Ә. Н. ШЫНЫБЕКОВ, Д. Ә. ШЫНЫБЕКОВ,
Р. Н. ЖҰМАБАЕВ

АЛГЕБРА

Жалпы білім беретін мектептің
8-сыныбына арналған оқулық

8

Қазақстан Республикасының Білім және ғылым министрлігі ұсынған

А. Байтұрсынұлы атындағы Тіл білімі институтының
сарапшыларымен келісілді

Алматы «Атамұра» 2018

1–3457

ӘОЖ 373.167.1
КБЖ 22. 14 я 72
Ш 97

Оқулық Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігі бекіткен негізгі орта білім беру деңгейінің 7–9-сыныптарына арналған «Алгебра» пәнінің жаңартылған мазмұндағы Типтік оқу бағдарламасына сәйкес дайындалды.

Жалпы редакциясын басқарған
физика-математика ғылымдарының докторы,
профессор, ҚР ҰҒА академигі **М. Өтелбаев**

Пайдаланылған шартты белгілер:

— жаңа материалды бекіту сұрақтары
— практикалық және шығармашылық жұмыстар
— тарихқа шолу
— қосымша материалдар мен тапсырмалар;
— дәлелдеудің (есептің шешуінің) басы;
— дәлелдеудің (есептің шешуінің) соңы.

Есептер:

A — бастапқы
B — орта деңгей
C — жоғары деңгей

Шыныбеков Ә.Н және т.б.
Ш97 Алгебра: Жалпы білім беретін мектептің 8-сыныбына арналған оқулық /Ә. Н. Шыныбеков., Д. Ә. Шыныбеков., Р. Н. Жұмабаев. — Алматы: Атамұра, 2018. — 192 бет.

ISBN 978-601-331-162-3

ӘОЖ 373.167.1
КБЖ 22. 14 я 72

ISBN 978-601-331-162-3

АЛҒЫ СӨЗ

Жалпы білім беретін мектептердің 8-сыныбына арналып жазылған «Алгебра» оқулығының өзіндік ерекшеліктері бар. Атап айтсақ, бұрынғы оқулықтармен салыстырғанда, мұнда жалпы білім беретін мектептер бағдарламасына енетін материалдармен қатар, математиканы тереңдетіп оқытуға қажет материалдар қамтылған. Оқулықтағы әр тақырыптан кейін бекіту сұрақтары, тапсырмалар мен есептер берілген. Есептер қиындық деңгейіне қарай үш топқа бөлінген: **А, В** және **С. А** деңгейіндегі есептерде барлық оқушының меңгеруі міндетті тапсырмалар, **В** тобында есептердің күрделілігі орташа, ал **С** тобына қиындық деңгейі жоғары есептер жинақталған.

С тобының есептері математиканы тереңдетіп оқытатын сыныптар мен біліктілігі жоғары оқушылардың сыныпта немесе сыныптан тыс уақыттарда өз беттерінше оқып-үйренулеріне арналған. Математикалық олимпиадалар мен түрлі конкурстарда нәтижеге қол жеткізу үшін осы материалдардың ықпалы зор.

Оқуда табыс тілейміз!

Авторлар

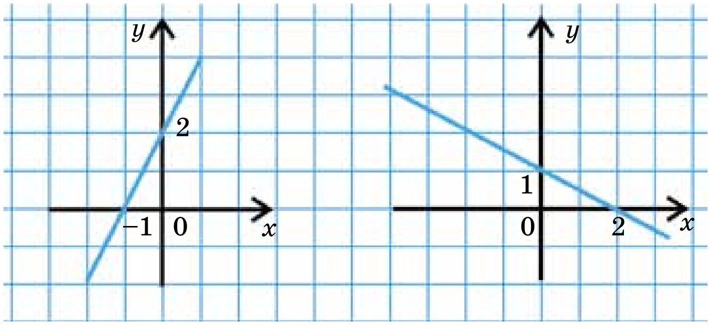
7-СЫНЫП АЛГЕБРА КУРСЫН ҚАЙТАЛАУ

Бөлімді оқып-үйрену барысында мына мақсаттарға қол жеткіземіз:

- 7-сыныпта өтілген материалдарды қайталап еске түсіру;
- жаңадан өтілетін материалдарды меңгеруге дайындық жасау.

7-СЫНЫП АЛГЕБРА КУРСЫ МАТЕРИАЛДАРЫН ЕСКЕ ТҮСІРУ ТАПСЫРМАЛАРЫ

1) Санның натурал көрсеткішті дәрежесі деп нені түсінесіңдер?
2) Санның бүтін теріс көрсеткішті дәрежесі деп нені түсінесіңдер?
3) a санының n дәрежесі a^n түрінде жазылады. Оның негізі мен дәреже көрсеткішін көрсетіңдер. Мысал келтіріңдер.
4) Санның бүтін (натурал) көрсеткішті дәрежесінің қандай қасиеттерін білесіңдер? 1)— 5)-қасиеттерін тұжырымдап, мысал келтіріңдер.
5) Натурал санды разрядтық қосылғыштарға қалай жіктейді? Мысал келтіріңдер.
6) Санның стандарт түрі былай жазылады: $a \cdot 10^n$ $(1 \leqslant a < 10)$. Санның мәнді бөлігі мен ретін көрсетіңдер. Мысал келтіріңдер.
7) Жуық мәннің абсолюттік және салыстырмалы қателігі деп нені айтады? Мысал келтіріңдер.
8) Қандай өрнекті бірмүше деп атайды? Оның стандарт түрі, коэффициенті және дәрежесі деп нені түсінесіңдер? Мысал арқылы көрсетіңдер.
9) Бірмүшелерді қалай көбейтеді, қалай дәрежеге шығарады? Мысал арқылы көрсетіңдер.
10) Көпмүше деген не? Оның дәрежесі мен стандарт түрін қалай түсінесіңдер? Мысал келтіріңдер.
11) Ұқсас мүшелер деген не? Оларды қалай біріктіреді? Мысал арқылы көрсетіп, ауызша түсіндіріңдер.
12) Бірмүше мен көпмүшені, көпмүше мен көпмүшені қалай көбейтеді? Мысал келтіріңдер.
13) Функция деп нені түсінесіңдер? Ол қандай тәсілдермен берілуі мүмкін? Мысал келтіріңдер.
14) Функцияның графигі деген не? Оны қалай салады? Мысал келтіріңдер.
15) Тура пропорционалдық функция деген не? Оның бұрыштық коэффициенті деп нені айтады? Мысал келтіріңдер.
16) Сызықтық функция деген не? Оның бос мүшесінің мағынасын сызбада көрсетіп түсіндіріңдер.
17) Бұрыштық коэффициент пен бос мүше бойынша түзулердің орналасуын қалай анықтайды? Мысал келтіріңдер.



0.1-сурет

18) 0.1-суретте көрсетілген сызықтық функцияны жазыңдар. Оның бос мүшесі мен бұрыштық коэффицентін анықтаңдар.

19) Екі айнымалысы бар сызықтық теңдеу деп нені айтады? Оның графигі қалай салынады?

20) Сызықтық теңдеулер жүйесін графиктік тәсілмен шешу тәсілін мысал арқылы түсіндіріңдер.

21) $y = x^2$ және $y = x^3$ функцияларының графиктері қалай аталады?

22) $y = ax^2$ және $y = ax^3$ функцияларының графиктері a-ның мәніне байланысты қалай орналасады? Оны мысал арқылы көрсетіп түсіндіріңдер.

23) Кері пропорционалдық функция деп қандай функцияны атайды? Оның графигі қалай аталады және пропорционалдық коэффицентіне байланысты қалай орналасады? Мысал келтіріңдер.

24) Бас жиынтық, кездейсоқ таңдама, ығыспалы қатар, нұсқалық деп нені түсінесіңдер? Мысал келтіріңдер.

25) Нұсқалықтың абсолюттік жиілігі (салыстырмалы жиілігі) деген не? Мысал келтіріңдер.

26) Ығыспалы қатардың жиіліктер (салыстырмалы жиіліктері) кестесі қалай тұрғызылады? Мысал келтіріңдер.

27) Ығыспалы қатардың жиіліктер (салыстырмалы жиіліктер) алқабы қалай тұрғызылады? Мысал келтіріңдер.

28) Қысқаша көбейту формулаларын ауызша тұжырымдап, оларды математикалық тілде (формуламен) жазып көрсетіңдер.

29) Математикалық модель деген не? Оны қалай түсінесіңдер? Мысал келтіріңдер.

30) Мәтінді есепті шығару қандай кезеңдерге бөлінеді? Әр кезеңнің мағынасын мысал арқылы ашып көрсетіңдер.

31) Алгебралық бөлшек деп нені айтады? Мысал келтіріңдер. Бөлшектердің негізгі қасиетін жазып көрсетіңдер.

32) Алгебралық өрнек, алгебралық өрнекті теңбе-тең түрлендіру ұғымын қалай түсінесіңдер? Мысал келтіріңдер.

33) Алгебралық өрнектерге (бөлшектерге) амалдар қалай қолданылады? Мысал келтіріңдер.

7-СЫНЫП АЛГЕБРА КУРСЫ МАТЕРИАЛДАРЫН ҚАЙТАЛАУҒА АРНАЛҒАН ЖАТТЫҒУЛАР

А

0.1. Өрнекті негізі a болатын дәреже түрінде жазыңдар:

1) $(a^5)^3 \cdot a$; 2) $a \cdot a^3 \cdot a^2$; 3) $((a^3)^2)^4$;
4) $(-a^3)^2$; 5) $(a^2 \cdot a^3)^2$; 6) $(a^2)^5 : (a^3)^2$; 6) $(a^3)^4 : (a^2)^5$;
7) $(a^3 : a)^5$; 8) $\left(\dfrac{a^4}{a^2}\right)^3$.

5) $(a^2 \cdot a^3)^2 = (a^{2+3})^2 = (a^5)^2 = a^{10}$.

0.2. Есептеңдер:

1) $\dfrac{15^9 \cdot 15^5}{15^{13}}$; 2) $5^{15} \cdot 5^{-17} \cdot 5^4$; 3) $\dfrac{0,4^{11}}{0,4^4 \cdot 0,4^5}$;
4) $8^{-2} \cdot 4^3$; 5) $9^0 : 9^{-2}$; 6) $7^8 \cdot 7^{-5} \cdot 7^{-4}$.

0.3. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $-0,4x^2y \cdot (-10xy^2)$; 2) $-0,2a^3b^4 \cdot 5a^2b^3$;
3) $(0,25x^{-2}y^{-1})^{-3}$; 4) $\left(\dfrac{x^{-3}a^4}{16}\right)^{-2} \cdot \left(\dfrac{4}{x^{-2}a^3}\right)^{-3}$;
5) $ab(-5ab^2) \cdot (4a^2b)$; 6) $m^2n \cdot (-mn) \cdot (-mn^2)$.

4) $\left(\dfrac{x^{-3}a^4}{16}\right)^{-2} \cdot \left(\dfrac{4}{x^{-2}a^3}\right)^{-3} = \dfrac{(x^{-3})^{-2} \cdot (a^4)^{-2}}{(16)^{-2}} \cdot \dfrac{4^{-3}}{(x^{-2})^{-3} \cdot (a^3)^{-3}} =$
$= \dfrac{x^6 \cdot a^{-8}}{4^{-4}} \cdot \dfrac{4^{-3}}{x^6 \cdot a^{-9}} = \dfrac{1}{4^{-1} \cdot a^{-1}} = 4a$.

0.4. Көрсетілген амалды орындап, көпмүшені стандарт түрге келтіріңдер:

1) $(4a^2b-3ab^2)+(-a^2b+2ab^2)$; 2) $(y^2-3y)+(3y-2y^2)-(4-2y^2)$;
3) $2x^2-x(2x-5y)-y(2x-y)$; 4) $7m(3m+2n)-3m(7n-2m)$;
5) $(5p-4q)(2p-2q)$; 6) $(a^2-2ab)(a^2-5ab+3b^2)$.

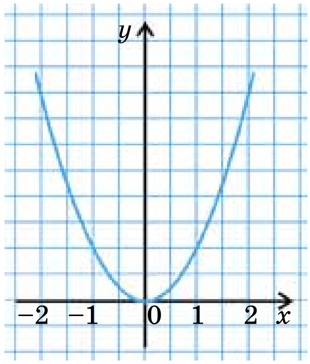
0.5. Ортақ көбейткішті жақша сыртына шығарыңдар:

1) $4x^3y-6x^2y^2$; 2) $5a^3-15a^2b+20ab^2$;
3) $6mn^2-9n^3+12m^2n^2$; 4) $-3xy^2-15x^2y-21x^2y^2$;

5) $12a^2b-18ab^2-30ab^3$; 6) $-6ax^2+9x^2-12x^4-3a^2x^2$.

5) $12a^2b-18ab^2-30ab^3=(6ab)\cdot 2a-(6ab)\cdot 3b-(6ab)\cdot 5b^2=6ab(2a-$ $-3b-5b^2)$.

0.6. $y=x^2$ функциясының графигін салыңдар. График бойынша:
$x=-1;\ -0{,}5;\ 0{,}5;\ 2$ мәндеріне сәйкес келетін y-тің мәндерін анықтаңдар (0.2-сурет).



0.2-сурет

0. 7. $y=x^3$ функциясының графигін салыңдар. График бойынша:
$x=-1{,}5;\ -0{,}5;\ 0{,}5;\ 1{,}2$ мәндеріне сәйкес келетін y-тің мәндерін анықтаңдар.

0.8. Қысқаша көбейту формулаларын қолданып, өрнекті көпмүше түрінде жазыңдар:

1) $(2a+b)^2$; 2) $(0{,}2x-y)^2$; 3) $(5a-3x)^3$;
4) $\left(\frac{1}{2}m+2n\right)^3$; 5) $(3ab-x)(3ab+x)$; 6) $(-x-2y)(-x+2y)$;
7) $(0{,}2p+q)(q-0{,}2p)$; 8) $(3-a)(9+3a+a^2)$; 9) $(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)$.

6) $(-x-2y)(-x+2y)=(-1)(x+2y)\cdot(2y-x)=(-1)[(2y)^2-x^2]=x^2-4y^2$.

0.9. Қысқаша көбейту формулаларын қолданып, көбейткіштерге жіктеңдер:

1) $4x^2-9y^2$; 2) $-25a^2+b^2$; 3) $27x^3-y^3$; 4) $8a^3+b^3$;
5) $4m^2-4mn+n^2$; 6) $8xy+y^2+16x^2$; 7) m^3+125; 8) $8a^3-27b^3$.

0.10. Көрсетілген амалды орындаңдар:

1) $\frac{x}{x-y}+\frac{y}{y-x}$; 2) $\frac{2x+1}{a}+\frac{3x+1}{a}-\frac{x-2}{a}$; 3) $\frac{a}{12m}-\frac{b}{18n}$;
4) $\frac{3xy}{4mn}\cdot\frac{10m^2n^2}{21x^2y}$; 5) $-\frac{18a^2b^2}{5pq}:\frac{6ab}{5p^2q^2}$; 6) $\frac{x^2y-4y^3}{3xy^2}\cdot\frac{yx^2}{x^2-2xy}$.

0.11. Көпмүшені көбейткіштерге жіктеңдер:

1) $2a^2-4ab+2b^2$; 2) x^2-y^2+x+y;
3) $5m^2+20mn+20n^2$; 4) $x^3+x^2y-xy^2-y^3$;
5) $(a-b)^3-3(a^2-b^2)$; 6) $(m+n)^3-n(m+n)^2$.

0.12. $y=\dfrac{2}{x}$ функциясының графигін салыңдар. $A(2;1)$; $B(2;-1)$; $C(1;2)$ және $D(4;2)$ нүктелерінің қайсысы осы графиктің бойында жатады?

0.13. Амалдарды орындаңдар:

1) $\left(\dfrac{a}{a+1}+1\right)\cdot\dfrac{1+a}{2a+1}$; 2) $\left(\dfrac{m}{n^2}-\dfrac{1}{m}\right):\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m}\right)$;

3) $\dfrac{b-2}{b-3}\cdot\left(b+\dfrac{b}{2-b}\right)$; 4) $\left(\dfrac{4x}{2-x}-x\right):\dfrac{x+2}{x-2}$.

0.14. Бөлшектерді периодты ондық бөлшектерге айналдырып, оны 0,01-ге дейінгі дәлдікпен жуықтаңдар. Жуық мәндердің абсолют және салыстырмалы қателіктерін табыңдар:

1) $\dfrac{1}{6}$; 2) $1\dfrac{2}{3}$; 3) $5\dfrac{7}{12}$; 4) $12\dfrac{1}{3}$.

3)
$$\begin{array}{r|l} 7,0 & 12 \\ \underline{60} & 0,583\ldots \\ 100 & \\ \underline{96} & \\ 40 & \\ \underline{36} & \\ 4 & \end{array}$$

Осыдан $5\dfrac{7}{12}=5,5833\ldots=5,58\,(3)\approx 0,58$. Абсолют қателік:

$$\left|5\frac{7}{12}-5,58\right|=\left|\frac{67}{12}-\frac{558}{100}\right|=\frac{1}{300}.$$

Салыстырмалы қателік:

$\left|5\dfrac{7}{12}-5,58\right|:5,58=\dfrac{1}{300\cdot 5,58}=\dfrac{1}{1674}=0,00059\ldots\approx 0,0006.$ Осы алынған мәнді 100%-ға көбейтіп, абсолют қателіктің жуық мәнге шаққандағы үлесін аламыз. Абсолют қателік жуық мәннің небәрі $0,06\%$-ін құрайды.

B

0.15. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $2a-3b-(4a+7b+c+3)$;

2) $2xy-y^2+(y^2-xy)-(x^2+xy)$;

3) $(-2x^2+x+1)-(x^2-x+7)-(4x^2+2x+8)$;
4) $(3a^2-a+2)+(-3a^2+3a-1)-(a^2-1)$;
5) $(1-x+4x^2-8x^3)+(2x^3+x^2-6x-3)-(5x^3-8x^2)$;
6) $(0{,}5a-0{,}6b+5{,}5)-(-0{,}5a+0{,}4b)+(1{,}3b-4{,}5)$.

0.16. Өрнекті ықшамдаңдар **(0.16–0.17):**

1) $(x^2)^4\cdot(x^4)^3$; 2) $(a^2\cdot a^3)^4$; 3) $\dfrac{(mn)^2\cdot m^3n^4}{m\cdot(mn)^3}$; 4) $\dfrac{(x^2y^3)^5}{(x^2)^2\cdot y^5}$;

5) $\left(\dfrac{a^{-3}b^4}{9}\right)^{-2}\cdot\left(\dfrac{9}{a^{-2}b^3}\right)^{-3}$; 6) $\left(\dfrac{p^{-4}}{10q^5k^2}\right)^{-2}:(5p^2q^3k)^3$.

3) $\dfrac{(mn)^2\cdot m^3\cdot n^4}{m\cdot(m\cdot n)^3}=\dfrac{m^2\cdot n^2\cdot m^3\cdot n^4}{m\cdot m^3\cdot n^3}=\dfrac{m^5\cdot n^6}{m^4\cdot n^3}=m\cdot n^3$.

0.17. 1) $(x-2)(x+3)+(x-3)(x+2)$; 2) $(y-1)(y+2)+(y+1)(y-2)$;
3) $(a+1)(a+2)+(a+3)(a+4)$; 4) $(c-1)(c-2)+(c-3)(c-4)$.

0.18. Өрнекті көпмүше түріне келтіріңдер:
1) $(x^2-x+4)(x-5)$; 2) $(2y-1)(y^2+5y-2)$;
3) $(2-3a)(-a^2+4a-8)$; 4) $(3-4c)(2c^2-c-1)$;
5) $(x^2-x+4)(2x^2-x+4)$; 6) $(-5a^2+2a+3)(4a^2-a+1)$;
7) $(8+4c)(2c^2-c-4)$; 8) $(c-4)(c+2)(c+3)$.

0.19. Теңдеуді шешіңдер:
1) $(x+1)(x+2)=(x-3)(x+4)$;
2) $(3x-1)(2x+7)-(x+1)(6x-5)=16$;
3) $24-(3y+1)(4y-5)=(11-6y)(2y-1)+6$;
4) $(6y+2)(5-y)=47-(2y-3)(3y-1)$.

3) $24-(3y+1)(4y-5)=(11-6y)(2y-1)+6\Rightarrow 24-12y^2+15y-4y+5=$
$=22y-11-12y^2+6y+6\Rightarrow 11y+29=28y-5\Rightarrow 17y=34\Rightarrow y=2$.

0.20. Көпмүшелерді көбейткіштерге жіктеңдер:
1) a^3-2a^2-2a+4; 2) $x^3-12+6x^2-2x$;
3) $c^4-2c^2+c^3-2c$; 4) $-y^6-y^5+y^4+y^3$;
5) $a^2b-b^2c+a^2c-bc^2$; 6) $2x^3+xy^2-2x^2y-y^3$;
7) $16ab^2-10c^3+32ac^2-5b^2c$; 8) $6a^3-21a^2b+2ab^2-7b^3$;
9) $c^3+ac^2-4a-4c$.

5) $a^2b-b^2c+a^2c-bc^2= b(a^2-bc)+c(a^2-bc) = (a^2-bc)(b+c)$.

0.21. Теңдеуді шешіңдер:

1) $1,2x^2+x=0$; 2) $1,6x-x^2=0$; 3) $0,5x^2-x=0$;
4) $5x^2=x$; 5) $1,6x^2=3x$; 6) $x=x^2$.

0.22. Өрнекті көбейтінді түрінде жазыңдар:

1) a^k+a^{k+1}; 2) $5x^{k+3}+10x^3$; 3) $4x^{k+2}+20x^k$;
4) $y^{k+2}-y$; 5) $a^kb^{2k}+a^kb^k$; 6) $15x^{2k+1}-25x^{k+1}$.

0.23. 1) 41^3+19^3 өрнегі 60-қа; 2) 79^3-29^3 өрнегі 50-ге; 3) 66^3+34^3 өрнегі 400-ге; 4) 54^3-24^3 өрнегі 1080-ге бөлінетінін көрсетіңдер.

0.24. Теңбе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $a^5-1=(a-1)(a^4+a^3+a^2+a+1)$;
2) $a^5-b^5=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$;
3) $a^5+1=(a+1)(a^4-a^3+a^2-a+1)$;
4) $a^5+b^5=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$.

0.25. Квадрат үшмүшелердің толық квадратын бөліп жазыңдар:

1) $x^2-6x-16$; 2) $x^2+12x+20$; 3) x^2-5x+6; 4) x^2+x-2;
5) x^2-4x+3; 6) $x^2-3x-10$; 7) $x^2+9x+14$; 8) $x^2-2x-35$.

6) $x^2-3x-10= x^2-2\cdot\frac{3}{2}\cdot x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-$

$-10-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-10-\frac{9}{4}=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{49}{4}$.

0.26. Бөлшектің мәнін табыңдар:

1) $\frac{8^{16}}{16^{12}}$; 2) $\frac{81^{25}}{27^{33}}$; 3) $\frac{15a^2-10ab}{3ab-2b^2}$, мұндағы $a=-2$, $b=-0,1$;

4) $\frac{9c^2-4b}{18c^2-12bc}$, мұндағы $b=0,5$, $c=\frac{2}{3}$.

0.27. Бөлшекті қысқартыңдар:

1) $\frac{ab-3b-2a+6}{15-5a}$; 2) $\frac{7p-35}{15-3p}$; 3) $\frac{18a-3a^2}{8a^2-48a}$;

4) $\frac{4-x^2}{10-5x}$; 5) $\frac{a^2+3a+9}{27-a^3}$; 6) $\frac{x^6+x^4}{x^4+x^2}$;

7) $\dfrac{x^6-x^8}{x^4-x^2}$; 8) $\dfrac{b^7-b^{10}}{b^9-b^3}$; 9) $\dfrac{c^6-c^4}{c^3+c^2}$.

0.28. 1) $\dfrac{x}{a-b}$ бөлшегінің бөлімі $(a-b)^2$;

2) $\dfrac{2y}{x-1}$ бөлшегінің бөлімі x^3-1;

3) $\dfrac{y}{x-a}$ бөлшегінің бөлімі x^2-a^2;

4) $\dfrac{3a}{a^2+ab+b^2}$ бөлшегінің бөлімі a^3-b^3;

5) $\dfrac{8}{3xy^2}$ бөлшегінің бөлімі $15x^2y^2$;

6) $\dfrac{6}{7a^2c}$ бөлшегінің бөлімі $35a^3c^3$;

7) $\dfrac{a}{a-2}$ бөлшегінің бөлімі a^2-2a;

8) $\dfrac{1}{x+1}$ бөлшегінің бөлімі x^3+1 болатындай етіп бөлшектерді түрлендіріңдер.

4) $\dfrac{3a}{a^2+ab+b^2}=\dfrac{3a(a-b)}{(a-b)(a^2+ab+b^2)}=\dfrac{3a(a-b)}{a^3-b^3}$.

0.29. Көпмүшеге түрлендіріңдер:

1) $\dfrac{(y-b)^2}{y-b+1}+\dfrac{y-b}{y-b+1}$; 2) $\dfrac{(a+x)^2}{a+x-2}-\dfrac{2a+2x}{a+x-2}$;

3) $\dfrac{x^2-y^2}{x-y+1}+\dfrac{x+y}{x-y+1}$; 4) $\dfrac{b^2-9c^2}{b+3c-2}+\dfrac{2(b-3c)}{2-b-3c}$.

2) $\dfrac{(a+x)^2}{a+x-2}-\dfrac{2a+2x}{a+x-2}=\dfrac{(a+x)^2-2(a+x)}{a+x-2}=\dfrac{(a+x)(a+x-2)}{a+x-2}=a+x.$

0.30. Бөлшек түрінде жазыңдар:

1) $x+y+\dfrac{x-y}{4}$; 2) $a-\dfrac{ab+ac+bc}{a+b+c}$; 3) $m+n-\dfrac{1+mn}{n}$;

4) $\dfrac{3ax-y^2}{3ax+y^2}-1$; 5) $a^2-b^2-\dfrac{a^3-b^3}{a+b}$; 6) $(1-x)^2-\dfrac{1+x^4}{(1+x)^2}$.

0.31. Ықшамдаңдар:

1) $\left(\dfrac{a+b}{a-b}+\dfrac{a}{b}\right)\cdot\left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{a-b}{a+b}\right):\left(\dfrac{a^2+b^2}{a^2b-b^3}\right)^2;$

2) $\left(\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\right)^2:\left[\left(\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x}{y}\right)\cdot\left(\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{y}{x}\right)\right];$

3) $\left(\dfrac{1}{(2a-b)^2}+\dfrac{2}{4a^2-b^2}+\dfrac{1}{(2a+b)^2}\right)\cdot\dfrac{4a^2+4ab+b^2}{16a};$

4) $\dfrac{4c^2}{(c-2)^2}:\left(\dfrac{1}{(c+2)^2}+\dfrac{1}{(c-2)^2}+\dfrac{2}{c^2-4}\right).$

0.32. Теңбе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $\dfrac{1}{p-2u}+\dfrac{6u}{4u^2-p^2}-\dfrac{2}{p+2u}=-\dfrac{1}{2p}\cdot\left(\dfrac{p^2+4u^2}{p^2-4u^2}+1\right);$

2) $\left(\dfrac{x+y}{xy}\right)^2:\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{2}{x+y}\cdot\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)\right)=1;$

3) $\dfrac{4x^2}{(x+y)^2+2(x^2-y^2)+(x-y)^2}=1.$

3) *1-тәсіл:* $\dfrac{4x^2}{(x+y)^2+2(x^2-y^2)+(x-y)^2}=$

$$=\frac{4x^2}{x^2+2xy+y^2+2x^2-2y^2+x^2-2xy+y^2}=\frac{4x^2}{4x^2}=1.$$

2-тәсіл: $\dfrac{4x^2}{(x+y)^2+2(x^2-y^2)+(x-y)^2}=\dfrac{4x^2}{\left[(x+y)^2+x^2-y^2\right]+\left[x^2-y^2+(x-y)^2\right]}=$

$$=\frac{4x^2}{(x+y)(x+y+x-y)+(x-y)(x+y+x-y)}=$$

$$=\frac{4x^2}{2x(x+y)+2x(x-y)}=\frac{4x^2}{2x(x+y+x-y)}=\frac{4x^2}{4x^2}=1.$$

3-тәсіл: ... $=\dfrac{4x^2}{(x+y)^2+2(x+y)(x-y)+(x-y)^2}=\dfrac{4x^2}{(x+y+x-y)^2}=\dfrac{4x^2}{(2x)^2}=1.$

C

0.33. x^8 өрнегін бір көбейткіші 1) x^2; 2) x^5; 3) x^7; 4) x^8; 5) x^{10}; 6) x^{12} -не тең болатындай етіп екі көбейткішке жіктеңдер.

0.34. Егер біз ойлаған санның оң жағына нөлді тіркеп жазып, оны 143-тен азайтса, онда ойдағы саннан үш есе үлкен сан шығады. Біз қандай сан ойладық?

0.35. Егер берілген санның оң жағына 9 цифрын тіркеп жазып, шыққан санға берілген санды екі еселеп қосса, онда осы қосынды 633-ке тең болады. Берілген санды табыңдар.

Берілген x санының оң жағына 9 цифрын тіркеп жазғанда $x\cdot10+9$ саны шығады. Онда есеп шарты бойынша $10x+9+2x=633$ теңдігі орындалады. Осыдан $12x=624$, $x=52$.

0.36. Егер үш таңбалы санының сол жағына 8 цифрын тіркеп жазып, шыққан төрт таңбалы санға 5572-ні қосса, онда шыққан қосынды берілген үш таңбалы саннан 40 есе артық болады. Осы үш таңбалы санды анықтаңдар.

0.37. Әрбір натурал n саны үшін:

1) $x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1)$;

2) $x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\ldots+xy^{n-2}+y^{n-1})$;

3) $x^{2n+1}+1=(x+1)(x^{2n}-x^{2n-1}+\ldots-x+1)$;

4) $x^{2n+1}+y^{2n+1}=(x+y)(x^{2n}-x^{2n-1}y+\ldots-xy^{2n-1}+y^{2n})$ формулаларының орындалатынын дәлелдеңдер.

0.38. 1) $143^{15}-81^{15}$ айырмасы 62-ге; 2) $23^{13}+1$ қосындысы 12-ге; 3) $16^{17}+1$ қосындысы 17-ге бөлінетінін көрсетіңдер.

0.39. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $32a^5+\dfrac{16a^4b}{c}+\dfrac{8a^3b^2}{c^2}+\dfrac{4a^2b^3}{c^3}+\dfrac{2ab^4}{c^4}+\dfrac{b^5}{c^5}$;

2) $81x^4-54x^3yz+36x^2y^2z^2-24xy^3z^3+16y^4z^4$.

0.40. 1) $12^{31}+28^{31}$ қосындысы 80-ге; 2) $125^{220}-15^{220}$ айырмасы 220-ға; 3) $11^{11}+13$ қосындысы 12-ге; 4) $6^{41}+8$ қосындысы 7-ге еселік болатынын дәлелдеңдер.

0.41.* Әрбір натурал n үшін 1) 21^n+4^{n+2} өрнегі 17-ге; 2) $5^{2n+1}+11^{2n+1}+2$ өрнегі 6-ға; 3) $5^n+8^n-2^{n+1}$ өрнегі 3-ке; 4) $3^n+5^n+7^n+9^n$ өрнегі 4-ке бөлінетінін көрсетіңдер.

1) $21^n+4^{n+2}=21^n-4^n+16\cdot4^n+4^n=(21-4)(21^{n-1}+\ldots+4^{n+1})+4^n(16+1)=17\times\times(21^{n-1}+\ldots+4^{n-1})+17\cdot4^n$. Бұл 17-ге еселі.

0.42.* Әрбір натурал n үшін $5^n-3^n+2^n$ өрнегі 4-ке еселік болатынын көрсетіңдер.

0.43. Теңбе-теңдікті дәлелдеңдер:
$2b^5+(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)(a-b)=(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+$ $+b^4)(a+b)$.

0.44. $2(3a-2)^2-3a(3a-2)+1$ өрнегін екімүшенің квадраты түрінде жазыңдар.

0.45. 1) $2a^2+2b^2$ өрнегін екі көпмүшенің квадраттарының қосындысы; 2) $4ab$ өрнегін екі көпмүшенің квадраттарының айырмасы түрінде жазыңдар.

0.46. $x(8x+3y)^2-2y(6x+0{,}25y)^2$ өрнегін екімүшенің кубы түрінде жазыңдар.

0. 47.* $2a(a^2+3b^2)$ өрнегін екі көпмүшенің кубтарының қосындысы түрінде жазыңдар.

0.48.* $2b(3a^2+b^2)$ өрнегін екі көпмүшенің кубтарының айырмасы түрінде жазыңдар.

0.49. $2x^4+x^3-15x^2-83x-45=(ax^2+bx+c)(x^2+4x+9)$ теңдігі орындалатындай етіп, a, b және c коэффициенттерін анықтаңдар.

0.50.* x-тің әрбір мәнінде 1) оң; 2) теріс мәндер қабылдайтындай етіп, x-ке тәуелді 6-дәрежелі көпмүше құрастырыңдар.

0.51.* $2017 \cdot 2018 \cdot 2019 \cdot 2020+1$ саны қандай да бір n натурал санының квадраты болатынын дәлелдеңдер және n-ді табыңдар.

0.52. Бөлшекті қысқартыңдар:

1) $\dfrac{(4x-y)(2x+y)+(4x+2y)^2}{4x^2+xy}$; 2) $\dfrac{a^4+a^3+4a^2+3a+3}{a^3-1}$;

3) $\dfrac{a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc}{a^2-b^2-c^2-2bc}$; 4) $\dfrac{2a^2-5ab+3b^2}{2a^2-ab-3b^2}$.

2) $\dfrac{a^4+a^3+4a^2+3a+3}{a^3-1}=\dfrac{a^4+a^3+a^2+3a^2+3a+3}{(a-1)(a^2+a+1)}=$

$=\dfrac{(a^2+3)\cdot(a^2+a+1)}{(a-1)(a^2+a+1)}=\dfrac{a^3+3}{a-1}$.

0.53. $\frac{x+y}{y}=3$ деп алып, өрнектің мәнін табыңдар:

1) $\frac{x}{y}$; 2) $\frac{y}{x+y}$; 3) $\frac{x-y}{y}$; 4) $\frac{y}{x}$.

0.54. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\left(\frac{a-1}{3a+(a-1)^2}-\frac{1-3a+a^2}{a^3-1}-\frac{1}{a-1}\right):\frac{a^2+1}{1-a}$;

2) $\left(\frac{2p}{2p-u}-\frac{4p^2}{4p^2+4pu+u^2}\right):\left(\frac{2p}{u^2-4p^2}+\frac{1}{2p-u}\right)$;

3) $\left(\frac{1}{1-a}-1\right):\left(a-\frac{1-2a^2}{1-a}-1\right)$;

4) $\left(\frac{p}{p^2-4}+\frac{2}{2-p}+\frac{1}{p+2}\right):\left(p-2+\frac{10-p^2}{p+2}\right)$;

5) $\frac{a+b}{a^2-2ab+b^2}+\frac{a-b}{a^2+2ab+b^2}+\frac{2a}{b^2-a^2}$;

6) $\frac{a-5}{a^2-18a+81}+\frac{5-3a}{18a-81-a^2}+\frac{131+2a}{(9-a)^2}$;

7) $\frac{4}{1+x^4}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}$;

8) $\frac{a^2-bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^2-ac}{(b+a)(b+c)}+\frac{c^2-ab}{(c+a)(c+b)}$.

0.55. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\left(\frac{a}{a+1}+1\right):\left(1-\frac{3a^2}{1-a^2}\right)$;

2) $\left(\frac{2m+1}{2m-1}-\frac{2m-1}{2m+1}\right):\frac{4m}{10m-5}$;

3) $\left(\frac{a+1}{2a-2}+\frac{6}{2a^2-2}-\frac{a+3}{2a+2}\right)\cdot\frac{4a^2-4}{3}$;

4) $\left(\frac{5a}{a+x}+\frac{5x}{a-x}+\frac{10ax}{a^2-x^2}\right)\left(\frac{a}{a+x}+\frac{x}{a-x}-\frac{2ax}{a^2-x^2}\right)$.

1-бөлім. КВАДРАТ ТҮБІР ЖӘНЕ ИРРАЦИОНАЛ ӨРНЕК

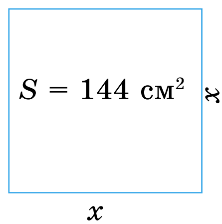
Бөлімді оқып-үйрену барысында келесі мақсаттарға қол жеткіземіз:

- иррационал және нақты сандар ұғымдарын меңгеру;
- санның квадрат түбірі және арифметикалық квадрат түбірі анықтамаларын білу және ұғымдарын ажырату;
- арифметикалық квадрат түбірдің қасиеттерін қолдану;
- квадрат түбірдің мәнін бағалау;
- көбейткішті квадрат түбір белгісінің алдына шығару және көбейткішті квадрат түбір белгісінің астына алу;
- бөлшек бөлімін иррационалдықтан босату;
- құрамында түбір таңбасы бар өрнектерді түрлендіру;
- нақты сандарды салыстыру;
- $y = \sqrt{x}$ функциясының қасиеттерін білу және оның графигін салу;
- аргументтің берілген мәндері бойынша функцияның мәндерін табу және функцияның мәні бойынша аргументтің мәнін табу.

1.1. Квадрат түбір анықтамасы

Квадрат түбір ұғымы.

Мысал. Ауданы $S = 144$ см^2 болатын шаршының белгісіз x қабырғасын табайық (1.1-сурет).



1.1-сурет

Шаршы ауданының формуласы:

$S = x^2$. Онда

$$\left.\begin{array}{l} S = x^2, \\ S = 144 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 = 144.$$

Сонымен, квадраты 144-ке тең санды табу керек. Ол сан 12, яғни $12^2 = 144$.

Олай болса, $x = 12$ см.

Анықтама: *а санының* ***квадрат түбірі*** *деп квадраты а-ға тең санды атайды. Санның квадрат түбірін анықтау амалын* ***квадрат түбірден шығару*** *деп атайды.*

Мысалы: 12 саны 144-тің квадрат түбірі. (-12) саны да 144-тің квадрат түбірі болады. Өйткені $(-12)^2 = 144$.

Өзара кері амалдар

Квадрат түбірден шығару амалы ← → Квадраттау амалы

Мысалы:

Сан	Санның квадрат түбірі	Себебі
25	5 және (-5)	$5^2 = 25$ $(-5)^2 = 25$
0,36	0,6 және $-0,6$	$0,6^2 = 0,36$ $(-0,6)^2 = 0,36$

$a = x^2 \geqslant 0$	Теріс емес сандардан ғана квадрат түбір шығаруға болады

0-дің жалғыз квадрат түбірі бар, ол 0-ге тең, себебі

$$0^2 = 0.$$

Арифметикалық квадрат түбір.

Анықтама. a $(a \geqslant 0)$ *санының* ***арифметикалық квадрат*** *түбірі деп квадраты а-ға тең теріс емес санды айтады және оны* $\sqrt{a}$ *түрінде белгілейді. Мұнда* $\sqrt{0} = 0$; $\sqrt{1} = 1$.

Мысалы:

$\sqrt{1} = 1$; $\sqrt{0} = 0$; $\sqrt{9} = 3$;

$\sqrt{0,64} = 0,8$; $\sqrt{\dfrac{25}{16}} = \dfrac{5}{4}$.

$\Longrightarrow$ Қорытынды: $a \geqslant 0$, $\sqrt{a} = b$ $\Rightarrow$ $b^2 = a$, b I 0.

$\sqrt{2^2} = 2$;

$\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 = -(-2)$

$\Longrightarrow$ Қорытынды: $\sqrt{x^2} = \begin{cases} x, \text{ егер } x \geqslant 0, \\ -x, \text{ егер } x < 0. \end{cases}$

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{егер, } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{егер } x < 0. \end{cases}$$

Сондықтан

$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

$a < 0$ болса, $\sqrt{a}$ түбірінің мағынасы жоқ. Мысалы: $\sqrt{-4}$, $\sqrt{-0,01}$ және т.с.с.

Арифметикалық квадрат түбірдің қасиеттері:

1) $\sqrt{a}$ өрнегінің анықталу облысы $[0;\ +\infty)$ — теріс емес сандар жиыны;

2) $\sqrt{a} \geqslant 0$ арифметикалық квадрат түбірдің мәні теріс емес;

3) $x^2 = a$ $(a>0)$ теңдеуінің екі түбірі бар: $x = \pm\sqrt{a}$;

4) кез келген x үшін $\sqrt{x^2} = |x|$ теңдігі орындалады.

1. Санның квадрат түбірі деп қандай санды айтады?
2. Санның квадрат түбірін анықтау амалын қалай атайды?
3. Қандай саннан квадрат түбір алуға болады? Теріс санның квадрат түбірі бар ма?
4. Оң санның неше квадрат түбірі бар?
5. Қандай санның бір ғана квадрат түбірі бар?
6. Теріс емес санның арифметикалық квадрат түбірі деп қандай санды айтады? Оны қалай белгілейді?
7. $x^2 = a$, aI0 теңдеуінің неше түбірі бар?

Практикалық жұмыс

Дәптерлеріңе ауданы 1) S=36 см^2; 2) S=144 мм^2 болатын квадрат (шаршы) салыңдар. Салынған фигураның диагоналын 1 мм-ге дейінгі дәлдікпен өлшеп, жуық мәнін табыңдар. Оның дәл мәні қандай? (Пифагор теоремасы көмегімен есептеңдер: катеттері a мен b-ға, гипотенузасы c-ға тең тік бұрышты үшбұрыш үшін $c^2=a^2+b^2$ теңдігі орындалады.)

ЕСЕПТЕР

А

1.1. 1) $\sqrt{64} = 8$; 2) $\sqrt{225} = 15$; 3) $\sqrt{0,09} = 0,3$; 4) $\sqrt{1,21} = 1,1$ теңдіктері орындалатынын көрсетіңдер.

3) $(0,3)^2 = 0,09 \Rightarrow \sqrt{0,09} = 0,3.$

1.2. 1) 7 саны 49-дың; 2) −6 саны 36-ның; 3) 0,1 саны 0,01-дің; 4) $1\frac{1}{4}$ саны $1\frac{9}{16}$-дың квадрат түбірі болатынын дәлелдеңдер.

1.3. Сандардың квадратын табыңдар:

$$\sqrt{16};\ \sqrt{3};\ \sqrt{0,04};\ \sqrt{81};\ -\sqrt{2};\ -\sqrt{1,2};\ \sqrt{\frac{1}{3}};\ -\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Мысалы, $\left(-\sqrt{1,2}\right)^2 = \left(\sqrt{1,2}\right)^2 = 1,2$.

1.4. Түбірдің мәнін табыңдар:

1) $\sqrt{64}$; 2) $\sqrt{25}$; 3) $\sqrt{36}$; 4) $\sqrt{100}$; 5) $\sqrt{1600}$; 6) $\sqrt{400}$.

7) $\sqrt{10000}$; 8) $\sqrt{0,09}$; 9) $\sqrt{0,49}$; 10) $\sqrt{2,25}$; 11) $\sqrt{\frac{9}{4}}$; 12) $\sqrt{\frac{64}{25}}$.

5) $\sqrt{1600} = \sqrt{(40)^2} = 40$.

1.5. Есептеңдер:

1) $\sqrt{900}$; 2) $\sqrt{2500}$; 3) $\sqrt{0,01}$; 4) $\sqrt{6,25}$; 5) $\sqrt{1,44}$;

6) $\sqrt{0,04}$; 7) $\sqrt{\frac{25}{4}}$; 8) $\sqrt{\frac{81}{49}}$; 9) $\sqrt{2\frac{1}{4}}$; 10) $\sqrt{1\frac{24}{25}}$.

9) $\sqrt{2\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}$.

1.6. Кестедегі бос орындарды толтырыңдар:

a	4	49		0,25	3600			5	99
$\sqrt{a}$			11			$\sqrt{2}$	$\sqrt{0,4}$		

1.7. Өрнектің мағынасы бар ма:

1) $\sqrt{64}$; 2) $-\sqrt{64}$; 3) $\sqrt{-64}$; 4) $-\sqrt{1,2}$; 5) $\sqrt{-1,2}$;

6) $\sqrt{3}$; 7) $\sqrt{4,9}$; 8) $\sqrt{-0,04}$; 9) $-\sqrt{0,2}$; 10) $\sqrt{-\frac{9}{4}}$?

1.8. Есептеңдер:

1) $\sqrt{64}\cdot\sqrt{9}$; 2) $5\cdot\sqrt{49}$; 3) $\sqrt{0,04}+\sqrt{0,16}$;

4) $\sqrt{25}:\sqrt{100}$; 5) $\frac{1}{3}\cdot\sqrt{81}$; 6) $\sqrt{\frac{9}{16}}-\sqrt{\frac{25}{4}}$.

1.9. Өрнектің мәнін табыңдар:

1) $\sqrt{a+b}$, мұндағы $a=28$; $b=-12$; 2) $\sqrt{x-y}$, мұндағы $x=55$; $y=-9$;

3) $x+\sqrt{x}$, мұндағы $x=0,09$; 4) $\sqrt{2a-5}$, мұндағы $a=15$.

1) $\sqrt{a+b} = \sqrt{28-12} = \sqrt{16} = \sqrt{4^2} = 4$.

1.10. Теңдеуді шешіңдер:

1) $x^2=64$; 2) $x^2=25$; 3) $x^2-0,09=0$; 4) $x^2=3$.

1) $8^2=64,\ (-8^2)=64 \Rightarrow x=\pm 8.$

B

1.11. 1) 2; 2) 7; 3) -5; 4) 1,2; 5) $1\frac{1}{4}$; 6) $-\frac{4}{7}$; 7) $-0,2$; 8) $\sqrt{3}$; 9) $-\sqrt{1,5}$;

10) $\sqrt{2\frac{2}{5}}$ саны қандай санның квадрат түбірі болады?

1.12. Өрнектің мәнін табыңдар:

1) $\left(\sqrt{6}\right)^2$; 2) $\left(4\sqrt{3}\right)^2$; 3) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}$;

4) $\left(-\sqrt{13}\right)^2$; 5) $\left(-\sqrt{13}\right)\cdot\sqrt{13}$; 6) $3\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}$;

7) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$; 8) $\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{15}}\right)^2$; 9) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}\right)^2$.

5) $\left(-\sqrt{13}\right)\left(\sqrt{13}\right)=-\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}=-\left(\sqrt{13}\right)^2=-13.$

1.13. x айнымалысының қандай мәндерінде өрнектің мағынасы бар:

1) $\sqrt{x}$; 2) $\sqrt{x^2}$; 3) $\sqrt{-x}$; 4) $\sqrt{-3x}$;

5) $\sqrt{25x}$; 6) $\sqrt{0,01x}$; 7) $\sqrt{-\frac{7x}{5}}$; 8) $\sqrt{-81x^2}$?

3) $-x\geqslant 0 \Rightarrow x\leqslant 0 \Rightarrow x\in(-\infty;\ 0].$

1.14. Теңдеуді шешіңдер:

1) $\sqrt{x}=2$; 2) $\sqrt{x}=25$; 3) $4\sqrt{y}=12$;

4) $7\sqrt{y}=0$; 5) $7\sqrt{x}=2$; 6) $11\sqrt{x}=10$.

2) $x=\left(\sqrt{x}\right)^2=25^2=625.$

1.15. Санды санның квадраты түрінде жазыңдар:

1) 16; 2) 1,21; 3) 625; 4) 0,16;

5) 7; 6) 2,5; 7) $\frac{49}{25}$; 8) $\frac{1}{3}$.

1) $16=4^2$.

1.16. Теңдеуді шешіңдер:

1) $x^2-7=0$; 2) $-y^2+6=0$; 3) $3x^2-7=0$;

4) $-4x^2+19=0$; 5) $-0{,}3y^2+0{,}39=0$; 6) $\frac{3}{2}x^2-\frac{9}{4}=0$.

6) $x^2=\frac{3}{2} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$.

1.17. Есептеңдер:

1) $\sqrt{(7{,}2)^2}$; 2) $\sqrt{(-0{,}5)^2}$; 3) $\sqrt{41^2}$;

4) $\sqrt{(-22)^2}$; 5) $\sqrt{|-1{,}9|^2}$; 6) $\sqrt{|-7|^2}$.

2) $\sqrt{(-0{,}5)^2}=|-0{,}5|=0{,}5$.

1.18. Егер айнымалылар оң мәндер қабылдаса, онда өрнекті түбір таңбасы болмайтындай етіп жазыңдар:

1) $\sqrt{a^2}$; 2) $\sqrt{4x^2}$; 3) $\sqrt{0{,}01y^2}$; 4) $\sqrt{\frac{9b^2}{4}}$.

2) $\sqrt{4x^2}=\sqrt{(2x)^2}=|2x|=2x$.

1.19. Өрнекті оған теңбе-тең түбір таңбасы болмайтын өрнекпен алмастырыңдар:

1) $\sqrt{(x-2)^2}$; 2) $\sqrt{(y+3)^2}$; 3) $\sqrt{(a-1)^2}$, $a<1$;

4) $\sqrt{(5-x)^2}$, $x\ \text{I}\ 5$; 5) $\sqrt{4m^2+4m+1}$; 6) $\sqrt{(b+6)^2}$, $b<-6$.

2) $\sqrt{(y+3)^2}=|y+3|$.

C

1.20. Бөлшекті қысқартыңдар:

1) $\frac{2}{\sqrt{2}}$; 2) $-\frac{7}{2\sqrt{7}}$; 3) $\frac{2x}{\sqrt{x}}$; 4) $-\frac{a}{2\sqrt{a}}$;

5) $\frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$; 6) $\frac{\sqrt{0{,}2}+0{,}2}{2\sqrt{0{,}2}}$; 7) $\frac{x+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$; 8) $\frac{a^2+a\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$.

5) $\frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1$.

