А. Н. ШЫНЫБЕКОВ, Д. А. ШЫНЫБЕКОВ

АЛГЕБРА

Учебник для 7 класса
общеобразовательной школы

7

Рекомендовано Министерством образования
и науки Республики Казахстан

Алматы «Атамұра» 2017

1–2555

УДК 373.167.1
ББК 22.1 я 72
Ш 98

Учебник подготовлен в соответствии с Типовой учебной программой по предмету «Алгебра» для 7–9 классов уровня среднего образования по обновленному содержанию, утвержденной Министерством образования и науки РК.

Под редакцией **М. Отелбаева** – доктора физико-математических наук, профессора, академика НАН Республики Казахстан.

Условные обозначения:

? – вопросы по новой теме;

И – материалы из истории;

ПЗ – практические задания;

А – упражнения первого уровня сложности;
В – упражнения второго уровня сложности;
С – упражнения третьего уровня сложности;
* – упражнения повышенной сложности и творческого характера.

Шыныбеков А. Н., Шыныбеков Д. А.
Ш 98 **Алгебра:** Учебник для 7 кл. общеобразоват. шк./ А. Н. Шыныбеков, Д. А. Шыныбеков– Алматы: Атамұра, 2017. – 208 стр.

ISBN 978-601-306-747-6

УДК 373.167.1
ББК 22.1 я 72

ISBN 978-601-306-747-6

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данный учебник составлен на основе ранее изданного учебника автора «Алгебра – 7» в соответствии с учебной программой общеобразовательных школ. Здесь мы старались учесть все замечания специалистов и отдельные недостатки, которые имели место в других изданиях учебника. Например, по многим темам увеличено количество тренировочных упражнений легкого уровня. По сравнению с другими учебниками данный учебник имеет ряд специфических особенностей. Упражнения по каждой теме специально разделены на три группы сложности: **A**, **B** и **C**. Если в группах **A** и **B** сосредоточены упражнения легкого и среднего уровней сложности, то группа **C** состоит из упражнений повышенной сложности. Это позволяет пользоваться учебником как в общеобразовательной школе, так и в классах с углубленным изучением математики. Упражнения группы **C**, в основном, предназначены для классов с углубленным изучением математики и для учащихся, обладающих математическими способностями. Для удобства все упражнения и необходимые рисунки пронумерованы двойными номерами. Здесь первое число указывает на номер раздела, а второе число – на порядковый номер упражнения (рисунка) в указанном разделе.

При изучении курса алгебры по данному учебнику, независимо от профиля класса, рекомендую придерживаться следующих правил: при закреплении новой темы необходимо, чтобы каждый ученик в полном объеме научился выполнять упражнения группы **A**. Иначе будет невозможным в полной мере освоить упражнения групп **B**, **C** и последующие новые темы.

ПОВТОРЕНИЕ ПРОЙДЕННОГО МАТЕРИАЛА ЗА 5 и 6 КЛАССЫ

1) Как определяется сумма, разность, произведение и частное целых чисел?

2) Что такое обыкновенная дробь?

3) Как определяется сумма, разность, произведение и частное обыкновенных дробей?

4) Что такое правильные и неправильные дроби? Что вы понимаете под смешанным числом?

5) Как определяется сумма, разность, произведение и частное смешанных чисел?

6) Какие дроби называются десятичными дробями? Как получить бесконечную периодическую десятичную дробь?

7) Как перевести обыкновенную дробь в десятичную и, обратно, десятичную дробь в обыкновенную?

8) Как определить сумму, разность, произведение и частное двух десятичных дробей?

9) Как определить сумму, разность, произведение и частное обыкновенной дроби с десятичной дробью?

10) Что такое рациональное число?

11) Как найти указанный процент данного числа?

12) Что такое модуль числа? Как его находят?

13) Как находят сумму чисел с разными знаками?

14) Что такое пропорция? Какими свойствами она обладает?

15) Какие величины называются прямо пропорциональными?

16) Какие величины называются обратно пропорциональными?

17) Что такое координатная ось (прямая)? Как изобразить на координатной оси данное рациональное число?

18) Какие числа называются противоположными числами?

19) Что такое алгебраическое выражение?

20) Вспомните упрощение алгебраических выражений: раскрытие скобок; вынесение множителя за скобки; объединение подобных слагаемых.

21) Что такое линейное уравнение? Как его решают?

22) Какие виды числовых промежутков вы знаете?

23) Вспомните решение линейных неравенств с одной переменной.

24) Что вы понимаете под прямоугольной системой координат на плоскости?

25) Что такое функция? Какие способы задания функции вы знаете?

26) Какая функция называется линейной? Как построить ее график?

27) Как построить график линейного уравнения с двумя переменными?

Упражнения

A

0.1. Выполните действия:

1) $2{,}8\cdot(-3{,}9)-76{,}15:15{,}23$;

2) $34{,}68:(7{,}11+1{,}56)+46:(2{,}45-1{,}65)$;

3) $(0{,}62+0{,}56-2{,}29)\cdot(8{,}44-5{,}34)$;

4) $62{,}93+(12{,}5-7{,}6+3{,}21):0{,}1$.

0.2. Выполните действия:

1) $2\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{15}-3\frac{5}{6}\right)+\frac{1}{4}$;

3) $\left(6\frac{3}{8}-2\frac{3}{4}\right)\cdot(-4)+\frac{7}{18}\cdot 9$;

2) $-1\frac{1}{7}\cdot\left(\frac{4}{5}+\frac{19}{20}\right)\cdot\left(6\frac{5}{6}+4\frac{2}{3}\right)$;

4) $9\frac{1}{6}:\left(4\frac{1}{3}-8\right)+24\cdot\frac{3}{8}$.

0.3. Решите уравнение:

1) $4x+5(3-2x)=5-11x$;

3) $14(2y-3)-5(y+4)=2(3y+5)+5y$;

2) $\frac{2-7x}{6}+\frac{4x+7}{3}=-\frac{x}{2}$;

4) $5+\frac{7y-12}{3}=y+13$.

0.4. Решите уравнение:

1) $\frac{3y+9}{5}+\frac{5y-5}{4}=6+\frac{3y+1}{2}$;

3) $\frac{7(y-6)}{4}=\frac{5(y+1)}{3}-3(y+2)$;

2) $\frac{3}{4}x+2x+5=2\frac{3}{4}x+4{,}1+0{,}9$;

4) $4\cdot|x|-7=-2|x|+5$.

0.5. Упростите выражение:

1) $\frac{5}{8}x-\left(\frac{1}{4}x-\frac{1}{12}y\right)+\frac{1}{3}y$;

3) $2\frac{1}{6}y-\left(7x-1\frac{3}{4}y\right)+2\frac{1}{5}x$;

2) $9{,}4y+\left(2x-11\frac{1}{4}y\right)-3\frac{5}{9}x$;

4) $3{,}5x+\left(6\frac{1}{4}y-7x\right)-7y$.

0.6. Решите неравенство:

1) $11x-8{,}8>4x+5{,}2$;

3) $18{,}9x-13{,}4\leqslant 10{,}1x+13$;

2) $2\frac{5}{9}x-15>x-1$;

4) $4{,}6\cdot(x-3)\geqslant 4{,}2+x$;

5) $x+3<5,7(x+10)+2\frac{2}{5}$; 6) $4\frac{1}{6}y+(2-y)\leqslant 4y-3$.

0.7. Постройте график линейной функции:

1) $y=2x+1$; 3) $y=-\frac{3}{2}x+3$; 5) $y=-0,6x-1,2$; 7) $y=2x$;

2) $y=3-x$; 4) $y=0,5x-2$; 6) $y=\frac{2}{7}x-2$; 8) $y=-3$.

0.8. Найдите координаты точек пересечения прямых, заданных уравнениями:

1) $y=5x-3$ и $y=3x+1$; 3) $y=-4x+3$ и $y=\frac{1}{2}x+3$;

2) $y=4x-5$ и $y=x+4$; 4) $y=-2x-10$ и $y=-x-7$.

0.9. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x-y=2, \\ 2x-3y=-1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2(x+y)-x=-6, \\ 3x-(x-y)=0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4x=-6y, \\ 7y-2x=20; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x+5y=-2, \\ 0,5x-y=6; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 8x-3y=7, \\ 3x+y=9; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 2x+3(x+y)=11, \\ 7(x+3y)-4y=-23. \end{cases}$

0.10. Сумма двух чисел равна 58, а их разность равна 8. Найдите эти числа.

B

0.11. Вычислите:

1) $\dfrac{\frac{3}{4}-\frac{5}{8}+\frac{1}{6}}{\frac{3}{8}+\frac{7}{12}-\frac{1}{2}}$; 3) $\dfrac{3+\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{1}{5}}{3}}{7-\frac{4}{5}}$;

2) $5+\dfrac{4}{2-\frac{1}{3}}$; 4) $2+\dfrac{3}{2-1\frac{1}{2}}$.

0.12. Решите уравнение:

1) $\frac{x+9}{7}=1+\frac{x+1}{3}$; 2) $1-\frac{5x-2}{6}=\frac{x-5}{9}$;

3) $\frac{3x+4}{5}+\frac{x-7}{2}=\frac{2(2x+3)}{5}$; 4) $\frac{7x-3}{2}-\frac{9-4x}{3}=\frac{7-x}{2}$.

0.13. Решите уравнение:

1) $\frac{3x-11}{4}-\frac{3-5x}{8}=\frac{x+6}{2}$; 3) $\frac{3}{4}x-\frac{25}{4}+\frac{4}{3}x=0$;

2) $6-\frac{3-y}{2}=\frac{y-1}{2}+\frac{y-2}{3}$; 4) $\frac{y-3}{6}+y=\frac{2y-1}{3}-\frac{4-y}{2}$.

0.14. Найдите наибольшее целое решение неравенства:

1) $x+2\geqslant 2,5x-1$; 3) $\frac{x-2}{5}-\frac{2x+3}{3}>1$;

2) $\frac{3x+2}{4}-\frac{x-3}{2}<3$; 4) $\frac{2x-8}{3}-\frac{3x-5}{2}\geqslant 4$.

0.15. Найдите наименьшее целое решение неравенства:

1) $\frac{2x+2}{5}-\frac{x-1}{2}<2$; 3) $\frac{5x}{11}-\frac{x+2}{4}\geqslant 3$;

2) $\frac{x}{6}-\frac{x}{7}\geqslant 1$; 4) $\frac{2x-5}{3}-1>3-x$.

0.16. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases}\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y=1,\\ 3x-5y=-3;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}3x-2y=\frac{1}{2},\\ 4y-x=\frac{2}{3};\end{cases}$

2) $\begin{cases}\frac{1}{4}x-y=-5,\\ \frac{1}{2}x-\frac{1}{7}y=3;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}2x-3y=-1,\\ \frac{y}{x}=0,75.\end{cases}$

0.17. Вычислите:

1) $\left(\frac{1}{2}+0,125-\frac{1}{6}\right)\cdot\left(6,4:\frac{80}{3}\right)+\frac{1}{8}$;

2) $\left(\frac{3\frac{1}{3}+2,5}{2,5-1\frac{1}{3}}\cdot\frac{4,6-2\frac{1}{3}}{4,6+2\frac{1}{3}}\right)\cdot 5,2:\left(\frac{0,05}{\frac{1}{7}-0,125}+5,7\right)$;

3) $\dfrac{\left(13\frac{1}{4}-2\frac{5}{27}-10\frac{5}{6}\right)\cdot 230{,}04+46{,}75}{0{,}01}.$

0.18. Сумма двух чисел равна 45, одно из них относится к другому как 7:8. Найдите эти числа.

0.19. Сумма длин трех отрезков равна 35 см. Длина одного из отрезков в 4 раза меньше длины другого отрезка и на 1 см больше длины третьего отрезка. Найдите длину каждого отрезка.

0.20. Сумма в 525 тг выплачена пятитенговыми и десятитенговыми монетами, количество каждой монеты поровну. Сколько пятитенговых и десятитенговых монет было выплачено?

C

0.21. Изобразите на координатной плоскости множество решений системы неравенств с двумя переменными:

1) $\begin{cases}5x-y\leqslant 4,\\ 0{,}5x+y\leqslant 0;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}3x-5y<-10,\\ x+y>9;\end{cases}$

2) $\begin{cases}2x-y<3,\\ 2x+y<6;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}4x+3y+12\geqslant 0,\\ 3y-x-6\geqslant 0.\end{cases}$

0.22. Решите уравнение относительно переменной x:

1) $(5x-3a)-(2x+5a)=4a$;

2) $(x+a)+(x+2a)-(x-3a)=8a$;

3) $\left(\frac{3}{4}x-\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{2}{3}x+0{,}6\right)-\left(\frac{7}{12}x-0{,}3\right)=5{,}8$;

4) $(x-a-b)+(2x+3a+b)=(2a-b)-(2a-5b)$.

0.23. Решите систему уравнений относительно переменных x и y:

1) $\begin{cases}px-qy=a,\\ lx+my=b;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}\dfrac{2x+3}{3y-2}=1,\\ x(2y-5)-2y(x+3)=2x+1;\end{cases}$

2) $\begin{cases}bx+ay=ab,\\ bx+1=a+y;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}\dfrac{x+1}{y+2}=5,\\ 3(2x-5)-4(3y+4)=5.\end{cases}$

0.24. Составьте несколько систем уравнений с двумя неизвестными, не имеющих решения.

0.25. Дана система уравнений: $\begin{cases} x + y = 7, \\ ax + 2y = c. \end{cases}$

Подберите такие значения a и c, чтобы система уравнений: 1) имела одно решение; 2) имела бесконечное множество решений.

0.26. В задаче 25 подберите значения a и c так, чтобы данная система уравнений не имела решений.

0.27. Для ремонта здания нанято несколько рабочих, которые могут выполнить эту работу в определенное число дней. Если их будет на 3 человека меньше, то срок работы увеличится на 6 дней. Если же их будет на 2 человека больше, то они смогут выполнить работу на 2 дня раньше срока. Сколько рабочих было нанято и в какой срок они смогут выполнить работу?

0.28. Отцу и дочери вместе 62 года. Четыре года назад отец был в 8 раз старше дочери. Сколько лет каждому из них?

0.29. При каких значениях x дробь $\frac{3x-4}{2}$:

1) больше 1; 2) меньше 1; 3) равна 1?

0.30. Составьте систему неравенств, решения которой находятся на сторонах треугольника ABC и внутри него (рис. 0.1). Здесь $A(-3; -3)$, $B(0; 3)$ и $C(3; -1)$.

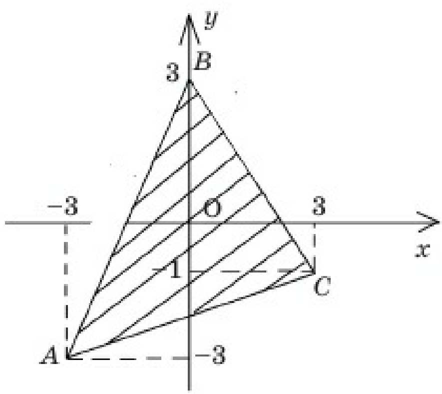


Рис. 0.1.

И

Возникновение и установление понятия «алгебра»

Алгебра – это часть математики, в которой изучаются функции, уравнения, неравенства и выполняются тождественные преобразования и вычисления. Начальные элементы алгебры впервые стали применять ученые Древней Греции, Египта, Вавилона, Индии и Китая. Начиная с VI века до н.э., в древнегреческих научных трудах встречаются общие начальные понятия (правила) о тождественных преобразованиях. В этот период все утверждения математики выражали в геометрической форме. Например, сложение чисел понимали, как сложение отрезков. Произведение двух чисел представляли, как нахождение площади прямоугольника (где меньшее число – ширина прямоугольника, а большее число – его длина), а произведение трех чисел – как нахождение объема прямого параллелепипеда. Геометрические взгляды на алгебраические понятия вызывали некоторые затруднения. К примеру, тут не могло быть и речи об умножении более трех чисел.

С VI века математические исследования начали широко развиваться в Индии, Китае, странах Ближнего Востока и Средней Азии. В трудах ученых Ближнего Востока и Средней Азии алгебра стала развиваться как отдельная часть математики. В IX веке в трактате «Китаб аль-джебр валь-мукабала» («Книга о восстановлении и противопоставлении») среднеазиатского математика, астронома аль-Хорезми были приведены общие правила решения уравнений первой степени. От слова «аль-джебр» возникло название «алгебра».

Важный вклад в становление и развитие алгебры как науки внесли италь-янские математики Н. Тарталья (1499–1557), Дж. Кордано (1501–1576) и французские математики Ф. Виет (1540–1603), Р. Декарт (1596–1650).

Раздел 1. СТЕПЕНЬ С НАТУРАЛЬНЫМ и ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЯМИ

1.1. Степень с натуральным показателем

1.1.1. Понятие степени с натуральным показателем.

В алгебре умножение равных между собой чисел рассматривается как новое действие, которое называется возведением в степень. Например, если число 4 умножается само на себя, то произведение 4·4, равное 16, называется второй степенью числа 4; произведение 4·4·4, равное 64, называется третьей степенью числа 4; произведение 4·4·4·4, равное 256, называется четвертой степенью числа 4 и т.д. При этом говорят, что число 4 возводится во вторую, третью, четвертую и т.д. степень.

Пусть a – произвольное число, а n – натуральное число, большее 1. Произведение n сомножителей, равных a,

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}$$

называется n-й степенью числа a и обозначается через a^n. При этом a называется ***основанием степени***, а натуральное число n – ее ***показателем***, т.е. другими словами:

- ***действие, посредством которого находится произведение нескольких равных сомножителей, называется возведением в степень;***
- ***произведение n сомножителей, равных a, называется n-й степенью числа a;***
- ***число, повторяющееся сомножителем, называется основанием степени;***
- ***число, указывающее, сколько раз берется одинаковый множитель, называется показателем степени.***

Если показатель степени равен 1, т.е. $n=1$, то по определению полагают $a^1=a$, т.е. первой степенью числа a называется само число a.

Итак, если число записано без показателя степени, то подразумевается, что этот показатель равен 1.

Таким образом, по определению

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}} = a^n, \; n>1 \text{ и } a^1=a.$$

Выражение a^n читается как «a в степени n» или «n-я степень числа a». В рассмотренном примере основанием степени является число 4. Выше мы рассмотрели примеры возведения числа 4 в степень:

$$4^2=16, \; 4^3=64, \; 4^4=256 \text{ и т.д.}$$

Приведем и другие примеры возведения числа в степень:
$5^4=5\cdot5\cdot5\cdot5=625$; $0^3=0\cdot0\cdot0=0$; $1^5=1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1=1$;
$(-3)^3=(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)=-27$; $(-2)^4=(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)=16$;
$10^1=10$.

Нетрудно заметить, что при возведении в степень положительного числа получается положительное число; при возведении в степень нуля или единицы получается соответственно нуль или единица. А при возведении отрицательного числа может получиться как положительное число, так и отрицательное. Отрицательное число с четным показателем является положительным числом, так как произведение четного числа отрицательных множителей положительно. Отрицательное число с нечетным показателем является отрицательным числом, так как произведение нечетного числа отрицательных множителей отрицательно. При решении задач удобно пользоваться формулой

$$(-a)^n=\begin{cases}a^n, & \text{если } n-\text{четное число,}\\ -a^n, & \text{если } n-\text{нечетное число.}\end{cases}$$

Вторая степень называется иначе ***квадратом***, третья степень – ***кубом***. Это объясняется тем, что площадь квадрата со стороной a равна второй степени числа a, т. е. $S=a^2$ (квадратных единиц), а объем куба с ребром a равна третьей степени числа a, т. е. $V=a^3$ (кубических единиц) (рис. 1.1.).

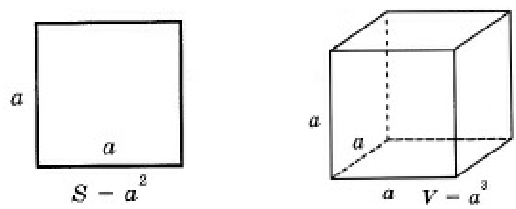


Рис. 1.1.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Найдем значения выражений:
1) $2\cdot3^3$; 2) $(2\cdot3)^3$.

Решение: 1) $2\cdot3^3=2\cdot3\cdot3\cdot3=2\cdot27=54$;
2) $(2\cdot3)^3=2\cdot3\cdot2\cdot3\cdot2\cdot3=6\cdot6\cdot6=6^3=216$.

Пример 2. Найдем значение выражения $-3^4+(-2)^6$.

Решение: 1) $3^4=81$; 2) $-3^4=-81$; 3) $(-2)^6=2^6=64$;
4) $-81+64=-17$.

Значит, $-3^4+(-2)^6=-17$.

?

1. Сформулируйте определение степени числа с натуральным показателем.
2. Сформулируйте определение основания степени.
3. Сформулируйте определение показателя степени.
4. Приведите пример возведения числа в степень и прочтите его. Укажите основание степени и показатель.
5. Как записывают степень числа с показателем степени, равным 1?
6. Какой знак имеет отрицательное число с четным показателем?
7. Какой знак имеет отрицательное число с нечетным показателем?

ПЗ

В сосуд кубической формы с ребром, равным 1 дм, вмещается 1 литр жидкости. Сколько литров воды вмещается в бассейн кубической формы с ребром, равным 1,5 м?

Упражнения

A

1.1. Представьте произведение в виде степени:

1) $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$;

2) $0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,3$;

3) $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$;

4) $\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$;

5) $\left(-\frac{5}{3}\right) \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) \cdot \left(-\frac{5}{3}\right)$;

6) $(ax) \cdot (ax) \cdot (ax) \cdot (ax) \cdot (ax)$.

1.2. Вычислите:

1) $(-3)^3$; 2) $(-2)^4$; 3) $(-4)^3$; 4) $(-5)^2$; 5) 4^4; 6) 2^5; 7) 7^3; 8) 8^2; 9) $2,5^2$; 10) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$.

1.3. Выполните возведение в степень:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^2$; 2) $\left(-\frac{1}{2}\right)^5$; 3) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2$; 4) $0,3^3$; 5) $0,1^3$; 6) $\left(1\frac{1}{2}\right)^4$; 7) $\left(-\frac{3}{4}\right)^3$; 8) $\left(2\frac{1}{2}\right)^3$.

1.4. Представьте произведение в виде степени:

1) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$;
2) $x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$;
3) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot a \cdot a$;
4) $a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b$;
5) $x \cdot x + y \cdot y$;
6) $m \cdot m \cdot m + m \cdot m$;
7) $u \cdot u \cdot b \cdot b$;
8) $m \cdot x \cdot x + n \cdot n \cdot y \cdot y \cdot y$;
9) $2 \cdot x \cdot x \cdot z \cdot z + y \cdot y \cdot y$.

1.5. Запишите степень в виде произведения:

1) a^3; 2) b^5; 3) x^3; 4) $(cx)^3$; 5) $2\cdot y^5$; 6) $(-m)^5$.

1.6. Вычислите:

1) $\left(\frac{4}{5}\right)^2$; 4) $\left(-2\frac{1}{4}\right)^2$; 7) 9^3; 10) $(-1{,}2)^3$.

2) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2$; 5) $(2{,}1)^2$; 8) $(-1)^3$;

3) $\left(1\frac{1}{2}\right)^2$; 6) $(-6)^3$; 9) $\left(1\frac{3}{4}\right)^3$;

1.7. Заполните таблицу.

x	1	2	3	4	-1	-2	-3	-4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-1\frac{2}{3}$	$-0{,}3$
x^2								16						

1.8. Представьте число в виде квадрата числа.

$0{,}01$; $0{,}49$; 121; $\frac{36}{169}$; $1\frac{56}{169}$; $0{,}0009$.

1.9. Найдите значения выражений:

1) x^2, $-x^2$, $(-x)^2$, если $x=5$; -4;

2) x^3, $-x^3$, $(-x)^3$, если $x=3$; -2.

B

1.10. Вычислите:

1) $2\cdot(-3)^2$; 3) $-\frac{1}{2}\cdot(-4)^2$; 5) $-(-0{,}2)^2$; 7) $(-5)^3\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)$;

2) $-5\cdot(-2)^3$; 4) $-4\cdot(-4)^3$; 6) $-\frac{2}{3}\cdot(-3)^2$; 8) $-(-3)^2\cdot(-2)^3$.

1.11. Сравните:

1) $(-0{,}5)^2$ и 0; 2) $-0{,}5^3$ и 0; 3) $(-0{,}5)^3$ и 0;

4) $(-1{,}1)^2$ и $0{,}3^2$; 5) $-1{,}1^4$ и $(-0{,}3)^4$; 6) $(-2{,}7)^{10}$ и $(-9{,}2)^{13}$.

1.12. Представьте произведение в виде степени:

1) $\underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{20 \text{ множителей}}$; 3) $(x-y)(x-y)(x-y)$;

2) $(-a)(-a)(-a)(-a)(-a)$; 4) $\underbrace{(a+b)(a+b)\ldots(a+b)}_{n \text{ множителей}}$.

1.13. Представьте число в виде степени с основанием 5:
25; 125; 625; 15625.

1.14. Представьте число в виде квадрата или куба числа.

1) 27; 2) 25; 3) -125; 4) 64; 5) 0,001; 6) $1\dfrac{11}{25}$.

1.15. Упростите выражение:

1) $a^2 + a^2$; 4) $bb + bb + bb$; 7) $\dfrac{xx + xx + xx}{yyy + yyy}$.

2) $x^2 + x^2 + x^2$; 5) $xxx + xxx$;

3) $m^5 + m^5 + m^5$; 6) $aa + aa + bbb + bbb$;

1.16. Запишите степень в виде произведения:

1) a^2; 2) $(-b)^3$; 3) ax^2; 4) $(ax)^2$; 5) $(-my)^4$; 6) $-my^4$.

1.17. Найдите значение выражения:

1) $3a^2-2b^3$ при $a=-17$, $b=-2$;

2) $5x^2y^3 + 4(x-y)$ при $x = -\dfrac{1}{2}$, $y = -1$;

3) $m^2+2mn+n^2$ при $m=-5$, $n=4$;

4) $3pq^2-2p^2q$ при $p=-4$, $q=3$.

1.18. Вычислите значение выражения x^n+y^n при $x=-2$, $y=3$, $n=4$.

1.19. Вычислите:

1) $-5^2+(-2)^4$; 3) $0{,}2 \cdot 5^3-0{,}4 \cdot 2^4$;

2) $3^4 - \left(\dfrac{2}{5}\right)^2 \cdot 6\dfrac{1}{4}$; 4) $8 \cdot 0{,}5^3+125 \cdot 0{,}2^2$.

1.20. Представьте число в виде куба числа.

$27;\ -64;\ 343;\ -0{,}008;\ -\frac{1}{125};\quad 4\frac{17}{27}.$

1.21. Заполните таблицу.

x	1	2	3	4	5
2^x					
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$					
3^x					
$(-1)^x$					
$(-2)^x$					

1.22. Запишите в виде выражения:

1) квадрат суммы x и y;

2) сумму квадратов x и y;

3) утроенное произведение квадрата x и куба y;

4) удвоенный куб разности x и y.

1.23. Могут ли выражения $2a^2$ и $(a-5)^4$ при некоторых значениях a принимать отрицательные значения? Объясните ответ.

C

1.24. Представьте произведение в виде степени с основанием x:

1) $x^2 \cdot x$; 2) $x^3 \cdot x^2$; 3) $x^3 \cdot x^7$; 4) $x^{14} \cdot x^{20}$.

1.25. Вычислите значение выражения $2a^5-5a^4+a^3-3a^2$, если $a=-1;\ 0;\ 2$.

1.26. Найдите значение выражения:

1) $\frac{2a^4-3b^3}{1-a^2}$ при $a=-\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{3}$;

2) $\frac{2m^2-4m-1}{m^2+m+1}$ при $m=-\frac{3}{4}$;

3) $\frac{3x^2+5y}{2x-1}+\frac{x^2-2y^3}{3-4y}$ при $x=-\frac{1}{3}$, $y=\frac{1}{2}$;

4) $\dfrac{1-2ab}{3a^2b}-\dfrac{2+3ab^2}{4ab^3}$ при $a=\dfrac{1}{2}$, $b=-\dfrac{2}{3}$.

1.27. Докажите, что выражения x^4+1 и $3+(4-x)^2$ принимают только положительные значения.

1.28. Докажите, что уравнение $x^4+5x^3+2x^2+x+4=0$ не может иметь положительных корней.

1.29. Верно ли равенство, данное ниже, при любом a?

1) $|a|^2=a^2$; 2) $|a|^3=a^3$.

Упражнения для повторения

1.30. Решите уравнение:

1) $0{,}12-2{,}5x=-0{,}8$;

2) $4{,}8x-0{,}3=4{,}2\cdot0{,}5$;

3) $1\dfrac{3}{4}-5x=2\dfrac{3}{4}:\left(-3\dfrac{2}{3}\right)$;

4) $20x+0{,}4\cdot\left(-6\dfrac{1}{4}\right)=4\dfrac{2}{3}:\left(-\dfrac{1}{4}\right)$.

1.31*. При каких значениях a и b система уравнений

$$\begin{cases}x-2y=3,\\2x+ay=b\end{cases}$$

имеет: 1) одно решение; 2) бесконечное множество решений; 3) не имеет решения?

1.32. Из удвоенного квадрата суммы чисел a и b вычтите утроенную разность тех же чисел и вычислите результат при:

1) $a=6$, $b=-4$; 2) $a=3$, $b=-5$.

1.33. При каких условиях значение выражения $\dfrac{a-1}{2}$: 1) положительное число; 2) отрицательное число; 3) целое число; 4) равно нулю?

1.1.2. Умножение и деление степеней с натуральным показателем. Степень с нулевым показателем.

Выражение a^3a^5 является произведением двух степеней с одинаковыми основаниями и его можно записать в виде степени с тем же основанием:

$$a^3\cdot a^5=(a\cdot a\cdot a)(a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a)=a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a=a^8.$$

Следовательно,

$$a^3 \cdot a^5 = a^{3+5} = a^8,$$

т. е. произведение $a^3 \cdot a^5$ равно степени с тем же основанием и показателем, равным сумме показателей множителей. Аналогичным свойством обладает произведение любых степеней с одинаковыми основаниями, т.е. для любого числа a и произвольных натуральных чисел n и m выполняется равенство:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}. \qquad (1)$$

Это следует из определения степени:

$$a^n \cdot a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ раз}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{(n+m) \text{ раз}} = a^{n+m}.$$

Таким образом, ***при умножении степеней с одинаковыми основаниями основание оставляют прежним, а показатели множителей складывают.***

Доказанная формула (1) выражает ***основное свойство степени.*** Эта формула распространяется на произведение трех и более степеней.

Например,

$$a^n \cdot a^m \cdot a^k = a^{n+m+k}.$$

Приведем примеры:

$$b^2 \cdot b^7 = b^{2+7} = b^9; \; y^3 \cdot y^4 = y^{3+4} = y^7; \; x \cdot x^2 \cdot x^3 = x^{1+2+3} = x^6.$$

Выражение $a^9 : a^5$ является частным двух степеней с одинаковыми основаниями и при $a \neq 0$ его можно представить в виде степени с тем же основанием. В самом деле, так как $a^5 \cdot a^4 = a^9$, то по определению частного

$$a^9 : a^5 = a^4, \text{ т.е. } a^9 : a^5 = a^{9-5}.$$

Мы видим, что частное $a^9 : a^5$ равно степени с тем же основанием и показателем, равным разности показателей делимого и делителя.

Аналогично, при $n > m$ и $a \neq 0$ имеем

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}. \qquad (2)$$

Это следует из равенства $a^n = a^{m+(n-m)} = a^m \cdot a^{n-m}$.

Значит, по определению частного

$$a^n : a^m = a^{n-m}.$$

Из доказанного свойства следует правило деления степеней, данное ниже.

При делении степеней с одинаковыми основаниями основание оставляют прежним, а из показателя делимого вычитают показатель делителя.

Например,

$x^{10}:x^3=x^{10-3}=x^7$; $m^8:m^5=m^{8-5}=m^3$; $q^5 : q=q^{5-1}=q^4$.

Данное правило деления a^n на a^m получено для случая, когда $n>m$. При $n=m$, с одной стороны, по определению частного

$$a^n : a^n = 1,$$

с другой стороны, по правилу деления степени должно получиться равенство

$$a^n : a^n = a^{n-n} = a^0 .$$

Поэтому, при $a \neq 0$ по определению полагают, что

$$a^0 = 1 .$$

Число а, не равное нулю, с нулевым показателем равно единице.

Например, $3^0=1$, $(-5,2)^0=1$. ***Выражение 0^0 не имеет смысла.***

Теперь формулу (1) можно применять при $a \neq 0$ для любых целых неотрицательных чисел n и m. Формулу (2) можно применять при $a \neq 0$ для любых целых неотрицательных чисел n и m, удовлетворяющих условию $n \geqslant m$.

?

1. Напишите формулу для умножения степеней с одинаковыми показателями и сформулируйте соответствующее правило.
2. Напишите формулу для деления степеней с одинаковыми показателями и сформулируйте соответствующее правило.
3. Докажите формулу (1).
4. Докажите формулу (2).
5. Чему равна степень числа, не равного нулю, с нулевым показателем?
6. Имеет ли смысл выражение 0^0 ?

ПЗ

Как можно определить цифру степени числа с натуральным показателем, который оканчивается цифрой: 1) 3; 2) 4; 3) 7; 4) 8? Покажите алгоритм нахождения последней цифры.

Упражнения

А

1.34. Представьте произведение в виде степени:

1) $a^3 \cdot a^4$; 2) $a \cdot a^5$; 3) $x^5 \cdot x^3$; 4) $0,5^3 \cdot 0,5^7$;

5) $\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4$; 6) $p^2\cdot p^3$; 7) $q^4\cdot q^5$; 8) $y^3\cdot y^5$.

1.35. Запишите произведение в виде степени:

1) $n^{12}\cdot n^5$; 4) $a^6\cdot a^7$; 7) $b\cdot b\cdot b^2$;

2) $m^5\cdot m^{17}$; 5) $a^{16}\cdot a^7$; 8) $x^2\cdot x\cdot x^3$;

3) $c^3\cdot c^4$; 6) $p^{10}\cdot p^{11}$; 9) $r^2\cdot r^2\cdot r^2$.

1.36. Представьте произведение в виде степени:

1) $2^5\cdot 64$; 3) $3^4\cdot 81$; 5) $0,25^7\cdot\frac{1}{64}$;

2) $0,2^6\cdot 0,04$; 4) $6^{12}\cdot 36$; 6) $0,0001\cdot 0,1^5$.

1.37. Представьте частное в виде степени:

1) $a^5 : a^2$; 5) $x^{11} : x^7$;

2) $b^{20} : b^{12}$; 6) $p^{19} : p^9$;

3) $-c^{15} : c^5$; 7) $q^{12} : q^3$;

4) $0,5^{17} : 0,5^{10}$; 8) $7^{20} : 7^{12}$.

1.38. Выполните деление:

1) $p^{12} : p^2$; 3) $10^{21} : 10^{12}$; 5) $2,3^{17} : 2,3^8$;

2) $a^{16} : a^7$; 4) $y^9 : y$; 6) $q^{12} : q^8$.

1.39. Найдите значение выражения:

1) $5^8:5^6$; 4) $\left(1\frac{2}{3}\right)^4 : \left(1\frac{2}{3}\right)^2$;

2) $0,2^7:0,2^5$; 5) $\left(-\frac{3}{7}\right)^5 : \left(-\frac{3}{7}\right)^4$;

3) $1,99^{13}:1,99^{12}$; 6) $\left(2\frac{3}{5}\right)^6 : \left(2\frac{3}{5}\right)^4$.

1.40. Упростите выражение:

1) $a^5\cdot a^0$; 2) $b^6:b^0$; 3) $p^4\cdot p^0$; 4) $x^8 : x^0$.

1.41. Вычислите:

1) $4^2 \cdot 4$; 2) $1{,}1 \cdot 1{,}1^2$; 3) $5^5 : 5^3$; 4) $\left(2\frac{3}{5}\right)^6 : \left(2\frac{3}{5}\right)^4$.

1.42. Упростите выражение:

1) $a \cdot a^3 \cdot a^5$; 3) $x^2 \cdot x^4 \cdot x^5$; 5) $y^{12} : y^{11}$;

2) $a^7 : a^5$; 4) $m^{10} : m^7$; 6) $c^5 \cdot c^{10} \cdot c$.

B

1.43. Представьте произведение в виде степени:

1) $a^3 \cdot a^4 \cdot a^6$; 3) $10 \cdot 10^5 \cdot 10^2$; 5) $q^5 \cdot q^3 \cdot q \cdot q^2$;

2) $n \cdot n^2 \cdot n^3 \cdot n^4$; 4) $x^2 \cdot x^3 \cdot x$; 6) $2 \cdot 2^6 \cdot 2 \cdot 2^2$.

1.44. Запишите произведение в виде степени:

1) $x^2 \cdot x^2 \cdot x^7$; 3) $4 \cdot 4^2 \cdot 4^3 \cdot 4^2$; 5) $m^5 \cdot m \cdot m^3 \cdot m^6$;

2) $a \cdot a^4 \cdot a^4 \cdot a$; 4) $y^4 \cdot y^3 \cdot y^2$; 6) $7^3 \cdot 7 \cdot 7^7$.

1.45. Представьте выражение x^{12} в виде произведения двух степеней с основанием x, одна из которых равна:

1) x^5; 2) x^2; 3) x^7; 4) x^{12}.

1.46. Представьте произведение в виде степени:

1) $a^2 \cdot a^5 \cdot a^8$; 4) $10^2 \cdot 10^3 \cdot 10^7$; 7) $0{,}125 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}5$;

2) $b \cdot b^4 \cdot b^4 \cdot b$; 5) $m \cdot m^2 \cdot m^3 \cdot m^4$; 8) $3^{12} \cdot 27 \cdot 81$.

3) $x^3 \cdot x^2 \cdot x$; 6) $0{,}4^5 \cdot 0{,}16$;

1.47. Представьте частное в виде степени:

1) $x^5 : x^2$; 3) $2{,}5^{16} : 2{,}5^7$;

2) $b^{12} : b^{10}$; 4) $\left(-\frac{2}{3}\right)^7 : \left(-\frac{2}{3}\right)^4$.

1.48. Покажите, что значение дроби не зависит от натурального n:

1) $\dfrac{6^{n+1} \cdot 6^{n+2}}{6^{2n}}$; 2) $\dfrac{5^{2n+4} \cdot 5^{2n-1}}{5^{4n+2}}$.

1.49. Представьте каким-нибудь способом степень в виде произведения двух степеней с тем же основанием:

1) a^{10}; 2) b^{12}; 3) x^{11}; 4) 3^{12}.

1.50. Найдите значение дроби:

1) $\dfrac{5^6}{5^4}$;   3) $\dfrac{0,8^5}{0,8^3}$;   5) $\dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^7}{\left(\frac{2}{3}\right)^4}$;

2) $\dfrac{9^{12}}{9^{11}}$;   4) $\dfrac{\left(-1\frac{1}{2}\right)^4}{-1\frac{1}{2}}$;   6) $(1,3)^9 : \left(\dfrac{13}{10}\right)^7$.

1.51. Вычислите:

1) $\dfrac{17^9 \cdot 17^5}{17^{13}}$;   3) $\dfrac{5^{16} \cdot 5^4}{5^{18}}$;

2) $\dfrac{4^{15}}{4^5 \cdot 4^8}$;   4) $\dfrac{0,3^{12}}{0,3^4 \cdot 0,3^5}$.

1.52. Представьте выражение в виде степени:

1) $\left(a^{12} : a^7\right) \cdot a^2$;;   2) $\left(x^5 \cdot x^7\right) : x^8$;   3) $b^{12} : \left(b^4 \cdot b^3\right)$.

1.53. Упростите выражение:

1) $\left(a^5 \cdot a^3 + a^8 \cdot a^0\right) : a^7$;   2) $x^{12} : \left(2x^3 \cdot x^4 - x^2 \cdot x^5\right)$.

1.54. Представьте выражение в виде степени:

1) $2^5 \cdot 8 \cdot 16$;   2) $16 \cdot 64 \cdot 128$;   3) $7^n \cdot 343$;   4) $243 \cdot 3^k$.

C

1.55. Представьте выражение в виде произведения двух множителей, один из которых равен b^4.

1) b^{11};   2) b^7;   3) $b^8 \cdot b^2 \cdot b$;   4) $\dfrac{b^{10} \cdot b^2}{b^4}$.

1.56. Замените x степенью с основанием a так, чтобы полученное равенство было тождеством:

1) $a^3 \cdot x = a^5$;   3) $a^7 \cdot x = a^{11}$;

2) $x \cdot a^4 = a^8$;   4) $a^5 \cdot x = a^{16}$.

1.57. Докажите, что при любом натуральном n значение дроби $\dfrac{10^n - 1}{9}$ является натуральным числом.

1.58. Докажите, что при любом натуральном n выполняется равенство $2^n+2^n=2^{n+1}$.

1.59. Определите знак выражения: 1) a^{2n}; 2) a^{2n+1}, где $a<0$ и $n\geqslant 0$ – целое число.

1.60. Упростите выражение:

1) $7^{n+2}:7^n$; 2) $10^{n+1}:10^{n-1}$; 3) $(-1)^n\cdot(-1)^n$.

1.61. Докажите, что уравнение $x^4+4=0$ не имеет корней.

1.62. Упростите выражение:

1) $125m^4p^5:\left(-0,25m^3p^2\right):25mp$;

2) $0,125a^{n+13}\cdot b^{n+12}:\left(-\frac{1}{8}a^4b^3:5a^9b^5\right)$, $n\in N$.

Упражнения для повторения

1.63. Представьте в виде квадрата или куба числа:

1) -27; 3) $6,25$; 5) $-3\frac{3}{8}$;

2) $1,69$; 4) -64; 6) $5\frac{4}{9}$.

1.64. Найдите координаты точек пересечения графика функции $y=2x-6$ с осями координат.

1.65. Найдите координаты точек пересечения прямых, заданных уравнениями $y=2x-6$ и $y=-\frac{1}{2}x+1$.

1.66. Три студента получили стипендию. Первый получил 0,9 той суммы, которую получил второй студент, и еще 4200 тг, а третий студент получил 0,9 той суммы, которую получил второй, и еще 1200 тг. Сколько тенге получил каждый студент, если известно, что второй и третий получили поровну?

1.1.3 Возведение в степень произведения, частного и степени.

Выражение $(ab)^3$ является степенью, основание которой есть произведение множителей a и b. Это выражение можно представить в виде произведения степеней:

$$(ab)^3=ab\cdot ab\cdot ab=(a\cdot a\cdot a)\cdot(b\cdot b\cdot b)=a^3b^3,$$

т.е.
$$(ab)^3=a^3b^3.$$

Для любых a, b и произвольного натурального числа n выполняется равенство

$$(ab)^n=a^nb^n. \qquad (3)$$

Доказательство. По определению степени имеем:

$$(ab)^n=\underbrace{(ab)\cdot(ab)\cdot\ldots\cdot(ab)}_{n\text{ раз}}=\underbrace{(a\cdot a\cdot\ldots\cdot a)}_{n\text{ раз}}\cdot\underbrace{(b\cdot b\cdot\ldots\cdot b)}_{n\text{ раз}}=a^nb^n\ . \qquad (4)$$

Это свойство степени, основанием которой является произведение двух множителей, распространяется на степень, основанием которой является произведение трех и более множителей. Например,

$$(abc)^n=a^nb^nc^n \text{ и т.д.,}$$

т.е. ***при возведении в степень произведения множителей возводят в эту степень каждый множитель и результаты перемножают.***

Пример 1. Возведем произведение $3ax$ в куб.

$$(3ax)^3=3^3a^3x^3=27a^3x^3$$

Выражение $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ является степенью, основание которой есть частное делимого и делителя a и b. Это выражение можно представить в виде частного степеней, т.е.

для любых чисел a и b (b ≠ 0) и произвольного натурального числа n выполняется равенство

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}. \qquad (5)$$

Доказательство. Пусть $\frac{a}{b}=c$. Тогда $a=b\cdot c$. Возведем в n-ю степень обе части этого равенства и применим к правой части формулу (3):

$$a^n=(bc)^n=b^nc^n.$$

По определению частного, с одной стороны,

$$\frac{a^n}{b^n}=c^n,$$

а с другой –

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=c^n.$$

Следовательно, $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Это свойство степени, основанием которой является частное, можно обобщить так:

$$\left(\frac{ab}{cxy}\right)^n = \frac{a^n b^n}{c^n x^n y^n} \text{ и т.д.,}$$

т.е. ***при возведении в степень дроби возводят в эту степень каждый множитель как числителя, так и знаменателя этой дроби.***

Пример 2. Возведем дробь $\frac{2xy}{3ab}$ в 5-ю степень.

$$\left(\frac{2xy}{3ab}\right)^5 = \frac{(2xy)^5}{(3ab)^5} = \frac{2^5 x^5 y^5}{3^5 a^5 b^5} = \frac{32x^5 y^5}{243a^5 b^5}$$

Выражение $(a^3)^4$ является степенью, основание которой есть степень. Это выражение можно представить в виде степени с основанием a:

$$(a^3)^4 = a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 = a^{3+3+3+3} = a^{3\cdot 4}.$$

Для любого числа a и положительных натуральных чисел n и m выполняется равенство

$$(a^n)^m = a^{n\cdot m}. \qquad (6)$$

Доказательство. По определению степени

$$(a^n)^m = \underbrace{a^n \cdot a^n \cdot \ldots \cdot a^n}_{m \text{ раз}} = a^{\overbrace{n+n+\ldots+n}^{m \text{ раз}}} = a^{n\cdot m},$$

т.е. ***при возведении степени в степень основание оставляют тем же, а показатели перемножают***. Например,

$$(x^4)^5 = x^{4\cdot 5} = x^{20}; \ (a^2b^3)^4 = a^{2\cdot 4}b^{3\cdot 4} = a^8b^{12}.$$

И

В Древнем Вавилоне применялись таблицы квадратов и кубов чисел. Индийские ученые умели производить действия над степенями с показателем до 9. В трудах самаркандского ученого аль-Каши (XIV–XV) применялось понятие $a^0=1$, где $a \neq 0$, а французский математик Рене Декарт (1596–1650) в своем сочинении «Геометрия» применял обозначения a^2, a^3, … .

?

1. Сформулируйте правило возведения в степень произведения.
2. Сформулируйте правило возведения в степень частного.
3. Сформулируйте правило возведения в степень степени.
4. Докажите формулы (3), (5), (6).

ПЗ а) В тетради начертите три прямоугольника со сторонами 4 см и 6 см, 2 см и 3 см, 8 см и 12 см. Найдите площадь каждого из них и сравните полученные результаты. Сделайте вывод и обоснуйте его.
б) Даны два параллелепипеда с ребрами 2 см, 3 см, 4 см; 4 см, 6 см, 8 см. 1) Найдите площади полных поверхностей и объемы этих параллелепипедов; 3) сравните объемы; 4) сделайте вывод и обоснуйте его.

Упражнения

A

1.67. Выполните возведение в степень:

1) $(ab)^5$; 3) $(-5y)^3$; 5) $(xyz)^4$; 7) $(4nk)^3$;
2) $(3x)^4$; 4) $(-0,5pq)^4$; 6) $(-2m)^6$; 8) $(-0,2cd)^3$.

1.68. Выполните возведение в степень:

1) $(xy)^4$; 3) $(10ab)^2$; 5) $(mnk)^3$; 7) $(-2abxy)^4$;
2) $(-na)^3$; 4) $(-5x)^4$; 6) $(-3pq)^3$; 8) $(-3px)^3$.

1.69. Вычислите:

1) $(2\cdot 5)^4$; 2) $(2\cdot 3)^3$; 3) $(2\cdot 100)^2$; 4) $(7\cdot 20)^2$.

1.70. Выполните возведение в степень:

1) $(a^3)^3$; 3) $(y^2)^5$; 5) $(b^3)^2$; 7) $(m^7)^2$;
2) $(x^5)^2$; 4) $(c^3)^4$; 6) $(b^4)^4$; 8) $(p^5)^6$.

1.71. Выполните возведение в степень:

1) $\left(\frac{xy}{a}\right)^5$; 3) $\left(\frac{x^2y}{ab}\right)^4$; 5) $\left(\frac{p^2}{q^3}\right)^3$; 7) $\left(\frac{xy}{bc}\right)^3$;
2) $\left(-\frac{c}{ab}\right)^3$; 4) $\left(\frac{an}{m}\right)^7$; 6) $\left(\frac{-y}{x}\right)^5$; 8) $\left(-\frac{2ab}{3x}\right)^5$.

1.72. Представьте произведение в виде степени:

1) a^4y^4; 3) $81c^4$; 5) $(-m)^4\cdot n^4$;
2) $a^3x^3y^3$; 4) b^6x^6; 6) $0,0016\cdot p^4$.

1.73. Запишите выражение в виде степени с основанием a:

1) $(a^5)^2 \cdot a$; 3) $a \cdot a^2 \cdot a^3$; 5) $(a^2 \cdot a^3)^2$;

2) $a^3 \cdot a^3$; 4) $((a^2)^3)^4$; 6) $a^2 \cdot (a^3)^4 \cdot a$.

1.74. Представьте выражение в виде степени с основанием b:

1) $(b^2)^3$; 3) $(b^3)^4$; 5) $b^3 \cdot b^3$;

2) $b \cdot b^7$; 4) $(-b^3)^2$; 6) $(b^3)^3$.

1.75. Представьте выражение в виде степени с основанием x:

1) $(x^2)^5 : (x^3)^2$; 3) $(x^3 : x^2)^5$;

2) $(x^3)^4 : (x^2)^5$; 4) $\left(\dfrac{x^4}{x}\right)^3$.

B

1.76. Упростите выражение:

1) $a^3 \cdot (a^2)^4$; 3) $(p^2 \cdot p^3)^2$; 5) $(x^2)^5 \cdot x^5$;

2) $(a^2)^4 \cdot (a^4)^3$; 4) $(m^2 \cdot m^3)^3$; 6) $(y^2 \cdot y^3)^4$.

1.77. Упростите выражение:

1) $\dfrac{(x^2 \cdot x)^4}{(x^3)^2}$; 2) $\dfrac{(ab)^2 \cdot a^3 \cdot b^4}{a \cdot (ab)^3}$; 3) $\dfrac{(a^2 \cdot x^3)^5}{(a^2)^2 \cdot x^5}$.

1.78. Докажите, что: 1) квадраты противоположных чисел равны; 2) кубы противоположных чисел противоположны.

1.79. Как изменится площадь квадрата, если длину его стороны увеличить в 3 раза?

1.80. Как изменится объем куба, если длину его ребра увеличить в 2 раза?

1.81. Представьте выражение в виде степени с основанием x:

1) $x^2 x^m$; 3) $(x^2)^n$; 5) $(x^3)^n$.

2) $x^m \cdot x$; 4) $(x^n)^3$;

1.82. Представьте числа в виде степени с основанием 3:

1) 9^5; 2) 27^3; 3) 81^4; 4) 243^2.

1.83. Представьте 5^{20} в виде степени с основанием:

1) 5^2; 2) 25^2; 3) 5^{10}; 4) 625; 5) 5^5.

1.84. Вычислите:

1) $\dfrac{2^5 \cdot \left(2^3\right)^3}{2^{13}}$; 3) $\dfrac{\left(5^5\right)^2}{25 \cdot 5^6}$;

2) $\dfrac{\left(5^8\right)^2 \cdot 5^7}{5^{20}}$; 4) $\dfrac{81 \cdot 3^6}{\left(3^4\right)^3}$.

C

1.85. Представьте выражение x^{20} в виде степени несколькими способами.

1.86. Известно, что $a^3=k$. Найдите a^{12}.

1.87. Если $a^3=p$ и $b^3=q$, то чему равно выражение $\left(\dfrac{a^3}{b^2}\right)^6$?

1.88. Сколькими способами можно представить в виде степени с показателем, отличным от 1, числа: 1) 2^{15}; 2) 5^6?

1.89. При каком условии сумма квадратов двух чисел равна нулю?

1.90. Может ли уравнение $x^4-x^3+2x^2-4x+1=0$ иметь отрицательные корни?

1.91. Какой цифрой оканчивается число 3^{4k}? Здесь k – некоторое натуральное число.

1.92. Докажите, что при любом натуральном n число 10^n-1 кратно 9.

Упражнения для повторения

1.93. Точка $A(a;\ -5)$ симметрична точке $B(3;\ b)$ относительно: 1) оси абсцисс; 2) оси ординат; 3) начала координат. Найдите a и b в каждом из указанных случаев.

1.94. Известно, что прямая, заданная уравнением $y=kx+b$, проходит через точки $A(0;\ 2)$ и $B(-2;\ 0)$. Найдите k и b.

1.95. На элеватор за два дня завезли 1440 т зерна, причем во второй день завезли 80% того количества, что завезли в первый. Сколько тонн зерна завезли на элеватор в первый день?

1.96*. Может ли уравнение $7\cdot(x^2+2x+5)=13$ иметь целое решение?

1.2. Степень с целым показателем

1.2.1. Понятие степени с целым отрицательным показателем. На практике часто для краткости обозначения больших чисел пользуются степенями с основанием 10. Так, например, среднее расстояние от Солнца до Земли приближенно равно 150 000 000 км, или $150\cdot 10^6$ км. А для краткости обозначения малых чисел пользуются степенями с основанием 10 и отрицательным показателем. Например, диаметр молекулы воды приближенно равен $\frac{3}{100\,000\,000}$ см, или $3\cdot 10^{-8}$ см, а масса атома водорода $1{,}674\cdot 10^{-24}$ г и т.д. В выражении $150\cdot 10^6$ км запись 10^6 означает произведение шести множителей, каждый из которых равен 10. А каков смысл записи 10^{-8} в выражении $3\cdot 10^{-8}$? Чтобы выяснить это, выпишем последовательно степени с основанием 10 и целыми неотрицательными показателями:

$$10^0,\ 10^1,\ 10^2,\ 10^3,\dots \qquad (1)$$

Эту последовательность можно записать и так:

$$1,\ 10,\ 100,\ 1000,\ \dots$$

Здесь каждый член последовательности меньше следующего в 10 раз. Попробуем эту последовательность продолжить влево. Тогда перед числом $1=10^0$ должно стоять в 10 раз меньшее число, т.е. число $\frac{1}{10}=\frac{1}{10^1}$, а перед числом $\frac{1}{10}$ – в 10 раз меньшее число, т.е. число $\frac{1}{100}=\frac{1}{10^2}$, перед числом $\frac{1}{100}$ – в 10 раз меньшее число, т.е. число $\frac{1}{1000}=\frac{1}{10^3}$ и т.д. Таким образом, мы можем записать следующую последовательность:

$$\dots,\frac{1}{1000},\quad \frac{1}{100},\quad \frac{1}{10},\ 1,\ 10,\ 100,\ 1000,\dots,$$

или
$$\dots,\frac{1}{10^3},\quad \frac{1}{10^2},\quad \frac{1}{10},\quad 10^0,\quad 10^1,\quad 10^2,\quad 10^3,\dots \qquad (2)$$

В последовательности (1) показатель степени каждого члена на 1 меньше показателя степени следующего члена. Если придерживаться этой закономерности, то последовательность (2) будет записана в виде:

$$\dots,\ 10^{-3},\ 10^{-2},\ 10^{-1},\ 10^0,\ 10^1,\ 10^2,\ 10^3,\ \dots \qquad (3)$$

Сопоставляя последовательности (2) и (3), видим, что 10^{-1} равно $\frac{1}{10}$, 10^{-2} равно $\frac{1}{10^2}$ и т.д. В математике подобное соглашение принято для степени с основанием, не равным нулю.

Определение. ***(−n)-й (где n − натуральное число) степенью числа a, не равного нулю, считается число, обратное n-й степени числа a:***

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}. \tag{4}$$

Например, $10^{-3} = \frac{1}{10^3}$; $5^{-2} = \frac{1}{5^2}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^1} = \frac{2}{1} = 2.$

Степени с основанием 0 с отрицательным показателем не существует.

1.2.2. Свойства степени с целым показателем. Свойства, установленные для степени с натуральными показателями, справедливы и для степени с любым целым показателем, т.е.

для любых $a \neq 0$, $b \neq 0$ и любых целых n и m справедливы равенства:

1) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$;
2) $a^n : a^m = a^{n-m}$;
3) $(a^n)^m = a^{nm}$;
4) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$;
5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Для образца докажем свойство 1).

а) Если m и n − целые неотрицательные числа, то справедливость этого свойства уже доказана.

б) Если $n \geqslant 0$, $m < 0$, то существует такое натуральное число k, что $m = -k$. Мы должны показать, что $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.

Действительно,

$$a^n \cdot a^m = a^n \cdot a^{-k} = a^n \cdot \frac{1}{a^k} = \frac{a^n}{a^k} = a^{n-k} = a^{n+(-k)} = a^{n+m}$$

в) Если $n < 0$, $m < 0$, то существуют такие натуральные числа k и l, что $n = -k$, $m = -l$.

Действительно,

$$a^n \cdot a^m = a^{-k} \cdot a^{-l} = \frac{1}{a^k} \cdot \frac{1}{a^l} = \frac{1}{a^k \cdot a^l} = \frac{1}{a^{k+l}} =$$

$$= a^{-(k+l)} = a^{-k-l} = a^{(-k)+(-l)} = a^{n+m}.$$

Аналогично доказываются и другие свойства.

Пример 1. Найдем значение выражения $5^8 \cdot 5^{-3} \cdot 5^{-2}$.

$5^8 \cdot 5^{-3} \cdot 5^{-2} = 5^{8-3-2} = 5^3 = 125$. Значит, $5^8 \cdot 5^{-3} \cdot 5^{-2} = 125$.

Пример 2. Представим выражение $243^m : 3^{5m-3}$ в виде степени с основанием 3.

Так как $243 = 3^5$, то $243^m = (3^5)^m = 3^{5m}$. Поэтому
$243^m : 3^{5m-3} = 3^{5m} : 3^{5m-3} = 3^{5m-(5m-3)} = 3^{5m-5m+3} = 3^3 = 27$.

