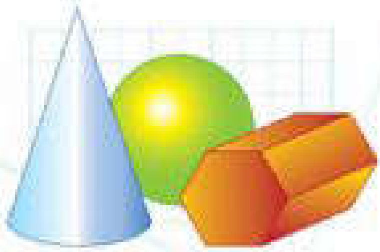
АЛГЕБРА

7

Жалпы білім беретін мектептің
7-сыныбына арналған оқулық

*Қазақстан Республикасының
Білім және ғылым министрлігі бекіткен*



Алматы «Мектеп» 2017

ӘОЖ 373.167.1
КБЖ 22.144я72
А39

Авторлары :

А.Е. Әбілқасымова, Т.П. Кучер,
В.Е. Корчевский, З.Ә. Жұмағұлова

Шартты белгілер:

— анықтамалар, қасиеттер, ережелер

— жаңа білімді меңгеру барысында шешілетін мәселе

— талдауға арналған сұрақтар

— пысықтау сұрақтары

— теориялық материалды өзіндік игеруге арналған тапсырмалар

— теорема немесе қасиеттің дәлелдеуінің аяқталуы

А — барлығы үшін міндетті жаттығулар

В — орта деңгейлі жаттығулар

С — жоғары деңгейлі жаттығулар

Алгебра. Жалпы білім беретін мектептің 7-сыныбына арналған оқулық/
А39 А.Е. Әбілқасымова, Т.П. Кучер, В.Е. Корчевский, З.Ә. Жұмағұлова. —
Алматы: Мектеп, 2017. — 272 б.

ISBN 978—601—07—0851—8

А $\frac{4306020503—117}{404(05)—17}$ 14(1)—17

ӘОЖ 373.167.1
КБЖ 22.144я72

ISBN 978—601—07—0851—8

МАЗМҰНЫ

КІРІСПЕ

Құрметті оқушылар!

Алгебра — математиканың бір бөлігі. Бастауыш сыныптардан бастап сендер теңдеулер шығардыңдар, санды және әріпті өрнектермен таныстыңдар. Оларды алгебра қарастырады. Мектеп курсындағы алгебра теңдеулер, теңдеулер жүйесі арқылы мәтін есептерді шығаруды, әртүрлі теңдеулерді, теңсіздіктер және олардың жүйелерін шешу тәсілдерін, өзгеретін шамалар (мысалы, жылдамдық, уақыт пен жүрілген жол, баға, мөлшер мен құн және т.б.) арасындағы тәуелділіктерді қарастырады. Ондай тәуелділіктердің кейбіреуін функционалдық тәуелділік немесе функция деп атайды.

Алгебраның ерекшелігі —санның мағынасын білдіретін әріптерді қолдану. Оны әріпті белгілеу қолданылды дейді. Әріптердің көмегімен сендер қосу мен көбейтудің ауыстырымдылық, терімділік және үлестірімділік қасиеттерін, нөл және бірдің, сонымен қатар бөлімдері бірдей жай бөлшектерді қосу және азайтудың қасиеттерін жаздыңдар. Әріптерді, мысалы, уақыт пен жылдамдық белгілі болғанда жүрілген жолды табу формуласын, үшбұрыштың периметрін табу формуласын және т.б. жазғанда да қолдандыңдар. Әріптер ережелер мен қасиеттерді есте сақтауға ыңғайлы етіп қысқаша және көрнекі түрде жазуға көмектеседі.

Өрнектерді ықшамдауға болатынын білесіңдер. Демек, әріпті өрнектер де ықшамдалады. Ондай ықшамдаулардың кейбіреуін тепе-тең түрлендірулер деп атайды.

Алгебра курсында сендер өрнек, теңдік, теңдеу, теңсіздік және т.б. сөздерді қолдандыңдар. Олар терминдер болып табылады. 7-сыныптағы алгебраны игеру кезінде сендер тепе-теңдік, айнымалы, бірмүше, көпмүше, функция, аргумент, алгебралық бөлшек және т.б. терминдермен танысасыңдар.

Статистика – статистикалық (сандық немесе сапалық) деректерді жинақтау, өлшеу және талдаудың мәселелерін баяндайтын; қоғам өмірінің сандық жақтарында болатын құбылыстары сандық сипатта зерделейтін білім саласы. Оқулықтағы материал шынайы кездейсоқ құбылыстардың қасиеттерін, сипаттамаларын және байланыстарын көрсететін математикалық модельдерді құру және талдау бойынша оқушылардың білімін, біліктігін және дағдыларын қалыптастыруға бағытталған.

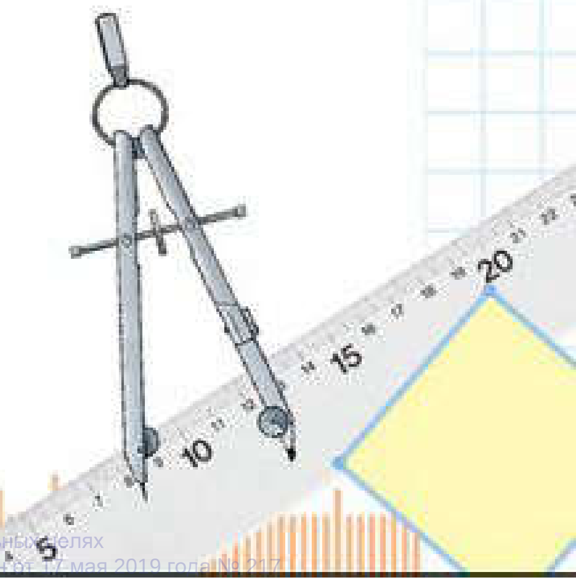
Оқулықтың барлық материалы тарауларға және параграфтарға бөлінген. Олар теориялық материалды, өзіндік жұмысқа арналған тапсырмаларды, қайталауға арналған сұрақтарды, күрделілігі әртүрлі деңгейдегі есептерді және т.б. материалдарды қамтиды.

Есептер A, B және C деңгейлері бойынша бөлінген. A деңгейіндегі есептер —күрделіліктің бастапқы деңгейі және оны орындау негізгі материалды меңгеруін анықтайды. B деңгейіндегі есептер базалық болады және оны орындау оқу материалын меңгергенін көрсетеді. C деңгейінде қиындығы жоғары деңгейлі есептер берілген.

Әрбір тараудың соңында оқыған материалды меңгеруді тексеруге арналған тест тапсырмалары ұсынылған.

Жаттығулардың дұрыс шешімін тексеру үшін оқулықтың соңында есептердің жауаптары берілген.

Оқуда сәттілік тілейміз!



5-6-СЫНЫПТАРДАҒЫ МАТЕМАТИКА КУРСЫН ҚАЙТАЛАУҒА АРНАЛҒАН ЖАТТЫҒУЛАР

Амалдарды орындаңдар **(1—3)**:

1. 1) $3\frac{1}{9} : 2\frac{1}{3} - 2\frac{5}{6}$;   2) $1\frac{5}{7} - 4\frac{3}{13} : 1\frac{19}{26}$;

3) $10\frac{16}{17} : 8\frac{5}{11} + 1\frac{2}{3}$;   4) $\frac{47}{48} : 3\frac{13}{27} - \frac{13}{16}$.

2. 1) $24,892 : 5,08 + 33,6 \cdot 6,5 - 230$;
2) $6,22 \cdot 4,7 - 4,8076 : 4,04 + 1,956$;
3) $68,16 : 3,55 + 51,4 \cdot 0,16 - 28,004$;
4) $7,06 \cdot 1,02 - 69,531 : 9,03 - 0,5012$.

3. 1) $7,8 \cdot \frac{4}{13} - 61,5 : 13\frac{2}{3} + 198,8$;

2) $19,25 \cdot \frac{5}{11} + 5,76 \cdot \frac{5}{12} - 13,009$;

3) $4,625 \cdot 2\frac{2}{15} : 2,96 - 2\frac{4}{7}$;

4) $30,25 : 4\frac{5}{7} : 1,05 - 2\frac{1}{6}$.

Өрнектің мәнін табыңдар **(4-5)**:

4. 1) $|-7| \cdot |-2,1| + 5,6$;   2) $-40 + |-10| \cdot |-3,8| + 5,6$;
3) $|-11| \cdot |-9| - 3,02$;   4) $-2,05 + |-25| : |-16|$.

5. 1) $|-8,8| : 11 + 264 : |-2,4|$;   2) $|-91,3 - 89,7| \cdot 0,5 - 104$;
3) $54,2 + 6,7 \cdot |-41,2 + 32,8|$;   4) $|-92,5| \cdot |-2,2| - 210,1$.

6. Амалдарды орындаңдар:

1) $\left(5\frac{5}{6} + 8\frac{2}{9}\right) : 25,3 - 3\frac{1}{9} + 1,5 : \frac{27}{28}$;

2) $117,5 \cdot \frac{4}{47} - 11\frac{2}{3} + \left(10\frac{2}{25} - 8\frac{7}{15}\right) : \frac{11}{45}$;

3) $89,8 : 59\frac{13}{15} + \frac{3}{7} - \left(42 - 41\frac{36}{49}\right) \cdot 3,5$;

4) $\left(73,6 - 72\frac{5}{9}\right) : 6\frac{4}{15} + \frac{7}{13} \cdot \left(20\frac{2}{3} - 19\frac{3}{7}\right)$;

5) $\left(17\frac{5}{14} - 29\frac{4}{21}\right) \cdot (32,098 + 5,902) : \left(49\frac{1}{7} - 30\frac{10}{21}\right)$;

6) $\left(81\frac{2}{15} - 79{,}3\right) \cdot (24{,}04 - 22{,}68) \cdot \left(1\frac{2}{3} + 1\frac{1}{9}\right)$;

7) $\left(52{,}25 - 49\frac{1}{7}\right) \cdot (40{,}01 - 36{,}81) : \left(6\frac{1}{6} - 2\frac{1}{42}\right)$;

8) $(28{,}24 - 29{,}1) \cdot \left(11{,}75 + 30\frac{5}{6}\right) : \left(40{,}4 - 6\frac{1}{3}\right)$.

7. Егер Күннен Шолпанға дейінгі қашықтық 108200 600 км, Жерге дейінгі қашықтық 149600000 км, Марсқа дейінгі қашықтық 227940000 км, Юпитерге дейінгі қашықтық 778330000 км, Сатурнға дейінгі қашықтық 1429400000 км, Уранға дейінгі қашықтық 2870990000 км, Нептунға дейінгі қашықтық 4504300000 км болса, орташа қашықтықты миллион километрмен өрнектеңдер.

Астрономиялық дене

8. $2^4 \cdot 5^3 \cdot 29 + 2 \cdot 13^2$ өрнегінің мәнін есептегенде ғарыш кемесінің Жер бетінен ұшу кезіндегі ең үлкен жылдамдығын білесіңдер.

9. Берілген өрнектердің мәндері Ақмола облысында орналасқан кейбір көлдердің шаршы километрмен алынған аудандарын береді.

1) $(1 - 0{,}67) \cdot 10^3$ өрнегінің мәні Қорғалжын көлінің;

2) $0{,}46 \cdot 10^2 + 0{,}54 \cdot 10^2 + 0{,}59 \cdot 10^2$ өрнегінің мәні Теңіз көлінің;

3) $(199 + 12 \cdot 29) : 10$ өрнегінің мәні Қыпшақ көлінің ауданына тең.

Ғарыш кемесі

10. Ақ аю Жер бетіндегі ең ірі сүтқоректі жануарлардың бірі. Мына өрнектердің мәндері ақ аю туралы мағлұматтар береді.

1) Ақ аюдың орташа массасы $\left(1\frac{1}{5} + 2{,}8\right) \cdot 10^2$ кг-нан $(400 \cdot 50+5 \cdot 8000) : 10^2$ кг-ға дейін;

2) $3\,(2^3 \cdot 5^2 + 10^2)$ өрнегінің мәні ең үлкен ақ аюдың массасын;

Ақ аю

3) $\frac{1}{2}\left(2\frac{5}{7}+4\frac{2}{7}\right)$ өрнегінің мәні ең үлкен ақ аю дың ұзындығын;
4) $3\cdot 2^3 : 10$ м мен $2^2\cdot 5\cdot 13\cdot 0{,}01$ м аралығы ақ аюдың орташа ұзындығын;
5) $2^4\cdot 3\cdot 625$ өрнегінің мәні ақ аюдың километрмен алынған жеке өмір сүру аймағын;
6) $0{,}001\cdot 2^5\cdot 3125$ өрнегінің мәні ақ аюдың қанша километр жүзіп өте алатынын;
7) $2^5\cdot 5^3\cdot 17 : 1000$ өрнегінің мәні үлкен ақ аюдың қанша килограмм азық жейтінін;
8) $5^3\cdot 2^2$ өрнегінің мәні ақ аю ұстаған балықтың килограммен алынған салмағын;
9) $2^3\cdot 3\cdot 5^2$ өрнегінің мәні ақ аю ұстаған киттің килограммен алынған салмағын береді.

Өрнектің мәнін табыңдар **(11-12)**:

11. 1) $6\frac{3}{7}a-8\frac{5}{8}b-\frac{2}{3}c$, мұндағы $a=\frac{14}{15}$; $b=2\frac{18}{23}$; $c=-6{,}75$;

2) $2\frac{4}{11}a-19{,}25\ b+\frac{4}{9}c$, мұндағы $a=13{,}2$; $b=2\frac{10}{11}$; $c=-10\frac{1}{8}$;

3) $36\frac{2}{3}a-4{,}84\ b+7\frac{5}{7}c$, мұндағы $a=0{,}9$; $b=3\frac{9}{22}$; $c=3{,}5$;

4) $53\frac{7}{9}a-8{,}2\ b+4\frac{17}{38}c$, мұндағы $a=3\frac{15}{22}$; $b=-\frac{25}{82}$; $c=-4\frac{5}{13}$.

12. 1) $7\frac{2}{3}a-1{,}5\ b-\frac{5}{6}c$, мұндағы $a=\frac{5}{46}$; $b=-\frac{4}{9}$; $c=\frac{14}{15}$;

2) $-\frac{20}{27}a+1\frac{2}{25}b-\frac{8}{39}c$, мұндағы $a=-0{,}9$; $b=\frac{5}{9}$; $c=3{,}25$;

3) $4\frac{2}{9}a+8\frac{1}{6}b+\frac{14}{81}c$, мұндағы $a=\frac{3}{19}$; $b=-3\frac{3}{7}$; $c=1\frac{13}{14}$;

4) $1{,}4\ a-\frac{51}{92}b+\frac{11}{25}c$, мұндағы $a=\frac{25}{42}$; $b=1\frac{6}{17}$; $c=-1\frac{17}{33}$.

Өрнектің мәндерін салыстырыңдар **(13-14)**:

13. 1) $0{,}5-\frac{4}{7}\cdot 2{,}1$ және $\left(1-\frac{3}{18}\right)\cdot 0{,}6$;

2) $26 - \frac{5}{14} \cdot 0{,}7$ және $(0{,}86 + 0{,}17) \cdot 25$;

3) $(10{,}5 - 11{,}8) \cdot 20$ және $\frac{40}{49} \cdot 9{,}4 - 34$;

4) $7{,}4 \cdot \frac{15}{37} + 19$ және $(-2{,}97 + 3{,}07) \cdot 20$.

14. 1) $|-30| \cdot 2 - |-15| \cdot |-4|$ және $0{,}15 \cdot |-60| - 8{,}9$;

2) $\left|-\frac{5}{18}\right| \cdot \left|-\frac{3}{10}\right| + \frac{7}{12}$ және $\left|-\frac{25}{26}\right| \cdot \left|-\frac{26}{75}\right| \cdot |-1|$;

3) $|-3{,}5| + \left|-\frac{7}{8}\right| \cdot 1{,}6$ және $|-8{,}1 + 32| \cdot 0{,}01$;

4) $|49{,}2 - 50| : |-0{,}4|$ және $|201 - 401| \cdot 0{,}1$.

Өрнекті ықшамдаңдар **(15-16)**:

15. 1) $40{,}3a - 51{,}2a + 12{,}19a - a$;

2) $-81{,}4b + 90b - 7{,}15b + 0{,}45b$;

3) $13\frac{2}{15}c - 15\frac{1}{3}c + 3{,}5c - \frac{4}{5}c$;

4) $59\frac{3}{16}t + 4\frac{1}{8}t - 64{,}25t + \frac{3}{4}t$.

16. 1) $213{,}25x - 49\frac{5}{7}y - 215\frac{5}{6}x + 50y$;

2) $-95\frac{7}{18}a + 79b + 93{,}2a - 80\frac{4}{11}b$;

3) $-59{,}5c + 44\frac{5}{6}d - 46\frac{2}{9}d + 57\frac{2}{7}c$;

4) $200{,}75t - 81\frac{5}{14}k + 80\frac{2}{21}k - 199\frac{1}{3}t$.

17. Өрнекті ықшамдап, мәнін табыңдар:

1) $81{,}5y - 63\frac{4}{7}z - 99{,}4y + 64\frac{2}{3}z$, мұндағы $y = 10$; $z = -1\frac{19}{23}$;

2) $-177\frac{5}{11}t + 100{,}1k + 176\frac{4}{9}t$, мұндағы $t = -19{,}8$, $k = 50$;

3) $33{,}6n - 76\frac{3}{8}m + 78\frac{1}{9}m - 35n$, мұндағы $m = \frac{24}{25}$; $n = 10$;

4) $29\frac{4}{13}s + 409\frac{1}{9}t - 30{,}5s - 407{,}2t$, мұндағы $s = -2{,}6$; $t = \frac{9}{43}$.

b санының a %-ын табыңдар **(18-19)**:

18. 1) $b = 35 + 4{,}5 \cdot 0{,}6$ және $a = 20$;

2) $b = 140 + 1{,}5 \cdot 0{,}8$ және $a = 25$;

3) $b = 7\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{23} - 0{,}03$ және $a = 50$;

4) $b = \frac{4}{7} + 10\frac{3}{7} : 7\frac{3}{10}$ және $a = 110$.

19. 1) $b = 0{,}02 \cdot 300 - 6\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{19}$ және $a = 144$;

2) $b = 40\frac{1}{2} : 81 + 1{,}5$ және $a = 120$;

3) $b = 505{,}2 - 9\frac{1}{5} : 92$ және $a = 260$;

4) $b = 341\frac{1}{3} : 170\frac{2}{3} + 75$ және $a = 2300$.

20. Ақмола облысының аумағында шамамен 4000 көл бар. Бетінің ауданы 1) 1 км^2 артық емес; 2) 1,1-ден 5 км^2-ге; 3) 5,1 км^2-ден 10 км^2-ге; 4) 10,1-ден 50 км^2-ге жететін; 5) 50 км^2-ден артық көлдер Ақмола облысындағы жалпы көлдер ауданының сәйкесінше 92,5 %; 5,4 %; 1 %; 0,9 %; 0,2 %-ын құрайды. Осы көлдердің санын табыңдар.

21. 1) 9 кг тартатын кашалоттың миы — ең ауыр ми. Ол адам миының массасынан 6 есе артық және кит массасының шамамен 0,02 %-ын құрайды. Адам миы мен кит денесінің массасын табыңдар.

Кашалот

2) Ең ұзын тұмсық көк киттікі. Ол ұзындық 5м-ге дейін жетеді және дене ұзындығының 33 %-ын құрайды. Көк кит денесінің жалпы ұзындығын табыңдар.

3) Ең ұзын кесіртке — алабажақ кесіртке. Оның ұзындығы 4,75 м-ге дейін жетеді және оның 75 %-ы алабажақ кесіртке құйрығының ұзындығын береді. Алабажақ кесіртке құйрығының ұзындығы қандай?

Кесіртке

4) Үшбұрыштың периметрі 12 см. Оның бір қабырғасының ұзындығы периметрдің

25 %-ын, ал екінші қабырғасының ұзындығы $\frac{1}{3}$-ін құрайды. Үшбұрыштың үшінші қабырғасының ұзындығы периметрдің қандай бөлігін құрайды?

22. Берілген теңдеулерді шешіп, кейбір тарихи оқиғалар туралы мәліметтер аласыңдар.
1) $(x - 54) : 25 = 76$, x — наурыз айында тың және тыңайған жерлерді игеру басталған жылға сәйкес келеді;
2) $(2x + 46) : 100 = 1$, x — тың және тыңайған жерлерді игерудің алғашқы жылының көктемінде құрылған совхоздардың саны;
3) $\left(\frac{1}{5}x + 90\right) \cdot 0{,}1 = 10$, x — тың және тыңайған жерлерді игерудің алғашқы жылының күзінде Ақмола облысында құрылған совхоздардың саны.

23. $17x - 121 - 3x = 19 - (x + 5)$ теңдеуін шығарып, солтүстік американдық құндыздың бір жылда қанша ай ұйықтайтынын білесіңдер.

24. 1) $2 \cdot 700 \cdot 50 - 0{,}1x = 200^2$ теңдеуіндегі x-тің мәні найзағай жарқылының алғашқы секундында қызған ауаның ең жоғары температурасына (°С-пен) сәйкес келеді;
2) $3(109y - 200) = 9(3y + 100)$ теңдеуіндегі y-тің мәні найзағай жарқылынан қызған ауа температурасының күн сәулесінен қызған ауа температурасынан неше есе артық болатынын көрсетеді.

25. Пропорцияның белгісіз мүшесін табыңдар:

1) $\frac{x}{3} = \frac{9{,}6}{14{,}4}$; 2) $\frac{x}{4} = \frac{49{,}5}{66}$; 3) $\frac{6{,}5}{x} = \frac{104}{144}$;

4) $\frac{16{,}1}{25{,}3} = \frac{x}{16{,}5}$; 5) $\frac{3\frac{3}{7}}{\left|-7\frac{3}{7}\right|} = \frac{y}{13}$; 6) $\frac{9}{y} = \frac{\left|-4\frac{1}{11}\right|}{\left|-7\frac{3}{11}\right|}$;

7) $\frac{|23|}{y} = \frac{\left|-3\frac{37}{49}\right|}{4\frac{4}{49}}$; 8) $\frac{y}{16} = \frac{|76{,}25|}{\left|-1\frac{5}{56}\right|}$.

26. Пропорциядан белгісіз y-ті табыңдар:

1) $\frac{40 - y}{30} = \frac{5}{6}$; 2) $\frac{4}{7} = \frac{21 - y}{28}$; 3) $\frac{220}{y - 49} = \frac{11}{13}$;

4) $\frac{21}{53} = \frac{220}{y + 300}$; 5) $\frac{29}{30} = \frac{78}{3y - 2}$; 6) $\frac{52}{4y + 2} = \frac{14}{27}$;

7) $\frac{13}{17} = \frac{7 + 2y}{85}$; 8) $\frac{55}{90} = \frac{6 - 5y}{18}$.

Теңдеудің түбірін табыңдар **(27—29)** :

27. 1) $2(2,6x - 4) = -30 + 5,09x$; 2) $20,1x - 1,1 = 4(10 - 5,25x)$;

3) $3(17 - 22,1x) = -7 - 63,4x$; 4) $19x - 0,4 = 2(32x - 5) + 0,6$.

28. 1) $6\frac{1}{3}y + 6,5 = 2,5 - \frac{2}{3}y$;

2) $3\frac{4}{9}y - 6,73 = 4\frac{4}{9}y + 9,27$;

3) $\frac{1}{5} - \left(\frac{1}{3}x + 4,63\right) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} + 1,37$;

4) $\frac{4}{9}x + 1,64 - \frac{6}{11} = 1 - \left(0,36 + \frac{5}{9}x\right)$.

29. 1) $20(x - 4) - 17(3 - 2x) = 58 + 27x$;

2) $-4,5(3x + 2) + 1,6(5 - 4x) = 3,1x + 1,3$;

3) $\frac{5}{21}(7 - 3x) - \frac{4}{35}(5x + 7) = \frac{2}{15} - \frac{2}{7}$;

4) $\frac{9}{16}(32 + x) + \frac{7}{12}(36 - x) = \frac{5}{16}x - 7$.

30. 1-кестені толтырыңдар:

1-кесте

Катердің меншікті жылдамдығы (км/сағ)	30		35	40		
Өзен ағысының жылдамдығы (км/сағ)	3				3	4
Катердің өзен ағысымен жүргендегі жылдамдығы (км/сағ)		39	39		45	
Катердің өзен ағысына қарсы жүргендегі жылдамдығы (км/сағ)		29		38		34

Мәтінді есепті шығарыңдар, оған кері есеп құрастырыңдар және шешіңдер **(31-32)** :

31. Бірінші шеберхана жұмысты 6 сағ-та, ал екінші шеберхана осы жұмысты 4 сағ-та орындайды. Егер олар бірігіп жұмыс атқарса, онда жұмысты қанша уақытта орындайды?

32. Жүк мәшинесіне қажетті жолды жүру үшін 7 сағ, ал жеңіл мәшинеге 3 сағ керек. Егер жүк және жеңіл мәшинелер бір мезгілде қарама-қарсы бағытта шықса, онда олар қанша уақыттан кейін кездеседі?

33. Шаршының периметрі қабырғаларының ұзындығы 36 см; 2 см; 0,2 см; 0,5 см; $\frac{1}{6}$ см; $\frac{2}{3}$ см болатын алтыбұрыштың периметріне тең. Шаршының ауданын табыңдар.

34. Көлемі өлшемдері 1) 4 см, 6 см және 9 см; 2) 4 см; 10 см және 25 см; 3) 5 см; 8 см; 25 см; 4) 27 см; 8 см; 125 см; 5) 6,4 см; 2,7 см; 34,3 см; 6) 0,7 см; 4,9 см; 0,8 см болатын тік параллелепипедтің көлеміне тең текшенің қабырғасының ұзындығын табыңдар.

35. Дөңгелек бірінші бұрышы үшіншісінен екі есе, ал екіншісі үшіншісінен үш есе артық болатын үш секторға бөлінген. Әр сектордың бұрышын табыңдар.

36. Ойлаған санды 2,6-ға көбейтіп, шыққан көбейтіндінің 25%-ына 0,35-ті қосса, 1 саны шығады. Ойлаған санды табыңдар.

37. Меншікті жылдамдығы 14 км/сағ болатын моторлы қайық өзен ағысымен төмен жүрді. Қайық шыққан пункттен 1 сағ-тан соң меншікті жылдамдығы 31 км/сағ-қа тең катер шықты. Егер өзен ағысының жылдамдығы 3 км/сағ болса, онда катер моторлы қайықпен қанша уақыттан кейін кездеседі?

38. Меншікті жылдамдығы 15 км/сағ-қа тең моторлы қайық өзен ағысымен төмен жүрді. 1 сағ-тан соң оған қарама-қарсы бағытта меншікті жылдамдығы 33 км/сағ-қа тең катер шықты. Егер өзен ағысының жылдамдығы 3 км/сағ болса, онда қанша сағаттан кейін катер мен моторлы қайықтың аралығы 114 км болады?

39. Жұмыс соңында дүкенде a кг алма сатылмай қалды және тағы әрқайсысында b кг-нан 5 жәшік алма әкелінді. Сонда дүкенде барлығы қанша килограмм алма болды?
Есеп шығару формуласын жазып, $a = 5,75$ және $b = 4,25$ болғандағы есептің жауабын табыңдар.

40. $y = x + 37^2$ формуласына:
1) $x = 25^2 - 101$ санын қойғанда y-тің мәні қоғам қайраткері, ақын Мағжан Жұмабаевтың туған жылын;
2) $x = 24^2 - 10^2$ санын қойғанда y-тің мәні қазақтың жазба әдебиетінің негізін қалаған, ағартушы Абай Құнанбаевтың туған жылын;

3) $x = 22^2 - 2 \cdot 3^2$ санын қойғанда y-тің мәні ағартушы, саяхатшы, Орта Азия, Қазақстан және Шығыс Түркістан халықтарының тарихы мен мәдениетін зерттеген Шоқан Уәлихановтың туған жылын;
4) $x = 21^2 + 2^2 \cdot 3^2$ санын қойғанда y-тің мәні жырау, айтыскер ақын Жамбыл Жабаевтың туған жылын береді.

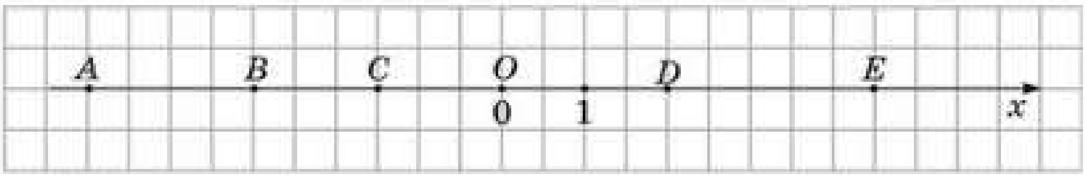

М. Жұмабаев


А. Құнанбаев


Ш. Уәлиханов

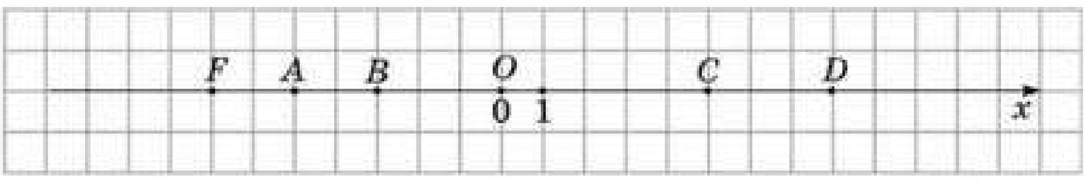

Ж. Жабаев

41. 1-суретте кескінделген нүктелердің координаталарын табыңдар. 1-суретті қолданып, келесі сұрақтарға жауап беріңдер:
1) координаталар басынан сол жақта орналасқан нүктелерді атаңдар;
2) координаталар басынан оң жақта орналасқан нүктелерді атаңдар;
3) қай нүкте координаталар басына ең жақын орналасқан?



1-сурет

42. 2-суретте көрсетілген нүктелердің координаталарын табыңдар. Координаталық түзуде:
1) координаталары берілген нүктелердің координаталарына қарама-қарсы болатын нүктелерді белгілеңдер;
2) C және D арасында орналасқан екі нүктені белгілеп, олардың координаталарын жазыңдар;

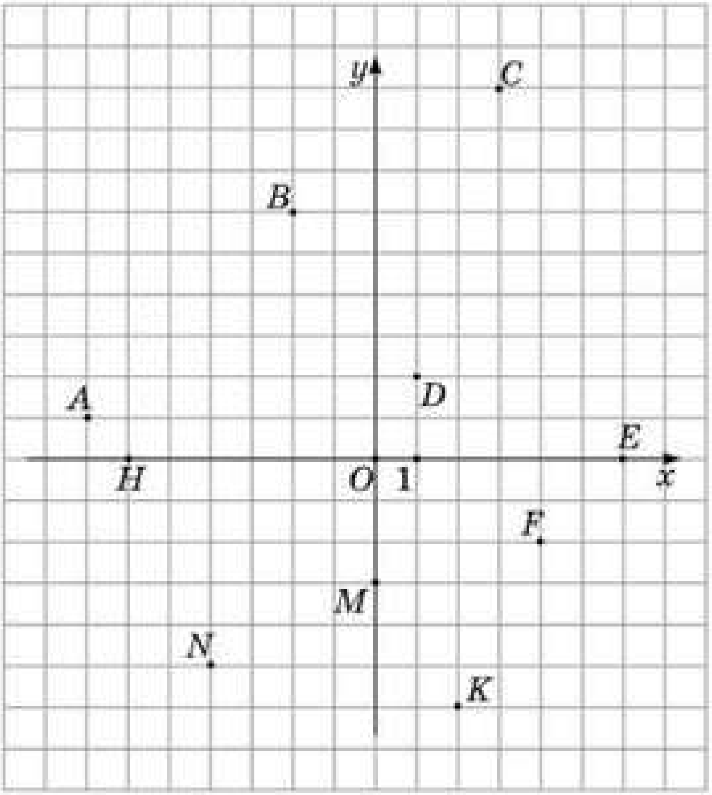


2-сурет

3) берілген нүктелердің әрқайсысының сол жағында (оң жағында) орналасқан нүктені белгілеңдер және оның координатасын жазыңдар.

43. Координаталық түзуде:
1. а) –4 және 3; ә) –3,5 және 0; б) –7,3 және –2; в) –0,99 және 2,1 сандарының арасында орналасқан бүтін сандарды атаңдар.
2. а) 4,7; ә) –3,2; б) 0,6; в) –9,99 саны қандай бүтін сандардың арасында орналасқан?

44. Координаталар жазықтығына салынған нүктелердің координаталарын жазыңдар (3-сурет). Осы нүктелердің қайсылары 1) Ox осінде; 2) Oy осінде; 3) I ширекте; 4) II ширекте; 5) III ширекте; 6) IV ширекте орналасқан?



3-сурет

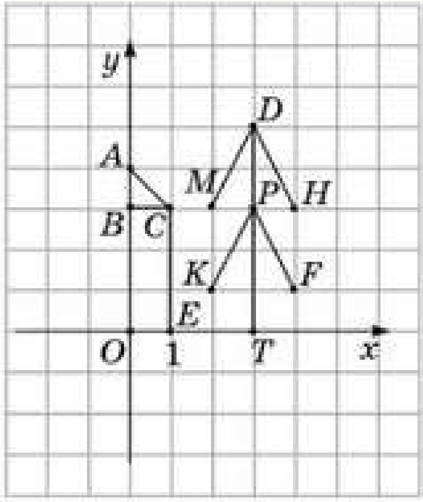
45. Координаталар жазықтығында A (– 3; 2); B (0, –2); C (1,5; –1); D (–4; 0); E (2,5; –3,5) нүктелерін белгілеңдер. Олар қай координаталық ширекте орналасқан? Басқа координаталық ширектегі нүктелерді салып, олардың координаталарын жазыңдар.

46. A (5; 6); B (–3; 0); C (0; 8) нүктелерін координаталар жазықтығына салмай, оларға 1) абсцисса осіне; 2) ординат осіне; 3) координаталар басына қарағанда сәйкесінше симметриялы M, H, K нүктелерінің координаталарын жазыңдар.

47. 4-суретте салынған A, B, C, E, D, M, H, K, F, T, P нүктелерінің координаталарын жазыңдар:

1) ордината осіне қарағанда сәйкесінше A, B, C, E, D, M, H, K, F, T, P нүктелеріне симметриялы A_1, B_1, C_1, E_1, D_1, M_1, H_1, K_1, F_1, T_1, P_1 нүктелерінің координаталарын жазыңдар;

2) A_1, B_1, C_1, E_1, D_1, M_1, H_1, K_1, F_1, T_1, P_1 нүктелерін салыңдар және AC_1, BC_1, C_1E_1, D_1M_1, D_1H_1, P_1K_1, P_1F_1, D_1T_1 кесінділерін жүргізіңдер.



4-сурет

48. A (0; 1,5) және B (2; 6) нүктелерін салыңдар;

1) AB және BO кесінділерін жүргізіп, олардың ұзындықтарын 1 мм дәлдікке дейін өлшеңдер;

2) ордината осіне қарағанда B нүктесіне симметриялы F нүктесінің координаталарын және абсцисса осіне қарағанда сәйкесінше F, A және B нүктелеріне симметриялы E, D, C нүктелерінің координаталарын табыңдар;

3) $ABOCDEFA$ сынығын жүргізіп, оның 1 мм дәлдікке дейінгі ұзындығын табыңдар.

49. A (3; 4) нүктесін және абсциссасы A нүктесінің абсциссасына тең, ал ординатасы A нүктесінің ординатасының 50 %-ын құрайтын B нүктесін салыңдар. Ординатасы B нүктесінің ординатасына тең, ал абсциссасы B нүктесінің абсциссасынан 2 есе артық болатын C нүктесін салыңдар. Ординатасы нөлге тең, ал абсциссасы C нүктесінің абсциссасына тең T нүктесін салыңдар. Ордината осіне қарағанда сәйкесінше A, B, C, T нүктелеріне симметриялы D, M, K, F нүктелерін салыңдар. Егер бірлік кесіндінің ұзындығы 5 мм болса, онда $ABCTFKMDA$ фигурасының периметрі мен ауданын табыңдар.

Теңдеуді шешіңдер **(50-51)** :

50. 1) $40 + 2x = 3x - 15$; 2) $16x - 33 = 1 + 13x$;

3) $23{,}8y - 80 - 24{,}3y = 2$; 4) $95y - 4{,}9 = 98y - 1$;

5) $8\frac{1}{15}z - 27 = 9z - 13$; 6) $\frac{41}{45}t + \frac{2}{9} = 1\frac{2}{9}t - \frac{7}{9}$.

51. 1) $16{,}05x + 1{,}8x = 3{,}63 - 0{,}3x$; 2) $1{,}09 + 5{,}8y = 38{,}29 + 15{,}1y$;

3) $\frac{5}{7}x + 2\frac{1}{7} = 3\frac{3}{28} - \frac{4}{7}x$; 4) $5\frac{1}{6} + \frac{4}{15}t = -\frac{2}{5}t - \frac{2}{3}$;

5) $19t - \frac{3}{8} = \frac{5}{7} - 42t$; 6) $\frac{6}{11} - 31{,}28\,k = -\frac{2}{3} + 8{,}72\,k$.

Теңдеудің түбірін табыңдар **(52-53)** :

52. 1) $17x - 2{,}6 = 3(0{,}8 + 3x)$; 2) $8 + 5{,}1\,x = 49(1 + 0{,}1\,x)$;

3) $38(0{,}1\,x + 1) = 40 - 3{,}2\,x$; 4) $63x - 13{,}7 = 13(0{,}1 + 5x)$;

5) $23(x - 0{,}1) = 17x + 2{,}7$; 6) $33(0{,}1\,x + 1) = 4 - 6{,}7\,x$.

53. 1) $3(2x - 4) + 15 = 16 - 5(2 - x)$;

2) $4{,}5(6 - z) - 0{,}5\,z = 1 + 0{,}5(z + 3)$;

3) $\frac{23}{40}(8t + 5) - t = 2{,}6\,t - (3t - \frac{3}{4})$;

4) $10\frac{2}{3}(9 - k) + 81 = 107 - \frac{1}{3}(k - 60)$.

54. Берілген теңдеулердің түбірлері Шығыс Қазақстан облысында орналасқан Марқакөл қорығы туралы мағлұматтар береді:

1) $x + 0{,}24 = 20 + 0{,}99\,x$, x – қорықтың құрылған жылы;

2) $3y - 2(169{,}9 + y) = 150 - (y + 339{,}8)$, y — қорықтың ауданы (мың гектар);

3) $50z + (z + 6{,}2) = 200$, z — қорықтағы орманның ауданы (мың гектар).

Марқакөл қорығы

55. Берілген теңдеулерді шешкенде әртүрлі биіктіктегі ауа температурасына сәйкес мәнді аласыңдар:

1) $3x + (x + 2) = 2(3x + 12)$ теңдеуінің түбірі 4000 м биіктіктегі ауаның температурасын (x°C);

2) $-3(2{,}5 - y) = 28{,}5 + 4{,}5\,y$ теңдеуінің түбірі 6000 м биіктіктегі ауаның температурасын (y°C);

3) $25{,}8\,z - 4{,}3(6z + 300) = 25{,}8\,z$ теңдеуінің түбірі 10 000 м биіктіктегі ауаның температурасын (z°C) береді.

56. Берілген теңдеулерді шешкенде кейбір жануарлардың орташа өмір сүру уақытына сәйкес санды аласыңдар:

1) $12{,}5 - (16x - 28{,}3) = -71{,}2$ теңдеуінің түбірі құмырсқаның ең

ұзақ өмір сүру уақытын;

2) $31{,}8-\left(\frac{1}{7}+\frac{4}{7}y\right)=1\frac{2}{3}y+4{,}8$ теңдеуінің түбірі кесірткенің ең ұзақ өмір сүру уақытын;

3) $\frac{13}{15}z-\left(\frac{7}{9}+\frac{1}{3}z\right)=7\frac{2}{9}$ теңдеуінің түбірі тиінның ең ұзақ өмір сүру уақытын береді.

Теңдеудің түбірлерін табыңдар **(57-58)** :

57. 1) $|x|+20{,}9=22$; 2) $315-|x|=288$;

3) $|x|-74{,}6=9{,}4$; 4) $15\frac{2}{15}-|x|=7\frac{1}{12}$;

5) $|x|-21{,}9=6\frac{2}{3}$; 6) $100{,}3+|x|=101\frac{8}{9}$.

58. 1) $|x|+5|x|-40=4|x|$; 2) $100-|x|=-49|x|+124$;

3) $6|x|-2|x|=35-16|x|$; 4) $29|x|-|x|-13=-22|x|$.

59. Айнымалының қандай мәндерінде теңдік тура болады:

1) $|x+1|=x+1$; 2) $|2-x|=2-x$?

60. a-ның қандай мәнінде $|10-x|=a$ теңдеуінің 1) шешімі болады; 2) шешімі болмайды; 3) түбірі нөлге тең болады; 4) түбірі 10-ға тең болады?

61. Бір координаталық түзуде 1) сандар интервалы мен санды сәуле; 2) санды кесінді мен санды ашық сәуле салыңдар. Мүмкін болатын жағдайларды қарастырып, әр жағдай үшін сан аралықтарының бірігуі мен қиылысуын табыңдар.

62. 1) $(1;\ 8)$ және $(-5;\ 7]$; 2) $[-2;\ 3]$ және $(-1;\ 5)$;

3) $(-\infty;\ 6]$ және $[4;\ +\infty)$; 4) $(-10;\ -2]$ және $[-7;\ 1)$

сан аралығының қиылысуына тиісті болатын барлық натурал сандарды табыңдар.

63. 1) $(-10;\ 6)$ және $(1;\ +\infty)$; 2) $[5;\ 29]$ және $[20;\ +\infty)$;

3) $(-3;\ 13]$ және $[-4;\ +\infty)$; 4) $(21;\ +\infty)$ және $(-20;\ 21]$ сан аралығының қиылысуына тиісті болатын ең үлкен (ең кіші) натурал санды табыңдар.

64. 1) $[3{,}5;\ 7{,}1]$ және $(1;\ +4{,}9)$; 2) $\left(-\infty;\frac{3}{7}\right]$ және $\left[-\frac{8}{9};+\infty\right)$;

3) $(-\infty; +\infty)$ және $\left[-7\frac{1}{3};\ 8\frac{1}{3}\right]$; 4) $(-5{,}1;\ 9{,}1)$ және $(-\infty; +\infty)$ сан аралығының қиылысуына тиісті болатын ең үлкен (ең кіші) бүтін санды табыңдар.

65. Берілген теңсіздіктің шешімі болатын ең кіші натурал санды табыңдар:

1) $10 + 7x > 24$; 2) $19 - 6x < -5$;

3) $-43x + 2 \le 45$; 4) $60 + 17x > -19$;

5) $83 + x < 84x$; 6) $-7 - 30x \le 5x$.

Берілген теңсіздіктің шешімі болатын ең үлкен бүтін санды табыңдар **(66—68)**:

66. 1) $0{,}5x + 41{,}5 \le 42$; 2) $90 - \frac{1}{3}x > 91$;

3) $\frac{2}{3}x - 15 < 20$; 4) $18\frac{1}{9} \ge 0{,}2x + 18$;

5) $31 - 4\frac{1}{7}x > 2$; 6) $30{,}08 < -\frac{8}{9}x - 1{,}92$.

67. 1) $-4y + 10 \ge 2(1 - y) + 24$; 2) $49 - 3(3 - 2z) \le 1 - 4z$;

3) $7(6 - 5t) - 5 < 1 - 41t$; 4) $-0{,}5(8x + 9) - 0{,}9 > 4x - 3$.

68. 1) $\frac{3x - 4}{2} < \frac{6 - 2x}{3}$; 2) $\frac{10 - x}{6} \ge \frac{x + 7}{5}$;

3) $\frac{3 + 2x}{12} \ge \frac{3x - 2}{15}$; 4) $\frac{y - 5}{18} < \frac{6 - y}{24}$.

Теңсіздікті шешіңдер **(69—71)**:

69. 1) $3{,}3x - 0{,}4(4 - 3x) \le 9{,}3 + 5(0{,}7 - x)$;

2) $9(0{,}5y + 1) - 3{,}1(1 - y) > 5{,}9 + 7{,}2y$;

3) $0{,}6(a - 2) - 0{,}2 \ge 0{,}8(a + 2) + 3{,}5$;

4) $-1{,}4 + 0{,}5(11b - 2) < -5{,}5b + 1{,}6$.

70. 1) $5\frac{2}{3} + \frac{7}{3}(14x - 3) > \frac{4}{9}(18x - 2)$; 2) $\frac{5}{6}(7 + 9y) \le 7\frac{1}{2} - \frac{7}{8}(5y - 8)$;

3) $30 - \frac{4}{5}(2 - 15z) \ge \frac{2}{3}(15z + 1)$; 4) $\frac{3}{4}(8t + 1) < \frac{5}{6}(16t - 3) - 12\frac{1}{2}$.

71. Теңсіздікті шешіңдер:

1) $\frac{x-3}{14}-\frac{x-7}{35}+\frac{2x+3}{5} \mid 0,1;$

2) $\frac{5-3y}{11}+\frac{y-4}{10}-\frac{2+3y}{22}<\frac{2}{11};$

3) $\frac{8x-1}{8}+\frac{7-4x}{5}-\frac{x+3}{20}>\frac{3}{40}.$

Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер **(72—74)**.

72. 1) $\begin{cases} 20x+40\leqslant 0, \\ \frac{2}{9}-\frac{4}{27}x>0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3\frac{1}{3}-10x<0, \\ 1,6-4,8x<0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 10+5x>-20, \\ \frac{5}{11}-\frac{20}{33}x\geqslant 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 7\frac{2}{7}-51x\leqslant 0, \\ 3x+40\leqslant 52. \end{cases}$

73. 1) $\begin{cases} 2(x+5)<2-2x, \\ 3(2-x)\geqslant 3-x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3(x+8)>9-2x, \\ 3(x+4)\geqslant x+5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4(x+1)\leqslant 9-2x, \\ 2(x+5)\leqslant 1-x; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 4(3-x)\geqslant 2-2x, \\ 3(x-2)\geqslant 2-x. \end{cases}$

74. 1) $\begin{cases} 3x+5(x-2)\leqslant 3-2x, \\ 4(5x-1)-21x\geqslant 1-3x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7-11x<9x-2(5x+7), \\ 6-x\geqslant 2(1-4x)-3(1-3x). \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5(6x-5)<3(4x+3)+2, \\ 2(6x-1)-12+9x>5(8x+1); \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3(2x+13)-2(x+2)>10x-4, \\ 3(4x+9)-2(x-1)<16x+2. \end{cases}$

75. Теңсіздіктер жүйесінің шешімі болатын барлық бүтін сандарды табыңдар:

1) $\begin{cases} x-1>\frac{2x-0,5}{3}, \\ \frac{7x+12}{8}\geqslant x+1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{9x-13}{8}>x-2, \\ 1+x>\frac{10x+6}{9}. \end{cases}$

76. Теңсіздіктер жүйесінің шешімі болатын барлық натурал сандарды табыңдар:

1) $\begin{cases} \frac{7,4x+23}{21}\leqslant 1+0,4x, \\ 3x-5\leqslant\frac{20x-31}{7}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 1-2x\leqslant\frac{28-53x}{27}, \\ 0,1x+3<\frac{13-0,7x}{3}. \end{cases}$

77. 1) Егер екі еселенген бүтін санға оның жартысын косса, онда 17-ден артық сан, ал егер бүтін санның 3 еселенген көбейтіндісінен оның жартысын азайтса, онда 18-ден кіші сан шығады. Берілген бүтін санды табыңдар.

2) Егер бүтін санның $\frac{3}{10}$-іне 0,25-ті косса, онда 5-тен кіші, ал егер ол бүтін санның $\frac{7}{9}$ -інен $\frac{1}{3}$-ді азайтса, онда 11-ден үлкен сан шығады. Берілген бүтін санды табыңдар.

78. 1) Егер бүтін санға оның 40 %-ын косса, онда 47-ден артық, ал осы бүтін саннан оның 65 %-ын азайтса, онда 12-ден кіші сан шығады. Бастапқы бүтін санды табыңдар.

2) Егер бүтін саннан оның 11 %-ын азайтса, онда 88-ден артық, ал егер осы бүтін санға оның 121 %-ын косса, онда 221-ден кіші сан шығады. Бастапқы бүтін санды табыңдар.

79. Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases} 4x+7{,}8>45x-4{,}2, \\ 18+1{,}1x\leqslant 4{,}1x+13{,}5, \\ 5{,}5-3{,}4x<40{,}5-8{,}4x; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 17{,}3-29x\geqslant -35x-6{,}7, \\ 1{,}5x+13{,}1<\frac{1}{2}x-18{,}1, \\ 6\frac{1}{3}x-27{,}8\leqslant 21{,}2-\frac{2}{3}x. \end{cases}$

80. 5-суретте кескінделген сан аралықтарын модулі бар теңсіздік түрінде жазыңдар:

5-сурет

81. Теңсіздіктер шешімін координаталық түзуде кескіндеңдер :

1) |x| m5,6; 2) |x| < 17;

3) $|x| > 4\frac{3}{16}$; 4) |x| l 9;

5) |x| > 10; 6) |x| m8,14;

7) $|x| < 3\frac{5}{6}$; 8) |x| l 20.

82. Теңсіздікті шешіңдер :

1) $|1+2x|<9$;
2) $|3+2x|\,\mathrm{m}\,5$;
3) $|1-2x|\,\mathrm{l}\,\;7$;
4) $|2-5x|>22$;
5) $|3x+5|\,\mathrm{l}\,\;20$;
6) $|7-4x|\,\mathrm{m}\,11$;
7) $|4+3x|\,\mathrm{m}\,5$;
8) $|6x-5|\,\mathrm{l}\,\;1$;
9) $|1-2x|<4$;
10) $|0{,}8-\frac{1}{3}x|>0{,}2$;
11) $|2{,}5x+1|<1{,}5$;
12) $|-4x+\frac{1}{9}|\,\mathrm{m}\,\frac{5}{9}$.

83. Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases} 147-3x\geqslant 51, \\ |x|\geqslant 11, \\ 11+0{,}5x>0{,}5; \end{cases}$
2) $\begin{cases} |x|\leqslant 1{,}5, \\ 60x+8<9x+9, \\ |x|<9{,}7. \end{cases}$

84. 1) $\begin{cases} |x|<4, \\ |x|\geqslant 1, \\ x>-3; \end{cases}$
2) $\begin{cases} |x|\leqslant 10, \\ x>-7, \\ x\leqslant 2; \end{cases}$
3) $\begin{cases} |x|>3, \\ x\leqslant 4, \\ |x|\leqslant 5 \end{cases}$

теңсіздіктер жүйесінің шешімі болатын барлық бүтін сандардың қосындысының мәнін табыңдар.

85. Теңсіздіктер жүйесінің шешімі желдің жылдамдықтары туралы мәлімет береді.

Теңіз дауылы

1) $\begin{cases} \frac{1}{5}y\geqslant 4, \\ \frac{1}{7}y\leqslant 4; \end{cases}$ y км/сағ — қоңыр желдің жылдамдығы;

2) $\begin{cases} 10y-390\geqslant 0, \\ 0{,}1y\geqslant -5; \end{cases}$ y км/сағ — қатты желдің жылдамдығы;

3) $\begin{cases} 15(5-z)\leqslant -14z, \\ 29(z-3)\leqslant 28z; \end{cases}$ z км/сағ — теңіз дауылының жылдамдығы;

4) $\begin{cases} 50-0{,}5z\leqslant -9, \\ 9-\frac{1}{3}z\leqslant -1; \end{cases}$ z км/сағ — құйынды дауыл кезіндегі желдің жылдамдығы.

Теңдеулер жүйесін шешіңдер (86-87):

86. 1) $\begin{cases}4x+3y=-7,\\2x-y=9;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}5x+6y=3,\\x-2y=-9;\end{cases}$

3) $\begin{cases}6x+y=-1,\\12x-7y=61;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x-4y=-42,\\9x+8y=62.\end{cases}$

87. 1) $\begin{cases}8x+15y=-56,\\4x-7y=30;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}6x-9y=88{,}5,\\5x+3y=47{,}5;\end{cases}$

3) $\begin{cases}11x+10y=73{,}5,\\6x-5y=-54;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}2x+13y=-69,\\14x+11y=-3.\end{cases}$

88. $\begin{cases}x+y=300,\\\frac{1}{2}x-0{,}5y=30\end{cases}$ теңдеулер жүйесін шешіп, құрлықтағы ең ірі жануарлардың бірі сусиыр туралы мағлұматтар аласыңдар. x-тің мәні сусиыр аузының қанша градусқа ашылатынын; y-тің мәні сусиырдың ауыз жақтарының қанша сантиметрге ашылатынын береді.

Сусиыр

89. Теңдеулер жүйесін шешіп, Қостанай облысында орналасқан Наурызым қорығы туралы мағлұматтар аласыңдар.

1) $\begin{cases}x+y=3897,\\x-y=35;\end{cases}$

x-тің мәні Наурызым қорығының қайта құрылған жылын;

y-тің мәні Наурызым қорығының құрылған жылы;

Наурызым қорығы

2) $\begin{cases}x+10y=1197,\\20y-x=1434;\end{cases}$

x-тің мәні Наурызым қорығының алғашқы аумағына (мың га), y-тің мәні Наурызым қорығының қайта құрылғаннан кейінгі аумағына (мың га) сәйкес келеді;

3) $\begin{cases}0{,}1x+0{,}01y=32,\\2x+y=1200;\end{cases}$

x-тің мәні Наурызым қорығындағы құстардың түрін;

y-тің мәні Наурызым қорығындағы өсімдіктердің түрін береді;

4) $\begin{cases} 1{,}5x+2{,}5y = 75, \\ \frac{1}{20}x + \frac{1}{6}y = 3; \end{cases}$

x-тің мәні Наурызым қорығындағы сүткоректілер түрін;
y-тің мәні Наурызым қорығындағы балықтардың түрін береді.

Теңдеулер жүйесін шешіңдер (90—94):

90. 1) $\begin{cases} x = -7 + y, \\ 2x - 3y = -16; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = x - 5, \\ 4x + y = 10; \end{cases}$

3) $\begin{cases} -x = 3 - 2y, \\ x - 5y = -6; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y = 4-5x, \\ y-7x=-8. \end{cases}$

91. 1) $\begin{cases} x + 2y = 0{,}3, \\ x = -y + 0{,}5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y-8x = 83{,}1, \\ y = -x-6{,}9; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 21x + y = -15{,}1, \\ y = 0{,}9 - x; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} -2{,}5y+x=-12{,}8, \\ x=1{,}2-y. \end{cases}$

92. 1) $\begin{cases} x - y = -\frac{5}{7}, \\ 4x + 3y = -4\frac{6}{7}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 10x - 3y = \frac{94}{9}, \\ x + y = -\frac{14}{9}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 9x + 2y = -\frac{19}{7}, \\ y - x = \frac{10}{21}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 7x - 6y = \frac{10}{3}, \\ y + x = -\frac{11}{3}. \end{cases}$

93. 1) $\begin{cases} 3(x-2) - 2(y+1) = -16, \\ 5(x-3) + 8(y-2) = 51; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -6(4-x)+(y+5)=2, \\ 11(1+x)-9(7-y)=-36. \end{cases}$

94. 1) $\begin{cases} \frac{4x-3}{2} + \frac{5y+1}{3} = 12{,}5, \\ 1{,}5x-0{,}7y=-3{,}4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2{,}3x-1{,}9y=0{,}8, \\ \frac{4-3y}{4}+\frac{-5x-2}{3}=-4{,}5. \end{cases}$

95. 2-кестеде ойыншықтардың бағалары көрсетілген:

2-кесте

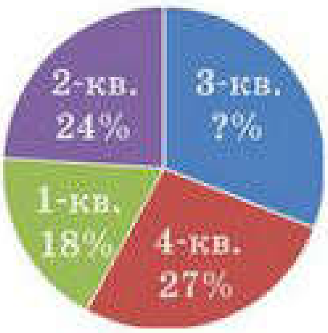
Ойыншық-тың түрі	A	B	C	D	E	F	G	H	K	L
Бағасы (теңгемен)	430	500	630	520	320	610	440	710	360	736

1) Бағасы 500 теңгеден артық емес ойыншықтардың қанша түрі бар?
2) Әкесі 1000 теңге жұмсап баласына екі түрлі ойыншықты қанша тәсілмен сатып алуына болады?
3) Үш ойыншық сатып алған адамға 15% жеңілдік жасалады. 1000 теңгеден кем ақшаға қандай үш ойыншық сатып алуға болады?

96. 1) Түстері әртүрлі киім үлгілерінің топтамасы 1-диаграммада көрсетілген. Егер топтамада барлығы 80 үлгі болса, қызыл түсті үлгілердің саны қандай?
2) Кәсіпорынның жыл бойы алған өнімін талдау нәтижелері 2-диаграммада көрсетілген. Егер жылдық өнім 2400 000 теңгені құраса, 3-кварталда қандай өнім алынған?

1-*диаграмма*

2-*диаграмма*



1-ТАРАУ

БҮТІН КӨРСЕТКІШТІ ДӘРЕЖЕ

§ 1. НАТУРАЛ КӨРСЕТКІШТІ ДӘРЕЖЕ

Натурал көрсеткішті дәрежені не үшін білу керек?

Түсіндіріңдер

Бірнеше бірдей көбейткіштердің көбейтіндісі неге дәрежемен алмастырылды: $2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=2^6$; $\frac{8}{9}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{8}{9}=\left(\frac{8}{9}\right)^3$; $\underbrace{(-1,1)\cdot(-1,1)\cdot\ldots\cdot(-1,1)}_{21\ \text{рет}}=(-1,1)^{21}$?

Егер қандай бір санды a әрпі, ал көбейткіштер санын n әрпі арқылы белгілесек, онда келесі түрде жазуға болады:

$$\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\ \text{рет}}=a^n.$$

a^n өрнегіндегі ***a* саны** (қайталанатын көбейткіш) **дәреженің негізі**, ***n* саны** (көбейткіштің қанша рет қайталанатынын көрсететін сан) **дәреженің көрсеткіші**, a^n — **дәреже** деп аталады.

Дәрежені оқыған кезде алдымен оның негізін, одан кейін көрсеткішін оқиды.

a^n өрнегінің оқылуы:
- a санының n көрсеткішті дәрежесі;
- n-ші дәрежелі a.

Анықтама. Көрсеткіші 1-ден артық a санының n натурал көрсеткішті дәрежесі деп әрбір көбейткіші a-ға тең n көбейткіштің көбейтіндісі аталады:

$$\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\ \text{рет}}=a^n.$$

Кез келген санның бірінші дәрежесі сол санның өзіне тең:

$$a^1=a.$$

Еске түсіріңдер!

1. a^2 және a^3 дәрежелерін қалай атайды?

2. $\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$; $(-0{,}6)^2 = 0{,}36$; $(-3)^3 = -27$ теңдігін түсіндіріңдер.

3. Қандай жағдайда натурал көрсеткішті дәреже a^n оң, ал қандай жағдайда теріс сан болады?

Натурал көрсеткішті дәреженің қасиеттері

Егер $a > 0$ және n натурал сан болса, онда $a^n > 0$, яғни кез келген оң санның натурал көрсеткіші оң сан болады.

Егер $a < 0$ және n жұп сан болса, онда $a^n > 0$, яғни теріс санның жұп дәрежесі оң сан; егер $a < 0$ және n тақ сан болса, онда $a^n < 0$, яғни теріс санның тақ дәрежесі теріс сан.

Мысалы: $8^3 = 8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$; $\left(\frac{6}{7}\right)^4 = \frac{6}{7} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{6}{7} = \frac{1296}{2401}$;

$(-0{,}3)^5 = (-0{,}3) \cdot (-0{,}3) \cdot (-0{,}3) \cdot (-0{,}3) \cdot (-0{,}3) = -0{,}00243$;

$x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x = x^8$.

Натурал көрсеткішті дәреженің негізі қандай сан (натурал, бөлшек оң немесе теріс және т.б.) болуы мүмкін?

Дәреженің негізі кез келген рационал сан (натурал сандар, нөл, оң және теріс бөлшектер), теріс бүтін сандар және кез келген айнымалы болуы мүмкін.

Дәрежеге шығару үшінші деңгейдің амалы. Сендерге бірінші деңгейдің (қосу және азайту) амалдары және екінші деңгейдің (көбейту және бөлу) амалдары белгілі болған. Сонымен қатар сендер жақшалары жоқ санды өрнектің мәнін табу үшін алдымен екінші деңгейдің, одан кейін бірінші деңгейдің амалдары орындалатынын білесіңдер.

Өрнекте үшінші деңгейдің амалдары болғанда мына ереже қолданылады.

Егер санды өрнекте жақша болмаса, онда алдымен үшінші, одан кейін екінші, соңынан бірінші деңгейдің амалдары орындалады.

Мысалы, $6 : \frac{1}{8} - \frac{5}{9} \cdot (-3)^4 + 0,1 \cdot 10^2 = 6 : \frac{1}{8} - \frac{5}{9} \cdot 81 + 0,1 \cdot 100 =$ $= 48 - 45 + 10 = 13$.

Санды дәреже түрінде жазу көптеген жағдайларда, айталық натурал санды қосылғыштардың разряды және ондық жазылуы түрінде жазу үшін қолданылады:

$82\ 345 = 8 \cdot 10000 + 2 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 5 = 8 \cdot 10^4 + 2 \times$ $\times 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 5$.

10 санының дәрежесін өте үлкен сандарды жазуға қолданады. Мысалы, Жердің Күннен бір жылда алатын энергиясының шамасы 10^{25} Дж, дауылдың энергиясы 10^{15} Дж, адамның қан айналым жүйесінің ұзындығы 10^5 км-ге тең.

1. Натурал көрсеткішті дәреженің мәні теріс сан, нөл болуы мүмкін бе?
2. $81 \cdot 4 - 243 : 3^5 + 240$ өрнегіндегі амалдарды орындау ретін атаңдар.

Жаттығулар

A

1.1. Көбейтіндіні дәреже түрінде жазыңдар:

1) $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$;

2) $(-1,2) \cdot (-1,2) \cdot (-1,2) \cdot (-1,2) \cdot (-1,2)$;

3) $\frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7}$;

4) $b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b$;

5) $(t + k) \cdot (t + k) \cdot (t + k) \cdot (t + k)$;

6) $\frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y}$.

Көбейтіндіні дәреже түрінде жазуды қолданып, өрнекті ықшамдаңдар (**1.2-1.3**):

1.2. 1) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 11$; 2) $\frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13$;

3) $1,7 \cdot 1,7 \cdot 1,7 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$; 4) $\left(-\frac{5}{11}\right) \cdot \left(-\frac{5}{11}\right) \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$.

1.3. 1) $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot c \cdot c \cdot c$; 2) $0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot d \cdot d \cdot d \cdot d \cdot d$;

3) $k \cdot k \cdot k \cdot k \cdot s \cdot s \cdot s \cdot s \cdot s$; 4) $\frac{t}{m} \cdot \frac{t}{m} \cdot \frac{t}{m} \cdot n \cdot n \cdot n \cdot n$;

5) $(2-b) \cdot (2-b) \cdot (2-b) \cdot (2-b) \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y$.

Берілген өрнекті бірдей көбейткіштердің көбейтіндісі түрінде жазыңдар **(1.4-1.5)**:

1.4. 1) 23^5; 2) $\left(-\frac{9}{17}\right)^6$; 3) $7{,}3^4$; 4) $(-0{,}1)^7$.

1.5. 1) $(3c)^5$; 2) $\left(t-\frac{5}{14}\right)^3$; 3) $(8s+1)^4$; 4) $\left(\frac{2}{7}ab\right)^4$;

5) $(n+m)^6$; 6) $(0{,}9\,kst)^3$.

Есептеңдер **(1.6—1.8)**:

1.6. 1) 6^3; 2) $1{,}4^3$; 3) $(-8)^4$; 4) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4$; 5) $(-0{,}2)^5$.

1.7. 1) 10^4; 2) $(-0{,}7)^3$; 3) $\left(-\frac{3}{4}\right)^4$; 4) $\left(1\frac{4}{5}\right)^3$.

1.8. 1) $(-2{,}8)^3$; 2) $\left(2\frac{1}{2}\right)^5$; 3) 7^4; 4) $1{,}1^3$; 5) $\left(-\frac{3}{5}\right)^5$.

B

Амалдарды орындаңдар **(1.9—1.11)** :

1.9. 1) $5^2 - 200$; 2) $13 - 3^3$; 3) $20 + 2^6$; 4) $2^4 - 3^2$.

1.10. 1) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \frac{29}{32}$; 2) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{22}{27}$; 3) $\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{11}{25}$;

4) $(1{,}2)^2 + 2{,}06$; 5) $(0{,}4)^4 - 1$; 6) $20 - (1{,}4)^2$.

1.11. 1) $3^5 - 2^6 : 40$; 2) $4^4 : 1000 - 0{,}3$;

3) $7^2 \cdot 2^3 + 608$; 4) $8^2 \cdot 3^3 - 728$.

1.12. Көбейтіндіні дәреже арқылы жазып, өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\underbrace{15 \cdot 15 \cdot ... \cdot 15}_{15 \text{ рет}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{22 \text{ рет}}$; 2) $\underbrace{2{,}8 \cdot 2{,}8 \cdot ... \cdot 2{,}8}_{10 \text{ рет}} \cdot \underbrace{c \cdot c \cdot ... \cdot c}_{37 \text{ рет}}$;

3) $\underbrace{\frac{10}{19} \cdot \frac{10}{19} \cdot ... \cdot \frac{10}{19}}_{18 \text{ рет}} \cdot \underbrace{y \cdot y \cdot ... \cdot y}_{11 \text{ рет}}$; 4) $\underbrace{(-7) \cdot (-7) \cdot ... \cdot (-7)}_{27 \text{ рет}} \cdot \underbrace{z \cdot z \cdot ... \cdot z}_{40 \text{ рет}}$;

5) $\underbrace{24 \cdot 24 \cdot ... \cdot 24}_{20 \text{ рет}} \cdot \underbrace{(x+3)(x+3) \cdot ... \cdot (x+3)}_{43 \text{ рет}}$; 6) $\underbrace{\frac{d}{4} \cdot \frac{d}{4} \cdot ... \cdot \frac{d}{4}}_{19 \text{ рет}} \cdot \underbrace{t \cdot t \cdot ... \cdot t}_{50 \text{ рет}}$.

1.13. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $x \cdot x \cdot x \cdot x + b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b$; 2) $y \cdot y \cdot y - s \cdot s \cdot s \cdot s \cdot s$;

3) $(5a) \cdot (5a) \cdot (5a) \cdot (5a) - \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}$; 4) $\frac{a}{5} \cdot \frac{a}{5} \cdot \frac{a}{5} \cdot \frac{a}{5} + z \cdot z$.

C

1.14. Амалдарды орындаңдар:

1) $10^3 - 5^2 : 8 + \left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot 81$; 2) $2{,}43 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 6^2(2^5 - 28)$;

3) $9^3 - 15^2 : 16 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 : \frac{27}{32}$; 4) $(7^2 - 51)^3 \cdot \frac{5}{9} + 3{,}6 : 9^2$.

1.15. 1) $x = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot 4^3 \cdot 3^4$; 2) $x = 3^3 \cdot 2^4 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2$;

3) $x = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot 24 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2$; 4) $x = \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot 27 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$

болса, x санының 25%-ын табыңдар.

1.16. Өрнектердің мәнін салыстырыңдар:

1) $8^3 - 600$ және $17^2 - 4^4$;

2) $-10^4 + 9^4$ және $(-15)^3$;

3) $0{,}4^3 + 1{,}6 \cdot 1{,}1$ және $1{,}5^3 - 11 \cdot 0{,}5^3$;

4) $(-2{,}2)^3 + 0{,}603 \cdot 2^4$ және $368 - 2^3 \cdot 6^4$.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

1.17. Есептеңдер және нәтижесін дәреже түрінде жазыңдар:

1) $2^3 \cdot 2^4$; 2) $3^2 \cdot 3^3$;

3) $\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$; 4) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2$.

1.18. Өрнектердің мәндерін салыстырыңдар:

1) $5^3 \cdot 5^4$ және 5^{12}; 2) $6^2 \cdot 6^6$ және 6^8;

3) $(-3)^2 \cdot (-3)^4$ және $(-3)^8$; 4) $4^4 \cdot 4^5$ және 4^9.

1.19. Тура теңдікті табыңдар және оларды теріп жазыңдар:

1) $7^2 \cdot 7^6 = 7^8$;

2) $(-6)^7 \cdot (-6)^2 = (-6)^{14}$;

3 $(0{,}5)^5 \cdot (0{,}5)^2 = (0{,}5)^7$;

4) $(-1{,}25)^3 \cdot (-1{,}25)^2 = (-1{,}25)^6$.

§ 2. НЕГІЗДЕРІ БІРДЕЙ ДӘРЕЖЕЛЕРДІ КӨБЕЙТУ

Негіздері бірдей дәрежелерді көбейту қалай орындалады?

Негіздері бірдей екі дәреженің көбейтіндісін қарастырайық: $a^6 \cdot a^2$. Көбейтуді орындау үшін натурал көрсеткішті дәреженің анықтамасын ескеріп $a^6 \cdot a^2$ өрнегін негізі a болатын дәреже түрінде жазайық:

$$a^6 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a; \quad a^2 = a \cdot a.$$

Түсіндіріңдер

1. $a^6 \cdot a^2 = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}_{6 \text{ рет}} \cdot \underbrace{a \cdot a}_{2 \text{ рет}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}_{(6+2) \text{ рет}} = a^8;$

2. a^6 және a^2 дәрежелерінің көрсеткіштері a^8 дәрежесі көрсеткішімен қалай байланысқан?

Негіздері бірдей екі дәрежені көбейткенде негізі өзгеріссіз қалып, ал дәреже көрсеткіштерінің қосылғанын байқаймыз.

Бұл қасиет кез келген негіздері бірдей дәрежелер үшін орындалады. Осы қасиеттің дұрыстығын дәлелдейік.

Егер a кез келген рационал сан және m, n кез келген натурал сан болса, онда

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Расында, $a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ рет}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ рет}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m+n \text{ рет}} = a^{m+n}.$

Сонымен натурал көрсеткішті дәреженің қасиетін дәлелдедік.

Негіздері бірдей екі дәреженің көбейтіндісінің мәні негізі өзгеріссіз қалатын, ал дәреже көрсеткіші берілген дәрежелердің көрсеткіштерінің қосындысын беретін дәрежеге тең.

Негіздері бірдей натурал көрсеткішті екі дәреженің көбейтіндісінің мәнін табу үшін мына ереже қолданылады.

Негіздері бірдей дәрежелерді көбейту үшін негізін өзгеріссіз қалдырып, дәреже көрсеткіштерін қосу керек.

Бұл ережені негіздері бірдей, натурал көрсеткіші үш және одан да артық дәрежелерді көбейту үшін де қолданады.

Түсіндіріңдер

Неліктен $d^3d^7dd^{11} = d^{3+7+1+11} = d^{22}$?

1. Дәреже көрсеткіштері жоқ және негіздері бірдей теріс болатын екі дәрежені көбейткенде қандай сан (теріс немесе оң) шығады?
2. Негіздері бірдей дәрежелерді көбейту ережесін қолдану үшін дәрежелердің негіздері қандай сан болуы мүмкін?

Жаттығулар

A

Өрнекті дәреже түрінде жазыңдар **(2.1-2.2)** :

2.1. 1) x^5x^{12}; 2) y^4y^{11}; 3) $z^{20}z^6$;

4) $40^{20}\cdot 40^3$; 5) $(0,3)^7\cdot(0,3)^{29}$; 6) $(8,4)^3\cdot(8,4)^{15}$;

7) $\left(\frac{2}{7}\right)^{31}\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^6$; 8) $\left(\frac{15}{19}\right)^3\cdot\left(\frac{15}{19}\right)^{19}$; 9) $\left(4\frac{4}{9}\right)^{14}\cdot\left(4\frac{4}{9}\right)^{28}$;

10) $(-5)^4\cdot(-5)^{11}$; 11) $\left(-\frac{1}{3}\right)^4\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^8$; 12) $(-6,2)^6\cdot(-6,2)^7$;

13) $(-c)^{10}\cdot(-c)^{51}$; 14) $\left(-\frac{d}{2}\right)^9\cdot\left(-\frac{d}{2}\right)^9$; 15) $(-1,4k)^5\cdot(-1,4k)^{20}$.

2.2. 1) $(3-a)^4\cdot(3-a)^{10}$; 2) $(x+y)^3\cdot(x+y)^{15}$;

3) $(2b-3)^6\cdot(2b-3)^{23}$; 4) $\left(\frac{1}{2}c+2\right)^{21}\cdot\left(\frac{1}{2}c+2\right)^{14}$;

5) $\left(4-\frac{2}{3}t\right)^{19}\cdot\left(4-\frac{2}{3}t\right)^2$; 6) $(9,2-k)^{15}\cdot(9,2-k)^{34}$.

Дәрежені негіздері бірдей екі дәреженің көбейтіндісі түрінде жазыңдар **(2.3-2.4)** :

2.3. 1) 9^{10}; 2) $\left(\frac{2}{3}\right)^{8}$; 3) $(81,4)^{6}$; 4) $\left(-\frac{4}{11}\right)^{15}$;

5) $(-20)^{7}$; 6) $\left(5\frac{1}{9}\right)^{40}$; 7) $(-0,09)^{13}$; 8) $\left(2\frac{5}{13}\right)^{28}$.

2.4. 1) y^{11}; 2) $(-d)^{41}$; 3) $(8,5c)^{14}$; 4) $\left(-3\frac{2}{3}x\right)^{13}$.

Теңдік тура болатындай етіп жұлдызшаның орнына сан қойыңдар **(2.5-2.6)** :

2.5. 1) $a^{31}=a^{19}\cdot a^{*}$; 2) $b^{24}=b^{*}\cdot b^{16}$;
3) $(-d)^{52}=(-d)^{34}\cdot(-d)^{*}$; 4) $(xy)^{9}=(xy)^{3}\cdot(xy)^{*}$;
5) $\left(\frac{k}{3}\right)^{20}=\left(\frac{k}{3}\right)^{10}\cdot\left(\frac{k}{3}\right)^{*}$; 6) $(1,3t)^{*}:(1,3t)^{8}=(1,3t)^{13}$.

2.6. 1) $x^{40}=x^{9}\cdot x^{*}\cdot x^{23}$; 2) $a^{*}\cdot a^{5}\cdot a^{23}=a^{41}$;
3) $(ab)^{*}\cdot(ab)\cdot(ab)^{9}=a^{14}$; 4) $\left(\frac{c}{4}\right)^{20}\cdot\left(\frac{c}{4}\right)^{*}=\left(\frac{c}{4}\right)\cdot\left(\frac{c}{4}\right)^{25}$;
5) $(-k)^{5}\cdot(-k)^{*}\cdot(-k)^{5}=(-k)^{15}$; 6) $\left(\frac{2}{5}y\right)^{6}\cdot\left(\frac{2}{5}y\right)^{*}=\left(\frac{2}{5}y\right)\cdot\left(\frac{2}{5}y\right)^{8}$.

B

Өрнекті ықшамдаңдар **(2.7-2.8)** :

2.7. 1) $5^{k}\cdot 5^{4}$; 2) $6^{m}\cdot 6^{10}$; 3) $1,7^{7}\cdot 1,7^{c}$;
4) $(-4)^{3}\cdot(-4)^{d}$; 5) $\left(\frac{6}{13}\right)^{c}\cdot\left(\frac{6}{13}\right)^{6}$; 6) $(-5,2)^{9}\cdot(-5,2)^{n}$.

2.8. 1) $8^{4n}\cdot 8^{n}$; 2) $(-3)^{3k}\cdot(-3)^{8k}$; 3) $\left(\frac{8}{9}\right)^{11t}\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^{6t}$;
4) $\left(6\frac{2}{3}\right)^{9m}\cdot\left(6\frac{2}{3}\right)^{9m}$; 5) $(-4,1)^{9t}\cdot(-4,1)^{9t}$; 6) $3,7^{8n}\cdot 3,7^{8n}$.

Дәрежені негіздері бірдей үш дәреженің көбейтіндісі түрінде жазыңдар **(2.9-2.10)** :

2.9. 1) 15^{13n}; 2) $(-42)^{8m}$; 3) $\left(\frac{9}{16}\right)^{20t}$; 4) $(-1,1)^{11k}$.

2.10. 1) $(-100)^{6k}$; 2) 99^{7k}; 3) $\left(8\frac{3}{5}\right)^{17t}$; 4) $7{,}7^{3k}$.

2.11. Дәрежені негіздері бірдей дәрежелердің көбейтіндісі түрінде жазыңдар. Әртүрлі жағдайларды қарастырыңдар:

1) a^3; 2) $(-6)^4$; 3) $\left(\frac{5}{18}\right)^5$; 4) $(x+y)^4$.

C

Теңдік тура болатындай етіп жұлдызшаның орнына өрнек қойыңдар **(2.12-2.13)** :

2.12. 1) $a^k \cdot a^* = a^{k+n}$; 2) $b^* \cdot b^{3n} = b^{m+3n}$;
3) $(cd)^* = (cd)^{2t} \cdot (cd)^5$; 4) $(5z)^6 \cdot (5z)^* = (5z)^{6+3k}$.

2.13. 1) $c^k \cdot c^* = c^{2k+1}$; 2) $d^{5k} \cdot d^* = d^{8k+2}$;
3) $z^{6k} \cdot z^* = z^{10k+10}$; 4) $m^* \cdot m^{13k} = m^{16k+13}$.

2.14. Берілген теңдіктің тура теңдік болатынын дәлелдеңдер:
1) $x^{k+4n-9} \cdot x^{7-3k} \cdot x^{6+2k-4n} = x^4$;
2) $x^{5m+11} \cdot x^{20-4m+2n} \cdot x^{m-2n-30} = x^{2m+1}$.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

2.15. Дәрежелерді көбейтінді түрінде жазыңдар және бөлшекті қысқартыңдар:

1) $\frac{3^5}{3^4}$; 2) $\frac{4^4}{4^5}$; 3) $\frac{(2,3)^4}{(2,3)^3}$; 4) $\frac{(-0,8)^3}{(-0,8)^2}$.

2.16. Тура теңдіктерді көшіріп жазыңдар:

1) $\frac{2^9}{2^3} = 2^3$; 2) $\frac{7^8}{7^4} = 7^4$; 3) $\frac{(0,25)^{12}}{(0,25)^4} = (0,25)^8$.

§ 3. НЕГІЗДЕРІ БІРДЕЙ ДӘРЕЖЕЛЕРДІ БӨЛУ. КӨРСЕТКІШІ НӨЛГЕ ТЕҢ ДӘРЕЖЕ

Негіздері бірдей дәрежелерді көбейту қалай орындалады? Көрсеткіші нөлге тең дәреже дегеніміз не?

Натурал көрсеткішті негіздері бірдей екі дәрежені, мысалы, $b^{15} : b^9$ бөліндісін қарастырыңдар.

Ойланайық

1. $b^{15} : b^9$ өрнегін берілген негіздегі дәреже түрінде қалай жазуға болады?
2. Бөлу қалай орындалған: $b^{15} : b^9 = \frac{b^{15}}{b^9} = \frac{b^9 \cdot b^6}{b^9} = b^6$?
3. b^{15} және b^9 дәрежелерінің көрсеткіштері b^6 дәрежесінің көрсеткішімен қалай байланысқан?

Негіздері бірдей дәрежелерді бөлгенде негізі өзгеріссіз қалғанын, көрсеткіші алымы мен бөліміндегі дәрежелердің көрсеткіштерінің айырымының мәніне тең болғанын көріп отырмыз.

Мына қасиеттің дұрыстығына көз жеткізейік.

Егер b — нөлге тең емес кез келген рационал сан, ал m және n сандары $m > n$ болатындай кез келген натурал сандар болса, онда $\frac{b^m}{b^n} = b^{m-n}$.

Дәлелдеуі. $\frac{b^m}{b^n} = \frac{b^n \cdot b^{m-n}}{b^n} = b^{m-n}$, яғни $b^m : b^n = b^{m-n}$, $m > n$ және $b \neq 0$.

Дәлелденген қасиетті тұжырымдайық:

нөлге тең емес негіздері бірдей натурал көрсеткішті екі дәреженің бөліндісінің мәні негізі өзгеріссіз қалатын, көрсеткіші бөлінгіш пен бөлгіштің дәреже көрсеткіштерінің айырымы болатын дәрежеге тең.

Нөлге тең емес негіздері бірдей екі дәреженің бөліндісінің мәнін табу үшін мына ережені қолдануға болады:

негіздері бірдей екі дәреженің бөліндісінің мәнін табу үшін негізін өзгеріссіз қалдырып, бөлінгіштің дәреже көрсеткішінен бөлгіштің дәреже көрсеткішін азайту керек.

Түсіндіріңдер

Негіздері бірдей дәрежелерді бөлу қалай орындалған:

$$\frac{t^{41}}{t^{29}} = t^{41-29} = t^{12}?$$

Негіздері бірдей дәрежелерді бөлу ережесін көрсеткіштері бірдей болған жағдайда қарастырайық. Ол үшін қандай да бір дәрежені өз-өзіне бөлейік. Мысалы, a^n дәрежесін a^n дәрежесіне бөлуді қарастырайық. Нөлге бөлуге болмайтын болғандықтан, $a \neq 0$.

Сонда $\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$, ал $\frac{a^n}{a^n} = 1$, сондықтан

$a^0 = 1$.

Демек, кез келген $a \neq 0$ саны үшін $a^0 = 1$.

Мысалы: $10^0 = 1$; $5^0 = 1$; $28^0 = 1$; $(-16)^0 = 1$.

1. Негіздері бірдей дәрежелерді бөлу ережесін қолдану үшін дәреженің негізі мен көрсеткіші қандай болуы керек?
2. Көрсеткіші нөлге тең дәреженің мәнін тапқанда неліктен дәреженің негізі нөлге тең болмауы керек?
3. a-ның қандай мәндерінде a^0 дәрежесінің мәні 1-ге тең болады?

Жаттығулар

А

Өрнекті дәреже түрінде жазыңдар **(3.1—3.3)**:

3.1. 1) $x^{10} : x^7$; 2) $y^{13} : y^8$; 3) $z^{41} : z^{19}$;
4) $35^{21} : 35^9$; 5) $(1,8)^{14} : (1,8)^9$; 6) $(0,8)^{50} : (0,8)^{31}$;
7) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{28} : \left(-\frac{1}{2}\right)^{20}$; 8) $\left(-\frac{17}{20}\right)^{43} : \left(-\frac{17}{20}\right)^{26}$; 9) $\left(-5\frac{4}{18}\right)^{17} : \left(-5\frac{4}{13}\right)^{8}$.

3.2. 1) $(-8)^{50} : (-8)^{30}$; 2) $\left(\frac{3}{14}\right)^3 : \left(\frac{3}{14}\right)^2$; 3) $(4,1)^{81} : (4,1)^{72}$;
4) $\left(\frac{a}{3}\right)^{31} : \left(\frac{a}{3}\right)^{21}$; 5) $(-k)^{38} : (-k)^{37}$; 6) $(-6,8)^{43} : (-6,8)^{42}$.

3.3. 1) $(9+x)^6:(9+x)^4$; 2) $(m-n)^9:(m-n)^5$;

3) $(2x-1)^7:(2x-1)^4$; 4) $\left(\frac{a}{5}-3\right)^{25}:\left(\frac{a}{5}-3\right)^{23}$;

5) $\left(4+\frac{b}{6}\right)^{10}:\left(4+\frac{b}{6}\right)$; 6) $(8{,}8-c)^{44}:(8{,}8-c)^{34}$.