1.21. Неліктен 1) $\sqrt{x} = -4$; 2) $\sqrt{y} + 5 = 0$; 3) $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = 0$; 4) $\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1} = 5$ теңдеуінің түбірі болмайтынын түсіндіріңдер.

1.22. Өрнектің анықталу облысын табыңдар:

1) $\sqrt{x-5}$; 2) $\sqrt{x+5}$; 3) $\sqrt{2x-\frac{1}{2}}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{x-3}}$.

1.23. Көбейткіштерге жіктеңдер:

1) a^2-3; 2) b^2-2c^2; 3) $-12x^2+13$; 4) $\frac{m^2}{5} - \frac{n^2}{14}$.

1) $a^2 - 3 = a^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = \left(a - \sqrt{3}\right)\left(a + \sqrt{3}\right)$.

1.24. Өрнектің мәні бүтін сан болатынын көрсетіңдер:

1) $\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)$; 2) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)$;

3) $\left(2\sqrt{7}-\sqrt{6}\right)\left(2\sqrt{7}+\sqrt{6}\right)$; 4) $\left(\sqrt{3}-2\sqrt{10}\right)\left(\sqrt{3}+2\sqrt{10}\right)$.

1.25. 1) $\sqrt{x^2-2x+1} = x-1$; 2) $\sqrt{a^2-6a+9} = 3-a$;

3) $\sqrt{y^4+4y^2+4} = y^2+2$ теңдігі айнымалының қандай мәндерінде орындалады?

2) $\sqrt{a^2-6a+9} = \sqrt{(a-3)^2} = |a-3| = 3-a \Rightarrow aJ3$.

1.26. Бөлшекті қысқартыңдар:

1) $\frac{a-3}{\sqrt{a}-\sqrt{3}}$; 2) $\frac{2x-5}{\sqrt{2x}+\sqrt{5}}$; 3) $\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$.

ҚАЙТАЛАУҒА АРНАЛҒАН ЖАТТЫҒУЛАР

1.27. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\left(x^2-1\right)\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - 1\right)$; 2) $\left(m+1+\frac{1}{m-1}\right):\left(m-\frac{m^2}{m-1}\right)$.

1.28. Модуль таңбасынсыз жазыңдар:

1) $\left|a^2\right|$; 2) $|x|^2$; 3) $\left|y^3\right|,\ y > 0$; 4) $|m|^3,\ m < 0$.

1.29. 2 кг күріш пен 3 кг ұнға 980 теңге төленді. Егер бір килограмм күріш бір килограмм ұннан 40 тг қымбат болса, күріш пен ұнның килограммен алғандағы бағасы қандай?

1.2. Иррационал сан ұғымы

Квадрат түбірді жуықтап есептеу.

Практикада квадрат түбір мәнін калькулятор (компьютер) көмегімен есептейді. Ол үшін санды теріп $\boxed{\sqrt{\ }}$ белгісі бар батырманы басса, жеткілікті. Мысалы,

$$\boxed{1444} \to \boxed{\sqrt{\ }} \to \boxed{38} \Rightarrow \sqrt{1444} = 38.$$

Барлық сандардың квадрат түбірі мен мәні бүтін сан бола бермейді. Мысалы, калькулятормен есептеп, $\sqrt{2}$ =1,41421356237 ...; $\sqrt{3}$ = = 1,73205080756 ...; $\sqrt{5}$ = 2,2360679774 ... мәндерін табамыз. Мұндағы көп нүктелер бөлшектің шексіз жалғаса беретінін білдіреді. Осыдан шыққан сандарды, қажетіне қарай, тиісті дәлдікпен жуықтап алады. Мысалы, $\sqrt{2}$ саны үшін төмендегі қос теңсіздіктер жүйесін аламыз:

$$1<\sqrt{2}<2$$
$$1{,}4<\sqrt{2}<1{,}5$$
$$1{,}41<\sqrt{2}<1{,}42$$
$$1{,}414<\sqrt{2}<1{,}415$$
$$1{,}4142<\sqrt{2}<1{,}4143$$
$$1{,}41421<\sqrt{2}<1{,}41422$$

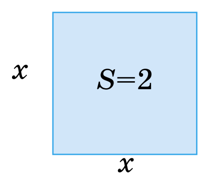
Мұндағы 1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; 1,41421; ... — $\sqrt{2}$ санының **кемімен алынған** жуықтаулар тізбегі.

2; 1,5; 1,42; 1,415; 1,4143; 1,41422; ... — $\sqrt{2}$ санының **артығымен алынған** жуықтаулары тізбегі.

Иррационал сандар. Нақты сандар жиыны.

Мысал қарастырайық.

Мысал. Ауданы 2-ге тең шаршының қабырғасы x-тің мәні рационал сан болмайтынын көрсетейік (1.2-сурет).



1.2-сурет

Егер шаршының қабырғасын x арқылы белгілесек, онда есептің математикалық моделі $x^2=2$ теңдеуінің рационал түбірі болмайтынын көрсету болып табылады.

Кері жорып, $x=\dfrac{m}{n}$, $m\in Z$; $n\in N$ қысқармайтын бөлшек түрінде жазылсын делік. (Кез келген бөлшекті қысқармайтын бөлшек түрінде жазуға болады!) Онда $\left(\dfrac{m}{n}\right)^2 = 2 \Rightarrow m^2 = 2n^2$, мұндағы m — жұп сан. $m = 2k,\ k \in N \Rightarrow (2k)^2 = 2n^2 \Rightarrow 4k^2 = 2n^2 \Rightarrow 2k^2 = n^2$, мұндағы n — жұп сан. Сонымен, m де, n де — жұп сандар. Бұл $\frac{m}{n}$ бөлшегінің қысқармайтынына қайшы. Олай болса, x рационал сан емес.

Кез келген рационал сан шектеулі немесе шектеусіз периодты ондық бөлшек түрінде жазылады.

x рационал сан емес. Ендеше ол шектеусіз периодсыз ондық бөлшек түрінде жазылады.

Анықтама. *Шектеусіз периодсыз ондық бөлшектерді **иррационал сандар*** деп атайды.

Иррационал сандардың барлығы түбір көмегімен жазыла бермейді. Мысалы, $\pi = 3{,}14159265\ ...$ — иррационал сан. $0{,}10110111011110\ ...$ саны да шексіз периодсыз ондық бөлшек, яғни иррационал сан. «Ир» — латынша кері мағыналы ұғымдарды атау үшін қолданылады. Сонда «иррационал» сөзі «рационал сан болмайтын» деген мағынаны білдіреді.

Жалпы рационал және иррационал сандарды ортақ атаумен *нақты сандар* деп атайды. Барлық нақты сандар жиыны $\boldsymbol{R}$ әрпімен белгіленеді.

R нақты сандар жиынының құрылымы:

$\boldsymbol{N}=\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ ...\}$ — натурал сандар жиыны;

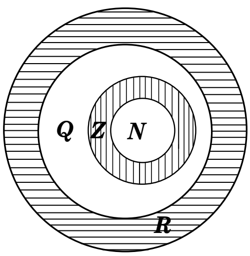
$\boldsymbol{Z}=\{...,\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ ...\}$ — бүтін сандар жиыны;

$\boldsymbol{Q} = \left\{\frac{n}{m}; m \in \boldsymbol{N}, n \in \boldsymbol{Z}\right\}$ — рационал сандар жиыны;

Бір жиын басқа жиынның ішкі жиыны екенін білдіретін сөйлемді $\subset$ белгісі арқылы $\boxed{\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}}$ түрінде жазылады.

1.3-суретте бұл жиындар Эйлер — Венн дөңгелектері көмегімен көрнекі бейнеленген.

Сонымен, нақты сандар жиыны рационал және иррационал сандар жиындарының бірігуінен құралады.



1.3-сурет

Нақты сандарға бізге белгілі арифметикалық амалдар (қосу, азайту, көбейту және нөлден өзге сандарға бөлу) қолданылады. Мысалы, іс жүзінде, тұрмыста кездесетін есептерді шығару барысында нақты сандардың қажетті дәлдікпен алынған жуық мәндеріне шектеулі ондық бөлшектерге қолданылатын ережелер бойынша амалдар қолданылады.

1-мысал. $\pi+\sqrt{3}$ қосындысын қарастырайық.

0,01-ге дейінгі дәлдікпен π C $3{,}14$; $\sqrt{3}$ C $1{,}73$ болғандықтан, $\pi+\sqrt{3}\approx$ $\approx 3{,}14 + 1{,}73 = 4{,}87$.

Нақты сандарды салыстыру үшін де ондық бөлшектерді салыстыру ережелері қолданылады.

2-мысал. π және 3,(14) сандарын салыстыру керек.

$\pi = 3{,}14159\ldots > 3{,}1415 > 3{,}141414\ldots = 3{,}(14)$.

Тарихқа шолу

Ежелгі заманнан-ақ тұрмыс мұқтаждығынан туындайтын есептер санның квадрат түбірін табу қажеттілігіне тірелген. Мысалы, ауданы белгілі квадрат пішінді жер телімінің ұзындығын анықтау, квадрат теңдеулерді шешуге келтірілетін есептер және т.с.с.

Мәселен, б.з.д. II ғасырда ежелгі қытайлықтарға санның квадрат түбірін анықтайтын ережелер белгілі болған. Ал б.з. IV–V ғасырларында үнді ғалымдары оң санның екі квадрат түбірі болатынын (оң және теріс) және теріс санның квадрат түбірі болмайтынын білген.

Біздің заманымыздан 2000 жылдай бұрын жазылған Ежелгі Вавилон қолжазбаларында санның квадрат түбірін анықтауға арналған формула кездеседі. Бұл формула қазіргі алгебра тілінде былай жазылады:

$$\sqrt{a^2+b}\approx a+\frac{b}{2a}. \qquad (1)$$

Мысалы, (1) формуланы пайдаланып, $\sqrt{19}$ -дың жуық мәнін анықтайық:

$$\sqrt{19}=\sqrt{16+3}\approx 4+\frac{3}{2\cdot 4}=4{,}375.$$

$(4{,}375)^2=19{,}140625$, олай болса, квадрат түбірдің мәні 0,1-ге дейінгі дәлдікпен анықталған. Әрине, бұл дәлдік a санын таңдап алуға тәуелді. Егер $a^2=(4{,}2)^2=17{,}64$ деп алсақ, онда $b=1{,}36$ болып, жуық мәні былай анықталған болар еді:

$$\sqrt{19}=\sqrt{17{,}64+1{,}36}\approx 4{,}2+\frac{1{,}36}{2\cdot 4{,}2}=4{,}3619047\ldots$$

Мұндағы $(4{,}3619047)^2=19{,}026212\ldots$. Жуықтау дәрежесі жоғарылай түсті.

Түбірдің $\sqrt{\ }$ таңбасын француз математигі М. Ролль (1652–1719) өзінің «Алгебраға нұсқаулар» атты еңбегінде ұсынған.

Жалпы, нақты сандар ұғымы рационал сандар ұғымын кеңейту барысында туындаған. Бұл рационал сандар ұғымын кеңейту мұқтаждығы математиканың күнделікті тұрмыста қолданылуынан және ғылым ретінде дамуының қажеттілігінен (мысалы, санның квадрат түбірін анықтау) шығады.

Ежелгі грек ғалымы Пифагор (б.з.д. VI ғасыр) мектебінде, егер өлшем бірлігі ретінде квадраттың қабырғасы алынса, онда оның диагоналы рационал санмен өрнектелмейтіні дәлелденген. Мұндай кесінділерді (квадраттың қабырғасы мен диагоналы) өзара *өлшемдес емес кесінділер* деп атаған.

Сонымен, ежелгі грек ғалымдары өзара өлшемдес емес кесінділер теориясын дамыту барысында жалпы нақты сандар ұғымына келіп тірелген. Дегенмен, нақты сандарды ұғым ретінде алғаш рет XVII ғасырда И. Ньютон (1643—1727) қарастырған. Ал нақты сандардың қатаң теориясын XIX ғасырда неміс ғалымдары К. Вейерштрасс (1815—1897), Р. Дедекинд (1831—1916) және Г. Кантор (1845–1918) ұсынған еді.

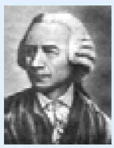
1. Иррационал сан деп қандай санды айтады?
2. Иррационал санның кемімен және артығымен алынған ондық жуықтаулары деп қандай сандарды айтады? Мысал келтіріңдер.
3. $\sqrt{2}$ санының рационал сан болмайтынын дәлелдеңдер.
4. Қандай сандарды нақты сандар деп атайды?
5. Нақты сандар жиыны деп қандай сандар жиынын айтады? Оны қалай белгілейді?
6. Натурал, бүтін, рационал сандар және нақты сандар жиындарын қалай белгілейді? Оларды Эйлер—Венн диаграммасы көмегімен кескіндеп көрсетіңдер.

Практикалық жұмыс

1) $\sqrt{273}$; $\sqrt{0,66}$ санының жуық мәнін (1) формуланың көмегімен анықтаңдар. Анықталған жуық мәннің дәлдігін калькуляторды пайдаланып бағалаңдар.

Хабарлама дайындаңдар

1. Математика ғылымында ең көп еңбек жазған ғалым, швейцариялық математик Л. Эйлер жайлы шағын хабарлама дайындаңдар. Оның ғылыми еңбектерінің жинағы 60—80 том көлемінде деген болжам бар.



Леонард Эйлер (1707—1783)

2. Ағылшын математигі, механик, астроном және физигі И. Ньютон жайлы шағын хабарлама дайындаңдар.

Исаак Ньютон (1643—1727)

ЕСЕПТЕР

А

1.30. 1) 0,2664; 2) −1,2731; 3) $\frac{5}{6}$; 4) $-\frac{2}{7}$ сандарының 0,1-ге және 0,01-ге дейінгі дәлдікпен кемімен және артығымен алынған жуықтауларын табыңдар.

1.31. 2,6 және 2,7 сандары $\sqrt{7}$ санының 0,1-ге дейінгі дәлдікпен кемімен және артығымен алынған жуықтаулары болатынын көрсетіңдер.

1.32. 0,01-ге дейінгі дәлдікпен алғанда $\sqrt{5} \approx 2{,}23$ жуықтауы орындалатынын көрсетіңдер.

$\sqrt{5} \approx 2{,}23606 \ldots$ болғандықтан, абсолюттік қателік

$$\left|\sqrt{5} - 2{,}23\right| = 0{,}00606 \ldots < 0{,}01$$

теңсіздігін қанағаттандырады. $\sqrt{5} \approx 2{,}23$ жуықтауында 0,01-ге дейінгі дәлдік орындалады.

1.33. 1) $\frac{31}{20}; \frac{7}{50}; \frac{17}{200}$; 2) $\frac{8}{5}; \frac{3}{2}; \frac{13}{50}$; 3) $\frac{3}{150}; \frac{21}{35}; \frac{13}{65}$ сандарын ондық бөлшек түрінде жазыңдар.

1.34. Амалдарды орындаңдар:

1) (0,6 · 0,1−0,186:0,1)+1,575:1,5; 2) (0,137:0,01−14,2) · 2,44+1,23;

3) 0,025 · (134,7075+3,75:2,5−2,27); 4) $3{,}85 \cdot 5\frac{1}{7} + 69{,}25 : 27{,}7 - 14\frac{3}{20}$.

2) (0,137 : 0,01−14,2) · 2,44+1,23 = (13,7−14,2) · 2,44+1,23 = =−0,5 · 2,44 + 1,23 = −1,22 + 1,23 = 0,01.

1.35. Есептеңдер:

1) $\left(42\frac{5}{12} - 21\frac{11}{18}\right) - \left(25 - 4\frac{1}{9}\right)$; 2) $\left(2\frac{1}{2} : 3\frac{2}{3}\right) : \left(7\frac{1}{2} : 7\frac{1}{3}\right) \cdot \left(5\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{21}\right)$;

3) $1{,}5 \cdot \left(\frac{3}{50} + 0{,}2652 : 0{,}13 - 1\frac{17}{30}\right) + 1\frac{13}{15}$; 4) $\dfrac{3\frac{1}{3} + 2{,}5}{2{,}5 - 1\frac{1}{3}} - 5{,}7 \cdot \frac{2}{19}$.

1.36. Шектеусіз периодты ондық бөлшек түрінде жазыңдар:

1) $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{7}$; $-\frac{20}{9}$; $\frac{5}{6}$; 2) $-\frac{8}{15}$; $10,28$; -17; $\frac{3}{16}$;

3) $1\frac{3}{5}$; $\frac{5}{16}$; $-1\frac{5}{8}$; $\frac{7}{30}$; 4) $1\frac{12}{25}$; $\frac{5}{16}$; $\frac{49}{80}$; $\frac{17}{30}$.

1.37. Периодты ондық бөлшектерді жай бөлшек түрінде жазыңдар:

1) 0,(3); 0,2(5); 7,(36); 2) 7,2(23); 4,2(25); 1,0(27);

3) 10,21(4); −2,1(12); 4) 0,(312); 0,0(2).

4) $0,(312) = \frac{312}{999} = \frac{104}{333}$; $0,0(2) = \frac{2}{90} = \frac{1}{45}$.

1.38. Микрокалькуляторды пайдаланып, есептеңдер:

1) $\sqrt{2112}$; 2) $\sqrt{72234}$; 3) $\sqrt{134,7075}$; 4) $\sqrt{0,28452}$.

B

1.39. 1) $\frac{1}{3}+\frac{4}{7}$; 2) $\frac{2}{5}+\sqrt{7}$; 3) $\sqrt{3}+\sqrt{5}$; 4) $\sqrt{10}-\sqrt{2}$ сандарын 0,01-ге дейінгі кемімен алынған дәлдікпен жуықтаңдар.

4) $\left.\begin{matrix}\sqrt{10} = 3,1622\ldots > 3,162 \\ \sqrt{2} = 1,4142\ldots < 1,415\end{matrix}\right\} \Rightarrow \sqrt{10}-\sqrt{2} > 3,162 - 1,415 = 1,747 > 1,74.$

Жауабы: 1,74.

1.40. Рационал және иррационал сандардың қосындысы рациона сан болуы мүмкін бе? Жауаптарыңды негіздеңдер.

1.41. Екі иррационал санның қосындысы рационал сан болуы мүмкін бе? Жауаптарыңды негіздеңдер.

1.42. 1) $\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{5}$; 3) $\sqrt{6}$; 4) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ сандарының иррационал болатынын дәлелдеңдер.

4) Кері жорып, $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ рационал сан болсын делік. Сонда $\sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{m}{n}$, $m \in Z$, $n \in N \Rightarrow 2+\sqrt{3} = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{m^2}{n^2} - 2$ — рационал сан. Бұл $\sqrt{3}$ -тің иррационал сан болатынына қайшы. Демек, $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ — иррационал сан.

1.43. a санының кемімен алынған ондық жуықтауларында үтірден кейін белгілі орыннан бастап жазылатын цифрлар периодты түрде қайталанады. Онда a саны рационал сан бола ма, әлде иррационал сан бола ма?

1.44. a және b рационал сандарының қосындысы, айырмасы, көбейтіндісі және бөліндісі ($b \neq 0$ болғанда) рационал сан болатынын көрсетіңдер.

1.45. Есептеңдер:

1) $0,(3)+\frac{1}{3}$; 2) (2,(1)+3,(12)) : 0,5;

3) 1,(7)+8,(2); 4) 5,1(7)+0,(15)–1,3(21).

2) (2,(1)+3,(12)) : 0,5 = (2,(11) + 3, (12)) · 2 = 5, (23) ·2 =10,(46).

1.46. Сандарды салыстырыңдар:

1) $\frac{3}{8}$ және 0,375; 2) –1,174 және $-1\frac{7}{40}$;

3) $-1\frac{3}{4}$ және –1,75; 4) 0,437 және $\frac{7}{15}$;

5) 0,1(3) және 0,132; 6) 0,239 және 0,23(8);

7) 0,(94) және $\frac{34}{37}$; 8) $\frac{241}{33}$ және 7,31(06).

1.47. Өрнектің мәнін 0,001-ге дейінгі дәлдікпен микрокалькуляторды қолданып есептеңдер:

1) $\sqrt{2,1}+\sqrt{3,51}$; 2) $\sqrt{3+\sqrt{2}}$;

3) $\sqrt{3,14^2+2,1\sqrt{2}}$; 4) $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}$;

5) $\sqrt{2,1+\sqrt{3,1+\sqrt{4,1}}}$; 6) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}$.

C

1.48. Қысқармайтын екі бөлшектің 1) қосындысы; 2) айырмасы; 3) көбейтіндісі; 4) қатынасы бүтін санға тең болатындай шарттарды табыңдар.

1.49. Қысқармайтын екі бөлшектің 1) қосындысы олардың көбейтіндісіне; 2) айырмасы олардың көбейтіндісіне тең болатындай шарттарды табыңдар.

1.50. (1) формуланы қолданып, 1) $\sqrt{28}$; 2)$\sqrt{125}$; 3)$\sqrt{5,7}$; 4) $\sqrt{521}$ санының 0,1-ге; 0,01-ге дейінгі жуық мәндерін табыңдар.

1.51.* Егер x_1саны $\sqrt{a}$ -ның (a>0) кемімен алынған жуық мәні болса, $\frac{a}{x_1}$ саны $\sqrt{a}$ -ның артығымен алынған жуықтауы болатынын көрсетіңдер.

Егер$\sqrt{a} > x_1$ болса, $\frac{a}{x_1} > \frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$.

1.52.* Егер x_1 саны $\sqrt{a}$ -ның (a>0) артығымен алынған жуық мәні болса, $\frac{a}{x_1}$ саны $\sqrt{a}$ -ның кемімен алынған жуықтауы болатынын көрсетіңдер.

1.53. 1.51 және 1.52-есептер бойынша, егер x_1 саны $\sqrt{a}$ -ның (a>0) кемімен (не артығымен) алынған жуықтауы болса, онда x_1 және $\frac{a}{x_1}$ сандарының бірі $\sqrt{a}$ -ның кемімен алынған жуықтауы, екіншісі $\sqrt{a}$ -ның артығымен алынған жуықтауы болатынын көреміз. Онда бұл жуықтаулардың арифметикалық ортасы, яғни $x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{a}{x_1}\right)$ саны $\sqrt{a}$ санының x_1, $\frac{a}{x_1}$ сандарымен салыстырғанда дәлірек жуықтауы болатыны шығады. Ал өз кезегінде x_2, $\frac{a}{x_2}$ сандары да (1.50, 1.51-есептер бойынша) $\sqrt{a}$ -ның кемімен және артығымен алынған жуықтаулары болады. Сонда $x_3 = \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{a}{x_2}\right)$ саны $\sqrt{a}$ -ның дәлірек жуықтауы болатыны шығады. Осы процесті жалғастырып, $\sqrt{a}$ санына біртіндеп жуықтайтын төмендегідей рекурренттік формуланы аламыз:

$$x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right),\ n = 1,\ 2, \ldots . \qquad (2)$$

Мысалы, $x_1 = 2$ саны $\sqrt{5}$ санының кемімен алынған жуық мәні. Онда (2) формула бойынша $\sqrt{5}$ -тің екінші жуықтауы былай анықталады:

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{5}{2}\right) = 2,25.$$

Енді келесі жуық мәндерді анықтайық:

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(2,25 + \frac{5}{2,25}\right) = \frac{161}{72} = 2,236(1) \approx 2,2361;$$

$$x_4 = \frac{1}{2}\left(2,2361 + \frac{5}{2,2361}\right) \approx 2,2361.$$

Сонымен, x_3 саны $\sqrt{5}$-ті 0,0001-ге дейінгі дәлдікпен жуықтайды. (2) формуланың көмегімен 1) $\sqrt{24,24}$; 2) $\sqrt{3,81}$; 3) $\sqrt{516,3}$; 4) $\sqrt{0,721}$ сандарының мәнін 0,001-ге дейінгі дәлдікпен анықтаңдар.

1.54. 5 және 5,01 сандарының арасында жататын рационал және иррационал санды жазып көрсетіңдер.

1.55. 1) Қосындысы; 2) көбейтіндісі рационал сан болатын екі иррационал санды жазып көрсетіңдер.

ҚАЙТАЛАУҒА АРНАЛҒАН ЖАТТЫҒУЛАР

1.56. Бір метр матаның 1) жарты; 2) ширек; 3) сегізден бір метрін арнайы өлшейтін құралсыз қалай өлшеп, қиып алуға болады?

1.57. Кез келген натурал n саны үшін

1) $\frac{10^n + 2}{3}$; 2) $\frac{10^n + 8}{9}$; 3) $\frac{10^n + 5}{5}$; 4) $\frac{101 \cdot 10^{2n} + 9}{11}$ бөлшегінің мәндері бүтін сан болатынын дәлелдеңдер.

1.58. 1) $A(-0,3;\ 0,09)$; 2) $B\left(1\frac{1}{2};\ 2\frac{1}{4}\right)$; 3) $C\left(-3\frac{1}{3};\ \frac{1}{9}\right)$ нүктелері $y=x^2$ функциясының графигінде жата ма?

1.59. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\frac{xy^2 - xz^2}{2x+8} \cdot \frac{3x+12}{xy+xz}$; 2) $\frac{a^2+ab+b^2}{a-1} : \frac{a^3-b^3}{a^2-1}$.

1.3. НАҚТЫ САНДАР МЕН ТҮЗУ НҮКТЕЛЕРІНІҢ СӘЙКЕСТІГІ

Санның бүтін және бөлшек бөліктері. *Кез келген x нақты саны үшін $n \in Z$ бүтін саны табылып,*

$$n \leqslant x < n + 1$$

қос теңсіздігі орындалады. Басқаша айтсақ, кез келген сан тізбектес екі бүтін санның арасында жатады:

Мысалы: $2<\frac{8}{3}<3$; $\quad 0<\frac{79}{113}<1$;

$-4<-\frac{7}{2}<-3$; $\quad 1<\sqrt{2}<2$;

$-3<1-\pi<-2$; $\quad$ 4J4 < 5.

x санының бүтін бөлігі деп осы саннан артық емес ең үлкен бүтін санды айтады. Оны $[x]$ арқылы белгілейді. Сонымен, егер $n \leqslant x < n+1$ болса, онда $[x]=n$.

Мысалы, $2<\frac{8}{3}<3$ қостеңсіздігіндегі бүтін бөлік 2 саны. Оны былай жазады: $\left[\frac{8}{3}\right]=2$. Сол сияқты қарастырылған мысалдағы қалған сандардың бүтін бөліктері: $\left[\frac{79}{113}\right]=0$; $\left[-\frac{7}{2}\right]=-4$; $\left[\sqrt{2}\right]=1$; $[1-\pi]=-3$; $[4]=4$.

Берілген сан мен оның бүтін бөлігінің айырмасы осы санның ***бөлшек бөлігі*** деп аталады. x санының бөлшек бөлігі $\{x\}$ арқылы белгіленеді:

$$\{x\}=x-[x],$$
$$0\leqslant \{x\} < 1.$$

Мысалы: $\left\{\frac{8}{3}\right\}=\frac{8}{3}-2=\frac{2}{3}$; $\quad \left\{\frac{79}{113}\right\}=\frac{79}{113}-0=\frac{79}{113}$;

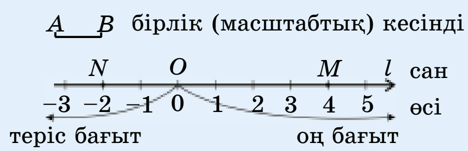
$\left\{-\frac{7}{2}\right\}=-\frac{7}{2}-(-4)=\frac{1}{2}$; $\quad \left\{\sqrt{2}\right\}=\sqrt{2}-1$;

$\{1-\pi\}=1-\pi+3=4-\pi$; $\quad \{4\}=4-4=0$.

Нақты сандар мен түзу нүктелерінің сәйкестігі.

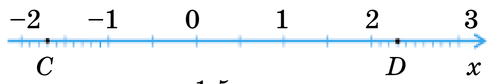
Мұны білесіңдер!

6-сыныпта сендер сан өсінде рационал санның орнын анықтау тәсілдерін қарастырдыңдар.



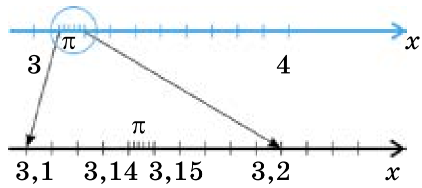
1.4-сурет

1.4-суретте $N(-2)$ және $M(4)$. 1.5-суретте $C(-1,7)$ және $D(2,3)$ нүктелерінің орнын анықтау тәсілі көрсетілген.



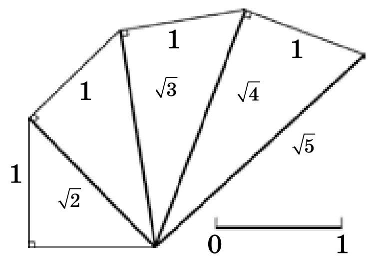
1.5-сурет

1.6-суретте $\pi = 3{,}141592 \ldots$ санының орнын жуықтап анықтау тәсілі көрсетілген. Осы тәсілмен кез келген иррационал (нақты) санның сан өсіндегі орнын берілген дәлдікпен жуықтап көрсетуге болады.



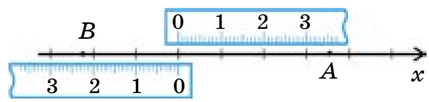
1.6-сурет

Кейбір жағдайларда иррационал санның дәл орнын циркуль және сызғыштың көмегімен көрсетуге болады. Мысалы, 1.7-суретте ұзындығы $\sqrt{2}\,\sqrt{3}\,\sqrt{4}\,\sqrt{5}$ және т.с.с. болатын кесінділерді салу тәсілі көрсетілген.



1.7-сурет

Сан өсіндегі кез келген нүктенің координатасын өлшеу арқылы анықтайды. Мысалы, 1.8-суретте $A(3{,}5)$ және $B(-2{,}3)$. Осылай сан өсі нүктелері мен нақты сандар жиыны арасында өзара бірмәнді сәйкестік орнатылады.



1.8-сурет

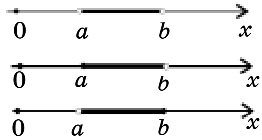
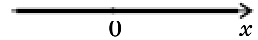
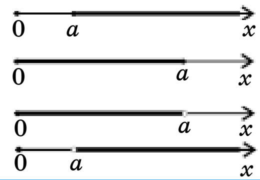
Егер сан өсінде $A(a)$ және $B\,(b)$ нүктелері берілсе, онда A және B нүктелерінің арақашықтығы

$$AB = |a-b| \qquad (1)$$

формуласымен анықталады. Мысалы, 1.8-суретте $AB = |3{,}5-(-2{,}3)| = |3{,}5+2{,}3| = 5{,}8$.

Кейбір сан аралықтары және оларды теңсіздіктер арқылы өрнектеу. Сендер 6-сыныпта жиындарды қарастырып, оларға амалдар қолдануды оқып-үйрендіңдер. Осыған қоса, сан өсінде берілген жиындарды (сан аралықтарын) қарастырып, оларды жазу тәсілдерін, теңсіздіктер арқылы жазуды және сан өсіндегі бейнелерін көрсете білуді үйрендіңдер. Енді осы мәліметтерді естеріңе түсіріп, қайталап алу үшін 1.1-кестені қолданыңдар. Өйткені бұл материалдар келесі тарауларда есептер шығару үшін кеңінен қолданылады.

1.1-*кесте*

Теңсіздіктер	Сан аралықтары	Аралықтардың сан өсіндегі бейнесі
$a \le x \le b$	$[a; b]$ — кесінді	
$a<x<b$ $a \le x < b$ $a < x \le b$	$(a;\ b)$ — интервал $\left.\begin{matrix}[a;\ b)\\(a;\ b]\end{matrix}\right\}$ — жартылай интервал	
$-\infty < x < +\infty$	$(-\infty;\ +\infty)$ — сан өсі	
$a \le x < +\infty$ $-\infty < x \le a$ $-\infty < x < a$ $a < x < +\infty$	$\left.\begin{matrix}[a;\ +\infty)\\(-\infty;\ a]\end{matrix}\right\}$ — сәуле $\left.\begin{matrix}(-\infty;\ a)\\(a;\ +\infty)\end{matrix}\right\}$ — ашық сәуле	

1. Санның бүтін бөлігі деген не?
2. Санның бөлшек бөлігі деген не?
3. Сан өсі қалай анықталады?
4. Сан өсінен берілген санға сәйкес қойылатын нүктені қалай анықтайды?
5. Сан өсіндегі берілген нүктеге сәйкес қойылатын санды қалай анықтайды?
6. Сан өсіндегі нүктенің координатасы деп нені айтады және оны қалай жазады?
7. Қандай сан аралықтары бар және оларды теңсіздіктер арқылы жазып көрсетіңдер.

Практикалық жұмыс

Сан өсінде циркуль және сызғышты пайдаланып, $A(\sqrt{5})$, $B(-\sqrt{13})$, $C(\sqrt{61})$ сандарының дәл орнын көрсетіңдер.

ЕСЕПТЕР

А

1.60. 1) $2\frac{7}{17}$; 2) $-3\frac{4}{5}$; 3) 5; 4) 122,31; 5) −17,32;

6) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$ сандарының бүтін және бөлшек бөліктерін жазыңдар.

5) $[-17{,}32] = -18;\ \{-17{,}32\} = -17{,}32 + 18 = 0{,}68.$

1.61. Координаталары $\frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \sqrt{3};$ $-1,6;$ $0,7$ болатын нүктелерді белгілі бір өлшем бірлігі бойынша сан өсінде бейнелеп көрсетіңдер.

1.62. A және B нүктелерінің арақашықтығын табыңдар:

1) $A(1,5);$ $B(-2);$ 2) $A(-10,3);$ $B(6,2);$
3) $A(-3,6);$ $B(0);$ 4) $A(-5,7);$ $B(-1).$

1.63. Егер:

1) $AB=5;$ $B(5);$ 2) $AB<3,5;$ $B(-1);$
3) $AB \leqslant 0,2;$ $B(-4,5);$ 4) $AB<\frac{1}{48};$ $B(-12)$ болса, онда A (x) нүктесінің координатасы қанағаттандыратын шарттарды теңдеу немесе теңсіздік түрінде жазыңдар.

3) ▶ $A(x)$ болса, онда $AB=|x+4,5| \Rightarrow |x+4,5| \leqslant 0,2 \Rightarrow -0,2 \leqslant x+4,5 \leqslant 0,2 \Rightarrow$ $\Rightarrow -4,7 \leqslant x \leqslant -4,3.$ ◀

1.64. Сан өсінен $A(-7)$, $B(5)$, $C(2)$ нүктелерін белгілеп, AB, AC және BC кесінділерінің ұзындықтарын табыңдар.

1.65. 1) $x>5;$ 2) $x<3;$ 3) $-3<x<7;$ 4) $-3 \leqslant x \leqslant 3;$ 5) $x \geqslant -2;$ 6) $-\infty < x \leqslant 11;$ 7) $-5<x \leqslant 0$ теңсіздіктерімен берілген жиынды аралықтар арқылы жазыңдар.

1.66. 1) $[2;+\infty);$ 2) $[-5;3];$ 3) $(-2;0);$ 4) $(-\infty;-1);$ 5) $(-\infty;5];$ 6) $(-3;+\infty);$ 7) $[2;4);$ 8) $(-2;1]$ аралықтарын сан өсінде кескіндеп, оларды теңсіздіктер арқылы жазыңдар.

1.67. 1) $\sqrt{6};$ 2) $\sqrt{13};$ 3) $\sqrt{69};$ 4) $\sqrt{111};$ 5) $\sqrt{250};$ 6) $\sqrt{1221}$ санынан кем ең үлкен натурал санды табыңдар.

4) ▶ $\sqrt{111}>\sqrt{100}=10;$ $\sqrt{111}<\sqrt{121}=11 \Rightarrow 10<\sqrt{111}<11.$

Жауабы: 10. ◀

1.68. 1) $\sqrt{6};$ 2) $\sqrt{23};$ 3) $\sqrt{67};$ 4) $\sqrt{113};$ 5) $\sqrt{250};$ 6) $\sqrt{2112}$ санынан үлкен ең кіші натурал санды табыңдар.

B

1.69. Төмендегі сандарды бүтін бөлігі мен бөлшек бөліктерінің қосындысына жіктеп жазыңдар:

$$\frac{3}{4};\ \frac{21}{19};\ -\frac{1}{6};\ -\frac{81}{20};\ \frac{1}{3}+\frac{5}{2};\ \frac{3}{5}-\frac{7}{3};\ -\frac{2}{5}+\frac{20}{27};\ -\frac{5}{6}-\frac{215}{183}.$$

1.70. Сандардың қайсысы үлкен:

1) 3 немесе $\sqrt{8,5}$;   2) $3\sqrt{2}$ немесе $\sqrt{17}$;

3) $5\sqrt{3}$ немесе $6\sqrt{2}$;   4) $\sqrt{3\sqrt{2}}$ немесе 2?

1.71. Сандардың бүтін бөлігін табыңдар:

1) $\sqrt{14}$;   2) $-\sqrt{32}$;   3) $\sqrt{238}$;   4) $-\sqrt{105}$.

2) $-\sqrt{32} > -\sqrt{36} = -6;\ -\sqrt{32} < -\sqrt{25} = -5 \Rightarrow -6 < -\sqrt{32} < -5 \Rightarrow [-\sqrt{32}] = -6$.

1.72. Төмендегі сандардың қайсысы рационал, қайсысы иррационал сан болады:

1) $\sqrt{36}$;   2) $\sqrt{1,44}$;   3) $\sqrt{18}$;   4) $-\sqrt{7}$;   5) 0,6161...;   6) $-2,3(74)$;

7) 0,202002000...;   8) $(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})$?

1.73. Егер a және b ($b \neq 0$) рационал сандар болса, онда $\frac{a}{b}$ саны да рационал сан болатынын дәлелдеңдер.

1.74. Координаталары 1) $\sqrt{2}$ және $-\frac{2}{3}$;   2) 0,5 және $\sqrt{2}-\sqrt{5}$ болатын нүктелердің арақашықтығын 0,01-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

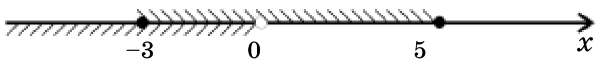
1.75. Төмендегі нүктелердің қайсысы O нүктесінен алысырақ орналасқан:

1) 5,2397 және 4,4996;   2) −15,001 және −15,100;

3) − 0,3567(8) және 0,3559;   4) 2,103 және −2,093?

1.76. 1) $[5; +\infty)$ және $(7; +\infty)$; 2) $[-3; 5]$ және $(-\infty; 0)$; 3) $(-\infty; 4)$ және $[0; +\infty)$; 4) $(-\infty; 10)$ және $(0; 5)$; 5) $(-\infty; 5)$ және $[-1; 3]$; 6) $(-4; 0)$ және $(3; 4)$ сан аралықтарының қиылысуын табыңдар.

2) 1.9-сурет бойынша $[-3; 5] \cap (-\infty; 0) = [-3; 0)$.



1.9-сурет

1.77. 1) $[2;\ 4]$ және $(-7;\ 3)$; 2) $(-2;\ 0)$ және $[0;\ +\infty]$; 3) $(-1;\ 5)$ және $(0;\ 3)$; 4) $(-\infty;\ 15]$ және $[2;\ 4]$; 5) $(-\infty;\ 4]$ және $[0;\ +\infty)$; 6) $(-3;\ 0]$ және $[5;\ +\infty)$ сан аралықтарының бірігуін табыңдар.

1.78. Арасында 1) $\sqrt{6}$; 2) $\sqrt{11}$; 3) $\sqrt{67}$; 4) $\sqrt{123}$; 5) $\sqrt{222}$; 6) $\sqrt{720}$ саны орналасатындай етіп, тізбектес екі натурал санды табыңдар.

C

1.79*. 1.7-суретте ұзындықтары $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots$ сандарына тең кесінділерді салу тәсілдері көрсетілген. Ұзындықтары 1) $\sqrt{10}$; 2) $\sqrt{101}$; 3) $\sqrt{85}$-ке тең кесінділерді оңайырақ тәсілдермен салуға бола ма?

1.80*. Егер координатасы a-ға тең нүкте белгілі болса, онда циркуль және сызғыштың көмегімен координатасы $\frac{1}{a}$ болатын нүктені қалай салуға болады?

1.81*. Координаталары 1) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 2) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ болатын нүктелерді сан өсінде көрсетіңдер.

1.82. 1) $|x| < 5$; 2) $|x|\ \mathrm{I}\ 2$; 3) $|x-3|\ \mathrm{J}\ 3$; 4) $|x+2| > 4$ теңсіздіктерін аралықтар арқылы жазып, оларды сан өсінде кескіндеңдер.

1.83. 1) $(x-1)(x+2)<0$; 2) $(x-2)(x-5)\ \mathrm{I}\ 0$; 3) $(x-3)^2\ \mathrm{J}\ 9$; 4) $(x+1)^2>1$ теңсіздіктерінің шешімдерін сан аралықтары арқылы көрсетіңдер.

1.84. Ешбір натурал n саны үшін $\frac{n-6}{15}, \frac{n-5}{24}$ бөлшектері бірдей бүтін мәндер қабылдай алмайтынын көрсетіңдер.

1.85. Көрсетілген теңсіздікті шешіп, жауабын сан аралықтары көмегімен жазыңдар:

1) $\sqrt{(x-3)^2}\ \mathrm{J}\ 2$; 2) $\sqrt{(x+3)^2}\ \mathrm{J}\ 2$; 3) $\sqrt{(5-x)^2}<3$; 4) $\sqrt{(2x+3)^2}<1$.

ҚАЙТАЛАУҒА АРНАЛҒАН ЖАТТЫҒУЛАР

1.86. Бір сағат уақыттың 1) жартысында; 2) ширегінде; 3) үштен бірінде; 4) жиырмадан бірінде неше минут бар?

1.87. 3 кг ұннан бірдей 5 нан пісіріледі. Сонда әр нанға неше килограмм ұн жұмсалады?

1.88. 1) $\frac{5}{6}, \frac{8}{9}, \frac{10}{14}, \frac{7}{8}$; 2) $\frac{217}{300}, \frac{7}{8}, \frac{47}{60}, \frac{17}{20}$ бөлшектерінің ең үлкені мен ең кішісін табыңдар.

1.89. Теңдеуді шешіңдер:

1) $\sqrt{x} = 5$; 2) $\sqrt{x-1} = 3$; 3) $\sqrt{3x+2} = 6$; 4) $\sqrt{7x-8} = 12$.

1.90. x айнымалысының қандай мәндерінде $y = \frac{x}{2} + 2$ теңдігімен анықталатын функцияның мәндері $[-2; 2]$ аралығына тиісті болады?

1.91. Егер жерге тігінен қадалған 1 м таяқ көлеңкесінің ұзындығы 70 см болса, көлеңкесінің ұзындығы 14 м 70 см болатын ғимараттың биіктігі қандай?

1.4. Квадрат түбірдің қасиеттері

Квадрат түбірдің қасиеттері.

№	Қасиеттердің тұжырымдамасы	Дәлелдеуі
1.	$\sqrt{a}$ *өрнегінің анықталу облысы:* $a \geq 0$; теріс емес нақты сандар жиыны	1—4-қасиеттердің ақиқаттығы бөлімнің 1-пунктінде көрсетілген
2.	$a \geq 0$, яғни арифметикалық квадрат түбірдің мәні теріс емес	
3.	$\forall\, a \geq 0 \Rightarrow x^2 = a$ теңдеуінің екі түбірі бар: $x_{1/2} = \pm\sqrt{a}$. (∀ таңбасы «кез келген» сөзінің қысқаша жазылуы.)	
4.	$\forall\, a \Rightarrow \sqrt{a^2} = \lvert a \rvert$	
5.	Сандардың көбейтіндісінің түбірі көбейткіштердің түбірлерінің көбейтіндісіне тең: $\forall\, a \geq 0, b \geq 0 \Rightarrow \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$	$\left(\sqrt{ab}\right)^2 = a \cdot b$; $\left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{b}\right)^2 =$ $= a \cdot b \Rightarrow \sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$
6.	Сандардың қатынасының түбірі түбірлердің қатынасына тең: $\forall\, a \geq 0, b > 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$	$\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 = \frac{a}{b}$; $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{\left(\sqrt{a}\right)^2}{\left(\sqrt{b}\right)^2} = \frac{a}{b}$; $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

жалғасы

7.	Дәреженің түбірі түбірдің дәрежесіне тең: $\forall\ a\ \mathrm{I}\ 0,\ n \in N \Rightarrow \sqrt{a^n} = \left(\sqrt{a}\right)^n$	$\left(\sqrt{a^n}\right)^2 = a^n;$ $\left(\left(\sqrt{a}\right)^n\right)^2 = \left(\left(\sqrt{a}\right)^2\right)^n = \left(a^n\right);$ $\sqrt{a^n} = \left(\sqrt{a}\right)^n$
С А Л Д А Р	n — жұп сан $\Rightarrow \sqrt{a^n} = \lvert a\rvert^{\frac{n}{2}}$, $a \in R$	$n = 2k \Rightarrow \dfrac{n}{2} = k \in N.$ $\left(\lvert a\rvert^{\frac{n}{2}}\right)^2 = \left(\lvert a\rvert^k\right)^2 = \lvert a\rvert^{2k} = a^{2k} =$ $= a^n \Rightarrow \sqrt{a^n} = \lvert a\rvert^{\frac{n}{2}}$

1-мысал. $\sqrt{9 \cdot 25 \cdot 36} = \sqrt{9}\sqrt{25}\sqrt{36} = 3 \cdot 5 \cdot 6 = 90.$

2-мысал. $\sqrt{\dfrac{121}{324}} = \dfrac{\sqrt{121}}{\sqrt{324}} = \dfrac{11}{18}.$

3-мысал. $\sqrt{7^6} = 7^{\frac{6}{2}} = 7^3 = 343.$

4-мысал. $\sqrt{a^{10}b^6}\ (a > 0, b < 0)$ өрнегін ықшамдайық.

$\sqrt{a^{10}b^6} = \sqrt{a^{10}}\sqrt{b^6} = \lvert a\rvert^5 \lvert b\rvert^3 = a^5(-b)^3 = -a^5b^3.$

5-мысал. $\sqrt{288}$ және $13\sqrt{2}$ сандарын салыстыру керек.

1-тәсіл (көбейткішті түбір таңбасы алдына шығару тәсілі).

$\sqrt{288} = \sqrt{144 \cdot 2} = \sqrt{144}\sqrt{2} = 12\sqrt{2}; \qquad 12\sqrt{2} < 13\sqrt{2}.$

2-тәсіл (көбейткішті түбір таңбасы астына алу тәсілі).

$13\sqrt{2} = \sqrt{169}\sqrt{2} = \sqrt{169 \cdot 2} = \sqrt{338} > \sqrt{288}.$

Квадрат түбірі бар өрнектерді түрлендіру. Квадрат түбірлері бар өрнектерді түрлендіруге бірнеше мысалдар қарастырайық.

6-мысал. $\sqrt{15} - \sqrt{60} + 3\sqrt{135}$ өрнегін ықшамдау керек.

Шешуі. Алдымен екінші және үшінші қосылғыштарды ықшамдаймыз:

$\sqrt{60}=\sqrt{4\cdot 15}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{15}=2\sqrt{15};$

$3\sqrt{135}=3\cdot\sqrt{9\cdot 15}=3\cdot 3\cdot\sqrt{15}=9\sqrt{15}.$

Сонда $\sqrt{15}-\sqrt{60}+3\sqrt{135}=\sqrt{15}-2\sqrt{15}+9\sqrt{15}=8\cdot\sqrt{15}.$

7-мысал. 1) $\frac{4}{\sqrt{6}}$; 2) $\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ бөлшегінің бөлімінде түбір таңбасы болмайтындай етіп түрлендірейік. Бұл амалды ***бөлшек бөліміндегі иррационалдықтан құтылу*** деп атайды.

Шешуі. 1) $\frac{4}{\sqrt{6}}=\frac{4\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=\frac{4\sqrt{6}}{6}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$; 2) бөлшектің алымы мен бөлімін бөліміне түйіндес $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ өрнегіне көбейтіп түрлендіреміз:

$$\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{2\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}=\frac{2\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{2\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{5-3}=\sqrt{5}+\sqrt{3}.$$

8-мысал. $\frac{a^2-5}{a-\sqrt{5}}$ бөлшегін қысқарту керек.

Шешуі. $a^2-5=a^2-\left(\sqrt{5}\right)^2=\left(a-\sqrt{5}\right)\left(a+\sqrt{5}\right)$ болғандықтан, $\frac{a^2-5}{a-\sqrt{5}}=$

$=\frac{\left(a-\sqrt{5}\right)\left(a+\sqrt{5}\right)}{a-\sqrt{5}}=a+\sqrt{5}$ теңдігін аламыз.

9-мысал. $a>3$ деп алып, $\sqrt{a^2+a+4+\sqrt{a^2-6a+9}}$ өрнегін ықшамдау керек.

Шешуі. $\sqrt{a^2-6a+9}=\sqrt{(a-3)^2}=|a-3|=a-3$ теңдігін ескеріп, берілген өрнекті түрлендіреміз:

$$\sqrt{a^2+a+4+\sqrt{a^2-6a+9}}=\sqrt{a^2+a+4+a-3}=\sqrt{a^2+2a+1}=$$

$$=\sqrt{(a+1)^2}=|a+1|=a+1.$$

1. Квадрат түбірлердің қандай қасиеттерін білесіңдер?
2. 5) — 7)-қасиеттерді тұжырымдап, дәлелдеңдер.
3. Бөлшектің бөліміндегі иррационалдықтан құтылу деп нені түсінесіңдер?

Практикалық жұмыс

1) Өздерің отырған партаның; 2) «Алгебра» оқулығының енін, ұзындығын және диагоналін 0,1 см-ге дейінгі дәлдікпен өлшеңдер. Егер a және b тіктөртбұрыштың ені мен ұзындығы, ал d оның диагоналі болса, онда $d^2=a^2+b^2$ теңдігі геометрия курсында дәлелденеді. Бұл теңдік — *Пифагор теоремасы* деп аталатын теореманың математикалық түрде жазылуы. Пифагор теоремасын пайдаланып, қажетіне қарай калькуляторды қолданып, оның диагоналін есептеп шығарыңдар. Алынған нәтижелерді салыстырыңдар. Диагональдің бұл жуық мәндерінің қайсысы оның дәл өлшенген мәніне дәлірек жуықтайды? Жауаптарыңды негіздеңдер.

