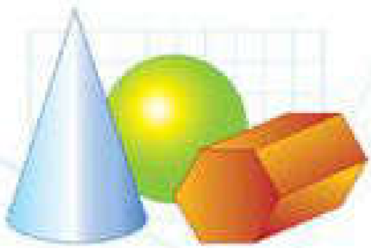
АЛГЕБРА

7

Учебник для 7 класса общеобразовательных школ

Утверждено Министерством образования и науки Республики Казахстан



Алматы "Мектеп" 2017

УДК 373.167.1
ББК 22.144я72
А17

Авторы:
А. Е. Абылкасымова, Т. П. Кучер, З. А. Жумагулова, В. Е. Корчевский

Условные обозначения:

— определения, свойства, правила

— проблема, которая будет решена при овладении новыми знаниями

— проанализируй и ответь на вопрос

— вопросы для закрепления

— задания для самостоятельного изучения теоретического материала

— конец доказательства теоремы или свойства

A — обязательные упражнения для всех учащихся

B — упражнения средней сложности

C — упражнения повышенной сложности

Алгебра: Учебник для 7 кл. общеобразоват. шк./ А. Е. Абылкасымова,
А17 Т. П. Кучер, З. А. Жумагулова, В. Е. Корчевский —Алматы: Мектеп, 2017. — 288 с., ил.

ISBN 978—601—07—0853—2

А $\frac{4306020503-131}{404(05)-17}$ 15(1)— 17

УДК 373.167.1
ББК 22.144я72

ISBN 978—601—07—0853—2

СОДЕРЖАНИЕ

Глава 4. ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИКИ

Глава 5. ФОРМУЛЫ СОКРАЩЕННОГО УМНОЖЕНИЯ

Глава 6. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДРОБИ

ВВЕДЕНИЕ

Дорогие ребята !

Алгебра — это раздел математики. Уже в начальных классах школы вы решали уравнения, ознакомились с числовыми и буквенными выражениями. Все эти темы изучаются в алгебре. В школьной алгебре решают задачи с помощью составления уравнений, систем уравнений, изучают способы решения различных уравнений, неравенств и их систем; изучают зависимости между величинами, которые изменяются (*например* , скоростью, временем и пройденным путем; ценой, количеством и стоимостью; производительностью труда, временем и выполненной работой и др.). Некоторые из этих зависимостей называются *функциональными зависимостями* или *функциями* .

Особенность алгебры заключается в том, что используется буквенная символика. С помощью букв вы записывали свойства сложения и умножения чисел: переместительное, сочетательное и распределительное; свойство нуля и единицы; некоторые правила. *Например* , правила сложения и вычитания обыкновенных дробей с одинаковыми знаменателями. Буквы использовали и для записи формул, *например* , формулы нахождения пройденного пути по известному времени и скорости движения; формулы периметра треугольника и др. С помощью букв можно записывать правила, свойства в форме, удобной для запоминания и использования. Вы знаете, что выражения упрощают. Выражения с буквами подвергаются преобразованиям. Некоторые из них называют *тождественными преобразованиями* . В курсе математики вы использовали слова *выражение* , *равенство* , *неравенство* , *уравнение* и др. Это термины.

При изучении алгебры в 7 классе вы ознакомитесь с новыми терминами: *тождество* , *переменная*, *одночлен*, *многочлен*, *функция*, *аргумент* и др. Смысл этих терминов вам помогут понять определения. Хотя слово *определение* для вас новое, но с определениями вы уже встречались при изучении математики в 6 классе. В учебнике они были выделены зеленым цветом. При изучении новых свойств, правил, будут даваться объяснения, почему эти свойства и правила выполняются, причем не на конкретных примерах, а в общем виде, т. е. когда числа заменены буквами. Такие объяснения являются доказательствами. Существуют разные способы доказательств.

Статистика — отрасль знаний, в которой излагаются общие вопросы сбора, измерения и анализа статистических (количественных или качественных) данных; изучение количественной стороны общественных явлений в числовой форме. При изучении элементов статистики вы научитесь строить и анализировать математические модели, отражающие свойства, характеристики и зависимости, существующие у реальных случайных явлений.

В начале работы с учебником внимательно ознакомьтесь с теми условными обозначениями, которые в нем используются, это поможет вам легко ориентироваться в учебнике.

Весь материал учебника разбит на главы и параграфы. Нужный параграф вы найдете по “Содержанию”, которое находится в начале учебника. Параграфы содержат теоретический материал, задания для самостоятельной работы, вопросы для самоконтроля, упражнения различного уровня сложности и др.

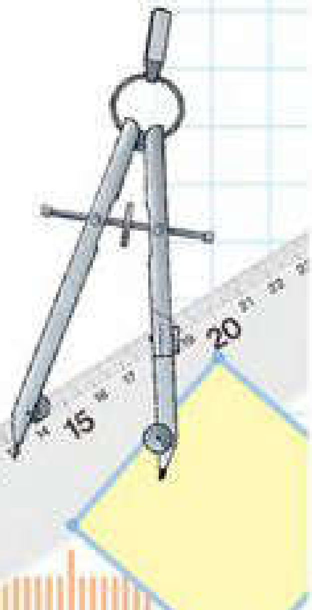
Упражнения разделены по уровням A, B и C. Упражнения уровня A имеют начальный уровень сложности. Их должен уметь выполнять каждый учащийся. Упражнения уровня B несколько сложнее упражнений уровня A. Их выполнение свидетельствует об усвоении материала данного пункта. Упражнения уровня C имеют повышенный уровень сложности.

Кроме этих упражнений, имеются упражнения под рубрикой “Подготовьтесь к овладению новыми знаниями”. Их выполнение поможет вам проявить самостоятельность в открытии новых для вас математических свойств, алгоритмов, признаков, правил и др.

В конце каждой главы предлагаются задания с выбором ответов под рубрикой “Проверь себя!”.

В конце учебника приведены ответы к задачам.

Дорогие учащиеся, желаем успехов в изучении алгебры!



УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ КУРСА МАТЕМАТИКИ ДЛЯ 5 И 6 КЛАССОВ

Выполните действия **(1—3)**:

1. 1) $3\frac{1}{9} : 2\frac{1}{3} - 2\frac{5}{6}$; 2) $1\frac{5}{7} - 4\frac{3}{13} : 1\frac{19}{26}$;

3) $10\frac{16}{17} : 8\frac{5}{11} + 1\frac{2}{3}$; 4) $\frac{47}{48} : 3\frac{13}{27} - \frac{13}{16}$.

2. 1) $24{,}892 : 5{,}08 + 33{,}6 \cdot 6{,}5 - 230$;

2) $6{,}22 \cdot 4{,}7 - 4{,}8076 : 4{,}04 + 1{,}956$;

3) $68{,}16 : 3{,}55 + 51{,}4 \cdot 0{,}16 - 28{,}004$;

4) $7{,}06 \cdot 1{,}02 - 69{,}531 : 9{,}03 - 0{,}5012$.

3. 1) $7{,}8 \cdot \frac{4}{13} - 61{,}5 : 13\frac{2}{3} + 198{,}8$;

2) $19{,}25 \cdot \frac{5}{11} + 5{,}76 \cdot \frac{5}{12} - 13{,}009$;

3) $4{,}625 \cdot 2\frac{2}{15} : 2{,}96 - 2\frac{4}{7}$;

4) $30{,}25 : 4\frac{5}{7} : 1{,}05 - 2\frac{1}{6}$.

Найдите значения выражений **(4—5)**:

4. 1) $|-7| \cdot |-2{,}1| + 5{,}6$; 2) $-40 + |-10| \cdot |-3{,}8| + 5{,}6$;

3) $|-11| \cdot |-9| - 3{,}02$; 4) $-2{,}05 + |-25| : |-16|$.

5. 1) $|-8{,}8| : 11 + 264 : |-2{,}4|$; 2) $|-91{,}3 - 89{,}7| \cdot 0{,}5 - 104$;

3) $54{,}2 + 6{,}7 \cdot |-41{,}2 + 32{,}8|$; 4) $|-92{,}5| \cdot |-2{,}2| - 210{,}1$.

6. Выполните действия:

1) $\left(5\frac{5}{6} + 8\frac{2}{9}\right) : 25{,}3 - 3\frac{1}{9} + 1{,}5 : \frac{27}{28}$;

2) $117{,}5 \cdot \frac{4}{47} - 11\frac{2}{3} + \left(10\frac{2}{25} - 8\frac{7}{15}\right) : \frac{11}{45}$;

3) $89{,}8 : 59\frac{13}{15} + \frac{3}{7} - \left(42 - 41\frac{36}{49}\right) \cdot 3{,}5$;

4) $\left(73{,}6 - 72\frac{5}{9}\right) : 6\frac{4}{15} + \frac{7}{13} \cdot \left(20\frac{2}{3} - 19\frac{3}{7}\right)$;

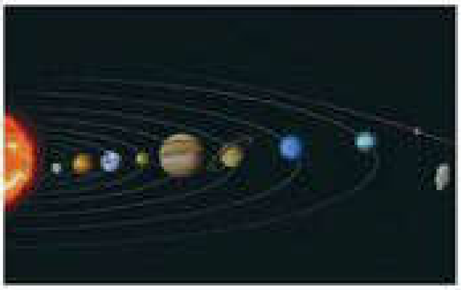
5) $\left(17\frac{5}{14} - 29\frac{4}{21}\right) \cdot (32{,}098 + 5{,}902) : \left(49\frac{1}{7} - 30\frac{10}{21}\right)$;

6) $\left(81\frac{2}{15} - 79{,}3\right) \cdot (24{,}04 - 22{,}68) \cdot \left(1\frac{2}{3} + 1\frac{1}{9}\right)$.

7) $\left(52{,}25 - 49\frac{1}{7}\right) \cdot (40{,}01 - 36{,}81) : \left(6\frac{1}{6} - 2\frac{1}{42}\right)$;

8) $(28{,}24 - 29{,}1) \cdot \left(11{,}75 + 30\frac{5}{6}\right) : \left(40{,}4 - 6\frac{1}{3}\right)$.

7. Выразите средние расстояния в миллионах километров, если от Солнца до: Венеры — 108 200 600 км; Земли — 149 600 000 км; Марса — 227 940 000 км; Юпитера — 778 330 000 км; Сатурна — 1 429 400 000 км; Урана — 2 870 990 000 км; Нептуна — 4 504 300 000 км.



Астрономическое тело

8. Найдите значение выражения $2^4 \cdot 5^3 \cdot 29 + 2 \cdot 13^2$ и вы узнаете о самой большой скорости — скорости взлета с Земли космического корабля.

9. Найдите значение выражения и вы узнаете о площади некоторых озер Акмолинской области:

1) $(1 - 0{,}67) \cdot 10^3$ — столько квадратных километров составляет площадь озера Коргалжын;

2) $0{,}46 \cdot 10^2 + 0{,}54 \cdot 10^2 + 0{,}59 \cdot 10^2$ — столько квадратных километров составляет площадь озера Тенгиз;

3) $(199 + 12 \cdot 29) : 10$ — столько квадратных километров составляет площадь озера Кыпшак.

Космический корабль

10. Белый медведь — самое крупное на Земле хищное млекопитающее. Найдите значение выражения и вы узнаете о белом медведе следующее:

1) $\left(1\frac{1}{5} + 2{,}8\right) \cdot 10^2$ — от стольких килограммов $(400 \cdot 50 + 5 \cdot 8000) : 10^2$ — до стольких килограммов составляет средняя масса белого медведя;

2) $3\,(2^3 \cdot 5^2 + 10^2)$ — столько килограммов составляет масса самого большого белого медведя;

Белый медведь

3) $\frac{1}{2}\left(2\frac{5}{7}+4\frac{2}{7}\right)$ — столько метров составляет длина самого большого белого медведя;

4) $3\cdot 2^3 : 10$ — от стольких метров $2^2\cdot 5\cdot 13\cdot 0{,}01$ — до стольких метров составляет средняя длина белого медведя;

5) $2^4\cdot 3\cdot 625$ — столько километров составляет территория белого медведя;

6) $0{,}001\cdot 2^5\cdot 3125$ — столько километров способен проплыть белый медведь;

7) $2^5\cdot 5^3\cdot 17 : 1000$ — столько килограммов вмещает желудок взрослого белого медведя;

8) $5^3\cdot 2^2$ — столько килограммов составляет масса моржа, которого добыл белый медведь;

9) $2^3\cdot 3\cdot 5^2$ — столько килограммов составляет масса кита-белухи, которого добыл белый медведь.

Найдите значения выражений **(11—12)**:

11. 1) $6\frac{3}{7}a-8\frac{5}{8}b-\frac{2}{3}c$ при $a=\frac{14}{15}$; $b=2\frac{18}{23}$; $c=-6{,}75$;

2) $2\frac{4}{11}a-19{,}25\,b+\frac{4}{9}c$ при $a=13{,}2$; $b=2\frac{10}{11}$; $c=-10\frac{1}{8}$;

3) $36\frac{2}{3}a-4{,}84\,b+7\frac{5}{7}c$ при $a=0{,}9$; $b=3\frac{9}{22}$; $c=3{,}5$;

4) $53\frac{7}{9}a-8{,}2\,b+4\frac{17}{38}c$ при $a=3\frac{15}{22}$; $b=-\frac{25}{82}$; $c=-4\frac{5}{13}$.

12. 1) $7\frac{2}{3}a-1{,}5\,b-\frac{5}{6}c$ при $a=\frac{5}{46}$; $b=-\frac{4}{9}$; $c=\frac{14}{15}$;

2) $-\frac{20}{27}a+1\frac{2}{25}b-\frac{8}{39}c$ при $a=-0{,}9$; $b=\frac{5}{9}$; $c=3{,}25$;

3) $4\frac{2}{9}a+8\frac{1}{6}b+\frac{14}{81}c$ при $a=\frac{3}{19}$; $b=-3\frac{3}{7}$; $c=1\frac{13}{14}$;

4) $1{,}4\,a-\frac{51}{92}b+\frac{11}{25}c$ при $a=\frac{25}{42}$; $b=1\frac{6}{17}$; $c=-1\frac{17}{33}$.

Сравните значения выражений **(13—14)**:

13. 1) $0{,}5-\frac{4}{7}\cdot 2{,}1$ и $\left(1-\frac{3}{18}\right)\cdot 0{,}6$;

2) $26-\frac{5}{14}\cdot 0{,}7$ и $(0{,}86+0{,}17)\cdot 25$;

3) $(10{,}5-11{,}8)\cdot 20$ и $\frac{40}{49}\cdot 9{,}4-34$;

4) $7{,}4\cdot\frac{15}{37}+19$ и $(-2{,}97+3{,}07)\cdot 20$.

14. 1) $|-30|\cdot 2-|-15|\cdot|-4|$ и $0{,}15\cdot|-60|-8{,}9$;

2) $\left|-\frac{5}{18}\right|\cdot\left|-\frac{3}{10}\right|+\frac{7}{12}$ и $\left|-\frac{25}{26}\right|\cdot\left|-\frac{26}{75}\right|\cdot|-1|$;

3) $|-3{,}5|+\left|-\frac{7}{8}\right|\cdot 1{,}6$ и $|-8{,}1+32|\cdot 0{,}01$;

4) $|49{,}2-50|:|-0{,}4|$ и $|201-401|\cdot 0{,}1$.

Упростите выражения **(15—16)**:

15. 1) $40{,}3a-51{,}2a+12{,}19a-a$;

2) $-81{,}4b+90b-7{,}15b+0{,}45b$;

3) $13\frac{2}{15}c-15\frac{1}{3}c+3{,}5c-\frac{4}{5}c$;

4) $59\frac{3}{16}t+4\frac{1}{8}t-64{,}25t+\frac{3}{4}t$.

16. 1) $213{,}25x-49\frac{5}{7}y-215\frac{5}{6}x+50y$;

2) $-95\frac{7}{18}a+79b+93{,}2a-80\frac{4}{11}b$;

3) $-59{,}5c+44\frac{5}{6}d-46\frac{2}{9}d+57\frac{2}{7}c$;

4) $200{,}75t-81\frac{5}{14}k+80\frac{2}{21}k-199\frac{1}{3}t$.

17. Упростите выражение и найдите его значение:

1) $81{,}5y-63\frac{4}{7}z-99{,}4y+64\frac{2}{3}z$ при $y=10$; $z=-1\frac{19}{23}$;

2) $-177\frac{5}{11}t+100{,}1k+176\frac{4}{9}t$ при $t=-19{,}8$; $k=50$;

3) $33{,}6n-76\frac{3}{8}m+78\frac{1}{9}m-35n$ при $m=\frac{24}{25}$; $n=10$;

4) $29\frac{4}{13}s+409\frac{1}{9}t-30{,}5s-407{,}2t$ при $s=-2{,}6$; $t=\frac{9}{43}$.

Найдите a % от числа b **(18—19):**

18. 1) $b = 35 + 4{,}5 \cdot 0{,}6$ и $a = 20$;

2) $b = 140 + 1{,}5 \cdot 0{,}8$ и $a = 25$;

3) $b = 7\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{23} - 0{,}03$ и $a = 50$;

4) $b = \frac{4}{7} + 10\frac{3}{7} : 7\frac{3}{10}$ и $a = 110$.

19. 1) $b = 0{,}02 \cdot 300 - 6\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{19}$ и $a = 144$;

2) $b = 40\frac{1}{2} : 81 + 1{,}5$ и $a = 120$;

3) $b = 505{,}2 - 9\frac{1}{5} : 92$ и $a = 260$;

4) $b = 341\frac{1}{3} : 170\frac{2}{3} + 75$ и $a = 2300$.

20. На территории Акмолинской области около 4000 озер. Найдите число озер, площадь которых:

1) менее 1 км^2; 2) от 1,1 до 5 км^2;

3) от 5,1 км^2 до 10 км^2; 4) от 10,1 до 50 км^2; 5) более 50 км^2,

если число этих озер соответственно составляет: 92,5 %; 5,4 %; 1%; 0,9 %; 0,2 % от общего числа озер Акмолинской области.

21. 1) Самый тяжелый мозг — это мозг кашалота, масса которого доходит до 9 кг, т. е. он в 6 раз тяжелее мозга человека, но масса мозга кашалота составляет примерно 0,02 % от массы тела кита. Каковы масса мозга человека и масса тела кита?

Кашалот

2) Самый большой нос — нос синего кита — достигает в длину 5 м и составляет до 33 % от общей длины тела. Какова общая длина тела синего кита?

Ящерица

3) Самая длинная ящерица — варан. Он достигает в длину 4,75 м, из которых 75 % приходится на хвост. Какой длины хвост варана?

4) Периметр треугольника равен 12 см. Длина одной из его сторон составляет 25 % от периметра, длина другой стороны — $\frac{1}{3}$. Какую часть составляет длина третьей стороны треугольника от его периметра?

22. Узнаете об историческом событии, решив уравнение:

1) $(x - 54) : 25 = 76$, x — в марте этого года началось освоение целинных и залежных земель;

2) $(2x + 46) : 100 = 1$, x — столько новых совхозов было основано в Акмолинской области в первый год с начала освоения целины;

3) $\left(\frac{1}{5}x + 90\right) \cdot 0{,}1 = 10$, x — еще столько новых совхозов стали формироваться в Акмолинской области в первый год с начала освоения целины.

23. Вы узнаете о самом сонливом зверьке, решив уравнение:
$17x - 121 - 3x = 19 - (x + 5)$, x — столько месяцев в году спит североамериканский суслик.

24. Вы узнаете следующие данные, решив уравнение:

1) $2 \cdot 700 \cdot 50 - 0{,}1x = 200^2$, x — до стольких градусов Цельсия разогревается воздух вокруг молнии за доли секунды;

2) $3(109y - 200) = 9(3y + 100)$, y — примерно во столько раз температура воздуха вокруг молнии больше температуры на поверхности Солнца.

25. Найдите неизвестный член пропорции:

1) $\frac{x}{3} = \frac{9{,}6}{14{,}4}$; 2) $\frac{x}{4} = \frac{49{,}5}{66}$; 3) $\frac{6{,}5}{x} = \frac{104}{144}$; 4) $\frac{16{,}1}{25{,}3} = \frac{x}{16{,}5}$;

5) $\frac{3\frac{3}{7}}{\left|-7\frac{3}{7}\right|} = \frac{y}{13}$; 6) $\frac{9}{y} = \frac{\left|-4\frac{1}{11}\right|}{\left|-7\frac{3}{11}\right|}$; 7) $\frac{|-23|}{y} = \frac{\left|-3\frac{37}{49}\right|}{4\frac{4}{49}}$; 8) $\frac{y}{16} = \frac{|76{,}25|}{\left|-1\frac{5}{56}\right|}$.

26. Найдите неизвестный y из пропорции:

1) $\frac{40 - y}{30} = \frac{5}{6}$; 2) $\frac{4}{7} = \frac{21 - y}{28}$; 3) $\frac{220}{y - 49} = \frac{11}{13}$;

4) $\frac{21}{53} = \frac{220}{y + 300}$; 5) $\frac{29}{30} = \frac{78}{3y - 2}$; 6) $\frac{52}{4y + 2} = \frac{14}{3^3}$;

7) $\frac{13}{17} = \frac{7 + 2y}{85}$; 8) $\frac{55}{90} = \frac{6 - 5y}{18}$.

Найдите корни уравнений **(27—29):**

27. 1) $2(2{,}6x - 4) = -30 + 5{,}09x$; 2) $20{,}1x - 1{,}1 = 4(10 - 5{,}25x)$;

3) $3(17 - 22{,}1x) = -7 - 63{,}4x$; 4) $19x - 0{,}4 = 2(32x - 5) + 0{,}6$.

28. 1) $6\frac{1}{3}y + 6{,}5 = 2{,}5 - \frac{2}{3}y$; 2) $3\frac{4}{9}y - 6{,}73 = 4\frac{4}{9}y + 9{,}27$;

3) $\frac{1}{5} - \left(\frac{1}{3}x + 4{,}63\right) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} + 1{,}37$;

4) $\frac{4}{9}x + 1{,}64 - \frac{6}{11} = 1 - \left(0{,}36 + \frac{5}{9}x\right)$.

29. 1) $20(x - 4) - 17(3 - 2x) = 58 + 3^3x$;

2) $-4{,}5(3x + 2) + 1{,}6(5 - 4x) = 3{,}1x + 1{,}3$;

3) $\frac{5}{21}(7 - 3x) - \frac{4}{35}(5x + 7) = \frac{2}{15} - \frac{2}{7}$;

4) $\frac{3^2}{4^2}(2^5 + x) + \frac{7}{12}(36 - x) = \frac{5}{4^2}x - 7$.

30. Заполните таблицу 1.

Таблица 1

Собственная скорость движения катера (в км/ч)	30		35	40		
Скорость течения реки (в км/ч)	3				3	4
Скорость движения катера по течению (в км/ч)		33	39		45	
Скорость движения катера против течения (в км/ч)		29		38		34

Решите задачи, составьте обратные задачи и решите их **(31—32):**

31. Одна мастерская может выполнить некоторую работу за 6 ч, а другая за 4 ч. Сколько потребуется времени для выполнения этой работы, если они будут работать совместно?

32. На прохождение некоторого пути грузовой машине требуется 7 ч, а легковой 3 ч. Через сколько часов произойдет встреча грузовой и легковой машин, если они выедут навстречу друг другу по этой дороге одновременно?

33. Найдите площадь квадрата, который имеет такой же периметр, как шестиугольник, у которого длины всех его сторон равны по: 1) 36 см; 2) 2 см; 3) 0,2 см; 4) 0,5 см; 5) $\frac{1}{6}$ см; 6) $\frac{2}{3}$ см.

34. Найдите длину стороны куба, объем которого равен объему прямоугольного параллелепипеда с измерениями: 1) 4 см, 6 см и

9 см; 2) 4 см, 10 см, 25 см; 3) 5 см, 8 см, 25 см; 4) 27 см, 8 см, 125 см; 5) 6,4 см, 2,7 см, 34,3 см; 6) 0,7 см, 4,9 см, 0,8 см.

35. Круг разделили на три сектора так, что первый угол в два раза больше, а второй в три раза больше третьего угла. Сколько градусов содержит угол каждого сектора?

36. Если задуманное число умножить на 2,6, затем найти 25 % от полученного числа и прибавить к результату 0,35, то получим 1. Какое число было задумано?

37. Из некоторого пункта вниз по течению реки вышла лодка, скорость которой по течению реки 14 км/ч. Через 1 ч из этого же пункта в том же направлении вышел катер, собственная скорость которого 31 км/ч. Через сколько часов после своего выхода катер догонит лодку, если скорость течения реки 3 км/ч?

38. Из некоторого пункта вниз по течению реки вышла лодка, скорость которой по течению реки 15 км/ч. Через 1 ч из этого же пункта в противоположном направлении вышел катер, собственная скорость которого 33 км/ч. Через сколько часов после начала движения катера расстояние между ними будет 114 км, если скорость течения реки 3 км/ч?

39. Составьте формулу для решения задачи: К концу рабочего дня в магазине остались нераспроданными a кг яблок и еще завезли 5 коробок по b кг яблок. Сколько килограммов яблок стало в магазине? Ответьте на вопрос задачи, если $a = 5{,}75$, $b = 4{,}25$.

40. Узнайте дату рождения по формуле $y = x + 37^2$, если:
1) $x = 25^2 - 101$, то y — год рождения Магжана Жумабаева — поэта, одного из основоположников казахской литературы;
2) $x = 24^2 - 10^2$, то y — год рождения Абая Кунанбаева — поэта - просветителя, основоположника казахского литературного языка;
3) $x = 22^2 - 2 \cdot 3^2$, то y — год рождения Чокана Валиханова —

М. Жумабаев А. Кунанбаев Ч. Валиханов Ж. Жабаев

просветителя, путешественника, исследователя истории и культуры народов Средней Азии, Казахстана и Восточного Туркестана;
4) $x = 21^2 + 2^2 \cdot 3^2$, то y — год рождения Жамбыла Жабаева — поэта, продолжателя гуманистических традиций народной поэзии, для него характерным было откликаться на самые жизненно важные для народа события.

41. Найдите координаты точек, изображенных на рисунке 1. С помощью рисунка ответьте на вопросы:
1) какие точки лежат левее начала координат;
2) какие точки лежат правее начала координат;
3) какая точка лежит ближе к началу координат?

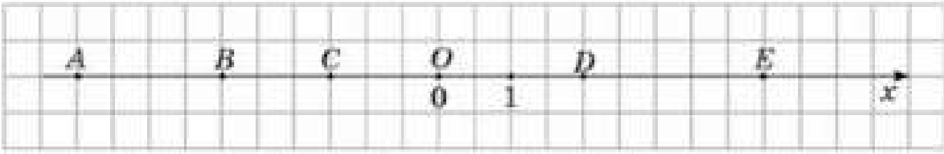


Рис. 1

42. Найдите координаты точек, отмеченных на рисунке 2. Отметьте на координатной прямой:
1) точки, координаты которых противоположны координатам данных точек;
2) две точки, расположенные между точками C и D, запишите их координаты;
3) точку, которая лежит правее (левее) от всех изображенных точек, и запишите ее координату.

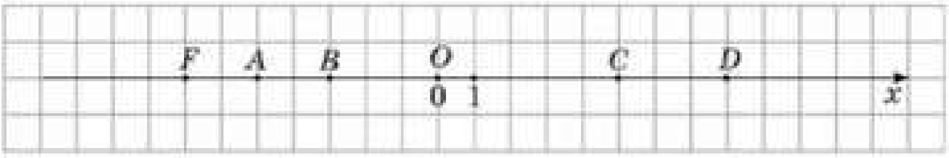


Рис. 2

43. 1) Назовите целые числа, расположенные на координатной прямой между числами: а) -4 и 3; б) $-3{,}5$ и 0; в) $-7{,}3$ и -2; г) $-0{,}99$ и $2{,}1$.
2) Между какими соседними целыми числами координатной прямой заключено число: а) $4{,}7$; б) $-3{,}2$; в) $0{,}6$; г) $-9{,}99$?

44. Найдите координаты точек, отмеченных на координатной плоскости (рис. 3). Какие из этих точек лежат: 1) на оси Ox; 2) на оси Oy; 3) в I четверти; 4) во II четверти; 5) в III четверти; 6) в IV четверти?

45. В прямоугольной системе координат отметьте точки $A(-3;\ 2)$; $B(0,\ -2)$; $C(1{,}5;\ -1)$; $D(-4;\ 0)$; $E(2{,}5;\ -3{,}5)$. В каких координатных четвертях лежат данные точки? Отметьте точки в других четвертях и напишите их координаты.

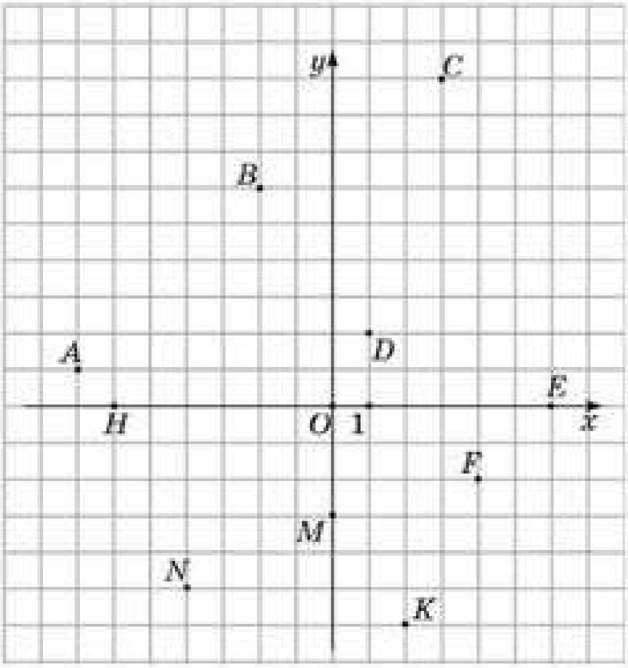


Рис. 3

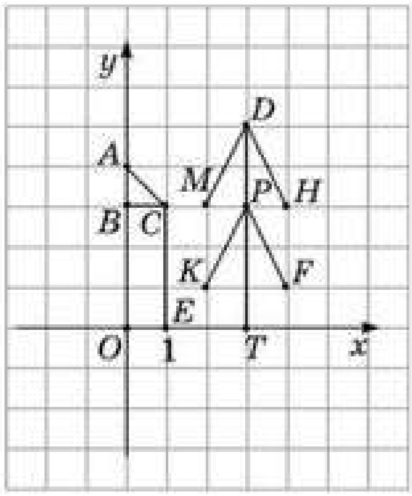


Рис. 4

46. Не выполняя построений, запишите координаты точек M, H, K, которые соответственно симметричны точкам $A(5;\ 6)$; $B(-3;\ 0)$; $C(0;\ 8)$ относительно: 1) оси абсцисс; 2) оси ординат; 3) начала координат.

47. Запишите координаты точек A, B, C, E, D, M, H, K, F, T, P, изображенных на рисунке 4.

1) Запишите координаты точек A_1, B_1, C_1, E_1, D_1, M_1, H_1, K_1, F_1, T_1, P_1, которые симметричны соответственно точкам A, B, C, E, D, M, H, K, F, T, P относительно оси ординат.

2) Постройте точки A_1, B_1, C_1, E_1, D_1, M_1, H_1, K_1, F_1, T_1, P_1 и проведите отрезки AC_1, BC_1, C_1E_1, D_1M_1, D_1H_1, P_1K_1, P_1F_1, D_1T_1.

48. Постройте точки $A(0;\ 1{,}5)$ и $B\ (2;\ 6)$.

1) Проведите отрезки AB и BO и измерьте их длины с точностью до 1 мм.

2) Найдите координаты точки F, симметричной точке B относительно оси ординат и координаты точек E, D, C, симметричные соответственно точкам F, A и B относительно оси абсцисс.

3) Проведите ломаную $ABOCDEFA$ и найдите ее длину с точностью до 1 мм.

49. Постройте точку $A\ (3;\ 4)$ и точку B, у которой абсцисса такая же, как у точки A, а ордината составляет 50 % от ординаты точки B. Постройте точку C, у которой ордината такая же, как у точки B, а абсцисса в 2 раза больше абсциссы точки B. Постройте точку T, у которой ордината равна нулю, а абсцисса такая же, как у точки C. Постройте точки D, M, K, F, симметричные относительно оси ординат соответственно точкам A, B, C, T. Найдите периметр и площадь фигуры $ABCTFKMDA$, если длина единичного отрезка равна 5 мм.

Решите уравнения **(50—51):**

50. 1) $40 + 2x = 3x - 15$; 2) $16x - 33 = 1 + 13x$;

3) $23{,}8y - 80 - 24{,}3y = 2$; 4) $95y - 4{,}9 = 98y - 1$;

5) $8\frac{1}{15}z - 27 = 9z - 13$; 6) $\frac{41}{45}t + \frac{2}{9} = 1\frac{2}{9}t - \frac{7}{9}$.

51. 1) $16{,}05x + 1{,}8x = 3{,}63 - 0{,}3x$; 2) $5\frac{1}{6} + \frac{4}{15}t = -\frac{2}{5}t - \frac{2}{3}$;

3) $1{,}09 + 5{,}8y = 38{,}29 + 15{,}1y$; 4) $19t - \frac{3}{8} = \frac{5}{7} - 42t$;

5) $\frac{5}{7}x + 2\frac{1}{7} = 3\frac{3}{28} - \frac{4}{7}x$; 6) $\frac{6}{11} - 31{,}28k = -\frac{2}{3} + 8{,}72k$.

Найдите корни уравнений **(52—53):**

52. 1) $17x - 2{,}6 = 3(0{,}8 + 3x)$; 2) $8 + 5{,}1x = 49(1 + 0{,}1x)$;

3) $38(0{,}1x + 1) = 40 - 3{,}2x$; 4) $63x - 13{,}7 = 13(0{,}1 + 5x)$;

5) $23(x - 0{,}1) = 17x + 2{,}7$; 6) $33(0{,}1x + 1) = 4 - 6{,}7x$.

53. 1) $3(2x - 4) + 15 = 16 - 5(2 - x)$;

2) $4{,}5(6 - z) - 0{,}5z = 1 + 0{,}5(z + 3)$;

3) $\frac{23}{40}(8t + 5) - t = 2{,}6t - (3t - \frac{3}{4})$;

4) $10\frac{2}{3}(9 - k) + 81 = 107 - \frac{1}{3}(k - 60)$.

54. Решите уравнения и вы узнаете о Маркакольском заповеднике, который находится в Восточно-Казахстанской области:

1) $x + 0{,}24 = 20 + 0{,}99x$,

x — год создания заповедника;

2) $3y - 2(169{,}9 + y) = 150 - (y + 339{,}8)$,

Маркакольский заповедник

y — столько тысяч гектаров составляет площадь заповедника;

3) $50z + (z + 6,2) = 200$,

z — столько тысяч гектаров занимает в этом заповеднике лес.

55. Узнайте температуру воздуха на различных высотах, решив уравнения:

1) $3x + (x + 2) = 2(3x + 12)$,

x °С — температура воздуха на высоте 4000 м;

2) $-3(2,5 - y) = 28,5 + 4,5y$,

y °С — температура воздуха на высоте 6000 м;

3) $25,8z - 4,3(6z + 300) = 25,8z$,

z °С — температура воздуха на высоте 10 000 м.

56. Узнайте наибольшую продолжительность жизни насекомого, пресмыкающегося и зверька, решив уравнения:

1) $12,5 - (16x - 28,3) = -71,2$,

x лет — наибольшая продолжительность жизни муравья;

2) $31,8 - \left(\frac{1}{7} + \frac{4}{7}y\right) = 1\frac{2}{3}y + 4,8$,

y лет — наибольшая продолжительность жизни ящерицы;

3) $\frac{13}{15}z - \left(\frac{7}{9} + \frac{1}{3}z\right) = 7\frac{2}{9}$,

z лет — наибольшая продолжительность жизни белки.

Найдите корни уравнений **(57—58)**:

57. 1) $|x| + 20,9 = 22$; 2) $315 - |x| = 288$;

3) $|x| - 74,6 = 9,4$; 4) $15\frac{2}{15} - |x| = 7\frac{1}{12}$;

5) $|x| - 21,9 = 6\frac{2}{3}$; 6) $100,3 + |x| = 101\frac{8}{9}$.

58. 1) $|x| + 5|x| - 40 = 4|x|$; 2) $100 - |x| = -49|x| + 124$;

3) $6|x| - 2|x| = 35 - 16|x|$; 4) $29|x| - |x| - 13 = -22|x|$.

59. При каких значениях переменной верно равенство:

1) $|x + 1| = x + 1$; 2) $|2 - x| = 2 - x$?

60. При каких значениях a уравнение $|10 - x| = a$: 1) имеет решения; 2) не имеет решений; 3) решение равно нулю; 4) решение равно 10?

61. Изобразите на одной координатной прямой: 1) числовой интервал и числовой луч; 2) числовой отрезок и открытый числовой луч. Рассмотрите все возможные случаи и для каждого случая найдите объединение и пересечение числовых промежутков.

62. Перечислите все натуральные числа, принадлежащие пересечению числовых промежутков:

1) $(1;\ 8)$ и $(-5;\ 7]$; 2) $[-2;\ 3]$ и $(-1;\ 5)$;
3) $(-\infty;\ 6]$ и $[4;\ +\infty)$; 4) $(-10;\ -2]$ и $[-7;\ 1)$.

63. Найдите наибольшее (наименьшее) натуральное число, принадлежащее пересечению числовых промежутков:

1) $(-10;\ 6)$ и $(1;\ +\infty)$; 2) $[5;\ 29]$ и $[20;\ +\infty)$;
3) $(-3;\ 13]$ и $[-4;\ +\infty)$; 4) $(21;\ +\infty)$ и $(-20;\ 21]$.

64. Найдите наибольшее (наименьшее) целое число, принадлежащее пересечению числовых промежутков:

1) $[3{,}5;\ 7{,}1]$ и $(1;\ +4{,}9)$; 2) $\left(-\infty; \frac{3}{7}\right]$ и $\left[-\frac{8}{9}; +\infty\right)$;
3) $(-\infty;\ +\infty)$ и $\left[-7\frac{1}{3};\ 8\frac{1}{3}\right]$; 4) $(-5{,}1;\ 9{,}1)$ и $(-\infty;\ +\infty)$.

65. Найдите наименьшее натуральное число, являющееся решением неравенства:

1) $10 + 7x > 24$; 2) $19 - 6x < -5$;
3) $-43x + 2 \le 45$; 4) $60 + 17x > -19$;
5) $83 + x < 84x$; 6) $-7 - 30x \le 5x$.

Найдите наибольшее целое число, являющееся решением неравенства **(66—68)**:

66. 1) $0{,}5x + 41{,}5 \le 42$; 2) $90 - \frac{1}{3}x > 91$;
3) $\frac{2}{3}x - 15 < 20$; 4) $18\frac{1}{9} \ge 0{,}2x + 18$;
5) $31 - 4\frac{1}{7}x > 2$; 6) $30{,}08 < -\frac{8}{9}x - 1{,}92$.

67. 1) $-4y + 10 \ge 2(1 - y) + 24$; 2) $49 - 3(3 - 2z) \le 1 - 4z$;
3) $7(6 - 5t) - 5 < 1 - 41t$; 4) $-0{,}5(8x + 9) - 0{,}9 > 4x - 3$.

68. 1) $\frac{3x-4}{2} < \frac{6-2x}{3}$; 2) $\frac{10-x}{6} \mid \frac{x+7}{5}$;

3) $\frac{3+2x}{12} \mid \frac{3x-2}{15}$; 4) $\frac{y-5}{18} < \frac{6-y}{24}$.

Решите неравенства **(69—71):**

69. 1) $3{,}3x - 0{,}4(4-3x) \text{ m } 9{,}3 + 5(0{,}7-x)$;

2) $9(0{,}5y+1) - 3{,}1(1-y) > 5{,}9 + 7{,}2y$;

3) $0{,}6(a-2) - 0{,}2 \mid 0{,}8(a+2) + 3{,}5$;

4) $-1{,}4 + 0{,}5(11b-2) < -5{,}5b + 1{,}6$.

70. 1) $5\frac{2}{3} + \frac{7}{3}(14x-3) > \frac{4}{9}(18x-2)$; 2) $\frac{5}{6}(7+9y) \text{ m } 7\frac{1}{2} - \frac{7}{8}(5y-8)$;

3) $30 - \frac{4}{5}(2-15z) \mid \frac{2}{3}(15z+1)$; 4) $\frac{3}{4}(8t+1) < \frac{5}{6}(16t-3) - 12\frac{1}{2}$.

71. 1) $\frac{x-3}{14} - \frac{x-7}{35} + \frac{2x+3}{5} \mid 0{,}1$; 2) $\frac{5-3y}{11} + \frac{y-4}{10} - \frac{2+3y}{22} < \frac{2}{11}$;

3) $\frac{8x-1}{8} + \frac{7-4x}{5} - \frac{x+3}{20} > \frac{3}{40}$.

Решите систему неравенств **(72—74):**

72. 1) $\begin{cases} 20x+40 \leqslant 0, \\ \frac{2}{9} - \frac{4}{27}x > 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3\frac{1}{3} - 10x < 0, \\ 1{,}6 - 4{,}8x < 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 10+5x > -20, \\ \frac{5}{11} - \frac{20}{33}x \geqslant 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 7\frac{2}{7} - 51x < 0, \\ 3x+40 \leqslant 52. \end{cases}$

73. 1) $\begin{cases} 2(x+5) < 2-2x, \\ 3(2-x) \geqslant 3-x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3(x+8) > 9-2x, \\ 3(x+4) \geqslant x+5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4(x+1) \leqslant 9-2x, \\ 2(x+5) \leqslant 1-x; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 4(3-x) \geqslant 2-2x, \\ 3(x-2) \geqslant 2-x. \end{cases}$

74. 1) $\begin{cases} 3x+5(x-2) \leqslant 3-2x, \\ 4(5x-1)-21x \geqslant 1-3x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7-11x < 9x-2(5x+7), \\ 6-x \geqslant 2(1-4x)-3(1-3x). \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5(6x-5)<3(4x+3)+2, \\ 2(6x-1)-12+9x>5(8x+1); \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3(2x+13)-2(x+2)>10x-4, \\ 3(4x+9)-2(x-1)<16x+2. \end{cases}$

75. Найдите все целые числа, являющиеся решениями системы неравенств:

1) $\begin{cases} x-1 > \dfrac{2x-0,5}{3}, \\ \dfrac{7x+12}{8} \geqslant x+1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{9x-13}{8} > x-2, \\ 1+x > \dfrac{10x+6}{9}. \end{cases}$

76. Найдите все натуральные числа, являющиеся решениями системы неравенств:

1) $\begin{cases} \dfrac{7,4x+23}{21} \leqslant 1+0,4x \\ 3x-5 \leqslant \dfrac{20x-31}{7}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 1-2x \leqslant \dfrac{28-53x}{27}, \\ 0,1x+3 < \dfrac{13-0,7x}{3}. \end{cases}$

77. 1) Если к удвоенному целому числу прибавить его половину, то получится число, которое больше 17, а если из утроенного этого же целого числа вычесть его половину, то получится число, которое меньше 18. Найдите это целое число.

2) Если к $\frac{3}{10}$ от целого числа прибавить 0,25, то получится число, которое меньше 5, а если от $\frac{7}{9}$ этого же числа вычесть $\frac{1}{3}$, то получится число, которое больше 11. Найдите это целое число.

78. 1) Если к целому числу прибавить 40% от этого же числа, то получится число, которое больше 47, а если из этого же числа вычесть 65% этого же числа, то получится число, которое меньше 12. Найдите это целое число.

2) Если от целого числа вычесть его 11%, то получится число, которое больше 88, а если к этому же целому числу прибавить 121% этого числа, то получится число, которое меньше 221. Найдите это целое число.

79. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} 4x+7{,}8>45x-4{,}2, \\ 18+1{,}1x\leqslant 4{,}1x+13{,}5, \\ 5{,}5-3{,}4x<40{,}5-8{,}4x; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 17{,}3-29x\geqslant -35x-6{,}7, \\ 1{,}5x+13{,}1<\frac{1}{2}x-18{,}1, \\ 6\frac{1}{3}x-27{,}8\leqslant 21{,}2-\frac{2}{3}x. \end{cases}$

80. Запишите в виде неравенства с модулем числовые промежутки, изображенные на рисунке 5.

Рис. 5

81. Изобразите на координатной прямой решение неравенства:

1) $|x|\,\text{m}\,5{,}6$;
2) $|x| < 17$;
3) $|x| > 4\frac{3}{16}$;
4) $|x|\,\text{l}\,9$;
5) $|x| > 10$;
6) $|x|\,\text{m}\,8{,}14$;
7) $|x| < 3\frac{5}{6}$;
8) $|x|\,\text{l}\,20$.

82. Решите неравенство:

1) $|1 + 2x| < 9$;
2) $|3 + 2x|\,\text{m}\,5$;
3) $|1 - 2x|\,\text{l}\,7$;
4) $|2 - 5x| > 22$.
5) $|3x + 5|\,\text{l}\,20$;
6) $|4 + 3x|\,\text{m}\,5$;
7) $|7 - 4x|\,\text{m}\,11$.
8) $|6x - 5|\,\text{l}\,1$.
9) $|1 - 2x| < 4$;
10) $|0{,}8 - \frac{1}{3}x| > 0{,}2$;
11) $|2{,}5x + 1| < 1{,}5$;
12) $|-4x + \frac{1}{9}|\,\text{m}\,\frac{5}{9}$.

83. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} 147-3x \geqslant 51, \\ |x| \geqslant 11, \\ 11+0{,}5x>0{,}5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} |x| \leqslant 1{,}5, \\ 60x+8<9x+9, \\ |x| < 9{,}7. \end{cases}$

84. Найдите значение суммы всех целых чисел, которые являются решениями системы неравенств:

1) $\begin{cases} |x| < 4, \\ |x| \geqslant 1, \\ x>-3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} |x| \leqslant 10, \\ x>-7, \\ x \leqslant 2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} |x|>3, \\ x \leqslant 4, \\ |x| \leqslant 5. \end{cases}$

85. Решив следующую систему неравенств, вы узнаете о скорости таких ветров:

1) $\begin{cases} \frac{1}{5}y \geqslant 4, \\ \frac{1}{7}y \leqslant 4; \end{cases}$ y км/ч — скорость умеренного ветра;

2) $\begin{cases} 10y-390 \geqslant 0, \\ 0{,}1y \geqslant -5; \end{cases}$ y км/ч — скорость сильного ветра;

Шторм

3) $\begin{cases} 15(5-z) \leqslant -14z, \\ 29(z-3) \leqslant 28z; \end{cases}$ z км/ч — скорость ветра при шторме;

4) $\begin{cases} 50-0{,}5z \leqslant -9, \\ 9-\frac{1}{3}z \leqslant -1; \end{cases}$ z км/ч — скорость ветра при урагане.

Решите систему уравнений **(86—87)**:

86. 1) $\begin{cases} 4x+3y=-7, \\ 2x-y=9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x+6y=3, \\ x-2y=-9; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 6x+y=-1, \\ 12x-7y=61; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x-4y=-42, \\ 9x+8y=62. \end{cases}$

87. 1) $\begin{cases} 8x + 15y = -56, \\ 4x - 7y = 30; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 6x - 9y = 88{,}5, \\ 5x + 3y = 47{,}5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 11x + 10y = 73{,}5, \\ 6x - 5y = -54; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x + 13y = -69, \\ 14x + 11y = -3. \end{cases}$

88. Вы узнаете, у кого из животных самая большая пасть, решив систему уравнений с двумя переменными:

$$\begin{cases} x + y = 300, \\ \frac{1}{2}x - 0{,}5y = 30; \end{cases}$$

x — под таким углом может распахнуть пасть бегемот;
y — столько сантиметров достигает расстояние между челюстями бегемота.

Бегемот

89. Решите систему уравнений и вы узнаете о Наурызымском заповеднике, который находится в Костанайской области:

Наурызымский заповедник

1) $\begin{cases} x + y = 3897, \\ x - y = 35; \end{cases}$

x — в этом году Наурызымский заповедник был реорганизован;
y — в этом году был организован Наурызымский заповедник;

2) $\begin{cases} x + 10y = 1197, \\ 20y - x = 1434; \end{cases}$

x — столько тысяч гектаров была площадь Наурызымского заповедника первоначально;
y — столько тысяч гектаров стала площадь Наурызымского заповедника после реорганизации;

3) $\begin{cases} 0{,}1x + 0{,}01y = 32, \\ 2x + y = 1200; \end{cases}$

x — столько видов птиц в Наурызымском заповеднике;

y — примерно столько видов растений в Наурызымском заповеднике;

4) $\begin{cases} 1{,}5x+2{,}5y=75, \\ \frac{1}{20}x+\frac{1}{6}y=3; \end{cases}$

x — примерно столько видов млекопитающих в Наурызымском заповеднике;
y — столько видов рыб в Наурызымском заповеднике.

Решите систему уравнений **(90—94)**:

90. 1) $\begin{cases} x=-7+y, \\ 2x-3y=-16; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y=x-5, \\ 4x+y=10; \end{cases}$

3) $\begin{cases} -x=3-2y, \\ x-5y=-6; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y=4-5x, \\ y-7x=-8. \end{cases}$

91. 1) $\begin{cases} x+2y=0{,}3, \\ x=-y+0{,}5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y-8x=83{,}1, \\ y=-x-6{,}9; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 21x+y=-15{,}1, \\ y=0{,}9-x; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} -2{,}5y+x=-12{,}8, \\ x=1{,}2-y. \end{cases}$

92. 1) $\begin{cases} x-y=-\frac{5}{7}, \\ 4x+3y=-4\frac{6}{7}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 10x-3y=\frac{94}{9}, \\ x+y=-\frac{14}{9}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 9x+2y=-\frac{19}{7}, \\ y-x=\frac{10}{21}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 7x-6y=\frac{40}{3}, \\ y+x=-\frac{11}{3}. \end{cases}$

93. 1) $\begin{cases} 3(x-2)-2(y+1)=-16, \\ 5(x+3)-8(y-2)=13; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -6(4-x)+(y+5)=2, \\ 11(1+x)-9(7-y)=-36. \end{cases}$

94. 1) $\begin{cases} \frac{4x-3}{2}+\frac{5y+1}{3}=12{,}5, \\ 1{,}5x-0{,}7y=-3{,}4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2{,}3x-1{,}9y=0{,}8, \\ \frac{4-3y}{4}+\frac{-5x-2}{3}=-4{,}5. \end{cases}$

95. В магазине игрушек представлены следующие цены на различные типы игр:

Таблица 2

Тип игр	A	B	C	D	E	F	G	H	K	L
Цена (в тг)	430	560	630	520	320	610	440	710	360	736

1) Найдите число типов игр, стоимость которых не превышает 500 тг.
2) Отец решил приобрести своей маленькой дочери две разные игры, потратив на это не более 1000 тг. Найдите число вариантов такой покупки.
3) В магазине на всю покупку действует скидка 15 %, если клиент покупает сразу три игры. Запишите, какие три разные настольные игры может приобрести отец своей дочери на сумму не более 1000 тг?

96. 1) Коллекция моделей одежды разной цветовой гаммы представлена в виде диаграммы (рис. 6). Сколько в коллекции моделей красного цвета, если всего в ней 80 моделей?
2) Результаты анализа полученной прибыли предприятия за год представлены в виде круговой диаграммы (рис. 7). Какая прибыль была получена предприятием в 3 квартале, если за год она составила 2400 тыс. тг?

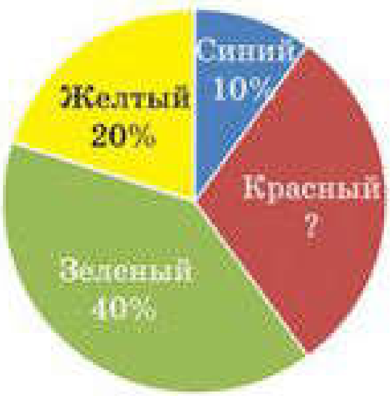


Рис. 6

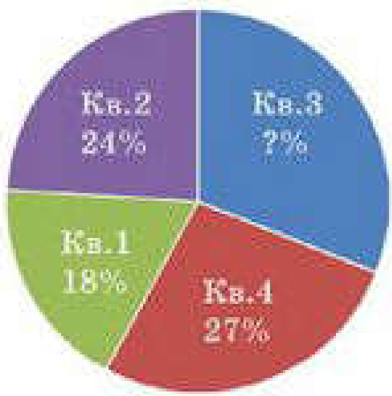


Рис. 7

ГЛАВА 1

СТЕПЕНЬ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

§ 1. СТЕПЕНЬ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Для чего нужно знать о степени с натуральным показателем?

Объясните

Как произведение нескольких одинаковых множителей заменили степенью : $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6$; $\frac{8}{9} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{8}{9} = \left(\frac{8}{9}\right)^3$; $\underbrace{(-1{,}1) \cdot (-1{,}1) \cdot \ldots \cdot (-1{,}1)}_{21 \text{ раз}} =$ $= (-1{,}1)^{21}$?

Если какое-либо число обозначить буквой a, число множителей n, то можно записать:

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}} = a^n.$$

В выражении a^n число a (повторяющийся множитель) называется *основанием степени*, n (число, показывающее, сколько раз повторяется множитель) — *показателем степени*, a^n — *степенью*.

При чтении степени сначала читают ее основание, а затем ее показатель.

Чтение выражения a^n:
- a в степени n;
- степень числа a с показателем n.

Степенью числа a с натуральным показателем n, большим 1, называется *произведение n множителей*, каждый из которых равен a: $\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}} = a^n$.

Любое число в первой степени равно этому числу, т. е. $a^1 = a$.

Вспомните!

1. Как называются степени: a^2 и a^3 ?

2. Рассмотрите примеры: $\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$; $(-0,6)^2 = 0,36$; $(-3)^3 = -27$.

3. В каком случае значение степени a^n с натуральным показателем будет числом положительным, а в каком отрицательным?

Записи числа во второй и третьей степени называются *квадратом числа* и *кубом числа* .

Если $a > 0$ и n — натуральное число, то $a^n > 0$, т. е. степень любого положительного числа с натуральным показателем есть число положительное.

Если $a < 0$ и n — четное число, то $a^n > 0$, т. е. в четной степени отрицательное число есть число положительное; если $a < 0$ и n — нечетное число, то $a^n < 0$, т. е. в нечетной степени отрицательное число есть число отрицательное.

Рассмотрите примеры: $8^3 = 8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$;

$\left(\frac{6}{7}\right)^4 = \frac{6}{7} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{6}{7} = \frac{1296}{2401}$;

$(-0,3)^5 = (-0,3) \cdot (-0,3) \cdot (-0,3) \cdot (-0,3) \cdot (-0,3) = -0,00243$;

$x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x = x^8$.

Какими числами (натуральными, дробными — положительными или отрицательными и др.) может быть основание степени с натуральным показателем?

Основанием степени могут быть любые рациональные числа: натуральные, нуль, дробные — положительные и отрицательные, любая переменная.

Действие, с помощью которого находят значение степени, называется *возведением в степень* .

Возведение в степень — действие третьей ступени. Вам были известны действия первой ступени (сложение и вычитание) и второй ступени (умножение и деление). Также вы знаете, что при нахождении значения числового выражения, не содержащего скобок, сначала выполняются действия второй, а затем первой ступени.

При наличии действия третьей ступени надо руководствоваться правилом:

> если числовое выражение не содержит скобок, то сначала выполняются действия третьей ступени, затем — второй и, наконец, — действия первой ступени.

Например, $6 : \frac{1}{8} - \frac{5}{9} \cdot (-3)^4 + 0,1 \cdot 10^2 = 6 : \frac{1}{8} - \frac{5}{9} \cdot 81 + 0,1 \cdot 100 =$ $= 48 - 45 + 10 = 13$.

Запись чисел в виде степени используется во многих случаях. *Например*, для записи натуральных чисел в виде суммы разрядных слагаемых и в виде десятичной записи: $82\,345 = 8 \cdot 10\,000 + 2 \cdot 1000 +$ $+ 3 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 5 = 8 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 5$.

Для записи больших чисел часто применяются степени числа 10.

Например, энергию, которую получает Земля от Солнца за 1 год, записывают: 10^{25} Дж, энергию урагана — 10^{15} Дж, длину кровеносной системы человека — 10^5 км.

1. Может ли значение степени с натуральным показателем быть отрицательным числом, нулем?
2. Установите порядок выполнения действий в выражении: $81 \cdot 4 - 243 : 3^5 + 240$.

Упражнения

А

1.1. Запишите в виде степени произведение:

1) $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$; 2) $(-1,2) \cdot (-1,2) \cdot (-1,2) \cdot (-1,2) \cdot (-1,2)$;

3) $\frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7}$; 4) $b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b$;

5) $(t + k) \cdot (t + k) \cdot (t + k) \cdot (t + k)$;

6) $\frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y}$.

Упростите выражения, используя запись в виде степени произведения **(1.2—1.3)**:

1.2. 1) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 11$; 2) $\frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13$;

3) $1,7 \cdot 1,7 \cdot 1,7 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$; 4) $\left(-\frac{5}{11}\right) \cdot \left(-\frac{5}{11}\right) \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$.

1.3. 1) $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot c \cdot c \cdot c$; 2) $0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot d \cdot d \cdot d \cdot d \cdot d$;

3) $k \cdot k \cdot k \cdot k \cdot s \cdot s \cdot s \cdot s \cdot s$; 4) $\frac{t}{m} \cdot \frac{t}{m} \cdot \frac{t}{m} \cdot n \cdot n \cdot n \cdot n$;

5) $(2 - b) \cdot (2 - b) \cdot (2 - b) \cdot (2 - b) \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y$.

Запишите в виде произведения одинаковых множителей степени **(1.4—1.5):**

1.4. 1) 23^5; 2) $\left(-\frac{9}{17}\right)^6$; 3) $7{,}3^4$; 4) $(-0{,}1)^7$.

1.5. 1) $(3c)^5$; 2) $\left(t - \frac{5}{14}\right)^3$; 3) $(8s + 1)^4$;

4) $\left(\frac{2}{7}ab\right)^4$; 5) $(n + m)^6$; 6) $(0{,}9\,kst)^3$.

Вычислите **(1.6—1.8):**

1.6. 1) 6^3; 2) $1{,}4^3$; 3) $(-8)^4$; 4) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4$; 5) $(-0{,}2)^5$.

1.7. 1) 10^4; 2) $(-0{,}7)^3$; 3) $\left(-\frac{3}{4}\right)^4$; 4) $\left(1\frac{4}{5}\right)^3$.

1.8. 1) $(-2{,}8)^3$; 2) $\left(2\frac{1}{2}\right)^5$; 3) 7^4; 4) $1{,}1^3$; 5) $\left(-\frac{3}{5}\right)^5$.

B

Выполните действия **(1.9—1.11):**

1.9. 1) $5^2 - 200$; 2) $13 - 3^3$; 3) $20 + 2^6$; 4) $2^4 - 3^2$.

1.10. 1) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \frac{29}{32}$; 2) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{22}{27}$; 3) $\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{11}{25}$;

4) $(1{,}2)^2 + 2{,}06$; 5) $(0{,}4)^4 - 1$; 6) $20 - (1{,}4)^2$.

1.11. 1) $3^5 - 2^6 : 40$; 2) $4^4 : 1000 - 0{,}3$;

3) $7^2 \cdot 2^3 + 608$; 4) $8^2 \cdot 3^3 - 728$.

1.12. Упростите выражение, используя запись в виде степени произведения:

1) $\underbrace{15 \cdot 15 \cdot \ldots \cdot 15}_{15 \text{ раз}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{22 \text{ раза}}$; 2) $\underbrace{2{,}8 \cdot 2{,}8 \cdot \ldots \cdot 2{,}8}_{10 \text{ раз}} \cdot \underbrace{c \cdot c \cdot \ldots \cdot c}_{37 \text{ раз}}$;

3) $\underbrace{\frac{10}{19} \cdot \frac{10}{19} \cdot \ldots \cdot \frac{10}{19}}_{18 \text{ раз}} \cdot \underbrace{y \cdot y \cdot \ldots \cdot y}_{11 \text{ раз}}$; 4) $\underbrace{(-7) \cdot (-7) \cdot \ldots \cdot (-7)}_{15 \text{ раз}} \cdot \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{22 \text{ раза}}$;

5) $\underbrace{24\cdot 24\cdot\ldots\cdot 24}_{20\text{ раз}}\cdot\underbrace{(x+3)(x+3)\cdot\ldots\cdot(x+3)}_{43\text{ раза}}$;

6) $\underbrace{\frac{d}{4}\cdot\frac{d}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{d}{4}}_{19\text{ раз}}\cdot\underbrace{t\cdot t\cdot\ldots\cdot t}_{50\text{ раз}}$.

1.13. Упростите выражение:

1) $x\cdot x\cdot x\cdot x+b\cdot b\cdot b\cdot b\cdot b$;
2) $y\cdot y\cdot y-s\cdot s\cdot s\cdot s\cdot s$;
3) $(5a)\cdot(5a)\cdot(5a)\cdot(5a)-\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}$;
4) $\frac{a}{5}\cdot\frac{a}{5}\cdot\frac{a}{5}\cdot\frac{a}{5}+z\cdot z$.

C

1.14. Выполните действия:

1) $10^3-5^2:8+\left(\frac{2}{3}\right)^5\cdot 81$;
2) $2{,}43\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3+6^2(2^5-28)$;
3) $9^3-15^2:16+\left(\frac{3}{4}\right)^3:\frac{27}{32}$;
4) $(7^2-51)^3\cdot\frac{5}{9}+3{,}6:9^2$.

1.15. Найдите 25% от числа x, если:

1) $x=\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot 4^3\cdot 3^4$;
2) $x=3^3\cdot 2^4\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2$;
3) $x=\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot 24\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2$;
4) $x=\left(\frac{2}{3}\right)^4\cdot 27\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2$.

1.16. Сравните значения выражений:

1) 8^3-600 и 17^2-4^4;
2) -10^4+9^4 и $(-15)^3$;
3) $0{,}4^3+1{,}6\cdot 1{,}1$ и $1{,}5^3-11\cdot 0{,}5^3$;
4) $(-2{,}2)^3+0{,}603\cdot 2^4$ и $368-2^3\cdot 6^4$.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

1.17. Вычислите и результат запишите в виде степени:

1) $2^3\cdot 2^4$; 2) $3^2\cdot 3^3$; 3) $\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2$; 4) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2$.

1.18. Сравните значения выражений:

1) $5^3\cdot 5^4$ и 5^{12};
2) $6^2\cdot 6^6$ и 6^8;
3) $(-3)^2\cdot(-3)^4$ и $(-3)^8$;
4) $4^4\cdot 4^5$ и 4^9.

1.19. Найдите верные равенства и выпишите их:

1) $7^2\cdot 7^6=7^8$;
2) $(-6)^7\cdot(-6)^2=(-6)^{14}$;
3) $(0{,}5)^5\cdot(0{,}5)^2=(0{,}5)^7$;
4) $(-1{,}25)^3\cdot(-1{,}25)^2=(-1{,}25)^6$.

§ 2. УМНОЖЕНИЕ СТЕПЕНЕЙ С ОДИНАКОВЫМИ ОСНОВАНИЯМИ

Каким свойством обладает умножение степеней с одинаковыми основаниями?

Рассмотрите произведение двух степеней с одинаковыми основаниями, *например* $a^6 \cdot a^2$.

Объясните

Как связаны показатели степеней a^6 и a^2 с показателем степени a^8:

$$a^6 \cdot a^2 = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}_{6 \text{ раз}} \times \underbrace{a \cdot a}_{2 \text{ раза}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}_{(6+2) \text{ раз}} = a^8?$$

Как видим, при умножении двух степеней с одинаковыми основаниями основание степени осталось тем же, а показатель 8 получился в результате сложения показателей первой и второй степеней.

Этим свойством обладают все степени с одинаковыми основаниями. Докажем это, т. е. объясним в общем виде, почему это свойство верно.

Если a — любое рациональное число и m, n — любые натуральные числа, то

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

В самом деле:

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ раз}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{(m+n) \text{ раз}} = a^{m+n}.$$

Таким образом, доказали свойство степени с натуральным показателем:

произведение двух степеней с одинаковыми основаниями равно степени с тем же основанием и показателем, равным сумме показателей данных степеней.

При преобразовании произведения двух степеней с одинаковыми основаниями и натуральными показателями можно пользоваться правилом:

чтобы умножить степени с одинаковыми основаниями, надо основание оставить прежним, а показатели сложить.

Это правило можно использовать при нахождении произведения трех и более степеней с натуральными показателями и одинаковыми основаниями.

Объясните

Почему $d^3d^7dd^{11} = d^{3+7+1+11} = d^{22}$?

1. Какое (положительное или отрицательное) число получится при умножении двух степеней с нечетными показателями и отрицательными одинаковыми основаниями?
2. Какими числами могут быть основания степеней, чтобы можно было применить правило умножения степеней с одинаковыми основаниями? Какими при этом могут быть показатели этих степеней?

Упражнения

А

Представьте в виде степени выражения (2.1—2.2):

2.1. 1) x^5x^{12}; 2) y^4y^{11}; 3) $z^{20}z^6$;

4) $40^{20}\cdot 40^3$; 5) $(0,3)^7\cdot(0,3)^{29}$; 6) $(8,4)^3\cdot(8,4)^{15}$;

7) $\left(\frac{2}{7}\right)^{31}\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^6$; 8) $\left(\frac{15}{19}\right)^3\cdot\left(\frac{15}{19}\right)^{19}$; 9) $\left(4\frac{4}{9}\right)^{14}\cdot\left(4\frac{4}{9}\right)^{28}$;

10) $(-5)^4\cdot(-5)^{11}$; 11) $\left(-\frac{1}{3}\right)^4\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^8$; 12) $(-6,2)^6\cdot(-6,2)^7$;

13) $(-c)^{10}\cdot(-c)^{51}$; 14) $\left(-\frac{d}{2}\right)^9\cdot\left(-\frac{d}{2}\right)^9$; 15) $(-1,4\ k)^5\cdot(-1,4\ k)^{20}$.

2.2. 1) $(3-a)^4\cdot(3-a)^{10}$; 2) $(x+y)^3\cdot(x+y)^{15}$;

3) $(2b-3)^6\cdot(2b-3)^{23}$; 4) $\left(\frac{1}{2}c+2\right)^{21}\cdot\left(\frac{1}{2}c+2\right)^{14}$;

5) $\left(4-\frac{2}{3}t\right)^{19}\cdot\left(4-\frac{2}{3}t\right)^2$; 6) $(9,2-k)^{15}\cdot(9,2-k)^{34}$.

Запишите в виде произведения двух степеней с одинаковыми основаниями степени **(2.3—2.4):**

2.3. 1) 9^{10}; 2) $\left(\frac{2}{3}\right)^{8}$; 3) $(81{,}4)^{6}$; 4) $\left(-\frac{4}{11}\right)^{15}$;

5) $(-20)^{7}$; 6) $\left(5\frac{1}{9}\right)^{40}$; 7) $(-0{,}09)^{13}$; 8) $\left(\ 2\frac{5}{13}\right)^{28}$.

2.4. 1) y^{11}; 2) $(-d)^{41}$; 3) $(8{,}5\,c)^{14}$; 4) $\left(-3\frac{2}{3}x\right)^{13}$.

Вместо звездочки запишите число, чтобы были верными равенства **(2.5—2.6):**

2.5. 1) $a^{31} = a^{19} \cdot a^{*}$; 2) $b^{24} = b^{*} \cdot b^{16}$;

3) $(-d)^{52} = (-d)^{34} \cdot (-d)^{*}$; 4) $(xy)^{9} = (xy)^{3} \cdot (xy)^{*}$;

5) $\left(\frac{k}{3}\right)^{20} = \left(\frac{k}{3}\right)^{10} \cdot \left(\frac{k}{3}\right)^{*}$; 6) $(1{,}3\,t)^{*} : (1{,}3\,t)^{8} = (1{,}3\,t)^{13}$.

2.6. 1) $x^{40} = x^{9} \cdot x^{*} \cdot x^{23}$; 2) $a^{*} \cdot a^{5} \cdot a^{23} = a^{41}$;

3) $(ab)^{*} \cdot (ab) \cdot (ab)^{9} = a^{14}$; 4) $\left(\frac{c}{4}\right)^{20} \cdot \left(\frac{c}{4}\right)^{*} = \left(\frac{c}{4}\right) \cdot \left(\frac{c}{4}\right)^{25}$;

5) $(-k)^{5} \cdot (-k)^{*} \cdot (-k)^{5} = (-k)^{15}$; 6) $\left(\frac{2}{5}y\right)^{6} \cdot \left(\frac{2}{5}y\right)^{*} = \left(\frac{2}{5}y\right) \cdot \left(\frac{2}{5}y\right)^{8}$.

B

Упростите выражения **(2.7—2.8):**

2.7. 1) $5^{k} \cdot 5^{4}$; 2) $6^{m} \cdot 6^{10}$; 3) $1{,}7^{7} \cdot 1{,}7^{c}$;

4) $(-4)^{3} \cdot (-4)^{d}$; 5) $\left(\frac{6}{13}\right)^{c} \cdot \left(\frac{6}{13}\right)^{6}$; 6) $(-5{,}2)^{9} \cdot (-5{,}2)^{n}$.

2.8. 1) $8^{4n} \cdot 8^{n}$; 2) $(-3)^{3k} \cdot (-3)^{8k}$; 3) $\left(\frac{8}{9}\right)^{11t} \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^{6t}$;

4) $\left(6\frac{2}{3}\right)^{9m} \cdot \left(6\frac{2}{3}\right)^{9m}$; 5) $(-4{,}1)^{9t} \cdot (-4{,}1)^{9t}$; 6) $3{,}7^{8n} \cdot 3{,}7^{8n}$.

Запишите в виде произведения трех степеней с одинаковыми основаниями степени **(2.9—2.10):**

2.9. 1) 15^{13n}; 2) $(-42)^{8m}$; 3) $\left(\frac{9}{16}\right)^{20t}$; 4) $(-1{,}1)^{11k}$.

2.10. 1) $(-100)^{6k}$; 2) 99^{7k}; 3) $\left(8\frac{3}{5}\right)^{17t}$; 4) $7{,}7^{3k}$.

2.11. Представьте в виде произведения одинаковых множителей разными способами степень:

1) a^3; 2) $(-6)^4$; 3) $\left(\frac{5}{18}\right)^5$; 4) $(x+y)^4$.

C

Вместо звездочки запишите выражение, чтобы были верными равенства **(2.12—2.13):**

2.12. 1) $a^k \cdot a^* = a^{k+n}$; 2) $b^* \cdot b^{3n} = b^{m+3n}$;

3) $(cd)^* = (cd)^{2t} \cdot (cd)^5$; 4) $(5z)^6 \cdot (5z)^* = (5z)^{6+3k}$.

2.13. 1) $c^k \cdot c^* = c^{2k+1}$; 2) $d^{5k} \cdot d^* = d^{8k+2}$;

3) $z^{6k} \cdot z^* = z^{10k+10}$; 4) $m^* \cdot m^{13k} = m^{16k+13}$.

2.14. Докажите, что является верным равенство:

1) $x^{k+4n-9} \cdot x^{7-3k} \cdot x^{6+2k-4n} = x^4$;

2) $x^{5m+11} \cdot x^{20-4m-2n} \cdot x^{m-2n-30} = x^{2m-1}$.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

2.15. Сократите дроби, результат запишите в виде степени:

1) $\frac{3^5}{3^4}$; 2) $\frac{4^4}{4^5}$; 3) $\frac{(2,3)^4}{(2,3)^3}$; 4) $\frac{(-0,8)^3}{(-0,8)^2}$.

2.16. Выпишите верные равенства:

1) $\frac{2^9}{2^3} = 2^3$; 2) $\frac{7^8}{7^4} = 7^4$; 3) $\frac{(0,25)^{12}}{(0,25)^4} = (0,25)^8$.

§ 3. ДЕЛЕНИЕ СТЕПЕНЕЙ С ОДИНАКОВЫМИ ОСНОВАНИЯМИ. СТЕПЕНЬ С НУЛЕВЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Каким свойством обладает деление степеней с одинаковыми основаниями? Что такое *степень с нулевым показателем*?

Рассмотрите деление двух степеней с одинаковыми основаниями и натуральными показателями, *например* : $b^{15} : b^9$.

Подумайте

1. Как выражение $b^{15} : b^9$ можно представить в виде степени с тем же основанием?
2. Как выполнить деление: $b^{15} : b^9 = \frac{b^{15}}{b^9} = \frac{b^9 \cdot b^6}{b^9} = b^6$?
3. Как связаны показатели степеней b^{15} и b^9 с показателем степени b^6?

Как видим, при делении степеней с одинаковыми основаниями основание осталось тем же, а показатель оказался равным значению разности показателей степени числителя и знаменателя.

Убедимся, что справедливо свойство:

если b — любое рациональное число, не равное 0, и m и n — любые натуральные числа, такие, что $m > n$, то $\frac{b^m}{b^n} = b^{m-n}$.

Доказательство: $\frac{b^m}{b^n} = \frac{b^n \cdot b^{m-n}}{b^n} = b^{m-n}$, т. е. $b^m : b^n = b^{m-n}$ при $m > n$, $b \neq 0$. ■

Сформулируем доказанное свойство:

частное двух степеней с одинаковыми основаниями, не равными нулю, и натуральными показателями, такими, что показатель делимого больше показателя делителя, равно степени с тем же основанием и показателем, равным разности показателей степеней делимого и делителя.

При преобразовании частного двух степеней с одинаковыми основаниями, не равными нулю, и натуральными показателями, можно пользоваться правилом:

при преобразовании частного двух степеней с одинаковыми основаниями и показателями, такими, что показатель делимого больше показателя делителя, надо основание оставить тем же, а из показателя степени делимого вычесть показатель степени делителя.

Объясните

Почему $\frac{t^{41}}{t^{29}} = t^{41-29} = t^{12}$?

Распространим правило деления степеней с одинаковыми основаниями для случая, когда показатели равны. Для этого разделим какую-нибудь степень саму на себя, *например* , a^n на a^n, так как делить на нуль нельзя, то $a \neq 0$. Тогда получим: $\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$. Поскольку $\frac{a^n}{a^n} = 1$, то и $a^0 = 1$. Значит,

$a^0 = 1$ для любого числа, не равного нулю ($a \neq 0$).

Например , $10^0 = 1$; $5^0 = 1$; $28^0 = 1$; $(-16)^0 = 1$.

1. Какими могут быть основания степени и показатели, чтобы можно было использовать правило деления степеней с одинаковыми основаниями?
2. Почему при нахождении степени с нулевым показателем основание степени не может быть равным нулю?
3. При каких значениях a значение степени a^0 равно 1?

Упражнения

A

Представьте в виде степени выражения **(3.1—3.3):**

3.1. 1) $x^{10} : x^7$; 2) $y^{13} : y^8$; 3) $z^{41} : z^{19}$;

4) $35^{21} : 35^9$; 5) $(1,8)^{14} : (1,8)^9$; 6) $(0,8)^{50} : (0,8)^{31}$;

7) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{28} : \left(-\frac{1}{2}\right)^{20}$; 8) $\left(-\frac{17}{20}\right)^{43} : \left(-\frac{17}{20}\right)^{26}$; 9) $\left(-5\frac{4}{18}\right)^{17} : \left(-5\frac{4}{13}\right)^{8}$.

3.2. 1) $(-8)^{50} : (-8)^{30}$; 2) $\left(\frac{3}{14}\right)^{3} : \left(\frac{3}{14}\right)^{2}$;

3) $(4{,}1)^{81} : (4{,}1)^{72}$; 4) $\left(\frac{a}{3}\right)^{31} : \left(\frac{a}{3}\right)^{21}$;

5) $(-k)^{38} : (-k)^{37}$; 6) $(-6{,}8)^{43} : (-6{,}8)^{42}$.

3.3. 1) $(9+x)^{6} : (9+x)^{4}$; 2) $(m-n)^{9} : (m-n)^{5}$;

3) $(2x-1)^{7} : (2x-1)^{4}$; 4) $\left(\frac{a}{5}-3\right)^{25} : \left(\frac{a}{5}-3\right)^{23}$;

5) $\left(4+\frac{b}{6}\right)^{10} : \left(4+\frac{b}{6}\right)$; 6) $(8{,}8-c)^{44} : (8{,}8-c)^{34}$.

Запишите в виде частного двух степеней с одинаковыми основаниями степени (3.4—3.5) :

3.4. 1) 50^{22}; 2) $\left(\frac{7}{3}\right)^{10}$; 3) $(-7{,}2)^{34}$; 4) $\left(-\frac{8}{9}\right)^{41}$.

3.5. 1) y^{12}; 2) $(-z)^{16}$; 3) $(-1{,}8\,d)^{51}$; 4) $\left(\frac{2}{11}c\right)^{77}$.

Вместо звездочки запишите числа, чтобы были верными равенства (3.6—3.7) :

3.6. 1) $200^{10} = 200^{21} : 200^{*}$; 2) $4{,}45^{39} : 4{,}45^{*} = 4{,}45^{30}$;

3) $(-5\,ab)^{*} : (-5\,ab) = (-5\,ab)^{11}$; 4) $\left(\frac{5}{16}t\right)^{*} : \left(\frac{5}{16}t\right)^{2} = \left(\frac{5}{16}t\right)^{22}$.

3.7. 1) $x^{60} = x^{80} : x^{15} : x^{*}$; 2) $a^{*} : a^{4} : a = a^{7}$;

3) $\left(-\frac{8}{15}k\right)^{38} = \left(-\frac{8}{15}k\right)^{36} : \left(-\frac{8}{15}k\right)^{*} : \left(-\frac{8}{15}\right)$;

4) $(1{,}1\,t)^{8} : (1{,}1\,t) : (1{,}1\,t)^{*} = 1{,}1\,t$.

3.8. Вычислите: $4{,}5^{0}$; $\left(-\frac{4}{5}\right)^{0}$; x^{0}; $(-2x+y)^{0}$; $(8{,}6\,a)^{0}$; $(-9{,}1\,bc)^{0}$.

3.9. Упростите выражение:

1) $a^{100} : a^{89} \cdot a^{2}$; 2) $b^{98} : b^{88} \cdot b^{15}$;

3) $(ax)^{41} \cdot (ax)^{12} : (ax)^{33}$;

4) $(3z)^{56} : (3z)^{51} \cdot (3z)$;

5) $\left(\frac{c}{5}\right)^{66} : \left(\frac{c}{5}\right)^{62} \cdot \left(\frac{c}{5}\right)^{3}$;

6) $(-kt)^{49} : (-kt)^{39} \cdot (-kt)^{10}$.

3.10. Вычислите:

1) $3^{25} : 3^{22} \cdot 3^{2}$;

2) $6^{20} \cdot 6^{18} : 6^{35}$;

3) $\left(\frac{5}{9}\right)^{40} : \left(\frac{5}{9}\right)^{36} \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^{2}$;

4) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{50} : \left(-\frac{1}{2}\right)^{49} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{4}$;

5) $(1,1)^{17} \cdot (1,1) : (1,1)^{16}$;

6) $(-1,3)^{29} : (-1,3)^{28} \cdot (-1,3)$.

B

3.11. Найдите значение выражений:

1) $\frac{a^{20} \cdot a^{20}}{a^{17} \cdot a^{19}}$ при $a = 5;\ -\frac{3}{11};\ 2,8;\ -40$;

2) $\frac{b^{40} \cdot b^{10} \cdot b^{38}}{b^{37} \cdot b^{49}}$ при $b = 8;\ -1,3;\ \frac{5}{3};\ -6$.

3.12. При каком значении переменной x значение выражения равно 1:

1) $100^{34} : 100^{32} : 100^{x}$;

2) $(-40)^{50} : (-40)^{x} : (-40)^{21}$;

3) $\left(\frac{1}{6}\right)^{42} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{9} : \left(\frac{1}{6}\right)^{x}$;

4) $(-9,3)^{x} : (-9,3)^{24} : (-9,3)^{48}$?

