В. А. Смирнов, Е. А. Тұяқов

ГЕОМЕТРИЯ

7

Жалпы білім беретін мектептің
7-сыныбына арналған оқулық

*Қазақстан Республикасының Білім және
ғылым министрлігі бекіткен*

Алматы "Мектеп" 2017

ӘОЖ 373.167.1
КБЖ 22.151
С53

Шартты белгілер:

— анықтамалар, қасиеттер, ережелер

— жаңа білімді меңгеру барысында шешілетін мәселе

— пысықтау сұрақтары

— параграфтың ішіндегі сұрақтар мен тапсырмалар

— теорема дәлелдеуінің аяқталуы

A — орта деңгейлі жаттығулар

B — жоғары деңгейлі жаттығулар

C — өткенді қайталауға арналған жаттығулар

Смирнов В. А., Тұяқов Е. А.
С53 **Геометрия.** Жалпы білім беретін мектептің 7-сыныбына арналған оқулық. — Алматы: Мектеп, 2017. — 144 б.

ISBN 978—601—07—0872—3

С $\frac{4306020502-118}{404(05)-17}$ 30(1)—17

ӘОЖ 373.167.1
КБЖ 22.151

ISBN 978—601—07—0872—3

КІРІСПЕ

Құрметті оқушылар! Сендер математиканы игеруді жалғастырасыңдар.

Геометрия —математиканың ең маңызды да қызықты бөлімдерінің бірі. ***Геометрия*** — грек сөзі, "жер өлшеу" (*гео* — жер, *метрео* — өлшеймін) деген мағынаны білдіреді. Геометрия екі бөлімнен тұрады: планиметрия және стереометрия. Планиметрияда жазықтықта орналасқан жазық фигуралар оқытылады. Стереометрияда жазықтықта жатпайтын жазық емес фигуралар оқытылады. Көбінесе оларды *кеңістіктік* фигуралар деп атайды.

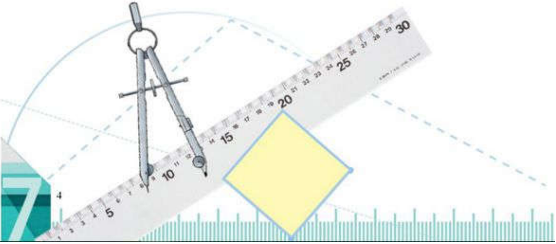
Ол не үшін керек? Біріншіден, геометрия кеңістіктегі пішіндердің түрлерімен таныстырып, қажетті кеңістіктік түсініктерді қалыптастырады. Екіншіден, геометрия ғылыми таным әдісін беріп, логикалық ойлауды дамытады. Үшіншіден, геометрияны оқып-білу кеңістіктік фигураларды кескіндеуге, модельдеуге және құрастыруға, негізгі геометриялық шамаларды (ұзындықты, бұрышты, ауданды, көлемді) өлшеуге қажетті практикалық дағдыларды меңгеруге мүмкіндік жасайды.

Бұл курста негізгі геометриялық фигуралармен танысып, оларды салуды, қосымша салуларды жүргізуді, дәлелдеуге, кесінділердің ұзындығын, бұрыштардың шамаларын, практикалық мазмұнды және т.б. есептерді шешуді үйренесіңдер.

Әрбір тараудың соңында оқыған материалды меңгеруді тексеруге арналған тест тапсырмалары ұсынылған.

Жаттығулардың дұрыс шешімін тексеру үшін оқулықтың соңында есептердің жауаптары берілген.

Оқуда сәттілік тілейміз!



ГЕОМЕТРИЯНЫҢ АЛҒАШҚЫ ҰҒЫМДАРЫ

§ 1. ГЕОМЕТРИЯНЫҢ НЕГІЗГІ ҰҒЫМДАРЫ

Геометриялық фигуралар туралы түсінік бізді қоршаған нысандарды береді. Дегенмен, шынайы нысандарға қарағанда геометриялық фигуралар мінсіз болады.

Нүкте — өте кішкентай нысандар бейнесі. Ежелгі грек ғалымы Евклид өзінің "Бастамалар" атты еңбегінде алғаш рет геометрияны ғылыми тұрғыда тұжырымдап, нүктені бөліктері жоқ фигура ретінде анықтаған.

Нүктелер қағаз бетіне жақсы ұшталған қарындашпен немесе қаламмен, тақтаға бормен немесе т.б. бейнеленеді. Бірақ нүктелердің кескіні — тек жуықталған нұсқасы, себебі қарындашпен салынған нүктенің әрқашан да, өте кішкентай болса да, өлшемдері нөлден өзгеше, ал геометриялық нүктеде өлшем болмайды.

Нүктелер латынның бас әрпімен белгіленеді: A, B, C, ... , A_1, B_2, C_3, ... , A', B'', C''', ...

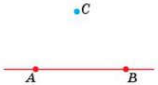
Түзу тартылған жұқа жіптің, тікбұрышты пішінді үстелдің қырының бейнесі болады. Түзу бойымен жарық сәулесі таралады.

Евклид түзуді ені жоқ ұзындық ретінде анықтаған.

Түзулер қағаз бетіне немесе тақтаға сызғыштың көмегімен жүргізіледі. Түзулердің кескіні шектеулі болғанмен, оларды екі жағынан да шектеусіз деп елестету керек. Кескіндеу үшін түзудің түсі маңызды емес. Түзулер латынның кіші әріптерімен a, b, c, ... , a_1, b_2, c_3, ... , a', b'', c''', ... немесе латынның екі бас әрпімен AB, CD, ... , A_1B_1, C_2D_2, ... , $A'B'$, $C''D''$, ... белгіленеді.

Жазықтық судың, үстелдің, тақтаның, айнаның және т.б. тегіс бетінің бейнесі болады.

Нүкте берілген түзуге тиісті болуы мүмкін, бұл жағдайда түзу нүкте арқылы өтеді деп айтады, сондай-ақ нүкте түзуге тиісті болмауы мүмкін, бұл жағдайда түзу нүкте арқылы өтпейді деп айтады. 1.1-суретте A, B нүктелері a түзуіне тиісті, C нүктесі тиісті емес.



1.1-сурет

Евклид ұсынып, жүзеге асырған геометрияны аксиоматикалық әдіспен құрудың идеясы мынада: егер біз зерттелетін объектінің нені білдіретінін анықтай алмасақ, онда объектінің маңызды белгілерін бөліп алып, оның қасиеттерін анықтауымыз қажет. Бұл қасиеттер *аксиомалар* деп аталады, грек тілінен аударғанда "күмән жоқ, лайықты деп танылған".

Мысалы, шахмат фигурасы пілдің бейнесі шынайы пілге ұқсамайтын, әртүрлі материалдан жасалуы, әртүрлі қалыпта болуы мүмкін. Осы белгілердің бәрі маңызды болып табылмайды. Маңыздысы — олардың шахмат тақтасындағы қозғалыс ережесі (аксиомалар).

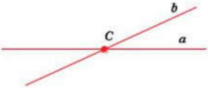
Әр ғылымның өз ережелері бар. Күнделікті өмірде осы немесе өзге де ережелерді пайдаланамыз. Мысалы, түрлі ойындар ережелерге негізделеді. Компьютермен жұмыс жасау барысында белгілі бір ережелерді басшылыққа аламыз. Адамдардың әртүрлі салалағы қызметін реттеуші заңдар жинағы да ережелер жиынтығы болып табылады.

Осылайша геометрия аксиомаларын геометриядағы ойын ережелері ретінде қарастыруға болады. Логикалық ойлау арқылы, аксиомаларды пайдалана отырып, *теоремалар* деп аталатын геометриялық фигуралардың қасиеттері алынады (дәлелденеді). Бұл жерде логикалық пайымдаулар — *дәлелдеулер* ерекше рөл атқарады. Геометриялық фигуралардың кейбір қасиеттері суреттен туындаған болып көрінуі мүмкін, дегенмен, оларды дәлелдеу қажет. Сурет дәлелдемені табуға көмектеседі, бірақ оны алмастырмайды.

Аксиома ретінде мынадай қасиеттер қабылданады:

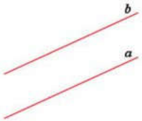
Кез келген екі нүкте арқылы тек қана жалғыз түзу өтеді.

Екі түзудің бір ортақ нүктесі болса, түзулер сол нүктеде *қиылысады* деп айтамыз (1.2-сурет).



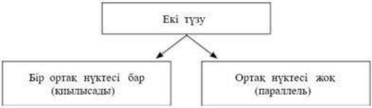
1.2-сурет

Бір жазықтықта жататын және ортақ нүктелері болмайтын екі түзу ***параллель түзулер*** деп аталады (1.3-сурет).



1.3-сурет

Жазықтықта екі түзудің өзара орналасуы



1.2, 1.3-суреттеріне ұқсас үш түзудің әртүрлі орналасу жағдайларын кескіндеңдер.

1. Нүкте қандай объектілердің бейнесі болып табылады?
2. Евклид нүктені қалай анықтаған?
3. Нүктелер қалай бейнеленеді?
4. Нүктелер қалай белгіленеді?
5. Түзу қандай объектілердің бейнесі болып табылады?
6. Евклид түзуді қалай анықтаған?
7. Түзулер қалай бейнеленеді?
8. Түзулер қалай белгіленеді?
9. Түзудің негізгі қасиеттерінің бірі қандай?
10. Нүкте мен түзу бір-біріне қатысты қалай орналасуы мүмкін?
11. Екі түзудің қанша ортақ нүктесі болуы мүмкін?
12. Жазықтық қандай объектілердің бейнесі болып табылады?
13. Қандай екі түзу қиылысады деп аталады?
14. Қандай екі түзу параллель деп аталады?
15. Жазықтықта екі түзу бір-біріне қатысты қалай орналасуы мүмкін?
16. Геометрияны аксиоматикалық әдіспен құрудың идеясы неде?
17. Аксиома дегеніміз не?
18. Теорема дегеніміз не?
19. Дәлелдеу дегеніміз не?

Жаттығулар

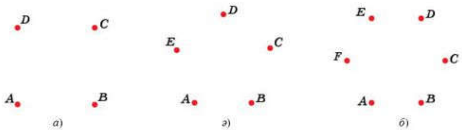
A

1.1. Түзуге тиісті және тиісті емес нүктелер мен түзуді салыңдар.

1.2. A, B, C нүктелері бір түзуге тиісті болсын және B, C, D нүктелері бір түзуге тиісті болсын. Барлық A, B, C, D нүктелері туралы не айтуға болады?

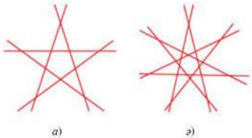
1.3. Бір түзудің бойында жатпайтын үш нүктені белгілеңдер. Берілген үш нүктеден, әртүрлі нүктелер жұбы арқылы өтетін түзулерді жүргізіңдер. Мұндай түзудің барлығы қанша?

1.4. Үш нүктесі бір түзудің бойында жатпайтын а) төрт нүкте; ә) бес нүкте; б) алты нүкте салыңдар (1.4-сурет). Осы нүктелерден әртүрлі нүктелер жұбы арқылы өтетін түзулерді жүргізіңдер. Мұндай түзудің барлығы қанша?



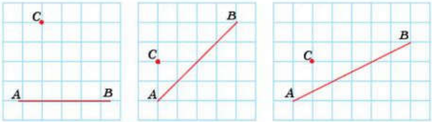
1.4-сурет

1.5. 1.5-суретте қанша түзу бейнеленген? Жұптардың қиылысқан нүктелер саны нешеу?



1.5-сурет

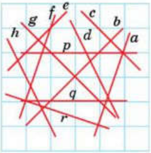
1.6. Торкөз қағазға, 1.6-суретте көрсетілгендей, AB түзуі мен C нүктесін салыңдар. C нүктесі арқылы өтетін, AB түзуіне параллель түзу жүргізіңдер.



а) *ә)* *б)*

1.6-сурет

1.7. 1.7-суретте бейнеленген a түзуімен қиылысатын түзулерді көрсетіңдер.



1.7-сурет

B

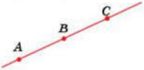
1.8. a, b, c түзулері бір нүктеде қиылысатын болсын және b, c, d түзулері бір нүктеде қиылыссын. Барлық a, b, c, d түзулері жайлы не айтуға болады?

1.9. Үш түзу қиылысқанда қиылысқан жұптарының қанша нүктесі болуы мүмкін? Әртүрлі жағдайларды бейнелеңдер.

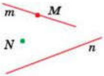
1.10. Қиылысқан жұптардың а) үш нүктесі; ә) төрт нүктесі; б) бес нүктесі; в) алты нүктесі болатындай етіп, төрт түзуді бейнелеңдер.

1.11. Қиылысқан жұптардың он нүктесі болатындай етіп, бес түзуді бейнелеңдер.

1.12. 1.8 және 1.9-суреттерді қолданып, екі ақиқат және екі жалған пікір құрыңдар.



1.8-сурет



1.9-сурет

1.13. Айжан, Сәуле, Берік және Дәурен түзу сызық бойымен қатарға тұрды. Берік Айжан мен Сәуленің ортасында, ал Сәуле Берік пен Дәуреннің ортасында тұр. Балалар қандай ретпен тұр?

C

1.14. а) 3 нүкте; ә) 4 нүкте; б) 5 нүкте; в)* n нүктелер жұбы арқылы неше түзу жүргізуге болады? Әрбір үш нүкте бір түзудің бойында жатпауы тиіс.

1.15. а) 3 түзу; ә) 4 түзу; б) 5 түзу; в)* n түзу қос-қостан қиылысқанда пайда болған нүктелердің ең көп саны қанша?

Хабарлама дайындаңдар

1.16. Геометрия ғылымының тарихындағы басты тұлғалар — Пифагор, Евклид, Архимед, И.Кеплер, Р.Декарт, Л.Эйлер, Н.И.Лобачевский. Осы ғалымдардың өмірі, ғылыми еңбектері туралы хабарлама дайындаңдар .

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

1.17. Түзудің бойында: а) бір нүкте; ә) екі нүкте; б) үш нүкте; в) * n нүкте белгіленген. Осы нүктелер берілген түзуді неше бөлікке бөледі?

§ 2. СӘУЛЕ ЖӘНЕ КЕСІНДІ

Түзу салыңдар және оның бойынан қандай да бір нүкте белгілеңдер.

Қалай ойлайсыңдар, осы нүкте түзуді неше бөлікке бөледі?

Дұрыс жауабы — екі бөлікке бөледі.
Түзудің осы қасиеті аксиома ретінде қабылданады.

Түзудегі әрбір нүкте осы түзуді екі бөлікке бөледі.

2.1-суретте C нүктесі түзуді екі бөлікке бөледі. A мен B нүктелері түзудің әр бөлігінде орналасқан. Бұл жағдайда A мен B нүктелері C нүктесінің *әр жағында жатыр*, ал C нүктесі A мен B нүктелерінің *арасында жатыр* деп айтылады. B мен D нүктелері түзудің бір бөлігінде орналасқан. Бұл жағдайда B мен D нүктелері C нүктесінің *бір жағында жатыр* деп айтылады.

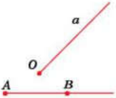
2.1-сурет

Сәуле немесе *жартытүзу* деп берілген нүкте мен барлық нүктелер сол берілген нүктенің бір жағында жататын түзудің бөлігін айтады. Берілген нүкте сәуленің *төбесі* немесе сәуленің *басы* деп аталады.

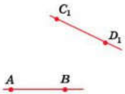
Сәулені белгілеу үшін латынның кіші әріптері қолданылады, мысалы, a немесе латынның бас әріптерінің жұбы, мысалы AB. Бұл жұптың бірінші әрпі сәуле төбесін, ал екіншісі — сәуленің бойында жататын қандай да бір нүктені көрсетеді (2.2-сурет).

Екі нүкте мен олардың арасында орналасқан нүктелерден құралатын түзудің бөлігін *кесінді* деп атайды. Мұндағы берілген нүктелер кесіндінің *ұштары* деп аталады.

Кесінді ұштарындағы нүктелерімен белгіленді. Мысалы, AB, C_1D_1 (2.3-сурет) және т.б.



2.2-сурет



2.3-сурет

Кесіндіге қолданылатын негізгі амалдардың бірі берілген сәуленің төбесінен бастап *берілген кесіндіні орналастыру* болып табылады. Мұнда пайда болған кесінді бастапқы кесіндіге *тең* кесінді деп аталады.

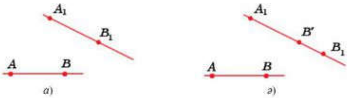
Аксиома ретінде мына қасиет қабылданады.

Кез келген сәуленің төбесінен бастап берілген кесіндіге тең бір ғана кесінді салуға болады.

AB мен A_1B_1 кесінділерінің теңдігі $AB = A_1B_1$ түрінде жазылады. Осы кесінділердің бірін, мысалы, AB кесіндісін A_1 нүктесінен бастап

A_1B_1 сәулесіне орналастырсақ, AB кесіндісі A_1B_1 кесіндісімен беттеседі (2.4, а-сурет).

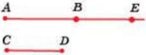
Егер AB кесіндісін A_1 нүктесінен бастап A_1B_1 сәулесіне орналастырғанда A_1 мен B_1 нүктелерінің арасында жатқан B нүктесі B' нүктесіне ауысса, онда AB кесіндісі A_1B_1 кесіндісінен кіші деп айтылады және $AB < A_1B_1$ түрінде белгіленеді. Сонымен қатар A_1B_1 кесіндісі AB кесіндісінен үлкен деп аталып, $A_1B_1 > AB$ түрінде белгіленеді (2.4, ә-сурет).



2.4-сурет

Егер AB кесіндісіндегі A мен B нүктелерінің арасынан қандай да бір C нүктесін алсақ, AC және CB жаңа екі кесінді пайда болады. AB кесіндісі AC мен CB *кесінділерінің қосындысы* деп аталады және $AB = AC + CB$ түрінде белгіленеді (2.5-сурет). AC мен CB кесінділердің әрқайсысы AB кесіндісі мен екінші *кесіндінің айырымы* деп аталады. Белгіленуі: $AC = AB - CB$, $CB = AB - AC$.

2.5-сурет



2.6-сурет

Кез келген AB және CD кесінділерін қосу үшін AB кесіндісін B нүктесінен бастап жалғастырамыз және BE кесіндісін CD кесіндісіне тең етіп саламыз (2.6-сурет). AE кесіндісі AB мен CD кесінділерінің қосындысын береді: $AE = AB + CD$.

Осыған ұқсас өздерің үлкен кесіндіден кішісін азайту ережесін тұжырымдаңдар.

Кесіндіні тең екі бөлікке бөлетін нүкте оның *ортасы* деп аталады.

1. Аксиома ретінде қабылданған түзудің қасиетін тұжырымдаңдар.
2. Қандай фигура *сәуле* деп аталады ?
3. Сәуле қалай белгіленеді?

4. Сәуле басқаша қалай аталады?
5. Сәуленің төбесі басқаша не деп аталады?
6. Қандай фигура кесінді деп аталады?
7. Кесінді қалай белгіленеді?
8. Кесіндімен қандай амалдар жүргізіледі?
9. Кесінділердің теңдігі қалай белгіленеді?
10. Қандай нүкте кесіндінің ортасы деп аталады?

Жаттығулар

А

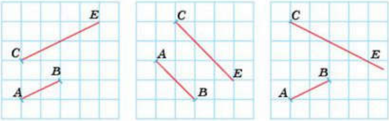
2.1. Берілген нүктеден төбесі ретінде шығатын қанша сәуле болуы мүмкін?

2.2. Берілген түзуде жататын, осы түзудегі берілген нүкте төбесі болатын қанша сәуле бар?

2.3. AB кесіндісінен C нүктесі алынған. AB, AC, CA, CB, BA, BC сәулелері арасынан сәйкес сәулелер жұбын атаңдар.

2.4. A, B, C, D нүктелерін мына шарттар орындалатындай етіп түзудің бойында кескіндеңдер:
а) C нүктесі A мен B нүктелерінің арасында, ал D нүктесі B мен C нүктелерінің арасында жатсын;
ә) A нүктесі B және C нүктелерінің арасында, ал C нүктесі — A мен D нүктелерінің арасында жатсын.

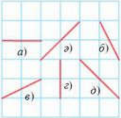
2.5. Торкөз қағазға 2.7-суретте көрсетілгендей етіп CE сәулесі мен AB кесіндісін салыңдар. CE сәулесінің C төбесінен AB кесіндісіне тең CD кесіндісін салыңдар.



а) ә) б)

2.7-сурет

2.6. 2.8-суретте берілген тең кесінділерді көрсетіңдер.



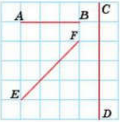
2.8-сурет

B

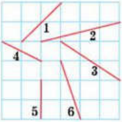
2.7. Түзудегі A, B, C, D нүктелері үшін B мен C нүктелері A нүктесінің бір жағында, B мен D нүктелері A нүктесінің бір жағында жатқаны белгілі. C мен D нүктелері A нүктесіне қарағанда қалай орналасқан?

2.8. 2.9-суретте көрсетілгендей етіп торкөз қағазда кесінділерді бейнелеңдер. AB, CD, EF кесінділерінің ортасын көрсетіңдер.

2.9. 2.9-суретте көрсетілгендей етіп торкөз қағазда кесінділерді бейнелеңдер. AB, CD, EF кесінділерін тең үш бөлікке бөлетін нүктелерді көрсетіңдер.



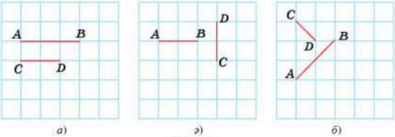
2.9-сурет



2.10-сурет

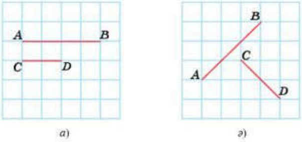
2.10. 2.10-суретте бейнеленген кесінділерді өсу ретімен орналастырыңдар.

2.11. 2.11-суретте көрсетілгендей етіп торкөз қағазда кесінділерді бейнелеңдер. AB мен CD кесінділерінің қосындысына тең кесінділі салыңдар .



2.11-сурет

2.12. 2.12-суретте көрсетілгендей етіп торкөз қағазда кесінділерді бейнелеңдер. AB мен CD кесінділерінің айырымына тең кесіндіні салыңдар .



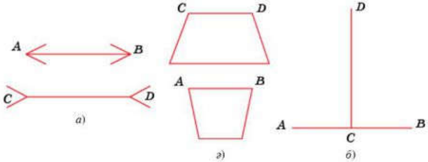
2.12-сурет

C

2.13. Түзуде а) 3 нүкте; ә) 4 нүкте; б) 5 нүкте; в)* n нүкте белгіленген . Төбесі осы нүктелер болатындай, берілген түзуде жататын неше сәуле бар?

2.14. Түзуде: а) 3 нүкте; ә) 4 нүкте; б) 5 нүкте; в)* n нүкте белгіленген . Осы нүктелер ұштары болатындай неше кесінді бар?

2.15. 2.13-суретте бейнеленген AB және CD кесінділерін салыстырыңдар.



2.13-сурет

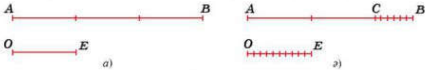
Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

2.16. Түзу салыңдар. Сызғыштың көмегімен оның бойынан бір бағытта ұзындығы 5 см болатын AB кесіндісін және ұзындығы 6 см болатын BC кесіндісін алыңдар. AC кесіндісінің ұзындығы неге тең?

§ 3. КЕСІНДІЛЕРДІҢ ҰЗЫНДЫҒЫН ӨЛШЕУ

Кесіндінің ұзындығын өлшеу ұзындығы бірлік ретінде қабылданатын (бірлік кесінді) кесіндінің ұзындығымен салыстыруға негізделген. *Кесіндінің ұзындығы* — бірлік кесіндіні берілген кесіндінің бойына неше рет орналастыруға болатынын көрсететін оң сан.

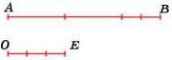
AB кесіндісінің ұзындығын өлшеу үшін AB сәулесінің A төбесінен бастап, OE бірлік кесіндісін тізбектей отырып орналастырады. Егер бірлік кесіндіні AB кесіндісінің бойынан қалдықсыз бірнеше рет орналастыруға болса, онда өлшеу нәтижесінде алынған бүтін сан кесіндінің ұзындығы болып есептеледі. Мысалы, 3.1, а-суретте бірлік кесінді берілген кесіндінің бойынан үш рет орналастырылған.



3.1-сурет

AB кесіндінің бойында бірлік кесіндіні бүтін және қалдықпен орналастырса, яғни бірлік кесіндінің ұшы C нүктесі AB кесіндісінің ұшымен беттеспесе және CB қалған бөлігі бірлік кесіндіден кіші болса (3.1, ә-сурет), онда n саны бірлік кесінді өлшемінің жуық мәні болады (1-ге дейінгі дәлдікпен). Бұл жағдайда бірлік кесінді тең 10 бөлікке бөлінеді. CB сәулесінің C төбесінен бірлік кесіндінің ондық бөлігін тізбектей отырып орналастырып, CB кесіндісінде неше рет келетінін білдіретін m санын табады. Егер соңғы кесіндінің ұшы CB кесіндісінің ұшымен дәл келетін болса, онда өлшеу процесі тоқтатылады да, n, m ондық бөлшекпен өрнектелетін сан AB кесіндісінің ұзындығы болады. 3.1, ә-суретте $n = 2$, $m = 6$.

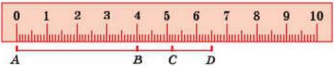
Егер соңғы кесіндінің ұшы CB кесіндісінің ұшымен беттеспесе, онда n, m саны кесінді ұзындығының жуық өлшемі болып есептеледі (0,1 дәлдікпен). Бұл жағдайда бірлік кесіндінің оннан бір бөлігі тең он бөлікке бөлінеді және жоғарыдағы процесс қайталанады. Нәтижесінде өлшеу процесі кейбір қадамда аяқталуы мүмкін. Бұл жағдайда кесіндінің ұзындығы ондық бөлшекпен өрнектеледі. Алайда бұл өлшеу процесі ешқандай қадамда тоқтатылмауы мүмкін. Бұл жағдайда кесіндінің ұзындығы шексіз ондық бөлшекпен өрнектеледі. Бірлік кесіндіні тең 10 бөлікке бөліп қоймай, басқа да тең бөліктерге бөлуге болады. Егер бірлік кесіндіні тең q бөлікке бөліп және осы бөлікті AB кесіндісінің бойынан p рет орналастыруға болса, онда AB кесіндісінің ұзындығы $\frac{p}{q}$. 3.2-суретте $q = 3$, $p = 8$.



3.2-сурет

AB кесіндісінің ұзындығын *A* мен *B* нүктелерінің *арақашықтығы* деп те атайды. *AB* кесіндісінің ұзындығын *AB* деп белгілейміз .

Кесінділердің ұзындығын өлшеу үшін әртүрлі өлшеу құралдары қолданылады, олардың ішіндегі ең қарапайымы — сантиметрмен бөлінген және оның ондық бөлігі миллиметрмен бөлінген сызғыш. 3.3-суретте *AB*, *AC* мен *AD* кесінділерінің ұзындықтары сәйкесінше 4 см, 5 см 2 мм, 6 см 5 мм-ге тең.



3.3-сурет

Жергілікті жерлерде кесіндінің ұзындығын өлшеу үшін, әдетте, бірлік кесінді ретінде өлшемі 1 м (метр), 100 см-ге тең өлшеу таспасы қолданылады. Үлкен қашықтықты өлшеу үшін өлшем бірлігі ретінде 1000 м-ге тең болатын 1 км (километр) ұзындық алынады. Кесінділердің ұзындығы үшін төмендегі қасиеттер орындалады.

1-қасиет. *Тең кесінділердің ұзындықтары тең болады.*

2-қасиет. *Кесінділердің қосындысының ұзындығы олардың ұзындықтарының қосындысына тең.*

Кесінділер айырымының ұзындығы неге тең екенін өздерің тұжырымдаңдар.

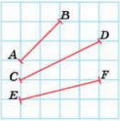
1. Кесіндінің ұзындығы деп нені айтамыз?
2. Кесіндінің ұзындығы қалай белгіленеді?
3. Кесіндінің ұзындығы қалай өлшенеді?
4. Екі нүктенің арақашықтығы деп нені айтамыз?
5. Кесінділердің ұзындығы үшін қандай қасиеттер орындалады?

Жаттығулар

A

3.1. Сызғышты қолданып, ұзындығы: а) 6 см; ә) 18 мм; б) 1 дм болатын кесінділерді салыңдар.

3.2. Торкөз қағазға 3.4-суретте көрсетілгендей AB, CD, EF кесінділерін салыңдар. Олардың ұзындығын сызғыш көмегімен өлшеңдер.



3.4-сурет

3.3. 3.5-суретте $AB = CD$, $AC = 6$ см. BD-ны табыңдар.

3.4. 3.5-суретте $AC = BD$, $AC = 10$ см, $CD = 4$ см. BC кесіндісінің ұзындығын табыңдар.

3.5-сурет

B

3.5. C нүктесі түзудегі A мен B нүктелерінің арасында жатыр. Егер: а) $AC = 2$ см, $CB = 3$ см; ә) $AC = 3$ дм, $CB = 4$ дм; б) $AC = 12$ м, $CB = 5$ м болса, AB кесіндісінің ұзындығын табыңдар.

3.6. Түзудің бір жағында $OE = 5$ см, $EF = 30$ мм, $FG = 15$ мм, $GH = 11$ см кесінділері орналасқан. а) OF; ә) OH; б) EG; в) FH кесінділерін табыңдар.

3.7. A, B және C нүктелері бір түзуге тиісті. Егер $AB = 4$ см, $AC = 7$ см, $BC = 3$ см екені белгілі болса, онда A, B, C нүктелерінің қайсысы қалған екеуінің ортасында жатыр?

3.8. Егер $AB = 2$ см, $BC = 3$ см, $AC = 4$ см болса, онда A, B, C нүктелері бір түзудің бойында жатуы мүмкін бе?

3.9. A, B және C нүктелері бір түзуге тиісті. Егер $AC = 3$ см, $BC = 5$ см болса, онда B нүктесі AC кесіндісіне тиісті ме?

3.10. Егер үлкен AB кесіндісінің ұзындығы AC мен BC кесінділері ұзындықтарының қосындысынан кіші болса, онда A, B, C нүктелері бір түзудің бойында жатуы мүмкін бе?

3.11. $AB = 10$ см, $BC = 5$ см кесінділері түзудің бойында жатыр. Егер а) B нүктесі A мен C нүктелерінің арасында; ә) C нүктесі A мен B нүктелерінің арасында жатса, AC неге тең?

3.12. AB мен CD кесінділері O нүктесінде қиылысады және сол нүктеде қақ бөлінеді. $AO = 2CO$ екені белгілі. AB мен CD кесінділерін салыстырыңдар.

3.13. Екі кесіндінің қосындысы 6 см-ге тең, ал олардың айырымы 2 см. Кесінділердің ұзындығын табыңдар.

3.14. Ұзындығы 15 м болатын AB кесіндісінде C нүктесі белгіленген. а) AC кесіндісі BC кесіндісінен 3 м-ге ұзын; ә) AC кесіндісі BC кесіндісінен екі есе ұзын; б) AC мен BC кесінділері ұзындықтарының қатынасы 2:3 болса, AC мен BC кесінділерінің ұзындығын табыңдар.

3.15. Түзудің бойынан $AB = 3$ см, $BC = 5$ см, $CD = 4$ см болатындай AB, BC және CD кесінділері орналасқан. AB мен CD кесінділері орталарының арақашықтығын табыңдар.

3.16. Түзудің бойынан $AB = 60$ мм, $AC = 100$ мм болатындай, A нүктесінен бір бағытта AB мен AC кесінділері орналасқан. а) BC кесіндісінің ұзындығын; ә) A нүктесінен BC кесіндісінің ортасына дейінгі қашықтықты; б) AB мен AC кесінділері орталарының арақашықтығын табыңдар.

3.17. A, B, C үш ауыл түзу жол бойында орналасқан. A мен B ауылдарының арақашықтығы 2 км, ал A мен C арасы 5 км. B мен C ауылдарының арақашықтығы неге тең? Есептің неше шешімі бар?

3.18. Сызғыш бөліктерін қолданбай, 2 м таспаның 150 см бөлігін қалай кесіп алуға болады?

C

3.19. Түзудегі бір нүктеден бір бағытта үш тең кесінді орналасқан. Бірінші кесіндінің ұшы екінші кесіндінің ортасы, ал екінші кесіндінің ұшы үшінші кесіндінің ортасы болып келеді. Ұштары бірінші кесіндінің басы мен үшінші кесіндінің ұшы болатын кесіндінің ұзындығы 28 см. Осы кесінділердің ұзындығын табыңдар.

3.20. Газет парағының қалыңдығы 0,1 миллиметрге тең. Газет парағын екі бүктеп, сосын тағы бүктеп, сонымен 50 рет бүктелді делік. Егер мұндай бүктеу мүмкін болса, бүктеменің қалыңдығы қандай болады?

Хабарлама дайындаңдар

3.21. XVII ғ. соңындағы әр елдің өлшем бірліктері туралы не білесіңдер? Ұзындықтың өлшем бірлігінің эталонына метрді қабылдау себебі неде?

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

3.22. Ортақ төбесі бар: а) екі сәуле; ә) үш сәуле; б) төрт сәуле; в) * n сәуле жазықтықты неше бөлікке бөледі?

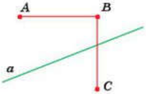
§ 4. ЖАРТЫЖАЗЫҚТЫҚ ЖӘНЕ БҰРЫШ

Жазықтықта қандай да бір түзу жүргізіңдер.

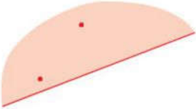
Қалай ойлайсыңдар,осы түзу жазықтықты нешебөлікке бөледі?

4.1-суретте *a* түзуі жазықтықты екі бөлікке бөледі. Мұнда, егер *A* мен *B* нүктелері осы бөліктердің біреуінде жатса, онда *AB* кесіндісі түзуді қимайды. Бұл жағдайда *A* мен *B* нүктелері *a* түзуінің *бір жағында жатыр* деп айтылады. Егер *B* мен *C* нүктелері жазықтықтың әр бөліктерінде жатса, онда *BC* кесіндісі түзуді қияды. Бұл жағдайда *B* мен *C* нүктелері *a* түзуінің *әр жағында жатыр* деп айтылады.
Түзудің осы қасиеті аксиома ретінде қабылданады.