Дәрежені негіздері бірдей екі дәреженің бөліндісі түрінде жазыңдар **(3.4-3.5)** :

3.4. 1) 50^{22}; 2) $\left(\frac{7}{3}\right)^{10}$; 3) $(-7{,}2)^{34}$; 4) $\left(-\frac{8}{9}\right)^{41}$.

3.5. 1) y^{12}; 2) $(-z)^{16}$; 3) $(-1{,}8\,d)^{51}$; 4) $\left(\frac{2}{11}c\right)^{77}$.

Теңдік тура болатындай етіп жұлдызшаның орнына сан жазыңдар **(3.6-3.7)** :

3.6. 1) $200^{10}=200^{21}:200^{*}$; 2) $4{,}45^{39}:4{,}45^{*}=4{,}45^{30}$;

3) $(-5ab)^{*}:(-5ab)=(-5ab)^{11}$; 4) $\left(\frac{5}{16}t\right)^{*}:\left(\frac{5}{16}t\right)^{2}=\left(\frac{5}{16}t\right)^{22}$.

3.7. 1) $x^{60}=x^{40}:x^{15}:x^{*}$; 2) $a^{*}:a^{4}:a=a^{7}$;

3) $\left(-\frac{8}{15}k\right)^{38}=\left(-\frac{8}{15}k\right)^{36}:\left(-\frac{8}{15}k\right)^{*}:\left(-\frac{8}{15}\right)$;

4) $(1{,}1\,t)^{8}:(1{,}1\,t):(1{,}1\,t)^{*}=1{,}1\,t$.

3.8. $4{,}5^{0}$; $\left(-\frac{4}{5}\right)^{0}$; x^{0}; $(-2x+y)^{0}$; $(8{,}6\,a)^{0}$; $(-9{,}1\,bc)^{0}$ өрнегін есептеңдер.

3.9. Өрнекті ықшамдаңдар :

1) $a^{100}:a^{89}\cdot a^{2}$; 2) $b^{98}:b^{88}\cdot b^{15}$;

3) $(ax)^{41}\cdot(ax)^{12}:(ax)^{33}$; 4) $(3z)^{56}:(3z)^{51}\cdot(3z)$;

5) $\left(\frac{c}{5}\right)^{66}:\left(\frac{c}{5}\right)^{62}\cdot\left(\frac{c}{5}\right)^{3}$; 6) $(-kt)^{49}:(-kt)^{39}\cdot(-kt)^{10}$.

3.10. Есептеңдер:

1) $3^{25}:3^{22}\cdot3^{2}$; 2) $6^{20}\cdot6^{18}:6^{35}$;

3) $\left(\frac{5}{9}\right)^{40}:\left(\frac{5}{9}\right)^{36}:\left(\frac{5}{9}\right)^{2}$; 4) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{50}:\left(-\frac{1}{2}\right)^{49}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{4}$;

5) $(1{,}1)^{17}\cdot(1{,}1):(1{,}1)^{16}$; 6) $(-1{,}3)^{29}:(-1{,}3)^{28}\cdot(-1{,}3)$.

B

3.11. 1) $a = 5; -\frac{3}{11}; 2{,}8; -40$ болса, онда $\frac{a^{20} \cdot a^{20}}{a^{17} \cdot a^{19}}$;

2) $b = 8; -1{,}3; \frac{5}{3}; -6$ болса, онда $\frac{b^{40} \cdot b^{10} \cdot b^{38}}{b^{37} \cdot b^{49}}$ өрнегінің мәнін табыңдар.

3.12. x айнымалысының қандай мәнінде

1) $100^{34} : 100^{32} : 100^{x}$; 2) $(-40)^{50} : (-40)^{x} : (-40)^{21}$;

3) $\left(\frac{1}{6}\right)^{42} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{9} : \left(\frac{1}{6}\right)^{x}$; 4) $(-9{,}3)^{x} : (-9{,}3)^{24} : (-9{,}3)^{48}$

өрнегінің мәні 1-ге тең болады?

3.13. Өрнектердің мәндерін салыстырыңдар:

1) $4^5 : 4^3$ және $2^8 : 2^6$;

2) $(-9)^{10} : (-9)^{9}$ және $(-8)^{9} : (-8)^{8}$;

3) $10^{20} : 10^{19} \cdot 10^{2}$ және $2^{40} : 2^{35} \cdot 2^{5}$;

4) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{60} : \left(-\frac{1}{3}\right)^{58}$ және $\left(-\frac{1}{2}\right)^{40} : \left(-\frac{1}{2}\right)^{36}$.

Өрнекті ықшамдаңдар **(3.14-3.15)**:

3.14. 1) $9^{n} : 9^{5}$; 2) $(-10)^{6} : (-10)^{m}$; 3) $3{,}7^{k} : 3{,}7^{11}$;

4) $\left(\frac{3}{16}\right)^{6} : \left(\frac{3}{16}\right)^{d}$; 5) $\left(8\frac{1}{4}\right) : \left(8\frac{1}{4}\right)^{c}$; 6) $(-2{,}4)^{t} : (-2{,}4)^{1}$.

3.15. 1) $11^{k} : 11^{4} \cdot 11^{k-1}$; 2) $20^{10} : 20^{t} \cdot 20^{3+t}$;

3) $\left(\frac{1}{4}\right)^{3k} : \left(\frac{1}{4}\right)^{k} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{2k+3}$; 4) $(-9)^{20t} : (-9)^{t-5} : (-9)$;

5) $\left(-\frac{1}{9}\right)^{5t-2} : \left(-\frac{1}{9}\right) \cdot \left(-\frac{1}{9}\right)^{5t}$; 6) $2{,}1^{k-3} \cdot 2{,}1^{6t} : 2{,}1^{4t-3}$.

C

3.16. Есептеңдер:

1) $(2^{30} : 2^{15} : 2^{10}) \cdot (5^{27} : 5^{26} \cdot 5)$;

2) $(3^{13} : 3^{12} \cdot 3^{3}) : (7^{17} : 7^{15} : 7^{2})$;

3) $(4^{10} : 4^{8}) \cdot (6^{8} : 6^{6}) : (24^{37} : 24^{34})$;

4) $(9^{22} : 9^{20}) \cdot (8^{5} : 8^{3}) : (6^{18} : 6^{15})$.

3.17. Дәрежені негіздері бірдей екі дәреженің бөліндісі түрінде жазыңдар:

1) a^{k+5}; 2) d^{k-m}; 3) b^{2k-1}; 4) c^{4+5k}.

3.18. Есептеңдер:

1) $\frac{(-5)^{6} \cdot (-5)^{7} \cdot (-5)^{8}}{(-5)^{14} \cdot (-5)^{4}}$; 2) $\frac{1{,}2^{40} \cdot 1{,}2^{25} \cdot 1{,}2^{4}}{1{,}2^{59} \cdot 1{,}2^{8}}$;

3) $\dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^{10} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{20} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{30}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{34} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{23}}$; 4) $\dfrac{\left(-\frac{1}{6}\right)^{25} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^{19} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^{16}}{\left(-\frac{1}{6}\right)^{8} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^{49}}$.

3.19. Өрнектің мәнін табыңдар:

1) $\dfrac{(-6)^{19} \cdot (-6)^{33}}{3{,}2^{24} \cdot 3{,}2^{6}} \cdot \dfrac{3{,}2^{96} \cdot 3{,}2^{12}}{(-6)^{28} \cdot (-6)^{29}} \cdot \dfrac{(-6)^{6}}{3{,}2^{77}}$;

2) $\dfrac{1{,}7^{40} \cdot 1{,}7^{12} \cdot 20^{30}}{1{,}7^{39} \cdot 20^{6} \cdot 20^{7}} \cdot \dfrac{20^{7} \cdot 20^{8}}{1{,}7^{13} \cdot 1{,}7^{9}} \cdot \dfrac{1{,}7^{10}}{20^{31}}$.

3.20. Теңдіктің дұрыстығын тексеріңдер :

1) $\dfrac{x^{100} \cdot x^{20} \cdot x^{60}}{x^{89} \cdot x^{72}} = \dfrac{x^{55} \cdot x^{36}}{x^{41} \cdot x^{13} \cdot x^{18}}$;

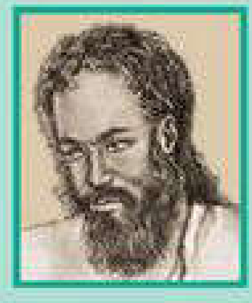
2) $\dfrac{x^{33} \cdot x \cdot x^{69}}{x^{47} \cdot x^{49}} = \dfrac{x^{53} \cdot x^{56} \cdot x^{60}}{x^{81} \cdot x^{2} \cdot x^{79}}$;

3) $\dfrac{a^{17} \cdot a^{47} \cdot a^{56}}{a^{81} \cdot a^{39}} = \dfrac{a^{80} \cdot a^{5} \cdot a^{37}}{a^{59} \cdot a^{63}}$;

4) $\dfrac{a^{31} \cdot a^{18} \cdot a^{27} \cdot a^{19}}{a^{22} \cdot a^{54} \cdot a^{16}} = \dfrac{a^{39} \cdot a^{23}}{a^{59}}$.

Хабарлама дайындаңдар

3.21. Әл-Каши — XV ғасырдың басында $a^0 = 1$ теңдігін (мұндағы $a \neq 0$) алғаш рет өз еңбектерінде қолданған самарқандтық ғалым.



Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

3.22. Өрнекті дәреже түрінде жазыңдар:
1) $(2^3)^4$; 2) $(4^2)^3$; 3) $((-2)^3)^2$; 4) $(5^2)^3$.

3.23. Тура теңдіктерді теріп жазыңдар:
1) $(7^2)^3 = 7^5$; 2) $(8^4)^2 = 8^8$; 3) $(3^3)^2 = 3^9$.

§ 4. ДӘРЕЖЕНІ ДӘРЕЖЕГЕ ШЫҒАРУ

Дәрежені дәрежеге шығару қалай орындалады?

$(a^7)^5$ өрнегі негізі a^7 және көрсеткіші 5-ке тең дәреже түрінде берілген.

Дәлелдеңдер

$(a^7)^5 = a^{35}$ теңдігінің орындалатынына натурал көрсеткішті дәреженің анықтамасын қолданып көз жеткізіңдер.

$(x^4)^3$ және $(2^5)^6$ өрнектерін негізі сәйкесінше x және 2 болатын дәреже түрінде жазайық:

$$(x^4)^3 = x^4 \cdot x^4 \cdot x^4 = x^{4\cdot 3} = x^{12};$$

$$(2^5)^6 = 2^5 \cdot 2^5 \cdot 2^5 \cdot 2^5 \cdot 2^5 \cdot 2^5 = 2^{5\cdot 6} = 2^{30}.$$

Дәрежені дәрежеге шығару кезінде дәреженің негізі өзгеріссіз қалып, дәреже көрсеткіштерінің көбейтілгенін көріп отырмыз. Енді мына қасиеттің дұрыстығын дәлелдейік:

егер a — кез келген сан және m мен n — бүтін теріс емес сандар болса, онда

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Расында да натурал көрсеткішті дәреженің анықтамасы бойынша $(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n \text{ рет}}$. Негіздері бірдей дәрежелерді көбейту ережесін

қолдансақ, $\underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n \text{ рет}} = a^{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{n \text{ рет}}}$.

Бірдей қосылғыштардың қосындысын, яғни $\underbrace{m+m+\ldots+m}_{n \text{ рет}}$-ді көбейтіндімен алмастырайық: $a^{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{n \text{ рет}}} = a^{mn}$. Демек, дәрежені дәрежеге шығарғанда мына ережені қолдануға болады.

Дәрежені дәрежеге шығару үшін негізін өзгеріссіз қалдырып, дәреже көрсеткіштерін көбейтеді.

1. Дәрежені дәрежеге шығару ережесін қолдану үшін дәреженің негізі мен көрсеткіші қандай болуы керек?
2. Дәрежені дәрежеге шығаруды амалын әруақытта орындауға бола ма?

Жаттығулар

A

Негізі b болатын дәреже түрінде жазыңдар **(4.1-4.2)** :

4.1. 1) $(b^2)^3$; 2) $(b^3)^2$; 3) $(b^4)^3$; 4) $(b^2)^4$.

4.2. 1) $(b^5)^2 \cdot b^3$; 2) $b \cdot (b^3)^4$; 3) $b^8 \cdot (b^{10})^3$;
4) $b^6 \cdot (b^4)^8$; 5) $(b^7)^5 \cdot b$; 6) $(b^{11})^4 \cdot b^{10}$;
7) $(b^5)^{10} : b^{31}$; 8) $b^{43} : (b^9)^4$; 9) $(b^6)^{12} \cdot b^{59}$;
10) $b^{100} : (b^5)^4$; 11) $(b^{17})^5 : b^{81}$; 12) $b^{79} : (b^{13})^6$.

Ықшамдаңдар **(4.3-4.4)**:

4.3. 1) $(a^4)^2 \cdot (a^3)^4$; 2) $(b^4 b)^6$; 3) $(c^5)^8 : (c^6)^6$;
4) $(d^8 d^2)^3$; 5) $(c^9)^5 : (c^4)^{10}$; 6) $(kk^{11})^7$.

4.4. 1) $(b^4)^6 \cdot (b^5)^4$; 2) $(b^{16})^4 : (b^3)^{20}$; 3) $(b^9)^{12} : (b^{10})^{10}$;
4) $(b^{30})^3 : (b^4)^{20}$; 5) $(b^3)^7 \cdot (b^5)^5$; 6) $(b^7)^6 : (b^8)^5$.

4.5. Өрнекті дәреженің квадраты түрінде жазыңдар:
1) a^6; 2) x^{20}; 3) y^{22}; 4) z^{48}.

4.6. 1) a^6; 2) x^{21}; 3) y^{30}; 4) z^{72}
өрнегін дәреженің кубы түрінде жазыңдар.

4.7. Есептеңдер:
1) $(5^2)^2 - 600$; 2) $(3^3)^2 + 271$; 3) $1000 - 5 \cdot (2^3)^2$;
4) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^4\right)^2 \cdot 320$; 5) $(2^4)^2 - 200$; 6) $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)^3 \cdot \frac{3645}{32}$.

B

4.8. Өрнектің мәнін табыңдар:
1) $(b^5)^5 \cdot (b^2)^7 : (b^6)^4$, мұндағы $b = -2$;

1) $(a^2)^5 \cdot (a^{10})^2 : (a^{14})^2$, мұндағы $a = -\frac{3}{7}$.

4.9. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:
1) $(a^2)^4 \cdot (a^3)^5 : (a^3)^7 = a^2$; 2) $(x^3)^6 \cdot (x^2)^5 = x^{28}$.

4.10. Ықшамдаңдар:

1) $\frac{(125b^2)^3}{25b^4}$; 2) $\frac{45x^{14}y^9}{-27x^{12}(-y^3)^3}$; 3) $\frac{-32c^{15}(d^4)^5}{24c^{13}d^{17}}$.

C

4.11. Есептеңдер:

1) $\dfrac{(13^5)^{11} \cdot (13^4)^{10}}{(13^{47})^2}$; 2) $\dfrac{(7^5)^6 \cdot 7^{27}}{(7^{14})^4}$;

3) $\dfrac{(6^8)^9 \cdot (6^4)^5}{(6^{24})^3 \cdot (6^3)^6}$; 4) $\dfrac{(19^{11})^7 \cdot (19^7)^2}{(19^{20})^3 \cdot 19^{29}}$;

5) $\dfrac{(3^{15})^5 \cdot (3^{12})^2}{(3^2)^{25} \cdot (3^3)^{16}}$; 6) $\dfrac{(2^{40})^3 \cdot (2^{12})^5}{(2^{45})^2 \cdot (2^{11})^4}$.

4.12. Өрнектің мәнін табыңдар:

1) $(y^4)^5 : (y^9)^2 \cdot y^3$, мұндағы $y = -1$;

2) $(z^3)^9 : (z^4)^6 \cdot z$, мұндағы $z = -2$.

4.13. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $(a^{2k})^5 : (2a^{3k}) - 1{,}5\, a^{7k} = -\, a^{7k}$;

2) $(y^{2n})^6 : (5y^{5n})^2 + 0{,}96\, y^{2n} = y^{2n}$.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

4.14. Тура теңдіктерді теріп жазыңдар:

1) $(ab)^2 = a^2b^2$; 2) $(7^2 \cdot 4^3)^2 = 7^2 \cdot 4^9$;

3) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 = \dfrac{a^2}{b^2}$; 4) $\left(\dfrac{4}{7}\right)^3 = \dfrac{4^3}{7}$.

4.15. Өрнектер дің мәндерін салыстырыңдар:

1) $(2^3b^2)^3$ және 2^9b^6; 2) $(m^2c^3)^4$ және m^8c^7;

3) $\left(\dfrac{3}{11}\right)^2$ және $\dfrac{3^2}{11^2}$; 4) $\left(\dfrac{2}{9}\right)^3$ және $\dfrac{2^3}{9^3}$.

4.16. $|3x - 7|$ m 3 теңсіздігі ақиқат болатын дай ең кіші натурал санды табыңдар.

§ 5. КӨБЕЙТІНДІНІ ЖӘНЕ БӨЛІНДІНІ ДӘРЕЖЕГЕ ШЫҒАРУ

Көбейтінді және бөліндіні дәрежеге шығарудың қандай қасиеті бар?

$(3 \cdot 8)^4$ дәрежесін 3^4 және 8^4 дәрежелерінің көбейтіндісі түрінде қалай жазуға болады?

Түсіндіріңдер

$(3 \cdot 8)^4 = (3 \cdot 8) \cdot (3 \cdot 8) \cdot (3 \cdot 8) \cdot (3 \cdot 8) = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 3^4 \cdot 8^4$ теңдігін қолданып, $(3 \cdot 8)^4$ дәрежесін $3^4 \cdot 8^4$ түрінде жазуға болатынын түсіндіріңдер.

Көбейтіндіні дәрежеге шығарғанда әр көбейткіш сол дәрежеге шығарылып, шыққан дәрежелердің көбейтілетінін көріп отырмыз. Енді мына қасиеттің дұрыстығына көз жеткізейік.

Егер a және b — кез келген рационал сандар, ал m — натурал сандар болса, онда $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$.

Расында, $(a \cdot b)^m = \underbrace{(ab) \cdot (ab) \cdot \ldots \cdot (ab)}_{m \text{ рет}}$

Көбейткіштердің орнын ауыстыруға болғандықтан,

$$\underbrace{(ab) \cdot (ab) \cdot \ldots \cdot (ab)}_{m \text{ рет}} = \underbrace{aa \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ рет}} \cdot \underbrace{bb \cdot \ldots \cdot b}_{m \text{ рет}} = a^m \cdot b^m.$$

Көбейт індіні дәрежеге шығарған кезде мына ережені қолдануға болады:

көбейтіндіні дәрежеге шығару үшін әр көбейткішті сол дәрежеге шығарып, шыққан дәрежелерді көбейту керек.

Мысалы, $(2 \cdot 10)^4 = 2^4 \cdot 10^4 = 16 \cdot 10000 = 160\ 000.$

$\left(\frac{2}{3}\right)^4$ мысалын негізге алып, бөліндіні дәрежеге шығару жолын қарасты райық. Натурал көрсет кішті дәреженің анықтамасы бойынша

$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$. Бөлшектерді көбейтудің ережесін ескерсек, $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}$. Бірдей көбейткіштердің көбейтіндісін дәрежемен алмастырайық: $\frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{2^4}{3^4}$. Демек, $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4}$.

Бөлшекті дәрежеге шығару үшін оның алымы мен бөлімін жеке-жеке дәрежеге шығару керегін көріп отырмыз.

Енді мына қасиеттің дұрыстығын дәлелдейік.

Егер a — бүтін сан, b және n — натурал сандар болса, онда

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Расында натурал көрсеткішті дәреженің анықтамасы бойынша,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}}_{n \text{ рет}} = \frac{\overbrace{aa \ldots a}^{n \text{ рет}}}{\underbrace{bb \ldots b}_{n \text{ рет}}} = \frac{a^n}{b^n}.$$

Бөлшекті дәрежеге шығарғанда мына ережені қолдануға болады.

> Бөлшекті дәрежеге шығару үшін оның алымы мен бөлімін сол дәрежеге шығарып дәрежелерді бөлу керек.

Мысалы, $\left(-\frac{2}{k}\right)^6 = \left(\frac{2}{k}\right)^6 = \frac{2^6}{k^6} = \frac{64}{k^6}$.

1. 1) Көбейтіндіні; 2) бөлшекті дәрежеге шығару ережесін қолдану үшін дәреженің негізі мен көрсеткіші қандай болу керек?
2. Көбейтіндіні немесе бөлшекті натурал дәрежеге шығарған кезде теріс сан немесе нөл шығуы мүмкін бе?

Жаттығулар

А

Дәрежені дәрежелердің көбейтіндісі түрінде жазыңдар **(5.1-5.2)**:

5.1. 1) $(ax)^7$; 2) $(yz)^{10}$; 3) $(mn)^{15}$; 4) $(cd)^{20}$.

5.2. 1) $(2a)^{20}$; 2) $(1{,}5\,b)^5$; 3) $\left(\frac{2}{17}c\right)^7$; 4) $(-4\,d)^{12}$.

Дәрежені дәрежелердің бөліндісі түрінде жазыңдар **(5.3-5.4)** :

5.3. 1) $\left(\frac{a}{y}\right)^3$; 2) $\left(\frac{n}{m}\right)^{10}$; 3) $\left(\frac{k}{c}\right)^{19}$; 4) $\left(\frac{d}{x}\right)^{31}$.

5.4. 1) $\left(\frac{2}{b}\right)^5$; 2) $\left(\frac{d}{7}\right)^4$; 3) $\left(\frac{5}{a}\right)^{11}$; 4) $\left(-\frac{6}{n}\right)^8$.

5.5. Өрнекті көбейтіндінің дәрежесі түрінде жазыңдар:

1) $2^8 \cdot a^8$; 2) $5^5 \cdot b^5$; 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^7 c^7$; 4) $\left(\frac{2}{15}\right)^{10} d^{10}$.

5) $4^6 a^6 b^6$; 6) $8^9 c^9 d^9$; 7) $\left(\frac{4}{11}\right)^{11} n^{11} m^{11}$; 8) $x^{13} y^{13} z^{13}$.

5.6. Өрнекті бөлшектің дәрежесі түрінде жазыңдар:

1) $\frac{4^{10}}{x^{10}}$; 2) $\frac{7^{13}}{y^{13}}$; 3) $\frac{z^{21}}{6^{21}}$; 4) $\frac{t^{39}}{9^{39}}$.

Ықшамдаңдар **(5.7-5.8)** :

5.7. 1) $\frac{(a \cdot b)^3}{b^2}$; 2) $\left(\frac{x}{y}\right)^5 \cdot y^7$; 3) $\frac{(d \cdot t)^9}{d^7}$;

4) $\frac{(x \cdot y)^6}{x^5}$; 5) $\frac{(a \cdot c)^{10}}{c^8}$; 6) $m^{12} \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^{10}$.

5.8. 1) $\frac{\left(x^5 y^6\right)^4}{x^{20} y^{22}}$; 2) $\left(\frac{a^4}{b^3}\right)^5 \cdot b^{17}$; 3) $\frac{\left(x^8 y^4\right)^3}{x^{23} y^{12}}$;

4) $\frac{a^{21} b^{34}}{\left(a^{10} b^{17}\right)^2}$; 5) $y^{20} \cdot \left(\frac{z^2}{y^5}\right)^4$; 6) $\frac{z^{19} t^{41}}{\left(z^6 t^{13}\right)^3}$.

B

5.9. Өрнектің мәнін табыңдар:

1) $(a^4 b^5)^2 : (a^2 b^2)^3$, мұндағы $a = -0{,}5$, $b = 2$;

2) $(x^7 y^4)^3 : (x^{10} y^5)^2$, мұндағы $x = -3$, $y = \frac{2}{3}$;

3) $(-2a^6b^3)^3 : (5a^8b^4)^2$, мұндағы $a = \frac{7}{8}$, $b = -\frac{3}{25}$;

4) $(3a^9b^3)^2 : (-4a^4b)^4$, мұндағы $a = -\frac{5}{9}$, $b = -16$.

5.10. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $\left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot (2^5)^3 \cdot 3^7 : (2^{10} \cdot 3)^2 = 1$;

2) $(7^2)^8 \cdot (6^3)^4 : (7^4 \cdot 6^3)^4 = 1$;

3) $\left(\frac{4}{5}\right)^6 \cdot (4^3)^3 \cdot 5^8 : (4^7 \cdot 5)^2 = 4$;

4) $(9^4 \cdot 8^3)^5 : (9^{10})^2 : (8^2)^7 = 8$.

Өрнекті ықшамдаңдар **(5.11-5.12)** :

5.11. 1) $(2x^5y^7)^3 : (x^{14}y^{20}) - (3xy^5)^3 : (x^2y^{14})$;

2) $(-3a^4b^5)^2 \cdot (-2a^2b^3)^3 : (-72a^6b^9)^2 + a^2b$;

3) $(5x^6y^2)^3 \cdot (-x^8y^7)^2 : (-0{,}2x^{15}y^{10})^2 - 10x^4$;

4) $(-2a^{10}b^{20})^2 : (-a^2b^3)^3 : (-2a^5b^{24})^2$.

5.12. 1) $(x^{11}y^{12}z^{13})^2 : (x^2yz^2)^9 \cdot (xyz^5)^2$;

2) $\left(\frac{x}{y}\right)^5 \cdot \left(\frac{x^4}{y^3}\right)^3 \cdot \left(\frac{x^8}{y^{10}}\right)^2 \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^5$.

C

5.13. 1) $a = -2$, $b = -\frac{1}{2}$ болса, онда $(a^3b^5)^5 : (a^7b^{12})^2 \cdot (ab)^3$;

2) $a = -\frac{1}{3}$, $b = -3$ болса, онда $\left(\frac{a^4}{b^5}\right)^2 \cdot \left(\frac{b^6}{a^3}\right)^2 : (ab)$

өрнегінің мәнін табыңдар.

5.14. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $(4^k3^n)^2 : (4^{k-1}3^{n-1})^2$;

2) $(7^m9^n)^3 : (7^{m-2}9^n)^3$;

3) $(11^k5^t)^4 : (11^k5^{t-1})^4$;

4) $(13^m6^k)^3 : (13^m6^{k-1})^3$.

5.15. Есептеңдер:

1) $(100^{10} \cdot 9^3)^7 \cdot (100^{20} \cdot 9^6)^2 : (100^{109} \cdot 9^{33})$;

2) $(0{,}15^{16} \cdot 3^7)^5 \cdot (3^3 \cdot 0{,}15^{10})^3 : (3^{20} \cdot 0{,}15^{55})^2$;

3) $\left(\left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^6\right)^{10} : \left(\left(\frac{4}{5}\right)^{12} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^6\right)^5$;

4) $\left(\left(\frac{5}{6}\right)^7 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^3\right)^8 : \left(\left(\frac{6}{7}\right)^{11} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{27}\right)^2.$

5.16. 1) $((a^2)^3)^5 \cdot (a^{15}b)^2 : a^{60} - b^2$;

2) $(x^5y)^3 \cdot ((y^4)^3)^4 : y^{51} - x^{15}$ өрнегінің мәні нөлге тең болатынын дәлелдеңдер.

5.17. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $\left(\frac{2}{3}\right)^8 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^9 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{10} = 3{,}75$;   2) $(4 \cdot 7)^{10} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{10} : (7^5 \cdot 3^4)^2 = 9.$

5.18. 64; 729 сандарын а) негізі теріс; ә) көрсеткіші тақ болатын дәреже түрінде жазыңдар.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

5.19. 3 санының дәрежелерінен тұратын 3; 3^2; 3^3; 3^4; 3^5; 3^6; … тізбегінің мәндерін табыңдар.

1) Алдыңғы дәреженің мәнімен салыстырғанда әрбір келесі дәреженің мәні туралы қандай қорытынды жасауға болады?

2) Келесі дәреженің мәнімен салыстырғанда әрбір алдыңғы дәреженің мәні туралы қандай қорытынды жасауға болады?

5.20. Бөлшектерден тұратын сандар тізбегін дәрежелерден тұратын тізбек түрінде жазыңдар:

1) $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{27}$; $\frac{1}{81}$; … ;

2) $\frac{2}{7}$; $\frac{4}{49}$; $\frac{8}{343}$; $\frac{16}{2401}$; … .

§ 6. БҮТІН КӨРСЕТКІШТІ ДӘРЕЖЕ

Жердің массасы $5{,}976 \cdot 10^{27}$ г. Бұл өте үлкен шама. Ал заттарды құрайтын бөлшек молекуласының массасы өте аз шама. Өте кіші сандарды қалай жазуға болады?

Орындап көріңдер

6.1-кестеге зер салып, бос орындарды толтырыңдар.

6.1- кесте

Дәреже	Көбейтінді	Дәреженің мәні
10^2	$10 \cdot 10$	100
10^3		
10^4		
10^5		
10^6		

Тапсырманы орындау нәтижесінде 10 санының дәреже көрсеткішін 1-ге арттырса, онда дәреже мәні 10 есе артатынын және керісінше дәреже көрсеткішін 1-ге кемітсе, онда дәреже мәні 10 есе кемітінін көріп отырмыз.

Осы заңдылықты қолданып 6.2-кестені толтырыңдар.

6.2 -кесте

Толтырған кестені қолданып 10 санының натурал дәрежесі мен 10 санының бүтін теріс көрсеткіші нені білдіретінін анықтаңдар.

Дәреже	Дәреженің мәні
10^3	1000
10^2	100
10^1	10
10^0	1
10^{-1}	$\frac{1}{10}$
10^{-2}	$\frac{1}{100}$
10^{-3}	
10^{-4}	
10^{-5}	

Анықтама. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, мұндағы $a \neq 0$ және n — натурал сан.

Мысалы, $12^{-2} = \dfrac{1}{12^2} = \dfrac{1}{144}$; $(-7)^{-3} = \dfrac{1}{(-7)^3} = \dfrac{1}{-343} = -\dfrac{1}{343}$;

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^4} = \frac{1}{\frac{1}{81}} = 81.$$

Түсіндіріңдер

Неліктен 2^{-1}; 3^{-2} өрнегін есептеуге болады, ал 0^0; 0^{-1} өрнегін есептеуге болмайды?

Есте сақта!

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ $(a \neq 0)$ жазуын бүтін теріс көрсеткішті дәрежені бөлшекпен алмастыру деп айтады.

1. 3 санының дәреже көрсеткішін 1-ге кемітсе; 2-ге арттырса; 2-ге кемітсе, осы дәреженің мәні қалай өзгереді?
2. Теріс көрсеткішті дәреженің негізі қандай болуы мүмкін?
3. Неліктен 0 саны натурал көрсеткішті дәреженің негізі болады, ал бүтін көрсеткішті дәреженің негізі бола алмайды?

Жаттығулар

А

6.1. Бүтін теріс көрсеткішті дәрежені бөлшекпен алмастырыңдар:
1) 7^{-3}; 2) 13^{-2}; 3) 11^{-1};
4) 12^{-3}; 5) 16^{-3}; 6) 25^{-4}.

6.2. 1) $\dfrac{1}{81}$; 2) $\dfrac{1}{64}$; 3) $\dfrac{1}{121}$; 4) $\dfrac{1}{625}$; 5) $\dfrac{1}{841}$; 6) $\dfrac{1}{256}$ бөлшегін бүтін теріс көрсеткішті дәрежемен алмастырыңдар.

6.3. 5; 25; 125; 625; $\dfrac{1}{5}$; $\dfrac{1}{25}$; $\dfrac{1}{125}$; $\dfrac{1}{625}$ сандарын негізі 1) 5; 2) $\dfrac{1}{5}$ болатын дәреже түрінде жазыңдар.

6.4. Есептеңдер:

1) 2^{-3}; 2) $(-3)^{-3}$; 3) $(-1)^{-22}$; 4) $\left(\frac{2}{5}\right)^{3}$;

5) $0{,}02^{-3}$; 6) $1{,}25^{-2}$; 7) -4^{-3}; 8) $(-0{,}3)^{-2}$;

9) $\left(-2\frac{1}{2}\right)^{-3}$; 10) $(2{,}25)^{-1}$; 11) $-(-2{,}3)^{-1}$; 12) $-\left(-2\frac{1}{3}\right)^{-2}$.

B

6.5. Бүтін теріс көрсеткішті дәрежені бөлшекпен алмастырыңдар:

1) 25^{-1}; 2) $0{,}125^{-2}$; 3) $(-2{,}5)^{-2}$; 4) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$; 5) $\left(2\frac{1}{3}\right)^{-3}$; 6) $\left(-\frac{2}{7}\right)^{-2}$.

6.6. Есептеңдер:

1) $3 \cdot 12^{-2}$; 2) $2^{-3} + 6^{-1}$; 3) $3^{-2} - (-3)^{-1}$;

4) $-2 \cdot 4^{-3}$; 5) $3 \cdot 4^{-2} + 2^{-3}$; 6) $0{,}4^{0} - (-0{,}25)^{-3}$;

7) $-(-2{,}5)^{-2} + \left(-\frac{2}{5}\right)^{-2}$; 8) $(-3)^{-3} - 3{,}5^{-1}$; 9) $-4^{-3} + \left(-\frac{4}{5}\right)^{-2}$;

10) $-3{,}5^{-1} + (-2{,}5)^{-2}$; 11) $3 \cdot (-4)^{-2} + 5^{-1}$; 12) $(-2{,}7)^{0} + \left(\frac{1}{7}\right)^{-1}$.

C

6.7. 1) $a^{-1} + b^{-1}$; 2) $ab^{-1} - a^{-1}b$; 3) $(x + y^{-1})(x^{-1} + y)$

өрнегін бөлшек түрінде жазыңдар.

6.8. Бөлшекті бүтін көрсеткішті дәреже түрінде жазыңдар:

1) $\frac{2ab^2}{c^2x^3}$; 2) $\frac{54x^3y^2}{2a^5b^4}$; 3) $\frac{4}{(x+y)^3}$; 4) $\frac{(a-b)^3}{(a+b)^5}$.

Хабарлама дайындаңдар

6.9. Француз математигі Николе Шюке — 1484 жылы "Сандар туралы ғылым" трактатына теріс көрсеткішті және көрсеткіші нөлге тең дәрежелерді енгізген ғалым.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

6.10. 1) $(5^3 \cdot 5^2)^4 : 5^{15}$; 2) $(3^3)^4 \cdot 9^2 : 3^{10}$; 3) $3^2 \cdot (-3)^4 - 3^6$;

4) $25^3 : 5^2$; 5) $3^4 \cdot 9^1$; 6) $4^2 \cdot (-4)^1$

өрнегін ықшамдаңдар.

§ 7. БҮТІН КӨРСЕТКІШТІ ДӘРЕЖЕНІҢ ҚАСИЕТТЕРІ

Бүтін көрсеткішті дәреженің қандай қасиеттері бар?

Натурал көрсеткішті дәреженің қасиеттері белгілі. Кез келген $a \neq 0$, $b \neq 0$ және n мен m натурал сандары үшін

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$; $a^n : a^m = a^{n-m}$, мұндағы $n > m$; $(a^m)^n = a^{mn}$; $(ab)^n = a^n b^n$, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ теңдіктері дұрыс.

Енді осы қасиеттердің дәреже көрсеткіші кез келген бүтін сан болғанда да орындалатынын дәлелдейік.

Кез келген m мен n және $a \neq 0$ сандары үшін мына теңдіктер дұрыс:

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; 2) $a^n : a^m = a^{n-m}$; 3) $(a^m)^n = a^{mn}$;

4) $(ab)^n = a^n b^n$; 5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$.

Дәлелдеу. 1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ теңдігін дәлелдейік.

а) Бір дәреже көрсеткіші оң сан, яғни $m > 0$, екіншісі теріс сан, яғни $n < 0$ болатын жағдайды қарастырайық.

Натурал көрсеткішті дәреже үшін дәреженің қасиеттері дәлелденгендіктен, m және n сандарын натурал сандар арқылы өрнектейміз. $m = k$, $n = -p$ (k мен p — натурал сандар) белгілеуін енгізейік. Енді осы белгілеулерді қолдансақ, $a^m \cdot a^n = a^k \cdot a^{-p}$.

Екінші көбейткішті бүтін теріс көрсеткішті дәреженің анықтамасы бойынша түрлендірсек, $a^k \cdot a^{-p} = a^k \cdot \dfrac{1}{a^p}$.

Бөлшектерді көбейту ережесін қолдансақ,

$$a^k \cdot \frac{1}{a^p} = \frac{a^k}{a^p}.$$

Бұл жерде $k > p$, $k < p$ және $k = p$ болуы мүмкін.

Егер $k > p$ болса, онда $\dfrac{a^k}{a^p} = a^{k-p}$, яғни натурал көрсеткішті дәреженің қасиеті бойынша $a^n : a^m = a^{n-m}$ $(n > m)$.

Егер $k < p$ болса, онда $\dfrac{a^k}{a^p} = \dfrac{1}{a^{p-k}}$, яғни бөлшекті a^k ортақ көбейткішіне қысқартамыз.

Демек, бүтін теріс көрсеткішті дәреженің анықтамасы бойынша

$$\frac{1}{a^{p-k}} = a^{k-p}.$$

Егер $k = p$ болса, онда $\frac{a^k}{a^p} = 1 = a^0 = a^{k-p}$, өйткені $a \neq 0$ және $a^k = a^p$, $a^0 = 1$.

Дәреже көрсеткішіндегі өрнекті алгебралық қосынды түрінде жазайық:

$$a^{k-p} = a^{k+(-p)}.$$

Енгізілген белгілеулерді қолданып $(m = k,\ n = -p)$,

$$a^{k+(-p)} = a^{m+n}$$

аламыз. Жоғарыдағы барлық түрлендірулерді былай жазуға болады:

$$a^m \cdot a^n = a^k \cdot a^{-p} = a^k \cdot \frac{1}{a^p} = \frac{a^k}{a^p} = a^{k-p} = a^{k+(-p)} = a^{m+n}.$$

ә) Екі дәреже көрсеткіші де теріс сан, яғни $m < 0$, $n < 0$ болатын жағдайды қарастырайық.

Натурал көрсеткішті дәреже үшін дәреженің қасиеттері дәлелденгендіктен, m және n сандарын натурал сандар арқылы өрнектейміз. $m = -k$, $n = -p$, мұндағы k мен p — натурал сандар, белгілеуін енгізейік. Сонда енгізілген белгілеулерді қолдансақ,

$$a^m \cdot a^n = a^{-k} \cdot a^{-p},\ m = -k,\ n = -p.$$

Енді бүтін теріс көрсеткішті дәреженің анықтамасы бойынша

$$a^{-k} \cdot a^{-p} = \frac{1}{a^k} \cdot \frac{1}{a^p}.$$

Бөлшектерді көбейту ережесі бойынша

$$\frac{1}{a^k} \cdot \frac{1}{a^p} = \frac{1}{a^k \cdot a^p}.$$

Натурал көрсеткішті дәреженің қасиеті бойынша

$$\frac{1}{a^k \cdot a^p} = \frac{1}{a^{k+p}}.$$

Демек, бүтін теріс көрсеткішті дәреженің анықтамасы бойынша

$$\frac{1}{a^{k+p}} = a^{-(k+p)}.$$

"–" таңбасын ескеріп, жақшаны ашқанда

$$a^{-(k+p)} = a^{-k-p}$$

шығады. Көрсеткіші бар дәрежелі өрнекті алгебралық қосынды түрінде жазсақ,

$$a^{-k-p} = a^{-k+(-p)}.$$

Енгізілген белгілеулерді $(m = -k,\ n = -p)$ қолдансақ,

$$a^{-k+(-p)} = a^{m+n}.$$

Жоғарыдағы барлық түрлендірулерді біріктіріп жазуға болады:

$$a^m \cdot a^n = a^{-k} \cdot a^{-p} = \frac{1}{a^k} \cdot \frac{1}{a^p} = \frac{1}{a^{k+p}} = a^{-(k+p)} = a^{-k-p} = a^{-k+(-p)} = a^{m+n}.$$

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, мұндағы $m = 0$ немесе $n = 0$.

Негіздері бірдей (нөлден өзгеше) бүтін көрсеткішті дәрежелерді көбейткенде олардың негізін өзгертпей қалдырып, дәреже көрсеткіштерін қосу керек.

55-беттегі 2) — 5) қасиеттерін дәлелдеп көріңдер.

Бүтін көрсеткішті дәрежелерге амалдар қолдану натурал көрсеткішті дәрежеге амалдар қолдану ережесімен орындалады.

1-мысал. $b^{19} \cdot b^{-13}$ $(b \neq 0)$ көбейтіндісін ықшамдайық.

Шешуі. Негіздері бірдей дәрежелерді көбейткенде олардың негізін қалдырып, дәреже көрсеткіштерін қосады: $b^{19} \cdot b^{-13} = b^{19+(-13)}$. Енді жақшаны ашайық:

$$b^{19+(-13)} = b^{19-13},$$

$$b^{19-13} = b^6.$$

Жауабы: b^6.

2-мысал. $c^7 : c^{11}$ $(c \neq 0)$ бөліндісін ықшамдайық.

Шешуі. Негіздері бірдей дәрежелерді бөлгенде негізін өзгертпей, дәреже көрсеткіштерін азайтады:

$$c^7 : c^{11} = c^{7-11} = c^{-4}.$$

Жауабы: c^{-4}.

3-мысал. $(-3x^{-4}y^2)^{-5}$ өрнегін ықшамдайық.

Шешуі. Көбейтіндіні дәрежеге шығару үшін көбейткіштердің әрқайсысын осы дәрежеге шығарып, нәтижелерін көбейтеді:

$$(-3x^{-4}y^2)^{-5} = (-3)^{-5}(x^{-4})^{-5}(y^2)^{-5}.$$

Дәрежені дәрежеге шығарғанда, негізін өзгертпей, дәреже көрсеткіштерін көбейтеді:

$$(-3)^{-5}(x^{-4})^{-5}(y^2)^{-5}=-\frac{1}{243}x^{20}y^{-10}.$$

Жауабы : $-\frac{1}{243}x^{20}y^{-10}$.

1. Неліктен бүтін көрсеткішті дәрежелердің қасиеттерін қолданғанда дәрежелердің негіздері нөлге тең болмауы керек?
2. Негіздері бірдей дәрежелерді бөлгенде нәтижесі 0-ге тең болуы мүмкін бе?

Жаттығулар

А

7.1. Бүтін көрсеткішті дәреженің қасиеттерін қолданып өрнектерді ықшамдаңдар:

1) $2a^{-2}\cdot 3a^4$; 2) $24a^5:(6a^{-3})$;
3) $(2c^{-3})^2$; 4) $2(3^{-3}b^3)^2 3b^{-4}$.

7.2. 1) $125\cdot 5^{-4}$; 2) $27\cdot\frac{1}{9}\cdot 3^{-4}:3^{-2}$;

3) $\frac{1}{32}\cdot 2^7:64$; 4) $100^2\cdot 10^{-3}$

өрнектер ін бүтін көрсе ткішті дәреже түрінде көрсетіңдер.

7.3. Есептеңдер:

1) $64^{-1}\cdot 32^2$; 2) $(6^3)^2:36^5$; 3) $\frac{4^{-3}\cdot 2^5}{8^{-4}}$; 4) $\frac{(3^{-3})^3\cdot 3^7}{27^2}$.

7.4. 1) $10^{-3}\cdot 0{,}001$; 2) $13^0\cdot(13^{-2}):13^{-4}$;

3) $\frac{(3^{-2})^{-2}\cdot 9^{-1}}{27}$; 4) $\frac{25^{-2}\cdot 125}{5^3}$

өрнектерінің мәнде рін табыңдар.

7.5. Берілген өрнекті дәреже түрінде жазып, мәнін табыңдар:

1) $5(5a^{-3})^{-2}a^{-2}$, мұндағы $a=(0{,}2)^{-1}$;
2) $(0{,}5a^{-2})^{-2}:(32a^5)^3$, мұндағы $a=(0{,}5)^{-4}$;

3) $(2^3a^{-3})^{-1}\cdot 64a^{-4}$, мұндағы $a=-0{,}125$;
4) $27(-3^{\,2}a^3):(3^5a^{-1})^3$, мұндағы $a=-0{,}1$.

7.6. Теңдеуді шешіңдер:
1) $2^{-2}+3^{-1}x=0{,}25$;
2) $3^{-1}x+3^{-2}x=9^{-2}+x$;
3) $2{,}25x=5{,}125-4^{-1}x$;
4) $4^{-1}x-2^{-2}x=8^2+x$.

B

7.7. Теңсіздікті шешіңдер:
1) $7^{-1}x-2^{-2}x$ l $2\frac{4}{7}$;
2) $3{,}125+x$ m $5{,}125-4^{-1}x$;
3) $7{,}25+2x>5{,}125-5^{-1}x$;
4) $12{,}5x-5{,}125<2^{-3}-4^{-1}x$.

7.8. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:
1) $27^{-1}81^2(3^{-3})^3:81^{-3}=9^4$;
2) $7^{-2}21^2(6^{-3})^2:14^{-3}:343=2^{-3}9^{-2}$;
3) $4^{-1}8^2(a^{-3})^3:(8a^{-3})^2=0{,}25a^{-3}$;
4) $a^{-1}(ab)^2(b^{-3})^3:b^{-3}=ab^{-4}$.

Берілген өрнектердің мәндерін салыстырыңдар (7.9-7.10):

7.9. 1) $128^{-2}\cdot 32^3$ және $(6^3)^2:36^5$;

2) $\dfrac{8^{-3}\cdot 2^5}{16^{-4}}$ және $\dfrac{(3^{-3})^3\cdot 9^7\cdot 2^{-2}}{81^2}$.

7.10. 1) $13^0\cdot 3^{-3}:2^3$ және $10^2\cdot 5^{-2}:2^3$;

2) $\dfrac{14^0\cdot 3^2:4^{-2}}{2\cdot 3^3}$ және $\dfrac{21^3\cdot 9^{-2}}{7^3}$.

7.11. Берілген өрнекті дәреже түрінде жазып, мәнін табыңдар:
1) $125(5a^{-3}b^3)^{-2}a^{-2}b^4$, мұндағы $a=0{,}2$, $b=0{,}5$;
2) $(0{,}5a^{-2})^{-2}:(32a^5b^2)^3$, мұндағы $a=(0{,}5)^{-4}$, $b=0{,}25$;
3) $(2^3a^{-3}b)^{-1}\cdot 64a^{-4}:a^{-5}$, мұндағы $a=-0{,}125$, $b=0{,}5$;
4) $27(-3^{\,2}a^3):(3^5a^{-1}b^{-2})^3$, мұндағы $a=-0{,}1$, $b=0{,}1$.

C

7.12. Теңдеуді шешіңдер:
1) $7^{-2}x=21+3^{-1}$;
2) $0{,}01\cdot 10^3x+5^2-x=2\cdot 5^2$;
3) $\dfrac{3\cdot 3^{-2}}{6^{-2}}x=2^2\cdot 3$;
4) $\dfrac{5^3\cdot 3^3}{12^0\cdot 15^3\cdot 2}x=10^{-1}$.

7.13. 1) $8^{-2}x$ l $24{,}75+4^{-1}$;
2) 6^2-x l $-4^2\cdot x+5^{-1}$;
3) $3^{-1}x$ l $15^{-1}-2x$ теңсіздігін қанағаттандыратын ең кіші бүтін санды табыңдар.

7.14. 1) $4^{-2}x$ m $12{,}75 - 4^{-1}$; 2) $12^{2} + 3^{4}x$ m $8^{2} \cdot x + 6^{-1}$;
3) $4^{-1}x$ m $13^{0} - 12^{-1} - 3x$ теңсіздігін қанағаттандыратын ең үлкен бүтін санды табыңдар.

Тепе-теңдікті дәлелдеңдер **(7.15-7.16)**:

7.15. 1) $(0{,}25\, a^{-2})^{2} \cdot 4^{3}a^{3} = 2^{2}a^{-1}$; 2) $\dfrac{2^{3} : 4}{14^{0} \cdot a^{-2}} \cdot a = \dfrac{2}{a^{-3}}$;

3) $\dfrac{2^{3} : 8}{24^{0} \cdot a^{-2}} \cdot a^{2} = a^{4}$.

7.16. 1) $\left(\dfrac{8x^{-2}}{y^{-3}}\right)^{3} \cdot \left(\dfrac{2^{-4}}{x^{-2}y^{2}}\right)^{3} = 0{,}125\, y^{3}$; 2) $\dfrac{3^{3} : 27}{17^{0} \cdot a^{-2}} \cdot a^{3} = \dfrac{a^{2}}{a^{-3}}$;

3) $\dfrac{5^{3} : 75}{19^{0} \cdot b^{-2}} \cdot b = \dfrac{5}{3b^{-3}}$.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

7.17. Амалдарды орындаңдар:
1) $15248 : 10^{4}$; 2) $0{,}0174 \cdot 10^{2}$;
3) $7124 : 10^{3}$; 4) $0{,}00824 \cdot 10^{3}$.

7.18. 1) $7200 : 10^{3}$ және $7{,}2$; 2) $0{,}058 \cdot 10^{2}$ және $5{,}8$;
3) $193000 : 10^{5}$ және $1{,}93$; 4) $0{,}0002 \cdot 10^{3}$ және 2
өрнектерінің мәндерін салыстырыңдар.

7.19. 243,478; 4076,237; 15023,4083 сандарын 1) ондық үлеске; 2) жүздік үлеске; 3) ондыққа; 4) жүздікке дейін дөңгелектеңдер.

§ 8. САННЫҢ СТАНДАРТ ТҮРІ. ҮЛКЕН ЖӘНЕ КІШІ ШАМАЛАРҒА БЕРІЛГЕН МӘТІН ЕСЕПТЕРДІ ШЕШУ

Санның стандарт түрі дегеніміз не? Стандарт түрде жазылған сандарды қалай салыстыруға және оларға қандай амалдар қолдануға болады?

Өте үлкен және өте кіші сандарды оқу, жазу және оларға қандай да бір амалдарды қолдану үшін санның стандарт түрде жазылуы қарапайым ондық түрде жазылуына қарағанда ыңғайлы.

Өте үлкен сандарды, мысалы, Жерден күнге дейінгі қашықтықты және өте кіші сандарды, мысалы, сутек атомының массасын, уран ядросының ыдырау энергиясының шамасын және т.с.с. сандарды оқуға, жазуға және амалдар қолдануға ыңғайлы болу үшін қалай жазуға болады?

Анықтама. ***Санның стандарт түрі*** *деп* $a \cdot 10^n$ *түрінде жазылуын айтады*, *мұндағы* $1 \leq a < 10$ *және* n *— бүтін сан*.
n *санның реті деп аталады.*

Мысалы, Күннен Жерге дейінгі қашықтық шамамен $1{,}5 \cdot 10^8$ км, күшті жер сілкінісінің энергиясы $6 \cdot 10^{18}$ Дж, ғарыш кемесінің ұшу энергиясының стандарт түрде жазылуы $9 \cdot 10^{11}$ Дж, ДНҚ молекуласының диаметрі $2 \cdot 10^{-9}$ м. Осы жазылуларда джоульмен өрнектелген ғарыш кемесінің ұшу энергиясының шамасын беретін санның реті 11-ге, ал метрмен өрнектелген ДНҚ молекуласы диаметріне тең санның реті 9-ға тең.

Санның реті оның қаншалықты үлкен немесе кіші екені туралы түсінік береді. Мысалы, егер a санының реті 3-ке тең болса, онда $1000 \leq a < 10\,000$ болады. Егер a санының реті –2-ге тең болса, онда $0{,}01 \leq a < 0{,}1$ болады.

Санның үлкен оң реті оның шамасының өте үлкен екенін көрсетеді. Санның модулі бойынша үлкен теріс реті оның шамасының өте кіші екенін көрсетеді.

1-мысал. 1 300 000 км-ге тең Күннің диаметрін санның стандарт түрін қолданып жазайық.

Шешуі. 1 300 000 санына үтірді оның бүтін бөлігінде бір цифр қалатын етіп қоямыз: 1, 300 000. Енді ондық бөлшектің қасиетін пайдаланамыз: 1,300 000 = 1,3. Сонда 1 300 000 = $1,3 \cdot 10^6$, өйткені 1 300 000 санында 6 орынды солға жылжытып, үтір қойдық. Демек, сан 10^6 есе кішірейеді, яғни 1 300 000 саны 1,3 санынан 10^6 есе үлкен.

Жауабы : $1,3 \cdot 10^6$ км.

2-мысал. Санның стандарт түрін қолданып, 0,000000 000 000 005 м-ге тең атом ядросы диаметрінің ұзындығын жазамыз.

Шешуі . 0,000 000 000 000 005 санындағы үтірді бүтін бөлігінде нөлден өзге бір цифр қалдырып қоямыз, сонда 5,000 000 000 000 000 шығады, яғни ондық бөлшектің қасиеті бойынша 5,000 000 000 000 000 болады. Енді үтірді 15 орынға оңға жылжытсақ, 0,000 000 000 000 005 саны 10^{15} есе үлкейеді, яғни 0,000 000 000 000 005 саны 5 санынан 10^{15} есе кіші, ендеше $0,000\ 000\ 000\ 000\ 005 = 5 : 10^{15} = 5 \cdot \frac{1}{10^{15}} = 5 \cdot 10^{-15}$ аламыз.

Демек, $0,000\ 000\ 000\ 000\ 005 = 5 \cdot 10^{-15}$.

Жауабы : $5 \cdot 10^{-15}$ м.

Шаманың жуық мәндерін қалай табуға және оларды стандарт түрде қалай жазуға болады?

Шамалардың жуық мәндерінің абсолюттік және салыстырмалы қателіктерін қалай есептеуге болады?

Адам өзінің күнделікті іс-әрекетінде шамалардың дәл мәндерін емес, олардың жуық мәндерін жиі қолданады.

Мысалы, бөлменің ұзындығын (жол, жер телімін және т.б.) миллиметрге дейінгі дәлдікпен өлшемейді; әртүрлі тауардың массасын (кәмпит, ұн, қант және т.б.) миллиграммға дейінгі дәлдікпен өлшемейді (1 мг = 10^{-3} г) және т.б.

Мысалы, егер өлшеу кезінде жер телімінің ұзындығы 300 м 1 см-ге, ал ені 199 м 99 см-ге тең болса, онда ұзындықтың жуық мәнін 300 м, ал енін 200 м деп алады. Қарастырылған мысалдарда нақты және жуық мәндердің айырмашылығы 1 см-ді құрайды: бірінші жағдайда бұл айырмашылық 300 м 1 см – 300 м = 1 см оң шамамен, ал екінші жағдайда 199 м 99 см – 200 м = –1 см теріс шамамен өрнектеледі.

Тәжірибеде нақты және жуық мәндердің айырмашылығының кемуі немесе артуы емес, осы айырмашылықтың сандық мәні маңызды. Сондықтан осы шаманың айырымын емес, осы айырымның модулін қарастырады.

Анықтама. *Шамалардың дәл және жуық мәндері айырымының модулі* ***жуық мәннің абсолюттік қателігі*** *деп аталады* .

x саны берілген делік, оның жуық мәнін x_1 деп белгілейік.

Анықтама. *x шамасы (саны) мен оның x_1 жуық мәнінің айырымының модулі (абсолюттік мәні) x_1* ***жуық мәнінің абсолюттік қателігі*** *деп аталады.*

Жуық мәннің абсолюттік қателігін Δ (*дельта*) символымен белгілейміз: $\Delta = |x - x_1|$.

1-мысал. Есептеу кезінде $\frac{3}{7}$ бөлшегін 0,42 ондық бөлшегімен алмастырсақ, жуық мәннің абсолюттік қателігі қандай болады?

Шешуі.

0,42 ондық бөлшегін $\frac{42}{100}$ жай бөлшегі түрінде жазайық: $\Delta = \left|\frac{3}{7} - 0{,}42\right| = \left|\frac{3}{7} - \frac{42}{100}\right|$. Енді $\frac{42}{100}$ бөлшегін 2-ге қысқартамыз: $\left|\frac{3}{7} - \frac{42}{100}\right| = \left|\frac{3}{7} - \frac{21}{50}\right|$. Осы бөлшектерді ортақ бөлімге келтіреміз: $\left|\frac{3}{7} - \frac{21}{50}\right| = \left|\frac{150 - 147}{350}\right|$. Соңғы бөлшектің алымының мәнін тауып, модульдің жақшасын ашсақ, $\left|\frac{150 - 147}{350}\right| = \left|\frac{3}{350}\right| = \frac{3}{350}$ аламыз.

Жауабы: $\frac{3}{350}$.

Жалпы, *x санының жуық мәні x_1-ге тең* және осы жуық мәннің абсолюттік қателігі кейбір h санынан аспайды (кем немесе тең) деп есептейді.

Анықтама. *Егер $|x - x_1| \le h$ болса, онда x_1 саны h-қа дейінгі дәлдікпен алынған* ***x санының жуық мәні*** *деп аталады.*

Егер x_1 саны h-қа дейінгі дәлдікпен алынған *x санының жуық мәні* болса, онда оны $x = x_1 \pm h$ деп жазады. $|x - x_1| \le h$ теңсіздігінен

$$-h \le x - x_1 \le h$$

қостеңсіздігі шығады.

Мысалы, егер $x = 1{,}4 \pm 0{,}05$ болса, онда артығымен және кемімен алынған x санының жуық мәнін табайық.

Шешуі . 1,4-тен 0,05-ке дейінгі дәлдікпен алынған *x санының жуық мәні* $x = 1,4 \pm 0,05$-ке тең. Сондықтан

$$1,4 - 0,05 \leq x \leq 1,4 + 0,05 \text{ немесе } 1,35 \leq x \leq 1,45.$$

Олай болса 1,35 және 1,45 сандары артығымен және кемімен алынған x санының жуық мәні болып табылады.

Жауабы : 1,35 және 1,45.

Көптеген математикалық, физикалық, техникалық есептерді шешу, әртүрлі жуық мәндерге амалдар қолдану кезінде сандарды дөңгелектеу қолданылады. Мысалы, шеңбердің ұзындығының оның диаметріне қатынасын көрсететін тұрақты санның $\pi = 3,141592652...$ болатыны белгілі. Әдетте, бұл санды жүздік үлеске дейін дөңгелектейді, яғни $\pi \approx 3,14$.

Бұл жазу 3,14 саны π-дің жуық мәні болып табылатынын көрсетеді . Мұндай дөңгелектеулер практикалық есептеулерде қолданылады.

a саны x шамасын ың жуық мәні болып табылады, оны $x \approx a$ деп жазады және *x шамасы a-ға жуық шамамен тең* деп оқиды.

Мысалы, 5,748 санын жүздік үлеске дейін дөңгелектейік.

Кемімен дөңгелектегенде 5,74 жуық мәнін, артығымен дөңгелектегенде 5,75 аламыз.

Алдымен кемімен және артығымен дөңгелектеудің абсолюттік қателігін табайық. Оған сәйкес

$|5,748 - 5,74| = |0,008| = 0,008$ және

$|5,748 - 5,75| = |-0,002| = 0,002$ болады.

0,008 кемімен алынған дөңгелектеудің қателігі 0,002 артығымен алынған дөңгелектеудің қателігінен үлкен. Ендеше артығымен алынған дөңгелектеудің дәлдігі жоғары.

Демек, оң сандарды дөңгелектеу кезінде жуықтаудың абсолюттік қателігі кем болу үшін мына ережені қолдану қажет.

Егер бірінші алынып тасталынатын цифр 5-тен кіші болса, онда дөңгелектеу кезінде жуық мән кемімен алынады, егер бірінші алынып тасталынатын цифр 5-ке тең немесе 5-тен артық болса, онда дөңгелектеу кезінде жуық мән артығымен алынады.

Мысалы, 89,621 және 6,784 сандарын 0,1 дәлдікпен дөңгелектеу кезінде $89,621 \approx 89,6$; $6,784 \approx 6,8$ алынады, ал жүздік үлеске дейін дөңгелектегенде $89,621 \approx 89,62$; $6,784 \approx 6,78$ алынады.

Санды дөңгелектегенде абсолюттік қателік жуық мәннің ең кіші разрядының бірлігінен аспайды және оның барлық *цифрларының мәні дұрыс* болады.

Мысалы, $\frac{4}{7}$ бөлшегін ондық бөлшек түрін де 0,5 71428... деп жазып, оны а) 0,01-ге дейінгі; ә) 0,00001-ге дейінгі дәлдікпен дөңгелектесек,

а) 0,571428… ≈ 0,57, ә) 0,571428… ≈ 0,57143 болады.

0,57; 0,57143 жуық мәндерінің абсолюттік қателігі сәйкесінше 0,01; 0,00001 — оның ең кіші разрядының бірлігінен аспайды (кем немесе тең). Жуық мәннің барлық 0,57 және 0,57143 цифрлары дұрыс болады.

Санды $a \cdot 10^n$ стандарт түрінде жазғанда a санының барлық цифрлары дұрыс болады.

Мысалы, жарық жылының шамасы $9{,}46 \cdot 10^{12}$ км-ге тең. Бұл 9,46 санының барлық цифрлары дұрыс екенін білдіреді.

Онда $9{,}46 \cdot 10^{12} = (9{,}46 \pm 0{,}01) \cdot 10^{12}$ км $\approx 9{,}46 \cdot 10^{12}$ км $\pm 10^{10}$ км, яғни жарық жылы 10^{10} км дейінгі дәлдікпен алынған.

Әртүрлі екі заттың ұзындығын өлшегенде, айталық $x = (0{,}2 \pm 0{,}1)$ см және $y = (200{,}0 \pm 0{,}1)$ см алдық делік. Екі жағдайда да нәтижелер 0,1 см-ге дейінгі дәлдікпен алынған. Осы өлшеулердің дәлдігі бірдей деп тұжырымдауға бола ма? Неге y ұзындығын өлшеу дәлдігі x ұзындығын өлшеу дәлдігімен салыстырғанда әлдеқайда дәлірек?

Өлшеу дәлдігін бағалау үшін абсолюттік қателікпен қатар *салыстырмалы қателікті* де қолданады.

А н ы қ т а м а. ***Жуық мәннің салыстырмалы қателігі*** *деп абсолюттік қателіктің жуық мәннің модуліне қатынасын айтады.*

Салыстырмалы қателікті ε (*эпсилон*) әрпімен белгілейді.

Онда $\varepsilon = \frac{|x - x_1|}{|x_1|}$, мұндағы x_1 шамасы — x-тің жуық мәні.

Анықтама бойынша $|x - x_1|$ m h, мұндағы h жуықтау дәлдігі болса, онда салыстырмалы қателік ε m $\frac{h}{|x_1|}$.

Мысалы, $x = (0{,}2 \pm 0{,}1)$ см дегеніміз x шамасын өлшеу нәтижесінде $h = 0{,}1$ дәлдігімен $x_1 = 0{,}2$ жуық мәнін алғанымызды білдіреді. Ендеше салыстырмалы қателік ε m $\frac{0{,}1}{0{,}2}$ немесе ε m 0,5.

$y = (200,0 \pm 0,1)$ см дегеніміз — y шамасын өлшеу нәтижесінде $h = 0,1$ дәлдігімен $y_1 = 200,0$ жуық мәнін алғанымызды білдіреді. Ендеше салыстырмалы қателік $\varepsilon = \frac{0,1}{200,0}$ немесе $\varepsilon = 0,0005$.

Салыстырмалы қателікті пайызбен жиі өрнектейді.

Бөлінділі пайызбен өрнектеу үшін бөлінділі 100-ге көбейтіп, алынған көбейтіндінің мәніне пайыздың таңбасы қосылып жазылатыны белгілі: $\varepsilon = \frac{|x - x_1|}{|x_1|} \cdot 100\,\%$.

1-мысал. Жоғарыда қарастырылған x және y ұзындық өлшемдерінің салыстырмалы қателігін есептейік.

Шешуі. x ұзындығын өлшеген кездегі салыстырмалы қателік $\varepsilon_1 = \frac{0,1}{0,2} \cdot 100\% = \frac{1}{2} \cdot 100\% = 0,5 \cdot 100\% = 50\%$ болады.

y ұзындығын өлшеген кездегі салыстырмалы қателік:

$$\varepsilon_2 = \frac{0,1}{200} \cdot 100\% = \frac{1}{2000} \cdot 100\% = 0,0005 \cdot 100\% = 0,05\%.$$

Жауабы: 50 %, 0,05 %.

2-мысал. $x = 7,45 \cdot 10^{22}$ санының абсолюттік және салыстырмалы қателігін табайық.

Шешуі. 7,45 санында барлық цифрлар дұрыс және жүздік цифры соңғы цифр болса, онда $x = (7,45 \pm 0,01) \cdot 10^{22}$. Енді жақшаларды ашсақ, $x = 7,45 \cdot 10^{22} \pm 0,01 \cdot 10^{22}$ немесе $x = 7,45 \cdot 10^{22} \pm 10^{20}$ аламыз. Бұл жазу x санының абсолюттік қателігі 10^{20} кем немесе тең екенін және $x = 7,45 \cdot 10^{22}$ жуық санының салыстырмалы қателігін білдіреді. Демек, x санының салыстырмалы қателігін формула бойынша есептесек,

$$\varepsilon = \frac{|x - x_1|}{|x_1|} \cdot 100\% = \frac{10^{20}}{7,45 \cdot 10^{22}} \cdot 100\% = \frac{1}{7,45}\% = 0,134\%.$$

Жауабы: 10^{20} және 0,134 %.

1. Өлшеу кезінде қандай шамалардың пайда болуы мүмкін?
2. Санның немесе шаманың жуық мәнінің абсолюттік қателігі нені білдіреді?
3. Қандай сандарға санның стандарт түрде жазылуы қолданылады?
4. Кез келген санды стандарт түрде жазуға бола ма?

5. $1,5 \cdot 10^3$; $0,5 \cdot 10^9$; $50 \cdot 10^4$; $2,3 \cdot 10^2$ сандарының қайсылары стандарт түрде жазылған?
6. Абсолюттік және салыстырмалы қателіктердің қайсысы өлшеу дәлдігінің сапасын жақсы сипаттайды?
7. Абсолюттік және салыстырмалы қателіктер қалай байланысқан?

Жаттығулар

А

8.1. Стандарт түрде көрсетілген сандардың ретін атаңдар:
1) $4,3 \cdot 10^5$; 2) $2,34 \cdot 10^{-3}$; 3) $8,3 \cdot 10^{-13}$;
4) $9,123 \cdot 10^{-1}$; 5) $5,31 \cdot 10^{12}$; 6) $7,1 \cdot 10^{-32}$.

8.2. 1) 23 000 000 000; 2) 3 043 000 000;
3) 153 000 000; 4) 0,00 00 012;
5) $600,32 \cdot 10^5$; 6) 0,00 000 203 сандарын стандарт түрде көрсетіңдер.

8.3. 1) 1000; 2) 10 000 000; 3) 0,00 001; 4) 0,00 000 001 сандарын 10 санының дәрежесі түрінде көрсетіңдер.

8.4. Төмендегі сөйлемдерде кездесетін сандарды стандарт түрде жазыңдар:
1) түйреуіштің диаметрі 0,001 м;
2) сутек атомының диаметрі 0,00000000003 м;
3) Дүниежүзілік мұхиттың жер бетінен алып жатқан ауданы 361 000 000 $км^2$;
4) Балқаш көлінің жер бетінен алып жатқан ауданы 22 000 $км^2$;
5) Каспий теңізінің жер бетінен алып жатқан ауданы 370 000 $км^2$;
6) компьютердің пернесін басқанда 0,1 Дж энергия жұмсалады;
7) араның қанат қағысына жұмсалатын энергия 0,0009 Дж.

8.5. Мәтінде кездесетін сандарды стандарт түрде жазыңдар: "Қазақстан жерінің аумағы 2 724 900 $км^2$. Батыс, солтүстік-шығыс және солтүстігінде Ресей Федерациясымен (шегара ұзындығы 6467 км), оңтүстігінде Орталық Азия республикаларымен, оның ішінде Өзбекстанмен (2300 км), Қырғызстанмен (980 км) және Түрікменстанмен (380 км), ал оңтүстік-шығысында Қытай Халық Республикасымен шектеседі (1460 км). Қазақстан шегарасының жалпы ұзындығы 12200 км, оның ішінде 600 км батыста Каспий теңізі арқылы өтеді.

Теміржол торабының жалпы ұзындығы 14,5 мың км, ал автомобиль жолдары — 87,4 мың км.

8.6. 1) $a = 4,7 \pm 0,2$; 2) $a = 43,74 \pm 0,05$;
3) $a = -2\frac{3}{4} \pm \frac{3}{5}$; 4) $a = -3\frac{3}{5} \pm \frac{1}{10}$;
5) $a = 7,90 \pm 0,12$; 6) $a = -3,45 \pm 0,15$;
7) $a = -47 \pm 2$; 8) $a = 0,97 \pm 0,01$
жазуларын түсіндіріңдер.

8.7. Берілген теңдіктерді қостеңсіздік түрінде жазыңдар:
1) $x = 43,32 \pm 0,05$; 2) $y = -513,2 \pm 0,05$;
3) $n = 433 \pm 0,1$; 4) $x = 43,2 \pm 0,25$.

8.8. Барлық цифрлары дұрыс x санының жуық мәнінің дәлдігін табыңдар:
1) $x \approx 2,74$; 2) $x \approx 35,274$; 3) $x \approx -4,004$;
4) $x \approx 0,740$; 5) $x \approx -8,7040$; 6) $x \approx 0,07$.

8.9. Сутек атомының массасы 0,000 000 000 000 000 000000167 г, Жердің массасы 6 000 000 000 000 000 000 000 кг. Сутек атомының және Жердің массасын стандарт түрде жазыңдар.

8.10. Санды
1) 12,4 бірлікке; 2) 5,65 ондыққа;
3) 876 ондыққа; 4) 7,3346 жүздікке
дейін дөңгелектеу нәтижесінен шыққан жуық мәннің абсолюттік және салыстырмалы қателіктерін табыңдар.

8.11. Төмендегі сандарды ондық үлеске дейін дөңгелектеп, салыстырмалы қателігін табыңдар:
1) 0,879; 2) 20,456; 3) 133,507;
4) 0,058; 5) 0,987; 6) 10,509.

8.12. $x = a \cdot 10^n$ түрінде жазылған x жуық мәнінің салыстырмалы қателігін табыңдар:
1) $x \approx 34,58 \cdot 10^8$; 2) $x \approx 5,93 \cdot 10^7$; 3) $x \approx 2,75 \cdot 10^{-5}$;
4) $x \approx 11,55 \cdot 10^0$; 5) $x \approx 25,18 \cdot 10^{-9}$; 6) $x \approx 0,086 \cdot 10^{-8}$.

8.13. Электронның массасы $0,91 \cdot 10^{-27}$ кг. $0,91 \cdot 10^{-27}$ жуық мәнінің салыстырмалы қателігін көрсетіңдер.

B

8.14. 1) Массаларды стандарт түрде тоннамен жазыңдар: мұхиттардың массасы 1450000000000000000000 кг; Жердің массасы 5980000000000000000000000 кг; 2) аудандарды гектармен стандарт түрде жазыңдар: Күннен жер бетіне дейінгі қашықтық 149500000 км; күн бетінің ауданы 6000000000000 км ^{2}; жер бетінің ауданы 510200000 км ^{2}; ай бетінің ауданы 38000000 км ^{2}.

8.15. Жер диаметрінің ұзындығы $1{,}2756 \cdot 10^7$ м, атом ядросы диаметрінің ұзындығы $5 \cdot 10^{-15}$ м. Жер диаметрінің ұзындығы атом ядросы диаметрінің ұзындығынан неше есе үлкен екенін табыңдар.

8.16. 1) $2{,}7 \cdot 10^4$ т-ны граммен;
2) $8{,}321 \cdot 10^5$ кг-ды тоннамен;
3) $1{,}3 \cdot 10^{-3}$ т-ны килограммен;
4) $5{,}36 \cdot 10^{13}$ г-ды миллиграммен;
5) $5{,}23 \cdot 10^{12}$ дм-ді километрмен;
6) $4{,}31 \cdot 10^5$ см-ді метрмен;
7) $1{,}32 \cdot 10^5$ км-ді метрмен;
8) $2{,}51 \cdot 10^7$ мм-ді сантиметрмен өрнектеңдер.

C

8.17. Жердің массасы $5{,}98 \cdot 10^{24}$ кг, ал Юпитердің массасы $1{,}90 \cdot 10^{27}$ кг. Жердің массасы мен Юпитердің массасының қайсысы үлкен және неше есе үлкен?

8.18. 1) $(7{,}5 \cdot 10^4) \cdot (2{,}4 \cdot 10^{-1})$; 2) $(4{,}3 \cdot 10^4) \cdot (3{,}7 \cdot 10^{-3})$;
3) $(3{,}4 \cdot 10^4) \cdot (5{,}4 \cdot 10^{-2})^2$; 4) $(5{,}5 \cdot 10^{-3}) \cdot (2{,}4 \cdot 10^2)^3$
өрнектерінің мәнін стандарт түрде жазыңдар.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

8.19. Есептеңдер:

1) $183^0 \cdot 5^3 : 3^2 + \frac{2}{9}$; 2) $100^2 \cdot 5^2 : 2^3$; 3) $\frac{155^0 \cdot 3^2 \cdot 4^2}{8 \cdot 3^3}$.

8.20. 1) $2 \cdot \frac{x^4}{x^4} + x^0$; 2) $\frac{x^5}{x^4} - x + 3$ өрнегінің мәні x айнымалысының мәніне тәуелді болмайтынын дәлелдеңдер.

§ 9. ДӘРЕЖЕЛЕРІ БАР ӨРНЕКТЕРДІ ТҮРЛЕНДІРУ. ҚҰРАМЫНДА ДӘРЕЖЕЛЕРІ БАР САНДЫ ТІЗБЕКТЕР

Өрнектерді ықшамдағанда дәреженің қасиеттерін қалай қолдануға болады?

Дәрежесі бар өрнектерді түрлендіруді мысалдар арқылы қарастырайық.

1-мысал. Жарық жылдамдығы $3 \cdot 10^8$ м/с-қа тең. Күннен Жерге дейінгі қашықтық $1{,}5 \cdot 10^{11}$ м. Осы қашықтықты жарық қанша уақытта жүріп өтеді?

Шешуі. Жүрілген жолды $s = v \cdot t$ формуласы (мұндағы v — қозғалыс жылдамдығы, t — қозғалыс уақыты) арқылы табуға болады:

$$1{,}5 \cdot 10^{11} = 3 \cdot 10^8 \cdot t, \text{ бұдан } t = \frac{1{,}5 \cdot 10^{11}}{3 \cdot 10^8} = 0{,}5 \cdot 10^{11-8} = 0{,}5 \cdot 10^3 =$$

$$= 0{,}5 \cdot 1000 = 500.$$

Жауабы: 500 с немесе 8 мин 20 с.

2-мысал. 1) $\dfrac{(2^3)^3 \cdot 32}{64^2}$; 2) $\dfrac{25^5 \cdot 36^4}{(30)^7}$ өрнектерінің мәнін есептейік.

Шешуі. 1) $\dfrac{(2^3)^3 \cdot 32}{64^2} = \dfrac{2^9 \cdot 2^5}{(2^6)^2} = \dfrac{2^{14}}{2^{12}} = 2^{14-12} = 2^2 = 4;$

2) $\dfrac{25^5 \cdot 36^4}{(30)^7} = \dfrac{(5^2)^5 \cdot (6^2)^4}{(5 \cdot 6)^7} = \dfrac{5^{10} \cdot 6^8}{5^7 \cdot 6^7} = 5^{10-7} \cdot 6^{8-7} = 5^3 \cdot 6 = 125 \cdot 6 =$

$$750.$$

Жауабы: 1) 4; 2) 750.

3-мысал. $\dfrac{13^4 \cdot 11^7 \cdot 5^9}{13 \cdot 11^6} : \dfrac{13^6 \cdot 11^4 \cdot 5^8}{13^4 \cdot 11^3}$ өрнегінің мәнін табайық.

Шешуі. $\dfrac{13^4 \cdot 11^7 \cdot 5^9}{13 \cdot 11^6} : \dfrac{13^6 \cdot 11^4 \cdot 5^8}{13^4 \cdot 11^3} = (13^{4-1} \cdot 11^{7-6} \cdot 5^9) : (13^{6-4} \cdot 11^{4-3} \times$

$\times\ 5^{8}) = 13^{3} \cdot 11 \cdot 5^{9} : (13^{2} \cdot 11 \cdot 5^{8}) = 13^{3-2} \cdot 11^{1-1} \cdot 5^{9-8} =$
$= 13 \cdot 11^{0} \cdot 5 = 65.$

Жауабы : 65.

Натурал көрсеткішті дәрежелерді салыстырғанда оларды бірдей негізге немесе бірдей көрсеткішке келтіреді. Бірінші жағдайда негізі үлкен дәреже үлкен, екінші жағдайда көрсеткіші үлкен дәреже үлкен болады.

4-мысал. $3^{40} \cdot 2^{40}$ және 33^{20} өрнектерінің мәндерін салыстырайық.

Шешуі. $3^{40} \cdot 2^{40}$ өрнегін дәреже түрінде жазайық: $3^{40} \cdot 2^{40} = (3 \cdot 2)^{40} = 6^{40}$. Енді 6^{40} дәрежесінің көрсеткішін 20-ға келтірейік: $6^{40} = (6^{2})^{20}$ немесе 36^{20}.

Ал $36^{20} > 33^{20}$ болғандықтан, $3^{40} \cdot 2^{40} > 33^{20}$.

5-мысал . $\dfrac{4^{-2} \cdot 8^{-6}}{2^{-22}}$ бөлшегінің мәнін табайық.

Шешуі . Алдымен әрбір көбейткішті 2 санының дәрежесі түрінде көрсетеміз: $\dfrac{4^{-2} \cdot 8^{-6}}{2^{-22}} = \dfrac{(2^{2})^{-2} \cdot (2^{3})^{-6}}{2^{-22}}$. Бөлшектің алымына дәреженің “дәрежені дәрежеге шығарғанда дәреже көрсеткіштері көбейтіледі” қасиетін қолданғанда $\dfrac{(2^{2})^{-2} \cdot (2^{3})^{-6}}{2^{-22}} = \dfrac{2^{-4} \cdot 2^{-18}}{2^{-22}}$ шығады. Сонымен қатар бөлшектің алымына тағы да дәреженің “негіздері бірдей дәрежелерді көбейткенде негізі өзгермей, дәреже көрсеткіштері қосылады” қасиетін қолданамыз: $\dfrac{2^{-4} \cdot 2^{-18}}{2^{-22}} = \dfrac{2^{-22}}{2^{-22}}$. Енді бөлуді орындасақ,

$\dfrac{2^{-22}}{2^{-22}} = 1.$

Жауабы : 1.

6-мысал . $\left(-\dfrac{1}{3}x^{6}y^{-7}\right)^{-2} \cdot 9^{-1}x^{13}y^{-13}$ өрнегін ықшамдайық.

Шешуі . Дәреженің “көбейтіндіні дәрежеге шығару үшін әрбір көбейткішті осы дәрежеге шығарып, нәтижелерін көбейту керек” қасиетін пайдаланамыз:

$$\left(-\frac{1}{3}x^{6}y^{-7}\right)^{-2} \cdot 9^{-1}x^{13}y^{-13} = \left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot (x^{6})^{-2} \cdot (y^{-7})^{-2} \cdot 9^{-1}x^{13}y^{-13}.$$

Енді теріс көрсеткішті дәреженің анықтамасы мен дәреженің “дәрежені дәрежеге шығару үшін дәреже көрсеткіштерін көбейту керек” қасиетін пайдалансақ,

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot (x^6)^{-2} \cdot (y^{-7})^{-2} \cdot 9^{-1}x^{13}y^{-13} = (-3)^2 \cdot x^{-12} \cdot y^{14} \cdot 9^{-1}x^{13}y^{-13}.$$

Сонымен қатар –3 санын квадратқа келтіріп, дәреженің "негіздері бірдей дәрежені көбейткенде, негізі өзгермей, дәреже көрсеткіштері қосылады" қасиетін қолданамыз:

$$(-3)^2 \cdot x^{-12} \cdot y^{14} \cdot 9^{-1}x^{13}y^{-13} = 9 \cdot x \cdot y \cdot 9^{-1}.$$

Ендеше негіздері бірдей дәрежелерді көбейткенде $9 \cdot x \cdot y \cdot 9^{-1} = xy$ болады.

Жауабы : xy.

7-мысал. $y = \frac{1}{5}$ болғандағы $\frac{5}{6^2}x^7y^4 \cdot 36x^{-7}y^{-5}$ өрнегінің мәнін табайық.

Шешуі. Алдымен $\frac{5}{6^2}x^7y^4 \cdot 36x^{-7}y^{-5}$ өрнегін ықшамдайық. Ол үшін сан ды дәреже түрінде көрсетейік:

$$\frac{5}{6^2}x^7y^4 \cdot 36x^{-7}y^{-5} = 5 \cdot 6^{-2}x^7y^4 \cdot 6^2x^{-7}y^{-5}.$$

Енді негіздері бірдей дәрежелерді көбейтеміз:

$$5 \cdot 6^{-2}x^7y^4 \cdot 6^2x^{-7}y^{-5} = 5 \cdot 6^0x^0y^{-1}.$$

Нөлдік көрсеткішті дәреженің анықтамасы бойынша,

$$5 \cdot 6^0x^0y^{-1} = 5y^{-1}.$$

y-тің орнына $\frac{1}{5}$ санын қоямыз: $5y^{-1} = 5\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$.

Сонда $5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = 5 \cdot 5 = 25.$

Жауабы : 25.

8-мысал. $\left(-\frac{1}{2}a^{-1}b^2\right)^2 \cdot 4a^3b^{-3} = ab$ тепе-теңдігін дәлелдейік.

Дәлелдеу. Теңдіктің сол жағын ықшамдасақ, онда оның оң жағын аламыз: $\left(-\frac{1}{2}a^{-1}b^2\right)^2 \cdot 4a^3b^{-3} = \frac{1}{4}a^{-2}b^4 \cdot 4a^3b^{-3} = ab$. Берілген тепе-теңдік дәле лденді.

9-мысал. $\frac{5^{-2n} \cdot 7^{-2}}{25^{-n} \cdot 49^{-1} \cdot 3^{-3}}$ өрнегінің мәні n-ге тәуелді емес екенін дәлел дей ік.

Дәлелдеу. $\frac{5^{-2n}\cdot 7^{-2}}{25^{-n}\cdot 49^{-1}\cdot 3^{-3}}$ өрнегін ықшамдап, 25 пен 49 сандарын дәреже түрінде көрсетсек, $\frac{5^{-2n}\cdot 7^{-2}}{25^{-n}\cdot 49^{-1}\cdot 3^{-3}}=\frac{5^{-2n}\cdot 7^{-2}}{(5^2)^{-n}\cdot (7^2)^{-1}\cdot 3^{-3}}$. Енді бөлшектің бөліміндегі дәрежені дәрежеге шығарсақ,

$$\frac{5^{-2n}\cdot 7^{-2}}{(5^2)^{-n}\cdot (7^2)^{-1}\cdot 3^{-3}}=\frac{5^{-2n}\cdot 7^{-2}}{5^{-2n}\cdot 7^{-2}\cdot 3^{-3}}.$$

Шыққан бөлшекті қысқартып, теріс көрсеткішті дәреженің анықтамасы мен натурал санды бөлшекке бөлу ережесін қолданамыз:

$$\frac{5^{-2n}\cdot 7^{-2}}{5^{-2n}\cdot 7^{-2}\cdot 3^{-3}}=\frac{1}{3^{-3}}=1:3^{-3}=1:\frac{1}{3^3}=3^3=27.$$

Сонымен, $\frac{5^{-2n}\cdot 7^{-2}}{25^{-n}\cdot 49^{-1}\cdot 3^{-3}}$ өрнегінің мәні 27-ге тең болғандықтан, ол n-ге тәуелді емес.