ЕСЕПТЕР

А

1.92. Түбірдің мәнін табыңдар:

1) $\sqrt{121\cdot 64}$; 2) $\sqrt{0,36\cdot 49}$; 3) $\sqrt{12\frac{1}{4}}$; 4) $\sqrt{10\frac{9}{16}}$;

5) $\sqrt{0,04\cdot 81\cdot 25}$; 6) $\sqrt{0,09\cdot 16\cdot 0,04}$; 7) $\sqrt{1\frac{7}{9}\cdot\frac{4}{25}}$; 8) $\sqrt{\frac{121}{144}\cdot 2\frac{1}{4}}$.

1.93. Өрнектің мәнін табыңдар:

1) $\sqrt{810\cdot 40}$; 2) $\sqrt{75\cdot 12}$; 3) $\sqrt{72\cdot 32}$; 4) $\sqrt{45\cdot 80}$;

5) $\sqrt{2,5\cdot 14,4}$; 6) $\sqrt{4,9\cdot 360}$; 7) $\sqrt{90\cdot 6,4}$; 8) $\sqrt{160\cdot 6,4}$.

5) $\sqrt{2,5\cdot 14,4}=\sqrt{25\cdot 1,44}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{1,44}=5\cdot 1,2=6$.

1.94. Түбірдің мәнін табыңдар:

1) $\sqrt{13^2-12^2}$; 2) $\sqrt{21,8^2-18,2^2}$; 3) $\sqrt{313^2-312^2}$;

4) $\sqrt{17^2-64}$; 5) $\sqrt{45,8^2-44,2^2}$; 6) $\sqrt{117^2-108^2}$;

7) $\sqrt{6,8^2-3,2^2}$; 8) $\sqrt{\left(2\frac{3}{5}\right)^2-\left(2\frac{2}{5}\right)^2}$.

1.95. Өрнектің мәнін табыңдар:

1) $\sqrt{2}\sqrt{8}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$; 3) $\sqrt{27}\sqrt{3}$; 4) $\frac{\sqrt{52}}{\sqrt{117}}$;

5) $\sqrt{28}\sqrt{7}$; 6) $\frac{\sqrt{23}}{\sqrt{2300}}$; 7) $\sqrt{13}\sqrt{52}$; 8) $\frac{\sqrt{12500}}{\sqrt{500}}$.

1.96. Көбейткіштерді квадрат түбір таңбасының алдына шығарыңдар:

1) $\sqrt{27}$; 2) $\sqrt{98}$; 3) $\sqrt{80}$; 4) $\sqrt{160}$;

5) $\sqrt{432}$; 6) $\sqrt{675}$; 7) $3\sqrt{12}$; 8) $2\sqrt{18}$;

9) $4\sqrt{24}$; 10) $7\sqrt{75}$; 11) $\frac{3}{2}\sqrt{200}$; 12) $0{,}2\sqrt{300}$.

1.97. Көбейткішті квадрат түбір таңбасының астына алыңдар:

1) $2\sqrt{3}$; 2) $5\sqrt{2}$; 3) $3\sqrt{5}$; 4) $4\sqrt{7}$;

5) $\frac{1}{2}\sqrt{8}$; 6) $5\sqrt{92}$; 7) $\frac{2}{3}\sqrt{18}$; 8) $\frac{3}{4}\sqrt{\frac{32}{3}}$;

9) $5\sqrt{\frac{13}{25}}$; 10) $0{,}5\sqrt{60}$; 11) $0{,}3\sqrt{200}$; 12) $10\cdot\sqrt{0{,}07}$.

1.98. Көрсетілген амалды орындаңдар:

1) $6\sqrt{2}+5\sqrt{18}$; 2) $5\sqrt{75}-2\sqrt{27}$;

3) $\sqrt{2}+\sqrt{50}-\sqrt{18}$; 4) $3\sqrt{20}+5\sqrt{45}-2\sqrt{80}$;

5) $2\sqrt{48}+\sqrt{27}+\sqrt{12}$; 6) $\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)$.

3) $\sqrt{2}+\sqrt{50}-\sqrt{18}=\sqrt{2}+\sqrt{2\cdot 25}-\sqrt{2\cdot 9}=$

$=\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{25}-\sqrt{2}\cdot\sqrt{9}=\sqrt{2}+5\sqrt{2}-3\sqrt{2}=3\sqrt{2}$.

1.99. Сандарды салыстырыңдар:

1) $2\sqrt{5}$ және $\sqrt{45}$; 2) $\sqrt{27}$ және $4\sqrt{3}$;

3) $5\sqrt{7}$ және $\sqrt{63}$; 4) $7\sqrt{2}$ және $\sqrt{72}$.

2) *1-тәсіл:* $\sqrt{27}=\sqrt{9\cdot 3}=3\sqrt{3}<4\sqrt{3}$;

2-тәсіл: $4\sqrt{3}=\sqrt{16}\sqrt{3}=\sqrt{16\cdot 3}=\sqrt{48}>\sqrt{27}$.

1.100. Өрнек құрамындағы әріптер оң мәндер қабылдайды деп алып, өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\sqrt{16x^2}$; 2) $\sqrt{0{,}25a^2b^4}$; 3) $\sqrt{1{,}44a^2x^6}$;

4) $\sqrt{\frac{1}{9}m^2n^2}$; 5) $\sqrt{\frac{9x^2y^4}{16p^2q^2}}$; 6) $\sqrt{\frac{64a^4c^6}{81x^4y^2}}$.

1.101. Көрсетілген амалды орындаңдар:

1) $\left(\sqrt{20}-\sqrt{5}\right)\cdot\sqrt{5}$; 2) $\sqrt{3}\left(\sqrt{12}+\sqrt{3}\right)$;

3) $\left(\sqrt{7}-2\right)\left(\sqrt{7}+2\right)$; 4) $\left(\sqrt{8}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{8}+\sqrt{5}\right)$.

B

1.102. Айнымалының барлық мүмкін мәндерін табыңдар:

1) $\sqrt{x^2+9}$; 2) $\sqrt{\dfrac{1}{x}}$; 3) $\sqrt{|x|}$; 4) $\dfrac{4}{\sqrt{x}}$;

5) $\sqrt{|x|+1}$; 6) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}$; 7) $\sqrt{(4-x)^2}$; 8) $\dfrac{5}{\sqrt{x}-1}$.

8) $\begin{cases} x \geq 0, \\ \sqrt{x} \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow x \in [0;\ 1) \cup (1;\ +\infty).$

1.103.* белгісінің орнына $<, =, >$ таңбаларының тиістісін қойыңдар:

1) $\sqrt{7{,}5} * \sqrt{7{,}6}$; 2) $\sqrt{\dfrac{1}{3}} * \sqrt{0{,}3}$; 3) $\sqrt{0{,}1} * \sqrt{0{,}01}$;

4) $\sqrt{2{,}16} * \sqrt{2\dfrac{1}{6}}$; 5) $\sqrt{7} * 2{,}6$; 6) $\sqrt{\dfrac{5}{6}} * \sqrt{\dfrac{6}{11}}$;

7) $3{,}2 * \sqrt{9{,}8}$; 8) $\sqrt{\dfrac{1}{3}} * \sqrt{0{,}(3)}$.

1.104. Түбірдің мәнін табыңдар:

1) $\sqrt{\dfrac{165^2-124^2}{164}}$; 2) $\sqrt{\dfrac{98}{176^2-112^2}}$;

3) $\sqrt{\dfrac{149^2-76^2}{457^2-384^2}}$; 4) $\sqrt{\dfrac{145{,}5^2-96{,}5^2}{193{,}5^2-31{,}5^2}}$.

1) $\sqrt{\dfrac{165^2-124^2}{164}}=\sqrt{\dfrac{(165-124)(165+124)}{164}}=\sqrt{\dfrac{41\cdot 289}{164}}=\sqrt{\dfrac{289}{4}}=\dfrac{17}{2}=8\dfrac{1}{2}$.

1.105. Түбірдің мәнін табыңдар:

1) $\sqrt{0{,}87\cdot 49+0{,}82\cdot 49}$; 2) $\sqrt{1{,}44\cdot 1{,}21-1{,}44\cdot 0{,}4}$.

1.106. Айнымалының қандай мәндерінде теңдік орындалады:

1) $\sqrt{y^2} = -y$; 2) $\sqrt{y^4} = y^2$; 3) $\sqrt{x^6} = x^3$; 4) $\sqrt{c^{10}} = -c^5$?

1.107. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\sqrt{\left(2-\sqrt{2}\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}$; 2) $\sqrt{\left(\sqrt{3}-5\right)^2} + \sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}$;

3) $\sqrt{\left(\sqrt{7}-2\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{7}-5\right)^2}$; 4) $\sqrt{\left(\sqrt{15}-2\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{15}-3\right)^2}$.

2) $\sqrt{\left(\sqrt{3}-5\right)^2} + \sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2} = \left|\sqrt{3}-5\right| + \left|1-\sqrt{3}\right| =$

$= -\left(\sqrt{3}-5\right) - \left(1-\sqrt{3}\right) = 5-\sqrt{3}+\sqrt{3}-1 = 4$.

1.108. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\sqrt{64a^{10}b^6}$, $a > 0$, $b > 0$; 2) $\sqrt{25a^{16}x^{10}}$, $x < 0$;

3) $\dfrac{b}{a}\sqrt{\dfrac{a^2}{b^4}}$, $a > 0$; 4) $4x^2y\sqrt{\dfrac{x^{10}}{36y^{12}}}$, $x < 0$.

1.109. Көбейткішті түбір таңбасының алдына шығарыңдар:

1) $0{,}5\sqrt{60a^2}$, $a > 0$; 2) $2{,}1\sqrt{300x^4}$; 3) $\sqrt{-3c^3}$; 4) $\sqrt{9a^2b}$, $a < 0$;

5) $0{,}2\sqrt{225a^5}$; 6) $a\sqrt{18a^2b}$; 7) $-b\sqrt{48ab^4}$; 8) $\sqrt{-5m^7}$.

4) $\sqrt{9a^2b} = \sqrt{9}\sqrt{a^2}\sqrt{b} = 3\cdot|a|\sqrt{b} = -3a\sqrt{b}$.

1.110. Көбейткішті түбір таңбасының астына алыңдар:

1) $x\sqrt{\dfrac{1}{x}}$; 2) $ab\sqrt{\dfrac{b}{a}}$, $a > 0, b > 0$; 3) $2ab\sqrt{\dfrac{a}{2b}}$, $a < 0, b < 0$;

4) $-x^2\sqrt{5}$; 5) $x\sqrt{-\dfrac{2}{x}}$; 6) $-ab\sqrt{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$, $a > 0, b > 0$.

1.111. Сандарды салыстырыңдар:

1) $0{,}2\sqrt{200}$ және $10\sqrt{3}$; 2) $0{,}5\sqrt{108}$ және $9\sqrt{3}$;

3) $2{,}5\sqrt{63}$ және $4{,}5\sqrt{28}$.

1.112. Сандарды өсу ретімен орналастырыңдар:

1) $\dfrac{2}{3}\sqrt{72}$; $\sqrt{30}$; $7\sqrt{2}$; 2) $5\sqrt{\dfrac{7}{2}}$; $\sqrt{17}$; $\dfrac{1}{2}\sqrt{62}$; 3) $8\sqrt{\dfrac{1}{5}}$; $\sqrt{41}$; $\dfrac{2}{5}\sqrt{250}$.

1) $\frac{2}{3}\sqrt{72}=\sqrt{\frac{4}{9}\cdot 72}=\sqrt{32};\;\; 7\sqrt{2}=\sqrt{49\cdot 2}=\sqrt{98};\;\; \sqrt{30}<\sqrt{32}<\sqrt{98}\Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{30};\;\; \frac{2}{3}\sqrt{72};\;\; 7\sqrt{2}.$

1.113. Көбейтуді орындаңдар:

1) $\sqrt{ab}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$; 2) $\left(\sqrt{m}-\sqrt{n}\right)\sqrt{mn}$;

3) $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(2\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$; 4) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(3\sqrt{a}+2\sqrt{b}\right)$.

1.114. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}+x\right)$; 2) $\left(\sqrt{m}-\sqrt{n}\right)\left(m+n+\sqrt{mn}\right)$;

3) $\left(\sqrt{a}+2\right)\left(a-2\sqrt{a}+4\right)$; 4) $\left(x+\sqrt{y}\right)\left(x^2-x\sqrt{y}+y\right)$.

1.115. Өрнектің мәнін табыңдар:

1) $\frac{1}{3\sqrt{2}-4}-\frac{1}{3\sqrt{2}+4}$; 2) $\frac{1}{5+2\sqrt{6}}+\frac{1}{5-2\sqrt{6}}$;

3) $\frac{1}{11-2\sqrt{30}}-\frac{1}{11+2\sqrt{30}}$; 4) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.

1.116. Бөлшекті қысқартыңдар:

1) $\frac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$; 2) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}$; 3) $\frac{2\sqrt{2}-x\sqrt{x}}{2+\sqrt{2x}+x}$;

4) $\frac{a-\sqrt{3a}+3}{a\sqrt{a}+3\sqrt{3}}$; 5) $\frac{2\sqrt{10}-5}{4-\sqrt{10}}$; 6) $\frac{9-2\sqrt{3}}{3\sqrt{6}-2\sqrt{2}}$;

7) $\frac{\sqrt{70}-\sqrt{30}}{\sqrt{35}-\sqrt{15}}$; 8) $\frac{\sqrt{15}-5}{\sqrt{6}-\sqrt{10}}$; 9) $\frac{\left(\sqrt{10}-1\right)^2-3}{\sqrt{10}+\sqrt{3}-1}$.

1) $\frac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{\sqrt{x^3}-\sqrt{y^3}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=$

$=\frac{\left(\sqrt{x}\right)^3-\left(\sqrt{y}\right)^3}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\left(\sqrt{x}\right)^2+\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}+\left(\sqrt{x}\right)^2\right)}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=x+\sqrt{xy}+y.$

1.117. Бөлшектің бөліміндегі иррационалдықтан құтылыңдар:

1) $\frac{x-\sqrt{xy}+y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$; 2) $\frac{9+3\sqrt{a}+a}{3+\sqrt{a}}$; 3) $\frac{1-2\sqrt{x}+4x}{1-2\sqrt{x}}$;

4) $\dfrac{a^2b+2a\sqrt{b}+4}{a\sqrt{b}+2}$; 5) $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{y}}$; 6) $\dfrac{a+\sqrt{b}}{a\sqrt{b}}$;

7) $\dfrac{7-\sqrt{a}}{49-7\sqrt{a}+a}$; 8) $\dfrac{\sqrt{mn}+1}{mn+\sqrt{mn}+1}$; 9) $\dfrac{a+2\sqrt{2a}+2}{\sqrt{a}+\sqrt{2}}$;

10) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}$; 11) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}+2}$; 12) $\dfrac{x-2\sqrt{3x}+3}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}$.

10) $$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{3}+1-\sqrt{2}}{\left(\sqrt{3}+1+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+1-\sqrt{2}\right)}=$$

$$\frac{\sqrt{3}+1-\sqrt{2}}{\left(\sqrt{3}+1\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}+1-\sqrt{2}}{2\left(\sqrt{3}+1\right)}=\frac{\left(\sqrt{3}+1-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}{2\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)-\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2\cdot 2}=\frac{2-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

C

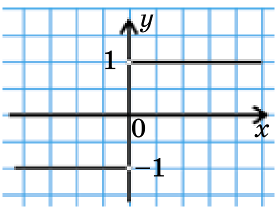
1.118. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $a^2+a\sqrt{3a}+3a+3\sqrt{3a}+9,\ a>0$;

2) $4x^2-2x\sqrt{2x}+2x-\sqrt{2x}+1,\ x>0$.

1.119.* Функцияның графигін салыңдар:

1) $y=\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$; 2) $y=-\dfrac{2\sqrt{x^2}}{x}$; 3) $y=x\sqrt{x^2}$.



1.10-сурет

1) $y=\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$ функциясының анықталу облысы $x\neq 0$, $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$. $x>0$ болса, $\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}=\dfrac{|x|}{x}=\dfrac{x}{x}=1$; $x<0$ болса, берілген функция $y=\begin{cases}\text{егер } x>0 \text{ болса, онда } 1,\\ \text{егер } x<0 \text{ болса, онда } -1\end{cases}$ түрінде жазылады. Оның графигі 1.10-суретте көрсетілген.

1.120. $x=\dfrac{2ab}{b^2+1}$ деп алып, $\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$ өрнегінің мәнін табыңдар.

1.121. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\dfrac{n+2+\sqrt{n^2-4}}{n+2-\sqrt{n^2-4}}+\dfrac{n+2-\sqrt{n^2-4}}{n+2+\sqrt{n^2-4}}$; 2) $\dfrac{a}{\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}}-b\sqrt{\dfrac{a^2}{b^2}-1}+\dfrac{b}{\sqrt{\dfrac{a^2}{b^2}-1}}$.

1.122. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}+2-\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$, x I 2.

1.123. $\dfrac{\sqrt{a^4-6a^3+9a^2}+\sqrt{4a^4-4a^3+a^2}}{\sqrt{a^2+4a+4}}$ өрнегін ықшамдаңдар, мұндағы $0,5<a<3$.

1.124. $\dfrac{\sqrt{a^2-3a}+\sqrt{a^2-4a+3}}{\sqrt{6-2a}}$ өрнегін ықшамдаңдар.

1.125. Бөлшектің бөліміндегі иррационалдықтан құтылыңдар:

1) $\dfrac{y}{\sqrt{x+\sqrt{x^2-y^2}}}$; 2) $\dfrac{\sqrt{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}}{\sqrt{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}}$;

3) $\dfrac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{6+4\sqrt{2}}}$; 4) $\dfrac{50}{3+\sqrt{2}-\sqrt{1+\sqrt{2}}}$.

1.126.* «Күрделі радикал формулаларын» дәлелдеңдер:

$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$, $a>0,\ a^2>b>0$.

1.127. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\sqrt{12+\sqrt{63}}-\sqrt{10,5}$; 2) $\sqrt{28-10\sqrt{3}}+\sqrt{28+10\sqrt{3}}$;

3) $\sqrt{\left|12\sqrt{3}-21\right|}-\sqrt{12\sqrt{3}+21}$; 4) $\sqrt{a\pm\sqrt{a^2-b^2}}$.

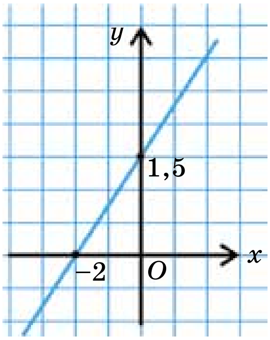
ҚАЙТАЛАУҒА АРНАЛҒАН ЖАТТЫҒУЛАР

1.128. $x=8,4$; $y=-0,6$ деп алып, $\dfrac{(y-x)^2}{x+y}:\left(\dfrac{2xy}{y^2-x^2}+\dfrac{x}{x+y}-\dfrac{y}{y-x}\right)$ өрнегінің мәнін табыңдар.

1.129. Қосындысы $\sqrt{10}$-ға, айырмасы $\sqrt{6}$-ға тең екі санның көбейтіндісі 1-ге тең екенін дәлелдеңдер.

1.130. Теңдеуді шешіңдер:

1) $x^2-8x=0$; 2) $4y^2-1=0$; 3) $4x^2+1=0$.



1.11-сурет

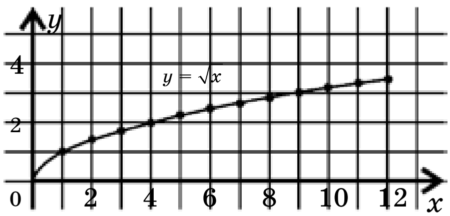
1.131. 1.11-суретте берілген түзудің бұрыштық коэффициентін табыңдар.

1.5. $y = \sqrt{x}$ Функциясының графигі

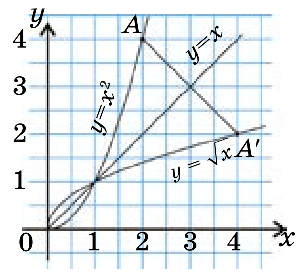
$y = \sqrt{x}$ функциясы және оның графигі. Егер $x \geqslant 0$ болса, $\sqrt{x}$ өрнегінің мағынасы бар және кез келген $x \geqslant 0$ санына жалғыз $\sqrt{x} \geqslant 0$ саны сәйкес қойылса, $y = \sqrt{x}$ $(x \geqslant 0)$ теңдігі x және y айнымалылары арасында функционалды тәуелділікті береді. Бұл функцияның анықталу облысы $D = [0; +u)$.

$y = \sqrt{x}$ функциясының графигін салу үшін 0,01-ге дейінгі дәлдікпен оның мәндерінің кестесін құрайық:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\sqrt{x}$	0	1	1,41	1,73	2	2,24	2,45	2,65	2,83	3	3,16



1.12-сурет



1.13-сурет

Кестедегі анықталған нүктелерді координаталық жазықтықта белгілеп, оларды сызықпен қосамыз. Сонда 1.12-суретте көрсетілген график шығады. Бұл $y = \sqrt{x}$ функциясының графигі.

- *Егер $x = 0$ болса, $y = \sqrt{0} = 0$. $y = \sqrt{x}$ функциясының графигі координаталар бас нүктесі арқылы өтеді.*
- *Егер $x > 0$ болса, $y = \sqrt{x} > 0$. Функцияның графигі I координаталық ширекте орналасады.*
- *$y = \sqrt{x}$ және $y=x^2$* $(x ı 0)$ *функцияларының графиктері $y=x$ түзуіне қатысты симметриялы орналасады* (1.13-сурет).

Шынында да, $y=x$ түзуіне қатысты $A'(a, b)$ нүктесіне симметриялы нүкте $A'(b, a)$ болып табылады, яғни өзара симметриялы нүктелердің координаталары алмасып орналасады.

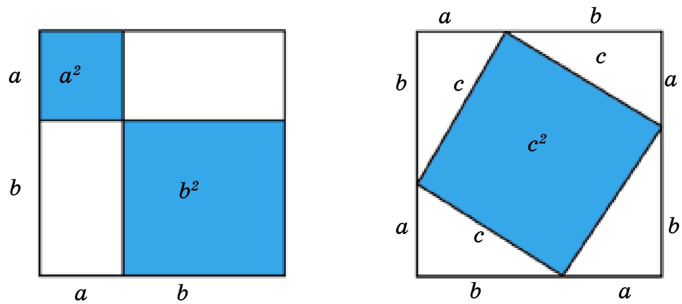
Сонымен, $M(x;\ x^2)$ $(x \geq 0)$ нүктесі $y=x^2$ функциясы графигінің нүктесі болса, онда оған симметриялы нүкте $M'(x^2;\ x)$ болады. Ал $y=\sqrt{x^2}=|x|=x$ болғандықтан, M' нүктесі $y=\sqrt{x}$ функциясының графигіне тиісті.

Осы сияқты $y=\sqrt{x}$ функциясы графигіне тиісті $N(x;\ \sqrt{x})$ нүктесіне симметриялы $N'(\sqrt{x};\ x)$ нүктесінің $y=x^2$ функциясы графигіне тиісті болатынын көрсетуге болады. Бұл функциялардың графиктері $y=x$ түзуіне қатысты симметриялы.

Квадрат түбірдің геометрияда қолданылуы. Ежелгі заманнан-ақ практикалық қажеттіліктен санның квадрат түбірін анықтау тәсілдері пайда болған. Мысалы, осы тәсілмен геометрия курсында Пифагор теоремасы дәлелденеді.

Тік бұрышты үшбұрыштың гипотенузасының квадраты оның катеттерінің квадраттарының қосындысына тең.

Бұл теореманы ежелгі үнділіктер 1.14-суреттің көмегімен дәлелдей білген. Бұл суреттердегі боялған фигуралардың аудандары бірдей. Егер 1.14, *а*-суреттегі боялған фигураның ауданы a^2+b^2 болса, 1.14, *ә*-суреттегі боялған фигураның ауданы c^2-қа тең. Олай болса, $c^2=a^2+b^2$, мұндағы a және b — тік бұрышты үшбұрыштың катеттері, c — оның гипотенузасы.

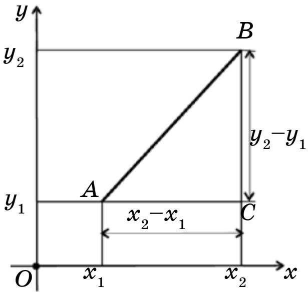


а) *ә)*

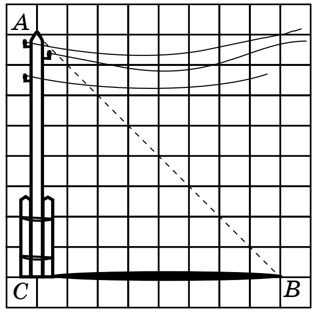
1.14-сурет

Пифагор теоремасынан $A(x_1;\ y_1)$ және $B(x_2;\ y_2)$ нүктелерінің арақашықтығын анықтауға болады. Теорема бойынша $AB^2=AC^2+BC^2$ (1.15-сурет) немесе $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}$. $AC=|x_2-x_1|$, $BC=|y_2-y_1|$ болғандықтан,

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \qquad (1)$$



1.15-сурет



1.16-сурет

1-мысал. $A(-3;\ 0)$ және $B(9;\ 5)$ нүктелерінің арақашықтығын табу керек.

Шешуі. (1) формуладан

$$AB = \sqrt{\left(9-(-3)\right)^2+(5-0)^2} = \sqrt{12^2+5^2} = \sqrt{169} = 13.$$

2-мысал. Егер биіктігі 8 м баған көлеңкесінің ұзындығы 6 м болса, көлеңкенің B ұшынан бағанның A басына дейінгі қашықтықты табу керек (1.16-сурет).

Шешуі. AC=8 м, BC=6 м болғандықтан, Пифагор теоремасы бойынша

$$AB = \sqrt{AC^2+BC^2} = \sqrt{8^2+6^2} = \sqrt{100} = 10 \text{ м}.$$

1. $y=\sqrt{x}$ функциясының қандай қасиеттерін білесіңдер?
2. $y=\sqrt{x}$ және $y=x^2$ (x I 0) функцияларының графиктері өзара қалай орналасқан?
3. Пифагор теоремасын тұжырымдаңдар.
4. Екі нүктенің арақашықтығы қандай формуламен анықталады?

Практикалық жұмыс

Бір координаталар жүйесіне $y=x^2$ (x J 0); $y=x$ және $y=-\sqrt{x}$ (x I 0) функцияларының графиктерін салыңдар. Салынған сызба бойынша қорытынды жасаңдар. $A(-2;4)$, $C(4;4)$ және $B(4;\ -2)$ нүктелері қай функцияның графигіне тиісті? AB, AC және BC кесінділерінің ұзындықтарын есептеңдер. ABC үшбұрышы тік бұрышты үшбұрыш бола ма? Жауаптарыңды негіздеңдер.

Хабарлама дайындаңдар!

Француз математигі әрі философы, тік бұрышты декарттық координаталар жүйесін енгізіп, аналитикалық геометрия негіздерін қалаушылардың бірі болған Р. Декарт жайлы шағын хабарлама дайындаңдар.

Рене Декарт
(1596–1650)

ЕСЕПТЕР

А

1.132. Ауданы S, қабырғасының ұзындығы a-ға тең квадрат берілген. 1) S-тің a-ға; 2) a-ның S-ке тәуелділігін формуламен жазыңдар.

1.133. $y=\sqrt{x}$ функциясының графигі бойынша 1) x=0,5; 1,5; 2; 5 деп алып, y-тің; 2) y=0,5; 1,5; 2,5 деп алып, x-тің жуық мәндерін табыңдар.

1.134. $y=\sqrt{x}$ функциясының графигі бойынша 1) x=1,4; 2,3; 5,5 деп алып, функцияның; 2) y=1,2; 1,8; 2,5 деп алып, аргументтің сәйкес жуық мәндерін табыңдар.

1.135. $A(16;\ 4)$, $B(16;-4)$, $C(0{,}09;\ 0{,}3)$, $D(-25;\ 5)$ нүктелерінің қайсысы $y=\sqrt{x}$ функциясының графигінде жатады?

1.136. Егер тіктөртбұрыштың қабырғалары 3 см және 4 см болса, диагоналінің ұзындығы қандай?

1.137. 1) $O(0;\ 0)$ және $A(4;\ 3)$; 2) $B(5;\ 2)$ және $C(1;\ -1)$; 3) $D(-5;\ 6)$ және $E(2;\ 6)$; 4) $M(-6;\ 0)$ және $N(2;\ 6)$ нүктелерінің арақашықтығын табыңдар.

2) $BC=\sqrt{(1-5)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$.

1.138. Тік бұрышты үшбұрыштың гипотенузасы c-ға, катеттері a мен b-ға тең деп алып, оның белгісіз қабырғасын табыңдар: 1) a=12 см, b=5 см; 2) a=3 м, c=5 м; 3) b=7 м; c=25 м.

В

1.139. Радиусы r-ге тең шеңбердің ауданы $S=\pi r^2$ формуласымен анықталады. 1) S-ті шеңбер диаметрі d арқылы; 2) r-ді S арқылы; 3) d-ны S арқылы өрнектейтін формуланы жазыңдар.

1.140. Егер кубтың қыры a, толық бетінің ауданы S болса, 1) S-ті a арқылы; 2) a-ны S арқылы өрнектейтін формуланы жазыңдар.

1.141. 1) $A(a;2)$; 2) $B\left(a;\sqrt{5}\right)$; 3) $C(25;a)$; 4) $D(7;a)$ нүктесі $y=\sqrt{x}$ функциясы графигінде жататындай етіп, a санын анықтаңдар.

1) $2=\sqrt{a}\Rightarrow a=4\Rightarrow A(4;2)$ нүктесі $y=\sqrt{x}$ функциясының графигіне тиісті болады.

1.142. Егер $x\in[1;4]$ болса, онда $y=\sqrt{x}$ функциясының мәндері қандай аралықта өзгереді?

1.143. Теңдеуді шешіңдер:

1) $\sqrt{x}=5$; 2) $\sqrt{x}=11$; 3) $\sqrt{x}=\sqrt{7}$; 4) $\sqrt{x}=2\sqrt{3}$.

1.144. $y=\sqrt{x}$ функциясының графигі 1) $y=1$; 2) $y=5$; 3) $y=-3$ теңдеулерімен берілген түзумен қиылыса ма? Егер қиылысса, қиылысу нүктесін табыңдар.

1.145. Бір-бірінен 24 м қашықтықта орналасқан, биіктіктері 5 м және 12 м болатын бағандардың ұштарына сым керілген. Осы сымның ұзындығын табыңдар.

1.146. Төбелері $A(-2;\ 3)$, $B(3;\ 3)$ және $C(-1;\ -2)$ нүктелерінде орналасқан үшбұрыштың қабырғаларының ұзындығын табыңдар.

1.147. Төбелері $A(0;\ 0)$, $B(3;\ 1)$ және $C(1;\ 7)$ нүктелерінде орналасқан үшбұрыштың тік бұрышты үшбұрыш болатынын көрсетіңдер.

C

1.148. Егер P нүктесінің абсциссасы 5, осы нүктеден $Q\ (-1;\ 3)$ нүктесіне дейінгі қашықтығы 10 болса, P нүктесінің ординатасын табыңдар.

1.149. $y=\sqrt{x}$ функциясының мәндері 1) $[0;\ 4]$; 2) $[0{,}04;\ 1]$, 3) $[25;\ 225]$ аралығында жатуы үшін оның аргументі қандай мәндер қабылдауы қажет?

1.150.* 1) $y=-\sqrt{x}$; 2) $y=\sqrt{-x}$, x J 0; 3) $y=\sqrt{|x|}$; 4) $y=2\sqrt{x}$ функциясының графигін салыңдар.

1.151. a-ның қандай мәндерінде 1) $y=a\sqrt{x}$; 2) $y=\sqrt{ax}$; 3) $y=\sqrt{a|x|}$ функциясының графигі $A(3;\ 1)$ нүктесі арқылы өтеді?

1.152.* 1) $\sqrt{10}$; 2) $\sqrt{34}$; 3) $\sqrt{125}$; 4) $\sqrt{229}$ өрнектерінің жуық мәндерін салу және өлшеу тәсілдері арқылы табыңдар.

ҚАЙТАЛАУҒА АРНАЛҒАН ЖАТТЫҒУЛАР

1.153. Өрнектің мәнін табыңдар:

1) $2\sqrt{0{,}09}-0{,}2\sqrt{225}$; 2) $0{,}1\sqrt{400}+2{,}1\sqrt{\frac{1}{9}}$.

1.154. Өрнектің анықталу облысын табыңдар:

1) $\sqrt{4-3x}$; 2) $\dfrac{1}{\sqrt{y-5}}$; 3) $\dfrac{1}{\sqrt{y}-5}$; 4) $\dfrac{1}{\sqrt{y}+5}$.

1.155. Кездейсоқ таңдамада ығыспалы қатардың жиіліктері берілген:

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	2	3	5	7	6	2

1) Таңдама көлемін; 2) арифметикалық орта мәнін; 3) модасы мен медианасын табыңдар; 4) таңдаманың жиіліктер алқабын тұрғызыңдар.

1.156. Жылдамдығы 10 км/сағ болатын моторлы қайық жағалаудағы елді мекеннен өзен ағысына қарсы бағытта жүзіп шықты. 45 минуттан кейін қайықтың моторы бұзылып, ол өзен ағысымен 3 сағаттан соң өзі шыққан елді мекенге жетті. Өзен ағысының жылдамдығы қандай?

1.157.* Егер $a \geq 0, b \geq 0$ болса, онда $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ теңсіздігі орындалатынын дәлелдеңдер.

І БӨЛІМГЕ ҚОСЫМША ЕСЕПТЕР

1.158. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\sqrt{\left(\sqrt{7}-2\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{7}-5\right)^2}$; 2) $\sqrt{\left(\sqrt{15}-2\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{15}-3\right)^2}$;

3) $\sqrt{\sqrt{28-16\sqrt{3}}}$; 4) $\sqrt{\sqrt{68-\sqrt{4608}}}$.

1.159. Көбейткіштерге жіктеңдер:

1) $7-\sqrt{14}+\sqrt{7}$; 2) $\sqrt{6}+\sqrt{27}-\sqrt{18}$;

3) $\sqrt{x^2-y^2}+\sqrt{x+y}$, $x>0, y>0$; 4) $\sqrt{ab+ac}-\sqrt{b^2+bc}$, $a>0, b>0, c>0$;

5) $2+y\sqrt{x}-2\sqrt{xy}-\sqrt{y}$; 6) $mn+m\sqrt{m}+n\sqrt{n}+\sqrt{mn}$.

1.160. Айнымалының қандай мәндерінде теңдік орындалады:

1) $\sqrt{x^6}=-x^3$; 2) $\sqrt{y^4}=y^2$;

3) $\sqrt{c^4}=-c^2$; 4) $\sqrt{4m^4-4m+1}=1-2m$;

5) $\sqrt{n^4+6n^2+9}=n^2+3$; 6) $\sqrt{(a-5)^2}=5-a$?

1.161. Есептеңдер:

1) $\sqrt{146,5^2-109,5^2+27\cdot 256}$; 2) $\sqrt{117,5^2-26,5^2-1440}$;

3) $\sqrt{\dfrac{149^2-76^2}{37^2-36^2}}$; 4) $\sqrt{\dfrac{129^2-8^2}{93^2-44^2}}$.

1.162. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\sqrt{\dfrac{a^{10}}{16b^6}}$, $a<0, b<0$; 2) $\sqrt{121a^{16}b^{10}}$, $a>0$, $b<0$;

3) $\dfrac{a+\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}}$, $a<0$, $b<0$; 4) $\dfrac{\sqrt{ab}-\sqrt{b^2}}{b}+\sqrt{\dfrac{a}{b}}$, $a<0$, $b<0$.

1.163. Амалдарды орындаңдар:

1) $3\sqrt{48}-\sqrt{75}+\dfrac{1}{7}\sqrt{147}$; 2) $\sqrt{25a^5}+4a\sqrt{a^3}-a^2\sqrt{a}$;

3) $\left(\dfrac{1}{3}\sqrt{5}+3\sqrt{2}\right)^2-\left(3\sqrt{2}-\dfrac{1}{3}\sqrt{5}\right)^2$; 4) $\left(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$.

1.164. Өрнектің мәнін табыңдар:

1) x^2+2x+3, мұндағы $x=\sqrt{3}-1$; 2) x^2-6x+3, мұндағы $x=3-\sqrt{7}$.

1.165. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\sqrt{7+\sqrt{24}}$; 2) $\sqrt{7-\sqrt{24}}$; 3) $\sqrt{5+\sqrt{24}}$;

4) $\sqrt{7+\sqrt{48}}$; 5) $\sqrt{17-4\sqrt{9+4\sqrt{5}}}$; 6) $2\sqrt{6+2\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$.

2) $\sqrt{7-\sqrt{24}}=\sqrt{7-\sqrt{4\cdot 6}}=\sqrt{6-2\sqrt{6}+1}=$

$=\sqrt{\left(\sqrt{6}-1\right)^2}=\left|\sqrt{6}-1\right|=$ $\left|\sqrt{6}>1\right.$ болғандықтан, $\left.\right|=\sqrt{6}-1$.

1.166. Бөлшектің бөліміндегі иррационалдықтан құтылыңдар:

1) $\dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$; 2) $\dfrac{x^2-2x}{\sqrt{x+2}-2}$; 3) $\dfrac{x}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1-2x}}$.

1.167. 1) $\sqrt{17}-\sqrt{15}$ және $\sqrt{7}-\sqrt{5}$; 2) $\sqrt{3+\sqrt{5+\sqrt{8}}}$ және $1+\sqrt{2}$ сандарын салыстырыңдар.

1.168. Көбейткішті түбір таңбасының астына алыңдар:

1) $2xy\sqrt{\dfrac{x}{2y}}$, $x<0$, $y<0$; 2) $mn\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}$, $m<0$, $n>0$;

3) $(y-1)\sqrt{\dfrac{3y}{1-y^2}}$, $0<y<1$; 4) $(2-x)\sqrt{\dfrac{5x}{x^2-4}}$, $-2<x<0$.

1.169. Теңдеуді шешіңдер:

1) $10\sqrt{(x-3)^2}=8$; 2) $(x+1)\sqrt{3}=x+3$;

3) $\left(2-x\sqrt{6}\right)\sqrt{2}=2\cdot\left(x-\sqrt{6}\right)$; 4) $\left(x\sqrt{5}-2\right)\sqrt{10}=5x-2\sqrt{5}$.

1.170. Есептеңдер:

1) $\sqrt{14+6\sqrt{5}}+\sqrt{14-6\sqrt{5}}$; 2) $\sqrt{28-10\sqrt{3}}+\sqrt{28+10\sqrt{3}}$;

3) $\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^4$; 4) $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^6$.

1.171. Көбейткіштерге жіктеңдер:

1) $x-6\sqrt{x}-7$; 2) $m+\sqrt{m}-6$;

3) $a-6\sqrt{a}+5$; 4) $2y+\sqrt{y}-3$.

1.172. Функцияның графигін салыңдар:

1) $y=\sqrt{x}+2$; 2) $y=\sqrt{x}-2$; 3) $y=3\sqrt{x}$; 4) $y=-3\sqrt{x}$.

1.173. Егер m, n және $\sqrt{m}+\sqrt{n}$ рационал сандар болса, онда $\sqrt{m}$ және $\sqrt{n}$ сандары да рационал болатынын дәлелдеңдер.

1.174. 1) $\sqrt{2+\sqrt{2}}$; 2) $\sqrt{5}+\sqrt{2}-1$ санының иррационал сан болатынын көрсетіңдер.

1.175. Есептеңдер:

1) $\sqrt{15+2\sqrt{26}}\cdot\sqrt{4+\sqrt{1+2\sqrt{26}}}\cdot\sqrt{4-\sqrt{1+2\sqrt{26}}}$; 2) $\sqrt{\dfrac{11+\sqrt{21}}{11-\sqrt{21}}}+\sqrt{\dfrac{11-\sqrt{21}}{11+\sqrt{21}}}$.

1.176. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\dfrac{5}{4+\sqrt{11}}+\dfrac{8}{\sqrt{19}-\sqrt{11}}-\dfrac{10}{\sqrt{19}+3}$;

2) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}$.

1.177. $a=\dfrac{1}{2}\left(m+\dfrac{1}{m}\right)$, $b=\dfrac{1}{2}\left(n+\dfrac{1}{n}\right)$ деп алып,

1) $ab-\sqrt{a^2-1}\cdot\sqrt{b^2-1}$; 2) $ab+\sqrt{a^2-1}\cdot\sqrt{b^2-1}$ өрнегін түрлендіріңдер.

2-бөлім. КВАДРАТ ТЕҢДЕУЛЕР

Бөлімді оқып-үйрену барысында келесі мақсаттарға қол жеткіземіз:

- квадрат теңдеудің анықтамасын білу;
- квадрат теңдеулердің түрлерін ажырату;
- квадрат үшмүшенің түбірі ұғымын меңгеру;
- үшмүшеден екімүшенің толық квадратын бөлу;
- квадрат үшмүшені көбейткіштерге жіктеу;
- $|ax^2+bx|+c = 0$; $ax^2+b|x|+c = 0$ түріндегі теңдеулерді шешу;
- бөлшек-рационал теңдеулерді шешу;
- квадрат теңдеулерге келтірілетін теңдеулерді шешу;
- мәтінді есептерді квадрат теңдеулердің көмегімен шешу;
- мәтінді есептерді бөлшек-рационал теңдеулердің көмегімен шешу;
- екінші дәрежелі теңдеулер жүйесін шешу тәсілдерін білу.

2.1. Квадрат теңдеу және оның түбірлері

Квадрат теңдеудің анықтамасы.

1-мысал. Айнұр сыныпқа келген ер балалардың бір-бірімен қол алысып амандасып жатқанын көріп, барлық қол алысулар саны 45-ке тең болғанын және сыныпқа келген барлық ер балалар бір-бірімен толық амандасып шыққанын байқады. Осы мәлімет бойынша сыныпқа барлығы неше ер бала келгенін тауып көрейік.

Сыныпқа келген ер балалар санын x деп алайық. Ер балалардың әрқайсысы басқа $(x-1)$ ер баламен бір-бір рет қол алысып амандасып шығады. Сондықтан барлық амандасулар саны $\frac{x(x-1)}{2}$. Бұл өрнекте екі ер баланың бір-бірімен қол алысуы екі рет ескерілген. Мысалы, Санжар Азаматқа және Азамат Санжарға қолын берді. Олай болса, Айнұрдың есептеуі бойынша $\frac{x(x-1)}{2}=45$. Осыдан $x^2-x-90=0$ теңдеуін аламыз. Мұндай теңдеулер **квадрат теңдеу** деп аталады.

Осы тарауда квадрат теңдеулерді аналитикалық жолмен (формула көмегімен) шешуді үйренеміз. Ал әзірге бұл есепті талдау тәсілімен шешіп, $x=10$ болатынын, яғни сыныпқа 10 ер бала кіргенін анықтаймыз.

Жауабы: 10 бала.

Анықтама. $ax^2+bx+c=0$ *түріндегі теңдеу* **квадрат теңдеу** деп аталады. Мұндағы x — айнымалы шама, a, b, c — берілген сандар. a($a\neq 0$) шамасы 1-коэффициент, b шамасы 2-коэффициент, c бос мүше деп аталады.

Мысалы, $5x^2-x-4=0$ — квадрат теңдеу, мұндағы $a=5$, $b=-1$, $c=-4$. ax^2+bx+c өрнегі **квадрат үшмүше** деп аталады.

Егер $x=u$ саны квадрат теңдеудің сол жақ бөлігін нөлге айналдырса, яғни $au^2+bu+c=0$ теңбе-теңдігі орындалса, u саны квадрат теңдеудің ***түбірі*** деп аталады. Мысалы, $x=2$ саны $2x^2+3x-14=0$ теңдеуінің түбірі болады, себебі $2\cdot 2^2+3\cdot 2-14=8+6-14=14-14=0$. Ал $x=5$ саны үшін $2\cdot 5^2+3\cdot 5-14=50+15-14=51\neq 0$ теңсіздігі орындалғандықтан, $x=5$ саны $2x^2+3x-14=0$ квадрат теңдеуінің түбірі бола алмайды.

Егер $a=1$ болса, онда квадрат теңдеуді ***келтірілген квадрат теңдеу*** деп атайды. Мысалы, $x^2-5x+6=0$, $x^2+5x-1=0$ — келтірілген квадрат теңдеулер.

Сонымен,

1) $ax^2+bx+c=0$, ($a\neq 0$) — квадрат теңдеудің жалпы түрі;

2) $x^2+px+q=0$ — келтірілген квадрат теңдеу, мұндағы p және q — берілген сандар.

Толымсыз квадрат теңдеулерді шешу.

Дербес жағдайларда квадрат теңдеу коэффициенттерінің біреуі немесе бос мүшенің нөлге тең болуы мүмкін. Мұндай жағдайда квадрат теңдеу *толымсыз* (толық емес) *квадрат теңдеу* деп аталады.

1) $ax^2+bx=0$; $c=0$; 2) $ax^2+c=0$, $b=0$; 3) $ax^2=0$, $b=c=0$ — толымсыз квадрат теңдеулер.

Осы теңдеулердің шешуіне тоқталайық.

1) $ax^2+bx=0$ ($c=0$) теңдеуін шешейік. Ол үшін теңдеуді көбейткіштерге жіктейміз:

$$x(ax+b)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l} x=0, \\ ax+b=0 \end{array}\right. \Rightarrow x_1=0,\ x_2=-\frac{b}{a}.$$

2-мысал. $5x^2+4x=0$ теңдеуін шешу керек.

Мұнда $a=5$, $b=4$, $c=0$ $\Rightarrow 5x^2+4x=0 \Rightarrow x(5x+4)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ 5x+4=0 \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1=0,\ x_2=-\dfrac{4}{5}.$

2) $ax^2+c=0$, $b=0 \Rightarrow ax^2=-c \Rightarrow x^2=-\dfrac{c}{a}.$

Егер $-\dfrac{c}{a}$ І 0 болса, онда теңдеудің екі түбірі бар: $x=\pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$.

Егер $-\dfrac{c}{a}$ Н 0 болса, онда теңдеудің түбірі жоқ.

3-мысал. $x^2-3=0$ теңдеуін шешу керек.

$a=1$, $b=0$, $c=-3$. $x^2-3=0 \Rightarrow x^2=3 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$.

Жауабы: $x_1=\sqrt{3}$; $x_2=-\sqrt{3}$.

4-мысал. $3x^2+2=0$ теңдеуін шешу керек.

$3x^2+2=0 \Rightarrow 3x^2=-2 \Rightarrow x^2=-\dfrac{2}{3}<0$. Санның квадраты теріс болмайды. Демек, теңдеудің түбірі жоқ. Жауабы: $\varnothing$.

3) $ax^2=0$, ($b=c=0$) теңдеуінің өзара тең екі шешімі бар деп есептейміз: $x_1=x_2=0$.

1. Қандай теңдеуді квадрат теңдеу деп атайды?
2. Квадрат теңдеудегі бірінші коэффициент $a \neq 0$ шарты не үшін қажет?
3. Қандай сандарды квадрат теңдеудің түбірлері деп атайды?
4. Квадрат үшмүше дегеніміз не?
5. Қандай теңдеулерді толымсыз квадрат теңдеулер деп атайды?
6. Толымсыз квадрат теңдеулерді қалай шешеді?
7. Толымсыз квадрат теңдеулердің түбірлері әрқашан да табыла ма? Қандай теңдеудің әрқашан да екі түбірі болады?

Практикалық жұмыс

Халық арасында ауданы 100 м^2 жер телімін «бір сотық жер» деп атап кеткен. Саяжайға бөлінген квадрат пішінді 6 сотық жер телімін сым темірден тоқылған тормен қоршап шығу үшін неше бума тор алу қажет? Саяжайға кіретін қақпаның ұзындығы 3 м, ал бір бума тордың ұзындығы 10 м. Егер 1 бума тордың бағасы 10 мың теңге болса, барлық бума торға неше теңге жұмсалады? Артылып қалған тордың құны қандай?

ЕСЕПТЕР

A

2.1. Квадрат теңдеулердің коэффициенттерін атап көрсетіңдер:

1) $x^2-2x-1=0$; 2) $3x^2+x+1=0$; 3) $-2x^2+3x=0$;
4) $x^2-5=0$; 5) $-x^2+6x-7=0$; 6) $12x^2=0$.

2.2. Толымсыз квадрат теңдеулерді анықтап, нөлге тең коэффициентін көрсетіңдер:

1) $7x^2-3x=0$; 2) $2x+5=0$; 3) $x^2+x-1=0$;
4) $-x^2-x+3=0$; 5) $-4x^2+1=0$; 6) $8x^2=0$.

2.3. Теңдеулерді $ax^2+bx+c=0$ түрінде жазыңдар:

1) $(2x-1)(2x+1)=x(2x+3)$; 2) $(3x+2)^2=(x+2)(x-3)$;
3) $(x+1)(x+2)=(2x-1)(x-2)$; 4) $4x^2-2x(3x+1)=5$;
5) $(x+3)(3x-2)=(4x+5)(2x-3)$; 6) $x^2+(1-x)(1-3x)=x$.

5) $(x+3)(3x-2)=(4x+5)\cdot(2x-3)$; $3x^2-2x+9x-6=8x^2-12x+10x-15$; $(8x^2-3x^2)+(-12x+10x+2x-9x)+(-15+6)=0 \Rightarrow 5x^2-9x-9=0$.