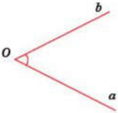
Жазықтықтағы әрбір түзу осы жазықтықты екі бөлікке бөледі. Егер екі нүкте жазықтықтың әр бөлігінде жатса, онда осы нүктелерді қосатын кесінді түзумен қиылысады. Екі нүкте жазықтықтың бір бөлігінде жатса, онда осы нүктелерді қосатын кесінді түзумен қиылыспайды.



4.1-сурет


4.2-сурет

Түзудің бір жағында жататын және сол түзу мен нүктелерден құралған жазықтықтың бөлігі *жартыжазықтық* деп аталады (4.2-сурет).
Төбелері ортақ екі сәулені қарастырайық (4.3-сурет). Олар жазықтықты екі бөлікке бөледі.



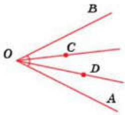
4.3-сурет

Мұны өздерің түсіндіріп көріңдер.

Төбелері ортақ екі сәуледен және осы сәулелермен шектелген жазықтықтың бір бөлігінен құралған фигура *бұрыш* деп аталады. Сәулелердің ортақ төбесі *бұрыштың төбесі*, ал сәулелер *бұрыштың қабырғалары* деп аталады.

Бұрыш төбесін көрсететін бір әріппен немесе қабырғаларынан алынған кез келген нүктелермен қоса үш әріппен белгіленеді. Төбесіндегі әріп ортасында жазылады. Мысалы, $\angle A$, $\angle AOB$ және т.с.с. Кейде бұрыш цифрмен де белгіленеді, мысалы, $\angle 1$, $\angle 2$ және т.с.с.

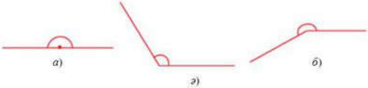
Қабырғаларында жатпайтын бұрыштың нүктелерін *ішкі нүктелер* деп атайды. Бұрыштың төбесінен шығатын және бұрыштың ішкі нүктелерінен өтетін сәулелерді *ішкі сәулелер* деп атайды. 4.4-суретте AOB бұрышы бейнеленген. C мен D нүктелері — оның ішкі нүктелері, OC мен OD сәулелері — оның ішкі сәулелері.



4.4-сурет

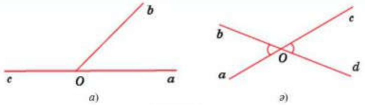
Бұрыштың қабырғалары түзу құраса, ол *жазыңқы бұрыш* деп аталады. (4.5, а-сурет). Кері жағдайда бұрыш *жазыңқы емес* деп аталады.

Жазыңқы емес бұрыш жазыңқы бұрыштан кіші, яғни жазыңқы бұрыштың бөлігі болады (4.5, ә-сурет) немесе жазыңқыдан үлкен, яғни жазыңқы бұрышты қамтуы мүмкін (4.5, б-сурет).



4.5-сурет

Біз жазыңқы бұрыштан кіші бұрышты қарастырамыз. Егер екі бұрыштың бір қабырғасы ортақ, ал басқа екі қабырғасы бір түзуде жатса, онда бұл бұрыштарды *сыбайлас* бұрыштар деп атайды (4.6, а-сурет).



4.6-сурет

Егер бұрыштың бір қабырғасы екінші бұрыштың қабырғасын түзуге дейін толықтырса, онда бұл бұрыштарды *вертикаль* бұрыштар деп атайды (4.6, ә-сурет).

1. Түзу жазықтықты қанша бөлікке бөледі?
2. Жазықтықта нүктелердің берілген түзуге қатысты өзара орналасу қасиетінің мәні неде?
3. Жартыжазықтық деп нені айтамыз?
4. Қандай жағдайда екі нүкте берілген түзуге қатысты: а) бір жартыжазықтықта; ә) әр жартыжазықтықта жатады?
5. Қандай фигура бұрыш деп аталады? Бұрыштың төбесі деп нені айтады? Бұрыштың қабырғалары деп нені айтады?
6. Қандай бұрышты жазыңқы бұрыш деп айтады?
7. Қандай бұрыштарды: а) сыбайлас; ә) вертикаль деп айтады?
8. Бұрыштар қалай белгіленеді?

Жаттығулар

А

4.1. p түзуі мен A, B, C, D, E, F нүктелерін орналастырыңдар. A, E нүктелері берілген түзуде жатыр, қалғандары түзуге тиісті емес, D мен F әр жартыжазықтықта, B мен C бір жазықтықта жатады. BD кесіндісі p түзуімен қиылысады.

4.2. a түзуі мен осы түзуде жатпайтын A, B, C, D нүктелері берілген. а) AB, BC және CD кесінділері a түзуін қиады ; ә) a түзуін AC мен BC кесінділері қияды , ал BD кесіндісі қиылыспайды; б) a түзуін AB мен CD кесінділері қияды , ал BC кесіндісі қиылыспайды; в) a түзуін AB мен CD кесінділері қимайды , ал BC кесіндісі қияды; г) AB, BC және CD кесінділері a түзуін қимайды ; ғ) AC, BC және BD кесінділері a түзуін қиса, AD кесіндісі a түзуін қия ма? Осы жағдайларды кескіндеңдер.

4.3. Қиылысатын екі түзуді салыңдар. Олар жазықтықты неше бөлікке бөледі?

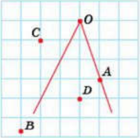
4.4. Бір нүктеде қиылысатын үш түзуді салыңдар. Олар жазықтықты неше бөлікке бөледі?

4.5. Бір нүктеде қиылысатын төрт түзуді салыңдар. Олар жазықтықты неше бөлікке бөледі?

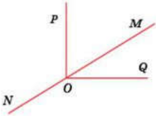
4.6. а) AOB бұрышының ішінде OC сәулесі жатыр, ал BOC бұрышының ішінде OD сәулесі жатыр; ә) BOC бұрышының ішінде OA сәулесі жатыр, ал AOD бұрышының ішінде OC сәулесі жататындай, OA, OB, OC, OD сәулелерін салыңдар.

4.7. 4.7-суретте кескінделген нүктелердің қайсысы бұрыштың қабырғасында, қайсысы бұрыштың ішінде орналасқан?

4.8. 4.8-суретте O нүктесі төбесі болатын неше бұрыш кескінделген?



4.7-сурет



4.8-сурет

4.9. Берілген бұрышқа сыбайлас қанша бұрыш бар?

4.10. Берілген бұрышқа вертикаль қанша бұрыш бар?

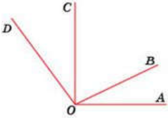
B

4.11. Бес нүкте және осы нүктелерден өтпейтін түзу берілген. Осы түзуге қатысты нүктелердің үшеуі бір жартыжазықтықта, ал екеуі екінші жартыжазықтықта жатыр. Әрбір екі нүкте кесіндімен қосылған. Неше кесінді а) түзумен қиылысады; ә) түзумен қиылыспайды? Сәйкес суретті салыңдар.

4.12. Бір нүктеде қиылыспайтын, бірақ қос-қостан қиылысатын үш түзуді кескіндеңдер. Олар жазықтықты неше бөлікке бөледі?

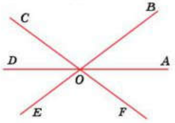
4.13. Үшеуі бір нүктеде қиылыспайтын, бірақ қос-қостан қиылысатын төрт түзуді кескіндеңдер. Олар жазықтықты неше бөлікке бөледі?

4.14. 4.9-суретте кескінделген сәулелермен анықталған бұрыштардың нешеуі жазыңқы бұрыштан кіші? Оларды атаңдар.



4.9-сурет

4.15. 4.10-суреттегі сыбайлас бұрыштар жұбын жазыңдар.
4.16. 4.10-суреттегі вертикаль бұрыштар жұбын жазыңдар.



4.10-сурет

C

4.17. Бір нүктеде қиылысатын n түзу жазықтықты неше бөлікке бөледі?

4.18. а) 2 нүкте; ә) 3 нүкте; б) 4 нүкте; в)* n нүкте түзуде белгіленген. Осы нүктелер төбесі болатын неше жазыңқы бұрыштар пайда болды?

4.19. Төбесі ортақ: а) 2 сәуле; ә) 3 сәуле; б) 4 сәуле; в) * n сәуле жазықтықты неше бөлікке бөледі?

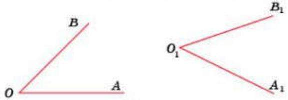
4.20. Үш түзудің ешбірі бір нүктеде қиылыспайтын, қос-қостан қиылысатын n түзу жазықтықты неше бөлікке бөледі?

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

4.21. OA сәулесін салыңдар. Транспортирдің көмегімен оның бойынан бір бағытта 60°-қа тең AOB бұрышын және 30°-қа тең BOC бұрышын салыңдар. AOC бұрышының шамасы неге тең?

§ 5. БҰРЫШТАРҒА АМАЛДАР ҚОЛДАНУ. БҰРЫШТАРДЫҢ ТЕҢДІГІ

Бұрыштарға қолданылатын негізгі амалдардың бірі — берілген бұрышты берілген сәуледен бастап басқа жаққа *орналастыру* (5.1-сурет). Пайда болған бұрыш берілген бұрышқа *тең* деп аталады.



5.1-сурет

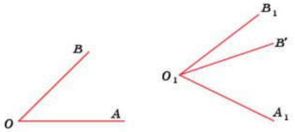
AOB мен $A_1O_1B_1$ бұрыштарының теңдігі $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$ түрінде жазылады. Мұның мағынасы, егер осы бұрыштардың бірін, мысалы AOB бұрышын, O_1A_1 сәулесінен бастап O_1B_1 сәулесімен анықталатын жаққа орналастырсақ, онда AOB бұрышы $A_1O_1B_1$ бұрышымен беттеседі.

Аксиома ретінде келесі қасиеттер қабылданады.

Жазықтықтағы кез келген сәуледен бастап берілген бұрышқа тең тек бір ғана бұрышты орналастыруға болады.

Барлық жазыңқы бұрыштар тең болады.

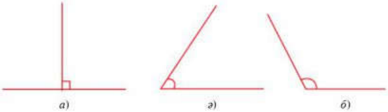
Сонымен бірге AOB бұрышын O_1A_1 сәулесінен бастап салғанда OB сәулесі $A_1O_1B_1$ бұрышының ішінде жататын O_1B' сәулесіне көшсе, AOB бұрышы $A_1O_1B_1$ бұрышынан кіші болады және $\angle AOB < \angle A_1O_1B_1$ түрінде белгіленеді (5.2-сурет).



5.2-сурет

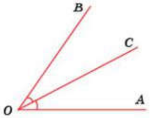
Сонымен бірге $A_1O_1B_1$ бұрышы AOB бұрышынан *үлкен* дейді және $\angle A_1O_1B_1 > \angle AOB$ түрінде белгіленеді .

Өзінің сыбайлас бұрышына тең болатын бұрыш *тік бұрыш* деп аталады (5.3, а-сурет). Тік бұрыштан кіші бұрыш *сүйір бұрыш*, (5.3, ә-сурет), тік бұрыштан үлкен бұрыш *доғал бұрыш* деп аталады (5.3, б-сурет).

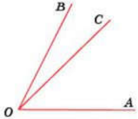


5.3-сурет

Бұрышты тең екі бөлікке бөлетін ішкі сәуле бұрыштың ***биссектрисасы*** деп аталады (5.4-сурет).



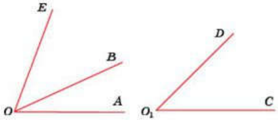
5.4-сурет



5.5-сурет

Егер AOB бұрышының ішінен OC сәулесін жүргізсек, онда жаңа AOC мен COB бұрыштары пайда болады (5.5-сурет). AOB бұрышы AOC мен COB бұрыштарының *қосындысы* деп аталады және $\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$ түрінде жазылады. AOC мен COB бұрыштарының әрқайсысы AOB бұрышы мен екіншісінің *айырымы* деп аталады. Оның жазылуы: $\angle AOC = \angle AOB - \angle COB$, $\angle COB = \angle AOB - \angle AOC$.

Екі бұрышты қосу үшін, мысалы AOB мен CO_1D (5.6-сурет), OB сәулесінен бастап CO_1D бұрышын A мен D нүктелері OB түзуінің әр жағында орналасатындай етіп саламыз. O_1D сәулесіне көшетін сәулені OE деп белгілейік. Онда AOE бұрышы AOB мен CO_1D бұрыштарының қосындысын береді, $\angle AOE = \angle AOB + \angle CO_1D$.



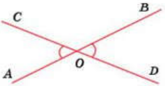
5.6-сурет

Осыған ұқсас өздерің үлкен бұрыштан кішісін азайтыңдар.

Бұрыштардың қосындыларының анықтамасынан сыбайлас бұрыштардың қосындысы жазыңқы бұрышқа тең болатындығы шығады.

Теорема. ***Вертикаль бұрыштар тең болады.***

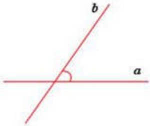
Дәлелдеуі. AOC мен BOD вертикаль бұрыштар болсын. BOD бұрышының OB мен OD қабырғаларының созындысы, AOC бұрышының OA мен OC қабырғаларымен сәйкесінше түзуге дейін толықтырылады (5.7-сурет). Онда AOC мен COB бұрыштарының қосындысы жазыңқы бұрышты құрайды. BOD мен COB бұрыштарының қосындысы да жазыңқы бұрышты құрайды. Сонымен, $\angle AOC + \angle COB = \angle BOD + \angle COB$. Теңдіктің екі жағынан $\angle COB$-ны азайтсақ, $\angle AOC = \angle BOD$ теңдігін аламыз ■.



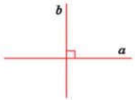
5.7-сурет

Түзулердің қиылысу нүктесінде пайда болған сәулелерден құралған ең кіші бұрыш *қиылысқан түзулердің арасындағы* бұрыш деп аталады (5.8-сурет).

Тік бұрыш жасап қиылысқан түзулер ***перпендикуляр*** түзулер деп аталады (5.9-сурет).



5.8-сурет



5.9-сурет

1. Қандай бұрыштар тең бұрыштар деп аталады?
2. Бұрыштардың теңдігі қалай белгіленеді?
3. Бір бұрыш басқа бұрыштан кіші болса, нені білдіреді?
4. а) сүйір; ә) тік; в) доғал бұрыш деп қандай бұрыштарды атаймыз?
5. Бұрыштың биссектрисасы деп нені атайды?
6. а) екі бұрыштың қосындысы; ә) екі бұрыштың айырымы қалай анықталады?
7. Вертикаль бұрыштар туралы теореманы тұжырымдап беріңдер.
8. Қиылысқан түзулер арасындағы бұрыш деп нені айтады?
9. Қандай түзулер перпендикуляр түзулер деп аталады?

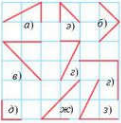
Жаттығулар

A

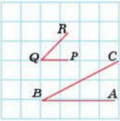
5.1. 5.10-суретте көрсетілген бұрыштардың ішінен тең бұрыштарды атаңдар.

5.2. 5.11-суретте көрсетілген бұрыштардың қайсысы үлкен?

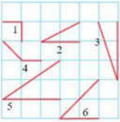
5.3. 5.12-суретте көрсетілген бұрыштарды өсу ретімен орналастырыңдар.



5.10-сурет

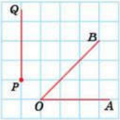


5.11-сурет

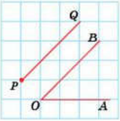


5.12-сурет

5.4. 5.13-суретте көрсетілгендей, торкөз қағазға *AOB* бұрышы мен *PQ* сәулесін салыңдар. *PQ* сәулесінен *AOB* бұрышына тең *QPR* бұрышын салыңдар.



а)



ә)

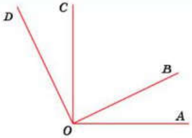
5.13-сурет

5.5. Түзулердің арасындағы бұрыш а) тік; ә) доғал бола ма?

5.6. Қиылысқан екі түзудің арасындағы бұрыштың бірі 30°-қа тең. Қалған бұрыштары неге тең?

B

5.7. 5.14-суретінде көрсетілген сәулелерден құралған жазыңқы бұрыштан үлкен қанша бұрыш бар?

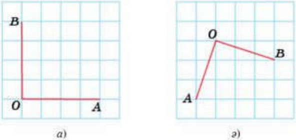


5.14-сурет

5.8. 5.14-суретте бейнеленген сәулелерден құралған қанша а) сүйір; ә) тік; б) доғал бұрыш бар?

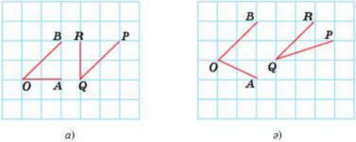
5.9. Екі сыбайлас бұрыш бірдей а) сүйір; ә) тік; б) доғал бұрыш бола ма?

5.10. 5.15-суретте берілгендей, торкөз қағазға AOB бұрышын және оның OC биссектрисасын салыңдар.



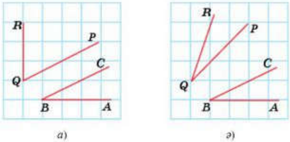
5.15-сурет

5.11. Торкөз қағазға AOB мен PQR бұрыштарының қосындысына тең бұрышты салыңдар (5.16-сурет).



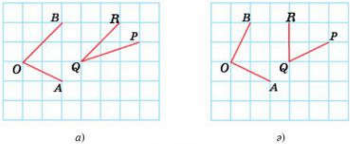
5.16-сурет

5.12. Торкөз қағазға ABC мен PQR бұрыштарының қосындысына тең бұрышты салыңдар (5.17-сурет).



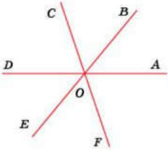
5.17-сурет

5.13. Торкөз қағазға AOB мен PQR бұрыштарының айырымына тең бұрышты салыңдар (5.18-сурет).



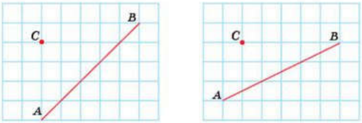
5.18-сурет

5.14. 5.19-суретте AOB бұрышы $50°$-қа тең, COD бұрышы $60°$-қа тең. EOF бұрышын табыңдар .



5.19-сурет

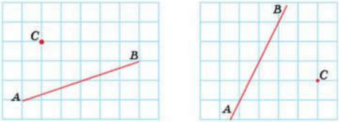
5.15. Торкөз қағазға C нүктесі арқылы AB түзуіне перпендикуляр түзу салыңдар (5.20-сурет).



а) ә)

5.20-сурет

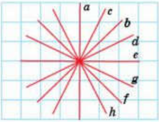
5.16. Торкөз қағазға C нүктесі арқылы AB түзуіне перпендикуляр түзу салыңдар (5.21-сурет).



а) ә)

5.21-сурет

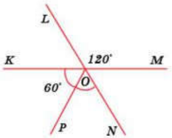
5.17. 5.22-суретте көрсетілген түзудің қайсысы а) a; ә) b; б) c; в) d түзуіне перпендикуляр?



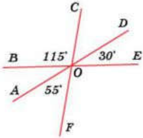
5.22-сурет

5.18. Қайық бастапқыда оңтүстікке қарай жүзді де, содан кейін 90°-қа бұрылды. Ол қандай бағытта жүзеді? Есептің неше шешімі бар?

5.19. 5.23, 5.24-суреттерде қате бар ма? Жауабын түсіндіріңдер.



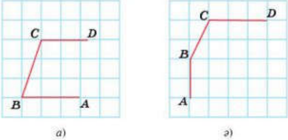
5.23-сурет



5.24-сурет

C

5.20. Торкөз қағазға: а) C мен B (5.25, а-сурет); ә) B мен C (5.25, ә-сурет) бұрыштарының айырымына тең бұрышты салыңдар.



5.25-сурет

5.21. Егер екі бұрыш тең болса, онда оларға сыбайлас бұрыштар да тең болатынын дәлелдеңдер.

5.22. Қиылысқан екі түзудің арасындағы бұрыштың бірі екіншісінен 20°-қа кіші. Осы бұрыштарды табыңдар.

5.23. Қиылысқан екі түзудің арасындағы бұрыштың бірі екіншісінен 4 есе үлкен. Осы бұрыштарды табыңдар.

5.24. Қиылысқан екі түзудің арасындағы үш бұрыштың қосындысы 306°-қа тең. Осылардың үлкенін табыңдар.

5.25. Қиылысқан екі түзудің арасындағы үш бұрыштың қосындысы 150°-қа тең бола ма?

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

5.26. Дөңгелектің көршілес біздерінің арасындағы бұрыш 20°-қа тең. Дөңгелектің біздер санын табыңдар.

5.27. Сағаттың минуттық тілі 30 минутта неше градусқа бұрылады?

§ 6. БҰРЫШТАРДЫҢ ШАМАСЫН ӨЛШЕУ

Бұрыштың шамасын өлшеу де кесіндінің ұзындығын өлшеу сияқты орындалады.

Алдымен бұрышты өлшеу бірлігі ретінде бірлік бұрышты таңдап аламыз. Әдетте, бірлік бұрыш жазыңқы бұрыштың жүз сексеннен бір бөлігін құрайды. Оның шамасы бір градусқа тең деп есептеледі және 1° деп белгіленеді.

AOB бұрышын өлшеу үшін OA сәулесінен бастап бірлік бұрышты біртіндеп салу арқылы n санын табамыз, ол бұрышқа қанша рет бірлік бұрышты салғанын көрсетеді. Егер соңғы бірлік бұрыш OB сәулесімен дәл келсе, онда өлшеу процесін тоқтатамыз және табылған n градус саны AOB бұрышының шамасын білдіреді де, $\angle AOB = n^\circ$ деп белгіленеді. Егер OC сәуле соңғы бірлік OA мен OB сәулелерінің ортасында жатса, онда бірлік бұрышты тең 60 бөлікке бөлеміз. Осы бөліктің біреуін минут деп атап, $1'$ деп белгілейді. Сонан соң соңғы OC сәулесінен бастап бір минутқа тең бұрышты біртіндеп беттестіреді, сонда m саны табылады, ол COB бұрышына тұтас салатынын көрсетеді. Егер соңғы сәуле OB сәулесімен беттессе, онда өлшеу процесі тоқтатылады да, бұрыш шамасы $n^\circ m'$ болады, мұндағы n° қанша 1° бұрыш, m' қанша $1'$ бұрыш келетінін көрсетеді. Егер соңғы сәуле OC мен OB сәулелерінің ортасына түссе, онда бір минут тағы да тең 60 бөлікке бөлінеді де (осы бөліктің шамасы бір секунд деп аталады да, $1''$ түрінде белгіленеді), өлшеу процесін қайталайды.

Сонымен, *бұрыштың градустық шамасы* қанша рет градуспен және оның бөліктерімен өлшенетінін көрсетеді. Бұрыштың градустық шамасын келесі қасиеттер қанағаттандырады.

1-қасиет. *Тең бұрыштардың градустық шамалары тең болады.*

2-қасиет. *Бұрыштардың қосындысының градустық шамасы олардың градустық шамаларының қосындысына тең болады.*

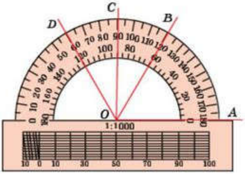
Өздерің бұрыштар айырымының градустық шамасы неге тең екенін тұжырымдаңдар.

Бұрыштың градустық шамасы сол бұрыш сияқты белгіленеді. Мысалы, $\angle AOB = 30^\circ$ жазуы AOB бұрышының шамасы 30°-қа тең екенін көрсетеді. AOB бұрышы 30°-қа тең деп те айтылады. Кейбір кезде бұрыштың градустық шамасы грек әріптерімен белгіленеді, мысалы, φ, ψ және т.б.

Анықтамадан тік бұрыш 90°-қа тең екені шығады. Сүйір бұрыш 90°-тан кіші, ал доғал бұрыш 90°-тан үлкен, бірақ 180°-тан кіші.

Бұрыштардың шамасын өлшеу үшін әртүрлі өлшеу құралдары пайдаланылады, солардың ішінде бізге белгілі, қарапайым түрі — транспортир (6.1-сурет).

6.1-суретте AOB, AOC және AOD бұрыштарының градустық шамасы сәйкесінше 60°, 90° және 120°-қа сәйкес келеді.



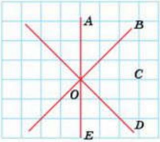
6.1-сурет

1. Бұрышты өлшеу үшін қандай бірлік пайдаланылады?
2. Градус деген не?
3. Минут деген не?
4. Секунд деген не?
5. Бұрыштың градустық шамасы қалай өлшенеді?
6. Бұрыштың градустық шамалары үшін қандай қасиеттер орындалады?

Жаттығулар

A

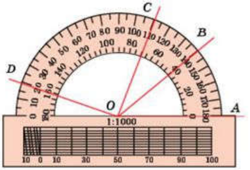
6.1. а) AOC; ә) AOB; б) AOD; в) AOE; г) BOD; ғ) BOC; д) BOE бұрышының градустық шамасын табыңдар (6.2-сурет).



6.2-сурет

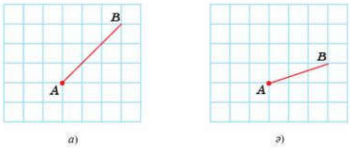
6.2. 6.3-суретте бейнеленген AOB, AOC, AOD, BOC, BOD, COD бұрыштарының градустық шамаларын табыңдар.

6.3. Транспортир көмегімен шамалары 10°, 30°, 70°, 100°, 150° болатын бұрыштарды салыңдар.



6.3-сурет

6.4. Торкөз қағазға, 6.4-суретте көрсетілгендей, AB сәулесін салыңдар. AB сәулесінен а) 45°; ә) 90°-қа тең BAC бұрышын салыңдар.

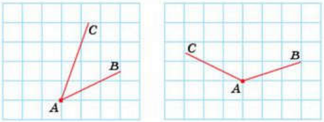


6.4-сурет

B

6.5. Батыс пен солтүстік-шығыс бағыттарының арасындағы бұрыш шамасы неге тең?

6.6. Торкөз қағазға, 6.5-суретте көрсетілгендей, бұрыштарды салыңдар. "Көз мөлшермен" олардың градустық шамасын бағаландар. Өздеріңнің бағалауларыңды транспортир көмегімен өлшеу арқылы тексеріңдер.



а) *ә)*

6.5-сурет

6.7. 60°-қа тең AOB бұрышының ішінде OC сәулесі орналасқан. BOC бұрышынан 30° артық болатын AOC бұрышын табыңдар.

6.8. 45°-қа тең AOB бұрышының ішінде OC сәулесі орналасқан. BOC бұрышынан екі есе артық болатын AOC бұрышын табыңдар.

6.9. 120°-қа тең AOB бұрышының ішінде OC сәулесі орналасқан. BOC бұрышынан 30° кіші болатын AOC бұрышын табыңдар.

6.10. 120°-қа тең AOB бұрышының ішінде OC сәулесі орналасқан. AOC бұрышынан үш есе артық болатын BOC бұрышын табыңдар.

6.11. 38°-қа тең бұрышпен сыбайлас бұрыштың шамасы неге тең?

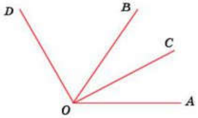
6.12. Егер сыбайлас бұрыштың бірі екіншісінен екі есе үлкен болса, онда сыбайлас бұрыштардың градустық шамаларын табыңдар.

6.13. а) біреуі екіншісінен 30° артық; ә) айырымы 40°-қа тең; б) біреуі екіншісінен төрт есе кіші; в) өзара тең болатын екі сыбайлас бұрыштың градустық шамаларын табыңдар.

6.14. а) 2 : 3; ә) 3 : 7; б) 11 : 25; в) 22 : 23 қатынаста болатындай екі сыбайлас бұрыштың градустық шамаларын табыңдар.

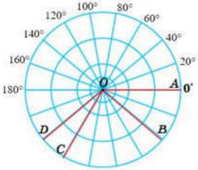
6.15. Шамасы 30° болатын BOC бұрышы өлшемдері сәйкесінше 60° және 90° болатын AOB мен COD бұрыштарының ортақ бөлігі (6.6-сурет). AOD бұрышын табыңдар.

6.16. Вертикаль бұрыштардың биссектрисаларының арасындағы бұрыш неге тең?



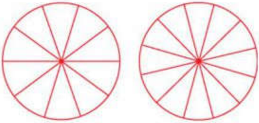
6.6-сурет

6.17. 6.7-суретте бейнеленген AOB, AOC, AOD, BOC, BOD, COD бұрыштарының шамасы неге тең?



6.7-сурет

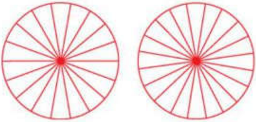
6.18. Арбаның доңғалағында а) 10 біз; ә) 12 біз (6.8-сурет) бар. Көрші екі біздің арасындағы бұрыштың шамасын табыңдар (градустық өлшемде).



а) ә)

6.8-сурет

6.19. Велосипед доңғалағында а) 18 біз; ә) 20 біз бар (6.9-сурет). Көрші екі біздің арасындағы бұрыштың шамасын табыңдар (градустық өлшемде).

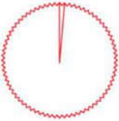


а) ә)

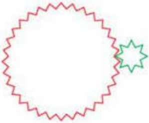
6.9-сурет

6.20. Дөңгелекте 72 тіс бар (6.10-сурет). Көршілес екі тістің ортасын қосатын шеңбер доғасы қандай градусты құрайды?

6.21. Егер 8 тісі бар дөңгелек минутына 12 айналым жасайтын болса, онда 32 тісі бар дөңгелек минутына неше айналым жасайды (6.11-сурет)?



6.10-сурет



6.11-сурет

6.22. а) 3 сағат; ә) 6 сағат; б) 5 сағат болса, сағаттың минут және сағат тілдерінің арасы неше градус?

6.23. а) 20 мин; ә) 10 мин; б) 50 мин-та сағаттың минуттық тілі неше градусқа бұрылады?

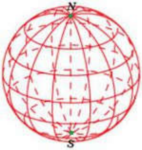
6.24. а) 1 сағат; ә) 30 мин; б) 20 мин-та сағаттың сағат тілі неше градусқа бұрылады?

C

6.25. Сыбайлас бұрыштардың биссектрисалары тік бұрыш жасайтынын дәлелдеңдер.

6.26. 8 сағатта Жер өзінің *SN* осі бойымен неше градусқа бұрылады (6.12-сурет)?

6.27. Жер өз осі бойымен 90°-қа неше сағатта бұрылады (6.12-сурет)?



6.12-сурет

Хабарлама дайындаңдар

6.28. 1) Бұрышты өлшеу құралының бірі — **астролябия** қалай пайда болды?
2) Геодезиялық жұмыстарды орындау үшін қолданылатын бұрыштық құрал **теодолит** қалай пайда болды?

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

1. Бір нүкте арқылы неше түзу жүргізуге болады?
A) Ешқандай. B) Біреу. C) Екі. D) Шексіз көп.
2. Екі нүкте арқылы неше түзу жүргізуге болады?
A) Шексіз көп. B) Екі. C) Біреу. D) Ешқандай.
3. Екі түзудің ең көп ортақ қанша нүктесі бар?
A) Ешқандай. B) Біреу. C) Екі. D) Шексіз көп.
4. Бір түзудің бойында жатпайтын үш нүктелер жұбынан қанша түзу жүргізуге болады?
A) Біреу. B) Екі. C) Үш. D) Шексіз көп.
5. Кез келген үшеуі бір түзудің бойында жатпайтын төрт нүктелер жұбынан ең көп қанша түзу жүргізуге болады?
A) 4. B) 6. C) 8. D) 12.
6. Кез келген үшеуі бір түзудің бойында жатпайтын бес нүктелер жұбынан ең көп қанша түзу жүргізуге болады?
A) 5. B) 10. C) 15. D) 20.
7. Үш түзудің ең көп қиылысу жұптарының нүктесі қанша?
A) Біреу. B) Екі. C) Үш. D) Шексіз көп.
8. Төрт түзуден қиылысу жұптарының ең көп нүктесін анықтаңдар.
A) 4. B) 6. C) 8. D) 12.
9. Бес түзуден қиылысу жұптарының ең көп нүктесін анықтаңдар.
A) 5. B) 10. C) 15. D) 20.
10. Түзуде 4 нүкте белгіленген. Осы нүктелер кесіндінің ұштары болатын қанша кесінді шығады?
A) 3. B) 4. C) 5. D) 6.
11. OA сәулесінің бойынан OA кесіндісінен кіші OB кесіндісі орналасқан. Үш нүктенің қайсысы қалған екеуінің арасында жатыр?
A) A. B) O. C) B. D) Мүмкін емес.

12. Түзу бойында тізбектеліп AB, BC және CD кесінділері орналасқан $AB = 3$ см, $BC = 5$ см, $CD = 4$ см. AB мен CD кесінділері орталарының арақашықтығын табыңдар.

A) 6,5 см. B) 7,5 см. C) 8,5 см. D) 10,5 см.

13. Берілген бұрышқа сыбайлас қанша бұрыш бар?

A) 1. B) 2. C) 3. D) 4.

14. Сыбайлас бұрыштың бірі 30°. Екінші бұрышын табыңдар.

A) 30°. B) 60°. C) 120°. D) 150°.

15. Сыбайлас бұрыштың бірі екіншісінен 90°-қа үлкен. Осы бұрыштарды табыңдар.

A) 90°, 180°. B) 30°, 120°. C) 60°, 150°. D) 45°, 135°.

16. Сыбайлас бұрыштың бірі екіншісінен үш есе кіші. Осы бұрыштарды табыңдар.

A) 45°, 135°. B) 60°, 120°. C) 30°, 90°. D) 15°, 45°.

17. Сыбайлас бұрыштың бірі екіншісінің 20%-ын құрайды. Осы бұрыштарды табыңдар.

A) 20°, 160°. B) 45°, 135°. C) 60°, 120°. D) 30°, 150°.

18. Екі түзу қиылысқанда пайда болған вертикаль бұрыштардың қосындысы 150°. Осы түзулердің арасындағы барлық бұрышты табыңдар.

A) 60°, 120°, 60°, 120°. B) 30°, 150°, 30°, 150°.
C) 75°, 105°, 75°, 105°. D) 50°, 130°, 50°, 130°.