?

1. Дайте определение степени с отрицательным показателем.
2. Сформулируйте свойства 1) –5). Приведите соответствующие примеры.
3. Как можно перевести число (выражение) со знаменателя дроби в ее числитель? Приведите пример.
4. Как можно перевести число (выражение) с числителя дроби в ее знаменатель? Приведите пример.
5. Может ли основание степени с нулевым показателем равняться нулю?
6. Каким будет знак показателя степени выражения:
   1) $(a^{-2})^{-3}$; 2) $a^{-5} \cdot (a^{-3})^2$, если его записать в виде степени с основанием a?

И

Понятие степени с отрицательным показателем ввел Николай Шюке в XII веке. До этого английский математик Джон Валлис высказывал об уместности рассмотрения степеней с отрицательными показателями. А И. Ньютон начал систематически использовать это понятие. В 1676 году в одном из своих писем он написал следующее: «Как алгебраисты вместо AA, AAA и т.д. пишут A^2, A^3 и т.д., так я вместо $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$ и т.д. пишу a^{-1}, a^{-2}, a^{-3} и т.д».

Упражнения

А

1.97. Замените дробью степень с целым отрицательным показателем:

1) 3^{-3}; 2) 2^{-3}; 3) 5^{-2}; 4) a^{-2}; 5) b^{-10}; 6) x^{-7}.

1.98. Замените дробь степенью с целым отрицательным показателем:

1) $\frac{1}{2^6}$; 2) $\frac{1}{3^5}$; 3) $\frac{1}{10^3}$; 4) $\frac{1}{x^4}$; 5) $\frac{1}{a^9}$; 6) $\frac{1}{625}$.

1.99. Представьте в виде дроби выражение:

1) $3x^{-5}$; 3) $a^{-1}b$; 5) $a^{-3} \cdot b^2$ 7) $-8mn^{-6}$;

2) $5xy^{-2}$; 4) $m^{-2} \cdot n^{-3}$; 6) $5(xy)^{-2}$; 8) $7x(x+y)^{-2}$.

1.100. Представьте дробь в виде произведения:

1) $\frac{5}{x^3}$; 3) $\frac{1}{a^3b^2}$; 5) $\frac{a}{b}$; 7) $\frac{c}{a^3b^4}$;

2) $\frac{2m^3}{n^5}$; 4) $\frac{2x}{a-b}$; 6) $\frac{p^5}{q^4}$; 8) $\frac{(x-y)^2}{25(x+y)^4}$.

1.101. Вычислите:

1) $7^3 \cdot 7^{-2}$; 3) $\left(3^{-1}\right)^2$; 5) $8^{-2} \cdot 4^3$; 7) $10^8 \cdot 10^{-5} \cdot 10^{-4}$;

2) $2 : 2^{-2}$; 4) $\left(5^{-2}\right)^{-1}$; 6) $10^0 : 10^{-3}$; 8) $3^{-6} \cdot \left(3^{-2}\right)^{-4}$.

1.102. Представьте степень в виде произведения:

1) $\left(x^{-1} \cdot y^{-2}\right)^{-2}$; 3) $\left(0,25m^{-2}n^2\right)^{-3}$; 5) $\left(-3p^3 \cdot q^{-1}\right)^2$;

2) $\left(\frac{1}{2}a^{-3}b^3\right)^{-2}$; 4) $\left(a^3 \cdot b^{-1}\right)^2$; 6) $\left(\frac{1}{3}x^{-3}y^2\right)^3$.

1.103. Представьте выражение в виде степени с основанием 2:

1) $8 \cdot 2^{-4}$; 3) $4^{-2} : 2^{-6}$;

2) $\left(2^{-1}\right)^5 : 16^2$; 4) $16^3 : \left(4^{-2}\right)^{-3}$.

1.104. Каждое из чисел 16, 8, 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ замените степенью с основанием 2.

B

1.105. Найдите значение выражения:

1) $18 \cdot (-9)^{-1}$; 3) $10^2 \cdot \left(\frac{1}{50}\right)^{-1}$; 5) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$;

2) $0,5^{-2} + \left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$; 4) $(0,97)^0 + (0,1)^{-3}$; 6) $2^{-3} - 3^{-2}$.

1.106. Докажите равенство $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$, где $a \neq 0,\ b \neq 0$.

1.107. Сравните с нулем:

1) $(-0,001)^6$; 2) $\left(-\frac{1}{25}\right)^{-3}$; 3) $(-5)^4$; 4) $(-2)^{-3}$.

1.108. Сравните:

1) 2^{-5} и 2^{-4};
2) 7^{-5} и 7^{-3};
3) $(-3)^{-3}$ и 3^{-3};
4) $(0,2)^{-3}$ и $(0,5)^{-3}$;
5) $(0,3)^{-3}$ и $(0,3)^{-4}$;
6) 6^{-2} и $(-6)^{-2}$.

1.109. Представьте выражение в виде степени с основанием 3:

1) $3^n \cdot 3^{n+1} \cdot 3^{1-n}$, $n \in Z$;
3) $81^m : 3^{4m-2}$, $m \in Z$;
2) $\left(3^m\right)^2 \cdot \left(3^{-3}\right)^m$, $m \in Z$;
4) $(-3)^{4n} : 27^n$, $n \in Z$.

1.110. При каком целом значении n равенство верно для любого $x \neq 0$:

1) $x^n \cdot x^6 = x^4$; 2) $x^3 : x^n = x^{-2}$; 3) $\left(x^{-3}\right)^n \cdot x^3 = x^6$; 4) $\left(x^{-n}\right)^{-4} = x^{-4}$?

1.111. Представьте выражение a^{20}, где $a \neq 0$, в виде степени с основанием:

1) a^4; 2) a^{-5}; 3) $\frac{1}{a^2}$; 4) $\frac{1}{a^{-4}}$.

1.112. Упростите выражение:

1) $\left(0,25a^{-4}y^{-3}\right)^2 \cdot \left(\frac{a^{-3}}{4y^2}\right)^{-3}$; 3) $\left(\frac{m^{-4}}{10n^5k^2}\right)^{-2} : \left(5m^2n^3k\right)^3$;

2) $\left(\frac{x^{-3}y^4}{9}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{3}{x^{-2}y^3}\right)^{-3}$; 4) $\left(\frac{9c^5}{a^3b^{-2}}\right)^{-2} : \left(\frac{a^2b^{-3}}{6c^4}\right)^3$.

C

1.113. Представьте выражение в виде степени с основанием 10:

1) 100^n; 2) $0,01 \cdot 100^{n+3}$; 3) $0,01^n : 10^{2-2n}$.

1.114. Решите уравнение:

1) $5x^{-1} - 6 = 0$; 2) $3 + 10x^{-1} = 0$; 3) $\left(5 - x^{-1}\right)^{-1} = 2^{-2}$.

1.115. Упростите выражение:

1) $\frac{\left(\frac{1}{25}\right)^{-n}}{5^{2n-1}}$; 2) $\frac{12^n}{2^{2n-1} \cdot 3^{n+1}}$; 3) $\frac{45^{n+1}}{3^{2n+1} \cdot 5^n}$; 4) $\frac{60^n}{2^{2n} \cdot 3^{n-1} \cdot 5^{n+1}}$.

1.116. Докажите равенство, где $n \in Z$:

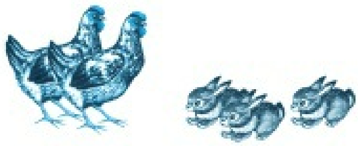
1) $3 \cdot 2^n + 2^n = 2^{n+2}$; 2) $2 \cdot 3^n + 3^n = 3^{n+1}$; 3) $2^{1-n} - 2^{-n} = 2^{-n}$; 4) $2^{-n} + 2^{-n+1} = 3 \cdot 2^{-n}$.

1.117. Упростите выражение:

1) $\dfrac{\left(3^n+3^{n-1}\right)^2}{9^{n-1}}$; 2) $\dfrac{\left(5^n-5^{n-1}\right)^3}{125^{n-1}}$; 3) $\dfrac{4^{n-2}}{\left(2^{n-1}-2^{n-2}\right)^2}$.

Упражнения для повторения

1.118. Для того чтобы подняться в гору по тропе длиной 9 км и спуститься по той же тропе обратно, туристам потребовалось 5 ч. С какой скоростью шли туристы при подъеме в гору, если известно, что на обратном пути их скорость возросла в 1,5 раза?



1.119. В хозяйстве 20 кур и кроликов, всего у них 52 ноги. Сколько кур и сколько кроликов в хозяйстве?

1.120. График линейной функции параллелен оси абсцисс и проходит через точку $M(2;-3)$. Задайте эту функцию формулой.

1.3. Применение степени с целым показателем

1.3.1. Последовательность чисел, в составе которых имеются степени.

Рассмотрим множество чисел:

$$2;\ 4;\ 8;\ 16;\ \ldots \qquad (1)$$

Подобное бесконечное множество чисел, элементы которого подчиняются определенным закономерностям и записываются в ряд, называется ***числовой последовательностью.***

Определим закономерность, по которой записана числовая последовательность (1). Эту закономерность можно проследить из нижеследующей таблицы:

Порядковый номер	1-й член последов.	2-й член последов.	3-й член последов.	4-й член последов.	и т.д.	n-й член последов. (общий член послед.)
Члены последовательности	$a_1=2$	$a_2=4$	$a_3=8$	$a_4=16$	...	обозначается через a_n
Запись в виде степени числа	2^1	2^2	2^3	2^4	...	2^n

Итак, каждый член последовательности (1) записывается в виде степени числа 2. Показатель степени каждого члена последовательности на 1 меньше, чем показатель степени следующего ее члена, и показатель степени является также порядковым номером данного члена последовательности. Здесь выражение $a_n = 2^n$ (n-й член последовательности называется формулой общего члена или общим членом последовательности).

Иногда последовательность чисел задается формулой общего члена. При этом, подставляя вместо n числа 1, 2, 3 и т.д., мы получим 1-й, 2-й, 3-й и т.д. члены последовательности.

Пример 1. Запишем первые 4 члена последовательности, заданной формулой общего члена: 1) $a_n = \frac{n}{5^n}$; 2) $a_n = (-1)^{n-1}$.

Решение. 1) $a_1 = \frac{1}{5^1} = \frac{1}{5}$; $a_2 = \frac{2}{5^2} = \frac{2}{25}$; $a_3 = \frac{3}{5^3} = \frac{3}{125}$; $a_4 = \frac{4}{5^4} = \frac{4}{625}$; ...

2) $a_1 = (-1)^{1-1} = (-1)^0 = 1$; $a_2 = (-1)^{2-1} = (-1)^1 = -1$; $a_3 = (-1)^{3-1} = (-1)^2 = 1$; $a_4 = (-1)^{4-1} = -1$; ...

Ответ: 1) $\frac{1}{5}; \frac{1}{25}; \frac{1}{125}; \frac{1}{625}$; 2) 1; −1; 1; −1.

Пример 2. Нужно определить закономерность, по которой записана последовательность: 1) 1; 3; 9; 27; ... ; 2) $\frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \frac{5}{8}; \frac{7}{16}; \ldots$

Решение. 1) Так как $1 = 3^0$; $3 = 3^1$; $9 = 3^2$; $27 = 3^3$, то члены последовательности записываются в виде степени с основанием, равным 3, и показатель степени на 1 меньше, чем порядковый номер этого члена последовательности.

2) Так как $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$; $\frac{3}{4} = \frac{3}{2^2}$; $\frac{5}{8} = \frac{5}{2^3}$; $\frac{7}{16} = \frac{7}{2^4}$, то в знаменателе членов последовательности располагаются степени числа 2, а в числителе – нечетные числа в порядке возрастания.

Также степени числа применяются при разложении натурального числа на сумму разрядных слагаемых. Например, $6385 = 6 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 5 = 6 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 5$.

1.3.2. Стандартный вид числа. В науке и технике часто используют очень большие и очень малые положительные числа. Например, диаметр Солнца приблизительно равен 1392000000 м, а диаметр молекулы воды – 0,00000003 см. Чтобы кратко записывать подобные числа, используют стандартный вид числа. Число в ***стандартном виде*** записывается так:

$$a \cdot 10^n, \ (1 \leqslant a < 10), \qquad (1)$$

где n – целое число. Число n называется ***порядком числа***, а число a – его ***значащей частью***. Например, диаметр Солнца в стандартном виде записывается так: $1,392 \cdot 10^9$ м, его порядок равен 9. Итак, если число записано в стандартном виде, то в его значащей части до запятой записывается только одна цифра, а остальные цифры записываются после запятой. Например, расстояние от Земли до Солнца равно $150 \cdot 10^6$ км. Это число записано в нестандартном виде, в стандартном виде его нужно записывать так: $1,5 \cdot 10^8$ км.

При решении задач числа после запятой округляют до 1-й, 2-й, 3-й и т.д. значащей цифры. Например, диаметр Солнца, округленный до 1-й, 2-й и 3-й значащей цифры, соответственно записывается так:

1) $1,392 \cdot 10^9$ м $\approx 1 \cdot 10^9$ м;　　3) $1,392 \cdot 10^9$ м $\approx 1,39 \cdot 10^9$ м и т.д.

2) $1,392 \cdot 10^9$ м $\approx 1,4 \cdot 10^9$ м;

Теперь на примерах рассмотрим умножение и деление чисел, записанных в стандартном виде:

1) $(3,2 \cdot 10^3) \cdot (2,7 \cdot 10^5) = (3,2 \cdot 2,7) \cdot 10^{3+5} = 8,64 \cdot 10^8$;

2) $(9 \cdot 10^2) \cdot (1,5 \cdot 10^{-5}) = (9 \cdot 1,5) \cdot 10^{2-5} = 13,5 \cdot 10^{-3} = 1,35 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 1,35 \cdot 10^{-2}$;

3) $(2,7 \cdot 10^4) : (1,5 \cdot 10^6) = (2,7 : 1,5) \cdot 10^{4-6} = 1,8 \cdot 10^{-2}$;

4) $(1,3 \cdot 10^5) : (6,5 \cdot 10^{-3}) = (1,3 : 6,5) \cdot 10^{5+3} = 0,2 \cdot 10^8 = 2 \cdot 10^{-1} \cdot 10^8 = 2 \cdot 10^7$.

?

1. Как вы понимаете понятие последовательности чисел? Приведите пример.
2. Как могут располагаться показатели степени в числовых последовательностях, в составе которых имеются степени? Приведите пример для всех возможных случаев.
3. Как записывается стандартный вид числа? Приведите пример.
4. Как вы понимаете значащую часть числа, записанного в стандартном виде? Какому условию должна удовлетворять значащая часть числа?
5. Может ли значащая часть числа быть меньше 1 или больше 10?
6. Что такое порядок числа, записанного в стандартном виде? Какой может быть знак порядка очень большого числа или очень малого числа? Приведите пример.

И

Шахматы придумал древнеиндийский изобретатель Сета. Шаху эта игра очень понравилась и он вызвал изобретателя для вознаграждения и спросил об его желаниях. Тогда Сета попросил шаха положить на первую клетку шахматной доски 1 зерно, на вторую – 2 зерна, на третью – 4 зерна, на четвертую – 8 зерен и т.д. На каждую последующую клетку просил положить вдвое больше зерна, чем в предыдущей. Сначала шах удивился на «минимальные» запросы Сета и поспешно дал указания об удовлетворении пожелания изобретателя. Однако очень скоро он убедился, что его казна не в состоянии удовлетворить просьбу Сета. Действительно, нужно было на 64 клетки шахматной доски последовательно положить 1; 2; 2^2; 2^3; ... ; 2^{63} зерен. Если сложить эти числа (на компьютере), то получилось бы, что Сета запросил 18 446 744 073 709 551 615 зерен.

ПЗ
1) Запишите количество зерен, которое запросил Сета, в стандартном виде. Это число после запятой округлите до двух значащих цифр.
2) В сумме $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{63}$ найдите значения первых 8 слагаемых, определите сумму первых 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 слагаемых и запишите результаты в порядке возрастания.
3) Считается, что 1 пуд содержит в среднем $4000 = 4 \cdot 10^3$ зерен, а в самые урожайные годы в Казахстане намолачивают $1\ 000\ 000\ 000 = 1 \cdot 10^9$ пудов зерна. Полагая, что Казахстан ежегодно может намолачивать 10^9 пудов зерна, определите, за сколько лет Казахстан может собрать необходимое для Сета количество зерна.

Упражнения

А

1.121. Запишите последующие два члена числовой последовательности:

1) 3; 9; 27; ... ;
2) 4; 16; 64; ... ;
3) 1; 2; 4; ... ;
4) 1; 5; 25; ... .

1.122. Запишите числа 0,25; 0,5; 1; 2; 4 в виде степени с основанием, равным 2.

1.123. Запишите числа $\frac{1}{27}; \frac{1}{9}; \frac{1}{3}; 1$ в виде степени с основанием 3.

1.124. Запишите числа 0,2; 1; 5; 25 в виде степени с основанием 5.

1.125. Запишите число в стандартном виде и укажите его порядок:

1) 5 000 000;
2) 0,05;
3) 0, 00064;
4) $\frac{1}{7} \cdot 10^{-5}$;
5) 27 760 000 000;
6) 0, 0019;
7) $\frac{22}{210000}$;
8) $\frac{1}{800000}$.

1.126. Запишите число в стандартном виде:

1) расстояние от Солнца до Земли равно 149 500 000 км;
2) поверхность Земли составляет 510 083 000 км^2;
3) масса атома водорода равна 0,000 000 000 000 000 000 000 00172 г;
4) организм человека состоит из более чем 100 000 000 000 000 клеток.

1.127. Сравните числа:

1) $3{,}4 \cdot 10^{11}$ и $7{,}5 \cdot 10^{9}$;
2) $3{,}4 \cdot 10^{-11}$ и $7{,}5 \cdot 10^{-9}$;
3) $7{,}27 \cdot 10^{-5}$ и $5{,}1 \cdot 10^{-4}$;
4) $9{,}2 \cdot 10^{-7}$ и $3{,}2 \cdot 10^{4}$.

1.128. Запишите число в стандартном виде и укажите его порядок.

1) Площадь территории Казахстана равна 2724,9 тыс. кв. км;

2) 1 января 2012 года количество населения Казахстана было равно 16 675,4 тыс.;

3) По данным 2005 года количество населения земного шара было равно 6,5 млрд людей.

4) Оптический микроскоп может различать объекты с диаметром 0,0025 см.

1.129. Полагая, что числа, заданные в упражнении: 1) 1.122; 2) 1.123; 3) 1.124, являются последовательными членами числовой последовательности, запишите ее следующий член.

1.130. Выполните действия:

1) $(1 \cdot 10^{5}) \cdot (2{,}7 \cdot 10^{4})$;
2) $(8{,}2 \cdot 10^{12}) : (2{,}5 \cdot 10^{7})$;
3) $(5{,}2 \cdot 10^{-4}) \cdot (3{,}4 \cdot 10^{-3})$;
4) $(4{,}5 \cdot 10^{-5}) : (9 \cdot 10^{-8})$.

B

1.131. Массу выразите в граммах, запишите результат в стандартном виде:

1) 965,5 кг; 2) 43,2 т; 3) 760 т.

1.132. Выразите: 1) 64 м^2 в мм^2; 2) 16 мм^2 в м^2. Запишите результат в стандартном виде.

1.133. Запишите следующие два члена последовательности:

1) $\frac{1}{3}; \frac{4}{9}; \frac{9}{27}; \ldots$;
2) 1; 0,1; 0,01; ... ;
3) 6; 12; 24; 48; ... ;
4) 1; −2; 4; −8 ... .

1.134. По формуле общего члена запишите первые три члена последовательности:

1) $a_n = 5^n$; 2) $b_n = n^2$; 3) $c_n = \frac{1}{2^n}$; 4) $d_n = 4^{-n}$.

1.135. Запишите первые четыре члена последовательности:

1) $a_n = \frac{n}{3^n}$; 2) $a_n = n^2 \cdot 2^{-n}$; 3) $a_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$; 4) $a_n = (-1)^{n-1}$.

1.136. Запишите формулу общего члена последовательности, заданной в упражнении **1.121**.

1.137. Заполните таблицу:

№	Число	Стандартный вид числа	Значащая часть числа	Порядок числа
1	1 200 000			
2		$3{,}21 \cdot 10^4$		
3			2,08	7
4		$6{,}77 \cdot 10^{-5}$		−5
5	0,0001783			
6	0,00002956			

Здесь после запятой оставьте 2 значащие цифры.

1.138. Выполните действия:

1) $4{,}27 \cdot 10^7 \cdot 4 \cdot 10^4$;
3) $2{,}8 \cdot 10^{-7} \cdot 4{,}6 \cdot 10^{-8}$;
2) $4{,}27 \cdot 10^7 : 4 \cdot 10^4$;
4) $560 \cdot 10^7 : 752 \cdot 10^6$.

1.139. Вычислите:

1) $1{,}3 \cdot 10^5 : 2{,}5 \cdot 10^{-3}$;
3) $2{,}5 \cdot 10^{-7} \cdot 7{,}1 \cdot 10^5$;
2) $7{,}1 \cdot 10^{-4} : 2{,}7 \cdot 10^{-8}$;
4) $1{,}7 \cdot 10^5 \cdot 12{,}5 \cdot 10^{-2}$.

1.140. Запишите число в стандартном виде:

1) 25 800 млн тг;
3) 125 700 тыс. кг;
2) 450 тыс. км;
4) 57 млн жителей.

1.141. Разложите число на сумму разрядных слагаемых:

1) 5618; 2) 27809; 3) 123000; 4) 78099.

1.142. Выразите данные сведения в данных единицах измерения:

1) $4{,}7 \cdot 10^{-3}$ км в метрах;
3) $6{,}82 \cdot 10^{-2}$ кг в тоннах;
2) $8{,}8 \cdot 10^5$ т в килограммах:
4) $7{,}19 \cdot 10^7$ см в метрах.

C

1.143. Даны числа $a = 272000000000$ и $b = 0{,}000000000371$. Поясните, как можно выполнить действия: 1) $a \cdot b$; 2) $a : b$; 3) $b : a$ на калькуляторе.

1.144. Запишите формулу общего члена последовательностей, заданных в упражнении **1.133**.

1.145. В таблице приведены площадь территории и количество жителей 14 областей Казахстана:

№	Область	Площадь	Население
1.	Акмолинская	146,2 тыс.км^2	735,6 тыс.
2.	Актюбинская	300,6 тыс.км^2	703,4 тыс.
3.	Алматинская	223,9 тыс.км^2	1,6 млн
4.	Атырауская	118,6 тыс.км^2	490,2 тыс.
5.	Восточно-Казахстанская	283,3 тыс.км^2	1,451 млн
6.	Жамбылская	144,2 тыс.км^2	1,072 млн
7.	Западно-Казахстанская	151,2 тыс.км^2	615,3 тыс.
8.	Карагандинская	428 тыс.км^2	1,364 млн
9.	Кызылординская	226 тыс.км^2	728 тыс.
10.	Костанайская	196 тыс.км^2	880,2 тыс.
11.	Мангистауская	165,6 тыс.км^2	596,7 тыс.
12.	Павлодарская	124,8 тыс.км^2	749,5 тыс.
13.	Северо-Казахстанская	98 тыс.км^2	579,4 тыс.
14.	Южно-Казахстанская	117,3 тыс.км^2	2,685 млн

1) Запишите данные сведения в стандартном виде; 2) определите области с наибольшей и наименьшей территорией; 3) запишите площади территории областей в стандартном виде в м^2; 4) определите области с наибольшей и наименьшей плотностью населения (в расчете человек/км^2).

1.146. Запишите формулу общего члена и следующие 2 члена последовательности:

1) $1; -2; 4; -8; \ldots;$

2) $1; 1; \frac{9}{5}; \frac{7}{27}; \ldots;$

3) $0; \frac{2}{5}; \frac{4}{25}; \frac{6}{125}; \ldots;$

4) $2; 0; 2; 0; \ldots$.

1.147. В одной семье имеется 60–80 тыс. пчел. Из них примерно 50000 являются рабочими пчелами, собирающими нектар. Одна рабочая пчела за один полет садится в среднем на 200 цветов и собирает 40 мг нектара, за день она совершает 4 полета. Кроме того, каждая рабочая пчела за 1 с совершает в среднем 400 взмахов крыльями, она живет только 1 месяц. Определите: 1) сколько килограммов нектара собирает одна рабочая пчела за все время существования; 2) сколько граммов (килограммов) нектара собирает одна семья пчел за сутки; 3) сколько взмахов крыльями совершает одна рабочая пчела за сутки (за 10 часов дневного времени); 4) сколько цветов должна посетить одна рабочая пчела, чтобы собрать 1 кг меда. Полученные результаты запишите в стандартном виде.

Упражнения для повторения

1.148. Решите уравнения:

1) $\frac{y-5}{9}+\frac{5y-2}{6}=1$; 2) $3+\frac{x+2}{4}=\frac{5x}{11}$.

1.149. При каких условиях прямая $y = 2x + b$ проходит через точку: 1) A (0; 2); 2) B (−2; 0)?

1.150. Из утроенного произведения чисел n и m вычтите их учетверенную сумму. Посчитайте результат при $m = 2{,}3$ и $n = -10$.

1.3.3. Нахождение суммы и разности чисел, заданных в стандартном виде. Расстояние от Земли до Солнца равно 149500000 км, в стандартном виде это число записывается так: $1{,}5 \cdot 10^8$ км. А расстояние между городами Алматы и Тараз равно 500 км, т.е. $5 \cdot 10^2$ км. Если найти сумму или разность этих двух расстояний, то полученные результаты не будут иметь никакой практической ценности, так как $1{,}5 \cdot 10^8 + 5 \cdot 10^2 \approx 1{,}5 \times 10^8$ км или $1{,}5 \cdot 10^8 - 5 \cdot 10^2 \approx 1{,}5 \cdot 10^8$ км. Здесь число $5 \cdot 10^2$ не может повлиять на значащую часть числа $1{,}5 \cdot 10^8$.

Итак, можно находить сумму или разность только тех чисел, которые могут повлиять на значащую часть друг друга.

Пример 1. 1) $3{,}21 \cdot 10^7 + 8{,}7 \cdot 10^7 = (3{,}21 + 8{,}7) \cdot 10^7 = 11{,}91 \cdot 10^7 = 1{,}191 \cdot 10^8$;

2) $3{,}21 \cdot 10^8 - 8{,}7 \cdot 10^7 = 32{,}1 \cdot 10^7 - 8{,}7 \cdot 10^7 = (32{,}1 - 8{,}7) \cdot 10^7 = 23{,}4 \cdot 10^7 = 2{,}34 \cdot 10^8$;

3) $2,3 \cdot 10^{-5} + 9,25 \cdot 10^{-5} = (2,3 + 9,25) \cdot 10^{-5} = 11,55 \cdot 10^{-5} = 1,155 \cdot 10^{-4}$.

1.3.4. Абсолютная и относительная погрешности. При записи больших и малых чисел в стандартном виде мы округляли эти числа и после запятой оставляли несколько значащих цифр. Например, в сентябре 2014 года территтория Акмолинской области была равна 146219 км^2. Это число в стандартном виде записывается так: $1,46 \cdot 10^5$ км^2. Итак, точным значением данного сведения является $a = 146219$ км^2, а его приближенным значением в стандартном виде $\tilde{a} = 1,46 \cdot 10^5$ км^2. Тогда абсолютной величиной ошибки, которую мы допустили, является

$$|a - \tilde{a}| = |146219 - 1,46 \cdot 10^5| = 219 \text{ км}^2.$$

Это число называется ***абсолютной погрешностью*** приближенного значения.

Определение. ***Модуль разности точного и приближенного значений называется абсолютной погрешностью приближенного значения.***

В рассмотренном примере абсолютная погрешность 219 км^2 кажется очень большим числом. Однако ее доля в приближенном значении достаточно мала. Действительно, чтобы проверить сказанное, нужно разделить абсолютную погрешность на модуль приближенного значения:

$$\frac{|a-\tilde{a}|}{|\tilde{a}|} = \frac{219}{1,46 \cdot 10^5} = (219:1,46) \cdot 10^{-5} = 150 \cdot 10^{-5} = 0,0015.$$

Если полученный результат умножить на 100, то получим долю абсолютной погрешности по отношению к приближенному значению в процентах: $0,0015 \cdot 100 = 0,15\%$, т.е. допущенная нами ошибка составляет всего 0,15% от приближенного значения. Здесь число 0,0015 называется относительной погрешностью приближенного значения.

Определение. ***Отношение абсолютной погрешности к модулю приближенного значения называется относительной погрешностью приближенного значения.*** Чтобы получить его процентную долю, нужно результат умножить на 100.

Итак, a – точное значение, $\tilde{a}$ – приближенное значение.

$|a - \tilde{a}|$ – абсолютная погрешность приближенного значения;

$\frac{|a-\tilde{a}|}{|\tilde{a}|}$ – относительная погрешность приближенного значения;

$\frac{|a-\tilde{a}|}{|\tilde{a}|} \cdot 100\%$ – процентное выражение относительной погрешности.

Пример 2. Диаметр земного шара равен 12756000 м. Это число запишем в стандартном виде, оставляя после запятой 1, 2 и 3 значащие цифры. Для каждого приближенного значения найдем абсолютную и относительную погрешности.

Решение. 1) $a = 12756000$ м, $\tilde{a} = 1,3 \cdot 10^7$ м. Тогда $|a - \tilde{a}| = 244000$ м $= 2,44 \cdot 10^5$ – абсолютная погрешность.

$\dfrac{|a-\tilde{a}|}{|\tilde{a}|} = \dfrac{2,44 \cdot 10^5}{1,3 \cdot 10^7} \approx 1,88 \cdot 10^{-2} = 0,0188$ – относительная погрешность, т.е. абсолютная погрешность составляет $0,0188 \cdot 100\% = 1,88\%$ от приближенного значения.

2) $a = 12756000$ м, $\tilde{a} = 1,28 \cdot 10^7$ м, тогда $|a - \tilde{a}| = 44000$ м $= 4,4 \times 10^4$ м – абсолютная погрешность. $\dfrac{|a-\tilde{a}|}{|\tilde{a}|} = \dfrac{4,4 \cdot 10^4}{1,28 \cdot 10^7} = 3,4375 \cdot 10^{-3} \approx 0,0034$ или $0,34\%$ – относительная погрешность.

3) $a = 12756000$ м, $\tilde{a} = 1,276 \cdot 10^7$ м, тогда $|a - \tilde{a}| = 4000$ м $= 4 \cdot 10^3$ м – абсолютная погрешность, $\dfrac{|a-\tilde{a}|}{|\tilde{a}|} = \dfrac{4 \cdot 10^3}{1,276 \cdot 10^7} \approx 3,13 \cdot 10^{-4}$ или $0,0313\%$ – относительная погрешность.

При записи числа в стандартном виде выбор количества значащих цифр после запятой осуществляется в соответствии с требуемой точностью вычисления. Чем меньше оносительная погрешность, тем больше точность приближения.

?

1. Можно ли прибавлять (вычитать) любые числа, записанные в стандартном виде? Приведите пример.
2. При каких условиях можно прибавлять (вычитать) числа, записанные в стандартном виде?
3. Что называется абсолютной погрешностью?
4. Что называется относительной погрешностью?
5. Как можно повысить качество результатов измерения?
6. По какому принципу выбирают количество значащих цифр после запятой в стандартном виде числа? Приведите пример.

ПЗ

Измерьте длину и ширину поверхности парты, за которой вы сидите, с точностью до 1 мм и вычислите площадь поверхности парты в мм^2. Запишите результат вычисления в стандартном виде, оставляя после запятой 1, 2 и 3 значащие цифры. Для каждого приближения, записанного в стандартном виде, найдите абсолютную и относительную погрешности.

Упражнения

А

1.151. Выполните действия:

1) $1{,}22 \cdot 10^6 + 3{,}79 \cdot 10^6$;

2) $4{,}2 \cdot 10^{-3} - 2{,}5 \cdot 10^{-3}$;

3) $9{,}5 \cdot 10^7 - 3{,}9 \cdot 10^7$;

4) $6{,}7 \cdot 10^{-6} - 4{,}22 \cdot 10^{-6}$.

1.152. Округлите числа 4,27; 17,032; 9,753 до десятых и найдите абсолютную погрешность каждого из приближенных значений.

1.153. Округлите числа до единиц и найдите абсолютную и относительную погрешности:

1) 5,4; 2) 7,9; 3) 1,89; 4) 8,5; 5) 3,71; 6) 11,27.

1.154. Найдите абсолютную погрешность приближенного значения, полученного в результате округления:

1) числа 8,79 до единиц;
2) числа 132 до десятков;
3) числа 0,777 до десятых;
4) числа 1,2839 до сотых.

1.155. Начертите острый угол и измерьте его с помощью транспортира. Какова точность полученного результата?

1.156. Округлите число 3,275 до десятых. Найдите относительную погрешность приближенного значения.

1.157. Измерьте линейкой толщину вашей тетради по алгебре и оцените абсолютную погрешность измерения.

1.158. Представьте число $\frac{1}{3}$ в виде десятичной дроби и округлите эту дробь до десятых, до сотых, до тысячных. В каждом из случаев найдите абсолютную погрешность приближенного значения.

1.159. Термометр показывает температуру $21^\circ C$ с точностью до 1° С. С какой относительной точностью определена температура воздуха?

1.160. Поверхность Земли 510,2 млн км² (с точностью до 0,1 млн км²). Найдите относительную погрешность приближенного значения.

1.161. Выполните действия:

1) $4{,}125 \cdot 10^7 + 9{,}29 \cdot 10^7$; 2) $8{,}927 \cdot 10^{-5} + 5{,}32 \cdot 10^{-5}$.

Запишите сумму в стандартном виде, оставляя после запятой 1 и 2 значащие цифры. Найдите абсолютную и относительную погрешности этих приближенных значений.

B

1.162. Обратите обыкновенные дроби в десятичные периодические дроби и найдите их десятичные приближения до сотых. Найдите абсолютную погрешность приближенного числа:

1) $3\frac{2}{3}$; 2) $2\frac{5}{6}$; 3) $4\frac{10}{11}$; 4) $3\frac{1}{12}$.

1.163. Округлите данные числа до сотых и найдите относительную погрешность приближенного значения:

1) 3,(6); 2) 2,7(2); 3) 2,(72); 4) 2,89(3).

1.164. Выполните действия:

1) $1{,}27 \cdot 10^5 + 8{,}23 \cdot 10^4$;

2) $1{,}27 \cdot 10^{-5} - 8{,}23 \cdot 10^{-6}$;

3) $8{,}5 \cdot 10^{12} + 3{,}91 \cdot 10^{13} + 2{,}5 \cdot 10^{12}$;

4) $1{,}28 \cdot 10^{-7} + 4{,}5 \cdot 10^{-7} - 9{,}7 \cdot 10^{-8}$.

1.165. Результаты вычислений в упражнении **1.164** запишите в стандартном виде так, чтобы после запятой остовались 1, 2 и 3 значащие цифры. Найдите их относительные погрешности.

1.166. Покажите, что каждое из чисел 2,66 и 2,67 является приближенным значением числа $2\frac{2}{3}$ с точностью до 0,01. Какое из них является приближенным значением числа $2\frac{2}{3}$ с точностью до 0,005?

1.167. Какое из двух приближенных значений числа $\frac{2}{11}$ точнее: 0,18 или 0,19?

1.168. Какое из четырех приближенных значений числа $\pi = 3{,}14159$ точнее: 3,141; 3,142; $3\frac{1}{7}$; $3\frac{10}{71}$?

1.169. Докажите, что число 2,5 является приближенным значением числа 2,4673 с точностью до 0,1.

1.170. Измерили толщину человеческого волоса d и расстояние от Земли до Луны l. Получили $d = 0{,}15$ мм с точностью до 0,01 мм и $l = 384400$ км с точностью до 500 км. Сравните качество измерений, оценив относительные погрешности в процентах.

1.171. На весах с точностью до 5 г взвесили 2 кг сахара и 5 кг муки. Сравните качество измерений, оценив относительные погрешности в процентах.

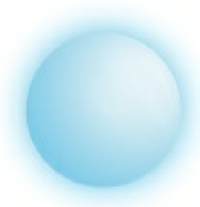
1.172. Округлите число до десятков и оцените относительную погрешность приближенного значения в процентах: 1) 48,8; 2) 2738.

1.173. В сумме $\frac{2}{3}+\frac{7}{9}$ каждое слагаемое представили в виде десятичной дроби с одним знаком после запятой и выполнили сложение. Найдите абсолютные погрешности приближенных значений слагаемых и суммы.

C

1.174. Докажите, что среднее арифметическое чисел a и b является приближенным значением любого из этих чисел с точностью до их полуразности по абсолютной величине.

1.175. Земной шар совершает полный оборот вокруг Солнца за 365,24 суток. Эти данные переведите в часы и результат запишите в стандартном виде так, чтобы относительная погрешность не превышала 0,1%.

1.176. В Солнечной системе Юпитер является самой большой планетой. В среднем его диаметр составляет 142800 км. Эти данные переведите в метры и результат запишите в стандартном виде так, чтобы относительная погрешность не превышала: 1) 1%; 2) 0,1%.

1.177. На приборе указано, что граница относительной погрешности измерения равна 0,1%. В результате измерения значения некоторой величины получили 487. С какой точностью произведено измерение?

1.178. При $0<a<1$ часто используется формула $(1+a)^2=1+2a$. Какова абсолютная погрешность приближенного значения, найденного по этой формуле? С помощью этой формулы найдите приближенные значения данного выражения и, используя калькулятор, вычислите абсолютную и относительную погрешности приближенного значения:

1) $(1+0,001)^2$; 2) $1,05^2$; 3) $1,002^2$; 4) $0,999^2$.

Упражнения для повторения

1.179. Найдите координаты точки, симметричной точке:

1) $A(-3;\ 4)$; 2) $B(5;\ -2)$, относительно начала координат.

1.180. Вычислите:

$$\frac{\left(9\frac{1}{4}-2\frac{1}{8}\right)\cdot\frac{2}{3}}{\left(5\frac{3}{8}-\frac{2}{3}\right):11,3}+\frac{\frac{3}{5}\cdot 1,35:0,9}{0,72-\frac{3}{25}}+0,1.$$

1.181. Найдите значение выражения:

1) $1,2x+4(1,7x-2y)$, если $x-y=2$;

2) $1,6(5m+3k)-5,2m$, если $0,7m+1,2k=3$.

1.182. Сумма цифр двузначного числа равна 10. Если поменять местами цифры данного числа и цифру единичного разряда полученного двузначного числа увеличить на 1, то полученное число будет вдвое больше исходного числа. Найдите данное двузначное число.

Раздел 2. ОДНОЧЛЕНЫ и МНОГОЧЛЕНЫ

2.1. Одночлены

2.1.1. Одночлен и его стандартный вид. Выражения, которые составлены из чисел, переменных и их степеней при помощи действия умножения, называются ***одночленами.*** Например, $5a$; $abba$; $2x^3(-3)a^2cx$; -7; 3^4; x; y^5 – одночлены. Упростим одночлен $2x^3(-3)a^2cx$ с помощью переместительного и сочетательного законов умножения:

$$2x^3(-3)a^2cx = 2(-3)x^3a^2cx = -6a^2cx^3\cdot x = -6a^2cx^4.$$

Такой вид одночлена, где на первом месте стоит числовой множитель, а за ним – переменные и их степени, называют ***стандартным видом одночлена.*** К одночленам стандартного вида относятся и такие одночлены, как -3; a; $-x$; y^3. Любой одночлен можно привести к стандартному виду.

Числовой множитель одночлена, записанного в стандартном виде, называют ***коэффициентом одночлена.*** Например, коэффициентом одночлена $-6a^2cx^4$ является числовой множитель -6. Коэффициентами одночленов x; $-ay^3$ считаются соответственно числа 1 и -1, ибо $x=1\cdot x$ и $-ay^3=$ $=(-1)\cdot ay^3$. Сумму показателей степеней всех переменных, входящих в состав одночлена, называют ***степенью одночлена.*** Например, степень одночлена $-6a^2cx^4$ равна 7, а степень одночлена $7abcxy$ равна 5. Если одночлен не содержит переменных, то его степень считают равной нулю.

2.1.2. Умножение одночленов. Возведение одночлена в степень. При умножении одночленов и возведении одночлена в степень используется правило умножения степеней с одинаковыми основаниями и правило возведения степени в степень. При этом получается одночлен, который обычно представляют в стандартном виде.

Пример 1. Перемножим одночлены $-3a^2b^3c$ и $5a^3bc^2d$.

$$-3a^2b^3c\cdot5a^3bc^2d = (-3\cdot5)\cdot(a^2a^3)\cdot(b^3b)\cdot(c\cdot c^2)\cdot d = \\ = -15a^5b^4c^3d$$

Итак, при умножении одночленов их коэффициенты перемножаются, степени с одинаковыми основаниями умножают друг на друга согласно правилу, степени с разными основаниями и другие переменные оставляют прежними. Полученные в результате множители перемножают. А при возведении в степень одночлена достаточно возвести в эту степень каждый множитель и полученные результаты перемножить.

Пример 2. Возвести одночлен $2a^2y^3z$ в четвертую степень.

$$(2a^2y^3z)^4=2^4(a^2)^4\cdot(y^3)^4\cdot z^4=16a^8y^{12}z^4$$

?

1. Какие выражения называются одночленами?
2. Как записываются одночлены в стандартном виде?
3. Что мы понимаем под коэффициентом одночлена, записанного в стандартном виде?
4. Как определяется степень одночлена?
5. Как умножить одночлен на одночлен?
6. Как возвести одночлен в степень?

Упражнения

A

2.1. Вычислите наиболее рациональным способом:

1) $4\cdot37\cdot(-25)$; 3) $2\cdot4\cdot(-87)\cdot125$; 5) $25\cdot(-0,43)\cdot(-4)$;

2) $8\cdot(-21)\cdot125$; 4) $\left(-\frac{3}{19}\right)\cdot(-90)\cdot19$; 6) $1,25\cdot(-1,47)\cdot(-8)$.

2.2. Выполните действия:

1) $2b\cdot(-3c)$; 3) $8x\cdot\left(-\frac{1}{2}y\right)$; 5) $(-0,3m)\cdot(-5n)$;

2) $(-4a)\cdot(-5b)$; 4) $\frac{3}{4}a\cdot\left(-\frac{2}{3}x\right)$; 6) $(-3a)\cdot2b\cdot(-c)$.

2.3. Выполните возведение в степень:

1) $\left(a^3\right)^2$; 3) $\left(4m^3\right)^2$; 5) $\left(-1\frac{1}{2}b^3\right)^2$; 7) $\left(-1,2c^4b^3\right)^2$;

2) $\left(-3x^2\right)^2$; 4) $\left(-3y^2\right)^4$; 6) $\left(2\frac{1}{2}xy^2\right)^2$; 8) $\left(3a^2x\right)^3$.

2.4. Представьте одночлены в стандартном виде и назовите их коэффициент:

1) $0,5m\cdot2x$; 3) $8b^2b$; 5) $\frac{4}{3}x^2y\cdot4,5x^3$; 7) $6p^2(-0,8)q$;

2) $-2aba$; 4) $3ab(-2)b$; 6) $1,2xyz\cdot5x$; 8) $-5m^2n^32m$.

2.5. Выполните умножение:

1) $-11a^2b\cdot0,3a^2b^2$; 3) $-0,6m^2n\cdot\left(-10mn^2\right)$; 5) $-4ab\cdot\left(-a^2\right)\cdot\left(-b^3\right)$;

2) $\frac{4}{9}xy^3\cdot\frac{2}{3}xy$; 4) $x^5y\cdot xy^3z$; 6) $-\frac{1}{5}p^3q^4\cdot5p^2q^3$.

2.6. Упростите выражение:

1) $xy\cdot\left(-7xy^2\right)\cdot4x^2y$; 3) $0{,}3m^2\left(-\frac{1}{3}n^4m^6\right)$;

2) $10a^2b\cdot\left(-ab^2\right)\cdot0{,}6a^3$; 4) $a^2b\cdot(-ab)\cdot\left(-ab^2\right)$.

2.7. Выполните возведение в степень:

1) $\left(3a^2\right)^3$; 3) $\left(-m^2nk^3\right)^5$; 5) $\left(-3a^2b\right)^4$;

2) $\left(-2x^4y^2\right)^3$; 4) $\left(2ab^2\right)^2$; 6) $\left(-a^3b^3c\right)^2$.

2.8. Представьте выражение в виде квадрата одночлена:

1) $16a^4$; 2) $169x^6$; 3) $0{,}04b^{12}$; 4) $\frac{9}{4}m^6$.

2.9. Представьте выражение в виде одночлена стандартного вида:

1) $\left(-2a^4b^2\right)^3$; 3) $\left(-2xy^3\right)^4$;

2) $\left(-a^2bd^3\right)^5$; 4) $\left(-3x^2y\right)^3$.

B

2.10. Упростите выражение:

1) $10ab^3\cdot\left(-a^2b\right)\cdot0{,}5b^3$; 3) $xy\cdot\left(-x^5y^3\right)\cdot\left(-x^3y^8\right)$;

2) $0{,}3y^2\cdot\left(-\frac{1}{3}x^4y^6\right)$; 4) $1\frac{1}{6}pq\cdot\left(-\frac{6}{7}p^9q^7\right)$.

2.11. Представьте выражение в виде квадрата одночлена:

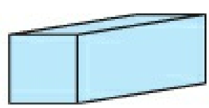
1) $0{,}01a^6b^4$; 2) $9b^4c^8$; 3) $100p^2q^6$.

2.12. Представьте выражение в виде куба одночлена:

1) $64a^9$; 3) $-\frac{27}{8}c^{15}$; 5) $1000a^3b^6$;

2) $0{,}001x^{12}$; 4) $-27a^6y^9$; 6) $-0{,}008b^6y^9$.

2.13. Чему равен объем прямоугольного параллелепипеда, ширина которого равна $2m$ см, длина – в 3 раза больше ширины, а высота – в 2 раза меньше длины?



2.14. Представьте одночлен $-12a^4y^3$ двумя способами в виде произведения: 1) двух одночленов стандартного вида; 2) трех одночленов стандартного вида.

2.15. Какой одночлен надо возвести в квадрат, чтобы получить одночлен: 1) a^6b^{12}; 2) $100p^8q^6$?

2.16. Какой одночлен надо возвести в куб, чтобы получить одночлен: 1) x^9y^6; 2) $0{,}008a^{12}\cdot b^3$?

2.17. Упростите выражение:

1) $(0{,}2x^2\cdot y)^3\cdot 1000x^4y^7$;

2) $\left(\dfrac{1}{4}a^2b\right)^3\cdot(-32a^2b)$;

3) $\left(-\dfrac{2}{3}mn^4\right)^2\cdot(-27m^5n)$;

4) $-0{,}6c^7d^7\cdot(0{,}5cd^2)^2$.

2.18. Представьте одночлен в стандартном виде:

1) $(-8a^m\cdot x^{n+1}y^n)\cdot\left(-\dfrac{1}{2}a^{2-m}x^{n-1}y^2\right)$;

2) $(3x^ny^m)^2\cdot(-2x^ny^m)^3$;

3) $0{,}64a^2b^3c\cdot 1\dfrac{9}{16}a^2b^7c^3\cdot(-0{,}25a^2bc^4)$;

4) $\dfrac{(2ab)^3\cdot(a^4b^2c)^2}{4a^2b^3c}$.

C

2.19. Упростите выражение:

1) $\dfrac{3^5+3^9}{3^{-5}+3^{-9}}$;

2) $\dfrac{2^5+2^6+2^7}{2^{-5}+2^{-6}+2^{-7}}$.

2.20. Составьте все возможные одночлены стандартного вида с коэффициентом 2, содержащие такие переменные x и y, что степень каждого одночлена равна:

1) 2; 2) 3; 3) 4.

2.21. Представьте одночлен в стандартном виде:

1) $\dfrac{(x^2y^3z^2)^4\cdot(x^3y)^3}{(xy^2z^4)^2}$;

2) $\dfrac{(3^na^2b^{n+1})^2\cdot(ab)^n}{(3a^2b^n)^2}$, $n\in N$.

2.22. Докажите, что сумма трех последовательных натуральных степеней числа 4 кратна 84.

2.23*. Докажите, что сумма произведения трех последовательных чисел и среднего из сомножителей равна кубу среднего сомножителя.

2.24. Упростите выражение:

1) $\dfrac{5^{2n+3}\cdot 5^{2n-1}}{25^{2n+1}}$; 2) $\dfrac{2^m\cdot 3^{n-1}-2^{m-1}\cdot 3^n}{2^m\cdot 3^n}$, $n, m \in N$.

2.25. Сократите дробь:

1) $\dfrac{3^n+3^{-n}}{9^n+1}$; 2) $\dfrac{5^{n+1}-5^n}{4}$; 3) $\dfrac{\left(4^n+4^{n-1}\right)^2}{4^{2n-2}}$.

Упражнения для повторения

2.26. Найдите координаты точки пересечения графиков функций $y=-3x+5$ и $y=7x-8$.

2.27. Найдите значение выражения:

1) $\dfrac{4^3\cdot 3^{10}}{6^{10}}$; 2) $\dfrac{2^6\cdot 6^{18}}{2^{25}\cdot 9^9}$.

2.28. Какой цифрой может оканчиваться: 1) квадрат натурального числа; 2) четвертая степень натурального числа?

2.2. Многочлены

2.2.1. Многочлен и его стандартный вид. Выражение $2ax^2+by^2-x+7y-9$ является суммой одночленов $2ax^2$; by^2; $-x$; $7y$; -9.

Такие выражения называют ***многочленами***.

Определение 1. ***Сумма одночленов называется многочленом.***

Одночлены, из которых составлен многочлен, называются ***членами многочлена***. Например, членами многочлена $2ax^2+by^2-x+7y-9$ являются $2ax^2$, by^2, $-x$, $7y$ и -9.

Если многочлен состоит из двух членов, его называют ***двучленом***, если состоит из трех членов – ***трехчленом***. Одночлен также считается многочленом, состоящим из одного члена.

Определение 2. ***Одинаковые или отличающиеся только коэффициентами одночлены называются подобными.***

Например, одночлены $6ax^2y^3$ и $-2ax^2y^3$ подобны, а одночлены $3ax^2y$ и $3axy^2$ не подобны.

В равенстве $2x^2y+5x^2y-3x^2y=4x^2y$ алгебраическая сумма подобных членов заменена одним членом, тождественно равным этой сумме.

Определение 3. ***Замена алгебраической суммы подобных членов одним членом, тождественно равным этой сумме, называется приведением подобных членов.***

Таким образом, приведение подобных членов есть ***тождественное преобразование***.

В многочлене $3a^2x+4+5ax^2-a^2x-9$ члены $3a^2x$ и $-a^2x$, 4 и -9 являются подобными. После приведения подобных членов данный многочлен можно записать в виде $2a^2x+5ax^2-5$. Действительно,

$$3a^2x+4+5ax^2-a^2x-9=$$
$$=\left(3a^2x-a^2x\right)+5ax^2+(4-9)=2a^2x+5ax^2-5.$$

Определение 4. ***Степенью многочлена называют наибольшую из степеней входящих в него одночленов.***

Например, многочлен $2a^2x+5ax^2-5$ является многочленом 3-й степени, а многочлен $5x^4-3y^4+2x^2y^3-3x^3-4yx^2+5xy+7y-9$ – многочленом 5-й степени, так как в нем наибольшую степень имеет одночлен $2x^2y^3$, $2+3=5$. Запишем этот многочлен в порядке убывания степеней его членов:

$$2x^2y^3+5x^4-3y^4-3x^3-4x^2y+5xy+7y-9.$$

Данный многочлен не содержит подобных членов. Такие многочлены называют ***многочленами стандартного вида***.

Любой многочлен можно привести к стандартному виду. Для этого нужно каждый его член привести к стандартному виду, привести подобные члены и записать сумму в порядке убывания степеней его членов. Если в составе многочлена имеются несколько членов, не являющихся подобными, с одинаковыми степенями, то эти члены располагают в произвольном порядке.

Например, в многочлене $5x^4+2x^2y+y^3-3xy^2-5$ члены $2x^2y$, y^3 и $-3xy^2$ имеют одинаковые степени, равные 3. Поэтому многочлены $5x^4+2x^2y+y^3-3xy^2-5$, $5x^4-3xy^2+2x^2y+y^3-5$, $5x^4+y^3+2x^2y-3xy^2+5$ и т.д. записаны в стандартном виде.

2.2.2. Сложение и вычитание многочленов. Сложим многочлены $3a^3-5a^2b+7ab^2+b^3$ и $-5a^3-6ab^2+4b^3$. Для этого составим их сумму, затем раскроем скобки и в полученном многочлене приведем подобные члены:

$$\left(3a^3-5a^2b+7ab^2+b^3\right)+\left(-5a^3-6ab^2+4b^3\right)=$$
$$=3a^3-5a^2b+7ab^2+b^3-5a^3-6ab^2+4b^3=$$
$$=-2a^3-5a^2b+ab^2+5b^3.$$

Из многочлена $6x^2-2x+5$ вычтем многочлен $3x^2-2x+1$. Для этого составим их разность, раскроем скобки и в полученном многочлене приведем подобные члены:

$$(6x^2-2x+5)-(3x^2-2x+1)=6x^2-2x+5-3x^2+2x-1=3x^2+4.$$

Таким образом, при сложении и вычитании многочленов получается многочлен. Из этих примеров мы получаем правила, данные ниже.

• ***Чтобы раскрыть скобки, перед которыми стоит знак «плюс», все члены, стоящие в скобках, надо записать без скобок с их знаками.***

• ***Чтобы раскрыть скобки, перед которыми стоит знак «минус», все члены, стоящие в скобках, надо записать без скобок с противоположными знаками.***

?

1. Дайте определение многочлена.
2. Какие одночлены называются подобными членами?
3. Как вы понимаете смысл выражения «Приведите подобные члены многочлена»?
4. Что называется степенью многочлена?
5. Как привести многочлен к стандартному виду?
6. Сформулируйте правило сложения и правило вычитания многочленов.

Упражнения

A

2.29. Приведите подобные члены многочлена:

1) $5x-7xy+4xy$;
2) $2xy-7xy+6y^2$;
3) $2x^4-3x+4x^2-x^4+4x$;
4) $2ax-x^2+3ax-y^2+2x^2$;
5) $4mn-n^2+m^2-2mn$;
6) $8px+p^2-x^2+4p^2$.

2.30. Приведите подобные члены многочлена:

1) $-x^4+3x^3-4x^4-2x^2-3x^2$;
2) $2m^4-3m^5+m^6+1-m^4+4m^5-m^6$;
3) $5a^2b-5ab^2-ab-2a^2b+10ab^2$;
4) $3mn^3-n^3m-5mn^3-n^3+m$.

2.31. Составьте сумму многочленов и упростите:

1) $5x$ и $3x+7$;
2) $8a$ и $1-3a$;
3) $-y$ и $y-1$;
4) $-5m$ и $-m-n$;
5) $2x-3y$ и $-y-x$;
6) $1{,}5a^2+2b^2$ и $2a^2-b^2$.

2.32. Выполните сложение:

1) $8y+(3x+5y)$;
2) $(4a+2)+(-a-1)$;

3) $\left(\frac{1}{2}m+\frac{3}{4}\right)+\left(2\frac{1}{2}-m\right)$; 5) $(15x+2y)+(4x-3y)$;

4) $0,4b+(1,2b-0,1)$; 6) $(4p^2q-3pq^2)+(-p^2q+2pq^2)$.

2.33. Составьте разность многочленов и упростите:

1) $3a$ и $7+2a$; 4) $3m^2+m$ и $1-m+3m^2$;

2) $5b^2-9$ и $4b^2-b+5$; 5) $2a-3b$ и $-b-a$;

3) $4x+2$ и $x+1$; 6) a^2+a+1 и a^2-a+1.

2.34. Даны два многочлена: $3x^3-4x+5$ и x^3-4x-3. Составьте: 1) сумму этих многочленов; 2) разность первого и второго многочленов; 3) разность второго и первого многочленов. Упростите получившиеся выражения.

2.35. Составьте сумму и разность многочленов и упростите:

1) $x+y$ и $x-y$; 3) a^2-a+4 и $-a^2-a-4$;

2) x^2-y^2 и x^2+y^2; 4) b^3-8 и $-b^3-8$.

2.36. Преобразуйте в многочлен стандартного вида:

1) $21a^2-(12a-5+21a^2)$; 3) $-7x^2+x+(x+6x^2)$;

2) $(x^2+x-1)-(x^2-x+1)$; 4) $(12-5p^2)+(p^3+2p^2-p+15)$.

2.37. Найдите значение многочлена:

1) $6a^5-3a^2+7-2a^5-4a^5+4a^2$ при $a=-5$;

2) $5x^2y-xy^2-4x^2y+xy^2-xy+7$ при $x=-1$, $y=2$.

2.38. Преобразуйте в многочлен стандартного вида:

1) $3aa^4+3aa^3-5a^2a^3-5a^2a$; 3) $3x\cdot 4y^2-0,8y\cdot 4y^2-2xy\cdot 3y+y\cdot 3y^2-1$;

2) $5a\cdot 2b^2-5a\cdot 3ab-a^2b+6ab^2$; 4) $2m^2n^3-mn^3-m^4-m^2n^3+mn^3+2m^4$.

B

2.39. Преобразуйте в многочлен стандартного вида:

1) $(1+3x)+(x^2-2x)-(2x^2-x)$;

2) $(7,3c-c^2+4)+0,5c^2-(8,7c-2,4c^2)$;

3) $(-12a^2+5a)+(a+11a^2)-(a^2-1)$;

4) $(b^2-5b)+(5b-2b^2)-(4-2b^2)$.

2.40. Докажите, что значение выражения:

1) $(a-b)+(b-c)+(c-a)$ равно 0;

2) $(x^2-7xy)-(5-4xy)+(3xy-x^2)$ равно -5.