1. 4-мысалдағы тепе-теңдікті дәлелдегенде дәреженің қандай қасиеттері қолданылды?
2. 5-мысалдағы $\frac{2^{-22}}{2^{-22}}=1$ теңдігінің қалай шыққанын түсіндіріңдер.

Жаттығулар

А

Өрнекті ықшамдаңдар (9.1-9.2) :

9.1. 1) $(a^5)^2 : a^9 \cdot a^3$; 2) $a^{21}\cdot(a^4)^3 : (a^3)^{10}$;
3) $b^{40} : (b^2)^{11} : (b^4)^2$; 4) $(b^6)^4 : (b^7)^3 \cdot (b^2)^3$.

9.2. 1) $(x^2y)^6 : (x^5y^3)^2 \cdot xy$; 2) $(xy^3)^7 \cdot (x^6y^4)^3 : (x^{24}y^{32})$;
3) $\left(\frac{x}{y}\right)^8 : \left(\frac{x^2}{y}\right)^4 \cdot xy^5$; 4) $x^5y^8\cdot(xy)^5 : (x^5y^3)^2$.

Өрнекті ықшамдап, мәнін табыңдар (9.3-9.4) :

9.3. 1) $(n^5)^2 : (n^3)^3 \cdot n^{10} : n^8$, мұндағы $n=-0{,}3$;
2) $a^{20}\cdot(a^8)^4 : (a^{10})^5$, мұндағы $a=5{,}5$;

3) $(b^{17})^3 : b^{40} : (b^4)^2$, мұндағы $b = -\dfrac{2}{7}$;

4) $((a^4)^4 \cdot a^{31}) : ((a^{20})^2 \cdot a^3)$, мұндағы $a = 4$.

9.4. 1) $a^{10}b^{17} : (a^4b^8)^2$, мұндағы $a = 3\dfrac{1}{2}$ және $b = \dfrac{4}{7}$;

2) $(x^{14})^2 \cdot (y^{20})^3 : (x^9y^{19})^3$, мұндағы $x = \dfrac{6}{11}$ және $y = -11$;

3) $(m^6)^4 \cdot (n^8)^2 : (m^{11}n^7)^2$, мұндағы $m = -\dfrac{8}{9}$ және $n = 0{,}81$;

4) $(c^{10}d^6)^3 : (c^9)^3 : (d^2)^8$, мұндағы $c = -0{,}25$ және $d = \dfrac{4}{5}$.

9.5. m айнымалысының қандай мәнінде теңдік тура болады:

1) $303 - 7^3 + (2^4)^3 = m^3$;
2) $(-3)^5 + (-5)^2 + 282 = m^3$;
3) $-16{,}31 - (-1{,}3)^2 + (-19)^2 = m^3$;
4) $49\dfrac{1}{8} + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^3 + (-24)^2 = m^2$?

9.6. Теңдік тура болатындай етіп жұлдызшаның орнына сан қойыңдар:

1) $10^4 - 9375 = 5^*$;
2) $-2015 + 14^3 = 9^*$;
3) $3^9 - 11683 = (20)^*$;
4) $1199 + 7^4 = (60)^*$.

9.7. Айнымалының кез келген мәнінде өрнектің мәні 1-ге тең болатынын дәлелдеңдер:

1) $(a^5)^6 \cdot (a^4b^2)^7 : (a^{29}b^7)^2$;
2) $(a^4b^5)^3 \cdot (a^8b^9) : (a^{10}b^{12})^2$;
3) $(c^8)^6 \cdot (d^{18})^3 : (c^8d^9)^6$;
4) $(x^{11}y^2)^4 \cdot (y^5)^2 : (x^{22}y^9)^2$.

9.8. Өрнектің мәні айнымалының мәніне тәуелді емес екенін дәлелдеңдер:

1) $((n^3)^2)^4 : (n^7)^2 - 5 - n^{10}$;
2) $m^{30} : ((m^3)^2)^3 + 17 - (m^6)^2$;
3) $((a^2)^2)^2 \cdot a^4 + 19 - (a^4)^3$;
4) $-23 - b^{40} + ((b^5)^4)^2$.

9.9. Мына өрнектерді ықшамдаңдар:

1) $(0{,}25\ a^{-4}x^3) \cdot (5^2a^3 \cdot x^{-4})$;
2) $(2{,}25\ b^{-4}x^3) \cdot (5^2b^3 \cdot x^{-6})$;
3) $(5a^{-5}x^6) \cdot (5^2a^3 : x^7)$;
4) $(1{,}25\ a^{-4}x^7) : (5^2a^8 \cdot x^{-4})$.

9.10. Берілген өрнектердің мәнін табыңдар:

1) $\dfrac{17^2 \cdot 17^{-4}}{17^{-3}}$;
2) $\dfrac{0{,}7^7 \cdot 0{,}7^{-3}}{0{,}7^3} \cdot 3$;
3) $\dfrac{0{,}5^4 \cdot 2^5}{4^2} : 8^2$;
4) $1{,}33^{-5} \cdot 1{,}33^6 : \pi^0$.

9.11. 1) $\left(\frac{a^3}{a^2}-a^2\right):a^2$; 2) $x^5:(x^{-1})^3+p^0$; 3) $(b^4-b^3):b^3$

өрнектерін ықшамдаңдар .

9.12. 1) $2^5\cdot2^{-2}\cdot*=2^7$; 2) $4^5\cdot8^{-2}\cdot*=4^7$; 3) $5^5\cdot5^{-2}\cdot*=5^7$ теңдіктерін дұрыс теңдікке айналдыратын етіп жұлдызшаның орнына сан жазыңдар.

9.13. 3^{-1}; 3^3; 9^2; 27^{-2}; 81^0; -3^2; -9^{-1} сандарын өсу ретімен орналастырыңдар.

9.14. 5^{-1}; 5^3; 25^2; 27^{-2}; 521^0; -8^2; -4^{-2} сандарын кему ретімен орналастырыңдар.

9.15. 1) $\frac{(-3)^3\cdot9^{-2}}{(-81)^2}$; 2) $\frac{(-4)^4\cdot9^{-2}}{-11^2}$; 3) $\frac{(-3)^3\cdot(-9^{-2})}{-8^2}$

өрнектерінің мәні теріс сан болатынын дәлелдеңдер.

9.16. 1) $21^0-3^{-2}-4^{-2}$; 2) $2^{-3}+3^{-1}+(-4)^2$; 3) $9^{-1}-\frac{(-3)^2}{(-5^2)}$

өрнектерінің мәні оң сан болатынын дәлелдеңдер.

B

9.17. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $x^3:(x^{-1})^3+\pi^0=1+x^6$; 2) $(b^4-b^3):b^2=b^2-b$;

3) $\frac{2^4:4}{14^0\cdot a^{-2}}a^2=\frac{4}{a^{-4}}$.

Өрнектерді ықшамдаңдар (9.18-9.19):

9.18. 1) $\frac{(b^5)^3\cdot(b^7)^7}{b^{19}\cdot b^{38}}$; 2) $\frac{c^{50}\cdot c^{11}}{(c^{20})^2\cdot(c^2)^5}$;

3) $\frac{(a^9)^3\cdot(a^3)^4\cdot a^{23}}{a^{40}\cdot a^{18}}$; 4) $\frac{d^{13}\cdot(d^8)^3\cdot(d^7)^2}{(d^3)^{10}\cdot(d^6)^2}$.

9.19. 1) $(ab)^{10}:(a^9\cdot b^8)\cdot a^2$; 2) $((x^5y^2)^3)^4:((x^{29})^2\cdot(y^{12})^2)$;

3) $((k^6)^7)\cdot(t^3)^9:((k^7\cdot t^4)^3)^2$; 3) $((c^8d^{11})^5)^2:((c^{20}d^{25})^2)^2$.

9.20. 1) $\frac{8^3:4}{14^0\cdot a^{-2}}\cdot a^3$; 2) $\frac{(x^3\cdot x)^2}{(-x^2)^3}$; 3) $\frac{(a^3\cdot x^4)^2}{(a^2)^2\cdot x^7}$; 4) $\frac{(b^3\cdot x^4)^3}{(-2b^2)^2\cdot x^{12}}$

өрнектерін ықшамдаңдар.

9.21. 1) $\frac{\left(\frac{1}{9}\right)^{-3}\cdot\frac{1}{9}}{3^3}$; 2) $45\cdot\frac{5^{-2}}{9^2}$; 3) $\frac{34^3}{17^2\cdot2^4}\cdot8^2$ өрнектерінің мәнін табыңдар.

C

Теңдіктің дұрыстығын тексеріңдер **(9.22-9.23)** :

9.22. 1) $\dfrac{(2^4)^6 \cdot 4^5}{16^3 \cdot 8^7} = 2$; 2) $\dfrac{(17^8)^2 \cdot (17^3)^3 \cdot 16^5}{17^{22} \cdot 289 \cdot 8^6} = 68$.

9.23. 1) $\dfrac{(a^5)^6 \cdot (b^9)^4 \cdot (a^2b^2)^3}{(b^4)^{10} \cdot (a^7)^5} = ab^2$; 2) $\dfrac{(c^8 \cdot d^5)^{11} \cdot (c^7)^3 \cdot (d^4)^2}{(d^{31})^2 \cdot (c^{25})^4} = c^9d$.

9.24. $a=1$, $b=-1$ болғандағы өрнектердің мәндері тең екенін дәлелдеңдер:
1) $(a^5 \cdot b^6)^7 : (a^{33} \cdot b^{40}) + 1$ және $(a^8b^2)^2 : (a^5b)^3 + 3$;

2) $\dfrac{(a^4)^3 \cdot (b^{10})^2}{a^8 \cdot (b^5)^3} - 4$ және $\dfrac{(a^7)^4 \cdot (b^9)^2}{(a^5)^5 \cdot b^{16}} - 6$.

9.25. Амалдарды орындаңдар және шыққан өрнектерді теріс емес көрсеткішті дәреже түріне келтіріңдер:

1) $\dfrac{(a^{-3} \cdot x^4)^2}{(a^{-2})^2 \cdot x^{-7}} \cdot 2^{-2}$; 2) $\dfrac{(b^3 \cdot y^{-3})^2}{(b^2)^2 \cdot y^7} \cdot y^{-1}$; 3) $\dfrac{(3^3 \cdot x^4 y^{-2}}{(3^2)^2 \cdot x^{-7}} + \dfrac{2}{x^{-3}}$.

9.26. 1) $x = 0{,}5$ және $b = \dfrac{1}{3}$ болғанда $\dfrac{(3^3 \cdot x)^2}{(x^2)^3 \cdot b^2}$;

2) $a = 0{,}1$ және $x = 2$ болғанда $\dfrac{(a^3 \cdot x^4)^2}{(a^2)^2 \cdot x^7}$

өрнектерінің мәні натурал сан бола ма?

9.2 7. 1) $\dfrac{2^{-2n} \cdot 3^{-2}}{4^{-n} \cdot 3^{-1}}$; 2) $\dfrac{5^{-3n} \cdot 34^{-2}}{125^{-n} \cdot 17^{-1}}$; 3) $\dfrac{0{,}2^{-2n} \cdot 13^{-2}}{0{,}04^{-n} \cdot 23^{-1}}$

өрнектерінің мәні n-ге тәуелді болмайтынын дәлелдеңдер.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

9.28. Дұрыс жауаптың нөмірін көрсетіңдер. Өрнек болатын жазу:
1. 728 + 327; 2. 728 + 327; $7a + 2b$;
3. 728 + 327; $7a + 2b$, 126; 4. 728 + 327; $7a + 2b$, 126, $152 < 200$.

9.29. Өрнектің мәнін есептеңдер:
$(327 \cdot 14 - 4577) \cdot 11^0$; 2) $(32 \cdot 74 - 4552) : 14(-13)^0$.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

1. $2^{10} \cdot 2^{12} : 2^{21}$ өрнегінің мәнін есептеңдер.

A. 4; B. 2; C. 1; D. 8.

2. $a^{35} \cdot a^{19} : (a^{52} \cdot a^{2})$ өрнегін ықшамдаңдар.

A. a; B. a^4; C. 1; D. a^2.

3. $\dfrac{x^{10} y^8}{x^9 y^6}$ өрнегін ықшамдап, $x = 2$, $y = 3$ болғандағы мәнін табыңдар.

A. 24; B. 12; C. 6; D. 18.

4. $0{,}2 \cdot (-5)^2 - 3^3$ өрнегінің мәнін есептеңдер.

A. –32; B. –22; C. –2; D. 52.

5. $\dfrac{(m^3)^5 \cdot (n^4)^3}{(m^3)^4 \cdot (n^5)^2}$ өрнегін ықшамдаңдар.

A. $m^{23}n^{22}$; B. m^7n^{22}; C. m^3n^2; D. m^7n^2.

6. $\dfrac{x^4}{y^6}$ өрнегін дәрежелердің көбейтіндісі түрінде жазыңдар.

A. x^4y^6; B. $x^{-4}y^6$; C. $x^{-4}y^{-6}$; D. x^4y^{-6}.

7. $5^{-3} \cdot 25^2$ өрнегінің мәнін есептеңдер.

A. 5; B. $\dfrac{1}{5}$; C. 25; D. $\dfrac{1}{25}$.

8. $\dfrac{a^2}{b^3 c^{-4}}$ өрнегін дәрежелердің көбейтіндісі түрінде жазыңдар.

A. $a^2b^3c^{-4}$; B. $a^2b^{-3}c^4$; C. $a^{-2}b^{-3}c^{-4}$; D. $a^{-2}b^{-3}c^4$.

9. $\dfrac{5a^9 - 3a^7}{4a^8}$ өрнегін ықшамдап, $a = -1$ болғандағы мәнін табыңдар.

A. $\dfrac{1}{2}$; B. $-\dfrac{1}{2}$; C. 2; D. –2.

10. Кубы $-\dfrac{1}{8}$-ге тең санның бесінші дәрежесін табыңдар.

A. $\dfrac{1}{32}$; B. –0,5; C. $-\dfrac{1}{32}$; D. –32.

2-ТАРАУ

КӨПМҮШЕ ЖӘНЕ ОЛАРҒА АМАЛДАР ҚОЛДАНУ

§ 10. БІРМҮШЕ. БІРМҮШЕНІҢ СТАНДАРТ ТҮРІ

Бірмүше, оның дәрежесі және стандарт түрі дегеніміз не? Бірмүшелерді қалай көбейтеміз?

Анықтама. Санды және әріпті көбейткіштер мен олардың дәрежелерінің көбейтіндісі бірмүше деп аталады.

3^3xy; $15ab^3$; $-\frac{8}{9}nm^4$; $\left(1\frac{4}{7}\right)^5$ көбейтінділерін қарастырайық. Олардың құрамына сандар арқылы жазылған көбейткіштер, айнымалылар мен олардың дәрежелері арқылы жазылған көбейткіштер кіреді.

Жоғарыда көрсетілген көбейтінділер неліктен бірмүшелер деп аталады?

Кез келген санды сол сан мен бірдің көбейтіндісі түрінде жазуға болады және бір санын нөлге тең емес кез келген a санының нөлінші дәрежесі деп ала аламыз. Ендеше 7; b; 0,09; $-\frac{5}{6}$ түріндегі өрнектер де бірмүше деп есептеледі.

1-мысал. $a=-1$, $b=2$, $c=13$ болғандағы $25a^4b\cdot(0{,}4ab^2)\cdot 3bc$ бірмүшесінің мәнін табайық.

Шешуі. **Бірінші тәсіл**. Әріптердің (айнымалылардың) берілген мәндерін бірмүшеге қойып, көбейтіндінің мәнін есептейік. Сонда $25\cdot(-1)^4\cdot 2\cdot 0{,}4(-1)\cdot 2^2\cdot 3\cdot 2\cdot 13=-6240$.

Екінші тәсіл. Есептеуді тиімді жолмен жүргізуге болады. Ол үшін көбейтудің ауыстырымдылық және терімділік қасиеттерін қолданып, берілген бірмүшені ықшамдау керек.

$$25a^4b\cdot(0{,}4ab^2)\cdot 3bc=(25\cdot 0{,}4\cdot 3)\cdot(a^4\cdot a)\cdot(b\cdot b^2\cdot b)\cdot c=30a^5b^4c.$$

Енді әріптердің (айнымалылардың) берілген мәндеріне сәйкес $30a^5b^4c$ бірмүшесінің мәнін табамыз: $30\cdot(-1)^5\cdot 2^4\cdot 13=-6240$.

Жауабы : –6240.

Екінші жағдайда берілген бірмүше $30a^5b^4c$ түрінде жазылды. Мұнда санды көбейткіш пен әртүрлі негізді дәрежелер бар. Мұндай бірмүшелерді *стандарт түрдегі бірмүше* деп атайды.

Кез келген бірмүшені стандарт түрге келтіруге болады. Стандарт түрде жазылған бірмүшедегі санды көрсеткішті *бірмүшенің коэффициенті* деп атайды. Мысалы, $\frac{4}{9}x$ бірмүшесінің коэффициенті $\frac{4}{9}$, ал $-7x^2$ бірмүшесінің коэффициенті -7-ге тең.

2-мысал. $-0{,}6\,d^4\cdot\left(\frac{5}{6}d^2\right)$ бірмүшесін қалай стандарт түрге келтіруге болады?

Шешуі. Көбейтудің ауыстырымдылық және терімділік қасиеттерін, негіздері бірдей дәрежелерді көбейтудің қасиетін қолданамыз:

$$-0{,}6\,d^4\cdot\left(\frac{5}{6}d^2\right)=\left(-0{,}6\cdot\frac{5}{6}\right)(d^4\cdot d^2)=-0{,}5\,d^6.$$

Жауабы : $-0{,}5\,d^6$.

Әдетте, 1-ге тең коэффициент жазылмайды, өйткені бірге көбейткеннен өрнектің мәні өзгермейді. Мысалы, $1\cdot a^4b^3c=a^4b^3c$, яғни a^4b^3c бірмүшесінің коэффициенті 1-ге тең. Егер коэффициент -1-ге тең болса, онда бірмүшенің алдына "минус" таңбасы қойылады. Мысалы, $(-1)\cdot mn^7t^3=-mn^7t^3$, сондықтан $-mn^7t^3$ бірмүшесінің коэффициенті -1-ге тең.

$3a^4b^3c$ бірмүшесіндегі айнымалылардың дәреже көрсеткіштерінің қосындысы 8-ге тең. 8 санын $3a^4b^3c$ бірмүшесінің дәрежесі деп атайды.

Бірмүшедегі барлық айнымалылардың дәреже көрсеткіштерінің қосындысы **бірмүшенің дәрежесі** деп аталады.

Мысалы, $-0{,}9\,x^5yz^2$ бірмүшесінің дәрежесі 8-ге $(5+1+2=8)$ тең, ал $\frac{4}{11}a^8b$ бірмүшесі тоғызыншы дәрежелі бірмүше. 125 бірмүшесінің дәрежесі нөлге тең, өйткені $125=125\cdot a^0$ немесе $125\cdot x^0\cdot y^0$.

Кейбір бірмүшелердің әріпті бөлігі бірдей болады.

Анықтама. Бірдей бірмүшелер және коэффициенттерімен ерекшеленетін әріпті бөліктері ортақ бірмүшелер *ұқсас бірмүшелер* деп аталады.

Мысалы, $7xy^3t$; $7xy^3t$; $-8{,}9\ xy^3t$ және $1\frac{5}{11}xy^3t$ бірмүшелері ұқсас бірмүшелер.

Бірмүшелерді көбейтуді және дәрежеге шығаруды қарастырайық. Егер екі бірмүшенің арасына көбейту таңбасы қойылса, онда берілген мүшелердің көбейтіндісі деп аталатын бірмүше шығады. Мысалы, $9n^3m$ және $-1{,}1\ mn^4$ бірмүшелерінің көбейтіндісі $(9n^3m)\cdot(-1{,}1\ mn^4)$ өрнегі болады. Көбейтудің терімділік және ауыстырымдылық қасиеттерін қолданып, көбейтіндіні $9\cdot(-1{,}1)\cdot n^3mmn^4$ түріне келтіреміз. Одан кейін дәреженің қасиеттерін қолдансақ, $-9{,}9\ n^4m^5$ шығады.

3-мысал. $4\frac{1}{3}x^4y$; $-0{,}3\ xz^5$; $10xy^4z^2$ бірмүшелерінің көбейтіндісін қалай табуға және стандарт түрге келтіруге болады?

Шешуі. Бірмүшелердің көбейтіндісі $\left(4\frac{1}{3}x^4y\right)\cdot(-0{,}3\ xz^5)\cdot(10xy^4z^2)$ өрнегі болады. Енді көбейтудің терімділік пен ауыстырымдылық және дәреженің қасиеттерін қолданып, көбейтіндіні түрлендіреміз:

$$\left(4\frac{1}{3}x^4y\right)\cdot(-0{,}3\ xz^5)\cdot(10xy^4z^2)=\frac{13}{3}\cdot(-0{,}3)\cdot10\cdot x^4y\cdot$$

$$\cdot\ xz^5\cdot xy^4z^2=-13\ x^6y^5z^7.$$

Жауабы: $-13\ x^6y^5z^7$.

Бірмүшені натурал дәрежеге шығарғанда бірмүше шығады.

Бірмүшені дәрежеге шығару үшін оның әрбір көбейткішін (санды, әріпті) берілген дәрежеге шығару керек.

Мысалы, $\left(\frac{1}{5}tk^4\right)^3=\left(\frac{1}{5}\right)^3\cdot t^3\cdot(k^4)^3=\frac{1}{125}t^3k^{12}$.

4-мысал. $-0{,}125\ x^9y^3$ бірмүшесін екінші бірмүшенің кубы түрінде жазайық.

Шешуі. $-0{,}125\ x^9y^3=(-0{,}5)^3\cdot(x^3)^3\cdot y^3=(-0{,}5\ x^3y)^3$.

Жауабы: $(-0{,}5\ x^3y)^3$.

5-мысал. n-нің қандай мәнінде $\left(2\frac{1}{3}m^5\right)^n\cdot\left(\frac{9}{49}m^{11}\right)=29\frac{52}{81}m^{41}$ теңдігі дұрыс болады?

Шешуі. Егер $m = 0$ болса, онда теңдік дұрыс.

Егер $m \neq 0$ болса, онда теңдіктің екі жақ бөлігін $\frac{9}{49}m^{11}$-не бөлеміз:

$\left(2\frac{1}{3}m^5\right)^n = 29\frac{52}{81}m^{41} : \frac{9}{49}m^{11}$ немесе $\left(2\frac{1}{3}m^5\right)^n = \frac{2401}{81} \cdot \frac{49}{9} \cdot m^{41-11}$.

Дәреженің қасиеттерін қолданып, теңдіктің оң жақ бөлігін ықшамдаймыз: $\frac{2401}{81} \cdot \frac{49}{9} \cdot m^{41-11} = \left(\frac{7}{3}\right)^6 \cdot m^{30}$. Енді нәтижені негізі $\frac{7}{3}m^5$ болатын дәрежеге келтірейік: $\left(\frac{7}{3}m^5\right)^6$ немесе $\left(2\frac{1}{3}m^5\right)^6$.

Демек, $\left(2\frac{1}{3}m^5\right)^n = \left(2\frac{1}{3}m^5\right)^6$. Бұдан $n = 6$.

Жауабы : $m = 0$ болғанда n — кез келген сан,
$m \neq 0$ болғанда $n = 6$.

1. Бірмүшені сан мен натурал көрсеткішті дәреженің көбейтіндісінен тұратын өрнек түрінде жазуға бола ма? Жауабын түсіндіріңдер.
2. Ретімен орындалған соңғы амал қосу да, азайту да болмайтын өрнекті бірмүше деп атаймыз деген анықтама дұрыс па? Жауабын түсіндіріңдер.
3. 1) Кез келген бірмүше өрнек болады; 2) кез келген өрнек бірмүше болады деген тұжырым дұрыс па?

Жаттығулар

A

10.1. $8a$; $-0,5\,bc$; $\frac{2}{3}x^2yz$; $\frac{x-2}{3}$; $\frac{y+1}{z}$; $10\frac{a}{5}$; $\frac{4}{b}$ өрнектерінің қайсылары бірмүше болады?

10.2. 41, $9a^2c$; $-\frac{8}{17}x^5$; $6a^4ba$; $107x^2yzy^2$; $-26a^2nm^{10}$; $3ab \cdot \frac{5}{9}b$; $0,24x^3y\frac{7}{3}x^7y$ бірмүшелерінің арасынан стандарт түрде жазылған бірмүшелерді көрсетіңдер.

Бірмүшені стандарт түрде жазыңдар **(10.3-10.4)**:

10.3. 1) $8x^5x$; 2) $-b^4b^4b$; 3) xyx^4;

4) $-a^5(-a^8)$; 5) $7mn^4(-8n^3)$; 6) $\frac{5}{24}k^5t\left(-\frac{3}{10}t^6\right)$.

10.4. 1) $1{,}8\,a^5b^7a^{10}$; 2) $\frac{14}{5}cd^5\left(-\frac{8}{7}c^4\right)$; 3) $2{,}8\,xt^5(-0{,}5\,x^2t)$;

4) $-b^5(-b^8)(-b)$; 5) $1{,}4\,a^6t\left(-\frac{3}{2}at^8\right)$; 6) $20\,bc^8(-0{,}05\,b^{10})$.

10.5. 10.3-10.4-жаттығуларындағы бірмүшелердің дәрежесін табыңдар.

Бірмүшені стандарт түрде жазыңдар **(10.6—10.8)**:

10.6. 1) $5a^3(-3)\,ab^5$; 2) $7m^2\cdot 6c^3m$; 3) $-6m^8\cdot 9am^3$;
4) $-8\,ac^5(-2\,a^4)$; 5) $3m^2np\cdot(-5\,mn^24)$; 6) $ab\cdot 9a\cdot 4b$.

10.7. 1) $\left(-\frac{1}{2}m^3\right)\cdot(16m^2)$; 3) $\left(-\frac{3}{5}a^2xy^3\right)\cdot\left(\frac{2}{3}ax^2y\right)$;

2) $\left(\frac{3}{4}x^2y^3z\right)\cdot\left(\frac{2}{3}x^3y^2z^2\right)$; 4) $\left(10\frac{1}{3}ab^2c^4\right)\cdot\left(1\frac{5}{31}a^7bc^2\right)$.

10.8. 1) $\left(\frac{4pc^2}{15}\right)\cdot\left(\frac{9ca^3}{2}\right)$; 2) $\left(-\frac{4}{5}m^4np\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}m^2n^3p^2\right)$;

3) $\left(-4\frac{3}{4}mn^2\right)\cdot\left(-\frac{17}{38}amn\right)$; 4) $\left(6\frac{1}{2}x^3yz^2\right)\cdot\left(2\frac{2}{13}x^6yz^3\right)$.

10.9. Бірмүшенің дәрежесін табыңдар:

1) $\left(\frac{2}{3}ab^2\right)^3$; 2) $\left(\frac{3}{4}a^2b^3\right)^4$; 3) $\left(\frac{4}{3}m^5n^2\right)^5$;

4) $\left(\frac{2}{9}m^{10}n^{13}\right)^3$; 5) $(-0{,}6\,a^3b^4)^4$; 6) $(-1{,}3\,x^{10}y^4)^3$;

7) $(0{,}02\,m^3n^3)^2$; 8) $(0{,}5\,x^3y^5)^3$.

B

10.10. Бірмүшелерді көбейтіңдер және шыққан өрнектің мәнін табыңдар:

1) $\frac{3}{4}a^2\cdot\frac{4}{5}b^2$, мұндағы $a=2$, $b=\frac{3}{5}$;

2) $0{,}4\,ab\cdot 8b^2$, мұндағы $a=0{,}5$, $b=3$;

3) $0{,}5\,ab^3 \cdot 16\,a^2b$, мұндағы $a = -0{,}5$, $b = -2$;

4) $\frac{5}{18}a^3b^4 \cdot 3\frac{3}{5}a^4b^4$, мұндағы $a = -0{,}2$, $b = -5$.

10.11. Өрнектің мәнін табыңдар:

1) $\frac{1}{2}a^2b^4x \cdot \frac{3}{4}$, мұндағы $a = 2$, $b = 1$, $x = \frac{1}{2}$;

2) $-4\,a^2b^2c^2 \cdot 6a^4c^3$, мұндағы $a = 1$, $b = \frac{1}{4}$, $c = 2$;

3) $\frac{2}{5}x^3y^2z \cdot 7{,}5\,xz^4$, мұндағы $x = -2$, $y = -1$, $z = -0{,}5$;

4) $-25\,n^2m^2 \cdot 0{,}16\,n^5m^7$, мұндағы $n = -0{,}1$, $m = 10$.

10.12. Бірмүшені екінші бірмүшенің квадраты түрінде жазыңдар:

1) $16a^6$; 2) $100\,m^8n^4$; 3) $\frac{25}{81}x^6y^{12}$;

4) $\frac{169}{225}a^{10}b^2$; 5) $3{,}24\,m^4p^{14}$; 6) $0{,}0289\,\frac{x^{20}}{y^{18}}$.

10.13. Өрнектердің арасынан бірмүшенің квадраты және бірмүшенің кубы түрінде жазуға болатын өрнектерді теріп жазыңдар:

1) $a^{13}b^{30}$; 2) $n^6m^{18}k^9$; 3) $x^{24}y^{16}z^{20}$;

4) $0{,}16\,a^2b^6$; 5) $216\,a^6b^6$; 6) $7{,}296\,a^{15}c^9$.

C

10.14. Егер $5x^2y^3 = 8$ болса, онда

1) $45x^2y^3$; 2) $3x^2y^3$; 3) $-5{,}5\,x^2y^3$; 4) $25x^4y^6$;

5) $125\,x^6y^9$; 6) $\frac{625}{128}x^8y^{12}$ өрнегінің мәнін табыңдар.

10.15. $(a^5b^3)^6 \cdot (a^7b^4)^5 : (a^{21}b^{12})^3$ өрнегін ықшамдап, $a = -\frac{5}{11}$ және $b = 3\frac{2}{3}$ болғандағы мәнін есептеңдер.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

10.16. 1) $2a^2b - 13\,ab^3$ айырымын бірмүшелердің қосындысы;

2) $11\,x^2y + (-xy^3)$ қосындысын бірмүшелердің айырымы түрінде жазыңдар.

10.17. $17\,a^3$, $-5\,ya^4$; $8a^2n^3$; $12\,xy^5$ бірмүшелерінің арасынан дәрежесі ең үлкен бірмүшені көрсетіңдер.

§ 11. КӨПМҮШЕ. КӨПМҮШЕНІҢ СТАНДАРТ ТҮРІ. КӨПМҮШЕНІҢ ДӘРЕЖЕСІ

Көпмүше, оның дәрежесі және стандарт түрі дегеніміз не?

$a - b$ айырымын $a + (-b)$ қосындысымен алмастыруға болатынын білесіңдер.

$a - b$ және $a + (-b)$ өрнектерін *алгебралық қосынды* деп атайды.

Анықтама. Бірнеше бірмүшелердің алгебралық қосындысы *көпмүше* деп аталады.

Неліктен $3 + a$; $a^2 - b^2$; $8c + 0{,}7d^2$; $\frac{2}{9}xy^2 + z - 3$ өрнектері көпмүшелер болады?

Анықтама. Көпмүшені беретін бірмүшелер *көпмүшенің мүшелері* деп аталады .

Неліктен $25a + \frac{7}{9}xy^2 - 1{,}11n^4 + 10$ көпмүшесінің мүшелері $25a$; $\frac{7}{9}xy^2$; $-1{,}11n^4$; 10 бірмүшелер болады?

Барлық көпмүшелердің арасынан екімүше мен үшмүше бөлініп көрсетіледі.

Анықтама. Екі мүшеден тұратын көпмүше *екімүше* деп аталады.

Неліктен $\frac{8}{11} + 6c$; $y^5 - 7{,}3$ өрнектері екімүшелер болады?

Анықтама. Үш мүшеден тұратын көпмүше *үшмүше* деп аталады.

Түсіндіріңдер

1. Неліктен $a^2 - ab + 2$; $-\frac{5}{7}s + s^3 - k$ жазулары өрнек болады?

2. $8xy^2 - 1{,}2\,mx + 8{,}3 + 0{,}7\,mx - 9 + mx$ өрнегі қалай ықшамдалған:

$$8xy^2 - \underline{1{,}2\,mx} + \underline{8{,}3} + \underline{0{,}7\,mx} - \underline{9} + \underline{mx} = 8xy^2 + (-1{,}2\,mx + 0{,}7\,mx + mx) +$$
$$+ (8{,}3 - 9) = 8xy^2 + (-1{,}2 + 0{,}7 + 1)mx + (-0{,}7) = 8xy^2 + 0{,}5\,mx - 0{,}7?$$

Анықтама. Ұқсас бірмүшелердің қосындысын бір бірмүшемен алмастыру көпмүшенің *ұқсас мүшелерін біріктіру* деп аталады.

$8xy^2 + 0,5\,mx - 0,7$ көпмүшесінде әрбір бірмүше стандарт түрде жазылған және олардың арасында ұқсас бірмүшелер жоқ. Көпмүшенің мұндай түрі *көпмүшенің стандарт түрі* деп аталады.

Көпмүшені стандарт түрге келтіру үшін оның әрбір мүшесін стандарт түрде жазып, одан кейін ұқсас мүшелерін біріктіру керек.

Көпмүшенің стандарт түріндегі бірмүшелерінің ең үлкен дәрежесі *көпмүшенің дәрежесі* деп аталады.

Неліктен $8xy^2 + 0,5mx - 0,7$ көпмүшесі үшінші дәрежелі көпмүше болады?

1. Көпмүшедегі бірмүшелердің ең кіші саны қандай?
2. Екі бірмүшенің, үш бірмүшенің, бес бірмүшенің қосындысы қалай аталады?
3. Көпмүшенің дәрежесі нөлге; бірге тең болуы мүмкін бе?
4. Екінші дәрежелі көпмүшеге мысал келтіріңдер.

Жаттығулар

A

11.1. Бірмүшелерді көпмүше түрінде жазыңдар:
1) a^2; a және 5; 2) $9x^3$; x және -7; 3) $0,8\,y$; $-2\,y$ және y^7;
4) -4; $7b^3$ және d^4; 5) $\frac{4}{15}t^3$; $-k$ және 10; 6) $\frac{19}{5}k^4$; $-6,3\,k^3$ және k.

11.2. Көпмүшенің әрбір мүшесін стандарт түрге келтіріп, дәрежесін табыңдар:
1) $8xy^4x^3 - 9x^3yy^7 + 10zz^5$; 2) $0,2\,a^5bb^6 - 1,1\,xyx^7 + k^8t^2k$;
3) $\frac{1}{3}8ac^5a - 3,8\,t^8s^9s - b^6c^8b^{10}$; 4) $mn^{10}n^2 + \frac{2}{5}c^8dd^7 - t^4t^5t$.

11.3. Көпмүшенің мүшелерін атаңдар:
1) $5x^4 - 6a^2c + 0,8\,y^5$; 2) $-40\,a^{10} + 3,8\,cd^5 - mn^3$;
3) $\frac{8}{3}ab^3 + \frac{10}{17}d^{10} - 1,2\,z$; 4) $5c^5 - \frac{15}{26}xy^3 + 100$.

Көпмүшенің ұқсас мүшелерін біріктіріңдер **(11.4-11.5)**:

11.4. 1) $13\,a - 2\,bc + 19\,bc$; 2) $10\,mn + 9x - 20\,mn$;
3) $0,7\,b^2 + 20\,a + 2,0\,b^2$; 4) $5xy - 34\,xy + 3,3\,a$;
5) $9,3\,c + 4,5\,d^3 - 5,1\,d^3$; 6) $0,8\,t^4 + 2,4\,c - 2,1\,t^4$.

11.5. 1) $x^4 + a^2 - 6x^4 + 7a^2$; 2) $3y^3 - ab + 8y^3 + 9ab$;
3) $2ab^2 - nm - 5ab^2 + 6nm$; 4) $12c^2d - 7kt^2 + 8kt^2 - 10c^2d$;
5) $a^8c + 13a^8c - a^2d$; 6) $4x^3y - 6am + 2{,}1\,am - 7x^3y$.

11.6. 1) $8\frac{2}{3}x^3 - 16ay^2 + 9ay^2 - 9x^3$; 2) $27a^2z - 24{,}89\,a^2z + 3\frac{1}{5}y^2 - 15y^2$;

3) $3{,}12\,ab + 7\frac{5}{6}m^3 - 4\frac{1}{6}m^3 + 16{,}82\,ab$; 4) $19{,}2\,x^2 - 30\frac{1}{9}kt + 31kt - 20x^2$.

B

Көпмүшені стандарт түрге келтіріп, дәрежесін атаңдар **(11.7—11.9)** :

11.7. 1) $22a^2 - 40a^3 + 18a^2 + 29a^3 + a^4$; 2) $-7b^5 - 13b^6 + 15 - 9b^5 + 34b^6$;
3) $41c^2 + 62c^3 - 99 - 42c^2 + 38c^3$; 4) $-52k + k^4 - 18k^4 + 52 - k$.

11.8. 1) $7{,}8x + 9{,}1y^2 - x + 1{,}9y^2 - 8{,}7y^2$;
2) $0{,}246z^3 - 15{,}2t + 16t - z^3 - 0{,}94$;
3) $-29{,}1\,c^2 + 0{,}17\,d^3 - d^3 + 30c^2 - 1{,}1\,d^3$;
4) $40{,}4\,a^3 - b^4 + 2{,}6\,a^3 - 44a^3 + 0{,}73\,b^4$.

11.9. 1) $1\frac{3}{7}b^2 - 10a^3 - \frac{2}{3}b^2 - \frac{3}{7}b^2 + 9a^3$;

2) $-8{,}5\,c^4 + 17b + 6\frac{2}{3}c^4 + \frac{5}{6}c^4 - 19b$;

3) $2\frac{2}{3}t^5 + 40a^2 - 3\frac{4}{9}t^5 - 41a^2 + 1\frac{1}{3}t^5$;

4) $-\frac{6}{7}k^6 - 8{,}8\,d^4 + 2\frac{6}{11}k^6 + 9d^4 - \frac{9}{11}k^6$.

Көпмүшенің мәнін табыңдар **(11.10-11.11)** :

11.10. 1) $5x^3 - 8x^5 + 44 - 10x^3 + 7x^5 - 60$, мұндағы $x = -2$;
2) $-7y^2 + 13y^6 - 71 + 3y^2 + 59 - 11y^6$, мұндағы $y = 3$;
3) $37 + 12a^4 - a^3 - 40 + 4a^3 + 10a^4$, мұндағы $a = -3$;
4) $-100 - 29b^3 + 51b^6 - 52b^6 + 27b^3 + 200$, мұндағы $b = 2$.

11.11. 1) $\frac{1}{3}x^4 + \frac{7}{9}x^3 - 2{,}5 - x^3 - x^4 + 6$, мұндағы $x = 1$;

2) $72 - \frac{4}{5}a^5 + \frac{3}{4}a^3 + \frac{2}{5}a^5 - a^3 - 69$, мұндағы $a = -1$;

3) $80{,}3 + \frac{3}{8}y^2 - 79{,}4 - y^2 - \frac{5}{6}y^3 + y^3$, мұндағы $y = -1$;

4) $-\frac{11}{17}b^5 + 99{,}1 + \frac{8}{13}b + b^5 - \frac{5}{13}b - 100$, мұндағы $b = 1$.

11.12. Өрнектің мәнін табыңдар:

1) $0{,}7\,ab - 49 + a - 1{,}2\,ab + 47$, мұндағы $a = \frac{2}{3}$; $b = \frac{9}{16}$;

2) $53 - 5{,}3\,xy - y + 4{,}8\,xy - 6y$, мұндағы $x = \frac{4}{13}$; $y = \frac{13}{7}$;

3) $mn + 8m + 9{,}2\,n - 9mn - 10\,n$, мұндағы $m = \frac{3}{4}$; $n = \frac{5}{8}$;

4) $13{,}2\,c + d - cd - 10\,d - 8cd$, мұндағы $c = \frac{5}{3}$; $d = \frac{14}{3}$.

C

11.13. Көпмүшенің бірмүшелерін дәрежелердің өсу ретімен орналастырыңдар:

1) $x^2 - 3x^4 + 5x^5 + x$;
2) $-1{,}7\,y^5 + 2{,}8\,y^4 + y - y^6$;
3) $11\,a + 11 - a^5 + 1{,}9\,a^4$;
4) $4{,}8\,b^6 - b^8 - 10\,b + b^2$.

11.14. Көпмүшенің бірмүшелерін дәрежелердің кему ретімен орналастырыңдар:

1) $6x^8 - 7x^7 + 9x^{11} + x^{10}$;
2) $-1{,}7\,y^5 + 2{,}8\,y^4 + y - y^6$;
3) $-10 + b^2 - 4b^3 - 5b + b^5$;
4) $2x^3 - 3x^2 - 8x^9 - 7x^8$.

11.15. Көпмүшенің мәндерін салыстырыңдар:

1) $2{,}25\,x^3 - 16x^2$ және $-2{,}5\,x^4 + 3x^3$, мұндағы $x = -2$;
2) $3{,}6\,x^3 - 1{,}875\,x^4$ және $0{,}125\,x^5 - x^9$, мұндағы $x = 2$;
3) $1{,}9\,b^7 - b^6 - 2b^7$ және $-2{,}4\,b^4 + b^5 + 2{,}3\,b^4$, мұндағы $b = -1$;
4) $\frac{1}{3}a^{10} + \frac{2}{7}a^7 - \frac{2}{3}a^{10}$ және $\frac{6}{7}a^9 - a^8 - \frac{2}{7}a^9$, мұндағы $a = -1$.

11.16. Айнымалылардың берілген мәндерінде көпмүшелердің мәндері тең болатынын дәлелдеңдер:

1) $11\frac{1}{9}ab^2 - 18\frac{2}{3}ab^2 + 5\frac{1}{6}ab^2 + \frac{8}{9}ab^2 + 26{,}6$ және $47{,}8\,a^2b - 6{,}3\,a^2b - 40{,}5\,a^2b - \frac{6}{7}a^2b$, мұндағы $a = 0{,}7$, $b = 5$;

2) $2{,}2\,c^3d^2 - 2\frac{1}{3}c^3d^2 + \frac{7}{15}c^3d^2$ және $2\frac{2}{9}c^4d - 2{,}5\,c^4d + \frac{1}{18}c^4d$, мұндағы $c = 3$, $d = -2$.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

11.17. $17ya^3$, $-8ya^3$; $3a^2n^3$; 4; $12xy^5$; a^2n^3; $-5xy^5$ бірмүшелері берілген. Коэффициенттерімен өзгешеленетін бірмүшелерді атаңдар.

11.18. Көпмүшеге қарама-қарсы көпмүшені жазыңдар:

1) $x^2 - 3x + 5a$; 2) $y - 2x + 3$; 3) $-y^2 - 3a^3 - 5$; 4) $8a^4 - 3a + 5$.

§ 12. КӨПМҮШЕЛЕРДІ ҚОСУ ЖӘНЕ АЗАЙТУ

Көпмүшелерді қосу және азайтуды қалай орындауға болады?

Көпмүшелерге арифметикалық амалдар қолдануға болады.

Көпмүшелерге амалдар қолдану өрнектерді ықшамдау үшін жүргізіледі. Амалдарды орындау кезінде жақшаны ашу, ұқсас мүшелерді біріктіру, бірмүшелерді көбейту тәрізді түрлендірулер қолданылады.

Көпмүшелерді қосқанда қосу ережесі пайдаланылады.

Көпмүшелерді қосу ережесі: көпмүшелерді қосу үшін барлық мүшелерді таңбаларымен тізбектеп жазып, одан кейін көпмүшенің ұқсас мүшелерін біріктіру керек.

Түсіндіріңдер

$30x^5 - 8{,}8yz^2 - 3\frac{1}{9}$ және $4 + 9{,}1yz^2 - 53x^5$ көпмүше лерінің қосындысы қалай табылған:

$$(30x^5 - 8{,}8yz^2 - 3\frac{1}{9}) + (4 + 9{,}1yz^2 - 53x^5) =$$

$$= 30x^5 - 8{,}8yz^2 - 3\frac{1}{9} + 4 + 9{,}1yz^2 - 53x^5 = -23x^5 + 0{,}3yz^2 + \frac{8}{9}?$$

Көпмүшелердің айырымын рационал сандардың айырымы тәрізді табады.

Көпмүшелерді азайту ережесі: бірінші көпмүшеден екінші көпмүшені азайту үшін азайғыш көпмүшеге азайтқыш көпмүшеге қарама-қарсы көпмүшені қосу керек.

$(21{,}8y^4 - 17x^2 + 9\frac{1}{7}z - 50)$ және $(22y^4 - 31x^2 + 7\frac{2}{7}z - 49)$ көпмүшелерінің айырымын қалай табуға болады?

Ол үшін көпмүшелерге азайту амалын қолданамыз:

$$\left(21{,}8y^4 - 17x^2 + 9\frac{1}{7}z - 50\right) - \left(22y^4 - 31x^2 + 7\frac{2}{7}z - 49\right) =$$

$$= (21{,}8\, y^4 - 17x^2 + 9\frac{1}{7}z - 50) + (-22\, y^4 + 31\, x^2 - 7\frac{2}{7}z + 49) =$$

$$= 21{,}8\, y^4 - 17x^2 + 9\frac{1}{7}z - 50 - 22y^4 + 31\, x^2 - 7\frac{2}{7}z + 49 =$$

$$= -0{,}2\, y^4 + 14x^2 + 1\frac{6}{7}z - 1.$$

1. Көпмүшелерді қосу және азайту кезінде қандай түрлендірулер қолданылады?
2. Көпмүшелерді қосу немесе азайту нәтижесінде 1) сан; 2) бірмүше шығуы мүмкін бе? Егер мүмкін болса, мысал келтіріңдер.
3. $2x^2 - 7xy + y^2$ көпмүшесіне қарама-қарсы көпмүшені атаңдар.

Жаттығулар

А

12.1. Көпмүшелердің қосындысын табыңдар:
1) $x^2 + 5$ және $x^2 - 4$; 2) $y - 2x$ және $4x + 6$;
3) $2ab - 1$ және $ab + 10$; 4) $1{,}8\, a^2 - y^3$ және $22\, a^2 + 2y^3$.

12.2. Көпмүшелердің айырымын табыңдар:
1) $20 + a^3$ және $90\, a^3 + 21$; 2) $4b - c^2$ және $-17\, b + 8c^2$;
3) $77 - mn$ және $-30\, mn + 8$; 4) $4{,}9\, kt - 3z$ және $-8{,}3\, kt + 5{,}2\, z$.

Көпмүшелердің алгебралық қосындысын табыңдар **(12.3-12.4)** :

12.3. 1) $(4x + 8y) + (23x + 5y)$; 2) $(83\, a - 91\, b) - (89\, a - 100\, b)$;
3) $(1{,}5\, m - 4{,}2\, n) - (2m + 3n)$; 4) $(5k + 6t) + (2{,}8\, t - 3{,}1\, k)$;
5) $\left(\frac{3}{16}a - 20b\right) + \left(11b - \frac{1}{16}a\right)$; 6) $\left(\frac{7}{15}a + 53d\right) + \left(60d - \frac{13}{15}c\right)$.

12.4. 1) $(5 + 4a^3) + (a + 2a^3)$; 2) $(y - 7x^4) - (2{,}3 - 9x^4)$;
3) $(9b + 7c^2) - (14\, b - 10\, c^2)$; 4) $(39\, n^2 - 2m) + (5m - 44\, n^2)$.

12.5. 12.1-кестені толтырыңдар:

12.1 *-кесте*

A	B	$A + B$	$A - B$
$8{,}1 - 7x^3$	$9{,}2\, x^3 - 10$		
$-15{,}1 + 6y^2$	$23{,}4 - 11\, y^2$		

12.6. Егер $A = \frac{2}{3}a^2 - 4{,}5$ және $B = 2\frac{1}{9}a^2 + 3{,}09$ болса, онда 12.2-к кестені толтырыңдар :

12.2 -кесте

$A + B$	$B - A$	$A - B$

12.7. Теңдіктің дұрыстығын тексеріңдер:

1) $(18{,}9 - x^2) - (5x^2 - 21) + (7x^2 - 39{,}9) = x^2$;

2) $(60b^3 + 51{,}3) + (70 - 62{,}8b^3) - (-2{,}8b^3 + 121) = 0{,}3$;

3) $\left(\frac{7}{9}y^4 - 10{,}1\right) - \left(17 - \frac{2}{3}y^4\right) + \left(27{,}1 - \frac{4}{9}y^4\right) = y^4$;

4) $\left(4{,}7c^2 - 6\frac{5}{7}\right) + \left(3\frac{4}{9} - 5c^2\right) - \left(0{,}7c^2 - 3\frac{5}{21}\right) + \frac{2}{63} = -c^2$.

12.8. Өрнекті ықшамдап, мәнін табыңдар:

1) $(20a^7 + 7a^3) - (57 + 20a^7)$, мұндағы $a = 2$;

2) $(17{,}3x^5 - 62) + (3x^2 - 17{,}3x^5)$, мұндағы $x = -5$;

3) $\left(8\frac{3}{4}b^4 + 9{,}1\right) - \left(2{,}7b^3 + 8{,}75b^4\right)$, мұндағы $b = \frac{1}{3}$;

4) $\left(1\frac{44}{49} - 11{,}3y^4\right) + (6y^2 + 11{,}3y^4)$, мұндағы $y = -\frac{3}{7}$.

12.9. a айнымалысының қандай мәнінде берілген өрнектің мәні нөлге тең болады :

1) $(90 - 24{,}1a) - (15{,}9a + 86)$; 2) $(4{,}5 - 0{,}23a) + (-2{,}9 + 0{,}13a)$;

3) $\left(1{,}6a + \frac{1}{12}\right) - \left(0{,}5a - \frac{5}{6}\right)$; 4) $(18{,}7a - 3) + \left(2\frac{2}{7} - 13{,}7a\right)$?

Көпмүшелердің қосындысы мен айырымын табыңдар **(12.10-12.11)** :

12.10. 1) $5x^2 - 0{,}18y^3$ және $6{,}2x^2 + 7y^3$;

2) $-10{,}9b^3 + 43c$ және $60c + 11{,}1b^3$;

3) $76n^4 - 27{,}2t^2$ және $30t^2 - 80n^4$;

4) $88{,}1x - 64m^2$ және $41m^2 - 8{,}8x$.

12.11. 1) $9\frac{1}{5}y + 81z^3$ және $39z^3 - 10y$;

2) $-51k^4 + 10\frac{3}{7}c^2$ және $12\frac{3}{7}c^2 + 19k^4$;

3) $29m^3 - 3,8t$ және $2,8t - 21\frac{11}{19}m^3$;

4) $100s^5 + 31\frac{5}{12}k$ және $40k - 92,8s^5$.

B

12.12. Өрнектің мәні айнымалылардың мәндеріне байланысты болмайтынын дәлелдеңдер:

1) $(50 - 120x + 76y) + (88x - 74y) - (2y - 32x)$;

2) $(8,7a - 5,1b + 13) - (2,9a - 4,2b) + (0,9b - 5,8a)$.

12.13. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $(11a + 12b) - (20a - 34b) + (10a - 45b) = a + b$;

2) $(22,4x + 31,3y) + (4,9y - 30x) - (35,2y - 6,6x) = y - x$.

Өрнекті ықшамдаңдар **(12.14—12.16)** :

12.14. 1) $(a^3 - a^2 + 6) - (4a^3 + 8a^2 - 11)$;

2) $(11x^4 + 21x^3 - 43) + (60 - 19x^3 - 7x^4)$;

3) $(30b^5 - 15b + 16) - (17 + 17b + 44b^5)$;

4) $(-73 + 17x + 19x^3) + (-18x^3 - 39x + 50)$.

12.15. 1) $(5a^2 - 4x + 25) + (-31 + 9a^2 - 3x)$;

2) $(17y + 8b^2 - 11) - (70 - 9b^2 + 18y)$;

3) $(2,3c - 9,1z^3 - 4) - (10z^3 - 3c + 5,9)$;

4) $(0,8t^2 - 20m + 5) - (41 - 3m - 2,4t^2)$.

12.16. 1) $(xy + 6a) + (6a - z) - (8z + 10xy)$;

2) $(4b - 3cd) - (11b + 20k) + (23k - 19cd)$;

3) $(2t - mn) + (8mn - 9k) - (-10k + 15t)$;

4) $(1,8a - bc) + (7,7bc - d) - (10,1d - a)$.

C

12.17. Егер $A = 1,8a^2b^3 - 25a^3b^3$; $B = 20a^3b^2 - 0,7a^2b^3$ және $C = 1,9a^2b^3 + 23a^3b^2$ болса, 12.3-кестені толтырыңдар:

12.3- кесте

$A + B + C$	$A - B + C$	$A - B - C$	$C - A - B$

12.18. 12.17-жаттығудағы берілгендерді қолданып, 1) $B - A + C$; 2) $C - A + B$; 3) $B - A - C$ айырымын табыңдар.

12.19. Теңдіктің дұрыстығын тексеріңдер:

1) $(a^2b^2z^4 - 0{,}3\,a^4b^3c^2) - (a^2b^3z^4 - 9{,}3\,a^4b^3c^2) = 9a^4b^3c^2$;

2) $(7x^3y^2z - 8{,}1\,xy^2z^3) + (7{,}1\,xy^2z^3 - 7x^3y^2z) = -xy^2z^3$.

12.20. Айнымалылардың қандай мәнінде

1) $(47{,}5\,x^4y - 28{,}9\,xy^4) - (19{,}6\,x^4y - 28{,}9\,xy^4) + (2{,}7\,x - 27{,}9\,x^4y)$;

2) $\left(8\frac{3}{16}a^2b^2 - 18\frac{8}{15}a^2b^2\right) + \left(20{,}6a^2b^2 - 8\frac{3}{16}a^2b^2\right) -$

$- \left(2\frac{1}{15}a^2b^2 - 3{,}1a\right)$ алгебралық қосындысының мәні 1-ге тең болады ?

12.21. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $(-9k^4t^2 + 11k^3t) - (19k^3t - 8k^4t^2) + (10k^4t^2 + 8k^3t) = 9k^4t^2$;

2) $(5n^3m^2 - n^3m^3) - (7n^3m^3 + 10n^3m^2) + (6n^3m^2 + 8n^3m^3) = n^3m^2$.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

12.22. Амалдарды орындаңдар:

$$\left(11\frac{5}{8} : 15{,}5 + 4{,}25 - 3\frac{7}{9}\right) \cdot \frac{9}{22} - 0{,}59.$$

12.23. Автомобильдің 90 км/сағ жылдамдықпен b сағ-та жүрген жолын өрнектейтін формуланы жазыңдар. Егер $b = 3\frac{1}{3}$ сағ болса, жүрілген жолдың ұзындығын табыңдар.

§ 13. КӨПМҮШЕЛЕРДІ КӨБЕЙТУ

Көпмүшелерді көбейтуді қалай орындайды?

Алдымен көпмүшені бірмүшеге көбейтуді қарастырайық. $30a - 7b$ екімүшесі мен $0{,}4x$ бірмүшесінің көбейтіндісі

$$(30a - 7b) \cdot 0{,}4x$$

өрнегі болады. Бұл өрнекті $(30a + (-7b)) \cdot 0{,}4x$ түрінде жазайық. Көбейтудің үлестірімділік қасиетін қолданып,

$$30a \cdot 0{,}4x - 7b \cdot 0{,}4x \text{ немесе } 12ax - 2{,}8bx$$

өрнегін аламыз.

Көпмүшені бірмүшеге көбейту үшін мына ережені қолданамыз:

> көпмүшені бірмүшеге көбейту үшін бірмүшені көпмүшенің әрбір мүшесіне көбейтіп, шыққан көбейтінділерді қосу керек.

Түсіндіріңдер

$\frac{2}{3}nm - 0{,}5m^2 + 7n^2$ көпмүшесі $-0{,}3nm$ бірмүшесіне қалай көбейтілген:

$$\left(\frac{2}{3}nm - 0{,}5m^2 + 7n^2\right) \cdot (-0{,}3nm) = \frac{2}{3}nm \cdot (-0{,}3nm) + (-0{,}5m^2) \times$$
$$\times (-0{,}3nm) + 7n^2 \cdot (-0{,}3nm) = -0{,}2n^2m^2 + 0{,}15nm^3 - 2{,}1n^3m?$$

$a + c$ және $a^2 - c^3 + 5$ екі көпмүшесін көбейту керек болсын. Олардың көбейтіндісі $(a + c) \cdot (a^2 - c^3 + 5)$ өрнегі болады.

$a + c$ екімүшесінің мәні сан болғандықтан, оны x әрпі арқылы өрнектеп,

$$(a + c)(a^2 - c^3 + 5) = x \cdot (a^2 - c^3 + 5) = x \cdot a^2 - x \cdot c^3 + 5 \cdot x =$$
$$= (a + c) \cdot a^2 + (a + c) \cdot (-c^3) + (a + c) \cdot 5$$

түбіріне келтіреміз. Көпмүшені бірмүшеге көбейту ережесін тағы бір рет қолдансақ,

$$a^3 + a^2c - ac^3 - c^4 + 5a + 5c.$$

Сонымен,

$$(a+c)(a^2-c^3+5)=a^3+a^2c-ac^3-c^4+5a+5c.$$

Көпмүшелерді көбейту нәтижесінде бір көпмүшенің әрбір мүшесі екінші көпмүшенің әрбір мүшесіне көбейтіліп, көбейтінділердің қосындысына тең көпмүше шықты.

Көпмүшелерді көбейту үшін мына ереже қолданылады.

Көпмүшені көпмүшеге көбейту үшін бір көпмүшенің әрбір мүшесін екінші көпмүшенің әрбір мүшесіне көбейтіп, шыққан көбейтінділерді қосу керек.

Түсіндіріңдер

$1{,}5\,t^2-3kt+2k^2$ және $\left(\frac{1}{6}k-4t\right)$ көпмүшелері қалай көбейтілген:

$$(1{,}5\,t^2-3kt+2k^2)\cdot\left(\frac{1}{6}k-4t\right)=0{,}25\,kt^2-0{,}5\,k^2t+\frac{1}{3}k^3-6t^3+$$
$$+12\,kt^2-8k^2t=\frac{1}{3}k^3-8{,}5\,k^2t+12{,}25\,kt^2-6t^3?$$

1. Көпмүшені бірмүшеге көбейту қалай орындалады?
2. Екімүшені екімүшеге көбейтуді қалай орындауға болады?
3. Үшмүшені екімүшеге көбейту қалай орындалады?

Жаттығулар

A

Көбейтіндіні көпмүше түрінде жазыңдар **(13.1—13.6)** :

13.1. 1) $a(a-c+1)$; 2) $-c(m+n-3)$; 3) $5x(x+y^2-5)$; 4) $4y(y+x^2-6)$; 5) $-xy(3y^2+2x)$; 6) $mn(7-m+8n^2)$; 7) $2^2xy(4x-3y+5xy)$; 8) $-3a^2b(2a+5b-7ab)$.

13.2. 1) $(x-a)(x+y)$; 2) $(a+z)(n-m)$; 3) $(t+s)(b+k)$; 4) $(c-d)(x-y)$; 5) $(a+2)(b-3)$; 6) $(4-b)(5+c)$; 7) $(d-4)(t+5)$; 8) $(k-6)(7-d)$.

13.3. 1) $(x-7)(x+8)$; 2) $(9-y)(y+5)$; 3) $(a+6)(4-a)$; 4) $(2-b)(b+3)$; 5) $(10-c)(9-c)$; 6) $(d+3)(d+11)$.

13.4. 1) $(b+3)(b^2-b-7)$; 2) $(2-a)(16-a+a^2)$; 3) $(a+4)(a^2+a-2)$; 4) $(5-b)(4-b-b^2)$; 5) $(3xy-4)(6+xy)$; 6) $(4mn+3)(mn-8)$.

13.5. 1) $(a^3-2a-4)(-a+5)$; 2) $(7b-20)(2-b+4b^2)$; 3) $(-3c^2+c-9)(5c+6)$; 4) $(4-3d+2d^2)(1-7d)$.

13.6. 1) $(ab+7)(8-ab)$; 2) $(xy+11)(xy-12)$; 3) $(1{,}5-6mn)(8mn+2{,}5)$; 4) $(9st-1{,}6)(10+1{,}8st)$.

Өрнекті ықшамдаңдар **(13.7-13.8)** :

13.7. 1) $8(3n-2m)-5(2n-m)$;
2) $-11(4x+3y)-9(2y-3x)$;
3) $-1{,}2(5x-6y)+1{,}4(5y-3x)$.

13.8. 1) $(x-4a)(5a+8x)-(6a-7x)(3x-2a)$;
2) $(6c+d)(8c-9d)+(-10d+2c)(11c-4d)$;
3) $(\frac{2}{3}b-5k)(6k-0{,}3b)-(3k+\frac{5}{6}b)(6b-1{,}8k)$;
4) $(\frac{1}{7}x-\frac{1}{8}y)(7y-8x)+(\frac{1}{7}y-\frac{1}{8}x)(7x-8y)$.

13.9. Өрнектің мәнін табыңдар:
1) $8a^2(a-5)-4a(a^2-7)$, мұндағы $a=3$;
2) $b(-9b^2+1)+3b(3b^2+b)$, мұндағы $b=-2$;
3) $(3x-4)(8x+2)-24x^2-2$, мұндағы $x=2$;
4) $(c^2+3)(c-9)-c^2(c-6)$, мұндағы $c=-5$.

13.10. Теңдеуді шешіңдер:
1) $3x(x^2-8)-3x^3=12$; 2) $(x+8)(5x-6)-20=5x^2$;
3) $18y^3-2y(1+9y^2)=6{,}5$; 4) $53-8y(1-3y)=24y^2$.

B

13.11. Теңсіздікті шешіңдер:
1) $0{,}8x(5x-0{,}8)+0{,}04x$ m $4x^2-12$;
2) $9x^2-11$ l $9x(x-2)-3$;
3) $(4x-5)(6-3x)-4<(1-2x)(7+6x)$;
4) $(1{,}8x+1)(5x-1)-2{,}2x>9x^2-4$.

13.12. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:
1) $(7x-3)(4-8x)+2x(28x-26)=-12$;
2) $1{,}1x^2(x^2-10)-x(1{,}1x^3-9x)=-2x^2$;
3) $(-y^3+5y)2y-10y^2(1+0{,}2y^2)=-4y^4$;
4) $(2{,}5a+b^2)(-4a)+2a(5a-b^2)=-6ab^2$.

13.13. Өрнектің мәнін табыңдар:

1) $(x-4)(x^2+2x-5)-x^3$, мұндағы $x=-\frac{4}{5}$;

2) $(a^2-a+9)(2a+1)-2a^3$, мұндағы $a=-\frac{3}{8}$;

3) $24y^3-3(8y^2-1)(y+6)$, мұндағы $y=-\frac{2}{3}$;

4) $40m^3-(5m^2+m-2)(8m+3)$, мұндағы $m=\frac{7}{10}$.

Теңдеуді шешіңдер (13.14-13.15) :

13.14. 1) $(x^2+1)(x-2)-x^3=-2x^2$; 2) $(3-y)(1-y^2)+3y^2=y^3$;
3) $(z-6)(z+5)-(z-2)z=30$; 4) $3a(a-3)+a(2-3a)=-100{,}59$.

C

13.15. 1) $(x+10)(x-9)-(x-8)^2=0$;
2) $(x+11)(x+9)-(x-3)(x+40)=0$;
3) $(x-6)(7+x)+(3-x)(3+x)=0$;
4) $(x-4)(4+x)-(1-x)(9-x)=0$.

13.16. Теңсіздікті шешіңдер :
1) $(a+6)(a-5)-a^2$ m0; 2) $a^2-(a-2)(a+4)>0$;
3) $(2a-1)(a-4)-2a^2$ l 0; 4) $3a^2+(2-a)(4+3a)<0$.

13.17. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:
1) $b(b-4)+(b-8)(b+9)-2(b-3)^2=9b-90$;
2) $(c+2)^2-(c-4)(3-c)-0{,}5(4c^2-1)=16{,}5+3c$;
3) $(d-4)(d^2+d+1)-d(d^2-3)=-3d^2-4$;
4) $(k+7)(k-6)-2(k-2)^2+(k-3)^2=3k-41$.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

13.18. Амалдарды орындамай, өрнектердің мәндерін салыстырыңдар:
1) $(12{,}4+13{,}5):3$ және $12{,}4:3+13{,}5$;
2) $(5{,}1-0{,}34):1{,}7$ және $5{,}1-0{,}34:1{,}7$;
3) $(400-120):40$ және $400:40-120:40$.

13.19. Ықшамдаңдар:

1) $\frac{25a^5b}{5a^2}$; 2) $\frac{0,16xy^4}{2xy}$; 3) $\frac{8a^{-2}b^3}{2^2ab^3}$.

13.20. Егер $a=\frac{3,9\cdot 11,5-45,05}{44,52:10,6-4,225}$ болса, онда a санының 45 %-ын табыңдар.

§ 14. БІРМҮШЕ МЕН КӨПМҮШЕНІ БІРМҮШЕГЕ БӨЛУ

Бірмүшені және көпмүшені бірмүшеге қалай бөлуге болады?

Бірмүшені бірмүшеге бөлуді мысал арқылы қарастырайық.

1-мысал. $40xy^3$ бірмүшесін $0,5y^2$ бірмүшесіне бөлейік. Ол үшін $40xy^3 : (0,5y^2)$ бөліндісін $\frac{40xy^3}{0,5y^2}$ бөлшегі түрінде жазайық. Бөлшекті $0,5$ және y^2-қа қысқартып, $80xy$ өрнегін аламыз.

Жауабы : $80xy$.

Демек,

бірмүшені бірмүшеге бөлу үшін бөліндіні бөлшек түрінде жазып, қысқартуды орындау керек.

Көпмүшені бірмүшеге бөлуді мысал арқылы қарастырайық.

$-3,6a^2b^2 + 3a^2b + 44a^4b^4$ көпмүшесін $-4a^2b$ бірмүшесіне бөлейік. Қосындыны санға бөлу ережесін $(a+b) : c = a : c + b : c$ қолданайық: қосындыны санға бөлу үшін сол санға әрбір қосылғышты бөліп, нәтижелерін қосу керек.

Кез келген бірмүшенің мәні сан болғандықтан, әрбір қосылғышты (көпмүшенің мүшесін) санға (бірмүшеге) бөлуді орындайық:

$$(-3,6a^2b^2 + 3a^2b + 44a^4b^4) : (-4a^2b) = -3,6a^2b^2 : (-4a^2b) +$$

$$+ 3a^2b : (-4a^2b) + 44a^4b^4 : (-4a^2b) = \frac{-3,6a^2b^2}{-4a^2b} + \frac{3a^2b}{-4a^2b} + \frac{44a^4b^4}{-4a^2b} = 0,9b -$$

$$- 0,75 - 11a^2b^3.$$

Жауабы : $0,9b - 0,75 - 11a^2b^3$.

Демек,

көпмүшені бірмүшеге бөлу үшін көпмүшенің әрбір мүшесін берілген бірмүшеге бөліп, нәтижелерін қосу керек.

Ескерту.

1. Көпмүшені бірмүшеге бөлгенде көпмүше шықса, *көпмүше бірмүшеге бөлінеді* деп айтады. Бірақ бұл әруақытта бола бермейді.

$mn + mp - np$ көпмүшесі mn бірмүшесіне бөлінбейді.

2. Көпмүшені бірмүшеге бөлу кезінде айнымалылар бөлгіштің мәні нөлге тең болмайтындай мәндерді қабылдайды.

1. Бірмүшені бірмүшеге бөлу кезінде қандай түрлендіру қолданылады?
2. Көпмүшені бірмүшеге бөлуді қалай орындайды?

Жаттығулар

A

Бөлуді орындаңдар **(14.1-14.2)** :

14.1. 1) $46a^2b:(2a)$; 2) $50xy^2:(-5y)$; 3) $14x^2y^3:(-7xy)$;

4) $72cd^3:(9cd^2)$; 5) $\frac{5}{6}a^2c^2:\left(\frac{3}{5}ac\right)$; 6) $0{,}24\,k^4t:\left(\frac{4}{9}k^3t\right)$.

14.2. 1) $(-20a+12ab+18ac):(-2a)$;
2) $(4{,}8b-0{,}6bc-1{,}5bd):(0{,}3b)$;
3) $\left(\frac{14}{15}x^2-\frac{32}{25}xy+\frac{54}{5}xz\right):\left(\frac{2}{5}x\right)$;
4) $\left(-\frac{100}{63}nm+\frac{50}{77}nk-\frac{20}{21}nt\right):\left(-\frac{20}{7}n\right)$.

Өрнекті ықшамдаңдар **(14.3-14.4)** :

14.3. 1) $40x^2y:(8x)-6xy$; 2) $2{,}8ab^2:(0{,}7b)+1{,}3ab$;

3) $\frac{4}{9}s^2t^2:\left(\frac{2}{3}st\right)+\frac{1}{3}st$; 4) $8\frac{1}{3}n^3m^3:\left(1\frac{3}{5}n^2m^2\right)-1{,}9n$.

14.4. 1) $8a^2b:(4ab)+15ac^2:(5c^2)$;
2) $7{,}5x^2y^2:(3x^2y)-3{,}9my:(12m)$;
3) $2{,}1ab^2:\left(\frac{4}{3}b^2\right)-2{,}7at^3:\left(\frac{8}{9}t^3\right)$;
4) $6\frac{1}{4}c^2d:2\frac{1}{2}cd+8\frac{1}{4}c^2t^2:5\frac{1}{2}ct^2$.

14.5. Өрнектің мәнін табыңдар :
1) $100b^4:(4b^3)-5b$, мұндағы $b=0{,}2$;
2) $99c+2c^5:(0{,}2c^4)$, мұндағы $c=-\frac{1}{5}$;
3) $68t^3:(3{,}4t^2)-t$, мұндағы $t=-\frac{4}{7}$;
4) $-21{,}4y+7y^5:(5y^4)$, мұндағы $y=-0{,}03$.

B

14.6. Өрнектердің мәндерін салыстырыңдар:

1) $76a^2b^2 : (38ab)$ және $3ab$, мұндағы $a = -2$, $b = 3$;

2) $-5xy$ және $105x^3y^2 : (-21x^2y)$, мұндағы $x = 0{,}2$, $y = 7$;

3) $a^5b^4 : a^3b^3$ және $a^7b^9 : (a^6b^8)$, мұндағы $a = -2$, $b = -2$;

4) $33c^4d^2 : (1{,}1c^3d)$ және $20cd$, мұндағы $c = 0{,}5$, $d = -0{,}1$.

14.7. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $(200x^4y^3 - 55x^3y^2) : (5x^3y^2) + 11 = 40xy$;

2) $1{,}1a - (12{,}1a^3b^2 - 44a^2b^2) : (11a^2b^2) = 4$;

3) $1{,}6s^4t : (0{,}04s^3t) - 41{,}22s = -1{,}22s$;

4) $(8{,}47n^5m^4 + 77n^4m^3) : (7{,}7n^4m^3) - 10 = 1{,}1mn$.

14.8. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $(\frac{1}{2}a^7b^9 + 0{,}3a^8b^6) : \left(\frac{1}{6}a^5b^6\right)$;

2) $(15{,}2x^4y^{11} - 5{,}2x^3y^8) : (0{,}2x^2y^7)$.

C

14.9. Өрнектің мәнін табыңдар:

1) $90a^2b^2 : (18a^2b) + 0{,}14a^2b : (7ab)$, мұндағы $a = -5$, $b = 2$;

2) $4{,}95x^3y^4 : (2{,}2x^3y^2) - 77x^5y^4 : (0{,}11x^4y^4)$, мұндағы $x = \frac{3}{7}$, $y = -\frac{14}{15}$.

14.10. Өрнектердің мәндерін салыстырыңдар:

1) $6a^2b : (0{,}5ab)$ және $8ab^2 : (0{,}2ab)$, мұндағы $a = 2$, $b = 3$;

2) $3{,}5n^3m : (7mn)$ және $5{,}7mn^4 : (19m^3)$, мұндағы $n = -1$, $m = 1$.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

14.11. $9yax^3$, $-8yx$; $3xy^2n^3$; $4xy$; $5xcy^5$; $-3xy$; $-9xay^5$ бірмүшелері берілген. Осы бірмүшелердің құрамындағы ортақ көбейткішті табыңдар.

14.12. Көбейтудің үлестірімділік заңын қолданып, ортақ көбейткішті жақшаның сыртына шығарыңдар:

1) $2a + 2b$; 2) $xy + xz$;

3) $8c - 10d$; 4) $abc - abd$.

§ 15. КӨПМҮШЕНІ КӨБЕЙТКІШТЕРГЕ ОРТАҚ КӨБЕЙТКІШТІ ЖАҚШАНЫҢ СЫРТЫНА ШЫҒАРУ ТӘСІЛІМЕН ЖІКТЕУ

Көпмүшені көбейткіштерге қалай жіктеуге болады?

Алдыңғы параграфта сендер көпмүшені бірмүшеге немесе көпмүшеге бөлгенде көпмүше шығатынын білдіңдер. Кейбір жағдайда осыған кері есеп шығарылады, яғни берілген көпмүшені бірнеше бірмүшелердің және көпмүшелердің көбейтіндісі түрінде жазу керек. Сонда *берілген көпмүшені көбейткіштерге жіктеу* орындалады.

Көпмүшені көбейткіштерге жіктеуді мысал арқылы қарастырайық.

1-мысал. $8xy - \frac{2}{3}xz + 1,7x$ көпмүшесін көбейткіштерге жіктеуге болады, себебі берілген көпмүшенің барлық мүшелерінің ортақ x көбейткіші бар. Сондықтан көбейтудің үлестірімділік қасиетін қолданып, ортақ көбейткішті жақшаның сыртына шығарамыз:

$$x(8y - \frac{2}{3}z + 1,7).$$

Жауабы : $x(8y - \frac{2}{3}z + 1,7)$.

2-мысал. $14mn^2 - 49mn^3 - 35mn^4$ көпмүшесін көбейткіштерге жіктейік. Берілген көпмүшенің ортақ көбейткішін табу үшін, алдымен коэффициенттердің ең үлкен ортақ бөлгішін табамыз. Одан кейін оның әріпті бөлігін қарастырамыз. Ол дәрежелердің көбейтіндісін береді. Негіздері бірдей дәрежелердің арасынан көрсеткіші ең кішісін табамыз. Сонда $14mn^2 - 49mn^3 - 35mn^4$ көпмүшесінде 14, 49, 35 сандарының ең үлкен ортақ бөлгіші 7 саны, ал көрсеткіштері ең кіші дәрежелер m және n^2 болады. Сондықтан ортақ көбейткіш $7mn^2$ болатын бірмүше. Осы ортақ көбейткішті жақшаның сыртына шығарамыз:

$$14mn^2 - 49mn^3 - 35mn^4 = 7mn^2(2 - 7n - 5n^2).$$

Жауабы : $7mn^2(2 - 7n - 5n^2)$.

Көпмүшені көбейткіштерге жіктеудің дұрыстығын жақша ішіндегі көпмүшені ортақ көбейткішке көбейту арқылы тексеруге болады.

Кейбір жағдайларда ортақ көбейткіш бірмүше емес, көпмүше болуы мүмкін.

Мысалы, $19(3t + 2k) - a(3t + 2k) + 3b(3t + 2k)$ көпмүшесінің ортақ көбейткіші $(3t + 2k)$ екімүшесі. Сондықтан

$19(3t + 2k) - a(3t + 2k) + 3b(3t + 2k) = (3t + 2k)(19 - a + 3b)$.

Ортақ көбейткішті тапқанда кейбір жағдайларда $a - b = -(b - a)$ теңдігі қолданылады.

Мысалы, $(9 - c^3)d + (c^3 - 9)m$ көпмүшесінде бірдей көбейткіш жоқ, бірақ $(c^3 - 9)$ өрнегін $-(9 - c^3)$ өрнегімен алмастырсақ, онда әрбір көбейткішінде $9 - c^3$ ортақ көбейткіші болатын көпмүшені аламыз.

Осы ортақ көбейткішті жақшаның алдына шығарамыз:

$$(9 - c^3)d + (c^3 - 9)m = (9 - c^3)d - (9 - c^3)m = (9 - c^3)(d - m).$$

3-мысал. 1) $11(x - 1) - x(x - 1) + y(1 - x)$; 2) $120yz^2(2z - y) - 80z(y - 2z)$ көпмүшесін көбейткіштерге жіктейік.

Шешуі. 1) $11(x - 1) - x(x - 1) + y(1 - x) = 11(x - 1) - x(x - 1) - y(x - 1) = (x - 1)(11 - x - y)$;

2) $120yz^2(2z - y) - 80z(y - 2z) = 120yz^2(2z - y) + 80z(2z - y) = 40z(2z - y)(3yz + 2)$.

Жауабы : 1) $(x - 1)(11 - x - y)$; 2) $40z(2z - y)(3yz + 2)$.

4-мысал. 1) $0,41x + x^2 = 0$; 2) $y^2\left(\frac{2}{3} - y\right) - 5y\left(y - \frac{2}{3}\right) = 0$ теңдеуін шешейік.

Шешуі. 1) $0,41x + x^2 = 0$ теңдеуінің сол жақ бөлігі — әрбір мүшесінде бірдей (ортақ) x көбейткіші бар екімүше. Осы ортақ көбейткішті жақшаның сыртына шығарамыз. Сонда берілген теңдеу $x(0,41 + x) = 0$ түріне келеді. Көбейткіштің бірі нөлге тең болғанда ғана көбейтіндінің мәні нөлге тең болатыны белгілі. Сондықтан $x = 0$ немесе $x = -0,41$. Демек, теңдеудің 0 және $-0,41$ болатын екі түбірі бар. Жазылуы: $\{0; -0,41\}$.

2) $y^2\left(\frac{2}{3} - y\right) - 5y\left(y - \frac{2}{3}\right) = 0$ теңдеуінің сол жақ бөлігін $y^2\left(\frac{2}{3} - y\right) + 5y\left(\frac{2}{3} - y\right)$ түріне келтіреміз. Одан кейін $y\left(\frac{2}{3} - y\right)$ ортақ көбейткішін жақшаның алдына шығарсақ, $y\left(\frac{2}{3} - y\right)(y + 5) = 0$ теңдеуін аламыз.

Бұл теңдеудің түбірлері: 0; $\frac{2}{3}$; -5. Жазылуы: $\left\{0; \frac{2}{3}; -5\right\}$.

Жауабы : 1) $\{0; -0,41\}$; 2) $\left\{0; \frac{2}{3}; -5\right\}$.

1. Көпмүшені көбейткіштерге жіктеу дегеніміз нені білдіреді?
2. Көпмүшенің ортақ көбейткіші қандай (тек қана сан; бірмүше және т.с.с.) өрнек болуы мүмкін?

Жаттығулар

А

Көпмүшені көбейткіштерге жіктеңдер (15.1—15.7) :

15.1. 1) $15ab - 8ac + \frac{2}{7}ad$; 2) $-\frac{3}{8}xy + 0{,}9xz - 15x$;

3) $0{,}1mn + 2mk - 4m$; 4) $12tk - 8tx - 7t$;

5) $\frac{3}{4}at + 0{,}17ax - 5a$; 6) $-\frac{6}{5}dx + \frac{3}{11}dy - 21d$.

15.2. 1) $3ab + 9ac + 27ad$; 2) $4xy + 8xz - 16x$;

3) $0{,}2mn - 0{,}8mk + 1{,}6m$; 4) $9tk - 18tx + 27t$;

5) $0{,}75at + \frac{3}{4}ax - \frac{9}{16}a$; 6) $-\frac{2}{3}dx + \frac{4}{9}dy - \frac{8}{9}d$.

15.3. 1) $16a^2b^3 - 32ab^2 + 64abc$; 2) $9x^3y^4 - 27x^2yz + 54xy^2$;

3) $\frac{3}{16}a^4bc + \frac{7}{32}a^3bc - \frac{9}{64}a^4b^2c$; 4) $\frac{5}{9}x^8y^2z^3 + \frac{11}{27}x^6y^3z^2 - \frac{11}{54}x^7y^4z$.

15.4. 1) $0{,}125m^2n^3 - 0{,}25mn + 0{,}625m^2n$;

2) $328t^2k^3 + 82t^2k^2$;

3) $0{,}09m^6n^5 + 0{,}27m^3n^8 - 0{,}09m^3n^5$;

4) $1{,}6t^{11}k^4 - 3{,}2t^{10}k + 0{,}8t^9k$;

5) $14m^4 - 49m^2nk + 7m^2n$;

6) $-8t^8k^3y + 64t^3k^8 - 4t^3k^3$.

15.5. 1) $12(a + b) - c \cdot (a + b) + 5d(a + b)$;

2) $14(m - n) + x(m - n)$;

3) $-1{,}5(x + y) + x(x + y) - y(x + y) + (x + y)$;

4) $(t + k) - 8x(t + k)$;

5) $(c + d)x - (c + d)y + 5(c + d) + 5xy(c + d)$.

15.6. 1) $5a(3a - 8) - 3b(3a - 8) + 9ab(3a - 8) - (3a - 8)$;

2) $7y(7x - y) + x(7x - y) - 7xy(7x - y) + (7x - y)$;

3) $(a + b)^2(x + y) - x(a + b)^2 - y(a + b)^2 + (a + b)^2$;

4) $m(m + n^3) - n^3(m + n^3) + n(m + n^3) - m^3(m + n^3)$.

B

15.7. 1) $4b(7-8a)+a(8a-7)-(14-16a)+(7-8a)ab$;
2) $3x(5y-4)-y(4-5y)+(15y-12)-3xy(4-5y)$;
3) $mn(m-3n)-m(m-3n)-n(m-3n)+8(6n-2m)$;
4) $(-\frac{2}{3}t+k)x-(k-\frac{2}{3}t)y+(3k-2t)xy-(-2t+3k)$.

Теңдеуді шешіңдер **(15.8-15.9)** :

15.8. 1) $x^2+6x=0$; 2) $x^2-5x=0$;
3) $\frac{7}{8}x+x^2=0$; 4) $\frac{12}{13}x-x^2=0$;
5) $x+\frac{2}{3}x^2=0$; 6) $x-\frac{7}{9}x^2=0$;
7) $\frac{1}{25}x+\frac{1}{125}x^2=0$; 8) $\frac{1}{49}x-\frac{1}{343}x^2=0$.

15.9 . 1) $z(2z-5)+5(2z-5)=0$; 2) $3(4-z)-7z(z-4)=0$;
3) $z(0{,}5z+5)-6(5+0{,}5z)=0$; 4) $z(8-z)+z-8=0$.