19. 20 минутта сағаттың минуттық тілі қандай бұрышқа бұрылады?

A) 30°. B) 60°. C) 90°. D) 120°.

20. 13 сағ 30 мин болғанда сағаттың минуттық және сағаттық тілдері қандай бұрыш жасайды?

A) 90°. B) 120°. C) 135°. D) 150°.

2-ТАРАУ

ҮШБҰРЫШТАР

§ 7. ҮШБҰРЫШ ЖӘНЕ ОНЫҢ ТҮРЛЕРІ

Үшбұрыш негізгі геометриялық фигуралардың бірі болып табылады. 7.1-суретте әртүрлі үшбұрыштар кескінделген. Өздерің қандай фигура үшбұрыш деп аталатынын анықтап көріңдер. 7.1-суретте кескінделген үшбұрыштардың айырмашылығы қандай?

Бір түзудің бойында жатпайтын үш нүктеден және оларды қосқостан қосатын үш кесіндіден құрылған фигура *үшбұрыш* деп аталады. Нүктелер үшбұрыштың *төбелері*, ал кесінділер үшбұрыштың *қабырғалары* деп аталады.

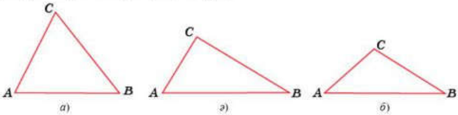
Үшбұрыш оның төбелерін көрсету арқылы белгіленеді. Мысалы, ABC үшбұрышы.

Төбесі үшбұрыштың төбесі болатын, ал қабырғалары үшбұрыштың қабырғаларын құрайтын бұрыш *үшбұрыштың бұрышы* деп аталады.

Барлық бұрыштары сүйір болатын үшбұрыш *сүйір бұрышты үшбұрыш* деп аталады (7.1, а-сурет).

Үшбұрыштың бір бұрышы тік болса, онда ол *тікбұрышты үшбұрыш* деп аталады (7.1, ә-сурет).

Үшбұрыштың бір бұрышы доғал болса, онда ол *доғал бұрышты үшбұрыш* деп аталады (7.1, б-сурет).



7.1-сурет

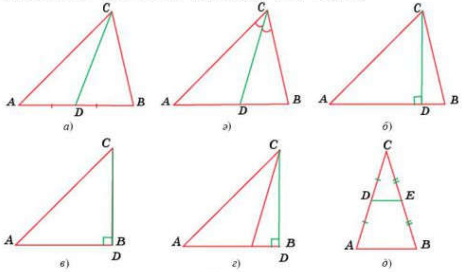
Үшбұрыштың төбелері, қабырғалары және бұрыштарынан басқа төмендегідей негізгі элементтері бар:

- үшбұрыштың *медианасы* — үшбұрыштың төбесі мен оған қарсы жатқан қабырғасының ортасын қосатын кесінді (7.2, а-сурет);
- үшбұрыштың *биссектрисасы* — үшбұрыш бұрышы биссектрисасының төбесі мен оған қарсы жатқан қабырғасын қосатын кесінді (7.2, ә-сурет);

• үшбұрыштың *биіктігі* — үшбұрыштың төбесі мен оған қарсы жатқан қабырғада немесе оның жалғасында жатқан нүктені қосатын және осы қабырғаға перпендикуляр болатын кесінді (7.2, *б*, *в*, *г*-сурет).

Үшбұрыштың барлық қабырғалары ұзындықтарының қосындысы оның *периметрі* деп аталады.

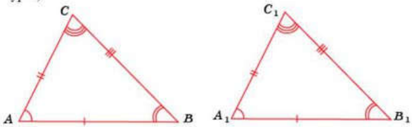
Үшбұрыштың екі қабырғасының ортасын қосатын кесінді *үшбұрыштың орта сызығы* деп аталады (7.2, *д*-сурет).



7.2-сурет

Егер бір үшбұрыштың қабырғалары және олардың арасындағы бұрыштар екінші үшбұрыштың сәйкесінше қабырғаларына және олардың арасындағы бұрыштарға тең болса, онда мұндай үшбұрыштар *тең* деп аталады.

Сонымен, ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштарында $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$; $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$ теңдіктері орындалса, онда бұл үшбұрыштар тең болады және былай белгіленеді: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ (7.3-сурет).



7.3-сурет

***ABC* және *DEF* тең үшбұрыштары үшін теңдіктерді өздерің жазыңдар.**

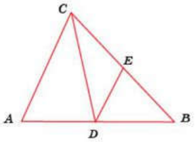
Теңдік ұғымын тек үшбұрыштар үшін ғана емес, басқа фигуралар үшін де анықтауға болады. Егер екі фигураның пішіндері мен өлшемдері бірдей болса, онда олар тең фигуралар болады. Фигуралардың теңдігінің анықтамасы 9-сыныпта қарастырылатын *қозғалыс* ұғымына негізделеді. Егер қозғалыс арқылы бір фигураны екінші фигураға көшіруге болса, онда бұл фигуралар *тең* деп аталады.

1. Қандай фигура үшбұрыш деп аталады?
2. Үшбұрыш қалай белгіленеді?
3. Үшбұрыштың медианасы дегеніміз не?
4. Үшбұрыштың биссектрисасы дегеніміз не?
5. Үшбұрыштың биіктігі дегеніміз не?
6. Үшбұрыштың периметрі дегеніміз не?
7. Қандай үшбұрыштар тең деп аталады?
8. Қандай үшбұрыш а) сүйір бұрышты; ә) тікбұрышты; б) доғал бұрышты деп аталады?

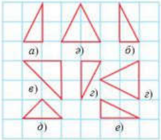
Жаттығулар

А

7.1. 7.4-суретте кескінделген барлық үшбұрыштарды атаңдар.
7.2. 7.5-суреттегі тең үшбұрыштарды көрсетіңдер.



7.4-сурет

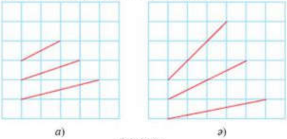


7.5-сурет

7.3. а) сүйір бұрышты және тікбұрышты үшбұрыштар; ә) сүйір бұрышты және доғал бұрышты үшбұрыштар; б) тікбұрышты және доғал бұрышты үшбұрыштар тең болуы мүмкін бе?
7.4. Үшбұрышта қанша а) медиана; ә) биссектриса; б) биіктік бар?
7.5. Үшбұрыштан тыс оның а) медианасы; ә) биссектрисасы; б) биіктігі өтуі мүмкін бе?

В

7.6. Торкөз қағазға қабырғалары 7.6-суретте кескінделген кесінділерге тең болатын үшбұрышты салыңдар.



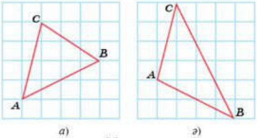
7.6-сурет

7.7. ABC және EFG үшбұрыштары тең және $AB = 5$ см, $BC = 6$ см, $AC = 7$ см. EFG үшбұрышының қабырғаларын табыңдар.

7.8. ABC және EFG үшбұрыштары тең және $\angle A = 40°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 80°$. EFG үшбұрышының бұрыштарын табыңдар.

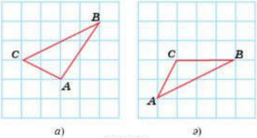
7.9. ABC, PQR және XYZ үшбұрыштары тең және $AB = 5$ см, $QR = 6$ см, $XZ = 7$ см. Әр үшбұрыштың қалған қабырғаларын табыңдар.

7.10. Торкөз қағазға ABC үшбұрышын салыңдар (7.7-сурет) және оның медианаларын кескіндеңдер.



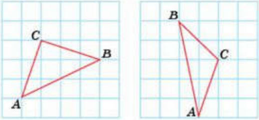
7.7-сурет

7.11. Торкөз қағазға ABC үшбұрышын салыңдар (7.8-сурет) және оның а) CD; ә) AD биссектрисасын кескіндеңдер.



7.8-сурет

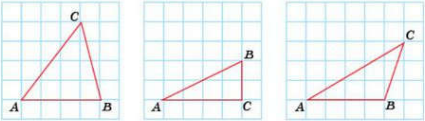
7.12. Торкөз қағазға ABC үшбұрышын салыңдар (7.9-сурет) және оның а) CD; ә) AD биіктігін кескіндеңдер.



а) ә)

7.9-сурет

7.13. 7.10-суретте көрсетілгендей, торкөз қағазға а) ABC сүйір бұрышты үшбұрышын; ә) ABC тікбұрышты үшбұрышын; б) ABC доғал бұрышты үшбұрышын салыңдар. C төбесінен медианасын, биссектрисасын және биіктігін жүргізіңдер.



а) ә) б)

7.10-сурет

7.14. ABC үшбұрышының AB қабырғасы 17 см-ге тең. AC қабырғасы AB қабырғасынан екі есе үлкен, BC қабырғасы AC қабырғасынан 10 см-ге кіші. ABC үшбұрышының периметрін табыңдар.

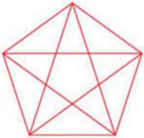
7.15. Үшбұрыштың периметрі 48 см және бір қабырғасы 18 см. Егер қалған екі қабырғасының айырымы 10 см болса, онда осы қабырғаларды табыңдар.

7.16. Үшбұрыштың периметрі 54 см. Егер қабырғаларының қатынасы 2:3:4 болса, онда үшбұрыштың қабырғаларын табыңдар.

7.17. Үшбұрыш пішіндес жер телімінің периметрі бойынша бір-бірінен 2 м қашықтықта қарақат түптерін отырғызу керек. Жер телімінің қабырғаларының ұзындықтары 16 м, 24 м, 20 м болса, барлығы қанша түп отырғызуға болады?

C

7.18. 7.11-суретте қанша үшбұрыш кескінделген?



7.11-сурет

7.19. Егер түзу үшбұрыштың қабырғаларының біреуін қиып өтсе және оның төбелері арқылы өтпесе, онда ол қалған екі қабырғасының біреуін қиып өтетінін дәлелдеңдер.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

7.20. Бір үшбұрыштың қабырғасы мен оған іргелес жатқан бұрышы екінші үшбұрыштың сәйкесінше қабырғасы мен оған іргелес жатқан бұрышына тең. Осы үшбұрыштар тең бола ма? Мысал келтіріңдер.

§ 8. ҮШБҰРЫШТАР ТЕҢДІГІНІҢ БІРІНШІ БЕЛГІСІ

Үшбұрыштардың теңдігін анықтап жазу үшін олардың барлық қабырғалары мен бұрыштары жұптарының теңдігін тексеру міндетті емес. Кейбіреуінің теңдігін тексерсек жеткілікті. Осыған сәйкес теоремалар *үшбұрыштар теңдігінің белгілері* деп аталады.

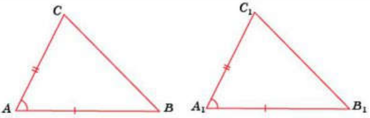
Сызғыш пен транспортирді пайдаланып, $AB = 5$ см, $AC = 4$ см, A бұрышы 60° болатын ABC үшбұрышын салыңдар. Осы үшбұрышты сыныптас көршің салған үшбұрышпен салыстырыңдар.

Қалай ойлайсыңдар, бұл үшбұрыштар тең бе?

Олар тең болады. Үшбұрыштар теңдігінің мына белгісі орынды.

Теорема (Үшбұрыштар теңдігінің бірінші белгісі). ***Егер бір үшбұрыштың екі қабырғасы және олардың арасындағы бұрыш екінші үшбұрыштың сәйкесінше екі қабырғасына және олардың арасындағы бұрышқа тең болса, онда бұл үшбұрыштар тең болады.***

Дәлелдеуі. ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштарында $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$ болсын (8.1-сурет).



8.1-сурет

C_1 төбесімен анықталған жартыжазықтықта A_1B_1 сәулесінен бастап ABC үшбұрышын саламыз. A төбесі A_1 төбесімен беттеседі. AB және A_1B_1 қабырғалары тең болғандықтан, B төбесі B_1 төбесімен беттеседі. A және A_1 бұрыштары тең болғандықтан, AC қабырғасы A_1C_1 қабырғасында жатады және осы қабырғалар тең болғандықтан, C төбесі C_1 төбесімен беттеседі. Сонымен, ABC үшбұрышы $A_1B_1C_1$ үшбұрышымен беттеседі, яғни осы үшбұрыштар тең болады ■.

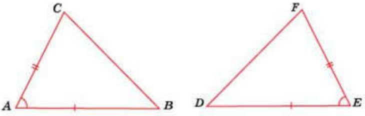
Үшбұрыштар теңдігінің бірінші белгісіне қатысты ABC және DEF үшбұрыштары элементтерінің теңдіктерін өздерің жазыңдар.

1. Қандай теоремалар үшбұрыштар теңдігінің белгілері деп аталады?
2. Үшбұрыштар теңдігінің бірінші белгісін тұжырымдаңдар.

Жаттығулар

A

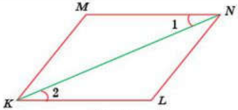
8.1. Егер $AB = DE$, $AC = EF$ және A бұрышы E бұрышына тең болса, онда 8.2-суретте кескінделген үшбұрыштар тең бола ма?



8.2-сурет

8.2. Егер $KL = NM$, $\angle 1 = \angle 2$ болса, онда 8.3-суреттегі KLN және NMK үшбұрыштары тең бола ма?

8.3. 8.3-суретте $KL = NM = 4$ см, 1-бұрыш 2-бұрышқа тең, $KM = 3$ см. LN ұзындығын табыңдар.

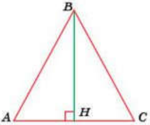


8.3-сурет

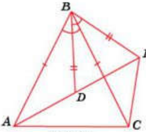
8.4. Егер $BH \perp AC$ және $AH = CH$ болса, онда 8.4-суреттегі ABH және CBH үшбұрыштары тең бола ма?

8.5. 8.4-суретте BH кесіндісі AC қабырғасына перпендикуляр және $AH = CH = 2$ см, $AB = 5$ см. BC қабырғасының ұзындығын табыңдар.

8.6. 8.5-суретте ABC және DBE тең бұрыштары мен тең кесінділер көрсетілген. Тең үшбұрыштарды жазыңдар.



8.4-сурет



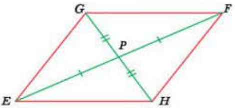
8.5-сурет

8.7. 8.6-суретте P нүктесі — EF және GH кесінділерінің ортасы. Осы суретте тең үшбұрыштар бар ма?

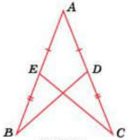
B

8.8. 8.7-суретте $AB = AC$, $AE = AD$. $BD = CE$ екенін дәлелдеңдер.

8.9. 8.7-суретте $AE = AD = 2$ см, $BE = CD = 3$ см, $BD = 4$ см. CE ұзындығын табыңдар.



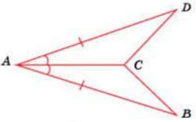
8.6-сурет



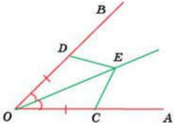
8.7-сурет

8.10. 8.8-суретте $AB = AD$ және BAC бұрышы DAC бұрышына тең. $BC = DC$ екенін дәлелдеңдер.

8.11. AOB бұрышының қабырғаларынан OC және OD тең кесінділері алынған (8.9-сурет). Осы бұрыштың биссектрисасынан алынған E нүктесі C және D нүктелерімен қосылған. $EC = ED$ екенін дәлелдеңдер.



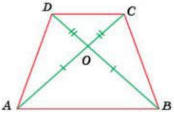
8.8-сурет



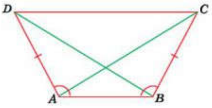
8.9-сурет

8.12. 8.10-суретте $AO = OB$ және $DO = OC$. AD және BC кесінділерінің теңдігін дәлелдеңдер.

8.13. 8.11-суретте A бұрышы B бұрышына тең және $AD = BC$. $AC = BD$ екенін дәлелдеңдер.



8.10-сурет



8.11-сурет

8.14. B ауылы A ауылынан оңтүстікке қарай 15 км, ал C ауылы B ауылынан солтүстік-шығысқа қарай 7 км қашықтықта болатындай A, B, C ауылдары орналасқан. Тағы басқа N ауылы M ауылынан батысқа қарай 15 км, K ауылы M ауылынан солтүстік-батысқа қарай 7 км қашықтықта болатындай M, N, K ауылдары орналасқан. A және C ауылдарымен N және K ауылдарының арақашықтықтарын салыстырыңдар.

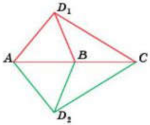
C

8.15. Тең үшбұрыштардың сәйкесінше медианалары тең болатынын дәлелдеңдер.

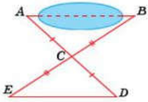
8.16. 8.12-суретте A, B, C нүктелері бір түзудің бойында жатыр. D_1 және D_2 нүктелері осы түзудің әртүрлі жақтарында орналасқан.

Егер ABD_1 және ABD_2 үшбұрыштары тең болса, онда BCD_1 және BCD_2 үшбұрыштары да тең болатынын дәлелдеңдер.

8.17. Жергілікті жерде араларында түзу бойымен өтуге болмайтын A және B нүктелерінің арақашықтығын өлшеу үшін (8.13-сурет) AC және BC қашықтықтарын өлшеуге болатындай C нүктесі алынады және $CD = AC$, $CE = BC$ кесінділері салынады. Сонда E және D нүктелерінің арақашықтығы ізделінді арақашықтыққа тең болады. Шешімді түсіндіріңдер.



8.12-сурет



8.13-сурет

8.18. Егер бір үшбұрыштың екі қабырғасы мен бір бұрышы екінші үшбұрыштың сәйкесінше екі қабырғасы мен бір бұрышына тең болса, онда бұл үшбұрыштардың тең болатыны дұрыс па?

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

8.19. Бір үшбұрыштың екі бұрышы екінші үшбұрыштың сәйкесінше екі бұрышына тең. Осы үшбұрыштар тең бола ма? Мысал келтіріңдер.

§ 9. ҮШБҰРЫШТАР ТЕҢДІГІНІҢ ЕКІНШІ БЕЛГІСІ

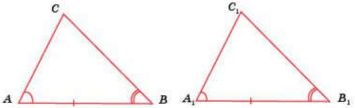
Сызғыш пен транспортирді пайдаланып, $AB = 5$ см, A бұрышы $60°$, B бұрышы $45°$ болатын ABC үшбұрышын салыңдар. Осы үшбұрышты сыныптас көршің салған үшбұрышпен салыстырыңдар.

Қалай ойлайсыңдар, бұл үшбұрыштар тең бе?

Олар тең болады. Үшбұрыштар теңдігінің келесі белгісі орынды.

Теорема (Үшбұрыштар теңдігінің екінші белгісі). ***Егер бір үшбұрыштың бір қабырғасы мен оған іргелес жатқан екі бұрышы екінші үшбұрыштың сәйкесінше қабырғасына және оған іргелес жатқан бұрыштарына тең болса, онда бұл үшбұрыштар тең болады.***

Дәлелдеуі. ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштарында $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ болсын (9.1-сурет).



9.1-сурет

C_1 төбесімен анықталған жартыжазықтықта A_1B_1 сәулесінен бастап ABC үшбұрышын саламыз. A төбесі A_1 төбесімен беттеседі. AB және A_1B_1 қабырғалары тең болғандықтан, B төбесі B_1 төбесімен беттеседі. A және A_1 бұрыштары тең болғандықтан, AC қабырғасы A_1C_1 қабырғасында жатады және B және B_1 бұрыштары тең болғандықтан, BC қабырғасы B_1C_1 қабырғасында жатады. Сонымен, ABC үшбұрышы $A_1B_1C_1$ үшбұрышымен беттеседі. Демек, осы үшбұрыштар тең ■.

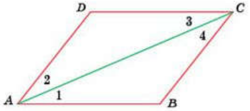
Үшбұрыштар теңдігінің екінші белгісіне қатысты ABC және DEF үшбұрыштары элементтерінің теңдігін өздерің жазыңдар.

Үшбұрыштар теңдігінің екінші белгісін тұжырымдаңдар.

Жаттығулар

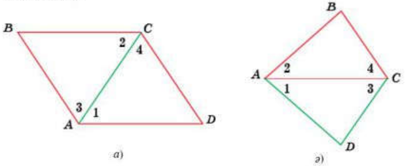
A

9.1. 9.2-суретте $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$. CDA және ABC үшбұрыштары тең бе?



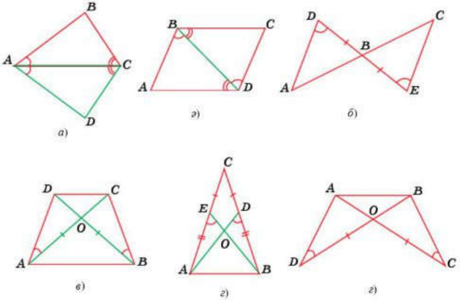
9.2-сурет

9.2. 9.3 а, ә-суреттерде $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$. Суреттен тең кесінділерді көрсетіңдер.



9.3-сурет

9.3. 9.4-суретте тең кесінділер және тең бұрыштар көрсетілген. Осылардан тең үшбұрыштарды көрсетіңдер.

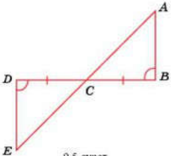


9.4-сурет

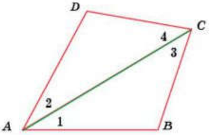
B

9.4. 9.5-суретте $BC = CD$, $\angle B = \angle D$, $AC = CE$ екенін дәлелдеңдер.

9.5. 9.6-суретте $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, $AB = AD$ екенін дәлелдеңдер.



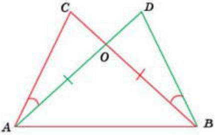
9.5-сурет



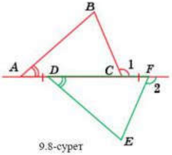
9.6-сурет

9.6. 9.7-суретте $\angle DBC = \angle DAC$ және $BO = AO$. C бұрышы D бұрышына тең болатынын және $AC = BD$ екенін дәлелдеңдер.

9.7. 9.8-суретте $AD = CF$, $\angle BAC = \angle EDF$, $\angle 1 = \angle 2$ болатындай фигура кескінделген. ABC және DEF үшбұрыштары тең болатынын дәлелдеңдер.



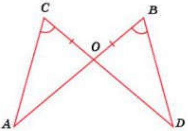
9.7-сурет



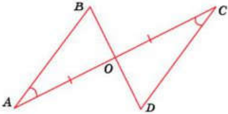
9.8-сурет

9.8. 9.9-суретте AB және CD кесінділері O нүктесінде қиылысады. $OB = OC$ және $\angle B = \angle C$. AOC және DOB үшбұрыштарының теңдігін дәлелдеңдер.

9.9. 9.10-суретте AC және BD кесінділері O нүктесінде қиылысады. $AO = OC$ және $\angle A = \angle C$. AOB және COD үшбұрыштарының теңдігін дәлелдеңдер.

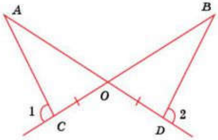


9.9-сурет



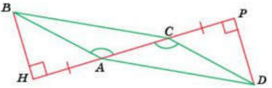
9.10-сурет

9.10. 9.11-суретте AD және BC сәулелері O нүктесінде қиылысады. $\angle 1 = \angle 2$ және $OC = OD$. A бұрышы B бұрышына тең болатынын дәлелдеңдер.



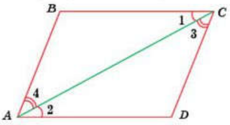
9.11-сурет

9.11. 9.12-суретте BH пен AC перпендикуляр, DP мен AC перпендикуляр, $AH = CP$ және $\angle BAC = \angle ACD$. Суреттен тең үшбұрыштарды табыңдар.



9.12-сурет

9.12. 9.13-суретте $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$. ABC және CDA үшбұрыштары теңдігін дәлелдеңдер. Егер $AD = 19$ см, $CD = 11$ см болса, онда AB және BC қабырғаларын табыңдар.

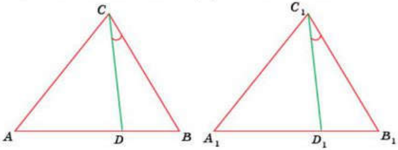


9.13-сурет

C

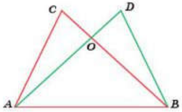
9.13. Тең үшбұрыштардың сәйкесінше биссектрисалары тең болатынын дәлелдеңдер.

9.14. 9.14-суретте ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштары тең. CD және C_1D_1 кесінділері сәйкесінше CB және C_1B_1 қабырғаларымен тең бұрыштар құрайды. $AD = A_1D_1$ екенін дәлелдеңдер.



9.14-сурет

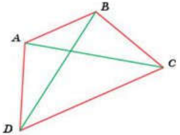
9.15. 9.15-суретте $\angle DAB = \angle CBA$, $\angle CAB = \angle DBA$, $CA = 13$ см. DB кесіндісін табыңдар.



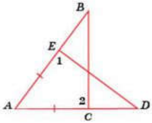
9.15-сурет

9.16. $ABCD$ төртбұрышында $\angle DAB = \angle CBA$, AC және BD диагональдары AB қабырғасымен тең бұрыштар жасайды (9.16-сурет), $AD = 3$ см, $AC = 4$ см. BD кесіндісін табыңдар.

9.17. 9.17-суретте $AE = AC$, $\angle 1 = \angle 2$, A бұрышы $50°$, B бұрышы $40°$. D бұрышын табыңдар.

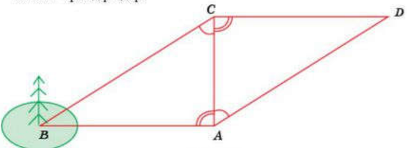


9.16-сурет



9.17-сурет

9.18. 9.18-сурет бойынша A нүктесінен алыстағы B нүктесіне (мысалы, аралдағы ағашқа) дейінгі қашықтықты қалай табуға болатынын түсіндіріңдер.



9.18-сурет

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

9.19. Екі қабырғасы тең болатын үшбұрышты кескіндеңдер. Транспортирдің көмегімен оның үшінші қабырғасына іргелес жатқан бұрыштарды өлшеңдер. Олар тең бола ма?

§ 10. ТЕҢБҮЙІРЛІ ҮШБҰРЫШТАР

Қабырғаларының арасындағы қатынастарға байланысты үшбұрыштар: а) әртүрлі қабырғалы; ә) теңбүйірлі; б) теңқабырғалы болып бөлінеді.

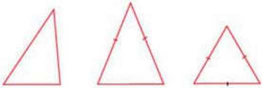
Егер үшбұрыштың қабырғалары өзара тең болмаса, онда бұл үшбұрыш *әртүрлі қабырғалы* деп аталады (10.1, а-сурет).

Егер үшбұрыштың екі қабырғасы тең болса, онда бұл үшбұрыш *теңбүйірлі* деп аталады (10.1, ә-сурет).

Осы тең болатын қабырғалар — *үшбұрыштың бүйір қабырғалары* деп, ал үшінші қабырғасы *табаны* деп аталады.

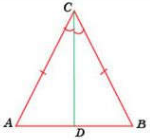
Егер үшбұрыштың барлық қабырғалары тең болса, онда бұл үшбұрыш *тең қабырғалы* деп аталады (10.1, б-сурет).

Егер үшбұрыштың барлық қабырғалары және барлық бұрыштары тең болса, онда бұл үшбұрыш *дұрыс* деп аталады (10.1, б-сурет).

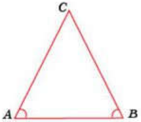


а) ә) б)

10.1-сурет



10.2-сурет



10.3-сурет

Теорема. ***Теңбүйірлі үшбұрыштың табанындағы бұрыштар тең болады.***

Дәлелдеуі. ABC — теңбүйірлі үшбұрыш болсын ($AC = BC$). CD биссектрисасын жүргіземіз (10.2-сурет). ADC және BDC үшбұрыштары үшбұрыштар теңдігінің бірінші белгісі бойынша тең болады ($AC = BC$, CD — ортақ қабырға, $\angle ACD = \angle BCD$). Ендеше, $\angle A = \angle B$.

Осы теоремадан теңқабырғалы үшбұрыштың барлық бұрыштары тең болатыны шығады. Демек, теңқабырғалы үшбұрыш дұрыс үшбұрыш болады.

Сызғыш пен транспортирді пайдаланып, $AB = 5$ см, A және B бұрыштары $70°$ болатын ABC үшбұрышын салыңдар.

Қалай ойлайсыңдар, осы үшбұрыш теңбүйірлі бола ма?

ABC теңбүйірлі үшбұрыш болады. Теңбүйірлі үшбұрыштың мына белгісі орынды.

Теорема (теңбүйірлі үшбұрыштың белгісі). ***Егер үшбұрыштың екі бұрышы тең болса, онда ол теңбүйірлі үшбұрыш болады.***

Дәлелдеуі. ABC үшбұрышында $\angle A = \angle B$ болсын (10.3-сурет). Үшбұрыштар теңдігінің екінші белгісін ABC және BAC үшбұрыштарына қолданамыз. Осыдан $AB = BA$, $\angle A = \angle B$, $\angle B = \angle A$. Демек, $AC = BC$, яғни ABC — теңбүйірлі үшбұрыш.

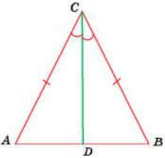
Теңбүйірлі үшбұрыштың белгісіне қатысты DEF үшбұрышы элементтерінің теңдігін өздерің жазыңдар.

$AB = 4$ см болатын ABC теңбүйірлі үшбұрышын ($AC = BC$) салыңдар. C төбесінен биссектриса, медиана және биіктігін жүргізіңдер.

Олардың барлығының беттесетіні дұрыс па?

Теорема. ***Теңбүйірлі үшбұрыштың табанына жүргізілген биссектрисасы оның биіктігі де, медианасы да болады.***

Дәлелдеуі. ABC — теңбүйірлі үшбұрыш, $AC = BC$, CD — биссектриса болсын (10.4-сурет).



10.4-сурет

Онда үшбұрыштар теңдігінің бірінші белгісі бойынша ACD және BCD үшбұрыштары тең болады ($AC = BC$, CD — ортақ қабырға, $\angle ACD = \angle BCD$). Демек, $AD = BD$, $\angle ADC = \angle BDC$ теңдіктері орынды. Бірінші теңдік CD кесіндісі берілген үшбұрыштың медианасы болатынын, екінші теңдік CD кесіндісі берілген үшбұрыштың биіктігі болатынын білдіреді ◻.

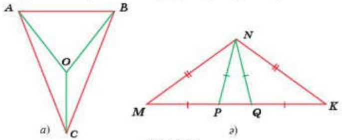
Сонымен, ABC теңбүйірлі үшбұрышында CD кесіндісі — биссектриса, медиана және биіктік, сонымен бірге табанының ортасы арқылы жүргізілген перпендикуляр болып табылады. Осы қасиеттердің әрқайсысы CD кесіндісінің орнын анықтайтын болғандықтан, олардың біреуі орындалса, қалған қасиеттері де орындалады. Мысалы, теңбүйірлі үшбұрыштың табанына түсірілген биіктік табанына қарсы жатқан бұрыштың биссектрисасы, табанына жүргізілген медианасы, табанының ортасы арқылы жүргізілген перпендикуляр болады.

1. Қабырғаларының арасындағы қатынастар арқылы анықталатын үшбұрыштың түрлерін атаңдар.
2. Қандай үшбұрыш а) әртүрлі қабырғалы; ә) теңбүйірлі; б) теңқабырғалы деп аталады?
3. Теңбүйірлі үшбұрыштың қандай қабырғалары бүйір, ал қайсысы табаны деп аталады?
4. Теңбүйірлі үшбұрыштың табанындағы бұрыштар туралы не айтуға болады?
5. Теңбүйірлі үшбұрыштың белгісін тұжырымдаңдар.
6. Теңбүйірлі үшбұрыштың табанына жүргізілген биссектриса не болады?

Жаттығулар

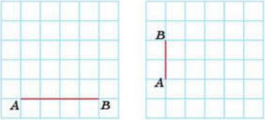
А

10.1. 10.5-суреттен барлық теңбүйірлі үшбұрыштарды атаңдар.



10.5-сурет

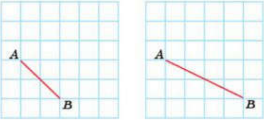
10.2. Табаны AB кесіндісі болатын, C төбесі торкөздердің бір түйінінде орналасқан теңбүйірлі үшбұрышты кескіндеңдер (10.6-сурет).



а) ә)

10.6-сурет

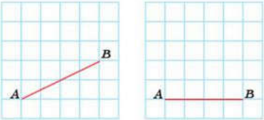
10.3. Табаны AB кесіндісі болатын, C төбесі торкөздердің бір түйінінде орналасқан теңбүйірлі үшбұрышты кескіндеңдер (10.7-сурет).



а) ә)

10.7-сурет

10.4. Бір қабырғасы AB кесіндісі болатын, C төбесі торкөздердің бір түйінінде орналасқан теңбүйірлі тікбұрышты үшбұрышты кескіндеңдер (10.8-сурет).

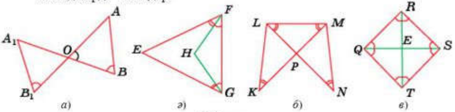


а) ә)

10.8-сурет

В

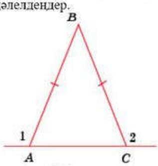
10.5. 10.9-суреттің әрқайсысында барлығы қанша теңбүйірлі үшбұрыштар кескінделген? Суреттердің әрқайсысындағы тең кесінділерді атаңдар.



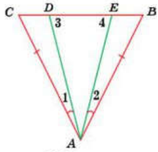
10.9-сурет

10.6. 10.10-суретте $AB = BC$. $\angle 1 = \angle 2$ болатынын дәлелдеңдер.

10.7. 10.11-суретте $AB = AC$ және $\angle 1 = \angle 2$. $\angle 3 = \angle 4$ болатынын дәлелдеңдер.



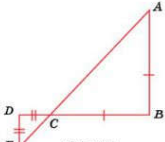
10.10-сурет



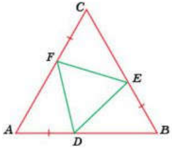
10.11-сурет

10.8. 10.12-суретте $AB = BC$, $CD = DE$. $\angle A = \angle E$ болатынын дәлелдеңдер.

