А. Е. Абылкасымова, Т. П. Кучер, З. А. Жумагулова

МАТЕМАТИКА

Часть 2

6

Учебник для 6 класса
общеобразовательных школ

Утверждено Министерством образования и науки Республики Казахстан

Алматы "Мектеп" 2018

УДК 373.167.1
ББК 22.1я72
А 17

Условные обозначения:

— правила, свойства, признаки

— предложение, раскрывающее содержание понятия или смысл термина

— вопросы для самоконтроля

— задания для самостоятельной работы

— какими новыми знаниями овладеете

— упражнения, обязательные для выполнения

— упражнения средней сложности

— упражнения повышенной сложности и исследовательского характера

П — упражнения для повторения

Абылкасымова А. Е. и др.
А17 **Математика.** Учебник для 6 кл. общеобразоват. шк.: в 2 частях/ А. Е. Абылкасымова, Т. П. Кучер, З. А. Жумагулова. — Часть 2. — Алматы: Мектеп, 2018. — 184 с.: ил.

ISBN 978—601—07—0985—0

А $\frac{4306020500—039}{404(05)—18}$ 13(1а)—18

УДК 373.167.1
ББК 22.1я72

ISBN 978—601—07—0985—0 (ч.2)
ISBN 978—601—07—0984—3

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

4 глава

4 Линейные уравнения с одной переменной

§ 27. Числовые равенства и их свойства

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Верное числовое равенство. Неверное числовое равенство.

Какими свойствамиобладают верные числовыеравенства?

Вы знаете, что числовое равенство состоит из *чисел, знака равенства и может содержать знаки действий и скобки.*

Объясните!

Почему являются числовыми равенствами:
$2 + 3 = 5$; $(-0{,}3 - 0{,}7) \cdot 3 = -3$;
$4{,}5 + 6{,}3 = 6{,}3 + 4{,}5$;
$7{,}01 = 7{,}01$?

Числовые равенства могут быть верными и неверными.

Например, $7 - 6 = 101 - 100$ — *числовое равенство, верное.* Действительно, значение числового выражения $7 - 6$, стоящего в левой части равенства, равно 1 и значение числового выражения $101 - 100$, стоящего в правой части равенства, также равно 1. Поскольку $1 = 1$, то равенство $7 - 6 = 101 - 100$ верное.

$7 - 6 = 24 - 8$ — *числовое равенство, но оно неверное*. Действительно, значение числового выражения $7 - 6$, стоящего в левой части равенства, равно 1, а значение числового выражения $24 - 8$, стоящего в правой части равенства, равно 16. Значение выражения $7 - 6$ не равно значению выражения $24 - 8$. Поэтому равенство $7 - 6 = 24 - 8$ неверное.

Рассмотрим свойства верных числовых равенств.

К обеим частям верного числового равенства $22 - 6 = 24 - 8$ прибавьте одно и то же число: 1) 8; 2) 10; 3) -2; 4) -4.
Установите, какие — верные или неверные — равенства получились.
Какой предположительно вывод можно сформулировать на основе результатов, полученных при выполнении этого задания?

Первое свойство верных числовых равенств.

Если к обеим частям верного числового равенства прибавить одно и то же число, то получим верное числовое равенство, т.е. если $a = b$, то $a + c = b + c$.

Обе части верного числового равенства $22 - 12 = 24 - 14$ умножьте на одно и то же число: 1) 8; 2) 10; 3) -2; 4) -4.
Установите, какие — верные или неверные — равенства получились.
Какой предположительно вывод можно сформулировать на основе результатов, полученных при выполнении этого задания?

Второе свойство верных числовых равенств .

Если обе части верного числового равенства умножить на одно и то же число или разделить на одно и то же число, не равное нулю, то получим верное числовое равенство. Если $a = b$, то $a \cdot c = b \cdot c$, или $\left(\frac{a}{c} = \frac{b}{c}\right)$.

Как из двух верных числовых равенств $22 - 9 = 24 - 11$ и $24 - 11 = 45 - 32$ получили числовое равенство $22 - 9 = 45 - 32$?
Установите, какое оно — верное или неверное — равенство.
Какой вывод предположительно можно сформулировать на основе результатов, полученных при выполнении этого задания?

Третье свойство верных числовых равенств.

Если $a = b$, $b = c$, то $a = c$.

Сложите отдельно левые и правые части верных числовых равенств $67 - 62 = 5$ и $12 - 7 = 13 - 8$.
Установите, какое — верное или неверное — равенство получилось.
Какой предположительно вывод можно сформулировать на основе результатов, полученных при выполнении этого задания?

Четвертое свойство верных числовых равенств.

Если почленно сложить два верных числовых равенства, то получится верное числовое равенство. Если $a = b$, $c = d$, то $a + c = b + d$.

Перемножьте отдельно левые и правые части верных числовых равенств $67 - 62 = 5$ и $12 - 7 = 13 - 8$.
Установите, какое — верное или неверное — равенство получилось.
Какой предположительно вывод можно сформулировать на основе результатов, полученных при выполнении этого задания?

Пятое свойство верных числовых равенств.

Если почленно умножить два верных числовых равенства, то получится верное числовое равенство. Если $a = b$, $c = d$, то $a \cdot c = b \cdot d$.

?

1. Какие арифметические действия можно выполнять с двумя верными числовыми равенствами?
2. Какие арифметические действия можно выполнять с левой и правой частями верного числового равенства?

A Упражнения

799. Является ли верным числовое равенство:
1) $101 - 98 = 3$;
2) $202 : 2 = 100$;
3) $86 + 87 = 173$;
4) $106 \cdot 5 = 530$?

800. Какое число нужно вставить вместо звездочки, чтобы было верным числовое равенство:
1) $* + 69 = 190$;
2) $503 - * = 377$;
3) $4422 : * = 402$;
4) $25 \cdot * = 900$?

801. Является ли верным числовое равенство:
1) $41 + 59 = 50 \cdot 2$;
2) $79 - 57 = 66 : 2$;
3) $600 - 480 = 15 \cdot 8$;
4) $909 : 3 = 199 + 104$?

802. Запишите верное числовое равенство, содержащее: 1) три знака арифметических действий; 2) два знака арифметических действий и скобки.

B Упражнения

803. Является ли верным числовое равенство:
1) $999 + 434 - 829 + 77 - 666 = -15$;
2) $2000 : 0{,}2 - 0{,}654 \cdot 1000 = 364$?

804. Вместо звездочки вставьте число, чтобы было верным равенство:
1) $\frac{13}{15} \cdot \frac{75}{91} + * = 2$;
2) $\frac{25}{33} : \frac{5}{33} - 3\frac{11}{15} = *$;

3) $-0,45 \cdot \frac{8}{9} + 0,31 = *$;

4) $* - \frac{20}{77} \cdot \frac{77}{80} = 3,5$;

5) $\frac{2^5}{343} \cdot \frac{7^3}{96} + * = 1$;

6) $\frac{448}{3^4} \cdot \frac{81}{4^3} + * = 10$;

7) $\frac{5^3}{216} : \frac{1000}{6^3} + * = -\frac{1}{8}$;

8) $* - \frac{2^{10}}{4^4} \cdot \frac{16^2}{4^5} = 1\frac{2}{7}$.

Упражнения

805. Расставьте скобки так, чтобы было верным равенство:
1) $600 - 400 - 500 = 700$;
2) $20 \cdot 3 - 404 : 4 = -1960$;
3) $200 \cdot 3 - 404 : 4 = 49$;
4) $555 : 5 + 39 \cdot 4 = 600$.

П **(806—807)** :

806. Выполните действия:

1) $\left(19 - 18\frac{1}{3}\right) \cdot (7,13 - 8,03) + 8\frac{1}{4}$;

2) $\left(0,8 + \frac{1}{20}\right) : \left(21\frac{1}{3} - 19\frac{1}{15}\right) - 4,1$.

807. Золотой человек — символ свободы независимого Казахстана.

1) Одежда Золотого человека украшена золотыми деталями. Их число больше значения произведения $2^2 \cdot 10^3$. Сколько золотых деталей в одежде Золотого человека?

2) Головной убор высотой, равной $5 \cdot (2^2 \cdot 3 + 1)$ см, украшен более чем $2^3 \cdot 5^2$ золотыми предметами. Какова высота головного убора Золотого человека и сколько на нем золотых предметов?

Золотой человек

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

808. Корнем каких уравнений является число 3:

1) $x : 7 = 21$;
2) $-10 \cdot x = -30$;
1) $x - 40 = -37$?

809. Найдите корни уравнения $(x + 4)(x - 5)(x - 7) = 0$.

§ 28. Решение уравнений

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Подобные слагаемые. Перенос слагаемых.

Вы умеете решать уравнения, пользуясь правилами нахождения неизвестных компонентов арифметических действий.

Используя правила нахождения неизвестных компонентов арифметических действий, решите уравнение: 1) $x + 5 = 20$; 2) $13 + x = 31$; 3) $x - 17 = 30$; 4) $15 - x = 8$.

При решении более сложных уравнений, *например* таких, как уравнения $\frac{4}{27} \cdot \left(6\frac{3}{4}x - 2,7\right) = 17 + 2,7\left(-\frac{20}{27}x - 2\right)$, или $20 \cdot \left(-x + 1\frac{1}{2}\right) - 3,2 = 6x - 1$, этот способ использовать неудобно.

Зная отрицательные числа, уравнения можно решать другим способом. Чтобы ознакомиться с этим способом, рассмотрим решение простейших уравнений:

1) $x + a = b$. По правилу нахождения неизвестного слагаемого получим: $x = b - a$.

Сравним данное уравнение с полученным уравнением. Видим, что второе слагаемое a переместилось из левой части уравнения в его правую часть с противоположным знаком: в левой части уравнения $+a$ стало в его правой части $-a$.

2) $m + x = n$. По этому же правилу нахождения неизвестного слагаемого получим: $x = n - m$.

Сравним данное уравнение с полученным уравнением. Видим, что первое слагаемое m переместилось из левой части уравнения в его правую часть с противоположным знаком: в левой части уравнения m стало в его правой части $-m$.

3) $x - c = d$. По правилу нахождения неизвестного уменьшаемого получим: $x = d + c$.

Сравним данное уравнение с полученным уравнением. Видим, что вычитаемое c переместилось из левой части уравнения в его правую часть с противоположным знаком: в левой части уравнения было $-c$, в его правой части стало c.

4) $k - x = a$. По правилу нахождения неизвестного вычитаемого получим: $x = k - a$. Это равенство можно записать так: $k - a = x$.

Сравним данное уравнение с полученным уравнением. Видим, что a переместилось из правой части уравнения в его левую часть с противоположным знаком и стало $-a$, а $-x$ переместился из левой части уравнения в правую с противоположным знаком и стал x.

Подумайте!

Какой общий вывод можно сформулировать на основании сравнения рассмотренных уравнений?

При решении всех этих уравнений слагаемые (положительные или отрицательные) переносили из одной части уравнения в другую с противоположными знаками.

Такой же вывод получим и для более сложных уравнений, в которых вместо букв a, b, c, d, n, m, k будут стоять числовые или буквенные выражения. Значит,

> слагаемые можно переносить из одной части уравнения в другую, изменяя при этом их знаки на противоположные знаки.

Пример 1. Найдем корень уравнения

$$\frac{4}{27}\left(6\frac{3}{4}x - 2{,}7\right) = 17 + 2{,}7\left(-\frac{20}{27}x - 2\right).$$

Решение. Сначала раскроем скобки. Получим: $x - 0{,}4 = 17 - 2x - 5{,}4$. Перенесем слагаемые, содержащие множитель x в левую часть, а числа — в правую, поменяв их знаки на противоположные знаки: $x + 2x = 17 - 5{,}4 + 0{,}4$. Приведем подобные слагаемые, получим уравнение: $3x = 12$.

Найдем неизвестный множитель: $x = 12 : 3$, или $x = 4$.

Проверим, является ли число 4 корнем уравнения

$$\frac{4}{27}\left(6\frac{3}{4}x - 2{,}7\right) = 17 + 2{,}7\left(-\frac{20}{27}x - 2\right).$$

Для этого вместо x подставим число 4. Получим числовое равенство: $\frac{4}{27}\left(6\frac{3}{4} \cdot 4 - 2{,}7\right) = 17 + 2{,}7\left(-\frac{20}{27} \cdot 4 - 2\right)$, или $4 \cdot (-1) = 4 - 2 \cdot 4$. Убедимся, что оно верное числовое равенство.

Раскрыв скобки, получим: $4 - 0{,}4 = 17 - 2 \cdot 4 - 5{,}4$. Продолжая вычисления, получим: $3{,}6 = 3{,}6$ — верное числовое равенство.

Значит, число 4 является корнем данного уравнения.

Ответ: 4.

> При решении уравнений, содержащих скобки и подобные слагаемые, сначала:
>
> — по возможности упрощают уравнение (раскрывают скобки, приводят подобные слагаемые);
>
> — переносят слагаемые, содержащие неизвестное, в одну часть уравнения (обычно в левую), остальные слагаемые — в другую часть уравнения, при этом изменяют их знаки на противоположные знаки;

— приводят подобные слагаемые;
— находят корень уравнения;
— делают проверку.

Обычно при решении уравнения рассуждения проводят устно, а запись решения выглядит так:

Решение . $\frac{4}{27}\left(6\frac{3}{4}x - 2{,}7\right) = 17 + 2{,}7\left(-\frac{20}{27}x - 2\right)$,

$\frac{4}{27} \cdot 6\frac{3}{4}x - \frac{4}{27} \cdot 2{,}7 = 17 + 2{,}7\left(-\frac{20}{27}x\right) - 2{,}7 \cdot 2$,

$\frac{4}{27} \cdot \frac{27}{4}x - \frac{4}{27} \cdot \frac{27}{10} = 17 + \frac{27}{10} \cdot \left(-\frac{20}{27}x\right) - 2{,}7 \cdot 2$,

$x - 0{,}4 = 17 - 2x - 5{,}4$,

$x + 2x = 17 - 5{,}4 + 0{,}4$,

$3x = 12$,

$x = 12 : 3$ или $x = 4$.

Проверка : $\frac{4}{27} \cdot \left(6\frac{3}{4} \cdot 4 - 2{,}7\right) = 17 + 2{,}7 \cdot \left(-\frac{20}{27} \cdot 4 - 2\right)$,

$\frac{4}{27} \cdot 6\frac{3}{4} \cdot 4 - \frac{4}{27} \cdot 2{,}7 = 17 + 2{,}7 \cdot \left(-\frac{20}{27} \cdot 4\right) - 2{,}7 \cdot 2$,

$\frac{4}{27} \cdot \frac{27}{4} \cdot 4 - \frac{4}{27} \cdot \frac{27}{10} = 17 + \frac{27}{10} \cdot \left(-\frac{20}{27} \cdot 4\right) - 2{,}7 \cdot 2$,

$4 - 0{,}4 = 17 - 2 \cdot 4 - 5{,}4$,

$3{,}6 = 3{,}6$.

Ответ : 4.

?

1. На основании каких правил нахождения неизвестных компонентов арифметических действий получили вывод о том, что слагаемые можно переносить из одной части уравнения в другую, поменяв знаки этих слагаемых на противоположные знаки?
2. Какие способы решения уравнений вам известны?
3. Можно ли одно и то же уравнение решить разными способами?

А Упражнения

810. Выясните, является ли число:
1) –3 корнем уравнения $x - 5 = 2x + 10$;
2) –5 корнем уравнения $|y| = -y$;
3) 0 корнем уравнения $k = 2k$;
4) –2 корнем уравнения $a(a - 1)(a + 1) = 0$.

811. Является ли корнем уравнения $4x + 2 = 8 + 7x$ число:

1) 2; 2) -2; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{1}{2}$?

812. Является ли число 5 корнем уравнения:

1) $x + 6 = 2x + 1$; 2) $0{,}2 + x = 5{,}2$;

3) $\frac{1}{5}x + 1 = 3x - 13$; 4) $6x - 4 = x + 20$?

Найдите корни уравнений **(813—816)** :

813. 1) $9 - 4y = -5y$; 2) $4n = -2 + 6n$;
3) $2x + 4 = 6$; 4) $3x + 7 = x$;
5) $-5m + 24 = m$; 6) $-16 - m = -2m$.

814. 1) $12a - 1 = -a + 25$; 2) $2 - c = 5c + 1$;
3) $8 + 3b = -7 + 2b$; 4) $-3d - 10 = 3d - 6$;
5) $3y - 3 = 5 - y$; 6) $-7 - 4x = -7x + 5$.

815. 1) $2x + 3 = x - 6$; 2) $z + 4 - 3 = 2z$;
3) $5 - 3y = 4 - 2y$; 4) $7 - 3x = 4x - 9$;
5) $6a - 1 = 3a + 7$; 6) $10y - 3 = 5 + 3y$.

816. 1) $9 - 7y = 2{,}5 - 3y$; 2) $3{,}2 - 5a = -1{,}8a + 4$;
3) $0{,}8x - 3{,}5 = -1{,}2x + 0{,}5$; 4) $8{,}6x - 3{,}7 = 7{,}6x - 5$.

817. Найдите корень уравнения:

1) $\frac{x}{5} - 4 = -0{,}1x + 2$; 2) $\frac{11}{12}x - \frac{2}{3} = -0{,}5 - \frac{3}{4}x$;

3) $4\frac{1}{6} - 1\frac{1}{3}x = 4x + 3\frac{5}{18}$; 4) $\frac{x}{3} + 5 = \frac{x}{4} + 3$.

Найдите корни уравнений **(818—821)** :

818. 1) $\frac{2}{5} - \frac{3}{5}x = \frac{2}{5} - \frac{1}{10}x + 3$; 2) $\frac{5}{6}m + 2 = \frac{1}{3}m - 0{,}8$;

3) $\frac{3}{4}y - 12 = 5 - \frac{1}{4} - 12$; 4) $\frac{7}{12}n - 3 = \frac{1}{2}n + 0{,}7$.

819. 1) $3(x - 2) = 4x$; 2) $6(z - 1) = 18$;
3) $5(y + 3) = 10$; 4) $3(2x - 7) = 9$;
5) $-4(x - 2) = -6$; 6) $3(x - 5) = x + 3$.

820. 1) $-2(x + 3) = 2x - 1$; 2) $2(2 - y) = y - 5$;
3) $-(3x - 4) = 3x - 8$; 4) $2a - (14 - 3a) = -10$.

821. 1) $-(2x + 1) = 1 - x$; 2) $\frac{1}{2}(4x - 2) = -7$;

3) $\frac{5}{6}x + 3 = \frac{1}{6}x$; 4) $3(x + 6) = 2(x - 3)$.

B Упражнения

822. Найдите неизвестное число x из пропорции:

1) $\frac{x-3}{6}=\frac{7}{3}$; 2) $\frac{x+7}{3}=\frac{2x-3}{5}$;

3) $\frac{5}{2x+3}=\frac{2,5}{4,5}$; 4) $\frac{0,2}{x+3}=\frac{0,7}{x-2}$.

Найдите корни уравнений **(823—829)**:

823. 1) $1,2(x-5)=0,2x+6$; 2) $1,3(t-0,6)=1,8t$;

3) $\frac{5}{7}(x+3)=-2(1-x)$; 4) $6(4x-7)-3(5-8x)=0$.

824. 1) $3x-4+2x=6+2x-4$; 2) $50-7e-16=3e-16$;

3) $-6a+16=4a-6a-24$; 4) $5x-6+x=2(x-1)$;

5) $2(x-6)-x=3x+4x$; 6) $-(9-2b)-(b+5)=16$.

825. 1) $2,6a-0,2(3a-9)=-0,5(-2a+6)$;

2) $0,6(-2y+3)-0,4(9-y)=-0,3(y-9)$.

826. 1) $1,2d-0,5(4d-1)=-0,7(d-2)$;

2) $0,3n-(2,6-0,9n)=1,2n+3$.

827. 1) $0,8(0,5+2x)=2x+0,4$;

2) $0,2(x-3)-1=0,5(x+3)-0,4$.

C Упражнения

828. 1) $\frac{y}{9}-\left(y+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6}-\left(\frac{8y}{9}+0,5\right)$;

2) $3-\left(\frac{2}{9}m+\frac{1}{6}\right)=\frac{m}{3}+1,5$;

3) $\frac{5}{12}(c-3)-\frac{1}{6}(2c-7)=2$;

4) $\frac{2}{15}(b+5)-\frac{3}{10}(5b-1)=4$.

829. 1) $\frac{4x-3}{3-5x}=\frac{0,14}{0,35}$; 2) $\frac{a-3,2}{2a+1,4}=\frac{0,9}{2,7}$; 3) $\frac{-3}{9-4a}=\frac{40}{200}$.

Подготовьте сообщение

Как в математике появились уравнения? В 825 г. арабский математик аль-Хорезми написал свой труд “Книга о восстановлении и противопоставлении”, в которой он рассматривает перенос слагаемых из одной части уравнения в другую с изменением знака слагаемого.

Аль-Хорезми
(783—850 гг.)

П **(830—833)** :

Раскройте скобки и найдите значения выражений **(830—831)** :

830. $10025 + (15009 - 14584) - (2397 + 14296)$.

831. $200\ 000 + (49\ 000 - 48\ 989) - (190\ 001 + 180\ 999)$.

832. Составьте формулу для решения задачи. Из одного и того же пункта в одном и том же направлении одновременно выехали мотоциклист со скоростью a км/ч и велосипедист со скоростью b км/ч. Сколько километров будет между ними через t ч? Используя составленную формулу, ответьте на вопрос задачи, если: 1) $a = 39$, $b = 12$, $t = 0{,}15$; 2) $a = 40$, $b = 13$, $t = \frac{2}{3}$.

833. Найдите периметр треугольника ABC, у которого длина стороны AB равна 9 см, длина стороны AC составляет 80%, длина стороны CB — 60% от длины стороны AB.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

834. Сколько корней имеет уравнение:

1) $x(x - 5) = 0$; 2) $2(y - 3)(y - 6) = 0$?

835. Решите уравнение:

1) $(x - 10) \cdot 13 = 52 \cdot (-27)$; 2) $54(x - 50) = 26 \cdot 162$.

§ 29. Линейное уравнение с одной переменной

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Линейное уравнение. Переменная. Корень уравнения. Равносильные уравнения. Пустое множество.

Что такое *линейное уравнение с одной переменной*?

Рассмотрим уравнения вида $ax = b$, где x — переменная (неизвестное число, которое нужно найти), a и b — некоторые числа. *Например*, $-45{,}8x = 9{,}16$; $-x = 10{,}7$; $\frac{34}{35}x = \frac{17}{5}$. Такие уравнения называют *линейными уравнениями с одной переменной*.

Уравнение вида $ax = b$, где x — переменная (неизвестное число, которое нужно найти), a и b — некоторые числа, называется *линейным уравнением с одной переменной*.

Рассмотрим решение линейного уравнения с одной переменной. Поскольку в линейном уравнении $ax = b$ неизвестное число x — множитель, то, чтобы его найти, надо значение произведения b разделить на известный множитель a. Это можно сделать, если множитель a не равен нулю. Тогда уравнение $ax = b$ *имеет единственное решение* (*единственный корень*): $x = b : a$, или $x = \frac{b}{a}$.

Рассмотрим уравнение вида $ax = b$, где $a = 0$.

Если $a = 0$, то уравнение $ax = b$ примет вид: $0 \cdot x = b$. Решение этого уравнения зависит от числа b.

Если число b равно нулю, то решением (корнем) уравнения будет любое число, так как при любом значении переменной x равенство $0 \cdot x = 0$ обращается в верное числовое равенство: $0 = 0$.

Если число b не равно нулю, то уравнение не имеет решения (корня), так как равенство $0 \cdot x = b$, где $b \neq 0$ не будет верным ни при каком значении переменной x.

Решение многих уравнений сводится к решению линейных уравнений с одной переменной.

Пример 1. Найдем корень уравнения

$(-14x + 0{,}55) : 0{,}5 = \frac{2}{3}x - 170{,}9.$

Решение. Раскроем скобки.

Получим: $-28x + 1{,}1 = \frac{2}{3}x - 170{,}9$.

Перенесем слагаемые, содержащие переменные, в левую часть уравнения, а числа — в правую, изменив при этом их знаки на противоположные: $-28x - \frac{2}{3}x = -1{,}1 - 170{,}9$.

Приведем подобные слагаемые: $-28\frac{2}{3}x = -172$.

Найдем неизвестный множитель: $x = -172 : \left(-28\frac{2}{3}\right)$ или $x = 172 : \frac{86}{3} = 6$.

Ответ: 6.

Какие уравнения называются *равносильными*?

В процессе решения уравнения $(-14x + 0{,}55) : 0{,}5 = \frac{2}{3}x - 170{,}9$ были получены другие уравнения:

$-28x + 1{,}1 = \frac{2}{3}x - 170{,}9$; $\quad -28x - \frac{2}{3}x = -1{,}1 - 170{,}9$;

$-28\frac{2}{3}x = -172$; $\quad x = -172 : \left(-28\frac{2}{3}\right)$.

Убедитесь, что все эти уравнения имеют один и тот же корень — число 6.

Такие уравнения называют *равносильными уравнениями*.

Уравнения, имеющие одни и те же корни или не имеющие корней, называются *равносильными уравнениями*.

Объясните!

Почему равносильны уравнения: $x + 8 = 18$ и $x + 8 - 6x = 18 - 6x$; $|x| = 7$ и $(x - 7) \cdot (x + 7) = 0$?

Как решать линейные уравнения с одной переменной?

При решении уравнений используют свойство:

Если выражения, стоящие в левой и правой частях уравнения, заменить тождественно равными выражениями, то получится уравнение, равносильное данному уравнению.

Поскольку в уравнении переменная x обозначает неизвестное число, которое нужно найти, то при решении уравнений с одним неизвестным используются правила, вывод которых основан на свойствах числовых равенств. Поэтому:

1) если какое-либо слагаемое перенести из одной части уравнения в другую, поменяв знак этого слагаемого на противоположный знак, то получится уравнение, равносильное данному уравнению;
2) если к обеим частям уравнения прибавить одно и то же число, то получится уравнение, равносильное данному уравнению;
3) если обе части уравнения умножить (или разделить) на одно и то же отличное от нуля число, то получится уравнение, равносильное данному уравнению.

Пример 2. Решим уравнение $-5x - 0{,}74 = -5x + 0{,}26$.

Решение. Заменим данное уравнение равносильным ему уравнением. Для этого сначала перенесем слагаемые, содержащие переменные, в левую часть уравнения, числа — в правую, изменив при этом их знаки на противоположные: $-5x + 5x = 0{,}74 + 0{,}26$ и затем приведем подобные слагаемые. Получим уравнение: $0 \cdot x = 1$. Оно не имеет корней. Значит и уравнение $-5x - 0{,}74 = -5x + 0{,}26$ не имеет корней. В этом случае говорят, что *множество решений пустое* и записывают его с помощью знака пустого множества $\varnothing$.

Ответ: $\varnothing$.

Если уравнение не имеет корней (решений), то говорят: множество решений пустое. Пустое множество обозначают символом $\varnothing$.

Объясните!

Как решили $(1{,}8x - 4{,}5) : 9 = -0{,}5 + 0{,}2x$?

Решение.
$0{,}2x - 0{,}5 = -0{,}5 + 0{,}2x$;
$0{,}2x - 0{,}2x = -0{,}5 + 0{,}5$;
$0 \cdot x = 0$.

Ответ: множество всех чисел.

?

1. Какие из уравнений $\frac{x}{7} = 5$; $\frac{7}{x} = 5$; $x - 7 = 2x$; $x + 7 = 0$; $(x - 7)(x + 7) = 0$; $x^2 - 7 = 0$ являются линейными уравнениями с одной переменной?
2. Может ли линейное уравнение с одной переменной иметь только два решения?
3. Объясните, почему уравнения $x - 7 = 2x$; $x = 2x + 7$; $x - 7 + 7 = 2x + 7$; $3x - 21 = 6x$ равносильны.

A Упражнения

836. Какое из уравнений является линейным уравнением с одной переменной:

1) $1,5x = 2$; 2) $7x = -1,1$; 3) $2\frac{1}{9}y = 0$;
4) $18x - 4 = 0$; 5) $2x - y = 5$; 6) $x + x^2 = 6$?

837. Вы узнаете о времени создания семи чудес света, решив уравнение:

1) $x \cdot 10^3 = 2 \cdot 10^6$ — столько лет назад построены древние египетские пирамиды;
2) $8280 : x = 2070$ — в середине этого века до нашей эры построен мавзолей в Галикарнасе;
3) $x + 450 = 1000$ — примерно в этот год до нашей эры построен Храм Артемиды в Эфесе;
4) $1000 - x = 570$ — примерно в этот год до нашей эры изготовлена статуя Зевса в Олимпии;
5) $99x = 693$ — в этом веке до нашей эры созданы висячие сады Семирамиды в Вавилоне;
6) $x : 73 = 4$ — примерно в этот год до нашей эры изготовлена статуя Гелиоса в Родосе;
7) $x - 188 = 92$ — примерно в этот год до нашей эры построен маяк в Александрии.

838. При каком значении переменной x значение выражения $5x + 4$ равно: 1) 20; 2) –30; 3) –3,8; 4) $3\frac{1}{3}$?

839. Найдите значение переменной y, при котором значение выражения $13 - 2y$ равно: 1) 40; 2) –25; 3) –25,12; 4) $15\frac{5}{7}$.

840. Составьте линейное уравнение с одной переменной, корнем которого является значение выражения:

1) $\frac{9 \cdot 17^2}{51}$; 2) -72; 3) $-\frac{1}{3^2}$; 4) $0{,}33 \cdot 10 + 6$.

841. Является ли число $-\frac{3}{7}$ корнем уравнения:

1) $x + 1 = \frac{4}{7}$; 2) $10 - x = 10\frac{3}{7}$; 3) $-2\frac{1}{3}x = 1$;

4) $2\frac{1}{7} : x = -5$; 5) $2x - 1 = \frac{1}{7}$; 6) $\frac{7}{9}x + 24{,}5 = 24\frac{5}{6}$?

842. Вместо буквы b подберите какое-либо число, при котором корнем уравнения: 1) $b + y = 20$; 2) $b \cdot z = 1{,}8$; 3) $t - 1{,}1 = b$; 4) $x : b = -5$ является: а) положительное число; б) отрицательное число. Можно ли подобрать такое число b, при котором корень уравнения будет равен 0?

843. При каких значениях переменной x обращается в верное числовое равенство уравнение:

1) $10 - x = -8$; 2) $21 + x = 6$; 3) $4 - 5x = 0$;

4) $0{,}5x + 20{,}1 = 0{,}1$; 5) $\frac{x+3}{2} = -7$; 6) $\frac{9-x}{7} = -1$?

Найдите решения уравнений **(844–845)**:

844. 1) $40 + 2x = 3x - 15$; 2) $16x - 33 = 1 + 13x$;

3) $23{,}8y - 80 - 24{,}3y = 2$; 4) $95y - 4{,}9 = 98y - 1$.

845. 1) $16{,}05x + 1{,}8x = 3{,}63 - 0{,}3x$;

2) $1{,}09 + 5{,}8y = 38{,}29 + 15{,}1y$;

3) $\frac{5}{7}x + 2\frac{1}{7} = 3\frac{3}{28} - \frac{4}{7}x$;

4) $5\frac{1}{6} + \frac{4}{15}t = -\frac{2}{5}t - \frac{2}{3}$.

Найдите корни уравнений **(846—848)**:

846. 1) $17x - 2{,}6 = 3(0{,}8 + 3x)$; 2) $8 + 5{,}1x = 49(1 + 0{,}1x)$;

3) $38(0{,}1x + 1) = 40 - 3{,}2x$; 4) $63x - 13{,}7 = 13(0{,}1 + 5x)$.

847. 1) $\frac{4}{7}(x - 1) = \frac{2}{7} + x$; 2) $4\frac{5}{9} - \frac{1}{6}x = 5(1 + 0{,}1x)$;

3) $5(x - 1{,}5) = 4\frac{2}{3}x - 8\frac{3}{14}$; 4) $1\frac{7}{9}x - 1\frac{1}{9} = 4\frac{2}{9}(1 - x)$.

848. 1) $\frac{23}{40}(8t + 5) - t = 2{,}6t - (3t - \frac{3}{4})$;

2) $10\frac{2}{3}(9-k)+81=107-\frac{1}{3}(k-60)$.

849. Найдите корень уравнения и вы узнаете о Маркакольском заповеднике, который находится в Восточно-Казахстанской области:

1) $x+0{,}24=20+0{,}99x$, x — год создания заповедника;

2) $3y-2(169{,}9+y)=150-(y+339{,}8)$, y — столько тысяч гектаров составляет площадь заповедника;

3) $50z+(z+6{,}2)=200$, z — столько тысяч гектаров занимает в этом заповеднике лес.

850. Узнайте температуру воздуха на различных высотах, решив уравнение:

1) $3x+(x+2)=2(3x+12)$, x°C — температура воздуха на высоте 4000 м;

2) $-3(2{,}5-y)=28{,}5+4{,}5y$, y°C — температура воздуха на высоте 6000 м;

3) $25{,}8z-4{,}3(6z+300)=25{,}8z$, z°C — температура воздуха на высоте 10 000 м.

851. Узнайте наибольшую продолжительность жизни животного, решив уравнение:

1) $12{,}5-(16x-28{,}3)=-71{,}2$, x лет — наибольшая продолжительность жизни муравья;

2) $31{,}8-\left(\frac{1}{7}+\frac{4}{7}y\right)=1\frac{2}{3}y+4{,}8$, y лет — наибольшая продолжительность жизни ящерицы;

3) $\frac{13}{15}z-\left(\frac{7}{9}+\frac{1}{3}z\right)=7\frac{2}{9}$, z лет — наибольшая продолжительность жизни белки.

B Упражнения

852. Сколько корней имеет уравнение:

1) $(x-5)\left(x+\frac{3}{23}\right)=0$;

2) $5x+10=5x$;

3) $1{,}1y-0{,}9y+4=4+0{,}2y$;

4) $x\left(x+3\frac{8}{15}\right)(x-10{,}2)=0$?

853. При каком значении переменной равны значения выражений:

1) $6\frac{1}{3}z + 4\frac{1}{7}$ и $3\frac{1}{6} + 5\frac{1}{6}z$;

2) $4{,}05\,t - \frac{17}{24}$ и $2\frac{5}{12} + 3{,}97\,t$;

3) $0{,}32\,x - 0{,}09$ и $0{,}3 - 0{,}2^2 x$;

4) $0{,}52 \cdot 10x + 1$ и $0{,}42 \cdot 10x + 0{,}1$?

854. При каком значении переменной значение выражения:

1) $2x - 0{,}5$ на 7 больше значения выражения $x + 1{,}2$;

2) $\frac{4}{11}y + 11{,}5$ на 2,3 меньше значения выражения $y - 1{,}2$;

3) $2\frac{2}{3}t - 10{,}5$ в 6 раз меньше значения выражения $2t + 9{,}8$;

4) $42{,}2\,x - 3$ в 5 раз меньше значения выражения $x + 10$?

Упражнения

855. При каком значении переменной значение выражения $19\frac{7}{8} - (7x + 0{,}125)$ равно значению выражения $49{,}75 + 8(x - 37{,}5)$?

856. Решив данные уравнения, вы узнаете о Коргалжынском заповеднике, который находится в Акмолинской области:

1) $(16x - 170) + 2(7x - 165) = 85x + 1400 - (56x - 58)$, x — год создания заповедника;

2) $1350 + 5(y + 100) = 15(y - 10) - 589$, y тыс. га — площадь заповедника;

3) $9(z - 73) - 8(z + 375) = 238 - 11(z - 7)$, z — столько видов растений в заповеднике ;

4) $17(x + 13) - 19(x - 21) + 249 = 25(5x - 53) - 3(7x + 576)$, x — столько видов млекопитающих в заповеднике ;

5) $8(y - 325) - 17(y + 940) = 6(1096 - y) - 94(y - 17)$, y — столько видов птиц в заповеднике, среди них — розовый фламинго ;

6) $85z - 27 - 19(1 + z) = 43(1 - z) + 91 + 91z$, z — столько видов рыб в заповеднике .

857. Имеет ли корни при заданном значении a уравнение:

1) $8x - a = 8x - 9$, при $a = 9{,}5$;
2) $3{,}6t + a = 0{,}6t + 10$, при $a = 10$;
3) $ax + 41{,}3 = x + 0{,}3$, при $a = 1$;
4) $x(x - a) = 0$, при $a = 4$?

Если уравнение не имеет корней, то укажите такое значение a, при котором данное уравнение имеет корни.

Подготовьте сообщение

858. О лèìàéíûõ óðàâíàíèÿõ ñ îàíèì íàèçâåñòíûì (îàîîé ïàðà-íàîîé). Их yìåëè ðåøàòü åùå â Äðåâíåì Âàâèëîíå è Åãèïòå áîëåå ÷åì 4 òûñ. ëåò íàçàä.

П **(859—860)** :

859. Запишите координаты точек, отмеченных на координатной прямой (рис. 56):

1) какая точка из отмеченных на рисунке 56 находится ближе всех к началу координат;
2) какая точка из отмеченных на рисунке 56 расположена дальше всех от начала координат;
3) какие точки из отмеченных на рисунке 56 находятся на одинаковом расстоянии от начала координат?

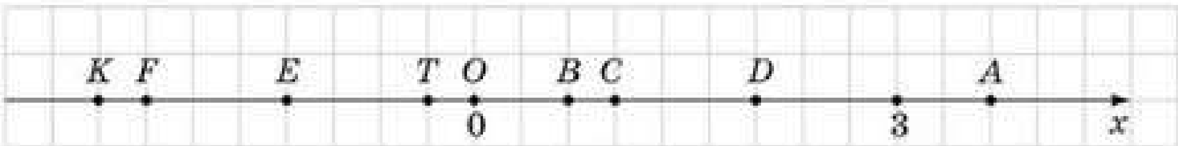


Рис. 56

860. 1) Найдите длину прямоугольника, площадь которого равна 128 см ^{2}, его ширина составляет 50% длины;

2) Найдите длину прямоугольника, периметр которого равен $11\frac{3}{7}$ см, его ширина составляет $\frac{1}{7}$ длины .

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

861. Найдите значение выражения:

1) $|a| + 2|b| - 3|a - b|$ при $a = -8{,}9$ и $b = -6{,}2$;
2) $|-x| + |x| + |-x^2| + |-x^3|$ при $x = 0{,}5$.

§ 30. Линейное уравнение, содержащее переменную под знаком модуля

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Линейное уравнение. Переменная. Корень уравнения. Равносильные уравнения. Модуль.

Как решать уравнения вида $|x \pm a| = b$, где a и b — рациональные числа?

Объясните!

Почему $|3| = 3$ и $|-3| = 3$, $|0| = 0$?

При решении линейных уравнений, в которых неизвестное находится под знаком модуля, рассматривают два случая:

если $x \geq 0$, то $|x| = x$; если $x < 0$, то $|x| = -x$.

Пример 1. Решим уравнение $|x| = 7$.

Решение. Если $x \geq 0$, то уравнение $|x| = 7$ равносильно уравнению $x = 7$; если $x < 0$, то $|x| = -x$, поэтому уравнение $|x| = 7$ равносильно уравнению: $-x = 7$ или $x = -7$. Значит, уравнение $|x| = 7$ имеет два корня: -7; 7. Решения уравнения $|x| = 7$ принято записывать в фигурных скобках: $\{-7; 7\}$. Говорят, что *множество решений уравнения* $|x| = 7$ состоит из чисел -7; 7.

Ответ: $\{-7; 7\}$.

Пример 2. Решим уравнение: $-|x| + 12|x| - 24{,}3 = 5{,}7 - 4|x|$.

Решение. Заменим данное уравнение равносильным ему уравнением.

Для этого сначала перенесем слагаемые, содержащие переменные, в левую часть уравнения, числа — в правую, изменив при этом их знаки на противоположные знаки: $-|x| + 12|x| + 4|x| = 5{,}7 + 24{,}3$.

Затем приведем подобные слагаемые: $15|x| = 30$ и найдем неизвестный множитель: $|x| = 30 : 15$ или $|x| = 2$.

Если $x > 0$, то уравнение $|x| = 2$ примет вид $x = 2$. Если $x < 0$, то уравнение $|x| = 2$ примет вид: $-x = 2$, или $x = -2$.

Следовательно, данное уравнение имеет два корня: 2 и -2.

Ответ: $\{-2; 2\}$.

1. Почему модуль отрицательного числа равен положительному числу?
2. Для каких значений переменной верно равенство $|x| = x$?
3. Сколько решений имеет уравнение $|x| = a$, где $a > 0$, $a < 0$, $a = 0$?

Упражнения

862. Из чисел 1; 1,7; 5,7; –1,7; –5,7; 2 выпишите числа, которые являются корнями уравнения: 1) $|x| = 1{,}7$; 2) $|x + 2| = 3{,}7$.

863. Является ли число 5 корнем уравнения:

1) $|x| = 5$; 2) $|x| = 0{,}5$; 3) $|x| = \frac{1}{5}$;
4) $|x + 3| = 8$; 5) $|11 - x| = 6$; 6) $|x + 1| = 5$?

864. Является ли число $-\frac{8}{11}$ корнем уравнения:

1) $|x| = \frac{8}{11}$; 2) $|x| = \frac{11}{8}$; 3) $\left|x - \frac{3}{11}\right| = 1$;
4) $|11x| = 8$; 5) $|x + 1| = \frac{3}{11}$; 6) $|x - 1| = \frac{3}{11}$?

865. Решите уравнение:

1) $|x| = 53$; 2) $|x| = 300{,}7$; 3) $|x| = 19\frac{7}{17}$.

866. Имеет ли решение уравнение:

1) $|x| = 3\frac{11}{18}$; 2) $|x| - 19{,}2 = 0$; 3) $|x| + 45 = 0$?

867. Найдите корни уравнения:

1) $|x| + 20{,}9 = 22$; 2) $315 - |x| = 288$;
3) $|x| - 74{,}6 = 9{,}4$; 4) $15\frac{2}{15} - |x| = 7\frac{1}{12}$;
5) $|x| - 21{,}9 = 6\frac{2}{3}$; 6) $100{,}3 + |x| = 101\frac{8}{9}$.

868. Решите уравнение:

1) $12|x| = 1{,}2$; 2) $225 : |x| = 1{,}5$;
3) $-4{,}84 : |x| = -4{,}4$; 4) $5|x| + 6\frac{11}{26} = 7$;
5) $3|x| : 13{,}2 = \frac{1}{33}$; 6) $79 + 4 : |x| = 81{,}8$.

B Упражнения

869. Решите уравнение:

1) $3|x| + |x| = 20$; 2) $5|x| - 3|x| = 33$;

3) $19|x| - 17 = 16|x|$; 4) $42 - 63|x| = 65|x|$.

870. Найдите множество корней уравнения:

1) $|x| + 5|x| - 40 = 4|x|$; 2) $100 - |x| = -49|x| + 124$;

3) $6|x| - 2|x| = 35 - 16|x|$; 4) $29|x| - |x| - 13 = -22|x|$.

871. При каких значениях переменной x верно равенство:

1) $|x + 1| = x + 1$; 2) $|2 - x| = 2 - x$?

C Упражнения

872. При каких значениях a уравнение $|10 - x| = a$: 1) имеет корни; 2) не имеет корней; 3) корень равен нулю; 4) корень равен 10?

П **(873—875)** :

873. Выполните действия: $\left(4\frac{5}{12} : 44\frac{1}{6} - 2{,}6\right) : 7{,}5 - 2{,}25 \cdot 2\frac{4}{9}$.

874. Напишите все: 1) натуральные числа; 2) четные числа; 3) нечетные числа, при подстановке которых вместо переменной x будет верным неравенство $8{,}13 < x \le 13{,}909$.

875. Чему равны координаты точек, отмеченных на рисунке 57? Напишите координаты двух точек, расположенных:

1) между точками A и D; 2) левее точки B; 3) правее точки C.

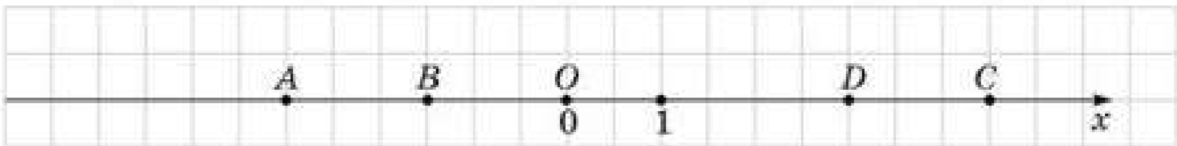


Рис. 57

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

876. В 2007 г. в Жамбылской области было произведено 302 433,231 т сахара, что составляло 77,1% от массы сахара, который производили в нашей республике. Сколько тонн сахара было произведено в нашей республике в 2007 г.?

2) Три сестры разделили 12 конфет так, что младшей сестре досталось в 3 раза, а средней сестре в 2 раза больше конфет, чем старшей сестре. Сколько конфет получила каждая сестра?

3) Из двух населенных пунктов, расстояние между которыми 200 км, навстречу друг другу выехали две машины. Скорость первой машины a км/ч, скорость второй — b км/ч. Что означает выражение: а) $3a$; б) $2b$; в) $a + b$; г) $200 : a$; д) $200 : b$; е) $200 : (a + b)$?