2.41. Решите уравнение:

1) $(3,2x-1,8)-(5,2x+3,4)=-5,8;$

2) $1-(0,5y-15,8)=12,8-0,7y;$

3) $3,8-1,5x+(4,5x-0,8)=2,4x+3;$

4) $3,5y+0,8=5,5y-(1,2y+0,8)-2,4.$

2.42. Решите уравнение относительно переменной x:

1) $(5x-3a)-(2x+5a)=4a;$

2) $(x+5m)-(3m-2x)=17m;$

3) $4x-(3p-x)+(8x-5p)=5p;$

4) $(x+b)+(x+2b)-(x-3b)=8b;$

5) $x^2-(x+c)-(x^2-2x-3c)=0;$

6) $(6x-4n)-(2x^2+x)+(2x^2-n)=0.$

2.43. Докажите, что значение многочлена

$\left(\frac{3}{4}x^2-1,4xy-2,5y+4\right)-\left(2y^2-\frac{7}{5}xy+0,75x^2\right)$ не зависит от переменной x.

2.44. Упростите выражение:

1) $(10a-6b+5c-4d)-(9a-2b-4c+2d);$

2) $(5a^2-ax+x^2)+(3a^2+2ax-3x^2)-(4ax+2x^2+a^2);$

3) $(2m^4+5m^3n-3m^2n^2-mn^3)+(3m^4-8m^2n^2-6mn^3).$

2.45. Составьте сумму многочленов и приведите подобные члены:

1) $5x^4+3x^3y-2x^2y^2-4xy^3$, $3x^4-8x^3y+9x^2y^2+xy^3$ и $-6x^4+x^3y+5x^2y^2-9xy^3$;

2) $-\frac{5}{6}a^2+4\frac{2}{3}ab+\frac{3}{4}b^2$, $\frac{5}{12}a^2-\frac{4}{3}ab-\frac{7}{4}b^2$ и $2\frac{1}{2}a^2+\frac{5}{4}ab-b^2$;

3) $5\frac{1}{4}m^3+2\frac{1}{6}m^2n+3\frac{1}{2}mn^2-8\frac{2}{3}n^3$ и $13m^2n-1\frac{1}{4}mn^2-3\frac{5}{6}m^3+n^3$.

2.46. Одна сторона треугольника равна $a+b$, вторая сторона на $a-6$ больше первой, а третья сторона равна $2b+6$. Найдите периметр треугольника.

2.47. Найдите значение выражения:

$4,6x^2y-2,2xy+7y^2-(7,8xy-3,4x^2y+7y^2)$ при: 1) $x=2$, $y=5$; 2) $x=-2$, $y=3$.

2.48. Представьте выражение $3x^3-2x^2-x+4$ в виде суммы двух многочленов так, чтобы одно из слагаемых было равно:

1) x^3+4; 2) $2x^3-x^2-x$.

C

2.49. Пусть $x=2a^2-3ab-b^2$, $y=-a^2+2ab+b^2$, $z=4a^2+2ab$. Подставьте эти многочлены вместо x, y, и z в данное выражение и упростите его:

1) $x+y+z$; 2) $x-y-z$; 3) $-x-y+z$.

2.50. Представьте выражение каким-либо способом в виде разности двучлена и трехчлена:

1) a^3+2a^2-3a-5; 2) $4x^4+2a^3+5a^2-4$.

2.51. Какой многочлен нужно подставить вместо A, чтобы следующее равенство оказалось тождеством:

1) $A+(6x^2-3xy)=8x^2+7xy-y^2$;

2) $A-(8a^n-2b^m+c)=4a^n+5b^m+c$;

3) $3x^{n+1}+10x^n-7x-A=5$?

2.52. Какой многочлен в сумме с многочленом $5x^n-x^3-x+7$ тождественно равен:

1) 0; 2) 5; 3) $2x-6$; 4) x^3-3x+2; 5) x^n+1?

2.53. Докажите, что многочлен, содержащий только четные степени одной и той же переменной, не меняет своего значения при изменении знака этой переменной на противоположный.

2.54. Найдите наименьшее числовое значение суммы:

1) $1+2x^2+(x^4-x^2+1)$; 2) $4a^2-4-(5+3a^2)+(a^4-a^2)$.

2.55. Решите уравнение относительно переменной x:

1) $x^2-(x+m)-(x^2-2x-3m)=0$; 2) $(6x-4a)-(2x^2+x)+(2x^2-a)=0$;

3) $(5x^2+2x-p)-(3p-2x+5x^2)=0$;

4) $(x-a-b)+(2x+3a+b)=(2a-b)-(2a-5b)$.

Упражнения для повторения

2.56. Приведите одночлен к стандартному виду:

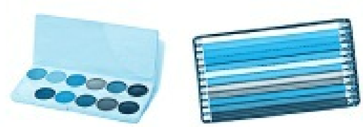
1) $(2a^2)\cdot\frac{1}{4}a^2$; 2) $(-3b^4)^5\cdot\frac{1}{27}b^3$; 3) $(-5a^3b^2)^2\cdot(-0,2a^2b^3)^{-1}$.

2.57. Докажите, что произведение двух последовательных четных чисел кратно 4.

2.58. Вычислите:

$$\left(\frac{3\frac{1}{3}+2,5}{2,5-1\frac{1}{3}}\cdot\frac{4,6-2\frac{1}{3}}{4,6+2\frac{1}{3}}\right)\cdot 5,2:\left(\frac{0,5}{\frac{1}{7}-0,125}-19,5\right).$$

2.59. В школе с целью поощрения 12 ученикам младшего звена решили купить наборы акварельных красок и цветных карандашей. В магазине набор акварельных красок стоит 210 тенге, а набор карандашей – 120 тенге. Какое наибольшее количество наборов красок можно купить, чтобы суммарная цена покупки не превышала 1960 тенге?



2.60. Может ли у уравнения $x^4-3x^3+4x^2-x+2=0$ быть отрицательный корень? Обоснуйте ответ.

2.3. Произведение одночлена и многочлена

2.3.1. Умножение одночлена на многочлен. Пусть требуется умножить одночлен $4ab^2$ на многочлен $3a^2-5a^2b+6a^2c$.

Многочлен является алгебраической суммой одночленов. Поэтому, используя распределительный закон умножения и тождественное преобразование, получим:

$$4ab^2\cdot(3a^2-5a^2b+6a^2c)=4ab^2\cdot 3a^2-4ab^2\cdot 5a^2b+4ab^2\cdot 6a^2c=$$
$$=12a^3b^2-20a^3b^3+24a^3b^2c=24a^3b^2c-20a^3b^3+12a^3b^2.$$

Отсюда получаем правило, данное ниже.

Чтобы умножить одночлен на многочлен, надо умножить на этот одночлен каждый член многочлена и полученные произведения сложить.

Пример 1. Умножим одночлен $-2a^2xy$ на многочлен $4a^2xy-5ax^2y^2+a^2xy^2$.

$$-2a^2xy\left(4a^2xy-5ax^2y^2+a^2xy^2\right)=$$

$$=-2a^2xy\cdot 4a^2xy-2a^2xy\left(-5ax^2y^2\right)-2a^2xy\cdot a^2xy^2=$$

$$=-8a^4x^2y^2+10a^3x^3y^3-2a^4x^2y^3$$

Пример 2. Упростим выражение

$$2x^3-2x\left(x^2-4x+3\right)+6x-4.$$

Имеем:

$$2x^3-2x\left(x^2-4x+3\right)+6x-4=$$

$$=2x^3-2x^3+8x^2-6x+6x-4=8x^2-4.$$

Пример 3. Решим уравнение

$$x^2+\frac{6x+7}{4}+\frac{8-5x}{3}=5-x(1-x)\ .$$

Для этого обе части уравнения умножим на наименьшее общее кратное знаменателей дробей, т.е. на число 12:

$$\left(x^2+\frac{6x+7}{4}+\frac{8-5x}{3}\right)\cdot 12=(5-x(1-x))\cdot 12\ ;$$

$$12x^2+\frac{6x+7}{4}\cdot 12+\frac{8-5x}{3}\cdot 12=60-12x(1-x);$$

$$12x^2+18x+21+32-20x=60-12x+12x^2;$$

$$12x^2+18x-20x+12x-12x^2=60-21-32;$$

$$10x=7;$$

$$x=0,7.$$

2.3.2. Вынесение общего множителя за скобки. При решении уравнений, сокращении алгебраических дробей и решении ряда других задач бывает полезно заменить многочлен на произведение нескольких многочленов. Представить многочлен в виде произведения двух или нескольких многочленов – значит ***разложить многочлен на множители.***

Рассмотрим многочлен $9x^2y-21y^2$. В составе каждого члена содержится множитель $3y$:

$$9x^2y-21y^2=3y\cdot 3x^2-3y\cdot 7y.$$

Полученное выражение на основе распределительного закона умножения можно записать в виде

$$3y\cdot 3x^2-3y\cdot 7y=3y\left(3x^2-7y\right).$$

Получим равенство

$$9x^2y-21y^2=3y\left(3x^2-7y\right),$$

т.е. мы разложили многочлен $9x^2y-21y^2$ на множители: одночлен $3y$ и многочлен $3x^2-7y$. Этот способ разложения многочлена на множители называют ***вынесением общего множителя за скобки.***

Рассмотрим примеры.

Пример 4. Разложим на множители многочлен

$$12a^2b-18ab^2-30ab^3.$$

Решение.

$$12a^2b-18ab^2-30ab^3=6ab\cdot 2a-6ab\cdot 3b-6ab\cdot 5b^2=$$
$$=6ab\left(2a-3b-5b^2\right).$$

Примечание. В рассмотренном многочлене слагаемые имеют несколько общих множителей: 2; 3; $2a$; $3b$; 6; a; ab и т.д. Поэтому общий множитель, который выносится за скобки, выбирают так, чтобы члены многочлена, оставшиеся в скобках, не имели других общих множителей. Для этого в качестве коэффициента выносимого одночлена выбирают наибольший общий делитель коэффициентов исходного многочлена, т.е. чисел 12, 18 и 30, взятых по модулю. Этот коэффициент равен 6. А из общих переменных берут ту, которая имеет наименьший показатель степени. Из a, a^2 выбирают a, из b, b^2 b^3 – b. Тогда выносимый общий множитель имеет вид: $6ab$.

Пример 5. Разложим на множители выражение

$$3x(2b-7)+4b(7-2b).$$

Решение. Так как $7-2b=-(2b-7)$, то

$$3x(2b-7)+4b(7-2b)=3x\cdot(2b-7)-4b(2b-7)=$$
$$=(2b-7)\cdot(3x-4b).$$

Пример 6. Решим уравнение $3x^2-1{,}2x=0$.

Решение. Вынесем общий множитель x за скобки, данное уравнение запишем так:

$$x(3x-1{,}2)=0.$$

Произведение равно нулю тогда и только тогда, когда равен нулю хотя бы один из множителей, т.е. когда $x=0$ или $3x-1{,}2=0$. Решая уравнение $3x-1{,}2=0$, имеем:

$$3x=1{,}2$$
$$x=0{,}4.$$

Следовательно, произведение $x(3x-1{,}2)$ обращается в нуль при $x=0$ или при $x=0{,}4$, т.е. уравнение имеет два корня: 0 и 0,4.

Пример 7. Докажем, что выражение $4^9+4^8-4^7$ делится на 19.

Решение. $4^9+4^8-4^7=4^7\left(4^2+4-1\right)=19\cdot4^7$

Это произведение делится на 19.

?

1. Сформулируйте правило умножения одночлена на многочлен.
2. Что вы понимаете под разложением многочлена на множители?
3. Объясните, как правильно вынести общий множитель за скобки.

Упражнения

А

2.61. Выполните умножение:

1) $4\cdot(x+3)$; 2) $3\cdot(x+8)$; 3) $2\cdot(7-a)$; 4) $5\cdot(p-10)$; 5) $6\cdot(a-2b)$; 6) $(m+3n)\cdot4$; 7) $2\cdot(3x-2y)\cdot3$; 8) $3\cdot(2p-5q)\cdot7$.

2.62. Выполните умножение:

1) $(x+y)\cdot a$; 2) $b\cdot(x-y)$; 3) $3x\cdot(2a+b)$; 4) $2y\cdot(3x-y)$; 5) $5x\cdot(6x+3y)$; 6) $3a\cdot(-4b-2a)$; 7) $-6a\cdot(5b-2a)$; 8) $8m\cdot(m+n)$.

2.63. Преобразуйте произведение в многочлен:

1) $-4x\cdot\left(2x^2-5x+3\right)$;

2) $(-2x)\cdot\left(x^2-x+1\right)$;

3) $\left(-\frac{1}{2}a\right)\cdot\left(-4a^2-8a+6\right)$;

4) $\left(-\frac{1}{3}b\right)\cdot\left(-9b^2+3b-12\right)$;

5) $2ab\cdot\left(2a^2-5ab+b^2\right)$;

6) $-3ab\cdot\left(2a^2-7ab-b^2\right)$;

7) $-\frac{1}{2}xy\cdot\left(5x^2+10xy-4y^2\right)$;

8) $\left(-1\frac{1}{2}m^2-\frac{3}{4}mn+n^2\right)\cdot(-2mn)$.

2.64. Разложите на множители и сделайте проверку:

1) $ax+ay$;
2) $mx+nx$;
3) $-xy+2x$;
4) $-2ab-3a$;
5) $ac+bc$;
6) $-10xz+8yz$;
7) $30a^2+15ab$;
8) $8k^2+8kl$.

2.65. Вынесите общий множитель за скобки:

1) $4a+3a^2$;
2) $-20m+30n$;
3) $5a^2-15a$;
4) $-6xy+9y^2$;
5) $0,5x^3-2,5x$;
6) $8xy-4y^2$;
7) $-m^2n^2-mn$;
8) $18pq^3-9q^4$.

2.66. Представьте многочлен в виде произведения:

1) $4a^3b-6a^2b^2$;
2) $5x^2y+10xy^2$;
3) $14m^3n-21m^2n^3$;
4) $5x^3-15x^2y+20xy^2$;
5) $2a^2y-6ay^2+8y$;
6) $6ax-9a^2+15ax^2$.

2.67. Упростите выражение и найдите его значение:

1) $2(3x+1)-5(x+1)$ при $x=2$;
2) $20x-4(2x-1)+5(1-2x)$, при $x=-3$;
3) $5y-2(8y-1)+4(3y+1)$, при $y=10$;
4) $12(2-3m)+35m-9(m+1)$ при $m=2$.

2.68. Представьте выражение в виде многочлена:

1) $10\cdot(m+5)+2\cdot(-2m+3n)$;
2) $7x\cdot(4y-x)+4x(x-7y)$
3) $4a(7x-1)-7(4ax+1)$;
4) $3a^2-2a(5+2a)+10a$;
5) $a(a+b)+b(a-b)$;
6) $2a^2-a(2a-5b)-b(2a-b)$;
7) $5a(6a+3b)-6a(5b-2a)$;
8) $8m(m+n)-3n(2m-4n)$.

2.69. Решите уравнение:

1) $6\cdot(x-3)-2(x+2)=10$;
2) $5(x-1)-4(x-3)=-20$;
3) $0,6(x-0,6)+0,8(x-0,4)=1$;
4) $0,3(0,4x-1,2)+0,36x=3,4$;
5) $8(x-7)-3(2x+9)=15$;
6) $0,15(y-4)=9,9-0,3(y-1)$;
7) $0,6-0,5(x-1)=x+0,5$;
8) $0,5(2y-1)-(0,5-0,2y)+1=0$.

B

2.70. Выполните умножение:

1) $4a^2b^2 \cdot (2a^3 - 3a^2 + 3a - 1)$;

2) $-2a^2b \cdot (8a^3 - 4a^2b^2 - 3ab^2 + 5b^3)$;

3) $-3x^2y \cdot (-2xy^3 + 5x^2y^2 - 5x^3y + 3x^4)$;

4) $-5abc \cdot (4ab^2c - 7a^2bc^2 + 3a^2bc)$.

2.71. Представьте выражение в виде многочлена:

1) $a(a+b) - b(a-b) + 2(b-a)$;

2) $2x^2 - x(2x - 5y) - y(2x - y)$;

3) $2xy(2x^2 - 5xy) - 3xy(7xy - y^2)$;

4) $6m^2 - 5m(2n - m) - 4m(3m + 2,5n)$.

2.72. Упростите выражение:

1) $6x\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y\right) - 12y\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y\right)$;

2) $10a(5a^2 - 7b) - 6a(5b + 7a^2) - 3ab$;

3) $-2b(a^3 - 2b) - b(a^3 + 4b^2)$;

4) $1,4x(0,5x + 0,3y) - 5(0,4y^2 - 4xy) + 0,2(8y - 5x)$;

5) $5x(6x + 3y) + 3y(2x - 4y) - 6x(5y - 2x)$;

6) $4y - 2(y - 3) - 3(y - 3(4 - 2y) + 8)$.

2.73. Вынесите общий множитель за скобки:

1) $3x^2 - 9x^2y + 6xy^2$;
2) $15a^2 - 25a^2b^2 - 10a^3$;
3) $6ab^2 - 9b^3 + 12b^4$;
4) $14m^2n - 21mn^2 - 35mn^3$;
5) $30pq^3 + 18p^2q^2 - 12p^3q$;
6) $8x^4y^3 - 12x^2y^2 + 16x^3y^2$.

2.74. Разложите на множители:

1) $a^3 + 5a^2 + a$;
2) $8b^2 - 4b^3 + 10b^4$;
3) $x^2 - 3x^3 - 4x^4$;
4) $15y^3 - 27y^2 + 9y$;
5) $6a^5 - 72a^4 - 48a^2$;
6) $-5mn^2 - 15m^2n - 20m^2n^2$.

2.75. Представьте многочлен в виде произведения:

1) $5a^4+10a^3b-25a^2b^2-15ab^3$;

2) $2x^4-6x^3y-6x^2y^2+8xy^3$;

3) $3x^4+6x^3y-15x^2y^2-9x^2y$;

4) $-6bm^2+9m^3-12m^4-3b^2m^2$.

2.76. Разложите на множители:

1) $12x^2y-18xy^2-30ay^3$;
3) $8a^4b^3-12a^2b^4+16a^3b^3$;

2) $20x^2y-25x^2y^2-10x^3y^3$;
4) $-4mn^3-8m^2n^2+12m^3n$.

2.77. Решите уравнение:

1) $x^2-5x=0$;
5) $2x^2-3x=0$;

2) $y^2+6y=0$;
6) $6x^2-0,5x=0$;

3) $y^2+0,1y=0$;
7) $7x-0,2x^2=0$;

4) $x^2+2,5x=0$;
8) $\frac{1}{4}x^2+x=0$.

2.78. Найдите значение выражения:

1) $5,27x-x^2$ при $x=4,27$;
2) $ay-a^2$ при $a=1,5$, $y=-8,5$;
3) ab^2+b^3 при $a=8,7$, $b=1,3$;
4) $-xy-x^2$ при $x=-1,28$, $y=101,28$.

2.79. Докажите, что значение выражения:

1) 18^6+18^5 кратно 19;
3) 7^6-7^4 кратно 48;
2) $122^{10}-122^9$ кратно 11^2;
4) $4^{18}+4^{16}$ кратно 34.

2.80. Продано m м сатина по x тг за один метр и n м шелка. Сколько тенге заплатили за всю покупку, если один метр шелка на y тг дороже одного метра сатина?

2.81. Двузначное число имеет a десятков и b единиц. Между цифрами этого двузначного числа записали цифру 0 и получили трехзначное число. Докажите, что разность полученного трехзначного числа и данного двузначного числа кратна 90.

C

2.82. Вынесите общий множитель за скобки:

1) $4a^3b-10a^2b^2+2ab^3$;
2) $18x^3y+21x^2y^2-3xy^3$;

3) $8x^5y^2-12x^4y^2+12x^3y^2-4x^2y^2$;

4) $-20x^2y^3z^2-35x^3y^2z^3+15x^3y^2z^2$;

5) $16a^5b-8a^4b^3-6a^3b^3+10a^2b^4$;

6) $6a^4x^3-15a^3x^4+15a^2x^5-9ax^6$.

2.83. Докажите, что выражение $A\cdot B-C\cdot D$ тождественно равно выражению $C\cdot D-A\cdot B$, если $A=ax$, $B=cy-b$, $C=x$ и $D=acy-ab$.

2.84. Докажите, что при любых значениях переменной y значение выражения $y\left(2+y-y^3\right)-\frac{2}{3}\left(6+3y+1,5y^2\right)$ является отрицательным числом.

2.85. Решите уравнение:

1) $\frac{x(x+6)}{2}-\frac{x(x+14)}{3}-\frac{x^2+1}{6}=0$;

2) $\frac{y(2y-1)}{12}-\frac{y^2+1}{6}=y$;

3) $\frac{6+7y^2}{3}+\frac{y(5-8y)}{4}=\frac{y(y+2)}{3}$;

4) $\frac{2m^2+1}{4}+3=\frac{m}{6}-\frac{m(1-2m)}{4}$.

2.86. Представьте выражение в виде произведения двух многочленов:

1) $2a(m+n)+b(m+n)$;

2) $8(x-1)+(x-1)^2$;

3) $3c(x-y)-2d(x-y)$;

4) $3ab(x+2y)+c^2(x+2y)$;

5) $9a^2(x-2y)-b^2(x-2y)+(x-2y)^2$;

6) $3a(2x-7)+5b(2x-7)-(2x-7)^2$.

2.87. Представьте выражение в виде произведения:

1) $5x(2a-3b)+2y(2a-3b)+z(2a-3b)$;

2) $7(c+2)+(c+2)^2-b(c+2)$;

3) $2ab^2(3x+y)+4a(3x+y)$;

4) $5xy^2\left(x^2-x+1\right)-15x^2y\left(x^2-x+1\right)$.

2.88. Докажите, что если к целому числу прибавить квадрат этого числа, то полученная сумма будет четным числом.

2.89. В общем виде трехзначное число записывают так: $\overline{abc}$, в котором a сотен, b десятков и c единиц. Это число можно представить в виде: $\overline{abc}=a\cdot 100+b\cdot 10+c$.

Например: $845=100\cdot 8+10\cdot 4+5$.

Докажите, что число $\overline{abc}-\overline{cba}$ делится на 99. Здесь $a>c$.

2.90. Докажите, что сумма чисел $\overline{ab}+\overline{ba}$ делится на 11.

2.91. Докажите, что сумма трех последовательных степеней с основанием 2 делится на 14.

2.92. Докажите, что сумма двух последовательных степеней с основанием 5 делится на 30.

2.93. За 4 ч катер проходит по течению реки расстояние, в 2,4 раза большее, чем за 2 ч против течения. Какова скорость катера в стоячей воде, если скорость течения 1,5 км/ч?

2.94. На элеватор поступило 1400 т пшеницы двух сортов. При обработке пшеницы одного сорта оказалось 2% отходов, другого сорта – 3% отходов. После обработки получилось 1364 т пшеницы. Сколько тонн пшеницы каждого сорта поступило на элеватор?

2.95. Вынесите общий множитель за скобки:

1) $(3x+6)^2$;
2) $(7x-14)^2$;
3) $(5m+30)^2$;
4) $(2a-4b)^3$;
5) $(3m-12n)^3$;
6) $(2ab-4b^2)^2$;
7) $(5x-15x^2)^3$;
8) $(2xy+6x^2)^5$.

2.96. Докажите, что значение выражения 1) $3^9+3^7+3^6$ делится на 93; 2) $11^9-11^8+11^7$ делится на 37.

Упражнения для повторения

2.97. В зрительном зале 80 больших и малых электрических лампочек. В течение вечера горение одной большой лампочки обходится в 13 тг, а горение одной малой лампочки – в $9\frac{3}{4}$ тг. Сколько больших и сколько малых лампочек в зрительном зале, если освещение его в течение вечера обходится в 884 тг?

2.98. Найдите координаты точки пересечения графиков линейных функций:

1) $y=3x-5$ и $y=4x-9$; 2) $y=6x+3$ и $y=3x-6$.

2.99. Упростите выражение:

1) $\left(\frac{1}{3}a^5\cdot y^3\right)^2\cdot(-3ay)^3$; 2) $(-30x^2y^2)^2:(-10xy^2)^3$.

2.100. Трехзначное число оканчивается цифрой 7. Если эту цифру переставить на первое место, то число увеличится на 324. Найдите трехзначное число.

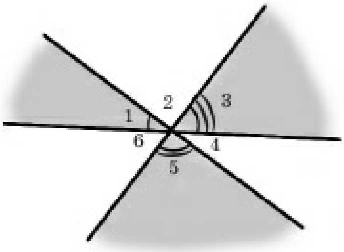


Рис. 2.1

2.101. По рис.2.1 найдите сумму закрашенных углов.

2.4. Произведение многочленов

2.4.1. Умножение многочлена на многочлен. Пусть требуется перемножить многочлены: $m-n$ и $a+b-c$. Составим произведение этих многочленов:

$$(m-n)(a+b-c).$$

Обозначим двучлен $m-n$ буквой x и по правилу умножения одночлена на многочлен преобразуем произведение:

$$(m-n)(a+b-c)=x(a+b-c)=xa+xb-xc.$$

В выражении $xa+xb-xc$ подставим вместо x двучлен $m-n$ и снова применим правило умножения одночлена на многочлен:

$$xa+xb-xc=(m-n)a+(m-n)b-(m-n)c=$$

$$=ma-na+mb-nb-mc+nc.$$

Итак,

$$(m-n)(a+b-c)=ma-na+mb-nb-mc+nc.$$

Мы видим, что последнее выражение получилось после того, как каждый член многочлена $m-n$ умножили на каждый член многочлена $a+b-c$. Отсюда получаем правило, данное ниже.

Чтобы умножить многочлен на многочлен, нужно каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого многочлена и полученные произведения сложить.

Нетрудно заметить, что при умножении многочлена, содержащего n членов, на многочлен, содержащий m членов, получится многочлен, содержащий $n\cdot m$ членов.

Пример 1. Упростим выражение $5x^3+(y^2+5x)(xy-x^2)$.

Решение. Сначала надо перемножить двучлены y^2+5x и $xy-x^2$, а затем привести подобные члены.

$$5x^3+(y^2+5x)(xy-x^2)=5x^3+y^2\cdot xy-y^2\cdot x^2+5x\cdot xy-5x\cdot x^2=$$

$$=5x^3+xy^3-y^2x^2+5x^2y-5x^3=xy^3-y^2x^2+5x^2y.$$

2.4.2. Разложение многочлена на множители способом группировки. Разложим на множители многочлен

$$ac-bc+ad-bd.$$

Мы не можем разложить этот многочлен на множители способом, указанным в пункте 2.3. (подпункт 2.3.2), так как все его члены не имеют общего множителя. В таких случаях разбивают члены многочлена на группы, имеющие общие множители:

$$(ac-bc)+(ad-bd).$$

В каждой группе вынесем общие множители за скобки:

$$c(a-b)+d(a-b).$$

В полученном выражении двучлен $a-b$ является общим множителем, поэтому вынесем его за скобки:

$$c(a-b)+d(a-b)=(a-b)(c+d).$$

Итак,

$$ac-bc+ad-bd=(a-b)(c+d).$$

Такой способ разложения многочлена на множители называют ***способом группировки***.

Разложение многочлена $ac-bc+ad-bd$ на множители можно выполнить, группируя его члены иначе:

$$ac-bc+ad-bd=(ac+ad)-(bc+bd)=$$

$$=a(c+d)-b(c+d)=(c+d)(a-b).$$

Заметим, что этот же ответ можно получить, если сгруппировать слагаемые так: $(ac-bc)+(ad-bd)$. Из приведенных выше примеров видим, что результат не зависит от способа группировки слагаемых.(Проверьте сказанное самостоятельно.)

Пример 2. Разложим многочлен x^2-6x+5 на множители.

Решение. Представив член $-6x$ в виде $-x-5x$, сгруппируем полученные члены так:

$$x^2-6x+5=x^2-x-5x+5=(x^2-x)-(5x-5)=$$

$$=x(x-1)-5(x-1)=(x-1)(x-5).$$

Пример 3. Докажите тождество (т.е. докажите, что следующее равенство верно при любых значениях x)

$$(x-3)(x+7)-13=(x+8)(x-4)-2.$$

Решение. Для доказательства тождества проводят тождественные преобразования. При этом одну часть тождества сводят к другой части, преобразовывая только одну часть тождества, или приравнивают обе части тождества, преобразовывая их. В нашем случае мы применяем второй вариант преобразования:

$$(x-3)(x+7)-13=x^2+7x-3x-21-13=x^2+4x-34,$$

$$(x+8)(x-4)-2=x^2+8x-4x-32-2=x^2+4x-34.$$

Так как правые части данных равенств равны одному и тому же выражению, то они тождественно равны между собой. Значит, данное равенство – тождество.

?

1. Сформулируйте правило умножения многочлена на многочлен.
2. В каких случаях разложение многочлена на множители выполняют способом группировки?

ПЗ

По рис. 2.2 найдите:

1) сумму площадей закрашенных квадратов и незакрашенных прямоугольников;
2) площадь большого квадрата.

Приравняйте выражения, полученные в заданиях 1) и 2), и запишите полученное равенство.

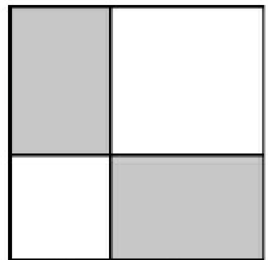


Рис. 2.2

Упражнения

A

2.102. Выполните умножение:

1) $(a+b)(x-y)$; 4) $(a+b)(a+2)$; 7) $(p+x)(q-y)$;

2) $(a-b)(x+y)$; 5) $(y+2)(y-3)$; 8) $(a+b)(c-d)$;

3) $(m-n)(p+q)$; 6) $(a+1)(a-3)$; 9) $(x+1)(x-1)$.

2.103. Выполните умножение многочленов:

1) $(2x+1)(x+4)$; 5) $(2m+3n)(2m-5n)$;

2) $(2x+3)(5x-4)$; 6) $(3x+2y)(x-y)$;

3) $(3x-2)(2a-1)$; 7) $(5b-4c)(2b-2c)$;

4) $(5a-3b)(4a-b)$; 8) $(p-3q)(8p+5q)$.

2.104. Представьте в виде многочлена выражение:

1) $(x+m)(y+m)$; 3) $(-a+y)(-y-2)$;

2) $(x+8)(x-1)$; 4) $(a-4)(2a+1)$;

5) $(2x-1)(2x+y)$;
7) $(5-a)(4-a)$;
6) $(m-n)(x+y)$;
8) $(6m-3)(2-5m)$.

2.105. Запишите произведение в виде многочлена:

1) $(6a^2+5b^2)(2a^2-4b^2)$;
4) $(8x^2-3xy)(3x^3-xy)$;
2) $(-7m^2-8n^2)(-m^2+3n^2)$;
5) $(5ab^2-4b^3)(3ab^3-4a^2)$;
3) $(4n^2-1)(n^2+5)$;
6) $(7x^3y^2-xy)(-2x^2y^2+5xy^3)$.

2.106. Представьте выражение в виде произведения многочленов:

1) $2a(x+y)+x+y$;
3) $4a(m-n)+m-n$;
5) $5a(x+y)-x-y$;
2) $3b(x-y)+x-y$;
4) $x(p-q)+p-q$;
6) $4a(m-n)-m+n$.

2.107. Разложите многочлен на множители:

1) $ax+ay+bx+by$;
6) $ab+2b-2a-4$;
2) $ax-ay+bx-by$;
7) $x^2+xy+ax+ay$;
3) $a^2+ab+ac+bc$;
8) $am-an+m-n$;
4) $ax+ay+6x+6y$;
9) $3x-3y+ax-ay$;
5) $1-bx-x+b$;
10) $ab-a^2+2a-2b$.

2.108. Представьте многочлен в виде произведения:

1) x^3+3x^2+3x+9;
6) $6by-15bx-4ay+10ax$;
2) $x^2-xy-2x+2y$;
7) $5x^2-5ax-7a+7x$;
3) $m^2+mn-5m-5n$;
8) $4x^2-4xz-3x+3z$;
4) $a^2-ab-3a+3b$;
9) $5ax-6bx-5ay+6by$;
5) $10ay-5by+2ax-bx$;
10) $2m^2-mn+2mx-nx$.

2.109. Докажите тождество:

1) $x(y-a)+a(x+y)=y(x+a)$;
2) $x(y-2)+2(x+y)=y(x+2)$;
3) $m(m-n)+2mn=m(m+n)$;
4) $x(1-x)+x(x^2-1)=x^2(x-1)$.

B

2.110. Выполните умножение:

1) $(2a^2-3b)(a^2+2ab+5b^2)$;
2) $(x^2-2xy)(x^2-5xy+3y^2)$;
3) $(x-y)(x^3+x^2y+xy^2+y^3)$;
4) $(a+b)(a^3-a^2b+ab^2-b^3)$;
5) $(5a-4b)(a^3+2a^2b-5ab^2-3b^3)$;
6) $(2x+3y)(x^3+3x^2y-3xy^2+4y^3)$.

2.111. Представьте выражение в виде многочлена:

1) $(x-2)(x+3)+(x+2)(x-3)$;
2) $(a-1)(a+2)+(a+1)(a-2)$;
3) $(a+1)(a+2)+(a+3)(a+4)$;
4) $(x-1)(x-2)+(x-3)(x-4)$.

2.112. Найдите значение выражения:

1) $(x-4)(x-2)-(x-1)(x-3)$ при $x=1\frac{3}{4}$;

2) $(a-5)(a-1)-(a+2)(a-3)$ при $a=-2\frac{3}{5}$;

3) $(x-2)(x-3)+(x+6)(x-5)-2(x^2-7x+13)$ при $x=5{,}6$;

4) $(3m-1)(m+1)+(2m-1)(m-1)-(5m+5)(m-2)$ при $m=0{,}375$.

2.113. Выполните умножение:

1) $(4b^2+2a^2-4ab)(3ab+2a^2-3b^3)$;
2) $(5ab-3a^2-2b^2)(-4b^2-ab+6a^2)$;
3) $(7+3a^2-3a)(5-2a-a^2)$;
4) $(5xy^2-3x^3+2x^2y)(2x^2-xy-4y^2)$.

2.114. Представьте многочлен в виде произведения:

1) $ax^2-bx^2-bx+ax-a+b$;
2) $ax^2+bx^2-bx-ax+a+b$;
3) $ax^2+bx^2+ax-cx^2+bx-cx$;
4) $ax^2+bx^2-bx-ax+cx^2-cx$.

2.115. Разложите многочлен на множители:

1) $ac^2-ad+c^3-cd-bc^2+bd$;
2) $mx^2+my^2-nx^2-ny^2+n-m$;
3) $am^2+cm^2-an+an^2-cn+cn^2$;
4) $xy^2-ny^2-mx+mn+m^2x-m^2n$;
5) $a^2b+a+ab^2+b+2ab+2$;
6) $x^2-xy+x-xy^2+y^3-y^2$.

2.116. Найдите значение выражения:

1) $a^2+ab-5a-5b$ при $a=6\frac{3}{5}$, $b=\frac{2}{5}$;
2) $x^2-xy-3x+3y$ при $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{4}$;

3) $5a^2-5ax-7a+7x$ при $a=4$, $x=-3$.

2.117. Докажите тождество:

1) $(x-5)(x+8)-(x+4)(x-1)=-36$;
3) $x^4-(x^2-7)(x^2+7)=49$;
2) $x^4-(x^2-1)(x^2+1)=1$;
4) $(x-3)(x+7)-(x+5)(x-1)=-16$.

2.118. Докажите, что выражение $(n-6)(n+8)-2(n-25)$ при любом значении n принимает положительное значение.

2.119. Найдите корни уравнения:

1) $(2x-1)(3x+4)-6x^2=16$;
3) $7+2x^2=2(x+1)(x+3)$;
2) $(1-2y)(1-3y)=(6y-1)y-1$;
4) $(y+4)(y+1)=y-(y-2)(2-y)$.

2.120. Докажите, что при всех целых n значение выражения:

1) $n(n-1)-(n+3)(n+2)$ делится на 6;

2) $n(n+5)-(n-3)(n+2)$ делится на 6.

C

2.121. С помощью рисунка 2.3 разъясните геометрический смысл равенства $(m+n)(a+b)=ma+mb+na+nb$ для положительных n, m, a, b.

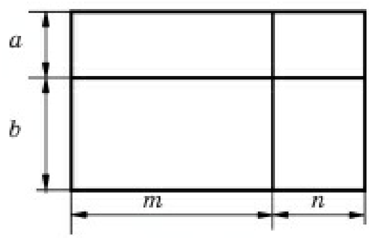


Рис. 2.3

2.122. Выполните действия:

1) $(x-a)(x-b)(x-c)$;

2) $(x^2-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$;

3) $(a-b+c)(a+b-c)(-a+b+c)$;

4) $(x-y)(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)$.

2.123. Докажите тождество:

1) $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$;
4) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$;
2) $(a+b)(a^2-ab-b^2)=a^3+b^3$;
5) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.
3) $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$;

2.124. Произведение двух последовательных чисел меньше произведения следующих двух последовательных целых чисел на 38. Найдите эти числа.

2.125. Докажите, что: 1) сумма двух нечетных чисел – четное число; 2) произведение двух нечетных чисел – нечетное число.

2.126. Разложите на множители трехчлен:

1) x^2+5x+6; 5) x^2-x-12;

2) x^2-5x+6; 6) x^2-3x-4;

3) $x^2-8x+15$; 7) x^2-x-6;

4) $x^2-7x+12$; 8) $x^2+2x-15$.

2.127. Длина прямоугольника в 3 раза больше его ширины. Если ширину прямоугольника увеличить на 4 м, а длину его уменьшить на 5 м, то площадь прямоугольника увеличится на 15 м^2. Найдите размеры прямоугольника.

2.128. Решите уравнение, предварительно разложив его левую часть на множители:

1) $x^2-4x-5=0$; 3) $x^2-11x+10=0$;

2) $x^2+7x+12=0$; 4) $2x^2-3x+1=0$.

2.129. Докажите, что разность квадрата целого числа и самого числа – четное число.

2.130. Докажите, что если $b+c=10$, то $(10a+b)\cdot(10a+c)=100a\cdot(a+1)+bc$. С помощью этой формулы вычислите:

1) $24\cdot26$; 2) $37\cdot33$; 3) $42\cdot48$; 4) $81\cdot89$.

2.131. Докажите, что $(a+c)(b+c)+(a-c)(b-c)=0$, если $ab+c^2=0$.

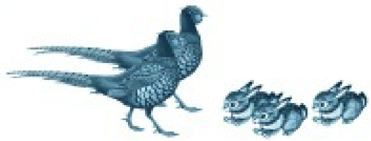
Упражнения для повторения

2.132. Тракторная бригада должна была по плану вспахивать ежедневно 112 га земли. Перевыполняя план на 8 га в день, бригада уже за день до срока закончила пахоту. Сколько гектаров земли вспахала бригада?

2.133. К данному трехзначному числу слева приписали цифру 5 и из полученного четырехзначного числа вычли 3032. Получилась разность, которая в 9 раз больше трехзначного числа. Найдите данное трехзначное число.

2.134. При каком значении m значение дроби $\frac{3m+2}{4}$ на 1 меньше значения дроби $\frac{5m-1}{3}$?

2.135. (Старинная китайская задача.) В клетке находятся кролики и фазаны. У них вместе 100 ног и 36 голов. Сколько фазанов и сколько кроликов в клетке?



2.136. Найдите значение выражения:

1) $(3a - 2b)(3a^3 + 2b^2)$ при $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{2}$;

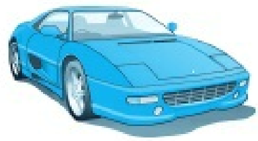
2) $3a^2 + 7ab + 2b^2$ при $a = 2$, $b = -1$.

2.137. Моторная лодка прошла по реке от одной станции до другой и обратно за 4 ч. Найдите расстояние между этими станциями, если скорость течения реки равна 3 км/ч, а собственная скорость моторной лодки – 18 км/ч.

Раздел 3. ФУНКЦИЯ

3.1. Функция и способы ее задания

3.1.1. Понятие функции.



Пример 1. Автомобиль едет с постоянной скоростью $\upsilon = 60$ км/ч. Требуется найти пройденный им путь S км за время t ч.

Решение. Пройденный путь определяется так:

$$S = \upsilon t.$$

Здесь $\upsilon = 60$ км/ч, поэтому пройденный путь вычисляется с помощью равенства

$$S = 60t.$$

Отсюда видно, что по мере изменения времени t изменяется также пройденный путь S. Например, если $t = 0,5$ ч, то $S = 60 \cdot 0,5 = 30$ км; если $t = 2$ ч, то $S = 120$ км и т.д.

Пример 2. Акимат выделил населению участок земли прямоугольной формы под дачу с площадью по 6 соток (600 м^2) каждый. Если одно из измерений участка равно x м, то как можно найти его второе измерение y?

Решение. По формуле нахождения площади прямоугольника имеем: $600 = x \cdot y$. Отсюда

$$y = \frac{600}{x}.$$

Если здесь x и y рассматривать как переменные величины, то видим, что каждому значению переменной x соответствует единственное значение переменной y. Например,

если $x = 6$ м, то $y = \frac{600}{6} = 100$ м;

если $x = 15$ м, то $y = \frac{600}{15} = 40$ м;

если $x = 20$ м, то $y = \frac{600}{20} = 30$ м.

В рассмотренных примерах каждому значению одной переменной (независимой переменной) соответствует единственное значение второй переменной (зависимой переменной).

Определение. ***Закономерность, по которой каждому значению независимой переменной ставит в соответствие единственное значение зависимой переменной, называется функциональной зависимостью, или функцией.*** Здесь независимую переменную x называют ***аргументом***, а зависимую переменную y называют ***функцией*** от аргумента x.

В общем случае, функцию y, зависящую от аргумента x, обозначают так: $y = f(x)$. Читается так: «Игрек равен эф от икс».

Итак, чтобы функция была заданной, необходимо, чтобы:

1) была известна закономерность, которая устанавливает данную функциональную зависимость между переменными;

2) было известно множество допустимых значений аргумента. Это множество называется ***областью определения*** функции.

Например, функции $f(x) = 2x - 3$, $x \in [-1; 2]$ и $f(x) = 2x - 3$, $x \in [0; 5]$ – разные функции, т.к. их области определения разные. Во многих случаях области определения функции специально не выделяются. В таких случаях в качестве области определения данной функции принято считать множество всех допустимых значений аргумента x, при которых выражение $f(x)$ имеет смысл.

Пример 3. Область определения функции $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$ определяется неравенством $x \neq 1$, т.к. необходимо, чтобы $x - 1 \neq 0$:

$D = (-\infty; 1) \cap (1; +\infty)$ – область определения этой функции.

Пример 4. Найти область значений функции $y = 3x - 2$, $-3 \leqslant x \leqslant 3$.

Множество всех значений функции $y = f(x)$ называется областью значений этой функции.

Решение. $-3 \leqslant x \leqslant 3 \Rightarrow -9 \leqslant 3x \leqslant 9 \Rightarrow -11 \leqslant 3x - 2 \leqslant 7 \Rightarrow -11 \leqslant y \leqslant 7$. Итак, $[-11; 7]$ – область значений данной функции.

Пример 5. При каком значении аргумента x значение функции $f(x) = \dfrac{3}{x+3}$ равно 6?

Решение. Необходимо, чтобы $f(x) = 6$:

$$6 = \frac{3}{x+3} \Rightarrow 6(x+3) = 3 \Rightarrow 2x + 6 = 1 \Rightarrow 2x = -5 \Rightarrow x = -2{,}5,$$

т.е. $f(-2{,}5) = 6$.

Во всех рассмотренных примерах функциональные зависимости были заданы с помощью формул (выражений). В этом случае говорят, что функция задана ***аналитическим способом***. Кроме того функции могут быть заданы ***табличными*** или ***графическими*** способами.

?

1. Какая зависимость переменных называется функциональной зависимостью?
2. Как вы понимаете понятия независимой и зависимой переменной? Какая из них называется аргументом, а какая – функцией? Приведите пример.

3. Что такое область определения функции? Что вы понимаете под областью значений функции?
4. При каких условиях считается, что функция задана? Приведите пример.
5. Если область определения специально не указана, то что берется в качестве области определения функции? Приведите пример.

ПЗ Велосипедист в 15^{00} тронулся с места и, проехав 100 м за 15 с, довел скорость движения до 5 м/с. Далее он двигался с этой постоянной скоростью.

1) Задайте пройденный велосипедистом путь S м как функцию, зависящую от времени t с, и определите область определения этой функции.
2) Какой путь пройдет велосипедист: а) в 15 ч 15 мин 15 с; б) за 1 ч?
3) За какое время велосипедист пройдет путь 1 км 100 м?
4) В котором часу он преодолеет рубеж в 5 км?

Выполните задание, объединившись в 3 подгруппы, и совместно обсудите результаты вычислений.


Г. Лейбниц

И Термин «функция» исходит от латинского functio (действие, исполнение). Этот термин впервые в 1694 году ввел немецкий математик, основатель теории дифференциальных и интегральных исчислений, Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646–1716). После этого на протяжении многих лет математики и философы старались дать определение понятию *функция*. Многие считали, что функция – это произвольно написанная формула, а другие считали, что функция – это начерченная на листе бумаги линия. Позже было показано, что оба эти подхода были ошибочны и не описывают все возможные функции. А то определение, аналогом которого мы пользуемся по сей день, было предложено великим русским математиком, основателем неевклидовой геометрии, Н.И. Лобачевским (1792–1856).


Н. И. Лобачевский

Упражнения

А

3.1. Найдите значение функции $f(x) = 2x - 5$ при $x = -2; -1; 0; 1; 2$.

3.2. При каких значениях аргумента x значение функции $f(x) = 2x - 5$ равно: 1) 3; 2) -1; 3) 0; 4) 10?

3.3. Применяя общее обозначение функции $y = f(x)$ запишите следующие утверждения в виде функциональной зависимости: 1) значение функции равно 10, если аргумент равен 3; 2) значение функции равно 5,5, если аргумент равен 1,5; 3) при $x = -1$ и $x = 2$ соответствующие значения функции равны между собой.

3.4. Может ли значение функции $f(x) = 1{,}2x + 3{,}8$ быть равным: 1) 3; 2) 4; 3) 5; 4) 6, если $x = 1$? Обоснуйте ответ.

3.5. Запишите область определения функции в виде числового множества:

1) $f(x) = 0{,}5x + 4$; $0 \leqslant x \leqslant 3$;
3) $f(x) = 4 - x$, $-2 \leqslant x$;
2) $f(x) = 0{,}3x - 2$, $-2 \leqslant x \leqslant 1$;
4) $f(x) = \dfrac{x+1}{4}$, $x \leqslant 3$.

3.6. Для функции $y = f(x)$ найдите значения $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$:

1) $f(x) = 4 - 0{,}5x$;
3) $f(x) = x^2 + 1$;
2) $f(x) = 3x - 2$;
4) $f(x) = \dfrac{3}{x+5}$.

3.7. Для функции $f(x) = 2x - 3$ заполните таблицу

x	0	−1		−2			5
$f(x)$			2		4,5	7	

3.8. Одно из измерений прямоугольника равно 3 см, а другое – x см. Запишите площадь прямоугольника S в виде функции, зависящей от x. Каким может быть:

1) значение x при $S = 13{,}5$ см²;
2) значение S при $x = 5{,}7$ см?

B

3.9. Является ли следующая зависимость функциональной? Если да, то запишите ее в виде формулы, данной ниже.

1) Длине стороны квадрата x м соответствует его площадь $S(x)$;

2) оператор за 7 ч рабочего времени может набрать на компьютере 30 страниц рукописи произведения, которая имеет 300 страниц. Каждому пройденному часу x ставится в соответствие количество еще ненабранных страниц y.

3.10. Будет ли следующая зависимость функциональной: «Каждому двузначному числу ставится в соответствие сумма его цифр»? Если зависимость функциональная, то найдите значения $f(12)$, $f(35)$, $f(92)$. Можно ли найти значения $f(7)$ и $f(102)$? Обоснуйте ответ. Найдите область определения и область значений этой функции.

3.11. В бак объемом 200 л наливают бензин со скоростью 2 л/с. Через t с в баке остается пустота объемом V л. Выразите объем V во времени t. Какова область определения функции $V(t)$? Найдите значения $V(10)$, $V(30)$. Можно ли найти значение $V(120)$? Обоснуйте ответ.

3.12. Для функции: 1) $f(x) = x^2 - 2x + 3$; 2) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+4}$ найдите значения $f(-1)$, $f(0{,}1)$, $f(0{,}25)$, $f(1)$ и $f(2)$. Какова область определения функции?

3.13. Может ли значение функции: 1) $f(x) = 2x - 7$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$; 2) $f(x) = 2x - 7$, $0 \leqslant x \leqslant 5$ равняться 1? Если значение функции равно 1, то найдите соответствующее значение аргумента.

3.14. При каком значении аргумента значение функции равно 4:

1) $f(x) = \dfrac{6}{x-2}$; 3) $f(x) = \dfrac{3}{x} + 3$;

2) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-3}$; 4) $f(x) = \dfrac{x}{x-2} + 5$?

3.15. Для функции $f(x) = x^2 - 5$ сравните указанные значения функции:

1) $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ и $f(0{,}5)$; 3) $f(-2)$ и $f(1)$;

2) $f(0)$ и $f(-2)$; 4) $f(-3)$ и $f(4)$.

3.16. Найдите область определения функции и запишите ее в в виде числового промежутка:

1) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-5}$; 3) $f(x) = \dfrac{3x+4}{2x-3}$;

2) $f(x) = \dfrac{2x}{x+1} - 3$; 4) $f(x) = \dfrac{1-x}{x^2+1}$.

C

3.17. Найдите область определения функции:

1) $f(x) = \dfrac{1}{x-3} + \dfrac{2}{x+3}$; 2) $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x-1)\cdot(x+4)}$.

3.18. Если известно, что аргумент функции $y = f(x)$ может принимать значения не менее, чем -2, и не более, чем 7, то найдите область определения функции:

1) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$; 2) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-4}$.

3.19*. Дана функция $y = \frac{2}{x-3} + 4$. 1) Найдите область определения функции; 2) в заданной функциональной зависисмости выразите переменную x через y; 3) в полученном выражении найдите все возможные значения переменной y. Можно ли найденное множество возможных значений y принимать как множество значений исходной функции? Обоснуйте ответ.

3.20*. Дана функция $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. 1) Найдите область определения функции. 2) Найдите значения $f(-10)$, $f(-3)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(3)$, $f(10)$ и сравните их. 3) Найдите наибольшее значение функции. 4) Может ли значение функции быть равным 0 или отрицательному числу? Обоснуйте ответ. 5) Запишите область значений функции в виде числового промежутка.

Упражнения для повторения

3.21. Выполните действия:

1) $(4x^2)^3$;
3) $0,3v^2 \cdot (-\frac{1}{3}u^4 \cdot v^6)$;
2) $(-2a^4b^2)3$;
4) $\left(\frac{1}{4}x^2y\right)^3 \cdot (-32x^2 \cdot b)$.

3.22. Какой цифрой может оканчиваться 5-я степень натурального числа? Обоснуйте ответ.

3.23. Разложите многочлен на множители:

1) $a^2c + b^2c - a^2d - b^2d + d - c$; 2) $x^2 + 7x + 10$;

3.24. Ширина прямоугольника в 2 раза короче его длины. Если ширину увеличить на 2 см, а длину сократить на 2 см, то площадь прямоугольника увеличится на 2 см^2. Каковы измерения данного прямоугольника?

3.25. Населенные пункты A, B и C расположены вдоль прямолинейной трассы. Как могут расположиться эти населенные пункты, если известно, что расстояние между A и B равно 35 км, а между A и C – 15 км? Чему равно расстояние между B и C? Рассмотрите все возможные случаи.

3.1.2. Таблица значений функции и ее график. В повседневной жизни, в науке и технике мы часто используем сведения, записанные в виде таблицы.

Пример 1. В течение суток измерили температуру T°C воздуха с интервалом в 2 ч и результаты измерения записали в таблицу зависимости от времени t измерения:

t	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
T	−2	−4	−3	−2,5	0	2	3,5	5	7	4	1,5	0	−3

В этой таблице каждому значению времени t соответствует единственное значение T температуры воздуха. Тогда температуру T можно рассматривать как функцию, зависящую от времени t. Итак, здесь функция $T = f(t)$ задана табличным способом. Например, по этой таблице имеем: $2^\circ C = f(10)$, $-3^\circ C = f(4)$ и $-3^\circ C = f(24)$. В таких случаях говорят, что функция задана ***табличным способом***.

Каждую пару чисел, расположенную на одном столбце таблицы, можно рассматривать как координаты точки. А именно, верхнее число – как абсциссу точки, а нижнее – как ординату этой точки. Тогда по данной таблице полученные точки отмечены на плоскости так, как показано на рис 3.1.

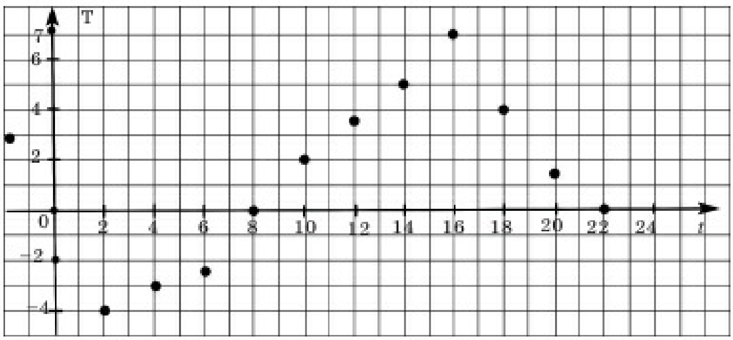


Рис. 3.1

Если в таблице были бы сведения о температуре воздуха, измеренные через каждый час, то точки, обозначенные на рис. 3.1, расположились бы в 2 раза чаще. Если соединить эти точки сплошной линией, то получим ***график*** изменения температуры воздуха за сутки (рис. 3.2).

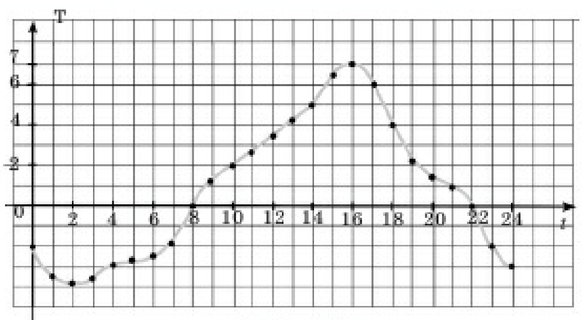


Рис. 3.2

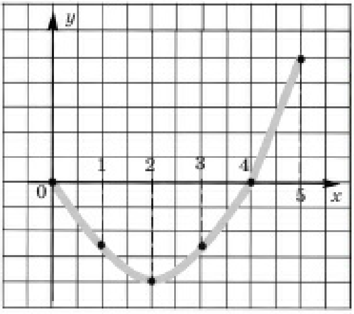


Рис. 3.3

В таких случаях говорят, что функция задана ***табличным способом***.

Определение. ***Графиком функции называется множество точек плоскости, в которых абсцисса равна аргументу функции, а ордината равна соответствующему значению этой функции.***

Итак, график функции $y = f(x)$ – это множество точек плоскости вида: $M(x; f(x))$.

Чтобы нарисовать график функции, на практике выбирают несколько значений аргумента и составляют таблицу с помощью соответствующих значений функции. Полученные по таблице точки отмечают на плоскости $0xy$ и эти точки плавно и последовательно соединяют сплошной линией. Чем чаще расположены эти точки, тем точнее строится график функции.

Пример 2. Построить график функции $y = 0{,}5x^2 - 2x$, $0 \leqslant x \leqslant 5$.

Решение. Областью определения функции является промежуток $[0; 5]$. В этом промежутке составим таблицу значений функции:

x	0	1	2	3	4	5
y	0	−1,5	−2	−1,5	0	2,5

Найденные точки отметим на координатной плоскости $0xy$ и плавно соединим их сплошной линией. Получим график данной функции (рис. 3.3).

?

1. Приведите пример функции, заданной табличным способом.
2. Что называется графиком функции?
3. Как можно построить график функции?
4. Как по графику можно найти значение функции, соответствующее данному значению аргумента? Приведите пример.

ПЗ

Количество диагоналей выпуклого n-угольника обозначим через m. Найдите закономерности зависимости m от n. Для этого:

1) Постройте выпуклые четырехугольник, пятиугольник, шестиугольник и семиугольник и посчитайте количество диагоналей каждого из них.
2) Результаты подсчета запишите в таблице:

n	3	4	5	6	7	8	9
m	0	2					

Здесь учтено то, что треугольник не имеет диагоналей.

3) Определите закономерности изменения количества диагоналей в зависимости от количества его сторон по первым пяти значениям таблицы. Основываясь на эти закономерности, найдите количество диагоналей многоугольника при $n = 8$ и $n = 9$ (не используя соответствующие рисунки).
4) По этим закономерностям запишите функцию $m = f(n)$.
5) Обозначив $m = y$ и $n = x$, постройте график функции $y = f(x)$. Здесь $x \geqslant 3$. (Целесообразно задание выполнять в группе.)

Упражнения

A

3.26. Задайте функцию таблицей:

1) $y = 2x - 3, \ -1 \leqslant x \leqslant 4$; 2) $y = \dfrac{1}{3}x + 2, \ -3 \leqslant x \leqslant 3$.

3.27. В таблице с шагом 1 мин показан процесс закипания электрического самовара:

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
T°C	25	31	38	44	50	56	62	68	76	84	92	100	100

1) За сколько минут вскипел самовар?
2) Какова температура воды, залитой в самовар?
3) Какова температура воды в самоваре после 5 мин, как подключили самовар к электричеству?
4) Полагая, что каждый 1 см оси ординат равен 10°С и 1см оси Ox равен 1 мин, указанные сведения отметьте на координатной плоскости.