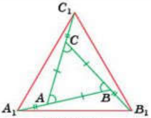
10.9. ABC дұрыс үшбұрышының қабырғаларынан тең AD, BE және CF кесінділері алынған. D, E және F нүктелері кесінділермен қосылған (10.13-сурет). DEF дұрыс үшбұрыш болатынын дәлелдеңдер.



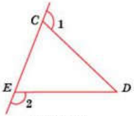
10.12-сурет



10.13-сурет



10.14-сурет



10.15-сурет

10.10. ABC үшбұрышы қабырғаларының жалғасынан тең AA_1, BB_1 және CC_1 кесінділері алынған (10.14-сурет). $A_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрыш болатынын дәлелдеңдер.

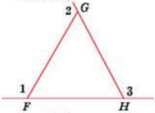
10.11. Теңбүйірлі үшбұрыштың периметрі 15,6 м. Егер оның а) табаны бүйір қабырғасынан 3 м кіші; ә) табаны бүйір қабырғасынан 3 м үлкен болса, үшбұрыштың қабырғаларын табыңдар.

10.12. Теңбүйірлі үшбұрыштың табаны мен бүйір қабырғасының қатынасы 3:8, периметрі 38 см, үшбұрыштың қабырғаларын табыңдар.

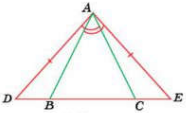
10.13. CDE үшбұрышында $\angle 1 = \angle 2$ (10.15-сурет). Осы үшбұрыш теңбүйірлі деген тұжырым дұрыс па?

10.14. FGH үшбұрышының 1, 2 және 3 бұрыштары өзара тең (10.16-сурет). Осы үшбұрыш а) теңбүйірлі; ә) теңқабырғалы; б) дұрыс үшбұрыш деген тұжырым дұрыс па?

10.15. 10.17-суретте $AD = AE$, $\angle CAD = \angle BAE$. $BD = CE$ екенін дәлелдеңдер.



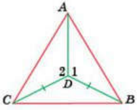
10.16-сурет



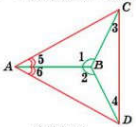
10.17-сурет

10.16. 10.18-суретте $CD = BD$, $\angle 1 = \angle 2$. ACB бұрышы ABC бұрышына тең екенін дәлелдеңдер.

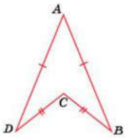
10.17. 10.19-суретте $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 5 = \angle 6$. $\angle 3 = \angle 4$ болатынын дәлелдеңдер.



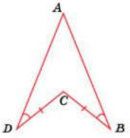
10.18-сурет



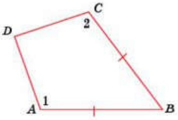
10.19-сурет



10.20-сурет



10.21-сурет



10.22-сурет

10.18. 10.20-суретте $AB = AD$ және $DC = BC$. ABC және ADC бұрыштарының теңдігін дәлелдеңдер.

10.19. 10.21-суретте $DC = BC$, B және D бұрыштары тең. $AB = AD$ екенін дәлелдеңдер.

10.20. 10.22-суретте $AB = BC$, $\angle 1 = \angle 2$. $AD = CD$ екенін дәлелдеңдер.

C

10.21. Егер үшбұрыштың биссектрисасы оның биіктігі де болса, онда ол теңбүйірлі үшбұрыш болатынын дәлелдеңдер.

10.22. Теңбүйірлі үшбұрыштың бүйір қабырғаларына жүргізілген медианалары өзара тең болатынын дәлелдеңдер.

10.23. Теңбүйірлі үшбұрыштың бүйір қабырғаларына жүргізілген биссектрисалары өзара тең болатынын дәлелдеңдер.

10.24. Табаны AC болатын ABC теңбүйірлі үшбұрышында BD медианасы жүргізілген. Егер ABC үшбұрышының периметрі 50 м, ал ABD үшбұрышының периметрі 40 м болса, онда BD медианасының ұзындығын табыңдар.

Хабарлама дайындаңдар

10.25. Үшбұрыш — ертеден қалыптасқан алғашқы геометриялық фигуралардың бірі.
Ахмес папирусындағы теңбүйірлі үшбұрыштар.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

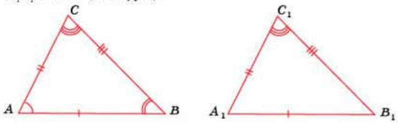
10.26. Бір үшбұрыштың екі қабырғасы екінші үшбұрыштың сәйкесінше екі қабырғасына тең. Осы үшбұрыштар тең бола ма? Мысал келтіріңдер.

§ 11. ҮШБҰРЫШТАР ТЕҢДІГІНІҢ ҮШІНШІ БЕЛГІСІ

Үшбұрыштар теңдігінің тағы бір белгісін қарастырайық.

Теорема (Үшбұрыштар теңдігінің үшінші белгісі). ***Егер бір үшбұрыштың үш қабырғасы екінші үшбұрыштың сәйкесінше үш қабырғасына тең болса, онда бұл үшбұрыштар тең болады.***

Дәлелдеуі. ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштарында $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$ болсын (11.1-сурет).



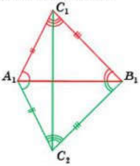
11.1-сурет

Осы үшбұрыштардың тең болатынын көрсетейік. Ол үшін A_1B_1 сәулесінен бастап C төбесі A_1B_1 түзуіне қатысты C_1 нүктесінің екінші жағында жататын C_2 нүктесіне көшетіндей ABC үшбұрышын саламыз (11.2-сурет).

Сонда $A_1B_1C_2$ және ABC үшбұрыштары тең болады. C_1C_2 сәулесі $A_1C_1B_1$ бұрышының ішінде немесе сыртында жатуы, бір қабырғасымен беттесуі мүмкін. Бірінші жағдайды қарастырайық.

C_1C_2 сәулесі $A_1C_1B_1$ бұрышының бір қабырғасымен беттесетін немесе бұрыштың сыртында жататын жағдайларын өздерің қарастырыңдар.

A_1C_1 және A_1C_2 қабырғаларының теңдігінен $C_1A_1C_2$ үшбұрышының теңбүйірлі болатыны шығады, демек $\angle A_1C_1C_2 = \angle A_1C_2C_1$. Дәл осылай B_1C_1 және B_1C_2 қабырғаларының теңдігінен $C_1B_1C_2$ үшбұрышының теңбүйірлі болатыны шығады, демек, $\angle B_1C_1C_2 = \angle B_1C_2C_1$. Тең бұрыштарды қосып, C_1 бұрышының C_2 бұрышына тең болатынын аламыз. Сонымен, $A_1B_1C_1$ және $A_1B_1C_2$ үшбұрыштары тең (үшбұрыштар теңдігінің бірінші белгісі бойынша). Ендеше ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштары да тең ▢.



11.2-сурет

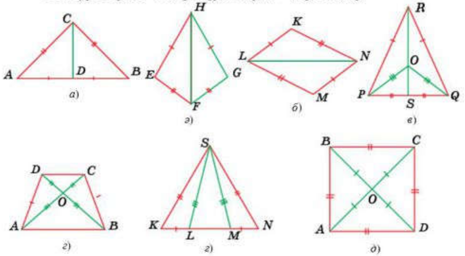
Үшбұрыштар теңдігінің үшінші белгісіне қатысты ABC және DEF үшбұрыштары элементтерінің теңдігін өздерің жазыңдар.

Үшбұрыштар теңдігінің үшінші белгісін тұжырымдаңдар.

Жаттығулар

A

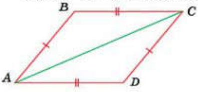
11.1. 11.3-суреттерде тең кесінділер және тең бұрыштар белгіленген. Осы суреттерден тең үшбұрыштарды көрсетіңдер.



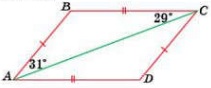
11.3-сурет

11.2. 11.4-суретте $AB = DC$ және $BC = AD$. B және D бұрыштарының теңдігін дәлелдеңдер.

11.3. 11.5-суретте $AB = DC$ және $BC = AD$, BAC бұрышы $31°$, BCA бұрышы $29°$. ACD бұрышын табыңдар.

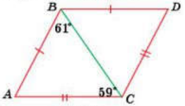


11.4-сурет



11.5-сурет

11.4. 11.6-суретте $AB = BD$ және $AC = CD$, ABC бұрышы $61°$, ACB бұрышы $59°$. BCD бұрышын табыңдар.

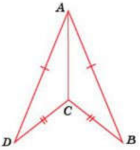


11.6-сурет

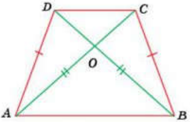
В

11.5. 11.7-суретте $AB = AD$ және $DC = BC$. AC кесіндісі BAD бұрышының биссектрисасы болатынын дәлелдеңдер.

11.6. 11.8-суретте $AD = BC$ және $AC = BD$. BAD және ABC бұрыштары тең болатынын дәлелдеңдер.



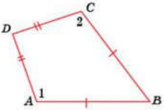
11.7-сурет



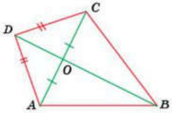
11.8-сурет

11.7. 11.9-суретте $AB = BC$, $AD = CD$. 1 және 2 бұрыштары тең болатынын дәлелдеңдер.

11.8. 11.10-суретте $AO = OC$, $AD = CD$. $AB = BC$ екенін дәлелдеңдер.



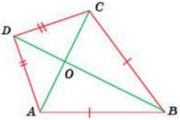
11.9-сурет



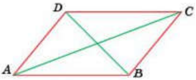
11.10-сурет

11.9. 11.11-суретте $AB = BC$, $AD = CD$. $AO = OC$ екенін дәлелдеңдер.

11.10. 11.12-суретте ABC және CDA үшбұрыштары тең. B және D нүктелері AC түзуінің әртүрлі жағында жатыр. BCD және DAB үшбұрыштарының теңдігін дәлелдеңдер.



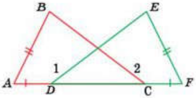
11.11-сурет



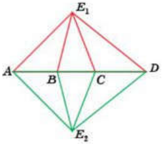
11.12-сурет

11.11. 11.13-суретте $AD = CF$, $AB = FE$, $BC = ED$. 1 және 2 бұрыштары тең болатынын дәлелдеңдер.

11.12. A, B, C, D нүктелері бір түзудің бойында жатыр. Егер ABE_1 және ABE_2 үшбұрыштары тең болса (11.14-сурет), онда CDE_1 және CDE_2 үшбұрыштары да тең болатынын дәлелдеңдер.

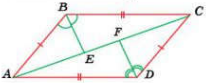


11.13-сурет



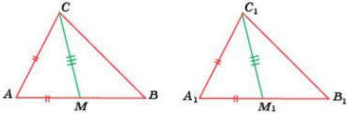
11.14-сурет

11.13. 11.15-суретте $AB = CD$, $AD = BC$, BE — ABC бұрышының биссектрисасы, ал DF — ADC бұрышының биссектрисасы. $\Delta ABE = \Delta CDF$ екенін дәлелдеңдер.



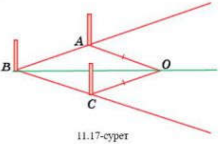
11.15-сурет

11.14. Егер $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, CM және C_1M_1 медианалары тең болса, онда ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштары тең болатынын дәлелдеңдер (11.16-сурет).



11.16-сурет

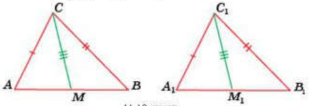
11.15. Жергілікті жерде бұрышты қақ бөлу қажет (11.17-суретте ABC бұрышын). Ол үшін оның қабырғаларынан өлшеу құралының көмегімен өзара тең BA және BC кесінділері салынды. Содан кейін ортасы белгіленген (O нүктесі) таспа алып, оның шеттері A және C нүктелерінде бекітілді. Таспаның ортасынан тартып, жергілікті жерден O нүктесінің орны белгіленді. Сонда BO сәулесі ABC бұрышын қақ бөледі. Салудың дұрыстығын негіздеңдер.



11.17-сурет

C

11.16. ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштарында $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$, CM медианасы C_1M_1 медианасына тең болса (11.18-сурет), онда ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштары тең болатынын дәлелдеңдер.



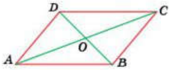
11.18-сурет

11.17. 11.19-суретте $AB = CD$ және $AD = BC$. BAC және DCA бұрыштары тең болатынын дәлелдеңдер.

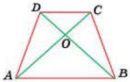
11.18. 11.19-суретте $AB = CD$, BAC және DCA бұрыштары тең. DAC және BCA бұрыштары тең болатынын дәлелдеңдер.

11.19. 11.19-суретте $\angle ABD = \angle CDB$, $\angle ADB = \angle CBD$. BAD және DCB бұрыштары тең болатынын дәлелдеңдер.

11.20. 11.20-суретте $AD = BC$ және $AC = BD$. ADC және BCD бұрыштары тең болатынын дәлелдеңдер.



11.19-сурет



11.20-сурет

11.21. 11.20-суретте $AO = BO$ және $CO = DO$. DAC және CBD бұрыштары тең болатынын дәлелдеңдер.

11.22. 11.20-суретте $\angle BAC = \angle ABD$, $\angle BAD = \angle ABC$. $AD = BC$ екенін дәлелдеңдер.

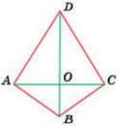
11.23. 11.21-суретте $AB = CB$ және $AD = CD$. BAD және BCD бұрыштары тең болатынын дәлелдеңдер.

11.24. 11.21-суретте $AD = CD$, ADB және CDB бұрыштары тең. $AB = BC$ теңдігін дәлелдеңдер.

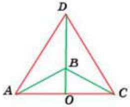
11.25. 11.21-суретте ADB және CDB бұрыштары тең, AC мен BD өзара перпендикуляр. $AD = CD$ екенін дәлелдеңдер.

11.26. 11.22-суретте $AB = CB$ және $AD = CD$. ADB және CDB бұрыштары тең болатынын дәлелдеңдер.

11.27. 11.22-суретте $AD = CD$, ADB және CDB бұрыштары тең. BAD және BCD бұрыштары тең болатынын дәлелдеңдер.



11.21-сурет



11.22-сурет

11.28. 11.22-суретте ADB және CDB бұрыштары тең, AC мен BD өзара перпендикуляр. $AD = CD$ екенін дәлелдеңдер.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

11.29. ABC үшбұрышында A бұрышы B бұрышынан үлкен. AC немесе BC қабырғаларының қайсысы үлкен?

§ 12. ҮШБҰРЫШТЫҢ ҚАБЫРҒАЛАРЫ МЕН БҰРЫШТАРЫ АРАСЫНДАҒЫ ҚАТЫНАСТАР

ABC үшбұрышының бір қабырғасының, мысалы, AC қабырғасының жалғасын және C бұрышымен сыбайлас BCD бұрышын қарастырайық (12.1-сурет).

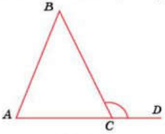
Мұндай бұрыш үшбұрыштың *сыртқы бұрышы* деп, ал үшбұрыштың өзінің бұрыштарын оның *ішкі бұрыштары* деп атайды.

Үшбұрыштың әрбір төбесіндегі қабырғаларын жалғастыру арқылы оның екі сыртқы бұрышты салуға болады. Бұл бұрыштар вертикаль болғандықтан, өзара тең болады.

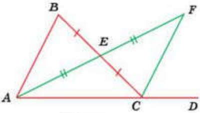
Үшбұрыштың ішкі және сыртқы бұрыштарының арасындағы қатынасты орнатайық.

Теорема. *Үшбұрыштың сыртқы бұрышы онымен сыбайлас емес әрбір ішкі бұрышынан үлкен болады.*

Дәлелдеуі. ABC — кез келген үшбұрыш болсын. BCD сыртқы бұрышын қарастырайық және оның ABC ішкі бұрышынан үлкен болатынын дәлелдейік (12.2-сурет).



12.1-сурет



12.2-сурет

Ол үшін A төбесі және BC қабырғасының ортасы болатын E нүктесі арқылы түзу жүргізіп, осы түзуден AE кесіндісіне тең EF кесіндісін аламыз. Үшбұрыштар теңдігінің бірінші белгісі бойынша ABE және FCE үшбұрыштары тең болады ($BE = CE$, $AE = FE$, $\angle AEB = \angle FEC$). Демек, $\angle ABC = \angle BCF$. Бірақ F төбесі BCD бұрышының ішінде жатыр. Сондықтан BCF бұрышы BCD бұрышының бір бөлігін ғана құрайды. Ендеше, $\angle BCD > \angle ABC$ ▢.

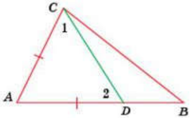
$\angle BCD > \angle ABC$ дәлелдеуіне ұқсас $\angle BCD > \angle BAC$ екенін өздерің дәлелдеңдер.

Үшбұрыштың қабырғалары мен бұрыштарының арасындағы қатынасты орнатайық.

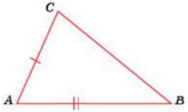
Теорема. *Кез келген үшбұрыштың үлкен қабырғасына қарсы үлкен бұрышы жатады.*

Дәлелдеуі. ABC үшбұрышында AB қабырғасы AC қабырғасынан үлкен болсын. C бұрышы B бұрышынан үлкен болатынын дәлелдейік. Ол үшін AB сәулесінің бойынан AC қабырғасына тең AD кесіндісін саламыз (12.3-сурет).

ACD — табаны CD болатын теңбүйірлі үшбұрыш. Демек, $\angle 1 = \angle 2$. 1 бұрышы C бұрышының бөлігін құрайды. Сондықтан, $\angle 1 < \angle C$. Басқа жағынан алғанда, 2 бұрышы BCD үшбұрышының сыртқы бұрышы болады. Сондықтан



12.3-сурет



12.4-сурет

$\angle 2 > \angle B$. Ендеше, $\angle C > \angle 1 = \angle 2 > \angle B$, яғни $\angle C > \angle B$ ■.

Теорема. ***Кез келген үшбұрыштың кез келген үлкен бұрышына қарсы үлкен қабырға жатады.***

Дәлелдеуі. ABC үшбұрышында C бұрышы B бұрышынан үлкен болсын (12.4-сурет). AB және AC қабырғалары тең болмайды, себебі бұл жағдайда ABC үшбұрышы табаны BC болатын теңбүйірлі үшбұрыш болып, C бұрышы B бұрышына тең болар еді. AB қабырғасы AC қабырғасынан кіші болмайды, себебі бұл жағдайда дәлелдегеніміз бойынша C бұрышы B бұрышынан кіші болар еді. AB қабырғасы AC қабырғасынан үлкен болатын жағдай ғана қалды ■.

?
1. Үшбұрыштың сыртқы бұрышы деп қандай бұрышты айтады?
2. Үшбұрыштың әрбір төбесінде неше сыртқы бұрышы болады?
3. Үшбұрыштың сыртқы бұрышы үшін қандай теңсіздік орындалады?
4. Үшбұрыштың үлкен қабырғасына қарсы қандай бұрыш жатады?
5. Үшбұрыштың үлкен бұрышына қарсы қандай қабырға жатады?

Жаттығулар

А

12.1. Үшбұрыштың сыртқы бұрышы оның а) бір ішкі бұрышынан; ә) екі ішкі бұрыштарынан; б) үш ішкі бұрыштарынан үлкен бола ма? Мысалдар келтіріңдер.

12.2. Үшбұрыштың сыртқы бұрышы оның а) бір ішкі бұрышына тең; ә) бір ішкі бұрышынан кіші бола ма?

12.3. Егер үшбұрыштың бір сыртқы бұрышы сүйір болса, онда басқа сыртқы бұрыштары қандай болады?

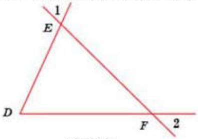
12.4. Үшбұрыштың екі а) сүйір; ә) доғал; б) тік сыртқы бұрыштары бола ма?

12.5. AB — ABC үшбұрышының ең үлкен қабырғасы. C бұрышы қандай бұрыш?

12.6. Егер $AB = 7$ см, $BC = 10$ см және $AC = 5$ см болса, ABC үшбұрышының бұрыштарын салыстырыңдар.

12.7. ABC үшбұрышында $BC > AC > AB$. Мына бұрыштардың қайсысы үлкен: а) B немесе A; ә) C немесе A; б) B немесе C?

12.8. 12.5-суретте $DE < DF$. 1 және 2 бұрыштарын салыстырыңдар.



12.5-сурет

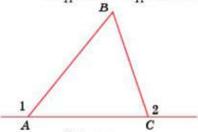
12.9. а) $\angle A > \angle B > \angle C$; ә) $\angle A > \angle B = \angle C$ болатын ABC үшбұрышының қабырғаларын салыстырыңдар.

B

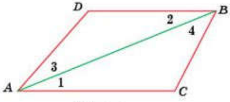
12.10. Үшбұрыштың тек бір ғана а) тік бұрышы; ә) доғал бұрышы болатынын дәлелдеңдер.

12.11. 12.6-суретте $AB > BC$. 1 бұрышы 2 бұрышынан үлкен болатынын дәлелдеңдер.

12.12. 12.7-суретте 1 бұрышы 2 бұрышына тең және $AC > BD$. 3 бұрышы 4 бұрышынан кіші болатынын дәлелдеңдер.

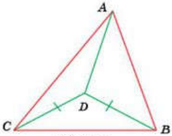


12.6-сурет

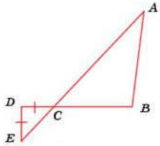


12.7-сурет

12.13. ABC үшбұрышының төбелері оның ішінде жатқан D нүктесімен кесінділер арқылы қосылған және $AC > AB$, $CD = BD$ (12.8-сурет). ACD бұрышы ABD бұрышынан кіші болатынын дәлелдеңдер.



12.8-сурет

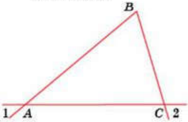


12.9-сурет

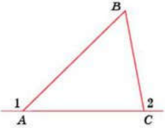
12.14. AE және BD кесінділері C нүктесінде қиылысады және $AB > BC$, $CD = DE$ (12.9-сурет) . BAC бұрышы DEC бұрышынан кіші болатынын дәлелдеңдер.

12.15. 12.10-суретте 1 бұрышы 2 бұрышынан кіші. ABC үшбұрышының AB және BC қабырғаларын салыстырыңдар.

12.16. 12.11-суретте 1 бұрышы 2 бұрышынан үлкен. $AB > BC$ екенін дәлелдеңдер.



12.10-сурет

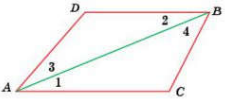


12.11-сурет

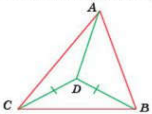
C

12.17. 12.12-суретте 1 және 2 бұрыштары тең, 3 бұрышы 4 бұрышынан кіші. $AC > BD$ екенін дәлелдеңдер.

12.18. ABC үшбұрышының төбелері оның ішінде жатқан D нүктесімен кесінділер арқылы қосылған және $CD = BD$, ACD бұрышы ABD бұрышынан кіші (12.13-сурет) . $AC > AB$ екенін дәлелдеңдер .



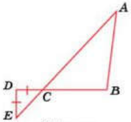
12.12-сурет



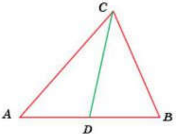
12.13-сурет

12.19. AE және BD кесінділері C нүктесінде қиылысады және $CD = DE$, BAC бұрышы DEC бұрышынан кіші (12.14-сурет). $AB > BC$ екенін дәлелдеңдер.

12.20. ABC үшбұрышында $AC > BC$ теңсіздігі орындалады, CD — медиана (12.15-сурет). BCD бұрышы ACD бұрышынан үлкен болатынын дәлелдеңдер.



12.14-сурет



12.15-сурет

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

12.21. Екі қабырғасы 3 см және 4 см, ал олардың арасындағы бұрыш 90°-қа тең болатын үшбұрышты кескіндеңдер.

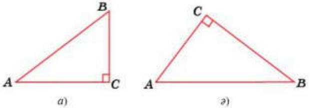
§ 13. ТІКБҰРЫШТЫ ҮШБҰРЫШТАР

Егер үшбұрыштың тік бұрышы бар болса, онда үшбұрыш *тікбұрышты* деп аталатынын еске салайық (13.1-сурет).

Тікбұрышты үшбұрыштың тік бұрышына қарсы жатқан қабырғасы *гипотенузасы*, ал қалған екі қабырғасы *катеттері* деп аталады.

13.1-суреттегі ABC тікбұрышты үшбұрышында $\angle C = 90°$, AB — гипотенузасы, AC және BC — катеттері.

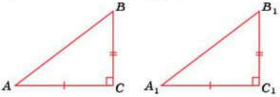
Үшбұрыштың сыртқы бұрышы онымен сыбайлас емес әрбір ішкі бұрышынан үлкен болғандықтан, тікбұрышты үшбұрыштың бір бұрышы тік, қалған екі бұрышы сүйір болады.



13.1-сурет

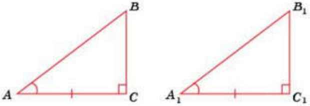
Үшбұрыштар теңдігінің белгілерін тікбұрышты үшбұрыштарға қолданып, тікбұрышты үшбұрыштар теңдігінің келесі белгілерін алуға болады.

1-белгі. *Егер бір тікбұрышты үшбұрыштың катеттері екінші тікбұрышты үшбұрыштың катеттеріне сәйкесінше тең болса, онда бұл үшбұрыштар тең болады* (13.2-сурет).



13.2-сурет

2-белгі. *Егер бір тікбұрышты үшбұрыштың катеті мен оған іргелес жатқан сүйір бұрышы екінші тікбұрышты үшбұрыштың катеті мен оған іргелес жатқан сүйір бұрышына сәйкесінше тең болса, онда бұл үшбұрыштар тең болады* (13.3-сурет).



13.3-сурет

Осы тұжырымдалған белгілерді өздерің дәлелдеңдер.

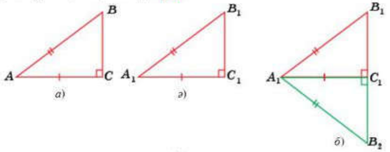
Тікбұрышты үшбұрыштар теңдігінің тағы екі күрделі белгілерін қарастырайық.

3-белгі. *Егер бір тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасы мен катеті екінші тікбұрышты үшбұрыштың сәйкесінше гипотенузасы мен катетіне тең болса, онда бұл үшбұрыштар тең болады* .

Дәлелдеуі. Дәлелдеуі үшбұрыштар теңдігінің үшінші белгісінің дәлелдеуіне ұқсас болады. ABC және $A_1B_1C_1$ — тікбұрышты үшбұрыштар, мұндағы C және C_1 бұрыштары тік, $AB = A_1B_1$ және $AC = A_1C_1$ болсын (13.4, а-сурет).

A_1C_1 сәулесінен A төбесі A_1 төбесімен беттесетіндей, ал B төбесі A_1C_1 түзуіне қатысты B_1 төбесінің екінші жағында жататын B_2 нүктесіне көшетіндей етіп ABC үшбұрышын саламыз (13.4, ә-сурет).

Сонда $A_1B_2C_1$ үшбұрышы ABC үшбұрышына тең болады. $A_1C_1B_1$ және $A_1C_1B_2$ бұрыштары тік болғандықтан, C_1, B_1 және B_2 нүктелері бір түзудің бойында жатады. A_1B_1 және A_1B_2 қабырғаларының теңдігінен $B_1A_1B_2$ үшбұрышының теңбүйірлі екені шығады. Теңбүйірлі үшбұрыштың табанына түсірілген биіктік биссектриса болатынын білеміз. A_1C_1 — биссектриса, демек, $C_1A_1B_1$ және $C_1A_1B_2$ бұрыштары тең. Сонымен, үшбұрыштар теңдігінің бірінші белгісі бойынша $A_1B_1C_1$ және $A_1B_2C_1$ үшбұрыштары тең. Осыдан ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштары да тең болады ■.



13.4-сурет

4-белгі. *Егер бір тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасы мен сүйір бұрышы екінші тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасы мен сүйір бұрышына сәйкесінше тең болса, онда бұл үшбұрыштар тең болады.*

Бұл белгіні дәлелдеу үшін дәлелденетін тұжырым дұрыс емес деп алып, қайшылыққа әкелетін "қарсы ұйғару" әдісін қолданамыз.

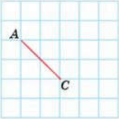
Дәлелдеуі. ABC және $A_1B_1C_1$ — тікбұрышты үшбұрыштар, мұндағы C және C_1 бұрыштары тік, $AB = A_1B_1$ және $\angle A = \angle A_1$ болсын (13.4, *а*-сурет). Осы үшбұрыштардың теңдігін дәлелдеу үшін AC және A_1C_1 катеттерінің теңдігін дәлелдеу жеткілікті, өйткені бұл жағдайда үшбұрыштар гипотенузасы мен катеті бойынша тең болады. Қарсы ұйғарайық, яғни AC және A_1C_1 катеттері тең емес дейік. AC сәулесіне A_1C_1-ге тең AC_2 кесіндісін саламыз. Бірінші белгі бойынша ABC_2 үшбұрышы $A_1B_1C_1$ үшбұрышына тең. Ендеше, BC_2A бұрышы тік. Сонда BCC_2 үшбұрышында екі тік бұрыш бар, ал ол мүмкін емес. Алынған қайшылық, AC және A_1C_1 катеттерінің тең еместігі туралы ұйғарым дұрыс емес екендігін көрсетеді. Демек, катеттер тең және берілген үшбұрыштар өзара тең.

1. Қандай үшбұрыш тікбұрышты деп аталады?
2. Тікбұрышты үшбұрыштың катеті және гипотенузасы дегеніміз не?
3. Тікбұрышты үшбұрыштар теңдігінің белгілерін тұжырымдаңдар.

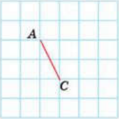
Жаттығулар

А

13.1. Торкөз қағазға AC кесіндісі катеті болатын, ал B төбесі торкөздердің бір түйінінде орналасқан тікбұрышты үшбұрышты кескіндеңдер (13.5-сурет).



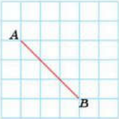
а)



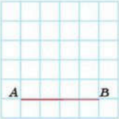
ә)

13.5-сурет

13.2. Торкөз қағазға AB кесіндісі гипотенузасы болатын, ал C төбесі торкөздердің бір түйінінде орналасқан тікбұрышты үшбұрышты кескіндеңдер (13.6-сурет).



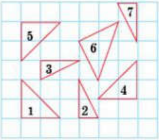
а)



ә)

13.6-сурет

13.3. 13.7-суреттен тең тікбұрышты үшбұрыштарды көрсетіңдер.



13.7-сурет

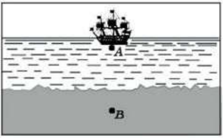
13.4. Тікбұрышты үшбұрыштар а) теңбүйірлі; ә) теңқабырғалы бола ма?
13.5. Тікбұрышты үшбұрыштың қабырғалары 4, 5, 5 бола ма?
13.6. Тікбұрышты үшбұрыштың катеттері 11 см және 111 см бола ма?
13.7. Тікбұрышты үшбұрыштың қабырғалары 3 см, 4 см, 5 см. Гипотенузасы неге тең?

B

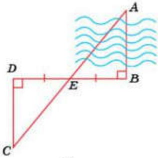
13.8. Тікбұрышты үшбұрыштың екі сүйір бұрышы болатынын дәлелдеңдер.
13.9. Тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасы оның катеттерінен үлкен екенін дәлелдеңдер.
13.10. ABC теңбүйірлі үшбұрышында $AC = BC$ және CD — биіктік. ACD және BCD үшбұрыштарының тең болатынын дәлелдеңдер.
13.11. Егер үшбұрыштың екі биіктігі тең болса, бұл үшбұрыштың теңбүйірлі болатынын дәлелдеңдер.

C

13.12. Қарсы жорығару әдісін пайдаланып, бір тікбұрышты үшбұрыштың катеті мен оған қарсы жатқан сүйір бұрышы екінші тікбұрышты үшбұрыштың катеті мен оған қарсы жатқан бұрышына сәйкесінше тең болса, онда бұл үшбұрыштардың тең болатынын дәлелдеңдер.
13.13. Тең үшбұрыштарда сәйкесінше биіктіктері тең болатынын дәлелдеңдер.
13.14. Жағалаудан (жағалаудағы белгілі нүктеден) теңіздегі кемеге дейінгі қашықтықты табу тәсілін көрсетіңдер (13.8, а-сурет). 13.8, ә-суретті пайдаланыңдар.



а)



ә)

13.8-сурет

Хабарлама дайындаңдар

13.15. Ахмес папирусындағы тікбұрышты үшбұрышқа арналған есептер жайлы не білесіңдер?
Өзара тең кабырғасы және оған іргелес жатқан екі бұрышы бойынша екі үшбұрыштың теңдігі туралы Фалес теоремасы жайында хабарлама дайындаңдар.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

13.16. b түзуін және оған тиісті емес A нүктесін кескіндеңдер. A нүктесі арқылы b түзуіне перпендикуляр a түзуін жүргізіңдер. Осындай неше түзу жүргізуге болады?

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

1. Қандай үшбұрыштың кез келген биіктігі берілген үшбұрышты тең екі үшбұрышқа бөледі?
   A) Теңбүйірлі. B) Кез келген.
   C) Теңқабырғалы. D) Мұндай үшбұрыш жоқ.
2. Үшбұрыштың бір қабырғасына жүргізілген медианасы қабырғаға перпендикуляр. Берілген үшбұрыштың түрін анықта.
   A) Тікбұрышты. B) Әртүрлі қабырғалы.
   C) Теңбүйірлі. D) Анықтау мүмкін емес.
3. $AB = BC = CA$ болатын ABC үшбұрышы берілген. CD — биссектриса, AD = 3 см. ABC үшбұрышының периметрін тап.
   A) 3 см. B) 6 см. C) 9 см. D) 18 см.
4. Үшбұрыштың бір қабырғасына жүргізілген биіктік қабырғаны қақ бөледі. Үшбұрыштың түрін анықта.
   A) Тікбұрышты. B) Әртүрлі қабырғалы.
   C) Теңбүйірлі. D) Анықтау мүмкін емес.
5. $AB = BC = CA$ болатын ABC үшбұрышы берілген. BH — биіктік. Берілген үшбұрыштың периметрі 42 см. AH ұзындығын тап.
   A) 7 см. B) 14 см. C) 21 см. D) 35 см.
6. Үшбұрыштың периметрі 60 см. Оның қабырғалары 3:4:5 қатынасындай. Қабырғаларын табыңдар.
   A) 9 см, 12 см, 15 см. B) 12 см, 16 см, 20 см.
   C) 10 см, 20 см, 30 см. D) 15 см, 20 см, 25 см.