4) Первый рабочий изготовил x деталей, второй — на 7 деталей больше, чем первый, третий — на 10 деталей меньше, чем изготовили двое рабочих вместе. Напишите следующие выражения:

а) число деталей, изготовленных вторым рабочим;
б) число деталей, изготовленных третьим рабочим;
в) число деталей, изготовленных тремя рабочими.

§ 31. Решение текстовых задач с помощью уравнений

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Задача. Уравнение.

Как решить задачу с помощью составления линейного уравнения?

Для того чтобы решить задачу с помощью уравнения, сначала по условию задачи надо составить уравнение.

Рассмотрим решение задач с помощью уравнения на следующих двух примерах.

Молния

Задача 1. Найдите длину самой короткой молнии и самой длинной молнии, если значение суммы их длин равно 158 км и длина самой короткой молнии на 140 км меньше длины самой длинной молнии.

Решение . Обозначим длину самой короткой молнии через x км. Тогда длина самой длинной молнии $(x + 140)$ км.

По условию задачи значение суммы их длин равно 158 км, поэтому можно составить уравнение: $x + (x + 140) = 158$. Решим его. В левой части раскроем скобки и приведем подобные слагаемые. Получим: $2x + 140 = 158$, или $2x = 18$, или $x = 9$. Значит, длина самой короткой молнии равна 9 км, самой длинной — 149 км.

Ответ : 9 км, 149 км.

Решите задачу 1, обозначив через x км длину самой длинной молнии.

Задача 2. Собственная скорость моторной лодки равна 16 км/ч. Ее скорость по течению реки на 6 км/ч больше ее скорости против течения. Найдите скорость течения реки.

Решение . Обозначим скорость реки через x км/ч.

Поскольку течение реки увеличивает скорость моторной лодки, то скорость моторной лодки по течению реки равна $(16 + x)$ км/ч.

Скорость движения моторной лодки против течения реки равна $(16 - x)$ км/ч, так как ее скорость уменьшается течением реки.

Чтобы узнать, на сколько километров в час скорость по течению реки больше ее скорости против течения, надо из большей величины — скорости по течению, вычесть меньшую величину — скорость против течения, т. е. $(16 + x)$ км/ч $- (16 - x)$ км/ч. По условию задачи — на 6 км/ч.

Поэтому можно составить уравнение: $(16 + x) - (16 - x) = 6$.

Решим его. В левой части раскроем скобки и приведем подобные слагаемые. Получим: $16 + x - 16 + x = 6$, или $2x = 6$, или $x = 3$.

Значит, скорость течения реки равна 3 км/ч.

Ответ : 3 км/ч.

?

1. Какую величину удобно принять за x для решения задачи с помощью уравнения?
2. Если в задаче требуется найти две неизвестные величины, то для решения задачи с помощью уравнения можно ли за x принять любую из них?

А Упражнения

877. Длина отрезка AB на 2 см больше, чем длина отрезка CD. Если длину отрезка AB увеличить на 10 см, длину отрезка CD — в 3 раза, то получатся равные отрезки. Найдите длины отрезков AB и CD.

878. На одной полке было в 3 раза больше книг, чем на другой. Когда с одной полки убрали 8 книг, на другую положили 32 книги, то на полках стало книг поровну. Сколько книг было на каждой полке первоначально?

879. Дети делили яблоки. Когда каждому стали раздавать по 5 яблок, то последнему досталось 3 яблока; когда стали раздавать по 4 яблока, то осталось 15 яблок. Сколько было детей и сколько — яблок?

880. Одно число больше другого в 4,5 раза. Если от большего числа отнять 54, к меньшему прибавить 72, то получатся одинаковые числа. Чему равны эти числа?

881. Велосипедист ехал из одного города в другой со скоростью 10 км/ч. Если бы он ехал со скоростью на 20% больше, то приехал бы в город на 4 ч раньше. Сколько километров между городами?

882. На двух полках 72 книги, причем на первой полке в 3 раза больше, чем на второй. Сколько книг на первой полке?

883. В двух пачках 48 тетрадей, причем в первой пачке в 2 раза больше тетрадей, чем во второй. Сколько тетрадей в первой пачке?

884. Во дворе было всего 20 кур и цыплят. Кур в 4 раза меньше, чем цыплят. Сколько цыплят было во дворе?

885. Во дворе было всего 16 уток и утят. Уток в 3 раза меньше, чем утят. Сколько утят было во дворе?

886. Кусок полотна длиной в 124 м надо разрезать на две части так, чтобы длина одной части была на 12 м больше другой. По сколько метров полотна будет в каждой части?

887. Леску длиной 8,6 м надо разрезать на две части так, чтобы длина одной части была на 1 м больше другой. По сколько метров лески будет в каждой части?

888. 1) Отец в 8 раз старше дочери, дочь на 28 лет моложе отца. Сколько лет отцу?
2) Мать в 6 раз старше сына, сын на 25 лет моложе матери. Сколько лет матери?

889. 1) Задумали число, увеличили его на 28. Оно увеличилось в 3 раза. Найдите задуманное число;
2) задумали число, увеличили его на 35. Оно увеличилось в 6 раз. Найдите задуманное число.

890. В спортивном лагере $\frac{1}{12}$ часть прибывших туристов разместили в гостинице, $\frac{1}{6}$ часть — в летних домиках, остальных — 72 туриста — в палатках . Сколько туристов прибыло в лагерь?

891. Чтобы осушить луг, прорыли три канавы. Первая канава составляла $\frac{3}{13}$ части, вторая — $\frac{4}{13}$ части длины всех трех канав. Длина третьей канавы равна 4,8 км. Найдите длину первой и второй канав.

B Упражнения

892. Из города до села автобус едет 1,8 ч, легковая автомашина — 0,8 ч. Найдите скорость автобуса, если известно, что она меньше скорости легковой автомашины на 50 км/ч.

893. На первую автомашину погрузили на 0,6 т зерна больше, чем на вторую. Если бы на первую автомашину погрузили в 1,2 раза больше, на вторую — в 1,4 раза больше, то груза на обеих автомашинах было бы поровну. Сколько тонн груза погрузили на каждую автомашину?

894. В первом бидоне в 3 раза больше молока, чем во втором. Если из первого бидона перелить 20 л молока во второй бидон, то молока в бидонах станет поровну. Сколько молока было в каждом бидоне?

895. В двух бочках 725 л бензина. Когда из первой бочки отлили $\frac{1}{3}$ часть, из второй бочки — $\frac{2}{7}$ части бензина, то в обеих бочках бензина стало поровну. Сколько литров бензина было в каждой бочке первоначально?

896. На трех полках 165 книг. На первой полке в 3 раза больше книг, чем на второй, на третьей полке на 15 книг больше, чем на второй. Сколько книг на второй полке?

897. Скорость скорого поезда на 30 км/ч больше скорости товарного поезда, поэтому за 6 ч скорый поезд прошел на 60 км больше, чем товарный поезд за 8 ч. Найдите скорость товарного поезда.

898. Значение суммы трех чисел равно 94. Известно, что первое число на 18 меньше второго, третье число на 4 больше второго. Найдите эти числа.

899. Коля на 2 года старше Даурена, Сауле младше Коли на 3 года. Возраст Коли, Даурена и Сауле вместе составляет 37 лет. Сколько лет Даурену?

900. Возраст отца, дочери и сына вместе составляет 47 лет. Отец старше сына в 5 раз, сестра младше брата на 2 года. Сколько лет сыну?

901. У пятнадцати треугольников и четырехугольников 53 угла. Сколько треугольников? Сколько четырехугольников?

902. 8 телят и 5 овец съели 835 кг корма. За все время каждому теленку дали на 28 кг корма больше, чем овце. Сколько корма съел каждый теленок, сколько — каждая овца?

Упражнения

903. Из двух пунктов, между которыми по шоссе 120 км, одновременно навстречу друг другу выехали мотоциклист и велосипедист. Скорость мотоциклиста на 20 км/ч больше скорости велосипедиста. Сколько километров проехал каждый из них, если известно, что они встретились через 3 ч?

904. Из двух пунктов, между которыми 132 км, одновременно навстречу друг другу выехали мотоциклист и велосипедист. Скорость велосипедиста составила 25% от скорости мотоциклиста. Сколько километров проехал каждый из них до встречи, если известно, что они встретились через 2,2 ч?

905. В первой вазе стояло в 3 раза больше роз, чем во второй, в третьей вазе — на 5 роз больше, чем во второй. Сколько роз стояло в первой вазе, если в этих вазах всего было 45 роз?

906. В первой вазе лежало в 2 раза больше конфет, чем в третьей, во второй вазе — на 4 конфеты больше, чем в третьей. Сколько конфет лежало в первой вазе, если в этих вазах было всего 164 конфеты?

907. Найдите три такие числа, чтобы значение их суммы было равно числу 480, первое число было бы на 40, второе число — на 80 больше третьего.

П **(908—909)** :

908. В треугольнике ABC $\angle A = 72°$, он составляет 80%, а $\angle B$ 20% от $\angle C$. Сколько градусов содержат $\angle B$ и $\angle C$ треугольника ABC?

909. Решите уравнение:

1) $\frac{7}{9} = \frac{315}{x + 400}$; 2) $\frac{3}{11} = \frac{x + 140}{517}$; 3) $\frac{444}{x - 480} = -\frac{12}{13}$.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

910. 1. Сравните числа:

1) 7,8 и 7,08; 2) -10 и -9; 3) $-4\frac{1}{3}$ и $-4{,}5$; 4) 8,05 и $|-8{,}05|$.

2. Сравните значения выражений

$8 \cdot (-10) + (-20 : 4) + 100$ и $-200 - 10 \cdot (-20) + (-40) : 0{,}4$.

911. В первом ящике x кг, во втором ящике y кг картофеля. Что означают следующие неравенства:

1) $x > y$; 2) $x + y > 30$; 3) $x + y < 40$; 4) $x - y > 3$?

ЛИНЕЙНЫЕ НЕРАВЕНСТВА С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ И ИХ СИСТЕМЫ

5 глава

5 Линейные неравенства с одной переменной и их системы

§ 32. Числовые неравенства и их свойства

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Верное числовое неравенство. Неверное числовое неравенство. Противоположные знаки неравенств. Сложение неравенств. Умножение неравенств. Деление неравенств.

Какими свойствамиобладают верные числовыенеравенства?

Вы знаете, что числовое неравенство состоит из чисел, одного из знаков неравенства и может содержать скобки и знаки действий.

Объясните!

Почему являются числовыми $12 + 3\frac{2}{9} \leqslant 15\frac{2}{9}$; $(-0{,}13 - 0{,}87)^2 > -1$; $69{,}3 + 4{,}5 \geq 69{,}3 - 4{,}5$; $-8{,}1 < 7{,}1$ неравенства?

Числовые неравенства могут быть верными и неверными.

Например , $2 + 3 > 4$ — верное числовое неравенство, так как значение числового выражения $2 + 3$ равно 5; $5 > 4$ — верное числовое неравенство;

$24 - 4 < 10$ — неверное числовое неравенство, так как значение числового выражения $24 - 4$ равно 20; $20 < 10$ — неверное числовое неравенство.

Числовые неравенства могут быть строгими и нестрогими.

Неравенства вида $a < b$ и $a > b$ называют *строгими.*

Неравенства вида $a \leq b$ и $a \geq b$ называют *нестрогими.*

Двойными неравенствами называют неравенства вида $a \leq x \leq b$, $a < x \leq b$, $a \leq x < b$ и т. п.

Знаки неравенств $<$ и $>$; $\leq$ и $\geq$ называют *противоположными друг другу знаками неравенств.*

Рассмотрим свойства верных числовых неравенств.

К обеим частям верного числового неравенства $22 - 6 > 24 - 14$ прибавьте одно и то же число: 1) 8; 2) 10; 3) –2; 4) –4. Установите, какие — верные или неверные — неравенства получились. Какой предположительно вывод можно сформулировать на основе результатов, полученных при выполнении этого задания?

Первое свойство верных числовых неравенств.

Если к обеим частям верного числового неравенства прибавить одно и то же число, то получим верное числовое неравенство. Если $a > b$, то $a + c > b + c$.

С помощью примера убедитесь в справедливости свойства верных числовых неравенств, если $a < b$, то $a + c < b + c$, где c — любое число.

Рассмотрим верное числовое неравенство $a > b + c$.

Используя первое свойство, прибавим к его обеим частям число $-c$.

Получим верное числовое неравенство $a - c > b + c - c$.

После приведения подобных слагаемых получим верное числовое неравенство $a - c > b$.

Сравним верные числовые неравенства: $a > b + c$ и $a - c > b$. Второе неравенство можно получить из первого, если слагаемое c перенести из правой части неравенства в его левую часть, поменяв знак этого слагаемого на противоположный. Или, наоборот, перенести слагаемое c из левой части неравенства в его правую часть, при этом также поменяв знак этого слагаемого на противоположный знак.

Справедливо правило:

Любое слагаемое из одной части неравенства можно переносить в другую его часть, поменяв знак этого слагаемого на противоположный знак.

Например, $3 < 2 + 5$ — верное числовое неравенство. Тогда неравенства $3 - 2 < 5$, $3 - 5 < 2$ также будут верными числовыми неравенствами.

Обе части верного числового неравенства $22 - 12 > 14 - 10$ умножьте на одни и те же:
— положительные числа 8; 10;
— отрицательные числа –2; –4, поменяв знак неравенства на противоположный.
Установите, какие — верные или неверные — неравенства получились. Какой предположительно вывод можно сформулировать на основе результатов, полученных при выполнении этого задания?

Второе свойство верных числовых неравенств.

Если обе части верного числового неравенства $a > b$ умножить на одно и то же:

1) положительное число $c > 0$, то получим: $a \cdot c > b \cdot c$ — верное числовое неравенство;

2) отрицательное число $c < 0$ и поменяем знак неравенства на противоположный знак, то получим: $a \cdot c < b \cdot c$ — верное числовое неравенство.

Если $a > b$ и $c > 0$, то $a \cdot c > b \cdot c$. Если $a > b$ и $c < 0$, то $a \cdot c < b \cdot c$.

С помощью примера убедитесь в справедливости свойства верных числовых неравенств:
если $a < b$ и $c > 0$, то $a \cdot c < b \cdot c$; если $a < b$ и $c < 0$, то $a \cdot c > b \cdot c$.

Значит,

при умножении обеих частей неравенства на положительное число знак неравенства остается тем же, при умножении на отрицательное число — меняется на противоположный знак неравенства.

Рассмотрим верное числовое неравенство $a > b$ и умножим его левую и правую части на одно и то же:

1) положительное число $c = \frac{1}{m} > 0$. Тогда по свойству верных числовых неравенств получим верное числовое неравенство: $a \cdot \frac{1}{m} > b \cdot \frac{1}{m}$, или $\frac{a}{m} > \frac{b}{m}$. Сравним верные числовые неравенства: $a > b$ и $\frac{a}{m} > \frac{b}{m}$. Второе неравенство можно получить из первого, если обе части верного числового неравенства $a > b$ разделить на одно и то же положительное число m;

2) отрицательное число $c = \frac{1}{m} < 0$. Тогда по свойству верных числовых неравенств получим верное числовое неравенство $a \cdot \frac{1}{m} < b \cdot \frac{1}{m}$, или $\frac{a}{m} < \frac{b}{m}$. Сравним верные числовые неравенства $a > b$ и $\frac{a}{m} < \frac{b}{m}$. Второе неравенство можно получить из первого, если обе части верного числового неравенства $a > b$ разделить на одно и то же отрицательное число m и поменять знак неравенства на противоположный знак.

Поэтому справедливо правило:

Если обе части верного числового неравенства $a > b$ разделить на одно и то же: 1) положительное число m, то получим верное числовое неравенство $\frac{a}{m} > \frac{b}{m}$; 2) отрицательное число m, то получим верное числовое неравенство $\frac{a}{m} < \frac{b}{m}$.

С помощью примера убедитесь в справедливости свойства верных числовых неравенств: если обе части верного числового неравенства $a < b$ разделить на одно и то же:

1) положительное число m, то получим верное числовое неравенство $\frac{a}{m} < \frac{b}{m}$;

2) отрицательное число m и поменять знак неравенства на противоположный, то получим верное числовое неравенство $\frac{a}{m} > \frac{b}{m}$.

Значит, при делении обеих частей неравенства на положительное число знак неравенства остается тем же, при делении на отрицательное число — меняется на противоположный знак неравенства.

Объясните!

Как из двух верных числовых неравенств: 1) $5 > 3$, $3 > 1$ получили числовое неравенство $5 > 1$; 2) $22 - 9 > 20 - 11$ и $20 - 11 > 45 - 37$ получили числовое неравенство $22 - 9 > 45 - 37$?

Установите, какое оно — верное или неверное — неравенство.

Какой вывод предположительно можно сформулировать на основе результатов, полученных при выполнении этого задания?

Третье свойство верных числовых неравенств.

Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.

С помощью примера убедитесь в справедливости свойства верных числовых неравенств: если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.

? Как сложить верные числовыенеравенства?

Выполните!

Сложите отдельно левые и правые части верных числовых неравенств с одинаковыми знаками неравенства: 1) $7 > -4$ и $3 > 2$; 2) $67 - 62 > 2$ и $12 - 7 > -8$.

Установите, какое — верное или неверное неравенство — получилось.

Какой предположительно вывод можно сформулировать на основе результатов, полученных при выполнении этого задания?

Четвертое свойство верных числовых неравенств.

Если почленно сложить два верных числовых неравенства с одинаковыми знаками неравенств, то получится верное числовое неравенство. Если $a > b$, $c > d$, то $a + c > b + d$.

С помощью примеров убедитесь в справедливости свойства верных числовых неравенств: если $a < b$, $c < d$, то $a + c < b + d$.

Как умножить верные числовыенеравенства?

Выполните!

Перемножьте отдельно левые и правые части верных числовых неравенств, значения которых являются положительными числами: 1) $7 > 6$ и $8 > 3$; 2) $67 - 62 > 1$ и $12 - 7 > 3$. Установите, какое — верное или неверное — неравенство получилось. Какой предположительно вывод можно сформулировать на основе результатов, полученных при выполнении этого задания?

Пятое свойство верных числовых неравенств.

Если почленно умножить два верных числовых неравенства одного знака с положительными членами, то получится верное числовое неравенство. Если $a > b > 0$, $c > d > 0$, то $a \cdot c > b \cdot d$.

С помощью примера убедитесь в справедливости свойства верных числовых неравенств: если $0 < a < b$, $0 < c < d$, то $a \cdot c < b \cdot d$.

Шестое свойство верных числовых неравенств.

Если $a > b > 0$ и $c > d > 0$, то $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$;

если $0 < a < b$ и $0 < c < d$, то $\frac{a}{d} < \frac{b}{c}$.

Как разделить верные числовыенеравенства?

С помощью примера убедитесь в справедливости шестого свойства верных числовых неравенств.

?

1. Что можно сказать про число m, если известно, что $a > b$ и $am < bm$ — верные числовые неравенства?

А Упражнения

912. Сравните числа:

1) $0{,}55$ и $\frac{5}{12}$; 2) $0{,}6$ и $\frac{1}{6}$; 3) $0{,}94$ и $\frac{15}{16}$;

4) $-\frac{1}{3}$ и $0{,}3$; 5) $-\frac{21}{25}$ и $-0{,}9$; 6) $\frac{41}{64}$ и $0{,}65$.

913. Сравните числа x и y, если:

1) $x - y = 0$; 2) $x - y = 20$; 3) $y - x = 5{,}8$;

4) $x - y = -\frac{2}{13}$; 5) $y - x = -9{,}9$; 6) $x - y = 0{,}01$.

914. Прибавьте к обеим частям неравенства $-8{,}5 < 1{,}7$ число:

1) -6; 2) 10; 3) $2{,}8$; 4) $-9{,}9$.

915. Вычтите из обеих частей неравенства $-9\frac{1}{12} < 20$ число:

1) -7; 2) 16; 3) $4\frac{1}{6}$; 4) $-3\frac{2}{3}$.

916. Запишите верное неравенство, которое получится, если умножить обе части неравенства $-5{,}6 < \frac{7}{24}$ на число: 3; -2; $0{,}5$; $-\frac{6}{7}$.

917. Запишите верное неравенство, которое получится, если разделить обе части неравенства $-\frac{5}{36} < 4{,}8$ на число 5; $-\frac{1}{9}$; $1{,}6$; -100.

918. Выполните сложение неравенств:

1) $-10 < 3$ и $1{,}1 < 5$; 2) $\frac{4}{15} < 4{,}5$ и $3 < 3{,}2$;

3) $9{,}8 > 0{,}7$ и $8\frac{1}{3} > -\frac{1}{7}$; 4) $-6\frac{9}{13} > -11\frac{2}{3}$ и $4\frac{1}{3} > \frac{69}{70}$.

919. Выполните умножение неравенств:

1) $0,8 < 9$ и $5 < 2,02$; 2) $5\frac{3}{11} < 10,55$ и $11 < 16$;

3) $1\frac{4}{17} > \frac{9}{13}$ и $\frac{17}{21} > \frac{13}{18}$; 4) $0,025 > 0,008$ и $1002 > 125$.

920. Известно, что $6 < x \leq 11$. Найдите значение выражения:

1) $x + 5$; 2) $x - 7$; 3) $0,4x$; 4) $\frac{1}{6}x$.

921. Известно, что $4 < a < 9$ и $1 < b < 7$. Найдите значение выражения: 1) $a + b$; 2) ab; 3) $a - b$; 4) $\frac{a}{b}$.

922. Найдите 1) $n + m$; 2) $n - m$; 3) mn; 4) $n : m$, если $0,5 < n < 5\frac{1}{3}$ и $\frac{8}{9} < m < 4,5$.

B Упражнения

923. Известно, что: а) $a > b$; б) $a < b$. Сравните значения выражений:

1) $6a$ и $6b$; 2) $-3\frac{4}{9}a$ и $-3\frac{4}{9}b$;

3) $8,1a$ и $8,1b$; 4) $6a + \frac{3}{5}$ и $6b + \frac{3}{5}$;

5) $5(a + 9)$ и $5(b + 9)$; 6) $-\frac{1}{15}(a - 1)$ и $-\frac{1}{15}(b - 1)$.

C Упражнения

924. Докажите, что если $a > 1,5$ и $b > 10$, то:

1) $6a + 5b > 49$; 2) $ab + 4,4 > 19,38$;

3) $4a + b^2 > 105,02$.

925. Докажите, что если:

1) $0,89c - 2d < 13d - 14,11c$, то $c < d$;

2) $x + 8y < 4x + 5y$, то $x > y$;

3) $\frac{6}{7}n - 6 > m - \frac{1}{7}m - 6$, то $n > m$;

4) $1,2s + 5,1t > 2s + 4,3t$, то $s < t$.

П **(926—929)** :

926. 1) Автомобиль проехал 2 ч со скоростью a км/ч и 3 ч — со скоростью b км/ч. Найдите длину пройденного автомобилем пути, если $a = 90$, $b = 110$.
2) Для оформления зала было куплено 50 шаров по n тг за 1 шар и 60 цветов по m тг за 1 цветок. Найдите стоимость покупки, если $n = 70$ и $m = 90$.

927. Найдите значение выражения:

1) $0{,}85\,a - 79\frac{1}{3}$ при $a = 100$;

2) $26\frac{3}{7} + b : \frac{49}{60}$ при $b = 7$.

928. Сравните значения выражений:

1) $|87{,}98 - 90|$ и $|4{,}1 - 6{,}12|$;

2) $\left|\frac{2^3}{3^3} \cdot \frac{3}{4}\right|$ и $\left|-\frac{20}{21}\right| : \left|2\frac{6}{7}\right|$.

929. Собственная скорость моторной лодки составляет $\frac{4}{9}$ от собственной скорости катера. Скорость катера по течению реки на 16 км/ч больше скорости моторной лодки, движущейся по течению реки. Найдите собственную скорость катера.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

930. Изобразите на числовой прямой числа –4; 2; –1,5; 1; 7; –6,5.

§ 33. Числовые промежутки

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Открытый числовой луч. Числовой интервал. Числовой луч. Числовой отрезок. Числовой полуинтервал. Числовая прямая.

Как обозначить и изобразить числовые промежутки?

Вы знаете, что числа изображают точками на координатной прямой. Решением неравенства $0 \cdot x > -2$ является любое число. Поэтому, если изобразить все решения неравенства $0 \cdot x > -2$ на координатной прямой, то получим всю координатную прямую (рис. 58.1). Числовой промежуток, который соответствует всей координатной прямой, обозначают: $(-\infty; +\infty)$.

Говорите правильно

Запись $(-\infty; +\infty)$ читают:

— числовой промежуток от минус бесконечности до плюс бесконечности;

— числовая прямая от минус бесконечности до плюс бесконечности.

Для наглядности числовую прямую $(-\infty; +\infty)$ показывают штриховкой, нанесенной над или под координатной прямой, так, как показано на рисунках 58.2, 58.3.

1) 2) 3)

Рис. 58

Говорят, что решением неравенства $0 \cdot x > -2$ является числовой промежуток или числовая прямая $(-\infty; +\infty)$.

Решением неравенства $x \leq 1$ является любое число, которое меньше или равно 1. Поэтому, если изобразить все решения неравенства $x \leq 1$ на числовой прямой, то получим луч (рис. 59.1). Числовой промежуток, который соответствует этому лучу на координатной прямой, обозначают $(-\infty; 1]$ и называют *числовым лучом*.

1) 2) 3)

Рис. 59

Числовой луч $(-\infty; 1]$ также показывают штриховкой, нанесенной над или под координатной прямой, так, как показано на рисунках 59.2, 59.3.

Говорят, что решением неравенства $x \leq 1$ является числовой промежуток или числовой луч $(-\infty; 1]$.

Говорите правильно

Запись $(-\infty; 1]$ читают:

— числовой промежуток от минус бесконечности до единицы, включая единицу;

— числовой луч от минус бесконечности до единицы, включая единицу.

Решением неравенства $x \geq 1$ является любое число, которое больше или равно 1. Поэтому, если изобразить все решения неравенства $x \geq 1$ на числовой прямой, то получим луч (рис. 60.1). Числовой промежуток, который соответствует этому лучу на координатной прямой, обозначают $[1; +\infty)$ и называют *числовым лучом*.

Говорите правильно

Запись $[1; +\infty)$ читают :

— числовой промежуток от единицы до плюс бесконечности, включая единицу;

— числовой луч от единицы до плюс бесконечности, включая единицу.

Числовой луч $[1; +\infty)$ также показывают штриховкой, нанесенной над или под координатной прямой, так, как показано на рисунках 60.2, 60.3.

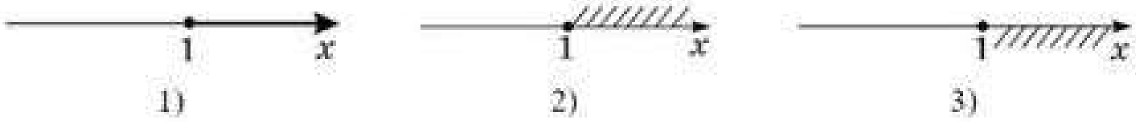


Рис. 60

Говорят, что решением неравенства $x \geq 1$ является числовой промежуток или числовой луч $[1; +\infty)$.

Решением неравенства $x < 1$ является любое число, которое меньше 1. Поэтому, если изобразить все решения неравенства $x < 1$ на координатной прямой, то получим геометрическую фигуру, которую называют *открытым лучом* (рис. 61.1).

Луч называется *открытым* тогда и только тогда, когда точка, изображающая его начало, не принадлежит лучу.

Чтобы показать, что точка не принадлежит лучу, ее изображают так, как показано на рисунке 61.1, — маленькой окружностью.

Числовой промежуток, который соответствует этому открытому лучу на координатной прямой, обозначают: $(-\infty; 1)$.

Открытый числовой луч $(-\infty; 1)$ показывают штриховкой, нанесенной над или под координатной прямой, так, как показано на рисунках 61.2, 61.3.

1) 2) 3)

Рис. 61

Говорят, что решением неравенства $x < 1$ является числовой промежуток или *открытый числовой луч* $(-\infty; 1)$.

Решением неравенства $x > 1$ является любое число, которое больше 1. Поэтому, если изобразить все решения неравенства $x > 1$ на координатной прямой, то получим также открытый луч (рис. 62.1). Числовой промежуток, который соответствует этому открытому лучу на координатной прямой, обозначают $(1; +\infty)$ и называют *открытым числовым лучом*.

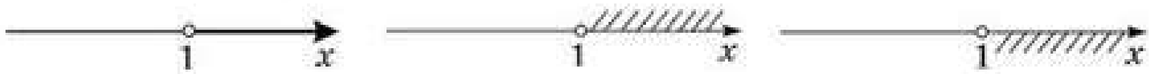
Говорите правильно

Запись $(1; +\infty)$ читают:

— числовой промежуток от единицы до плюс бесконечности;

— открытый числовой луч от единицы до плюс бесконечности.

Для наглядности открытый числовой луч $(1; +\infty)$ показывают штриховкой, нанесенной над или под координатной прямой, так, как показано на рисунках 62.2, 62.3.



1) 2) 3)

Рис. 62

Говорят, что решением неравенства $x > 1$ является числовой промежуток или открытый числовой луч $(1; +\infty)$.

Говорите правильно

Запись [–3; 1] читают:

— числовой промежуток от минус трех до единицы, включая минус три и единицу;

— числовой отрезок от минус трех до единицы.

Решением двойного неравенства $-3 \le x \le 1$ является любое число, которое больше или равно –3, но меньше или равно 1. Поэтому, если изобразить все решения двойного неравенства $-3 \le x \le 1$ на числовой прямой, то получим отрезок (рис. 63.1). Числовой промежуток, который соответствует этому отрезку на координатной прямой, обозначают [–3; 1] и называют *числовым отрезком*.

Для наглядности числовой отрезок [–3; 1] показывают штриховкой, нанесенной над или под координатной прямой, так, как показано на рисунках 63.2, 63.3.

Рис. 63

Говорят, что решением неравенства $-3 \le x \le 1$ является числовой промежуток или числовой отрезок [–3; 1].

Решением двойного неравенства $-3 < x < 1$ является любое число, которое больше –3, но меньше 1. Поэтому, если изобразить все решения двойного неравенства $-3 < x < 1$ на координатной прямой, то получим геометрическую фигуру, которую называют *интервалом* (рис. 64.1). Интервалу не принадлежат точки, которые соответствуют числам –3 и 1. Поэтому при изображении интервала числа –3 и 1 изображены не точками на координатной прямой, а маленькими окружностями. Числовой промежуток, который соответствует этому интервалу на координатной прямой, обозначают (–3; 1) и называют *числовым интервалом*.

Рис. 64

Говорите правильно

Запись (–3; 1) читают:

— числовой промежуток от минус трех до единицы;

— числовой интервал от минус трех до единицы.

Числовой интервал (–3; 1) показывают штриховкой, нанесенной над или под координатной прямой так, как показано на рисунках 64.2, 64.3.

Решением двойного неравенства $-3 \le x < 1$ является любое число, которое больше или равно –3, но меньше 1. Поэтому, если изобразить все решения двойного неравенства $-3 \le x < 1$ на координатной прямой, то получим геометрическую фигуру, которую называют *полуинтервалом* (рис. 65.1). Числовой промежуток, который соответствует этому полуинтервалу на координатной прямой, обозначают [–3; 1) и называют *числовым полуинтервалом*.

Говорите правильно

Запись [–3; 1) читают:

— числовой промежуток от минус трех до единицы, включая минус три;

— числовой полуинтервал от минус трех до единицы, включая минус три.

Для наглядности числовой полуинтервал [–3; 1) показывают штриховкой, нанесенной над или под координатной прямой, так, как показано на рисунках 65.2, 65.3.

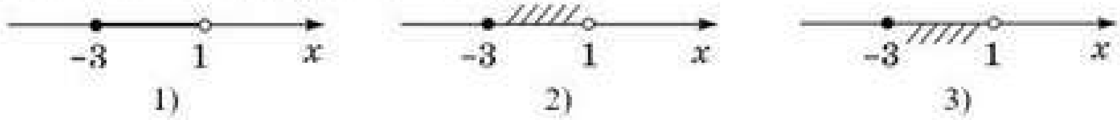


Рис. 65

Говорят, что решением двойного неравенства $-3 \le x < 1$ является числовой промежуток или числовой полуинтервал [–3; 1).

Решением двойного неравенства $-3 < x \le 1$ является любое число, которое больше –3, но меньше или равно 1. Поэтому, если изобразить все решения двойного неравенства $-3 < x \le 1$ на координатной прямой, то получим также *полуинтервал* (рис. 66.1). Числовой промежуток, который соответствует этому полуинтервалу на координатной прямой, обозначают (–3; 1] и называют *числовым полуинтервалом*.

Говорите правильно

Запись (–3; 1] читают:

— числовой промежуток от минус трех до единицы, включая единицу;

— числовой полуинтервал от минус трех до единицы, включая единицу.

Числовой полуинтервал (–3; 1] показывают штриховкой, нанесенной над или под координатной прямой, так, как показано на рисунках 66.2, 66.3.

Рис. 66

Говорят, что решением двойного неравенства $-3 < x \le 1$ является числовой промежуток или числовой полуинтервал (–3; 1].

1. Назовите числовой промежуток, который является решением неравенства $x > 7$; $x \le -2$; $-3 < x \le 9$.
2. Приведите пример числового промежутка, который является числовым отрезком, открытым числовым лучом.
3. Каким числовым промежуткам принадлежит число 8: $(8; +\infty)$; $(-1; +\infty)$; $(-\infty; 8]$; $[-3; 10]$?

Упражнения

931. Прочитайте числовые промежутки:
1) $(-\infty; 3)$; 2) $[-4; 5]$; 3) $[-1,5; +\infty)$;
4) $\left(-\frac{1}{3}; \frac{4}{7}\right)$; 5) $[-8,7; 10)$; 6) $\left(-\infty; \frac{13}{60}\right)$.

932. Запишите символически числовой промежуток:
1) от 20 до 45; 2) от –7,8 до 13, включая 13; 3) от минус бесконечности до $14\frac{5}{9}$; 4) от $\frac{6}{7}$ до плюс бесконечности, включая $\frac{6}{7}$; 5) от –9,1 до 2,2, включая — 9,1 и 2,2; 6) от –40 до $-2\frac{19}{23}$.

933. Запишите числовой промежуток, изображенный на рисунке 67:

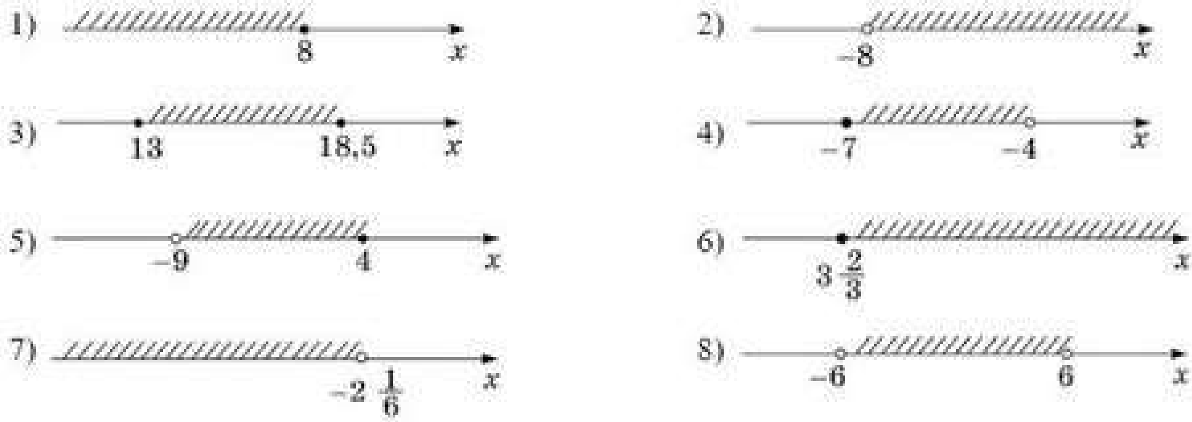


Рис. 67

934. Изобразите на координатной прямой числовой промежуток:
1) [6; 10]; 2) [–5; –1]; 3) [–9; 3); 4) (–1; 7];
5) $(-\infty; 15)$; 6) $(8; +\infty)$; 7) $(-\infty; 2]$; 8) $[-3; +\infty)$.

935. Изобразите на координатной прямой геометрическую фигуру, состоящую из точек, расстояние до которых от точки: 1) $A(5)$; 2) $B(-5)$: а) меньше или равно 3; б) больше 3. Какие числовые промежутки получились?

936. Из упражнений 932—933 укажите числовые промежутки, являющиеся: 1) числовым отрезком; 2) числовым открытым лучом; 3) числовым интервалом.

937. Изобразите на координатной прямой: 1) числовой луч; 2) числовой открытый луч; 3) числовой отрезок; 4) числовой интервал; 5) числовой полуинтервал. Запишите соответствующие числовые промежутки.

938. Напишите по три числовых промежутка, соответствующих: 1) лучу; 2) открытому лучу; 3) отрезку; 4) интервалу; 5) полуинтервалу.

939. Из чисел 5; –9; 14; –12; 9; 13; 1; –19 выпишите числа, которые принадлежат числовому промежутку:
1) [–12; 9); 2) (–13; 13); 3) (1; 15]; 4) [–20; 20].

940. Среди числовых промежутов [–7; 4]; (–17; 5); (–9;5]; [–1; 11) укажите те промежутки, которым принадлежит число:
1) 5; 2) –8; 3) $4\frac{1}{9}$; 4) –0,5; 5) 10,2; 6) –16,9.

B Упражнения

941. Найдите все натуральные числа, принадлежащие числовому промежутку:
1) [3,5; 10); 2) [0,9; 4,9]; 3) (101; 105);
4) [0; 5); 5) [–5; 2); 6) [–101; 1,2].

942. Укажите все целые числа, принадлежащие числовому промежутку:
1) (2; 7,5]; 2) [–3,2; 3); 3) [–21; –17);
4) [12,3; 13,1]; 5) $\left[-7\frac{1}{3}; -2{,}99\right]$; 6) (–1; 4).

943. Найдите: а) наименьшее; б) наибольшее натуральное число, принадлежащее числовому промежутку:

1) $(-3;\ 6]$; 2) $[-5;\ 2)$; 3) $[0{,}7;\ 9{,}9]$; 4) $\left[1\frac{11}{12};20\frac{1}{3}\right]$.

944. Укажите: а) наименьшее; б) наибольшее целое число, принадлежащее числовому промежутку:

1) $[-100{,}1;\ 98)$; 2) $\left[-2\frac{1}{3};5\right)$; 3) $(1;\ 8{,}1]$; 4) $\left(-35;\frac{11}{19}\right]$.

Упражнения

945. Найдите значение суммы всех целых чисел, принадлежащих числовому промежутку:

1) $(-9;\ 4]$; 2) $\left[-4\frac{3}{7};3\frac{1}{9}\right]$; 3) $[-6;\ 8]$; 4) $(-1{,}25;\ 11{,}7]$.

946. Найдите числовой отрезок, концы которого неотрицательные числа, если значение суммы всех натуральных чисел, принадлежащих этому отрезку, равно: 1) 6; 2) 9. Рассмотрите все возможные варианты.

П (947—949) :

947. Найдите значение выражения:

1) $2{,}15a + b + 1\frac{7}{15}c + \frac{11}{150}$ при $a = 6\frac{6}{15}$, $b = -5{,}5$ и $c = 2{,}5$;

2) $100a^2 + 10b^2 + c$ при $a = 0{,}3$, $b = 0{,}4$ и $c = 0{,}4$.

948. Катер прошел 60 км со скоростью 45 км/ч. Сколько времени он затратил на пройденный путь?

949. Длина одной стороны треугольника в 2 раза больше длины второй стороны, длина третьей стороны на 1,5 см меньше длины первой стороны. Найдите длины сторон треугольника, если его периметр равен 12,5 см.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

950. Элементы множества A — 1; 3; 9; 13, элементы множества B — 2; 9; 10; 13; 15. Найдите элементы объединения и пересечения множеств A и B.

§ 34. Объединение и пересечение числовых промежутков

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Объединение числовых промежутков. Пересечение числовых промежутков.

Как найтиобъединение и пересечение числовыхпромежутков?

Объединением числовых промежутков называется числовой промежуток, состоящий из чисел, которые принадлежат хотя бы одному из этих числовых промежутков.

Пример 1. Найдем объединение числовых промежутков [–4; 1] и [1; 2].

Рис. 68

Решение. Объединение числовых промежутков найдем с помощью числовой прямой. Для этого один числовой промежуток покажем штриховкой, нанесенной над координатной прямой, другой — под координатной прямой. На рисунке 68 показаны числовые промежутки [–4; 1] и [1; 2].

В объединение этих промежутков войдут числа от минус четырех до двух, включая числа –4 и 2, т. е. [–4; 2], так как числа, принадлежащие числовому промежутку [–4; 2], принадлежат хотя бы одному из числовых промежутков [–4; 1] или [1; 2].

Ответ: [–4; 2].

Чтобы записать предложение "Объединение числовых промежутков [–4; 1] и [1; 2] равно числовому промежутку [–4; 2]" коротко, используют знак объединения — ∪. Пишут: [–4; 1] ∪ [1; 2] = [–4; 2].

Объясните!

С помощью числовой прямой (рис. 69, 70, 71), почему полученный числовой промежуток есть результат объединения промежутков: 1) [–6; 1] ∪ (–2; 7] = [–6; 7]; 2) (–∞; 1] ∪ [–2; +∞) = (–∞; +∞); 3) [–3; 2] ∪ [4; 8).

Рис. 69

Рис. 70

Рис. 71

Кроме объединения числовых промежутков находят их пересечение, т. е. общую часть.

Пересечением числовых промежутков называется числовой промежуток, состоящий из чисел, которые принадлежат одновременно каждому из этих числовых промежутков.

Пример 2. Найдем пересечение числовых промежутков $[-4;\ 1]$ и $[1;\ 2]$.

Рис. 72

Решение. Пересечение числовых промежутков найдем с помощью числовой прямой. Для этого один числовой промежуток покажем штриховкой, нанесенной над координатной прямой, другой — под координатной прямой.

На рисунке 72 показаны числовые промежутки $[-4;\ 1]$ и $[1;\ 2]$. Их пересечение состоит только из одного числа 1, так как только число 1 принадлежит одновременно числовому промежутку $[-4;\ 1]$ и числовому промежутку $[1;\ 2]$. Говорят, что пересечением числовых промежутков $[-4;\ 1]$ и $[1;\ 2]$ является множество, состоящее из одного числа 1, записывают: $\{1\}$.

Ответ: $\{1\}$.

Чтобы записать предложение "Пересечение числовых промежутков $[-4;\ 1]$ и $[1;\ 2]$ содержит одно число — единицу" коротко, используют знак пересечения $\cap$ и фигурные скобки $\{\ \}$.

Пишут: $[-4;\ 1] \cap [1;\ 2] = \{1\}$.

Объясните!

С помощью числовой прямой (рис. 73, 74, 75), почему полученный числовой промежуток есть результат пересечения промежутков:

1) $[-4;\ 3) \cap [-1;\ 6) = [-1;\ 3)$;
2) $(-\infty;\ 6) \cap [-1;\ +\infty) = [-1;\ 6)$;
3) $[-5;\ 2] \cap [4;\ 9) = \varnothing$.

Рис. 73

Рис. 74

Рис. 75

В случае, когда пересечение числовых промежутков не содержит ни одного числа, используют знак $\varnothing$. Например, чтобы записать предложение "Пересечение числовых промежутков $[-4;\ 1]$ и $(2;\ 6]$ не содержит ни одного числа", коротко пишут: $[-4;\ 1] \cap (2;\ 6] = \varnothing$. Значит, числовые промежутки $[-4;\ 1]$ и $(2;\ 6]$ *не пересекаются*.

1. Может ли объединение двух числовыхпромежутков не содержать ни одного числа?
2. Может ли объединение двух числовыхлучей быть числовымотрезком, числовымлучом; числовойпрямой?
3. Может ли пересечение двух числовыхлучей быть числовымотрезком, числовымлучом, числовойпрямой?