2.4. Теңдеуді оған мәндес квадрат теңдеумен алмастырыңдар:

1) $-5x(x+6)=4(x-3)-10$;
2) $(x-8)(2x+3)=(3x-5)(x+4)$;
3) $(x-3)(3x+9)=(x-8)(x+9)$;
4) $(y-7)(7y+49)=(y+8)(y-7)$.

2.5. Теңдеуді шешіңдер:

1) $x^2=64$; 2) $y^2=0,09$; 3) $3x^2=48$; 4) $x^2=3$;
5) $y^2-10=39$; 6) $x^2+5=30$; 7) $5t^2-3=77$; 8) $\frac{1}{2}x^2=\frac{8}{9}$.

2.6. Теңдеудің түбірін табыңдар:

1) $2x^2-5x=0$; 2) $5x^2+7x=0$; 3) $2x-5x^2=0$;
4) $4m^2-3m=0$; 5) $y^2-2y-8=2y-8$; 6) $3u^2+7=6u+7$.

2) $5x^2+7x=0 \Rightarrow x(5x+7)=0 \Rightarrow x_1=0,\ x_2=-\frac{7}{5}$.

2.7. Теңдеудің түбірлері бар ма? Бар болса, осы түбірлерді табыңдар:

1) $4x^2+1=0$; 2) $2m^2-3m=8-3m$;
3) $5n^2-1=(n-1)(n+1)$; 4) $10-2x^2=x^2-x+10$;
5) $3y^2+4y+4=3+4y$; 6) $(2x-3)^2+4=0$.

2.8. Теңдеуді шешіңдер:

1) $3x^2-4x=0$; 2) $4x^2-9=0$; 3) $-5x^2+6x=0$; 4) $-x^2+3=0$;
5) $y^2-\frac{1}{9}=0$; 6) $6u^2-u=0$; 7) $6m^2-1=0$; 8) $2y+y^2=0$.

7) $6m^2-1=0 \Rightarrow m^2=\frac{1}{6} \Rightarrow m=\pm\frac{1}{\sqrt{6}} \Rightarrow$ Жауабы: $\pm\frac{1}{\sqrt{6}}$.

B

2.9. Теңдеуді $ax^2+bx+c=0$ түріне келтіріңдер:

1) $(x-3)(3x+2)=(5x-4)(3x-2)$;
2) $(2x+7)(7-2x)=49+x\cdot(x+2)$;
3) $\frac{3x-2}{2x+1}=\frac{2x+3}{2x-1}$;
4) $\frac{x-1}{x+3}+\frac{5x-4}{4x+1}=1$;
5) $(x-3)(x^2+3x+9)=x(x-8)(x+9)$;
6) $(x+7)(x^2-7x+49)=x(x+8)(x-7)$.

4) $\frac{x-1}{x+3}+\frac{5x-4}{4x+1}=1$; $(x-1)(4x+1)+(5x-4)(x+3)=(x+3)(4x+1)$;

$4x^2-3x-1+5x^2+11x-12=4x^2+13x+3 \Rightarrow 5x^2-5x-16=0$.

2.10. Теңдеуді шешіңдер:

1) $\frac{1}{5}x^2-5=0$;
2) $9y^2-6{,}25=0$;
3) $1{,}44-x^2=3x^2$;
4) $\frac{5}{7}x^2=-3{,}5+x^2$;
5) $(2y-1)^2=10-4y$;
6) $(3m-2)(3m+2)=5m^2$.

2.11. Теңдеудің түбірлерін табыңдар:

1) $\frac{x^2-2x}{4}=\frac{3x^2+2x}{3}$;
2) $\frac{5y-y^2}{2}=\frac{y^2+3y}{5}$;
3) $(4y-3)^2+(y+2)^2=13$;
4) $(7m+6)(6-7m)=36-m(m+1)$.

Теңдеуді шешіңдер **(2.12–2.13):**

2.12. 1) $(x-2)^2-49=0$;
2) $9(2x+3)^2-25=0$;
3) $2(3x+5)^2=7(3x+5)$;
4) $(3x-1)^2=4-12x$.

2) $9(2x+3)^2-25=0$; $(2x+3)^2=\frac{25}{9}$; $2x+3=\pm\frac{5}{3}$; $2x=-3\pm\frac{5}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow x=-\frac{3}{2}\pm\frac{5}{6} \Rightarrow x_1=-\frac{3}{2}+\frac{5}{6}=-\frac{2}{3}$; $x_2=\frac{3}{2}-\frac{5}{6}=-\frac{7}{3}$.

Жауабы: $-\frac{2}{3}$; $-2\frac{1}{3}$.

2.13. 1) $\dfrac{x-4}{x+3}=\dfrac{2x+4}{x-3}$; 2) $\dfrac{2-3y}{3-y}=\dfrac{y+2}{y+3}$;

3) $\dfrac{x-1}{x+1}+\dfrac{x+2}{x-1}+3=0$; 4) $\dfrac{7x+5}{x-1}-\dfrac{2x}{x+1}=-5$.

2.14. Қандай санның квадраты өзінен 2 есе үлкен? Осы санды табыңдар.

2.15. Тізбектес екі натурал санның көбейтіндісі олардың кішісінен үш есе үлкен. Осы сандарды табыңдар.

2.16. Тіктөртбұрышты жер телімінің ұзындығы енінен 5 есе үлкен. Оның енін 9 метрге ұзартқанда ауданы 4 есе өсті. Жер телімінің бастапқы өлшемдерін анықтаңдар.

2.17. Тіктөртбұрыштың ені ұзындығынан 5 есе кем, ауданы 720 см^2. Оның ені мен ұзындығын табыңдар.

a — ені, $5a$ — ұзындығы $\Rightarrow 5a^2=720 \Rightarrow a^2=144 \Rightarrow a=12$ м.

Жауабы: 12 м; 60 м.

C

Теңдеуді шешіңдер **(2.18–2.21):**

2.18. 1) $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x}{x-1}=2\dfrac{2}{3}$; 2) $\dfrac{y-2}{y+2}+\dfrac{y+2}{y-2}=3\dfrac{1}{3}$;

3) $\dfrac{5m+7}{m-2}-\dfrac{2m+21}{m+2}=8\dfrac{2}{3}$; 4) $\dfrac{x+2}{2}+\dfrac{2}{x+2}=\dfrac{x+2}{3}+\dfrac{3}{x+2}$.

2.19*. 1) $x^2-3|x|=0$; 2) $5y^2+4|y|=0$;

3) $5y^2-4|y|=0$; 4) $2u^2+3|u|-5u=0$;

5) $4t^2-3|t|+t=0$; 6) $2m^2+|m|-7m=0$.

2.20*. 1) $x|x|-5x=0$; 2) $2x^2-3x|x|+1=0$; 3) $9x^2+\dfrac{x}{|x|}=0$;

4) $9x^2-\dfrac{x}{|x|}=0$; 5) $3x^2-\dfrac{4x^2}{|x|}=0$; 6) $5x^2+\dfrac{x^2}{5|x|}=0$.

3) Егер $x>0 \Rightarrow 9x^2+1=0 \Rightarrow x\in\varnothing$;

егер $x<0 \Rightarrow 9x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm\frac{1}{3} \Rightarrow x=-\frac{1}{3}$.

Жауабы: $-\frac{1}{3}$.

2.21*. 1) $x(x-1)(x-3)-25=(x-5)(x+5)+3x$;

2) $|x-2|\cdot(x+2)^2=4x-8$.

2.22. 1) Бір түбірі нөлге тең; 2) түбірлерінің модульдері тең, бірақ таңбалары қарама-қарсы; 3) екі түбірі де нөлге тең болатын квадрат теңдеудің жалпы түрін жазыңдар.

2.23*. a-ның қандай мәндерінде теңдеудің бір түбірі нөлге тең? Оның екі түбірі де нөлге тең болуы мүмкін бе:

1) $6x^2-5x+a-3=0$;
2) $3x^2+x-a^2+9=0$;
3) $4x^2+(a-1)x+1-a^2=0$;
4) $x^2+(a+3)x+|a|-3=0$?

2.24. c-нің қандай мәндерінде теңдеу түбірлерінің модульдері тең, таңбалары қарама-қарсы болады:

1) $x^2-(c+3)x+4c+3=0$;
2) $2x^2+(|c|-3)x-32=0$?

2.25. Екі жол өзара тік бұрыш жасап қиылысады. Жолдардың қиылысу нүктесінен жылдамдықтары 80 км/сағ және 60 км/сағ болатын автокөліктер әртүрлі жолдарға түсіп, бір мезгілде жүріп кетті. Қанша уақыт өткен соң олардың арақашықтығы 100 км болады?

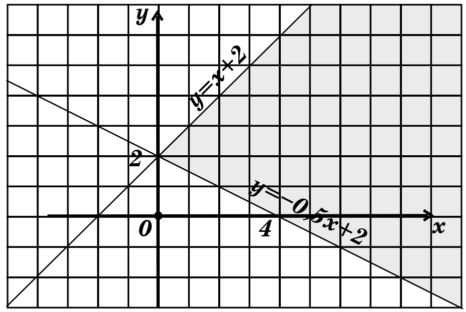
ҚАЙТАЛАУҒА БЕРІЛГЕН ЖАТТЫҒУЛАР

2.26. Бөлшектің бөліміндегі иррационалдықтан құтылыңдар:

1) $\frac{5}{2\sqrt{6}}$;
2) $\frac{x+2}{\sqrt{4-x^2}}$;
3) $\frac{1}{3+2\sqrt{2}}$;
4) $\frac{\sqrt{\sqrt{17}+\sqrt{8}}}{\sqrt{\sqrt{17}-\sqrt{8}}}$.

2.27. 1) x^2+4; 2) x^2-4; 3) $\sqrt{x}+1$ өрнегінің ең кіші мәнін анықтаңдар.

2.28. 2.1-суреттегі боялған облысты теңсіздіктер жүйесімен жазып көрсетіңдер.



2.1-сурет

2.2. Квадрат теңдеу түбірлерінің формуласы

Жалпы түрдегі формула.

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (1)$$

квадрат теңдеуін шешу үшін ax^2+bx+c квадрат үшмүшесінің толық квадратын бөліп алайық:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c=a\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x\right)+c=$$

$$=a\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)+c-\frac{b^2}{4a}=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

Онда (1) квадрат теңдеуін былай жазуға болады:

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=0 \text{ немесе } \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

Бұл теңдеу берілген (1) квадрат теңдеуімен мәндес болғандықтан, оның шешімі бар немесе жоқ болуы $D=b^2-4ac$ санының таңбасына тәуелді. $D=b^2-4ac$ саны (1) квадрат теңдеудің **дискриминанты**[1] деп аталады. Сонымен, (1) теңдеуді былай жазамыз:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{D}{4a^2}. \qquad (2)$$

Дискриминанттың $D>0$, $D<0$, $D=0$ болуы мүмкін. Осы жағдайларға тоқталайық.

а) D>0 болсын. Онда (2) теңдеуден

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{D}{4a^2}} \text{ немесе } x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a};\ D=b^2-4ac. \qquad (3)$$

---

[1] Латынның discriminans (ажырату, анықтау) деген сөзінен шыққан. Дискриминанттың таңбасы арқылы теңдеудің неше түбірі бар екенін анықтайды.

Ендеше, бұл жағдайда квадрат теңдеудің екі шешімі бар:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}; \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}; \; D = b^2 - 4ac. \tag{4}$$

1-мысал. $3x^2-6x+2=0$ квадрат теңдеуін шешу керек.

Шешуі. Алдымен $3x^2-6x+2$ квадрат үшмүшесінің толық квадратын бөліп жазамыз:

$3x^2-6x+2=3(x^2-2x)+2=3(x^2-2x+1-1)+2=3(x-1)^2-3+2=$ $=3(x-1)^2-1$. Онда берілген квадрат теңдеу $3(x-1)^2-1=0$ немесе $(x-1)^2=\frac{1}{3}$ түрінде жазылады. Осыдан $|x-1|=\frac{\sqrt{3}}{3}$; $x-1=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$; $x=1\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Жауабы: $x_{172}=1\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2-мысал. $3x^2-6x+2=0$ теңдеуін шешейік.

Шешуі. $a=3$, $b=-6$, $c=2$. Онда $D=(-6)^2-4\cdot3\cdot2=36-24=12>0$. Демек, теңдеудің екі түбірі бар:

$$x_{172}=\frac{-(-6)\pm\sqrt{12}}{2\cdot3}=\frac{6\pm2\sqrt{3}}{6}=\frac{3\pm\sqrt{3}}{3}=1\pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Жауабы: $1\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(3) және (4) *формулалар — квадрат теңдеу түбірлерінің формулалары.*

ә) D=0 болсын. Онда $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$ теңдеуінен $x=-\frac{b}{2a}$ теңдігін аламыз. Бұл жағдайда теңдеудің өзара тең екі шешімі бар деп есептейміз: $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$.

б) D<0 болғанда $\frac{D}{4a^2}<0, \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ I 0 теңсіздіктерінен (2) теңдеудің x айнымалысының нақты мәндерінің ешқайсысының да орындалмайтынын көреміз. Олай болса, квадрат теңдеудің нақты сандар жиынында түбірлері жоқ.

3-мысал. $4x^2-5x-21=0$ теңдеуін шешу керек.

Шешуі. $a=4$, $b=-5$, $c=-21$ болғандықтан, $D=(-5)^2-4\cdot4\cdot(-21)=$ $=25+336=361=19^2$.

$D>0$, демек, (4) бойынша $x_{1/2}=\dfrac{-(-5)\pm\sqrt{19^2}}{2\cdot 4}=\dfrac{5\pm 19}{8}$.

Осыдан $x_1=\dfrac{5-19}{8}=-\dfrac{7}{4}-1\dfrac{3}{4}$, $x_2=\dfrac{5+19}{8}=3$.

4-мысал. $2x^2-7x=0$ теңдеуін шешейік.

Шешуі. Бұл толымсыз теңдеуді $x(2x-7)=0$ көбейткіштеріне жіктеп, түбірлерін табамыз: $x_1=0$, $x_2=3,5$. Дегенмен бұл теңдеуді (4) формуланы қолданып та шешуге болады. $a=2$, $b=-7$, $c=0$ және $D=49-4\cdot 2\cdot 0=7^2$, $D>0$ болғандықтан, (4) формулаға сәйкес $x_{1,2}=\dfrac{7\pm\sqrt{49}}{2\cdot 2}=\dfrac{7\pm 7}{4}$ немесе $x_1=0$, $x_2=3,5$.

5-мысал. $3x^2-2x+7=0$ теңдеуін шешейік.

Шешуі. $D=2^2-4\cdot 3\cdot 7=-80<0$ болғандықтан, оның нақты түбірлері жоқ.

6-мысал. $9x^2-12x+4=0$ теңдеуін шешейік.

Шешуі. $D=144-4\cdot 4\cdot 9=0$. Сондықтан оның өзара тең екі түбірі бар:

$$x_1=x_2=\frac{12}{2\cdot 9}=\frac{2}{3}.$$

7-мысал. $4x^2-12x+7=0$ теңдеуін шешейік.

Шешуі. $D=144-4\cdot4\cdot7=144-112=32>0$ болғандықтан, берілген теңдеудің әртүрлі екі түбірі бар:

$$x_{1,2}=\frac{12\pm\sqrt{32}}{2\cdot 4}=\frac{3\pm\sqrt{2}}{2} \text{ немесе } x_1=\frac{3-\sqrt{2}}{2},\ x_2=\frac{3+\sqrt{2}}{2}.$$

Квадрат теңдеулердің дискриминанттары үнемі рационал сандардың квадраттары бола бермейді.

***b* жұп сан болғандағы квадрат теңдеу түбірлерінің формуласы.**

Егер b жұп сан болса, онда (4) формуланы жеңілдетуге болады. Шынында да, $b=2k$ болса, $D=b^2-4ac=4k^2-4ac=4(k^2-ac)$ теңдігі мен (4) формуладан

$$x_{1,2}=\frac{-2k\pm\sqrt{4\left(k^2-ac\right)}}{2a}=\frac{-2k\pm 2\sqrt{k^2-ac}}{2a}=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a},$$

$$x_{1,2}=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a},\ b=2k \qquad (5)$$

формуласын аламыз.

5–3457

8-мысал. $9x^2-14x+5=0$ теңдеуін шешу керек.

Шешуі. $b=-14=-2\cdot 7$. Онда (5) формула бойынша

$$x_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{7^2-9\cdot 5}}{9}=\frac{7\pm 2}{9}\Rightarrow x_1=\frac{5}{9};\ x_2=1.$$

Практикалық жұмыс

Мектепте оқушылар арасында тоғызқұмалақтан бір айналымдық турнир өткізілді. Ереже бойынша әрбір екі ойыншы өздерінің партиясы басталар кезде және аяқталғанда өзара қол алысуы қажет. Егер турнирде барлығы 306 рет қол алысу рәсімі тіркелсе, бұл турнирге неше ойыншы қатысқан?

ЕСЕПТЕР

А

2.29. Жалпы түрдегі $ax^2+bx+c=0$ теңдеуімен салыстырып, берілген теңдеулердің a, b және c коэффициенттерінің шамасын жазыңдар. Дискриминантты табыңдар және түбірлердің санын көрсетіңдер:

1) $x^2-5x+6=0$; 2) $x^2-5x+4=0$;
3) $2x^2+x-3=0$; 4) $3x^2-2x-1=0$;
5) $3x^2-13x+14=0$; 6) $5x^2-9x-2=0$;
7) $y^2-y-20=0$; 8) $16x^2-8x+1=0$.

Теңдеудің түбірлерін табыңдар **(230–231):**

2.30. 1) $x^2+7x-60=0$; 2) $y^2-10y-24=0$;
3) $m^2+m-90=0$; 4) $3t^2+7t+4=0$;

2.31. 1) $3x^2+32x+80=0$; 2) $2x^2+9x-486=0$;
3) $3x^2-6x+3=0$; 4) $9x^2+6x+1=0$.

Теңдеуді шешіңдер **(2.32–2.33):**

2.32. 1) $2x^2+3x+1=0$; 2) $2x^2+x+2=0$;
3) $4x^2+4x+1=0$; 4) $x^2+5x-6=0$.

2.33. 1) $14x^2-5x-1=0$; 2) $2x^2+x+67=0$; 3) $2p^2+7p-30=0$;
4) $y^2-3y-5=0$; 5) $5x^2-11x+2=0$; 6) $9y^2-30y+25=0$;
7) $81y^2-18y+1=0$; 8) $y^2-11y-152=0$; 9) $8z^2-7z-1=0$.

2.34. (5) формуланы қолданып, теңдеуді шешіңдер:

1) $3x^2-14x+16=0$; 2) $x^2+2x-80=0$; 3) $15y^2-22y-37=0$;
4) $5x^2-6x+1=0$; 5) $4x^2-36x+77=0$; 6) $x^2-22x-23=0$.

Теңдеуді шешіңдер **(2.35–2.36):**

2.35. 1) $7x^2-20x+14=0$; 2) $y^2-10y-25=0$; 3) $8z^2-14z+5=0$;
4) $x^2-8x-84=0$; 5) $x^2+6x-27=0$; 6) $5t^2+26t-24=0$.

2.36. 1) $(x+3)(x-4)=-12$; 2) $18-(x-5)(x-4)=-2$;
3) $(3x-1)^2=1$; 4) $5x+(2x+1)(x-3)=0$;
5) $(2x+3)(3x+1)=11x+30$; 6) $x^2-5=(x-5)(2x-1)$.

4) $5x+(2x+1)(x-3)=0$; $5x+2x^2-5x-3=0$; $2x^2-3=0 \Rightarrow x^2=1,5 \Rightarrow$
$\Rightarrow x=\pm\sqrt{1,5}$. Жауабы: $x=\pm\sqrt{1,5}$.

2.37. Түбірлері 1) 1-ге және 2-ге; 2) −3-ке және 3-ке; 3) −10-ға және 4-ке; 4) $\frac{1}{2}$-ге және $\frac{1}{3}$-ге тең квадрат теңдеу құрастырыңдар.

1) $x_1=1$, $x_2=2$ сандары $x^2+px+q=0$ теңдеуінің түбірлері болса, онда

$$\begin{cases} 1+p+q=0, \\ 4+2p+q=0. \end{cases}$$

Осыдан $p=-3$, $q=2$. Жауабы: $x^2-3x+2=0$.

Теңдеуді шешіңдер **(2.38–2.39):**

2.38. 1) $(x+4)^2=3x+40$; 2) $(2x-3)^2=11x-19$;
3) $(x+1)^2=7918-2x$; 4) $(x+2)^2=3131-2x$.

2.39. 1) $x^2-0,6x+0,08=0$; 2) $7=0,4y+0,2y^2$;
3) $x^2-1,6x-0,36=0$; 4) $z^2-2z+2,91=0$;
5) $0,2y^2-10y+125=0$; 6) $\frac{x^2}{3}=9-2x$.

2.40. Айнымалының қандай мәндерінде теңдік орындалады:
1) $\frac{x^2}{7}=2x-7$; 2) $\frac{x^2}{3}=\frac{10}{3}-x$;
3) $x^2+1,2=2,6x$; 4) $4x^2=7x+7,5$?

2.41. x-тің қандай мәндерінде теңдік орындалады:
1) $(5x+3)^2=5x+3$; 2) $(3x+10)^2=3x+10$;
3) $(3x-8)^2=3x^2-8x$; 4) $(4x+5)^2=5x^2+4x$?

2.42. $ax^2-3x-5=0$ теңдеуінің бір түбірі 1-ге тең болатындай етіп, a-ны анықтаңдар.

2.43. 1 саны $ax^2-(a+c)x+c=0$ теңдеуінің түбірі бола ма? Екінші түбірі қандай?

2.44. Теңдеуді шешіңдер:

1) $4x^2-4ax+a^2-b^2=0$; 2) $ax^2-(2a+1)x+2=0$;
3) $abx^2+2(a+b)\sqrt{ab}x+(a-b)^2=0$; 4) $\left(7-4\sqrt{3}\right)x^2+\left(2-\sqrt{3}\right)x=2$;
5) $(a+b)x^2+2ax+a-b=0$; 6) $mnx^2-(an+bm)x+ab=0$.

3) $D=(a+b)^2ab-ab(a-b)^2=4a^2b^2 \Rightarrow$

$$x_1=\frac{-(a+b)\sqrt{ab}-2ab}{ab}=-\frac{a+2\sqrt{ab}+b}{\sqrt{ab}}=-\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}{\sqrt{ab}}=-\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2;$$

$$x_2=\frac{-(a+b)\sqrt{ab}+2ab}{ab}=-\frac{a-2\sqrt{ab}+b}{\sqrt{ab}}=-\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2.$$

Жауабы: $-\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\pm\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2$.

2.45. Теңдеуді шешіңдер:

1) $6x^2+5mx+m^2=0$; 2) $x^2+2(a-b)x-4ab=0$;
3) $56y^2+ay-a^2=0$; 4) $abx^2-(a^2-b^2)x-ab=0$;
5) $2y^2-(b-2c)y=bc$; 6) $(m-n)x^2-nx-m=0$.

2.46. a-ның қандай мәндерінде $9x^2-(2-a)x-6-a=0$ теңдеуінің 1) өзара тең; 2) модульдері тең, таңбалары қарама-қарсы екі түбірі бар?

2.47. k-ның қандай мәндерінде $x=-2$ саны $x^2-7x+k=0$ теңдеуінің түбірі болады?

C

2.48. Теңдеуді шешіңдер:

1) $x^2-5|x|+6=0$; 2) $x^2-2|x|-15=0$;
3) $3x^2-4|x|+1=0$; 4) $2x^2+3|x|-5=0$.

2.49. 1) $m^2-6mn+8n^2=0$; 2) $8m^2-14mn+5n^2=0$;

3) $\left(\frac{m+n}{m-n}\right)^2-2\left(\frac{m+n}{m-n}\right)=3$ теңдіктері берілген. m-нің n-ге қатынасын табыңдар.

2.50. n-нің қандай мәндерінде $(n-1)x^2-2(n+1)x+n+4=0$ теңдеуінің түбірлері өзара тең болады?

2.51. $(p+k+n)x^2-2(p+k)x+(p+k-n)=0$ теңдеуінің түбірлерін табыңдар, мұндағы p, k, n — рационал сандар.

2.52. Бір жазықтықта берілген бірнеше нүктенің кез келген үшеуі бір түзудің бойында жатпайды. Осы нүктелерді қос-қостан қосатын барлығы 28 түзу жүргізу мүмкін болса, бұл нүктелердің саны нешеу?

2.53. 2.52-есептегі түзулер саны m-ге тең деп алып, есепті жалпы жағдайда шешіңдер.

2.54. Барлық диагональдарының саны 12-ге тең дөңес көпбұрыш табыла ма? 13-ке тең болатын ше?

2.55. y-тің қандай мәндерінде y^2-6 өрнегінің мәні $5|y|$-ке тең?

Нұсқау: $y^2-6=5|y|$ теңдеуін модуль таңбасын ашып жазу арқылы шешу керек.

2.56. Егер екі санның көбейтіндісінің олардың квадраттарының қосындысына қатынасы 0,3-ке тең болса, онда бұл сандардың өзара қатынасы қандай?

2.57. $x^2+px+q=0$ теңдеуінің түбірлері x_1, x_2 болса, онда $x_1+x_2=-p$; $x_1 \cdot x_2=q$ болатынын дәлелдеңдер.

2.58. Түбірлері $\frac{1}{10-\sqrt{72}}$, $\frac{1}{10+\sqrt{72}}$ сандарына тең квадрат теңдеу құрыңдар.

2.59. Түбірлері $\frac{a}{\sqrt{a} \pm \sqrt{a-b}}$ $(a>b)$ болатын квадрат теңдеу құрыңдар.

ҚАЙТАЛАУҒА АРНАЛҒАН ЖАТТЫҒУЛАР

2.60. $n^2-12n+40$ өрнегі n-нің кез келген мәнінде тек оң мәндер қабылдайтынын көрсетіңдер.

2.61. Өрнектің мәнін табыңдар:

$$\frac{(b-a)^2}{a+b}:\left(\frac{2ab}{b^2-a^2}+\frac{a}{a+b}-\frac{b}{b-a}\right),$$ мұндағы $a=8{,}4$; $b=-0{,}6$.

2.62. Функцияның анықталу облысын табыңдар:

1) $y=\sqrt{\frac{3x-6}{4}}$; 2) $y=\sqrt{\frac{1}{2}+x^2}$.

2.3. Виет теоремасы

Виет теоремасы. Мысалдар қарастырайық.

1-мысал. $x^2-7x+12=0$ келтірілген квадрат теңдеуін қарастырайық.

$D=7^2-4\cdot12=1>0$. Теңдеудің екі түбірі бар: $x_1=3$; $x_2=4$.

Ойланыңдар!

Мына жазуға зер салыңдар. Қарастырған теңдеудің түбірлері жайлы не айтасыңдар?

$$x^2+(-7)x+12=0$$
$$x_1+x_2=7=-(-7)$$
$$x_1\cdot x_2=12.$$

1-теорема (Виет теоремасы). ***Келтірілген $x^2+px+q=0$ квадрат теңдеуінің түбірлерінің қосындысы оның қарама-қарсы таңбамен алынған екінші коэффициентіне, ал көбейтіндісі бос мүшесіне тең:***

$$\begin{cases}x_1+x_2=-p,\\ x_1\cdot x_2=q.\end{cases} \qquad (1)$$

Әңгіме $x^2+px+q=0$ теңдеуінің түбірлері жайында. Демек, $D=p^2-4q\geqslant0$ деп қарастыру керек. Онда $x_1=\frac{1}{2}\left(-p-\sqrt{D}\right)$, $x_2=\frac{1}{2}\left(-p+\sqrt{D}\right)$ болғандықтан,

$$x_1+x_2=\frac{1}{2}\left(-p-\sqrt{D}\right)+\frac{1}{2}\left(-p+\sqrt{D}\right)=-p,$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{1}{2}\left(-p-\sqrt{D}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(-p+\sqrt{D}\right)=\frac{1}{4}\left[(-p)^2-\left(\sqrt{D}\right)^2\right]=$$

$$=\frac{1}{4}\left(p^2-D\right)=\frac{1}{4}\left(p^2-p^2+4q\right)=q.$$

Сонымен, $x_1+x_2=-p$, $x_1\cdot x_2=q$.

Виет теоремасының жалпы түрі: $ax^2+bx+c=0$ теңдеуінің түбірлері x_1,

x_2 болсын. Онда бұл сандар $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ келтірілген квадрат теңдеуінің де түбірлері болады. Виет теоремасы бойынша

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{b}{a}, \\ x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}. \end{cases}$$

Кері теорема.

2-теорема (кері теорема). ***Егер $u+v=-p$, $u\cdot v=q$ болса, онда u және v сандары $x^2+px+q=0$ теңдеуінің түбірлері болады.***

Айталық, $u+v=-p$, $u\cdot v=q$ болсын, онда u мен v сандарын $x^2+px+q=0$ теңдеуіне қойып, мынаны аламыз:

$$u^2+pu+q=u^2-u(u+v)+uv=u^2-u^2-uv+uv=0,$$
$$v^2+pv+q=v^2-v(u+v)+uv=v^2-vu-v^2+uv=0.$$

Мұнда u және v сандары $x^2+px+q=0$ теңдеуін қанағаттандырады.

2-мысал.

$$\begin{cases} 2+(-3)=-1, \\ 2\cdot(-3)=-6. \end{cases}$$

Онда 2 және (−3) сандары $x^2+x-6=0$ теңдеуінің түбірлері болады.

3-мысал. $x^2+2x-15=0$ теңдеуі үшін $3+(-5)=-2$, $3\cdot(-5)=-15$ болғандықтан, $x_1=-5$ және $x_2=3$ — берілген теңдеудің түбірлері.

4-мысал. Түбірлері 2 және 7 болатын квадрат теңдеу құру керек.

Виет теоремасы бойынша $x^2-(2+7)x+2\cdot7=0$ немесе $x^2-9x+14=0$. Бізге қажет теңдеу осы.

5-мысал. $\begin{cases} x+y=4, \\ xy=-21 \end{cases}$ теңдеулер жүйесін шешу керек.

2-теорема бойынша x және y сандары $t^2-4t-21=0$ теңдеуінің түбірлері. Ал $t_1=-3$, $t_2=7$ болғандықтан, $x_1=-3$, $y_1=7$ немесе $x_2=7$, $y_2=-3$.

$a\pm b+c=0$ жағдайы.

3-теорема. I. ***Егер $ax^2+bx+c=0$ квадрат теңдеуі үшін $a+b+c=0$ теңдігі орындалса, $x_1=1$ және $x_2=\frac{c}{a}$ сандары осы теңдеудің түбірлері болады.***

II. ***Егер $ax^2+bx+c=0$ квадрат теңдеуі үшін $a-b+c=0$ теңдігі орындалса, $x_1=-1$ және $x_2=-\frac{c}{a}$ сандары осы теңдеудің түбірлері болады.***

I. $a+b+c=0$ болсын. Онда $x_1=1$, $x_2=\frac{c}{a}$ сандары $ax^2+bx+c=0$ теңдеуін қанағаттандыратынын көрсетсе, жеткілікті. Шынында да,

$$x_1=1 \Rightarrow a\cdot 1^2+b\cdot 1+c=a+b+c=0,$$

$$x_2=\frac{c}{a} \Rightarrow a\cdot\left(\frac{c}{a}\right)^2+b\cdot\left(\frac{c}{a}\right)+c=\frac{ac^2+abc+a^2c}{a^2}=\frac{ac(c+b+a)}{a^2}=0.$$

Дәлелдеу керегі де осы.

Өздерің дәлелдеңдер

Дәл осылай теореманың **II** тұжырымын өздерің дәлелдеп көріңдер.

6-мысал. 3-теорема бойынша теңдеудің түбірлерін табу керек:

1) $7x^2-13x+6=0$; 2) $9x^2+20x+11=0$;

3) $12x^2-7x-5=0$; 4) $5x^2+3x-2=0$.

1) $7-13+6=0 \Rightarrow x_1=1;\ x_2=\frac{6}{7}$;

2) $9-20+11=0 \Rightarrow x_1=-1;\ x_2=-\frac{11}{9}$;

3) $12-7-5=0 \Rightarrow x_1=1;\ x_2=-\frac{5}{12}$;

4) $5-3-2=0 \Rightarrow x_1=-1;\ x_2=\frac{2}{5}$.

1. Виет теоремасын тұжырымдап, оны дәлелдеңдер.
2. Виет теоремасына кері теореманы тұжырымдап, оны дәлелдеңдер.
3. $ax^2+bx+c=0$ теңдеуі үшін Виет теоремасы қалай жазылады?
4. $a\pm b+c=0$ жағдайындағы квадрат теңдеудің түбірлерін анықтауға арналған теореманы тұжырымдап, оны дәлелдеңдер.

Практикалық жұмыс

Сынып бөлмесінің ұзындығы енінен 3 м артық, ауданы 54 м². Сынып еденін жаңартқаннан соң оның жақтауына плинтус (еден мен қабырға қосылатын бұрышқа қағылатын материал) қағу үшін ұзындығы 3 м болатын плинтустардың неше данасы керек? Сыныпқа кірер есіктің ені 1 м 20 см. Алынған плинтустардың неше метрі артылып қалады?

Хабарлама дайындаңдар!

Француз математигі, алгебралық шартты белгілер жүйесін енгізген элементар алгебраның негізін қалаушы, алғашқылардың бірі болып сандарды әріптермен белгілеуді енгізіп, теңдеулер теориясын дамытуға зор үлес қосқан ғалым Ф. Виет жайлы шағын хабарлама дайындаңдар.

Франсуа Виет
(1540–1603)

ЕСЕПТЕР

А

2.63. Түбірлердің қосындысы мен көбейтіндісін табыңдар:

1) $x^2-37x+27=0$; 2) $x^2-210x=0$; 3) $-y^2+y=0$;
4) $x^2+41x-371=0$; 5) $y^2-19=0$; 6) $3x^2-10=0$.

2.64. Виет теоремасына кері теореманы қолданып, теңдеулердің түбірлерін табыңдар:

1) $x^2-5x+6=0$; 2) $x^2+4x+3=0$; 3) $x^2-16x+48=0$;
4) $x^2-2x-3=0$; 5) $x^2+3x-4=0$; 6) $x^2+12x+27=0$.

5) $p=3$, $q=-4$ болғандықтан, $u+v=-3$ және $u \cdot v=-4$ теңдіктері орындалатындай етіп u мен v сандарын табу керек. $u=1$, $v=-4$ сандары үшін $1+(-4)=-3$ және $1 \cdot (-4)=-4$ болғандықтан, Виет теоремасына кері 2-теорема бойынша $x_1=1$, $x_2=-4$ сандары — осы квадрат теңдеудің түбірлері. *Жауабы:* $x_1=1$, $x_2=-4$.

2.65. Теңдеулердің түбірлерін ауызша анықтаңдар:

1) $x^2-6x+8=0$; 2) $x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}=0$;
3) $x^2-7ax+12a^2=0$; 4) $x^2+2x-24=0$;
5) $x^2-\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)x+2\sqrt{3}=0$; 6) $x^2+5bx+6b^2=0$.

2.66. Берілген түбірлері бойынша квадрат теңдеу құрыңдар:

1) -7 және -2; 2) $-3{,}4$ және 6; 3) $\frac{4}{3}$ және 2;
4) 8 және -3; 5) $\frac{4}{7}$ және $\frac{4}{7}$; 6) $-\frac{8}{3}$ және $-\frac{8}{3}$;
7) $\sqrt{2}$ және $\sqrt{5}$; 8) $3-\sqrt{5}$ және $3+\sqrt{5}$; 9) $-\sqrt{7}$ және $\sqrt{2}$.

4) Бізге қажет $x^2+px+q=0$ квадрат теңдеуінің түбірлері: $x_1=8$, $x_2=-3$. Онда Виет теоремасы бойынша $-p=x_1+x_2=8-3=5$ және $q=x_1 \cdot x_2=8\cdot(-3)=-24$. Ендеше $p=-5$, $q=-24$. Демек, $x^2-5x-24=0$ — бізге қажет теңдеу осы.

Жауабы: $x^2-5x-24=0$.

2.67. Теңдеуді шешіңдер және оны Виет теоремасы бойынша тексеріңдер:

1) $x^2-37x+27=0$;
2) $x^2-2x-9=0$;
3) $2x^2+7x+6=0$;
4) $3x^2-4x-4=0$.

2.68. Теңдеудің түбірлерін 3-теореманы қолданып, анықтаңдар:

1) $3x^2-13x+10=0$;
2) $5x^2+12x+7=0$;
3) $5x^2-\left(5+\sqrt{3}\right)x+\sqrt{3}=0$;
4) $\frac{1}{2}x^2+2x+\frac{3}{2}=0$;
5) $7x^2-3x-4=0$;
6) $9x^2+\left(9-\sqrt{2}\right)x-\sqrt{2}=0$.

2.69. Берілген түбірлері бойынша квадрат теңдеу құрыңдар:

1) 2; 7; 2) -1; 4; 3) -3; -4; 4) 0; 6; 5) -5; 5;
6) 9; 7) $2\pm\sqrt{3}$; 8) $5\pm\sqrt{2}$; 9) $\pm\sqrt{5}$; 10) 0.

B

2.70. Бір түбірі 1) $-\sqrt{6}$; 2) $\sqrt{7}$; 3) $2-\sqrt{5}$; 4) $3+\sqrt{3}$-ке тең болатындай рационал коэффициентті квадрат теңдеу құрыңдар.

2.71. Теңдеулер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases} x+y=4, \\ xy=4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} a+b=2, \\ ab=-48; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+y=3, \\ xy=-10; \end{cases}$

4) $\begin{cases} y+z=-5, \\ yz=6; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} m+n=-3, \\ mn=-18; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} u+v=15, \\ uv=56. \end{cases}$

2.72. $x^2+8x-1=0$ теңдеуінің x_1, x_2 түбірлерін анықтамай-ақ, 1) $x_1{}^2+x_2{}^2$; 2) $x_1x_2{}^3+x_2x_1{}^3$; 3) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$; 4) $x_1{}^4+x_2{}^4$ өрнектерінің мәндерін табыңдар.

1) Виет теоремасы бойынша $x_1+x_2=-8$, $x_1 \cdot x_2=-1$ болуы керек. Осыдан $(-8)^2=(x_1+x_2)^2=x_1^2+x_2^2+2x_1 \cdot x_2=x_1^2+x_2^2-2$; $x_1^2+x_2^2=64+2=66$.

Жауабы: $x_1^2+x_2^2=66$.

2.73. Егер u және v сандары $ax^2+bx+c=0$ $(a \neq 0)$ теңдеуінің түбірлері болса, 1) u^4+v^4; 2) u^6+v^6 қосындыларын a, b және c арқылы өрнектеңдер.

2.74. $x^2-4rx+7r^2=0$ теңдеуінің түбірлері $x_1{}^2+x_2{}^2=2$ шартын қанағаттандыратындай етіп, r-ді анықтаңдар.

2.75. $3x^2-5x-6=0$ теңдеуінің түбірлері x_1, x_2 үшін $x_1{}^7x_2{}^2+x_1{}^2x_2{}^7$ қосындысын табыңдар.

2.76. 1) Егер u және v сандары $x^2+px+q=0$ теңдеуінің түбірлері, $u+1$ мен $v+1$ сандары $x^2-p^2x+pq=0$ теңдеуінің түбірлері болса, онда p мен q-ді табыңдар;
2) егер u мен v сандары $x^2-8x+12=0$ теңдеуінің түбірлері болса, онда түбірлері $\frac{1}{u^3}$ мен $\frac{1}{v^3}$ болатындай квадрат теңдеуді жазыңдар.
2) $\frac{1}{u^3}+\frac{1}{v^3}$ қосындысын $u+v$ және $u \cdot v$ арқылы өрнектесе жеткілікті.

2.77. $x^2-4x+p=0$ теңдеуі түбірлерінің квадраттарының қосындысы 16-ға тең. p-ны табыңдар.

2.78. a-ның қандай мәндерінде $x^2+2a(x-1)+1=0$ теңдеуі түбірлерінің қосындысы олардың квадраттарының қосындысына тең?

2.79. m-нің қандай мәндерінде 1) $x^2-2mx+m=0$ теңдеуінің бір түбірі $a-b$-ға; 2) $z^2+mz-18=0$ теңдеуінің бір түбірі -3-ке; 3) $mx^2-15x-7=0$ теңдеуінің бір түбірі -7-ге; 4) $y^2+my+a^2+5a+6=0$ теңдеуінің бір түбірі $a+3$-ке тең болады?

2.80. a-ның қандай мәндерінде $3x^2+2x-a=0$ теңдеуі түбірлерінің қатынасы $\frac{2}{3}$-ге тең?

C

2.81. Егер a және c сандары $3x^2+2x+k=0$ теңдеуінің түбірлері болса, 1) $a-c=6$; 2) $3a-c=4$; 3) $a^2+c^2=34$; 4) $a:c=-2:5$ болатындай етіп k-ны табыңдар.

2.82. Егер m мен n сандары $ax^2+bx+c=0$ теңдеуінің түбірлері болса, онда түбірлері $(m+n)^2$ және $(m-n)^2$-қа тең квадрат теңдеуді жазыңдар.

2.83. $x^2-3|x|+1=0$ теңдеуінің барлық түбірлері квадраттарының қосындысын табыңдар.
Берілген теңдеу $|x|^2-3|x|+1=0$ түрінде жазылған. Егер $t^2-3t+1=0$ теңдеуінің түбірлері m және n болса, берілген теңдеудің түбірлері $\pm m$ және $\pm n$-ге тең, мұндағы $m>0$, $n>0$. Сондықтан $m^2+n^2+(-m)^2+$ $+(-n)^2=2(m^2+n^2)$ өрнегінің мәнін анықтау керек.

2.84. a-ның қандай мәндерінде $(a^2-5a+3)x^2+(3a-1)x+2=0$ теңдеуінің бір түбірі екіншісінен екі есе артық болады?

2.85. k-ның қандай мәндерінде $x^2+(2-k)x-k-3=0$ теңдеуі түбірлерінің квадраттарының қосындысы ең кіші мән қабылдайды?

2.86. Егер $2p$ мен $\frac{q}{2}$ сандары $x^2+px+q=0$ теңдеуінің түбірлері болса, онда p мен q-ді анықтаңдар.

2.87. $x^2+px+q=0$ теңдеуінің түбірлері p мен q-ға тең болатындай етіп, коэффициенттерін табыңдар.

2.88*. $x^2-13x+b=0$ теңдеуінің түбірлері $x^2+ax+b=0$ теңдеуінің сәйкес түбірлерінің квадраттарына тең. a мен b-ны және әрбір теңдеудің түбірлерін табыңдар.

2.89*. $2x^2-5x+1=0$ теңдеуін шешпей-ақ, оның түбірлерінің квадраттарының айырмасын табыңдар.

ҚАЙТАЛАУҒА АРНАЛҒАН ЖАТТЫҒУЛАР

2.90. Теңбе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $\frac{37}{7+2\sqrt{3}}+\frac{37}{7-2\sqrt{3}}=14;$ 2) $\frac{\sqrt{10}+3}{\sqrt{10}-3}+\frac{\sqrt{10}-3}{\sqrt{10}+3}=38.$

2.91. 1) $a>0$, $b<0$ болса, $\frac{5a^2b}{a^2+b^2}$ өрнегінің;

2) $a<0$, $b<0$ болса, $\frac{2a^3b^2}{a+b}$ өрнегінің таңбасын анықтаңдар.

2.92. Берілген a, b, c және d сандары үшін $a+3=b-4=c+5=d-6$ теңдігі орындалады. Осы сандардың ең кішісі мен ең үлкенін көрсетіңдер.

2.4. Квадрат теңдеу түбірлерінің қасиеттері

Квадрат теңдеу түбірлерін зерттеу.

Сонымен, біз $ax^2+bx+c=0$ квадрат теңдеуі жөнінде мына мәліметтерді білеміз (2.1-кесте):

2.1-*кесте*

Дискриминант таңбасы	$D=b^2-4ac>0$	$D=0$	$D<0$
Нақты түбірлері	$x_{172}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$	$x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$	Нақты түбірлері жоқ

Кейбір квадрат теңдеудің түбірлерін коэффициенттері бойынша анықтауға болады. Осыған тоқталайық.

$x^2+px+q=0$ келтірілген квадрат теңдеуі берілсін.

1-жағдай. Егер $q<0$ болса, онда $D=p^2-4q>0$ (себебі $-4q>0$). Квадрат теңдеудің нақты түбірлері бар. Ал $x_1 \cdot x_2=q<0$ болғандықтан, бұл түбірлердің таңбалары әртүрлі. Мысалы:

$$x^2+3x-10=0,$$
$$p=3,\quad q=-10,$$
$$D=9+4\cdot10=49,$$
$$x_1=2,\quad x_2=-5.$$

2-жағдай. Егер $q=0$ болса, теңдеу $x^2+px=0$ түрінде жазылады және $x_1=0$, $x_2=-p$. Теңдеудің бір түбірі нөлге тең. Мысалы:

$$x^2-5x=0,$$
$$p=-5,\ q=0,$$
$$x_1=0,\ x_2=5.$$

3-жағдай. Егер $q>0$ болса, теңдеудің тек $D\geqslant0$ жағдайында ғана нақты түбірлері бар. $x_1 \cdot x_2=q>0$ теңсіздігінен бұл түбірлердің таңбаларының бірдей болатыны шығады. Мұнда p коэффициентіне қатысты екі жағдай қарастырылады: $p>0$, $p<0$.

$p>0$: $x_1+x_2=-p<0$ теңсіздігінен теңдеу түбірлерінің екеуі де теріс болатыны шығады.

$$x^2+4x+3=0,$$
$$p=4>0,\ q=3>0,$$
$$x_1=-1,\ x_2=-3.$$

$p<0$: $x_1+x_2=-p>0$ теңсіздігінен теңдеудің екі түбірі де оң болатыны шығады.

$$x^2-4x+3=0,$$
$$p=-4<0,\ q=3>0,$$
$$x_1=1,\ x_2=3.$$

Жалпы жағдай:

$ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$ теңдеуін a коэффицентіне бөлсек, $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$

$p=\frac{b}{a};\ \ q=\frac{c}{a}$ белгілеуін енгізсек, p мен q таңбалары сәйкесінше b мен c таңбаларымен бірдей болады (себебі $a>0$). Жоғарыда айтылғандарды жалпылап 2.2-кестеге түсірейік:

2.2-*кесте*

$ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$		
$c<0$	$c>0,\ b>0,\ D\geqslant0$	$c>0,\ b<0,\ D\geqslant0$
Теңдеудің таңбалары қарама-қарсы екі түбірі бар	**Теңдеудің екі теріс түбірі бар**	**Теңдеудің екі оң түбірі бар**

Квадрат үшмүшені көбейткіштерге жіктеу.

Анықтама: *$ax^2+bx+c=0$ квадрат теңдеуінің түбірлері ax^2+bx+c үшмүшесінің де* **түбірлері** деп аталады.

Үшмүшені оның түбірлері арқылы көбейткіштерге жіктеуге болады. Осы тәсілге тоқталайық.

Келтірілген квадрат үшмүшені көбейткіштерге жіктеу үшін x^2+px+ $+q=0$ теңдеуінің түбірлерін табамыз. Айталық теңдеудің түбірлері x_1 және x_2 болсын. Онда $x_1+x_2=-p$, $x_1\cdot x_2=q$. Сондықтан

$x^2+px+q=x^2-(x_1+x_2)x+x_1\cdot x_2=x^2-x_1x-x_2x+x_1x_2=x(x-x_1)-x_2(x-x_1)=$ $=(x-x_1)(x-x_2)$. Сонымен,

$$x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2).$$

1-мысал. $x^2-7x+12$ үшмүшесін көбейткіштерге жіктеу керек.

$x^2-7x+12=0$ теңдеуінің түбірлері $x_1=3$, $x_2=4$. Демек, үшмүшені былай жіктейміз: $x^2-7x+12=(x-3)(x-4)$.

Енді жалпы ax^2+bx+c түрінде берілген үшмүшені көбейткіштерге жіктейік.

ax^2+bx+c квадрат үшмүшесінің түбірлері $ax^2+bx+c=0$ немесе $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ квадрат теңдеулерінің түбірлерімен бірдей. Бұл түбірлер x_1, x_2 болсын. Сонда

$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a(x-x_1)(x-x_2)$. Сонымен,

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

2-мысал. $2x^2-x-6$ квадрат үшмүшесін көбейткіштерге жіктейік.

Үшмүшенің түбірлерін табамыз: $x_1=-1{,}5$; $x_2=2$, $2x^2-x-6=2(x-(-1{,}5))(x-2)=2(x+1{,}5)(x-2)=(2x+3)(x-2)$ теңдігі орындалады.

Тарихқа шолу

Әл-Хорезми (Б.з.787–850 жж. шамасында)

Квадрат теңдеулерге келетін есептерді шешу тәсілдерін ежелгі вавилондықтар білген. Олардың б.з.д. 3000 жылдары толымсыз квадрат теңдеулерді шешкенін айғақтайтын қолжазбалар сақталған. Ежелгі грек математиктері де кейбір квадрат теңдеулерді геометриялық салу есептеріне келтіріп шеше білген. Мәселен, алек-сандриялық Диофант (III ғ.) $ax=b$ және $ax^2=b$ түріндегі теңдеулерді шешу тәсілдерін (геометрияға сүйенбей) көрсете білген. VII ғасырда Үнді ғалымы Брахмагупта $ax^2+bx=c$ түріндегі теңдеулерді шешу ережелерін көрсеткен, ал ортаазиялық ғұлама ғалым әл-Хорезми өзінің атақты «Китаб әл-джебр ва-л-мукабала» атты еңбегінде $x^2+px+q=0$ түріндегі теңдеулерді шешу формуласының $\left(x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)$ тұжырымдамасын келтірген. Квадрат теңдеулерді шешудің жалпы түрі мен оның түбірлерінің теңдеудің коэффициенттеріне тәуелділігін өрнектейтін формулаларды Ф. Виет 1591 жылы ұсынған. Бірақ Ф. Виет теңдеулердің тек оң түбірлерін қарастырған. Квадрат теңдеулердің теріс түбірлерін ескеруді алғашқылардың бірі болып Италия ғалымдары Н. Тарталья (1499–1557), Д. Кардано (1501–1576), Р. Бомбелли (1530 – 1572) ұсынған.