3.13. Сравните значения выражений:

1) $4^{5} : 4^{3}$ и $2^{8} : 2^{6}$;

2) $(-9)^{10} : (-9)^{9}$ и $(-8)^{9} : (-8)^{8}$;

3) $10^{20} : 10^{19} \cdot 10^{2}$ и $2^{40} : 2^{35} \cdot 2^{5}$;

4) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{60} : \left(-\frac{1}{3}\right)^{58}$ и $\left(-\frac{1}{2}\right)^{40} : \left(-\frac{1}{2}\right)^{36}$.

Упростите выражения **(3.14—3.15):**

3.14. 1) $9^{n} : 9^{5}$;

2) $(-10)^{6} : (-10)^{m}$;

3) $3,7^{k} : 3,7^{11}$;

4) $\left(\frac{3}{16}\right)^{6} : \left(\frac{3}{16}\right)^{d}$;

5) $\left(8\frac{1}{4}\right) : \left(8\frac{1}{4}\right)^{c}$;

6) $(-2,4)^{t} : (-2,4)^{1}$.

3.15. 1) $11^{k} : 11^{4} \cdot 11^{k+1}$; 2) $20^{10} : 20^{t} \cdot 20^{3+t}$;

3) $\left(\frac{1}{4}\right)^{3k} : \left(\frac{1}{4}\right)^{k} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{2k+3}$; 4) $(-9)^{20t} : (-9)^{t+5} : (-9)$;

5) $\left(-\frac{1}{9}\right)^{5t-2} : \left(-\frac{1}{9}\right) \cdot \left(-\frac{1}{9}\right)^{5t}$; 6) $2{,}1^{k+3} \cdot 2{,}1^{6t} : 2{,}1^{4t+3}$.

C

3.16. Вычислите:

1) $(2^{30} : 2^{15} : 2^{10}) \cdot (5^{27} : 5^{26} \cdot 5)$; 2) $(3^{13} : 3^{12} \cdot 3^{3}) : (7^{17} : 7^{15} : 7^{2})$;

3) $(4^{10} : 4^{8}) \cdot (6^{8} : 6^{6}) : (24^{37} : 24^{36})$; 4) $(9^{22} : 9^{20}) \cdot (8^{5} : 8^{3}) : (6^{18} : 6^{15})$.

3.17. Представьте в виде частного двух степеней с одинаковыми основаниями выражение:

1) a^{k+5}; 2) d^{k+m}; 3) b^{2k+1}; 4) c^{4+5k}.

3.18. Вычислите:

1) $\dfrac{(-5)^{6} \cdot (-5)^{7} \cdot (-5)^{8}}{(-5)^{14} \cdot (-5)^{4}}$; 2) $\dfrac{1{,}2^{40} \cdot 1{,}2^{25} \cdot 1{,}2^{4}}{1{,}2^{59} \cdot 1{,}2^{8}}$;

3) $\dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^{10} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{20} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{30}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{34} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{23}}$; 4) $\dfrac{\left(-\frac{1}{6}\right)^{25} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^{19} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^{16}}{\left(-\frac{1}{6}\right)^{8} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^{49}}$.

3.19. Найдите значение выражения:

1) $\dfrac{(-6)^{19} \cdot (-6)^{33}}{3{,}2^{24} \cdot 3{,}2^{6}} \cdot \dfrac{3{,}2^{96} \cdot 3{,}2^{12}}{(-6)^{28} \cdot (-6)^{29}} \cdot \dfrac{(-6)^{6}}{3{,}2^{77}}$;

2) $\dfrac{1{,}7^{40} \cdot 1{,}7^{12} \cdot 20^{30}}{1{,}7^{39} \cdot 20^{6} \cdot 20^{7}} \cdot \dfrac{20^{7} \cdot 20^{8}}{1{,}7^{13} \cdot 1{,}7^{9}} \cdot \dfrac{1{,}7^{10}}{20^{31}}$.

3.20. Верно ли равенство:

1) $\dfrac{x^{100} \cdot x^{20} \cdot x^{60}}{x^{89} \cdot x^{72}} = \dfrac{x^{55} \cdot x^{36}}{x^{41} \cdot x^{13} \cdot x^{18}}$;

2) $\dfrac{x^{33} \cdot x \cdot x^{69}}{x^{47} \cdot x^{49}} = \dfrac{x^{53} \cdot x^{56} \cdot x^{60}}{x^{81} \cdot x^{2} \cdot x^{79}}$;

3) $\dfrac{a^{17} \cdot a^{47} \cdot a^{56}}{a^{81} \cdot a^{39}} = \dfrac{a^{80} \cdot a^{5} \cdot a^{37}}{a^{59} \cdot a^{63}}$;

4) $\dfrac{a^{31} \cdot a^{18} \cdot a^{27} \cdot a^{19}}{a^{22} \cdot a^{54} \cdot a^{16}} = \dfrac{a^{39} \cdot a^{23}}{a^{59}}$?

Подготовьте сообщение

3.21. Расскажите о среднеазиатском ученом аль-Каши, который применил в своих трудах равенство $a^0 = 1$ (для $a \neq 0$) в начале XV в.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

3.22. Представьте в виде степени выражения:

1) $(2^3)^4$; 2) $(4^2)^3$; 3) $\left((-2)^3\right)^2$; 4) $(5^2)^3$.

3.23. Выпишите верные равенства:

1) $(7^2)^3 = 7^5$; 2) $(8^4)^2 = 8^8$; 3) $(3^3)^2 = 3^9$.

§ 4. ВОЗВЕДЕНИЕ СТЕПЕНИ В СТЕПЕНЬ

Каким свойством обладает возведение степени в степень?

Выражение $(a^7)^5$ представлено в виде степени с основанием a^7 и показателем 5.

Объясните

Как степень $(a^7)^5$ представили в виде степени с основанием a:
$(a^7)^5 = a^7 \cdot a^7 \cdot a^7 \cdot a^7 \cdot a^7 = a^{7+7+7+7+7} = a^{7\cdot 5} = a^{35}$?

Как видим, при возведении степени в степень основание степени осталось прежним, а показатели степеней перемножили.

Убедимся, что справедливо свойство:

если a — любое число и m, n — целые неотрицательные числа, то $(a^m)^n = a^{mn}$.

Действительно, по определению степени:

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n \text{ раз}}.$$

Используя правило умножения степеней с одинаковыми основаниями, получим: $\underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n \text{ раз}} = a^{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{n \text{ раз}}}$.

Заменим сумму одинаковых слагаемых $\underbrace{m+m+\ldots+m}_{n \text{ раз}}$ произведением mn.

Получим: $a^{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{n \text{ раз}}} = a^{mn}$.

При возведении степени в степень можно использовать правило:

чтобы возвести степень в степень, надо основание степени оставить прежним, а показатели перемножить.

1. Какими могут быть основания степени и показатели, чтобы можно было применить правило возведения степени в степень?
2. Всегда ли можно возвести степень в степень?

Упражнения

A

Запишите в виде степени с основанием b выражения (4.1—4.2):

4.1. 1) $(b^2)^3$; 2) $(b^3)^2$; 3) $(b^4)^3$; 4) $(b^2)^4$.

4.2. 1) $(b^5)^2 \cdot b^3$; 2) $b \cdot (b^3)^4$; 3) $b^8 \cdot (b^{10})^3$;
4) $b^6 \cdot (b^4)^8$; 5) $(b^7)^5 \cdot b$; 6) $(b^{11})^4 \cdot b^{10}$;
7) $(b^5)^{10} : b^{31}$; 8) $b^{43} : (b^9)^4$; 9) $(b^6)^{12} \cdot b^{59}$;
10) $b^{100} : (b^5)^4$; 11) $(b^{17})^5 : b^{81}$; 12) $b^{79} : (b^{13})^6$.

Упростите (4.3—4.4):

4.3. 1) $(a^4)^2 \cdot (a^3)^4$; 2) $(b^4 b)^6$; 3) $(c^5)^8 : (c^6)^6$;
4) $(d^8 d^2)^3$; 5) $(c^9)^5 : (c^4)^{10}$; 6) $(kk^{11})^7$.

4.4. 1) $(b^4)^6 \cdot (b^5)^4$; 2) $(b^{16})^4 : (b^3)^{20}$; 3) $(b^9)^{12} : (b^{10})^{10}$;
4) $(b^{30})^3 : (b^4)^{20}$; 5) $(b^3)^7 \cdot (b^5)^5$; 6) $(b^7)^6 : (b^8)^5$.

4.5. Представьте в виде квадрата выражения степень:
1) a^6; 2) x^{20}; 3) y^{22}; 4) z^{48}.

4.6. Представьте в виде куба выражения степень:
1) a^6; 2) x^{21}; 3) y^{30}; 4) z^{72}.

4.7. Вычислите:
1) $(5^2)^2 - 600$; 2) $(3^3)^2 + 271$; 3) $1000 - 5 \cdot (2^3)^2$;
4) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^4\right)^2 \cdot 320$; 5) $(2^4)^2 - 200$; 6) $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)^3 \cdot \frac{3645}{32}$.

B

4.8. Найдите значение выражения:
1) $(b^5)^3 \cdot (b^2)^7 : (b^6)^4$ при $b = -2$; 2) $(a^2)^5 \cdot (a^{10})^2 : (a^{14})^2$ при $a = -\frac{3}{7}$.

4.9. Докажите тождество:
1) $(a^2)^4 \cdot (a^3)^5 : (a^3)^7 = a^2$; 2) $(x^3)^6 \cdot (x^2)^5 = x^{28}$.

4.10. Упростите:
1) $\frac{(125b^2)^3}{25b^4}$; 2) $\frac{45x^{14}y^9}{-27x^{12}(-y^3)^3}$; 3) $\frac{-32c^{15}(d^4)^5}{24c^{13}d^{17}}$.

C

4.11. Вычислите:

1) $\dfrac{(13^5)^{11} \cdot (13^4)^{10}}{(13^{47})^2}$; 2) $\dfrac{(7^5)^6 \cdot 7^{27}}{(7^{14})^4}$; 3) $\dfrac{(6^8)^9 \cdot (6^4)^5}{(6^{24})^3 \cdot (6^3)^6}$;

4) $\dfrac{(19^{11})^7 \cdot (19^7)^2}{(19^{20})^3 \cdot 19^{29}}$; 5) $\dfrac{(3^{15})^5 \cdot (3^{12})^2}{(3^2)^{25} \cdot (3^3)^{16}}$; 6) $\dfrac{(2^{40})^3 \cdot (2^{12})^5}{(2^{45})^2 \cdot (2^{11})^4}$.

4.12. Найдите значение выражения:

1) $(y^4)^5 : (y^9)^2 \cdot y^3$ при $y = -1$; 2) $(z^3)^9 : (z^4)^6 \cdot z$ при $z = -2$.

4.13. Докажите тождество:

1) $(a^{2k})^5 : (2a^{3k}) - 1{,}5\, a^{7k} = -a^{7k}$; 2) $(y^{2n})^6 : (5y^{5n})^2 + 0{,}96\, y^{2n} = y^{2n}$.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

4.14. Выпишите верные равенства:

1) $(ab)^2 = a^2b^2$; 2) $(7^2 \cdot 4^3)^2 = 7^2 \cdot 4^9$;

3) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 = \dfrac{a^2}{b^2}$; 4) $\left(\dfrac{4}{7}\right)^3 = \dfrac{4^3}{7}$.

4.15. Сравните значения выражений:

1) $(2^3b^2)^3$ и 2^9b^6; 2) $(m^2c^3)^4$ и m^8c^7;

3) $\left(\dfrac{3}{11}\right)^2$ и $\dfrac{3^2}{11^2}$; 4) $\left(\dfrac{2}{9}\right)^3$ и $\dfrac{2^3}{9^3}$.

4.16. Найдите наименьшее натуральное число, при котором верно неравенство $|3x - 7|$ m 3.

§ 5. ВОЗВЕДЕНИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ И ЧАСТНОГО В СТЕПЕНЬ

Каким свойством обладает возведение произведения и частного в степень?

Объясните

Как степень $(3 \cdot 8)^4$ представили в виде произведения степеней $3^4 \cdot 8^4$:
$(3 \cdot 8)^4 = (3 \cdot 8) \cdot (3 \cdot 8) \cdot (3 \cdot 8) \cdot (3 \cdot 8) = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 3^4 \cdot 8^4$?

Как видим, при возведении произведения в степень сначала возвели в эту степень каждый из множителей, затем полученные степени перемножили.

Убедимся в справедливости свойства:

> если a и b — любые рациональные числа, а m — натуральное число, то $(ab)^m = a^m b^m$.

Действительно, $(ab)^m = \underbrace{(ab) \cdot (ab) \cdot \ldots \cdot (ab)}_{m \text{ раз}}$.

Поскольку множители можно менять местами, то получим:

$$\underbrace{(ab) \cdot (ab) \cdot \ldots \cdot (ab)}_{m \text{ раз}} = \underbrace{aa \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ раз}} \cdot \underbrace{bb \cdot \ldots \cdot b}_{m \text{ раз}} = a^m \cdot b^m.$$

При возведении произведения в степень можно использовать правило:

> чтобы произведение возвести в степень, надо возвести в эту степень каждый множитель и полученные степени перемножить.

Например, $(2 \cdot 10)^4 = 2^4 \cdot 10^4 = 16 \cdot 10\,000 = 160\,000$.

Рассмотрите возведение частного (дроби) в степень на примере $\left(\frac{2}{3}\right)^4$.

По определению степени с натуральным показателем получим:
$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$. По правилу умножения дробей получим: $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot$

$\cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}$. Заменим произведения одинаковых множителей степенями. Получим: $\frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{2^4}{3^4}$. Таким образом, $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4}$.

Как видим, при возведении в степень дробь возвели в эту степень отдельно числитель и отдельно знаменатель, первый результат записывают в числитель, второй — в знаменатель.

Убедимся в справедливости свойства:

если a — целое число, b и n — натуральные числа, то $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Действительно, по определению степени с натуральным показателем имеем:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{b}{b}}_{n \text{ раз}} = \frac{\overbrace{aa \ldots a}^{n \text{ раз}}}{\underbrace{bb \ldots b}_{n \text{ раз}}} = \frac{a^n}{b^n}.$$

При возведении дроби в степень можно воспользоваться правилом:

чтобы возвести дробь в степень, надо возвести в эту степень отдельно ее числитель и знаменатель.

Например, $\left(-\frac{2}{k}\right)^6 = \left(\frac{2}{k}\right)^6 = \frac{2^6}{k^6} = \frac{64}{k^6}$.

1. Какими могут быть основания и показатели степени, чтобы можно было применить правило возведения в степень: 1) произведения; 2) дроби?
2. Может ли в результате возведения произведения или дроби в натуральную степень получиться отрицательное число или нуль?

Упражнения

А

Представьте в виде произведения степеней степени (5.1—5.2):

5.1. 1) $(ax)^7$; 2) $(yz)^{10}$; 3) $(nm)^{15}$; 4) $(cd)^{20}$.

5.2. 1) $(2a)^{20}$; 2) $(1{,}5\,b)^5$; 3) $(\frac{2}{17}c)^7$; 4) $(-4\,d)^{12}$.

Представьте в виде частного степеней степени **(5.3—5.4)**:

5.3. 1) $\left(\frac{a}{y}\right)^3$; 2) $\left(\frac{n}{m}\right)^{10}$; 3) $\left(\frac{k}{c}\right)^{19}$; 4) $\left(\frac{d}{x}\right)^{31}$.

5.4. 1) $\left(\frac{2}{b}\right)^5$; 2) $\left(\frac{d}{7}\right)^4$; 3) $\left(\frac{5}{a}\right)^{11}$; 4) $\left(-\frac{6}{n}\right)^8$.

5.5. Запишите в виде степени выражение:

1) $2^8 \cdot a^8$; 2) $5^5 \cdot b^5$; 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^7 c^7$; 4) $\left(\frac{2}{15}\right)^{10} d^{10}$.

5) $4^6a^6b^6$; 6) $8^9c^9d^9$; 7) $\left(\frac{4}{11}\right)^{11} n^{11}m^{11}$; 8) $x^{13}y^{13}z^{13}$.

5.6. Запишите в виде степени дробь:

1) $\frac{4^{10}}{x^{10}}$; 2) $\frac{7^{13}}{y^{13}}$; 3) $\frac{z^{21}}{6^{21}}$; 4) $\frac{t^{39}}{9^{39}}$.

Упростите **(5.7—5.8)**:

5.7. 1) $\frac{(a \cdot b)^3}{b^2}$; 2) $\left(\frac{x}{y}\right)^5 \cdot y^7$; 3) $\frac{(d \cdot t)^9}{d^7}$;

4) $\frac{(x \cdot y)^6}{x^5}$; 5) $\frac{(a \cdot c)^{10}}{c^8}$; 6) $m^{12} \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^{10}$.

5.8. 1) $\frac{\left(x^5y^6\right)^4}{x^{20}y^{22}}$; 2) $\left(\frac{a^4}{b^3}\right)^5 \cdot b^{17}$; 3) $\frac{\left(x^8y^4\right)^3}{x^{23}y^{12}}$;

4) $\frac{a^{21}b^{34}}{\left(a^{10}b^{17}\right)^2}$; 5) $y^{20} \cdot \left(\frac{z^2}{y^5}\right)^4$; 6) $\frac{z^{19}t^{41}}{\left(z^6t^{13}\right)^3}$.

B

5.9. Найдите значение выражения:

1) $(a^4b^5)^2 : (a^2b^2)^3$ при $a = -0{,}5$, $b = 2$;

2) $(x^7y^4)^3 : (x^{10}y^5)^2$ при $x = -3$, $y = \frac{2}{3}$;

3) $(-2a^6b^3)^3 : (5a^8b^4)^2$ при $a = \frac{7}{8}$, $b = -\frac{3}{25}$;

4) $(3a^9b^3)^2 : (-4a^4b)^4$ при $a = -\frac{5}{9}$, $b = -16$.

5.10. Докажите тождество:

1) $\left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot (2^5)^3 \cdot 3^7 : (2^{10} \cdot 3)^2 = 1$; 2) $(7^2)^8 \cdot (6^3)^4 : (7^4 \cdot 6^3)^4 = 1$;

3) $\left(\frac{4}{5}\right)^6 \cdot (4^3)^3 \cdot 5^8 : (4^7 \cdot 5)^2 = 4$; 4) $(9^4 \cdot 8^3)^5 : (9^{10})^2 : (8^2)^7 = 8$.

Упростите выражения **(5.11—5.12)**:

5.11. 1) $(2x^5y^7)^3 : (x^{14}y^{20}) - (3xy^5)^3 : (x^2y^{14})$;

2) $(-3a^4b^5)^2 \cdot (-2a^2b^3)^3 : (-72a^6b^9)^2 + a^2b$;

3) $(5x^6y^2)^3 \cdot (-x^8y^7)^2 : (-0{,}2x^{15}y^{10})^2 - 10x^4$;

4) $(-2a^{10}b^{20})^2 : (-a^2b^3)^3 : (-2a^5b^{24})^2$.

5.12. 1) $(x^{11}y^{12}z^{13})^2 : (x^2yz^2)^9 \cdot (xyz^5)^2$; 2) $\left(\frac{x}{y}\right)^5 \cdot \left(\frac{x^4}{y^3}\right)^3 \cdot \left(\frac{x^8}{y^{10}}\right)^2 \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^5$.

C

5.13. Найдите значение выражения:

1) $(a^3b^5)^5 : (a^7b^{12})^2 \cdot (ab)^3$ при $a = -2$, $b = -\frac{1}{2}$;

2) $\left(\frac{a^4}{b^5}\right)^2 \cdot \left(\frac{b^6}{a^3}\right)^2 : (ab)$ при $a = -\frac{1}{3}$, $b = -3$.

5.14. Упростите выражение:

1) $(4^k3^n)^2 : (4^{k-1}3^{n-1})^2$; 2) $(7^m9^n)^3 : (7^{m-2}9^n)^3$;

3) $(11^k5^t)^4 : (11^k5^{t-1})^4$; 4) $(13^m6^k)^3 : (13^m6^{k-1})^3$.

5.15. Вычислите:

1) $(100^{10} \cdot 9^3)^7 \cdot (100^{20} \cdot 9^6)^2 : (100^{109} \cdot 9^{33})$;

2) $(0{,}15^{16} \cdot 3^7)^5 \cdot (3^3 \cdot 0{,}15^{10})^3 : (3^{20} \cdot 0{,}15^{55})^2$;

3) $\left(\left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^6\right)^{10} : \left(\left(\frac{4}{5}\right)^{12} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^6\right)^5$;

4) $\left(\left(\frac{5}{6}\right)^7 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^3\right)^8 \cdot \left(\left(\frac{6}{7}\right)^{11} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{27}\right)^2$.

5.16. Докажите, что значение выражения равно нулю:

1) $((a^2)^3)^5 \cdot (a^{15}b)^2 : a^{60} - b^2$; 2) $(x^5y)^3 \cdot ((y^4)^3)^4 : y^{51} - x^{15}$.

5.17. Докажите тождество:

1) $\left(\frac{2}{3}\right)^8 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^9 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{10} = 3{,}75$; 2) $(4 \cdot 7)^{10} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{10} : (7^5 \cdot 3^4)^2 = 9$.

5.18. Представьте число: 1) 64; 2) 729 в виде степени:

а) с отрицательным основанием; б) с нечетным показателем.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

5.19. Найдите значения степеней числа 3:

$3;\ 3^2;\ 3^3;\ 3^4;\ 3^5;\ 3^6;\ \ldots$

1) Какой вывод можно сделать о значении степени каждого следующего числа по сравнению с предыдущим?
2) Какой вывод можно сделать о значении степени каждого предыдущего числа по сравнению с последующим?

5.20. Представьте из дробей в виде последовательности из степеней последовательность чисел:

1) $\frac{1}{3};\ \frac{1}{9};\ \frac{1}{27};\ \frac{1}{81};\ \ldots;$

2) $\frac{2}{7};\ \frac{4}{49};\ \frac{8}{343};\ \frac{16}{2401};\ \ldots$

§ 6. СТЕПЕНЬ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Как изменится число, если показатель степени числа 10 увеличить на 1; уменьшить на 1? Как записать очень маленькие числа?

Выполните задание

Заполните таблицу 6.1.

Таблица 6.1

Степень	Произведение	Значение степени
10^2	$10 \cdot 10$	100
10^3		
10^4		
10^5		

Если показатель степени 10 увеличить на 1, то значение степени увеличится в 10 раз, если уменьшить на 1, то значение степени уменьшится в 10 раз.

Продолжите заполнение таблицы 6.2 с помощью обнаруженной закономерности.

Таблица 6.2

Степень	Значение степени
10^3	1000
10^2	100
10^1	10
10^0	1
10^{-1}	$\frac{1}{10}$
10^{-2}	$\frac{1}{100}$
10^{-3}	
10^{-4}	
10^{-5}	

Используя заполненную таблицу, установите, что показывает натуральный показатель степени числа 10 и что показывает целый отрицательный показатель степени числа 10.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}\text{, если } a \neq 0 \text{ и } n \text{ — натуральное число.}$$

Рассмотрите примеры: $12^{-2} = \frac{1}{12^2} = \frac{1}{144}$;

$(-7)^{-3} = \frac{1}{(-7)^3} = \frac{1}{-343} = -\frac{1}{343}$;

$\left(-\frac{1}{3}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^4} = \frac{1}{\frac{1}{81}} = 81.$

Объясните

Почему вычислить 2^{-1}; 3^{-2} можно, а вычислить 0^0; 0^{-1} нельзя?

Запомните!

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $(a \neq 0)$ запись называют *заменой дробью степень с целым отрицательным показателем*.

1. Как изменится значение степени числа 3, если показатель этой степени уменьшить на 1; увеличить на 2; уменьшить на 2?
2. Каким может быть основание степени с отрицательным показателем?
3. Почему число 0 может быть основанием степени с натуральным показателем, а с целым не может?

Упражнения

А

6.1. Замените дробью степень с целым отрицательным показателем:

1) 7^{-3}; 2) 13^{-2}; 3) 11^{-1}; 4) 12^{-3}; 5) 16^{-5}; 6) 25^{-4}.

6.2. Замените степенью с целым отрицательным показателем дробь:

1) $\frac{1}{81}$; 2) $\frac{1}{64}$; 3) $\frac{1}{121}$;

4) $\frac{1}{625}$; 5) $\frac{1}{841}$; 6) $\frac{1}{256}$.

6.3. Представьте числа 5; 25; 125; 625; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{25}$; $\frac{1}{125}$; $\frac{1}{625}$:

1) в виде степени с основанием 5;

2) в виде степени с основанием $\frac{1}{5}$.

6.4. Вычислите:

1) 2^{-3}; 2) $(-3)^{-3}$; 3) $(-1)^{-22}$;

4) $\left(\frac{2}{5}\right)^{3}$; 5) $0{,}02^{-3}$; 6) $1{,}25^{-2}$;

7) -4^{-3}; 8) $(-0{,}3)^{-2}$; 9) $\left(-2\frac{1}{2}\right)^{-3}$;

10) $(-2{,}25)^{-1}$; 11) $-(-2{,}3)^{-1}$; 12) $-\left(-2\frac{1}{3}\right)^{-2}$.

B

6.5. Замените дробью степень с целым отрицательным показателем:

1) $(25)^{-1}$; 2) $(0{,}125)^{-2}$; 3) $(-2{,}5)^{-2}$;

4) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$; 5) $\left(2\frac{1}{3}\right)^{-3}$; 6) $\left(-\frac{2}{7}\right)^{-2}$.

6.6. Вычислите:

1) $3 \cdot 12^{-2}$; 2) $2^{-3} + 6^{-1}$; 3) $3^{-2} - (-3)^{-1}$;

4) $-2 \cdot 4^{-3}$; 5) $3 \cdot 4^{-2} + 2^{-3}$; 6) $0{,}4^{0} - (-0{,}25)^{-3}$;

7) $-(-2{,}5)^{-2} + \left(-\frac{2}{5}\right)^{-2}$; 8) $(-3)^{-3} - 3{,}5^{-1}$;

9) $-4^{-3} + \left(-\frac{4}{5}\right)^{-2}$; 10) $-3{,}5^{-1} + (-2{,}5)^{-2}$;

11) $3 \cdot (-4)^{-2} + 5^{-1}$; 12) $(-2{,}7)^{0} + \left(\frac{1}{7}\right)^{-1}$.

C

6.7. Представьте в виде дроби выражение:

1) $a^{-1} + b^{-1}$; 2) $ab^{-1} - a^{-1}b$; 3) $(x + y^{-1})(x^{-1} + y)$.

6.8. Представьте дробь в виде степени с целым показателем:

1) $\dfrac{2ab^2}{c^2x^3}$; 2) $\dfrac{54x^3y^2}{2a^5b^4}$; 3) $\dfrac{4}{(x+y)^3}$; 4) $\dfrac{(a-b)^3}{(a+b)^5}$.

Подготовьте сообщение

6.9. Расскажите о французском математике Николе Шюке, который ввел отрицательные и нулевые показатели степеней в рукописном трактате "Наука о числах" в 1484 г.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

6.10. Упростите выражение:

1) $(5^3 \cdot 5^2)^4 : 5^{15}$; 2) $(3^3)^4 \cdot 9^2 : 3^{10}$; 3) $3^2 \cdot (-3)^4 - 3^6$;

4) $25^3 : 5^2$; 5) $3^4 \cdot 9^1$; 6) $4^2 \cdot (-4)^1$.

§ 7. СВОЙСТВА СТЕПЕНИ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Какими свойствами обладают степени с целым показателем?

Вам известны свойства степени с натуральным показателем: для любых чисел $a \neq 0$, $b \neq 0$ и любых натуральных чисел n и m верны равенства:

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$; $a^n : a^m = a^{n-m}$ при $n > m$; $(a^m)^n = a^{mn}$; $(ab)^n = a^n b^n$, $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Докажем, что все эти свойства выполняются, когда показателями являются любые целые числа.

Свойства:

Для любых целых чисел m и n и $a \neq 0$ верны равенства:
1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; 2) $a^n : a^m = a^{n-m}$; 3) $(a^m)^n = a^{mn}$;
4) $(ab)^n = a^n b^n$; 5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$.

Доказательство.

Докажем равенство: 1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

а) Рассмотрим случай, когда один показатель степени числа a число положительное, другой — отрицательное: например, $m > 0$, $n < 0$.

Поскольку свойства степеней были доказаны для степеней с натуральными показателями, то выразим целые числа m и n через натуральные числа. Для этого обозначим $m = k$, $n = -p$, где k и p — натуральные числа. Тогда:

$a^m \cdot a^n = a^k \cdot a^{-p}$ — использовали введенные обозначения;

$a^k \cdot a^{-p} = a^k \cdot \frac{1}{a^p}$ — преобразовали второй множитель по определению степени с отрицательным целым показателем;

$a^k \cdot \frac{1}{a^p} = \frac{a^k}{a^p}$ — использовали правило умножения на дробь.

Здесь возможны случаи: $k > p$, $k < p$ и $k = p$.

Если $k > p$, то $\frac{a^k}{a^p} = a^{k-p}$ — по свойству степеней с натуральным показателем: $a^n : a^m = a^{n-m}$ при $n > m$.

Если $k < p$, то $\frac{a^k}{a^p} = \frac{1}{a^{p-k}}$ — сократили дробь на общий множитель a^k;

$\frac{1}{a^{p-k}} = a^{k-p}$ — по определению степени с отрицательным показателем;

Если $k = p$, то $\frac{a^k}{a^p} = 1 = a^0 = a^{k-p}$ — так как $a \neq 0$ и $a^k = a^p$, $a^0 = 1$.

$a^{k-p} = a^{k-(-p)}$ — записали выражение в показателе степени в виде алгебраической суммы;

$a^{k+(-p)} = a^{m+n}$ — использовали введенные обозначения: $m = k, n = -p$.

Все проведенные выше преобразования можно записать так:

$a^m \cdot a^n = a^k \cdot a^{-p} = a^k \cdot \frac{1}{a^p} = \frac{a^k}{a^p} = a^{k-p} = a^{k+(-p)} = a^{m+n}$.

б) Рассмотрим случай, когда оба показателя степеней числа a целые отрицательные числа, т. е. $m < 0$, $n < 0$.

Поскольку свойства степеней были доказаны для степеней с натуральными показателями, то выразим целые числа m и n через натуральные числа. Для этого обозначим $m = -k$, $n = -p$, где k и p — натуральные числа. Тогда:

$a^m \cdot a^n = a^{-k} \cdot a^{-p}$ — использовали введенные обозначения: $m = -k$, $n = -p$;

$a^{-k} \cdot a^{-p} = \frac{1}{a^k} \cdot \frac{1}{a^p}$ — по определению степени с отрицательным целым показателем;

$\frac{1}{a^k} \cdot \frac{1}{a^p} = \frac{1}{a^k \cdot a^p}$ — по правилу умножения дробей;

$\frac{1}{a^k \cdot a^p} = \frac{1}{a^{k+p}}$ — по свойству степеней с натуральными показателями;

$\frac{1}{a^{k+p}} = a^{-(k+p)}$ — по определению степени с отрицательным целым показателем;

$a^{-(k+p)} = a^{-k-p}$ — по правилу раскрытия скобок, перед которыми стоит знак "–";

$a^{-k-p} = a^{-k+(-p)}$ — записали выражение в показателе степени в виде алгебраической суммы;

$a^{-k+(-p)} = a^{m+n}$ — использовали введенные обозначения: $m = -k$, $n = -p$.

Все проведенные выше преобразования можно записать так:

$$a^m \cdot a^n = a^{-k} \cdot a^{-p} = \frac{1}{a^k} \cdot \frac{1}{a^p} = \frac{1}{a^{k+p}} = a^{-(k+p)} = a^{-k-p} = a^{-k+(-p)} = a^{m+n}.$$

Докажите свойство $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ при $m = 0$ или $n = 0$.

Чтобы умножить степени с целыми показателями и одинаковыми основаниями, отличными от нуля, надо основание оставить прежним, а показатели степеней сложить.

Докажите свойства 2)—5) (с. 55).

Из свойств следует, что действия над степенями с целыми показателями выполняются по тем же правилам, что и действия над степенями с натуральными показателями.

Пример 1. Упростим произведение $b^{19} \cdot b^{-13}$, где $b \neq 0$.

Решение .

$b^{19} \cdot b^{-13} = b^{19+(-13)}$ — по правилу: при умножении степеней с одинаковыми основаниями основание оставляют прежнее, а показатели степеней складывают;

$b^{19+(-13)} = b^{19-13}$ — по правилу раскрытия скобок, перед которыми стоит знак "+".

$b^{19-13} = b^6$.

Ответ : b^6.

Пример 2. Упростим частное $c^7 : c^{11}$, где $c \neq 0$.

Решение .

$c^7 : c^{11} = c^{7-11} = c^{-4}$ — по правилу: при делении степеней с одинаковыми основаниями основание оставляют прежним, а из показателя степени делимого вычитают показатель степени делителя.

Ответ : c^{-4}.

Пример 3. Упростим выражение $(-3x^{-4}y^2)^{-5}$.

Решение.

$(-3x^{-4}y^2)^{-5} = (-3)^{-5}(x^{-4})^{-5}(y^2)^{-5}$ — по правилу: при возведении в степень произведения возводят в эту степень каждый множитель и результаты перемножают.

$(-3)^{-5}(x^{-4})^{-5}(y^2)^{-5} = -\frac{1}{243}x^{20}y^{-10}$ — по правилу: при возведении степени в степень основание оставляют прежним, а показатели перемножают.

Ответ: $-\frac{1}{243}x^{20}y^{-10}$.

1. Почему при использовании свойств степеней с целыми показателями основания степеней не должны равняться нулю?
2. Может ли в результате деления степеней с одинаковыми основаниями получиться 0?

Упражнения

А

7.1. Используя свойства степени с целым показателем, упростите выражение:

1) $2a^{-2} \cdot 3a^4$;
2) $24a^5 : (6a^{-3})$;
3) $(2c^{-3})^2$;
4) $2(3^{-3}b^3)^2 3b^{-4}$.

7.2. Представьте в виде степени с целым показателем выражение:

1) $125 \cdot 5^{-4}$;
2) $27 \cdot \frac{1}{9} \cdot 3^{-4} : 3^{-2}$;
3) $\frac{1}{32} \cdot 2^7 : 64$;
4) $100^2 \cdot 10^{-3}$.

7.3. Вычислите:

1) $64^{-1} \cdot 32^2$;
2) $(6^3)^2 : 36^5$;
3) $\frac{4^{-3} \cdot 2^5}{8^{-4}}$;
4) $\frac{(3^{-3})^3 \cdot 3^7}{27^2}$.

7.4. Найдите значение выражения:

1) $10^{-3} \cdot 0{,}001$;
2) $13^0 \cdot (13^{-2}) : 13^{-4}$;
3) $\frac{(3^{-2})^{-2} \cdot 9^{-1}}{27}$;
4) $\frac{25^{-2} \cdot 125}{5^3}$.

7.5. Представьте в виде степени и найдите значение выражения:

1) $5(5a^{-3})^{-2}a^{-2}$ при $a=(0{,}2)^{-1}$;

2) $(0{,}5a^{-2})^{-2}:(32a^{5})^{3}$ при $a=(0{,}5)^{-4}$;

3) $(2^{3}a^{-3})^{-1}\cdot 64a^{-4}:a^{-5}$ при $a=-0{,}125$;

4) $27(-3^{2}a^{3}):(3^{5}a^{-1})^{3}$ при $a=-0{,}1$.

7.6. Решите уравнение:

1) $2^{-2}+3^{-1}x=0{,}25$;

2) $3^{-1}x+3^{-2}x=9^{-2}+x$;

3) $2{,}25x=5{,}125-4^{-1}x$;

4) $4^{-1}x-2^{-2}x=8^{2}+x$.

B

7.7. Решите неравенство:

1) $7^{-1}x-2^{-2}x$ ł $2\frac{4}{7}$;

2) $3{,}125+x$ m $5{,}125-4^{-1}x$;

3) $7{,}25+2x>5{,}125-5^{-1}x$;

4) $12{,}5x-5{,}125<2^{-3}-4^{-1}x$.

7.8. Докажите тождество:

1) $27^{-1}81^{2}(3^{-3})^{3}:81^{-3}=9^{4}$;

2) $7^{-2}21^{2}(6^{-3})^{2}:14^{-3}:343=2^{-3}9^{-2}$;

3) $4^{-1}8^{2}(a^{-3})^{3}:(8a^{-3})^{2}=0{,}25a^{-3}$;

4) $a^{-1}(ab)^{2}(b^{-3})^{3}:b^{-3}=ab^{-4}$.

Сравните значения выражений (7.9—7.10):

7.9. 1) $128^{-2}\cdot 32^{3}$ и $(6^{3})^{2}:36^{5}$;

2) $\dfrac{8^{-3}\cdot 2^{5}}{16^{-4}}$ и $\dfrac{(3^{-3})^{3}\cdot 9^{7}\cdot 2^{-2}}{81^{2}}$.

7.10. 1) $13^{0}\cdot 3^{-3}:2^{3}$ и $10^{2}\cdot 5^{-2}:2^{3}$;

2) $\dfrac{14^{0}\cdot 3^{2}:4^{-2}}{2\cdot 3^{3}}$ и $\dfrac{21^{3}\cdot 9^{-2}}{7^{3}}$.

7.11. Представьте в виде степени и найдите значение выражения:

1) $125(5a^{-3}b^{3})^{-2}a^{-2}b^{4}$ при $a=0{,}2$, $b=0{,}5$;

2) $(0{,}5a^{-2})^{-2}:(32a^{5}b^{2})^{3}$ при $a=(0{,}5)^{-4}$, $b=0{,}25$;

3) $(2^{3}a^{-3}b)^{-1}\cdot 64a^{-4}:a^{-5}$ при $a=-0{,}125$, $b=0{,}5$;

4) $27(-3^{2}a^{3}):(3^{5}a^{-1}b^{-2})^{3}$ при $a=-0{,}1$, $b=0{,}1$.

C

7.12. Решите уравнение:

1) $7^{-2}x=21+3^{-1}$;

2) $0{,}01\cdot 10^{3}x+5^{2}-x=2\cdot 5^{2}$;

3) $\dfrac{3\cdot 3^{-2}}{6^{-2}}x=2^{2}\cdot 3$;

4) $\dfrac{5^{3}\cdot 3^{3}}{12^{0}\cdot 15^{3}\cdot 2}x=10^{-1}$.

7.13. Найдите наименьшее целое число, которое удовлетворяет неравенству:

1) $8^{-2}x$ | $24{,}75 + 4^{-1}$; 2) $6^2 - x$ | $-4^2 \cdot x + 5^{-1}$;

3) $3^{-1}x$ | $15^{-1} - 2x$.

7.14. Найдите наибольшее целое число, которое удовлетворяет неравенству:

1) $4^{-2}x$ m $12{,}75 - 4^{-1}$; 2) $12^2 + 3^4x$ m $8^2 \cdot x + 6^{-1}$;

3) $4^{-1}x$ m $13^0 - 12^{-1} - 3x$.

Докажите тождества (7.15—7.16):

7.15. 1) $(0{,}25\, a^{-2})^2 \cdot 4^3a^3 = 2^2a^{-1}$; 2) $\dfrac{2^3 : 4}{14^0 \cdot a^{-2}} \cdot a = \dfrac{2}{a^{-3}}$;

3) $\dfrac{2^3 : 8}{24^0 \cdot a^{-2}} \cdot a^2 = a^4$.

7.16. 1) $\left(\dfrac{8x^{-2}}{y^{-3}}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{2^{-4}}{x^{-2}y^2}\right)^3 = 0{,}125\, y^3$; 2) $\dfrac{3^3 : 27}{17^0 \cdot a^{-2}} \cdot a^3 = \dfrac{a^2}{a^{-3}}$;

3) $\dfrac{5^3 : 75}{19^0 \cdot b^{-2}} \cdot b = \dfrac{5}{3b^{-3}}$.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

7.17. Выполните действия:

1) $15\,248 : 10^4$; 2) $0{,}0174 \cdot 10^2$;

3) $7124 : 10^3$; 4) $0{,}00824 \cdot 10^3$.

7.18. Сравните значения выражений:

1) $7200 : 10^3$ и 7,2; 2) $0{,}058 \cdot 10^2$ и 5,8;

3) $193\,000 : 10^5$ и 1,93; 4) $0{,}0002 \cdot 10^3$ и 2.

7.19. Округлите числа 243,478; 4076,237; 15 023,4083

1) до десятых; 2) до сотых; 3) до десятков; 4) до сотен.

§ 8. СТАНДАРТНЫЙ ВИД ЧИСЛА. РЕШЕНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ, СОДЕРЖАЩИХ БОЛЬШИЕ И МАЛЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Что такое *стандартный вид числа* и для чего надо записывать числа в стандартном виде?

Как записать очень большие, *например* расстояние от Земли до Солнца, и очень маленькие числа, *например* массу атома водорода, энергию распада ядра урана и другие так, чтобы было удобно читать, записывать и выполнять действия с этими числами?

Запись числа в стандартном виде используют, чтобы было удобнее, чем в обычном десятичном виде, читать, записывать и выполнять над очень большими и очень маленькими числами какие-либо действия.

> *Стандартным видом числа* называется его запись в виде $a \cdot 10^n$, где $1 \leq a < 10$ и n — целое число.
> Число n называется *порядком числа*.

Например, в стандартном виде расстояние от Солнца до Земли примерно равно $1{,}5 \cdot 10^8$ км, энергия сильного землетрясения равна $6 \cdot 10^{18}$ Дж, энергия старта космического корабля записывается $9 \cdot 10^{11}$ Дж, диаметр молекулы ДНК — $2 \cdot 10^{-9}$ м. В этих записях порядок числа, выражающего энергию старта космического корабля в джоулях, равен 11, а порядок числа, выражающего длину диаметра молекулы ДНК в метрах, равен –9.

Порядок числа дает представление о том, насколько велико или мало это число. *Например*, если порядок числа a равен 3, то это означает, что $1000 \leq a < 10\,000$. Если порядок числа a равен –2, то $0{,}01 \leq a < 0{,}1$.

> Большой положительный порядок показывает, что число очень велико. Большой по модулю отрицательный порядок показывает, что число очень мало.

Пример 1. Используя запись в стандартном виде, запишем длину диаметра Солнца, которая равна 1 300 000 км.

Решение.

1, 300 000 — в числе 1 300 000 поставили запятую так, что в целой части оказалась одна цифра;

1, 300 000 = 1,3 — по свойству десятичных дробей;

1 300 000 = $1{,}3 \cdot 10^6$ — так как, отделив запятой 6 цифр справа, уменьшили число 1300 000 в 10^6 раз, значит, число 1 300 000 больше числа 1,3 в 10^6 раз.

Ответ : $1{,}3 \cdot 10^6$ км.

Пример 2. Используя запись в стандартном виде, запишем длину диаметра атомного ядра, которая равна 0,000 000 000 000 005 м.

Решение .

5,000000 000 000 000 — в числе 0,000 000 000 000 005 переставили запятую так, что в целой части оказалась одна, отличная от нуля, цифра;

5,000 000 000 000 000 = 5 — по свойству десятичных дробей;

0,000 000 000 000 005 = $= 5 \cdot 10^{-15}$ — так как, переставив запятую на 15 знаков вправо, увеличили число 0,000 000 000 000 005 в 10^{15} раз, значит, число 0,000 000 000 000 005 меньше числа 5 в 10^{15} раз, т. е. 0,000 000 000 000 005 = $5 : 10^{15} = 5 \cdot \frac{1}{10^{15}} = 5 \cdot 10^{-15}$.

Ответ : $5 \cdot 10^{-15}$ м.

Как найти приближенные значения величин и записать их в стандартном виде?

Как вычислить абсолютную и относительную погрешности приближенных значений величин?

Человек в своей практической деятельности часто использует не точные значения величин, а их приближенные значения.

Например , длину комнаты (земельного участка, дороги и т. п.) не измеряют с точностью до миллиметра; массу различных товаров (конфет, муки, сахара и др.) не измеряют с точностью до миллиграмма (1 мг = 10^{-3} г) и др.

Если, *например* , при измерении длины участка получили 300 м 1 см, а его ширины — 199 м 99 см, то за приближенное значение длины принимают 300 м, а ширины — 200 м.

Расхождение точного и приближенного значения в каждом из этих случаев составляет 1 см: в первом случае это расхождение выражается положительной величиной: 300 м 1 см – 300 м = 1 см, во втором — отрицательной величиной: 199 м 99 см – 200 м = – 1 см.

На практике важно не расхождение точного и приближенного значения величины в сторону уменьшения или увеличения, а числовое значение этого расхождения. Поэтому рассматривают не саму разность величин, а модуль этой разности.

Модуль разности точного и приближенного значений величины называется *абсолютной погрешностью приближения*.

Пусть дана величина (число) x, обозначим ее (его) приближенное значение через x_1.

Модуль (абсолютное значение) разности величины (числа) x и ее (его) приближенного значения x_1 называется *абсолютной погрешностью приближенного значения* x_1.

Абсолютную погрешность приближенного значения обозначим символом Δ (*дельта*), тогда $\Delta = |x - x_1|$.

Пример 1. Найдем абсолютную погрешность приближенного значения, если при вычислении дробь $\frac{3}{7}$ заменили десятичной дробью 0,42.

Решение.

$\Delta = \left|\frac{3}{7} - 0{,}42\right| = \left|\frac{3}{7} - \frac{42}{100}\right|$ —записали десятичную дробь 0,42 в виде обыкновенной дроби $\frac{42}{100}$;

$\left|\frac{3}{7} - \frac{42}{100}\right| = \left|\frac{3}{7} - \frac{21}{50}\right|$ —сократили дробь $\frac{42}{100}$ на 2;

$\left|\frac{3}{7} - \frac{21}{50}\right| = \left|\frac{150-147}{350}\right|$ —привели дроби к общему знаменателю;

$\left|\frac{150-147}{350}\right| = \left|\frac{3}{350}\right| = \frac{3}{350}$ —нашли значение числителя и раскрыли знак модуля.

Ответ: $\frac{3}{350}$.

В общем случае считают, что приближенное значение числа x равно x_1 и абсолютная погрешность этого приближенного значения не превосходит (меньше или равна) некоторого числа h.

Если $|x - x_1| \le h$, то число x_1 называется *приближенным значением числа x с точностью* до h.

Если x_1 приближенное значение числа x с точностью до h, то пишут: $x = x_1 \pm h$.

Из $|x - x_1| \le h$ следует двойное неравенство $-h \le x - x_1 \le h$.

Пример 2. Найдем приближенные значения числа x с недостатком и с избытком, если $x = 1{,}4 \pm 0{,}05$.

Решение. Запись $x = 1{,}4 \pm 0{,}05$ означает, что приближенное значение числа x равно 1,4 с точностью до 0,05. Поэтому $1{,}4 - 0{,}05 \le x \le 1{,}4 + 0{,}05$ или $1{,}35 \le x \le 1{,}45$, тогда числа 1,35 и 1,45 являются приближенными значениями числа x с недостатком и избытком.

Ответ: 1,35 и 1,45.

При решении многих математических, физических, технических задач, при выполнении действий над различными приближенными значениями используют округление чисел. *Например*, постоянное число, показывающее отношение длины окружности к ее диаметру, равно $\pi = 3{,}141\ 592\ 652...$ Обычно это число округляют до сотых долей, т. е. $\pi \approx 3{,}14$.

Эта запись означает, что 3,14 является приближенным значением π. Такое округление вполне подходит для практических вычислений.

a является приближенным значением величины x, записывают $x \approx a$ и читают: x приближенно равно a.

Округлим, *например*, число 5,748 до сотых долей.

Вы знаете, что при округлении с недостатком получим приближенное значение 5,74, при округлении с избытком — 5,75.

Найдем абсолютную погрешность округления с недостатком и с избытком. Получим соответственно:

$|5{,}748 - 5{,}74| = |0{,}008| = 0{,}008$ и $|5{,}748 - 5{,}75| = |-0{,}002| = 0{,}002$.

Абсолютная погрешность округления с недостатком 0,008 больше погрешности округления с избытком 0,002. Значит, точность округления с избытком выше.

Чтобы при округлении положительных чисел абсолютная погрешность приближения была меньше, нужно пользоваться следующим правилом.

Если первая отбрасываемая цифра меньше 5, то при округлении берут приближенное значение с недостатком, если первая отбрасываемая цифра равна 5 или больше 5, то при округлении берут значение с избытком.

Например, при округлении чисел 89,621 и 6,784 с точностью до 0,1 получим $89{,}621 \approx 89{,}6$; $6{,}784 \approx 6{,}8$, а при округлении их с точностью до сотых получим $89{,}621 \approx 89{,}62$; $6{,}784 \approx 6{,}78$.

При округлении числа считают, что абсолютная погрешность не превосходит единицы наименьшего разряда приближенного значения и значения всех его цифр верные.

Например, запишем дробь $\frac{4}{7}$ в виде десятичной дроби: 0,571 428... и округлим ее с точностью: а) до 0,01; б) до 0,00 001.

Получим а) $0{,}571\ 428... \approx 0{,}57$, б) $0{,}571\ 428... \approx 0{,}57\ 143$.

Абсолютная погрешность приближенного значения: а) 0,57; б) 0,57 143 не превосходит (меньше или равна): а) 0,01; б) 0,00 001 — единицы его наименьшего разряда. Все цифры приближенных значений 0,57 и 0,57 143 верны.

При записи числа в стандартном виде $a \cdot 10^n$ считают, что все цифры числа a верные.

Например, расстояние в световой год равно $9{,}46 \cdot 10^{12}$ км. Это означает, что все цифры числа 9,46 верны.

Тогда $9{,}46 \cdot 10^{12} = (9{,}46 \pm 0{,}01) \cdot 10^{12}$ км $\approx 9{,}46 \cdot 10^{12}$ км $\pm$ $\pm\ 10^{10}$ км, т. е. расстояние в световой год взято с точностью до 10^{10} км.

При измерении, *например*, длин двух различных предметов получили: $x = (0{,}2 \pm 0{,}1)$ см и $y = (200{,}0 \pm 0{,}1)$ см.

В обоих случаях результаты получены с точностью до 0,1 см. Можно ли утверждать, что качество этих измерений одинаковое? Почему качество измерения длины y по сравнению с качеством измерения длины x намного лучше?

Для оценки качества измерения используют не только абсолютную погрешность, но и *относительную погрешность*.

Относительной погрешностью приближенного значения называется отношение абсолютной погрешности к модулю приближенного значения.

Относительную погрешность обозначим буквой ε (*эпсилон*).

Тогда $\varepsilon = \dfrac{|x - x_1|}{|x_1|}$, где x_1 — приближенное значение x.

Поскольку по определению $|x - x_1| \leq h$, где h — точность приближения, то относительная погрешность $\varepsilon \leq \dfrac{h}{|x_1|}$.

Например, $x = (0{,}2 \pm 0{,}1)$ см означает, что в результате измерения величины x получили приближенное значение $x_1 = 0{,}2$ с точностью $h = 0{,}1$. Значит, относительная погрешность $\varepsilon \leq \dfrac{0{,}1}{0{,}2}$ или $\varepsilon \leq 0{,}5$.

$y = (200{,}0 \pm 0{,}1)$ см означает, что в результате измерения величины y получили приближенное значение $y_1 = 200{,}0$ с точностью $h = 0{,}1$. Значит, относительная погрешность $\varepsilon \leq \dfrac{0{,}1}{200{,}0}$ или $\varepsilon \leq 0{,}0005$.

Относительную погрешность часто выражают в процентах.

Вы знаете, чтобы выразить частное в процентах, нужно значение частного умножить на 100 и к полученному значению произведения приписать знак процента: $\varepsilon \leq \dfrac{|x - x_1|}{|x_1|} \cdot 100\,\%$.

Пример 1. Вычислим в процентах относительную погрешность измерения длин x и y, рассмотренных выше.

Решение. Относительная погрешность, допущенная при измерении длины x, равна:

$$\varepsilon_1 \leq \frac{0{,}1}{0{,}2} \cdot 100\% = \frac{1}{2} \cdot 100\% = 0{,}5 \cdot 100\% = 50\%.$$

Относительная погрешность, допущенная при измерении длины y, равна:

$$\varepsilon_2 m \frac{0,1}{200} \cdot 100\% = \frac{1}{2000} \cdot 100\% = 0,0005 \cdot 100\% = 0,05\%.$$

Ответ : 50%, 0,05%.

Пример 2. Найдем абсолютную и относительную погрешности числа $x = 7,45 \cdot 10^{22}$.

Решение.

Так как в числе 7,45 все цифры верные и последней является цифра сотых, то $x = (7,45 \pm 0,01) \cdot 10^{22}$. Раскрыв скобки, получим: $x = 7,45 \cdot 10^{22} \pm 0.01 \cdot 10^{22}$, или $x = 7,45 \cdot 10^{22} \pm 10^{20}$.

Эта запись означает, что абсолютная погрешность числа x меньше или равна 10^{20}. Оценим относительную погрешность приближенного числа $x = 7,45 \cdot 10^{22}$. Относительную погрешность числа x найдем по формуле:

$$\varepsilon_2 m \frac{|x - x_1|}{|x_1|} \cdot 100\% = \frac{10^{20}}{7,45 \cdot 10^{22}} \cdot 100\% = \frac{1}{7,45}\% = 0,134\%.$$

Ответ : 10^{20} и 0,134%.

1. Какие величины могут получаться при их измерении?
2. Что показывает абсолютная погрешность приближенного значения числа или величины?
3. Какая погрешность: абсолютная или относительная — лучше характеризует качество измерения?
4. Как связаны абсолютная и относительная погрешности?
5. Для записи каких чисел используют стандартный вид числа $1,5 \cdot 10^3$; $0,5 \cdot 10^9$; $50 \cdot 10^4$; $2,3 \cdot 10^{-2}$?
6. Любое ли число можно записать в стандартном виде?

Упражнения

А

8.1. Назовите порядок числа, представленного в стандартном виде:

1) $4,3 \cdot 10^5$; 2) $2,34 \cdot 10^{-3}$; 3) $8,3 \cdot 10^{-13}$;
4) $9,123 \cdot 10^{-1}$; 5) $5,31 \cdot 10^{12}$; 6) $7,1 \cdot 10^{-32}$.

8.2. Представьте в стандартном виде число:

1) 23 000 000 000; 2) 3 043 000 000;
3) 153 000 000; 4) 0,0 000 012;
5) $600,32 \cdot 10^5$; 6) 0,00 000 203.

8.3. Представьте в виде степени числа 10 число:

1) 1000; 2) 10 000 000; 3) 0,00 001; 4) 0,00 000 001.

8.4. Запишите в стандартном виде число, встречающееся в предложении:

1) диаметр головки английской булавки равен 0,001 м;
2) диаметр атома водорода равен 0,00 000 000 003 м;
3) площадь Мирового океана равна 361 000 000 км^2;
4) площадь озера Балкаш равна 22 000 км^2;
5) площадь Каспийского моря равна 370 000 км^2;
6) при ударе на клавишу компьютера тратится энергия в 0,1 Дж;
7) при взмахе крылом пчела затрачивает энергию в 0,0009 Дж.

8.5. Запишите в стандартном виде числа, встречающиеся в тексте: "Казахстан занимает площадь, равную 2 724 900 км^2. На востоке, севере и северо-западе Казахстан граничит с Россией (протяженность границы — 6467 км), на юге — с государствами Центральной Азии: Узбекистаном (2300 км), Кыргызстаном (980 км) и Туркменистаном (380 км), а на юго-востоке — с Китаем (1460 км). Общая протяженность границ Казахстана составляет почти 12 200 км, в том числе 600 км — по Каспийскому морю (на западе). Общая протяженность железных дорог составляет 14,5 тыс. км, автомобильных — 87,4 тыс. км".

8.6. Объясните запись:

1) $a = 4,7 \pm 0,2$;
2) $a = 43,74 \pm 0,05$;
3) $a = -2\frac{3}{4} \pm \frac{3}{5}$;
4) $a = -3\frac{3}{5} \pm \frac{1}{10}$;
5) $a = 7,90 \pm 0,12$;
6) $a = -3,45 \pm 0,15$;
7) $a = -47 \pm 2$;
8) $a = 0,97 \pm 0,01$.

8.7. Запишите в виде двойного неравенства равенство:

1) $x = 43,32 \pm 0,05$;
2) $y = -513,2 \pm 0,05$;
3) $n = 433 \pm 0,1$;
4) $x = 43,2 \pm 0,25$.

8.8. Найдите абсолютную погрешность приближенного значения числа x, все цифры которого верные:

1) $x \approx 2,74$;
2) $x \approx 35,274$;
3) $x \approx -4,004$;
4) $x \approx 0,740$;
5) $x \approx -8,7040$;
6) $x \approx 0,07$.

8.9. Масса атома водорода равна 0,000 000 000 000 000 000 000 167 г, масса Земли равна 6 000 000 000 000 000 000 000 т. Запишите в стандартном виде массу атома водорода и массу Земли.

8.10. Найдите абсолютную и относительную погрешность приближенного значения, полученного в результате округления числа:

1) 12,4 до единиц; 2) 5,65 до десятых;

3) 876 до десятков; 4) 7,3346 до тысячных.

8.11. Найдите относительную погрешность, округлив до десятых число:

1) 0,879; 2) 20,456; 3) 133,507;

4) 0,058; 5) 0,987; 6) 10,509.

8.12. Найдите относительную погрешность приближенного значения x, записанного в виде $x = a \cdot 10^n$:

1) $x \approx 34{,}58 \cdot 10^8$; 2) $x \approx 5{,}93 \cdot 10^7$; 3) $x \approx 2{,}75 \cdot 10^{-5}$;

4) $x \approx 11{,}55 \cdot 10^0$; 5) $x \approx 25{,}18 \cdot 10^{-9}$; 6) $x \approx 0{,}086 \cdot 10^{-8}$.

8.13. Масса электрона равна $0{,}91 \cdot 10^{-27}$ кг. Укажите относительную погрешность приближенного значения $0{,}91 \cdot 10^{-27}$.

B

8.14. Запишите в стандартном виде числа, которые встречаются в предложении:

1) Масса океанов равна 1 450 000 000 000 000 000 000 кг. Масса Земли равна 5 980 000 000 000 000 000 000 000 кг. Представьте записанные массы в стандартном виде, в тоннах.

2) Расстояние от Солнца до Земли равно 149 500 000 км. Площадь поверхности Солнца 6 000 000 000 000 км^2. Площадь поверхности Земли 510 200 000 км^2. Площадь поверхности Луны 38 000 000 км^2. Представьте записанные площади в стандартном виде, в гектарах.

8.15. Найдите, во сколько раз длина диаметра Земли больше длины диаметра атомного ядра, если длина диаметра Земли равна $1{,}2756 \cdot 10^7$ м, длина диаметра атомного ядра равна $5 \cdot 10^{-15}$ м.

8.16. Выразите:

1) $2{,}7 \cdot 10^4$ т — в граммах;

2) $8{,}321 \cdot 10^5$ кг — в тоннах;

3) $1{,}3 \cdot 10^{-3}$ т — в килограммах;

4) $5{,}36 \cdot 10^{13}$ г — в миллиграммах;

5) $5{,}23 \cdot 10^{12}$ дм — в километрах;

6) $4{,}31 \cdot 10^5$ см — в метрах;

7) $1{,}32 \cdot 10^5$ км — в метрах;

8) $2{,}51 \cdot 10^7$ мм — в сантиметрах.

C

8.17. Масса Земли $5{,}98 \cdot 10^{24}$ кг, масса Юпитера — $1{,}90 \cdot 10^{27}$ кг. Что больше: масса Земли или масса Юпитера и во сколько раз?

8.18. Запишите в стандартном виде значение выражения:

1) $(7{,}5 \cdot 10^{4}) \cdot (2{,}4 \cdot 10^{-1})$; 2) $(4{,}3 \cdot 10^{4}) \cdot (3{,}7 \cdot 10^{-3})$;

3) $(3{,}4 \cdot 10^{4}) \cdot (5{,}4 \cdot 10^{-2})^{2}$; 4) $(5{,}5 \cdot 10^{-3}) \cdot (2{,}4 \cdot 10^{2})^{3}$.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

8.19. Вычислите:

1) $183^{0} \cdot 5^{3} : 3^{2} + \dfrac{2}{9}$; 2) $100^{2} \cdot 5^{2} : 2^{3}$; 3) $\dfrac{155^{0} \cdot 3^{2} \cdot 4^{2}}{8 \cdot 3^{3}}$.

8.20. Докажите, что значение выражения не зависит от значения перемен ной x:

1) $2 \cdot \dfrac{x^{4}}{x^{4}} + x^{0}$; 2) $\dfrac{x^{5}}{x^{4}} - x + 3$.

§ 9. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ СТЕПЕНИ. ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ, СОДЕРЖАЩИЕ СТЕПЕНИ

Как применять свойства степеней для упрощения выражений?

Преобразование выражений, содержащих степени, рассмотрим на примерах.

Пример 1. Решим задачу.

Скорость света равна $3 \cdot 10^8$ м/с, расстояние от Земли до Солнца равно $1{,}5 \cdot 10^{11}$ м. За какое время луч света пройдет расстояние от Солнца до Земли?

Решение. Длину пройденного пути (расстояние) s можно найти по формуле $s = v \cdot t$, где v — скорость движения, t — время движения. По этой формуле получим:

$1{,}5 \cdot 10^{11} = 3 \cdot 10^8 \cdot t$, откуда:

$$t = \frac{1{,}5 \cdot 10^{11}}{3 \cdot 10^8} = 0{,}5 \cdot 10^{11-8} = 0{,}5 \cdot 10^3 = 0{,}5 \cdot 1000 = 500.$$

Ответ: 500 с, или 8 мин 20 с.

Пример 2. Вычислим: 1) $\frac{\left(2^3\right)^3 \cdot 32}{64^2}$; 2) $\frac{25^5 \cdot 36^4}{(30)^7}$.

Решение. 1) $\frac{\left(2^3\right)^3 \cdot 32}{64^2} = \frac{2^9 \cdot 2^5}{\left(2^6\right)^2} = \frac{2^{14}}{2^{12}} = 2^{14-12} = 2^2 = 4;$

2) $\frac{25^5 \cdot 36^4}{(30)^7} = \frac{\left(5^2\right)^5 \cdot \left(6^2\right)^4}{(5 \cdot 6)^7} = \frac{5^{10} \cdot 6^8}{5^7 \cdot 6^7} = 5^{10-7} \cdot 6^{8-7} = 5^3 \cdot 6 = 125 \cdot 6 = 750.$

Ответ: 1) 4; 2) 750.

Пример 3. Найдем значение выражения: $\frac{13^4 \cdot 11^7 \cdot 5^9}{13 \cdot 11^6} : \frac{13^6 \cdot 11^4 \cdot 5^8}{13^4 \cdot 11^3}$.

Решение. $\frac{13^4 \cdot 11^7 \cdot 5^9}{13 \cdot 11^6} : \frac{13^6 \cdot 11^4 \cdot 5^8}{13^4 \cdot 11^3} = (13^{4-1} \cdot 11^{7-6} \cdot 5^9) : (13^{6-4} \times$

$\times 11^{4-3} \cdot 5^8) = 13^3 \cdot 11 \cdot 5^9 : (13^2 \cdot 11 \cdot 5^8) = 13^{3-2} \cdot 11^{1-1} \cdot 5^{9-8} = 13 \cdot 11^0 \cdot 5 =$
$= 65.$

Ответ: 65.

При сравнении степеней с натуральными показателями их приводят либо к одинаковым основаниям, либо к одинаковым показателям. В первом случае будет больше та степень, у которой больше показатель. Во втором случае больше та степень, у которой основание больше.

Пример 4. Сравним значения выражений $3^{40} \cdot 2^{40}$ и 33^{20}.

Решение. Запишем выражение $3^{40} \cdot 2^{40}$ в виде степени: $3^{40} \cdot 2^{40} = (3 \cdot 2)^{40} = 6^{40}$. Затем 6^{40} представим в виде степени с показателем 20. Получим $6^{40} = (6^2)^{20}$, или 36^{20}.

Поскольку $36^{20} > 33^{20}$, то $3^{40} \cdot 2^{40} > 33^{20}$.

Пример 5. Вычислим: $\dfrac{4^{-2} \cdot 8^{-6}}{2^{-22}}$.

Решение.

$\dfrac{4^{-2} \cdot 8^{-6}}{2^{-22}} = \dfrac{(2^2)^{-2} \cdot (2^3)^{-6}}{2^{-22}}$ — каждый множитель представили в виде степени числа 2;

$\dfrac{(2^2)^{-2} \cdot (2^3)^{-6}}{2^{-22}} = \dfrac{2^{-4} \cdot 2^{-18}}{2^{-22}}$ — в числителе использовали свойство степени: при возведении степени в степень показатели степеней перемножаются;

$\dfrac{2^{-4} \cdot 2^{-18}}{2^{-22}} = \dfrac{2^{-22}}{2^{-22}}$ — в числителе использовали свойство степени: при умножении степеней с одинаковыми основаниями основание степени оставляют прежним, а показатели складывают;

$\dfrac{2^{-22}}{2^{-22}} = 1$ — выполнили деление.

Ответ: 1.

Пример 6. Упростим выражение: $\left(-\dfrac{1}{3}x^6y^{-7}\right)^{-2} \cdot 9^{-1}x^{13}y^{-13}$.

Решение.

$\left(-\dfrac{1}{3}x^6y^{-7}\right)^{-2} \cdot 9^{-1}x^{13}y^{-13} = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^{-2} \cdot (x^6)^{-2} \cdot (y^{-7})^{-2} \cdot 9^{-1}x^{13}y^{-13}$ — использовали свойство степени: чтобы возвести в степень произведение, надо возвести в эту степень каждый множитель и результаты перемножить;

$\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot (x^6)^{-2} \cdot (y^{-7})^{-2} \cdot$

$\cdot \quad 9^{-1}x^{13}y^{-13} = (-3)^2 \cdot x^{-12} \cdot$

$\cdot \; y^{14} \cdot 9^{-1}x^{13}y^{-13}$ — использовали определение степени с отрицательным показателем и свойство степени: при возведении степени в степень показатели степеней перемножаются;

$(-3)^2 \cdot x^{-12} \cdot y^{14} \cdot 9^{-1}x^{13}y^{-13} =$

$= 9 \cdot x \cdot y \cdot 9^{-1}$ — возвели число –3 в квадрат и использовали свойство степеней с одинаковыми основаниями: при умножении степеней с одинаковыми основаниями основание степени оставляют прежним, а показатели складывают;

$9 \cdot x \cdot y \cdot 9^{-1} = xy$ — умножили степени с одинаковыми основаниями.

Ответ : xy.

Пример 7. Найдем значение выражения: $\frac{5}{6^2}x^7y^4 \cdot 36x^{-7}y^{-5}$ при $y = \frac{1}{5}$.

Решение . Сначала упростим выражение $\frac{5}{6^2}x^7y^4 \cdot 36x^{-7}y^{-5}$.

Получим: $\frac{5}{6^2}x^7y^4 \cdot 36x^{-7}y^{-5} = 5 \cdot 6^{-2}x^7y^4 \cdot 6^2x^{-7}y^{-5}$ — представили числа в виде степени;

$5 \cdot 6^{-2}x^7y^4 \cdot 6^2x^{-7}y^{-5} = 5 \cdot 6^0x^0y^{-1}$ — умножили степени с одинаковыми основаниями;

$5 \cdot 6^0x^0y^{-1} = 5y^{-1}$ — использовали определение степени с нулевым показателем;

$5y^{-1} = 5\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$ — подставили вместо буквы y число $\frac{1}{5}$.

$5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = 5 \cdot 5 = 25.$

Ответ : 25.

Пример 8. Докажем тождество: $\left(-\frac{1}{2}a^{-1}b^2\right)^2 \cdot 4a^3b^{-3} = ab$.

Доказательство. Упростим левую часть равенства.

$\left(-\frac{1}{2}a^{-1}b^2\right)^2 \cdot 4a^3b^{-3} = \frac{1}{4}a^{-2}b^4 \cdot$ — получили правую часть

$\cdot\, 4a^3b^{-3} = ab$ равенства.

Пример 9. Докажем, что не зависит от n значение выражения $\frac{5^{-2n} \cdot 7^{-2}}{25^{-n} \cdot 49^{-1} \cdot 3^{-3}}$.

Доказательство. Упростим выражение: $\frac{5^{-2n} \cdot 7^{-2}}{25^{-n} \cdot 49^{-1} \cdot 3^{-3}}$.

$\frac{5^{-2n} \cdot 7^{-2}}{25^{-n} \cdot 49^{-1} \cdot 3^{-3}} =$ — представили числа 25 и 49 в виде степеней;

$= \frac{5^{-2n} \cdot 7^{-2}}{(5^2)^{-n} \cdot (7^2)^{-1} \cdot 3^{-3}}$

$\frac{5^{-2n} \cdot 7^{-2}}{(5^2)^{-n} \cdot (7^2)^{-1} \cdot 3^{-3}} =$ — в знаменателе возвели степень в степень;

$= \frac{5^{-2n} \cdot 7^{-2}}{5^{-2n} \cdot 7^{-2} \cdot 3^{-3}}$

$\frac{5^{-2n} \cdot 7^{-2}}{5^{-2n} \cdot 7^{-2} \cdot 3^{-3}} = \frac{1}{3^{-3}}$ — сократили дробь;

$\frac{1}{3^{-3}} = 1 : 3^{-3} = 1 : \frac{1}{3^3} = 3^3$ — по определению степени с отрицательным показателем и правилу деления натурального числа на дробь.

$3^3 = 27$.

Ответ : 27.

Поскольку значение выражения $\frac{5^{-2n} \cdot 7^{-2}}{25^{-n} \cdot 49^{-1} \cdot 3^{-3}}$ равно 27, значит оно не зависит от n.

1. Какие свойства степени были использованы при доказательстве тождества в примере 4?
2. Объясните, как получили равенство $\frac{2^{-22}}{2^{-22}} = 1$ в примере 5.

Упражнения

A

Упростите выражения **(9.1—9.2)** :

9.1. 1) $(a^5)^2 : a^9 \cdot a^3$; 2) $a^{21} \cdot (a^4)^3 : (a^3)^{10}$;

3) $b^{40} : (b^2)^{11} : (b^4)^2$; 4) $(b^6)^4 : (b^7)^3 \cdot (b^2)^3$.

9.2. 1) $(x^2y)^6 : (x^5y^3)^2 \cdot xy$; 2) $(xy^3)^7 \cdot (x^6y^4)^3 : (x^{24}y^{32})$;

3) $\left(\frac{x}{y}\right)^8 : \left(\frac{x^2}{y}\right)^4 \cdot xy^5$; 4) $x^5y^8 \cdot (xy)^5 : (x^5y^3)^2$.

Упростите выражения и найдите их значения **(9.3—9.4)** :

9.3. 1) $(n^5)^2 : (n^3)^3 \cdot n^{10} : n^8$ при $n = -0{,}3$;

2) $a^{20} \cdot (a^8)^4 : (a^{10})^5$ при $a = 5{,}5$;

3) $(b^{17})^3 : b^{40} : (b^4)^2$ при $b = -\frac{2}{7}$;

4) $((a^4)^4 \cdot a^{31}) : ((a^{20})^2 \cdot a^3)$ при $a = 4$.

9.4. 1) $a^{10}b^{17} : (a^4b^8)^2$ при $a = 3\frac{1}{2}$ и $b = \frac{4}{7}$;

2) $(x^{14})^2 \cdot (y^{20})^3 : (x^9y^{19})^3$ при $x = \frac{6}{11}$ и $y = -11$;

3) $(m^6)^4 \cdot (n^8)^2 : (m^{11}n^7)^2$ при $m = -\frac{8}{9}$ и $n = 0{,}81$;

4) $(c^{10}d^6)^3 : (c^9)^3 : (d^2)^8$ при $c = -0{,}25$ и $d = \frac{4}{5}$.

9.5. При каком значении переменной m верно равенство:

1) $303 - 7^3 + (2^4)^2 = m^3$; 2) $(-3)^5 + (-5)^2 + 282 = m^3$;

3) $-16{,}31 - (-1{,}3)^2 + (-19)^2 = m^3$; 4) $49\frac{1}{8} + \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + (-24)^2 = m^2$?

9.6. Вместо звездочки вставьте число, чтобы было верным равенство:

1) $10^4 - 9375 = 5^*$; 2) $-2015 + 14^3 = 9^*$;

3) $3^9 - 11\,683 = (20)^*$; 4) $1199 + 7^4 = (60)^*$.

9.7. Докажите, что при любых значениях переменной равно единице значение выражения:

1) $(a^5)^6 \cdot (a^4b^2)^7 : (a^{29}b^7)^2$; 2) $(a^4b^5)^3 \cdot (a^8b^9) : (a^{10}b^{12})^2$;

3) $(c^3)^6 \cdot (d^{18})^3 : (c^3d^9)^6$; 4) $(x^{11}y^2)^4 \cdot (y^5)^2 : (x^{22}y^9)^2$.

9.8. Докажите, что значение выражения не зависит от значения переменной:

1) $((n^3)^2)^4 : (n^7)^2 - 5 - n^{10}$; 2) $m^{30} : ((m^3)^2)^3 + 17 - (m^6)^2$;

3) $((a^2)^2)^2 \cdot a^4 + 19 - (a^4)^3$; 4) $-23 - b^{40} + ((b^5)^4)^2$.

9.9. Упростите выражение:

1) $(0{,}25\, a^{-4}x^3) \cdot (5^2a^3 \cdot x^{-4})$; 2) $(2{,}25\, b^{-4}x^3) \cdot (5^2b^3 \cdot x^{-6})$;

3) $(5a^{-5}x^6) \cdot (5^2a^3 : x^7)$; 4) $(1{,}25\, a^{-4}x^7) : (5^2a^8 \cdot x^{-4})$.

9.10. Найдите значение выражения:

1) $\dfrac{17^7 \cdot 17^{-4}}{17^{-3}}$; 2) $\dfrac{0{,}7^7 \cdot 0{,}7^{-3}}{0{,}7^3} \cdot 3$;

3) $\dfrac{0{,}5^4 \cdot 2^5}{4^2} : 8^2$; 4) $1{,}33^{-5} \cdot 1{,}33^6 : \pi^0$.

9.11. Упростите выражение:

1) $\left(\dfrac{a^3}{a^2} - a^2\right) : a^2$; 2) $x^5 : (x^{-1})^3 + \pi^0$; 3) $(b^4 - b^3) : b^3$.

9.12. Вместо звездочки запишите число, чтобы было верным равенство:

1) $2^5 \cdot 2^{-2} \cdot * = 2^7$; 2) $4^5 \cdot 8^{-2} \cdot * = 4^7$; 3) $5^5 \cdot 5^{-2} : * = 5^7$.

9.13. Расположите в порядке возрастания числа:

3^{-1}; 3^3; 9^2; 27^{-2}; 81^0; -3^2; -9^{-1}.

9.14. Расположите в порядке убывания числа:

5^{-1}; 5^3; 25^2; 27^{-2}; 521^0; -8^2; -4^{-2}.

9.15. Докажите, что отрицательным числом является значение выражения:

1) $\dfrac{(-3)^3 \cdot 9^{-2}}{(-81)^2}$; 2) $\dfrac{(-4)^4 \cdot 9^{-2}}{-11^2}$; 3) $\dfrac{(-3)^3 \cdot (-9^{-2})}{-8^2}$.

9.16. Докажите, что значение выражения является положительным числом:

1) $21^0 - 3^{-2} - 4^{-2}$; 2) $2^{-3} + 3^{-1} + (-4)^2$; 3) $9^{-1} - \dfrac{(-3)^2}{(-5^2)}$.

B

9.17. Докажите тождество:

1) $x^5 : (x^{-1})^3 + \pi^0 = 1 + x^6$;

2) $(b^4 - b^3) : b^2 = b^2 - b$;

3) $\dfrac{2^4 : 4}{14^0 \cdot a^{-2}} a^2 = \dfrac{4}{a^{-4}}$.

Упростите выражения **(9.18—9.19)** :

9.18. 1) $\dfrac{(b^5)^3 \cdot (b^7)^7}{b^{19} \cdot b^{38}}$;

2) $\dfrac{c^{50} \cdot c^{11}}{(c^{20})^2 \cdot (c^2)^5}$;

3) $\dfrac{(a^9)^3 \cdot (a^3)^4 \cdot a^{23}}{a^{40} \cdot a^{18}}$;

4) $\dfrac{d^{13} \cdot (d^8)^3 \cdot (d^7)^2}{(d^3)^{10} \cdot (d^6)^2}$.

9.19. 1) $(ab)^{10} : (a^9 \cdot b^8) \cdot a^2$;

2) $((x^5y^2)^3)^4 : ((x^{29})^2 \cdot (y^{12})^2)$;

3) $((k^6)^7) \cdot (t^3)^9 : ((k^7 \cdot t^4)^3)^2$;

4) $((c^8d^{11})^5)^2 : ((c^{20}d^{25})^2)^2$.

9.20. Упростите выражение:

1) $\dfrac{8^3 : 4}{14^0 \cdot a^{-2}} a^3$;

2) $\dfrac{(x^3 \cdot x)^2}{(-x^2)^3}$;

3) $\dfrac{(a^3 \cdot x^4)^2}{(a^2)^2 \cdot x^7}$;

4) $\dfrac{(b^3 \cdot x^4)^3}{(-2b^2)^2 \cdot x^{12}}$.

9.21. Найдите значение выражения:

1) $\dfrac{\left(\frac{1}{9}\right)^{-3} \cdot \frac{1}{9}}{3^3}$;

2) $45 \cdot \dfrac{5^{-2}}{9^2}$;

3) $\dfrac{34^3}{17^2 \cdot 2^4} \cdot 8^2$.

C

Верны ли равенства **(9.22—9.23)** :

9.22. 1) $\dfrac{(2^4)^6 \cdot 4^5}{16^3 \cdot 8^7} = 2$;

2) $\dfrac{(17^8)^2 \cdot (17^3)^3 \cdot 16^5}{17^{22} \cdot 289 \cdot 8^6} = 68$?

9.23. 1) $\dfrac{(a^5)^6 \cdot (b^9)^4 \cdot (a^2b^2)^3}{(b^4)^{10} \cdot (a^7)^5} = ab^2$;

2) $\dfrac{(c^8 \cdot d^5)^{11} \cdot (c^7)^3 \cdot (d^4)^2}{(d^{31})^2 \cdot (c^{25})^4} = c^9d$?

9.24. Докажите, что при $a = 1$, $b = -1$ значения выражений равны:

1) $(a^5 \cdot b^6)^7 : (a^{33} \cdot b^{40}) + 1$ и $(a^8 b^2)^2 : (a^5 b)^3 + 3$;

2) $\dfrac{\left(a^4\right)^3 \cdot \left(b^{10}\right)^2}{a^8 \cdot \left(b^5\right)^3} - 4$ и $\dfrac{\left(a^7\right)^4 \cdot \left(b^9\right)^2}{\left(a^5\right)^5 \cdot b^{16}} - 6$.

9.25. Выполните действия и приведите выражение к виду, не содержащему отрицательных показателей степеней:

1) $\dfrac{(a^{-3} \cdot x^4)^2}{(a^{-2})^2 \cdot x^{-7}} \cdot 2^{-2}$; 2) $\dfrac{(b^3 \cdot y^{-3})^2}{(b^2)^2 \cdot y^7} \cdot y^{-1}$; 3) $\dfrac{(3^3 \cdot x^4)^{-2}}{(3^2)^2 \cdot x^{-7}} + \dfrac{2}{x^{-3}}$.

9.26. Верно ли, что натуральным числом является значение выражения:

1) $\dfrac{(3^3 \cdot x)^2}{(x^2)^3 \cdot b^2}$ при $x = 0{,}5$ и $b = \dfrac{1}{3}$; 2) $\dfrac{(a^3 \cdot x^4)^2}{(a^2)^2 \cdot x^7}$ при $a = 0{,}1$ и $x = 2$?