Упражнения

951. Запишите объединение числовых промежутков, изображенных на рисунк е 76:

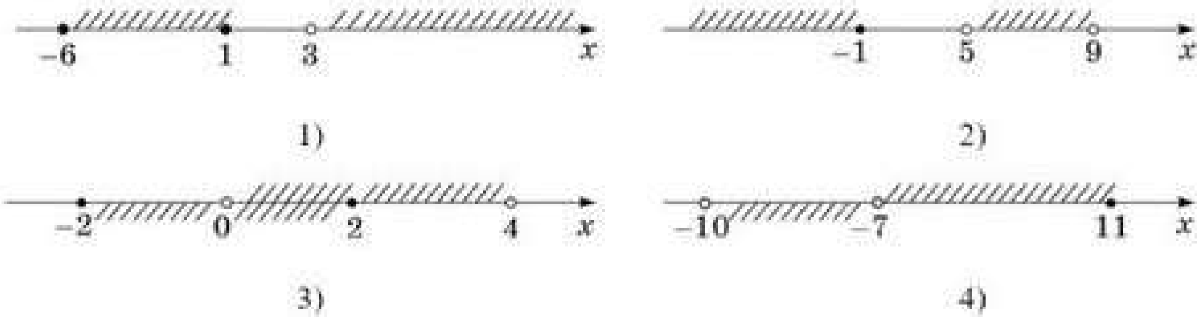


Рис. 76

952. Запишите пересечение числовых промежутков, изображенных на рисунк е 77:

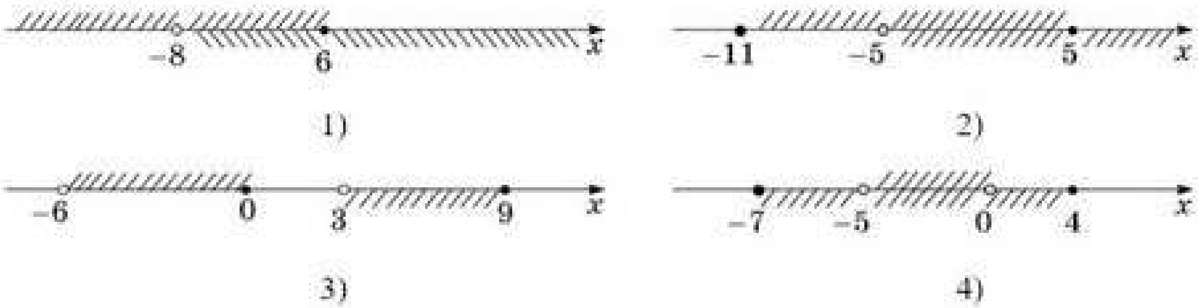


Рис. 77

Найдите объединение числовых промежутков **(953—954)** :

953. 1) $(-\infty;\ 7)$ и $(6;\ +\infty)$; 2) $(-\infty;\ -4]$ и $(-5;\ 2)$;
3) $\left[-\frac{2}{3};10\right)$ и $[0;\ 8)$; 4) $\left(15\frac{1}{14};20\right]$ и $(0;\ +\infty)$.

954. 1) $(-\infty;\ 10)$ и $(-3;\ 6)$; 2) $(-\infty;\ 8]$ и $[7;\ +\infty)$;
3) $[2{,}4;\ 5)$ и $(4;\ 11]$; 4) $[-1{,}8;\ 0)$ и $[-1;\ 14]$.

Найдите пересечение числовых промежутков (955—957):

955. 1) $(-5;\ 1]$ и $[-6;\ 0)$; 2) $\left[-7\frac{1}{3};11\right)$ и $[-3;\ 5)$;

3) $\left(-\infty;4\frac{2}{3}\right)$ и $[4;\ +\infty)$; 4) $(-19{,}2;\ 0)$ и $[-8;\ 8)$.

956. 1) $(-\infty;\ -7{,}9)$ и $(-12;\ 3)$; 2) $(-20;\ 1]$ и $[-1{,}9;\ +\infty)$;

3) $\left[8\frac{1}{9};35\right)$ и $(-7{,}5;\ 10]$; 4) $\left(\frac{7}{15};9\right]$ и $\left[-6;5\frac{1}{2}\right)$.

957. 1) $(-8;\ 13)$ и $(-3{,}7;\ 5)$; 2) $\left[-6\frac{2}{3};17{,}3\right]$ и $(-1;\ 0)$;

3) $\left(9\frac{3}{5};18\right]$ и $\left[-12;4\frac{1}{2}\right)$; 4) $[-13;\ 5)$ и $[6;\ 12)$.

Найдите пересечение и объединение числовых промежутков (958—959) :

958. 1) $(-\infty;\ 3]$ и $[1;\ +\infty)$; 2) $(-4;\ 0]$ и $[4;\ 7)$;

3) $\left(-16\frac{3}{7};16\right]$ и $[-6;\ 6)$; 4) $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right]$ и $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

959. 1) $(-5;\ 15)$ и $[4;\ 13)$; 2) $(-\infty;\ 4{,}5]$ и $[-4{,}5;\ +\infty)$;

3) $\left[-8\frac{3}{5};11\right]$ и $(-9;\ 2)$; 4) $\left[\frac{2}{3};5\right)$ и $(2;\ 6{,}7)$.

960. Среди чисел -6; -4; 8; -8; 0; 13 назовите числа, принадлежащие пересечению числовых промежутков, изображенных на рисунке 78:

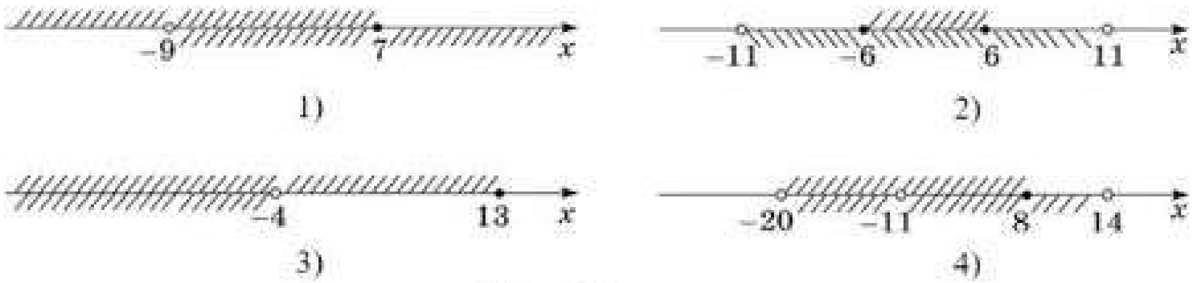


Рис. 78

Упражнения

961. Изобразите на одной координатной прямой: 1) числовой интервал и числовой луч; 2) числовой отрезок и открытый числовой луч. Рассмотрите все возможные случаи и для каждого случая найдите обьединение и пересечение числовых промежутков.

962. Дан числовой промежуток: 1) $[-3; 3]$; 2) $\left(-\infty; 9\frac{1}{3}\right]$; 3) $\left[1\frac{2}{3}; 10\right)$. Изобразите на одной координатной прямой данный числовой промежуток и числовой интервал так, чтобы их пересечением являлся числовой полуинтервал. Запишите этот числовой интервал.

963. Перечислите все натуральные числа, принадлежащие пересечению числовых промежутков:

1) $(1; 8)$ и $(-5; 7]$;
2) $[-2; 3]$ и $(-1; 5)$;
3) $(-\infty; 6]$ и $[4; +\infty)$;
4) $(-10; -2]$ и $[-7; 1)$.

964. Назовите все целые числа, принадлежащие пересечению числовых промежутков:

1) $(-3{,}4; 3]$ и $[-4; 5)$;
2) $(-9; 11]$ и $[-4; 3{,}1]$;
3) $(-\infty; 7{,}9]$ и $[-0{,}5; +\infty)$;
4) $\left(-6\frac{11}{12}; 0\right]$ и $[-8; 1)$.

965. Найдите наибольшее (наименьшее) натуральное число, принадлежащее пересечению числовых промежутков:

1) $(-10; 6)$ и $(1; +\infty)$;
2) $[5; 29]$ и $[20; +\infty)$;
3) $(-3; 13]$ и $[-4; +\infty)$;
4) $(21; +\infty)$ и $(-20; 21]$.

Упражнения

966. Найдите наибольшее (наименьшее) целое число, принадлежащее пересечению числовых промежутков:

1) $[3{,}5; 7{,}1]$ и $(1; 4{,}9)$;
2) $\left(-\infty; \frac{3}{7}\right]$ и $\left[-\frac{8}{9}; +\infty\right)$;
3) $(-\infty; +\infty)$ и $\left[-7\frac{1}{3}; 8\frac{1}{3}\right]$;
4) $(-5{,}1; 9{,}1)$ и $(-\infty; +\infty)$.

967. Укажите наибольшее натуральное число и наименьшее целое число, принадлежащее пересечению числовых промежутков:

1) $(-10; 5]$ и $(-3; 7]$;
2) $[-11; 9]$ и $[-2{,}5; 6{,}1)$;
3) $(-\infty; 4{,}8]$ и $[3{,}9; +\infty)$;
4) $(-\infty; -5{,}7)$ и $(-6{,}8; +\infty)$.

П **(968—970)** :

968. Изобразите на координатной прямой точки, расстояние до которых от точки: 1) $O(0)$; 2) $A(-1)$; 3) $B(3)$: а) равно 2; б) меньше 2; в) больше 2. В каком случае построенные точки образуют интервал?

969. Упростите выраж ение:

1) $37{,}6\,x - (10 - 41{,}2\,x) + 7{,}13$;

2) $8{,}8 + 13{,}19\,y - (15{,}1\,y + 20{,}02)$;

3) $\dfrac{0{,}3^2 + 0{,}4^2}{0{,}5^3} \cdot x - (200x + 8) \cdot \dfrac{1}{2^3}$;

4) $\dfrac{y \cdot (0{,}5^3 - 0{,}1)}{0{,}5^2} - (9y + 0{,}1)$.

970. Рис, выращенный в 2007 г. в Кызылординской области, составил 91,6% от массы риса, выращенного в этом году в нашей республике. Какой процент от всей массы риса составляет рис, выращенный в этом году в других областях нашей республики?

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

971. Изобразите на числовой прямой числа: 1) больше 3; 2) меньше –2.

§ 35. Линейные неравенства с одной переменной

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Линейное неравенство. Переменная. Решение неравенства. Равносильные неравенства.

Как решать линейные неравенства видов: $kx > b$, $kx \geq b$, $kx < b$, $kx \leq b$?

Неравенства видов $ax < b$, $ax > b$, $ax \leq b$, $ax \geq b$, в которых x — переменная (неизвестное число, которое нужно найти), a и b — некоторые числа, называются *линейными неравенствами с одной переменной*.

Решение многих неравенств сводится к решению линейных неравенств с одной переменной.

Выражения, стоящие слева и справа от знака неравенства, называются соответственно *левой и правой частями неравенства*. Каждое слагаемое левой и правой частей неравенства называется *членом неравенства*.

Например, в неравенстве $0{,}8x - 1{,}6 > 3{,}5 + 7x$ левая часть — $0{,}8x - 1{,}6$, правая часть — $3{,}5 + 7x$; члены неравенства $-0{,}8x$; $-1{,}6$; $3{,}5$; $7x$.

Значение переменной (число), при подстановке которого в неравенство с одной переменной получается верное числовое неравенство, называется *решением неравенства с одной переменной*.

Например, решением неравенства $20 + x > 24$ является число 8, так как $20 + 8 > 24$ — верное числовое неравенство.

Решить неравенство с одной переменной — значит найти все его решения или показать, что решений нет.

Неравенства с одной переменной, имеющие одни и те же решения или не имеющие решений, называются *равносильными неравенствами с одной переменной*.

Поскольку в неравенстве с переменной переменная x обозначает неизвестное число, которое нужно найти, то, используя свойства числовых неравенств, можно заменять одно неравенство с переменной другим, равносильным неравенством. Поэтому справедливы правила равносильности неравенств с одной переменной:

1) если к обеим частям неравенства с одной переменной прибавить одно и то же число, то получим неравенство, равносильное данному неравенству;

2) если какое-либо слагаемое перенести из одной части неравенства с одной переменной в другую, поменяв знак этого слагаемого на противоположный знак, то получим неравенство, равносильное данному неравенству;

3) если обе части неравенства с одной переменной умножить (или разделить) на одно и то же положительное число, то получим неравенство, равносильное данному неравенству;

4) если обе части неравенства с одной переменной умножить (или разделить) на одно и то же отрицательное число, при этом поменять знак неравенства на противоположный, то получим неравенство, равносильное данному неравенству.

?

1. Какие из неравенств $\frac{x}{7} > 5$; $\frac{7}{x} > 5$; $x - 7 \le 2x$; $x + 7 < 0$; $(x - 7) \cdot (x + 7) < 0$; $x^2 - 7 < 0$ являются линейными неравенствами с одной переменной?
2. Объясните, почему неравенства $x - 7 > 2x$; $x > 2x + 7$; $x - 7 + 7 > 2x + 7$; $3x - 21 > 6x$ равносильны.

А Упражнения

972. Является ли линейным неравенством с одной переменной неравенство:

1) $x \ge -4$; 2) $y < 2{,}5$; 3) $x + 1 \ge y$;

4) $3 + 15 < 20$; 5) $xy \le \frac{1}{3}$; 6) $7x > -2$?

973. Запишите в виде неравенства утверждение:

1) x меньше 10; 2) x больше или равно 4,9;

3) x меньше или равно $-15\frac{2}{13}$; 4) x больше $-7{,}191$.

974. Назовите три значения переменной y, при которых верно неравенство:

1) $y < 25{,}4$; 2) $y > -\frac{5}{17}$; 3) $y \leq -1{,}8$;

4) $y \geq 33$; 5) $y > 0{,}19$; 6) $y < 10{,}1$.

975. Являются ли равносильными неравенства:

1) $x \geq -8$ и $x + 3 \geq -5$; 2) $y \leq 10$ и $y - 1 \leq 9$;

3) $x > 5$ и $5x > 25$; 4) $x < 3$ и $-3x > -9$;

5) $x < 20$ и $\frac{1}{2}x + 3 > 10$; 6) $y \geq -16$ и $-\frac{1}{4}y \leq 4$?

976. Укажите равносильные неравенства:

1) $x < 12$ и $x - 5 < 7$; 2) $y \geq -4$ и $x + 7 \geq -11$;

3) $x - 4 > 9$ и $x > 13$; 4) $13 + x \leq 10$ и $x \geq -3$.

977. Равносильны ли неравенства:

1) $x + 4 > 5$ и $x > 1$; 2) $9 - x \leq 10$ и $-x \leq 1$;

3) $6y > -12$ и $y > -2$; 4) $-7x < 21$ и $x > -3$?

B Упражнения

978. Запишите в виде неравенства утверждение: 1) сумма x и $-18{,}5$ меньше или равна 18,7; 2) разность 20 и $9x$ больше $-41{,}2$; 3) сумма 61 и $-y$ больше или равна $-0{,}01$; 4) разность 13 и $7y$ меньше суммы 2,2 и $-11y$.

979. Укажите какое-нибудь равносильное неравенство неравенству:

1) $7x - 4 \geq 0$; 2) $10 - 3x < 1{,}5$;

3) $4\frac{2}{3}x + 7{,}8 < -2{,}9$; 4) $20x - 3\frac{1}{7} \leq 8\frac{2}{5}$.

980. Докажите, что являются равносильными неравенства:

1) $20x - 11 \geq 19x + 18$ и $13x - 2 \geq 12x + 27$;

2) $35y - 12{,}8 < 1{,}2$ и $5y < 2$.

Упражнения

При каких значениях a равносильны неравенства **(981—982)** :

981. 1) $15 + 5x \le x$ и $4x \le a$;

2) $-9y + 27 > 3$ и $3y < a$;

3) $14z + 40 < 41$ и $7z < a$;

4) $63 - 10t \ge 65$ и $5t \le a$.

982. 1) $\frac{4}{7}+13x \ge 10x + 3\frac{4}{7}$ и $2{,}5x + a \ge 1 - 0{,}5x$;

2) $19\frac{2}{9}y - 40 < 20y - 55$ и $\frac{2}{9}y + 7 < y + a$?

П **(983—984)** :

983. Собственная скорость лодки равна 7 км/ч, а скорость течения реки — 2,5 км/ч. Лодка проплыла по течению реки 2 ч. Найдите длину пути, пройденного лодкой.

984. Определите урожайность основных сельскохозяйственных культур, выращенных в нашей республике в разные годы, используя данные таблицы:

Год	2003	2004	2005	2006	2007	2009
Урожайность картофеля (ц/га)	$11^2 + 2 \cdot 3^2$	$11^2 + 13$	$12^2 + 6$	$12^2 + 10$	$13^2 - 10$	12^2
Урожайность овощей (ц/га)	$13^2 + 2^3$	$14^2 - 10$	14^2	$14^2 + 5$	$15^2 - 14$	$14^2 - 2^3$

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

985. Найдите корень уравнения:

1) $16{,}8x - 41 = 17x + 19$; 2) $31{,}6y + 93 = 32{,}1y - 2$.

§ 36. Решение линейных неравенств с одной переменной

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Алгебраические преобразования. Линейное неравенство. Переменная. Решение неравенства.

Как привести неравенства с помощью алгебраических преобразований к неравенству видов $kx > b$, $kx \geq b$, $kx < b$, $kx \leq b$?

Рассмотрим примеры решения неравенств с одной переменной, которые сводятся к линейным неравенствам.

Пример 1. Решим неравенство $-4x + 17 > 15 + 6x$.

Решение. Используя свойства равносильности неравенств, перенесем члены неравенства, содержащие переменные, в левую часть неравенства, а числа — в правую часть, поменяв знаки этих членов на противоположные знаки. Получим $-4x - 6x > 15 - 17$, или $-10x > -2$. Разделим обе части полученного неравенства на число -10 и поменяем знак неравенства на противоположный. Получим $x < 0{,}2$.

Ответ: $(-\infty; 0{,}2)$.

Кратко решение неравенства $-4x + 17 > 15 + 6x$ будем записывать так:

$-4x - 6x > 15 - 17;$

$-10x > -2;$

$x < 0{,}2.$

Пример 2. Решим неравенство $9(-2x + 4) - 7(x + 3) < 15x - (40x - 7)$.

Убедитесь, что данное в примере 2 неравенство равносильно неравенству: $0 \cdot x < -8$.

Поскольку при любом значении переменной x неравенство $0 \cdot x < -8$ обращается в неверное числовое неравенство $0 < -8$, то неравенство $0 \cdot x < -8$ и равносильное ему неравенство $9(-2x + 4) - 7(x + 3) < 15x - (40x - 7)$ не имеют решений. Говорят, что его решением является пустое множество и записывают: $\varnothing$.

Ответ: $\varnothing$.

Пример 3. Решим неравенство $3x - 43 + 2(24 - 2x) < 7x - 4(2x - 9) - 23$.

Убедитесь, что данное в примере 3 неравенство равносильно неравенству: $0 \cdot x < 8$.

Поскольку при любом значении переменной x неравенство $0 \cdot x < 8$ обращается в верное числовое неравенство $0 < 8$, то неравенство $0 \cdot x < 8$ и равносильное ему неравенство $3x - 43 + 2(24 - 2x) < 7x - 4(2x - 9) - 23$ имеют бесконечно много решений: их решением является любое число, т. е. числовой промежуток: $(-\infty; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; +\infty)$.

?

1. Какие преобразования можно выполнять с неравенствами с одной переменной при их решении?
2. Какие из чисел -4; 0; 6 являются решениями неравенства $-9x > 0$?
3. Какой числовой промежуток является решением неравенства: $-2x > 8$; $-2x > -8$; $-2x < 8$; $2x < -8$?
4. Сколько решений имеет неравенство: $0 \cdot x < -1$; $0 \cdot x < 1$; $0 \cdot x > -1$; $0 \cdot x > 1$?

А Упражнения

Изобразите на координатных прямых решения неравенств **(986—987)**:

986. 1) $y > 0$; 2) $y \leq -3$; 3) $x < 3{,}5$;
4) $x \geq 4\frac{1}{2}$; 5) $z < 10$; 6) $z \geq -13\frac{2}{19}$.

987. 1) $t \geq -8$; 2) $z < 5{,}5$; 3) $k < -9\frac{1}{3}$;
4) $x > 10{,}7$; 5) $y \leq 2\frac{1}{7}$; 6) $z < -11{,}1$.

988. Решением какого неравенства является изображенный на рисунке 79 числовой промежуток:

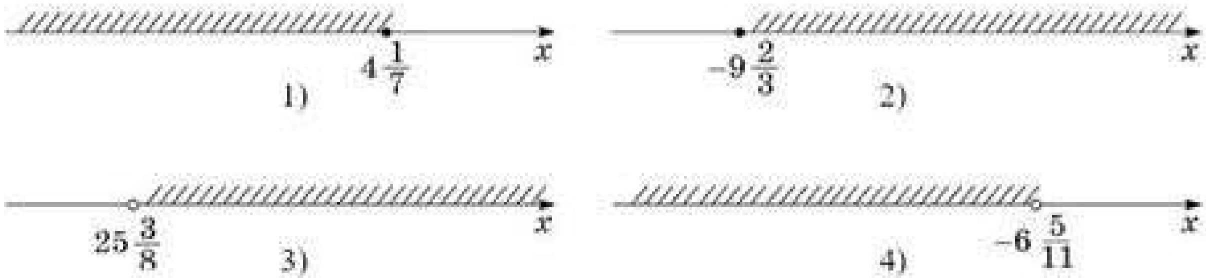


Рис. 79

Решите неравенства (989—991) :

989. 1) $x - 3 < 10$; 2) $7 + x > 2$; 3) $x + 41 \leq 10$;
4) $3x + 1 \geq -14$; 5) $8x - 5 \leq 11$; 6) $1{,}2x + 2 > 0{,}4$.

990. 1) $-y > 5$; 2) $-y \leq -3$; 3) $-y < \frac{1}{7}$;
4) $-y \geq 6{,}1$; 5) $1 - 2y \mid 16$; 6) $29 > y - 27$.

991. 1) $\frac{x}{5} < 21$; 2) $\frac{x}{4} > 10$; 3) $\frac{y}{3} \leq -19$;
4) $8 - \frac{1}{2}y > 8$; 5) $11 + \frac{1}{9}z \mid 5$; 6) $0{,}5 - 10z < 1$.

992. Изобразите на числовой прямой решение неравенства:
1) $20 + 2x > 0$; 2) $35 - 5x < 0$; 3) $81x + 9 \geq 0$;
4) $45 \leq 4x + 1$; 5) $60 \geq 5 - 13x$; 6) $23x + 2 \leq -21$.

Решите неравенства (993—995) :

993. 1) $0{,}7x + 8 > 0{,}8x - 1$; 2) $9{,}5x - 11 \leq 11{,}5x + 3$;
3) $\frac{2}{9}x - 3 < 3\frac{2}{9}x + 4$; 4) $29x + 4\frac{1}{4} \geq 33x + 3\frac{1}{3}$.

994. 1) $4y + 10 \geq 2(1-y) + 24$; 3) $7(6 - 5t) - 5 < 1-41t$;
2) $49 - 3(3-2z) \leq 1 - 4z$; 4) $-0{,}5(8x + 9) - 0{,}9 > 4x-3$.

995. 1) $\frac{3x-4}{2} > \frac{6-2x}{3}$; 2) $\frac{10-x}{6} \geqslant \frac{x+7}{5}$;
3) $\frac{3+2x}{12} \leqslant \frac{3x-2}{15}$; 4) $\frac{y-5}{18} > \frac{6-y}{24}$.

996. Выясните, при каких значениях переменной a принимает положительные значения выражение:
1) $8\frac{2}{7} - 5a$; 2) $9{,}3 + 4a$;
3) $11\frac{3}{11} - 31a$; 4) $11{,}11 + 11a$?

997. Выясните, при каких значениях переменной b принимает отрицательные значения выражение:
1) $19{,}2 + \frac{1}{3}b$; 2) $\frac{4}{7} - 3\frac{1}{2}b$;
3) $0{,}05 - 0{,}2b$; 4) $202 + 50b$?

998. При каких значениях переменной x значение выражения:
1) $421 - 0{,}2x$ больше 420;

2) $\frac{4}{13}x + 8{,}91$ меньше $0{,}09$;

3) $15{,}5x - 10\frac{1}{3}$ меньше или равно $9\frac{2}{3}$;

4) $1000 - 500x$ больше или равно 1001?

999. Найдите наименьшее натуральное число, являющееся решением неравенства:

1) $10 + 7x > 24$;
2) $19 - 6x < -5$;
3) $43x + 2 \leq 45$;
4) $60 - 17x > -19$;
5) $83 + x < 84x$;
6) $-7 - 30x \leq 5x$.

1000. Найдите наибольшее целое число, являющееся решением неравенства:

1) $0{,}5x + 41{,}5 \leq 42$;
2) $90 - \frac{1}{3}x > 91$;
3) $\frac{2}{3}x - 15 < 20$;
4) $18\frac{1}{9} \geq 0{,}2x + 18$;
5) $31 - 4\frac{1}{7}x > 2$;
6) $30{,}08 < -\frac{8}{9}x - 1{,}92$.

B Упражнения

1001. Решите неравенство:

1) $3{,}3x - 0{,}4(4 - 3x) \leq 9{,}3 + 5(0{,}7 - x)$;

2) $9(0{,}5y + 1) - 3{,}1(1 - y) > 5{,}9 + 7{,}2y$;

3) $0{,}6(a - 2) - 0{,}2 \geq 0{,}8(a + 2) + 3{,}5$;

4) $-1{,}4 + 0{,}5(11b - 2) < -5{,}5b + 1{,}6$;

5) $5\frac{2}{3} + \frac{7}{3}(14x - 3) > \frac{4}{9}(18x - 2)$;

6) $\frac{5}{6}(7 + 9y) \leq 14\frac{2}{3} - \frac{7}{8}(5y - 8)$.

1002. Снегозащитные насаждения имеют огромное значение в снегозадержании. Вы узнаете, сколько снега задерживают в своей кроне береза и сосна, если решите неравенство:

1) $1{,}6 \leq \frac{2}{5}x \leq 2$, $x\%$ — столько процентов снега задерживает береза;

2) $-12 \leq 9 - \frac{3}{5}x \leq -3$, $x\%$ — столько процентов снега задерживает сосна.

1003. При каких значениях переменной: 1) значение суммы выражений $10x - 7$ и $7x + 8$ больше 13; 2) значение разности выражений $29y + 31$ и $25y + 5$ больше 4; 3) значение суммы выражений $51 - 17t$ и $39 + 23t$ меньше $4t$; 4) значение разности выражений $67z - 11$ и $19 + 69z$ меньше $6z$?

1004. Найдите все значения переменной y, при которых значение выражения:
1) $27 - 28y$ больше значения выражения $(2{,}5 - 2y) \cdot 6$;
2) $4{,}7 - 0{,}85y$ больше значения выражения $(y - 1) \cdot 3$;
3) $5 \cdot (y + 2)$ меньше значения выражения $6{,}8 - y$.

1005. Решите неравенство:

1) $\dfrac{x-3}{14} - \dfrac{x-7}{35} + \dfrac{2x+3}{5} \geq 0{,}1$;

2) $\dfrac{5-3y}{11} + \dfrac{y-4}{10} - \dfrac{2+3y}{2} < \dfrac{2}{11}$.

1006. При каких значениях переменной b значение выражения $\dfrac{5b+3}{2} - 1$ больше или равно значению выражения $\dfrac{7-5b}{2}$?

1007. При каких значениях переменной b значение выражения $\dfrac{b+4}{2} - 2$ меньше или равно значению выражения $\dfrac{b}{2}$?

1008. Найдите все значения переменной a, при которых: 1) значение суммы дробей $\dfrac{3a-2}{4}$ и $\dfrac{5a+4}{3}$ меньше или равно значению выражения $\dfrac{a-49}{6}$; 2) значение разности дробей $\dfrac{a+1}{4}$ и $\dfrac{a-2}{3}$ больше или равно значению выражения $\dfrac{5a}{2}$.

Упражнения

1009. 1) Значение суммы трех последовательных натуральных чисел больше 74. Найдите наименьшее натуральное число, удовлетворяющее этому условию.
2) Значение суммы трех последовательных целых чисел больше или равно нулю. Найдите наименьшее целое число, удовлетворяющее этому условию.

3) Значение суммы четного числа с последующим четным числом меньше 59. Найдите наибольшее четное число, удовлетворяющее этому условию.
4) Значение суммы нечетного числа с последующими двумя нечетными числами больше 95. Найдите наименьшее нечетное число, удовлетворяющее этому условию.

1010. 1) Бригада по плану должна за один день проложить 50 м дороги. Сколько метров дороги она должна проложить за один день, чтобы перевыполнить план более чем на 10%?
2) Рабочий по плану должен изготовить 45 деталей. Сколько деталей он должен изготовить, чтобы перевыполнить план более чем на 9%?

1011. На какое наименьшее целое число сантиметров нужно увеличить ширину прямоугольника, чтобы его периметр увеличился более чем на 18 см, при этом его длина была равна 7 см?

1012. При каких значениях x верно равенство:

1) $|6 - 3x| = 3x - 6$; 2) $|7x + 1{,}4| = 7x + 1{,}4$;

3) $\left|\frac{3}{4}x - 15\right| = 15 - \frac{3}{4}x$; 4) $\left|12 - \frac{6}{7}x\right| = 12 - \frac{6}{7}x$?

1013. При каких значениях c уравнение:
1) $4x + c = 5c - 2$ имеет отрицательный корень;
2) $6x - 7 = 3 - 5c$ имеет положительный корень?

П **(1014)** :

1014. Выполните действия:

1) $\left(\left(22{,}22 : 110 - \frac{2^6 \cdot 3}{10^3}\right) \cdot 5^4 \cdot 2^3 - 48\frac{7}{9}\right) : 3\frac{2}{3}$;

2) $7^4 : 49 - 576 : \left(3 : \frac{1}{2^3}\right) - 2^5$.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

1015. Найдите пересечение числовых промежутков:

1) $(-3;\ 2{,}5]$ и $[0;\ 4)$; 2) $[0{,}7;\ 5)$ и $[1;\ 6)$;

3) $(-\infty;\ -15]$ и $[-14{,}9;\ 3]$; 4) $[-6;\ 11)$ и $[-3;\ +\infty)$.

§ 37. Решение систем линейных неравенств с одной переменной

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Система линейных неравенств.

Как решить систему линейных неравенств с одной переменной?

В тех случаях, когда требуется найти значения переменной, при которых два или несколько неравенств с одной переменной одновременно верные, рассматривают *системы неравенств*.

Для записи систем неравенств используют знак системы — фигурную скобку. *Например*, $\begin{cases} 4x \leqslant 17, \\ 9x - 32 \geqslant 0, \end{cases}$

Решить систему неравенств означает, что нужно найти все такие значения переменной, при подстановке которых в каждое из неравенств с переменной они обращаются в верные числовые неравенства одновременно. Эти значения переменных называют *решениями системы неравенств*.

> *Решением системы неравенств с одной переменной* называется такое значение переменной, при подстановке которого в каждое неравенство системы оно становится верным числовым неравенством.

Например, число 4 является решением системы неравенств $\begin{cases} 4x \leqslant 17, \\ 9x - 32 \geqslant 0, \end{cases}$ так как если в первое неравенство $4x \le 17$ вместо x подставить число 4, то получим $4 \cdot 4 \le 17$ — верное числовое неравенство, и если во второе неравенство $9x - 32 \ge 0$ вместо x подставить число 4, то получим $9 \cdot 4 - 32 \ge 0$ — верное числовое неравенство.

Число 0 не является решением системы неравенств $\begin{cases} 4x \leqslant 17, \\ 9x - 32 \geqslant 0, \end{cases}$ так как если в первое неравенство $4x \le 17$ вместо x подставить число 0, то получим $4 \cdot 0 \le 17$ — верное числовое неравенство, но если во второе неравенство $9x - 32 \ge 0$ вместо x подставить число 0, то получим $9 \cdot 0 - 32 \ge 0$ — неверное числовое неравенство.

> Решить систему неравенств с одной переменной — это значит найти все решения системы неравенств с одной переменной или убедиться в том, что решений нет.

Для того чтобы решить систему неравенств с одной переменной, надо решить каждое неравенство в отдельности, затем найти их общее решение.

Пример. Решим систему $\begin{cases} 4x \leqslant 17, \\ 9x - 32 \geqslant 0. \end{cases}$

Решение. Решением неравенства $4x \leq 17$ является числовой промежуток $(-\infty; 4{,}25]$, а неравенства $9x - 32 \geq 0$ — $\left[3\frac{5}{9}; +\infty\right)$.

Для нахождения общего решения этих неравенств изобразим решения каждого неравенства на одной и той же числовой прямой: одного — над числовой прямой, другого — под числовой прямой, как показано на рисунке 80.

Рис. 80

Найдем пересечение числовых промежутков $(-\infty; 4{,}25]$ и $\left[3\frac{5}{9}; +\infty\right)$. Получим числовой промежуток $\left[3\frac{5}{9}; 4{,}25\right]$. Значит, решением системы неравенств $\begin{cases} 4x \leqslant 17, \\ 9x - 32 \geqslant 0 \end{cases}$ является числовой отрезок $\left[3\frac{5}{9}; 4{,}25\right]$.

Ответ: $\left[3\frac{5}{9}; 4{,}25\right]$.

?

1. Имеет ли система неравенств с одной переменной решение, если одно из неравенств системы не имеет решений?
2. Что будет решением системы неравенств с одной переменной, если одно из неравенств верно при любом значении переменной?

A Упражнения

1016. Какое из чисел –9; –3; 0; 3; 6; 9; 13 является решением системы неравенств:

1) $\begin{cases} x \geqslant -20, \\ x > -4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x \leqslant 10, \\ x < 8; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x > 0, \\ x \leqslant 5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x \geqslant -9, \\ x < 6? \end{cases}$

1017. Из чисел –4; –0,5; 3; 6; 7; 8,7; 15 выпишите числа, которые являются решениями системы неравенств:

1) $\begin{cases} x > 3, \\ x \leqslant 10; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x \geqslant -1, \\ x < 7; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x < 25, \\ x \geqslant -5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x \leqslant 4, \\ x \geqslant -8. \end{cases}$

1018. Запишите в виде двойного неравенства изображенный на рисунке 81 числовой промежуток:

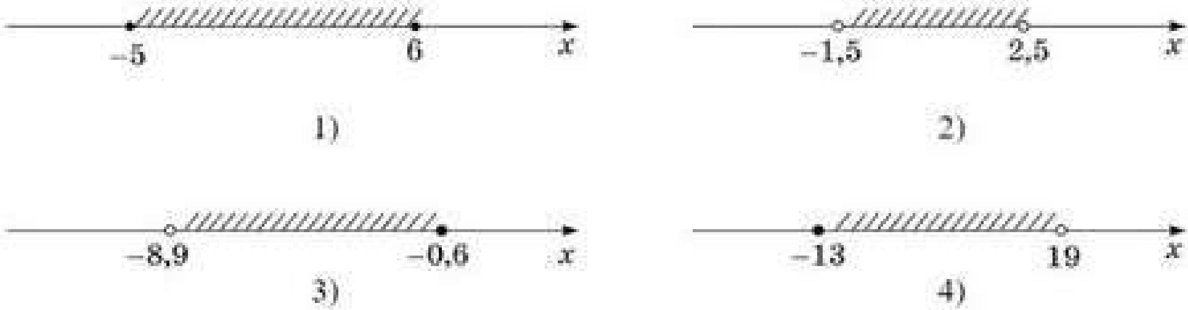


Рис. 81

1019. Приведите пример системы линейных неравенств с одной переменной, для которой решение каждого неравенства изображено на рисунке 82:

Рис. 82

1020. Запишите с помощью обозначений и изобразите на координатной прямой числовой промежуток, который является решением неравенства:

1) $3 < x \leq 12$; 2) $-19 \leq x < 0$;

3) $-27 \leq x \leq -3$; 4) $-9\frac{1}{9} < x < 3{,}5$;

5) $0{,}27 \leq x \leq 4$; 6) $-5{,}6 < x \leq 4\frac{2}{7}$.

1021. Запишите двойное неравенство, решением которого является числовой промежуток:

1) $(-45;\ 1]$; 2) $[-7;\ 7]$; 3) $[-1;\ 28]$;

4) $\left(-\frac{1}{15};\ \frac{2}{17}\right)$; 5) $\left[-0{,}15;\ 4\frac{3}{7}\right)$; 6) $[0;\ 49{,}5]$.

Изобразите на координатных прямых решения неравенств, которые равносильны системам неравенств **(1022—1023)**:

1022. 1) $\begin{cases} x > 1, \\ x \geqslant 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x \geqslant -5, \\ x > 2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x > 0, \\ x > -4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x \geqslant -3, \\ x \geqslant -8. \end{cases}$

1023. 1) $\begin{cases} x < 2{,}5, \\ x < -1{,}7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x \geqslant 7\frac{2}{3}, \\ x > 7; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x \leqslant 8{,}01, \\ x \leqslant 8\frac{1}{3}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x < 10, \\ x < -6. \end{cases}$

1024. Изобразите на координатной прямой решение неравенства, которое равносильно системе неравенств :

1) $\begin{cases} x > -3, \\ x \leqslant 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x < 17, \\ x \geqslant -1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x \geqslant -11, \\ x \leqslant 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x > -4, \\ x < 24. \end{cases}$

1025. Найдите все натуральные числа, являющиеся решениями системы неравенств $\begin{cases} x > 5, \\ x \leqslant 7. \end{cases}$

Решите системы неравенств **(1026—1030)**:

1026. 1) $\begin{cases} x > 5, \\ -x > 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -x \leqslant 2, \\ x < 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} -x \leqslant -7, \\ x \leqslant 10; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x \leqslant -1, \\ -x < 9. \end{cases}$

1027. 1) $\begin{cases} -x > 2\frac{1}{3}, \\ x > -2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -x > 2{,}7, \\ -x < 4; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} -x \geqslant -15\frac{1}{5}, \\ -x \leqslant 15; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} -x > -11, \\ -x > 0{,}9. \end{cases}$

1028. 1) $\begin{cases} 2x + 12 > 0, \\ 3x - 9 \leqslant 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x - 25 < 0, \\ 4x + 16 > 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 1{,}1x + 1{,}1 \leqslant 0, \\ 8x - 16 < 0. \end{cases}$

1029. 1) $\begin{cases} 7x - 21 \leqslant 0, \\ 1 - x > 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 25 - 5x \geqslant 0, \\ 3x - 18 < 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 1{,}2 - 0{,}6x > 0, \\ 9x + 27 \leqslant 0. \end{cases}$

1030. 1) $\begin{cases} 20x + 40 \leqslant 0, \\ \frac{2}{9} - \frac{4}{27}x > 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3\frac{1}{3} - 10x < 0, \\ 1{,}6 - 4{,}8x < 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 10 + 5x > -20, \\ \frac{5}{11} - \frac{20}{33}x \geqslant 0. \end{cases}$

B Упражнения

Решите системы неравенств **(1031—1034)**:

1031. 1) $\begin{cases} 2(x + 5) < 2 - 2x, \\ 3(2 - x) \geqslant 3 - x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3(x + 8) > 9 - 2x, \\ 3(x + 4) \geqslant x + 5. \end{cases}$

1032. 1) $\begin{cases} \frac{x+1}{2} \leqslant \frac{x+0,5}{3}, \\ 1,5x - 1 \leqslant 2x + 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{2x+1}{5} \geqslant \frac{x+0,6}{2}, \\ 1 - 1,5x < 3,5 - x. \end{cases}$

1033. 1) $\begin{cases} 4(x+1) \geqslant 3(x+3) - x, \\ 2(2x-1) \geqslant 7(x+1); \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4(x+1) < 3(x-3) - x, \\ 4(2x-1) \leqslant 3(3x-2). \end{cases}$

1034. 1) $\begin{cases} 3x + (5x - 2) \leqslant 3 - 2x, \\ 4(5x-1) - 21x \geqslant 1 - 3x; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 7 - 11x < 9x - 2(5x + 7), \\ 6 - x > 2(1 - 4x) - 3(1 - 3x). \end{cases}$

Упражнения

1035. Найдите все целые числа, являющиеся решениями системы неравенств:

1) $\begin{cases} x - 1 > \frac{2x-0,5}{3}, \\ \frac{7x+12}{8} \geqslant x + 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{9x-13}{8} > x - 2, \\ 1 + x > \frac{10x+6}{9}; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x - 1 \geqslant \frac{12x-15}{13}, \\ \frac{3x+5}{4} > x + 1. \end{cases}$

1036. Найдите все натуральные числа, являющиеся решениями системы неравенств:

1) $\begin{cases} \frac{7,4x + 23}{21} \leqslant 1 + 0,4x, \\ 3x - 5 \leqslant \frac{20x - 31}{7}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 1 - 2x \leqslant \frac{28 - 53x}{27}, \\ 0,1x + 3 < \frac{13 - 0,7x}{3}. \end{cases}$

1037. Если к $\frac{3}{10}$ от целого числа прибавить 0,25, то получится число, которое меньше 5, а если из $\frac{7}{9}$ от этого же числа отнять $\frac{1}{3}$, то получится число, которое больше 11. Найдите это целое число .

1038. Решив систему неравенств, вы узнаете годы жизни великих ученых и музыкантов, проживавших в разные годы на территории нашей страны :


Аль-Фараби


М. Х. Дулати


Курмангазы

1) $\begin{cases} 0{,}01x - 0{,}7 \geqslant 8, \\ 0{,}1x + 5 \leqslant 100, \end{cases}$ x — годы жизни великого ученого аль-Фараби. Он знал около 70 языков и был автором более 160 научных трудов;

2) $\begin{cases} x + 1 \geqslant 1500, \\ x - 51 \leqslant 1500, \end{cases}$ x — годы жизни великого ученого Хайдара Дулати — историка из Средней Азии;

3) $\begin{cases} x + 207 \geqslant 45^2, \\ x - 664 \leqslant 35^2, \end{cases}$ x — годы жизни классика казахской музыки Курмангазы Сагырбайулы. Его наследие — бесценное духовное богатство народа;


Ы. Алтынсарин

4) $\begin{cases} x \leqslant 2^6 \cdot 5^2 + 289, \\ x \geqslant 10^3 + 3^2 \cdot 2^2 \cdot 5^2 - 2 \cdot 5^3 + 191, \end{cases}$

x — кды жизни педагога-просветителя Ыбырая Алтынсарина;


Е. Г. Брусиловский

5) $\begin{cases} \frac{1}{3}x \geqslant 635, \\ 0{,}1x + 1{,}9 \leqslant 2^3 \cdot 5^2, \end{cases}$ x — годы жизни великого композитора Евгения Григорьевича Брусиловского, автора первых казахских опер “Кыз Жибек”, “Дударай”, “Ер Таргын”.

1039. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} 4x + 7,8 > 4,5x - 4,2, \\ 18 + 1,1x \leqslant 4,1x + 13,5, \\ 5,5 - 3,4x < 40,5 - 8,4x; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 17,3 - 29x \leqslant -35x - 6,7, \\ 1,5x - 13,1 < \frac{1}{2}x + 18,1, \\ 6\frac{1}{3}x - 27,8 \leqslant 21,2 - \frac{2}{3}x. \end{cases}$

П **(1040—1041)** :

1040. Выполните действия: $\dfrac{\left(\left|-\frac{24}{37}\right| : \left|-\frac{3}{74}\right| - \frac{2^2 \cdot 3^2}{10}\right) : \left|-1\frac{1}{30}\right| - |-11,9|}{\left(\frac{2^5 \cdot 13}{10^2} : \left|-\frac{2^2}{5^2}\right| + |-13,5|\right) \cdot 4,7 - |-38,8|}.$

1041. 1. На сколько процентов повысилась урожайность картофеля в нашей республике, если в 1998 г. она составляла 77 ц с 1 га, в 2008 г. — 143,7 ц с 1 га? (Ответ округлите до целых.)

Заповедник "Барсакельмес"

2. Вы узнаете о заповеднике "Барсакельмес", который находится на северо-западе Аральского моря, решив уравнение:

1) $126(2,5 - x) - 173(x - 2) = 81x - 344 - 237(x + 3)$, x — столько видов млекопитающих в заповеднике "Барсакельмес";

2) $3,48(y - 7,5) - 1,78(y + 50) = 52,9(25 - y) - 2(15 + 11,8y)$, y — столько видов птиц в заповеднике "Барсакельмес".

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

1042. Найдите значение выражения:

1) $|-30| \cdot 5 + |-2,5| : |-0,051|$; 2) $-6,6 : |-20| - |-8,4| \cdot (-5)$.

§ 38. Линейное неравенство, содержащее переменную под знаком модуля

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Линейное неравенство. Двойное неравенство. Переменная. Решение неравенства. Равносильные неравенства. Модуль. Система неравенств.

Как изобразить множество точек на координатной прямой, заданное неравенством вида $|x| \le a$?

Работа с рисунками!

$|3|$ — модуль числа три (рис. 83); $|-3|$ — модуль числа минус три (рис. 84).

Рис. 83

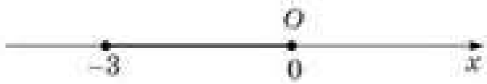


Рис. 84

Вы знаете, что модуль числа показывает расстояние от начала координат до точки с координатой, которая равна этому числу. Поэтому $|x|$ показывает расстояние от начала координат до точки с координатой x. Рассмотрим решение неравенства $|x| \le 7$.

Поскольку $|x| \le 7$, то расстояние от начала координат до точки с координатой x меньше или равно 7. Это означает, что все числа, которые являются решениями неравенства $|x| \le 7$, будут принадлежать числовому отрезку $[-7; 7]$ (рис. 85).

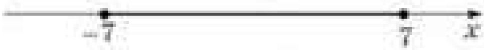


Рис. 85

Вы знаете, что числовой отрезок $[-7; 7]$ является решением двойного неравенства $-7 \le x \le 7$. Поскольку множества решений неравенств $|x| \le 7$ и $-7 \le x \le 7$ совпадают, то они равносильны.

Неравенство $|x| \le b$, где $b > 0$, равносильно неравенству $-b \le x \le b$; неравенство $|x| < b$, где $b > 0$, равносильно неравенству $-b < x < b$.