1. Қандай шарт орындалғанда $ax^2+bx+c=0$ теңдеуінің а) таңбалары қарама-қарсы екі түбірі; ә) екі теріс түбірі; б) екі оң түбірі бар?
2. ax^2+bx+c квадрат үшмүшесін көбейткіштерге жіктеу формуласын жазып, оны дәлелдеңдер.

Практикалық жұмыс

Математикалық моделі $\dfrac{9}{x-2}+\dfrac{7}{x+2}=\dfrac{10}{x}$ теңдеуімен анықталатын мәтінді есеп құрастырып, оны шешіңдер.

ЕСЕПТЕР

А

2.93. Теңдеулерді шешпей-ақ, олардың түбірлерінің таңбаларын анықтаңдар:

1) $x^2+7x-1=0$; 2) $x^2-7x+1=0$; 3) $5x^2+17x+16=0$;
4) $x^2-18x+17=0$; 5) $x^2-2x-1=0$; 6) $x^2-15x+56=0$;
7) $19x^2-23x+5=0$; 8) $2x^2+5x+6=0$; 9) $11x^2-9x-0{,}02=0$;
10) $5x^2-x-108=0$; 11) $x^2-2{,}7x+1=0$; 12) $3x^2-12x-7=0$.

2.94. Егер $a>0$ және $b>0$ болса, онда $ax^2+abx-b=0$ теңдеуінің түбірлері бола ма?

2.95. a-ның қандай мәндерінде $x^2+6x+a=0$ теңдеуінің түбірлері өзара тең болады?

2.96. Егер $|a|<|b|$ болса, онда $bx^2-2ax+b=0$ теңдеуінің түбірлері бола ма?

2.97. c-нің қандай мәндерінде $2x^2-4x+c=0$ теңдеуінің екі әртүрлі оң түбірлері бар?

$c>0$ және $D>0$ жағдайында теңдеудің екі оң түбірі бар:

$$\begin{cases} c\mathrm{G}0, \\ D=4-2c\mathrm{G}0 \end{cases} \Rightarrow 0<c<2.$$

Ж а у а б ы: $0<c<2$.

2.98. Квадрат үшмүшені көбейткіштерге жіктеңдер:

1) $x^2-2x-48$; 2) $2x^2-5x+3$; 3) $3x^2-10x+3$;
4) $5x^2-x-42$; 5) $3x^2-8x+5$; 6) $36x^2-12x+1$;
7) $2x^2-7x+6$; 8) $x^2+9x-22$; 9) $x^2-8x-84$;
10) $4x^2-11x+7$; 11) $5x^2+9x+4$; 12) $2x^2-7x+5$.

2) $2x^2-5x+3=0$ теңдеуінің түбірлері $x_1=1$, $x_2=1,5$. Сондықтан $2x^2-5x+3=2(x-1,5)\cdot(x-1)=(2x-2\cdot1,5)(x-1)=(2x-3)(x-1)$.

B

2.99. c-нің қандай мәндерінде $5x^2-4x+c=0$ теңдеуінің 1) әртүрлі екі түбірі; 2) өзара тең екі түбірі бар; 3) нақты түбірлері жоқ; 4) $x^2+13x-30=0$ теңдеуімен кем дегенде бір ортақ түбірі бар?

2.100. b-ның қандай мәндерінде $x^2+bx+4=0$ теңдеуінің 1) бір түбірі 3-ке тең; 2) әртүрлі екі түбірі бар; 3) өзара тең екі түбірі бар; 4) нақты түбірлері жоқ?

2.101. Квадрат үшмүшені көбейткіштерге жіктеңдер:

1) $4x^2+7x+3$; 2) x^2+x-56; 3) x^2-x-56;
4) $5x^2-18x+16$; 5) $8x^2+x-75$; 6) $3x^2-11x-14$;
7) $3x^2+11x-34$; 8) x^2-x-1; 9) $4y^2-7y+1$.

2.102. Квадрат үшмүшені көбейткіштерге жіктеңдер:

1) $ax^2-(a+c)x+c$; 2) $6x^2+5mx+m^2$;
3) $56y^2+ay-a^2$; 4) $(m-n)x^2-nx-m$.

C

2.103. a-ның қандай мәндерінде $(a+2)x^2+2(a+2)x+2=0$ теңдеуінің түбірлері өзара тең болады?

2.104. a-ның қандай мәндерінде $(a^2-6a+8)x^2+(a^2-4)x+(10-3a-a^2)=0$ теңдеуінің түбірлерінің саны екіден артық болады?

Нұсқау. Егер квадрат теңдеудің түбірлер саны 2-ден артық болса, онда оның түбірлерінің шексіз көп болатынын ескеріңдер.

2.105. a-ның қандай мәндерінде $4x^2+(3a^2-5|a|+2)x-3=0$ теңдеуінің түбірлерінің модульдері тең, ал таңбалары қарама-қарсы болады?

2.106. $x^2+x+k=0$ теңдеуінің нақты түбірлері болмайтындай етіп, k-ның ең кіші бүтін мәнін табыңдар.

2.107. a-ның қандай мәндерінде 1) $2x^2+x-a=0$ және $2x^2-7x+6=0$; 2) $x^2+ax+1=0$ және $x^2+x+a=0$ теңдеулерінің кем дегенде бір ортақ түбірі бар?

6–3457

2.108. a-ның қандай мәндерінде $x^2+2(a-3)x+(a^2-7a+12)=0$ және $x^2+(a^2-5a+6)x=0$ теңдеулері мәндес болады?

2.109. a, b және c сандарының қандай мәндерінде $0{,}75x^2+(a+b+c)x+a^2+b^2+c^2=0$ теңдеуінің бір түбірі болады? Бұл теңдеудің әртүрлі екі түбірі болуы мүмкін бе?

2.110. a-ның қандай мәндерінде 1) $4x^2+ax+9=0$; 2) $ax^2+4x+1=0$; 3) $x^2-2(1-3a)x+7(3+2a)=0$ теңдеулерінің түбірлері өзара тең болады?

ҚАЙТАЛАУҒА АРНАЛҒАН ЖАТТЫҒУЛАР

2.111. Теңдеуді шешіңдер:

1) $(2x-1)^2=2x-1$;
2) $(x-3)^2=4(x-3)$;
3) $4(x-3)^2=(2x+6)^2$;
4) $(3x+4)^2=3(x+4)$.

2.112. Теңдеулер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases} x+2y=1, \\ 2x-y=-8; \end{cases}$
2) $\begin{cases} 3x-2y=2, \\ 2x+y=13. \end{cases}$

2.113. Түбірлері бойынша теңдеулер құрастырып, оларды көпмүше түрінде жазыңдар:

1) -3; 8; 2) 0; 12; 3) 5; -5; 4) 1; $2{,}3$; 5) $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

2.5. Теңдеулерді шешу

$|ax^2+bx|+c=0$ және $ax^2+b|x|+c=0$ түріндегі теңдеулерді шешу. Ол үшін бірнеше мысалдар қарастыралық.

1-мысал. $|2x^2+5x|-3=0$ теңдеуін шешу керек.

Шешуі. Берілген теңдеуді $|2x^2+5x|=3$ түрінде жазамыз. $2x^2+5x$ өрнегінің модулі 3-ке тең. Олай болса, $2x^2+5x = \pm3$. Берілген теңдеу $\left[\begin{array}{l} 2x^2+5x=3, \\ 2x^2+5x=-3 \end{array}\right.$ теңдеулер жиынтығымен мәндес.

Осыдан $\left[\begin{array}{l} 2x^2+5x-3=0, \\ 2x^2+5x+3=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=0{,}5;\ x_2=-3; \\ x_3=-1;\ x_4=-1{,}5. \end{array}\right.$

Жауабы: 0,5; –1; –1,5; 3.

2-мысал. $|3x^2-7x|+4=0$ теңдеуін шешу керек.

Шешуі. Теңдеуді $|3x^2-7x|=-4$ түрінде жазамыз. Мұндағы $(-4) < 0$. $|3x^2-7x|\geqslant 0$ болғандықтан, теңдеудің шешімі жоқ.

Жауабы: $\varnothing$

3-мысал. $3x^2-5|x|+2=0$ теңдеуін шешу керек.

Шешуі. $3x^2-5|x|+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2-5x+2=0,\ x \geq 0, \\ 3x^2+5x+2=0,\ x<0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=1,\ x_2=\dfrac{2}{3}; \\ x_3=-1,\ x_4=-\dfrac{2}{3}. \end{array}\right.$

Жауабы: $\pm 1;\ \pm\dfrac{2}{3}$.

Қорытынды:

- Егер $c<0 \Rightarrow |ax^2+bx|+c=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} ax^2+bx+c=0, \\ ax^2-bx-c=0. \end{array}\right.$
- Егер $c>0 \Rightarrow |ax^2+bx|+c=0 \Leftrightarrow x\in\varnothing$.
- Егер $c=0 \Rightarrow |ax^2+bx|=0 \Leftrightarrow ax^2+bx=0$.
- $ax^2+b|x|+c=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} ax^2+bx+c=0, \\ ax^2-bx+c=0. \end{array}\right.$

Биквадрат теңдеулерді шешу.

$ax^2+bx^2+c=0,\ a\neq 0$ түрінде берілген теңдеу **биквадрат теңдеу** деп аталады.

Биквадрат теңдеу	Белгілеу енгізу	Квадрат теңдеуге келтіру	Биквадрат теңдеу түбірлерін анықтау
$ax^4+bx^2+c=0$, $a\neq 0$	$x^2=z$	$az^2+bz+c=0$ теңдеуінің түбірлері: $z_1;\ z_2$.	$\left[\begin{array}{l} x^2=z_1, \\ x^2=z_2 \end{array}\right.$ теңдеулер жиынтығынан биквадрат теңдеудің түбірлері анықталады.

1-мысал. $x^4-25x^2+144=0$ теңдеуінің түбірлерін табу керек.

Шешуі. $x^2=y$ деп белгілесек, $y^2-25y+144=0$ квадрат теңдеуін аламыз. Оның түбірлері $y_1=9$, $y_2=16$. Онда берілген биквадрат теңдеудің түбірлері төмендегідей: $x_{1,2}=\pm 3$; $x_{3,4}=\pm 4$.

Жауабы: ± 3; ± 4.

Теңдеулерді жаңа айнымалы енгізу тәсілімен шешу.

Осы сияқты белгілеулер енгізіп, жоғары ретті теңдеулерді шешуге болады. Оны мысалдар арқылы көрсетейік.

2-мысал. $(x^2+x+1)^2-3x^2-3x-1=0$ теңдеуінің түбірлерін табу керек.

Шешуі. Берілген теңдеуді $(x^2+x+1)^2-3(x^2+x+1)+2=0$ түрінде жазып, $x^2+x+1=y$ айнымалысын енгізейік. Сонда берілген теңдеуді $y^2-3y+2=0$ түрінде жазуға болады. Оның түбірлері $y_1=1$, $y_2=2$ болғандықтан, $x^2+x+1=1$ және $x^2+x+1=2$ немесе $x^2+x=0$ және $x^2+x\ 1=0$ теңдеулерін аламыз. Осыдан $x^2+x=0$ теңдеуінің түбірлері $x_1=0$, $x_2=-1$, ал $x^2+x-1=0$ теңдеуінің түбірлері $x_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Ж а у а б ы: $x_1=0$, $x_2=-1$, $x_{3,4}=-\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

3-мысал. $16x(x+1)(x+2)(x+3)=9$ теңдеуінің түбірлерін табу керек.

Шешуі. $x(x+3)=x^2+3x$ және $(x+1)(x+2)=x^2+3x+2$ болғандықтан, $x^2+3x=y$ белгілеуін енгізіп, теңдеуді $16y(y+2)=9$ немесе $16y^2+32y-9=0$ түрінде жазамыз. Оның түбірлері: $y_1=-\frac{9}{4}$; $y_2=\frac{1}{4}$. Осыны ескерсек, берілген теңдеудің түбірлері $x^2+3x=-\frac{9}{4}$ және $x^2+3x=\frac{1}{4}$ немесе $4x^2+12x+9=0$ және $4x^2+12x-1=0$ теңдеулерін шешу арқылы алынады. Осыдан бірінші теңдеудің түбірлері $x_1=x_2=-1{,}5$, екінші теңдеудің түбірлері $x_{3,4}=\frac{-3\pm\sqrt{10}}{2}$.

Ж а у а б ы: $x_{1,2}=-1{,}5$; $x_{3,4}=\frac{-3\pm\sqrt{10}}{2}$.

1. $|ax^2+bx|+c=0$ түріндегі теңдеуді қалай шешеді? Неліктен $c>0$ болғанда теңдеудің түбірі болмайды?
2. $ax^2+b|x|+c=0$ теңдеуін қалай шешеді? Теңдеудің түбірлері барлық уақытта бола ма?
3. Қандай теңдеулер биквадрат теңдеу деп аталады? Оларды қалай шешеді?
4. Айнымалыны алмастыру тәсілімен квадрат теңдеуге келтіріп шешілетін өзге де теңдеулерге мысал келтіріңдер.

ЕСЕПТЕР

А

2.114. Теңдеуді шешіңдер:

1) $|x^2-3x|=-2$; 2) $|x^2-3x|=-2$; 3) $|x^2-3x|=0$;

4) $|3x^2+7x|=4$; 5) $|2x^2-7x|-5=0$; 6) $|2x^2-7x|+5=0$.

Теңдеуді шешіңдер **(2.115–2.117):**

2.115. 1) $x^2+7|x|+10=0$; 2) $x^2-29|x|+30=0$; 3) $x^2-11|x|+30=0$;
4) $|x^2+5|x| = -8$; 5) $2x^2+|x| = 1$; 6) $2x^2-5|x|-7=0$.

2.116. 1) $|x^2+x|-2=0$; 2) $x^2-2|x|=15$; 3) $2x^2-3|x|=2$;
4) $|x^2+5x|=-8$; 5) $2x^2+|x|=1$; 6) $|7x^2-x|+1=0$.

2.117. 1) $x^4-5x^2+4=0$; 2) $x^4-8x^2-9=0$; 3) $x^4-11x^2+30=0$;
4) $x^4+5x^2+10=0$; 5) $2x^4-5x^2+3=0$; 6) $9x^4+23x^2-12=0$.

2.118. Биквадрат теңдеулердің түбірлерін табыңдар:
1) $x^4-29x^2+30=0$; 2) $x^4+7x^2+10=0$; 3) $5y^4+2y^2-3=0$;
4) $2y^4-5y^2-7=0$; 5) $x^4-(a^2+9)x^2+9a^2=0$; 6) $x^4-(9a^2+4)x^2+36a^2=0$.

B

Теңдеуді шешіңдер **(2.119–2.125):**

2.119. 1) $|x^2-3x|+x^2 = 6-(x-2)(x+2)$; 2) $x^2-3|x| - 5 = 10 - 5|x|$;
3) $3x^2-|x|=2|x|+(x-1)(x+1)+2$; 4) $|x^2+5x|-x^2 =(x+2)(2-x)-5$;
5) $|x^2-x-3| - 5 = 0$; 6) $|x^2 - 2x + 4| = 2|x|$.

2.120. 1) $(x+3)^4-13(x+3)^2+36=0$; 2) $(2x-1)^4-(2x-1)^2-12=0$;
3) $(x-1)^4-x^2+2x-73=0$; 4) $(x+2)^4+2x^2+8x-16=0$.

2.121. 1) $\dfrac{x-2}{x^3}=2x-x^2$; 2) $\dfrac{x^2-x-2}{x-3}=\dfrac{2x-4}{x^2-3x}$;
3) $\dfrac{8x-4x^2}{1-x^2}=\dfrac{x^3-4x}{x+1}$; 4) $\dfrac{x^2+x-2}{x-3}=\dfrac{2x+4}{x^2-3x}$.

2.122. 1) $(x+1)^2(x^2+2x)=12$; 2) $(x-2)^2(x^2-4x)+3=0$;
3) $(x^2+3x+1)(x^2+3x+3)+1=0$; 4) $(x^2-5x+2)(x^2-5x-1)=28$.

2.123. 1) $(x^2-2x-1)^2+3x^2-6x-13=0$; 2) $(2x^2-x+5)^2+3(2x^2-x-1)-10=0$;
3) $(x^2-5x+7)^2-(x-2)(x-3)=1$; 4) $(x-1)x(x+1)(x+2)=24$;
5) $(x+4)(x+5)(x+7)(x+8)=4$; 6) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=120$.

C

2.124. 1) $|x^2 + 5x| = 6x$; 2) $|x^2 - 4x + 5| = -4x$;
3) $x^2 - 6x + 3|x-3| + 5 = 0$; 4) $|x^2 + x + 2| = x-3$.

2.125. 1) $\frac{x^2 - 2x}{4x - 3} + 5 = \frac{16x - 12}{2x - x^2}$; 2) $\frac{x^2 + 4x}{7x - 2} - \frac{12 - 42x}{x^2 + 4x} = 7$;

3) $\left(\frac{4x-5}{3x+2}\right)^2 + \left(\frac{3x+2}{5-4x}\right)^2 = 4,25$; 4) $\left(\frac{5x+1}{2x-3}\right)^2 + \left(\frac{3-2x}{5x+1}\right)^2 = \frac{82}{9}$.

2.126. a-ның қандай мәндерінде 1) $x^4+(3a+1)x^2+0,25=0$; 2) $x^4+(3a-1)x^2+2a+0,25=0$ теңдеулерінің өзара тең екі түбірі болады?

2.127. Кейбір түбірлері $\sqrt{2}$ және $\sqrt{3}$ сандарына тең болатындай етіп, биквадрат теңдеу құрыңдар.

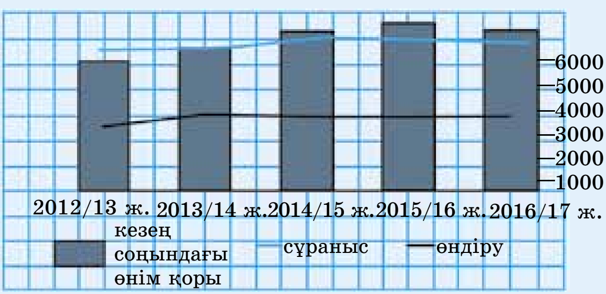
ҚАЙТАЛАУҒА АРНАЛҒАН ЖАТТЫҒУЛАР

2.128. $A(0;\ 4)$, $B(2;\ 0)$ және $C(4;\ 0)$ нүктелері арқылы өтетін квадраттық функцияның теңдеуін жазып, оның графигін салыңдар.

2.129. n-нің қандай мәндерінде $\frac{2n-3}{n}$ өрнегінің мәні $\frac{1}{n+1}$ өрнегінің сәйкес мәндерінен артық болады?

ТОПТЫҚ ЖҰМЫС

2.130. 2.2-суретте әлемдік деңгейде дәнді дақылдарды өндіру, сұраныс және оның қоры бойынша мәліметтер берілген (млн тонна есебімен). Осы мәліметтерді талқылап, қорытынды жасаңдар.



2.2-сурет

2.6. Рационал теңдеулер. Квадрат теңдеулерге келтірілетін мәтінді есептер

Рационал теңдеулер.

Рационал өрнектерден құралған теңдеу ***рационал теңдеу*** деп аталады. Ал құрамында бөлшек өрнек болмайтын рационал теңдеу ***бүтін теңдеу*** деп аталады. Құрамында бөлшек өрнегі бар теңдеу ***бөлшек теңдеу*** деп аталады.

Мысалы:

$3x-2=2(x+1)+5$; $\frac{1}{2}x-x^2=2x-\frac{4}{5}$ — бүтін теңдеулер.

$x+\frac{1}{x}=2x-1$; $\frac{1}{x-1}+\frac{x}{x^2-1}=\frac{3}{x+1}$ — бөлшек теңдеулер.

1-мысал. $2-\frac{x-7}{x-5}=\frac{x+5}{x^2-5x}-\frac{1}{x}$ теңдеуін шешу керек.

Шешуі. Теңдеудің ММЖ-ын анықтаймыз. Бөлшектің бөлімі нөлге тең болмауы қажет, сондықтан $\begin{cases} x-5\neq 0, \\ x^2-5x\neq 0, \\ x\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\neq 0, \\ x\neq 5; \end{cases} \Rightarrow$ ММЖ: $(-\infty;0)\cup(0;5)\cup(5;+\infty)$.

Енді теңдеу құрамындағы бөлшек өрнектерді ортақ бөлімге келтіріп, былай жазамыз:

$$\frac{2x(x-5)-x(x-7)}{x(x-5)}=\frac{x+5-(x-5)}{x(x-5)} \Rightarrow 2x(x-5)-x(x-7)=x+5-(x-5) \Rightarrow$$

$\Rightarrow x^2-3x-10=0 \Rightarrow x_1=-2$; $x_2=5$. Мұнда $(-2)\in$ММЖ, ал $5\notin$ММЖ.

Жауабы: $x=-2$.

Сонымен, бөлшек теңдеулерді мына ережелерге сүйеніп, шешкен тиімді:

а) теңдеудің құрамындағы бөлшектердің бөлімдерін нөлге айналдыратын x-тің мәндерін анықтап, теңдеудің ММЖ-ын табу керек;

ә) берілген теңдеулердегі бөлшектердің ортақ бөлімдерін анықтап, теңдеуді осы ортақ бөлімге көбейтеді. Осылай берілген теңдеуді бүтін теңдеумен алмастыру керек;

б) шыққан бүтін теңдеуді шешіп, оның түбірлерін табу керек;

в) табылған түбірлердің ММЖ-ына жататындарын тауып, оларды есептің жауабына жазу керек.

Квадрат теңдеулерге келтірілетін мәтінді есептер. Рационал теңдеулер сияқты басқа да көптеген есептер квадрат теңдеулер көмегімен шешіледі. Енді осындай есептерге бірнеше мысал қарастырайық.

2-мысал. Екі таңбалы санның ондық разрядындағы цифр оның бірлігінен 2-ге артық. Егер осы санды өзінің цифрларының қосындысына көбейтсек, онда ол 900-ге тең болады. Осы екі таңбалы санды табу керек.

Шешуі. 1-кезең. Алдымен есептің математикалық моделін құрамыз. $\overline{xy}=x\cdot 10+y$ бізге қажет екі таңбалы сан болсын, мұндағы x және y — цифрлар. Онда $x=y+2$ және $(10x+y)\cdot(x+y)=900$. Мұнда $y=x-2$ болғандықтан, $(11x-2)(2x-2)=900$. Жақшаларды ашып, ұқсас мүшелерді біріктірген соң $11x^2-13x-448=0$ теңдеуін аламыз. Бұл теңдеу берілген есептің математикалық моделі.

2-кезең. Математикалық модель шешімін анықтаймыз, яғни $11x^2-13x-448=0$ теңдеуін шешеміз: $D=13^2+4\cdot 11\cdot 448=141^2\Rightarrow$

$$x_{1/2}=\frac{13\pm 141}{22}\Rightarrow x_1=-\frac{64}{11};\quad x_2=7.$$

3-кезең. Есеп шарты бойынша x — цифр (бөлшек сан емес). Сондықтан $x=7$ және $y=7-2=5$.

Жауабы: 75.

3-мысал. Бірінші жұмысшы 60 тетікті екіншісіне қарағанда 3 сағат ерте жасап бітірді. Егер екеуі бірігіп 30 тетікті бір сағатта жасайтыны белгілі болса, онда екінші жұмысшы 90 тетікті неше сағатта жасап бітіреді?

Шешуі. Мәтінді есептің математикалық моделін бірнеше тәсілдермен құруға болады. **1-тәсіл:** 1) еңбек өнімділігін табайық. Егер бірінші жұмысшы x сағатта 60 тетік жасайды деп алсақ, онда екінші жұмысшы осы 60 тетікті $x+3$ сағатта жасайды. Сонда бірінші жұмысшы 1 сағатта $\frac{60}{x}$ тетік, екіншісі $\frac{60}{x+3}$ тетік дайындайды. Есеп шарты бойынша 1 сағатта екеуі бірігіп $\frac{60}{x}+\frac{60}{x+3}=30$ тетік дайындайды. Бұл теңдеу есептің математикалық моделі.

2) Енді $\frac{60}{x+3}+\frac{60}{x}=30$ теңдеуін шешу керек. Осыдан $\frac{2}{x}+\frac{2}{x+3}=1$ немесе $x^2+3x-4x-6=0$; $x^2-x-6=0\Rightarrow x_1=3,\ x_2=-2.$

3) -2 саны есеп шартына қайшы, уақыт өлшемі теріс болмайды. Сонымен, бірінші жұмысшы 60 тетікті 3 сағатта жасайды. Сонда ол 1 сағатта 20 тетік, ал екіншісі $30-20=10$ тетік дайындайды. Олай болса, екінші жұмысшы 90 тетікті 9 сағатта бітіреді.

Жауабы: 9 сағат.

2-тәсіл: 1) айталық, бірінші жұмысшы 1 сағатта x тетік жасасын, онда екінші жұмысшы 1 сағатта $30-x$ тетік жасайды. Сондықтан 60 тетікті бірінші жұмысшы $\frac{60}{x}$ сағатта, ал екіншісі $\frac{60}{30-x}$ сағатта дайындайды. Есеп шарты бойынша $\frac{60}{30-x}-\frac{60}{x}=3$ теңдігі орындалады. Бұл есептің математикалық моделі.

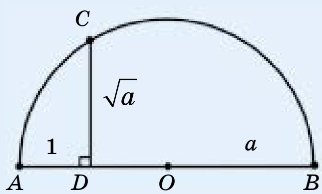
2) Модельдік теңдеуді шешу керек: $\frac{60}{30-x}-\frac{60}{x}=3 \Rightarrow \frac{20}{30-x}-\frac{20}{x}-1=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2+10x-600=0 \Rightarrow x_1=20,\ x_2=-30.$

3) $x=-30$ есеп шартына қайшы (тетік саны теріс болмайды). Сондықтан $x=20$, яғни бірінші жұмысшы 1 сағатта 20 тетік, ал екінші жұмысшы 30–20=10 тетік жасайды. Олай болса, екінші жұмысшы 90 тетікті 9 сағатта жасап бітіреді.

Жауабы: 9 сағат.

Практикалық жұмыс

Квадрат түбірді анықтаудың геометриялық тәсілі. Диаметрге керілген жарты шеңбер берілген (2.3-сурет). Геометрия курсында CD кесіндісі AD және BD кесінділерінің геометриялық ортасы болатыны дәлелденеді: $CD=\sqrt{AD\cdot BD}$. Мұндағы $AD=1$, $BD=a$ деп алсақ, $CD=\sqrt{a}$. Осы қасиетті пайданып, циркульдің және тік бұрышты сызғыштың көмегімен ұзындығы 1) $\sqrt{13}$ см; 2) $\sqrt{23}$ см болатын кесіндіні салыңдар.



2.3-сурет

ЕСЕПТЕР

А

2.131. Теңдеудің түбірлерін табыңдар:

1) $\frac{x^2}{x-2}=\frac{x}{x-2}$; 2) $\frac{y^2-6y}{y-5}=\frac{5}{5-y}$; 3) $\frac{5y+1}{y+1}=\frac{y+2}{y}$;

4) $\frac{2y-1}{y+7}=\frac{3y+4}{y-1}$; 5) $\frac{2y+3}{2y-1}=\frac{y-5}{y+3}$; 6) $\frac{x^2}{x-2}=\frac{5x-6}{x-2}$;

7) $\frac{2x^2}{x-2}=\frac{6-7x}{2-x}$; 8) $\frac{1+3y}{1-3y}=\frac{5-2y}{1+2y}$.

2.132. Теңдеуді шешіңдер:

1) $\frac{x+1}{6}+\frac{20}{x-1}=4$; 2) $\frac{12}{x-1}-\frac{8}{x+1}=1$; 3) $\frac{3}{1-x}+\frac{1}{x+1}=\frac{28}{1-x^2}$;

4) $\frac{x+15}{4}-\frac{21}{x+2}=2$; 5) $\frac{16}{x-3}+\frac{30}{1-x}=3$; 6) $\frac{5}{x-2}-\frac{3}{x+3}=\frac{20}{x^2-4}$.

2.133. 1) 1) $y = \dfrac{2x-5}{x+3}$; 2) $y = \dfrac{(x-4)(3x-15)}{x-9}$;

3) $y = \dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$; 4) $y = \dfrac{x^3-7x^2+12x}{x-3}$

функцияларының графиктері мен Ox өсінің қиылысу нүктелерін анықтаңдар.

3) Функцияның анықталу облысы $x \neq 2$ теңсіздігімен анықталады, яғни $D=(-\infty;2)\cup(2;\ +\infty)$. Ox өсіндегі нүктелердің ординатасы 0-ге тең, сондықтан функция графигі мен Ox-тің қиылысу нүктесінде $y=0$ болуы керек. Онда $\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}=0 \Rightarrow x^2-5x+6=0 \Rightarrow x_1=2,\ x_2=3$. $x_1=2$ функцияның анықталу облысында жатпайды. Олай болса, функцияның графигі Ox-ті $(3;0)$ нүктесінде қияды.

2.134. 1) $y=2x+3$ және $y = \dfrac{34}{x-5}$; 2) $y = \dfrac{x^2-5x}{x+3}$ және $y=2x-35$ функциялары графиктерінің қиылысу нүктелерін анықтаңдар.

2.135. y-тің қандай мәндерінде

1) $\dfrac{3y+9}{3y-1}$ және $\dfrac{2y-13}{2y+5}$ бөлшектерінің қосындысы 2-ге тең;

2) $\dfrac{5y+13}{5y+4}$ және $\dfrac{4-6y}{3y-1}$ бөлшектерінің айырмасы 3-ке тең болады?

2.136. Теңдеудің түбірлерін табыңдар:

1) $\dfrac{x-4}{x-5}+\dfrac{x-6}{x-5}=2$; 2) $\dfrac{1}{2-x}-1=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{6-x}{3x^2-12}$;

3) $\dfrac{7y-3}{y-y^2}=\dfrac{1}{y-1}-\dfrac{5}{y(y-1)}$; 4) $\dfrac{3}{y-2}+\dfrac{7}{y+2}=\dfrac{10}{y}$;

5) $\dfrac{30}{y^3+27}=\dfrac{2}{y+3}-\dfrac{y-5}{y^2-3y+9}$; 6) $\dfrac{3x+2}{x^3-8}=\dfrac{5}{x^2+2x+4}-\dfrac{1}{x-2}$.

1) $x \neq 5 \Rightarrow \dfrac{x-4}{x-5}(x-5)+\dfrac{x-6}{x-5}(x-5)=2(x-5) \Rightarrow x-4+x-6=2x-10 \Rightarrow$ $\Rightarrow 2x-2x=10-10 \Rightarrow 0 \cdot x=0$. Бұл теңдік x-тің кез келген мәнінде орындалады.

Жауабы: $x\in(-\infty;5)\cup(5;+\infty)$.

2.137. Теңдеудің түбірлерін табыңдар:

1) $\frac{6}{x^2-1}-\frac{2}{x-1}=2-\frac{x+4}{x+1}$;
2) $\frac{3}{x+2}-\frac{2x-1}{x+1}=\frac{2x+1}{x^2+3x+2}$;

3) $\frac{2}{x^2-4}+\frac{x-4}{x^2+2x}=\frac{1}{x^2-2x}$;
4) $\frac{4}{x+2}-\frac{3}{x-2}-\frac{12}{4-x^2}=\frac{1}{7}$;

5) $\frac{4}{x}+5=\frac{1}{x^2}$;
6) $\frac{6-y}{1-y^2}-\frac{y+3}{y-y^2}=\frac{y+5}{y+y^2}$.

B

2.138. Теңдеудің түбірлерін табыңдар:

1) $\frac{1}{a}+\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a+2x}=0$;
2) $1-\frac{2a}{x-a}=\frac{b^2-a^2}{a^2+x^2-2ax}$;

3) $\frac{x}{x+a}+\frac{2x}{x-a}=\frac{5a^2}{4\left(x^2-a^2\right)}$;
4) $\frac{2x}{x+b}-\frac{x}{b-x}=\frac{b^2}{4\left(x^2-b^2\right)}$;

5) $\frac{x^2}{ab-2b^2}=\frac{a-b}{ac^2-2bc^2}-\frac{x}{bc}$;
6) $\frac{x^2+1}{n^2x-2n}-\frac{1}{2-nx}=\frac{x}{n}$.

1) Ортақ бөлімге келтіреміз:

$\frac{(a+x)(a+2x)+a(a+2x)+a(a+x)}{a(a+x)(a+2x)}=0$, $\left(x\neq-a,\ x\neq-\frac{a}{2}\right)\Rightarrow(a+x)\times$
$\times(a+2x)+a(a+2x)+a(a+x)=0\Rightarrow a^2+3ax+2x^2+a^2+2ax+a^2+ax=0\Rightarrow$
$\Rightarrow 2x^2+6ax+3a^2=0$. $D=9a^2-6a^2=3a^2>0\Rightarrow x_1=\frac{-3a-\sqrt{3}\cdot a}{2}=-\frac{3+\sqrt{3}}{2}a$;

$x_2=\frac{\sqrt{3}-3}{2}a$. $x_{1/2}\in$ ММЖ.

Жауабы: $x_1=-\frac{\sqrt{3}+3}{2}a$; $x_2=\frac{\sqrt{3}-3}{2}a$.

2.139. Теңдеуді шешіңдер:

1) $\frac{2x+1}{2x-1}+\frac{8}{1-4x^2}=\frac{3(2x-1)}{7(2x+1)}$;
2) $\frac{y}{y^2-9}=\frac{1}{y^2+3y}-\frac{3}{6y+2y^2}$;

3) $\frac{9x+12}{x^3-64}-\frac{1}{x^2+4x+16}=\frac{1}{x-4}$;
4) $\frac{x\sqrt{3}+\sqrt{2}}{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}{x\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{10x}{3x^2-2}$.

2.140. A пунктінен 210 км қашықтықта орналасқан B пунктіне екі автокөлік шықты. Бірінші автокөліктің жылдамдығы екіншісіне қарағанда 5 км/сағ артық болғандықтан, біріншісі екіншісіне қарағанда B пунктіне 12 минут ерте келді. Әр автокөліктің жылдамдығын анықтаңдар.

1-көлік жылдамдығы v км/сағ болса, онда екінші көлік жылдамдығы $(v - 5)$ км/сағ. Онда бірінші көлік 210 км жолды $\frac{210}{v}$ сағ, екіншісі $\frac{210}{v-5}$ сағатта жүріп өтеді. Есеп шарты бойынша осы уақыттар айырмасы 12 мин, яғни $\frac{1}{5}$ сағатқа тең: $\frac{210}{v-5} - \frac{210}{v} = \frac{1}{5}$. Бұл есептің мате-матикалық моделі. Осыдан $5 \cdot 210 = \frac{1}{5}\ v\ (v - 5) \Rightarrow$ $5250 = v^2 - 5v \Rightarrow v^2 - 5v - 5250 = 0 \Rightarrow v_1 = 75,\ v_2 = -70$.
2-түбір есеп шартына қайшы. Сондықтан $v = 75$ км/сағ.

Жауабы: 75 км/сағ; 70 км/сағ.

2.141. Көрермендер залында 320 орын бар. Әр қатардағы орындар саны бірдей. Әр қатардағы орындар санын 4-ке арттырып, тағы бір қатар қосқан соң орындықтар саны 420 болды. Залда неше қатар бар?

2.142. Бассейндегі суды 1 сағат бойы бірқалыпты ағызған соң оның ішінде 400 м^3 су қалды. Тағы да 3 сағат ағызған соң бассейндегі су мөлшері 250 м^3 болды. Бассейндегі бастапқы су мөлшерін табыңдар.

2.143. Бір айналымды шахмат турнирінде (әр шахматшы қалғандарының әрқайсысымен бір-бір рет ойнап шығады) барлығы 78 партия ойналған. Бұл турнирге қатысқан шахматшылар санын табыңдар.

2.144. Катер өзен ағысымен 18 км жүрген соң өзен ағысына қарсы 20 км жүріп, барлық жолға 2 сағат жұмсады. Егер катердің тұнық судағы жылдамдығы 20 км/сағ болса, өзен ағысының жылдамдығын табыңдар.

2.145. A және B қалаларының арақашықтығы 260 км. Автобус A-дан B қаласына қарай 2 сағат жүргеннен кейін 30 минут кідірді. Сондықтан B қаласына кестеде көрсетілген мерзімде жету үшін жылдамдығын 5 км/сағ-қа арттыруға мәжбүр болды. Автобустың бастапқы жылдамдығы қандай?

2.146. A және B теміржол бекеттерінің арақашықтығы 120 км. A-дан B-ға аттанған пойыздың соңынан 3 сағат өткен соң, одан жылдамдығы 10 км/сағ артық екінші пойыз шықты.Егер екінші пойыз B бекетіне біріншісіне қарағанда 2 сағат кеш келгені белгілі болса, екінші пойыз A мен B бекеттерінің арасына қанша уақыт жұмсаған?

C

2.147. Қайықтың көл бетімен 25 км және өзен ағысына қарсы 9 км жүрген жолына жұмсаған уақыты оның өзен ағысымен 56 км жүретін жолына жұмсайтын уақытымен бірдей болды. Егер өзен ағысының жылдамдығы 2 км/сағ болса, онда қайықтың тұнық судағы жылдамдығы қандай?

2.148. Әуежайдан бір уақытта ұшып шыққан ұшақтардың біреуі батысқа, ал екіншісі оңтүстікке бет алды. Олар 2 сағат ұшқаннан кейін бір-бірінен 2000 км қашықтықта болды. Егер бір ұшақтың жылдамдығы екіншісінің жылдамдығының 75%-індей болса, әр ұшақтың жылдамдығы қандай?

2.149. Екі тракторшы тың жерді бірігіп жыртса жұмысты бірінші тракторшы жалғыз жыртқан уақыттан 18 сағат, екінші тракторшы жалғыз жыртқан уақыттан 32 сағат ертерек бітірген болар еді. Осы тың жерді тракторшылардың әрқайсысы жеке-жеке қанша уақытта жыртып бітірер еді?

2.150. Екі бригада өнімді 12 күнде жинап бітіруі керек. Олар бірігіп 8 күн жұмыс істегеннен кейін бірінші бригада басқа жұмысқа ауысып, қалған жұмысты екінші бригада 7 күнде аяқтады. Осы бригадалар өнімді жеке-жеке неше күнде жинап бітіреді?

2.151. Екі жұмысшыға белгілі бір тетіктер жасау тапсырылды. Бірінші жұмысшы 7 сағат, екіншісі 4 сағат істегеннен кейін барлық жұмыстың $\frac{5}{9}$ бөлігі біткені белгілі болды. Олар бірігіп тағы да 4 сағат жұмыс істегеннен кейін барлық жұмыстың $\frac{1}{18}$ бөлігі қалды. Барлық тапсырманы әр жұмысшы жеке өзі істегенде неше сағатта бітірер еді?

2.152. Егер жолаушы пойызы бағананың қасынан 7 секундта, ал бекет аялдамасынан (платформадан) 25 секундта жүріп өтсе пойыздың ұзындығы мен жылдамдығы қандай болғаны? Аялдама ұзындығы 180 м.

2.153. Бір егін алқабынан 2880 ц астық, ауданы одан кіші жерден 2160 ц бидай жиналды. Бірінші алқаптың әр гектарынан екіншісіне қарағанда 4 ц бидай артық жиналса және бірінші алқаптың ауданы екіншісінен 12 га артық болса, әр алқаптың ауданын табыңдар.

2.154. Алюминий мен магнийдің қоспасында 22 кг алюминий бар. Бұл қоспаға 15 кг магний қосылып, қайта балқытылды. Осыдан шыққан жаңа қоспаның құрамында магнийдің үлесі 45% болды. Алғашқы қоспаның салмағы қандай болған?

2.155. Тұнық судағы жылдамдығы 25 км/сағ болатын катер 2 сағат ішінде өзен ағысымен 30 км және ағысқа қарсы 20 км жол жүрді. Өзен ағысының жылдамдығы қандай?

2.156. Шеңбер бойымен қозғалатын екі дененің біреуі екіншісінен 2 с озып отырады. Егер екі дене бір бағытта қозғала отырып, әрбір 60 секунд өткен сайын кездесіп отыратыны белгілі болса, онда олардың әрқайсысы 1 секундта шеңбердің қандай бөлігін жүріп өтеді?

ТОПТЫҚ ЖҰМЫС

2.157. а) $x(x-10)=24$; ә) $\frac{12}{x-1}-\frac{8}{x+1}=1$ теңдеулері бойынша шығарылатын есеп құрастырыңдар.

ҚАЙТАЛАУҒА АРНАЛҒАН ЖАТТЫҒУЛАР

2.158. Теңдеулер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases} 2x-3y=5, \\ 3x+y=2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-2y=0, \\ x+3y=5. \end{cases}$

2.159. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\left(\sqrt{21}+\sqrt{14}-2\sqrt{35}\right)\cdot\frac{\sqrt{7}}{7}+\sqrt{20}$;

2) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{15}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)+\sqrt{75}$.

2.160. Ығыспалы қатардың жиіліктері алқабын тұрғызыңдар:

x_i	0	1	2	3	4
n_i	1	2	7	8	2

2.7*. Екінші дәрежелі теңдеулер жүйесін шешу

Көпмүшенің дәрежесі деп осы көпмүшеге кіретін барлық бірмүшелер дәрежелерінің ең үлкенін айтамыз. Мысалы, $2xy^2+x^2+6y+20$ көпмүшесінің дәрежесі 3-ке, $2x^2y^2+x^3+5y^3$ көпмүшесінің дәрежесі 4-ке, ал $xy+5$ көпмүшесінің дәрежесі 2-ге тең. Егер теңдеулер жүйесінің бір теңдеуінің дәрежесі 2-ге тең, екінші теңдеуінің дәрежесі 2-ден артық болмаса, онда бұл теңдеулер жүйесін ***екінші дәрежелі*** теңдеулер жүйесі деп атайды. Мысалы,

$$\begin{cases} x+y=5, \\ xy=3 \end{cases} \quad \text{және} \quad \begin{cases} x^2+3y^2+xy=4, \\ 2x^2+y^2=5 \end{cases}$$

теңдеулер жүйесі — екінші дәрежелі. Теңдеулер жүйелерінің ***шешімі*** деп осы жүйенің әрбір теңдеуін теңбе-теңдікке айналдыратын x пен y-тің мәндерін айтамыз. Мысалы,

$\begin{cases} x^2+y^2=5, \\ x-y=1 \end{cases}$ жүйесінің екі шешімі бар: 1) $x_1=-1$, $y_1=-2$; 2) $x_2=2$, $y_2=1$.

Бұл сандардың берілген жүйенің шешімі болатынына тексеру арқылы көз жеткізейік:

$$1)\ \begin{cases} (-1)^2+(-2)^2=5, \\ (-1)-(-2)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5=5, \\ 1=1. \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} 2^2+1^2=5, \\ 2-1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5=5, \\ 1=1. \end{cases}$$

Екінші дәрежелі теңдеулер жүйесін шешудің бірнеше тәсілі бар. Енді осы тәсілдерді мысалдар арқылы көрсетейік.

1-мысал. *Бір айнымалыны екіншісі арқылы өрнектеу.*

$\begin{cases} x^2+y^2+2y-9=0, \\ 3x-y-1=0 \end{cases}$ жүйесін шешейік.

Шешуі. Екінші теңдеуден y-ті x арқылы өрнектейміз: $y=3x-1$. Енді оны бірінші теңдеуге апарып қоямыз: $x^2+(3x-1)^2+2(3x-1)-9=0$ немесе $x^2-1=0$. Бұл теңдеудің екі түбірі бар: $x_1=-1$, $x_2=1$. Осы түбірлерге y-тің сәйкес мәндерін $y=3x-1$ теңдеуінен табамыз: $y_1=-4$, $y_2=2$. Сонымен, $x_1=-1$, $y_1=-4$ және $x_2=1$, $y_2=2$.

Жауабы: $x_1=-1$, $y_1=-4$, $x_2=1$, $y_2=2$.

Кейбір жағдайларда бір айнымалыны екіншісі арқылы өрнектеудің орнына теңдеулер жүйесін шешудің басқа тәсілдерін қолданған тиімді. Осындай тәсілдердің бірі Виет теоремасын қолдану. Осыған бірер мысалдар қарастырайық.

2-мысал. $\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6 \end{cases}$ теңдеулер жүйесін шешу керек.

Шешуі. Виет теоремасы бойынша берілген жүйені қанағаттандыратын x және y сандары $z^2-5z+6=0$ квадрат теңдеуінің түбірлері болады. Бұл теңдеудің түбірлері $z_1=2$, $z_2=3$ болғандықтан, берілген жүйеде x пен y-ті z_1 мен z_2-нің кез келгенімен теңестіруге болады. Сондықтан жүйенің екі шешімі бар: $x_1=2$, $y_1=3$ және $x_2=3$, $y_2=2$.

Жауабы: $x_1=2$, $y_1=3$, $x_2=3$, $y_2=2$.

3-мысал. $\begin{cases} x - y = 7, \\ xy = -10 \end{cases}$ теңдеулер жүйесін шешейік:

Шешуі. Берілген жүйені былай жазамыз:

$$\begin{cases} x + (-y) = 7, \\ x \cdot (-y) = 10. \end{cases}$$

Онда x пен $(-y)$ сандары $z^2-7z+10=0$ теңдеуінің түбірлері болады.

Жауабы: $x_1=2$, $y_1=-5$; $x_2=5$, $y_2=-2$.

4-мысал. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20, \\ xy = 8 \end{cases}$ теңдеулер жүйесін шешу керек.

Шешуі. *1-тәсіл.* Бұл жүйенің екінші теңдеуін 2-ге көбейтіп, оны біріншісіне қоссақ, $(x+y)^2=36$ немесе $x + y = \pm 6$ теңдеулерін аламыз. Онда берілген теңдеулер жүйесін мынадай екі жүйеге жіктеуге болады:

1) $\begin{cases} x + y = 6, \\ xy = 8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = -6, \\ xy = 8. \end{cases}$

Бұлардың әрқайсысы 2-мысалдағы жүйе сияқты шешіледі. Сонымен, есептің 4 шешімі бар: $x_1=-4$, $y_1=-2$; $x_2=-2$, $y_2=-4$; $x_3=4$, $y_3=2$; $x_4=2$, $y_4=4$.

2-тәсіл. $x^2=u$, $y^2=v$ айнымалысын енгізіп, берілген жүйені былай жазамыз:

$$\begin{cases} u + v = 20, \\ uv = 64. \end{cases}$$

2-мысалда көрсетілген тәсіл бойынша $u_1=16$, $x_1=\pm 4$ және $v_1=4$, $y_1=\pm 2$; $u_2=4$, $x_2=\pm 2$ және $v_2=16$, $y_2=\pm 4$ түбірлерін аламыз.

Жауабы: $x_1=\pm 4$, $y_1=\pm 2$; $x_2=\pm 2$, $y_2=\pm 4$.

5-мысал. $\begin{cases} x^2 - xy - y^2 = 3, \\ 2x^2 - xy + y^2 = 5 \end{cases}$ жүйесін шешейік.

Шешуі. Жүйенің бірінші теңдеуін 5-ке, екіншісін 3-ке көбейтіп, олардың екіншісінен біріншісін шегерсек, $x^2+2xy-8y^2=0$ теңдеуін аламыз. $y=0$ мәні жүйенің шешімі бола алмайды. Сондықтан $y \neq 0$ деп алып, бұл теңдеуді y^2-қа бөлсек, $\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{y}\right) - 8 = 0$ теңдеуі шығады. Осыдан $\frac{x}{y} = z$ белгілеуін енгізсек, $z^2+2z-8=0$. Оның түбірлері $z_1=-4$, $z_2=2$ болғандықтан, $\frac{x}{y} = -4$, $\frac{x}{y} = 2$ немесе $x=-4y$, $x=2y$ теңдіктерін аламыз. Олай болса, берілген жүйе мынадай екі жүйеге жіктеледі:

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3, \\ x = -4y \end{cases} \quad \text{және} \quad \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3, \\ x = 2y. \end{cases}$$

Бұл жүйелерді 1-мысал сияқты шешсек, онда есептің 4 шешімін аламыз:

Жауабы: $x_{1,2} = \pm\frac{4}{\sqrt{7}}$, $x_{3,4} = \pm 2$, $y_{1,2} = \& \frac{1}{\sqrt{7}}$, $y_{3,4} = \pm 1$.

ЕСЕПТЕР

А

2.161. Төмендегі көпмүшелер мен теңдеулердің дәрежелерін анықтаңдар:

1) $4xy+xy^2-5x^2+y$;
2) $8x^4y+5x^2y^3-11$;
3) $2xy=x^3+y^3$;
4) $xy-x+y-1$;
5) $xy-x+y-1$;
6) $1-3x$;
7) $4x^6+2y^6+x^4y^4=0$;
8) $5xy^2+6x^2y=0$.

2.162–2.173-есептерде көрсетілген теңдеулер жүйесін шешіңдер.

2.162. 1) $\begin{cases} x^2 - y^2 = -21, \\ x + y = -3; \end{cases}$
2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 74, \\ x - y = 2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 34, \\ x + y = 7; \end{cases}$
4) $\begin{cases} x^2 - 2xy - y^2 = 1, \\ x + y = 2. \end{cases}$

1) $\Rightarrow \begin{cases} (x-y)(x+y)=-21, \\ x+y=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3(x-y)=-21, \\ x+y=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=7, \\ x+y=-3 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x=4, \\ 2y=-10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2, \\ y=-5. \end{cases}$

Жауабы: $x = 2$, $y = -5$.