7. Үшбұрыштың бір қабырғасына жүргізілген биссектрисасы қабырғаны қақ бөледі. Үшбұрыштың түрін анықта.

A) Тікбұрышты. B) Әртүрлі қабырғалы.
C) Теңбүйірлі. D) Анықтау мүмкін емес.

8. Теңбүйірлі үшбұрыштың периметрі 32 см. Табанына қарсы жатқан бұрыштың биссектрисасы үшбұрышты периметрлері 24 см болатын екі үшбұрышқа бөледі. Осы биссектриса ұзындығын тап.

A) 6 см. B) 8 см. C) 12 см. D) 16 см.

9. EF және GH кесінділері қиылысу нүктесінде қақ бөлінеді. Егер EH = 10 см болса, онда GF кесіндісінің ұзындығын тап.

A) 5 см. B) 10 см. C) 15 см. D) 20 см.

10. Теңқабырғалы үшбұрыштар теңдігін орнату үшін олардың қандай элементтерінің теңдігін тексеру жеткілікті?

A) Бір қабырғасы. B) Бір бұрышы.
C) Бір бұрышы мен бір қабырғасы. D) Екі қабырғасы.

11. Екі тікбұрышты үшбұрыштардың бір сүйір бұрыштары тең. Осы үшбұрыштардың теңдігін орнату үшін тағы қандай элементтердің теңдігін тексеру жеткілікті?

A) Екінші сүйір бұрышы.
B) Іргелес катеті.
C) Гипотенуза және екінші сүйір бұрышы.
D) Катеті және екінші сүйір бұрышы.

12. Теңбүйірлі үшбұрыштың табаны 8 см. Табанындағы бір төбесінің бұрышы арқылы жүргізілген медиана үшбұрыштың периметрін бірі екіншісінен 2 см-ге үлкен болатындай екі бөлікке бөледі. Үшбұрыштың бүйір қабырғасын тап.

A) 4 см. B) 8 см. C) 10 см. D) 12 см.

13. Үшбұрыштың бір сыртқы бұрышы тік екені белгілі. Үшбұрыштың түрін анықта.

A) Тікбұрышты. B) Сүйір бұрышты.
C) Доғал бұрышты. D) Анықтау мүмкін емес.

14. Үшбұрыштың бір сыртқы бұрышы сүйір екені белгілі. Үшбұрыштың түрін анықта.

A) Тікбұрышты. B) Сүйір бұрышты.
C) Доғал бұрышты. D) Анықтау мүмкін емес.

15. Егер үшбұрыштың бір сыртқы бұрышы ішкі бұрышына тең болса, онда үшбұрыштың түрін анықта.

A) Тең қабырғалы.
B) Доғал бұрышты.
C) Тікбұрышты.
D) Сүйір бұрышты.

16. Егер $AB = 5$ см, $AC = 7$ см, $BC = 6$ см болса, онда ABC үшбұрышының бұрыштарын салыстыр.

A) $\angle A > \angle B > \angle C$.
B) $\angle A > \angle C > \angle B$.
C) $\angle C > \angle A > \angle B$.
D) $\angle B > \angle A > \angle C$.

17. Егер $DE = DF = 12$ см, $EF = 5$ см болса, онда DEF үшбұрышының бұрыштарын салыстыр.

A) $\angle D < \angle E = \angle F$.
B) $\angle D > \angle E > \angle F$.
C) $\angle D > \angle E = \angle F$.
D) $\angle D < \angle F < \angle E$.

18. ABC үшбұрышының қабырғаларын салыстырыңдар, мұндағы $\angle A < \angle B < \angle C$.

A) $AB < AC < BC$.
B) $AB < BC < AC$.
C) $AB > AC > BC$.
D) $AB > BC > AC$.

19. DEF үшбұрышының қабырғаларын салыстырыңдар, мұндағы $\angle D > \angle E > \angle F$.

A) $DE > DF > EF$.
B) $DF > DE > EF$.
C) $DF > EF > DE$.
D) $EF > DF > DE$.

20. ABC үшбұрышының қабырғаларын салыстырыңдар, мұндағы $\angle A < \angle B = \angle C$.

A) $AB < AC = BC$.
B) $BC < AB = AC$.
C) $AC > BC = AB$.
D) $AB > BC = AC$.

3-ТАРАУ

ТҮЗУЛЕРДІҢ ӨЗАРА ОРНАЛАСУЫ

§ 14. ПЕРПЕНДИКУЛЯР ЖӘНЕ КӨЛБЕУ

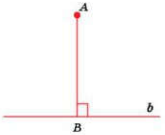
B түзуін және оған тиісті емес A нүктесін қарастырайық. A нүктесі арқылы b түзуіне перпендикуляр түзу жүргіземіз және B нүктесі осы түзулердің қиылысу нүктесі болсын.

AB кесіндісі A нүктесінен b түзуіне түсірілген *перпендикуляр*, ал B нүктесі *перпендикулярдың табаны* деп аталады (14.1-сурет). Перпендикулярдың ұзындығы A нүктесінен b түзуіне дейінгі *қашықтық* деп аталады.

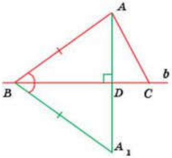
Теорема. ***Берілген түзуде жатпайтын кез келген нүкте арқылы осы түзуге перпендикуляр жүргізуге болады және ол тек біреу ғана болады.***

Дәлелдеуі. A нүктесі b түзуіне тиісті емес нүкте болсын (14.2-сурет).

Осы түзудің бойынан қандай да бір B және C нүктелерін аламыз. Егер ABC бұрышы тік болса, онда AB ізделінді перпендикуляр болады. Керісінше жағдайда BC сәулесінен A нүктесі жатпайтын жартыжазықтықта ABC бұрышына тең A_1BC бұрышын саламыз және AB мен A_1B кесінділері тең болатындай A_1 нүктесін таңдап аламыз. A және A_1 нүктелерін қосамыз. BC түзуінде ABA_1 бұрышының биссектрисасы жатыр. Осы биссектриса мен AA_1 кесіндісінің қиылысу нүктесін D деп белгілейік. Табаны AA_1 болатын ABA_1 теңбүйірлі үшбұрышында BD биссектрисасы биіктік болады. Демек, AD кесіндісі A нүктесінен b түзуіне түсірілген ізделінді перпендикуляр болады.



14.1-сурет



14.2-сурет

Осы перпендикулярдың біреу ғана болуын дәлелдейік. Шынында, егер AD_1 және AD_2 екі перпендикуляр бар болса (14.3-сурет), онда AD_1D_2 үшбұрышының екі тік бұрышы бар болар еді, ал бұл тікбұрышты үшбұрыштың қасиеті бойынша мүмкін емес ■.

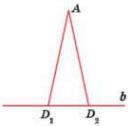
Берілген түзуде жататын нүкте арқылы осы түзуге перпендикуляр жалғыз түзу жүргізуге болатынын өздерің түсіндіріңдер.

b түзуіндегі B нүктесінен өзге кез келген C нүктесі үшін AC кесіндісі A нүктесінен b түзуіне жүргізілген ***көлбеу***, C нүктесі көлбеудің табаны, BC кесіндісі көлбеудің b түзуіндегі *проекциясы* деп аталады (14.4-сурет).

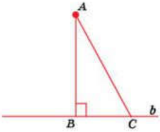
Тікбұрышты үшбұрыштың қабырғалары арасындағы қатынастан мына теореманы аламыз.

Теорема. ***Берілген нүктеден берілген түзуге түсірілген перпендикуляр осы нүктеден осы түзуге жүргізілген кез келген көлбеуден қысқа болады. Басқаша айтқанда, нүктеден түзуге дейінгі қашықтық осы нүктеден осы түзудің нүктелеріне дейінгі қашықтықтардың ішінен ең кішісі болады.***

Дәлелдеуі. A нүктесі b түзуіне тиісті болмасын, AB — перпендикуляр, AC — көлбеу (14.4-сурет). Сонда AB — ABC тікбұрышты үшбұрышының катеті, AC гипотенузасы болады. Демек, $AB < AC$ ■.



14.3-сурет



14.4-сурет

1. Берілген нүктеден берілген түзуге түсірілген перпендикуляр, перпендикулярдың табаны дегеніміз не?
2. Берілген нүктеден берілген түзуге жүргізілген көлбеу дегеніміз не? Көлбеудің а) табаны; ә) проекциясы дегеніміз не?
3. Нүктеден түзуге дейінгі қашықтық дегеніміз не?
4. Бір нүктеден берілген түзуге жүргізілген перпендикуляр немесе көлбеудің қайсысы үлкен?

Жаттығулар

A

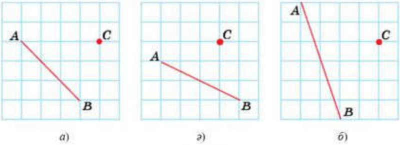
14.1. Берілген нүктеден берілген түзуге неше перпендикуляр жүргізуге болады?

14.2. Берілген нүктеден берілген түзуге ұзындығы белгілі неше көлбеу жүргізуге болады?

14.3. Үшбұрыштың медианасы сол төбеден жүргізілген биіктігінен үлкен бола ма?

14.4. Үшбұрыштың биссектрисасы сол төбеден жүргізілген биіктігінен үлкен бола ма?

14.5. Торкөзді қағазда, 14.5-суретте көрсетілгендей, нүктелер мен түзулерді кескіндеңдер. C нүктесінен AB түзуіне CD перпендикулярын түсіріңдер.



14.5-сурет

B

14.6. Қабырғасы 1 болатын теңқабырғалы үшбұрыштың бір қабырғасының екінші қабырғасы жатқан түзудегі проекциясы неге тең?

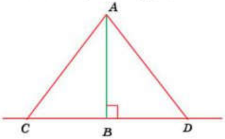
14.7. Теңбүйірлі үшбұрыштың қабырғалары 6, 8, 8. Осы үшбұрыштың бүйір қабырғасының оның табаны жатқан түзудегі проекциясы неге тең?

14.8. Тікбұрышты үшбұрыштың қабырғалары 3, 4, 5. Үшбұрыштың гипотенузасының оның үлкен катеті жатқан түзудегі проекциясы неге тең?

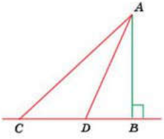
14.9. A нүктесінен b түзуіне AB перпендикуляры және AB_1, AB_2 көлбеулері жүргізілген. Егер: а) B_1 нүктесі B мен B_2 аралығында жатса; ә) B нүктесі B_1 мен B_2 аралығында жатса және $BB_1 < BB_2$ болса, онда екі көлбеудің қайсысы кіші болады?

14.10. Берілген нүктеден берілген түзуге жүргізілген өзара тең екі көлбеудің проекциялары да тең болатынын дәлелдеңдер (14.6-сурет).

14.11. Берілген нүктеден берілген түзуге жүргізілген екі көлбеудің проекциялары тең болса, онда көлбеулердің де тең болатынын дәлелдеңдер (14.6-сурет).



14.6-сурет



14.7-сурет

C

14.12. Берілген нүктеден берілген түзуге жүргізілген екі көлбеудің қайсысының проекциясы үлкен болса, сол көлбеу үлкен болатынын дәлелдеңдер (14.7-сурет).

14.13. Берілген нүктеден берілген түзуге жүргізілген екі көлбеудің қайсысы үлкен болса, сол көлбеудің проекциясы да үлкен болатынын дәлелдеңдер.

14.14. Үшбұрыштың биссектрисасы сол төбеден жүргізілген медианасынан аспайтынын дәлелдеңдер.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

14.15. b түзуін және оған тиісті емес A нүктесін кескіндеңдер. A нүктесі арқылы b түзуіне параллель a түзуін жүргізіңдер. Осындай неше түзу жүргізуге болады?

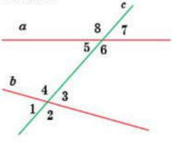
§ 15. ТҮЗУЛЕРДІҢ ПАРАЛЛЕЛЬДІГІ

Егер жазықтықтағы екі түзу қиылыспаса, яғни ортақ нүктесі болмаса, онда олар *параллель түзулер* деп аталатынын еске салайық.

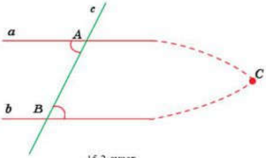
Түзулердің параллельдігі $\|$ белгісімен белгіленеді. Егер a және b түзулері параллель болса, онда ол былай жазылады: $a \| b$.

a және b түзулері берілсін және оларды *қиюшы* деп аталатын үшінші c түзуі қиып өтсін. Осы түзулермен құрылған бұрыштарды, 15.1-суретте көрсетілгендей, 1, ... , 8 цифрларымен белгілейік.

1 және 5, 4 және 8, 2 және 6, 3 және 7 бұрыштары *сәйкес бұрыштар*;
3 және 5, 4 және 6 бұрыштары *ішкі айқыш бұрыштар*;
4 және 5, 3 және 6 бұрыштары *ішкі біржақты бұрыштар* деп аталады.



15.1-сурет



15.2-сурет

15.1-суреттегі *a* және *b* түзулері параллель ме? Қалай ойлайсыңдар, түзулер параллель болуы үшін ішкі айқыш бұрыштар қандай болуы керек?

Осы сұраққа жауапты мына теорема береді.

Теорема (Екі түзудің параллельдік белгісі). ***Егер екі түзуді үшінші түзумен қиганда ішкі айқыш бұрыштары тең болса, онда бұл екі түзу параллель болады.***

Дәлелдеуі. a және b түзулері c түзуімен сәйкесінше A және B нүктелерінде қиылысып, өзара тең ішкі айқыш бұрыштар құрасын. Егер a және b түзулері қандайда бір C нүктесінде қиылысса (15.2-сурет), онда ABC үшбұрышында A бұрышының сыртқы бұрышы B бұрышының ішкі бұрышына тең болар еді.

Бұл үшбұрыштың сыртқы бұрышы онымен сыбайлас емес әрбір ішкі бұрышынан үлкен болады деген теоремаға қайшы келеді. Демек, a және b түзулері қиылыспайды, яғни параллель болады ■.

1-салдар. *Егер екі түзуді үшінші түзумен қиганда сәйкес бұрыштары тең болса, онда бұл екі түзу параллель болады.*

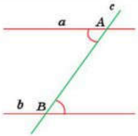
2-салдар. *Егер екі түзуді үшінші түзумен қиганда ішкі біржақты бұрыштардың қосындысы* 180° *болса, онда бұл екі түзу параллель болады.*

3-салдар. *Егер екі түзу үшінші түзуге перпендикуляр болса, онда бұл екі түзу параллель болады.*

Шынында, бұл жағдайда ішкі айқыш бұрыштары тең, сондықтан түзулер параллель.

Параллель түзулердің негізгі қасиеті (аксиомасы) былай тұжырымдалады:

Берілген түзуде жатпайтын нүкте арқылы осы түзуге параллель бірден артық емес түзу өтеді.



15.3-сурет

Осыдан берілген түзуге тиісті емес нүкте арқылы осы түзуге параллель жалғыз ғана түзу өтетіні шығады. Сондықтан екі түзудің параллельдік белгісіне кері теорема дұрыс болады.

Теорема. ***Егер екі параллель түзу үшінші түзумен қиылысса, онда олардың ішкі айқыш бұрыштары тең болады.***

Дәлелдеуі. a және b түзулері c түзуімен сәйкесінше A және B нүктелерінде қиылысқан параллель түзулер болсын (15.3-сурет).

A нүктесі арқылы a_1, b түзулері және c қиюшысымен құрылған ішкі айқыш бұрыштары тең болатындай a_1 түзуін жүргіземіз. Сонда түзулердің параллельдік белгісі бойынша a_1 және b түзулері параллель болады. Ал A нүктесі арқылы b түзуіне параллель жалғыз ғана түзу өтетін болғандықтан, a түзуі a_1 түзуімен беттеседі. Демек, a, b түзулері және c қиюшысымен құрылған ішкі айқыш бұрыштары тең болады ■.

1-салдар. *Егер екі параллель түзу үшінші түзумен қиылысса, онда сәйкес бұрыштары тең болады.*

Шынында, дәлелденген теорема бойынша, егер екі параллель түзу үшінші түзумен қиылысса, онда ішкі айқыш бұрыштары тең болады. Осыдан сәйкес бұрыштары тең болатыны шығады.

2-салдар. *Егер екі параллель түзу үшінші түзумен қиылысса, онда ішкі біржақты бұрыштарының қосындысы* 180°*-қа тең болады.*

Осы салдардың қорытындысын өздерің негіздеңдер.

1. Берілген екі түзу үшін қандай түзу қиюшы деп аталады?
2. Екі түзудің параллельдік белгісін тұжырымдаңдар.
3. Параллель түзулердің аксиомасын тұжырымдаңдар.
4. Жазықтықта берілген нүкте арқылы берілген түзуге параллель неше түзу жүргізуге болады?

Жаттығулар

A

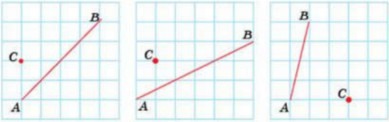
15.1. Екі түзуді үшінші түзумен қиғанда 8 бұрыш пайда болды. Олардың ішінде нешеуі доғал бұрыш?

15.2. Екі түзуді үшінші түзумен қиғанда ішкі біржақты бұрыштардың екеуі де доғал болуы мүмкін бе?

15.3. Екі түзуді үшінші түзумен қиғанда ішкі біржақты бұрыштары тең болуы мүмкін бе?

15.4. Екі түзуді үшінші түзумен қиғанда пайда болған барлық бұрыштары өзара тең болуы мүмкін бе?

15.5. Торкөз қағазға C нүктесі арқылы AB түзуіне параллель түзу жүргізіңдер (15.4-сурет).

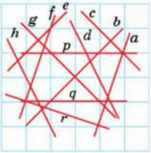


а) *ә)* *б)*

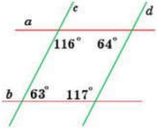
15.4-сурет

15.6. 15.5-суреттен параллель түзулердің жұбын көрсетіңдер.

15.7. 15.6-суреттегі қандай түзулер параллель болады?



15.5-сурет

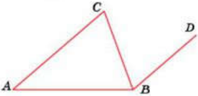


15.6-сурет

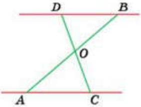
B

15.8. ABC үшбұрышында $\angle A = 40°$, $\angle B = 70°$. B төбесі арқылы BC сәулесі ABD бұрышының биссектрисасы болатындай BD түзуі жүргізілген (15.7-сурет). AC және BD түзулері параллель екенін дәлелдеңдер.

15.9. AB және CD кесінділерінің ортасы O нүктесінде қиылысады (15.8-сурет). AC және BD түзулерінің параллель екенін дәлелдеңдер.

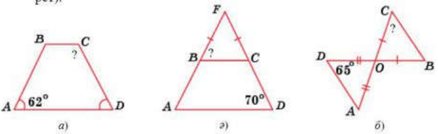


15.7-сурет



15.8-сурет

15.10. Егер $AD \parallel BC$ болса, онда белгісіз бұрышты табыңдар (15.9-сурет).



15.9-сурет

15.11. Екі параллель түзудің қиюшымен жасайтын бұрыштарының а) біреуі 150°-қа тең; ә) біреуі екіншісінен 70°-қа үлкен болса, осы бұрыштарды табыңдар.

15.12. Параллель түзулердің қиюшымен жасайтын екі ішкі айқыш бұрыштардың қосындысы 150°-қа тең. Осы бұрыштарды табыңдар.

15.13. Параллель түзулердің қиюшымен жасайтын екі айқыш бұрыштарының айырымы 30°-қа тең. Осы бұрыштарды табыңдар.

15.14. AB кесіндісінің ұштары a және b параллель түзулерінде жатыр. Осы кесіндінің ортасын O нүктесі арқылы өтетін түзу a және b түзулерін C және D нүктелерінде қиып өтеді. $CO = OD$ екенін дәлелдеңдер.

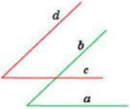
15.15. Екі параллель түзудің қиюшымен жасайтын ішкі айқыш бұрыштарының биссектрисалары параллель, яғни параллель түзулердің бойында жататынын дәлелдеңдер.

C

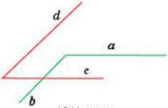
15.16. Қандай да бір түзу екі параллель түзудің біреуін қиып өтсе, онда ол екіншісін де қиып өтетінін дәлелдеңдер.

15.17. Үшінші түзуге параллель екі түзу өзара параллель болатынын дәлелдеңдер.

15.18. 15.10-суреттегі бір бұрыштың a және b қабырғалары екінші бұрыштың сәйкесінше c және d қабырғаларына параллель. Осы бұрыштардың теңдігін дәлелдеңдер.



15.10-сурет



15.11-сурет

15.19. 15.11-суреттегі бір бұрыштың a және b қабырғалары екінші бұрыштың сәйкесінше c және d қабырғаларына параллель. Осы бұрыштардың қосындысы 180°-қа тең болатынын дәлелдеңдер.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

15.20. Қандай да бір үшбұрыш салыңдар. Транспортирдің көмегімен оның бұрыштарын өлшеңдер және олардың қосындысын табыңдар.

§ 16. ҮШБҰРЫШТЫҢ БҰРЫШТАРЫНЫҢ ҚОСЫНДЫСЫ

Қандай да бір үшбұрыш салыңдар. Транспортирдің көмегімен оның бұрыштарын өлшеңдер және олардың қосындысын табыңдар. Келесі теорема орынды болады.

Қалай ойлайсыңдар, осы қосынды шамамен 180°-қа тең бола ма?

Теорема. *Үшбұрыштың бұрыштарының қосындысы 180°-қа тең болады*.

Дәлелдеуі. Кез келген ABC үшбұрышының C төбесі арқылы AB қабырғасына параллель түзу жүргіземіз (16.1-сурет).

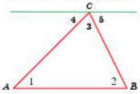
Ішкі айқыш бұрыштары ретінде $\angle 1 = \angle 4$, $\angle 2 = \angle 5$. Демек, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \angle 4 + \angle 5 + \angle 3 = 180°$ ▢.

Салдар. *Тікбұрышты үшбұрыштың сүйір бұрыштарының қосындысы 90°-қа тең*.

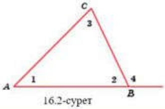
Осы салдарды өздерің негіздеңдер.

Теорема. ***Үшбұрыштың сыртқы бұрышы онымен сыбайлас емес екі ішкі бұрышының қосындысына тең болады***.

Дәлелдеуі. ABC үшбұрышының ішкі бұрыштарын 1, 2 және 3 цифрларымен белгілейік (16.2-сурет). 4 бұрышы — *1* және *3* бұрыштарымен сыбайлас емес сыртқы бұрышы болсын. Сонда $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$ және $\angle 4 = 180° - \angle 2 = \angle 1 + \angle 3$ ▢.



16.1-сурет



16.2-сурет

1. Үшбұрыштың бұрыштарының қосындысы неге тең?
2. Тікбұрышты үшбұрыштың сүйір бұрыштарының қосындысы неге тең?
3. Үшбұрыштың сыртқы бұрышы неге тең?

Жаттығулар

A

16.1. Теңқабырғалы үшбұрыштың бұрыштары неге тең?

16.2. Тікбұрышты теңбүйірлі үшбұрыштың сүйір бұрыштары неге тең?

16.3. ABC үшбұрышында A бұрышы 30°-қа, B бұрышы 90°-қа тең. Оның C бұрышын табыңдар.

16.4. Тікбұрышты үшбұрыштың бір сүйір бұрышы екіншісінен 32°-қа үлкен. Оның үлкен сүйір бұрышын табыңдар.

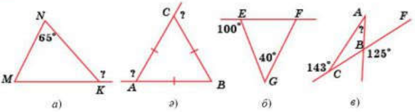
16.5. Тікбұрышты үшбұрыштың бір сүйір бұрышы екіншісінен екі есе үлкен. Оның кіші сүйір бұрышын табыңдар.

16.6. Тікбұрышты үшбұрыштың екі сүйір бұрышының қатынасы 2:3. Оның үлкен сүйір бұрышын табыңдар.

16.7. ABC үшбұрышында A бұрышы 40°, $AC = BC$. Оның C бұрышын табыңдар.

16.8. ABC үшбұрышында C бұрышы 120°, $AC = BC$. Оның A бұрышын табыңдар.

16.9. 16.3-суреттегі белгісіз бұрыштарды табыңдар.



16.3-сурет

B

16.10. Теңбүйірлі үшбұрыштың бір бұрышы 98°. Оның басқа екі бұрышын табыңдар.

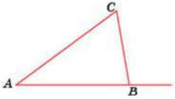
16.11. Теңбүйірлі үшбұрыштың бір бұрышы екіншісінен 90°-қа кіші. Оның үлкен бұрышын табыңдар.

16.12. Үшбұрыштың бұрыштарының қатынасы 1:2:3. Оның кіші бұрышын табыңдар.

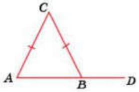
16.13. ABC үшбұрышында C бұрышы 64°-қа, B төбесіндегі сыртқы бұрышы 104°-қа тең (16.4-сурет). Оның A бұрышын табыңдар.

16.14. ABC үшбұрышында $AC = BC$. B төбесіндегі сыртқы бұрышы 122°-қа тең (16.5-сурет). Оның C бұрышын табыңдар.

16.15. ABC үшбұрышында $AC = BC$, C бұрышы 50°-қа тең (16.5-сурет). CBD сыртқы бұрышын табыңдар.



16.4-сурет

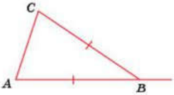


16.5-сурет

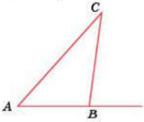
16.16. ABC үшбұрышында $AB = BC$. B төбесіндегі сыртқы бұрышы 138°-қа тең (16.6-сурет). Оның C бұрышын табыңдар.

16.17. ABC үшбұрышында $AB = BC$, A бұрышы 70°-қа тең (16.6-сурет). B төбесіндегі сыртқы бұрышын табыңдар.

16.18. Үшбұрыштың бір сыртқы бұрышы 85°-қа тең. Осы сыртқы бұрышпен сыбайлас емес бұрыштардың қатынасы 2:3 (16.7-сурет). Олардың ішіндегі ең үлкенін табыңдар.



16.6-сурет



16.7-сурет

16.19. Тікбұрышты үшбұрыштың бір сыртқы бұрышы 120°-қа тең. Осы үшбұрыштың сүйір бұрыштарын табыңдар.

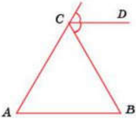
16.20. Үшбұрыштың әрбір төбесінен біреуден алынған барлық сыртқы бұрыштарының қосындысын табыңдар.

C

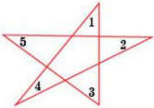
16.21. Егер тікбұрышты үшбұрыштың бір бұрышы 30° болса, осы бұрышқа қарсы жатқан катет гипотенузасының жартысына тең болатынын дәлелдеңдер.

16.22. Теңбүйірлі үшбұрыштың табанына қарсы жатқан төбесіндегі бұрыштың биссектрисасы оған параллель болатынын дәлелдеңдер (16.8-сурет).

16.23. Кез келген бесбұрышты жұлдыздың сүйір бұрыштарының қосындысын табыңдар (16.9-сурет).

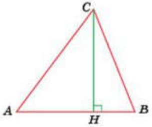


16.8-сурет

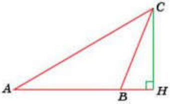


16.9-сурет

16.24. ABC үшбұрышында A бұрышы $60°$, B бұрышы $70°$, CH — биіктігі (16.10-сурет). ACH және BCH бұрыштарының айырымын табыңдар.



16.10-сурет

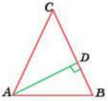


16.11-сурет

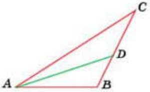
16.25. ABC үшбұрышында B бұрышы доғал, A бұрышы $30°$, CH — биіктігі, BCH бұрышы $22°$ (16.11-сурет). ACB бұрышын табыңдар.

16.26. ABC үшбұрышында $AC = BC$, AD — биіктігі, BAD бұрышы $24°$ (16.12-сурет). C бұрышын табыңдар.

16.27. ABC үшбұрышында AD — биссектрисасы, C бұрышы $30°$, BAD бұрышы $22°$ (16.13-сурет). ADB бұрышын табыңдар.



16.12-сурет

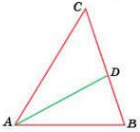


16.13-сурет

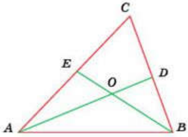
16.28. ABC үшбұрышында AD — биссектрисасы, C бұрышы $50°$, CAD бұрышы $28°$ (16.14-сурет). B бұрышын табыңдар.

16.29. ABC үшбұрышында AD — биссектрисасы, B бұрышы $72°$, CAD бұрышы $30°$ (16.14-сурет). C бұрышын табыңдар.

16.30. ABC үшбұрышында C бұрышы $60°$, AD және BE кесінділері — O нүктесінде қиылысатын биссектрисалары (16.15-сурет). AOB бұрышын табыңдар.



16.14-сурет

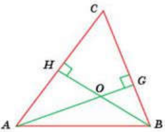


16.15-сурет

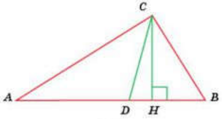
16.31. Тікбұрышты үшбұрыштың сүйір бұрыштары биссектрисаларының арасындағы сүйір бұрышын табыңдар.

16.32. Үшбұрыштың екі бұрышы $54°$ және $66°$. Осы бұрыштардың төбелерінен түсірілген биіктіктердің арасындағы сүйір бұрышын табыңдар (16.16-сурет).

16.33. Тікбұрышты үшбұрыштың бір сүйір бұрышы $30°$. Оның тік бұрышындағы төбесінен жүргізілген биіктігі мен биссектрисасы арасындағы бұрышты табыңдар (16.17-сурет).



16.16-сурет



16.17-сурет

16.34. ABC тікбұрышты үшбұрыштың A сүйір бұрышы $30°$-қа, AB гипотенузасы 12 см-ге тең. BC катетінің гипотенузадағы проекциясын табыңдар.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

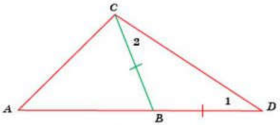
16.35. Қандай да бір үшбұрыш салыңдар. Сызғыштың көмегімен оның қабырғаларын өлшеңдер. Үшбұрыштың әрбір қабырғасы оның қалған екі қабырғасының қосындысынан кіші және айырымынан үлкен болатыны дұрыс па?

§ 17. ҮШБҰРЫШТЫҢ ТЕҢСІЗДІГІ

Үшбұрыштың қабырғалары арасындағы негізгі қатынастардың бірі үшбұрыштың теңсіздігі болып табылады.

Теорема. ***Үшбұрыштың әрбір қабырғасы басқа екі қабырғасының қосындысынан кіші болады.***

Дәлелдеуі. ABC үшбұрышын қарастырайық. AC қабырғасы AB және BC қабырғалары қосындысынан кіші екенін дәлелдейміз. AB қабырғасының жалғасынан BC қабырғасына тең болатын BD кесіндісін аламыз (17.1-сурет).



17.1-сурет

BDC — табаны BD болатын теңбүйірлі үшбұрыш, сондықтан $\angle 1 = \angle 2$. 2 бұрышы ACD бұрышының бөлігін құрайды. Демек, $\angle 2 < \angle ACD$. Сонымен, ACD үшбұрышында C бұрышы D бұрышынан үлкен. Үшбұрыштың үлкен бұрышына қарсы үлкен қабырға жатады деген тұжырымды пайдаланамыз. $AD > AC$ теңсіздігін аламыз. Бірақ $AD = AB + BD = AB + BC$. Осыдан үшбұрыштың AC қабырғасы екі қабырғасының қосындысынан кіші болатынын білдіретін теңсіздікті аламыз: $AB + BC > AC$ немесе $AC < AB + BC$ ◻.

$AB < AC + BC$, $BC < AB + AC$ болатынын өздерің тексеріңдер.

1-салдар. *Үшбұрыштың әрбір қабырғасы басқа екі қабырғасының айырымынан үлкен болады.*

Дәлелдеуі. ABC үшбұрышында AC қабырғасы BC қабырғасынан үлкен болсын. Дәлелденген теорема бойынша $AB + BC > AC$ теңсіздігі орындалады. Осы теңсіздіктің екі жақ бөлігінен BC-ны азайтып, үшбұрыштың AB қабырғасы AC және BC қабырғаларының айырымынан үлкен болатынын білдіретін $AB > AC - BC$ теңсіздігін аламыз ◻.

$AC > AB - BC$ және $BC > AC - AB$ болатынын өздерің тексеріңдер.

2-салдар. *Егер $AC + CB = AB$ теңдігі орындалса, онда C нүктесі AB кесіндісінде A және B нүктелерінің арасында жатады.*

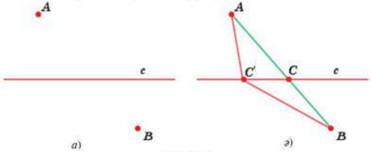
Дәлелдеуі. Расында, егер C нүктесі AB түзуіне тиісті болмаса, онда $AC + CB > AB$ теңсіздігі орындалады. Егер C нүктесі AB түзуіне тиісті болса және AB кесіндісінен тыс жатса, онда осы теңсіздік тағы орындалады. Бір ғана мүмкіндік қалды, ол — C нүктесі AB кесіндісінде A және B нүктелерінің арасында жатады ■.

Үшбұрыштың теңсіздігін кейбір экстремалды есептерді — кесінділер ұзындықтарының, бұрыштардың шамаларының және т.б. ең кіші немесе ең үлкен мәндерін табу есептерін шешкенде қолданайық.

Алғашқы экстремалды есептердің бірі жазықтықта ең қысқа жолды табу туралы келесі классикалық есеп болып табылады. Оның шешімі Архимедке (б.з.д. 287—212 жж.) белгілі болған.

Есеп. Жазықтықта c түзуі және екі A мен B нүктелері берілген. $AC + CB$ қашықтықтарының қосындысы ең кіші болатындай осы түзудің бойынан C нүктесін табыңдар.