Этот же вывод о равносильности неравенств $|x| \le 7$ и $-7 \le x \le 7$ можно получить и другим способом. Заменим неравенство $|x| \le 7$ неравенством, в котором неизвестное не находится под знаком модуля.

Подумайте!

Чему равен модуль числа x, если: 1) $x = 3$; 7; 8; 0 — положительное число или 0; 2) $x = -2$; -4; -10 — отрицательное число?

Вы знаете, что модулем положительного числа и числа нуль является само это число, модулем отрицательного числа — противоположное ему положительное число. Поэтому для замены неравенства $|x| \leq 7$, которое содержит неизвестное под знаком модуля, неравенством без знака модуля, рассмотрим два случая:

1) если x — положительное число или нуль, т. е. если $x \geq 0$, то неравенство $|x| \leq 7$ равносильно неравенству $0 \leq x \leq 7$, так как модуль положительного числа x или нуля равен самому числу x; тогда решением неравенства $|x| \leq 7$ будет числовой промежуток $[0; 7]$;

2) если x — отрицательное число, т. е. если $x < 0$, то неравенство $|x| \leq 7$ равносильно неравенству $0 < -x \leq 7$, так как модуль отрицательного числа x равен противоположному числу $-x$. Умножим все части неравенства $0 < -x \leq 7$ на -1 и поменяем знаки двойного неравенства на противоположные знаки. Получим: $0 > x \geq -7$, или $-7 \leq x < 0$. Тогда решением неравенства $|x| \leq 7$ при $x < 0$ будет числовой промежуток $[-7; 0)$.

Поскольку в первом случае решением является числовой промежуток $[0; 7]$, во втором — $[-7; 0)$, то решением неравенства $|x| \leq 7$ является числовой промежуток $[-7; 7]$. Значит, неравенства $|x| \leq 7$ и $-7 \leq x \leq 7$ равносильны.

Убедитесь, что система неравенств $\begin{cases} x \leqslant 7, \\ x \geqslant -7 \end{cases}$ равносильна двойному неравенству $-7 \leq x \leq 7$, т. е. они имеют одинаковые решения.

Неравенство $|x| \leq b$, где $b > 0$, равносильно системе неравенств $\begin{cases} x \leqslant b, \\ x \geqslant -b. \end{cases}$

Неравенство $|x| < b$, где $b > 0$, равносильно системе неравенств $\begin{cases} x < b, \\ x > -b. \end{cases}$

Решим неравенство $|x| \geq 4$. Вы знаете, что модуль числа показывает расстояние от начала координат до точки с координатой, которая равна этому числу. Поэтому $|x|$ показывает расстояние от начала координат до точки с координатой x.

Поскольку $|x| \geq 4$, то расстояние от начала координат до точки с координатой x больше или равно 4. Это означает, что все числа, которые являются решениями неравенства $|x| \geq 4$, будут принадлежать числовому промежутку: $(-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$ (рис. 86).

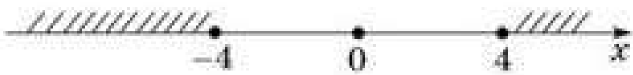


Рис. 86

Таким образом, решение неравенства $|x| \geq 4$ равносильно объединению решений неравенств $x \leq -4$ и $x \geq 4$.

Убедитесь другим способом, что решение неравенства $|x| \geq 4$ равносильно объединению решений неравенств. Решение неравенства $|x| \geq a$, где $a > 0$, равно объединению решений неравенств $x \leq -a$ и $x \geq a$. Решение неравенства $|x| > a$, где $a > 0$, равно объединению решений неравенств $x < -a$ и $x > a$.

Подумайте!

Почему неравенство:

1) $|x| < -2$ не имеет решений; 2) $|x| \leq -2$ не имеет решений; 3) $|x| \leq 0$ имеет единственное решение, равное 0; 4) $|x| \geq -2$ имеет бесконечно много решений и решением является числовой промежуток $(-\infty; +\infty)$; 5) $|x| > -2$ имеет бесконечно много решений и решением является числовой промежуток $(-\infty; +\infty)$?

Неравенство:

1) $|x| < a$, где $a < 0$, не имеет решений;
2) $|x| \leq a$, где $a < 0$, не имеет решений;
3) $|x| \leq 0$ имеет единственное решение, равное 0;
4) $|x| \geq a$, где $a < 0$, имеет бесконечно много решений и решением является числовой промежуток $(-\infty; +\infty)$;
5) $|x| > a$, где $a < 0$, имеет бесконечно много решений и решением является числовой промежуток $(-\infty; +\infty)$.

1. Является ли число -4; -9 решением неравенства $|x| \leq 8$?
2. Является ли число -4; -9 решением неравенства $|x| \geq 8$?
3. Какому двойному неравенству равносильно неравенство $|x| \leq 8$?
4. Какой системе неравенств равносильно двойное неравенство $-8 < x \leq 8$?

Упражнения

1043. Какие из чисел -20; -9; -6; 0; 4; 8; 15 являются решениями неравенства: 1) $|x| < 7$; 2) $|x| \leq 11$; 3) $|x| > 1$; 4) $|x| \geq 5$?

1044. Запишите в виде неравенства с модулем изображенный на рисунке 87 числовой промежуток:

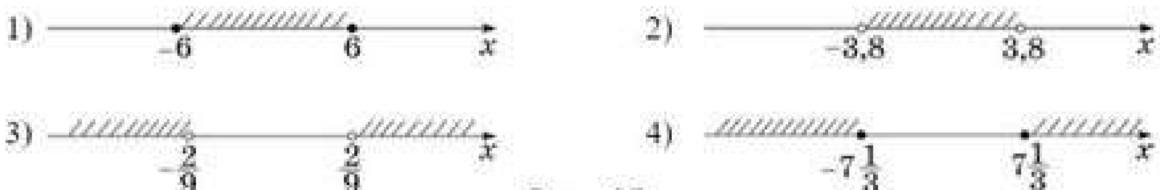


Рис. 87

Изобразите на координатных прямых решения неравенств **(1045—1047):**

1045. 1) $|x| \le 5,6$; 2) $|x| < 17$; 3) $|x| > 4\frac{3}{16}$; 4) $|x| \ge 9$.

1046. 1) $|x| > 10$; 2) $|x| \le 8,14$; 3) $|x| < 3\frac{5}{6}$; 4) $|x| \ge 20$.

1047. 1) $|x| \le 10$; 2) $|x| > 5$; 3) $|x| < 8,7$; 4) $|x| \ge 6,2$.

1048. Запишите в виде двойного неравенства неравенство с модулем:
1) $|x| < 72$; 2) $|x| \le 10,3$; 3) $|x| \le \frac{4}{13}$; 4) $|x| < 3$;
5) $|x| < 16\frac{1}{9}$; 6) $|x| < 12$; 7) $|x| < 0,8$; 8) $|x| \le \frac{2}{7}$.

1049. Запишите в виде неравенства с модулем двойное неравенство:
1) $-14 \le x \le 14$; 2) $-\frac{3}{17} < x < \frac{3}{17}$;
3) $-20,04 < x < 20,4$; 4) $-111 \le x \le 111$.

1050. Запишите в виде неравенства с модулем неравенства:
1) $x > 15$ и $x < -15$; 2) $x < -2,2$ и $x > 2,2$;
3) $x \ge 18\frac{1}{3}$ и $x \le -18\frac{1}{3}$; 4) $x \le -\frac{5}{9}$ и $x \ge \frac{5}{9}$.

1051. Имеет ли решение неравенство с модулем:
1) $|x| \ge 100$; 2) $|x| < -1$; 3) $|x| \le 0$;
4) $|x| > -30,7$; 5) $|x| \le -2$; 6) $|x| \ge -6$?

1052. Запишите в виде двойного неравенства неравенство с модулем:
1) $|x + 3| < 4$; 2) $|x - 1| \le 2$; 3) $|5 + x| < 8$;
4) $|6 - x| \le \frac{2}{3}$; 5) $|4 - 3x| < 4,7$; 6) $|8\frac{1}{7} + 5x| < 1$.

1053. Запишите в виде неравенства с модулем двойное неравенство:
1) $-7 \le x + 1,3 \le 7$; 2) $-9 \le 3,5 - x \le 9$;
3) $-19\frac{2}{7} < 6 - 5x < 19\frac{2}{7}$; 4) $-24,7 < 10\frac{1}{5} - 2,1x < 24,7$.

1054. Запишите в виде неравенства с модулем неравенства:
1) $x + 8 > 10$ и $x + 8 < -10$;
2) $20\frac{4}{7} - 3x < -1$ и $20\frac{4}{7} - 3x > 1$.

B Упражнения

1055. Являются ли равносильными неравенства:
1) $-8 \le x \le 8$ и $-6 \le x + 2 \le 10$;
2) $-4,7 < x < 4,7$ и $-9,7 < x - 5 < -0,3$?

1056. Можно ли из первого неравенства получить второе неравенство:
1) $|x| \le 4$ и $0 \le x + 4 \le 8$; 2) $|x| < 10$ и $-15 < x - 5 < 5$;
3) $|x| \le 6$ и $-18 \le 3x \le 18$; 4) $|x| < 14$ и $-2 < \frac{1}{7}x < 2$?

1057. Верно ли, что если:
1) $|x| < 20$, то $-10 < x + 10 < 30$;
2) $|x| \le 5$, то $-50 \le -10x \le 50$;
3) $|x| < 1{,}2$, то $-4 < 5x - 1 < 7$;
4) $|x| \le \frac{3}{11}$, то $\frac{5}{11} < \frac{8}{11} - x < 1$?

Упражнения

1058. Запишите в виде двойного неравенства изображенные на рисунке 88 числовые промежутки:

Рис. 88

1059. Является ли число -8 решением системы линейных неравенств с одной переменной:

1) $\begin{cases} x + 1 > -13, \\ x - 2^3 \leqslant -13; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x + 3^2 \geqslant 2x, \\ 3x + 2^3 < 2x? \end{cases}$

1060. Ширина прямоугольника 5,5 см, длина на 3^3 мм больше ширины. Найдите ширину второго прямоугольника, если его длина 10 см, а площадь равна площади первого прямоугольника.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

1061. Заполните следующую таблицу:

Числовые промежутки	Объединение числовых промежутков	Пересечение числовых промежутков
$(2;\ 5)$ и $(-3;\ 4)$		
$[-2;\ 5]$ и $(3;\ 6]$		
$[-7;\ 10)$ и $[4;\ 9)$		

§ 39. Решение линейных неравенств, содержащих переменную под знаком модуля

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Линейное неравенство. Двойное неравенство. Переменная. Решение неравенств. Равносильные неравенства. Модуль. Система неравенств.

Как решить систему линейныхнеравенств, содержащих переменную под знаком модуля?

Рассмотрим более сложные неравенства, в которых переменная находится под знаком модуля.

Пример 1. Решим неравенство $|7-x| \leq 8$.

Решение . Заменим неравенство $|7-x| \leq 8$ системой неравенств : $\begin{cases} 7-x \leqslant 8, \\ 7-x \geqslant -8 \end{cases}$ и решим ее. Получим: $\begin{cases} -x \leqslant 8-7, \\ -x \geqslant -8-7 \end{cases}$ или $\begin{cases} x \geqslant -1, \\ x \leqslant 15. \end{cases}$

С помощью координатной прямой (рис. 89) найдем решение полученной системы $[-1;\ 15]$.

Неравенство $|7-x| \leq 8$ можно решить и другим способом, заменив его двойным неравенством $-8 \leq 7-x \leq 8$ и применив правила равносильности неравенств: вычесть из каждой части неравенства число 7. Получим: $-15 \leq -x \leq 1$. Затем разделить каждую часть неравенства на -1, поменяв знаки неравенств на противоположные знаки. Получим: $15 \geq x \geq -1$, или $-1 \leq x \leq 15$. Решением этого неравенства является числовой промежуток $[-1;\ 15]$.

Ответ: $[-1;\ 15]$.

Рис. 89

Пример 2. Решим неравенство $|3x-4| > 9$.

Решение . Поскольку решение неравенства $|3x-4| > 9$ равно объединению решений неравенств $3x-4 > 9$ и $3x-4 < -9$, то решим каждое из них:

$$3x-4 > 9,\qquad 3x-4 < -9,$$
$$3x > 9+4,\qquad 3x < -9+4,$$
$$3x > 13,\qquad 3x < -5,$$
$$x > 4\frac{1}{3},\qquad x < -1\frac{2}{3}.$$

Решением неравенства $|3x-4|>9$ является $(-\infty; -1\frac{2}{3}) \cup (4\frac{1}{3}; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -1\frac{2}{3}) \cup (4\frac{1}{3} +\infty)$.

1. Какому двойному неравенству равносильно неравенство: $|x|<1$; $|x|\le 2$?
2. Можно ли заменить двойным неравенством неравенство $|x|>1$?
3. Решением какого неравенства $|x|>-5$; $|x|>5$ является любое число?
4. Какое из неравенств $|x|<-1$; $|x|<1$ не имеет решений?

Упражнения

1062. Найдите все целые значения переменной z, при которых верно неравенство:

1) $|z|\le 3$; 2) $|z|<4$; 3) $|z|\le 1{,}9$;

4) $|z|<2{,}7$; 5) $|z|\le 3\frac{1}{7}$; 6) $|z|<3$.

Решите неравенства **(1063—1066)**:

1063. 1) $|x+2|\le 1$; 2) $|x-3|<2$; 3) $|x+1|\ge 3$;

4) $|x-0{,}3|<4$; 5) $|1{,}7+x|>5$; 6) $|x+4{,}8|\le 6$.

1064. 1) $\left|5\frac{1}{3}+x\right|\ge 7$; 2) $\left|x-6\frac{2}{9}\right|<8$; 3) $\left|x+7\frac{3}{14}\right|>9$;

4) $|3-x|\le 2$; 5) $|10-x|>11$; 6) $|15-x|<17$.

1065. 1) $|9{,}1-x|\ge 9$; 2) $\left|20\frac{1}{6}-x\right|\le 22$; 3) $|40{,}5-x|>50$;

4) $\left|13\frac{1}{3}-x\right|\le 10$; 5) $|25-x|\ge 7\frac{3}{4}$; 6) $|19-x|<3{,}5$.

1066. 1) $|17+x|<5$; 2) $|29-x|\le 13$; 3) $|x-2{,}5|\ge 3{,}5$;

4) $|2{,}6-x|>1{,}1$; 5) $|x+8{,}8|<2{,}2$; 6) $|7{,}1-x|>8{,}2$.

1067. Изобразите на координатной прямой решение неравенства:

1) $|x+3|<7$; 2) $|5-x|\le 9$; 3) $|11+x|\ge 1$;

4) $|1{,}5-x|>8$; 5) $|x+9{,}3|\le 10{,}3$; 6) $|12{,}1-x|\ge 1{,}1$.

1068. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} |x| \leqslant 6, \\ x > 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x > -4, \\ |x| \leqslant 7; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x \leqslant 2, \\ |x| > 1,5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x \leqslant -3, \\ |x| > 1. \end{cases}$

Решите неравенства **(1069—1071):**

1069. 1) $|1 + 2x| < 9$; 2) $|3 + 2x| \leq 5$; 3) $|1 - 2x| \geq 7$.

1070. 1) $|3x + 5| \geq 20$; 2) $|7 - 4x| \leq 11$; 3) $|4 + 3x| \leq 5$.

1071. 1) $|1 - 2x| < 4$; 2) $\left|0,8 - \frac{1}{3}x\right| > 0,2$; 3) $|2,5x + 1| < 1,5$.

В Упражнения

1072. Запишите в виде неравенства с модулем изображенный на рисунке 90 числовой промежуток:

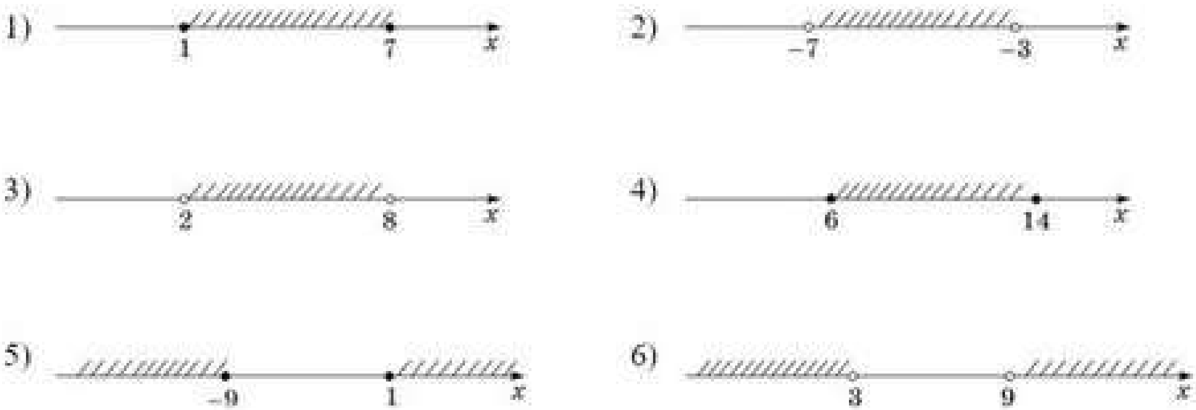


Рис. 90

1073. Найдите все натуральные значения переменной x, при которых верно неравенство:

1) $|3x - 4| \leq 1$; 2) $|4 - 2x| < 3$; 3) $|-0,8 + 5x| \leq 13,2$.

1074. Найдите наибольшее и наименьшее целые решения неравенства:

1) $|6 + 7x| < 8$; 2) $|5 + 9x| \leq 20$; 3) $|-2x + 11| < 19$.

1075. Укажите отрицательное значение переменной x, при котором верно неравенство:

1) $|x - 15| \leq 15 - x$; 2) $|7 + x| \leq x + 19$;

3) $|8 - x| \geq x - 14$; 4) $|x + 10| < x + 10$.

1076. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} 3x - 15 > 0, \\ |x| \leqslant 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 8 - x > 8, \\ |x| > 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} |x| < 0{,}5, \\ 27 - 5x < 70; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} |x| \leqslant 1{,}7, \\ 93{,}1 - 11x > 28{,}1; \end{cases}$

5) $\begin{cases} |x| \geqslant \frac{1}{15}, \\ \frac{1}{3} - \frac{2}{3}x < 9; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \frac{2}{7} + \frac{1}{7}x > -4, \\ |x| > 6{,}1. \end{cases}$

1077. Найдите такие натуральные числа, при которых одновременно верны неравенства:

1) $|x| \leq 4$ и $|x - 5| < 8$; 2) $|9 - x| \leq 12$ и $|x| < 5$;

3) $|x + 7| > 11$ и $|x| \leq 7$; 4) $|x| \geq 1$ и $|x - 3| < 3$.

Упражнения

1078. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} 147 - 3x \geqslant 51, \\ |x| \geqslant 11, \\ 11 + 0{,}5x > 0{,}5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} |x| < 1{,}5, \\ 60x + 8 < 9x + 9, \\ |x| \leqslant 9{,}7. \end{cases}$

1079. Найдите значение суммы всех целых чисел, которые являются решениями системы неравенств:

1) $\begin{cases} |x| < 4, \\ |x| \geqslant 1, \\ x > -3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} |x| \leqslant 10, \\ x > -7, \\ x \leqslant 2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} |x| > 3, \\ x \leqslant 4, \\ |x| \leqslant 5. \end{cases}$

1080. 1. Найдите наименьшее целое число, которое является решением системы неравенств:

1) $\begin{cases} 7x - 21 > 9x - 25, \\ |x| \leqslant 3, \\ -5 < x - 2 < 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} |x| < 10, \\ |x| \geqslant 2, \\ 23 - x \leqslant 2x + 53. \end{cases}$

2. Найдите наибольшее целое число, которое является решением системы неравенств:

1) $\begin{cases} x - 16{,}5 \leqslant 2x - 9{,}5, \\ |x| < 8, \\ -11 \leqslant 3 - x \leqslant 7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} |x| \geqslant 6, \\ |x| < 9, \\ 33 + 2x \geqslant 3x + 40. \end{cases}$

П **(1081—1082)** :

1081. Катер проплыл против течения реки 3 ч со скоростью 42 км/ч. За сколько часов он проплывет 144 км по течению реки, если скорость течения реки равна 3 км/ч?

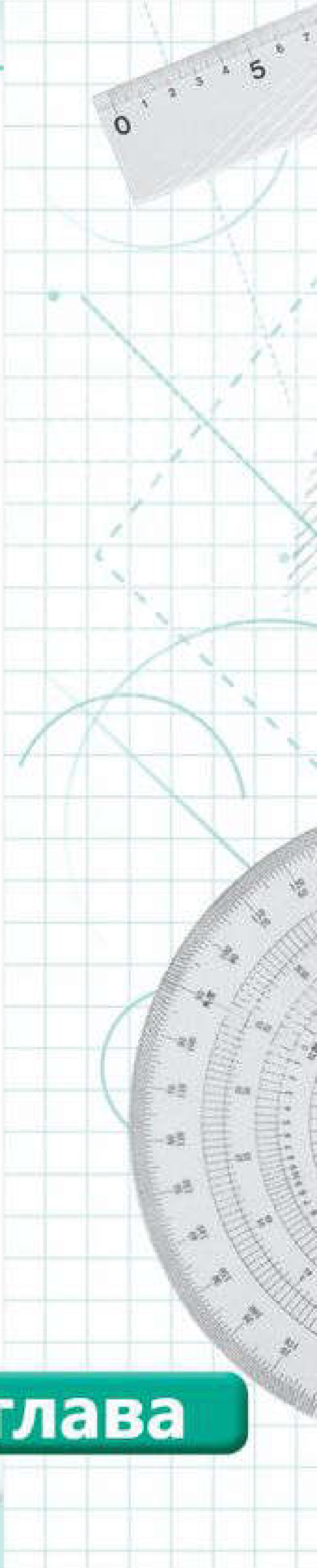
1082. 1) Решите уравнение $54 - 10x + 28{,}4 + 4{,}5x = -1{,}5x + 10{,}4$ и вы узнаете, сколько видов птиц, занесенных в Красную книгу, в заповеднике “Барсакельмес”;

2) найдите значение выражения $((-23{,}8) \cdot 9{,}4 - 501{,}96 : (-56{,}4)) \cdot 200 - (-84724)$ и вы узнаете, чему равна скорость (км/ч) космического корабля при взлете с Земли.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

1083. 1) Начертите отрезок длиной 3 см. Отметьте две точки на отрезке.
2) Постройте тупой угол. Разделите его на две части так, чтобы один угол был прямым.

КООРДИНАТНАЯ ПЛОСКОСТЬ



6 глава

6 Координатная плоскость

§ 40. Плоскость. Перпендикулярные прямые и отрезки

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Плоскость. Перпендикулярные прямые. Пересекающиеся прямые. Перпендикулярные отрезки.

Какие прямые называются *пересекающимися*, какие — *перпендикулярными*?

Поверхности доски, школьной парты дают представление о такой геометрической фигуре, как *плоскость* (рис. 91). Названные предметы ограничены. Плоскость неограничена, т. е. она бесконечна.

Рис. 91

Изобразить всю плоскость невозможно. Ее изображением можно считать поверхность листа бумаги, школьной доски и т. п., на которой отмечаем точки, рисуем линии, строим геометрические фигуры.

Рис. 92

Если продолжить изображение отрезка AB в обе стороны, то получим прямую AB (рис. 92). Прямая неограничена, т. е. бесконечна.

Сравните изображение отрезка и прямой (рис. 93).

Рис. 93

Прямую обозначают двумя заглавными латинскими буквами или одной строчной буквой (рис. 94).

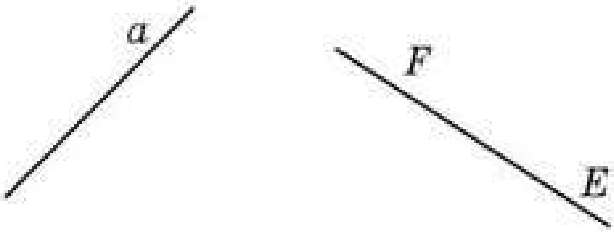


Рис. 94

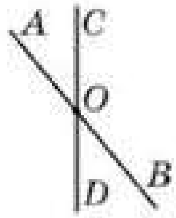


Рис. 95

Например, на рисунке 94 изображены прямая FE и прямая a. Прямые AB и CD, изображенные на рисунке 95, пересекаются в точке O.

Какие прямые, изображенные на рисунках 96 и 97 пересекаются, какие — не пересекаются?

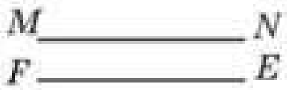


Рис. 96

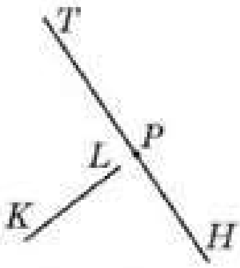


Рис. 97

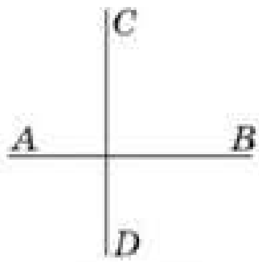


Рис. 98

Две прямые на плоскости могут либо пересекаться, либо не пересекаться, либо совпадать.

Две прямые, которые имеют только одну общую точку, называются *пересекающимися прямыми*.

Прямые AB и CD, изображенные на рисунке 98, образуют прямые углы.

Две прямые, образующие при пересечении прямые углы, называются *перпендикулярными прямыми*.

Значит, прямые AB и CD — перпендикулярные прямые. Пишут $AB \perp CD$.

Если $AB \perp CD$, то $CD \perp AB$.

Говорите правильно

Чтение записи $AB \perp CD$:
— AB и CD — перпендикулярные прямые;
— прямая AB перпендикулярна прямой CD.

Примеры изображения прямого угла показаны на рисунках 99—101.

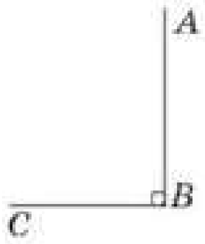


Рис. 99

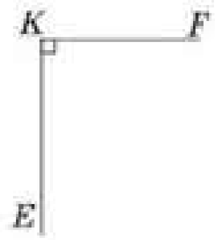


Рис. 100

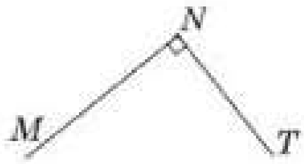


Рис. 101

Для построения перпендикулярных прямых можно использовать “угольник” (рис. 102—104).

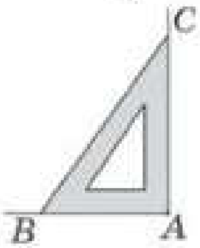


Рис. 102

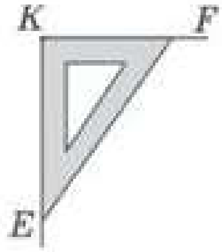


Рис. 103

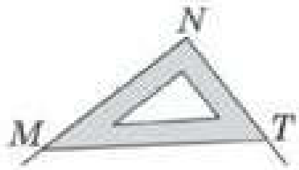


Рис. 104

Вы знаете, что прямой угол содержит 90°. Для построения прямого угла можно использовать также “транспортир” (рис. 105).

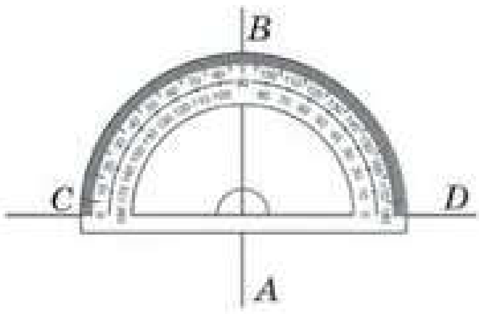


Рис. 105

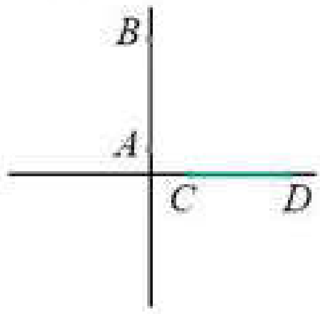


Рис. 106

Отрезки AB и CD лежат на перпендикулярных прямых (рис. 106). Отрезки AB и CD называют *перпендикулярными отрезками*.

Отрезки, лежащие на перпендикулярных прямых, называются *перпендикулярными отрезками*.

?

1. Какие углы образуются при пересечении перпендикулярных прямых?
2. Какими инструментами можно воспользоваться, чтобы построить прямые углы?
3. Верно ли, что всегда пересекаются: 1) перпендикулярные прямые; 2) перпендикулярные отрезки?

A Упражнения

1084. Начертите прямую a и отметьте точку B вне этой прямой. С помощью угольника проведите прямую b, проходящую через точку B так, чтобы $a \perp b$. Сколько таких прямых можно провести через точку B?

1085. Начертите прямую m и отметьте точку A вне этой прямой.

1086. Начертите две пересекающиеся прямые a и b. Вне этих прямых отметьте точку M.

1087. Начертите прямую a. Проведите прямую b, которая пересекает прямую a и прямую c, которая не пересекает прямую a.

1088. Начертите прямой угол. Отметьте на сторонах угла по одной точке. Проведите через них прямые, перпендикулярные сторонам угла. Отметьте точку пересечения этих прямых. Какой четырехугольник получился?

1089. Начертите два перпендикулярных отрезка AB и CD так, чтобы они: 1) не пересекались; 2) пересекались.

B Упражнения

1090. Какие из отрезков, изображенных на рисунке 107, перпендикулярны?

1091. На рисунке 108 прямая a перпендикулярна прямой b и $\angle AOB = 100°$, $\angle COD = 48°$, $\angle BOC = 34°$. Сколько градусов содержат $\angle AOD$ и $\angle DOB$?

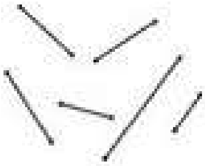


Рис. 107

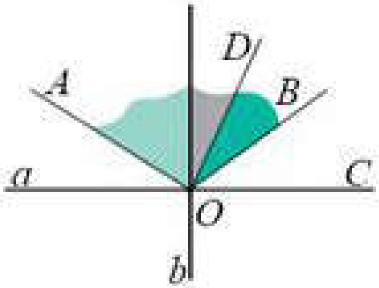


Рис. 108

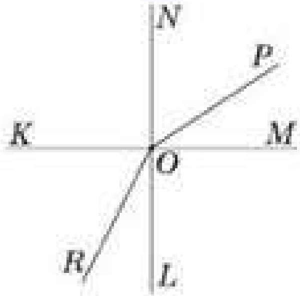


Рис. 109

Упражнения

1092. На рисунке 109 прямая KM перпендикулярна прямой NL и $\angle POM + \angle LOR = 35°$, $\angle KOP = 160°$. Сколько градусов содержат $\angle POM$ и $\angle LOR$?

П **(1093—1094)** :

1093. Вы узнаете, какие меры приняты в нашей стране за последние годы для охраны окружающей среды, если:

1) найдете значение выражения:

$-0,4 + \frac{1}{20}(718,235 - (73,28 + 16,955))$ — на столько процентов уменьшилась площадь земель, используемых в сельскохозяйственных целях;

2) решите систему неравенств $\begin{cases} 2 - x \leqslant -3, \\ 3x + 1\frac{1}{2} \leqslant 19,5, \end{cases}$ x показывает, во сколько раз уменьшилось использование химикатов.

1094. На складе в 3 раза больше сахара, чем в магазине. Если со склада вывезти 850 т сахара, в магазине будет продано 50 т сахара, то и на складе, и в магазине сахара останется поровну. Сколько тонн сахара на складе и сколько в магазине?

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

1095. $\angle B = 81°$, он составляет 90% от $\angle C$, а $\angle A$ — 10% от $\angle C$. Сколько градусов содержат $\angle A$ и $\angle C$?

§ 41. Параллельные прямые и отрезки

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Плоскость. Параллельные прямые. Параллельные отрезки.

Какие прямые и отрезки называются *параллельными*?

Вы знаете, что прямые, которые лежат в одной плоскости и не пересекаются, имеют особое название. Их называют *параллельными прямыми*. *Например*, на рисунке 110 прямые a и b параллельны.

Рис. 110

Две непересекающиеся прямые, лежащие в одной и той же плоскости, называются *параллельными прямыми*.

Если прямые a и b параллельны (рис. 110), то пишут: $a \parallel b$.

Если $a \parallel b$, то $b \parallel a$.

Говорите правильно

Чтение записи $a \parallel b$:
— прямые a и b параллельны;
— прямая a параллельна прямой b.

Отрезки AB и CD лежат на параллельных прямых (рис. 111).

Отрезки AB и CD называют *параллельными отрезками*.

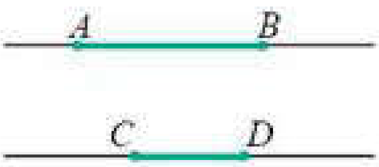


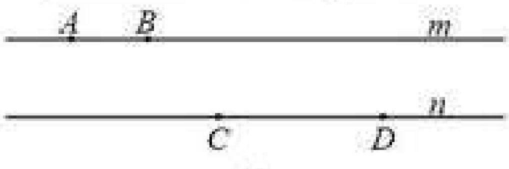
Рис. 111

Отрезки, лежащие на параллельных прямых, называются *параллельными отрезками*.

1. Поверхность каких из перечисленных предметов: мяч, дверь, глобус, стакан, книга — имеет форму плоскости?
2. Почему параллельные отрезки не пересекаются?

A Упражнения

1096. На рисунке 112.1 прямая m параллельна прямой n. Укажите параллельные отрезки.



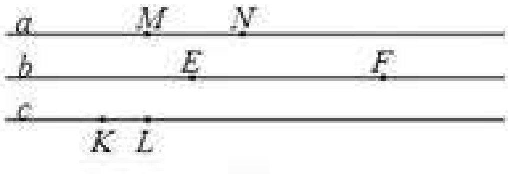


Рис. 112

1097. На рисунке 112.2 прямые $a \parallel b \parallel c$. Найдите параллельные отрезки.

1098. Найдите все пары параллельных прямых, изображенных на рисунке 113.

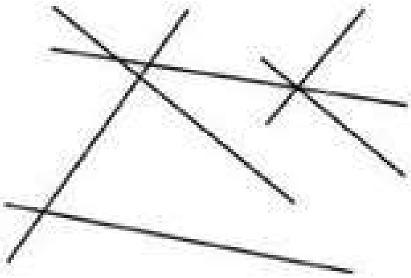


Рис. 113

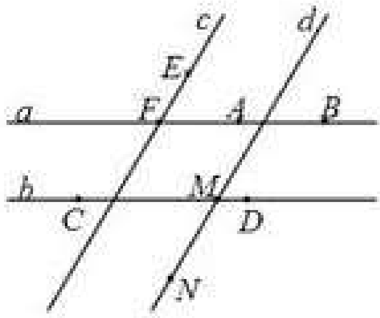


Рис. 114

1099. Если $a \parallel b$, $c \parallel d$, то запишите параллельные отрезки, изображенные на рисунке 114.

B Упражнения

1100. Начертите острый угол ABC. На стороне AB отметьте точку M и проведите через нее две прямые, одна из которых параллельна, а другая — перпендикулярна стороне BC.

1101. Укажите параллельные отрезки, перпендикулярные отрезки (рис. 115).

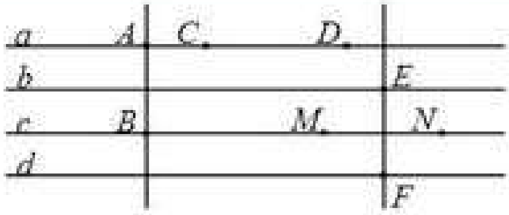


Рис. 115

Упражнения

1102. Начертите четыре прямые так, чтобы: 1) не было ни одной точки пересечения; 2) получилось три точки пересечения; 3) получилось пять точек пересечения этих прямых.

П **(1103—1105)** :

1103. В треугольнике ABC $\angle C$ прямой, $\angle A$ составляет 40%, а $\angle B$ — 60% от $\angle C$. Найдите значение суммы углов треугольника ABC.

1104. Вы узнаете о численной характеристике животного мира нашей страны, если:

1) найдете значение выражения: $716102 - (28128 + 843744) + 156259$ — столько видов птиц обитает в нашей стране;

2) решите уравнение $-\frac{1}{4}(1{,}5 + x) = -26\frac{3}{8}$. Найденное значение переменной x показывает количество видов рыб, обитающих в водоемах нашей страны.

1105. У трех девочек 20 конфет, причем у одной из них в 2 раза меньше конфет, чем у двух других. Сколько конфет у каждой девочки?

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

1106. На координатной прямой, длина единичного отрезка которого равна 2 см, отметьте точки $A(1{,}75)$ и $B\left(-\frac{3}{4}\right)$. Отметьте точку C — середину отрезка AB. Найдите координату точки C и длину отрезка AB.

§ 42. Координатная плоскость. Прямоугольная система координат

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Координатная прямая. Координатная плоскость. Прямоугольная система координат. Координатная четверть. Ось абсцисс. Ось ординат.

Какая плоскость называется *координатной*? Как ее построить?

Проведем две перпендикулярные координатные прямые так, как показано на рисунке 116.

Горизонтальная координатная прямая называется *осью абсцисс*. Ее обычно обозначают буквой x.

Вертикальная координатная прямая называется *осью ординат*. Ее обычно обозначают буквой y.

Точка пересечения осей координат называется *началом координат*.

Ось абсцисс и ось ординат называются *осями координат* (рис. 117).

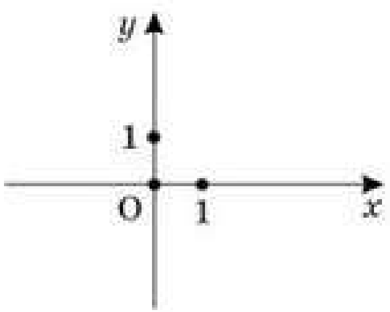


Рис. 116

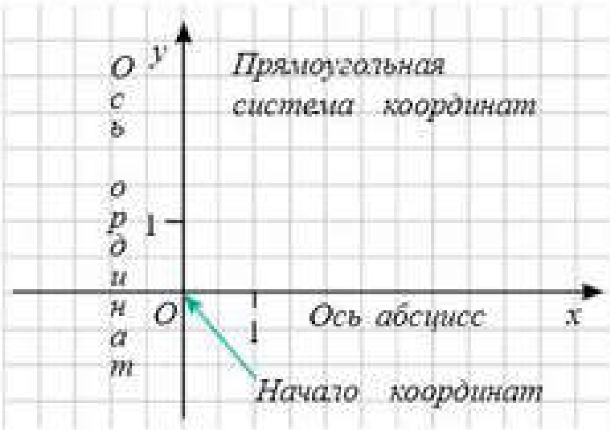


Рис. 117

На рисунке 117 начало координат обозначено буквой O.

Ось абсцисс и ось ординат вместе образуют прямоугольную систему координат (рис. 117).

Плоскость, на которой имеется система координат, называется *координатной плоскостью*.

Координатная плоскость показана на рисунке 118.

Как найти координаты точки, заданной на координатной плоскости?

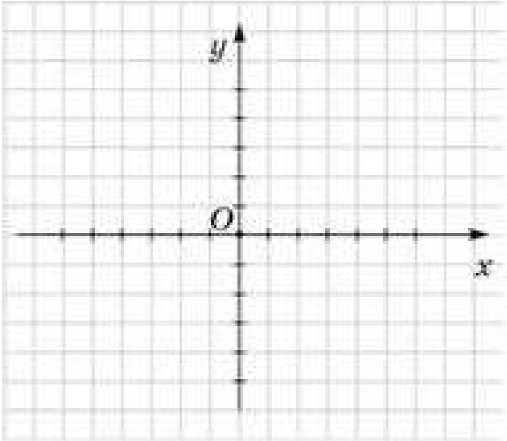


Рис. 118

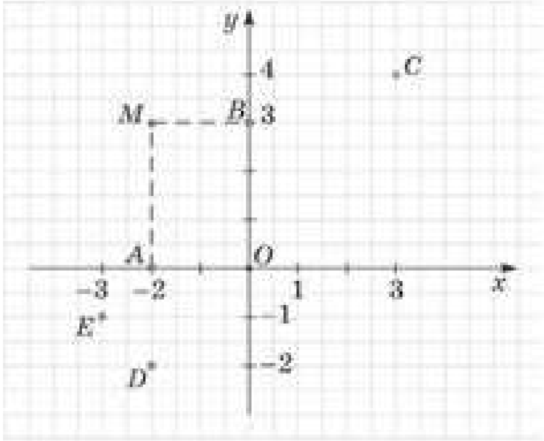


Рис. 119

На координатной плоскости отметим точку M (рис. 119). Проведем от этой точки перпендикуляры к осям координат. На оси абсцисс получим точку A с координатой –2, на оси ординат — точку B с координатой 3.

Число –2 называют *абсциссой точки* M, число 3 — *ординатой точки* M.

Абсцисса и ордината называются *координатами точки*.

Например, –2 и 3 — координаты точки M. Координаты точки записывают в скобках, *например* $M(-2;\ 3)$.

Говорите правильно

Чтение записи $M(-2;\ 3)$:
— точка M с координатами –2 и 3;
— точка M имеет координаты –2 и 3.

Как построить точки в системе координат по их координатам?

На рисунке 119 отмечены еще точки $C(3;\ 4)$, $D(-2;\ -2)$, $E(-3;\ -1)$ и $O(0;\ 0)$; $A(-2;\ 0)$; $B(0;\ 3)$.

При записи координат точки надо строго соблюдать следующий порядок: на первом месте всегда пишется абсцисса, на втором — ордината.

Поэтому говорят, что координаты точки образуют *упорядоченную пару чисел*.

Постройте на осях координат несколько точек и найдите их координаты. Какой особенностью обладают координаты точек, которые лежат на оси абсцисс, на оси ординат?

Какие координаты имеют точки, лежащие на оси Ox и на оси Oy?

Если точка лежит на оси абсцисс, то ее ордината равна нулю; если точка лежит на оси ординат, то ее абсцисса равна нулю.

Тогда координаты точек, *например*, A и B запишем: A (–2; 0), B (0; 3) (рис. 119).

Оси координат разбивают плоскость на четыре части, которые называются *координатными четвертями*.

Нумерация четвертей и знаки координат точек, расположенных в каждой четверти, показаны на рисунке 120.

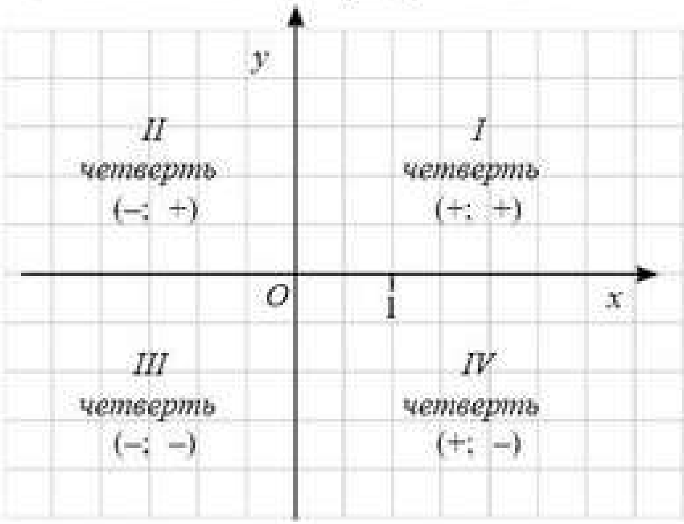


Рис. 120

1. Как расположены относительно друг друга ось абсцисс и ось ординат в прямоугольной системе координат?
2. Что представляет собой прямоугольная система координат; координатная плоскость; координатная четверть?
3. В какой координатной четверти расположена точка, если ее абсцисса и ордината: отрицательные числа; положительные числа; числа с разными знаками?
4. Почему координаты точки образуют упорядоченную пару чисел?

Упражнения

1107. Назовите абсциссы и ординаты точек A, E и K (рис. 121).

1108. Найдите координаты вершин четырехугольника $ABCD$ (рис. 122).

1109. Какие координаты имеют вершины треугольника ABC, изображенного на рисунке 123?

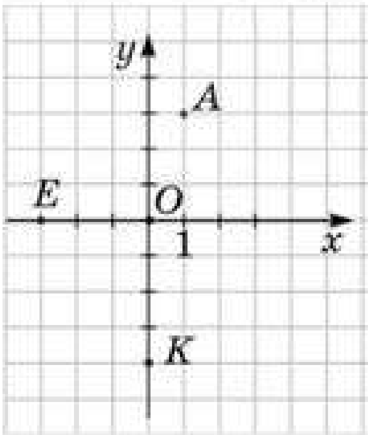


Рис. 121

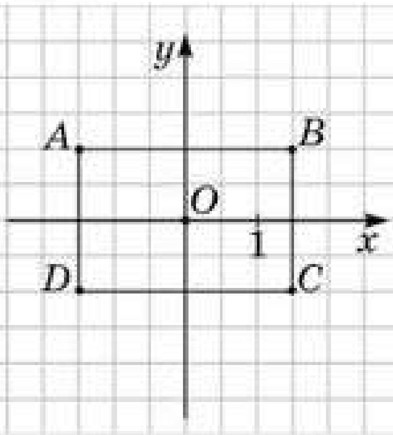


Рис. 122

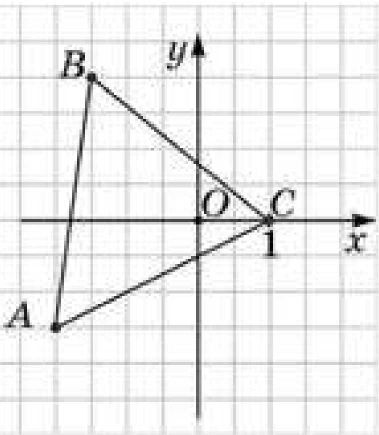


Рис. 123

1110. Отметьте на координатной плоскости точку $A(-2;\ 3)$. Через точку A проведите прямую, перпендикулярную: 1) оси абсцисс; 2) оси ординат.