2.163. 1) $\begin{cases} x+2y=13, \\ xy=15; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-2y=2, \\ xy=12; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 5(x-y)=4y, \\ x^2+4y^2=181. \end{cases}$

2.164. 1) $\begin{cases} x^2+3xy-y^2+2x-5y=-64, \\ x-y=-7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+3y^2-4x-5y-8=0, \\ x-y+1=0. \end{cases}$

B

2.165. 1) $\begin{cases} 2x-3y=-18, \\ xy=-12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^2-3y^2=-19, \\ xy=-6; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2+y^2=65, \\ xy=28. \end{cases}$

1) $\begin{cases} 2x-3y=-18, \\ xy=-12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+(-3y)=-18, \\ 2x(-3y)=-12\cdot(-6) \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} 2x=u, \\ -3y=v \end{array} \right| \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} u+u=-18, \\ u\cdot u=72. \end{cases}$ Виет теоремасына кері теорема бойынша u және v сандары $t^2 + 18t + 72 = 0$ теңдеуінің түбірлері болып табылады. Осы теңдеуді шешсек, $t_1 = -6$, $t_2 = -12$. $\Rightarrow u = -6$, $v = -12$ немесе $u = -12$, $v = -6$ $\Rightarrow$ $2x = -6$, $-3y = -12$ немесе $2x = -12$, $-3y = -6 \Rightarrow x = -3$, $y = 4$, немесе $x = -6$, $y = 2$.

Жауабы: $(-3; 4)$; $(-6; 2)$.

2.166. 1) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=18, \\ x+y=12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=3, \\ x+y=2. \end{cases}$

2.167. 1) $\begin{cases} \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}=1, \\ x+y=4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y-x=2, \\ \dfrac{10x+y}{xy}=3. \end{cases}$

2.168. 1) $\begin{cases} xy = 36, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2\sqrt{xy}, \\ x + y = 20. \end{cases}$

C

2.169. 1) $\begin{cases} 2x^2 - 3xy - 19y^2 = 25, \\ x^2 - 6y^2 = 250; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7x^2 - 6xy + 12y^2 = 108, \\ x^2 - \dfrac{5}{6}xy + \dfrac{7}{8}y^2 = 18. \end{cases}$

2.170. 1) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 1, \\ x + y = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + xy = 12, \\ xy - y^2 = 2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 8, \\ x - y = 2. \end{cases}$

2.171. 1) $\begin{cases} \dfrac{5}{x^2 + xy} + \dfrac{4}{y^2 + xy} = \dfrac{13}{6}, \\ \dfrac{8}{x^2 + xy} - \dfrac{1}{y^2 + xy} = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{2}{x^2 + 3xy} + \dfrac{3}{y^2 - xy} = \dfrac{25}{14}, \\ \dfrac{3}{x^2 + 3xy} - \dfrac{1}{y^2 - xy} = -\dfrac{4}{7}. \end{cases}$

2.172. 1) $\begin{cases} \dfrac{x + 2y}{x - y} + \dfrac{x - 2y}{x + y} = 4, \\ x^2 + xy + y = 21; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{3x - 9y}{x + y} + \dfrac{2x + y}{x - y} = 4, \\ x^2 - y^2 = 48. \end{cases}$

2.173. 1) $\begin{cases} x + y + xy = -1, \\ x^2 + xy + y^2 = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^3y^2 - x^2y^2 = 36, \\ 2x^2y - xy^2 = 6. \end{cases}$

2.174.*1) $\begin{cases} x + y = a, \\ xy = 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = a, \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$

жүйелерінің a-ның қандай мәндерінде тек бір ғана шешімі болады?

2-БӨЛІМГЕ ҚОСЫМША ЕСЕПТЕР

2.175. Теңдеуді толық квадратын бөлу арқылы шешіңдер:

1) $x^2-6x+8=0$; 2) $x^2+3x-40=0$; 3) $5x^2+3x-2=0$;
4) $4x^2-3x-22=0$; 5) $x^2+px+q=0$; 6) $ax^2+bx+c=0$.

2.176. Теңдеуді шешіңдер:

1) $9x^2-4x-2=0$;
2) $7x^2+18x+5=0$;
3) $x^2-3\sqrt{2}x+4=0$;
4) $x^2+2\left(1+\sqrt{8}\right)x+8\sqrt{2}=0$;
5) $x^2-3x-5-\sqrt{7}=0$;
6) $x^2-13x+4=0$.

2.177. Квадрат теңдеуге келтіріп, шешіңдер:

1) $(3x-2)(x-3)=20$;
2) $(x+2)(4x-5)=-3$;
3) $\dfrac{(x-1)^2}{5}-\dfrac{x+4}{6}=\dfrac{2x-2}{3}$;
4) $\dfrac{x^2+3x}{5}=\dfrac{10-x}{2}-\dfrac{3x^2+8x}{14}$.

2.178. Теңдеуді шешіңдер:

1) $x^2-cx-2c^2=0$;
2) $x^2+5ax-6a^2=0$;
3) $ax^2-(a+1)x+1=0$;
4) $(a+1)x^2-2x+1-a=0$.

2.179. Төмендегі теңдіктерден a-ны b арқылы өрнектеңдер:

1) $a^2-3ab-4b^2=0$;
2) $21a^2-4ab-b^2=0$;
3) $\left(\dfrac{a+2b}{a-b}\right)^2-2\left(\dfrac{a+2b}{a-b}\right)=3$;
4) $\dfrac{a-2b}{3a+b}+3\cdot\dfrac{3a+b}{a-2b}=4$.

2.180. Екі санның көбейтіндісінің олардың квадраттарының қосындысына қатынасы 0,3-ке тең. Осы сандардың қатынасын табыңдар.

2.181. Екі санның квадраттарының қосындысы олардың айырмасының толымсыз квадратынан 2 есе артық болса, осы сандардың қатынасын табыңдар.

Теңдеуді шешіңдер **(2.182–2.183):**

2.182. 1) $\dfrac{x^3}{|x|}-7x+12=0$;
2) $x|x|+7x+12=0$;
3) $|x+3|=|x^2+x-5|$;
4) $|3x^2-6x-1|=2|3-x|$.

2.183. 1) $\dfrac{30}{x^2-1}+\dfrac{7-18x}{x^3+1}=\dfrac{13}{x^2-x+1}$;
2) $\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{x^2+x+1}=\dfrac{2x+1}{1-x^3}$;
3) $\dfrac{2x-7}{x^2-9x+14}-\dfrac{1}{x^2-3x+2}=\dfrac{1}{x-1}$;
4) $\dfrac{2x+7}{x^2+5x-6}+\dfrac{3}{x^2+9x+18}=\dfrac{1}{x+3}$.

2.184. Айталық, x_1 және x_2 сандары $4x^2-6x-1=0$ теңдеуінің түбірлері болсын. Онда түбірлері 1) x_1-2, x_2-2; 2) $2x_1+3$, $2x_2+3$; 3) $\frac{1}{x_1}$, $\frac{1}{x_2}$; 4) $x_1+\frac{1}{x_2}$, $x_2+\frac{1}{x_1}$ сандарына тең болатын квадрат теңдеу құрыңдар.

2.185. 1) a-ның қандай мәндерінде $x^2+(2-a)x-a-3=0$ теңдеуі түбірлерінің квадраттарының қосындысы ең кіші мән қабылдайды? 2) $x^2+x-a=0$ теңдеуінің нақты түбірлері болмайтындай етіп, a-ның ең үлкен бүтін мәнін анықтаңдар.

2.186. k-ның қандай мәндерінде $x^2+2(k-3)x+(k^2-7k+12)=0$ және $x^2-(k^2-5k+6)x=0$ теңдеулері мәндес болады?

2.187. Қала тұрғындарының саны 2 жылда 20 000-нан 22 050-ге дейін өсті. Осы қала тұрғындары санының жылдық өсімінің процентін табыңдар.

2.188. Мектеп бітірушілер бір-бірімен фотосуреттермен алмасты. Егер олар барлығы 992 фотосурет алмасқан болса, мектеп бітірушілер саны қанша?

2.189. x-тің қандай мәнінде:

1) $\frac{6}{x+1}$ және $\frac{x}{x-2}$ бөлшектерінің қосындысы;

2) $\frac{x+12}{x-4}$ және $\frac{x}{x+4}$ бөлшектерінің айырмасы олардың көбейтіндісіне тең?

2.190. Теңдеулер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases} |x|+y=1, \\ x^2+y^2=5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} |x|+|y|=2, \\ xy=1. \end{cases}$

3-бөлім. КВАДРАТТЫҚ ФУНКЦИЯ

Бөлімді оқып-үйрену барысында келесі мақсаттарға қол жеткіземіз:

- $y = a(x-m)^2$, $y = ax^2+n$ және $y = a(x-m)^2+n$, $a \neq 0$ түріндегі квадраттық функциялардың қасиеттерін білу және графиктерін салу;
- $y = ax + bx + c$, $a \neq 0$ түріндегі квадраттық функцияның қасиеттерін білу және графигін салу;
- аргументтің берілген мәндері бойынша функцияның мәндерін табу және функцияның мәні бойынша аргументтің мәнін табу;
- есептерді шығарғанда квадраттық функцияны қолдану;
- функцияның графигін түрлендіре білу;
- модуль таңбасы бар функцияның графигін салу;
- бөлшек-сызықтық функцияның графигін салу;
- теңдеулер мен теңдеулер жүйесін графиктік тәсілмен шешу.

3.1. Квадраттық функция және оның графигі

Квадраттық функцияның анықтамасы.

Анықтама. $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ *өрнегімен анықталатын функционалды сәйкестік* **квадраттық функция**, ал *оның графигі* **парабола** деп аталады. Мұндағы a, b, c — нақты сандар. Өрнектегі x айнымалысы кез келген нақты мәндер қабылдауы мүмкін. Сондықтан бұл функция бүкіл сан өсінде анықталған: $x \in (-\infty, +\infty)$. Квадрат үшмүшенің толық квадратын бөліп алып, оны былай жазуға болады:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}, \quad (D = b^2 - 4ac).$$

Формуланы ықшамдап жазу үшін $m = -\frac{b}{2a}$; $n = -\frac{D}{4a}$ белгілеуін енгізсек, ол $y = a(x - m)^2 + n$ түрінде жазылады.

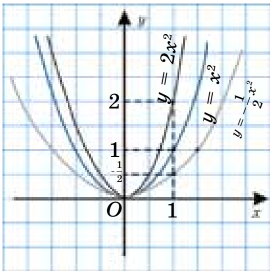
$A(m; n)$ нүктесі квадраттық функция графигінің **төбесі**, $x = m$ түзуі оның **өсі** деп аталады.

1-мысал. $y = 2x^2 - 5x + 3$ квадраттық функциясы графигінің төбесі мен өсін табу керек.

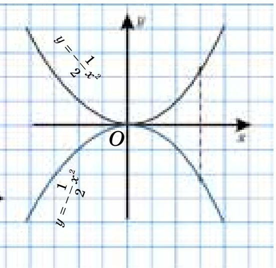
Шешуі. $a = 2$, $b = -5$, $c = 3$, $D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1$. График төбесінің координаталары $m = \frac{5}{4}$; $n = -\frac{1}{8}$ болғандықтан, квадраттық функция $y = 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$ түрінде жазылады. $A\left(\frac{5}{4}; -\frac{1}{8}\right)$ нүктесі — оның төбесі, $x - \frac{5}{4} = 0$ түзуі — өсі.

$y = a\,(x - m)^2$ және $y = ax^2 + n$ функцияларының графиктері.

7-сыныпта $y = ax^2$ функциясының графигін салуды үйрендік. Мысалы, 3.1 және 3.2-суреттерде $y = 2x^2$, $y = x^2$, $y = -\frac{1}{2}x^2$ және $y = -\frac{1}{2}x^2$ функцияларының графиктері бейнеленген. Енді осыны қолданып, $y = a\,(x - m)^2$ және $y = ax^2 + n$ функцияларының графигін салуды үйренеміз. Ол үшін 3.1-кестеге зер салып, ондағы тапсырманы орындаңдар.



3.1-сурет

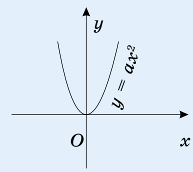
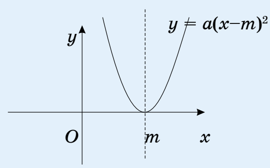
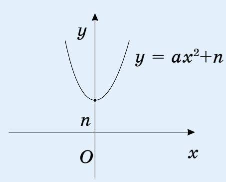


3.2-сурет

Кестемен жұмыс!

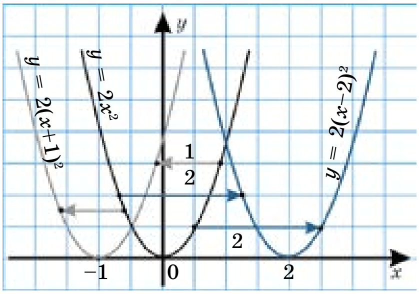
3.1-кестеге зер салыңдар. Функцияларды және олардың графиктерін салыстырыңдар.

3.1-*кесте*

Функция	Функцияның төбесі	Функцияның өсі	Функцияның графигі
$y = ax^2$	$D(0;\ 0)$	$x = 0$ түзуі	
$y = a(x - m)^2$	$A(m;\ 0)$	$x - m = 0$ түзуі	
$y = ax^2 + n$	$A(0;\ n)$	$x = 0$ түзуі	

Тапсырма

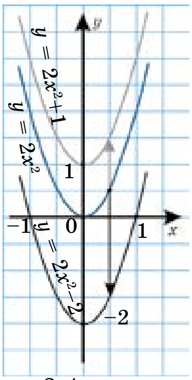
1. Берілген функциялардың айырмашылығы неде?
2. Функциялардың төбесі мен өсі қалай табылған?
3. Функциялардың төбесі мен өсін пайдаланып, графиктердің қалай салынғанын түсіндіріп көріңдер.



3.3-сурет

Сонымен, $y = a(x-m)^2$ функциясының графигін салу үшін $y = ax^2$ функциясының графигін төбесі $A(m;\ 0)$ нүктесінде болатындай етіп параллель жылжытса, жеткілікті. 3.3-суретте, сәйкесінше, $y = 2(x+1)^2$, $y = 2x^2$ және $y = 2(x-2)^2$ функцияларының графиктері бейнелеген.

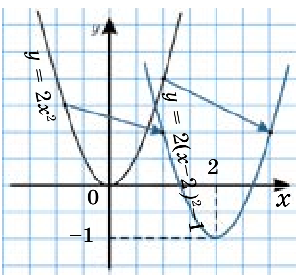
$y = ax^2 + n$ функциясының графигін салу үшін $y = ax^2$ функциясының графигін төбесі $A(0;\ n)$ нүктесінде болатындай етіп параллель жылжытса, жеткілікті. 3.4-суретте сәйкесінше $y = 2x^2 + 1$, $y = 2x^2$ және $y = 2x^2 - 2$ функцияларының графиктері бейнеленген.



3.4-сурет

$\boldsymbol{y = a(x - m)^2 + n}$ **функциясының графигі.** $y = a(x - m)^2 + n$ функциясының графигін салу үшін $y = ax^2$ функциясының графигін төбесі $A(m;\ n)$ нүктесінде, өсі $x = m$ түзуі болатындай етіп параллель жылжытса, жеткілікті. 3.5-суретте $y = 2(x -2) - 1$ функциясының графигі бейнеленген.

Жалпы жағдайда $y = ax^2 + bx + c\ \ (a \neq 0)$ функциясының графигін дәлірек салу үшін оның координаталар өстерімен қиылысу нүктелерін анықтау қажет. Ол үшін $y = 0$ деп алып, $ax^2 + bx + c = 0$ теңдеуінің түбірлерін немесе $x = 0$ деп алып y-ті табамыз.



3.5-сурет

Функция графигінің Ox өсімен қиылысуы:

$$\begin{cases} y = 0, \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases} \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0.$$

$D = b^2 - 4ac > 0$ болғанда теңдеудің екі түбірі бар: $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a}$; $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a}$. Функцияның графигі Ox өсін $(x_1;\ 0)$ және $(x_2;\ 0)$ нүктелерінде қияды.

$D = 0$ болса, $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$. Ox өсі функцияның графигін $\left(-\dfrac{b}{2a};0\right)$ нүктесінде жанайды.

Егер $D < 0$ болса, функцияның графигі Ox өсімен қиылыспайды. $a > 0$ болғанда график Ox өсінен жоғары, $a < 0$ болғанда график Ox өсінен төмен орналасады.

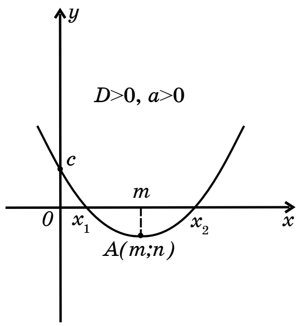
Функция графигінің Oy өсімен қиылысуы:

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = ax + bx + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = c. \end{cases}$$

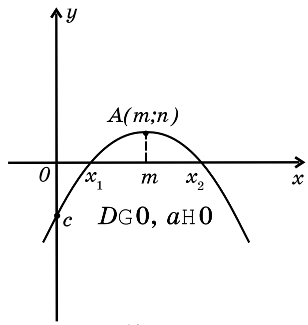
$y = ax^2 + bx + c$ функциясының графигі Oy өсімен $(0;\ C)$ нүктесінде қиылысады.

$y = ax^2 + bx + c$ функциясының графигі парабола болады. Егер:

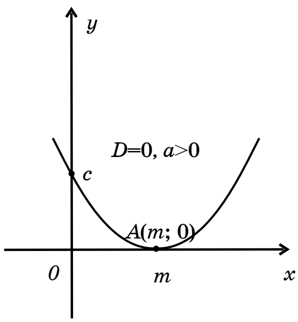
- $a > 0$ болса, парабола тармағы жоғары бағытталады;
- $a < 0$ болса, парабола тармағы төмен бағытталады;
- $x = -\dfrac{b}{2a}$ түзуі — параболаның симметрия өсі;
- $A(m;\ n)$ — параболаның төбесі, мұндағы $m = -\dfrac{b}{2a}$; $n = -\dfrac{D}{4a}$; $D = b^2 - 4ac$ (3.6–3.11-суреттер).



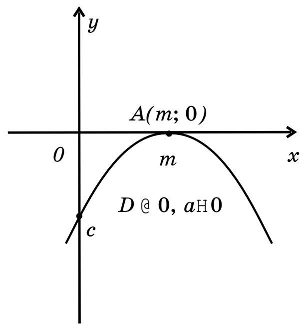
3.6-сурет



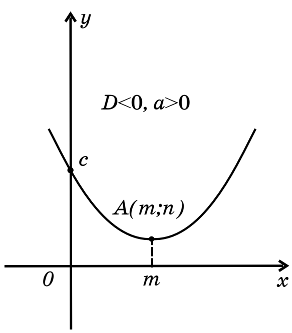
3.7-сурет



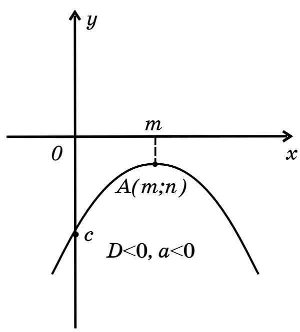
3.8-сурет



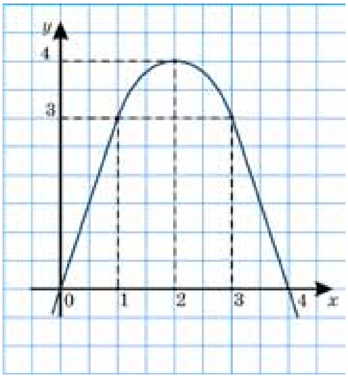
3.9-сурет



3.10-сурет



3.11-сурет



3.12-сурет

2-мысал. $y = x\,(4 - x)$ функциясының графигін салу керек.

Шешуі. $y = x\,(4 - x) = 4x - x^2 = -(x-2)^2 + 4$. Мұнда $a = -1 < 0$, $m = 2$, $n = 4$. Сондықтан парабола тармақтары төмен бағытталады; төбесі $A(2;\ 4)$ нүктесі, симметрия өсі $x = 2$ түзуі болады.

$x\,(4 - x) = 0$ теңдеуінің түбірлері: $x_1 = 0$, $x_2 = 4$. Демек, Ox өсін $(0; 0)$ және $(4; 0)$ нүктелерінде қиып өтеді (3.12-сурет). Егер $x = 1 \Rightarrow y = 1\,(4 - 1) = 3$; егер $x = 3 \Rightarrow y = 3\,(4 - 3) = 3$. Демек, $(1; 3)$ және $(3; 3)$ нүктелері функцияның графигінде жатады.

1. Қандай функцияны квадраттық функция деп атайды?
2. $a \neq 1$ болғанда $y=ax^2$ функциясының графигін қалай салады?
3. $y=a(x-m)^2$ функциясының графигі $y=ax^2$ функциясының графигімен салыстырғанда қалай орналасады?
4. $y=a(x-m)^2+n$ функциясының графигін қалай салуға болады?

Практикалық жұмыс

Қатты қағаздан масштабы 1 см болатындай $y=x^2$ параболасының макетін жасаңдар. Осы макет көмегімен 1) $y=(x-3)^2-2$; 2) $y=x^2+4x+3$ функцияларының графиктерін салыңдар. Парабола төбесінің координаталарын, өсін және абсциссалар өсімен қиылысу нүктелерін анықтаңдар.

ЕСЕПТЕР

А

3.1. $y=3x^2-x-2$ функциясының графигі $A(-1;\ 2)$, $B(2;\ 8)$, $C(0;\ 3)$ және $D(1;\ 4)$ нүктелері арқылы өте ме?

3.2. $y=-x^2+2x+3$ функциясының графигінде жататын бірнеше нүктенің координаталарын анықтаңдар.

3.3. Абсциссалары 1) -2; 2) -1; 3) 0; 4) $1{,}5$; 5) 2-ге тең және $y=2x^2-x-1$ функциясының графигіне тиісті нүктелердің сәйкес ординаталарын табыңдар.

3.4. Ординаталары 1) -4; 2) $-2{,}5$; 3) 0; 4) 1; 5) 3-ке тең және $y=-x^2+x+2$ функциясының графигінде жататын нүктелер бар ма? Егер бар болса, олардың координаталарын анықтаңдар.

1) $\begin{cases} y = -4, \\ y = -x^2 + x + 2 \end{cases} \Rightarrow -4 = -x^2 + x + 2 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = -2;\ x_2 = 3,$

Демек, $(-2; -4)$ және $(3; -4)$ нүктелері функцияның графигінде жатады.

3.5. Төмендегі функциялардың графиктерін салыңдар:

1) $y=-2x^2+1$; 2) $y=(x-2)^2+3$; 3) $y=-2(x+1{,}5)^2+1$;

4) $y=-3x^2+8x+3$; 5) $y=0{,}5x^2-2$; 6) $y=(x+1)^2-2$.

3.6. Төмендегі функциялармен берілген параболалардың төбелері мен симметрия өстерін анықтап, графиктерін салыңдар:

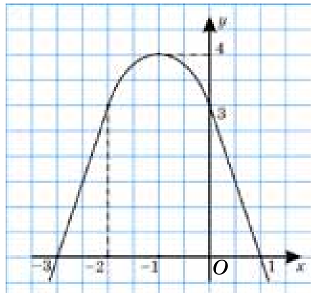
1) $y=3(x-2)^2-2$; 2) $y=3-2x-x^2$;

3) $y=x^2+12x+22$; 4) $y=-(x+1)^2+3$;

5) $y=2x^2-2x-4$; 6) $y=x(1-x)$.

2) $y=3-2x-x^2=4-(1+2x+x^2)=-(x+1)^2+4\Rightarrow$

$\Rightarrow$ төбесі: $A(-1;\ 4)$; өсі: $x=-1$ (3.13-сурет).



3.13-сурет

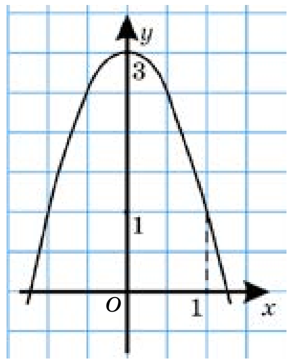
B

3.7. Функциялардың графиктерін салыңдар:

1) $y=3x(x+2)$; 2) $y=(3-x)(x-4)$;

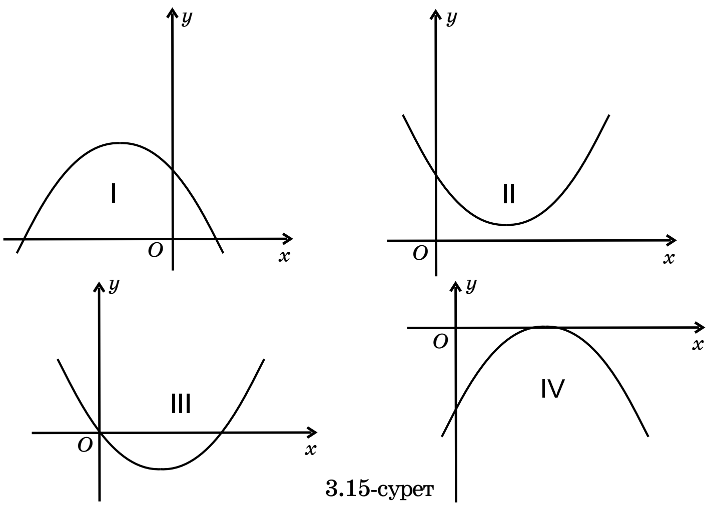
3) $5y=(x^2-4)^2-(x^2+1)^2$; 4) $y=(x-1)^2-4(x-1)+3$.

3) $5y=(x^2-4)^2-(x^2+1)^2=x^4-8x^2+16-$
$-x^4-2x^2-1=-10x^2+15\Rightarrow 5y=-10x^2+15\Rightarrow$
$\Rightarrow y=-2x^2+3$ (3.14-сурет).



3.14-сурет

3.8. 3.15-суретте $y=ax^2+bx+c$ функциясының әртүрлі жағдайларындағы графиктері бейнеленген. Осы суреттегі әр график үшін a, b және c коэффициенттерінің таңбаларын анықтаңдар.



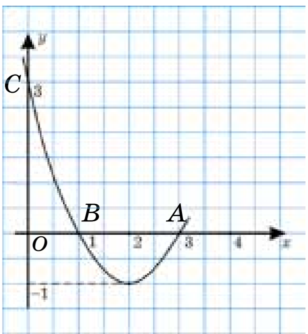
3.15-сурет

3.9. 1) $A(-1;0)$, $B(2;0)$, $C(0;-4)$; 2) $A(3;0)$, $B(1;0)$, $C(0;3)$; 3) $A(-5;0)$, $B(-1;0)$, $C(0;-5)$ нүктелерінің екеуі Ox өсінде, ал біреуі Oy өсінде жатады. Графигі осы берілген үш нүкте арқылы өтетін квадраттық функция табыла ма? Табылса, ол жалғыз бола ма?

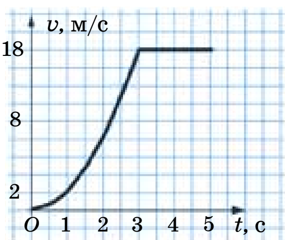
2) Егер графигі $A(3;\ 0)$, $B(1;\ 0)$ және $C(0;\ 3)$ нүктелері арқылы өтетін $y = ax^2 + bx + c$ квадраттың функциясы табылса, онда берілген нүктелердің координаталары осы теңдеуді қанағаттандыруы қажет. Осыларды ескерсек, мына теңдеулер жүйесі алынады:

$$\begin{cases} 0 = 9a + 3b + c, \\ 0 = a + b + c, \\ 3 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 3, \\ 3a + b = -1, \\ a + b = -3. \end{cases} \Rightarrow a = 1,\ b = -4,$$

яғни $y = x^2 - 4x + 3$. Квадраттық функцияның графигі A, B және C нүктелері арқылы өтеді. Ал жүйенің жалғыз шешімі болғандықтан, квадраттық функция да жалғыз (3.16-сурет).



3.16-сурет



3.17-сурет

3.10. 1) $A(0;1)$, $B(1;3)$; 2) $A(8;1)$, $B(5;-2)$; 3) $A(2;4)$, $B(0;0)$ нүктелері берілген. Төбесі A нүктесінде болатын және графигі B нүктесі арқылы өтетін квадраттық функция табыла ма? Табылса, ол жалғыз бола ма?

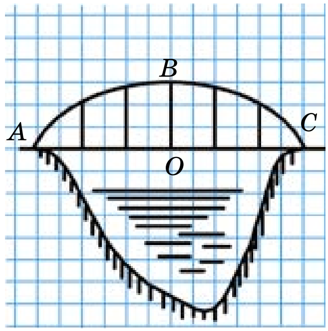
3.11. $x^2+2px+1$ квадрат үшмүшесінің мәні әрбір x үшін оң болатындай етіп, p-ның барлық мәндерін анықтаңдар.

3.12. Егер $y=2x^2-(a+2)x+a$ функциясының графигі Ox өсін x_1 және x_2 нүктелерінде қиып өтсе және $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 3$ теңдігі орындалса, онда a-ның мәнін анықтап, осы функцияның графигін салыңдар.

3.13. Алғашқы 3 с ішінде автомобиль жылдамдығы уақыт квадратына тура пропорционал өсіп, әрі қарай тұрақты жылдамдықпен қозғалды (3.17-сурет). 3.17-суреттегі мәліметтер бойынша 1) алғашқы 3 с ішінде v жылдамдығының t уақытқа тәуелді өзгеру заңдылығын анықтаңдар;

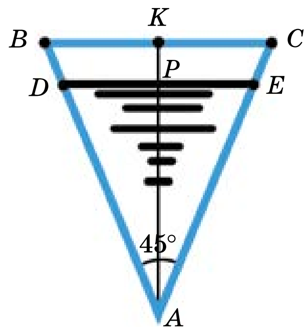
2) автомобильдің 3 с өткеннен кейінгі тұрақты жылдамдығын (км/сағ) анықтаңдар.

3.14. Парабола пішіндес көпір өзара бірдей қашықтықтарда орналасқан 5 вертикаль тіреуге бекітілген. Тіреулер көпір доғасының хордасын тең 6 кесіндіге бөледі (3.18-сурет). Егер AC=12 см, BO=3 м болса, қалған тіреулердің биіктіктері қандай?



3.18-сурет

3.15. Өртке қарсы қолданылатын қарапайым құралдар (шелек, күрек, темір сойыл және т.с.с.) барлық мекемеде, арнайы тақтайшаларға ілініп қойылады. Мұндағы шелектер конус пішінді болып келеді. 3.19-суретте суы бар шелектің көлденең қимасы бейнеленген. Осында көрсетілген мәліметтер бойынша 1) қиманың суы бар бөлігінің ауданы S-ті $AD=AE=x$ арқылы өрнектеңдер. Мұнда $AB=AC=40$ см, $\angle BAC=$ $=45°$;



3.19-сурет

2) тік бұрышты координаталар жүйесінде $S=S(x)$ функциясының графигін бейнелеңдер;

3) $S=S(x)$ функциясының анықталу облысын тауып, график бойынша қорытынды жасаңдар.

C

3.16. Функциялардың графиктерін салыңдар:

1) $y=\left|2-x^2\right|$; 2) $y=\left|x^2+x-2\right|$; 3) $y=6x^2-7|x|+2$;

4) $y=\left|3x^2-1\right|$; 5) $y=2x^2-2|x|-4$; 6) $y=2x^2-5|x|-3$.

3.17. p-ның қандай мәндерінде $y=x^2+4x+p$ параболасының төбесі координаталар бас нүктесінен 4-ке тең қашықтықта орналасады?

3.18. Функциялардың графиктерін салыңдар:

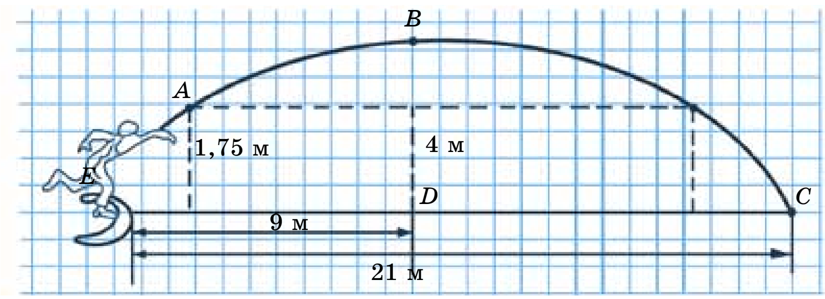
1) $y=\dfrac{x^3}{(\sqrt{x})^2}-1$; 2) $y=\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2}}-1$.

3.19. a-ның қандай мәнінде $y=x^2-7x+a$ және $y=-3x^2+5x-6$ функцияларының графиктерінің тек бір ғана ортақ нүктесі болады? Осы нүктенің координаталарын табыңдар.

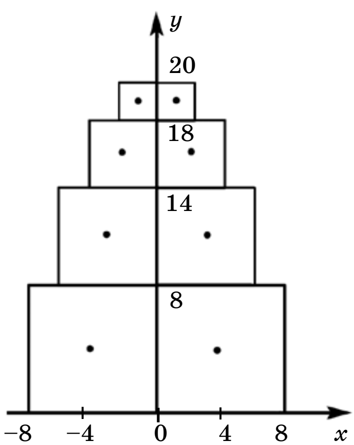
3.20. a, b және c сандарының кез келген мәндерінде $y=(x-a)\cdot(x-b)-c^2$ функциясының графигі мен Ox өсінің кем дегенде бір ортақ нүктесі болатынын дәлелдеңдер.

3.21*. Егер u саны табылып, $af(u)<0$ теңсіздігі орындалса, онда $f(x)=ax^2+bx+c$ квадрат үшмүшесінің әртүрлі екі түбірі бар және бұл түбірлердің бірі u-дан кіші, ал екіншісі u-дан үлкен болатынын дәлелдеңдер.

3.22. 3.20-суретте спортшының ядро лақтырған сәті бейнеленген. Тік бұрышты координаталар жүйесінің Ox өсі DC түзуімен, ал Oy өсі DB түзуімен беттеседі. Ядроның траекториясы парабола және ауаның кедергісі жоқ деп алып, 3.20-суреттегі мәліметтер бойынша 1) парабола теңдеуін жазыңдар; 2) егер осы парабола бойымен қозғалатын ядро жер бетіндегі E нүктесінен ұшып шықты десек, онда E және C нүктелерінің арақашықтығын табыңдар.



3.20-сурет



3.21-сурет

3.23. Қабырғалары 8, 6, 4 және 2-ге тең шаршы жұптары 3.21-суретте көрсетілгендей орналасқан. Шаршылардың:
1) центрлерінің координаталарын табыңдар;
2) центрлері парабола бойында жататынын көрсетіп, оның теңдеуін жазыңдар;
3) егер көрсетілген тәртіппен шаршылар жұбын төмен қарай (Ox өсінен төмен) жалғастырып салсақ, келесі шаршылар жұбы центрлерінің координаталары қандай? Жалпы түрдегі n шаршының центрін анықтаңдар.

ТОПТЫҚ ЖҰМЫС

3.24. 3.22-суретте Астанадағы «Москва» сауда-саттық орталығы ғимаратындағы парабола бейнесін анық көреміз.

3.22-сурет

1-топ тапсырмасы: 1) әр қабаттың биіктігі 3,5 м деп алып, AB және CD кесінділерінің ұзындығын бағаландар; 2) тік бұрышты координаталар жүйесінің өстері AB және CD сәулелерімен бағыттас және осы сәулелер арқылы өтеді деп алып, табылған жуық мәндер бойынша парабола теңдеуін жазыңдар.

2-топ тапсырмасы: 1) АТК мүмкіндіктерін пайдаланып, осы парабола параметрлерінің нақты мәндерін анықтап, оларды 1-топ есептеген жуық мәндермен салыстырыңдар: 2) жуық мәннің абсолюттік және салыстырмалы қателіктерін анықтаңдар. Екі топ бірлесіп тиісті қорытынды жасаңдар.

ҚАЙТАЛАУҒА АРНАЛҒАН ЖАТТЫҒУЛАР

3.25. $y=\dfrac{2}{x}$ функциясының графигін салыңдар. Осы графиктің $y=2x$ түзуімен қиылысу нүктелерін табыңдар.

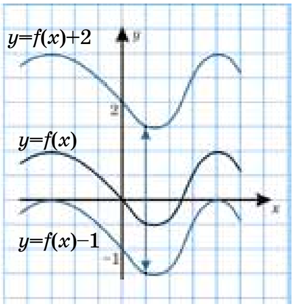
3.26. Егер $3<a<4$ және $4<b<5$ болса, 1) $a+b$; 2) $a-b$; 3) $a\cdot b$; 4) $\dfrac{a}{b}$ өрнегін бағалаңдар.

3.27. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right):\dfrac{a^2+2ab+b}{2ab}$; 2) $\left(x+1-\dfrac{1}{1-x}\right):\left(x-\dfrac{x^2}{x-1}\right)$.

3.2. Функцияның графигін түрлендіру

Біз $y = ax^2$ функциясы графигінің көмегімен $y = a(x - m)^2 + n$ функциясының графигін салуды үйрендік. Енді $y = f(x)$ функциясы графигінің көмегімен $y = f(x - m) + n$ функциясының графигін салуды қарастырамыз.



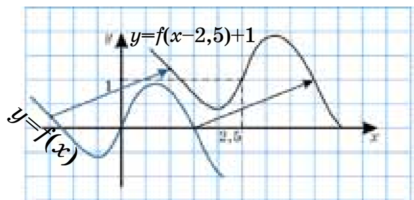
3.23-сурет

***y = f(x)* функциясының көмегімен *y = f(x) + n* функциясының графигін салу.** Егер $y = f(x)$ функциясының графигі белгілі болса, онда бұл графикпен салыстырғанда $y = f(x) + n$ функциясының графигі $n > 0$ жағдайында n бірлікке жоғары ($n < 0$ жағдайында $|n|$ бірлікке төмен) орналасады (3.23-сурет).

***y = f(x)* функциясының көмегімен *y = f(x − m)* функциясының графигін салу.** $y = f(x-m)$ функциясының графигін салу үшін $y = f(x)$-тің графигін $m > 0$ жағдайында m бірлікке оңға қарай, $m < 0$ жағдайында $|m|$ бірлікке солға қарай параллель көшіру қажет (3.24-сурет).

***y = f(x)* функциясының көмегімен *y = f(x − m) + n* функциясының графигін салу.** $y = f(x - m) + n$ функциясының графигін салу үшін $y = f(x)$ функциясының графигіне тиісті әрбір (x_0, y_0) нүктесін $(x_0 + m; y_0 + n)$ нүктесіне параллель көшіру керек. 3.25-суретте $y = f(x)$ және $y = f(x- 2{,}5) + 1$ функцияларының графиктері бейнеленген.

3.24-сурет



3.25-сурет

Бөлшек-сызықтық функцияның графигі.

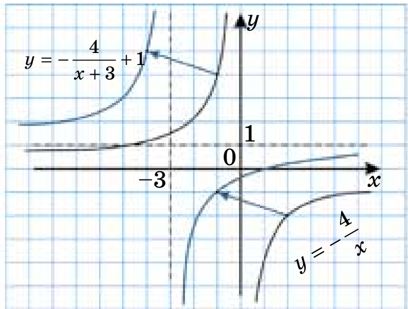
Анықтама. $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, $c \neq 0$, $ad - bc \neq 0$ *функциясы бөлшек-сызықтық функция* деп аталады. Мұндағы $cx + d \neq 0 \Rightarrow x \neq -\dfrac{d}{c}$.

Сондықтан функцияның анықталу облысы:

$$D = \left(-u\ ;-\frac{d}{c}\right)2\left(-\frac{d}{c};+u\ \right).$$

Енді бөлшек-сызықтық функцияның графигін $y = \dfrac{k}{x}$ кері пропорционалдық функциясы графигінің көмегімен салуды қарастырамыз.

1-мысал. $y=\dfrac{x-1}{x+3}$ функциясының графигін салу керек.



3.26-сурет

$\dfrac{x-1}{x+3}=\dfrac{x+3-4}{x+3}=1-\dfrac{4}{x+3}$ болғандықтан, берілген бөлшек сызықтық функцияны $y=-\dfrac{4}{x+3}+1$ түрінде жазамыз. Онда бұл функцияның графигін $y=-\dfrac{4}{x}$ функциясының графигін Oy өсі бойымен жоғары 1 бірлікке және Ox өсі бойымен солға қарай 3 бірлікке жылжыту арқылы саламыз (3.26-сурет). $x=-3$, $y=1$ түзулері — берілген функция графигінің асимптоталары.

Назар аударыңдар!

$y=\dfrac{k}{x}$ функциясының асимптоталары координаталар өстері болғандықтан, $y=\dfrac{k}{x+m}+n$ функциясының асимптоталары $x=-m$, $y=n$ түзулері болады. Кері пропорционалдықтың графигін параллель көшіргенде координаталар өстеріне сәйкес келетін түзулер бөлшек-сызықтық функция графигінің асимптоталары болады. Кері пропорционалдық және жалпы бөлшек-сызықтық функцияның графигін ***гипербола*** деп атайды.

1. Функцияның графигін параллель көшіру арқылы түрлендіру дегенді қалай түсінесіңдер?
2. Қандай функцияны бөлшек-сызықтық функция деп атайды?
3. Бөлшек-сызықтық функцияның графигін қалай салады?

Практикалық жұмыс

$y=x^2$ немесе $y=\dfrac{1}{x}$ функциялары графиктерінің макеті көмегімен мына функциялардың графиктерін салыңдар: 1) $y=5-(x+3)^2$; 2) $y=4x-x^2-3$; 3) $y=3-\dfrac{1}{x-2}$; 4) $y=-\dfrac{2x+1}{x+1}$.

Берілген макет көмегімен салынған графиктердің ұқсастығы мен айырмашылығын көрсетіңдер. Жауаптарыңды негіздеңдер.

ЕСЕПТЕР

А

3.28. $y=f(x)$ функциясының графигімен салыстырғанда
1) $y=f(x-1)$; 2) $y=f(x+3)$; 3) $y=f(x)-2$;
4) $y=f(x)+1$; 5) $y=f(x-2)+1$; 6) $y=f(x+1)-2$;
7) $y=f(x+3)+2$; 8) $y=f(x-1)-2$; 9) $y=f(x-2)+3$ функцияларының графиктері қалай орналасқан? Ауызша орындаңдар.

3.29. $y=0,5x^2$ параболасының графигін пайдаланып, төмендегі функциялардың графиктерін салыңдар:
1) $y=0,5(x-1)^2+2$; 2) $y=0,5x^2+4$;
3) $y=0,5(x+2,5)^2-3$; 4) $y=0,5(x+4)^2$.

3.30. $y=2x^2$ параболасын пайдаланып, 1) $y=-2x^2$; 2) $y=2x^2-1$; 3) $y=-2(x-4)^2-4$; 4) $y=-2(x+3)^2$ функцияларының графиктерін салыңдар.

3.31. 1) $y=3(x-5)^2-2$; 2) $y=2x^2-1$; 3) $y=-2(x+1)^2+3$; 4) $y=(x-5)^2$ параболасының төбесі мен симметрия өсін анықтап, оның графигін схема түрінде салыңдар.

3.32. Функцияның графигін салыңдар:
1) $y=x^2+2x-3$; 2) $y=\dfrac{x^2}{2}-4x+6$; 3) $y=-2x^2-5x-2$;
4) $y=-x^2+6x-10$; 5) $y=x^2-4x$; 6) $y=-x^2+5$.

3.33. Электр желісінің бойынан ток жүріп тұр. Реостат көмегімен желінің кедергісін арттырғанда 1) ток күші; 2) ток кернеуі өзгере ме?

3.34. ABC үшбұрышының B төбесін диаметрі AC табанымен беттесетін шеңбер бойымен жылжытсақ, оның қандай элементтері тұрақты болады және қандай элементтері өзгеріп отырады?

3.35. $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$ функциясы үшін 1) $f(0)$; 2) $f(2)$; 3) $f(-2)$; 4) $f(a)$; 5) $f\left(\dfrac{1}{a}\right)$ мәндерін табыңдар.

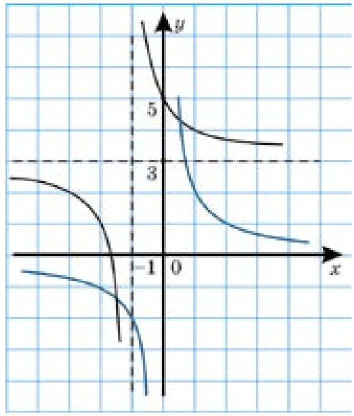
3.36. $f(x)=x^3-10$ функциясы үшін 1) $f(5)$; 2) $f(4)$; 3) $f(2)$; 4) $f(-3)$; 5) $f(a-1)$ мәндерін табыңдар.

3.37. Функцияның графигін салыңдар:

1) $y = \dfrac{1}{x} - 3$; 2) $y = \dfrac{1}{x-1}$;

3) $y = \dfrac{2}{x+1} + 3$ (3.27-сурет);

4) $y = 2 - \dfrac{2}{x-3}$.



3.27-сурет

B

3.38. 1) $f(x)=x(x+4)$; 2) $f(x) = \dfrac{x+1}{5-x}$ функциясы үшін $f(x)=0$ теңдігін қанағаттандыратын x-ті табыңдар.

3.39. $f(x) = \sqrt{x}$ үшін $f(a)$ және $f\left(\dfrac{1}{a}\right)$ өрнектері a-ның қандай мәндерінде анықталған?

3.40. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2}$ үшін $f(a)$ және $f\left(\dfrac{1}{a}\right)$ өрнектері a-ның қандай мәндерінде анықталған?

3.41. Функцияның анықталу облысын табыңдар:

1) $f(x) = \sqrt{x+1} + \dfrac{2}{\sqrt{x-4}}$; 2) $F(x) = \sqrt{x^2 - 1} + \dfrac{1}{\sqrt{3-x}}$;

3) $h(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{1-x}$; 4) $D(x) = \sqrt{(1-x)(1+5x)}$.

3) $\begin{cases} x+1 \ge 0, \\ 1-x \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge -1, \\ x \le 1 \end{cases} \Rightarrow x \in [-1;1]$.

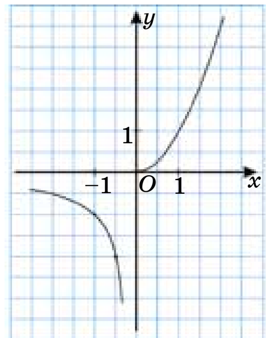
3.42. Егер $f(x)=x^2+x+1$ болса, $f(0)+f(1)+f(2)+f(3)$ өрнегінің мәнін табыңдар.

3.43. $f(x)=2x-3$ функциясы үшін 1) $f(x)=12$; 2) $f(x)=-1$; 3) $f(x)=0$; 4) $f(x)=2a-1$ теңдеуін қанағаттандыратын x-ті табыңдар.

3.44. Функцияның графигін салыңдар:

1) $y=\begin{cases}-1, \text{ егер } x<0,\\ 0, \text{ егер } x=0,\\ 1, \text{ егер } x>0;\end{cases}$ 2) $y=\begin{cases}-1, \text{ егер } x<-1,\\ x, \text{ егер } -1\le x\le 1,\\ 1, \text{ егер } x>1;\end{cases}$

3) $y=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, \text{ егер } x<0,\\ x^2, \text{ егер } x\ge 0\end{cases}$ (3.28-сурет); 4) $y=\dfrac{x^3}{|x|}$.



3.28-сурет

3.45. 1) $y=\dfrac{2}{4x+3}$; 2) $y=\dfrac{2x-1}{x-3}$;

3) $y=\dfrac{3x+1}{2x-5}$; 4) $y=\dfrac{1-2x}{x-2}$

функцияларының графиктерін салыңдар.

3.46. 1) $y=\dfrac{2x-1}{x}$; 2) $y=\dfrac{1-3x}{x+2}$;

3) $y=\dfrac{2x-3}{3x+2}$; 4) $y=1+\dfrac{x-1}{x+1}$

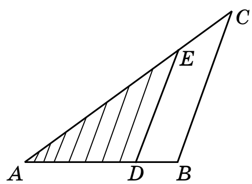
функцияларының графиктері координаталар өстерімен қиылысса, қиылысу нүктелерін анықтаңдар.

3.47. Асимптоталары $x=3$ және $y=2$ теңдеулерімен берілген және $A(-2;\ 3)$ нүктесі арқылы өтетін бөлшек-сызықтық функцияны табыңдар.

3.48. k-ның қандай мәндерінде $y=\dfrac{2x-k}{x+2}$ функциясының графигі 1) $A(-1;3)$; 2) $B(2;2)$; 3) $C(-3;-4)$ нүктелері арқылы өтеді?

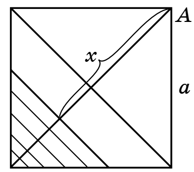
C

3.49*. 3.29-суретте штрихталған үшбұрыштың периметрі $P(x)$-ті $ED=x$-ке тәуелді формуламен анықтаңдар. Мұнда $AB=8$, $BC=6$, $AC=10$ және $ED\|BC$.



3.29-сурет

3.50*. Қабырғасы a-ға тең квадратты оның диагоналіне параллель түзумен қиып өткенде шығатын қиындының ауданы $S(x)$-ті квадраттың төбесінен түзуге дейінгі x қашықтығына тәуелді функция ретінде жазыңдар. $S(x)$ функциясының анықталу облысы мен мәндер облысын табыңдар (3.30-сурет).



3.30-сурет

ҚАЙТАЛАУҒА АРНАЛҒАН ЖАТТЫҒУЛАР

3.51. $11^6 - 1$ саны 120-ға бөлінетінін көрсетіңдер.

3.52. $A(1;\ 2)$ және $B(4;\ -2)$ нүктелері арқылы өтетін түзудің бұрыштық коэффициентін анықтап, оның графигін салыңдар.