9.27. Докажите, что от n не зависит значение выражения:

1) $\dfrac{2^{-2n} \cdot 3^{-2}}{4^{-n} \cdot 3^{-1}}$; 2) $\dfrac{5^{-3n} \cdot 34^{-2}}{125^{-n} \cdot 17^{-1}}$; 3) $\dfrac{0{,}2^{-2n} \cdot 13^{-2}}{0{,}04^{-n} \cdot 23^{-1}}$.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

9.28. Выражением является только:

1. $728 + 327$;
2. $728 + 327$; $7a + 2b$
3. $728 + 327$; $7a + 2b$, 126
4. $728 + 327$; $7a + 2b$, 126, $152 < 200$.

9.29. Найдите значение выражения:

1) $(327 \cdot 14 - 4577) \cdot 11^0$;

2) $(32 \cdot 74 - 45 \cdot 52) : 14 \cdot (-3)^0$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Вычислите: $2^{10} \cdot 2^{12} : 2^{21}$:

A. 4; B. 2; C. 1; D. 8.

2. Упростите: $a^{35} \cdot a^{19} : (a^{52} \cdot a^{2})$:

A. a; B. a^{4}; C. 1; D. a^{2}.

3. Упростите выражение $\frac{x^{10}y^{8}}{x^{9}y^{6}}$ и найдите его значение при $x = 2$, $y = 3$:

A. 24; B. 12; C. 6; D. 18.

4. Вычислите $0{,}2 \cdot (-5)^{2} - 3^{3}$:

A. –32; B. –22; C. –2; D. 52.

5. Упростите: $\frac{(m^{3})^{5} \cdot (n^{4})^{3}}{(m^{3})^{4} \cdot (n^{5})^{2}}$:

A. $m^{23}n^{22}$; B. $m^{7}n^{22}$; C. $m^{3}n^{2}$; D. $m^{7}n^{2}$.

6. Представьте в виде произведения степеней выражение $\frac{x^{4}}{y^{6}}$:

A. $x^{4}y^{6}$; B. $x^{-4}y^{6}$; C. $x^{-4}y^{-6}$; D. $x^{4}y^{-6}$.

7. Упростите: $5^{-3} \cdot 25^{2}$:

A. 5; B. $\frac{1}{5}$; C. 25; D. $\frac{1}{25}$.

8. Представьте в виде произведения степеней выражение $\frac{a^{2}}{b^{3}c^{-4}}$:

A. $a^{2}b^{3}c^{-4}$; B. $a^{2}b^{-3}c^{4}$; C. $a^{-2}b^{-3}c^{-4}$; D. $a^{-2}b^{-3}c^{4}$.

9. Упростите выражение $\frac{5a^{9} - 3a^{7}}{4a^{8}}$ и найдите его значение при $a = -1$:

A. $\frac{1}{2}$; B. $-\frac{1}{2}$; C. 2; D. –2.

10. Найдите пятую степень числа, если его куб равен $-\frac{1}{8}$:

A. $\frac{1}{32}$; B. –0,5; C. $-\frac{1}{32}$; D. –32.

ГЛАВА 2

МНОГОЧЛЕНЫ

§ 10. ОДНОЧЛЕНЫ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ. СТАНДАРТНЫЙ ВИД ОДНОЧЛЕНА. СТЕПЕНЬ ОДНОЧЛЕНА

Что такое *одночлен*, его *степень* и *стандартный вид*? Как умножать одночлены?

Произведение числовых и буквенных множителей и их степеней называется *одночленом*.

Рассмотрите произведения 3^3xy; $15ab^3$; $-\frac{8}{9}mn^4$; $\left(1\frac{4}{7}\right)^5x^2$. В их состав входят множители, записанные с помощью цифр, они называются *числовыми множителями*, и множители, записанные буквами (переменными) и их степенями, они называются *буквенными множителями*.

Почему указанные выше произведения являются одночленами?

Так как каждое число можно записать в виде произведения этого числа на единицу и единица есть нулевая степень любого числа a, не равного нулю, то выражения вида 7; b; 0,09; $-\frac{5}{6}$ также считаются одночленами.

Пример 1. Как найти значение выражения, которым является одночлен $25a^4b\cdot(0{,}4ab^2)\cdot 3bc$, при $a=-1$, $b=2$, $c=13$?

Решение. Первый способ. Подставив данные значения букв (переменных) в одночлен, вычислим значение произведения:

$$25\cdot(-1)^4\cdot 2\cdot 0{,}4(-1)\cdot 2^2\cdot 3\cdot 2\cdot 13=-6240.$$

Второй способ. Вычисления можно провести более рационально, если сначала упростить данный одночлен, используя переместительное и сочетательное свойства умножения:

$$25a^4b\cdot(0{,}4ab^2)\cdot 3bc=(25\cdot 0{,}4\cdot 3)\cdot(a^4\cdot a)\cdot(b\cdot b^2\cdot b)\cdot c=30a^5b^4c.$$

Найдем значение одночлена $30a^5b^4c$ при заданных значениях букв (переменных). Получим: $30\cdot(-1)^5\cdot 2^4\cdot 13=-6240$.

Ответ: -6240.

При решении задачи вторым способом данный одночлен был записан в виде: $30a^5b^4c$. В нем содержится только один числовой множитель, стоящий на первом месте, и степени с различными буквенными основаниями. Такие одночлены называются *одночленами стандартного вида.*

Любой одночлен можно привести к одночлену стандартного вида, т. е. представить его в виде произведения числового множителя, стоящего на первом месте, и степеней с различными буквенными основаниями.

Числовой множитель одночлена, записанного в стандартном виде, называется *коэффициентом одночлена*.

Например, коэффициент одночлена $\frac{4}{9}x$ равен $\frac{4}{9}$, коэффициент одночлена $-7x^2$ равен -7.

Пример 2. Как привести к стандартному виду одночлен

$$-0,6\,d^4\cdot\left(\frac{5}{6}d^2\right)?$$

Решение. Применяя переместительное и сочетательное свойства умножения, а также свойство умножения степеней с одинаковыми основаниями, имеем: $-0,6\,d^4\cdot\left(\frac{5}{6}d^2\right)=\left(-0,6\cdot\frac{5}{6}\right)\cdot(d^4\cdot d^2)=-0,5\,d^6$.

Ответ: $-0,5\,d^6$.

Коэффициент, равный 1, обычно не записывают, так как от умножения на единицу значение выражения не меняется.

Например, $1\cdot a^4b^3c=a^4b^3c$, поэтому коэффициент одночлена a^4b^3c равен единице.

Если коэффициент равен (-1), то в этом случае перед одночленом ставится только знак "–".

Например, $(-1)\cdot mn^7t^3=-mn^7t^3$, поэтому коэффициент одночлена $-mn^7t^3$ равен -1.

В одночлене $3a^4b^3c$ значение суммы показателей всех степеней переменных равно 8. Число 8 называют *степенью одночлена* $3a^4b^3c$.

Значение суммы показателей степеней всех переменных, входящих в одночлен, называется *степенью одночлена.*

Например, степень одночлена $-0{,}9\,x^5yz^2$ равна $5 + 1 + 2 = 8$; выражение $\frac{4}{11}a^8b$ есть одночлен девятой степени. Степень одночлена 125 равна нулю, так как $125 = 125 \cdot a^0$ или $125 \cdot x^0y^0$.

Некоторые одночлены имеют общую буквенную часть.

Одинаковые одночлены и одночлены, имеющие общую буквенную часть и отличающиеся друг от друга только коэффициентами, называются *подобными одночленами*.

Например, одночлены $7xy^3t - 8{,}9\,xy^3t$ и $1\frac{5}{11}xy^3t$ — подобные.

Рассмотрим умножение и возведение в степень одночленов.

Если между двумя одночленами поставить знак умножения, то получится одночлен, называемый *произведением* исходных одночленов. *Например*, произведением двух одночленов $9n^3m$ и $-1{,}1\,nm^4$ будет выражение $(9n^3m)\cdot(-1{,}1\,nm^4)$.

На основании сочетательного и переместительного свойств умножения это произведение можно записать в следующем виде: $9\cdot(-1{,}1)\cdot n^3nmm^4$ и, используя свойства степени, получим: $-9{,}9\,n^4m^5$.

Пример 3. Как найти произведение одночленов:

$4\frac{1}{3}x^4y$; $-0{,}3\,xz^5$; $10xy^4z^2$ и привести его к стандартному виду?

Решение. Произведением этих одночленов будет выражение $\left(4\frac{1}{3}x^2y\right)\cdot(-0{,}3\,xz^5)\cdot(10xy^4z^2)$. На основании сочетательного, переместительного свойств умножения и свойства степени это произведение запишем в следующем виде:

$$\left(4\frac{1}{3}x^4y\right)\cdot(-0{,}3\,xz^5)\cdot(10xy^4z^2) = \frac{13}{3}\cdot(-0{,}3)\cdot 10\cdot x^4y\cdot xz^5\cdot xy^4z^2 =$$
$$=-13\,x^6y^5z^7.$$

Ответ: $-13\,x^6y^5z^7$.

При возведении одночлена в натуральную степень также получается одночлен, который обычно приводят к стандартному виду.

Чтобы возвести одночлен в степень, нужно в эту степень возвести каждый (и числовой, и буквенный) множитель.

Например, $\left(\frac{1}{5}tk^4\right)^3 = \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot t^3 \cdot (k^4)^3 = \left(\frac{1}{125}\right)t^3k^{12}$.

Пример 4. Как представить одночлен $-0{,}125\ x^9y^3$ в виде куба другого одночлена?

Решение. $-0{,}125\ x^9y^3 = (-0{,}5)^3 \cdot (x^3)^3 \cdot y^3 = (-0{,}5\ x^3y)^3$.

Ответ: $(-0{,}5\ x^3y)^3$.

Пример 5. Как найти, при каком значении n будет верно равенство:

$\left(2\frac{1}{3}m^5\right)^n \cdot \left(\frac{9}{49}m^{11}\right) = 29\frac{52}{81}m^{41}$?

Решение. Если $m = 0$, то данное равенство верно. Если $m \neq 0$, то разделим обе части данного равенства на $\frac{9}{49}m^{11}$, получим:

$$\left(2\frac{1}{3}m^5\right)^n = 29\frac{52}{81}m^{41} : \frac{9}{49}m^{11} \text{ или } \left(2\frac{1}{3}m^5\right)^n = \frac{2401}{81}\cdot\frac{49}{9}\cdot m^{41-11}.$$

Используя свойства степени, упростим правую часть равенства. Получим:

$\frac{2401}{81}\cdot\frac{49}{9}\cdot m^{41-11} = \left(\frac{7}{3}\right)^6 \cdot m^{30}$. Полученное выражение $\left(\frac{7}{3}\right)^6 m^{30}$ приведем к степени с основанием $\frac{7}{3}m^5$. Получим $\left(\frac{7}{3}m^5\right)^6$, или $\left(2\frac{1}{3}m^5\right)^6$.

Таким образом: $\left(2\frac{1}{3}m^5\right)^n = \left(2\frac{1}{3}m^5\right)^6$. Отсюда: $n = 6$.

Ответ: n — любое при $m = 0$;
$n = 6$ при $m \neq 0$.

1. Можно ли одночлен представить как выражение, состоящее только из произведения числа и степени с натуральным показателем? Почему?
2. Правильно ли следующее определение одночлена: "*Одночленом* называется всякое выражение, в котором последним по порядку действием является не сложение и не вычитание"? Почему?
3. Верно ли: 1) любой одночлен является выражением; 2) любое выражение является одночленом?

Упражнения

А

10.1. Какие из следующих выражений являются одночленами:

$8a$; $-0{,}5\ bc$; $\frac{2}{3}x^2yz$; $\frac{x-2}{3}$; $\frac{y+1}{z}$; $10\frac{a}{5}$; $\frac{4}{b}$?

10.2. Среди одночленов 41, $9a^2c$; $-\frac{8}{17}x^5$; $6a^4ba$; $107x^2yzy^2$; $-26a^2nm^{10}$; $3ab\cdot\frac{5}{9}b$; $0{,}24x^3y\frac{7}{3}x^7y$ укажите одночлены, записанные в стандартном виде.

Запишите в стандартном виде одночлены **(10.3—10.4)**:

10.3. 1) $8x^5x$; 2) $-b^4b^4b$; 3) xyx^4;

4) $-a^5(-a^8)$; 5) $7nm^4(-8n^3)$; 6) $\frac{5}{24}k^5t\left(-\frac{3}{10}t^6\right)$.

10.4. 1) $1{,}8a^5b^7a^{10}$; 2) $\frac{14}{5}cd^5\left(-\frac{8}{7}c^4\right)$; 3) $2{,}8xt^5(-0{,}5x^2t)$;

4) $-b^5(-b^8)(-b)$; 5) $1{,}4a^6t\left(-\frac{3}{2}at^8\right)$; 6) $20bc^8(-0{,}05b^{10})$.

10.5. Найдите степень одночленов из упражнений **10.3—10.4.**

Приведите в стандартный вид одночлены **(10.6—10.8)**:

10.6. 1) $5a^3(-3)ab^5$; 2) $7m^2\cdot 6c^3m$; 3) $-6m^8 9am^3$;

4) $-8ac^5(-2a^4)$; 5) $3m^2np\cdot(-5mn^2 4)$; 6) $ab\cdot 9a\cdot 4b$.

10.7. 1) $\left(-\frac{1}{2}m^3\right)(16m^2)$; 2) $\left(\frac{3}{4}x^2y^3z\right)\left(\frac{2}{3}x^3y^2z^2\right)$;

3) $\left(-\frac{3}{5}a^2xy^3\right)\left(\frac{2}{3}ax^2y\right)$; 4) $\left(10\frac{1}{3}ab^2c^4\right)\left(1\frac{5}{31}a^7bc^2\right)$.

10.8. 1) $\left(\frac{4pc^2}{15}\right)\left(\frac{9ca^3}{2}\right)$; 2) $\left(-\frac{4}{5}m^4np\right)\left(-\frac{1}{4}m^2n^3p^2\right)$;

3) $\left(-4\frac{3}{4}mn^2\right)\left(-\frac{17}{38}amn\right)$; 4) $\left(6\frac{1}{2}x^3yz^2\right)\left(2\frac{2}{13}x^6yz^3\right)$.

10.9. Найдите степень одночлена:

1) $\left(\frac{2}{3}ab^2\right)^3$; 2) $\left(\frac{3}{4}a^2b^3\right)^4$; 3) $\left(\frac{4}{3}m^5n^2\right)^5$;

4) $\left(\frac{2}{9}m^{10}n^{13}\right)^3$; 5) $(-0{,}6\ a^3b^4)^4$; 6) $(-1{,}3\ x^{10}y^4)^3$;

7) $(0{,}02\ m^3n^3)^2$; 8) $(0{,}5\ x^3y^5)^3$.

B

10.10. Выполните умножение одночленов и найдите значение полученного выражения:

1) $\frac{3}{4}a^2 \cdot \frac{4}{5}b^2$ при $a = 2,\ b = \frac{3}{5}$;

2) $0{,}4\ ab \cdot 8b^2$ при $a = 0{,}5,\ b = 3$;

3) $0{,}5\ ab^3 \cdot 16a^2b$ при $a = -0{,}5,\ b = -2$;

4) $\frac{5}{18}a^3b^4 \cdot 3\frac{3}{5}a^4b^4$ при $a = -0{,}2,\ b = -5$.

10.11. Найдите значение выражения:

1) $\frac{1}{2}a^2b^4x \cdot \frac{3}{4}$ при $a = 2,\ b = 1,\ x = \frac{1}{2}$;

2) $-4a^2b^2c^2 \cdot 6a^4c^3$ при $a = 1,\ b = \frac{1}{4},\ c = 2$;

3) $\frac{2}{5}x^3y^2z \cdot 7{,}5\ xz^4$ при $x = -2,\ y = -1,\ z = -0{,}5$;

4) $-25\ n^2m^2 \cdot 0{,}16\ n^5m^7$ при $n = -0{,}1,\ m = 10$.

10.12. Представьте в виде квадрата одночлен:

1) $16a^6$; 2) $100\ m^8n^4$; 3) $\frac{25}{81}x^6y^{12}$;

4) $\frac{169}{225}a^{10}b^2$; 5) $3{,}24\ m^4p^{14}$; 6) $0{,}0289\ \frac{x^{20}}{y^{18}}$.

10.13. Выпишите выражения, которые можно представить в виде квадрата и в виде куба одночлена, содержащие степени с натуральным показателем:

1) $a^{13}b^{30}$; 2) $n^6m^{18}k^9$; 3) $x^{24}y^{16}z^{20}$;

4) $0{,}16\ a^2b^6$; 5) $216\ a^6b^6$; 6) $7{,}296\ a^{15}c^9$.

C

10.14. Известно: $5x^2y^3 = 8$. Найдите:

1) $45x^2y^3$; 2) $3x^2y^3$; 3) $-5{,}5\,x^2y^3$;

4) $25x^4y^6$; 5) $125\,x^6y^9$; 6) $\frac{625}{128}x^8y^{12}$.

10.15. Упростите выражение $(a^5b^3)^6 \cdot (a^7b^4)^5 : (a^{21}b^{12})^3$ и найдите его значение при $a = -\frac{5}{11}$ и $b = 3\frac{2}{3}$.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

10.16. Замените: 1) разность одночленов $2a^2b - 13\,ab^3$ на сумму одночленов;
2) сумму одночленов $11\,x^2y + (-xy^3)$ на разность одночленов.

10.17. Найдите одночлен наибольшей степени: $17\,a^3$, $-5\,ya^4$; $8a^2n^3$; $12\,xy^5$.

§ 11. МНОГОЧЛЕН. СТАНДАРТНЫЙ ВИД МНОГОЧЛЕНА. СТЕПЕНЬ МНОГОЧЛЕНА

Что такое *многочлен*, его *степень* и *стандартный вид*?

Вы знаете, что разность $a - b$ можно заменить суммой $a + (-b)$, поэтому выражения $a - b$ и $a + (-b)$ называют *алгебраическими суммами*.

Алгебраическая сумма нескольких одночленов называется *многочленом* .

Почему выражения $3 + a$; $a^2 - b^2$; $8c + 0{,}7d^2$; $\frac{2}{9}xy^2 + z - 3$ являются многочленами?

Одночлены, из которых составлен многочлен, называются *членами этого многочлена* .

Почему членами многочлена $25a + \frac{7}{9}xy^2 - 1{,}11n^4 + 10$ являются одночлены $25a$; $\frac{7}{9}xy^2$; $-1{,}11n^4$; 10?

Среди всех многочленов выделяют двучлен и трехчлен.

Многочлен, состоящий из двух членов, называется *двучленом* .

Почему $\frac{8}{11} + 6c$; $y^5 - 7{,}3$ являются двучленами?

Многочлен, состоящий из трех членов, называется *трехчленом* .

Объясните

1. Почему выражения $a^2 - ab + 2$; $-\frac{5}{7}s + s^3 - k$ являются трехчленами?

2. Как упростили многочлен $8xy^2 - 1{,}2mx + 8{,}3 + 0{,}7mx - 9 + mx$?

$8xy^2 - \underline{1{,}2mx} + \underline{8{,}3} + \underline{0{,}7mx} - \underline{9} + \underline{mx} = 8xy^2 + (-1{,}2mx + 0{,}7mx + mx) + (8{,}3 - 9)$.

Так как $-1{,}2mx + 0{,}7mx + mx = (-1{,}2 + 0{,}7 + 1)mx = 0{,}5mx$ и $8{,}3 - 9 = -0{,}7$, то получим: $8xy^2 + 0{,}5mx - 0{,}7$.

Замена суммы подобных одночленов многочлена одним одночленом называется *приведением подобных членов* многочлена .

В многочлене $8xy^2 + 0,5mx - 0,7$ каждый одночлен записан в стандартном виде, и среди них нет подобных одночленов. Такой вид многочлена называют *стандартным видом многочлена.*

Чтобы привести многочлен к стандартному виду, вначале нужно записать каждый член многочлена в стандартном виде, а затем привести подобные члены получившегося многочлена.

Наибольшая из степеней одночленов, входящих в многочлен стандартного вида, называется *степенью многочлена.*

Почему многочлен $8xy^2 + 0,5mx - 0,7$ есть многочлен третьей степени?

1. Какое наименьшее число одночленов может содержать многочлен?
2. Как называется сумма: двух одночленов; трех одночленов; пяти одночленов?
3. Может ли степень многочлена быть равной нулю; единице?
4. Приведите пример многочлена второй степени.

Упражнения

А

11.1. Составьте многочлен из одночленов:

1) a^2; a и 5; 2) $9x^3$; x и -7; 3) $0,8y$; $-2y$ и y^7;

4) -4; $7b^3$ и d^4; 5) $\frac{4}{15}t^3$; $-k$ и 10; 6) $\frac{19}{5}k^4$; $-6,3k^3$ и k.

11.2. Приведите каждый член многочлена к стандартному виду и найдите степень многочлена:

1) $8xy^4x^3 - 9x^3yy^7 + 10zz^5$; 2) $0,2a^5bb^6 - 1,1xyx^7 + k^8t^2k$;

3) $\frac{1}{3}8ac^5a - 3,8t^8s^9s - b^6c^8b^{10}$; 4) $mn^{10}n^2 + \frac{2}{5}c^8dd^7 - t^4t^5t$.

11.3. Назовите каждый член многочлена:

1) $5x^4 - 6a^2c + 0,8y^5$; 2) $-40a^{10} + 3,8cd^5 - mn^3$;

3) $\frac{8}{3}ab^3 + \frac{10}{17}d^{10} - 1,2z$; 4) $5c^5 - \frac{15}{26}xy^3 + 100$.

Приведите подобные члены многочлена (11.4—11.6):

11.4. 1) $13a - 2bc + 19bc$; 2) $10mn + 9x - 20mn$;
3) $0{,}7b^2 + 20a + 2{,}0b^2$; 4) $5xy - 34xy + 3{,}3a$;
5) $9{,}3c + 4{,}5d^3 - 5{,}1d^3$; 6) $0{,}8t^4 + 2{,}4c - 2{,}1t^4$.

11.5. 1) $x^4 + a^2 - 6x^4 + 7a^2$; 2) $3y^3 - ab + 8y^3 + 9ab$;
3) $2ab^2 - mn - 5ab^2 + 6mn$; 4) $12c^2d - 7kt^2 + 8kt^2 - 10c^2d$;
5) $a^8c + 13a^8c - a^2d$; 6) $4x^3y - 6an + 2{,}1an - 7x^3y$.

11.6. 1) $8\frac{2}{3}x^3 - 16ay^2 + 9ay^2 - 9x^3$;
2) $27a^2z - 24{,}89a^2z + 3\frac{1}{5}y^2 - 15y^2$;
3) $3{,}12ab + 7\frac{5}{6}m^3 - 4\frac{1}{6}m^3 + 16{,}82ab$;
4) $19{,}2x^2 - 30\frac{1}{9}kt + 31kt - 20x^2$.

B

Представьте в стандартном виде и назовите степени многочленов (11.7—11.9):

11.7. 1) $22a^2 - 40a^3 + 18a^2 + 29a^3 + a^4$;
2) $-7b^5 - 13b^6 + 15 - 9b^5 + 34b^6$;
3) $41c^2 + 62c^3 - 99 - 42c^2 + 38c^3$;
4) $-52k + k^4 - 18k^4 + 52 - k$.

11.8. 1) $7{,}8x + 9{,}1y^2 - x + 1{,}9y^2 - 8{,}7y^2$;
2) $0{,}246z^3 - 15{,}2t + 16t - z^3 - 0{,}94$;
3) $-29{,}1c^2 + 0{,}17d^3 - d^3 + 30c^2 - 1{,}1d^3$;
4) $40{,}4a^3 - b^4 + 2{,}6a^3 - 44a^3 + 0{,}73b^4$.

11.9. 1) $1\frac{3}{7}b^2 - 10a^3 - \frac{2}{3}b^2 - \frac{3}{7}b^2 + 9a^3$;
2) $-8{,}5c^4 + 17b + 6\frac{2}{3}c^4 + \frac{5}{6}c^4 - 19b$;
3) $2\frac{2}{3}t^5 + 40a^2 - 3\frac{4}{9}t^5 - 41a^2 + 1\frac{1}{3}t^5$;
4) $-\frac{6}{7}k^6 - 8{,}8d^4 + 2\frac{6}{11}k^6 + 9d^4 - \frac{9}{11}k^6$.

Найдите значения многочленов (11.10—11.11):

11.10. 1) $5x^3 - 8x^5 + 44 - 10x^3 + 7x^5 - 60$ при $x = -2$;

2) $-7y^2 + 13y^6 - 71 + 3y^2 + 59 - 11y^6$ при $y = 3$;

3) $37 + 12a^4 - a^3 - 40 + 4a^3 + 10a^4$ при $a = -3$;

4) $-100 - 29b^3 + 51b^6 - 52b^6 + 27b^3 + 200$ при $b = 2$.

11.11. 1) $\frac{1}{3}x^4 + \frac{7}{9}x^3 - 2,5 - x^3 - x^4 + 6$ при $x = 1$;

2) $72 - \frac{4}{5}a^5 + \frac{3}{4}a^3 + \frac{2}{5}a^5 - a^3 - 69$ при $a = -1$;

3) $80,3 + \frac{3}{8}y^2 - 79,4 - y^2 - \frac{5}{6}y^3 + y^3$ при $y = -1$;

4) $-\frac{11}{17}b^5 + 99,1 + \frac{8}{13}b + b^5 - \frac{5}{13}b - 100$ при $b = 1$.

11.12. Найдите значение выражения:

1) $0,7ab - 49 + a - 1,2ab + 47$ при $a = \frac{2}{3}$; $b = \frac{9}{16}$;

2) $53 - 5,3xy - y + 4,8xy - 6y$ при $x = \frac{4}{13}$; $y = \frac{13}{7}$;

3) $mn + 8m + 9,2n - 9mn - 10n$ при $m = \frac{3}{4}$; $n = \frac{5}{8}$;

4) $13,2c + d - cd - 10d - 8cd$ при $c = \frac{5}{3}$; $d = \frac{14}{3}$.

C

11.13. Расположите по возрастающим степеням переменной одночлены многочлена:

1) $x^2 - 3x^4 + 5x^5 + x$; 2) $-1,7y^5 + 2,8y^4 + y - y^6$;

3) $11a + 11 - a^5 + 1,9a^4$; 4) $4,8b^6 - b^8 - 10b + b^2$.

11.14. Расположите по убывающим степеням переменной одночлены многочлена:

1) $6x^8 - 7x^7 + 9x^{11} + x^{10}$; 2) $-1,7y^5 + 2,8y^4 + y - y^6$;

3) $-10 + b^2 - 4b^3 - 5b + b^5$; 4) $2x^3 - 3x^2 - 8x^9 - 7x^8$.

11.15. Сравните значения многочленов:

1) $2,25x^3 - 16x^2$ и $-2,5x^4 + 3x^3$ при $x = -2$;

2) $3,6x^3 - 1,875x^4$ и $0,125x^5 - x^9$ при $x = 2$;

3) $1{,}9\,b^7 - b^6 - 2b^7$ и $-2{,}4\,b^4 + b^5 + 2{,}3\,b^4$ при $b = -1$;

4) $\frac{1}{3}a^{10} + \frac{2}{7}a^7 - \frac{2}{3}a^{10}$ и $\frac{6}{7}a^9 - a^8 - \frac{2}{7}a^9$ при $a = -1$.

11.16. Докажите, что равны значения многочленов:

1) $11\frac{1}{9}ab^2 - 18\frac{2}{3}ab^2 + 5\frac{1}{6}ab^2 + \frac{8}{9}ab^2 + 26{,}6$ и

$47{,}8\,a^2b - 6{,}3\,a^2b - 40{,}5\,a^2b - \frac{6}{7}a^2b$ при $a = 0{,}7$, $b = 5$;

2) $2{,}2\,c^3d^2 - 2\frac{1}{3}c^3d^2 + \frac{7}{15}c^3d^2$ и $2\frac{2}{9}c^4d - 2{,}5\,c^4d + \frac{1}{18}c^4d$

при $c = 3$, $d = -2$.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

11.17. Даны одночлены: $17ya^3$, $-8ya^3$; $3a^2n^3$; 4; $12xy^5$; a^2n^3; $-5xy^5$. Назовите одночлены, отличающиеся коэффициентами.

11.18. Запишите многочлен, противоположный многочлену:

1) $x^2 - 3x + 5a$,
2) $y - 2x + 3$,
3) $-y^2 - 3a^3 - 5$,
4) $8a^4 - 3a + 5$.

§ 12. СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ

Как выполнять сложение, вычитание многочленов?

С многочленами можно выполнять арифметические действия.

Действия с многочленами проводятся для упрощения выражений. При их выполнении используются преобразования: раскрытие скобок, приведение подобных членов.

Правило сложения многочленов:

чтобы сложить многочлены, надо последовательно записать все члены с их знаками, а затем привести подобные члены многочлена.

Объясните

Как нашли сумму двух многочленов: $30x^5 - 8{,}8yz^2 - 3\frac{1}{9}$ и $4 + 9{,}1yz^2 - 53x^5$?

$$(30x^5 - 8{,}8yz^2 - 3\frac{1}{9}) + (4 + 9{,}1yz^2 - 53x^5) = 30x^5 - 8{,}8yz^2 - 3\frac{1}{9} + 4 + 9{,}1yz^2 - 53x^5 = -23x^5 + 0{,}3yz^2 + \frac{8}{9}.$$

Разность многочленов находится также, как и разность рациональных чисел.

Правило вычитания многочленов:

чтобы вычесть из одного многочлена другой многочлен, надо к уменьшаемому многочлену прибавить многочлен, противоположный вычитаемому многочлену.

Как нашли разность многочленов: $(21{,}8y^4 - 17x^2 + 9\frac{1}{7}z - 50)$ и $(22y^4 - 31x^2 + 7\frac{2}{7}z - 49)$?

Для решения используем правило вычитания многочленов, получим:

$$\left(21{,}8y^4 - 17x^2 + 9\frac{1}{7}z - 50\right) - \left(22y^4 - 31x^2 + 7\frac{2}{7}z - 49\right) =$$

$= (21{,}8\,y^4 - 17x^2 + 9\frac{1}{7}z - 50) + (-22\,y^4 + 31\,x^2 - 7\frac{2}{7}z + 49) = 21{,}8\,y^4 -$

$- 17x^2 + 9\frac{2}{7}z - 50 - 22\,y^4 + 31\,x^2 - 7\frac{2}{7}z + 49 = -0{,}2\,y^4 + 14x^2 + 1\frac{6}{7}z - 1.$

1. Какие преобразования используют при сложении и вычитании многочленов?
2. Может ли в результате сложения или вычитания многочленов получиться число? Одночлен? Если да, то приведите пример.
3. Назовите многочлен, противоположный многочлену $2x^2 - 7xy + y^2$.

Упражнения

А

12.1. Найдите сумму многочленов:

1) $x^2 + 5$ и $x^2 - 4$;
2) $y - 2x$ и $4x + 6$;
3) $2ab - 1$ и $ab + 10$;
4) $1{,}8\,a^2 - y^3$ и $22\,a^2 + 2y^3$.

12.2. Найдите разность многочленов:

1) $20 + a^3$ и $90\,a^3 + 21$;
2) $4b - c^2$ и $-17\,b + 8c^2$;
3) $77 - mn$ и $-30\,mn + 8$;
4) $4{,}9\,kt - 3z$ и $-8{,}3\,kt + 5{,}2\,z$.

Найдите алгебраическую сумму многочленов (12.3—12.4):

12.3. 1) $(4x + 8y) + (23x + 5y)$;
2) $(83\,a - 91\,b) - (89\,a - 100\,b)$;
3) $(1{,}5\,m - 4{,}2\,n) - (2m + 3n)$;
4) $(5k + 6t) + (2{,}8\,t - 3{,}1\,k)$;
5) $\left(\frac{3}{16}a - 20b\right) + \left(11b - \frac{1}{16}a\right)$;
6) $\left(\frac{7}{15}a + 53d\right) + \left(60d - \frac{13}{15}c\right)$.

12.4. 1) $(5 + 4a^3) + (a + 2a^3)$;
2) $(y - 7x^4) - (2{,}3 - 9x^4)$;
3) $(9b + 7c^2) - (14\,b - 10\,c^2)$;
4) $(39\,n^2 - 2m) + (5m - 44\,n^2)$.

12.5. Заполните таблицу 12.1.

Таблица 12.1

A	B	$A + B$	$A - B$
$8{,}1 - 7x^3$	$9{,}2\,x^3 - 10$		
$-15{,}1 + 6y^2$	$23{,}4 - 11\,y^2$		

12.6. Если $A = \frac{2}{3}a^2 - 4,5$ и $B = 2\frac{1}{9}a^2 + 3,09$, то заполните таблицу 12.2.

Таблица 12.2

$A + B$	$B - A$	$A - B$

12.7. Верно ли равенство:

1) $(18,9 - x^2) - (5x^2 - 21) + (7x^2 - 39,9) = x^2$;

2) $(60b^3 + 51,3) + (70 - 62,8b^3) - (-2,8b^3 + 121) = 0,3$;

3) $\left(\frac{7}{9}y^4 - 10,1\right) - \left(17 - \frac{2}{3}y^4\right) + \left(27,1 - \frac{4}{9}y^4\right) = y^4$;

4) $\left(4,7c^2 - 6\frac{5}{7}\right) + \left(3\frac{4}{9} - 5c^2\right) - \left(0,7c^2 - 3\frac{5}{21}\right) = -c^2$?

12.8. Упростите и найдите значение выражения:

1) $(20a^7 + 7a^3) - (57 + 20a^7)$ при $a = 2$;

2) $(17,3x^5 - 62) + (3x^2 - 17,3x^5)$ при $x = -5$;

3) $\left(8\frac{3}{4}b^4 + 9,1\right) - \left(2,7b^3 + 8,75b^4\right)$ при $b = \frac{1}{3}$;

4) $\left(1\frac{44}{49} - 11,3y^4\right) + (6y^2 + 11,3y^4)$ при $y = -\frac{3}{7}$.

12.9. При каком значении переменной равно нулю значение выражения :

1) $(90 - 24,1a) - (15,9a + 86)$;   2) $(4,5 - 0,23a) + (-2,9 + 0,13a)$;

3) $\left(1,6a + \frac{1}{12}\right) - \left(0,5a - \frac{5}{6}\right)$;   4) $(18,7a - 3) + \left(2\frac{2}{7} - 13,7a\right)$?

Найдите сумму и разность многочленов **(12.10—12.11)** :

12.10. 1) $5x^2 - 0,18y^3$ и $6,2x^2 + 7y^3$;   2) $-10,9b^5 + 43c$ и $60c + 11,1b^5$;

3) $76n^4 - 27,2t^2$ и $30t^2 - 80n^4$;   4) $88,1x - 64m^2$ и $41m^2 - 8,8x$.

12.11. 1) $9\frac{1}{5}y + 81z^3$ и $39z^3 - 10y$;

2) $-51k^4 + 10\frac{3}{7}c^2$ и $12\frac{3}{7}c^2 + 19k^4$;

3) $29m^3 - 3,8t$ и $2,8t - 21\frac{11}{19}m^3$;

4) $100s^5 + 31\frac{5}{12}k$ и $40k - 92,8s^5$.

B

12.12. Докажите, что не зависит от значений переменных значение выражения:

1) $(50 - 120x + 76y) + (88x - 74y) - (2y - 32x)$;

2) $(8{,}7a - 5{,}1b + 13) - (2{,}9a - 4{,}2b) + (0{,}9b - 5{,}8a)$.

12.13. Докажите тождество :

1) $(11a + 12b) - (20a - 34b) + (10a - 45b) = a + b$;

2) $(22{,}4x + 31{,}3y) + (4{,}9y - 30x) - (35{,}2y - 6{,}6x) = y - x$.

Упростите выражения **(12.14—12.16)** :

12.14. 1) $(a^3 - a^2 + 6) - (4a^3 + 8a^2 - 11)$;

2) $(11x^4 + 21x^3 - 43) + (60 - 19x^3 - 7x^4)$;

3) $(30b^5 - 15b + 16) - (17 + 17b + 44b^5)$;

4) $(-73 + 17x + 19x^3) + (-18x^3 - 39x + 50)$.

12.15. 1) $(5a^2 - 4x + 25) + (-31 + 9a^2 - 3x)$;

2) $(17y + 8b^2 - 11) - (70 - 9b^2 + 18y)$;

3) $(2{,}3c - 9{,}1z^3 - 4) - (10z^3 - 3c + 5{,}9)$;

4) $(0{,}8t^2 - 20m + 5) - (41 - 3m - 2{,}4t^2)$.

12.16. 1) $(xy + 6a) + (6a - z) - (8z + 10xy)$;

2) $(4b - 3cd) - (11b + 20k) + (23k - 19cd)$;

3) $(2t - mn) + (8mn - 9k) - (-10k + 15z)$;

4) $(1{,}8a - bc) + (7{,}7bc - d) - (10{,}1d - a)$.

12.17. Выполните действия с многочленами A, B и C. Полученные многочлены запишите в таблицу 12.3, если $A = 1{,}8a^2b^3 - 25a^3b^3$; $B = 20a^3b^2 - 0{,}7a^2b^3$ и $C = 1{,}9a^2b^3 + 23a^3b^2$.

Таблица 12.3

$A + B + C$	$A - B + C$	$A - B - C$	$C - A - B$

12.18. Используя данные из упражнения 12.17, найдите:
1) $B - A + C$; 2) $C - A + B$; 3) $B - A - C$.

12.19. Верно ли равенство:

1) $(a^2b^2z^4 - 0{,}3a^4b^3c^2) - (a^2b^3z^4 - 9{,}3a^4b^3c^2) = 9a^4b^3c^2$;

2) $(7x^3y^2z - 8{,}1xy^2z^3) + (7{,}1xy^2z^3 - 7x^3y^2z) = -xy^2z^3$?

12.20. При каких значениях переменных значение алгебраической суммы равно 1:

1) $(47,5\,x^4y - 28,9\,xy^4) - (19,6\,x^4y - 28,9\,xy^4) + (2,7\,x - 27,9\,x^4y)$;

2) $\left(8\frac{3}{16}a^2b^2 - 18\frac{8}{15}a^2b^2\right) + \left(20,6a^2b^2 - 8\frac{3}{16}a^2b^2\right) -$

$- \left(2\frac{1}{15}a^2b^2 - 3,1a\right)$?

12.21. Докажите тождество :

1) $(-9\,k^4t^2 + 11\,k^3t) - (19\,k^3t - 8k^4t^2) + (10\,k^4t^2 + 8k^3t) = 9k^4t^2$;

2) $(5n^3m^2 - n^3m^3) - (7n^3m^3 + 10n^3m^2) + (6n^3m^2 + 8n^3m^3) = n^3m^2$.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

12.22. Выполните действия:

$$\left(11\frac{5}{8} : 15,5 + 4,25 - 3\frac{7}{9}\right) \cdot \frac{9}{22} - 0,59.$$

12.23. Напишите формулу, выражающую длину пути, пройденного автомобилем за b ч со скоростью 90 км/ч. Найдите длину пути, если $b = 3\frac{1}{3}$.

§ 13. УМНОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ

Как выполнять умножение многочленов?

Сначала рассмотрим умножение многочлена на одночлен.

Произведением двучлена $30a - 7b$ и одночлена $0{,}4x$ является выражение $(30a - 7b) \cdot 0{,}4x$. На основании распределительного свойства умножения получим: $30a \cdot 0{,}4x - 7b \cdot 0{,}4x$, или $12ax - 2{,}8bx$. Как видим, каждый член двучлена (многочлена) умножили на одночлен и полученные результаты сложили.

Для умножения многочлена на одночлен можно использовать правило:

> чтобы умножить многочлен на одночлен, надо умножить на этот одночлен каждый член многочлена и полученные произведения сложить.

Объясните

Как умножили многочлен $\frac{2}{3}nm - 0{,}5m^2 + 7n^2$ на одночлен $-0{,}3\ nm$?

$(\frac{2}{3}nm - 0{,}5m^2 + 7n^2) \cdot (-0{,}3\ nm) = \frac{2}{3}nm \cdot (-0{,}3\ nm) + (-0{,}5\ m^2) \cdot$
$\cdot (-0{,}3\ nm) + 7n^2 \cdot (-0{,}3\ nm) = -0{,}2\ n^2m^2 + 0{,}15\ nm^3 - 2{,}1\ n^3m$.

Пусть требуется перемножить два многочлена: $a + c$ и $a^2 - c^3 + 5$. Их произведением будет выражение $(a + c) \cdot (a^2 - c^3 + 5)$.

Поскольку значением двучлена $a + c$ является число, то обозначим его буквой x. Используя распределительное свойство умножения, получим: $(a + c)(a^2 - c^3 + 5) = x \cdot (a^2 - c^3 + 5) = xa^2 - xc^3 + 5x = (a + c) \cdot a^2 + (a + c) \cdot (-c^3) + (a + c) \cdot 5$. Применяя еще раз правило умножения многочлена на одночлен, получим: $a^3 + a^2c - ac^3 - c^4 + 5a + 5c$. Таким образом, $(a + c)(a^2 - c^3 + 5) = a^3 + a^2c - ac^3 - c^4 + 5a + 5c$. Как видим, в результате умножения многочленов получился многочлен, равный сумме произведений каждого члена одного многочлена на каждый член второго многочлена.

Для умножения многочленов можно использовать правило:

> чтобы умножить многочлен на многочлен, надо умножить каждый член одного многочлена на каждый член другого многочлена и полученные произведения сложить.

Объясните

Как нашли многочлен, равный произведению многочленов $1{,}5\,t^2 - 3kt + 2k^2$ и $\left(\frac{1}{6}k - 4t\right)$?

$$(1{,}5\,t^2 - 3kt + 2k^2)\cdot\left(\frac{1}{6}k - 4t\right) = 0{,}25\,kt^2 - 0{,}5\,k^2t + \frac{1}{3}k^3 - 6t^3 + 12\,kt^2 - 8k^2t = \frac{1}{3}k^3 - 8{,}5\,k^2t + 12{,}25\,kt^2 - 6t^3.$$

1. Как умножить многочлен на одночлен?
2. Как умножить двучлен на двучлен?
3. Как умножить трехчлен на двучлен?

Упражнения

А

Запишите в виде многочленов произведения **(13.1—13.6):**

13.1. 1) $a(a - c + 1)$; 2) $-c(m + n - 3)$; 3) $5x(x + y^2 - 5)$; 4) $4y(y + x^2 - 6)$; 5) $-xy(3y^2 + 2x)$; 6) $mn(7 - m + 8n^2)$; 7) $2^2xy(4x - 3y + 5xy)$; 8) $-3a^2b(2a + 5b - 7ab)$.

13.2. 1) $(x - a)(x + y)$; 2) $(a + z)(n - m)$; 3) $(t + s)(b + k)$; 4) $(c - d)(x - y)$; 5) $(a + 2)(b - 3)$; 6) $(4 - b)(5 + c)$; 7) $(d - 4)(t + 5)$; 8) $(k - 6)(7 - d)$.

13.3. 1) $(x - 7)(x + 8)$; 2) $(9 - y)(y + 5)$; 3) $(a + 6)(4 - a)$; 4) $(2 - b)(b + 3)$; 5) $(10 - c)(9 - c)$; 6) $(d + 3)(d + 11)$.

13.4. 1) $(b + 3)(b^2 - b - 7)$; 2) $(2 - a)(16 - a + a^2)$; 3) $(a + 4)(a^2 + a - 2)$; 4) $(5 - b)(4 - b - b^2)$; 5) $(3xy - 4)(6 + xy)$; 6) $(4mn + 3)(mn - 8)$.

13.5. 1) $(a^3 - 2a - 4)(-a + 5)$; 2) $(7b - 20)(2 - b + 4b^2)$; 3) $(-3c^2 + c - 9)(5c + 6)$; 4) $(4 - 3d + 2d^2)(1 - 7d)$.

13.6. 1) $(ab + 7)(8 - ab)$; 2) $(xy + 11)(xy - 12)$;
3) $(1{,}5 - 6nm)(8nm + 2{,}5)$; 4) $(9st - 1{,}6)(10 + 1{,}8st)$.

Упростите выражения **(13.7—13.8):**

13.7. 1) $8(3n - 2m) - 5(2n - m)$;
2) $-11(4x + 3y) - 9(2y - 3x)$;
3) $-1{,}2(5x - 6y) + 1{,}4(5y - 3x)$.

13.8. 1) $(x - 4a)(5a + 8x) - (6a - 7x)(3x - 2a)$;
2) $(6c + d)(8c - 9d) + (-10d + 2c)(11c - 4d)$;
3) $(\frac{2}{3}b - 5k)(6k - 0{,}3b) - (3k + \frac{5}{6}b)(6b - 1{,}8k)$;
4) $(\frac{1}{7}x - \frac{1}{8}y)(7y - 8x) + (\frac{1}{7}y - \frac{1}{8}x)(7x - 8y)$.

13.9. Найдите значение выражения:
1) $8a^2(a - 5) - 4a(a^2 - 7)$ при $a = 3$;
2) $b(-9b^2 + 1) + 3b(3b^2 + b)$ при $b = -2$;
3) $(3x - 4)(8x + 2) - 24x^2 - 2$ при $x = 2$;
4) $(c^2 + 3)(c - 9) - c^2(c - 6)$ при $c = -5$.

13.10. Решите уравнение:
1) $3x(x^2 - 8) - 3x^3 = 12$; 2) $(x + 8)(5x - 6) - 20 = 5x^2$;
3) $18y^3 - 2y(2 + 9y^2) = 6{,}5$; 4) $53 - 8y(1 - 3y) = 24y^2$.

B

13.11. Решите неравенство:
1) $0{,}8x(5x - 0{,}8) + 0{,}04x \mathrm{m} 4x^2 - 12$;
2) $9x^2 - 11 \mid 9x(x - 2) - 3$;
3) $(4x - 5)(6 - 3x) - 4 < (1 - 2x)(7 + 6x)$;
4) $(1{,}8x + 1)(5x - 1) - 2{,}2x > 9x^2 - 4$.

13.12. Докажите тождество:
1) $(7x - 3)(4 - 8x) + 2x(28x - 26) = -12$;
2) $1{,}1x^2(x^2 - 10) - x(1{,}1x^3 - 9x) = -2x^2$;
3) $(-y^3 + 5y)2y - 10y^2(1 + 0{,}2y^2) = -4y^4$;
4) $(2{,}5a + b^2)(-4a) + 2a(5a - b^2) = -6ab^2$.

13.13. Найдите значение выражения:
1) $(x - 4)(x^2 + 2x - 5) - x^3$ при $x = -\frac{4}{5}$;

2) $(a^2 - a + 9)(2a + 1) - 2a^3$ при $a = -\frac{3}{8}$;

3) $24y^3 - 3(8y^2 - 1)(y + 6)$ при $y = -\frac{2}{3}$;

4) $40m^3 - (5m^2 + m - 2)(8m + 3)$ при $m = \frac{7}{10}$.

13.14. Решите уравнение:

1) $(x^2 + 1)(x - 2) - x^3 = -2x^2$; 2) $(3 - y)(1 - y^2) + 3y^2 = y^3$;

3) $(z - 6)(z + 5) - (z - 2)z = 30$; 4) $3a(a - 3) + a(2 - 3a) = -100{,}59$.

C

13.15. Решите уравнение:

1) $(x + 10)(x - 9) - (x - 8)^2 = 0$;

2) $(x + 11)(x + 9) - (x - 3)(x + 40) = 0$;

3) $(x - 6)(7 + x) + (3 - x)(3 + x) = 0$;

4) $(x - 4)(4 + x) - (1 - x)(9 - x) = 0$.

13.16. Решите неравенство :

1) $(a + 6)(a - 5) - a^2 \text{m} 0$; 2) $a^2 - (a - 2)(a + 4) > 0$;

3) $(2a - 1)(a - 4) - 2a^2 \mid 0$, 4) $3a^2 + (2 - a)(4 + 3a) < 0$.

13.17. Докажите тождество :

1) $b(b - 4) + (b - 8)(b + 9) - 2(b - 3)^2 = 9b - 90$;

2) $(c + 2)^2 - (c - 4)(3 - c) - 0{,}5(4c^2 - 1) = 16{,}5 - 3c$;

3) $(d - 4)(d^2 + d + 1) - d(d^2 - 3) = -3d^2 - 4$;

4) $(k + 7)(k - 6) - 2(k - 2)^2 + (k - 3)^2 = 3k - 41$.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

13.18. Не выполняя вычислений, сравните значения выражений:

1) $(12{,}4 + 13{,}5) : 3$ и $12{,}4 : 3 + 13{,}5$;

2) $(5{,}1 - 0{,}34) : 1{,}7$ и $5{,}1 - 0{,}34 : 1{,}7$;

3) $(400 - 120) : 40$ и $400 : 40 - 120 : 40$.

13.19. Упростите: 1) $\frac{25a^5b}{5a^2}$; 2) $\frac{0,16xy^4}{2xy}$; 3) $\frac{8a^{-2}b^3}{2^2ab^3}$.

13.20. Найдите 45% от числа, если $a = \frac{3,9 \cdot 11,5 - 45,05}{44,52 : 10,6 - 4,225}$.

§ 14. ДЕЛЕНИЕ ОДНОЧЛЕНА И МНОГОЧЛЕНА НА ОДНОЧЛЕН

Как одночлен и многочлен разделить на одночлен?

Рассмотрим деление одночлена на одночлен с помощью примера.

Пример. Разделим одночлен $40xy^3$ на одночлен $0{,}5y^2$. Для этого запишем частное $40xy^3 : (0{,}5y^2)$ в виде дроби $\frac{40xy^3}{0,5y^2}$. Сократим дробь на 0,5 и применим свойства степени: $y^3 : y^2 = y$. Тогда получим $80xy$.

Ответ : $80xy$.

Значит,

> чтобы разделить одночлен на одночлен, нужно записать частное в виде дроби и сократить ее.

Рассмотрим деление многочлена на одночлен с помощью примера.

Разделим многочлен $-3{,}6a^2b^2 + 3a^2b + 44a^4b^4$ на $-4a^2b$. Для этого используем правило деления суммы на число. Чтобы сумму разделить на число, надо на это число разделить каждое слагаемое и полученные результаты сложить.

Поскольку значением любого одночлена является число, то разделим каждое слагаемое (значит, каждый член многочлена) на число, т. е. на одночлен. Получим :

$(-3{,}6a^2b^2 + 3a^2b + 44a^4b^4) : (-4a^2b) = -3{,}6a^2b^2 : (-4a^2b) + 3a^2b :$

$: (-4a^2b) + 44a^4b^4 : (-4a^2b) = \frac{-3,6a^2b^2}{-4a^2b} + \frac{3a^2b}{-4a^2b} + \frac{44a^4b^4}{-4a^2b} = 0{,}9b - 0{,}75 -$

$- 11a^2b^3$.

Ответ : $0{,}9b - 0{,}75 - 11a^2b^3$.

Значит,

> чтобы разделить многочлен на одночлен, нужно каждый член многочлена разделить на этот одночлен и полученные результаты сложить.

Примечание :

1. Если при делении многочлена на одночлен получится многочлен (как это было в рассмотренных выше примерах), то в таких случаях

говорят, что *многочлен делится на одночлен*. Однако это происходит не всегда.

Например, многочлен $mn + mp - np$ не делится на одночлен mn.

2. При делении многочлена на одночлен предполагается, что переменные могут принимать такие значения, при которых значение делителя не равно нулю.

1. Какие преобразования используют при делении одночлена на одночлен?
2. Как разделить многочлен на одночлен?

Упражнения

A

Выполните деление **(14.1—14.2):**

14.1. 1) $46a^2b : (2a)$; 2) $50xy^2 : (-5y)$;

3) $14x^2y^3 : (-7xy)$; 4) $72cd^3 : (9cd^2)$;

5) $\frac{5}{6}a^2c^2 : \left(\frac{3}{5}ac\right)$; 6) $0{,}24k^4t : \left(\frac{4}{9}k^3t\right)$.

14.2. 1) $(-20a+12ab+18ac):(-2a)$;

2) $(4{,}8b-0{,}6bc-1{,}5bd):(0{,}3b)$;

3) $\left(\frac{14}{15}x^2 - \frac{32}{25}xy + \frac{54}{5}xz\right) : \left(\frac{2}{5}x\right)$;

4) $\left(-\frac{100}{63}nm + \frac{50}{77}nk - \frac{20}{21}nt\right) : \left(-\frac{20}{7}n\right)$.

Упростите выражения **(14.3—14.4):**

14.3. 1) $40x^2y : (8x) - 6xy$; 2) $2{,}8ab^2 : (0{,}7b) + 1{,}3ab$;

3) $\frac{4}{9}s^2t^2 : \left(\frac{2}{3}st\right) + \frac{1}{3}st$; 4) $8\frac{1}{3}n^3m^3 : \left(1\frac{3}{5}n^2m^2\right) - 1{,}9n$.

14.4. 1) $8a^2b : (4ab) + 15ac^2 : (5c^2)$;

2) $7{,}5x^2y^2 : (3x^2y) - 3{,}9my : (12m)$;

3) $2{,}1\,ab^2 : \left(\frac{4}{3}b^2\right) - 2{,}7\,at^3 : \left(\frac{8}{9}t^3\right)$;

4) $6\frac{1}{4}c^2d : \left(2\frac{1}{2}cd\right) + 8\frac{1}{4}c^2t^2 : \left(5\frac{1}{2}ct^2\right)$.

14.5. Найдите значение выражения:

1) $100\,b^4 : 4b^3 - 5b$ при $b = 0{,}2$;

2) $99\,c + 2c^5 : 0{,}2\,c^4$ при $c = -\frac{1}{5}$;

3) $68\,t^3 : (3{,}4\,t^2) - t$ при $t = -\frac{4}{7}$;

4) $-21{,}4\,y + 7y^5 : (5y^4)$ при $y = -0{,}03$.

B

14.6. Сравните значения выражений:

1) $76\,a^2b^2 : (38\,ab)$ и $3ab$ при $a = -2$, $b = 3$;

2) $-5\,xy$ и $105\,x^3y^2 : (-21\,x^2y)$ при $x = 0{,}2$, $y = 7$;

3) $a^5b^4 : (a^3b^3)$ и $a^7b^9 : (a^6b^8)$ при $a = -2$, $b = -2$;

4) $33\,c^4d^2 : (1{,}1\,c^3d)$ и $20\,cd$ при $c = 0{,}5$, $d = -0{,}1$.

14.7. Докажите тождество:

1) $(200\,x^4y^3 - 55\,x^3y^2) : (5x^3y^2) + 11 = 40\,xy$;

2) $1{,}1\,a - (12{,}1\,a^3b^2 - 44\,a^2b^2) : (11\,a^2b^2) = 4$;

3) $1{,}6\,s^4t : (0{,}04\,s^3t) - 41{,}22\,s = -1{,}22\,s$;

4) $(8{,}47\,n^5m^4 + 77\,n^4m^3) : (7{,}7\,n^4m^3) - 10 = 1{,}1\,nm$.

14.8. Упростите выражение:

1) $\left(\frac{1}{2}a^7b^9 + 0{,}3\,a^8b^6\right) : \left(\frac{1}{6}a^5b^6\right)$;

2) $(15{,}2\,x^4y^{11} - 5{,}2\,x^3y^8) : (0{,}2\,x^2y^7)$.

C

14.9. Найдите значение выражения:

1) $90\,a^2b^2 : (18\,a^2b) + 0{,}14\,a^2b : (7ab)$ при $a = -5$, $b = 2$;

2) $4{,}95\,x^3y^4 : (2{,}2\,x^3y^2) - 77\,x^5y^4 : (0{,}11\,x^4y^4)$ при $x = \frac{3}{7}$, $y = -\frac{14}{15}$.

14.10. Сравните значения выражений:

1) $6a^2b : (0{,}5\,ab)$ и $8ab^2 : (0{,}2\,ab)$ при $a = 2$, $b = 3$;

2) $3{,}5\,n^3m : (7nm)$ и $5{,}7\,nm^4 : (19\,m^3)$ при $n = -1$, $m = 1$.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

14.11. Даны одночлены:

$9yax^3$; $-8yx$; $3xy^2n^3$; $4xy$; $5xay^5$; $-3xy$; $-9xay^5$.

Найдите общий множитель, входящий в каждый из этих одночленов.

14.12. Вынесите общий множитель за скобки, используя распределительное свойство умножения:

1) $2a + 2b$;
2) $xy + xz$;
3) $8c - 10d$;
4) $abc - abd$.

§ 15. РАЗЛОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНА НА МНОЖИТЕЛИ С ВЫНЕСЕНИЕМ ОБЩЕГО МНОЖИТЕЛЯ ЗА СКОБКИ

Как разложить многочлен на множители?

В предыдущем параграфе вы узнали, что при умножении многочлена на одночлен или на многочлен получается многочлен. Иногда решают обратную задачу, а именно: данный многочлен представляют в виде произведения нескольких одночленов и многочленов, т. е. выполняют *разложение данного многочлена на множители.*

Рассмотрим разложение многочлена на множители с помощью примеров.

Пример 1. Многочлен $8xy - \frac{2}{3}xz + 1,7x$ можно разложить на множители, так как все члены данного многочлена имеют общий множитель x. Поэтому, применяя распределительное свойство умножения, этот множитель вынесем за скобки. Получим:

$$x\left(8y - \frac{2}{3}z + 1,7\right).$$

Ответ: $x\left(8y - \frac{2}{3}z + 1,7\right)$.

Пример 2. Разложим на множители многочлен

$$14mn^2 - 49mn^3 - 35mn^4.$$

Коэффициенты каждого члена данного многочлена — целые числа, поэтому для нахождения общего множителя сначала найдем наибольший общий делитель коэффициентов членов многочлена. Затем рассмотрим буквенную часть. Она представляет собой произведение степеней. Среди степеней с одинаковым основанием найдем степени с наименьшими показателями. В многочлене $14mn^2 - 49mn^3 - 35mn^4$ число 7 есть наибольший общий делитель чисел 14, 49, 35, а степенями с наименьшими показателями являются m и n^2. Поэтому общим множителем является одночлен $7mn^2$. Вынесем этот общий множитель за скобки. Тогда получим:

$$14mn^2 - 49mn^3 - 35mn^4 = 7mn^2(2 - 7n - 5n^2).$$

Ответ: $7mn^2(2 - 7n - 5n^2)$.

Правильность разложения многочлена на множители можно проверить умножением многочлена, заключенного в скобках, на общий множитель.

В некоторых многочленах общим множителем для всех членов является не одночлен, а многочлен.

Например, в многочлене $19(3t+2k)-a(3t+2k)+3b(3t+2k)$ общий множитель $(3t+2k)$. Поэтому $19(3t+2k)-a(3t+2k)+3b(3t+2k)=(3t+2k)(19-a+3b)$.

Иногда для нахождения общего множителя можно применить равенство

$$a-b=-(b-a).$$

Например, в многочлене $(9-c^3)d+(c^3-9)m$ нет одинаковых множителей, но если (c^3-9) заменить на $-(9-c^3)$, то получим многочлен, каждый член которого содержит общий множитель $9-c^3$. Поэтому его можно вынести за скобки:

$$(9-c^3)d+(c^3-9)m=(9-c^3)d-(9-c^3)m=(9-c^3)(d-m).$$

Пример 3. Разложим на множители многочлен:

1) $11(x-1)-x(x-1)+y(1-x)$;

2) $120yz^2(2z-y)-80z(y-2z)$.

Решение. 1) $11(x-1)-x(x-1)+y(1-x)=11(x-1)-x(x-1)-y(x-1)=(x-1)(11-x-y)$;

2) $120yz^2(2z-y)-80z(y-2z)=120yz^2(2z-y)+80z(2z-y)=40z(2z-y)(3yz+2)$.

Ответ: 1) $(x-1)(11-x-y)$; 2) $40z(2z-y)(3yz+2)$.

Пример 4. Решим уравнения:

1) $0{,}41x+x^2=0$;

2) $y^2\left(\frac{2}{3}-y\right)-5y\left(y-\frac{2}{3}\right)=0$.

Решение. 1) Левая часть уравнения представляет собой двучлен, каждый член которого содержит одинаковый (общий) множитель x. В левой части уравнения $0{,}41x+x^2$ вынесем за скобки общий множитель x. Тогда уравнение примет вид: $x(0{,}41+x)=0$. Известно, что значение произведения равно нулю тогда и только тогда, когда один из множителей равен нулю. Поэтому $x=0$ или $x=-0{,}41$. Значит, уравнение имеет два решения: 0; –0,41. Записывают: $\{0; -0{,}41\}$.

2) Левую часть уравнения $y^2\left(\frac{2}{3}-y\right)-5y\left(y-\frac{2}{3}\right)=0$ преобразуем в вид: $y^2\left(\frac{2}{3}-y\right)+5y\left(\frac{2}{3}-y\right)$, затем вынесем за скобки общий множитель

$y\left(\frac{2}{3}-y\right)$. Тогда получим: $y\left(\frac{2}{3}-y\right)(y+5)=0$. Корнями этого уравнения являются числа: $0; \frac{2}{3}; -5$. Записывают: $\left\{0; \frac{2}{3}; -5\right\}$.

Ответ : 1) $\{0; -0{,}41\}$; 2) $\left\{0; \frac{2}{3}; -5\right\}$.

1. Что значит "разложить многочлен на множители"?
2. Каким может быть общий множитель членов многочлена (только числом, одночленом и т. п.)?

Упражнения

A

Разложите на множители многочлены **(15.1—15.7)**:

15.1. 1) $15ab-8ac+\frac{2}{7}ad$; 2) $-\frac{3}{8}xy+0{,}9xz-15x$;

3) $0{,}1mn+2mk-4m$; 4) $12tk-8tx-7t$;

5) $\frac{3}{4}at+0{,}17ax-5a$; 6) $-\frac{6}{5}dx+\frac{3}{11}dy-21d$.

15.2. 1) $3ab+9ac+27ad$; 2) $4xy+8xz-16x$;

3) $0{,}2mn-0{,}8mk+1{,}6m$; 4) $9tk-18tx+27t$;

5) $0{,}75at+\frac{3}{4}ax-\frac{9}{16}a$; 6) $-\frac{2}{3}dx+\frac{4}{9}dy-\frac{8}{9}d$.

15.3. 1) $16a^2b^3-32ab^2+64abc$; 2) $9x^3y^4-27x^2yz+54xy^2$;

3) $\frac{3}{16}a^4bc+\frac{7}{32}a^3bc-\frac{9}{64}a^4b^2c$; 4) $\frac{5}{9}x^8y^2z^3+\frac{11}{27}x^6y^3z^2-\frac{11}{54}x^7y^4z$.

15.4. 1) $0{,}125m^2n^3-0{,}25mn+0{,}625m^2n$;

2) $328t^2k^3+82t^2k^2$;

3) $0{,}09m^6n^5+0{,}27m^3n^8-0{,}09m^3n^5$;

4) $1{,}6t^{11}k^4-3{,}2t^{10}k+0{,}8t^9k$;

5) $14m^4-49m^2nk+7m^2n$;

6) $-8t^8k^3y+64t^3k^8-4t^3k^3$.

15.5. 1) $12(a+b)-c\cdot(a+b)+5d(a+b)$;

2) $14(m-n)+x(m-n)$;

3) $-1{,}5(x+y)+x(x+y)-y(x+y)+(x+y)$;

4) $(t+k)-8x(t+k)$;

5) $(c+d)x-(c+d)y+5(c+d)+5xy(c+d)$.

15.6. 1) $5a(3a-8)-3b(3a-8)+9ab(3a-8)-(3a-8)$;

2) $7y(7x-y)+x(7x-y)-7xy(7x-y)+(7x-y)$;

3) $(a+b)^2(x+y)-x(a+b)^2-y(a+b)^2+(a+b)^2$;

4) $m(m+n^3)-n^3(m+n^3)+n(m+n^3)-m^3(m+n^3)$.

B

15.7. 1) $4b(7-8a)+a(8a-7)-(14-16a)+(7-8a)ab$;

2) $3x(5y-4)-y(4-5y)+(15y-12)-3xy(4-5y)$;

3) $mn(m-3n)-m(m-3n)-n(m-3n)+8(6n-2m)$;

4) $(-\frac{2}{3}t+k)x-(k-\frac{2}{3}t)y+(3k-2t)xy-(-2t+3k)$.

Решите уравнения **(15.8—15.9)**:

15.8. 1) $x^2+6x=0$; 2) $x^2-5x=0$;

3) $\frac{7}{8}x+x^2=0$; 4) $\frac{12}{13}x-x^2=0$;

5) $x+\frac{2}{3}x^2=0$; 6) $x-\frac{7}{9}x^2=0$;

7) $\frac{1}{25}x+\frac{1}{125}x^2=0$; 8) $\frac{1}{49}x-\frac{1}{343}x^2=0$.

15.9. 1) $z(2z-5)+5(2z-5)=0$; 2) $3(4-z)-7z(z-4)=0$;

3) $z(0{,}5z+5)-6(5+0{,}5z)$; 4) $z(8-z)+z-8=0$.

Разложите на множители многочлены **(15.10—15.11)**:

15.10. 1) $(0{,}16a+0{,}32b)a-(0{,}64b+1{,}28a)b$;

2) $(0{,}09a-0{,}81b)b-(0{,}81b-7{,}29a)a$;

3) $(4{,}9x-3{,}43y)\cdot xy-(3{,}43y-4{,}9x)\cdot 4$;

4) $\left(\frac{7}{9}ab-k\right)\cdot a-\left(k-\frac{7}{9}ab\right)\cdot k-\left(k-\frac{7}{9}ab\right)\cdot b$;

5) $(2{,}5xy+1{,}25m)+(1{,}25m+2{,}5xy)y-(1{,}25m+2{,}5xy)x$.

15.11. 1) $\left(\frac{2}{3}xy-1\right)xy-\left(1-\frac{2}{3}xy\right)$;

2) $\left(\frac{4}{9}x-y\right)\frac{4}{9}-y\left(y-\frac{4}{9}x\right)$;

3) $\left(\frac{25}{49}x^2 + 1\right)y + \left(1 + \frac{25}{49}x^2\right)$;

4) $\left(1\frac{8}{19}y^2 + 15x^2\right)x + y\left(15x^2 + 1\frac{8}{19}y^2\right)$.

C

15.12. Разложите на множители:

1) $\left(\frac{121}{144}mnx + \frac{22}{24}mx\right) - n\left(\frac{11}{12}n + 2\right) + \left(4 + 1\frac{5}{6}n\right) \cdot \frac{1}{2}$;

2) $(169\,abc - 196\,cbax) + (13^2y - 14^2yx) - (14^2x - 13^2)$;

3) $(225\,x^2yz^3 - 289\,yz) - (15^2x^2z^2 - 17^2) + (17^2 - 225\,x^2z^2)$;

4) $(450\,tk^3 - 225\,k^2) + t(8t^2k - 4t) - 2 \cdot (\frac{1}{2} - tk)$.

Решите уравнения **(15.13—15.14):**

15.13. 1) $(7x - 5)x = (1,5 - 2,1\,x)$;

2) $(1 - 8x)x = (11,2\,x - 1,4)$;

3) $\left(1,7x - \frac{1}{3}\right)x = (3 - 15,3\,x) \cdot \frac{1}{2}$;

4) $\left(\frac{x}{7} - 1\frac{6}{7}\right)x = (3,9 - 0,3\,x) \cdot \frac{1}{35}$.

15.14. 1) $(14x^2 - 49x)x - (2x - 7) \cdot 8x = 0$;

2) $(125\,x - 25x^2) \cdot 9x - (15x - 3x^2) \cdot x = 0$;

3) $(0,81\,y^2 - 0,9\,y) \cdot 0,9\,y = (0,1 - 0,09\,y) \cdot 10y$;

4) $\left(\frac{3}{4}y^2 - \frac{9}{16}y\right) \cdot 8y = \frac{1}{7}y^2 - \frac{3}{28}y$.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

15.15. Упростите :

1) $(5 + a) \cdot (5 - a)$; 2) $(a + 4)(a - 4)$; 3) $(c + 7)(c - 7)$;
4) $(d + 8)(8 - d)$; 5) $(m + n)(m - 4)$; 6) $(k + t)(k - t)$.

15.16. Вынесите общий множитель в выражении:

1) $4x^2y - 6y$; 2) $6x^2y - xy + 5y^3$; 3) $6a^2n - 2ayn + 5an^2y^3$.

§ 16. РАЗЛОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНА НА МНОЖИТЕЛИ СПОСОБОМ ГРУППИРОВКИ

Как разложить многочлен на множители другим способом?

Можно ли многочлен разложить на множители, если не все его члены имеют общий множитель? Такие многочлены встречаются очень часто. Для разложения многочлена на множители, у которого не все члены имеют общий множитель, вначале нужно его члены сгруппировать так, чтобы в каждой группе оказались слагаемые с общим множителем.

Как разложили на множители многочлен $20a - 4ab + 5c - bc$?

$20a - 4ab + 5c - bc = (20a + 5c) + (-4ab - bc) = 5(4a + c) -$
$- b(4a + c) = (4a + c)(5 - b).$

Ответ : $(4a + c)(5 - b)$.

Вы уже заметили, что выполненные преобразования были основаны на применении переместительного, сочетательного и распределительного свойств сложения и умножения.

Группировку членов многочлена можно проводить разными способами.

Например , разложим на множители многочлен, состоящий из шести членов: $nt - mt - 4t + 5n - 5m - 20$.

Члены данного многочлена можно сгруппировать двумя способами:

1) по два, тогда получим:

$nt - mt - 4t + 5n - 5m - 20 = (nt + 5n) - (mt + 5m) -$
$- (4t + 20) = n(t + 5) - m(t + 5) - 4(t + 5) = (t + 5)(n - m - 4).$

2) по три, тогда получим:

$nt - mt - 4t + 5n - 5m - 20 = (nt - mt - 4t) + (5n - 5m - 20) =$
$= t(n - m - 4) + 5(n - m - 4) = (t + 5)(n - m - 4).$

Ответ : $(t + 5)(n - m - 4)$.

Таким образом,

для разложения многочлена на множители способом группировки используется следующий алгоритм:

1) нужно распределить члены многочлена в такие группы слагаемых, которые имеют общий множитель;

2) вынести этот общий множитель в каждой группе за скобки;

3) вынести общий множитель в полученной алгебраической сумме.

Другие способы разложения многочлена на множители связаны с применением формул сокращенного умножения, к изучению которых приступим с помощью пятой главы.

В некоторых случаях при разложении многочлена на множители для использования способа группировки не хватает слагаемых. Поэтому некоторые слагаемые заменяют суммой.

Например , разложим на множители многочлен $z^2 + 14z + 33$. Как видим, сгруппировать эти слагаемые в группы с одинаковым числом слагаемых сразу не сможем. Поэтому одно из слагаемых, *например* $14z$, представим в виде суммы: $3z + 11z$. Это позволит применить способ группировки. Действительно,

$$z^2 + 14z + 33 = z^2 + 11z + 3z + 33 = z(z + 11) + 3(z + 11) = \\ = (z + 11)(z + 3).$$

Разложение многочлена на множители можно использовать при решении уравнений.

Например , решим уравнение $y^2 + 2y - 63 = 0$. Для этого разложим его левую часть на множители. Получим:

$y^2 + 2y - 63 = y^2 - 7y + 9y - 63 = y(y - 7) + 9(y - 7) = (y - 7)(y + 9)$, затем решим уравнение $(y + 9) \cdot (y - 7) = 0$.

Произведение двух множителей равно нулю, если хотя бы один из множителей равен нулю. Следовательно, получим два уравнения: $y - 7 = 0$, или $y + 9 = 0$. Если $y - 7 = 0$, то $y = 7$; если $y + 9 = 0$, то $y = -9$. Значит, уравнение имеет два решения: 7 и –9. Записывают $\{-9; 7\}$.

?

1. В каких случаях для разложения многочлена на множители можно применить способ группировки?
2. Каков алгоритм разложения многочлена на множители способом группировки?

Упражнения

А

Разложите на множители способом группировки многочлены **(16.1—16.8)**:

16.1. 1) $x + xy + a + ay$; 2) $4 + 2m + 2n + mn$;

3) $kt + t - 2k - 2$; 4) $ab + ac + 7b + 7c$;

5) $am + an + 4m + 4n$; 6) $xz + yz - 3x - 3y$.

16.2. 1) $9x + xy + 8y + 72$; 2) $bx - 4b + ax - 4a$;
3) $4a - ay - by + 4b$; 4) $7ax - ay + 7bx - by$;
5) $11ay - by - 77a + 7b$; 6) $13x - ax + 13y - ay$.

16.3. 1) $0{,}5xt + yt + 0{,}5xk + yk$; 2) $xk + 0{,}5yk + xt + 0{,}5yt$;
3) $0{,}7ax - bx + 0{,}7ay - by$; 4) $\frac{2}{3}by - ay + \frac{2}{3}bx - ax$;
5) $\frac{5}{6}a - ax + \frac{5}{6}b - bx$; 6) $\frac{7}{8}ax - a + \frac{7}{8}bx - b$.

16.4. 1) $2ax + 3bx + 10a + 15b$; 2) $3my - 2ny - 9m + 6n$;
3) $7ax + 8ay - 28x - 32y$; 4) $48m + 56n - 6am - 7an$;
5) $12{,}1y - 4{,}4z + 8yz - 22y^2$; 6) $0{,}09t - 0{,}07k + 27at - 21ak$.

16.5. 1) $a - 0{,}25b + 4ax - bx$; 2) $0{,}6b - 3{,}5x + 1{,}2by - 7xy$;
3) $\frac{1}{7}ax + \frac{1}{3}bx + 3a + 7b$; 4) $\frac{3}{8}by - \frac{2}{7}xy - 21b + 16x$;
5) $4x - 5b - \frac{x^2}{5} + \frac{xb}{4}$; 6) $3by - 4nx + \frac{aby}{4} - \frac{anx}{3}$.

16.6. 1) $20xy - 21ab + \frac{5}{6}xyc - \frac{7}{8}abc$; 2) $x - 6a + \frac{xy}{3} - 2ay$;
3) $\frac{abx}{9} + \frac{cax}{27} - 3b - c$; 4) $\frac{abm}{3} + \frac{abn}{4} - 4m - 3n$;
5) $\frac{kxy}{5} - \frac{txy}{3} + 3k - 5t$; 6) $4tx + 7kx + \frac{ty}{7} + \frac{ky}{4}$.

B

16.7. 1) $am + an + ak + bm + bn + bk$; 2) $ax + bx + cx + ay + by + cy$;
3) $mx + my + mz - nx - ny - nz$; 4) $ta + tb + tc - ak - bk - ck$;
5) $am - an - ak - bm + bn + bk$; 6) $ax - bx - cx - ay + by + cy$.

16.8. 1) $a^2 + 2a - 15$; 2) $b^2 + 3b - 28$;
3) $x^2 + 15x + 54$; 4) $y^2 - 5y + 6$;
5) $m^2 + 15m + 56$; 6) $n^2 - n - 110$;
7) $k^2 - 17k + 72$; 8) $t^2 - 2t - 63$.

16.9. Решите уравнение, разложив левую часть на множители:

1) $x^2 - 5x + 6 = 0$;
2) $x^2 + 5x + 6 = 0$;
3) $x^2 + x - 6 = 0$;
4) $x^2 - x - 6 = 0$;
5) $x^2 - 5x + 4 = 0$;
6) $x^2 + 5x + 4 = 0$.

C

16.10. Разложите на множители способом группировки многочлен:

1) $2am - 2bm + 2cm + 3an - 3bn + 3cn$;
2) $3mx + 3nx + 3kx - 2ny - 2my - 2ky$;
3) $7tx + 7ty + 7tz + 4kx + 4ky + 4kz$;
4) $11at + 11ak + 11ap - 9bt - 9bk - 9pb$.

16.11. Решите уравнение, разложив на множители выражение, стоящее в скобках:

1) $(x^2 - 3x + 2)(x^2 - 7x + 12) = 0$;
2) $(2 + 3x + x^2)(12 + 7x + x^2) = 0$;
3) $(1 - 2x^2 + x)\cdot(5 - 10{,}5x + x^2) = 0$;
4) $(12 - 7x + x^2)(5x - 1 - 6x^2) = 0$.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

16.12. Цена вишни равна 800 тг/кг. Какова стоимость покупки, если купили вишни: 1) 300 г; 2) 500 г; 3) 1 кг 250 г; 4) 2 кг; 5) 2,5 кг; 6) $2\frac{3}{4}$ кг? Заполните таблицу 16.1.

Таблица 16.1

Масса вишни (кг)						
Стоимость вишни (тг)						

Что произойдет со стоимостью покупки, если увеличится масса вишни? Во сколько раз увеличится стоимость покупки, если вишни купят в 2 раза больше, в 3 раза больше?

16.13. Запишите формулу для нахождения площади фигуры, если известно, что она состоит из квадрата, длина стороны которого равна a см, и двух равных прямоугольников, у которых длина равна a см, а ширина b см.

§ 17. ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ВЫРАЖЕНИЙ

Как преобразовать выражение?

Тождественные преобразования выражений рассмотрим на примерах.

Пример 1. Упростим выражение

$$(5x-2)(3x^2+2x-9)-7\left(\frac{4}{7}x^2-7x\right)-16x^3.$$

Решение . Для упрощения данного выражения используем правило умножения многочлена и одночлена на многочлен, затем —приведение подобных слагаемых:

$$(5x-2)(3x^2+2x-9)-7\left(\frac{4}{7}x^2-7x\right)-16x^3=\underline{15x^3}+10x^2-45x-$$

$$-6x^2-4x+18-4x^2+49x-\underline{16x^3}=18-x^3.$$

Ответ : $18-x^3$.

Пример 2. Представим алгебраическую сумму $7a^2b-6ab-21ab^3+$ $+18b^3$ в виде произведения.

Решение . Чтобы представить данную алгебраическую сумму в виде произведения, вынесем общий множитель за скобки и применим способ группировки:

$7a^2b-6ab-21ab^3+18b^3=b(7a^2-6a-21ab^2+18b^2)=$ $=b((7a^2-21ab^2)+(18b^2-6a))=b(7a(a-3b^2)+6(3b^2-a))=$ $=b(a-3b^2)(7a-6)$.

Ответ : $b(a-3b^2)(7a-6)$.

Пример 3. Найдем наименьшее целое число, при котором верно неравенство: $(4x-1)(5+6x)-3x<(2+3x)(8x-1)$.

Решение . Воспользуемся правилом умножения многочлена на многочлен и правилами, гарантирующими равносильность линейных неравенств с одной переменной.

$20x-5+24x^2-6x-3x<16x+24x^2-3x-2,$

$11x-5+24x^2<13x+24x^2-2,$

$11x+24x^2-13x-24x^2<-2+5,$

$-2x<3,$

$x>-1{,}5.$

Рис. 17.1

Решением неравенства $x \geq -1{,}5$ являются все числа, которые больше или равны $-1{,}5$, т. е. все числа числового луча $[-1{,}5;\ +\infty)$ (рис. 17.1). Значит, наименьшее целое число, при котором верно неравенство, это число -1.

Ответ : -1.

Упражнения

А

Упростите выражения **(17.1—17.2):**

17.1. 1) $(x^8 - 2)(x^4 - 1) - x^{12} + 2x^4$;

2) $a^9 - 9a^5 - (a^4 - 9)(a^5 + 3)$;

3) $(x^{15} + 5)(x^3 + 2) - 10 - x^{18}$;

4) $a^{42} - 14a^7 - (a^6 - 14)(a^7 - 1)$.

17.2. 1) $0{,}5\,a^2c^4(a^4 - c^2 + 6) - 0{,}5\,a^6c^4 - 0{,}5\,a^2c^6$;

2) $4{,}8\,x^8y^7 - (12x^6y^6 - 6) - 2{,}4\,x^6y^5(2x^2y^2 - 5y + 3)$;

3) $2{,}5\,t^8s^{10}(4t^2 - 6c^2 - 3) + 15\,t^8c^2s^{10} - 10\,t^{10}s^{10}$;

4) $9a^{20}b^{16} - 1{,}8\,a^{10}b^{18} - 0{,}9\,a^5b^9(10\,a^{15}b^7 + 2a5b^9)$.