3.28. Для функции $f(x) = 2x - 4$ заполните пустующие клетки в следующей таблице:

x	-2	-1		1	2		4
$f(x)$			-4			2	

1) При каком значении аргумента x значение функции равно -4; 0; 4?
2) Может ли значение функции равняться 3? Какому значению аргумента оно соответствует, если значение функции равняется 3?
3) По таблице постройте график функции.

3.29. Какой из графиков, показанных на рис. 3.4, определяет функцию?

3.30. Задайте функцию таблицей, график которой изображен на рис. 3.5.

3.31. Функция $y = 2x(2 - x)$ определена на множестве $D = \{-1; 0; 1; 2; 3; 4\}$. Задайте ее табличным способом. При каком значении аргумента функция достигает своего наибольшего значения?

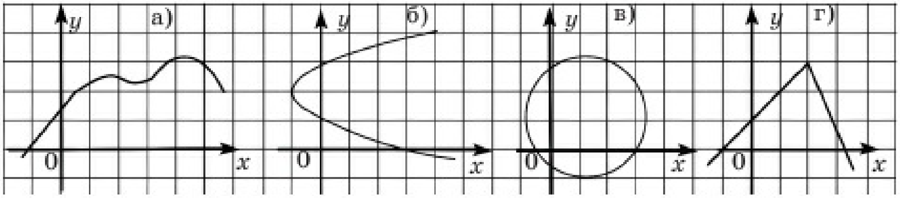


Рис. 3.4

В

3.32. Функция $y = f(x)$ задана таблицей:

x	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	$1,5$	2
$f(x)$	0	$-0,75$	-1	$-0,75$	0	$1,25$	3

1) При каком значении аргумента функция достигает своего наименьшего (наибольшего) значения?

2) Определив закономерность функциональной зависисмости, найдите $f(-2)$ и $f(3)$.

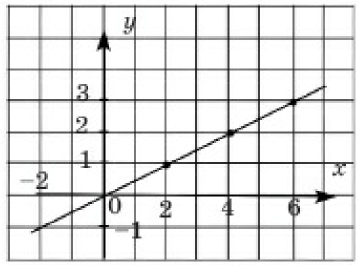


Рис. 3.5

3.33. Функция задана графическим способом (рис. 3.6). Задайте ее табличным способом и найдите значения $f(-2)$, $f(0)$, $f(3)$. Каким может быть значение $f(4)$? Обоснуйте ответ.

3.34. Функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ заданы таблицей.

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	7	5	3	1	-1	-3

x	0	1	2	3	4	5
$g(x)$	0	1	4	9	16	25

Найдите: 1) $\varphi(3)$, $\varphi(1)$, если $\varphi(x) = f(x) + g(x)$; 2) $r(2)$ и $r(4)$, если $r(x) = f(x) \cdot g(x)$.

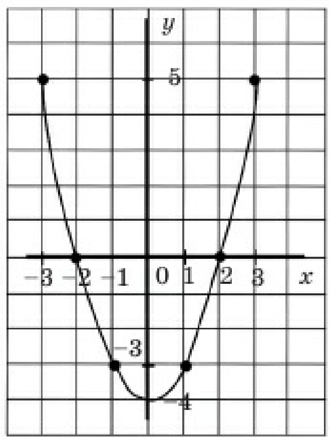


Рис. 3.6

3.35. Междугородный автобус движется с постоянной скоростью 80 км/ч. Зависимость пройденного автобусом пути S км от времени t ч задана таблицей. Заполните пустующие клетки.

t	15 мин	30 мин		1 ч 20 мин		2 ч
S			80 км		120 км	

3.36. В указанном промежутке с заданным шагом задайте функцию таблицей и по данным этой таблицы постройте ее график:

1) $y = \frac{2}{x}$, $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 3$, шаг $h = \frac{1}{2}$; 2) $y = \frac{x+1}{x-5}$, $0 \leqslant x \leqslant 4$, шаг $h = \frac{1}{2}$.

3.37. Собственная скорость катера 30 км/ч. В таблице приведены сведения о пройденном пути S км катера по течению реки за t ч:

t	0,5	1		2	2,5	3
S	16,5		49,5	66		

1) Заполните пустующие клетки.
2) Найдите скорость течения реки.
3) Задайте функцию $S = f(t)$ формулой;
4) Каждый 1 см оси Ox приравняйте 0,5 ч и 1 см оси Oy – 20 км. Постройте график движения катера.

C

3.38. Если в ведро в форме усеченного конуса налить воду объемом V л, то высота уровня воды в ведре равна H мм. На рис. 3.7 показано изменение высоты воды в ведре в зависисмости от объема налитой в него воды V л.

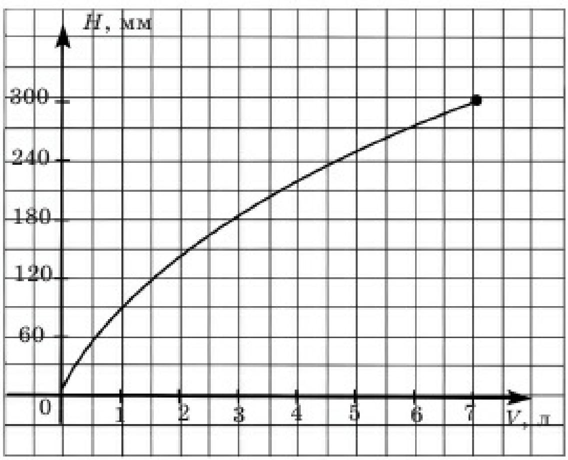


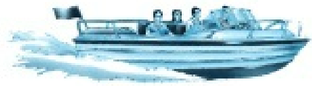
Рис. 3.7

1) Какой будет высота уровня воды в ведре, если в ведро налить воду объемом в 1л; 3л; 5,5л?

2) Оцените объем воды в ведре, если высота уровня воды в ведре равна 120 мм, 200 мм.

3) На сколько увеличится высота уровня воды, если объем воды в ведре увеличится с 0,5 литра до 3л?

4) Определите объем ведра.



3.39. Моторная лодка плывет по течению реки с собственной скоростью 20 км/ч, а в противоположном направлении плывет катер с собственной скоростью 30 км/ч. Первоначально расстояние между ними было равно 20000 м, а скорость течения реки 3 км/ч. Считая, что расстояние S м между ними является функцией от времени t мин, заполните таблицу.

t мин	10	20	30	40	50	60	70	80	90
S м									

1) Имеются ли в условии задачи ненужные (лишние) сведения?

2) По таблице постройте график функции $S = f(t)$. Здесь 1 см оси Ox равен 10 мин, а 1 см оси Oy равен 2000 м.

Упражнения для повторения.

3.40. При каком значении x значение дроби $\frac{6}{|x-5|}$ равно 3?

3.41. Выразите скорость, равную 20 км/ч, в м/с.

3.42. Сократите дробь:

1) $\left(\frac{1}{36}\right)^{-n} : 6^{2n-1}$; 2) $\frac{40^{n+1}}{2^{3n+1} \cdot 5^n}$.

3.2. Линейная функция и ее график

3.2.1. Функция прямой пропорциональности.

В магазине за x кг муки по цене 260 тг за 1 кг нужно заплатить y тг: $y = 260 \cdot x$ тг.

Аналогично, из 20-литровой канистры отлили x л бензина. Масса 1 литра бензина равна 0,9 кг. Тогда y – масса отлитого бензина определяется так: $y = 0{,}9 \cdot x$ кг.

В каждом из этих примеров мы использовали функцию вида:

$$y = kx.$$

Эту функцию называют ***функцией прямой пропорциональности***. Здесь k – заданное постоянное число, его называют *коэффициентом прямой пропорциональности*. Т.к. выражение kx определено при любом значении аргумента x, то областью определения этой функции является вся числовая ось. Построим график прямой пропорциональности.

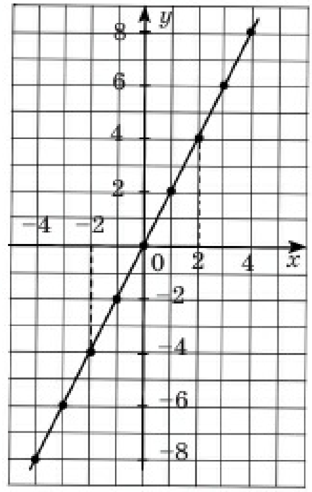


Рис. 3.8

Пример 1. Построить график функции $y = 2x$.

Решение. Построим таблицу значений этой функции и в результате полученные точки отметим на координатной плоскости (рис. 3.8).

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8

Видно, что эти точки лежат на одной прямой (рис. 3.8).

Пример 2. Построить график функции $y = -\dfrac{1}{2}x$.

Решение. Составим таблицу.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	2	$1{,}5$	1	$0{,}5$	0	$-0{,}5$	-1	$-1{,}5$	-2

Эти точки также лежат на одной прямой (рис. 3.9).

Из этих примеров вытекают следующие свойства функции прямой пропорциональности и ее графика:

1) Различные соответствующие значения переменных x и y пропорциональны, т.е. если $y_1 = kx_1$ и $y_2 = kx_2$, то верно равенство:

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = k.$$

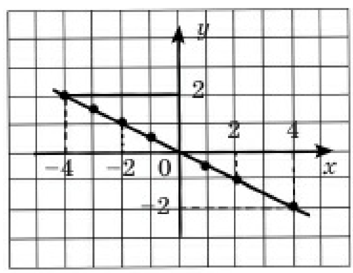


Рис. 3.9

Поэтому k называется коэффициентом пропорциональности. Его также называют *угловым коэффициентом* соответствующей прямой. Т.к. в старших классах будет показана связь k с углом, образованным графиком пря-

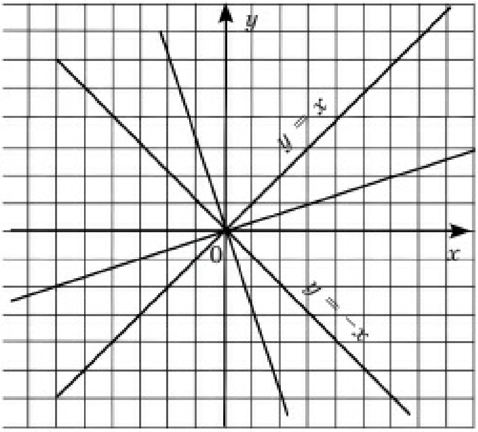


Рис. 3.10

мой пропорциональности с положительным направлением оси абсцисс.

2) Графиком функции $y = kx$ является прямая, проходящая через начало координат:

• если $k > 0$, то прямая расположена в I и III координатных четвертях (рис. 3.8);

• если $k < 0$, то прямая расположена в II и IV координатных четвертях (рис. 3.9);

• если $k = 0$, то прямая $y = 0$ совпадает с осью Ox, т.е. уравнением прямой, проходящей через ось Ox, является уравнение $y = 0$.

На рис. 3.10 даны графики прямой пропорциональности при различных значениях k.

3.2.2. Линейная функция и ее график.

Пример 3. Из канистры, в котором содержится 20 л бензина, отлили x литров. Найти массу y оставшегося в канистре бензина, если масса 1 л бензина равна 0,9 кг.

Решение. Масса 20 л бензина равна $20 \cdot 0{,}9 = 18$ кг, а масса отлитого бензина – $0{,}9x$ кг. Тогда масса оставшегося в канистре бензина такова: $y = 18 - 0{,}9x$ кг.

Итак, в результате мы получим функцию вида $y = kx + b$. Эту функцию называют ***линейной функцией***. Здесь k и b – заданные постоянные. k называется *угловым коэффициентом*, b – *свободным членом* линейной функции.

Пример 4. Построить график функции $y = 0{,}5x - 1$.

Решение. Для этого составим таблицу значений этой функции:

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	−3	−2,5	−2	−0,5	−1	−0,5	0	0,5	1

В результате, соединив полученные точки, получим график линейной функции $y = 0{,}5x - 1$ (рис. 3.11). Графиком этой функции является прямая. Поэтому для того чтобы построить график линейной функции, достаточно найти координаты двух точек, лежащих на этой прямой, и соединить их линейкой.

Если в линейной функции $y = kx + b$ предположить, что $x = 0$, то $y = b$. Это значит, что график линейной функции пересекает ось Oy в точке $(0; b)$.

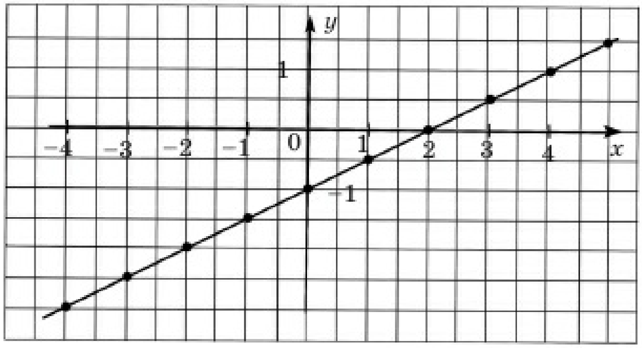


Рис. 3.11

Пример 5. Построить график функции $y = 3 - \frac{2}{3}x$.

Решение. График функции проходит через точку (0; 3).

Достаточно определить координаты еще одной точки, лежащей на этой прямой. Предположив, что $x = 3$, получим: $y = 3 - \frac{2}{3} \cdot 3 = 1$, т.е прямая проходит через точку (3; 1) (рис. 3.12).

Пример 6. По графику, изображенному на рис.3.13, написать уравнение этой прямой.

Решение. Прямая проходит через точки $A(0; 2)$ и $B(4; 0)$. Поэтому имеем: $2 = k \cdot 0 + b$ и $0 = k \cdot 4 + b$. Отсюда $b = 2$ и $k = -\frac{1}{2}$, т.е данная прямая задается уравнением $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

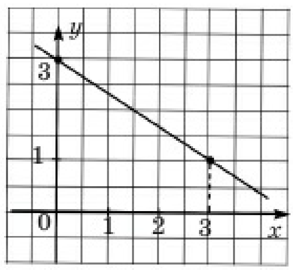


Рис. 3.12

Координаты точек, лежащих на данной прямой, удовлетворяют ее уравнению, а координаты точек, не лежащих на этой прямой, не удовлетворяют ее уравнению. Например, на рис. 3.13 точка C (2; 1) лежит на прямой $y = -\frac{1}{2}x + 2$, т.к. при $x = 2$, $y = 1$ имеем: $1 = -\frac{1}{2} \cdot 2 + 2 \Rightarrow 1 = 1$, т.е получим тождество. А для точки D (3; 2) имеем неравенство $2 \neq -\frac{1}{2} \cdot 3 + 2$, т.е. координата точки D не удовлетворяет уравнению данной прямой.

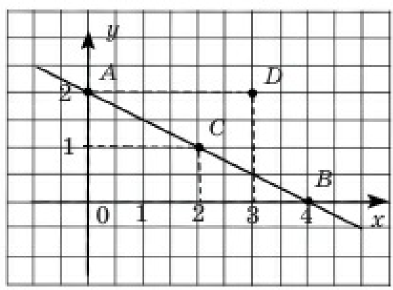


Рис. 3.13

?

1. Что называется функцией прямой пропорциональности и какой формулой она задается? Приведите пример.
2. Что такое угловой коэффициент? Как влияет его знак на расположение графика прямой пропорциональности? Приведите пример.
3. Что называется линейной функцией? Какая линия является ее графиком?
4. Чему равен свободный член соответствующей линейной функции, если прямая пересекает ось Oy в точке (0; 3)? Приведите пример.
5. Из каких координатных углов отсекает треугольник в зависимости от знака углового коэффициента и свободного члена графика линейной функции? Приведите пример.
6. В чем отличие уравнения прямой пропорциональности от линейной функции?

ПЗ

Найдите высоту школьного здания. Для этого найдите ответы на следующие вопросы:

1) Являются ли пропорциональными длина тела и длина его тени? Если да, то в 12^{00} ч дня найдите коэффициент пропорциональности между высотой тела и его тенью. Обоснуйте ответ.
2) Найдите длину тени здания школы.
3) Умножьте результат на коэффициент пропорциональности. Результат умножения даст приближенное значение высоты здания школы.
4) Этим способом можно определить высоту любого высокого объекта (столба, дерева и т.д.) Здесь, чтобы определить коэффициент пропорциональности, можно использовать шест длиной 1 м, 2 м. Обоснуйте алгоритм определения высоты объекта.

Упражнения

А

3.43. Постройте график прямой пропорциональности $y=-\frac{1}{2}x$.

Определите по графику значение y при $x = -4; 2; 6$.

3.44. При каком значении x значение y равно 4? (Используйте условие упражнения 3.43.)

3.45. Сколько тенге стоят 2 кг сахара, если за 5 кг сахара заплатили 1200 тг?

3.46. Чтобы покрасить пол комнаты площадью 16 м^2, потребовалось 3,6 кг эмали. Сколько килограммов краски потребуется для покраски пола комнаты площадью 22 м^2?

3.47. Функция прямой пропорциональности задана таблицей:

x	-2		1	3	
$y=kx$	4	0			-10

1) Заполните пустующие клетки; 2) найдите угловой коэффициент.

3.48. Заполните таблицу:

1)

x	-2	0	1	3	7
$y = 0{,}5x$					

2)

x	1		2		3
$y = -2x$		-3		-5	

3.49. Через какие координатные четверти проходит график прямой пропорциональности:

1) $y = 3x$; 2) $y = -0{,}3x$; 3) $y = -x$; 4) $y = 0{,}2x$?

3.50. Напишите уравнение прямой пропорциональности, график которой параллелен графику линейной функции:

1) $y = -5x + 7$; 2) $y = \frac{1}{2}x - 3$; 3) $y = 3x + 5$; 4) $y = -0{,}5x - 4$.

3.51. Постройте график функции:

1) $y = 2$; 2) $y = -2$; 3) $y = 0$; 4) $y = -3$.

3.52. В какой точке пересекает график линейной функции, заданной в упражнении 3.51, осью Oy ? Обоснуйте ответ. Из какого координатного угла отсекают треугольник эти прямые?

3.53. Какая из точек A (8; 0), B (−2; 3), C (−2; 5) и D(2; 5) лежит на графике функции $y = -0{,}5x + 4$? Постройте график этой линейной функции.

B

3.54. В каждом из рис. 3.14 найдите угловой коэффициент и запишите уравнение соответствующей прямой пропорциональности.

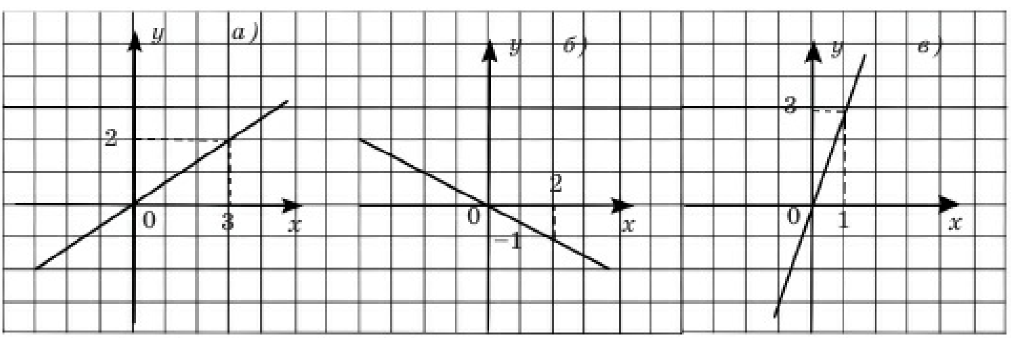


Рис. 3.14

3.55. Постройте график линейной функции:

1) $y=\frac{2}{3}x-4$;   3) $y=-1{,}5x-3$;   5) $y=\frac{5}{3}x-2$;

2) $y=2x+6$;   4) $y=-\frac{1}{2}x+1$;   6) $y=-\frac{4}{3}x+2$.

3.56. Найдите точки пересечения графика линейной функции с осями координат и постройте ее график:

1) $y=2x-3$;   3) $y=0{,}3x-1{,}5$;   5) $y=0{,}6x-3$;

2) $y=-1{,}5x+1$;   4) $y=-x+6$;   6) $y=-0{,}5x-2$.

3.57. Для линейной функции $f(x)=kx-3$ найдите значение k такое, чтобы: 1) $f(2)=1$; 2) $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-3{,}3$; 3) $f(2)=-6$. Пересекаются ли эти три прямые? Если да, то найдите координаты точки их пересечения.

3.58. Для линейной функции $f(x)=1{,}5x+b$ найдите значение b такое, чтобы: 1) $f(1)=4{,}5$; 2) $f(-2)=1{,}5$; 3) $f(0{,}6)=-2$. Пересекаются ли эти три прямые? Обоснуйте ответ.

3.59. Автобус идет с постоянной скоростью 54 км/ч. Пусть он за время t ч пройдет S км пути. Являются ли величины S и t пропорциональными? Если да, то каков коэффициент пропорциональности? Заполните таблицу.

t, ч	$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$	1	1,5	$1\frac{2}{3}$	2
S, км		27			72		

3.60. Найдите коэффициент пропорциональности и заполните таблицу:

1)

x		-1	1		5
y	-2			2	$\frac{10}{3}$

2)

x		-1	1	2		5
y	1,2				$-2{,}4$	-3

3.61. Плотность керосина равна 8 г/см^3. Сколько килограммов керосина вмещается в 20-литровую канистру?

C

3.62. Линейная функция $y = kx + b$ задана таблицей:

1)

x	-2	-1	0	1	2
y			4		3

2)

x	$-2,5$	-1	0	1	2
y	$-4,25$			$-2,5$	

1) Определите по таблице значения k и b и запишите линейную функцию формулой; 2) заполните пустующие клетки; 3) найдите точки пересечения прямой с осями координат и постройте график этой линейной функции; 4) найдите площадь треугольника, отсекаемого графиком линейной функции от координатного угла.

3.63. Напишите линейную функцию, график которой проходит через две заданные точки M_1 $(x_1; y_1)$ и M_2 $(x_2; y_2)$. Используя найденную формулу, напишите линейную функцию, проходящую через точки:

1) A $(2; 0)$ и B $(0; 3)$; 2) P $(-1; -4)$ и Q $(2; 2)$.

3.64. Чтобы попасть в дом чабана, мотоциклист должен проехать по проселочной дороге 40 км. Он запланировал пройти этот путь за 1 ч 15 мин с постоянной средней скоростью. За 20 мин он проехал 10 км пути. Может ли он уложиться в запланированный им срок, если он продолжит путь с этой же скоростью?

С какой скоростью он продолжит движение на оставшемся отрезке пути, чтобы уложиться в запланированный им срок?

Упражнения для повторения

3.65. Решите уравнение: 1) $\frac{2(x-9)}{3} + \frac{x+10}{6} = 4$; 2) $\frac{12}{1+|x|} = 3$.

3.66. Если разложить трехзначное число на сумму разрядных слагаемых, то получим 5 сотых, 6 десятков и n единиц. Чему должно быть равно n, чтобы данное трехзначное число было кратно 6?

3.67. Найдите значение выражения $\frac{3a^2+5b}{2a-1} + \frac{a^2-2b^2}{3-4b}$ при $a = -\frac{1}{3}$ и $b = \frac{1}{2}$.

3.2.3. Взаимное расположение прямых на плоскости.

Пример 1. Покажем, что графики линейных функций $y = 2x - 3$ и $y = 2x + 1$ не пересекаются.

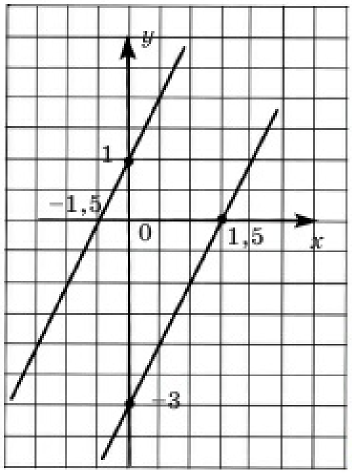


Рис. 3.15

Решение. Решим методом от противного. Пусть данные прямые пересекаются в точке C $(a; b)$. Тогда координаты точки C удовлетворяют уравнениям обеих прямых, т.е. верны тождества $b = 2a - 3$ и $b = 2a + 1$. Отсюда имеем: $2a - 3 = 2a + 1 \Rightarrow 2a - 2a = 1 + 3 \Rightarrow 0 = 4$. А это невозможно. Поэтому данные две прямые не имеют общих точек. Этот же вывод можно получить, если построить графики этих функций (рис. 3.15). На плоскости прямые, которые не пересекаются, параллельны.

Прямые, заданные линейными функциями с равными угловыми коэффициентами, параллельны.

Пример 2. Покажем, что прямые $y = 3x - 6$ и $y = -\frac{1}{2}x + 1$ пересекаются.

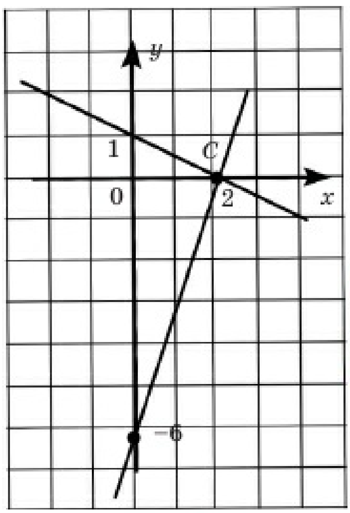


Рис. 3.16

Решение. Действительно, если эти прямые имеют общую точку, то в этой точке должно быть $3x - 6 = -\frac{1}{2}x + 1$.

Отсюда, $6x - 12 = -x + 2 \Rightarrow 7x = 14 \Rightarrow x = 2$. Поэтому $y = 3 \cdot 2 - 6 = 0$, т.е. данные прямые пересекаются в точке C (2; 0) (рис. 3.16).

Прямые, заданные линейными функциями с разными угловыми коэффициентами, пересекаются.

Пример 3. Построим графики линейных функций $y = 3x + 9$ и $y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$ и с помощью транспортира измерим угол между ними (рис. 3.17).

Величина этого угла равна 90°.

Аналогично, угол между графиками линейных функций $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$ и $y = -2x$ также равен 90° (рис. 3.18).

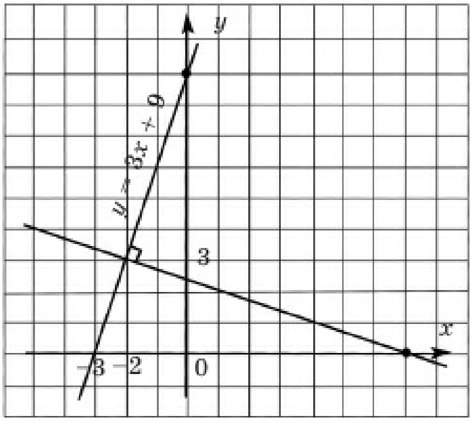


Рис. 3.17

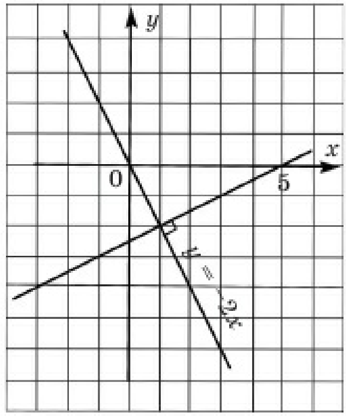


Рис. 3.18

Если прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ перпендикулярны, то верно равенство $k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$. Это и есть условие перпендикулярности прямых.

3.2.4. Расположение прямых относительно осей координат.

В п.3.2.1 мы изучили особенности расположения графика прямой пропорциональности. А именно, если $k > 0$, то угол, образованный графиком прямой пропорциональности с положительным направлением оси абсцисс острый, а если $k < 0$, то этот угол тупой. Например, на рис. 3.19 изображены графики функций $y = 2x$ и $y = -\dfrac{1}{3}x$. С другой стороны, прямая пропорциональность $y = kx$ является частным случаем линейной функции $y = kx + b$ (при $b = 0$), эти две прямые параллельны.

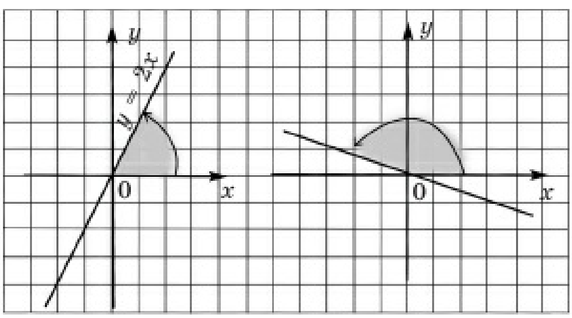
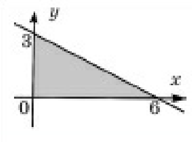
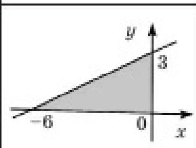
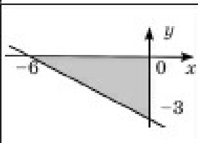
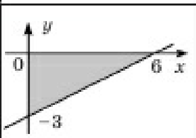


Рис. 3.19

Поэтому углы, которые они образуют с положительным направлением оси Ox, также одинаковы. Тогда особенности расположения графика линейной функции относительно осей координат в зависимости от знаков k и b можно посмотреть в следующей таблице:

Функция $y = kx + b$	График	Знак k	Знак b	Выводы
$y = -\frac{1}{2}x + 3$		$k = -\frac{1}{2}$ отрицат.	$b = 3$ положит.	Прямая отсекает треугольник из I-го координатного угла.
$y = \frac{1}{2}x + 3$		$k = \frac{1}{2}$ положит.	$b = 3$ положит.	Прямая отсекает треугольник из II-го координатного угла.
$y = -\frac{1}{2}x - 3$		$k = -\frac{1}{2}$ отрицат.	$b = -3$ отрицат.	Прямая отсекает треугольник из III-го координатного угла.
$y = \frac{1}{2}x - 3$		$k = \frac{1}{2}$ положит.	$b = -3$ отрицат.	Прямая отсекает треугольник из IV-го координатного угла.

?

1. При каких условиях графики двух линейных функций: а) пересекаются; б) параллельны; в) перпендикулярны? Приведите пример.
2. Как могут располагаться относительно друг друга две прямые, заданные линейными функциями, с равными свободными членами? Найдите координаты точки пересечения этих прямых, если b – общий свободный член.

ПЗ

Через водителя автобуса, который отправился из Тараза в Алматы, было передано заказное письмо. В силу срочной необходимости отправленного документа через час после отправления автобуса к нему навстречу из Алматы выехал легковой автомобиль, и спустя 3 ч они встретились. Расстояние между городами Алматы и Тараз равно 500 км, средняя скорость автобуса – x км/ч, средняя скорость легкового автомобиля – y км/ч.

1) Запишите зависимость между x и y с помощью уравнения.
2) Каким должно быть значение y, если x = 70 км/ч?
3) Чему равно наименьшее возможное время встречи автобуса и легкового автомобиля, если вдоль автобана имеется ограничение скорости 90 км/ч?

4) Могли бы они встретиться через 3 ч после выезда легкового автомобиля из Алматы, если средняя скорость автобуса равна 60 км/ч?
Помните! По правилу дорожного движения нельзя превышать скорость движения выше указанного ограничения скорости.

Упражнения

A

3.68. Напишите функцию прямой пропорциональности, график которой параллелен графику линейной функции:

1) $y = 3x + 2$; 3) $y = \frac{1}{2}x + 4$; 5) $y = -\frac{2}{3}x + 4$;

2) $y = -0{,}3x - 2$; 4) $y = 1{,}5x - 5$; 6) $y = -6x + 1$.

3.69. Может ли график линейной функции располагаться только: 1) в I и III координатных четвертях; 2) во II и IV координатных четвертях; 3) в I и II координатных четвертях; 4) в III и IV координатных четвертях; 5) в I и IV координатных четвертях; 6) во II и III координатных четвертях?

3.70. Какое число нужно подставить вместо $\square$, чтобы графики линейных функций были параллельными:

1) $y = 3x - 4$ и $y = \square\, x + 4$; 3) $y = \square \cdot x - 1$ и $y = -0{,}3x - 3$;

2) $y = -\frac{1}{2}x$ и $y = \square\, x + 3$; 4) $y = \square\, x + 7$ и $y = -2x - 3$?

3.71. Какое число нужно подставить вместо знака $\square$ в упражнении **3.70**, чтобы указанные прямые были перпендикулярными?

3.72. Найдите точки пересечения прямых, предварительно построив графики указанных линейных функций:

1) $y = 2x - 3$ и $y = \frac{1}{2}x$; 3) $y = 0{,}5x$ и $y = -0{,}3x + 3{,}2$;

2) $y = 1{,}5x + 2$ и $y = -2x - 5$; 4) $y = -\frac{4}{3}x + 2$ и $y = 3x - 11$.

3.73. Проверьте результаты упражнения **3.72**, находя точки пересечения графиков данных линейных функций аналитическим способом.

3.74. При каких значениях k и b графики функций: 1) $y = kx + 3$; 2) $y = -2x + b$ проходят через точку A (1; −2)? Проведите проверку, построив графики обеих функций на одной координатной плоскости.

7–2555

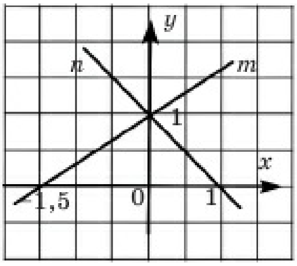


Рис. 3.20

B

3.75. По графику (рис. 3.20) запишите формулу линейных функций. Найдите координаты точек их пересечения аналитическим способом (письменно) и результат сверьте с рисунком.

3.76. Напишите линейную функцию, график которой параллелен графику функции $y = -0{,}5x + 4$, а свободный член равен: 1) -4; 2) 3; 3) -1; 4) 5. Постройте графики всех этих линейных функций на одной координатной плоскости.

3.77. Напишите линейную функцию, график которой параллелен графику функции $y = 2x - 3$ и проходит через точку:

1) $A(1;\ 2)$; 2) $B(2;\ -1)$; 3) $C(0;\ 2)$; 4) $D(3;\ 0)$. Постройте графики всех этих линейных функций на одной координатной плоскости.

3.78. Напишите линейную функцию, график которой перпендикулярен графику функции $y = -0{,}5x + 4$ и свободный член которой равен:

1) -4; 2) 3; 3) -1; 4) 5.

3.79. Напишите линейную функцию, график которой перпендикулярен графику функции $y = 2x - 3$ и проходит через точку: 1) $A(1;\ 2)$; 2) $B(2;\ -1)$; 3) $C(0;\ 2)$; 4) $D(3;\ 0)$.

C

3.80. Постройте график функции $y = \frac{4}{3}x - 1$. По графику найдите координату точки, лежащей на этой прямой. Через эту точку проведите прямую, перпендикулярную данной прямой. Найдите угловой коэффициент перпендикулярной прямой и его свободный член.

3.81. По рисунку 3.21 напишите уравнения прямых a и b. По графику найдите приближенные значения координат точки C, проверьте точность аналитическим способом.

3.82. На рис. 3.22 изображен отрезок AB. Напишите уравнение этого отрезка. Для этого напишите уравнение прямой, проходящей через точки A и B. Примите во внимание то, что отрезок является ограниченной частью прямой.

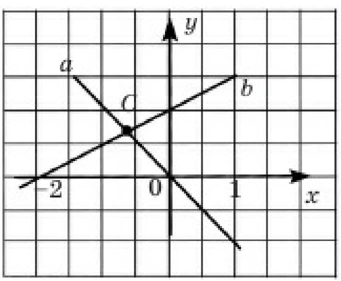


Рис. 3.21

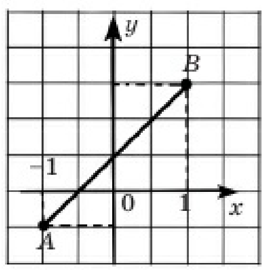


Рис. 3.22

3.83. Напишите уравнения отрезка MN и луча a, изображенных на рис. 3.23.

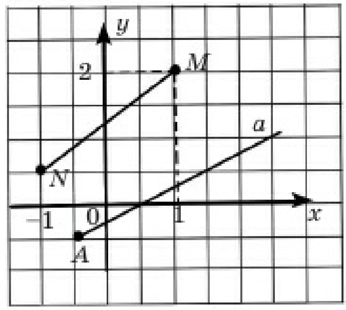


Рис. 3.23

Упражнения для повторения

3.84. Сократите дробь:

1) $\dfrac{(5,7+1,9)\cdot 1,44}{(-1,9)\cdot 0,48}$; 2) $\dfrac{(9,5-6)\cdot 0,9}{(-0,1)\cdot 0,7}$.

3.85. Напишите число m^{10} $(m \neq 0)$ в виде степени с основанием: 1) m^2; 2) m^{-5}; 3) $\dfrac{1}{m^2}$.

3.86. Напишите многочлен в стандартном виде:

1) $(1 + 3a) + (a^2 - 2a) - (2a^2 - a)$;

2) $(5x - 12x^2) + (x + 11x^2) - (x^2 - 1)$.

3.3. Решение системы линейных уравнений графическим методом

3.3.1. График линейного уравнения с двумя переменными.

Пример 1. Стоимость товара, купленного в магазине, равна 4680 тг. Покупатель дал за товар 5000 тг. Кассирша вернула сдачу монетами достоинством 20 тг и 50 тг. Какое может быть количество каждой из монет?

Решение. Пусть кассирша вернула m монет по 20 тг и n монет по 50 тг. Тогда должно быть верно равенство $20m + 50n = 320$ тг. Сократив это уравнение на 10, получим уравнение с двумя неизвестными m и n:

$$2m + 5n = 32.$$

Каждое решение этого уравнения, которое является натуральным числом, даст нам ответ на вопрос: «Сколько монет по 20 тг и по 50 тг вернула кассирша?» Подобные уравнения называются линейными уравнениями с двумя переменными.

Определение. ***Уравнение вида $ax + by = c$ называется линейным уравнением с двумя переменными.*** Здесь x и y – переменные, a, b – коэффициенты, свободный член c – заданные числа.

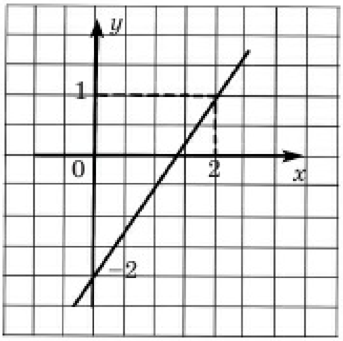


Рис. 3.24

Если для чисел p и q выполняется числовое тождество $ap + bq = c$, то числа p и q называются ***решениями*** линейного уравнения $ax + by = c$ или говорят, что график этого уравнения проходит через точку $P(p; q)$. Здесь ***графиком*** линейного уравнения называется множество точек (x, y) плоскости, являющиеся решением этого уравнения. Например, числа $m = 6$ и $n = 4$ являются решениями уравнения $2m + 5n = 32$, т.е. кассирша могла вернуть 6 монет по 20 тг и 4 монеты по 50 тг.

Пример 2. Построим график линейного уравнения $3x - 2y = 4$.

Решение. Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$3x - 2y = 4 \Rightarrow 2y = 3x - 4 \Rightarrow y = 1{,}5x - 2,$$

т.е. получим линейную функцию. Ее графиком и тем самым графиком линейного уравнения будет прямая (рис. 3.24).

Итак, ***если $b \neq 0$, то графиком уравнения $ax + by = c$ является прямая с угловым коэффициентом $k = -\frac{a}{b}$.***

Теперь отдельно рассмотрим случай, когда $b = 0$. Какой будет график уравнения $2x + 0 \cdot y = 6$? Из этого уравнения получим, что $x = 3$, т.е. имеем, что все точки, лежащие на данной прямой, имеют абсциссу, равную 3, а их ординатой является произвольное число. Множество этих точек образует прямую, пересекающую ось Ox в точке $(3; 0)$ параллельно оси Oy (рис. 3.25). Итак, если $b = 0$, то графиком уравнения является прямая, параллельная оси Oy. Подобные линейные уравнения не определяют функцию, т.к. нарушается однозначность соответствия x и y.

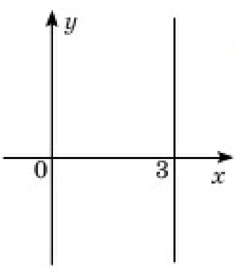


Рис. 3.25

3.3.2. Решение системы линейных уравнений графическим методом.

Пример 3. Десятичная цифра двузначного числа на 4 меньше, чем его единичная цифра, а их сумма равна 10. Найти это двузначное число.

Решение. Пусть x будет единичной цифрой, а y – десятичной цифрой искомого числа. Тогда по условию задачи имеем: $y = x - 4$ и $x + y = 10$. Чтобы найти x и y, запишем эти уравнения в виде системы

$$\begin{cases} x - y = 4, \\ x + y = 10. \end{cases}$$

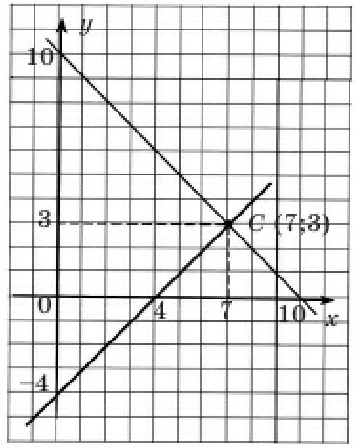


Рис. 3.26

Каждое уравнение этой системы является линейным уравнением, их графики будут прямыми, которые пересекаются в точке $C(7; 3)$ (рис. 3.26).

Тогда числа $x = 7$ и $y = 3$ являются единственными решениями системы. Ответ: 37.

Показанный способ решения системы называется ***графическим методом***.

Рассмотрим несколько примеров решения систем линейных уравнений.

Пример 4. Решим систему уравнений графическим методом.

$$\begin{cases} 2x + y = 4, \\ y = 2x. \end{cases}$$

Решение. Построим графики каждого уравнения системы (рис. 3.27). Эти прямые пересекаются в точке (1; 2). Ответ: $x = 1$, $y = 2$.

Пример 5. Решим систему уравнений $\begin{cases} 2x - 2y = 2, \\ 2x - 4y = -4. \end{cases}$

Решение. Соответствующие коэффициенты каждого из уравнений пропорциональны между собой и коэффициент пропорциональности не равен отношению свободных членов: $\frac{1}{2} = \frac{-2}{-4} \neq \frac{2}{-4}$. Тогда угловые коэффициенты этих прямых равны ($k_1 = \frac{1}{2}$ и $k_2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$). Поэтому данные прямые параллельны (рис. 3.28), т.е. прямые не имеют общих точек и система не имеет решения. Этот факт записывают с помощью знака пустого множества $\varnothing$.

Ответ: $\varnothing$.

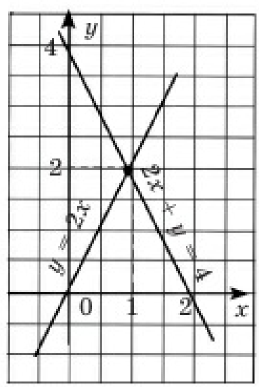


Рис. 3.27

Пример 6. Решим систему уравнений $\begin{cases} x + 2y = 4, \\ 3x + 6y = 12. \end{cases}$

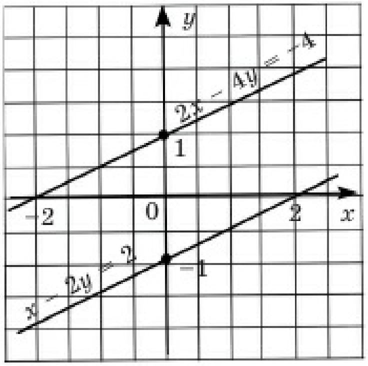


Рис. 3.28

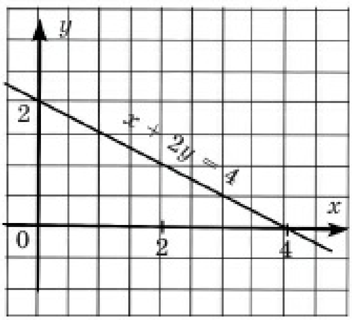


Рис. 3.29

Решение. Все соответствующие коэффициенты и свободные члены уравнений данной системы пропорциональны между собой:

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{4}{12}.$$

Поэтому прямые, определяемые уравнениями этой системы, совпадают, т.к., сократив 2-е уравнение системы на 3, получим ее 1-е уравнение. График этой прямой изображен на рис. 3.29. Координаты каждой точки этой прямой являются решениями каждого уравнения системы. В таких случаях говорят, что система уравнений имеет бесконечное множество решений. Каждое из этих решений определяется уравнением $x + 2y = 4$.

Итак, если для системы $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ верно:

1) неравенство $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, то эта система линейных уравнений имеет единственное решение, которое является координатами точки пересечения графиков, соответствующих уравнений;

2) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, то система уравнений не имеет решения;

3) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, то система уравнений имеет бесконечно много решений.

?

1. Что называется линейным уравнением с двумя переменными?
2. Что такое график линейного уравнения с двумя переменными? Какая эта линия?
3. Какова связь между линейным уравнением и линейной функцией? Как записывается линейное уравнение $ax + by = c$ в виде линейной функции? Каким должен быть b?
4. Что называется системой линейных уравнений с двумя переменными?
5. Каков смысл графического метода решения системы уравнений?

6. При каких условиях система уравнений $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$:
   а) имеет единственное решение;
   б) не имеет решения;
   в) имеет бесконечно много решений?
   Разъясните геометрический смысл этих условий.

ПЗ
1) По рисунку 3.30 напишите уравнения прямых m, n и k и запишите их в виде линейного уравнения.
2) Определите координаты точек C и D.
3) С помощью полученных трех линейных уравнений составьте попарно всевозможные системы линейных уравнений. Среди них укажите системы, имеющие единственное решение, и систему, не имеющую решения.
4) Можно ли составить систему, имеющую бесконечно много решении, с помощью указанных уравнений? Чему равно количество подобных систем, если можно составить такую схему?
(Целесообразно выполнить задания в группе.)

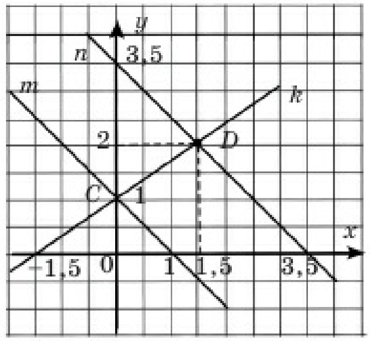


Рис. 3.30

Упражнения

A

3.87. Сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases} y = 2x, \\ x - y = 3? \end{cases}$

Какая из указанных пар чисел является решением этой системы: 1) $x = 1$, $y = 2$; 2) $x = 3$, $y = 0$; 3) $x = -3$, $y = -6$? Проверьте это графическим способом.

3.88. Запишите линейные уравнения в виде линейной функции $y = kx + b$:

1) $x + y = 2$; 3) $2x - 3y = 4$; 5) $x + 2y = -2$;
2) $-2x + y = -3$; 4) $7x - 2y = 10$; 6) $3,5x + 2y = 15$.

3.89. Запишите линейную функцию в виде линейного уравнения:

1) $y = -3,5x + 6$; 2) $y = -1,5x + \frac{3}{4}$; 3) $y = \frac{1}{3}x + 4$;

4) $y = 2x$; 5) $y = 3$; 6) $y = \frac{5}{2}x - \frac{8}{3}$.

3.90. По рис. 3.31 а), б) : 1) составьте систему линейных уравнений; 2) найдите по графику решение составленной системы.

3.91. Решите систему уравнений графическим способом:

1) $\begin{cases} y = x, \\ x + 2y = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - 2y = 0, \\ 2x + y = 5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x + y = 2, \\ 2x - 3y = 9. \end{cases}$

3.92. Найдите точки пересечения графика линейной функции, заданной в упражнении **3.88,** с осями координат.

3.93. Проходит ли график уравнения $3x - 4y = 7$ через точку:

1) A (3; 4); 2) B $\left(3; \frac{1}{2}\right)$; 3) C (1; −1); 4) D (1; 1)?

3.94. График уравнения $2x + y = c$ проходит через точку $A(3; -4)$. Найдите c.

B

3.95. График уравнения $3x + by = 12$ проходит через точку $C(2; 3)$. Проходит ли эта прямая через точку: 1) $A(0; 6)$; 2) $B(-4; 6)$?

3.96. Прямая $ax - 5y = 7$ параллельна прямой $2x - 5y = -3$. Проходит ли график этой прямой через точку: 1) $C(1; 1)$; 2) $D(1; -1)$?

3.97. Найдите точку пересечения прямых $x - 2y = 0$ и $2x + y = -5$. Проходит ли прямая $3x - 2y = -4$ через эту точку?

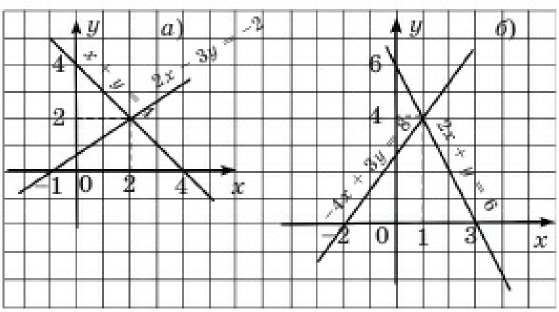


Рис. 3.31

3.98. Решите систему уравнений графическим способом:

1) $\begin{cases} x-2y=-1, \\ 2x+y=3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-y=8, \\ x+y=-3; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3x+4y=2, \\ 5x-2y=-1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x-3y=4, \\ -x+1,5y=-2. \end{cases}$

3.99. Решите систему уравнений графическим способом:

1) $\begin{cases} 0,5x+y=2, \\ -2x+5y=10; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x-4y=-4, \\ 3x-4y=7; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 4x-3y=0, \\ 3x+2y=17; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 5x-4y=0, \\ 2,5x-2y=1. \end{cases}$

3.100. Прямая $ax - 3y = 4$ проходит через точку пересечения прямых $x - y = 7$ и $x + y = -3$. Найдите значение a.

3.101. Прямая $2x + by = 3$ проходит через точку пересечения прямых $4x - 3y = 0$ и $-2x + 3y = -12$. Найдите b.

C

3.102. Имеет ли решение система из трех линейных уравнений:

1) $\begin{cases} x-y=3, \\ x+y=-1, \\ 2x-3y=8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+2y=1, \\ 2x-y=7, \\ 3x+4y=6? \end{cases}$

3.103. Найдите значения a, b и c так, чтобы система:

1) $\begin{cases} 3x+2y=5, \\ ax+by=c; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-2y=11, \\ ax+by=c \end{cases}$

а) имела единственное решение; б) не имела решений; в)имела бесконечно много решений.

3.104. При каких условиях прямая $ax + by = c$:

1) параллельна оси Ox;

2) параллельна оси Oy;

3) проходит через начало координат;

4) параллельна прямой $2x - 3y = 7$;

5) перпендикулярна прямой $2x - y = 7$?

3.4. Графики функций $y=ax^2$, $y=ax^3$ и их свойства

Выражения вида ax, ax^2, ax^3 и т.д. относятся к числу простейших одночленов. Здесь a – заданное число, а x – независимая переменная. В этом параграфе мы рассмотрим функции вида $y=ax^2$, $y=ax^3$ и построим их графики.

3.4.1. Функция $y=x^2$ и ее график. Зависимость площади квадрата от его стороны и зависимость объема куба от его ребра являются примерами функций $y=x^2$ и $y=x^3$.

Сначала построим график функции $y=x^2$. Составим таблицу значений x и y:

x	–2	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5	2
y	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4

На координатной плоскости построим точки (рис. 3.32), координаты которых указаны в таблице. Через отмеченные точки проведем плавную линию (рис.3.33). Получим график функции $y=x^2$. Ясно, что этот график неограниченно продолжается вверх справа и слева от оси Oy. ***График функции $y=x^2$ называют параболой.***

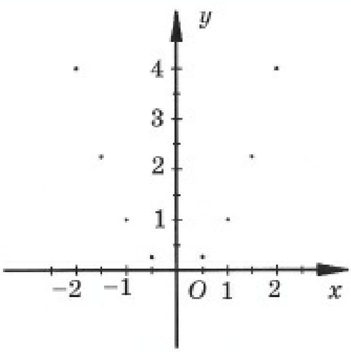


Рис. 3.32

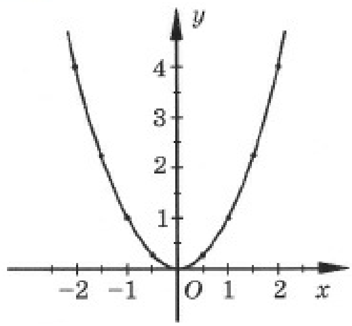


Рис. 3.33

Если $x=0$, то $y=0$. Следовательно, ***график функции $y=x^2$ проходит через начало координат.***

Если $x \neq 0$, то $y>0$ (как квадрат ненулевого числа). Поэтому ***график функции $y=x^2$, кроме точки*** (0; 0), ***расположен выше оси абсцисс.***

Противоположным значениям x соответствует одно и то же значение y. Действительно, при любом x имеем $(-x)^2=x^2$. Значит, ***точки графика, имеющие противоположные абсциссы, симметричны относительно оси Oy.***

3.4.2. Функция $y=x^3$ и ее график.

Теперь построим график функции $y=x^3$. Составим таблицу значений x и y:

x	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2
y	−8	−3,375	−1	−0,125	0	0,125	1	3,375	8

Построим точки, координаты которых указаны в таблице, и через них проведем плавную линию (рис. 3.34). Этот график неограниченно продолжается справа от оси Oy вверх и слева от оси Oy вниз.

Если $x=0$, то $y=0$. Поэтому ***график функции $y=x^3$ проходит через начало координат.***

Если $x>0$, то $y>0$; если $x<0$, то $y<0$. В самом деле, куб положительного числа есть положительное число, а куб отрицательного числа есть отрицательное число. Значит, ***график функции $y=x^3$ расположен в I и III координатных четвертях.***

Противоположным значениям x соответствуют противоположные значения y. Действительно, при любом значении x верно равенство $(-x)^3=-x^3$. Значит, ***точки графика, имеющие противоположные абсциссы, расположены симметрично относительно начала координат. График функции $y=x^3$ называют кубической параболой.***

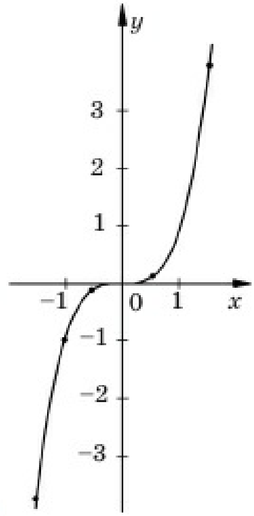


Рис. 3.34

И Название «парабола» впервые применил в своем труде «Конические сечения» древнегреческий математик, астроном Аполлоний, живший в III веке до н.э. Парабола имеет ряд замечательных свойств. Например, Аполлоний конусную поверхность пересекал плоскостями параллельно образующей CO и в сечении получал параболу. Ударенный ногой мяч, брошенный камень, выпущенный из пушки артиллерийский снаряд – все они, будучи направленные под острым углом к горизонту, летят по параболе (рис. 3.35).

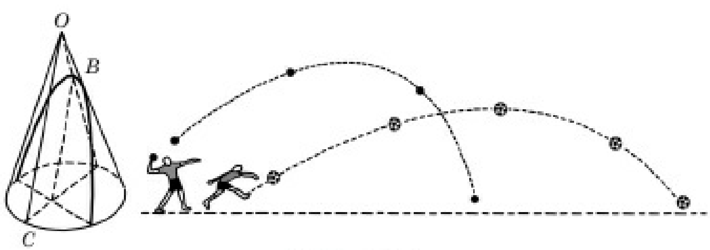


Рис. 3.35

Свойства параболы широко используются в области науки и техники. Например, осевые сечения автомобильных фар являются параболами. Если параболу рассматривать как отражающее зеркало и источник света поставить в точку, которая называется фокусом параболы, то все отраженные лучи окажутся параллельными оси симметрии параболы. Все лучи пересекаются в одной точке, находящейся на оси параболы (рис. 3.36). Эту точку называют фокусом параболы.

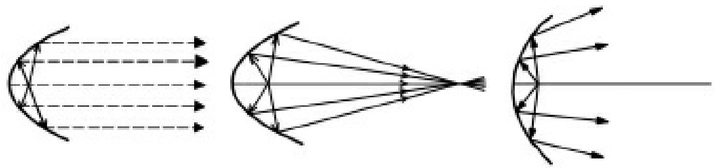


Рис. 3.36

Слово «фокус» в переводе с греческого языка означает «очаг». Итак, если источник света установить в фокусе, то луч, отраженный от зеркала параболы, будет параллельным ее оси. Это свойство применяется в конструкции прожектора. Здесь зеркало прожектора является круговой поверхностью, полученной от вращения параболы вокруг ее оси симметрии. Его иногда называют круговым параболоидом. Если источник света несколько отклонен от фокуса, то все равно рассеивающиеся лучи собираются в одной точке. Это свойство параболы применяют в работе параболических антенн – приемников рассеивающихся телесигналов.

?

1. Сформулируйте свойства функции $y=x^2$. Как отражаются эти свойства на графике функции $y=x^2$?
2. Сформулируйте свойства функции $y=x^3$. Как отражаются эти свойства на графике функции $y=x^3$?

Упражнения

А

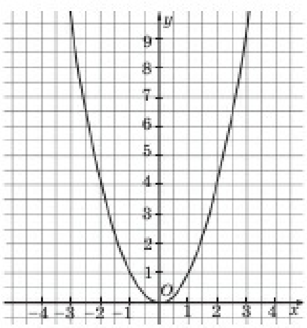


Рис. 3.37

3.105. Используя график функции $y=x^2$, изображенный на рисунке 3.37, найдите:

1) значения y, соответствующие значениям x, равным 0,75; –1,25; 1,25; –2,5; 2,5 ;

2) значения x, которым соответствуют значения y, равные 3; 5.