1111. Постройте прямоугольную систему координат и отметьте на координатной плоскости точки $P(2;\ 1)$; $N(-4;\ 0)$; $E(0;\ 3)$; $K(-3{,}5;\ 0{,}5)$; $M(5;\ 0)$; $H(0;\ -6)$.

1112. 1) Постройте координатную плоскость и на ней отметьте точки $A(-1;\ -2)$; $B(0;\ 2)$; $C(-3;\ 0)$; $D(-0{,}5;\ 1{,}7)$; $E\ (0;\ -5)$; $K(2;\ 0)$. Выясните, какой четверти или какой оси принадлежит каждая из точек.
2) На координатной плоскости отметьте точки $B(1;\ 4)$; $C(-5;\ 2)$; $D(-2;\ -5)$; $E(4;\ -3)$; $F(0;\ -4)$; $G(5;\ 0)$.

1113. Изобразите на координатной плоскости точки $A(-2;\ -2)$; $B(-1;\ -1)$; $C(0;\ 0)$; $D(1;\ 1)$; $E(2;\ 2)$. Проверьте с помощью линейки, лежат ли эти точки на одной прямой и лежит ли на этой прямой точка $M(-5;\ 5)$.

1114. Постройте треугольник KMH по координатам его вершин $H(3;\ 3)$; $M(0;\ -2)$; $K(-3;\ 0)$.

1115. Постройте четырехугольник $ABCD$ по координатам его вершин $A(-1;\ 1)$; $B(-3;\ 4)$; $C(3;\ 2)$ и $D(2;\ -3)$.

1116. На координатной плоскости начертите:
1) треугольник KLM, если $K(4;\ -1)$; $L(-2;\ 0)$; $M(0;\ 3)$;
2) квадрат $ABCD$, если $A(2;\ -1)$; $B(-3;\ -1)$; $C(-3;\ 4)$; $D(2;\ 4)$;
3) прямоугольник $KLMN$, если $K(2;\ -3)$; $L(2;\ 4)$; $M(-2;\ 4)$; $N(-2;\ -3)$.

1117. На координатной плоскости начертите прямую, проходящую через точки $C(-4;\ -2)$ и $D(4;\ 2)$. Отметьте на этой прямой точки, абсциссы которых равны -3; -1; 0; 2. Запишите координаты полученных точек.

1118. На координатной плоскости начертите прямую, проходящую через точки $A(2;\ 3)$ и $B(-2;\ -5)$. Отметьте на этой прямой точки, ординаты которых -2; 0; 1; 3. Запишите координаты полученных точек.

1119. На координатной плоскости начертите прямую, которая проходит через точки $K(-2;\ -1)$ и $L(-2;\ 4)$ и прямую, которая проходит через точки $A(0;\ 0)$ и $B(1;\ -1)$. Запишите координаты точки пересечения этих прямых.

1120. Постройте на координатной плоскости четырехугольник $ABCD$, если $A(-10;\ -2)$; $B(-2;\ -2)$; $C(-2;\ -6)$; $D(-10;\ -6)$. Является ли он прямоугольником, квадратом? Найдите периметр и площадь этого четырехугольника, если длина единичного отрезка равна 1 см. Проведите отрезки AC и BD, найдите координаты точки E — пересечения отрезков AC и BD.

1121. Постройте ломаные линии $ABCDE$ и MNK по координатам точек $A(-6;\ 2)$, $B(-4;\ 6)$, $C(1;\ 1)$, $D(2;\ -5)$, $E(8;\ -1)$, $M(-5;\ -5)$, $N(-1;\ 7)$, $K(8;\ 4)$. Найдите координаты точек пересечения ломаных $ABCDE$ и MNK.

1122. Отметьте на координатной плоскости точки $M(0;\ 5)$, $N(8;\ 1)$; $C(2;\ 2)$; $D(-6;\ -2)$. Найдите координаты точки пересечения прямых MN и CD. На какой из этих прямых лежит точка $K(0;\ 1)$?

1123. Постройте треугольник ABK по координатам его вершин $A(-2;\ -2)$; $B(1;\ 5)$; $K(6;\ -2)$. Найдите координаты точки пересечения стороны AK с осью ординат.

1124. Даны координаты трех вершин прямоугольника $KLMN$: $K(-2;\ -3)$; $L(2;\ 4)$; $M(-2;\ 4)$. Начертите этот прямоугольник. Найдите координаты точки N и координаты середин сторон прямоугольника. Приняв длину единичного отрезка за 3 см, вычислите площадь и периметр прямоугольника.

1125. Даны координаты двух вершин квадрата $ABCD$: $A(1;\ -1{,}5)$ и $B(1;\ 2)$. Начертите квадрат $ABCD$ (рассмотрите два случая). Найдите координаты вершин C и D. Вычислите площадь и периметр квадрата $ABCD$.

В Упражнения

1126. Как расположены на координатной плоскости точки, у которых:

1) абсцисса равна 3;
2) ордината равна –2;
3) ордината равна 5;
4) абсцисса равна –4?

1127. Где находится на координатной плоскости точка $P(x;\ y)$, если:

1) $x > 0,\ y > 0$;
2) $x = 0,\ y > 0$;
3) $x < 0,\ y < 0$;
4) $x < 0,\ y > 0$;
5) $x > 0,\ y = 0$;
6) $x = 0,\ y < 0$?

1128. Какие из точек $A(1;\ 3)$, $B(-1;\ 4)$, $C(7;\ -5)$, $D(0;\ 6)$ расположены:

1) выше оси абсцисс;
2) левее оси ординат?

1129. Выясните:

1) где находятся все точки с абсциссой, равной 0;
2) где находятся все точки с ординатой, равной 0;
3) каким общим свойством обладают абсциссы всех точек, расположенных слева от оси ординат;
4) в каких координатных четвертях находятся точки с положительной абсциссой;
5) в каких координатных четвертях находятся точки с отрицательной ординатой;
6) каким общим свойством обладают ординаты всех точек, лежащих выше оси абсцисс?

Упражнения

1130. Где расположены точки на координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют условию:

1) $x = 0$, $|y| > 10$; 2) $y \leq 0$, $|x| > 10$; 3) $|x| < 1$, $y > 0$?

П (1131) :

1131. За три дня Ерлан прочитал 18 страниц книги. В первый день он прочитал на 1 страницу меньше, во второй день — на 4 страницы больше, чем в третий день. По сколько страниц книги читал Ерлан каждый из этих трех дней?

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

1132. Изобразите прямую a и на ней отрезок AB. Постройте отрезок BC, равный отрезку AB.

1133. Проведите прямую a и постройте прямую b, перпендикулярную прямой a.

§ 43. Центральная и осевая симметрии

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Центральная симметрия. Центр симметрии. Центрально-симметричные фигуры. Осевая симметрия. Ось симметрии.

Какие геометрические фигуры называются *центрально-симметричными*?

На рисунке 124 изображен отрезок AB и точка O так, что $AO = OB$, т. е. расстояния от точки O до концов A и B отрезка равны. Точку O называют *серединой отрезка* AB.

Рис. 124

Точка называется *серединой отрезка* тогда и только тогда, когда расстояния от этой точки до концов отрезка равны.

Две точки A и B называются *центрально-симметричными* относительно точки O, если точка O является серединой отрезка AB. Точку O называют *центром симметрии*.

Как построить геометрические фигуры, симметричные относительно точки?

Пример 1. Построим точку F, центрально-симметричную точке E относительно точки O — начала координат (рис. 125.1).

Построение: проведем луч EO (рис. 125.2). Затем по другую сторону от точки O отложим отрезок OF, равный отрезку OE (рис. 125.3). Получили точку F, центрально-симметричную точке E относительно точки O.

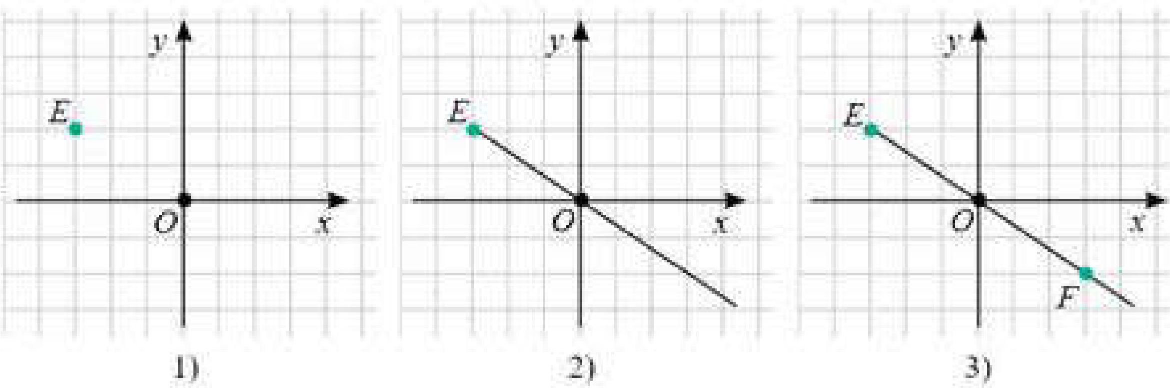


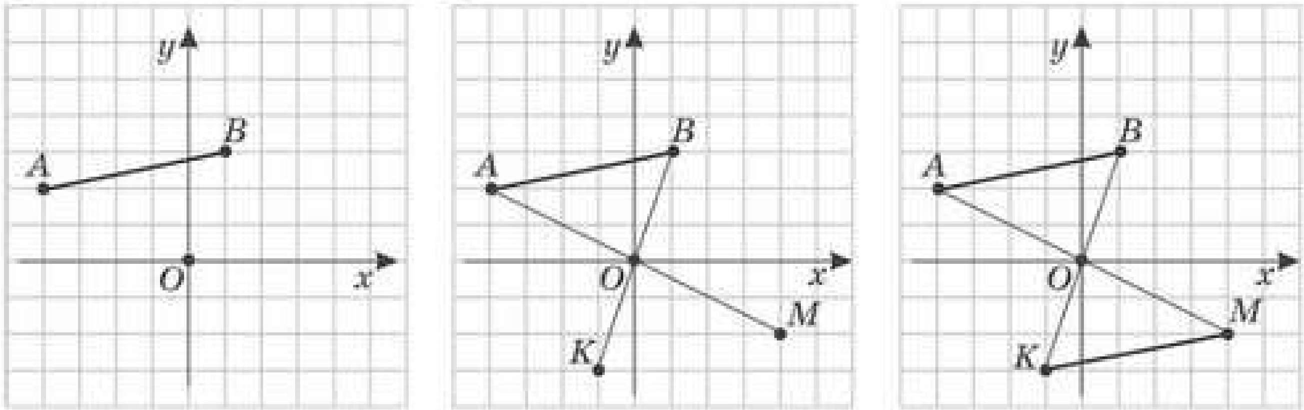
Рис. 125

Подумайте!

Почему точка F центрально-симметрична точке E?

Пример 2. Построим отрезок MK, центрально-симметричный отрезку AB относительно точки O — начала координат (рис. 126.1).

Построение : сначала построим точки M и K, центрально-симметричные точкам A и B относительно точки O (рис. 126.2). Затем проведем отрезок KM (рис. 126.3).



1) 2) 3)

Рис. 126

Примерами центрально-симметричных фигур являются квадрат, окружность и круг (рис. 127, 128).

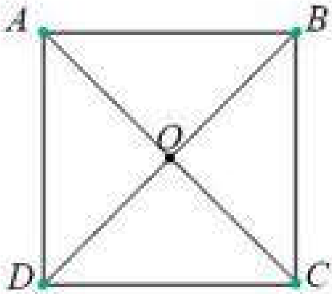


Рис. 127

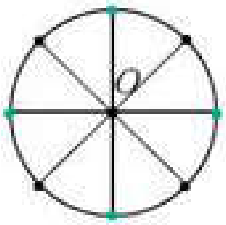


Рис. 128

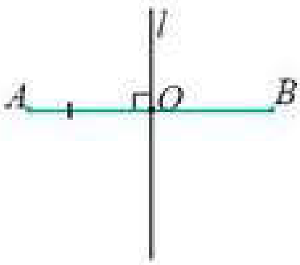


Рис. 129

Какая симметрия является осевой симметрией? Как построить геометрические фигуры, симметричные относительно прямой?

Две точки A и B называются *симметричными относительно оси* l, если отрезок, соединяющий эти точки, перпендикулярен оси l и расстояние от точки A до оси l равно расстоянию от точки B до оси l, l — ось симметрии.

Точки A и B, симметричные относительно оси l, изображены на рисунке 129.

Предложение "Отрезок, соединяющий точки A и B, перпендикулярен оси l и расстояния от точек A и B до оси l равны" **можно записать так:** $AB \perp l$ и $AO = OB$.

Пример 3. Построим треугольник MFK, симметричный треугольнику ABC относительно оси ординат (рис. 130.1).

Построим точки M, F, K, симметричные точкам A, B, C относительно оси ординат, и проведем отрезки MK, KF, FM.

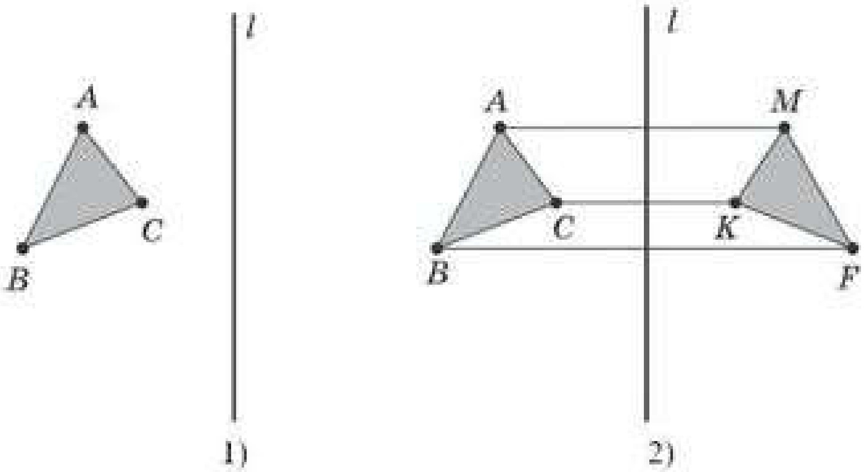


Рис. 130

Получим треугольник MKF, симметричный треугольнику ABC относительно оси ординат (рис. 130.2).

Если изобразить на прозрачном листе бумаги симметричные треугольники и перегнуть лист бумаги по оси ординат, то треугольники ABC и MFK совместятся.

Какие геометрические фигуры имеют ось симметрии?

Осевой симметрией обладают геометрические фигуры: треугольник, у которого две или три стороны равны, прямоугольник, квадрат (рис. 131—133) и др.

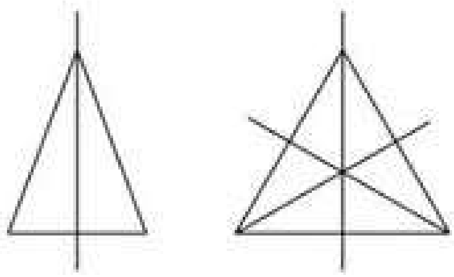


Рис. 131

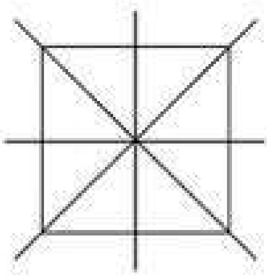


Рис. 132

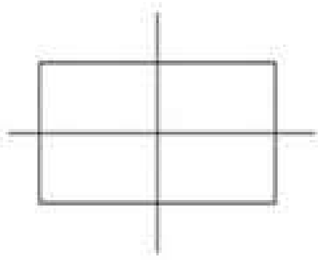


Рис. 133

Симметрию используют на практике, *например*, в строительстве, при создании орнаментов (рис. 134).

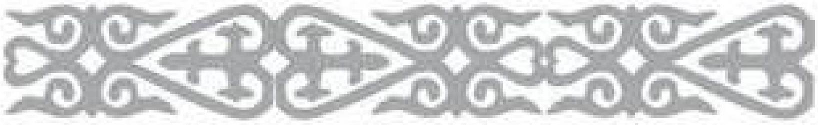


Рис. 134

Симметрия встречается в природе.

1. Какие виды симметрии вы знаете?
2. Приведите примеры из окружающей жизни, где вы видели симметрию.

Упражнения

1134. Назовите среди точек, отмеченных на рисунке 135, точки, симметричные относительно: 1) оси абсцисс; 2) оси ординат; 3) начала координат.

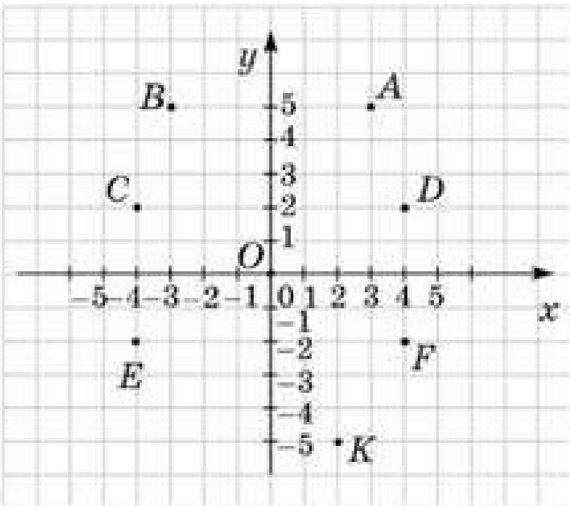


Рис. 135

1135. Постройте на координатной плоскости точку B, симметричную точке: а) $A(1;\ 4)$; б) $B(-3;\ 2)$; в) $C(-1;\ -5)$; г) $D(4;\ -3)$ относительно: 1) оси абсцисс; 2) оси ординат.

1136. Постройте на координатной плоскости точку, симметричную точке: 1) $M(-4;\ 3)$; 2) $N(5;\ -2)$; 3) $Q(4;\ 4)$; 4) $P(-1;\ -1)$ относительно начала координат и запишите ее координаты.

1137. Постройте на координатной плоскости точки $S(-6;\ 2)$; $F(3;\ 5)$; $T(1;\ -5)$ и точки: 1) A, B, C, симметричные им относительно оси абсцисс; 2) M, N, K, симметричные им относительно оси ординат.

1138. Постройте на координатной плоскости треугольник ABC, если $A(-5;\ 3)$; $B(-2;\ -3)$; $C(-1;\ 6)$. Постройте точки, симметричные относительно оси ординат, и запишите их координаты. Соедините построенные точки отрезками. Какая фигура получилась?

1139. Постройте на координатной плоскости четырехугольник $MNKF$, если $M(2;\ -4)$; $N(5;\ -1)$; $K(6;\ 2)$; $F(3;\ 4)$. Постройте точки, симметричные вершинам четырехугольника $MNKF$ относительно начала координат. Последовательно соедините точки отрезками. Выясните, какая фигура получилась.

1140. Отметьте точку C, симметричную точке A относительно прямой l (рис. 136). Какая точка будет симметрична точке B относительно прямой l? Проведите отрезок BC. Измерьте длины отрезков AB и BC и сравните их.

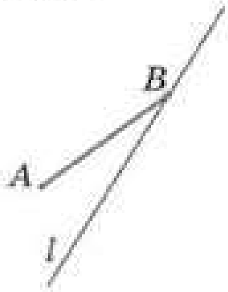


Рис. 136

1141. Изобразите в тетради отрезок $AB = 2$ см и точку O, как показано на рисунке 137. Постройте точку M, симметричную точке A и точку K, симметричную точке B относительно точки O. Проведите отрезок MK. Сравните длины отрезков AB и MK.

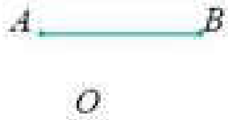


Рис. 137

B Упражнения

1142. Изобразите в тетради треугольник ABC, у которого $\angle C = 90°$, длина стороны $CB = 2$ см, $AC = 3$ см (рис. 138). Постройте точку P, симметричную точке B относительно оси l, которая содержит сторону AC треугольника ABC. Какие точки будут симметричны точкам A и C относительно прямой l? Проведите отрезки PA и PC. Сравните длины отрезков PC и CB.

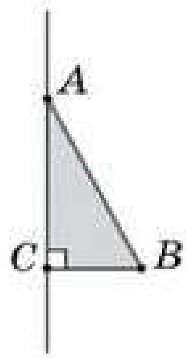


Рис. 138

1143. Постройте $\angle ABC = 45°$ (рис. 139). На луче BA выберите любую точку и обозначьте ее буквой M. Постройте точку K, симметричную точке M относительно прямой BC. Какая точка будет симметрична точке B относительно прямой BC? Проведите луч BK. Измерьте острый угол CBK и сравните его с острым углом ABC.

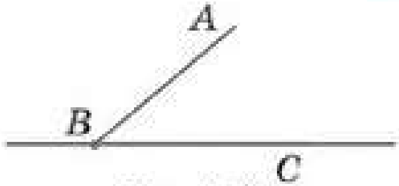


Рис. 139

Упражнения

1144. Постройте круговой сектор, у которого $\angle AOB = 40°$ (рис. 140). Отметьте точки P и T соответственно центрально-симметричные точкам A и B относительно точки O. Проведите отрезки OP и OT. Закрасьте получившийся круговой сектор и измерьте его угол. Сравните острые углы AOB и POT.

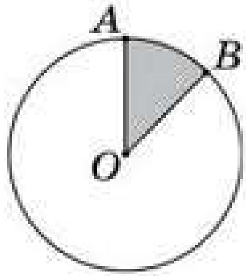


Рис. 140

П **(1145—1146)** :

1145. 50 груш разложили в два пакета и в корзину. В корзину положили на 14 груш больше, чем в каждый пакет. Сколько груш в каждом пакете и в корзине?

1146. Решив систему неравенств:

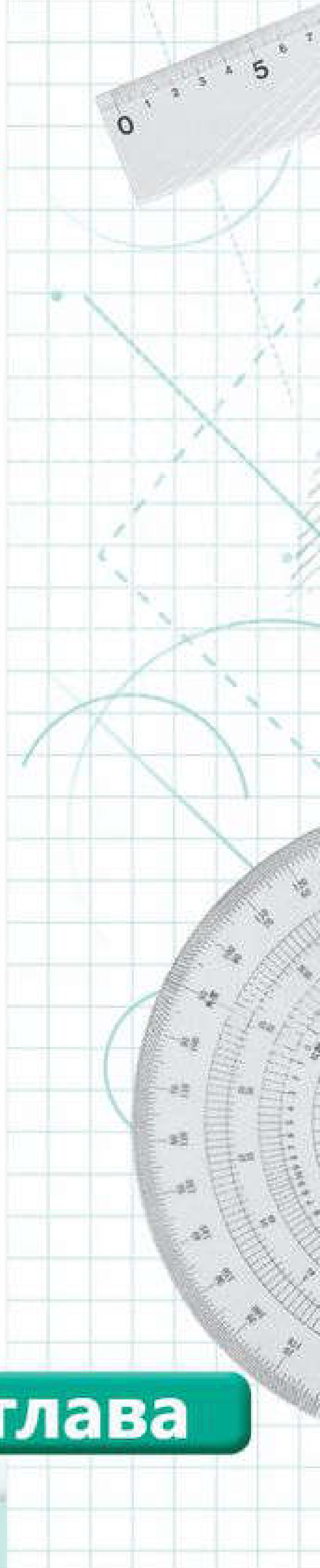
$$\begin{cases} -10(x-4) < 3(4-2x) - 3x, \\ 1{,}6(0{,}1x - 3) > 3(-6 + 0{,}1x) + 0{,}3x, \end{cases}$$ вы узнаете о том,

какую пользу приносят птицы, x — на столь ко процентов птицы снижают убытки, уничтожая огромное количество насекомых, вредных для сельского и лесного хозяйства.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

1147. 1) Назовите предметы, имеющие форму прямоугольника, шара, круга, сферы, треугольника в повседневной жизни. В чем отличие и сходство этих предметов?
2) Сколько у куба вершин, ребер, граней? Какая фигура является гранью куба?

ФИГУРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ



7 глава

7 Фигуры в пространстве

§ 44. Расположение фигур в пространстве. Изображение пространственных фигур

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Пространственная фигура. Плоскость.

Как изобразить пространственнуюфигуру?

При изображении пространственных фигур на плоскости видимые линии изображают сплошной линией.

При изображении пространственных фигур на плоскости невидимые линии изображают пунктиром.

Используя рисунок, расскажите, как изобразили пространственные фигуры на плоскости (рис. 141—144).

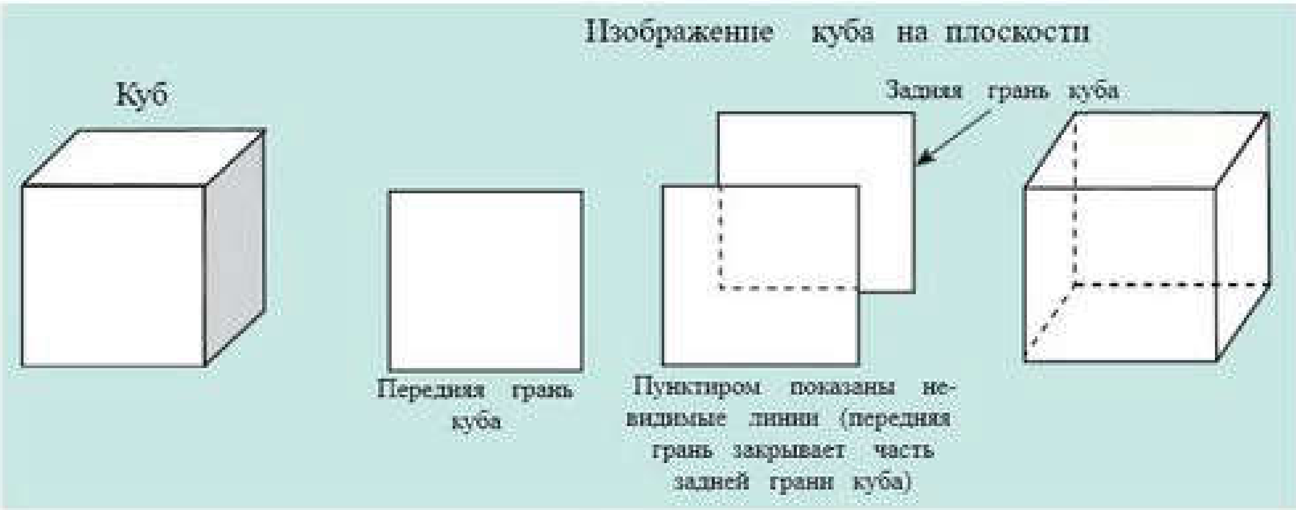


Рис. 141

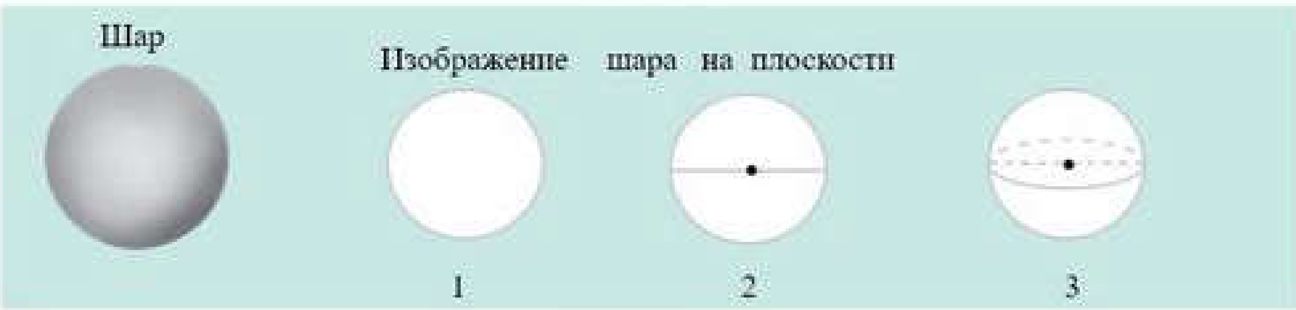


Рис. 142

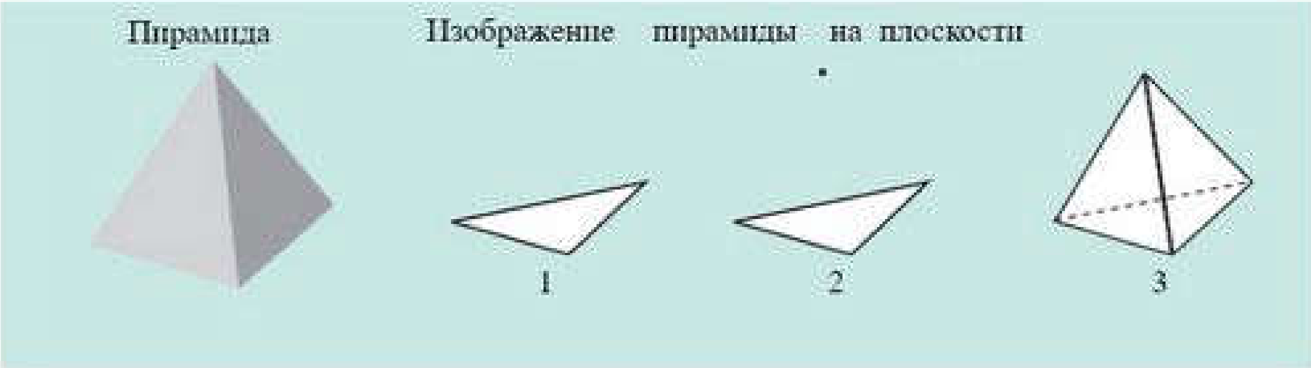


Рис. 143

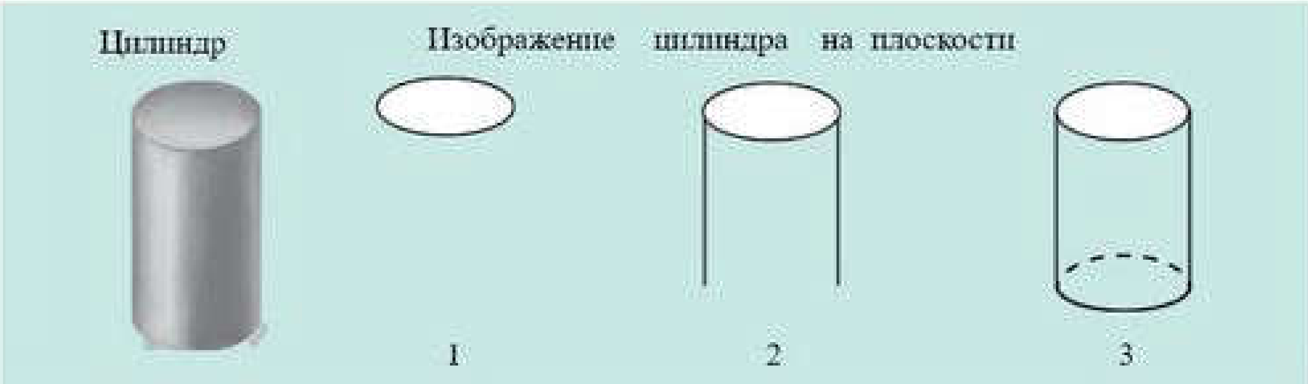


Рис. 144

1. Можно ли изобразить на плоскости (прямоугольный параллелепипед) куб так, чтобы все его ребра (грани) были "видимыми"?
2. Какие геометрические фигуры используют для изображения шара на плоскости?

А Упражнения

1148. Сколько ребер куба при изображении его на плоскости являются "видимыми", сколько — "невидимыми"?

1149. Сколько ребер прямоугольного параллелепипеда при изображении его на плоскости являются "видимыми", сколько — "невидимыми"?

1150. Сколько ребер пирамиды при изображении его на плоскости являются "видимыми", сколько — "невидимыми" (рис. 143)?

1151. Сколько граней куба при изображении его на плоскости являются "видимыми", сколько — "невидимыми"?

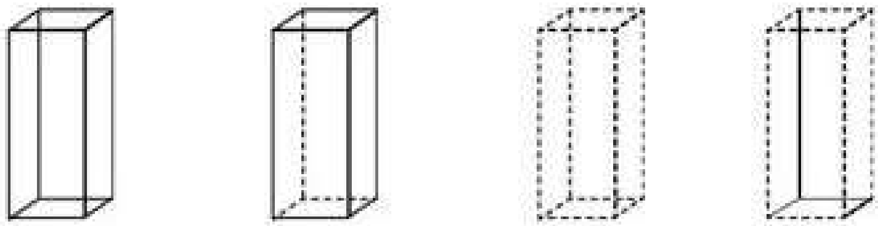
1152. Сколько граней прямоугольного параллелепипеда при изображении его на плоскости являются “видимыми”, сколько — “невидимыми”?

1153. Сколько граней пирамиды при изображении его на плоскости являются “видимыми”, сколько — “невидимыми” (рис. 143)?

B Упражнения

1154. Используя клетки тетради, изобразите куб, длина стороны которого равна 2 см.

1155. Из рисунка 145 укажите правильно изображенный прямоугольный параллелепипед.



1 2 3 4

Рис. 145

C Упражнения

1156. Используя клетки тетради, изобразите прямоугольный параллелепипед, измерения которого равны 2 см, 4 см и 5 см. Сколько прямоугольных параллелепипедов можно построить?

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

1157. Начертите координатную плоскость. Отметьте три точки. Запишите их координаты.

1158. Начертите координатную прямую. Изобразите на координатной прямой точки с координатами 8, –4, 2,5. Найдите длину отрезков, изображенных на координатной прямой.

§ 45. Понятие вектора

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Вектор. Нулевой вектор. Начало вектора. Конец вектора. Направление вектора.

Что называется *вектором*?

Величины: масса, время, цена, стоимость, объем (вместимость), площадь, длина — характеризуются только числом. Многие физические величины характеризуются не только числом, но и направлением. Такие величины называются *векторными величинами*, или *векторами*.

Вектором AB называется направленный отрезок, началом которого является точка A, а концом — точка B.

Любую точку плоскости считают нулевым вектором.

Начало нулевого вектора совпадает с его концом.

Как изобразить вектор?

Направление вектора указывают стрелкой (рис. 146).

Рис. 146

На рисунках 147—149 векторы обозначаются:

— либо маленькими латинскими буквами: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

— либо двумя большими: $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{FM}$.

Нулевой вектор обозначают: $\vec{O}$, $\overline{PP}$.

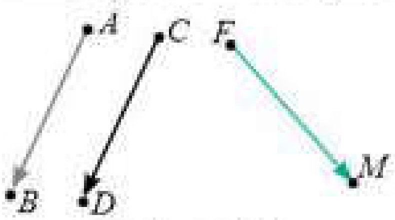


Рис. 147

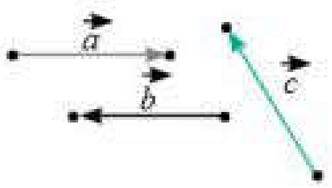


Рис. 148

Рис. 149

1. Что нужно знать, чтобы построить вектор на координатной плоскости?

A Упражнения

1159. Начертите три вектора. Обозначьте их.

1160. На координатной плоскости изобразите векторы $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ и $\overline{MK}$, если известны координаты точек: $A(1;\ 4)$, $B(-1;\ 3)$, $C(-1;\ -1)$, $D(4;\ 0)$, $M(0;\ 5)$, $K(-2;\ 4)$.

1161. Начертите в каждой четверти координатной плоскости по одному вектору. Запишите координаты их начала и конца.

1162. Напишите координаты начала и конца векторов (рис. 150).

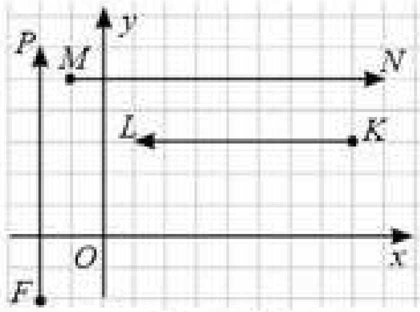


Рис. 150

B Упражнения

1163. На координатной плоскости изобразите вектор $\overline{AB}$, если известны координаты точек: $A(0;\ 2)$, $B(-3;\ 2)$. Постройте вектор $\overline{CD}$, если точки C, D симметричны соответственно точкам A, B относительно начала координат.

C Упражнения

Подготовьте сообщение

1164. У. Гамильтон ввел понятие вектора.

1165. Найдите значение разности чисел: 1) 6,5 и –4,05; 2) 8 и 9,04; 3) –78,96 и 56,95. Сколько ответов получится при выполнении каждого пункта? Ответ объясните.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

1166. Расположите числа 5; –1; 8; –0,5; –2 в порядке возрастания.

1167. Найдите наибольшее число среди чисел 0,8; –0,8; 0; 0,81.

1168. Найдите наименьшее число среди чисел –2,03; 3,8; 0; –2,3.

СТАТИСТИКА. КОМБИНАТОРИКА

8 глава

8 Статистика. Комбинаторика

§ 46. Статистические данные и их характеристики

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Среднее арифметическое. Наибольшее значение. Ряд данных. Наименьшее значение. Размах. Мода. Медиана.

? Что такое *среднее арифметическое нескольких чисел*? Как вычислить среднее арифметическое нескольких чисел?

В повседневной жизни часто слышим: средняя температура воздуха, средняя продолжительность жизни, средний рост, средняя наполняемость класса, средняя урожайность, средняя зарплата и т. д.

Задача 1. В классе учатся 7 девочек. Их рост равен 1,2 м; 1,1 м; 1,1 м, 1,2 м; 1,28 м; 1,32 м; 1,2 м. Вычислим средний рост девочек.

Решение. Для вычисления среднего роста сложим рост всех девочек и полученное значение суммы разделим на 7:

$(1{,}2 + 1{,}1 + 1{,}1 + 1{,}2 + 1{,}28 + 1{,}32 + 1{,}2) : 7 = 1{,}2.$

Ответ: 1,2 м.

Средним арифметическим нескольких чисел называется значение частного от деления значения суммы этих чисел на число слагаемых.

Чтобы найти среднее арифметическое нескольких чисел, надо:

1) найти значение суммы этих чисел; 2) разделить значение суммы этих чисел на число слагаемых.

Задача 2. Найдем среднесуточную температуру воздуха, если ночью она была 0° С, утром +2° С, днем +7° С, а вечером +5° С.

Решение. Для нахождения среднесуточной температуры найдем среднее арифметическое чисел 0, 2, 7 и 5. Получим:

$$\frac{0+2+7+5}{4} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2} = 3{,}5.$$

Ответ: 3,5°С.

В выше рассмотренных задачах были записи вида:
1) 1,2 м; 1,1 м; 1,1 м; 1,2 м; 1,28 м; 1,32 м; 1,2 м;
2) 0°C; 2°C; 7°C; 5°C.
Такие записи в математике называют *рядами данных*.
В каждом ряду данных есть наибольшее и наименьшее числа.

Наибольшее из чисел ряда данных называется *наибольшим значением ряда данных*. Наименьшее из чисел ряда данных называется *наименьшим значением ряда данных*.

Объясните!

Как нашли наибольшее и наименьшее значение ряда данных 4; 67; 32; 70; 13; 0?
70 — наибольшее значение ряда данных 4; 67; 32; 70; 13; 0.
0 — наименьшее значение ряда данных 4; 67; 32; 70; 13; 0.

?

Что такое *размах ряда числовых данных*? Как вычислить размах ряда числовых данных?

Значение разности между наибольшим и наименьшим значениями ряда данных называется *размахом*.

Задача 3. Найдем размах среднесуточной температуры воздуха по следующим данным: 3°C; 5°C; 15°C; 1°C; 0°C; 12°C; 4°C; 7°C.

Решение. Наибольшее значение среднесуточной температуры 15°C, наименьшее значение — 0°C. Тогда размах среднесуточной температуры воздуха: 15°C – 0°C = 15°C.

Ответ: 15°C.

Чтобы найти размах, надо найти:
1) наибольшее значение ряда данных;
2) наименьшее значение ряда данных;
3) значение разности между наибольшим и наименьшим значениями ряда данных.

?

Что такое *мода ряда числовых данных*? Как вычислить моду ряда числовых данных?

В рядах данных числа или величины могут повторяться. *Например*, в ряду данных (задача) рост 1,2 м встречался 3 раза, рост 1,1 м — 2 раза.

Наиболее часто повторяющееся число или величину в ряду данных принято называть *модой*.

Некоторые ряды данных могут не иметь моды или иметь несколько.

Например, в ряду данных 3; 11; 19; 100 нет моды, а в ряду данных 22, 30, 31, 22, 59, 61, 30 две моды — 22 и 30.

? Что такое *медиана ряда числовых данных*? Как вычислить медиану ряда числовых данных?

Медианой ряда данных называют число, которое расположено посередине него, при условии, что количество чисел нечетное или равно среднему арифметическому двух чисел, стоящих в его середине, при условии, что количество чисел четное и числа этого ряда данных записаны либо в порядке возрастания, либо в порядке убывания.

Задача 4. Численность верблюдов в хозяйствах Республики Казахстан на 1 января 2013—2017 гг. в тыс. голов составила: 164,8; 160,9; 165,9; 170,5; 172,5.

Решение. Для нахождения медианы данного ряда расположим заданные числа в порядке возрастания: 160,9; 164,8; 165,9; 170,5; 172,5. В этом ряду данных 5 чисел, посередине стоит число 165,9. Оно является медианой данного ряда чисел.

Ответ: 165,9.

Задача 5. Посевные площади Республики Казахстан, отведенные под кормовые культуры (в тыс. га) за период 2011—2016 гг., составили: 2484,3; 2517,4; 2866,8; 3109,9; 3671,3; 3485,2. Найдите медиану посевных площадей.

Решение. Для нахождения медианы данного ряда расположим данные числа в порядке возрастания: 2484,3; 2517,4; 2866,8; 3109,9; 3485,2; 3 671,3. В этом ряду данных 6 чисел, поэтому посередине стоит не одно, а два числа: 2866,8; 3109,9. В таких случаях за медиану ряда данных принимают среднее арифметическое двух чисел, стоящих в его середине. Поэтому медианой данного ряда данных будет среднее арифметическое этих двух чисел:

$(2866,8 + 3109,9) : 2 = 5976,7 : 2 = 2988,35.$

Ответ: 2988,35.

Для нахождения медианы ряда данных используют правило: располагают числа ряда данных в порядке возрастания или убывания;

1) если количество чисел в ряду данных нечетное, то медиана этого ряда равна числу, стоящему посередине него;

2) если количество чисел в ряду данных четное, то медиана этого ряда равна среднему арифметическому двух чисел, стоящих посередине него.

?

1. Как найти среднее арифметическое нескольких чисел?
2. Как найти размах?
3. Может ли ряд данных иметь три моды?
4. Что показывает медиана ряда данных?
5. В чем заключается отличие в нахождении медианы ряда данных, содержащих четное и нечетное число чисел ряда данных?
6. Может ли медиана ряда данных равняться наибольшему числу ряда данных; наименьшему числу ряда данных?

A Упражнения

Найдите среднее арифметическое, размах и медиану ряда данных **(1169—1170)**:

1169. 1) 524; 346; 486; 2) 0,87; 1,03; 1,72; 1,98; 2;
3) 42,8; 54,3; 59,6; 60; 4) 1,08; 1,99; 1,76; 0,99; 1,32.

1170. 1) 107; 122; 113; 2) 12,4; 14,8; 18,9; 20,1;
3) 11; 17,2; 20; 24,6; 4) 0,89; 1,23; 1,64; 1,79; 2.

1171. На рыбалке Мурат поймал трех карасей. Масса первого карася равна 0,125 кг, второго — 0,205 кг, третьего — 0,18 кг. Найдите среднюю массу карасей.

1172. Масса апельсинов, находящихся в ящике, равна 21 кг. Найдите среднюю массу одного апельсина, если в ящике 125 апельсинов.

1173. Укажите наибольшее и наименьшее значения ряда данных:
1) 12 тг; 148 тг; 326 тг; 700 тг;
2) 78 т; 326 кг; 760 кг;

3) 160 мин; 1 ч 60 мин; 2 ч; 200 мин;
4) 17,3; 0,73; 173,1; 17,31.

1174. Найдите моду и медиану для ряда данных:
1) 34,8; 63,1; 90,09; 90,9; 90;
2) 421; 214; 124; 412; 421; 142;
3) 3; 3; 7; 8; 8; 8; 9; 9; 10; 11; 11; 15; 15; 15.