Көпмүшені көбейткіштерге жіктеңдер **(15.10-15.11)** :

15.10. 1) $(0{,}16a+0{,}32b)a-(0{,}64b+1{,}28a)b$;
2) $(0{,}09a-0{,}81b)b-(0{,}81b-7{,}29a)a$;
3) $(4{,}9x-3{,}43y)\cdot xy-(3{,}43y-4{,}9x)\cdot 4$;
4) $\left(\frac{7}{9}ab-k\right)\cdot a-\left(k-\frac{7}{9}ab\right)\cdot k-\left(k-\frac{7}{9}ab\right)\cdot b$;
5) $(2{,}5xy+1{,}25m)+(1{,}25m+2{,}5xy)y-(1{,}25m+2{,}5xy)x$.

15.11 . 1) $\left(\frac{2}{3}xy-1\right)xy-\left(1-\frac{2}{3}xy\right)$;
2) $\left(\frac{4}{9}x-y\right)\frac{4}{9}-y\left(y-\frac{4}{9}x\right)$;
3) $\left(\frac{25}{49}x^2+1\right)y+\left(1+\frac{25}{49}x^2\right)$;
4) $\left(1\frac{8}{19}y^2+15x^2\right)x+y\left(15x^2+1\frac{8}{19}y^2\right)$.

C

15.12 . Көпмүшені көбейткіштерге жіктеңдер:
1) $\left(\frac{121}{144}mnx+\frac{22}{24}mx\right)-n\left(\frac{11}{12}n+2\right)+\left(4+1\frac{5}{6}n\right)\cdot\frac{1}{2}$;

2) $(169\,abc - 196\,cbax) + (13^2y - 14^2yx) - (14^2x - 13^2)$;

3) $(225\,x^2yz^3 - 289\,yz) - (15^2x^2z^2 - 17^2) + (17^2 - 225\,x^2z^2)$;

4) $(450\,tk^3 - 225\,k^2) + t(8t^2k - 4t) - 2\cdot(\frac{1}{2} - tk)$.

Теңдеуді шешіңдер **(15.13-15.14)** :

15.13. 1) $(7x - 5)x = 1{,}5 - 2{,}1\,x$;

2) $(1 - 8x)x = 11{,}2\,x - 1{,}4$;

3) $\left(1{,}7x - \frac{1}{3}\right)x = (3 - 15{,}3\,x)\cdot\frac{1}{2}$;

4) $\left(\frac{x}{7} - 1\frac{6}{7}\right)x = (3{,}9 - 0{,}3\,x)\cdot\frac{1}{35}$.

15.14. 1) $(14x^2 - 49x)x - (2x - 7)\cdot 8x = 0$;

2) $(125\,x - 25x^2)\cdot 9x - (15x - 3x^2)\cdot x = 0$;

3) $(0{,}81\,y^2 - 0{,}9\,y)\cdot 0{,}9\,y = (0{,}1 - 0{,}09\,y)\cdot 10y$;

4) $\left(\frac{3}{4}y^2 - \frac{9}{16}y\right)\cdot 8y = \frac{1}{7}y^2 - \frac{3}{28}y$.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

15.15. Ықшамдаңдар:

1) $(5 + a)\cdot(5 - a)$; 2) $(a + 4)(a - 4)$;

3) $(c + 7)(c - 7)$; 4) $(d + 8)(8 - d)$;

5) $(m + n)(m - 4)$; 6) $(k + t)(k - t)$.

15.16. Өрнектегі ортақ көбейткішті жақшаның сыртына шығарыңдар:

1) $4x^2y - 6y$;

2) $6x^2y - xy + 5y^3$;

3) $6a^2n - 2ayn + 5an^2y^3$.

§ 16. КӨПМҮШЕНІ ТОПТАУ ТӘСІЛІ АРҚЫЛЫ КӨБЕЙТКІШТЕРГЕ ЖІКТЕУ

Барлық мүшелерінің ортақ көбейткіші болмайтын көпмүшелер де кездеседі. Осындай жағдайда көпмүшені көбейткіштерге қалай жіктеуге болады?

Ортақ көбейткіші жоқ көпмүшелерді көбейткіштерге жіктеу кезінде әрқайсысында ортақ көбейткіші болатындай етіп көпмүшенің мүшелерін топтайды.

$20a - 4ab + 5c - bc$ көпмүшесінің көбейткіштерге жіктелуі:

$$20a - 4ab + 5c - bc = (20a + 5c) + (-4ab - bc) =$$
$$= 5(4a + c) - b(4a + c) = (4a + c)(5 - b).$$

Жауабы : $(4a + c)(5 - b)$.

Орындалған түрлендірулер қосу мен көбейтудің ауыстырымдылық, терімділік және үлестірімділік қасиеттері негізінде жасалды. Көпмүше мүшелерін топтауды әртүрлі тәсілдермен жүргізуге болады.

Мысалы, алты мүшесі бар $nt - mt - 4t + 5n - 5m - 20$ көпмүшесін көбейткіштерге жіктейік.

Берілген көпмүшенің мүшелерін екі тәсілмен топтауға болады:

1) $nt - mt - 4t + 5n - 5m - 20 = (nt + 5n) - (mt + 5m) - (4t + 20) =$
$= n(t + 5) - m(t + 5) - 4(t + 5) = (t + 5)(n - m - 4).$

2) $nt - mt - 4t + 5n - 5m - 20 = (nt - mt - 4t) + (5n - 5m - 20) =$
$= t(n - m - 4) + 5(n - m - 4) = (t + 5)(n - m - 4).$

Жауабы : $(t + 5)(n - m - 4)$.

Сонымен,

> көпмүшені топтау тәсілі арқылы көбейткіштерге жіктеу үшін мына алгоритм қолданылады:
>
> 1) көпмүшенің мүшелерін ортақ көбейткіші болатындай етіп қосылғыштарға топтау;
>
> 2) әр топтың ортақ көбейткішін жақшаның алдына шығару;
>
> 3) шыққан алгебралық қосындының ортақ көбейткішін жақшаның сыртына шығару.

Көпмүшені көбейткіштерге жіктеудің басқа тәсілдері қысқаша көбейту формулаларымен байланысты. Ол формулалар бесінші тарауда қарастырылады.

Кейбір жағдайларда көпмүшені топтау тәсілімен көбейткіштерге жіктеу үшін қосылғыштар жеткіліксіз болады. Ондай жағдайда кейбір қосылғыштарды қосындымен алмастырады.

Мысалы, $z^2 + 14z + 33$ көпмүшесін көбейткіштерге жіктейік. Көпмүшені қосылғыштар саны бірдей болатын етіп топтау мүмкін емес. Сондықтан қосылғыштың бірін, яғни $14z$ қосылғышын $3z + 11z$ қосындысы түрінде жазайық. Сонда топтау тәсілін қолдануға болады. Расында $z^2 + 14z + 33 = z^2 + 11z + 3z + 33 = z(z + 11) + 3(z + 11) = (z + 11)(z + 3)$.

Көпмүшені көбейткіштерге жіктеу теңдеулерді шешу кезінде де қолданылады.

Мысалы, $y^2 + 2y - 63 = 0$ теңдеуін шешу үшін оның сол жақ бөлігін көбейткіштерге жіктейік: $y^2 + 2y - 63 = y^2 - 7y + 9y - 63 = y(y - 7) + 9(y - 7) = (y - 7)(y + 9)$. Енді $(y + 9) \cdot (y - 7) = 0$ теңдеуін шешеміз. Көбейткіштердің біреуі нөлге тең болса, онда көбейтінді нөлге тең болады. Сондықтан $y - 7 = 0$ немесе $y + 9 = 0$ теңдеулерін аламыз. $y - 7 = 0$ болғанда $y = 7$, $y + 9 = 0$ болғанда $y = -9$ шығады. Демек, берілген теңдеудің 7 және –9 болатын екі түбірі бар.

1. Қандай жағдайда көпмүшені көбейткіштерге жіктеу үшін топтау тәсілі қолданылады?
2. Көпмүшені топтау тәсілімен көбейткіштерге жіктеу үшін қандай алгоритм қолданылады?

Жаттығулар

A

Топтау тәсілін қолданып, көпмүшені көбейткіштерге жіктеңдер **(16.1—16.8)**:

16.1. 1) $x + xy + a + ay$; 2) $4 + 2m + 2n + mn$;
3) $kt + t - 2k - 2$; 4) $ab + ac + 7b + 7c$;
5) $am + an + 4m + 4n$; 6) $xz + yz - 3x - 3y$.

16.2. 1) $9x + xy + 8y + 72$; 2) $bx - 4b + ax - 4a$;
3) $4a - ay - by + 4b$; 4) $7ax - ay + 7bx - by$;
5) $11ay - by - 77a + 7b$; 6) $13x - ax + 13y - ay$.

16.3. 1) $0{,}5xt + yt + 0{,}5xk + yk$; 2) $xk + 0{,}5yk + xt + 0{,}5yt$;
3) $0{,}7ax - bx + 0{,}7ay - by$; 4) $\frac{2}{3}by - ay + \frac{2}{3}bx - ax$;
5) $\frac{5}{6}a - ax + \frac{5}{6}b - bx$; 6) $\frac{7}{8}ax - a + \frac{7}{8}bx - b$.

16.4. 1) $2ax + 3bx + 10a + 15b$; 2) $3my - 2ny - 9m + 6n$;
3) $7ax + 8ay - 28x - 32y$; 4) $48m + 56n - 6am - 7an$;
5) $12{,}1y - 4{,}4z + 8yz - 22y^2$; 6) $0{,}09t - 0{,}07k + 27at - 21ak$.

16.5. 1) $a - 0{,}25b + 4ax - bx$; 2) $0{,}6b - 3{,}5x + 1{,}2by - 7xy$;
3) $\frac{1}{7}ax + \frac{1}{3}bx + 3a + 7b$; 4) $\frac{3}{8}by - \frac{2}{7}xy - 21b + 16x$;
5) $4x - 5b - \frac{x^2}{5} + \frac{xb}{4}$; 6) $3by - 4nx + \frac{aby}{4} - \frac{anx}{3}$.

16.6. 1) $20xy - 21ab + \frac{5}{6}xyc - \frac{7}{8}abc$; 2) $x - 6a + \frac{xy}{3} - 2ay$;
3) $\frac{abx}{9} + \frac{cax}{27} - 3b - c$; 4) $\frac{abm}{3} + \frac{abn}{4} - 4m - 3n$;
5) $\frac{kxy}{5} - \frac{txy}{3} + 3k - 5t$; 6) $4tx + 7kx + \frac{ty}{7} + \frac{ky}{4}$.

B

16.7. 1) $am + an + ak + bm + bn + bk$;
2) $ax + bx + cx + ay + by + cy$;
3) $mx + my + mz - nx - ny - nz$;
4) $ta + tb + tc - ak - bk - ck$;
5) $am - an - ak - bm + bn + bk$;
6) $ax - bx - cx - ay + by + cy$.

16.8. 1) $a^2 + 2a - 15$; 2) $b^2 + 3b - 28$;
3) $x^2 + 15x + 54$; 4) $y^2 - 5y + 6$;
5) $m^2 + 15m + 56$; 6) $n^2 - n - 110$;
7) $k^2 - 17k + 72$; 8) $t^2 - 2t - 63$.

16.9. Теңдеудің сол жақ бөлігіне топтау тәсілін қолданып, теңдеуді шешіңдер:
1) $x^2 - 5x + 6 = 0$; 2) $x^2 + 5x + 6 = 0$;
3) $x^2 + x - 6 = 0$; 4) $x^2 - x - 6 = 0$;
5) $x^2 - 5x + 4 = 0$; 6) $x^2 + 5x + 4 = 0$.

C

16.10. Топтау тәсілін қолданып, көпмүшені көбейткіштерге жіктеңдер:
1) $2am - 2bm + 2cm + 3an - 3bn + 3cn$;
2) $3mx + 3nx + 3kx - 2my - 2ny - 2ky$;

3) $7tx + 7ty + 7tz + 4kx + 4ky + 4kz$;

4) $11at + 11ak + 11ap - 9bt - 9bk - 9pb$.

16.11. Жақшалардағы өрнектерді топтау арқылы көбейткіштерге жіктеңдер:

1) $(x^2 - 3x + 2)(x^2 - 7x + 12) = 0$;

2) $(2 + 3x + x^2)(12 + 7x + x^2) = 0$;

3) $(1 - 2x^2 + x) \cdot (5 - 10{,}5x + x^2) = 0$;

4) $(12 - 7x + x^2)(5x - 1 - 6x^2) = 0$.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

16.12. 1 кг шие 800 тг тұрады. 1) 300 г; 2) 500 г; 3) 1 кг 250 г; 4) 2 кг; 5) 2,5 кг; 6) $2\frac{3}{4}$ кг шиенің құны қандай? 16.1-кестені толтырыңдар.

16.1- *кесте*

Шиенің массасы (кг)						
Шиенің құны (тг)						

Шиенің массасы артқан сайын оның құны қалай өзгереді? Егер 2 есе, 3 есе артық шие сатып алынса, құны қанша есе артады?

16.13. Қабырғасы a см шаршыдан және ұзындығы a см, ені b см екі тіктөртбұрыштан тұратын фигураның ауданын есептейтін формуланы жазыңдар.

§ 17. ӨРНЕКТЕРДІ ТЕПЕ-ТЕҢ ТҮРЛЕНДІРУ

Өрнектерді қалай түрлендіруге болады?

Өрнектерді тепе-тең түрлендіруді мысалдар арқылы қарастырайық.

1-мысал. $(5x-2)(3x^2+2x-9)-7\left(\frac{4}{7}x^2-7x\right)-16x^3$ өрнегін ықшамдайық.

Шешуі. Берілген өрнекті ықшамдау үшін көпмүшені бірмүшеге және көпмүшелерді көбейту ережелерін қолданған соң ұқсас қосылғыштарды біріктіреміз:

$$(5x-2)(3x^2+2x-9)-7\left(\frac{4}{7}x^2-7x\right)-16x^3=\underline{15x^3}+10x^2-\underline{\underline{45x}}-$$

$$-6x^2-\underline{\underline{4x}}+18-4x^2+\underline{\underline{49x}}-\underline{16x^3}=18-x^3.$$

Жауабы: $18-x^3$.

2-мысал. $7a^2b-6ab-21ab^3+18b^3$ алгебралық қосындысын көбейтінді түрінде жазайық.

Шешуі. Берілген алгебралық қосындыны көбейтінді түрінде жазу үшін алдымен ортақ көбейткішті жақшаның сыртына шығарып, одан кейін топтау тәсілін қолданамыз:

$$7a^2b-6ab-21ab^3+18b^3=b(7a^2-6a-21ab^2+18b^2)=$$
$$=b((7a^2-21ab^2)+(18b^2-6a))=b(7a(a-3b^2)+6(3b^2-a))=$$
$$=b(a-3b^2)(7a-6).$$

Жауабы: $b(a-3b^2)(7a-6)$.

3-мысал. $(4x-1)(5+6x)-3x\leq(2+3x)(8x-1)$ теңсіздігі тура болатындай ең кіші бүтін санды табайық.

Шешуі. Көпмүшені көпмүшеге көбейту ережесін және бір айнымалысы бар сызықтық теңсіздіктің мәндестігін беретін ережелерді қолданамыз:

$20x-5+24x^2-6x-3x\leq16x+24x^2-3x-2,$

$11x-5+24x^2\leq13x+24x^2-2,$

$11x+24x^2-13x-24x^2\leq-2+5,$

$-2x\leq3,$

$x\geq-1{,}5.$

$x\geq-1{,}5$ теңсіздігінің шешімі $-1{,}5$ санынан үлкен немесе тең болатын барлық сандар, яғни $[-1{,}5;\ +\infty)$ санды сәулесінің барлық сандары болады (17.1-сурет).

17.1-сурет

-1 саны — берілген теңсіздікті тура теңсіздікке айналдыратын ең кіші бүтін сан.

Жауабы : -1.

Жаттығулар

A

Өрнекті ықшамдаңдар **(17.1-17.2)** :

17.1. 1) $(x^8-2)(x^4-1)-x^{12}+2x^4$;
2) $a^9-9a^5-(a^4-9)(a^5+3)$;
3) $(x^{15}+5)(x^3+2)-10-x^{18}$;
4) $a^{42}-14a^7-(a^6-14)(a^7-1)$.

17.2. 1) $0{,}5\,a^2c^4(a^4-c^2+6)-0{,}5\,a^6c^4-0{,}5\,a^2c^6$;
2) $4{,}8\,x^8y^7-(12x^6y^6-6)-2{,}4\,x^6y^5(2x^2y^2-5y+3)$;
3) $2{,}5\,t^8s^{10}(4t^2-6c^2-3)+15\,t^8c^2s^{10}-10\,t^{10}s^{10}$;
4) $9a^{20}b^{16}-1{,}8\,a^{10}b^{18}-0{,}9\,a^5b^9(10\,a^{15}b^7+2a5b^9)$.

Өрнектің мәнін табыңдар **(17.3-17.4)** :

17.3. 1) $15x^{17}:x^{13}-16x^4$, мұндағы $x=-1$;
2) $-33\,y^6:y^4+37y^2$, мұндағы $y=0{,}5$;
3) $15\,z^9:z^6-160\,z^3$, мұндағы $z=-0{,}5$;
4) $250\,t^8:t^5+6t^3$, мұндағы $t=-4\,t$.

17.4. 1) $0{,}07\,a^8b^4:a^7+0{,}03\,a^2b^6:(ab^2)$, мұндағы $a=7,\ b=-2$;
2) $2{,}5\,x^4y:x^5-2{,}6\,x^{10}y:x$, мұндағы $x=-1,\ y=10$;
3) $47{,}3\,t^6z^2:(t^5z)+2{,}7\,t^9z^3:(t^8z^2)$, мұндағы $z=0{,}2,\ t=-3$;
4) $-9{,}4\,a^{25}b^9:a^8-0{,}6\,a^{10}\cdot(a^7b^9)$, мұндағы $a=1,\ b=-1$.

Қосындыны көбейтінді түрінде жазыңдар **(17.5—17.7)** :

17.5. 1) $x^2+bx-ax-ab$; 2) $x^2-cx+bx-bc$;
3) $z^2+zx-zk-xk$; 4) $y^2+my-km-ky$.

17.6. 1) $x^4y^2+3x^4-2y^2-6$; 2) $x^3y^3-2x^3+5y^3-10$;
3) $-x^5y^2+7y^2+x^5-7$; 4) $27-9x^2-x^2y^6+3y^6$.

17.7. 1) $3a + ax - 3b + 3c - bx + cx$;
2) $4x + 6b + 4y - by - 24 - bx$;
3) $ak - 18a - bk + 7k + 18b - 126$;
4) $nx - 4x - 5mx - 100m + 20n - 80$.

Теңдеуді шешіңдер **(17.8-17.9)** :

17.8. 1) $x(x - 8) - 20 = -15 - x(1 - x)$;
2) $47 - x(11 - x) = 19x + x^2$;
3) $33x - x^2 = (35 - x)x - 17$;
4) $59x + 4x^2 = -4x(1 - x) + 21$.

17.9. 1) $(x + 4{,}5)(6x - 1) - (3x + 1{,}6)(2x - 1) = -3{,}8x$;
2) $(3{,}5 - x)(7x + 2) + (3{,}5x - 1)(7 + 2x) = -450$;
3) $(8x + 3)(1 - 0{,}9x) + 7{,}4 = (4x - 5)(1 - 1{,}8x)$;
4) $498 + (2{,}7 - 5x)(6x - 7) = (9 - 0{,}5x)(60x + 1)$.

17.10. Теңсіздікті шешіңдер :
1) $x(x^3 - 4) - x^4 \ \mathrm{m}\ 18 - x$; 2) $x^3 + x(20 - x^2)\ \mathrm{I}\ 24x - 3$;
3) $x(31 + x^4) - x^5 > 37x - 68$; 4) $x^9 - x(47 + x^8) > 19 - 45x$.

B

17.11. Егер $A = 5x^6 + x^4 - 9$ және $B = 10x^6 - 5x^4 + 1{,}8$ болса, онда
1) $A + 5B = 55x^6 - 24x^4$;
2) $-2A + B = -7x^4 + 19{,}8$;
3) $10A + 2B = 70x^6 - 86{,}4$;
4) $-3A - 1{,}5B = -30x^6 + 4{,}5x^4 + 24{,}3$ болатынын дәлелдеңдер.

17.12. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:
1) $(x^2 - 8x + 7)(x + 5) + 3x(x + 11) = x^3 + 35$;
2) $(y + 9)(10 - 3y + y^2) - 0{,}5y(12y - 34) = 90 + y^3$;
3) $(2a^2 - a + 11)(8a - 3) + 7a(-13 + 2a) = -33 + 16a^3$;
4) $(13x + 6)(4x^2 - x - 9) - 5x(2{,}2x - 24{,}6) = -54 + 52x^3$.

17.13. Өрнектің мәнін табыңдар:
1) $(8a^3b - c^4)\cdot(15a^5b^4):(3a^4b^3) - 40a^4b^2$, мұндағы $a = 0{,}2$, $b = 0{,}5$, $c = -2$;
2) $0{,}9x^{10}y^7 \cdot (10x^8y^3z^6 - 9):(20x^9y^6) + 0{,}40xy$, мұндағы $x = -1$, $y = 5$, $z = 1$.

17.14. Теңдеудің түбірін табыңдар:
1) $(x^4 - 3)(x + 5) = 29 - 2x + x^4(x + 5)$;
2) $(10 - x^6)\cdot(7 + x) = 11x - 63 - x^6(x + 7)$;
3) $(2 + x)x^5 - 15x + 41 = (x^5 - 13)(2 + x)$;
4) $99 - 23x + x^8(x - 9) = -(17 - x^8)(x - 9)$.

17.15. Теңсіздікті шешіңдер.

1) $(x^3-2)(x+1)\ \mathrm{m}\ x^4+x^3-23$;

2) $-x^8+49\ \mathrm{m}\ (10-x^7)(5+x)+5x^7$;

3) $(x^2-4x+8)\cdot 5<2x(2{,}5x-1)$;

4) $3x(1{,}1x+2)>0{,}1x(33x+10)-6$.

C

17.16. 1) $(x^2-3x+5)(x+3)\ \mathrm{m}\ x^3+7x-1$;

2) $(y^2-y+8)(4-y)-2{,}4\ \mathrm{l}\ 5y^2-y^3-6y$;

3) $z^3+2{,}8z-2{,}2>(9-z-z^2)(1{,}2-z)+0{,}2z^2+11{,}5$;

4) $-2{,}2x-7{,}15-0{,}5x^2<(1{,}7+x+x^2)(0{,}5-x)+x^3$

теңсіздігінің шешімі болатын ең кіші бүтін санды табыңдар.

17.17. 1) $(x^5-6)\cdot x+7x^4\ \mathrm{l}\ x^4(7+x^2)-1{,}8$;

2) $(x^9+11)\cdot 6x-15x^5\ \mathrm{m}\ -33+3x^5(2x^5-5)$;

3) $7x^3(6x^5-3)+44>2x(21x^7+1{,}1)-21x^3$;

4) $9x^2(10x^7-3)+135<4{,}5x(20x^8-3)-27x^2$

теңсіздігінің шешімі болатын ең үлкен бүтін санды табыңдар.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

17.18. Тіктөртбұрыштың ұзындығын 5 есе арттырып, енін өзгеріссіз қалдырса, онда оның ауданы қалай өзгереді?

17.19. Тауар бағасы 200 тг-ге өзгерді. 7 кг тауардың құны қанша теңгеге өзгерген?

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

1. $(3x^2y)^3 \cdot 5y^7$ бірмүшесін стандарт түрде жазыңдар.

A. $135x^6y^8$; B. $45x^7y^{10}$; C. $135x^5y^8$; D. $135x^6y^{10}$.

2. $(2ab^5)^4 \cdot (5a^7b^2)^2$ өрнегін ықшамдаңдар.

A. $80a^{13}b^{24}$; B. $400a^{18}b^{24}$; C. $250a^{18}b^{13}$; D. $400a^{13}b^{24}$.

3. $2{,}5\,a^3b \cdot \frac{4}{25}a^2b^4$ өрнегін ықшамдап, $a=-1$, $b=-1$ болғандағы мәнін табыңдар.

A. $-0{,}4$; B. $-2{,}5$; C. $0{,}4$; D. $2{,}5$.

4. $(24m^5n^3)^2 : (12m^3n)^3$ бөлуін орындаңдар.

A. $\frac{1}{3}m^2n^2$; B. $3mn^2$; C. $3m^2n^3$; D. $\frac{1}{3}mn^3$.

5. x-тің қандай мәнінде x^2-6x-1 және $6+x^2+x$ өрнектері тең болады?

A. 1; B. -1; C. 0; D. 6.

6. $8x^6y^3-12x^3y^3$ өрнегінің ортақ көбейткішін табыңдар.

A. x^3y^3; B. $2x^3y^3$; C. $2x^3-4$; D. $4x^3y^3$.

7. $4n^3m^2+8n^3m^3-12n^2m^3$ өрнегіндегі ортақ көбейткішті жақшаның сыртына шығарыңдар.

A. $4mn(n^2m+2n^2m^2-3nm^2)$; B. $n^2m^2(4n+8nm-12m)$;

C. $4n^2m^2(n+2nm-3m)$; D. $4n^2m(nm+2nm-3nm^2)$.

8. $(x^2+5x)-x(x-5)=0$ теңдеуін шешіңдер.

A. 0; B. 1; 5; C. 0; 5; D. Түбірі жоқ.

9. $3m^5+7m^3-18-3m^5+7m^3-18$ көпмүшесінің дәрежесін анықтаңдар.

A. 6; B. 5; C. 0; D. 3.

10. $6a^3+9ab-5b^2-8ab-4b^2$ көпмүшесін стандарт түрде жазыңдар.

A. $6a^3+17ab-9b^2$; B. $6a^3+ab+9b^2$;

C. $6a^3+ab-9b^2$; D. $6a^3-ab+9b^2$.

11. $3b^2+a^2b+5ab^2+4a^2b-5ab^2-3b^2$ көпмүшесін стандарт түрге келтіріп, $a=1$, $b=-1$ болғандағы мәнін табыңдар.

A. 5; B. -5; C. -10; D. 10.

12. $\dfrac{(2m^5n^4)^7 \cdot (4m^3n^5)^2}{(2m^4n^4)^{10}}$ өрнегін ықшамдаңдар.

A. $\frac{2m}{n^2}$; B. $\frac{m^2}{2n}$; C. $\frac{m}{n^2}$; D. $\frac{2m^2}{n}$.

13. $(t^2 + 8t - 9) - (t^2 - 11t + 10) = 18t - 20$ теңдеуін шешіңдер.
A. –0,5; B. 2; C. – 1; D. 1.

14. $-0{,}8\,c\cdot(c+5) - 0{,}7(10\,c+5) + 0{,}8\,c^2 + 10c - 4$ өрнегін ықшамдаңдар.
A. $1{,}6\,c^2 - c - 7{,}5$; B. $-c - 7{,}5$;
C. $-c - 0{,}5$; D. $-19\,c - 7{,}5$.

15. $81\,m^9n^8 : (24\,m^8n^5)$ өрнегін ықшамдап, $m = 32$, $n = -\dfrac{1}{3}$ болғандағы мәнін табыңдар.
A. –12; B. 12; C. 4; D. –4.

16. Егер $2(a+1)(b+1) = (a+b)(a+b+2)$ болса, онда $a^2 + b^2$ өрнегінің мәнін табыңдар.
A. 1; B. 3; C. 4; D. 2.

17. $(125\,a^3 - 25\,a^5) : (5a^2) - (25\,a^2 - 2a^2) : a$ өрнегінің $a = 5$ болғандағы мәнін табыңдар.
A. 5; B. –5; C. 10; D. –15.

18. $(n^2 - n - 1)(n^2 - n + 1)$ көбейтіндісін стандарт түрдегі көпмүшеге келтіріңдер.
A. $2n^2 - n$; B. $n^4 - 2n^2 - 1$;
C. $n^2 + 2n^2 + n + 1$; D. $n^4 - 2n^3 + n^2 - 1$.

19. $3x(x-2) - (3x-1)(x+4) \square 8(2-x)$ теңсіздігін қанағаттандыратын ең үлкен бүтін санды табыңдар.
A. 0; B. –1; C. 1; D. –2.

20. $3a + 3a^2 - b - ab$ көпмүшесін көбейткіштерге жіктеңдер.
A. $(3a - b)(1 - a)$; C. $(a - 3b)(1 + a)$;
B. $(3a - b)(1 + a)$; D. $(3a + b)(a - 1)$.

3-ТАРАУ

ФУНКЦИЯ. ФУНКЦИЯНЫҢ ГРАФИГІ

§ 18. ФУНКЦИЯ

Функция, оның графигі дегеніміз не? Функцияның анықталу аймағы мен мәндер жиынын қалай табады?

Екі шама — баға мен құнды қарастырайық. Бұл шамалар — өзара тәуелді шамалар. Бағаның өсуі құнның өсуіне әкеледі. Тура осылай басқа шамалар туралы да айтуға болады. Мысалы, қозғалыс уақыты мен жылдамдығы. Жылдамдық артқан сайын жол жүруге кеткен уақыт кеміді.

C құнының m бағасынан тәуелділігін $C = k \cdot m$ (мұндағы k тауардың мөлшері) формуласы арқылы өрнектеуге болады. Бағаның әрбір мәніне құнның бір ғана мәні сәйкес келеді. Мысалы, $k = 3$ мәнінде,

$m = 5$ тг/дана болғанда $C = 15$ тг;

$m = 10$ тг/дана болғанда $C = 30$ тг;

$m = 20$ тг/дана болғанда $C = 60$ тг.

t қозғалыс уақытының v жылдамдығына тәуелділігі $t = \frac{s}{v}$ (мұндағы s — жүрілген жол) формуласы арқылы өрнектеледі. Жылдамдықтың әрбір мәніне уақыттың бір ғана мәні сәйкес келеді. Мысалы, $s = 120$ мәнінде,

$v = 40$ км/сағ болғанда $t = 3$ сағ;

$v = 60$ км/сағ болғанда $t = 2$ сағ;

$v = 12$ км/сағ болғанда $t = 10$ сағ.

Қарастырылған мысалдарда бір айнымалы шаманың әрбір мәніне екінші айнымалы шаманың бір ғана мәні сәйкес. Мұндай тәуелділікті *функционалдық тәуелділік* немесе *функция* деп атайды.

Қарастырылған мысалдардағы айнымалы шамалар жұбының бірі тәуелді айнымалы болады, оны *функцияның мәні* немесе *функция* деп атайды және әдетте, y әрпімен белгілейді. Айнымалы шамалар жұбының екіншісі тәуелсіз айнымалы болады, оны *аргумент* деп атайды және әдетте, x әрпімен белгілейді.

Жоғарыда қарастырылған мысалдарда құн мен қозғалыс уақыты — *тәуелді айнымалылар*; баға мен қозғалыс жылдамдығы — *тәуелсіз айнымалылар*.

Анықтама. x айнымалысының әрбір мәніне y айнымалысының бір ғана мәні сәйкес болғанда y айнымалысының x айнымалысына тәуелділігі *функция* деп аталады.

Тәуелсіз айнымалылар қабылдайтын барлық мәндер *функцияның анықталу аймағын* құрайды.

C құнның m бағаға тәуелділігі қарастырылған мысалда m тәуелсіз айнымалысы 5, 10, 20 мәндерін қабылдады. Осы мәндердің барлығы C функциясының анықталу аймағын құрайды.

C тәуелді айнымалысы 15, 30, 60 мәндерін қабылдады. Бұл мәндер функцияның мәндер жиынын құрайды.

t қозғалыс уақытының v жылдамдығына тәуелділігі қарастырылған мысалда v тәуелсіз айнымалысы 40, 60, 12 мәндерін қабылдады. Осы мәндердің барлығы t функциясының анықталу аймағын құрайды.

t тәуелді айнымалысы 3, 2, 10 мәндерін қабылдады. Бұл мәндер функцияның мәндер жиынын құрайды.

Егер функцияны қарастыру кезінде тәуелсіз айнымалының нақты мәндері көрсетілмесе, онда функцияның анықталу аймағы ретінде тәуелсіз айнымалының барлық мүмкін болатын мәндері алынады.

Мысалы, $y = 30x$ функциясы үшін айнымалының мүмкін болатын мәндер жиыны кез келген сан, сондықтан анықталу аймағы $(-\infty; +\infty)$ сан аралығы болады; $y = \dfrac{120}{x}$ функциясы үшін айнымалының мүмкін болатын мәндер жиыны нөл санынан басқа барлық сандар (өйткені нөлге бөлуге болмайды), сондықтан анықталу аймағы — $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ сан аралығы.

Анықтама. D жиындағы аргументтің үлкен (кіші) мәніне функцияның үлкен (кіші) мәні сәйкес болғанда ғана функция осы жиында *өспелі функция* деп аталады.

Анықтама. D жиындағы аргументтің үлкен (кіші) мәніне функцияның кіші (үлкен) мәні сәйкес болғанда ғана функция осы жиында *кемімелі функция* деп аталады.

Мысалы, бағаның құнға тәуелділік функциясы өспелі, өйткені баға өскен сайын құн да өседі, ал жылдамдықтың уақытқа тәуелділік функциясы кемімелі, өйткені қозғалыс жылдамдығы артқан сайын жүрілген жолға жіберілген уақыт кеміді.

Функция өспелі де, кемімелі де болмауы мүмкін. Мысалы, егер оқушы бірінші күні кітаптың 15 бетін оқып, екінші, үшінші және төртінші күндері ол кітапты оқымай, бесінші күні 20 бет, ал қалған 30 бетті алтыншы күні оқыған болса, онда k күнде кітаптың оқылған беттер санын беретін функция өспелі болмайды. Өйткені бір күнде 15 бет, екі күнде 15 бет, үш күнде 15 бет, төрт күнде 15 және т.с.с., яғни күннің саны өскен сайын кітаптың оқыған беттер саны өспейді.

1. Бір шама тәуелді шама да, тәуелсіз шама да бола ала ма? Мысал келтіріңдер.
2. Құнның бағаға тәуелділік функциясының анықталу аймағы теріс сан, нөл, аралас оң сан болуы мүмкін бе?
3. Бір функцияның анықталу аймағында өспелі және кемімелі болуы мүмкін бе?
4. Өспелі де, кемімелі де болмайтын функция бола ма?

Жаттығулар

А

18.1. 1) Шаршының периметрі; 2) шаршының ауданы; 3) қозғалыс жылдамдығы; 4) тауардың бағасы; 5) тіктөртбұрыштың периметрі; 6) тіктөртбұрыштың ауданы; 7) текшенің көлемі; 8) тікбұрышты параллелепипедтің көлемі тәуелді айнымалы болса, онда тәуелсіз айнымалыны табыңдар.

18.2. 1) Сатып алынған тауардың мөлшері; 2) қозғалыс уақыты; 3) қозғалыс жылдамдығы; 4) шаршының периметрі тәуелсіз айнымалы болса, тәуелді айнымалыны табыңдар.

18.3. 1) Еңбек өнімділігі мен белгілі бір уақытта орындалған жұмыс; 2) белгілі бір уақытта орындалған жұмыс пен еңбек өнімділігі; 3) x айнымалысы мен оның модулі; 4) x айнымалысының модулі мен x айнымалысы арасындағы тәуелділік функция бола ма?

В

18.4. 1) Барлық қабырғалары тең бесбұрыш периметрінің қабырғаның ұзындығына; 2) жемісі бар бірдей бес жәшік массасының бір жәшікте салынған жемістің массасына; 3) 10 бірдей қарындаш құнының бір қарындаш құнына; 4) оқулықтар санының оқушылар санына тәуелділігі функция бола ма?

18.5. 1) Қабырғалары тең көпбұрыш периметрінің оның ұзындығына тәуелділік функциясының; 2) су күйінің температураға тәуелділік функциясының анықталу аймағын табыңдар.

C

18.6. 1) Шаршы қабырғасы ұзындығының оның ауданына тәуелділігін;
2) жұмысқа жіберілген уақыттың еңбек өнімділігіне тәуелділігін беретін функция өспелі бола ма, әлде кемімелі бола ма?

18.7. Шаршы қабырғасының ұзындығы 2 см m a m 5 см мәндерін қабылдайды. Шаршының 1) P периметрі; 2) S ауданы қандай мәндерді қабылдайды?

18.8. 1) a m4 см; 3) a m2,5 см; 5) 3 см m a m5 см;
2) a l 3 см; 4) a l 17,5 см; 6) 1,25 см m a m1,75 см болса, онда қабырғасы a см шаршының периметрі туралы не айтуға болады?

18.9. Автомобиль, мотоцикл, пойыз және моторлы қайық жолда 2 сағ болды. Егер олардың жылдамдықтары сәйкесінше 80 км/сағ, 30 км/сағ, 65 км/сағ, 12 км/сағ болса, онда әрқайсының жүрген жолын табыңдар. Жүрілген жол ұзындығының қозғалыс жылдамдығына тәуелділігін беретін формуланы жазыңдар.

Хабарлама дайындаңдар

18.10. Функция ұғымы XVII ғасырда пайда болған. Функция терминін енгізген неміс математигі **Готфрид Лейбниц** жайлы хабарлама дайындаңдар.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

18.11. $P = 4a$ формуласын қолданып
1) $a = 2{,}5;\ 15\frac{1}{8}$ болғанда P-ның мәнін; 2) $P = 8;\ 1{,}6;\ \frac{1}{4}$ болғанд а a-ның мәнін табыңдар.

18.12. $y = 3x - 9$ формуласын қолданып
1) $y = 0$ болғанда x-тің; 2) $x = 0$ болғанда y-тің мәнін табыңдар.

§ 19. ФУНКЦИЯНЫ ФОРМУЛА АРҚЫЛЫ БЕРУ

"Функцияны беру" дегеніміз не? Функцияны қалай беруге болады?

Функция әртүрлі тәсілдермен берілуі мүмкін.

Функцияны беру — берілген аргументтің мәндеріне сәйкес функцияның мәндерін табуды көрсету.

Функцияны формула арқылы беруге болады.

Функцияны формула арқылы беру функцияны аналитикалық тәсілмен беру деп аталады.

Мысалы, қандай да бір жылдамдықпен 2 сағ-та жүрілген жолдың формуласын қарастырайық.

Егер жылдамдықты өзгертсе, онда белгілі бір уақытта (мысалы, 2-сағ-та) жүрілген жол ұзындығы өзгереді. Демек, бұл мысалда жылдамдық тәуелсіз айнымалы, оны x арқылы өрнектейік, ал жүрілген жол ұзындығы тәуелді айнымалы, оны y арқылы өрнектейік.

Қозғалыс уақыты өзгеріссіз қалып отыр, ол 2 сағ-қа тең. Сонда жүрілген жол ұзындығының қозғалыс жылдамдығына тәуелділігін $y = 2x$ формуласымен жазуға болады.

Формула бойынша x (жылдамдық) аргументінің әрбір мәніне y (жүрілген жол) функциясының бір ғана мәні сәйкес екенін көреміз. Сондықтан $y = 2x$ формуласы функцияны береді. Осы формула бойынша x аргументінің берілген мәні арқылы y функциясының сәйкес мәнін табуға болады.

Мысалы, x аргументі 40 км/сағ; 45 км/сағ; 50 км/сағ; 60 км/сағ, мәндерін қабылдаса, онда $y = 2x$ функциясының сәйкес мәндері 80 км; 90 км; 100 км; 120 км болады. Оларды табу үшін $y = 2x$ формуласындағы x-тің орнына сәйкесінше 40; 45; 50; 60 сандарын қойдық.

Керісінше $y = 2x$ формуласы бойынша y функциясының берілген мәндері бойынша x аргументінің сәйкес мәндерін табуға болады.

Егер y функциясы 86 км; 94 км; 98 км мәндерін қабылдаса, онда x аргументінің сәйкес мәндері 43 км/сағ; 47 км/сағ; 49 км/сағ болады. Бұл мәндерді табу үшін 86; 94; 98 сандарын $y = 2x$ формуласына қойдық.

Кез келген формула функцияны бермейді.

Мысалы, $|y|=x$ формуласы y функциясын бермейді, себебі аргументтің бір мәніне функцияның екі мәні сәйкес келеді. Мысалы, $x = 2$ болса, онда y мәндері 2 және –2 сандары болады.

Формуланың көмегімен функцияның өспелі немесе кемімелі екенін анықтай аламыз. Мысалы, $y = 3x - 5$ функциясының өспелі екенін дәлелдейік. Анықтама бойынша аргументтің үлкен мәніне функцияның үлкен мәні сәйкес келсе, онда функция өспелі. $x_1 > x_2$ болсын. y_1 және y_2-ні табайық. Сонда $y_1 = 3x_1 - 5$ және $y_2 = 3x_2 - 5$ шығады. $y_1 - y_2$ айырымын қарастырайық. Ол үшін $y_1 - y_2$ өрнегінде y_1-дің орнына $3x_1 - 5$, y_2-нің орнына $3x_2 - 5$ өрнегін қоямыз. Сонда $y_1 - y_2 = 3x_1 - 5 - (3x_2 - 5)$.

Жақшаларды ашып, ұқсас қосылғыштарды біріктіріп, ортақ көбейткішті жақшаның сыртына шығарамыз: $3x_1 - 5 - (3x_2 - 5) = 3x_1 - 5 - 3x_2 + 5 = 3x_1 - 3x_2 = 3(x_1 - x_2)$. $x_1 > x_2$ болғандықтан, $x_1 - x_2$ өрнегінің мәні оң болады. Сондықтан $y_1 - y_2 > 0$, демек, $y_1 > y_2$, яғни $y = 3x - 5$ функциясы өспелі.

Формула бойынша функция графигі абсцисса осін қандай нүктеде қиятынын табуға болады. Мысалы, $y = 3x - 5$ функциясы графигінің абсцисса осімен қиылысу нүктесінің координаталарын табайық. Абсцисса осіне тиісті нүктенің ординатасы нөлге тең болғандықтан, $y = 3x - 5$ формуласындағы y айнымалысының орнына 0 санын қоямыз. Сонда $3x - 5 = 0$ теңдеуі шығады, осыдан x айнымалысының мәнін табамыз. $3x = 5$ немесе $x = 1\frac{2}{3}$. Демек, $y = 3x - 5$ функциясының графигі абсцисса осін координаталары $(1\frac{2}{3}; 0)$ нүктесінде қиып өтеді.

Формуланың көмегімен аргументтің қандай мәнінде функция мәндері оң немесе теріс болатынын табуға болады.

Мысалы, $y = 3x - 5$ функциясының теріс болатын x аргументінің мәндерін табайық. Ол үшін $3x - 5 < 0$ теңсіздігін шешеміз. Сонда $3x < 5$ немесе $x < 1\frac{2}{3}$. Демек, $(-\infty; 1\frac{2}{3})$ сан аралығына тиісті барлық x-тер үшін $y = 3x - 5$ функциясының мәндері теріс болады.

?

1. Неліктен функцияны формула арқылы беруге болады?
2. Қандай уақытта формула функцияны береді?
3. Қандай кезде формула функцияны бермейді?
4. Формуланың көмегімен функцияның анықталу аймағын табуға бола ма?
5. Функцияның берілген мәні бойынша аргументтің сәйкес мәні қалай табылады?

Жаттығулар

A

19.1. Берілген формулалардың қайсысы x-ке тәуелді y функциясын береді:

1) $y = -3x + 4$; 2) $y^2 = x$; 3) $x + 8 - 6y = 0$.

19.2. Функцияның анықталу аймағын табыңдар:

1) $y = \frac{1}{3}x$; 2) $y = \frac{x}{2}$; 3) $y = \frac{x}{2} + 5$;

4) $y = 5 \cdot (x + 2)$; 5) $y = \frac{3}{x+2}$; 6) $y = \frac{x(x-2)}{2}$.

19.3. 1) $x = 1782$; 1101; $\frac{2}{3}$; $0{,}3$ болса, онда $y = \frac{1}{3}x + 8$;

2) $x = 25$; 250; $2{,}5$ болса, онда $y = 0{,}01\,x - 2{,}5$;

3) $x = 40$; 100; $\frac{1}{2}$; 8 болса, онда $y = \frac{1}{8} + 25\%\,x$ функциясының мәнін табыңдар.

19.4. 1) $y = \frac{1}{3}$; $0{,}3$; 8; 30 болса, онда $y = \frac{1}{3}x + 8$;

2) $y = 2{,}5$; $0{,}01$; $\frac{1}{25}$ болса, онда $y = 0{,}01\,x - 2{,}5$;

3) $y = \frac{1}{4}$; $0{,}5$; 10 болса, онда $y = \frac{1}{8} + 25\%\,x$ функциясы үшін x аргументінің мәнін табыңдар.

B

19.5. x-тің қандай мәнінде функцияның мәні нөлге тең:

1) $y = 12x + 18$; 2) $y = 12x + 3$; 3) $y = 3x + 8$;

4) $y = 5x + 1$; 5) $y = -12x + 18$; 6) $y = 4x - 8$;

7) $y = -2x - 8$; 8) $y = -10x + 2$?

19.6. x-тің қандай мәнінде функцияның мәні оң болады:

1) $y = 2x + 8$; 2) $y = -2x + 8$;

3) $y = -2x - 8$; 4) $y = 2x - 8$;

5) $y = 0{,}1\,x + 10$; 6) $y = -0{,}1\,x + 10$;

7) $y = -0{,}1\,x - 10$; 8) $y = 0{,}1\,x - 10$?

19.7. x-тің қандай мәнінде функцияның мәні теріс болады:
1) $y = 100x + 4$; 2) $y = 4x + 100$; 3) $y = 20x + 80$;
4) $y = 5x + 80$; 5) $y = -2x + 8$; 6) $y = 2x - 8$;
7) $y = -2x - 8$; 8) $y = 2x + 8$?

C

19.8. 1) $y = -3{,}5x + 4\frac{2}{3}$; 2) $y = \frac{5}{9}x - 14\frac{7}{18}$;

3) $y = -\frac{7}{8}x + 4\frac{4}{7}$; 4) $y = -1\frac{2}{3}x - 12{,}5$

функциясы ның мәні x аргумент інің қандай мәндерінде теріс емес болады?

19.9. 1) $y = \frac{x+6}{5-x}$; 2) $y = \frac{x+3}{8{,}9+2x}$;

3) $y = \frac{x(x-4)}{x-4}$; 4) $y = \frac{x^2}{x^2-7x}$

функциясының анықталу аймағын табыңдар.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

19.10. Егер $y = 2{,}2x$ болса, онда мына 19.1-кестені толтырыңдар:

19.1- *кесте*

x	5	–3	27	$-1\frac{1}{3}$
y				

19.11. 19.2-кестені толтырыңдар:

19.2 -*кесте*

x		$\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{6}$		
$y = 3x - 2$	4			2,5	–5

§ 20. ФУНКЦИЯНЫ КЕСТЕМЕН БЕРУ ТӘСІЛІ

Функцияны кесте арқылы қалай беруге болады? Неліктен кесте арқылы функцияны беруге болады?

Кесте бойынша аргументтің берілген мәні арқылы функцияның сәйкес мәнін табуға болғандықтан, функцияны кестемен беруге болады.

Қандай да бір функцияны беретін кесте бойынша функцияның анықталу аймағын табуға бола ма?

Кестенің жоғарғы жолында x аргументінің мәндері жазылады. Мысалы: 15, 18, 20, 21, 30, 40 (20.1-кесте).

20.1 *-кесте*

x	15	18	20	21	30	40
y	30	36	40	42	60	120

Кестенің төменгі жолында y функциясының сәйкес мәндері жазылады. Аргументтің бұл мәндері *функцияның анықталу аймағын* құрайды. 15; 18; 20; 21; 30; 40 сандар жиынын функцияның анықталу аймағы деп атап, {15; 18; 20; 21; 30; 40} түрінде жазады.

Кесте бойынша y функциясының қандай мәніне x аргументінің мәні сәйкес екенін табуға болады. Мысалы, аргументтің 30-ға тең мәніне функцияның 60-қа тең мәні сәйкес (20.1-кесте). Керісінше x аргументінің мәніне y функциясының қандай мәні сәйкес екенін табуға болады. Мысалы, функцияның 36 мәніне аргументтің 18 мәні сәйкес .

Қандай да бір функцияны беретін кесте бойынша функцияның өспелі немесе кемімелі екенін анықтауға бола ма?

Кесте бойынша функция өспелі немесе кемімелі, немесе өспелі де емес, кемімелі де емес екенін айтуға болады. Ол үшін аргумент мәндерін өсу немесе кему ретімен алып, оларға сәйкес функцияның мәндері қалай өзгеретініне назар салу керек. Кестеде аргументтің мәндері 15; 18; ... өсу ретімен және оларға сәйкес функцияның мәндері де 30; 36; ... өсу ретімен орналасқан.

Сондықтан кестемен берілген функция өспелі.

Кез келген кесте функцияны бермейді.

Мысалы, 20.2-кесте функцияны бермейді. Себебі x аргументінің бір мәніне (1-ге) функцияның екі мәні (4 пен 5) сәйкес. Сондықтан бұл кесте функцияны бермейді.

20.2 -*кесте*

x	0	1	1	2
y	3	4	5	6

1. Кестенің функцияны беретінін қалай анықтауға болады?
2. Кестеде аргументтің мәндерін өсу немесе кему ретімен беру міндетті ме?

Жаттығулар

А

20.1. 20.3-кесте функцияны бере ме?

20.3 -*кесте*

1)

x	1	2	3
y	0,5	1	1,5

2)

x	–1	–2	1	2
y	1	2	1	2

3)

x	1	2	1
y	–1	–2	1

4)

x	4	2	1
y	0	0	0

20.2. 20.4-кестемен берілген y функциясының анықталу аймағын табыңдар.

20.4 -*кесте*

1)

x	1	2	3	4
y	1	4	9	16

2)

x	1	4	2	9
y	–1	–2	1	3

20.3. 20.5-кестемен берілген функция өспелі ме, әлде кемімелі ме?

20.5- *кесте*

1)

x	7	8	9	12
y	1	2	3	4

2)

x	44	30	15	6
y	40	20	10	1

3)

x	10	20	30	40
y	5	15	10	20

4)

x	11	12	13	14
y	15	14	13	12

5)

x	90	80	70	60
y	6	12	18	24

6)

x	1	3	5	4
y	10	30	50	40

7)

x	4	5	6	7
y	0	5	4	6

8)

x	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$
y	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{5}$

20.4. 20.6-кестемен берілген функцияны формула арқылы жазыңдар.

20.6 *-кесте*

1)

x	1	2	3	4
y	3	6	9	12

2)

x	1	2	3	4
y	4	7	10	13

3)

x	1	2	3	4
y	2	5	8	11

4)

x	1	2	3	4
y	–3	–6	–9	–12

5)

x	1	2	3	4
y	–2	–5	–8	–11

6)

x	1	2	3	4
y	–4	–7	–10	–13

Функцияның анықталу аймағы қандай сандардан тұрады? Функциялардың қайсысы өспелі, қайсысы кемімелі?

B

20.5. 20.7-кесте бойынша функцияның анықталу аймағын табыңдар және функцияның өспелі немесе кемімелі болатынын анықтаңдар.

20.7- *кесте*

1)

x	0	1	2	3	4	5	6
y	1	2	4	8	16	32	64

2)

x	0	1	2	3	4	5	6
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$

3)

x	0	1	2	3	4	5	6
y	1	3	9	27	81	243	729

4)

x	0	1	2	3	4	5	6
y	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{243}$	$\frac{1}{729}$

5)

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
y	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25

6)

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
y	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	1	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{25}$

7)

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	–27	–8	–1	0	1	8	27

8)

x	–3	–2	–1	1	2	3
y	$-\frac{1}{27}$	$-\frac{1}{8}$	–1	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{27}$

C

20.6. 20.5-жаттығуындағы кестелердің берілгендерін қолданып, функцияны формула арқылы беріңдер.

20.7. Егер $y = x^2$ формуласымен берілген функцияның анықталу аймағы:

1) –3; –2; –1; 0; 1; 2; 3; 2) –30; –20; –10; 0; 10; 20; 30;
3) –8; –7; –6; –5; –4; 4) –0,3; –0,2; –0,1; 0; 0,1; 0,2; 0,3;
5) $-\frac{1}{100}; -\frac{1}{10}; \frac{1}{10}; \frac{1}{100}$; 6) $-\frac{1}{5}; -\frac{1}{4}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}$ сандарынан тұрса, онда функцияны кесте арқылы беріңдер.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

20.8. Координаталық жазықтықта келесі нүктелерді белгілеңдер: $A(-3;\ 4)$, $B(5;\ 6)$, $C(2;\ -3)$, $D(-1{,}5;\ -2)$, $M(0;\ -2)$, $N(3;\ 0)$.

20.9. 1) Абсцисса осіне тиісті бірнеше нүкте, ордината осіне тиісті бірнеше нүкте салыңдар. Осы нүктелер координаталарының қандай ерекшелігі бар?

2) Абсцисса осінен жоғары орналасқан бірнеше нүкте және абсцисса осінен төмен орналасқан бірнеше нүкте салыңдар. Осы нүктелер координаталарының қандай ерекшелігі бар?

3) Ордината осінің сол жақ бөлігінде орналасқан бірнеше нүкте және ордината осінің оң жақ бөлігінде орналасқан бірнеше нүкте салыңдар. Осы нүктелер координаталарының қандай ерекшелігі бар?

§ 21. ФУНКЦИЯНЫ ГРАФИКТІК ТӘСІЛМЕН БЕРУ

Функцияны график арқылы қалай беруге болады?

Функцияны график арқылы, яғни координаталар жазықтығының нүктелер жиыны арқылы беруге болады. Бұл жиын шексіз және шектелген, яғни бірнеше нүктеден тұруы мүмкін.

Бұл нүктелердің абсциссалары тәуелсіз айнымалыға (x аргументіне), ал ординаталары тәуелді айнымалыға (y функциясының мәніне) тең.

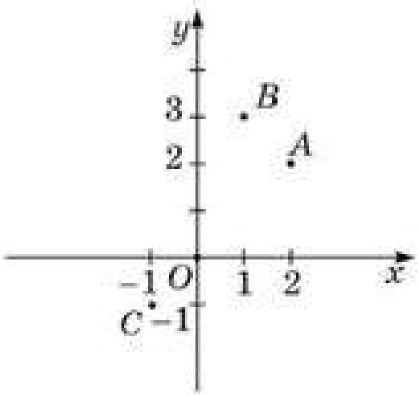
Функцияны график арқылы берудегі мақсат не?

Мысалы, 21.1-суреттегі графигі үш нүкте арқылы берілген функцияның $x = 2$ аргументіне оның $y = 2$ мәні сәйкес, демек бұл мәндер A нүктесінің координаталары болып табылады: $A(2; 2)$

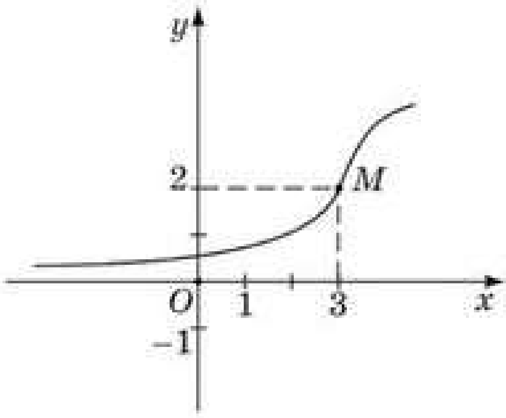
$x = 1$ аргументіне функцияның $y = 3$ мәні сәйкес, өйткені олар $B(1; 3)$ нүктесінің координаталары (21.1-сурет).

$x = -1$ аргументіне функцияның $y = -1$ мәні сәйкес, өйткені олар $C(-1; -1)$ нүктесінің координаталары.

Егер функцияның графигі сызық арқылы берілсе, онда аргумент пен функцияның сәйкес мәндерін былай табады. График бойынша аргументі 3-ке тең функцияның сәйкес мәнін табу үшін абсциссасы 3 санына тең нүкте арқылы Ox осіне перпендикуляр жүргізіледі (21.2-сурет). Одан кейін осы перпендикулярдың функция графигімен қиылысу нүктесі табылады. Қарастырылып жатқан мысалда ол M нүктесі. Енді осы нүктенің ординатасы анықталады. Ол үшін M нүктесінен Oy осіне перпендикуляр жүргізіледі. Демек, аргументтің 3-ке тең мәніне функцияның 2-ге тең мәні сәйкес.

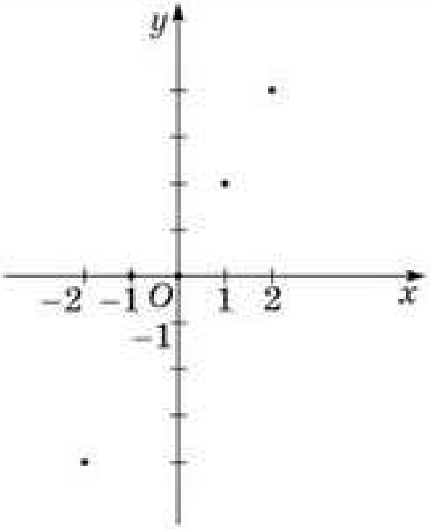


21.1-сурет



21.2-сурет

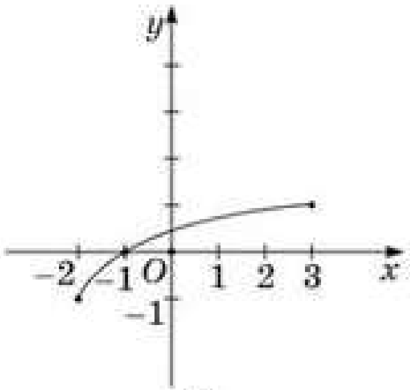
Графиктің функцияны беретінін қалай анықтауға болады?



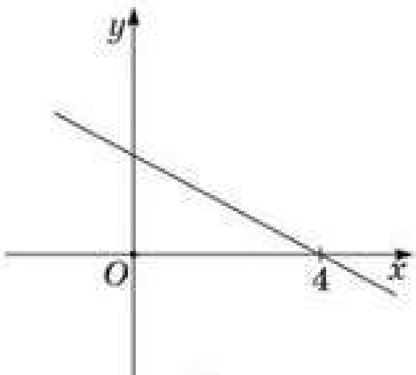
21.3-сурет

График бойынша функцияның анықталу аймағын оңай табуға болады. Ол үшін графиктің барлық нүктелерінің абсциссаларын табу керек. Мысалы, 21.3-суретте салынған функцияның анықталу аймағы −2, −1, 0, 1, 2 сандарынан тұрады. 21.4, а-суреттегі функцияның анықталу аймағы [−2; 3] сан аралығы, ал 21.4, ә-суреттегі функцияның анықталу аймағы $(-\infty; +\infty)$ сан аралығы болады.

График бойынша функцияның анықталу аймағын қалай табады?



а)



ә)

21.4-сурет

График бойынша функцияның өсуі немесе кемуі оңай анықталады.

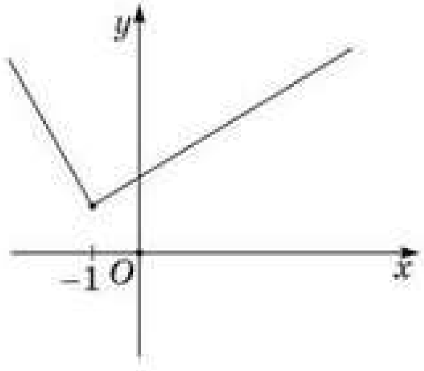
Мысалы,

1) 21.3-суреттегі функция өспейтін де, кемімейтін де функция болып табылмайды. Себебі x аргументінің мәні −1-ден 0-ге дейін өскенде функцияның мәні өзгермей нөлге тең болып қалады;

2) 21.4, а-суреттегі функция өспелі, себебі график солдан оңға қарай көтеріледі;

3) 21.4, ә-суреттегі функция кемімелі, яғни график солдан оңға қарай төмен түседі.

21.5-суретте кескінделген функцияның графигін қарастырайық.



21.5-сурет

21.5-суреттен функцияның өспейтінін, кемімейтінін көреміз. Суреттен функцияның анықталу аймағында, яғни $(-\infty; +\infty)$ аралығында өспелі де, кемімелі де болмайтынын көреміз. Бірақ графиктің бір бөлігі солдан оңға қарай төмен түседі, ал екінші бөлігі жоғары көтеріледі.

Мұндай жағдайда $(-\infty; -1]$ аралығында функция кемиді, ал $[-1; +\infty)$ аралығында функция өседі деп айтады.

График бойынша функцияның өсетінін немесе кемитінін қалай анықтауға болады?

График бойынша аргументтің қандай мәндерінде функцияның мәні нөлге тең, нөлден үлкен немесе нөлден кіші екенін анықтауға болады.

Мысалы,

1) 21.3-суреттегі функцияның мәні x-тің -1 және 0 мәндерінде нөлге тең;

x-тің 1 және 2 мәндерінде нөлден үлкен; x-тің -2 мәнінде нөлден кіші;

2) 21.4, а-суретте кескінделген функцияның мәні x-тің -1 мәнінде нөлге тең; $(-1;\ 3]$ сан аралығында нөлден үлкен, себебі аргументтің осы мәндері үшін функцияның графигі абсцисса осінен жоғары орналасқан;

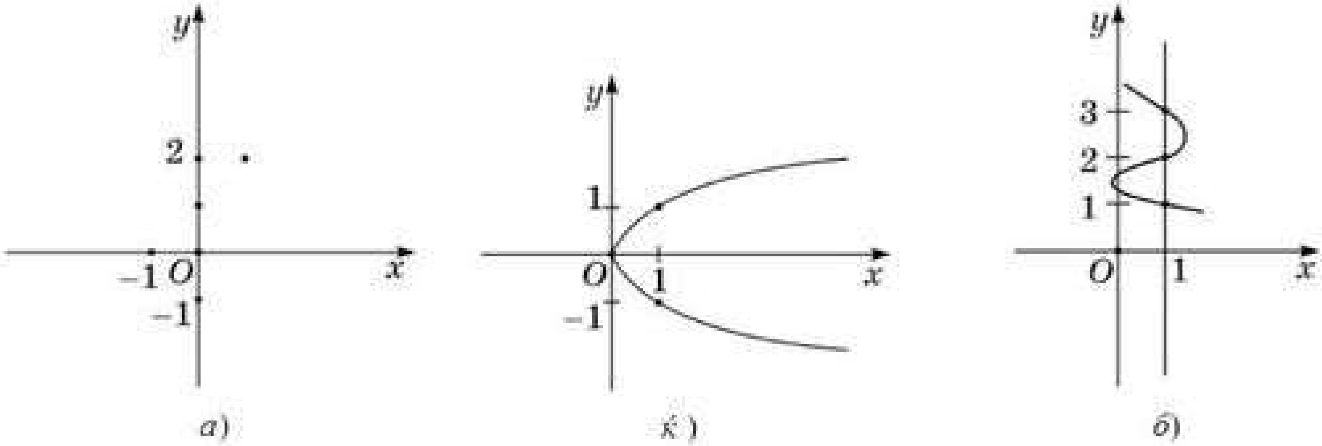
$[-2;\ -1)$ сан аралығында нөлден кіші, себебі аргументтің осы мәндері үшін функцияның графигі абсцисса осінен төмен орналасқан;

3) 21.4, ә-суреттегі функцияның мәні x-тің 4-ке тең мәнінде нөлді береді; $(-\infty;\ 4)$ сан аралығында нөлден үлкен, себебі аргументтің осы мәндері үшін функцияның графигі абсцисса осінен жоғары орналасқан; $(4;\ +\infty)$ сан аралығында нөлден кіші, себебі аргументтің осы мәндері үшін функцияның графигі абсцисса осінен төмен орналасқан.

Кез келген график функцияны бермейді. Мысалы, 21.6, а, ә, б-суреттердегі графиктер функцияны бермейді.

Аргументтің қандай мәндерінде функцияның мәндері оң немесе теріс болатынын анықтайтын график нүктелері қайда орналасқан?

Суреттер бойынша x айнымалысының бір мәніне y айнымалысының бірнеше мәні сәйкес келеді. Мысалы, 21.6, а-суретте $x = 0$ мәніне y айнымалысының $-1;\ 0;\ 1;\ 2$ болатын төрт мәні сәйкес; 21.6, ә-суретте $x = 1$ мәніне y айнымалысының 1 және -1 болатын екі мәні сәйкес;



21.6-сурет

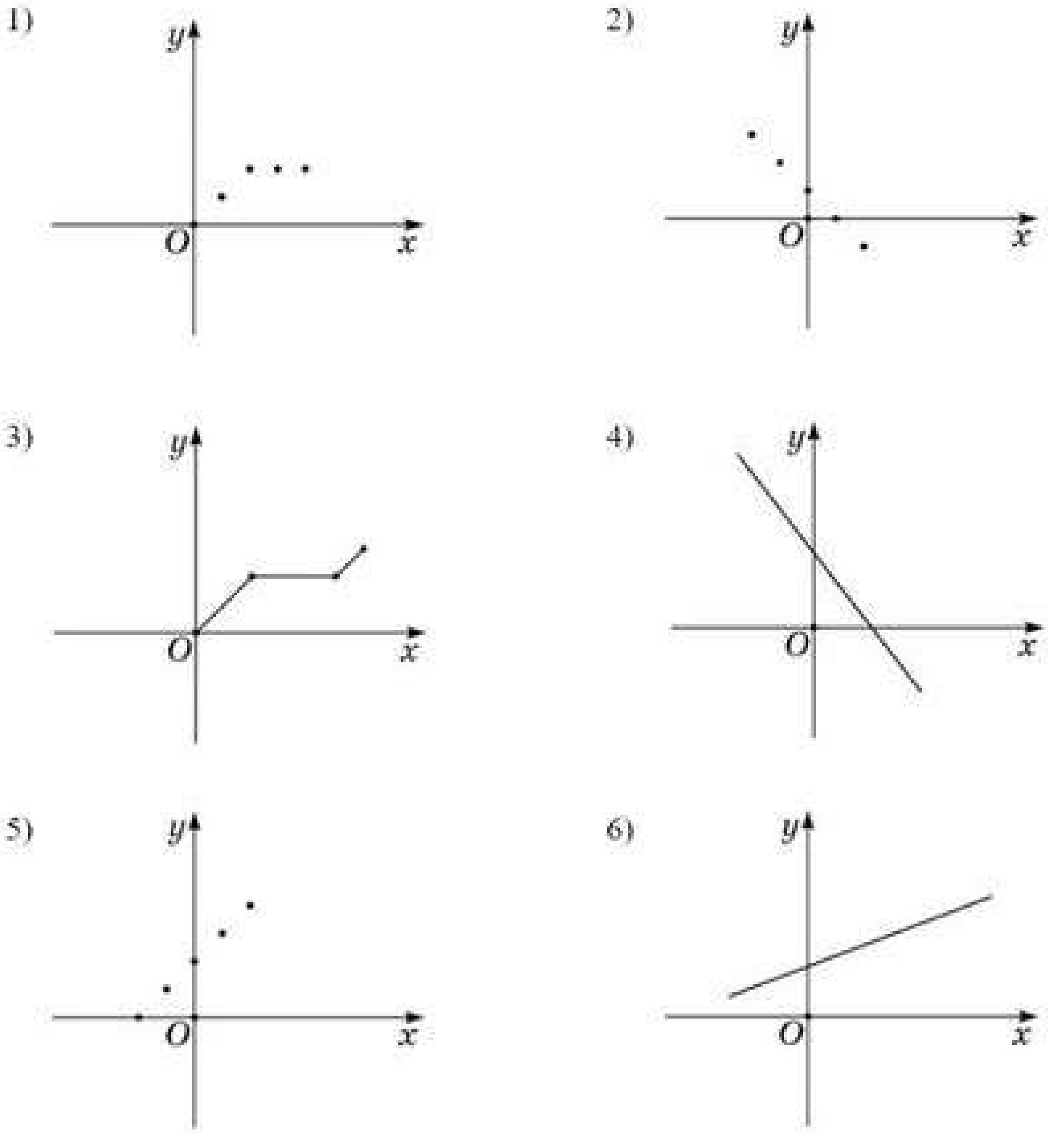
21.6. б-суретте $x = 1$ мәніне y айнымалысының 1; 2; 3 болатын үш мәні сәйкес.

1. Координаталық жазықтықтың үш нүктесі функцияның графигі бола ма?
2. Кез келген график функцияны бере ме?

Жаттығулар

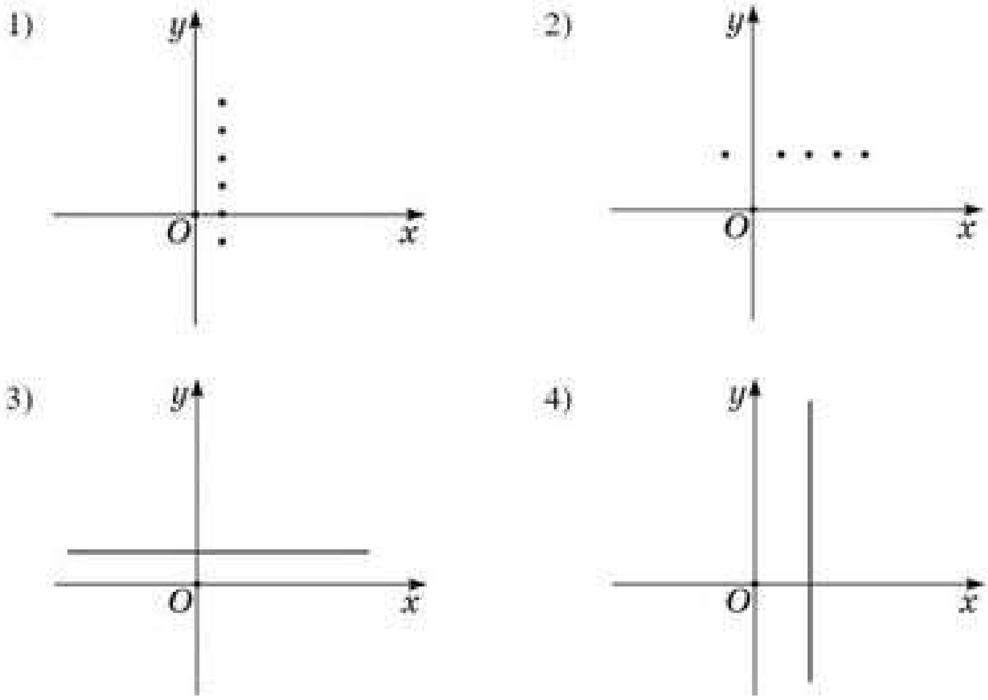
A

21.1. 21.7-суретте кескінделген график функцияны бере ме?



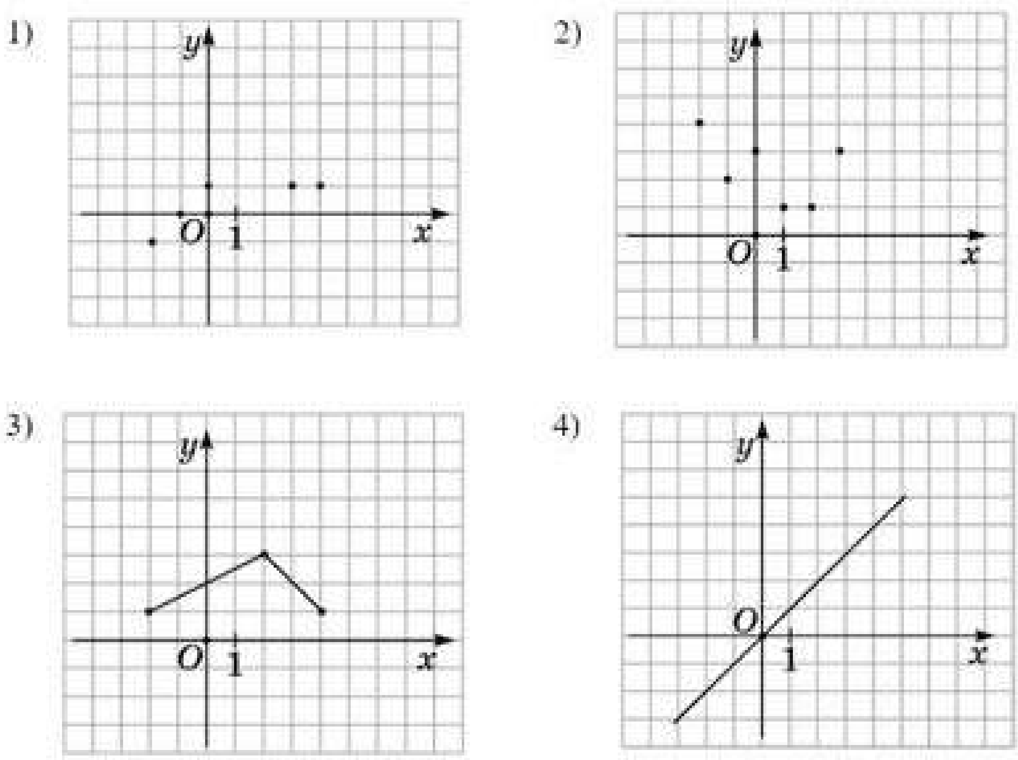
21.7-сурет

21.2. 21.8-суретте кескінделген график функцияны бере ме?



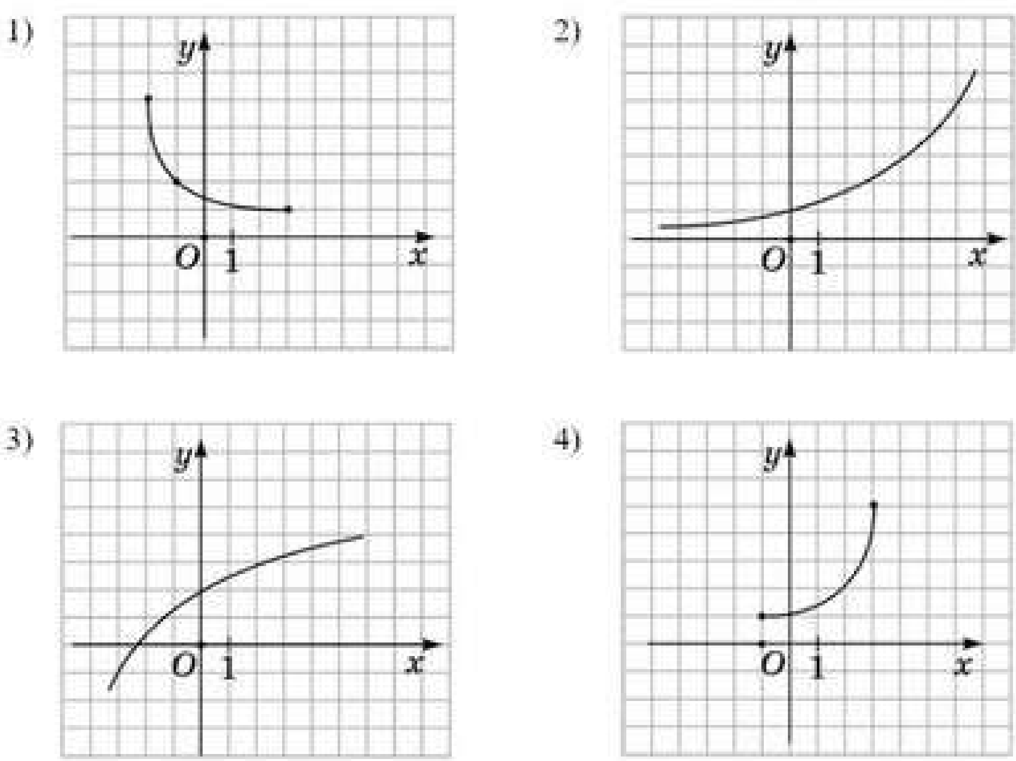
21.8-сурет

21.3. 21.9-суретте берілген график бойынша функцияның анықталу аймағын табыңдар :



21.9-сурет

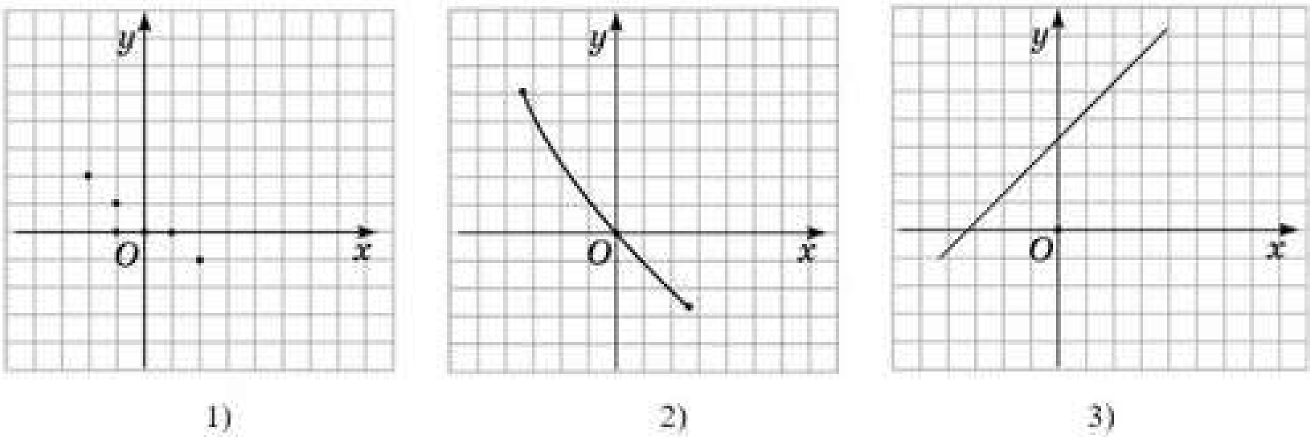
21.4. 21.10-суретте берілген график бойынша функцияның анықталу аймағын табыңдар.



21.10-сурет

21.5. 21.10-суретте кескінделген графиктер бойынша өсетін функцияларды, кемитін функцияларды көрсетіңдер.

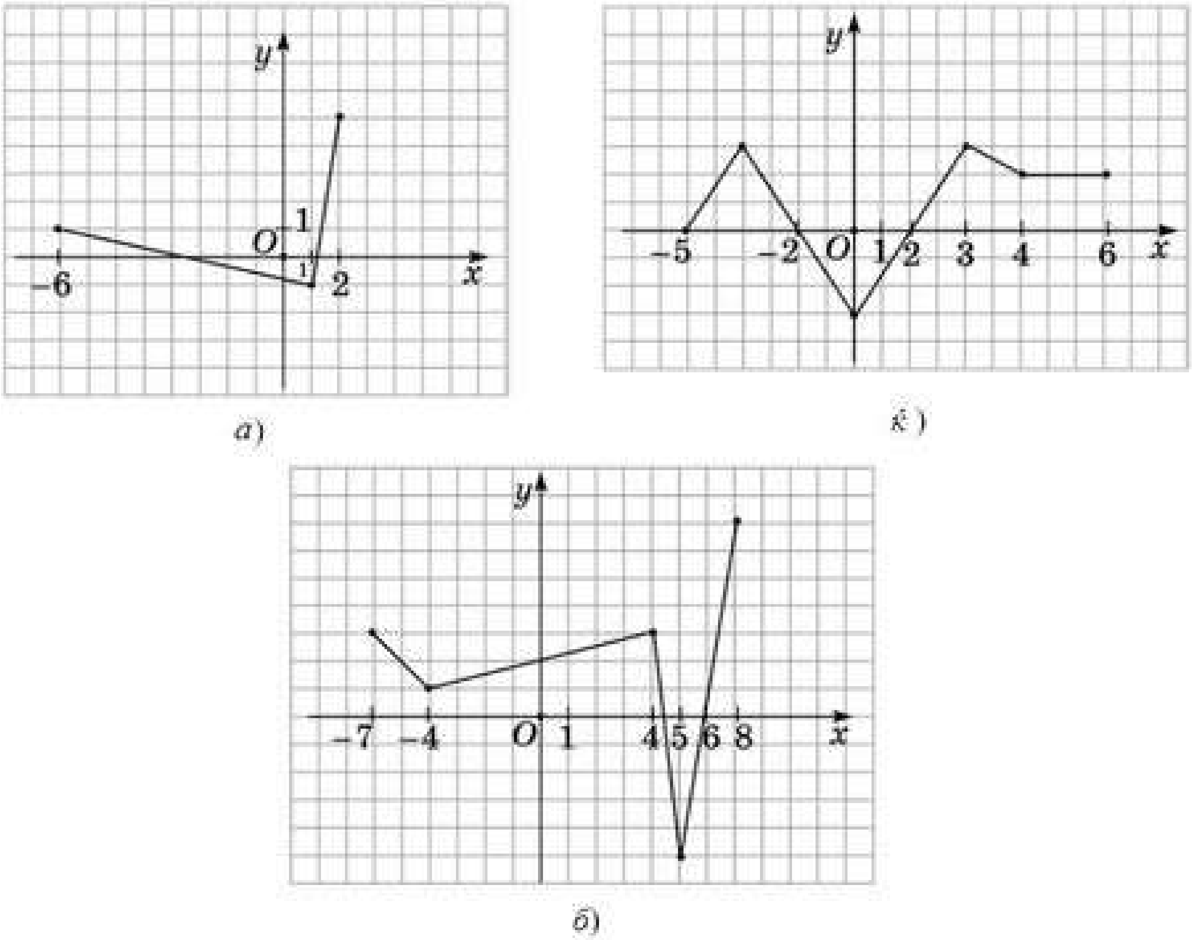
21.6. 21.11-суретте салынған график бойынша функцияның
1) анықталу аймағын;
2) аргументтің қандай мәндерінде функцияның нөлге тең болатынын;
3) а) өсетін; ә) кемитін сан аралықтарын табыңдар.



21.11-сурет

B

21.7. 21.12-суреттегі график бойынша функцияның
1) анықталу аймағын;
2) аргументтің қандай мәндерінде функцияның нөлге тең болатынын;
3) а) өсетін; ә) кемитін сан аралықтарын;
4) функцияның а) оң; ә) теріс болатын сан аралықтарын
табыңдар.