3.106. Пользуясь графиком функции $y=x^2$ (рис. 3.37), найдите:

1) значения функции, соответствующие значениям аргумента, равным 1,5; –2,7; 3,1;

2) значения аргумента, при которых значения функции равны 2 и 7.

3.107. Воспользовавшись графиком функции $y=x^2$ (рис. 3.37), найдите:

1) значения y, соответствующие значениям x, равным $-2{,}3$; $-0{,}4$; $0{,}4$; $2{,}3$;

2) значения x, которым соответствуют значения y, равные 2; 0,9.

3.108. Используя график функции $y=x^3$, изображенный на рисунке 3.38, найдите:

1) значения y, соответствующие значениям x, равным $1{,}5$; $-1{,}5$; $-0{,}6$; $0{,}6$;

2) значения x, которым соответствуют значения y, равные -5; 5.

3.109. Пользуясь графиком функции $y=x^3$ (рис.3.38), найдите:

1) значения функции, соответствующие значениям аргумента, равным $-0{,}7$; $1{,}2$;

2) значения аргумента, которым соответствуют значения функции, равные 3; -3.

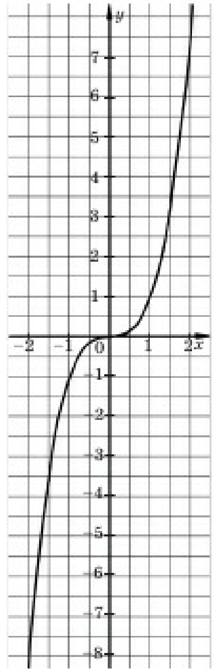


Рис.3.38

3.110. Какие из точек $A(2;\ 4)$, $B(-1;\ 1)$, $C(1;\ -1)$, $D(-3;\ -9)$, $E(5;\ -25)$, $F(-4;\ 16)$ лежат на графике функции $y=x^2$?

3.111. Какие из точек $A(3;\ 27)$, $B(-3;\ 27)$, $C(-1;\ 1)$, $D(0;\ 1)$, $E(-2;\ -8)$, $F(8;\ 2)$ лежат на графике функции $y=x^3$?

3.112. При каких значениях m точка: 1) $A(-3;\ m)$; 2) $B(m;\ 25)$ лежит на графике функции $y=x^2$?

3.113. При каких значениях m точка: 1) $A(-3;\ m)$, 2) $B(m;\ 8)$ лежит на графике функции $y=x^3$?

B

3.114. Принадлежит ли графику функции $y=x^2$ точка:

1) $A(-0{,}3;0{,}09)$; 2) $B\left(1\frac{1}{2};2\frac{1}{4}\right)$; 3) $C\left(-3\frac{1}{3};\frac{1}{9}\right)$?

3.115. Принадлежит ли графику функции $y=x^3$ точка:

1) $A(-0{,}2;-0{,}008)$; 2) $B\left(-1\frac{1}{3};-2\frac{10}{27}\right)$; 3) $C\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{8}\right)$?

3.116. В одной и той же системе координат постройте графики функций $y=x^2$ и $y=x^3$, где $x>0$. Пользуясь построенными графиками, сравните числа:

1) $0,5^2$ и $0,5^3$; 2) $1,5^2$ и $1,5^3$.

3.117. Постройте график функции $y=-x^2$. Найдите по графику:
1) значения y, соответствующие значениям x, равным 0,7; −1,3;
2) значения x, которым соответствуют значения y, равные −2; 3.

3.118. Постройте график функции $y=-x^3$. Найдите по графику:
1) значения y, соответствующие значениям x, равным 0,6; −1,5;
2) значения x, которым соответствуют значения y, равные 4; −3.

C

3.119. Известно, что точка $A(a;b)$ принадлежит графику функции: 1) $y=x^2$; 2) $y=x^3$. Принадлежат ли этому графику точки $B(-a;b)$; $C(a;-b)$; $D(-a;-b)$?

3.120. Расположите в порядке возрастания числа a, a^2 и a^3, если:
1) $0<a<1$; 2) $a>1$; 3) $-1<a<0$; 4) $a<-1$.

Упражнения для повторения

3.121 Если к задуманному числу прибавить 8, полученную сумму удвоить и из произведения вычесть 23, то получится задуманное число. Какое число задумано?

3.122. Три тракториста вспахали 65 га земли. Первый тракторист вспахал на 10 га земли меньше, чем второй, а третий – 30% участка земли, который вспахали первый и второй трактористы вместе. Сколько гектаров земли вспахал каждый тракторист?

3.123. График линейной функции $y=kx-2$ проходит через точку $A(2; 4)$. Определите k. Проходит ли график этой функции через точку $B(-3; -6)$?

3.124. Упростите выражение:

1) $-0,7a^5b \cdot (-2a^3b^2)^2$; 2) $22a^5b^6 : (-2ab^2)^3$.

3.4.3. Графики функций $y=ax^2$ и $y=ax^3$. Сначала исследуем функцию $y=ax^2$ и построим ее график.

Если $a=1$, то получим функцию $y=x^2$. Теперь мы знаем ее основные свойства и умеем строить параболу – график этой функции.

Далее возможны следующие случаи: $a>1$, $0<a<1$ и $a<0$. Рассмотрим каждый из этих случаев.

а) Пусть $a>1$. Например, рассмотрим функцию $y=2x^2$ и сравним ее с функцией $y=x^2$. Для этого составим таблицу значений x и y для каждой из указанных функций:

x	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	0,5	1	1,5	2
$y=x^2$	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4
$y=2x^2$	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8

Из таблицы видно, что при одном и том же значении аргумента x значение функции $y=2x^2$ в два раза больше значения функции $y=x^2$. Отсюда следует, что график функции $y=2x^2$ можно получить так: построить график функции $y=x^2$ и удвоить ординату каждой его точки (рис.3.39), т.е. нужно растянуть график функции $y=x^2$ вдоль оси Oy в 2 раза.

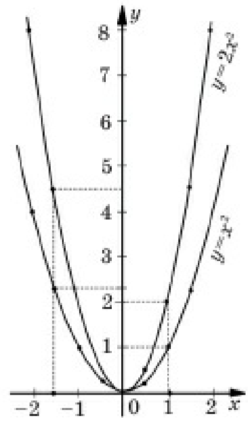


Рис. 3.39

Вообще, при $a>1$ и для каждого значения x значение функции $y=ax^2$ в a раз больше значения функции $y=x^2$. Следовательно, график функции $y=ax^2$ получается «растяжением» графика функции $y=x^2$ вдоль оси Oy в a раз.

б) Пусть $0<a<1$. При одном и том же значении аргумента x значение функции $y=ax^2$ в $\frac{1}{a}$ раз меньше значения функции $y=x^2$. Например, при $a=\frac{1}{2}$ и при одном и том же значении x значение функции $y=\frac{1}{2}x^2$ в $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$ раза меньше значения функции $y=x^2$ (применили формулу $\frac{1}{a}=a^{-1}$) (рис.3.40), т.е. чтобы получить график функции $y=\frac{1}{2}x^2$, нужно ординату графика функции $y=x^2$ уменьшить в 2 раза.

в) Пусть $a<0$. Например, рассмотрим функцию $y=-2x^2$. Нетрудно заметить, что при одном и том же значении аргумента x модули значений функций $y=-2x^2$ и $y=2x^2$ равны, а их знаки противоположны. Это значит, что точки графика функции $y=-2x^2$ с одной и той же абс-

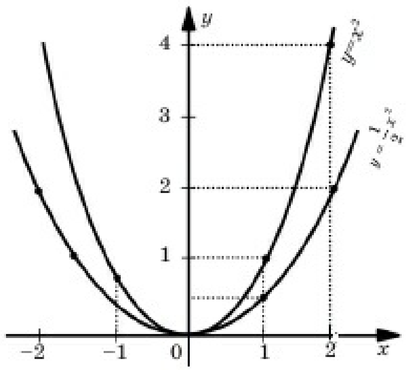


Рис. 3.40

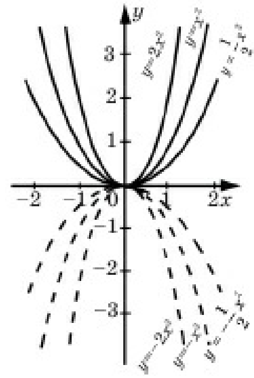


Рис. 3.41

циссой расположены симметрично относительно оси Ox (рис.3.41), т.е. графики функций $y=2x^2$ и $y=-2x^2$ симметричны относительно оси абсцисс.

Вообще, при $a<0$ график функции $y=ax^2$ можно получить из основной формулы параболы $y=x^2$ так: умножить ординаты точек параболы $y=x^2$ на $|a|$, а затем зеркально отразить полученную параболу относительно оси абсцисс.

Например, на рисунке 3.41 изображено несколько парабол $y=ax^2$ при различных значениях a. Мы видим, что при $a>0$ параболы «выпуклые» вниз, т.е. ветви парабол обращены вверх, а при $a<0$ – соответствующие параболы «выпуклые» вверх, т.е. ветви парабол обращены вниз.

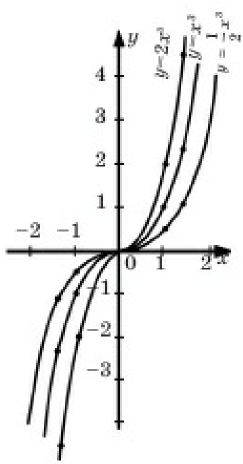


Рис. 3.42

Так же строится график функции $y=ax^3$ в сравнении с графиком функции $y=x^3$.

а) Пусть $a>1$. При одном и том же значении аргумента x график функции $y=ax^3$ получается «растяжением» графика функции $y=x^3$ от оси Ox в a раз.

б) Пусть $0<a<1$. При одном и том же значении аргумента x график функции $y=ax^3$ получается «сжатием» графика функции $y=x^3$ к оси Ox в $\frac{1}{a}$ раза. Например, на рисунке 3.42 изображены графики функций $y=2x^3$, $y=x^3$ и $y=\frac{1}{2}x^3$.

Таким образом, при $a>0$ график функции $y=ax^3$ расположен в I и III координатных четвертях.

в) Пусть $a<0$. Тогда нетрудно заметить, что графики функций $y=ax^3$ и $y=|a|x^3$ симметричны относительно оси Ox, т.е. при $a<0$ график функции $y=ax^3$ можно получить, зеркально отобразив график функции $y=|a|x^3$ относительно оси Ox.

Например, на рисунке 3.43 изображены графики функций $y=-\frac{x^3}{2}$ и $y=\frac{x^3}{2}$.

При $a<0$ график функции $y=ax^3$ расположен во II и IV координатных четвертях.

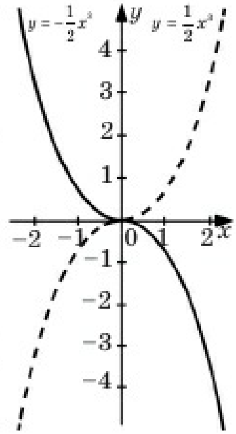


Рис. 3.43

?

1. Как строится график функции $y=ax^2$ по сравнению с графиком функции $y=x^2$ при: а) $a>1$; б) $0<a<1$; в) $a<0$?
2. Куда обращены ветви параболы $y=ax^2$ при $a>0$, $a<0$?
3. Как строится график функции $y=ax^3$ по сравнению с графиком функции $y=x^3$ при: а) $a>1$; б) $0<a<1$; в) $a<0$?
4. В каких координатных четвертях расположен график функции $y=ax^3$ при $a>0$, $a<0$?

Упражнения

А

3.125. Какие из точек $A(2;\ 8)$, $B(-3;\ 18)$, $C(-3;\ 9)$ и $D(3;\ 18)$ лежат на графике функции $y=2x^2$?

3.126. Используя график функции $y=x^2$, постройте графики функций: 1) $y=2x^2$; 2) $y=\frac{1}{2}x^2$; 3) $y=-x^2$; 4) $y=-2x^2$; 5) $y=-\frac{1}{2}x^2$.

3.127. Какие из точек $A(2;\ 4)$, $B(-2;\ 4)$, $C(-2;\ -4)$ $D\ (2;\ -4)$ лежат на графике функции: 1) $y=\frac{1}{2}x^3$; 2) $y=-\frac{1}{2}x^3$?

3.128. Используя график функции $y=x^3$, постройте графики функций: 1) $y=-x^3$; 2) $y=2x^3$; 3) $y=-2x^3$; 4) $y=\frac{1}{2}x^3$; 5) $y=-\frac{1}{2}x^3$.

3.129. Найдите значение функции: 1) $y=0{,}4x^2$; 2) $y= =-2{,}5x^2$, соответствующее значению аргумента x, равному $-2{,}1$; $-0{,}3$; $0{,}3$; $2{,}1$.

3.130. Найдите значение функции: 1) $y=0{,}5x^3$; 2) $y=-2x^3$, соответствующее значению аргумента x, равному -2; $-0{,}3$; $0{,}3$; 2.

8–2555

B

3.131. Значение функции $y=2x^2$ равно: 1) 8; 2) 50. Найдите соответствующие ему значения аргумента.

3.132. Значение функции $y=-2x^3$ равно: 1) 54; 2) 128. Найдите соответствующие ему значения аргумента.

3.133. При каких значениях a точка $A(3;a)$ принадлежит графику функции: 1) $y=3x^2$; 2) $y=-2x^2$; 3) $y=-\frac{1}{4}x^2$; 4) $y=\frac{1}{5}x^2$?

3.134. При каких значениях a точка $B(2;\ a)$ принадлежит графику функции: 1) $y=2x^3$; 2) $y=-x^3$; 3) $y=-\frac{1}{3}x^3$; 4) $y=\frac{1}{8}x^3$?

3.135. При каких значениях a график функции $y=ax^2$ проходит через точку: 1) $A(2;\ 2)$; 2) $B(2;\ -2)$; 3) $C(-3;\ 6)$; 4) $D(-3;\ -6)$; 5) $E(\frac{1}{2};1{,}5)$; 6) $F(-\frac{2}{3};\frac{4}{3})$?

3.136. При каких значениях a график функции $y=ax^3$ проходит через точку: 1) $A(2;\ 2)$; 2) $B(2;\ -2)$; 3) $C(\frac{1}{3};\frac{1}{9})$; 4) $D(-\frac{1}{2};-\frac{1}{4})$?

C

3.137. Сколько точек пересечения могут иметь графики функций $y=ax^2$ и $y=bx^3$? Здесь a и b–заданные коэффициенты. Определите координаты этих точек при: 1) $a=2$; $b=-2$; 2) $a=\frac{1}{2}$; $b=\frac{1}{3}$.

3.138. Определите координаты точек пересечения графиков функций $y=ax$ и $y=bx^2$. Решите задачу при $a=1, b=\frac{1}{3}$ и начертите графики этих функций в одной системе координат.

3.139. Сколько точек пересечения имеют графики функций $y=a^2x$ и $y=b^2x^3$? Найдите координаты этих точек.

3.140. В одной системе координат начертите графики функций $y=2x$ и $y=\frac{1}{2}x^3$ и найдите координаты точек их пересечения.

3.141. Постройте график уравнения:

1) $\frac{y-x^2}{xy}=0$; 2) $\frac{4y-x^2}{4-x^2}=0$; 3) $\frac{y-x^3}{y-8}=0$.

Упражнения для повторения

3.142. На закладку квадратного проема потребовалось 20 кирпичей. Сколько кирпичей потребуется, чтобы заложить квадратный проем, сторона которого в 3 раза больше?

3.143. Сравните: 1) $(0,7)^{20}$ и $(-0,7)^{20}$; 2) $-6,4^4$ и $(-6,4)^4$; 3) $(-2,1)^{19}$ и $2,1^{19}$; 4) $(-0,2)^{15}$ и $-0,2^{15}$.

3.144. Двигаясь со скоростью 70 км/ч, автомобиль за t ч проехал расстояние s км. Задайте зависимость s от t формулой. Пользуясь этой формулой, определите путь, который автомобиль проехал за 3 ч; за 4 ч 20 мин.

3.5. Функция $y = \frac{k}{x}$ и ее график

Определение. ***Функция вида $y = \frac{k}{x}$ называется обратной пропорциональностью. Здесь x – независимая переменная, k – заданное число, называемое коэффициентом обратной пропорциональности.***

Областью определения функции $y = \frac{k}{x}$ являются все числа, за исключением $x=0$, так как выражение $\frac{k}{x}$ имеет смысл при всех $x \neq 0$.

Например, пусть $k=4$. Чтобы нарисовать график функции $y = \frac{4}{x}$, составим таблицу значений аргумента и функции.

x	-4	-3	-2	-1	$-0,5$	$-\frac{1}{3}$	$-0,25$	$0,25$	$\frac{1}{3}$	$0,5$	1	2	3	4
y	-1	$-\frac{4}{3}$	-2	-4	-8	-12	-16	16	12	8	4	2	$\frac{4}{3}$	1

В координатной плоскости отметим точки, координаты которых помещены в таблице, и соединим эти точки плавной линией (рисунок 3.44). Из таблицы видно, что отрицательным значениям аргумента соответствуют отрицательные значения функции, а положительным значениям аргумента – положительные значения функции. Вместе с тем, видно, что по мере удаления аргумента x от начала координат соответствующие значения функции приближаются (прижимаются) к оси абсцисс.

А если x приближается к нулю слева, то соответствующие значения функции неограниченно убывают, приближаясь к оси ординат; если x приближается к нулю справа, то соответствующие значения

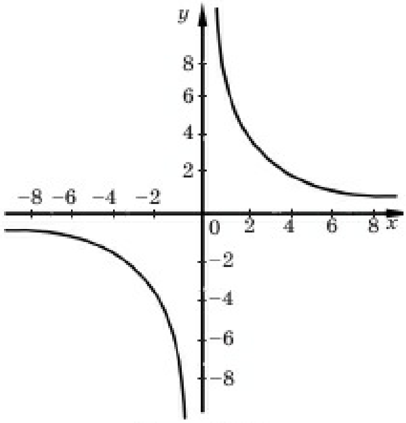


Рис. 3.44

функции неограниченно растут, все более «прижимаясь» к оси Oy. Например, если $x=-1000$, то $y=-0{,}004$, а если $x=-0{,}001$, то $y=-4000$. Также, если $x=1000$, то $y=0{,}004$, а если $x=0{,}001$, то $y=4000$.

Таким образом, при $k>0$ график функции $y=\frac{k}{x}$ расположен в I и III четвертях координатной плоскости.

Пусть $k=\frac{1}{2}$, $k=1$ и $k=2$. Составим таблицу значений аргумента и функции для функций $y=\frac{1}{2x}$, $y=\frac{1}{x}$ и $y=\frac{2}{x}$.

x	-4	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
$y=\frac{1}{2x}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$
$y=\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
$y=\frac{2}{x}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	-1	-2	-4	-8	8	4	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$

На рисунке 3.45 изображены графики функций $y=\frac{1}{2x}$, $y=\frac{1}{x}$ и $y=\frac{2}{x}$, построенные по точкам, указанным в таблице. Отсюда видно, что чем меньше значения k, тем более «прижаты» графики функций $y==\frac{k}{x}$ к осям координат, а чем больше значения k, тем они менее «прижаты» к осям координат (рис. 3.45).

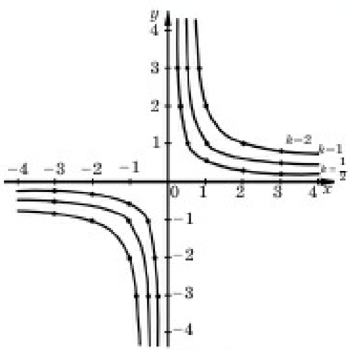


Рис. 3.45

Пусть $k<0$. Например, рассмотрим функцию $y=-\frac{2}{x}$. Нетрудно заметить, что при одном и том же значении аргумента x модули значений функций $y=-\frac{2}{x}$ и $y=\frac{2}{x}$ равны, а их знаки противоположны. Это значит, что точки графиков функций $y=-\frac{2}{x}$ и $y=\frac{2}{x}$ с одной и той же абсциссой расположены симметрично относительно оси Ox (рис. 3.46).

Вообще, при $k<0$ график функции $y=\frac{k}{x}$ ***можно получить, зеркально отобразив график функции*** $y=\frac{|k|}{x}$ ***относительно оси абсцисс.***

График функции вида $y=\frac{k}{x}$ называют ***гиперболой.***

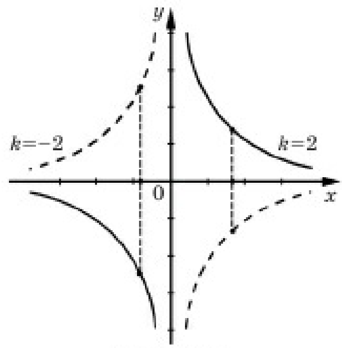


Рис. 3.46

?

1. В каких координатных четвертях расположен график функции $y=\frac{k}{x}$ при: а) $k>0$; б) $k<0$?
2. Как расположены графики функций $y=\frac{k_1}{x}$ и $y=\frac{k_2}{x}$ при $0<k_1<k_2$?

Упражнения

А

3.145. Дана функция $y=\frac{4}{x}$. Заполните таблицу.

x	-4		-1	$-0,5$		$-0,25$				4
y		-2			-16		8	4	2	

3.146. Принадлежат ли точки $A(-0,05;-200)$, $B(-0,1;\ 100)$, $C(400;\ 0,25)$ и $D(500;-0,02)$ графику функции $y=\frac{10}{x}$?

3.147. Используя график функции $y=\frac{2}{x}$, изображенный на рисунке 3.47, найдите:

1) значения y, соответствующие значениям x, равным -4; $-\frac{1}{2}$; 2;

2) значения x, которым соответствуют значения y, равные -2; $0,5$; 4.

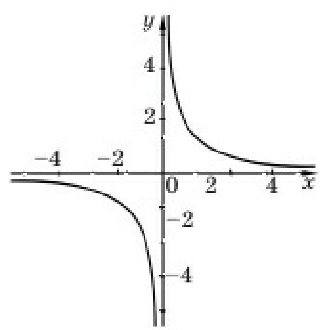


Рис. 3.47

3.148. Определите знак коэффициента k, если график функции $y=\frac{k}{x}$ расположен в: 1) I и III; 2) II и IV координатных четвертях.

3.149. Обратная пропорциональность задана формулой $y = -\frac{12}{x}$. Заполните таблицу.

x	−600		−12	−0,05	0,5		120	
y		0,1				−1		−0,02

3.150. Постройте график функции $y = -\frac{3}{x}$. С помощью построенного графика найдите значения:

1) y, соответствующие значениям x, равным -6; -3; -1; $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; 1; 3; 6.

2) x, которым соответствуют значения y, равные $-\frac{1}{2}$; -1; -2; 2; 1; $\frac{1}{2}$.

3.151. Обратная пропорциональность значению аргумента, равному 3, ставит в соответствие значение функции, равное 3. Найдите коэффициент пропорциональности.

3.152. Начертите график функции $y = -\frac{4}{x}$ и укажите промежутки, где функция принимает: 1) положительные значения; 2) значения между -4 и -2.

3.153. Начертите график функции $f(x) = \frac{6}{x}$ и определите значения $f(1{,}5)$; $f(-3)$; $f(3{,}5)$.

B

3.154. При каком значении k график функции $y = \frac{k}{x}$ проходит через точку: 1) $A(3;\ -6)$; 2) $B(-6;\ 3)$; 3) $C(4;\ 4)$; 4) $D(-2;\ -2)$?

3.155. При каких значениях m и n точки $A(m;\ 4)$ и $B(-4;\ n)$ лежат на графике функции: 1) $y = -\frac{12}{x}$; 2) $y = \frac{8}{x}$; 3) $y = \frac{1}{x}$; 4) $y = -\frac{24}{x}$?

3.156. Задайте формулой обратную пропорциональность, график которой проходит через точку: 1) $A(8;\ 0{,}125)$; 2) $B\left(\frac{2}{3};\ \frac{9}{5}\right)$; 3) $C(-25;\ -0{,}2)$.

3.157. Прямоугольник со сторонами a см и b см имеет постоянную площадь, равную 6 см^2. Задайте формулой зависимость b от a. Почему эта зависимость является обратной пропорциональностью? Найдите область определения этой функции и начертите ее график.

3.158. Автомобиль проходит путь от Тараза до Алматы протяженностью 500 км со средней скоростью v км/ч за t ч. Задайте формулой зависимость v от t. Используя полученную функцию, найдите среднюю скорость автомобиля такую, чтобы на весь путь было затрачено:

1) 5 ч; 2) 8 ч; 3) 10 ч.

3.159. Дана функция $f(x)=\dfrac{1}{x}$. Найдите:

1) $f(0,5)-f(1)$; 2) $f(1)-f(1,5)$; 3) $f(1,5)-f(2,5)$.

Функция $y=f(x)$, определенная на промежутке от a до b, называется ***возрастающей***, если для любых x_1 и x_2, удовлетворяющих неравенству $a<x_1<x_2<b$, верно неравенство:

$$f(x_1)<f(x_2). \tag{1}$$

Если вместо неравенства (1) выполняется неравенство

$$f(x_1)>f(x_2), \tag{2}$$

то функция $y=f(x)$ называется ***убывающей*** на промежутке от a до b. Таким образом, ***функция называется возрастающей на промежутке от a до b, если на этом промежутке большему значению аргумента соответствует большее значение функции, а меньшему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.*** Напротив, ***функция называется убывающей, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, а меньшему значению аргумента соответствует большее значение функции.***

Например, если $x>0$ (или $x<0$), то функция $f(x)=\dfrac{1}{x}$ является убывающей. В самом деле, если $0<x_1<x_2$ (случай $x_1<x_2<0$ доказывается аналогично), то

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}=\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}>0,$$

где $x_2-x_1>0$ и $x_1\cdot x_2>0$. Тогда $f(x_1)>f(x_2)$, т.е. функция убывает.

Если $x>0$ (или $x<0$), то функция $f(x)=\dfrac{k}{x}$ при $k>0$ является убывающей (при $k<0$ является возрастающей). Докажите это утверждение.

C

3.160. Пусть $x>0$ и $x<0$. Докажите, что функция $y=\dfrac{k}{x}$ при $k>0$ убывает, а при $k<0$ возрастает, определите, какие из нижеследующих функций являются убывающими, а какие – возрастающими. В каких координатных четвертях расположены графики этих функций:

1) $y=\dfrac{3}{x}$; 2) $y=-\dfrac{10}{x}$; 3) $y=-\dfrac{1}{2x}$; 4) $y=\dfrac{1}{4x}$?

Упражнения для повторения

3.161. Запишите числа в стандартном виде и укажите их значащую часть и порядок:

1) 28 127 000 000; 2) 0,000 019 270; 3) $\frac{4}{7}\cdot 10^{-5}$; 4) $182\cdot 10^{7}$.

3.162. Решите уравнение:

1) $3{,}5x - 1{,}8 = (5{,}5x + 3{,}4) - 5{,}8$; 2) $(x + 5a) - 17a = 3a - 2x$.

3.163. Словесно описанную модель запишите на математическом языке:

1) сумма чисел x и y равна 17;

2) удвоенное произведение двух чисел на 20 больше их суммы.

Раздел 4. ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИКИ

4.1. Генеральная совокупность и выборка

С элементами статистики вы знакомы с младших классов. Вспомним это.

Статистика – это отрасль науки, которая занимается сбором данных об однородной совокупности объектов, характеризующихся какими-либо общими свойствами, признаками, обработкой и анализом этих данных и разъяснениями полученных результатов.

Пусть требуется провести статистические исследования некоторых однородных объектов, имеющих какие-то общие числовые характеристики. Множество таких объектов называется ***генеральной совокупностью***. В отдельных случаях проводят исследование каждого элемента генеральной совокупности. Например, если нужно изучить успеваемость по математике учеников 7 класса вашей школы за II четверть, то нужно изучить успеваемость каждого ученика. Также при проведении переписи населения изучается каждый житель страны. А во многих случаях изучение элементов генеральной совокупности бывает невозможным. Например, пусть требуется изучить процент всхожести семян, посеянных на определенном участке земли. Здесь невозможно проверить всхожесть всех посеянных семян на этом участке. В таких случаях фермеры поступают так: из данного участка (генеральная совокупность) произвольно выбирают участок земли площадью 1 м^2. На этом участке земли проверяют всхожесть семян (ее называют выборкой) и полученные результаты принимают за свойство, присущее всему участку.

Случайно отобранная часть генеральной совокупности называется ***случайной выборкой*** (или просто ***выборкой***).

Вся совокупность исследуемых объектов – генеральная совокупность.	Случайно отобранная часть генеральной совокупности – случайная выборка.

Пример 1. Менеджер обувной фабрики провел опрос о размере обуви 50 мальчиков из 7 класса и получил следующие результаты: 38, 36, 36, 37, 34, 40, 39, 35, 35, 37, 37, 38, 39, 38, 38, 37, 40, 38, 37, 36, 37, 38, 37, 38, 34, 33, 39, 39, 34, 40, 35, 38, 37, 36, 39, 36, 40, 40, 35, 33, 39, 34, 36, 37, 38, 38, 36, 37, 35, 39.

Эти данные представляют собой случайную выборку, а генеральной совокупностью являются размеры обуви всех мальчиков из 7 класса страны. $n = 50$ – объем выборки, это количество элементов выборки; $x_{min} = 33$ – наименьшее значение выборки; $x_{max} = 40$ – наибольшее значение выборки; $x_{max} - x_{min} = 40 - 33 = 7$ – размах выборки.

Эти данные трудно изучать в том виде, в котором они записаны. Поэтому их обрабатывают следующим образом. Сначала определяют, сколько и какие различные виды данных содержится в составе данной выборки и их записывают в порядке возрастания (или убывания): 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40. Выписанные таким образом данные называются **вариационным рядом**, а каждый элемент этого вариационного ряда называется **вариантой**.

Теперь определяют, сколько раз встречается каждая варианта в составе выборки. Для этого производят подсчет так, как показано в таблице:

x_i варианта	$x_1 = 33$	$x_2 = 34$	$x_3 = 35$	$x_4 = 36$	$x_5 = 37$	$x_6 = 38$	$x_7 = 39$	$x_8 = 40$
подсчет	𝍷𝍷	𝍷𝍷𝍷𝍷	𝍸	𝍸 𝍷𝍷	𝍸 𝍸	𝍸 𝍸	𝍸 𝍷𝍷	𝍸
n_i – количество	2	4	5	7	10	10	7	5

Из этой таблицы видно, что варианта $x_1 = 33$ встречается 2 раза, $x_3 = 35$ – 5 раз, а $x_5 = 37$ – 10 раз. Эти числа называются ***абсолютной частотой*** (просто ***частотой***) соответствующей варианты. Сумма всех абсолютных частот равна объему выборки: $n = 2 + 4 + 5 + 7 + 10 + 10 + 7 + 5 = 50$.

Если поделить абсолютную частоту варианты на объем выборки, то полученное число называется ***относительной частотой*** этой варианты. Например, абсолютной частотой варианты $x_4 = 36$ является $n_4 = 7$, тогда ее относительной частотой является $w_4 = \frac{n_4}{n} = \frac{7}{50}$. Сумма всех относительных частот равна 1:

$$\frac{2}{50} + \frac{4}{50} + \frac{5}{50} + \frac{7}{50} + \frac{10}{50} + \frac{10}{50} + \frac{7}{50} + \frac{5}{50} = 1.$$

С помощью абсолютных частот можно составить таблицу, которую называют ***таблицей абсолютных частот вариационного ряда:***

x_i	33	34	35	36	37	38	39	40
n_i	2	4	5	7	10	10	7	5

Аналогично составляется ***таблица относительных частот вариационного ряда***:

x_i	33	34	35	36	37	38	39	40
ω_i	$\frac{2}{50}$	$\frac{4}{50}$	$\frac{5}{50}$	$\frac{7}{50}$	$\frac{10}{50}$	$\frac{10}{50}$	$\frac{7}{50}$	$\frac{5}{50}$

По таблице абсолютных частот легко найти моду и медиану выборки. В данном примере в качестве моды берем 2 значения варианты: $M_0 = 37$ и $M_0 = 38$, а медианой является значение $M_e = 37$. Арифметическое среднее значение выборки обозначается через $\overline{X}$. Для того чтобы найти

$\overline{X}$, каждую варианту умножают на ее абсолютную частоту и их сумму делят на объем выборки:

$$\overline{X} = \frac{33\cdot2+34\cdot4+35\cdot5+36\cdot7+37\cdot10+38\cdot10+39\cdot7+40\cdot5}{50} = 37{,}04.$$

?

1. Что изучает статистика?
2. Что такое генеральная совокупность?
3. Что называется случайной выборкой? Чему равен ее объем? Приведите пример.
4. Что называется вариационным рядом, вариантой? Приведите пример.
5. Что называется абсолютной частотой, относительной частотой варианты? Приведите пример.
6. Как определяется арифметическое среднее значение, размах, объем, мода и медиана выборки? Приведите пример.

И

Термин «статистика» произошел от латинского слова «статус» (status) и означает «состояние». Социальные явления математики начали выражать числами или отношением чисел со второй половины XVII века. В целом после научных трудов таких ученых, как Бернулли, Лаплас, Пуассон, Чебышев, Марков, в области теории вероятностей открылись широкие возможности применения их трудов при изучении статистических данных. Таким образом, из общего понятия *статистика* отделилось понятие *математическая статистика*. А в XIX веке методы статистики, применявшиеся, в основном, при изучении явлений социальной жизни общества, стали широко внедряться во все отрасли естествознания. В настоящее время невозможно указать ни одну отрасль науки, техники, народного хозяйства и общественно-социальной жизни общества, где бы ни применялись методы математической статистики.

ПЗ

Длиной предложения называется количество слов и знаков препинания, вошедших в его состав. Посчитайте длину предложения, имеющегося на 100–101 стр. романа «Путь Абая» (I том или какого-нибудь другого произведения) и с ее помощью составьте:
1) таблицу частот (относительных частот) вариационного ряда;
2) найдите размах выборки;
3) найдите моду и медиану выборки;
4) найдите арифметическое среднее значение выборки.

Упражнения

А

В упражнениях **4.1–4.6** по заданным таблицам абсолютных частот или относительных частот найдите:

1) арифметическое среднее значение;

2) моду и медиану.

4.1.

X	2	5	7	8
m_i	1	3	2	4

4.2.

X	4	7	8
m_i	5	2	3

4.3.

X	2	3	5	6
m_i	10	15	5	20

4.4.

X	15	20	25	30	5
m_i	10	15	30	20	5

4.5.

X	2	4	5	7	10
ω_i	0,15	0,2	0,1	0,1	0,45

4.6.

X	1	4	5	8	9
ω_i	0,15	0,25	0,3	0,2	0,1

4.7. Длиной слова называется количество букв, из которых оно состоит. Из всех длин слов в тексте гимна Казахстана составьте: 1) таблицу абсолютных частот; 2) таблицу относительных частот; 3) объем и размах выборки; 4) арифметическое среднее значение; 5) моду и медиану.

B

4.8. Выпишите все свои оценки по каждому предмету за II-ю четверть и с их помощью составьте (по каждому предмету): 1) таблицу абсолютных частот; 2) таблицу относительных частот; 3) арифметическое среднее значение.

4.9. Найдите m и объем выборки, если среднее арифметическое значение выборки из следующей таблицы равно $\overline{X} = -0{,}3$.

X_i	−5	2	3	4
m_i	4	3	1	m

4.10. Дана таблица относительных частот случайной величины:

X_i	-2	-1	1	x_4
ω_i	0,3	0,1	0,2	p

Найдите p и x_4, если $\overline{X} = 1{,}1$.

4.11. Дана таблица относительных частот случайной величины:

X_i	2	x_2	5	7
m_i	0,2	0,3	0,3	p_4

Найдите x_2 и p_4, если $\overline{X} = 4{,}2$.

4.12. При каком значении y для случайной величины x верно равенство $\overline{X} = 3{,}8$?

X_i	0	y	4	6
ω_i	0,2	0,1	0,3	0,4

В упражнениях **4.13 – 4.14** по данным выборки найдите: 1) таблицу абсолютных частот; 2) таблицу относительных частот; 3) среднее арифметическое значение; 4) моду и медиану.

4.13.

42	42	41	49	42
41	49	42	41	42
45	42	42	41	49
40	45	41	44	44
41	45	42	43	43

4.14.

55	56	56	58	57
59	57	58	56	58
58	56	59	57	59
57	55	56	59	57
56	58	56	59	59

C

4.15*. Выборка с объемом 10 состоит из двух элементов x_1 и x_2. Здесь $x_1 < x_2$, абсолютная частота элемента x_1 равна 6. Найдите x_1 и x_2, если среднее арифметическое значение равно $\overline{X} = 1{,}4$, а мода равна $M_0 = 1$.

4.16*. Выборка принимает 2 значения: x_1 и x_2 ($x_1 < x_2$). Относительная частота элемента x_1 равна 0,2, $\overline{X} = 2{,}6$, и $M_0 = 6{,}7$. Найдите x_1 и x_2.

4.17. В журнале метеоролога имеются сведения о температуре воздуха, которую измеряли через каждые 3 ч с 9^{00} до 21^{00} ч:

Время	9 ч	12 ч	15 ч	18 ч	21 ч
Температура	6°C	10°C	18°C	12°C	9°C

Для какой из частот принадлежит это таблица: относительных или абсолютных?

Обоснуйте ответ. По таблице абсолютных частот найдите арифметическое среднее значение температуры воздуха и найдите объем выборки.

Упражнения для повторения

4.18. Мальчики составляют 52% всех учащихся школы. Сколько девочек учится в этой школе, если в школе 806 мальчиков?

4.19. Запишите одночлен в стандартном виде:

1) $(2x^2)^3 \cdot \dfrac{x^2}{4}$; 2) $(-3a^4)^5 \cdot \dfrac{a^3}{27}$.

4.20. График линейной функции проходит через точку $M\,(-1;\ 2)$ параллельно прямой $y = 2x$. Напишите формулу этой линейной функции.

4.2. Полигон частот и относительных частот

В предыдущей теме вы научились записывать статистические данные в виде таблицы вариационного ряда абсолютных или относительных частот. Теперь представим эти данные в виде графика. Для этого варианта отметим на оси абсцисс, а соответствующие частоты (относительные частоты) – на оси ординат. На координатной плоскости отметим эти точки и последовательно соединим эти точки отрезками прямых. Полученная фигура называется ***полигоном*** абсолютных (относительных) частот. Иногда ее называют ***многоугольником*** абсолютных (относительных) частот.

По вариационному ряду абсолютных частот, полученному в примере 1 из предыдущей темы, построим полигон частот. Эта таблица имеет вид:

x_i	33	34	35	36	37	38	39	40
n_i	2	4	5	7	10	10	7	5

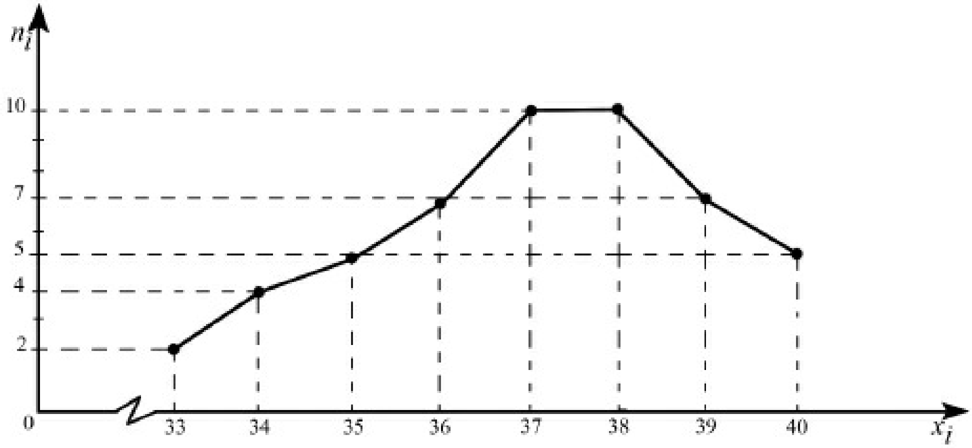


Рис. 4.1

Таблица относительных частот имеет вид:

x_i	33	34	35	36	37	38	39	40
ω_i	$\frac{2}{50}$	$\frac{4}{50}$	$\frac{5}{50}$	$\frac{7}{50}$	$\frac{10}{50}$	$\frac{10}{50}$	$\frac{7}{50}$	$\frac{5}{50}$

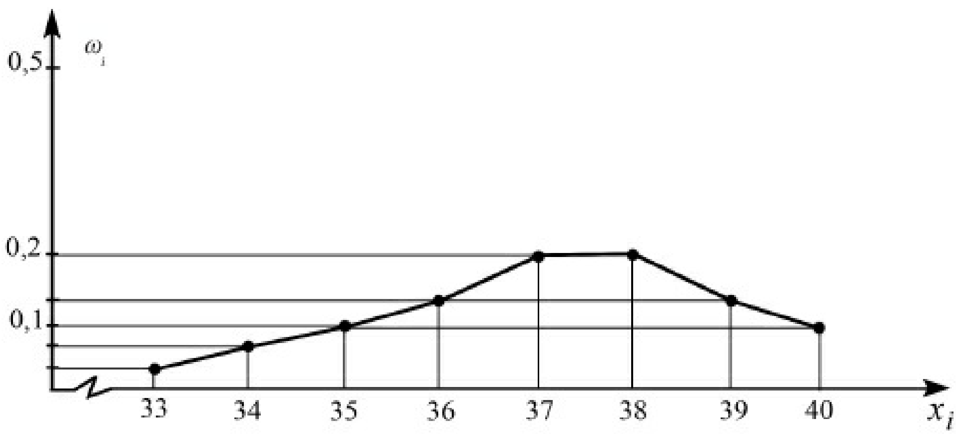


Рис. 4.2

Иногда относительные частоты записывают в виде процента. Тогда для данного примера таблица относительных частот в процентах имеет вид:

x_i	33	34	35	36	37	38	39	40
ω_i %	4%	8%	10%	14%	20%	20%	14%	10%

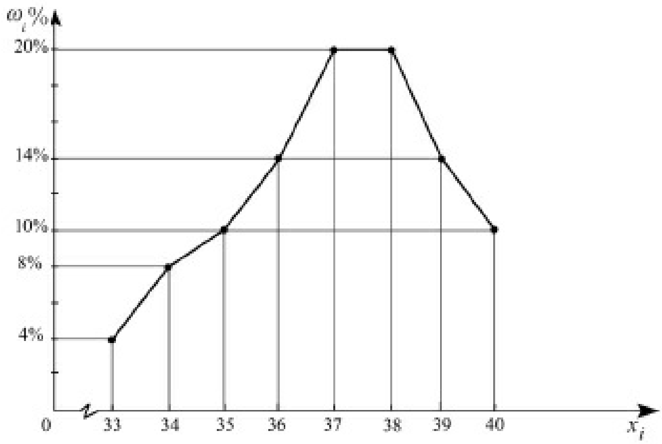


Рис. 4.3

?

1. Что такое полигон абсолютных (относительных) частот? Как он строится?
2. Как подсчитывают относительные частоты в процентах?
3. В чем сходство и различие полигонов частот и относительных частот на рисунках 4.1.–4.3? Как можно объяснить это?

ПЗ

В упражнении 4.7 вы составили вариационный ряд абсолютных (относительных) частот для длин слов в тексте Гимна Казахстана. Постройте полигон абсолютных частот этой задачи на компьютере, используя программу на Excel. Пошагово это выполняют так:

1) Открываем программу Excel.
2) Находим MS Excel – полигон частот.
3) Из таблицы выделяем 2 столбца: в первом столбце набираем варианты, а во втором – частоты. Нажимаем на кнопку – Выводим мастер диаграмм.

   На экране монитора появятся 4 указания, данные ниже.

1) Определите тип графика (точечная диаграмма, соединяющая значения отрезками).
2) Указать первоначальные данные (они уже набраны):
   X – варианты, Y – соответствующие частоты.
3) Можно задать дополнительные параметры оформления (можно и не задавать).
4) Нужно указать место, куда нужно поставить диаграмму.
   Полигон частот готов.

Упражнения

А

В упражнениях **4.21–4.26** постройте полигон частот и полигон относительных частот в процентах для данных вариационного рода.

4.21.

x	2	5	7	9
n_i	1	3	4	2

4.22.

x	4	5	6	7
n_i	4	3	2	1

4.23.

x	2	4	5	7
n_i	10	15	5	20

4.24.

x	15	20	25	30	35
n_i	10	15	30	20	25

4.25.

x	2	4	6	8	10
n_i	0,15	0,2	0,1	0,1	0,45

4.26.

x	1	3	5	7	9
n_i	0,15	0,25	0,3	0,2	0,1

В упражнениях **4.27–4.34** обработайте данные по программе Excel и постройте полигон частот, x_{max}, x_{min} и размах выборки.

4.27.

42	42	41	49	42
41	49	42	41	42
45	42	42	41	49
40	45	41	44	44
41	45	42	43	43

4.28.

55	56	56	58	57
59	57	58	56	58
58	56	59	57	59
57	55	56	59	57
56	58	56	59	59

B

4.29.

45	56	66	42	61	53	62	71	49	62
59	53	57	46	57	71	49	61	51	72
53	46	59	53	59	43	62	52	51	69
51	65	56	39	57	60	59	51	59	69
56	57	44	59	51	51	48	62	53	67
48	62	51	51	59	56	57	46	57	59
51	61	47	56	48	64	51	58	62	66
51	56	59	42	56	57	51	48	61	62
59	48	63	49	53	64	59	63	51	67
56	50	58	53	46	65	49	59	56	58

4.30.

268	273	242	222	236	248	252	232	269	287
253	286	275	235	202	239	225	236	237	224
258	268	277	249	248	263	243	266	212	255
249	288	213	264	247	242	228	277	256	251
267	232	258	246	278	279	257	255	243	268
258	262	267	275	266	246	252	261	269	262
254	244	265	274	252	265	222	269	254	278
249	246	253	296	249	242	258	258	254	245
251	252	249	232	269	263	269	271	245	249
268	286	277	264	278	246	222	258	245	287

4.31.

30	52	72	25	62	45	65	82	39	56
58	45	55	32	55	82	38	63	43	84
46	32	58	45	58	26	65	45	62	78
42	70	52	38	55	60	58	43	58	69
52	55	28	58	43	42	35	64	46	75
35	64	43	42	58	52	55	32	55	59
43	62	34	52	37	68	42	56	65	72
42	52	58	25	52	55	43	35	62	65
58	36	66	38	46	68	58	64	43	74
52	41	45	47	32	69	39	58	52	56

4.32.

45	56	66	43	61	52	62	71	49	62
59	52	58	46	58	71	49	62	51	72
53	46	59	52	59	46	62	52	61	69
51	65	56	49	57	60	59	51	59	64
56	58	44	59	51	51	47	62	53	67
47	62	51	51	59	56	57	56	57	59
51	56	59	42	56	57	51	47	61	62
59	48	63	49	53	64	59	63	51	67
56	56	52	59	46	64	49	59	56	58
46	51	58	48	49	61	51	47	58	71

4.33.

169	154	143	155	113	155	171	168	153	136
145	168	122	163	117	165	132	159	107	125
146	152	142	132	152	161	148	136	138	149
151	157	178	149	195	145	166	182	135	136
163	169	165	148	151	153	139	166	138	128
168	157	143	179	165	159	149	141	102	169
179	177	162	149	146	113	151	152	143	157
163	169	155	152	175	177	131	154	174	182
145	153	162	142	173	174	168	153	185	168
168	167	141	148	152	158	152	155	184	181

4.34.

132	136	147	124	129	101	125	124	137	108
128	121	138	132	124	119	121	127	130	114
129	131	133	138	126	121	130	128	134	111
112	135	127	106	120	131	117	127	118	118
124	119	131	133	134	125	134	137	123	126
134	126	127	126	127	135	115	141	122	108
127	124	133	134	124	133	131	141	143	129
131	134	139	106	132	121	124	123	121	116
134	126	125	146	139	126	123	137	116	134
133	122	134	107	135	136	132	124	117	112

4.35. Из генеральной совокупности отобрали выборку. Найдите: а) объем выборки; б) вариационный ряд частот; в) постройте полигон частот:

1) 2, 1, 3, 3, 4, 5, 4, 4, 3, 5, 2, 2, 3, 4, 3, 1, 5, 4, 2, 3;

2) 4, 3, 4, 4, 6, 6, 7, 8, 7, 6, 5, 5, 3, 5, 6, 8, 5, 3, 4, 6.

4.36. Из некоторой генеральной совокупности отобрана выборка 5, 3, 7, 10, 5, 5, 2, 10, 7, 2, 7, 7, 4, 2, 4. а) Составьте вариационный ряд. б) Найдите объем выборки. в) Составьте вариационный ряд частот. г) Постройте полигон частот.

4.37. При изучении некоторой генеральной совокупности по результатам 40 независимых наблюдений получены данные:

10,	13,	10,	9,	9,	12,	12,	6,	7,	9,
8,	9,	11,	9,	14,	13,	9,	8,	8,	7,
10,	10,	11,	11,	11,	12,	8,	7,	9,	10,
14,	13,	8,	10,	9,	7,	10,	9,	8,	12.

а) Составьте вариационный ряд. б) Составьте вариационный ряд относительных частот. в) Постройте полигон частот.

C

4.38. Арифметическое среднее значение выборки с объемом 10 равно 25. Наименьшее значение выборки равно 7 и оно намного меньше, чем другие варианты. Поэтому это значение сняли из состава выборки. Каким станет среднее арифметическое остальных значений выборки?

4.39. Объем выборки равен 15, а ее среднее арифметическое значение равно 220. В состав данной выборки добавили варианту 252. Как изменится среднее арифметическое значение?

4.40. Соревнования по фигурному катанию оценивают 10 судей. За выступление спортсмена все судьи выставили свои оценки, причем их арифметическое среднее равно 5,4. По правилу игры самая низкая и самая высокая оценки отбрасываются и выставляется арифметическое среднее остальных оценок. Эта оценка спортсмена была равна 5,4. Чему равна сумма отброшенных оценок?

4.41. На рис.4.4 изображен полигон частот размеров мужской обуви, проданной обувным магазином за 1 день. По рисунку найдите: 1) объем выборки; 2) вариационный ряд абсолютных (относительных) частот; 3) размах выборки; 4) моду и медиану; 5) арифметическое среднее.

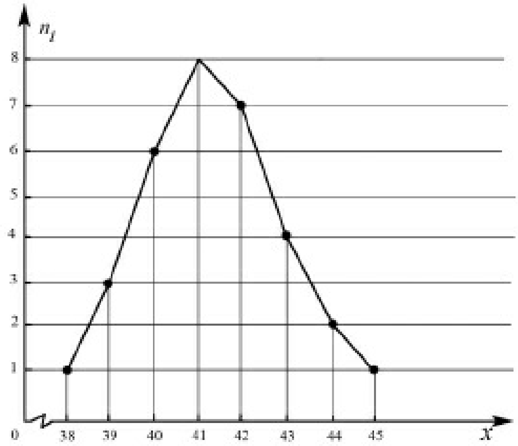


Рис. 4.4

Упражнения для повторения

4.42. Решите уравнение:

1) $x-\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{x}{6}-3$; 2) $0,23=\dfrac{5-2x}{8}\cdot 4,6$.

4.43. Постройте графики функций $y = 2 - x$ и $y = x^2$ на одной координатной плоскости и по графику определите точку их пересечения.

Раздел 5. ФОРМУЛЫ СОКРАЩЕННОГО УМНОЖЕНИЯ

5.1. Квадрат суммы и квадрат разности двух выражений

5.1.1. Квадрат суммы двух выражений. Умножение многочлена на многочлен в некоторых случаях удается выполнить короче. Равенства, выражающие эти частные случаи умножения, называются ***формулами сокращенного умножения.***

Возведем в квадрат сумму двух выражений a и b.

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2$$

Значит,

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2. \qquad (1)$$

Тождество (1) называют ***формулой квадрата суммы двух выражений.*** Отсюда получим правило, данное ниже.

Квадрат суммы двух выражений равен квадрату первого выражения, плюс удвоенное произведение первого и второго выражений и плюс квадрат второго выражения.

5.1.2. Квадрат разности двух выражений. Теперь возведем в квадрат разность двух выражений a и b.

$$(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-ab-ab+b^2=a^2-2ab+b^2$$

Значит,

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2. \qquad (2)$$

Квадрат разности двух выражений равен квадрату первого выражения, минус удвоенное произведение первого и второго выражений и плюс квадрат второго выражения.

Пример 1.

а) $(3x+2)^2=(3x)^2+2\cdot 3x\cdot 2+2^2=9x^2+12x+4$;

б) $(2a-7b)^2=(2a)^2-2\cdot 2a\cdot 7b+(7b)^2=4a^2-28ab+49b^2$.

Пример 2. Упростим выражение $(2a+9)^2-a(4a+31)$.

$$(2a+9)^2-a(4a+31)=4a^2+36a+81-4a^2-31a=5a+81.$$

С помощью формул (1) и (2) удобно вычислять квадраты чисел, отличающихся от «круглого» числа на несколько единиц.

Пример 3. а) $51^2=(50+1)^2=2500+100+1=2601$;
б) $79^2=(80-1)^2=6400-160+1=6241$.

Формулы (1) и (2) часто используются в виде:

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2;$$
$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2.$$

В этом виде формулы квадрата суммы и квадрата разности двух выражений находят применение при разложении многочлена на множители.

Пример 4. Разложим на множители многочлены:

а) $9a^2-12ab+4b^2$; б) $100+40p+4p^2$; в) $x^2-4xy+4y^2-ax+2ay$.

Решение.

а) $9a^2-12ab+4b^2=(3a)^2-2\cdot 3a\cdot 2b+(2b)^2=(3a-2b)^2$;

б) $100+40p+4p^2=10^2+2\cdot 10\cdot 2p+(2p)^2=(10+2p)^2$;

в) $x^2-4xy+4y^2-ax+2ay=x^2-2\cdot x\cdot 2y+(2y)^2-a(x-2y)=$
$=(x-2y)^2-a(x-2y)=(x-2y)(x-2y-a)$.

Объединяя формулы квадрата суммы и квадрата разности двух выражений, их часто записывают в виде:

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2.$$

?

1. Какие формулы называются формулами сокращенного умножения?
2. Чему равен квадрат суммы двух выражений?
3. Напишите формулу квадрата суммы двух выражений.
4. Чему равен квадрат разности двух выражений?
5. Напишите формулу квадрата разности двух выражений.
6. Докажите формулы (1) и (2).

Упражнения

A

5.1. Представьте выражение в виде многочлена:

1) $(m+4)^2$; 6) $(b+4)^2$;

2) $(c-b)^2$; 7) $(2x-y)^2$;

3) $(x+y)^2$; 8) $(-2-a)^2$;

4) $(p-q)^2$; 9) $(\frac{1}{2}+b)^2$;

5) $(a-3)^2$; 10) $(0,3-y)^2$.

5.2. Преобразуйте выражение в многочлен:

1) $(x-1)^2$; 3) $(5z+t)^2$; 5) $(6m-4n)^2$; 7) $(a-4)^2$;
2) $(3a-b)^2$; 4) $(5x-2y)^2$; 6) $(x+c)^2$; 8) $(0,2a+b)^2$.

5.3. Преобразуйте выражение:

1) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$;

2) $\left(b+\frac{1}{3}\right)^2$;

3) $\left(a-\frac{1}{5}\right)^2$;

4) $\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{3}\right)^2$;

5) $\left(\frac{x}{4}+\frac{y}{3}\right)^2$;

6) $\left(2\frac{1}{3}m+1\frac{1}{2}n\right)^2$;

7) $\left(5m-\frac{n}{2}\right)^2$;

8) $\left(9p-\frac{q}{3}\right)^2$.

5.4. Преобразуйте выражение в многочлен:

1) $(-a+2)^2$;

2) $(-b-3)^2$;

3) $(-n+4)^2$;

4) $(-x-10)^2$;

5) $(-2x-3y)^2$;

6) $\left(-\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b\right)^2$;

7) $\left(-1\frac{1}{3}x-6\right)^2$;

8) $\left(-c+\frac{b}{4}\right)^2$.

5.5. Используя формулу квадрата суммы или квадрата разности двух выражений, вычислите:

1) $101^2=(100+1)^2$;

2) 31^2;

3) 51^2;

4) 39^2;

5) 103^2;

6) 99^2;

7) 999^2;

8) 1001^2;

9) 105^2;

10) 52^2.

5.6. Представьте трехчлен в виде квадрата двучлена:

1) $x^2+2xy+y^2$;

2) a^2+2a+1;

3) b^2-6b+9;

4) $c^2-10c+25$;

5) $4m^2+4m+1$;

6) $16-8c+c^2$.

5.7. Представьте трехчлен в виде квадрата двучлена:

1) $9a^2-24ab+16b^2$;
2) $4c^2+12c+9$;
3) $25x^2+10x+1$;
4) $81x^2-18xy+y^2$;
5) m^2+4n^2-4mn;
6) $100a^2+b^2+20ab$.

5.8. Преобразуйте трехчлен в квадрат двучлена:

1) $1+a^2-2a$;
2) $4xy+y^2+4x^2$;
3) $28ab+49a^2+4b^2$;
4) $10mn+100m^2+0,25n^2$;
5) $\frac{1}{4}a^2+4b^2-2ab$;;
6) $8ab+b^2+16a^2$.

5.9. Замените $\square$ одночленом так, чтобы трехчлен можно было представить в виде квадрата двучлена:

1) $\square+2ac+c^2$;
2) $m^2-\square+n^2$;
3) $x^2-4xy+\square$;
4) $a^2+2ca+\square$;
5) $\square+14c+49$;
6) $k^2-\square+9$.

5.10. Найдите значение выражения:

1) a^2-2a+1 при $a=101$; -9; 31; $0,4$;
2) x^2+4x+4 при $x=98$; -32; $-2,5$.

B

5.11. Представьте выражение в виде многочлена:

1) $(0,2a-5y)^2$;
2) $(0,3x+4y)^2$;
3) $(1,3m+2,5n)^2$;
4) $\left(\frac{3}{4}x-0,5y\right)^2$;
5) $\left(1\frac{2}{3}c+0,6\right)^2$;
6) $\left(\frac{5}{6}p-\frac{3}{5}q\right)^2$.