Найдите значения выражений **(17.3—17.4):**

17.3. 1) $5x^{17} : x^{13} - 16x^4$ при $x = -1$;

2) $-33\,y^6 : y^4 + 37\,y^2$ при $y = 0{,}5$;

3) $15\,z^9 : z^6 - 160\,z^3$ при $z = -0{,}5$;

4) $250\,t^8 : t^5 + 6t^3$ при $t = -4\,t$.

17.4. 1) $0{,}07\,a^8b^4 : a^7 + 0{,}03\,a^2b^6 : (ab^2)$ при $a = 7,\ b = -2$;

2) $2{,}5\,x^4y : x^3 - 2{,}6\,x^{10}y : x$ при $x = -1,\ y = 10$;

3) $47{,}3\,t^6z^2 : (t^5z) + 2{,}7\,t^9z^3 : (t^8z^2)$ при $z = 0{,}2,\ t = -3$;

4) $-9{,}4\,a^{25}b^9 : a^8 - 0{,}6\,a^{10}\cdot(a^7b^9)$ при $a = 1,\ b = -1$.

Представьте алгебраические суммы в виде произведений **(17.5—17.7)**:

17.5. 1) $x^2 + bx - ax - ab$; 2) $x^2 - cx + bx - bc$;
3) $z^2 + zx - zk - xk$; 4) $y^2 + my - km - ky$.

17.6. 1) $x^4y^2 + 3x^4 - 2y^2 - 6$; 2) $x^3y^3 - 2x^3 + 5y^3 - 10$;
3) $-x^5y^2 + 7y^2 + x^5 - 7$; 4) $27 - 9x^2 - x^2y^6 + 3y^6$.

17.7. 1) $3a + ax - 3b + 3c - bx + cx$;
2) $4x + 6b + 4y - by - 24 - bx$;
3) $ak - 18a - bk + 7k + 18b - 126$;
4) $nx - 4x - 5mx - 100m + 20n - 80$.

Решите уравнения **(17.8—17.9)**:

17.8. 1) $x(x - 8) - 20 = -15 - x(1 - x)$;
2) $47 - x(11 - x) = 19x + x^2$;
3) $33x - x^2 = (35 - x)x - 17$;
4) $59x + 4x^2 = -4x(1 - x) + 21$.

17.9. 1) $(x + 4{,}5)(6x - 1) - (3x + 1{,}6)(2x - 1) = -3{,}8x$;
2) $(3{,}5 - x)(7x + 2) + (3{,}5x - 1)(7 + 2x) = -450$;
3) $(8x + 3)(1 - 0{,}9x) + 7{,}4 = (4x - 5)(1 - 1{,}8x)$;
4) $498 + (2{,}7 - 5x)(6x - 7) = (9 - 0{,}5x)(60x + 1)$.

17.10. Решите неравенство:
1) $x(x^3 - 4) - x^4$ m$18 - x$; 2) $x^3 + x(20 - x^2)$ | $24x - 3$;
3) $x(31 + x^4) - x^5 > 37x - 68$; 4) $x^9 - x(47 + x^8) > 19 - 45x$.

B

17.11. Проверьте, если $A = 5x^6 + x^4 - 9$, $B = 10x^6 - 5x^4 + 1{,}8$, то выполняется равенство:
1) $A + 5B = 55x^6 - 24x^4$;
2) $-2A + B = -7x^4 + 19{,}8$;
3) $10A + 2B = 70x^6 - 86{,}4$;
4) $-3A - 1{,}5B = -30x^6 + 4{,}5x^4 + 24{,}3$.

17.12. Докажите тождество:
1) $(x^2 - 8x + 7)(x + 5) + 3x(x + 11) = x^3 + 35$;
2) $(y + 9)(10 - 3y + y^2) - 0{,}5y(12y - 34) = 90 + y^3$;
3) $(2a^2 - a + 11)(8a - 3) + 7a(-13 + 2a) = -33 + 16a^3$;
4) $(13x + 6)(4x^2 - x - 9) - 5x(2{,}2x - 24{,}6) = -54 + 52x^3$.

17.13. Найдите значение выражения:

1) $(8a^3b - c^4)\cdot(15a^5b^4):(3a^4b^3) - 40a^4b^2$ при $a = 0{,}2$, $b = 0{,}5$, $c = -2$;

2) $0{,}9x^{10}y^7\cdot(10x^8y^3z^6 - 9):(20x^9y^6) + 0{,}40xy$ при $x = -1$, $y = 5$, $z = 1$.

17.14. Найдите корень уравнения:

1) $(x^4 - 3)(x + 5) = 29 - 2x + x^4(x + 5)$;

2) $(10 - x^6)\cdot(7 + x) = 11x - 63 - x^6(x + 7)$;

3) $(2 + x)x^5 - 15x + 41 = (x^5 - 13)(2 + x)$;

4) $99 - 23x + x^8(x - 9) = -(17 - x^8)(x - 9)$.

17.15. Решите неравенство:

1) $(x^3 - 2)(x + 1)\ \mathrm{m}\ x^4 + x^3 - 23$;

2) $-x^8 + 49\ \mathrm{m}\ (10 - x^7)(5 + x) + 5x^7$;

3) $(x^2 - 4x + 8)\cdot 5 < 2x(2{,}5x - 1)$;

4) $3x(1{,}1x + 2) > 0{,}1x(33x + 10) - 6$.

C

17.16. Найдите наименьшее целое число, при котором верно неравенство:

1) $(x^2 - 3x + 5)(x + 3)\ \mathrm{m}\ x^3 + 7x - 1$;

2) $(y^2 - y + 8)(4 - y) - 2{,}4\ \mathrm{l}\ 5y^2 - y^3 - 6y$;

3) $z^3 + 2{,}8z - 2{,}2 > (9 - z - z^2)(1{,}2 - z) + 0{,}2z^2 + 11{,}5$;

4) $-2{,}2x - 7{,}15 - 0{,}5x^2 < (1{,}7 + x + x^2)(0{,}5 - x) + x^3$.

17.17. Найдите наибольшее целое число, при котором верно неравенство:

1) $(x^5 - 6)\cdot x + 7x^4\ \mathrm{l}\ x^4(7 + x^2) - 1{,}8$;

2) $(x^9 + 11)\cdot 6x - 15x^5\ \mathrm{m} -33 + 3x^5(2x^5 - 5)$;

3) $7x^3(6x^5 - 3) + 44 > 2x(21x^7 + 1{,}1) - 21x^3$;

4) $9x^2(10x^7 - 3) + 135 < 4{,}5x(20x^8 - 3) - 27x^2$.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

17.18. Как изменится площадь прямоугольника, если его длину увеличить в 5 раз, а ширину оставить без изменения?

17.19. Стоимость товара изменилась на 200 тг/кг. На сколько тенге изменилась стоимость 7 кг товара?

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Запишите в стандартном виде одночлен $(3x^2y)^3 \cdot 5y^7$:
A. $135x^6y^8$; B. $45x^7y^{10}$; C. $135x^5y^8$; D. $135x^6y^{10}$.

2. Упростите $(2ab^5)^4 \cdot (5a^7b^2)^2$:
A. $80a^{13}b^{24}$; B. $400a^{18}b^{24}$; C. $250a^{18}b^{13}$; D. $400a^{13}b^{24}$.

3. Упростите выражение $2{,}5a^3b \cdot \frac{4}{25}a^2b^4$ и найдите его значение при $a = -1$, $b = -1$:
A. $-0{,}4$; B. $-2{,}5$; C. $0{,}4$; D. $2{,}5$.

4. Выполните деление $(24m^5n^3)^2 : (12m^3n)^3$:
A. $\frac{1}{3}m^2n^2$; B. $3mn^2$; C. $3m^2n^3$; D. $\frac{1}{3}mn^3$.

5. При каком значении x значения выражений $x^2 - 6x - 1$ и $6 + x^2 + x$ равны:
A. 1; B. -1; C. 0; D. 6 ?

6. Найдите общий множитель выражения $8x^6y^3 - 12x^3y^3$:
A. x^3y^3; B. $2x^3y^3$; C. $2x^3 - 4$; D. $4x^3y^3$.

7. Вынесите в выражении $4n^3m^2 + 8n^3m^3 - 12n^2m^3$ общий множитель за скобки:
A. $4mn(n^2m + 2n^2m^2 - 3mn^2)$; B. $n^2m^2(4n + 8mn - 12m)$;
C. $4n^2m^2(n + 2nm - 3m)$; D. $4n^2m(nm + 2nm - 3mn^2)$.

8. Решите уравнение $(x^2 + 5x) - x(x - 5) = 0$:
A. 0; B. 1; 5; C. 0; 5; D. Нет корней.

9. Найдите степень многочлена $3m^5 + 7m^3 - 18 - 3m^5 + 7m^3 - 18$:
A. 6; B. 5; C. 0; D. 3.

10. Представьте в стандартном виде многочлен $6a^3 + 9ab - 5b^2 - 8ab - 4b^2$:
A. $6a^3 + 17ab - 9b^2$; B. $6a^3 + ab + 9b^2$;
C. $6a^3 + ab - 9b^2$; D. $6a^3 - ab + 9b^2$.

11. Приведите многочлен $3b^2 + a^2b + 5ab^2 + 4a^2b - 5ab^2 - 3b^2$ к стандартному виду и найдите его значение при $a = 1$, $b = -1$:
A. 5; B. -5; C. -10; D. 10.

12. Упростите выражение $\dfrac{\left(2m^5n^4\right)^7 \cdot \left(4m^3n^5\right)^2}{\left(2m^4n^4\right)^{10}}$:

A. $\frac{2m}{n^2}$; B. $\frac{m^2}{2n}$; C. $\frac{m}{n^2}$; D. $\frac{2m^2}{n}$.

13. Решите уравнение $(t^2 + 8t - 9) - (t^2 - 11t + 10) = 18t - 20$:

A. –0,5; B. 2; C. – 1; D. 1.

14. Упростите выражение $-0{,}8c \cdot (c + 5) - 0{,}7(10c + 5) + 0{,}8c^2 + 10c - 4$:

A. $1{,}6c^2 - c - 7{,}5$; B. $-c - 7{,}5$;

C. $-c - 0{,}5$; D. $-19c - 7{,}5$.

15. Упростите выражение $81m^9n^8 : (24m^8n^5)$ и найдите его значение при $m = 32$, $n = -\frac{1}{3}$:

A. –12; B. 12; C. 4; D. –4.

16. Известно, что $2(a + 1)(b + 1) = (a + b)(a + b + 2)$.

Найдите $a^2 + b^2$:

A. 1; B. 3; C. 4; D. 2.

17. Найдите значение выражения $(125a^3 - 25a^3) : (5a^2) - (25a^2 - 2a^2) : a$ при $a = 5$:

A. 5; B. –5; C. 10; D. –15.

18. Преобразуйте произведение $(n^2 - n - 1)(n^2 - n + 1)$ в многочлен стандартного вида:

A. $2n^2 - n$; B. $n^4 - 2n^2 - 1$;

C. $n^2 + 2n^2 + n + 1$; D. $n^4 - 2n^3 + n^2 - 1$.

19. Найдите наибольшее положительное целое число, которое удовлетворяет неравенству $3x(x - 2) - (3x - 1)(x + 4) \square 8(2 - x)$:

A. 0; B. –1; C. 1; D. –2.

20. Разложите на множители $3a + 3a^2 - b - ab$:

A. $(3a - b)(1 - a)$; C. $(a - 3b)(1 + a)$;

B. $(3a - b)(1 + a)$; D. $(3a + b)(a - 1)$.

ГЛАВА 3

ФУНКЦИЯ. ГРАФИК ФУНКЦИИ

§ 18. ФУНКЦИЯ

Что такое *функция*, ее определения и множество значений? Какие бывают функции?

Рассмотрим величины: цену и стоимость. Эти величины взаимосвязаны между собой: увеличение цены ведет к обязательному увеличению стоимости. То же самое можно сказать и про некоторые другие величины. *Например*, время движения и скорость. Чем больше скорость, тем меньше будет затрачено времени на прохождение одного и того же пути.

Зависимость стоимости C от цены m можно выразить формулой $C = k \cdot m$, где k — количество. Каждому значению цены соответствует единственное значение стоимости. *Например*, при $k = 3$ шт:

если $m = 5$ тг/шт., то $C = 15$ тг;
если $m = 10$ тг/шт., то $C = 30$ тг;
если $m = 20$ тг/шт., то $C = 60$ тг.

Зависимость времени движения t от скорости v можно выразить формулой $t = \frac{s}{v}$, где s — длина пройденного пути. Каждому значению скорости соответствует единственное значение времени. *Например*, при $s = 120$ км:

если $v = 40$ км/ч, то $t = 3$ ч;
если $v = 60$ км/ч, то $t = 2$ ч;
если $v = 12$ км/ч, то $t = 10$ ч.

В рассмотренных примерах каждому значению одной переменной величины соответствует единственное значение другой переменной величины. Такую зависимость одной переменной величины от другой называют *функциональной зависимостью*, или *функцией*.

Одна из этих пар переменных величин в рассмотренных примерах является *зависимой переменной*, ее называют *значением функции*, или *функцией* и обычно обозначают буквой y. Другая из этих пар переменных величин является *независимой переменной*, ее называют *аргументом* и обычно обозначают буквой x.

В наших примерах стоимость и время движения — зависимые переменные; цена и скорость движения — независимые переменные.

Функцией называется такая зависимость переменной y от переменной x, при которой каждому значению переменной x соответствует единственное значение переменной y.

Все значения, которые принимает независимая переменная, образуют область определения функции.

Так, в примере, где рассматривалась зависимость стоимости C от цены m, независимая переменная m принимала значения: 5, 10, 20. Все эти значения образуют область определения функции C.

Зависимая переменная C принимала значения 15, 30, 60. Все эти значения образуют множество значений функции.

В примере, где рассматривали зависимость времени движения t от скорости v, независимая переменная v принимала значения: 40, 60, 12. Все эти значения образуют область определения функции t.

Зависимая переменная t принимала значения 3, 2, 10. Все эти значения образуют множество значений функции.

Если при рассмотрении функции не указываются конкретные значения независимой переменной, то за область определения функции принимают все допустимые значения независимой переменной.

Например, для функции $y = 30x$ допустимыми значениями переменной являются любые числа, поэтому областью определения будет числовой промежуток $(-\infty; +\infty)$; а для функции $y = \dfrac{120}{x}$ допустимыми значениями переменной являются все числа, кроме нуля, так как делить на нуль нельзя, поэтому областью определения будет числовой промежуток $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Функция называется *возрастающей* на множестве D тогда и только тогда, когда любому большему (меньшему) значению аргумента из этого множества соответствует большее (меньшее) значение функции.

Функция называется *убывающей* на множестве D тогда и только тогда, когда любому большему (меньшему) значению аргумента из этого множества соответствует меньшее (большее) значение функции.

Например, функция цены от стоимости является возрастающей, так как при увеличении цены увеличивается и стоимость; функция скорости от времени является убывающей, так как при увеличении скорости движения уменьшается время, затраченное на прохождение этого пути.

Рассмотрим пример, когда функция не является возрастающей. В первый день ученик прочитал 15 страниц, во второй, третий, четвертый дни он не читал книги, в пятый день прочитал 20 страниц, в шестой день — оставшиеся 30 страниц. Тогда функция, задающая количество прочитанных страниц книги за k дней, не является возрастающей: увеличение количества дней не увеличивает количество прочитанных страниц книги. Ведь за один день он прочитал 15 страниц, за 2 дня — 15 страниц, за 3 дня — 15 страниц, за 4 дня — 15 страниц и т. д.

1. Может ли одна и та же величина быть зависимой величиной и независимой величиной? Приведите пример.
2. Может ли область определения функции стоимости от цены содержать отрицательное число; нуль; смешанное положительное число?
3. Может ли одна и та же функция быть одновременно возрастающей и убывающей на всей области определения?
4. Существуют ли функции, которые не являются ни возрастающими, ни убывающими?

Упражнения

A

18.1. Подберите независимую переменную для зависимой переменной, которой является:

1) периметр квадрата;
2) площадь квадрата;
3) скорость движения;
4) цена товара;
5) периметр прямоугольника;
6) площадь прямоугольника;
7) объем куба;
8) объем прямоугольного параллелепипеда.

18.2. Подберите зависимую переменную для независимой переменной, которой является:

1) количество купленного товара;
2) время движения;

3) скорость движения;

4) периметр квадрата.

18.3. Является ли функцией зависимость между величинами:

1) производительностью труда и выполненной работой за некоторое время;

2) выполненной работой за некоторое время и производительностью труда;

3) переменной x и ее модулем;

4) модулем переменной x и переменной x ?

B

18.4. Докажите, что зависимость является функцией:

1) периметра пятиугольника, у которого все стороны равны, от длины его стороны;

2) массы пяти одинаковых ящиков с фруктами от массы фруктов, находящихся в одном ящике;

3) стоимости десяти одинаковых карандашей от стоимости одного карандаша;

4) количества учебников у учащихся от количества учащихся.

18.5. Найдите область определения функции:

1) периметра многоугольника с равными сторонами от длины его стороны;

2) состояния воды от температуры.

C

18.6. Какие из следующих функций возрастающие, а какие убывающие:

1) зависимость длины стороны квадрата от его площади;

2) зависимость времени, затраченного на выполнение работы, от производительности.

18.7. Длина стороны квадрата принимает значения 2 см $\le a \le$ 5 см. В каких числовых значениях изменяется:

1) периметр квадрата;

2) площадь квадрата?

18.8. Что можно сказать про периметр P квадрата, длина стороны которого равна a см, если:

1) $a \le 4$ см; 2) $a \ge 3$ см; 3) $a \le 2{,}5$ см;

4) $a \ge 1{,}75$ см; 5) 3 см $\le a \le$ 5 см; 6) 1,25 см $\le a \le$ 1,75 см;

18.9. Автомобиль, мотоцикл, поезд и моторная лодка находятся в пути два часа. Найдите длину пройденного пути каждого из них, если их скорости соответственно равны 80 км/ч, 30 км/ч, 65 км/ч и 12 км/ч. Запишите формулы зависимости длины пройденного пути (расстояния) от скорости движения.

Подготовьте сообщение

18.10. Расскажите о немецком математике Готфриде Вильгельме Лейбнице, который ввел термин "функция". Понятие функции возникло в XVII в.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

18.11. Используя формулу $P = 4a$, вычислите:

1) P, если $a = 2{,}5$; 15; $\frac{1}{8}$;

2) a, если $P = 8$; $1{,}6$; $\frac{1}{4}$.

18.12. Используя формулу $y = 3x - 9$, найдите:

1) значение x, при котором $y = 0$;

2) значение y, при котором $x = 0$.

§ 19. ЗАДАНИЕ ФУНКЦИИ С ПОМОЩЬЮ ФОРМУЛЫ

Что означает "задать функцию"? Как можно задать функцию?

Функция может быть задана различными способами.

Задать функцию — значит показать, как для заданных значений аргумента найти соответствующие значения функции.

Функцию можно задать формулой.

Способ задания функции с помощью формулы называется *аналитическим способом задания функции.*

Например , рассмотрим формулу пути, пройденного с некоторой скоростью за 2 ч. Если изменять скорость, то за одно и то же время длина пройденного пути будет меняться. Значит, в данном примере скорость — это независимая переменная, ее обозначим через x, длина пройденного пути — зависимая переменная. Ее обозначим через y. Время движения не изменяется — 2 ч. Тогда зависимость длины пройденного пути от скорости движения запишется формулой $y = 2x$.

По этой формуле видно, что каждому значению аргумента x (скорости) соответствует единственное значение функции y (длины пройденного пути). Поэтому формула $y = 2x$ задает функцию.

По этой формуле по заданному значению аргумента x можно найти соответствующее значение функции y.

Например , если x принимает значения 40 км/ч; 45 км/ч; 50 км/ч; 60 км/ч, то соответственные значения функции $y = 2x$ равны 80 км; 90 км; 100 км; 120 км. Чтобы их найти, подставляем соответственно числа 40; 45; 50; 60 вместо x в формулу $y = 2x$.

И наоборот, по формуле $y = 2x$, по заданному значению функции y можно найти соответствующее значение аргумента.

Например , если y принимает значения 86 км; 94 км; 98 км, то соответствующие значения аргумента x равны 43 км/ч; 47 км/ч; 49 км/ч. Чтобы их найти, подставляем соответственно числа 86; 94; 98 вместо y в формулу $y = 2x$.

Не всякая формула задает функцию. Формула $|y| = x$ не задает функцию y, так как одному значению аргумента, *например* , $x = 2$, соответствует не одно, а два значения функции. В данном примере числа 2 и – 2.

С помощью формулы можно узнать, является ли функция возрастающей или убывающей.

Например, докажем, что функция $y = 3x - 5$ — возрастающая. Действительно, по определению, функция возрастающая, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

Пусть $x_1 > x_2$. Найдем y_1 и y_2. Получим: $y_1 = 3x_1 - 5$ и $y_2 = 3x_2 - 5$. Рассмотрим разность $y_1 - y_2$. Для этого в выражение $y_1 - y_2$ вместо y_1 подставим $3x_1 - 5$ и вместо y_2 подставим $3x_2 - 5$.

Получим: $y_1 - y_2 = 3x_1 - 5 - (3x_2 - 5)$. Раскроем скобки, приведем подобные слагаемые и вынесем общий множитель за скобки: $3x_1 - 5 - (3x_2 - 5) = 3x_1 - 5 - 3x_2 + 5 = 3x_1 - 3x_2 = 3(x_1 - x_2)$. Поскольку $x_1 > x_2$, то значение разности $x_1 - x_2$ положительно. Если $y_1 - y_2 > 0$, тогда $y_1 > y_2$. Поэтому функция $y = 3x - 5$ возрастающая.

С помощью формулы можно узнать координаты точек, в которых график функции пересекает ось абсцисс.

Например, найдем точку пересечения графика функции $y = 3x - 5$ с осью абсцисс. Поскольку точки, лежащие на оси абсцисс, имеют ординаты, равные нулю, то надо в формулу $y = 3x - 5$ вместо переменной y подставить число 0. Получим уравнение $3x - 5 = 0$, из которого находим x. Получим: $3x = 5$, или $x = 1\frac{2}{3}$. Значит, график функции $y = 3x - 5$ пересекает ось абсцисс в одной точке с координатами $(1\frac{2}{3};\ 0)$.

С помощью формулы можно узнать, при каких значениях аргумента значения функции положительны или отрицательны.

Например, найдем значения аргумента x, при которых функция $y = 3x - 5$ отрицательна. Для этого составим и решим неравенство: $3x - 5 < 0$. Получим: $3x < 5$, или $x < 1\frac{2}{3}$. Значит, функция $y = 3x - 5$ отрицательна для всех x, принадлежащих числовому промежутку $(-\infty;\ 1\frac{2}{3})$.

1. Почему с помощью формулы можно задать функцию?
2. В каком случае формула задает функцию?
3. В каком случае формула не задает функцию?
4. Как с помощью формулы, задающей функцию, найти ее область определения?
5. Что нужно сделать, чтобы по заданному значению функции найти соответствующее значение аргумента?

Упражнения

A

19.1. Какие из следующих формул задают функцию y от x, а какие нет:

1) $y = -3x + 4$; 2) $y^2 = x$; 3) $x + 8 - 6y = 0$?

19.2. Найдите область определения функции:

1) $y = \frac{1}{3}x$; 2) $y = \frac{x}{2}$; 3) $y = \frac{x}{2} + 5$;

4) $y = 5 \cdot (x + 2)$; 5) $y = \frac{3}{x+2}$; 6) $y = \frac{x(x-2)}{2}$.

19.3. Найдите значение функции:

1) $y = \frac{1}{3}x + 8$, если $x = 1782$; 1101; $\frac{2}{3}$; $0{,}3$;

2) $y = 0{,}01x - 2{,}5$, если $x = 25$; 250; $2{,}5$;

3) $y = \frac{1}{8} + 25\%\ x$, если $x = 40$; 100; $\frac{1}{2}$; 8.

19.4. Найдите значение аргумента x для функции:

1) $y = \frac{1}{3}x + 8$, если $y = \frac{1}{3}$; $0{,}3$; 8; 30;

2) $y = 0{,}01x - 2{,}5$, если $y = 2{,}5$; $0{,}01$; $\frac{1}{25}$;

3) $y = \frac{1}{8} + 25\%\ x$, если $y = \frac{1}{4}$; $0{,}5$; 10.

B

19.5. Для каких значений аргумента x равны нулю значения функции:

1) $y = 12x + 18$; 2) $y = 12x + 3$; 3) $y = 3x + 8$;
4) $y = 5x + 1$; 5) $y = -12x + 18$; 6) $y = 4x - 8$;
7) $y = -2x - 8$; 8) $y = -10x + 2$?

19.6. Для каких значений аргумента x являются положительными значения функции:

1) $y = 2x + 8$; 2) $y = -2x + 8$; 3) $y = -2x - 8$;
4) $y = 2x - 8$; 5) $y = 0{,}1x + 10$; 6) $y = -0{,}1x + 10$;
7) $y = -0{,}1x - 10$; 8) $y = 0{,}1x - 10$?

19.7. Для каких значений аргумента x являются отрицательными значения функции:

1) $y = 100x + 4$; 2) $y = 4x + 100$; 3) $y = 20x + 80$;
4) $y = 5x + 80$; 5) $y = -2x + 8$; 6) $y = 2x - 8$;
7) $y = -2x - 8$; 8) $y = 2x + 8$?

C

19.8. Для каких значений аргумента x являются неотрицательными значения функции:

1) $y = -3{,}5x + 4\frac{2}{3}$; 2) $y = \frac{5}{9}x - 14\frac{7}{18}$;

3) $y = -\frac{7}{8}x + 4\frac{4}{7}$; 4) $y = -1\frac{2}{3}x - 12{,}5$?

19.9. Найдите область определения функции:

1) $y = \dfrac{x+6}{5-x}$; 2) $y = \dfrac{x+3}{8{,}9+2x}$;

3) $y = \dfrac{x(x-4)}{x-4}$; 4) $y = \dfrac{x^2}{x^2-7x}$.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

19.10. Вычислите значение y. Заполните таблицу 19.1, если $y = 2{,}2x$.

Таблица 19.1

x	5	–3	27	$-1\frac{1}{3}$
y				

19.11. Заполните таблицу 19.2.

Таблица 19.2

x		$\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{6}$		
$y = 3x - 2$	4			2,5	–5

§ 20. ТАБЛИЧНЫЙ СПОСОБ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИИ

Как с помощью таблицы можно задать функцию? Почему с помощью таблицы можно задать функцию?

Функцию можно задать с помощью таблицы, поскольку по таблице по заданному значению аргумента нетрудно найти соответствующее значение функции.

Как с помощью таблицы, которая задает некоторую функцию, найти область определения этой функции?

В верхней строке таблицы записываем значения аргумента x. *Например*, 15, 18, 20, 21, 30, 40 (табл. 20.1).

Таблица 20.1

x	15	18	20	21	30	40
y	30	36	40	42	60	120

В нижней строке таблицы — соответствующие значения функции y. Эти значения аргумента образуют *область определения функции*. Говорят, что областью определения этой функции является множество чисел 15, 18, 20, 21, 30, 40 и записывают: $\{15; 18; 20; 21; 30; 40\}$.

По таблице 20.1 можно узнать, какое значение функции y соответствует значению аргумента x, *например* 30: аргументу 30 соответствует значение функции 60. И, наоборот, по таблице можно узнать, какой аргумент x соответствует значению функции y. *Например*, значению функции 36 соответствует значение аргумента 18.

Можно ли по таблице, которая задает некоторую функцию, узнать, является ли эта функция возрастающей или убывающей?

По таблице можно установить, является ли функция возрастающей или убывающей, или не является ни той, ни другой. Для этого надо рассмотреть значения аргумента либо в порядке возрастания, либо в порядке убывания и проследить, как в соответствии с этим будут изменяться значения функции.

Как видим по таблице, значения аргумента расположены в порядке их возрастания: 15, 18, 20, 21, 30, 40 и соответствующие значения функции также в порядке возрастания: 30, 36, 40, 42, 60, 120.

Поэтому функция, которую задает эта таблица, является возрастающей функцией.

Не всякая таблица задает функцию. *Например* , таблица 20.2 не задает функцию. Действительно, по этой таблице видно, что значению x, равному 1, соответствует не одно, а два значения y: числа 4 и 5. Поэтому данная таблица функцию не задает.

Таблица 20.2

x	0	1	1	2
y	3	4	5	6

1. Как с помощью таблицы узнать, задает ли она функцию или нет?
2. Обязательно ли в таблице значение аргумента располагать в порядке возрастания или убывания?

Упражнения

А

20.1. Задает ли функцию таблица 20.3:

Таблица 20.3

1)

x	1	2	3
y	0,5	1	1,5

2)

x	–1	–2	1	2
y	1	2	1	2

3)

x	1	2	1
y	–1	–2	1

4)

x	4	2	1
y	0	0	0

20.2. Найдите область определения функции y, заданной таблицей 20.4:

Таблица 20.4

1)

x	1	2	3	4
y	1	4	9	16

2)

x	1	4	2	9
y	–1	–2	1	3

20.3. Возрастающей или убывающей является функция, заданная таблицей 20.5:

Таблица 20.5

1)

x	1	8	9	12
y	1	2	3	4

2)

x	44	30	15	6
y	40	20	10	1

3)

x	10	20	30	40
y	5	15	10	20

4)

x	11	12	13	14
y	15	14	13	12

5)

x	90	80	70	60
y	6	12	18	24

6)

x	1	3	5	4
y	10	30	50	40

7)

x	4	5	6	7
y	0	5	4	6

8)

x	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$
y	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{5}$

20.4. Задайте функцию y формулой с помощью таблицы 20.6:

Таблица 20.6

1)

x	1	2	3	4
y	3	6	9	12

2)

x	1	2	3	4
y	4	7	10	13

3)

x	1	2	3	4
y	2	5	8	11

4)

x	1	2	3	4
y	–3	–6	–9	–12

5)

x	1	2	3	4
y	–2	–5	–8	–11

6)

x	1	4	2	9
y	–4	–7	–10	–13

Из каких чисел состоит область определения всех этих функций? Какие из этих функций возрастающие, какие убывающие?

B

20.5. Найдите область определения функции и установите по таблице 20.7, является ли эта функция возрастающей или убывающей:

Таблица 20.7

1)

x	0	1	2	3	4	5	6
y	1	2	4	8	16	32	64

2)

x	0	1	2	3	4	5	6
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$

3)

x	0	1	2	3	4	5	6
y	1	3	9	27	81	243	729

4)

x	0	1	2	3	4	5	6
y	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{243}$	$\frac{1}{729}$

5)

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
y	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25

6)

x	–5	–4	–3	–2	–1	1	2	3	4	5
y	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	1	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{25}$

7)

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	–27	–8	–1	0	1	8	27

8)

x	–3	–2	–1	1	2	3
y	$-\frac{1}{27}$	$-\frac{1}{8}$	–1	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{27}$

C

20.6. Используя данные таблиц из упражнения 20.5, задайте функции формулой.

20.7. Задайте функцию таблицей с помощью формулы $y = x^2$, если область определения этой функции состоит из чисел:

1) –3; –2; –1; 0; 1; 2; 3;
2) –30; –20; –10; 0; 10; 20; 30;
3) –8; –7; –6; –5; –4;
4) –0,3; –0,2; –0,1; 0; 0,1; 0,2; 0,3;
5) $-\frac{1}{100}$; $-\frac{1}{10}$; $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{100}$;
6) $-\frac{1}{5}$; $-\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

20.8. На координатной плоскости отметьте следующие точки: $A(-3;\ 4)$, $B(5;\ 6)$, $C(2;\ -3)$, $D(-1{,}5;\ -2)$, $M(0;\ -2)$, $N(3;\ 0)$.

20.9. 1) Постройте несколько точек, лежащих на оси абсцисс, и несколько точек, лежащих на оси ординат. Какой особенностью обладают координаты этих точек?

2) Постройте несколько точек, лежащих выше оси абсцисс, и несколько точек, лежащих ниже оси абсцисс. Какой особенностью обладают координаты этих точек?

3) Постройте несколько точек, лежащих левее оси ординат, и несколько точек, лежащих правее оси ординат. Какой особенностью обладают координаты этих точек?

§ 21. ГРАФИЧЕСКИЙ СПОСОБ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИИ

Как задать функцию с помощью графика?

Функцию можно задать с помощью графика — множества точек координатной плоскости. Это множество точек может быть бесконечным и конечным (состоит из нескольких точек). При этом абсциссы этих точек равны значениям независимой переменной (аргументу x), ординаты — значениям зависимой переменной (значению функции y).

Почему функцию можно задать с помощью графика?

Например, по графику, состоящему из трех точек, можно узнать, что аргументу $x = 2$ соответствует значение функции $y = 2$, поскольку координаты точки $A(2;\ 2)$ (рис. 21.1).

Аргументу $x = 1$ соответствует значение функции $y = 3$, так как координаты точки $B(1;\ 3)$ (рис. 21.1).

Аргументу $x = -1$ соответствует значение функции $y = -1$, так как координаты точки $C(-1; -1)$ (рис. 21.1).

Если графиком функции является линия, то по ней находят соответствующие значения аргумента и функции. Чтобы найти по графику функции значение функции, соответствующее аргументу 3, проводят перпендикуляр к оси Ox, проходящий через точку с абсциссой, равной числу 3 (рис. 21.2). Затем находят точку пересечения этого перпендикуляра с графиком функции, в данном примере — точку M. И, наконец, находят ординату этой точки. Для этого из точки M проводят перпендикуляр к оси Oy. Значит, аргументу 3 соответствует значение функции — число 2.

Как с помощью графика функции найти ее область определения?

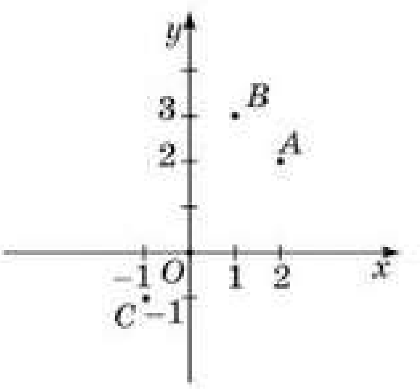


Рис. 21.1

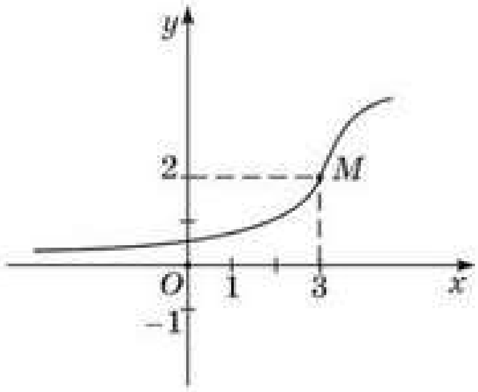


Рис. 21.2

По графику функции легко найти ее область определения. Для этого надо найти абсциссы всех точек графика.

Например, область определения функции, изображенной на рисунке 21.3, состоит из чисел -2, -1, 0, 1, 2, областью определения функции, изображенной на рисунке 21.4, *а*, является числовой промежуток $[-2; 3]$, на рисунке 21.4, *б* числовой промежуток $(-\infty; +\infty)$.

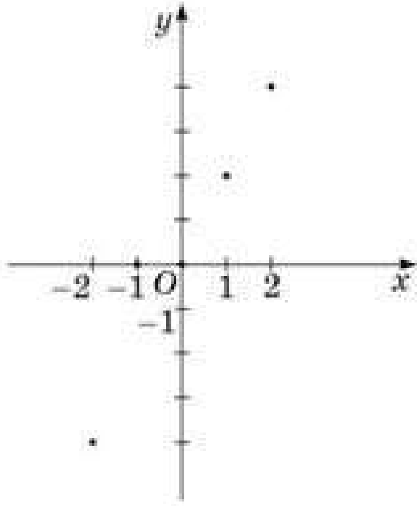


Рис. 21.3

Как с помощью графика функции узнать, возрастает или убывает функция?

С помощью графика также легко установить, возрастает или убывает функция.

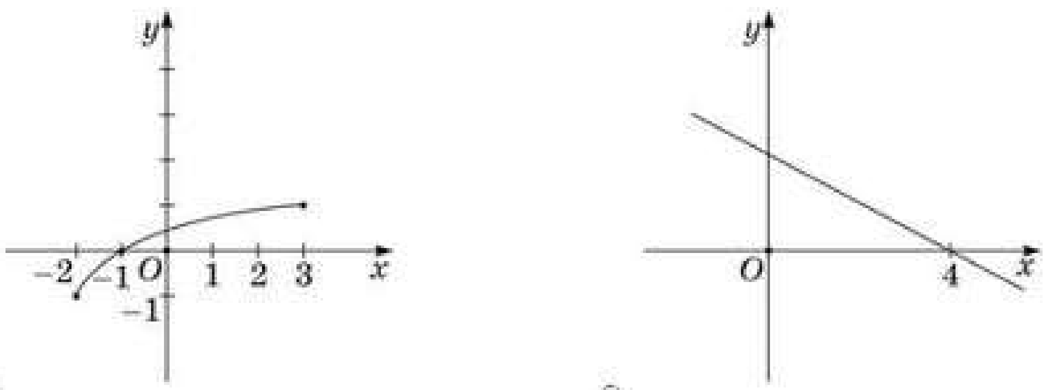
Например:

1) функция, изображенная на рисунке 21.3, не является ни возрастающей, ни убывающей, так как с увеличением аргумента x (от -1 до 0) значение функции не изменилось (не увеличилось и не уменьшилось), осталось равным нулю;

2) функция, изображенная на рисунке 21.4, *а*, является возрастающей — при движении по графику слева направо "поднимаемся вверх";

3) функция, изображенная на рисунке 21.4, *б*, является убывающей — при движении по графику слева направо "опускаемся вниз".

Рассмотрим график функции, изображенный на рисунке 21.5. По рисунку видно, что функция, изображенная на нем, на всей области ее определения $(-\infty; +\infty)$ не является ни возрастающей, ни убывающей. Легко заметить, что по одной части графика при движении по нему слева направо "опускаемся вниз", по другой — "поднимаемся вверх". В этом случае говорят, что на промежутке $(-\infty; -1]$ функция убывает, на промежутке $[-1; +\infty)$ функция возрастает.



а) *б*)

Рис. 21.4

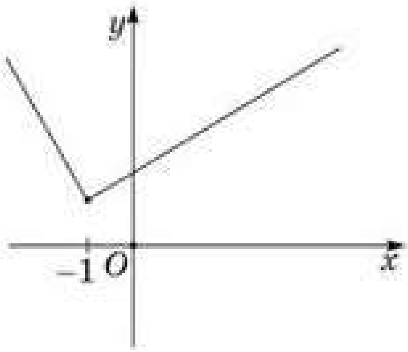


Рис. 21.5

С помощью графика также легко установить, при каких значениях аргумента значение функции равно нулю, больше нуля или меньше нуля.

Где расположены точки графика функции, с помощью которых можно установить, при каких значениях аргумента значения функции положительные или отрицательные?

Например :

1) значение функции, изображенной на рисунке 21.3:

— равно нулю при x, равном -1 и 0;

— больше нуля при x, равном 1 и 2;

— меньше нуля при x, равном -2;

2) значение функции, изображенной на рисунке 21.4 *а*:

— равно нулю при x, равном -1;

— больше нуля на числовом отрезке $(-1; 3]$ — для этих значений аргумента график функции лежит выше оси абсцисс;

— меньше нуля на числовом отрезке $[-2; -1)$ — для этих значений аргумента график функции лежит ниже оси абсцисс;

3) значение функции, изображенной на рисунке 21.4, *б*:

— равно нулю при x, равном 4;

— больше нуля на числовом промежутке $(-\infty; 4)$ — для этих значений аргумента график функции лежит выше оси абсцисс;

— меньше нуля на числовом отрезке $(4; +\infty)$ — для этих значений аргумента график функции лежит ниже оси абсцисс.

Не любой график задает функцию. *Например* , графики, изображенные на рисунках 21.6, *а*; 21.6, *б*; 21.6, *в*, функцию не задают.

Как по графику узнать, задает он функцию или нет?

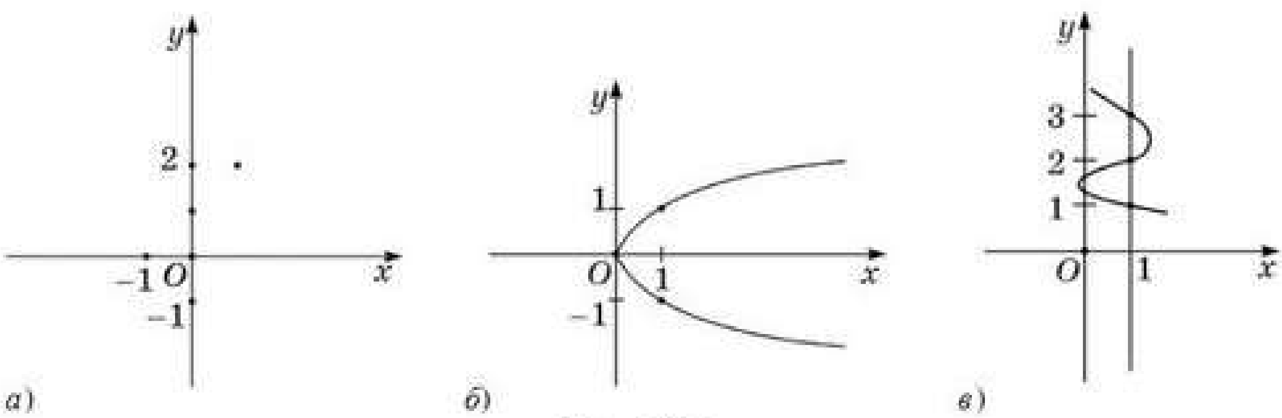


Рис. 21.6

По рисунку видно, что одному значению переменной x соответствует не одно, а несколько значений переменной y. *Например*, $x = 0$ соответствуют четыре значения переменной y: –1; 0; 1 и 2 (рис. 21.6, *а*); $x = 1$ соответствуют два значения переменной y: 1 и –1 (рис. 21.6, *б*); $x = 1$ соответствуют три значения переменной y: 1; 2; 3 (рис. 21.6, *в*).

1. Могут ли быть графиком функции три точки?
2. Всякий ли график задает функцию?

Упражнения

А

21.1. Задает ли функцию график, изображенный на рисунке 21.7:

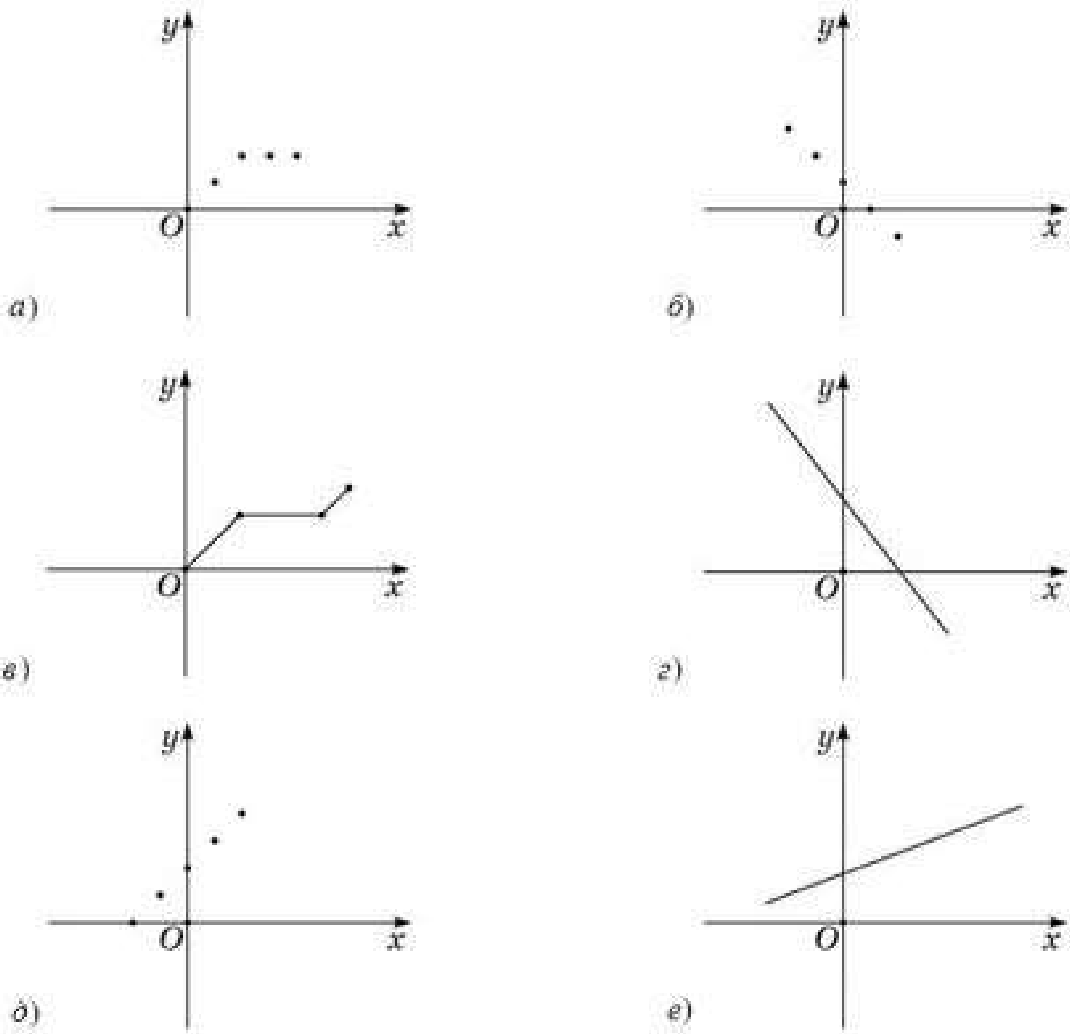


Рис. 21.7

21.2. Задает ли функцию график, изображенный на рисунке 21.8:

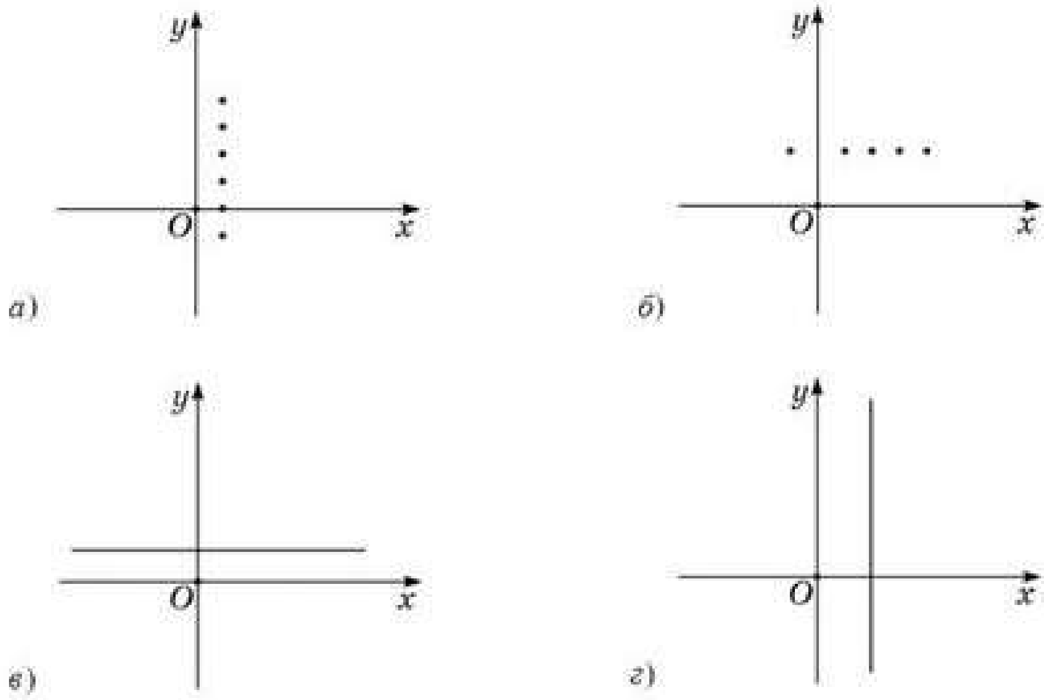


Рис. 21.8

21.3. Найдите область определения функии по ее графику (рис. 21.9):

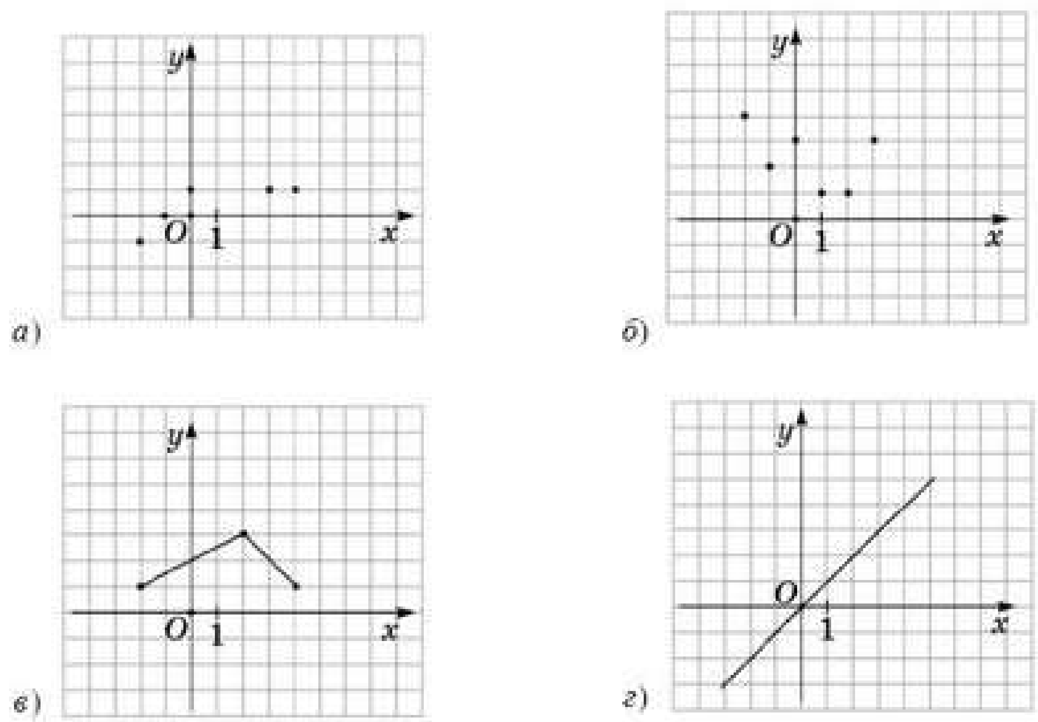


Рис. 21.9

21.4. Найдите область определения функции по ее графику (рис. 21.10):

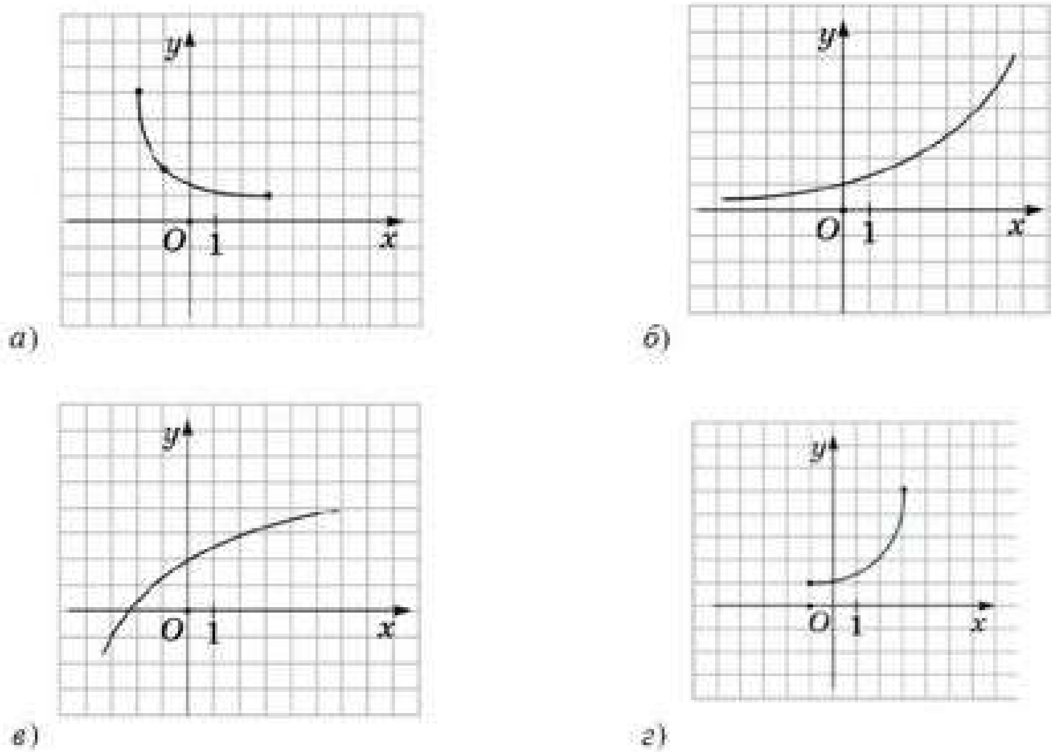


Рис. 21.10

21.5. Установите по графикам, изображенным на рисунке 21.11, какие из функций возрастающие, какие — убывающие.

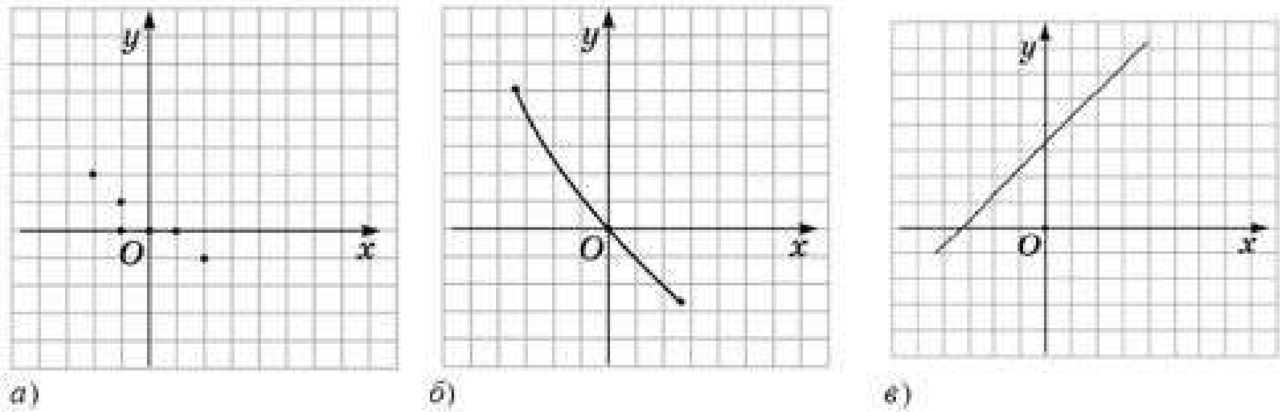


Рис. 21.11

21.6. По графику функции, изображенному на рисунке 21.12, найдите:
1) область определения функции;
2) значение аргумента, при котором функция равна нулю;
3) числовые промежутки, на которых функция: а) возрастает; б) убывает.

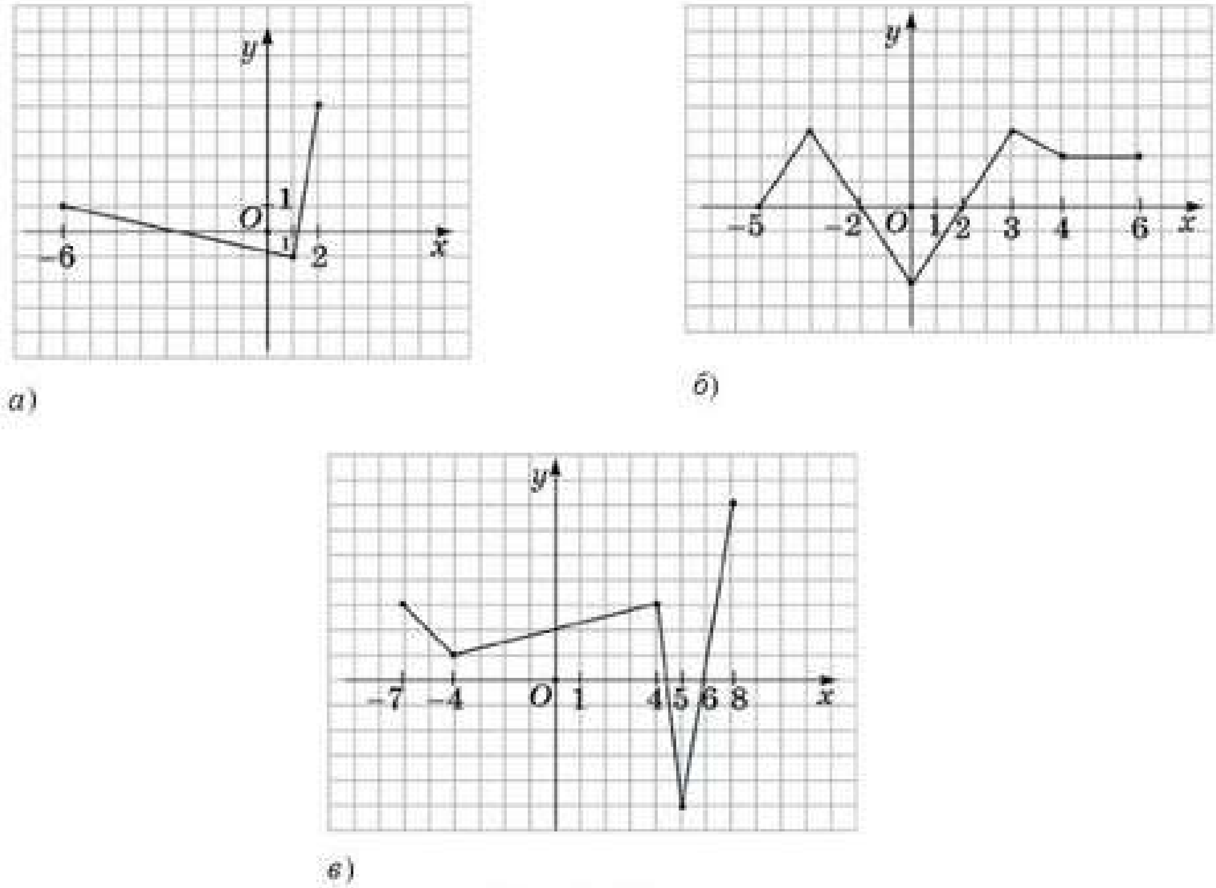


Рис. 21.12

B

21.7. По графику функции, изображенному на рисунке 21.12, найдите:

1) область определения функции;

2) значение аргумента, при котором функция равна нулю;

3) числовые промежутки, на которых функция: а) возрастает; б) убывает;

4) числовые промежутки, на которых функция: а) положительна; б) отрицательна.

21.8. Задайте функцию с помощью таблицы и постройте график по ее формуле $y = 5x - 3$, если область определения этой функции состоит из чисел: -1; 0; $0{,}5$; 1; $1{,}5$.

C

21.9. По графику функции, изображенному на рисунке 21.13, найдите:

1) область определения функции;

2) значение аргумента, при котором функция равна нулю;

3) числовые промежутки, на которых функция: а) возрастает; б) убывает.

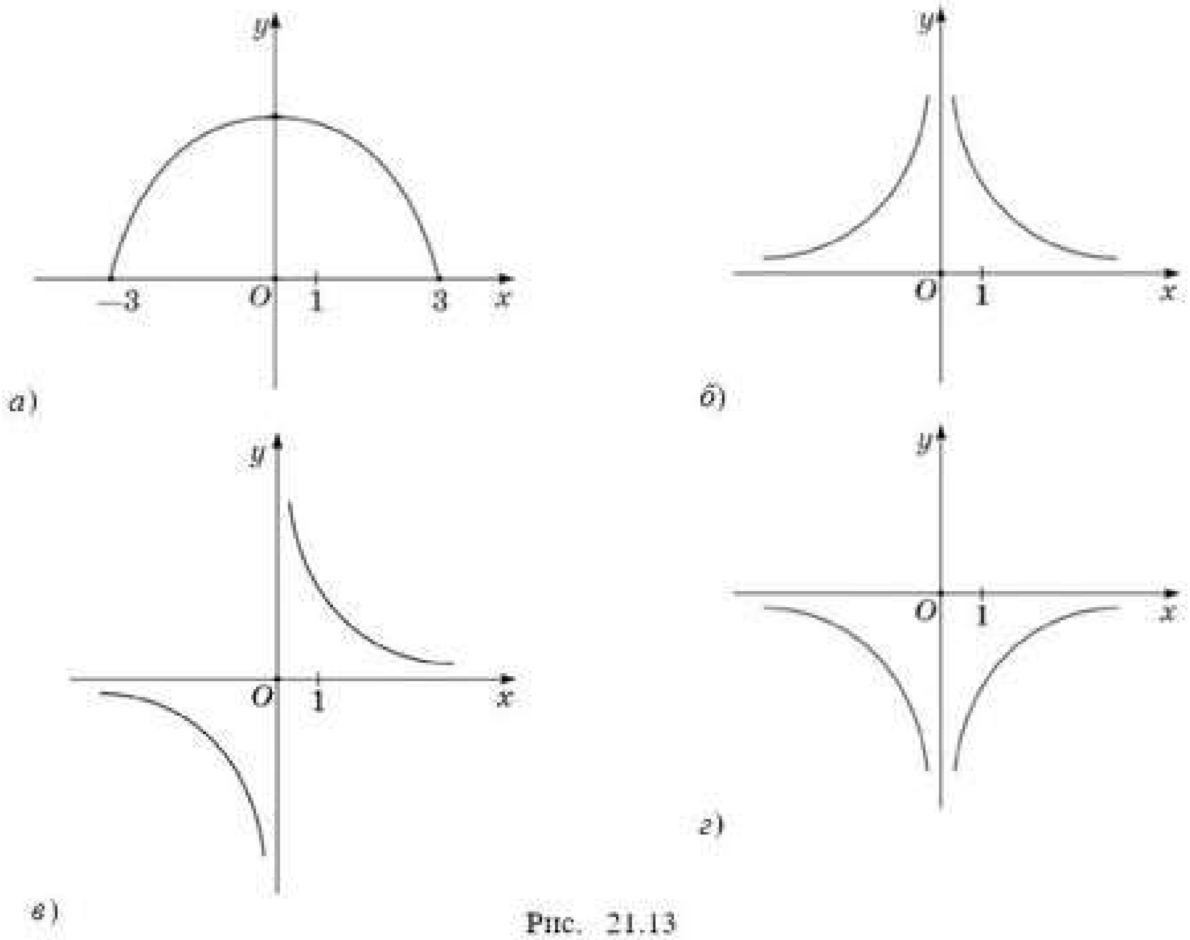


Рис. 21.13

21.10. По графику функции, изображенному на рисунке 21.14, найдите: 1) область определения функции; 2) значение аргумента, при котором значение функции равно нулю; 3) числовые промежутки, на которых функция: а) возрастает; б) убывает.

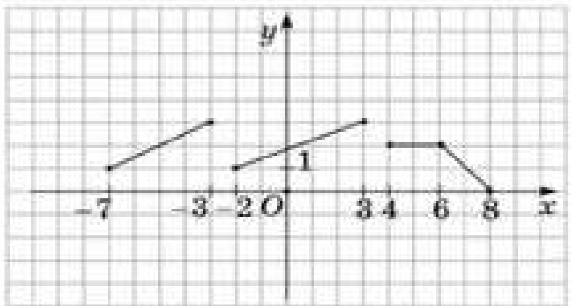


Рис. 21.14

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

21.11. Заполните таблицу 21.1, если $y = \frac{1}{3}x$.

Таблица 21.1

x	–9	–6	–3	0	3	6	9
y							

21.12. Постройте точки с координатами $(x; y)$ из упражнения 21.11.

§ 22. ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЕ ГРАФИК

Как построить график функции $y = kx + b$? Как его расположение зависит от k и b?

Линейной функцией называется функция, которую можно задать формулой $y = kx + b$, где x — независимая переменная, k и b — некоторые числа.

Например, $y = \frac{1}{2}x + 7$; $y = -2x + 3{,}4$; $y = 7$; $y = 12x$; $y = 0$ — линейные функции.

Рассмотрим линейную функцию $y = -3x + 2$ и построим ее график. Поскольку график состоит из точек, координаты которых являются значениями аргумента и значениями функции, то сначала выясним, какие значения может принимать аргумент, т. е. найдем *область определения функции* $y = -3x + 2$. Вместо x можно подставлять любое число, так как при любом значении x можно найти значение произведения $-3x$ и к полученному результату прибавить число 2. Поэтому область определения состоит из всех чисел: $(-\infty; +\infty)$.

Составим таблицу 22.1.

Таблица 22.1

x	–2	–1	0	1	2	3
y	8	5	2	–1	–4	–7

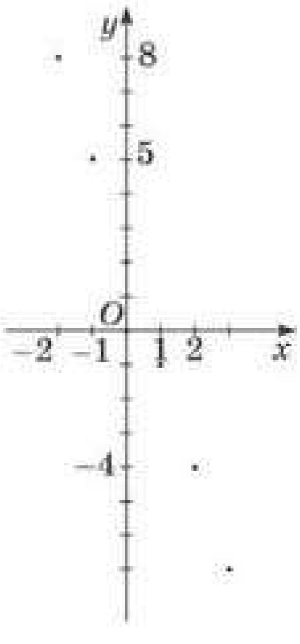


Рис. 22.1

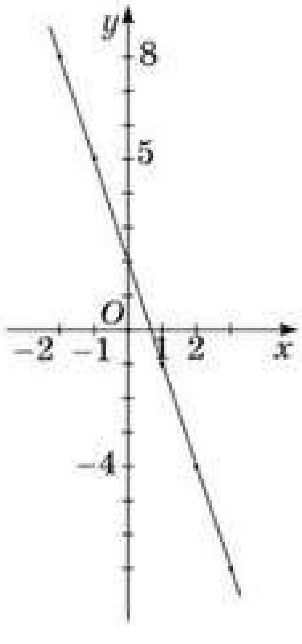


Рис. 22.2

Построим точки, координатами которых будут пары (–2; 8); (–1; 5); (0; 2); (1; –1), (2; –4); (3; –7) (рис. 22.1).

Но это не все точки графика $y = -3x + 2$, так как область определения состоит не только из шести чисел: –2; –1; 0; 1; 2; 3, а из всех чисел.

Можно проверить, что если построить другие точки, из которых состоит график функции $y = -3x + 2$, то они будут принадлежать одной прямой, проходящей через уже построенные точки. Эта прямая и является графиком функции $y = -3x + 2$ (рис. 22.2).

Графиком линейной функции $y = kx + b$, где k и b — некоторые числа, является прямая.

Сколько точек нужно построить, чтобы изобразить график линейной функции?

Чтобы построить график линейной функции, надо построить только две точки и провести через них прямую.

Например, построим график функции $y = \frac{1}{3}x - 2$. Для этого составим таблицу 22.2.

Таблица 22.2

x	y
0	–2
3	–1

Затем на координатной плоскости отметим точки $A(0; -2)$ и $B(3; -1)$ и через них проведем прямую (рис. 22.3).

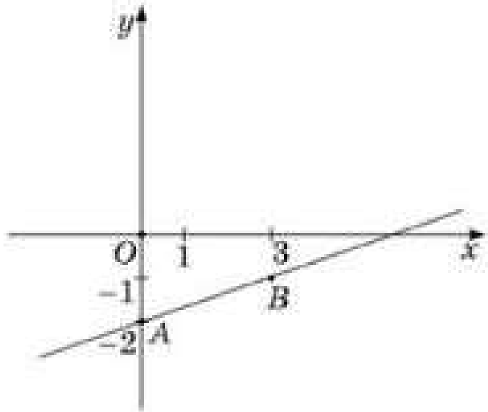


Рис. 22.3

Рассмотрим графики линейной функции $y = kx + b$ в случаях, когда k или b равны 0. Если $k = 0$, то функция примет вид: $y = 0 \cdot x + b$, или $y = b$. Построим, *например*, график функции $y = 2$. Для этого надо построить две точки. Выберем два произвольных значения аргумента: 4 и –1 и подставим в формулу $y = 0 \cdot x + 2$: получим $y = 2$ при $x = 4$ и $y = 2$ при $x = -1$ (табл. 22.3).

Таблица 22.3

x	y
4	2
–1	2

Построим точки $A(4; 2)$; $B(-1; 2)$ и проведем через них прямую (рис. 22.4). Полученная прямая параллельна оси Ox. Эта прямая

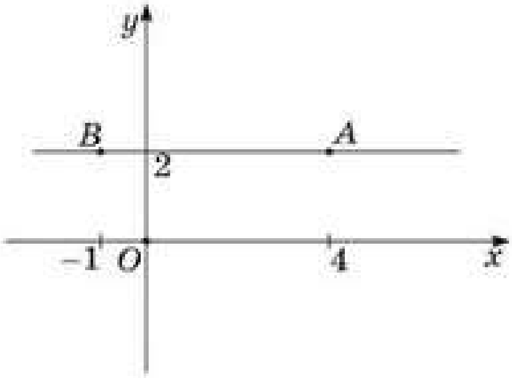


Рис. 22.4

пересекает ось Oy в точке, ордината которой равна 2. Поэтому

графиком функции $y = b$ является прямая, параллельная оси Ox и проходящая через точку с ординатой, равной числу b.

Если $k = 0$ и $b = 0$, то график функции $y = 0$ совпадает с осью Ox.

Значит, чтобы построить график функции, *например* $y = -2$, надо провести прямую, параллельную оси Ox и пересекающую ось Oy в точке, ордината которой равна -2.

Рассмотрим случай построения графика линейной функции $y = kx + b$, если $b = 0$. В этом случае функция примет вид: $y = kx$. График этой функции при любом значении k проходит через начало координат — точку $O(0; 0)$. Действительно, при $x = 0$, $y = kx$ всегда равно 0.

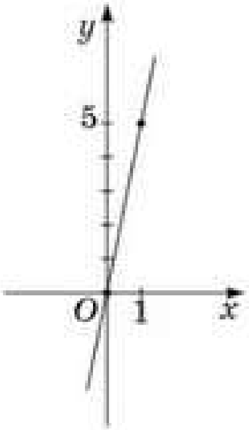


Рис. 22.5

В каких случаях достаточно построить одну точку, чтобы изобразить график линейной функции?

Для построения графика функции $y = kx$ надо найти координаты только одной точки, кроме $O(0; 0)$.

Например, построим график функции $y = 5x$. Если $x = 1$, то $y = 5$. Значит, прямая, которая является графиком функции $y = 5x$, проходит через две точки: $O(0; 0)$ и $A(1; 5)$ (рис. 22.5).

1. Какая функция называется *линейной функцией*?
2. Приведите примеры линейных функций.
3. Какая линия является графиком линейной функции?
4. Может ли графиком линейной функции быть прямая: 1) параллельная оси абсцисс; 2) параллельная оси ординат?
5. Как найти точки пересечения графика линейной функции с осями координат?
6. Как по графику линейной функции $y = kx + b$ узнать знаки k и b?
7. Как построить график функции $y = kx$? Как его расположение зависит от k?

Упражнения

A

22.1. Является ли линейной функция:

1) $y = x + 1{,}9$;   2) $y = 13 - x$;   3) $y = x^2 - 5$;

4) $y = 5\frac{1}{3}$;   5) $y = 0{,}5x - 3$;   6) $y = -\frac{x}{11} + 3$?

22.2. Дана линейная функция:

1) $y = 4x - 3$;   2) $y = 5 + 2x$;

3) $y = 7 - \frac{2}{3}x$;   4) $y = \frac{5}{6}x + 2$.

Найдите y, если $x = 0$; $x = -3$; $x = 9$; $x = 1{,}5$.

22.3. Дана линейная функция:

1) $y = 7{,}2 - 2{,}4x$;   2) $y = \frac{2}{3} + 6x$;

3) $y = -\frac{3}{8}x + 7{,}5$;   4) $y = -4{,}6x - 1\frac{1}{3}$.

Найдите x, если $y = 1$; $y = -1$; $y = -\frac{2}{3}$; $y = 5$.

22.4. Постройте график функции:

1) $y = x + 4$;   2) $y = x - 2$;   3) $y = 7 - x$;

4) $y = -3 - x$;   5) $y = 0{,}6x - 1$;   6) $y = 3 + 2{,}5x$;

7) $y = \frac{1}{3}x + 9$;   8) $y = 6 - \frac{5}{6}x$.

22.5. Постройте график функции, заданной формулой $y = 3x - 6$. Найдите по графику:

1) значение y, соответствующее значению x, равному -2; -1; 0; 1,5; 3; 4;

2) значение x, при котором значение y равно: 6; 1,5; 0; $-1{,}5$; -3.

B

22.6. Постройте график функции, заданной формулой $y = -1 - 3x$. Найдите по графику:

1) значение y, соответствующее значению x, равному -3; -1; 0; 1,5; 2;

2) значение x, при котором значение y равно: -4; $-2{,}5$; -1; 3, 5; 5.

22.7. Принадлежат ли точки $A(-2;-2)$; $B(-1;-1)$; $C(1;\ 2)$; $D(2;\ 4)$ графику функции $y = 1{,}5\,x + 1$?

22.8. Какие из точек $A\left(1;\frac{29}{14}\right)$; $B\left(0;\frac{4}{7}\right)$; $C\left(1;\frac{13}{14}\right)$; $D\left(-2;\ -\frac{17}{7}\right)$; $E\left(\frac{2}{7};\ -\frac{1}{7}\right)$ принадлежат графику функции $y = -\frac{4}{7} + 1{,}5\,x$?

22.9. Постройте график функции, вычислив координаты точек пересечения графика с осями координат:

1) $y = 5x - 5$; 2) $y = 3{,}8 - 0{,}2\,x$; 3) $y = -10 + 2{,}5\,x$;

4) $y = -\frac{2}{7}x + 1$; 5) $y = 1\frac{5}{6}x - 2{,}2$; 6) $y = \frac{x-8}{5}$.

C

22.10. Найдите b, если известно, что график функции $y = -1{,}2\,x + b$ проходит через точку: 1) $A(0;\ 2{,}4)$; 2) $B(5;-9{,}6)$.

22.11. Найдите b, если известно, что график функции $y = \frac{1}{3}x + b$ проходит через точку: 1) $C(3;\ -4)$; 2) $D(-6;\ 9)$.

22.12. Найдите k, если известно, что график функции $y = kx + \frac{6}{7}$ проходит через точку: 1) $E(-1;\ 1)$; 2) $F(7;\ -2)$.

22.13. Найдите k, если известно, что $y = kx + 3\frac{1}{3}$ проходит через точку:

1) $N(1;\ 4)$; 2) $M(1;\ -4)$.

22.14. Постройте график функции:
1) $y = 6x - 1$; 2) $y = 3 - 8x$; 3) $y = -4$; 4) $y = 3{,}8$
и укажите все значения аргумента, для которых функция:
а) положительна; б) отрицательна.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

22.15. Постройте в одной и той же системе координат графики функций: 1) $y = 3x$; $y = 3x - 2$; $y = 3x + 1{,}5$;

2) $y = 2x - 1$, $y = -2x - 1$; $y = x - 1$; $y = 5x - 1$.

22.16. Как относительно друг друга могут располагаться две прямые на плоскости?

§ 23. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ГРАФИКОВ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ

Как по коэффициентам k и b линейных функций $y = kx + b$ установить их взаимное расположение?

Построим в одной и той же системе координат графики функций:

1) $y = -\frac{2}{3}x + 3$ и $y = 2x - 5$;

2) $y = 1{,}5x + 2$; $y = \frac{1}{4}x + 2$; $y = x + 2$;

3) $y = -\frac{1}{3}x$; $y = -\frac{1}{3}x - 2$; $y = -\frac{1}{3}x + 2$.

1) Построим графики линейных функций:

$y = -\frac{2}{3}x + 3$ и $y = 2x - 5$.

Составим таблицы (табл. 23.1):

$y = -\frac{2}{3}x + 3$; $y = 2x - 5$.

Таблица 23.1

x	y
0	3
3	1

x	y
0	– 5
1	– 3

Графики пересекаются в точке $A(3; 1)$ (рис. 23.1).

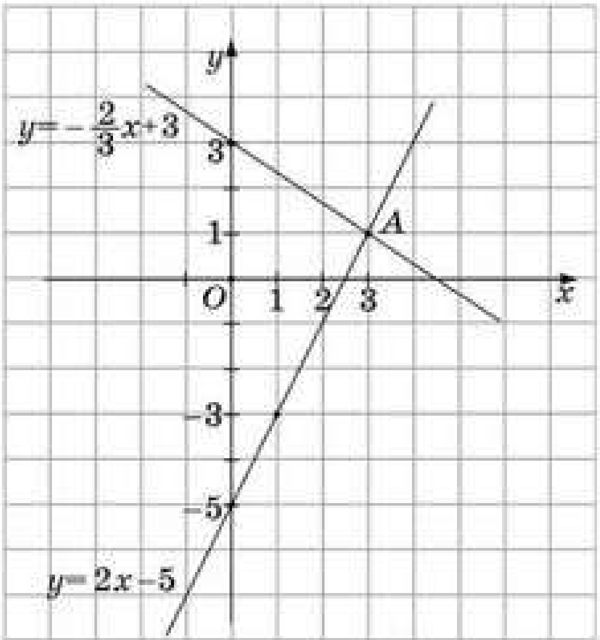


Рис. 23.1

2) Построим графики линейных функций: $y = 1{,}5x + 2$, $y = \frac{1}{4}x + 2$ и $y = x + 2$.

Составим таблицы (табл. 23.2):

$y = 1{,}5x + 2$; $y = \frac{1}{4}x + 2$; $y = x + 2$.

Таблица 23.2

x	y
0	2
–2	–1

x	y
0	2
4	3

x	y
0	2
2	4

У всех этих функций $b = 2$. Видно, что графики этих линейных функций проходят через точку с координатами (0; 2) (рис. 23.2).

3) Построим графики функций: $y = -\frac{1}{3}x$; $y = -\frac{1}{3}x - 2$; $y = -\frac{1}{3}x + 2$. Составим таблицы (табл. 23.3):

$y = -\frac{1}{3}x$; $\qquad y = -\frac{1}{3}x - 2$; $\qquad y = -\frac{1}{3}x + 2$.

Таблица 23.3

x	y
3	–1

x	y
0	–2
3	–3

x	y
0	2
3	1

У всех этих функций $k = -\frac{1}{3}$. Как видим, графики этих функций расположены параллельно друг другу (рис. 23.3).

Обоснуем это в общем виде. График линейной функции — прямая, поэтому графики линейных функций либо пересекаются в одной точке, либо параллельны, либо совпадают.

Рассмотрим две линейные функции: $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$, где x — переменная, k_1, k_2, b_1 и b_2 — некоторые числа. Тогда $k_1x + b_1 = k_2x + b_2$. Это равенство содержит переменную, т. е. является уравнением. Решим его. Для этого перенесем слагаемые, содержащие x, в левую часть уравнения, числа — в правую. Получим: $k_1x - k_2x = b_2 - b_1$. Вынесем x за скобки: $(k_1 - k_2)x = b_2 - b_1$.

