Ә. Н. ШЫНЫБЕКОВ, Д. Ә. ШЫНЫБЕКОВ

ГЕОМЕТРИЯ

Жалпы білім беретін мектептің
7-сыныбына арналған оқулық

7

Қазақстан Республикасының Білім және ғылым министрлігі
ұсынған

А. Байтұрсынұлы атындағы Тіл білімі институтының
сарапшыларымен келісілді

Алматы «Атамұра» 2017

1–2558

ӘОЖ 373.167.1
КБЖ 22.1я72
Ш 17

Оқулық Қазақстан Республикасының Білім және ғылым министрлігі бекіткен негізгі орта білім беру деңгейінің 7–9-сыныптарына арналған «Геометрия» пәнінің жаңартылған мазмұндағы Типтік оқу бағдарламасына сәйкес дайындалды.

Жалпы редакциясын басқарған физика-математика ғылымдарының докторы, профессор, ҚР ҰҒА академигі **М. Өтелбаев**

Пайдаланылған шартты белгілер:

$\boxed{?}$ – тақырыптың негізгі материалдары бойынша сұрақтар;

$\boxed{Т}$ – тарихи мәліметтер;

$\boxed{ПТ}$ – практикалық тапсырмалар;

А – I деңгейлі есептер;
В – II деңгейлі есептер;
С – III деңгейлі есептер;
* – шығармашылық немесе күрделілігі жоғары есептер.

Шыныбеков Ә. Н., Шыныбеков Д. Ә.
Ш 17 **Геометрия:** Жалпы білім беретін мектептің 7-сыныбына арналған оқулық./Ә. Н. Шыныбеков, Д.Ә. Шыныбеков – Алматы: Атамұра, 2017. – 96 бет.

ISBN 978-601-306-750-6

ӘОЖ 373.167.1
КБЖ 22.1я72

ISBN 978-601-306-750-6

АЛҒЫ СӨЗ

Сендерді геометрияның ғажайып та қызықты әлеміне шақырамыз. Геометрия – ең ежелгі ғылымдардың бірі.
«Геометрия» сөзі «жер өлшеу» (гректің «гео» – жер, «метрео» – өлшеу) сөзінен шыққан. Бұл атау адамзаттың ертеректен бастап жер бетінде өлшеу жұмыстарын жүргізуі, құрылыс, жол тарту және т.с.с. жұмыстарының салдарына байланысты пайда болған. Мұнда оларға жер бетінде түрлі өлшеу жұмыстары нәтижелерін белгілеп, сызықтар мен белгілер салуына тура келген. Осының нәтижесінде біртіндеп қарапайым геометриялық фигуралардың қасиеттері жөніндегі мәліметтер жинақтала бастады. Сонымен қатар осы кезеңде бір-бірімен байланыссыз, жеке-дара жинақталған мәліметтерді біріктіруде алғашқы қадамдар да жасала бастады. Дегенмен, бұл жұмыстар, негізінен қандай да бір фигураны немесе оның элементін тұрғызу үшін жасалатын іс-шаралардың ережелері ретінде жазылды. Бұл жұмыстарда «дәлелдеу» ұғымы мүлде болмаған деуге болады және бұл ережелер «былай жаса» деген қағидамен жазылған еді. Ежелгі грек ғалымы Евклидтің (біздің з.б. 365 – 300 жж.) «Бастамалар» атты шығармаларының пайда болуымен фигуралар мен олардың қасиеттері жөніндегі ғылым – «Геометрияның» дүниеге келуін байланыстырады. Мұнда ол геометриялық фигуралар жөнінде жинақталған барлық мәліметтерді бір қалыпқа келтірген және күнделікті өмірден алынған кейбір қарапайым және ақиқат тұжырымдарға – аксиомаларға сүйене отырып, геометриялық фигуралар жөніндегі осыған дейін жинақталған барлық деректерді қисынды пайымдаулар жолымен алған және геометрияны жаңа деректермен байыта түскен. Ал Евклидтің геометрияның негізін жасауда

қолданған тәсілі кейінірек **аксиоматикалық тәсіл** деп аталды және бұл тәсіл қазіргі кезең математикасы мен өзге де ғылымдар салаларында кең көлемде қолданылуда.

Сонымен геометрия ерте кезден-ақ жоғары теориялық тұрғыдан оқытылған: әрбір **теорема** дәлелденеді, ал кез келген есеп **аксиомалар** мен осыған дейін дәлелденген теоремаларға сүйене отырып шығарылады. Олай болса, геометрияны оқып-үйрену барысында сендер геометриялық фигуралардың қасиеттері жөніндегі білімдеріңді жетілдіріп қана қоймай, қисынды ойлау қабілеттеріңді шыңдап, ақиқаттық пайымдау тәсілдерін үйренесіңдер, ал бұл тек математиканы ғана оқып-үйренуге емес, ғылымның салаларын жете меңгеруге көмектесері сөзсіз.

Жалпы білім беретін мектептердің 7-сыныбына арналған «Геометрия-7» оқулығының өзге оқулықтармен салыстырғанда бірқатар өзіндік ерекшеліктері бар. Әрбір тақырыпқа берілген есептер арнайы үш топқа бөлінген: ***A***, ***B*** және ***C***. ***A*** және ***B*** тобындағы есептер жеңіл және орташа қиындықты деңгейде, ал ***C*** тобына қиындық деңгейі жоғары есептер жинақталған. Бұл оқулықтың әрі жалпы білім беретін мектептерде, әрі математиканы тереңдетіп оқытатын сыныптарда қолданылуына жол ашады. Мұнда ***C*** тобы есептері негізінен, математиканы тереңдетіп оқытатын сынып оқушылары мен математикаға қабілеті жоғары оқушыларға арналған. Сонымен бірге, оқушыларға ыңғайлы болуы үшін әрбір бөлім есептері мен қажетті сызбалары қос сандарымен нөмірленген. Оның біріншісі тарау нөмірін, ал екіншісі осы тараудағы есептің (сызбаның) реттік нөмірін көрсетеді.

Жалпы, оқулықпен дәріс алу барысында оқу бағдарламасы ерекшеліктеріне тәуелсіз мынадай қағиданы ұстанған дұрыс: жаңа өтілген тақырыпты пысықтау барысында, ең алдымен ***A*** тобы материалдарын толық меңгеріп алу қажет. Онсыз келесі ***B***, ***C*** топтары есептерін шығару және келесі тақырыпты меңгеру мүмкін емес.

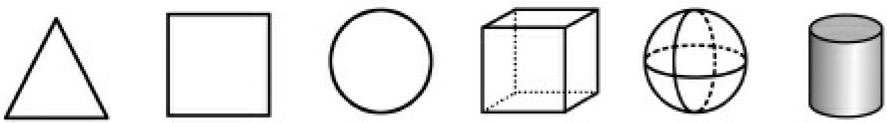
7-сыныпта қолданылатын геометриялық белгілеулер:

$A, B, C, \ldots$ – нүктелер; $a, b, c, \ldots$ – түзулер; $\angle A$ – A бұрышы; $\angle(ab)$ – (ab) бұрышы (a және b сәулелерімен шектелген бұрыш); ΔABC – ABC үшбұрышы; $\omega(O; R)$– центрі O нүктесі, радиусы R-ге тең шеңбер;

$\parallel$ – параллельдік белгі;
$\perp$ – перпендикулярлық белгі;
$\cap$ – қиылысу белгісі;
$\cup$ – бірігу белгісі;
$\in, \notin$ – тиісті және тиісті емес белгілері;
$\Rightarrow$ – логикалық салдар белгісі (шығады);
$\Leftrightarrow$ – тең шамалылық.

ГЕОМЕТРИЯ ҚҰРЫЛЫМЫНЫҢ АКСИОМАТИКАЛЫҚ ТӘСІЛІ

Өздерің білетіндей, геометрия – ол геометриялық фигуралардың қасиеттері жөніндегі ғылым. Үшбұрыш, квадрат, шеңбер, куб, шар, цилиндр (1-сурет) және т.с.с. геометриялық фигуралардың мысалдары болып табылады.



1-сурет

Геометриялық фигуралар сан алуан түрлі болып келеді. Геометриялық фигуралардың бөліктері, қиылысуы және бірігулері де геометриялық фигура болады.

Мектеп геометриясы **планиметрия** және **стереометрия** деген атаулармен екі бөлікке бөлінеді. Планиметрияда жазықтықта орналасқан кесінді, үшбұрыш, тік төртбұрыш және т.с.с. фигуралардың қасиеттері қарастырылады. Жазықтық шексіз болғандықтан, оның бір бөлігінің мысалы ретінде тынық судың, үстелдің, партаның, дәптердің, т.с.с. тегіс бетін қарастыруға болады. Стереометрияда кеңістікте орналасқан параллелепипед, сфера, цилиндр, пирамида және т.с.с. фигуралардың қасиеттері қарастырылады. Біздер геометрияны мүмкіндігінше қатаң теориялық деңгейде, планиметриядан бастап оқып үйренеміз. Бұл – геометрияның негізін жасаудың ***аксиоматикалық тәсілі***. Енді соңғы айтылған сөйлемнің мәні мен мазмұнына қысқаша түсініктеме берейік.

Жалпы, математикада кез келген тұжырым (теорема, сөйлем, қасиет, белгі және т.с.с.) бұрыннан белгілі, одан ертерек дәлелденген тұжырымдарға сүйене отырып дәлелденеді (негізделеді). Мұнда, әдетте ***теоремалардың*** қисындық құрылымы мынадай болып келеді. Егер A_1 – бұрынырақ дәлелденген қандай да бір тұжырым болса (оны "шарты" деп атайық), онда осы тұжырымға сүйене отырып, қисынды ой қорытындылар көмегімен жаңадан бір A сөйлемін (тұжырымын, теоремасын, қасиетін және т.с.с.) қорытып шығарамыз. Осыны $\Rightarrow$ қисынды салдар символы көмегімен қысқаша былай жазуға болады: $A_1 \Rightarrow A$. Енді соңына дейін қатаң математикалық дәлелдеулер принципіне жүгінетін болсақ, онда A_1 теоремасының өзі дәлелдеуді талап етеді және оны дәлелдеу үшін A_1-ден ертерек дәлелденген қандай да бір A_2 теоремасына сүйенуіміз қажет. Көрсетілген процесс шексіз жалғасып, оны «аяқтау» ешкімнің қолынан келмейтін жұмыс, яғни біз төмендегідей теоремалар тізбесін алар едік:

$$\ldots \Rightarrow A_4 \Rightarrow A_3 \Rightarrow A_2 \Rightarrow A_1 \Rightarrow A \qquad (1)$$

немесе мынадай циклді тізбек шығар еді:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small] & A_3 \arrow[dr, Rightarrow] & & & & \\ A_4 \arrow[ur, Rightarrow] & & A_2 \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dl, Rightarrow] & A_1 \arrow[r, Rightarrow] & A \ldots \\ & A_5 \arrow[ul, Rightarrow] & & & \end{tikzcd} \qquad (2)$$

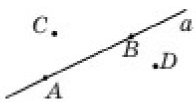
Осы сияқты, әрбір жаңа түсінік ертеректен белгілі түсініктер көмегімен анықталады. Мысалы, «барлық бұрыштарының шамалары 90°-тан және барлық қабырғалары өзара тең болатын төртбұрышты квадрат деп атаймыз». Мұнда «квадрат» деген жаңа ұғым «төртбұрыш», «қабырға», «бұрыш» және т.с.с. ұғымдарға сүйеніп анықталды. Енді осы көрсетілген ұғымдарды анықтау үшін де біз өзге белгілі ұғымдарға сүйенуіміз қажет, т.с.с., яғни әрбір ұғымға ***анықтама*** беру әрекеті де біздерді көрсетілген (1) және (2) түрдегідей шексіз анықтамалар тізбесіне соқтырады. Осыдан теоремалар мен түсініктердің көрсетілген шексіз тізбелерін түзу қажеттілігі туындайды, яғни кейбір түсініктерді негізгі түсініктер деп алып, оларды анықтамасыз, ал кейбір теоремаларды ***аксиомалар*** деп атап, оларды дәлелдеусіз алынатын ақиқат тұжырымдар ретінде қабылдау мұқтаждығы туындайды. Ал енді кейбір түсініктерді анықтамасыз қабылдағандықтан, олардың арасында қандай қатынастар бар екенін білуіміз қажет. Мұндай қатынастар алдын ала айтылады, оларды теорияның ***негізгі қатынастары*** деп атайды. Мұнда біз геометрияны аксиоматикалық тұрғыдан қалыптастырудың қарапайым жоспарын ғана келтірдік. Мұны жалпы және мағыналы жүйеде білген дұрыс. Себебі біздер геометрияны оқып үйрену үдерісінде әрбір тұжырымды, қасиетті және теореманы қабылданған аксиомалар жүйесіне сүйене отырып дәлелдейміз және қабылданған негізгі түсініктер мен негізгі қатынастарға сүйене отырып, әрбір ұғымға анықтама береміз. Сондықтан өздеріңе белгілі ұғымдарға «қайтадан» анықтама берудің және оқып-үйренген қарапайым геометриялық фигуралардың «ақиқат», «онсыз да түсінікті» қасиеттерін дәлелдеудің қажеті жоқ деп ойлаймыз. Ал бұлай ойлау геометрия негіздерін дұрыс ұғынуға айтарлықтай кедергі болары ақиқат.

I ТАРАУ. ПЛАНИМЕТРИЯНЫҢ АЛҒАШҚЫ ТҮСІНІКТЕРІ МЕН АКСИОМАЛАРЫ

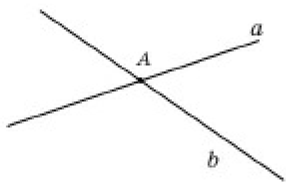
1.1. Нүкте, түзу және кесінді

1.1.1. Нүкте және түзу. Жазықтықта негізгі фигуралар (түсініктер) ретінде нүкте мен түзуді қабылдайды. Нүктелерді латын алфавитінің үлкен әріптерімен белгілейді: A, B, C, D,... Түзулерді осы алфавиттің кіші әріптерімен белгілейді: a, b, c, d,... Түзуді қағаз бетінде салу үшін сызғышты қолданады (1.1-сурет), бірақ мұнда түзудің белгілі бір бөлігін ғана бейнелеуге болады, ал бүкіл түзуді екі жағына да шексіз ұласа береді деп елестетеміз. 1.2-суретте A, B, C, D нүктелері мен a түзуі бейнеленген. A және B нүктелері a түзуінде жатады (яғни нүктелер түзуге тиісті), ал C және D нүктелері бұл түзу бойында жатпайды (яғни нүктелер түзуге тиісті емес). Оны былай жазады: $A \in a$, $B \in a$, $C \in a$, $D \in a$. Мұнда a түзуі A және B нүктелері арқылы өтеді деп те айтады. Түзуді екі нүктесі арқылы белгілеуге болады. Мысалы, 1.2-суреттегі a түзуін AB арқылы да белгілейді. Егер екі түзудің тек бір ғана ортақ нүктесі бар болса, онда бұл түзулерді қиылысады деп айтады. Ал олардың жалғыз ортақ нүктесін осы түзулердің *қиылысу нүктесі* деп атайды. 1.3-суретте a және b түзулері A нүктесінде қиылысады. Оны былай жазады: $a \cap b = A$.

1.1-сурет



1.2-сурет



1.3-сурет

Сонымен нүктенің түзуде жататындығы (түзудің нүкте арқылы өтетіндігі) негізгі қатынастардың бірі болып табылады. Жазықтықтағы нүктенің түзуге тиістілігін төмендегі аксиома айқындайды.

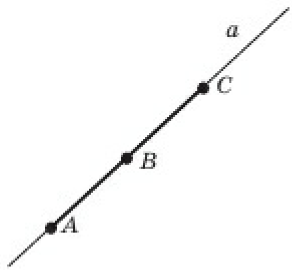
I. Түзу қандай болса да, оның бойында жататын және оның бойында жатпайтын нүктелер табылады. Әрбір екі нүкте арқылы бір ғана түзу жүргізуге болады.

Енді I аксиоманың салдары ретінде келесі тұжырымды дәлелдейік.

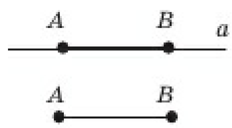
1-мысал. Әртүрлі екі түзу екі немесе одан да көп нүктелерде[1] қиылыса алмайтынын дәлелдейік.

Дәлелдеуі. Біз керісінше, қандай да бір a және b түзулерінің ортақ әртүрлі A және B нүктелері болсын делік. Онда әртүрлі A және B нүктелері арқылы a және b екі түзуі өтетіндігі шығады. Бұл I аксиомаға қайшы. Алынған қайшылық әртүрлі екі түзудің бір нүктеден көп ортақ нүктелері болмайтынын көрсетеді.

1.4-суретте a түзуі мен осы түзу бойынан A, B және C нүктелері берілген. Мұнда B нүктесі A және C нүктелерінің ***арасында жатыр,*** яғни a түзуінің бойында B нүктесі A мен C нүктелерін бөліп тұр. Бұл жағдайда A және C нүктелері B нүктесінің ***екі жағында жатады*** деп немесе B және C нүктелері A нүктесінің ***бір жағында жатады*** деп, немесе B және C нүктелері A нүктесімен ***бөлінбейді*** деп те айтады. Біз мұнда бұрынғы түсініктерге сүйеніп, анықталмайтын түзу нүктелері арасындағы жаңа қатынасты қарастырдық. Сондықтан түзу нүктелері арасындағы негізгі қатынас ретінде ***«арасында жатады»*** қатынасы алынып, оның мағынасы төмендегі аксиомамен айқындалады.



1.4-сурет

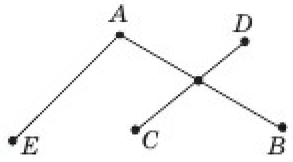


1.5-сурет

II. Түзу бойындағы үш нүктенің тек біреуі ғана қалған екеуінің арасында жатады.

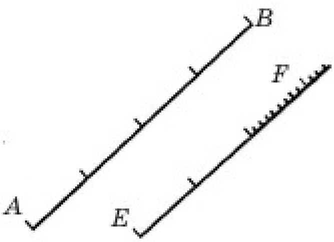
1.1.2. Кесінді. Енді біз кесінді ұғымына анықтама бере аламыз. Айталық, A және B нүктелері a түзуінің бойында жатсын. Онда a түзуінің A және B нүктелерінің арасында орналасқан нүктелерінің жиынын AB ***кесіндісі*** деп атайды, яғни a түзуінің A және B нүктелерімен шектелген бөлігін AB кесіндісі дейді (1.5-сурет). Кесіндіні шектейтін нүктелерді оның ***ұштары*** деп, ал өзге нүктелерінің барлығын оның

[1]Осы жерде және бұдан былай «екі түзу», «екі нүкте», «үш нүкте», т.с.с. деген сөзді сәйкесінше әртүрлі түзулер мен әртүрлі нүктелер берілді деп есептейміз.



1.6-сурет

1.7-сурет



1.8-сурет

ішкі нүктелері деп атайды. Мысалы, 1.4-суретте B нүктесі AC кесіндісінің ішкі нүктесі, ал A және C нүктелері – оның ұштары.

Егер екі кесіндінің тек бір ғана ортақ ішкі нүктесі бар болса, онда бұл кесінділерді ***қиылысады*** деп айтады. Мысалы, 1.6-суретте AB және CD, AB және AE кесінділері қиылысады, ал AE және CD кесінділері қиылыспайды.

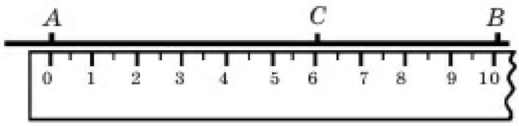
Кесіндіні өлшеу үшін өлшеу бірлігі болуы қажет. 1.7-суретте бейнеленген кесіндіні ***бірлік кесінді*** деп қабылдайық, оның ұзындығы 1 см. Егер қайсыбір AB кесіндісінің бойына осындай бірлік кесіндінің тура төртеуі салынса, яғни AB-ны бірлік кесіндімен тура 4 рет өлшеуге болатын болса, онда AB кесіндісінің ұзындығы 4 см деп есептейміз (1.8-сурет). Ал егер EF кесіндісінің бойына бірлік кесінді үш рет салынып, қалдық қалатын болса, онда қалдығына бірлік кесіндінің оннан бір бөлігі 3 рет өлшеп салынды. Демек, EF кесіндісінің ұзындығы 3,3 см. Оны былай жазады: $AB = 4$ см, $EF = 3,3$ см.

Сонымен кесіндінің ұзындығын өлшеу – негізгі ұғым, оның қасиеттерін төмендегі аксиома айқындайды.

ІІІ. Әрбір кесіндінің нөлден үлкен ұзындығы бар. Кесіндінің ұзындығы оның әрбір нүктесімен бөлінетін бөліктерінің ұзындықтарының қосындысына тең.

Бұл, AB кесіндісі кез келген C нүктесімен екі бөлікке бөлінгенде, AB кесіндісінің ұзындығы AC және CB кесінділерінің ұзындықтарының қосындысына тең дегенді білдіреді. Мысалы, 1.9-суретте $AB = 10$ см, $AC = 6$ см, $CB = 4$ см, яғни $AB = AC + CB$ болатынын көреміз.

AB кесіндісінің ұзындығын A және B нүктелерінің ***арақашықтығы*** деп те атайды.



1.9-сурет

2-мысал. A, B, C нүктелері бір түзудің бойында жатады және AB = 5,8 см, AC = 2,5 см, BC = 3,3 см екені белгілі, A нүктесі B мен C нүктелерінің арасында жатуы мүмкін бе? B нүктесі A мен C нүктелерінің арасында жатуы мүмкін бе? A, B, C нүктелерінің қайсысы қалған екеуінің арасында жатады?

Шешуі. Егер A нүктесі B мен C нүктелерінің арасында жататын болса, онда III аксиома бойынша $AB + AC = BC$ болуы қажет. Бірақ $5{,}8 + 2{,}5 \neq 3{,}3$. Олай болса, A нүктесі B мен C нүктелерінің арасында жата алмайды.

Егер B нүктесі A мен C нүктелерінің арасында жатса, онда $AB + BC = AC$ теңдігі орындалуы керек. $5{,}8 + 3{,}3 \neq 2{,}5$ болғандықтан, B нүктесі де A мен C нүктелерінің арасында жатпайды.

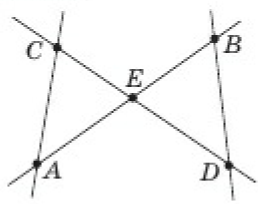
II аксиома бойынша түзу бойындағы үш нүктенің біреуі ғана қалған екеуінің арасында жатады. Олай болса, C нүктесі A мен B нүктелерінің арасында жатыр.

?

1. Геометриялық фигураларға мысалдар келтіріңдер.
2. Жазықтықтағы негізгі фигураларды атаңдар.
3. Нүктелер мен түзулер қалай белгіленеді?
4. Екі нүкте арқылы неше түзу жүргізуге болады?
5. Екі түзудің неше ортақ нүктесі болуы мүмкін?
6. Кесінді деген не?
7. Кесіндіні өлшеудің негізгі қасиеттерін атаңдар.
8. Екі нүктенің арақашықтығы деп нені түсінеміз?

ПТ

1. $A \in a$, және $B \in a$ болатындай A және B нүктелері мен a түзуі берілген. Осының сызбасын салыңдар.
2. a түзуі берілген. a мен AB түзулері A және B нүктелерінің арасында жататын C нүктесінде қиылысатындай етіп, A, B, C нүктелерін белгілеп көрсетіңдер.
3. 1.10-сурет бойынша: 1) Барлық қиылысатын түзулер жұбын және олардың қиылысу нүктелерін жазып



1.10-сурет

көрсетіңдер; 2) Барлық қиылысатын кесінділер жұбын және олардың ортақ нүктелерін жазып көрсетіңдер.

4. a түзуін сызып, оның бойынан A және B нүктелерін салыңдар.

1) AB кесіндісінде жататын M және N нүктелерін; 2) a түзуінде жататын, бірақ AB кесіндісіне тиісті емес P және Q нүктелерін; 3) a түзуінде жатпайтын R және S нүктелерін салып көрсетіңдер.

Есептер

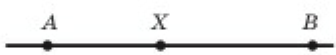
А

1.1. M нүктесі CD түзуінің C және D нүктелері арасында жатады. Егер: 1) $CM = 2{,}5$ см, $MD = 3{,}5$ см; 2) $CM = 3{,}1$ дм, $MD = 4{,}6$ дм; 3) $CM = 12{,}3$ м, $MD = 5{,}8$ м болса, онда CD кесіндісінің ұзындығын табыңдар.

1.2. Түзу бойынан A және B екі нүктесін алып, AB кесіндісінің ортасын көз мөлшерімен белгілеңдер. Белгіленген нүктенің дұрыстығын сызғышты пайдаланып тексеріңдер.

1.3. A, B, C үш нүктесі бір түзу бойында жатады. $AB = 4{,}3$ см, $AC = 7{,}5$ см, $BC = 3{,}2$ см екені белгілі. A нүктесі B және C нүктелерінің арасында жатуы мүмкін бе? C нүктесі A және B нүктелерінің арасында жатуы мүмкін бе? A, B, C нүктелерінің қайсысы қалған екеуінің арасында жатады?

1.4. A, B, C нүктелері бір түзудің бойында жатады. Егер $AC = 5$ см, $BC = 7$ см болса, онда B нүктесі AC кесіндісінде жатуы мүмкін бе? Жауаптарыңды түсіндіріңдер.



1.11-сурет

1.5. X нүктесі AB түзуінің A және B нүктелерінің арасында жатады. Егер $AX = 2{,}5$ см, $XB = 3{,}4$ см болса, онда AB кесіндісінің ұзындығын табыңдар (1.11-сурет).

1.6. M нүктесі K және P нүктелерінің арасында жатады. Егер $KP = 0{,}9$ дм, $KM = 0{,}3$ дм болса, онда M мен P нүктелерінің арақашықтығын табыңдар.

1.7. Егер: 1) $AB = 2{,}5$ см, $BC = 3{,}8$ см, $AC = 1{,}3$ см; 2) $AB = 1{,}9$ дм, $BC = 2{,}9$ дм, $AC = 4{,}8$ дм болса, онда A, B, C нүктелері бір түзудің бойында жата ма?

B

1.8. Әрбір үшеуі бір түзудің бойында жатпайтындай етіп, жазықтықтан төрт нүкте белгілеңдер. Олардың әрбір екеуі арқылы түзу жүргізіңдер. Барлығы неше түзу жүргізілді?

1.9. Жазықтықта төрт түзу берілген және олардың әрбір екеуі қиылысады. Егер осы қиылысу нүктелері арқылы тек екі түзу ғана өтетін болса, онда барлығы неше қиылысу нүктесі болғаны?

1.10. P, Q, R нүктелері бір түзудің бойында жатады. Егер $PR = 7$ см, $QR = 7{,}6$ см болса, онда Q нүктесі P және R нүктелерін бөліп тұра ма? Жауаптарыңды түсіндіріңдер.

1.11. Егер $AB = 1{,}8$ м, $AC = 1{,}3$ м, $BC = 3$ м болса, онда A, B, C нүктелері бір түзудің бойында жата ма?

1.12. C нүктесі – AB кесіндісінің ортасы, ал O – AC кесіндісінің ортасы. Егер: 1) $AB = 2$ см болса, онда AC, CB, AO, OB кесінділерінің ұзындығын; 2) $CB = 3{,}2$ м болса, онда AB, AC, AO және OB кесінділерінің ұзындығын табыңдар.

1.13. 1) A, B, C нүктелері a түзуінде жатады және $AB = 5$ см, $BC = 7$ см. AC-ның ұзындығы қандай болуы мүмкін? 2) C нүктесі – AB кесіндісінің ортасы және $AB = 7$ м $5{,}8$ см болса, онда AC-ның ұзындығын дециметр есебімен табыңдар.

1.14. 1) M, N, K нүктелері m түзуінде жатады және $MN = 8$ см, $NK = 12$ см. MK кесіндісінің ұзындығы қандай болуы мүмкін? 2) Егер F нүктесі – EL кесіндісінің ортасы және $EF = 3$ дм 12 см болса, онда EL кесіндісінің ұзындығы неше метр?

1.15. 1) A және B нүктелері a түзуінің екі жағында жатады және $C \in a$, $AB = 37$ дм, $AC = 12$ дм, $BC = 26$ дм. C нүктесі AB кесіндісі мен a түзуінің қиылысу нүктесі бола ма?
2) $AC = DB$, C нүктесі A және D нүктелері арасында жататындай AB кесіндісінен C және D нүктелері алынған. Егер $AB = 58$ см, $CD = 2{,}8$ дм болса, онда AC және BD кесінділері орталарының арақашықтығын табыңдар (1.12-сурет).

1.12-сурет

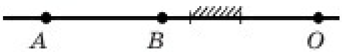
1.16. 1) A және B нүктелері b түзуіне тиісті емес және оның әртүрлі жағында жатады, $C \in b$, $AB = 29$ см, $AC =$

$= 14$ см, $BC = 16$ см. C нүктесі AB және b түзулерінің қиылысу нүктесі бола ма? 2) $CE = DF$, E нүктесі C және F нүктелерінің арасында жататындай, CD кесіндісінен E және F нүктелері алынған. CE және DF кесінділері орталарының арақашықтығы 8,5 дм, ал $CD = 1,2$ м. EF-ті табыңдар.