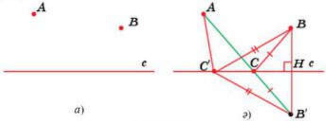
Шешуі. Алдымен A және B нүктелері c түзуінің әр жағында жатқан жағдайды қарастырайық (17.2, а-сурет).



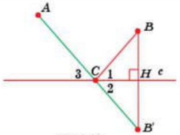
17.2-сурет

Бұл жағдайда ізделінді C нүктесі AB кесіндісінің c түзуімен қиылысу нүктесі болатынын көрсетейік. Шынында, үшбұрыштар теңсіздігінен c түзуінің кез келген C' нүктесі үшін $AC' + C'B > AC + CB$ теңсіздігі орындалады (17.2, ә-сурет). Демек, $AC + CB$ қосындысы ең кіші болады.

Енді A және B нүктелері c түзуінің бір жағында жатсын делік (17.3, а-сурет).



17.3-сурет



17.4-сурет

Ізделінді C нүктесін табу идеясы B нүктесін c түзуінің екінші жағында жатқан B' нүктесімен ауыстырып, оны алдыңғы жағдайға келтіру болады.

B нүктесінен c түзуіне BH перпендикулярын түсіреміз және BH-қа тең HB' кесіндісін аламыз (17.3, ә-сурет). C' нүктесі c түзуіндегі нүкте болсын. BHC' және $B'HC'$ тікбұрышты үшбұрыштары тең (екі катеті бойынша), демек, $C'B = C'B'$ теңдігі орынды. Сондықтан, егер өзіне тең $AC' + C'B'$ қосындысы ең кіші болса, сонда тек сонда ғана, $AC' + C'B$ қосындысы ең кіші болады. Егер A, B', C' нүктелері бір түзудің бойында жатса, $AC' + C'B'$ қосындысы ең кіші болатыны белгілі, яғни ізделінді C нүктесі AB' кесіндісінің c түзуімен қиылысу нүктесі болады.

Алынған C нүктесінің мына қасиетін ескертеміз: AC және CB түзулерінің c түзуімен құрайтын бұрыштары тең болады (17.4-сурет). Шынында, $\angle 1 = \angle 2$ (BHC және $B'HC$ үшбұрыштары теңдігіндегі сәйкес бұрыштар), $\angle 2 = \angle 3$ (вертикаль бұрыштар). Демек, $\angle 1 = \angle 3$.

Осы бұрыштардың теңдігінен жарықтың шағылу заңы шығады. Дәлірек айтсақ, жарықтың сәулесі ең қысқа жолмен таралады. Сондықтан жарықтың сәулесі A нүктесінен шығып, c түзуімен шағылысып, B нүктесіне келсе, онда C нүктесі шағылу нүктесі болады. Сонымен, жарықтың шағылу заңы орынды: жарық сәулесінің түсу бұрышы шағылу бұрышына тең болады.

1. Үшбұрыштың теңсіздігінің мәні неде?
2. Үшбұрыштың екі қабырғасының айырымы туралы не айтуға болады?
3. $AC + CB = AB$ теңдігі орындалатындай C нүктесі туралы не айтуға болады?

Жаттығулар

A

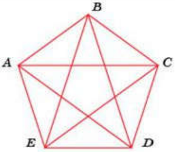
17.1. а) 13 см, 2 см, 8 см; ә) 1 м, 0,5 м, 0,5 м шамалары қабырғалары болатын үшбұрыш салуға бола ма?.

17.2. Үшбұрыштың қабырғалары а) 1 : 2 : 3; ә) 2 : 3 : 6; б) 1 : 1 : 2 қатынасында бола ма?

17.3. Теңбүйірлі үшбұрыштың бір қабырғасы 25 см, ал екіншісі 10 см. Осылардың қайсысы табаны болады?

17.4. Теңбүйірлі үшбұрыштың екі қабырғасы берілген: а) 6 см және 3 см; ә) 8 см және 2 см. Оның үшінші қабырғасын табыңдар.

17.5. Туристік топ A пунктінен B пунктіне жетуі керек (17.5-сурет). A пунктінен B пунктіне апаратын бірнеше жол бар. Кез келген жолдағы қозғалыс жылдамдығы бірдей болса олардың қайсысымен жылдамырақ жетуге болады? Жауапты түсіндіріңдер.



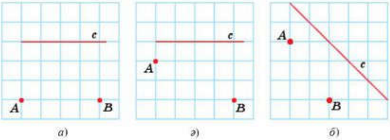
17.5-сурет

B

17.6. Теңбүйірлі үшбұрыштың бір қабырғасы 12 см, екінші қабырғасы 5 см. Осы үшбұрыштың периметрін табыңдар.

17.7. Теңбүйірлі үшбұрыштың периметрі 20 см. Бір қабырғасы екіншісінен екі есе үлкен. Осы үшбұрыштың қабырғаларын табыңдар.

17.8. c түзуінің бойынан $AC + CB$ қашықтықтарының қосындысы ең кіші болатындай C нүктесін көрсетіңдер (17.6-сурет).



17.6-сурет

C

17.9. Үшбұрыштың әрбір қабырғасы оның периметрінің жартысынан кіші болатынын дәлелдеңдер.

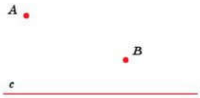
17.10. Үшбұрыштың медианасы оның жарты периметрінен кіші болатынын дәлелдеңдер.

17.11. Үшбұрыштың кез келген ішкі нүктесінен оның төбелеріне дейінгі қашықтықтардың қосындысы оның жарты периметрінен үлкен болатынын дәлелдеңдер.

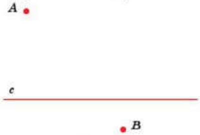
17.12. Үшбұрыштың медианасы оны шектейтін қабырғаларының жарты қосындысынан кіші болатынын дәлелдеңдер.

17.13. c түзуі және оның бір жағында жатқан A және B нүктелері берілген (17.7-сурет). c түзуінде $AC - CB$ қашықтықтарының айырымы ең үлкен болатындай C нүктесін салыңдар.

17.14. c түзуі және оның әр жағында жатқан A және B нүктелері берілген (17.8-сурет). c түзуінде $AC - CB$ қашықтықтарының айырымы ең үлкен болатындай C нүктесін салыңдар.

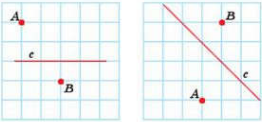


17.7-сурет



17.8-сурет

17.15. c түзуінде $AC - CB$ қашықтықтарының айырымы ең үлкен болатындай C нүктесін салыңдар (17.9-сурет).



а) ә)

17.9-сурет

17.16. Төрт елді мекен A, B, C, D нүктелерінде орналасқан (17.10-сурет). Наубайханадан барлық төрт елді мекенге дейінгі қашықтықтардың қосындысы ең кіші болатындай наубайхананы қай орынға салу керек?

17.10-сурет

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

17.17. Циркульдің көмегімен центрі O және радиусы 2 см болатын шеңбер салыңдар. Осы шеңбердің: а) ішінде; ә) сыртында орналасқан нүктелер қандай теңсіздікті қанағаттандырады?

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

1. Екі параллель түзу үшінші түзумен қиылысқанда неше бұрыш пайда болады?
A) 4. B) 6. C) 8. D) 12.
2. Екі параллель түзу үшінші түзумен қиылысқанда неше сүйір бұрыш пайда болады?
A) 2. B) 4. C) 6. D) 8.
3. Екі параллель түзу үшінші түзумен қиылысқанда неше доғал бұрыш пайда болады?
A) 2. B) 4. C) 8 D) 16.
4. Екі параллель түзу үшінші түзумен қиылысқанда неше тік бұрыш пайда болады?
A) 0. B) 2. C) 4. D) 8.
5. Екі параллель түзу үшінші түзумен қиылысқанда пайда болған бұрыштардың бірі 112°-қа тең. Пайда болған барлық бұрыштардың ішінен кішісін табыңдар.
A) Анықтауға болмайды. B) 34°. C) 68°. D) 112°.
6. Екі параллель түзу үшінші түзумен қиылысқанда пайда болған үш ішкі бұрыштардың қосындысы 290°-қа тең. Төртінші ішкі бұрышты табыңдар.
A) 145°. B) 110°. C) 35°. D) 70°.
7. Екі параллель түзу үшінші түзумен қиылысқанда пайда болған ішкі біржақты бұрыштардың биссектрисалары жататын түзулер бір-біріне қатысты қалай орналасады?
A) Перпендикуляр.
B) Параллель.
C) 45°-қа бұрыш жасап қиылысады.
D) 60°-қа бұрыш жасап қиылысады.
8. Екі параллель түзу үшінші түзумен қиылысқанда пайда болған ішкі айқыш бұрыштардың биссектрисалары жататын түзулер бір-біріне қатысты қалай орналасады?
A) Перпендикуляр.
B) Параллель.
C) 45° бұрыш жасап қиылысады.
D) 60° бұрыш жасап қиылысады.

9. Үшбұрыштың бұрыштарының қатынасы 2:3:4. Осы бұрыштарды табыңдар.
A) 20°, 30°, 40°. B) 40°, 60°, 80°. C) 36°, 54°, 90°. D) 18°, 27°, 36°.

10. Үшбұрыштың бұрыштарының қатынасы 1:2:3. Осы үшбұрыштың түрін анықтаңдар.
A) Теңбүйірлі. B) Сүйір бұрышты.
C) Тікбұрышты. D) Доғал бұрышты.

11. Бір бұрышы басқа екі бұрышының қосындысынан үлкен болатын үшбұрыштың түрін анықтаңдар.
A) Теңбүйірлі. B) Сүйір бұрышты.
C) Тікбұрышты. D) Доғал бұрышты.

12. Тікбұрышты үшбұрыштың екі сүйір бұрыштарының қатынасы 1:2. Оның үлкен сүйір бұрышын табыңдар.
A) 40°. B) 50°. C) 60°. D) 80°.

13. ABC үшбұрышында A бұрышы 50°, $AC = BC$. C бұрышын табыңдар.
A) 40°. B) 50°. C) 60°. D) 80°.

14. ABC үшбұрышында C бұрышы 100°, $AC = BC$. A бұрышын табыңдар.
A) 40°. B) 50°. C) 60°. D) 80°.

15. Теңбүйірлі үшбұрыштың бір бұрышы 90°. Оның басқа екі бұрышын табыңдар.
A) 30°. B) 45°. C) 60°. D) 90°.

16. Теңбүйірлі үшбұрыштың табанындағы бұрышы 70°. Оның бүйір қабырғасына жүргізілген биіктігі мен екінші бүйір қабырғасы арасындағы бұрышты табыңдар.
A) 20°. B) 50°. C) 70°. D) 110°.

17. Дұрыс үшбұрыштың екі биссектрисасы арасындағы бұрышты табыңдар.
A) 30°. B) 45°. C) 60°. D) 90°.

18. Үшбұрыштың екі бұрышы 40° және 60°. Осы бұрыштардың төбелерінен жүргізілген биіктіктердің арасындағы сүйір бұрышты табыңдар.
A) 20°. B) 40°. C) 80°. D) 100°.

19. Тікбұрышты үшбұрыштың бір сүйір бұрышы 40°. Үшбұрыштың тік бұрышының төбесінен жүргізілген биіктігі мен биссектрисасы арасындағы бұрышты табыңдар.
A) 5°. B) 10°. C) 15°. D) 20°.

20. Теңбүйірлі үшбұрыштың екі қабырғасы 10 см және 5 см. Оның үшінші қабырғасын табыңдар.
A) 5 см. B) 10 см. C) 15 см. D) 20 см.

4-ТАРАУ

ШЕҢБЕР. ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ САЛУЛАР

§ 18. ШЕҢБЕР ЖӘНЕ ДӨҢГЕЛЕК

18.1-суретте шеңбер көрсетілген. Шеңберлерді салу үшін циркуль қолданылады. Циркульдің көмегімен қандай да бір шеңбер сальщдар. Өздерің қандай фигура шеңбер деп аталатынын анықтап көріңдер.

Берілген нүктеден белгілі қашықтықта орналасқан жазықтықтың барлық нүктелерінен тұратын геометриялық фигура *шеңбер* деп аталады. Берілген нүкте *шеңбердің центрі*, берілген қашықтық — *шеңбердің радиусы* деп аталады. Шеңбердің нүктесін оның центрімен қосатын кез келген кесінді де радиус деп аталады (18.1-сурет).

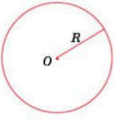
Сонымен, центрі O нүктесі және радиусы R болатын шеңбер осы O нүктесінен арақашықтығы R-ге тең жазықтықтың барлық нүктелерінен тұратын геометриялық фигураны құрайды.

18.2-суретте дөңгелек көрсетілген. Өздерің қандай фигура дөңгелек деп аталатынын анықтап көріңдер.

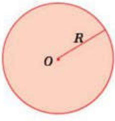
Берілген нүктеден берілген қашықтықтан аспайтын жазықтықтың барлық нүктелерінен тұратын фигура *дөңгелек* деп аталады (18.2-сурет). Берілген нүкте *дөңгелектің центрі*, ал берілген қашықтық — *дөңгелектің радиусы* деп аталады.

Сонымен, центрі O нүктесі және радиусы R болатын дөңгелек осы O нүктесінен арақашықтығы R-ден аспайтын жазықтықтың барлық нүктелерінен тұратын геометриялық фигураны құрайды.

Дөңгелекті шеңбермен шектелген фигура ретінде көрсетуге болады.

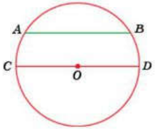


18.1-сурет

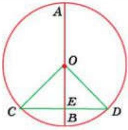


18.2-сурет

Шеңбердің кез келген екі нүктесін қосатын кесінді осы шеңбердің *хордасы* деп аталады. Шеңбердің центрі арқылы өтетін хорда осы шеңбердің *диаметрі* деп аталады (18.3-сурет).



18.3-сурет

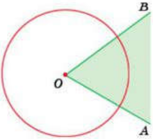


18.4-сурет

Дөңгелектің *хордасы* мен *диаметрі* деп осы дөңгелекті шектейтін шеңбердің сәйкесінше хордасы мен диаметрін айтады.

Теорема. ***Шеңбердің хордасына перпендикуляр диаметр осы хорданы қақ бөледі.***

Дәлелдеуі. Центрі O нүктесі болатын шеңбер берілсін және AB диаметрі CD хордасына перпендикуляр болсын. Егер CD хордасы O центрі арқылы өтсе, онда ол диаметр болып, O нүктесінде қақ бөлінеді. Енді CD хордасы O центрі арқылы өтпейтін болсын. Оның AB диаметрімен қиылысу нүктесін E деп белгілейік (18.4 сурет).



18.5-сурет

OEC және OED тікбұрышты үшбұрыштары тең (гипотенузасы мен катеті бойынша). Демек, $EC = ED$ ■.

Шеңбердің *центрлік бұрышы* деп төбесі осы шеңбердің центрінде жататын бұрышты айтады (18.5-сурет).

Центрлік бұрыштың ішінде орналасқан шеңбердің бөлігі *шеңбердің доғасы* деп аталады.

Центрлік бұрыштың ішінде орналасқан дөңгелектің бөлігі *дөңгелек сектор* деп аталады.

Дөңгелек секторды өздерің кескіндеңдер.

Шеңбер доғасының градустық шамасы деп центрлік бұрыштың сәйкесінше градустық өлшемін айтады. Егер шеңбердің екі доғасының градустық шамалары тең болса, олар *тең доғалар* деп аталады.

Дөңгелек секторлдың градустық шамасы не екенін өздерің анықтаңдар.

1. Қандай фигура шеңбер деп аталады? а) Шеңбердің центрі; ә) шеңбердің радиусы дегеніміз не?
2. Қандай фигура дөңгелек деп аталады? а) Дөңгелектің центрі; ә) дөңгелектің радиусы дегеніміз не?

3. Шеңбердің: а) хордасы; ә) диаметрі дегеніміз не?
4. Шеңбердің радиусы мен диаметрі өзара қалай байланысқан?
5. Шеңбердің ең үлкен хордасы не болады?
6. Хордаға перпендикуляр диаметр оны қандай қатынаста бөледі?
7. Шеңбердің центрлік бұрышы деп қандай бұрышты айтады?
8. Шеңбердің доғасы дегеніміз не?
9. Дөңгелек сектор дегеніміз не?
10. Шеңбер доғасының градустық шамасы дегеніміз не?
11. Шеңбердің қандай доғалары тең деп аталады?
12. Дөңгелек сектордың градустық шамасы дегеніміз не?

Жаттығулар

А

18.1. а) Центрі O нүктесі және радиусы R болатын дөңгелекте; ә) центрі O нүктесі және радиусы R болатын дөңгелектің сыртында жатқан A нүктелері қандай теңсіздікті қанағаттандырады?

18.2. Берілген нүкте арқылы өтетін, радиусы берілген шеңберлердің центрлері қандай фигураны құрайды?

18.3. Шеңбердің центрі арқылы неше диаметр жүргізуге болады?

18.4. Диаметрі радиусынан 55 мм үлкен болатын шеңбердің диаметрін табыңдар.

18.5. Қарбыз екі тең бөлікке бөлінді. Кесілген бөліктегі шеңбердің радиусы 15 см. Қарбыздың диаметрі қандай болып еді?

18.6. Киіз үй — көшпенділердің ежелден келе жатқан тұрғын үйі (18.6, а-сурет). Өлшемдері бойынша киіз үйлер әртүрлі болады. Егер: а) диаметрлері 1 м; 1,2 м; 1,4 м; 2 м болса, шаңырақтың (18.6. ә-сурет); ә) диаметрлері 5 м; 6 м; 7 м; 10 м болатын киіз үй керегесінің (18.6, б-сурет) радиусын табыңдар.

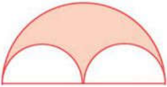

а)


ә)


б)

18.6-сурет

18.7. Кішкентай жартышеңберлердің әрқайсысының диаметрі (18.7, а-сурет) үлкен жартышеңбердің радиусына тең. Егер үлкен жартышеңбердің диаметрі d болса, кішкентай жартышеңберлердің радиусы неге тең болады? Мұндай фигураны Архимед *арбелос* деп атаған "αρβυλος" грек сөзі — етікшінің пышағы (18.7, ә-сурет) дегенді білдіреді. Бұл есепте кіші дөңгелектерінің диаметрлері тең болатын арбелос — теңбүйірлі арбелос қарастырылады.



а)

ә)

18.7-сурет

18.8. Егер киіз үй табанының радиусы а) 2,5 м; ә) 3 м; б) 3,5 м; в) 5 м болса, диаметрі қандай (18.8-сурет)?

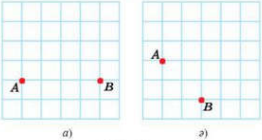
18.8-сурет

18.9. Градустық шамалары а) 90°; ә) 180° болатын дөңгелек секторды салыңдар.

B

18.10. *A* және *B* нүктелерінің арақашықтығы 2 см. Осы нүктелер арқылы өтетін шеңбердің мүмкін болатын ең кіші радиусын табыңдар.

18.11. Торкөз қағазда берілген екі нүкте арқылы өтетін және тордың түйіндерінде орналасқан шеңбердің центрлерін кескіндеңдер (18.9-сурет).

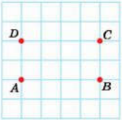


18.9-сурет

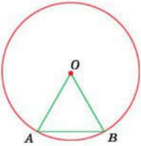
18.12. Берілген екі нүкте арқылы неше шеңбер жүргізуге болады?

18.13. Торкөз қағазға берілген A, B, C, D нүктелері арқылы өтетін шеңбердің O центрін кескіндеңдер (18.10-сурет).

18.14. Шеңбердің AB хордасы оның OA радиусына тең (18.11-сурет). AOB бұрышы неге тең?



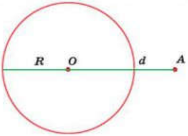
18.10-сурет



18.11-сурет

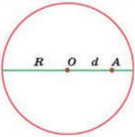
18.15. A нүктесі радиусы R болатын шеңбердің сыртында оның центрі O нүктесінен d қашықтықта орналасқан (18.12-сурет). A нүктесінен берілген шеңбердің нүктелеріне дейінгі ең кіші және ең үлкен қашықтықтар неге тең?

18.16. Шеңберден тыс жатқан берілген нүктеден шеңбердің нүктесіне дейінгі ең үлкен және ең кіші қашықтықтар сәйкесінше 50 см мен 20 см. Осы шеңбердің радиусын табыңдар.



18.12-сурет

18.17. A нүктесі радиусы R болатын шеңбердің ішінде жатыр және шеңбердің центрі O нүктесінен d қашықтықта орналасқан (18.13-сурет). A нүктесінен берілген шеңберге дейінгі ең кіші және ең үлкен қашықтықтар неге тең?



18.13-сурет

18.18. Шеңбердің ішінде орналасқан берілген нүктеден шеңбердің нүктесіне дейінгі ең үлкен және ең кіші қашықтықтар сәйкесінше 20 см мен 4 см. Осы шеңбердің радиусын табыңдар.

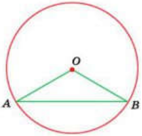
C

18.19. Хорданың ортасы арқылы жүргізілген диаметр осы хордаға перпендикуляр болатынын дәлелдеңдер.

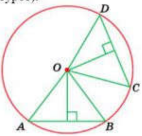
18.20. 18.14-суретті пайдаланып, диаметр шеңбердің ең үлкен хордасы болатынын дәлелдеңдер.

18.21. Шеңбердің тең хордалары оның центрінен бірдей қашықтықта болатынын дәлелдеңдер (18.15-сурет).

18.22. Шеңбер центрінен бірдей қашықтықта жатқан хордалар тең болатынын дәлелдеңдер (18.15-сурет).



18.14-сурет



18.15-сурет

Хабарлама дайындаңдар

18.23. Шеңбер — ертеден қалыптасқан геометриялық фигуралардың бірі. Коперник, Галилей, Кеплердің (XVII ғ.) ілімдері туралы айтыңдар.

18.24. Түзу мен шеңбердің неше ортақ нүктесі болуы мүмкін? Мүмкін жағдайларды кескіндеңдер.

§ 19. ТҮЗУ МЕН ШЕҢБЕРДІҢ ӨЗАРА ОРНАЛАСУЫ

Түзу мен шеңбердің өзара орналасу жағдайларын қарастырайық.

Түзу мен шеңбердің ортақ нүктесі болмауы мүмкін (19.1, а-сурет), бір ғана ортақ нүктесі (19.1, ә-сурет) немесе екі ортақ нүктесі (19.1, б-сурет) болуы мүмкін.

Егер түзудің шеңбермен бір ғана ортақ нүктесі болса, онда *түзу шеңберді жанайды* дейді және түзудің өзін шеңберге *жанама* деп айтады (19.1, ә-сурет).

Сонымен, ***шеңберге жанама*** — *шеңбермен бір ортақ нүктесі болатын түзу*. Ортақ нүкте *жанасу нүктесі* деп аталады.

Егер түзу мен шеңбердің екі ортақ нүктесі болса, онда түзу мен шеңбер *қиылысады* дейді (19.1, б-сурет).

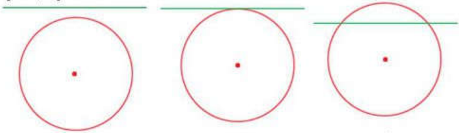
Түзу мен шеңбердің өзара орналасуы шеңбердің центрі мен берілген түзудің арақашықтығына байланысты.

Түзу салыңдар және осы түзуден 4 см қашықтықта орналасқан O нүктесін белгілеңдер. Циркульдің көмегімен центрі O нүктесі және радиусы 3 см болатын шеңбер жүргізіңдер.

Осы түзу мен шеңбер бір-біріне қатысты қалай орналасады?

Осы сұраққа жауапты мына теорема береді.

Теорема. ***Егер шеңбердің центрінен түзуге дейінгі қашықтық шеңбердің радиусынан үлкен болса, онда бұл түзу мен шеңбердің ортақ нүктесі болмайды.***



а) *ә)* *б)*

19.1-сурет

Дәлелдеуі. Шеңбердің O центрінен түзуге дейінгі a қашықтығы шеңбердің R радиусынан үлкен болсын (19.2-сурет).

Осы түзуге O центрінен OA перпендикулярын түсірейік. Сонда $OA > R$. a түзуінің кез келген басқа B нүктесінен салынған OB көлбеуі OA перпендикулярынан үлкен болады, демек, R радиустан да үлкен. Сонымен, a түзуінің кез келген нүктесінен O центріне дейінгі қашықтық R-ден үлкен. Демек, a түзуі мен шеңбердің ортақ нүктелері болмайды.

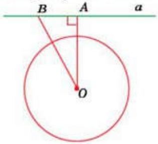
Түзу салыңдар және осы түзуден 4 см қашықтықта орналасқан O нүктесін белгілеңдер. Циркульдің көмегімен центрі O нүктесі және радиусы 4 см болатын шеңбер жүргізіңдер.

Осы түзу мен шеңбер бір-біріне қатысты қалай орналасады?

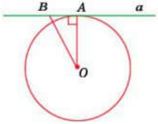
Осы сұраққа жауапты мына теорема береді.

Теорема. ***Егер шеңбердің центрінен түзуге дейінгі қашықтық шеңбердің радиусына тең болса, онда осы түзу шеңберге жанама болады.***

Дәлелдеуі. Шеңбердің O центрінен a түзуіне дейінгі қашықтық шеңбердің R радиусына тең болсын (19.3-сурет).



19.2-сурет



19.3-сурет

Шеңбердің O центрінен осы түзуге OA перпендикулярын түсірейік. Сонда $OA = R$. a түзуінің кез келген басқа B нүктесінен салынған OB көлбеуі OA перпендикулярынан үлкен болады, демек, R радиустан да үлкен. Сонымен, a түзуінің A нүктесінен басқа кез келген нүктесінен O центріне дейінгі қашықтық R радиустан үлкен. Демек, a түзуі мен шеңбердің бір ғана ортақ A нүктесі болады, яғни түзу шеңберді жанайды.

Енді шеңбердің центрінен түзуге дейінгі қашықтық шеңбердің радиусынан кіші болатын жағдайды қарастыру ғана қалды.

Түзу салыңдар және осы түзуден 4 см қашықтықта орналасқан O нүктесін белгілеңдер. Циркульдің көмегімен центрі O нүктесі және радиусы 5 см болатын шеңбер жүргізіңдер.

Осы түзу мен шеңбер бір-біріне қатысты қалай орналасады?

Егер шеңбер центрінен түзуге дейінгі қашықтық шеңбердің радиусынан кіші болса, онда түзу мен шеңбердің қиылысатынын дәлелдеусіз қабылдайық.

Түзу мен шеңбердің өзара орналасуының қарастырылған жағдайларынан жанаманың мына қасиеті шығады.

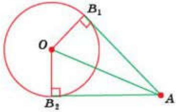
Теорема. ***Шеңберге жанама осы шеңбердің жанасу нүктесіне жүргізілген радиусына перпендикуляр болады.***

Дәлелдеуі. Шынында, егер түзу шеңберді жанаса, онда шеңбер центрінен түзуге дейінгі қашықтық оның радиусынан үлкен немесе кіші болуы мүмкін емес, демек, ол радиусқа тең болады. Сондықтан, жанамаға түсірілген OA перпендикуляры шеңбердің радиусы болады, демек, шеңберге жанама осы радиусқа перпендикуляр ■.

Шеңберді және осы шеңберге жанама түзуді салыңдар.

Теорема. ***Шеңберден тыс жатқан нүктеден осы шеңберге жүргізілген жанамалардың кесінділері тең болады.***

Дәлелдеуі. AB_1 және AB_2 — центрі O нүктесі болатын шеңберге жүргізілген жанамалардың кесінділері болсын (19.4-сурет). AOB_1 және AOB_2 тікбұрышты үшбұрыштары катеті мен гипотенузасы бойынша тең ($OB_1 = OB_2$, AO гипотенузасы ортақ). Демек, AB_1 мен AB_2 кесінділері тең болады ■.



19.4-сурет

1. Түзу мен шеңбер бір-біріне қатысты қалай орналасады?
2. Қандай түзу а) шеңберге жанама; б) шеңберді қиюшы деп аталады?
3. Қандай жағдайда түзу мен шеңбердің ортақ нүктесі болмайды?
4. Қандай жағдайда түзу шеңберді жанайды?
5. Қандай жағдайда түзу мен шеңбер қиылысады?

Жаттығулар

А

19.1. Түзу шеңберді қияды. Берілген шеңбермен шектелген, түзу мен дөңгелектің қиылысуынан (ортақ бөлігі) шыққан фигура қалай аталады?

19.2. а) шеңбердің ішінде; ә) шеңберден тыс; б) шеңбердің бойында жатқан нүкте арқылы берілген шеңберге неше жанама жүргізуге болады?

19.3. Берілген түзуді берілген нүктеде жанайтын неше шеңбер жүргізуге болады?

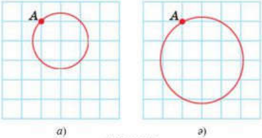
19.4. Берілген түзуді берілген нүктеде жанайтын берілген радиуспен неше шеңбер жүргізуге болады?

19.5. Шеңберге жанама мен жанасу нүктесінен жүргізілген радиус қандай бұрыш жасайды?

B

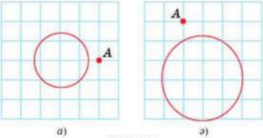
19.6. Егер шеңбердің радиусы 3 см және шеңбердің центрінен түзуге дейінгі қашықтық: а) 2 см; ә) 3 см; б) 4 см болса, түзу мен шеңбердің өзара орналасуы қандай?

19.7. Торкөз қағазға *A* нүктесі арқылы берілген шеңберге жанама жүргізіңдер (19.5-сурет).



19.5-сурет

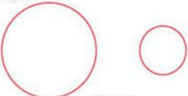
19.8. Торкөз қағазға *A* нүктесі арқылы берілген шеңберге жанама жүргізіңдер (19.6-сурет).



19.6-сурет

19.9. Екі түзу шеңберді қарама-қарсы диаметрлі нүктелерде жанайды. Осы түзулердің өзара орналасуы қандай?

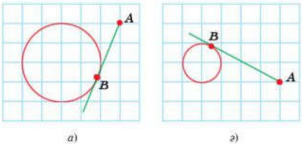
19.10. 19.7-суретте кескінделген екі шеңберді жанайтын қанша түзу жүргізуге болады?



19.7-сурет

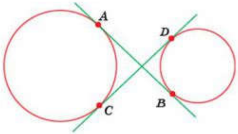
C

19.11. AB жанама кесіндісінің ұзындығын табыңдар (19.8-сурет). Торкөз қабырғасы 1-ге тең.



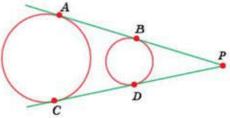
19.8-сурет

19.12. Екі шеңберге ортақ ішкі жанамаларының AB және CD кесінділері тең болатынын дәлелдеңдер (19.9-сурет).



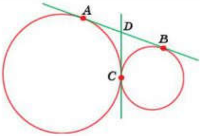
19.9-сурет

19.13. Екі шеңберге ортақ сыртқы жанамаларының AB және CD кесінділері тең болатынын дәлелдеңдер (19.10-сурет).

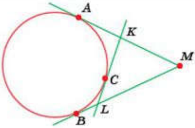


19.10-сурет

19.14. 19.11-суретте DA, DB, DC — жанамалар. D нүктесі AB кесіндісін қандай қатынаста бөледі?



19.11-сурет



19.12-сурет

19.15. Шеңберден тыс жатқан M нүктесі арқылы MA және MB жанамалары жүргізілген. Шеңбердің C нүктесі арқылы MA және MB кесінділерін сәйкесінше K мен L нүктелерінде қиып өтетіндей жанама жүргізілген (19.12-сурет). KLM үшбұрышының периметрі C нүктесінің орналасуына байланысты болмайтынын дәлелдеңдер.

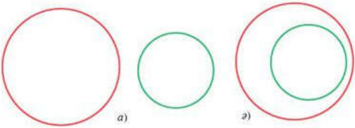
Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

19.16. Екі шеңбердің неше ортақ нүктелері болуы мүмкін? Мүмкін жағдайларды кескіндеңдер.

§ 20. ЕКІ ШЕҢБЕРДІҢ ӨЗАРА ОРНАЛАСУЫ

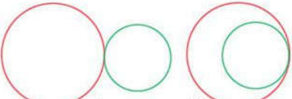
Екі шеңбердің өзара орналасуы жағдайларын қарастырайық.

1) Екі шеңбердің ортақ нүктелері болмауы мүмкін. Бұл жағдайда олар бір-бірінен тыс жатуы (20.1, а-сурет) немесе біреуі екіншісінің ішінде орналасуы мүмкін (20.1, ә-сурет).



20.1-сурет

2) Екі шеңбердің ортақ бір нүктесі болуы мүмкін. Бұл жағдайда шеңберлер *жанасады* деп айтады. Шеңберлер сырттай (20.2, а-сурет) немесе іштей жанасуы мүмкін (20.2, ә-сурет).

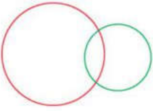


а) ә)

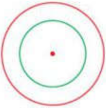
20.2-сурет

3) Екі шеңбердің екі ортақ нүктесі болуы мүмкін (20.3-сурет). Бұл жағдайда шеңберлер *қиылысады* деп атайды.

Центрлері ортақ шеңберлер *центрлес* шеңберлер деп аталады (20.4-сурет).



20.3-сурет



20.4-сурет

Екі шеңбердің өзара орналасуы олардың радиустары мен центрлерінің арақашықтығына байланысты болады.

Бір-бірінен 6 см қашықтықта орналасқан O_1 және O_2 нүктелерін кескіндеңдер. Циркульдің көмегімен центрі O_1 нүктесі және радиусы 3 см болатын шеңбер жүргізіңдер. Центрі O_2 нүктесі және радиусы 2 см болатын шеңбер жүргізіңдер.

Осы шеңберлер бір-біріне қатысты қалай орналасады?

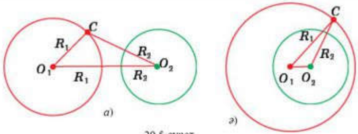
Бір-бірінен 1 см қашықтықта орналасқан O_1 және O_2 нүктелерін кескіндеңдер. Циркульдің көмегімен центрі O_1 нүктесі және радиусы 4 см болатын шеңбер жүргізіңдер. Центрі O_2 нүктесі және радиусы 2 см болатын шеңбер жүргізіңдер.