Если $k_1 \neq k_2$, то $k_1 - k_2 \neq 0$, поэтому $x = \frac{b_2 - b_1}{k_1 - k_2}$ — единственное число. Подставив его в одну из формул $y = k_1x + b_1$ или $y = k_2x + b_2$, найдем

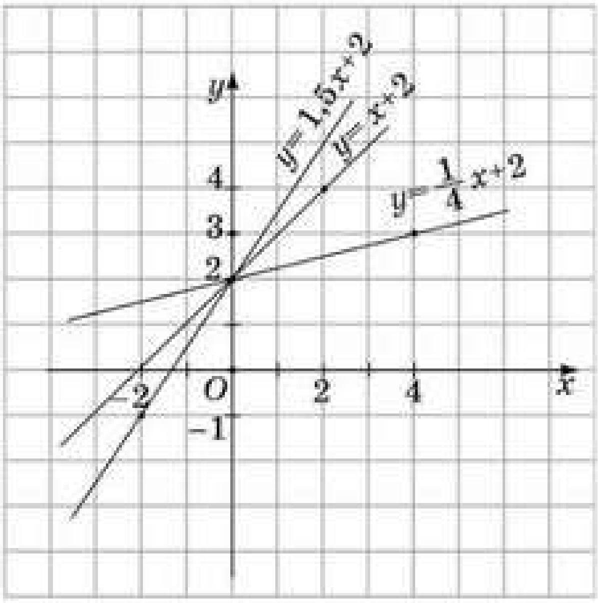


Рис. 23.2

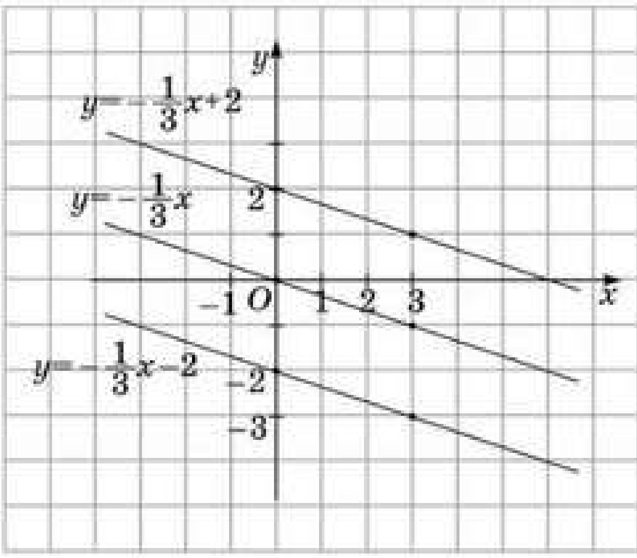


Рис. 23.3

значение y, значит, пару $(x; y)$. Поэтому при $k_1 \neq k_2$ графики линейных функций $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ пересекаются в одной точке.

Если $k_1 = k_2$, то уравнение $(k_1 - k_2)x = b_2 - b_1$ примет вид: $0 \cdot x = b_2 - b_1$.

Если при этом $b_2 = b_1$, то получим два уравнения: $y = k_1x - b_1$ и $y = k_2x - b_2$ с одинаковыми коэффициентами: поэтому, построив их графики, получим одну прямую.

Если при $b_1 = b_2$ число $b_2 \neq b_1$, то уравнение $0 \cdot x = b_2 - b_1$ не имеет решений. Это означает, что нет точки, которая одновременно принадлежит графикам функций $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$, значит, графики функций при $k_1 = k_2$ и $b_2 \neq b_1$ не пересекаются, т. е. расположены параллельно.

Таким образом,

графики линейных функций, заданных формулой $y = kx + b$, пересекаются, если коэффициенты при x различны, и параллельны, если коэффициенты при x одинаковые, а числа b разные, и совпадают, если коэффициенты при x равны и b одинаковые.

Из формулы $y = kx + b$ следует, что при $x = 0$ значение $y = b$.

Это означает:

график любой линейной функции $y = kx + b$ проходит через точку, координаты которой равны $(0; b)$.

1. Могут ли графики двух линейных функций иметь:
   1) только одну общую точку;
   2) только две общие точки;
   3) ни одной общей точки;
   4) все общие точки?
2. В каком случае графики линейных функций $y = kx + b$ и $y = tx + m$:
   1) пересекаются; 2) параллельны; 3) совпадают?
3. Приведите примеры двух линейных функций, графики которых:
   1) пересекаются; 2) параллельны; 3) совпадают.

Упражнения

A

23.1. Как расположены относительно друг друга графики функций:
1) $y = 2x - 10$ и $y = 2x + 9$; 2) $y = -3x + 9$ и $y = -3x + 9$;
3) $y = -5x + 6$ и $y = -5x$; 4) $y = 1{,}5 + 4x$ и $y = -4x + 3$;
5) $y = 7 + 2{,}3x$ и $y = 3{,}2x - 1$; 6) $y = 10x$ и $y = 1 - 10x$?

23.2. Для линейной функции: 1) $y = 8x - 1$; 2) $y = 3 - 4x$; 3) $y = -2 + 2x$ запишите формулу такой линейной функции, график которой:
а) параллелен графику данной функции;
б) пересекает график данной функции;
в) совпадает с графиком данной функции.

23.3. Для линейной функции: 1) $y = 2x - 7$; 2) $y = 1{,}4 + 3x$; 3) $y = x + 3{,}5$; 4) $y = -10{,}5 + 3x$; 5) $y = 3x - 7$
укажите функцию, график которой:
а) параллелен графику данной функции;
б) пересекает график данной функции;
в) совпадает с графиком данной функции.

23.4. Запишите формулы двух линейных функций, графики которых:
а) пересекаются; б) параллельны; в) совпадают.

23.5. Найдите координаты точек пересечения графиков функций:
1) $y = -6x + 1$ и $y = 5x + 9$;
2) $y = -17 + 3{,}4x$ и $y = -1{,}2x + 69$;
3) $y = 21 - 9x$ и $y = -2{,}5x + 8$;
4) $y = 16{,}2 + 8x$ и $y = -0{,}8x + 7{,}4$;
5) $y = 1 - 3x$ и $y = -x - 1$;
6) $y = 1 + 7x$ и $y = 6{,}5x$.

B

23.6. Докажите, что пересекаются графики функций:
1) $y = 9 + x$ и $y = 5x + 6$;
2) $y = -0{,}5x + 13$ и $y = 8 + x$;
3) $y = 6x - 5{,}1$ и $y = 9x - 6$.

23.7. Постройте графики линейных функций и выясните их взаимное расположение:

1) $y = 1,4x + 2$ и $y = x + 2$; 2) $y = -x + 1,5$ и $y = 2x - 3$;

3) $y = 7 + 9x$ и $y = -9x - 0,9$; 4) $y = -\frac{5}{11}x + 2$ и $y = x - 14$.

23.8. Запишите несколько формул линейных функций, графики которых параллельны графику функции:

1) $y = -4$; 2) $y = \frac{8}{9}$; 3) $y = 0$.

23.9. Постройте в одной и той же координатной плоскости графики функций, которые заданы формулой:

1) $y = 0,5x + b$ при $b = -3$; 5;

2) $y = kx - 2$ при $k = 4$; $-\frac{1}{4}$.

23.10. Запишите формулу линейной функции, график которой пересекает ось ординат в точке:

1) $A(0; -3,5)$; 2) $B(0; -2\frac{1}{2})$;

3) $C(0; \frac{5}{6})$; 4) $D(0; -4,8)$

и расположен параллельно графику функции: а) $y = 4x - 7$; б) $y = 10 - 2,5x$.

C

23.11. Найдите число b, если известно, что графики линейных функций $y = 3x + b$, $y = 4x + b$, $y = -x + b$, $y = 2,2x + b$ пересекаются в одной и той же точке с графиком функции:

1) $y = x + 7,2$; 2) $y = -5x + 9$;

3) $y = 3,4x - 8$; 4) $y = -\frac{3}{8}x - \frac{1}{4}$.

23.12. В каких координатных четвертях расположен график функции $y = kx + b$, если известно, что он проходит через начало координат и параллелен графику функции:

1) $y = 7x + 5$; 2) $y = 3,2x - 4$;

3) $y = -\frac{6}{7}x + 3$; 4) $y = -4,5x - 8$?

23.13. Запишите формулу линейной функции, если известно, что ее график проходит через точку $A(-1; 3)$ и пересекает ось ординат в точке с ординатой:

1) 4,8; 2) –6,05; 3) 8,6; 4) $9\frac{1}{3}$.

23.14. Запишите формулу линейной функции, график которой параллелен графику функции $y = 3x + 5$ и проходит через точку:

1) $A(-4;\ 1)$; 2) $B(1;\ 15)$;

3) $C\left(\frac{1}{3};\ \frac{1}{16}\right)$; 4) $M(0{,}15;\ -1)$.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

23.15. Решите систему уравнений $\begin{cases} x+4y=5, \\ 3x-y=2 \end{cases}$ способом алгебраического сложения.

23.16. Решите систему уравнений $\begin{cases} 5x-y=6, \\ x-6y=7 \end{cases}$ способом подстановки.

§ 24. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ ГРАФИЧЕСКИМ СПОСОБОМ

Как решить систему двух линейных уравнений с двумя переменными графическим способом?

При решении систем линейных уравнений графическим способом используем следующий ***алгоритм*** :

— построить графики уравнений системы в одной координатной плоскости;

— найти координаты точек пересечения графиков уравнений (если они пересекаются);

— записать ответ в виде множества пар, которые являются координатами точек пересечения графиков.

Рассмотрим решение систем двух линейных уравнений с двумя переменными графическим способом, используя примеры.

Пример 1. Решим систему уравнений: $\begin{cases} y-2x=0, \\ 2x+y-4=0. \end{cases}$

Сначала выразим y через x из каждого уравнения: $\begin{cases} y=2x, \\ y=-2x+4. \end{cases}$

Получим равенства, которые задают линейную функцию $y = kx + b$.

Поскольку графиками линейных функций $y = 2x$ и $y = -2x + 4$ являются прямые и первый график проходит через начало координат, то для построения первого графика надо построить одну точку, для второго — две точки. Составим таблицы (табл. 24.1).

$y = 2x$, $y = -2x + 4$.

Таблица 24.1

1)

x	y
1	2

2)

x	y
0	4
2	0

Построим точки $O(0;\ 0)$ и $A(1;\ 2)$ и проведем прямую OA. Получим график функции $y = 2x$, т. е. график уравнения $y - 2x = 0$. Построим точки $B(0;\ 4)$ и $C(2;\ 0)$, проведем прямую BC. Получим график функции $y = -2x + 4$ или график уравнения $2x + y - 4 = 0$ (рис. 24.1).

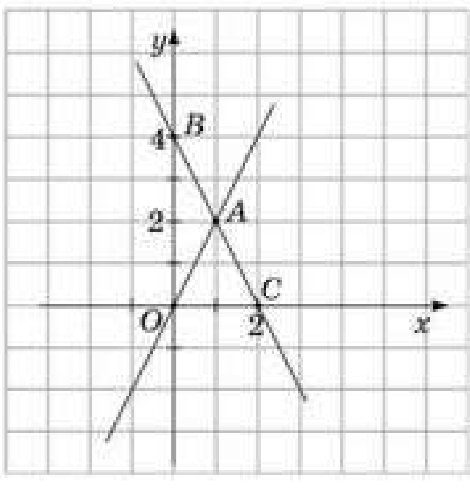


Рис. 24.1

Графики пересекаются в точке с координатой (1; 2). Значит, данная система уравнений имеет единственное решение — (1; 2).

Ответ : {(1; 2)}.

Пример 2. Решим систему уравнений $\begin{cases} 2y - x - 2 = 0, \\ y = 0{,}5x - 1 \end{cases}$ графическим способом. Сначала выразим переменную y через переменную x в каждом уравнении. Получим равенства $y = 0{,}5x + 1$ и $y = 0{,}5x - 1$, которые задают линейную функцию $y = kx + b$.

Построим графики функций:

$y = 0{,}5x - 1$ и $y = 0{,}5x + 1$. Составим таблицы (табл. 24.2).

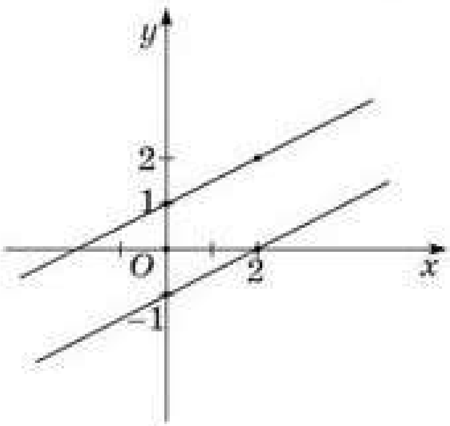


Рис. 24.2

Таблица 24.2

1)

x	y
0	–1
2	0

2)

x	y
0	1
2	2

Графики не пересекаются — они расположены параллельно друг другу, поэтому система не имеет решений (рис. 24.2).

Ответ : ∅.

Пример 3. Сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases} y + 3x - 2 = 0, \\ 2y = 4 - 6x? \end{cases}$

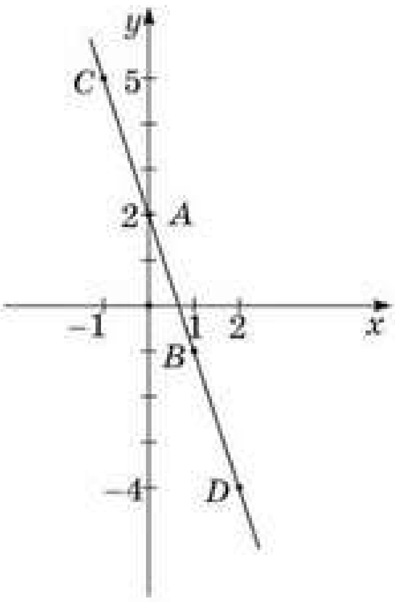


Рис. 24.3

Чтобы ответить на вопрос, построим графики функций $y = 2 - 3x$ и $2y = 4 - 6x$. Составим таблицы (табл. 24.3).

$y = 2 - 3x$ и $2y = 4 - 6x$.

Таблица 24.3

1)

x	y
0	2
1	–1

2)

x	y
–1	5
2	–4

Построим точки $A(0; 2)$ и $B(1; -1)$ и проведем прямую AB. Получим график уравнения $y + 3x - 2 = 0$ (рис. 24.3). Построим точки $C(-1; 5)$ и $D(2; -4)$ и проведем прямую CD. Получим график уравнения $2y = 4 - 6x$.

Как видим, графики уравнений совпадают. Поэтому решением системы будут пары чисел, являющиеся координатами точек прямой $y = 2 - 3x$. Таких точек бесконечно много, так как прямая бесконечна.

Ответ : бесконечно много.

При решении системы двух линейных уравнений с двумя переменными графическим способом оказалось, что такие системы могут иметь либо одно решение (когда прямые пересекаются), либо не иметь решений (когда прямые параллельны), либо иметь бесконечно много решений (когда прямые совпадают). Остальное исключено, так как две прямые на плоскости либо пересекаются, либо параллельны, либо совпадают.

1. Почему один из способов решения системы двух линейных уравнений с двумя переменными назвали *графическим способом* ?
2. Какие линии и сколько надо построить, чтобы решить систему двух линейных уравнений с двумя переменными?
3. Может ли система двух линейных уравнений с двумя переменными иметь только два решения?
4. Почему система двух линейных уравнений с двумя переменными может иметь либо одно решение, либо ни одного решения, либо бесконечно много решений?

Упражнения

A

24.1. Найдите координаты точек пересечения с осью Ox прямых, являющихся графиками уравнений:

1) $x + y = 8$; 2) $y - x = 7$; 3) $5x - y = 2$;

4) $6x - 2y = 1$; 5) $x + 4y - 5 = 0$; 6) $2x + 3y + 1 = 0$.

24.2. Найдите координаты точек пересечения с осью Oy прямых, являющихся графиками уравнений:

1) $x + y = 13$; 2) $x - y = 1{,}7$; 3) $x + 8y = 11{,}2$;

4) $5x - y = 3$; 5) $8y - 7x = 14$; 6) $9x + 1{,}6y = 3$.

24.3. Постройте график уравнения:

1) $y = x + 5$; 2) $y = x - 4$; 3) $y = 7 - 2x$;

4) $x - y = 6$; 5) $3x + 2y = 1$; 6) $x + 4y = 9$;

7) $3y - 18 = 0$; 8) $16 + 8x = 0$; 9) $4 - x - y = 0$.

24.4. Постройте графики функций и найдите координаты точки их пересечения:

1) $y = x + 4$ и $y = 6 - x$;
2) $y = 7x + 9$ и $y = 3 + x$;
3) $x + y = 3$ и $x - y = 1$;
4) $3x - 2y = -2$ и $7x - 5y = -4$.

B

24.5. Решите графически систему уравнений **(24.5—24.7)**:

1) $\begin{cases} y=2x, \\ y=2+x; \end{cases}$
2) $\begin{cases} y=-2x, \\ y=x-3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y-5x=0, \\ y=x-4; \end{cases}$
4) $\begin{cases} y-3x=0, \\ y=-6+x. \end{cases}$

24.6. 1) $\begin{cases} x+y=9, \\ x-y=1; \end{cases}$
2) $\begin{cases} 3x+y=1, \\ x+y=5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y-6x=-25, \\ y-x=-5; \end{cases}$
4) $\begin{cases} y+7x=-18, \\ y+x=0. \end{cases}$

24.7. 1) $\begin{cases} x+20y=37, \\ 5y+x=7; \end{cases}$
2) $\begin{cases} y-8x=-33, \\ 7x-y=29; \end{cases}$
3) $\begin{cases} 17x+y=90, \\ y-23x=-110. \end{cases}$

24.8. Выясните, сколько решений имеет система уравнений:

1) $\begin{cases} 6x+y=0, \\ -4x+y=2; \end{cases}$
2) $\begin{cases} y+x=7, \\ y=-x-5; \end{cases}$
3) $\begin{cases} x-y=2, \\ 3x-3y-6=0. \end{cases}$

C

24.9. Найдите значение выражения $7x_0 + 3y_0$, если координаты точки $A(x_0; y_0)$ являются решением системы уравнений:

1) $\begin{cases} 7x-3y=-1, \\ 14x-2y=\frac{2}{3}; \end{cases}$
2) $\begin{cases} 12y+7x=-4, \\ x+24y=-2\frac{5}{7}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 8y-7x=-5{,}6, \\ 35x+2y=7; \end{cases}$
4) $\begin{cases} 10x+12y=7{,}5, \\ 24y-5x=-5. \end{cases}$

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

24.10. Используя данные таблицы 24.4, постройте график линейной функции.

Таблица 24.4

x	-1	0
y	-5	-3

24.11. Постройте график функции $y = -2x + 4$ и найдите значения x, при которых функция принимает неотрицательные значения.

§ 25. ФУНКЦИЯ $y = ax^2$, ЕЕ СВОЙСТВА И ГРАФИК

Какими свойствами обладает функция $y = ax^2 (a \neq 0)$ и как построить ее график?

Вы знаете, что при изучении свойств функции находят ее область определения; множество значений; значения аргумента, при которых значение функции принимает положительные значения, отрицательные значения или равно нулю (нули функции); промежутки, на которых функция возрастает или убывает (промежутки возрастания и убывания функции).

Рассмотрите свойства функции $y = ax^2$, где $a \neq 0$.

1) Областью определения функции $y = ax^2$ является множество чисел числовой прямой: $(-\infty; +\infty)$. Объясните, почему.

Символически записывают: $D(y) = (-\infty; +\infty)$, или $D(ax^2) = (-\infty; +\infty)$, или $D(y) = R$, или $D(ax^2) = R$.

2) Множество значений функции зависит от знака числа a:

— если число a — положительное $(a > 0)$, то множеством значений функции $y = ax^2$ является числовой луч $[0; +\infty)$.

Объясните, почему при $a > 0$, ax^2l 0 для любых значений переменной x.

Символически записывают: $E(y) = [0; +\infty)$, или $E(ax^2) = [0; +\infty)$;

— если число a — отрицательное $(a < 0)$, то множеством значений функции $y = ax^2$ является числовой луч $(-\infty; 0]$.

Объясните, почему при $a < 0$, ax^2m 0 для любых значений переменной x.

Символически записывают: $E(y) = (-\infty; 0]$, или $E(ax^2) = (-\infty; 0]$.

Из первого и второго свойств функции $y = ax^2$ следует, что ее график расположен:

— в I и II координатной четвертях (выше оси абсцисс) при $a > 0$;

— в III и IV координатной четвертях (ниже оси абсцисс) при $a < 0$.

3) Найдем промежутки знакопостоянства функции.

Из первого и второго свойств функции $y = ax^2$ следует, что она принимает:

при $a > 0$ — только положительные значения на $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$,

при $a < 0$ — только отрицательные значения на $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

4) Найдем нули функции. Значение функции $y = ax^2$ равно нулю при $x = 0$.

Действительно, при $y = 0$ получим $ax^2 = 0$. Поскольку $a \neq 0$, то $x^2 = 0$, или $x \cdot x = 0$. Значение произведения равно нулю, когда хотя бы один из множителей равен нулю. Значит, $x = 0$.

Для построения графиков функций $y = x^2$ и $y = -x^2$ составим таблицу 25.1.

Таблица 25.1

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$y = x^2$	9	4	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	4	9
$y = -x^2$	-9	-4	-1	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	-1	-4	-9

Если построить другие точки, принадлежащие графику функции $y = x^2$ или $y = -x^2$, то увидим, что они расположены на линии, которая плавно соединяет уже построенные с помощью таблицы точки.

Графики функций $y = x^2$ и $y = -x^2$ называют *параболами* (рис. 25.1, 25.2).

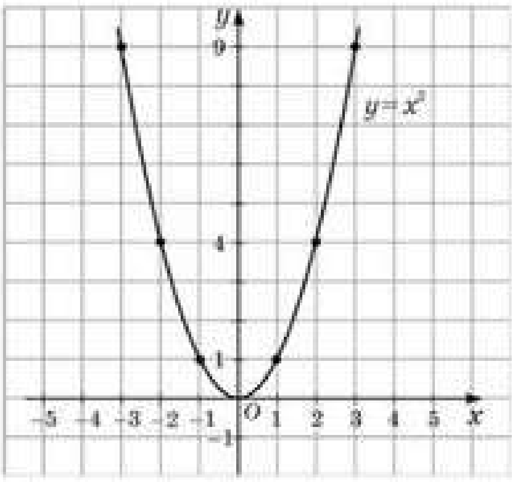


Рис. 25.1

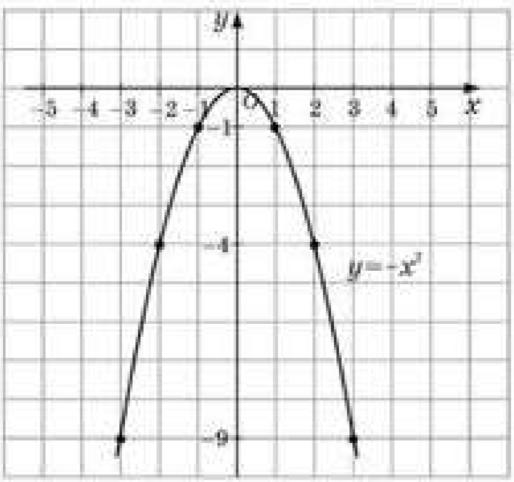


Рис. 25.2

Для построения графиков функций $y = 2x^2$ и $y = -2x^2$ составим таблицу 25.2.

Таблица 25.2

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$y = 2x^2$	8	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	8
$y = -2x^2$	-8	-2	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2	-8

При одних и тех же значениях аргумента сравните соответствующие значения функций: 1) $y = 2x^2$ и $y = x^2$; 2) $y = \frac{1}{2}x^2$ и $y = x^2$ (табл. 25.3).

Таблица 25.3

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$y = 2x^2$	32	8	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	8	32
$y = x^2$	16	4	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	4	16
$y = \frac{1}{2}x^2$	8	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	2	8

При одних и тех же значениях аргумента значения функции $y = 2x^2$ в 2 раза больше соответствующих значений функции $y = x^2$.

Говорят, что график функции $y = 2x^2$ получается из графика функции $y = x^2$ с помощью его *растяжения вдоль оси Oy* в 2 раза.

При одних и тех же значениях аргумента значения функции $y = \frac{1}{2}x^2$ в 2 раза меньше соответствующих значений функции $y = x^2$.

Говорят, что график функции $y = \frac{1}{2}x^2$ получается из графика функции $y = x^2$ с помощью его *сжатия вдоль оси Oy* в 2 раза.

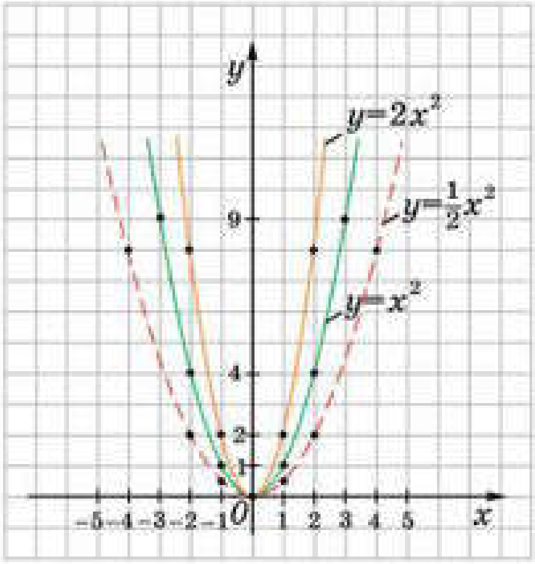


Рис. 25.3

В одной и той же системе координат построены графики функций: $y = x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$ и $y = 2x^2$ (рис. 25.3).

Все эти графики называют *параболами* .

Для краткости вместо предложения "построить параболу, которая является графиком функции $y = x^2$" говорят: "построить параболу $y = x^2$".

В одной и той же системе координат постройте параболы, которые являются графиками функций: $y = -x^2$, $y = -\frac{1}{2}x^2$ и $y = -2x^2$.

1. Как из параболы $y = x^2$ получить параболу: $y = -7x^2$; $y = \frac{1}{7}x^2$?
2. Как относительно друг друга расположены параболы $y = 25x^2$; $y = -25x^2$?
3. Объясните, почему ось ординат является осью симметрии параболы вида $y = ax^2$.
4. В каких координатных четвертях расположена парабола: $y = 9x^2$; $y = -9x^2$?

Упражнения

А

25.1. Принадлежит ли графику функции $y = 3x^2$ точка:

1) $A(1;\ 3)$; 2) $B\ (0{,}5;\ 0{,}75)$; 3) $C(-2;\ 8)$;

4) $M(-4;\ 48)$; 5) $P\ (-1;\ 3{,}5)$; 6) $K(\pi;\ 3\pi^2)$?

25.2. Постройте график функции $y = -3x^2$. По графику найдите и запишите промежутки возрастания и убывания функции.

25.3. Постройте в одной координатной плоскости графики функций:

1) $y = 4x^2$ и $y = \frac{1}{4}x^2$;

2) $y = -x^2$ и $y = \frac{1}{3}x^2$;

3) $y = 2x^2$ и $y = 5x^2$.

25.4. С помощью графика функции $y = 0,4x^2$ сравните значения выражений:

1) $0,4 \cdot 3^4$ и $0,4 \cdot 4^4$; 2) $0,4 \cdot (-2)^2$ и $0,4 \cdot (-3)^2$.

B

25.5. Используя графики функций, найдите число корней уравнения:

1) $x^2 + 4 = 0$; 2) $4x^2 - 3 = 5$;

3) $5 - 0,4x^2 = 2$; 4) $-2^3 + 3^2x^2 = 4$.

25.6. Пересекаются ли графики функций $y = 3x^2$ и $y = 5 - 2x$?

25.7. Найдите графическим способом приближенные значения корней уравнения $2x^2 = 3x + 1$.

25.8. Является ли функция $y = -\frac{1}{3}x^2$ возрастающей (убывающей) на промежутке:

1) [1; 4]; 2) [–4; –2]; 3) [0; 14]?

C

25.9. а) Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = 5x^2$ на промежутке:

1) [0; 5]; 2) [–1; 2];

3) [–5; –4]; 4) [0,4; 2,6].

б) Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = -0,5x^2$ на промежутке:

1) [–2; 0]; 2) [–3; 3];

3) [–5; –4]; 4) [0; 6].

25.10. Могут ли пересекаться графики функций $y = ax^2$ и $y = ax - 5$?

Подготовьте сообщение

25.11. Как появился термин "парабола"?

25.12. Расскажите о свойстве параболы, применяемом на практике. На рисунке 25.4 изображен параболоид. Как он получается и где используется?

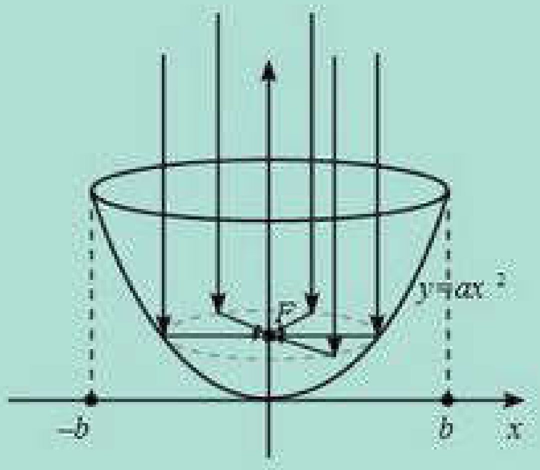


Рис. 25.4

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

25.13. Установите соответствие (табл. 25.4).

Таблица 25.4

Числовой промежуток:	Изображение, обозначение:
1) открытый числовой луч;	A. $[a; b)$
2) числовая прямая;	B. $(a; b)$
3) числовой луч;	C. $(a; +\infty)$
4) числовой интервал;	D. $(-\infty; b]$
5) числовой полуинтервал.	E. $(-\infty; +\infty)$
	F. $[a; b]$

§ 26. ФУНКЦИЯ $y = ax^3$, ЕЕ СВОЙСТВА И ГРАФИК

Какими свойствами обладает функция $y = ax^3$ $(a \neq 0)$ и как построить ее график?

Рассмотрим свойства функции $y = ax^3$, где $a \neq 0$.

1) областью определения функции $y = ax^3$ является множество чисел числовой прямой $(-\infty; +\infty)$. Объясните, почему.

Символически записывают: $D(y) = (-\infty; +\infty)$, или $D(ax^3) = (-\infty; +\infty)$, или $D(y) = R$, или $D(ax^3) = R$.

2) Найдем множество значений функции $y = ax^3$:

— если число a — положительное $(a > 0)$ и при этом:

— переменная x принимает отрицательные значения, то множеством значений функции $y = ax^3$ является открытый числовой луч $(-\infty; 0)$;

— переменная x принимает положительные значения, то множеством значений функции $y = ax^3$ является открытый числовой луч $(0; +\infty)$;

— переменная x принимает значение, равное нулю, то значением функции $y = ax^3$ будет число нуль.

Следовательно, при $a > 0$ множеством значений функции $y = ax^3$ является множество чисел числовой прямой $(-\infty; +\infty)$.

Объясните

Почему при $a < 0$ множеством значений функции $y=ax^3$ является множество чисел числовой прямой $(-\infty; +\infty)$?

Множеством значений функции $y = ax^3$, где $a \neq 0$, является множество чисел числовой прямой $(-\infty; +\infty)$.

Символически записывают: $E(y) = (-\infty; +\infty)$, или $E(ax^3) = (-\infty; +\infty)$, или $E(y) = R$, или $E(ax^3) = R$.

Из первого и второго свойств функции $y = ax^3$ следует, что ее график расположен:

— в I и III координатной четвертях при $a > 0$,

— в II и IV координатной четвертях при $a < 0$.

3) Найдем промежутки знакопостоянства функции.

Из первого и второго свойств функции $y = ax^3$ следует, что она принимает:

при $a > 0$ — положительные значения на $(0; +\infty)$; отрицательные значения — на $(-\infty; 0)$.

при $a < 0$ — положительные значения на $(-\infty; 0)$; отрицательные значения — на $(-0; +\infty)$.

4) Найдем нули функции. Значение функции $y = ax^3$ равно нулю при $x = 0$.

Действительно, если $y = 0$, то получим $ax^3 = 0$. Поскольку $a \neq 0$, то $x^3 = 0$, или $x \cdot x \cdot x = 0$. Значение произведения равно нулю, когда хотя бы один из множителей равен нулю. Значит, $x = 0$.

Для построения графика функции $y = x^3$ и $y = -x^3$ составим таблицу 26.1.

Таблица 26.1

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$y = x^3$	-8	-1	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	1	8
$y = -x^3$	8	1	$\frac{1}{8}$	0	$-\frac{1}{8}$	-1	-8

Если построить другие точки, принадлежащие графику функции $y = x^3$ или $y = -x^3$, то увидим, что они расположены на линии, которая плавно соединяет точки, построенные с помощью таблицы.

Графики функций $y = x^3$, $y = -x^3$ называют *кубическими параболами* (рис. 26.1, 26.2).

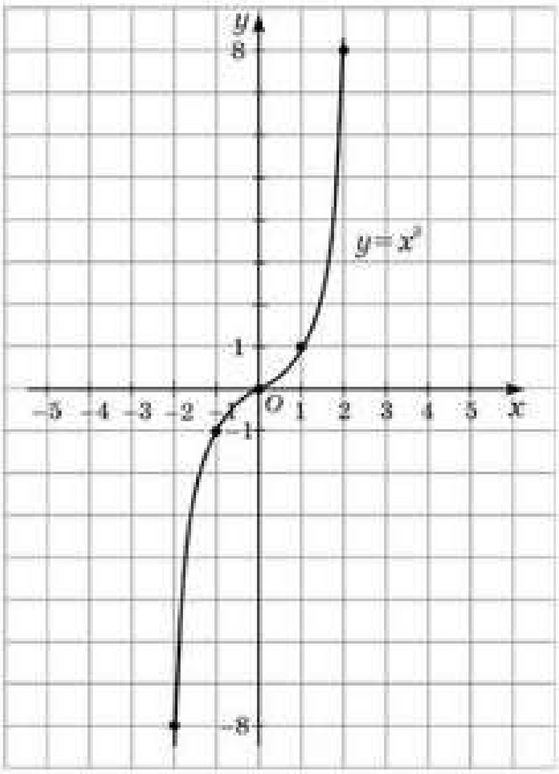


Рис. 26.1

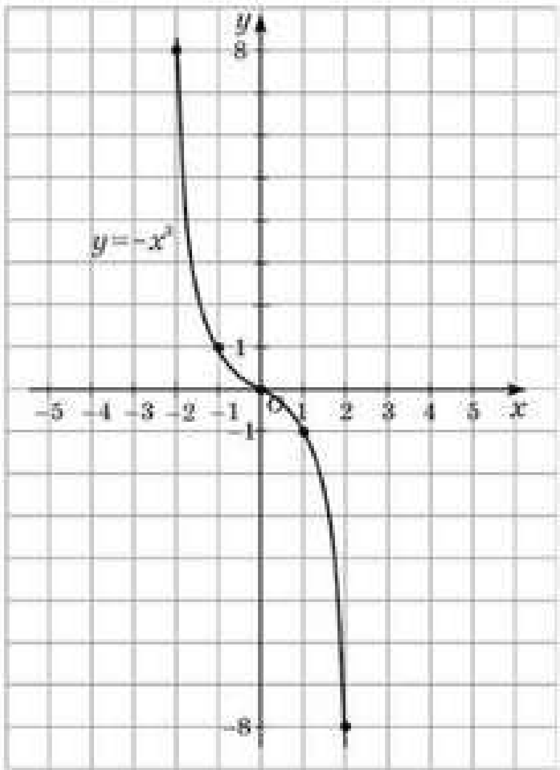


Рис. 26.2

Для построения графиков функций $y = 2x^3$ и $y = -2x^3$ составим таблицу 26.2.

Таблица 26.2

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$y = 2x^3$	-16	-2	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	2	16
$y = -2x^3$	16	2	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	-2	-16

Заполните таблицу 26.3. При одних и тех же значениях аргумента сравните соответствующие значения функций: 1) $y = 2x^3$ и $y = x^3$; 2) $y = \frac{1}{2}x^3$ и $y = x^3$.

Таблица 26.3

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	-0	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$y = 2x^3$									
$y = x^3$									
$y = \frac{1}{2}x^3$									

Графики всех этих функций $y = x^3$, $y = \frac{1}{2}x^3$ и $y = 2x^3$ называют *кубическими параболами* .

Для краткости вместо предложения “построить кубическую параболу, которая является графиком функции $y = x^3$”, говорят: “построить кубическую параболу $y = x^3$”.

В одной и той же системе координат постройте кубические параболы, которые являются графиками функций: $y = -x^3$, $y = -\frac{1}{2}x^3$ и $y = -2x^3$.

1. Как из кубической параболы $y = x^3$ получить кубическую параболу: $y = 7x^3$; $y = \frac{1}{7}x^3$?
2. Как относительно друг друга расположены кубические параболы $y = 5x^3$ и $y = -5x^3$?

3. Объясните, почему начало координат является центром симметрии кубической параболы вида $y = ax^3$.
4. В каких координатных четвертях расположена кубическая парабола: $y = 7x^3$; $y = -7x^3$?

Упражнения

А

26.1. Принадлежит ли графику функции $y = x^3$ точка:

1) $A(2;\ 16)$; 2) $B(-1;\ -1)$;
3) $C(3;\ 54)$; 4) $D(-2;\ -8)$;
5) $M(-0{,}2;\ -0{,}008)$; 6) $R(-3;\ 27)$;
7) $P(0{,}3;\ 1{,}27)$; 8) $X(-5;\ -125)$?

26.2. Постройте график функции $y = 0{,}5x^3$. По графику найдите:

1) значения y, соответствующие $x = -1{,}25;\ -0{,}75;\ 2{,}5;\ 4$;
2) значения x, которым соответствует $y = -3;\ -1;\ 4;\ 4{,}8$.

26.3. Постройте в одной координатной плоскости графики функций:

1) $y = x^3$, $y = 5x^3$, $y = \frac{1}{4}x^3$, $y = 4x^3$;
2) $y = -5x^3$, $y = -\frac{1}{4}x^3$; $y = -4x^3$; $y = -\frac{1}{2}x^3$.

В

26.4. С помощью графика функции $y = x^3$ сравните числа:

1) $(-3)^3$ и $(-2)^3$; 2) $(-1{,}2)^3$ и $0{,}2^3$;
3) $4{,}4^3$ и $5{,}02^3$; 4) 0 и $(-2)^3$.

26.5. Имеет ли корни уравнение:

1) $x^3 = 2x + 1$; 2) $2x^3 = -3x$;
3) $0{,}4x + 2 = x^3$; 4) $-1{,}2x - 1 = x^3$?

26.6. Решите уравнение:

1) $x^3 = -8$; 2) $x^3 = 125$;
3) $2x^3 = -54$; 4) $-0{,}5x^3 = -4$.

26.7. Пересекаются ли графики функций $y = -0{,}4x^3$ и $y = -0{,}3x + 5$?

26.8. Найдите графическим способом приближенные значения корней уравнения:

1) $-0{,}3x^3 = -4$; 2) $-0{,}3x^3 = 5$; 3) $-0{,}3x^3 = 1{,}4$.

C

26.9. Сколько точек пересечения имеют графики функций $y = ax^2$ и $y = bx^3$, если:

1) $a = 3$, $b = 2$;
2) $a = -3$, $b = 0,2$;
3) $a = 0,2$, $b = -0,2$;
4) $a = -4$, $b = -2$?

26.10. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2x^3$ на промежутке:

1) $[-2; 5]$;
2) $[-1; -0,5]$;
3) $[-3; 3,5]$.

26.11*. Постройте график уравнения:

1) $\dfrac{y - x^2}{x - 3} = 0$;
2) $\dfrac{2y - x^2}{4 - x^2} = 0$;
3) $\dfrac{y - x^2}{x - 3} = 0$;
4) $\dfrac{y - 0,25x^2}{4 - y} = 0$.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

26.12. Какие из перечисленных функций: $y = -3x$; $y = 2x - 1$; $y = 3 - \dfrac{x}{3}$; $y = 0,5x + 1$ являются:

1) возрастающими; 2) убывающими?

26.13. В каких четвертях расположены графики функций:

1) $y = -0,2x^2$; 2) $y = 5x^2$; 3) $y = -2x^3$?

§ 27. ФУНКЦИЯ $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$, ЕЕ СВОЙСТВА И ГРАФИК

Какими свойствами обладает функция $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ и как построить ее график?

Рассмотрим свойства функции $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$.

1) Областью определения функции $y = \frac{k}{x}$ является множество всех чисел, кроме нуля: $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Объясните, почему.

Символически записывают: $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, или $D(\frac{k}{x}$, $(k \neq 0)) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

2) Найдем множество значений функции $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$:

— если число k — положительное $(k > 0)$ и при этом:

— переменная x принимает отрицательные значения, то множеством значений функции $y = \frac{k}{x}$ является числовой луч $(-\infty; 0)$;

— переменная x принимает положительные значения, то множеством значений функции $y = \frac{k}{x}$ является числовой луч $(0; +\infty)$;

— переменная x принимает значение, равное нулю, то значение функций $y = \frac{k}{x}$ не существует.

Следовательно, при $k > 0$ множеством значений функции $y = \frac{k}{x}$ является множество чисел $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Объясните

Почему при $k < 0$ множеством значений функции $y = \frac{k}{x}$ является множество чисел $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$?

Множеством значений функции $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, является множество чисел $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Символически записывают: $E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, или $E(\frac{k}{x}) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Из 1) и 2) свойств функции $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, следует, что ее график расположен:

— в I и III координатной четвертях при $k > 0$,
— во II и IV координатной четвертях при $k < 0$.

3) Найдем промежутки знакопостоянства функции.

Из 1) и 2) свойств функции $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$ следует, что она принимает:

при $k > 0$ — положительные значения на $(0; +\infty)$; отрицательные значения — на $(-\infty; 0)$.

при $k < 0$ — положительные значения на $(-\infty; 0)$; отрицательные значения — на $(0; +\infty)$.

4) Найдем нули функции.

Объясните

Почему значение функции $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, не может быть равно нулю?

Функция $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, не имеет нулей. Это означает, что график этой функции не пересекает оси Ox.

5) Найдем промежутки возрастания и убывания функции.

Пусть $x_1 > x_2$. Сравним y_1 и y_2. Для этого найдем значение разности $y_1 - y_2$.

$y_1 - y_2 = \frac{k}{x_1} - \frac{k}{x_2}$ — по формуле функции $y = \frac{k}{x}$;

$\frac{k}{x_1} - \frac{k}{x_2} = k \cdot \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right)$ — вынесли общий множитель k за скобки;

$k \cdot \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right) = k \cdot \left(\frac{x_2 - x_1}{x_1 \cdot x_2}\right)$ — привели дроби к общему знаменателю.

Поскольку k может принимать как положительные, так и отрицательные значения, то рассмотрим два случая: а) если $k < 0$, б) если $k > 0$, при этом будем учитывать, что по допущению $x_1 > x_2$, значит, $x_1 - x_2 > 0$, или $x_2 - x_1 < 0$. Тогда в произведении $k \cdot \left(\frac{x_2 - x_1}{x_1 \cdot x_2}\right)$

числитель дроби принимает отрицательные значения, а знаменатель — положительные, отдельно на промежутке $(-\infty; 0)$ и на промежутке $(0; +\infty)$, так как при $x_1 > x_2 > 0$ и $x_2 < x_1 < 0$ значение произведения двух положительных чисел и двух отрицательных чисел есть число положительное. Поэтому, если:

а) $k < 0$, то $y_1 - y_2 = k \cdot \left(\frac{x_2 - x_1}{x_1 \cdot x_2}\right) > 0$. Это означает, что для всех значений переменной x из ее области определения, т. е. на числовых промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$ функция $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, возрастающая, так как большему значению аргумента x отдельно на каждом из этих промежутков соответствует большее значение функции y.

б) $k > 0$, то $y_1 - y_2 = k \cdot \left(\frac{x_2 - x_1}{x_1 \cdot x_2}\right) < 0$. Это означает, что для всех значений переменной x из ее области определения, т. е. на числовых промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$ функция $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, убывающая, так как большему значению аргумента x отдельно на каждом из этих промежутков соответствует меньшее значение функции y.

Для построения графика функции $y = \frac{1}{x}$ и $y = -\frac{1}{x}$ составим таблицу 27.1.

Таблица 27.1

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$y = \frac{1}{x}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	не сущ.	2	1	$\frac{1}{2}$
$y = -\frac{1}{x}$	$\frac{1}{2}$	1	2	не сущ.	-2	-1	$-\frac{1}{2}$

Если построить другие точки, принадлежащие графику функции $y = \frac{1}{x}$ или $y = -\frac{1}{x}$, то увидим, что они расположены на линии, которая плавно соединяет точки, построенные с помощью таблицы 27.1 (рис. 27.1, 27.2).

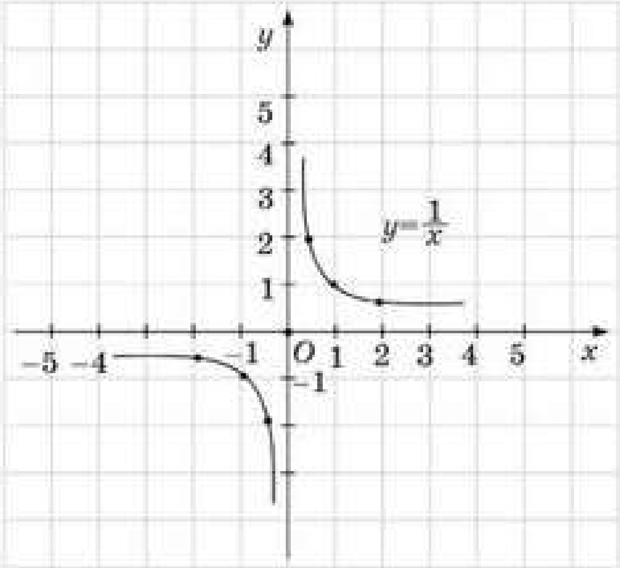


Рис. 27.1

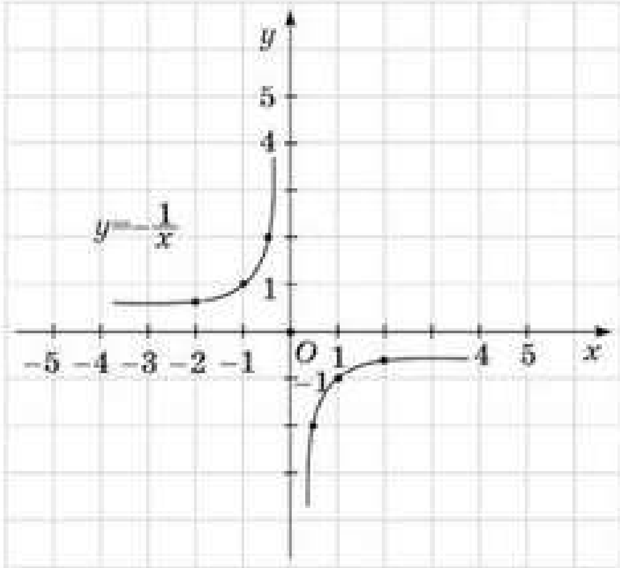


Рис. 27.2

Графики функций называют *гиперболами* (рис. 27.1, 27.2).

Заполните таблицу 27.2. При одних и тех же значениях аргумента сравните соответствующие значения функций: 1) $y = \frac{2}{x}$ и $y = \frac{1}{x}$; 2) $y = \frac{1}{2x}$ и $y = \frac{1}{x}$;

Таблица 27.2

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$y = \frac{2}{x}$									
$y = \frac{1}{x}$									
$y = \frac{1}{2x}$									

Графики всех этих функций $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{2}{x}$ и $y = \frac{1}{2x}$ называют *гиперболами* .

Для краткости вместо предложения "построить гиперболу, которая является графиком функции $y = \frac{1}{x}$", говорят: "построить гиперболу $y = \frac{1}{x}$".

В одной и той же системе координат постройте гиперболы, которые являются графиками функций: $y = -\frac{1}{x}$, $y = -\frac{1}{2x}$ и $y = -\frac{2}{x}$.

1. Как из гиперболы $y = \frac{1}{x}$ получить гиперболы: $y = -7 \cdot \frac{1}{x}$; $y = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{x}$?
2. Как относительно друг друга расположены гиперболы $y = \frac{k}{x}$ и $y = -\frac{k}{x}$?
3. Объясните, почему начало координат является центром симметрии гиперболы вида $y = \frac{k}{x}$.
4. В каких координатных четвертях расположена гипербола: $y = \frac{11}{x}$, $y = -\frac{11}{x}$?

Упражнения

А

27.1. Принадлежит ли графику функции $y = \frac{1}{x}$ точка:

1) $A(2;\ 0{,}5)$; 2) $B(-3;\ 4{,}3)$;

3) $C(-10;\ -0{,}1)$; 4) $M(-0{,}2;\ -5)$?

27.2. Постройте график функции $y = \frac{3}{x}$. По графику найдите:

1) значение функции, соответствующее значению аргумента $x = -3;\ -0{,}6;\ 5;\ 30$;

2) значение аргумента x, которому соответствует значение функции $y = -2;\ -1{,}5;\ 0{,}5;\ 2{,}5;\ 4$;

3) $f(0{,}5) + f(3)$; $f(1) - f(-1{,}5)$; $f(2) - 2f(3)$; $f(-0{,}3) + 3f(1{,}5)$, если $y = f(x)$.

27.3. Постройте в одной координатной плоскости графики функций:

$y = \frac{2}{x}$; $y = \frac{4}{x}$; $y = -\frac{2}{x}$; $y = -\frac{4}{x}$; $y = \frac{0{,}5}{x}$.

27.4. Функция задана формулой: $y = -\frac{5}{x}$. Заполните таблицу 27.3.

Таблица 27.3

x	-5	-2	-1	1	2	5
y						

B

27.5. Имеет ли корни уравнение:

1) $-\frac{5}{x}=3x+2$; 2) $-\frac{2,5}{x}=5$; 3) $\frac{4}{x}=-x$; 4) $\frac{6}{x}=4x-3$?

27.6. Решите уравнение графическим способом:

1) $4=-\frac{2}{x}$; 2) $3=\frac{4}{x}$; 3) $x=-\frac{2}{x}$; 4) $2x=-\frac{5}{x}$;

5) $x^2=\frac{1}{x}$; 6) $x^3=-x^2$; 7) $x^2=x+2$; 8) $0,25\,x^2=\frac{2}{x}$.

27.7. Пересекается ли график функции $f(x)=-\frac{5}{x}$ с графиком функции:

1) $y=-x+3$; 2) $y=2x$; 3) $y=x+1$; 4) $y=-3x-3,5$;
5) $y=-x^2$; 6) $y=-0,5\ x^3$; 7) $y=\frac{1}{3}x^2$; 8) $y=|x|$?

C

27.8*. Могут ли графики функций $y=\frac{4}{x}$ и $y=ax+b$ пересекаться:
1) только в одной точке;
2) только в двух точках;
3) в трех точках?

27.9. Постройте график функции:

1) $y=\frac{2}{x}$; 2) $y=-\frac{2}{x}$;

3) $y=-\frac{1}{|-x|}$; 4) $y=\frac{-0,2}{|x|}$.

27.10*. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=\frac{2}{|x|}$ на промежутке:

1) [2,4; 5]; 2) [–2,4; –1]; 3) [–3,5; –0,5]; 4) [4; 12].

27.11. График функции $y=\frac{k}{x}$ проходит через точку $M(-4;\ 2)$. Проходит ли график этой функции через точку:

1) $A(-1;\ 8)$; 2) $B\ (3;\ -9)$; 3) $C\ (0,5;\ -16)$; 4) $K\ (-3;\ 2\frac{2}{3})$?

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

27.12. Стоимость игрушек в отделе "Детский мир" представлена в следующей последовательности: 480 тг; 780 тг; 250 тг; 420 тг; 420 тг; 180 тг; 250 тг; 480 тг; 480 тг; 680 тг; 250 тг; 380 тг; 540 тг; 125 тг; 430 тг; 450 тг; 380 тг; 680 тг; 990 тг; 420 тг; 690 тг; 450 тг; 360 тг; 1200 тг; 850 тг; 800 тг; 1150 тг; 250 тг.

1) Найдите число игрушек, стоимость которых составляет от 300 тг до 700 тг.

2) Найдите число игрушек, стоимость которых превышает 600 тг.

3) Найдите число игрушек, стоимость которых не превышает 600 тг.

27.13. Заданную последовательность температуры воздуха –12°C; –10°C; –9°C; –12°C; –11°C; –10°C; –9°C; –8°C; –9°C; –12°C; –11°C; –10°C; –10°C; –9°C; –8°C запишите: 1) в порядке убывания; 2) в порядке возрастания.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Какая точка не принадлежит графику функции $y = 2x^2$:
A. (0; 0); B. (1; 2); C. (–1; 2); D. (–1; –2)?

2. Вычислите значение функции $y = -3x^3$ при $x = -2$:
A. –24; B. 18; C. 24; D. –18.

3. При $x = -3$ значение функции $y = ax^2$ равно –9. Найдите значение a:

A. 1; B. –1; C. $\frac{1}{3}$; D. $-\frac{1}{3}$.

4. Какая точка принадлежит графику функции $y = -\frac{5}{x}$:

A. (1; 5); B. (–2; 10); C. $\left(\frac{1}{5};-25\right)$; D. (2; 2,5)?

5. Укажите множество значений x, при которых функция $y = -\frac{14}{x}$ возрастает:

A. $(0; +\infty)$; B. $(-\infty; 0)$; C. R; D. $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

6. Выразите формулой обратную пропорциональность, зная, что ее график проходит через точку $A(-2; -4,5)$:

A. $y = -\frac{9}{x}$; B. $y = \frac{9}{x}$; C. $y = -\frac{14}{x}$; D. $y = -\frac{2}{9x}$.

7. Укажите множество значений x, при которых функция $y = \frac{20}{x}$ положительна:
A. $(0; +\infty)$; B. $(-\infty; 0)$; C. R; D. $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

8. Сколько точек пересечения имеют графики функций $y = x^2$ и $y = x^3$:
A. Две точки; B. Одну точку;
C. Не имеют общих точек; D. Три точки?

9. Какие из точек принадлежат графику функции $y = -x^3$:
A. (1; 1), (–1; –1); B. (1; –1), (–1; –1);
C. (–1; 1), (1; –1); D. (1; 1), (0; 0)?

10. Сколько точек пересечений имеют графики функций $y = 3x^3$ и $y = \frac{3}{x}$:

A. Не имеют общих точек; B. Одну точку;
C. Две точки; D. Три точки?

ГЛАВА 4

ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИКИ

Математическая статистика — раздел математики, посвященный математическим методам систематизации, обработки и исследования результатов наблюдений для научных и практических выводов.

§ 28. ВАРИАЦИОННЫЕ РЯДЫ

Что такое *генеральная совокупность, случайная выборка, вариационный ряд, варианта*?

Выводы, обобщения, как в науке, так и на практике, ценны лишь тогда, когда они обоснованы фактами.

Всякое исследование начинается со сбора фактов, наблюдения. Обработать и систематизировать эти факты нам помогут статистические понятия: *генеральная совокупность*, *случайная выборка*, *вариационный ряд, варианта*.

Генеральной совокупностью (в англ. — *population*) называется множество всех объектов или явлений, имеющих общую характеристику, которые подлежат изучению.

Генеральная совокупность зависит от тех целей, которые ставятся перед исследованием. *Например*, если нас интересует исследование размеров листьев дуба, то генеральной совокупностью будет воображаемое множество всех листьев дуба; в исследовании температуры воздуха в осенние месяцы — все показатели температуры воздуха, которые наблюдались в осенние месяцы; в исследовании роста семиклассников — показатели роста всех детей этого возраста.

Из каких объектов может состоять генеральная совокупность?

Элементами генеральной совокупности могут быть объекты любой природы: неодушевленные предметы, живые люди, природные явления и т. д.

Если из генеральной совокупности отобрать произвольным образом некоторые его элементы (объекты), то полученная совокупность называется *случайной выборкой*.

Например, в исследовании роста детей 13 лет случайной выборкой будут дети 13 лет, которые учатся в вашей школе (рис. 28.1).

Генеральная совокупность: все дети 13 лет

Случайная выборка: дети 13 лет, отобранные из генеральной совокупности

Рис. 28.1

Вариационным рядом называется упорядоченная по невозрастанию или неубыванию последовательность объектов совокупности.

1. В последовательности −3°, 0°, −3°, −6°, −7°, −12°, −11°, 0°, 0°, −7°, −9°, −10°, −12°, −10° записана температура воздуха, которая была с 5 по 18 ноября. Почему эта последовательность не является вариационным рядом?

2. Являются ли вариационными рядами приведенные ниже последовательности:
−12°, −12°, −11°, −10°, −10°, −9°, −7°, −7°, −6°, −3°, −3°, 0°, 0°, 0°;
0°, 0°, 0°, −3°, −3°, −6°, −7°, −7°, −9°, −10°, −10°, −11°, −12°, −12°?

Каждый член вариационного ряда называется *вариантой*.

Каковы преимущества вариационного ряда перед последовательностью, произвольно фиксирующей результаты наблюдений (исходы)?

С помощью вариационного ряда можно сразу указать наименьшее и наибольшее значения ряда; значения, которые повторяются чаще других и т. д. Но при большом количестве вариантов выборки и вариационный ряд — не самая удобная форма представления полученной информации.

1. Приведите пример генеральной совокупности и случайной выборки.
2. Является ли вариационным рядом последовательность 1 149 641, 1 175 208, 1 209 485, 1 247 896, 1 287 246, 1 324 739, 1 365 105, которая показывает численность населения (количество человек), проживающего в г. Алматы на начало года, в период с 2003 г. по 2009 г.?

Упражнения

A

28.1. Из перечисленных последовательностей укажите вариационные ряды:
1) 1, 12, 13, 15, 16, 21, 22, 24, 26;
2) –17, –15, –13, –11, –10, –9, –8, –5, –4;
3) 111, 112, 113, 125, 126, 121, 122, 124, 126;
4) 101, 102, 103, 105, 216, 221, 222, 224, 326, 334, 339.

28.2. Запишите рост каждого учащегося класса согласно списку. Будут ли записанные значения роста учащихся вариационным рядом? Обоснуйте ответ.

28.3. Температура воздуха днем в г. Астане в период с 9 ноября до 19 ноября 2016 г. представлена в виде ряда:
–2 °, –6 °, –2 °, –3 °, –13 °, –14 °, –10 °, –5 °, –3 °, –7 °.
Является ли данный ряд вариационным? Обоснуйте ответ.

28.4. Является ли данная последовательность 1, 1, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 8, 9, 9, 11, 11, 12, 12 вариационным рядом? Запишите варианту, которая повторяется наибольшее число раз. Запишите варианту, которая повторяется наименьшее число раз. Запишите наибольшее и наименьшее значения варианты.

B

28.5. Назовите генеральную совокупность для выборки.
Составьте вариационный ряд масс животных, приведенный в таблице 28.1.

Таблица 28.1

Медведь	Волк	Лисица	Заяц	Косуля	Лось	Кабан
60 кг	50 кг	5 кг	3, 5 кг	25 кг	45 кг	36 кг

28.6. Приведите пример выборки из генеральной совокупности количества учащихся 7 и 8 классов вашей школы, занимающихся спортом.

Таблица 28.2

	Волейбол	Баскетбол	Плавание	Легкая атлетика	Теннис	Футбол	Гимнастика	Борьба
7 класс								
8 класс								

1. Составьте вариационный ряд из данной генеральной совокупности.
2. Запишите наибольшее и наименьшее значения варианты.

C

Подготовьте сообщение

28.7. Расскажите о Готфриде Ахенвалле (1719—1772), который ввел в науку термин “статистика”.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

28.8. Заполните таблицу 28.3.

Таблица 28.3

Значение x	-1	1			4	5		
$y = 2x - 1$				5				
$y = x^2$								49
$y = \frac{2}{x}$			1				$\frac{1}{3}$	

§ 29. АБСОЛЮТНАЯ ЧАСТОТА И ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ЧАСТОТА. ТАБЛИЦА ЧАСТОТ

Как вычислить абсолютную и относительную частоты варианты и представить выборку в виде таблицы частот?

В вариационном ряду некоторые варианты повторяются по несколько раз: –12°, –12°, –11°, –10°, –10°, –9°, –7°, –7°, –6°, –3°, –3°, 0°, 0°, 0°. В таких случаях результаты наблюдений (исходов) удобно представлять в виде таблицы 29.1, в которой указываются только разные варианты и их число.

Таблица 29.1

Варианты (исходы)	–12°	–11°	–10°	–9°	–7°	–6°	–3°	0°
Абсолютная частота варианты	2	1	2	1	2	1	2	3

Абсолютной частотой варианты называется число, которое показывает, сколько раз наблюдалась соответствующая варианта.

Почему абсолютная частота варианты –7° равна двум, а варианты 0° — трем?

В нашем примере всего было 14 наблюдений (исходов). Если абсолютную частоту варианты разделить на общее число наблюдений (исходов), то получим относительную частоту варианты.

Таблица 29.2

Варианты (исходы)	–12°	–11°	–10°	–9°	–7°	–6°	–3°	0°
Абсолютная частота варианты	2	1	2	1	2	1	2	3
Относительная частота варианты	$\frac{1}{7} \approx 0{,}14$	$\frac{1}{14} \approx 0{,}07$	$\frac{1}{7} \approx 0{,}14$	$\frac{1}{14} \approx 0{,}07$	$\frac{1}{7} \approx 0{,}14$	$\frac{1}{14} \approx 0{,}07$	$\frac{1}{7} \approx 0{,}14$	$\frac{3}{14} \approx 0{,}21$

Относительную частоту варианты иногда записывают в процентах.

Мы представили статистические данные в виде таблицы частот.

Как проверить данные таблицы на непротиворечивость? Вычислите значение суммы абсолютных частот варианты и значение суммы относительных частот. Сформулируйте вывод.

Свойства таблицы частот:

1) значение суммы абсолютных частот варианты равно общему числу наблюдений (исходов);
2) значение суммы относительных частот равно 1.

1. Какие данные нужны для вычисления абсолютной и относительной частоты варианты?
2. Найдите абсолютную и относительную частоту варианты, используя исходы: 20, 20, 30, 10, 10, 20, 30, 20, 30, 20.

Упражнения

А

29.1. В таблице 29.3 даны значения средней температуры воздуха в Северо-Казахстанской области в течение июля 2016 г.

Таблица 29.3

Варианты (исходы)	x	29°	27°	26°	25°	24°	22°	21°	20°
Абсолютная частота варианты	n	4	4	5	6	4	4	2	1
Относительная частота варианты	W								

Заполните таблицу, найдя относительную частоту W с точностью до 0,01. Какая варианта появляется чаще всего?
Придумайте какие-нибудь вопросы, на которые, на ваш взгляд, можно найти ответы с помощью этой таблицы.

29.2. Дан статистический ряд — 2 2 3 3 3 3 4 2 3 3 2 3 2 3 2 3 2 4 3 2 2 3 2 4 5 2 3 3 2 4 3 2 3 4 3 3 2 3 5 3. Получите по нему вариационный ряд. Найдите по вариационному ряду абсолютную и относительную частоту появления варианты “3”, “4”.

29.3. Соберите сведения о последних четвертных оценках своих одноклассников по алгебре, геометрии, казахскому языку и физике. Ранжируйте каждое из этих сведений в вариационные ряды. Найдите минимальную, максимальную и наиболее популярную оценку по каждому из этих предметов.

B

29.4. Проведите в своей школе опрос о любимых школьных предметах. Составьте на его основе рейтинг школьных предметов. Выясните, наблюдается ли зависимость этого рейтинга от возраста школьников?

29.5. За I четверть домашнее задание по алгебре было задано 24 раза.

1) Ученик восемь раз выполнил домашнее задание на оценку “5”. Какова абсолютная частота выполнения домашнего задания на оценку “5” у ученика за четверть?

2) Ученик 12 раз выполнил домашнее задание на оценку “4”. Какова абсолютная частота выполнения домашнего задания на оценку “4” у ученика за четверть?

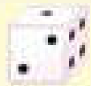
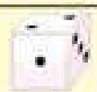
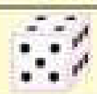
3) Ученик 13 раз выполнил домашнее задание на оценку “4”. Какова абсолютная частота выполнения домашнего задания на оценку, отличную от “4”?

C

29.6. Проведите 30 экспериментов по выбрасыванию игрального кубика из закрытого сосуда — стаканчика.

1. Полученные результаты выпадения очков оформите в виде таблицы 29.4.

Таблица 29.4

Исход	№ протокола										Абсолютная частота	Относительная частота
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
												
												
												
												
												
												
							Значение суммы					

Статистика

2. Найдите абсолютную и относительную частоты для каждого исхода.
3. Подсчитайте, чему равно значение суммы абсолютных частот и чему равно значение суммы относительных частот.
Сделайте вывод.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

29.7. На координатной плоскости отметьте точки с координатами $A(0; 1)$; $B(2; 3)$, $C(4; 3)$, $M(6; 4)$. Соедините эти точки отрезками. Сведите все результаты, полученные в классе, в одну общую таблицу.

§ 30. ПОЛИГОН ЧАСТОТ

Как представить результаты выборки в виде полигона частот?

Представим результаты наблюдений графически.

Объясните по рисунку 30.1 как, используя таблицу абсолютных частот варианты 29.2, построили ломаную линию.

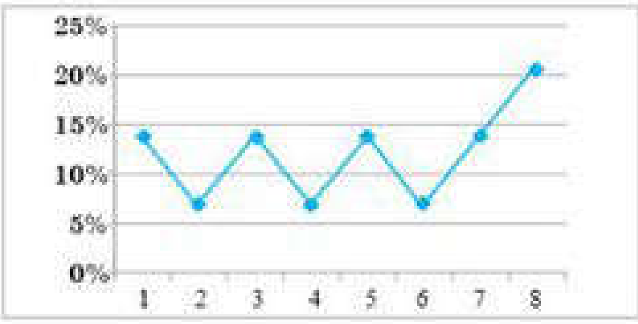


Рис. 30.1

Эту ломаную линию называют *полигоном абсолютных частот* .

Полигоном абсолютных частот называется ломаная линия, звенья которой соединяют точки, абсциссы которых различные варианты, а ординаты — абсолютные частоты этих вариант.

Алгоритм построения полигона абсолютных частот:

1. Отложить варианты x на оси Ox.
2. Отложить частоты n на оси Oy.
3. Построить точки с координатами $(x; n)$.
4. Соединить построенные точки отрезками.

Как построили полигон относительных частот на рисунке 30.2, используя данные таблицы 29.2?

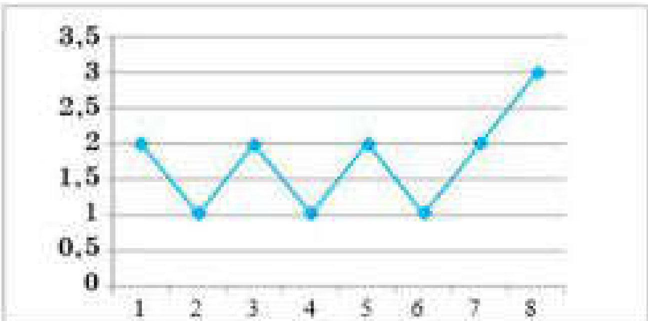


Рис. 30.2

Полигоном относительных частот называется ломаная линия, звенья которой соединяют точки, абсциссы которых различные варианты, ординаты — относительные частоты этих вариант.

Алгоритм построения полигона относительных частот:

1. Отложить варианты x на оси Ox.
2. Отложить частоты W на оси Oy.
3. Построить точки с координатами (x, W).
4. Соединить построенные точки отрезками.

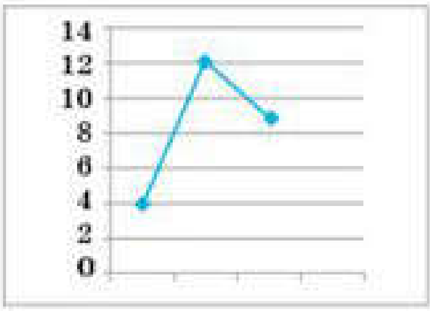
В таблице 30.1 частот содержится информация об оценках, полученных учащимися класса за контрольную работу.

Таблица 30.1

Варианты (исходы)	x	3	4	5
Абсолютная частота варианты	n	4	12	9
Относительная частота варианты	W	16%	48%	36%

Частота варианты показывает: отметку "3" за контрольную работу получили 4 учащихся, что составило 16 % учащихся класса, отметку "4" — 12 учащихся (48 %), а "5" — 9 учащихся (36 %).

Эту же информацию можно получить из полигона частот (рисунок 30.3).



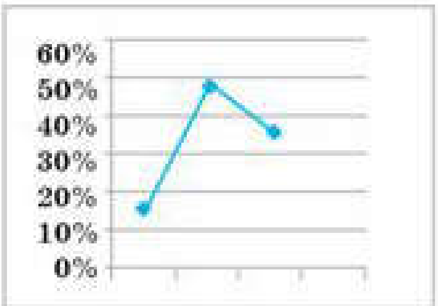


Рис. 30.3

Укажите номер правильного ответа:

1. Полигон частот представляет собой линию:
   1) прямую, 2) ломаную, 3) кривую.
2. Полигон частот представляет информацию в виде:
   1) таблицы, 2) графика.
3. Варианты отмечают на оси:
   1) абсцисс, 2) ординат.
4. Частоты отмечают на оси:
   1) абсцисс, 2) ординат.

Упражнения

А

30.1. Найдите среднее арифметическое ряда чисел, его моду и размах: 13; 15; 13; 12; 12; 12; 13; 14; 13; 15; 13; 12; 12.

1) Составьте для этих статистических данных вариационный ряд.

2) Найдите абсолютную и относительную частоту для значений варианты, входящих в этот ряд.

3) Представьте результаты выборки в виде полигона частот.

30.2. Придумайте задания из школьной жизни, составьте вариационный ряд, найдите абсолютную и относительную частоту, найдите значения их сумм. Представьте информацию в виде полигона частот.

30.3. Известна случайная выборка из 30 учащихся 8 класса с данными об их росте (в см): 166, 165, 163, 166, 168, 165, 168, 170, 165, 165, 165, 165, 164, 168, 165, 164, 161, 162, 164, 166, 165, 166, 167, 164, 163, 168, 167, 167, 165, 162. Составьте вариационный ряд данной выборки. Постройте по ней таблицу абсолютных и относительных частот и ответьте с ее помощью на вопросы:

1. Какой наименьший и наибольший рост учащихся?
2. Какой процент учащихся имеет рост 168 см?
3. Какой рост учащихся чаще всего встречался в выборке?

В

30.4. По полигону абсолютных частот набора игрушек разных цветов (рис. 30.4) найдите:

1) общее количество игрушек;

2) относительную частоту игрушек каждого цвета;

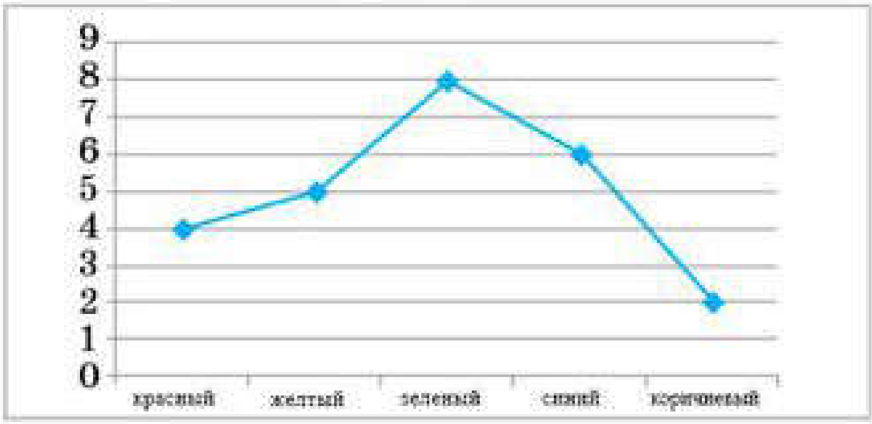


Рис. 30.4

3) игрушек какого цвета больше (меньше) игрушек других цветов.

30.5. Используя данные упражнения 30.4, составьте таблицу частот набора игрушек разных цветов.

C

30.6. Проведите 50 опытов с тремя игровыми кубиками. Экспортируйте результаты в *MS Excel* и найдите сумму очков в каждом опыте. Получите вариационный ряд и составьте для него таблицу частот. Оцените по полученной таблице, с какой частотой значение суммы будет равно 5; 10; 15.

30.7. Для контрольной работы учащимся предложили тест из 8 заданий. Количество верных ответов, полученных каждым учащимся из 48, представлено в таблице 30.2.

Таблица 30.2

Число верных ответов	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Абсолютная частота	0	0	0	1	5	14	16	6	6
Относительная частота									

1) Найдите пропущенное значение абсолютной частоты.
2) Найдите относительные частоты числа верных ответов и заполните таблицу.
3) Постройте полигоны абсолютных и относительных частот.

30.8. На полигоне частот (рис. 30.5) представлены данные о сотрудниках страховой компании по возрастным группам.

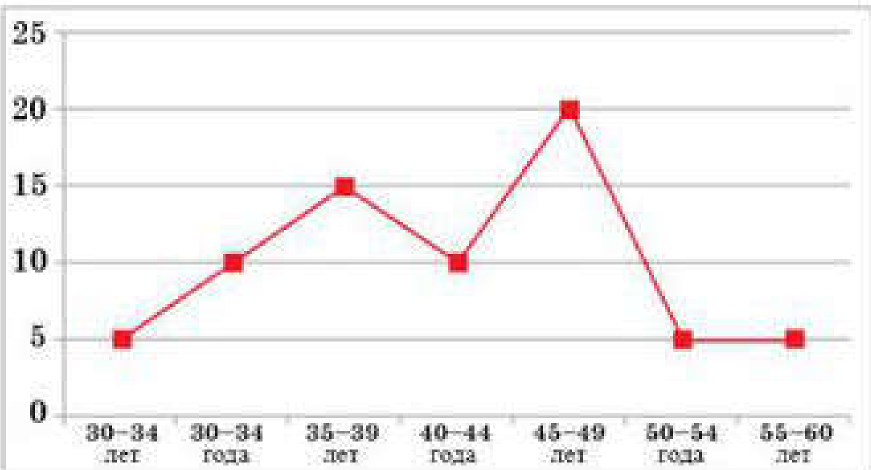


Рис. 30.5

1) Найдите относительную частоту (в %) возрастной категории сотрудников старше 39 лет.
2) Найдите относительную частоту (в %) возрастной категории сотрудников моложе 40 лет.

30.9. Если абсолютная частота верных ответов на тест из десяти заданий равна 24, а относительная частота верных ответов равна 30%, то сколько учащихся выполняли этот тест?

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

30.10. Выполните действия:
1) $2a^2 \cdot (a^2 - ab + b^2)$;
2) $a \cdot (a^2 - 2ab + b) - 2ab$;
3) $x^2 \cdot (a^2 - 3ax + x) + 3ax^2$.

30.11. Докажите тождество:
1) $a \cdot (a^2 - ab + b^2) + a^2b - ab^2 = a^3$;
2) $a \cdot (a + 2ax - x) - 2a^2x - a^2 + 1 = 1 - ax$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Разность между наибольшим и наименьшим значением варианты ряда +5°, 0°, 0°, + 4°, + 2°, + 5°, + 8°, + 7°, + 4°, + 1°, + 2°, 0° равна:

A. 8°; B. 9°; C. 10°; D. 7°.

2. Абсолютная частота варианты (–3°) ряда –2°, –2°, –1°, 0°, –3°, –2°, –2°, –5°, –6°, –3°, –3°, –2°, –3°, –5°, –4°, –6° равна:

A. 2; B. 3; C. 4; D. 5.

3. Относительная частота варианты (–2°) ряда –2°, –2°, –1°, 0°, –3°, –2°, –2°, –5°, – 6°, –3°, –3°, –2°, –3°, –5°, –4°, –6° равна:

A. 20%; B. 25%; C. 28%; D. 30%.

4. Абсолютная и относительная частота роста учащихся, чаще всего встречающаяся в выборке 163, 162, 163, 165, 162, 165, 166, 158, 160, 162, 165, 165, 164, 162, 160, 164, 161, 162, 164, 162, 165, 162, 160, 162, 163, равна:

A. 7; 28%; B. 6; 32%; C. 8; 30%; D. 8; 32% .

5. Относительная частота возрастной категории сотрудников старше 44 лет, представленных на полигоне частот (рисунок 30.6), равна:

A. 24%; B. 30%; C. 37%; D. 40%.

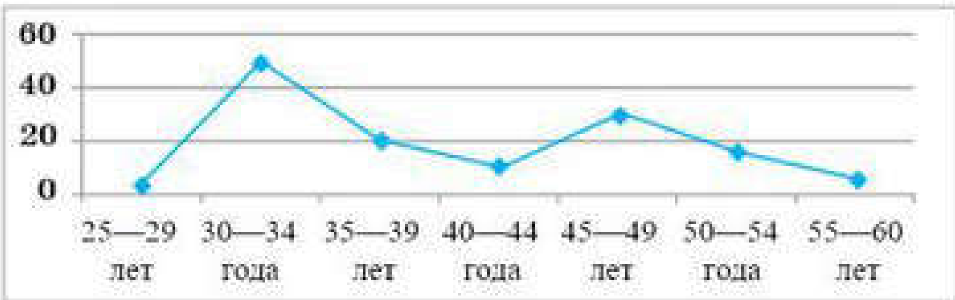


Рис. 30.6

6. Если в таблице 30.3 представлены относительные частоты верных ответов на тест из десяти заданий, то пропущенное значение относительной частоты равно:

A. 19%; B. 20%; C. 24%; D. 25%.

Таблица 30.3

Число верных ответов	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Относительная частота (%)	1	2	6	8	12	…	22	15	12	4	1

ГЛАВА 5

ФОРМУЛЫ СОКРАЩЕННОГО УМНОЖЕНИЯ

§ 31. ФОРМУЛА РАЗНОСТИ КВАДРАТОВ ДВУХ ВЫРАЖЕНИЙ

Что такое *формулы сокращенного умножения* и как их применять?

Рассмотрим умножение двучлена $a - b$ на двучлен $a + b$. Для этого используем известное правило умножения многочлена на многочлен, т. е. каждый член первого многочлена умножим на каждый член второго многочлена. Тогда получим: $(a - b) \cdot (a + b) = a^2 + ab - ab - b^2$. Приводя подобные члены в правой части равенства, получим:

$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$, или $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

Равенство $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ называется *формулой разности квадратов*.

Чтение равенства $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ — разность квадратов двух выражений равна произведению их разности на их сумму.

Формулу разности квадратов можно получить геометрическим способом, используя рисунок 31.1.

На этом рисунке изображены:

— квадрат со стороной длиной, равной b, площадь которого равна: $S_1 = b^2$;

— прямоугольник со сторонами длиной a и $(a - b)$, площадь которого равна: $S_2 = a(a - b)$;

— два равных прямоугольника со сторонами b и $(a - b)$, площадь каждого из которых равна: $S_3 = b \cdot (a - b)$.

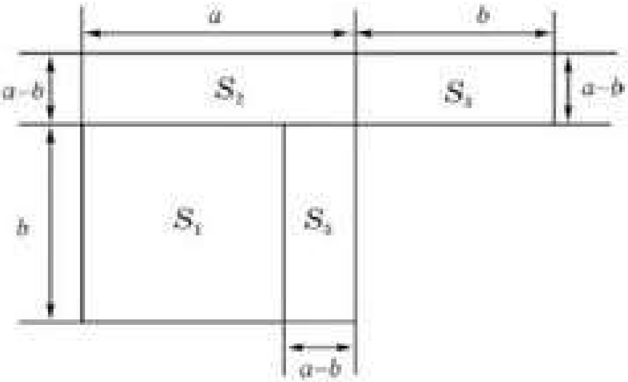


Рис. 31.1

Из рисунка видно, что квадрат со стороной длиной a, площадь которого $S = a^2$, состоит из квадрата со стороной длиной b и из двух прямоугольников, один со сторонами длиной $(a - b)$ и b, а другой — со сторонами длиной $(a - b)$ и a. Используя указанные выше обозначения, можно записать:

$S = S_1 + S_2 + S_3$, или $S - S_1 = S_2 + S_3$.