C

1.17. A, B, C және D нүктелері берілген. A, B, C нүктелерінің бір түзудің бойында жататыны және B, C, D нүктелерінің де бір түзудің бойында жататыны белгілі. Барлық төрт нүкте бір түзудің бойында жататынын дәлелдеңдер.

1.18. p, q, m және n түзулері берілген. p, q, m түзулері бір нүктеде және q, m, n түзулері де бір нүктеде қиылысатыны белгілі. Осы төрт түзудің бір нүкте арқылы өтетінін дәлелдеңдер.



1.13-сурет

1.19. $OA = 12$ см, $OB = 9$ см болатындай бір түзудің O, A, B нүктелері берілген. O нүктесі: 1) AB кесіндісінде жатады; 2) AB кесіндісінде жатпайды деп алып, OA және OB кесінділері орталарының арақашықтығын табыңдар (1.13-сурет).

1.20. Ұзындығы a-ға тең кесінді өзінің кез келген нүктесімен екі бөлікке бөлінген. Осы бөліктердің орталарының арақашықтығын табыңдар.

1.21. Ұзындығы 28 см болатын кесінді өзара тең емес үш бөлікке бөлінген. Шеткі екі бөліктерінің орталарының арақашықтығы 16 см. Ортаңғы кесіндінің ұзындығын табыңдар.

1.22. 1) P, A және B нүктелері a түзуінде орналасқан. Егер $AB = 6$ см және $PA + PB = 9$ см болса, онда PA мен PB кесінділерінің ұзындықтарын табыңдар.

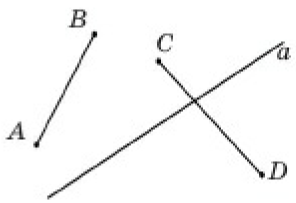
2) Түзу бойында $AB = CD$ болатындай етіп, A, B, C және D нүктелері белгіленген. Ұштары көрсетілген нүктелерде жататындай және өзара тең болатындай өзге де кесінділер жұбы табыла ма?

1.23. AB және CD кесінділері бір түзу бойында, ал B мен C – бұл кесінділердің ең жақын орналасқан нүктелері. Егер $BC = 5$ см және осы кесінділердің орталарының қашықтығы 17 см болса, AD-ны табыңдар.

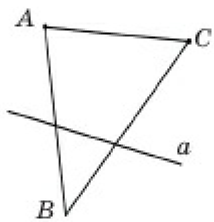
1.2. Жарты жазықтық, сәуле және бұрыш

1.2.1. Жарты жазықтық. Әрбір түзу жазықтықты екі бөлікке бөледі. 1.14-суретте a түзуі жазықтықты екі жарты жазықтыққа бөліп тұр. Жазықтықтың бұлайша бөліктенуінің мынадай қасиеттері бар: егер кесіндінің ұштары бір жарты жазықтықта жатса, онда кесінді a түзуін қиып өтпейді, ал кесіндінің ұштары әртүрлі жарты жазықтықтарда жатса, онда кесінді a түзуін қиып өтеді.

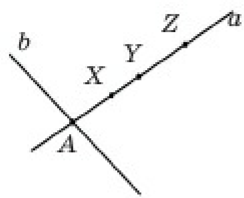
1.14-суретте A және B нүктелері a түзуімен бөлінетін бір жарты жазықтықта орналасқан. Сондықтан AB кесіндісі a түзуін қиып өтпейді. C және D нүктелері әртүрлі жарты жазықтықтарда жатқандықтан, CD кесіндісі a түзуін қиып өтеді.



1.14-сурет



1.15-сурет



1.16-сурет

Жазықтықтағы түзу мен нүктелердің өзара орналасуының негізгі қасиетін мынадай аксиома айқындайды.

IV. Түзу жазықтықты екі жарты жазықтыққа бөледі.

1-мысал. a түзуі мен осы түзуде жатпайтын A, B, C нүктелері берілген. AB кесіндісі a түзуін қиып өтетіні, ал AC кесіндісі a түзуімен қиылыспайтыны белгілі. BC кесіндісі a түзуін қиып өте ме?

Шешуі. a түзуі жазықтықты екі жарты жазықтыққа бөледі (1.15-сурет). AC кесіндісі a түзуін қимайды, сондықтан A және C нүктелері бір жарты жазықтықта орналасқан. Ал AB кесіндісі a түзуін қиып өтеді, олай болса, A және B нүктелері әртүрлі жарты жазықтықтарда жатады. Онда B және C нүктелері де әртүрлі жарты жазықтықтарда орналасқан, яғни BC кесіндісі a түзуін қиып өтеді.

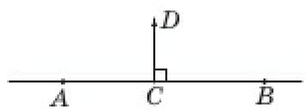
1.2.2. Сәуле. **2-мысал.** a түзуі және осы түзу бойынан A, X, Y, Z нүктелері алынған (1.16-сурет). X және Y нүктелері A нүктесінің бір жағында жататыны, X және Z нүктелерінің де A нүктесінің бір жағында жататыны белгілі. Y және Z нүктелері A нүктесіне қатысты қалай орналасқан: бір жағында ма, әлде екі жағында ма?

Шешуі. A нүктесі арқылы өтетін a түзуінен өзгеше b түзуін жүргізейік. Бұл түзу жазықтықты екі жарты жазықтыққа бөледі. Осы жарты жазықтықтардың бірінде X нүктесі жатады. Есеп шарты бойынша X және Y, X және Z нүктелері a түзуінде A нүктесінің бір жағында орналасқан, онда XY және XZ кесінділері b түзуімен қиылыспайды, яғни A нүктесі XY және XZ кесінділерінде жатпайды. Онда A нүктесі YZ кесіндісіне де тиісті емес (YZ b түзуімен қиылыспайды), яғни Y және Z нүктелері A нүктесінің бір жағында жатыр.

Түзудің берілген нүктесінен оның бір жағында орналасқан нүктелерінің жиынын ***сәуле*** немесе ***жарты түзу*** деп атайды. Бұл берілген нүктені сәуленің ***бастапқы нүктесі*** деп атайды. Түзудің әрбір нүктесі оны екі сәулеге бөледі және олардың бастапқы нүктелері ортақ. Түзудің осындай бастапқы нүктелері ортақ болып келген әртүрлі сәулелері бір-бірінің ***толықтауыш сәулелері*** деп аталады.

Сәулелерді де түзулер сияқты латынның кіші әріптерімен белгілейді. Сәулені бастапқы нүктесі және осы сәуледе жататын екінші нүкте арқылы екі әріппен де белгілеуге болады. Мұнда сәуленің бастапқы нүктесі үнемі бірінші жазылады. Мысалы, 1.17-суретте қалың сызықпен бейнеленген сәулені AB арқылы белгілейді.

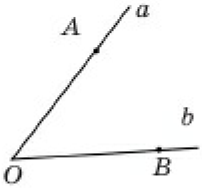
1.17-сурет



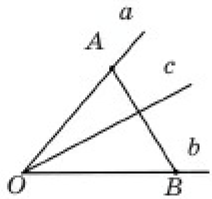
1.18-сурет

1.2.3. Бұрыш. ***Бұрыш*** деп бастапқы нүктелері ортақ болатын әртүрлі жарты түзулерден құралған фигураны айтады. Бұл ортақ нүкте ***бұрыштың төбесі*** деп, ал жарты түзулер ***бұрыштың қабырғалары*** деп аталады. Егер бұрыш қабырғалары өзара толықтауыш сәулелер болса, онда мұндай бұрышты ***жазыңқы бұрыш*** деп атайды. Жазыңқы бұрыштың тең жартысы ***тік бұрыш*** деп аталады. Суретте көбінесе тік бұрыштарды □ белгісімен көрсетеді (1.18-сурет).

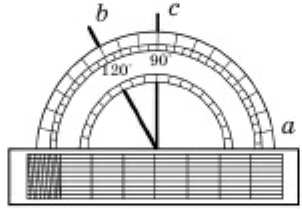
1.19-суретте төбесі O және қабырғалары a, b сәулелері болатын бұрыш бейнеленген. Бұрышты оның төбесін көрсету



1.19-сурет



1.20-сурет



1.21-сурет

арқылы немесе оның қабырғаларын көрсету арқылы, немесе оның үш нүктесі: төбесі және қабырғаларында жататын екі нүктесі арқылы белгілейді. «Бұрыш» сөзін кейде $\angle$ таңбасымен алмастырады.

1.19-суретте бейнеленген бұрышты үш түрлі тәсілмен белгілеуге болады: $\angle O$, $\angle(ab)$, $\angle AOB$. Бұрышты белгілеудің үшінші тәсілінде ортаңғы әріп міндетті түрде бұрыш төбесін көрсетеді.

Егер бұрыш төбесінен шығатын сәуле ұштары бұрыш қабырғаларында орналасқан кесіндіні қиып өтсе, онда бұл сәулені осы бұрыш қабырғаларының арасы арқылы өтеді деп айтады. Мысалы, 1.20-суретте c сәулесі (ab) бұрышының қабырғаларының арасы арқылы өтеді, себебі оның бастапқы нүктесі (ab) бұрышының төбесінде жатады және ол AB кесіндісін қиып өтеді. Мұнда $A \in a$, $B \in b$. Жазыңқы бұрыш жағдайында оның төбесінен шығатын және қабырғаларынан басқа кез келген сәулені осы бұрыш қабырғалары арасынан өтеді деп есептейміз.

Егер нүкте бұрыш қабырғалары арасынан өтетін сәуледе жатса, онда бұл нүктені бұрыштың ***ішкі нүктесі*** деп атайды. Ал бұрыштың ішкі нүктесі болмайтын және оның қабырғаларында жатпайтын нүктені бұрыштың ***сыртқы нүктесі*** деп атайды. Бұрыштың барлық ішкі нүктелерінің жиыны оның ***ішкі аймағы*** деп, ал барлық сыртқы нүктелерінің жиыны ***сыртқы аймағы*** деп аталады.

Бұрыштар транспортир көмегімен градустық өлшем бірлігімен, яғни градуспен өлшенеді. Мысалы, 1.21-суретте көрсетілген (ab) бұрышының шамасы 120°-қа тең, ал c сәулесі (ab) бұрышы қабырғаларының арасынан өтеді. (ab) бұрышы (ac) және (bc) бұрыштарының қосындысына тең.

Ал $1^\circ = 60'$, $1' = 60''$ болатыны сендерге 5-сыныптан белгілі.

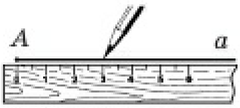
Бұрыштарды өлшеудің **негізгі қасиеті:**

V. Әрбір бұрыштың нөлден үлкен белгілі бір градустық өлшемі бар. Жазыңқы бұрыштың шамасы 180°-қа тең. Бұрыштың градустық өлшемі осы бұрыштың қабырғаларының арасы арқылы өтетін кез келген сәулемен бөлінетін бөліктерінің градустық өлшемдерінің қосындысына тең.

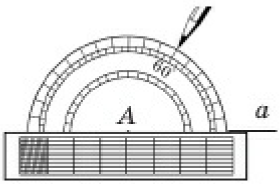
Бұл айтылғандардың мағынасы мынадай: егер c сәулесі (ab) бұрышы қабырғаларының арасынан өтсе (1.20-сурет), онда $\angle(ab)$, $\angle(ac)$, $\angle(bc)$ теңдігі орындалады.

3-мысал. Егер $\angle(ac) = 30^\circ$, $\angle(cb) = 80^\circ$, $\angle(ab) = 50^\circ$ болса, онда c сәулесі (ab) бұрышы қабырғаларының арасы арқылы өте ме?

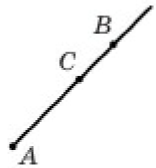
Шешуі. Егер c сәулесі (ab) бұрышы қабырғаларының арасы арқылы өтсе, онда V аксиома бойынша $\angle(ab) = \angle(ac) + \angle(bc)$ теңдігі орындалуы қажет. Ал $30^\circ + 80^\circ \neq 50^\circ$. Олай болса, c сәулесі (ab) бұрышы қабырғалары арасынан өтпейді.



1.22-сурет



1.23-сурет



1.24-сурет

1.2.4. Кесінділер мен бұрыштарды өлшеп салу.

1.22-суретте сызғышты пайдаланып, a сәулесінің бастапқы нүктесінен бастап ұзындығы белгілі (3 см) кесіндіні салу тәсілі көрсетілген.

1.23-суреттегі a сәулесі толықтауыш сәулемен бірге жазықтықты екі жарты жазықтыққа бөледі. Мұнда транспортирді пайдаланып, бір қабырғасы a сәулесі болатындай жоғарғы жарты жазықтықта градустық өлшемі берілген (60°) бұрышты салу тәсілі көрсетілген.

Кесінділерді өлшеп салу мен бұрыштарды өлшеп салудың негізгі қасиеттері (аксиомалары) мынадай:

VI. Кез келген сәуле бойынан оның бастапқы нүктесінен бастап ұзындығы берілген кесіндіні өлшеп салуға болады және бұл кесінді жалғыз болады.

VII. Кез келген сәуледен берілген жарты жазықтықта градустық өлшемі берілген бұрышты өлшеп салуға болады және бұл бұрыш жалғыз болады.

4-мысал. AB сәулесінде AB кесіндісінен кіші AC кесіндісі өлшеп салынған. A, B, C нүктелерінің қайсысы қалған екеуінің арасында жатады?

Шешуі. B және C нүктелері бастапқы нүктесі A болатын сәуледе жатқандықтан (1.24-сурет), олар A нүктесімен бөлінбейді, яғни A нүктесі B және C нүктелерінің арасында жатпайды. B нүктесі A және C нүктелерінің арасында жатуы мүмкін бе? Егер B нүктесі A және C нүктелерінің арасында жатса, онда $AB + BC = AC$ болуы қажет. Бұлай болуы мүмкін емес, себебі есеп шарты бойынша AC кесіндісі AB кесіндісінен кіші. Олай болса, B нүктесі A және C нүктелерінің арасында жатуы мүмкін емес. Сондықтан C нүктесі ғана A мен B нүктелерінің арасында жатады.

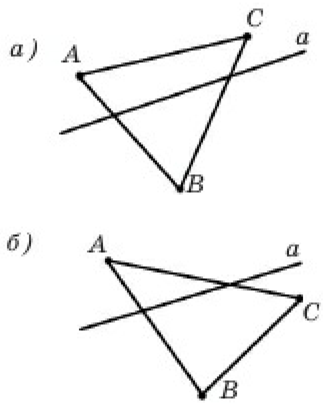
1.2.5. Аксиомалар және теоремалар. Кіріспеде сендер геометрия құрылымының аксиоматикалық тәсілімен және алғаш рет аксиома, теорема ұғымдарымен таныстыңдар. Енді осы ұғымдардың мәнін тереңірек қарастырайық.

Дәлелдеусіз қабылданатын және қарапайым геометриялық фигуралардың негізгі қасиеттерін айқындайтын тұжырымды ***аксиома*** деп атайды. Сонымен, қысқаша айтқанда, **аксиома деп дәлелдеусіз қабылданатын тұжырымды айтады.** Аксиома гректің "аксиос" деген сөзінен туындаған және "ақиқаттығы күмән келтірмейтін сөйлем" деген мағынаны білдіреді. Мысалы, IV аксиомада A ретінде "жазықтықта жататын түзу" берілген (бұл – тұжырымның шарты), ал B ретінде осы "түзудің жазықтықты екі жарты жазықтыққа бөлетіні" алынады (бұл – тұжырымның қорытындысы). Сонымен, бұл қарапайым тұжырым жазықтық пен онда жататын түзу арасындағы қатынасты реттейтін аксиома ретінде қабылданған.

Геометрияда қабылданған аксиомалардан өзге тұжырымдардың барлығы дәлелденуі қажет. Мұндай **дәлелдеуді қажет ететін тұжырымды *теорема* деп атайды.** Жалпы, қисынды ой қорытулар тәсілімен тұжырымның ақиқаттығына көз жеткізу процесін ***дәлелдеу*** деп атайды. Енді теорема мен оны дәлелдеуге мысал келтірейік. 1-мысалдың қорытындысын төмендегідей теорема ретінде тұжырымдауға болады.

Теорема. *Егер түзу қос-қостан ұштары ортақ үш кесіндінің біреуін қиып өтсе және кесінділердің ортақ ұштары* *арқылы өтпесе, онда бұл түзу қалған екі кесіндінің біреуін ғана қиып өтеді.*

Дәлелдеуі. Айталық, a түзуі AB кесіндісін қиып өтсін (1.25-сурет).



1.25-сурет

a түзуі жазықтықты екі жарты жазықтыққа бөледі және AB кесіндісін қиып өтеді. Сондықтан A және B нүктелері әртүрлі жарты жазықтықтарда жатады, ал C нүктесі осы жарты жазықтықтардың тек біреуінде ғана жатады.

Егер C нүктесі A нүктесімен бір жарты жазықтықта жатса, онда B және C нүктелері әртүрлі жарты жазықтықтарда жатады. Сондықтан a түзуі AC кесіндісімен қиылыспайды, ал BC кесіндісін қиып өтеді.

Егер C нүктесі B нүктесімен бір жарты жазықтықта жатса, онда A және C нүктелері әртүрлі жарты жазықтықтарда жатады. Олай болса, a түзуі BC кесіндісімен қиылыспайды, ал AC кесіндісін қиып өтеді.

Бұл жағдайлардың әрқайсысында a түзуі AC не BC кесінділерінің тек біреуін ғана қиып өтеді, теорема толық дәлелденді.

Теоремаларды дәлелдеу үдерісінде аксиомаларды, дәлелденген теоремаларды немесе шешілген мысалдардың қорытындыларын (соңғылар да теорема болып табылады) қолданады. Ал фигуралардың өзге дәлелденбеген қасиеттерін қолдануға мүлде болмайды. Геометриялық сызбалардан фигуралардың көрініп тұрған қасиеттерін де негіздеусіз қолдануға болмайды.

?

1. Жазықтықты екі жарты жазықтыққа бөлудің қандай қасиеттері бар?
2. Жазықтықтағы нүктелердің түзуге қатысты орналасуының негізгі қасиеттерін тұжырымдаңдар.
3. Сәуле немесе жарты түзу деген не? Қандай сәулелер бірбірінің толықтауыш сәулелері деп аталады?
4. Сәулелер қалай белгіленеді?
5. Бұрыш деп қандай фигураны атайды?
6. Бұрышты қалай белгілейді?

7. Қандай бұрышты жазыңқы бұрыш деп атайды?
8. "Сәуле бұрыш қабырғалары арасынан өтеді" деген сөйлемді қалай түсінесіңдер?
9. Бұрыштарды өлшеудің негізгі қасиетін айтыңдар.
10. Кесінділер мен бұрыштарды өлшеп салудың негізгі қасиеттерін айтыңдар.
11. Аксиома деген не?
12. Қандай тұжырымдамаларды теорема деп атайды?

ПТ

1. Түзу бойынан A және B нүктелерін белгілеп, AB кесіндісінен C нүктесін алыңдар. AB, BC, CA, AC және BA сәулелері арасынан өзара беттесетін сәулелер жұбын көрсетіңдер.
2. Градустық өлшемі 90°, 50°, 120° болатын бұрыштарды транспортирді пайдаланып салыңдар.
3. Көз мөлшерімен 30°, 45°, 60°-қа тең бұрыштар салып, олардың дұрыстығын транспортирді пайдаланып тексеріңдер.
4. Сынып бөлмесі ішінен тік бұрыштарға мысал келтіріңдер. Мүмкін болса, ол бұрышты транспортир немесе бұрыштықтың көмегімен тексеріңдер. Мұнда жазыңқы болатын бұрыш табыла ма? Жауаптарыңды негіздеңдер.
5. I–VII аксиомаларына сәйкес келетін суреттер салыңдар. Оны басқа оқушылардың сәйкес суреттерімен салыстырыңдар. Қорытынды ретінде сызбаға сәйкес аксиомаларды тұжырымдаңдар.

Есептер

А

1.24. Жазыңқы емес (ab) бұрышын салып, осы бұрыш ішінен екі нүкте, сыртынан екі нүкте және қабырғаларынан екі нүкте белгілеп көрсетіңдер.

1.25. Жазыңқы емес бұрыш салып, AB кесіндісінің барлық нүктелері осы бұрыштың ішкі нүктелері болатындай және CD кесіндісінің барлық нүктелері бұрыштың сыртқы нүктелері болатындай етіп, A, B, C және D нүктелерін салыңдар.

1.26. Жазыңқы емес AOB бұрышын салып: 1) бұрышты екі бөлікке бөлетіндей OC сәулесін; 2) AOB бұрышын екі бөлікке бөлмейтін OD сәулесін жүргізіңдер.

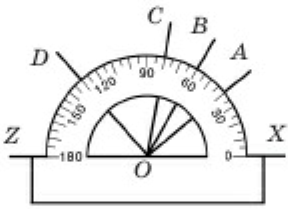
1.27. Екі түзу қиылысқанда неше жазыңқы емес бұрыш пайда болады?

1.28. Шамалары $135'$, $500'$ болатын бұрыштардың градустық өлшемдерін табыңдар.

1.29. Шамасы $6^\circ 15'$, 2°, $11{,}5^\circ$ болатын бұрыштарды минутпен өрнектеңдер.

1.30. Амалды орындаңдар:

1) $5^\circ 48' + 7^\circ 35'$; 2) $32^\circ 17' - 8^\circ 45'$.



1.26-сурет

1.31. 1.26-суретте бастапқы O нүктесі ортақ болатын сәулелер бейнеленген. 1) AOX, BOX, AOB, COB, DOX бұрыштарының градустық өлшемдерін табыңдар; 2) 20°-қа тең бұрыштарды атаңдар; 3) Тең бұрыштарды атаңдар; 4) Қабырғасы OA болатын барлық бұрыштарды атап, олардың градустық өлшемдерін табыңдар.

B

1.32. a сәулесі (cd) бұрышының қабырғаларының арасынан өтеді. Егер: 1) $\angle(ac) = 35^\circ$, $\angle(ad) = 75^\circ$; 2) $\angle(ac) = 57^\circ$, $\angle(ad) = 62^\circ$; 3) $\angle(ac) = 94^\circ$, $\angle(ac) = 94^\circ$, $\angle(ad) = 85^\circ$ болса, онда (cd) бұрышын табыңдар.

1.33. Егер $\angle QPR = 70^\circ$, $\angle QPK = 80^\circ$ болса, онда PK сәулесі QPR бұрышының ішкі сәулесі бола ма?

1.34. Сағаттың минуттық тілі 20 минут ішінде қандай бұрышқа бұрылады? 30 минутта ше?

1.35. 0,5 сағат ішінде сағат тілі қандай бұрышқа бұрылады? 5 минутта ше?

1.36. $\angle AOB = 90^\circ$, $\angle AOK = 40^\circ$ $\angle MOB = 30^\circ$ болатындай етіп, AOB бұрышы мен оның OK, OM ішкі сәулелерін салыңдар. KOM бұрышын табыңдар.

1.37. Егер OM сәулесі AOB бұрышын қақ бөлсе, ал OK сәулесі AOM бұрышын қақ бөлсе, онда KOM бұрышы AOB бұрышынан неше есе кіші?

1.38. Егер: 1) $\angle(ac) = 30^\circ$, $\angle(ab) = 80^\circ$; 2) $\angle(ac) = 100^\circ$, $\angle(cb) = 90^\circ$;

3) (ac) бұрышы (ab) бұрышынан үлкен болса, онда c сәулесі (ab) бұрышының ішкі сәулесі бола ма?

1.39. $\angle(ab) = 60^\circ$, c – оның ішкі сәулесі. Егер: 1) (ac) бұрышы (bc) бұрышынан 30° үлкен; 2) (ac) бұрышы (bc) бұрышынан екі есе үлкен болса, онда (ac) және (bc) бұрыштарын табыңдар.

1.40. $\angle(mn) = 90^\circ$, l – оның ішкі сәулесі. Егер: 1) l сәулесі (mn) бұрышын қақ бөлсе; 2) (ml) және (nl) бұрыштарының градустық өлшемдерінің қатынасы 2:3 қатынасындай болса, онда (ml) және (nl) бұрыштарын табыңдар.

1.41. OE сәулесі AOB бұрышын екі бұрышқа бөледі. Егер: 1) $\angle AOE = 44^\circ$, $\angle EOB = 77^\circ$, 2) $\angle AOE = 12^\circ 37'$, $\angle EOB = 108^\circ 25'$ болса, онда AOB бұрышын табыңдар.

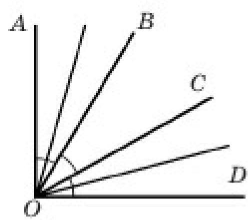
C

1.42. OC сәулесі – AOB бұрышының ішкі сәулесі. Егер $\angle AOB = 78^\circ$, ал AOC бұрышы BOC бұрышынан 18° кіші болса, онда COB бұрышын табыңдар.

1.43. OC сәулесі AOB бұрышын екі бөлікке бөледі. Егер $\angle AOB = 155^\circ$ және AOC бұрышы COB бұрышынан 15°-қа үлкен болса, онда AOC бұрышын табыңдар.

1.44. AOB бұрышы – AOC бұрышының бөлігі. Егер $\angle AOC = 108^\circ$, $\angle AOB = 3 \cdot \angle BOC$ болса, онда AOB бұрышын табыңдар.

1.45. 1.27-суреттегі AOD бұрышы тік бұрыш, $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD$. AOB және COD бұрыштарын қақ бөлетін сәулелердің арасындағы бұрыштарды табыңдар.



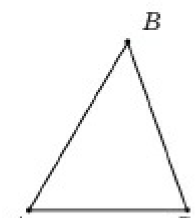
1.27-сурет

1.46. Егер A, B және C нүктелері бір түзу бойында жатса, және $AB = 20$ см, $AC = 15$ см, $CB = 35$ см болса, онда бұл нүктелер түзу бойында қалай орналасуы мүмкін? Жауаптарыңды негіздеріңдер.

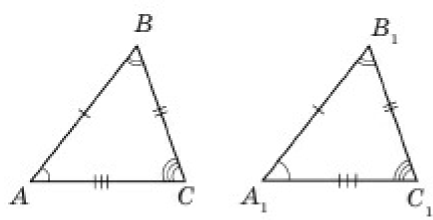
1.3. Үшбұрыштар

1.3.1. Үшбұрыш. Бір түзу бойында жатпайтын үш нүкте белгілеп, оларды кесінділермен қосамыз (1.28-сурет). Шыққан геометриялық фигураны ***үшбұрыш*** деп атаймыз. Берілген үш нүкте ***үшбұрыштың төбелері*** деп, ал оларды қосатын кесінділер ***үшбұрыштың қабырғалары*** деп аталады, Мысалы, 1.28-суреттегі A, B, C нүктелері – үшбұрыштың төбелері, ал AB, AC, BC кесінділері оның қабырғалары болады. Бұл үшбұрышты былай белгілейді: ΔABC. $\angle BAC$, $\angle CBA$ және $\angle ABC$ үшбұрыштың ***бұрыштары*** деп аталады. Кейде ABC үшбұрышының бұрыштарын бір әріппен белгілейді: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$. Үшбұрыштың үш қабырғасы ұзындықтарының қосындысын оның ***периметрі*** деп атайды. A бұрышын BC қабырғасына ***қарсы орналасқан*** бұрыш деп атайды (1.28-сурет). Осы сияқты B бұрышы AC қабырғасына, C бұрышы AB қабырғасына қарсы орналасқан. Төбелері үшбұрыштың бір қабырғасының ұштарында орналасқан бұрыштарды осы қабырғаға ***іргелес орналасқан бұрыштар*** деп атайды. Мысалы, 1.28-суретте A және B бұрыштары AB қабырғасына іргелес орналасқан.

Егер екі кесіндінің ұзындықтары бірдей болса, онда бұл кесінділерді ***тең кесінділер*** деп атайды. Егер екі бұрыштың градустық өлшемдері бірдей болса, онда бұл бұрыштарды ***тең бұрыштар*** деп атайды. Егер екі үшбұрыштың сәйкес қабырғалары мен сәйкес бұрыштары өзара тең болса, онда мұндай үшбұрыштарды ***тең үшбұрыштар*** деп атайды. Мұнда тең бұрыштар сәйкес тең қабырғаларға қарсы жатуы тиіс. 1.29-суретте өзара тең ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштары бейнеленген: $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$.



1.28-сурет



1.29-сурет

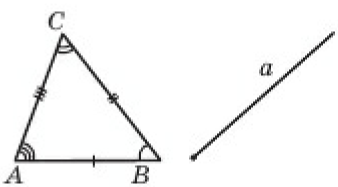
Үшбұрыштар теңдігін былай белгілейді: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$. Мұнда үшбұрыш төбелерінің жазылу тәртібі маңызды. Мысалы, $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ теңдігінен $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$ болатындығы шығады, ал $\Delta ABC = \Delta B_1A_1C_1$ теңдігінен $\angle A = \angle B_1$, $\angle B = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$ теңдіктерін аламыз.

1-мысал. Егер $\Delta ABC = \Delta PQR$, $AB = 10$ см және $\angle C = 90^\circ$ болса, онда PQ мен $\angle R$-ді анықтайық.

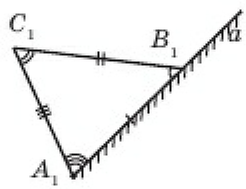
Шешуі. $\Delta ABC = \Delta PQR$ болғандықтан, $AB = PQ$ және $\angle C = \angle R$ болады. Олай болса, $PQ = 10$ см, $\angle C = 90^\circ$.