5.12. Преобразуйте выражение в многочлен:

1) $(x^2+3y)^2$;
2) $(0,3a^2+4b)^2$;
3) $(0,2m^2-5n)^2$;
4) $(1,3p^3+2,5p^2)^2$;
5) $(2,4c^3-1,5d^2)^2$;
6) $(7x^2y+3xy^2)^2$.

5.13. Преобразуйте выражение:

1) $\left(\frac{3}{4}a^2-0,5b^3\right)^2$; 4) $(x^m-x)^2$;

2) $\left(1\frac{2}{3}x^2+0,6y^4\right)^2$; 5) $(c^{k+1}+c^k)^2$;

3) $(b^n-b)^2$; 6) $(a^m+b^n)^2$.

5.14. Представьте выражение в виде квадрата двучлена:

1) $25x^2+49y^2-70xy$; 3) $\frac{25}{36}m^2-mn+\frac{9}{25}n^2$; 5) $0,01a^4+b^2-0,2a^2b$;

2) $\frac{1}{4}a^2+3a+9$; 4) $\frac{1}{16}c^4+2c^2x+16x^2$; 6) $b^8-a^2b^4+\frac{1}{4}a^4$.

5.15. Можно ли трехчлен представить в виде квадрата двучлена:

1) a^2-2a+4; 3) $4a^2+b^2-4ab$; 5) $9x^8+4y^2-12x^4y$;

2) $9m^2+100n^2-60mn$; 4) $81p^2-72pq-16q^2$; 6) $a^2b^4-2ab^2x^4+x^8$?

5.16. С помощью рисунка 5.1 разъясните геометрический смысл формулы $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ для положительных a и b.

5.17. С помощью рисунка 5.2 разъясните геометрический смысл формулы $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ для положительных a и b.

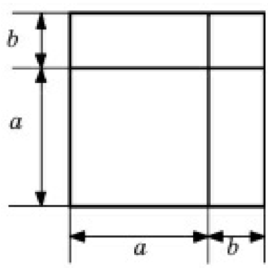


Рис.5.1

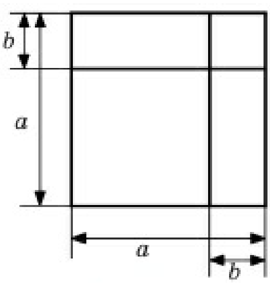


Рис.5.2

5.18. Замените $\square$ одночленом так, чтобы получившееся равенство было тождеством:

1) $(\square+2b^2)^2=9a^4+12a^2b^2+4b^4$; 3) $(3x^2-2,5y)^2=9x^4-\square+6,25y^2$;

2) $(15m+\square)^2=225m^2+12n^3m+0,16n^6$; 4) $(3x^4-2a^6)^2=9x^8-12x^4a^6+\square$.

5.19. Решите уравнение:

1) $4x^2-(2x-1)^2=15$;
2) $9x^2-1=(3x-2)^2$;
3) $(3x+1)^2-(3x-1)^2=11x+1{,}2$;
4) $(5+2y)(y-3)-2(y-1)^2=0$.

5.20. Найдите корни уравнений:

1) $16x(2-x)+(4x-5)^2=0$;
2) $9y(y+6)-(3y+1)^2=-1$;
3) $0{,}5(x-6)^2+2x\left(8-\dfrac{x}{4}\right)=2$;
4) $y+(5y+2)^2=25(2+y^2)$.

5.21. Упростите выражение:

1) $(a+b)^2-(a-b)^2$;
2) $(m+4)^2-4(m+1)^2$;
3) $3(2-y)^2+4(y-5)^2$;
4) $5(3-5x)^2-5(3x-7)(3x+7)$;
5) $(a+1)^2+3(a-1)^2-5(a-1)(a+1)$;
6) $(x-1)^2-4(x+1)^2-6(x+1)(x-1)$.

5.22. Выполните действия:

1) $((3a+b)^2-(a+3b)^2)\cdot 2ab$;
2) $((x^2+2x)^2+(2x^2-x)^2):(5x^2)$.

C

5.23. Какое выражение нужно прибавить к выражению $(a-b)^2$, чтобы получить выражение $(a+b)^2$?

5.24. Докажите равенство:

1) $(a-b)^2=(b-a)^2$;
2) $(-a-b)^2=(a+b)^2$.

5.25. Докажите равенство:

1) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$;
2) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

5.26. Представьте выражение в виде многочлена, используя формулы задания **5.25**:
1) $(a+2b)^3$; 2) $(c-3d)^3$; 3) $(2-m)^3$; 4) $(3x+2b)^3$.

5.27. Выразите сумму квадратов чисел a и b через $a+b$ и $a-b$.

5.28. Выразите выражение $4ab$ через $a+b$ и $a-b$.

5.29. Докажите тождество:

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$.

5.30. Представьте выражение в виде многочлена: 1) $((a+b)^2)^2$; 2) $(a-b)^4$.

Упражнения для повторения

5.31. Разложите на множители:

1) $x^3+6x^2+11x+6$; 2) $a^5+a^4+a^3+a^2+a+1$.

5.32. Представьте выражение в виде многочлена:

1) $(a^3-3a^2b+b)(2a^2+2ab-3b^2)$; 2) $(a+3b)(a-3b)$.

5.33. Из пунктов A и B, расстояние между которыми 920 км, одновременно навстречу друг другу отправились два поезда, причем скорость одного из них на 10 км/ч больше скорости другого. Через 5 ч расстояние между поездами составляло 70 км. Найдите скорости поездов.

5.34. Представьте выражение в виде квадрата одночлена:

1) $0{,}25x^4$; 2) $49a^6$; 3) $4m^2n^4$; 4) $0{,}04a^6b^4$.

5.2. Разность квадратов двух выражений

5.2.1. Умножение разности двух выражений на их сумму. Умножим разность $a-b$ на сумму $a+b$:

$$(a-b)(a+b)=a^2+ab-ab-b^2=a^2-b^2.$$

Значит,

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2. \qquad (3)$$

Произведение разности двух выражений и их суммы равно разности квадратов этих выражений.

Пример 1. а) $(4-5a)(4+5a)=4^2-(5a)^2=16-25a^2$;

б) $(8+3x)(8-3x)=8^2-(3x)^2=64-9x^2$;

в) $(-m-7p)(7p-m)=(-1)(m+7p)(7p-m)=-[(7p)^2-m^2]=-(49p^2-m^2)=m^2-49p^2$.

Пример 2. Упростим выражение $(2x-3y)(2x+3y)+9y^2-x$.

$$(2x-3y)(2x+3y)+9y^2-x=4x^2-9y^2+9y^2-x=4x^2-x$$

5.2.2. Разложение разности квадратов двух выражений на множители. Формула (3) часто находит применение в виде:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b). \qquad (4)$$

Тождество (4) часто называют ***формулой разложения разности квадратов на множители.***

Разность квадратов двух выражений равна произведению разности этих выражений и их суммы.

Пример 3. а) $64-x^2=8^2-x^2=(8-x)(8+x)$;

б) $49a^2-25b^2c^4=(7a)^2-(5bc^2)^2=(7a-5bc^2)(7a+5bc^2)$;

в) $(2a-b)^2-(a+2b)^2=(2a-b-a-2b)(2a-b+a+2b)=(a-3b)(3a+b)$.

Пример 4. Разложим многочлен $4a^2-9b^2-2a-3b$ на множители.

$$4a^2-9b^2-2a-3b=(2a-3b)(2a+3b)-(2a+3b)=(2a+3b)(2a-3b-1)$$

?

1. Чему равно произведение разности двух выражений и их суммы?
2. Чему равна разность квадратов двух выражений?
3. Докажите формулу (3).

Упражнения

А

5.35. Выполните умножение двучленов:

1) $(m+n)(m-n)$;
2) $(q-p)(q+p)$;
3) $(c-d)(d+c)$;
4) $(a-c)(c+a)$;
5) $(x+y)(y-x)$;
6) $(y-5)(y+5)$;
7) $(x+2)(2-x)$;
8) $(1-a)(1+a)$;
9) $(n-2m)(n+2m)$;
10) $(2x-3y)(2x+3y)$;
11) $(8a+9b)(9b-8a)$;
12) $(5x+3y)(3y-5x)$.

5.36. Выполните умножение двучленов:

1) $(m-3)(m+3)$;
2) $(c-7)(c+7)$;
3) $(4+5a)(5a-4)$;
4) $(7x-2)(7x+2)$;
5) $(8b+5a)(5a-8b)$;
6) $(10p-6q)(10p+6q)$.

5.37. Представьте выражение в виде многочлена:

1) $(-c+d)(c+d)$;
2) $(-a+b)(b-a)$;
3) $(-x-y)(x-y)$;
4) $(a+b)(-a-b)$;
5) $(x-y)(y-x)$;
6) $(-a-b)(-a-b)$.

5.38. Представьте двучлен в виде произведения разности и суммы:

1) x^2-y^2;
2) m^2-n^2;
3) c^2-25;
4) a^2-1;
5) $25-a^2$;
6) $49-b^2$;
7) $100-p^2$;
8) m^2-400;
9) $b^2-0{,}04$;
10) $1{,}21-x^2$;
11) $n^2-\frac{4}{9}$;
12) $\frac{25}{64}-p^2$.

5.39. Разложите двучлен на множители:

1) $9a^2-25b^2$;
2) $4c^2-49d^2$;
3) $-81+25m^2$;
4) $x^2y^2-0{,}04$;
5) $0{,}16-x^2$;
6) $144-49n^2$;
7) $a^2b^2-c^2$;
8) $p^2q^2-4k^2$.

5.40. Вычислите:

1) $(30+1)(30-1)$;
2) $61\cdot59$;
3) $199\cdot201$;
4) $72\cdot68$;
5) 55^2-45^2;
6) 41^2-31^2;
7) 76^2-24^2;
8) 37^2-23^2.

5.41. Решите уравнение:

1) $x^2-9=0$;
2) $x^2-0{,}04=0$;
3) $x^2-81=0$;
4) $y^2-\frac{1}{9}=0$;
5) $y^2-1\frac{9}{16}=0$;
6) $y^2-2\frac{1}{4}=0$.

5.42. Вычислите:

1) $15{,}2\cdot14{,}8$;
2) $19{,}9\cdot20{,}1$;
3) $4{,}01\cdot3{,}99$;
4) $29{,}8\cdot30{,}2$;
5) 86^2-14^2;
6) 328^2-172^2;
7) $\left(2\frac{3}{4}\right)^2-\left(1\frac{1}{4}\right)^2$;
8) $\left(7\frac{1}{5}\right)^2-\left(2\frac{1}{5}\right)^2$.

5.43. Выполните действия:

1) $(2ab-c)(2ab+c)$;
2) $(4+3xy)(4-3xy)$;
3) $(5a-3b)(5a+3b)$;
4) $(5b+4a)(4a-5b)$;
5) $(5x+6y)(6y-5x)$;
6) $(2p+7q)(7q-2p)$.

5.44. Разложите двучлен на множители:

1) $25a^2-b^2$;
2) $9x^2-16y^2$;
3) $49-m^2n^2$;
4) $-81x^2+16y^2$;
5) $36p^2-25q^2$;
6) $4a^2b^2-1$.

5.45. С помощью рисунка 5.3 разъясните геометрический смысл формулы $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ для положительных a и b $(a>b)$.

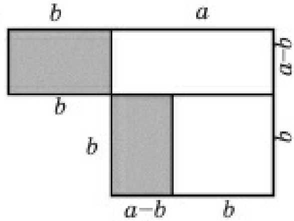


Рис. 5.3

B

5.46. Представьте выражение в виде многочлена:

1) $(2xy-1)(2xy+1)$;
2) $(1+3ab)(1-3ab)$;
3) $(8ab+5)(5-8ab)$;
4) $(10cx-6)(10cx+6)$;
5) $(8+9cd)(9cd-8)$;
6) $(0{,}2t-0{,}5u)(0{,}2t+0{,}5u)$.

5.47. Выполните умножение:

1) $(a^2-5)(a^2+5)$;
2) $(4-x^2)(4+x^2)$;
3) $(9x-y^2)(9x+y^2)$;
4) $(5a^2-3b)(5a^2+3b)$;
5) $(4m^2+6n)(4m^2-6n)$;
6) $(1{,}3ab-1{,}1c)(1{,}3ab+1{,}1c)$.

5.48. Выполните действия:

1) $(a^2+b^2)(a^2-b^2)$;
2) $(c^3-d^3)(c^3+d^3)$;
3) $(10m^2-n^2)(10m^2+n^2)$;
4) $(c^4+d^2)(c^4-d^2)$;
5) $(5x^2+2y^3)(2y^3-5x^2)$;
6) $(1{,}4c-0{,}7a^3)(1{,}4c+0{,}7a^3)$.

5.49. Выполните умножение:

1) $(x^n+y^n)(x^n-y^n)$;
2) $(a^k-b)(a^k+b)$;
3) $(p^m-q^n)(p^m+q^n)$;
4) $(a-2)(a+2)(a^2+4)$;
5) $(5-x)(5+x)(25+x^2)$;
6) $(a-2)^2(a+2)^2$.

5.50. Представьте выражение в виде произведения:

1) $(2a+5)^2-49$;
2) $(5x-2y)^2-9y^2$;
3) $p^2-(3p+1)^2$;
4) $(2a+b)^2-(a-2b)^2$;
5) $(x+y)^2-(x-y)^2$;
6) $(4p-q)^2-(2p+3q)^2$.

5.51. Представьте выражение в виде произведения:

1) c^6-9x^4;
2) x^4y^2-1;
3) $25a^2b^2-16x^4$;
4) $100x^2-y^8$.

5.52. Разложите на множители:

1) $81y^2-a^8$;
2) $16x^2y^4-81z^2$;
3) $25m^2-49n^2$;
4) $0{,}49p^4-m^2q^6$;
5) $1-64a^8$;
6) a^4-a^8;
7) $\frac{m^4n^6}{9}-\frac{p^4}{16}$;
8) $\frac{4a^2x^4}{25}-\frac{9y^4}{16}$.

5.53. Представьте выражение в виде произведения:

1) $(a+2)^2-1$; 3) $(5y-6)^2-49$; 5) $16a^2-(4a+6)^2$;
2) $16-(x+y)^2$; 4) $(m-7)^2-64$; 6) $x^6-(2y^2-x^3)^2$.

5.54. Разложите на множители:

1) $(5a+6)^2-81$; 3) $9m^2-(1+2m)^2$; 5) $(5c-3d)^2-9d^2$;
2) $25-(a+7)^2$; 4) $(5x-3y)^2-16x^2$; 6) $49m^2-(n+8m)^2$.

5.55. Вычислите:

1) $2{,}1\cdot1{,}9$; 3) $19{,}8\cdot20{,}2$; 5) $\left(3\frac{2}{3}\right)^2-\left(2\frac{1}{3}\right)^2$; 7) $\left(5\frac{2}{3}\right)^2-\left(4\frac{1}{3}\right)^2$;

2) $4{,}02\cdot3{,}98$; 4) $1{,}05\cdot0{,}95$; 6) $\left(4\frac{1}{6}\right)^2-\left(1\frac{1}{6}\right)^2$; 8) $21{,}3^2-21{,}2^2$.

5.56. Найдите значение дроби:

1) $\frac{72}{13^2-11^2}$; 2) $\frac{79^2-65^2}{420}$; 3) $\frac{92^2-48^2}{27^2-17^2}$; 4) $\frac{63^2-27^2}{83^2-79^2}$.

5.57. Представьте разность квадратов двух выражений в виде произведения:

1) $(2a+b)^2-(a-2b)^2$; 3) $(p+q)^2-(p-q)^2$;
2) $(x+y)^2-(y-z)^2$; 4) $(4a-b)^2-(2a+3b)^2$.

C

5.58. Докажите, что разность квадратов двух последовательных натуральных чисел есть число нечетное.

5.59. Докажите, что при любом натуральном n значение выражения $(4n+5)^2-9$ делится на 8.

5.60. Докажите, что при любом натуральном n значение выражения $(2n+11)^2-4n^2$ кратно 11.

5.61. Разложите на множители:

1) $a^2-b^2-2{,}5(a-b)$; 3) $x^2+5x+5y-y^2$;
2) $m^2-n^2+1{,}5(m+n)$; 4) $4c^2-b^2-2c+b$.

5.62. Представьте в виде произведения:

1) $16a^{17}-a^{15}$; 2) $m^{20}-\frac{16}{49}m^{18}$; 3) x^6-16x^2; 4) $y^7-1\frac{7}{9}y^5$.

5.63. Разложите на множители:

1) $a^2+b^2+2ab-1$;
2) $4-25m^2+10mn-n^2$;
3) $81x^2+6ab-9a^2-b^2$;
4) $x^2y^2-4xy-x^2-y^2+1$.

5.64. Решите уравнение:

1) $x^3-6x^2=6-x$;
2) $y^3+3y^2-4y-12=0$;
3) $2x^3-x^2-18x+9=0$;
4) $4y^3-3y^2-4y+3=0$;
5) $2x^3-x^2-32x+16=0$;
6) $(y+6)^2-(y+5)(y-5)=79$.

5.65. Докажите, что при каждом натуральном n значение выражения:

1) $(2n+3)^2-(2n-1)^2$ кратно 8;

2) $(5n+1)^2-(2n-1)^2$ кратно 7.

5.66. На сторонах прямоугольника построены квадраты (рис.5.4). Площадь одного квадрата на 95 см^2 больше площади другого. Найдите периметр прямоугольника, если известно, что длина прямоугольника на 5 см больше его ширины.

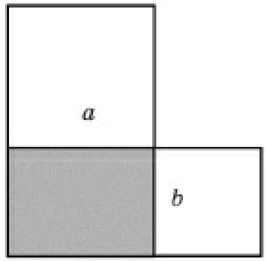


Рис. 5.4

Упражнения для повторения

5.67. Представьте выражение в виде куба одночлена:

1) $64x^3$;
2) $27a^6$;
3) $8m^9$;
4) $-64x^3y^6$;
5) $-8a^9b^6$;
6) $0{,}027p^3q^9$.

5.68. Представьте в виде квадрата двучлена:

1) $4a^2b^2+4ab+1$;
2) $1-xy+\frac{x^2y^2}{4}$.

5.69. Докажите равенство:

1) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$;
2) $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$.

5.70. Разложите на множители:

1) $12a^3x-36a^2bx+27ab^2x$;
2) $2a^2b^3-28ab^2+98b$.

5.71. Турист рассчитал, что если он будет идти к железнодорожной станции со скоростью 4 км/ч, то он опоздает к отправлению поезда на полчаса, а если он будет идти со скоростью 5 км/ч, то он придет на станцию за 6 мин до отправления поезда. Какое расстояние должен пройти турист?

5.3. Сумма и разность кубов двух выражений

5.3.1. Разложение на множители суммы кубов двух выражений. Для разложения на множители суммы кубов используется формула

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2). \qquad (5)$$

Докажем справедливость тождества (5). Применяя правило умножения многочлена на многочлен, получим:

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3=a^3+b^3.$$

Тождество (5) называется ***формулой суммы кубов двух выражений***.

Множитель a^2-ab+b^2 в правой части формулы (5) напоминает трехчлен $a^2-2ab+b^2$, который равен квадрату разности a и b, но отличается от этого трехчлена лишь коэффициентом при ab. Поэтому множитель a^2-ab+b^2 называют ***неполным квадратом разности a и b***. Получим правило, данное ниже.

Сумма кубов двух выражений равна произведению суммы этих выражений и неполного квадрата их разности.

Пример 1. Разложим на множители многочлен $64a^3+1$.

$$64a^3+1=(4a)^3+1^3=(4a+1)\left((4a)^2-4a\cdot 1+1^2\right)=$$

$$=(4a+1)\left(16a^2-4a+1\right).$$

5.3.2. Разложение на множители разности кубов двух выражений. Для разложения на множители разности кубов используется формула

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2). \qquad (6)$$

Действительно,

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3=a^3-b^3.$$

Тождество (6) называется ***формулой разности кубов двух выражений***. Множитель a^2+ab+b^2 называют ***неполным квадратом суммы a и b***, так как коэффициент при ab равен 1, а не 2. Получим правило, данное ниже.

Разность кубов двух выражений равна произведению разности этих выражений и неполного квадрата их суммы.

Пример 2. Разложим на множители многочлен $8p^3-q^6$.

$$8p^3-q^6=(2p)^3-(q^2)^3=(2p-q^2)\left((2p)^2+2p\cdot q^2+(q^2)^2\right)=$$

$$=(2p-q^2)(4p^2+2pq^2+q^4)$$

?

1. Напишите формулу суммы кубов двух выражений.
2. Сформулируйте правило разложения на множители суммы кубов двух выражений.
3. Напишите формулу разности кубов двух выражений.
4. Сформулируйте правило разложения на множители разности кубов двух выражений.
5. Докажите формулы (5) и (6).

Упражнения

A

5.72. Разложите многочлен на множители:

1) x^3+y^3; 4) m^3+n^3; 7) a^3+8; 10) n^3-27;
2) x^3-y^3; 5) p^3+q^3; 8) a^3-8; 11) $1-x^3$;
3) m^3-n^3; 6) p^3-q^3; 9) m^3+27; 12) $1+y^3$.

5.73. Разложите многочлен на множители:

1) $27-8a^3$; 3) $27a^3-8b^3$; 5) $125x^3-27y^3$; 7) $8+\frac{1}{8}a^3$;
2) $8x^3+y^3$; 4) $1+64y^3$; 6) $1-8b^3$; 8) $\frac{m^3}{64}+\frac{n^3}{125}$.

5.74. Запишите выражение в виде произведения:

1) $-a^3+b^3$; 3) x^6+27; 5) $-\frac{b^3}{27}-1$;
2) $-a^6+\frac{1}{8}$; 4) $-64-y^3$; 6) m^6+n^6.

5.75. Запишите выражение в виде суммы или разности кубов одночленов:

1) $(a-2)(a^2+2a+4)$; 3) $(4+b)(16-4b+b^2)$;
2) $(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)$; 4) $(3a-2b)(9a^2+6ab+4b^2)$.

5.76. Упростите выражение:

1) $(a+1)(a^2-a+1)-a^3$; 3) $(m-2)(m^2+2m+4)+8$;
2) $(x+y)(x^2-xy+y^2)-x(x^2+y^2)$; 4) $(c+3)(c^2-3c+9)-27$.

5.77. Разложите на множители:

1) x^3+64; 3) $27a^3-64b^3$; 5) $\frac{n^3}{64}+8$;
2) $125-x^3$; 4) $1+27m^3$; 6) $\frac{p^3}{64}-\frac{q^3}{27}$.

5.78. Разложите на множители:

1) $-a^3+b^3$; 3) a^6+1; 5) m^3n^3+8;

2) $-x^3+\frac{1}{y^3}$; 4) x^3y^3-1; 6) $-\frac{1}{8}-a^3$.

5.79. Упростите выражение:

1) $(a+2)(a^2-2a+4)$; 4) $(2x-y)(4x^2+2xy+y^2)$;

2) $(x+3)(x^2-3x+9)$; 5) $(3a-2b)(9a^2+6ab+4b^2)$;

3) $(m-4)(m^2+4m+16)$; 6) $(1+c)(1-c+c^2)$.

B

5.80. Запишите выражение в виде произведения:

1) a^3+b^6; 3) x^6+y^6; 5) p^3-q^9;

2) x^9-y^3; 4) x^6+y^3; 6) m^9-n^9.

5.81. Разложите на множители:

1) m^3+n^3; 2) x^9-y^6; 3) a^6-8; 4) b^9+27.

5.82. Представьте в виде произведения:

1) x^3y^3+1; 3) $a^6c^3-b^3$; 5) a^3b^3+64;

2) $27-a^3b^3$; 4) $1-x^3y^3$; 6) $27x^3-y^3z^3$.

5.83. Докажите, что значение выражения:

1) 326^3+74^3 кратно 400; 2) 425^3-125^3 кратно 300.

5.84. Докажите, что значение выражения:

1) 43^3+37^3 делится на 80; 2) 79^3-35^3 делится на 44.

5.85. Запишите выражение в виде суммы или разности кубов:

1) $(ab-4)(a^2b^2+4ab+16)$; 3) $\left(2a-\frac{b}{2}\right)\left(4a^2+ab+\frac{b^2}{4}\right)$;

2) $(3x+yz)(9x^2-3xyz+y^2z^2)$; 4) $\left(\frac{x}{4}+\frac{y}{5}\right)\left(\frac{x^2}{16}-\frac{xy}{20}+\frac{y^2}{25}\right)$.

5.86. Представьте в виде произведения:

1) $a^3b^6-c^3$; 3) $12am^3-12an^3$; 5) $1-p^9$;

2) $3ax^3-3ay^3$; 4) a^6b^3+27; 6) $64x^3y^6+343a^3$.

5.87. Разложите на множители:

1) $(a+b)^3-(a-b)^3$;
2) $(2x+y)^3+(x-2y)^3$;
3) $(2mn-1)^3+1$;
4) $(3a-2b)^3+8b^3$.

C

5.88. Разложите на множители:

1) $a^3+b^3-2ab(a+b)$;
2) $m^3-n^3-6m(m^2+mn+n^2)$;
3) $x^3-y^3+8x^2y-8xy^2$;
4) $p^3+q^3-2pq(p^2-pq+q^2)$.

5.89. Представьте в виде произведения:

1) $8a^3+6a^2+3a+1$;
2) $x^3-4x^2+20x-125$;
3) $m^4+mn^3-m^3n-n^4$;
4) $c^4+c^3y-cy^3-y^4$.

5.90. Представьте произведение в виде многочлена:

1) $(3x^3-1)(9x^6+3x^3+1)$;
2) $(a^5-3b^6)(a^{10}+3a^5b^6+9b^{12})$;
3) $(m^3+n^{10})(m^6-m^3n^{10}+n^{20})$;
4) $(7b^2+2)(49b^4-14b^2+4)$.

5.91. Разложите на множители:

1) $(a-2b)^3+8b^3$;
2) $27-(x-2)^3$;
3) $(m+1)^3+64$.

5.92. Докажите, что при каждом натуральном значении n выражение:

1) $(2n+3)^3-(2n-1)^3+4$ делится на 16;
2) $(5n+1)^3+(2n-1)^3-7n^3$ делится на 21.

5.93. Разложите на множители:

1) $a^{3n}-b^{6m}$;
2) $8x^{9k}+27y^{6p}$;
3) $\dfrac{a^{6m}}{64}-125c^{27n}$.

5.94. Докажите, что сумма:

1) $1^3+2^3+3^3+\ldots+9^3$ делится на 5;
2) $1^3+2^3+3^3+\ldots+49^3$ делится на 25.

Упражнения для повторения

5.95. Упростите выражение и найдите его значение при указанном значении переменной:

1) $(3a-1)(3a+1)-(3a-1)^2$ при $a=0,3$;
2) $(5+2x)^2-2,5x(8x+7)$ при $x=-0,5$.

5.96. Принадлежат ли графику функции, заданной формулой $y=\dfrac{1}{2}x^2$, точки $A(-2;\ 2)$; $B(4;\ 8)$; $C\left(-\dfrac{1}{2};\ \dfrac{1}{4}\right)$?

5.97. Найдите координаты точек пересечения графика функции $y=0{,}4x+2$ с осями координат.

5.98. В каких четвертях координатной плоскости расположены графики функций:

1) $y=-0{,}001x^2$; 2) $y=100x^2$; 3) $y=-2x^3$; 4) $y=\frac{1}{8}x^3$?

5.99. Разложите на множители:

1) $a^2+4b^2-9c^2-4ab$; 2) $x^3+x^2-xy^2-y^2$.

5.4. Куб суммы и куб разности двух выражений

5.4.1. Куб суммы двух выражений. Возведем в куб сумму a и b.

$$(a+b)^3=(a+b)(a+b)^2=(a+b)(a^2+2ab+b^2)=$$
$$=a^3+2a^2b+ab^2+ba^2+2ab^2+b^3=$$
$$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

Значит,

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3. \qquad (7)$$

Куб суммы двух выражений равен кубу первого выражения, плюс утроенное произведение квадрата первого выражения и второго, плюс утроенное произведение первого выражения и квадрата второго, плюс куб второго выражения.

Пример 1.

а) $(3x+y)^3=(3x)^3+3(3x)^2y+3\cdot3x\cdot y^2+y^3=27x^3+27x^2y+9xy^2+y^3$;

б) $11^3=(10+1)^3=10^3+3\cdot10^2\cdot1+3\cdot10\cdot1^2+1^3=1000+300+30+1=1331$.

Пример 2. Разложим на множители многочлен

$a^2+4ab+4b^2-a^3-6a^2b-12ab^2-8b^3$.

Решение. $a^2+4ab+4b^2-a^3-6a^2b-12ab^2-8b^3=$

$=(a+2b)^2-(a^3+3a^2\cdot2b+3a(2b)^2+(2b)^3)=$

$=(a+2b)^2-(a+2b)^3=(a+2b)^2(1-a-2b)$

5.4.2. Куб разности двух выражений. Возведем в куб разность a и b.

$$(a-b)^3=(a-b)(a-b)^2=(a-b)(a^2-2ab+b^2)=$$
$$=a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3=$$
$$=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

Значит,

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3. \qquad (8)$$

Куб разности двух выражений равен кубу первого выражения, минус утроенное произведение квадрата первого выражения и второго, плюс утроенное произведение первого выражения и квадрата второго, минус куб второго выражения.

Пример 3. а) $(3x-2y)^3=27x^3-54x^2y+36xy^2-8y^3$;

б) $27a^3-108a^2c+144ac^2-64c^3=(3a)^3-3\cdot(3a)^2\cdot 4c+3\cdot 3a(4c)^2-(4c)^3=(3a-4c)^3$.

Тождества (7) и (8) называются соответственно ***формулами куба суммы и куба разности двух выражений.***

?

1. Напишите формулу куба суммы двух выражений.
2. Чему равен куб суммы двух выражений?
3. Напишите формулу куба разности двух выражений.
4. Чему равен куб разности двух выражений?
5. Докажите формулы (7) и (8).

Упражнения

А

5.100. Представьте выражение в виде многочлена:

1) $(x+y)^3$; 4) $(p-q)^3$; 7) $(x-2)^3$;

2) $(c-d)^3$; 5) $(2+a)^3$; 8) $(4+x)^3$;

3) $(p+q)^3$; 6) $(3-b)^3$; 9) $(a+2b)^3$.

5.101. Представьте выражение в виде многочлена:

1) $\left(4m+\frac{1}{3}n\right)^3$; 3) $\left(\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b\right)^3$; 5) $(0,2x-5y)^3$; 7) $(0,1m-4n)^3$;

2) $\left(\frac{2}{3}x-3y\right)^3$; 4) $\left(\frac{1}{6}x+2y\right)^3$; 6) $(3a-0,6b)^3$; 8) $(0,5a+0,16)^3$.

5.102. Представьте многочлен в виде куба суммы или куба разности двух выражений:

1) $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$; 4) $a^3+6a^2b+12ab^2+8b^3$;

2) $8+12x+6x^2+x^3$; 5) $0,008+0,12a+0,6a^2+a^3$;

3) $27-27b+9b^2-b^3$; 6) $\frac{m^3}{27}-m^2n+9mn^2-27n^3$.

5.103. Упростите выражение:

1) $8a^3+36a^2+54a+27$; 2) $125x^3-225x^2y+135xy^2-27y^3$;

3) $\frac{u^3}{8}+\frac{3u^2v}{2}+6uv^2+8v^3$;   4) $0,001a^3-0,3a^2b+30ab^2-1000b^3$.

5.104. Выполните возведение в степень:

1) $(a+2b)^3$;   3) $(2m-3n)^3$;   5) $\left(\frac{2}{3}a-3b\right)^3$;

2) $(x-3y)^3$;   4) $\left(4x+\frac{1}{3}y\right)^3$;   6) $\left(\frac{1}{3}p+\frac{1}{2}q\right)^3$.

5.105. Представьте в виде многочлена:

1) $\left(\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}b\right)^3$;   3) $\left(\frac{1}{2}m-\frac{1}{7}\right)^3$;   5) $(0,2m+0,1n)^3$;

2) $\left(\frac{1}{6}x+\frac{1}{2}y\right)^3$;   4) $(0,5+0,1b)^3$;   6) $(0,2x+0,5y)^3$.

5.106. Упростите выражение:

1) $\frac{x^3}{8}-\frac{x^2y}{4}+\frac{xy^2}{6}-\frac{y^3}{27}$;

2) $\frac{125m^3}{27}+\frac{125m^2n}{6}+\frac{125mn^2}{4}+\frac{125n^3}{8}$;

3) $0,008a^3-0,6a^2b+15ab^2-125b^3$;

4) $0,027x^3+1,08x^2y+14,4xy^2+64y^3$.

B

5.107. Выполните возведение в степень:

1) $(2a^3+3b^2)^3$;   3) $(2m^2-3n^2)^3$;   5) $\left(10x^2+\frac{1}{3}a^2\right)^3$;

2) $(x^2-y^2)^3$;   4) $(7p^3+9q^4)^3$;   6) $(0,3a^5+0,5b^2)^3$.

5.108. Представьте выражение в виде многочлена:

1) $(a^2+b^2)^3$;   3) $(2m^2-3n^2)^3$;   5) $(4m^3+5n^2)^3$;   7) $(7u^3-9v^4)^3$;

2) $(x^2-y^2)^3$;   4) $(2a^3-3b^2)^3$;   6) $(10p^4-6q^2)^3$;   8) $(10x^3+3y^2)^3$.

5.109. Докажите тождество:

1) $a^3+3ab(a+b)+b^3=(a+b)^3$;   2) $a^3-3ab(a-b)-b^3=(a-b)^3$.

5.110. Представьте выражение в виде многочлена:

1) $\left(\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}b^2\right)^3$; 3) $\left(10a^3+\frac{1}{3}b^3\right)^3$; 5) $\left(0,1x^4-\frac{1}{2}x^3\right)^3$;

2) $\left(\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{2}y^3\right)^3$; 4) $(0,3a^5+0,5a)^3$; 6) $(1,5m^3+0,3m^4)^3$.

5.111. Упростите выражение:

1) $1000x^9+100x^6y^2+\frac{10}{3}x^3y^4+\frac{1}{27}y^6$;

2) $8x^5+36x^4+54x^3+27x^2$;

3) $125x^4y-225x^3y^2+135x^2y^3-27xy^4$;

4) $27a^3b-27a^3b^2+9a^3b^3-a^3b^4$.

5.112. Разложите на множители:

1) $(a-b)^3-a^2+2ab-b^2$; 4) $(m+2n)^3-m^2+4n^2$;

2) $x^2+y^2+2xy-(x+y)^3$; 5) $(c-2y)^2+c^3-6c^2y+12cy^2-8y^3$;

3) $a^2-b^2-(a-b)^3$; 6) $(x+3y)^2-x^3-9x^2y-27xy^2-27y^3$.

5.113. Решите уравнение:

1) $(x+2)^3=x^3+8$; 2) $(3x-1)^3=27x^3-1$.

5.114. Упростите выражение и вычислите его значение:

1) $8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3+12x^2-12xy+3y^2$ при $x=1,1$; $y=1,2$;

2) $3(m-1)^2+(m+2)(m^2-2m+4)-(m+1)^3$ при $m=-\frac{1}{3}$;

3) $(a-1)^3-4a(a+1)(a-1)+3(a-1)(a^2+a+1)$ при $a=-2$.

5.115. Вместо знака * впишите одночлен такой, чтобы получилось тождество:

1) $(2a-*)^3=8a^3-36a^2b+54ab^2-(*)^3$;

2) $\left(*+\frac{y}{2}\right)^3=27x^3+\frac{27}{2}x^2y+\frac{3\cdot *}{4}y^2+\frac{y^3}{8}$.

C

5.116. Докажите, что разность кубов двух последовательных натуральных чисел не делится на 3.

5.117. Докажите, что сумма кубов трех последовательных натуральных чисел делится на 3.

5.118. Решите уравнение:

1) $6(x+1)^2+2(x-1)(x^2+x+1)-2(x+1)^3=32$;

2) $5x(x-3)^2-5(x-1)^3+15(x+2)(x-2)=5$;

3) $(x+2)^3-x(3x+1)^2+(2x+1)(4x^2-2x+1)=42$.

5.119. Для натуральных чисел n, m, k сумма $n+m+k$ делится на 6. Докажите, что сумма $n^3+m^3+k^3$ также делится на 6.

5.120. Каждое из выражений $(a+b)^5$, $(a-b)^5$ представьте в виде многочлена.

Упражнения для повторения

5.121. Докажите тождество:

1) $(a+b)^2-4ab=(a-b)^2$; 2) $(a-b)^2+4ab=(a+b)^2$.

5.122. Разложите на множители:

1) $x^3-y^3+5x(x^2+xy+y^2)$; 2) $a^3-b^3-5a^2b+5ab^2$.

5.123. Найдите натуральные числа n и k, такие, чтобы имело место равенство $kn^2-n^2-kn+n=74$.

5.124. Разложите на множители:

1) $(x+y)^2-z^2+x+y+z$; 2) $a^4-a^3b+ab^3-b^4$.

5.125. Из пункта A вышла грузовая машина со скоростью 60 км/ч. Через 2 ч вслед за ней из пункта A вышла легковая машина со скоростью 90 км/ч. Через сколько часов после своего выезда легковая машина догонит грузовую?

5.5. Преобразование целых выражений

5.5.1. Преобразование целого выражения в многочлен. Выражения, составленные из чисел и переменных с помощью действий сложения, вычитания, умножения и возведения в степень, называются ***целыми выражениями***. К целым относятся и выражения, в которых, кроме указанных действий, используется деление на число, отличное от нуля. Например,

$2,7a^3b-3b^3-7$; $-\frac{4}{5}ax^2$; $6y^3-(3x-y)(x^2+4y^2)$ – целые выражения.

Выражение

$$a + x - \frac{x-b}{x+b} + (b-a)(x-c)$$

не является целым, так как в нем используется деление на выражение с переменными.

Каждое целое выражение можно представить в виде многочлена. Покажем это на примере.

Пример 1. Представим в виде многочлена целое выражение

$$x(1-2x)^2-(x^2-2)(2-x)+4x^3(3x-1).$$

Решение:

$$\begin{gathered}x(1-2x)^2-(x^2-2)(2-x)+4x^3(3x-1)=\\=x(1-4x+4x^2)-(2x^2-x^3-4+2x)+12x^4-4x^3=\\=x-4x^2+4x^3-2x^2+x^3+4-2x+12x^4-4x^3=\\=12x^4+x^3-6x^2-x+4.\end{gathered}$$

5.5.2. Различные способы преобразований для разложения многочлена на множители. Для разложения многочлена на множители мы рассматривали различные способы: вынесение общего множителя за скобки, группировка членов многочлена, применение формул сокращенного умножения. Иногда указанные способы разложения многочлена на множители применяются несколько раз. Целесообразно начинать преобразование, если это возможно, с вынесения общего множителя за скобки.

Пример 2.

а) $9a^2b-4b^3=b(9a^2-4b^2)=b(3a-2b)(3a+2b)$;

б) $x^2y-4xy^2+4y^3=y(x^2-4xy+4y^2)=y(x-2y)^2$;

в) $9a^2-4c^2+12ab+4b^2=(9a^2+12ab+4b^2)-4c^2=$

$=(3a+2b)^2-(2c)^2=(3a+2b-2c)(3a+2b+2c)$.

Формулы сокращенного умножения и другие способы преобразования целых выражений применяются и в других задачах.

Пример 3. Докажем, что выражение x^2-4x+7 при любом x принимает только положительное значение.

Доказательство. Учитывая, что $7=4+3$, в данном многочлене можно воспользоваться формулой квадрата разности двух выражений:

$$x^2-4x+7=x^2-4x+4+3=(x-2)^2+3.$$

Так как $(x-2)^2$ неотрицательно при любом x и $3>0$, то $x^2-4x+7=(x-2)^2+3>0$.

Пример 4. Докажем, что разность квадратов двух последовательных нечетных чисел кратна 8.

Доказательство. Нечетные последовательные числа записываются в виде: $2n-1$ и $2n+1$, где n – любое натуральное число. Тогда

$$(2n+1)^2-(2n-1)^2=4n^2+4n+1-4n^2+4n-1=8n.$$

Это число при любом натуральном n делится на 8.

?

1. Какое выражение называют целым?
2. Приведите пример целого выражения и выражения, не являющегося целым.
3. Какие способы разложения многочлена на множители вы знаете?

Упражнения

A

5.126. Разложите на множители:

1) $5a^2-5b^2$; 3) a^3-a; 5) $7x^2-7y^2$; 7) $5x^2-20y^2$;

2) $3m^2-3n^2$; 4) b^3-b; 6) $4m^3-4mn^2$; 8) a^3b-ab^3.

5.127. Разложите на множители:

1) $2m(a+b)+a+b$; 5) $5x(a+b)-a-b$;

2) $2a(x+y)+x+y$; 6) $4y(k-p)-k+p$;

3) $4x(m-n)-m+n$; 7) $3m(x+y)-x-y$;

4) $x(a-b)+a-b$; 8) $2a(x-y)-x+y$.

5.128. Разложите на множители:

1) $xy^2+x^2y^3$; 3) $m^2n^2+mn^3$; 5) $c^3d^2-c^4d^2$;

2) $a^4b^2-a^2b^4$; 4) $a^3b^2+a^5b^3$; 6) $-x^5y^3-x^3y^5$.

5.129. Разложите на множители:

1) $x(a-b)+y(b-a)$; 3) $2m(x-y)-y+x$;

2) $m^2(a-2)+n(2-a)$; 4) $2n(x-y)-(y-x)$.

5.130. Представьте многочлен в виде произведения:

1) $2x^2+4xy+2y^2$; 2) $6x^2-12xy+6y^2$; 3) $3a^2-6a+3$;

4) $5m^2+10m+5$; 5) $2xy^2+4xy+2x$; 6) $3a-6ab+3ab^2$.

5.131. Разложите на множители:

1) a^2-b^2-a+b; 4) $a^3+a^2b-ab^2-b^3$;

2) a^2-b^2-a+b; 5) $m^2+2mn+n^2-mb-nb$;

3) $x^3-x^2y-xy^2+y^3$; 6) $xc-yc-x^2+2xy-y^2$.

5.132. Представьте в виде произведения:

1) $(a-b)^3-3(a-b)^2$; 3) $(m+n)^3-m^2-2mn-n^2$;

2) $(x+y)^3+2x(x+y)^2$; 4) $x^2-4xy+4y^2-(x-2y)^3$.

B

5.133. Докажите, что выражение принимает лишь положительное значение:

1) a^2+2a+2; 3) $4m^2-4m+4$;

2) $x^2+y^2-2xy+4$; 4) $a^2+b^2+c^2-2bc+3$.

5.134. Докажите, что выражение $4x-4x^2-2$ может принимать лишь отрицательные значения.

5.135. Докажите тождество:

1) $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)=a^4-b^4$; 2) $(a^4+b^4)(a^2+b^2)(a+b)(a-b)=a^8-b^8$.

5.136. Разложите на множители:

1) $25x^2-(x+y)^2$; 3) $1-(a^2+b^2)^2$; 5) $x^4y^2-(a^2-b^2)^2$;

2) $100-(3a+7y)^2$; 4) $m^6n^2-(m-n)^2$; 6) $9x^2y^4-(a-b)^2$.

5.137. Представьте в виде произведения:

1) $(a+2b)^2-(3c+4d)^2$; 5) $9(m+n)^2-(m-n)^2$;

2) $(x-y)^2-(m+n)^2$; 6) $4(a-b)^2-(a+b)^2$;

3) $(m-2n)^2-(2p-3q)^2$; 7) $16(a+b)^2-9(x+y)^2$;

4) $(2a-3c)^2-(4b+5d)^2$; 8) $9(a-b)^2-4(x-y)^2$.

5.138. Разложите на множители:

1) a^4-b^4; 3) a^8-b^8; 5) $(a+b)^3-(a-b)^3$;

2) a^6-b^6; 4) a^4+a^3+a+1; 6) $(a+b)^4-(a-b)^4$.

5.139. Представьте в виде произведения:

1) $ax^2+bx^2+ax-cx^2+bx-cx$; 2) $ax^2+bx^2-bx-ax+cx^2-cx$.

5.140. Разложите на множители:

1) $(a-2b)^4-8(a-2b)$; 3) $(a-2b)^3-(a+2b)^3$;

2) $(x-3y)^4-27x+81y$; 4) $(2x+3y)^3+(3x-2y)^3$.

5.141. Представьте в виде произведения:

1) $m^3-m^2n-mn^2+n^3$; 3) x^4+x^3-x-1; 5) $m^6-m^4+2m^3+2m^2$;

2) $x^5-x^3+x^2-1$; 4) a^4+a^3+a+1; 6) b^3-8+6b^2-12b.

C

5.142. Разложите на множители:

1) x^2-5x+6; 3) $m^2-7mn+12n^2$;

2) x^2+6x+8; 4) $a^2-7ab+10b^2$.

5.143. Представьте в виде произведения:

1) x^8+x^4+1; 3) a^3-3a+2;

2) $x^4+x^2y^2+y^4$; 4) x^3+3x^2-4.

5.144. Разложите на множители:

1) $x^3+6x^2+11x+6$; 2) $x^4+x^3+6x^2+5x+5$.

5.145. Докажите, что при любом целом n значение выражения:

1) $(2n+1)^2-1$ кратно 8; 2) n^3-n кратно 6.

5.146. Докажите, что разность квадратов двух последовательных четных чисел не делится на степень 2, большую, чем 2^2.

5.147. Докажите тождество:

1) $(a+b)^2(a-b)-2ab(b-a)-6ab(a-b)=(a-b)^3$;

2) $(a^2+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)+(a^3-b^3)(a^3+b^3)=2a^6$;

3) $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$;

4) $(a^2+cb^2)(d^2+ce^2)=(ad+cbe)^2+c(ae-bd)^2$.

5.148*. При каком значении a произведение $(x^2+x-1)(x-a)$ в виде многочлена стандартного вида не содержит: 1) x; 2) x^2?

5.149*. При каком значении b произведение $(x^2-10x+6)(2x+b)$ в виде многочлена стандартного вида: 1) не содержит x^2; 2) имеет равные коэффициенты при x^3 и при x?

5.150. Найдите наименьшее общее кратное выражений:

1) $2a^2-4ab+2b^2$; $6a^2-6b^2$; $12a-12b$;

2) $3x^2+6xy+3y^2$; $4x^2-4y^2$; $8x+8y$.

5.6. Решение текстовых задач с помощью составления их математических моделей

При решении многих задач вводят одну, две или несколько переменных и с их помощью составляют уравнения, неравенства или их системы. Здесь составленные с помощью введенных переменных уравнения, неравенства и их системы называются ***математической моделью*** задачи. Рассмотрим модели.

Пример 1. Стоимость 4 кг яблок и стоимость 3 кг груш одинаковые. Если цена 1 кг яблок повысится на 50 тг, а цена 1 кг груш понизится на 50 тг, то их цены станут равными. Найдите первоначальную цену каждого фрукта.

Решение. Для решения подобных текстовых задач вводят переменные. Как правило, в качестве таких переменных обозначают искомые неизвестные величины. Итак, пусть 1 кг яблок стоит x тг, а 1 кг груш – y тг.

Следующий шаг. Используя введенные переменные x и y, составляем уравнения по условию задачи. По условию задачи стоимость 4 кг яблок и стоимость 3 кг груш одинаковые, т.е. $4x = 3y$. С другой стороны, если цена 1 кг яблок повысится на 50 тг, а цена 1 кг груш понизится на 50 тг, то их цены станут равными, т.е. $x + 50 = y - 50$ или $y = x + 100$. Значения переменных должны удовлетворять полученным обоим уравнениям. Тогда мы получим систему уравнений

$$\begin{cases} 4x = 3y, \\ y = x + 100. \end{cases}$$

Итак, в результате мы получили алгебраическую систему уравнений (математическую модель).

Теперь решим эту систему, используя метод подстановки. Тогда $4x = 3(x + 100) \Rightarrow 4x = 3x + 300 \Rightarrow x = 300$ и $y = 400$.

На этом этапе мы получили ответ математической модели: $x = 300$, $y = 400$.

На последнем этапе с помощью полученных ответов мы должны ответить на вопросы, поставленные в исходной задаче. Так как буквой x мы обозначили цену 1 кг яблок, а буквой y – цену 1 кг груш, то цена 1 кг яблок составляет 300 тг, а цена 1 кг груш – 400 тг.

Ответ: 1кг яблок стоит 300 тг, а 1 кг груш – 400 тг.

Отсюда видно, что решение этой задачи мы разделили на 3 этапа, данные ниже.

I. Ввели переменные величины и с их помощью по условию задачи составили системы уравнений, т.е. составили математическую модель задачи.

II. Решили математическую задачу и нашли ее ответ.

III. Использовали полученные ответы для того, чтобы ответить на вопросы, поставленные в исходной задаче. Таким образом, мы получили следующую схему решения текстовых задач:

Решение текстовых задач	Ввести переменные и составить математическую модель задачи	Решить математическую задачу и получить ее ответ	По этим результатам ответить на вопросы, поставленные в задаче

Пример 2. Нужно составить текстовую задачу, которая решается с помощью математической модели

$$22 + x = 34 - x.$$

Решение. Составление текстовых задач по заданному уравнению – очень интересная и сложная задача. Все зависит от фантазии учащегося. Сколько учеников в классе и столько различных текстовых задач может быть составлено. Пример одной из подобных задач: «Самат собрал 22 яблока, а Ажар – 34 яблока. Ажар дала Самату несколько яблок, и у них количество яблок стало поровну. Сколько яблок дала Ажар Самату?» Разумеется, решив данное уравнение, мы получим ответ на поставленный вопрос. Здесь через x обозначено количество яблок, которое дала Ажар Самату. Ответ: $x = 6$, т.е. Самат дал Ажар 6 яблок.

Пример 3. Двузначное число в 3 раза больше, чем сумма его цифр. Найдем это число.

Решение. Пусть m – десятичный разряд, а n – единичный разряд искомого числа. Тогда по условию задачи имеем:

$10m + n = 3(m + n)$, причем m и n – целые числа, принимающие значения между нулем и девятью. Раскрыв скобки и собирая подобные члены, получим уравнение

$$7m = 2n; \qquad m, n \in M,$$

где $M = \{0, 1 , 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ – область определения полученной прямой пропорциональности. Из этого уравнения имеем, что число n должно делиться на 7, а m – на 2. Так как из области определения 7 является единственным значением, которое делится на 7, то небходимо, чтобы $n = 7$. Тогда и $m = 2$. *Ответ:* 27.

?

1. Что такое математическая модель? Как вы ее понимаете? Приведите пример.
2. На сколько этапов и на какие этапы делится процесс решения текстовых задач? Раскройте смысл каждого этапа с помощью примеров.

ПЗ

1) Подберите какое-либо уравнение или систему уравнений и по ним составьте текстовую задачу.
2) В примере 3 разделите процесс решения на этапы. Это задание целесообразно выполнять в группе. Обсудите результаты всем классом и обоснуйте свои ответы.

Упражнения

А

5.151. Составьте математическую модель следующих высказываний:
1) сумма чисел a и b в 4 раза больше разности a и b;
2) частное чисел a и b в 5 раз меньше их суммы.

5.152. От текстовой модели перейдите к математической модели:
1) Удвоенное произведение чисел x и y равно 12;
2) утроенное произведение квадрата p и числа q равно 18;
3) 14% числа m равны числу n;
4) квадрат суммы чисел a и b равен 25.

5.153. Если m, n, k и l – заданные числа, то следующие математические модели запишите словами:

1) $2m \cdot n = 5k$; 3) $m : n = k : l$ 5) $0{,}12m = 2(k - n)$;
2) $m + l = n + k$; 4) $m - n = 3l$; 6) $3m = 5k$.

5.154. Если a – количество мальчиков класса, а b – количество девочек этого класса, то следующие математические модели запишите словами:

1) $a < b$; 2) $a + 2 = b$; 3) $a = b$; 4) $a + 2 = b - 1$.

5.155. Если p – количество тетрадей, q – количество карандашей, то математическую модель запишите словами:

1) $30 \cdot p + 15q = 375$ тг; 2) $30p + 15 = 165$ тг.

В упражнениях **5.156–5.158** предложения запишите в виде математической модели.

5.156. 1) Значения выражений $3a + 14$ и $5a + 3$ равны.
2) Значение выражения $4m + 1$ на 5 больше значения выражения $2m - 1$.
3) Значение выражения $3b - 8$ равно половине значения выражения $6b - 1$.

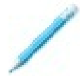
5.157. 1) Значение выражения $2 - 3x$ меньше 4;

2) значение выражения $2 - 3x$ больше 5;

3) значение выражения $2u - 1$ меньше соответствующих значений выражения $3u + 4$;

4) значение выражения $2u - 1$ больше соответствующих значений выражения $u - 5$.

5.158. Алмас в магазине купил карандаши по 15 тг и тетради по 40 тг и за все заплатил 270 тг. Сколько карандашей и сколько тетрадей купил Алмас?



В

Решите упражнения **5.159–5.165** с помощью составления математической модели.

5.159. При каких значениях x: 1) значение дроби $\frac{x-4}{5}$ на 9 больше, чем значение дроби $\frac{2x+4}{9}$; 2) значение дроби $\frac{x+17}{5}$ в 3 раза больше значения дроби $\frac{x-5}{4}$?

5.160. 1) Если число x уменьшить на 17%, то получим число, равное 20,75.

2) Если число x увеличить на 27%, то получим число, равное 31,75.

5.161. При каких значениях x: 1) значение выражения $\frac{x-4}{5}$ меньше соответствующих значений выражения $\frac{2x+4}{9}+9$;

2) значение выражения $\frac{x+17}{5}$ не больше соответствующих значений выражения $3\cdot\frac{x-5}{4}$?

5.162. Одно из чисел в 4 раза больше другого, а их сумма равна 60. Найдите большее из этих чисел.

5.163. Одно из чисел в 3 раза больше другого, а их разность равна 40. Найдите меньшее из чисел.

5.164. Папе 31 год, а сыну 5 лет. Через сколько лет возраст папы будет в 3 раза больше возраста сына?

5.165. Сначала участок земли, выделенный под дачу, был квадратной формы. Позднее в конце огорода к нему добавили участок земли шириной 10 м. Полученный прямоугольный участок обвели оградой из проволоки, состоящей из 3-х витков. Общая длина проволоки 420 м. Какова длина стороны выделенного участка первоначально?

5.166. Найдите значения a так, чтобы число: 1) 4; 2) −5; 3) 0; 4) 1 было корнем уравнения $\frac{x+3}{2}=\frac{3x}{7}-a$.

5.167. Найдите значения m так, чтобы промежутки: 1) $(5; +\infty)$; 2) $(-2; +\infty)$; 3) $(0; +\infty)$ были решениями неравенства $4(x-7)>3x+5+m$.

5.168. Рабочий ежедневно на станке обрабатывал 16 деталей. После приобретения в цех управляемого компьютером оборудования, он начал обрабатывать по 24 детали в день и месячную норму сделал на 8 дней раньше срока. Сколько деталей рабочий должен был обрабатывать за месяц?

5.169. Если отнять 3 из удвоенной суммы крайних чисел, из трех последовательных четных чисел, получим число, равное 29. Найдите среднее из чисел.

5.170. На одном складе объем имеющегося там зерна в 2 раза больше, чем на другом складе. После того как с I-го склада вывезли 80 т зерна, а на второй склад завезли 40 т зерна, на обоих складах зерна стало поровну. Сколько тонн зерна было на складах первоначально?

C

5.171. Отцу 40, а его сыновьям Асану и Усену 12 лет и 8 лет соответственно.

Найдите неизвестные величины с помощью составления математической модели задачи при условии:

1) спустя x лет возраст отца будет вдвое больше возраста Асана;

2) спустя y лет возраст отца будет вдвое больше возраста Усена;

3) спустя t лет возраст отца будет равен сумме возрастов его сыновей;

4) n лет назад возраст отца был в 4 раза больше возраста Асана.

5.172. Ширина прямоугольника составляет 40% его длины. Если его длину уменьшить на 2 см, а ширину увеличить на 4 см, то получится прямоугольник, площадь которого равна площади данного прямоугольника. Найдите измерения первоначального прямоугольника.

5.173. В дистиллированную воду добавили 150 г соли и получили 10% раствора соли. Найдите количество воды. В какое количество воды нужно добавить 150 г соли, чтобы получить 25% раствора соли?

5.174. Расстояние между населенными пунктами A и B по течению реки катер прошел за 5 ч 30 мин, а плот – за 71 ч 30 мин. Катер вернулся обратно за 6 ч 30 мин. Каково расстояние между населенными пунктами A и B?

5.175. Из смеси двух видов сухофруктов готовят компот. Стоимость 1 кг первого вида сухофруктов 400 тг, а второго вида – 530 тг. Какими должны быть доли каждого вида сухофруктов, взятого для приготовления компота, чтобы стоимость 1 кг последней смеси не привышала 450 тг?

5.176. Междугородный автобус первый час шел со средней скоростью 70 к/ч. Водитель подсчитал, что если он продолжит движение с этой же скоростью, то он отстанет от графика на полчаса. Поэтому он увеличил скорость на 10 км/ч и прибыл в пункт назначения вовремя. Какое расстояние прошел автобус?

Упражнения для повторения

5.177. Выполните действия:

1) $34{,}68 : (7{,}11 + 1{,}56) + 46 : (2{,}45 - 1{,}65)$;

2) $9\frac{1}{6} : \left(4\frac{1}{3} - 8\right) + 24 \cdot \frac{3}{8}$.

5.178. Цена на овощи в октябре повысилась на 20%, а в июне снизилась на 20%. Стала ли цена на овощи прежней? Обоснуйте ответ. Решите задачу при исходной цене: 1) 150 тг; 2) 250 тг.