Так как площади двух меньших прямоугольников известны, то:

$$S_2 + S_3 = (a - b)\,b + (a - b)\,a = (a - b)(a + b).$$

Следовательно, $S - S_1 = (a - b)(a + b)$.

Подставляя значения $S = a^2$ и $S_1 = b^2$ в последнее равенство, получим формулу разности квадратов $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

Рассмотрим примеры на применение формулы разности квадратов:

1) $25 - m^2 = 5^2 - m^2 = (5 - m)(5 + m)$;

2) $y^4 - 0{,}49x^2 = (y^2)^2 - (0{,}7x)^2 = (y^2 - 0{,}7x)(y^2 + 0{,}7x)$.

Использование формулы разности квадратов значительно облегчает различные вычисления, дает возможность привести выражение к более упрощенному виду.

Объясните

1. Как, используя формулу разности квадратов, вычислили:

$$71^2 - 59^2 = (71 - 59)(71 + 59) = 12 \cdot 130 = 1560?$$

2. Как, используя формулу разности квадратов, упростили выражение $\left(\frac{1}{3}x + 8y\right)\left(\frac{1}{3}x - 8y\right)$?

$$\left(\frac{1}{3}x + 8y\right)\left(\frac{1}{3}x - 8y\right) = \left(\frac{1}{3}x\right)^2 - (8y)^2 = \frac{1}{9}x^2 - 64y^2.$$

Формулу разности квадратов можно использовать при решении уравнений.

Например, $1{,}69 - z^2 = 0$.

Уравнение такого вида вы встречаете в первый раз. Однако, используя формулу разности квадратов, можно привести это уравнение к известному вам виду уравнений:

$1{,}69 - z^2 = 1{,}3^2 - z^2 = (1{,}3 - z)(1{,}3 + z)$. Тогда вместо уравнения $1{,}69 - z^2 = 0$ получим равносильное ему уравнение:

$(1{,}3 - z)(1{,}3 + z) = 0$. Значение произведения равно нулю, если $z = 1{,}3$, или $z = -1{,}3$. Значит, уравнение имеет корни $1{,}3$ и $-1{,}3$.

Ответ записывают в виде $\{-1{,}3;\ 1{,}3\}$ и говорят, что решением уравнения является множество, состоящее из чисел $-1{,}3$ и $1{,}3$.

Ответ: $\{1{,}3;\ -1{,}3\}$.

1. Какие известные вам правила были применены для получения формулы разности квадратов двух выражений?
2. Как можно прочитать формулу разности квадратов двух выражений двумя способами?

Упражнения

А

31.1. Выполните умножение:

1) $(x+y)(x-y)$;
2) $(n-m)(n+m)$;
3) $(k-2)(k+2)$;
4) $(3-c)(3+c)$;
5) $(4+b)(4-b)$;
6) $(a-7)(a+7)$;
7) $\left(\frac{1}{7}+x\right)\left(\frac{1}{7}-x\right)$;
8) $\left(a-\frac{2}{9}\right)\left(a+\frac{2}{9}\right)$;
9) $\left(\frac{5}{6}+m\right)\left(\frac{5}{6}-m\right)$;
10) $(0,4+n)(0,4-m)$;
11) $(k+1,1)(k-1,1)$;
12) $(d-2,2)(d+2,2)$.

31.2. Выполните действие :

1) $(x-5)(5+x)$;
2) $(8+y)(y-8)$;
3) $(10-k)(k+10)$;
4) $\left(a+\frac{2}{3}b\right)\left(a-\frac{2}{3}b\right)$;
5) $\left(\frac{4}{9}x-y\right)\left(y+\frac{4}{9}x\right)$;
6) $\left(\frac{4}{15}n-m\right)\left(m+\frac{4}{15}n\right)$;
7) $(9x-5y)(9x+5y)$;
8) $(-4a+3b)(3b+4a)$;
9) $(13k-2d)(2d+13k)$;
10) $\left(\frac{5}{4}c+\frac{3}{7}d\right)\left(\frac{3}{7}d-\frac{5}{4}c\right)$;
11) $\left(\frac{1}{3}x-3y\right)\left(3y+\frac{1}{3}x\right)$;
12) $\left(\frac{1}{5}a+\frac{1}{9}b\right)\left(\frac{1}{9}b-\frac{1}{5}a\right)$.

31.3. Разложите на множители:

1) a^2-49;
2) $64-b^2$;
3) $c^2-2,25$;
4) $2,89-d^2$;
5) $\frac{64}{81}-x^2$;
6) $\frac{100}{121}-y^2$;
7) $z^2-\frac{169}{196}$;
8) $t^2-\frac{400}{441}$;
9) $25x^2-36$;
10) $-16+49y^2$;
11) $0,64-\frac{1}{9}z^2$;
12) $\frac{4}{25}t^2-36$;

13) $\frac{9}{16} - \frac{1}{144}a^2$;   14) $\frac{25}{64}b^2 - \frac{1}{81}$;

15) $2{,}56x^2 - \frac{225}{361}$;   16) $\frac{81}{100} - 0{,}04c^2$.

31.4. Представьте в виде произведения двучлен:

1) $c^2 - 0{,}49$;   2) $16 - k^2$;

3) $400 - m^2$;   4) $t^2 - 225$;

5) $1{,}69 - b^2$;   6) $y^2 - \frac{16}{81}$;

7) $25x^2 - 4$;   8) $\frac{25}{36} - 64y^2$.

31.5. Вычислите с помощью формулы $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$:

1) $13^2 - 9^2$;   2) $20^2 - 19^2$;

3) $2{,}2^2 - 2{,}8^2$;   4) $3{,}5^2 - 3{,}7^2$;

5) $\left(\frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2$;   6) $\left(\frac{7}{9}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2$;

7) $\left(\frac{5}{12}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2$;   8) $\left(\frac{3}{10}\right)^2 - \left(\frac{4}{5}\right)^2$;

9) $\left(\frac{8}{15}\right)^2 - \left(\frac{4}{5}\right)^2$;   10) $\left(2\frac{1}{7}\right)^2 - \left(2\frac{1}{7}\right)^2$;

11) $\left(3\frac{1}{3}\right)^2 - \left(4\frac{1}{2}\right)^2$;   12) $\left(5\frac{1}{6}\right)^2 - \left(7\frac{1}{3}\right)^2$;

13) $51^2 - 41^2$;   14) $54^2 - 46^2$;

15) $76^2 - 24^2$;   16) $328^2 - 172^2$;

17) $\left(3\frac{2}{3}\right)^2 - \left(2\frac{1}{3}\right)^2$;   18) $\left(7\frac{5}{9}\right)^2 - \left(4\frac{4}{9}\right)^2$.

31.6. Вычислите, представив в виде суммы или разности множители, используя формулу $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$:

1) $101 \cdot 99$;   2) $102 \cdot 98$;   3) $103 \cdot 97$;

4) $104 \cdot 96$;   5) $105 \cdot 95$;   6) $106 \cdot 94$.

31.7. Упростите выражение:

1) $(5+b)(b-5)-b^2$;
2) $c^2+(9-c)(9+c)$;
3) $\left(\frac{1}{3}-z\right)\left(\frac{1}{3}+z\right)-\frac{1}{9}$;
4) $-\frac{16}{49}+\left(\frac{4}{7}-d\right)\left(d+\frac{4}{7}\right)$;
5) $(0{,}9-a)(a+0{,}9)-a(1+a)$;
6) $k(5-k)+(1{,}2+k)(k-1{,}2)$.

31.8. Найдите значение выражения:

1) $(7+d)(d-7)+(d+3)(3-d)+40(d+1)$ при $d=0{,}5$;
2) $x(2x-1)-(6+x)(x-6)+(x+10)(10-x)$ при $x=-101$;
3) $1{,}2(b+1{,}2)+(0{,}5-b)(b+0{,}5)-(b+1{,}3)(1{,}3-b)$ при $b=-\frac{5}{6}$;
4) $(1{,}5+c)(c-1{,}5)-(c+8)(c-8)-2{,}5(c-24{,}5)$ при $c=\frac{2}{3}$.

31.9. Решите уравнение:

1) $x^2-16=0$;
2) $25-y^2=0$;
3) $3{,}24-z^2=0$;
4) $\frac{144}{169}-n^2=0$;
5) $7{,}29-m^2=0$;
6) $k^2-\frac{196}{625}=0$.

31.10. Докажите, что значение выражения не зависит от переменной a:

1) $(a-10)(10+a)+60-a^2$;
2) $0{,}64+a^2-(0{,}5+a)(a-0{,}5)$;
3) $(2{,}4-a)(a+2{,}4)+(1{,}9+a)(a-1{,}9)$;
4) $(17+a)(17-a)-(0{,}6-a)(a+0{,}6)$.

31.11. Докажите тождество:

1) $(x-1{,}6)(1{,}6+x)+5-x^2=2{,}44$;
2) $(2-0{,}9x)(0{,}9x+2)-10+0{,}81x^2=-6$;
3) $(x-1{,}5)(1{,}5+x)+(6-x)(6+x)=33{,}75$;
4) $(2{,}1-x)(x+2{,}1)-(5-x)(x+5)=-20{,}59$.

B

Выполните умножение (31.12—31.14):

31.12.
1) $(4a^2-y)(y+4a^2)$;
2) $(0{,}3b^3+x)(0{,}3b^3-x)$;
3) $(1{,}1c^2+z^2)(z^2-1{,}1c^2)$;
4) $(21d^2-k^3)\cdot(21d^2+k^3)$;
5) $(5a^3-4b^2)(4b^2+5a^3)$;
6) $(1{,}9c^4+6d)(6d-1{,}9c^4)$.

31.13. 1) $\left(\frac{1}{3}a-\frac{1}{2}b\right)\left(\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b\right)$; 2) $\left(1\frac{4}{7}x^5-z^2\right)\left(1\frac{4}{5}x^5+z^2\right)$;

3) $\left(\frac{2}{3}m+\frac{3}{4}n\right)\left(\frac{2}{3}m-\frac{3}{4}n\right)$; 4) $\left(m^6-2\frac{1}{3}n^5\right)\left(2\frac{1}{3}n^5+m^6\right)$.

31.14. 1) $(0{,}2a-1{,}3b)(0{,}2a+1{,}3b)$; 2) $(0{,}1x^3+2{,}5z)(0{,}1x^3-2{,}5z)$;

3) $(a^5-b^2)(a^5+b^2)$; 4) $(x^4+y^3)(x^4-y^3)$;

5) $(7t^2-3y)(7t^2+3y)$; 6) $(4a^2+9c^4)(4a^2-9c^4)$.

Разложите на множители **(31.15—31.16)**:

31.15. 1) x^3-100x; 2) $2y^3-32y$; 3) $0{,}16y^6-y^4$;

4) $\frac{2}{3}x^5-\frac{8}{27}x^3$; 5) $\frac{9}{16}x^4-\frac{16}{9}x^2$; 6) $3y^5-\frac{3}{25}y^7$.

31.16. 1) $x^4-0{,}49y^2$; 2) $-0{,}64z^4+t^6$; 3) $0{,}81a^8-b^2$;

4) $\frac{361}{400}m^2-n^{10}$; 5) $c^6-\frac{289}{324}d^4$; 6) $5{,}76x^{12}-\frac{4}{81}y^8$.

31.17. Представьте в виде произведения:

1) m^2-n^2-m+n; 2) $9x^2-4y^2-3x+2y$;

3) $x^3+3x^2-4x-12$; 4) $81-(3-8y)^2$;

5) $(x+5)^2-16$; 6) $36-(y+1)^2$;

7) $(3x-7)^2-25$; 8) $(4-5x)^2-64$.

Вычислите **(31.18—31.19)**:

31.18. 1) $\frac{20^2-13^2}{31^2-24^2}$; 2) $\frac{17^2-22^2}{49^2-10^2}$;

3) $\frac{37^2-47^2}{72^2-12^2}$; 4) $\frac{100^2-60^2}{70^2-90^2}$.

31.19. 1) $\frac{38^2-28^2}{47^2-19^2}$; 2) $\frac{53^2-25^2}{79^2-51^2}$;

3) $\frac{181^2-61^2}{319^2-77^2}$; 4) $\frac{200^2-380^2}{420^2-160^2}$.

Представьте в виде многочленов произведения **(31.20—31.21)**:

31.20. 1) $(5-a)(5+a)\cdot(25+a^2)$;

2) $(3x+2)(3x-2)(9x^2+4)$;

3) $\left(\frac{1}{3}+2b\right)\cdot\left(\frac{1}{3}-2b\right)\left(\frac{1}{9}+4b^2\right)$;

4) $\left(6c^2-\frac{2}{7}\right)\cdot\left(6c^2+\frac{2}{7}\right)\left(36c^4+\frac{4}{49}\right)$.

31.21. 1) $(a-y)(a+y)(a^2+y^2)$; 2) $(7x+1)(7x-1)(49x^2+1)$;
3) $(x-6y^3)^2\cdot(x+6y^3)^2$; 4) $(8+x^3)(8-x^3)\cdot(64+x^6)$;
5) $(25x^2+y^2)(5x+y)(5x-y)$; 6) $(81a^4+16b^4)(9b^2+4a^2)(4a^2-9b^2)$.

C

31.22. Найдите корни уравнений:
1) $x^4-3x^3-x^2+3x=0$; 2) $x^5-x^4-x+1=0$;
3) $(1-3x)^2=(3x+5)^2-96$; 4) $\left(\frac{1}{2}-5x\right)^2+\frac{3}{4}=(5x-4)^2$;
5) $x(x+2)-(x+3)(x-3)=13$; 6) $4x(x-1)-(2x+5)(2x-5)=1$.

31.23. Решите неравенство:
1) $(10-x)(x+10)+x^2\le x+90$;
2) $y^2-(y-8)(8+y)-4>32-y$;
3) $x(x+0{,}3)-(x-0{,}3)(x+0{,}3)\ge 0{,}1$;
4) $27-(1{,}2-y)(-y-1{,}2)<1{,}44-y^2-y$.

31.24. Докажите тождество :
1) $(1+a)(1-a)(1+a^2)-5+a^4=-4$;
2) $5a^2-3(a+1)(a-1)+8a^2+5=10a^2+8$;
3) $7(a^2+2)-4(a+3)(a-3)+3a^2+24=6a^2+74$;
4) $10(a^2-15)-12(a-4)(a+4)+8-a^2=50-3a^2$.

31.25. Представьте в виде произведения выражение:
1) $25a^4x^2z^{10}-9b^6y^2z^{10}$; 2) $(9a^4-4b^6)a^2b^2-12a^2b^8$.

31.26. Укажите, при каком наименьшем натуральном k значение выражения:
1) $(k-3)^2-(k+3)^2$ делится на 15;
2) $(7k+2)^2-(7k-2)^2$ делится на 21?

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

31.27. Длина стороны квадрата равна 13 см. Длину стороны квадрата увеличили на 2 см. Найдите площадь полученного квадрата .

31.28. Способом группировки разложите выражение $4a^2-4a+1$ на два одинаковых множителя .

§ 32. ФОРМУЛЫ КВАДРАТА СУММЫ И КВАДРАТА РАЗНОСТИ ДВУХ ВЫРАЖЕНИЙ

Как рациональным способом можно найти сумму и разность двух выражений?

Рассмотрим квадрат двучлена $(a + b)$, равного сумме двух выражений.

Вам известно, что $(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b)$.

По правилу умножения многочлена на многочлен получим:

$$(a + b) \cdot (a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Значит, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Как видно, полученная формула позволяет представить квадрат суммы двух выражений в виде суммы трех одночленов (трехчлена).

Формула $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ называется *формулой квадрата суммы двух выражений*.

Чтение формулы $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$:
— квадрат суммы двух выражений равен квадрату первого выражения плюс удвоенное произведение первого выражения на второе и плюс квадрат второго выражения.

Геометрическая иллюстрация формулы квадрата двучлена показана на рисунке 32.1.

Объясните

С помощью рисунка самостоятельно объясните, как можно получить формулу $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

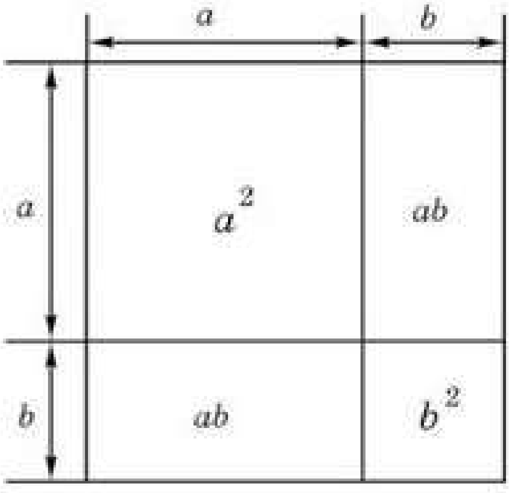


Рис. 32.1

Пример 1. Представим квадрат двучлена $(5n + 2m)^2$ в виде трехчлена.

Решение. Используем формулу $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, т. е. вместо a запишем $5n$, вместо b – $2m$. Получим: $(5n + 2m)^2 = (5n)^2 + 2 \cdot (5n) \cdot (2m) + (2m)^2 = 25n^2 + 20nm + 4m^2$.

Ответ: $25n^2 + 20nm + 4m^2$.

Пример 2. Представим трехчлен $0{,}49c^2 + 1{,}4cd + d^2$ в виде квадрата двух выражений.

Решение . Воспользуемся формулой $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Для этого сначала преобразуем данный трехчлен следующим образом:

$$0{,}49\,c^2 + 1{,}4\,cd + d^2 = (0{,}7\,c)^2 + 2\cdot(0{,}7\,c)\cdot d + d^2.$$

В правой части последнего равенства видим квадрат одного члена плюс удвоенное произведение этого члена на второй член и плюс квадрат второго члена. Поэтому

$$(0{,}7\,c)^2 + 2\cdot(0{,}7\,c)\cdot d + d^2 = (0{,}7\,c + d)^2.$$

Ответ : $(0{,}7\,c + d)^2$.

Формула $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ называется *формулой квадрата разности двух выражений* .

Чтение формулы $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$:

— *квадрат разности двух выражений равен квадрату первого выражения, минус удвоенное произведение первого выражения на второе и плюс квадрат второго выражения* .

По аналогии с доказательством формулы квадрата суммы двух выражений самостоятельно докажите формулу квадрата разности двучлена.

Доказательство формулы квадрата разности двучлена двух выражений можно провести геометрическим способом с помощью рисунка 32.2.

На рисунке изображены квадрат со стороной длиной a, площадь которого равна: $S_1 = a^2$; квадрат со стороной длиной $(a-b)$, площадь которого равна: $S_2 = (a-b)^2$; два равных прямоугольника, стороны которых длиной $(a-b)$ и b равны, площади их равны: $S_3 = (a-b)\cdot b$ и квадрат со стороной длиной b, площадь которого равна $S_4 = b^2$.

Площадь большого квадрата S_1 состоит из суммы площадей S_2, $2S_3$ и S_4, т. е. $S_1 = S_2 + 2S_3 + S_4$. Подставляя вместо S_1, S_2, S_3 и S_4 их значения, выраженные через a, b $(a-b)$, имеем:

$a^2 = (a-b)^2 + 2(a-b)\cdot b + b^2$, или: $a^2 - 2(a-b)\cdot b - b^2 = (a-b)^2$. Отсюда: $a^2 - 2ab + 2b^2 - b^2 = (a-b)^2$, или: $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$.

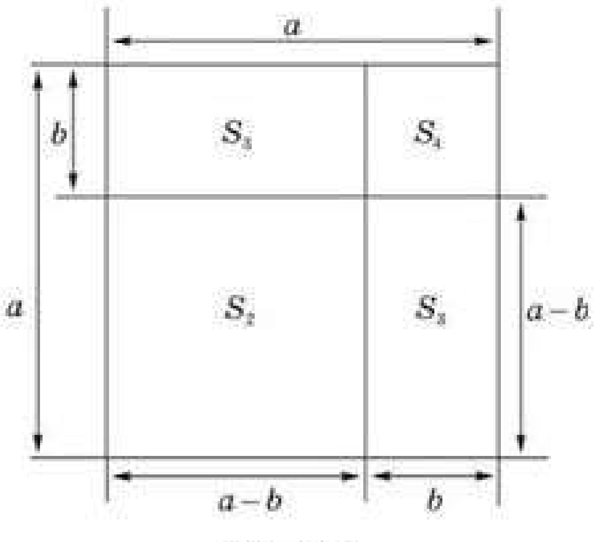


Рис. 32.2

Пример 3. Представим квадрат разности двух выражений $\left(\frac{1}{7}n - 3m^2\right)^2$ в виде трехчлена.

Решение . Используя формулу квадрата разности $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, вместо a запишем $\frac{1}{7}n$, вместо $b - 3m^2$.

Получим:

$$\left(\frac{1}{7}n - 3m^2\right)^2 = \left(\frac{1}{7}n\right)^2 - 2\cdot\left(\frac{1}{7}n\right)\cdot(3m^2) + (3m^2)^2 = \frac{1}{49}n^2 - \frac{6}{7}nm^2 + 9m^4.$$

Ответ : $\frac{1}{49}n^2 - \frac{6}{7}nm^2 + 9m^4$.

Пример 4. Представим трехчлен $0{,}36a^6 - 9{,}6a^3b + 64b^2$ в виде квадрата разности двух выражений.

Решение. Чтобы использовать формулу квадрата разности двух выражений, сначала перепишем $0{,}36a^6 - 9{,}6a^3b + 64b^2$ в следующем виде:

$$0{,}36a^6 - 9{,}6a^3b + 64b^2 = (0{,}6a^3)^2 - 2\cdot(0{,}6a^3)\cdot(8b) + (8b)^2.$$

В правой части последнего равенства получили квадрат одного члена (выражения) минус удвоенное произведение этого члена (выражения) на второй член (выражение) и плюс квадрат второго члена (выражения).

Поэтому $(0{,}6a^3)^2 - 2\cdot(0{,}6a^3)\cdot(8b) + (8b)^2 = (0{,}6a^3 - 8b)^2$. Следовательно, $0{,}36a^6 - 9{,}6a^3b + 64b^2 = (0{,}6a^3 - 8b)^2$.

Ответ : $(0{,}6a^3 - 8b)^2$.

Легко заметить, что формулы квадрата суммы и квадрата разности двух выражений можно записать одним равенством:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2.$$

1. В чем сходство и различие между формулами квадрата суммы и квадрата разности двух выражений?
2. От чего зависит использование формулы (1) и (2) "слева направо" или "справа налево"?

Упражнения

А

Представьте в виде многочленов **(32.1—32.2)** :

32.1. 1) $(m-3)^2$; 2) $(x+5)^2$; 3) $(6+y)^2$; 4) $(b-9)^2$;
5) $(4+d)^2$; 6) $(p+q)^2$; 7) $(z^2-y)^2$; 8) $(a+1)^2$.

32.2. 1) $\left(a+\frac{1}{7}\right)^2$; 2) $\left(\frac{1}{9}+b\right)^2$; 3) $\left(\frac{n}{4}+\frac{m}{3}\right)^2$; 4) $\left(\frac{k}{2}-\frac{t}{5}\right)^2$;
5) $\left(4\frac{1}{3}-x\right)^2$; 6) $\left(y+3\frac{1}{4}\right)^2$; 7) $\left(z-5\frac{1}{5}\right)^2$; 8) $\left(4\frac{1}{2}+t\right)^2$.

32.3. Вычислите, представив в виде суммы или разности основание степени:
1) 101^2; 2) 102^2; 3) 103^2; 4) 104^2;
5) 99^2; 6) 98^2; 7) 97^2; 8) 96^2.

Представьте в виде квадрата двучлена трехчлены (32.4—32.7):

32.4. 1) a^2+2a+1; 2) $b^2-8b+16$; 3) $c^2+10c+25$;
4) $n^2+14n+49$; 5) $100-20z+z^2$; 6) $81+18b+b^2$.

32.5. 1) $0{,}16-0{,}8t+t^2$; 2) $z^2+1{,}4z+0{,}49$;
3) $0{,}36-1{,}2b+b^2$; 4) $2{,}25-3x+x^2$;
5) $y^2-3{,}2y+2{,}56$; 6) $3{,}61+3{,}8d+d^2$.

32.6. 1) $\frac{4}{9}+\frac{4}{3}a+a^2$; 2) $\frac{9}{25}+\frac{6}{5}b+b^2$;
3) $\frac{16}{49}+\frac{8}{7}c+c^2$; 4) $\frac{100}{121}k^2-\frac{20}{11}tk+t^2$;
5) $m^2-\frac{22}{13}mn+\frac{121}{169}n^2$; 6) $\frac{400}{441}t^2+\frac{40}{21}nt+n^2$.

32.7. 1) $\frac{25}{4}+5x+x^2$; 2) $\frac{9}{16}-\frac{3}{2}y+y^2$;
3) $\frac{49}{36}-\frac{7}{3}z+z^2$; 4) $n^2-\frac{9}{4}cn+\frac{81}{64}c^2$;
5) $m^2+\frac{11}{6}m+\frac{121}{144}$; 6) $t^2-\frac{17}{5}dt+\frac{289}{100}d^2$.

Упростите выражения (32.8—32.10):

32.8. 1) $(x+5)\cdot 6+(x-3)^2$; 2) $(y-4)^2-(y+2)\cdot 8$;
3) $26-a^2-(5-a)^2$; 4) $(k+7)^2-14k-50$;
5) $0{,}3+b^2-(b-0{,}5)^2$; 6) $15+(0{,}4+c)^2-0{,}8c^2$.

32.9. 1) $(a-4b)^2-8ab-17b$; 2) $-9c^2+(3c+d)^2-d^2$;
3) $(5a-6)^2-(5a-6)(5a+6)$; 4) $(7b-t)(t+7b)+(7b+t)^2$;
5) $(9-8b)(2b+3)+(4b-1)^2$; 6) $(11c+3)^2-2c(5{,}5c+33)$.

32.10. 1) $a(a-2b)-(3b+a)^2$; 2) $(m+8)^2-(m-2n)(m+2n)$;
3) $3(b-10)^2+8b-5b^2$; 4) $(n+15)^2-n(n-19)$;
5) $4c(9c-3)-(6c+1)^2$; 6) $(6-5m)(5m+6)+(5m-4)^2$.

Представьте в виде квадрата двучлена трехчлены **(32.11—32.12)**:

32.11. 1) $9y^2 - 12xy + 4y^2$; 2) $25t^2 + 30t + 9$;
3) $16k^2 - 40k + 25$; 4) $121a^2 - 44ac + 4c^2$;
5) $4n^2 + 52mn + 169m^2$; 6) $36t^2 - 84ts + 49s^2$.

32.12. 1) $0{,}04x^2 - 1{,}2xy + 9y^2$; 2) $36c^2 + 6cd + 0{,}25d^2$;
3) $1{,}96k^2 - 14kt + 25t^2$; 4) $\frac{1}{49}a^2 + \frac{2}{21}ab + \frac{1}{9}b^2$;
5) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}xy + \frac{9}{64}y^2$; 6) $81d^2 - \frac{27}{2}cd + \frac{9}{16}c^2$.

Разложите на множители трехчлены **(32.13—32.14)**:

32.13. 1) $5x^2 + 20x + 20$; 2) $2x^2 - 12x + 18$;
3) $-3x^2 + 18x - 27$; 4) $-2y^2 - 16y - 32$;
5) $6x^2 + 12x + 6$; 6) $-10a^2 + 20a - 10$.

32.14. 1) $a^3 + 2a^2 + a$; 2) $x^2y - 6xy + 9y$;
3) $c^4 - 4c^3 + 4c^2$; 4) $2ay^2 - 4ay + 2a$;
5) $\frac{1}{9}a - \frac{8}{9}ab + \frac{16}{9}ab^2$; 6) $0{,}5cd - acd + 0{,}5a^2cd$.

Решите уравнения **(32.15—32.17)**:

32.15. 1) $(x + 11)^2 - x^2 = 11$; 2) $69 - (13 - y)^2 = -y^2$;
3) $44 + z^2 = (12 + z)^2$; 4) $31 - t^2 = -(t - 9)^2$.

32.16. 1) $(a - 3)^2 - (a + 8)(a - 8) = 0$; 2) $(9 - b)(b + 9) + (4 - b)^2 = 0$;
3) $(c - 6)^2 - (7 + c)^2 = 0$; 4) $(d - 10)^2 + (4 - d)(d + 4) = 0$.

32.17. 1) $x(x - 4) = 2 + (x - 1)^2$; 2) $(x + 2)(x - 3) - 3 = (x + 1)^2$;
3) $y(5 - y) = 1 - (y + 2)^2$; 4) $(y - 1)^2 - (y + 1)(y - 7) = 0$.

Решите неравенства **(32.18—32.20)**:

32.18. 1) $n^2 - (n + 1)^2 > 2$; 2) $(1 - t)^2 - t^2 > 3$;
3) $(m - 2)^2 - 41 < m^2$; 4) $m^2 + 9 < (1 - m)^2$.

32.19. 1) $x(x - 5) - (x - 3)^2 < 0$; 2) $(4 + y)^2 - y(6 + y) > 0$;
3) $(17 - y)^2 > y(y - 13) - 5$; 4) $z(z - 10) > (3 - z)^2$.

32.20. 1) $(x + 9)(x - 2) - (x - 2)^2 > 0$; 2) $(10 - x)^2 + (x + 10)(10 - x) < 0$;
3) $(5 - x)(x + 5) + (x - 5)^2 > 0$; 4) $(4 + x)(2 - x) + (1 - x)^2 > 0$.

B

Запишите в виде многочлена степени **(32.21—32.22)**:

32.21. 1) $(3x-8y)^2$; 2) $(7z+11d)^2$; 3) $(3{,}5t-4k)^2$;

4) $(5k+1{,}2t)^2$; 5) $\left(\frac{2}{3}a-\frac{3}{7}b\right)^2$; 6) $\left(\frac{7}{8}c-\frac{4}{7}d\right)^2$.

32.22. 1) $(1{,}3m^2+4n^2)^2$; 2) $(2{,}5a^2+4b)^2$; 3) $\left(\frac{5}{2}p-0{,}5q^3\right)^2$;

4) $\left(2{,}4m^3-\frac{3}{4}t\right)^2$; 5) $\left(\frac{7}{4}+0{,}6b^4\right)^2$; 6) $\left(\frac{3}{8}a-\frac{2}{3}b^4\right)^2$.

32.23. Представьте в виде квадрата многочлен :

1) $a^{10}-10a^5b^8+25b^{16}$; 2) $a^6+6a^3x^4+9x^8$;

3) $81a^6-90a^3b^2c+25b^4c^2$; 4) $16x^2+24x^3+9x^4$.

32.24. Представьте в виде квадрата двучлена трехчлен:

1) $x^2+2+\frac{1}{x^2}$; 2) $\frac{x^2}{y^2}-2+\frac{y^2}{x^2}$;

3) $\frac{a^2}{b^2}-2a+b^2$; 4) $\frac{a^2}{4b^2}+2+\frac{4b^2}{a^2}$;

5) $\frac{1}{4x^2}+1+x^2$; 6) $\frac{9x^2}{4y^2}-\frac{1}{y}+\frac{1}{9x^2}$.

32.25. Упростите выражение:

1) $(11a-b)^2+(9a+7b)(8a-13b)$;

2) $(18x+5y)(2x-4y)-(6x-3y)^2$;

3) $4x(3x-2y)-(10y-0{,}4x)^2$;

4) $(15a+2b)^2-(3a-7b)(3b-5a)$.

Решите уравнения **(32.26—32.27)** :

32.26. 1) $(2a-11)(11+2a)-(2a-5)^2=0$;

2) $(4+9b)^2+(9b+2)(2-9b)=0$;

3) $(2{,}5-8c)^2-(8c-1{,}5)(8c+1{,}5)=0$;

4) $\left(\frac{3}{4}-5d\right)\left(5d+\frac{3}{4}\right)+\left(5d-\frac{3}{4}\right)^2=0$.

32.27. 1) $(7-8x)(2x+1)+(4x-1)^2=0$;

2) $(2x-5)^2-(2x-3)(2x+3)=15$;

3) $(3x+5)(3x-5)-(3x-1)^2=-4$;

4) $(9x+2)(1-4x)+(5-6x)^2=-32$.

Решите неравенства (32.28—32.30):

32.28. 1) $(3{,}5 - x)(4x + 1) + (2x + 3)^2 < 0$;
2) $8(y - 3)^2 + (5 - y)(3 + 8y) > 2$;
3) $\left(3z + \frac{1}{3}\right)^2 - (1{,}5z + 1)(6z - 1) < 0$;
4) $\left(7z - \frac{1}{7}\right)^2 - (24{,}5z + 11)(2z - 1) > 0$.

32.29. 1) $(4x - 3)(4x + 3) - (4x - 1)^2 < 3x$;
2) $3(x - 1)^2 - 3x(x - 5) > 21$;
3) $10(x - 2)^2 - 5x(2x - 1) < -30$;
4) $(5x + 6)^2 - (5x - 6)^2 > 12$.

32.30. 1) $(3x - 1)^2 - 7 < (9x + 2)x + 2$;
2) $2x(8x + 3) + 1 > (5 - 4x)^2 - 1$;
3) $(0{,}3x + 0{,}2)^2 + 0{,}58x > 3{,}9 - (2 - 0{,}3x)(2 + 0{,}3x)$;
4) $(0{,}2 - 0{,}8x)^2 + 11{,}16 < (0{,}5 + 0{,}8x)^2 - 0{,}25$.

32.31. Докажите, что при любом значении переменной значение выражения равно отрицательному числу:
1) $5(3 - 5a)^2 - 5(3a - 7)(3a + 7) - 80a^2 + 150a - 300$;
2) $3(a - 1)^2 + 5(a + 1)(a - 1) - 8a^2 + 6a$;
3) $(m - 1)^2 - 4(m + 1)^2 + 3m^2 + 10m$;
4) $5(1 - y)^2 - (3 + y)^2 - 4y^2 + 16y$.

32.32. Докажите тождество:
1) $\left(\frac{3}{5}a^{3n+1}b^2 + \frac{2}{3}a^{n-1}b^3\right)^2 - \frac{4}{45}a^{2n-2}b^5(9a^{2n+2} + 5b) + \frac{16}{25}a^{6n+2}b^4 =$
$= a^{6n+2}b^4$;
2) $\left(\frac{5}{6}x^{2n-1}y^n - \frac{3}{5}x^{n+1}y^2\right)^2 - \frac{1}{36}x^{3n}y^{n+2}(25x^{n-2}y^{n-2} - 36) =$
$= \frac{9}{25}x^{2n+2}y^4$.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

32.33. Длина стороны куба равна a см. Выразите формулой объем куба, если:
1) длина стороны куба увеличена на 2 см;
2) длина стороны куба уменьшена на 3 см.

32.34. Длина стороны куба равна a см. Ее увеличили на 4 см. На сколько кубических сантиметров увеличился объем куба, если длина стороны куба равна 8 см?

§ 33. ФОРМУЛЫ КУБА СУММЫ И КУБА РАЗНОСТИ ДВУХ ВЫРАЖЕНИЙ

Как рациональным способом можно найти куб суммы и куб разности двух выражений?

В предыдущем параграфе вы ознакомились с формулой квадрата суммы двух выражений $(a+b)=a^2+2ab+b^2$. Теперь представим куб суммы двух выражений, т. е. $(a+b)^3$ в виде многочлена. Для этого надо двучлен $a+b$ умножить сам на себя три раза, т. е.:

$$(a+b)^3=(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b).$$

Правую часть данного равенства запишем в следующем виде: $(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)=(a+b)^2\cdot(a+b)$. Первый множитель представляет собой квадрат суммы двух выражений. Поэтому, используя формулу $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, имеем: $(a+b)^2\cdot(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)$.

Применив правило умножения многочленов и приведя подобные слагаемые, получим:

$$(a^2+2ab+b^2)(a+b)=a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3=$$
$$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

Таким образом,

Формула $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ называется *формулой куба суммы двух выражений, или куба двучлена* .

Самостоятельно прочитайте формулу: $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

Пример 1. Найдем куб суммы двух выражений $4m+3n$.
Решение. Используя формулу куба суммы двух выражений, имеем:

$$(4m+3n)^3=(4m)^3+3\cdot(4m)^2\cdot3n+3\cdot4m\cdot(3n)^2+(3n)^3=64m^3+$$
$$+144m^2n+108mn^2+27n^3.$$

Ответ: $64m^3+144m^2n+108mn^2+27n^3$.

Пример 2. Представим многочлен $t^6+15t^4k+75t^2k^2+125k^3$ в виде куба двучлена.

Решение. Перепишем данный многочлен в следующем виде:

$$t^6+15t^4k+75t^2k^2+125k^3=(t^2)^3+3\cdot(t^2)^2\cdot5k+3\cdot t^2\cdot(5k)^2+(5k)^3.$$

В правой части этого равенства вы видите многочлен, который представляет собой куб первого члена, плюс утроенное произведение квадрата этого члена на второй член, плюс утроенное произведение первого члена на квадрат второго члена и плюс куб второго члена.

Поэтому, используя формулу куба двучлена, правую часть последнего равенства можно записать в виде куба двучлена:

$$(t^2)^3 + 3(t^2)^2 \cdot 5k + 3t^2 \cdot (5k)^2 + (5k)^3 = (t^2 + 5k)^3.$$

Таким образом,

$$t^6 + 15t^4k + 75t^2k^2 + 125k^3 = (t^2 + 5k)^3.$$

Ответ: $(t^2 + 5k)^3$.

Формула $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ называется *формулой куба разности двух выражений*.

Чтение формулы $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$: *куб разности двух выражений равен кубу первого выражения минус утроенное произведение квадрата первого выражения на второй плюс утроенное произведение первого выражения на квадрат второго минус куб второго выражения*.

Самостоятельно докажите справедливость формулы:

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Пример 3. Представим степень $\left(\frac{1}{4}p - s\right)^3$ в виде многочлена.

Решение. Используя формулу куба двучлена, имеем:

$$\left(\frac{1}{4}p - s\right)^3 = \left(\frac{1}{4}p\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{1}{4}p\right)^2 \cdot s + 3 \cdot \left(\frac{1}{4}p\right) \cdot s^2 - s^3 = \frac{1}{64}p^3 - \frac{3}{16}p^2s + \frac{3}{4}ps^2 - s^3.$$

Ответ: $\frac{1}{64}p^3 - \frac{3}{16}p^2s + \frac{3}{4}ps^2 - s^3$.

Пример 4. Представим многочлен $8x^3 - 3{,}6x^2y + 0{,}54xy^2 - 0{,}027y^3$ в виде куба разности двух выражений.

Решение. Перепишем данный многочлен в следующем виде:

$$8x^3 - 3{,}6x^2y + 0{,}54xy^2 - 0{,}027y^3 = (2x)^3 - 3 \cdot (2x)^2 \cdot (0{,}3y) + 3 \cdot (2x) \cdot (0{,}3y)^2 - (0{,}3y)^3.$$

Нетрудно заметить, что правая часть последнего равенства представляет собой куб разности выражений $2x$ и $0{,}3y$. Следовательно,

$$(2x)^3 - 3(2x)^2 \cdot (0{,}3y) + 3 \cdot (2x) \cdot (0{,}3y)^2 - (0{,}3y)^3 = (2x - 0{,}3y)^3.$$

Таким образом, $8x^3 - 3{,}6x^2y + 0{,}54xy^2 - 0{,}027y^3 = (2x - 0{,}3y)^3$.

Ответ: $(2x - 0{,}3y)^3$.

1. Как можно записать формулы куба суммы и куба разности одним равенством ?
2. Какие правила были использованы при выводе формулы куба суммы и куба разности ?

Упражнения

А

Представьте в виде многочленов (33.1—33.4) :

33.1. 1) $(2+x)^3$; 2) $(a-2)^3$; 3) $(5-b)^3$; 4) $(y+3)^3$;
5) $(a-c)^3$; 6) $(c+d)^3$; 7) $(z-t)^3$; 8) $(k+m)^3$.

33.2. 1) $(4x+1)^3$; 2) $(1-3y)^3$; 3) $(5z-2)^3$; 4) $(4x-3)^3$;
5) $(a+2x)^3$; 6) $(2y-3)^3$; 7) $(p-3q)^3$; 8) $(3n-2m)^3$.

33.3. 1) $(0{,}2\,a+5)^3$; 2) $(4-0{,}5\,b)^3$; 3) $(0{,}6\,c-5)^3$;
4) $\left(\frac{1}{2}d-2\right)^3$; 5) $\left(\frac{1}{3}t+3\right)^3$; 6) $\left(2-\frac{1}{4}k\right)^3$.

33.4. 1) $(4x+0{,}1\,y)^3$; 2) $(0{,}2\,a+30\,b)^3$; 3) $\left(\frac{1}{7}a-7c\right)^3$;
4) $(0{,}3\,b-10\,c)^3$; 5) $(0{,}5\,x-2y)^3$; 6) $\left(\frac{2}{9}n+\frac{9}{2}m\right)^3$.

Представьте в виде куба двучлена многочлены (33.5—33.6):

33.5. 1) x^3-3x^2+3x-1; 2) y^3-3y^2+3y-1;
3) $8+12p+6p^2+p^3$; 4) $1-6q+12q^2-8q^3$;
5) $125-75a+15a^2-a^3$; 6) $0{,}008+0{,}12\,p+0{,}6\,p^2+p^3$.

33.6. 1) $a^3-6a^2b+12\,ab^2-8b^3$; 2) $27m^3+27m^2n+9mn^2+n^3$;
3) $8p^3+27q^3+54pq^2+36p^2q$; 4) $x^3y^3-6x^2y^2+12xy-8$.

33.7. Упростите выражение и найдите его значение при указанных значениях переменной:
1) $(3a-1)^3-27a^3+5$ при $a=-1;\ 0;\ 1$;
2) $(0{,}7\,b-2)^3-(0{,}7\,b+2)^3$ при $b=-2;\ -1;\ 1$;
3) $(5x-4)^3+(5x-2)^3-250\,x^3$ при $x=0{,}5;\ 0;\ -1$;
4) $(0{,}2+5y)^3-(0{,}5+2y)^3-117\,y^3$ при $y=-1;\ 0;\ 2$.

Решите уравнения (33.8—33.9):

33.8. 1) $(x+1)^3-4x=5+x^2(x+3)$;
2) $(1-y)^3+8y=7+y^2(3-y)$;

3) $(x+1)^3+(x-1)^3-2x^3=12$;
4) $(1+y)^3+(1-y)^3-6y^2=3y-1$.

33.9. 1) $(2+x)^3-x^2(6+x)=11x+19$;
2) $(z-2)^3-z^2(z-6)=13z-7$;
3) $(y+3)^3-2y-30=y^2(9+y)$;
4) $(3-t)^3+3t+21=-t^2(t-9)$.

33.10. Докажите тождество:
1) $(3a+b)^3-(a+3b)^3-18ab(a-b)=26(a^3-b^3)$;
2) $(x+4y)^3+(4x-y)^3+12xy(3x-5y)-128y^3=65(x^3-y^3)$.

B

33.11. Представьте в виде многочлена степень:
1) $(a^2-b^2)^3$; 2) $(m^2+n^2)^3$; 3) $(2a^2+b^2)^3$;
4) $(x^4-6y^2)^3$; 5) $(7m^3-n^4)^3$; 6) $\left(a^3-\frac{1}{3}b^2\right)^3$;
7) $(0{,}3x^5-0{,}5y^2)^3$; 8) $\left(0{,}6x^4-\frac{1}{2}y^3\right)^3$; 9) $\left(\frac{1}{5}a^2+0{,}36^4\right)^3$.

33.12. Представьте в виде куба двучлена многочлен:
1) $8x^3-60x^2y+150xy^2-125y^3$;
2) $64a^{15}+144a^{10}b^3+108a^5b^6+27b^9$;
3) $0{,}125a^9-0{,}15a^6b^4+0{,}06a^3b^8-0{,}008b^{12}$;
4) $0{,}216x^{12}+0{,}54x^8y^5+0{,}45x^4y^{10}+0{,}125y^{15}$.

Упростите выражения **(33.13—33.14)**:

33.13. 1) $(x^2+1)^3-3(x^2-1)^2-5x(x-2)+10$;
2) $(x-2)^3+20(2x-1)^3+x(x-5)$;
3) $(1-3y)^3-3(y+3)^3+10y(y^2-2)$;
4) $(y^3+2)^3-y^6(y^3-6)+2(y-2)^2$.

33.14. 1) $(x+5)^3-(x+1)^3-4(3x^2-5)+10x-7$;
2) $(x-3)^3-x^2(x+6)-5x(5-3x)-19x+1$;
3) $(y+4)^3+(3y+1)^3-7y^2(4y+9)+24y^2+8$;
4) $(4y-5)^3-(4y+5)^3-48y(1-10y)+5-14y^2$.

Решите уравнения **(33.15—33.16)**:

33.15. 1) $(x+2)^3-(x-2)^3=2x(6x+2)$;
2) $(x+3)^3-(x-4)^3=21x^2+7$;

3) $(x+2)^3+3x^2-11=(x+3)^3$;

4) $(x-3)^3=x^2(x-9)+27$.

33.16. 1) $(6-x)^3-x^2(16-x)=2x^2+116$;

2) $(y+7)^3+y(13-y^2)=21y^2+23$;

3) $(4-3z)^3+z(14+27z^2)=108z^2+77$;

4) $(5x+2)^3-25x(5x^2-4)=150x^2+21$.

C

33.17. Найдите наибольшее целое число, являющееся решением неравенства :

1) $(2-3x)^3-54x^2\le-27x^3-41x$;

2) $(3+2x)^3-36x^2\ge60x+8x^3$.

33.18. Найдите наименьшее целое число, являющееся решением неравенства : :

1) $(x-7)^3+42x^2\ge(x+7)^3+14-7x$;

2) $(6+x)^3-220x\le2x^3-(x-6)^3+19$.

33.19. Докажите тождество :

1) $(b+5)^3-b(b-5)^2-25(1+b)^2=100$;

2) $5(1-b)^3+5b(1+b)^2-(1-5b)^2=4$;

3) $(2b-3)^3-4b^2(2b-6)+6b(2b-9)=-27$;

4) $(b+2)^3+(2b+1)^3-9b(b^2+2b+2)-10=-1$.

33.20. Докажите, что при любых значениях переменных значение выражения равно нулю :

1) $(a+x)^3-a(a+x)^2-x^2(2a+x)-a^2x$;

2) $(a-1)^3+3(a-1)^2+3(a-1)+1-a^3$;

3) $(x^3+y^3)^2-(x^2+y^2)^3+3x^2y^2(x+y)^2-8x^3y^3$;

4) $(m-3n)^3-(2m-3n)(3mn+(m-3n)^2)+m^3$.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

33.21. Выполните действия:

1) $(a+2b)(a^2+ab+b^2)$; 2) $(a-3b)(a^2+3ab+9b^2)$.

33.22. Длина стороны одного куба равна a см, другого — b см. Выразите формулой сумму объемов этих кубов .

§ 34. ФОРМУЛЫ СУММЫ И РАЗНОСТИ КУБОВ ДВУХ ВЫРАЖЕНИЙ

Как можно найти сумму и разность кубов двух выражений рациональным способом?

При преобразовании выражений наряду с изученными формулами разности квадратов двух выражений

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b);$$

квадратов суммы и разности двух выражений

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$

кубов суммы и разности двух выражений

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

широко используются формулы суммы и разности кубов двух выражений: $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$.

Докажем справедливость формулы суммы кубов:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Для этого преобразуем правую часть равенства, применив правила умножения многочлена на многочлен :

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3.$$

Чтение формулы $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$:
сумма кубов двух выражений равна произведению суммы этих выражений и неполного квадрата их разности .

Самостоятельно докажите справедливость формулы: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$. Прочитайте эту формулу по аналогии с чтением формулы $a^3 + b^3$.

Рассмотрим на примерах применение формул суммы и разности кубов.

Пример 1. Разложим на множители выражение: $n^6 + \frac{8}{125}m^3$.

Решение . Применим формулу суммы кубов :

$$n^6 + \frac{8}{125}m^3 = (n^2)^3 + \left(\frac{2}{5}m\right)^3 = \left(n^2 + \frac{2}{5}m\right)\left((n^2)^2 - n^2 \cdot \left(\frac{2}{5}m\right) + \left(\frac{2}{5}m\right)^2\right) =$$

$$= \left(n^2 + \frac{2}{5}m\right) \cdot \left(n^4 - \frac{2}{5}mn^2 + \frac{4}{25}m^2\right).$$

Ответ : $\left(n^2 + \frac{2}{5}m\right) \cdot \left(n^4 - \frac{2}{5}mn^2 + \frac{4}{25}m^2\right)$.

Пример 2. Упростим выражение: $8c^3 + (3 - 2c)(9 + 6c + 4c^2)$.

Решение. Применим формулу разности кубов:

$$8c^3 + (3 - 2c)(9 + 6c + 4c^2) = 8c^3 + 27 - 8c^3 = 27.$$

Ответ : 27.

1. Чем отличается формула суммы (разности) кубов двух выражений от формулы куба их суммы (разности)?
2. Почему при чтении формулы суммы кубов употребляется словосочетание "неполный квадрат разности двух выражений"?

Упражнения

A

Разложите на множители **(34.1—34.3)** :

34.1. 1) $a^3 + x^3$; 2) $y^3 - b^3$; 3) $t^3 - n^3$; 4) $m^3 + k^3$; 5) $z^3 - 8$; 6) $64 + s^3$; 7) $125 - x^3$; 8) $1000 + y^3$.

34.2. 1) $27 - a^3$; 2) $b^3 + 125$; 3) $64 - m^3$; 4) $8 + q^3$; 5) $0{,}008 + a^3$; 6) $0{,}216 - b^3$; 7) $0{,}027 + n^3$; 8) $0{,}125 - m^3$.

34.3. 1) $\frac{1}{8} - b^3$; 2) $\frac{1}{27} + c^3$; 3) $\frac{1}{64} - d^3$; 4) $\frac{1}{125} + t^3$; 5) $\frac{8}{27} + z^3$; 6) $y^3 - \frac{27}{64}$; 7) $k^3 + \frac{27}{125}$; 8) $\frac{1}{216} - z^3$.

34.4. Представьте произведение в виде многочлена :

1) $(a + 2)(a^2 - 2a + 4)$; 2) $(1 - x^2)(1 + x^2 + x^4)$;
3) $(k - 5)(k^2 + 5k + 25)$; 4) $(3 + m)(9 - 3m + m^2)$;
5) $(1 + a^3)(1 - a^3 + a^6)$; 6) $(4 - n^2)(16 + 4n^2 + n^4)$;
7) $(25 - 5y^2 + y^4)(5 + y^2)$; 8) $(64 + 8z^3 + z^6)(8 - z^3)$.

Упростите выражения **(34.5—34.6):**

34.5. 1) $(x - 10)(x^2 + 10x + 100) - x^3$; 2) $216 - (a + 6)(a^2 - 6a + 36)$;
3) $y^3 + (7 - y)(49 - 7y + y^2)$; 4) $600 - (8 - z)(z^2 + 8z + 64)$.

34.6. 1) $(a - 1)(a^2 + a + 1) - a^2(a - 8)$; 2) $(b + 2)(b^2 - 2b + 4) - b(b^2 - 1)$;
3) $2a^3 + 7(x^2 - x + 1)(x + 1)$; 4) $y^3 - (y - 3)(y^2 + 3y + 9)$.

34.7. Решите уравнение :

1) $(2x - 3)(4x^2 + 6x + 9) - 8x^3 = 2{,}7x$;
2) $(3 + 4x)(16x^2 - 12x + 9) - 64x^3 = -10x$;

3) $(5-2x)(4x^2+10x+25)=2{,}5x-8x^3$;

4) $(6-5x)(36+30x+25x^2)=108x-125x^3$.

34.8. Решите неравенство :

1) $(1-4x)(1+4x+16x^2)-6x^3\le 10x-70x^3$;

2) $99x^3-(1+5x)(1-5x+25x^2)\ge 12x-26x^3$.

34.9. Докажите тождество :

1) $(5x-6)(25x^2+30x+36)-0{,}25(500x^3-864)=0$;

2) $91x^3-(3x-4)(9x^2+12x+16)-(3+4x)(9-12x+16x^2)=37$.

B

34.10. Разложите на множители многочлен :

1) a^3-27b^3; 2) $m^3n^3+k^3$; 3) x^6-y^6;

4) $k^6+(pq)^6$; 5) $(a-b)^3+b^3$; 6) $(x-2)^3-27$;

7) $8a^3+(a-b)^3$; 8) $27x^3-y^3(x-y)^3$.

34.11. Запишите в виде многочлена произведение:

1) $\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{3}x+x^2\right)$; 2) $\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n^2+\frac{1}{2}n+\frac{1}{4}\right)$;

3) $\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}b\right)\left(\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{6}ab+\frac{1}{9}b^2\right)$; 4) $\left(\frac{1}{4}y^2-yz+4z^2\right)\left(\frac{1}{2}y+2z\right)$.

34.12. Представьте в виде произведения многочлен :

1) $m^3-n^3+2n-2m$; 2) $3a^3-3b^3+5a^2-5b^2$;

3) $x^6+y^6+x^2+y^2$; 4) $a^3-b^3+a^2-b^2$;

5) $x^4+xy^3-x^3y-y^4$; 6) $a^4-a^3b+ab^3-b^4$.

Упростите выражения **(34.13—34.14):**

34.13. 1) $2a^3+9-2(a+1)(a^2-a+1)$;

2) $x(x+2)(x-2)-(x-3)(x^2+3x+9)$;

3) $3(b-1)^2+(b+2)(b^2-2b+4)-(b+1)^3$;

4) $(a-1)^3-4a(a+1)(a-1)+3(a-1)(a^2+a+1)$.

34.14. 1) $(x+2)(x^2-2x+4)-x(x-3)(x+3)-42$;

2) $(x-3)(x^2+3x+9)-x(x^2-16)+21$;

3) $(2x-1)(4x^2+2x+1)-23-4x(2x^2+3)$;

4) $16x(4x^2-5)+17-(4x+1)(16x^2-4x+1)$.

C

34.15. Упростите выражение:

1) $6(x+1)^2 + 2(x-1)(x^2+x+1) - 2(x+1)^3$;

2) $5x(x-3)^2 - 5(x-1)^3 + 15(x+2)(x-2)$;

3) $(x+2)^3 - x(3x+1)^2 + (2x+1)(4x^2-2x+1)$.

34.16. Найдите корни уравнения:

1) $x^3 - (x-3)(x^2+3x+9) + 9x = -18x$;

2) $(x+4)(16-4x+x^2) - x(x^2+8) = -192$;

3) $y(y^2-5) - (y-2)(y^2+2y+4) + 3y = 0$;

4) $(5+y)(25-5y+y^2) - 20y - y^3 = 0$.

Докажите тождества **(34.17—34.18):**

34.17. 1) $(x+y)^3 - (x-y)^3 - 6y(x^2-y^2) = 8y^3$;

2) $(m+n)^3 - (m-n)^3 - 2n(m^2+n^2) = 4m^2n$;

3) $x^3 - 4 - (x+2)^2 + x(4+x) = x^3 - 8$.

34.18. 1) $(a^2-3)^3 - (a^2-4)(a^2+4) - a^2(a^4-10a^2+27) + 27 = 16$;

2) $(b^2+3)^3 - (b^2+3)(b^4-3b^2+9) - 9b^2(b^2+3) = 0$;

3) $(m^2-1)(m^4+m^2+1) - (m^2-1)^3 + 3(m^2-1) = 3m^4 - 3$.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

34.19. Решите неравенство :

1) $(x+2)^2 - 10 \le 12x + x^2$; 2) $24 - (3-x)^2 > 8x - x^2$.

34.20. Найдите периметр и площадь фигуры, изображенной на рисунке 34.1.

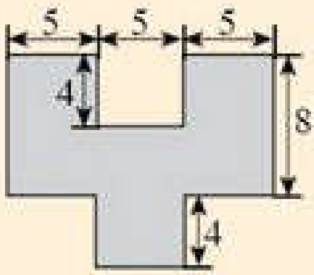


Рис. 34.1

§ 35. ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ВЫРАЖЕНИЙ

Как использовать формулы сокращенного умножения для рационального вычисления?

Формулы: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ — разности квадратов;
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ — квадрата суммы ;
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ — квадрата разности ;
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ — куба суммы ;
$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ — куба разности;
$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$ — разности кубов;
$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$ — суммы кубов
называются *формулами сокращенного умножения* .

Применение формул сокращенного умножения позволяет упростить выражения . Рассмотрим, как используются эти формулы .

Пример 1. Упростим выражение $(4 - 5a)^2 - 8a(3a + 1) + (7a - 4)\cdot(4 + 7a)$.

Решение . Для упрощения данного выражения воспользуемся формулами квадрата разности и разности квадратов, правилом умножения одночлена на многочлен, а затем приведем подобные слагаемые. Тогда имеем:

$$(4 - 5a)^2 - 8a(3a + 1) + (7a - 4)(4 + 7a) =$$
$$= 16 - 40a + \underline{25a^2} - \underline{24a^2} - 8a + \underline{49a^2} - 16 = \underline{50a^2} - 48a.$$

Ответ : $50a^2 - 48a$.

Пример 2. Решим неравенство $(5 - 2x)^2 - 8x \le 2x(2x - 6) + 9$.

Решение . $25 - 20x + 4x^2 - 8x \le 4x^2 - 12x + 9$;
$-20x + 4x^2 - 8x - 4x^2 + 12x \le 9 - 25$;
$-16x \le -16$;
$x \ge 1$.

Ответ : $[1; +\infty)$.

Пример 3. Докажем тождество: $4(b - 5)^2 - (b - 3)(b^2 + 3b + 9) + (b + 4)^3 - 8b(2b + 1) = 191$.

Доказательство . $4(b - 5)^2 - (b - 3)(b^2 + 3b + 9) + (b + 4)^3 - 8b(2b + 1) = 4(b^2 - 10b + 25) - (b^3 - 27) + b^3 + 12b^2 + 48b + 64 - 16b^2 - 8b = 4b^2 - 40b + 100 - b^3 + 27 + b^3 - 4b^2 + 40b + 64 = 191$.

Упражнения

А

Упростите выражения (35.1—35.4) :

35.1. 1) $(m^3 + 6n^2)^2 - (6n^2 - m^3)^2$; 2) $(x^2 - 7y^3)^2 + (x^2 + 7y^3)^2$;
3) $(9z + 2x^4)^2 - (2x^4 - 9z)^2$; 4) $(5a^3 - 4b)^2 + (4b + 5a^3)^2$.

35.2. 1) $(1{,}1x^2 - 6y)^2 - (1{,}1x^2 - 6y)(1{,}1x^2 + 6y)$;
2) $(2{,}3a - 7b^3)(2{,}3a + 7b^3) - (2{,}3a + 7b^3)^2$;
3) $(3{,}1n^3 - 5m)^2 + (5m - 3{,}1n^3)(5m + 3{,}1n^3)$.

35.3. 1) $1000 + a^6 - (a^2 + 10)(a^4 - 10a^2 + 100)$;
2) $(a^3 - 9)(a^6 + 9a^3 + 81) - a^9 - 729$;
3) $0{,}512t^3 - 100 + (0{,}8t + 5)(0{,}64t^2 - 4t + 25)$;
4) $(1{,}1d - c^3)(1{,}21d^2 + 1{,}1c^3d + c^6) - 1{,}331d^3 + 2c^9$.

35.4. 1) $(2 + a^4)(a^8 - 2a^4 + 4) + a^{10}(1 - a^2)$;
2) $k^5(k + 1) - (3 + k^2)(k^4 - 3k^2 + 9)$;
3) $(25 - 5y^4 + y^8)(5 + y^4) - y^6(y^6 - 1)$;
4) $(z^6 + 7z^3 + 49)(z^3 - 7) + z(1 - z^8)$.

Решите уравнения (35.5—35.6):

35.5. 1) $35 + (5x - 1)(5x + 1) = (5x + 2)^2$;
2) $3 + (2x + 3)^2 = 4(x - 6)(6 + x)$;
3) $6 - x + (2x - 1)^2 = 4(x + 3)^2$;
4) $39x + (4x + 3)^2 = 2 + 4(2x + 1)^2$.

35.6. 1) $7x - (x - 2)^3 = 13 - x^2(x - 6)$; 2) $10 + (3 - x)^3 = x^2(9 - x) - 17$;
3) $-16 + (4 + x)^3 = x^2(x + 12)$; 4) $11 - x^2(x + 9) = 8x - (x + 3)^3$.

35.7. Найдите корни уравнения:
1) $(x - 7)^2 - 49 = 0$; 2) $(6 + y)^2 - 81 = 0$;
3) $100 - (z - 19)^2 = 0$; 4) $25 - (13 + t)^2 = 0$.

Решите уравнения (35.8—35.10) :

35.8. 1) $x(0{,}25x - 3) - (0{,}5x + 1)(0{,}5x - 1) = 0$;
2) $(1{,}2 - x)(x + 1{,}2) + 1{,}8x + x^2 = 0$;
3) $0{,}49x^2 - 3x - (0{,}7x + 2)(0{,}7x - 2) = 0$;
4) $(1{,}6x + 1)(1 - 1{,}6x) - 64x(1 - 0{,}04x) = 0$.

35.9. 1) $(7x - 5)^2 + 67x - 49x^2 = -2$;
2) $196x^2 - (14x + 3)^2 + 80x = -5$;

3) $-2,89x^2+(1,7x+2)^2+0,2x=11$;
4) $(2,4x-1)^2-0,2x-5,76x^2=3$.

35.10. 1) $5(2+x)^3-5x^3=28x+30x^2$;
2) $54x^2-6(x-3)^3=162+6x^3$;
3) $(x+9)(x^2-9x+81)=-7-4x+x^3$;
4) $x^3-2x-331=(x^2-11x+121)(x+11)$.

Решите неравенства **(35.11—35.13):**

35.11. 1) $(x+8)^2-x^2\le 11x$; 2) $x^2-(9-x)^2>-2x$;
3) $(12+x)^2\ge x^2+21x$; 4) $x^2<(25-x)^2+25x$.

35.12. 1) $(y+7)^3-y^3-21y^2\ge 0$; 2) $-24y^2+(8-y)^3+y^3\le 0$;
3) $(6-y)^3+y^3-18y^2<0$; 4) $y^3-27y^2-(y-9)^3>0$.

35.13. 1) $(10+x)(100-10x+x^2)-x^3-500x<0$;
2) $-x^3+675x-(15+x)(225-15x+x^2)>0$;
3) $(169+13x+x^2)(x-13)-x^3-2262x\le 0$;
4) $1331x-x^3+(11+x)(x^2-11x+121)\ge 0$.

Докажите тождества **(35.14—35.15):**

35.14. 1) $(3x+4y)^2-(4y-3x)^2=48xy$;
2) $(1,5x-2y)^2+(2x+1,5y)^2=6,25(x^2+y^2)$;
3) $(2a-3b)^3-(2a+3b)^3=-18b(4a^2+3b^2)$;
4) $(3a-2b)^3+(3a+2b)^3=18a(3a^2+4b^2)$.

35.15. 1) $(5z^2-6k)^2-(5z^2+3k)^2+90z^2k=27k^2$;
2) $(m^2-n^2)(m^2+n^2)-m^2(m^2-n^2)-m^2n^2=-n^4$;
3) $(1,2x^4-7y^2)(1,2x^4+7y^2)+0,56x^8+49y^4=2x^8$;
4) $(1,4a^3-5b^2)(1,4a^3+5b^2)-2,96a^6+25b^4=-a^6$.

B

Упростите выражения **(35.16—35.17):**

35.16. 1) $(4x^3-1)(9x^3+5)-(6x^3-1)^2$; 2) $(x^4-1)^2-(x^4+4)-(x^4-6)$;
3) $(x^7-3)(x^7+7)-(x^7+2)^2$; 4) $(x^8+9)(11-x^8)-(x^8+1)^2$.

35.17. 1) $(a^3+b^3)^3-(a^3-b^3)^3-2b^9$; 2) $(1-a^3b^3)^3-(a^3b^3-1)^3-2$;
3) $3a^4b^4(a^4-b^4)-(a^4-b^4)^3$; 4) $(c^2+d^2)^3-3c^2d^2(c^2+d^2)$.

Решите уравнения **(35.18—35.19):**

35.18. 1) $8(x-10)^2-11(x+5)^2=-3x^2-170x+1600$;
2) $2,5(4+x)^2+7(5-x)(5+x)=295-4,5x^2$;

3) $1{,}9(y+20)(20-y)-1{,}6(y+20)^2=116-3{,}5y^2$;

4) $30(1{,}8-y)^2+20(y+1{,}8)(y-1{,}8)=50y^2+140{,}4$.

35.19. 1) $(2{,}3x-10)(5{,}29x^2+23x+100)-125x=12{,}167x^3$;

2) $(20+1{,}7x)(2{,}89x^2-34x+400)-400x=4{,}913x^3$;

3) $5(x-6)^3-13(2+x)^3+32=-8x^2(x+21)$;

4) $-6(4+x)^3+3(5-x)^3=1017-9x^2(3+x)$.

Решите неравенства **(35.20—35.21):**

35.20. 1) $(9x-7)^2-10\le(9x+3)(9x-5)$;

2) $(3+7x)^2-x\le-26+x(49x-8)$;

3) $(11+25x)x+7<(5x-7)^2-3x$;

4) $4+(6-11x)^2>25x+x(121x+3)$.

35.21. 1) $13+x^2(x-9)\le(x-3)^3+11$;

2) $26+(2+x)^3<x^2(6+x)$;

3) $3x-x^2(15+x)>-(x+5)^3-4x$;

4) $(4+x)^3-6x\le x^2(x+12)+1$.

C

35.22. Найдите наибольшее целое число, являющееся решением неравенства:

1) $(3-x)(9+3x+x^2)-2x+x^3\ge7x+7$;

2) $(x-7)(x^2+7x+49)<-4x+x^3+17$;

3) $7x-x^3>27x-(x+8)(x^2-8x+64)$;

4) $16x(32x^2+1)\le-32+(8x-1)(64x^2+8x+1)$.

35.23. Найдите наименьшее целое число, являющееся решением неравенства:

1) $(x+9)^2-x^2>15x-79$; 2) $x^2-(11-x)^2<23x+19$;

3) $(x-8)^3+24x^2\ge x^3+64x$; 4) $x^3-(7+x)^3\ge-21x^2-490$.

Докажите тождества **(35.24—35.25):**

35.24. 1) $((a^7-8b^4)(8b^4+a^7)+63b^8)^2-a^{14}(+2b^8+a^{14})=b^{16}$;

2) $b^{24}-(82c^{10}+(b^6-9c^5)(9c^5+b^6))^2+c^{20}=-2c^{10}b^{12}$;

3) $(x^3-9y^4)^2-(x^3+9y^4)^2+36x^3(y^4-x)=-36x^4$;

4) $0{,}5z^4(40zt^2-5)-(z^5+10t^2)^2+(10t^2-z^5)^2=-2{,}5z^4-20z^5t^2$.

35.25. 1) $(a^7-t^5)(a^{14}+a^7t^5+t^{10})+(t^5-a^7)^3-3a^{14}t^5=-3a^7t^{10}$;

2) $(x^4+b^9)^3-(b^9+x^4)(b^{18}-x^4b^9+x^8)-3x^8b^9=3x^4b^{18}$.

Подготовьте сообщение

35.26. Некоторые формулы сокращенного умножения были известны еще 4 тыс. лет тому назад. Их знали вавилоняне и другие народы древности. Расскажите о том, как изображали эти формулы в "Началах" Евклида.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

35.27. Докажите, что разность между разностью кубов двух нечетных чисел и кубом их разности кратна 6.

35.28. Докажите, что для того, чтобы возвести целое число с половиной в квадрат, можно целую часть этого числа умножить на число, которое больше его на единицу и к результату прибавить 0,25.

35.29. Длины двух противоположных сторон квадрата увеличили на 5 см каждую, а длины двух других уменьшили на столько же сантиметров. Как изменилась площадь полученной фигуры по отношению к первоначальной?

§ 36. РЕШЕНИЕ ТЕКСТОВЫХ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ СОСТАВЛЕНИЯ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

Как решать текстовые задачи с помощью составления уравнений и неравенств?

В математике часто описываются различные проблемные реальные ситуации, которые надо решить. Для этого используются математический язык, различные математические правила и составляется математическая модель.

Многие проблемные реальные ситуации можно решить арифметическим способом, т. е. найти ответ на вопрос задачи с помощью выполнения арифметических действий над числами. Существует много практических задач, которые решаются алгебраическим способом, т. е. с помощью уравнений.

При решении задачи алгебраическим способом нужно четко придерживаться следующего алгоритма:

1) искомую величину или несколько величин обозначают буквами x, y, z ...;

2) устанавливают взаимосвязи между данными и искомыми величинами;

3) составляют уравнение или неравенство, или систему уравнений или неравенств (математическую модель);

4) решают составленное уравнение или неравенство, или систему уравнений или неравенств;

5) проверяют полученный результат в соответствии с условием задачи;

6) записывают ответ.

Как составить математическую модель по условию задачи?

Математическая модель может быть представлена в виде уравнения или системы уравнений с переменными, или системы неравенств, в виде таблицы, схематичного рисунка и др. Решим несколько практических задач.

Пример 1. На овощном складе имеются огурцы и помидоры. Число ящиков с помидорами вдвое больше, чем с огурцами. Если со склада будет отпущено пять ящиков с помидорами и дополнительно пять ящиков с огурцами, то ящиков с помидорами будет на 5 больше, чем ящиков с огурцами. Сколько всего ящиков с помидорами и огурцами находится на складе?

Решение. Пусть число ящиков с огурцами равно x, тогда $2x$ — число ящиков с помидорами. Значит, всего на складе $x + 2x = 3x$ ящиков с овощами. Если со склада будет отпущено 5 ящиков с помидорами, то их останется $(2x - 5)$, а если еще дополнительно 5 ящиков с огурцами, то их станет $(x + 5)$. По условию задачи ящиков с помидорами будет на 5 больше, чем ящиков с огурцами. На математическом языке запишем это так: $(2x - 5) - (x + 5) = 5$ $(x > 0)$.

Полученное уравнение является математической моделью нашей задачи. Решая уравнение $2x - 5 - x - 5 = 5$, получим $x = 15$.

Значит, на складе 15 ящиков с огурцами и 30 ящиков с помидорами. Проверим по условию, верно ли решена задача.

Если отпустить 5 ящиков с помидорами, то их останется $30 - 5 = 25$ (ящиков).

Если подвезти 5 ящиков с огурцами, то на складе их будет $15 + 5 = 20$.

Тогда получим, что на складе ящиков с помидорами на 5 больше, чем с огурцами $(25 - 20 = 5)$. А всего на складе $3 \cdot 15 = 45$.

Ответ: 45 ящиков.

Пример 2. Из двух городов, расстояние по шоссе между которыми составляет 590 км, навстречу друг другу выехали два автобуса, причем скорость второго автобуса на 10 км/ч больше скорости первого. Известно, что первый автобус выехал на 2 ч раньше второго, и они встретились через 5 ч после выхода первого автобуса. Найдите скорость каждого автобуса.

Решение. Воспользуемся известной формулой: $s = v \cdot t$, где s — расстояние (длина пройденного пути), v — скорость движения, t — время движения.

Составим математическую модель задачи. Пусть скорость первого автобуса x км/ч, тогда скорость второго автобуса будет $(x + 10)$ км/ч. Первый автобус находился в пути 5 ч до встречи, второй — $(5 - 2) = 3$ (ч).

Следовательно, первый автобус за 5 ч проехал $5x$ км, а второй за 3 ч — $3(x + 10)$ км. Так как по условию задачи они встретились, то вместе они прошли $(5x + 3 \cdot (x + 10))$ км, т. е. 590 км.

Составим уравнение: $5x + 3 \cdot (x + 10) = 590$.

Полученное уравнение является математической моделью нашей задачи. Решая уравнение $5x + 3 \cdot (x + 10) = 590$, получим $x = 70$.

Значит, скорость первого автобуса равна 70 км/ч, тогда скорость второго автобуса равна $70 + 10 = 80$ (км/ч).

Проверим, удовлетворяют ли условию задачи найденные значения. По условию задачи, первый автобус был в пути 5 ч со скоростью 70 км/ч. Значит, он прошел путь длиной 350 км. Второй автобус был в пути 3 ч, и его скорость равна 80 км/ч. Значит, он прошел путь длиной 240 км. Так как по условию задачи они встретились, то вместе ими пройден путь длиной в 240 + 350 = 590 (км), что соответствует условию задачи.

Ответ : 70 км/ч, 80 км/ч.

Пример 3. Из г. Петропавловска в г. Астану выехал автобус, скорость которого 70 км/ч. Через два часа вслед за ним выехал легковой автомобиль. Какой должна быть скорость автомобиля, чтобы он смог догнать автобус до его прибытия в г. Астану, если расстояние между городами 630 км.

Решение .

Пусть скорость автомобиля x км/ч. Автобус прибудет в г. Астану через 630 : 70 = 9 (ч). После выхода автомобиля автобус будет в пути еще 7 ч. Значит, автомобиль должен проехать путь от г. Петропавловска до г. Астаны менее чем за 7 ч. Можно составить неравенство $\frac{630}{x} \le 7$, или $7x \ge 630$, т. е. $x \ge 90$.

Следовательно, скорость автомобиля должна быть не менее 90 км/ч.

Ответ : не менее 90 км/ч.

1. Что представляет собой "математическая модель задачи"?
2. Что означает "решить задачу алгебраическим способом", "арифметическим способом"?
3. Как можно проверить, правильно ли решена задача?
4. Как называется способ решения задачи с помощью составления неравенства?
5. Как называется способ решения задачи с помощью составления системы уравнений или системы неравенств?

Упражнения

A

36.1. Библиотекарь получила школьные учебники и решила разместить их по стеллажам. Она посчитала, что если поставить по 20 учебников на каждую полку, то две полки окажутся пустыми. Но если на каждую полку поставить по 15 учебников, то на всех полках будет одинаковое число книг. Сколько учебников получено библиотекой?

36.2. В шахматном турнире участвовало 20 учащихся из 6 и 7 классов. Учащихся из 7 класса было в 1,5 раза больше, чем из 6. Найдите число участников турнира из 6 и 7 классов.

36.3. В седьмых классах девочек в 1,4 раза больше, чем мальчиков. Найдите число учащихся в седьмых классах, если девочек на 16 больше, чем мальчиков.

36.4. В одной коробке было в 3 раза больше яблок, чем в другой. Если из нее взять 17 яблок, в другую коробку добавить 35, то в обеих коробках яблок станет поровну. Сколько яблок было первоначально в каждой коробке?

36.5. Значение суммы двух чисел равно 77. Найдите эти числа, если $\frac{2}{3}$ одного числа составляют 0,8 от другого.

36.6. Цена персиков на 50 тг/кг больше цены абрикосов. Для консервирования компота купили 4 кг персиков и 6 кг абрикосов. По какой цене куплены фрукты, если за всю покупку заплатили 4200 тг?

36.7. Периметр треугольника ABC равен 92 см. Длина стороны AB вдвое меньше длины стороны BC и на 8 см меньше длины стороны AC. Какова длина каждой стороны треугольника?

36.8. Расстояние между двумя пристанями по реке равно 80 км. Это расстояние катер проплывает по течению за 4 ч, против течения за 5 ч. Найдите собственную скорость катера и скорость течения реки.

36.9. Из пунктов A и B, расстояние между которыми 30 км, навстречу друг другу одновременно вышли два пешехода и встретились через 3 ч 20 мин. Если бы первый пешеход вышел на 2 ч раньше второго, то встреча произошла бы через 2 ч 30 мин после выхода второго. Найдите скорость второго пешехода.

36.10. Двое рабочих вместе изготовили 678 деталей. Первый рабочий работал 8 дней, второй 11 дней. Найдите число деталей, изготовленных каждым рабочим за день, если второй за каждые 4 дня выполнял на 22 детали больше, чем первый за 3 дня.

B

36.11. Три бригады рабочих изготовили за смену 96 деталей. Первая бригада изготовила на 18 деталей больше, чем вторая, третья бригада изготовила $\frac{5}{11}$ того количества деталей, что изготовила первая и вторая бригады вместе.

1) Сколько деталей изготовила каждая бригада?
2) Если за изготовление деталей рабочий получает 56 тг/дет., то какую сумму заработал каждый из них?
3) На сколько процентов заработок за смену первого рабочего больше заработка третьего рабочего?

36.12. Требуется оклеить стены комнаты, площадь пола которой имеет квадратную форму и равна 9 м^2. Высота комнаты 3 м, площадь двери — 1,8 м^2, окна — 1,5 м^2 и одним рулоном можно оклеить 7,2 м^2.
1) Найдите число рулонов, которые потребуются для оклейки комнаты.
2) Какую сумму надо заплатить за обои, если цена обоев 650 тг за один рулон?

36.13. Сколько литров воды потребуется для заполнения пустого аквариума, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда, если объем воды, который в него надо налить, равен объему куба с длиной стороны, равной 30 см?

36.14. Клумба имеет форму прямоугольника, длины сторон которого относятся как 3:4. Найдите размеры прямоугольника, если площадь клумбы равна 4800 дм^2.

36.15. Клумба имеет форму прямоугольника, у которого ширина составляет $\frac{5}{7}$ от его длины.
1) Найдите размеры клумбы, если ее площадь равна 3500 дм^2.
2) Сколько блоков декоративного ограждения потребуется для ее ограждения, если длина одного блока декоративного ограждения составляет 50 см?

36.16. Измерения прямоугольного параллелепипеда относятся как 2 : 3 : 4, а его объем равен 192 дм^3.
1) Найдите измерения прямоугольного параллелепипеда.
2) Если длину и ширину этого параллелепипеда увеличить на 2 дм, то как изменится его объем?

36.17. Здание имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Его ширина в 6 раз меньше длины и в 3 раза меньше высоты. Найдите высоту здания, если площадь его боковой поверхности равна 8232 м^2.

36.18. Если из числителя дроби вычесть 4, знаменатель умножить на 4, то получим $\frac{1}{12}$. Если же числитель дроби умножить на 2, а из знаменателя вычесть 2, то получим число 2. Найдите эту дробь.

36.19. Вкладчик открыл в банке депозит из расчета 10% годовых. Через год он снял с депозита 60 000 тг, в результате на депозите осталась сумма, равная половине первоначального взноса. Какова сумма будет на депозите в конце второго года?

C

36.20. От пристани A отошел плот и одновременно с ним от пристани B отплыла моторная лодка вверх по течению реки по направлению к A. Найдите собственную скорость лодки, если лодка и плот встретились через 2 ч, а путь, пройденный лодкой и плотом, равен 16 км.

36.21. От пристани вниз по течению реки отплыла лодка, скорость которой в стоячей воде равна 12 км/ч. Через 1 ч вверх по реке отправился катер, собственная скорость которого равна 18 км/ч. Найдите скорость течения реки, если через 3 ч после выхода лодки длина пути, пройденного лодкой и катером, будет равна 75 км.

36.22. Среди 400 000 жителей города 60% не интересуются футболом. Среди футбольных болельщиков 75% смотрели по телевидению финал Лиги чемпионов.

1) Сколько жителей этого города смотрели этот матч?

2) Какой процент жителей города смотрели этот матч?

3) Какой процент жителей города не смотрели этот матч?

36.23. Глава семьи решил положить на депозит в банк 250 000 тг. Часть этих денег он положил на счет, процентный прирост которого составляет 10%. Оставшуюся часть положил на депозит под 9% годовых, но с которого можно снимать деньги до неснижаемого остатка в 50 000 тг. Через год на депозитах была сумма в 274 000 тг.

1) Какая сумма была положена на депозит, прирост которого составляет 10% годовых?