B Упражнения

1175. В магазин привезли 250 арбузов, общая масса которых 1,5 т. Найдите среднюю массу одного арбуза.

1176. В пакете массой 3,4 кг находится 16 яблок. Найдите среднюю массу одного яблока.

1177. Измерьте длину 10 своих шагов. Найдите среднюю длину своего шага.

1178. С участка площадью 4,5 га собрали 430,5 ц картофеля, с участка площадью 3,5 га собрали 349,5 ц картофеля. Сколько центнеров картофеля в среднем собрали с участка площадью 1 га?

C Упражнения

1179. Найдите среднее арифметическое чисел 529 335, 550 438, 574 448, 602 684, 639 311, которые показывают численность населения (количество человек), проживающего в г. Астане на начало года, начиная с 2005 по 2009 г.

1180. Найдите размах ряда данных 501 998, 510 533, 529 335, 550 438, 574 448, 602 684, 639 311, который показывает численность населения, проживающего в г. Астане на начало года в период с 2003 по 2009 г.

1181. Найдите среднее арифметическое чисел из ряда данных 1 209 485, 1 247 896, 1 287 246, 1 324 739, 1 365 105, показывающее численность населения, проживающего в г. Алматы на начало года в период с 2005 по 2009 г.

П **(1182)** :

1182. Найдите длину окружности и площадь круга, приняв $\pi \approx 3,14$, если длина их радиуса равна: 1) 2,5 см; 2) 5 см; 3) 10 см; 4) 20 см.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

1183. Сколько всего двузначных чисел? Сколько двузначных чисел от 17 до 40?

1184. Сколько всего трехзначных чисел? Сколько трехзначных чисел от 200 до 238?

§ 47. Решение задач на нахождение средней скорости движения. Решение комбинаторных задач методом перебора

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Средняя скорость. Комбинаторная задача. Метод перебора. Дерево возможных вариантов.

Что такое *средняя скорость движения* и как ее найти?

Средней скоростью движения называется значение частного длины всего пройденного пути и всего затраченного на этот путь времени.

Формула для нахождения средней скорости:

$$v = \frac{s}{t},$$

где s — длина всего пройденного пути,
t — все затраченное время на прохождение пути.

Формула для нахождения средней скорости для двух участков пути:

$$v_{ср} = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2},$$

где s_1 — длина одного участка пути,
s_2 — длина другого участка пути,
t_1 — затраченное время на прохождение одного участка пути,
t_2 — затраченное время на прохождение другого участка пути.

Задача 1. Поезд проехал перегон в 120 км за 2 часа и 90 км за 1,5 часа. Найдите среднюю скорость движения поезда на участке в 200 км.

Решение. По условию задачи $s_1 = 120$ км; $t_1 = 2$ ч; $s_2 = 90$ км; $t_2 = 1{,}5$ ч. Используя формулу $v_{ср} = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2}$, найдем среднюю скорость движения на данном участке $v_{ср} = \frac{120 + 90}{2 + 1{,}5} = 60$ (км/ч).

Ответ: 60 км/ч.

Задача 2. Из одного города в другой Есен ехал на автомобиле со скоростью 90 км/ч, на обратном пути — на автобусе со скоростью 60 км/ч. Найдите среднюю скорость движения от одного города в другой и обратно, если длина пути между этими городами 180 км.

Решение. По условию задачи длина пути между городами 180 км. Значит, $s_1 = 180$ км и $s_2 = 180$ км. Найдем время, затраченное на путь из одного города в другой, и обратно: $t_1 = \frac{180}{90} = 2$ и $t_2 = \frac{180}{60} = 3$.

Тогда по формуле $v_{ср} = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2}$ найдем среднюю скорость движения из одного города в другой и обратно: $v_{ср} = \frac{180 + 180}{2 + 3} = 72$ (км/ч).

Ответ: 72 км/ч.

Формула для нахождения средней скорости для трех участков пути:

$$v_{ср} = \frac{s_1 + s_2 + s_3}{t_1 + t_2 + t_3},$$

где s_1 — длина одного участка пути,
s_2 — длина другого участка пути,
s_3 — длина третьего участка пути,
t_1 — время, затраченное на прохождение одного участка пути,
t_2 — время, затраченное на прохождение другого участка пути,
t_3 — время, затраченное на прохождение третьего участка пути.

Например, надо найти среднюю скорость движения мотоциклиста на участке 218 км, если мотоциклист 79 км проехал за 2 ч, 81 км — за 2 ч и 60 км — за 1,5 ч.

Убедитесь, что средняя скорость движения мотоциклиста на участке 218 км равна 40 км/ч.

? Как решать комбинаторные задачи методом перебора?

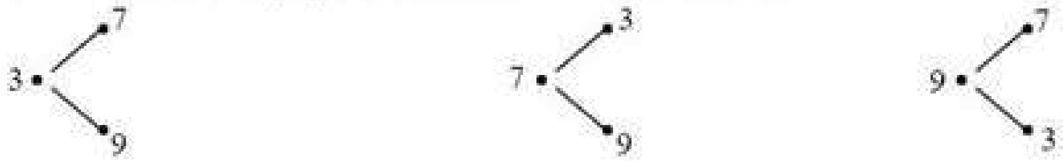
Задачи, в которых из элементов некоторого конечного множества по некоторым правилам составляются различные комбинации этих элементов и подсчитывается их число, называют *комбинаторными*.

Задача 3. Сколько четырехзначных чисел, у которых все цифры разные и которые оканчиваются цифрой 5, можно составить из цифр числа 3579?

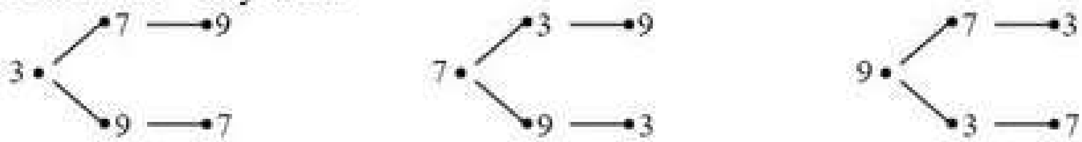
Решение . Это комбинаторная задача. Ее анализ можно провести методом перебора. Очень удобно процесс перебора осуществлять путем построения специальной схемы, которая называется *дерево возможных вариантов* . Рассмотрим построение дерева возможных вариантов для данной задачи: сначала нужно выбрать первую цифру. Это могут быть цифры 3, 7 или 9, поэтому в "дереве" обозначим три точки с цифрами 3, 7 и 9 на концах.

3 • 7• 9•

Поскольку все цифры числа разные и цифра 5 последняя, то если первая цифра 3, то вторая — либо 7, либо 9. Аналогично, для числа 7 — это 3 и 9, для числа 9 — это 7 и 3.



Поскольку все цифры числа разные и цифра 5 последняя, то если первая цифра 3, вторая — 7, то третья цифра — 9. Аналогично для остальных случаев.



Поскольку все цифры числа разные и цифра 5 последняя, то получим:

Теперь, проходя по "веточкам дерева", по порядку выписываем нужные нам числа: 3795, 3975, 7395, 7935, 9735, 9375.

Ответ : 6 чисел.

Объясните!

Решите задачу 4, используя чертеж (рис. 151).

Задача 4. Сколькими способами можно проехать по городу из A в C через B, если из A в B можно проехать одной из трех дорог, из B в C также одной из трех дорог?

Рис. 151

?

1. Можно ли определить среднюю скорость на участках пути, если известно только время?
2. Приведите пример комбинаторной задачи.
3. Какой способ используется для решения комбинаторных задач?
4. Что в процессе использования метода перебора можно использовать, чтобы не пропустить ни одного возможного варианта?

A Упражнения

1185. 1) Поезд проехал перегон в 93 км за 1,5 часа и 147 км за 2,5 часа. Найдите среднюю скорость движения поезда на участке в 240 км.
2) Найдите среднюю скорость движения автобуса, если он на путь длиной 110 км потратил 2 часа, 165 км — 3 часа.

1186. 1) Составьте все двузначные числа, используя цифры 7 и 9.
2) Составьте все трехзначные числа, используя цифры 3; 0 и 8.
3) Из цифр 5; 3; 1 составьте трехзначные числа, у которых все цифры разные.

B Упражнения

1187. 1) Велосипедист 2 часа ехал со скоростью 12 км/ч и 1 час — со скоростью 10 км/ч. Чему равна средняя скорость движения велосипедиста за указанный промежуток времени?
2) Найдите среднюю скорость движения мотоциклиста, если он на путь длиной 84 км проехал со скоростью 42 км/ч, 76 км — со скоростью 38 км/ч.

1188. 1) Сколькими способами можно составить нечетные двузначные числа, используя цифры 6; 1; 9; 0 только один раз?
2) Сколькими способами можно составить четные двузначные числа, используя цифры 3; 7; 1; 0 только один раз?

Упражнения

1189. Поезд проехал первый перегон в 100 км за $1\frac{2}{3}$ часа, второй перегон — за 1 час, увеличив скорость на 5 км/ч, и третий перегон, длиной 140 км — со скоростью 60 км/ч. Найдите среднюю скорость движения поезда на трех участках.

1190. Сколько четырехзначных чисел, у которых все цифры разные и вторая цифра 7, можно составить из цифр числа 2647?

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

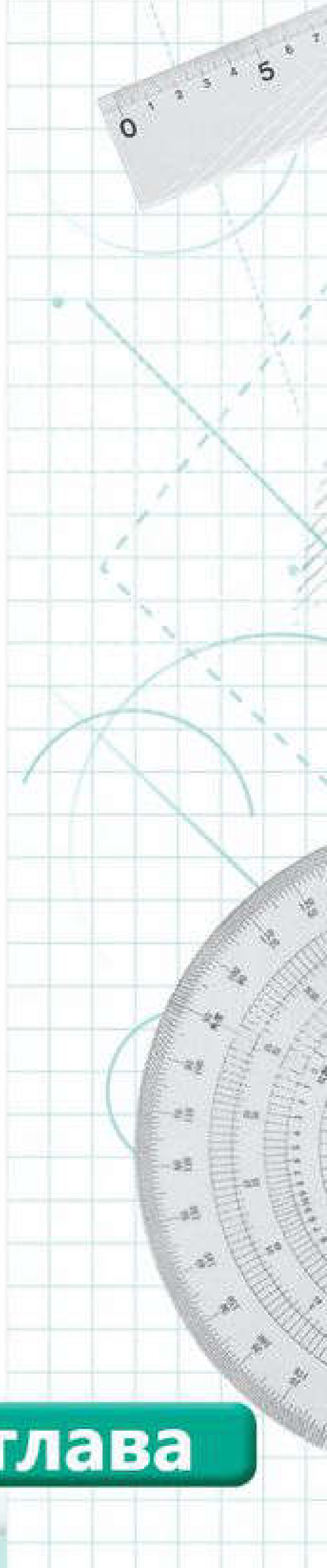
1191. 1) Заполните следующую таблицу.

Длина прямоугольника	Ширина прямоугольника	Площадь прямоугольника
6 см	3,5 см	? $см^2$
10 см	a см	? $см^2$
? дм	4,7 см	94 $см^2$
b см	? см	5,6 b $см^2$

2) Заполните следующую таблицу.

Урожайность	Площадь	Масса
? ц/га	8,5 га	8,5 ц
1,5 ц/га	? га	150 т
2,2 ц/га	15 га	? ц

ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ ВЕЛИЧИНАМИ



9 глава

9 Зависимости между величинами

§ 48. Способы задания зависимостей между величинами

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Зависимость между величинами. Аналитический способ. Независимая переменная. Зависимая переменная. График зависимости. Таблица.

Как решать задачи на зависимость между величинами?

Используя данную таблицу, найдите неизвестную величину:

Цена	Количество	Стоимость
340 тг/л	2 л	? тг
360 тг/л	2 л	? тг
300 тг/л	2 л	? тг

Рассмотрим величины: цену и стоимость. Эти величины взаимосвязаны между собой: изменение (увеличение или уменьшение) цены при покупке одного и того же количества ведет к обязательному изменению (увеличению или уменьшению) стоимости. Здесь стоимость является зависимой переменной величиной, а цена является независимой переменной величиной. То же самое можно сказать и про некоторые другие величины. *Например* , масса собранного урожая с одной и той же площади зависит от урожайности, поэтому масса собранного урожая — это зависимая величина, а урожайность — независимая величина.

Объясните!

1. Используя данные таблицы, укажите, какая переменная величина является зависимой, какая — независимой.

2. Найдите цену, если количество равно 4.

Стоимость (тг)	60	72	80	84	100
Цена (тг/шт)					

3. Найдите урожайность, если площадь равна 24 га.

Масса урожая (ц)	432	192	240	168	264
Урожайность (ц/га)					

Зависимую переменную величину обычно обозначают буквой y. Независимую переменную величину обычно обозначают буквой x.

Какими способами можно задать зависимости между величинами?

Зависимость между величинами может быть задана различными способами.

Задать зависимость между величинами — значит показать, как для заданных значений независимой переменной найти соответствующие значения зависимой переменной.

Как записать формулу зависимости между величинами по ее описанию?

Зависимость между величинами можно задать формулой.

Способ задания зависимости между величинами с помощью формулы называется *аналитическим способом задания зависимости*.

Составим формулу пути, пройденного с некоторой скоростью за 3 часа. Если изменять скорость, то за одно и то же время (*например*, за 3 часа) длина пройденного пути будет меняться. Значит, в данном примере скорость — это независимая переменная, ее обозначим через x, а длина пройденного пути — зависимая переменная, ее обозначим через y. Время движения не изменяется — 3 часа. Тогда зависимость длины пройденного пути от скорости движения запишется формулой $y = 3x$.

По этой формуле видно, что по значению независимой переменной x (скорости) можно найти значение зависимой переменной y (длины пройденного пути). *Например*, если x принимает значения 60 км/ч; 80 км/ч; 90 км/ч; 120 км/ч, то соответствующие значения зависимой переменной $y = 3x$ равны 180 км; 240 км; 270 км; 360 км. Чтобы их найти, подставляли соответственно числа 60; 80; 90; 120 вместо x в формулу $y = 3x$.

И наоборот, по формуле $y = 3x$, по заданному значению зависимой переменной y можно найти соответствующее значение независимой переменной x. *Например*, если y принимает значение 216 км; 240 км; 255 км, то соответствующие значения независимой переменной x равны 72 км/ч; 80 км/ч; 85 км/ч. Чтобы их найти, подставляли соответственно числа 216; 240; 255 вместо y в формулу $y = 3x$, поэтому формула $y = 3x$ задает зависимость между величинами.

Как составить таблицу для зависимостей, заданных формулой?

Зависимость между величинами можно задать с помощью таблицы, поскольку по таблице по заданному значению независимой переменной можно найти соответствующее значение зависимой переменной.

В верхней строке таблицы записываем значения независимой переменной x, в нижней строке таблицы — соответствующие значения зависимой переменной y.

Объясните!

Как, используя формулу $y = 3x$ и зная значения x, составили таблицу?

x	60	72	80	85	90	120
y	180	216	240	255	270	360

По таблице можно узнать, какое значение зависимой переменной y соответствует значению независимой переменной x, *например*, независимой переменной 60 соответствует значение зависимой переменной 180. И, наоборот, по таблице можно узнать, какая независимая переменная x соответствует значению зависимой переменной y. *Например*, значению зависимой переменной 255 соответствует значение независимой переменной 85.

Как построить график зависимости, заданной формулой или таблицей?

Зависимость между величинами можно задать с помощью графика.

Графиком зависимости между величинами называется множество точек координатной плоскости, у которых абсциссы равны значениям независимой переменной x, а ординаты — соответствующим значениям зависимой переменной y.

Объясните!

Используя выше составленную таблицу, как построили график (рис. 152)?

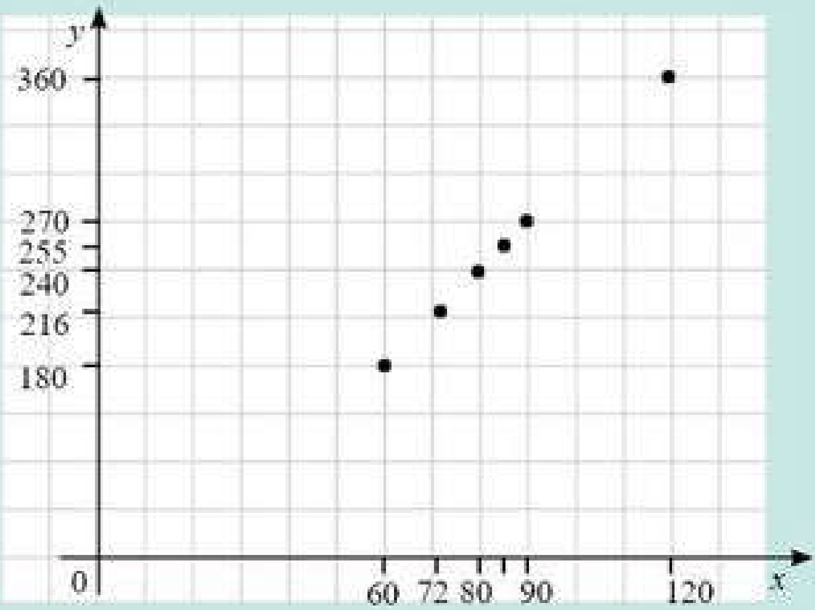


Рис. 152

График зависимости между величинами может состоять из одной или нескольких точек координатной плоскости, или из бесконечного числа точек, которые образуют линию.

По графику, состоящему *например* , из трех точек, можно узнать, что независимой переменной $x = 5$ соответствует значение зависимой переменной $y = 3$, поскольку координаты точки $A(5; 3)$ (рис. 153).

Независимой переменной $x = -4$ соответствует значение зависимой переменной $y = -2$, так как координаты точки $B(-4; -2)$ (рис. 153).

Независимой переменной $x = 2$ соответствует значение зависимой переменной $y = 1$, так как координаты точки $C(2; 1)$ (рис. 153).

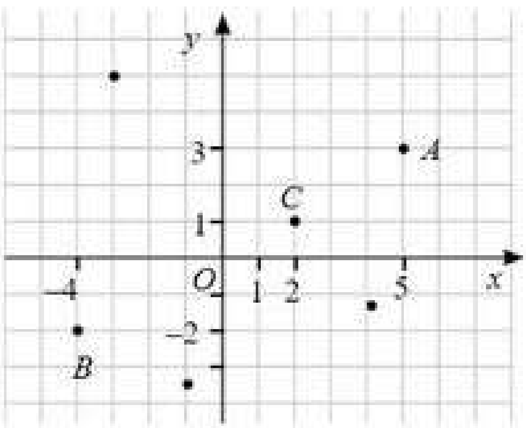


Рис. 153

Если графиком зависимости между величинами является линия, то по ней находят соответствующие значения независимой переменной. Чтобы найти по графику зависимости между величинами значение зависимой переменной, соответствующее независимой переменной 3, проводят перпендикуляр к оси Ox, проходящий через точку с абсциссой, равной числу 3 (рис. 154). Затем находят точку пересечения этого перпендикуляра с графиком, в данном примере — точку M. И, наконец, находят ординату этой точки. Для этого из точки M проводят перпендикуляр к оси Oy. Значит, независимой переменной 3 соответствует значение зависимой переменной — число 4.

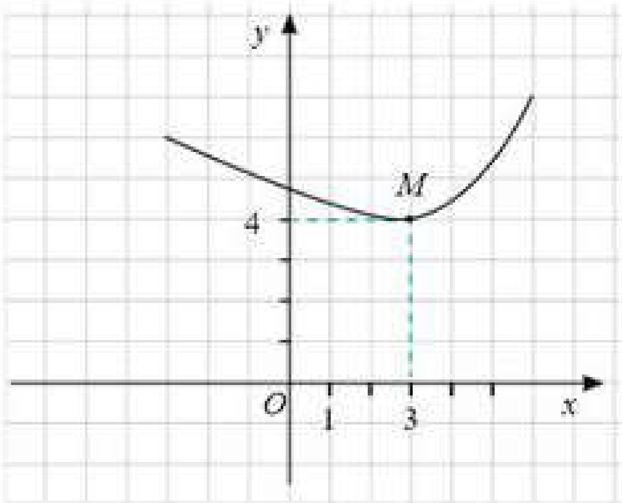
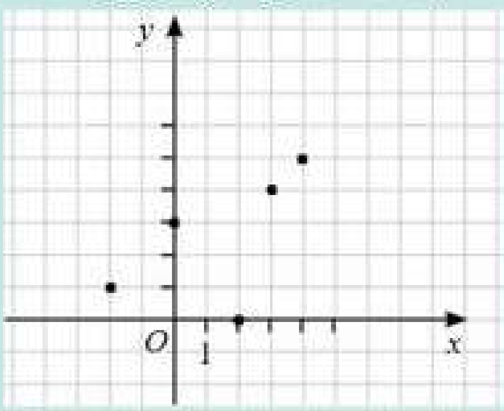


Рис. 154

Как составитьтаблицу для зависимостей, заданныхграфиком?

Объясните!

Как по графику (рис. 155) составили таблицу?



x	–2	0	2	3	4
y	1	3	0	4	5

Рис. 155

?

1. Может ли одна и та же величина быть зависимой величиной и независимой величиной? Приведите пример.
2. Почему с помощью формулы можно задать зависимость между величинами?
3. Почему с помощью таблицы можно задать зависимость между величинами?
4. Почему зависимость между величинами можно задать с помощью графика?

A Упражнения

1192. Для зависимой переменной y найдите ее значение при заданных x, равной 5; –2; 1,3; –0,8, если $y = 3x + 1$.

1193. При каком значении x значение зависимой переменной $y = -0{,}5x + 4$ равно 1,5; –10,5?

1194. По заданным значениям переменной y найдите соответствующие значения аргумента x, если: 1) $y = -x + 10$ и $y = 8{,}1$; 2) $y = 9{,}7 - 1{,}6x$ и $y = -6{,}3$.

1195. Длина стороны квадрата a см. Найдите периметр и площадь второго квадрата, если длина его стороны на 5 см короче длины стороны первого квадрата. Вычислите периметр и площадь второго квадрата, если: 1) $a = 7$ см; 2) $a = 20{,}5$ см.

1196. Ширина прямоугольника c см. Найдите периметр и площадь прямоугольника, если длина на 2,9 см больше его ширины. Вычислите периметр и площадь прямоугольника, если: 1) $c = 5{,}2$ см; 2) $c = 2\frac{1}{3}$ см.

B Упражнения

1197. Используя данные таблицы, постройте точки на координатной плоскости:

x	–5	–2	1,5	4	9
y	–3	4	0	5	–4

1198. Используя график, составьте таблицу значений зависимой и независимой переменной (рис. 156).

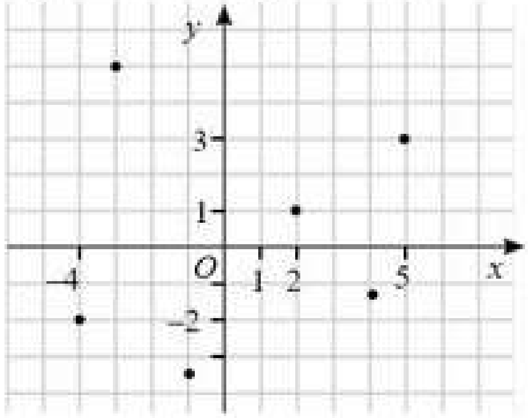


Рис. 156

1199. Используя рисунок 156, найдите значения зависимой переменной при $-2 \le x \le 2$.

1200. Используя рисунок 156, найдите значения независимой переменной при $-3 \le y \le 0$.

Упражнения

1201. Для значения аргумента x, где $-2{,}5 \le x \le 4$, найдите множество целых значений зависимой переменной y, заданной формулой $y = 5|x| - 1$.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

1202. 1) Заполните таблицу.

Время	3 с	? ч	14 ч
Скорость	56,3 км/ч	81 км/ч	? км/ч
Пройденный путь	? км	162 км	910 км

2) Заполните таблицу.

Длина	5 см	? см	3 дм	15 м
Ширина	8 см	2 см	15 см	? м
Высота	4,5 см	20 мм	? см	4000 мм
Объем	? см^3	100 см^3	1350 см^3	120 м^3

§ 49. Исследование зависимостей между величинами с использованием графиков реальных процессов

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

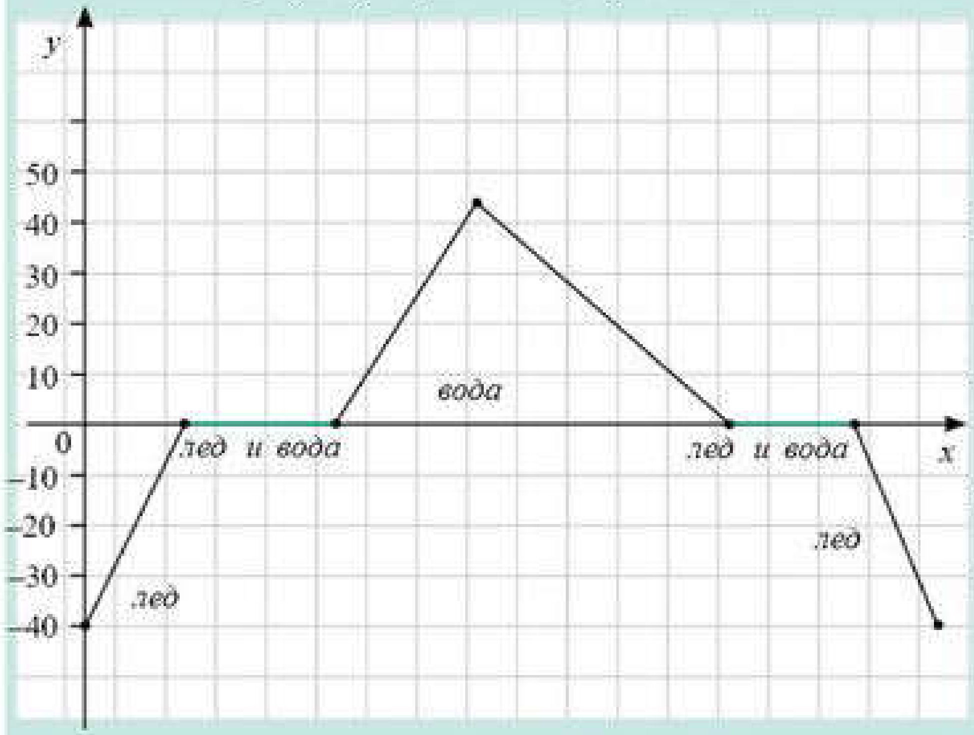
Зависимость между величинами. График зависимости. Реальные процессы.

Как найти и исследовать зависимости между величинами используя графики реальных процессов?

Для наглядного описания реальных процессов, отражающих зависимости между величинами, используют графики.

Объясните!

Как по графику (рис. 157) установили состояние вещества?



При температуре:
- ✓ –30°C — это лед
- ✓ 20°C — это вода
- ✓ 0°C — это лед и вода
- ✓ 30°C — это вода
- ✓ выше 0°C — это вода
- ✓ ниже 0°C — это лед

Рис. 157

По графику реального процесса можно получить ответы на многообразные вопросы.

Используя график (рис. 158), ответьте на вопросы:

1. Зависимость между какими величинами изображена на графике?
2. Какая единица величины соответствует единичному отрезку каждой оси?
3. В какое время температура воздуха была 1°C, 4°C, –1°C?
4. Какая температура воздуха была в 12 ч; 24 ч?
5. Найдите по графику наибольшую и наименьшую температуру в течение суток.
6. Найдите значение разницы между наибольшей и наименьшей температурой в течение суток.
7. Какая была средняя температура воздуха: 1) утром с 6 ч до 12 ч; 2) днем с 12 ч до 18 ч; 3) вечером с 18 ч до 23 ч; 4) ночью с 0 ч до 6 ч?

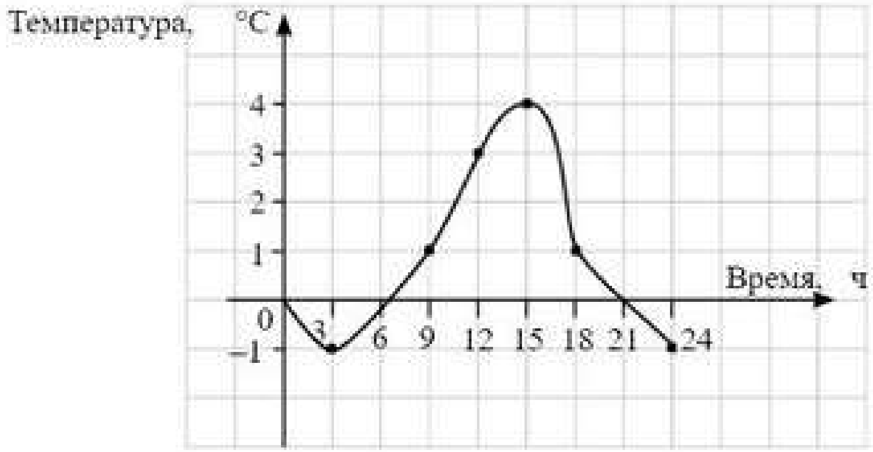


Рис. 158

1. Приведите примеры реальных процессов, которые вы сможете изобразить графически. Назовите величины, участвующие в этих процессах.

Упражнения

1203. На рисунке 159 показан график движения парусной яхты. Первую часть движения яхта прошла без паруса, вторую часть — под парусом.
Используя рисунок 159, ответьте на следующие вопросы:
1) Сколько километров яхта прошла под парусом?
2) Сколько километров яхта прошла без паруса?
3) На каком расстоянии от начала движения находилась яхта через 1 ч?

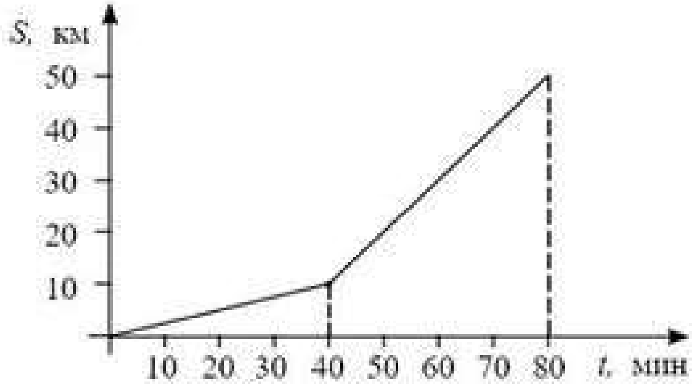


Рис. 159

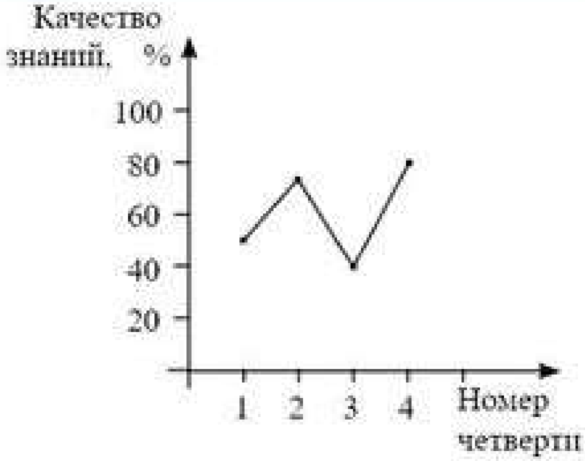


Рис. 160

1204. На рисунке 160 показано качество знаний учащихся 7 классов за четверти. Используя рисунок 160, составьте вопросы и ответьте на них.

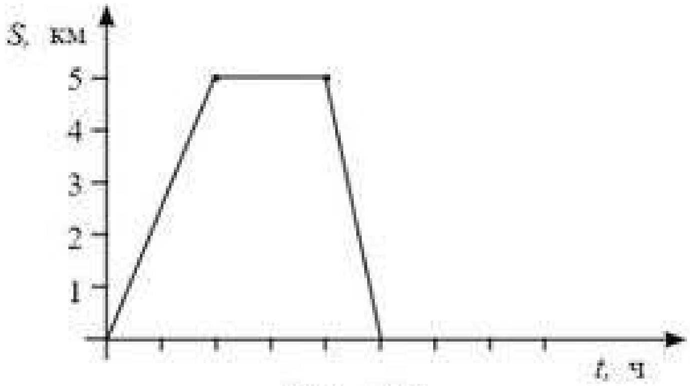


Рис. 161

1205. Туристы отправились из лагеря к озеру, отдохнули у озера 1,5 часа и вернулись обратно. На рисунке 161 изображено движение туристов.

Используя рисунок 161, ответьте на следующие вопросы:

1) Сколько километров туристы прошли до озера?

2) Сколько времени потратили туристы на обратный путь?

3) Сколько всего километров прошли туристы?

B Упражнения

1206. На рисунке 162 изображено изменение температуры воздуха за два дня. Используя рисунок 162, составьте задания и выполните их.

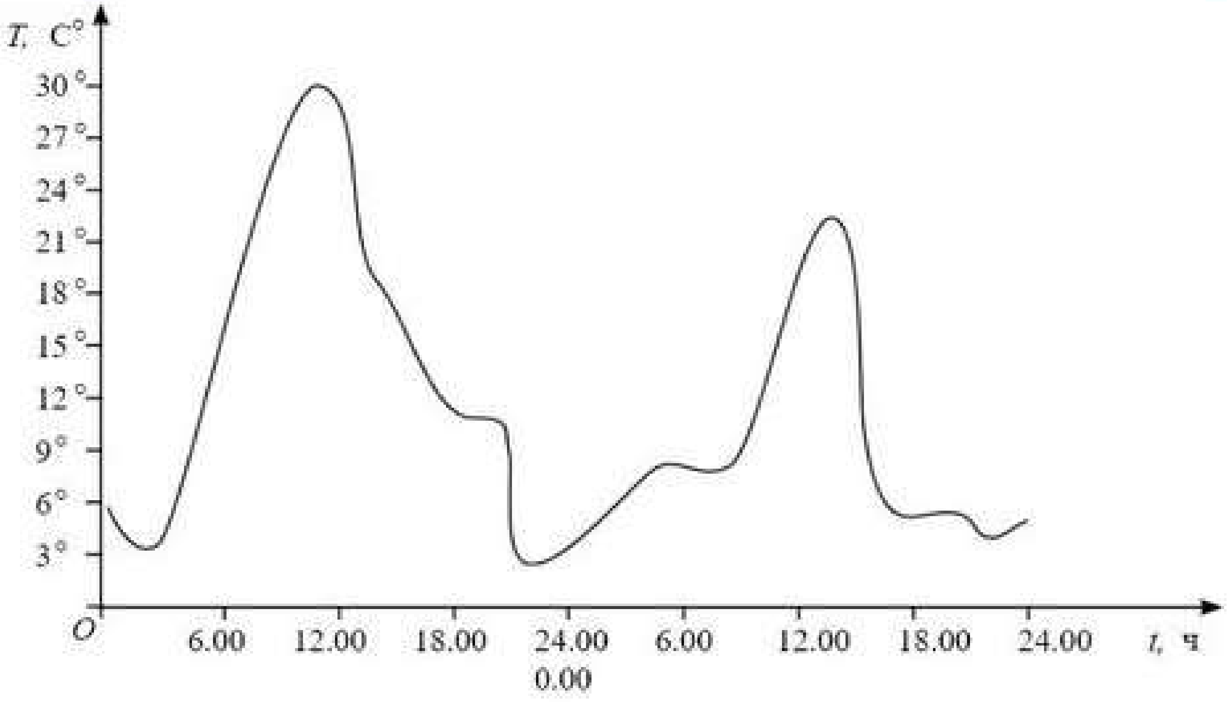


Рис. 162

Упражнения

1207. На рисунке 163 изображено движение двух автомобилей. Используя рисунок 163, составьте вопросы и ответьте на них.

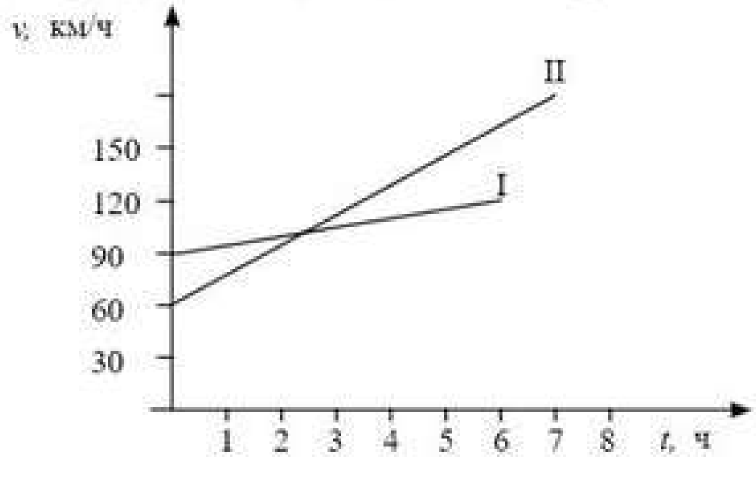


Рис. 163

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

1208. Длина радиуса окружности m см. Напишите формулы зависимости длины окружности от длины радиуса и площади круга от длины диаметра.

1209. Длина прямоугольного параллелепипеда 0,5 м, ширина m см, высота n см.
1) Найдите объем прямоугольного параллелепипеда.
2) Какие значения может принимать ширина m?
3) Какие значения может принимать высота n?

1210. Заполните следующую таблицу.

Длина радиуса	30 мм			
Длина диаметра		4,4 см		
Длина окружности				$5{,}6\pi$ дм
Площадь круга			81π м^3	

§ 50. Прямая пропорциональность и ее график

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Зависимость. Величины. Прямая пропорциональность. График.

Как распознаватьпрямо пропорциональныезависимости?

Вспомните!

Каким свойством обладает прямопропорциональность?

Объясните!

Почему являются прямо пропорциональными зависимости:

— стоимость товара от его цены при одном и том же количестве;

— длина пройденного пути от времени движения при одной и той же скорости движения;

— выполненная работа от затраченного времени на ее выполнение при одной и той же производительности труда?

Как по описаниюзаписатьформулу прямойпропорциональности?

Объясните!

Как по описанию записали формулу прямой пропорциональности $y = kx$, где $k \neq 0$:

— стоимости товара (y) от его цены (x) при одном и том же количестве (k);

— длины пройденного пути (y) от времени движения (x) при одной и той же скорости движения (k);

— выполненной работы (y) от затраченного времени на ее выполнение (x) при одной и той же производительности (k)?

С помощью какой формулы можно задать прямую пропорциональность?

Прямой пропорциональностью называется зависимость между величинами y и x, которую можно задать формулой $y = kx$, где k — некоторое число, не равное нулю, или величина, которая не изменяется (говорят: постоянная величина). Число k называется *коэффициентом прямой пропорциональности*.

Как построить график прямой пропорциональности?

Рассмотрим прямую пропорциональность, заданную формулой $y = 3x$, и построим ее график. Поскольку график состоит из точек, координаты которых являются значениями независимой переменной x и зависимой переменной y, то сначала выясним, какие значения может принимать x. Вместо x можно подставлять любое число, так как при любом значении x можно вычислить значение произведения $3x$.

Составим таблицу.

x	-2	$-1\frac{2}{3}$	$-1\frac{1}{3}$	-1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$1\frac{1}{3}$	$1\frac{2}{3}$	2
y	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6

Объясните!

Как, используя данные таблицы, построили точки (рис. 164)?

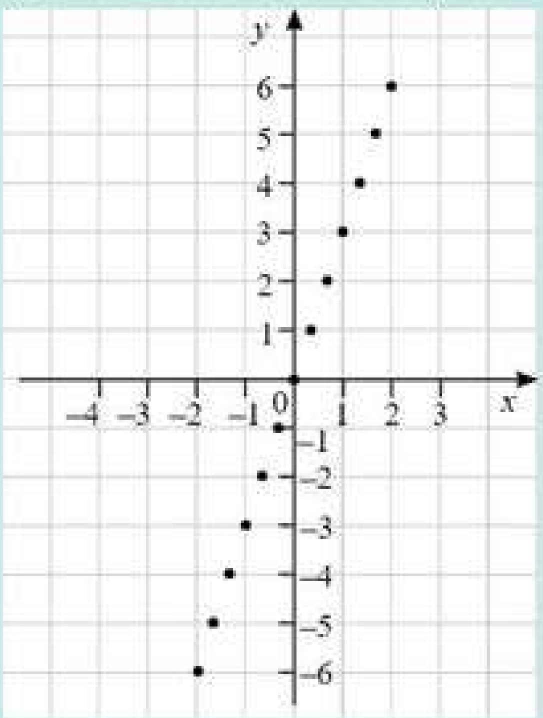


Рис. 164

Это не все точки графика зависимости $y = 3x$, поскольку x может принимать и другие значения. Можно проверить, что и другие точки графика прямой пропорциональности $y = 3x$ лежат на прямой, которая проходит через уже построенные точки. Эта прямая (рис. 165) и является графиком прямой пропорциональности $y = 3x$.

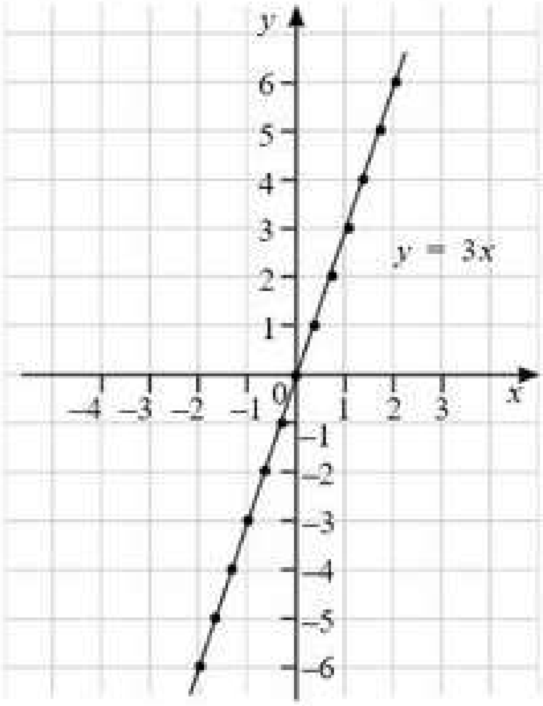


Рис. 165

Работа с рисунком!

Объясните!

Почему график прямой пропорциональности всегда проходит через точку $O(0; 0)$ (рис. 166)?

Почему для построения графика прямой пропорциональности $y = kx$, где $k \neq 0$, достаточно найти координаты только одной точки, отличной от начала координат?

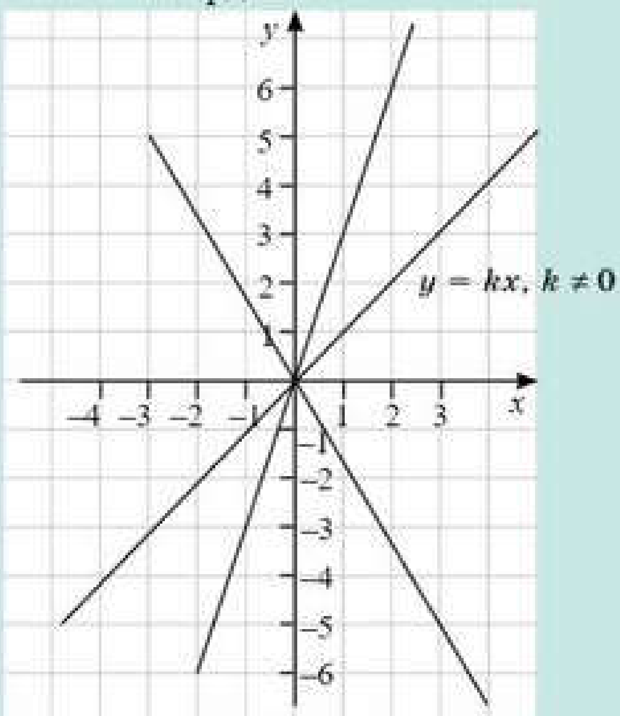


Рис. 166

Для построения графика прямой пропорциональности $y = kx$, где $k \neq 0$, достаточно найти координаты только одной точки, кроме O (0; 0) и провести прямую, проходящую через эту точку и начало координат.

Например, для построения графика прямой пропорциональности $y = 0{,}5x$ найдем координаты только одной точки A (2; 1) и проведем прямую через эту точку и начало координат (рис. 167).

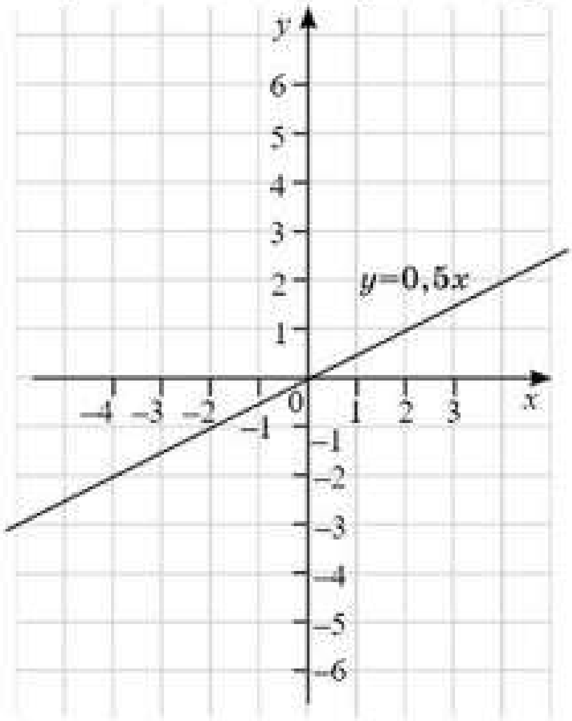


Рис. 167

Как интерпретировать (разъяснить, истолковать, перевести на более понятный язык) графики реальных зависимостей между прямо пропорциональными величинами?