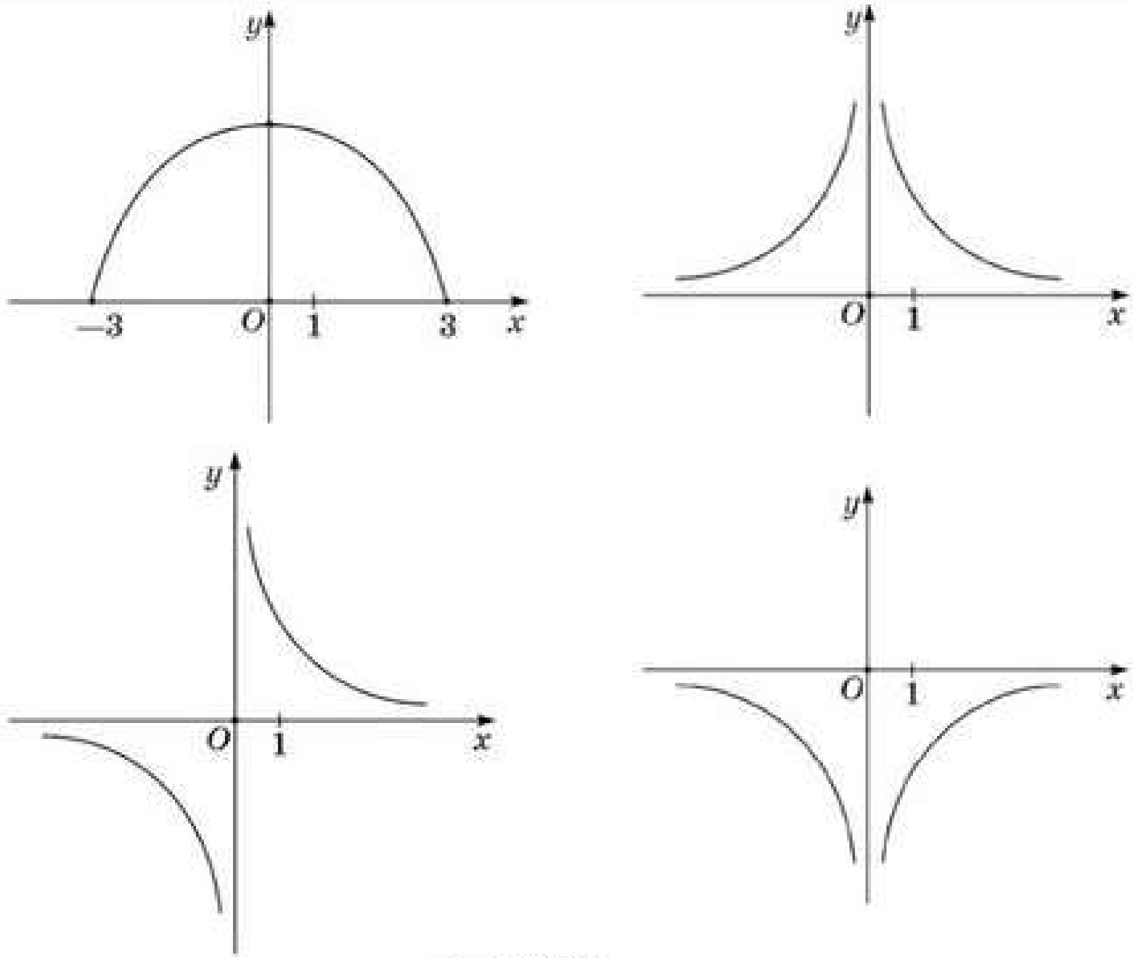


21.12-сурет

21.8. Егер $y = 5x - 3$ функциясының анықталу аймағы -1; 0; $0{,}5$; 1; $1{,}5$ сандары болса, онда функцияны кесте арқылы беріңдер және графигін салыңдар.

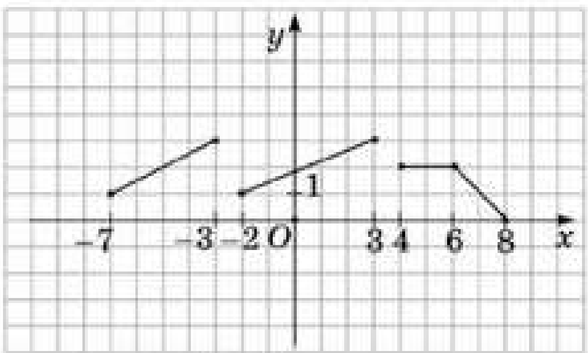
C

21.9. 21.13-суретте салынған график бойынша функцияның
1) анықталу аймағын;
2) аргументтің қандай мәндерінде функцияның нөлге тең болатынын;
3) а) өсетін; ә) кемитін сан аралықтарын табыңдар.



21.13-сурет

21.10. 21.14-суретте салынған график бойынша функцияның
1) анықталу аймағын;
2) аргументтің қандай мәндерінде функцияның мәні нөлге тең болатынын;
3) а) өсетін; ә) кемитін сан аралықтарын табыңдар.



21.14-сурет

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

21.11. Егер $y = \frac{1}{3}x$ болса, онда 21.1-кестені толтырыңдар:

21.1- *кесте*

x	–9	–6	–3	0	3	6	9
y							

21.12. 21.11-жаттығуда $(x; y)$ координаталарымен берілген нүктелерді координаталық жазықтықта салыңдар.

§ 22. СЫЗЫҚТЫҚ ФУНКЦИЯ ЖӘНЕ ОНЫҢ ГРАФИГІ

$y = kx + b$ формуласының графигін қалай салуға болады? Графиктің орналасуы k және b мәндеріне қалай тәуелді болады?

Анықтама. $y = kx + b$ формуласымен (мұндағы x — тәуелсіз айнымалы, k және b — қандай да бір сандар) беруге болатын функцияны *сызықтық функция* деп атайды.

Мысалы, $y = \frac{1}{2}x + 7$; $y = -2x + 3{,}4$; $y = 7$; $y = 12x$; $y = 0$ — сызықтық функциялар.

$y = -3x + 2$ сызықтық функциясын қарастырып, графигін салайық. Координаталары аргументтің және функцияның мәндері болатын нүктелерден тұрғандықтан, алдымен аргументтің қандай мәндерді қабылдайтынын анықтайық. Яғни, $y = -3x + 2$ функциясының анықталу аймағын табамыз. x-тің орнына кез келген санды қоюға болады. Өйткені x-тің кез келген мәнінде $-3x$ көбейткішінің мәнін есептеп, нәтижеге 2 санын қосуға болады. Сондықтан анықталу аймағы барлық сандардан тұрады.

22.1-кестені құрамыз:

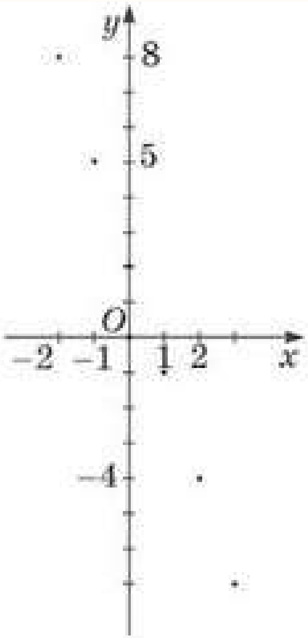
22.1- кесте

x	–2	–1	0	1	2	3
y	8	5	2	–1	–4	–7

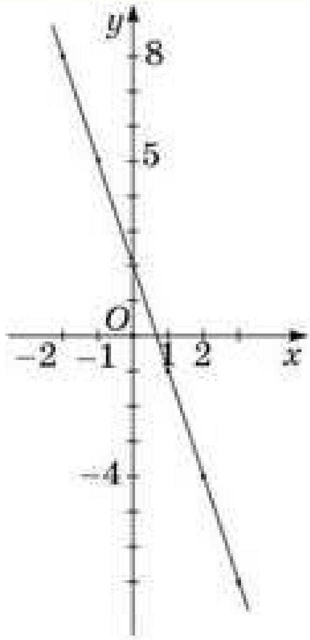
Координаталары (–2; 8); (–1; 5); (0; 2); (1; –1), (2; –4); (3; –7) жұптары болатын нүктелерді салайық (22.1-сурет).

Бұл нүктелер $y = -3x + 2$ функциясы графигінің барлық нүктелері емес, себебі оның анықталу аймағы –2; –1; 0; 1; 2; 3 алты нүктеден ғана емес, барлық нүктелерден тұрады. Егер $y = -3x + 2$ функциясының графигіне тиісті басқа нүктелерді салсақ, онда олардың салынған нүктелер арқылы өтетін бір түзуде жататынын көрсете аламыз. Бұл түзу $y = -3x + 2$ функциясының графигі болады (22.2-сурет).

$y = kx + b$ (мұндағы k және b — сандар) сызықтық функциясының графигі түзу болады.



22.1-сурет



22.2-сурет

Сызықтық функцияның графигін салу үшін қанша нүкте жеткілікті?

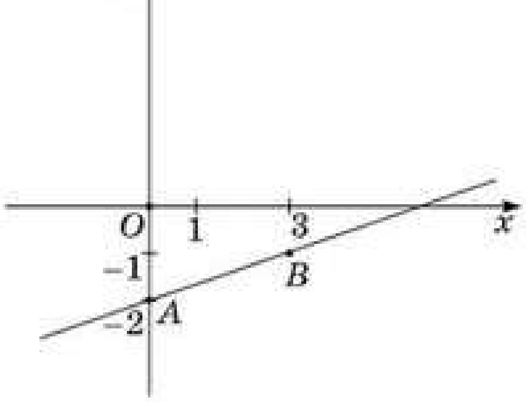
Сызықтық функцияның графигін салу үшін екі нүктені белгілеп, олар арқылы түзу жүргізу керек.

22.2 -кесте

x	y
0	–2
3	–1

Мысалы, $y = \frac{1}{3}x - 2$ функциясын ың графигін салайық. Ол үшін 22.2-кестені құрамыз. Одан кейін координаталар жазықтығында $A(0; -2)$ және $B(3; -1)$ нүктелерін белгілеп, түзу жүргіземіз (22.3-сурет).

$y = kx + b$ сызықтық функциясының k немесе b нөлге тең болғандағы графиктерін қарастырайық. Егер $k = 0$ болса, онда функция $y = 0 \cdot x + b$ немесе $y = b$ түріне келеді. Мысалы, $y = 2$ функциясының графигін салайық. Ол үшін екі нүктені белгілейміз. Аргументтің 4 және –1 мәндерін алып, $y = 0 \cdot x + 2$ формуласына қоямыз: $x = 4$ болғанда $y = 2$; $x = -1$ болғанда $y = 2$ (22.3-кесте).



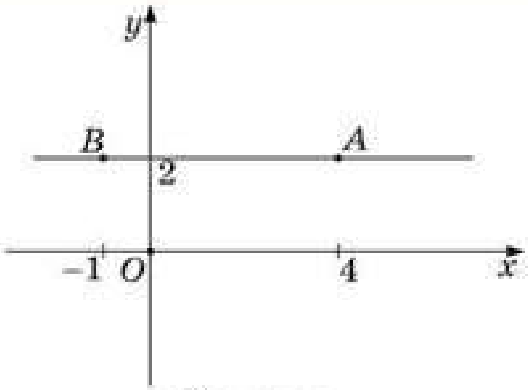
22.3-сурет

22.3 -кесте

x	y
4	2
–1	2

$A(4;\ 2)$ және $B(-1;\ 2)$ нүктелерін белгілеп, түзу жүргіземіз (22.4-сурет). Шыққан түзу Ox осіне параллель. Бұл түзу Oy осін ординатасы 2-ге тең нүктеде қияды. Сондықтан

Демек, $y = -2$ функциясының графигін салу үшін Ox осіне параллель және Oy осін ординатасы -2-ге тең нүкте арқылы қиятын түзуді жүргізу керек.



22.4-сурет

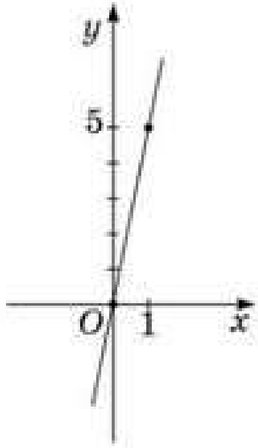
> $y = b$ функциясының графигі Ox осіне параллель және ординатасы b санына тең болатын нүкте арқылы өтеді.
>
> Егер $k = 0$ және $b = 0$ болса, онда $y = 0$ функциясының графигі Ox осімен беттеседі.

$y = kx + b$ сызықтық функциясының $b = 0$ жағдайындағы графигін салуды қарастырайық. Бұл жағдайда функция $y = kx$ түріне келеді. Бұл функцияның графигі k-ның кез келген мәнінде координаталар басы, яғни $O(0;\ 0)$ нүктесі арқылы өтеді. Расында, $x = 0$ болғанда, $y = kx$ нөлге тең.

Қандай жағдайда сызықтық функцияның графигін салу үшін бір ғана нүктені белгілеу жеткілікті?

$y = kx$ функциясының графигін салу үшін $O(0;\ 0)$ нүктесінен басқа тағы бір нүктенің координатасын табу керек.

Мысалы, $y = 5x$ функциясының графигін салайық. Егер $x = 1$ болса, онда $y = 5$. Демек, $y = 5x$ функциясының графигі болатын түзу $O(0;\ 0)$ және $A(1;\ 5)$ нүктелері арқылы өтеді (22.5-сурет).



22.5-сурет

1. Қандай функция сызықтық функция деп аталады?
2. Сызықтық функцияларға мысал келтіріңдер.
3. Сызықтық функцияның графигі қандай сызық болады?
4. Сызықтық функцияның графигі:
   1) абсцисса осіне параллель; 2) ордината осіне параллель болады?
5. Сызықтық функция графигінің координаталар осьтерімен қиылысу нүктелері қалай табылады?
6. $y = kx + b$ сызықтық функциясының графигі бойынша k және b-ның таңбаларын қалай анықтауға болады?
7. $y = kx$ функциясының графигі қалай салынады? Графиктің орналасуы k-мен қалай байланысты?

Жаттығулар

A

22.1. Сызықтық функция бола ма:
1) $y = x + 1{,}9$; 2) $y = 13 - x$; 3) $y = x^2 - 5$;
4) $y = 5\frac{1}{3}$; 5) $y = 0{,}5x - 3$; 6) $y = -\frac{x}{11} + 3$?

22.2. 1) $y = 4x - 3$; 2) $y = 5 + 2x$;
3) $y = 7 - \frac{2}{3}x$; 4) $y = \frac{5}{6}x + 2$
сызықтық функциясы берілген. Егер $x = 0$; $x = -3$; $x = 9$; $x = 1{,}5$ болса, онда y-ті табыңдар.

22.3. 1) $y = 7{,}2 - 2{,}4x$; 2) $y = \frac{2}{3} + 6x$;
3) $y = -\frac{3}{8}x + 7{,}5$; 4) $y = -4{,}6x - 1\frac{1}{3}$ сызықтық функциясы берілген.
Егер $y = 1$; $y = -1$; $y = -\frac{2}{3}$; $y = 5$ болса, онда x-ті табыңдар.

22.4. Функцияның графигін салыңдар:
1) $y = x + 4$; 2) $y = x - 2$; 3) $y = 7 - x$;
4) $y = -3 - x$; 5) $y = 0{,}6x - 1$; 6) $y = 3 + 2{,}5x$;
7) $y = \frac{1}{3}x + 9$; 8) $y = 6 - \frac{5}{6}x$.

22.5. $y = 3x - 6$ формуласымен берілген функцияның графигін салыңдар. График бойынша
1) x-тің -2; -1; 0; 1,5; 3; 4 мәніне сәйкес y-тің мәнін;
2) x-тің қандай мәнінде y-тің мәні 6; 1,5; 0; $-1{,}5$; -3 болатынын табыңдар.

B

22.6. $y = -1 - 3x$ формуласымен берілген функцияның графигін салыңдар. График бойынша
1) x-тің -3; -1; 0; 1,5; 2 мәніне сәйкес y-тің мәнін;
2) x-тің қандай мәнінде y-тің мәні -4; $-2{,}5$; -1; 3,5; 5 болатынын табыңдар.

22.7. $A(-2;-2)$; $B(-1;-1)$; $C(1;\ 2)$; $D(2;\ 4)$ нүктелері $y = 1{,}5x + 1$ функциясының графигіне тиісті бола ма?

22.8. $A\left(1; \frac{29}{14}\right)$; $B\left(0; \frac{4}{7}\right)$; $C\left(1; \frac{13}{14}\right)$; $D\left(-2; -\frac{17}{7}\right)$; $E\left(\frac{2}{7}; -\frac{1}{7}\right)$ нүкте лерінің қайсысы $y = -\frac{4}{7} + 1,5x$ функциясының графигіне тиісті?

22.9. Функция графигінің координаталар осьтерімен қиылысу нүктелерінің координаталарын тауып, графигін салыңдар:

1) $y = 5x - 5$; 2) $y = 3,8 - 0,2x$; 3) $y = -10 + 2,5x$;

4) $y = -\frac{2}{7}x + 1$; 5) $y = 1\frac{5}{6}x - 2,2$; 6) $y = \frac{x-8}{5}$.

C

22.10. $y = -1,2x + b$ функциясының графигі 1) $A(0; 2,4)$; 2) $B(5; -9,6)$ нүктесі арқылы өтсе, b-ны табыңдар.

22.11. $y = \frac{1}{3}x + b$ функциясының графигі 1) $C(3; -4)$; 2) $D(-6; 9)$ нүктесі арқылы өтсе, b-ны табыңдар.

22.12. $y = kx + \frac{6}{7}$ функциясының графигі 1) $E(-1; 1)$; 2) $F(7; -2)$ нүктесі арқылы өтсе, k-ны табыңдар;

22.13. $y = kx + 3\frac{1}{3}$ функциясының графигі 1) $N(1; 4)$; 2) $M(1; -4)$ нүктесі арқылы өтсе, k-ны табыңдар.

22.14. 1) $y = 6x - 1$; 2) $y = 3 - 8x$; 3) $y = -4$; 4) $y = 3,8$ функциясының графигін салыңдар. Функцияның қабылдайтын а) оң; ә) теріс мәндеріне сәйкес аргументтің барлық мәндерін көрсетіңдер.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

22.15. 1) $y = 3x$; $y = 3x - 2$; $y = 3x + 1,5$; 2) $y = 2x - 1$, $y = -2x - 1$; $y = x - 1$; $y = 5x - 1$ функцияларының графиктерін бір координаталық жазықтықта салыңдар.

22.16. Координаталық жазықтықта екі түзу өзара қалай орналасуы мүмкін?

§ 23. СЫЗЫҚТЫҚ ФУНКЦИЯЛАР ГРАФИКТЕРІНІҢ ӨЗАРА ОРНАЛАСУЫ

Сызықтық функцияның графигі — түзу, демек, сызықтық функциялардың графиктері бір нүктеде қиылысады немесе параллель болады, немесе беттеседі.

k және *b* коэффициенттері бойынша $y = kx + b$ сызықтық функцияларының орналасуын қалай анықтауға болады?

Бір координаталар жазықтығына мына функциялардың графиктерін салайық (23.1-сурет):

1) $y = -\frac{2}{3}x + 3$ және $y = 2x - 5$;

2) $y = 1{,}5x + 2$; $y = \frac{1}{4}x + 2$; $y = x + 2$;

3) $y = -\frac{2}{3}x$; $y = -\frac{2}{3}x - 2$; $y = -\frac{2}{3}x + 2$.

1) $y = -\frac{2}{3}x + 3$; $y = 2x - 5$ функциялар ының графиктерін салайық:

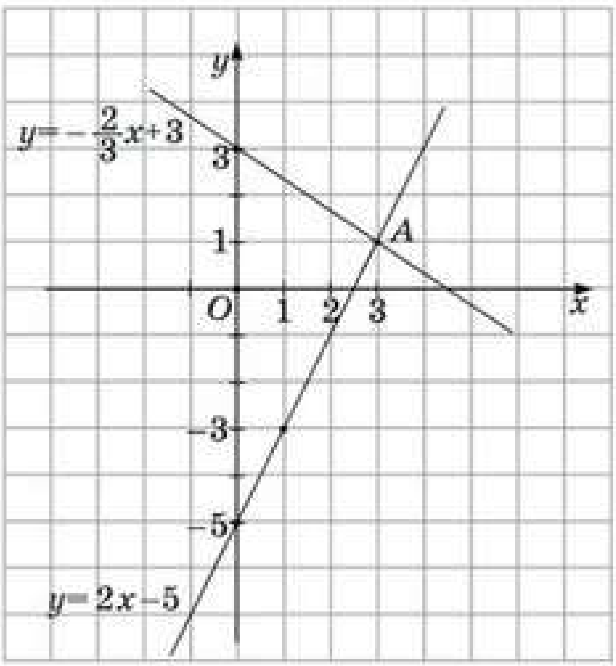
$y = -\frac{2}{3}x + 3$

x	*y*
0	3
3	1

$y = 2x - 5$

x	*y*
0	–5
1	–3

Графиктер $A(3;\ 1)$ нүктесінде қиылысады (23.1-сурет).



23.1-сурет

2) $y = 1{,}5\,x + 2$; $y = \frac{1}{4}x + 2$; $y = x + 2$ функцияларының графиктерін салайық.

$y = 1{,}5\,x + 2$

x	y
0	2
–2	–1

$y = \frac{1}{4}x + 2$

x	y
0	2
4	3

$y = x + 2$

x	y
0	2
2	4

Бұл функцияларда $b = 2$. Графиктердің $(0;\ 2)$ нүктесі арқылы өтетінін көреміз (23.2-сурет).

3) $y = -\frac{1}{3}x$; $y = -\frac{1}{3}x - 2$; $y = -\frac{1}{3}x + 2$ функцияларының графиктерін салайық. Ол үшін кестелер құрайық:

$y = -\frac{1}{3}x$

x	y
0	0
3	–1

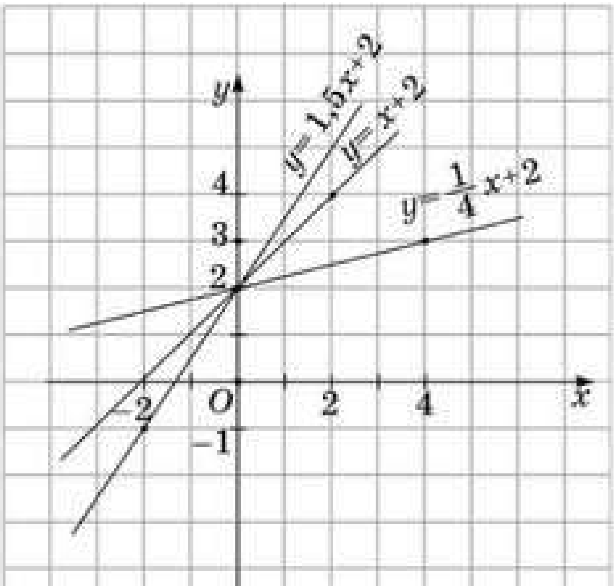
$y = -\frac{1}{3}x - 2$

x	y
0	–2
3	–3

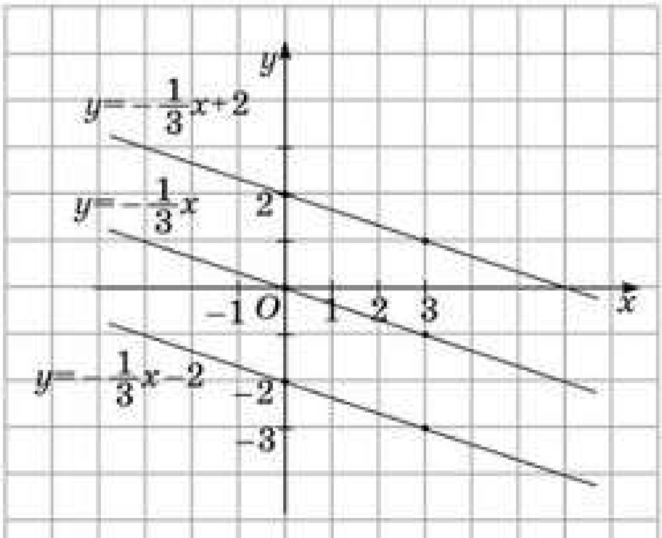
$y = -\frac{1}{3}x + 2$

x	y
0	2
3	1

Бұл функциялардың бәрінде $k = -\frac{1}{3}$. 23.3-суреттен олардың графиктерінің параллель екенін көреміз.



23.2-сурет



23.3-сурет

Жоғарыдағы мысалдарды жалпы түрде карастырайық.

$y = k_1x + b_1$ және $y = k_2x + b_2$ сызықтық функциялары берілсін (мұндағы x — айнымалы, k_1, k_2, b_1 және b_2 — қандай да бір сандар). Сонда $k_1x + b_1 = k_2x + b_2$. Бұл теңдікте айнымалылар бар, демек, ол теңдеу болады. Осы теңдеуді шешейік. Ол үшін x айнымалысы бар қосылғыштарды теңдіктің сол жағына, сандарды оң жағына көшірейік: $k_1x - k_2x = b_2 - b_1$. x ортақ көбейткішін жақшаның сыртына шығарамыз: $(k_1 - k_2)x = b_2 - b_1$.

Егер $k_1 \neq k_2$ болса, онда $k_1 - k_2 \neq 0$, сондықтан $x = \dfrac{b_2 - b_1}{k_1 - k_2}$ — жалғыз сан. Бұл санды $y = k_1x + b_1$ формулаларының біріне қойып, y-тің мәнін тапсақ, $(x;\ y)$ жұбын анықтаймыз. Сондықтан графиктер бір нүктеде қиылысады.

Егер $k_1 = k_2$ болса, онда $(k_1 - k_2)x = b_2 - b_1$ теңдеуі $0 \cdot x = b_2 - b_1$ түріне келеді.

Егер $b_2 = b_1$ болса, онда коэффициенттері бірдей $y = k_1x - b_1$ және $y = k_2x - b_2$ теңдеулерін аламыз, сондықтан олардың графиктерін салсақ, бір түзу шығады.

Егер $b_2 \neq b_1$ болса, онда $0 \cdot x = b_2 - b_1$ теңдеулерінің шешімі болмайды. Ол $y = k_1x + b_1$ және $y = k_2x + b_2$ функциясы графиктеріне бір мезетте тиісті болатын нүктенің жоқ екенін білдіреді. Демек, $k_1 = k_2$ және $b_2 \neq b_1$ болғанда, функциялардың графиктері қиылыспайды, яғни параллель болады.

Сонымен

$y = kx + b$ формуласымен берілген сызықтық функциялардың графиктері x-тің коэффициенттері әртүрлі болғанда қиылысады; x-тің коэффициенттері бірдей болғанда параллель; x-тің коэффициенттері тең және b сандары бірдей болғанда беттеседі.

$y = kx + b$ формуласынан $x = 0$ болғанда $y = b$ аламыз.

Демек, кез келген $y = kx + b$ сызықтық функциясы координаталары $(0;\ b)$ болатын нүкте арқылы өтеді.

1. Екі сызықтық функцияның графиктерінің:
   1) бір ортақ нүктесі;
   2) екі ортақ нүктесі;
   3) ортақ нүктелері болмауы;
   4) барлығы ортақ нүктелері болуы мүмкін бе?

2. $y = kx + b$ және $y = tx + m$ сызықтық функцияларының графиктері қандай жағдайда 1) қиылысады; 2) параллель болады; 3) беттеседі?
3. Графиктері 1) қиылысатын; 2) параллель болатын; 3) беттесетін екі сызықтық функцияға мысал келтіріңдер.

Жаттығулар

A

23.1. 1) $y = 2x - 10$ және $y = 2x + 9$; 2) $y = -3x + 9$ және $y = -3x + 9$;
3) $y = -5x + 6$ және $y = -5x$; 4) $y = 1{,}5 + 4x$ және $y = -4x + 3$;
5) $y = 7 + 2{,}3x$ және $y = 3{,}2 - 1$; 6) $y = 10x$ және $y = 1 - 10x$ функцияларының графиктері өзара қалай орналасқан?

23.2. 1) $y = 8x - 1$; 2) $y = 3 - 4x$; 3) $y = -2 + 2x$ сызықтық функциясы үшін а) функцияның графигіне параллель; ә) графикпен қиылысатын; б) графикпен беттесетін сызықтық функцияның формуласын жазыңдар.

23.3. 1) $y = 2x - 7$, $y = 1,4 + 3x$, $y = x + 3{,}5$, $y = x + 3{,}5$, $y = -10{,}5 + 3x$, $y = 3x - 7$ сызықтық функциясының
1) графигіне параллель; 2) графигімен қиылысатын;
3) графигімен беттесетін сызықтық функцияның формуласын жазыңдар.

23.4. Графиктері а) қиылысатын; ә) параллель; б) беттесетін екі сызықтық функцияның формулаларын жазыңдар.

23.5. Функция графиктерінің қиылысу нүктелерінің координаталарын табыңдар:
1) $y = -6x + 1$ және $y = 5x + 9$;
2) $y = -17 + 3{,}4x$ және $y = -1{,}2x + 69$;
3) $y = 21 - 9x$ және $y = -2{,}5x + 8$;
4) $y = 16{,}2 + 8x$ және $y = -0{,}8x + 7{,}4$;
5) $y = 1 - 3x$ және $y = -x - 1$;
6) $y = 1 + 7x$ және $y = 6{,}5x$.

B

23.6. Функция графиктерінің қиылысатынын дәлелдеңдер:
1) $y = 9 + x$ және $y = 5x + 6$; 2) $y = -0{,}5x + 13$ және $y = 8 + x$;
3) $y = 6x - 5{,}1$ және $y = 9x - 6$.

23.7. 1) $y = 1{,}4x + 2$ және $y = x + 2$; 2) $y = -x + 1{,}5$ және $y = 2x - 3$;
3) $y = 7 + 9x$ және $y = -9x - 0{,}9$; 4) $y = -\frac{5}{11}x + 2$ және $y = x - 14$

сызықтық функцияларының графиктерін салып, олардың өзара орналасуын анықтаңдар.

23.8. 1) $y = -4$; 2) $y = \frac{8}{9}$; 3) $y = 0$ функциясының графигіне параллель болатын бірнеше сызықтық функцияның формуласын жазыңдар.

23.9. 1) $b = -3; 5$ болғанда $y = 0,5x + b$; 2) $k = 4; -\frac{1}{4}$ болғанда $y = kx - 2$ формуласымен берілген функциялардың графиктерін бір координаталар жазықтығына салыңдар.

23.10. Ордината осін 1) $A(0; -3,5)$; 2) $B(0; -2\frac{1}{2})$; 3) $C(0; \frac{5}{6})$; 4) $D(0; -4,8)$ нүктесінде қиятын және а) $y = 4x - 7$; ә) $y = 10 - 2,5x$ функциясы графигіне параллель болатын сызықтық функцияның формуласын жазыңдар.

C

23.11. Егер $y = 3x + b$, $y = 4x + b$, $y = -x + b$, $y = 2,2x + b$ сызықтық функциясының графиктері 1) $y = x + 7,2$; 2) $y = -5x + 9$; 3) $y = 3,4x - 8$; 4) $y = -\frac{3}{8}x - \frac{1}{4}$ сызықтық функция графиктерімен бір нүктеде қиылысса, b санын табыңдар.

23.12. Графигі координаталар басы арқылы өтетін және 1) $y = 7x + 5$; 2) $y = 3,2x - 4$; 3) $y = -\frac{6}{7}x + 3$; 4) $y = -4,5x - 8$ функциясы графигіне параллель болатын $y = kx + b$ функциясының графигі қай ширектерде орналасқан?

23.13. Графигі $A(-1; 3)$ нүктесі арқылы өтетін және ордината осін ординатасы 1) 4,8; 2) –6,05; 3) 8,6; 4) $9\frac{1}{3}$ болатын нүктеде қиятын сызықтық функцияның формуласын жазыңдар.

23.14. Графигі $y = 3x + 5$ функциясының графигіне параллель және 1) $A(-4; 1)$; 2) $B(1; 15)$; 3) $C(\frac{1}{3}; \frac{1}{16})$; 4) $M(0,15; -1)$ нүктесі арқылы өтетін сызықтық функцияның формуласын жазыңдар.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

23.15. $\begin{cases} x+4y=5, \\ 3x-y=2 \end{cases}$ теңдеулер жүйесін қосу тәсілімен шешіңдер.

23.16. $\begin{cases} 5x-y=6, \\ x-6y=7 \end{cases}$ теңдеулер жүйесін алмастыру тәсілімен шешіңдер.

§ 24. ЕКІ АЙНЫМАЛЫСЫ БАР СЫЗЫҚТЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІН ГРАФИКТІК ТӘСІЛМЕН ШЕШУ

Екі айнымалысы бар сызықтық теңдеулер жүйесін графиктік тәсілмен қалай шығаруға болады?

Алтыншы сыныпта екі айнымалысы бар теңдеулер жүйесін қосу және алмастыру тәсілімен шығару қарастырылды. Бұл параграфта екі айнымалысы бар теңдеулер жүйесін графиктік тәсілмен шығаруды қарастырамыз.

Екі айнымалысы бар теңдеулер жүйесін графиктік тәсілмен шығарғанда мына алгоритм қолданылады:

— бір координаталық жазықтықта әр теңдеудің графигін салу;

— теңдеулер графиктерінің қиылысу нүктесінің (егер қиылысатын болса) координаталарын табу;

— жүйенің жауабын айнымалылардың мәндерінің жұбы түрінде жазу.

Екі айнымалысы бар сызықтық теңдеулер жүйесін графиктік тәсілмен шығаруды қарастырайық.

1-мысал. $\begin{cases} y-2x=0, \\ 2x+y-4=0 \end{cases}$ теңдеу лер жүйесін шешейік.

Әрбір теңдеудегі y-ті x арқылы өрнектесек,

$\begin{cases} y=2x, \\ y=-2x+4 \end{cases}$ теңдеулер жүйесінд е әрқайсысы $y = kx + b$ сызықтық функциясын беретін тенд ік аламыз.

$y = 2x$ және $y = -2x + 4$ сызықтық функцияларының графиктері түзу болып, бірінші график координаталар басы арқылы өткендіктен, оны тұрғызу үшін бір нүктенің, ал екінші график үшін екі нүктенің координаталарын анықтаймыз. 24.1-кестені құрайық.

24.1- кесте

$y = 2x$

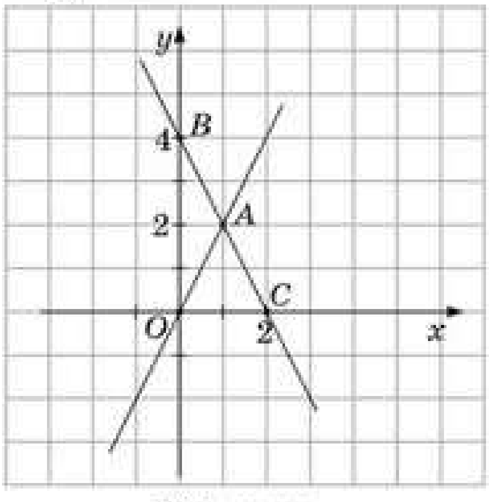
1)

x	y
1	2

$y = -2x + 4$

2)

x	y
0	4
2	0



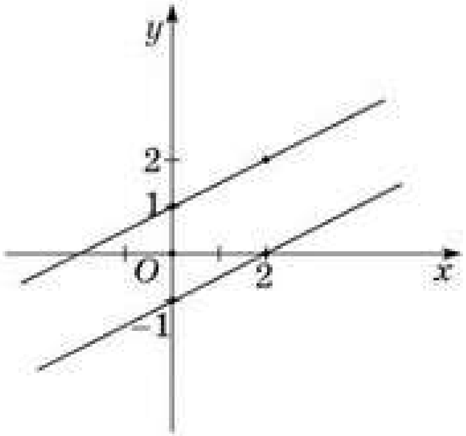
24.1-сурет

$O(0;\ 0)$ және $A(1;\ 2)$ нүктелерін салып, OA түзуін жүргіземіз. Сонда $y = 2x$ функциясының графигін, яғни

$y-2x=0$ теңдеуінің графигін аламыз. $B(0;4)$ және $C(2;0)$ нүктелерін салып, BC түзуін жүргізсек, $y=-2x+4$ функциясының немесе $2x+y-4=0$ теңдеуінің графигін аламыз (24.1-сурет).

Графиктер $A(1;2)$ нүктесінде қиылысады. Демек, берілген теңдеудің (1; 2) болатын бір ғана шешімі бар.

Жауабы : (1; 2).



24.2-сурет

2-мысал. $\begin{cases} 2y-x-2=0, \\ y=0,5x-1 \end{cases}$ теңдеулер жүйесін графиктік тәсілмен шығарайық. Алдымен әрбір теңдеудегі y-ті x арқылы өрнектесек, $y=kx+b$ сызықтық функциясын беретін $y=0,5x+1$ және $y=0,5x-1$ теңдіктерін аламыз. $y=0,5x-1$ және $y=0,5x+1$ функцияларының графиктерін салайық. Ол үшін алдымен кесте толтырайық (24.2-кесте).

Графиктер қиылыспайды, олар өзара параллель орналасқан. Демек, теңдеулер жүйесінің шешімі болмайды (24.2-сурет).

Жауабы : шешімі жоқ.

24.2- *кесте*

$y=0,5x-1$

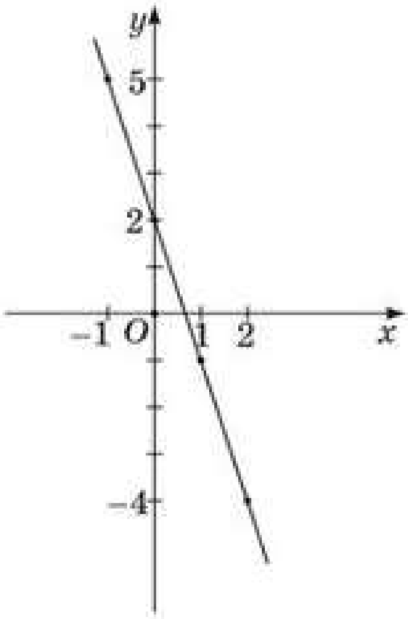
1)

x	y
0	–1
2	0

$y=0,5x+1$

2)

x	y
0	1
2	2



24.3-сурет

3-мысал. $\begin{cases} y+3x-2=0, \\ 2y=4-6x \end{cases}$ теңдеулер жүйесінің қанша шешімі бар? Сұраққа жауап беру үшін $y=2-3x$ және $2y=4-6x$ функцияларының графиктерін саламыз. Ол үшін алдымен 24.3-кестені толтырайық.

24.3- *кесте*

$y=2-3x$

1)

x	y
0	2
1	–1

$2y=4-6x$.

2)

x	y
–1	5
2	–4

$A(0;2)$ және $B(1;-1)$ нүктелерін салып, AB түзуін жүргізсек, $y+3x-2=0$ теңдеуінің графигін, ал $C(-1;5)$ және $D(2;-4)$ нүктелерін салып, CD түзуін жүргізсек, $2y = 4 - 6x$ теңдеуінің графигін аламыз (24.3-сурет). Графиктер беттеседі. Сондықтан теңдеулер жүйесінің шешімі $y = 2 - 3x$ түзуіне тиісті нүктелердің координаталары болып табылатын сандар жұбы. Ондай нүктелер шексіз, себебі түзу шексіз.

Жауабы : шексіз көп.

Сонымен, екі айнымалысы бар сызықтық теңдеулерді графиктік тәсілмен шығара отырып, жүйенің бір ғана шешімі (егер түзулер қиылысса), шексіз көп шешімі болатынын (егер түзулер беттессе), шешімі болмайтынын (түзулер параллель) алдық. Басқа шешімі болмайды, себебі жазықтықтағы екі түзу қиылысады немесе параллель болады, әйтпесе беттеседі.

1. Неліктен екі айнымалысы бар сызықтық теңдеулер жүйесін шешу тәсілдерінің бірін графиктік тәсіл деп айтады?
2. Екі айнымалысы бар сызықтық теңдеулер жүйесін шешу үшін қанша түзу салу керек?
3. Екі айнымалысы сызықтық теңдеулер жүйесінің неліктен бір ғана шешімі болады немесе шешімі болмайды, немесе шексіз көп шешімі бар?

Жаттығулар

А

24.1. Теңдеу графигінің Ox осімен қиылысу нүктесінің координаталарын табыңдар:

1) $x + y = 8$; 2) $y - x = 7$; 3) $5x - y = 2$;
4) $6x - 2y = 1$; 5) $x + 4y - 5 = 0$; 6) $2x + 3y + 1 = 0$.

24.2. Теңдеу графигінің Oy осімен қиылысу нүктесінің координаталарын табыңдар:

1) $x + y = 13$; 2) $x - y = 1{,}7$; 3) $x + 8y = 11{,}2$;
4) $5x - y = 3$; 5) $8y - 7x = 14$; 6) $9x + 1{,}6y = 3$.

24.3. Теңдеудің графигін салыңдар:

1) $y = x + 5$; 2) $y = x - 4$; 3) $y = 7 - 2x$;
4) $x - y = 6$; 5) $3x + 2y = 1$; 6) $x + 4y = 9$;
7) $3y - 18 = 0$; 8) $16 + 8x = 0$; 9) $4 - x - y = 0$.

24.4. Функцияның графиктерін салып, олардың қиылысу нүктелерінің координаталарын табыңдар:

1) $y = x + 4$ және $y = 6 - x$; 2) $y = 7x + 9$ және $y = 3 + x$;
3) $x + y = 3$ және $x - y = 1$; 4) $3x - 2y = -2$ және $7x - 5y = -4$.

B

Теңдеулер жүйесін шешіңдер (24.5—24.7):

24.5. 1) $\begin{cases} y=2x, \\ y=2+x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y=-2x, \\ y=x-3; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y-5x=0, \\ y=x-4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y-3x=0, \\ y=-6+x. \end{cases}$

24.6. 1) $\begin{cases} x+y=9, \\ x-y=1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x+y=1, \\ x+y=5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y-6x=-25, \\ y-x=-5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y+7x=-18, \\ y+x=0. \end{cases}$

24.7. Теңдеулер жүйесін графиктік тәсілмен шешіңдер:

1) $\begin{cases} x+20y=37, \\ 5y+x=7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y-8x=-33, \\ 7x-y=29; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 17x+y=90, \\ y-23x=-110. \end{cases}$

24.8. Теңдеулер жүйесінің қанша шешімі бар:

1) $\begin{cases} 6x+y=0, \\ -4x+y=2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y+x=7, \\ y=-x-5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x-y=2, \\ 3x-3y-6=0? \end{cases}$

C

24.9. Егер $A(x_0; y_0)$ нүктесі

1) $\begin{cases} 7x-3y=-1, \\ 14x-2y=\frac{2}{3}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 12y+7x=-4, \\ x+24y=-2\frac{5}{7}; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 8y-7x=-5{,}6, \\ 35x+2y=7; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 10x+12y=7{,}5, \\ 24y-5x=-5 \end{cases}$ теңдеулер жүйесінің шешімі болса, онда $7x_0+3y_0$ өрнегінің мәнін табыңдар.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

24.10. 24.4-кестені қолданып сызықтық функцияның графигін салыңдар.

24.4-кесте

x	-1	0
y	-5	-3

24.11. $y=-2x+4$ сызықтық функциясының графигін салыңдар. Графикті қолданып, x-тің қандай мәнінде функция теріс емес мәндерді қабылдайтынын анықтаңдар.

§ 25. $y = ax^2$ ФУНКЦИЯСЫ, ОНЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ ЖӘНЕ ГРАФИГІ

$y = ax^2$ $(a \neq 0)$ функциясының қандай қасиеттері бар? Оның графигін қалай салуға болады?

Функцияның қасиеттерін зерделегенде, оның анықталу аймағын, мәндерінің жиынын, функцияның оң және теріс мәндер немесе нөл (функцияның нөлдері) қабылдайтын аргументтерінің мәндерін, функцияның өсетін немесе кемитін (функцияның өсу және кему аралықтары) аралықтарын табатынын білесіңдер.

$y = ax^2$ $(a \neq 0)$ функциясының қасиеттерін қарастырыңдар.

1) Неліктен $y = ax^2$ функциясының анықталу аймағы сан осінің сандар жиыны болады?

Символдық түрде оларды былай белгілейді: $D(y) = (-\infty; +\infty)$ немесе $D(ax^2) = (-\infty; +\infty)$, $D(y) = R$, немесе $D(ax^2) = R$.

2) Функцияның мәндерінің жиыны a санының таңбасына тәуелді.
1. Егер a оң сан $(a > 0)$ болса, онда $y = ax^2$ функциясының мүмкін мәндерінің жиыны $[0; +\infty)$ сәулесі болады.

Символдық белгіленуі: $E(y) = [0; +\infty)$ немесе $E(ax^2) = [0; +\infty)$.

Неліктен x айнымалысының кез келген мәнінде $a > 0$ болғанда $ax^2 \geq 0$ орындалатынын түсіндіріңдер.

2. Егер a теріс сан $(a < 0)$ болса, онда $y = ax^2$ функциясының мәндерінің жиыны $(-\infty; 0]$ сәулесі болады.

Оның символдық белгіленуі: $E(y) = (-\infty; 0]$ немесе $E(ax^2) = (-\infty; 0]$.

Неліктен x айнымалысының кез келген мәнінде $a < 0$ болғанда $ax^2 \leq 0$ орындалатынын түсіндіріңдер.

$y = ax^2$ функциясының бірінші және екінші қасиеттерінен мыналар шығады:

- $a > 0$ болғанда функцияның графигі I және II координаталық ширектерде (абсцисса осінің жоғарғы жағында);
- $a < 0$ болғанда III және IV координаталық ширектерде (абсцисса осінің төменгі жағында) орналасады.

3) Функция таңбасының тұрақтылық аралықтарын табамыз.

$y = ax^2$ функциясының бірінші және екінші қасиеттерінен мыналар шығады:

- x-тің $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ аралығында функция $a > 0$ болғанда оң мәндер, $a < 0$ болғанда теріс мәндер қабылдайды.

4) Функцияның нөлдерін табамыз. $x = 0$ болғанда $y = ax^2$ функциясының мәні нөлге тең болады.

Шындығында, $y = 0$ болса, $ax^2 = 0$ аламыз. $a \neq 0$ болғандықтан, $x^2 = 0$ немесе $x \cdot x = 0$. Ең болмағанда бір көбейткіші нөлге тең көбейтіндінің мәні нөлге тең. Сонымен, $x = 0$.

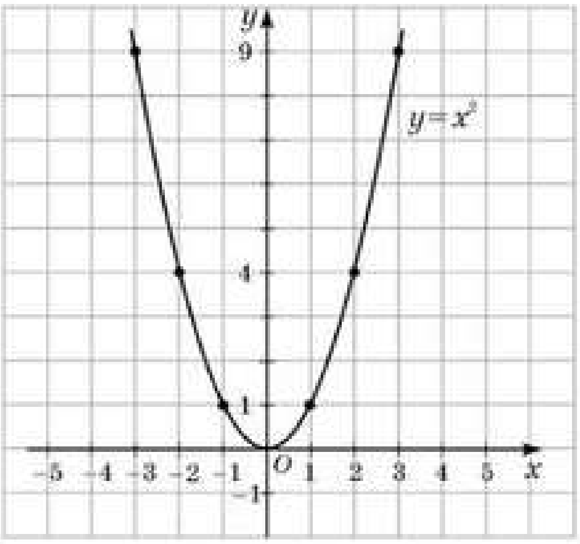
$y = x^2$ және $y = -x^2$ функцияларының графиктерін салу үшін төмендегі 25.1-кестені құрамыз:

25.1 *-кесте*

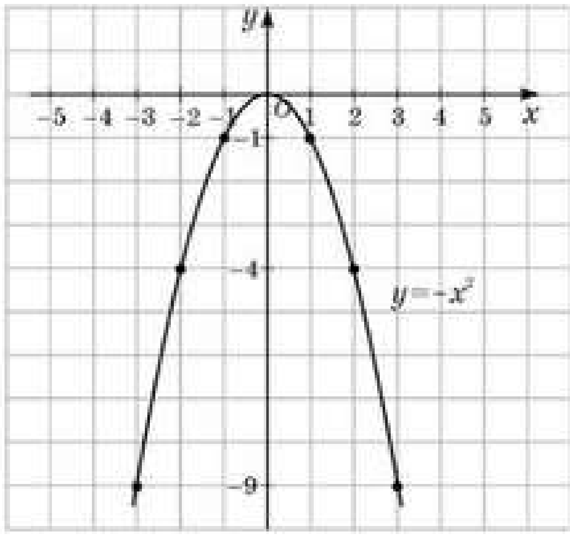
x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$y = x^2$	9	4	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	4	9
$y = -x^2$	-9	-4	-1	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	-1	-4	-9

Егер $y = x^2$ немесе $y = -x^2$ функцияларының графиктерінде жататын басқа нүктелерді салсақ, онда олардың кестенің көмегімен тұрғызылған нүктелерді бірсарынды жалғастыратын сызықтың бойында орналасатынын көреміз.

$y = x^2$ және $y = -x^2$ функцияларының графигі ***парабола*** деп аталады (25.1, 25.2-сурет).



25.1-сурет



25.2-сурет

$y = 2x^2$ және $y = -2x^2$ функцияларының графиктерін салу үшін мына 25.2-кестені құрамыз:

25.2 -кесте

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$y = 2x^2$	8	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	8
$y = -2x^2$	-8	-2	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2	-8

Өзіндік жұмысқа арналған тапсырма.

Аргументтің бірдей мәндеріне сәйкес функциялардың мәндерін салыстырыңдар: 1) $y = 2x^2$ және $y = x^2$; 2) $y = x^2$ және $y = \frac{1}{2}x^2$ (25.3-кесте).

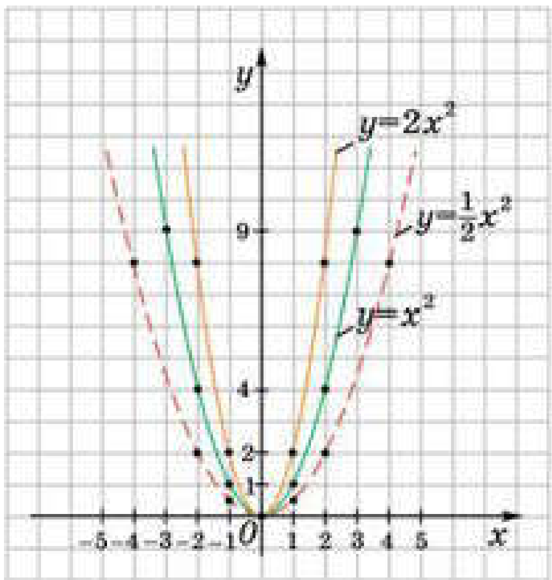
25.3 -кесте

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$y = 2x^2$	32	8	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	8	32
$y = x^2$	16	4	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	4	16
$y = \frac{1}{2}x^2$	8	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	2	8

Аргументтің бірдей мәндерінде $y = 2x^2$ функциясының мәндері сәйкесінше $y = x^2$ функциясының мәндерінен 2 есе үлкен.

$y = 2x^2$ функциясының графигі $y = x^2$ функциясының графигін Oy осі бойымен 2 есе сығу арқылы алынады.

Аргументтің бірдей мәндерінде $y = \frac{1}{2}x^2$ функция сының мәндері сәйкесінше $y = x^2$ функциясының мәндерінен 2 есе кіші.



25.3-сурет

$y = \frac{1}{2}x^2$ функци ясының графигі $y = x^2$ функциясы ның графигін Oy осі бойымен 2 есе созу арқылы алынады.

$y = x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$ және $y = 2x^2$ функцияларының графиктері бір координаталар жүйесінде салынған (25.3-сурет).

Бұл графиктердің барлығы *парабола* деп аталады.

"$y = x^2$ функциясының графигі болатын параболаны салу" сөзтіркесінің орнына қысқаша "$y = x^2$ параболасын салу" деп айтылады.

Өзіндік жұмысқа арналған тапсырма.

$y = -x^2$, $y = -\frac{1}{2}x^2$ және $y = -2x^2$ функцияларының графиктері болатын параболаларды бір координаталар жүйесіне салыңдар.

1. $y = x^2$ параболасынан $y = -7x^2$, $y = \frac{1}{7}x^2$ параболаларын қалай аламыз?
2. $y = 25x^2$, $y = -25x^2$ параболалары бір-біріне қатысты қалай орналасқан?
3. Неліктен ордината осі $y = ax^2$ түріндегі параболаның осьтік симметриясы болатынын түсіндіріңдер.
4. $y = 9x^2$, $y = -9x^2$ параболалары қай координаталық ширектерде орналасқан?

Жаттығулар

A

25.1. 1) $A(1;\ 3)$; 2) $B\ (0,5;\ 0,75)$; 3) $C(-2;\ 8)$;
4) $M(-4;\ 48)$; 5) $P\ (-1;\ 3,5)$; 6) $K(\pi;\ 3\pi^2)$
нүктелері $y = 3x^2$ функциясының графигіне тиісті ме?

25.2. $y = -3x^2$ функциясының графигін салыңдар. График бойынша функцияның өсу және кему аралықтарын жазыңдар.

25.3. 1) $y = 4x^2$ және $y = \frac{1}{4}x^2$; 2) $y = -x^2$ және $y = \frac{1}{3}x^2$;
3) $y = 2x^2$ және $y = 5x^2$ функцияларының графиктерін бір координаталық жазықтыққа салыңдар.

25.4. $y = 0,4x^2$ функциясы графигінің көмегімен берілген өрнектердің мәндерін салыстырыңдар:
1) $0,4 \cdot 3^4$ және $0,4 \cdot 4^4$; 2) $0,4(-2)^2$ және $0,4(-3)^2$.

B

25.5. 1) $x^2 + 4 = 0$; 2) $4x^2 - 3 = 5$;
3) $5 - 0{,}4x^2 = 2$; 4) $-2^3 + 3^2x^2 = 4$ теңдеулерінің түбірлер санын графиктік тәсілмен табыңдар.

25.6. $y = 3x^2$ және $y = 5 - 2x$ функцияларының графиктері қиылыса ма?

25.7. Графиктік тәсілмен $2x^2 = 3x + 1$ теңдеуі түбірлерінің жуық мәндерін табыңдар.

25.8. 1) [1; 4]; 2) [–4; –2]; 3) [0; 14] аралықтарында $y = -\frac{1}{3}x^2$ функциясы өспелі (кемімелі) бола ма?

C

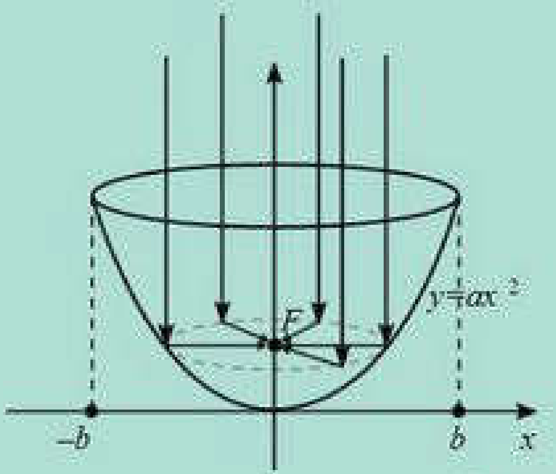
25.9. а) 1) [0; 5]; 2) [–1; 2]; 3) [–5; –4]; 4) [0,4; 2,6] аралықтарындағы $y = 5x^2$ функ циясының ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңдар.
ә) 1) [–2; 0]; 2) [–3; 3]; 3) [–5; –4]; 4) [0; 6] аралықтарындағы $y = -0{,}5x^2$ фун кциясының ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңдар.

25.10. $y = ax^2$ және $y = ax - 5$ функцияларының графиктері қиылыса ма?

Хабарлама дайындаңдар

25.11. "Парабола" термині қалай пайда болған?

25.12. 25.4-суретте парабола қасиеттерінің практикада қолданылуы көрсетілген. Оны суретте кескінделген параболоидты салғанда қолданады. Параболоид қалай алынады және қайда қолданылады?



25.4-сурет

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

25.13. Сәйкестікті табыңдар:

Сан аралығы	Кескіні, белгілеуі	
1) ашық сандық сәуле	A. 	$[a; b)$
2) санды түзу	B. 	$(a; b)$
3) санды сәуле	C. 	$(a; +\infty)$
4) санды интервал	D. 	$(-\infty; b]$
5) санды жарты-интервал	E. 	$(-\infty; +\infty)$
	F. 	$[a; b]$

§ 26. $y = ax^3$ ФУНКЦИЯСЫ, ОНЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ ЖӘНЕ ГРАФИГІ

$y = ax^3$ ($a \neq 0$) функциясының қандай қасиеттері бар және оның графигі қалай салынады?

$y = ax^3$ ($a \neq 0$) функциясының қасиеттерін қарастырайық.

1) Неліктен $y = ax^3$ функциясының анықталу аймағы сан осіндегі сандар жиыны болады ?

Белгіленуі: $D(y) = (-\infty; +\infty)$ немесе $D(ax^3) = (-\infty; +\infty)$, $D(y) = R$ немесе $D(ax^3) = R$.

2) $y = ax^3$ функциясы мәндерінің жиынын табайық.

Егер a оң сан ($a > 0$) болса және x айнымалысы теріс мәндер қабылдаса, онда $y = ax^3$ функциясы мәндерінің жиыны $(-\infty; 0)$ ашық сан сәулесі болады;

x айнымалысы оң мәндер қабылдаса, онда $y = ax^3$ функциясы мәндерінің жиыны $(0; +\infty)$ ашық сан сәулесі болады;

x айнымалысы нөлге тең мән қабылдаса, онда $y = ax^3$ функциясы мәндерінің жиыны нөл саны болады.

Демек, $a > 0$ болғанда $y = ax^3$ функциясы мәндерінің жиыны $(-\infty; +\infty)$ сан осі болады.

Түсіндіріңдер

Неліктен $a < 0$ болғанда $y = ax^3$ функциясы мәндерінің жиыны $(-\infty; +\infty)$ сан осі болады?

$y = ax^3$ ($a \neq 0$) функциясы мәндерінің жиыны $(-\infty; +\infty)$ сан осі болады.

Белгіленуі: $E(y) = (-\infty; +\infty)$ немесе $E(ax^3) = (-\infty; +\infty)$, $E(y) = R$, немесе $E(ax^3) = R$.

$y = ax^3$ функциясының бірінші және екінші қасиеттерінен мыналар шығады:

- $a > 0$ болғанда функцияның графигі I және III координаталық ширектерде;
- $a < 0$ болғанда II және IV координаталық ширектерде орналасады.

3) Функцияның таңба тұрақтылық аралықтарын табамыз.

$y = ax^3$ функциясының бірінші және екінші қасиеттерінен мыналар шығады:

функция $a > 0$ болғанда $(0; +\infty)$ аралығында оң мәндер, $(-\infty; 0)$ аралығында теріс мәндер;

$a < 0$ болғанда $(-\infty; 0)$ аралығында оң мәндер, ал $(0; +\infty)$ аралығында теріс мәндер қабылдайды.

4) Функцияның нөлдерін табамыз. $x = 0$ болғанда $y = ax^3$ функциясының мәні нөлге тең.

Шындығында, $y = 0$ болғанда $ax^3 = 0$ аламыз. $a \neq 0$ болғандықтан, $x^3 = 0$ немесе $x \cdot x \cdot x = 0$. Ең болмағанда бір көбейткіші нөлге тең көбейтінді нөлге тең. Сонымен $x = 0$.

$y = x^3$ және $y = -x^3$ функцияларының графиктерін салу үшін мына 26.1-кестені құрамыз:

26.1 *-кесте*

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$y = x^3$	-8	-1	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	1	8
$y = -x^3$	8	1	$\frac{1}{8}$	0	$-\frac{1}{8}$	-1	-8

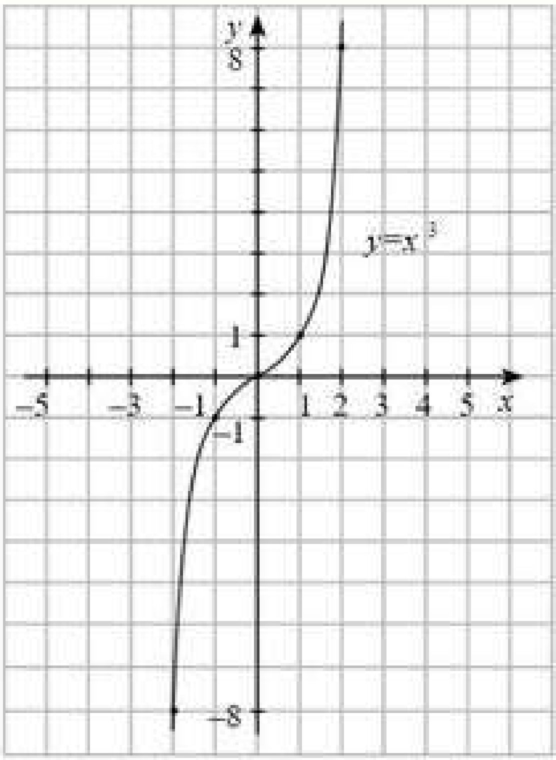
Егер $y = x^3$ немесе $y = -x^3$ функцияларының графиктерінде жататын басқа нүктелерді салсақ, олардың кестенің көмегімен тұрғызылған нүктелерді бірсарынды жалғастыратын сызықтың бойында орналасатынын көреміз.

$y = x^3$, $y = -x^3$ функцияларының графигі ***кубтық парабола*** деп аталады (26.1, 26.2-суреттер).

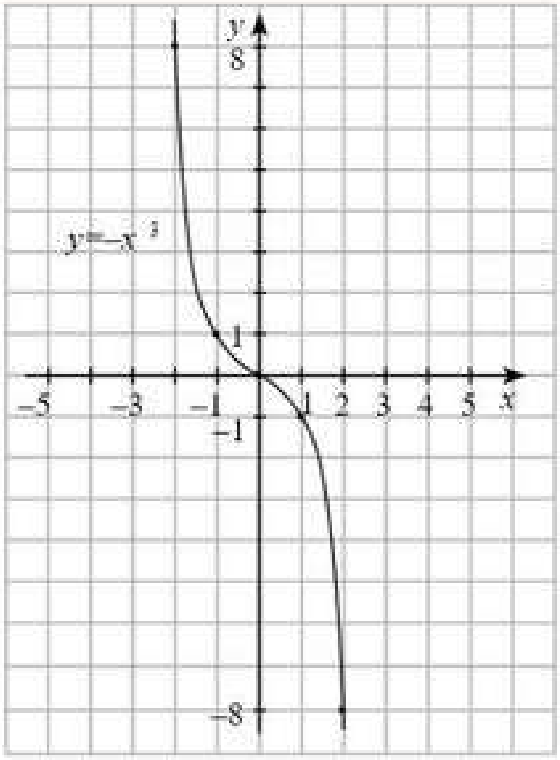
$y = 2x^3$ және $y = -2x^3$ функцияларының графиктерін салу үшін мына 26.2-кестені құрамыз:

26.2- *кесте*

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$y = 2x^3$	-16	-2	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	2	16
$y = -2x^3$	16	2	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	-2	-16



26.1-сурет



26.2-сурет

26.3-кестені толтырыңдар. Аргументтің бірдей мәндерінде функциялардың сәйкес мәндерін салыстырыңдар: 1) $y = 2x^3$ және $y = x^3$; 2) $y = x^3$ және $y = \frac{1}{2}x^3$.

26.3 -кесте

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	-0	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$y = 2x^3$									
$y = x^3$									
$y = \frac{1}{2}x^3$									

$y = x^3$, $y = \frac{1}{2}x^3$ және $y = 2x^3$ функцияларының графиктері *кубтық парабола* деп аталады.

"$y = x^3$ функциясының графигі болатын кубтық параболаны салу" сөзтіркесінің орнына қысқаша "$y = x^3$ кубтық параболаны салу" деп айтылады.

$y = -\frac{1}{2}x^3$, $y = -x^3$ және $y = -2x^3$ функцияларының графиктері болатын кубтық параболаларды бір координаталық жүйеге салыңдар.

1. $y = x^3$ кубтық параболасынан $y = -7x^3$; $y = \frac{1}{7}x^3$ кубтық параболаларын қалай аламыз?
2. $y = 5x^3$ және $y = -5x^3$ кубтық параболалары бір-біріне қатысты қалай орналасқан?
3. Неліктен координаталар басы $y = x^3$ түріндегі кубтық параболаның центрлік симметриясы болатынын түсіндіріңдер.
4. $y = 7x^3$; $y = -7x^3$ параболалары қай координаталық ширектерде орналасқан?

Жаттығулар

A

26.1. 1) $A(2;\ 16)$; 2) $B(-1;\ -1)$; 3) $C(3;\ 54)$; 4) $D(-2;\ -8)$; 5) $M(-0{,}2;\ -0{,}008)$; 6) $R(-3;\ 27)$; 7) $P(0{,}3;\ 1{,}27)$; 8) $X(-5;\ -125)$

нүктелері $y = x^3$ функциясының графигіне тиісті ме?

26.2. $y = 0{,}5x^3$ функциясының графигін салыңдар. Графиктен:
1) $x = -1{,}25;\ -0{,}75;\ 2{,}5;\ 4$ мәндеріне сәйкес y-тің;
2) $y = -3;\ -1;\ 4;\ 4{,}8$ мәндеріне сәйкес x-тің мәндерін табыңдар.

26.3. 1) $y = x^3$, $y = 5x^3$, $y = \frac{1}{4}x^3$, $y = 4x^3$;

2) $y = -5x^3$, $y = -\frac{1}{4}x^3$; $y = -4x^3$; $y = -\frac{1}{2}x^3$

функцияларының графиктерін бір координаталық жазықтыққа салыңдар.

B

26.4. $y = x^3$ функциясы графигінің көмегімен берілген сандарды салыстырыңдар:
1) $(-3)^3$ және $(-2)^3$; 2) $(-1{,}2)^3$ және $0{,}2^3$;
3) $4{,}4^3$ және $5{,}02^3$; 4) 0 және $(-2)^3$.

26.5. 1) $x^3 = 2x + 1$; 2) $2x^3 = -3x$; 3) $0{,}4x + 2 = x^3$; 4) $-1{,}2x - 1 = x^3$ теңдеулерінің түбірлері бар ма?

26.6. Теңдеулерді шешіңдер:

1) $x^3 = -8$; 2) $x^3 = 125$;

3) $2x^3 = -54$; 4) $-0,5\ x^3 = -4$.

26.7. $y = -0,4\ x^3$ және $y = -0,3\ x + 5$ функцияларының графиктері қиылыса ма?

26.8. 1) $-0,3\ x^3 = -4$; 2) $-0,3\ x^3 = 5$; 3) $-0,3\ x^3 = 1,4$ теңдеуі түбірлерінің жуық мәндерін графиктік тәсілмен табыңдар.

C

26.9. 1) $a = 3,\ b = 2$; 2) $a = -3,\ b = 0,2$;

3) $a = 0,2,\ b = -0,2$; 4) $a = -4,\ b = -2$

болса, онда $y = ax^2$ және $y = bx^3$ функциялары графиктерінің неше қиылысу нүктесі бар?

26.10. $y = 2x^3$ функциясының 1) $[-2;\ 5]$; 2) $[-1;\ -0,5]$; 3) $[-3; 3,5]$ аралықтарындағы ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңдар.

26.11*. 1) $\dfrac{y - x^2}{x - 3} = 0$; 2) $\dfrac{2y - x^2}{4 - x^2} = 0$;

3) $\dfrac{y - x^2}{x - 3} = 0$; 4) $\dfrac{y - 0,25x^2}{4 - y} = 0$

теңдеулерінің графигін салыңдар.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

26.12. $y = -3x$; $y = 2x - 1$; $y = 3 - \dfrac{x}{3}$; $y = 0,5\ x + 1$ функцияларының қайсысы 1) өспелі; 2) кемімелі болады?

26.13. 1) $y = -0,2\ x^2$; 2) $y = 5x^2$; 3) $y = -\ 2x^3$ функциясының графигі қай ширектерде орналасқан?

§ 27. $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ ФУНКЦИЯСЫ, ОНЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ ЖӘНЕ ГРАФИГІ

$y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ функциясының қандай қасиеттері бар және оның графигін қалай салуға болады?

$y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ функциясының қасиеттерін қарастырайық.

1) $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ функциясы ның анықталу аймағы нөлден өзге барлық сандар жиыны болады, яғни $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Белгіленуі: $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ немесе $D(\frac{k}{x}, (k \neq 0)) = = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;

2) $y = \frac{k}{x}$ функциясы мәндерінің жиынын табайық.

Егер k оң сан $(k > 0)$ болса және x айны малысы теріс мәндер қабылдаса, онда $y = \frac{k}{x}$ функциясының мәндерінің жиыны $(-\infty; 0)$ аралығы болады;

x айнымалысы оң мәндер қабылдаса, онда $y = \frac{k}{x}$ фу нкциясының мәндерінің жиыны $(0; +\infty)$ аралығы болады;

x айнымалысы нөл мәнін қабылда са, онда $y = \frac{k}{x}$ функ циясының мағынасы болмайды.

Демек, $k > 0$ болғанда $y = \frac{k}{x}$ функциясының мәндерінің жиыны $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ сандар аралығы болады.

Түсіндіріңдер

Неліктен $k<0$ болғанда $y = \frac{k}{x}$ функциясы мәндерінің жиыны $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ сандар аралығы болады?

$y = \dfrac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ функциясы мәндерінің жиыны $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ сандар аралығы болады.

Белгіленуі: $E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ немесе $E\left(\dfrac{k}{x}\right) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

$y = \dfrac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ функциясының бірінші және екінші қасиеттері нен мыналар шығады:

- $k > 0$ болғанда функцияның графигі I және III координаталық ширектерде,
- $k < 0$ болғанда II және IV координаталық ширектерде орналасады.

3) Функцияның таңбатұрақтылық аралықтарын табамыз.

$y = \dfrac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ функциясының бірінші және екінші қасиеттерінен мыналар шығады:

- $k > 0$ болғанда функция $(0; +\infty)$ аралығында оң мәндер, $(-\infty; 0)$ аралығында теріс мәндер;
- $k < 0$ болғанда функция $(-\infty; 0)$ аралығында оң мәндер, $(0; +\infty)$ аралығында теріс мәндер қабылдайды.

4) Функцияның нөлдерін табамыз.

Түсіндіріңдер

Неліктен $y = \dfrac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ функциясының мәні нөлге тең бола алмайды?

$y = \dfrac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ функциясы нөлге тең емес. Бұл функцияның графигі Ox осін қиып өтпейтінін көрсетеді.

5) Функцияның өсу және кему аралықтарын табамыз.

$x_1 > x_2$ болсын. y_1 мен y_2 салыстырамыз. Ол үшін $y_1 - y_2$ айырымының мәнін табамыз. $y = \dfrac{k}{x}$ функциясының формуласын қолданып, $y_1 - y_2 = \dfrac{k}{x_1} - \dfrac{k}{x_2}$ аламыз. k ортақ көбейткішін жақша сыртына шығарамыз: $\dfrac{k}{x_1} - \dfrac{k}{x_2} = k \cdot \left(\dfrac{1}{x_1} - \dfrac{1}{x_2}\right)$.

Бөлшектерді ортақ бөлімге келтірсек,

$$k \cdot \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right) = k \cdot \left(\frac{x_2 - x_1}{x_1 \cdot x_2}\right).$$

a оң және теріс мәндер қабылдауы мүмкін, олай болса а) $k < 0$, ә) $k > 0$ болатын екі жағдайды қарастырамыз. $x_1 > x_2$ екенін ескерсек, $x_1 - x_2 > 0$ немесе $x_2 - x_1 < 0$. Сонда $k \cdot \left(\frac{x_2 - x_1}{x_1 \cdot x_2}\right)$ көбейтіндісіндегі бөлшектің алымы теріс мәндер, ал бөлімі оң мәндер қабылдайды, өйткені осы аралықтардың әрқайсысында $x_1 > x_2 > 0$ және $x_2 < x_1 < 0$ болғанда теріс сандардың да, оң сандардың да көбейтіндісінің мәні оң сан болады. Сондықтан, егер:

а) $k < 0$ болса, онда $y_1 - y_2 = k \cdot \left(\frac{x_2 - x_1}{x_1 \cdot x_2}\right) > 0$. Демек, оның анықталу аймағынан алынған x айнымалысының барлық мәндерін де, яғни $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ сан аралығында $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ функциясы өспелі, өйткені x аргументінің үлкен мәніне y функциясы ның үлкен мәні сәйкес келеді.

ә) $k > 0$ болса, онда $y_1 - y_2 = k \cdot \left(\frac{x_2 - x_1}{x_1 \cdot x_2}\right) < 0$. Демек, оның анықталу аймағынан алынған x айнымалысының барлық мәнде рінде, яғни $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ сан аралығында $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ функциясы кемімелі, өйткені осы аралықтардың әрқайсысында x аргументінің үлкен мәніне y функциясының кіші мәні сәйкес келеді.

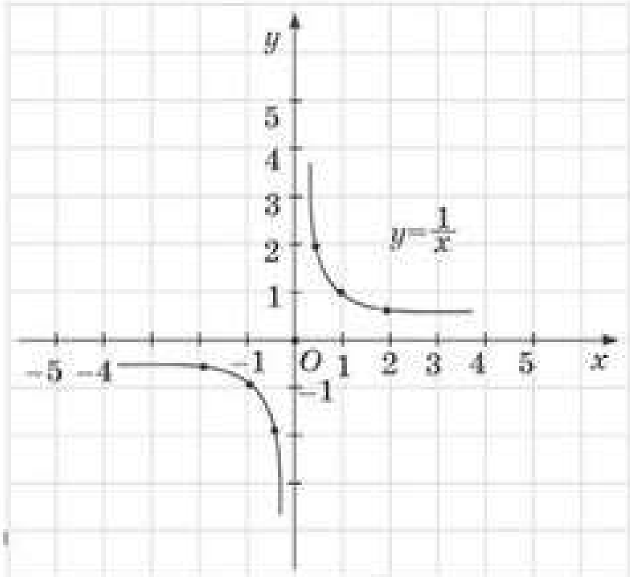
$y = \frac{1}{x}$ және $y = -\frac{1}{x}$ функцияларының графиктерін салу үшін мына 27.1-кестені құрамыз:

Егер $y = \frac{1}{x}$ немесе $y = -\frac{1}{x}$ функцияларының графиктерінде жататын басқа нүктелерді сал сақ, олардың 27.1-кестенің көмегімен тұрғызылған нүктелерді бірсарынды жалғастыратын сызықтың бойында орналасатынын көреміз (27.1, 27.2-суреттер).

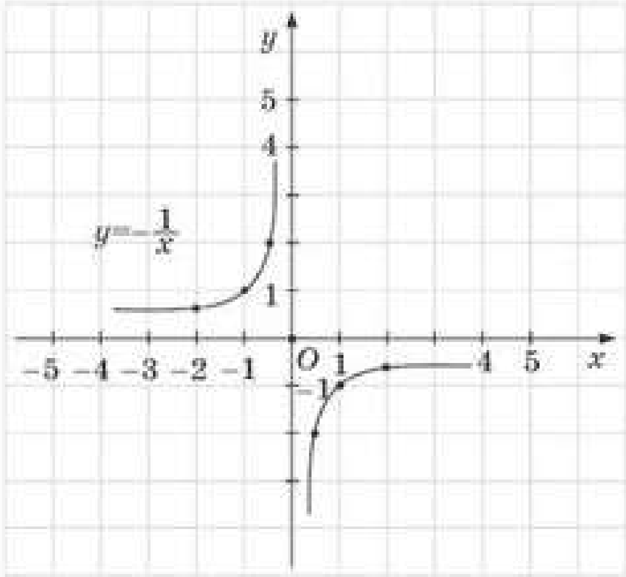
27.1- *кесте*

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$y=\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	мәні болмайды	2	1	$\frac{1}{2}$
$y=-\frac{1}{x}$	$\frac{1}{2}$	1	2	мәні болмайды	-2	-1	$-\frac{1}{2}$

Функцияның графигі ***гипербола*** деп аталады (27.1, 27.2-суреттер) .



27.1-сурет



27.2-сурет

27.2-кестені толтырыңдар. Аргументтің бірдей мәндерінде функциялардың сәйкес мәндерін салыстырыңдар: 1) $y=\frac{2}{x}$ және $y=\frac{1}{x}$; 2) $y=\frac{1}{2x}$ және $y=\frac{1}{x}$.

27.2 -*кесте*

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$y=\frac{2}{x}$									
$y=\frac{1}{x}$									
$y=\frac{1}{2x}$									

$y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{2}{x}$ және $y = \frac{1}{2x}$ функцияларының барлығының графиктері *гипербола* деп аталады.

"$y = \frac{1}{x}$ функциясының графигі болатын гиперболаны салу" сөзтіркесінің орнына қысқаша "$y = \frac{1}{x}$ гиперболасын салу" деп айтылады.

$y = -\frac{2}{x}$, $y = -\frac{1}{2x}$ және $y = -\frac{2}{x}$ функцияларының графиктері болатын гиперболаларды бір координаталар жүйесіне салыңдар.

1. $y = \frac{1}{x}$ гиперболасынан $y = -7 \cdot \frac{1}{x}$; $y = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{x}$ гиперболаларын қалай аламыз?
2. $y = \frac{k}{x}$ және $y = -\frac{k}{x}$ гиперболалары бір-біріне қатысты қалай орналасқан ?
3. Неліктен координаталар басы $y = \frac{k}{x}$ түріндегі гиперболаның центрлік симметриясы болатынын түсіндіріңдер.
4. $y = \frac{11}{x}$; $y = -\frac{11}{x}$ гиперболалары қай координаталық ширектерде орналасқан?

Жаттығулар

А

27.1. 1) $A(2;\ 0,5)$; 2) $B(-3;\ 4,3)$; 3) $C(-10;\ -0,1)$; 4) $M(-0,2;\ -5)$ нүктелері $y = \frac{1}{x}$ функциясының графигіне тиісті ме?

27.2. $y = \frac{3}{x}$ функциясының графигін салыңдар. График бойынша
1) $x = -3;\ -0,6;\ 5;\ 30$ мәндеріне сәйкес функцияның мәндерін;
2) $y = -2;\ -1,5;\ 0,5;\ 2,5;\ 4$ мәндеріне сәйкес аргументтің мәндерін анықтаңдар;

3) Егер $y = f(x)$ болса, онда мыналарды табыңдар: $f(0{,}5) + f(3)$; $f(1) - f(-1{,}5)$; $f(2) - 2f(3)$; $f(-0{,}3) + 3f(1{,}5)$.

27.3. $y = \frac{2}{x}$; $y = \frac{4}{x}$; $y = -\frac{2}{x}$; $y = -\frac{4}{x}$; $y = \frac{0{,}5}{x}$ функцияларының графиктерін бір координаталық жазықтыққа салыңдар.

27.4. Функция $y = -\frac{5}{x}$ формул асым ен берілген. 27.3-кестені толтырыңдар.

27.3 *-кесте*

x	-5	-2	-1	1	2	5
y						

B

27.5. 1) $-\frac{5}{x} = 3x + 2$; 2) $-\frac{2{,}5}{x} = 5$; 3) $\frac{4}{x} = -x$; 4) $\frac{6}{x} = 4x - 3$ теңдеулерінің түбірлері бар ма?

27.6. 1) $4 = -\frac{2}{x}$; 2) $3 = \frac{4}{x}$; 3) $x = -\frac{2}{x}$; 4) $2x = -\frac{5}{x}$;

5) $x^3 = \frac{1}{x}$; 6) $x^3 = -x^2$; 7) $x^2 = x + 2$; 8) $0{,}25\,x^2 = \frac{2}{x}$

теңдеулерін графиктік тәсілмен шешіңдер .

27.7. 1) $y = -x + 3$; 2) $y = 2x$; 3) $y = x + 1$; 4) $y = -3x - 3{,}5$;

5) $y = -x^2$; 6) $y = -0{,}5 \cdot x^3$; 7) $y = \frac{1}{3}x^2$; 8) $y = |x|$

функцияларының графиктері мен $f(x) = -\frac{5}{x}$ функциясының графигі қиылыса ма?

C

27.8*. $y = \frac{4}{x}$ және $y = ax + b$ функцияларының графиктері:

1) тек бір нүктеде; 2) тек екі нүктеде; 3) үш нүктеде қиылысуы мүмкін бе?

27.9. 1) $y = \frac{2}{|x|}$; 2) $y = -\frac{2}{|x|}$; 3) $y = -\frac{1}{|-x|}$; 4) $y = \frac{-0{,}2}{|x|}$

функцияларының графигін салыңдар.

27.10*. $f(x)=\dfrac{2}{|x|}$ функциясының 1) [2,4; 5]; 2) [–2,4; –1]; 3) [–3,5; –0,5]; 4) [4; 12] аралықта рындағ ы ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңдар.

27.11. $y=\dfrac{k}{x}$ функциясының графигі $M(-4;\ 2)$ нүктесі арқылы өтеді. Осы функцияның графигі 1) $A(-1;\ 8)$; 2) $B\ (3;\ -9)$; 3) $C\ (0,5;\ -16)$; 4) $K\ (-3;\ 2\frac{2}{3})$ нүктеле рі арқылы өтеді ме?

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

27.12. Дүкендегі "балалар ойыншықтары" бөлімде ойыншықтардың бағалары келесі тізбекті береді:
480 тг, 780 тг, 250 тг, 420 тг; 420 тг; 180 тг, 250 тг; 480 тг, 480 тг, 680 тг, 250 тг, 380 тг, 540 тг, 125 тг, 430 тг, 450 тг, 380 тг, 680 тг, 990 тг, 410 тг; 690 тг, 450 тг, 360 тг, 1200 тг, 850 тг, 800 тг; 150 тг, 250 тг.
1) Бағасы 300 тг-ден 700 тг-ге дейін болатын қанша ойыншық бар?
2) Бағасы 600 тг-ден артық болатын ойыншықтар саны қанша?
3) Бағасы 600 тг-ден аспайтын қанша ойыншық бар?

27.13. Ауа температурасы келесі тізбекпен берілген:
–12°С; – 10°С; –9°С; –12°С; –11°С;–10°С; –9°С; –8°С; –9°С; –12°С; –11°С; –10°С; –10°С; –9°С; –8°С.
Осы тізбекті 1) кему ретімен;
2) өсу ретімен жазыңдар.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

1. $y = 2x^2$ функциясының графигіне тиісті емес нүктені анықтаңдар.
A. (0; 0); B. (1; 2); C. (–1; 2); D. (–1; –2).

2. $y = -3x^3$ функциясының $x = -2$ болғандағы мәнін табыңдар.
A. –24; B. 18; C. 24; D. –18.

3. $y = ax^2$ функциясының $x = -3$ болғандағы мәні –9-ға тең. a-ның мәнін табыңдар.
A. 1; B. –1; C. $\frac{1}{3}$; D. $-\frac{1}{3}$.

4. $y = -\frac{5}{x}$ функциясының графигіне тиісті емес нүктені анықтаңдар.
A. (1; 5); B. (–2; 10); C. $\left(\frac{1}{5};-25\right)$; D. (2; 2,5).

5. $y = -\frac{14}{x}$ функциясының мәні өсетіндей x-тің барлық мәндерін көрсетіңдер.
A. $(0; +\infty)$; B. $(-\infty; 0)$; C. R; D. $(-\infty; 0)$ және $(0; +\infty)$.

6. Графигі A(–2; –4,5) нүктесі арқылы өтетін кері пропорционалдықты формуламен өрнектеңдер.
A. $y = -\frac{9}{x}$; B. $y = \frac{9}{x}$; C. $y = -\frac{14}{x}$; D. $y = -\frac{2}{9x}$.

7. $y = \frac{20}{x}$ функциясының мәні оң мән болатын x-тің барлық мәндерін көрсетіңдер.
A. $(0; +\infty)$; B. $(-\infty; 0)$; C. R; D. $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

8. $y = x^2$ және $y = x^3$ функцияларының графиктері неше нүктеде қиылысады?
A. Екі нүктеде; B. Бір нүктеде.
C. Ортақ нүктелері жоқ. D. Шексіз нүктеде.

9. Нүктелердің қайсылары $y = -x^3$ функциясының графигіне тиісті болады?
A. (1; 1), (–1; –1); B. (1; –1), (–1; –1);
C. (–1; 1), (1; –1); D. (1; 1), (0; 0).

10. $y = 3x^3$ және $y = \frac{3}{x}$ функцияларының графиктері неше нүктеде қиылысады?
A. Ортақ нүктелері жоқ. B. Бір нүктеде.
C. Екі нүктеде. D. Үш нүктеде.

4-ТАРАУ

СТАТИСТИКА ЭЛЕМЕНТТЕРІ

Математикалық статистика — ғылыми және практикалық қорытындылар жасау үшін бақылау нәтижелерін жүйелеу, өңдеу және зерттеудің математикалық әдістеріне арналған математиканың бөлімі.

§ 28. ВАРИАЦИЯЛЫҚ ҚАТАР

Бас жиынтық, кездейсоқ таңдама, вариациялық қатар, варианта дегеніміз не?

Ғылымда, практикада қорытындылар, жалпылаулар деректер негізделгенде ғана құнды болады.