2) Какая сумма была через год на депозите, прирост которого составляет 9% годовых?

3) На сколько тенге выгоднее положить всю сумму на депозит под 10% годовых?

36.24. Первый оператор на компьютере набирает рукопись за 9 ч, второй оператор за 6 ч. После того как первый оператор работал 3 ч, ему поручили другую работу. Оставшуюся часть рукописи набрал второй оператор.

1) За сколько часов второй оператор набрал оставшуюся часть работы?

2) За какое время выполнена вся работа?

3) Если половину работы выполнит один оператор, вторую половину второй оператор, то за какое время будет готова вся работа?

4) Если оба оператора одновременно набирают рукопись, то за какое время будет выполнена вся работа ?

36.25* . Найдите такие двузначные числа, сумма цифр которых не больше 12, а цифра десятков втрое больше цифры единиц.

36.26* . Средняя скорость автобуса больше 60 км/ч, но меньше 80 км/ч.

1) За какое время автобус может пройти путь в 240 км?

2) Какая должна быть скорость автобуса, чтобы проехать это расстояние не более чем за 3 ч 20 мин?

36.27 . 1) Значение суммы двух двузначных чисел равно 36, а значение разности их квадратов равно 432. Найдите эти числа.

2) Составьте сюжетную задачу, решение которой приводит к уравнению:

а) $x(x-3)=28$;

б) $\dfrac{42}{17-x}-\dfrac{40}{17+x}=1$;

в) $\dfrac{20}{50+x}+\dfrac{10}{10-x}=1$.

36.28* . При делении 48 на значение суммы цифр другого двузначного числа получим в частном число 4. Разность квадратов цифр этого двузначного числа равна 24. Найдите двузначное число.

36.29* . 1) Расстояние от пункта A до пункта B равно 180 км. Если автомобиль увеличит скорость на 20 км/ч, то за 2 ч он проедет больше 180 км. Если он уменьшит скорость на 20 км/ч, то даже за 3 ч не успеет доехать до пункта B. Какова скорость автомобиля?

2) Расстояние между двумя пристанями по озеру равно 36 км. Если моторная лодка увеличит скорость на 3 км/ч, то за 3 ч она проплывет более 36 км. Если же уменьшит на 2 км/ч, то за 4 ч еще не доплывет до пункта назначения. Какова скорость моторной лодки?

3) Расстояние между двумя мотоциклистами равно 7 км. Скорость одного из них равна 14 км/ч, другого — 16 км/ч. Через какое время расстояние между мотоциклистами будет равно

1 км, если:а) мотоциклисты движутся в одном направлении; б) мотоциклисты движутся в разных направлениях? (рассмотреть все варианты.)

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

36.30. Найдите значение переменной, при котором значение выражения равно нулю: 1) $2x - 5$; 2) $36x - 4x^2$; 3) $2\frac{1}{3}x - 14$; 4) $x^2 - 16$; 5) $25 - x^2$; 6) $9x + 4x^2$.

36.31. Запишите выражение в виде многочлена стандартного вида:

1) $\frac{2x^2 - 3x + 3}{4}$; 2) $36x - \frac{x^2 + 4x + 5}{2}$;

3) $2\frac{1}{3}x - \frac{7 - 5x + 2x^3}{3}$; 4) $x^2 + 1 - \frac{x - 3}{4} + \frac{8x^2 - 3}{4}$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Выберите неверное равенство:

A. $(3b-c)(3b+c)=9b^2-c^2$; B. $(x+4)(4-x)=16-x^2$;
C. $36n^2-49=(6n+7)(7-6n)$; D. $y^4-25=(y^2-5)(y^2+5)$.

2. В выражении $n^2+x+0{,}04$ замените x одночленом так, чтобы получился квадрат двучлена:

A. $0{,}2n$ и $-0{,}2n$; B. $4n$ или $-4n$;
C. $2n$ или $-2n$; D. $0{,}4n$ и $-0{,}4n$.

3. Выберите верное равенство:

A. $(3+a^2)^2=9+3a+a^2$; B. $(k-5)^2=k^2-10k+10$;
C. $(x+2y^2)^2=x^2+4xy^2+4y^4$; D. $16a^4-24a^2b+9b^2=(8a^2-3b)^2$.

4. Разложите на множители выражение $a^4b^6-16c^8$:

A. $(a^2b^3-4c^4)^2$; B. $(a^2b^3+4c^4)^2$;
C. $(a^2b^3-4c^4)(a^2b^3+4c^4)$; D. $(a^2b^3+4c^4)(4c^4-a^2b^3)$.

5. Решите уравнение $4x^2-25=0$:

A. 2,5; B. –2,5;
C. –2,5; 2,5; D. –10; 10.

6. Разложите на множители выражение $169-(z+7)^2$:

A. $(6-z)(20+z)$; B. $(6-z)(20-z)$;
C. $(6-z)(z-20)$; D. $(z-6)(20-z)$.

7. Выберите верное равенство:

A. $8t^3+1=(2t-1)(4t^2+2t+1)$;

B. $216a^3-b^6=(6a+b^2)(36a^2-6ab^2-b^3)$;

C. $27x^3-64y^3=(3x-4y)(9x^2+12xy+16y^2)$;

D. $\frac{8}{27}a^3-\frac{1}{64}b^3=\left(\frac{2}{3}a-\frac{1}{2}b\right)\left(\frac{4}{9}a^2+\frac{1}{12}ab+\frac{1}{4}b^2\right)$.

8. На какое число делится выражение 41^3+14^3:

A. 2; B. 7; C. 14; D. 55?

9. В выражении $0{,}25a^2-{*}ab+9b^2$ вместо звездочки (*) вставьте число, чтобы получился квадрат разности двучлена:

A. 1,5; B. –1,5; C. 3; D. –3.

10. Вычислите $\dfrac{5{,}2^2-4{,}8^2}{1{,}1^2-2\cdot1{,}1+1}$:

A. 400; B. 40; C. –40; D. – 400.

11. Решите уравнение $5x^3 - 125x = 0$:

A. 0,5; B. –5; C. 0; D. –5; 0; 5.

12. Упростите выражение $(8 + x)(8 - x) + (x + 2)^2$:

A. $68 - 4x$; B. $68 + 4x$;

C. $60 - 4x$; D. $60 + 4x$.

13. Упростите выражение $(9 - b)(9 + b) - (3 - b)(9 + 3b + b^2)$ и найдите его значение при $b = -1$:

A. 52; B. 53; C. 56; D. 108.

14. В выражении $m^2 + 2 * + 0{,}04$ вместо звездочки (*) вставьте одночлен так, чтобы получился квадрат разности двучлена:

A. $0{,}1\ m$ или $-0{,}1\ m$; B. $0{,}2\ m$;

C. $-0{,}2\ m$; D. $0{,}2\ m$ и $-0{,}2\ m$.

15. Преобразуйте выражение $(5x - 2)(x + 1) - (5 - 2x)^2$ в многочлен стандартного вида:

A. $x^2 + 23x - 27$; B. $9x^2 + 23x - 27$;

C. $9x^2 - 27x - 27$; D. $x^2 + 23x + 27$.

16. Разложите выражение $2x + y + y^2 - 4x^2$ на множители:

A. $(2x + y)(y - 2x)$; B. $(2x + y)(1 + y - 2x)$;

C. $(y + 2x)(y - 2x - 1)$; D. $(y + 2x)(2x - y - 1)$.

17. Упростите выражение $(2 - a)(4 + 2a + a^2) - (3 + a)(9 - 6a + a^2)$ и найдите его значение при $a = -2$:

A. –3; B. 37; C. –37; D. –19.

18. Вычислите $\dfrac{18^3 - 7^3}{18^2 + 18 \cdot 7 + 7^2}$:

A. 3218; B. 1321; C. 11; D. 3125.

19. Разложите на множители выражение $(b - 4)^2 - (a + 3)^2$:

A. $(b - a - 7)(b - a + 1)$; B. $(b - a - 7)(b + a - 1)$;

C. $(b + a - 7)(b - a + 1)$; D. $(b - a + 7)(b - a - 1)$.

20. Разложите на множители выражение $x^6 - x^2 \cdot y^4$:

A. $(x^3 - y^2)(x^3 + y^2)$; B. $x^2(x^2 - y^2)^2$;

C. $x^2(x^2 + y^2)^2$; D. $x^2(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)$.

ГЛАВА 6

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДРОБИ

§ 37. АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ДРОБЬ

Что такое *алгебраическая дробь*?

Вы знаете, что такое *многочлен* (*одночлен*, *двучлен*, *трехчлен*). *Например*, выражение: $-2a^2b^5$ — одночлен, $x^3 + 0{,}12y^3$ — двучлен, $\frac{1}{3}x^2 + 2xy + y^2$ — трехчлен, $x^2 + 3x + 7xy + 8y + y^2 + \frac{1}{12}$ — многочлен.

Многочлены являются *целыми выражениями*. Число также многочлен.

Объясните

Почему выражения $\frac{b-36}{2}$, $n^3 - \frac{n(n-9)}{4}$ являются целыми выражениями (многочленами)?

В выражениях: $\frac{4+b}{-2a+11}$, $\frac{2x+6-y}{x^2-8+y}$, $\frac{14+n^2}{n^2-7}$ числитель и знаменатель являются многочленами, или целыми выражениями. Такие выражения называют *алгебраическими* (*рациональными*) *дробями*, *или дробными выражениями*.

> *Алгебраической* (*рациональной*) *дробью* (*дробным выражением*) называется выражение вида $\frac{A}{B}$, где A и B — многочлены (целые выражения).

Многочлен A называется *числителем алгебраической дроби* (*дробного выражения*), многочлен B называется *знаменателем алгебраической дроби* (*дробного выражения*).

> Целые и дробные выражения (многочлены и алгебраические дроби) называются *рациональными выражениями*.

Рациональные выражения

целые выражения (многочлены)	дробные выражения (алгебраические дроби)

Вы умеете находить значения целых выражений. Значения дробных выражений (алгебраических дробей) находят также.

Объясните

Как нашли значение алгебраической дроби $\frac{7a-8b}{1{,}4ab}$ при $a=\frac{2}{7}$, $b=-10$?

$$\frac{7a-8b}{1{,}4ab}=\frac{7\cdot\frac{2}{7}-8(-10)}{1{,}4\cdot\frac{2}{7}(-10)}=\frac{2+80}{-4}=\frac{82}{-4}=-20{,}5.$$

Для нахождения значения целого выражения (многочлена) всегда можно выполнить указанные арифметические действия, поэтому целое выражение имеет смысл при любых значениях входящих в него переменных.

Почему нельзя найти значение алгебраической дроби $\frac{7a-8b}{1{,}4ab}$ при $a=0$ или $b=0$?

Дробное выражение (алгебраическая дробь) при некоторых значениях переменных может не иметь смысла.

Почему дробное выражение (алгебраическая дробь) $\frac{10x-12}{x}$ не имеет смысла при $x=0$? При всех остальных значениях x это дробное выражение (алгебраическая дробь) имеет смысл.

Значения переменных, при которых дробное выражение (алгебраическая дробь) имеет смысл, называются *допустимыми значениями переменных дробного выражения* (алгебраической дроби).

Как найти область допустимых значений переменных в алгебраической дроби?

Пример. Найдем допустимые значения переменной x дробного выражения (алгебраической дроби) $\frac{7+8x}{x(x-3)}$.

Решение. Допустимыми значениями дробного выражения являются такие значения переменных, при которых знаменатель не равен нулю. Поэтому найдем значения переменной x, при которых знаменатель алгебраической дроби обращается в нуль, и исключим эти значения из всех чисел. Для этого сначала решим уравнение $x(x-3)=0$.

Это уравнение имеет два корня: 0 и 3, так как произведение равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю. Значит, допустимыми значениями переменной x дробного выражения (алгебраической дроби) $\frac{7+8x}{x(x-3)}$ являются все числа, кроме 0 и 3, т. е. числовой промежуток $(-\infty; 0) \cup (0; 3) \cup (3; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; 0) \cup (0; 3) \cup (3; +\infty)$.

Алгебраические дроби также называют *дробно-рациональными выражениями*. *Например*, $\frac{-58}{y}$, $\frac{x+83}{100}$, $\frac{x-y}{x^2-2xy+y^2}$, $\frac{mn}{m^2+n^2}$ — дробно-рациональные выражения.

Допустимыми значениями дробно-рационального выражения являются значения переменных, при которых знаменатель дроби не обращается в нуль.

1. Верно ли, что:
   — любое дробное выражение является рациональным выражением;
   — любое рациональное выражение является дробным выражением;
   — любое рациональное выражение является целым выражением;
   — любое целое выражение является рациональным выражением;
   — любая алгебраическая дробь является дробным выражением;
   — любой многочлен является целым выражением?
2. Какие значения переменных рационального выражения могут быть недопустимыми?

Упражнения

А

37.1. Выберите дробно-рациональные выражения из выражений:

1) $\frac{2x}{3}+\frac{4}{7}$; 2) $\frac{2-5x}{7,3}-\frac{4x+3}{3}$; 3) $\frac{3}{x-2}$;

4) $\dfrac{3x+4}{x-2}+\dfrac{x}{7}$; 5) $\dfrac{3y}{2,7-\frac{3}{7}}$; 6) $\dfrac{4y-5}{3-0,2y}+\dfrac{2y-3}{8}$;

37.2. Найдите значение выражения:

1) $\dfrac{2x-1}{x}$ при $x = 3;\ 1;\ -5;\ \frac{1}{2};\ -1,6;\ 100$;

2) $\dfrac{3a-7}{2a+5}$ при $a = -2;\ -0,4;\ 0;\ 2,5$;

3) $\dfrac{b^2+6}{3b-4}$ при $b = 3;\ 4,4;\ 5;\ 6$;

4) $2x+\dfrac{8}{x+1}$ при $x = -\frac{1}{2};\ 0,5;\ 1;\ 3$;

5) $\dfrac{y+3}{2y}+\dfrac{2y}{y-3}$ при $y = 1,5;\ 2,5;\ 4;\ 4,5$;

6) $\dfrac{x+3}{x}+\dfrac{x}{x-3}$ при $x = -\frac{1}{2};\ 1,5;\ 2;\ 3$;

7) $\dfrac{(a+b)^2-1}{a^2+1}$ при $a = -3,\ b = -1$;

8) $\dfrac{2a^2-b}{b^2+1}-\dfrac{1}{a}$ при $a = 1\frac{1}{2},\ b = 0,5$.

37.3. Заполните таблицу 37.1.

Таблица 37.1

x	-13	-5	$-0,2$	0	$\frac{1}{17}$	1	$5\frac{2}{3}$	7
$\frac{x+5}{x-3}$								

37.4. Укажите значения переменной, при которых не имеет смысла выражение:

1) $\dfrac{x}{x-2}$; 2) $\dfrac{b+4}{b^2+7}$; 3) $\dfrac{y^2-1}{y}+\dfrac{y}{y-3}$;

4) $\dfrac{a+10}{a(a-1)}-1$; 5) $\dfrac{y^3-1}{2-y}-\dfrac{2y}{3y-3}$; 6) $\dfrac{c^2-1}{3c}+\dfrac{4c}{2c-3}$.

37.5. Составьте дробь, у которой числитель: 1) произведение переменных x и y, знаменатель — сумма $2x$ и $3y$;
2) разность выражений $2a$ и $b-1$, знаменатель — их произведение.

B

37.6. Найдите допустимые значения переменной в выражении:

1) $\frac{5y-8}{11}$; 2) $\frac{y^2+1}{y^2-2y}$; 3) $\frac{y-10}{y^2+3}$;

4) $\frac{6y}{3y-4}+\frac{15}{y+16}$; 5) $\frac{32}{5y}-\frac{3y+1}{2y+7}$.

37.7. Укажите допустимые значения переменной в выражении:

1) $\frac{4}{x}-\frac{1}{2x-6}$; 2) $\frac{2x+3}{x(x+1)}+\frac{4}{3x}$;

3) $5x+\frac{71}{x+5}$; 4) $\frac{5y-7}{(y-3)\cdot(2y+5)}-\frac{5}{y}$.

37.8. Запишите дробь с переменной x, которая имеет смысл при всех значениях x, кроме чисел 1) 3; 2) 4; 3) –2; 4) –1 и 2; 5) 3 и 5; 6) $-\frac{2}{3}$ и 7.

C

37.9. Из городов A и B, расстояние между которыми по железной дороге s км, вышли в одно и то же время навстречу друг другу два поезда. Первый шел со скоростью v_1 км/ч, а второй со скоростью v_2 км/ч. Через t ч они встретились. Выразите переменную t через s, v_1 и v_2. Найдите значение t, если известно, что: 1) $s = 350$, $v_1 = 55$, $v_2 = 45$; 2) $s = 465$, $v_1 = 85$, $v_2 = 70$.

37.10. 1) Найдите значение дроби $\frac{3x}{x^3-3x^2}$, если оно существует при: $x = 0$; $x = 0,5$; $x = 2$; $x = 4,6$; $x = 3$.

2) Вычислите значение дроби $\frac{2c-3}{2c^3-3c^2}$, если оно существует при: $c = -2$; $c = 4,5$; $c = 6\frac{1}{4}$; $c = \frac{2}{3}$; $c = 1,5$.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

37.11. Зная, что $\frac{x-4y}{y}=12$, найдите значение выражения:

1) $\frac{x}{y}$; 2) $\frac{y}{x}$; 3) $\frac{3x+y}{2y}$.

37.12. Выпишите верные равенства:

1) $\frac{65}{85}=\frac{13}{17}$; 2) $\frac{46}{79}=\frac{138}{237}$; 3) $\frac{21}{23}=\frac{189}{230}$.

§ 38. ОСНОВНОЕ СВОЙСТВО АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ДРОБИ

Какое основное свойство алгебраической дроби и как его применять?

Вы знаете основное свойство обыкновенных дробей: если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же, не равное нулю число, то значение дроби не изменится.

Аналогичным свойством обладают и рациональные дроби.

Теорема. *При любых значениях* a и при $b \neq 0$ *и* $c \neq 0$ *верно равенство* $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$.

Доказательство. Обозначим дробь $\frac{a}{b}$ буквой m: $\frac{a}{b} = m$.

Выразим делимое a из равенства $\frac{a}{b} = m$, тогда $a = bm$.

Умножим обе части верного числового равенства $a = bm$ на c и получим $ac = (bm)c$.

Затем, используя переместительное и сочетательное свойства умножения, имеем $ac = (bc)m$.

Выразим m из равенства $ac = (bc)m$, где $bc \neq 0$, тогда $m = \frac{ac}{bc}$.

Теперь, используя обозначение дроби $\frac{a}{b}$ буквой m, получим $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$. ■

Свойство, выраженное тождеством $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$, называют *основным свойством алгебраической дроби*.

Вы знаете, что тождествами называются *равенства с переменной* (*переменными*), которые верны при любых значениях переменных.

Равенство $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ верно при всех значениях переменных, при которых имеют смысл его левая и правая части, т.е. при всех допустимых значениях переменных. Такие равенства также называют *тождествами*.

Тождеством называется равенство, верное при всех допустимых значениях входящих в него переменных.

Два выражения, принимающие равные значения при всех допустимых для них значениях переменных, называют *тождественно равными*, а замену одного такого выражения другим — *тождественным преобразованием выражения*.

Поменяв в тождестве $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ его левую и правую части, получим: $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$.

Это тождество позволяет заменить дробь вида $\frac{ac}{bc}$ тождественно равной дробью $\frac{a}{b}$ или сократить дробь $\frac{ac}{bc}$ на общий множитель c числителя и знаменателя .

Пример 1. Сократим дробь $\frac{35a^3}{21ab}$.

Решение . Представим числитель и знаменатель данной дроби в виде произведений, содержащих один и тот же множитель $7a$: $\frac{35a^3}{21ab} = \frac{5a^2 \cdot 7a}{3b \cdot 7a}$.

Затем сократим дробь на общий множитель $7a$. Тогда получим $\frac{5a^2 \cdot 7a}{3b \cdot 7a} = \frac{5a^2}{3b}$.

Ответ : $\frac{5a^2}{3b}$.

Оформить решение можно следующим образом: около выполненных действий записать пояснение, как в примерах 2, 3, 4.

Пример 2. Сократим дробь $\frac{16 - x^2}{8x + 2x^2}$.

Решение .

$\frac{16 - x^2}{8x + 2x^2} = \frac{(4 - x)(4 + x)}{2x(4 + x)}$ — разложили числитель и знаменатель дроби на множители;

$\frac{(4 - x)(4 + x)}{2x(4 + x)} = \frac{4 - x}{2x}$ — сократили полученную дробь на общий множитель $4 + x$.

Ответ : $\frac{4 - x}{2x}$.

Пример 3. Приведем дробь $\frac{5x}{6y}$ к дроби со знаменателем $12y^3$.

Решение .

$12y^3 = 6y \cdot 2y^2$ —представили знаменатель, к которому надо привести дробь, в виде произведения, в котором знаменатель данной дроби является одним из множителей;

$\frac{5x}{6y} = \frac{5x \cdot 2y^2}{6y \cdot 2y^2}$ — умножили числитель и знаменатель данной дроби $\frac{5x}{6y}$ на второй (дополнительный) множитель $2y^2$;

$\frac{5x \cdot 2y^2}{6y \cdot 2y^2} = \frac{10xy^2}{12y^3}$ — упростили числитель и знаменатель.

Ответ : $\frac{10xy^2}{12y^3}$.

Пример 4. Приведем дробь $\frac{2x^2}{9y-7}$ к дроби со знаменателем $7-9y$.

Решение .

$\frac{2x}{9y-7} = \frac{2x \cdot (-1)}{(9y-7) \cdot (-1)}$ — числитель и знаменатель данной дроби умножили на -1 ;

$\frac{2x \cdot (-1)}{(9y-7) \cdot (-1)} = \frac{-2x}{-9y+7}$ — упростили числитель и знаменатель;

$\frac{-2x}{-9y+7} = \frac{-2x}{7-9y}$ — в знаменателе использовали переместительное свойство сложения;

$\frac{-2x}{7-9y} = \frac{2x}{7-9y}$ — по свойству $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$.

Ответ : $-\frac{2x}{7-9y}$.

1. Может ли быть тождеством равенство, которое при каких-либо значениях: является неверным равенством; не имеет смысла?
2. При каких значениях букв выполняется основное свойство дроби?

Упражнения

A

Сократите алгебраические дроби (38.1—38.2) :

38.1. 1) $\dfrac{12xa}{15ya}$; 2) $\dfrac{12cb^2}{9bc^3}$; 3) $\dfrac{12ay^3}{-8a^2y}$; 4) $\dfrac{-6p^3q}{-12q^3}$;

5) $\dfrac{-4ax^2}{12xy}$; 6) $\dfrac{9axy^2}{6ay^3}$; 7) $\dfrac{48a^2c^2}{36ac}$; 8) $\dfrac{63x^3y^5}{84x^6y^4}$.

38.2. 1) $\dfrac{18bc}{24c}$; 2) $\dfrac{25a^2y}{15by}$; 3) $\dfrac{24a^3}{6ac}$; 4) $\dfrac{27x^2y}{21xy^3}$;

5) $\dfrac{-2a^6b^3}{a^3b^5}$; 6) $\dfrac{x^7y^4}{x^5y^8}$; 7) $\dfrac{42m^3n^5}{35mn^5}$; 8) $\dfrac{75p^4q}{150p^5q}$.

38.3. Приведите к дроби со знаменателем $4a^3c^2$ дробь:

1) $\dfrac{4a}{a^3c}$; 2) $\dfrac{5ac^3}{a^2c}$; 3) $\dfrac{4a}{2ac^2}$;

4) $\dfrac{ac^4}{0{,}5ac}$; 5) $\dfrac{5{,}5ac}{a^2c}$; 6) $\dfrac{-ax}{a^3c}$.

38.4. Приведите алгебраическую дробь:

1) $\dfrac{2y}{a-b}$ к дроби со знаменателем $(a-b)^2$;

2) $\dfrac{-3x}{x+a}$ к дроби со знаменателем x^2-a^2;

3) $\dfrac{5a}{y-1}$ к дроби со знаменателем y^3-1;

4) $\dfrac{4b}{a^2+ab+b^2}$ к дроби со знаменателем a^3-b^3;

5) $\dfrac{9y}{y-b}$ к дроби со знаменателем $b-y$;

6) $\dfrac{-5x}{x-10}$ к дроби со знаменателем $10-x$;

7) $\dfrac{-4p}{p+2}$ к дроби со знаменателем $4-p^2$;

8) $\frac{2a+3}{6-2a}$ к дроби со знаменателем $2(a^2-9)$;

9) $\frac{7a}{3xy^2}$ к дроби со знаменателем $15x^2y^3$;

10) $\frac{11}{x+1}$ к дроби со знаменателем x^3+1.

38.5. Упростите дробно-рациональное выражение:

1) $\frac{x^7+x^5}{x^4+x^2}$; 2) $\frac{y^7+y^9}{y^4+y^2}$; 3) $\frac{a^7-a^{10}}{a^5-a^2}$; 4) $\frac{x^6-x^4}{x^3+x^2}$;

5) $\frac{a-2b}{2b-a}$; 6) $\frac{4(a-b)^2}{2b-2a}$; 7) $\frac{(-a-b)^2}{a+b}$; 8) $\frac{(a-b)^2}{(b-a)^2}$.

B

38.6. Найдите значение дробного выражения:

1) $\frac{x^5+4x^4}{x^4+4x^3}$ при $x=-0{,}6$;

2) $\frac{3x^5-4x^4}{3x^3-4x^2}$ при $x=-3\frac{2}{3}$.

38.7. Сократите алгебраическую дробь:

1) $\frac{a(x-2y)}{b(2y-x)}$; 2) $\frac{3a-36}{12b-ab}$; 3) $\frac{25-a^2}{3a-15}$; 4) $\frac{8b^2-8a^2}{a^2-2ab+b^2}$;

5) $\frac{5x(x-y)}{x^3(y-x)}$; 6) $\frac{7b-14b^2}{42b^2-21b}$; 7) $\frac{3-3x}{x^2-2x+1}$; 8) $\frac{(b-2)^3}{(2-b)^2}$.

38.8. Упростите дробно-рациональное выражение:

1) $\frac{18a-3a^2}{8a^2-48a}$; 2) $\frac{8p-40}{15-3p}$; 3) $\frac{4-x^2}{10-5x}$;

4) $\frac{(3x+6y)^2}{5x+10y}$; 5) $\frac{ax+bx-ay-by}{bx-by}$; 6) $\frac{a^2-6a+9}{27-a^3}$;

7) $\frac{(2a-2b)^2}{a-b}$; 8) $\frac{(4c+12d)^2}{c+3d}$; 9) $\frac{4x^2-y^2}{(6x-3y)^2}$;

10) $\frac{ab-3b-2a+6}{15-5a}$.

C

38.9. Зная, что $a + 2c = 7$, найдите значение дробно-рационального выражения:

1) $\dfrac{3a + 6c}{(2c + a)^2}$; 2) $\dfrac{a + 2c}{2(2c + a)^2}$;

3) $\dfrac{a + 2c}{(2c + a)^3}$; 4) $\dfrac{(2c - a) \cdot 4}{(4c^2 - a^2)}$.

38.10. Упростите и найдите значение алгебраической дроби:

1) $\dfrac{15a^2 - 10ab}{3ab - 2b^2}$ при $a = -3$, $b = -0,2$;

2) $\dfrac{9c^2 - 4d^2}{18c^2d - 12cd^2}$ при $c = 1\dfrac{2}{3}$, $d = 0,5$;

3) $\dfrac{6x^2 + 12xy}{5xy + 10y^2}$ при $x = \dfrac{2}{3}$, $y = -0,4$;

4) $\dfrac{x^2 + 6xy + 9y^2}{4x^2 + 12xy}$ при $x = -0,2$, $y = -0,6$.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

38.11. **Решите задачу. Составьте обратные задачи и решите их.** Два токаря должны изготовить 120 деталей за 8 ч. Сколько деталей в час изготовит каждый токарь, если производительность одного рабочего на 3 детали в час больше производительности другого рабочего?

38.12. Найдите значение числового значения:

1) $\dfrac{2}{3} + 1\dfrac{4}{5}$; 2) $\dfrac{11}{15} - 2\dfrac{3}{5}$; 3) $4\dfrac{5}{7} - 2\dfrac{3}{14}$.

§ 39. СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДРОБЕЙ

Как выполнить сложение и вычитание алгебраических дробей?

Вы знаете, что при сложении обыкновенных дробей с одинаковыми знаменателями складывают их числители, а знаменатель оставляют прежним. *Например* , $\frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{3+2}{8} = \frac{5}{8}$.

Также складывают любые рациональные дроби с одинаковыми знаменателями.

Теорема. Равенство $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ верно при любых допустимых значениях переменных, т. е. при $(c \neq 0)$.

Доказательство .

Обозначим дроби $\frac{a}{c}$ и $\frac{b}{c}$ соответственно буквами m и n: $\frac{a}{c} = m$, $\frac{b}{c} = n$. Далее найдем делимые a и b, тогда $a = cm$, $b = cn$. Рассмотрим сумму $a + b$ и преобразуем ее, используя равенства, полученные выше: $a + b = cm + cn$.

В правой части последнего равенства вынесем общий множитель c за скобки: $cm + cn = c(m + n)$. Тогда в результате преобразований получим: $a + b = c(m + n)$. В последнем равенстве выразим множитель $m + n$ (так как $c \neq 0$): $m + n = \frac{a+b}{c}$.

Теперь подставим вместо m и n соответствующие обозначения: $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$. ■

Правило сложения рациональных дробей с одинаковыми знаменателями:

чтобы сложить дроби с одинаковыми знаменателями, нужно сложить их числители, а знаменатель оставить тем же.

Докажите, что это правило можно использовать при сложении трех дробей с одинаковыми знаменателями. Почему это правило можно использовать и для четырех и более чисел дробей с одинаковыми знаменателями?

Вы знаете, что сложение и вычитание — взаимообратные действия: если $x + y = k$, то $k - y = x$ и наоборот, если $k - y = x$, то $x + y = k$.

Эту связь сложения и вычитания с помощью знака равносильности записывают так: $x + y = k \Leftrightarrow k - y = x$.

Читают: $x + y = k$ равносильно $k - y = x$.

Используя связь сложения и вычитания, докажите, что при любых a, b и c, где $c \neq 0$, верно равенство $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$.

Правило вычитания рациональных дробей с одинаковыми знаменателями:

чтобы выполнить вычитание дробей с одинаковыми знаменателями, нужно из числителя уменьшаемого вычесть числитель вычитаемого, а знаменатель оставить тем же.

Пример 1. Сложим дроби $\frac{3a-7b}{15ab}$ и $\frac{2a-2b}{15ab}$.

Решение.

$\frac{3a-7b}{15ab} + \frac{2a+2b}{15ab} = \frac{3a-7b+2a+2b}{15ab}$ — использовали правило сложения рациональных дробей с одинаковыми знаменателями;

$\frac{3a-7b+2a+2b}{15ab} = \frac{5a-5b}{15ab}$ — привели подобные слагаемые в числителе дроби;

$\frac{5a-5b}{15ab} = \frac{a-b}{3ab}$ — вынесли в числителе дроби общий множитель 5 и сократили дробь на 5.

Кратко решение можно записать так:

$$\frac{3a-7b}{15ab} + \frac{2a+2b}{15ab} = \frac{3a-7b+2a+2b}{15ab} = \frac{5a-5b}{15ab} = \frac{5(a-b)}{15ab} = \frac{a-b}{3ab}.$$

Ответ: $\frac{a-b}{3ab}$.

Пример 2. Вычтем из дроби $\frac{a^2+9}{5a-15}$ дробь $\frac{6a}{5a-15}$.

Решение. $\frac{a^2+9}{5a-15} - \frac{6a}{5a-15} = \frac{a^2+9-6a}{5a-15} = \frac{(a-3)^2}{5(a-3)} = \frac{a-3}{5}$.

Ответ: $\frac{a-3}{5}$.

Пример 3. Упростим выражение: $\dfrac{x^2-3}{x^2+2x}+\dfrac{2}{x^2+2x}-\dfrac{2x-1}{x^2+2x}$.

Решение . Здесь удобно сложение и вычитание дробей выполнять не последовательно, а совместно:

$$\frac{x^2-3}{x^2+2x}+\frac{2}{x^2+2x}-\frac{2x-1}{x^2+2x}=\frac{x^2-3+2-(2x-1)}{x^2+2x}=\frac{x^2-2x}{x^2+2x}=$$

$$=\frac{x(x-2)}{x(x+2)}=\frac{x-2}{x+2}.$$

Ответ : $\dfrac{x-2}{x+2}$.

Пример 4. Сложим дроби $\dfrac{3a}{2x-a}$ и $\dfrac{6x}{a-2x}$.

Решение . Сначала приведем дроби к дробям с одинаковыми знаменателями. Далее применим правило вычитания дробей с одинаковыми знаменателями.

Получим: $\dfrac{6x}{a-2x}=-\dfrac{6x}{2x-a}$ — изменили знаки в знаменателе второй дроби и перед ней, так как знаменатели дробей $\dfrac{3a}{2x-a}$ и $\dfrac{6x}{a-2x}$ противоположные выражения.

$$\frac{3a}{2x-a}+\frac{6x}{a-2x}=\frac{3a}{2x-a}-\frac{6x}{2x-a}=\frac{3a-6x}{2x-a}=\frac{-3(2x-a)}{2x-a}=-3.$$

Ответ : –3.

Рассмотрим сложение и вычитание рациональных дробей с разными знаменателями. Они сводятся к сложению и вычитанию дробей с одинаковыми знаменателями.

Например , сложим рациональные дроби $\dfrac{a}{b}$ и $\dfrac{c}{d}$.

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{ad}{bd}$ и $\dfrac{c}{d}=\dfrac{bc}{bd}$ — привели дроби к дробям с одинаковым знаменателем bd. Для этого числитель и знаменатель первой дроби умножили на d, а числитель и знаменатель второй дроби — на b;

$\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad}{bd}+\dfrac{bc}{bd}=\dfrac{ad+bc}{bd}$ — использовали правило сложения дробей с одинаковыми знаменателями.

Следовательно, $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad+bc}{bd}$.

Аналогично поступают при вычитании рациональных дробей с разными знаменателями: $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}-\frac{bc}{bd}=\frac{ad-bc}{bd}$.

Следовательно, $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$.

Вы знаете, что при сложении и вычитании дробей с разными знаменателями при нахождении общего знаменателя находят наименьшее общее кратное знаменателей:

— оно равно произведению знаменателей, если они являются взаимно простыми числами;

— одному из знаменателей, если он делится на другой знаменатель;

— произведению множителей первого знаменателя и недостающих множителей второго знаменателя, входящих в разложение каждого знаменателя на простые множители.

При нахождении общего знаменателя рациональных дробей с разными знаменателями используют аналогичные способы: для этого сначала раскладывают их на множители так, чтобы у этих знаменателей были общие множители.

Пример 5. Сложим дроби $\frac{m-10nk}{14n^3k^2}$ и $\frac{5}{7n^2k}$.

Решение.

$\frac{m-10nk}{14n^3k^2}=\frac{m-10nk}{7n^2k\cdot 2nk}$ — представили знаменатель второй дроби в виде произведения одночленов, один из которых равен знаменателю второй дроби;

$\frac{^{1/}m-10nk}{7n^2k\cdot 2nk}+\frac{^{2nk/}5}{7n^2k}$ — нашли дополнительные множители к дробям;

$\frac{m-10nk}{14n^3k^2}+\frac{10nk}{14n^3k^2}=\frac{m-10nk+10nk}{14n^3k^2}$ — сложили дроби;

$\frac{m-10nk+10nk}{14n^3k^2}=\frac{m}{14n^3k^2}$ — привели подобные слагаемые в числителе дроби.

Ответ: $\frac{m}{14n^3k^2}$.

Пример 6. Преобразуем разность $\dfrac{x+7}{x^2+xy} + \dfrac{y-7}{xy+y^2}$.

Решение .

$\dfrac{x+7}{x^2+xy} + \dfrac{y-7}{xy+y^2} = \dfrac{x+7}{x(x+y)} - \dfrac{y-7}{y(x+y)}$ — разложили знаменатели каждой дроби на множители — вынесли общий множитель за скобки;

$\dfrac{{}^{y/}x+7}{x(x+y)} - \dfrac{{}^{x/}y-7}{y(x+y)} = \dfrac{(x+7)\cdot y}{xy(x+y)} - \dfrac{(y-7)\cdot x}{xy(x+y)}$ —привели дроби к одинаковому знаменателю и нашли дополнительные множители;

$\dfrac{(x+7)\cdot y}{xy(x+y)} - \dfrac{(y-7)\cdot x}{xy(x+y)} = \dfrac{xy+7y-xy+7x}{xy(x+y)}$ —выполнили вычитание;

$\dfrac{xy+7y-xy+7x}{xy(x+y)} = \dfrac{7y+7x}{xy(x+y)}$ —в числителе дроби привели подобные слагаемые;

$\dfrac{7y+7x}{xy(x+y)} = \dfrac{7(y+x)}{xy(x+y)} = \dfrac{7}{xy}$ —вынесли общий множитель за скобки и сократили дробь.

Ответ : $\dfrac{7}{xy}$.

Пример 7. Упростим выражение $b-2-\dfrac{b^2+5}{b+2}$.

Решение .

$b-2-\dfrac{b^2+5}{b+2} = \dfrac{b-2}{1} - \dfrac{b^2+5}{b+2}$ —представили выражение в виде дроби со знаменателем 1;

$\dfrac{b-2}{1} - \dfrac{b^2+5}{b+2} = \dfrac{{}^{b+2/}b-2}{1} - \dfrac{b^2+5}{b+2}$ —нашли дополнительные множители;

$\dfrac{{}^{b+2/}b-2}{1} - \dfrac{b^2+5}{b+2} = \dfrac{(b-2)\cdot(b+2)-(b^2+5)}{b+2}$ —выполнили вычитание дробей;

$\dfrac{(b-2)\cdot(b+2)-(b^2+5)}{b+2} = \dfrac{b^2-4-b^2-5}{b+2}$ —раскрыли скобки;

$$\frac{b^2-4-b^2-5}{b+2}=\frac{-9}{b+2}$$ — привели подобные слагаемые.

Ответ: $-\frac{9}{b+2}$.

1. В каких случаях общий знаменатель двух рациональных дробей равен: произведению знаменателей этих дробей; одному из знаменателей?
2. При каких значениях букв выполняются действия сложения и вычитания рациональных дробей?

Упражнения

А

39.1. Пользуясь тождеством $\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$, представьте в виде суммы дробей дробь:

1) $\frac{2a+b}{x}$; 2) $\frac{2a^2+5a}{4y}$; 3) $\frac{x^2+6y^2}{2xy}$;

4) $\frac{12a^2+y^3}{6ay}$; 5) $\frac{2a^2-3y^3}{3ay^3}$; 6) $\frac{12a^2+y^4+5y}{8ay^3}$.

39.2. Выполните сложение дробей:

1) $\frac{x}{5}+\frac{y}{5}$; 2) $\frac{a}{4}+\frac{b}{4}$; 3) $\frac{a}{y}+\frac{2a}{y}$;

4) $\frac{5b^2}{3a}+\frac{13b^2}{3a}$; 5) $\frac{x+y}{19}+\frac{2x}{19}$; 6) $\frac{2c-x}{2b}+\frac{x}{2b}$.

Выполните действия (39.3—39.5):

39.3. 1) $\frac{17-12x}{x}-\frac{10}{x}$; 2) $\frac{12p-1}{3p^2}-\frac{1+3p}{3p^2}$; 3) $\frac{6y-3}{5y}-\frac{y+2}{5y}$;

4) $\frac{5b}{6}-\frac{3a-2b}{6}$; 5) $\frac{5y-3}{7y}-\frac{3y+2}{7y}$; 6) $\frac{11x-5}{14x}+\frac{3x-2}{14x}$;

7) $\frac{7y-13}{10y}-\frac{2y+3}{10y}$; 8) $\frac{8c+25}{6c}+\frac{5-2c}{6c}$.

39.4. 1) $\frac{3p-q}{5p}-\frac{2p+6q}{5p}+\frac{p-4q}{5p}$; 2) $\frac{5c-2d}{4c}-\frac{3d}{4c}+\frac{d-5c}{4c}$;

3) $\frac{2a}{b}-\frac{1-6a}{b}+\frac{13-8a}{b}$;　4) $\frac{4b-2}{5b}-\frac{2b-1}{5b}+\frac{1}{5b}$;

5) $\frac{7y-5}{12y}-\frac{10y-19}{12y}+\frac{10-15y}{12y}$;　6) $\frac{11a-2b}{2a}+\frac{2a-3b}{2a}-\frac{a-b}{2a}$.

39.5. 1) $\frac{5a+b^5}{8b}-\frac{5a-7b^5}{8b}$;　2) $\frac{2x-3y}{4xy}+\frac{11y-2x}{4xy}$;

3) $\frac{3x-y^4}{4y^5}-\frac{y^4+3x}{4y^5}$;　4) $\frac{a-2}{7a}+\frac{2a+5}{7a}-\frac{3-a}{7a}$;

5) $\frac{7y-5}{11y}-\frac{10y-9}{11y}+\frac{10-5y}{11y}$;　6) $\frac{21a+2b}{6a}+\frac{21a-3b}{6a}-\frac{36a-b}{6a}$.

Найдите значения выражений **(39.6—39.7):**

39.6. 1) $\frac{x^2+1}{x-3}-\frac{10}{x-3}$ при $x=57$;　2) $\frac{y+7}{y^2-25}-\frac{2y+2}{y^2-25}$ при $y=5{,}7$;

3) $\frac{a^2-16}{a-3}+\frac{7}{a-3}$ при $a=33{,}25$;　4) $\frac{9b-1}{b^2-9}-\frac{6b-10}{b^2-9}$ при $b=4{,}5$.

39.7. 1) $\frac{x^2-19}{x-3}+\frac{10}{x-3}$ при $x=77$;

2) $\frac{y+7}{y^2-25}-\frac{2y+2}{y^2-25}$ при $y=-25{,}1$;

3) $\frac{a^2-43}{a-6}-\frac{7}{6-a}$ при $a=-10{,}25$;

4) $\frac{9b-1}{b^2-9}-\frac{6b-10}{b^2-9}$ при $b=-10$.

Упростите выражения **(39.8—39.9):**

39.8. 1) $\frac{12-2x}{x-2}+\frac{10-x}{2-x}$;　2) $\frac{12p^3-1}{3p^2}-\frac{1-3p^3}{3p^2}$;

3) $\frac{3x+5}{2x-1}+\frac{7x+3}{1-2x}$;　4) $\frac{5x+1}{5x-20}+\frac{x+17}{20-5x}$;

5) $\frac{x^2}{x^2-16}-\frac{8(x-2)}{x^2-16}$;　6) $\frac{64-2ab}{(a-8)^2}+\frac{2ab-a^2}{(8-a)^2}$;

7) $\frac{x^2}{x^2-4}-\frac{4(x-1)}{x^2-4}$;　8) $\frac{x^2+6}{x^2-9}-\frac{3(2x-1)}{9-x^2}$.

39.9. 1) $\frac{x^2}{(x-6)^2}-\frac{36}{(6-x)^2}$; 2) $\frac{x^2+25}{(x-5)^2}-\frac{10x}{(5-x)^2}$;

3) $\frac{10p}{p-c}+\frac{6p+7c}{c-p}$; 4) $\frac{5a}{a-b}+\frac{5b}{b-a}$;

5) $\frac{2x-5}{x-2}-\frac{1}{2-x}$; 6) $\frac{a}{2a-b}+\frac{3a-b}{b-2a}$;

7) $\frac{a}{a^2-9}-\frac{3}{9-a^2}$; 8) $\frac{y^2}{y-1}+\frac{1}{1-y}$.

39.10. Убедитесь, что при любом значении переменных значение выражения:

1) $\frac{(a+b)^2}{ab}-\frac{(a-b)^2}{ab}$ равно 4; 2) $\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}+\frac{(a-b)^2}{a^2+b^2}$ равно 2.

39.11. Представьте в виде рациональной дроби выражение:

1) $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}$; 2) $\frac{c}{6}-\frac{d}{12}$; 3) $\frac{p}{q}+\frac{q}{p}$;

4) $\frac{a}{b}-\frac{b^2}{a}$; 5) $\frac{3}{2x}-\frac{2}{3x}$; 6) $\frac{a}{5c}+\frac{3a}{4c}$;

7) $\frac{5x}{8y}+\frac{x}{4y}$; 8) $\frac{17y}{24c}-\frac{25y}{36c}$; 9) $\frac{5a}{18b}-\frac{7a}{45b}$;

10) $\frac{3}{2a}+\frac{3a-b}{2a}$; 11) $\frac{a}{7b}+\frac{4a-b}{7b}$; 12) $\frac{2a-3b}{2a-b}+\frac{7a-b}{b-2a}$.

39.12. Упростите выражение:

1) $\frac{a^2+16}{a-4}+\frac{8a}{4-a}$; 2) $\frac{x^2+4y^2}{x-2y}+\frac{4xy}{2y-x}$;

3) $\frac{x^2+25y^2}{x-5y}+\frac{10xy}{5y-x}$; 4) $\frac{9a^2+4y^2}{3a-2y}+\frac{12ay}{2y-3a}$;

5) $\frac{a}{2a-yb}+\frac{3a-by}{by-2a}$; 6) $\frac{a^2x^2+25y^2}{ax-5y}+\frac{10axy}{5y-ax}$.

39.13. Докажите, что при любом значении переменной является целым числом значение выражения:

1) $\frac{-2x}{x-4}-\frac{8}{4-x}$;
2) $\frac{0{,}1y}{y-3}+\frac{0{,}3}{3-y}$;

3) $\frac{3{,}1y}{y-0{,}1}+\frac{0{,}31}{0{,}1-y}$;
4) $\frac{0{,}1y^2}{y^2-3}+\frac{0{,}3}{3-y^2}$.

39.14. Проверьте, верно ли равенство:

1) $\frac{3x+5}{2x-1}+\frac{7x+3}{1-2x}=-2$;
2) $\frac{5x+1}{5x-20}+\frac{x+17}{20-5x}=0{,}8$;

3) $\frac{x^2}{(x-5)^2}-\frac{25}{(5-x)^2}=\frac{x+5}{x-5}$;
4) $\frac{x^2+25}{(x-5)^2}-\frac{10x}{(5-x)^2}=1$;

5) $\frac{x^2}{x^2-16}-\frac{8(x-2)}{x^2-16}=\frac{x-4}{x+4}$;
6) $\frac{64-2ab}{(a-8)^2}+\frac{2ab-a^2}{(8-a)^2}=-\frac{a+8}{x-8}$.

39.15. Представьте в виде дроби выражение:

1) $2-\frac{a}{3}-\frac{b}{4}$;
2) $12-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$;

3) $\frac{x-2}{2}-4-\frac{x-3}{3}$;
4) $4a-\frac{a-1}{4}-\frac{a+2}{3}$;

5) $\frac{a+b}{4}-a+b$;
6) $2a+3b-\frac{a^2+b^2}{a}$;

7) $3x+3b-\frac{x^2+2y^2}{x}$;
8) $5a-3b-\frac{3a^2-b^2}{a}$.

B

39.16. Выполните действия:

1) $\frac{4a}{5(a+y)}-\frac{2y}{3(a+y)}$;
2) $\frac{p}{7a-14}+\frac{1}{2-a}$;

3) $\frac{3}{ax-ay}+\frac{2}{by-bx}$;
4) $\frac{13c}{bm-bn}-\frac{12b}{cn-cm}$;

5) $\frac{a}{2x+4}-\frac{a}{3x+6}$;
6) $\frac{a^2}{5(a-b)}-\frac{b^2}{4(a-b)}$.

39.17. Упростите выражение:

1) $\frac{1}{xy}+\frac{1}{ax}+\frac{1}{ay}$;
2) $\frac{xy-y}{x}-\frac{xy-x}{y}-\frac{x^2-y^2}{xy}$;

3) $\frac{3ac+2c^2}{ac}-\frac{a+2c}{a}+\frac{a-2c}{c}$.

39.18. Выполните действия:

1) $\frac{2x}{3(x-y)}-\frac{4y}{5(x-y)}$;
2) $\frac{a^2}{5(a-b)}-\frac{b^2}{4(a-b)}$;

3) $\frac{3}{ax-ay}+\frac{2}{by-bx}$;
4) $\frac{13c}{bm-bn}-\frac{12b}{cn-cm}$;

5) $\frac{c}{2x+4}-\frac{c}{3x+6}$;
6) $\frac{a}{7a-14}+\frac{1}{2-a}$.

39.19. Найдите значение выражения:

1) $\frac{y-25}{5y-25}+\frac{3y+5}{y^2-5y}$ при $y=2{,}5$;

2) $\frac{2}{y^2-yx}-\frac{2}{yx-x^2}$ при $x=2$; $y=-3$.

C

Преобразуйте в дроби выражения **(39.20—39.22)**:

39.20. 1) $\frac{2a+n}{a-n}-\frac{3n}{a-n}$;
2) $\frac{a^2+b^2}{a-b}-a$;
3) $m-n+\frac{n^2}{m+n}$;

4) $a+b-\frac{a^2+b^2}{a+b}$;
5) $x-\frac{9}{x-3}-3$;
6) $a^2-\frac{a^4+1}{a^2-1}+1$;

7) $2m+2n+\frac{4n^2}{2m-2n}$;
8) $2a-n+\frac{n^2+2an}{2a+n}$.

39.21. 1) $\frac{1}{a+b}-\frac{a^2+b^2}{a^3+b^3}$;
2) $\frac{1}{p-q}-\frac{3pq}{p^3-q^3}$;

3) $\frac{1-a}{a^2-a+1}+\frac{a^2}{a^3+1}$;
4) $\frac{6a^3+48a}{a^3+64}-\frac{3a^2}{a^2-4a+16}$.

39.22. 1) $\frac{b}{(a-b)^2}-\frac{a+b}{b^2-ab}$; 2) $\frac{a}{a-6}-\frac{3}{a+6}+\frac{a^2}{36-a^2}$;

3) $\frac{1}{a-4b}-\frac{1}{a+4b}-\frac{2a}{16b^2-a^2}$; 4) $\frac{x^2}{(x-y)^2}-\frac{x+y}{2x-2y}$;

5) $\frac{4}{y+2}-\frac{3}{y-2}+\frac{12}{y^2-4}$; 6) $\frac{1}{2b-2a}+\frac{1}{2b+2a}+\frac{a^2}{a^2b-b^3}$;

7) $\frac{1}{2x-b}+\frac{6bx}{b^3-8x^3}$; 8) $\frac{2y^2+16}{y^3+8}-\frac{2}{y+2}$;

9) $\frac{1}{2a-2c}+\frac{1}{2a+2c}+\frac{2a^2}{a^2c-c^3}$.

39.23. Докажите, что тождественно равны выражения:

1) $\frac{n^3}{n^2-4}-\frac{n}{n-2}-\frac{2}{n+2}$ и $n-1$;

2) $\frac{3}{a^2-3a}+\frac{a^2}{a-3}$ и $a+3+\frac{9a+3}{a^2-3a}$;

3) $\frac{2a+b}{2a^2-ab}-\frac{16a}{4a^2-b^2}-\frac{2a-b}{2a^2+ab}$ и $\frac{-8}{2a+b}$;

4) $\frac{1}{(a-3)^2}-\frac{2}{a^2-9}+\frac{1}{(a+3)^2}$ и $\frac{36}{(a^2-9)^2}$;

5) $\frac{x-2}{x^2+2x+4}-\frac{6x}{x^3-8}+\frac{1}{x-2}$ и $\frac{2x-4}{x^2+2x+4}$;

6) $\frac{2a^2+7a+3}{a^3-1}-\frac{1-2a}{a^2+a+1}-\frac{3}{a-1}$ и $\frac{1}{a-1}$.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

39.24. Вычислите значение числового выражения:

1) $\frac{55}{34}\cdot\frac{17}{22}$; 2) $\frac{12}{35}:\frac{18}{25}$; 3) $\frac{13}{32}:\frac{91}{128}$;

4) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$; 5) $\frac{8}{9}:\left(\frac{2}{3}\right)^2$; 6) $\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3$.

39.25. 2 кг яблок и 3 кг конфет стоят 3400 тг. Цена 1 кг яблок и 1 кг конфет вместе равна 1250 тг. Какова цена 1 кг яблок и 1 кг конфет?

§ 40. УМНОЖЕНИЕ, ВОЗВЕДЕНИЕ В СТЕПЕНЬ И ДЕЛЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДРОБЕЙ

Как выполнить умножение и деление, возведение в степень алгебраических дробей?

Вы знаете, что при умножении обыкновенных дробей перемножают отдельно их числители и их знаменатели, первое произведение записывают в числителе, а второе — в знаменателе дроби.

Например , $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 7} = \frac{6}{35}$.

Аналогично перемножают любые рациональные дроби.

Свойство 1

Равенство $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ верно при любых допустимых значениях переменных, т. е. при $b \neq 0$ и $d \neq 0$.

Доказательство.

$\frac{a}{b} = m$, $\frac{c}{d} = n$ — обозначили дроби буквами m и n;

$a = bm$, $c = dn$ — нашли делимые a и c;

$ac = (bm)(dn)$ — рассмотрели произведение и преобразовали его, используя равенства, полученные выше;

$(bm)(dn) = (bd)(mn)$ — использовали переместительное и сочетательное свойства умножения;

$mn = \frac{ac}{bd}$ — выразили mn из равенства $ac = (bd)(mn)$. ■

Правило умножения рациональных дробей:

чтобы умножить рациональную дробь на рациональную дробь, нужно перемножить числители и записать в числитель, перемножить знаменатели и записать в знаменатель.

Докажите, что это правило можно использовать при умножении трех рациональных дробей: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{m}{n} = \frac{ac}{bd} \cdot \frac{m}{n} = \frac{acm}{bdn}$.

Почему это правило можно использовать при умножении четырех и более рациональных дробей?

Пример 1. Умножим рациональную дробь $\frac{m^7}{28n^6}$ на дробь $\frac{24n^5}{m^6}$.

Решение.

$\frac{m^7}{28n^6} \cdot \frac{24n^5}{m^6} = \frac{m^7 \cdot 24n^5}{28n^6 m^6}$ — использовали правило умножения дробей;

$\frac{m^7 \cdot 24n^5}{28n^6 m^6} = \frac{6m}{7n}$ — сократили дробь.

Ответ: $\frac{6m}{7n}$.

Пример 2. Умножим рациональную дробь $\frac{a^2-4}{a^2b^3}$ на дробь $\frac{a^3b^2}{2b-ab}$.

Решение.

$\frac{a^2-4}{a^2b^3} \cdot \frac{a^3b^2}{2b-ab} = \frac{(a^2-4) \cdot a^3b^2}{a^2b^3 \cdot (2b-ab)}$ — использовали правило умножения дробей;

$\frac{(a^2-4) \cdot a^3b^2}{a^2b^3 \cdot (2b-ab)} = \frac{(a-2) \cdot (a+2) \cdot a^3b^2}{a^2b^3 \cdot b \cdot (2-a)}$ — разложили на множители;

$\frac{(a-2) \cdot (a+2) \cdot a^3b^2}{a^2b^3 \cdot b \cdot (2-a)} = \frac{-(a+2) \cdot a}{b \cdot b}$ — сократили дробь;

$\frac{-(a+2) \cdot a}{b \cdot b} = -\frac{a(a+2)}{b^2}$. — упростили выражение.

Ответ: $-\frac{a(a+2)}{b^2}$.

Пример 3. Упростим дробно-рациональное выражение:

$\frac{2p+p^2}{1-p^2} \cdot \frac{p+1}{p+2} \cdot \frac{p-1}{p}$.

Решение.

$\frac{2p+p^2}{1-p^2} \cdot \frac{p+1}{p+2} \cdot \frac{p-1}{p} = \frac{p(2+p) \cdot (p+1) \cdot (p-1)}{(1-p)(1+p) \cdot (p+2) \cdot p}$ — у первой дроби разложили числитель, знаменатель на множители и использовали правило умножения рациональных дробей;

$\frac{p(2+p)\cdot(p+1)\cdot(p-1)}{(1-p)(1+p)\cdot(p+2)\cdot p}=\frac{-1}{1}=-1$ — сократили рациональную дробь.

Ответ : -1.

Пример 4. Умножим рациональную дробь $\frac{3b+2a}{9b^2-4a^2}$ на многочлен $4a^2-12ab+9b^2$.

Решение .

$\frac{3b+2a}{9b^2-4a^2}\cdot(4a^2-12ab+9b^2)=$ — записали многочлен в виде дроби;

$=\frac{3b+2a}{9b^2-4a^2}\cdot\frac{4a^2-12ab+9b^2}{1}$

$\frac{3b+2a}{9b^2-4a^2}\cdot\frac{4a^2-12ab+9b^2}{1}=$ — применили правило умножения дробей;

$=\frac{(3b+2a)\cdot(4a^2-12ab+9b^2)}{9b^2-4a^2}$

$\frac{(3b+2a)\cdot(4a^2-12ab+9b^2)}{9b^2-4a^2}=$ — разложили на множители выражения: $4a^2-12ab+9b^2$ и $9b^2-4a^2$, используя формулы сокращенного умножения;

$=\frac{(3b+2a)\cdot(2a-3b)^2}{(3b-2a)\cdot(3b+2a)}$

$\frac{(3b+2a)\cdot(3b-2a)^2}{(3b-2a)\cdot(3b+2a)}=\frac{3b-2a}{1}=$ — сократили дробь, учитывая, что $(2a-3b)^2=(3b-2a)^2$.

$=3b-2a$

Ответ : $3b-2a$.

Вы знаете, что при возведении дроби в степень возводят в эту степень числитель и знаменатель и первый результат записывают в числителе, а второй — в знаменателе дроби: $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$.

Аналогично возводят в степень любые рациональные дроби.

Свойство 2

Равенство $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$, где n — целое число, верно при любых допустимых значениях переменных, т. е. при $b\neq 0$.

Докажите свойство 2.

Правило возведения рациональной дроби в степень:

чтобы возвести рациональную дробь в степень, надо возвести в эту степень числитель и знаменатель и первый результат записать в числителе, а второй — в знаменателе дроби.

Пример 5. Возведем рациональную дробь $\frac{5m^4}{6n^7}$ в квадрат.

Решение .

$\left(\frac{5m^4}{6n^7}\right)^2 = \frac{(5m^4)^2}{(6n^7)^2}$. — использовали правило возведения рациональной дроби в степень;

$\frac{(5m^4)^2}{(6n^7)^2} = \frac{25m^8}{36n^{14}}$ — возвели в степень числитель дроби и ее знаменатель.

Ответ : $\frac{25m^8}{36n^{14}}$

Рассмотрим деление рациональных дробей.

Вы знаете, что при делении обыкновенных дробей первую дробь (делимое) умножают на дробь, обратную второй (делителю).

Например , $\frac{7}{9} : \frac{4}{5} = \frac{7}{9} \cdot \frac{5}{4} = \frac{35}{36}$.

Также поступают при делении рациональных дробей.

Свойство 3

Равенство $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$ верно при любых допустимых значениях переменных, т. е. при $b \neq 0$, $c \neq 0$ и $d \neq 0$.

Докажите свойство 3, используя связь деления и умножения: $x : y = k \Leftrightarrow k \cdot y = x$.

Правило деления рациональных дробей:

чтобы разделить одну дробь на другую, нужно первую дробь умножить на дробь, обратную второй.

Воспользовавшись равенством $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$ и правилом умножения рациональных дробей, получим: $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$.

Следовательно, $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$.

Пример 6. Упростим дробно-рациональное выражение:

$$\left(\frac{3+b}{2b^2-6b}\right)^3:\left(\frac{b^2+6b+9}{2b\cdot\left(b^2-6b+9\right)}\right)^2.$$

Решение .

$$\left(\frac{3+b}{2b^2-6b}\right)^3:\left(\frac{b^2+6b+9}{2b\cdot\left(b^2-6b+9\right)}\right)^2=$$ — применили правило возведения дроби в степень;

$$=\frac{(3+b)^3}{\left(2b^2-6b\right)^3}:\frac{\left(b^2+6b+9\right)^2}{4b^2\cdot\left(b^2-6b+9\right)^2}$$

$$\frac{(3+b)^3}{\left(2b^2-6b\right)^3}:\frac{\left(b^2+6b+9\right)^2}{4b^2\cdot\left(b^2-6b+9\right)^2}=$$ — применили правило деления рациональных дробей;

$$=\frac{(3+b)^3\cdot 4b^2\cdot\left(b^2-6b+9\right)^2}{\left(2b^2-6b\right)^3\cdot\left(b^2+6b+9\right)^2}$$

$$\frac{(3+b)^3\cdot 4b^2\cdot\left(b^2-6b+9\right)^2}{\left(2b^2-6b\right)^3\cdot\left(b^2+6b+9\right)^2}=$$ — разложили выражения b^2-6b+9, b^2+6b+9, $2b^2-6b$ на множители, используя формулы сокращенного умножения и вынесение общего множителя за скобки;

$$=\frac{(3+b)^3\cdot 4b^2\cdot\left((b-3)^2\right)^2}{(2b(b-3))^3\cdot\left((b+3)^2\right)^2}$$

$$\frac{(3+b)^3\cdot 4b^2\cdot\left((b-3)^2\right)^2}{(2b(b-3b))^3\cdot\left((b+3)^2\right)^2}=\frac{(3+b)^3\cdot 4b^2\cdot(b-3)^4}{8b^3\,(b-3b)^3\cdot(b+3)^4}.$$ — возвели в степень произведение и степень;

$$\frac{(3+b)^3\cdot 4b^2\cdot(b-3)^4}{8b^3(b-3b)^3\cdot(b+3)^4}=\frac{b-3}{2b\cdot(b+3)}.$$ — сократили дробь.

Ответ : $\frac{b-3}{2b\cdot(b+3)}$.

1. В чем сходство и различие в правилах умножения и деления обыкновенн ых и рациональных дробей?
2. При каких значениях букв выполняются действия умножения и деления рациональных дробей?

Упражнения

А

40.1. Представьте дробь в виде произведения или частного двух дробно-рациональных выражений:

1) $\frac{3xy-2y}{5x^2}$; 2) $\frac{4x^3y-2y^2}{3xy^2}$; 3) $\frac{3xy^3+12y}{5x^2a}$; 4) $\frac{7xy-25y^3}{5a^2-x}$.

40.2. Выполните умножение:

1) $\frac{9}{2a}\cdot\frac{5a}{3}$; 2) $\frac{5a}{8y}\cdot\frac{7}{10}$; 3) $\frac{b^2}{10}\cdot\frac{5}{b}$;

4) $\frac{12x^5}{25}\cdot\frac{15}{8x^2}$; 5) $\frac{5}{3a}\cdot\frac{2b}{3}$; 6) $\frac{3x}{4}\cdot\frac{1}{x}$;

7) $\frac{3b^2}{10}\cdot\frac{15}{b^3}$; 8) $\frac{16x^5}{35}\cdot\frac{5}{8x^3}$; 9) $\frac{5a}{8y}\cdot\frac{7}{10}$;

10) $\frac{9}{2a}\cdot\frac{5a}{3}$; 11) $\frac{18}{c^4}\cdot\frac{c^3}{24}$; 12) $\frac{3}{4a^3}\cdot\frac{16a^2}{9}$;

13) $\frac{15x^3}{4}\cdot\frac{12}{5x}$; 14) $\frac{15}{3ab}\cdot\frac{12b^3}{3}$; 15) $\frac{18}{c^4}\cdot\frac{c^3}{24}$.

40.3. Выполните деление:

1) $35x^5y:\frac{7x^3}{34}$; 2) $\frac{12p^2}{7d^4}:\frac{6p^3}{35d^2}$; 3) $\frac{3ab}{4xy}:\left(-\frac{12a^2b}{10x^2y}\right)$;

4) $-\frac{a^2}{12b}:\frac{ab}{36}$; 5) $-\frac{9y^2}{20x^3}:\frac{y^5}{16x}$; 6) $\frac{18a^2b^2}{5cd}:\left(-\frac{9ab^3}{5c^2d^4}\right)$;

7) $-\frac{8c}{21d^2}:\frac{6c^2}{7d}$; 8) $-\frac{11x}{4y^2}:(-22x^2)$; 9) $-\frac{18c^4}{7d}:(-9c^2d)$;

10) $\frac{14}{9x^3}:\frac{7x}{2y^2}$; 11) $\frac{3x}{10a^3}:\frac{1}{5a^2}$; 12) $27a^3:\frac{18a^4}{7b^2}$.

Выполните действия (40.4—40.5):

40.4. 1) $\frac{2a^2b}{3xy}\cdot\frac{3x^2y}{4ab^2}\cdot\frac{6ax}{15b^2}$; 2) $\frac{x^2-xy}{4y}\cdot\frac{y^2}{x}\cdot\frac{2x^3}{x-y}$;

3) $\frac{6m^3n^2}{35p^3}\cdot\frac{49n^4}{m^5p^3}\cdot\frac{5m^4p^2}{42n^6}$; 4) $\frac{m-n}{mn}\cdot\frac{2mn}{mn-m^2}$;

5) $\frac{ma-mb}{3n^2}\cdot\frac{2m}{nb-na}$; 6) $\frac{3a}{b^2}\cdot\frac{ab+b^2}{9}\cdot\frac{6}{a}$;

7) $\frac{4ab}{cx+dx}\cdot\frac{ax+bx}{2ab}$; 8) $\frac{ax-ay}{5x^2y^2}\cdot\left(-\frac{5xy}{by-bx}\right)$;

9) $\frac{cx-cy}{35x^2y^2}\cdot\left(-\frac{15xy}{ny-nx}\right)$.

40.5. 1) $(x+3y):(x^2-9y^2)$; 2) $\frac{ab^2}{a^2-1}:\frac{5b}{a-a^2}$;

3) $(a^2+6ab+9b^2):(a^2-9b^2)$; 4) $\frac{x^2-4y^2}{xy}:\frac{x^2-2xy}{3y}$;

5) $\frac{a^2-3a}{a^2-25}:\frac{a^2-9}{a^2+5a}$; 6) $\frac{3m^2-3n^2}{m^2+mp}:\frac{6m-6n}{p+m}$.

40.6. Найдите значение выражения:

1) $\frac{3mn-m}{4m+n}\cdot\frac{16m^2n^2}{3n-1}$, если $m=\frac{1}{4}$, $n=-5$;

2) $\frac{(x-2)^2}{4y+9}\cdot\frac{2y+6}{x^2-4}$, если $x=0{,}5$; $y=-1{,}5$.

40.7. Упростите выражение:

1) $\frac{12x^4}{m^3n^3}:\frac{x^3}{4mn^2}$; 2) $\frac{a^2b^3}{22mn^2}:\left(-\frac{4ab^3}{33mn}\right)$;

3) $\frac{16mx^2}{3y^3}:(4m^3x)$; 4) $\frac{35x^2y}{12ab}:\frac{7xy}{8ab^2}$;

5) $-\frac{6xy^2}{5ab}:\left(\frac{9x^2y^2}{10ab}\right)$; 6) $45a^2bx\cdot\frac{b^2}{30x^2a^3}$

40.8. Выполните действия:

1) $\dfrac{(y-5)^2}{2y+12}\cdot\dfrac{y^2-36}{2y-10}$; 2) $\dfrac{(a+3)^2}{2x-4}\cdot\dfrac{x^2-4}{2x+9}$;

3) $\dfrac{a^2+2bc}{b+3}\cdot\dfrac{5b+15}{b^2-4c^2}$; 4) $\dfrac{a^2-1}{a-b}\cdot\dfrac{7a-7b}{a^2+a}$.

40.9. Представьте в виде дроби выражение:

1) $\left(\dfrac{a^3}{c^2}\right)^4$; 2) $\left(\dfrac{2a^3}{3b^4}\right)^5$; 3) $\left(\dfrac{3x^2y^4}{4m^3}\right)^2$;

4) $\left(-\dfrac{10m^2}{3n^2p^3}\right)^3$; 5) $\left(-\dfrac{5a^3}{3b^2c^4}\right)^4$; 6) $\left(-\dfrac{b^3c^2}{8a^3}\right)^2$.

B

40.10. Докажите, что не зависит от допустимых значений переменной значение выражения:

1) $\dfrac{a^2-1}{a-b}\cdot\dfrac{7a-7b}{a^2+a}:\dfrac{a-1}{a}$; 2) $\dfrac{(x+3)^2}{2x-4}\cdot\dfrac{x^2-4}{3x+9}\cdot\dfrac{2}{(x+3)\cdot(x+2)}$;

3) $\dfrac{(y-5)^2}{2y+12}\cdot\dfrac{y^2-36}{2y-10}\cdot\dfrac{2}{(y-5)\cdot(x+6)}$; 4) $\dfrac{n^2+2nc}{n+3}\cdot\dfrac{5n+15}{n^2-4c^2}\cdot\dfrac{n-2c}{n}$.

40.11. Выполните действия:

1) $\dfrac{mx^2-my^2}{2m+8}\cdot\dfrac{3m+12}{my+mx}:(x-y)$; 2) $\dfrac{a^2-1}{a^3+1}\cdot\dfrac{a^2-a+1}{a^2+2a+1}\cdot(a+1)$;

3) $\dfrac{ax+ay}{x^2-2xy+y^2}\cdot\dfrac{x^2-xy}{7x+7y}:ax$; 4) $\dfrac{b^3-8}{b^2-9}\cdot\dfrac{b+3}{b^2+2b+4}$;

5) $\dfrac{x^3-y^3}{x+y}\cdot\dfrac{x^2-y^2}{x^2+xy+y^2}:(x-y)$; 6) $\dfrac{c^2+6c+9}{c^3+27}\cdot\dfrac{c^2-3c+9}{3c+9}:(c-3)$.

40.12. Упростите выражение:

1) $\dfrac{n^2-10n+25}{3a+12}\cdot\dfrac{a^2-16}{2n-10}$; 2) $\dfrac{y^2-25}{y^2+12y+36}\cdot\dfrac{3y+18}{2y+10}$;

3) $\dfrac{4-a^2}{4a+8b}\cdot\dfrac{a^2+4ab+4b^2}{3-3a}$; 4) $\dfrac{a^3+8}{18a^2+27a}\cdot\dfrac{2a+3}{a^2-2a+4}$.

40.13. Найдите значение выражения:

1) $\frac{8x^2-8x}{x+3}:(2x-2)\cdot x$, если $x=2{,}5;\ -3{,}4;$

2) $(3a-6b):\frac{2a^2-8b^2}{a-2b}$, если $a=2{,}6,\ b=-1{,}2$.

B

40.14. Докажите, что при любых допустимых значениях переменных целым числом является значение выражения:

1) $\frac{a^2+4a+4}{16-b^4}:\frac{4-a^2}{4+b^2}\cdot\frac{(2-a)\cdot(4-b^2)}{a+2}$;

2) $\frac{4m^2-25n^2}{m^3+8}:\frac{2m+5n}{m^2-2m+4}\cdot\frac{m+2}{2m-5n}$.

40.15. Упростите выражение :

1) $\frac{a-3}{2a+4}\cdot\frac{a^2-4}{a^3-27}\cdot\frac{a^2+3a+9}{a^2-2a}$; 2) $\frac{ab-2b}{a^2+8a+16}\cdot\frac{a^2-16}{2a-a^2}:\frac{a-4}{4b}$.

40.16. Докажите тождество:

1) $\frac{a^2+ax+x^2}{x-1}:\frac{a^3-x^3}{x^2-1}=\frac{x+1}{a-x}$; 2) $\frac{ap^2-9a}{p^3-8}:\frac{p+3}{2p-4}=\frac{2a(p-3)}{p^2+2p+4}$.

40.17. Докажите, что значение выражения:

1) $\frac{c^2-1}{c^3+1}:\frac{c-1}{c^2-c+1}$ при ($c\neq 1$ и $c\neq -1$) не зависит от значения переменной c;

2) $\frac{a^2-4}{a^3+8}\cdot\frac{a^2-2a+4}{3a-6}$ при ($a\neq 2$ и $a\neq -2$) не зависит от значения переменной a.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

40.18. Упростите выражение:

1) $(a-0{,}4)^2-(a+0{,}4)^2+2{,}68$;

2) $(a+0{,}1)^3+(a-0{,}1)^3-2a^3$.

40.19. Сравните значения числовых выражений:

1) $\left(\frac{2}{5}\right)^2\cdot\frac{5}{4}$ и $\frac{5}{4}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2$; 2) $1\frac{2}{5}+3\frac{4}{15}$ и $2\frac{3}{7}+1\frac{11}{14}$.

§ 41. ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Как выполнять преобразования алгебраических выражений?

Пример 1. Преобразуем в рациональную дробь выражение:

$$a+4-\frac{6a+3}{4a^2+4a+1}\cdot\frac{4a^2-1}{3a}.$$

Решение.

1) $\frac{6a+3}{4a^2+4a+1}\cdot\frac{4a^2-1}{3a}=\frac{3\cdot(2a+1)(2a-1)(2a+1)}{3a\cdot(2a+1)^2}=\frac{2a-1}{a}$

— выполнили умножение дробей;

2) $a+4-\frac{2a-1}{a}=\frac{a\cdot(a+4)-(2a-1)}{a}=\frac{a^2+4a-2a+1}{a}=$

$=\frac{a^2+2a+1}{a}=\frac{(a+1)^2}{a}$ — выполнили вычитание из многочлена $a+4$.

Ответ: $\frac{(a+1)^2}{a}$.

Вы знаете, что тождество можно доказывать разными способами:

— преобразовывать его левую часть до тех пор, пока не получится его правая часть;

— преобразовывать его правую часть до тех пор, пока не получится его левая часть;

— преобразовывать его обе части до тех пор, пока не получатся одинаковые выражения;

— преобразовать разность его левой и правой части и получить нуль.

Пример 2. Докажем тождество:

$$\left(\frac{m}{n^2-mn}+\frac{n}{mn-m^2}\right)\cdot\frac{n^2m+nm^2}{n^2+m^2}=\frac{2n}{n-m}-1.$$

Решение.

$$\left(\frac{m}{n^2-mn}+\frac{n}{mn-m^2}\right)\cdot\frac{n^2m+nm^2}{n^2+m^2}=\left(\frac{^{m/}m}{n\cdot(n-m)}+\frac{^{n/}n}{m\cdot(n-m)}\right)\cdot$$

$$\cdot\frac{nm(n+m)}{n^2+m^2}=\left(\frac{m^2+n^2}{nm\cdot(n-m)}\right)\cdot\frac{nm(n+m)}{n^2+m^2}=\frac{(m^2+n^2)\cdot nm(n+m)}{nm\cdot(n-m)\cdot(n^2+m^2)}=$$

$=\frac{n+m}{n-m}$ — преобразовали левую часть тождества;

$\dfrac{2n}{n-m} - 1 = \dfrac{2n - n + m}{n - m} = \dfrac{n + m}{n - m}$ — преобразовали правую часть тождества;

$\dfrac{n+m}{n-m} = \dfrac{n+m}{n-m}$ — получили одинаковые выражения $\dfrac{n+m}{n-m}$.

1. Любое ли дробно-рациональное выражение можно представить в виде рациональной дроби?
2. Любое ли тождество удобно доказывать любым из известных способов?

Упражнения

А

Выполните действия (41.1—41.2):

41.1. 1) $\left(\dfrac{2a}{y^2} - \dfrac{2}{a}\right) : \left(\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{a}\right)$; 2) $\left(\dfrac{n}{m^2} + \dfrac{n^2}{m^3}\right) : \left(\dfrac{m^2}{3n^2} + \dfrac{m}{3n}\right)$;

3) $\dfrac{ab + b^2}{5} : \dfrac{b^3}{5a} + \dfrac{a+b}{b}$; 4) $\dfrac{x-y}{x} - \dfrac{5y}{x^2} \cdot \dfrac{x^2 - xy}{5y}$;

5) $\left(\dfrac{x}{x+1} + 1\right) \cdot \dfrac{1+x}{2x-1}$; 6) $\left(\dfrac{4a}{2-a} - a\right) : \dfrac{a+2}{a-2}$;

7) $\dfrac{5y^2}{1-y^2} : \left(1 - \dfrac{1}{1-y}\right)$; 8) $\dfrac{xb + b^2}{7} : \dfrac{b^2}{7x} + \dfrac{x+b}{b}$;

9) $\dfrac{x-4}{x-5} \cdot \left(x + \dfrac{x}{4-x}\right)$; 10) $\left(\dfrac{a-b}{2a+2b}\right) : \left(\dfrac{2}{a} - \dfrac{2}{b}\right) \cdot \left(\dfrac{4a+4b}{a^2 b}\right)$.

41.2. 1) $\left(\dfrac{2m+1}{2m-1} - \dfrac{2m-1}{2m+1}\right) : \dfrac{4m}{10m-5}$; 2) $\left(\dfrac{y+3}{y^2+9}\right) \cdot \left(\dfrac{y+3}{y-3} + \dfrac{y-3}{y+3}\right)$.

Упростите выражения (41.3—41.4):

41.3. 1) $\dfrac{n^2 - 9}{2n^2 + 1} \cdot \left(\dfrac{6n+1}{n-3} + \dfrac{6n-1}{n+3}\right)$;

2) $\left(\dfrac{6x+y}{x-6y} + \dfrac{6x-y}{x+6y}\right) : \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 - 36y^2}$.

41.4. 1) $\left(\dfrac{x}{xy-y^2}-\dfrac{y}{x^2-xy}\right):\dfrac{x^2-y^2}{5xy}$;

2) $\left(\dfrac{4p-8}{p^3-2p^2}-\dfrac{q+2}{q^3+2q^2}\right)\cdot\dfrac{p}{2q-p}$;

3) $\left(\dfrac{a}{b^2-ab}+\dfrac{b}{a^2-ab}\right)\cdot\dfrac{3ab}{b-a}$;

4) $\left(\dfrac{a-7b}{ab-b^2}+\dfrac{7a+b}{a^2-ab}\right):\dfrac{a^2+b^2}{a-b}$.

Найдите значения выражений **(41.5—41.6):**

41.5. 1. $\dfrac{a^2-25}{a+3}\cdot\dfrac{1}{a^2+5a}-\dfrac{a+5}{a^2-3a}$ при 1) $a=2$; 2) $a=-4$;

2. $\dfrac{1-2x}{2x+1}+\dfrac{x^2+3x}{4x^2-1}:\dfrac{3+x}{4x+2}$ при 1) $x=-1$; 2) $x=-2{,}5$.

41.6. 1) $\dfrac{n-c}{a+n}-\dfrac{an-n^2}{a^2-ac}\cdot\dfrac{a^2-c^2}{a^2-n^2}+11{,}5\,n$ при $a=2$; $n=-1$; $c=3$;

2) $\dfrac{n^2-4}{x^2-9}:\dfrac{n^2-2n}{xy+3y}+\dfrac{2-y}{x-3}$ при $n=3$; $x=-4$; $y=-5$.

41.7. Выполните действия:

1) $\left(2a+1-\dfrac{1}{1-2a}\right):\left(2a-\dfrac{4a^2}{2a-1}\right)$;

2) $(y+1)^2\cdot\left(\dfrac{1}{y+1}+\dfrac{1}{y^2-1}-\dfrac{1}{y-1}\right)$;

3) $1-\left(\dfrac{2}{c-2}-\dfrac{2}{c+2}\right)\cdot\left(c-\dfrac{3c+2}{4}\right)$;

4) $1+\left(1-\dfrac{9x^2+4}{12x}\right):\left(\dfrac{1}{3x}-\dfrac{1}{2}\right)$.

41.8. Найдите x из пропорции:

1) $(a^2-4):(2a-4)=x:(a+2)$;

2) $(a^2-1)^2:x=(a^2-1):(a^3+1)$.

41.9. Докажите тождество:

1) $\dfrac{x^3}{x^2-4}+\dfrac{x}{x+2}-x=\dfrac{x}{x-2}$;

2) $\dfrac{5a^2-10}{a^4+2a^3-a^2-4a-2}-\dfrac{6}{(a+1)^2}=-\dfrac{1}{(a+1)^2}$.