4-бөлім. СТАТИСТИКА ЭЛЕМЕНТТЕРІ

Бөлімді оқып-үйрену барысында келесі мақсаттарға қол жеткіземіз:

- таңдама нәтижелерін жиіліктердің интервалдық кестесі арқылы беру;
- жиіліктердің интервалдық кестесінің мәліметтерін жиіліктер гистограммасы арқылы беру;
- жинақталған жиілік анықтамасын білу;
- статистикалық кестемен, алқаппен, гистограммамен берілген ақпаратты талдау;
- дисперсия, стандартты ауытқу анықтамаларын және оларды есептеу формулаларын білу.

4.1. Кездейсоқ таңдаманың графиктік бейнесі

Кездейсоқ таңдама және ығыспалы қатар. Статистика саласында қайсыбір санды сипаттамалары бар жалпылама құбылыстар қарастырылады. 5–7-сыныптарда статистика элементтерімен таныстыңдар.

Мұны білесіңдер!

Нысандардың үлкен жиынынан кездейсоқ таңдалып алынған нысандар жиынын *бас жиынтық* деп атайды.

Бас жиынтықтың кездейсоқ таңдалып алынған бөлігін *кездейсоқ таңдама* (немесе таңдама) деп атайды.

Енді статистиканың алдыңғы сыныптарда қарастырылған өзге ұғымдарын мысал арқылы еске түсірелік:

1-мысал. ІІ тоқсанның аяғында математика пәні бойынша ішкі жиынтық бақылау жұмысына 10 есеп берілді. Оның нәтижесінде 25 оқушы шығарған есептерінің саны бойынша мынадай көрсеткіштер көрсетті: 7, 6, 7, 8, 5, 10, 10, 7, 6, 4, 5, 8, 9, 8, 7, 6, 4, 5, 10, 7, 9, 7, 6, 7, 5. Бұл мәліметтер саны 25-ке тең, яғни ***таңдама көлемі*** $n=25$. Ең кіші мәні $x_{min}=4$, ең үлкен мәні $x_{max}=10$. Онда $x_{max}-x_{min}=10-4=6$ — ***таңдама құлашы***. Енді келтірілген мәндерді өсу тәртібімен тізіп жазамыз: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Бұл тізбек ***ығыспалы қатар,*** оның әр элементі ***нұсқалық*** деп аталады. Берілген мәліметтерді зерделеу үшін әр нұсқалықтың жиілігін анықтау қажет. Нұсқалықтың ***жиілігі*** деп оның таңдама құрамында неше рет кездесетінін көрсететін санды айтады. Оны есептеу мына тәртіппен жүзеге асады (4.1-кесте):

4.1-*кесте*

X_i нұсқалық	4	5	6	7	8	9	10
Санау	II	IIII	IIII	~~IIII~~ II	III	II	III
n_i жиілігі	2	4	4	7	3	2	3

Осының нәтижесінде ығыспалы қатардың жиіліктер кестесі анықталады (4.2-кесте):

4.2-*кесте*

x_i	4	5	6	7	8	9	10
n_i	2	4	4	7	3	2	3

Егер n — таңдама көлемі, ал n_i саны x_i нұсқалығының жиілігі болса, онда $W_i = \frac{n_i}{n}$ саны x_i нұсқалығының ***салыстырмалы жиілігі*** деп аталады. Ығыспалы қатардың салыстырмалы жиіліктер кестесі былай құрастырылады (4.3-кесте).

4.3-*кесте*

X_i	4	5	6	7	8	9	10
W_i	$\frac{2}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{7}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{3}{25}$

Бұл кестені кейде ***статистикалық кесте*** деп те атайды. Салыстырмалы жиіліктер қосындысы 1-ге тең:

$$\frac{2}{25}+\frac{4}{25}+\frac{4}{25}+\frac{7}{25}+\frac{3}{25}+\frac{2}{25}+\frac{3}{25}=1.$$

Таңдаманың орта мәні:

$$\bar{X} = \frac{\text{таңдама мәндері қосындысы}}{\text{таңдама көлемі}}.$$

Оны 4.2-кесте бойынша былай есептейді:

$$\bar{X} = \frac{4\cdot 2+5\cdot 4+6\cdot 4+7\cdot 7+8\cdot 3+9\cdot 2+10\cdot 3}{25} = \frac{173}{25} = 6,92.$$

Таңдаманың жиілігі ең көп мәнін оның ***модасы*** деп атайды: M_o. Бұл мысалда $M_o=7$.

Таңдама мәндерін өсу тәртібімен жазамыз. 25 элементтің дәл ортасында 13-элемент орналасады. Олай болса, $M_e=7$.

Таңдама медианасы M_e деп n тақ болғанда дәл ортанғы элементті, n жұп болғанда ортанғы екі элементтің арифметикалық ортасын айтады.

Оны есептеу үшін 4.2-кесте көмегімен ***жинақтық жиіліктер кестесі*** құрылады (4.4-кесте):

4.4-*кесте*

x_i	4	5	6	7	8	9	10
n_i	2	4	4	7	3	2	3
S	2	6	10	17	20	22	25

4.1-сурет

Кездейсоқ таңдаманың графиктік бейнесі. x_i нұсқалығын абсциссалар өсінен, оның n_i жиілігін ординаталар өсінен белгілеп, $(x_i; n_i)$ нүктелерін тізбектеп қосқаннан шығатын фигураны кездейсоқ таңдаманың ***жиіліктер алқабы*** деп атайды. Алдыңғы бапта қарастырылған мысал үшін жиіліктер алқабы 4.1-суретте бейнеленген.

Ескерту: Жиіліктер алқабын тұрғызу барысында абсциссалар және ординаталар өстеріндегі масштаб бірліктері әртүрлі болады. Өйткені бұл өстерде белгіленетін мәндер мағынасы әртүрлі.

Көп жағдайда әсіресе таңдама көлемі мен құлашы үлкен болғанда ығыспалы қатардың жиіліктер кестесі мен жиіліктер алқабы бас жиынтығын сипаттау дәлдігі ойдағыдай бола бермейді. Мұндай жағдайлар интервалдар жиілігі (салыстырмалы жиіліктер) қатарын қарастырады.

Интервалдар жиілігі кестесін тұрғызу үшін таңдама мәндері орналасқан кесіндіні ұзындығы h-қа тең бірнеше дербес интервалдарға бөледі. i-интервалға тиісті таңдама мәндері санын n_i арқылы белгілейді. Егер i-интервал ұштары x_{i-1} және x_i ($i = 1, 2, \ldots, k$) болса, онда 4.5-кесте құрастырылады:

Таңдаманың интервалдар жиілігі кестесі

4.5-*кесте*

Δ_i интервал	$[x_0\ ;\ x_1)$	$[x_1\ ;\ x_2)$	. . .	$[x_{k-1}\ ;\ x_k]$
жиілік n_i	n_1	n_2	. . .	n_k

$W_i = \frac{n_i}{n}$ — салыстырмалы жиілік.

Таңдаманың интервалдық салыстырмалы жиіліктер (статистикалық) кестесі

Δ_i	$[x_0\ ;\ x_1)$	$[x_1\ ;\ x_2)$	. . .	$[x_{k-1}\ ;\ x_k]$
W_i	$\frac{n_i}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	. . .	$\frac{n_k}{n}$

1-мысалда интервалдарды есеп шартына сәйкестендіріп алған орынды. Мысалы, егер оқушы шығарған есептер саны 5-тен кем болса, оған «2» бағасы қойылады, егер оқушы 5 немесе 6 есеп шығарса, оған «3», 7 не 8 есеп шығарса «4» бағасы, ал 9 не 10 есеп шығарса, оған «5» бағасы қойылады. Сондықтан интервалдарды былай алған дұрыс: [3;4]; [5;6]; [7;8]; [9;10]. Сонда мынадай интервалдар жиіліктері кестесін аламыз:

Жиіліктер кестесі

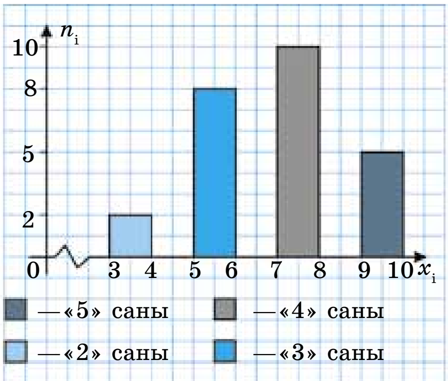
Δ_i	[3;4]	[5;6]	[7;8]	[9;10]
n_i	2	8	10	5

Салыстырмалы жиіліктер (статистикалық) кестесі

Δ_i	[3;4]	[5;6]	[7;8]	[9;10]
W_i	$\frac{5}{25}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{10}{25}$	$\frac{5}{25}$

Табаны h-қа, биіктігі n_i-ге тең (W_i-ге тең) тіктөртбұрыштардан құралған фигураны ***гистограмма*** деп атайды. 4.2-суретте 1-мысалдың гистограммасы бейнеленген.

Ескерту: Егер көршілес интервалдардың ортақ шеткі нүктелері бар болса, онда гистограммадағы тіктөртбұрыштар бір-біріне тақалып салынады. Бұл ортақ нүктелер екі көршілес интервалдардың біріне енуі қажет.

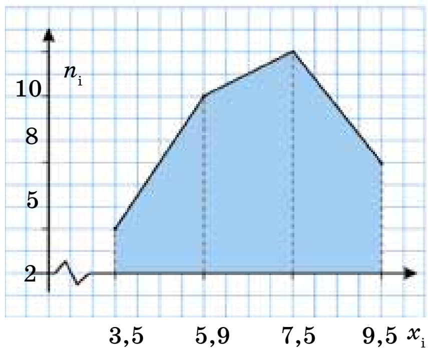


4.2-сурет

Салыстырмалы жиіліктер гистограммасы да осы сияқты тұрғызылады. Мұнда тіктөртбұрыштар биіктігі W_i салыстырмалы жиілігі болады. Сонымен қатар интервалдар жиілігі кестесінің көмегімен жиіліктер (салыстырмалы жиіліктер) алқабы да тұрғызылады. Ол үшін $(x_i^*; n_i)$ нүктелерін тізбектеп қосу қажет. Мұндағы $x_i^* = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$ — интервалдардың ортасы. 1-мысалдағы таңдаманың интервалдар жиілігі алқабын тұрғызу үшін 4.6-кестені пайдаланамыз.

4.6-*кесте*

Δ_i	[3;4]	[5;6]	[7;8]	[9;10]
x_i^*	3,5	5,5	7,5	9,5
n_i	2	8	10	5



4.3-сурет

4.3-суретте таңдаманың интервалдар жиілігі алқабының суреті көрсетілген.

Ескерту: Осы сияқты интервалдық салыстырмалы жиіліктер алқабы тұрғызылады. Ол үшін$(x_i^*; W_i)$ нүктелерін тізбектеп қосу қажет.

1. Бас жиынтық, кездейсоқ таңдама деп нені айтады?
2. Таңдама көлемі мен құлашы деп нені айтады?
3. Ығыспалы қатарды қалай түсінесіңдер?
4. Нұсқалық деген не? Оның жиілігі (салыстырмалы жиілігі) қалай анықталады?
5. Таңдаманың орта мәні (арифметикалық ортасы), модасы және медианасы қалай анықталады?
6. Таңдаманың жиіліктер (салыстырмалы жиіліктер) алқабы қалай тұрғызылады?
7. Таңдаманың интервалдар жиілігі (салыстырмалы жиіліктер) кестесі қалай тұрғызылады?
8. Гистограмма деген не? Оның көмегімен таңдаманың жиіліктер алқабын қалай тұрғызуға болады?

Практикалық жұмыс

Сөздің ұзындығы деп оның құрамына енетін әріптер санын айтады. Өздеріңе ұнайтын қайсыбір әдеби шығарманың кездейсоқ бір бетін таңдап алып, осы беттегі сөздер ұзындығын есептеп, оны тізіп жазыңдар. Алынған кездейсоқ таңдаманың:
1) көлемі мен құлашын табыңдар;
2) $h = 3$ деп алып, таңдаманың интервалдар жиілігі кестесін тұрғызыңдар;
3) интервалдар ортасын нұсқалық ретінде алып, оның жиіліктер және жинақтық жиіліктер кестесін тұрғызыңдар;
4) модасы мен медианасын, орта мәнін табыңдар;
5) жиіліктер гистограммасы мен жиіліктер алқабын тұрғызыңдар.

ЕСЕПТЕР

А

4.1—4.4-есептерде берілген кездейсоқ таңдаманың жиіліктер немесе салыстырмалы жиіліктер кестесі бойынша таңдаманың 1) модасы мен медианасын; 2) арифметикалық орта мәнін; 3) жиіліктер немесе салыстырмалы жиіліктер алқабын табу керек.

4.1.

X_i	1	4	7	10
n_i	1	3	2	4

4.2.

x_i	3	8	13
n_i	4	10	6

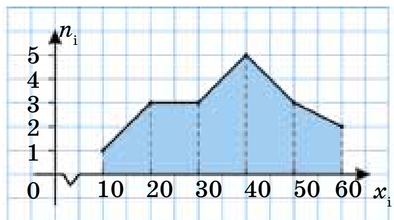
4.3.

x_i	2	3	5	6
W_i	0,2	0,3	0,1	0,4

4.4.

x_i	10	20	30	40	50
W_i	0,15	0,2	0,1	0,1	0,45

4.5. 4.4-суретте көрсетілген жиіліктер алқабы бойынша мына мәліметтерді табыңдар:
1) таңдама көлемі мен құлашын;
2) таңдаманың жиіліктер, салыстырмалы жиіліктер және жинақтық жиіліктер кестелерін;
3) таңдама модасы мен медианасын;
4) таңдаманың арифметикалық орта мәнін.



4.4-сурет

4.6—4.9-есептерде берілген интервалдар жиілігі (салыстырмалы жиіліктер) кестесі бойынша таңдаманың гистограммасын тұрғызыңдар.

4.6.

Δ_i	[4;6)	[6;8)	[8;10]
n_i	2	3	5

4.7.

Δ_i	[1;2)	[2;3)	[3;4)	[4;5]
n_i	10	15	20	5

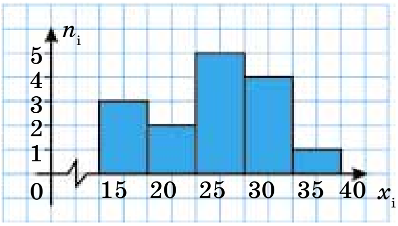
Кейде интервалдарды 4.8, 4.9-есептердегідей оның шеткі нүктелерін көрсетіп жазады.

4.8.

Δ_i	14—17	17—20	20—23	23—26
W_i	0,3	0,2	0,25	0,25

4.9.

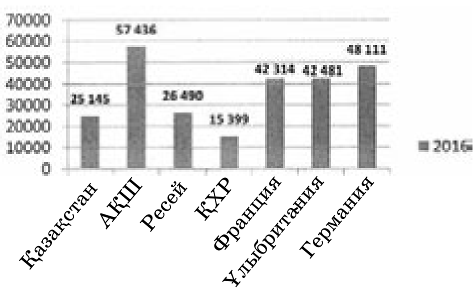
Δ_i	0—2	2—4	4—6	6—8
n_i	3	6	8	3



4.5-сурет

4.10. 4.5-суретте кездейсоқ таңдама гистограммасы берілген. Таңдаманың интервалдар жиілігі мен салыстырмалы жиіліктер кестесін құру керек.

B



4.6-сурет

4.11. 4.6-суретте жеті мемлекеттің бір тұрғынға шаққандағы ішкі жалпы өнімінің (ІЖӨ, мың $ есебімен) көрсеткіші келтірілген. Осы мәліметтерден 1) ең үлкен және ең кіші көрсеткіші бар мемлекеттерді атаңдар; 2) АҚШ-тың көрсеткішін 100% деп алып, қалған мемлекеттердің көрсеткішін процентпен көрсетіңдер;
3) көрсетілген мемлекеттер үшін ІЖӨ орта мәнін анықтаңдар.
Неліктен табылған орта мәнді Әлемдік ІЖӨ жуық мәні ретінде қабылдауға болмайды? Себебін түсіндіріңдер.

4.12. 4.6-есепте берілген интервалдар жиілігі кестесіне сәйкес келетін
1) ығыспалы қатардың жиіліктер кестесін құрып, оның жиіліктер алқабын тұрғызыңдар;
2) ығыспалы қатардың жинақтық жиіліктер кестесін құрып, оның модасын, медианасын және орта мәнін табыңдар.

4.13. 4.7-есепте берілген интервалдар жиілігі кестесіне сәйкес келетін
1) ығыспалы қатардың жиіліктер кестесін құрып, оның жиіліктер алқабын тұрғызыңдар;
2) ығыспалы қатардың жинақтық жиіліктер кестесін құрып, оның модасын, медианасын және орта мәнін табыңдар.

4.14. 4.8-есепте берілген интервалдық салыстырмалы жиіліктер кестесіне сәйкес келетін 1) ығыспалы қатардың салыстырмалы жиіліктер кестесін құрып, оның салыстырмалы жиіліктер алқабын тұрғызыңдар; 2) ығыспалы қатардың жинақтық салыстырмалы жиіліктер кестесін құрып, оның орта мәнін анықтаңдар.

4.15. 4.9-есепте берілген интервалдар жиілігі кестесіне сәйкес келетін 1) ығыспалы қатардың жиіліктер кестесін құрып, оның жиіліктер алқабын тұрғызыңдар; 2) ығыспалы қатардың жинақтық жиіліктер кестесін құрып, оның модасын, медианасын және орта мәнін табыңдар.

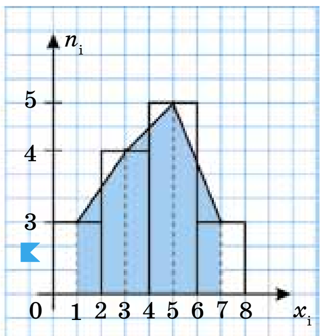
Берілгені:

Δ_i	0–2	2–4	4–6	6–8
n_i	3	6	8	3

1) Ығыспалы қатар нұсқалықтары ретінде сәйкес интервалдардың ортасы алынады. Жиіліктері сол күйінде қалады. Сонда біз жинақтық жиіліктер кестесін аламыз:

Δ_i	0–2	2–4	4–6	6–8	интервал
x_i^*	1	3	5	7	интервал ортасы
n_i	3	6	8	3	жиілік

Жиіліктер алқабын, әдетте 4.7-суретте көрсетілгендей, гистограммамен біріктіріп салады.



4.7-сурет

2)

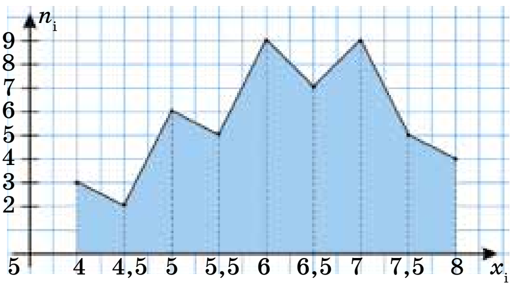
x_i^*	1	3	5	7
n_i	3	6	8	3
S	3	9	17	20

Мода $M_o = 5$ — ең жиі қайталанатын мәні.
Көлемі n=20 болғандықтан, оның ортасында 10- және 11- элементтер орналасады: x_{10}=5, x_{11}=5 болғандықтан, медиана

$$M_e = \frac{x_{10}+x_{11}}{2} = \frac{5+5}{2} = 5.$$

Ал орта мәні $\overline{X} = \frac{1}{20}(1\cdot 3+3\cdot 6+5\cdot 8+7\cdot 3) = 3{,}15.$

4.16. Қайсыбір белгіні өлшеу барысында төмендегідей мәліметтер алынды: 201, 202, 204, 189, 190, 191, 194, 194, 196, 196, 198, 199, 200, 200, 200, 200, 204, 195, 205, 206, 210, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 215, 216. Алынған таңдаманың жиіліктер және салыстырмалы жиіліктер гистограммасын тұрғызыңдар.



4.8-сурет

4.17*. 4.8-суретте қайсыбір белгінің жиіліктер алқабы берілген. Оған сәйкес ығыспалы қатардың жиіліктер кестесін тұрғызыңдар. Интервалдар кестесін құру үшін, әдетте, интервалдар санын $K \approx \log_2 n + 1$ (n — таңдама көлемі) формуласымен жуықтап анықтайды. Логарифм (log) ұғымы 11-сыныпта қарастырылады. Дегенмен санның логарифмін инженерлік **калькулятор** немесе **компьютер** көмегімен анықтауға болады. Мысалы, мұнда n=50, сондықтан $\log_2 50+1\approx 6{,}66 \Rightarrow K=7$ деп алған орынды. Таңдама мәндері 3,6—8,5 аралығында жатады деп алып (шеткі нүктелерінің 8,5 − 3,6 айырмасы 7-ге бөлінетіндей етіп алған тиімді), оның интервалдар жиілігі кестесін құрып, гистограммасын тұрғызыңдар. Интервалдардың орта нүктелері бойынша таңдаманың жиіліктер кестесін құрып, оның жиіліктер алқабын тұрғызыңдар. Нәтижесін 4.8-суретпен салыстырыңдар.

4.18. Мекеменің 70 қызметкеріне сауалнама жүргізіп, олардың айлық жалақы мөлшері (мың тг есебімен) төмендегідей болатыны анықталды:

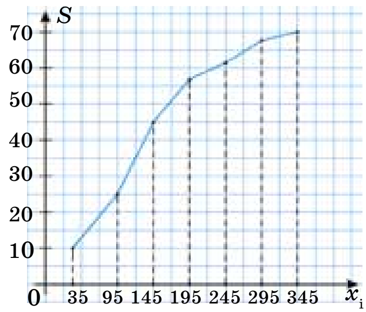
Жалақы мөлшері	70-тен төмен	70–120	120–170	170–220	220–270	270–320	320–370
Қызметкерлер саны: n_i	8	17	21	12	6	4	2

Табу керек: 1) интервалдық салыстырмалы жиіліктер кестесін; 2) жиіліктер гистограммасын; 3) ығыспалы қатардың жиіліктер кестесін; 4) ығыспалы қатардың жинақтық жиіліктер кестесін; 5) ығыспалы қатардың камулятасын тұрғызу керек.

5) Комулятаны тұрғызу үшін алдымен ығыспалы қатардың жинақтық кестесін құру керек (4.7-кесте).

4.7-*кесте*

x_i^*	35	95	145	195	245	295	345
n_i	8	17	21	12	6	4	2
S	8	25	46	58	64	68	70



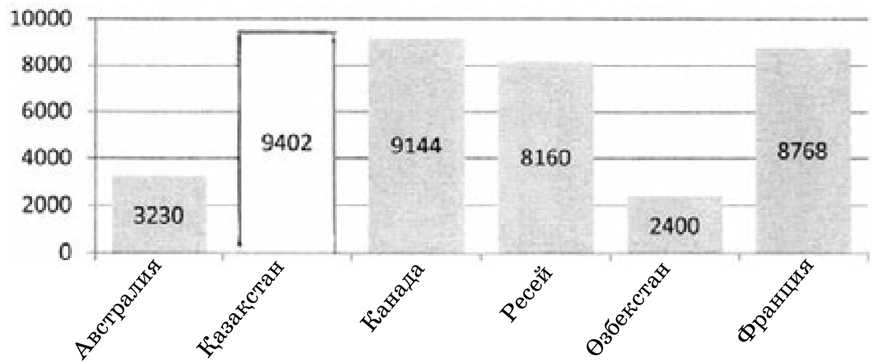
4.9-сурет

Комулята деп ығыспалы қатардың жинақтық жиіліктері (салыстырмалы жиіліктері) бойынша тұрғызылатын алқапты шектейтін қисықты айтады (4.9-сурет).

4.19. Сиыр сүтінің майлылығын зерттеу барысында (% есебімен) кездейсоқ алынған 25 сиырдың сүтінің майлылығы мынадай болды: 3,45; 3,56; 3,68; 3,66; 3,70; 3,76; 3,75; 3,78; 3,80; 3,94; 3,88; 3,94; 3,93; 3,96; 4,03; 4,03; 3,98; 4,00; 4,08; 4,10; 4,18; 4,35; 3,86; 3,88; 3,90. Интервал ұзындығын h=0,15%-ке тең деп алып:
1) жиіліктің интервалдық кестесін;
2) гистограмманы;
3) модасын;
4) медианасын;
5) таңдама ортасын;
6) ығыспалы қатардың жиіліктер кестесін;
7) ығыспалы қатардың жинақтық жиіліктер кестесін;
8) комулятасын тұрғызу керек.

4.20. 4.10-суретте мемлекеттердің уран өндіру көрсеткіштері көрсетілген (2013 жылдың қорытындысы бойынша). Осы көрсетілген гистограмманы мейлінше толық талқылап, қорытынды жасаңдар.

Уран өндірудің нақты мөлшері 2013 ж (U тонна)



4.10-сурет

ҚАЙТАЛАУҒА АРНАЛҒАН ЖАТТЫҒУЛАР

4.21. Теңдеуді шешіңдер:

1) $\frac{4}{9x^2-1}-\frac{4}{3x+1}-\frac{4}{1-3x}=0;$ 2) $\frac{4}{y+3}-\frac{5}{3-y}=\frac{1}{y-3}-1.$

4.22. Квадраттық функцияның графигі — төбесі $A(1;\ -2)$ нүктесінде орналасқан парабола және ол координаталар бас нүктесі арқылы өтеді. Осы функцияны жазып, оның графигін салыңдар.

4.23. x^4+2x^2-3 көпмүшесін көбейткіштерге жіктеңдер.

4.2. Таңдамалық дисперсия және стандартты ауытқу

Көп жағдайларда бас жиынтықтың үлестірімділік заңдылықтарын оқып-үйрену үшін оның кейбір белгісіз параметрлерін білсе немесе осы параметрлерді бағалап, жуық мәндерін анықтаса, жеткілікті. Осындай параметрлер санатына орта мән (арифметикалық орта), дисперсия, стандартты ауытқу (орташа квадраттық ауытқу) сияқты параметрлер енеді. Орта мәнді біздер төменгі сыныптан бастап қолданып келеміз:

Орта мән	$\Rightarrow$	**Таңдама мәндерінің арифметикалық ортасы**

Таңдамалық ығыспалы қатардың жиіліктер кестесі берілсін:

x_i	x_1	x_2	...	x_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k

Онда орта мән былай анықталады:

$$\overline{\mathrm{X}} = \frac{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + \ldots + x_k \cdot n_k}{n}, \qquad (n=n_1+n_2+\ldots+n_k). \qquad (1)$$

Ал таңдама мәндерінің орта мәннен қаншалықты «шашыраңқы» орналасатынын анықтау үшін дисперсия ұғымын қолданады. **Таңдамалық дисперсия** — ықтималдықтардың таралуының сандық сипаттамасы, ол

$$\overline{D} = \overline{\mathrm{X}^2} - \left(\overline{\mathrm{X}}\right)^2 \qquad (2)$$

формуласымен анықталады. Мұнда

$$\overline{\mathrm{X}^2} = \frac{x_1^2 \cdot n_1 + x_2^2 \cdot n_2 + \ldots + x_k^2\, n_k}{n}.$$

Дисперсияның квадрат түбірін **таңдамалық стандартты ауытқу** (немесе **орташа квадраттық ауытқу)** деп атайды:

$$\overline{\sigma} = \sqrt{\overline{D}}.$$

Ескерту: 1) ығыспалы қатардың салыстырмалы жиіліктер кестесі берілсін:

x_i	x_1	x_2	...	x_k
W_i	W_1	W_2	...	W_k

Орта мәндер сәйкесінше

$$\overline{\mathrm{X}} = x_1 W_1 + x_2 W_2 + \ldots + x_k \cdot W_k, \qquad (3)$$

$$\overline{\mathrm{X}^2} = x_1^2 W_1 + x_2^2 W_2 + \ldots + x_k^2 \cdot W_k \qquad (4)$$

формулаларымен анықталады.

2) $\overline{\mathrm{X}}$, $\overline{\mathrm{D}}$, $\overline{\sigma}$ өрнектеріндегі сызықшалар олардың таңдама бойынша анықталатынын көрсету мақсатында қойылады.

1-мысал. 4.1-параграфта қарастырылған 1-мысалдағы таңдамалық дисперсиясы мен стандартты ауытқуын анықтайық.

Бұл мысалда

x_i	4	5	6	7	8	9	10
n_i	2	4	4	7	3	2	3

және $\overline{X}=6,92$ болатынын анықтағанбыз.

$$\overline{X^2}=\frac{1}{25}\left(4^2\cdot2+5^2\cdot4+6^2\cdot4+7^2\cdot7+8^2\cdot3+9^2\cdot2+10^2\cdot3\right)=50,92$$

болғандықтан, $\overline{D}=50,92-(6,92)^2=3,0336$ және $\overline{\sigma}=\sqrt{3,0336}\approx1,74.$

Жауабы: $\overline{X}=6,92;\ \overline{D}\approx3,03;\ \overline{\sigma}\approx1,74.$

2-мысал. Мектеп оқушыларына арналған математика олимпиадасына қатысқан оқушыларға 7 есеп берілді және дұрыс шешілген есептің әрқайсысы 10 балға бағаланды. Олимпиада нәтижесі бойынша алғашқы 30 қатысушы мынадай балл жинады: 57, 53, 49, 47, 46, 45, 45, 44, 39, 38, 38, 37, 35, 35, 34, 34, 33, 31, 30, 30, 29, 28, 27, 27, 26, 25, 25, 25, 18, 15. Табу керек: 1) таңдама көлемі мен құлашын, интервалдар санын; 2) интервалдар жиілігінің (салыстырмалы жиіліктер) кестесін; 3) жиіліктер гистограммасын; 4) сәйкес ығыспалы қатарының жиіліктер (салыстырмалы жиіліктер, жинақтық жиіліктер) кестесін; 5) жиіліктер алқабын; 6) жиіліктер комулятасын; 7) орта мәнін; 8) дисперсия мен стандартты ауытқуын.

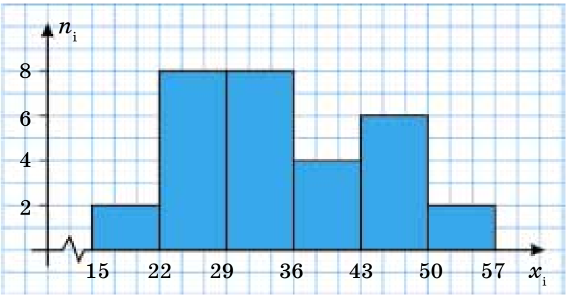
1) n=30, x_{max}=57, x_{min}=15, құлашы 57−15=42-ге тең. Калькуляторды немесе компьютерді пайдаланып, $\log_2 30\approx4,907$ тауып, интервалдар санын $k\approx4,907+1\approx5,9\approx6$-ға, интервал ұзындығын $h=\frac{42}{6}=7$-ге тең етіп алу керек.

2)

Интервал Δ_i	15—22	22—29	29—36	36—43	43—50	50—57
Санау	II	卌 III	卌 III	IIII	卌 I	II
Жиілігі n_i	2	8	8	4	6	2
Салыстырмалы жиілігі W_i	$\frac{2}{30}$	$\frac{8}{30}$	$\frac{8}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{2}{30}$

Мұнда жиіліктер және салыстырмалы жиіліктер кестесі біріктіріліп берілген. Қажетіне қарай оларды бөліп қарастыруға болады.

3) 4.11-суретте таңдаманың жиіліктер гистограммасы бейнеленген. Салыстырмалы жиілік гистограммасы да осы сияқты салынады.

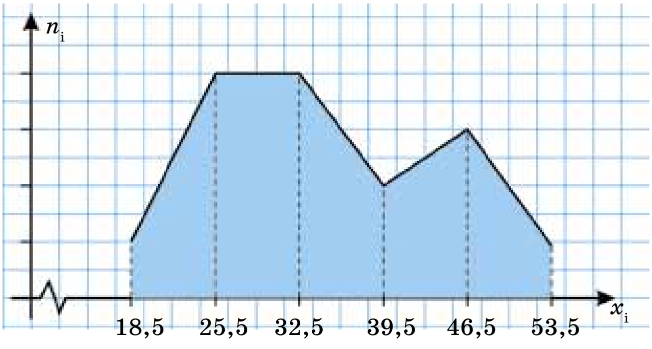


4.11-сурет

4)

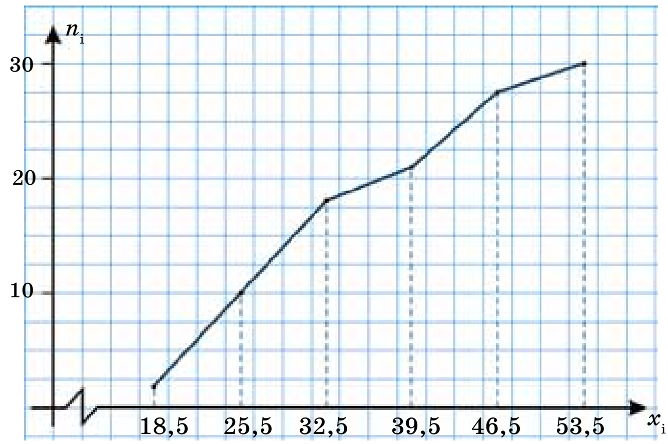
Интервал ортасы: x_i^*	18,5	25,5	32,5	39,5	46,5	53,5
n_i	2	8	8	4	6	2
W_i	$\frac{2}{30}$	$\frac{8}{30}$	$\frac{8}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{2}{30}$
Жинақтық жиілік: S	2	10	18	22	28	30

5) Нұсқалық ретінде сәйкес интервалдардың ортасы алынады. Жиіліктер алқабы 4.12-суретте бейнеленген.



4.12-сурет

6) 4.13-суретте комулята бейнеленген. Бұл қисық жинақтық жиіліктер көмегімен тұрғызылады.



4.13-сурет

7) Орта мән: $\overline{X} = \frac{1}{30}(18{,}5 \cdot 2+25{,}5 \cdot 8+32{,}5 \cdot 8+39{,}5 \cdot 4+46{,}5 \cdot 6+53{,}5 \cdot 2) = \frac{1045}{30} \approx 34{,}83.$

8) $\overline{X^2} = \frac{1}{30}\left(18{,}5^2 \cdot 2+25{,}5^2 \cdot 8+32{,}5^2 \cdot 8+39{,}5^2 \cdot 4+46{,}5^2 \cdot 6+53{,}5^2 \cdot 2\right) = \frac{39275{,}5}{30} \approx$
$\approx 1309{,}1833.$

Онда дисперсия: $\overline{D} = \overline{X^2} - \overline{X}^2 = 1309{,}1833 - (34{,}83)^2 \approx 96{,}05.$ Стандартты ауытқу: $\overline{\sigma} = \sqrt{\overline{D}} = \sqrt{96{,}05} \approx 9{,}8.$

1. Таңдамалық орта мәнін қалай анықтайды?
2. Таңдамалық дисперсия деп нені айтады?
3. Таңдамалық стандартты ауытқу (орташа квадраттық ауытқу) деп нені айтады?

Практикалық жұмыс

Мектептегі барлық сыныптардың әрқайсысында неше оқушы оқитынын анықтап, тізім жазыңдар. Алынған мәліметтердің 1) көлемі мен құлашын табыңдар; 2) интервалдар жиілігінің (салыстырмалы жиіліктер) кестесін құрыңдар; 3) жиіліктер гистограммасын тұрғызыңдар; 4) сәйкес ығыспалы қатардың жиіліктер (салыстырмалы жиіліктер) кестесін құрыңдар; 5) жиіліктер алқабын тұрғызыңдар; 6) жиіліктер комулятасын тұрғызыңдар; 7) ығыспалы қатар бойынша модасы мен медианасын, орта мәнін табыңдар; 8) дисперсиясы мен стандартты ауытқуларын табыңдар.

ЕСЕПТЕР

А

0,01-ге дейінгі дәлдікпен есептеңдер **(4.24—4.28):**

4.24. 4.1—4.5-есептердегі таңдамалық дисперсия мен стандартты ауытқуды табыңдар.

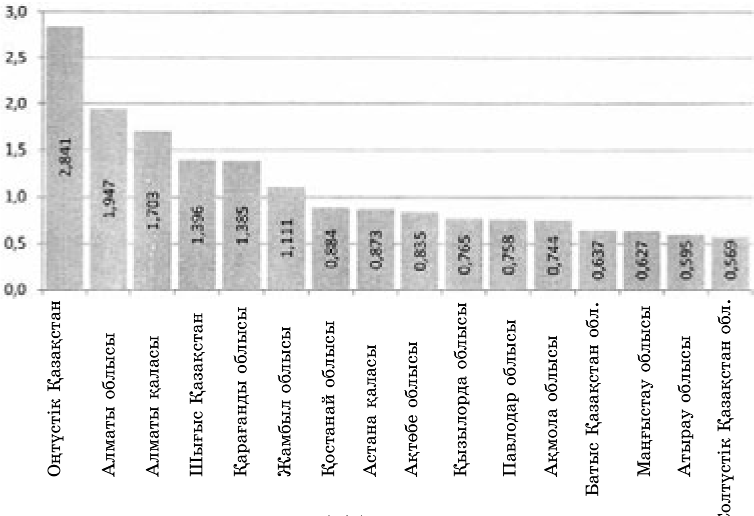
4.25. 4.6—4.10-есептердегі таңдамалық орта мәнді, дисперсияны және орташа квадраттық ауытқуды табыңдар.

B

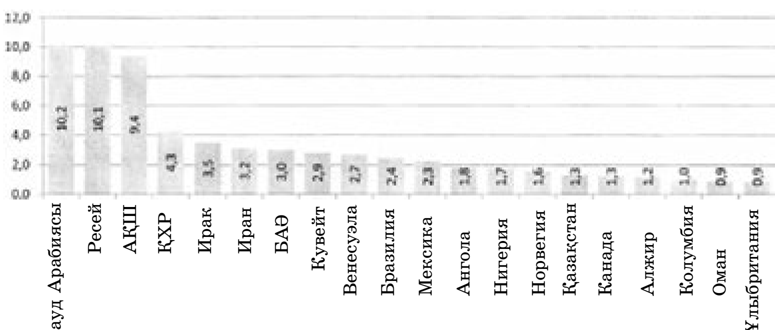
4.26. 4.11—4.20-есептерде берілген таңдамалық дисперсиясы мен стандартты ауытқуларды табыңдар.

4.27. 4.14-суретте 2016 жылғы 1 қаңтардағы Қазақстан облыстарының тұрғындар саны (млн адам) келтірілген. Осы мәлімет бойынша арифметикалық орта, дисперсия және стандартты ауытқуын табыңдар.

4.28. 4.15-суретте алдыңғы қатарлы 20 мұнай өндіруші мемлекеттердің бір күнде өндіретін мұнай мөлшері көрсетілген (млн барель есебімен). Осы мәлімет бойынша таңдамалық орта мәнді, дисперсияны және стандартты ауытқуды табыңдар.



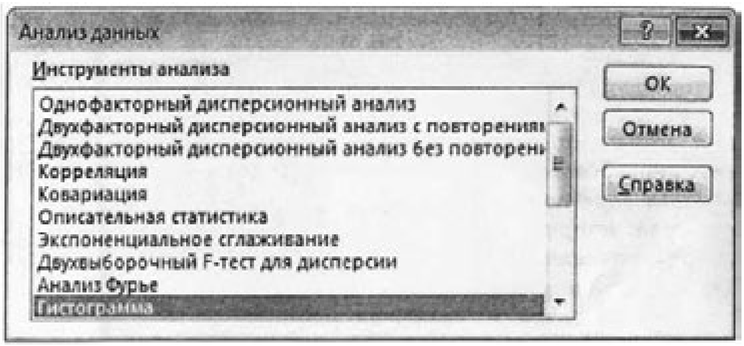
4.14-сурет



4.15-сурет

C

Excel-де гистограмма тұрғызуға болады. Ол үшін екі баған қолданылады. 1) Бірінші бағанға зерттелетін мәліметтер жазылады; 2) екіншісінде анықталған h қадаммен интервалдар шегарасы жазылады (өсу тәртібімен); 3) «Данные» жинағы ішінен «Анализ данных» командасын таңдаңдар; 4) «Гистограмма» бабын таңдап алып, «ОК» батырмасын басыңдар.
5) «Ввод» бөлімінде келесі іс-әрекеттерді орындаңдар: а) «Формировать список по диапазону» өрісінде берілген мәліметтер жазылған ұяшықтарға сілтеме жасаңдар; ә) «Интервал карманов» өрісінде интервалдар жазылған ұяшықтарға сілтеме жасау керек; 6) «Параметры вывода» топтамасында нәтиже көрсетілетін орынды көрсетіңдер. Гистограмма осы орынға салынады.



4.29—4.32-есептерде берілген мәліметтер үшін Excel көмегімен гистограмма тұрғызып, осы гистограмма бойынша таңдаманың орта мәнін, дисперсиясын және стандартты ауытқуын табыңдар.

4.29.

79	82	72	76	84	77	99	75	85	93
73	82	84	72	88	79	70	79	85	88
82	83	87	77	81	82	81	94	81	78
93	84	72	81	81	91	81	89	81	86
81	83	73	84	84	83	81	85	65	73
74	81	74	69	81	86	69	79	67	81
82	87	70	81	84	81	86	66	86	87
80	82	89	69	77	81	93	89	71	75
82	76	83	75	74	73	76	69	78	66
81	92	82	83	87	83	79	78	93	96

4.30.

45	68	52	63	69	69	57	87	48	53
51	71	57	78	73	74	68	68	55	85

55	55	32	12	62	75	77	31	54	64
46	13	57	45	49	46	13	51	54	34
63	55	52	65	79	65	59	49	41	02
68	43	69	43	56	48	51	53	39	38
79	69	77	62	48	92	43	59	26	26
69	54	56	55	49	95	46	66	72	35
46	36	62	42	32	62	61	48	36	38
49	54	56	28	17	65	32	59	07	25

4.31.

25	07	59	32	65	32	63	57	63	45
38	36	48	61	52	17	42	52	54	56
35	82	66	43	95	48	78	22	71	55
26	16	59	46	92	49	45	57	51	51
38	41	53	51	48	79	65	69	13	68
02	39	49	59	65	66	43	52	55	63
34	52	51	77	46	52	62	66	43	79
35	54	31	13	75	49	55	77	96	63
53	53	68	57	74	69	42	55	54	45
74	48	87	68	69	43	28	62	36	49

4.32.

77	55	46	53	49	13	15	79	36	27
62	79	65	21	31	65	47	44	72	55
42	66	48	58	53	42	68	53	25	64
45	48	92	54	59	53	78	55	46	03
65	48	95	52	66	43	59	65	35	24
43	32	54	69	56	68	51	68	02	18
32	16	61	77	52	54	43	63	34	88
25	35	28	21	85	28	32	92	35	30
87	32	69	67	28	55	49	46	53	45
87	62	75	72	92	62	54	35	59	56

ҚАЙТАЛАУҒА АРНАЛҒАН ЖАТТЫҒУЛАР

4.33. Түбірлері $x_1=\sqrt{5}-\sqrt{3}$ және $x_2=\sqrt{5}+\sqrt{3}$ болатын квадрат теңдеу құрыңдар.

4.34. 1) $\dfrac{1}{x^2+4}$; 2) $\dfrac{x^2+3}{x^2+1}$; 3) $\dfrac{2}{4+\sqrt{x}}$ өрнегінің ең үлкен мәнін табыңдар.

4.35. $x^2+y^2=25$ шеңбері мен $3x+4y=25$ түзуінің жанасатынын көрсетіп, жанасу нүктесінің координаталарын табыңдар.

5-бөлім. ТЕҢСІЗДІКТЕР

Бөлімді оқып-үйрену барысында келесі мақсаттарға қол жеткіземіз:

- квадрат теңсіздіктерді шешу;
- рационал теңсіздіктерді шешу;
- біреуі сызықтық, екіншісі квадрат теңсіздік болатын екі теңсіздіктен құралған жүйелерді шешу;
- құрамында екі квадрат теңсіздігі бар жүйелер мен жиынтықтарды шешу;
- санды теңсіздіктердің қасиеттерін білу;
- теңсіздікті дәлелдеу тәсілдерін меңгеру;
- екі айнымалылы теңсіздіктердің геометриялық мағыналарын білу.

5.1. Теңсіздіктерді дәлелдеу

Санды теңсіздіктің қасиеттері. Кез келген a және b сандарын салыстыру:

$a - b = 0$ ⇄	$a = b$	a және b сандары тең
$a - b > 0$ ⇄	$a > b$	a саны b санынан үлкен
$a - b < 0$ ⇄	$a < b$	a саны b санынан кіші

1-мысал: $\frac{7}{8}$ және $\frac{8}{9}$ сандарын салыстыру керек.

$$\frac{7}{8} - \frac{8}{9} = \frac{7\cdot 9 - 8\cdot 8}{8\cdot 9} = -\frac{1}{72} < 0 \Rightarrow \frac{7}{8} < \frac{8}{9}.$$

Теңсіздік таңбасының екі жағында сандар немесе сандық өрнектер жазылған теңсіздіктер **санды теңсіздіктер** деп аталады. Мұнда $<$ және $>$ қатаң, ал $\leqslant$ және $\geqslant$ қатаң емес теңсіздік белгілері деп аталады.

$a<c$, $c<b$ теңсіздіктерін біріктіріп, $a<c<b$ қос теңсіздігі түрінде жазуға болады.

Теңсіздіктің қасиеттері	Дәлелдеуі
1°. $a<b$ және $b<c \Rightarrow a<c$	$a-c=(a-b)+(b-c)$ және $a-b<0$, $b-c<0 \Rightarrow a-c<0 \Rightarrow a<c$
2°. **Теңсіздікке санды қосу қасиеті.** $a<b$ болса, кез келген c саны үшін $a+c<b+c$ теңсіздігі орындалады.	$(a+b)-(b+c)=a+c-b-c=a-b<0\Rightarrow$ $\Rightarrow a+c<b+c$.
1-салдар. $a+c<b \Rightarrow a<b-c$: теңсіздіктің бір бөлігіндегі санды оның екінші бөлігіне қарама-қарсы таңбамен шығаруға болады	2°- қасиет бойынша $a+c<b$ теңсіздігінің екі бөлігіне де $(-c)$ санын қосу керек
3°. **Теңсіздіктерді қосу.** Бірдей мағыналы теңсіздіктерді мүшелеп қосуға болады: $\begin{cases} a<b, \\ c<d \end{cases} \Rightarrow a+c<b+d$	$(a+c)-(b+d)=(a-b)+(c-d)<0$ себебі $a-b<0$, $c-d<0$
Теңсіздіктерді азайту. **2-салдар.** $a<b$, $c<d$ болса, онда $a-d<b-c$	1-салдар мен 3°-қасиеттен шығады
4°. **Теңсіздікті санға көбейту.** Теңсіздікті оң санға көбейткенде оның таңбасы сақталады, теріс санға көбейткенде қарама-қарсы таңбаға өзгереді: $a>b$, $c>0 \Rightarrow ac>bc$; $a>b$, $c<0 \Rightarrow ac<bc$	$c>0$, $a>b$ болсын, онда $ac-bc=c(a-b)>0\Rightarrow ac>bc$. Екінші теңсіздік те осылай дәлелденеді
5°. **Теңсіздікті санға бөлу.** $a>b, c>0 \Rightarrow \frac{a}{c}>\frac{b}{c}$; $a>b, c<0 \Rightarrow \frac{a}{c}<\frac{b}{c}$	4°-қасиет сияқты дәлелденеді (өздерің дәлелдеп көріңдер)

жалғасы

6°. Теңсіздіктерді көбейту. Бірдей мағыналы оң мүшелі теңсіздіктерді мүшелеп көбейтуге болады: $\begin{cases} a > b > 0, \\ c > d > 0 \end{cases} \Rightarrow ac > bd$	$ac-bd=(ac-bc)+(bc-bd)=$ $=c(a-b)+b(c-d)>0$
7°. Теңсіздіктерді бөлу. $\begin{cases} a > b > 0, \\ c > d > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{d} > \frac{b}{c}$	$\frac{a}{d} - \frac{b}{c} = \frac{ac-bd}{cd}$; $cd > 0$ және $ac - bd > 0$ (6°-қасиет бойынша) $\Rightarrow \frac{a}{d} > \frac{b}{c}$
Кері шама теңсіздігі. **3-салдар.** $a > b > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$	7° -қасиеттен шығады
Теңсіздікті дәрежеге шығару. **4-салдар.** $a>b>0$ болса, кез келген n натурал саны үшін $a^n > b^n$.	6° -қасиеттен шығады

Құрамындағы әріптердің барлық мүмкін мәндерінде орындалатын теңсіздікті **ақиқат теңсіздік** деп атайды.

Теңсіздіктің ақиқаттығын көрсету үрдісін **теңсіздікті дәлелдеу** деп атайды.

2-мысал. $(a-3)(a-5) < (a-4)^2$ теңсіздігін дәлелдеу керек.

$(a-3)(a-5) < (a-4)^2 \Rightarrow a^2-8a+15-a^2+8a-16 < 0.$

3-мысал. Кез келген a және b сандары үшін $a^2+b^2 \geq 2ab$ теңсіздігі орындалатынын көрсетейік.

$a^2+b^2-2ab=(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2+b^2 \geq 2ab$.

Теңсіздіктерді дәлелдеу тәсілдері. 1. *Теңсіздіктерді анықтама бойынша дәлелдеу.*

$a-b>0$ жағдайында анықтама бойынша $a>b$ болады. 2- және 3-мысалдар анықтама бойынша дәлелденеді.

4-мысал. Егер $a \geq 0, b \geq 0$ болса, $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ теңсіздігі орындалады.

$a+b-2\sqrt{ab} = \left(\sqrt{a}\right)^2 + \left(\sqrt{b}\right)^2 - 2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab}$.

2. *Теңсіздіктерді кері жору тәсілімен дәлелдеу.*

5-мысал. Егер $ab > 0$ болса, $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ теңсіздігі орындалады.

$ab > 0$ болғанымен, $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ теңсіздігі орындалмайды деп кері жоримыз. Онда $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} < 2$ болуы керек. Бұдан $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 < 0 \Rightarrow \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{ab} < 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{(a-b)^2}{ab} < 0$. Қайшылыққа келдік. Себебі $(a-b)^2 \geq 0$, $ab > 0$. Алынған қайшылық берілген теңсіздікті орындалмайды деген жоруымызды теріске шығарады. Демек, $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ теңсіздігі орындалады.