1.3.2. Берілген үшбұрышқа тең үшбұрыштың бар болуы.

Айталық, ΔABC мен a сәулесі берілген (1.30-сурет). Үшбұрыштың A төбесі a сәулесінің бастапқы нүктесімен беттесетіндей, B төбесі a сәулесінде жататындай және C төбесі a сәулесі мен оның толықтауыш сәулесіне қатысты берілген жарты жазықтықта жататындай етіп, ABC үшбұрышын жылжытамыз. Жылжыған үшбұрыш төбелерін A_1, B_1, C_1 арқылы белгілейік (1.31-сурет). Онда $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$. Мұнда ABC үшбұрышы $A_1B_1C_1$ үшбұрышымен жылжыту (қозғалыс) арқылы *беттеседі* деп аталады. Жалпы, қозғалыс арқылы тең кесінділерді де, тең бұрыштарды да беттестіруге болады (VI және VII аксиомалар).



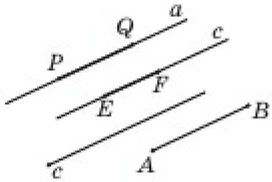
1.30-сурет



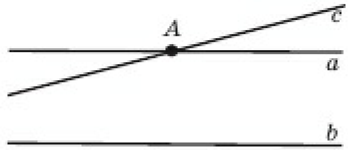
1.31-сурет

Берілген ABC үшбұрышына тең болатын және берілген a сәулесіне қатысты көрсетілген тәртіппен орналасатын $A_1B_1C_1$ үшбұрышының бар болуы негізгі қасиеттер (аксиомалар) қатарына жатады.

VIII. Берілген сәулеге қатысты көрсетілген тәртіпте орналасатын және кез келген берілген үшбұрышқа тең үшбұрыш табылады.



1.32-сурет



1.33-сурет

1.3.3. Параллель түзулер. Егер жазықтықтағы екі түзу қиылыспаса, онда бұл түзулерді ***параллель түзулер*** деп атаймыз. Егер a және b түзулері параллель болса, онда оны былай жазады: $a \parallel b$ (1.32-сурет).

Параллель түзулермен бірге параллель кесінділерді де қарастырады. Егер кесінділер параллель түзулер бойында жатса, онда бұл кесінділер ***параллель кесінділер*** деп аталады. 1.32-суретте PQ және EF кесінділері параллель. Осы сияқты түзу мен кесіндінің, сәуле мен түзудің, кесінді мен сәуленің, екі сәуленің параллельдігі анықталады (1.32-сурет).

Түзулердің параллельдігінің негізгі қасиеті (аксиомасы) мынадай:

IX. Түзуде жатпайтын нүкте арқылы жазықтықта осы түзуге параллель тек бір ғана түзу жүргізуге болады.

Теорема. *Егер түзу параллель екі түзудің біреуін қиып өтетін болса, онда бұл түзу параллель түзулердің екіншісін де қиып өтеді.*

Дәлелдеуі. Айталық, $a \parallel b$ және $a \cap c = A$ (1.33-сурет) болсын. Егер b және c түзулері қиылыспайтын болса, онда $b \parallel c$ болар еді, яғни A нүктесі арқылы b түзуіне параллель әртүрлі a және c түзулері өтер еді. Бұл IX аксиомаға қайшы. Олай болса, c түзуі a түзуін қиып өтсе, онда ол b түзуін де қиып өтуі керек.

?

1. Үшбұрыш дегеніміз не?
2. Үшбұрыштың бұрышы дегеніміз не?
3. Қандай кесінділер тең деп аталады?
4. Қандай бұрыштар тең деп аталады?
5. $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ теңдігі нені білдіреді?
6. Қандай түзулерді параллель түзулер деп атайды? Параллель кесінділер деп қандай кесінділерді атайды?
7. Параллельдік аксиомасын айтыңдар.

ПТ
1. Параллель түзулерді салудың бірнеше тәсілін көрсетіңдер.
2. Көз мөлшерімен өзара тең екі үшбұрыш салып, олардың теңдігін өлшеу құралдарымен тексеріңдер.
3. Қоршаған ортадан параллель түзулер мен параллель кесінділерге бірнеше мысалдар қарастырыңдар.

Есептер

А

1.47. Үшбұрыштың AB қабырғасынан D нүктесі алынған. Егер $AD = 5$ см, ал $BD = 6$ см болса, онда AB-ны табыңдар.

1.48. Егер $\Delta ABC = \Delta PQK$, $AB = 5$ см, $BC = 6$ см және $AC = 7$ см болса, онда PQK үшбұрышының қабырғаларын табыңдар.

1.49. Егер $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, $\angle A_1 = 40^\circ$, $\angle B_1 = 60^\circ$ және $\angle C_1 = 80^\circ$ болса, онда ABC үшбұрышының бұрыштарын табыңдар.

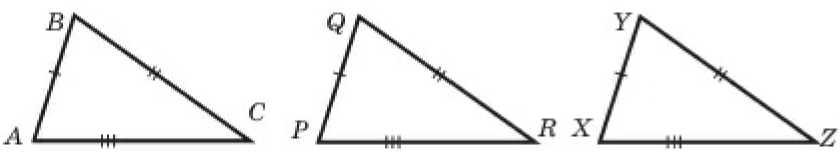
1.50. ABC, PQR және XYZ үшбұрыштары тең және $AB = 5$ см, $QR = 6$ см, $XZ = 7$ см болса, онда әрбір үшбұрыштың белгісіз қабырғаларын табыңдар (1.34-сурет).

1.51. $\Delta ABC = \Delta MNP$. 1) Егер $NP = 12$ см, ал $\angle P = 12^\circ 1'$ болса, онда BC қабырғасы мен C бұрышын табыңдар; 2) Егер MNP үшбұрышының қабырғалары әртүрлі болса, онда ABC үшбұрышының AB және BC қабырғалары тең болуы мүмкін бе?

1.52. $\Delta ABC = \Delta QPT$ және $\angle P = 17^\circ 35'$, $QT = 23$ см.

1) Егер QPT үшбұрышының тең емес екі бұрышы бар болса, онда ABC үшбұрышының барлық бұрыштары тең болуы мүмкін бе?

2) AC қабырғасы мен P бұрышын табыңдар.



1.34-сурет

1.53. ABC үшбұрышы берілген. C төбесінен AB қабырғасына параллель неше түзу жүргізуге болады?

B

1.54. ABC үшбұрышы берілген. Оған тең ABD үшбұрышы табыла ма?

1.55. a түзуі ABC үшбұрышының AB қабырғасына параллель. BC және AC түзулері a түзуімен қиылысатынын дәлелдеңдер.

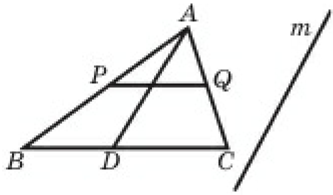
1.56. Үшбұрыштың бірде-бір төбесі арқылы өтпейтін түзу оның барлық қабырғаларын қиып өтуі мүмкін бе? Жауаптарыңды негіздеңдер.

1.57 $\Delta ABC = \Delta SKT$ және $AB = 17$ дм, $\angle K = 70^\circ 18'$. 1) B бұрышы мен SK қабырғасын табыңдар; 2) SKT үшбұрышының периметрі ABC үшбұрышының периметрінен үлкен болуы мүмкін бе?

1.58. $\Delta ABC = \Delta SKT$ және $\angle B = 121^\circ 15'$, $ST = 16$ дм. 1) K бұрышы мен AC қабырғасын табыңдар; 2) Осы үшбұрыштардың периметрлерінің қатынасы 2-ге тең болуы мүмкін бе?

C

1.59. ABC үшбұрышы берілген. m түзуі AD түзуіне параллель, $D \in BC$, $P \in AB$, $Q \in AC$ және $PQ \parallel BC$. m түзуі AB, AC, BC, PD, PQ және QD түзулерімен қиылысатынын дәлелдеңдер (1.35-сурет).



1.35-сурет

1.60. ABC үшбұрышы және $B_1 \in AC$, $A_1 \in BC$ нүктелері берілген. AA_1 және BB_1 кесінділері қиылысатынын дәлелдеңдер.

1.61. $\Delta ABC = \Delta B_1A_1C_1$ және $\angle B = 15^\circ$, $B_1C_1 = 5$ м. 1) A_1 бұрышы мен AC қабырғасын табыңдар; 2) Егер $AB = BC$ болса, онда $B_1A_1C_1$ үшбұрышының периметрі $2A_1B_1 + AC$ қосындысынан үлкен болуы мүмкін бе?

1.62. $\Delta ABC = \Delta C_1A_1B_1$ және $\angle B = 60^\circ$, $BC = 8$ м. 1) C бұрышы мен B_1A_1 қабырғасын табыңдар; 2) Егер ABC үшбұрышының барлық қабырғалары өзара тең болса, онда оның периметрі $2AC + 3B_1C_1$ қосындысына тең болуы мүмкін бе?

1.63. Кез келген екі түзудің қиылысатынын немесе параллель болатынын дәлелдеңдер.

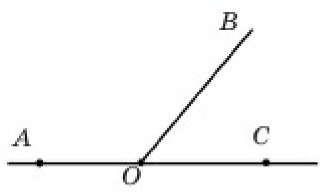
1.64. a түзуінде жатпайтын нүкте арқылы үш түзу жүргізілген. Осы түзулердің кем дегенде екеуі a түзуімен қиылысатынын дәлелдеңдер.

1.65. Егер $a \parallel b$, $b \parallel c$, $c \parallel d$ болса, онда $a \parallel d$ екенін дәлелдеңдер.

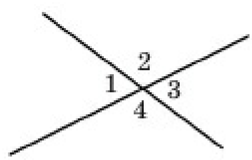
1.66. A, B және C елді мекендері түзу трасса бойында орналасқан. Егер A мен B-ның арасы 32 км, B мен C-ның арасы 18 км, ал A мен C-ның арасы 14 км болса, онда бұл елді мекендер өзара қалай орналасқан?

1.4. Сыбайлас және вертикаль бұрыштар

1.4.1. Сыбайлас және вертикаль бұрыштар. Егер екі бұрыштың бір қабырғасы ортақ, ал өзге екі қабырғасы бір-біріне толықтауыш сәулелер болса, онда бұл бұрыштарды ***сыбайлас бұрыштар*** деп атайды. 1.36-суреттегі AOB және BOC бұрыштары – сыбайлас бұрыштар. OA және OC толықтауыш сәулелері жазыңқы бұрышты анықтайтын болғандықтан, $\angle AOB + \angle BOC = \angle AOC = 180^\circ$, яғни сыбайлас бұрыштардың қосындысы 180°-қа тең.

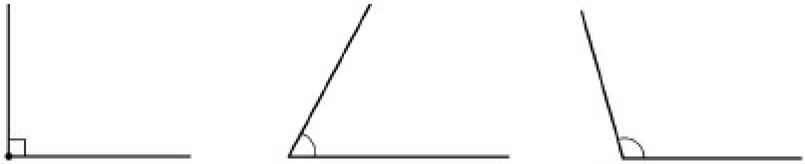


1.36-сурет



1.37-сурет

Егер бір бұрыш қабырғалары екінші бұрыш қабырғаларының толықтауыш сәулелері болса, онда бұл бұрыштарды ***вертикаль бұрыштар*** деп атайды. 1.37-суреттегі 1 және 3 бұрыштар, 2 және 4 бұрыштар – вертикаль бұрыштар. Сыбайлас бұрыштардың қасиеті бойынша:



Тік бұрыш Сүйір бұрыш Доғал бұрыш

1.38-сурет

$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ,$ $\angle 1 + 180^\circ - \angle 2;$

$\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ,$ $\angle 3 + 180^\circ - \angle 2;$

Олай болса, $\angle 1 = \angle 3$, яғни ***вертикаль бұрыштар өзара тең.***

Шамасы 90°-қа тең бұрышты ***тік бұрыш*** деп атайды. 90°-тан кіші бұрышты ***сүйір бұрыш*** деп, ал 90°-тан үлкен бұрышты ***доғал бұрыш*** деп атайды (1.38-сурет). Сыбайлас бұрыштардың қосындысы 180°-қа тең болғандықтан, сүйір бұрышқа сыбайлас бұрыш доғал, ал керісінше, доғал бұрышқа сыбайлас бұрыш сүйір болады. Осы сияқты тік бұрышқа сыбайлас бұрыш та тік бұрыш болады.

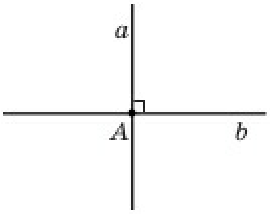
1-мысал. Сыбайлас бұрыштардың бірі екіншісінен 2 есе үлкен. Осы бұрыштарды анықтайық.

Шешуі. Кіші бұрыш шамасын x арқылы белгілейік. Онда онымен сыбайлас бұрыштың шамасы $2x$-ке және олардың қосындысы 180°-қа тең, яғни $x + 2x = 180^\circ \Rightarrow 3x = 180^\circ \Rightarrow$ $\Rightarrow x = 60^\circ$. Олай болса, берілген сыбайлас бұрыштардың шамасы: 60° және 120°.

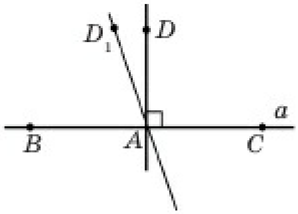
1.4.2. Перпендикуляр түзулер. Айталық, a және b түзулері A нүктесінде қиылыссын. Онда 4 жазыңқы емес бұрыш шығады. Егер бұл бұрыштардың біреуі тік болса, онда өзгелері де тік бұрыштар болады. Бұл түзулер жөнінде өзара тік бұрыш жасап қиылысады дейді.

Анықтама. Тік бұрыш жасап қиылысатын түзулерді өзара *перпендикуляр* деп атайды (1.39-сурет). Перпендикулярлықты $\perp$ символымен белгілейді. $a \perp b$ жазуын: "a түзуі b түзуіне перпендикуляр" деп оқиды.

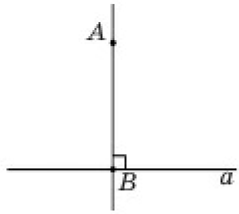
Теорема. *Түзудің әрбір нүктесінен оған перпендикуляр болатын бір ғана түзу жүргізуге болады.*



1.39-сурет



1.40-сурет



1.41-сурет

Дәлелдеуі. Айталық $A \in a$, $B \in a$, $C \in a$ болып, A нүктесі B және C нүктелерінің арасында жатсын (1.40-сурет). AC сәулесінен бастап шамасы 90°-қа тең CAD бұрышын салайық. Онда $AD \perp a$ болады.

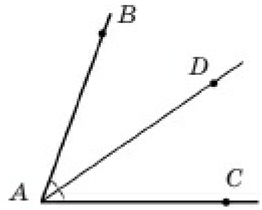
Енді a түзуіне перпендикуляр болатын екінші бір AD_1 түзуі бар болсын. Онда $\angle CAD = 90^\circ$, әрі $\angle CAD_1 = 90^\circ$ және бұл бұрыштар a түзуінің бір жағында орналасқан. Бірақ берілген бұрышқа тең бұрышты өлшеп салу жөніндегі VII аксиома бойынша AC түзуінің бір жақ бөлігіне AC сәулесінен бастап шамасы 90°-қа тең болатын бір ғана бұрышты өлшеп салуға болады. Сондықтан A нүктесі арқылы өтетін және a түзуіне перпендикуляр болатын AD түзуінен өзге түзу табылмайды.

A нүктесі a түзуінен тысқары жатсын және осы A нүктесі арқылы өтетін a түзуіне перпендикуляр түзу a-ны B нүктесінде қиып өтсін. Онда AB кесіндісін a түзуіне жүргізілген ***перпендикуляр*** деп, ал B нүктесін осы перпендикулярдың ***табаны*** деп атайды. 1.41-суретте A нүктесінен a түзуіне түсірілген перпендикуляр AB кесіндісі, ал B нүктесі оның табаны болады.

1.4.3. Бұрыш биссектрисасы. Бұрышты тең екі бөлікке бөлетін оның ішкі сәулесін осы бұрыштың ***биссектрисасы*** деп атайды. 1.42-суретте BAC бұрышының AD ішкі сәулесі оны тең бөліктерге бөледі: $\angle BAD = \angle DAC = \dfrac{\angle BAC}{2}$, яғни AD сәулесі BAC бұрышының биссектрисасы болады.

2-мысал. Биссектрисаның бұрыш қабырғаларымен жасайтын бұрыштарының шамасы 90°-тан артық болмайтынын көрсетейік.

Шешуі. Әрбір бұрыштың градустық өлшемі 180°-тан артық емес. Сондықтан оның жартысы 90°-тан артық болмайды.



1.42-сурет

1.4.4. Теоремаларды қарсы жорып дәлелдеу тәсілі.

Геометрияда, жалпы математикада, теоремаларды қарсы жорып дәлелдеу тәсілі жиі қолданылады. Дәлелдеудің осы тәсілімен сендер 1.4.2-пунктіндегі теореманы дәлелдеу барысында таныстыңдар. Енді бұл тәсілдің мәні мен мағынасын жете түсініп алайық.

Кіріспеде айтылғандай, әрбір теореманы символ арқы-лы былай жазуға болады: $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$. Мұнда $\mathcal{A}$ — берілген сөйлем, яғни теореманың ***шарты*** деп, ал $\mathcal{B}$ теореманың ***қорытындысы*** деп аталады. $\mathcal{B}$ сөйлеміне кері мағынадағы сөйлемді $\overline{\mathcal{B}}$ арқылы белгілейді. Дәлелдеудің қарсы жору тәсілінің мағынасы мынадай: теореманың шарты $\mathcal{A}$ сөйлемі орындалады деп алып, оның қорытындысы (салдары) ретінде $\mathcal{B}$ сөйлемі емес, оған кері $\overline{\mathcal{B}}$ сөйлемі орындалады деп, яғни $\mathcal{A} \Rightarrow \overline{\mathcal{B}}$ тұжырымы орындалады деп қабылдаймыз. Сонан соң, қисынды ой қорытындылар жасай отырып, аксиомалар мен дәлелденген теоремалар көмегімен теореманың $\mathcal{A}$ шартына немесе қандай да бір аксиомаға, немесе дәлелденген тұжырымға қайшы тұжырымға келеміз.

Жалпы, қисынды ой қорытынды жасау принципі бойынша $\mathcal{B}$ және $\overline{\mathcal{B}}$ сөйлемдерінің тек біреуі ғана ақиқат болатындығы белгілі. Сондықтан алынған қайшылық $\mathcal{A} \Rightarrow \overline{\mathcal{B}}$ тұжырымы орындалады деген жоруымызды теріске шығарып, берілген $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ теоремасының ақиқаттығын көрсетеді.

Дәлелденген теоремада a түзуі және оның бойында жататын A нүктесі берілген. Бұл теореманың шарты, оны $\mathcal{A}$ арқылы белгілейік. Онда теореманың қорытындысы: «A нүктесі арқылы a түзуіне перпендикуляр тек бір ғана түзу жүргізуге болады». Мұны $\mathscr{B}$ арқылы белгілейік. Сонымен, бұл тұжырымды қысқаша былай жазамыз: $\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}$. Енді $\mathscr{B}$ сөйлеміне кері $\overline{\mathscr{B}}$ сөйлемін тұжырымдайық. $\mathscr{B}$ сөйлемінің мағынасы мынадай: егер $\overline{\mathscr{B}}$ сөйлемінде: $A \in a$ нүктесі арқылы a түзуіне перпендикуляр жалғыз түзу өтетіндігі айтылса, онда оған кері $\overline{\mathscr{B}}$ сөйлемін: «$\mathscr{A}$ нүктесі арқылы a түзуіне кем дегенде екі перпендикуляр түзу өтеді» деп түсіну қажет. Сонда $\mathscr{A} \Rightarrow \overline{\mathscr{B}}$ тұжырымы ақиқат болсын деп жоруымыздың нәтижесінде берілген бұрышқа тең бұрышты өлшеп салу аксиомасына қайшы қорытындыға келдік. Бұл қорытынды бойынша a түзуінің бір жақ жарты жазықтығында градустық өлшемі 90°-қа тең бір емес әртүрлі екі бұрыш өлшеп салынды. Бұлай болуы мүмкін емес, яғни $\mathscr{A} \Rightarrow \overline{\mathscr{B}}$ тұжырымы қате, ал $\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}$ теоремасы дәлелденді.

?

1. Қандай бұрыштарды сыбайлас бұрыштар деп атайды?
2. Сыбайлас бұрыштардың қосындысы 180°-қа тең екенін дәлелдеңдер.
3. Егер екі бұрыш тең болса, онда олармен сыбайлас бұрыштар да тең болатынын дәлелдеңдер.
4. Қандай бұрышты тік (сүйір, доғал) бұрыш деп атайды?
5. Тік бұрышпен сыбайлас бұрыш тік болатынын көрсетіңдер.
6. Қандай бұрыштарды вертикаль бұрыштар деп атайды?
7. Вертикаль бұрыштардың тең болатынын дәлелдеңдер.
8. Қандай түзулерді перпендикуляр түзулер деп атайды? Түзулердің перпендикулярлығын қандай белгімен белгілейді?
9. Түзуге түсірілген перпендикуляр деп нені атайды?
10. Бұрыш биссектрисасы деген не?
11. Қарсы жорып дәлелдеу тәсілінің мағынасы қандай? Мысал келтіріңдер.

ПТ

1. Сүйір, тік және доғал бұрыштарды салыңдар. Олардың әрқайсысымен сыбайлас бұрыштарды салыңдар.
2. 70°-қа тең бұрыш салып, транспортирді пайдаланып, оның биссектрисасын жүргізіңдер.
3. Дәптердің торкөз сызықтарына параллель емес a түзуіне A нүктесінен көз мөлшерімен перпендикуляр түсіріңдер. Нәтижесін транспортир арқылы тексеріңдер.

3–2558

Есептер

А

1.67. 30°; 45°; 60°; 90°-қа тең бұрыштармен сыбайлас бұрыштардың шамасын табыңдар.

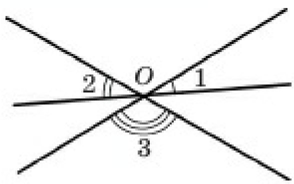
1.68. Сыбайлас бұрыштардың екеуі де: 1) сүйір; 2) доғал; 3) тік болуы мүмкін бе? Жауаптарыңды негіздеңдер.

1.69. Біреуі екіншісінен 2 есе үлкен болатын сыбайлас бұрыштарды табыңдар.

1.70. 1) Біреуі екіншісінен 30° үлкен; 2) айырмасы 40°-қа тең; 3) біреуі екіншісінен 3 есе кіші; 4) өзара тең болатын сыбайлас бұрыштарды табыңдар.

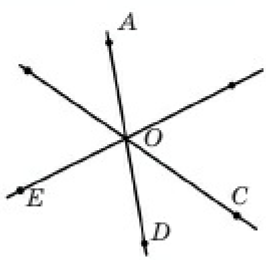
1.71. Егер: 1) $\angle ABC = 111^\circ$; 2) $\angle ABC = 90^\circ$; $\angle ABC = 15^\circ$ болса, онда ABC бұрышымен сыбайлас бұрышты табыңдар.

1.72. 1.43-суретте үш түзу O нүктесінде қиылысқан. $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$ қосындысын табыңдар.



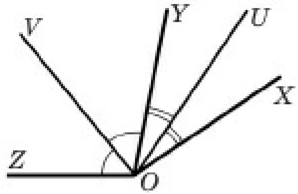
1.43-сурет

1.73. 1.44-суретте $\angle AOB = 50^\circ$, $\angle FOE = 70^\circ$. AOC, BOD, COE және COD бұрыштарын табыңдар.



1.44-сурет

1.74. Егер екі түзу қиылысқанда пайда болатын бұрыштардың біреуі тік болса, онда қалған үш бұрыш та тік болатынын дәлелдеңдер.



1.45-сурет

1.75. 1.45-суретте OV сәулесі – ZOY бұрышының, ал OU сәулесі – XOY бұрышының биссектрисасы. Егер $\angle UOV = 80^\circ$ болса, XOZ бұрышын табыңдар.

1.76. p сәулесі – жазыңқы емес (ab) бұрышының биссектрисасы. (ap) бұрышы доғал немесе тік болуы мүмкін бе?

1.77. Егер екі түзу қиылысқанда пайда болатын үш бұрыштың қосындысы 270°-қа тең болса, бұл бұрыштардың шамасы қандай?

1.78. Егер екі түзу қиылысқанда пайда болатын бұрыштардың үшеуі өзара тең болса, онда бұл түзулер өзара перпендикуляр болатынын дәлелдеңдер.

В

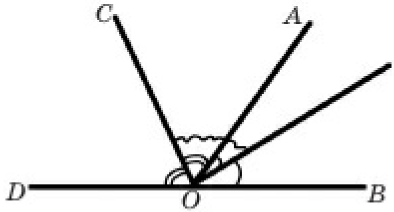
1.79. Егер сыбайлас бұрыштардың қатынасы: 1) 2:3; 2) 3:7; 3) 11:25; 4) 22:23 қатынасындай болса, осы сыбайлас бұрыштарды табыңдар.

1.80. Егер бір бұрышпен сыбайлас екі бұрыштың қосындысы 100°-қа тең болса, онда бұл бұрыштың шамасы неше градус болады?

1.81. Екі түзу қиылысқанда пайда болатын бұрыштардың екеуінің қосындысы 50°-қа тең. Осы бұрыштарды табыңдар.

1.82. Екі түзу қиылысқанда пайда болатын бұрыштардың бірі екіншісінен 4 есе үлкен. Осы бұрыштарды табыңдар.

1.83. Екі түзу қиылысқанда пайда болатын бұрыштардың бірі екіншісінен 50° кіші. Осы бұрыштарды табыңдар.



1.46-сурет

1.84. Сыбайлас бұрыштардың биссектрисаларының арасындағы бұрышты табыңдар (1.46-сурет).

1.85. Вертикаль бұрыштардың биссектрисалары бір түзудің бойында жататынын дәлелдеңдер.

1.86. Бұрыш биссектрисасы мен оның бір қабырғасының созындысы арасындағы бұрышты табыңдар. Берілген бұрыш шамасы: 1) 50°; 2) 90°; 3) 150°.

C

1.87. $\angle AOB = 35^\circ$, $\angle BOC = 50^\circ$. AOC бұрышын табыңдар. Әрбір мүмкін жағдай үшін сызбасын салыңдар.

1.88. $\angle(ab) = 120^\circ$, $\angle(ac) = 150^\circ$. (bc) бұрышын табыңдар. Әрбір мүмкін жағдай үшін сызбасын салыңдар.

1.89. Егер сәуле бұрыш төбесінен басталып, оның қабырғаларымен тең сүйір бұрыштар жасайтын болса, онда бұл сәуле осы бұрыштың биссектрисасы болатынын дәлелдеңдер.

1.90. Егер ABC және CBD бұрыштарының биссектрисалары өзара перпендикуляр болса, онда A, B, D нүктелері бір түзу бойында жататынын дәлелдеңдер.

1.91. Бастапқы нүктелері ортақ a, b, c сәулелері берілген. Егер $\angle(ab) = \angle(ac) = \angle(bc) = 120^\circ$ болса, онда: 1) осы сәулелердің бірі өзге екі сәулемен шектелетін бұрыштың ішкі сәулесі бола ма? 2) Бастапқы нүкте арқылы өтпейтін түзу осы үш сәуленің бәрін қиып өтуі мүмкін бе? Жауаптарыңды түсіндіріңдер.

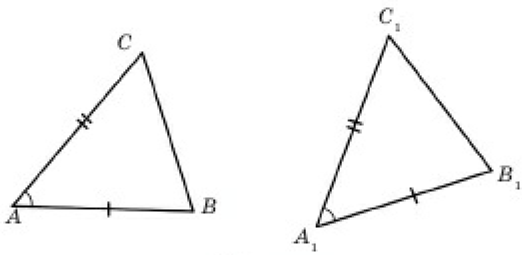
1.92. $\Delta ABC = \Delta PQR$, $\angle R = 55^\circ$ және $AB = 12$ см. 1) $\angle C$ мен PQ-ді табыңдар; 2) ABC үшбұрышының периметрі PQR үшбұрышы периметрінен 6 см артық болуы мүмкін бе?

II ТАРАУ. ҮШБҰРЫШТАР ТЕҢДІГІНІҢ БЕЛГІЛЕРІ ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ САЛДАРЛАРЫ

2.1. Үшбұрыштар теңдігінің белгілері

2.1.1.Үшбұрыштар теңдігінің бірінші белгісі.

Теорема 1. (I белгі). *Егер бір үшбұрыштың екі қабырғасы мен олардың арасындағы бұрышы екінші үшбұрыштың сәйкес екі қабырғасы мен олардың арасындағы бұрышына тең болса, онда бұл үшбұрыштар тең болады.*



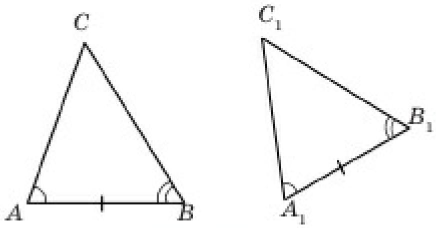
2.1-сурет

Дәлелдеуі. $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ және болатындай ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштары берілген (2.1-сурет). $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ теңдігін дәлелдейік.