5.179. Найдите точку пересечения графика линейного уравнения $3x-y=-5$ и линейной функции $y = 0{,}5x - 5$.

5.180. Опишите закономерность, по которой составлена последовательность, и найдите ее последующие 2 члена:

1) 0,2; 0,04; 0,008; ... ; 2) 1; 1,5; 1,25; $\frac{7}{8}$; ... .

5.181. Обратите число в бесконечную периодическую дробь и округлите ее с точностью до 0,001. Найдите относительную погрешность приближенного значения:

1) $1\frac{1}{3}$; 2) $\frac{3}{7}$; 3) $2\frac{4}{11}$; 4) $5\frac{7}{12}$.

5.182. Постройте график уравнения: 1) $2x - y = 0$; 2) $x + 3y - 6$.

5.183. Дана таблица частот вариационного ряда:

x	0	2	4	6
n_i	4	7	6	3

Найдите: 1) объем и размах выборки; 2) арифметическое среднее значение; 3) моду и медиану; 4) таблицу относительных частот. Постройте полигон частот.

5.184. Разложите выражение на множители:

1) $a^2 + 4ab + 4b^2 - (a + 2b)^3$; 2) $36u^2 - (2u - v)^2$.

5.185. Запишите члены последовательности в виде степени с основанием 3, найдите первый и последний члены этой последовательности: $\ldots; 9; 3; 1; \frac{1}{3}; \frac{1}{9}; \ldots$.

5.186. Найдите объем и размах, арифметическое среднее значение, моду и медиану выборки:

1) 11; 10; 8; 10; 8; 12; 11; 8;

2) −3; −5; 5; 1; 2; 4; 3; −1.

Раздел 6. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

6.1. Преобразование рациональных выражений

6.1.1. Понятие рационального выражения. В предыдущих главах мы рассматривали выражения, составленные из чисел и переменных с помощью действий сложения, вычитания, умножения и возведения в степень. Такие выражения мы называли ***целыми выражениями***.

Например, $3ax^2$, $2(x-y)(a^2x+by^2)+cx$, $\frac{ax}{2}-c$ – целые выражения.

А выражения $2a-\frac{b^3}{c-x}$, $\frac{a-x}{a+x}+\frac{2x}{a-x}$, $\frac{8p^2}{11q}$ составили из чисел и переменных с помощью действий сложения, вычитания, умножения и деления. В каждом из них имеется деление на выражения, содержащие переменные. Такие выражения называются ***дробными выражениями***. Целые и дробные выражения называются ***рациональными выражениями***.

Мы знаем, что каждое целое выражение всегда может быть представлено в виде многочлена. Целые выражения имеют смысл при любых значениях переменных, входящих в состав этого выражения, ибо действия сложения, вычитания и умножения имеют смысл при любых значениях переменных. А дробные выражения при некоторых значениях переменных, входящих в их состав, могут не иметь смысла. Например, выражение $5+\frac{1}{a}$ не имеет смысла при $a=0$, а при всех других значениях переменной a это выражение имеет смысл. Выражение $\frac{x+y}{x-y}$ имеет смысл при $x \neq y$.

Значения переменных, при которых выражение имеет смысл, называют ***допустимыми значениями переменных*** этого выражения.

Выражение вида $\frac{a}{b}$ называют ***рациональной дробью, где a, b – рациональные выражения, причем b обязательно содержит переменные.***

Например, $\frac{2x}{x^2-5}$, $\frac{3y+1}{7y}$, $\frac{ab-4}{\frac{a}{b}+9}$ – рациональные дроби.

6.1.2. Сокращение рациональных дробей. Мы хорошо знаем, что для натуральных чисел a, b и c выполняется тождество

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot c}{b\cdot c}.$$

Это основное свойство рациональных дробей также справедливо и для рациональных выражений.

Для всех рациональных выражений a, b и c, для которых $b \neq 0$ и $c \neq 0$, выполняется тождество:

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot c}{b\cdot c}. \qquad (1)$$

Докажем тождество (1). Пусть $\frac{a}{b}=m$. Тогда имеем: $a=bm$. Отсюда $ac=(bm)c=(bc)m$. Так как $bc \neq 0$, то из равенства $ac=(bc)m$ по определению частного получим равенство $\frac{ac}{bc}=m$. Следовательно, $\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}$. Это доказанное тождество называют ***основным свойством рациональных дробей.***

Определение. ***Равенство, верное при всех допустимых значениях переменных, входящих в его состав, называют тождеством. Замену одного выражения другим, тождественно равным ему, называют тождественным преобразованием.***

Тождество (1) позволяет заменить дробь $\frac{ac}{bc}$ на тождественное ему выражение $\frac{a}{b}$, т.е. на основании этой формулы мы можем сократить дробь $\frac{ac}{bc}$ на множитель c.

Пример1. Сократим дроби: а) $\frac{21y}{3y^2}$; б) $\frac{a^2-9}{ab+3b}$.

а) $\frac{21y}{3y^2}=\frac{3y\cdot 7}{3y\cdot y}=\frac{7}{y}$; б) $\frac{a^2-9}{ab+3b}=\frac{(a-3)\cdot(a+3)}{b(a+3)}=\frac{a-3}{b}$.

Пример 2. Знаменатель дроби $\frac{2x}{7y}$ приведем к виду $35y^3$.

Так как $35y^3=7y\cdot 5y^2$, то $\frac{2x}{7y}=\frac{2x\cdot 5y^2}{7y\cdot 5y^2}=\frac{10xy^2}{35y^3}$.

Рассмотрим еще одно свойство дроби.

Если изменить знак числителя (или знаменателя) дроби, то изменится знак и самой дроби:

$$\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b},\quad \frac{a}{-b}=-\frac{a}{b},$$

т.е. при изменении знака дроби нужно изменить знак числителя (или знаменателя) этой дроби.

Пример 3. Сократим дробь $\frac{4-a^2}{ac-2c}$.

$$\frac{4-a^2}{ac-2c}=\frac{(2-a)(2+a)}{c(a-2)}=-\frac{-(2-a)(2+a)}{c(a-2)}=-\frac{(a-2)(2+a)}{c(a-2)}=-\frac{a+2}{c}.$$

?

1. Какие выражения называются дробными?
2. Что такое допустимые значения переменных?
3. Что называют тождеством и тождественным преобразованием?
4. Докажите основное свойство рациональных дробей.
5. Как изменяется знак дроби, если изменить знак числителя (знаменателя)?

Упражнения

А

6.1. Запишите выражение в виде дроби:

1) $a:7$; 4) $(a+b):5$; 7) $x^2:(a+b)$;
2) $5:a$; 5) $8:(p-q)$; 8) $3a:(2m-5n)$;
3) $x:y$; 6) $(x+y):(m+n)$; 9) $(4x-3y):(x+y)$.

6.2. При каких значениях a обращается в нуль дробь:

1) $\frac{a-3}{4}$; 3) $\frac{a-3}{a}$; 5) $\frac{3a-2}{2a}$; 7) $\frac{(a+3)(a-3)}{2a-5}$;

2) $\frac{a+3}{a-3}$; 4) $\frac{a+0,1}{3a-1}$; 6) $\frac{a(a-4)}{a+15}$; 8) $\frac{(a+1)(a+5)}{a-3}$?

6.3. При каких значениях x следующие дроби не имеют смысла:

1) $\frac{3}{x-2}$; 6) $\frac{4-x}{3-x}$;

2) $\frac{4}{x+1}$; 7) $\frac{1}{x-a}$;

3) $\frac{2x}{x-3}$; 8) $\frac{1}{x+b}$;

4) $\frac{x+1}{2x-4}$; 9) $\frac{1}{x^2-1}$;

5) $\frac{x+1}{x-1}$; 10) $\frac{1}{(x+1)(x-2)}$?

6.4. Изменится ли значение дроби, если каждое из значений x и y удвоить:

1) $\frac{x-y}{x+y}$; 2) $\frac{x^2}{y}$; 3) $\frac{3x^2}{y}$; 4) $\frac{4x^2-y^2}{x^2+y^2}$?

6.5. Сократите дробь:

1) $\frac{15a}{20b}$; 3) $\frac{6xy}{8x}$; 5) $\frac{8bx}{16by}$; 7) $\frac{24m^3}{16m^2n}$; 9) $\frac{8a^2y^2}{24ay}$;

2) $\frac{ab}{ac}$; 4) $\frac{10mn}{15mp}$; 6) $\frac{2a^2}{3ab}$; 8) $\frac{-2xy}{5x^2y}$; 10) $\frac{63a^2b^2}{42a^6b^4}$.

6.6. Запишите частное в виде дроби и сократите дробь:

1) $4a^2b^2 : (2a^4b^2)$;
2) $24p^4q^4 : (48p^4q^2)$;
3) $-ax^2 : (xy)$;
4) $3xy^2 : (6x^3y^3)$;
5) $36nm^2 : (18mn)$;
6) $-6ax : (-18ax)$;
7) $6ab^2 : (9bc^2)$;
8) $3axy : (6ay^3)$;
9) $-32b^5c : (12b^4 \cdot c^2)$;
10) $(6xy-18x^2) : (y-3x)^3$.

6.7. Сократите дробь:

1) $\frac{3a+12b}{6ab}$; 4) $\frac{15x(y+2)}{6y+12}$; 7) $\frac{y^2-16}{3y+12}$; 10) $\frac{6cb-18c^2}{(b-3c)^3}$;

2) $\frac{15b-20c}{10b}$; 5) $\frac{a-3b}{a^2+3ab}$; 8) $\frac{5x-15y}{x^2-9y^2}$; 11) $\frac{(a+5)^2}{a^2-25}$;

3) $\frac{2a-4}{3(a-2)}$; 6) $\frac{3x^2+15xy}{x+5y}$; 9) $\frac{(c+2)^2}{7c^2+14c}$; 12) $\frac{a^3-b^3}{a-b}$.

6.8. Найдите значение дроби:

1) $\frac{15a^2-10ab}{3ab-2b^2}$ при $a=-2$; $b=-0{,}1$; 2) $\frac{9c^2-4b^2}{18c^2-12bc}$ при $b=0{,}5$, $c=\frac{2}{3}$.

6.9. Сократите дробь:

1) $\frac{3a(a+b)^2}{9a^2(a+b)}$; 3) $\frac{7a^3b^3(a+b)}{21a^2b^3(a+b)^3}$; 5) $\frac{x(y-z)^2}{x(y-z)}$;

2) $\frac{10a^2b(x-y)^2}{15a^4b(x-y)^3}$; 4) $\frac{3(a-b)(a-c)^2}{6(a-b)(a-c)}$; 6) $\frac{8m(a+b)}{4m(a+b)}$.

6.10. Не изменяя значения дроби, преобразуйте ее так, чтобы числитель и знаменатель дроби не содержали знака «минус»:

1) $\frac{-2x}{-5y}$; 3) $-\frac{-3m}{4n}$; 5) $-\frac{3a^2b}{-10m}$;

2) $\frac{8c^2}{-15x}$; 4) $-\frac{-a}{-b}$; 6) $-\frac{-5ab}{8cd}$.

B

6.11. Докажите справедливость равенства:

1) $\frac{x-2}{y-4}=\frac{2-x}{4-y}=-\frac{x-2}{4-y}=-\frac{2-x}{y-4}$;

2) $\frac{m}{(x-m)(x-n)}=\frac{m}{(m-x)(n-x)}=-\frac{m}{(x-m)(n-x)}$.

В упражнениях **6.12–6.19** сократите дроби.

6.12. 1) $\frac{x+x^2}{x^2-1}$; 2) $\frac{a-a^2}{a^2-1}$; 3) $\frac{(a-b)^2}{b^2-a^2}$; 4) $\frac{m^2-n^2}{(n+m)^2}$.

6.13. 1) $\frac{a^2-1}{1-a}$; 2) $\frac{m-n}{(n-m)^2}$; 3) $\frac{(x+1)^2}{x^2-1}$; 4) $\frac{a^2-1}{(a-1)^2}$.

6.14. 1) $\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2}$; 3) $\frac{3a^2-6ab+3b^2}{6a^2-6b^2}$;

2) $\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$; 4) $\frac{5m^2+10mn+5n^2}{15m^2-15n^2}$.

6.15. 1) $\frac{x^3+y^3}{x^2-y^2}$; 2) $\frac{m^3-n^3}{m^2-n^2}$; 3) $\frac{2a^3-2b^3}{5a^2-5b^2}$; 4) $\frac{3p^2-3q^2}{6p^3+6q^3}$.

6.16. 1) $\frac{a^4-b^4}{a^2+b^2}$; 2) $\frac{x^4-y^4}{x^2-y^2}$; 3) $\frac{a^3-b^3}{a^4-b^4}$; 4) $\frac{a^2+ab+b^2}{a^3-b^3}$.

6.17. 1) $\frac{5a^3b+5ab^3}{a^4-b^4}$; 2) $\frac{a^4-b^4}{ab^2-a^3}$; 3) $\frac{2a+4}{a^3+8}$; 4) $\frac{a^4-b^4}{a^3-b^3}$.

6.18. 1) $\frac{a^2+2ab+b^2}{2a^4-2b^4}$; 2) $\frac{1-2x+x^2}{x^2-1}$; 3) $\frac{3n^2-3m^2}{6m^3+6n^3}$; 4) $\frac{a^4-b^4}{a^2-b^2}$.

6.19. 1) $\frac{x^6+x^4}{x^4+x^2}$; 2) $\frac{x^6-x^8}{x^4-x^2}$; 3) $\frac{m^7-m^{10}}{m^9-m^3}$; 4) $\frac{a^6-a^4}{a^3+a^2}$.

6.20. Приведите дроби $\frac{5b}{8a^3}$; $\frac{7a}{3b^2}$; $\frac{1}{2ab}$; $\frac{2}{a^2b^2}$ к знаменателю $24a^3b^2$.

6.21. Упростите дробь и найдите числовое значение выражения:

1) $\frac{a^2-8a+16}{ax-4x}$ при $a=-5$, $x=-2$; 2) $\frac{3x^2-xy}{9x^2-6xy+y^2}$ при $x=\frac{3}{4}$, $y=-\frac{2}{3}$.

6.22. Решите уравнение относительно x:

1) $ax-2x=a^2-4$; $a\neq 2$; 3) $cbx-abx=b^2c-ab^2$; $b\neq 0$, $a\neq c$;

2) $cx-dx=5c-5d$; $c\neq d$; 4) $ax-bx=a^2-b^2$; $a\neq b$.

C

6.23. Сократите дробь:

1) $\frac{ax+ay-bx-by}{ax-ay-bx+by}$; 3) $\frac{ab+ac+b^2+bc}{ax+ay+bx+by}$;

2) $\frac{ac-bc+ad-bd}{ac+bc+ad+bd}$; 4) $\frac{(a+b)^2-c^2}{a+b+c}$.

6.24. Упростите выражение:

1) $\frac{m^2+n^2-k^2+2mn}{m^2-n^2+k^2+2mk}$; 3) $\frac{1-3b+3b^2-b^3}{c-cb+a-ab}$;

2) $\frac{a^3-a^2-a+1}{a^4-2a^2+1}$; 4) $\frac{x^2-ax+bx-ab}{x^3+bx^2+ax+ab}$.

6.25. Упростите дробь и найдите значение выражения:

1) $\frac{(a+b)^2-c^2}{a+b+c}$ при $a=-3$, $b=5$, $c=3{,}4$; 2) $\frac{x^3+x^2y}{x^2+2xy+y^2}$ при $x=3$, $y=-2$.

6.26. Докажите тождество:

1) $\frac{ac+bx+ax+bc}{ay+2bx+2ax+by}=\frac{x+c}{2x+y}$;

2) $\frac{x-xy+z-zy}{1-3y+3y^2-y^3}=\frac{x+z}{(1-y)^2}$;

3) $\frac{3a^3+ab^2-6a^2b-2b^3}{9a^5-ab^4-18a^4b+2b^5}=\frac{1}{3a^2-b^2}$.

6.27. Решите уравнение:

1) $a^2x-b^2x=a^2+2ab+b^2$; 3) $ax+x=a^2+2a+1$;

2) $3mx+3nx=6m^2-6n^2$; 4) $m^2x+2mnx+n^2x=3m^2-3n^2$.

6.28. Сократите дробь:

1) $\dfrac{a^2+5a+6}{a^2+4a+4}$; 2) $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+6x+5}$; 3) $\dfrac{m^2+2m+1}{m^2+8m+7}$.

6.29. Упростите выражение:

1) $\dfrac{a^2-7a+12}{a^2-6a+9}$; 2) $\dfrac{2xy-x^2-y^2+a^2}{x^2+a^2-y^2+2ax}$; 3) $\dfrac{m^3-m^2n+mn^2}{m^3+n^3}$.

6.2. Сумма и разность рациональных выражений

6.2.1. Сумма и разность дробей с одинаковыми знаменателями. Как мы знаем, при сложении дробей с одинаковыми знаменателями складываются их числители, а знаменатель остается без изменения: $\dfrac{2}{7}+\dfrac{3}{7}=\dfrac{2+3}{7}=\dfrac{5}{7}$.

Дробные выражения с одинаковыми знаменателями складываются так же:

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}. \qquad (1)$$

Докажем тождество (1). Пусть $\dfrac{a}{c}=m$ и $\dfrac{b}{c}=n$. Тогда $a=cm$ и $b=cn$. Отсюда $a+b=cm+cn=c(m+n)$. Так как $c\neq 0$, то по определению частного имеем $\dfrac{a+b}{c}=m+n$.

С другой стороны, $\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}=m+n$. Следовательно, $\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}=m+n=\dfrac{a+b}{c}$.

Аналогично для любых двух дробных выражений $\dfrac{a}{c}$ и $\dfrac{b}{c}$ с одинаковыми знаменателями верно тождество

$$\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}. \qquad (2)$$

Действительно,

$$\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{(-b)}{c}=\frac{a+(-b)}{c}=\frac{a-b}{c}.$$

Получим правила, данные ниже.

Чтобы сложить дробные выражения с одинаковыми знаменателями, нужно сложить их числители и результат разделить на знаменатель, оставшийся без изменения.

Чтобы найти разность дробных выражений с одинаковыми знаменателями, нужно вычесть из числителя первого выражения числитель второго выражения и результат разделить на знаменатель, оставшийся без изменения.

Пример 1. Сложим дроби $\dfrac{3a-7b}{15ab}$ и $\dfrac{2a+2b}{15ab}$.

$$\frac{3a-7b}{15ab}+\frac{2a+2b}{15ab}=\frac{3a-7b+2a+2b}{15ab}=\frac{5a-5b}{15ab}=\frac{5(a-b)}{15ab}=\frac{a-b}{3ab}.$$

Пример 2 . Вычтем из дроби $\dfrac{a^2+9}{5a-15}$ дробь $\dfrac{6a}{5a-15}$.

$$\frac{a^2+9}{5a-15}-\frac{6a}{5a-15}=\frac{a^2+9-6a}{5a-15}=\frac{(a-3)^2}{5(a-3)}=\frac{a-3}{5}.$$

6.2.2. Сумма и разность дробей с разными знаменателями. При сложении дробей с разными знаменателями сначала приводят их к общему знаменателю, а затем складывают по формуле (1). Аналогично складывают и дробные выражения.

Чтобы сложить дробные выражения с разными знаменателями, их знаменатели приводят к общему знаменателю, затем складывают их, как складывали дробные выражения с одинаковыми знаменателями:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}. \qquad (3)$$

Доказательство тождества (3). Так как $b\neq 0$, $d\neq 0$, то по основному свойству дробных выражений имеем:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{cb}{db}=\frac{ad+bc}{bd}.$$

Аналогично находится и разность дробных выражений.

Чтобы найти разность дробных выражений с разными знаменателями, нужно привести их знаменатели к общему знаменателю, а затем найти их разность как разность дробных выражений с одинаковыми знаменателями:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}. \qquad (4)$$

Эта формула доказывается так же, как формула (3).

Пример 3. Найдем сумму дробей $\frac{x}{4a^3b}$ и $\frac{5}{6ab^4}$.

Знаменатели этих дробей приведем к виду $12a^3b^4$. Тогда:

$$\frac{x}{4a^3b} + \frac{5}{6ab^4} = \frac{x \cdot 3b^3}{4a^3b \cdot 3b^3} + \frac{5 \cdot 2a^2}{6ab^4 \cdot 2a^2} = \frac{3xb^3}{12a^3b^4} + \frac{10a^2}{12a^3b^4} = \frac{3xb^3 + 10a^2}{12a^3b^4}.$$

Пример 4. Найдем разность дробей $\frac{a+3}{a^2+ab}$ и $\frac{b-3}{ab+b^2}$.

$$\frac{a+3}{a^2+ab} - \frac{b-3}{ab+b^2} = \frac{a+3}{a(a+b)} - \frac{b-3}{b(a+b)} = \frac{b(a+3)}{ab(a+b)} - \frac{a(b-3)}{ab(a+b)} =$$

$$= \frac{ab+3b-ab+3a}{ab(a+b)} = \frac{3a+3b}{ab(a+b)} = \frac{3(a+b)}{ab(a+b)} = \frac{3}{ab}.$$

Пример 5. Упростим выражение $a - 1 - \frac{a^2-3}{a+1}$.

$$a - 1 - \frac{a^2-3}{a+1} = \frac{a-1}{1} - \frac{a^2-3}{a+1} = \frac{(a-1)(a+1) - (a^2-3)}{a+1} =$$
$$= \frac{a^2 - 1 - a^2 + 3}{a+1} = \frac{2}{a+1}.$$

?

1. Как сложить дробные выражения с одинаковыми знаменателями?
2. Как найти разность дробных выражений с одинаковыми знаменателями?
3. Докажите формулы (1) и (2).
4. Как сложить дробные выражения с разными знаменателями?
5. Как найти разность дробных выражений с разными знаменателями?
6. Докажите формулы (3) и (4).

Упражнения

А

В упражнениях **6.30–6.39** выполните указанные действия.

6.30. 1) $\frac{x-3}{4} + \frac{a+1}{4}$; 3) $\frac{5x+1}{2} - \frac{x}{2}$; 5) $\frac{3p-2q}{m} - \frac{p-q}{m}$;

2) $\frac{m+n}{a} - \frac{m-n}{a}$; 4) $\frac{x-1}{4} + \frac{x+2}{4} - \frac{x-3}{4}$; 6) $\frac{2a+1}{b} + \frac{3a+1}{b} - \frac{a-2}{b}$.

6.31. 1) $\dfrac{a+b}{x+a}+\dfrac{a-b}{x+a}$; 3) $\dfrac{1-x}{m-n}-\dfrac{1-3x}{m-n}$;

2) $\dfrac{b+4}{a-2}+\dfrac{b+3}{a-2}$; 4) $\dfrac{3a+1}{a+b}-\dfrac{2a+3}{a+b}$.

6.32. 1) $\dfrac{a-x}{m}+\dfrac{b+x}{m}$; 3) $\dfrac{x-bp}{p}-\dfrac{x+bp}{p}$;

2) $\dfrac{a-3b}{n}+\dfrac{4b-a}{n}$; 4) $\dfrac{c+qy}{q}-\dfrac{c-2qy}{q}$.

6.33. 1) $\dfrac{ax-y}{a+b}+\dfrac{y+bx}{a+b}$; 3) $\dfrac{px-3q}{x-y}+\dfrac{py-3q}{y-x}$.

2) $\dfrac{n+mx}{m+3}-\dfrac{n-3x}{m+3}$; 4) $\dfrac{2cx+b}{2c-3}+\dfrac{3x+b}{3-2c}$.

6.34. 1) $\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{1-x}$; 3) $\dfrac{x}{2m-n}+\dfrac{y}{n-2m}$;

2) $\dfrac{2x}{a-b}-\dfrac{x}{b-a}$; 4) $\dfrac{5b^2}{x-2}-\dfrac{2b^2}{2-x}$.

6.35. 1) $\dfrac{a}{x^2-1}-\dfrac{b}{1-x^2}$; 3) $\dfrac{a}{x-y}-\dfrac{b}{y-x}+\dfrac{c}{x-y}$;

2) $\dfrac{c+d}{c^2-b^2}+\dfrac{c-d}{b^2-c^2}$; 4) $\dfrac{x+1}{a-b}-\dfrac{x+2}{b-a}-\dfrac{x-1}{a-b}$.

6.36. 1) $\dfrac{1}{4x}+\dfrac{1}{2y}$; 2) $\dfrac{5}{3a}-\dfrac{2}{9b}$; 3) $\dfrac{a}{6m}+\dfrac{b}{8n}$; 4) $\dfrac{x}{12a}-\dfrac{y}{18b}$.

6.37. 1) $\dfrac{x}{ab}+\dfrac{x}{ac}$; 2) $\dfrac{a}{xy}-\dfrac{b}{xz}$; 3) $\dfrac{2m}{ax}+\dfrac{3n}{bx}$; 4) $\dfrac{5a}{mn}-\dfrac{3b}{mp}$.

6.38. 1) $\dfrac{2x-3y}{x}+\dfrac{4x^2-5y^2}{xy}$; 3) $\dfrac{2b^2+3ax}{bx}-\dfrac{ab+5bx}{ax}$;

2) $\dfrac{5a^2-b^2}{ab}-\dfrac{3a-2b}{b}$; 4) $\dfrac{3p^2+5mn}{mp}+\dfrac{n^2-3mp}{np}$.

6.39. 1) $\dfrac{2a}{x^2}-\dfrac{3}{x}$; 2) $\dfrac{5x}{a^2}-\dfrac{2y}{a^3}$; 3) $\dfrac{1}{m^4n^3}+\dfrac{2}{m^3n^4}$; 4) $\dfrac{3}{x^3y^3}-\dfrac{4}{x^4y^2}$.

6.40. Выделите целую часть дроби:

1) *Образец*: $\frac{a+3}{a}=\frac{a}{a}+\frac{3}{a}=1+\frac{3}{a}$;

2) $\frac{x+c^2}{c^2}$;

3) $\frac{m^2-2m+4}{m}$;

4) $\frac{a^2+3a-6}{a}$.

B

6.41. При каких натуральных n значение дроби равно натуральному числу:

1) $\frac{n+12}{n}$; 2) $\frac{5n-9}{n}$; 3) $\frac{n^2+2n+3}{n}$?

6.42. Упростите выражение:

1) $\frac{a}{2x}-\frac{b}{3x^2}$;

2) $\frac{5x}{ab}+\frac{2y}{3a^2b}-\frac{3}{6a^2b^2}$;

3) $\frac{3x}{4a^2b}+\frac{5x}{2ab^2}-\frac{7}{6a^2b}$;

4) $\frac{5a}{6b^2c}-\frac{7b}{12ac^2}+\frac{11c}{18a^2b}$.

6.43. Упростите выражение:

1) $\frac{2a-3b}{a^2b}-\frac{4a-5b}{ab^2}$;

2) $\frac{5x^2-3y}{x^2y}+\frac{6x-2y^2}{x^2y^2}$;

3) $\frac{5(2a-b)}{8}-\frac{3(a-4b)}{2}+\frac{7(a-b)}{6}$;

4) $\frac{(x+y)^2}{6}+\frac{(x-y)^2}{12}-\frac{x^2-y^2}{4}$.

6.44. Преобразуйте выражение в дробь:

1) $m+\frac{1}{n}$;

2) $\frac{x}{y}-x$;

3) $\frac{a^2+b}{a}-a$;

4) $a+\frac{a-ab}{b}$;

5) $\frac{2a^2b-b}{a}-ab$;

6) $a-\frac{b}{x}-\frac{a}{x^2}$;

7) $5-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$;

8) $a-\frac{a-1}{2}+\frac{a-2}{3}$.

6.45. Решите уравнение:

1) $\frac{x}{4}+\frac{x}{3}=7$; 2) $\frac{2x}{5}+\frac{x}{2}=9$; 3) $\frac{5x}{4}-\frac{x}{2}=3$;

4) $\frac{4x}{5}-\frac{x}{10}=7$; 5) $\frac{3x}{4}+\frac{5x}{6}=38$; 6) $\frac{2x}{3}+\frac{5x}{2}=19$.

6.46. Найдите значение выражения:

1) $\frac{a^2+1}{a-3}-\frac{10}{a-3}$ при $a=97$; 2) $\frac{x+7}{x^2-25}-\frac{2x+2}{x^2-25}$ при $x=-5,1$.

В упражнениях **6.47–6.56** выполните указанные действия.

6.47. 1) $\frac{3}{x+y}-\frac{5}{x}$; 2) $\frac{4}{a-b}+\frac{1}{a}$; 3) $\frac{6}{m-1}-\frac{2}{m}$; 4) $\frac{1}{b+2}-\frac{3}{b}$.

6.48. 1) $\frac{7x}{2(x-1)}+\frac{5x}{x-1}$; 3) $\frac{2a^2}{3(a+1)}+\frac{5a^2}{4(a+1)}$;

2) $\frac{9a}{4(a+2)}-\frac{1}{a+2}$; 4) $\frac{4x}{5(x-3)}-\frac{3x}{2(x-3)}$.

6.49. 1) $\frac{1}{2a-b}-\frac{1}{2a+b}$; 3) $\frac{5}{x-y}-\frac{3}{x+y}$;

2) $\frac{1}{3m-n}+\frac{1}{3m+n}$; 4) $\frac{4}{p+q}+\frac{2}{p-q}$.

6.50. 1) $\frac{2m}{5m+5n}+\frac{3n}{5m-5n}$; 3) $\frac{5b}{ax+ay}-\frac{2a}{bx+by}$;

2) $\frac{7x}{3x+3y}-\frac{2x}{3x-3y}$; 4) $\frac{3x}{4x+4y}-\frac{6x}{8x+8y}$.

6.51. 1) $\frac{7a}{x^2-9}+\frac{5a}{x-3}+\frac{a}{x+3}$; 3) $\frac{a}{1-b}-\frac{a}{1+b}+\frac{a}{1-b^2}$;

2) $\frac{4}{x+2}+\frac{3}{x-2}-\frac{x+2}{x^2-4}$; 4) $\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a-2}-\frac{4}{a^2-4}$.

6.52. 1) $\frac{3}{2m+6}-\frac{m-2}{m^2+6m+9}$; 3) $\frac{1}{2x+2}-\frac{x-1}{3x^2+6x+3}$;

2) $\frac{5-a}{a^2-8a+16}+\frac{6}{5a-20}$; 4) $\frac{4}{3m-3n}+\frac{3m-n}{2m^2-4mn+2n^2}$.

C

6.53. 1) $\frac{1}{x-2a}+\frac{1}{x+2a}+\frac{8a^2}{4a^2x-x^3}$; 3) $\frac{4a^2-3a+5}{a^3-1}-\frac{1-2a}{a^2+a+1}+\frac{6}{1-a}$;

2) $\frac{4x-3}{3-2x}-\frac{4+5x}{3+2x}-\frac{3+x-10x^2}{4x^2-9}$; 4) $\frac{2a-1}{2a}-\frac{2a}{2a-1}-\frac{1}{2a-4a^2}$.

6.54. 1) $\frac{1}{6x-4y}-\frac{1}{6x+4y}-\frac{3x}{4y^2-9x^2}$;

2) $\frac{3a+2}{a^2-2a+1}-\frac{6}{a^2-1}-\frac{3a-2}{a^2+2a+1}$;

3) $\frac{3}{x^2+2xy+y^2}-\frac{4}{x^2-2xy+y^2}+\frac{5}{x^2-y^2}$;

4) $\frac{1}{a-b}-\frac{3ab}{a^3-b^3}-\frac{b-a}{a^2+ab+b^2}$.

6.55*. 1) $\frac{1}{(a-b)(b-c)}-\frac{1}{(b-c)(a-c)}-\frac{1}{(c-a)(b-a)}$;

2) $\frac{x-y}{(z-x)(z-y)}-\frac{y-z}{(x-y)(x-z)}+\frac{z-x}{(y-x)(y-z)}$.

6.56*. 1) $\frac{1}{a(a-b)(a-c)}+\frac{1}{b(b-a)(b-c)}+\frac{1}{c(c-a)(c-b)}$;

2) $\frac{x^2}{(x-y)(x-u)}+\frac{y^2}{(y-x)(y-u)}+\frac{u^2}{(u-x)(u-y)}$.

6.57. Докажите тождество:

1) $\frac{1}{(a-b)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(a-b)}+\frac{1}{(b-c)(c-a)}=0$;

2) $\frac{ax+by}{(a-b)(x+y)}-\frac{bx-ay}{(a+b)(x+y)}=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$.

6.58. Зная, что $\frac{x}{y}=5$, найдите значение выражения:

1) $\frac{x+y}{y}$; 2) $\frac{x-y}{y}$; 3) $\frac{y}{x}$; 4) $\frac{x+2y}{x}$.

6.59. Зная, что $\frac{x+y}{y}=2$, найдите значение выражения:

1) $\frac{x}{y}$; 2) $\frac{y}{x+y}$; 3) $\frac{x-y}{x}$; 4) $\frac{y}{x}$.

6.60. Учитывая, что $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq b$ и $\frac{a^2-2b}{a(1-2b)}=\frac{b^2-2a}{b(1-2a)}$, докажите справедливость равенства $a+b+1,5=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

6.61. Найдите отношение суммы кубов трех последовательных натуральных чисел, минус утроенное произведение этих чисел к среднему арифметическому данных чисел.

Упражнения для повторения

6.62. Постройте график функции, заданной формулой:

1) $y=2x+1$; 2) $y=\frac{1}{2}x^2$; 3) $y=-\frac{1}{3}x^3$.

6.63. Разложите на множители:

1) $a^2+b^2-2ab-c^2$; 2) a^2-16+b^2-2ab.

6.64. Решите уравнение:

$12x^2-5x+(1+3x)(1-3x)-3(x-2)(x+3)-6=21$.

6.3. Умножение и деление рациональных выражений

6.3.1. Умножение дробей. Произведение дробных выражений $\frac{a}{b}$ и $\frac{m}{n}$ находят по формуле

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{m}{n}=\frac{a\cdot m}{b\cdot n}. \quad (1)$$

Действительно, пусть $\frac{a}{b}=p$, $\frac{m}{n}=q$. Отсюда имеем: $a=bp$, $m=nq$ и $am=(bp)(nq)=(bn)(pq)$. Так как $b \neq 0$, $n \neq 0$ и тем самым $bn \neq 0$, по определению частного имеем $\frac{am}{bn}=pq$.

С другой стороны $\frac{a}{b}\cdot\frac{m}{n}=pq$, т.е. верна формула (1). Получим правило, данное ниже.

Чтобы перемножить дробные выражения, нужно перемножить отдельно их числители и знаменатели и первое произведение записать числителем, а второе – знаменателем.

Пример 1. Перемножим дробные выражения $\frac{a^3}{4b^2}$ и $\frac{6b}{a^2}$.

$$\frac{a^3}{4b^2}\cdot\frac{6b}{a^2}=\frac{a^3\cdot 6b}{4b^2\cdot a^2}=\frac{3a}{2b}.$$

Пример 2. Умножим дробь $\frac{pm+2p}{m}$ на дробь $\frac{pm^2}{m^2-4}$.

$$\frac{pm+2p}{m}\cdot\frac{pm^2}{m^2-4}=\frac{(pm+2p)\cdot pm^2}{m(m^2-4)}=\frac{p^2m(m+2)}{(m-2)(m+2)}=\frac{p^2m}{m-2}.$$

Пример 3. Умножим дробь $\frac{x+a}{x-a}$ на двучлен x^2-a^2.

$$\frac{x+a}{x-a}\cdot(x^2-a^2)=\frac{x+a}{x-a}\cdot\frac{x^2-a^2}{1}=\frac{(x+a)(x^2-a^2)}{x-a}=$$

$$=\frac{(x+a)(x+a)(x-a)}{x-a}=(x+a)^2.$$

6.3.2. Деление дробей. Деление дробного выражения $\frac{a}{b}$ на дробное выражение $\frac{m}{n}$ $(m\neq 0)$ выполняют по формуле

$$\frac{a}{b}:\frac{m}{n}=\frac{a}{b}\cdot\frac{n}{m}=\frac{an}{bm}. \qquad (2)$$

Получим правило, данное ниже.

Чтобы разделить одно дробное выражение на другое, нужно делимое умножить на дробь, обратную делителю.

Пример 4. Разделим дробь $\frac{7a^2}{b^2}$ на дробь $\frac{14a}{b}$.

$$\frac{7a^2}{b^2}:\frac{14a}{b}=\frac{7a^2}{b^2}\cdot\frac{b}{14a}=\frac{7a^2b}{b^2 14a}=\frac{a}{2b}.$$

Пример 5. Разделим дробь $\frac{a^2-9}{3y}$ на двучлен $a+3$.

$$\frac{a^2-9}{3y}:(a+3)=\frac{a^2-9}{3y}:\frac{a+3}{1}=\frac{a^2-9}{3y}\cdot\frac{1}{a+3}=\frac{(a-3)(a+3)}{3y(a+3)}=\frac{a-3}{3y}$$

?

1. Как умножить одно дробное выражение на другое дробное выражение?
2. Докажите формулу (1).

3. Как разделить одно дробное выражение на другое дробное выражение?
4. Докажите формулу (2).

Упражнения

A

В упражнениях **6.65–6.78** выполните указанные действия.

6.65. 1) $\frac{18}{35}\cdot\frac{5}{6}$; 3) $\frac{a}{b}:\frac{m}{n}$; 5) $\frac{1}{a}:b$; 7) $\frac{1}{m}\cdot n$;

2) $\frac{5}{6}:\frac{2}{3}$; 4) $\frac{x}{y}\cdot\frac{p}{q}$; 6) $c:\frac{1}{x}$; 8) $2\cdot\frac{1}{a}$.

6.66. 1) $\frac{9a}{16b}\cdot\frac{2}{3}$; 3) $\frac{8c}{21d^2}:\frac{6c^2}{7d}$; 5) $\frac{x^4}{y^3}\cdot\frac{y^2}{x^3}$; 7) $\frac{12ab}{25c}:8a^2$;

2) $3m\cdot\frac{n}{12m}$; 4) $5a:\frac{15a}{b}$; 6) $\frac{3mn}{4ab}\cdot\frac{10a^2b^2}{21m^2n}$; 8) $\frac{5c}{28a^2}\cdot 21ac$.

6.67. 1) $\frac{5}{4x}\cdot\frac{2x}{3}$; 3) $\frac{6b}{7y}\cdot\frac{14}{3b}$; 5) $\frac{9}{2m}\cdot\frac{5m}{3}$;

2) $\frac{a^2}{8}\cdot\frac{4}{a}$; 4) $\frac{p^2}{18}\cdot\frac{36}{p}$; 6) $\frac{12}{7p}\cdot\frac{p^3}{12q}$.

6.68. 1) $\frac{48a^4}{49b^4}\cdot\frac{7b^2}{16a^2}$; 3) $\frac{25y^2}{16x}:\frac{y^3}{x^2}$;

2) $\frac{2n}{5m^3}\cdot 10m^5$; 4) $6xy^2:\frac{3y^2}{4x}$.

6.69. 1) $\frac{72a^4}{25b^5}\cdot\left(-\frac{5b^4}{27a^5}\right)$; 3) $\frac{11a}{4b^2}:(22a^2)$;

2) $-\frac{15m^4}{8n^6}\cdot\frac{16n^5}{25m^3}$; 4) $\frac{9p^2}{20q^3}:\frac{p^5}{16q}$.

6.70. 1) $-\frac{18x^2y^2}{5abm}:\left(-\frac{9xy^3}{5a^2m^4}\right)$; 3) $\frac{13a}{12xy^2}\cdot 4x^2y$; 5) $6ax^2:\frac{3x^2}{4a}$;

2) $35m^2n:\frac{7m^3}{24}$; 4) $-\frac{18p^3}{11q^3}:\frac{9p^2}{22q^4}$. 6) $\frac{x^2y^2}{11ab^2}:\left(-\frac{4xy^3}{33ab}\right)$.

6.71. 1) $8x^2y^4\cdot\left(-\frac{3x}{4y^3}\right)$; 2) $-\frac{18x^2y^2}{5ab}:\frac{6xy^3}{5a^2b^2}$; 3) $16a^2b^3:\left(-\frac{20a^5b^4}{3x^2y}\right)$;

4) $-\dfrac{25x^4y^3}{14m^2}\cdot\left(-\dfrac{21mn}{10x^3y^2}\right)$; 5) $\dfrac{a^2-ab}{b}\cdot\dfrac{b^2}{a}$; 6) $\dfrac{ab+b^2}{9}\cdot\dfrac{3a}{b^2}$.

6.72. 1) $\dfrac{a^2-b^2}{6a^2b^2}:\dfrac{a+b}{3ab}$; 3) $\dfrac{a^2b-4b^3}{3ab^2}\cdot\dfrac{a^2b}{a^2-2ab}$; 5) $\dfrac{x^2-xy}{x^2+xy}\cdot\dfrac{x^2y+xy^2}{xy}$;

2) $\dfrac{x^2+xy}{x}:\dfrac{xy+y^2}{y}$; 4) $\dfrac{4m^2-9n^2}{m^2n^2}:\dfrac{2am+3an}{2mn}$; 6) $\dfrac{c+d}{c-d}:\dfrac{c^2+cd}{2c^2-2d^2}$.

B

6.73. 1) $\dfrac{(a+3)^2}{2a-4}\cdot\dfrac{a^2-4}{3a+9}$; 3) $\dfrac{p^2-q^2}{2pq}\cdot\dfrac{4p}{p+q}$; 5) $\dfrac{3x^2-3y^2}{x^2+ax}:\dfrac{6x-6y}{x+a}$;

2) $\dfrac{m^2-4n^2}{mn}:\dfrac{m^2-4n^2}{3n}$; 4) $\dfrac{x^2+4x}{x^2-4}:\dfrac{3x+12}{x-2}$; 6) $(2x-u)^2:\dfrac{4x^3-xu^2}{3}$.

6.74. 1) $\dfrac{ab^2-ac^2}{2a+8}\cdot\dfrac{3a+12}{ab+ac}$; 3) $\dfrac{m^3-n^3}{m+n}\cdot\dfrac{m^2-n^2}{m^2+mn+n^2}$;

2) $\dfrac{4x^2-25y^2}{x^3+8}:\dfrac{2x+5y}{x^2-2x+4}$; 4) $\dfrac{p^2+pq+q^2}{p-1}:\dfrac{p^3-q^3}{p^2-1}$.

6.75. 1) $\dfrac{9xy}{5ab}\cdot\dfrac{3ab}{4yz}\cdot\dfrac{4bz}{3axy}$; 3) $\left(\dfrac{8b^2cd}{9a^5}:\dfrac{7cd}{12a^3}\right)\cdot\dfrac{28a^4}{3b^2}$;

2) $\left(\dfrac{2ax}{yz}:\dfrac{3bx}{ay}\right):\dfrac{9b^2z}{8a^2xy}$; 4) $\left(\dfrac{3p^2mq}{2a^2b^2}\cdot\dfrac{3abc}{8x^2y^2}\right):\dfrac{9a^2b^2c^3}{28pxy}$.

6.76. 1) $\dfrac{m^5+m^4+m^3}{m^3+m^2}\cdot\dfrac{m^5+m^4}{m^4+m^3+m^2}$; 3) $\dfrac{a-a^3}{a^6+a^2}\cdot\dfrac{a^5-a}{a^5+a}$;

2) $\dfrac{n^2-n^4+n^6}{1-n}\cdot\dfrac{n^2-1}{n^5-n^3+n}$; 4) $\dfrac{9x^2-x^6}{x^5+x^7}:\dfrac{x^4-3x^2}{x^9+x^7}$.

6.77. 1) $\dfrac{a^2+ax+ab+bx}{a^2-ax-ab+bx}\cdot\dfrac{a^2-ax-bx+ab}{a^2+ax-bx-ab}$;

2) $\dfrac{x^2+ax-3x-3a}{x^2-ax-3x+3a}\cdot\dfrac{x^2+4x-ax-4a}{x^2+4x+ax+4a}$;

3) $\dfrac{x^2-bx+ax-ab}{x^2+bx-ax-ab}:\dfrac{x^2+bx+ax+ab}{x^2-bx-ax+ab}$;

4) $\dfrac{m^2+m-mn-n}{m^2+m+mn+n}:\dfrac{m^2-m-mn+n}{m^2-m+mn-n}$.

6.78. 1) $\left(a+\dfrac{a-b}{a+b}-b\right):\left(\dfrac{2a+1}{a^2-b^2}+1\right)$; 3) $\dfrac{x-1}{x}\cdot\dfrac{x+1}{x}\cdot\dfrac{x^2+1}{x^2}\cdot\dfrac{x^4}{x^4-1}$;

2) $\left(x-\dfrac{x+y}{x-y}+y\right):\left(1-\dfrac{2y+1}{x^2-y^2}\right)$; 4) $\left(\left(\dfrac{1-a}{a}:\dfrac{a}{1+a}\right):\dfrac{a^2}{1+a^2}\right):\dfrac{a^4-1}{a^4}$.

6.79. Докажите, что при $x\neq y, x\neq 0, y\neq 0$ выражение $\dfrac{2}{xy}:\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}\right)^2-$ $-\dfrac{x^2+y^2}{(x-y)^2}$ не зависит от значения переменных.

6.80. Докажите тождество:

1) $\left(a-\dfrac{a^2+x^2}{a+x}\right)\left(\dfrac{2a}{x}+\dfrac{4a}{a-x}\right)=2a$; 2) $\dfrac{am^2-an^2}{m^2+2mn+n^2}:\dfrac{am^2-2amn+an^2}{3m+3n}=\dfrac{3}{m-n}$.

C

В упражнениях **6.81–6.84** упростите выражения.

6.81. 1) $\dfrac{3a^2+3ab+3b^2}{4a+4b}\cdot\dfrac{2a^2-2b^2}{9a^3-9b^3}$; 3) $\dfrac{a^2-5a+6}{a^2+7a+12}\cdot\dfrac{a^2+3a}{a^2-4a+4}$;

2) $\dfrac{5x^2-10xy+5y^2}{2x^2-2xy+2y^2}:\dfrac{8x-8y}{10x^3+10y^3}$; 4) $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+3x-10}:\dfrac{x^2+7x+12}{x^2-9x+14}$.

6.82. 1) $\dfrac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}$; 2) $\dfrac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}$; 3) $\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2x}}{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2x^2}}$; 4) $\dfrac{a-\frac{x^2}{a}}{x-\frac{a^2}{x}}$.

6.83. 1) $\dfrac{\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1+a}}{\frac{1}{1-a}-\frac{1}{1+a}}$; 2) $\dfrac{\frac{x}{x-1}-\frac{x+1}{x}}{\frac{x}{x+1}-\frac{x-1}{x}}$; 3) $\dfrac{x-\frac{ay}{y-a}}{y-\frac{ax}{x-a}}$.

6.84. 1) $\dfrac{a^2-1}{n^2+an}\cdot\left(\dfrac{1}{1-\frac{1}{n}}-1\right)\cdot\dfrac{a-an^3-n^4+n}{1-a^2}$;

2) $\dfrac{2a^2(a+c)^{2n}-0,5}{an^2-a^3-2a^2-a} : \dfrac{2a(a+c)^n-1}{a^2c-a(nc-c)}$.

6.85. Найдите значение выражения:

1) $\dfrac{ax}{a+x}-\dfrac{bx}{b-x}$ при $x=\dfrac{ab}{a-b}$;

2) $\dfrac{x^2y^2}{x^2-y^2}$ при $x=\dfrac{2ab}{a^2-b^2}$; $y=\dfrac{2ab}{a^2+b^2}$.

6.86. Дано целое число $a+\dfrac{1}{a}$. Докажите, что числа $a^2+\dfrac{1}{a^2}$ и $a^3+\dfrac{1}{a^3}$ также целые.

Упражнения для повторения

6.87. Многочлен x^8-16 представьте в виде произведения многочленов второй степени.

6.88. Решите уравнение:

1) $2x-\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{x}{3}-6$;

2) $0,69=\dfrac{5-2y}{8}\cdot 13,8$;

3) $\dfrac{1-y}{7}+y=\dfrac{y}{2}+3$;

4) $0,5\cdot\dfrac{4+2x}{13}=x-10$.

6.89. Постройте в одной и той же системе координат графики функций $y=x^2$ и $y=x+2$. Найдите с помощью графиков функций координаты точек пересечения этих графиков.

6.90*. Найдите координаты точек пересечения графиков функций, данных в упражнении **6.89,** решая систему уравнений. При этом для нахождения корней многочлена разложите уравнения на множители.

6.91. От села до станции велосипедист ехал со скоростью 15 км/ч, а обратно он возвращался со скоростью 10 км/ч. Найдите расстояние от села до станции, если известно, что на обратный путь велосипедист затратил на 1 ч больше, чем на путь от села до станции.

6.3.3. Тождественное преобразование рациональных выражений. Тождественное преобразование каждого рационального выражения сводится к выполнению действий сложения, вычитания, умножения и деления дробных выражений. Так как в результате указанных действий мы получаем дробное выражение, числитель и знаменатель которого есть многочлены, то любое рациональное выражение также можно представить в виде дроби, числитель и знаменатель которой есть многочлены. Если при этом нужно выполнить несколько преобразований, то предварительно следует определить порядок их выполнения.

Пример 1. Преобразуем выражение

$x+1-\dfrac{1}{x+2}\cdot\dfrac{x^2-4}{x}$ в дробь.

Решение. Сначала выполним действие умножения, а затем полученное произведение вычтем из двучлена $x+1$:

1) $\dfrac{1}{x+2}\cdot\dfrac{x^2-4}{x}=\dfrac{(x-2)(x+2)}{x(x+2)}=\dfrac{x-2}{x}$;

2) $x+1-\dfrac{x-2}{x}=\dfrac{x(x+1)-(x-2)}{x}=\dfrac{x^2+x-x+2}{x}=\dfrac{x^2+2}{x}$.

Значит, $x+1-\dfrac{1}{x+2}\cdot\dfrac{x^2-4}{x}=\dfrac{x^2+2}{x}$.

Пример 2. Упростим выражение

$\left(\dfrac{a-b}{ab}\cdot\dfrac{ab}{a+b}-\dfrac{a+b}{a-b}\right):ab$.

1) $\dfrac{a-b}{ab}\cdot\dfrac{ab}{a+b}=\dfrac{ab(a-b)}{ab(a+b)}=\dfrac{a-b}{a+b}$;

2) $\dfrac{a-b}{a+b}-\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{(a-b)^2-(a+b)^2}{(a+b)(a-b)}=\dfrac{(a-b-a-b)(a-b+a+b)}{a^2-b^2}=-\dfrac{4ab}{a^2-b^2}=\dfrac{4ab}{b^2-a^2}$;

3) $\dfrac{4ab}{b^2-a^2}:ab=\dfrac{4ab}{(b^2-a^2)ab}=\dfrac{4}{b^2-a^2}$.

Упражнения

A

В упражнениях **6.92–6.103** упростите выражения.

6.92. 1) $\left(\dfrac{a}{a+1}+1\right):\left(1-\dfrac{3a^2}{1-a^2}\right)$; 3) $\left(\dfrac{a}{x-a}-\dfrac{a}{x+a}\right)\cdot\dfrac{x^2+2ax+a^2}{2a^2}$;

2) $\left(\dfrac{2m+1}{2m-1}-\dfrac{2m-1}{2m+1}\right):\dfrac{4m}{10m-5}$; 4) $\left(\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y}{x}\right):\left(\dfrac{x}{y^2}-\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}\right)$.

6.93. 1) $\left(\frac{x}{y^2}-\frac{1}{x}\right):\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)$; 3) $\frac{ab+b^2}{3}:\frac{b^3}{3a}+\frac{a+b}{b}$;

2) $\left(\frac{a}{m^2}+\frac{a^2}{m^3}\right):\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{m}{a}\right)$; 4) $\frac{x-y}{x}-\frac{5y}{x^2}\cdot\frac{x^2-xy}{5y}$.

6.94. 1) $\left(\frac{x}{x+1}+1\right)\cdot\frac{1+x}{2x-1}$; 3) $\left(\frac{4a}{2-a}-a\right):\frac{a+2}{a-2}$;

2) $\frac{5y^2}{1-y^2}:\left(1-\frac{1}{1-y}\right)$; 4) $\frac{x-2}{x-3}\cdot\left(x+\frac{x}{2-x}\right)$.

6.95. 1) $\left(\frac{a+1}{2a-2}+\frac{6}{2a^2-2}-\frac{a+3}{2a+2}\right)\cdot\frac{4a^2-4}{3}$;

2) $\left(\frac{3a}{1-3a}+\frac{2a}{3a+1}\right):\frac{6a^2+10a}{1-6a+9a^2}$;

3) $(x^2-1)\cdot\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}-1\right)$;

4) $\left(1+\frac{a}{x}+\frac{a^2}{x^2}\right)\cdot\left(1-\frac{a}{x}\right)\cdot\frac{x^3}{a^3-x^3}$.

6.96. 1) $\left(\frac{b}{a^2-ab}+\frac{a}{b^2-ab}\right)\cdot\frac{a^2b+ab^2}{a^2-b^2}$;

2) $\left(\frac{2a}{a+2}+\frac{2a}{6-3a}+\frac{8a}{a^2-4}\right):\frac{a-4}{a-2}$;

3) $\left(\frac{a^2+b^2}{a}+b\right):\left(\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\cdot\frac{a^3-b^3}{a^2+b^2}\right)$;

4) $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right):\frac{x^2+2xy+y^2}{2xy}$.

6.97. 1) $\left(m+1-\frac{1}{1-m}\right):\left(m-\frac{m^2}{m-1}\right)$; 3) $\frac{b-c}{a+b}-\frac{ab-b^2}{a^2-ac}\cdot\frac{a^2-c^2}{a^2-b^2}$;

2) $\left(\frac{2ab}{4a^2-9b^2}-\frac{b}{2a-3b}\right):\left(1-\frac{2a-3b}{2a+3b}\right)$; 4) $\frac{a^2-4}{x^2-9}:\frac{a^2-2a}{xy+3y}+\frac{2-y}{x-3}$.

B

6.98. 1) $\dfrac{4xy}{y^2-x^2}:\left(\dfrac{1}{y^2-x^2}+\dfrac{1}{x^2+2xy+y^2}\right)$;

2) $\left(\dfrac{x-2y}{x^2-2xy}-\dfrac{1}{x^2-4y^2}:\dfrac{x+2y}{(2y-x)^2}\right)\cdot\dfrac{(x+2y)^2}{4y^2}$.

6.99. 1) $\left(\dfrac{a^2}{a+n}-\dfrac{a^3}{a^2+n^2+2an}\right):\left(\dfrac{a}{a+n}-\dfrac{a^2}{a^2-n^2}\right)$;

2) $\left(\dfrac{2x^2+x}{x^3-1}-\dfrac{x+1}{x^2+x+1}\right)\cdot\left(1+\dfrac{x+1}{x}-\dfrac{x+5}{x+1}\right)$.

6.100. 1) $\left(\dfrac{2a}{2a+b}-\dfrac{4a^2}{4a^2+4ab+b^2}\right):\left(\dfrac{2a}{4a^2-b^2}+\dfrac{1}{b-2a}\right)$;

2) $\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{3}{x^3+1}+\dfrac{3}{x^2-x+1}\right)\left(x-\dfrac{2x-1}{x+1}\right)$.

6.101. 1) $\dfrac{x+2}{x^2-2x+1}\cdot\dfrac{3(x-1)}{x^2-4}-\dfrac{3}{x-2}$;

2) $\left(\dfrac{a-1}{3a+(a-1)^2}-\dfrac{1-2a+a^2}{a^3-1}-\dfrac{1}{a-1}\right):\dfrac{a^2+1}{1-a}$.

6.102. 1) $\dfrac{a-2}{4a^2+16a+16}:\left(\dfrac{a}{2a-4}-\dfrac{a^2+4}{2a^2-8}-\dfrac{2}{a^2+2a}\right)$;

2) $\left(\dfrac{a-x}{a^2+ax+x^2}-\dfrac{1}{a-x}\right)\left(\dfrac{2x+a}{a}+\dfrac{2a+x}{x}\right)$.

6.103. 1) $\dfrac{x^2-x}{x^2+ax+a^2}:\dfrac{x^2-1}{x^3-a^3}+\dfrac{x^2+a^3}{x^2-1}:\dfrac{x^2-ax+a^2}{ax-a}$;

2) $\left(\dfrac{k+x}{x^2-kx+k^2}-\dfrac{1}{k+x}\right):\left(\dfrac{k^2+2x^2}{k^3+x^3}-\dfrac{k+2x}{k^2-kx+x^2}\right)$.

6.104. Докажите тождество:

1) $\dfrac{a+b}{2(a-b)}-\dfrac{a-b}{2(a+b)}=\dfrac{b}{a-b}-\dfrac{b^2-ab}{a^2-b^2}$;

2) $\dfrac{a^2}{a^2-b^2}-\dfrac{a^2b}{a^2+b^2}\cdot\left(\dfrac{a}{ab+b^2}+\dfrac{b}{a^2+ab}\right)=\dfrac{ab}{a^2-b^2}$.

6.105. Докажите, что значение выражения $\dfrac{y}{3-y}+\dfrac{y^2+3y}{2y+3}\left(\dfrac{y+3}{y^2-3y}-\dfrac{y}{y^2-9}\right)$ не зависит от значений переменной y.

C

6.106. Упростите выражение:

1) $\dfrac{\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-\dfrac{x}{ab}\right)(a+b+x)}{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{2}{ab}-\dfrac{x^2}{a^2b^2}}$; 2) $\dfrac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}}{\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ac}}$.

6.107. Упростите выражение:

1) $\dfrac{a+b}{ax+by}+\dfrac{a-b}{ax-by}+\dfrac{2\left(a^2x+b^2y\right)}{a^2x^2+b^2y^2}-\dfrac{4(a^4x^3-b^4y^3)}{a^4x^4-b^4y^4}$;

2) $\left(\dfrac{a^2+b^2}{ab}-2\right):\left(\dfrac{2a^2+2ab}{a^2+2ab+b^2}-1\right)\cdot\left(\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a-b}\right)$.