Осы шеңберлер бір-біріне қатысты қалай орналасады?

Осы сұрақтарға жауапты мына теорема береді.

Теорема. ***Егер екі шеңбердің центрлерінің арақашықтығы олардың радиустарының қосындысынан үлкен немесе айырымынан кіші болса, онда бұл шеңберлердің ортақ нүктелері болмайды.***

Дәлелдеуі. Центрлері O_1, O_2 нүктелерінде және радиустары сәйкесінше R_1, R_2, $O_1O_2 > R_1 + R_2$ болатын екі шеңбер берілсін (20.5, а-сурет).



20.5-сурет

Бірінші шеңбердегі C нүктесін қарастырайық, $O_1C = R_1$. Сонда $O_2C \geq O_1O_2 - O_1C > R_1 + R_2 - R_1 = R_2$, демек, C нүктесі екінші шеңберге тиісті емес. Ендеше, бұл шеңберлердің ортақ нүктесі жоқ және олардың біреуі екіншісінен тыс жатыр.

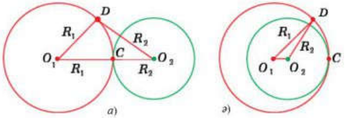
Енді $O_1O_2 < R_1 - R_2$ $(R_1 > R_2)$ болсын делік (20.5, ә-сурет). Бірінші шеңбердегі C нүктесін қарастырайық, $O_1C = R_1$. Сонда $O_2C \geq O_1C - O_1O_2 = R_1 - O_1O_2 > R_2$, демек, C нүктесі екінші шеңберге тиісті емес. Ендеше, бұл шеңберлердің ортақ нүктесі жоқ және олардың біреуі екіншісінің ішінде жатыр.

Өздерің бір-бірімен жанасатын шеңберлердің радиустары мен олардың центрлерінің арақашықтығы арасындағы қатынасты орнатып көріңдер (20.2-сурет).

Осыған жауап ретінде мына теорема орынды.

Теорема. ***Егер екі шеңбердің центрлерінің арақашықтығы олардың радиустарының қосындысына немесе айырымына тең болса, онда бұл шеңберлер жанасады.***

Дәлелдеуі. Центрлері O_1, O_2 нүктелері және радиустары сәйкесінше R_1, R_2, $O_1O_2 = R_1 + R_2$ болатын екі шеңбер берілсін (20.6, а-сурет).



20.6-сурет

O_1O_2 кесіндісіндегі C нүктесін қарастырайық, $O_1C = R_1$. Сонда $O_2C = R_2$. Демек, C нүктесі берілген шеңберлердің ортақ нүктесі болады. Егер D нүктесі бірінші шеңбердегі C нүктесінен өзге нүкте болса, онда үшбұрыштың теңсіздігінен $O_2D > O_1O_2 - O_1D = R_1 + R_2 - R_1 = R_2$ шығады. Ендеше, D нүктесі екінші шеңберге тиісті емес.

Демек, берілген шеңберлердің ортақ бір нүктесі бар, яғни шеңберлер сырттай жанасады.

Енді $O_1O_2 = R_1 - R_2 (R_1 > R_2)$ деп ұйғарайық (20.6, ә-сурет). O_1O_2 сәулесіндегі C нүктесін қарастырайық, $O_1C = R_1$. Сонда $O_2C = R_2$. Демек, C нүктесі берілген шеңберлердің ортақ нүктесі болады. D нүктесі бірінші шеңбердегі C нүктесінен өзге нүкте болса, онда үшбұрыштың теңсіздігінен $O_2D > O_1D - O_1O_2 = R_1 - O_1O_2 = R_2$ шығады. Ендеше, D нүктесі екінші шеңберге тиісті емес. Демек, берілген шеңберлердің ортақ бір нүктесі бар, яғни шеңберлер іштей жанасады.

Сырттай және іштей жанасатын шеңберлерді кескіндеңдер.

Екі шеңбердің орналасуының соңғы жағдайын қарастырайық.

Бір-бірінен 6 см қашықтықта орналасқан O_1 және O_2 нүктелерін кескіндеңдер. Циркульдің көмегімен центрі O_1 нүктесі және радиусы 4 см болатын шеңбер жүргізіңдер. Центрі O_2 нүктесі және радиусы 3 см болатын шеңбер жүргізіңдер.

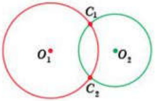
Осы шеңберлер бір-біріне қатысты қалай орналасады?

Бір-бірінен 2 см қашықтықта орналасқан O_1 және O_2 нүктелерін кескіндеңдер. Циркульдің көмегімен центрі O_1 нүктесі және радиусы 3 см болатын шеңбер жүргізіңдер. Центрі O_2 нүктесі және радиусы 2 см болатын шеңбер жүргізіңдер.

Осы шеңберлер бір-біріне қатысты қалай орналасады?

Осы сұрақтарға жауапты келесі теорема береді.

Теорема. ***Егер екі шеңбердің центрлерінің арақашықтығы олардың радиустарының қосындысынан кіші және айырымынан үлкен болса, онда бұл шеңберлер қиылысады*** (20.7-сурет).



20.7-сурет

Теореманы дәлелдеусіз қабылдаймыз.

1. Екі шеңбер бір-біріне қатысты қалай орналасуы мүмкін?
2. Екі шеңбердің неше ортақ нүктесі болуы мүмкін?
3. Қандай екі шеңберді а) жанасатын; ә) қиылысатын деп атайды?
4. Қандай шеңберлер центрлес деп аталады?
5. Қандай жағдайда бір шеңбер а) екіншісінен тыс; ә) екіншісінің ішінде жатады?
6. Қандай жағдайда екі шеңбер а) сырттай; ә) іштей жанасады?
7. Қандай жағдайда екі шеңбер қиылысады?

Жаттығулар

А

20.1. а) ортақ нүктесі жоқ; ә) центрлес; б) сырттай жанасатын; в) іштей жанасатын; г) қиылысатын екі шеңбер салыңдар.

20.2. Радиусы 3 см-ге тең шеңбер және оның центрінен 5 см қашықтықта жатқан A нүктесі берілген. Центрі A нүктесі болатын және берілген шеңбермен а) сырттай; ә) іштей жанасатын екінші шеңбердің радиусын табыңдар.

20.3. Екі шеңбердің центрлерінің арақашықтығы 5 см. Егер радиустары а) 2 см және 3 см; ә) 2 см және 2 см болса, олар бір-біріне қатысты қалай орналасқан?

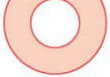
20.4. Екі шеңбердің центрлерінің арақашықтығы 2 см. Егер олардың радиустары а) 3 см және 5 см; ә) 2 см және 5 см болса, олар бір-біріне қатысты қалай орналасқан?

20.5. Радиустары 4 см және 6 см болатын шеңберлер а) сырттай; ә) іштей жанасса, олардың центрлерінің арақашықтығы неге тең?

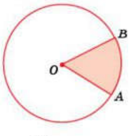
В

20.6. 20.8-суретте *сақина* деп аталатын фигура кескінделген. Осы фигураның анықтамасын тұжырымдаңдар.

20.7. 20.9-суретте *сектор* деп аталатын фигура кескінделген. Осы фигураның анықтамасын тұжырымдаңдар.



20.8-сурет



20.9-сурет

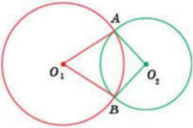
20.8. Екі шеңбердің центрлерінің арақашықтығы d және ол R_1 мен R_2 радиустарының қосындысынан үлкен. Осы шеңберлерде жатқан нүктелердің ең кіші және ең үлкен арақашықтықтарын табыңдар.

20.9. Екі шеңбердің центрлерінің арақашықтығы d және ол R_1 мен R_2 радиустарының айырымынан кіші $R_1 - R_2$ ($R_1 > R_2$). Осы шеңберлерде жатқан нүктелердің ең кіші және ең үлкен арақашықтықтарын табыңдар.

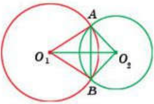
20.10. Егер бір інжу тастың радиусы 5 мм болса, ұзындығы 50 см-ге моншақ дайындау үшін неше інжу тасы керек болады?

C

20.11. Центрлері O_1, O_2 нүктелері болатын екі шеңбер A және B нүктелерінде қиылысады. $\angle O_1AO_2 = \angle O_1BO_2$ болатынын дәлелдеңдер (20.10-сурет).



20.10-сурет



20.11-сурет

20.12. Центрлері O_1, O_2 нүктелері болатын екі шеңбер A және B нүктелерінде қиылысады (20.11-сурет). O_1O_2 түзуі AB түзуіне перпендикуляр болатынын дәлелдеңдер.

20.13. Радиустары бірдей үш шеңбер бір-бірімен қос-қостан жанасады. Олардың центрлері дұрыс үшбұрыштың төбелері болатынын дәлелдеңдер.

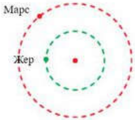
20.14. а) үш шеңбер; ә) төрт шеңбер; б) бес шеңбер бір-бірімен қос-қостан жанаса ма?

20.15. Радиустары бірдей төрт шеңбер бір-бірімен қос-қостан жанаса ма?

20.16. а) екі шеңбер; ә) үш шеңбер; б) төрт шеңбер; в) n шеңбер қос-қостан қиылысқанда ең көп дегенде неше нүктесі болады? Сәйкес шеңберлерді салыңдар.

20.17. а) екі шеңбер; ә) үш шеңбер; б) төрт шеңбер жазықтықты ең көп дегенде неше бөлікке бөледі? Сәйкес бөліктерді салыңдар.

20.18. Жер мен Марс Күнді әртүрлі бұрыштық жылдамдықтармен радиустары 150 және 228 миллион километр болатын дөңгелек (шамамен) орбиталар бойымен айналады (20.12-сурет). Жер мен Марстың арасындағы ең үлкен және ең кіші арақашықтықтарды табыңдар.



20.12-сурет

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

20.19. A және B нүктелерін кескіндеңдер. A және B нүктелеріне дейінгі қашықтықтары тең болатын нүктелерді көрсетіңдер.

§ 21. НҮКТЕЛЕРДІҢ ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ ОРНЫ

Жазықтықта фигураның берілуінің негізгі тәсілдерінің бірі — осы фигураның нүктелері қанағаттандыратын қасиеттерді көрсету болады.

Шеңбердің анықтамасын еске түсірейік. *Берілген нүктеден белгілі қашықтықта орналасқан жазықтықтың барлық нүктелерінен тұратын геометриялық фигура шеңбер деп аталады*. Мұндағы қасиет: берілген нүктеден белгілі қашықтыққа алшақтауы болады.

Берілген қасиетті қанағаттандыратын барлық нүктелерден тұратын фигуралар "нүктелердің геометриялық орны" деген ерекше атауға ие болды. Сонымен, берілген қасиетті немесе бірнеше қасиетті қанағаттандыратын барлық нүктелерден тұратын фигура *нүктелердің геометриялық орны* деп аталады.

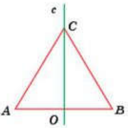
Бұл анықтамадағы "берілген қасиетті қанағаттандыратын барлық нүктелер" деген сөзінің мағынасын түсіндірейік. Оның мағынасы, фигураға тиісті барлық нүктелер берілген қасиетті қанағаттандырады және керісінше, берілген қасиетті қанағаттандыратын барлық нүктелер фигураға тиісті болады. Басқаша айтқанда, егер берілген қасиет орындалса сонда тек сонда ғана, нүкте фигураға тиісті болады.

Сонымен, шеңбер берілген нүктеден белгілі қашықтықта жатқан жазықтықтағы нүктелердің геометриялық орны болады.

Тағы бірнеше нүктелердің геометриялық орнын қарастырайық.

Берілген кесіндінің *орта перпендикуляры* деп осы кесіндіге перпендикуляр және оның ортасы арқылы өтетін түзуді айтады.

Орта перпендикуляр қандай нүктелердің геометриялық орны екенін анықтайық.



21.1-сурет

Теорема. ***Кесіндінің орта перпендикуляры осы кесіндінің ұштарынан бірдей қашықтықтағы нүктелердің геометриялық орны болады.***

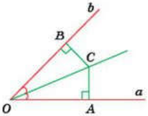
Дәлелдеуі. AB кесіндісі және оның ортасы O нүктесі берілсін. A және B нүктелерінен бірдей қашықтықтағы нүктелердің геометриялық орны AB кесіндісінің орта перпендикуляры c болатынын көрсетейік (21.1-сурет).

Шынында, O нүктесі A, B нүктелерінен бірдей қашықтықта жатады және орта перпендикулярға тиісті болады. Егер C нүктесі A мен B нүктелерінен бірдей қашықтықта жатып, O нүктесімен беттеспесе, онда ABC үшбұрышы теңбүйірлі және CO — оның медианасы. Теңбүйірлі үшбұрыштың қасиеті бойынша оның медианасы да, биіктігі де болады. Демек, C нүктесі орта перпендикулярға тиісті.

Керісінше, C нүктесі орта перпендикулярға тиісті және O нүктесімен беттеспейтін болсын. Сонда AOC және BOC тікбұрышты үшбұрыштары тең (катеттері бойынша). Демек, $AC = BC$ ■.

Кесіндіні және оның орта перпендикулярын салыңдар.

Теорема. ***Бұрыштың биссектрисасы осы бұрыштың ішінде және оның қабырғаларынан бірдей қашықтықта жататын нүктелердің геометриялық орны болады.***



21.2-сурет

Дәлелдеуі. Төбесі O нүктесінде, қабырғалары a, b болатын бұрышты қарастырайық. C нүктесі берілген бұрыштың ішінде жатсын. Осы нүктеден a және b қабырғаларына сәйкесінше CA және CB перпендикулярларын түсірейік (21.2-сурет).

Егер $CA = CB$ болса, онда AOC және BOC тікбұрышты үшбұрыштары тең болады (гипотенузасы мен катеті бойынша). Осыдан AOC мен BOC бұрыштары тең. Демек, C нүктесі бұрыштың биссектрисасына тиісті.

Керісінше, егер C нүктесі бұрыштың биссектрисасына тиісті болса, онда AOC және BOC тікбұрышты үшбұрыштары тең болады (гипотенузасы мен сүйір бұрышы бойынша). Осыдан $AC = BC$. Демек, C нүктесі берілген бұрыштың қабырғаларынан бірдей қашықтықта жатады ■.

Бұрышты және осы бұрыштың биссектрисасын салыңдар.

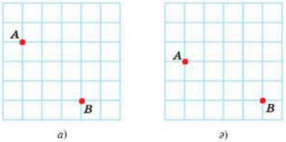
1. Нүктелердің геометриялық орны дегеніміз не?
2. Нүктелердің геометриялық орны ұғымымен шеңберді анықтаңдар.
3. Қандай түзу кесіндінің орта перпендикуляры деп аталады?
4. а) кесіндінің орта перпендикуляры; ә) бұрыштың биссектрисасы қандай нүктелердің геометриялық орны болады?

Жаттығулар

A

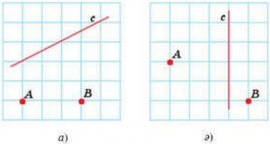
21.1. а) кесінді; ә) сәуле; б) центрі O және радиусы R болатын дөңгелек; в) центрі O және радиустары R_1, R_2 ($R_1 < R_2$) болатын сақина қандай нүктелердің геометриялық орны болады?

21.2. Торкөз қағазға A және B нүктелерінен бірдей қашықтықта жатқан нүктелердің геометриялық орнын (НГО) кескіндеңдер (21.3-сурет).



21.3-сурет

21.3. c түзуінде A және B нүктелерінен бірдей қашықтықта жатқан C нүктесін кескіндеңдер (21.4-сурет).

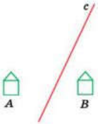


21.4-сурет

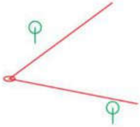
21.4. A, B, C, D елді мекендері, мұндағы A ауылы D ауылынан оңтүстікке қарай бірнеше километр қашықтықта, ал B және C ауылдары A ауылынан батыс пен шығысқа қарай (сәйкесінше) бірдей қашықтықта болатындай орналасқан. B және C ауылдары D ауылынан бірдей қашықтықта орналасқаны дұрыс па?

21.5. Екі үй жолдың әр жағында орналасқан (21.5-сурет). Осы екі үйден бірдей қашықтықта орналасатындай автобус аялдамасын қай орынға салу керек?

21.6. Алдарында қарақшылардың қазына жасырған аралы картасының бөлігі көрсетілген (21.6-сурет). Өкінішке орай, қазынаның қай жерде жасырылғаны белгіленбеген, бірақ сақталған бағдарлар (жол торабындағы тас пен екі ағаш) арқылы оны анықтауға болады. Қазына екі жолдан және екі ағаштан бірдей қашықтықта жасырылғаны белгілі. Қазынаны таба аласыңдар ма?



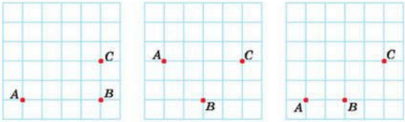
21.5-сурет



21.6-сурет

B

21.7. A, B және C нүктелерінен бірдей қашықтықта жатқан нүктені белгілеңдер (21.7-сурет).

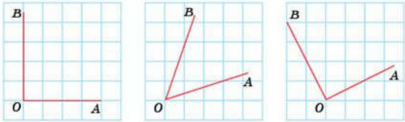


а) ә) б)

21.7-сурет

21.8. A және B жазықтықтың нүктелері болсын. а) $AC > BC$; ә) $AC < AB$ үшін C нүктелерінің геометриялық орнын көрсетіңдер.

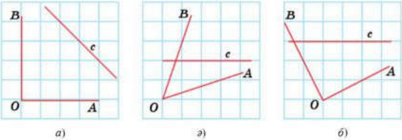
21.9. AOB бұрышының қабырғаларынан бірдей қашықтықта жатқан ішкі нүктелерінің геометриялық орнын кескіндеңдер (21.8-сурет).



а) ә) б)

21.8-сурет

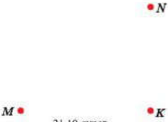
21.10. *AOB* бұрышының қабырғаларынан бірдей қашықтықта жатқан *c* түзуінен *C* нүктесін белгілеңдер (21.9-сурет).



21.9-сурет

C

21.11. *M, N, K* елді мекендері бір түзудің бойында орналаспаған (21.10-сурет). *N* қаласы арқылы *M* және *K* қалаларынан бірдей қашықтықта жататын түзусызықты жолды қалай салуға болады?

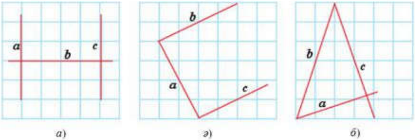


21.10-сурет

21.12. Берілген *A* және *B* нүктелері арқылы өтетін шеңберлердің центрлерінің геометриялық орнын табыңдар.

21.13. Табаны *AB* болатын теңбүйірлі үшбұрыштардың *C* төбелерінің геометриялық орнын табыңдар.

21.14. 21.11-суретте кескінделген *a, b, c* үш түзуінен бірдей қашықтықта жатқан нүктелерді көрсетіңдер.



21.11-сурет

21.15. Берілген екі қиылысатын a және b түзулерін жанайтын шеңберлердің центрлерінің геометриялық орнын табыңдар.

21.16. Радиусы R шеңбер берілген. Осы шеңберді жанайтын екінші шеңбердің де радиусы R. Осы шеңберлер центрлерінің геометриялық орнын табыңдар.

21.17. Радиусы R_1 шеңбер берілген. Осы шеңберді радиусы R-ге тең $(R \neq R_1)$ шеңбер жанайды. Осы шеңберлер центрлерінің геометриялық орнын табыңдар.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

21.18. Шеңберді және төбелері осы шеңбердің бойында жатқан үшбұрышты кескіндеңдер.

21.19. Шеңберді және қабырғалары осы шеңберді жанайтын үшбұрышты кескіндеңдер.

§ 22. ҮШБҰРЫШҚА СЫРТТАЙ СЫЗЫЛҒАН ШЕҢБЕР. ҮШБҰРЫШҚА ІШТЕЙ СЫЗЫЛҒАН ШЕҢБЕР

Егер үшбұрыштың барлық төбелері шеңбердің бойында жатса, онда шеңбер үшбұрышқа *сырттай сызылған* немесе үшбұрыш шеңберге *іштей салынған* деп аталады (22.1-сурет).

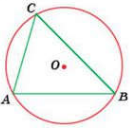
Қандай да бір үшбұрыш салыңдар. Оған сырттай шеңбер сызып көріңдер.

Қалай ойлайсыңдар, кез келген үшбұрышқа сырттай шеңбер сызуға бола ма?

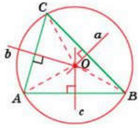
Осы сұраққа жауапты мына теорема береді.

Теорема. ***Кез келген үшбұрышқа сырттай шеңбер сызуға болады. Оның центрі үшбұрыштың қабырғаларына түсірілген орта перпендикулярларының қиылысу нүктесі болады.***

Дәлелдеуі. ABC үшбұрышын қарастырайық. AB және AC қабырғаларына сәйкесінше c және b орта перпендикулярларын жүргіземіз (22.2-сурет).



22.1-сурет



22.2-сурет

Олардың қиылысу O нүктесі сырттай сызылған шеңбердің центрі болатынын дәлелдейік. Ол үшін $OA = OB = OC$ теңдігінің орындалуын тексерсек жеткілікті. Шынында, O нүктесі AB кесіндісіне түсірілген c орта перпендикулярына тиісті болғандықтан, ол A және B төбелерінен бірдей қашықтықта жатады, яғни $OA = OB$. O нүктесі AC кесіндісіне түсірілген b орта перпендикулярына тиісті болғандықтан, ол A және C төбелерінен бірдей қашықтықта жатады, яғни $OA = OC$. Демек, O нүктесі ABC үшбұрышының A, B, C төбелерінен бірдей қашықтықта орналасқан: $OA = OB = OC$. $OB = OC$ теңдігінен O нүктесі BC кесіндісіне түсірілген A орта перпендикулярына тиісті екенін байқаймыз. Сонымен, барлық үш орта перпендикуляр бір O нүктесінде қиылысады. Центрі осы нүктеде және радиусы $R = OA = OB = OC$ болатын шеңбер ізделінді сырттай сызылған шеңбер болып табылады.

Параллельдік аксиоманы және қарсы ұйғару әдісін пайдаланып, үшбұрыштың екі қабырғасына түсірілген орта перпендикулярлардың қиылысатынын дәлелдейік. ABC —үшбұрышы, c және b—сәйкесінше AB және AC қабырғаларына түсірілген орта перпендикулярлары болсын (22.3-сурет).

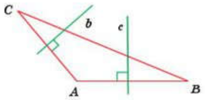
b мен c түзулері қиылыспайды делік, демек, олар параллель. AB түзуі c түзуіне перпендикуляр. AC түзуі b түзуіне перпендикуляр, демек, оған c түзуі де параллель. Сонымен, AB және AC түзулері бір c түзуіне перпендикуляр болады. Бірақ нүктеден түзуге жүргізілген перпендикулярдың жалғыздығы туралы теорема бойынша, олар беттесуі керек. Алайда бұл түзулер қиылысады. Осыдан b және c түзулері параллель дегеніміз дұрыс емес. Демек, олар қиылысады ■.

Сүйір бұрышты және доғал бұрышты үшбұрыштарға сырттай сызылған шеңберлерді салыңдар.

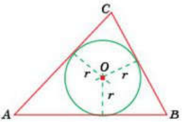
Егер үшбұрыштың барлық қабырғалары шеңберге жанасатын болса, онда шеңбер үшбұрышқа *іштей сызылған* немесе үшбұрыш шеңберге *сырттай сызылған* деп аталады (22.4-сурет).

Қандай да бір үшбұрыш салыңдар. Оған іштей шеңбер сызып көріңдер.

Қалай ойлайсыңдар, кез келген үшбұрышқа іштей шеңбер сызуға бола ма?



22.3-сурет

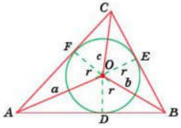


22.4-сурет

Осы сұраққа жауапты мына теорема береді.

Теорема. ***Кез келген үшбұрышқа іштей шеңбер сызуға болады. Оның центрі үшбұрыштың биссектрисаларының қиылысу нүктесі болады.***

Дәлелдеуі. ABC үшбұрышын қарастырайық және оның A және B төбелерінен сәйкесінше a және b биссектрисаларын жүргізейік (22.5-сурет).



22.5-сурет

Биссектрисалардың қиылысу O нүктесі іштей сызылған шеңбердің центрі болатынын дәлелдейік. Ол үшін O нүктесінен ABC үшбұрышының қабырғаларына түсірілген OD, OE және OF перпендикулярларының теңдігін немесе O нүктесі ABC үшбұрышының қабырғаларынан бірдей қашықтықта жатқанын тексерсек жеткілікті. Шынында, O нүктесі a биссектрисасына тиісті болғандықтан, ол AB және AC қабырғаларынан бірдей қашықтықта жатады. O нүктесі b биссектрисасына тиісті болғандықтан, ол AB және BC қабырғаларынан бірдей қашықтықта жатады. Демек, O нүктесі ABC үшбұрышының барлық қабырғаларынан бірдей қашықтықта орналасқан. O нүктесі BC және AC қабырғаларынан бірдей қашықтықта болғандықтан, C бұрышының c биссектрисасында жататыны шығады, яғни үш биссектриса бір O нүктесінде қиылысады. Центрі осы нүкте және радиусы $r = OD = OE = OF$ болатын шеңбер ізделінді іштей сызылған шеңбер болып табылады ■.

Сүйір бұрышты және доғал бұрышты үшбұрыштарға іштей сызылған шеңберлерді салыңдар.

1. Қандай *шеңбер үшбұрышқа сырттай сызылған* деп аталады?
2. Қандай *үшбұрыш шеңберге іштей сызылған* деп аталады?
3. Қандай *шеңбер үшбұрышқа іштей сызылған* деп аталады?
4. Қандай *үшбұрыш шеңберге сырттай сызылған* деп аталады?
5. Қандай нүкте үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің центрі болады?
6. Қандай нүкте үшбұрышқа іштей сызылған шеңбердің центрі болады?

Жаттығулар

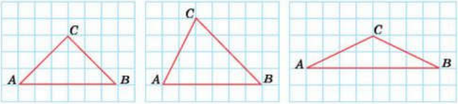
А

22.1. Үшбұрышқа іштей сызылған шеңбердің центрі осы үшбұрыштан тыс жатуы мүмкін бе?

22.2. Үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің центрі а) үшбұрыштың ішінде; ә) үшбұрыштың қабырғасында; б) үшбұрыштан тыс жатуы мүмкін бе? Мысал келтіріңдер.

В

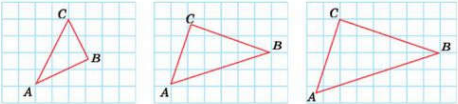
22.3. 22.6-суретте кескінделген үшбұрыштарға сырттай сызылған шеңберлердің центрлерін салыңдар.



а) ә) б)

22.6-сурет

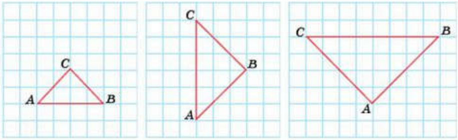
22.4. 22.7-суретте кескінделген үшбұрыштарға іштей сызылған шеңберлердің центрін салыңдар.



а) ә) б)

22.7-сурет

22.5. 22.8-суретте кескінделген үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің радиусын табыңдар (торкөздің қабырғасы 1-ге тең).

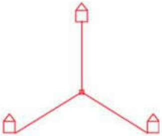


а) ә) б)

22.8-сурет

22.6. Тікбұрышты теңбүйірлі үшбұрыштың төбелерінде орналасқан A, B және C үш үйдің тұрғындары әр үйден бірдей қашықтықта

болатын құдық қазбақшы (22.9-сурет). Олар құдықты қай жер-
ден қазулары керек?



22.9-сурет

C

22.7. Теңбүйірлі үшбұрышқа іштей сызылған шеңбердің центрі осы үшбұрыштың табанына қарсы жатқан төбесінен түсірілген биіктікке тиісті екенін дәлелдеңдер.

22.8. Теңбүйірлі үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің центрі осы үшбұрыштың табанына қарсы жатқан бұрыштың биссектрисасына тиісті екенін дәлелдеңдер.

22.9. Егер үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің центрі үшбұрыштың бір медианасына тиісті болса, онда үшбұрыштың түрін анықтаңдар.

22.10. Егер үшбұрышқа іштей сызылған шеңбердің центрі үшбұрыштың бір биіктігіне тиісті болса, онда үшбұрыштың түрін анықтаңдар.

22.11. Егер үшбұрышқа іштей және сырттай сызылған шеңбердің центрлері беттессе, онда үшбұрыштың түрін анықтаңдар.

22.12. Теңбүйірлі үшбұрышқа іштей сызылған шеңбер оның бір бүйір қабырғасын жанасу нүктесінде табанынан бастап санағанда ұзындықтары 5 см және 4 см болатын екі кесіндіге бөледі. Үшбұрыштың периметрін табыңдар.

22.13. Гипотенузасы 10 см болатын тікбұрышты теңбүйірлі үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің радиусын табыңдар.

22.14. Бүйір қабырғалары 4 см, олардың арасындағы бұрыш 120° болатын теңбүйірлі үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің радиусын табыңдар.

22.15. Қабырғалары 3 см, 4 см, 5 см болатын тікбұрышты үшбұрышқа іштей сызылған шеңбердің радиусын табыңдар.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

22.16. AB кесіндісін салыңдар. Центрі A нүктесі және радиусы AB болатын шеңберді кескіндеңдер. Центрі B нүктесі және радиусы BA болатын шеңберді кескіндеңдер. Осы шеңберлердің қиылысу нүктелері арқылы түзу жүргізіңдер. Осы түзу туралы не айтуға болады?

§ 23. САЛУ ЕСЕПТЕРІ

Сызғыш пен циркуль геометриялық салулар үшін негізгі сызба құралдары болып табылады.

Сызғыштың көмегімен берілген екі нүкте арқылы түзу жүргізіледі. Циркульдің көмегімен берілген центрі мен радиусы бойынша шеңбер салынады. Дербес жағдайда, циркульдің көмегімен сәуледе оның басынан бастап берілген кесіндіге тең кесіндіні салуға болады.

Салу есептерін шешу ереже бойынша төрт кезеңнен тұрады:

1. Есептің шартын *талдау.* Ол ізделінді фигураны салуға мүмкіндік беретін байланыстарды табудан тұрады.

2. *Салу.* Ол ізделінді фигураны салу үшін орындауға жеткілікті негізгі салулардың бірізділігін көрсетуден тұрады.

3. *Дәлелдеу* салынған фигураның есептің барлық шарттарын қанағаттандыратындығын анықтаудан тұрады.

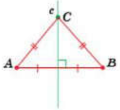
4. *Зерттеу* салуды әрқашан да таңдап алынған тәсілмен орындауға болатынын және есептің неше шешімі бар екенін анықтайды.

Сызғыш пен циркульдің көмегімен кейбір геометриялық салу есептерін қарастырайық.

1-есеп. Берілген кесіндінің орта перпендикулярын салыңдар.

Шешуі. *Талдау.* AB — берілген кесінді болсын. c орта перпендикуляры салынды деп ұйғарайық (23.1-сурет).

Ол осы кесіндінің A және B ұштарынан бірдей қашықтықта жатқан C нүктелерінің геометриялық орны болады. Демек, центрлері A және B нүктелері болатын радиустары бірдей және қиылысатын екі шеңбер жүргізсек, олардың қиылысу нүктелері ізделінді орта перпендикулярға тиісті болады.

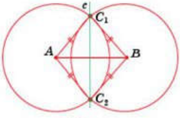


23.1-сурет

Салу. Центрлері A, B нүктелері және радиусы AB-ның жартысынан үлкен болатын шеңберлер салайық (23.2-сурет).

AB түзуінің әр жағында жатқан шеңберлердің қиылысу нүктелерін C_1 және C_2 арқылы белгілейік. C_1C_2 түзуін жүргіземіз. Ол ізделінді AB кесіндісінің орта перпендикуляры болады.

Дәлелдеуі . Салынған C_1 мен C_2 нүктелері AB кесіндісінің ұштарынан бірдей қашықтықта жатыр. Ендеше, олар орта перпендикулярға тиісті, демек, C_1C_2 түзуі, шынында, ізделінді орта перпендикуляр болып табылады.



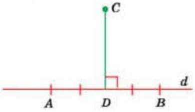
23.2-сурет

Зерттеу . Шеңбердің центрлерінің арасындағы қашықтық осы шеңберлердің радиустарының қосындысынан кіші және олардың айырымынан үлкен болғандықтан, бұл шеңберлер қиылысады, яғни ортақ екі нүктесі бар. Демек, салу жалғыз.

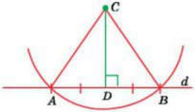
2-есеп. Берілген түзуде жатпайтын берілген нүктеден осы түзуге перпендикуляр түсіріңдер.

Шешуі. *Талдау* . C — берілген нүкте, ал d — берілген түзу болсын. CD перпендикуляры салынды деп ұйғарайық (23.3-сурет). Егер d түзуіне тиісті A және B нүктелері D нүктесінен бірдей қашықтықта жатса, онда CD түзуі AB кесіндісінің орта перпендикуляры болады.

Салу . A және B нүктелерін салу үшін центрі C нүктесі және радиусы C нүктесінен d түзуіне дейінгі қашықтықтан үлкен болатын шеңбер саламыз (23.4-сурет).



23.3-сурет



23.4-сурет

Бұл жағдайда шеңбер d түзуін екі нүктеде қиып өтеді. Оларды A және B деп белгілейік. 1-есеп бойынша, AB кесіндісінің орта перпендикулярын салайық. C нүктесі A және B нүктелерінен бірдей қашықтықта жатқандықтан, ол осы орта перпендикулярға тиісті. Орта перпендикулярдың d түзуімен қиылысу нүктесін D деп белгілейік. CD кесіндісі — ізделінді C нүктесінен d түзуіне түсірілген перпендикуляр.

Дәлелдеуі мен зерттеуді өздерің жүргізіңдер.