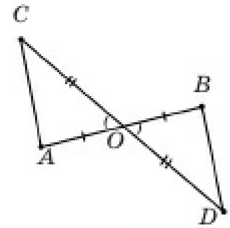
$\angle A = \angle A_1$ болғандықтан, A_1 төбесі A төбесімен, ал A_1B_1 және A_1C_1 қабырғалары сәйкес AB және AC сәулелерінде жататындай етіп, $C_1A_1B_1$ бұрышын CAB бұрышына беттестіруге болады. Берілген үшбұрышқа тең үшбұрыштың бар болатыны жөніндегі VIII аксиома бойынша мұндай үйлестіру мүмкін және ол бір ғана түрде анықталады. Ал $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$ болғандықтан, A_1B_1 қабырғасы AB қабырғасымен және A_1C_1 қабырғасы AC қабырғасымен беттеседі, яғни B_1 және B, C_1 және C нүктелері беттеседі. Олай болса, $A_1B_1C_1$ және ABC үшбұрыштары толық беттеседі. Онда бұл үшбұрыштар өзара тең. Дәлелденген теорема үшбұрыштардың екі қабырғасы мен олардың арасындағы бұрышы бойынша теңдік белгісі болып табылады.

2.1.2. Үшбұрыштар теңдігінің екінші белгісі.

Теорема 2. (II белгі). *Егер бір үшбұрыштың бір қабырғасы мен оған іргелес екі бұрышы екінші үшбұрыштың сәйкес қабырғасы мен оған іргелес екі бұрышына тең болса, онда бұл үшбұрыштар тең болады.*



2.2-сурет



2.3-сурет

Дәлелдеуі. $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$ және $\angle B = \angle B_1$ болатындай ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштары берілсін. ΔABC және $\Delta A_1B_1C_1$ теңдігін дәлелдейік (2.2-сурет).

$\angle A = \angle A_1$ болғандықтан, A_1 төбесі A төбесімен беттесетіндей етіп, A_1B_1 қабырғасы AB сәулесінде жататындай етіп, AB түзуіне қатысты C және C_1 төбелері бір жарты жазықтықта жататындай етіп, $A_1B_1C_1$ үшбұрышын ABC үшбұрышымен беттестіреміз. $AB = A_1B_1$ болғандықтан, B_1 төбесі B төбесімен беттеседі. $\angle A = \angle A_1$ және $\angle B = \angle B_1$ болғандықтан, A_1C_1 сәулесі AC сәулесімен, ал B_1C_1 сәулесі BC сәулесімен беттеседі. Онда C_1 төбесі C төбесімен беттеседі. Сонымен, ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштары толық беттеседі, яғни $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$. Бұл теорема үшбұрыштардың бір қабырғасы мен оған іргелес екі бұрышы бойынша теңдік белгісі деп аталады.

1-мысал. AB және CD кесінділері әрқайсысының ортасы болатын O нүктесінде қиылысады. Егер $AC = 10$ м болса, онда BD-ны табайық.

Шешуі. $\angle AOC = \angle BOD$ болғандықтан, үшбұрыштар теңдігінің бірінші белгісі бойынша $\Delta AOC = \Delta BOD$, себебі $AO = BO$, $CO = DO$ (2.3-сурет). Сондықтан $BD = AC = 10$ м.

?

1. Үшбұрыштар теңдігінің бірінші белгісін дәлелдеңдер. Дәлелдеуде қай аксиомалар қолданылады?
2. Үшбұрыштар теңдігінің екінші белгісін тұжырымдап, дәлелдеңдер.
3. Бір үшбұрыштың периметрі екіншісінің периметрінен үлкен. Осы үшбұрыштар тең болуы мүмкін бе?

ПТ

1. Транспортир мен бөліктері бар сызғышты пайдаланып: 1) $AB = 4{,}3$ см, $AC = 2{,}3$ см, $\angle A = 23^\circ$;
2) $BC = 9$ см, $AB = 6{,}2$ см, $\angle B = 122^\circ$; 3) $AC = 3$ см, $BC = 4$ см, $\angle C = 90^\circ$ болатындай етіп, ABC үшбұрышын салыңдар.

2. Транспортир мен бөліктері бар сызғышты пайдаланып: 1) $AB=5$ см, $\angle A = 30^{\circ}$, $\angle B = 50^{\circ}$; 2) $AB=6{,}2$ см, $\angle B = 62^{\circ}$, $\angle C = 48^{\circ}$ болатындай етіп, ABC үшбұрышын салыңдар.

Есептер

А

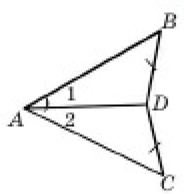
2.1. AE және CD кесінділері әрқайсысының ортасы болатын B нүктесінде қиылысады. 1) $\Delta ABC = \Delta EBD$ теңдігін дәлелдеңдер; 2) егер $\angle D = 47^{\circ}$, $\angle E = 42^{\circ}$ болса, онда A және C бұрыштарын табыңдар.

2.2. 2.4-суретте $AB = AC$, $\angle 1 = \angle 2$. 1) $\Delta ABD = \Delta ACD$ теңдігін дәлелдеңдер; 2) егер $AC = 15$ см, $DC = 5$ см болса, онда BD мен AB-ны табыңдар.

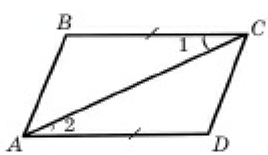
2.3. 2.5-суретте $BC = AD$, $\angle 1 = \angle 2$. 1) $\Delta ABC = \Delta CDA$ теңдігін дәлелдеңдер; 2) Егер $AD = 17$ см, $DC = 14$ см болса, онда AB мен BC-ны табыңдар.

2.4. 1) 2.6-суретте $\angle 1 = \angle 2$ және $DC = CE$. $BC = AC$ теңдігін дәлелдеңдер. 2) 2.7-суретте $\Delta ADB = \Delta CBD$. $AB = CD$, $AD=BC$ теңдіктерін дәлелдеңдер.

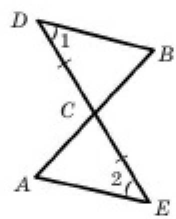
2.5. 1) 2.8-суретте $FO = OL$, $\angle EFO = \angle OLK$. $FE = KL$ теңдігін дәлелдеңдер. 2) 2.9-суретте $\angle BAC = \angle DAC$, $\angle ACB = \angle ACD$. $AB = AD$ теңдігін дәлелдеңдер.



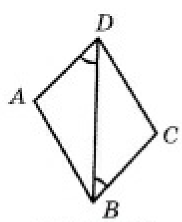
2.4-сурет



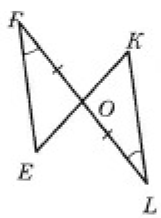
2.5-сурет



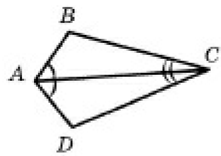
2.6-сурет



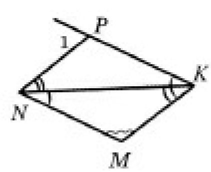
2.7-сурет



2.8-сурет



2.9-сурет



2.10-сурет

В

2.6. 2.10-суретте $\angle MNK = \angle PKN$, $\angle PNK = \angle MKN$, $\angle NMK = 137^\circ$. NPK бұрышына сыбайлас $\angle 1$ шамасын табыңдар.

2.7. 2.11-суретте $AB = AD$, $\angle BAC = \angle DAC$, $\angle ACB = 121^\circ$. $\angle 1$ шамасын табыңдар.

2.8. 2.12-суретте $OA = OD$, $OB = OC$, $\angle 1 = 74^\circ$, $\angle 2 = 36^\circ$. 1) $\Delta AOB = \Delta DOC$ теңдігін дәлелдеңдер; 2) $\angle ACD$ бұрышын табыңдар.

2.9. AC және BD кесінділері қиылысу нүктесінде қақ бөлінеді. $\Delta ABC = \Delta CDA$ теңдігін дәлелдеңдер.

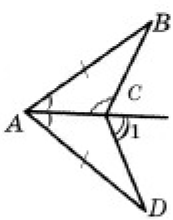
2.10. ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштарында $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$. AB және A_1B_1 қабырғаларынан $AP = A_1P_1$ болатындай P және P_1 нүктелері алынған. $\Delta BPC = \Delta B_1P_1C_1$ теңдігін дәлелдеңдер.

2.11. ACD үшбұрышында $AC = AD$ және $\angle ACD = \angle ADC$. Үшбұрыш қабырғаларынан $AB = AE$ болатындай етіп, $B \in AC$ және $E \in AD$ нүктелері алынған. $\angle CBD = \angle DEC$ теңдігін дәлелдеңдер.

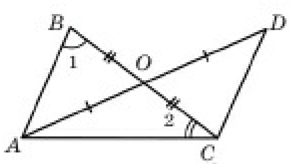
2.12. AB кесіндісінің ұштарынан $\angle ABD = \angle BAC$ болатындай AC және BD түзулері жүргізілген, ал AB-ның ортасы O арқылы өтетін түзу бұл параллель түзулерді C және D нүктелерінде қиып өтеді. Егер $BD = 8$ см болса, онда AC-ны табыңдар.

2.13. AB мен CD кесінділері $AO = OC$, $BO = OD$ теңдіктері орындалатындай O нүктесінде қиылысады. $\angle ABD = \angle BDC$ теңдігін дәлелдеңдер.

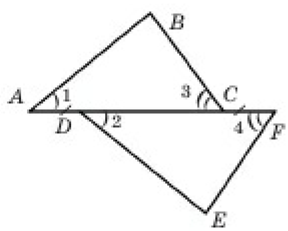
2.14. Ұзындықтары бірдей AB және CD кесінділері $AO = OD$ болатындай O нүктесінде қиылысады. $\Delta ABC = \Delta DCB$ теңдігін дәлелдеңдер.



2.11-сурет



2.12-сурет



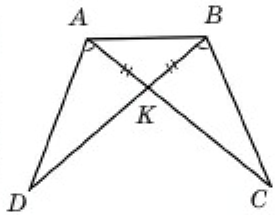
2.13-сурет

C

2.15. 2.13-суретте $AD = CF$, $\angle 1 = \angle 2$ және $\angle 3 = \angle 4$. $\Delta ABC = \Delta DEF$ теңдігін дәлелдеңдер.

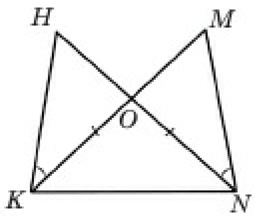
2.16. Ұзындықтары бірдей AB және CD кесінділері $AO = OC$ болатындай етіп, O нүктесінде қиылысады. $\Delta ABC = \angle ADC$, $\angle BAD = \angle BCD$ теңдіктерін дәлелдеңдер.

2.17. 1) 2.14-суретте $\angle DAC = \angle DBC$, $AK = KB$. $\angle DAB = \angle CBA$ теңдігін дәлелдеңдер. 2) C және D нүктелері AB түзуіне қатысты әртүрлі жарты жазықтықтарда $\angle ABC = \angle ABD$, $BD = BC$ теңдіктері орындалатындай етіп орналасқан. AB сәулесі DAC бұрышының биссектрисасы болатынын дәлелдеңдер.



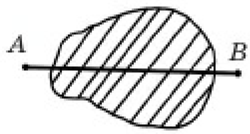
2.14-сурет

2.18. 1) 2.15-суретте $\angle HKM = \angle MNH$, $KO = ON$. $\angle HKN = \angle KNM$ теңдігін дәлелдеңдер. 2) $OM = PE$, $\angle MPO = \angle POE$ теңдіктері орындалатындай, OP түзуіне қатысты әртүрлі жарты жазықтықтарда M және E нүктелері орналасқан. $\angle MOE = \angle EPM$ және $\Delta MPE = \Delta EOM$ теңдіктерін дәлелдеңдер.



2.15-сурет

2.19. Түзу сызық бойымен жете алмайтындай A және B нүктелерінің арақашықтығын қалай табуға болады (2.16-сурет)? (Үшбұрыштар теңдігінің I және II белгілерін қолданыңдар).

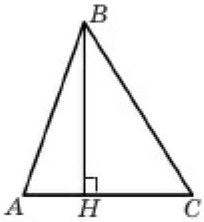


2.16-сурет

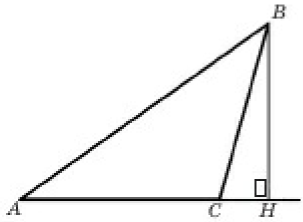
2.1.3. Үшбұрыштың биіктігі, биссектрисасы, медианасы және орта сызығы.

Үшбұрыштың ***биіктігі*** деп оның төбесінен қарсы жатқан қабырғасы арқылы өтетін түзуге түсірілген перпендикулярды атайды. 2.17-суретте ABC үшбұрышының BH биіктігінің H табаны оның AC қабырғасында жатыр. Ал 2.18-суретте биіктіктің H табаны AC қабырғасының созындысында жатыр.

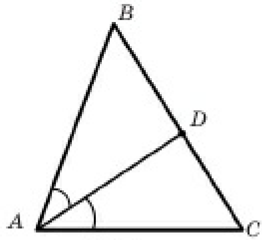
Үшбұрыштың берілген төбесінен жүргізілген ***биссектрисасы*** деп осы төбесіндегі бұрыш биссектрисасының қарсы жатқан қабырғасымен шектелетін кесіндісін айтады (2.19-сурет, AD – биссектриса).



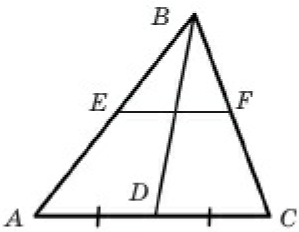
2.17-сурет



2.18-сурет



2.19-сурет



2.20-сурет

Үшбұрыштың берілген төбесінен жүргізілген ***медианасы*** деп осы төбені қарсы жатқан қабырғасының ортасымен қосатын кесіндіні атайды (2.20-сурет, BD – медиана).

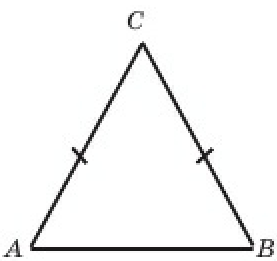
Үшбұрыштың екі қабырғасының орталарын қосатын кесіндіні ***үшбұрыштың орта сызығы*** деп атайды (2.20-сурет, EF – орта сызық).

Екі қабырғасы тең үшбұрышты ***тең бүйірлі үшбұрыш*** деп атайды. Тең қабырғаларын үшбұрыштың ***бүйір қабырғалары*** деп, ал үшінші қабырғасын оның ***табаны*** деп атайды. 2.21-суретте ABC тең бүйірлі үшбұрышы бейнеленген: $AC = BC$ – бүйір қабырғалары, AB – табаны.

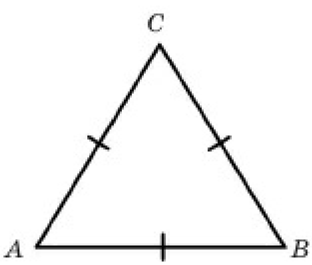
Барлық қабырғалары тең үшбұрышты ***тең қабырғалы үшбұрыш*** деп атайды. 2.22-суретте ABC тең қабырғалы үшбұрышы бейнеленген: $AB = AC = BC$.

Теорема 3. *Тең бүйірлі үшбұрыштың төбесінен табанына жүргізілген биссектрисасы оның әрі медианасы, әрі биіктігі болады.*

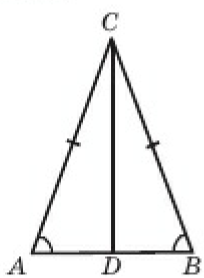
Дәлелдеуі. CD кесіндісі табаны AB болатын ABC тең бүйірлі үшбұрышының C төбесінен жүргізілген биссектрисасы болсын (2.23-сурет). CD кесіндісі осы үшбұрыштың әрі медианасы, әрі биіктігі болатынын көрсету керек.



2.21-сурет



2.22-сурет



2.23-сурет

Шынында да, CD биссектриса болғандықтан, $\angle ACD = \angle BCD$, ал ABC тең бүйірлі үшбұрыш болғандықтан, $AC = BC$. Осыған қоса CD кесіндісі – ACD және BCD үшбұрыштарына ортақ қабырға. Олай болса, үшбұрыштар теңдігінің I белгісі бойынша $\Delta ACD = \Delta BCD$. Сондықтан $AD = BD$, яғни CD – медиана және $\angle ADC = \angle BDC = 90^\circ$, яғни сыбайлас бұрыштар теңдігінен $CD \perp AB$ екенін аламыз. Онда CD әрі биіктік болады.

2.1.4. Кері теорема ұғымы.

Теорема 4. 1) *Егер үшбұрыш тең бүйірлі болса, онда бұл үшбұрыштың табанындағы бұрыштары тең болады;*

2) *Керісінше, егер үшбұрыштың екі бұрышы тең болса, онда бұл үшбұрыш тең бүйірлі болады.*

Дәлелдеуі. 1) ABC – тең бүйірлі үшбұрыш болсын: $AC=BC$. $\angle A = \angle B$ теңдігін дәлелдейік (2.23-сурет).

C төбесінен жүргізілген CD биссектрисасын қарастырайық. Онда теорема 3-тің дәлелдеуінде көрсетілген $\Delta ACD = \Delta BCD$ теңдігінен $\angle A = \angle B$ теңдігі шығады.

2) ABC үшбұрышында $\angle A = \angle B$ болсын. ΔABC-ның тең бүйірлі екенін дәлелдейік (2.23-сурет).

Үшбұрыштар теңдігінің екінші белгісі бойынша $\Delta ABC = \Delta BAC$, себебі $\angle A = \angle B$, $\angle B = \angle A$, $AB = BA$. Мұнда үшбұрыш төбелерінің жазылу реті өзгеше екені ескерілген. Сондықтан жалпы жағдайда ABC және BAC үшбұрыштары бір-бірінен өзгеше үшбұрыштар. Онда ABC үшбұрышының AC қабырғасы BAC үшбұрышының BC қабырғасына сәйкес келеді, ал ΔABC-ның BC қабырғасына ΔBAC-ның AC қабырғасы сәйкес келеді. Олай болса, ABC үшбұрышының AB табанына BAC үшбұрышының BA табаны сәйкес келеді.

Сонымен, $\Delta ABC = \Delta BAC$ теңдігінен $AC = BC$ теңдігін аламыз, яғни ΔABC – тең бүйірлі үшбұрыш. Теорема толық дәлелденді.

Теорема 4 1) және 2) екі теоремадан құрастырылған: 2) теореманы 1) теоремаға ***кері теорема*** деп атайды. Оның мәнін былай ұғыну қажет: 1) теореманың шарты («үшбұрыш тең бүйірлі») 2) теореманың тұжырымдамасы болып, ал 2) теореманың шарты («үшбұрыштың екі бұрышы тең» немесе «үшбұрыштың табанындағы бұрыштары тең») 1) теореманың тұжырымдамасы болып келген. Басқаша айтқанда, A арқылы «үшбұрыш тең бүйірлі» деген тұжырымды, ал B арқылы «үшбұрыштың екі бұрышы тең» дегенді немесе «үшбұрыштың табанындағы бұрыштары тең» деген тұжырымды белгілейік. Онда 1) теореманы қисынды салдар белгілеумен $A \Rightarrow B$ түрінде, ал 2) теореманы $B \Rightarrow A$ түрінде жазуға болады. Көп жағдайларда бұл өзара кері екі теореманы біріктіріп, былай жазады: $A \Leftrightarrow B$ және оны былай оқиды: «Үшбұрыш тең бүйірлі болуы үшін оның екі бұрышы тең болуы қажетті және жеткілікті».

Жалпы, кез келген теоремаға кері теорема бола бермейді. Мысалы, мынадай теореманы қарастырайық: «Сыбайлас бұрыштардың қосындысы 180°-қа тең». Бұған кері тұжырым былай жазылады: «Қосындысы 180°-қа тең бұрыштар сыбайлас бұрыштар болады». Әрине, бұл соңғы тұжырым дұрыс емес. Өйткені қосындысы 180°-қа тең бұрыштардың барлығы сыбайлас бұрыштар бола бермейді.

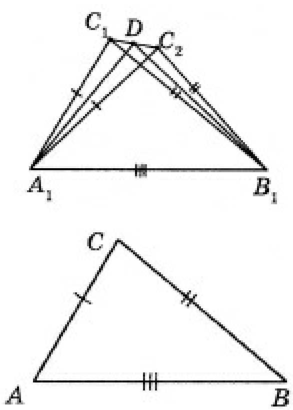
Бұл бұрыштар сыбайлас болуы үшін олардың міндетті түрде ортақ төбесі және ортақ қабырғасы болуы қажет.

2-мысал. Тең қабырғалы үшбұрыштың барлық бұрыштары тең болатынын көрсетейік.

Шешуі. ΔABC тең қабырғалы үшбұрыш болсын: $AB = AC = BC$. Осыдан $AB = AC$ теңдігі бойынша ΔABC тең бүйірлі болады. Онда 4-теорема бойынша $\angle B = \angle C$. Ал $AB = BC$ теңдігінен, осы сияқты, $\angle A = \angle C$ болатыны шығады. Олай болса, $\angle A = \angle B = \angle C$ (2.22-сурет).

2.1.5. Үшбұрыштар теңдігінің үшінші белгісі.

Теорема 5. (III белгі). *Егер бір үшбұрыштың үш қабырғасы екінші үшбұрыштың сәйкес үш қабырғасына тең болса, онда бұл үшбұрыштар тең болады.*



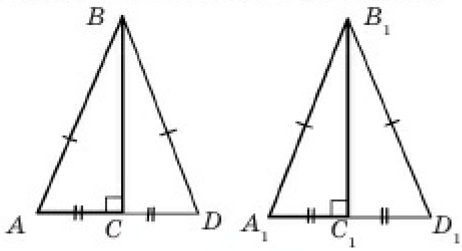
2.24-сурет

Дәлелдеуі. ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштарында $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$ теңдіктері орындалсын. $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ теңдігін дәлелдейік.

Қарсы жорып, $\Delta ABC \neq \Delta A_1B_1C_1$ делік. Онда $\angle A \neq \angle A_1$, $\angle B \neq \angle B_1$, $\angle C \neq \angle C_1$ болуы керек. Бұлай болмаса, үшбұрыштар теңдігінің I белгісі бойынша $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ болар еді. Айталық, $A_1B_1C_2$ үшбұрышы ABC үшбұрышына тең болсын және C_1 мен C_2 нүктелері A_1B_1 түзуінің бір жақ бөлігінде орналассын (2.24-сурет). D нүктесі C_1C_2 кесіндісінің ортасы болса, онда $A_1C_1C_2$ және $B_1C_1C_2$ үшбұрыштары – C_1C_2 табаны ортақ болатын тең бүйірлі үшбұрыштар. Себебі, $A_1C_1 = AC = A_1C_2$, $B_1C_1 = BC = B_1C_2$. Сондықтан олардың A_1D және B_1D медианалары әрі биіктік болады: $A_1D \perp C_1C_2$, $B_1D \perp C_1C_2$. Мұнда A_1D және B_1D түзулері беттеспейді, себебі A_1, B_1, D нүктелері бір түзудің бойында жатпайды. Бірақ C_1C_2 түзуіне оның D нүктесінен жалғыз ғана перпендикуляр жүргізуге болады. Бұл қайшылық $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ теңдігі орындалатынын көрсетеді. Үшінші белгі үшбұрыштардың үш қабырғасы бойынша теңдік белгісі деп аталады.

3-мысал. $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle C = C_1 = 90^\circ$ болатындай ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштары берілген. $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ теңдігі орындалатынын көрсетейік.

Шешуі. Айталық, ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштары есеп шарттарын қанағаттандырсын (2.25-сурет). CBA үшбұрышына тең CBD үшбұрышын және $C_1B_1A_1$ үшбұрышына тең $C_1B_1D_1$ үшбұрышын салайық. $\angle C = \angle C_1 = 90^\circ$ болғандықтан (оларға сыбайлас бұрыштар да 90°-қа тең), A,B,D және A_1,B_1,D_1 нүктелері сәйкесінше AD және A_1D_1 түзулерінде жатады. $AB = A_1B_1$, $AD = AC + CD = 2AC = 2A_1C_1 = A_1C_1 + C_1D_1 = A_1D_1$ және $BD = AB = A_1B_1 = B_1D_1$ болғандықтан, үшбұрыштар теңдігінің III белгісі бойынша $\Delta ABD = \Delta A_1B_1D_1$. Онда $\angle A = \angle A_1$. Ал $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ болғандықтан, I белгі бойынша $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$. Дәлелдеу керегі де осы.



2.25-сурет

?

1. Қандай үшбұрыш тең бүйірлі үшбұрыш деп аталады? Оның қандай қабырғалары бүйір қабырғалары деп және қандай қабырғасы табаны деп аталады?
2. Қандай үшбұрышты тең қабырғалы деп атайды?
3. Үшбұрыштың биіктігі деген не?
4. Үшбұрыштың биссектрисасы деген не?
5. Үшбұрыштың медианасы деген не?

ПТ

1. Үшбұрыш салып, сызғыштың көмегімен оның қабырғаларының орталарын белгілеңдер де, үшбұрыштың медианаларын жүргізіңдер.
2. Үшбұрыш салыңдар. Транспортирді пайдаланып, үшбұрыштың биссектрисаларын жүргізіңдер.
3. ABC сүйір бұрышты және MNP доғал бұрышты үшбұрыштарын салып, үшбұрышты сызғыштың көмегімен әрбір үшбұрыштың биіктіктерін жүргізіңдер.
4. Табанына қарсы жатқан төбесіндегі бұрышы: 1) сүйір; 2) тік; 3) доғал болатындай етіп, тең бүйірлі үш үшбұрыш салыңдар.

Есептер

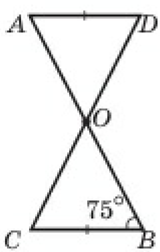
А

2.20. Тең бүйірлі үшбұрыштың табаны 5 см, ал бүйір қабырғасы 6 см. Периметрін табыңдар.

2.21. Тең бүйірлі үшбұрыштың периметрі 12 см, ал бүйір қабырғасы 5 см. Оның табанын анықтаңдар.

2.22. ABC және PQR үшбұрыштарында $AB=PQ$, $AC=PR$ және $BC=QR$. Егер $\angle Q = 50^\circ$ болса, онда $\angle B$-ын табыңдар.

2.23. MNK және PQR үшбұрыштарында $MN=PQ$, $MK=PR$ және $NK = QR$. Егер $\angle M = 60^\circ$ болса, онда P бұрышының сыртқы бұрышын табыңдар.



2.26-сурет

2.24. AB және CD кесінділері O нүктесінде қиылысады. Егер $AD = BC$, $AB = CD$ және $\angle ABC = 75^\circ$ болса, онда ADC бұрышын табыңдар (2.26-сурет).

2.25. Тең бүйірлі үшбұрыштың периметрі 7,5 м, ал бүйір қабырғасы 2 м. Табанын табыңдар.

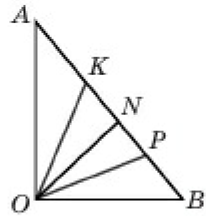
2.26. Тең бүйірлі үшбұрыштың периметрі 15,6 м. Егер: 1) табаны бүйір қабырғасынан 3 м кіші; 2) табаны бүйір қабырғасынан 3 м үлкен болса, онда үшбұрыштың қабырғаларын табыңдар.

2.27. Тең қабырғалы үшбұрыштың барлық бұрыштары тең екенін дәлелдеңдер.

2.28. Табаны BC болатын тең бүйірлі ABC үшбұрышында $\angle B = 40^\circ$. C бұрышының сыртқы бұрышын табыңдар.

B

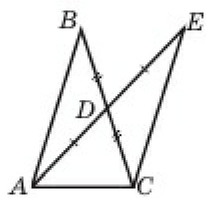
2.29. ON кесіндісі – AOB тік бұрышының биссектрисасы, ал OK және OP кесінділері – сәйкес AON және NOB бұрыштарының биссектрисалары. KOP бұрышын табыңдар (2.27-сурет).



2.27-сурет

2.30. A және C нүктелері a түзуіне қатысты әртүрлі жарты жазықтықтарда жатады және a түзуіне жүргізілген AB және CD перпендикулярлары тең. 1) $\Delta ABD = \Delta CDB$ теңдігін дәлелдеңдер; 2) Егер $\angle ADB = 44^\circ$ болса, онда $\angle ABC$-ны табыңдар.

2.31. ABC үшбұрышының AD медианасының BC қабырғасынан тысқары созындысынан $AD = DE$ болатындай E нүктесі алынған және E мен C нүктелері қосылған. 1) $\Delta ABD = \Delta ECD$ теңдігін дәлелдеңдер; 2) Егер $\angle ACD = 56^\circ$, $\angle ABD = 40^\circ$ болса, онда $\angle ACE$-ні табыңдар (2.28-сурет).



2.28-сурет

2.32. Тең бүйірлі үшбұрыштың табаны бүйір қабырғасынан екі есе кіші, ал периметрі 50 см. Үшбұрыштың қабырғаларын табыңдар.

2.33. Табаны BC болатын тең бүйірлі ABC үшбұрышының периметрі 40 см, ал тең қабырғалы BDC үшбұрышының периметрі 45 см. AB және BC қабырғаларын табыңдар.

2.34. AB кесіндісінің ортасы C арқылы осы кесіндіге перпендикуляр түзу жүргізілген. Осы түзудің әрбір X нүктесінен AB кесіндісінің ұштарына дейінгі қашықтықтар тең болатынын көрсетіңдер.