Кез келген зерттеу деректерді, бақылауларды жинақтаудан басталады. Ол деректерді өңдеу және жүйелеуде статистикалық ұғымдар көмек береді. Атап айтқанда бас жиынтық, кездейсоқ таңдау, вариациялық қатар, варианта.

Анықтама. Зерттеуді қажет ететін жалпы сипаттамасы бар барлық объектілер мен құбылыстар жиынын *бас жиынтық* (ағыл. тілінде — *population*) деп атайды.

Бас жиынтық зерттеудің алдына қойылатын мақсаттарға тәуелді. Мысалы, емен жапырақтарының өлшемдерін зерттесек, бас жиынтық ретінде емен жапырақтарының жиыны алынады; күз айларындағы ауа температурасын бақылағанда бас жиынтық күз айларындағы ауа температурасының көрсеткіштері болады; жетінші сынып оқушылары бойының ұзындығын зерттегенде бас жиынтық осы жастағы барлық балалар бойының ұзындықтарының көрсеткіштері болады.

Бас жиынтық қандай объектілерден тұруы мүмкін?

Бас жиынтық элементтері кез келген объектілер болуы мүмкін: заттар, адамдар, табиғи құбылыстар және т.б.

Анықтама. Егер бас жиынтықтан кейбір элементтер (объектілері) кез келген ретпен таңдап алынса, онда шыққан жиынтық ***кездейсоқ таңдама*** деп аталады.

Мысалы, 13 жастағы балалар бойының ұзындығын зерттегенде кездейсоқ таңдама өздерің оқитын мектептің 13 жастағы балалары болады (28.1-сурет).

Бас жиынтық — 13 жастағы барлық балалар

Кездейсоқ таңдама — бас жиынтықтан таңдалынған 13 жастағы балалар

28.1-сурет

Анықтама. Объектілер жиынтығының өспеуі немесе кемімеуі бойынша реттелуі ***вариациялық қатар*** деп аталады.

1. –3°C, 0°, –3°C, –6°C, –7°C, –12°C, –11°C, 0°C, 0°C, –7°C, –9°C, –10°C, –12°C, –10° C тізбегінде 5 және 18 қараша аралығындағы ауа температурасы жазылған. Бұл тізбек неліктен вариациялық қатар болмайды?

2. Төменде берілген тізбектер вариациялық қатар бола ма:
–12°C, –12°C, –11°C, –10°C, –10°C, –9°C, –7°C, –7°, –6°C, –3°C, –3°C, 0°C, 0°C, 0°C;
0°C, 0°C, 0°C, –3°C, –3°C, –6°C, –7°C, –7°C, –9°C, –10°C, –10°C, –11°C, –12°C, –12°C?

Анықтама. Вариациялық қатардың әр мүшесі ***варианта*** деп аталады.

Бақылаулар нәтижелерін кез келген ретпен беретін тізбекке қарағанда вариациялық қатардың қандай артықшылығы бар?

Вариациялық қатардың көмегімен қатардың ең үлкен және ең кіші мәндерін, басқа мәндерге қарағанда жиі қайталанатын мәндерді және т.б. бірден көрсетуге болады. Бірақ варианталардың саны өте көп болғанда алынған мәліметтерді көрсету ыңғайлы емес.

1. Бас жиынтық пен кездейсоқ таңдамаға мысалдар келтіріңдер.
2. 2003 және 2009 жылдар аралығында Астана қаласының тұрғындар санының көрсеткіштерін беретін 1 149 641, 1 175 208, 1 209 485, 1 247 896, 1 287 246, 1 324 739, 1 365 105 тізбегі вариациялық қатар бола ма?

Жаттығулар

A

28.1. Берілген тізбектердің арасынан вариациялық қатарды атаңдар:
1) 1, 12, 13, 15, 16, 21, 22, 24, 26;
2) –17, –15, –13, –11, –10, –9, –8, –5, –4;
3) 111, 112, 113, 125, 126, 121, 122, 124, 126;
4) 101, 102, 103, 105, 216, 221, 222, 224, 326, 334, 339.

28.2. Тізімге сәйкес әр баланың бойының ұзындығын жазыңдар. Жазылған мәндер вариациялық қатар бола ма? Жауаптарыңды түсіндіріңдер.

28.3. Астана қаласында 9 қарашадан 19 қараша аралығындағы ауа температурасының қатары берілген: –2°C, –6°C, –2°C, –3°C, –13°C, –14°C, –10°C, –5°C, –3°C, –7°C. Осы қатар вариациялық қатар бола ма? Жауабын түсіндіріңдер.

28.4. 1, 1, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 8, 9, 9, 11, 11, 12, 12 тізбегі вариациялық қатар бола ма? Ең көп қайталанатын варианталы жазыңдар. Ең аз қайталанатын варианталы жазыңдар. Вариантаның ең кіші және ең үлкен мәндерін жазыңдар.

B

28.5. Таңдаманың бас жиынтығын атаңдар (28.1-кесте):

28.1- кесте

Аю	Қасқыр	Түлкі	Қоян	Елік	Бұлан	Қабан
60 кг	50 кг	5 кг	3, 5 кг	25 кг	45 кг	36 кг

28.1-кестесін қолданып, аңдар массаларының вариациялық қатарын жазыңдар.

28.6. Мектепте спортпен шұғылданатын 7, 8-сыныптарының оқушылар санының басты жиынтығынан таңдауға мысалдар келтіріңдер (28.2-кесте):

28.2- *кесте*

Сынып	Волей-бол	Баскет-бол	Жүзу	Жеңіл атле-тика	Тен-нис	Фут-бол	Гимнас-тика	Күрес
7-сынып								
8-сынып								

1. Берілген бас жиынтықтан вариациялық қатар құрастырыңдар.
2. Варианттың ең кіші және ең үлкен мәндерін жазыңдар.

C

Хабарлама дайындаңдар

28.7. Ғылымға "статистика" ұғымын енгізген Готфрид Ахенвалль (1719—1772) туралы хабарлама дайындаңдар.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

28.8. 28.3-кестесін толтырыңдар:

28.3- *кесте*

x-тің мәні	-1	1			4	5		
$y = 2x - 1$				5				
$y = x^2$								49
$y = \frac{2}{x}$			1				$\frac{1}{3}$	

§ 29. АБСОЛЮТТІК ЖИІЛІК ЖӘНЕ САЛЫСТЫРМАЛЫ ЖИІЛІК. ЖИІЛІКТЕР КЕСТЕСІ

Вариантаның абсолюттік және салыстырмалы жиіліктерін қалай есептеуге және таңдауды жиілік кестесі түрінде қалай беруге болады?

–12°C, –12°C, –11°C, –10°C, –10°C, –9°C, –7°C, –7°C, –6°C, –3°C, –3°C, 0°C, 0°C, 0°C вариациялық катарда кейбір варианталар бірнеше рет кайталанған. Мұндай жағдайда бақылау нәтижелерін 29.1-кесте түрінде берген ыңғайлы. Ондай кестеде әртүрлі варианталар және олардың сандары көрсетіледі.

Анықтама. Вариантаның қанша рет бақыланғанын көрсететін сан вариантаның ***абсолюттік жиілігі*** деп аталады.

29.1- *кесте*

Варианта	–12°C	–11°C	–10°C	–9°C	–7°C	–6°C	–3°C	0°C
Вариантаның абсолюттік жиілігі	2	1	2	1	2	1	2	3

Неліктен –7° вариантасының абсолюттік қателігі екіге, ал 0° вариантасының абсолюттік қателігі үшке тең?

Қарастырылып отырған мысалда барлығы 14 бақылау бар. Егер вариантаның абсолюттік жиілігін бақылаудың жалпы санына бөлсе, онда вариантаның салыстырмалы жиілігін аламыз (29.2-кесте).

29.2- *кесте*

Варианта	–12°C	–11°C	–10°C	–9°C	–7°C	–6°C	–3°C	0°C
Вариантаның абсолюттік жиілігі	2	1	2	1	2	1	2	3
Вариантаның салыстырмалы жиілігі	$\frac{1}{7}\approx 0{,}14$	$\frac{1}{14}\approx 0{,}07$	$\frac{1}{7}\approx 0{,}14$	$\frac{1}{14}\approx 0{,}07$	$\frac{1}{7}\approx 0{,}14$	$\frac{1}{14}\approx 0{,}07$	$\frac{1}{7}\approx 0{,}14$	$\frac{3}{14}\approx 0{,}21$

Вариантаның салыстырмалы жиілігін кейбір жағдайда пайыз арқылы жазады.

Статистикалық мәліметтер жиілік кестесі арқылы берілді.

Кестедегі мәліметтердің қарама-қайшылық бермейтінін қалай тексеруге болады? Вариантаның абсолюттік жиілігінің қосындысының мәнін және салыстырмалы жиілігінің қосындысының мәнін есептеңдер. Қорытынды жасаңдар.

Жиілік кестесінің қасиеттері:

1) вариантаның абсолюттік жиілігінің қосындысының мәні бақылаудың жалпы санына тең;
2) салыстырмалы жиілігінің қосындысының мәні 1-ге тең.

1. Вариантаның абсолюттік жиілігін және салыстырмалы жиілігін табу үшін қандай мәліметтер қажет?
2. 20, 20, 30, 10, 10, 20, 30, 20, 30, 20 нәтижелерді қолданып, вариантаның абсолюттік жиілігін және салыстырмалы жиілігін табыңдар.

Жаттығулар

A

29.1. 29.3-кестеде Солтүстік Қазақстан облысындағы 2016 жылдың шілде айындағы орташа ауа температурасының мәндері берілген.

29.3- *кесте*

Варианталар	x	29°C	27°C	26°C	25°C	24°C	22°C	21°C	20°C
Вариантаның абсолюттік жиілігі	n	4	4	5	6	4	4	2	1
Вариантаның салыстырмалы жиілігі	W								

W салыстырмалы жиілігін 0,01 дәлдікпен тауып, кестені толтырыңдар. Қай варианта жиі кездеседі?
Кестенің көмегімен жауап беруге болатын сұрақтар құрастырыңдар.

29.2. 2 2 3 3 3 3 4 2 3 3 2 3 2 3 2 3 2 4 3 2 2 3 2 4 5 2 3 3 2 4 3 2 3 4 3 3 2 3 5 3 статистикалық қатарын пайдаланып, вариациялық қатар жазыңдар. Вариациялық қатарды қолданып, "3", "4" варианталарының абсолюттік және салыстырмалы жиіліктерін табыңдар.

29.3. Сыныптастарыңның алгебрадан, геометриядан, қазақ тілінен, физикадан тоқсандық бағалары туралы мәліметтер жинаңдар. Әр мәліметті вариациялық қатар түрінде жазыңдар. Әр пән бойынша ең аз, ең көп, ең кең тараған бағаларды көрсетіңдер.

B

29.4. Оқушылар арасында сүйікті пәнді анықтау мақсатында сауалнама жүргізіңдер. Осы сауалнама нәтижесі негізінде мектепте оқытылатын пәндердің рейтингісін жасаңдар. Ол рейтингте оқушылар жасына тәуелділігі байқала ма?

29.5. Бірінші тоқсанда математикадан 24 рет үй жұмысы берілген.

1) Оқушы үй жұмысын сегіз рет “5”-ке орындады. Тоқсан бойы оқушының үй жұмысын “5”-ке орындауының абсолюттік жиілігін табыңдар.

2) Оқушы үй жұмысын он екі рет “4”-ке орындады. Тоқсан бойы оқушының үй жұмысын “4”-ке орындауының абсолюттік жиілігін табыңдар.

3) Оқушы үй жұмысын он үш рет “4”-ке орындады. Тоқсан бойы оқушының үй жұмысын “4”-ке орындауының абсолюттік жиілігін табыңдар.

C

29.6. Ойын кубигін лақтыру бойынша тәжірибені 30 рет жасаңдар.

1. Тәжірибе нәтижесінде түскен ұпайларды 29.4-кестеге жазыңдар.

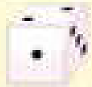
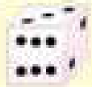
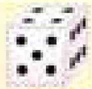
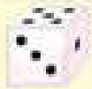
2. Әр ұпайдың түсуінің абсолюттік және салыстырмалы жиіліктерін табыңдар.

3. Абсолюттік жиіліктердің және салыстырмалы жиіліктердің қосындысының мәндерін табыңдар.

Қорытынды шығарыңдар.

Сыныпта алынған нәтижелердің қорытындысын бір кестеге жазыңдар.

29.4- *кесте*

Түсі	Хаттама №										Абсолюттік жиілік	Салыстырмалы жиілік
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
												
												
												
												
												
												
							Қосынды мәні					

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

29.7. Координаталар жазықтығында $A(0;\ 1)$; $B(2;\ 3)$, $C(4;\ 3)$, $M(6;\ 4)$ нүктелерін белгілеңдер. Осы нүктелерді кесінділермен қосыңдар.

§ 30. ЖИІЛІК ПОЛИГОНЫ

Таңдау нәтижелерін жиілік полигоны түрінде қалай беруге болады?

Бақылау нәтижелерін график түрінде берейік.

Вариантаның абсолюттік жиілігінің кестесін қолданып, 30.1-сурет бойынша сынық сызықтың қалай салынғанын түсіндіріңдер.

30.1-сурет

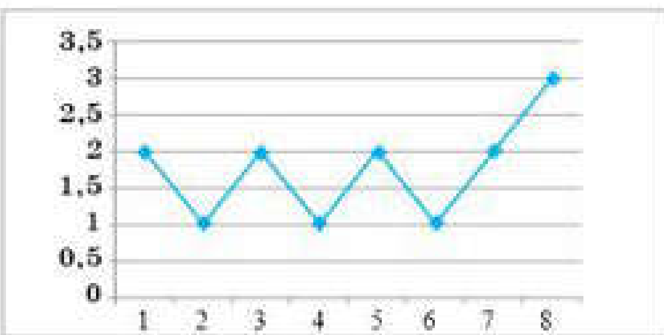
Суретте берілген сынық сызықты ***абсолюттік жиіліктің полигоны*** деп атайды.

> Анықтама. Буындары абсциссалары түрлі варианталар, ординаталары осы варианталардың абсолюттік жиілігі болатын нүктелерді қосатын сынық сызық ***абсолюттік жиіліктің полигоны*** деп аталады.

Абсолюттік жиіліктің полигонын салу алгоритмі:

1. Ox осінде x варианталарын көрсету.
2. Oy осінде n жиілігін көрсету.
3. Координаталары $(x; n)$ болатын нүктелерді салу.
4. Нүктелерді кесінділермен қосу.

Салыстырмалы жиіліктің полигоны қалай салынған (30.2-сурет)?



30.2-сурет

Анықтама. Буындары абсциссалары әртүрлі варианталар, ординаталары осы варианталардың салыстырмалы жиілігі болатын нүктелерді қосатын сынық сызық ***салыстырмалы жиіліктің полигоны*** деп аталады.

Салыстырмалы жиіліктің полигонын салу алгоритмі:
1. Ox осінде x варианталарын көрсету.
2. Oy осінде W жиілігін көрсету.
3. Координаталары $(x; W)$ болатын нүктелерді салу.
4. Нүктелерді кесінділермен қосу.

Кесте және жиілік полигоны түрінде берілген статистикалық мәліметтерді қалай талдауға болады?

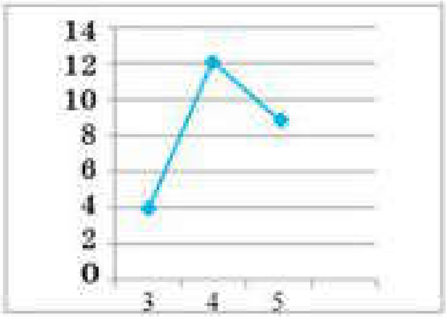
30.1-кестеде сынып оқушыларының бақылау жұмысынан алған бағалары туралы мәліметтер берілген.

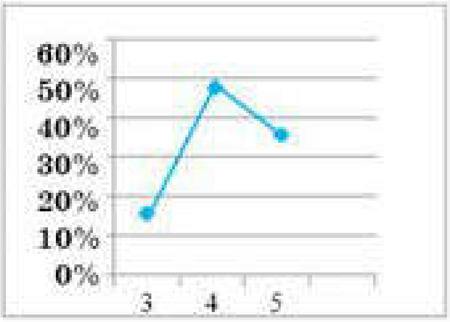
30.1- *кесте*

Варианта	x	3	4	5
Вариантаның абсолюттік жиілігі	n	4	12	9
Вариантаның салыстырмалы жиілігі	W	16%	48%	36%

Варианта жиілігі 4 оқушы "3" алғанын және олар 16%-ды құрайтынын, 12 оқушы "4" алғанын (48%), 9 оқушы "5" алғанын (36%) көрсетеді.

Осы мәліметті жиілік полигонынан да алуға болады (30.3-сурет).





30.3-сурет

Дұрыс жауаптың нөмірін көрсетіңдер:
1. Жиілік полигоны қандай сызық?
   1) түзу; 2) сынық; 3) қисық.
2. Жиілік полигоны мәліметтерінің берілу түрін көрсетіңдер:
   1) кесте; 2) график.
3. Варианталар қай осьте белгіленеді?
   1) абсциссалар осі; 2) ординаталар осі.
4. Жиіліктер қай осьте белгіленеді?
   1) абсциссалар осі; 2) ординаталар осі.

Жаттығулар

А

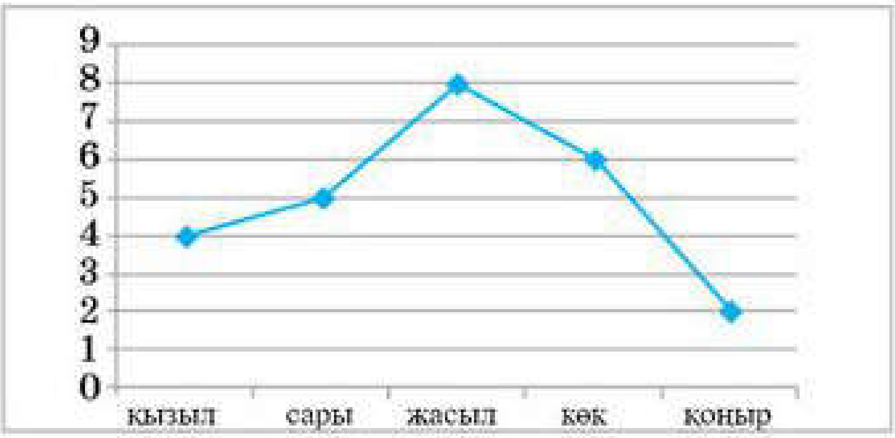
30.1. 13; 15; 13; 12; 12; 12; 13;14; 13; 15; 13; 12; 12 сандар қатарының арифметикалық ортасын, модасын және құлашын табыңдар.
1) Берілген мәліметтер үшін вариациялық қатар құрастырыңдар.
2) Қатарға кіретін варианталардың абсолюттік және салыстырмалы жиіліктерін табыңдар.
3) Таңдау нәтижелерін жиілік полигоны арқылы көрсетіңдер.

30.2. Мектеп өмірінен вариациялық қатар құрастырыңдар, абсолюттік және салыстырмалы жиіліктерін, олардың қосындысының мәндерін табыңдар.
Мәліметтерді жиілік полигоны арқылы кескіндеңдер.

30.3. Кездейсоқ таңдама нәтижесінде 8-сыныптардың 30 оқушысының бой ұзындықтары белгілі (сантиметрмен алынған): 166, 165, 163, 166, 168, 165, 168, 170, 165, 165, 165, 165, 164, 168, 165, 164, 161, 162, 164, 166, 165, 166, 167, 164, 163, 168, 167, 167, 165, 162. Осы таңдау үшін вариациялық қатар құрастырыңдар. Вариациялық қатар бойынша абсолюттік және салыстырмалы жиіліктері кестесін құрастырыңдар және мына сұрақтарға жауап беріңдер:
1) оқушылар бойы ұзындығының ең кіші және ең үлкен мәндері қандай? 2) бойының ұзындығы 168 см болатын оқушылар қанша пайызды құрайды? 3) таңдауда оқушылар бойының қандай ұзындығы жиі кездескен?

В

30.4. Әр түсті ойыншықтар жиынтығының 30.4-суретте берілген абсолюттік жиілігі полигонын қолданып,



30.4-сурет

1) ойыншықтардың жалпы санын;
2) әр түстегі ойыншықтардың салыстырмалы жиілігін;
3) ойыншықтардың бір түсі екінші түстен қанша артық (кем) екенін табыңдар.

30.5. 30.4-жаттығуындағы мәліметтерді қолданып, әр түсті ойыншықтар жиынтығының жиілік кестесін құрастырыңдар.

C

30.6. Үш ойын кубигімен 50 тәжірибе жасаңдар. Нәтижелерін MS Excel-де жазып, әр тәжірибедегі ұпайлар қосындысының мәнін табыңдар. Вариациялық қатарды жазып, оның жиілік кестесін құрастырыңдар. Кестені қолданып, қосындының мәні 5; 10; 15 болу жиілігін табыңдар.

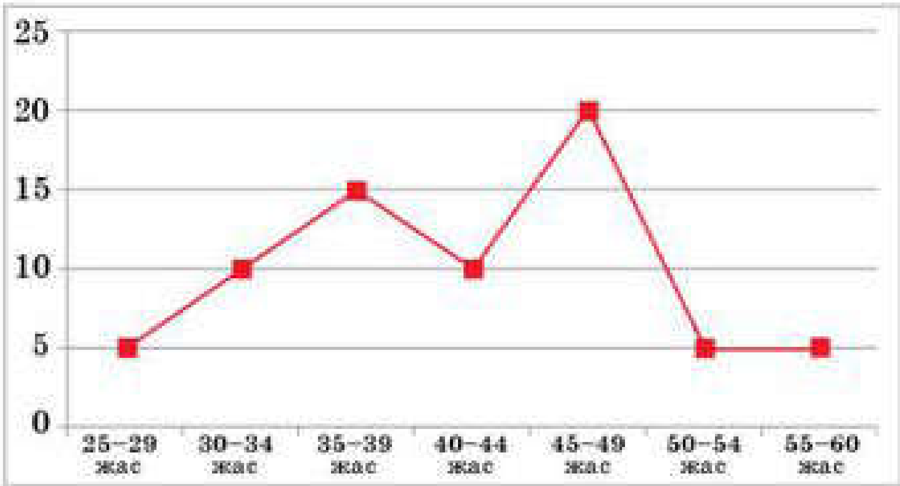
30.7. Бақылау жұмысында оқушыларға 8 тапсырмадан тұратын тест берілді. 48 оқушының дұрыс жауаптарының саны 30.2-кестесінде көрсетілген.

30.2- *кесте*

Дұрыс жауаптар саны	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Абсолюттік жиілік	0	0	0	1	5	14	16	6	6
Салыстырмалы жиілік									

1) Белгісіз абсолюттік жиілікті табыңдар.
2) Әр дұрыс жауаптың салыстырмалы жиілігін табыңдар және кестені толтырыңдар.
3) Абсолюттік және салыстырмалы жиіліктердің полигонын салыңдар.

30.8. 30.5-суретінде сақтандыру компаниясы қызметкерлерінің жасы бойынша топтар жиілік полигоны берілген.



30.5-сурет

1) 39 жастан үлкен қызметкерлердің салыстырмалы жиілігін (%-бен) табыңдар. 2) 40 жастан кіші қызметкерлердің салыстырмалы жиілігін (%-бен) табыңдар.

30.9. 10-тапсырмаға берілген дұрыс жауаптардың абсолюттік жиілігі 24-ке, ал салыстырмалы жиілігі дұрыс жауаптардың 30%-ына тең болса, онда тест тапсырмаларын қанша оқушы орындаған?

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

30.10. Амалды орындаңдар:

1) $2a^2(a^2 - ab + b^2)$;

2) $a(a^2 - 2ab + b) - 2ab$;

3) $x^2(a^2 - 3ax + x) + 3ax^2$.

30.11. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $a(a^2 - ab + b^2) + a^2b - ab^2 = a^3$;

2) $a(a + 2ax - x) - 2a^2x - a^2 + 1 = 1 - ax$.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

1. +5 °C, 0 °C, 0 °C, + 4 °C, + 2 °C, + 5 °C, + 8 °C, + 7 °C, + 4 °C, + 1 °C, + 2 °C, 0 °C қатарының ең үлкен және ең кіші варианталар мәндерінің айырымын табыңдар:

A. 8 °C; B. 9 °C; C. 10 °C; D. 7 °C.

2. –20, –20, –10, 00, –30, –20, –20, –50, –60, –30, –30, –20, –30, –50, –40, –60 қатарының (–30) вариантасының абсолюттік жиілігін табыңдар:

A. 2; B. 3; C. 4; D. 5.

3. –20, –20, –10, 00, –30, –20, –20, –50, – 60, –30, –30, –20, –30, –50, –40, –60 қатарының (–20) вариантасының салыстырмалы жиілігін табыңдар:

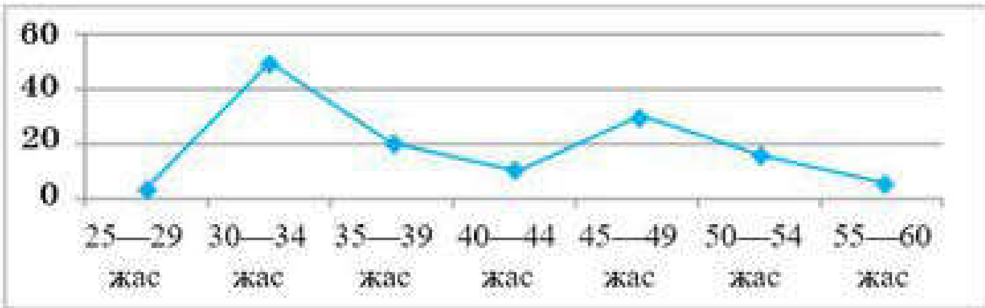
A. 20%; B. 25%; C. 28%; D. 30%.

4. 163, 162, 163, 165, 162, 165, 166, 158, 160, 162, 165, 165, 164, 162, 160, 164, 161, 162, 164, 162, 165, 162, 160, 162, 163 таңдаудағы оқушылардың бой ұзындықтарының абсолюттік және салыстырмалы жиіліктерін табыңдар:

A. 7; 28%; B. 6; 32%; C. 8; 30%; D. 8; 32%.

5. 30.6-суретінде берілген жиілік полигоны бойынша 44 жастан үлкен қызметкерлердің салыстырмалы жиілігін (%-бен) табыңдар.

A. 24%; B. 30%; C. 37%; D. 40%.



30.6-сурет

6. 10 тапсырмадан тұратын тесті орындау барысында берілген дұрыс жауаптардың салыстырмалы жиілігі 30.3-кестесінде берілген. Белгісіз салыстырмалы жиілікті табыңдар.

A. 19%; B. 20%; C. 24%; D. 25%.

30.3- кесте

Дұрыс жауаптар саны	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Салыстырмалы жиілік (%)	1	2	6	8	12	...	22	15	12	4	1

5-ТАРАУ

ҚЫСҚАША КӨБЕЙТУ ФОРМУЛАЛАРЫ

§ 31. ЕКІ ӨРНЕКТІҢ КВАДРАТТАРЫ АЙЫРЫМЫНЫҢ ФОРМУЛАСЫ

Қысқаша көбейту формулалары дегеніміз не және олар қалай қолданылады?

$a-b$ екімүшесінің $a+b$ екімүшесіне көбейтіндісін қарастырайық. Ол үшін көпмүшені көпмүшеге көбейту ережесін қолданамыз, яғни бірінші көпмүшенің әрбір мүшесін екінші көпмүшенің әрбір мүшесіне көбейтеміз: $(a-b)\cdot(a+b)=a^2+ab-ab-b^2$. Енді оң жақ бөліктегі ұқсас қосылғыштарды біріктірсек, $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ немесе $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ теңдігін квадраттар айырымының формуласы деп атайды.

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ теңдігінің оқылуы: екі өрнектің квадраттарының айырымы олардың айырымы мен қосындысының көбейтіндісіне тең.

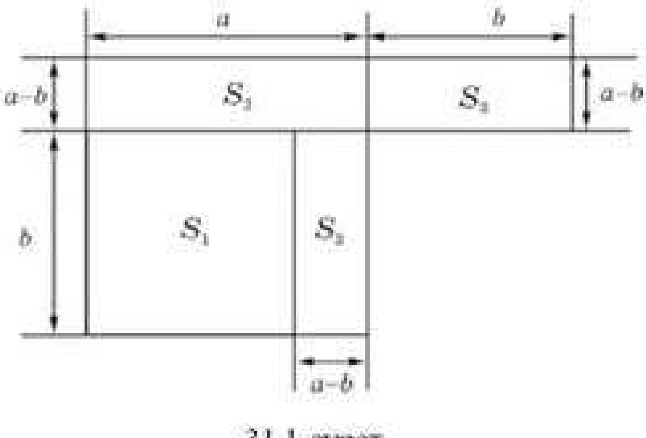
31.1-суретті қолданып, квадраттар айырымының формуласын геометриялық жолмен алуға болады.

Суретте берілген фигуралар:

♦ қабырғасының ұзындығы b-ға тең, ал ауданы $S_1=b^2$ болатын шаршы;

♦ қабырғаларының ұзындықтары a және $(a-b)$, ал ауданы $S_2=a(a-b)$ болатын тіктөртбұрыш;

♦ қабырғаларының ұзындықтары b және $(a-b)$, ал ауданы $S_3=b\cdot(a-b)$ болатын өзара тең екі тіктөртбұрыш.



31.1-сурет

Қабырғасының ұзындығы a-ға тең, ауданы $S=a^2$ болатын шаршы қабырғасының ұзындығы b-ға тең шаршыдан және біріншісінің қабырғаларының ұзындықтары

$(a-b)$ және b, ал екіншісінің қабырғаларының ұзындықтары $(a-b)$ және a болатын екі тіктөртбұрыштан тұратынын суреттен көруге болады: $S = S_1 + S_2 + S_3$ немесе $S - S_1 = S_2 + S_3$.

Екі кіші тіктөртбұрыштардың ауданы белгілі, сондықтан

$$S_2 + S_3 = (a-b)\,b + (a-b)\,a = (a-b)(a+b).$$

Демек, $S - S_1 = (a-b)(a+b)$.

Енді $S = a^2$ және $S_1 = b^2$ формулаларын соңғы теңдікке қойсақ, $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. ◪

Квадраттар айырымының формуласына мысалдар келтірейік:

1) $25 - m^2 = 5^2 - m^2 = (5-m)(5+m)$;

2) $y^4 - 0{,}49x^2 = (y^2)^2 - (0{,}7x)^2 = (y^2 - 0{,}7x)(y^2 + 0{,}7x)$.

Квадраттар айырымының формуласын қолдану барысында әртүрлі есептеулерді жеңілдетуге, өрнектерді ықшамдауға болады.

Түсіндіріңдер

1. $71^2 - 59^2$ өрнегінің мәні қалай есептелген:
$$71^2 - 59^2 = (71-59)(71+59) = 12 \cdot 130 = 1560?$$
2. $\left(\frac{1}{3}x + 8y\right)\left(\frac{1}{3}x - 8y\right)$ өрнегі қалай есептелген:
$$\left(\frac{1}{3}x + 8y\right)\left(\frac{1}{3}x - 8y\right) = \left(\frac{1}{3}x\right)^2 - (8y)^2 = \frac{1}{9}x^2 - 64y^2?$$

Квадраттар айырымының формуласын теңдеулерді шешу кезінде де қолдануға болады.

Мысал. $1{,}69 - z^2 = 0$ теңдеуін шешейік.

Шешуі: Квадраттар айырымының формуласын қолданайық:

$1{,}69 - z^2 = 1{,}3^2 - z^2 = (1{,}3 - z)(1{,}3 + z)$. Сонда $1{,}69 - z^2 = 0$ теңдеуінің орнына оған мәндес $(1{,}3 - z)(1{,}3 + z) = 0$ теңдеуін аламыз. Егер $z = 1{,}3$ немесе $z = -1{,}3$ болса, көбейтіндінің мәні нөлге тең. Демек, берілген теңдеудің 1,3 және –1,3 екі түбірі бар. Теңдеудің жауабын $\{-1{,}3;\ 1{,}3\}$ түрінде жазып, теңдеудің шешімі –1,3 және 1,3 сандарынан тұратын жиын деп айтады.

Жауабы: $\{-1{,}3;\ 1{,}3\}$.

1. Екі өрнектің квадраттары айырымының формуласын қорытып шығару үшін қандай ережелер қолданылды?
2. Екі өрнектің квадраттары айырымының формуласын екі түрлі тәсілмен қалай оқуға болады?

Жаттығулар

А

31.1. Көбейтуді орындаңдар:

1) $(x + y)(x - y)$;
2) $(n - m)(n + m)$;
3) $(k - 2)(k + 2)$;
4) $(3 - c)(3 + c)$;
5) $(4 + b)(4 - b)$;
6) $(a - 7)(a + 7)$;
7) $\left(\frac{1}{7} + x\right)\left(\frac{1}{7} - x\right)$;
8) $\left(a - \frac{2}{9}\right)\left(a + \frac{2}{9}\right)$;
9) $\left(\frac{5}{6} + m\right)\left(\frac{5}{6} - m\right)$;
10) $(0{,}4 + n)(0{,}4 - m)$;
11) $(k + 1{,}1)(k - 1{,}1)$;
12) $(d - 2{,}2)(d + 2{,}2)$.

31.2. Амалды орындаңдар :

1) $(x - 5)(5 + x)$;
2) $(8 + y)(y - 8)$;
3) $(10 - k)(k + 10)$;
4) $\left(a + \frac{2}{3}b\right)\left(a - \frac{2}{3}b\right)$;
5) $\left(\frac{4}{9}x - y\right)\left(y + \frac{4}{9}x\right)$;
6) $\left(\frac{4}{15}n - m\right)\left(m + \frac{4}{15}n\right)$;
7) $(9x - 5y)(9x + 5y)$;
8) $(-4a + 3b)(3b + 4a)$;
9) $(13k - 2d)(2d + 13k)$;
10) $\left(\frac{5}{4}c + \frac{3}{7}d\right)\left(\frac{3}{7}d - \frac{5}{4}c\right)$;
11) $\left(\frac{1}{3}x - 3y\right)\left(3y + \frac{1}{3}x\right)$;
12) $\left(\frac{1}{5}a + \frac{1}{9}b\right)\left(\frac{1}{9}b - \frac{1}{5}a\right)$.

31.3. Көбейткіштерге жіктеңдер:

1) $a^2 - 49$;
2) $64 - b^2$;
3) $c^2 - 2{,}25$;
4) $2{,}89 - d^2$;
5) $\frac{64}{81} - x^2$;
6) $\frac{100}{121} - y^2$;
7) $z^2 - \frac{169}{196}$;
8) $t^2 - \frac{400}{441}$;
9) $25x^2 - 36$;
10) $-16 + 49y^2$;
11) $0{,}64 - \frac{1}{9}z^2$;
12) $\frac{64}{81}t^2 - 36$;
13) $\frac{9}{16} - \frac{1}{144}a^2$;
14) $\frac{25}{64}b^2 - \frac{1}{81}$;
15) $2{,}56x^2 - \frac{225}{361}$;
16) $\frac{81}{100} - 0{,}04c^2$.

31.4. Екімүшенің көбейтінді түрінде жазыңдар :

1) $c^2 - 0{,}49$;
2) $16 - k^2$;
3) $400 - m^2$;
4) $t^2 - 225$;
5) $1{,}69 - b^2$;
6) $y^2 - \frac{16}{81}$;
7) $25x^2 - 4$;
8) $\frac{25}{36} - 64y^2$.

31.5. $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ формуласының көмегімен есептеңдер:

1) $13^2 - 9^2$; 2) $20^2 - 19^2$; 3) $2{,}2^2 - 2{,}8^2$;

4) $3{,}5^2 - 3{,}7^2$; 5) $\left(\frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2$; 6) $\left(\frac{7}{9}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2$;

7) $\left(\frac{5}{12}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2$; 8) $\left(\frac{3}{10}\right)^2 - \left(\frac{4}{5}\right)^2$; 9) $\left(\frac{8}{15}\right)^2 - \left(\frac{4}{5}\right)^2$;

10) $\left(2\frac{1}{7}\right)^2 - \left(2\frac{1}{7}\right)^2$; 11) $\left(3\frac{1}{3}\right)^2 - \left(4\frac{1}{2}\right)^2$; 12) $\left(5\frac{1}{6}\right)^2 - \left(7\frac{1}{3}\right)^2$;

13) $51^2 - 41^2$; 14) $54^2 - 46^2$; 15) $76^2 - 24^2$;

16) $328^2 - 172^2$; 17) $\left(3\frac{2}{3}\right)^2 - \left(2\frac{1}{3}\right)^2$; 18) $\left(7\frac{5}{9}\right)^2 - \left(4\frac{4}{9}\right)^2$.

31.6. Көбейткіштерді $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ формуласы арқылы қосынды немесе айырым түрінде жазып, мәнін есептеңдер:

1) $101 \cdot 99$; 2) $102 \cdot 98$; 3) $103 \cdot 97$;
4) $104 \cdot 96$; 5) $105 \cdot 95$; 6) $106 \cdot 94$.

31.7. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $(5 + b)(b - 5) - b^2$; 2) $c^2 + (9 - c)(9 + c)$;

3) $\left(\frac{1}{3} - z\right)\left(\frac{1}{3} + z\right) - \frac{1}{9}$; 4) $-\frac{16}{49} + \left(\frac{4}{7} - d\right)\left(d + \frac{4}{7}\right)$;

5) $(0{,}9 - a)(a + 0{,}9) - a(1 + a)$; 6) $k(5 - k) + (1{,}2 + k)(k - 1{,}2)$.

31.8. 1) $d = 0{,}5$ болса, онда $(7 + d)(d - 7) + (d + 3)(3 - d) + 40(d + 1)$;

2) $x = -101$ болса, онда $x(2x - 1) - (6 + x)(x - 6) + (x + 10)(10 - x)$;

3) $b = -\frac{5}{6}$ болса, онда $1{,}2(b + 1{,}2) + (0{,}5 - b)(b + 0{,}5) - (b + 1{,}3)(1{,}3 - b)$;

4) $c = \frac{2}{3}$ болса, онда $(1{,}5 + c)(c - 1{,}5) - (c + 8)(c - 8) - 2{,}5(c - 24{,}5)$

өрнегінің мәнін табыңдар.

31.9. Теңдеуді шешіңдер:

1) $x^2 - 16 = 0$; 2) $25 - y^2 = 0$; 3) $3{,}24 - z^2 = 0$;

4) $\frac{144}{169} - n^2 = 0$; 5) $7{,}29 - m^2 = 0$; 6) $k^2 - \frac{196}{625} = 0$.

31.10. Өрнектің мәні a айнымалысының мәніне тәуелді емес екенін дәлелдеңдер:

1) $(a - 10)(10 + a) + 60 - a^2$;
2) $0{,}64 + a^2 - (0{,}5 + a)(a - 0{,}5)$;
3) $(2{,}4 - a)(a + 2{,}4) + (1{,}9 + a)(a - 1{,}9)$;
4) $(17 + a)(17 - a) - (0{,}6 - a)(a + 0{,}6)$.

31.11. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $(x - 1{,}6)(1{,}6 + x) + 5 - x^2 = 2{,}44$;

2) $(2-0{,}9x)(0{,}9x+2)-10+0{,}81x^2=-6$;
3) $(x-1{,}5)(1{,}5+x)+(6-x)(6+x)=33{,}75$;
4) $(2{,}1-x)(x+2{,}1)-(5-x)(x+5)=-20{,}59$.

B

Көбейтуді орындаңдар **(31.12—31.14):**

31.12. 1) $(4a^2-y)(y+4a^2)$; 2) $(0{,}3b^3+x)(0{,}3b^3-x)$;
3) $(1{,}1c^2+z^2)(z^2-1{,}1c^2)$; 4) $(21d^2-k^3)\cdot(21d^2+k^3)$;
5) $(5a^3-4b^2)(4b^2+5a^3)$; 6) $(1{,}9c^4+6d)(6d-1{,}9c^4)$.

31.13. 1) $\left(\frac{1}{3}a-\frac{1}{2}b\right)\left(\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b\right)$; 2) $\left(1\frac{4}{7}x^5-z^2\right)\left(1\frac{4}{5}x^5+z^2\right)$;
3) $\left(\frac{2}{3}m+\frac{3}{4}n\right)\left(\frac{2}{3}m-\frac{3}{4}n\right)$; 4) $\left(m^6-2\frac{1}{3}n^5\right)\left(2\frac{1}{3}n^5+m^6\right)$.

31.14. 1) $(0{,}2a-1{,}3b)(0{,}2a+1{,}3b)$; 2) $(0{,}1x^3+2{,}5z)(0{,}1x^3-2{,}5z)$;
3) $(a^5-b^2)(a^5+b^2)$; 4) $(x^4+y^3)(x^4-y^3)$;
5) $(7t^2-3y)(7t^2+3y)$; 6) $(4a^2+9c^4)(4a^2-9c^4)$.

Көбейткіштерге жіктеңдер **(31.15-31.16):**

31.15. 1) x^3-100x; 2) $2y^3-32y$; 3) $0{,}16y^6-y^4$;
4) $\frac{2}{3}x^5-\frac{8}{27}x^3$; 5) $\frac{9}{16}x^4-\frac{16}{9}x^2$; 6) $3y^5-\frac{3}{25}y^7$.

31.16. 1) $x^4-0{,}49y^2$; 2) $-0{,}64z^4+t^6$; 3) $0{,}81a^8-b^2$;
4) $\frac{361}{400}m^2-n^{10}$; 5) $c^6-\frac{289}{324}d^4$; 6) $5{,}76x^{12}-\frac{4}{81}y^8$.

31.17. Көпмүшені көбейтінді түрінде жазыңдар:
1) m^2-n^2-m+n; 2) $9x^2-4y^2-3x+2y$;
3) $x^3+3x^2-4x-12$; 4) $81-(3-8y)^2$;
5) $(x+5)^2-16$; 6) $36-(y+1)^2$;
7) $(3x-7)^2-25$; 8) $(4-5x)^2-64$.

Есептеңдер **(31.18-31.19):**

31.18. 1) $\frac{20^2-13^2}{31^2-24^2}$; 2) $\frac{17^2-22^2}{49^2-10^2}$;
3) $\frac{37^2-47^2}{72^2-12^2}$; 4) $\frac{100^2-60^2}{70^2-90^2}$.

31.19. 1) $\frac{38^2-28^2}{47^2-19^2}$; 2) $\frac{53^2-25^2}{79^2-51^2}$;
3) $\frac{181^2-61^2}{319^2-77^2}$; 4) $\frac{200^2-380^2}{420^2-160^2}$.

Көбейтіндіні көпмүше түрінде жазыңдар (31.20-31.21):

31.20. 1) $(5-a)(5+a)\cdot(25+a^2)$;
2) $(3x+2)(3x-2)(9x^2+4)$;
3) $\left(\frac{1}{3}+2b\right)\cdot\left(\frac{1}{3}-2b\right)\left(\frac{1}{9}+4b^2\right)$;
4) $\left(6c^2-\frac{2}{7}\right)\cdot\left(6c^2+\frac{2}{7}\right)\left(36c^4+\frac{4}{49}\right)$.

31.21. 1) $(a-y)(a+y)(a^2+y^2)$; 2) $(7x+1)(7x-1)(49x^2+1)$;
3) $(x-6y^3)\cdot(x+6y^3)$; 4) $(8+x^3)(8-x^3)\cdot(64+x^6)$;
5) $(25x^2+y^2)(5x+y)(5x-y)$; 6) $(16a^4+81b^4)(9b^2+4a^2)(4a^2-9b^2)$.

C

Теңдеудің түбірін табыңдар:

31.22. 1) $x^4-3x^3-x^2+3x=0$; 2) $x^5-x^4-x+1=0$;
3) $(1-3x)^2=(3x+5)^2-96$; 4) $\left(\frac{1}{2}-5x\right)^2+\frac{3}{4}=(5x-4)^2$;
5) $x(x+2)-(x+3)(x-3)=13$; 6) $4x(x-1)-(2x+5)(2x-5)=1$.

31.23. Теңсіздікті шешіңдер:
1) $(10-x)(x+10)+x^2\le x+90$;
2) $y^2-(y-8)(8+y)-4>32-y$;
3) $x(x+0,3)-(x-0,3)(x+0,3)\ge 0,1$;
4) $27-(1,2-y)(-y-1,2)<1,44-y^2-y$.

31.24. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:
1) $(1+a)(1-a)(1+a^2)-5+a^4=-4$;
2) $5a^2-3(a+1)(a-1)+8a^2+5=10a^2+8$;
3) $7(a^2+2)-4(a+3)(a-3)+3a^2+24=6a^2+74$;
4) $10(a^2-15)-12(a-4)(a+4)+8-a^2=50-3a^2$.

31.25. 1) $25a^4x^2z^{10}-9b^6y^2z^{10}$; 2) $(9a^4-4b^6)a^2b^2-12a^2b^8$ өрнегін көбейтінді түрінде жазыңдар.

31.26. k-ның қандай ең кіші натурал мәнінде:
1) $(k-3)^2-(k+3)^2$ өрнегі 15-ке;
2) $(7k+2)^2-(7k-2)^2$ өрнегі 21-ге бөлінеді?

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

31.27. Шаршы қабырғасының ұзындығы 13 см. Шаршы қабырғасының ұзындығын 2 см-ге арттырған. Шыққан шаршының ауданын табыңдар.

31.28. $4a^2-4a+1$ өрнегін топтау тәсілін қолданып, екі бірдей көбейткіштерге жіктеңдер.

§ 32. ЕКІ ӨРНЕКТІҢ ҚОСЫНДЫСЫНЫҢ ЖӘНЕ АЙЫРЫМЫНЫҢ КВАДРАТЫНЫҢ ФОРМУЛАЛАРЫ

Екі өрнектің қосындысы мен айырымын қалай тиімді жолмен табуға болады?

Екі өрнектің (мүшенің) қосындысына тең $(a + b)$ екімүшесінің квадратын қарастырайық.

$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b)$ екені белгілі. Көпмүшені көпмүшеге көбейту ережесі бойынша

$$(a + b)\cdot(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Демек, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Шыққан формула екімүшенің қосындысының квадратын үш бірмүшенің қосындысы (үшмүше) түрінде жазуға мүмкіндік береді.

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ формуласы қосындының немесе екі өрнектің қосындысының квадратының формуласы деп аталады.

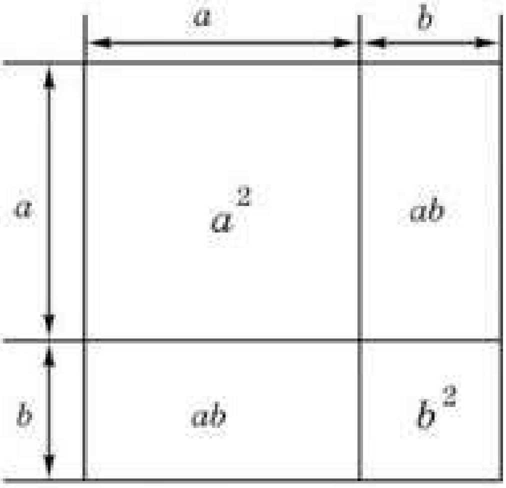
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ формуласының оқылуы:

екі өрнектің қосындысының квадраты бірінші өрнектің квадраты мен бірінші өрнек пен екінші өрнектің екі еселенген көбейтіндісі және екінші өрнектің квадратының қосындысына тең.

32.1-суретте аталған формуланың геометриялық кескіні берілген.

Түсіндіріңдер

32.1-суреттің көмегімен $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ формуласын қалай алуға болады?



32.1-сурет

1-мысал. $(5n + 2m)^2$ екімүшесін үшмүше түрінде жазайық.

Шешуі. a-ның орнына $5n$-ді, ал b-ның орнына $2m$-ді алып, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ формуласын қолданамыз:

$$(5n + 2m)^2 = (5n)^2 + 2\cdot(5n)\cdot(2m) + (2m)^2 = 25n^2 + 20nm + 4m^2.$$

Жауабы: $25n^2 + 20nm + 4m^2$.

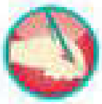
2-мысал. $0,49c^2 + 1,4cd + d^2$ үшмүшесін екі өрнектің квадраты түрінде жазайық.

Шешуі. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ формуласын қолдану үшін берілген үшмүшені түрлендіреміз: $0{,}49\,c^2 + 1{,}4\,cd + d^2 = (0{,}7\,c)^2 + 2\cdot(0{,}7\,c)\cdot d + d^2$ немесе $(0{,}7\,c)^2 + 2\cdot(0{,}7\,c)\cdot d + d^2 = (0{,}7\,c + d)^2$.

Жауабы: $(0{,}7\,c + d)^2$.

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ формуласы **екі өрнектің айырымының квадратының формуласы** деп аталады.

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ формуласының оқылуы:
екі өрнектің айырымының квадраты бірінші өрнектің квадраты минус бірінші өрнек пен екінші өрнектің екі еселенген көбейтіндісі плюс екінші өрнектің квадратының айырымына тең.

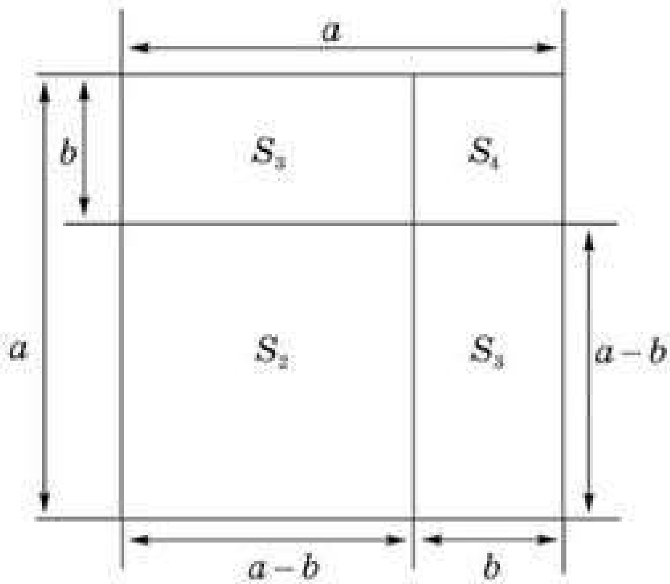


Екімүшенің қосындысы квадратының формуласы тәрізді, көпмүшені көпмүшеге көбейту ережесін қолданып, екімүшенің айырымы квадратының формуласын өздерің дәлелдеп көріңдер.

32.2-суретті қолданып, екімүшенің айырымы квадратының формуласын геометриялық тәсілмен дәлелдеуге болады.

32.2-суретте қабырғасы a-ға тең, ауданы $S_1 = a^2$ шаршы; қабырғасы $(a-b)$, ауданы $S_2 = (a-b)^2$ болатын шаршы; әрқайсысының қабырғалары $(a-b)$ және b-ға тең, ауданы $S_3 = (a-b)\cdot b$ болатын өзара тең екі тіктөртбұрыш және қабырғасы b-ға тең, ауданы $S_4 = b^2$ болатын шаршы берілген.

Үлкен шаршының S_1 ауданы S_2, $2S_3$, S_4 аудандарының қосындысына тең: $S_1 = S_2 + 2S_3 + S_4$. Енді S_1, S_2, S_3, S_4-тің орнына мәндерін қойсақ, $a^2 = (a-b)^2 + 2(a-b)\cdot b + b^2$ немесе $a^2 - 2(a-b)\cdot b - b^2 = (a-b)^2$ шығады. Бұдан $a^2 - 2ab + 2b^2 - b^2 = (a-b)^2$ немесе $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$.



32.2-сурет

3-мысал. $\left(\frac{1}{7}n - 3m^2\right)^2$ екі өрнектің айырымының квадратын үшмүше түрінде жазайық.

Шешуі. Екі өрнектің айырымының квадраты

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

формуласын қолданамыз:

$$\left(\frac{1}{7}n - 3m^2\right)^2 = \left(\frac{1}{7}n\right)^2 - 2\cdot\left(\frac{1}{7}n\right)\cdot(3m^2) + (3m^2)^2 = \frac{1}{49}n^2 - \frac{6}{7}nm^2 + 9m^4.$$

Жауабы : $\frac{1}{49}n^2 - \frac{6}{7}nm^2 + 9m^4$.

4-мысал. $0{,}36\,a^6 - 9{,}6\,a^3b + 64\,b^2$ үшмүшесін айырымның квадраты түрінде жазайық.

Шешуі. Айырымның квадраты формуласын қолдану үшін $0{,}36\,a^6 - 9{,}6\,a^3b + 64\,b^2$ өрнегін былай жазамыз: $0{,}36\,a^6 - 9{,}6\,a^3b + 64\,b^2 = (0{,}6\,a^3)^2 - 2\cdot(0{,}6\,a^3)\cdot(8b) + (8b)^2$.

Соңғы теңдіктің оң жақ бөлігі екі мүшенің айырымының квадратын бергендіктен, $(0{,}6\,a^3)^2 - 2\cdot(0{,}6\,a^3)\cdot(8b) + (8b)^2 = (0{,}6\,a^3 - 8b)^2$. Демек, $0{,}36\,a^6 - 9{,}6\,a^3b + 64\,b^2 = (0{,}6\,a^3 - 8b)^2$.

Жауабы : $(0{,}6\,a^3 - 8b)^2$.

Қосындының квадраты мен айырымның квадраты формулаларын бір теңдікпен жазуға болады:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2.$$

1. Қосындының квадраты мен айырымның квадраты формулаларының ұқсастығы мен ерекшелігін атаңдар.
2. Қосындының квадраты мен айырымның квадраты формулаларының "солдан оңға" және "оңнан солға" қарай қолданылуы неге байланысты?

Жаттығулар

A

Көпмүше түрінде жазыңдар **(32.1-32.2)** :

32.1. 1) $(m - 3)^2$; 2) $(x + 5)^2$; 3) $(6 + y)^2$; 4) $(b - 9)^2$;
5) $(4 + d)^2$; 6) $(p + q)^2$; 7) $(z^2 - y)^2$; 8) $(a + 1)^2$.

32.2. 1) $\left(a + \frac{1}{7}\right)^2$; 2) $\left(\frac{1}{9} + b\right)^2$; 3) $\left(\frac{n}{4} + \frac{m}{3}\right)^2$; 4) $\left(\frac{k}{2} - \frac{t}{5}\right)^2$;

5) $\left(4\frac{1}{3}-x\right)^2$; 6) $\left(y+3\frac{1}{4}\right)^2$; 7) $\left(z-5\frac{1}{5}\right)^2$; 8) $\left(4\frac{1}{2}+t\right)^2$.

32.3. Дәреженің негізін қосынды немесе айырым түрінде жазып, мәнін есептеңдер:

1) 101^2; 2) 102^2; 3) 103^2; 4) 104^2;
5) 99^2; 6) 98^2; 7) 97^2; 8) 96^2.

Үшмүшені екімүшенің қосындысының квадраты түрінде жазыңдар (32.4—32.7):

32.4. 1) a^2+2a+1; 2) $b^2-8b+16$;
3) $c^2+10c+25$; 4) $n^2+14n+49$;
5) $100-20z+z^2$; 6) $81+18b+b^2$.

32.5. 1) $0{,}16-0{,}8t+t^2$; 2) $z^2+1{,}4z+0{,}49$;
3) $0{,}36-1{,}2b+b^2$; 4) $2{,}25-3x+x^2$;
5) $y^2-3{,}2y+2{,}56$; 6) $3{,}61+3{,}8d+d^2$.

32.6. 1) $\frac{4}{9}+\frac{4}{3}a+a^2$; 2) $\frac{9}{25}+\frac{6}{5}b+b^2$;
3) $\frac{16}{49}+\frac{8}{7}c+c^2$; 4) $\frac{100}{121}k^2-\frac{20}{11}tk+t^2$;
5) $m^2-\frac{22}{13}mn+\frac{121}{169}n^2$; 6) $\frac{400}{441}t^2+\frac{40}{21}nt+n^2$.

32.7. 1) $\frac{25}{4}+5x+x^2$; 2) $\frac{9}{16}-\frac{3}{2}y+y^2$;
3) $\frac{49}{36}-\frac{7}{3}z+z^2$; 4) $n^2-\frac{9}{4}cn+\frac{81}{64}c^2$;
5) $m^2+\frac{11}{6}m+\frac{121}{144}$; 6) $t^2-\frac{17}{5}dt+\frac{289}{100}d^2$.

Өрнекті ықшамдаңдар (32.8—32.10):

32.8. 1) $(x+5)\cdot 6+(x-3)^2$; 2) $(y-4)^2-(y+2)\cdot 8$;
3) $26-a^2-(5-a)^2$; 4) $(k+7)^2-14k-50$;
5) $0{,}3+b^2-(b-0{,}5)^2$; 6) $15+(0{,}4+c)^2-0{,}8c^2$.

32.9. 1) $(a-4b)^2-8ab-17b$; 2) $-9c^2+(3c+d)^2-d^2$;
3) $(5a-6)^2-(5a-6)(5a+6)$; 4) $(7b-t)(t+7b)+(7b+t)^2$;
5) $(9-8b)(2b+3)+(4b-1)^2$; 6) $(11c+3)^2-2c(5{,}5c+33)$.

32.10. 1) $a(a-2b)-(3b+a)^2$; 2) $(m+8)^2-(m-2n)(m+2n)$;
3) $3(b-10)^2+8b-5b^2$; 4) $(n+15)^2-n(n-19)$;
5) $4c(9c-3)-(6c+1)^2$; 6) $(6-5m)(5m+6)+(5m-4)^2$.

Екімүшенің қосындысының немесе айырымының квадраты түрінде жазыңдар (32.11-32.12):

32.11. 1) $9y^2 - 12xy + 4y^2$; 2) $25t^2 + 30t + 9$;
3) $16k^2 - 40k + 25$; 4) $121a^2 - 44ac + 4c^2$;
5) $4n^2 + 52mn + 169m^2$; 6) $36t^2 - 84ts + 49s^2$.

32.12. 1) $0{,}04x^2 - 1{,}2xy + 9y^2$; 2) $36c^2 + 6cd + 0{,}25d^2$;
3) $1{,}96k^2 - 14kt + 25t^2$; 4) $\frac{1}{49}a^2 + \frac{2}{21}ab + \frac{1}{9}b^2$;
5) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}xy + \frac{9}{64}y^2$; 6) $81d^2 - \frac{27}{2}cd + \frac{9}{16}c^2$.

Үшмүшені көбейткіштерге жіктеңдер (32.13-32.14):

32.13. 1) $5x^2 + 20x + 20$; 2) $2x^2 - 12x + 18$; 3) $-3x^2 + 18x - 27$;
4) $-2y^2 - 16y - 32$; 5) $6x^2 + 12x + 6$; 6) $-10a^2 + 20a - 10$.

32.14. 1) $a^3 + 2a^2 + a$; 2) $x^2y - 6xy + 9y$;
3) $c^4 - 4c^3 + 4c^2$; 4) $2ay^2 - 4ay + 2a$;
5) $\frac{1}{9}a - \frac{8}{9}ab + \frac{16}{9}ab^2$; 6) $0{,}5cd - acd + 0{,}5a^2cd$.

Теңдеуді шешіңдер (32.15—32.17):

32.15. 1) $(x + 11)^2 - x^2 = 11$; 2) $69 - (13 - y)^2 = -y^2$;
3) $44 + z^2 = (12 + z)^2$; 4) $31 - t^2 = -(t - 9)^2$.

32.16. 1) $(a - 3)^2 - (a + 8)(a - 8) = 0$; 2) $(9 - b)(b + 9) + (4 - b)^2 = 0$;
3) $(c - 6)^2 - (7 + c)^2 = 0$; 4) $(d - 10)^2 + (4 - d)(d + 4) = 0$.

32.17. 1) $x(x - 4) = 2 + (x - 1)^2$; 2) $(x + 2)(x - 3) - 3 = (x + 1)^2$;
3) $y(5 - y) = 1 - (y + 2)^2$; 4) $(y - 1)^2 - (y + 1)(y - 7) = 0$.

Теңсіздікті шешіңдер (32.18—32.20):

32.18. 1) $n^2 - (n + 1)^2 > 2$; 2) $(1 - t)^2 - t^2 > 3$;
3) $(m - 2)^2 - 4 < m^2$; 4) $m^2 + 9 < (1 - m)^2$.

32.19. 1) $x(x - 5) - (x - 3)^2 < 0$; 2) $(4 + y)^2 - y(6 + y) > 0$;
3) $(17 - y)^2 > y(y - 13) - 5$; 4) $z(z - 10) > (3 - z)^2$.

32.20. 1) $(x + 9)(x - 2) - (x - 2)^2 > 0$; 2) $(10 - x)^2 + (x + 10)(10 - x) < 0$;
3) $(5 - x)(x + 5) + (x - 5)^2 > 0$; 4) $(4 + x)(2 - x) + (1 - x)^2 > 0$.

B

Дәрежені көпмүше түрінде жазыңдар (32.21-32.22):

32.21. 1) $(3x - 8y)^2$; 2) $(7z + 11d)^2$;
3) $(3{,}5t - 4k)^2$; 4) $(5k + 1{,}2t)^2$;

5) $\left(\frac{2}{3}a - \frac{3}{7}b\right)^2$; 6) $\left(\frac{7}{8}c - \frac{4}{7}d\right)^2$.

32.22. 1) $(1,3\,m^2 + 4n^2)^2$; 2) $(2,5\,a^2 + 4b)^2$;

3) $\left(\frac{5}{2}p - 0,5q^3\right)^2$; 4) $\left(2,4m^3 - \frac{3}{4}t\right)^2$;

5) $\left(\frac{7}{4} + 0,6b^4\right)^2$; 6) $\left(\frac{3}{8}a - \frac{2}{3}b^4\right)^2$.

32.23. Көпмүшені екінші көпмүшенің квадраты түрінде жазыңдар:

1) $a^{10} - 10a^5b^8 + 25b^{16}$; 2) $a^6 + 6a^3x^4 + 9x^8$;

3) $81a^6 - 90a^3b^2c + 25b^4c^2$; 4) $16x^2 + 24x^3 + 9x^4$.

32.24. Үшмүшені екімүшенің квадраты түрінде жазыңдар:

1) $x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$; 2) $\frac{x^2}{y^2} - 2 + \frac{y^2}{x^2}$; 3) $\frac{a^2}{b^2} - 2a + b^2$;

4) $\frac{a^2}{4b^2} + 2 + \frac{4b^2}{a^2}$; 5) $\frac{1}{4x^2} + 1 + x^2$; 6) $\frac{9x^2}{4y^2} - \frac{1}{y} + \frac{1}{9x^2}$.

32.25. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $(11a - b)^2 + (9a + 7b)(8a - 13b)$;

2) $(18x + 5y)(2x - 4y) - (6x - 3y)^2$;

3) $4x(3x - 2y) - (10y - 0,4x)^2$;

4) $(15a + 2b)^2 - (3a - 7b)(3b - 5a)$.

Теңдеуді шешіңдер (32.26-32.27):

32.26. 1) $(2a - 11)(11 + 2a) - (2a - 5)^2 = 0$;

2) $(4 + 9b)^2 + (9b + 2)(2 - 9b) = 0$;

3) $(2,5 - 8c)^2 - (8c - 1,5)(8c + 1,5) = 0$;

4) $\left(\frac{3}{4} - 5d\right)\left(5d + \frac{3}{4}\right) + \left(5d - \frac{3}{4}\right)^2 = 0$.

32.27. 1) $(7 - 8x)(2x + 1) + (4x - 1)^2 = 0$;

2) $(2x - 5)^2 - (2x - 3)(2x + 3) = 15$;

3) $(3x + 5)(3x - 5) - (3x - 1)^2 = -4$;

4) $(9x + 2)(1 - 4x) + (5 - 6x)^2 = -32$.

Теңсіздікті шешіңдер (32.28—32.30):

32.28. 1) $(3,5 - x)(4x + 1) + (2x + 3)^2 < 0$;

2) $8(y - 3)^2 + (5 - y)(3 + 8y) > 2$;

3) $\left(3z + \frac{1}{3}\right)^2 - (1,5z + 1)(6z - 1) > 0;$

4) $\left(7z - \frac{1}{7}\right)^2 - (24,5z + 11)(2z - 1) > 0.$

32.29. 1) $(4x - 3)(4x + 3) - (4x - 1)^2 < 3x;$
2) $3(x - 1)^2 - 3x(x - 5) > 21;$
3) $10(x - 2)^2 - 5x(2x - 1) < -30;$
4) $(5x + 6)^2 - (5x - 6)^2 > 12.$

32.30. 1) $(3x - 1)^2 - 7 < (9x + 2)x + 2;$
2) $2x(8x + 3) + 1 > (5 - 4x)^2 - 1;$
3) $(0,3x + 0,2)^2 + 0,58x > 3,9 - (2 - 0,3x)(2 + 0,3x);$
4) $(0,2 - 0,8x)^2 + 11,16 < (0,5 + 0,8x)^2 - 0,25.$

32.31. Айнымалының кез келген мәнінде өрнектің мәні теріс сан болатынын дәлелдеңдер:
1) $5(3 - 5a)^2 - 5(3a - 7)(3a + 7) - 80a^2 + 150a - 300;$
2) $3(a - 1)^2 + 5(a + 1)(a - 1) - 8a^2 + 6a;$
3) $(m - 1)^2 - 4(m + 1)^2 + 3m^2 + 10m;$
4) $5(1 - y)^2 - (3 + y)^2 - 4y^2 + 16y.$

32.32. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $\left(\frac{3}{5}a^{3n+1}b^2 + \frac{2}{3}a^{n-1}b^3\right)^2 - \frac{4}{45}a^{2n-2}b^5(9a^{2n+2} + 5b) + \frac{16}{25}a^{6n+2}b^4 =$
$= a^{6n+2}b^4;$

2) $\left(\frac{5}{6}x^{2n-1}y^n - \frac{3}{5}x^{n+1}y^2\right)^2 - \frac{1}{36}x^{3n}y^{n+2}(25x^{n-2}y^{n-2} - 36) =$

$= \frac{9}{25}x^{2n+2}y^4.$

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

32.33. Текше қабырғасының ұзындығы a см-ге тең. Егер текшенің қабырғасын 1) 2 см-ге ұлғайтқанда; 2) 3 см-ге қысқартқанда шығатын текшенің көлемін формула арқылы өрнектеңдер.

32.34. Текше қабырғасының ұзындығы a см. Текше қабырғасының ұзындығы 4 см-ге ұлғайған. Егер текше қабырғасының ұзындығы 8 см-ге тең болса, онда оның көлемі қанша артады?

§ 33. ЕКІ ӨРНЕКТІҢ ҚОСЫНДЫСЫНЫҢ КУБЫ МЕН АЙЫРЫМЫНЫҢ КУБЫ ФОРМУЛАЛАРЫ

Екі өрнектің қосындысының кубы мен айырымының кубын қалай тиімді жолмен табуға болады?

Алдыңғы параграфта қосындының квадраты $(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$ формуласымен таныстыңдар. Енді қосындының кубы $(a + b)^3$ өрнегін көпмүше түрінде жазайық. Ол үшін $a + b$ екімүшесін өз-өзіне үш рет көбейту керек, яғни

$$(a + b)^3 = (a + b) \cdot (a + b) \cdot (a + b).$$

Осы теңдіктің оң жақ бөлігін $(a + b) \cdot (a + b) \cdot (a + b) = (a + b)^2 \cdot (a + b)$ түрінде жазайық. Біріншi көбейткіш қосындының квадратын береді. Сондықтан $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ формуласын қолданып, $(a + b)^2 \cdot (a + b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b)$ аламыз. Енді көпмүшелерді көбейту формуласын қолданамыз: $(a^2 + 2ab + b^2)(a + b) = a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Сонымен

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Бұл формуланы *екі өрнектің қосындысының кубы формуласы* деп атайды.

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ формуласын өздерің оқып көріңдер.

1-мысал. $4m + 3n$ өрнегінің кубын табайық.

Шешуі. Қосындының кубы формуласын қолданамыз:
$(4m + 3n)^3 = (4m)^3 + 3 \cdot (4m)^2 \cdot 3n + 3 \cdot 4m \cdot (3n)^2 + (3n)^3 = 64m^3 + 144m^2n + 118mn^2 + 27n^3$.

Жауабы: $64m^3 + 144m^2n + 108mn^2 + 27n^3$.

2-мысал. $t^6 + 15t^4k + 75t^2k^2 + 125k^3$ көпмүшесін екімүшенің кубы түрінде жазайық.

Шешуі. Берілген көпмүшені былай түрлендіреміз:

$$t^6 + 15t^4k + 75t^2k^2 + 125k^3 = (t^2)^3 + 3 \cdot (t^2)^2 \cdot 5k + 3 \cdot t^2 \cdot (5k)^2 + (5k)^3.$$

Соңғы теңдіктің оң жақ бөлігінде тұрған көпмүше екімүшенің кубының формуласын береді, сондықтан оны

$$(t^2)^3 + 3(t^2)^2 \cdot 5k + 3t^2 \cdot (5k)^2 + (5k)^3 = (t^2 + 5k)^3$$

түрінде жазамыз. Сонымен

$$t^6 + 15t^4k + 75t^2k^2 + 125k^3 = (t^2 + 5k)^3.$$

Жауабы: $(t^2 + 5k)^3$.

Екі өрнектің айырымының кубының формуласы:

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ формуласының оқылуы: екі өрнектің айырымының кубы бірінші өрнектің кубы минус үш еселенген бірінші өрнектің квадраты мен екінші өрнектің көбейтіндісі плюс үш еселенген бірінші өрнек пен екінші өрнектің квадраты минус екінші өрнектің кубы.

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ формуласының дұрыстығын өздерің дәлелдеп көріңдер.

3-мысал. $\left(\frac{1}{4}p - s\right)^3$ өрнегін көпмүше түрінде жазайық.

Шешуі. Екімүшенің айырымының кубы формуласын қолдансақ,

$$\left(\frac{1}{4}p - s\right)^3 = \left(\frac{1}{4}p\right)^3 - 3\cdot\left(\frac{1}{4}p\right)^2\cdot s + 3\cdot\left(\frac{1}{4}p\right)\cdot s^2 - s^3 =$$

$$= \frac{1}{64}p^3 - \frac{3}{16}p^2s + \frac{3}{4}ps^2 - s^3.$$

Жауабы : $\frac{1}{64}p^3 - \frac{3}{16}p^2s + \frac{3}{4}ps^2 - s^3$.

4-мысал. $8x^3 - 3{,}6x^2y + 0{,}54xy^2 - 0{,}027y^3$ көпмүшесін екі өрнектің айырымының кубы түрінде жазайық.

Шешуі. Берілген көпмүшені былай түрлендіреміз: $8x^3 - 3{,}6x^2y + 0{,}54xy^2 - 0{,}027y^3 = (2x)^3 - 3\cdot(2x)^2\cdot(0{,}3y) + 3\cdot(2x)\cdot(0{,}3y)^2 - (0{,}3y)^3$.

Соңғы теңдіктің оң жақ бөлігі $2x$ және $0{,}3y$ өрнектерінің айырымының кубын береді.

Демек, $(2x)^3 - 3(2x)^2\cdot(0{,}3y) + 3\cdot(2x)\cdot(0{,}3y)^2 - (0{,}3y)^3 = (2x - 0{,}3y)^3$.

Сонымен $8x^3 - 3{,}6x^2y + 0{,}54xy^2 - 0{,}027y^3 = (2x - 0{,}3y)^3$.

Жауабы : $(2x - 0{,}3y)^3$.

1. Қосындының және айырымның кубы формулаларын бір теңдік арқылы қалай жазуға болады?
2. Қосындының кубы формуласын қорытып шығару кезінде қандай ережелер қолданылды?

Жаттығулар

A

Көпмүше түрінде жазыңдар **(33.1—33.4)**:

33.1. 1) $(2+x)^3$; 2) $(a-2)^3$; 3) $(5-b)^3$; 4) $(y+3)^3$; 5) $(a-c)^3$; 6) $(c+d)^3$; 7) $(z-t)^3$; 8) $(k+m)^3$.

33.2. 1) $(4x+1)^3$; 2) $(1-3y)^3$; 3) $(5z-2)^3$; 4) $(4x-3)^3$; 5) $(a+2x)^3$; 6) $(2y-3)^3$; 7) $(p-3q)^3$; 8) $(3n-2m)^3$.

33.3. 1) $(0,2a+5)^3$; 2) $(4-0,5b)^3$; 3) $(0,6c-5)^3$; 4) $\left(\frac{1}{2}d-2\right)^3$; 5) $\left(\frac{1}{3}t+3\right)^3$; 6) $\left(2-\frac{1}{4}k\right)^3$.

33.4. 1) $(4x+0,1y)^3$; 2) $(0,2a+30b)^3$; 3) $\left(\frac{1}{7}a-7c\right)^3$; 4) $(0,3b-10c)^3$; 5) $(0,5x-2y)^3$; 6) $\left(\frac{2}{9}n+\frac{9}{2}m\right)^3$.

Екімүшенің кубы түрінде жазыңдар **(33.5-33.6)**:

33.5. 1) x^3-3x^2+3x-1; 2) y^3-3y^2+3y-1; 3) $8+12p+6p^2+p^3$; 4) $1-6q+12q^2-8q^3$; 5) $125-75a+15a^2-a^3$; 6) $0,008+0,12p+0,6p^2+p^3$.

33.6. 1) $a^3-6a^2b+12ab^2-8b^3$; 2) $27m^3+27m^2n+9mn^2+n^3$; 3) $8p^3+27q^3+54pq^2+36p^2q$; 4) $x^3y^3-6x^2y^2+12xy-8$.

33.7. Өрнекті ықшамдап, айнымалының берілген мәндері үшін есептеңдер:
1) $(3a-1)^3-27a^3+5$, мұндағы $a=-1;\ 0;\ 1$;
2) $(0,7b-2)^3-(0,7b+2)^3$, мұндағы $b=-2;\ -1;\ 1$;
3) $(5x-4)^3+(5x-2)^3-250x^3$, мұндағы $x=0,5;\ 0;\ -1$;
4) $(0,2+5y)^3-(0,5+2y)^3-117y^3$, мұндағы $y=-1;\ 0;\ 2$.

Теңдеуді шешіңдер **(33.8-33.9)**:

33.8. 1) $(x+1)^3-4x=5+x^2(x+3)$;
2) $(1-y)^3+8y=7+y^2(3-y)$;
3) $(x+1)^3+(x-1)^3-2x^3=12$;
4) $(1+y)^3+(1-y)^3-6y^2=3y-1$.

33.9. 1) $(2+x)^3-x^2(6+x)=11x+19$;
2) $(z-2)^3-z^2(z-6)=13z-7$;
3) $(y+3)^3-2y-30=y^2(9+y)$;
4) $(3-t)^3+3t+21=-t^2(t-9)$.

33.10. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер.

1) $(3a+b)^3-(a+3b)^3-18ab(a-b)=26(a^3-b^3)$;

2) $(x+4y)^3+(4x-y)^3+12xy(3x-5y)-128y^3=65(x^3-y^3)$.

B

33.11. Көпмүше түрінде жазыңдар:

1) $(a^2-b^2)^3$; 2) $(m^2+n^2)^3$; 3) $(2a^2+b^2)^3$;

4) $(x^4-6y^2)^3$; 5) $(7m^3-n^4)^3$; 6) $\left(a^3-\frac{1}{3}b^2\right)^3$;

7) $(0{,}3x^5-0{,}5y^2)^3$; 8) $\left(0{,}6x^4-\frac{1}{2}y^3\right)^3$; 9) $\left(\frac{1}{5}a^2+0{,}36^4\right)^3$.

33.12. Көпмүшені екімүшенің кубы түрінде жазыңдар:

1) $8x^3-60x^2y+150xy^2-125y^3$;

2) $64a^{15}+144a^{10}b^3+108a^5b^6+27b^9$;

3) $0{,}125a^9-0{,}15a^6b^4+0{,}06a^3b^8-0{,}008b^{12}$;

4) $0{,}216x^{12}+0{,}54x^8y^5+0{,}45x^4y^{10}+0{,}125y^{15}$.

Өрнекті ықшамдаңдар **(33.13-33.14)** :

33.13. 1) $(x^2+1)^3-3(x^2-1)^2-5x(x-2)+10$;

2) $(x-2)^3+20(2x-1)^3+x(x-5)$;

3) $(1-3y)^3-3(y+3)^3+10y(y^2-2)$;

4) $(y^3+2)^3-y^6(y^3-6)+2(y-2)^2$.

33.14. 1) $(x+5)^3-(x+1)^3-4(3x^2-5)+10x-7$;

2) $(x-3)^3-x^2(x+6)-5x(5-3x)-19x+1$;

3) $(y+4)^3+(3y+1)^3-7y^2(4y+9)+24y^2+8$;

4) $(4y-5)^3-(4y+5)^3-48y(1-10y)+5-14y^2$.

Теңдеуд і шеш іңдер **(33.15-33.16)** :

33.15. 1) $(x+2)^3-(x-2)^3=2x(6x+2)$;

2) $(x+3)^3-(x-4)^3=21x^2+7$;

3) $(x+2)^3+3x^2-11=(x+3)^3$;

4) $(x-3)^3=x^2(x-9)+27$.

33.16. 1) $(6-x)^3-x^2(16-x)=2x^2+116$;

2) $(y+7)^3+y(13-y^2)=21y^2+23$;

3) $(4-3z)^3+z(14+27z^2)=108z^2+77$;

4) $(5x+2)^3-25x(5x^2-4)=150x^2+21$.

C

33.17. Теңсіздіктің шешімі болатын ең үлкен бүтін санды табыңдар:

1) $(2-3x)^3-54x^2 \le -27x^3-41x$;

2) $(3+2x)^3-36x^2 \ge 60x+8x^3$.

33.18. Теңсіздіктің шешімі болатын ең кіші бүтін санды табыңдар:

1) $(x-7)^3+42x^2 \ge (x+7)^3+14-7x$;

2) $(6+x)^3-220x \le 2x^3-(x-6)^3+19$.

33.19. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $(b+5)^3-b(b-5)^2-25(1+b)^2=100$;

2) $5(1-b)^3+5b(1+b)^2-(1-5b)^2=4$;

3) $(2b-3)^3-4b^2(2b-6)+6b(2b-9)=-27$;

4) $(b+2)^3+(2b+1)^3-9b(b^2+2b+2)-10=-1$.

33.20. Айнымалылардың кез келген мәнінде өрнектің мәні нөлге тең болатынын дәлелдеңдер:

1) $(a+x)^3-a(a+x)^2-x^2(2a+x)-a^2x$;

2) $(a-1)^3+3(a-1)^2+3(a-1)+1-a^3$;

3) $(x^3+y^3)^2-(x^2+y^2)^3+3x^2y^2(x+y)^2-8x^3y^3$;

4) $(m-3n)^3-(2m-3n)(3mn+(m-3n)^2)+m^3$.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

33.21. Амалдарды орындаңдар:

1) $(a+2b)(a^2+ab+b^2)$;   2) $(a-3b)(a^2+3ab+9b^2)$.

33.22. Бірінші текшенің қабырғасының ұзындығы a см-ге, ал екінші текшенің қабырғасының ұзындығы b см-ге тең. Текшелер көлемдерінің қосындысын формула арқылы өрнектеңдер.

§ 34. ЕКІ ӨРНЕКТІҢ КУБТАРЫНЫҢ ҚОСЫНДЫСЫ МЕН АЙЫРЫМЫНЫҢ ФОРМУЛАЛАРЫ

Екі өрнектің кубтарының қосындысы мен айырымын қалай тиімді жолмен табуға болады?

Өрнектерді түрлендіру кезінде екі өрнектің (мүшенің) квадраттарының айырымы

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b);$$

екі өрнектің қосындысы мен айырымының квадраты

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$

екі өрнектің қосындысы мен айырымының кубы

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

формулаларымен қатар екі өрнектің кубтарының қосындысы және кубтардың айырымы формулалары $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$ кеңінен қолданылады.

Кубтардың қосындысы $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ формуласының дұрыстығын дәлелдейік. Ол үшін көпмүшені көпмүшеге көбейту ережесін қолданып, теңдіктің оң жағын түрлендіреміз:

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3.$$

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ формуласының оқылуы:

екі өрнектің кубтарының қосындысы осы екі өрнектің қосындысы мен олардың айырымының толымсыз квадратының көбейтіндісіне тең.

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ теңдігінің дұрыстығын өздерің дәлелдеп көріңдер. $a^3 + b^3$ формуласы тәрізді $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ формуласын өздерің тұжырымдап көріңдер.

1-мысал. $n^6 + \frac{8}{125}m^3$ өрнегін көбейткіштерге жіктеңдер.

Шешуі. Екімүшенің кубтарының қосындысының формуласын қолданамыз:

$$n^6 + \frac{8}{125}m^3 = (n^2)^3 + \left(\frac{2}{5}m\right)^3 = \left(n^2 + \frac{2}{5}m\right)\left((n^2)^2 - n^2 \cdot \left(\frac{2}{5}m\right) + \left(\frac{2}{5}m\right)^2\right) =$$

$$= \left(n^2 + \frac{2}{5}m\right) \cdot \left(n^4 - \frac{2}{5}mn^2 + \frac{4}{25}m^2\right).$$

Жауабы: $\left(n^2 + \frac{2}{5}m\right) \cdot \left(n^4 - \frac{2}{5}mn^2 + \frac{4}{25}m^2\right)$.

2-мысал. $8c^3 + (3 - 2c)(9 + 6c + 4c^2)$ өрнегін ықшамдайық.

Шешуі. Кубтардың айырымы формуласын қолданамыз:

$$8c^3 + (3 - 2c)(9 + 6c + 4c^2) = 8c^3 + 27 - 8c^3 = 27.$$

Жауабы : 27.

1. Екі өрнектің кубтарының қосындысы (айырымы) формуласының қосындының (айырымның) кубынан қандай айырмашылығы бар?
2. Кубтардың қосындысы формуласын тұжырымдаған кезде "екі өрнектің айырымының толымсыз квадраты" сөз тіркесінің қолданылу себебі неде?

Жаттығулар

A

Көбейткіштерге жіктеңдер (34.1—34.3) :

34.1. 1) $a^3 + x^3$; 2) $y^3 - b^3$; 3) $t^3 - n^3$; 4) $m^3 + k^3$;
5) $z^3 - 8$; 6) $64 + s^3$; 7) $125 - x^3$; 8) $1000 + y^3$.

34.2. 1) $27 - a^3$; 2) $b^3 + 125$; 3) $64 - m^3$; 4) $8 + q^3$;
5) $0{,}008 + a^3$; 6) $0{,}216 - b^3$; 7) $0{,}027 + n^3$; 8) $0{,}125 - m^3$.

34.3. 1) $\frac{1}{8} - b^3$; 2) $\frac{1}{27} + c^3$; 3) $\frac{1}{64} - d^3$; 4) $\frac{1}{125} + t^3$;
5) $\frac{8}{27} + z^3$; 6) $y^3 - \frac{27}{64}$; 7) $k^3 + \frac{27}{125}$; 8) $\frac{1}{216} - z^3$.

34.4. Көбейтіндіні көпмүшеге келтіріңдер :
1) $(a + 2)(a^2 - 2a + 4)$; 2) $(1 - x^2)(1 + x^2 + x^4)$;
3) $(k - 5)(k^2 + 5k + 25)$; 4) $(3 + m)(9 - 3m + m^2)$;
5) $(1 + a^3)(1 - a^3 + a^6)$; 6) $(4 - n^2)(16 + 4n^2 + n^4)$;
7) $(25 - 5y^2 + y^4)(5 + y^2)$; 8) $(64 + 8z^3 + z^6)(8 - z^3)$.