6.108. Докажите тождество:

1) $\dfrac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{c-a}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{a-b}{(c-a)(c-b)}=\dfrac{2}{a-b}+\dfrac{2}{b-c}+\dfrac{2}{c-a}$;

2) $\dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=1$.

6.109. Упростите выражение:

1) $\dfrac{x-a}{x-b}$ при $x=\dfrac{ab}{a+b}$; 2) $\dfrac{\dfrac{a}{b}-x}{\dfrac{b}{a}+x}$ при $x=\dfrac{a-b}{a+b}$.

6.110. Упростите выражение:

1) $\dfrac{x-\dfrac{yz}{y-z}}{y-\dfrac{xz}{x-z}}$; 2) $\dfrac{\dfrac{a-b}{c-b}-\dfrac{b+c}{a+b}}{\dfrac{a+b}{c-b}+\dfrac{b-c}{a+b}}$.

6.111. Докажите, что при всех допустимых значениях переменных верно тождество:

$$\frac{\left(\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{2}{a^2-b^2}+\frac{1}{(a+b)^2}\right)(a^2-b^2)^2}{(a+b)^2+2(a^2-b^2)+(a-b)^2}=1.$$

Упражнения для повторения

6.112. Напишите выражение в виде многочлена:

1) $(3x^2-4y)^2$; 2) $(2a+b^2)^3$; 3) $(4m^3-n^2)^2$.

6.113. Решите уравнение:

1) $(2x+1)^2-(2x-1)^2=7x+1{,}5$; 2) $9x(3+x)-(3x+4)^2=2x-14$.

6.114. Определите обратную пропорциональность, график которой проходит через точку: 1) $A(4;0{,}5)$; 2) $B(-0{,}5;2)$. Постройте график найденной функции.

Раздел 7. УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ МАТЕРИАЛА, ПРОЙДЕННОГО В 7 КЛАССЕ

А

В упражнениях **7.1–7.5** выполните указанные действия.

7.1. 1) $\frac{2x}{15}-\frac{3x}{20}+\frac{x}{12}$; 2) $\frac{4a}{25}-\frac{4a}{35}+\frac{8a}{21}$; 3) $\frac{m}{a-1}+\frac{n}{1-a}$.

7.2. 1) $3x\cdot\frac{y}{12x}$; 2) $\frac{3ab}{4xy}\cdot\frac{10x^2y}{21a^2b}$; 3) $5x:\frac{15x}{y}$; 4) $\frac{12ab}{25c}:8a^2$.

7.3. 1) $(m+n)(m-n)$; 3) $(a-3)(3+a)$;

2) $(x+5)(x-5)$; 4) $(y+2)(2-y)$.

7.4. 1) $(x+2)^2$; 2) $(3x-y)^2$; 3) $(5a+b)^2$; 4) $(a^2+b^2)^2$.

7.5. 1) $(x+1)^2(x^2-x+1)$; 3) $\left(\frac{m}{2}-2n\right)\left(\frac{m^2}{4}+mn+4n^2\right)$.

2) $(a-2)(a^2+2a+4)$;

7.6. Вычислите: 1) $(3ab)^3$ при $a=\frac{1}{2}$, $b=4$;

2) $-\left(\frac{1}{5}xyz\right)^2$ при $x=-2$, $y=-5$, $z=1\frac{3}{4}$.

7.7. Сократите дробь:

1) $\frac{15x}{20y}$; 2) $\frac{6xy}{8y^2}$; 3) $\frac{2m^2}{3mn}$; 4) $\frac{24a^3}{56a^2b}$.

7.8. Решите уравнение:

1) $8x-3=5x+6$; 2) $x-7+8x=9x-3-4x$.

7.9. Упростите:

1) $(x^2-9):(x+3)$; 2) $(a-b)^2:(a^2-b^2)$; 3) $(25-x^2):(x+5)$.

7.10. Упростите: 1) $-\left(\frac{1}{3}xy^3\right)^2\cdot(-3x)^3$; 2) $\left(-5x^3y\right)^2\cdot\left(\frac{1}{5}ab^3\right)^3$;

3) $\left(-2a^3b\right)^3\cdot(-2b)$.

B

В упражнениях **7.11–7.17** выполните указанные действия.

7.11. 1) $\frac{a}{xy}+\frac{a}{xu}$; 2) $\frac{m}{ab}-\frac{n}{ac}$; 3) $\frac{5x^2-y^2}{xy}-\frac{3x-2y}{y}$.

7.12. 1) $\frac{5x}{ab}+\frac{2y}{3a^2b}-\frac{3}{6a^2b^2}$; 2) $\frac{2a-3b}{a^2b}-\frac{4a-5b}{ab^2}$; 3) $\frac{5a^2-2a-1}{a^2b}-\frac{3a-2}{ab}$.

7.13. 1) $\left(\frac{b^2xy}{9a^5}:\frac{7xy}{12a^5}\right)\cdot\frac{28a^4}{3b^2}$; 2) $\frac{3mx^2y}{2a^2b^2}\cdot\frac{3abc}{8p^2q^2}:\frac{9a^2b^2c^3}{28xpq}$.

7.14. 1) $(1+x)(1-x)(1+x^2)$; 2) $5x^2-3(x+1)(x-1)$.

7.15. 1) $(x^3+8):(x^2-2x+4)$; 2) $(a^3+27b^3):(a+3b)$.

7.16. 1) $[x(x+2y)+y^2]\cdot[x^2-y(2x-y)]:[(x-y)(x+y)]$;

2) $(8a^3-0{,}027):(2a-0{,}3)-(a+1)^2$.

7.17. 1) $x^m:x^n$; 2) $-y^{2m}:y^m$; 3) $a^{2n+2}\cdot a^{2-n}$; 4) $b^{2n+1}\cdot b^{1-2n}$.

7.18. Вычислите наиболее рациональным способом:

1) $2{,}4\cdot1{,}6$; 2) $49\cdot51$; 3) 86^2-14^2; 4) $\left(3\frac{4}{5}\right)^2-\left(2\frac{1}{5}\right)^2$.

7.19. Один фунт равен 0,41 кг. 1) Составьте формулу для перевода x фунтов в y кг; 2) Постройте график перевода фунтов в килограммы.

7.20. Упростите:

1) $\left(\frac{m}{m+1}+1\right):\left(1-\frac{3m^2}{1-m^2}\right)$; 2) $\left(\frac{2x+1}{2x-1}-\frac{2x-1}{2x+1}\right)\cdot\frac{10x-5}{4x}$.

7.21. Упростите:

1) $\dfrac{y-\frac{1}{y}}{\frac{1}{y}+1}$; 2) $\dfrac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{\frac{1}{xy}}$.

7.22. Докажите равенство $(xyz)^2=x^2y^2z^2$. Какое правило выражает это равенство?

7.23. Объясните, какое из чисел больше: 1) a^2 или $\frac{1}{a^2}$ при $a>1$ и при $0<a<1$; 2) a^2 или a^3 при $a>1$ и при $a<1$.

7.24. Сократите дробь:

1) $\frac{3a(x+y)^2}{9a^2(x+y)}$; 2) $\frac{10x^2y(a-b)^2}{25x^4y(a-b)^3}$; 3) $\frac{7m^3n^5(p+q)}{21m^2n^3(p+q)^2}$.

7.25. Сократите дробь:

1) $\frac{8x^2y^2(a-5)}{12xy^4(5-a)}$; 2) $\frac{3x^2+4xy}{9x^2y-16y^3}$; 3) $\frac{2ac-4bc}{5a^3c-20acb^2}$.

7.26. Найдите значение выражения:

1) $\frac{a^2x-ax^2}{a-x}$ при $a=1,5$, $x=0,75$;

2) $\frac{a^2-8a+16}{ax-4x}$ при $a=-5$, $x=-2$.

7.27. Вычислите:

1) $\frac{5^4+5\cdot 3^6}{5^3+5^2\cdot 3^2}$; 2) $\frac{6^6\cdot 2^3-3^6}{6^6+3^3\cdot 6^3+3^6}$; 3) $\frac{(-27)^{-15}\cdot(-9)^{20}}{(-3)^{-7}}$.

7.28. Докажите, что при любом натуральном n значение дроби $\frac{9^{2n}+14}{5}$ является натуральным числом.

7.29. Сравните числа 100^{20} и 9999^{10}.

7.30. Упростите выражение:

1) $\frac{28^{n+1}}{2^{2n+1}\cdot 7^n}$; 2) $\frac{90^{n+1}}{2^n\cdot 3^{2n}\cdot 5^n}$.

7.31. Постройте график функции::

1) $y=-\frac{1}{2}x^2$; 2) $y=\frac{x^3}{3}$; 3) $y=-\frac{4}{x}$.

7.32. Какие остатки могут давать точные квадраты при делении на 3; на 4?

C

7.33. Найдите значение выражения:

1) $\dfrac{(a+b)^2-c^2}{a+b+c}$ при $a=-1$, $b=-2$, $c=-3$;

2) $\dfrac{x^3+x^2y}{x^2+2xy+y^2}$ при $x=3$, $y=-2$.

7.34. Сократите дробь:

1) $\dfrac{ac+bx+ax+bc}{ay+2bx+2ax+by}$; 2) $\dfrac{x-xy+z-zy}{1-3y+3y^2-y^3}$; 3) $\dfrac{3a^3+ab^2-6a^2b-2b^3}{9a^5-ab^4-18a^4b+2b^5}$.

7.35. Выполните действия:

1) $\dfrac{2c-1}{2c}-\dfrac{2c}{2c-1}-\dfrac{1}{2c-4c^2}$; 2) $\dfrac{3}{x^2+2xy+y^2}-\dfrac{4}{x^2-2xy+y^2}+\dfrac{5}{x^2-y^2}$.

7.36. Выполните действия:

1) $\dfrac{m^2-5m+6}{m^2+7m+12}\cdot\dfrac{m^2+3m}{m^2-4m+4}$; 2) $\dfrac{a^2+2a-3}{a^2+3a-10}:\dfrac{a^2+7a+12}{a^2-9a+14}$.

7.37. Упростите:

1) $\dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$;

2) $1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{y}}}$; 3) $\cfrac{1}{a-\cfrac{1}{a-\cfrac{a}{1-a}}}$.

7.38. Задумайте число, умножьте его на 3, к произведению прибавьте 36, полученное число разделите на 3, от результата отнимите задуманное число. В результате получится число 12. Какое бы число вы ни задумали, ответ будет равен 12. Почему? Объясните.

7.39. Докажите, что сумма $333^{555}+555^{333}$ кратна 37.

7.40. Представьте произведение в виде степени:
1) $2\cdot2^2\cdot2^3\cdot\ldots\cdot2^{31}$; 2) $5\cdot5^2\cdot5^3\cdot\ldots\cdot5^{33}$; 3) $7^2\cdot7^4\cdot7^6\cdot\ldots\cdot7^{2n}$.

7.41. Найдите значение выражения:

1) $\dfrac{\left(8^{n+1}+8^n\right)^2}{\left(4^n-4^{n-1}\right)^3}$, $n\in N$; 2) $\dfrac{\left(4^{n+1}+6\cdot4^n\right)^3}{\left(8^{n+1}+2\cdot8^n\right)^2}$, $n\in N$.

7.42. Число $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 20$ представьте в виде произведения простых множителей (в виде канонического разложения).

7.43. Дано произведение чисел $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 100$. Его кратко записывают в виде $100!$ и читают: «Сто факториал». 1) На сколько нулей оканчивается число, полученное в результате умножения данных чисел? 2) На какую наибольшую степень числа 2 делится число $100!$?

7.44. Докажите, что пятая степень натурального числа и само это число оканчиваются одинаковыми цифрами.

7.45. Что больше: 1) 5^{300} или 3^{500}; 2) 2^{700} или 5^{300}; 3) 2^{300} или 3^{200}?

7.46. Запишите число $2^{2002} \cdot 5^{2003}$ в стандартном виде.

7.47. Найдите последнюю цифру числа: 1) 9^{2003}; 2) 3^{2003}; 3) 2^{2003}.

7.48. Какой цифрой оканчивается число $9119^{191^{919}}$?

7.49. Какой цифрой оканчивается сумма $1999^{2003}+9991^{2002}$?

7.50. Какой цифрой оканчивается разность $43^{43}-17^{17}$?

7.51. В десятичной записи 12-значного числа k цифры 2 и 9 встречаются по 2 раза, а остальные – по одному разу. Может ли k быть точным квадратом?

7.52. В десятичной записи числа содержатся 300 единиц и несколько нулей (других цифр нет). Может ли это число быть точным квадратом?

ОТВЕТЫ

Повторение пройденного материала за 5 и 6 классы

0.1. 1) −15,92; 2) 61,5; 3) −3,441; 4) 144,03; **0.2.** 1) −9; 2) −23; 3) −11; 4) 6,5. **0.3.** 1) −2; 2) −4; 3) 6; 4) 9. **0.4.** 1) 17; 2) решением является любое число; 3) 2; 4) ±2. **0.5.** 2) $-1\frac{5}{9}x-1{,}85y$. 4) $-3{,}5x-0{,}75y$. **0.6.** 1) $x>2$; 2) $x>9$; 3) $x\leqslant3$; 4) $x\geqslant5$; 5) $x>-12$; 6) $y\geqslant6$. **0.8.** 1) (2; 7); 2) (3; 7); 3) (0; 3); 4) (−3; −4); **0.9.** 5) (8; −2); 6) (4; −3). **0.10.** 33 и 25. **0.11.** 1) $\frac{7}{11}$; 2) $7\frac{2}{5}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) 8. **0.12.** 1) $-\frac{1}{4}$; 2) 2; 3) 13; 4) 1,5. **0.13.** 1) 7; 2) 17; 3) 3; 4) нет решения. **0.14.** 1) 2; 2) 3; 3) −6; 4) −5. **0.15.** 1) −10; 2) 42; 3) 18; 4) 4. **0.16.** 1) (4; 3); 2) (8; 7); 3) $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{4}\right)$; 4) (4; 3). **0.17.** 1) 0,235; 2) 1; 3) 10000. **0.18.** 21 и 24. **0.19.** 6 см, 24 см, 5 см. **0.20.** По 35 штук, всего 70 монет. **0.22.** 1) $x=4a$; 2) $x=2a$; 3) $x=6{,}36$. **0.23.** 1) $x=\frac{am+qb}{mp+lq}$; $y=\frac{pb-al}{mp+lq}$; 3) $x=-1$, $y=1$; 4) $x=4$; $y=-1$. **0.25.** 1) $a\neq2$; c – любое число; 2) $a=2$; $c=14$. **0.26.** $a=2$, $c\neq14$. **0.27.** 8 рабочих за 10 дней. **0.28.** 10 лет, 52 года. **0.29.** 1) $x>2$; 2) $x<2$; 3) $x=2$. **0.30.** $y\leqslant2x+3$; $y\geqslant\frac{1}{3}x-2$; $y\leqslant-1\frac{1}{3}x+3$.

Раздел 1. Степень с натуральным и целым показателями

1.10. 4) 256; 6) −6; **1.11.** 3) $(-0{,}5)^3<0$; 5) $-1{,}1^4<(0{,}3)^4$. **1.12.** 3) $(x-y)^3$; 4) $(a+b)^x$. **1.14.** 3) $(-5)^3$; 5) $(0{,}1)^3$; 6) $1{,}2^2$. **1.15.** 4) $3b^2$; 6) $2a^2+2b^3$; 7) $\frac{3x^2}{2y^3}$. **1.16.** 4) $(ax)^2=ax\cdot ax$ или $(ax)^2=(-ax)\cdot(-ax)$. **1.17.** 1) 883; 2) 0,75; 3) 1. **1.18.** 97. **1.19.** 1) −9; 2) 80; 3) 18,6; 4) 6. **1.22.** 1) $(x+y)^2$; 4) $2(x-y)^3$. **1.23.** Не могут. **1.24.** 1) x^3; 4) x^{34}. **1.25.** $a=-1\Rightarrow-11$; $a=0\Rightarrow0$; $a=2\Rightarrow-20$. **1.26.** 1) $\frac{17}{54}$; 2) $3\frac{11}{13}$; 3) $-1\frac{151}{180}$; 4) $1\frac{1}{6}$. **1.29.** 1) Верно; 2) не всегда верно. **1.30.** 2) $\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{97}{120}$. **1.31*.** 1) $a\neq-4$; 2) $a=-4$; $b=6$; 3) $a=-4$; $b\neq6$. **1.32.** 1) −22; 2) −16. **1.33.** 1) $a>1$; $a<1$; 3) a – целое и нечетное; 4) $a=1$. **1.36.** 1) 2^{11}; 2) $0{,}2^8$; 3) 3^8; 4) 6^{14}; 5) $\left(\frac{1}{4}\right)^{10}$; 6) $0{,}1^9$. **1.39.** 1) 25; 5) $-\frac{3}{7}$; 6) $6\frac{19}{25}$. **1.43.** 5) q^{11}; 6) 2^{10}. **1.44.** 2) a^{10}; 3) 4^8; 5) m^{15}; 6) 7^{11}.

1.45. 4) $x^0 \cdot x^{12}$. **1.46.** 4) 10^{12}; 6) $0,4^7$; 8) 3^{19}. **1.47.** 3) $2,5^9$; 4) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$. **1.48.** 1) 216; 2) 5. **1.49.** Например, 4) $3^5 \cdot 3^7$. **1.50.** 1) 25; 2) 9; 3) 0,64; 4) $-3\frac{3}{8}$; 5) $\frac{8}{27}$. **1.51.** 1) 17; 2) 16; 3) 25; 4) 0,027. **1.52.** 1) a^7; 2) x^4; 3) b^5. **1.53.** 1) $2a$; 2) x^5. **1.54.** 3) 7^{n+3}; 4) 3^{k+5}. **1.55.** 1) $b^4 \cdot b^7$; 2) $b^4 \cdot b^8$. **1.56.** 3) $x=a^4$; 4) $x=a^{11}$. **1.60.** 1) 49; 2) 100; 3) 1. **1.62.** 1) $-20p^2$; 2) $-5a^{n+18} \cdot b^{n+14}$. **1.65.** (2,8; –0,4). **1.66.** 15000 тг, 12000 тг и 12000 тг. **1.71.** 6) $-\frac{y^5}{x^5}$; 8) $-\frac{32a^5b^5}{243x^5}$. **1.72.** 3) $(3c)^4$; 6) $(0,2p)^4$. **1.73.** 4) a^{24}; 5) a^{10}. **1.74.** 2) b^8; 6) b^9. **1.75.** 1) x^4; 4) x^9. **1.76.** 2) a^{20}; 5) x^{15}. **1.77.** 1) x^6; 2) ab^3; 3) $a^6 \cdot x^{10}$. **1.81.** 2) x^{m+1}; 4) x^{3n}. **1.82.** 4) 3^{10}. **1.83.** 2) $(25^2)^5$; 5) $(5^5)^4$. **1.84.** 1) 2; 2) 125; 3) 25; 4) $\frac{1}{9}$. **1.86.** k^4. **1.87.** $\frac{p^6}{q^4}$. **1.88.** 1) 4 способа; 2) 4 способа. **1.90.** Нет. **1.91.** На 1. **1.93.** 1) $A(3; -5)$, $B(3; 5)$; 2) $A(-3; -5)$; $B(3; -5)$; 3) $A(-3; -5)$; $B(3; 5)$. **1.94.** $k=1$, $b=2$. **1.95.** 800 т. **1.96*.** Нет. **1.100.** 8) $25^{-1} \cdot (x-y)^2 \cdot (x+y)^{-4}$. **1.101.** 1) 7; 2) 8; 3) $\frac{1}{9}$; 4) 25; 5) 1; 6) 1000. **1.102.** 3) $2^6 \cdot m^6 \cdot n^{-6}$; 5) $9 \cdot p^6 \cdot q^{-2}$. **1.103.** 1) 2^{-1}; 2) 2^{-13}; 3) 2^2; 4) 2^0. **1.104.** 5) $2,776 \cdot 10^{10}$; 7) $1\frac{1}{21} \cdot 10^{-4}$; 8) $\frac{5}{4} \cdot 10^{-6}$. **1.105.** 1) –2; 2) 8; 3) 5000; 4) 1001; 5) 2,25; 6) $\frac{1}{72}$. **1.107.** 2) $\left(-\frac{1}{25}\right)^{-3} < 0$; 3) $(-5)^4 > 0$. **1.108.** 1) $2^{-5} < 2^{-4}$; 2) $7^{-5} < 7^{-3}$; 3) $(-3)^{-3} < 3^{-3}$; 4) $(0,2)^{-3} > (0,5)^{-3}$; 5) $(0,3)^{-3} < (0,3)^{-4}$; 6) $6^{-2} = (-6)^{-2}$. **1.109.** 1) 3^{n+2}; 4) 3^n. **1.110.** 1) $n=-2$; 2) $n=5$; 3) $n=-1$; 4) $n=-1$. **1.111.** 3) $\left(\frac{1}{a^2}\right)^{-10}$; 4) $\left(\frac{1}{a^{-4}}\right)^5$. **1.112.** 2) $3y$. **1.113.** 2) 10^{2n+4}. **1.114.** 3) $x=1$. **1.115.** 1) 5; 3) 15. **1.117.** 1) 16; 2) 64; 3) 1. **1.118.** 3 км/ч. **1.119.** 14 кур и 6 кроликов. **1.120.** $y=-3$. **1.121.** 4) $a_4=125$; $a_5=625$. **1.123.** 3^{-3}; 3^{-2}; 3^{-1}; 3^0. **1.127.** 2) $3 \cdot 4 \cdot 10^{-11} < 7,5 \cdot 10^{-9}$; 3) $7,27 \cdot 10^{-5} < 5,1 \cdot 10^{-4}$. **1.129.** 1) $a_6=8$. **1.133.** 4) $a_5=16$, $a_6=-32$. **1.134.** 3) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$. **1.135.** 2) $\frac{1}{2}$; 1; $\frac{9}{8}$; $\frac{16}{16}$. **1.139.** 3) $1,775 \cdot 10^{-2}$. **1.144.** 1) $a_n = \frac{n^2}{3^n}$. **1.146.** 4) $1-(-1)^n$. **1.153.** 1) 0,4; $\frac{0,4}{5} = 0,08$. **1.154.** 1) 0,21; 2) 2; 3) 0,023; 4) 0,0039. **1.159.** 0,048%. **1.160.** 0,0002.

Раздел 2. Одночлены и многочлены

2.1. 1) –3700; 2) –21000; 6) 14,7. **2.2.** 2) $20ab$; 5) $1,5mn$. **2.3.** 3) $16m^6$; 6) $6\frac{1}{4}x^2y^4$. **2.4.** 4) $-6ab^2$; 8) $-10m^3n^3$. **2.5.** 1) $-3,3a^4 \cdot b^3$; 4) x^6y^4z. **2.6.** 2) $-6a^6 \cdot b^3$; 3) $-0,1m^8 \cdot n^4$.

2.7. 3) $-m^{10}\cdot n^5\cdot k^{15}$; 4) $4a^2b^4$. **2.8.** 2) $(13x^3)^2$; 3) $(0,2b^6)^2$. **2.9.** 1) $-8a^{12}b^6$; 3) $16x^4y^{12}$. **2.10.** 2) $-0,1x^4\cdot y^8$; 4) $-p^{10}\cdot q^8$. **2.11.** 1) $(0,1a^3b^2)^2$. **2.12.** 6) $(-0,2b^2y^3)^3$. **2.13.** $36m^3$. **2.15.** 1) $(\pm a^3b^6)^2$. **2.16.** 1) $(x^3y^2)^3$; 2) $(0,2a^4b)^3$. **2.17.** 1) $8x^{10}y^{10}$; 3) $-12m^7\cdot n^9$. **2.18.** 2) $-72x^{5n}y^{5m}$; 4) $2a^9b^4\cdot c$. **2.19.** 1) 3^{14}; 2) 2^{12}. **2.20.** 1) $2xy$; $2x^2y^0$; $2x^0y^2$. **2.21.** 1) $x^{15}\cdot y^{11}$. **2.24.** 1) 1; 2) $-\frac{1}{6}$. **2.25.** 1) 3^{-n}; 2) 5^n; 3) 25. **2.26.** $\underline{A}(1,3;\ 1,1)$. **2.27.** 1) $\frac{1}{16}$; 2) $\frac{1}{2}$. **2.28.** 1) 0, 1, 4, 5, 6, 9; 2) 0, 1, 5, 6. **2.32.** 3) $3\frac{1}{4}-\frac{1}{2}m$; 6) $3p^2q-pq^2$. **2.34.** 1) $4x^3-8x+2$; 2) $2x^3+8$; 3) $-2x^3-8$. **2.36.** 2) $2x-2$; 3) $-x^2+2x$. **2.37.** 1) 32; 2) 11. **2.38.** 3) $6xy^2-0,2y^3-1$; 4) $m^2n^3+m^4$. **2.39.** 1) $-x^2+2x+1$; 4) b^2-4. **2.41.** 1) $x=0,3$; 2) $y=-20$; 3) $x=0$; 4) 5. **2.42.** 1) $4a$; 2) $5m$; 3) p; 4) $2b$; 5) $-2c$; 6) n. **2.44.** 1) $a-4b+9c-6d$; 2) $7a^2-3ax-4x^2$. **2.45.** 3) $1\frac{5}{12}m^3+15\frac{1}{6}m^2n+2\frac{1}{4}mn^2-7\frac{2}{3}n^3$. **2.46.** $3a+4b$. **2.47.** 1) 60; 2) 156. **2.48.** 1) $x^3+4+(2x^3-2x^2-x)$. **2.49.** 1) $x+y+z=5a^2+ab$. **2.51.** 1) $A=2x^2+10xy-y^2$; 2) $A=12a^n+3b^m+2c$; 3) $A=3x^{n+1}+10x^n-7x-5$. **2.52.** 5) $-4x^4+x^3+x-6$. **2.54.** 1) 2; 2) −9. **2.55.** 1) $-2m$; 2) a; 3) p; 4) $\frac{4b-2a}{3}$. **2.56.** 3) $-125a^4b$. **2.58.** 1. **2.59.** 5 наборов. **2.63.** 1) $-8x^3+20x^2-12x$; 8) $3m^3n+1,5m^2n^2-2mn^3$. **2.64.** 3) $x(2-y)$. **2.65.** 7) $-mn(mn+1)$; 8) $9q^3(2p-q)$. **2.67.** 1) −1; 2) 3; 3) 16; 4) −5. **2.68.** 6) $3ab+b^2$. **2.69.** 1) 8; 2) −27; 3) 1,2; 4) $7\frac{5}{6}$; 5) 49; 6) 24; 7) 0,4; 8) 0. **2.71.** 2) $3xy+y^2$. **2.72.** 6) $-19y+18$. **2.73.** 5) $6pq(5q^2+3pq-2p^2)$. **2.74.** 1) $a(a^2+5a+1)$. **2.75.** 4) $-3m^2(2b-3m+4m^2+b^2)$. **2.76.** 4) $-4mn(n^2+2mn-3m^2)$. **2.77.** 1) 0; 5; 2) 0; −6; 3) 0; −0,1; 4) 0; −2,5; 5) 0; 1,5; 6) 0; $\frac{1}{12}$; 7) 0; 35; 8) 0; −4. **2.78.** 1) 4,27; 2) −15; 3) 16,9; 4) 128. **2.80.** $mx+n(x+y)$ тг. **2.82.** 1) $2ab(2a^2-5ab+b^2)$; 6) $3ax^3(2a^3-5a^2x+5ax^2-3x^3)$. **2.83.** $AB-CD=0$. **2.85.** 1) −0,1; 2) $-\frac{2}{13}$; 3) $-3\frac{3}{7}$; 4) −39. **2.86.** 5) $(x-2y)(9a^2-b^2+x-2y)$. **2.87.** 4) $5xy(x^2-x+1)(y-3x)$. **2.93.** 16,5 км/ч. **2.94.** 600 т и 800 т. **2.95.** 7) $125x^3(1-3x)^3$; 8) $32x^5(y+3x)^5$. **2.97.** 32 больших и 48 маленьких лампочек. **2.98.** 1 (4;7); 2) (−3; −15). **2.99.** 1) $-3a^{13}y^9$; 2) $-\frac{0,9x}{y^2}$. **2.100.** 417. **2.103.** 7) $10b^2-18bc+8c^2$. **2.104.** 5) $4x^2+2xy-2x-y$; 8) $-30m^2+27m-6$. **2.105.** 3) $4n^4+19n^2-5$. **2.106.** 2) $(x-y)(3b+1)$; 6) $(m-n)(4a-1)$. **2.107.** 9) $(x-y)(3+a)$. **2.108.** 6) $(2y-5x)(3b-2a)$; 9) $(5a-6b)(x-y)$. **2.110.** 6) $2x^4+9x^3y+3x^2y^2-xy^3+12y^4$. **2.111.** 1) $2x^2-12$; 2) $2a^2-4$; 3) $2a^2+10a+14$; 4) $2x^2-10x+14$. **2.112.** 1) 1,5; 2) 24; 3) 6; 4) 11,5. **2.113.** 4) $20x^3y^2-13x^2y^3-20xy^4-6x^5+7x^4y$. **2.114.** 4) $(a+b+c)(x-1)x$; **2.115.** 1) $(c^2-d)(a+c-b)$; 2) $(m-n)\cdot(x^2+y^2-1)$; 5) $(ab+1)(a+b+2)$; 6) $(x-y^2)(x-y+1)$. **2.116.** 1) 11,2; 2) $-\frac{5}{8}$; 3) 91. **2.119.** 1) 4; 2) $\frac{1}{2}$;

3) $\frac{1}{8}$; 4) 0. **2.122.** 2) x^6-1; 4) x^5-y^5. **2.124.** 8, 9, 10, 11. **2.126.** 1) $(x+2)(x+3)$; 4) $(x-3)(x-4)$; 6) $(x+1)(x-4)$; 8) $(x-3)\cdot(x+5)$. **2.127.** 5 м и 15 м. **2.128.** 1) -1; 5; 2) -3; -4; 3) 1; 10. **2.132.** 1680 га. **2.133.** 246. **2.134.** $m=2$. **2.135.** 14 кроликов и 22 фазана. **2.136.** 1) 0; 2) 0. **2.137.** 35 км.

Раздел 3. Функция

3.14. 2) $x=3\frac{2}{3}$. **3.16.** 1) $(-\infty; 5)\cup(5; \infty)$; 4) $(-\infty; +\infty)$. **3.17.** 1) $(-\infty; -3)\cup(-3; 3)\cup(3; +\infty)$. **3.18.** 1) $[-2; -1)\cup(-1; 7]$. **3.19*.** 1) $(-\infty; 3)\cup(3; +\infty)$; 2) $x=\frac{2}{y-4}+3$; 3) $y\in(-\infty; 4)\cup(4; +\infty)$ – область значений. **3.29.** 1) Является функцией; 2) не является функцией; 3) не является функцией; 4) является функцией. **3.34.** 1) $\varphi(4)=10$, $\varphi(1)=6$; 2) $r(2)=12$; $r(1)=5$. **3.45.** 480 тг. **3.50.** 3) $y=3x+5$. **3.61.** 16 кг. **3.63.** Указание: записав уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1, y_1)$, в виде $y-y_1=k(x-x_1)$ и записав угловой коэффициент прямой, проходящей через точки M_1 и M_2, в виде $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, вы запишете искомое уравнение прямой M_1M_2: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$. **3.70.** 1) Так как $y=3x-4$, то $k=3$. Тогда этот коэффициент будет угловым коэффициентом второй параллельной прямой. **3.71.** 1) Для $y=3x-4$ $k=3$, а для перпендикулярной ей прямой $k_1=-\frac{1}{k}=-\frac{1}{3}$, т.е. $y=-\frac{1}{3}x+4$ – уравнение перпендикулярной прямой. **3.82.** $y=x+0,5$; $-1\leqslant x\leqslant 1$. **3.88.** 5) $y=-\frac{1}{2}x-1$

3.89. 3) $x-3y=-12$; 4) $2x-y=0$. **3.102.** 1) Имеет; $(1; -2)$; 2) Не имеет: $\varnothing$. **3.112.** 1) $m=9$; 2) $m=\pm 5$. **3.113.** 1) $m=-27$; 2) $m=2$. **3.114.** 1) Точка A принадлежит; 2) точка B принадлежит; 3) точка C не принадлежит. **3.116.** 1)$0,5^2>0,5^3$; 2) $1,5^2<1,5^3$. **3.120.** 1) a^3, a^2, a; 2) a, a^2, a^3; 3) a, a^3, a^2; 4) a^3, a, a^2. **3.121.** 7. **3.122.** 20 га, 30 га, 15 га. **3.123.** $k=3$, не проходит через точку B. **3.124.** 1) $-2,8a^{11}\cdot b^5$; 2) $-\frac{11}{4}a^2$. **3.125.** Точки A, B и D лежат, а точка C не лежит. **3.133.** 1) 27; 2) -18; 3) $-2\frac{1}{4}$; 4) $1\frac{4}{5}$. **3.134.** 1) 16; 2) -8; 3) $-2\frac{2}{3}$; 4) 1. **3.135.** 1) 0,5; 2) $-0,5$; 3) $\frac{2}{3}$; 4) $-\frac{2}{3}$; 5) 6; 6) 3.

3.136. 1) $\frac{1}{4}$; 3) 3; 4) 2. **3.137.** 1) Координаты двух точек пересечения

$(0;\ 0)$ и $(-1;\ 2)$; 2) $(0;\ 0)$ и $\left(\frac{3}{2};\ \frac{9}{8}\right)$. **3.139.** Координаты трех точек пересечения: $(0;\ 0)$; $\left(\pm\frac{a}{b};\ \pm\frac{a^2}{b}\right)$. **3.140.** $(0;\ 0)$, $(\pm 2; \pm 4)$. **3.141.** 180 кирпичей. **3.143.** 1) $(0,7)^{20}=(-0,7)^{20}$; 2) $-6,4^4<(-6,4)^4$. **3.144.** 210 км; $303\frac{1}{3}$ км. **3.155.** 2) $m=2$, $n=-2$. **3.156.** 1) $y=\frac{1}{x}$; 3) $y=\frac{5}{x}$; **3.157.** $b=\frac{6}{a}$. **3.158.** 1) 100 км/ч; 2) 62,5 км/ч; 3) 50 км/ч. **3.159.** 1) 1; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{4}{15}$.

Раздел 4. Элементы статистики

4.9. $m=2$, $n=10$. **4.10.** $p=0,4$; $x_4=4$. **4.12.** $y=2$. **4.15*.** $x_1=1$; $x_2=2$. **4.16*.** $x_1=-13,8$; $x_2=6,7$. **4.38.** 27. **4.39.** 222.

Раздел 5. Формулы сокращенного умножения

5.3. 6) $5\frac{4}{9}m^2+7mn+2\frac{1}{4}n^2$. **5.4.** 7) $1\frac{7}{9}x^2+16x+36$. **5.5.** 1) 10201; 2) 961; 3) 2601; 4) 1521. **5.6.** 4) $(c-5)^2$; 6) $(4-c)^2$. **5.7.** 1) $(3a-4b)^2$; 4) $(9x-y)^2$; 6) $(10a+b)^2$. **5.8.** 3) $(7a+2b)^2$; 6) $(4a+b)^2$. **5.9.** 2) $2mn$; 5) c^2; 6) $6k$. **5.11.** 6) $\frac{25}{36}p^2-pq+\frac{9}{25}q^2$. **5.12.** 3) $0,04m^4-2m^2n+25n^2$. **5.13.** 5) $c^{2k+2}+2c^{2k+1}+c^{2k}$. **5.14.** 3) $\left(\frac{5}{6}m-\frac{3}{5}n\right)^2$; 6) $\left(b^4-\frac{a^2}{2}\right)^2$. **5.15.** 1) Нельзя; 2) $(3m-10n)^2$; 3) $(2a-b)^2$; 4) нельзя; 5) $(3x^4-2y)^2$; 6) $(ab^2-x^4)^2$. **5.18.** 1) $3a^2$; 2) $0,4n^3$; 3) $15x^2y$; 4) $4a^{12}$. **5.19.** 1) 4; 2) $\frac{5}{12}$; 3) 1,2; 4) $5\frac{2}{3}$. **5.20.** 1) $3\frac{1}{8}$; 2) 0; 3) $-1,6$; 4) $2\frac{4}{21}$. **5.21.** 1) $4ab$; 2) $12-3m^2$; 3) $112-52y+7y^2$; 4) $290-150x+80x^2$; 5) $9-4a-a^2$; 6) $-9x^2-10x+3$; **5.22.** 1) $16a^3b-16ab^3$; 2) x^2+1. **5.23.** $4ab$. **5.26.** 4) $27x^3+54x^2b+36xb^2+8b^3$. **5.27.** $a^2+b^2=\frac{1}{2}\left[(a+b)^2+(a-b)^2\right]$. **5.28.** $4ab=(a+b)^2-(a-b)^2$. **5.31.** 1) $(x+1)(x+2)\times(x+3)$; 2) $(a+1)\cdot(a^2+a+1)(a^2-a+1)$. **5.32.** 2) a^2-9b^2. **5.33.** 80 км/ч и 90 км/ч. **5.34.** 2) $(7a^3)^2$; 4) $(0,2a^3b^2)^2$. **5.35.** 11) $81b^2-64a^2$. **5.36.** 5) $25a^2-64b^2$. **5.37.** 3) y^2-x^2; 6) $a^2+2ab+b^2$. **5.38.** 7) $(10-p)(10+p)$. **5.39.** 7) $(ab-c)(ab+c)$; 8) $(pq-2k)(pq+2k)$. **5.40.** 2) 3599; 4) 4896; 6) 720; 8) 840. **5.41.** 1) ±3; 3) ±9; 5) $\pm\frac{5}{4}$. **5.42.** 1) 224,96; 2) 399,99; 3) 15,9999; 4) 899,96; 5) 7200; 6) 78000; 7) 6; 8) 47. **5.43.** 5) $36y^2-25x^2$. **5.44.** 2) $(3x-4y)(3x+4y)$; 6) $(2ab-1)(2ab+1)$. **5.46.** 6) $0,04t^2-0,25u^2$.

5.47. 6) $1{,}69a^2b^2-1{,}21c^2$. **5.48.** 5) $4y^6-25x^4$. **5.49.** 3) $p^{2m}-q^{2n}$; 5) $625-x^4$; 6) a^4-8a^2+16. **5.50.** 1) $4(a-1)(a+6)$; 2) $5(x-y)(5x+y)$; 3) $-(2p+1)(4p+1)$; 4) $(a+3b)\times(3a-b)$; 5) $4xy$; 6) $4(p-2q)(3p+q)$. **5.51.** 3) $(5ab-4x^2)(5ab+4x^2)$. **5.52.** 8) $\left(\frac{2ax^2}{5}-\frac{3y^2}{4}\right)\left(\frac{2ax^2}{5}+\frac{3y^2}{4}\right)$. **5.53.** 2) $(4-x-y)\ (4+x+y)$; 5) $-12(4a+3)$. **5.54.** 6) $-(m+n)\,(15m+n)$. **5.55.** 1) 3,99; 2) 15,9996; 3) 399,96; 4) 0,9975; 5) 8; 6) 16; 8) 4,25. **5.56.** 1) $\frac{3}{2}$; 3) 14; 4) 5. **5.57.** 1) $(a+3b)(3a-b)$; 2) $(x+z)(x+2y-z)$; 3) $4pq$; 4) $4(a-2b)\cdot(3a+b)$. **5.61.** 1) $(a-b)\,(a+b-2{,}5)$; 2) $(m+n)(m-n+1{,}5)$; 3) $(x+y)(x-y+5)$; 4) $(2c-b)(2c+b-1)$. **5.62.** 1) $a^{15}(4a-1)(4a+1)$; 2) $m^{18}\left(m-\frac{4}{7}\right)\left(m+\frac{4}{7}\right)$; 3) $x^2(x-2)(x+2)(x^2+4)$. **5.63.** 1) $(a+b-1)(a+b+1)$; 2) $(2-5m+n)\times\times(2+5m-n)$; 3) $(9x-3a+b)(9x+3a-b)$; 4) $(xy-1-x-y)(xy-1+x+y)$. **5.64.** 1) 6; 2) ±2; -3; 3) ±3; 0,5; 4) ±1; $\frac{3}{4}$; 5) ±4; $\frac{1}{2}$; 6) 1,5. **5.66.** 38 см. **5.67.** 2) $(3a^2)^3$; 3) $(2m^3)^3$; 5) $(-2a^3b^2)^3$. **5.68.** 1) $(2ab+1)^2$; 2) $\left(1-\frac{xy}{2}\right)^2$. **5.71.** 12 км. **5.72.** 10) $(n-3)(n^2+3n+9)$. **5.73.** 8) $\left(\frac{m}{4}+\frac{n}{5}\right)\left(\frac{m^2}{16}-\frac{mn}{20}+\frac{n^2}{25}\right)$. **5.74.** 5) $-\left(\frac{b}{3}+1\right)\left(\frac{b^2}{9}-\frac{b}{3}+1\right)$. **5.75.** 1) a^3-8; 2) x^3+8y^3; 3) $64+b^3$; 4) $27a^3-8b^3$. **5.76.** 1) 1; 3) m^3; 4) c^3. **5.77.** 5) $\left(\frac{n}{4}+2\right)\left(\frac{n^2}{16}-\frac{n}{2}+4\right)$. **5.78.** 4) $(xy-1)\times\times(x^2y^2+xy+1)$. **5.79.** 5) $27a^3-8b^3$; 6) $1+c^3$. **5.80.** 6) $(m-n)\cdot(m^2+mn+n^2)\cdot(m^6+m^3n^3+n^6)$. **5.85.** 1) a^3b^3-64; 4) $\frac{x^3}{64}+\frac{y^3}{125}$. **5.86.** 6) $(4xy^2+7a)\cdot(16x^2y^4-28axy^2+49a^2)$. **5.87.** 1) $2b(3a^2+b^2)$; 2) $(3x\quad y)\cdot(3x^2+3xy+7y^2)$; 3) $2mn(4m^2n^2-6mn+3)$; 4) $9a(3a^2-6ab+4b^2)$. **5.88.** 1) $(a+b)(a^2-3ab+b^2)$; 2) $-(5m+n)(m^2+mn+n^2)$; 3) $(x-y)\cdot(x^2+9xy+y^2)$; 4) $(p^2-pq+q^2)(p+q-2pq)$. **5.89.** 1) $(2a+1)(4a^2+a+1)$; 2) $(x-5)\cdot(x^2+x+25)$; 3) $(m-n)\times\times(m+n)(m^2-mn+n^2)$; 4) $(c+y)(c-y)(c^2+cy+y^2)$. **5.90.** 1) $27x^9-1$; 4) $343b^6+8$. **5.91.** 1) $a(a^2-6ab+12b^2)$. **5.95.** 1) $-0{,}2$; 2) 19,75. **5.99.** 1) $(a-2b-3c)\cdot(a-2b+3c)$. **5.100.** 9) $a^3+6a^2b+12ab^2+8b^3$. **5.101.** 7) $0{,}001m^3-0{,}12m^2n+4{,}8mn^2-64n^3$. **5.102.** 5) $(0{,}2++a)^3$; 6) $\left(\frac{m}{3}-3n\right)^3$. **5.103.** 3) $\left(\frac{u}{2}+2v\right)^3$; 4) $(0{,}1a-10b)^3$. **5.104.** 5) $\frac{8}{27}a^3\quad 4a^2b+18ab^2\quad 27b^3$. **5.105.** 6) $0{,}008x^3+0{,}06x^2y+0{,}15xy^2+0{,}125y^3$. **5.106.** 1) $\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right)^3$; 4) $(0{,}3x+4y)^3$. **5.107.** 4) $343p^9+1323p^6q^4+1701p^3q^8+729q^{12}$. **5.108.** 8) $1000x^9+900x^6y^2+270x^3y^4+27y^6$. **5.110.** 6) $3{,}375m^9+2{,}025m^{10}+0{,}405m^{11}+0{,}027m^{12}$. **5.111.** 3) $xy(5x-3y)^3$. **5.112.** 5) $(c-2y)^2(1+c-2y)$. **5.113.** 1) 0; -2; 2) 0; $\frac{1}{3}$. **5.114.** 1) 4; 2) 13; 3) -30. **5.115.** 1) $3b$;

2) $3x$. **5.118.** 1) 5; 2) 2; 3) 3. **5.122.** 1) $(x^2+xy+y^2)(6x-y)$; 2) $(a-b)\cdot(a^2-4ab+b^2)$. **5.123.** $n=2$; $k=38$. **5.124.** 1) $(x+y+z)\cdot(x+y-z+1)$; 2) $(a-b)\cdot(a+b)\cdot(a^2-ab+b^2)$. **5.125.** 4 ч. **5.126.** 7) $5(x-2y)(x+2y)$. **5.127.** 4) $(a-b)(x+1)$; 7) $(x+y)(3m-1)$; 8) $(x-y)(2a-1)$. **5.128.** 2) $a^2b^2(a-b)(a+b)$; 5) $c^3d^2(1-c)$. **5.129.** 1) $(a-b)(x-y)$; 4) $(x-y)(2n+1)$. **5.130.** 1) $2(x+y)^2$; 2) $6(x-y)^2$; 6) $3a(1-b)^2$. **5.131.** 1) $(a-b)(a+b-1)$; 2) $(a+b)(a-b+1)$; 3) $(x-y)^2(x+y)$; 6) $(x-y)(c-x+y)$. **5.132.** 1) $(a-b)^2(a-b-3)$; 4) $(x-2y)^2(1-x+2y)$. **5.136.** 5) $(x^2y-a^2+b^2)\times$ $\times(x^2y+a^2-b^2)$; 6) $(3xy^2-a+b)$ $(3xy^2+a-b)$. **5.137.** 3) $(m-2n-2p+3q)(m-2n+2p-3q)$; 8) $(3a-3b-2x+2y)$ $(3a-3b+2x-2y)$. **5.138.** 2) $(a-b)(a+b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$; 4) $(a+1)^2\cdot(a^2-a+1)$. **5.139.** 2) $x(x-1)(a+b+c)$. **5.140.** 3) $-4b(3a^2+4b^2)$; 4) $(5x+y)\cdot(7x^2-$ $-5xy+19y^2)$. **5.141.** 1) $(m-n)^2(m+n)$; 6) $(b-2)(b^2+8b+4)$. **5.142.** 2) $(x+2)\cdot(x+4)$; 4) $(a-2b)\times$ $\times(a-5b)$. **5.143.** 1) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$; 4) $(x-1)(x+2)^2$. **5.144.** 1) $(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)$; 2) (x^2+5) (x^2+x+1). **5.148.** 1) $a=-1$; 2) $a=1$. **5.149.** 1) $b=20$; 2) $b=1$. **5.150.** 1) $12(a-$ $-b)^2$ $(a+b)$; 2) $24(x+y)^2(x-y)$.

Раздел 6. Рациональные выражения

6.1. 8) $\frac{3a}{2m-5n}$. **6.2.** 1) 3; 2) -3; 3) 3; 4) $-0{,}1$; 5) $\frac{2}{3}$; 6) 0; 4; 7) ±3; 8) -1; -5. **6.3.** 1) 2; 2) -1; 3) 3; 4) 2; 5) 1; 6) 3; 7) a; 8) $-b$; 9) ±1; 10) -1; 2. **6.6.** 5) $2m$; 8) $\frac{x}{2y^2}$. **6.7.** 1) $\frac{a+4b}{2ab}$; 7) $\frac{y-4}{3}$; 12) a^2+ab+b^2. **6.8.** 1) 100; 2) $\frac{3}{4}$. **6.9.** 1) $\frac{a+b}{3a}$; 5) $y-z$; 6) 2. **6.10.** 3) $\frac{3m}{4n}$; 4) $-\frac{a}{b}$; 6) $\frac{5ab}{8cb}$. **6.12.** 4) $\frac{m-n}{m+n}$. **6.13.** 3) $\frac{x+1}{x-1}$. **6.14.** 2) $\frac{x-1}{x+1}$. **6.15.** 2) $\frac{m^2+mn+n^2}{m+n}$. **6.16.** 4) $\frac{1}{a-b}$. **6.17.** 1) $\frac{5ab}{a^2-b^2}$. **6.18.** 4) a^2+b^2. **6.19.** 4) $a^2(a-1)$. **6.21.** 1) 4,5; 2) $\frac{9}{35}$. **6.22.** 1) $x=a+2$, $a\neq2$; 2) $x=5$, $c\neq d$; 3) $x=b$, $c\neq a, b\neq0$; 4) $x=a+b$; $a\neq b$. **6.23.** 4) $a+b-c$. **6.24.** 2) $\frac{1}{a+1}$; 4) $\frac{x-a}{x^2+a}$. **6.25.** 1) $-1{,}4$; 2) 9. **6.27.** 3) $x=a+1$, $a\neq-1$. Если $a=-1$, то $x\in(-\infty;+\infty)$. **6.28.** 3) $\frac{m+1}{m+7}$. **6.29.** 3) $\frac{m}{m+n}$. **6.30.** 2) $\frac{2n}{a}$; 6) $\frac{4a}{b}$. **6.31.** 4) $\frac{a-2}{a+b}$. **6.34.** 2) $\frac{3x}{a-b}$. **6.35.** 4) $\frac{x+4}{a-b}$. **6.36.** 1) $\frac{y+2x}{4xy}$. **6.37.** 1) $\frac{x(c+b)}{abc}$; 3) $\frac{2bm+3an}{abx}$. **6.38.** 2) $\frac{2a^2-b^2+2ab}{ab}$. **6.39.** 3) $\frac{n+2m}{m^4n^4}$. **6.40.** 1) $1+\frac{3}{a}$; 2) $1+\frac{x}{c^2}$; 3) $m-2+\frac{4}{m}$. **6.41.** 2) 1, 3, 9; 3) 1, 3. **6.42.** 1) $\frac{3ax-2b}{6x^2}$. **6.43.** 4) $\frac{y(x+3y)}{6}$. **6.44.** 4) $\frac{a}{b}$; 8) $\frac{5a-1}{6}$. **6.45.** 1) 12;

2) 10; 3) 4; 4) 10; 5) 24; 6) 6. **6.46.** 1) 100; 2) 10. **6.47.** 2) $\frac{5a-b}{a(a-b)}$; 4) $-\frac{2(b+3)}{b(b+2)}$.
6.48. 2) $\frac{9a-4}{4(a+2)}$; 4) $-\frac{7x}{10(x-3)}$. **6.49.** 2) $\frac{6m}{9m^2-n^2}$. **6.50.** 3) $\frac{5b^2-2a^2}{ab(x+y)}$; 4) 0. **6.51.** 3) $\frac{a(2b+1)}{1-b^2}$; 4) $\frac{2}{a+2}$. **6.52.** 2) $\frac{a+1}{5(a-4)^2}$. **6.53.** 1) $\frac{2}{x}$; 2) -2; 3) $\frac{12a}{1-a^3}$; 4) $-\frac{1}{a}$. **6.54.** 1) $\frac{1}{3x-2y}$; 4) $\frac{2(a-b)}{a^2+ab+b^2}$. **6.55*.** 1) 0; 2) $\frac{2}{y-z}$. **6.56*.** 1) $\frac{1}{abc}$; 2) 1. **6.58.** 1) 6; 2) 4; 3) $\frac{1}{5}$; 4) 1,4. **6.59.** 1) 1; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 0; 4) 1. **6.61.** 9. **6.63.** 1) $(a-b-c)(a-b+c)$; 2) $(a-b-4)(a-b+4)$. **6.64.** $x=-1$. **6.65.** 6) cx; 7) $\frac{n}{m}$. **6.66.** 5) $\frac{x}{y}$; 8) $\frac{15c^2}{4a}$. **6.71.** 1) $-6x^3y$; 5) $ab-b^2$. **6.72.** 2) 1; 3) $\frac{a+2b}{3}$; 5) $x-y$. **6.75.** 1) $\frac{9b}{5ay}$; 3) $\frac{128a^2}{9}$. **6.76.** 1) m^3; 2) $-n(n+1)$; 4) $-x^2(x^2+3)$. **6.77.** 1) $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2$; 2) 1; 3) $\left(\frac{x-b}{x+b}\right)^2$; 4) 1. **6.78.** 3) 1; 4) -1. **6.81.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{25(x^2-y^2)}{8}$. **6.82.** 3) x; 4) $-\frac{x}{a}$.
6.83. 1) $\frac{1}{a}$; 3) $\frac{x-a}{y-a}$. **6.84.** 1) $n+1+\frac{1}{n}$; 2) $\frac{2ac(a+c)^n+c}{2(n+a+1)}$. **6.85.** 1) $b+a$; 2) 1. **6.87.** $x^8-16=(x^2-2)\cdot(x^2+2)(x^2-2x+2)\cdot(x^2+2x+2)$. **6.88.** 1) -6; 2) 2,3. **6.91.** 30 км. **6.92.** 4) $x+y$.
6.93. 2) $\frac{a^3}{m^4}$; 4) 0. **6.94.** 3) $-a$; 4) x. **6.95.** 1) $6\frac{2}{3}$; 3) $3-x^2$; 4) -1. **6.96.** 1) $\frac{a+b}{b-a}$; 4) $\frac{2}{x+y}$.
6.97. 3) $-\frac{c}{a}$. **6.98.** 1) $2x(x+y)$; 2) $\frac{3x+2y}{2xy}$. **6.99.** 2) $\frac{x-1}{x(x+1)}$ **6.100.** 2) 1.
6.101. 1) $\frac{3}{1-x}$; 2) $\frac{1}{a^2+1}$. **6.102.** 2) $\frac{6}{x-a}$. **6.103.** 2) -1. **6.106.** 1) ab; 2) $\frac{ab+ac+bc}{a+b+c}$.
6.107. 1) 0; 2) $\frac{2}{b}$. **6.109.** 1) $\frac{a^2}{b^2}$; 2) $\frac{a}{b}$. **6.110.** 1) $\frac{x-z}{y-z}$. **6.113.** 1) 1,5; 2) 2.

Раздел 7. Упражнения для повторения материала, пройденного в 7 классе

7.1. 1) $\frac{x}{15}$; 2) $\frac{32a}{75}$; 3) $\frac{m-n}{a-1}$. **7.2.** 1) $\frac{y}{4}$; 2) $\frac{5x}{14a}$; 3) $\frac{y}{3}$; 4) $\frac{3b}{50ac}$. **7.5.** 3) $\frac{m^3}{8}-8n^3$.
7.6. 1) 216; 2) $-12\frac{1}{4}$. **7.7.** 4) $\frac{3a}{7b}$. **7.8.** 1) 3; 2) 1. **7.9.** 2) $\frac{a-b}{a+b}$; 3) $5-x$. **7.10.** 2) $\frac{1}{5}x^6y^2\cdot a^3b^2$.
7.11. 3) $\frac{2x^2+2xy-y^2}{xy}$. **7.12.** 1) $\frac{30abx+4by-3}{6a^2b^2}$. **7.13.** 1) $\frac{16a^4}{9}$. **7.14.** 1) $1-x^4$; 2) $2x^2+3$.

7.15. 1) $x+2$; 2) $a^2-3ab+9b^2$. **7.16.** 1) x^2-y^2; 2) $3a^2-1{,}4a-0{,}91$. **7.17.** 3) a^{n+4}. **7.19.** 1) $y=0{,}41x$. **7.20.** 1) $\frac{1-m}{1-2m}$; 2) $\frac{10}{2x+1}$. **7.21.** 1) $y-1$; 2) $x+y$. **7.23.** 1) Если $a>1$, то $a^2 > \frac{1}{a^2}$; если $0<a<1$, то $a^2 < \frac{1}{a^2}$. **7.24.** 2) $\frac{2}{5x^2(a-b)}$. **7.25.** 3) $\frac{2}{5a(a+2b)}$. **7.26.** 1) 1,125; 2) 4,5. **7.27.** 3) 9. **7.30.** 1) 14; 2) 90. **7.32.** 0 или 1. **7.33.** 1) 0; 2) 9. **7.34.** 1) $\frac{x+c}{2x+y}$; 2) $\frac{x+z}{(1-y)^2}$; 3) $\frac{1}{3a^2-b^2}$. **7.35.** 1) $-\frac{1}{c}$. **7.36.** 1) $\frac{m^2-3m}{m^2+2m-8}$; 2) $\frac{a^2-8a+7}{a^2+9a+20}$. **7.37.** 1) 1; 3) $\frac{a^2}{a^3-a+1}$. **7.40.** 1) 2^{496}; 2) 5^{561}; 3) 7^{n^2+n}. **7.41.** 2) 10. **7.43.** 1) 24; 2) 2^{97}. **7.45.** 1) $5^{300}=(5^3)^{100}=(125)^{100}<(243)^{100}=3^{500}$. **7.46.** $5 \cdot 10^{2002}$. **7.47.** 1) 9; 2) 7; 3) 8. **7.48.** 9. **7.49.** 0; **7.50.** 0. **7.51.** Не может. **7.52.** Не может.

СОДЕРЖАНИЕ

Раздел 6. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

Раздел 7. УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ МАТЕРИАЛА, ПРОЙДЕННОГО В 7 КЛАССЕ

Учебное издание

Шыныбеков Абдухали Насырович
Шыныбеков Данияр Абдухалиевич

АЛГЕБРА
Учебник для 7 класса общеобразовательной школы

Зав. редакцией *Н. Жиенгалиев*
Редактор *А. Изтлеуова*
Художник *А. Искаков*
Художественный редактор *М. Нурбеков*
Технический редактор *О. Рысалиева*
Корректор *Г. Туленова*

ИБ № 051

Сдано в набор 21.03.2017. Подписано в печать 26.06.2017. Формат 70x90 $^1/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура «Школьная». Печать офсетная. Усл. печ.л. 15,21. Уч.-изд.л.8,11. Тираж 28000 экз. Заказ № 2555.

ТОО «Корпорация «Атамұра», 050000, г. Алматы, пр. Абылай хана, 75.

Полиграфкомбинат ТОО «Корпорация «Атамұра» Республики Казахстан, 050002, г. Алматы, ул. М. Макатаева, 41.