2.35. AB және PQ кесінділері $AP = AQ$ және $BP = BQ$ теңдіктері орындалатындай болып қиылысады. AB сәулесі PAQ бұрышының биссектрисасы болатынын дәлелдеңдер.

2.36. 2.35-есеп шартын пайдаланып, AB және PQ түзулері перпендикуляр болатынын дәлелдеңдер.

2.37. Табаны BC болатын ABC тең бүйірлі үшбұрышының AD медианасының бойынан E нүктесі алынған. Үшбұрыштардың теңдігін дәлелдеңдер: 1) AEB және AEC; 2) BED және CED.

2.38. AB және CD кесінділері O нүктесінде қиылысады. Егер $BO = CO$ және $\angle ACO = \angle DBO$ болса, онда $\Delta ACO = \Delta DBO$ теңдігін дәлелдеңдер.

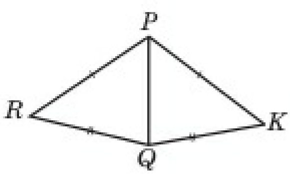
2.39. AB және CD кесінділері O нүктесінде қиылысады. Егер $AO = BO$ және $\angle CAO = \angle DBO$ болса, онда $\Delta ACO = \Delta BDO$ теңдігін дәлелдеңдер.

2.40. ABC үшбұрышында $AB = BC$, BD – биссектриса. Егер: 1) A төбесіндегі сыртқы бұрышы 130°-қа тең болса, онда BCA бұрышын; 2) егер $AB = 5$ см, $AD = 2$ см болса, онда ABC үшбұрышының периметрін табыңдар.

2.41. Тең қабырғалы үшбұрыштың: 1) барлық бұрыштары тең; 2) барлық медианалары өзара тең болатынын дәлелдеңдер.

C

2.42. Табаны BC болатын ABC тең бүйірлі үшбұрышының медианасы AN. Егер ABC үшбұрышының периметрі 32 см, ал ABN үшбұрышының периметрі 24 см болса, онда AN-ді табыңдар.



2.29-сурет

2.43. PRQ және PKQ үшбұрыштарының ортақ қабырғалары PQ, ал R және K нүктелері PQ-дің екі жағында орналасқан. Егер $PR = PK$, $QR = QK$ болса, онда PQ сәулесі KPR бұрышының биссектрисасы болатынын дәлелдеңдер (2.29-сурет).

2.44. AB кесіндісі – ABC және ABD тең бүйірлі үшбұрыштарының ортақ табаны, ал C және D төбелері AB-ға қатысты әртүрлі жарты жазықтықтарда орналасқан. AB және CD кесінділері өзара перпендикуляр болатынын көрсетіңдер.

2.45. Егер үшбұрыштың: 1) медианасы әрі биіктігі болса; 2) биіктігі әрі биссектрисасы болса, онда осы үшбұрыштың тең бүйірлі болатынын дәлелдеңдер.

2.46. Тең бүйірлі үшбұрыштың бүйір қабырғаларына жүргізілген биссектрисалары өзара тең болатынын көрсетіңдер.

2.47. Үшбұрыштың үлкен бұрышына қарсы үлкен қабырғасы, ал үлкен қабырғасына қарсы үлкен бұрышы жататынын дәлелдеңдер.

2.48. Табаны AC болатын ABC тең бүйірлі үшбұрышының BD медианасы жүргізілген. $AE = CF$ болатындай AB және BC қабырғаларынан E және F нүктелері алынған. 1) $\Delta BDE = \Delta BDF$; 2) $\Delta ADE = \Delta CDF$ теңдігін дәлелдеңдер.

2.49. Егер тең бүйірлі үшбұрыштардың табандары мен табандарына түсірілген биіктіктері тең болса, бұл үшбұрыштар тең болатынын дәлелдеңдер.

2.50. $\Delta ACC_1 = \Delta BCC_1$ және A мен B төбелері CC_1 түзуіне қатысты әртүрлі жарты жазықтықтарда жатыр. ABC және ABC_1 үшбұрыштары тең бүйірлі болатынын дәлелдеңдер.

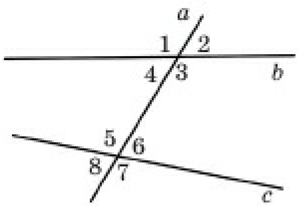
2.51*. Үшбұрыштар теңдігін олардың медианалары және бұрыштарының осы медианалармен бөлінетін бөліктерінің теңдігі арқылы дәлелдеңдер.

4–2558

III ТАРАУ. ТҮЗУЛЕРДІҢ ӨЗАРА ОРНАЛАСУЫ

3.1. Түзулердің параллельдік белгілері

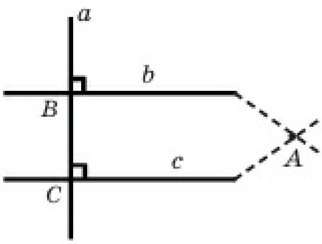
3.1.1. Екі түзудің қиюшымен жасайтын бұрыштары.



3.1,*а*-сурет

a түзуі *b* және *c* түзулерімен қиылысатын болсын (3.1,*а*-сурет). Мұнда *a* түзуі ***қиюшы*** деп аталады. *b* және *c* түзулерінің *a* қиюшысымен жасайтын бұрыштары жұптарының арнайы атаулары бар. 3.1,*а*-суреттегі 3 және 6, 4 және 5 бұрыштар ***ішкі тұстас*** бұрыштар деп аталады.

3 және 5, 4 және 6 бұрыштар ***ішкі айқыш*** бұрыштар деп аталады.



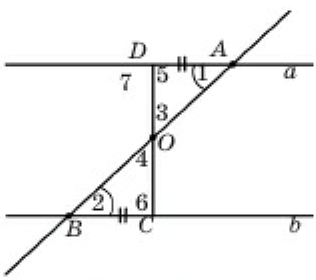
3.1,*ә*-сурет

1 және 5, 2 және 6, 4 және 8, 3 және 7 бұрыштар жұптары ***сәйкес*** бұрыштар деп аталады.

Теорема 1. *Егер $a \perp b$ және $a \perp c$ болса, онда $b \parallel c$ болады.*

Дәлелдеуі. $b \nparallel c$ болсын. Онда $A = b \cap c$ нүктесі бар. Егер $B = a \cap b$, $C = a \cap c$ болса, онда A нүктесінен a түзуіне екі түрлі AB және AC перпендикулярлары жүргізілген болып шығады. Бұл қайшылық $b \parallel c$ екенін дәлелдейді (3.1,*ә*-сурет).

Түзулер параллельдігінің үш белгісі бар.



3.2-сурет

Теорема 2. (Параллельдіктің белгілері). *Егер екі түзуді қиюшымен қиғанда пайда болған: 1) айқыш бұрыштар тең болса; 2) сәйкес бұрыштар тең болса; 3) ішкі тұстас бұрыштардың қосындысы 180°-қа тең болса, онда бұл екі түзу параллель болады.*

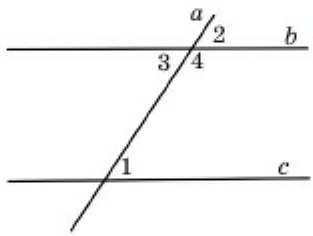
Дәлелдеуі. 1) a және b түзулерін AB қиюшысымен қиғанда пайда болған айқыш бұрыштар тең болсын: $\angle 1 = \angle 2$ (3.2-сурет). $a \parallel b$ екенін дәлелдейік.

Егер 1 және 2 бұрыштар тік болса, онда теорема 1 бойынша $a \parallel b$.

Енді 1 және 2 бұрыштар тік болмаған жағдайда AB кесіндісінің ортасы – O нүктесі арқылы a түзуіне перпендикуляр түсірейік. $OD \perp a$, $D \in a$. $BC = AD$ және D мен C нүктелері AB түзуінің екі жағында жататындай етіп, $C \in b$ нүктесін алайық, $\angle 1 = \angle 2$, $OA = OB$, $BC = AD$ болғандықтан, үшбұрыштар теңдігінің I белгісі бойынша $\Delta OAD = \Delta OBC$. Олай болса, $\angle 6 = \angle 5$. Ал $\angle 5 = \angle 7 = 90^\circ$ екенін ескерсек, онда C, O, D нүктелері бір түзудің бойында жататыны және $DC \perp a$, $DC \perp b$ екені шығады. Сондықтан 1-мысал бойынша $a \parallel b$.

2) $\angle 1 = \angle 2$ болсын (3.3-сурет). $b \parallel c$ екенін көрсетейік.

Шынында да, вертикаль бұрыштар ретінде $\angle 2 = \angle 3$. Онда $\angle 3 = \angle 1$, яғни ішкі айқыш бұрыштары тең. Сондықтан теорема 2-нің 1) тұжырымы бойынша $b \parallel c$.



3.3-сурет

3) $\angle 1 + \angle 4 = 180^\circ$ болсын (3.3-сурет). $b \parallel c$ екенін көрсетейік.

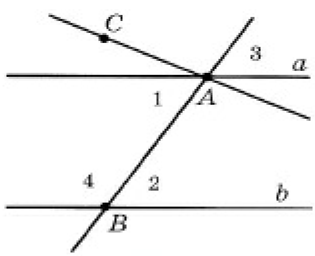
Шынында да, $\angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$ (сыбайлас бұрыштар). Осыдан $\angle 1 = \angle 3$ болып, теорема 2-нің 1) тұжырымы бойынша $b \parallel c$. Теорема толық дәлелденді.

Дәлелденген теореманың 1), 2) және 3) тұжырымдамаларын түзулер параллельдігінің сәйкесінше I, II және III белгілері деп атайды. Бұл теоремаға кері теорема да орындалады.

Теорема 3. (Кері теорема). *Екі параллель түзуді қиюшымен қиып өткенде пайда болған: 1) ішкі айқыш бұрыштар тең болады; 2) сәйкес бұрыштар тең болады; 3) ішкі тұстас бұрыштардың қосындысы 180°-қа тең болады.*

Дәлелдеуі. 1) $a \parallel b$, AB – қиюшы (3.4-сурет). $\angle 1 = \angle 2$ екенін көрсетейік.

Кері жорып, $\angle 1 = \angle 2$ болсын делік. Онда AB түзуінің $\angle 1$ орналасқан жағына $\angle 2$-ге тең болатын CAB бұрышын саламыз. Параллельдіктің I белгісі бойынша $AC \parallel b$ (себебі $\angle CAB = \angle 2$, салуымыз бойынша). Ал теорема шарты бойынша $a \parallel b$ екенін ескерсек, онда A нүктесі арқылы b түзуіне параллель екі түзу өтіп тұр.



3.4-сурет

Бұл параллельдік аксиомасына қайшы. Алынған қайшылық

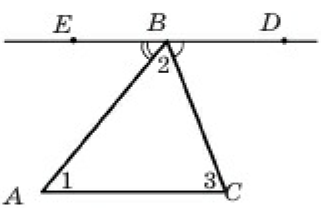
$\angle 1 = \angle 2$ теңсіздігін теріске шығарады, яғни $\angle 1 = \angle 2$ болуы қажет.

2) Егер $a \parallel b$ болса, онда дәлелдегеніміз бойынша $\angle 1 = \angle 2$ (3.4-сурет). Ал вертикаль бұрыштар ретінде $\angle 1 = \angle 3$. Олай болса, $\angle 2 = \angle 3$, яғни сәйкес бұрыштар тең.

3) Егер $a \parallel b$ болса, онда дәлелденген 1) тұжырым бойынша $\angle 1 = \angle 2$ (3.4-сурет). Ал $\angle 2$ және$\angle 4$ сыбайлас бұрыштар болғандықтан, $\angle 2 + \angle 4 = 180^\circ$. Олай болса, $\angle 1 + \angle 4 = 180^\circ$. Теорема толық дәлелденді.

3.1.2. Үшбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы.

Теорема 4. *Үшбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы 180°-қа тең.*



3.5-сурет

Дәлелдеуі. ABC үшбұрышы берілсін. B төбесі арқылы AC табанына параллель DE түзуін жүргіземіз (3.5-сурет). Онда $DE \parallel AC$ болғандықтан, $\angle BAC = \angle ABE$ және $\angle ABC = \angle CBD$. Екінші жағынан, (жазыңқы бұрыш). $\angle A = \angle ABE$, $\angle C = \angle CBD$ болғандықтан, $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$.

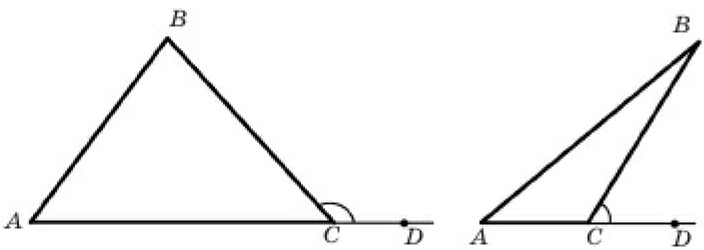
1-мысал. Үшбұрыштың екі доғал бұрышы болуы мүмкін бе?

Шешуі. Екі доғал бұрыштың қосындысы 180°-тан артық, сондықтан үшбұрышта екі доғал бұрыш болуы мүмкін емес.

2-мысал. Тең қабырғалы үшбұрыштың әр бұрышы 60°-қа тең екенін көрсетейік.

Шешуі. Егер ΔABC тең қабырғалы болса, онда $\angle A = \angle B = \angle C$ және $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$. Осыдан $\angle A + \angle B + \angle C = 60^\circ$.

Үшбұрыш бұрышына сыбайлас бұрышты оның ***сыртқы бұрышы*** деп атайды. 3.6-суретте BCD бұрышы – үшбұрыштың C төбесіндегі сыртқы бұрышы.

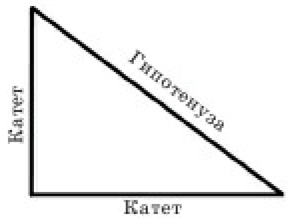


3.6-сурет

$\angle A + \angle B + \angle C = 180^{\circ}$ болғандықтан, $\angle A + \angle B = 180^{\circ} - \angle C$. Сонымен бірге $\angle C + \angle BCD = 180^{\circ}$ (сыбайлас бұрыштар). Сондықтан $\angle BCD = 180^{\circ} - \angle C$. Осыдан $\angle A + \angle B = \angle BCD$, яғни біз мынадай теореманы дәлелдедік.

Теорема 5. *Үшбұрыштың сыртқы бұрышы онымен сыбайлас емес екі бұрышының қосындысына тең.*

3.1.3. Тік бұрышты үшбұрыш. Егер үшбұрыштың бір бұрышы 90°-қа тең болса, онда бұл үшбұрышты ***тік бұрышты үшбұрыш*** деп атайды. Тік бұрышқа қарсы жатқан қабырғасы ***гипотенуза*** деп, ал өзге екі қабырғалары ***катеттері*** деп аталады (3.7-сурет).



3.7-сурет

Тік бұрышты үшбұрыштардың бір ортақ элементі бар – ол тік бұрышы. Сондықтан тік бұрышты үшбұрыштар үшін теңдік белгілерін былай айтуға болады.

I белгі: *Егер тік бұрышты үшбұрыштың екі катеті екінші тік бұрышты үшбұрыштың екі катетіне тең болса, онда бұл тік бұрышты үшбұрыштар тең болады.*

II белгі: *Егер бір тік бұрышты үшбұрыштың катеті мен оған іргелес сүйір бұрышы екінші тік бұрышты үшбұрыштың сәйкес катеті мен оған іргелес сүйір бұрышына тең болса, онда бұл үшбұрыштар тең болады.*

III белгі: *Егер бір тік бұрышты үшбұрыштың гипотенузасы мен сүйір бұрышы екінші тік бұрышты үшбұрыштың гипотенузасы мен сәйкес сүйір бұрышына тең болса, онда бұл үшбұрыштар тең болады.*

IV белгі: *Егер бір тік бұрышты үшбұрыштың катеті мен гипотенузасы екінші тік бұрышты үшбұрыштың сәйкес катеті мен гипотенузасына тең болса, онда бұл үшбұрыштар тең болады.*

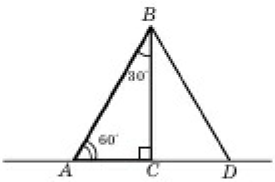
Мұнда I белгі үшбұрыштар теңдігінің I белгісінің салдары, I, II белгілер үшбұрыштар теңдігінің II белгісінен шығады. Ал IV белгі 2.1.1-дің 1-мысалында дәлелденген.

Теорема 6. *Тік бұрышты үшбұрыштың 30°-қа тең бұрышына қарсы жатқан катеті гипотенузасының жартысына тең.*

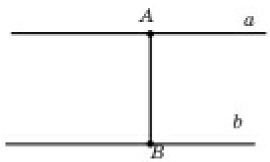
Дәлелдеуі. ABC үшбұрышында $\angle C = 90^{\circ}$ және $\angle B = 30^{\circ}$ болсын. 3.8-суретте көрсетілгендей етіп, BCD тік бұрышты үшбұрышын саламыз. Мұнда $\angle CBD = 30^\circ$. Онда ABD үшбұрышының барлық бұрыштары 60°-қа тең, яғни ΔABD тең қабырғалы. $AC = \frac{1}{2}AD$ және $AD = AB$ болғандықтан, $AC = \frac{1}{2}AB$.

Тағы бірнеше маңызды ұғымдар енгізейік. Егер ABC үшбұрышы тік бұрышты ($\angle C = 90^\circ$) болса, онда BC катеті AC түзуіне түсірілген перпендикуляр болады (3.8-сурет). AB гипотенузасын B нүктесінен AC түзуіне жүргізілген ***көлбеу*** деп атайды. Ал AC катетін AB көлбеуінің AC түзуіндегі ***проекциясы*** деп атайды. Тік бұрышты үшбұрыштың тік бұрышы оның өзге бұрыштарынан үлкен болғандықтан, гипотенуза оның кез келген катетінен үлкен болады. Онда қандай да бір нүктеден түзуге түсірілген перпендикуляр осы нүктеден берілген түзуге түсірілген көлбеуден кіші болады. Көлбеудің проекциясы көлбеудің өзінен кіші.

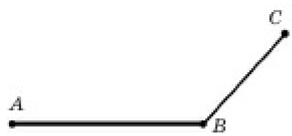
B нүктесінен AC түзуіне дейінгі ***қашықтық*** деп BC перпендикулярының ұзындығын айтады. Жалпы, екі фигура арасындағы қашықтық деп олардың ең жақын орналасқан нүктелерінің (мұндай нүктелері бар болса) арақашықтығын айтады. Мысалы, 3.9-суретте a және b параллель түзулерінің арасындағы қашықтық олардың ортақ перпендикулярларының ұзындығына тең. 3.10-суретте C нүктесінен AB кесіндісіне дейінгі қашықтық BC кесіндісінің ұзындығына тең.



3.8-сурет



3.9-сурет



3.10-сурет

Т

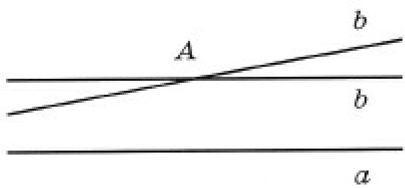
Алғы сөзде атап өткендей, әдетте аксиомалардың іс-тәжірибелік мәні бар, яғни аксиомалардың барлығының көрнекілік ақиқаттығы бар және күмәнсіз болып келеді. «Аксиома» сөзі гректің «аксиос» деген сөзінен шыққан және «құнды, лайықты» деген мағынаны білдіреді.

Геометрия өзінің дамуының алғашқы кезеңінде Мысыр елінде жоғары деңгейде болды. Біздің заманымыздан бұрынғы бірінші


Евклид
(б.з.б. III ғасыр)

Н. И. Лобачевский – орыс математигі (1792 – 1856)

мыңжылдықта геометриялық мәліметтер мысырлықтардан гректерге ауысты. Біздің заманымыздан бұрынғы VII–III ғасырлар аралығында грек ғалымдары геометрияны көптеген жаңа теоремалармен толықтырып қана қоймай, оны қатаң ой түйсіктігі жағынан негіздеме жасау жөнінен де айтарлықтай қадам жасаған. Грек геометрлерінің көптеген ғасырлар бойы жинақтаған еңбектерін қорытындылап, Евклид (б.з.б. III ғасыр) өзінің атақты «Бастамалар» атты еңбегінде бір жүйеге келтірген. Бұл еңбектерде геометрияның баяндалуы аксиомалар жүйесіне негізделген. Евклидтің аксиомалар жүйесі құрамында V постулат болды. Бұл постулаттан оған балама мынадай тұжырым алуға болады: түзуде жатпайтын нүкте арқылы осы түзуге параллель бір ғана түзу жүргізуге болады. Осы параллельдік аксиомасы өзге аксиомалармен салыстырғанда көрнекілігі жағынан кем түседі. Айталық, a түзуінде жатпайтын A нүктесі арқылы a түзуіне параллель b түзуін жүргізуге болады. Енді мынадай сұрақ туындайды: A нүктесі арқылы a түзуіне параллель болатын тағы бір түзу жүргізуге бола ма? Бізге b түзуін A нүктесі маңында өте кіші бұрышқа бұрсақ та, шыққан түзу a түзуін қиып өтетін сияқты болып көрінеді (3.11-сурет). Көбінде, V постулат өзінің күрделі фор-



3.11-сурет

мада топшылануына байланысты 20 ғасыр бойы көптеген ғалымдарды толғандырып келді. Бұл ғалымдар V постулатты теорема ретінде «дәлелдеуге» тырысып бақты. Бірақ олардың бұл әрекеттері ылғи да нәтижесіз аяқталып отырды. Тек XIX ғасырда ғана Евклидтің V постулаты өзге аксиомалар көмегімен дәлелденбейтіндігі және ол параллельдік аксиомасының баламасы екені дәлелденді. Осы мәселені шешу барысында орыстың ғұлама математигі Николай Иванович Лобачевскийдің (1792–1856) еңбектері шешуші үлес қосты.

ПТ

1. Қандай бұрыштар ішкі тұстас, айқыш бұрыштар деп аталады?
2. Сәйкес бұрыштар дегеніміз қандай бұрыштар?
3. Параллельдіктің 3 белгісін дәлелдеңдер.
4. Үшбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы неге тең?
5. Үшбұрыштың сыртқы бұрышы деп нені айтады?
6. Тік бұрышты үшбұрыш дегеніміз қандай үшбұрыш? Оның элементтерін атаңдар.
7. Тік бұрышты үшбұрыштар теңдігінің белгілерін айтыңдар.
8. Көлбеу дегеніміз не? Проекция дегеніміз не?
9. Фигуралардың арақашықтығы деп нені түсінеді?

?

1. a түзуін сызып, одан тысқары A нүктесін алыңдар. A нүктесінен a түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

Есептер

А

3.1. Егер A және D нүктелері BC түзуінің бір жағында жатса және $\angle ABC = 80^\circ$, $\angle BCD = 110^\circ$ болса, онда AB және CD түзулері: 1) параллель; 2) қиылысушы түзулер болуы мүмкін бе?

3.2. Егер $\angle ABC = 65^\circ$ және $\angle BCD = 105^\circ$ болса, онда 3.1-ші есептің сұрақтарына жауап беріңдер.

3.3. Екі параллель түзуді қиюшымен қиғандағы ішкі тұстас бұрыштардың айырмасы 50°. Осы бұрыштарды табыңдар.

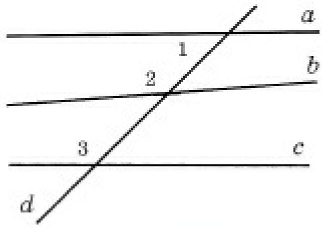
3.4. Екі параллель түзуді қиюшымен қиғандағы ішкі тұстас бұрыштардың айырмасы 30°. Осы бұрыштарды табыңдар.

3.5. Қиюшы мен параллель екі түзу арасындағы айқыш бұрыштардың қосындысы 150°. Осы бұрыштарды табыңдар.

3.6. Қиюшы параллель екі түзумен қиылысқанда пайда болатын бұрыштардың бірі 72°. Қалған 7 бұрышты табыңдар.

3.7. Қиюшы мен параллель екі түзу арасындағы бұрыштардың бірі 30°. Өзге 7 бұрыштың бірі 70°-қа тең болуы мүмкін бе?

3.8. Қиюшы мен параллель екі түзу арасындағы ішкі айқыш бұрыштардың қосындысы 210°. Осы бұрыштарды табыңдар.



3.12-сурет

3.9. 3.12-суретте a, b, c түзулері d қиюшысымен қиылысқан. $\angle 1 = 42^\circ$, $\angle 2 = 140^\circ$, $\angle 3 = 138^\circ$, a, b және c түзулерінің қайсылары өзара параллель?

3.10. Егер қиюшы мен параллель екі түзу арасындағы бұрыштардың бірі: 1) 150° болса; 2) екіншісінен 70° үлкен болса, онда барлық бұрыштарды табыңдар.

3.11. Тең бүйірлі тік бұрышты үшбұрыштың бұрыштарын табыңдар.

3.12. ABC үшбұрышында $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 60^\circ$, $AB = 32$ см. AC-ны табыңдар.

3.13. ABC үшбұрышының A және B төбелеріндегі бір-бірден алынған сыртқы бұрыштарының қосындысы 240°. C бұрышын табыңдар.

3.14. Үшбұрыштың бір ішкі бұрышы 30°, ал бір сыртқы бұрышы 40°. Үшбұрыштың қалған ішкі бұрыштарын табыңдар.

3.15. Егер үшбұрыштың екі бұрышы: 1) 50° және 30°; 2) 40° және 75°; 3) 60° және 80°; 4) 25° және 120°-қа тең болса, онда оның үшінші бұрышын табыңдар.

3.16. Егер үшбұрыштың екі бұрышы: 1) 54° және 36°; 2) 42° және 78°; 3) 65° және 35°; 4) 33° және 120°-қа тең болса, онда оның үшінші төбесіндегі сыртқы бұрышын табыңдар.

3.17. Егер тең бүйірлі үшбұрыштың бір бұрышы: 1) 40°; 2) 60°; 3) 100°-қа тең болса, онда осы үшбұрыштың бұрыштарын табыңдар.

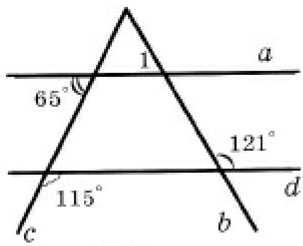
B

3.18. AB кесіндісінің ұштары параллель a және b түзулерінде жатады. AB-ның ортасы O арқылы өтетін түзу

a мен b-ны C және D нүктелерінде қияды. $CO = OD$ теңдігін дәлелдеңдер.

3.19. a түзуі AB кесіндісін оның ортасы O нүктесінде қияды. A және B нүктелері a түзуінен бірдей қашықтықта жататынын дәлелдеңдер.

3.20. 3.13-суретті пайдаланып, $\angle 1$-ты табыңдар.



3.13-сурет

3.21. Екі параллель түзуді үшінші түзумен қиғанда пайда болатын ішкі тұстас бұрыштардың биссектрисалары қандай бұрышпен қиылысады?

3.22. Егер үшбұрыш бұрыштарының қатынасы 3:8:5 қатынасындай болса, онда бұл үшбұрыш тік бұрышты үшбұрыш болатынын дәлелдеңдер.

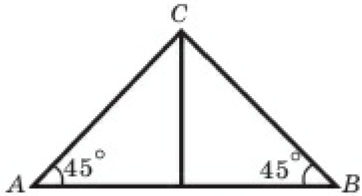
3.23. Үшбұрыштың бір бұрышы екіншісінен 30° үлкен, ал үшіншісінен 30° кіші. Үшбұрыштың барлық бұрыштарын табыңдар.

3.24. Табаны AC болатын ABC тең бүйірлі үшбұрышының биссектрисасы AD. Егер $\angle C = 50^\circ$ болса, онда $\angle ADC$-ны табыңдар.

3.25. ABC үшбұрышының A және B бұрыштарының биссектрисалары N нүктесінде қиылысады. Егер $\angle A = 58^\circ$, $\angle B = 96^\circ$ болса, онда $\angle ANB$-ны табыңдар.

3.26. ABC үшбұрышында AB =18 см, $\angle B = 30^\circ$, $\angle C = 90^\circ$. 1) A нүктесінен BC түзуіне дейінгі қашықтықты; 2) AB көлбеуінің AC түзуіндегі проекциясын табыңдар.

3.27. ABC үшбұрышында $\angle A = \angle B = 45^\circ$ және $AB = 19$ см. 1) C нүктесінен AB түзуіне дейінгі қашықтықты; 2) AC кесіндісінің AB түзуіндегі проекциясын табыңдар (3.14-сурет).



3.14-сурет

3.28. Тең бүйірлі үшбұрыштың табанына қарсы жатқан бұрышының сыртқы бұрышының биссектрисасы табанына параллель болатынын дәлелдеңдер.

3.29. Тең бүйірлі үшбұрыштың сыртқы бұрыштарының бірі 115°. Үшбұрыштың бұрыштарын табыңдар.

3.30. ABC тең бүйірлі үшбұрышының табаны AC, биссектрисасы AD. Егер $\angle ABD = 110^\circ$ болса, онда ABC үшбұрышының бұрыштарын табыңдар.

3.31. Егер тік бұрышты үшбұрыштың тік бұрышынан түсірілген биіктігі катетімен 50°-қа тең бұрыш жасайтын болса, онда осы үшбұрыштың бұрыштарын табыңдар.