На рисунке 168 показано движение со скоростью 50 км/ч.

По графику можно установить длину пройденного пути за некоторый промежуток времени или промежуток времени, за который пройден некоторый путь. *Например*, за 9 часов пройдено 450 км, за 4 часа — 200 км (рис. 169).

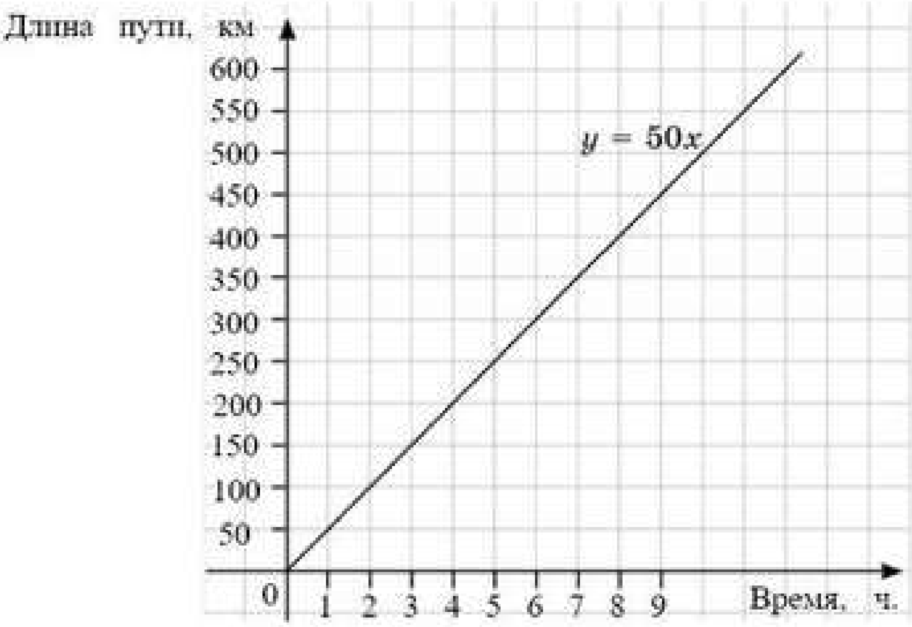


Рис. 168

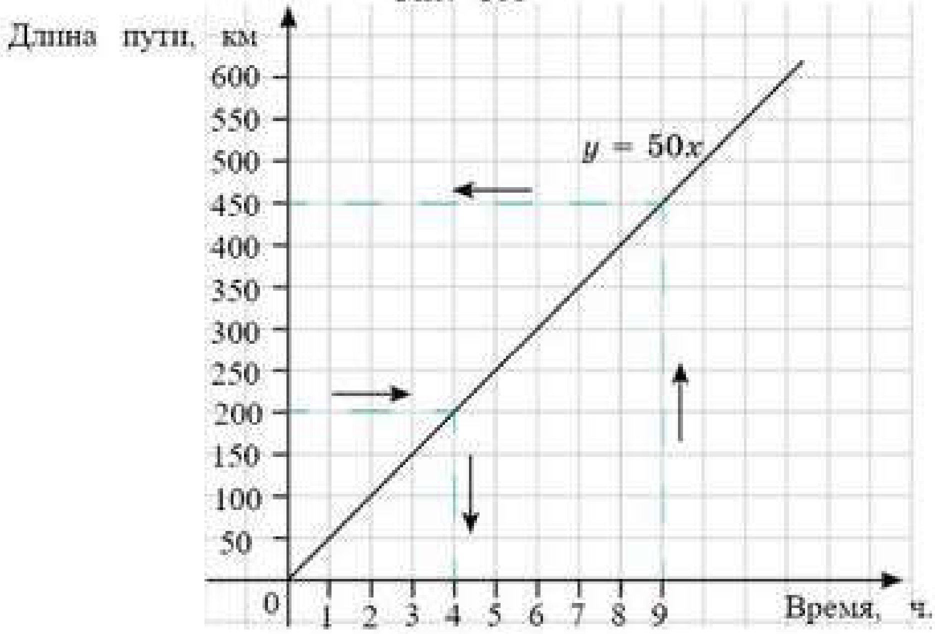


Рис. 169

1. Что называется *прямой пропорциональностью*?
2. Приведите пример прямой пропорциональности.
3. Что является графиком прямой пропорциональности?
4. Принадлежит ли графику прямой пропорциональности $y = 2x$ точка: 1) $A(1; 2)$, 2) $B(2; 1)$?

Упражнения

1211. Автомобиль проехал t час со скоростью 110 км/ч. Запишите формулу пройденного пути. Вычислите длину пути, пройденного автомобилем при: 1) $t = 1{,}5$; 2) $t = 4$; 3) $t = 2\frac{1}{6}$.

1212. Найдите значения y при заданных значениях x:

1) $y = 1{,}7x$, где $x = -2;\ 0;\ 3{,}8;\ -6{,}4;$

2) $y = -0{,}8$, где $x = 8;\ 0;\ -2{,}6;\ -5;$

3) $y = \frac{1}{3}x$, где $x = -18;\ 7;\ 5{,}16;\ -23{,}4;$

4) $y = -4\frac{3}{7}x$, где $x = 49;\ -2{,}8;\ 0{,}07;\ 57{,}4.$

Заполните таблицы и постройте графики **(1213—1214)** :

1213.

	$y = -2{,}5x$	$y = 1\frac{1}{2}x$	$y = 3{,}5x$	$y = -3\frac{5}{10}x$
x	2		–2	
y		6		7

1214.

	$y = -2{,}5x$	$y = 1\frac{1}{2}x$	$y = 3{,}5x$	$y = -3\frac{5}{10}x$
x		4		2
y	–10		–3,5	

В Упражнения

1215. Постройте график зависимости стоимости товара в количестве 5 штук от его цены.

1216. Постройте график зависимости периметра квадрата от его стороны.

1217. Для прямо пропорциональной зависимости, заданной формулой $y = -4x$, составьте таблицу с шагом, равным 1, при значениях $-3 \le x \le 3$. По таблице найдите значение зависимой переменной при значениях независимой переменной: –1,5; 2; 0; 2,5.

Упражнения

1218. Известно, что $y = 0{,}25x - \frac{5}{6}$. Сравните: 1) $y(-1)$ и $y(0)$; 2) $y(4)$ и $y(-8)$.

1219. Для прямо пропорциональной зависимости $y = kx$ найдите значение k, если:

1) $y(2) = 6{,}4$;
2) $y\left(-\frac{1}{11}\right) = -3$;
3) $y(-0{,}7) = 70$;
4) $y\left(8\frac{5}{6}\right) = -\frac{8}{9}$.

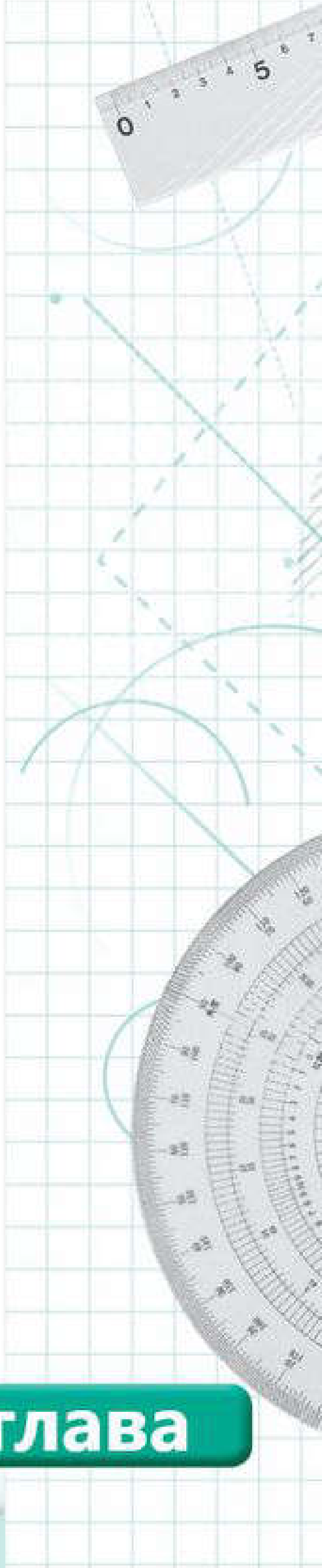
Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

1220. Заполните таблицу .

a	2		–3		1,5	
b		–0,5		0,5		0,5
$a + b$			–10			
$a - b$						0,2
$b - a$				–0,3		
$a \cdot b$					–15	
$a : b$		–100				
$b : a$	8					

1221. Найдите значение выражения $a \cdot c : k$, если $a = 18\frac{1}{6}$; $c = -9\frac{1}{12}$ и $k = 5{,}9$.

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ И ИХ СИСТЕМЫ



10 глава

10 Линейные уравнения с двумя переменными и их системы

§ 51. Линейное уравнение с двумя переменными

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Линейное уравнение. Переменная. Решение уравнения. Равносильные уравнения.

? Какое уравнение называется *линейным уравнением с двумя переменными*?

Линейным уравнением с двумя переменными x и y (с двумя неизвестными x и y) называется уравнение вида $ax + by + c = 0$, где a, b, c — числа, причем a и b одновременно не равны 0.

Например, $-2x + 7y = 0$; $12x - 11y + 5 = 0$ — линейные уравнения с двумя переменными.

Поскольку в таких уравнениях переменных две, поэтому решением уравнений с двумя переменными является не одно, а два числа, которые принято записывать в круглых скобках, причем число, которое подставляем в уравнение вместо x, пишем на первом месте, а y — на втором: $(x; y)$.

Говорите правильно

Запись $(x; y)$ *читают*: пара x, y.

Решением уравнения с двумя переменными $ax + by + c = 0$ называется такая пара чисел, при подстановке которых вместо x и y в уравнение получается верное числовое равенство.

Например, пара чисел $(0,5; 1)$ является решением уравнения с двумя переменными $12x - 11y + 5 = 0$, потому что при подстановке числа 0,5 вместо x и числа 1 вместо y в уравнение $12x - 11y + 5 = 0$ получим верное числовое равенство: $12 \cdot 0,5 - 11 \cdot 1 + 5 = 0$.

Решением этого уравнения будет пара (6; 7).
Действительно, $12 \cdot 6 - 11 \cdot 7 + 5 = 0$ — верное числовое равенство.

Подумайте!

Убедитесь, что пара (11,5; 13) также является решением уравнения $12x - 11y + 5 = 0$.

Пара чисел (0; 0) решением уравнения $12x - 11y + 5 = 0$ не является, так как $12 \cdot 0 - 11 \cdot 0 + 5 = 0$ — неверное числовое равенство.

Выясним, сколько решений может иметь линейное уравнение с двумя переменными. Рассмотрим линейное уравнение с двумя переменными $ax + by + c = 0$. Поскольку решением уравнения с двумя переменными $ax + by + c = 0$ является пара чисел $(x; y)$, то для нахождения решений будем вместо x в уравнение $ax + by + c = 0$ подставлять разные числа. Тогда значение суммы $ax + c$ будет число. Обозначив его буквой d, получим уравнение с одним неизвестным y вида $by + d = 0$, где y — переменная, b, d — некоторые числа. Из этого уравнения найдем y. Получим уравнение $by = -d$. Решим его. Если $b \neq 0$, то $y = -\frac{d}{b}$, т. е. в результате подстановки в уравнение $ax + by + c = 0$ вместо x некоторого числа получим соответствующее значение y, значит, пару $(x; y)$. Поскольку вместо x можем подставлять бесконечно много разных чисел, то получим бесконечно много пар, т. е. решений.

Подумайте!

Убедитесь, если $b = 0$, $a \neq 0$, то уравнение $ax + by + c = 0$ также имеет бесконечно много решений.

Решить линейное уравнение с двумя переменными — значит найти множество решений.

Если пара чисел является решением уравнения с двумя переменными, то говорят также, что эта *пара удовлетворяет этому уравнению*.

Объясните!

Почему пары (0; 0), (7; 2); (14; 4); (28; 8) удовлетворяют уравнению $-2x + 7y = 0$, а пары (1; 1); (5; 2) этому уравнению не удовлетворяют?

Уравнения с двумя переменными называются *равносильными*, если все решения одного уравнения равны решениям другого уравнения.

Какими свойствамиобладают уравненияс двумя переменными?

Так как в уравнениях буквы обозначают числа, которые при их подстановке в уравнение обращают его в верное числовое равенство, то, применив свойства верных числовых равенств, получим правила, которые будем использовать при решении уравнений с двумя переменными.

В уравнении с двумя переменными слагаемые можно переносить из одной части уравнения в другую, меняя знак слагаемых на противоположный. При этом получится уравнение, равносильное данному уравнению.

Объясните!

Почему уравнение $2x + 3y = -7x + 8y$ равносильно уравнению $2x + 7x = 8y - 3y$, или $9x = 5y$, или $9x - 5y = 0$?

Если обе части уравнения с двумя переменными умножить или разделить на какое-либо число, не равное нулю, то получится уравнение, равносильное данному уравнению.

Объясните!

Почему уравнение $6x + 8y - 10 = 0$ равносильно уравнению $3x + 4y - 5 = 0$; уравнение $3{,}7x - 4{,}8y + 2 = 0$ равносильно уравнению $37x - 48y + 20 = 0$?

?

1. С помощью какой формулы можно записатьлинейноеуравнениес двумя переменными?
2. Что являетсярешением линейногоуравненияс двумя переменными?
3. Сколько решенийможет иметьлинейноеуравнениес двумя переменными?
4. В каком случае говорят, что пара чисел удовлетворяет линейному уравнению с двумя переменными?
5. Какие два линейныхуравненияс двумя переменными называются *равносильными*?
6. Какие преобразованияи почему можно выполнятьпри решенииуравнений с двумя переменными?

A Упражнения

1222. Является ли линейным уравнением с двумя переменными уравнение:

1) $12x + 3y + 5 = 0$; 2) $-7x + 8y - 4 = 0$;

3) $1\frac{2}{3}x - 8y = 0$; 4) $3{,}5x + 0 \cdot y + 150$?

1223. Докажите, что удовлетворяют уравнению $2x + 3y - 6 = 0$ значения переменной x и переменной y:

1) $x = 3$; $y = 0$; 2) $x = 0$; $y = 2$;

3) $x = -1{,}5$; $y = 3$; 4) $x = 9$; $y = -4$.

1224. Докажите, что пары (2; 1), (0; 0,2); (–0,5; 0); (12; 5); (10; 4,2) являются решениями уравнения $-2x + 5y - 1 = 0$.

1225. Какие из пар (1; –5), (1,25; 2); (–5; 1); (–1,25; –2); (0; –12); (2,75; 0) являются решениями уравнения:

1) $7x - y = 12$; 2) $4x + 3y = 11$?

1226. Выразите переменную x через переменную y из линейного уравнения:

1) $x - 3y + 5 = 0$; 3) $5x + 11y - 3 = 0$;

2) $-2x + y - 7 = 0$; 4) $-7x + 6y - 1 = 0$.

1227. Выразите переменную y через переменную x из линейного уравнения:

1) $9x + y - 16 = 0$; 3) $11x - y + 20 = 0$;

2) $5x + 3y + 1 = 0$; 4) $6x - 12y + 19 = 0$.

B Упражнения

1228. Докажите, что равносильны друг другу уравнения:

1) $1{,}5x + 8y - 9 = 0$ и $1{,}5x = 9 - 8y$;

2) $3x + 6y - 2{,}4 = 0$ и $x + 2y - 0{,}8 = 0$.

1229. При каком значении m является решением уравнения:

1) $mx + 8y - 1 = 0$ пара (–3; 0,5);

2) $-9x + my + 4 = 0$ пара $(\frac{7}{9}; -2)$?

Упражнения

1230. Напишите уравнение, равносильное уравнению:

1) $x + 2y = 0,4$; 2) $-6x + y = -1,2$;

3) $\frac{5}{6}x - 1,2y = 1$; 4) $2,5x - 3\frac{1}{7}y - 3,5 = 0$.

П **(1231—1232)** :

1231. Число видов позвоночных животных, которые внесены в Красную книгу Казахстана, равно значению выражения: $\left(23\frac{5}{7} - 25\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-2\frac{2}{41}\right) \cdot 30 + 1\frac{2}{3} : \frac{1}{3}$. Найдите это число.

1232. Число видов беспозвоночных животных, которые внесены в Красную книгу Казахстана, равно наименьшему нечетному числу, являющемуся решением системы неравенств: $\begin{cases} 4x + 16,8 \geqslant 404,8, \\ 6x - 4,5 \leqslant 655,5. \end{cases}$ Найдите это число.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

1233. Что можно сказать о площади S прямоугольника, длины сторон которого равны a см и b см, если:

1) $a \leq 7\frac{3}{8}$; $b \leq 400$; 2) $a \geq 4,25$; $b \geq 8,4$?

1234. Упростите выражение $6a - 20b$ при

$a = \frac{1}{2}(m - n)$ и $b = 0,5(m + n)$.

§ 52. Системы линейных уравнений с двумя переменными

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Системы уравнений. Равносильные системы.

Что представляет собой система линейных уравнений с двумя переменными?

Если надо найти пары чисел, которые одновременно удовлетворяют двум уравнениям с двумя переменными, то говорят, что надо *решить систему двух уравнений с двумя переменными*.

Система двух уравнений с двумя переменными записывается с помощью фигурной скобки — *знака системы*.

Например, $\begin{cases} x+y-7=0, \\ 2x-y-2=0 \end{cases}$ — система двух линейных уравнений с двумя переменными.

Что называется *решением системы линейных уравнений с двумя переменными*?

Решением системы двух линейных уравнений с двумя переменными называется такая пара чисел, которая обращает каждое уравнение системы в верное числовое равенство одновременно.

Например, решением системы $\begin{cases} x+y-7=0, \\ 2x-y-2=0 \end{cases}$ является пара чисел (3; 4), так как после подстановки вместо x числа 3, вместо y — числа 4 в каждое уравнение системы получим: $3+4-7=0$ и $2\cdot 3-4-2=0$ — одновременно верные числовые равенства; пара чисел (2; 5) не является решением этой системы, так как после подстановки вместо x числа 2, вместо y — числа 5 в каждое уравнение системы получим: $2+5-7=0$ — верное числовое равенство, $2\cdot 2-5-2=0$ — неверное числовое равенство.

Решить систему двух уравнений с двумя переменными — значит найти все ее решения или показать, что данная система не имеет решения.

Две системы двух уравнений с двумя переменными называются *равносильными*, если все решения одной системы уравнений равны решениям другой системы уравнений.

?

1. Для чего нужны системы двух уравнений с двумя переменными?
2. Что является решением системы двух линейных уравнений с двумя переменными?
3. Какие две системы двух линейных уравнений с двумя переменными называются *равносильными*?
4. Будут ли две системы двух линейных уравнений с двумя переменными равносильными, если решением одной из них является только одна пара (2; 1), а решением другой — тоже только одна пара (1; 2)?

А Упражнения

1235. Проверьте, являются ли пары чисел (1; –1), (–1; –1) решениями системы уравнений:

1) $\begin{cases} 2{,}7x - 8{,}1y = 11{,}8, \\ 16x - 15y = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 21x - 20y = -16, \\ 9x - 10y = 1. \end{cases}$

1236. Докажите, что (–5; –5) является решением, а пара (5; –5) не является решением системы уравнений:

1) $\begin{cases} 5x - 3{,}6y = -7, \\ 8{,}4x - 9y = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -7{,}2x + 11y = -19, \\ 5{,}8x - 13y = 36. \end{cases}$

1237. Какие из следующих пар чисел (3; –3), (–3; –3), (–3; 3), (3; 3) удовлетворяют системе уравнений:

1) $\begin{cases} -10x + 13y + 9 = 0, \\ 27x - 19y + 24 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 6{,}5x + 8{,}1y - 4{,}89 = 0, \\ -14x - 23y - 27 = 0? \end{cases}$

1238. Докажите, что имеет бесконечное множество решений система уравнений:

1) $\begin{cases} 4x + 5y = 1{,}5, \\ 8x + 10y = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 1{,}2x - 1{,}7y = -4{,}4, \\ -6x + 8{,}5y = 22. \end{cases}$

B Упражнения

1239. Равносильны ли системы:

1) $\begin{cases} 6x-8y-1{,}2=0, \\ 3x+5y-0{,}2=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 3x=0{,}6+4y, \\ 15x=-1-25y; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 10x-7y-1=0, \\ -1{,}2y+6x+5=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 0{,}7y = x - 0{,}1, \\ y = 5x + 4\frac{1}{6}? \end{cases}$

1240. Найдите методом подбора хотя бы одно решение системы:

1) $\begin{cases} x+y=10, \\ xy=16; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-y=5, \\ xy=24. \end{cases}$

C Упражнения

1241. Найдите числа a и b, для которых пара чисел $(3; -4)$ является решением системы:

1) $\begin{cases} ax-0{,}5y-14=0, \\ -2x+by-11{,}6=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -\frac{5}{6}x+by=-28{,}5, \\ ax-3y=14\frac{2}{3}. \end{cases}$

Подготовьте сообщение

1242. Ñèñòåìû ëèíåéíûõ óðàâíåíèé ñ äâóìÿ íåèçâåñòíûìè (ïåðå-ìåííûìè) óìåëè ðåøàòü ñ íà÷àëà II òûñÿ÷åëåòèÿ äî í. ý. â Äðåâíåì Âàâèëîíå.

П (1243—1244) :

1243. Найдите наименьшее и наибольшее натуральные числа, при которых верно неравенство $|8x - 5| \le 11$.

1244. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, если длина равна 4 см, ширина составляет 75% от длины, высота в 5 раз больше половины ширины.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

1245. Решите уравнение $5(6x - 7) - 4(7x - 3) = 9x + 26$.

1246. Упростите выражение $1{,}1m - 2{,}7n$ при $m = a + b$, $n = a - b$.

§ 53. Решение систем линейных уравнений с двумя переменными способом сложения

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Системы уравнений. Способ сложения.

Как решить систему линейныхуравненийс двумя переменными способом сложения?

Пример 1. Рассмотрим систему $\begin{cases} x+2y-5=0, \\ 3x-2y+17=0. \end{cases}$

Особенностью этой системы является наличие в обеих уравнениях слагаемых $2y$ и $-2y$, содержащих переменную, значение суммы которых равно 0. Поскольку x и y обозначают числа, обращающие уравнения в верные числовые равенства, применим свойства верных числовых равенств: сложим почленно левые и правые части уравнений. Получим:

$$\begin{array}{r} x+2y-5=0 \\ +\ \underline{3x-2y+17=0} \\ 4x+12=0. \end{array}$$

Таким образом, получили уравнение с одним неизвестным. Решим его: $4x=-12$, или $x=-3$. Зная x, найдем y. Для этого в одно из уравнений вместо x подставим число -3. Получим:

$-3+2y-5=0$, или $2y-8=0$, или $2y=8$, или $y=4$. Значит, решением системы $\begin{cases} x+2y-5=0, \\ 3x-2y+17=0 \end{cases}$ является пара чисел $(-3;\ 4)$.

Ответ: $\{(-3;\ 4)\}$.

Описанный выше способ решения системы двух линейных уравнений с двумя переменными называют *способом сложения*.

Пример 2. Решим способом сложения систему: $\begin{cases} 8x+13y-73=0, \\ 8x-12y+52=0. \end{cases}$

В данных уравнениях нет слагаемых, значение суммы которых равно нулю, но есть одинаковые слагаемые $8x$.

Поскольку в результате умножения обеих частей уравнения с двумя переменными на одно и то же число, не равное нулю, получается уравнение, равносильное данному, то умножим обе части второго уравнения на –1 и применим способ сложения.

$$\begin{cases} 8x+13y-73=0 \\ 8x-12y+52=0 \end{cases} \Big| \times(-1) \quad \text{или} \quad \begin{cases} 8x+13y-73=0, \\ -8x+12y-52=0 \end{cases}$$

$$25y - 125 = 0,$$
$$25y = 125,$$
$$y = 125 : 25,$$
$$y = 5.$$

Далее, подставляя число 5 вместо y в одно из уравнений данной системы, получаем $x = 1$. Значит, решением системы является пара чисел (1; 5).

Легко заметить, что получим тот же результат, если из первого уравнения вычтем второе. Действительно,

$$\begin{array}{r} 8x + 13y - 73 = 0 \\ - \; 8x - 12y + 52 = 0 \\ \hline 25y - 125 = 0. \end{array}$$

В таких случаях обычно говорят о вычитании уравнений, сам способ называют *способом алгебраического сложения* , поскольку вычитание всегда можно заменить сложением, так как $a - b = a + (-b)$.

Пример 3. Найдем способом алгебраического сложения решение системы:

$$\begin{cases} 4x+7y-26=0, \\ 3x-8y+7=0. \end{cases}$$

В данных уравнениях нет слагаемых, значение суммы или разности которых равно нулю.

Поскольку в результате умножения обеих частей уравнения на одно и то же число получается уравнение, равносильное данному, то умножим обе части первого уравнения на 3, второго — на –4. Полученные уравнения сложим.

$$\begin{cases} 4x+7y-26=0, \\ 3x-8y+7=0 \end{cases} \begin{vmatrix} \times 3 \\ \times(-4) \end{vmatrix} \begin{cases} 12x+21y-78=0, \\ -12x+32y-28=0. \end{cases}$$

Решив систему $\begin{cases} 12x+21y-78=0, \\ -12x+32y-28=0, \end{cases}$ убедитесь, что ее решением является пара чисел (3; 2).

Алгоритм решения систем линейных уравнений с двумя переменными:

1) Если коэффициенты при какой-либо переменной не являются противоположными числами, то обе части каждого уравнения умножают на такие числа, чтобы коэффициенты при одной из переменных оказались противоположными числами.

2) Складывают левые и правые части получившихся уравнений.

3) Решают получившееся уравнение с одной переменной.

4) Найденное значение одной переменной подставляют в одно из уравнений системы и находят значение другой переменной.

5) Записывают решение системы.

?

1. Почему один из способов решения системы двух линейных уравнений с двумя переменными назвали *способом сложения*?
2. Какое арифметическое действие можно выполнить с левыми и правыми частями линейных уравнений с двумя переменными при использовании способа сложения? Почему?
3. Можно ли применить способ сложения для решения систем двух линейных уравнений с двумя переменными в случае, если коэффициенты при x и y таковы, что сложение уравнений сразу не приводит к уменьшению числа неизвестных?

A Упражнения

1247. Найдите решение системы уравнений:

1) $\begin{cases} x + y = 14, \\ x - y = 8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = 7, \\ x + y = 23; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x + y = 32, \\ x - y = 14; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x - y = 9, \\ x + y = 29; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 2x + y = 11, \\ 3x - y = 4; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 3x - y = 5, \\ 4x + y = 9. \end{cases}$

1248. Вы узнаете величину самой большой пасти, если найдете решение системы уравнений с двумя переменными: $\begin{cases} x + y = 300, \\ x - 0,5y = 120; \end{cases}$

x — под таким углом может распахнуть пасть бегемот; y — столько сантиметров достигает расстояние между челюстями бегемота.

Бегемот

1249. Найдите решение системы уравнений и вы узнаете о Наурызымском заповеднике, который находится в Костанайской области:

$$\begin{cases}0{,}1x+0{,}01y=32,\\ 2x+y=1200;\end{cases}$$

x — столько видов птиц в Наурызымском заповеднике;

y — примерно столько видов растений в заповеднике.

Наурызымский заповедник

Найдите решение систем уравнений или докажите, что системы не имеют решений **(1250—1260):**

1250. 1) $\begin{cases}3{,}2x+1\frac{4}{5}y-5=0,\\ 3{,}8x-1{,}8y-2=0;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}-7{,}12x+3{,}9y-3{,}22=0,\\ -2{,}88x-3{,}9y-6{,}78=0.\end{cases}$

1251. 1) $\begin{cases}\frac{1}{4}x-0{,}5y-1{,}34=0,\\ -0{,}25x+0{,}5y-1{,}34=0;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2x-0{,}5y-1{,}4=0,\\ -2x+0{,}5y-0{,}6=0.\end{cases}$

1252. 1) $\begin{cases}-2x-0{,}8y-1=0,\\ -2x+0{,}2y=0;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}4x-\frac{2}{3}y+3\frac{2}{3}=0,\\ 4x+3\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}=0.\end{cases}$

1253. 1) $\begin{cases}3^2x+4^2y-5^2=0,\\ 10x+16y-26=0;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}9^2x-2^3y-3^5=0,\\ -19x-8y+57=0.\end{cases}$

1254. 1) $\begin{cases}\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=-2,\\ 2x-y=-3;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}-x+4y=52,\\ \frac{x}{8}-\frac{y}{7}=-4.\end{cases}$

1255. 1) $\begin{cases}\frac{2}{7}x-\frac{3}{14}y-\frac{1}{7}=0,\\ x+y-4=0;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x+5y-24=0,\\ \frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y-3\frac{1}{3}=0.\end{cases}$

1256. 1) $\begin{cases}5x-8y+51=0,\\ 2{,}5x+3y-23{,}5=0;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}6x-5y+26=0,\\ 3x+17y-65=0.\end{cases}$

1257. 1) $\begin{cases} 8x + 7y + 53 = 0, \\ 4x - 5y + 1 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7x + 9y + 48 = 0, \\ 6x + 3y + 27 = 0. \end{cases}$

1258. 1) $\begin{cases} \frac{1}{3}x + 0{,}25y = 0, \\ 29x - 2{,}5y = -97; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 0{,}75x + \frac{1}{8}y + 1 = 0, \\ 1{,}3x - 0{,}65y = 0. \end{cases}$

1259. 1) $\begin{cases} 36x - 3y - 39 = 0, \\ 37x + 2y - 35 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 13x + 4y + 17 = 0, \\ 12x - 3y + 9 = 0. \end{cases}$

1260. 1) $\begin{cases} 3x + 7y - 3 = 0, \\ 7x + 9y - 7 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 6x - 13y + 1 = 0, \\ 5x + 10y - 20 = 0. \end{cases}$

B Упражнения

Найдите решение систем уравнений (**1261—1263**):

1261. 1) $\begin{cases} 2x - 3y + 1 + (x - y + 5) = 0, \\ 5x + 7y - 7 - (8x + y + 1) = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 7x + 9y - 14 + (y - 5x - 11) + 3 = 0, \\ 11x + y - 9 + (4y - 9x - 7) = 0. \end{cases}$

1262. 1) $\begin{cases} 3(x - 2) - 2(y + 1) = -1, \\ 5(x + 3) - 8(y - 2) = 45; \end{cases}$

2) $\begin{cases} -6(4 - x) + 4(y + 5) = -2, \\ 11(1 + x) - 9(7 - y) = -45. \end{cases}$

1263. 1) $\begin{cases} \frac{x - 4y}{5} - \frac{x - 5y}{6} = 0, \\ \frac{3x + y}{2} + \frac{x + 10y}{3} = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{7x + y}{4} - \frac{13x - y}{3} = -4, \\ \frac{x + 6y}{14} - \frac{8x - 3y}{10} = 0. \end{cases}$

1264. Найдите значение выражения $3x_0 - 5y_0$, если $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений:

1) $\begin{cases} 17x - 30y = 12, \\ -5x + 6y = -12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 29x + 3y = -23, \\ 19x - 21y = -61. \end{cases}$

Упражнения

1265. Найдите решение системы уравнений:

1) $\begin{cases}(3-7x)y+7y(x+9)=264,\\ x(4-y)=y(8-x)-34;\end{cases}$

2) $\begin{cases}-x(1-12y)+4y(-3x+2)=26,\\ y(x+6)=x(y-3)-3;\end{cases}$

3) $\begin{cases}(x-2)y-x(y+1)=2-3(x-2),\\ (x+5)y-y(x-2)=-42+4(x+5).\end{cases}$

П **(1266—1267)** :

1266. Что можно сказать о площади квадрата, длина стороны которого равна a см, если:

1) $a \le \frac{1}{2}$ см; 2) $a \ge 0{,}2$ см; 3) $\frac{1}{3}$ см $\le a \le 0{,}6$ см?

1267. Выполните действия: $\dfrac{\left(7\frac{9}{16} : \frac{33}{80} - 21\frac{5}{6}\right)}{\left(51\frac{4}{9} - 49{,}75\right) : 8\frac{17}{36} + 6{,}8}$.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

1268. Упростите выражение $-4{,}6(5-2y)-25(0{,}4y+3)+97$.

1269. Выразите одну переменную через другую:

1) $2x-y-5=0$; 2) $3x-6y+9=0$;

3) $2{,}7x+15y+83=0$; 4) $-52x+76y+89=0$.

§ 54. Решение систем линейных уравнений с двумя переменными способом подстановки

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Системы уравнений. Способ подстановки.

? Как решить систему линейныхуравненийс двумя переменными способом подстановки?

Системы двух линейных уравнений можно решать *способом подстановки* . Суть этого способа заключается в том, что одно из уравнений записывают в виде, где в левой части стоит одна из переменных. В таких случаях говорят, что *переменную* x *выразили через переменную* y или *переменную* y *выразили через переменную* x.

Объясните!

Как в уравнении $x + 5y - 7 = 0$, выразив x через y и y через x, соответственно получили $x = 7 - 5y$ и $y = \frac{7 - x}{5}$?

После того, как одну переменную из какого-либо уравнения выразили через другую переменную, в другое уравнение вместо переменной x или y подставляем равные им выражения (в зависимости от того, какую переменную выражали через другую).

Например , решим способом подстановки систему уравнений с двумя переменными: $\begin{cases} x + 5y - 7 = 0, \\ 3x + 8y + 21 = 0. \end{cases}$

Выразим переменную x через переменную y из первого уравнения: $x = 7 - 5y$. Во втором уравнении вместо x запишем $7 - 5y$. Получим систему: $\begin{cases} x = 7 - 5y, \\ 3(7 - 5y) + 8y + 21 = 0. \end{cases}$

После подстановки видим, что второе уравнение содержит только одну переменную. Решим это уравнение отдельно. Раскроем скобки, приведем подобные слагаемые:

$$21 - 15y + 8y + 21 = 0,$$
$$-7y + 42 = 0,$$
$$-7y = -42,$$
$$y = 6.$$

Подставим число 6 вместо y в первое уравнение. Получим:

$x = 7 - 5 \cdot 6$, или $x = 7 - 30$, или $x = -23$.
Значит, система имеет одно решение: $(-23;\ 6)$.

Ответ: $\{(-23;\ 6)\}$.

1. В каком случае говорят, что в уравнении с двумя переменными:
   1) переменную x выразили через переменную y;
   2) переменную y выразили через переменную x?
2. Почему один из способов решения системы двух линейных уравнений с двумя переменными назвали *способом подстановки*?
3. Изменится ли решение системы двух линейных уравнений с двумя переменными, если при использовании способа подстановки выразить переменную x через переменную y или переменную y — через переменную x?
4. Можно ли одну и ту же систему двух линейных уравнений с двумя переменными решить и способом сложения, и способом подстановки?

Упражнения

1270. Выразите переменную y через переменную x из уравнения:
1) $x + y = 10$; 2) $x - y = 12{,}5$; 3) $3x + y = 17$;
4) $x + 4y = -5$; 5) $5x + 7y = 1$; 6) $1{,}1x - 2y = 19$.

1271. Выразите переменную x через переменную y из уравнения:
1) $x + y = 21{,}5$; 2) $x - y = 36$; 3) $4x - y = 19$;
4) $-3x + 4y = 41$; 5) $0{,}5x + y = 4$; 6) $-1{,}5x + 2y = 5$.

1272. Выразите одно неизвестное через другое из уравнения:
1) $2x + y = 15$; 2) $y + 6x = 23$; 3) $0{,}9x - 2y = 18$.

Найдите решение систем уравнений (**1273—1278**):

1273. 1) $\begin{cases} x = -7 + y, \\ 2x - 3y = -16; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = x - 5, \\ 4x + y = 10; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} -x = 3 - 2y, \\ x - 5y = -6. \end{cases}$

1274. 1) $\begin{cases} x + 2y = 0{,}3, \\ x = -y + 0{,}5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y - 8x = 83{,}1, \\ y = -x - 6{,}9; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 21x + y = -15{,}1, \\ y = 0{,}9 - x. \end{cases}$

1275. 1) $\begin{cases} x + y = \frac{4}{3}, \\ 3x - 2y = -1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x + y = \frac{1}{6}, \\ x - 2y = -2\frac{1}{6}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y + 2x = -1, \\ 5x - 4y = 10{,}5. \end{cases}$

1276. 1) $\begin{cases} x + 2y = \frac{1}{12}, \\ 2x - y = -\frac{1}{4}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x - y = 7{,}8, \\ 8x - 3y = 18{,}6; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 13y - 4x = 17{,}1, \\ x + y = 0{,}4. \end{cases}$

1277. 1) $\begin{cases} x - y = -\frac{5}{7}, \\ 4x + 3y = -4\frac{6}{7}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 10x - 3y = \frac{94}{9}, \\ x + y = -\frac{14}{9}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 9x + 2y = -\frac{19}{7}, \\ y - x = \frac{10}{21}. \end{cases}$

1278. 1) $\begin{cases} 4x + 9y - 9 = 0, \\ 5x - 6y - 17 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 1{,}5x - 1{,}2y + 18 = 0, \\ 0{,}7x - 1{,}8y + 14{,}6 = 0. \end{cases}$

B Упражнения

Решите системы уравнений (**1279—1283**):

1279. 1) $\begin{cases} 5(x + y) = 7 + 4x, \\ 3(x + y) = 4 - y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3(x - y) = 17 + 2x, \\ 2(y - x) = 13 - x. \end{cases}$

1280. 1) $\begin{cases} 10(x + y) = 30 + 8x, \\ 9(x - y) = -49 - 8y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 21(x - y) = 48 + 20x, \\ 19(y + x) = 100 + 12y. \end{cases}$

1281. 1) $\begin{cases} \frac{x}{9} - \frac{y}{6} = -1, \\ 5x - y = 72; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{x}{8} + \frac{y}{12} = -1, \\ 6x + y = -120. \end{cases}$

1282. 1) $\begin{cases} 6(x+y)-5y=x+8, \\ 10x-7(y-x)=-y+46; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 49y-31(x+y)=14-27x, \\ 13(x-y)+14y=12x+13. \end{cases}$

1283. 1) $\begin{cases} 1{,}5(x+2y)-4(y-3x)-13{,}5=0, \\ 2(y-3x)+2{,}5(x+2y)+3{,}5=0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4{,}5(x-4y)+3(y+3x)+1{,}5=0, \\ 5(x+2y)-3{,}5(y-2x)-18{,}5=0. \end{cases}$

Упражнения

Найдите решение систем уравнений (**1284—1286**):

1284. 1) $\begin{cases} (x-4)y+13=x(y-3)+15-2(x-4), \\ (x+5)+xy=8x-9+y(x+5); \end{cases}$

2) $\begin{cases} 25-4(x+7)=x(1+y)-4-y(x+7), \\ y(6-x)+18=x(2-y)+24. \end{cases}$

1285. 1) $\begin{cases} \dfrac{4x-3}{2}+\dfrac{5y+1}{3}=12{,}5, \\ 1{,}5x-0{,}7y=-3{,}4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2{,}3x-1{,}9y=0{,}8, \\ \dfrac{4-3y}{4}+\dfrac{-5x-2}{3}=-4{,}5. \end{cases}$

1286. 1) $\begin{cases} \dfrac{x-y}{7}-\dfrac{y+x}{8}=\dfrac{5}{8}, \\ 1{,}6x+5y=-2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{y+x}{5}-\dfrac{y-x}{6}=0{,}6, \\ 8{,}5x-13y=-82{,}5. \end{cases}$

1287. Найдите значение выражения: 1) $2x_0-5y_0$; 2) $0{,}5y_0+0{,}2x_0$, если координаты точки $A(x_0;\,y_0)$ являются решением системы $\begin{cases} 9{,}4x-0{,}2y+20{,}8=0, \\ -6{,}5x-2{,}5y+12=0. \end{cases}$

П **(1288—1290)** :

1288. Упростите выражение $-8{,}5(x + 2y) + 1{,}7(5x - 4y) - x - 11y$.

1289. Найдите 60% от числа x, если $x = \dfrac{2{,}8 \cdot 0{,}65 - 2{,}3}{97\frac{4}{7} : 136{,}6 \cdot (-0{,}07)}$.

1290. Найдите значение выражения $5{,}4m - n : 30 + 2{,}65$, если $m = 8\dfrac{7}{9}$ и $n = 4{,}2$.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

1291. Длина прямоугольника равна 2,8 дм, ширина — в 4 раза меньше длины. Найдите длину стороны квадрата, площадь которого равна площади прямоугольника.

1292. Составьте формулу для решения задачи.
Купили x кг помидоров по цене 215 тг/кг и y кг огурцов — по цене 190 тг/кг. Сколько сдачи получит покупатель с 2000 тенге? Ответьте на вопрос задачи, если:

1) $x = 1{,}5$, $y = 0{,}5$;
2) $x = 0{,}5$, $y = 1{,}5$;
3) $x = \dfrac{3}{4}$, $y = 1\dfrac{1}{4}$;
4) $x = 2\dfrac{3}{4}$, $y = 3\dfrac{1}{4}$.

1293. Выясните, сколько решений имеет система уравнений:

1) $\begin{cases} 6x + y = 7, \\ -4x + y = 2; \end{cases}$
2) $\begin{cases} y + x = 5, \\ y = -x + 5. \end{cases}$

§ 55. Решение задач с помощью составления систем уравнений

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Задача. Система уравнений.

Как решить задачу с помощью составлениясистемы линейных уравнений?

Задача 1. Найдите два числа, если известно, что значение их суммы равно 95, значение разности — 19.

Решение. Обозначим одно число буквой x, другое — y. Поскольку значение суммы чисел равно 95, то $x + y = 95$; если значение разности равно 19, то $x - y = 19$. Составим систему уравнений $\begin{cases} x + y = 95, \\ x - y = 19. \end{cases}$ Решим эту систему способом сложения.

$$+\begin{array}{r} x + y = 95, \\ x - y = 19, \\ \hline 2x = 114, \\ x = 57. \end{array} \qquad \begin{array}{r} 57 - y = 19, \\ -y = 19 - 57, \\ \hline -y = -38, \\ y = 38. \end{array}$$

Поскольку буквой x было обозначено одно число, буквой y — другое, то искомые числа равны 57 и 38.

Ответ: 57 и 38.

Задача 2. Стоимость трех карандашей и пяти тетрадей 375 тг, семи таких карандашей и четырех тетрадей — 530 тг. Какова стоимость пяти карандашей и девяти тетрадей?

Решение. Обозначим цену карандаша через x тг/шт., цену тетради — y тг/шт. Так как стоимость трех карандашей и пяти тетрадей 375 тг, то можно составить уравнение: $3x + 5y = 375$. Так как стоимость семи карандашей и четырех тетрадей 530 тг, то можно составить уравнение: $7x + 4y = 530$. Значит, получаем систему уравнений $\begin{cases} 3x + 5y = 375, \\ 7x + 4y = 530. \end{cases}$

Решив ее способом алгебраического сложения, убедитесь, что система $\begin{cases} 3x + 5y = 375, \\ 7x + 4y = 530 \end{cases}$ имеет решение (50; 45).

Значит, цена карандаша 50 тг/шт., цена тетради — 45 тг/шт. Тогда стоимость пяти карандашей и девяти тетрадей: $50 \cdot 5 + 45 \cdot 9 = 655$ (тг).

Ответ: 655 тг.

?

1. В каких случаях удобно решать задачу с помощью системы двух линейных уравнений с двумя переменными?
2. Можно ли решить задачу 1 с помощью составления одного уравнения с одним неизвестным?

А Упражнения

1294. Найдите два числа, значение суммы которых равно:
1) 12, значение разности — 6;
2) 55, значение разности — 25;
3) –13, значение разности — 1;
4) 3, значение разности — (–13);
5) 10, значение разности — 5,84;
6) $\frac{5}{56}$, значение разности — $\frac{1}{168}$.

1295. Найдите два числа, если:
1) значение их суммы равно 5, значение их частного — 4;
2) значение их разности равно 2, значение их частного — 1,2.

1296. Найдите два числа, если: 1) значение их разности равно 2 и одно число больше другого в 7 раз; 2) значение их суммы равно $16\frac{2}{3}$ и одно число больше другого в 9 раз.

1297. За две одинаковые пачки чая и три одинаковые пачки печенья заплатили 510 тг. За три таких же пачки чая и пять пачек печенья надо заплатить 790 тг. Найдите цену пачки чая и цену пачки печенья.

1298. Если мотоциклист и велосипедист выедут одновременно навстречу друг другу по одной и той же дороге из пунктов A и B, между которыми 78 км, то они встретятся через 1,5 часа. Найдите скорость велосипедиста, если она составляет 30% от скорости мотоциклиста.