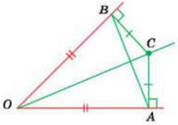
3-есеп. Берілген бұрыштың биссектрисасын салыңдар.

Шешуі. *Талдау* . O бұрышы берілсін. Оның биссектрисасы салынды деп ұйғарайық. Ол осы бұрыштың қабырғаларынан бірдей қашықтықта жатқан C ішкі нүктелерінің геометриялық орны

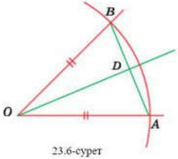
(23.5-сурет), яғни C нүктесінен бұрыштың қабырғаларына түсірілген CA және CB перпендикулярлары тең.

OAC мен OBC тікбұрышты үшбұрыштардың теңдігінен (гипотенузасы мен катеті бойынша), $OA = OB$ шығады. Табаны AB болатын OAB теңбүйірлі үшбұрышта O төбесінен жүргізілген биссектриса әрі медианасы әрі биіктік болады. Демек, биссектриса AB кесіндісінің орта перпендикулярында жатады.

Салу. Центрі берілген бұрыштың O төбесінде болатын бұрыштың қабырғаларын A және B нүктелерінде қиятын шеңбер салайық (23.6-сурет). AB кесіндісінің орта перпендикулярын жүргізейік. Берілген бұрыштың ішінде жатқан оның бөлігі ізделінді биссектриса болып табылады.



23.5-сурет



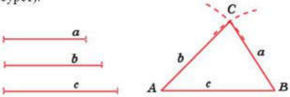
23.6-сурет

Дәлелдеуі мен зерттеуді өздерің жүргізіңдер.

4-есеп. Берілген $AB = c$, $AC = b$, $BC = A$ қабырғалары бойынша ABC үшбұрышын салыңдар.

Шешуі. *Талдау*. Егер үш кесіндінің әрқайсысы қалған екеуінің қосындысынан кіші және айырымынан үлкен болса, онда бұл кесінділер үшбұрыштың қабырғалары болатынын ескерейік.

Салу. Осы шарттарды қанағаттандыратын a, b және c кесінділері берілсін. Түзу жүргізіп, оның бойынан A нүктесін белгілейік. Осы түзудің бойынан циркульдің ашасымен өлшеп c кесіндісіне тең AB кесіндісін саламыз. Содан кейін циркульдің центрі A нүктесі болатын, ал радиусы b кесіндісіне тең шеңбер саламыз. Циркульдің ашасымен өлшеп a кесіндісіне тең радиуспен центрі B нүктесі болатын шеңбер саламыз. Осы шеңберлердің қиылысу нүктесін C арқылы белгілейік және A, B нүктелерін кесінділермен қосайық. ABC ізделінді үшбұрыш болады (23.7-сурет).



23.7-сурет

Дәлелдеуі мен зерттеуді өздерің жүргізіңдер.

1. Геометриялық фигураларды салу үшін қандай құралдар қолданылады?
2. Қандай салулар а) сызғыштың; ә) циркульдің көмегімен орындалады?
3. Кесіндінің орта перпендикулярын қалай салуға болады?
4. Берілген нүктеден берілген түзуге перпендикулярды қалай түсіруге болады?
5. Бұрыштың биссектрисасын қалай салуға болады?
6. Үш қабырғасы бойынша үшбұрышты қалай салуға болады?

Жаттығулар

A

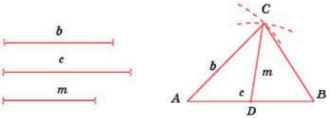
23.1. Берілген кесіндіге тең кесіндіні салыңдар.
23.2. Берілген кесіндінің ортасын салыңдар.

B

23.3. Берілген түзуге тиісті берілген нүкте арқылы осы түзуге перпендикуляр түзу жүргізіңдер.
23.4. Берілген екі қабырғасы және олардың арасындағы бұрышы бойынша ABC үшбұрышын салыңдар.
23.5. Берілген бір қабырғасы және оған іргелес жатқан екі бұрышы бойынша ABC үшбұрышын салыңдар.
23.6. Берілген бұрышқа тең бұрышты салыңдар.

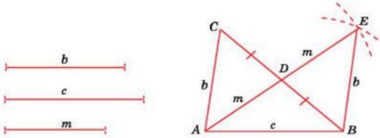
C

23.7. 23.8-суретте берілген $AB = c$, $AC = b$ екі қабырғасы және $CD = m$ медианасы бойынша ABC үшбұрышын қалай салуға болатынын түсіндіріңдер.



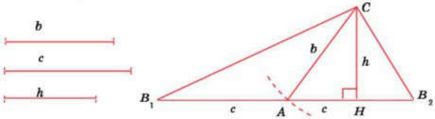
23.8-сурет

23.8. 23.9-суретте берілген $AB = c$, $AC = b$ екі қабырғасы және $AD = m$ медианасы бойынша ABC үшбұрышын қалай салуға болатынын түсіндіріңдер.



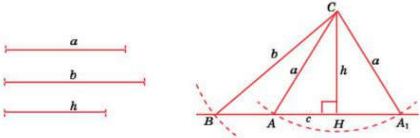
23.9-сурет

23.9. 23.10-суретте берілген $AB = c$, $AC = b$ екі қабырғасы және $CH = h$ биіктігі бойынша ABC үшбұрышын қалай салуға болатынын түсіндіріңдер.



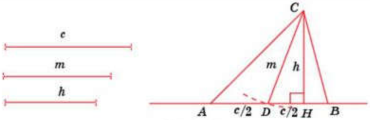
23.10-сурет

23.10. 23.11-суретті пайдаланып, берілген $AC = a$, $BC = b$ екі қабырғасы және $CH = h$ биіктігі бойынша ABC үшбұрышын салыңдар.



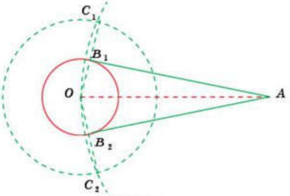
23.11-сурет

23.11. 23.12-суретті пайдаланып, берілген $AB = c$ қабырғасы, $CD = m$ медианасы, $CH = h$ биіктігі бойынша ABC үшбұрышын салыңдар.



23.12-сурет

23.12. 23.13-суретті пайдаланып, берілген шеңберден тыс жатқан берілген нүкте арқылы өтетін осы шеңберге жанама салыңдар.



23.13-сурет

Хабарлама дайындаңдар

23.13. Б.з.д. V ғ. циркуль мен сызғыштың көмегімен салуға арналған танымал есеп "кубты екі еселеу есебі" — Делостық есеп.

23.14. а) Парабола дегеніміз не? Параболаның оптикалық қасиеті.
ә) Эллипс дегеніміз не? Эллипстің оптикалық қасиеті.
б) Гипербола дегеніміз не? Гиперболаның оптикалық қасиеті.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

1. Центрі берілген нүкте болатын неше шеңбер салуға болады?
A) Ешқандай. B) Біреу. C) Екеу. D) Шексіз көп.
2. Бір нүкте арқылы неше шеңбер жүргізуге болады?
A) Біреу. B) Екеу. C) Үшеу. D) Шексіз көп.
3. Екі нүкте арқылы неше шеңбер жүргізуге болады?
A) Ешқандай. B) Біреу. C) Екеу. D) Шексіз көп.

4. Центрі O нүктесі және радиусы R болатын дөңгелектен тыс жататын M нүктесі қандай қатынасты қанағаттандырады?

A) $OM \mid R$. B) $OM > R$. C) $OM \; \mathrm{m} \; R$. D) $OM < R$.

5. Центрі O нүктесі және радиусы R болатын дөңгелектің ішінде жататын K нүктесі қандай қатынасты қанағаттандырады?

A) $OK \; \mathrm{m} \; R$. B) $OK \mid R$. C) $OK < R$. D) $OK > R$.

6. Шеңбердің диаметрі 10 см. Шеңбердің центрінен 3 см қашықтықта болатын түзу осы шеңберге қатысты қалай орналасады?

A) Қиылыспайды. B) Қиылысады.
C) Жанайды. D) Анықтауға мүмкін емес.

7. Шеңбердің диаметрі 8 см. Шеңбердің центрінен 4 см қашықтықта болатын түзу осы шеңберге қатысты қалай орналасады?

A) Қиылыспайды. B) Қиылысады.
C) Жанайды. D) Анықтау мүмкін емес.

8. Шеңбердің диаметрі 6 см. Шеңбердің центрінен 5 см қашықтықта болатын түзу осы шеңберге қатысты қалай орналасады?

A) Шеңбермен ортақ нүктесі болмайды.
B) Қиылысады.
C) Жанайды.
D) Анықтау мүмкін емес.

9. Екі шеңбердің радиустары 10 см және 15 см. Олардың центрлерінің арақашықтығы 20 см. Осы шеңберлер бір-біріне қатысты қалай орналасады?

A) Шеңбермен ортақ нүктесі болмайды.
B) Қиылысады.
C) Іштей жанасады.
D) Сырттай жанасады.

10. Екі шеңбердің радиустары 6 см және 8 см. Олардың центрлерінің арақашықтығы 14 см. Осы шеңберлер бір-біріне қатысты қалай орналасады?

A) Шеңбермен ортақ нүктесі болмайды.
B) Қиылысады.
C) Іштей жанасады.
D) Сырттай жанасады.

11. Екі шеңбердің радиустары 10 см және 20 см. Олардың центрлерінің арақашықтығы 10 см. Осы шеңберлер бір-біріне қатысты қалай орналасады?

A) Шеңбермен ортақ нүктесі болмайды.
B) Қиылысады.
C) Іштей жанасады.
D) Сырттай жанасады.

12. Сәйкесінше центрлері O_1, O_2 және радиустары R_1, R_2 болатын екі шеңбер іштей жанасады. Олар үшін қандай қатынас орындалады?

A) $O_1O_2 < R_1 + R_2$.
B) $O_1O_2 = R_1 + R_2$.
C) $O_1O_2 > R_1 + R_2$.
D) $O_1O_2 = |R_1 - R_2|$.

13. Сәйкесінше центрлері O_1, O_2 және радиустары R_1, R_2 болатын екі шеңбер іштей жанасады. Олар үшін қандай қатынас орындалады?

A) $O_1O_2 = |R_1 - R_2|$.
B) $O_1O_2 > |R_1 - R_2|$.
C) $O_1O_2 < |R_1 - R_2|$.
D) $O_1O_2 = R_1 + R_2$.

14. Центрлері ортақ екі шеңбердің радиустарының қатынасы 2:3. Олардан құрылған сақинаның ені 5 см болса, диаметрлерін табыңдар.

A) 2 см және 3 см.
B) 15 см және 20 см.
C) 10 см және 15 см.
D) 30 см және 20 см.

15. Шеңберден тыс жатқан нүктеден оған екі жанама жүргізілген. Осы нүктеден шеңберге дейінгі ең қысқа қашықтық шеңбердің радиусына тең. Жанамалардың арасындағы бұрышты табыңдар.

A) 30°. B) 45°. C) 60°. D) 120°.

16. Шеңбердегі нүктеден екі хорда жүргізілген, олардың әрқайсысы шеңбердің радиусына тең. Хордалардың арасындағы бұрышты табыңдар.

A) 30°. B) 45°. C) 90°. D) 120°.

17. Шеңберден тыс жатқан нүктеден шеңбердің нүктелеріне дейінгі ең ұзын және ең қысқа қашықтықтар сәйкесінше 50 см және 30 см. Осы шеңбердің радиусын табыңдар.

A) 10 см. B) 20 см. C) 30 см. D) 40 см.

18. Шеңбердің ішінде жатқан нүктеден шеңбердің нүктелеріне дейінгі ең ұзын және ең қысқа қашықтықтар сәйкесінше 50 см және 30 см. Осы шеңбердің радиусын табыңдар.

A) 30 см. B) 40 см. C) 50 см. D) 80 см.

19. Берілген нүктеден радиусы 8 см-ге тең шеңберге жүргізілген жанамалар өзара тік бұрыш жасайды. Осы жанамалардың кесінділерін (берілген нүкте мен жанасу нүктелері арасында шектелген) табыңдар.

A) 4 см. B) 8 см. C) 12 см. D) 16 см.

20. Берілген нүктеден шеңберге жүргізілген жанамалар өзара $60°$ бұрыш жасайды. Берілген нүкте мен шеңбердің центріне дейінгі қашықтық 24 см. Шеңбердің радиусын табыңдар.

A) 6 см. B) 8 см. C) 12 см. D) 24 см.

ГЛОССАРИЙ

Аксиома — ақиқаттығы дәлелдеусіз қабылданатын сөйлем.

Анықтама — жаңа ұғымдардың мағынасын бұрыннан белгілі ұғымдар арқылы түсіндіретін сөйлем.

Әртүрлі қабырғалы үшбұрыш — қабырғаларының ұзындықтары әртүрлі болатын үшбұрыш.

Бұрыш — бір нүктеден шығатын екі сәулемен шектелген жазықтықтың бөлігі.

Бұрыштың биссектрисасы — бұрыштың төбесінен шығып, оны қақ бөлетін сәуле.

Бұрыштың қабырғалары — бұрышты құрайтын сәулелер.

Бұрыштың төбесі — бұрышты құрайтын сәулелердің бас нүктесі.

Бірлік кесінді — ұзындығы таңдап алынған өлшем бірлігіне тең болатын кесінді.

Вертикаль бұрыштар — бір бұрыштың қабырғалары екінші бұрыштың қабырғаларының созындысы болып келетін екі бұрыш.

Гипотенуза — тікбұрышты үшбұрыштың тік бұрышына қарсы жатқан қабырғасы.

Дәлелдеу — берілген тұжырымдаманы ретімен талдау арқылы ақиқаттығына көз жеткізу.

Доғал бұрыш — тік бұрыштан үлкен, жазыңқы бұрыштан кіші бұрыш.

Доғал бұрышты үшбұрыш — бір бұрышы доғал болатын үшбұрыш.

Дөңгелек — берілген нүктеден белгілі қашықтықтан аспайтын жазықтықтың барлық нүктелерінен тұратын фигура.

Дөңгелектің диаметрі — дөңгелекті шектейтін шеңбердің диаметрі.

Дөңгелектің секторы — центрлік бұрыштың ішінде орналасқан дөңгелектің бөлігі.

Дөңгелектің хордасы — дөңгелекті шектейтін шеңбердің хордасы.

Дұрыс үшбұрыш — теңқабырғалы үшбұрыш.

Жазыңқы бұрыш — қабырғалары түзу құрайтын немесе қабырғалары толықтауыш сәулелер болатын бұрыш.

Жанасу нүктесі — шеңбер мен жанаманың ортақ нүктесі.

Жарты түзу — түзудің берілген нүктесінің бір жағында жатқан барлық нүктелерден тұратын бөлігі.

Жартыжазықтық — түзудің бір жағында жататын және сол түзу мен нүктелерден құралған жазықтықтың бөлігі.

Жартышеңбер — диаметрге керілетін доға.

Катет — тікбұрышты үшбұрыштың тік бұрыш жасап тұрған қабырғалары.

Кесінді — түзудің берілген екі нүктесі мен олардың арасында жатқан барлық нүктелерінен тұратын бөлігі.

Кесіндінің ортасы — кесіндіні тең екі бөлікке бөлетін нүкте.

Кесіндінің орта перпендикуляры — кесіндіге перпендикуляр және оның ортасы арқылы өтетін түзу.

Кесіндінің ұзындығы — бірлік кесіндіні берілген кесіндінің бойынан неше рет орналастыруға болатынын көрсететін оң сан.

Көлбеу — берілген нүктеден берілген түзуге жүргізілген кесінді.

Негізгі ұғымдар — анықтамасыз қабылданатын ұғымдар.

Нүктеден түзуге дейінгі қашықтық — перпендикулярдың ұзындығы.

Нүктелердің геометриялық орны — берілген қасиетті немесе бірнеше қасиетті қанағаттандыратын барлық нүктелерден тұратын фигура.

Параллель түзулер — бір жазықтықта жатқан және ортақ нүктесі болмайтын түзулер.

Перпендикуляр — берілген нүктеден берілген түзуге түсірілген кесінді.

Перпендикуляр түзулер — тік бұрыш жасап қиылысқан екі түзу.

Сәуле — жарты түзу.

Сүйір бұрыш — тік бұрыштан кіші бұрыш.

Сүйір бұрышты үшбұрыш — барлық бұрыштары сүйір болатын үшбұрыш.

Сыбайлас бұрыштар — бір қабырғасы ортақ, ал басқа екі қабырғасы бір түзудің бойында жататын екі бұрыш.

Тең бұрыштар — екі бұрышты беттестіргенде сәйкес қабырғалары мен төбелері дәл келетін бұрыштар.

Тең кесінділер — беттестіргенде ұштары дәл келетін кесінділер.

Тең үшбұрыштар — сәйкес қабырғалары мен бұрыштары тең болатын үшбұрыштар.

Тең фигуралар — сәйкес нүктелері беттесетін екі фигура.

Теңбүйірлі үшбұрыш — екі қабырғасы тең болатын үшбұрыш.

Теңқабырғалы үшбұрыш — барлық қабырғалары өзара тең болатын үшбұрыш.

Теорема — ақиқаттығы дәлелденетін сөйлем.

Тік бұрыш — жазыңқы бұрыштың жартысы немесе өзінің сыбайлас бұрышына тең болатын бұрыш.

Тікбұрышты үшбұрыш — бір бұрышы тік болатын үшбұрыш.

Транспортир — бұрыштарды өлшеу үшін арнайы құрал.

Үшбұрыш — бір түзудің бойында жатпайтын үш нүктеден және осы нүктелерді қос-қостан қосатын үш кесіндіден тұратын фигура.

Үшбұрыштың биіктігі — үшбұрыштың төбесінен оған карсы жатқан қабырғаны камтитын түзуге түсірілген перпендикуляр кесінді.

Үшбұрыштың биссектрисасы — үшбұрыш бұрышы биссектрисасының төбесі мен оған карсы жатқан қабырғасын қосатын кесінді.

Үшбұрыштың бұрышы — төбесі үшбұрыштың төбесі, ал қабырғалары үшбұрыштың қабырғалары болатын бұрыш.

Үшбұрыштың медианасы — үшбұрыштың төбесі мен оған карсы жатқан қабырғасының ортасын қосатын кесінді.

Үшбұрыштың орта сызығы — үшбұрыштың екі қабырғасының ортасын қосатын кесінді.

Үшбұрыштың периметрі — үшбұрыштың барлық қабырғалары ұзындықтарының қосындысы.

Үшбұрыштың сыртқы бұрышы — үшбұрыштың ішкі бұрышымен сыбайлас бұрыш.

Үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбер — үшбұрыштың барлық төбелері арқылы өтетін шеңбер.

Үшбұрышқа іштей сызылған шеңбер — үшбұрыштың барлық қабырғаларымен жанасатын шеңбер.

Шеңбер — берілген нүктеден бірдей қашықтықта жатқан жазықтықтың барлық нүктелерінен тұратын фигура.

Шеңбердің диаметрі — шеңбердің центрі арқылы өтетін хорда.

Шеңбердің доғасы — центрлік бұрыштың ішінде орналасқан шеңбердің бөлігі.

Шеңберге жанама — шеңбермен бір ғана ортақ нүктесі болатын болатын түзу.

Шеңберді қиюшы — шеңбермен ортақ екі нүктесі бар түзу.

Шеңбердің радиусы — шеңбердің центрі мен оның бойындағы кез келген нүктені қосатын кесінді.

Шеңбердің хордасы — шеңбердің кез келген екі нүктесін қосатын кесінді.

Центрлік бұрыш — шеңбердің екі радиусының арасындағы бұрыш.

Центрлес шеңберлер — центрлері ортақ шеңберлер.

Циркуль — шеңбер сызуға арналған құрал.

ЖАУАПТАРЫ

1-тарау. ГЕОМЕТРИЯНЫҢ АЛҒАШҚЫ ҰҒЫМДАРЫ

1.2. A, B, C, D нүктелері бір түзудің бойында жатыр. **1.3.** Үшеу. **1.4.** а) 6; ә) 10; б) 15. **1.5.** а) 5 түзу, 10 нүкте; ә) 7 түзу, 21 нүкте. **1.7.** b, c, d, e, g, h, p, q, r. **1.8.** A, b, c, d түзулері бір нүктеде қиылысады. **1.9.** Біреуде емес, бір нүкте, екі нүкте, үш нүкте. **1.13.** Айжан, Берік, Сәуле, Даурен. **1.14.** а) 3; ә) 6; б) 10; в) $\frac{n(n-1)}{2}$. **1.15.** а) 3; ә) 6; б) 10; в) $\frac{n(n-1)}{2}$. **2.1.** Шексіз көп. **2.2.** Екеу. **2.3.** AB және AC, BA және BC. **2.6.** а) және г), ә) және д), б) және в). **2.7.** C және D нүктелері A нүктесінің бір жағында жатыр. **2.10.** 5, 4, 1, 6, 3, 2. **2.13**. а) 6; ә) 8; б) 10; в)*$2n$. **2.14.** а) 3; ә) 6; б) 10; в) *$\frac{n(n-1)}{2}$. **2.15.** AB және CD кесінділері тең. **3.3.** 6 см. **3.4.** 6 см. **3.5.** а) 5 см; ә) 7 дм; б) 17 м. **3.6.** а) 8 см; ә) 20,5 см; б) 4,5 см; в) 12,5 см. **3.7.** B нүктесі A және C нүктелерінің ортасында жатыр. **3.8.** Жоқ. **3.9.** Жоқ. **3.10.** Жоқ. **3.11.** а) 15 см; ә) 5 см. **3.12.** $AB = 2CD$. **3.13.** 2 см және 4 см. **3.14.** а) 9 см және 6 см; ә) 10 см және 5 см; б) 6 см және 9 см. **3.15.** 8,5 см. **3.16.** а) 40 мм; ә) 80 мм; б) 20 мм. **3.17.** 3 км немесе 7 км. **3.18.** Таспаны ортасынан бүктейміз, кейін тағы ортасынан бүктейміз. Алынған таспаның төрттен бір бөлігін кесу керек. Қалған бөлігі 150 см болады. **3.19.** 14 см. **4.2.** а), ә), б), в), г) жоқ, ғ) иә. **4.3.** 4. **4.4.** 6. **4.5.** 8. **4.7.** A нүктесі бұрыштың қабырғасында жатыр; D нүктесі бұрыштың ішінде жатыр. **4.8.** 12. **4.9**. 2. **4.10.** 1. **4.11.** а) 6; ә) 4. **4.12.** 7. **4.13.** 11. **4.14.** 6. **4.15.** AOB және BOD, AOB және AOE, AOF және AOC, AOF және FOD, BOC және BOF, BOC және COE. **4.16.** AOB және EOD, AOF және DOC, BOC және EOF, BOF және COE. **4.17**. $2n$. **5. 4.18.** а) 2; ә) 3; б) 4; в)*n. **4.19.** а) 2; б) 3; в) 4; г)*n. **4.20.** $\frac{n(n+1)}{2} + 1$. **5.1.** а), г) және з); ә), в) және ж); б), ғ) және д). **5.2.** PQR бұрышы. **5.3.** 3, 2, 5, 6, 1, 4. **5.5.** ә) иә; ә) жоқ. **5.6.** 30, 150°, 150°. **5.7.** 6. **5.8.** а) 3; ә) 2; б) 1. **5.9.** а), б) жоқ; ә) иә. **5.14.** 70°. **5.17.** а) e; ә) f; б) g; в) h. **5.18.** Шығыс немесе Батыс. **5.19.** а) жоқ; ә) иә, көрсетілген бұрыштардың қосындысы 180° болуы керек. **5.22.** 80° және 100°. **5.23.** 36° және 144°. **5.24.** 126°. **5.25.** Жоқ. **6.1.** а) 90°; ә) 45°; б) 135°; в) 180°; г) 90°; ғ) 45°; д) 135°. **6.2.** 40°, 70°, 160°, 30°, 120°, 90°. **6.5.** 135°. **6.7.** 45°. **6.8.** 30°. **6.9.** 45°. **6.10.** 90°. **6.11.** 142°. **6.12.** 120° және 60°. **6.13.** а)105° және 75°; ә) 110 және 70; б) 36 және 144; в) 90 және 90. **6.14.** а) 72 және 108; ә) 54 және 126; б) 55 және 125; в) 88 және 92. **6.15.** 120°. **6.16.** 180°. **6.17.** 40°, 120°, 140°, 80°, 100°, 20°. **6.18.** а) 36°; ә) 30°. **6.19.** а) 20°; ә) 18°. **6.20.** 5°. **6.21.** 3 айналым. **6.22.** а) 90°; ә) 180°; б) 150°. **6.23.** а) 120°; ә) 60°; б) 300°. **6.24.** а) 30°; ә) 15°; б) 10°. **6.25.** 120°. **6.26.** 6 сағ. **6.27.** 0,5°.

2-тарау. ҮШБҰРЫШТАР

7.1. ABC, ADC, BDC, BDE, CDE. **7.2.** а), б), г) және е); ә) және ғ). **7.3.** а), ә), б) Жоқ. **7.4.** а), ә), б) 3. **7.5.** а), ә) Жоқ; б) Иә. **7.7.** $EF = 5$ см, $FG = 6$ см, $EG = 7$ см. **7.8.** $E = 40°$, $F = 60$, $G = 80$. **7.9.** $PQ = XY = 5$ см, $BC = YZ = 6$ см, $AC = PR = 7$ см. **7.14.** 75 см. **7.15.** 20 см және 10 см. **7.16.** 12 см, 18 см және 24 см. **7.17.** 30. **7.18.** 35. **8.1.** Иә. **8.2.** Иә. **8.3.** 3 см. **8.4.** Иә. **8.5.** 5 см. **8.6.** ABD және CBE. **8.7.** Иә, EPH және FPG, EPG және FPH, EGH және FHG, EFH және FEG. **8.9.** 4 см. **8.14.** Қашықтықтар тең. **8.18.** Жоқ. **9.1.** Иә. **9.2.** а) $AB = CD$, $BC = AD$; ә) $AB = AD$, $CB = CD$. **9.3.** а) ABC және ADC; ә) ABD және CDB; б) ABD және CBE; в) AOD және BOC, ACD және BDC; г) ACD және BCE, ABE және BAD; AOE және BOD; ғ) AOD және BOC, ABD және BAC. **9.11.** AHB және CPD, ABC және CDA, BHC және DPA. **9.12.** $AB = 11$ см, $BC = 19$ см. **9.15.** 13 см. **9.16.** 4 см. **9.17.** 40°. **10.1.** а) ABC, AOB, AOC, BOC; ә) MPN, PNQ, NQK, MNK. **10.5.** а) Екі үшбұрыш, $AO = AB$, $A_1O = A_1B_1$; ә) екі үшбұрыш, $HG = HF$, $EG = EF$; б) үш үшбұрыш, LMP, KLM, NLM. **10.11.** а) 3,2 м, 6, 2 м, 6,2 м; ә) 7,2 м, 4,2 м, 4,2 м. **10.12.** 6 см, 16 см, 16 см. **10.13.** Иә. **10.14.** а), ә), б) иә. **10.24.** 15 м. **11.1.** а) ADC және BDC; ә) EFH және GFH; б) KLN және MNL; в) POR және QOR, POS және QOS, PRS және QRS; г) AOD және BOC, ABD және BAC, ACD және BDC; ғ) KLS және NMS, KMS және NLS; д) AOB, BOC, COD, AOD; ABD, BCD, ADC, DAB. **11.3.** 31°. **11.4.** 59°. **12.1.** а), ә), б) Иә. **12.2.** а), ә) иә. **12.3.** Доғал. **12.4.** а), б) жоқ; ә) иә. **12.5.** Сүйір, тік, доғал. **12.6.** >. **12.7.** а) A; ә) A; б) B. **12.8.** 1 бұрышы 2 бұрышынан үлкен. **12.9.** а) $BC > AC > AB$; ә) $BC > AC = AB$. **12.15.** $AB > BC$. **13.3.** 1, 4, 5 және 2, 3, 7. **13.4.** а) Иә; ә) Жоқ. **13.5.** Жоқ. **13.6.** Иә. **13.7.** 5 см.

3-тарау. ТҮЗУЛЕРДІҢ ӨЗАРА ОРНАЛАСУЫ

14.1. Біреу. **14.2.** Екеу. **14.3.** Жоқ. **14.4.** Жоқ. **14.6.** 0,5. **14.7.** 3. **14.8.** 4. **14.9.** а), ә) AB_1. **15.1.** 4. **15.2.** Жоқ. **15.3.** Иә. **15.4.** Иә. **15.6.** A және f, b және e, c және g, d және h, p және q. **15.7.** c және d. **15.10.** а) 118°; ә) 70°; б) 65°. **15.11.** а) 150°, 30; ә) 55, 125. **15.12.** 75° және 105°. **16.1.** 60°. **16.2.** 45°. **16.3.** 60°. **16.4.** 61°. **16.5.** 30°. **16.6.** 54°. **16.7.** 100°. **16.8.** 30°. **16.9.** а) 130°; ә) 120°; б) 120°; в) 18°. **16.10.** 41° және 41°. **16.11.** 120°. **16.12.** 30°. **16.13.** 40°. **16.14.** 64°. **16.15.** 115°. **16.16.** 69°. **16.17.** 140°. **16.18.** 51°. **16.19.** 60° және 30°. **16.20.** 360°. **16.23.** 180°. **16.24.** 10°. **16.25.** 38°. **16.26.** 48°. **16.27.** 52°. **16.28.** 74°. **16.29.** 48°. **16.30.** 120°. **16.31.** 45°. **16.32.** 60°. **16.33.** 15°. **16.34.** 3 см. **17.1.** а), ә) жоқ. **17.2.** а), ә), б) жоқ. **17.3.** 10 см. **17.4.** а) 6 см; ә) 8 см. **17.5.** AB кесіндісі ең қысқа жол болады. **17.6.** 29 см. **17.7.** 4 см, 8 см, 8 см. **17.16.** AC және BD кесінділерінің қиылысу нүктесінде.

4-тарау. ШЕҢБЕР. ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ САЛУЛАР

18.1. а) ; ә) $OA > R$. **18.2.** Шеңбер. **18.3.** Шексіз көп. **18.4.** 110 мм. **18.5.** 30 см. **18.6.** а) 0,5 м, 0,6 м, 0,7 м, 1 м; ә) 2,5 м, 3 м, 3,5 м, 5 м. **18.8.** а) 5 м; ә) 6 м; б) 7 м; в) 10 м. **18.10.** 1 см. **18.12.** Шексіз көп. **18.14.** 60°. **18.15.** $d - R$, $d + R$. **18.16.** 15 см. **18.17.** $R - d$, $R + d$. **18.18.** 12 см. **19.1.** Хорда. **19.2.** а) Біреу де емес; ә) екеу; б) біреу. **19.3.** Шексіз көп. **19.4.** Екеу. **55.5.** 90°. **19.6.** а) Қиылысады; ә) жанасады; б) ортақ нүктелері жоқ. **19.9.** Параллель. **19.10.** 4. **19.11.** а) 3; ә) 4. **19.14.** Екі тең бөліктерге. **20.2.** а) 2 см; ә) 8 см. **20.3.** а) Сырттай жанасады; ә) ортақ нүктелері жоқ, біреуі екіншісінің ішінде жатады. **20.4.** а) Іштей жанасады; ә) ортақ нүктелері жоқ, біреуі екіншісінің ішінде жатады. **20.5.** а) 10 см; ә) 2 см. **20.8.** $d - R_1 - R_2$, $d + R_1 + R_2$. **20.9.** $R_1 - d - R_2$, $R_1 + d + R_2$. **20.10.** 50. **20.14.** а), ә), б) иә. **20.15.** Жоқ. **20.16.** а) 2; ә) 6; б) 12; в) $n(n-1)$. **20.17.** а) 4; ә) 8; б) 14. **20.18.** 378 млн км және 78 млн км. **21.4.** Иә. **21.6.** Жолдардан құрылған бұрыштың биссектрисасының екі ағашты қосатын кесіндінің орта перпендикулярымен қиылысу нүктесінде. **21.8.** а) A нүктесі жататын AB кесіндісінің орта перпендикулярымен шектелген жартыжазықтық; ә) AB кесіндісінің орта перпендикулярымен шектелген және осы орта перпендикулярға тиісті емес A нүктесі жататын жартыжазықтық. **21.12.** AB кесіндісінің орта перпендикуляры. **21.13.** AB кесіндісінің орта перпендикуляры. **21.15.** Берілген түзулердің қиылысу нүктесінсіз, олардан құрылған бұрыштардың биссектрисалары жататын екі перпендикуляр түзулер. **21.16.** Радиусы $2R$ болатын шеңбер. **21.17.** Радиустары $R + R_1$ және $|R - R_1|$ болатын екі центрлес шеңберлер. **22.1.** Жоқ. **22.2.** а), ә), б) иә. **22.5.** а) 2; ә) 3; б) 4. **22.6.** A және B үйлерінің ортасында. **22.9.** Теңбүйірлі. **22.10.** Теңбүйірлі. **22.11.** Теңқабырғалы . **22.12.** 28 см. **22.13.** 5 см. **22.14.** 4 см. **22.15.** 2 см.

МАЗМҰНЫ

Учебное издание

Смирнов Владимир Алексеевич
Туяков Есенкельды Алыбаевич

ГЕОМЕТРИЯ

Учебник для 7 класса
общеобразовательных школ

(*на казахском языке*)

Редакторы *Ж. Баданова*
Көркемдеуші редакторы *Ә. Сланова*
Техникалық редакторы *Л. Садықова*
Корректоры *Ж. Мұратова*
Компьютерде беттеген *И. Алмабаева*

Баспаға Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігінің
№ 0000001 мемлекеттік лицензиясы 2003 жылы 7 шілдеде берілген

ИБ № 5605

Басуға 23.10.18 қол қойылды. Пішімі 70x100 $^{1}/_{16}$. Офсеттік қағаз.
Қаріп түрі "SchoolBool Kza". Офсеттік басылыс.
Шартты баспа табағы 11,61. Шартты боялы беттаңбасы 47,04.
Есептік баспа табағы 8,81. Таралымы 5000 қос. дана. Тапсырыс №

"Мектеп" баспасы, 050009, Алматы қаласы, Абай даңғылы, 143
Факс: 8(727) 394-42-30, 394-37-58.
Тел.: 8(727) 394-42-34.
E-mail: mektep@mail.ru
Web-site: www.mektep.kz