3.32. Тік бұрышты үшбұрыштың сүйір бұрыштарының биссектрисалары 45° бұрыш жасап қиылысатынын дәлелдеңдер.

3.33. Егер тік бұрышты үшбұрыштың екі биссектрисасы 70° бұрыш жасап қиылысатын болса, онда осы үшбұрыштың бұрыштарын табыңдар.

C

3.34. Егер ABC үшбұрышының AD медианасы BC қабырғасының жартысына тең болса, онда ол тік бұрышты үшбұрыш болатынын дәлелдеңдер.

3.35*. a және b түзулері берілген. Егер a түзуін қиып өтетін кез келген түзу b түзуін де қиып өткенде пайда болған сәйкес бұрыштар тең болса, онда $a \parallel b$ болатынын дәлелдеңдер.

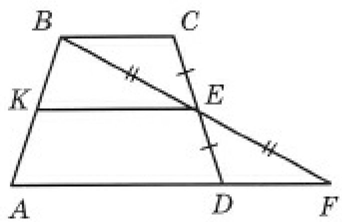
3.36. a және b түзулерінің үшінші түзумен қиылысуынан пайда болатын ішкі айқыш бұрыштар тең болмаса, онда a және b түзулері қиылысатынын дәлелдеңдер.

3.37. BP және AC кесінділерінің орталары, CQ және AB кесінділерінің орталары беттесетіндей етіп, ABC үшбұрышы мен P және Q нүктелері берілген. A, P, Q нүктелері бір түзудің бойында жататынын дәлелдеңдер.

3.38. B бұрышының биссектрисасында жататын D нүктесінен оның қабырғаларына DA және DC перпендикулярлары түсірілген. $DA = DC$ теңдігін дәлелдеңдер.

3.39. Егер бір бұрыштың қабырғалары екінші бұрыштың сәйкес қабырғаларына параллель болса, онда бұл бұрыштар не тең, не қосындысы 180°-қа тең болатынын дәлелдеңдер.

3.40. 3.15-суретте $CE = ED$, $BE = EF$ және $KE \parallel AD$. $KE \parallel BC$ болатынын дәлелдеңдер.



3.15-сурет

3.41. ABC үшбұрышының AD биссектрисасының ортасы арқылы өтетін оған перпедикуляр түзу AC қабырғасын K нүктесінде қиып өтеді. $KD \parallel AB$ болатынын дәлелдеңдер.

3.42. Тік бұрышты үшбұрыштың екі биссектрисасы 40° бұрыш жасап қиылысуы мүмкін бе?

3.43*. 52-беттегі 2-мысалда келтірілген тұжырымға кері тұжырымды пайымдап, оны дәлелдеңдер.

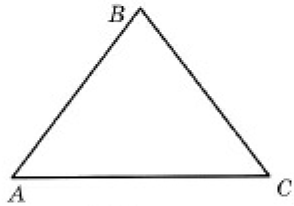
3.2. Үшбұрыш қабырғалары мен бұрыштары арасындағы қатынастар

3.2.1. Үшбұрыш қабырғалары мен бұрыштары арасындағы қатынастар.

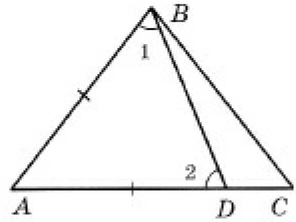
Теорема 1. *Үшбұрыштың үлкен қабырғасына үлкен бұрышы қарсы жатады және керісінше, үлкен бұрышына үлкен қабырғасы қарсы жатады.*

Дәлелдеуі. ABC үшбұрышында AC қабырғасы AB қабырғасынан үлкен болсын (3.16-сурет).

$\angle B > \angle C$ теңсіздігі орындалатынын дәлелдейік. Ол үшін AC-ның бойына AB-ға тең AD кесіндісін өлшеп саламыз (3.17-сурет). $AD = AB < AC$ болғандықтан, D нүктесі A және C нүктелерінің арасында жатады, яғни BD сәулесі B бұрышы қабырғаларының арасы арқылы өтеді. Сондықтан $\angle 1$



3.16-сурет



3.17-сурет

B бұрышының бөлігі болып табылады және $\angle 1 < \angle B$. Ал $\angle 2$ BDC үшбұрышының сыртқы бұрышы болғандықтан, $\angle 2 = \angle C + \angle DBC$ теңдігі орындалады. ΔABD тең бүйірлі үшбұрыш болғандықтан, $\angle 1 = \angle 2$. Олай болса, $\angle B > \angle C$ теңсіздігі орындалады.

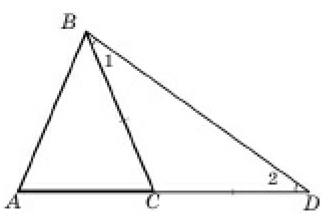
Керісінше, ABC үшбұрышында $\angle B > \angle C$ теңсіздігі орындалсын. Онда $AC > AB$ теңсіздігі орындалатынын көрсетейік. Қарсы жорып, бұл теңсіздік орындалмайды дейік. Онда не $AC = AB$, не $AC < AB$ болуы керек. Егер $AC = AB$ болса, онда ΔABC тең бүйірлі үшбұрыш болып, $\angle B = \angle C$ теңдігі орындалар еді, бұл $\angle B > \angle C$ теңсіздігіне қайшы келеді. Егер $AC < AB$ болса, онда дәлелдегеніміз бойынша, $\angle B > \angle C$ теңсіздігі орындалуы қажет, бұл да $\angle B > \angle C$ теңсіздігіне қайшы келеді. Онда біздің қарсы жоруымыз қате, яғни $AC > AB$ теңсіздігі орындалады. Теорема дәлелденді.

1-мысал. Тік бұрышты үшбұрыштың гипотенузасы катетінен үлкен болатынын көрсетейік.

Шынында да, гипотенузасы тік бұрышқа қарсы жатады, ал катет сүйір бұрышқа қарсы жатады. Тік бұрыш сүйір бұрыштан үлкен болғандықтан, дәлелденген теорема бойынша гипотенуза катеттен үлкен болады.

3.2.2. Үшбұрыштар теңсіздігі.

Теорема 2. *Үшбұрыштың әрбір қабырғасы өзге екі қабырғаларының қосындысынан кіші болады.*



3.18-сурет

Дәлелдеуі. Кез келген ABC үшбұрышы берілсін. $AB < AC + BC$ теңсіздігі орындалатынын көрсетейік.

Ол үшін AC қабырғасының созындысынан $CB = CD$ теңдігі орындалатындай етіп, CD кесіндісін өлшеп саламыз (3.18-сурет). BCD тең бүйірлі үшбұрышында $\angle 1 = \angle 2$, ал ABD үшбұрышында $\angle ABD > \angle 1 = \angle 2$. Онда теорема 1 бойынша $AB < AD$ теңсіздігі орындалады. $AD = AC + CD$ және $CD =$

$= BC$ болғандықтан, $AB < AC + BC$ теңсіздігі орындалады. Теорема дәлелденді.

Дәлелденген теңсіздік үшбұрыштың кез келген қабырғасы үшін орындалады, яғни ABC үшбұрышы үшін мына теңсіздіктер ақиқат:

$$\begin{cases} AB < AC + BC, \\ AC < AB + BC, \\ BC < AB + AC. \end{cases} \qquad (1)$$

Бұл теңсіздіктерді ***үшбұрыштар теңсіздігі*** деп атайды.

2-мысал. Үшбұрыштың әрбір қабырғасы өзге екі қабырғаларының айырмасынан үлкен болады.

Шынында да, үшбұрыштардың (1) теңсіздіктерінен $BC > AB - AC$, $AB > AC - BC$, $AC > BC - AB$ теңсіздіктерін аламыз.

?

1. Үшбұрыштың қабырғалары мен бұрыштары арасындағы қатынастар жөніндегі теорема 1-ді дәлелдеңдер.
2. Тік бұрышты үшбұрыштарда гипотенуза катеттен үлкен болатынын көрсетіңдер.
3. Үшбұрыштар теңсіздігі жөніндегі теореманы тұжырымдап, дәлелдеңдер.
4. Үшбұрыштың әрбір қабырғасы өзге екі қабырғасының айырмасынан үлкен болатынын көрсетіңдер.

ПТ

Көз мөлшерімен қабырғалары әртүрлі үшбұрыш салып, өлшеуіш құралдары көмегімен теорема 1 мен теорема 2-нің орындалатынын тексеріңдер.

Есептер

А

3.44. ABC үшбұрышында $BC > AC > AB$. Үшбұрыш бұрыштарының қайсысы үлкен: 1) B бұрышы ма, әлде A бұрышы ма? 2) C бұрышы ма, әлде A бұрышы ма?

3.45. Қабырғалары: 1) 2 см, 3 см және 5 см; 2) 2,1 дм, 2 дм және 4 дм; 3) 4 м, 3 м және 6 м болатын үшбұрыш табыла ма?

3.46. Егер: 1) $\angle A > \angle B > \angle C$; 2) $\angle A = \angle B < \angle C$ болса, онда ABC үшбұрышының қабырғаларын салыстырыңдар.

3.47. ABC үшбұрышында $AB = 4$ см, $BC = 5$ см, $AC = 6$ см. A, B және C бұрыштарын салыстырыңдар.

3.48. Егер үшбұрыштың: 1) екі бұрышы тең; 2) үш бұрышы да тең болса, онда бұл үшбұрыш қалай аталады?

3.49. Тең бүйірлі үшбұрыштың бүйір қабырғасы 6 см болса, онда оның табаны 15 см-ге тең болуы мүмкін бе?

3.50. Үшбұрыш қабырғаларының қатынасы: 1) 2 : 3 : 4; 2) 2 : 3 : 5-ке тең болуы мүмкін бе?

B

3.51. Үлкен бұрышы өзге екі бұрышының қосындысынан кіші болатын үшбұрыштың түрі қандай?

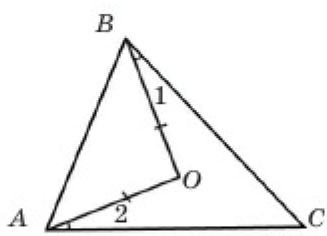
3.52. Екі қабырғасының ұзындығы: 1) 2 см және 5 см; 2) 21 см және 9 см; 3) 6 дм және 3 дм болатын тең бүйірлі үшбұрыштың үшінші қабырғасын табыңдар.

3.53. Тең бүйірлі үшбұрыштың бір қабырғасы 20 см, ал екіншісі 10 см. Бұлардың қайсысы үшбұрыштың табаны болуы мүмкін?

3.54. ABC үшбұрышында $\angle B = 70^\circ$. Осы бұрыштың биссектрисасы AC қабырғасын D нүктесінде қияды және $BD = CD$. $AB < AC$ теңсіздігін дәлелдеңдер.

3.55. D нүктесі ABC тең бүйірлі үшбұрышының BC табанында жатыр. AD кесіндісі үшбұрыштың бүйір қабырғасынан кіші болатынын көрсетіңдер.

3.56. D нүктесі ABC үшбұрышының AC қабырғасында жатады және $\angle C = 108^\circ$, $BD = 4{,}3$ см, $AB < 6$ см. Егер AB қабырғасының ұзындығы бүтін санмен өрнектелетіні белгілі болса, онда AB-ның ұзындығын табыңдар.



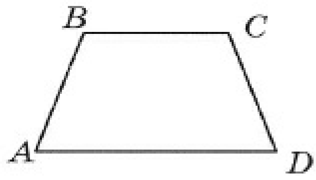
3.19-сурет

3.57. 3.19-суретте $AO = BO$, $\angle 1 = \angle 2$. $AC = BC$ теңдігін дәлелдеңдер.

3.58. D және E нүктелері ABC үшбұрышының сәйкес AB және BC қабырғаларында жатады және $AD = CE$, $AE = CD$. ABC үшбұрышы тең бүйірлі болатынын дәлелдеңдер.

3.59. $AD < AB + BC + CD$ теңсіздігін дәлелдеңдер (3.20-сурет).

3.60. Тең бүйірлі үшбұрыштың периметрі 50 см, ал бір қабырғасы 10 см. Оның өзге қабырғаларын табыңдар.



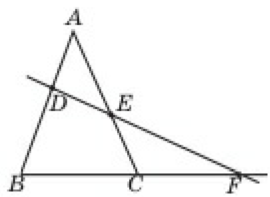
3.20-сурет

C

3.61. Үшбұрыштың медианасы осы төбеден жүргізілген биіктіктен кіші болмайтынын дәлелдеңдер.

3.62. Тең бүйірлі үшбұрыштың периметрі 36 см, екі қабырғасының айырмасы 6 см, ал бір төбесіндегі сыртқы бұрышы сүйір. Үшбұрыш қабырғаларын табыңдар.

3.63. Түзу тең бүйірлі үшбұрыштың AB және AC бүйір қабырғаларын сәйкес D және E нүктелерінде, ал BC түзуін F нүктесінде қиып өтеді. $AE > AD$ теңсіздігін дәлелдеңдер (3.21-сурет).



3.21-сурет

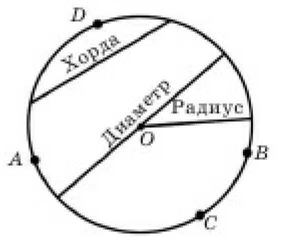
3.64. Үшбұрыштың әртүрлі төбелеріндегі екі сыртқы бұрышы тең. Үшбұрыштың периметрі 74 см, ал бір қабырғасы 16 см. Оның қалған екі қабырғасын табыңдар.

3.65. AB және CD кесінділері O нүктесінде қиылысып, қиылысу нүктесінде әрқайсысы қақ бөлінеді. $AO < \frac{AC + AD}{2}$ теңсіздігін дәлелдеңдер.

IV ТАРАУ. ШЕҢБЕР ЖӘНЕ САЛУ ЕСЕПТЕРІ

4.1. Шеңбер, дөңгелек, олардың элементтері мен бөліктері. Центрлік бұрыш

4.1.1. Шеңбер және дөңгелек. Жазықтықтың берілген нүктесінен бірдей қашықтықта орналасқан нүктелер жиынын ***шеңбер*** деп атайды. Жазықтықтың шеңбермен шектелген бөлігін ***дөңгелек*** деп атайды. Берілген нүктені шеңбердің (дөңгелектің) ***центрі*** деп, ал шеңбердің кез келген нүктесінен оның центріне дейінгі қашықтықты ***радиусы*** деп атайды. Шеңбердің екі нүктесін қосатын кесіндіні ***хорда*** деп, ал центр арқылы өтетін хорданы ***диаметр*** деп атайды (4.1-сурет). Әрбір диаметр екі радиустан құралады, сондықтан оның ұзындығы екі радиусқа тең: $d = 2r$. Центрі O нүктесінде және радиусы r-ге тең шеңберді $\omega(O; r)$ арқылы белгілейді. Төбесі шеңбердің O центрі, ал қабырғалары шеңбер радиустары болатын бұрыш ***центрлік бұрыш*** деп аталады.

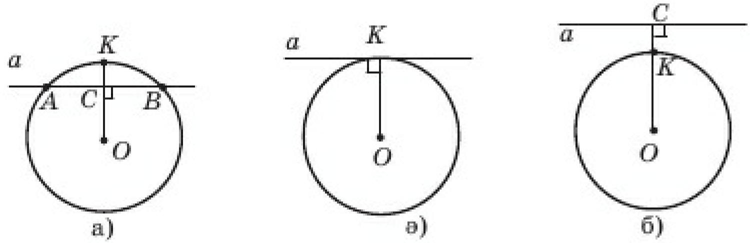


4.1-сурет

Шеңбер доғасы мен дөңгелектің осы доғаға тірелген радиустармен шектелген бөлігін ***дөңгелек секторы*** деп атайды.

Шеңбер өзінде жатқан екі нүкте арқылы екі бөлікке бөлінеді. Бұл бөліктер шеңбер ***доғасы*** деп аталады. 4.1-суретте шеңбер A және B нүктелері арқылы үлкен ADB және кіші ACB доғаларына бөлінген. Оларды сәйкесінше $\cup ADB$ және $\cup ACB$ деп белгілейді.

Шеңбер мен түзудің екі ортақ нүктесі, бір ортақ нүктесі болуы немесе ортақ нүктелері мүлде болмауы мүмкін (4.2-сурет). Шеңбермен бір ғана ортақ нүктесі бар түзуді ***жанама*** деп, ал осы ортақ нүктені ***жанасу нүктесі*** деп атайды. Соны-



4.2-сурет

мен, a түзуі мен $\omega(O;\ r)$ шеңберінің өзара орналасуларының үш түрлі жағдайы бар: 1) a түзуі $\omega(O;\ r)$ шеңберін екі A және B нүктелерінде қиып өтеді (4.2, *а*-сурет). Бұл жағдайда O центрінен a түзуіне дейінгі CO қашықтығы r радиусынан кіші ($CO < r$); 2) a түзуі $\omega(O;\ r)$ шеңберін жанап өтеді және a түзуінен O центріне дейінгі OK қашықтығы r радиусына тең ($OK = r$) (4.2, *ә*-сурет); 3) a түзуі мен $\omega(O;\ r)$ шеңбері қиылыспайды және a түзуінен O центріне дейінгі CO қашықтығы r радиусынан артық ($CO > r$) (4.2, *б*-сурет).

4.1.2. Шеңберге жүргізілген жанаманың қасиеті. Жанасу нүктесі шеңбер бойында жатқандықтан, оның центрге дейінгі қашықтығы радиусқа тең. Жанаманың өзге нүктелері шеңберден тысқары орналасқан, яғни олардан центрге дейінгі қашықтықтар радиустан үлкен. Олай болса, a жанамасынан шеңбер центріне дейінгі қашықтық OK-ға тең, яғни $OK \perp a$. Сондықтан шеңберге жүргізілген жанама радиусқа перпендикуляр (4.2, *ә*-сурет).

Теорема 1. *Хорданың ортасы арқылы өтетін диаметр оған перпендикуляр болады.*

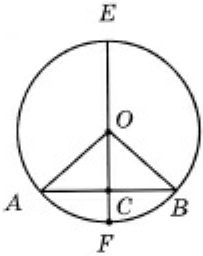
Дәлелдеуі. C нүктесі – AB хордасының ортасы болсын. OC түзуі шеңберді E және F нүктелерінде қиып өтсін (4.3-сурет). $EF \perp AB$ екенін көрсетейік.

ΔABC тең бүйірлі, себебі $AO = BO$ – радиустар, онда OC оның медианасы әрі биіктігі болады, яғни $OC \perp AB$. Олай болса, $EF \perp AB$.

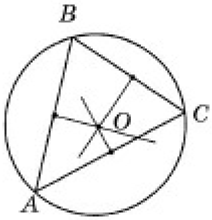
4.1.3. Үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбер. Егер шеңбер үшбұрыштың барлық төбелері арқылы өтсе, онда бұл шеңбер ***үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбер*** деп аталады. Үшбұрыш қабырғасының ортасы арқылы өтетін және оған перпендикуляр түзуді үшбұрыштың ***орта перпендикулярлары*** деп атайды.

Теорема 2. *Үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің центрі үшбұрыштың орта перпендикулярларының қиылысу нүктесі болады.*

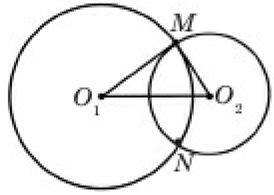
Дәлелдеуі. ABC үшбұрышына сырттай сызылған шеңбердің центрі O болсын. Онда ABC үшбұрышының қабырғалары осы шеңбердің хордалары болып табылады. 1-мысал бойынша үшбұрыш қабырғаларының орта перпендикулярлары шеңбер диаметрлерінде жатады, яғни шеңбер центрі арқылы өтеді (4.4-сурет).



4.3-сурет



4.4-сурет



4.5-сурет

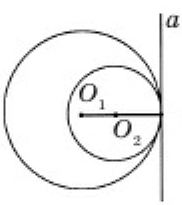
Жалпы, $\omega(O_1;\ r_1)$ және $\omega(O_2;\ r_2)$ екі шеңбер де үш түрлі жағдайда орналасады: ортақ екі нүктесі (4.5-сурет); жалғыз ортақ нүктесі бар (4.6, 4.7-суреттер) және ортақ нүктелері болмауы мүмкін (4.8, 4.9-суреттер).

Егер $\omega(O_1;\ r_1)$ және $\omega(O_2;\ r_2)$ шеңберлері екі нүктеде қиылысатын болса және $r_1 > r_2$ болса, онда $r_1 - r_2 < O_1O_2 < r_1 + r_2$ теңсіздігі орындалады.

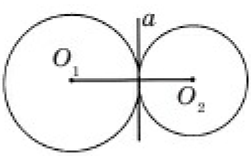
Шынында да, O_1O_2M үшбұрышынан $O_1O_2 < O_1M + O_2M = r_1 + r_2$ теңсіздігін аламыз. Сонымен қатар, осы үшбұрыштан $O_1M < O_1O_2 + O_2M$, яғни $r_1 < O_1O_2 + r_2$ теңсіздігі алынады. Сондықтан $r_1 - r_2 < O_1O_2$.

Егер $\omega(O_1;\ r_1)$ және $\omega(O_2;\ r_2)$ шеңберлерінің жалғыз ортақ нүктесі A болса, онда осы A нүктесі арқылы өтетін және O_1O_2 түзуіне перпендикуляр болатын a түзуі осы шеңберлердің ортақ жанамасы болады (шеңбермен жалғыз ортақ нүктесі бар және радиусқа перпендикуляр түзу ретінде).

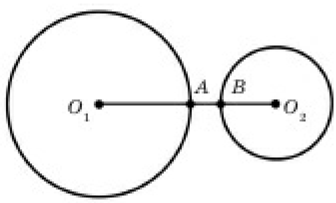
Егер екі шеңбердің жалғыз ортақ нүктесі бар болса, онда бұл шеңберді бір-бірімен ***жанасады*** деп айтады. Егер шеңберлердің центрі ортақ жанаманың бір жағында орналасатын болса, онда бұл шеңберлерді ***іштей жанасады*** (4.6-сурет) деп, ал шеңберлер центрлері ортақ жанаманың екі жағында жататын болса, онда шеңберлерді ***сырттай жанасады*** (4.7-сурет) деп айтады. Іштей жанасатын шеңберлер



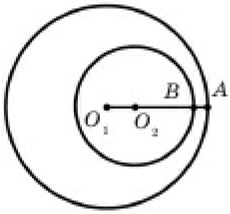
4.6-сурет



4.7-сурет



4.8-сурет



4.9-сурет

үшін $O_1O_2 = r_1 - r_2$ ($r_1 > r_2$ болса) теңдігі, ал сырттай жанасатын шеңберлер үшін $O_1O_2 = r_1 + r_2$ теңдігі орындалады.

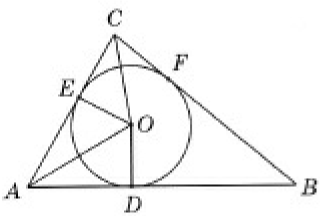
$\omega(O_1;\ r_1)$ және $\omega(O_2;\ r_2)$, мұнда $r_1 > r_2$, шеңберлерінің ортақ нүктелері болмасын. Онда бұл шеңберлердің бірі екіншісінің сыртқы облысында орналасады (4.8-сурет) немесе $\omega(O_2;\ r_2)$ шеңбері $\omega(O_1;\ r_1)$ шеңберінің ішкі облысында орналасады (4.9-сурет).

Бірінші жағдайда $\omega(O_2;\ r_2)$ шеңбері $\omega(O_1;\ r_1)$ шеңберінің ***сыртында орналасады*** (не керісінше, $\omega(O_1;\ r_1)$ шеңбері $\omega(O_2;\ r_2)$ шеңберінің ***сыртында орналасады***) деп айтады және $O_1O_2 > r_1 + r_2$ теңсіздігі орындалады.

Екінші жағдайда $O_1O_2 < r_1 - r_2$ теңсіздігі орындалып, $\omega(O_2;\ r_2)$ шеңбері $\omega(O_1;\ r_1)$ шеңберінің ***ішінде орналасады*** деп айтады.

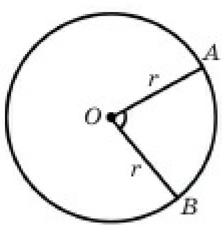
4.1.4. Үшбұрышқа іштей сызылған шеңбер. Үшбұрыштың барлық қабырғаларын жанайтын шеңбер ***осы үшбұрышқа іштей сызылған шеңбер*** деп аталады (4.10-сурет).

Теорема 3. *Үшбұрышқа іштей сызылған шеңбер центрі үшбұрыш биссектрисаларының қиылысу нүктесі болады.*



4.10-сурет

Дәлелдеуі. ABC үшбұрышына іштей сызылған шеңбер центрі O, ал қабырғаларымен жанасу нүктелері D, E және F болсын (4.10-сурет). $OD = OE$ (шеңбер радиустары) және AO гипотенузасы ортақ болғандықтан, $\Delta AOD = \Delta AOE$. Онда $\angle OAD = \angle OAE$, яғни үшбұрышқа іштей сызылған шеңбер центрі O нүктесі AO биссектрисасында жатыр. Осы сияқты O нүктесі үшбұрыштың өзге биссектрисаларында жататынын көрсетуге болады.



4.11-сурет

$\omega(O;\ r)$ шеңбері берілген болсын. Осы шеңберде A және B нүктелерін белгілейік. Онда AOB бұрышы ***центрлік бұрыш*** деп аталады (4.11-сурет). AOB бұрышының өлшемі AB доғасының ***градустық өлшемі*** деп аталады, яғни AB доғасының шамасы

AOB центрлік бұрышының градустық өлшемімен өлшенеді. A және B нүктелері шеңберді екі бөлікке бөледі. Бұл бөліктердің AOB центрлік бұрышымен шектелген бөлігі AB доғасы ретінде қарастырылады.

?

1. Шеңбер дегеніміз не? Шеңбердің центрі деп нені атайды? Радиусы деп нені атайды?
2. Хорда деп нені атайды? Қандай хорда диаметр болады?
3. Үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбер деп нені айтады?
4. Үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбер центрі жөніндегі теореманы тұжырымдап, дәлелдеңдер.
5. Қандай түзуді шеңберге жанама деп атайды?
6. Екі шеңбердің іштей, сырттай жанасуын қалай түсінесіңдер?
7. Қандай шеңберді үшбұрышқа іштей сызылған деп айтады?
8. Үшбұрышқа іштей сызылған шеңбер центрі жөніндегі теореманы тұжырымдап, дәлелдеңдер.

ПТ

100 тг-нің не 50 тг-нің немесе өзге шаблонның көмегімен шеңбер сызып, оның центрін көз мөлшерімен анықтаңдар. Егер сызылған шеңбер центрі көрсетілмесе, онда центрдің орнын қалай табуға болатынын түсіндіріп көріңдер.

Есептер

А

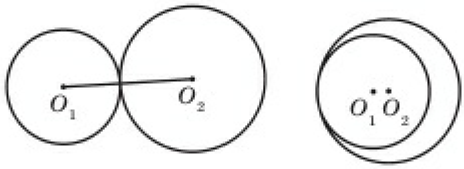
4.1. Шеңбер радиусы 2,5 см. Оның диаметрін табыңдар. Осы шеңбердің диаметрі 6 см болуы мүмкін бе?

4.2. Шеңбердің центрі арқылы өтпейтін хордасы оның диаметрінен кіші болатынын көрсетіңдер.

4.3. Шеңбер мен кесінді берілген. Шеңбердің берілген кесіндіге тең хордасын салыңдар.

4.4. Центрі O нүктесінде болатын шеңбердің ішінде жататын A нүктесі берілген: 1) OA түзуі; 2) OA сәулесі; 3) OA кесіндісі шеңберді неше нүктеде қиып өтеді?

4.5. Радиустары 30 см және 40 см болатын екі шеңбер жанасады. Осы шеңберлер сырттай және іштей жанасқан жағдайларда центрлерінің арақашықтығын табыңдар (4.12-сурет).



4.12-сурет

4.6. Егер центрлерінің арақашықтығы 60 см болса, онда радиустары 25 см және 50 см болатын шеңберлер жанасуы мүмкін бе?

4.7. Егер нүкте: 1) шеңберден тысқары; 2) шеңбер бойында; 3) шеңбердің ішінде жатса, онда осы нүктеден шеңберге неше жанама жүргізуге болады?

4.8. Шеңбер мен түзу екі нүктеде жанасуы мүмкін бе?

4.9. 1) $r_1 = 6$ см, $r_2 = 15$ см, $O_1O_2 = 21$ см; 2) $r_1 = 12$ см, $r_2 = 14$ см, $O_1O_2 = 8$ см; 3) $r_1 = 6$ см, $r_2 = 5$ см, $O_1O_2 = 18$ см болса, $\omega(O_1; r_1)$ және $\omega(O_2; r_2)$ шеңберлері қалай орналасқан?

4.10. Егер шеңбердің диаметрі 16 см-ге тең болса, ал центрден түзуге дейінгі қашықтық: 1) 17 см; 2) 8 см; 3) 9 см-ге тең болса, түзу шеңберге қатысты қалай орналасқан?

4.11. A, B және C нүктелері шеңберді $\smile AB$, $\smile BC$ және $\smile CA$ тең үш доғаға бөледі. Осы доғалардың градустық өлшемдері неге тең?

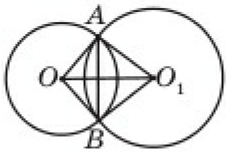
B

4.12. A нүктесінен бір шеңберге AB және AC жанамалары жүргізілген. Мұнда B және C – жанасу нүктелері, $AB = AC$ теңдігін дәлелдеңдер.