Өрнекті ықшамдаңдар (34.5-34.6):

34.5. 1) $(x - 10)(x^2 + 10x + 100) - x^3$; 2) $216 - (a + 6)(a^2 - 6a + 36)$;
3) $y^3 + (7 - y)(49 - 7y + y^2)$; 4) $600 - (8 - z)(z^2 + 8z + 64)$.

34.6. 1) $(a - 1)(a^2 + a + 1) - a^2(a - 8)$; 2) $(b + 2)(b^2 - 2b + 4) - b(b^2 - 1)$;
3) $2a^3 + 7(x^2 - x + 1)(x + 1)$; 4) $y^3 - (y - 3)(y^2 + 3y + 9)$.

34.7. Теңдеуді шешіңдер :
1) $(2x - 3)(4x^2 + 6x + 9) - 8x^3 = 2{,}7x$;
2) $(3 + 4x)(16x^2 - 12x + 9) - 64x^3 = -10x$;

3) $(5-2x)(4x^2+10x+25)=2{,}5x-8x^3$;

4) $(6-5x)(36+30x+25x^2)=108x-125x^3$.

34.8. Теңсіздікті шешіңдер:

1) $(1-4x)(1+4x+16x^2)-6x^3\le 10x-70x^3$;

2) $99x^3-(1+5x)(1-5x+25x^2)\ge 12x-26x^3$.

34.9. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $(5x-6)(25x^2+30x+36)-0{,}25(500x^3-864)=0$;

2) $91x^3-(3x-4)(9x^2+12x+16)-(3+4x)(9-12x+16x^2)=37$.

B

34.10. Көпмүшені көбейткіштерге жіктеңдер:

1) a^3-27b^3; 2) $m^3n^3+k^3$; 3) x^6-y^6;

4) $k^6+(pq)^6$; 5) $(a-b)^3+b^3$; 6) $(x-2)^3-27$;

7) $8a^3+(a-b)^3$; 8) $27x^3-y^3(x-y)^3$.

34.11. Көбейтіндіні көпмүше түрінде жазыңдар:

1) $\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{3}x+x^2\right)$; 2) $\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n^2+\frac{1}{2}n+\frac{1}{4}\right)$;

3) $\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}b\right)\left(\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{6}ab+\frac{1}{9}b^2\right)$; 4) $\left(\frac{1}{4}y^2-yz+4z^2\right)\left(\frac{1}{2}y+2z\right)$.

34.12. Көпмүшені көбейтінді түрінде жазыңдар:

1) $m^3-n^3+2n-2m$; 2) $3a^3-3b^3+5a^2-5b^2$;

3) $x^6+y^6+x^2+y^2$; 4) $a^3-b^3+a^2-b^2$;

5) $x^4+xy^3-x^3y-y^4$; 6) $a^4-a^3b+ab^3-b^4$.

Өрнекті ықшамдаңдар **(34.13-34.14):**

34.13. 1) $2a^3+9-2(a+1)(a^2-a+1)$;

2) $x(x+2)(x-2)-(x-3)(x^2+3x+9)$;

3) $3(b-1)^2+(b+2)(b^2-2b+4)-(b+1)^3$;

4) $(a-1)^3-4a(a+1)(a-1)+3(a-1)(a^2+a+1)$.

34.14. 1) $(x+2)(x^2-2x+4)-x(x-3)(x+3)-42$;

2) $(x-3)(x^2+3x+9)-x(x^2-16)+21$;

3) $(2x-1)(4x^2+2x+1)-23-4x(2x^2+3)$;

4) $16x(4x^2-5)+17-(4x+1)(16x^2-4x+1)$.

C

34.15. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $6(x+1)^2+2(x-1)(x^2+x+1)-2(x+1)^3$;
2) $5x(x-3)^2-5(x-1)^3+15(x+2)(x-2)$;
3) $(x+2)^3-x(3x+1)^2+(2x+1)(4x^2-2x+1)$.

34.16. Теңдеуді шешіңдер:

1) $x^3-(x-3)(x^2+3x-9)+9x=-18x$;
2) $(x+4)(16-4x+x^2)-x(x^2+8)=-192$;
3) $y(y^2-5)-(y-2)(y^2+2y+4)+3y=0$;
4) $(5+y)(25-5y+y^2)-20y-y^3=0$.

Тепе-теңдікті дәлелдеңдер **(34.17-34.18)**:

34.17. 1) $(x+y)^3-(x-y)^3-6y(x^2-y^2)=8y^3$;
2) $(m+n)^3-(m-n)^3-2n(m^2+n^2)=4m^2n$;
3) $x^3-4-(x+2)^2+x(4+x)=x^3-8$.

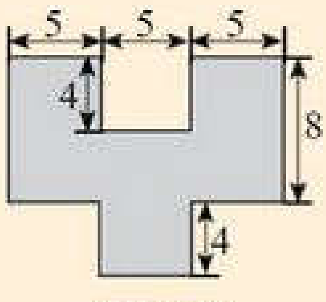
34.18. 1) $(a^2-3)^3-(a^2-4)(a^2+4)-a^2(a^4-10a^2+27)+27=16$;
2) $(b^2+3)^3-(b^2+3)(b^4-3b^2+9)-9b^2(b^2+3)=0$;
3) $(m^2-1)(m^4+m^2+1)-(m^2-1)^3+3(m^2-1)-3m^4=-3$.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

34.19. Теңсіздікті шешіңдер:

1) $(x+2)^2-10\le 12x+x^2$; 2) $24-(3-x)^2>8x-x^2$.

34.20. 34.1-суретте берілген фигураның периметрі мен ауданын табыңдар.



34.1-сурет

§ 35. ӨРНЕКТЕРДІ ТЕПЕ-ТЕҢ ТҮРЛЕНДІРУ

Тиімді есептеу үшін қысқаша көбейту формулаларын қалай қолдануға болады?

Анықтама: квадраттар айырымы $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$;
қосындының квадраты $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
айырымның квадраты $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
қосындының кубы $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;
айырымның кубы $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$;
кубтардың айырымы $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$;
кубтардың қосындысы $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
формулалары *қысқаша көбейту формулалары* деп аталады.

Қысқаша көбейту формулалары өрнектерді түрлендіруде кеңінен қолданылады.

Осы формулаларды қолдануға мысалдар қарастырайық.

1-мысал. $(4 - 5a)^2 - 8a(3a + 1) + (7a - 4)(4 + 7a)$ өрнегін ықшамдайық.

Шешуі. Берілген өрнекті ықшамдау үшін алдымен айырымның квадраты, квадраттардың айырымы формулаларын, бірмүшені көпмүшеге көбейту ережесін қолданамыз, одан кейін ұқсас қосылғыштарды біріктіреміз: $(4 - 5a)^2 - 8a(3a + 1) + (7a - 4)(4 + 7a) =$
$= 16 - 40a + 25a^2 - 24a^2 - 8a + 49a^2 - 16 = 50a^2 - 48a.$

Жауабы: $50a^2 - 48a$.

2-мысал. $(5 - 2x)^2 - 8x \le 2x(2x - 6) + 9$ теңсіздігін шешейік.

Шешуі.
$$25 - 20x + 4x^2 - 8x \le 4x^2 - 12x + 9;$$
$$-20x + 4x^2 - 8x - 4x^2 + 12x \le 9 - 25;$$
$$-16x \le -16;$$
$$x \ge 1.$$

Жауабы: $[1; +\infty)$.

3-мысал. $4(b - 5)^2 - (b - 3)(b^2 + 3b + 9) + (b + 4)^3 - 8b(2b + 1) = 191$ тепе-теңдігін дәлелдейік.

Дәлелдеуі. $4(b - 5)^2 - (b - 3)(b^2 + 3b + 9) + (b + 4)^3 - 8b(2b + 1) =$
$= 4(b^2 - 10b + 25) - (b^3 - 27) + b^3 + 12b^2 + 48b + 64 - 16b^2 - 8b =$
$= 4b^2 - 40b + 100 - b^3 + 27 + b^3 - 4b^2 + 40b + 64 = 191.$

Жаттығулар

A

Өрнекті ықшамдаңдар (35.1—35.4):

35.1. 1) $(m^3 + 6n^2)^2 - (6n^2 - m^3)^2$; 2) $(x^2 - 7y^3)^2 + (x^2 + 7y^3)^2$;
3) $(9z + 2x^4)^2 - (2x^4 - 9z)^2$; 4) $(5a^3 - 4b)^2 + (4b + 5a^3)^2$.

35.2. 1) $(1{,}1\,x^2 - 6y)^2 - (1{,}1\,x^2 - 6y)(1{,}1\,x^2 + 6y)$;
2) $(2{,}3\,a - 7b^3)(2{,}3\,a + 7b^3) - (2{,}3\,a + 7b^3)^2$;
3) $(3{,}1\,n^3 - 5m)^2 + (5m - 3{,}1\,n^3)(5m + 3{,}1\,n^3)$.

35.3. 1) $1000 + a^6 - (a^2 + 10)(a^4 - 10a^2 + 100)$;
2) $(a^3 - 9)(a^6 + 9a^3 + 81) - a^9 - 729$;
3) $0{,}512\,t^3 - 100 + (0{,}8\,t + 5)(0{,}64\,t^2 - 4t + 25)$;
4) $(1{,}1\,d - c^3)(1{,}21\,d^2 + 1{,}1\,c^3d + c^6) - 1{,}331\,d^3 + 2c^9$.

35.4. 1) $(2 + a^4)(a^8 - 2a^4 + 4) + a^{10}(1 - a^2)$;
2) $k^5(k + 1) - (3 + k^2)(k^4 - 3k^2 + 9)$;
3) $(25 - 5y^4 + y^8)(5 + y^4) - y^6(y^6 - 1)$;
4) $(z^6 + 7z^3 + 49)(z^3 - 7) + z(1 - z^8)$.

Теңдеуді шешіңдер (35.5-35.6):

35.5. 1) $35 + (5x - 1)(5x + 1) = (5x + 2)^2$;
2) $3 + (2x + 3)^2 = 4(x - 6)(6 + x)$;
3) $6 - x + (2x - 1)^2 = 4(x + 3)^2$;
4) $39x + (4x + 3)^2 = 2 + 4(2x + 1)^2$.

35.6. 1) $7x - (x - 2)^3 = 13 - x^2(x - 6)$; 2) $10 + (3 - x)^3 = x^2(9 - x) - 17$;
3) $-16 + (4 + x)^3 = x^2(x + 12)$; 4) $11 - x^2(x + 9) = 8x - (x + 3)^3$.

35.7. Теңдеудің түбірін табыңдар:
1) $(x - 7)^2 - 49 = 0$; 2) $(6 + y)^2 - 81 = 0$;
3) $100 - (z - 19)^2 = 0$; 4) $25 - (13 + t)^2 = 0$.

35.8. Теңдеуді шешіңдер (35.8—35.10):
1) $x(0{,}25\,x - 3) - (0{,}5\,x + 1)(0{,}5\,x - 1) = 0$;
2) $(1{,}2 - x)(x + 1{,}2) + 1{,}8\,x + x^2 = 0$;
3) $0{,}49\,x^2 - 3x - (0{,}7\,x + 2)(0{,}7\,x - 2) = 0$;
4) $(1{,}6\,x + 1)(1 - 1{,}6\,x) - 64x(1 - 0{,}04\,x) = 0$.

35.9. 1) $(7x - 5)^2 + 67x - 49x^2 = -2$;
2) $196x^2 - (14x + 3)^2 + 80x = -5$;
3) $-2{,}89\,x^2 + (1{,}7\,x + 2)^2 + 0{,}2\,x = 11$;
4) $(2{,}4\,x - 1)^2 - 0{,}2\,x - 5{,}76\,x^2 = 3$.

35.10. 1) $5(2 + x)^3 - 5x^3 = 28x + 30x^2$;
2) $54x^2 + 6(x - 3)^3 = 162 + 6x^3$;
3) $(x + 9)(x^2 - 9x + 81) = -7 - 4x + x^3$;
4) $x^3 - 2x - 331 = (x^2 - 11x + 121)(x + 11)$.

Теңсіздікті шешіңдер (35.11—35.13):

35.11. 1) $(x+8)^2-x^2\le 11x$; 2) $x^2-(9-x)^2>-2x$;
3) $(12+x)^2\ge x^2+21x$; 4) $x^2<(25-x)^2+25x$.

35.12. 1) $(y+7)^3-y^3-21y^2\ge 0$; 2) $-24y^2+(8-y)^3+y^3\le 0$;
3) $(6-y)^3+y^3-18y^2<0$; 4) $y^3-27y^2-(y-9)^3>0$.

35.13. 1) $(10+x)(100-10x+x^2)-x^3-500x<0$;
2) $-x^3+675x-(15-x)(225+15x+x^2)>0$;
3) $(169+13x+x^2)(x-13)-x^3-2262x\le 0$;
4) $1331x-x^3+(11+x)(x^2-11x+121)\ge 0$.

Тепе-теңдікті дәлелдеңдер (35.14-35.15):

35.14. 1) $(3x+4y)^2-(4y-3x)^2=48xy$;
2) $(1{,}5x-2y)^2+(2x+1{,}5y)^2=6{,}25(x^2+y^2)$;
3) $(2a-3b)^3-(2a+3b)^3=-18b(4a^2+3b^2)$;
4) $(3a-2b)^3+(3a+2b)^3=18a(3a^2+4b^2)$.

35.15. 1) $(5z^2-6k)^2-(5z^2+3k)^2+90z^2k=27k^2$;
2) $(m^2-n^2)(m^2+n^2)-m^2(m^2-n^2)-m^2n^2=-n^4$;
3) $(1{,}2x^4-7y^2)(1{,}2x^4+7y^2)+0{,}56x^8+49y^4=2x^8$;
4) $(1{,}4a^3-5b^2)(1{,}4a^3+5b^2)-2{,}96a^6+25b^4=-a^6$.

B

Өрнекті ықшамдаңдар (35.16-35.17):

35.16. 1) $(4x^3-1)(9x^3+5)-(6x^3-1)^2$; 2) $(x^4-1)^2-(x^4+4)-(x^4-6)$;
3) $(x^7-3)(x^7+7)-(x^7+2)^2$; 4) $(x^8+9)(11-x^8)-(x^8+1)^2$.

35.17. 1) $(a^3+b^3)^3-(a^3-b^3)^3-2b^9$; 2) $(1-a^3b^3)^3-(a^3b^3-1)^3-2$;
3) $3a^4b^4(a^4-b^4)-(a^4-b^4)^3$; 4) $(c^2+d^2)^3-3c^2d^2(c^2+d^2)$.

Теңдеуді шешіңдер (35.18-35.19):

35.18. 1) $8(x-10)^2-11(x+5)^2=-3x^2-170x+1600$;
2) $2{,}5(4+x)^2+7(5-x)(5+x)=295-4{,}5x^2$;
3) $1{,}9(y+20)(20-y)-1{,}6(y+20)^2=116-3{,}5y^2$;
4) $30(1{,}8-y)^2+20(y+1{,}8)(y-1{,}8)=50y^2+140{,}4$.

35.19. 1) $(2{,}3x-10)(5{,}29x^2+23x+100)-125x=12{,}167x^3$;
2) $(20+1{,}7x)(2{,}89x^2-34x+400)-400x=4{,}913x^3$;
3) $5(x-6)^3-13(2+x)^3+32=-8x^2(x+21)$;
4) $-6(4+x)^3+3(5-x)^3=1017-9x^2(3+x)$.

Теңсіздікті шешіңдер (35.20-35.21):

35.20. 1) $(9x-7)^2-10\le(9x+3)(9x-5)$;
2) $(3+7x)^2-x\le -26+x(49x-8)$;

3) $(11 + 25x)x + 7 < (5x - 7)^2 - 3x$;
4) $4 + (6 - 11x)^2 > 25x + x(121x + 3)$.

35.21. 1) $13 + x^2(x - 9) \geq (x - 3)^3 + 11$; 2) $26 + (2 + x)^3 < x^2(6 + x)$;
3) $3x - x^2(15 + x) > -(x + 5)^3 - 4x$; 4) $(4 + x)^3 - 6x \geq x^2(x + 12) + 1$.

C

35.22. Теңсіздіктің шешімі болатын ең үлкен бүтін санды табыңдар:
1) $(3 - x)(9 + 3x + x^2) - 2x + x^3 \geq 7x + 7$;
2) $(x - 7)(x^2 + 7x + 49) < -4x + x^3 + 17$;
3) $7x - x^3 > 27x - (x + 8)(x^2 - 8x + 64)$;
4) $16x(32x^2 + 1) \leq -32 + (8x - 1)(64x^2 + 8x + 1)$.

35.23. Теңсіздіктің шешімі болатын ең кіші бүтін санды табыңдар:
1) $(x + 9)^2 - x^2 > 15x - 79$; 2) $x^2 - (11 - x)^2 < x + 19$;
3) $(x - 8)^3 + 24x^2 \geq x^3 + 64x$; 4) $x^3 - (7 + x)^3 \leq -21x^2 - 490$.

Тепе-теңдікті дәлелдеңдер **(35.24-35.25)** :

35.24. 1) $((a^7 - 8b^4)(8b^4 + a^7) + 63b^8)^2 - a^{14}(-2b^8 + a^{14}) = b^{16}$;
2) $b^{24} - (82c^{10} + (b^6 - 9c^5)(9c^5 + b^6))^2 + c^{20} = -2c^{10}b^{12}$;
3) $(x^3 - 9y^4)^2 - (x^3 + 9y^4)^2 + 36x^3(y^4 - x) = -36x^4$;
4) $0,5z^4(40zt^2 - 5) - (z^5 + 10t^2)^2 + (10t^2 - z^5)^2 = -2,5z^4 - 20z^5t^2$.

35.25. 1) $(a^7 - t^5)(a^{14} + a^7t^5 + t^{10}) + (t^5 - a^7)^3 - 3a^{14}t^5 = -3a^7t^{10}$;
2) $(x^4 + b^9)^3 - (b^9 + x^4)(b^{18} - x^4b^9 + x^8) - 3x^8b^9 = 3x^4b^{18}$.

Хабарлама дайындаңдар

35.26. Қысқаша көбейтудің кейбір формулалары 4 мың жыл бұрын белгілі болған. Бұл формулалар Евклидтің "Бастамалар" кітабында қалай берілгені туралы баяндаңдар.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

35.27. Екі тақ санның кубтарының айырымы мен олардың айырымының кубының айырымы 6 санына еселік болатынын дәлелдеңдер.

35.28. 1,5; 2,5; 3,5; .... сандарын екінші дәрежеге шығару үшін бүтін бөлігін келесі санға көбейтіп, соңынан 0,25 санын тіркеп жазса, дәреженің мәні шығатынын дәлелдеңдер.

35.29. Квадраттың қарама-қарсы қабырғаларының ұзындықтары 5 см-ге арттырылды, қалған екі қарама-қарсы қабырғаларының ұзындықтары сонша сантиметрге кемітілді. Шыққан фигураның ауданы бастапқы фигураның ауданына қарағанда қалай өзгерді?

§ 36. МӘТІНДІ ЕСЕПТЕРДІ ТЕҢДЕУЛЕР МЕН ТЕҢСІЗДІКТЕР ҚҰРАСТЫРУ АРҚЫЛЫ ШЕШУ

Мәтінді есептерді теңдеулер мен теңсіздіктер құрастыру арқылы қалай шешуге болады?

Математикада шешуді қажет ететін әртүрлі нақты жағдайлар жиі сипатталады. Оларды шығару барысында математикалық тіл, әртүрлі математикалық ережелер қолданылады және математикалық модельдер құрастырылады.

Көптеген нақты жағдайлар арифметикалық тәсілдермен шығарылады, яғни есепте қойылған сұраққа сандарға арифметикалық амалдар қолдану арқылы жауап беруге болады. Алгебралық тәсілмен, яғни теңдеулермен шешуге болатын көптеген практикалық есептер де бар.

Мәтінді есептерді алгебралық тәсілмен шығару барысында мына алгоритм қолданылады:

1) ізделінді шаманы немесе бірнеше шамаларды x, y, z ...әріптерімен белгілейді;

2) берілген шамалар мен ізделінді шамалар арасындағы байланыс орнатылады;

3) теңдеу немесе теңсіздік, немесе теңдеулер жүйесі, немесе теңсіздіктер жүйесі (математикалық модель) құрастырылады;

4) құрастырылған теңдеу немесе теңсіздік, немесе теңдеулер жүйесі, немесе теңсіздіктер жүйесі шығарылады;

5) шыққан нәтиже есеп шартымен салыстырылады;

6) жауабы жазылады.

Есептің шарты бойынша математикалық модельді қалай құрастыруға болады?

Математикалық модель теңдеу немесе теңсіздік, теңдеулер жүйесі немесе теңсіздіктер жүйесі, кесте, сызба түрінде берілуі мүмкін. Бірнеше практикалық есептердің шығарылуын қарастырайық.

1-мысал. Көгөніс базасында қияр мен қызанақ бар. Қызанақ салынған жәшіктер саны қиярлар салынған жәшіктер санынан екі есе артық. Егер базадан қызанақ салынған бес жәшік жіберіліп, базаға қияр салынған бес жәшік әкелінсе, қызанақ салынған жәшіктер саны қиярлар салынған жәшіктер санынан 5-ке артық болады. Базада қияр мен қызанақ салынған барлығы қанша жәшік бар?

Шешуі . Қияр салынған жәшіктер саны x болсын, онда қызанақ салынған жәшіктер саны $2x$ болады. Демек, базадағы барлық көгөніс салынған жәшіктер саны — $x + 2x = 3x$. Егер базадан қызанақ салынған бес жәшік жіберілсе, онда қызанақ салынған жәшіктер саны $(2x - 5)$. Егер базаға қияр салынған бес жәшік әкелінсе , онда қияр салынған жәшіктер $(x + 5)$. Есептің шарты бойынша қызанақ салынған жәшіктер саны қиярлар салынған жәшіктер санынан 5-ке артық. Математика тілінде былай жазылады:

$$(2x - 5) - (x + 5) = 5, \ (x > 0).$$

Құрастырылған теңдеу берілген мәтінді есептің математикалық моделі болады. $2x - 5 - x - 5 = 5$ теңдеуін шешіп, $x = 15$ аламыз.

Демек, базада қияр салынған жәшіктер саны 15, ал қызанақ салынған жәшіктер саны 30. Есептің шығарылғанын дұрыс шарты бойынша тексереміз.

Қызанақ салынған 5 бес жәшік жіберілді, онда $30 - 5 = 25$.

Қияр салынған 5 жәшік әкелінді, онда $15 + 5 = 20$.

Демек, қызанақ салынған жәшіктер саны қиярлар салынған жәшіктер санынан 5-ке артық $(25 - 20 = 5)$. Ал базада барлығы $3 \cdot 15 = 45$.

Жауабы : 45 жәшік.

2-мысал. Аралығы 590 км жол бойымен бір-біріне қарама-қарсы екі автобус шықты. Екінші автобустың жылдамдығы бірінші автобустың жылдамдығынан 10 км/сағ-қа артық. Бірінші автобустың 2 сағ бұрын шыққаны белгілі. Олар бес сағаттан кейін кездесті. Әр автобустың жылдамдығын табыңдар.

Шешуі . $s = v \cdot t$ формуласын қолданайық, мұндағы s — аракашықтық (жүрілген жолдың ұзындығы), v — қозғалыс жылдамдығы, t — қозғалыс уақыты.

Есептің математикалық моделін құрастырайық. Бірінші автобустың жылдамдығы x км/сағ болсын, онда екінші автобустың жылдамдығы $(x + 10)$ км/сағ. Кездескенге дейін бірінші автобус жолда 5 сағ, ал екінші автобус $(5 - 2) = 3$ сағ болды.

Демек, бірінші автобус 5 сағ-та $5x$ км, ал екіншісі 3 сағ-та $3(x + 10)$ км жол жүрген. Есептің шарты бойынша олар кездесті, демек, екеуі бірге $((5x + 3(x + 10))$ км, яғни 590 км жол жүрген.

Теңдеу құрастырамыз: $5x + 3(x + 10) = 590$.

Құрастырылған теңдеу берілген есептің мәтінді математикалық моделі болады. Теңдеуін шешіп, $x = 70$ аламыз.

Демек, бірінші автобустың жылдамдығы 70 км/сағ болса, онда екінші автобустың жылдамдығы $70 + 10 = 80$ (км/сағ).

Есептің дұрыс шығарылғанын шарты бойынша тексереміз.

Есептің шарты бойынша бірінші автобус 70 км/сағ жылдамдықпен 5 сағ жүрді. Демек, 350 км жол жүрді. Екінші автобус 80 км/сағ жылдамдықпен 3 сағ жүрді. Демек, ол 240 км жол жүрген. Есептің шарты бойынша олар кездеседі, онда олар бірге 240 + 350 = 590 (км) жол жүріп өткен.

Жауабы : 70 км/сағ, 80 км/сағ.

3-мысал. Автобус 70 км/сағ жылдамдықпен Петропавл қаласынан Астана қаласына шықты. Екі сағаттан соң осы бағытта жеңіл мәшине шықты. Екі қаланың аралығы 630 км. Автобусты Астана қаласына жеткенше қуып жету үшін жеңіл мәшине қандай жылдамдықпен қозғалуы керек?

Шешуі . Жеңіл мәшиненің жылдамдығы x км/сағ болсын. Автобус Астана қаласына 9 сағ-та жетеді, себебі 630 : 70 = 9. Жеңіл мәшине шыққаннан кейін автобус жолда 7 сағ болады. Демек, жеңіл мәшине Петропавл қаласынан Астана қаласына дейін жолда кем деген де 7 сағ болады: $\frac{630}{x} \le 7$. Бұдан $7x \ge 630$ немесе $x \ge 90$.

Жеңіл мәшиненің жылдамдығы 90 км/сағ-тан кем болмауы керек.

Жауабы : 90 км/сағ-тан кем емес.

1. Есептің математикалық моделі нені береді?
2. Мәтінді есепті алгебралық (арифметикалық) тәсілмен шығару дегеніміз нені білдіреді?
3. Мәтінді есептің дұрыс шығарылғанын қалай тексеруге болады?
4. Мәтінді есепті теңсіздік арқылы шығару тәсілі қалай аталады?
5. Мәтінді есепті теңдеулер немесе теңсіздіктер жүйесі арқылы шығару тәсілі қалай аталады?

Жаттығулар

А

36.1. Кітапханашы оқулықтарды сөрелерге орналастыруы қажет. Егер әр сөреге 20 оқулықтан қойса, онда екі сөре бос қалады. Ал егер әр сөреге 15 оқулықтан қоятын болса, онда барлық сөрелердегі кітаптар саны бірдей болады. Кітапханашы қанша оқулықты сөрелерге орналастыруы керек?

36.2. Шахматтан жарысқа 6-7-сыныптардан 20 оқушы қатысты. 7-сынып оқушылары 6-сынып оқушыларынан 1,5 есе артық. Жарысқа әр сыныптан қанша оқушыдан қатысқан?

36.3. Жетінші сыныптардағы қыз балалар саны ер балалар санынан 1,4 есе артық. Қыз балалар саны ер балалар санынан 16-ға артық болса, жетінші сыныптардың оқушылар саны қанша?

36.4. Бірінші жәшіктегі алмалар саны екінші жәшікке қарағанда 3 есе артық. Егер бірінші жәшіктен 17 алма алынса, ал екінші жәшікке 35 алма салынса, онда екі жәшіктегі алмалар саны бірдей болады. Алғашқыда әр жәшікте қанша алмадан болған?

36.5. Екі санның қосындысының мәні 77-ге тең. Егер бір санның $\frac{2}{3}$-і екінші санның 0,8 бөлігін құраса, онда берілген екі санды табыңдар.

36.6. Шабдалының бағасы өріктің бағасынан 50 тг артық. Компот дайындау үшін 4 кг шабдалы және 6 кг өрік қажет. Егер шабдалы мен өрік сатып алуға 4200 тг жұмсалса, жемістердің бағасы қандай?

36.7. ABC үшбұрышының периметрі 92 см. AB қабырғасының ұзындығы BC қабырғасының ұзындығынан екі есе кем және AC қабырғасының ұзындығынан 8 см-ге кем. Үшбұрыштың әр қабырғасының ұзындығын табыңдар.

36.8. Екі айлақтың арақашықтығы 80 км. Осы аралықты катер өзен ағысы бойымен 4 сағ-та, ағысқа қарсы 5 сағ-та жүріп өтеді. Катердің меншікті жылдамдығын және өзен ағысының жылдамдығын табыңдар.

36.9. Арасы 30 км A және B пункттеріне бір-біріне қарама-қарсы бағытта екі жаяу адам шығып, 3 сағ 20 мин-тан кейін кездесті. Егер бірінші жаяу адам екіншіге қарағанда 2 сағ бұрын шықса, онда олардың кездесуі екінші жаяу адам шыққан соң 2 сағ 30 мин-тан кейін болар еді. Екінші жаяу адамның жылдамдығын табыңдар.

36.10. Екі жұмысшы бірге 678 тетік дайындады. Бірінші жұмысшы 8 күн, екінші жұмысшы 11 күн жұмыс жасады. Егер екінші жұмысшы әр төрт күнде бірінші жұмысшының үш күнде жасаған тетіктерінен 22 тетікке артық дайындап отырған болса, онда әр жұмысшы бір күнде қанша тетіктен дайындаған?

B

36.11. Үш бригада бір ауысымда 96 тетік дайындады. Бірінші бригада екіншіге қарағанда 18 тетік артық, үшінші бригада бірінші мен екінші бригадалардың бірге жасаған тетіктер санының $\frac{5}{11}$-індей дайындаған.

1) Әр бригада қанша тетіктен дайындады?

2) Егер жұмысшы жасалған бір тетікке 56 тг алса, онда әр жұмысшы қанша теңге алған?

3) Бірінші жұмысшының бір ауысымдағы жалақысы үшінші жұмысшының жалақысынан қанша пайызға артық?

36.12. Еденнің ауданы 9 $м^2$ және шаршы пішінді бөлменің қабырғаларын желімдеу керек. Бөлме биіктігі 3 м, есіктің ауданы 1,8 $м^2$, терезенің ауданы 1,5 $м^2$ және бір тұсқағазбен 7,2 $м^2$ жерді желімдеуге болады.

1) Бөлмені желімдеуге қажет тұсқағаздың санын табыңдар.

2) Егер тұсқағаздың бағасы 650 тг/бума болса, онда тұсқағаз алуға қанша теңге кетеді?

36.13. Қабырғасының ұзындығы 30 см текше пішінді аквариумды толтыру үшін қанша литр су қажет?

36.14. Гүлзар қабырғаларының ұзындықтары 3:4 қатынасындай тіктөртбұрыш пішінді болып келген. Егер гүлзардың ауданы 4800 $дм^2$ болса, онда тіктөртбұрыштың өлшемдерін табыңдар.

36.15. Гүлзар ені ұзындығының $\frac{5}{7}$-ін құрайтын тіктөртбұрыш пішінді.

1) Егер гүлзардың ауданы 3500 $дм^2$ болса, онда оның өлшемдерін табыңдар.

2) Егер гүлзарды қоршау үшін қажет бір сәнді блоктың ұзындығы 50 см болса, онда қоршауға барлығы қанша сәнді блок керек?

36.16. Тікбұрышты параллелепипедтің өлшемдері 2 : 3 : 4 қатынасындай, ал көлемі 192 $дм^3$. Тікбұрышты параллелепипедтің өлшемдерін табыңдар.

36.17. Ғимарат тікбұрышты параллелепипед пішінді болып келген. Оның ені ұзындығынан 6 есе кем және биіктігінен 3 есе кем. Егер ғимараттың бүйір бетінің ауданы 8232 $м^2$ болса, онда оның биіктігін табыңдар.

36.18. Егер жай бөлшектің алымынан 4 санын азайтып, бөлімін 4 санына көбейтсе, онда $\frac{1}{12}$, егер жай бөлшектің алымына 2 санын көбейтіп, бөлімінен 2 санын азайтса, онда 2 саны шығады. Алғашқы бөлшекті табыңдар.

36.19. Салымшы банкте жылдық өсімі 10%-дық депозит ашты. Бір жылдан соң ол депозиттен 60 000 тг алғанда, депозитте алғашқы салынған соманың жартысына тең ақша қалды. Екінші жылдың соңында депозитте қанша ақша болады?

C

36.20. Бір мезгілде A айлағынан сал және B айлағынан өзен ағысы бойымен A айлағына қарай моторлы қайық шықты. Егер қайық пен сал 2 сағ-тан кейін кездессе және олардың жүрген жолдары 16 км болса, онда қайықтың меншікті жылдамдығын табыңдар.

36.21. Тынық судағы жылдамдығы 12 км/сағ болатын қайық айлақтан өзен ағысы бойымен шықты. Меншікті жылдамдығы 18 км/сағ болатын катер 1 сағ-тан кейін өзенмен жоғары көтерілді. Егер қайық шыққаннан кейін 3 сағ-тан соң қайық пен катердің жүрген жолы 75 км болса, онда өзен ағысының жылдамдығын табыңдар.

36.22. 400 000 тұрғынның 60%-ы футболға қызықпайды. Футбол жанкүйерлерінің 75%-ы чемпиондар лигасының қорытынды ойынын теледидардан қараған:

1) Қанша тұрғын ойынды қараған?
2) Тұрғындардың қанша пайызы ойынды қараған?
3) Тұрғындардың қанша пайызы ойынды қарамаған?

36.23. Отағасы депозитке 250 000 тг салмақшы болды. Осы соманың бір бөлігін пайыздық өсімі 10%-ға тең шотқа, ал қалғанын қалдықты 50 000 тг төмендетпей алып тұруға болатын жылдық пайызы 9%-ға тең депозитке салды. Бір жылдан кейін депозиттегі сома 274 000 тг-ге жетті.

1) Пайыздық өсімі 10%-ға тең шотқа қанша сома салынды?
2) Жылдық пайызы 9%-ға тең депозитте бір жылдан кейін қанша сома болды?
3) Пайыздық өсімі 10%-ға тең шотқа қанша теңге салған тиімді?

36.24. Бірінші оператор қолжазбаны 9 сағ-та, екінші оператор 6 сағ-та тереді. Бірінші оператор 3 сағ жұмыс атқарғаннан кейін басқа жұмысқа ауыстырылды. Қолжазбаның қалған бөлігін екінші оператор терді.

1) Жұмыстың қалған бөлігін екінші оператор қанша сағатта терді?
2) Барлық жұмыс қанша уақытта аяқталды?
3) Егер жұмыстың жартысын бірінші оператор, екінші жартысын екінші оператор терген болса, онда жұмыс қанша уақытта орындалады?
4) Егер екі оператор жұмысты бір мезетте теретін болса, онда барлық жұмыс қанша уақытта орындалады?

36.25*. Цифрларының қосындысы 12 санынан артық емес, ал ондықтар цифры бірліктер цифрынан үш есе артық болатын екі таңбалы сандарды табыңдар.

36.26*. Автобустың орташа жылдамдығы 60 км/сағ-тан артық, бірақ 80 км/сағ-тан кем.
1) Автобус 240 км жолды қанша сағатта жүріп өтеді?
2) Осы аралықты 3 сағ 20 мин-тан артық емес уақытта жүріп өту үшін автобустың жылдамдығы қандай болуы керек?

36.27. 1) Екі екітаңбалы санның қосындысының мәні 36, олардың квадраттарының айырымы 432. Осы сандарды табыңдар;
2) Шешу барысында мына теңдеуді беретін есептің мәтінін құрастырыңдар:
а) $x(x-3)=28$; ә) $\frac{42}{17-x}-\frac{40}{17+x}=1$; б) $\frac{20}{50+x}+\frac{10}{10-x}=1$.
Құрастырылған мәтінді есепті шешіңдер.

36.28*. 48 санын екінші екітаңбалы санның цифрларының қосындысына бөлгенде бөліндінің мәнінде 4 шығады. Осы санның цифрларының квадраттарының айырымының мәні 24-ке тең. Берілген санды табыңдар.

36.29. 1) A және B пунктінің аралығы 180 км. Егер автомобиль жылдамдығын 20 км/сағ-қа арттырса, онда 2 сағ-та 180 км-ден артық жол жүреді. Егер жылдамдығын 20 км/сағ-қа кемітсе, онда баратын жерге 3 сағ ішінде жетіп үлгермейді. Автомобильдің жылдамдығын табыңдар.
2) Екі айлақтың арақашықтығы көлмен 36 км. Егер моторлы қайық жылдамдығын 3 км/сағ-қа арттырса, онда ол 36 км артық жол жүреді. Егер моторлы қайық жылдамдығын 2 км/сағ-қа кемітсе, онда ол 4 сағ-та қажетті пунктке жетпейді. Моторлы қайықтың жылдамдығын табыңдар.
3) Екі мотоциклшінің арақашықтығы 7 км. Біреуінің жылдамдығы 14 км/сағ, ал екіншісінікі 16 км/сағ. Егер мотоциклшілер а) бір бағытта; ә) қарама-қарсы бағытта жүрсе (екі жағдайды қарастырыңдар), онда қанша уақытта олардың арақашықтығы 1 км-ге тең болады?

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

36.30. Берілген өрнектің мәні нөлге тең болатындай айнымалының мәндерін табыңдар:
1) $2x-5$; 2) $36x-4x^2$; 3) $2\frac{1}{3}x-14$;
4) x^2-16; 5) $25-x^2$; 6) $9x+4x^2$.

36.31. Берілген өрнекті стандарт көпмүше түрінде жазыңдар:
1) $\frac{2x^2-3x+3}{4}$; 2) $36x-\frac{x^2+4x+3}{4}$;
3) $2\frac{1}{3}x-\frac{7-5x+2x^3}{3}$; 4) $x^2+1-\frac{x-3}{4}+\frac{8x^2-3}{4}$.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

1. Дұрыс емес теңдікті анықтаңдар.

A. $(3b-c)(3b+c)=9b^2-c^2$; B. $(x+4)(4-x)=16-x^2$;

C. $36n^2-49=(6n+7)(7-6n)$; D. $y^4-25=(y^2-5)(y^2+5)$.

2. x-ті қандай бірмүшемен алмастырғанда $n^2+x+0{,}04$ өрнегі екімүшенің квадраты болады?

A. $0{,}2n$ немесе $-0{,}2n$; B. $4n$ немесе $-4n$;

C. $2n$ немесе $-2n$; D. $0{,}4n$ немесе $-0{,}4n$.

3. Дұрыс теңдікті анықтаңдар.

A. $(3+a^2)^2=9+3a+a^2$; B. $(k-5)^2=k^2-10k+10$;

C. $(x+2y^2)^2=x^2+4xy^2+4y^4$; D. $16a^4-24a^2b+9b^2=(8a^2-3b)^2$.

4. $a^4b^6-16c^8$ өрнегін көбейткіштерге жіктеңдер.

A. $(a^2b^3-4c^4)^2$; B. $(a^2b^3+4c^4)^2$;

C. $(a^2b^3-4c^4)(a^2b^3+4c^4)$; D. $(a^2b^3+4c^4)(4c^4-a^2b^3)$.

5. $4x^2-25=0$ теңдеуін шешіңдер.

A. 2,5; B. –2,5; C. –2,5; 2,5; D. –10; 10.

6. $169-(z+7)^2$ өрнегін көбейткіштерге жіктеңдер.

A. $(6-z)(20+z)$; B. $(6-z)(20-z)$;

C. $(6-z)(z-20)$; D. $(z-6)(20-z)$.

7. Дұрыс теңдікті анықтаңдар:

A. $8t^3+1=(2t-1)(4t^2+2t+1)$;

B. $216a^3-b^6=(6a+b^2)(36a^2-6ab^2-b^3)$;

C. $27x^3-64y^3=(3x-4y)(9x^2+12xy+16y^2)$;

D. $\frac{8}{27}a^3-\frac{1}{64}b^3=\left(\frac{2}{3}a-\frac{1}{2}b\right)\left(\frac{4}{9}a^2+\frac{1}{12}ab+\frac{1}{4}b^2\right)$.

8. 41^3+14^3 өрнегі қандай санға бөлінеді?

A. 2; B. 7; C. 14; D. 55.

9. Айырымның квадраты шығатын етіп $0{,}25a^2-{*}ab+9b^2$ өрнегіндегі * таңбасының орнына сан қойыңдар.

A. 1,5; B. –1,5; C. 3; D. –3.

10. $\dfrac{5{,}2^2-4{,}8^2}{1{,}1^2-2\cdot1{,}1+1}$ өрнегін есептеңдер.

A. 400; B. 40; C. –40; D. – 400.

11. $5x^3 - 125x = 0$ теңдеуін шешіңдер.

A. 0,5; B. –5; C. 0; D. –5; 0; 5.

12. $(8 + x)(8 - x) + (x + 2)^2$ өрнегін ықшамдаңдар.

A. $68 - 4x$; B. $68 + 4x$; C. $60 - 4x$; D. $60 + 4x$.

13. $(9 - b)(9 + b) - (3 - b)(9 + 3b + b^2)$ өрнегін ықшамдап, $b = -1$ болғандағы мәнін табыңдар.

A. 52; B. 53; C. 56; D. 108.

14. Екі мүшенің айырымының квадраты шығу үшін $m^2 + 2* + 0{,}04$ өрнегіндегі * таңбасының орнына бірмүше қойыңдар.

A. $0{,}1\ m$ немесе $-0{,}1\ m$; B. $0{,}2\ m$;

C. $-0{,}2\ m$; D. $0{,}2\ m$ немесе $-0{,}2\ m$.

15. $(5x - 2)(x + 1) - (5 - 2x)^2$ өрнегін стандарт көпмүшеге түрлендіріңдер.

A. $x^2 + 23x - 27$; B. $9x^2 + 23x - 27$;

C. $9x^2 - 27x - 27$; D. $x^2 + 23x + 27$.

16. $2x + y + y^2 - 4x^2$ өрнегін көбейткіштерге жіктеңдер.

A. $(2x + y)(y - 2x)$; B. $(2x + y)(1 + y - 2x)$;

C. $(y + 2x)(y - 2x - 1)$; D. $(y + 2x)(2x - y - 1)$.

17. $(2 - a)(4 + 2a + a^2) - (3 + a)(9 - 6a + a^2)$ өрнегін ықшамдап, $a = -2$ болғандағы мәнін табыңдар.

A. –3; B. 37; C. – 37; D. –19.

18. $\dfrac{18^3 - 7^3}{18^2 + 18 \cdot 7 + 7^2}$ өрнегін есептеңдер.

A. 3218; B. 1321; C. 11; D. 3125.

19. $(b - 4)^2 - (a + 3)^2$ өрнегін көбейткіштерге жіктеңдер.

A. $(b - a - 7)(b - a + 1)$; B. $(b - a - 7)(b + a - 1)$;

C. $(b + a - 7)(b - a + 1)$; D. $(b - a + 7)(b - a - 1)$.

20. $x^6 - x^2 \cdot y^4$ өрнегін көбейткіштерге жіктеңдер.

A. $(x^3 - y^2)(x^3 + y^2)$; B. $x^2(x^2 - y^2)^2$;

C. $x^2(x^2 + y^2)^2$; D. $x^2(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)$.

6-ТАРАУ

АЛГЕБРАЛЫҚ БӨЛШЕКТЕР ЖӘНЕ ОЛАРҒА АМАЛДАР ҚОЛДАНУ

§ 37. АЛГЕБРАЛЫҚ БӨЛШЕК

Алгебралық бөлшек дегеніміз не?

Сендер көпмүше (бірмүше, екімүше, үшмүше) ұғымымен таныссыңдар. Мысалы, $-2a^2b^5$ — бірмүше, $x^3 + 0{,}12y^3$ — екімүше, $\frac{1}{3}x^2 + 2xy + y^2$ — үшмүше, $x^2 + 3x + 7xy + 8y + y^2 + \frac{1}{12}$ — көпмүше.

Көпмүшелер *бүтін өрнектер* болады. Сан да көпмүше болып табылады.

Түсіндіріңдер

Неліктен $\frac{b-36}{2}$, $n^3 - \frac{n(n-9)}{4}$ өрнектері бүтін өрнектер (көпмүшелер) болады?

$\frac{4+b}{-2a+11}$, $\frac{2x+6-y}{x^2-8+y}$, $\frac{14+n^2}{n^2-7}$ өрнектерінің алымы мен бөлімі көпмүшелер немесе бүтін өрнектерден тұрады. Мұндай өрнектер *алгебралық рационал бөлшектер немесе бөлшекті өрнектер* деп аталады.

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ теңдігін квадраттар айырымының формуласы деп атайды.

Анықтама. ***Алгебралық рационал бөлшек*** *(бөлшекті өрнек) деп* $\frac{A}{B}$ *түріндегі өрнекті айтады, мұндағы A және B — көпмүшелер (бүтін өрнектер).*

A көпмүшесі *алгебралық бөлшектің алымы* деп, *B* көпмүшесі *алгебралық бөлшектің бөлімі* деп аталады.

Анықтама. *Бүтін және бөлшекті өрнектерді (көпмүшелер мен алгебралық бөлшектерді)* ***рационал өрнектер*** *деп атайды.*

Рационал өрнектер

бүтін өрнектер (көпмүшелер) | бөлшекті өрнектер (алгебралық бөлшектер)

Бүтін өрнектердің мәндерін табуды білесіңдер. Бөлшекті өрнектердің мәндерін де солай табады.

Түсіндіріңдер

$\frac{7a-8b}{1,4ab}$ алгебралық бөлшегінің $a=\frac{2}{7}$, $b=-10$ болған дағы мәні қалай табылған?

$$\frac{7a-8b}{1,4ab}=\frac{7\cdot\frac{2}{7}-8(-10)}{1,4\cdot\frac{2}{7}(-10)}=\frac{2+80}{-4}=\frac{82}{-4}=-20,5.$$

Бүтін өрнектің (көпмүшенің) мәнін табу үшін әрқашан көрсетілген арифметикалық амалдарды орындауға болады, сондықтан бүтін өрнектің оған енетін айнымалылардың кез келген мәнінде мағынасы болады.

Неліктен $\frac{7a-8b}{1,4ab}$ алгебралық бөлшегінің $a=0$ немесе $b=0$ болғандағы мәнін табуға болмайды?

Бөлшекті өрнек айнымалылардың кейбір мәндерінде мағынасыз болуы мүмкін.

Неліктен $\frac{10x-12}{x}$ бөлшекті өрнегінің $x=0$ болғанда мағынасы болмайды? Осы бөлшекті өрнектің x айнымалысының басқа барлық мәндерінде мағынасы болады.

Анықтама. *Бөлшекті өрнектің мағынасы болатын айнымалылардың мәндерін осы бөлшекті өрнек айнымалысының* ***мүмкін мәндері*** *деп атайды*.

Алгебралық бөлшектегі айнымалылардың мүмкін болатын мәндер жиынын қалай табуға болады?

Мысалы, $\frac{7+8x}{x(x-3)}$ бөлшекті өрнегіндегі x айнымалысының мүмкін мәндерін табайық.

Шешуі. Бөлшекті өрнектің мүмкін мәндері деп бөлімін нөлге айналдырмайтын айнымалының барлық мәндерін айтады. Олай болса, алгебралық бөлшектің бөлімін нөлге айналдыратын x айнымалысының мәндерін табамыз да оларды барлық сандардың ішінен шығарып тастаймыз. Ол үшін алдымен $x(x-3)=0$ теңдеуін шешейік.

Бұл теңдеудің екі түбірі бар: 0 және 3, өйткені ең болмағанда бір көбейткіші нөлге тең болса ғана көбейтінді нөлге тең болады. Демек, $\frac{7+8x}{x(x-3)}$ бөлшекті өрнектегі x айнымалысының мүмкін мәндері 0 мен 3-тен басқа барлық сандар, яғни $(-\infty; 0) \cup (0; 3) \cup (3; +\infty)$ сан аралығы болады.

Жауабы : $(-\infty; 0) \cup (0; 3) \cup (3; +\infty)$.

Алгебралық бөлшектер *бөлшек-рационал өрнектер* деп те аталады. Мысалы, $\frac{-58}{y}$, $\frac{x+83}{100}$, $\frac{x-y}{x^2-2xy+y^2}$, $\frac{mn}{m^2+n^2}$ — бөлшек-рационал өрнектер.

Бөлшек-рационал өрнектің мүмкін мәндері деп бөлшектің бөлімін нөлге айналдырмайтын айнымалылардың мәндерін айтады.

1. Мына тұжырымдар дұрыс па:
   - кез келген бөлшекті өрнек рационал өрнек болады;
   - кез келген рационал өрнек бөлшекті өрнек болады;
   - кез келген рационал өрнек бүтін өрнек болады;
   - кез келген бүтін өрнек рационал өрнек болады;
   - кез келген алгебралық бөлшек бөлшекті өрнек болады;
   - кез келген көпмүше бүтін өрнек болады?
2. Айнымалылардың қандай мәндерінде рационал өрнектің мағынасы болмайды?

Жаттығулар

А

37.1. 1) $\frac{2x}{3}+\frac{4}{7}$; 2) $\frac{2-5x}{7,3}-\frac{4x+3}{3}$; 3) $\frac{3}{x-2}$;

4) $\frac{3x+4}{x-2}+\frac{x}{7}$; 5) $\frac{3y}{2,7-\frac{3}{7}}$; 6) $\frac{4y-5}{3-0,2y}+\frac{2y-3}{8}$

өрнектері бөлшек-ра ционал өрнек бола ма?

37.2. 1) $x = 3$; 1; -5; $\frac{1}{2}$; $-1,6$; 100 болғанда $\frac{2x-1}{x}$;

2) $a=-2$; $-0,4$; 0; 2,5 болғанда $\frac{3a-7}{2a+5}$;

3) $b = 3;\ 4{,}4;\ \ 5;\ \ 6$ болғанда $\dfrac{b^2+6}{3b-4}$;

4) $x = -\dfrac{1}{2};\ 0{,}5;\ \ 1;\ 3$ болғанда $2x + \dfrac{8}{x+1}$;

5) $y = 1{,}5;\ \ 2{,}5;\ \ 4;\ 4{,}5$ болғанда $\dfrac{y+3}{2y} + \dfrac{2y}{y-3}$;

6) $x = -\dfrac{1}{2};\ 1{,}5;\ \ 2;\ 3$ болғанда $\dfrac{x+3}{x} + \dfrac{x}{x-3}$;

7) $a = -3,\ b = -1$ болғанда $\dfrac{(a+b)^2-1}{a^2+1}$;

8) $a = 1\dfrac{1}{2},\ b = 0{,}5$ болғанда $\dfrac{2a^2-b}{b^2+1} - \dfrac{1}{a}$

өрнектерінің мәнін табыңдар.

37.3. Берілген 37.1-кестені толтырыңдар:

37.1- кесте

x	-13	-5	$-0{,}2$	0	$\dfrac{1}{17}$	1	5	7
$\dfrac{x+5}{x-3}$								

37.4. Айнымалының қандай мәндерінде берілген өрнектердің мағынасы болмайды:

1) $\dfrac{x}{x-2}$; 2) $\dfrac{b+4}{b^2+7}$; 3) $\dfrac{y^2-1}{y} + \dfrac{y}{y-3}$;

4) $\dfrac{a+10}{a(a-1)} - 1$; 5) $\dfrac{y^3-1}{2-y} - \dfrac{2y}{3y-3}$; 6) $\dfrac{c^2-1}{3c} + \dfrac{4c}{2c-3}$?

37.5. 1) Алымы x пен y-тің көбейтіндісі, ал бөлімі $2x$ пен $3y$-тің қосындысы болатын;
2) алымы $2a$ мен $b-1$ өрнектерінің айырымы, ал бөлімі олардың көбейтіндісі болатын бөлшек құрастырыңдар.

B

37.6. 1) $\dfrac{5y-8}{11}$; 2) $\dfrac{y^2+1}{y^2-2y}$; 3) $\dfrac{y-10}{y^2+3}$;

4) $\dfrac{6y}{3y-4} + \dfrac{15}{y+16}$; 5) $\dfrac{32}{5y} - \dfrac{3y+1}{2y+7}$

өрнектеріндегі айнымалының мүмкін мәндерін табыңдар.

37.7. 1) $\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{2x-6}$; 2) $\dfrac{2x+3}{x(x+1)}+\dfrac{4}{3x}$;

3) $5x+\dfrac{71}{x+5}$; 4) $\dfrac{5y-7}{(y-3)\cdot(2y+5)}-\dfrac{5}{y}$

өрнектеріндегі айнымалының мүмкін мәндер ін көрсетіңдер.

37.8. x-тің 1) 3; 2) 4; 3) –2; 4) –1 мен 2; 5) 3 пен 5; 6) $-\dfrac{2}{3}$ мен 7 сандарынан басқа барлық мәндерінде мағынасы болатын x айнымалысы бар бөлшек жазыңдар.

C

37.9. Арақашықтығы s км A және B қалаларынан екі пойыз бір мезгілде бір-біріне қарама-карсы бағытта жолға шықты. Біріншісі v_1 км/сағ жылдамдықпен, ал екіншісі v_2 км/сағ жылдамдықпен жүріп, олар t сағ уақыттан кейін кездесті. t айнымалысын s, v_1 және v_2 арқылы өрнектендер . Егер
1) $s = 350$, $v_1 = 55$, $v_2 = 45$;
2) $s = 465$, $v_1 = 85$, $v_2 = 70$
екені белгілі болса, онда t айнымалысын табыңдар.

37.10. 1) $x = 0$; $x = 0,5$; $x = 2$; $x = 4,6$; $x = 3$ болғанда $\dfrac{3x}{x^3-3x^2}$ бөлшегінің мәні бар болса, онда ол неге тең?

2) $c = -2$; $c = 4,5$; $c = 6\dfrac{1}{4}$; $c = \dfrac{2}{3}$; $c = 1,5$ болғанда $\dfrac{2c-3}{2c^3-3c^2}$ бөлшегінің мәні бар болса, онда ол неге тең?

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

37.11. $\dfrac{x-4y}{y}=12$ болса, 1) $\dfrac{x}{y}$; 2) $\dfrac{y}{x}$; 3) $\dfrac{3x+y}{2y}$ өрнегінің мәнін табыңдар.

37.12. Тура теңдіктерді көрсетіңдер:

1) $\dfrac{65}{85}=\dfrac{13}{17}$; 2) $\dfrac{46}{79}=\dfrac{138}{237}$; 3) $\dfrac{21}{23}=\dfrac{189}{230}$.

§ 38. АЛГЕБРАЛЫҚ БӨЛШЕКТІҢ НЕГІЗГІ ҚАСИЕТІ

Алгебралық бөлшектің негізгі қасиеті қандай және оны қалай қолданады?

Жай бөлшектердің негізгі қасиетін білесіңдер: егер бөлшектің алымы мен бөлімін нөлге тең емес бірдей санға көбейтсек немесе бөлсек, бөлшектің мәні өзгермейді.

Рационал-бөлшек өрнектің де осындай қасиеті бар.

Теорема. ***Кез келген $a, b \neq 0$ және $c \neq 0$ үшін $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ теңдігі дұрыс.***

Дәлелдеу. $\frac{a}{b}$ бөлшегін m әрпімен белгілеп, $\frac{a}{b} = m$ теңдігінен a бөлінгішін өрнектейміз: $a = bm$. Енді $a = bm$ теңдігінің екі жағын да c-ға көбейтеміз: $ac = (bm)c$. Көбейтудің ауыстырымдылық және терімділік қасиеттерін қолданамыз: $ac = (bc)m$.

$ac = (bc)\,m$ теңдігінен m-ді өрнектесек, $m = \frac{ac}{bc}$, мұндағы $bc \neq 0$.

Бастапқы $m = \frac{a}{b}$ белгілеуін ескеріп, $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ аламыз ■.

$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ тепе-теңдігімен өрнектелген қасиет *бөлшектің негізгі қасиеті* деп аталады.

Тепе-теңдік деп айнымалыларының кез келген мәндерінде дұрыс теңдікке айналатын теңдікті айтатынын білесіңдер.

$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ теңдігі сол және оң жағы да мағынаға ие болатын айнымалылардың барлық мәндерінде, яғни айнымалылардың барлық мүмкін мәндерінде дұрыс. Осындай теңдіктер де *тепе-теңдіктер* деп аталады.

Анықтама. ***Тепе-теңдік*** *деп оған енетін айнымалылардың барлық мүмкін мәндерінде дұрыс болатын теңдікті айтады.*

Құрамына енетін айнымалылардың барлық мүмкін мәндерінде бірдей мәндер қабылдайтын екі өрнек *тепе-тең*, ал осы өрнектің біреуін екіншісімен алмастыру *тепе-теңдікті түрлендіру* деп аталады.

$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ тепе-теңдігінің сол және оң жақ бөліктерін алмастырып, $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$-ны аламыз. Бұл тепе-теңдік $\frac{ac}{bc}$ түріндегі бөлшекті $\frac{a}{b}$ бөлшегімен алмастыруға немесе $\frac{ac}{bc}$ бөлшегінің алымы мен бөлімін c ортақ көбейткішіне қысқартуға мүмкіндік береді.

1-мысал. $\dfrac{35a^3}{21ab}$ бөлшегін қысқартайық.

Шешуі . Бөлшектің алымы мен бөлімін құрамында бірдей $7a$ көбейткіші бар көбейтінді түрінде көрсетеміз: $\dfrac{35a^3}{21ab} = \dfrac{5a^2 \cdot 7a}{3b \cdot 7a}$.

Енді бөлшекті $7a$ ортақ көбейткішіне қысқартамыз: $\dfrac{5a^2 \cdot 7a}{3b \cdot 7a} = \dfrac{5a^2}{3b}$.

Жауабы : $\dfrac{5a^2}{3b}$.

2-мысал. $\dfrac{16 - x^2}{8x + 2x^2}$ бөлшегін қысқартайық.

Шешуі . Бөлшектің алымы мен бөлімін көбейткіштерге жіктейміз: $\dfrac{16 - x^2}{8x + 2x^2} = \dfrac{(4 - x)(4 + x)}{2x(4 + x)}$. Шыққан бөлшекті $(4 + x)$ ортақ көбейткішіне қысқартамыз: $\dfrac{(4 - x)(4 + x)}{2x(4 + x)} = \dfrac{4 - x}{2x}$.

Жауабы : $\dfrac{4 - x}{2x}$.

3-мысал. $\dfrac{5x}{6y}$ бөлшегін бөлімі $12y^3$ болатын бөлшекке келтірейік.

Шешуі . Алдымен $12y^3$ өрнегін көбейткіштерінің бірі берілген бөлшектің бөліміне тең болатын етіп көбейтіндіге жіктейік: $12y^3 = 6y \cdot 2y^2$. Енді осы көбейтіндінің екінші $2y^2$ көбейткішіне (оны *толықтауыш көбейткіш* деп атайды) $\dfrac{5x}{6y}$ бөлшегінің алымы мен бөлімін көбейтеміз: $\dfrac{5x}{6y} = \dfrac{5x \cdot 2y^2}{6y \cdot 2y^2}$. Сонда $\dfrac{5x \cdot 2y^2}{6y \cdot 2y^2} = \dfrac{10xy^2}{12y^3}$ шығады.

Жауабы : $\dfrac{10xy^2}{12y^3}$.

4-мысал. $\dfrac{2x^2}{9y - 7}$ бөлшегін бөлімі $7 - 9y$ болатын бөлшекке келтірейік .

Шешуі . Берілген бөлшектің алымы мен бөлімін –1-ге көбейтіп, одан кейін ықшамдасақ, $\dfrac{2x}{9y - 7} = \dfrac{2x \cdot (-1)}{(9y - 7) \cdot (-1)} = \dfrac{-2x}{-9y + 7}$ шығад ы.

Бөлшектің бөліміне көбейтудің ауыстырымдылық қасиетін қолданамыз: $\frac{-2x}{-9y+7} = \frac{-2x}{7-9y}$. Енді $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$ қасиетін қолданамыз:

$$\frac{-2x}{7-9y} = -\frac{2x}{7-9y}.$$

Жауабы : $-\frac{2x}{7-9y}$.

1. Теңдіктің бұрыс, мағынасы жоқ мәндерінде оның тепе-теңдік болуы мүмкін бе?
2. Әріптердің қандай мәндерінде бөлшектердің негізгі қасиеті орындалады?

Жаттығулар

A

Берілген алгебралық бөлшектерді қысқартыңдар **(38.1-38.2)** :

38.1. 1) $\frac{12xa}{15ya}$; 2) $\frac{12cb^2}{9bc^3}$; 3) $\frac{12ay^3}{-8a^2y}$; 4) $\frac{-6p^3q}{-12q^3}$;

5) $\frac{-4ax^2}{12xy}$; 6) $\frac{9axy^2}{6ay^3}$; 7) $\frac{48a^2c^2}{36ac}$; 8) $\frac{63x^3y^5}{84x^6y^4}$.

38.2 . 1) $\frac{18bc}{24c}$; 2) $\frac{25a^2y}{15by}$; 3) $\frac{24a^3}{6ac}$; 4) $\frac{27x^2y}{21xy^3}$;

5) $\frac{-2a^6b^3}{a^3b^5}$; 6) $\frac{x^7y^4}{x^5y^8}$; 7) $\frac{42m^3n^5}{35mn^5}$; 8) $\frac{75p^4q}{150p^5q}$.

38.3. 1) $\frac{4a}{a^3c}$; 2) $\frac{5ac^3}{a^2c}$; 3) $\frac{4a}{2ac^2}$;

4) $\frac{ac^4}{0,5ac}$; 5) $\frac{5,5ac}{a^2c}$; 6) $\frac{-ax}{a^3c}$

бөлшектерін бөлімі $4a^5c^2$ болатын бөлшекке келтіріңдер.

38.4. 1) $\frac{2y}{a-b}$ бөлшегін бөлімі $(a-b)^2$;

2) $\frac{-3x}{x+a}$ бөлшегін бөлімі x^2-a^2;

3) $\frac{5a}{y-1}$ бөлшегін бөлімі y^3-1;

4) $\frac{4b}{a^2+ab+b^2}$ бөлшегін бөлімі a^3-b^3;

5) $\frac{9y}{y-b}$ бөлшегін бөлімі $b-y$;

6) $\frac{-5x}{x-10}$ бөлшегін бөлімі $10-x$;

7) $\frac{-4p}{p+2}$ бөлшегін бөлімі $4-p^2$;

8) $\frac{2a+3}{6-2a}$ бөлшегін бөлімі $2(a^2-9)$;

9) $\frac{7a}{3xy^2}$ бөлшегін бөлімі $15x^2y^3$;

10) $\frac{11}{x+1}$ бөлшег ін бөлімі x^3+1 болатын бөлшекке келтіріңдер.

38.5. 1) $\frac{x^7+x^5}{x^4+x^2}$; 2) $\frac{y^7+y^9}{y^4+y^2}$; 3) $\frac{a^7-a^{10}}{a^5-a^2}$; 4) $\frac{x^6-x^4}{x^3+x^2}$;

5) $\frac{a-2b}{2b-a}$; 6) $\frac{4(a-b)^2}{2b-2a}$; 7) $\frac{(-a-b)^2}{a+b}$; 8) $\frac{(a-b)^2}{(b-a)^2}$

бөлшек-рационал өрнектерін ықшамдаңдар.

B

38.6. 1) $x=-0{,}6$ болғанда $\frac{x^5+4x^4}{x^4+4x^3}$;

2) $x=-3\frac{2}{3}$ болғанда $\frac{3x^5-4x^4}{3x^3-4x^2}$ бөлшегінің мәнін табыңдар.

38.7. 1) $\frac{a(x-2y)}{b(2y-x)}$; 2) $\frac{3a-36}{12b-ab}$; 3) $\frac{25-a^2}{3a-15}$; 4) $\frac{8b^2-8a^2}{a^2-2ab+b^2}$;

5) $\frac{5x(x-y)}{x^3(y-x)}$; 6) $\frac{7b-14b^2}{42b^2-21b}$; 7) $\frac{3-3x}{x^2-2x+1}$; 8) $\frac{(b-2)^3}{(2-b)^2}$

алгебралық бөлшегін қысқартыңдар.

38.8. 1) $\dfrac{18a - 3a^2}{8a^2 - 48a}$; 2) $\dfrac{8p - 40}{15 - 3p}$; 3) $\dfrac{4 - x^2}{10 - 5x}$;

4) $\dfrac{(3x + 6y)^2}{5x + 10y}$; 5) $\dfrac{ax + bx - ay - by}{bx - by}$; 6) $\dfrac{a^2 - 6a + 9}{27 - a^3}$;

7) $\dfrac{(2a - 2b)^2}{a - b}$; 8) $\dfrac{(4c + 12d)^2}{c + 3d}$; 9) $\dfrac{4x^2 - y^2}{(6x - 3y)^2}$;

10) $\dfrac{ab - 3b - 2a + 6}{15 - 5a}$ бөлшек-рационал өрнегін қысқартыңдар.

C

38.9. $a + 2c = 7$ екенін ескеріп, төмендегі бөлшек-рационал өрнегінің мәнін табыңдар:

1) $\dfrac{3a + 6c}{(2c + a)^2}$; 2) $\dfrac{a + 2c}{2(2c + a)^2}$; 3) $\dfrac{a + 2c}{(2c + a)^3}$; 4) $\dfrac{(2c - a) \cdot 4}{\left(4c^2 - a^2\right)}$.

38.10. 1) $a = -3$, $b = -0{,}2$ болғанда $\dfrac{15a^2 - 10ab}{3ab - 2b^2}$;

2) $c = 1\frac{2}{3}$, $d = 0{,}5$ болғанда $\dfrac{9c^2 - 4d^2}{18c^2d - 12cd^2}$;

3) $x = \frac{2}{3}$, $y = -0{,}4$ болғанда $\dfrac{6x^2 + 12xy}{5xy + 10y^2}$;

4) $x = -0{,}2$, $y = -0{,}6$ болғанда $\dfrac{x^2 + 6xy + 9y^2}{4x^2 + 12xy}$

алгебралық бөлшегін ықшамдап, мәнін табыңдар.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

38.11. Екі темір ұстасы 8 сағ-та 120 бөлшек дайындайды. Егер бір ұста екіншісіне қарағанда бір сағатта 3 бөлшек артық жасаса, ұсталардың әрқайсысы сағатына қанша бөлшек дайындайды? Есепті шығарыңдар. Оған кері есептерді құрастырыңдар және оларды шешіңдер.

38.12. Санды өрнектің мәнін табыңдар:

1) $\frac{2}{3} + 1\frac{4}{5}$; 2) $\frac{11}{15} - 2\frac{3}{5}$; 3) $4\frac{5}{7} - 2\frac{3}{14}$.

§ 39. АЛГЕБРАЛЫҚ БӨЛШЕКТЕРДІ ҚОСУ ЖӘНЕ АЗАЙТУ

Алгебралық бөлшектерді қосу мен азайту қалай орындалады?

Бөлімдері бірдей жай бөлшектерді қосқанда олардың алымдарын қосып алымына жазылатынын, бөлімін өзгеріссіз қалдыратынын білесіңдер. Мысалы, $\frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{3+2}{8} = \frac{5}{8}$.

Кез келген бөлімдері бірдей рационал бөлшектерді де осылай қосады.

Теорема. $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ ***теңдігі айнымалылардың кез келген мүмкін мәндерінде*** **(**$c \neq 0$**)** ***дұрыс*** .

Дәлелдеу . Бөлшектерді m және n әріптерімен белгілейміз: $\frac{a}{c} = m$, $\frac{b}{c} = n$. Осыдан a және b бөлінгіштерін табамыз: $a = cm$, $b = cn$.

Соңғы теңдікті қолданып, $a + b$ қосындысын түрлендіреміз: $a + b = cm + cn$. Енді c ортақ көбейткішін жақша сыртына шығарайық: $cm + cn = c(m + n)$. Сонда $a + b = c(m + n)$ аламыз. Осыдан $m + n$ көбейткішін табамыз: $m + n = \frac{a+b}{c}$, өйткені $c \neq 0$. Енгізілген m және n белгілеулерін ескеріп, $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ аламыз ■.

Бөлімдері бірдей рационал бөлшектерді қосу ережесі: бөлімдері бірдей бөлшектерді қосу үшін олардың алымдарын қосып алымына жазып, бөлімдерін өзгеріссіз қалдыру керек.

Бұл ережені бөлімдері бірдей үш бөлшекті қосқанда қолдануға болатынын дәлелдеңдер. Неліктен бұл ережені бөлімдері бірдей төрт және одан да көп бөлшектерді қосқанда да қолдануға болады?

Қосу және азайту өзара кері амалдар екенін білесіңдер.

Егер $x + y = k$ болса, онда $k - y = x$ және керісінше, егер $k - y = x$ болса, онда $x + y = k$.

Қосу мен азайтудың осы байланысын өзара тең белгісінің көмегімен былай жазуға болады: $x + y = k \Leftrightarrow k - y = x$.

$x + y = k \Leftrightarrow k - y = x$ жазуының оқылуы: $x + y = k$ теңдігі $k - y = x$ теңдігімен мәндес .

Қосу мен азайтудың байланысын қолданып, кез келген a, b және c ($c \neq 0$) үшін $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$ теңдігінің дұрыс болатынын дәлелдеңдер.

Бөлімдері бірдей рационал бөлшектерді азайту ережесі: бөлімдері бірдей бөлшектерді азайту үшін азайғыштың алымынан азайтқыштың алымын азайтып алымына жазып, бөлімін өзгеріссіз қалдыру керек.

1-мысал . $\frac{3a-7b}{15ab}$ және $\frac{2a+2b}{15ab}$ бөлшектерін қосайық.

Шешуі . Бөлімдері бірдей рационал бөлшектерді қосу ережесін қолданамыз: $\frac{3a-7b}{15ab}+\frac{2a+2b}{15ab}=\frac{3a-7b+2a+2b}{15ab}$. Шыққан бөлшектің алымындағ ы ұқсас қосылғыштарды біріктіріп, $\frac{3a-7b+2a+2b}{15ab}=$ $=\frac{5a-5b}{15ab}$ алам ыз. Енді бөлшектің алымындағы ортақ көбейткіш 5 санын жақша сыртына шығарып, бөлшекті 5-ке қысқартамыз: $\frac{5a-5b}{15ab}=\frac{a-b}{3ab}$.

Есепт ің шешуін қысқаша былай жазуға болады:

$$\frac{3a-7b}{15ab}+\frac{2a+2b}{15ab}=\frac{3a-7b+2a+2b}{15ab}=\frac{5a-5b}{15ab}=\frac{5(a-b)}{15ab}=\frac{a-b}{3ab}.$$

Жауабы : $\frac{a-b}{3ab}$.

2-мысал. $\frac{a^2+9}{5a-15}$ бөлшегінен $\frac{6a}{5a-15}$ бөлшегін азайтайық.

Шешуі . $\frac{a^2+9}{5a-15}-\frac{6a}{5a-15}=\frac{a^2+9-6a}{5a-15}=\frac{(a-3)^2}{5(a-3)}=\frac{a-3}{5}$.

Жауабы : $\frac{a-3}{5}$.

3-мысал. $\frac{x^2-3}{x^2+2x}+\frac{2}{x^2+2x}-\frac{2x-1}{x^2+2x}$ өрнегін ықшамдайық .

Шешуі . Мұнда бөлшектерді қосу мен азайтуды жеке емес, бірге орындаған ыңғайлы:

$$\frac{x^2-3}{x^2+2x}+\frac{2}{x^2+2x}-\frac{2x-1}{x^2+2x}=\frac{x^2-3+2-(2x-1)}{x^2+2x}=\frac{x^2-2x}{x^2+2x}=$$

$$=\frac{x(x-2)}{x(x+2)}=\frac{x-2}{x+2}.$$

Жауабы : $\frac{x-2}{x+2}$.

4-мысал. $\dfrac{3a}{2x-a}$ және $\dfrac{6x}{a-2x}$ бөлшектерін қосайық.

Шешуі. $\dfrac{3a}{2x-a}$ және $\dfrac{6x}{a-2x}$ бөлшектерінің бөлімдері қарама-карсы өрнектер болғандықтан, екінші бөлшекті түрлендіреміз: $\dfrac{6x}{a-2x}=-\dfrac{6x}{2x-a}$. Осыдан кейін бөлшектерді ортақ бөлімге келтіріп, бөлімдері бірдей бөлшектерді азайту ережесін қолданамыз:

$$\frac{3a}{2x-a}+\frac{6x}{a-2x}=\frac{3a}{2x-a}-\frac{6x}{2x-a}=\frac{3a-6x}{2x-a}=\frac{-3(2x-a)}{2x-a}.$$

Жауабы: –3.

Бөлімдері әртүрлі рационал бөлшектерді қосу мен азайтуды қарастырайық. Ол бөлімдері бірдей бөлшектерді қосу мен азайтуға келтіріледі.

Мысалы, $\dfrac{a}{b}$ және $\dfrac{c}{d}$ рационал бөлшектерін қосайық.

Бөлшектерді бөлімдері bd бірдей бөлшектерге келті ру үшін бірінші бөлшектің алымы мен бөлімін d-ға, ал екінші бөлшектің алымы мен бөлімін b-ға көбейтеміз: $\dfrac{a}{b}=\dfrac{ad}{bd}$ және $\dfrac{c}{d}=\dfrac{bc}{bd}$. Бөлімдері бірдей бөлшектерді қосу ережесі бойынша $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad}{bd}+\dfrac{bc}{bd}=\dfrac{ad+bc}{bd}$.

Демек, $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad+bc}{bd}$.

Бөлімдері әртүрлі рационал бөлшектерді азайту да осыған ұқсас орындалады: $\dfrac{a}{b}-\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad}{bd}-\dfrac{bc}{bd}=\dfrac{ad-bc}{bd}$.

Демек, $\dfrac{a}{b}-\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad-bc}{bd}$.

Бөлімдері әртүрлі рационал бөлшектерді қосу мен азайту кезінде ортақ бөлімді табу үшін бөлшектің бөлімдеріндегі ең кіші ортақ еселікті табатынын білесіңдер, яғни:

— егер бөлшектің бөлімдері өзара жай сандар болса, онда ең кіші ортақ еселік бөлімдердің көбейтіндісіне тең;

— егер бөлшектің бөлімдері бір-біріне бөлінсе, онда ол осы бөлімдердің үлкеніне тең;

— бөлшектердің бөліміндегі өрнектер жай көбейткіштерге жіктеліп, осы жіктелудің құрамында бар, бірақ бірінші мен екінші бөлшектің бөлімдерінде жоқ көбейткіштердің көбейтіндісі ең кіші ортақ еселік ретінде алынады.

Бөлімдері әртүрлі рационал бөлшектердің ортақ бөлімін анықтағанда, алдымен осы бөлімдердің ортақ көбейткіштері болатындай көбейткіштерге жіктеу қолданады.

5-мысал. $\dfrac{m-10nk}{14n^3k^2}$ және $\dfrac{5}{7n^2k}$ бөлшектерін қоса йық.

Шешуі . Алдымен бірінші бөлшектің бөлімін көбейткіштің біреуі екінші бөлшектің бөліміне тең болатын бірмүшелердің көбейтіндісі түрінде жазамыз: $\dfrac{m-10nk}{14n^3k^2}=\dfrac{m-10nk}{7n^2k\cdot 2nk}$. Енді толықтауыш көбейткіштерді тауып, бөлшектерді қосамыз:

$$\frac{^{1/}m-10nk}{7n^2k\cdot 2nk}+\frac{^{2nk/}5}{7n^2k}=\frac{m-10nk}{14n^3k^2}+\frac{10nk}{14n^3k^2}=\frac{m-10nk+10nk}{14n^3k^2}.$$

Шыққан бөлшектің алымындағы ұқсас қосылғыштарды біріктіреміз:

$$\frac{m-10nk+10nk}{14n^3k^2}=\frac{m}{14n^3k^2}.$$

Жауабы : $\dfrac{m}{14n^3k^2}$.

6-мысал. $\dfrac{x+7}{x^2+xy}-\dfrac{y-7}{xy+y^2}$ айырымын түрлендірейік.

Шешуі . Алдымен ортақ көбейткішті жақша сыртына шығаруды қолданып, әр бөлімді көбейткіштерге жіктейміз:

$$\frac{x+7}{x^2+xy}-\frac{y-7}{xy+y^2}=\frac{x+7}{x(x+y)}-\frac{y-7}{y(x+y)}.$$

Осыдан кейін бөлшектерді бірдей бөлімдерге келтіріп, толықтауыш көбейткішін табамыз: $\dfrac{^{y/}x+7}{x(x+y)}-\dfrac{^{x/}y-7}{y(x+y)}=\dfrac{(x+7)\cdot y}{xy(x+y)}-\dfrac{(y-7)\cdot x}{xy(x+y)}$.

Азайтуды орындасақ, $\dfrac{(x+7)\cdot y}{xy(x+y)}-\dfrac{(y-7)\cdot x}{xy(x+y)}=\dfrac{xy+7y-xy+7x}{xy(x+y)}$ шығады. Бөлшектің алымындағы ұқсас қосылғыштарды біріктірсек, $\dfrac{xy+7y-xy+7x}{xy(x+y)}=\dfrac{7y+7x}{xy(x+y)}$. Енді ортақ көбейткішті жақша сыртына шығарып, бөлшекті қысқартамыз: $\dfrac{7y+7x}{xy(x+y)}=\dfrac{7(y+x)}{xy(x+y)}=\dfrac{7}{xy}$.

Жауабы : $\dfrac{7}{xy}$.

7-мысал. $b-2-\frac{b^2+5}{b+2}$ өрнегін ықшамдайық.

Шешуі . $b-2$ өрнегін бөлімі 1 саны болатын бөлшек түрінде көрсетеміз: $b-2-\frac{b^2+5}{b+2}=\frac{b-2}{1}-\frac{b^2+5}{b+2}$. Енді толықт ауыш көбейткіштерді табам ыз: $\frac{b-2}{1}-\frac{b^2+5}{b+2}=\frac{^{b+2/}b-2}{1}-\frac{b^2+5}{b+2}$. Бөлше ктерді азай тамыз: $\frac{^{b+2/}b-2}{1}-\frac{b^2+5}{b+2}=\frac{(b-2)\cdot(b+2)-\left(b^2+5\right)}{b+2}$. Осы бөл шектің алы мындағы жақша ларды ашып ұқсас қос ылғыштарды біріктіреміз :

$$\frac{(b-2)\cdot(b+2)-\left(b^2+5\right)}{b+2}=\frac{b^2-4-b^2-5}{b+2}=\frac{-9}{b+2}=-\frac{9}{b+2}.$$

Жауабы : $-\frac{9}{b+2}$.

1. Қандай жағдайда екі рационал бөлшектің ортақ бөлімі осы бөлшектердің бөлімдерінің көбейтіндісіне; біреуінің бөліміне тең болады?
2. Айнымалылардың қандай мәндерінде рационал бөлшектерді қосу мен азайту амалдары орындалады?

Жаттығулар

A

39.1. $\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$ тепе-теңдігін пайдаланып, берілген бөлшекті бөлшектердің қосындысы түрінде жазынд ар:

1) $\frac{2a+b}{x}$; 2) $\frac{2a^2+5a}{4y}$; 3) $\frac{x^2+6y^2}{2xy}$;

4) $\frac{12a^2+y^3}{6ay}$; 5) $\frac{2a^2-3y^3}{3ay^3}$; 6) $\frac{12a^2+y^4+5y}{8ay^3}$.

39.2. Бөлшектерді қосуды орындаңдар:

1) $\frac{x}{5}+\frac{y}{5}$; 2) $\frac{a}{4}+\frac{b}{4}$; 3) $\frac{a}{y}+\frac{2a}{y}$;

4) $\frac{5b^2}{3a}+\frac{13b^2}{3a}$; 5) $\frac{x+y}{19}+\frac{2x}{19}$; 6) $\frac{2c-x}{2b}+\frac{x}{2b}$.

Амалдарды орындаңдар (39.3—39.5) :

39.3. 1) $\frac{17-12x}{x}-\frac{10}{x}$; 2) $\frac{12p-1}{3p^2}-\frac{1+3p}{3p^2}$; 3) $\frac{6y-3}{5y}-\frac{y+2}{5y}$;

4) $\frac{5b}{6}-\frac{3a-2b}{6}$; 5) $\frac{5y-3}{7y}-\frac{3y+2}{7y}$; 6) $\frac{11x-5}{14x}+\frac{3x-2}{14x}$;

7) $\frac{7y-13}{10y}-\frac{2y+3}{10y}$; 8) $\frac{8c+25}{6c}+\frac{5-2c}{6c}$.

39.4. 1) $\frac{3p-q}{5p}-\frac{2p+6q}{5p}+\frac{p-4q}{5p}$; 2) $\frac{5c-2d}{4c}-\frac{3d}{4c}+\frac{d-5c}{4c}$;

3) $\frac{2a}{b}-\frac{1-6a}{b}+\frac{13-8a}{b}$; 4) $\frac{4b-2}{5b}-\frac{2b-1}{5b}+\frac{1}{5b}$;

5) $\frac{7y-5}{12y}-\frac{10y-19}{12y}+\frac{10-15y}{12y}$; 6) $\frac{11a-2b}{2a}+\frac{2a-3b}{2a}-\frac{a-b}{2a}$.

39.5. 1) $\frac{5a+b^5}{8b}-\frac{5a-7b^5}{8b}$; 2) $\frac{2x-3y}{4xy}+\frac{11y-2x}{4xy}$;

3) $\frac{3x-y^4}{4y^5}-\frac{y^4+3x}{4y^5}$; 4) $\frac{a-2}{7a}+\frac{2a+5}{7a}-\frac{3-a}{7a}$;

5) $\frac{7y-5}{11y}-\frac{10y-9}{11y}+\frac{10-5y}{11y}$; 6) $\frac{21a+2b}{6a}+\frac{21a-3b}{6a}-\frac{36a-b}{6a}$.

39.6. 1) $x = 57$ болғанда $\frac{x^2+1}{x-3}-\frac{10}{x-3}$;

2) $y = 5{,}7$ болғанда $\frac{y+7}{y^2-25}-\frac{2y+2}{y^2-25}$;

3) $a = 33{,}25$ болғанда $\frac{a^2-16}{a-3}+\frac{7}{a-3}$;

4) $b = 4{,}5$ болғанда $\frac{9b-1}{b^2-9}-\frac{6b-10}{b^2-9}$

өрнегінің мәнін табыңдар.

39.7. 1) $x = 77$ болғанда $\frac{x^2-19}{x-3}+\frac{10}{x-3}$;

2) $y = -25{,}1$ болғанда $\frac{y+7}{y^2-25}-\frac{2y+2}{y^2-25}$;

3) $a = -10{,}25$ болғанда $\frac{a^2-43}{a-6} - \frac{7}{6-a}$;

4) $b = -10$ болғанда $\frac{9b-1}{b^2-9} - \frac{6b-10}{b^2-9}$ өрнегінің мәнін табыңдар.

Өрнектерді ықшамдаңдар **(39.8-39.9)** :

39.8. 1) $\frac{12-2x}{x-2} + \frac{10-x}{2-x}$; 2) $\frac{12p^3-1}{3p^2} - \frac{1-3p^3}{3p^2}$; 3) $\frac{3x+5}{2x-1} + \frac{7x+3}{1-2x}$;

4) $\frac{5x+1}{5x-20} + \frac{x+17}{20-5x}$; 5) $\frac{x^2}{x^2-16} - \frac{8(x-2)}{x^2-16}$; 6) $\frac{64-2ab}{(a-8)^2} + \frac{2ab-a^2}{(8-a)^2}$;

7) $\frac{x^2}{x^2-4} - \frac{4(x-1)}{x^2-4}$; 8) $\frac{x^2+6}{x^2-9} - \frac{3(2x-1)}{9-x^2}$.