1299. Скорость движения на лодке на 9 км/ч меньше скорости движения на моторной лодке и составляет от нее 40%. Найдите скорость моторной лодки.

B Упражнения


Сова

1300. Вы узнаете о самой большой и самой маленькой сове, решив задачу:
1) длина самой маленькой совы на 57 см меньше длины филина — самой большой птицы из отряда сов, $\frac{1}{7}$ длины самой маленькой совы и 0,1 длины филина вместе составляют 9,1 см. Найдите длину тела самой большой и самой маленькой сов;
2) масса самой маленькой совы составляет 5% от массы филина, значение суммы масс 100 маленьких сов и 3 филинов равно 17 кг. Каковы массы филина и самой маленькой совы?

1301. Вы узнаете о самом большом и самом маленьком оленях, решив задачу:

1) высота самого большого оленя в $6\frac{3}{19}$ раза больше высоты самого маленького оленя — южного пуду. $\frac{1}{117}$ высоты самого большого оленя и $\frac{1}{19}$ высоты южного пуду равны 4 м. Сколько сантиметров составляет высота южного пуду и сколько метров — высота самого большого оленя?

2) Масса южного пуду составляет 1% от массы самого большого оленя. Значение разности $\frac{1}{8}$ массы самого большого оленя и массы южного пуду равно 92 кг. Найдите массы этих животных.

1302. Посевная площадь картофеля в 2008 г. в Атырауской области нашей республики составила $\frac{1}{17}$ от посевной площади картофеля в Южно-Казахстанской области. Найдите посевные площади картофеля в каждой из этих областей, если их общая площадь равна 10 800 га.

1303. Общая площадь лесного фонда Павлодарской области в 2008 г. составила 50% от площади лесного фонда Актюбинской области, $\frac{3}{5}$ от площади лесного фонда Павлодарской области вместе с $\frac{1}{8}$ — Актюбинской области равны 425 тыс. га. Каковы площади лесных фондов этих областей?

1304. Сколько тонн сахара произведено в нашей республике в 2006 г. и 2007 г., если в 2006 г. его произведено на 392 014 т меньше, чем в 2007 г., за эти два года произведено 392 508 т сахара?

1305. С 1 га в Карагандинской области и с 1 га в Костанайской области в 2008 г. собрали 467 ц овощей. С 1 га в Карагандинской области собрали на 548 ц меньше, чем с 4 га в Костанайской области. Сколько центнеров овощей с одного гектара собрали в этих областях в 2008 г.?

Упражнения

1306. Вы узнаете, на сколько миллиардов тенге произведено продукции в стране, решив задачу. В a году произведено продукции растениеводства и животноводства на b млрд. тг, при этом продукции растениеводства произведено на c млрд. тг больше, чем продукции животноводства. На сколько миллиардов тенге произведено продукции растениеводства и на сколько — животноводства? Решите задачу, если:

1) $a = 2003$; $b = 615,4$; $c = 97$;

2) $a = 2004$; $b = 698,4$; $c = 83,6$.

1307. Вы узнаете, сколько тысяч тонн зерна, картофеля и овощей было собрано в стране, решив задачу.
В a году собрано b тыс. т картофеля, c тыс. т овощей и зерна вместе, при этом зерна на d тыс. т больше, чем картофеля и овощей вместе. Сколько тысяч тонн зерна и овощей было собрано? Решите задачу, если:

1) $a = 2003$; $b = 2354,4$; $c = 16\ 715,7$; $d = 10\ 530,8$;

2) $a = 2004$; $b = 2414,8$; $c = 14\ 433,5$; $d = 8054,2$.

1308. Вы узнаете, сколько тысяч гектаров занимает посевная площадь зерновых культур, картофеля и овощей в стране, решив задачу. В a году посевная площадь картофеля была на b тыс. га больше, чем посевная площадь овощей, посевная площадь овощей и зерновых культур вместе составила c тыс. га. Чему равна посевная площадь овощей, картофеля и зерновых культур, если посевная площадь зерновых культур на d тыс. га больше посевной площади картофеля? Решите задачу, если:

1) $a = 2003$; $b = 56{,}7$; $c = 13\ 982{,}8$; $d = 13\ 705{,}7$;

2) $a = 2004$; $b = 56{,}9$; $c = 14\ 389{,}3$; $d = 14\ 109{,}8$.

1309. 1) Стоимость комплекта из трех авторучек и пяти карандашей равна 220 тг. Одна авторучка на 20 тг дороже карандаша. Найдите стоимость одной авторучки и одного карандаша.

1310. Скорость лодки по течению реки составляет 7,6 км/ч, против течения — 4,8 км/ч. Найдите скорость течения реки.

1311. Чтобы проплыть некоторое расстояние по течению реки, лодке потребуется времени в три раза меньше, чем против течения. Во сколько раз собственная скорость движения лодки больше скорости течения?

1312. Пловец по течению быстрой реки проплыл 150 м. Когда же он поплыл против течения, то за такое же время его снесло на 50 м ниже по течению. Во сколько раз скорость течения реки больше собственной скорости пловца?

Упражнения для повторения курса математики 6 класса

1313. Выполните действия:

1) $-8 - 4$; 2) $-9 - 10$; 3) $6 - (-5)$;
4) $12 - (-4)$; 5) $-5 - (-1)$; 6) $5 - (-3)$;
7) $-13 + 10$; 8) $13 - (-7)$; 9) $-29 - 5$;
10) $5 - (-5)$; 11) $-1{,}2 - 1{,}2$; 12) $-3{,}2 - (-4{,}1)$;
13) $2{,}6 - 5{,}96$; 14) $0 - 5{,}2$; 15) $0 - (-2{,}4)$;
16) $-5{,}3 - 0$; 17) $1 - (-4{,}9)$; 18) $2 - 7{,}3$.

1314. Найдите значение разности и выполните проверку сложением:

1) $7{,}8 - (-6{,}9)$; 2) $-6{,}7 - (-7{,}6)$;
3) $-5{,}4 - 6{,}8$; 4) $-5\frac{4}{5} - \left(-20\frac{3}{5}\right)$;
5) $-1\frac{7}{9} - 3\frac{5}{6}$; 6) $\frac{16}{21} - 5\frac{1}{3}$.

1315. Найдите значение выражения:

1) $-1\frac{3}{7} - \frac{1}{4}$; 2) $2\frac{1}{3} - 3\frac{4}{9}$;
3) $-5\frac{3}{4} - \left(-2\frac{1}{9}\right)$; 4) $-5{,}9 - 0$;
5) $1 - (-2{,}7)$; 6) $5 - 6\frac{2}{3}$.

1316. Выполните действия:

1) $-2{,}4 - 1{,}75 - \left(-\frac{5}{12}\right)$; 2) $-4{,}2 - 3{,}25 - \left(-\frac{1}{12}\right)$;
3) $-61{,}3 - (-7{,}7) + 5{,}36$; 4) $-8{,}6 + (-4{,}9) - 8{,}6 - (-5{,}3)$;
5) $-9 + 10 - 51 + 42$; 6) $10 - 61 + 72 - 13$;
7) $-10 - 2 + 33 - 4$; 8) $60 - 71 + 8 - 9 + 10$.

1317. Выполните действия:

1) $21{,}8 - \left(7\frac{19}{20} - 8\frac{3}{5}\right)$; 2) $-8{,}25 - \left(-\frac{1}{30} + \frac{7}{30}\right)$;
3) $3\frac{1}{14} + 2\frac{3}{7} - (-2{,}85)$; 4) $28 - 3\frac{5}{12} + \left(-4{,}5 + 2\frac{1}{4}\right)$.

1318. Выполните деление:

1) $-9,6 : 12$;
2) $-0,12 : (-0,3)$;
3) $-0,35 : (-0,07)$;
4) $636 : (-0,12)$.

1319. Выполните действия:

1) $9,8 \cdot \left(-3\frac{4}{29}\right) \cdot 4\frac{1}{7}$;
2) $4\frac{1}{2} \cdot (-4,05) \cdot \left(-1\frac{1}{9}\right)$;
3) $4\frac{2}{3} \cdot \left(-1\frac{4}{5}\right) \cdot \left(-\frac{5}{18}\right)$;
4) $4,8 \cdot \left(\frac{5}{6}\right) \cdot (-1,8) \cdot \frac{5}{9}$;
5) $-2,36 \cdot 5,4 \cdot 2\frac{7}{9}$;
6) $\left(-1\frac{1}{2}\right) \cdot 0,5 \cdot 2,8$;
7) $2\frac{7}{20} \cdot \frac{15}{47} \cdot (-0,64)$;
8) $7,5 \cdot (-0,01) \cdot \frac{1}{10} \cdot \left(-1\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{40}$.

1320. Сравните:

1) $-24 \cdot 8$ и 0;
2) $-2,4 \cdot (-3,6)$ и 0;
3) $-3,5 \cdot \frac{2}{7}$ и $\left(-\frac{2}{9}\right)$;
4) 0 и $(-2,4) \cdot (-3,9)$.

1321. Раскройте скобки в выражении:

1) $m + (n - k)$;
2) $c - (-a - b)$;
3) $(-2) \cdot (x + y - 8)$;
4) $(-3) \cdot (-x + y + 2)$.

1322. Раскройте скобки и решите уравнение:

1) $3,3 - (x - 6,7) = 100$;
2) $-1,3 + (x - 4,8) = -7,1$;
3) $4 - \frac{5}{7} - (m - 1) = \frac{11}{14}$;
4) $1\frac{5}{6} - \left(y + \frac{1}{2}\right) = 1\frac{1}{2}$.

Решите уравнения **(1323—1330)**:

1323. 1) $9x = 8x - 6 - x$;
2) $-4x + 8 - 7 = x - 1$;
3) $6 - 4y - 1 = y + 3$;
4) $5y = 2y + 9$.

1324. 1) $3(x - 2) = 4x$;
2) $5(y + 3) = 10$;
3) $3(2x - 7) = 9$;
4) $6(z - 1) = 18$.

1325. 1) $2(2 - y) = y - 5$;
2) $-4(x - 2) = -6$;
3) $-(3x - 4) = 3x - 8$;
4) $3(x - 5) = x + 3$.

1326. 1) $0,8x - 3,5 = -1,2x + 0,5$;
2) $1,3(t - 0,6) = 1,8t$;
3) $1,2(x - 5) = 0,2x + 6$;
4) $7,2 - (6,2 - x) = 2,2$.

1327. 1) $3x - 4 + 2x = 6 + 2x - 4$;

2) $50 - 7y - 16 = 3y - 16$;

3) $-6a + 16 = 4a - 6a - 24$;

4) $5x - 6 + x = 2(x - 1)$.

1328. 1) $\frac{1}{3}x + 6 = 2x$; 2) $\frac{1}{2}(4x - 2) = -7$; 3) $\frac{5}{6}x + 3 = \frac{1}{6}x$.

1329. 1) $\frac{5}{16} - \left(\frac{3}{16} - x\right) = \frac{5}{8}$; 2) $\left(m + \frac{4}{15}\right) - \frac{2}{15} = 0{,}8$;

3) $\frac{5}{24} - \left(x - \frac{1}{6}\right) = -\frac{7}{24}$; 4) $\left(y + \frac{5}{18}\right) + \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$.

1330. 1) $3(2x + 8) - (5x + 2) = 0$; 2) $-(3y + 4) + (2y - 1) = 0$;

3) $8(3 - 2x) + 5(3x + 5) = 9$; 4) $3(y - 5) - 2(y - 4) = 8$.

1331. Вы узнаете о дате основания городов нашей республики, решив уравнения:

1) $0{,}01x - 2^4 = |-1{,}18|$, x — в этом году основан город Семипалатинск (ныне Семей);

2) $0{,}5^2 x + |-11| = 21^2$, x — в этом году основан город Усть-Каменогорск;

3) $\frac{3}{4}x - |-2|^8 - \frac{5}{6}x = -|-7|^2 - 0{,}5^2 x$, x — в этом году основаны крепость и Акмолинский округ;

4) $0{,}375x - |-6| - \frac{4}{9}x - |-3|^4 = 0{,}5x + |-2|^4 - \frac{5^4}{10^3}x$, x — в этом году основано укрепление Верный (ныне Алматы);

5) $-0{,}1^2 x + |-4|^2 = -1{,}3^2 - 1$, x — в этом году основан город Актюбинск (ныне Актобе);

6) $-\left(-\frac{1}{2}\right)^4 x - 3^4 = -|-7|^2 \cdot |-2|^3 \cdot (-5) + 0{,}9375x - 148$, x — в этом году основан город Костанай.

1332. Приведите подобные слагаемые в выражении:

1) $6a + b + 2b - a$; 2) $6x + 4b - b - 3x$;

3) $4a - b - a + 16$; 4) $15a + a - 3a - 6a$.

1333. Найдите значение выражения:

1) $-m^2 + 2m - 4 - 3m - 6 + 2m^2 + m$, если $m = -5$;

2) $-6{,}3x + 8 - 3{,}7x - 5$, если $x = -2$; $-\frac{1}{8}$, $-0{,}4$.

1334. Раскройте скобки и приведите подобные слагаемые в выражении:

1) $5a + (a - 8) - (2a - 4)$;

2) $(6x - 1) + (8 - x) - (3 - 2x)$;

3) $7 + (3a - 2) - (4 + 2a) - 11 + 3a$;

4) $5m - (3m + 5) + (2m - 4)$.

1335. Приведите подобные слагаемые в выражении:

1) $\frac{5}{7}x - \frac{2}{3} - \frac{3}{14}x - \frac{1}{3}$; 2) $\frac{5}{6}a - 1\frac{1}{3}a + \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}x$;

3) $0{,}2m - \frac{2}{9} - 4m + \frac{5}{9}$; 4) $\frac{2}{7}x - \frac{4}{9}y - \frac{5}{14}x + \frac{2}{3}y$.

1336. Докажите, что нет такого числа, которое было бы корнем уравнения:

1) $x + 4 = x - 3$; 2) $|2x - 3| = -1$.

Решите уравнения **(1337—1339):**

1337. 1) $6x = 2x - 12$; 2) $5a = -a - 13$;

3) $-4x + 8 - 7 = x - 1$; 4) $6 - 4y = y + 3$;

5) $-\frac{1}{6}x - 1 = 3 - \frac{5}{6}x$; 6) $-\frac{11}{21}x + 2 = \frac{10}{21}x - 9$;

7) $\frac{1}{3} + \frac{5}{6}x = \frac{1}{12}x - \frac{3}{4}$; 8) $-\frac{14}{15}x + \frac{9}{10} = \frac{1}{30}x + \frac{2}{3}$.

1338. 1) $4(-2z + 5) = 14 - 2(4z - 3)$;

2) $-5(z - 7) = 30 - (2z + 1)$;

3) $-2(x + 5) + 3 = 2 - 3(x + 1)$;

4) $3(2x - 1) + 6x = 10x - 7$;

5) $0{,}3(x - 4) - 0{,}7x = -2$;

6) $0{,}6(5 + 2x) - 2 = 0{,}2x$;

7) $-2{,}5(x - 4) + 0{,}5x = 24$;

8) $48 - 0{,}2(x + 16) + 1{,}2x = 3{,}8$;

9) $\frac{4}{7}(21 - x) = \frac{3}{7}x + 20$;

10) $-\frac{1}{9}x + 14 = \frac{8}{9}(x + 18)$;

11) $\frac{2}{33}(11x - 3) + \frac{1}{3}x = -\frac{9}{11}$;

12) $\frac{5}{6}x + \frac{7}{12}(12 + 2x) = -10$.

1339. 1) $\frac{0,9}{7 + 5y} = \frac{0,2}{y - 4}$; 2) $\frac{2}{2 - x} = \frac{7}{4,5 - 4x}$;

3) $\frac{3}{x + 1} = \frac{10}{3x + 3\frac{2}{9}}$.

1340. Вы узнаете о самой маленькой обезьянке на Земле — игрунке, решив уравнение:

1) $0,15(x - 9) + 3,2(x - 6,5) = 0,12(x - 31) - 68,68 - 4,7(x - 36)$, x — столько граммов составляет масса детеныша карликовой обезьянки;

2) $4,5(10y - 5^2 \cdot 2) - 3\left(3\frac{2}{3}y + 10^3\right) = 9\left(2\frac{5}{9}y + 30\right) - (19y - 75)$, y — столько граммов составляет самая большая масса самой маленькой обезьянки ;

3) $\frac{13}{17}\left(48\frac{5}{13}z - 52\frac{4}{13}\right) - 6\frac{1}{3}\left(6z + 805\frac{5}{19}\right) = \frac{3}{8}\left(122\frac{2}{3}z - 240\right) - \frac{9}{11}\left(14\frac{2}{3}z - 12\frac{2}{9}\right) - 300 - 70$, z — столько миллиметров длина туловища (без хвоста) игрунка .

Найдите решения систем уравнений (**1341—1342**):

1341. 1) $\begin{cases} x + y = 33, \\ x - y = 11; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = 39, \\ x + y = 61; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + 2y = 27, \\ 3x - y = 11; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 4x - y = 19, \\ x + 15y = 20; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 7x - 4y = 11,5, \\ 9x + 5y = -5,5; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 11x - 13y = -35, \\ -17x + 2y = 36; \end{cases}$

7) $\begin{cases} \frac{6}{7}x - \frac{5}{9}y = 2, \\ -\frac{2}{21}x - \frac{1}{9}y = 6; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} \frac{1}{6}x - \frac{3}{4}y = -1, \\ \frac{11}{12}x + \frac{1}{2}y = 13; \end{cases}$

9) $\begin{cases} \frac{3}{5}x + \frac{1}{25}y = 32, \\ \frac{7}{50}x - \frac{9}{10}y = -38; \end{cases}$ 10) $\begin{cases} \frac{4}{11}x - \frac{20}{33}y = -\frac{8}{11}, \\ \frac{2}{3}x + \frac{10}{11}y = -\frac{8}{11}. \end{cases}$

1342. 1) $\begin{cases} \frac{3x-1}{2} + \frac{9-5y}{3} = 2,5, \\ \frac{8-3y}{4} - \frac{6+5x}{3} = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \frac{7y+1}{5} - \frac{x-2}{6} = 2\frac{4}{15}, \\ \frac{8x+3}{2} - \frac{y-10}{7} = -5\frac{3}{14}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{2x-1}{10} - \frac{y+2}{5} + \frac{3-x}{15} = \frac{1}{30}, \\ \frac{3+x}{6} + \frac{5-y}{4} - \frac{2y-1}{12} = 1\frac{3}{7}; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \frac{y+2}{9} - \frac{x-2}{2} + \frac{x-y}{18} = \frac{1}{9}, \\ \frac{x+y}{2} + \frac{6-x}{8} - \frac{7-y}{16} = 1\frac{1}{4}. \end{cases}$

1343. Найдите два числа, если значение суммы первого числа, увеличенного в три раза, и второго числа, увеличенного в два раза, равно 62, значение разности первого числа, умноженного на 5, и второго числа, умноженного на 6, равно (–18).

1344. 1) Найдите скорости двух автомобилей, если известно, что скорость их сближения равна 173 км/ч, а скорость удаления равна 17 км/ч.
2) Найдите скорость течения реки и собственную скорость теплохода, если его скорость по течению реки равна 47 км/ч, против течения — 39 км/ч.

1345. Решите систему относительно x и y, где p — некоторое число:

1) $\begin{cases} -2x + 5y - 7 = 0, \\ px + 3y - 1 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 8x - 9y + 4 = 0, \\ 4x - py + 2 = 0. \end{cases}$

1346. Найдите наибольшее целое число, при котором верно неравенство:

1) $17{,}2x + 0{,}91 \leq 16x + 18{,}71$; 2) $26x - 4{,}5 > 27x + 2{,}8$;

3) $50x - \frac{4}{9} \geq \frac{2}{3} + 51x$; 4) $7{,}4x + 5 < 7{,}3x + \frac{5}{6}$.

1347. Найдите наименьшее целое число, при котором верно неравенство:

1) $2{,}43x - 21{,}11 \geq -1{,}57x + 2{,}89$;

2) $x - 1 > \frac{6}{7}x + \frac{4}{7}$;

3) $-19{,}83 + 5x \leq 8x + 1{,}17$;

4) $-1{,}74x + 2 \leq 3{,}26x - \frac{8}{11}$.

1348. Найдите наибольшее целое число, при котором верно неравенство:

1) $-0{,}12x - 4{,}8 \geq 0{,}38x + 6{,}7$; 2) $23x - 100 < 16x + 71{,}1$.

1349. Найдите наименьшее целое число, при котором верно неравенство:

1) $3\frac{4}{5}x - \frac{13}{21} \leqslant 8x + \frac{1}{3} + 3\frac{101}{105}$; 2) $7\frac{3}{8}x - 7{,}9 > 5{,}6 + 6\frac{5}{8}x$;

3) $0{,}05x + 12 \mid 32 - 2{,}95x$; 4) $10 - 0{,}07x < 0{,}6 + 0{,}43x$.

1350. Что можно сказать об обьеме куба, длина стороны которого равна a см, если: 1) $a \leq 3$ см; 2) $a \geq 4$ см; 3) 5 см $\leq a \leq$ 6 см?

1351. Что можно сказать об обьеме прямоугольного параллелепипеда, длины сторон которых равны a см, b см и c см, если:

1) $a \geq 2$ см; $b \geq 3$ см; $c \geq 4$ см;

2) $a \leq \frac{3}{4}$ см; $b \leq 1\frac{1}{3}$ см; c m $0{,}15$ см;

3) 0,2 см $\leq a \leq$ 1,2 см; 0,5 см $\leq b \leq$ 1,5 см; 0,3 см $\leq c \leq$ 1,3 см?

1352. Астана — столица Казахстана. Раньше г. Астана имел другие названия: Акмолинск, Целиноград, Акмола. Вы узнаете, в какие годы и как называлась Астана, если решите неравенства:

1) $0{,}01x - 19{,}61 \le 0$, x — до этого года Астана называлась *Акмолинском* ;

2) $1930 \le y - 31 \le 1961$, y — в эти годы Астана называлась *Целиноградом* ;

3) $19{,}95 \le 0{,}01z + 0{,}03 \le 20$, z — в эти годы Астана называлась *Акмолой* .

Решите системы неравенств (**1353—1354**):

1353. 1) $\begin{cases} 3x - 8 \geqslant x - 1, \\ x + 9 \leqslant 2x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 78x + 3 > 79x + 9{,}5, \\ 3{,}1x - 0{,}2 \leqslant 2{,}5x - 0{,}8; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{1}{3}x - 7 \leqslant \frac{1}{2}x + 5, \\ \frac{4}{9}x + 1 \geqslant \frac{1}{9}x - 3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{5}{6} + x > \frac{1}{6} - 2x, \\ \frac{3}{7} + 3x < -\frac{3}{7} - x. \end{cases}$

1354. 1) $\begin{cases} 20x - 7 \leqslant 22x - 9, \\ 8{,}2x + 1 \leqslant 7{,}9x + 3{,}1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 13 - 3{,}1x \geqslant 10 - 3{,}6x, \\ 16x + 7{,}8 \geqslant 0{,}8 + 23x; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{2}{3}(x - 27) + \frac{1}{3}x < 4x - 1, \\ \frac{5}{11}(22 + x) - 5 > -\frac{7}{11}x + 3; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2(x + 4) - 5(x - 7) \geqslant 4(x + 3) - 12, \\ -3(x - 1) + 7(1 + x) \leqslant 8(2 - x) + 11; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \frac{2}{9}(9 - 2x) \leqslant \frac{5}{9}(x + 18) - 6, \\ \frac{4}{15}(30 + x) - 2 > \frac{11}{15}(15 - x) + 3; \end{cases}$

6) $\begin{cases} \frac{5}{24}x - 3(x + 1) \geqslant 10 - \frac{19}{24}x, \\ \frac{6}{7}x + 13 < \frac{1}{7}(14 - x) - 2. \end{cases}$

1355. Найдите все целые числа, при которых верна система неравенств:

1) $\begin{cases} 1{,}3x + 2 > 10 - 2{,}7x, \\ 16x - 29 > 17x - 34; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 78x + 3 \leqslant 79x + 9, \\ 3{,}1x - 0{,}2 \leqslant 2{,}5x - 0{,}8. \end{cases}$

1356. Найдите все целые числа, при которых верна система неравенств:

1) $\begin{cases} 5(x - 3) + 23 > 3x, \\ 7(2 - x) + 6x > 12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 11(4 - x) < 46 - 9x, \\ 20{,}7x - 2 \leqslant 19{,}7x. \end{cases}$

1357. Найдите значение суммы всех целых чисел, при которых верна система неравенств:

1) $\begin{cases} 9 + x < 2x + 4, \\ 17 + 8x < x + 59; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 103 - 14x \geqslant 40 - 23x, \\ 509 - 51x \geqslant 259 - x. \end{cases}$

1358. Найдите среднее арифметическое чисел, размах и моду ряда данных:
1) 154,0; 121,0; 114,0; 106,0; 104,0; 101,0; 96,0; 101,0; 114,0; 134,0, которые показывают урожайность овощей в центнерах с гектара в стране в период с 1990 по 1999 г.;
2) 134,0; 153,0; 166,0; 172,0; 177,0; 186,0; 196,0; 201,0; 211,0; 204,0, которые показывают урожайность овощей в центнерах с гектара в нашей республике в период с 1999 по 2008 г.

1359. Найдите среднее арифметическое чисел, размах, медиану и моду ряда данных:
1) 9,2; 4,9; 3,3; 3,2; 3,4; 2,9; 1,9; 2,8; 4,2; 4,9, которые показывают урожайность подсолнечника в центнерах с гектара в период с 1992 по 1999 г.;
2) 6,0; 5,9; 6,8; 5,9; 6,3; 5,9; 5,9; 4,1, которые показывают урожайность подсолнечника в центнерах с гектара в период с 1999 по 2008 г.

1360. Производство шерсти (в тысячах тонн) в стране в период с 2003 по 2008 г. соответственно составило: 26,8; 28,5; 30,4; 32,4; 34,2; 35,2. Найдите медиану производства шерсти.

Глоссарий

Аналитический способ задания зависимости	Способ задания зависимости между величинами с помощью формулы называется *аналитическим способом задания зависимости* .
Вектор	*Вектором* AB называется направленный отрезок, началом которого является точка A, концом — точка B. Любую точку плоскости считают нулевым вектором.
График зависимости между величинами	*Графиком зависимости между величинами* называется множество точек координатной плоскости, у которых абсциссы равны значениям независимой переменной x, ординаты — соответствующим значениям зависимой переменной y.
Комбинаторная задача	Задачи, в которых из элементов некоторого конечного множества по некоторым правилам составляются различные комбинации этих элементов и подсчитывается их число, называют *комбинаторными* .
Координата точки	Абсцисса и ордината называются *координатами точки.*
Координатная плоскость	Плоскость, на которой имеется система координат, называется *координатной плоскостью* .
Координатная четверть	Оси координат разбивают плоскость на четыре части, которые называются *координатными четвертями.*
Линейное уравнение с двумя переменными	*Линейным уравнением с двумя переменными* x и y (с двумя неизвестными x и y) называется *уравнение вида* $ax + by + c = 0$, где a, b, c — числа, причем a и b одновременно не равны 0.
Линейное уравнение с одной переменной	Уравнение вида $ax = b$, где x — переменная (неизвестное число, которое нужно найти), a и b — некоторые числа, называется *линейным уравнением с одной переменной.*
Мода	Наиболее часто повторяющееся число или величину в ряду данных принято называть *модой* .
Медиана ряда данных	*Медианой ряда данных* называют число, которое стоит посередине него, при условии, что количество чисел нечетное или равно среднему арифметическому двух чисел, стоящих в его середине, при условии, что количество чисел четное и числа этого ряда данных записаны либо в порядке возрастания, либо в порядке убывания.
Наибольшее значение ряда данных	Наибольшее из чисел ряда данных называется *наибольшим значением ряда данных* .

Продолжение

Наименьшее значение ряда данных	Наименьшее из чисел ряда данных называется *наименьшим значением ряда данных.*
Объединение числовых промежутков	*Объединением числовых промежутков* называется числовой промежуток, состоящий из чисел, которые принадлежат хотя бы одному из этих числовых промежутков.
Открытый луч	Луч называется *открытым* тогда и только тогда, когда точка, изображающая его начало, не принадлежит лучу. Обозначают $(-\infty; x_0)$ или $(x_0; +\infty)$.
Пересечение числовых промежутков	*Пересечением числовых промежутков* называется числовой промежуток, состоящий из чисел, которые принадлежат одновременно каждому из этих числовых промежутков.
Параллельные отрезки	Отрезки, лежащие на параллельных прямых, называются *параллельными отрезками.*
Параллельные прямые	Две непересекающиеся прямые, лежащие в одной и той же плоскости, называются *параллельными прямыми* .
Перпендикулярные отрезки	Отрезки, лежащие на перпендикулярных прямых, называются *перпендикулярными отрезками* .
Пересекающиеся прямые	Две прямые, которые имеют только одну общую точку, называются *пересекающимися прямыми* .
Перпендикулярные прямые	Две прямые, образующие при пересечении прямые углы, называются *перпендикулярными прямыми* .
Прямая пропорциональность	*Прямой пропорциональностью* называется зависимость между величинами y и x, которую можно задать формулой $y = kx$, где k — некоторая постоянная величина. Число k называется *коэффициентом прямой пропорциональности* .
Размах	Значение разности между наибольшим и наименьшим значениями ряда данных называется *размахом* .
Равносильные уравнения	Уравнения, имеющие одни и те же корни или не имеющие корней, называются *равносильными уравнениями* .
Решение системы неравенств с одной переменной	*Решением системы неравенств с одной переменной* называется такое значение переменной, при подстановке которого в каждое неравенство системы оно становится верным числовым неравенством.
Решение уравнения с двумя переменными	*Решением уравнения с двумя переменными* $ax + by + c = 0$ называется такая пара чисел, при подстановке которых вместо x и y в уравнение получается верное числовое равенство.
Среднее арифметическое нескольких чисел	*Средним арифметическим нескольких чисел* называется значение частного от деления значения суммы этих чисел на число слагаемых.

Продолжение

Средняя скорость движения	*Средней скоростью движения* называется значение частного длины всего пройденного пути и всего затраченного на этот путь времени.
Числовой луч	Числовой промежуток, который соответствует лучу на координатной прямой, обозначают $(-\infty; x_0]$ или $[x_0; +\infty)$ и называют *числовым лучом* .
Числовой отрезок	Числовой промежуток, который соответствует отрезку на координатной прямой, обозначают $[x_1; x_2]$ и называют *числовым отрезком* .
Центрально-симметричные точки	Две точки A и B называются *центрально-симметричными* относительно точки O, если точка O является серединой отрезка AB .

Ответы

Глава 4. Линейные уравнения с одной переменной

804. 1) $1\frac{2}{7}$; 2) $1\frac{4}{15}$; 3) –0,09; 4) 3,75; 5) $\frac{2}{3}$; 6) 3; 7) $-\frac{1}{4}$; 8) $2\frac{2}{7}$. **806.** 1) 7,65. **807.** 1) 4000; 2) 65 см; 3) более 200. **809.** –4; 5; –7. **822.** 3) 3. **828.** 1) Все числа. **837.** 1) 2 тыс. лет до н.э.; 2) середина IV в. до н.э. **839.** 1) –13,5; 2) 19; 3) 19,06; 4) $-1\frac{5}{14}$. **843.** 1) 18; 2) –15; 3) 0,8; 4) –40; 5) –17; 6) 16. **844.** 1) 55; 2) $11\frac{1}{3}$; 3) –164; 4) –1,3. **845.** 1) 0,2; 2) –4; 3) $-\frac{3}{4}$; 4) $-8\frac{3}{4}$. **846.** 1) 0,625; 2) 205; 3) $\frac{2}{7}$; 4) –7,5. **847.** 1) –2; 2) $-\frac{2}{3}$; 3) $-2\frac{1}{7}$. **848.** 1) $-\frac{17}{32}$; 2) $4\frac{26}{31}$. **849.** 1) 1976 год; 2) 75 тыс. га; 3) 3,8 тыс. га. **850.** 1) –11°С; 2) –24°С; 3) –50°С. **851.** 1) 7 лет; 2) 12 лет; 3) 15 лет. **854.** 1) 8,7. **856.** 1) В 1958 г; 2) 258,9 тыс. га; 3) около 331 вида растений; 4) 37 видов млекопитающих; 5) 294 вида птиц; 6) 10 видов рыб. **867.** 1) –1,1; 1,1; 2) –27; 27; 3) –84; 84; 4) –8,05; 8,05; 5) $28\frac{17}{30}$; $-28\frac{17}{30}$; 6) $1\frac{53}{90}$; $-1\frac{53}{90}$.
868. 1) {–0,1; 0,1}; 2) {–150; 150}; 3) {–1,1; 1,1}; 4) $\left\{-\frac{3}{26};\frac{3}{26}\right\}$; 5) $\left\{-\frac{2}{15};\frac{2}{15}\right\}$; 6) $\left\{-1\frac{3}{7};1\frac{3}{7}\right\}$.
869. 1) {–5; 5}; 2) {–16,5; 16,5}; 3) $\left\{-5\frac{2}{3};5\frac{2}{3}\right\}$; 4) $\left\{-\frac{21}{64};\frac{21}{64}\right\}$. **870.** 1) {–20; 20}; 2) $\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\}$; 3) {–1,75; 1,75}; 4) {–0,26; 0,26}. **873.** $-5\frac{1}{6}$. **874.** 1) 9; 10; 11; 12; 13.
883. 32 тетради . **885.** 12 утят. **887.** 3,8 м; 4,8 м. **888.** 1) 32 года. **889.** 1) Число 14. **890.** 96 туристов. **891.** 2,4 км; 3,2 км. **892.** 40 км/ч. **893.** 4,2 т; 3,6 т. **895.** 375 л; 350 л. **896.** 30 книг. **897.** 60 км/ч. **898.** 18; 36; 40. **899.** 12 лет. **900.** 7 лет. **901.** 7 треугольников, 8 четырехугольников. **902.** 47 кг; 75 кг. **903.** 30 км; 90 км. **904.** 26,4 км; 105,6 км. **908.** 90°, 18°.

Глава 5. Линейные неравенства с одной переменной и их системы

926. 1) 510 км; 2) 8900 тг. **927.** 1) $5\frac{2}{3}$; 2) 35. **942.** 1) 3, 4, 5, 6, 7; 2) –3, –2, –1, 0, 1, 2; 3) –21, –20, –19, –18; 4) 13; 5) –7, –6, –5, –4, –3; 6) 0, 1, 2, 3.
946. 1) [0;3] и [1;3]; 2) [2;4] и [4;5]. **947.** 1) 12; 2) 11. **948.** 1 ч 20 мин.
949. 5,6 см, 2,8 см, 4,1 см. **953.** 1) (–∞; +∞); 2) (–∞; 2); 3) $\left[-\frac{2}{3};10\right)$; 4) (0; +∞).
954. 1) (–∞;10); 2) (–∞; +∞); 3) [2,4; 11]; 4) [–1,8; 14]. **955.** 1) (–5; 0); 2) [–3; 5); 3) $\left[4;4\frac{2}{3}\right)$; 4) [–8; 0). **963.** 1) 2, 3, 4, 5, 6, 7; 2) 1, 2, 3; 3) 4, 5, 6; 4) ∅. **970.** 8,4%. **981.** 1) –15; 2) 8; 3) 0,5; 4) –1. **982.** 1) –2; 2) –8.
983. 32,5 км. **985.** 1) –300; 2) 190. **990.** 1) (–∞; –5); 2) [3; +∞); 3) $\left(-\frac{1}{7};+\infty\right)$;

4) $(-\infty; -6{,}1]$; 5) $(-\infty; -7{,}5]$; 6) $(-\infty; 56)$. **993.** 1) $(-\infty; 90)$; 2) $[-7; +\infty)$; 3) $\left(-2\frac{1}{3}; +\infty\right)$; 4) $\left(-\infty; \frac{11}{48}\right]$. **1002.** 1) 4% — 5%; 2) 20% — 35%. **1004.** 1) $\left(-\infty; \frac{3}{4}\right)$; 2) $(-\infty; 2)$; 3) $\left(-\infty; -\frac{8}{15}\right)$. **1006.** $[0{,}6; +\infty)$. **1007**. $(-\infty; +\infty)$. **1009.** 1) 24; 2) –1; 3) 28; 4) 31. **1013.** 1) $(-\infty; 0{,}5)$. 2) $(-\infty; 2)$. **1026.** 1) $\varnothing$; 2) $[-2; 0)$; 3) $[7; 10]$; 4) $(-9; -1]$. **1027.** 1) $\varnothing$; 2) $(-4; -2{,}7)$; 3) $[-15; 15{,}2]$. **1028.** 1) $(-6; 3]$; 2) $(-4; 5)$; 3) $(-\infty; -1]$. **1029.** 1) $(-\infty; 1)$; 2) $(-\infty; 5]$; 3) $(-\infty; -3]$. **1030.** 1) $(-\infty; -2]$; 2) $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$; 3) $(-6; 0{,}75]$. **1031.** 1) $(-\infty; -2)$; 2) $(-3; +\infty)$. **1032.** 1) $[-4; -2]$; 2) $(-5; -1]$. **1034.** 1) $\varnothing$; 2) $(2{,}1; 3{,}5]$. **1035.** 1) 3, 4; 2) –2, –1, 0, 1, 2; 3) –2, –1, 0. **1036.** 1) 2, 3, 4; 2) 1, 2, 3. **1037.** 15. **1038.** 1) 870—950; 2) 1499—1551; 3) 1818—1889; 4) 1841—1889; 5) 1905—1981. **1039.** 1) $[1{,}5; 7)$; 2) $[-4; 7]$. **1041.2.** 1) 12; 2) 18. **1050.** 1) $|x| > 15$. **1052.** 1) $-4 < x + 3 < 4$; 2) $-2 \le x - 1 \le 2$; 3) $-8 < 5 + x < 8$; 4) $-\frac{2}{3} \le 6 - x \le \frac{2}{3}$. **1053.** 3) $|6 - 5x| < 19\frac{2}{7}$; 4) $|10{,}2 - 2{,}1x| < 24{,}7$. **1055.** 1) — 2) Являются. **1056.** 1) Можно; 2) можно. **1058.** 1) $[-3{,}9; 10)$. **1063.** 5) $(-\infty; -6{,}7) \cup (3{,}3; +\infty)$; 6) $[-10{,}8; 1{,}2]$. **1064.** 5) $(-\infty; -1) \cup (21; +\infty)$; 6) $(-2; 32)$. **1068.** 1) $(5; 6]$; 2) $(-4; 7]$; 3) $(-\infty; -1{,}5) \cup (1{,}5; 2]$; 4) $(-\infty; -3]$. **1073.** 1) 1; 3) 1; 2. **1074.** 1) 0; –1; 2) 1; –2; 3) 14; –3. **1076.** 1) $(5; 9]$; 2) $(-\infty; -3)$; 3) $(-0{,}5; 0{,}5)$; 4) $[-1{,}7; 1{,}7]$; 5) $\left(-13; -\frac{1}{15}\right] \cup \left[\frac{1}{15}; +\infty\right)$; 6) $(-30; -6{,}1) \cup (6{,}1; +\infty)$. **1077.** 1) 1; 2; 3; 4; 2) 1; 2; 3; 4; 3) 5; 6; 7; 4) 1; 2; 3; 4; 5. **1078.** 1) $(-21; -11] \cup [11; 32]$; 2) $\left(-1{,}5; \frac{1}{51}\right]$. **1079.** 1) 3; 2) –18; 3) –5.

Глава 6. Координатная плоскость

1092. 20°; 15°. **1093.** 31%; в 5—6 раз. **1094.** 1200 т, 400 т. **1103.** 180°. **1104.** 1) 489; 2) 104. **1105.** 4 конфеты, 8 конфет, 8 конфет. **1125.** 14 ед.; 12,25 кв. ед. **1131.** 4 страницы, 9 страниц, 5 страниц. **1145.** 12 груш, 12 груш, 26 груш. **1146.** На 28% – 30%.

Глава 10. Линейные уравнения с двумя переменными и их системы

1225. Являются решениями пары: (1; –5); (0; –12); 2) являются решениями пары: (1,25; 2); (2,75; 0). **1229.** 1) 1; 2) –1,5. **1231.** 125. **1232.** 98. **1233.** 1) $S \le 2950$ см^2; 2) $S \ge 35{,}7$ см^2. **1240.** 1) {(2; 8); (8;2)}; 2) {(–3; –8); (8; 3)}. **1246.** $-1{,}6a + 3{,}8b$. **1247.** 1) (11; 3); 2) (15; 8); 3) (23; 9); 4) (19; 10); 5) (3; 5);

6) (2; 1). **1248.** 180°; 120 см. **1249.** 250 видов птиц; 700 видов растений . **1250.** 1) (1; 1); 2) (–1; –1). **1253.** 1) (1; 1); 2) (3; 0). **1255.** 1) (2; 2); 2) (4; 4). **1256.** 1) (1; 7); 2) (–1; 4). **1257.** 1)(–4; –3); 2) (–3; –3). **1258.** 1) (–3; 4); 2) (–1; –2). **1259.** 1) (1; –1); 2) (–1; –1). **1260.** 1) (1; 0); 2) (2; 1). **1261.** 1) $\left(-\frac{2}{3};1\right)$; 2) (5; 1,2) . **1262.** 1) (2; –0,5); 2) (–1; 2). **1263.** 1) (–1; 1); 2) (2; 2). **1264.** 1) 3; 2) –13. **1265.** 1) (–0,5; 4); 2) (–6; 2,5); 3) (2; –2). **1270.** 1) $y = 10 - x$; 2) $y = x - 12,5$; 3) $y = 17 - 3x$; 4) $y = -0,25x - 1,25$; 5) $y = \frac{1}{7} - \frac{5}{7}x$; 6) $y = 0,55x - 9,5$. **1271.** 1) $x = 21,5 - y$. **1273.** 1) (–5; 2); 2) (3; –2); 3) (–1; 1). **1274.** 1) (0,7; –0,2); 2) (–10; 3,1); 3) (–0,8; 1,7). **1292.** $C = 2000 - (215x + 190y)$; 1) 1582,5 тг. **1294.** 1) 9 и 3; 2) 40 и 15; 5) 7,92 и 2,08. **1306.** 1) 356,2 и 259,2; 2) 391 и 307,4.

Упражнения для повторения курса математики 6 класса

1315. 1) $-1\frac{19}{28}$; 2) $-1\frac{1}{9}$; 3) $-3\frac{23}{36}$. **1316.** 1) $-3\frac{11}{15}$; 2) $-7\frac{11}{30}$; 3) – 48,24; 4) – 16,8. **1317.** 1) $22\frac{9}{20}$; 2) –8,45; 3) 8,35; 4) $22\frac{1}{3}$. **1319.** 1) $-127\frac{2}{5}$; 2) $20\frac{1}{4}$; 3) $2\frac{1}{3}$; 4) –4; 5) –35,4; 6) –2,1; 7) $-\frac{12}{25}$; 8) $\frac{1}{4000}$. **1328.** 1) 3,6; 2) –3; 3) –4,5. **1329.** 1) 0,5; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $\frac{2}{3}$; 4) $-\frac{1}{6}$. **1340** . 1) 15 г; 2) 119 г; 3) 136 мм. **1341.** 1) (22; 11); 2) (50; 11); 3) (7; 10); 4) (5; 1). **1346.** 1) 14; 2) – 8; 3) – 2; 4) – 42. **1347.** 1) 6; 2) 12; 3) –7; 4) 1. **1348.** 1) – 23; 2) 24. **1349.** 1) – 4; 2) 21; 3) 7; 4) 19. **1352.** 1) до 1961 г.; 2) 1961—1992 гг.; 3) 1992 — 1997 гг. **1353.** 1) [9; +∞); 2) (–∞; –6,5). **1354.** 1) [1; 7]; 2) [–6; –1]. **1356.** 1) –5; –4; –3; –2; –1; 0; 1; 2) 0; 1; 2. **1357.** 1) 6; 2) –6.

Содержание

Глава 10. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ И ИХ СИСТЕМЫ

Учебное издание

Абылкасымова Алма Есимбековна
Кучер Татьяна Павловна
Жумагулова Зауре Абдыкеновна

МАТЕМАТИКА

Часть 2

Учебник для 6 класса общеобразовательных школ

Редактор *С. Родионова*
Худож. редактор *А. Сланова*
Техн. редактор *И. Тарапунец*
Компьютерная верстка *Д. Шариповой*

Государственная лицензия № 0000001 выдана издательству
Министерством образования и науки Республики Казахстан 7 июля 2003 года

ИБ № 5706

Подписано в печать 08.06.18. Формат 70 · 100 1/16. Бумага офсетная.
Гарнитура "SchoolBook Kza". Печать офсетная. Усл. печ. л. 14,84+0,32 форзац.
Усл. кр.-отт. 30,97. Уч.-изд. л. 8,23+0,54 форзац. Тираж 50 000 экз. Заказ №

Издательство "Мектеп", 050009, г. Алматы, пр. Абая, 143
Факс: 8(727) 394-37-58, 394-42-30
Тел.: 8(727) 394-41-76, 394-42-34
E-mail: mektep@mail.ru
Web-site: www.mektep.kz