4.13. Шеңбердің бір нүктесінен диаметрге және радиусқа тең хордалар жүргізілген. Олардың арасындағы бұрышты табыңдар.

4.14. Шеңбердің бір нүктесінен радиусқа тең хордалар жүргізілген. Олардың арасындағы бұрышты табыңдар.

4.15. Радиустары 3 см және 4 см болатын шеңберлер центрлерінің арақашықтығы 5 см. Бұл шеңберлердің ортақ нүктелері бар ма?



4.13-сурет

4.16. Центрлері O және O_1 болатын шеңберлер A және B нүктелерінде қиылысқан. 1) $\Delta OAO_1 = \Delta OBO_1$; 2) ΔOAB және ΔO_1AB тең бүйірлі болатынын дәлелдеңдер (4.13-сурет).

4.17. Центрлері O және O_1 болатын шеңберлер A және B нүктелерінде қиылысқан. Егер әрбір шеңбер екіншісінің центрі арқылы өтсе, онда AOB және OAO_1 бұрыштарын табыңдар.

4.18. Тең қабырғалы үшбұрышқа сырттай және іштей сызылған шеңберлердің центрлері беттесетінін дәлелдеңдер.

4.19. Радиустары 80 см және 60 см болатын шеңберлер жанасады. Олардың іштей және сырттай жанасатын жағдайларында центрлерінің арақашықтығын табыңдар.

4.20. Радиустары тең үш шеңбердің әрқайсысы өзге екеуінің центрлері арқылы өтеді. Олардың центрлері тең қабырғалы үшбұрыштың төбелері болатынын дәлелдеңдер.

4.21. Шеңбердің тең хордалары оның центрінен бірдей қашықтықта жататынын көрсетіңдер.

4.22. Егер шеңбердің екі хордасы центрден бірдей қашықтықта жатса, онда бұл хордалар тең болатынын көрсетіңдер.

4.23. 1) Берілген түзуге параллель; 2) берілген түзуге перпендикуляр болатын шеңбер жанамасын қалай жүргізуге болады?

4.24. A нүктесінен жүргізілген ұзындығы радиусқа тең хорда A нүктесінде шеңберге жүргізілген жанамамен қандай бұрыш жасайды?

4.25. Ұзындығы радиусқа тең хорданың ұштарынан жүргізілген жанамалар қандай бұрышпен қиылысады?

4.26. Радиустары 4 см және 6 см екі шеңбердің центрлері ортақ (оларды концентрлі шеңберлер деп атайды). Осы шеңберлердің арасындағы бір-бірінен қашықтықты табыңдар.

4.27. AB доғасы шеңбер ұзындығының $\frac{1}{6}$ бөлігіне тең болса, AOB центрлік бұрышы неге тең?

4.28. Градустық өлшемі 90°-қа тең центрлік бұрыштың $\frac{1}{15}$ бөлігінің доғасының шамасы неге тең?

C

4.29. Шеңбердің центрі көрсетілмесе, оның доғасын қалай тең екіге бөлуге болады?

4.30. 1) A, B, C нүктелері бір түзудің бойында, ал O бұл түзуден тысқары жатыр. Табандары AB және BC болатын AOB және BOC үшбұрыштары тең бүйірлі болуы мүмкін бе? Жауаптарыңды түсіндіріңдер.

2) Шеңбер мен түзу 2-ден көп нүктеде қиылысуы мүмкін бе?

4.31*. 1) A нүктесінен бір шеңберге AB, AC жанамалары жүргізілген. B, C – жанасу нүктелері. $AB = AC$ теңдігін дәлелдеңдер.

2) Бір нүктеден шеңберге екіден көп жанама жүргізуге болмайтынын дәлелдеңдер.

4.32*. ABC үшбұрышына іштей сызылған шеңбер оның қабырғаларын A_1, B_1, C_1 нүктелерінде жанайды. Онда $AC_1 = \frac{1}{2}(AB+AC - BC)$ теңдігін дәлелдеңдер.

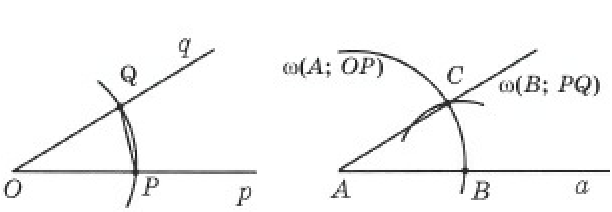
4.2. Геометрияның салу есептері

4.2.1. Қарапайым салу есептері.

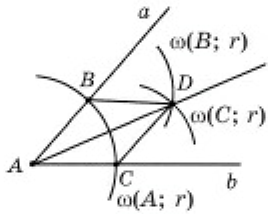
1-мысал. Берілген бұрышқа тең бұрыш салу.

Шешуі. Ең алдымен есепті қалай түсіну керек екенін айқындап алайық, яғни не берілді және нені салу қажет екеніне жауап берейік. Төбесі O нүктесінде болатын (pq) бұрышы берілген. Онда циркульді және сызғышты пайдаланып, берілген (pq) бұрышына тең BAC бұрышын салу қажет.

Ол үшін O центрінен радиусы кез келген шеңбер жүргіземіз. Бұл шеңбердің p және q түзулерімен қиылысу нүктелерін сәйкесінше P және Q арқылы белгілейік (4.14-сурет). Бастапқы нүктесі A болатын кез келген a сәулесін алып, центрі A және радиусы OP-ға тең шеңбер жүргіземіз. Бұл шеңбер a сәулесін B нүктесінде қиып өтсін. Осы шеңберді,



4.14-сурет



4.15-сурет

яғни центрі A, радиусы OP-ға тең шеңберді $\omega(A;\ PO)$ арқылы белгілейік. Сонымен, $B = a \cap \omega(A;\ OP)$. Енді келесі $\omega(B;\ PQ)$ шеңберін жүргізейік (центрі B, радиусы PQ). $\omega(A;\ PO)$ және $\omega(B;\ PQ)$ шеңберлерінің қиылысу нүктелерін C арқылы белгілейміз. Онда $\angle BAC$ – бізге қажетті бұрыш.

Шынында да, $\Delta OPQ = \Delta ABC$, өйткені салуымыз бойынша $AB = OP$, $AC = OQ$, $BC = PQ$ (III белгі бойынша). Олай болса, $\angle POQ = \angle BAC$.

2-мысал. Берілген бұрыштың биссектрисасын салу.

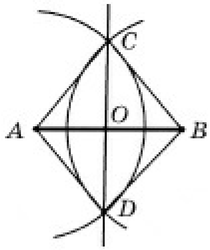
Шешуі. Төбесі A болатын (ab) бұрышы берілсін. $\omega(A;\ r)$ шеңберін жүргіземіз, r – кез келген оң сан. $B = a \cap \omega(A;\ r)$ және $C = b \cap \omega(A;\ r)$ нүктелерін аламыз. Енді $\omega(B;\ r)$ және $\omega(C;\ r)$ шеңберлерін жүргізіп, олардың қиылысу нүктесін D арқылы белгілейміз. Онда AD сәулесі (ab) бұрышының биссектрисасы болады. Бұл тұжырым $\Delta ABD = \Delta ACD$ теңдігінен шығады (4.15-сурет).

3-мысал. Кесіндіні қақ бөлу.

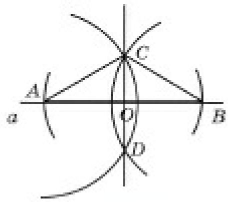
Шешуі. AB кесіндісі берілген. Кез келген r $\left(r > \dfrac{AB}{2}\right)$ радиусын алып, $\omega(A;\ r)$ және $\omega(B;\ r)$ шеңберлерін жүргіземіз (4.16-сурет). Бұл шеңберлер C және D нүктелерінде қиылысатын болсын. Онда $O = AB \cap CD$ нүктесі – AB кесіндісінің ортасы: $AO = BO$. Шынында да, ACD және BDC үшбұрыштары тең бүйірлі және өзара тең (үш қабырғасы бойынша). Осыдан $\angle ACD = \angle BCD$ теңдігі шығады, яғни CO – ACB тең бүйірлі үшбұрышының биссектрисасы. Олай болса, CO осы үшбұрыштың медианасы да болады. Онда $AO = BO$.

4-мысал. Берілген O нүктесі арқылы берілген a түзуіне перпендикуляр түзу жүргізу қажет.

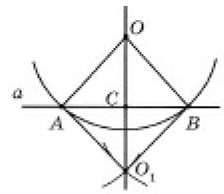
Шешуі. Екі жағдай қарастырамыз: 1) $O \in a$; 2) $O \notin a$. 1) $O \in a$ болсын. Радиусы кез келген $\omega(O;\ r)$ шеңберін жүргізіп, оның a



4.16-сурет



4.17-сурет



4.18-сурет

түзуімен қиылысуын A және B арқылы белгілейік (4.17-сурет). Радиустары r_1, $(r_1>r)$ бірдей $\omega(A; r_1)$ және $\omega(B; r_1)$ шеңберлерін жүргіземіз. Бұл шеңберлердің қиылысу нүктесін C арқылы белгілейік. Онда OC бізге қажет түзу, яғни $OC \perp a$. Шынында да, $\Delta AOC = \Delta BOC$ (үш қабырғасы бойынша), онда $\angle AOC = \angle BOC = 90^{\circ}$.

2) $O \in a$ болсын (4.18-сурет). a түзуін A және B нүктелерінде қиятын $\omega(O; r)$ шеңберін жүргіземіз. Енді $\omega(A; r)$ және $\omega(B; r)$ шеңберлері O және O_1 нүктелерінде қиылысады. Онда $OO_1 \perp a$.

Шынында да, $\Delta AOB = \Delta AO_1B$ (үш қабырғасы бойынша). Онда $\angle OAB = \angle O_1AB$ және үшбұрыштар теңдігінің I белгісі бойынша $\Delta AOC = \Delta AO_1C$. Мұнда $C = OO_1 \cap a$. Сондықтан $\angle AOC = \angle ACO_1 = 90^{\circ}$.

4.2.2. Үш элементі бойынша үшбұрыш салу.

5-мысал. Екі қабырғасы мен арасындағы бұрышы бойынша үшбұрыш салу.

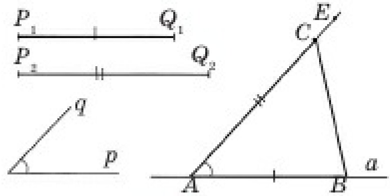
Шешуі. P_1Q_1, P_2Q_2 кесінділері мен (pq) бұрышы берілсін. Онда $AB = P_1Q_1$, $AC = P_2Q_2$, $\angle A = \angle(pq)$ болатындай ABC үшбұрышын салайық.

a түзуін салып, циркульді пайдаланып, оның бойынан $AB = P_1Q_1$ болатындай A және B нүктелерін аламыз. $\angle BAE = \angle(pq)$ бұрышын саламыз. AE сәулесінен $AC = P_2Q_2$ болатындай C нүктесін аламыз. Онда ΔABC – бізге қажетті үшбұрыш (4.19-сурет).

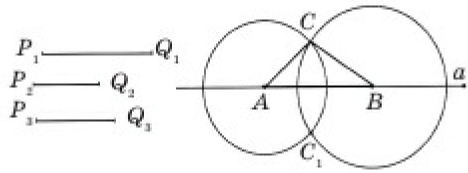
Шынында да, салуымыз бойынша $AB = P_1Q_1$, $AC = P_2Q_2$ және $\angle BAC = \angle(pq)$.

6-мысал. Үш қабырғасы бойынша үшбұрыш салу.

Шешуі. P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3 кесінділері берілген (4.20-сурет). $AB = P_1Q_1$, $AC = P_2Q_2$, $BC = P_3Q_3$ болатындай ABC үшбұрышын салу қажет.



4.19-сурет



4.20-сурет

a түзуінің бойына $AB = P_1Q_1$ кесіндісін өлшеп саламыз. $\omega(A;\ P_2Q_2)$ және $\omega(B;\ P_3Q_3)$ шеңберлерін жүргізіп, олардың қиылысу нүктесін C арқылы белгілейміз. Онда ΔABC – бізге қажет үшбұрыш салынады.

Шынында да, салуымыз бойынша $AB = P_1Q_1$, $AC = P_2Q_2$, $BC = P_3Q_3$. Есептің екі шешуі бар. ΔABC_1 де есеп шартын қанағаттандырады. Екінші жағынан, кез келген үш кесінді бойынша үшбұрыш салу әрқашан мүмкін бола бермейді. Үшбұрыш салынуы үшін берілген кесінділердің кез келгені қалған екеуінің қосындысынан кіші болуы қажет.

4.2.3. Салу есептері. Іс-әрекеттері сызба жұмыстарымен тығыз байланысты мамандық иелері геометрияның салу есептерін жиі қолданады. Олардың қатарына мынадай мамандықтарды қосуға болады: сызушылар, сәулетшілер, конструкторлар, геодезистер, штурмандар, слесарьлар, киім пішушілер, ағаш ұсталары және т.с.с.

Жоғарыда біз қарапайым салу есептері қалай орындалатынын көрсеттік. Енді одан күрделірек салу есептерін қарастырамыз. Салу есептерінде қандай да бір берілген шарттарды қанағаттандыратын фигураны салу керек. Егер салу жұмыстарына қандай құралдарды қолдану қажеттігі алдын ала көрсетілмесе, онда салу есептерін (бөліксіз) сызғыштың және циркульдің көмегімен орындау керек. Салу есептерін шешуді әдетте кезеңдерге бөліп орындайды. Алғашында **талдау** жұмыстары орындалады. Мұнда есепті шешу жолдары іздестіріледі. Екінші кезең – **салу жұмыстары** рет-ретімен орындалады. Үшінші кезең – **дәлелдеу,** мұнда екінші кезең нәтижесінде салынған фигураның шынымен есеп шартын қанағаттандыратындығы көрсетіледі. Өте күрделі салу есептерінде бұл үшеуіне төртінші – **зерттеу** кезеңі қосылады. Мұнда салу есебінің шешуі бар және жалғыз болатындығы жөніндегі сұрақтар қарастырылады.

7-мысал. A, B, C – үш нүкте берілген. A және B нүктелерінен бірдей қашықтықтарда орналасқан және C нүктесінен берілген d қашықтықта болатын X нүктесін салу қажет.

Шешуі. I. Талдау. Бізге қажет X нүктесі екі шартты қанағаттандырады: а) бұл нүкте A және B нүктелерінен бірдей қашықтықтарда орналасқан; ә) ол C нүктесінен берілген d қашықтығында орналасқан.

а) шартын қанағаттандыратын нүктелер жиыны AB кесіндісінің орта перпендикуляры болады; ә) шартын қанағаттандыратын нүктелер жиыны $\omega(C;\ d)$ шеңбері болады. Онда бізге қажет нүкте осы шеңбер мен AB-ның орта перпендикулярының қиылысу нүктесі болады.

II. Салу. 1) AB кесіндісінің орта перпендикуляры a түзуін жүргіземіз;

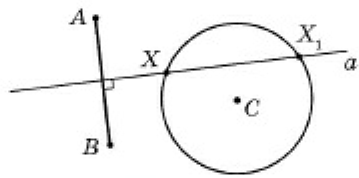
2) $\omega(C;\ d)$ шеңберін жүргіземіз;

3) a түзуі мен $\omega(C;\ d)$ шеңберінің X қиылысу нүктесін анықтаймыз (4.21-сурет).

Табылған X нүктесі бізге қажет нүкте.

III. Дәлелдеуі. Салуымыз бойынша $AX = BX$ және $CX = d$. Олай болса, табылған X нүктесі есеп шартын қанағаттандырады.

IV. Зерттеу. C нүктесінен a орта перпендикулярына дейінгі қашықтықты d_1 арқылы белгілейік.

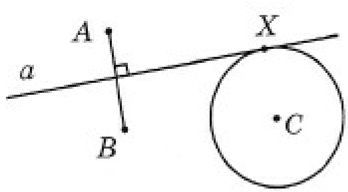


4.21-сурет

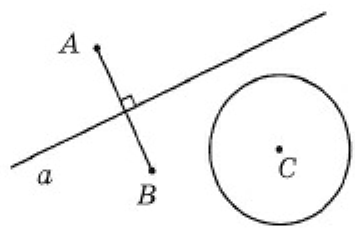
Егер $d_1 < d$ болса, онда a түзуі мен $\omega(C;\ d)$ шеңбері екі X және X_1 нүктелерінде қиылысады, яғни есептің екі шешімі бар (4.21-сурет).

Егер $d_1 = d$ болса, онда есептің жалғыз шешімі бар (4.22-сурет).

Егер $d_1 > d$ болса, онда есептің шешуі жоқ (4.23-сурет).



4.22-сурет



4.23-сурет

?

1. Берілген бұрышқа тең бұрышты қалай салады?
2. Бұрыштың биссектрисасын қалай тұрғызады?
3. Кесіндіні қалай қақ бөлуге болады?
4. Берілген нүкте арқылы өтетін және берілген түзуге перпендикуляр түзуді қалай жүргізеді?
5. Үшбұрышты үш элементі:
а) екі қабырғасы мен арасындағы бұрышы бойынша;
ә) үш қабырғасы бойынша;
б) бір қабырғасы мен оған іргелес екі бұрышы бойынша қалай салады?
6) Салу есебі дегеніміз не? Талдау, салу, дәлелдеу және зерттеу кезеңдерінің мәні қандай?

ПТ

1. Қабырғасы 5 см болатын тең қабырғалы үшбұрыш салыңдар.
2. Бүйір қабырғасы 6 см және төбесіндегі бұрышы: 1) 60°; 2) 90°; 3) 120° болатын тең бүйірлі үшбұрыш салыңдар.

Есептер

А

4.33. A және B нүктелері берілген. A мен B-дан бірдей қашықтықтарда орналасқан нүктелер жиыны қандай фигура болады?

4.34. Берілген нүктеден берілген қашықтықта орналасқан нүктелер жиыны қандай фигура болады?

4.35. Берілген нүкте арқылы өтетін өзара тең шеңберлер центрлері қандай фигура құрайды?

4.36. Берілген екі нүкте арқылы өтетін шеңберлер центрлері болатын нүктелер жиынын анықтаңдар.

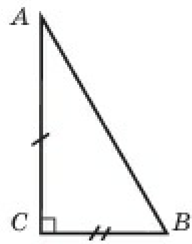
4.37. Берілген түзуден берілген қашықтықта орналасқан нүктелер жиынын анықтаңдар.

4.38. Берілген өзара параллель екі түзуден бірдей қашықтықтарда орналасқан нүктелер жиынын табыңдар.

4.39. PQ кесіндісі мен (hk) бұрышы берілген. 1) $AB = PQ$, $\angle ABC = \angle(hk)$, $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle(hk)$; 2) $AB = PQ$, $\angle ABC = \angle(hk)$, $\angle BAC = \frac{1}{4}\angle(hk)$ болатындай етіп, ABC үшбұрышын салыңдар.

4.40. (hk) және (h_1k_1) бұрыштары мен PQ кесіндісі берілген. $AB = PQ$, $\angle A = \angle(hk)$, $\angle B = \frac{1}{2}\angle(h_1k_1)$ болатындай етіп, ABC үшбұрышын салыңдар.

4.41. 1) Екі катеті; 2) катеті мен іргелес сүйір бұрышы бойынша тік бұрышты үшбұрыш салыңдар (4.24-сурет).



4.24-сурет

4.42. 1) Бүйір қабырғасы мен табанына қарсы жатқан бұрышы; 2) табаны мен табанындағы бұрышы; 3) бүйір қабырғасы мен табанындағы бұрышы; 4) табаны мен бүйір қабырғасы; 5) табаны мен табанына жүргізілген медианасы бойынша тең бүйірлі үшбұрыш салыңдар.

4.43. Ұзындықтары a, b және c-ға тең кесінділер берілген. $AB = a$, $BC = b$, $AC = 2c$ болатындай етіп, ABC үшбұрышын салыңдар.

4.44. Ұзындықтары a-ға, b-ға және c-ға тең кесінділер берілген. $AB = 2a$, $BC = b$, $AC = c$ болатындай етіп, ABC үшбұрышын салыңдар.

4.45. Табаны мен табанына түсірілген биіктігі бойынша тең бүйірлі үшбұрыш салыңдар.

4.46. 1) Гипотенузасы мен сүйір бұрышы; 2) гипотенузасы мен катеті; 3) катеті мен оған қарсы жатқан сүйір бұрышы бойынша тік бұрышты үшбұрыш салыңдар.

4.47. Екі қабырғасы мен олардың біреуіне жүргізілген медианасы бойынша үшбұрыш салыңдар.

4.48. Катеті және гипотенузасы мен екінші катетінің қосындысы бойынша үшбұрыш салыңдар.

4.49. Екі қабырғасы мен олардың біреуіне түсірілген биіктігі бойынша үшбұрыш салыңдар.

4.50. Берілген түзуден берілген қашықтықта және берілген екінші түзу бойында жататын нүктені анықтаңдар.

4.51. Екі қабырғасы мен үшінші қабырғасына түсірілген биіктігі бойынша үшбұрыш салыңдар.

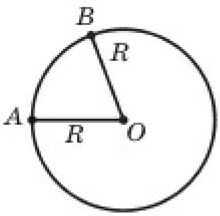
4.52. Берілген екі нүктеден бірдей қашықтықта және берілген түзуде жататын нүктенің орнын табыңдар.

4.53. Берілген бұрыш қабырғаларын жанайтын және оның бір қабырғасын берілген нүктеде жанайтын шеңбер салыңдар.

4.54. Берілген нүктеде берілген шеңберді жанайтын жанама жүргізіңдер.

B

4.55. Центрі берілген түзуде жататын, берілген нүкте арқылы өтетін, берілген радиусы бойынша шеңбер салыңдар.



4.25-сурет

4.56. Берілген екі нүкте арқылы өтетін, радиусы берілген шеңбер салыңдар (4.25-сурет).

4.57. A, B нүктелері, a түзуі және PQ кесіндісі берілген. $C \in a$, $AC = PQ$ болатындай етіп, ABC үшбұрышын салыңдар.

4.58. Шеңбер, A, B нүктелері және PQ кесіндісі берілген. C төбесі берілген шеңберде жататындай және $AC = PQ$ болатындай етіп, ABC үшбұрышын салыңдар.

4.59. ABC үшбұрышының BC қабырғасынан A және C төбелерінен бірдей қашықтықта орналасқан нүктені анықтаңдар.

4.60. Циркульді және сызғышты пайдаланып, берілген кесіндіні тең төрт бөлікке бөліңдер.

4.61. Берілген түзу бойынан берілген екі нүктеден бірдей қашықтықта орналасқан нүктені анықтаңдар.

4.62. A, B, C, D нүктелері берілген. A және B нүктелерінен бірдей қашықтықта және C мен D нүктелерінен де бірдей қашықтықта орналасқан X нүктесін табыңдар.

4.63. Қабырғасы, оған іргелес бұрышы және өзге екі қабырғаларының айырмасы бойынша үшбұрыш салыңдар.

4.64. Қабырғасы, оған іргелес бұрышы және өзге екі қабырғаларының қосындысы бойынша үшбұрыш салыңдар.

4.65. Катеті және гипотенузасына түсірілген биіктігі бойынша тік бұрышты үшбұрыш салыңдар.

4.66. *A* – берілген бұрыштың ішкі нүктесі. *A* нүктесі арқылы өтетін және берілген бұрыш қабырғаларынан тең кесінділер қиып өтетін түзу жүргізіңдер.

4.67. *AB* кесіндісі мен *a* түзуі берілген. *a* түзуіне параллель және *a* түзуінен *AB* қашықтығында өтетін *m* түзуін жүргізіңдер.

4.68. Берілген үш нүкте арқылы өтетін шеңбер салыңдар. Есептің шешуі үнемі табыла бере ме?

4.69. Циркульді және сызғышты пайдаланып: 1) 30°; 2) 60°; 3) 15°; 4) 135°; 5) 75°-қа тең бұрыш салыңдар.

C

4.70. Қабырғасы, оған қарсы жатқан бұрышы және осы бұрыш төбесінен түсірілген биіктігі бойынша үшбұрыш салыңдар.

4.71. *ABC* тең қабырғалы үшбұрышы мен оның *AC* қабырғасынан B_1 нүктесі берілген. *BC* және *AB* қабырғаларынан $A_1B_1C_1$ тең қабырғалы үшбұрыш болатындай етіп, сәйкес A_1 және C_1 нүктелерін табыңдар.

4.72*. Қабырғасы, осы қабырғасына жүргізілген медианасы мен биіктігі бойынша үшбұрыш салыңдар.

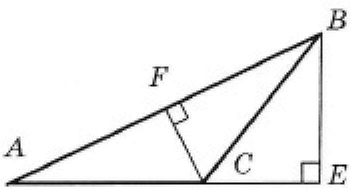
4.73. Бұрышы мен осы бұрыш төбесінен жүргізілген биіктігі және биссектрисасы бойынша үшбұрыш салыңдар.

4.74*. *A* бұрышы тік болатын *ABC* үшбұрышы берілген. *BC* түзуінен *AK* қашықтығында жататындай *AB* қабырғасынан *K* нүктесін табыңдар.

V ТАРАУ. 7-СЫНЫПТА ӨТІЛГЕНДЕРДІ ҚАЙТАЛАУҒА АРНАЛҒАН ЖАТТЫҒУЛАР

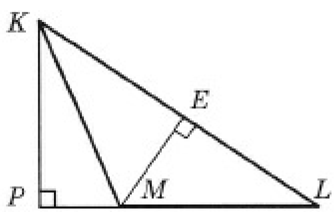
5.1. $AB = 8$ см, K нүктесі AB кесіндісінің ортасы болатынын ескере отырып, AB түзуінен $AX + BX + KX = 9$ см болатындай етіп, барлық X нүктелерін табыңдар. Бұл нүктелерді суреттен көрсетіңдер.

5.2. $AB = 8$ см, K нүктесі AB кесіндісінің ортасы екенін біле отырып, AB түзуінен $AX + BX + KX$ қосындысы 15 см болатындай барлық X нүктелерін табыңдар. Бұл нүктелерді суреттен көрсетіңдер.



5.1-сурет

5.3. 5.1-суретте BE және CF кесінділері – ABC үшбұрышының биіктіктері. Тек сызғышты ғана пайдаланып, үшбұрыштың AX биіктігін салыңдар. $AX = BE$, $CX = CF$ және AC=17 дм болса, BC кесіндісінің ұзындығын табыңдар.



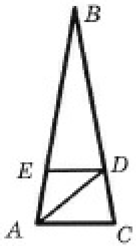
5.2-сурет

5.4. 5.2-суретте KP және ME – KML үшбұрышының биіктіктері. Тек сызғышты ғана пайдаланып, үшбұрыштың LX биіктігін салыңдар. Егер үшбұрыштың $KP = LX$, $MP = MX$ және $\angle PKM = 27^\circ$ болса, онда XLM бұрышын табыңдар.

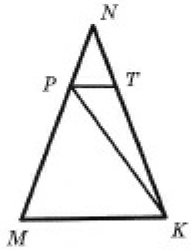
5.5. 1) Төбесі A нүктесінде болатын бұрыштың бір қабырғасынан D және B нүктелері, ал екінші қабырғасынан C және E нүктелері $AD = AC = 3$ см, $AB = AE = 4$ см болатындай етіп алынған. а) $BC = DE$; ә) $KB = KE$ теңдіктерін дәлелдеңдер, мұнда $K = BC \cap ED$.

2) ΔABC және $\Delta A_1B_1C_1$ – табандары сәйкес AC және A_1C_1 болатын тең бүйірлі үшбұрыштар, N және N_1 – сәйкес BC және B_1C_1 қабырғаларының орталары, $AB = A_1B_1$, $AN = A_1N_1$. $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ теңдігін дәлелдеңдер.

5.6. ΔABC және $\Delta A_1B_1C_1$ – табандары AC және A_1C_1 болатын тең бүйірлі үшбұрыштар. K және K_1 нүктелері – BC және B_1C_1 қабырғаларының орталары, $AC = A_1C_1$, $AB = A_1B_1$. $\Delta ABK = \Delta A_1B_1K_1$ теңдігін дәлелдеңдер.



5.3-сурет



5.4-сурет

5.7. 5.3-суретте $AB = BC$, $ED = AE$, $\angle C = 80^\circ$, $\angle DAC = 40^\circ$. ED және AC түзулері параллель болатынын дәлелдеңдер. $\angle BED$-ны табыңдар.

5.8. 5.4-суретте $PN=NT$, PK – MPT бұрышының биссектрисасы. $\angle NPT = 70^\circ$, $\angle PKM = 55^\circ$. PT және MK түзулерінің параллель болатынын дәлелдеңдер. $\angle PKT$-ны табыңдар.

5.9*. A және B елді мекендері түзу тас жолдың бір жақ бөлігінде орналасқан. $AC + BC$ қосындысы ең кіші мәнге ие болатындай етіп, тас жол бойының қай нүктесінен C аялдамасын жасау қажет?

5.10*. Егер X нүктесі ABC үшбұрышының ішінде жатса, онда $XB + XC < AB + BC$ теңсіздігі орындалатынын дәлелдеңдер.

5.11. Тең бүйірлі үшбұрыштың бір бұрышы 120°, ал табаны 10 см. Бүйір қабырғасына түсірілген биіктігін табыңдар.