39.9. 1) $\frac{x^2}{(x-6)^2} - \frac{36}{(6-x)^2}$; 2) $\frac{x^2+25}{(x-5)^2} - \frac{10x}{(5-x)^2}$; 3) $\frac{10p}{p-c} + \frac{6p+7c}{c-p}$;

4) $\frac{5a}{a-b} + \frac{5b}{b-a}$; 5) $\frac{2x-5}{x-2} - \frac{1}{2-x}$; 6) $\frac{a}{2a-b} + \frac{3a-b}{b-2a}$;

7) $\frac{a}{a^2-9} - \frac{3}{9-a^2}$; 8) $\frac{y^2}{y-1} + \frac{1}{1-y}$.

39.10. Айнымалылардың кез келген мәнінде

1) $\frac{(a+b)^2}{ab} - \frac{(a-b)^2}{ab}$ өрнегінің мәні 4-ке тең;

2) $\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2} + \frac{(a-b)^2}{a^2+b^2}$ өрнегінің мәні 2-ге тең болатынын тексеріңдер.

39.11. Мына өрнектерді рационал бөлшек түрінде жазыңдар:

1) $\frac{x}{4} + \frac{y}{3}$; 2) $\frac{c}{6} - \frac{d}{12}$; 3) $\frac{p}{q} + \frac{q}{p}$;

4) $\frac{a}{b} - \frac{b^2}{a}$; 5) $\frac{3}{2x} - \frac{2}{3x}$; 6) $\frac{a}{5c} + \frac{3a}{4c}$;

7) $\frac{5x}{8y} + \frac{x}{4y}$; 8) $\frac{17y}{24c} - \frac{25y}{36c}$; 9) $\frac{5a}{18b} - \frac{7a}{45b}$;

10) $\frac{3}{2a} + \frac{3a-b}{2a}$; 11) $\frac{a}{7b} + \frac{4a-b}{7b}$; 12) $\frac{2a-3b}{2a-b} + \frac{7a-b}{b-2a}$.

39.12. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\frac{a^2+16}{a-4}+\frac{8a}{4-a}$; 2) $\frac{x^2+4y^2}{x-2y}+\frac{4xy}{2y-x}$;

3) $\frac{x^2+25y^2}{x-5y}+\frac{10xy}{5y-x}$; 4) $\frac{9a^2+4y^2}{3a-2y}+\frac{12ay}{2y-3a}$;

5) $\frac{a}{2a-yb}+\frac{3a-by}{by-2a}$; 6) $\frac{a^2x^2+25y^2}{ax-5y}+\frac{10axy}{5y-ax}$.

39.13. Айнымалының кез келген мәнінде берілген өрнектердің мәні сан болатынын дәлелдеңдер:

1) $\frac{-2x}{x-4}-\frac{8}{4-x}$; 2) $\frac{0{,}1y}{y-3}+\frac{0{,}3}{3-y}$;

3) $\frac{3{,}1y}{y-0{,}1}+\frac{0{,}31}{0{,}1-y}$; 4) $\frac{0{,}1y^2}{y^2-3}+\frac{0{,}3}{3-y^2}$.

39.14. 1) $\frac{3x+5}{2x-1}+\frac{7x+3}{1-2x}=-2$; 2) $\frac{5x+1}{5x-20}+\frac{x+17}{20-5x}=0{,}8$;

3) $\frac{x^2}{(x-5)^2}-\frac{25}{(5-x)^2}=\frac{x+5}{x-5}$; 4) $\frac{x^2+25}{(x-5)^2}-\frac{10x}{(5-x)^2}=1$;

5) $\frac{x^2}{x^2-16}-\frac{8(x-2)}{x^2-16}=\frac{x-4}{x+4}$; 6) $\frac{64-2ab}{(a-8)^2}+\frac{2ab-a^2}{(8-a)^2}=-\frac{a+8}{a-8}$

теңдігінің дұрыстығын тексеріңдер.

39.15. 1) $2-\frac{a}{3}-\frac{b}{4}$; 2) $12-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$;

3) $\frac{x-2}{2}-4-\frac{x-3}{3}$; 4) $4a-\frac{a-1}{4}-\frac{a+2}{3}$;

5) $\frac{a+b}{4}-a+b$; 6) $2a+3b-\frac{a^2+b^2}{a}$;

7) $3x+3b-\frac{x^2+2y^2}{x}$; 8) $5a-3b-\frac{3a^2-b^2}{a}$

өрнегін ықшамдаңдар.

B

39.16. Амалды орындаңдар:

1) $\frac{4a}{5(a+y)}-\frac{2y}{3(a+y)}$; 2) $\frac{p}{7a-14}+\frac{1}{2-a}$; 3) $\frac{3}{ax-ay}+\frac{2}{by-bx}$;

4) $\frac{13c}{bm-bn}-\frac{12b}{cn-cm}$; 5) $\frac{a}{2x+4}-\frac{a}{3x+6}$; 6) $\frac{a^2}{5(a-b)}-\frac{b^2}{4(a-b)}$.

39.17. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\frac{1}{xy}+\frac{1}{ax}+\frac{1}{ay}$; 2) $\frac{xy-y}{x}-\frac{xy-x}{y}-\frac{x^2-y^2}{xy}$;

3) $\frac{3ac+2c^2}{ac}-\frac{a+2c}{a}+\frac{a-2c}{c}$.

39.18. Амал ды орындаңдар:

1) $\frac{2x}{3(x-y)}-\frac{4y}{5(x-y)}$; 2) $\frac{a^2}{5(a-b)}-\frac{b^2}{4(a-b)}$; 3) $\frac{3}{ax-ay}+\frac{2}{by-bx}$;

4) $\frac{13c}{bm-bn}-\frac{12b}{cn-cm}$; 5) $\frac{c}{2x+4}-\frac{c}{3x+6}$; 6) $\frac{a}{7a-14}+\frac{1}{2-a}$.

39.19. 1) $y=2{,}5$ болғанда $\frac{y-25}{5y-25}+\frac{3y+5}{y^2-5y}$;

2) $x=2$; $y=-3$ болғанда $\frac{2}{y^2-yx}-\frac{2}{yx-x^2}$ өрнегінің мәнін табыңдар.

C

Өрнектерді ықшамдаңдар **(39.20—39.22)** :

39.20. 1) $\frac{2a+n}{a-n}-\frac{3n}{a-n}$; 2) $\frac{a^2+b^2}{a-b}-a$; 3) $m-n+\frac{n^2}{m+n}$;

4) $a+b-\frac{a^2+b^2}{a+b}$; 5) $x-\frac{9}{x-3}-3$; 6) $a^2-\frac{a^4+1}{a^2-1}+1$;

7) $2m+2n+\frac{4n^2}{2m-2n}$; 8) $2a-n+\frac{n^2+2an}{2a+n}$.

39.21. 1) $\frac{1}{a+b}-\frac{a^2+b^2}{a^3+b^3}$; 2) $\frac{1}{p-q}-\frac{3pq}{p^3-q^3}$;

3) $\frac{1-a}{a^2-a+1}+\frac{a^2}{a^3+1}$; 4) $\frac{6a^3+48a}{a^3+64}-\frac{3a^2}{a^2-4a+16}$.

39.22. 1) $\frac{b}{(a-b)^2}-\frac{a+b}{b^2-ab}$; 2) $\frac{a}{a-6}-\frac{3}{a+6}+\frac{a^2}{36-a^2}$;

3) $\frac{1}{a-4b}-\frac{1}{a+4b}-\frac{2a}{16b^2-a^2}$;

4) $\frac{x^2}{(x-y)^2}-\frac{x+y}{2x-2y}$;

5) $\frac{4}{y+2}-\frac{3}{y-2}+\frac{12}{y^2-4}$;

6) $\frac{1}{2b-2a}+\frac{1}{2b+2a}+\frac{a^2}{a^2b-b^2}$;

7) $\frac{1}{2x-b}+\frac{6bx}{b^3-8x^3}$;

8) $\frac{2y^2+16}{y^3+8}-\frac{2}{y+2}$;

9) $\frac{1}{2a-2c}+\frac{1}{2a+2c}+\frac{2a^2}{a^2c-c^3}$.

39.23. 1) $\frac{n^3}{n^2-4}-\frac{n}{n-2}-\frac{2}{n+2}$ және $n-1$;

2) $\frac{3}{a^2-3a}+\frac{a^2}{a-3}$ және $a+3+\frac{9a+3}{a^2-3a}$;

3) $\frac{2a+b}{2a^2-ab}-\frac{16a}{4a^2-b^2}-\frac{2a-b}{2a^2+ab}$ және $\frac{-8}{2a+b}$;

4) $\frac{1}{(a-3)^2}-\frac{2}{a^2-9}+\frac{1}{(a+3)^2}$ және $\frac{36}{(a^2-9)^2}$;

5) $\frac{x-2}{x^2+2x+4}-\frac{6x}{x^3-8}+\frac{1}{x-2}$ және $\frac{2x-4}{x^2+2x+4}$;

6) $\frac{2a^2+7a+3}{a^3-1}-\frac{1-2a}{a^2+a+1}-\frac{3}{a-1}$ және $\frac{1}{a-1}$

өрнектерінің тепе-теңдігін дәлелдеңдер.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

39.24. Өрнектің мәнін табыңдар:

1) $\frac{55}{34}\cdot\frac{17}{22}$;

2) $\frac{12}{35}:\frac{18}{25}$;

3) $\frac{13}{32}:\frac{91}{128}$;

4) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$;

5) $\frac{8}{9}:\left(\frac{2}{3}\right)^2$;

6) $\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3$.

39.25. 2 кг алма мен 3 кг кәмпит 3400 тг тұрады. 1 кг алма мен 1 кг кәмпитті қоса алғанда, олардың бағасы 1250 тг тұрады. 1 кг алма және 1 кг кәмпиттің бағасы қандай?

§ 40. АЛГЕБРАЛЫҚ БӨЛШЕКТЕРДІ КӨБЕЙТУ, ДӘРЕЖЕГЕ ШЫҒАРУ ЖӘНЕ БӨЛУ

Алгебралық бөлшектерді көбейту, бөлу, дәрежеге шығару қалай орындалады?

Жай бөлшектерді көбейткенде, олардың алымдарын жеке, бөлімдерін жеке көбейтіп, бірінші көбейтіндінің мәнін бөлшектің алымына, ал екінші көбейтіндінің мәнін бөліміне жазатынын білесіңдер.

Мысалы, $\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{7}=\frac{3\cdot 2}{5\cdot 7}=\frac{6}{35}$.

Кез келген рационал бөлшектерді көбейтуде тура осылай орындалады.

1-қасиет. $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$ ***теңдігі айнымалылардың кез келген мүмкін мәндерінде, яғни $b \neq 0$ және $d \neq 0$ болғанда орындалады.***

Дәлелдеу. $\frac{a}{b}=m$, $\frac{c}{d}=n$ бөлшектерін m және n әріптерімен белгілеп, a және c бөлінгіштерін табамыз: $a = bm$, $c = dn$.

Жоғарыда алынған теңдікті қолданып, ac көбейтіндісін түрлендіреміз: $ac = (bm)(dn)$. Енді көбейтудің ауыстырымдылық және терімділік қасиеттерін қолданып, $(bm)(dn) = (bd)(mn)$ теңдігін аламыз. $ac = (bd)(mn)$ теңдігінен mn-ді өрнектесек, $mn=\frac{ac}{bd}$. Теорема дәлелденді.

Рационал бөлшектерді көбейту ережесі:
рационал бөлшекті рационал бөлшекке көбейту үшін олардың алымдарын көбейтіп оның мәнін шығатын бөлшектің алымына, сол сияқты бөлімдерін көбейтіп, оның мәнін шығатын бөлшектің бөліміне жазу керек.

Осы ережені үш рационал бөлшекті көбейткенде де қолдануға болатынын дәлелдеңдер: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{m}{n}=\frac{acm}{bdn}$.

Неліктен бұл ережені төрт немесе одан да көп рационал бөлшекті көбейткенде де қолдануға болады?

1-мысал. $\dfrac{m^7}{28n^6}$ бөлшегін $\dfrac{24n^5}{m^6}$ бөлшегін е көбейтейік .

Шешуі. Алдымен бөлшектерді көбейту ережесін қолданамыз :
$\dfrac{m^7}{28n^6}\cdot\dfrac{24n^5}{m^6}=\dfrac{m^7\cdot 24n^5}{28n^6m^6}$. Ен ді шыққан бөлшекті қысқартамыз :

$$\frac{m^7\cdot 24n^5}{28n^6m^6}=\frac{6m}{7n}.$$

Жауабы : $\dfrac{6m}{7n}$.

2-мысал. $\dfrac{a^3b^2}{2b-ab}$ бөлшегін $\dfrac{a^2-4}{a^2b^3}$ бөлшегіне көбейте йік .

Шешуі . Алдымен бөлшектерді көбейту ережесін қолданамыз :
$\dfrac{a^2-4}{a^2b^3}\cdot\dfrac{a^3b^2}{2b-ab}=\dfrac{\left(a^2-4\right)\cdot a^3b^2}{a^2b^3\cdot(2b-ab)}$. Шы ққан бөлшектің алымы мен бөлімін

көбейткі штерге жікте п, $\dfrac{\left(a^2-4\right)\cdot a^3b^2}{a^2b^3\cdot(2b-ab)}=\dfrac{(a-2)\cdot(a+2)\cdot a^3b^2}{a^2b^3\cdot b\cdot(2-a)}$ бөлш егін ала-

мыз және оны қыска ртамыз : $\dfrac{(a-2)\cdot(a+2)\cdot a^3b^2}{a^2b^3\cdot b\cdot(2-a)}=\dfrac{-(a+2)\cdot a}{b\cdot b}$.

Енді өрнекті ықшамдайық : $\dfrac{-(a+2)\cdot a}{b\cdot b}=-\dfrac{a(a+2)}{b^2}$.

Жауабы : $-\dfrac{a(a+2)}{b^2}$.

3-мысал. $\dfrac{2p+p^2}{1-p^2}\cdot\dfrac{p+1}{p+2}\cdot\dfrac{p-1}{p}$ бөлшек -рационал өрн егін ықшамдайық .

Шешуі . Алдымен бірінші бөлшектің алымы мен бөлімін көбейткіштерге жіктеп , рационал бөлшектерді көбейту ережесін қолданамыз :
$\dfrac{2p+p^2}{1-p^2}\cdot\dfrac{p+1}{p+2}\cdot\dfrac{p-1}{p}=\dfrac{p(2+p)\cdot(p+1)\cdot(p-1)}{(1-p)(1+p)\cdot(p+2)\cdot p}$. Алынған рацио нал бөлшекті

қысқартамыз : $\dfrac{p(2+p)\cdot(p+1)\cdot(p-1)}{(1-p)(1+p)\cdot(p+2)\cdot p}=\dfrac{-1}{1}=-1$.

Жауабы : –1.

4-мысал. $\frac{3b+2a}{9b^2-4a^2}$ рационал бөлшегін $4a^2-12ab+9b^2$ көпмүшесіне көбейтейік.

Шешуі. Алдымен көпмүшені бөлшек түрінде жазамыз:

$$\frac{3b+2a}{9b^2-4a^2}\cdot(4a^2-12ab+9b^2)=\frac{3b+2a}{9b^2-4a^2}\cdot\frac{4a^2-12ab+9b^2}{1}.$$

Осыған бөлшектерді көбейту ережесін қолданамыз:

$$\frac{3b+2a}{9b^2-4a^2}\cdot\frac{4a^2-12ab+9b^2}{1}=\frac{(3b+2a)\cdot\left(4a^2-12ab+9b^2\right)}{9b^2-4a^2}.$$

Қысқаша көбейту формуласын қолдансақ, өрнек $4a^2-12ab+9b^2$ және $9b^2-4a^2$ көпмүшелері көбейткіштеріне жіктеледі:

$$\frac{(3b+2a)\cdot\left(4a^2-12ab+9b^2\right)}{9b^2-4a^2}=\frac{(3b+2a)\cdot(2a-3b)^2}{(3b-2a)\cdot(3b+2a)}.$$

Осы бөлшекті $(2a-3b)^2=(3b-2a)^2$ болатынын ескеріп, қысқартамыз:

$$\frac{(3b+2a)\cdot(3b-2a)^2}{(3b-2a)\cdot(3b+2a)}=\frac{3b-2a}{1}=3b-2a.$$

Жауабы: $3b-2a$.

Бөлшекті дәрежеге шығару үшін осы дәрежеге оның алымы мен бөлімін шығарып, бірінші нәтижені бөлшектің алымына, ал екінші нәтижені бөліміне жазатынын білесіңдер: $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$.

Кез келген рационал бөлшекті де осыған ұқсас дәрежеге шығарады.

2-қасиет. $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$ ***(мұндағы n — бүтін сан) теңдігі айнымалылардың кез келген мүмкін мәндерінде ($b \neq 0$) орындалады.***

2-теореманы өздерің дәлелдеп көріңдер.

Рационал бөлшекті дәрежеге шығару ережесі:
рационал бөлшекті дәрежеге шығару үшін осы дәрежеге оның алымы мен бөлімін шығарып, бірінші нәтижені бөлшектің алымына, ал екінші нәтижені бөліміне жазу керек.

5-мысал . $\frac{5m^4}{6n^7}$ рационал бөлшегін квадраттайық.

Шешуі . Алдымен рационал бөлшекті дәрежеге шығару ережесін қолданамыз: $\left(\frac{5m^4}{6n^7}\right)^2 = \frac{(5m^4)^2}{(6n^7)^2}$. Осыдан кейін бөлшектің алымы мен бөлімін дәрежеге шығарамыз: $\frac{(5m^4)^2}{(6n^7)^2} = \frac{25m^8}{36n^{14}}$.

Жауабы : $\frac{25m^8}{36n^{14}}$.

Рационал бөлшектерді бөлуді қарастырайық.

Жай бөлшектерді бөлгенде бірінші бөлшекті (бөлінгішті) екіншінің (бөлгіштің) кері бөлшегіне көбейтетінін білесіңдер.

Мысалы, $\frac{7}{9} : \frac{4}{5} = \frac{7}{9} \cdot \frac{5}{4} = \frac{35}{36}$.

Рационал бөлшектерді бөлуді де осылай орындайды.

3-теорема . $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$ ***теңдігі айнымалылардың кез келген мүмкін мәндерінде, яғни $b \neq 0$, $c \neq 0$ және $d \neq 0$ болғанда дұрыс.***

Көбейту мен бөлудің $x : y = k \Leftrightarrow k \cdot y = x$ байланысын қолданып, 3-қасиетті дәлелдеңдер.

Рационал бөлшектерді бөлу ережесі:
рационал бөлшектерді бөлу үшін бөлінгіш бөлшекті бөлгіш бөлшектің кері бөлшегіне көбейту керек.

$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$ теңдігін және рационал бөлшектерді көбейту ережесін қолдансақ, $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$ аламыз. Демек, $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$.

6-мысал. $\left(\frac{3+b}{2b^2-6b}\right)^3 : \left(\frac{b^2+6b+9}{2b \cdot (b^2-6b+9)}\right)^2$ бөлшек-рационал өрнегін ықшамдайық.

Шешуі . Алдымен бөлшекті дәрежеге шығару ережесін қолданамыз:

$$\left(\frac{3+b}{2b^2-6b}\right)^3:\left(\frac{b^2+6b+9}{2b\cdot(b^2-6b+9)}\right)^2=\frac{(3+b)^3}{(2b^2-6b)^3}:\frac{(b^2+6b+9)^2}{4b^2\cdot(b^2-6b+9)^2}.$$ Енді рационал бөлшек терді бөлу ережесін қолданамыз:

$$\frac{(3+b)^3}{(2b^2-6b)^3}:\frac{(b^2+6b+9)^2}{4b^2\cdot(b^2-6b+9)^2}=\frac{(3+b)^3\cdot4b^2\cdot(b^2-6b+9)^2}{(2b^2-6b)^3\cdot(b^2+6b+9)^2}.$$

Осыдан кейін қысқаша көбейту формуласы мен ортақ көбейткішті жақша сыртына шығару ережесін қолданып, өрнекті b^2-6b+9, b^2+6b+9, $2b^2-6b$ көбейткіштеріне жіктейміз:

$$\frac{(3+b)^3\cdot4b^2\cdot(b^2-6b+9)^2}{(2b^2-6b)^3\cdot(b^2+6b+9)^2}=\frac{(3+b)^3\cdot4b^2\cdot\left((b-3)^2\right)^2}{(2b(b-3))^3\cdot\left((b+3)^2\right)^2}.$$

Көбейтінді мен дәрежені дәрежеге шығарамыз:

$$\frac{(3+b)^3\cdot4b^2\cdot\left((b-3)^2\right)^2}{(2b(b-3))^3\cdot\left((b+3)^2\right)^2}=\frac{(3+b)^3\cdot4b^2\cdot(b-3)^4}{8b^3\,(b-3)^3\cdot(b+3)^4}.$$

Соңғы бөлшекті қысқартамыз:

$$\frac{(3+b)^3\cdot4b^2\cdot(b-3)^4}{8b^3\,(b-3)^3\cdot(b+3)^4}=\frac{b-3}{2b\cdot(b+3)}.$$

Жауабы : $\dfrac{b-3}{2b\cdot(b+3)}$.

1. Жай бөлшектер мен рационал бөлшектерді көбейту мен бөлу ережесінің қандай ұқсастығы мен айырмашылығы бар?
2. Әріптердің қандай мәндерінде рационал бөлшектерді көбейту мен бөлу амалдары орындалады?

Жаттығулар

A

40.1. 1) $\dfrac{3xy-2y}{5x^2}$; 2) $\dfrac{4x^3y-2y^2}{3xy^2}$; 3) $\dfrac{3xy^3+12y}{5x^2a}$; 4) $\dfrac{7xy-25y^3}{5a^2-x}$

бөлшегін екі бөлшек-рационал өрнектің көбейтіндісі немесе бөліндісі түрінде көрсетіңдер.

40.2. Көбейту амалын орындаңдар:

1) $\frac{9}{2a}\cdot\frac{5a}{3}$; 2) $\frac{5a}{8y}\cdot\frac{7}{10}$; 3) $\frac{b^2}{10}\cdot\frac{5}{b}$; 4) $\frac{12x^5}{25}\cdot\frac{15}{8x^2}$; 5) $\frac{5}{3a}\cdot\frac{2b}{3}$;

6) $\frac{3x}{4}\cdot\frac{1}{x}$; 7) $\frac{3b^2}{10}\cdot\frac{15}{b^3}$; 8) $\frac{16x^5}{35}\cdot\frac{5}{8x^3}$; 9) $\frac{5a}{8y}\cdot\frac{7}{10}$; 10) $\frac{9}{2a}\cdot\frac{5a}{3}$;

11) $\frac{18}{c^4}\cdot\frac{c^3}{24}$; 12) $\frac{3}{4a^3}\cdot\frac{16a^2}{9}$; 13) $\frac{15x^3}{4}\cdot\frac{12}{5x}$; 14) $\frac{15}{3ab}\cdot\frac{12b^3}{3}$; 15) $\frac{18}{c^4}\cdot\frac{c^3}{24}$.

40.3. Бөлу амалын орындаңдар:

1) $35x^5y:\frac{7x^3}{34}$; 2) $\frac{12p^2}{7d^4}:\frac{6p^3}{35d^2}$; 3) $\frac{3ab}{4xy}:\left(-\frac{12a^2b}{10x^2y}\right)$;

4) $-\frac{a^2}{12b}:\frac{ab}{36}$; 5) $-\frac{9y^2}{20x^3}:\frac{y^5}{16x}$; 6) $\frac{18a^2b^2}{5cd}:\left(-\frac{9ab^3}{5c^2d^4}\right)$;

7) $-\frac{8c}{21d^2}:\frac{6c^2}{7d}$; 8) $-\frac{11x}{4y^2}:(-22x^2)$; 9) $-\frac{18c^4}{7d}:(-9c^2d)$;

10) $\frac{14}{9x^3}:\frac{7x}{2y^2}$; 11) $\frac{3x}{10a^3}:\frac{1}{5a^2}$; 12) $27a^3:\frac{18a^4}{7b^2}$.

Амалдарды орындаңдар **(40.4-40.5)**:

40.4. 1) $\frac{2a^2b}{3xy}\cdot\frac{3x^2y}{4ab^2}\cdot\frac{6ax}{15b^2}$; 2) $\frac{x^2-xy}{4y}\cdot\frac{y^2}{x}\cdot\frac{2x^3}{x-y}$; 3) $\frac{6m^3n^2}{35p^3}\cdot\frac{49n^4}{m^5p^3}\cdot\frac{5m^4p^2}{42n^6}$;

4) $\frac{m-n}{mn}\cdot\frac{2mn}{mn-m^2}$; 5) $\frac{ma-mb}{3n^2}\cdot\frac{2m}{nb-na}$; 6) $\frac{3a}{b^2}\cdot\frac{ab+b^2}{9}\cdot\frac{6}{a}$;

7) $\frac{4ab}{cx+dx}\cdot\frac{ax+bx}{2ab}$; 8) $\frac{ax-ay}{5x^2y^2}\cdot\left(-\frac{5xy}{by-bx}\right)$; 9) $\frac{cx-cy}{35x^2y^2}\cdot\left(-\frac{15xy}{ny-nx}\right)$.

40.5. 1) $(x+3y):(x^2-9y^2)$; 2) $\frac{ab^2}{a^2-1}:\frac{5b}{a-a^2}$;

3) $(a^2+6ab+9b^2):(a^2-9b^2)$; 4) $\frac{x^2-4y^2}{xy}:\frac{x^2-2xy}{3y}$;

5) $\frac{a^2-3a}{a^2-25}:\frac{a^2-9}{a^2+5a}$; 6) $\frac{3m^2-3n^2}{m^2+mp}:\frac{6m-6n}{p+m}$.

40.6. 1) $m=\frac{1}{4}$, $n=-5$ болғанда $\frac{3mn-m}{4m+n}\cdot\frac{16m^2-n^2}{3n-1}$;

2) $x=0{,}5$; $y=-1{,}5$ болғанда $\frac{(x-2)^2}{4y^2-9}\cdot\frac{2y+3}{x^2-4}$ өрнегінің мәнін табыңдар.

40.7. 1) $\frac{12x^4}{m^3n^3}:\frac{x^3}{4mn^2}$; 2) $\frac{a^2b^3}{22mn^2}:\left(-\frac{4ab^3}{33mn}\right)$; 3) $\frac{16mx^2}{3y^3}:(4m^3x)$;

4) $\frac{35x^2y}{12ab}:\frac{7xy}{8ab^2}$; 5) $-\frac{6xy^2}{5ab}:\left(\frac{9x^2y^2}{10ab}\right)$; 6) $45a^2bx\cdot\frac{b^2}{30x^2a^3}$

өрнектерін ықшамдаңдар.

40.8. Амалды орындаңдар:

1) $\frac{(y-5)^2}{2y+12}\cdot\frac{y^2-36}{2y-10}$; 2) $\frac{(a+3)^2}{2x-4}\cdot\frac{x^2-4}{2x+9}$;

3) $\frac{a^2+2bc}{b+3}\cdot\frac{5b+15}{b^2-4c^2}$; 4) $\frac{a^2-1}{a-b}\cdot\frac{7a-7b}{a^2+a}$.

40.9. 1) $\left(\frac{a^3}{c^2}\right)^4$; 2) $\left(\frac{2a^3}{3b^4}\right)^5$; 3) $\left(\frac{3x^2y^4}{4m^3}\right)^2$;

4) $\left(-\frac{10m^2}{3n^2p^3}\right)^3$; 5) $\left(-\frac{5a^3}{3b^2c^4}\right)^4$; 6) $\left(-\frac{b^3c^2}{8a^3}\right)^2$

өрнегін дәрежеге шығарыңдар .

B

40.10. 1) $\frac{a^2-1}{a-b}\cdot\frac{7a-7b}{a^2+a}:\frac{a-1}{a}$; 2) $\frac{(x+3)^2}{2x-4}\cdot\frac{x^2-4}{3x+9}\cdot\frac{2}{(x+3)\cdot(x+2)}$;

3) $\frac{(y-5)^2}{2y+12}\cdot\frac{y^2-36}{2y-10}\cdot\frac{2}{(y-5)\cdot(y+6)}$; 4) $\frac{n^2+2nc}{n+3}\cdot\frac{5n+15}{n^2-4c^2}\cdot\frac{n-2c}{n}$

өрнегінің мәні айнымалының мүмкін мәндеріне тәуелді болмайтынын дәлелдеңдер.

40.11. Амалдарды орындаңдар:

1) $\frac{mx^2-my^2}{2m+8}\cdot\frac{3m+12}{my+mx}:(x-y)$; 2) $\frac{a^2-1}{a^3+1}\cdot\frac{a^2-a+1}{a^2+2a+1}\cdot(a+1)$;

3) $\frac{ax+ay}{x^2-2xy+y^2}\cdot\frac{x^2-xy}{7x+7y}:ax$; 4) $\frac{b^3-8}{b^2-9}\cdot\frac{b+3}{b^2+2b+4}$;

5) $\frac{x^3-y^3}{x+y}\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+xy+y^2}:(x-y)$; 6) $\frac{c^2+6c+9}{c^3+27}\cdot\frac{c^2-3c+9}{3c+9}:(c-3)$.

40.12. 1) $\frac{n^2-10n+25}{3a+12}\cdot\frac{a^2-16}{2n-10}$; 2) $\frac{y^2-25}{y^2+12y+36}\cdot\frac{3y+18}{2y+10}$;

3) $\frac{4-a^2}{4a+8b}\cdot\frac{a^2+4ab+4b^2}{3-3a}$; 4) $\frac{a^3+8}{18a^2+27a}\cdot\frac{2a+3}{a^2-2a+4}$

өрнегін ықшамдаңдар.

40.13. 1) Егер $x = 2{,}5;\ -3{,}4$ болса, онда $\frac{8x^2-8x}{x+3}:\left((2x-2)\cdot x\right)$;

2) егер $a = 2{,}6,\ b = -1{,}2$ болса, онда $(3a-6b):\frac{2a^2-8b^2}{a-2b}$

өрнегінің мәнін табыңдар.

40.14. Айнымалының кез келген мүмкін мәндерінде берілген өрнектің мәні бүтін сан болатынын дәлелдеңдер:

1) $\frac{a^2+4a+4}{16-b^4}:\frac{4-a^2}{4+b^2}\cdot\frac{(2-a)\cdot(4-b^2)}{a+2}$; 2) $\frac{4m^2-25n^2}{m^3+8}:\frac{2m+5n}{m^2-2m+4}\cdot\frac{m+2}{2m-5n}$.

40.15. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\frac{a-3}{2a+4}\cdot\frac{a^2-4}{a^3-27}\cdot\frac{a^2+3a+9}{a^2-2a}$; 2) $\frac{ab-2b}{a^2+8a+16}\cdot\frac{a^2-16}{2a-a^2}:\frac{a-4}{4b}$.

40.1 6. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $\frac{a^2+ax+x^2}{x-1}:\frac{a^3-x^3}{x^2-1}=\frac{x+1}{a-x}$; 2) $\frac{ap^2-9a}{p^3-8}:\frac{p+3}{2p-4}=\frac{2a(p-3)}{p^2+2p+4}$.

40.17. 1) $\frac{c^2-1}{c^3+1}:\frac{c-1}{c^2-c+1}$ ($c \neq 1$ және $c \neq -1$) өрнегінің мәні c айнымалысының мүмкін мәніне тәуелді болмайтынын дәлелдеңдер.

2) $\frac{a^2-4}{a^3+8}\cdot\frac{a^2-2a+4}{3a-6}$ ($a \neq 2$ және $a \neq -2$) өрнегінің мәні a айнымалысының мәніне тәуелді болмайтынын дәлелдеңдер .

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

40.18. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $(a-0{,}4)^2-(a+0{,}4)^2+2{,}68$; 2) $(a+0{,}1)^3+(a-0{,}1)^3-2a^3$.

40.19. Өрнектердің мәндерін салыстырыңдар:

1) $\left(\frac{2}{5}\right)^2\cdot\frac{5}{4}$ және $\frac{5}{4}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2$; 2) $1\frac{2}{5}+3\frac{4}{15}$ және $2\frac{3}{7}+1\frac{11}{14}$.

§ 41. АЛГЕБРАЛЫҚ ӨРНЕКТЕРДІ ТЕПЕ-ТЕҢ ТҮРЛЕНДІРУ

Алгебралық өрнектерді түрлендірулер қалай орындалады?

1-мысал. $a+4-\frac{6a+3}{4a^2+4a+1}\cdot\frac{4a^2-1}{3a}$ өрнегін рационал бөлшекке түрлендірейік.

Шешуі .

1) Бөлшектерді көбейтуді орындаймыз:

$$\frac{6a+3}{4a^2+4a+1}\cdot\frac{4a^2-1}{3a}=\frac{3\cdot(2a+1)(2a-1)(2a+1)}{3a\cdot(2a+1)^2}=\frac{2a-1}{a}.$$

2) Шыққан бөлшекті $a+4$ көпмүшесінен азайтамыз:

$$a+4-\frac{2a-1}{a}=\frac{a\cdot(a+4)-(2a-1)}{a}=\frac{a^2+4a-2a+1}{a}=$$

$$=\frac{a^2+2a+1}{a}=\frac{(a+1)^2}{a}.$$

Жауабы : $\frac{(a+1)^2}{a}$.

Тепе-теңдікті төмендегідей әдістердің біреуімен дәлелдеуге болатынын білесіңдер:

- тепе-теңдіктің сол жағын оң жағы шыққанша түрлендіру;
- тепе-теңдіктің оң жағын сол жағы шыққанша түрлендіру;
- тепе-теңдіктің екі жағын да бірдей өрнек шыққанша түрлендіру;
- тепе-теңдіктің сол жағы мен оң жағының айырымын түрлендіріп, нөл санын алу.

2-мысал. $\left(\frac{m}{n^2-mn}+\frac{n}{mn-m^2}\right)\cdot\frac{n^2+nm^2}{n^2+m^2}=\frac{2n}{n-m}-1$ тепе-теңдігін дәлелдейік.

Шешуі . Алдымен тепе-теңдіктің сол жағын түрлендіреміз:

$$\left(\frac{m}{n^2-mn}+\frac{n}{mn-m^2}\right)\cdot\frac{n^2m+nm^2}{n^2+m^2}=\left(\frac{{}^{m}m}{n\cdot(n-m)}+\frac{{}^{n}n}{m\cdot(n-m)}\right)\cdot$$

$$\cdot\frac{nm(n+m)}{n^2+m^2}=\frac{m^2+n^2}{nm\cdot(n-m)}\cdot\frac{nm(n+m)}{n^2+m^2}=\frac{(m^2+n^2)\cdot nm(n+m)}{nm\cdot(n-m)\cdot(n^2+m^2)}=$$

$$=\frac{n+m}{n-m}.$$

Енді тепе-теңдіктің оң жағын түрлендіреміз:

$$\frac{2n}{n-m} - 1^{n-m} = \frac{2n-n+m}{n-m} = \frac{n+m}{n-m}.$$

Соңында теңдіктің екі жағынан да бірдей $\frac{n+m}{n-m}$ өрнегін аламыз: $\frac{n+m}{n-m} = \frac{n+m}{n-m}$.

1. Кез келген бөлшек-рационал өрнекті рационал бөлшек түрінде көрсетуге бола ма?
2. Белгілі тәсілдердің кез келгенімен кез келген тепе-теңдікті дәлелдеу жеңіл ме?

Жаттығулар

А

Амалдарды орындаңдар **(41.1-41.2)**:

41.1. 1) $\left(\frac{2a}{y^2} - \frac{2}{a}\right) : \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{a}\right)$;   2) $\left(\frac{n}{m^2} + \frac{n^2}{m^3}\right) : \left(\frac{m^2}{3n^2} + \frac{m}{3n}\right)$;

3) $\frac{ab+b^2}{5} : \frac{b^3}{5a} + \frac{a+b}{b}$;   4) $\frac{x-y}{x} - \frac{5y}{x^2} \cdot \frac{x^2-xy}{5y}$;

5) $\left(\frac{x}{x+1} + 1\right) \cdot \frac{1+x}{2x-1}$;   6) $\left(\frac{4a}{2-a} - a\right) : \frac{a+2}{a-2}$;

7) $\frac{5y^2}{1-y^2} : \left(1 - \frac{1}{1-y}\right)$;   8) $\frac{xb+b^2}{7} : \frac{b^2}{7x} + \frac{x+b}{b}$;

9) $\frac{x-4}{x-5} \cdot \left(x + \frac{x}{4-x}\right)$;   10) $\frac{a-b}{2a+2b} : \left(\frac{2}{a} - \frac{2}{b}\right) \cdot \frac{4a+4b}{a^2b}$.

41.2. 1) $\left(\frac{2m+1}{2m-1} - \frac{2m-1}{2m+1}\right) : \frac{4m}{10m-5}$;   2) $\left(\frac{y+3}{y^2+9}\right) \cdot \left(\frac{y+3}{y-3} + \frac{y-3}{y+3}\right)$.

Өрнектерді ықшамдаңдар **(41.3-41.4)**:

41.3. 1) $\frac{n^2-9}{2n^2+1} \cdot \left(\frac{6n+1}{n-3} + \frac{6n-1}{n+3}\right)$;

2) $\left(\frac{6x+y}{x-6y} + \frac{6x-y}{x+6y}\right) : \frac{x^2+y^2}{x^2-36y^2}$.

41.4. 1) $\left(\dfrac{x}{xy-y^2}-\dfrac{y}{x^2-xy}\right):\dfrac{x^2-y^2}{5xy}$; 2) $\left(\dfrac{4p-8}{p^3-2p^2}-\dfrac{q+2}{q^3+2q^2}\right)\cdot\dfrac{p}{2q-p}$;

3) $\left(\dfrac{a}{b^2-ab}+\dfrac{b}{a^2-ab}\right)\cdot\dfrac{3ab}{b-a}$; 4) $\left(\dfrac{a-7b}{ab-b^2}+\dfrac{7a+b}{a^2-ab}\right):\dfrac{a^2+b^2}{a-b}$.

Өрнектің мәнін табыңдар **(41.5-41.6)** :

41.5. 1) $\dfrac{a^2-25}{a+3}\cdot\dfrac{1}{a^2+5a}-\dfrac{a+5}{a^2-3a}$, мұндағы 1) $a=2$; 2) $a=-4$;

2) $\dfrac{1-2x}{2x+1}+\dfrac{x^2+3x}{4x^2-1}:\dfrac{3+x}{4x+2}$, мұндағы 1) $x=-1$; 2) $x=-2{,}5$.

41.6. 1) $\dfrac{n-c}{a+n}-\dfrac{an-n^2}{a^2-ac}\cdot\dfrac{a^2-c^2}{a^2-n^2}+11{,}5\ n$, мұндағы $a=2$; $n=-1$; $c=3$;

2) $\dfrac{n^2-4}{x^2-9}:\dfrac{n^2-2n}{xy+3y}+\dfrac{2-y}{x-3}$, мұндағы $n=3$; $x=-4$; $y=-5$.

41.7. Амалдарды орындаңдар:

1) $\left(2a+1-\dfrac{1}{1-2a}\right):\left(2a-\dfrac{4a^2}{2a-1}\right)$;

2) $(y+1)^2\cdot\left(\dfrac{1}{y+1}+\dfrac{1}{y^2-1}-\dfrac{1}{y-1}\right)$;

3) $1-\left(\dfrac{2}{c-2}-\dfrac{2}{c+2}\right)\cdot\left(c-\dfrac{3c+2}{4}\right)$;

4) $1+\left(1-\dfrac{9x^2+4}{12x}\right):\left(\dfrac{1}{3x}-\dfrac{1}{2}\right)$.

41.8. Берілген пропорциялардың белгісіз мүшесін табыңдар:

1) $(a^2-4):(2a-4)=x:(a+2)$;

2) $(a^2-1)^2:x=(a^2-1):(a^3+1)$.

41.9. 1) $\dfrac{x^3}{x^2-4}+\dfrac{x}{x+2}-x=\dfrac{x}{x-2}$;

2) $\dfrac{5a^2-10}{a^4+2a^3-a^2-4a-2}-\dfrac{6}{(a+1)^2}=-\dfrac{1}{(a+1)^2}$

тепе-теңдігін дәлелдеңдер.

41.10. Теңдеуді шешіңдер:

1) $(c^2-9)\cdot x=2c+6$; 2) $\dfrac{x}{(c+2)^2}=\dfrac{3}{c^2-4}$;

3) $\dfrac{4x}{(c+1)^2}=\dfrac{3c}{c^2-1}$; 4) $\dfrac{x-3}{(c-4)^2}=\dfrac{2,4}{16-c^2}$.

41.11. 1) $\dfrac{3x^2}{5y^3}:\dfrac{9x^3}{2y^2}\cdot\dfrac{5y}{3(x-1)}$; 2) $\dfrac{5a(b-1)}{3^2d}:\dfrac{5cd^2}{9ab}:\dfrac{a^2(b-1)}{c^3d}$;

3) $\dfrac{7p^4}{10q^3}\cdot\dfrac{5q^2(p+1)}{14p^2}:\dfrac{3p}{4q^4}$; 4) $\dfrac{8x^2y^3}{7ab^2}:\dfrac{14xy^2}{7a^2b}:\dfrac{2x^2(y+2)}{ab}$

өрнегін ықшамдаңдар.

41.12. Егер $x=\dfrac{3n}{n+2}$ болса, онда берілген өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\dfrac{x-3}{2x+n}$; 2) $\dfrac{2x-4n}{x+2n}+\dfrac{1}{x}$; 3) $\dfrac{3x-3}{(2+n)x+n}-\dfrac{x-3}{2x-3n}$.

41.13. $a=3$, $b=-4$ болғандағы $\left(a-\dfrac{4ab}{a+b}+b\right):(a-b)$ және $\dfrac{a}{a+b}-\dfrac{b}{b-a}=\dfrac{2ab}{a^2-b^2}$ өрнектерінің мәндерін салыстырыңдар.

41.14. 1) $\dfrac{a^2-25}{a+3}\cdot\dfrac{1}{a^2+5a}-\dfrac{a+5}{a^2-3a}=-\dfrac{16}{9-a^2}$;

2) $\dfrac{b-c}{a+b}-\dfrac{ab-b^2}{a^2-ac}\cdot\dfrac{a^2-c^2}{a^2-b^2}=-\dfrac{c}{a}$ теңдігінің дұрыстығын дәлелдеңдер.

41.15. Берілген өрнектердің мәні айнымалының мүмкін мәндеріне тәуелді болмайтынын тексеріңдер:

1) $\dfrac{(x-2)^2}{3x^4}\cdot\dfrac{4x^3}{x-2}\cdot\dfrac{-x}{2-x}$;

2) $\dfrac{(3x+2)^3}{x-3}:\dfrac{(3x+2)}{(x-3)^2}\cdot\dfrac{5}{(x-3)(3x+2)^2}$.

41.16. 1) $\dfrac{2x-q}{xq}-\dfrac{1}{x+q}\cdot\left(\dfrac{x}{q}-\dfrac{q}{x}\right)=\dfrac{1}{q}$; 2) $\dfrac{1,2a^2-ac}{0,36a^2-0,25c^2}=\dfrac{20a}{6a+5c}$

тепе-теңдігін дәлелдеңдер.

B

Амалдарды орындаңдар: **(41.17-41.18):**

41.17. 1) $(a^2-1)\cdot\left(\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a+1}+1\right)$; 2) $\left(\frac{1}{y}+\frac{2}{x-y}\right)\cdot\left(x-\frac{x^2+y^2}{x+y}\right)$;

3) $\left(x+1-\frac{1}{1-x}\right):\left(x-\frac{x^2}{x-1}\right)$; 4) $\left(a+b-\frac{2ab}{a+b}\right):\left(\frac{a-b}{a+b}+\frac{b}{a}\right)$.

41.18. 1) $\left(\frac{a-1}{3a+(a-1)^2}-\frac{1-3a+a^2}{a^3-1}-\frac{1}{a-1}\right):\frac{a^2+1}{1-a}$;

2) $\left(\frac{1}{n+1}-\frac{3}{n^3+1}+\frac{3}{n^2-n+1}\right)\cdot\left(n-\frac{2n-1}{n+1}\right)$.

41.19. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\left(\frac{a^2}{a+n}-\frac{a^3}{a^2+n^2+2an}\right):\left(\frac{a}{a+n}-\frac{a^2}{a^2-n^2}\right)$;

2) $\frac{4xy}{y^2-x^2}:\left(\frac{1}{y^2-x^2}+\frac{1}{x^2+2xy+y^2}\right)$;

3) $\left(\frac{2a}{2a+b}-\frac{4a^2}{4a^2+4ab+b^2}\right):\left(\frac{2a}{4a^2-b^2}+\frac{1}{b-2a}\right)$;

4) $\left(\frac{x-2y}{x^2+2xy}-\frac{1}{x^2-4y^2}:\frac{x+2y}{(2y-x)^2}\right)\cdot\frac{(x+2y)^2}{4y^2}$;

5) $\frac{4{,}5a+4x}{0{,}81a^2-0{,}64x^2}-\frac{50}{9a-8x}+\frac{1}{ax}$.

41.20. Өрнектің мәнін табыңдар:

1) $\frac{x+2}{x^2-2x+1}\cdot\frac{3x-3}{x^2-4}-\frac{3}{x-2}$, мұндағы $x=-1{,}5$;

2) $\left(\frac{y^2-3y}{y^2-6y+9}-\frac{3y+9}{y^2-9}\right)\cdot\left(1-\frac{3}{y}\right)$, мұндағы $y=-3{,}6$.

C

41.21. 1) $\frac{1}{a^2+2a-8}=\frac{x}{a+4}+\frac{y}{a-2}$; 2) $\frac{1}{a^2-5a+6}=\frac{x}{a-3}+\frac{y}{a-2}$;

3) $\dfrac{1}{a^2-2a-8}=\dfrac{x}{a-4}+\dfrac{y}{a+2}$; 4) $\dfrac{1}{2a^2-5a+3}=\dfrac{x}{a-1}+\dfrac{y}{2a-3}$

тепе-теңдіктерінен x пен y-ті табыңдар.

41.22. Егер $a+c=4$ және $ac=2$ болса, онда $\left(\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{2c}\right)^4+\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{c^2}\right)\cdot$

$\cdot\ \dfrac{1}{2ac}$ өрнегінің мәнін табыңдар.

41.23. 1) $\left(\dfrac{2ab}{a^2-b^2}+\dfrac{a-b}{2a+2b}\right)\cdot\dfrac{2a}{a+b}+\dfrac{b}{b-a}\cdot x=1$;

2) $\dfrac{c}{a-c}-\dfrac{a^3-ac^2}{a^2+c^2}\cdot\left(\dfrac{a}{(a-c)^2}-\dfrac{c}{a^2-c^2}\right)=2x$

теңдеулерін шешіңдер.

41.24. Өрнектің мәні a және c айнымалыларының мәніне тәуелді болмайтынын дәлелдеңдер:

1) $\left(\dfrac{1}{a-c}-\dfrac{3c^2}{a^3-c^3}-\dfrac{c}{a^2+ac+c^2}\right)\cdot\left(c+\dfrac{a^2}{a+c}\right)$;

2) $3a\cdot\left(\dfrac{1}{a-c}-\dfrac{c}{a^3-c^3}\cdot\dfrac{a^2+ac+c^2}{a+c}\right)-\dfrac{3c^2}{a^2-c^2}$.

41.25. Айнымалылардың барлық мүмкін мәндерінде

1) $\left(\dfrac{2xb}{x^2-b^2}+\dfrac{x-b}{2x+2b}\right)\cdot\dfrac{2x}{x+b}+\dfrac{b}{b-x}$;

2) $\dfrac{y}{y-x}+\dfrac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}\cdot\left(\dfrac{x}{(x-y)^2}-\dfrac{y}{x^2-y^2}\right)$ өрнегінің мәні айнымалының мүмкін мәндерінде теріс емес және айнымалыға тәуелді болмайтынын дәлелдеңдер.

41.26. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\dfrac{3-\dfrac{2}{x}}{3+\dfrac{2}{x}}$; 2) $\dfrac{\dfrac{5n-b}{b}+1}{\dfrac{15n+b}{b}-1}$;

3) $\dfrac{\dfrac{2x}{y^2}+\dfrac{y}{x^2}}{\dfrac{x}{y^2}-\dfrac{2y}{x^2}}$; 4) $\dfrac{\dfrac{11}{a}+\dfrac{11}{b}+\dfrac{11}{c}}{\dfrac{12}{ab}+\dfrac{12}{bc}+\dfrac{12}{ac}}+\dfrac{1}{12}$.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

1. a-ның қандай мәндерінде $\frac{a-1}{a^2+4}$ бөлшегінің мағынасы болады?

A. 4-тен басқа барлық сандар;
B. 1-ден басқа барлық сандар;
C. –2 және 2-ден басқа барлық сандар;
D. a — кез келген сан.

2. Айнымалының қандай мәнінде $\frac{x-3}{x+3}$ бөлшегінің мағынасы болмайды?

A. 9; B. 3; C. 0; D. –3.

3. $\frac{8x^2-4xy}{y-2x}$ бөлшегін қысқартыңдар.

A. 4; B. $-4x$; C. $4x$; D. –4.

4. $\frac{3}{y-x}$ бөлшегіне тең бөлшекті табыңдар.

A. $\frac{6}{2x-y}$; B. $\frac{3}{y-x}$; C. $\frac{3}{x+y}$; D. $-\frac{3}{y-x}$.

5. Дұрыс теңдікті көрсетіңдер.

A. $\frac{5a}{a^2-3}=\frac{5}{a-3}$; B. $\frac{x+y}{x-y}=\frac{(x+y)^2}{x^2-y^2}$;

C. $\frac{b}{b-3}=\frac{7b}{21-7b}$; D. $\frac{5}{11}=\frac{5}{11n}$.

6. $\frac{1}{3x^2}$; $\frac{5}{6xy^2}$; $\frac{3}{10xy^3}$ бөлшектерінің ортақ бөлімін табыңдар.

A. $30x^2y^3$; B. $60x^2y^3$; C. $30x^5y^5$; D. $180x^2y^3$.

7. $\frac{6}{3a-a^2}$; $\frac{a+1}{a^2-9}$; $\frac{4}{a^2}$ бөлшектерінің ортақ бөлімі неге тең?

A. a^2-9; B. $a(a^2-9)$; C. $a(9-a^2)$; D. $a^2(9-a^2)$.

8. $\frac{3x-26}{18x^2}-\frac{x-4}{3x^2}-\frac{5}{9x}$ өрнегін ықшамдаңдар.

A. $\frac{13x-26}{18x^2}$; B. $\frac{19x-22}{18x^2}$; C. $-\frac{13x+2}{18x^2}$; D. $\frac{13x-26}{18x^2}$.

9. x-тің қандай мәндерінде $\frac{2}{x^2-9}=\frac{1}{x-3}+\frac{3}{x+3}$ теңдігі орындалады?

A. 1; B. 0; C. 2; D. –1.

10. $\frac{2y+3}{x} \cdot \frac{3y^2}{4y^2-9} : \frac{y}{10xy-15x}$ өрнегін ықшамдаңдар.

A. 15; B. $15y$; C. $\frac{1}{15y}$; D. $\frac{x}{15y}$.

11. $\left(1-\frac{3}{a}\right) \cdot \frac{a}{a^2-9}$ өрнегін ықшамда ңдар.

A. $\frac{1}{a+3}$; B. $a+3$; C. $\frac{a^2}{a+3}$; D. 1.

12. $\frac{8-a^3}{16-a^2} \cdot \frac{a+4}{a^2+2a+4}$ өрнегін ықшамдап, $a=-2$ болғандағы мәнін табыңдар.

A. 0; B. $\frac{2}{3}$; C. 1; D. –1.

13. $\frac{9x^2+24xy+16y^2}{9x^2-16y^2}$ бөлшегін қысқартыңдар.

A. $\frac{4y+3x}{4y-3x}$; B. $\frac{3x-4y}{4y+3x}$; C. $\frac{4y+3x}{3x-4y}$; D. $\frac{1}{3x+4y}$.

14. $\frac{2a-b}{3a+2}=5$ болса, $\frac{4b-8a}{15a+10}$ өрнегінің мәнін табыңдар.

A. 4; B. 100; C. –4; D. – 100.

15. $\left(\frac{6a}{5b}\right)^2 \cdot \left(\frac{5b^3}{6a}\right)^4 \cdot (6a)^2$ өрнегін ықшамдаңдар.

A. $25b^{10}$; B. $\frac{b^{10}}{5}$; C. $30a^4b^{12}$; D. 1.

16. $\frac{a^3-25a}{2a+10}=\frac{3a^2-15a}{x}$ пропорциясынан x-тің мәнін табыңдар.

A. $\frac{1}{6}$; B. 1; C. 6; D. –6.

17. $\frac{1}{x}=\frac{b}{a}-b$ теңдігінен a-ны өрнектеңдер.

A. $\frac{4+xb}{xb}$; B. $\frac{xb}{1+xb}$; C. $\frac{1-xb}{xb}$; D. $\frac{xb}{1-xb}$.

18. Егер $\frac{1}{x}+x=m$ екені белгілі болса, онда $\frac{1}{x^2}+x^2$ өрнегін табыңдар.

A. m^2; B. $2+m^2$; C. m^2-2; D. $2-m^2$.

7-СЫНЫПТАҒЫ АЛГЕБРА КУРСЫН ҚАЙТАЛАУҒА АРНАЛҒАН ЖАТТЫҒУЛАР

Есептеулер

Есептеңдер (1—5):

1. 1) $0,7 \cdot 5^4 - 37,5$; 2) $-9^4 \cdot 2,1 + 13700,1$;

3) $6,3 - 10^3 \cdot 0,0073$; 4) $192 \cdot (-0,2)^3 - 0,112$;

5) $-240,02 + 7^4 \cdot 0,02$; 6) $10^4 \cdot 3,241 + 7590$.

2. 1) $\dfrac{4^8 \cdot 12^7 \cdot 9^3}{6^{12} \cdot 16^4}$; 2) $\dfrac{21^8 \cdot 27^5 \cdot 49^6}{9^{11} \cdot 343^7}$;

3) $\dfrac{25^{11} \cdot 81^4}{625^4 \cdot 15^5 \cdot 9^6}$; 4) $\dfrac{32^9 \cdot 125^8}{8^{13} \cdot 10^7 \cdot 25^8}$.

3. 1) $10^4 - 9^5 - 951$; 2) $15^4 + 14^4 - 9041$;

3) $6^5 + 5^6 + 7719$; 4) $-7^4 + 8^4 + 305$.

4. 1) $\dfrac{8^3 \cdot (11^3)^5}{121^7 \cdot 4^{19}}$; 2) $\dfrac{81^{10} \cdot 169^5}{(13^3)^3 \cdot 27^{13}}$;

3) $\dfrac{49^{25} \cdot 625^{15}}{(5^{12})^5 \cdot (7^{16})^3}$; 4) $\dfrac{216^8 \cdot 125^7}{625^5 \cdot (6^5)^4}$;

5) $\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 32^2 \cdot 1000 \cdot 5^3}{4^7 \cdot 0,001 \cdot 25^4}$; 6) $\dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot 9^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot 2^6}{\left(\frac{1}{11}\right)^2 \cdot 363 - \left(\frac{1}{12}\right)^2 \cdot 3^2 \cdot 2^4}$.

5. 1) $\dfrac{27^2 - 17^2}{16^2 - 6^2}$; 2) $\dfrac{48^2 - 18^2}{35^2 - 15^2}$; 3) $\dfrac{87^2 - 43^2}{31^2 - 16^2}$;

4) $\dfrac{98^2 - 58^2}{75^2 - 35^2}$; 5) $\dfrac{123^3 + 73^3}{196} - 123 \cdot 73$;

6) $\dfrac{186^3 - 34^3}{152} + 186 \cdot 34$.

6. Амалдарды орындаңдар:

1) $243 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6 - 8,75 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3 \cdot 0,25 + 0,12$;

2) $\left(\frac{6}{7}\right)^2 \cdot 2{,}45 - \left(34 - 3\frac{5}{14}\right) + 0{,}05 \cdot 2^8$;

3) $6{,}25 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^5 - 0{,}024 \cdot 9^3 + 1{,}552$;

4) $\left(\frac{8}{11}\right)^2 \cdot 0{,}5 \cdot \left(3\frac{2}{3}\right)^3 + \left(1\frac{1}{3}\right)^4 : 85\frac{1}{3}$.

7. 1) $b = 2^5 \cdot 5^2 + 200$ және $a = 11$;
2) $b = (-3)^3 \cdot 4^4 + 6962$ және $a = 5$;
3) $b = (0{,}5)^4 \cdot 2^8 + 18^2$ және $a = 13{,}5$;
4) $b = 0{,}2^8 \cdot 5^{10} + 6^2$ және $a = 50$ болса, онда b санының a%-ын табыңдар.

8. Өрнектің мәнін табыңдар:
1) $5a^4 - 7b^5 + 11c^3$, мұндағы $a = 2$, $b = -1$, $c = -1$;
2) $1{,}2x^5 + 3{,}9y^4 - 6c^4$, мұндағы $x = -1$, $y = 2$, $c = -2$;
3) $0{,}005n^3 + 0{,}023m^3$, мұндағы $n = -10$, $m = 10$;
4) $64t^6 - 27s^3 + 125k^3$, мұндағы $t = -\frac{1}{2}$, $s = \frac{1}{3}$, $k = -\frac{1}{5}$.

9. Өрнектердің мәндерін салыстырыңдар:
1) $7^3 \cdot (-2)^2$ және $10^3 + 7^3$;
2) $\left(-\frac{2}{9}\right)^4 \cdot 0{,}729$ және $3^3 - 5^2 \cdot 1{,}01$;
3) $(-0{,}2)^3 \cdot 5^4$ және $6^4 : (11^3 - 35)$;
4) $4^5 : (2 \cdot 5^3)$ және $2^2 \cdot (0{,}9^2 + 0{,}14)$.

10. Дәреженің қасиеттерін қолданып, өрнектердің мәндерін салыстырыңдар:
1) 40^{20} және 20^{40};
2) 25^5 және 125^8;
3) 16^5 және 64^3;
4) 72^{10} және $32 \cdot 12^{10}$.

Өрнектерді тепе-тең түрлендіру

Өрнекті ықшамдаңдар (**11-12**):

11. 1) $(a-5)^2 + (a+7)(5-a) + 8a$;
2) $-73 + (6+a)^2 + (9-a)(a+4)$;
3) $(3a-4)(9a+8) - (2-27a)(16-a)$.

12. 1) $(a^2-5)(3+2a) - 2a(a^2+4)$;

2) $(2-3a)^3-4(2-9a)+26a^3$;

3) $(4+a)^3-(a-4)^3-36(2a^2+3)$.

13. x-тің қандай мәнінде:

1) $(4m+x)^2=16m^2+24mn+9n^2$;

2) $(2a-x)^2=4a^2-28ab+49b^2$;

3) $(x+9n)^2=36m^2+108mn+81n^2$;

4) $(x-6b)^2=64a^2-96ab+36b^2$ теңд ігі ақиқат болады ?

14. y-тің қандай мәнінде

1) $(5a-y)^2=25a^2-2ac+0{,}04c^2$;

2) $(0{,}5a+y)^2=0{,}25a^2+6ab+36b^2$;

3) $(y-5c)^2=0{,}64a^2-8ac+25c^2$;

4) $(1{,}4a+y)^2=1{,}96a^2+16{,}8ab+36b^2$ теңдігі ақиқат болады?

15. Айнымалының кез келген мәніне

1) $(8ac-4)(ac+5)-4ac(2ac+9)$;

2) $(15mn-7)(12mn+8)-36mn(5mn+1)$;

3) $(10x^2-3)(9x^2-2)-3x^2(30x^2+17)+98x^2$;

4) $(4cd^3-7)^2+4cd^3(14-4cd^3)$ өрнегінің мәні тәуелді болмайтынын дәлелдеңдер.

16. Айнымалылардың кез келген мәнінде

1) $25x^2(x^2-y^2)-25x^2(x^2+y^2)+50x^2y^2$;

2) $(5ac-8)^2-(8ac-5)^2+39(a^2c^2-1)$ өрнегінің мәні нөлге тең болатынын дәлелдеңдер.

17. Тенд ікт ің дұрыстығын тексер іңдер :

1) $(12a-5)^2-18a(8a-6)+12a=25$;

2) $17(a-3)^2-(4a+1)^2-22(7-5a)=a^2-2$;

3) $9\left(b+1\frac{2}{3}\right)^2-21(2b+1)-(3b-2)^2-200=0$;

4) $15(5a+6)(6-5a)+13(6a-1)^2-31(17+3a^2)-26=-156a$.

18. Өрнект і ықшамдаңдар :

1) $(8a-5)(9a+10)-(12a-7)(11+6a)+55a$;

2) $(14a-3)(15a+10)-(35a+2)(7+6a)+162a$;

3) $(a-3)^3-(a+7)^3+30a^2+120a$;

4) $(a+5)^3+(6-a)^3+33(20-a+a^2)$.

Тепе-теңдікті дәлелдеңдер (19-20):

19. 1) $(a-m+7)(a+m-7)-a^2=-(m-7)^2$;

2) $(3x+5-y)(3x+5+y)+y^2=(3x+5)^2$;

3) $(6x-8y+7)(6x+8y-7)+(8y-7)^2=36x^2$;

4) $(9k+11+2m+n)(9k-2m+11-n)-9k(9k+22)+4m(m+n)=$
$=121-n^2$.

20. 1) $4+(a+b)^2-7a=a(2b-7)+(a^2+4+b^2)$;

2) $4t^2+(3-k)^2-(2t-7+k)=k^2+2t(2t-1)+k-8(k-2)$;

3) $9x^2-(3x-2y)^2=2y(6x-2y)$.

21. Берілген өрнектердің тепе-теңдігін дәлелдеңдер:

1) $\dfrac{x-2}{x^2+2x+4}-\dfrac{6x}{x^3-8}+\dfrac{1}{x-2}$ және $\dfrac{2x-4}{x^2+2x+4}$;

2) $\dfrac{2a^2+7a+3}{a^3-1}-\dfrac{1-2a}{a^2+a+1}-\dfrac{3}{a-1}$ және $\dfrac{1}{a-1}$.

22. Амалдарды орындаңдар:

1) $\dfrac{18c^4}{7d}:(-9c^2d)$; 2) $\dfrac{14}{9x^3}:\dfrac{7x}{2y^2}$;

3) $\dfrac{3x}{10a^3}:\dfrac{1}{5a^2}$; 4) $27a^3\cdot\dfrac{a^2}{b}:\dfrac{18a^4}{7b^2}$.

23. $\dfrac{5a^2-10}{a^4+2a^3-a^2-4a-2}=\dfrac{6}{(a+1)^2}-\dfrac{1}{(a+1)^2}$ тепе-теңдігін дәлелдеңдер.

24. Берілген өрнектерді рационал бөлшек түріне келтіріңдер:

1) $\dfrac{3x^2}{5y^3}:\dfrac{27x^5}{2y^4}\cdot\dfrac{5y}{3(x-1)}$; 2) $\dfrac{25a(b-1)}{3^2d}:\dfrac{5cd^2}{9ab}:\dfrac{a^3(b-1)}{c^3d}$;

3) $\dfrac{28p^4}{15q^3}\cdot\dfrac{5q^2(p+1)}{14p^2}:\dfrac{3p^2}{4q^4}$; 4) $\dfrac{8x^3y^4}{13ab^2}:\dfrac{4xy^2}{13a^2b}:\dfrac{2x^2(y+2)}{ab}$.

25. Егер $x=\dfrac{2n}{n-2}$ болса,

1) $\dfrac{x-3}{2x+n}$; 2) $\dfrac{2x-4n}{x+2n}+\dfrac{1}{2x}$; 3) $\dfrac{3x-3}{(2-n)x+n}-\dfrac{x-3}{2x-3n}$ өрнегінің мәнін табыңдар.

26. $x = 0{,}5$, $y = 4$ болғанда $\left(\frac{x}{y} + 1\right)^2 + \left(\frac{x}{y} - 1\right) - 2$ өрнегінің мәнін табыңдар.

Айнымалының мүмкін мәндерінде берілген өрнектердің мәні айнымалы ға тәуелді болмайтынын дәлелдеңдер **(27-28)** :

27. 1) $\left(\frac{4a}{a^2 - 1} + \frac{a - 1}{a + 1}\right) \cdot \frac{a}{a + 1} - \frac{a}{a - 1}$;

2) $\left(\frac{8a}{a^2 - 4} + \frac{a - 2}{a + 2}\right) \cdot \frac{a}{a + 2} - \frac{a}{a - 2}$.

28. 1) $\left(\frac{20a}{25 - a^2} + \frac{5 - a}{a + 5}\right) : \frac{a + 5}{5} - \frac{5}{5 - a}$;

2) $\left(\frac{28c}{c^2 - 49} + \frac{c - 7}{c + 7}\right) \cdot \frac{c}{c + 7} - \frac{c}{c - 7}$.

Теңдеулер және теңсіздіктер

Теңдеуді шешіңдер **(29—31)**:

29. 1) $(x + 2)^2 - (x^2 + 2^2) - 2^3 = 0$;

2) $(3 + x)^2 - (x^2 + 3^2) - 3^2 = 0$;

3) $0{,}5\ (0{,}5 + 2x) + x^2 - 10 - (x^2 + 0{,}25) = 0$;

4) $x\left(x + 1\frac{1}{3}\right) + \frac{4}{9} - \frac{3}{4} - \left(\frac{4}{9} + x^2\right) = 0$.

30. 1) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 7\frac{1}{4} + x^2$;

2) $2 - \left(\frac{1}{64} + x^2\right) = -\left(x - \frac{1}{8}\right)^2$;

3) $27 + 25x^2 + 2{,}7^2 = 7{,}29 + 5x\ (5x - 5{,}4)$;

4) $\frac{1}{49}x^2 - 7\left(-x - \frac{2}{7}\right) = -61 + \left(-\frac{1}{7}x\right)^2$.

31. 1) $x^2 - (x - 7)(x + 7) = 5 - 2(-2 - x)$;

2) $121 - (11 - x)(x + 11) = 187 + x(x + 11)$;

3) $x^2 - 0,3 \cdot \frac{3}{10} - x = (x + 0,3)(x - 0,3)$;

4) $\left(x - \frac{3}{4}\right)(x + 0,75) + \frac{3}{4}(0,75 - x) = x^2 + 1,5$.

32. Теңдеулер жүйесін графиктік тәсілмен шешіңдер:

1) $\begin{cases} 2,25x + 2y = 3, \\ 2x + y = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x - y = 5, \\ 2x + y = 10. \end{cases}$

33. 1) Үш еселенген бірінші сан мен екі еселенген екінші санның қосындысының мәні 62, ал 5-ке көбейтілген бірінші сан мен 6-ға көбейтілген екінші санның айырымының мәні –18 болатын екі санды табыңдар; 2) екі санның айырымының мәні 3-ке, ал қосындыларының мәні –7-ге тең болатын екі санды табыңдар.

34. 1) Егер екі автомобильдің жақындау жылдамдығы 173 км/сағ, ал алыстау жылдамдығы 17 км/сағ болса, онда олардың жылдамдықтарын табыңдар. 2) Егер теплоходтың өзен ағысымен жылдамдығы 47 км/сағ, ал өзен ағысына қарсы жылдамдығы 39 км/сағ болса, теплоходтың меншікті жылдамдығы мен өзен ағысының жылдамдығын табыңдар.

35. Параметрі бар жүйені шешіңдер:

1) $\begin{cases} -2x + 5y - 7 = 0, \\ px + 3y - 1 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 8x - 9y + 4 = 0, \\ 4x - py + 2 = 0. \end{cases}$

36. x-тің қандай мәндерінде:

1) $5x - 16$; 2) $47 - 97x$;

3) $x^2 - 11 - x(x - 2)$; 4) $x(3 + x) - x^2 - 33$;

5) $(x + 5)^2 - x^2 - 12x$; 6) $20x + x^2 - (4 - x)^2$ өрнегінің мәні теріс емес?

37. y-тің қандай мәнінде

1) $y^2 - 16$ және $8y + y^2$; 2) $5y^3 + 10y$ және $17 + 5y^3$;

3) $(1 - y)^2 + 13$ және $y^2 - 6$; 4) $87 + y^2$ және $(y - 3)^2 - 5$ өрнектері айырымының мәндері нөлден кіші?

Функция

38. Функцияның графигін салыңдар:

1) $x + y - 3 = 0$; 2) $x - y - 3 = 0$; 3) $y - x + 3 = 0$;

4) $y - x - 3 = 0$; 5) $y + 2x^3 = 0$; 6) $y - \frac{3}{x} = 0$;

7) $y + \frac{0,3}{x} = 0$ теңдеуінің графигін салыңдар.

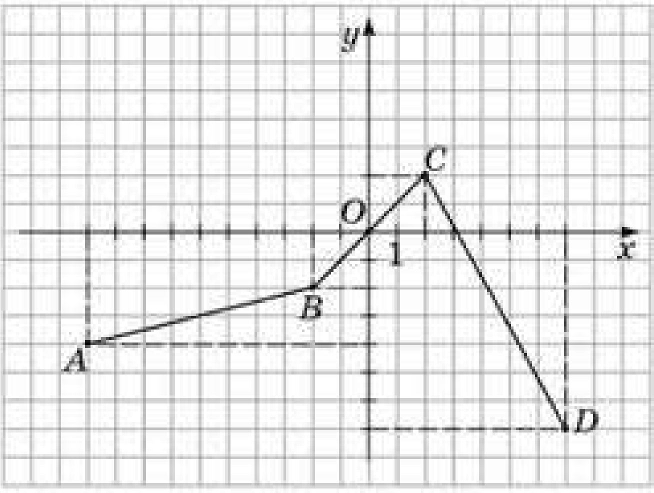
39. 1) $A(-3;\ 2)$ және $B(1;\ -1)$; 2) $M(-4;\ -2)$ және $K(2;\ 4)$;
3) $F(-1;\ 6)$ және $E(1;\ -6)$; 4) $T(5;\ 3)$ және $P(-5;\ -3)$ нүктелері арқылы өтетін сызықтық функцияның формуласын жазыңдар.

40. x-тің қандай мәндерінде
1) $2,3x - 7y - 4,6 = 0$; 2) $5x + 4y - 9 = 0$; 3) $x^2 + y = 0$;

4) $y = 2x^2$; 5) $y - \frac{3}{x} = 0$; 6) $y + \frac{2}{x} = 0$

теңдеуінің графигі абсцисса осінің төменгі жағында орналасады?

41. 1-суреттегі функцияның графигін қолданып,



1-сурет

1) функцияның анықталу аймағын;
2) функция өсетін x аргументінің мәндерін;
3) функция кемитін x аргументінің мәндерін;
4) A, B, C, D нүктелерінің координаталарын;
5) графиктің координата осьтерімен қиылысу нүктелерінің координаталарын;
6) AB, BC, CD түзулерінің теңдеулерін табыңдар.

42. $y = 4x + 8$; $y = -5x + 11$; $y = 4x$;
$y = 5x$; $y = 7x - 0,5$; $y = -6x - 0,5$;
$y = 1,5x + 2$; $y = -9 + 1,5x$; $y = x - 4$; $y = 8 + 6x$ қай сызықтық функцияларының графиктері:
1) қиылысады;
2) параллель болады;
3) беттеседі?

43. x аргументінің қандай мәндері үшін

1) $y = -0{,}125\ x + 7$; 2) $y = 0{,}3 - 0{,}015\ x$;

3) $y = 32x - 2^7$; 4) $y = 1000\ x - 80$;

5) $y = 0{,}5\ x^2$; 6) $y = -3\ x^3$;

7) $y = \dfrac{0{,}3}{x}$; 8) $y = -\dfrac{3}{x}$ функциясының мәні оң бола ды?

44. 1) $A\ (0;\ -4)$; 2) $B\ (8;\ -7)$; 3) $C\ (-8;\ -1)$;

4) $M\ (16;\ 2)$; 5) $K\ (-16;\ -2)$; 6) $F\ (-4;\ -2{,}5)$ нүктесі $y = -\dfrac{3}{8}x - 4$

функцияс ының графигіне тиісті бола ма?

45. Егер бірінші сызықтық функцияның графигі $F\ (3;\ 0)$ және $K(0;\ 3)$, екіншісі $M(-\ 6;\ 0)$ және $T(0;\ -6)$ нүктелері арқылы өтсе, ал үшінші мен төртінші функциялардың графиктері ордината осін ординатасы 6-ға тең нүктеде қиып және сәйкесінше бірінші және екінші функциялардың графиктеріне параллель болса, онда осы төрт сызықтық функцияның графиктерін салыңдар.

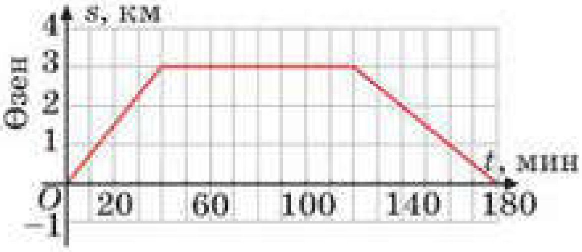
46. Графигі $M\ (-\ 5;\ 4)$ нүктесі арқ ылы өтетін және $y = 1\dfrac{1}{3}x + 7$ функциясының графигіне параллель болатын сызықтық функц ияның формуласын жазыңдар және графигін салыңдар. Функцияның мәні 1) оң; 2) теріс болатын сызықтық функцияның аргументінің мәндерін табыңдар.

47. Арман өзен бойымен төмен жүріп, сәл демалғаннан кейін кері қайтты. 2-суретте Арманның қозғалыс графигі көрсетілген. Графиктің көмегімен

1) Арманның демалған уақытын;

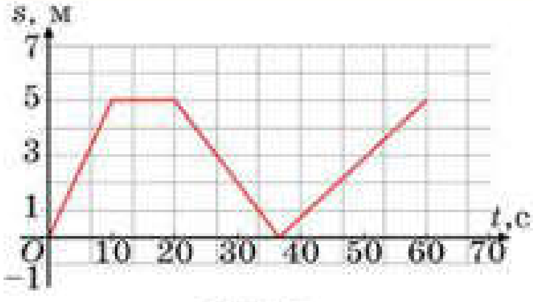
2) көтерілу жылдамдығын (км/сағ-пен);

3) жүруге қанша уақыт жібергенін табыңдар.



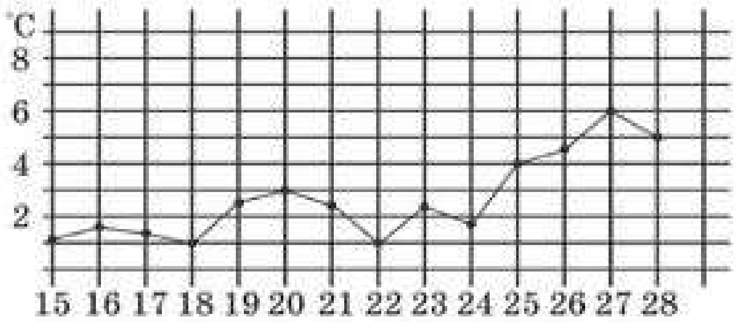
2-сурет

48. Ара омартадан гүлге және кері ұшты. Ол гүлге қонып, одан шырын жинайды. Омартадан гүлге дейінгі қашықтық 5 м. 3-суретте араның жылдамдығына қатысты ара мен омарта арасындағы қашықтық көрсетілген. Ара 40 с-та қандай қашықтықты ұшып өткен?



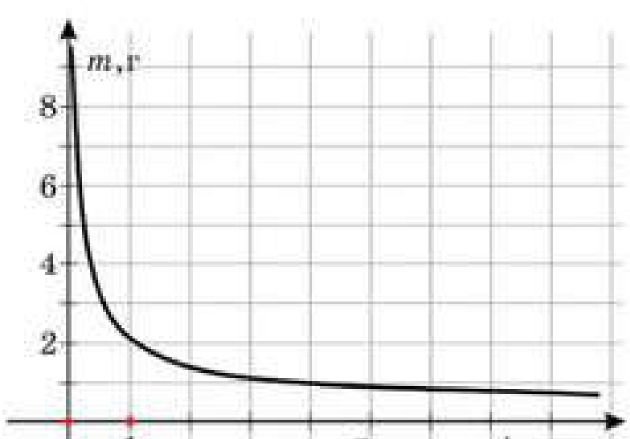
3-сурет

49. 2016 жылдың 15—28 наурыз аралығындағы N қаласының ауа температурасы 4-суретте нүктелермен көрсетілген. Көлденеңінен айдың күндері, тігінен ауа райының температурасы берілген. Көрнекілік үшін нүктелер сызықтармен қосылған. Суретті қолданып көрсетілген аралықтағы ауа температурасының ең үлкен және ең кіші шамаларының арасындағы айырмашылықты табыңдар. Жауапты Цельсий градус арқылы беріңдер.



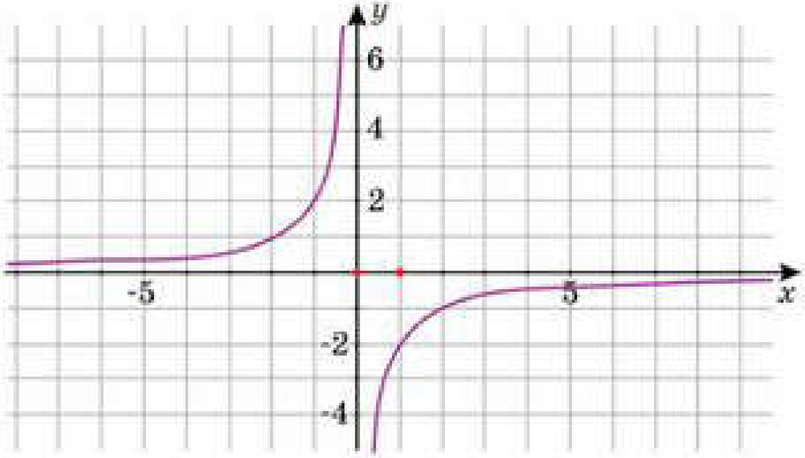
4-сурет

50. Химиялық реакция жасау барысында реакцияға түспеген зат (реагент) уақыт өте азаяды. Осы тәуелділік 5-суретте берілген. Абсцисса осінде реакция басталғаннан кейінгі уақыт (минутпен), ал ордината осінде реакцияға түспеген реагент массасы (граммен) көрсетілген. Төрт минутта реакцияға қанша грамм реагент түскенін табыңдар.



5-сурет

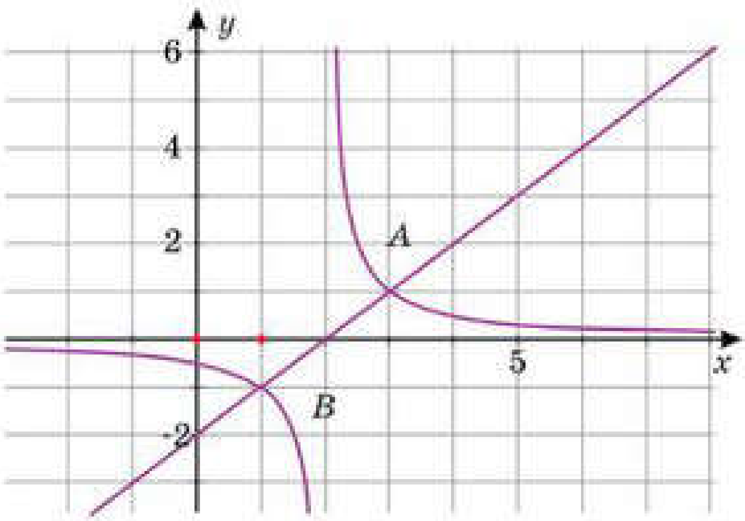
51*. $y = -\frac{2}{x}$ функциясының графигі берілген (6-сурет).



6-сурет

График бойынша x-тің қандай мәндерінде функцияның
1) теріс емес мәндерді қабылдайтынын;
2) кемитінін;
3) 2-ден кем емес мәндерді қабылдайтынын;
4) –1-ден кіші мәндерді қабылдайтынын табыңдар.

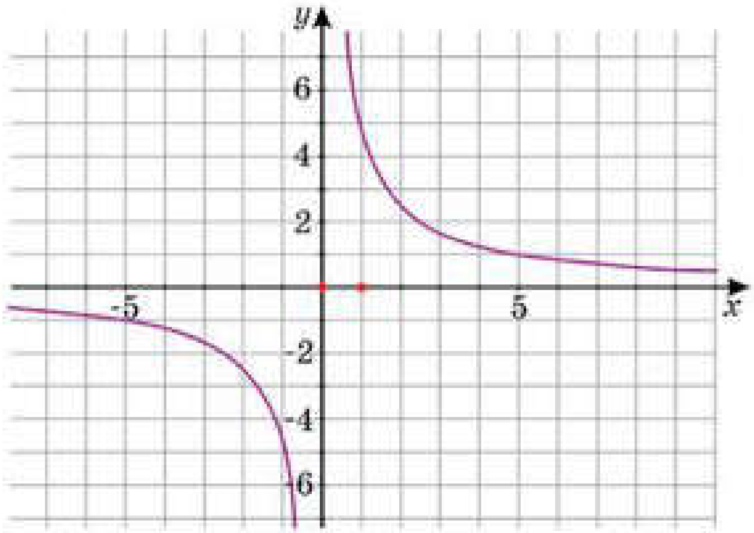
52. Екі функцияның графиктері A және B нүктелерінде қиылысады (7-сурет).



7-сурет

A және B нүктелерінің координаталарын табыңдар.

53. $y = \frac{5}{x}$ функциясының графигі берілген (8-сурет). Функцияның графигі 1) $A(1;\ 7)$; 2) $B(-5;\ -1)$; 3) $C(2;\ 1)$; $M(-2;\ -2{,}5)$ нүктесі арқылы өте ме?



8-сурет

Қиындығы жоғары тапсырмалар

54. $a+b+c=9$ және $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}=\frac{5}{6}$ белгілі. $\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+$ $+\frac{b}{a+c}$ өрнегінің мәнін табыңдар.

55. Қабырғасының ұзындығы 1 м текшені қабырғасының ұзындығы 1 см болатын текшелерге бөлген. Шыққан текшелерді бір қатарға жинайтын болса, онда қатардың ұзындығы қанша болады?

56. Әр жуған сайын сабын 20%-ға азаяды. Қанша рет жуғаннан кейін сабын көлемінің азаюы үштен екі бөлігінен кем емес болады? Ең кіші санды табыңдар.

57. $7^{2017}-3^{2017}$ өрнегі 10 санына бөлінетінін дәлелдеңдер.

58. n-нің қандай натурал мәндерінде

1) $\frac{n^2-n+3}{n+1}$; 2) $\frac{2n^2-3n+2}{2n-1}$ өрнегі бүтін сан болады?

59. n-нің кез келген натурал мәнінде :

1) $7\cdot 5^{2n}+12\cdot 6^n$ өрнегі 19-ға; 2) $6^{2n}+3^n+3^{n+2}$ өрнегі 11-ге;
3) $8^n+5^n-2^{n+1}$ өрнегі 3-ке; 4) $3^n+5^n+7^n+9^n$ өрнегі 4-ке бөлінетінін дәлелдеңдер.

60. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{2016\cdot 2017}$ өрнегінің мәнін табыңдар.

61. $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{2017^2}<\frac{2016}{2017}$ теңсіздігін дәлелдеңдер.