41.10. Решите уравнение:

1) $(c^2-9)\cdot x=2c+6$;

2) $\dfrac{x}{(c+2)^2}=\dfrac{3}{c^2-4}$;

3) $\dfrac{4x}{(c+1)^2}=\dfrac{3c}{c^2-1}$;

4) $\dfrac{x-3}{(c-4)^2}=\dfrac{2,4}{16-c^2}$.

41.11. Представьте в виде алгебраической дроби выражение:

1) $\dfrac{3x^2}{5y^3}:\dfrac{9x^3}{2y^2}\cdot\dfrac{5y}{3(x-1)}$;

2) $\dfrac{5a(b-1)}{3^2d}:\dfrac{5cd^2}{9ab}:\dfrac{a^2(b-1)}{c^3d}$;

3) $\dfrac{7p^4}{10q^3}\cdot\dfrac{5q^2(p+1)}{14p^2}:\dfrac{3p}{4q^4}$;

4) $\dfrac{8x^2y^3}{7ab^2}:\dfrac{14xy^2}{7a^2b}:\dfrac{2x^2(y+2)}{ab}$.

41.12. Если $x=\dfrac{3n}{n+2}$, то найдите значение выражения:

1) $\dfrac{x-3}{2x+n}$;

2) $\dfrac{2x-4n}{x+2n}+\dfrac{1}{x}$;

3) $\dfrac{3x-3}{(2+n)x+n}-\dfrac{x-3}{2x-3n}$.

41.13. Сравните значения выражений $\left(a-\dfrac{4ab}{a+b}+b\right):(a-b)$ и $\dfrac{a}{a+b}-\dfrac{b}{b-a}=\dfrac{2ab}{a^2-b^2}$ при $a=3$, $b=-4$.

41.14. Докажите, что верно равенство:

1) $\dfrac{a^2-25}{a+3}\cdot\dfrac{1}{a^2+5a}-\dfrac{a+5}{a^2-3a}=\dfrac{16}{9-a^2}$;

2) $\dfrac{b-c}{a+b}-\dfrac{ab-b^2}{a^2-ac}\cdot\dfrac{a^2-c^2}{a^2-b^2}=-\dfrac{c}{a}$.

41.15. Убедитесь, что значение выражения не зависит от допустимых значений переменной:

1) $\frac{(x-2)^2}{3x^4} \cdot \frac{4x^3}{x-2} \cdot \frac{-x}{2-x}$;

2) $\frac{(3x+2)^3}{x-3} : \frac{(3x+2)}{(x-3)^2} \cdot \frac{5}{(x-3)(3x+2)^2}$.

41.16. Докажите тождество:

1) $\frac{2x-q}{xq} - \frac{1}{x+q} \cdot \left(\frac{x}{q} - \frac{q}{x}\right) = \frac{1}{q}$; 2) $\frac{1{,}2a^2 - ac}{0{,}36a^2 - 0{,}25c^2} = \frac{20a}{6a+5c}$.

B

Выполните действия: **(41.17—41.18):**

41.17. 1) $(a^2-1) \cdot \left(\frac{1}{a-1} - \frac{1}{a+1} + 1\right)$; 2) $\left(\frac{1}{y} + \frac{2}{x-y}\right) \cdot \left(x - \frac{x^2+y^2}{x+y}\right)$;

3) $\left(x + 1 - \frac{1}{1-x}\right) : \left(x - \frac{x^2}{x-1}\right)$; 4) $\left(a + b - \frac{2ab}{a+b}\right) : \left(\frac{a-b}{a+b} + \frac{b}{a}\right)$.

41.18. 1) $\left(\frac{a-1}{3a+(a-1)^2} - \frac{1-3a+a^2}{a^3-1} - \frac{1}{a-1}\right) : \frac{a^2+1}{1-a}$;

2) $\left(\frac{1}{n+1} - \frac{3}{n^3+1} + \frac{3}{n^2-n+1}\right) \cdot \left(n - \frac{2n-1}{n+1}\right)$.

41.19. Упростите выражение:

1) $\left(\frac{a^2}{a+n} - \frac{a^3}{a^2+n^2+2an}\right) : \left(\frac{a}{a+n} - \frac{a^2}{a^2-n^2}\right)$;

2) $\frac{4xy}{y^2-x^2} : \left(\frac{1}{y^2-x^2} + \frac{1}{x^2+2xy+y^2}\right)$;

3) $\left(\frac{2a}{2a+b} - \frac{4a^2}{4a^2+4ab+b^2}\right) : \left(\frac{2a}{4a^2-b^2} + \frac{1}{b-2a}\right)$;

4) $\left(\frac{x-2y}{x^2+2xy} - \frac{1}{x^2-4y^2} : \frac{x+2y}{(2y-x)^2}\right) \cdot \frac{(x+2y)^2}{4y^2}$;

5) $\frac{4{,}5a+4x}{0{,}81a^2-0{,}64x2} - \frac{50}{9a-8x} + \frac{1}{ax}$.

41.20. Вычислите значение выражения:

1) $\dfrac{x+2}{x^2-2x+1}\cdot\dfrac{3x-3}{x^2-4}-\dfrac{3}{x-2}$ при $x=-1{,}5$;

2) $\left(\dfrac{y^2-3y}{y^2-6y+9}-\dfrac{3y+9}{y^2-9}\right)\cdot\left(1-\dfrac{3}{y}\right)$ при $y=-3{,}6$.

C

41.21. Найдите x и y из тождества:

1) $\dfrac{1}{a^2+2a-8}=\dfrac{x}{a+4}+\dfrac{y}{a-2}$;

2) $\dfrac{1}{a^2-5a+6}=\dfrac{x}{a-3}+\dfrac{y}{a-2}$;

3) $\dfrac{1}{a^2-2a-8}=\dfrac{x}{a-4}+\dfrac{y}{a+2}$;

4) $\dfrac{1}{2a^2-5a+3}=\dfrac{x}{a-1}+\dfrac{y}{2a-3}$.

41.22. Если $a+c=4$ и $ac=2$, то найдите значение выражения

$\left(\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{2c}\right)^4+\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{c^2}\right)\cdot\dfrac{1}{2ac}$.

41.23. Решите уравнение:

1) $\left(\dfrac{2ab}{a^2-b^2}+\dfrac{a-b}{2a+2b}\right)\cdot\dfrac{2a}{a+b}+\dfrac{b}{b-a}\cdot x=1$;

2) $\dfrac{c}{a-c}-\dfrac{a^3-ac^2}{a^2+c^2}\cdot\left(\dfrac{a}{(a-c)^2}-\dfrac{c}{a^2-c^2}\right)=2x$.

41.24. Докажите, что при всех допустимых значениях переменных от a и c не зависит значение выражения:

1) $\left(\dfrac{1}{a-c}-\dfrac{3c^2}{a^3-c^3}-\dfrac{c}{a^2+ac+c^2}\right)\cdot\left(c+\dfrac{a^2}{a+c}\right)$;

2) $3a\cdot\left(\dfrac{1}{a-c}-\dfrac{c}{a^3-c^3}\cdot\dfrac{a^2+ac+c^2}{a+c}\right)-\dfrac{3c^2}{a^2-c^2}$.

41.25. Докажите, что при всех допустимых значениях переменных значение выражения:

1) $\left(\frac{2xb}{x^2 - b^2} + \frac{x - b}{2x + 2b}\right) \cdot \frac{2x}{x + b} + \frac{b}{b - x}$;

2) $\frac{y}{y - x} + \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2} \cdot \left(\frac{x}{(x - y)^2} - \frac{y}{x^2 - y^2}\right)$ неотрицательно и не зависит от значения переменных.

41.26. Упростите выражения:

1) $\dfrac{3 - \frac{2}{x}}{3 + \frac{2}{x}}$;

2) $\dfrac{\frac{5n - b}{b} + 1}{\frac{15n + b}{b} - 1}$;

3) $\dfrac{\frac{2x}{y^2} + \frac{y}{x^2}}{\frac{x}{y^2} - \frac{2y}{x^2}}$;

4) $\dfrac{\frac{11}{a} + \frac{11}{b} + \frac{11}{c}}{\frac{12}{ab} + \frac{12}{bc} + \frac{12}{ac}} + \frac{1}{12}$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. При каких значениях a имеет смысл дробь $\frac{a-1}{a^2+4}$:

A. все числа, кроме 4;

B. все числа, кроме 1;

C. все числа, кроме 2 и –2;

D. a — любое число?

2. При каких значениях x переменной не имеет смысла дробь $\frac{x-3}{x+3}$:

A. 9; B. 3; C. 0; D. –3?

3. Сократите дробь $\frac{8x^2-4xy}{y-2x}$:

A. 4; B. $-4x$; C. $4x$; D. –4.

4. Найдите дробь, равную дроби $\frac{3}{y-x}$:

A. $\frac{6}{2x-y}$; B. $\frac{3}{y-x}$; C. $\frac{3}{x+y}$; D. $-\frac{3}{y-x}$.

5. Укажите верное тождество:

A. $\frac{5a}{a^2-3}=\frac{5}{a-3}$; B. $\frac{x+y}{x-y}=\frac{(x+y)^2}{x^2-y^2}$;

C. $\frac{b}{b-3}=\frac{7b}{21-7b}$; D. $\frac{5}{11}=\frac{5}{11n}$.

6. Приведите к общему знаменателю дроби $\frac{1}{3x^2}$; $\frac{5}{6xy^2}$; $\frac{3}{10xy^3}$:

A. $30\,x^2y^3$; B. $60\,x^2y^3$;

C. $30\,x^5y^5$; D. $180\,x^2y^3$.

7. Чему равен общий знаменатель дробей $\frac{6}{3a-a^2}$; $\frac{a+1}{a^2-9}$; $\frac{4}{a^2}$:

A. a^2-9; B. $a(a^2-9)$;

C. $a(9-a^2)$; D. $a^2(9-a^2)$?

8. Упростите выражение $\frac{3x-26}{18x^2}-\frac{x-4}{3x^2}-\frac{5}{9x}$:

A. $\frac{13x-26}{18x^2}$; B. $\frac{19x-22}{18x^2}$;

C. $-\frac{13x+2}{18x^2}$; D. $\frac{13x-26}{18x^2}$.

9. При каких значениях x выполняется равенство $\frac{2}{x^2-9}=\frac{1}{x-3}+$ $+\frac{3}{x+3}$:

A. 1; B. 0; C. 2; D. –1?

10. Упростите выражение $\frac{2y+3}{x}\cdot\frac{3y^2}{4y^2-9}:\frac{y}{10xy-15x}$:

A. 15; B. $15y$; C. $\frac{1}{15y}$; D. $\frac{x}{15y}$.

11. Упростите выражение $\left(1-\frac{3}{a}\right)\cdot\frac{a}{a^2-9}$:

A. $\frac{1}{a+3}$; B. $a+3$; C. $\frac{a^2}{a+3}$; D. 1.

12. Упростите выражение $\frac{8-a^3}{16-a^2}\cdot\frac{a+4}{a^2+2a+4}$ и найдите его значение при $a=-2$:

A. 0; B. $\frac{2}{3}$; C. 1; D. –1.

13. Сократите дробь $\frac{9x^2+24xy+16y^2}{9x^2-16y^2}$:

A. $\frac{4y+3x}{4y-3x}$; B. $\frac{3x-4y}{4y+3x}$; C. $\frac{4y+3x}{3x-4y}$; D. $\frac{1}{3x+4y}$.

14. Если $\frac{2a-b}{3a+2}=5$, то найдите значение дроби $\frac{4b-8a}{15a+10}$:

A. 4; B. 100; C. –4; D. – 100.

15. Упростите выражение $\left(\frac{6a}{5b}\right)^2\cdot\left(\frac{5b^3}{6a}\right)^4\cdot(6a)^2$:

A. $25b^{10}$; B. $\frac{b^{10}}{5}$; C. $30a^4b^{12}$; D. 1.

16. Из пропорции $\frac{a^3 - 25a}{2a + 10} = \frac{3a^2 - 15a}{x}$ найдите значение x:

A. $\frac{1}{6}$; B. 1; C. 6; D. –6.

17. Выразите a из равенства $\frac{1}{x} = \frac{b}{a} - b$:

A. $\frac{4 + xb}{xb}$; B. $\frac{xb}{1 + xb}$; C. $\frac{1 - xb}{xb}$; D. $\frac{xb}{1 - xb}$.

18. Известно, что $\frac{1}{x} + x = m$. Найдите выражение $\frac{1}{x^2} + x^2$:

A. m^2; B. $2 + m^2$; C. $m^2 - 2$; D. $2 - m^2$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ КУРСА АЛГЕБРЫ ДЛЯ 7 КЛАССА

Вычисления

Вычислите **(1—5):**

1. 1) $0,7 \cdot 5^4 - 37,5$; 2) $-9^4 \cdot 2,1 + 13\,700,1$;
3) $6,3 - 10^3 \cdot 0,0073$; 4) $192 \cdot (-0,2)^3 - 0,112$;
5) $-240,02 + 7^4 \cdot 0,02$; 6) $10^4 \cdot 3,241 + 7590$.

2. 1) $\dfrac{4^8 \cdot 12^7 \cdot 9^3}{6^{12} \cdot 16^4}$; 2) $\dfrac{21^8 \cdot 27^5 \cdot 49^6}{9^{11} \cdot 343^7}$;

3) $\dfrac{25^{11} \cdot 81^4}{625^4 \cdot 15^5 \cdot 9^6}$; 4) $\dfrac{32^9 \cdot 125^8}{8^{13} \cdot 10^7 \cdot 25^8}$.

3. 1) $10^4 - 9^5 - 951$; 2) $15^4 + 14^4 - 9041$;
3) $6^5 + 5^6 + 7719$; 4) $-7^4 + 8^4 + 305$.

4. 1) $\dfrac{8^3 \cdot (11^3)^5}{121^7 \cdot 4^{19}}$; 2) $\dfrac{81^{10} \cdot 169^5}{(13^3)^3 \cdot 27^{13}}$;

3) $\dfrac{49^{25} \cdot 625^{15}}{(5^{12})^5 \cdot (7^{16})^3}$; 4) $\dfrac{216^8 \cdot 125^7}{625^5 \cdot (6^5)^4}$;

5) $\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 32^2 \cdot 1000 \cdot 5^3}{4^7 \cdot 0,001 \cdot 25^4}$; 6) $\dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot 9^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot 2^6}{\left(\frac{1}{11}\right)^2 \cdot 363 - \left(\frac{1}{12}\right)^2 \cdot 3^2 \cdot 2^4}$.

5. 1) $\dfrac{27^2 - 17^2}{16^2 - 6^2}$; 2) $\dfrac{48^2 - 18^2}{35^2 - 15^2}$; 3) $\dfrac{87^2 - 43^2}{31^2 - 16^2}$;

4) $\dfrac{98^2 - 58^2}{75^2 - 35^2}$; 5) $\dfrac{123^3 + 73^3}{196} - 123 \cdot 73$; 6) $\dfrac{186^3 - 34^3}{152} + 186 \cdot 34$.

6. Выполните действия:

1) $243 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6 - 8,75 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3 \cdot 0,25 + 0,12$;

2) $\left(\frac{6}{7}\right)^2 \cdot 2,45 - \left(34 - 3\frac{5}{14}\right) + 0,05 \cdot 2^3$;

3) $6{,}25 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^5 - 0{,}024 \cdot 9^3 + 1{,}552$;

4) $\left(\frac{8}{11}\right)^2 \cdot 0{,}5 \cdot \left(3\frac{2}{3}\right)^3 + \left(1\frac{1}{3}\right)^4 : 85\frac{1}{3}$.

7. Найдите $a\%$ от числа b, если:

1) $b = 2^5 \cdot 5^2 + 200$ и $a = 11$;
2) $b = (-3)^3 \cdot 4^4 + 6962$ и $a = 5$;
3) $b = (0{,}5)^4 \cdot 2^8 + 18^4$ и $a = 13{,}5$;
4) $b = 0{,}2^8 \cdot 5^{10} + 6^2$ и $a = 50$.

8. Найдите значение выражения:

1) $5a^4 - 7b^5 + 11c^3$ при $a = 2$, $b = -1$, $c = -1$;
2) $1{,}2x^5 + 3{,}9y^4 - 6c^4$ при $x = -1$, $y = 2$, $c = -2$;
3) $0{,}005n^3 + 0{,}023m^3$ при $n = -10$, $m = 10$;
4) $64t^6 - 27s^3 + 125k^3$ при $t = -\frac{1}{2}$, $s = \frac{1}{3}$, $k = -\frac{1}{5}$.

9. Сравните значения выражений:

1) $7^3 \cdot (-2)^2$ и $10^3 + 7^3$;
2) $\left(-\frac{2}{9}\right)^4 \cdot 0{,}729$ и $3^3 - 5^2 \cdot 1{,}01$;
3) $(-0{,}2)^3 \cdot 5^4$ и $6^4 : (11^3 - 35)$;
4) $4^5 : (2 \cdot 5^3)$ и $2^2 \cdot (0{,}9^2 + 0{,}14)$.

10. Используя свойства степеней, сравните значения выражений:

1) 40^{20} и 20^{40};
2) 25^5 и 125^3;
3) 16^5 и 64^3;
4) 72^{10} и $32 \cdot 12^{10}$.

Тождественные преобразования выражений

Упростите выражения **(11—12)**:

11. 1) $(a - 5)^2 + (a + 7)(5 - a) + 8a$;
2) $-73 + (6 + a)^2 + (9 - a)(a + 4)$;
3) $(3a - 4)(9a + 8) - (2 - 27a)(16 - a)$.

12. 1) $(a^2 - 5)(3 + 2a) - 2a(a^2 + 4)$;
2) $(2 - 3a)^3 - 4(2 - 9a) + 26a^3$;
3) $(4 + a)^3 - (a - 4)^3 - 36(2a^2 + 3)$.

13. Для каких значений переменной x является тождеством равенство:

1) $(4m + x)^2 = 16m^2 + 24mn + 9n^2$;
2) $(2a - x)^2 = 4a^2 - 28ab + 49b^2$;
3) $(x + 9n)^2 = 36m^2 + 108mn + 81n^2$;
4) $(x - 6b)^2 = 64a^2 - 96ab + 36b^2$?

14. Для каких значений переменной y является тождеством равенство:

1) $(5a - y)^2 = 25a^2 - 2ac + 0{,}04\,c^2$;

2) $(0{,}5\,a + y)^2 = 0{,}25\,a^2 + 6ab + 36b^2$;

3) $(y - 5c)^2 = 0{,}64\,a^2 - 8ac + 25c^2$;

4) $(1{,}4\,a + y)^2 = 1{,}96\,a^2 + 16{,}8\,ab + 36b^2$?

15. Докажите, что при любых значениях переменной от них не зависит значение выражения:

1) $(8ac - 4)(ac + 5) - 4ac(2ac + 9)$;

2) $(15mn - 7)(12mn + 8) - 36mn\,(5mn + 1)$;

3) $(10x^2 - 3)(9x^2 - 2) - 3x^2(30x^2 + 17) + 98x^2$;

4) $(4cd^3 - 7)^2 + 4\,cd^3\,(14 - 4\,cd^3)$.

16. Докажите, что при любых значениях переменных значение выражения равно нулю:

1) $25x^2(x^2 - y^2) - 25x^2(x^2 + y^2) + 50x^2y^2$;

2) $(5ac - 8)^2 - (8ac - 5)^2 + 39(a^2c^2 - 1)$.

17. Верно ли равенство:

1) $(12a - 5)^2 - 18a(8a - 6) + 12a = 25$;

2) $17(a - 3)^2 - (4a + 1)^2 - 22(7 - 5a) = a^2 - 2$;

3) $9\left(b + 1\frac{2}{3}\right)^2 - 21(2b + 1) - (3b - 2)^2 - 200 = 0$;

4) $15(5a + 6)(6 - 5a) + 13(6a - 1)^2 - 31(17 + 3a^2) - 26 = -156a$?

18. Упростите выражение:

1) $(8a - 5)(9a + 10) - (12a - 7)(11 + 6a) + 55a$;

2) $(14a - 3)(15a + 10) - (35a + 2)(7 + 6a) + 162a$;

3) $(a - 3)^3 - (a + 7)^3 + 30a^2 + 120a$;

4) $(a + 5)^3 + (6 - a)^3 + 33(20 - a + a^2)$.

Докажите тождества **(19—20)**:

19. 1) $(a - m + 7)\cdot(a + m - 7) - a^2 = (m - 7)^2$;

2) $(3x + 5 - y)\cdot(3x + 5 + y) + y^2 = (3x + 5)^2$;

3) $(6x - 8y + 7)\cdot(6x + 8y - 7) + (8y - 7)^2 = 36x^2$;

4) $(9k + 11 + 2m + n)\cdot(9k - 2m + 11 - n) - 9k(9k + 22) + 4m(m + n) =$
$= 121 - n^2$.

20. 1) $4 + (a + b)^2 - 7a = a(2b - 7) + (a^2 + 4 + b^2)$;

2) $4t^2 + (3 - k)^2 - (2t - 7 + k) = k^2 + 2t(2t - 1) + k - 8(k - 2)$;

3) $9x^2 - (3x - 2y)^2 = 2y(6x - 2y)$.

21. Докажите, что тождественно равны выражения:

1) $\dfrac{x-2}{x^2+2x+4}-\dfrac{6x}{x^3-8}+\dfrac{1}{x-2}$ и $\dfrac{2x-4}{x^2+2x+4}$;

2) $\dfrac{2a^2+7a+3}{a^3-1}-\dfrac{1-2a}{a^2+a+1}-\dfrac{3}{a-1}$ и $\dfrac{1}{a-1}$.

22. Выполните действия над дробями:

1) $\dfrac{18c^4}{7d}:(-9c^2d)$;

2) $\dfrac{14}{9x^3}:\dfrac{7x}{2y^2}$;

3) $\dfrac{3x}{10a^3}:\dfrac{1}{5a^2}$;

4) $27a^3\cdot\dfrac{a^2}{b}:\dfrac{18a^4}{7b^2}$.

23. Докажите тождество:

$$\frac{5a^2-10}{a^4+2a^3-a^2-4a-2}=\frac{6}{(a+1)^2}-\frac{1}{(a+1)^2}.$$

24. Представьте в виде рациональной дроби выражение:

1) $\dfrac{3x^2}{5y^3}:\dfrac{27x^5}{2y^4}\cdot\dfrac{5y}{3(x-1)}$;

2) $\dfrac{25a(b-1)}{3^2d}:\dfrac{5cd^2}{9ab}:\dfrac{a^3(b-1)}{c^3d}$;

3) $\dfrac{28p^4}{15q^3}\cdot\dfrac{5q^2(p+1)}{14p^2}:\dfrac{3p^2}{4q^4}$;

4) $\dfrac{8x^3y^4}{13ab^2}:\dfrac{4xy^2}{13a^2b}:\dfrac{2x^2(y+2)}{ab}$.

25. Если $x=\dfrac{2n}{n-2}$, то найдите значение выражения:

1) $\dfrac{x-3}{2x+n}$;

2) $\dfrac{2x-4n}{x+2n}+\dfrac{1}{2x}$;

3) $\dfrac{3x-3}{(2-n)x+n}-\dfrac{x-3}{2x-3n}$.

26. Найдите значение выражения $\left(\dfrac{x}{y}+1\right)^2+\left(\dfrac{x}{y}-1\right)-2$ при $x=0{,}5$, $y=4$.

Докажите, что при допустимых значениях переменной не зависят от переменной значения выражений **(27—28)**:

27. 1) $\left(\dfrac{4a}{a^2-1}+\dfrac{a-1}{a+1}\right)\cdot\dfrac{a}{a+1}-\dfrac{a}{a-1}$;

2) $\left(\dfrac{8a}{a^2-4}+\dfrac{a-2}{a+2}\right)\cdot\dfrac{a}{a+2}-\dfrac{a}{a-2}$.

28. 1) $\left(\dfrac{20a}{25-a^2}+\dfrac{5-a}{a+5}\right):\dfrac{a+5}{5}-\dfrac{5}{5-a}$;

2) $\left(\dfrac{28c}{c^2-49}+\dfrac{c-7}{c+7}\right)\cdot\dfrac{c}{c+7}-\dfrac{c}{c-7}$.

Уравнения и их системы

Решите уравнения **(29—31):**

29. 1) $(x+2)^2-(x^2+2^2)-2^3=0$;

2) $(3+x)^2-(x^2+3^2)-3^2=0$;

3) $0,5\,(0,5+2x)+x^2-10-(x^2+0,25)=0$;

4) $x\left(x+1\dfrac{1}{3}\right)+\dfrac{4}{9}-\dfrac{3}{4}-\left(\dfrac{4}{9}+x^2\right)=0$.

30. 1) $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2=7\dfrac{1}{4}+x^2$;

2) $2-\left(\dfrac{1}{64}+x^2\right)=-\left(x-\dfrac{1}{8}\right)^2$;

3) $27+25x^2+2,7^2=7,29+5x\,(5x-5,4)$;

4) $\dfrac{1}{49}x^2-7\left(-x-\dfrac{2}{7}\right)=-61+\left(-\dfrac{1}{7}x\right)^2$.

31. 1) $x^2-(x-7)(x+7)=5-2(-2-x)$;

2) $121-(11-x)(x+11)=187+x(x+11)$;

3) $x^2-0,3\cdot\dfrac{3}{10}-x=(x+0,3)(x-0,3)$;

4) $\left(x-\dfrac{3}{4}\right)(x+0,75)+\dfrac{3}{4}(0,75-x)=x^2+1,5$.

32. Решите систему уравнений графическим способом:

1) $\begin{cases}2,25x+2y=3,\\2x+y=5;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}3x-y=5,\\2x+y=10.\end{cases}$

33. Найдите два числа, если:

1) значение суммы первого числа, увеличенного в три раза, и второго числа, увеличенного в два раза, равно 62, а значение разности первого числа, умноженного на 5, и второго числа, умноженного на 6, равно (–18);

2) значение разности двух чисел равно 3, а значение их суммы равно (–7).

34. 1) Найдите скорости двух автомобилей, если известно, что скорость их сближения равна 173 км/ч, а скорость удаления равна 17 км/ч.

2) Найдите скорость течения реки и собственную скорость теплохода, если его скорость по течению реки равна 47 км/ч, а против течения — 39 км/ч.

35*. Решите систему с параметром:

1) $\begin{cases} -2x+5y-7=0, \\ px+3y-1=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 8x-9y+4=0, \\ 4x-py+2=0. \end{cases}$

36. При каких значениях переменной x принимает неотрицательное значение выражение:

1) $5x-16$; 2) $47-97x$;
3) $x^2-11-x(x-2)$; 4) $x(3+x)-x^2-33$;
5) $(x+5)^2-x^2-12x$; 6) $20x+x^2-(4-x)^2$?

37. При каких значениях переменной y меньше нуля значение разности двух выражений:

1) y^2-16 и $8y+y^2$; 2) $5y^3+10y$ и $17+5y^3$;
3) $(1-y)^2+13$ и y^2-6; 4) $87+y^2$ и $(y-3)^2-5$?

Функция

38. Постройте график уравнения:

1) $x+y-3=0$; 2) $x-y-3=0$;
3) $y-x+3=0$; 4) $y-x-3=0$;
5) $y+2x^3=0$; 6) $y-\dfrac{3}{x}=0$; 7) $y+\dfrac{0,3}{x}=0$.

39. Запишите формулу линейной функции, график которой проходит через точки:

1) $A(-3;\ 2)$ и $B(1;\ -1)$; 2) $M(-4;\ -2)$ и $K(2;\ 4)$;
3) $F(-1;\ 6)$ и $E(1;\ -6)$; 4) $T(5;\ 3)$ и $P(-5;\ -3)$.

40. Для каких значений переменной x график уравнения:

1) $2,3x-7y+4=0$; 2) $5x+4y-9=0$;
3) $x^2+y=0$; 4) $y=2x^2$;
5) $y-\dfrac{3}{x}=0$; 6) $y+\dfrac{2}{x}=0$

расположен ниже оси абсцисс?

41. С помощью графика функции, изображенного на рисунке 1, найдите:

1) область ее определения;
2) значения аргумента x, для которых функция возрастает;

3) значения аргумента x, для которых функция убывает;
4) координаты точек A, B, C, D;
5) координаты точек пересечения графика с осями координат;
6) уравнения, графиками которых являются прямые AB, BC, CD.

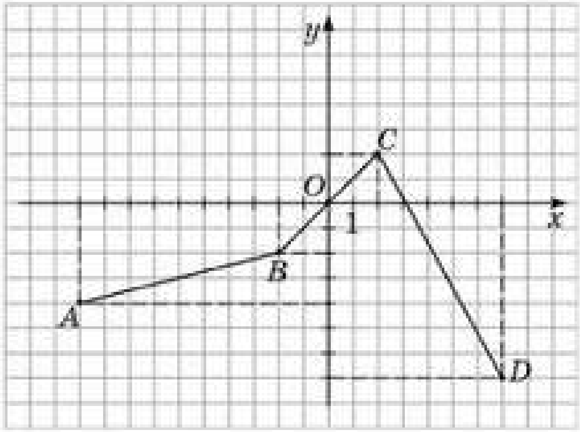


Рис. 1

42. Графики каких линейных функций: $y = 4x + 8$; $y = -5x + 11$; $y = 4x$; $y = 5x$; $y = 7x - 0{,}5$; $y = -6x - 0{,}5$; $y = 1{,}5x + 2$; $y = -9 + 1{,}5x$; $y = x - 4$; $y = 8 + 6x$:
1) пересекаются; 2) параллельны; 3) совпадают?

43. Для каких значений аргумента x являются положительными значения функции:
1) $y = -0{,}125x + 7$; 2) $y = 0{,}3 - 0{,}015x$;
3) $y = 32x - 2^7$; 4) $y = 1000x - 80$; 5) $y = 0{,}5x^2$;
6) $y + -3x^3$; 7) $y = \frac{0{,}3}{x}$; 8) $y =- \frac{3}{x}$?

44. Принадлежит ли графику функции $y = -\frac{3}{8}x - 4$ точка:
1) $A\ (0;\ -4)$; 2) $B\ (8;\ -7)$; 3) $C\ (-8;\ -1)$;
4) $M\ (16;\ 2)$; 5) $K\ (-16;\ -2)$; 6) $F\ (-4;\ -2{,}5)$?

45. Запишите формулы четырех линейных функций и постройте их графики в одной и той же координатной плоскости, если известно, что график одной из них проходит через точки $F\ (3;\ 0)$ и $K\ (0;\ 3)$, другой — через точки $M\ (-6;\ 0)$ и $T\ (0;\ -6)$, а графики третьей и четвертой функций пересекают ось ординат в точке с ординатой, равной 6, и параллельны соответственно графикам первой и второй функций.

46. Задайте формулой линейную функцию, график которой проходит через точку $M\ (-5;\ 4)$ и параллелен графику функции $y = 1\frac{1}{3}x + 7$, и постройте ее график. Найдите значения аргумента линейн ых функций, для которых значения функции:
1) положительные; 2) отрицательные.

47. Мальчик прошел вниз к реке, отдохнул у реки и вернулся обратно. На рисунке 2 изображен график движения мальчика. Определите, пользуясь графиком:
1) сколько минут отдыхал мальчик у реки;

2) скорость мальчика на подъеме (в км/ч);
3) сколько минут заняла ходьба.

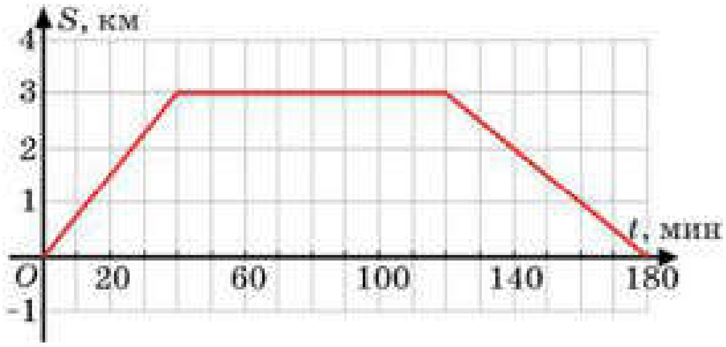


Рис. 2

48. 1) Пчела летает от улья к цветку и обратно. На цветке она какое-то время собирает пыльцу. Расстояние от улья до цветка равно 5 м. На рисунке 3 изображен график зависимости расстояния между пчелой и ульем от времени движения пчелы. Определите, какое расстояние пролетела пчела за первые 40 с.

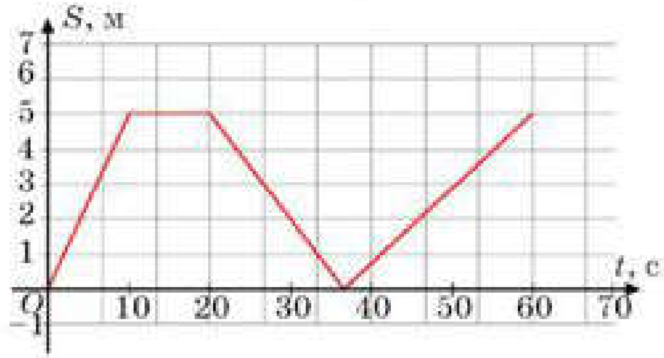


Рис. 3

49. На графике (рис. 4) жирными точками показана среднесуточная температура воздуха в городе N каждый день с 15 по 28 марта 2016 г. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Для наглядности жирные точки соединены линией. Определите разность между наибольшей и наименьшей среднесуточными температурами за указанный период. Ответ дайте в градусах Цельсия.

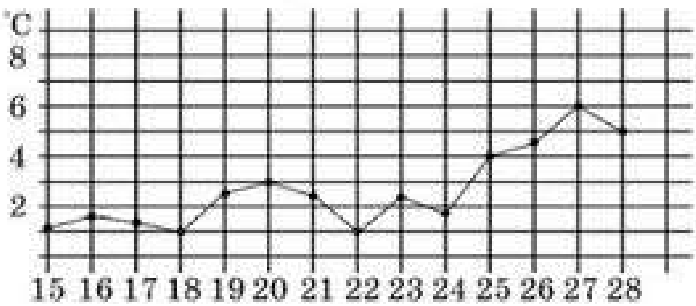


Рис. 4

50. В ходе химической реакции количество исходного вещества (реагента), которое еще не вступило в реакцию, со временем постепенно уменьшается. На рисунке 5 эта зависимость представлена графиком. На оси абсцисс указывается время в минутах, прошедшее с момента начала реакции, на оси ординат — масса оставшегося реагента, который еще не вступил в реакцию. Найдите, сколько граммов реагента вступило в реакцию за 4 мин.

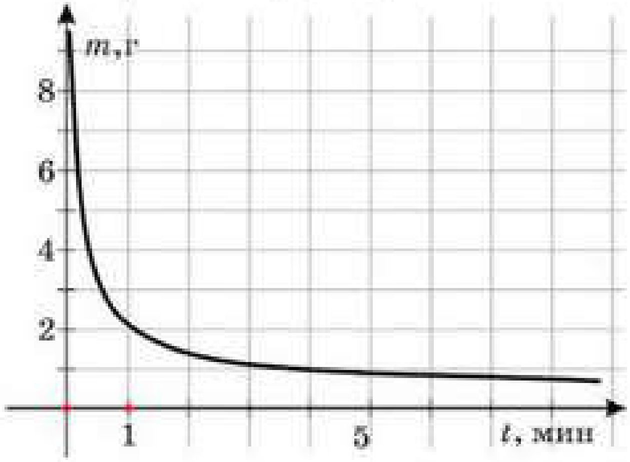


Рис. 5

51*. Дан график функции $y = -\dfrac{2}{x}$ (рис. 6).

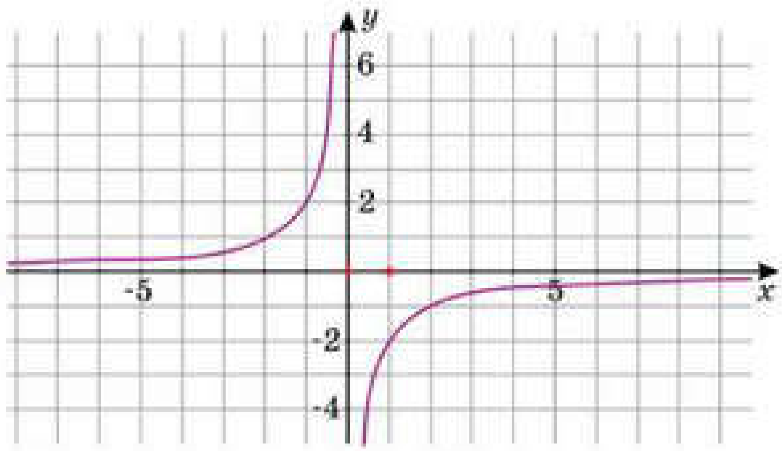


Рис. 6

По графику функции найдите множество значений переменной x, при которых функция:

1) принимает неотрицательные значения;
2) убывает;
3) принимает значения, не меньшие 2;
4) принимает значения, меньшие (-1).

52. Графики двух функций пересекаются в точках A и B (рис. 7). Найдите координаты точек A и B.

53. Дан график функции $y = \dfrac{5}{x}$ (рис. 8).

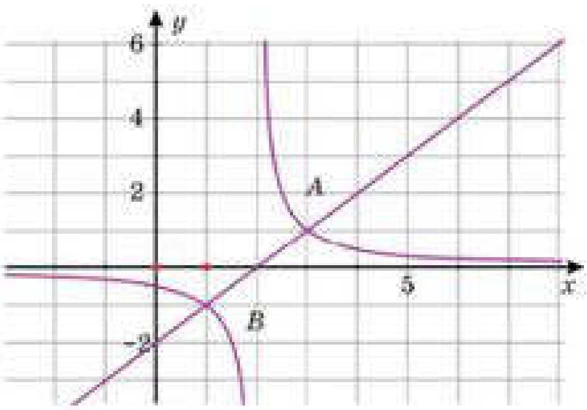


Рис. 7

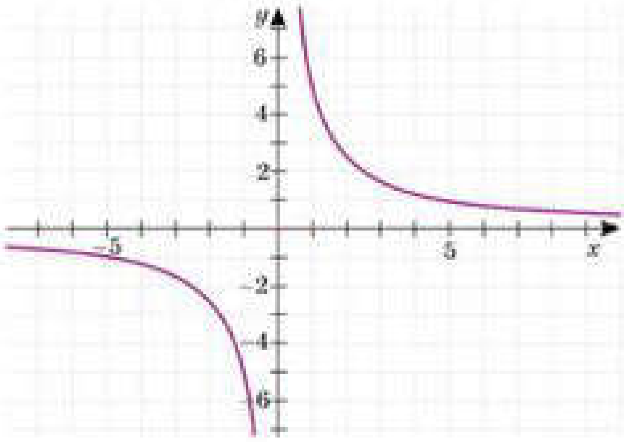


Рис. 8

Проходит ли график функции через точку:
1) A (1; 7); 2) B (–5; –1); 3) C (2; 1); M (–2; –2,5)?

Задачи повышенной трудности

54. Известно, что $a + b + c = 9$, $\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{a+c} = \dfrac{5}{6}$. Найдите значение выражения $\dfrac{c}{a+b} + \dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{a+c}$.

55. Куб с длиной ребра в 1 м распилили на кубики с ребром в 1 см. Если выложить в ряд полученные кубики, то какой длины получится ряд?

56. После каждой стирки кусок мыла уменьшается на 20%. После скольких стирок кусок мыла уменьшится не менее чем на две трети? Найдите наименьшее такое число.

57. Докажите, что числовое выражение $7^{2017} - 3^{2017}$ делится на 10.

58. При каких натуральных значениях n дробное выражение является целым числом:

1) $\dfrac{n^2 - n + 3}{n + 1}$; 2) $\dfrac{2n^2 - 3n + 2}{2n - 1}$?

59. Докажите, что при любом натуральном n:

1) $7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n$ кратно 19; 2) $6^{2n} + 3^n + 3^{n+2}$ кратно 11;
3) $8^n + 5^n - 2^{n+1}$ кратно 3; 4) $3^n + 5^n + 7^n + 9^n$ кратно 4.

60. Вычислите $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{2016 \cdot 2017}$.

61. Докажите, что $\dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{1}{2017^2} < \dfrac{2016}{2017}$.

Ответы

Упражнения для повторения курса математики для 5–6 классов

1. 1) –1,5; 2) $-\frac{46}{63}$; 3) $2\frac{49}{51}$; 4) $-\frac{17}{32}$. **2.** 1) –6,7; 2) 26,088; 3) –0,58; 4) –1. **3.** 1) 196,7; 2) –1,859; 3) $\frac{16}{21}$; 4) $3\frac{17}{18}$. **4.** 1) 20,3; 2) 3,6; 3) 95,98; 4) – 0,4875. **5.** 1) 110,8; 2) –13,5; 3) 110,48; 4) –6,6. **6.** 1) –1; 2) $4\frac{14}{15}$; 4) $\frac{5}{6}$; 6) $6\frac{25}{27}$; 7) 2,4; 8) $1\frac{3}{40}$. **8.** 58 338 км/ч. **9.** 1) 330 км^2; 2) 159 км^2; 3) 54,7 км^2. **10**. 1) от 400 кг до 600 кг; 2) 900 кг; 3) 3,5 м; 4) 2,4 м —2,6м; 5) 30 000 км; 6) 100 км; 7) 68 кг; 8) 500 кг; 9) 600 кг. **11.** 1) –13,5; 2) –29,3; 3) 43,5; 4) 181. **12.** 1) $\frac{13}{18}$; 3) –27; 4) $-\frac{7}{12}$. **17**. 1) –181; 2) 5025; 4) 3,5. **18.** 3) 1,485; 4) 2,2. **19.** 1) 7,68; 2) 2,4; 3) 1313,26; 4) 1771. **21.** 1) 1,5 кг; 45 т. **22.** 1) 1954 год; 2) 27 совхозов; 3) 50 совхозов. **23.** 9 месяцев. **24.** 1) 30 000°С; 2) в 5 раз. **25.** 1) 2; 2) 3; 4) 10,5; 6) 16; 7) 25; 8) 1120. **27.** 1) –200; 2) 1; 3) 20; 4) 0,2. **28.** 1) $-\frac{4}{7}$; 2) –16; 4) $-\frac{5}{11}$. **29.** 1) 7; 2) –0,1. **31**. 2,4 ч. **32**. 2,1 ч. **34.** 1) 6 см; 2) 10 см; 3) 10 см; 4) 30 см; 6) 1,4 см. **35.** 120°; 180°; 60°. **36.** 1. **38.** 2 ч. **50.** 1) 55; 2) $11\frac{1}{3}$; 3) –164; 4) –1,3; 5) –15; 6) $3\frac{3}{14}$. **52.** 1) 0,625; 2) 205; 3) $\frac{2}{7}$; 4) –7,5; 3) $\frac{5}{6}$; 6) –2,9. **53.** 1) 3; 2) $4\frac{5}{11}$; 4) $4\frac{26}{31}$. **54.** 1) 1976 год; 2) 75 тыс. га; 3) 3,8 тыс. га. **55.** 1) –11°; 2) –24°; 3) –50°. **56.** 1) 7 лет; 2) 12 лет; 3) 15 лет. **57.** 1) –1,1; 1,1; 2) –27; 27; 3) –84; 84; 4) $8\frac{1}{20}$; $-8\frac{1}{20}$; 5) $28\frac{17}{30}$; $-28\frac{17}{30}$; 6) $1\frac{53}{90}$; $-1\frac{53}{90}$. **72.** 1) (–∞; –2]; 2) $(\frac{1}{3}; +\infty)$; 3) $(-6; \frac{3}{4}]$; 4) $[\frac{1}{7}; 4]$. **84.** 1) 3; 2) –18; 3) –5. **86.** 1) (2; –5); 2) (–3; 3); 3) (1; –7); 4) (–2 ; 10). **87.** 1) (0,5; –4); 2) (11; –2,5). **89.** 1) (1966; 1931); 3) (250; 700). **91.** 1) (0,7; –0,2); 3) (–0,8; 1,7) . **93.** 1) $(2\frac{16}{17}; 8\frac{7}{17})$. **95.** 1) 3 игры; 2) 18 вариантов; 3) *A, E, K* и *E, G, K*.

Глава 1. Степень с целым показателем

1.10. 1) $\frac{15}{16}$; 2) $\frac{7}{9}$; 3) $\frac{3}{5}$; 4) 3,5; 5) –0,9744. **1.11.** 1) 241,4; 3) 1000; 4) 1000. **1.12.** 4) $(-7)^{27}\cdot z^{40}$; 5) $24^{20}\cdot(x+3)^{43}$; 6) $\left(\frac{d}{4}\right)^{19}\cdot t^{50}$. **1.13.** 1) x^4+b^5; 2) y^3-s^5; 3) $(5a)^4-\left(\frac{1}{n}\right)^3$; 4) $\left(\frac{a}{5}\right)^4+z^2$; **1.14.** 2) 144,09; 3) $715\frac{7}{16}$; 4) –4,4. **1.15.** 1) 81; 2) 3; 3) $2\frac{2}{3}$; 4) 0,75. **2.6.** 1) 8; 2) 13; 3) 4; 4) 6; 5) 5; 6) 3. **2.7.** 5) $\left(\frac{6}{13}\right)^{c-6}$; 6) $(-5,2)^{9+n}$. **2.8.** 1) 8^{5n}; 2) $(-3)^{11k}$; 3) $\left(\frac{8}{9}\right)^{5t}$. **2.12.** 1) n; 2) m; 3) $2t+5$; 4) $3k$. **2.13.** 1) $k+1$; 2) $3k+2$; 3) $4k+10$; 4) $3k+13$. **3.7.** 1) 5; 3) 1; 4) 6. **3.9.** 1) a^{13}; 2) b^{25};

4) $(3z)^6$; 6) $(-kt)^{20}$. **3.10.** 1) 243; 2) 216; 3) $\frac{25}{81}$; 4) $-\frac{1}{32}$; 5) 1,21; 6) 1,69. **3.11.** 2) 64; 1,69; $2\frac{7}{9}$; 36. **3.12.** 1) 2; 2) 29; 3) 51; 4) 72. **3.14.** 1) 9^{n-5}; 2) $(-10)^{6-m}$; 6) $(-2{,}4)^{t-1}$. **3.15.** 1) 11^{2k-3}; 2) 20^{13}; 4) $(-9)^{19t-6}$; 5) $\left(\frac{1}{9}\right)^{10t-3}$; 6) $2{,}1^{3t}$. **3.16.** 1) 800; 2) 81. **3.18.** 1) –125; 2) 1,44; 4) $-\frac{1}{216}$. **3.19.** 1) –19,2; 2) 34. **4.4.** 1) b^{44}; 2) b^4; 3) b^8; 4) b^{10}; 5) b^{46}; 6) b^2. **4.7.** 1) 25; 2) 1000; 3) 680; 5) 56. **4.8.** 1) –32; 2) $\frac{9}{49}$. **4.10**. 1) $5^7 \cdot b^2$; 3) $-\frac{4c^2 \cdot d^3}{3}$. **4.11.** 1) 13; 2) 7; 3) 36. **4.12.** 1) –1; 2) 16. **5.7.** 6) m^2n^{10}. **5.8.** 3) x; 5) z^5; 6) zt^2. **5.9.** 4) $2\frac{7}{9}$. **5.11.** 1) $-19xy$; 2) $2a^2b$. **5.13.** 1) 1; 2) 1. **5.14**. 1) 144; 2) 7^6. **5.15.** 1) 100; 2) 81; 3) 1; 4) $\frac{25}{49}$. **6.6.** 1) $\frac{1}{48}$; 2) $\frac{7}{24}$; 6) 65; 9) $1\frac{35}{64}$; 12) 8. **6.7.** 1) $\frac{a+b}{ab}$; 2) $\frac{a^2-b^2}{ab}$; 3) $\frac{(xy+1)^2}{xy}$. **7.12.** 1) $1045\frac{1}{3}$; 2) $2\frac{7}{9}$; 3) 1. **7.13.** 1) 1600; 2) –2; 3) 1. **7.14.** 1) 200; 3) 0. **8.14.** 1) $1{,}45 \cdot 10^{18}\,m$; $5{,}98 \cdot 10^{21}\,m$. **8.15.** $2{,}5512 \cdot 10^{21}$. **8.16.** 1) $2{,}7 \cdot 10^3$ г; 2) $8{,}321 \cdot 10^2\,m$; 3) 1,3 кг. **9.4.** 1) 7; 2) –726; 3) 0,5184; 4) –0,01. **9.5.** 1) 6; 2) 4; 3) 7; 4) 25. **9.6.** 1) 4; 2) 3; 3) 3; 4) 2. **9.9.** 1) $\frac{25}{4ax}$; 3) $\frac{125}{a^2x}$. **9.10.** 1) 17; 2) 2,1; 3) $\frac{1}{512}$. **9.18.** 1) b^7; 2) c^{11}; 3) a^4; 4) d^9. **9.20.** 2) $-x^2$; 3) a^2x. **9.21.** 1) 3; 3) 544.

Глава 2. Многочлены

10.3. 4) a^{13}; 5) $-56n^4m^4$; 6) $-\frac{1}{16}k^5t^7$. **10.4**. 4) $-b^{14}$; 5) $-2{,}1\,a^7t^9$; 6) $-b^{11}c^8$. **10.6**. 4) $16a^5c^5$; 5) $-60\,m^3n^3p$; 6) $36a^2b^2$. **10.7.** 1) $8m^5$; 2) $0{,}5\,x^5y^5z^3$; 3) $-0{,}4\,a^3x^3y^4$; 4) $12a^5b^5c^6$. **10.8.** 1) $1{,}2a^3c^3p$; 4) $14x^9y^2z^5$. **10.9**. 1) 9; 2) 20; 3) 35; 4) 69; 5) 28. **10.12**. 5) $(1{,}8\,m^2p^7)^2$; 6) $\left(0{,}17\frac{x^{10}}{y^9}\right)^2$. **10.15**. $2\frac{7}{9}$. **11.2**. 1) $8x^4y^3 - 9x^3y^8 + 10z^6$, степень 11. **11.6.** 1) $-\frac{1}{3}x^3 - 7ay^2$; 2) $2{,}11\,a^2z - 11\frac{4}{5}y^2$. **11.7.** 1) $a^4 - 11a^3 + 40a^2$; 4; 2) $21b^6 - 16b^5 + 15$; 6; 4) $-17k^4 - 53k + 52$; 4. **11.8.** 1) $2{,}3y^2 - 6{,}8x$; 2; 3) $-1{,}93\,d^3 + 0{,}9\,c^2$; 3. **11.10**. 1) 48. **11.11.** 1) $2\frac{11}{18}$; 2) 3,65; 3) $\frac{113}{120}$. **11.12.** 2) $39\frac{5}{7}$. **11.17.** 1) $-2ax + 4ab^2 + 4x^2b^3$; 2) $3b^2 - 2a^2x^3 - 3ab^3$. **11.18.** 1) $-x^2 + 3x - 5a$; 2) $2x - y - 3$; 3) $y^2 + 3a^3 + 5$; 4) $-8a^4 + 3a - 5$. **12.7.** 1) верно; 2) верно; 3) неверно; 4) неверно. **12.8**. 1) –1; 2) 13; 3) 9; 4) 3. **12.9**. 2) 16; 3) $-\frac{5}{6}$; 4) $\frac{1}{7}$. **12.14.** 1) $-3a^3 - 9a^2 + 17$; 2) $4x^4 + 2x^3 + 17$; 3) $-14b^5 - 32b - 1$. **12.15.** 1) $14a^4 - 7x - 6$; 2) $-y + 17b^2 - 81$; 3) $5{,}3c - 19{,}1z^3 - 9{,}9$. **12.16**. 3) $-13t + 7mn + k$; 4) $2{,}8a + 6{,}7bc - 11{,}1d$. **12.20**. 1) $x = \frac{10}{27}$, y — любое число; 2) $a = \frac{10}{31}$, b — любое число. **13.8.** 1) $29x^2 - 8a^2 - 59ax$; 4) $4xy - 2\frac{1}{56}x^2 - 2\frac{1}{56}y^2$.

13.10. 1) 0,5; 2) 2; 3) – 3,25; 4) $6\frac{5}{8}$. **13.11.** 1) [20; +∞); 2) $\left[\frac{4}{9};+\infty\right)$. **13.14**. 3) 0; 4) 14,37. **13.15.** 1) $9\frac{1}{17}$; 2) $12\frac{15}{17}$. **13.16.** 1) (–∞; 30]; 2) (–∞; 4); 3) (–∞; $\frac{4}{9}$]; 4) (–∞; –4). **14.4.** 1) $5a$; 2) 2,175 y; 4) $4c$. **14.5.** 1) 4; 2) –21,8; 3) $\frac{4}{7}$; 4) 0,6. **15.5.** 1) $(a+b)(2-c+5d)$; 2) $(m-n)(14+x)$; 3) $(x+y)(x-y-0,5)$; 4) $(c+d)(x-y+5+5xy)$. **15.6.** 3) $(a+b)^2$; 4) $(m+n^3)\times$ $\times(m-n^3+n-m^3)$. **15.7**. 1) $(7-8a)\cdot(4b-a-2-ab)$. **15.8**. 4) 0; $\frac{12}{13}$; 6) 0; $1\frac{2}{7}$; 8) 0; 7. **15.10.** 1) $0,16(a+2b)(a-4b)$; 5) $2,5(xy+0,5m)(1+y-x)$. **15.12**. 2) $(169-196x)(abc+y+1)$. **15.13.** 1) –0,3; $\frac{5}{7}$; 2) –1,4; $\frac{1}{8}$. **15.14.** 1) 0; $1\frac{1}{7}$; 3,5; 2) 0; 5. **16.2**. 5) $(11a-b)(y-7)$; 6) $(13-a)(x+y)$. **16.4**. 5) $(11y-4z)(1,1-2y)$; 6) $(9t-7k)\times$ $\times(0,01+3a)$. **16.7.** 1) $(a+b)(m+n+k)$; 2) $(a+b+c)(x+y)$; 3) $(m-n)(x+y+z)$; 4) $(t-k)(a+b+c)$. **16.8**. 1) $(a-3)(a+5)$; 3) $(x+6)\cdot(x+9)$; 8) $(t-9)(t+7)$. **16.9.** 1) 2; 3; 2) –3; –2; 3) –3; 2; 4) –2; 3; 5) 1; 4. **16.10.** 1) $(2m+3n)(a-b+c)$; 2) $(3x-2y)(m+n+k)$; 3) $(7t+4k)(x+y+z)$; 4) $(11a-9b)(t+k+p)$. **16.11.** 1) 1; 2; 3; 4; 2) –1; –2; –3; –4; 3) 1; $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; 10. **17.4**. 3) –30; 4) 10. **17.7**. 3) $(-a+b-7)(18-k)$; 4) $(20+x)(n-5m-4)$. **17.8.** 1) $-\frac{5}{7}$; 2) $1\frac{17}{30}$; 3) 8,5; 4) $\frac{1}{3}$. **17.9**. 2) –10. **17.10.** 1) [–6; +∞); 2) (–∞; 0,75]; 3) (–∞; $11\frac{1}{3}$); 4) (–∞; –9,5). **17.14.** 1) –44; 2) 133. **17.15.** 1) [10,5; +∞); 2) [–0,1; +∞); 3) [$2\frac{2}{9}$; +∞). **17.16.** 1) 2; 2) 6. **17.17**. 1) 0; 3) 1; 4) –11. **17.19.** Если уменьшилась на 200 тг/кг, то стоимость уменьшилась на 1400 тг; если увеличилась на 200 тг/кг, то стоимость увеличилась на 1400 тг.

Глава 3. Функция. График функции

19.5. 1) –1,5; 2) –0,25; 6) 2; 7) –4; 8) 0,2. **25.7.** 2) (4; +∞); 3) (–∞; –4); 6) (–∞; 4); 7) (–4; +∞). **20.5.** 1) возрастает; 2) убывает; 4) убывает. 5) не монотонная; 6) не монотонная. **20.6.** 5) $y=x^2$; 6) $y=\frac{1}{x^2}$; 7) $y=x^3$; 8) $y=\frac{1}{x^3}$. **21.2.** а) нет; б) да; в) да; г) нет. **21.10.** 1) [–7; –3] ∪ [–2; 3] ∪ [4; 8]; 2) $x=8$; 3) а) возрастает на [–7; –3] и [–2; 3]; б) убывает на [6; 8]. **23.5.** 1) $A(-\frac{8}{11}; 5\frac{4}{11})$; 5) $A(1; -2)$; 6) $A(-2; -13)$. **23.11**. 1) $b=7,2$; 2) $b=9$. **23.12.** 1) в I и III четвертях; 2) в I и III четвертях; 3) во II и IV четвертях; 4) во II и IV четвертях. **23.13**. 1) $y=1,8x+4,8$; 2) $y=-9,05x-6,05$; 3) $y=5,6x+8,6$; 4) $y=6\frac{1}{3}x+9\frac{1}{3}$. **24.7**. 1) (–3; 2); 2) (4; –1); 3) (5; 5). **24.9**. 1) 3; 2) $-3\frac{9}{52}$; 3) 0,1. **25.9.** а) 1) наименьшее 0, наибольшее 125; 2) наименьшее 0, наибольшее 20; 3) наименьшее 80, наибольшее 125; 4) наименьшее 2, наибольшее 13. б) 1) наименьшее (–2), наибольшее 0; 2) наименьшее (–4,5), наибольшее 0; 3) наименьшее (–12,5), наибольшее (–8); 4) наименьшее (–18), наибольшее 0.

26.5. 1) да; 2) да; 4) да. **26.6.** 1) –2; 2) 5; 3) –3; 4) 2. **26.7.** Пересекаются. **26.10.** 1) наименьшее (–16), наибольшее 250; 2) наименьшее (–2), наибольшее (–0,25); 3) наименьшее (–54), наибольшее 85,75.

Глава 4. Элементы статистики

29.5. 1) 8; 2) 12; 3) 11. **30.3.** 1) 161 см и 170 см; 2) 13,3%; 3) 165 см. **30.7.** 1) 7; 2)

Число верных ответов	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Абсолютная частота	0	0	0	1	5	14	16	6	6
Относительная частота	0	0	0	$\frac{1}{48}$	$\frac{5}{48}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

30.8. 1) 57,1%; 2) 42,9%.

Глава 5. Формулы сокращенного умножения

31.9. 1) $\{-4;\ 4\}$; 2) $\{-5;\ 5\}$; 3) $\{-1,8;\ 1,8\}$; 4) $\left\{-\frac{12}{13};\frac{12}{13}\right\}$; 5 $\{-2,7;\ 2,7\}$; 6) $\left\{-\frac{14}{25};\frac{14}{25}\right\}$ **31.16.** 1) $(x^2-0,7y)(x^2+0,7y)$; 2) $(t^3-0,8z^2)(t^3+0,8z^2)$; 3) $(0,9a^4-b)(0,9a^4+b)$. **31.17.** 1) $(m-n)(m+n-1)$; 2) $(3x-2y)(3x+2y-1)$; 4) $(6+8y)(12-8y)$. **31.18.** 1) 0,6; 2) $-\frac{5}{59}$; 3) $-\frac{1}{6}$; 4) –2. **31.19.** 1) $\frac{5}{14}$; 2) 0,6; 3) $\frac{10}{33}$; 4) $-\frac{9}{13}$.

31.21. 1) a^4-y^4; 3) $-24xy^3$; 4) $4096-x^{12}$. **31.22.** 1) $\{0;\ -1;\ 1;\ 3\}$; 2) $\{-1;\ 1\}$; 5) $\{2\}$; 6) $\{6\}$. **31.23.** 1) $[10;\ +\infty)$; 2) $(-28;\ +\infty)$; 3) $\left[\frac{1}{30};+\infty\right)$; 4) $(-\infty;\ -27)$. **32.3.** 1) 10 201; 2) 10 404; 3) 10 609; 4) 10 816; 5) 9801; 6) 960 4; 7) 9409; 8) 9216.

32.7. 1) $(\frac{5}{2}+x)^2$; 4) $(n-\frac{9}{8}c)^2$; 5) $(\frac{11}{12}+m)^2$. **32.14.** 4) $2a(y-1)^2$; 6) $0,5cd(1-a)^2$.

32.15. 1) $\{-5\}$; 2) $\left\{3\frac{11}{13}\right\}$; 3) $\left\{-4\frac{1}{6}\right\}$; 4) $\left\{6\frac{2}{9}\right\}$. **32.16** . 1) $\left\{12\frac{1}{6}\right\}$; 2) $\left\{12\frac{1}{8}\right\}$; 3) $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$; 4) $\{5,8\}$.

32.17 . 1) $\{-1,5\}$; 2) $\left\{-3\frac{1}{3}\right\}$; 3) $\left\{-\frac{1}{3}\right\}$; 4) $\{-2\}$. **32.18** . 1) $(-\infty;\ -1\frac{1}{2})$; 2) $(-\infty;\ -1)$; 3) $(0;\ +\infty)$; 4) $(-\infty;\ -4)$. **32.19** . 1) $(-\infty;\ 9)$; 2) $(-8;\ +\infty)$; 3) $(-\infty;\ 14)$; 4) $\left(-\infty;-2\frac{1}{4}\right)$. **32.20.** 1) $(2;\ +\infty)$; 2) $(10;\ +\infty)$; 3) $(-\infty;\ 5)$; 4) $\left(-2\frac{1}{4};+\infty\right)$. **32.24.** 1) $(x+\frac{1}{x})^2$; 2) $\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)^2$; 4) $\left(\frac{a}{2b}+\frac{2b}{a}\right)^2$; 6) $\left(\frac{3x}{2y}-\frac{1}{3x}\right)^2$. **32.26.** 1) $\{7,3\}$; 2) $\left\{-\frac{5}{18}\right\}$; 3) $\left\{\frac{17}{80}\right\}$; 4) $\{0,15\}$. **32.27** . 1) $\{4\}$; 2) $\{0,95\}$; 3) $\left\{3\frac{2}{3}\right\}$; 4) $\{1\}$. **32.28**. 1) $(-\infty;\ -0,5)$; 3) $\left(\frac{4}{9};+\infty\right)$; 4) $\left(-22\frac{2}{49};+\infty\right)$. **32.29** .

1) $(-\infty;\ 2)$; 2) $(2;\ +\infty)$; 3) $(2;\ +\infty)$; 4) $(0,1;\ +\infty)$. **32.30.** 1) $(-1;\ +\infty)$; 2) $(0,5;\ +\infty)$; 3) $(-0,2;\ +\infty)$. **33.6.** 1) $(a-2b)^3$; 3) $(2p+3q)^3$; 4) $(xy-2)^3$. **33.14**. 1) $82x+137$; 3) $57y+73$. **33.15**. 1) $\{4\}$; 2) $\{4\}$; 3) $\{-2\}$; 4) $\{2\}$. **34.6**. 1) $8a^2-1$; 2) $8+b$; 3) $2a^3+7x^3-7$; 4) 27. **34.8**. 1) $[0,1;\ \infty)$; 2) $\left(-\infty;-\dfrac{1}{12}\right]$. **34.14.** 1) $9x-34$; 3) $-12x-24$. **34.15**. 1) $6x+2$. **34.16**. 1) 1; 2) 32; 3) 4; 4) 6,25. **35.1.** 3) $72x^4z$. **35.2.** 2) $-94b^6-$ $-32,2ab^3$. **35.4.** 3) y^6+125. **35.7.** 1) 14; 0; 4) -8; -18. **35.9.** 1) 9; 2) -1; 3) 1. **35.12.** 1) $\left[-2\dfrac{1}{3};\ +\infty\right)$; 4) $(-\infty;\ 3)$. **35.18**. 1) $-10,75$; 2) 4; 4) -1. **35.19.** 1) -8; 3) 3; 4) -2. **35.22.** 1) -4; 2) 89; 3) 25; 4) -3. **36.1.** 120 учебников. **36.3.** 42 девочки и 30 мальчиков. **36.4.** 78 яблок и 26 яблок. **36.5.** 42 и 35. **36.6.** 450 тг/кг и 400 тг/кг. **36.7.** 21 см, 29 см, 42 см. **36.8.** 18 км/ч и 2 км/ч. **36.9.** 5,25 км/ч. **36.12.** 1) 5 рулонов; 2) 3250 тг. **36.13.** 27 л. **36.14.** 60 дм и 80 дм. **36.15.** 1) 50 дм и 70 дм; 2) 48 шт. **36.17.** 42 м. **36.18.** $\dfrac{7}{9}$. **36.19.** 55 000 тг. **36.20.** 8 км/ч. **36.21.** 3 км/ч. **36.22.** 1) 120 000 чел.; 2) 30%; 3) 70%. **36.23** 1) 150 000 тг; 2) 109 000 тг; 3) 2500 тг. **36.25.** 31, 62, 93. **36.28**. 75 или 57. **36.30**. 1) 2; 2) 19,8; 3) 6,6; 4) $1\dfrac{23}{55}$. **36.31.** 1) $6x^4+x^2y-2y^2$.

Глава 6. Алгебраические дроби

37.1. 3, 4, 6. **37.2.** 1) $1\dfrac{2}{3}$; 1; 2,2; 0; $2\dfrac{5}{9}$; 1,99; 4) 15; $6\dfrac{1}{3}$; 6; 8; 5) $-0,5$; $-8,9$; $8\dfrac{7}{8}$; $6\dfrac{5}{6}$. **37.4.** 1) 2; 3) $y\neq 0$; 3; 5) $y\neq 2$; 1. **37.5.** 1) $\dfrac{xy}{2x+3y}$; 2) $\dfrac{2a-b+1}{2a(b-1)}$. **37.6.** 1) $(-\infty;+\infty)$; 2) $(-\infty;\ 0)\cup(0;2)\cup(2;\ +\infty)$; 5) $\left(-\infty;\ -\dfrac{2}{7}\right)\cup\left(-\dfrac{2}{7};0\right)\cup(0;\ +\infty)$. **37.7.** 1) $(-\infty;\ 0)\cup$ $\cup(0;\ 3)\cup(3;\ +\infty)$; 3) $(-\infty;-5)\cup(-5;\ +\infty)$. **37.8.** 1) $\dfrac{5x}{x-3}$; 3) $\dfrac{7}{x+2}$; 5) $\dfrac{x-7}{(x-3)(x-5)}$. **37.9.** $t=\dfrac{s}{v_1+v_2}$; 1) 3,5 ч; 2) 3 ч. **38.1.** 1) $\dfrac{4x}{5y}$; 3) $\dfrac{3y^2}{2a}$; 5) $-\dfrac{ax}{3y}$; 7) $\dfrac{4ac}{3}$. **38.2.** 1) $\dfrac{3b}{4}$; 3) $\dfrac{4a^2}{c}$; 4) $\dfrac{9x}{7y^2}$; 7) $\dfrac{6m^2}{5}$. **38.3.** 1) $\dfrac{16a^3c}{4a^5c^2}$; 3) $\dfrac{8a^5}{4a^5c^2}$; 3) $\dfrac{22a^4}{4a^5c^2}$. **38.4.** 1) $\dfrac{2y(a-b)}{(a-b)^2}$; 3) $\dfrac{5a(y^2+y+1)}{y^3-1}$; 5) $\dfrac{-9y}{b-y}$; 7) $\dfrac{-4p(2-p)}{4-p^2}$; 9) $\dfrac{35axy}{15x^2y^3}$. **38.5.** 1) x^3; 3) $-a^5$; 5) -1; 7) $(a+b)$. **38.6.** 1) $-0,6$; 2) $13\dfrac{4}{9}$. **38.7.** 1) $-\dfrac{a}{b}$; 3) $-\dfrac{5+a}{3}$; 5) $\dfrac{-5}{x^2}$; 7) $\dfrac{3}{1-x}$; 8) $b-2$. **38.8.** 1) $-\dfrac{3}{8}$; 4) $\dfrac{9(x+2y)}{5}$; 5) $\dfrac{a+b}{b}$; 7) $4(a-b)$; 9) $\dfrac{2x+y}{9}$. **38.9.** 1) $\dfrac{3}{7}$; 2) $\dfrac{1}{14}$; 3) $\dfrac{1}{49}$; 4) $\dfrac{4}{7}$. **38.10.** 1) 75; 2) 1,2; 3) -2; 4) 2,5. **38.11.** 6 дет./ч, 9 дет./ч. **38.12.** 1) $2\dfrac{7}{15}$;

2) $-1\frac{13}{15}$; 3) 2,5. **39.1.** 1) $\frac{2a}{x}+\frac{b}{x}$; 3) $\frac{x^2}{2xy}+\frac{6y^2}{2xy}$; 5) $\frac{2a^2}{3ay^3}-\frac{3y^3}{3ay^3}$. **39.2.** 1) $\frac{x+y}{5}$; 3) $\frac{3a}{y}$; 5) $\frac{3x+y}{19}$. **39.3.** 1) $\frac{7-12x}{x}$; 4) $\frac{7b-3a}{6}$; 6) $\frac{2x-1}{2x}$; 8) $\frac{c+5}{c}$. **39.4.** 1) $\frac{2p-11q}{5p}$; 3) $\frac{12}{b}$; 5) $\frac{4-3y}{2y}$. **39.5.** 1) b^4; 3) $-\frac{1}{2y}$; 5) $\frac{14-8y}{11y}$. **39.6.** 1) 60; 3) 36,25; 4) 2. **39.7.** 1) 80; 2) $\frac{10}{201}$; 3) $-4{,}25$. **39.8.** 1) -1; 3) -2; 5) $\frac{x-4}{x+4}$; 7) $\frac{x-2}{x+2}$. **39.9.** 1) $\frac{x-2}{x+2}$; 3) 7; 5) 2; 7) $\frac{1}{a-3}$; 8) $y+1$. **39.10.** 1) 4; 2) 2. **39.11.** 1) $\frac{3x+4y}{12}$; 3) $\frac{p^2+q^2}{pq}$; 5) $\frac{5}{6x}$; 7) $\frac{7x}{8y}$; 9) $\frac{5a-b}{7b}$. **39.12.** 1) $a-4$; 2) $x-2y$; 3) $x-5y$; 6) $ax-5y$. **39.15.** 1) $\frac{24-4a-3b}{12}$; 2) $\frac{12ab-b-a}{ab}$; 3) $\frac{x-24}{6}$; 8) $\frac{2a^2-3ab+b^2}{a}$. **39.16.** 1) $\frac{12a-10y}{15(a+y)}$; 2) $\frac{p-7}{7(a-2)}$; 3) $\frac{3b-2a}{ab(x-y)}$; 5) $\frac{c}{6(x+2)}$; 6) $\frac{a-7}{7(a-2)}$. **39.19.** 1) $-0{,}2$; 2) $\frac{1}{3}$. **39.20.** 1) 2; 2) $\frac{b(a+b)}{a-b}$; 5) $\frac{x^2-6x}{x-3}$; 7) $\frac{2m^2}{m-n}$. **39.21.** 1) $\frac{-ab}{a^3+b^3}$; 3) $\frac{1}{a^3+1}$. **39.22.** 5) $\frac{1}{y+2}$; 8) $\frac{4}{y^2-2y+4}$. **39.25.** 350 тг; 900 тг. **40.1.** 1) $\frac{y}{5x}:\frac{x}{3x-2}$; 3) $\frac{3y}{5ax}\cdot\frac{xy^2+4}{x}$. **40.2.** 4) $\frac{9x^3}{10}$; 7) $\frac{9}{2b}$; 9) $\frac{7a}{16y}$; 12) $\frac{4}{3a}$; 15) $\frac{3}{4c}$. **40.3.** 1) $170x^2y$; 9) $-\frac{2c^2}{7d^2}$; 11) $\frac{3x}{2a}$. **40.4.** 2) $\frac{x^3y}{2}$; 4) $\frac{-2}{m}$; 5) $\frac{-2m^2}{3n^3}$; 7) $\frac{2(a+b)}{c+d}$; 9) $\frac{3c}{7nxy}$. **40.5.** 1) $\frac{1}{x-3y}$; 2) $-\frac{a^2b}{5(a+1)}$; 3) $\frac{a+3b}{a-3b}$; 5) $\frac{a^2}{(a-5)(a+3)}$. **40.6.** 1) 1,5; 2) $-0{,}4$. **40.7.** 1) $\frac{48x}{m^2n}$; 2) $\frac{-3a}{8n}$; 4) $3\frac{1}{3}bx$. **40.8.** 1) $\frac{(y-5)(y-6)}{4}$; 4) $\frac{7(a-1)}{a}$. **40.9.** 1) $\frac{a^{12}}{c^8}$; 2) $\frac{32a^{15}}{243b^{20}}$; 5) $\frac{625a^{12}}{81b^8c^{16}}$; 6) $\frac{b^6c^4}{64a^6}$. **40.11.** 1) 1,5; 2) $\frac{a-1}{a+1}$; 3) $\frac{1}{7(x-y)}$; 4) $\frac{b-2}{b-3}$; 5) $x-y$. **40.12.** 1) $\frac{(n-5)(a-4)}{6}$; 2) $\frac{3(y-5)}{2(y+6)}$; 3) $\frac{(a+2)(a+2b)}{12}$; 4) $\frac{a+2}{9a}$. **40.14.** 1) 1; 2) 1. **40.16.** 1) правильно ; 2) правильно . **40.17.** 1) 1; 2) $\frac{1}{3}$. **40.18.** 1) 2,56 т. **41.1.** 1) $\frac{2(a-y)}{y}$; 3) $\frac{(a+b)^2}{b^2}$; 5) $\frac{2x+1}{2x-1}$; 9) x. **41.2.** 1) $\frac{5}{2(2m+1)}$; 2) $\frac{2}{y-3}$. **41.3.** 1) 6; 2) 12. **41.4.** 1) $\frac{5}{x-y}$; 2) $\frac{2q+p}{pq^2}$;

3) $\frac{3(a+b)}{a-b}$; 4) $\frac{1}{ab}$. **41.6.** 1) -12. **41.7.** 1) $-2a$; 2) $\frac{y+1}{1-y}$; 3) $\frac{c}{c+2}$; 4) $1,5x$.

41.8. 1) $\frac{(a+2)^2}{2}$; 2) $(a^2-1)(a^3+1)$. **41.9.** 1) правильно ; 2) правильно . **41.10.** 1) $\frac{2}{c-3}$;

2) $\frac{3(c+2)}{c-2}$; 3) $\frac{3c(c+1)}{4(c-1)}$. **41.11.** 1) $\frac{2}{9x(x-1)}$; 2) $\frac{bc^2}{d^2}$; 3) $\frac{pq^3(p+1)}{3}$.

41.12. 1) $\frac{-6}{n^2+8n}$; 3) $\frac{3n^2-7n-4}{2n^2}$. **41.16.** 1) правильно ; 2) правильно . **41.17.** 1) a^2+1;

2) 1; 3) $-x$; 4) a. **41.18.** 1) $\frac{1}{a^2+a+1}$; 2) 1. **41.19.** 2) $2x(x+y)$; 3) $\frac{(b-2a)2a}{2a+b}$.

41.20. 1) 1,2. 2) $1\frac{5}{6}$. **41.21.** 1) $x=-\frac{1}{6}$; $y=\frac{1}{6}$; 2) $x=1$; $y=-1$; 3) $x=\frac{1}{6}$; $y=-\frac{1}{6}$;

4) $x=-1$; $y=2$. **41.22.** $1\frac{3}{4}$. **41.23.** 1) $\frac{a-2b}{-b}$; 2) $-\frac{1}{2}$. **41.26.** 1) $\frac{3x-2}{3x+2}$; 2) $\frac{1}{3}$;

3) $\frac{2x^3+y^3}{x^3-2y^3}$.

Упражнения для повторения курса алгебры для 7 класса

1. 1) 400; 2) -78; 3) -1; 4) $-1,648$; 5) -192; 6) 40000. **2.** 1) 12; 2) $\frac{3}{7}$; 3) $1\frac{2}{3}$;

4) 2,5. **3.** 3) 31120; 4) 2000. **4.** 1) 22; 2) 39; 3) 49; 4) 6480. **5.** 1) 2; 2) $1\frac{49}{50}$; 3) $8\frac{16}{141}$;

4) $1\frac{23}{55}$; 5) 2500; 6) 48 400. **8.** 1) 76; 2) $-34,8$; 3) 18; 4) -1. **18.** 1) 27; 3) -44; 3) -370; 4) 1001.

22. 1) $\frac{-2c^2}{7d^2}$; 2) $\frac{4y^2}{9x^4}$; 3) $\frac{3x}{2a}$; 4) $\frac{21ab}{2}$. **24.** 1) $\frac{2y^2}{27x^3(x-1)}$; 4) $\frac{a^2y^2}{y+2}$. **25.** 1) $\frac{6-n}{n^2+2n}$.

29. 1) 2; 2) 1,5; 3) 10; 4) $\frac{9}{16}$. **30.** 1) -7; 2) 8; 3) -1; 4) -9. **31.** 1) 20; 2) -17;

3) 0; 4) -2. **33.** 1) 12; 13; 2) -2; -5. **34.** 1) 95 км/ч; 2) 78 км/ч. 1) 43 км/ч;

2) 4 км/ ч. **36.** 3) $[5,5; +\infty)$; 4) $[11; +\infty)$; 5) $(-\infty; 12,5]$; 6) $[\frac{4}{7}; +\infty)$. **37.** 1) $(-2; +\infty)$; 2) $(-\infty; 1,7)$;

3) $(-10; +\infty)$; 4) $(-\infty; 13\frac{5}{6})$. **39.** 1) $y=-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$; 2) $y=x+2$; 3) $y=-6x$; 4) $y=0,6x$.

40. 1) $(-\infty; 2)$; 2) $(1,8; +\infty)$; **43.** 1) $(-\infty; 56)$; 2) $(-\infty; 20)$; 3) $(4; +\infty)$; 4) $(0,08; +\infty)$.

45. $y=x-3$; $y=-x-6$; $y=x+6$; $y=-x+6$. **46.** $y=1\frac{1}{3}x-2\frac{2}{3}$; 1) $(2; +\infty)$; 2) $(-\infty; 2)$.

54. 4.5. *Указание* . Умножим обе части второго равенства на 9, получим:

$\frac{9}{a+b}+\frac{9}{b+c}+\frac{9}{a+c}=\frac{45}{6}=\frac{15}{2}$. Вместо числа 9 подставим $a+b+c$, тогда получим :

$\frac{a+b+c}{a+b}+\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{a+c}=\frac{15}{2}$ или $1+\frac{c}{a+b}+1+\frac{a}{b+c}+1+\frac{b}{a+c}=\frac{15}{2}$.

Отсюда находим $\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}=\frac{15}{2}-3=4{,}5$. **56**. После пятой стирки.

60. $\frac{2016}{2017}$. *Указание* . Использовать равенство $\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.

Учебное издание

Абылкасымова Алма Есимбековна
Кучер Татьяна Павловна
Жумагулова Зауре Абдыкеновна
Корчевский Владимир Евгеньевич

АЛГЕБРА

Учебник для 7 класса общеобразовательных школ

Редактор *С. Родионова*
Худож. редактор *А. Сланова*
Техн. редактор *И. Тарапунец*
Корректор *Л. Байтенова*
Компьютерная верстка *Л. Жаксылыковой*

Государственная лицензия № 0000001 выдана издательству Министерством образования и науки Республики Казахстан 7 июля 2003 года

ИБ № 5604

Подписано в печать 01.11.18. Формат $70 \cdot 100\ ^1/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура "MM Mekteptik". Печать офсетная. Усл.-печ. л. 23,22+0,32 форзац. Усл. кр.-отт. 94,76. Уч.-изд. л. 9,91+0,54 форзац. Тираж 3 000 доп. экз. Заказ №

Издательство "Мектеп", 050009, г. Алматы, пр. Абая, 143
Факс.: 8(727) 394-37-58, 394-42-30.
Тел.: 8(727) 394-41-76, 394-42-34.
E-mail: mektep@mail.ru
Web-site: www.mektep.kz