5.12. Тең бүйірлі үшбұрыштың сыртқы бұрыштарының бірі 60°, ал бүйір қабырғасына түсірілген биіктігі 17 см. Үшбұрыштың табанын анықтаңдар.

5.13. Егер үшбұрыштың бір төбесінен жүргізілген медианасы осы төбеге қарсы жатқан қабырғаның жартысынан үлкен, тең немесе кіші болса, онда бұл төбедегі бұрыш сәйкесінше сүйір, тік немесе доғал болатынын дәлелдеңдер.

5.14. Табаны BC болатын ABC тең бүйірлі үшбұрышының ішінен N нүктесі $\angle NBC = 30^\circ$, $\angle NCB = 10^\circ$, болатындай етіп алынған. Егер $\angle BAC = 80^\circ$ болса, онда ANC бұрышын табыңдар.

5.15. Ұштары үшбұрыш қабырғаларында орналасқан кез келген кесінді осы үшбұрыштың ең үлкен қабырғасынан кіші болатынын дәлелдеңдер.

5.16. Егер BB_1 кесіндісі ABC үшбұрышының биссектрисасы болса, онда $BA > B_1A$ және $BC > B_1C$ теңсіздіктерін дәлелдеңдер.

5.17. A және B нүктелері a түзуінің екі жағында орналасқан. a түзуіне түсірілген AP және BN перпендикулярлары өзара тең. AB және PN кесінділері K нүктесінде қиылысады. K нүктесі осы кесінділердің әрқайсысын тең бөліктерге бөлетінін дәлелдеңдер.

5.18. A және B нүктелері a түзуінің бір жағында орналасқан. a түзуіне түсірілген AN және BK перпендикулярлары өзара тең. AK мен BN кесінділері O нүктесінде қиылысады. O нүктесі A, N, K, B нүктелерінен бірдей қашықтықта орналасқанын дәлелдеңдер.

5.19. Қабырғалары әртүрлі үшбұрышта биссектрисаның табаны осы төбеден жүргізілген медиана мен биіктік табандары арасында жататынын дәлелдеңдер.

5.20. Катеттері өзара тең емес тік бұрышты үшбұрыштың тік бұрышының биссектрисасы осы төбеден жүргізілген медиана мен биіктіктің арасындағы бұрыштың да биссектрисасы болатынын дәлелдеңдер.

5.21. Үшбұрыштың бір бұрышының төбесінен жүргізілген медиана мен биіктік осы бұрышты тең үш бөлікке бөледі, осы үшбұрыштың тік бұрышты екенін дәлелдеңдер.

5.22. ABC үшбұрышының AA_1 биіктігі BC қабырғасынан кіші емес, ал BB_1 биіктігі AC қабырғасынан кіші емес. ABC үшбұрышының тік бұрышты тең бүйірлі үшбұрыш екенін дәлелдеңдер.

5.23*. Берілген қабырғасы, оған іргелес бұрышы және өзге екі қабырғаларының қосындысы бойынша үшбұрыш салыңдар.

5.24*. Қабырғасы, оған түсірілген биіктігі және екі қабырғасының біріне түсірілген медианасы бойынша үшбұрыш салыңдар.

5.25*. Екі қабырғасы мен үшінші қабырғасына түсірілген медианасы бойынша үшбұрыш салыңдар.

5.26. BC қабырғасы, BN медианасы және BH биіктігі бойынша ABC үшбұрышын салыңдар.

5.27. AC және BC қабырғалары BN медианасы бойынша ABC үшбұрышын салыңдар.

5.28. B сүйір бұрышы мен BD биссектрисасы бойынша ABC тік бұрышты үшбұрышын салыңдар.

5.29. Берілген шеңбер бойынан берілген екі қиылысушы түзулерден бірдей қашықтықта жататын нүктені табыңдар. Есептің неше шешуі болуы мүмкін?

5.30. Бір нүктеден өтпейтін және қос-қостан қиылысатын үш түзу берілген. Осы түзулерден бірдей қашықтықта орналасатын нүктені салыңдар. Есептің неше шешуі бар?

5.31. Центрі O болатын шеңбер және одан тысқары A нүктесі берілген. A нүктесі арқылы шеңберді B және C нүктелерінде қиятын және $AB = BC$ теңдігі орындалатындай түзу жүргізіңдер.

5.32. Периметрі, бір бұрышы және басқа бір бұрышының төбесінен жүргізілген биіктігі бойынша үшбұрыш салыңдар.

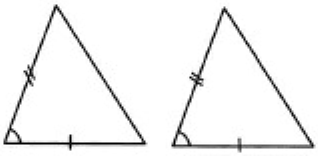
5.33. Периметрі мен екі бұрышы бойынша үшбұрыш салыңдар.

5.34*. Қабырғасы, осы қабырғаға іргелес екі бұрышының айырмасы және өзге екі қабырғасының қосындысы бойынша үшбұрыш салыңдар.

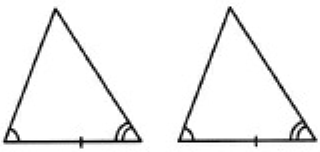
5.35*. Берілген екі шеңберге ортақ жанама жүргізіңдер.

ҚОСЫМШАЛАР

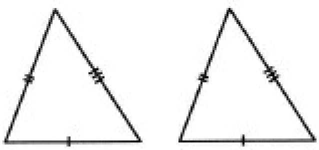
ҮШБҰРЫШТАР ТЕҢДІГІНІҢ БЕЛГІЛЕРІ



I. Екі қабырғасы және олардың арасындағы бұрышы бойынша.

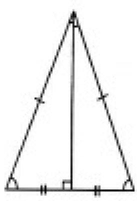


II. Бір қабырғасы және оған іргелес бұрыштары бойынша.

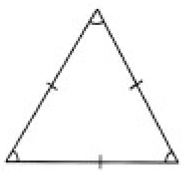


III. Үш қабырғасы бойынша.

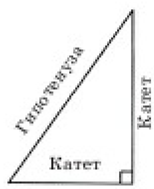
ҮШБҰРЫШТАРДЫҢ ТҮРЛЕРІ



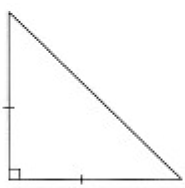
Тең бүйірлі



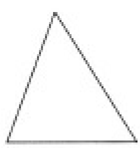
Тең қабырғалы



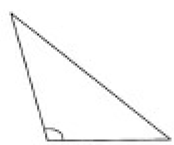
Тік бұрышты



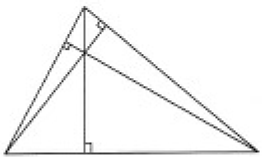
Тең бүйірлі
тік бұрышты



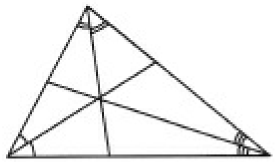
Сүйір бұрышты



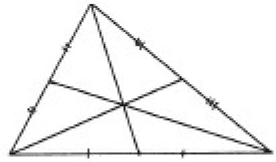
Доғал бұрышты



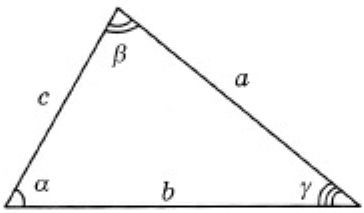
Үшбұрыштың биіктіктері



Үшбұрыштың биссектрисалары



Үшбұрыштың медианалары

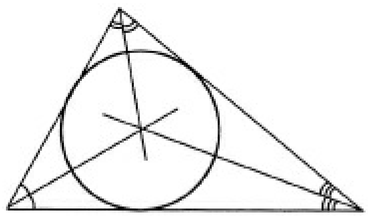


Үшбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы:

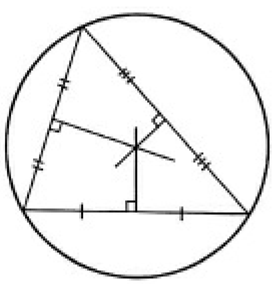
$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Үшбұрыштар теңсіздігі:

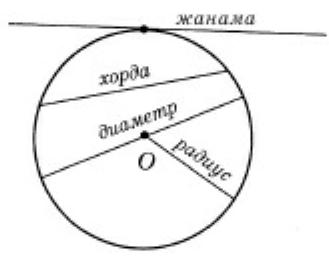
$$a + b > c,$$
$$a + c > b,$$
$$b + c > a.$$



Үшбұрышқа іштей сызылған шеңбер

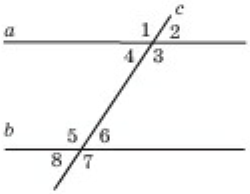


Үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбер



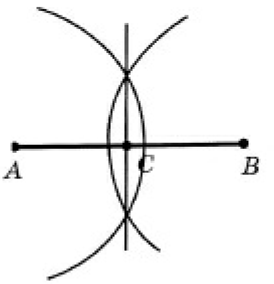
Шеңбер және оның элементтері

O – шеңбердің центрі

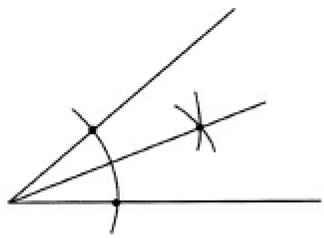


Түзулердің параллельдік белгілері:
I. $a \parallel b$, егер $\angle 4=\angle 6$ ($\angle 3=\angle 5$).
II. $a \parallel b$, егер $\angle 3+\angle 6=180^\circ$ ($\angle 4+\angle 5=180^\circ$).
III. $a \parallel b$, егер $\angle 1=\angle 5$ ($\angle 2=\angle 6$ немесе $\angle 4=\angle 8$, немесе $\angle 3=\angle 7$).

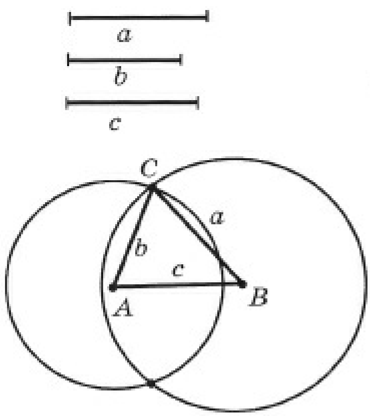
ҚАРАПАЙЫМ САЛУ ЕСЕПТЕРІ



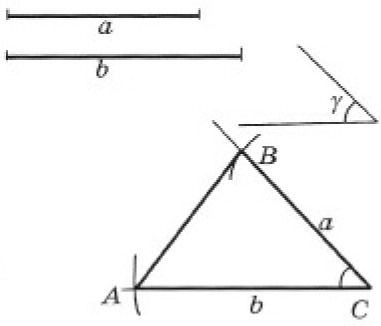
Кесіндіні
қақ бөлу



Бұрыштың
биссектрисасын салу



Үш қабырғасы бойынша
үшбұрыш салу



Екі қабырғасы және
олардың арасындағы
бұрышы бойынша
үшбұрыш салу

ЖАУАПТАРЫ

I. Планиметрияның алғашқы түсініктері мен аксиомалары

1.1. 1) 6 см; 2) 7,7 дм; 3) 18,1 м. **1.4.** Жатпайды. **1.5.** 5,9 см. **1.6.** 0,6 дм. **1.8.** 6 түзу. **1.9.** 6 нүкте. **1.10.** Мүмкін емес. **1.11.** Мүмкін емес. **1.12.** 1) AC=1 см, BC=1 см, AO=0,5 см, OB=1,5 см; 2) AB=6,4 м, AC=3,2 м, AO=1,6 м, OB=4,8 м. **1.13.** 1) 12 см немесе 2 см; 2) 37,9 дм. **1.14.** 1) 20 см немесе 4 см; 2) 0,84 м. **1.15.** 1) Болмайды; 2) 4,3 дм. **1.16.** 1) Болмайды; 2) 5 дм. **2.19.** 1) 10,5 см; 2) 1,5 см. **1.20.** $\frac{a}{2}$. **1.21.** 4 см. **1.22.** 2) AC және BD. **1.23.** 29 см. **1.28.** $21^\circ5'$; $820'$. **1.29.** $375'$; $120'$; $690'$. **1.35.** 15°; $2,5^\circ$. **1.36.** 20°. **1.37.** 4 есе. **1.41.** 1) 121°; 2) $121^\circ2'$. **1.42.** 48°. **1.43.** 85°. **1.44.** 81°. **1.45.** 60°. **1.47.** 11 см. **1.49.** $A = 40^\circ$; $B = 60^\circ$; $C = 80^\circ$. **1.53.** Тек біреу ғана. **1.56.** Мүмкін емес. **1.57.** 1) $70^\circ18'$, 17 дм; 2) жоқ. **1.58.** 1) 16 дм; $121^\circ15'$; 2) жоқ. **1.61.** 1) 5 м, 15°; 2) жоқ. **1.62.** 1) 8 м, 60°; 2) жоқ. **1.67.** 150°, 135°, 120°, 90°. **1.68.** 1) Жоқ; 2) жоқ; 3) иә. **1.69.** 60°, 120°. **1.70.** 1) 105°, 75°; 2) 110°, 70°; 3) 45°, 135°; 4) 90°, 90°. **1.71.** 1) 69; 2) 90°; 3) 165°. **1.72.** 180°. **1.73.** $\angle AOC=120^\circ$, $\angle BOD=130^\circ$, $\angle COE=110^\circ$, $\angle COD=60^\circ$. **1.75.** 160°. **1.76.** Жоқ. **1.77.** 90°-тан. **1.79.** 1) 72° және 108°; 2) 54° және 126°; 3) 55° және 125°; 4) 88° және 92°. **1.80.** 130°. **1.81.** 25° және 55°. **1.82.** 144° және 36°. **1.83.** 65° және 115°. **1.84.** 90°. **1.85.** 1) 155°; 2) 135°; 3) 105°. **1.88.** 30° немесе 90°. **1.91.** 1) Өтпейді; 2) мүмкін емес.

II. Үшбұрыштар теңдігінің белгілері және олардың салдарлары

2.1. 2) 42°, 47°. **2.2.** 2) BD = 5 см, AB = 15 см. **2.3.** 2) AB = = 14 см, BC= 17 см. **2.6.** 43°. **2.7.** 59°. **2.8.** 2) 110°. **2.12.** 8 см. **2.20.** 17 см. **2.21.** 2 см. **2.22.** 50°. **2.23.** 120°. **2.24.** 75°. **2.25.** 3,5 м. **2.26.** 1) 3,2 м, 6,2 м, 6,2 м; 2) 7,2 м, 4,2 м, 4,2 м. **2.29.** 45°. **2.30.** 2) 134°. **2.31.** 2) 96°. **2.32.** 10 см, 20 см және 20 см. **2.33.** AB= =12,5 см және BC=15 см. **2.40.** 1) 50°; 2) 14 см. **2.42.** 8 см.

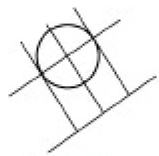
III. Түзулердің өзара орналасуы

3.1. 1) Жоқ; 2) иә. **3.2.** 1) Жоқ; 2) иә. **3.3.** 115° және 65°. **3.8.** 105°, 105°. **3.9.** $a \parallel c$. **3.10.** 2) Төрт бұрышы 55°-тан, төрт бұрышы 125°-тан. **3.11.** 45°, 45°, 90°. **3.12.** 16 см. **3.13.** 60°. **3.14.** 10°, 140°. **3.15.** 1) 100°; 2) 65°. **3.16.** 1) 90°; 2) 120°; 3) 100°; 4) 153°. **3.17.** 1) 40°, 40°, 100° немесе 40°, 70°, 70°; 2) 60°, 60°, 60°;

3) 100°, 40°, 40°. **3.20.** 59°. **3.21.** 90°. **3.23.** 30°, 60° және 90°. **3.24.** 105°. **3.25.** 103°. **3.26.** 1) 9 см, 2) 9 см. **3.27.** 1) 9,5 см, 2) 9,5 см. **3.29.** 57°30′, 57°30′, 65° немесе 65°, 65°, 50°. **3.30.** 73°20′, 73°20′ және 33°20′. **3.31.** 40°, 50°, 90°. **3.33.** 40°, 50°, 90°. **3.34.** Нұсқау. AD медианасы ABC үшбұрышын екі тең бүйірлі үшбұрыштарға бөлетінін қолданыңдар. **3.35.** Қарсы жору тәсілін қолданыңдар. **3.37.** Үшбұрыштың екі қабырғасының орталарын қосатын түзу үшінші қабырғасына параллель. **3.41.** ADK тең бүйірлі үшбұрыш болатынын көрсетіңдер. **3.42.** Мүмкін емес. **3.44.** 1) $\angle A > \angle B$ **3.45.** 1) Табылмайды; 2), 3) табылады. **3.46.** 1) $BC > AC > AB$; 2) $AB > AC = BC$. **3.47.** $\angle B > \angle A > \angle C$ **3.48.** 1) Тең бүйірлі. **3.49.** Мүмкін емес. **3.50.** 1) Мүмкін; 2) мүмкін емес. **3.51.** Сүйір бұрышты. **3.52.** 1) 5 см; 2) 21 см; 3) 6 дм. **3.53.** 10 см. **3.56.** AB=5 см. **3.58.** $\Delta ACE = \Delta CAD$ теңдігін қолданыңдар. **3.60.** 20 см, 20 см. **3.62.** 10 см, 10 см, 16 см. 3.64. 29 см, 29 см.

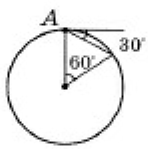
IV. Шеңбер және салу есептері

4.1. 5 см; жоқ. **4.5.** 70 см, 10 см. **4.6.** Мүмкін емес. **4.8.** Мүмкін емес. **4.13.** 60. **4.15.** Бар. **4.17.** 120, 60. **4.19.** 140 см, 20 см. **4.21, 4.22.** Тең бүйірлі үшбұрыштар теңдіктерінен шығады. **4.23.** 1) Шеңбер центрінен берілген түзуге перпендикуляр жүргізу қажет. 2) Шеңбер центрінен өзара перпендикуляр екі диаметр жүргізу қажет, олардың бірі берілген түзуге перпендикуляр (1-сурет).



1-сурет

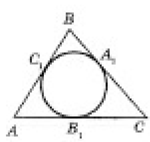
4.24. (2-сурет).



2-сурет

4.25. 180° − 60° = 120°. **4.30.** 1) Қарсы жорып дәлелдеу қажет; 2) мүмкін емес (шеңбердің үш нүктесі бір түзу бойында жатпайды). **4.31*.** 1) Тік бұрышты үшбұрыштар теңдігін қолдану керек. 2) Радиус жанамаға перпендикуляр болатынын ескеру керек.

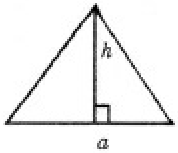
4.32*. $AB+AC-BC=(AC_1+BC_1)+(AB_1+CB_1)-$ $-(BA_1+CA_1)=AC_1+BC_1+AC_1-BC_1-CA_1=$ $=2AC_1AC_1=(AB+AC-BC)$ (3-сурет).



3-сурет

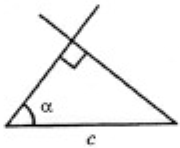
4.33. AB кесіндісінің орта перпендикуляры. **4.34.** Шеңбер. **4.35.** Осындай шеңбер. **4.36.** Оған параллель түзу. **4.37.** Орта перпендикуляр. **4.38.** Оларға параллель түзу. **4.42.** 1) a қабырғасы мен оған іргелес α және $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ бұрыштары бойынша үшбұрыш салу керек; 3) $\beta = 180^\circ - 2\alpha$ a, α бойынша; 4) Үш қабырғасы бойынша; 5) a, h берілген, катеттері: $\frac{0}{2}$, h болатын үшбұрыш салу.

4.45. 4-сурет.

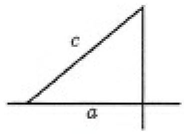


4-сурет

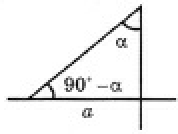
4.46. 1) 5-сурет; 2) 6-сурет; 3) 7-сурет.



5-сурет

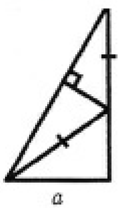


6-сурет



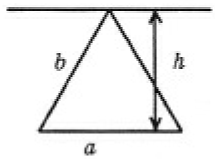
7-сурет

4.48. 8-сурет



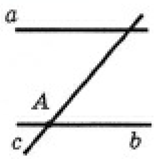
8-сурет

4.49. 9-сурет



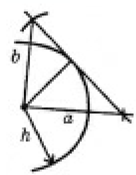
9-сурет

4.50. 10-сурет



10-сурет

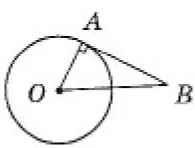
4.51. 11-сурет



11-сурет

4.52. Екі нүктені қосатын кесіндінің орта перпендикуляры мен берілген түзудің қиылысу нүктесі. **4.53.** Биссектриса мен берілген нүктеде қабырғаға перпендикуляр түзудің қиылысу нүктесі центр болады.

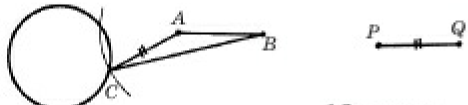
4.54. OAB тік бұрышты үшбұрышын салу керек (12-сурет).



12-сурет

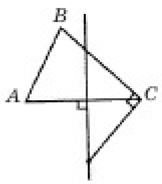
4.55. Берілген нүктені центр етіп, берілген радиуспен шеңбер салса, жеткілікті.

4.58. 13-сурет.



13-сурет

4.59. 14-сурет.



14-сурет

4.61. 15-сурет.

15-сурет

4.62. Екі орта перпендикулярдың қиылысу нүктесі. **4.63.** ABC бізге қажет үшбұрыш: $B=\beta$, $BC=a$. Егер $AB>AC$ болса, онда AB қабырғасынан $AD=AC$ болатындай D нүктесін аламыз: $BD=AB-AC$. Онда ΔACD тең бүйірлі болатынын қолданыңдар. **4.70.** Нұсқау. Алдымен бұрыш биссектрисасын жүргізіңдер. **4.71.** Нұсқау. BC және AB қабырғаларынан $BA_1=AC_1=CB_1$ болатындай A_1 және C_1 нүктелерін алыңдар. **4.72*.** Нұсқау. Алдымен гипотенузасы берілген медианаға тең, ал катеті берілген биіктікке тең тік бұрышты үшбұрыш салыңдар. **4.73.** Нұсқау. Алдымен гипотенузасы берілген биссектрисаға тең және катеті берілген биіктікке тең тік бұрышты үшбұрыш салыңдар. **4.74*.** Нұсқау. Алдымен C бұрышының биссектрисасын салыңдар.

V. 7-сыныпта өтілгендерді қайталауға арналған есептер

5.1. X нүктесі AB кесіндісінен тысқары жата алмайды. X нүктесі K және B нүктелерінің арасында жатсын, $AX = y$ деп алайық. Онда есеп шарты бойынша $y + 8 - y + y - 4=9$, яғни $y = 5$. Онда $XK=1$ см және XK-ның сол жағында жатыр. Осы сияқты X-ті A мен K-ның арасында жатыр деп есептеп, екінші нүктені табамыз. **5.2.** AB түзуінде және AB кесіндісінен тысқары оның ұштарынан 1 см қашықтықта орналасады. **5.3.** $H = BE\cap CF$. Онда AH түзуінде үшінші биіктігі жатады. Сондықтан $X = AH\cap BC$. $\Delta AXC = \Delta BEC$. Осыдан $BC = 17$ дм. **5.4.** $\angle PKM = \angle XLM = 27^\circ$. **5.6.** $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ (III белгі) $\Rightarrow BK = B_1K_1$, $\angle B = \angle B_1$, $AB = A_1B_1 \Rightarrow$ I белгі белгі бойынша $\Delta ABK = \Delta A_1B_1K_1$. **5.7.** Есеп шарты бойынша $AB = BC \Rightarrow \Delta ABC$ тең бүйірлі және $\angle A = \angle C = 80^\circ$. Онда $\angle EAD = 80^\circ - 40^\circ = 40^\circ$. $AE = ED \Rightarrow \Delta AED$ тең бүйірлі және $\angle EAD = \angle EDA = 40^\circ$. $ED \parallel AC$, себебі $\angle EDA = \angle DAC$ – айқыш бұрыштар, $\angle BED = \angle BAC = 80^\circ$ – сәйкес бұрыштар. **5.8.** 5.7-есеп сияқты. **5.9*.** a түзуі – жол болса, онда $A_1 \perp a$ болсын. $AA_1 \cap a = K$, $AK = A_1K$ деп алсақ, онда C аялдамасын $A_1B \cap a$ нүктесінде салу керек. **5.10*.** Нұсқау. Егер $N = BX \cap AC$ болса, онда ABN және XNC үшбұрыштарына үшбұрыштар теңсіздігін қолдану қажет. **5.11.** 5 см. **5.12.** 34 см. **5.13.** Нұсқау. Үшбұрыш бұрыштары мен қабырғаларының арасындағы қатынас пен үшбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысын қолданыңдар. **5.14.** 70°. Нұсқау. O – A төбесінен жүргізілген биссектриса мен BN түзуінің қиылысу нүктесі. Алдымен $\Delta AOC = \Delta NOC$ теңдігін дәлелдеңдер. **5.15.** Нұсқау. Кесіндінің бір ұшын үшбұрыш төбесімен қосыңдар. **5.16.** Нұсқау. Үшбұрыштың қабырғалары мен бұрыштарының арасындағы қатынасты қолданыңдар. **5.17.** $\angle AKP = \angle BKN$, ΔAPK және ΔBNK – тік бұрышты үшбұрыштар және $\angle AKP = \angle BKN \Rightarrow \angle PAK = \angle NBK \Rightarrow \Delta APK = \Delta BNK \Rightarrow PK = NK$ және $AK = KB$. **5.18** $\Delta ANK = \Delta BKN$ (екі катеті бойынша) $\Rightarrow \angle BKN = \angle AKN$ және $\angle NAK = \angle KBN$. Тік бұрышты үшбұрыштың сүйір бұрыштарының қосындысы 90° болғандықтан және $\angle BNK + \angle ANB = 90^\circ \Rightarrow \angle BNA = \angle AKB$. Осы сияқты $\angle BNA = \angle NAK = \angle KBN = \angle AKB \Rightarrow \Delta NOK$, ΔAON, ΔBOK – тең бүйірлі үшбұрыштар және $ON = OK = OA = OB$. **5.21.** Нұсқау. ABC үшбұрышының AN медианасы мен AH биіктігі A бұрышын тең BAH, HAN, NAC бұрыштарына бөлсін. AC қабырғасына ND перпендикулярын жүргізіп, $ND = NH$ теңдігін дәлелдеу керек. **5.22.** Нұсқау. Тік бұрышты үшбұрыштың гипотенузасы катеттен үлкен екенін ескеріңдер. **5.27.** Нұсқау. ΔABC – бізге қажет үшбұрыш, ал BN – оның берілген медианасы болсын. BN-ді созып (N нүктесінен ары қарай), $ND = BN$ болатындай D нүктесін аламыз. Онда $\Delta CNB = \Delta DNA \Rightarrow AD = BC$. Осыдан салу жоспары шығады. **5.29.** 4, 3, 2, 1 немесе біреуі де жоқ. **5.30.** 4. **5.31.** Нұсқау. $AD = R$, $OD = 2R$ болатындай OAD үшбұрышын салу керек. Мұнда R – берілген шеңбердің радиусы. **5.32.** Нұсқау. Бізге қажет ABC үшбұрышының A бұрышы мен BH биіктігі және оның периметріне тең PQ кесіндісі берілсін. Алдымен ABH үшбұрышын салып, сонан соң $AD+AB=PQ$ болатындай $D \in AH$ нүктесін аламыз. **5.33.** Нұсқау. Алдымен қабырғасы берілген периметрге тең, ал іргелес бұрыштары берілген бұрыштардың жартысына тең үшбұрыш салыңдар. **5.34*.** Нұсқау. BC, $AC+AB$, $\angle B - \angle C$ бізге қажет ΔABC-нің берілген элементтері болсын. CA қабырғасының A-дан тысқары созындысынан $AA_1 = AB$ болатындай A_1 нүктесін алып, ΔCBA_1-ді салыңдар. **5.35*.** Нұсқау. Берілген шеңберлердің бірімен концентрлі, радиусы берілген шеңберлер радиустарының қосындысына не айырмасына тең көмекші шеңбер салыңдар.

МАЗМҰНЫ

Оқу басылымы

Шыныбеков Әбдухали Насырұлы
Шыныбеков Данияр Әбдухалиұлы

ГЕОМЕТРИЯ

Жалпы білім беретін мектептің
7-сыныбына арналған оқулық

Редакторы *Г. Ғалиева*
Көркемдеуші редакторы *М. Нұрбеков*
Техникалық редакторы *Ү. Рысалиева*
Корректоры *Ү. Бахова*

ИБ № 054

Теруге 25.03.2017 жіберілді. Басуға 29.06.2017 қол қойылды.
Пішімі 60х90 $^{1}/_{16}$. Офсеттік қағаз. Офсеттік басылыс.
Шартты баспа табағы 6,0. Есептік баспа табағы 5,25.
Таралымы 80 000 дана. Тапсырыс № 2558.

«Атамұра» корпорациясы» ЖШС, 050000, Алматы қаласы,
Абылай хан даңғылы, 75.

Қазақстан Республикасы «Атамұра» корпорациясы» ЖШС-нің
Полиграфкомбинаты, 050002, Алматы қаласы, М. Мақатаев көшесі, 41.