3. *Тірек теңсіздіктер тәсілі.* Мұнда берілген теңсіздікті қайсыбір ақиқат теңсіздіктің немесе алдын ала дәлелденген теңсіздіктердің көмегімен дәлелдейді. Осындай көмекші теңсіздіктерді ***тірек теңсіздіктер*** деп атайды.

Мысалы, $a^2 \geq 0$; $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ $(a \geq 0,\ b \geq 0)$; $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ $(ab > 0)$ теңсіздіктерін тірек теңсіздіктері ретінде алуға болады.

6-мысал. $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0 \Rightarrow (a+b)(a+c)(b+c) \geq 8abc$ теңсіздігі орындалатынын дәлелдеу керек.

4-мысалда дәлелденген теңсіздікті тірек теңсіздік ретінде аламыз: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$; $a + c \geq 2\sqrt{ac}$; $b + c \geq 2\sqrt{bc}$. Теңсіздіктердің 6^0-қасиеті бойынша бұл тірек теңсіздіктерін мүшелеп көбейтіп,

$$(a+b)(a+c)(b+c) \geq 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{ac} \cdot 2\sqrt{bc} = 8\sqrt{a^2b^2c^2} = 8abc$$

теңсіздігін аламыз.

4. *Теңсіздік мүшелерін бағалау тәсілі.* Бұл тәсіл санды өрнектер арқылы берілген теңсіздіктерді дәлелдеуге қолайлы.

7-мысал. $\sqrt{27} + \sqrt{6} + 1$ және $\sqrt{48}$ сандарының қайсысы үлкен?

$\sqrt{27} > \sqrt{25} = 5$ және $\sqrt{6} > \sqrt{4} = 2$ болғандықтан, $\sqrt{27} + \sqrt{6} + 1 > 8$. Ал $\sqrt{48} < \sqrt{49} = 7$ теңсіздігінен $\sqrt{27} + \sqrt{6} + 1 > \sqrt{48}$ шығады.

1. Қандай шарт орындалғанда a саны b санынан үлкен делінеді? Оны қалай белгілейді?
2. Қатаң және қатаң емес теңсіздік белгілерін жазып көрсетіңдер.
3. Санды теңсіздіктердің қандай қасиеттерін білесіңдер? Оларды дәлелдеп беріңдер.
4. Теңсіздікті дәлелдеу деп нені түсінесіңдер?
5. Теңсіздікті дәлелдеу тәсілдерін атап, олардың мағынасын ашып беріңдер.

Шығармашылық жұмыс

Егер b саны $\sqrt{a}$-ның кемімен (артығымен) алынған жуықтауы болса, онда $\frac{a}{b}$ саны $\sqrt{a}$-ның артығымен (кемімен) алынған жуықтауы болды. Дәлелдеу керек: егер $\sqrt{a}> b$ болса, онда $\sqrt{a}<\frac{a}{b}$ немесе керісінше (оны өздерің көрсетіңдер). Сондықтан b және $\frac{a}{b}$ сандарының арифметикалық ортасы да $\sqrt{a}$ санының жуық мәні болды. Демек, $\sqrt{a}$ санының жуық мәнін $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$, $x_1 = a$ рекурренттік формуласымен есептейміз. Көрсетілген алгоритмде 1) $x_1 = 5$; 2) $x_1 = 2{,}5$ деп алсақ, онда неше қадамнан соң x_n саны $\sqrt{5}$ санына 0,001-ге дейінгі дәлдікпен жуықтайды? Оны калькулятор көмегімен тексеріңдер. Қорытынды жасаңдар. Алғашқы x_1 мәнін таңдап алуға жуықтау үрдісінің әсері қандай?

ЕСЕПТЕР

А

5.1. Егер $a<b$, $c>b$, $c<d$, $a>e$ болса, онда a, b, c, d және e сандарын сан өсінде бейнелеңдер.

5.2. 1) $a-3>b-3$ және $b>4$; 2) $7a>7b$ және $b>1$; 3) $a-8>b-8$ және $a<-12$; 4) $-2a>-2b$ және $b<-0{,}3$ болса, онда a және b сандарының таңбаларын анықтаңдар.

3) $a-8>b-8$ $a>b$ және $a<-12$. Шарт бойынша $b<a<-12 \Rightarrow a<0$, $b<0$.

5.3. $a>b$ теңсіздігінің екі жақ бөлігіне де 1) 5-ті қосқанда; 2) −2-ні қосқанда; 3) 0,5-ке көбейткенде; 4) −3-ке көбейткенде; 5) 4-ке бөлгенде; 6) −0,1-ге бөлгенде шығатын теңсіздіктерді жазыңдар.

5.4. Егер $3<a<4$ қос теңсіздігі орындалса, 1) $5a$; 2) $-a$; 3) $a+2$; 4) $a-2$; 5) $5-a$; 6) $0{,}2a+3$ өрнектері үшін қандай қос теңсіздіктер орындалады?

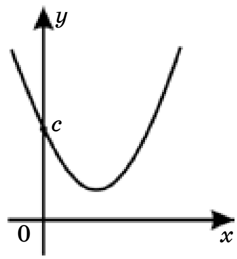
5) $3<a<4 \Rightarrow -3>-a>-4 \Rightarrow 5-3>5-a>5-4 \Rightarrow 2>5-a>1$.

5.5. Егер $5<x<8$ болса, 1) $6x$; 2) $-10x$; 3) $x-5$; 4) $3x+2$ өрнегін бағалаңдар.

5.6. $a^2+b^2\geqslant 2ab$ теңсіздігін 1-, 2-, 3-тәсілдермен дәлелдеп көрсетіңдер.

5.7. Егер $a>0$ және $b^2-4ac<0$ болса, онда $ax^2+bx+c>0$ теңсіздігі орындалатынын дәлелдеңдер.

$a>0$ болғандықтан, $y=ax^2+bx+c$ параболасының тармағы жоғары бағытталған. $D=b^2-4ac<0$ болғандықтан, парабола Ox өсімен қиылыспайды. Сондықтан парабола абсциссалар өсінен жоғары орналасады, яғни $ax^2+bx+c>0$ (5.1-сурет).



5.1-сурет

5.8. Теңсіздіктерді дәлелдеңдер:

1) $x^2+2x+2>0$; 2) $y^2-6y+10>0$;

3) $a^2+ab+b^2 \geq 0$; 4) $a^2-ab+b^2 \geq 0$.

В

5.9. 1) $5<y<8$; 2) $0,125<y<0,25$ теңсіздіктері орындалса, $\frac{1}{y}$ өрнегін бағалаңдар.

5.10. Анықтамаға сүйеніп, төмендегі теңсіздіктерді дәлелдеңдер:

1) $3(a+1)+a<4(2+a)^2$; 2) $(7p-1)(7p+1)<49p^2$;

3) $(a-2)^2>a(a-4)$; 4) $(2a+3)(2a+1)>4a(a+2)$;

5) $2b^2-6b+1>2b(b-3)$; 6) $(c+2)(c+6)<(c+3)(c+5)$;

7) $p(p+7)>7p-1$; 8) $8e(3e-10)<(5e-8)^2$.

5.11. 1) $4x(x+0,5)>(2x+3)(2x-3)$; 2) $(3x+8)^2>3x(x+16)$;

3) $(5x-1)(5x+1)<25x^2+2$; 4) $(7+2x)(7-2x)<49-x(4x+1)$

теңсіздіктері x-тің кез келген мәнінде орындала ма?

5.12. Теңсіздіктерді дәлелдеңдер:

1) $a(a+b) \geq ab$; 2) $a(a-b) \geq b(a-b)$;

3) $2bc \leq b^2+c^2$; 4) $m^2-mn+n^2 \geq mn$;

5) $10a^2-5a+1 \geq a^2+a$; 6) $a^2-a \leq 50a^2-15a+1$;

7) $\frac{c^2+1}{2} \geq c$; 8) $\frac{c}{c^2+1} \leq \frac{1}{2}$.

2) $a(a-b)-b(a-b)=(a-b)(a-b)=(a-b)^2 \geqslant 0 \Rightarrow a(a-b) \geqslant b(a-b)$.

5.13. Егер a және b сандары өзара тең емес оң сандар болса, a^3+b^3 пен $ab(a+b)$ өрнектерінің қайсысы үлкен?

5.14. Теңсіздіктерді анықтама бойынша дәлелдеңдер:

1) $(6y-1)(y+2)<(3y+4)(2y+1)$;

2) $(3x-1)(2x+1)>(2x-1)(2+3x)$;

3) $x^2+4y^2+3z^2>2x+12y+6z-14$;

4) $a^2+b^2+2\geq 2(a+b)$.

5.15. Кері жору тәсілімен дәлелдеңдер:

1) $a+\dfrac{1}{a}\geq 2 (a>0)$;

2) $(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\geq 4\ (a>0, b>0)$;

3) $\sqrt{(a+c)(b+d)}\geq\sqrt{ad}+\sqrt{bc}\ \ (a\geq 0, b\geq 0, c\geq 0, d\geq 0)$;

4) $\dfrac{a^2}{a^4+1}\leq 0,5$;

5) $ab(a+b)\leq a^3+b^3\ \ (a\geq 0, b\geq 0)$;

6) $a^5+b^5\geq a^4b+ab^4\ \ (a\geq 0, b\geq 0)$.

5) ▶ $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$ болғанда берілген теңсіздік орындалмасын. Онда $ab(a+b)>a^3+b^3$ теңсіздігі орындалуы қажет. Осыдан $ab(a+b)-(a^3+b^3)>$ $>0\ \Rightarrow\ ab(a+b)-(a+b)(a^2-ab+b^2)>0\ \Rightarrow\ (a+b)\ [ab-a^2+ab-b^2]>0\ \Rightarrow\ (a+b)\times$ $\times(2ab-a^2-b^2)>0\Rightarrow-(a+b)\cdot(a-b)^2>0$ қайшылыққа келдік. Себебі $a+b\geqslant 0$, $(a-b)^2\geqslant 0$. Алынған қайшылық $ab(a+b)\leqslant a^3+b^3$ теңсіздігі орындалатынын дәлелдейді. ◀

5.16. Тірек теңсіздіктер тәсілімен дәлелдеңдер:

1) $x^2+2y^2+2xy+6y+10\geq 0$;

2) $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$;

3) $a+b+c\geq\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\ \ (a\geq 0, b\geq 0, c\geq 0)$;

4) $(1-a)(1-b)(1-c)\geq 8abc\ (a\geq 0, b\geq 0, c\geq 0, a+b+c=1)$;

5) $\dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}\geq 2$;

6) $\dfrac{x+y}{2}\leq\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}(x\geq 0,\ y\geq 0)$.

5.17. Сандарды салыстырыңдар:

1) $\dfrac{86}{87}$ және $\dfrac{87}{88}$;

2) $\dfrac{113}{112}$ және $\dfrac{112}{111}$;

3) $436\cdot 438$ және 437^2;

4) 74^2-27^2 және 73^2-26^2;

5) $\sqrt{23}-\sqrt{11}$ және $\sqrt{22}-\sqrt{10}$;

6) $\sqrt{38}+\sqrt{20}$ және $\sqrt{37}+\sqrt{21}$.

5.18. Өрнектерді салыстырыңдар:

1) $(a-1)(a+2)$ және $(a-3)(a+4)$;
2) a^2+1 және $2|a|$;
3) a^2+5 және $2a+3$;
4) $1-a$ және $\frac{1}{a}-1\,(a>0)$;
5) a^2+25 және $10a$;
6) $(b+3)^2$ және $(b+2)(b+4)$;
7) $(a-2)^2$ және $4(1-a)$;
8) a^4+1 және $2a|a|$.

4) $1-a-(\frac{1}{a}-1)=\frac{a-a^2-1+a}{a}=\frac{(a-1)^2}{a}\leq 0 \Rightarrow 1-a\leq\frac{1}{a}-1$.

C

5.19. Егер $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$ болса, $\sqrt{a}+\sqrt{b}\geq\sqrt{a+b}$ теңсіздігін дәлелдеңдер.

5.20. Егер $a>0$, $b>0$ болса, $\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}$ теңсіздігін дәлелдеңдер.

5.21. Егер $a>0$, $b>0$, $c>0$ болса, $\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\geq a+b+c$ теңсіздігін дәлелдеңдер.

5.22. Егер $x^2+y^2=1$ болса, $-\sqrt{2}\leq x+y\leq\sqrt{2}$ теңсіздігін дәлелдеңдер.

5.23. Егер $a^2+b^2=2$ болса, $a^4+b^4\geqslant 2$ теңсіздігін дәлелдеңдер.

5.24. $\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}>2$ теңсіздігін дәлелдеңдер.

5.25. Егер $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, $c\geqslant 0$ болса, $(a+1)(b+1)(a+c)(b+c)\geqslant 16abc$ теңсіздігін дәлелдеңдер.

5.26. Үшбұрыштың әр қабырғасы оның жарты периметрінен кем болатынын дәлелдеңдер.

5.27. Егер a, b, c сандары үшбұрыш қабырғаларының ұзындықтарына тең болса, $a^2+b^2+c^2<2(ab+bc+ca)$ теңсіздігін дәлелдеңдер.

5.28. Моторлы қайықтың тұнық судағы 20 км жолға кеткен уақытын және өзен ағысына қарсы 10 км, ағыс бойымен жүрген 10 км жолға кеткен барлық уақытты салыстырыңдар.

ҚАЙТАЛАУҒА АРНАЛҒАН ЖАТТЫҒУЛАР

5.29. Теңсіздікті шешіңдер:

1) $\frac{3x-2}{5}-\frac{x+6}{10}>1$; 2) $\frac{3+x}{4}+\frac{2-x}{3}<0$.

5.30. Тұнық судағы жылдамдығы 20 км/сағ болатын катер өзен ағысына қарсы 36 км және өзен ағысымен 22 км жолды 3 сағатта жүріп өтті. Өзен ағысының жылдамдығы қандай?

5.31. b-ның қандай мәндерінде $2x^2+bx+18=0$ теңдеуінің екі түбірі бар?

5.2. Квадрат теңсіздіктерді шешу

Теңсіздіктерді шешу ұғымы.

Теңсіздікті дәлелдеу	Құрамына енетін барлық айнымалылардың (әріптердің) мүмкін мәндері үшін теңсіздіктің үнемі орындалатынын көрсету (дәлелдеу)	Бұл екі ұғымды шатастырмаңдар!
Теңсіздікті шешу	Теңсіздік орындалатындай етіп оның құрамына енетін айнымалылардың барлық мәндерін анықтау немесе мұндай мәндер табылмайтынын көрсету	

Айнымалының теңсіздікті қанағаттандыратын мәні оның **шешімі** деп аталады.

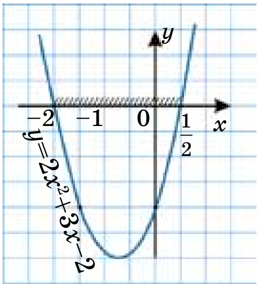
Мысалы, $x=1$ саны $3-2x+x^2>x^3-1$ теңсіздігінің шешімі	Өйткені $3-2\cdot1+1^2>1^3-1 \Rightarrow 2>0$ — ақиқат теңсіздік
Ал $x=2$ саны $3-2x+x^2>x^3-1$ теңсіздігінің шешімі болмайды	Өйткені $3-2\cdot2+2^2>2^3-1 \Rightarrow 3>7$ — жалған теңсіздік

Сонымен, ***теңсіздіктерді шешу дегеніміз — оның барлық шешімдерін табу немесе шешімдерінің болмайтындығын дәлелдеу***. Шешімдері бірдей теңсіздіктерді ***мәндес теңсіздіктер*** деп атаймыз. Мысалы, $x^2+2x>(x-1)(x+1)$ және $2x>-1$ теңсіздіктері мәндес. Шешімдері болмайтын теңсіздіктер де өзара мәндес болады. Айталық, $x^2+1<0$, $x^4+x^2+3<1$ теңсіздіктері мәндес, өйткені екеуінің де шешімдері жоқ.

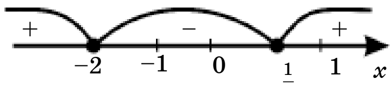
Бір айнымалылы квадрат теңсіздіктерді шешу.

1-мысал. $2x^2+3x-2\leqslant0$ теңсіздігін шешу керек.

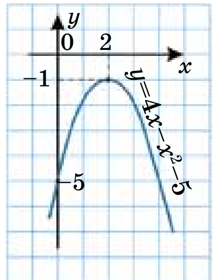
1-тәсіл (графиктік тәсіл). Алдымен $y=2x^2+3x-2$ функциясының графигін саламыз. Онда осы графиктің Ox өсінен төмен орналасқан x мәндері есептің жауабын анықтайды. 5.2-сурет бойынша есеп жауабы $[-2;\ \frac{1}{2}]$.



5.2-сурет



5.3-сурет



5.4-сурет

2-тәсіл (аралықтар тәсілі). Алдымен $2x^2+3x-2=0$ теңдеуінің түбірлерін анықтаймыз: $x_1=-2$; $x_2=\frac{1}{2}$. Онда $2x^2+3x-2=2(x+2)(x-\frac{1}{2})$. Берілген теңсіздікті былай жазамыз:

$$2(x+2)(x-\frac{1}{2})\leqslant 0.$$

$x_1=-2$; $x_2=\frac{1}{2}$ нүктелері сан өсін үш аралыққа бөледі. Осы бөліктердің әрқайсысында берілген квадрат үшмүшенің таңбаларын анықтаймыз (5.3-сурет).

Онда есептің жауабы былай жазылады: $-2\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$ немесе $[-2;\ \frac{1}{2}]$.

2-мысал. $4x-x^2-5>0$ теңсіздігін шешу керек.

$4x-x^2-5$ квадрат үшмүшесінің түбірлері жоқ. Интервалдар тәсілін қолдана алмаймыз. Онда бұл теңсіздікті графиктік тәсілмен шешеміз: $y=4x-x^2-5$ функциясының графигі 5.4-суретте бейнеленген. Парабола Ox абсцисса өсінен төмен орналасады, яғни функция теріс мәндер қабылдайды, сондықтан шешімі болмайды.

Жауабы: $\varnothing$.

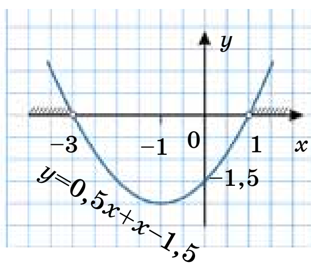
3-мысал. $0,5x^2+x-1,5>0$ теңсіздігін шешу керек.

$0,5x^2+x-1,5$ квадрат үшмүшесінің түбірлері: $x_1=-3$; $x_2=1$. Онда

$0,5x^2+x-1,5=0,5\ (x+3)(x-1)$

өрнегінің таңбасы 5.5-суретте бейнеленген. 5.6-суретте $y=0,5x^2+x-1,5$ функциясының графигі бейнеленген.

5.5-сурет



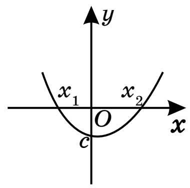
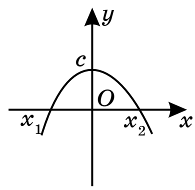
5.6-сурет

Жауабы: $(-\infty;-3)\cup(1;+\infty)$.

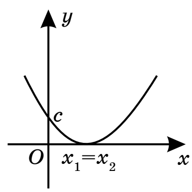
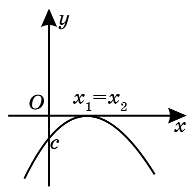
Ескерту: қатаң теңсіздіктерде аралықтардың шеткі нүктелері есептің жауабына енбейді және олар суретте боялмаған дөңгелекпен бейнеленеді. Қатаң емес теңсіздіктерде аралықтардың шеткі нүктелері есеп жауабына енеді және олар бояған дөңгелекпен бейнеленеді.

Осы мысалдардан төмендегідей қорытынды жасаймыз (5.1-кесте).

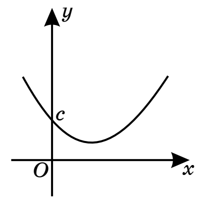
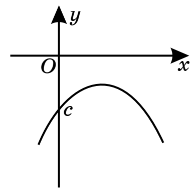
5.1-*кесте*

a		$D>0$	
		Шешімі	Геометриялық мағынасы
$a>0$	$ax^2+bx+c>0$ $ax^2+bx+c<0$ $ax^2+bx+c\geqslant 0$ $ax^2+bx+c\leqslant 0$	$x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$ $x\in(x_1;x_2)$ $x\in(-\infty;x_1]\cup[x_2;+\infty)$ $x\in[x_1;x_2]$	
$a<0$	$ax^2+bx+c>0$ $ax^2+bx+c<0$ $ax^2+bx+c\geqslant 0$ $ax^2+bx+c\leqslant 0$	$x\in(x_1;x_2)$ $x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$ $x\in[x_1;x_2]$ $x\in(-\infty;x_1]\cup[x_2;+\infty)$	

жалғасы

a		$D=0$	
		Шешімі	Геометриялық мағынасы
$a>0$	$ax^2+bx+c>0$ $ax^2+bx+c<0$ $ax^2+bx+c\geqslant 0$ $ax^2+bx+c\leqslant 0$	$x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$ $x\in\varnothing$ $x\in(-\infty;+\infty)$ $x=x_1$	
$a<0$	$ax^2+bx+c>0$ $ax^2+bx+c<0$ $ax^2+bx+c\geqslant 0$ $ax^2+bx+c\leqslant 0$	$x\in\varnothing$ $x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$ $x=x_1$ $x\in(-\infty;+\infty)$	

жалғасы

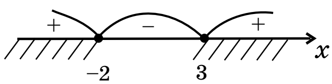
a		$D<0$	
		Шешімі	Геометриялық мағынасы
$a>0$	$ax^2+bx+c>0$ $ax^2+bx+c<0$ $ax^2+bx+c\geqslant 0$ $ax^2+bx+c\leqslant 0$	$x\in(-\infty;+\infty)$ $x\in\varnothing$ $x\in(-\infty;+\infty)$ $x\in\varnothing$	
$a<0$	$ax^2+bx+c>0$ $ax^2+bx+c<0$ $ax^2+bx+c\geqslant 0$ $ax^2+bx+c\leqslant 0$	$x\in\varnothing$ $x\in(-\infty;+\infty)$ $x\in\varnothing$ $x\in(-\infty;+\infty)$	

Бір айнымалылы теңсіздіктер жүйесін шешу.

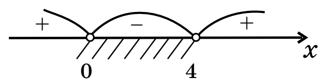
4-мысал. $\begin{cases} x^2-x-6\,\text{I}\,0, \\ x^2-4x<0 \end{cases}$ теңсіздіктер жүйесін шешейік.

Жүйенің әр теңсіздігі — квадрат теңсіздік. Олардың әрқайсысын шешу үшін аралықтар тәсілін қолданамыз. x^2-x-6 квадрат үшмүшесінің түбірлері -2 және 3 сандары болғандықтан, $x^2-x-6\,\text{I}\,0$ теңсіздігінің шешімі $x\in(-\text{u}\,;-2]\,2\,[3;+\text{u}\,)$ (5.7-сурет). Ал $x^2-4x=0$ теңдеуінің түбірлері 0-ге және 4-ке тең болғандықтан, $x^2-4x<0$ теңсіздігінің шешімі $x\in(0;\ 4)$ аралығы болады (5.8-сурет). Онда берілген жүйе шешімі былай алынады:

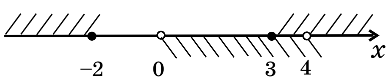
$\{(-\text{u}\,;-2]\,2\,[3;+\text{u}\,)\}\,3\,(0;\ 4]=[3;4)$ (5.9-сурет).



5.7-сурет



5.8-сурет



5.9-сурет

5-мысал: Енді $\left[\begin{array}{l} x^2-x-6\geq 0, \\ x^2-4x<0 \end{array}\right.$ теңсіздіктер жиынтығын шешейік.

$$\left[\begin{array}{l} x^2-x-6\geq 0, \\ x^2-4x<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-3)(x+2)\geq 0, \\ x(x-4)<0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x\in(-\infty;-2]\cup(3;+\infty), \\ x\in(0;4) \end{array}\right. \Rightarrow$$

$\Rightarrow x\in(-\infty;-2]\cup[3;+\infty)\cup(0;4)=(-\infty;-2]\cup(0;+\infty)$.

Жауабы: $(-\infty;-2]\cup(0;+\infty)$

Сонымен, жүйе шешімінің әрқайсысы оның құрамына енетін әрбір теңсіздікті қанағаттандырады.	⇒	*Жауабы:* әр теңсіздіктен алынған шешімдер жиындарының қиылысуы.
Жиынтық шешімінің әрқайсысы оның құрамына енетін теңсіздіктердің кем дегенде біреуін қанағаттандырады.	⇒	*Жауабы:* әр теңсіздік шешімдері жиындарының бірігуі.

1. Теңсіздікті шешу дегенді қалай түсінесіңдер?
2. Теңсіздіктің шешімі дегеніміз не?
3. Қандай теңсіздіктерді мәндес теңсіздіктер деп атайды?
4. Қандай теңсіздіктерді квадрат теңсіздіктер деп атайды?
5. Квадрат теңсіздіктерді қалай шешеді? Аралықтар тәсілін қалай қолданады?
6. Квадрат теңсіздіктердің геометриялық мағынасын түсіндіріңдер.
7. Бір айнымалысы бар теңсіздіктер жүйесін (жиынтығын) қалай шешеді?

Шығармашылық жұмыс

Альпинистер лагеріне тікұшақтан азық-түлік пен қажетті жабдықтар буылған теңдер тасталды. Ауа райының қолайсыздығынан тікұшақ жерге 10 метрден төмен жақындай алмайды. Егер жүк жерге 20 м/с-тан артық жылдамдықпен түссе, онда кейбір заттар істен шығып, жарамсыз болып қалады. Әдетте жүк жерге 1 м/с жылдамдықпен тасталады. Тасталынған заттар бүлінбей түсуі үшін тікұшақ неше метрден жоғары көтерілмеуі қажет? Мұнда бастапқы v_0 жылдамдықпен төмен құлдилап келетін дененің t уақытындағы лездік жылдамдығы $v=v_0+gt$ формуласымен, дененің түсетін биіктігі $h=v_0t+\frac{gt^2}{2}$ формуласымен есептеледі. Мұнда $g=9{,}8$ м/с^2 — дененің еркін түсу үдеуі.

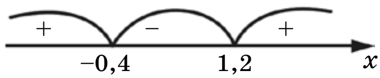
ЕСЕПТЕР

А

5.32—5.35-есептерде көрсетілген теңсіздіктерді шешіңдер.

5.32. 1) $x^2<9$; 2) $x^2\geqslant 4$;
3) $(3x-5)^2<1$; 4) $(2-5x)^2\geqslant 16$;
5) $(x-7)^2+1>0$; 6) $49-(3x+2)^2\geq 0$.

4) **1-тәсіл:** $(2-5x)^2\geqslant 16$; $4-20x+25x^2\geqslant 16$; $25x^2-20x-12\geqslant 0 \Rightarrow x_1=-0,4$; $x_2=1,2$. Соңғы теңсіздікті көбейткішке жіктеп, шешімін табамыз. $25(x+0,4)(x-1,2)\geqslant 0$.



Жауабы: $x\in(-\infty;-0,4]\cup[1,2;+\infty)$.

2-тәсіл: $(2-5x)^2\geqslant 16 \Leftrightarrow (5x-2)^2\geqslant 16$

$$\Leftrightarrow |5x-2|\geqslant 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x-2\geq 4, \\ 5x-2\leq -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\geq 1,2; \\ x\leq -0,4. \end{array}\right.$$

Жауабы: $x\in(-\infty;-0,4]\cup[1,2;+\infty)$.

5) $(x-7)^2\geqslant 0$. Олай болса, $(x-7)^2+1>0$ теңсіздігі кез келген x үшін орындалады. Жауабы: $x\in(-\infty;+\infty)$.

5.33. 1) $(x-1)(2x-3)<0$; 2) $(x+3)(x-1)\geq 0$;
3) $5(x-\frac{1}{5})(x+4)>0$; 4) $(x+2)(2x-3)\leq 0$;
5) $(3x+1)(x+3)<0$; 6) $(5x-3)(2x+7)\geq 0$.

5.34. 1) $x^2-3x-4<0$; 2) $x^2-3x-4\geqslant 0$;
3) $x^2-8x-9<0$; 4) $-x^2-2x+48<0$;
5) $-x^2+x+6\geqslant 0$; 6) $2x^2+3x-5\geqslant 0$.

5.35. 1) $6x^2-7x+1<0$; 2) $25x^2-10x+1\geqslant 0$;
3) $49x^2-28x+4<0$; 4) $8x^2+10x-3\geqslant 0$;
5) $2y^2+9y+9\leqslant 0$; 6) $x^2+7x-60<0$.

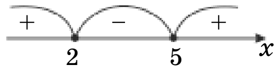
5.36. 1) $6x-x^2>0$; 2) $3x+x^2\leqslant 0$; 3) $x^2-4\leqslant 0$; 4) $5-x^2>0$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық бүтін сандарды көрсетіңдер.

5.37. Функцияның анықталу облысын табыңдар:

1) $y=\sqrt{(x-3)(x+1)}$; 2) $y=\sqrt{(2x-1)(x+4)}$;

3) $y=\sqrt{(x-2)(5-x)}$; 4) $y=\sqrt{(4x+3)(3-2x)}$.

3) $(x-2)(5-x)\geqslant 0 \Rightarrow (x-2)(-1)(x-5)\geqslant 0 \Rightarrow -(x-2)(x-5)\geqslant 0 \Rightarrow (x-2)(x-5)\leqslant 0$.



Жауабы: $x\in[2;\ 5]$.

5.38. Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер және шешімдерін сан өсінде көрсетіңдер:

1) $\begin{cases}17x-2>x-4,\\ 3-9x<1-x;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}25-6x \mathrm{J} 4+x,\\ 3x+7{,}7>1+4x;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}2x-5 \mathrm{I} 4-x,\\ 7-3x<12+x;\end{cases}$

4) $\begin{cases}x-4<8,\\ 2x+5<13,\\ 3-x>1;\end{cases}$ 5) $\begin{cases}2x-1<x+3,\\ 5x-1>6-2x,\\ x-3<0;\end{cases}$ 6) $\begin{cases}3x-5>x-3,\\ 2x+4<3x+5,\\ 7-2x>x-2.\end{cases}$

Теңсіздіктер жиынтығын шешіңдер **(5.39–5.40)**:

5.39. 1) $\left[\begin{array}{l}x\#5\mathrm{H}7,\\ x^2\#3x+2\mathrm{I}0;\end{array}\right.$ 2) $\left[\begin{array}{l}2x+1\mathrm{J}x+5,\\ x^2\#8x+12\mathrm{H}0;\end{array}\right.$ 3) $\left[\begin{array}{l}x+5\mathrm{H}7,\\ x^2\#7x+6\mathrm{J}0;\end{array}\right.$ 4) $\left[\begin{array}{l}7\#2x\mathrm{I}x\#2,\\ x^2\#2x\mathrm{G}63.\end{array}\right.$

5.40. 1) $\left[\begin{array}{l}x\#5\mathrm{H}7,\\ x^2\#3x+2\mathrm{I}0;\end{array}\right.$ 2) $\left[\begin{array}{l}2x+1\mathrm{J}x+5,\\ x^2\#8x+12\mathrm{H}0;\end{array}\right.$ 3) $\left[\begin{array}{l}x+5\mathrm{H}7,\\ x^2\#7x+6\mathrm{J}0;\end{array}\right.$ 4) $\left[\begin{array}{l}7\#2x\mathrm{I}x\#2,\\ x^2\#2x\mathrm{G}63.\end{array}\right.$

B

5.41—5.43-есептерде берілген теңсіздіктерді шешіңдер.

5.41. 1) $3x^2+40x+10<-x^2+11x+3$; 2) $9x^2-x+9\mathrm{I}3x^2+18x-6$;

3) $2x^2-8x-111<(3x-5)(2x+6)$; 4) $(5x+1)(3x-1)>(4x-1)(x+2)$;

5) $2x(3x-1)>4x^2+5x+9$; 6) $(5x+7)(x-2)<21x^2-11x-13$.

5.42. 1) $(x-3)^2(x+1)<0$; 2) $(2x+3)^2(x-5)>0$;
3) $|x-3|(x+1)\geqslant 0$; 4) $|x-5|(2x+3)\leqslant 0$.

4) $|x-5|\geqslant 0 \Rightarrow x=5$. $2x+3\leqslant 0 \Rightarrow x\leqslant -1,5$.
Ж а у а б ы: $x\in(-\infty;-1,5]\cup\{5\}$.

5.43. 1) $(x^2-4)(2x-1)<0$; 2) $(9-x^2)(6-5x)\ \text{I}\ 0$;

3) $(x-1)(x+2)(3x-1)>0$; 4) $(2x-5)(x+0,5)(3x+7)\leqslant 0$.

5.44. Функцияның анықталу облысын табыңдар:

1) $y=\sqrt{144-9x^2}$; 2) $y=\sqrt{x^2-2x-63}$;

3) $y=\sqrt{x(x+16)+64}$; 4) $y=\sqrt{36-5x-x^2}$.

5.45. 1) $x^2<a^2$ теңсіздігі $|x|<a\,(a>0)$ теңсіздігімен; 2) $x^2>a^2$ теңсіздігі $|x|>a$ $(a>0)$ теңсіздігімен мәндес болатынын дәлелдеңдер.

5.46. 1) $|x|<a$ $(a>0)$ теңсіздігі $-a<x<a$ теңсіздіктерімен; 2) $|x|>a$ $(a>0)$ теңсіздігі $x<-a$ және $x>a$ теңсіздіктері жиынтығымен мәндес болатынын көрсетіңдер.

5.47. Теңсіздікті шешіңдер:

1) $|x-3|<2$; 2) $|x+1|>3$; 3) $|2x+1|\leqslant 1$; 4) $\left|x+\dfrac{1}{2}\right|\ \text{I}\ 4$.

5.48. x-тің қандай мәндерінде 1) $y=-x^2+8x+2$ функциясының мәні 9-дан үлкен; 2) $y=x^2+x-6$ функциясының мәні 4-тен кем болады?

5.49. Функцияның анықталу облысын табыңдар:

1) $y=\dfrac{\sqrt{x^2-x-42}}{x-11}$; 2) $y=\dfrac{\sqrt{16-24x+9x^2}}{x+2}$;

3) $y=\dfrac{\sqrt{3-x^2}}{x-1}$; 4) $y=\dfrac{\sqrt{4x-5x^2}}{2x-1}$;

5) $y=\dfrac{\sqrt{4x^2-16x}}{x+3}$.

3) $\begin{cases} 3 - x^2 \geq 0, \\ x - 1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 \leq 3, \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}, \\ x \neq 1. \end{cases}$

Жауабы: $x \in [-\sqrt{3};\ 1) \cup (1;\ \sqrt{3}\,]$.

5.50. Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases} 21x^2+39x-6<0, \\ x<0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x^2+5x-6>0, \\ 7x>0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2-3x-4<0, \\ 3x-12>0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2+7x+10<0, \\ 4x-3,6>0; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x+7>0, \\ x^2+5x \leq 0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 2x^2+5x+20 \leq 0, \\ x-1,5 \geq 0. \end{cases}$

5.51. Теңсіздіктер жиынтығын шешіңдер:

1) $\left[\begin{array}{l} 21x^2+39x-6<0, \\ |x|-3>1; \end{array}\right.$ 2) $\left[\begin{array}{l} 4x^2+5x>6, \\ 7x>x^2; \end{array}\right.$ 3) $\left[\begin{array}{l} x^2-3x-4<0, \\ 3|x|-12>0; \end{array}\right.$

4) $\left[\begin{array}{l} x^2+7x+10<0, \\ 4|x|-3,6>0; \end{array}\right.$ 5) $\left[\begin{array}{l} |x|-7>0, \\ x^2+5x \leq 0; \end{array}\right.$ 6) $\left[\begin{array}{l} 2x^2+5x+20 \leq 0; \\ |x|-1,5 \geq 0. \end{array}\right.$

C

5.52. Функцияның анықталу облысын табыңдар:

1) $y=\sqrt{x}+\sqrt{4-x^2}$; 2) $y=\sqrt{7x-14}-\sqrt{x^2-15x+56}$;

3) $y=\sqrt{x+1}+\sqrt{3x-x^2}$; 4) $y=\dfrac{2}{x}-\sqrt{x^2-5x+6}$;

5) $y=\dfrac{\sqrt{4x^2-12x-7}}{x}-6x$; 6) $y=\dfrac{\sqrt{15-19x+6x^2}}{x-1}+\dfrac{4}{x}$.

5.53*. a-ның қандай мәндерінде $x^2-(a^2-2a-3)x-a^3+3a+2 \leq 0$ теңсіздігінің шешімдері [2; 4] аралығында болады?

5.54. Егер $a^2+12b<0$ болса, онда $3x^2-b \leq ax$ теңсіздігін шешіңдер.

5.55. Егер $b>0{,}05a^2$ болса, онда $5x^2-ax+b>0$ теңсіздігін шешіңдер.

5.56. Тіктөртбұрыштың ұзындығы оның енінен 5 см артық. Осы тіктөртбұрыштың ауданы 36 см^2-ден кем болмауы үшін оның ені қандай болуы керек?

5.57. Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases} x^2 + x - 6 < 0, \\ -x^2 - 2x + 3 > 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + 4x - 5 > 0, \\ x^2 - 2x - 8 < 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 21x^2 + 39x - 6 < 0, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1} \geq \dfrac{1}{x+2}. \end{cases}$

5.58. Теңсіздіктер мәндес бола ма:

1) $\dfrac{x-3}{x+1} \geq 0$ және $(x-3)(x+1) \geq 0$;

2) $\dfrac{x+5}{x-8} < 0$ және $(x+5)(x-8)<0$?

5.59. a-ның қандай мәндерінде 1) $(x+4)^2>a$; 2) $(2x-3)^2 \geq 3a-12$; 3) $4x^2-4x+1+$ $+a>0$; 4) $x^2 - 8x + a \geq 0$ теңсіздігі кез келген x үшін орындалады?

5.60. a-ның қандай мәндерінде 1) $x^2+ax+7=0$; 2) $x^2-(a-2)x+1=0$ теңдеуінің нақты түбірлері болмайды?

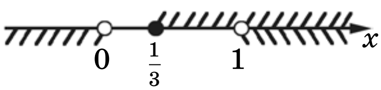
5.61. a-ның қандай мәндерінде 1) $2x^2-ax+2=0$; 2) $x^2-(2-3a)x+1=0$ теңдеуінің әртүрлі екі түбірі бар?

5.62. Теңсіздікті квадраттау тәсілімен шешіңдер:

1) $|x+1| < 3x-1$; 2) $|x-3| < 6-2x$;

3) $|x-2| \geq 3x-1$; 4) $|2x+3| \leq x+4$.

1) $\begin{cases} 3x-1 \geq 0, \\ |x+1|^2 < (3x-1)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{1}{3}, \\ 8x^2 - 8x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{1}{3}, \\ 8x(x-1) > 0. \end{cases}$



Жауабы: $x \in (1; +\infty)$.

5.63. Теңсіздіктер жиынтығын шешіңдер:

1) $\left[\begin{array}{l} x^2 + x - 6 < 0, \\ 3 - 2x - x^2 > 0; \end{array}\right.$ 2) $\left[\begin{array}{l} 21x^2 + 39x - 6 < 0, \\ 4x^2 + 5x > 6; \end{array}\right.$ 3) $\left[\begin{array}{l} 2x^2 + 5x - 25 \leq 0, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1} \geq \dfrac{1}{x-2}. \end{array}\right.$

ҚАЙТАЛАУҒА АРНАЛҒАН ЖАТТЫҒУЛАР

5.64. Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases} 5(x+2)-9(x+1)-3<1-4(x+3), \\ 7(3+5x)<3x-5(x-2); \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}-\dfrac{7}{4}>\dfrac{5x}{2}-\dfrac{7}{8}, \\ \dfrac{2x+1}{4}<5-\dfrac{1-2x}{3}; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x-1>3-5x, \\ 3x+2>3-4x, \\ 5x-3<2x+5. \end{cases}$

5.65. Теңдеуді шешіңдер:

1) $|2x-4|=10-5x$; 2) $|-4-x|=\dfrac{3x}{2}+1$.

5.66. Ойлаған екі таңбалы санның цифрларының қосындысын 6 еселеп, шыққан саннан 2-ні азайтса, ойлаған санның өзі шығады. Ойлаған санды табыңдар.

5.3. Рационал теңсіздіктерді шешу

$\left.\begin{matrix} f(x) \\ g(x) \end{matrix}\right\}$ — рационал өрнектер болсын. $f(x)<g(x)$ түріндегі теңсіздік **рационал теңсіздік** деп аталады. Мұнда $>$, $\geqslant$, $\leqslant$ белгілерінің кез келгені қолданылады.

Мысалы,

$\dfrac{3x+2}{x-1}>0$, $\dfrac{1}{x-1}<\dfrac{2x+1}{x^2-1}$, $x^2+x-2\mathrm{I}\,0$, $\dfrac{3-2x}{x^2-3x+2}\mathrm{J}\,4$ — рационал теңсіздіктер. Көп жағдайларда рационал теңсіздіктерді интервалдар (аралықтар) тәсілімен шешеді. Осыған мысалдар келтірейік.

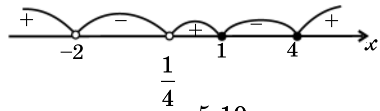
1-мысал. $\dfrac{x-2}{x+2}\mathrm{I}\,\dfrac{2x-3}{4x-1}$ теңсіздігін шешу керек.

Берілген теңсіздіктің анықталу облысы $x+2\neq 0$ және $4x-1\neq 0$, яғни $x\neq -2$, $x\ \mathrm{A}\ \dfrac{1}{4}$ теңсіздіктерімен анықталады.

Енді берілген теңсіздікті $\dfrac{x-2}{x+2}-\dfrac{2x-3}{4x-1}\mathrm{I}\,0$ түрінде жазып, оны ортақ бөлімге келтіреміз:

$$\frac{(x-2)(4x-1)-(2x-3)(x+2)}{(x+2)(4x-1)}\mathrm{I}\,0 \Leftrightarrow \frac{2(x^2-5x+4)}{(x+2)(4x-1)}\mathrm{I}\,0.$$

x^2-5x+4 квадрат үшмүшесінің түбірлері 1 және 4 болғандықтан, $x^2-5x+4=(x-1)(x-4)$ теңдігі орындалады. Сонымен бірге $4x-1=4\left(x-\frac{1}{4}\right)$ теңдігін ескеріп, соңғы теңсіздікті $\frac{(x-1)(x-4)}{2(x+2)\left(x-\frac{1}{4}\right)}\geq 0$ түрінде жазамыз. Осы теңсіздікке аралықтар тәсілін қолдану үшін бөлшектің алымы мен бөліміндегі жай көбейткішті нөлге айналдыратын -2; $\frac{1}{4}$; 1; 4 нүктелерімен сан өсін 5 бөлікке бөлеміз (5.10-сурет). Осы аралықтардың әрқайсысында көбейткіштердің таңбаларын зерттей отырып, «+» және «−» таңбаларын қойып шығамыз (5.10-сурет).



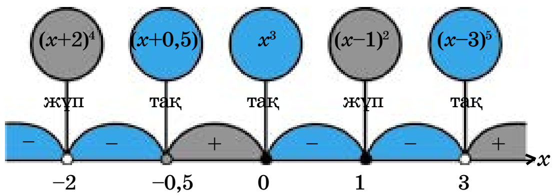
5.10-сурет

Ж а у а б ы: $x\in(-\infty;-2)\cup\left(\frac{1}{4};1\right]\cup[4;+\infty)$.

2-мысал: $\frac{(x-1)^2\cdot x^3(x+0,5)}{(x-3)^5\cdot(x+2)^4}\geq 0$ теңсіздігі көмегімен аралықтар тәсілін қолдану ережесін қарастырайық.

Көбейткіштерді нөлге айналдыратын нүктелер: -2; $-0,5$; 0; 1; 3. Осы нүктелерді сан өсіне бейнелеп, теңсіздіктегі өрнек таңбаларын зерттеп, оны суретте бейнелейміз (5.11-сурет).

Ж а у а б ы: $x\in[-0,5;0)\cup\{1\}\cup(3;+\infty)$.



5.11-сурет

Осы мысалдан теңсіздіктің оң жақ бөлігіндегі өрнек $x=a$ нүктесінің маңында таңбасын өзгертуі не өзгертпеуі оның құрамындағы $x-a$ екімүшесінің дәреже көрсеткішіне тәуелді болатынын көреміз. Егер дәреже көрсеткіші тақ болса, онда өрнек $x=a$ нүктесі маңында өз таңбасын өзгертетінін, дәреже көрсеткіші жұп болса, өрнек $x=a$ нүктесі маңында өз таңбасын өзгертпей сақтайтынын көреміз. Мысалы, $(x-1)^2\geq 0$ және $(x+2)^4>0$ болғандықтан, $x=1$, $x=-2$ нүктелерінің екі жағында да бірдей таңбалар бейнеленген. $x=-0,5$, $x=0$, $x=3$ нүктелерінің маңындағы таңбалар әртүрлі (себебі $x+0,5$, x^3, $(x-3)^5$ — тақ дәрежелі).

1. Қандай теңсіздіктерді рационал теңсіздіктер деп атайды?
2. Рационал теңсіздіктердің анықталу облысын қалай анықтайды?
3. Аралықтар тәсілінің мағынасы қандай?

ЕСЕПТЕР

А

5.67—5.81-есептердегі теңсіздіктерді шешіңдер.

5.67. 1) $(x-1)(x+1)\leq 0$; 2) $x(7-x)>0$;

3) $x^2(x-1)(x+2)\geq 0$; 4) $x^2(3-x)(x+1)\leq 0$;

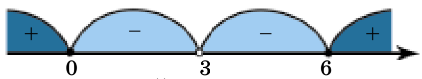
5) $-x^2+5x+6\geq 0$; 6) $3x^2-7x+2<0$.

5.68. 1) $\dfrac{x+2}{3-x}>0$; 2) $\dfrac{x-10}{2-x}<0$; 3) $\dfrac{1}{x-3}\leq -\dfrac{1}{10}$; 4) $\dfrac{3-2x}{x^2+3}\geq 1$.

5.69. 1) $\dfrac{x^2-6x}{x^2-6x+9}\leq 0$; 2) $\dfrac{x^2+9x+20}{x+4}>0$;

3) $\dfrac{x^2-6x}{4-3x-x^2}\geq 0$; 4) $\dfrac{2x^2+2x-24}{x^2+x+1}<0$.

1) $\dfrac{x^2-6x}{x^2-6x+9}\leq 0\Rightarrow\dfrac{x(x-6)}{(x-3)^2}\leq 0$.



5.12-сурет

Жауабы: $[0;\ 3)\cup(3;\ 6]$.

5.70. 1) $\dfrac{1}{x}\geq\dfrac{1}{3}$; 2) $\dfrac{x-1}{x+5}\geq 2$;

3) $\dfrac{x^2-36}{x^2+6x}<0$; 4) $\dfrac{x-1}{x+3}>3$.

5.71. 1) $\dfrac{(x-2)(x+1)}{x+2}>0$; 2) $\dfrac{(2x-3)(3x-17)}{(x+1)(x+4)}\leq 0$;

3) $\dfrac{(1-x)(x+1)}{x(5x+1)}\geq 0$; 4) $\dfrac{(2-x)(3+2x)}{x(1-x)}<0$.

5.72. 1) $\dfrac{2x^2+16x-3}{x^2+8x}>2$; 2) $\dfrac{2x^2+x-1}{5x+x^2+7}>0$;

3) $\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+5x+6}<0$; 4) $\dfrac{x^4+x^3+3}{-x^2+x+2}>0$.

4) $x^4+x^3+3>0$ теңсіздігі x-тің кез келген мәнінде орындалады. Себебі $|x|>1 \Rightarrow x^4>x^3$ және $x^4+x^3+3>0$, ал $|x|<1 \Rightarrow x^3<3$ және $x^4+x^3+3>0$. $-x^2+x+2=-(x+1)(x-2)$. Сондықтан берілген теңсіздік $\dfrac{1}{-(x+1)(x-2)}$ G 0 немесе $(x+1)(x-2)<0$ теңсіздігімен мәндес.

Жауабы: $(-1;\ 2)$.

5.73. 1) $\dfrac{x^3-3x^2-x+3}{x^2+3x+2}>0$; 2) $\dfrac{(x^3-64)(-x^2-1)}{x^3+1}$ I 0;

3) $\dfrac{(x+3)^2(x^2+x+1)}{x^2-x+1}$ J 0; 4) $\dfrac{(x-1)(x-2)(x+2)^3x^2}{(x-1)(x+1)(x-3)^4}$ I 0.

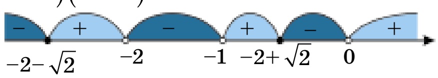
5.74. 1) $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-1}$ I $\dfrac{1}{x}$; 2) $\dfrac{(x-2)^2(x+4)}{x+7}$ J 0;

3) $1+\dfrac{x^2}{(1+x)^2}$ I $\dfrac{5}{4}$; 4) $\dfrac{(x+6)^3(x+4)}{(2-x)^6}$ I 0.

1) $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-1}$ I $\dfrac{1}{x} \Rightarrow \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-2}$ I $0 \Rightarrow \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-2}$ I $0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{(x+1)(x+2)+x(x+2)-x(x+1)}{x(x+1)(x+2)}$ I $0 \Rightarrow \dfrac{x^2+4x+2}{x(x+1)(x+2)}$ I 0.

$x^2+4x+2=0$ теңдеуінің түбірлері: $x_1=-2-\sqrt{2}$; $x_2=-2+\sqrt{2}$ — теріс түбірлер. $\Rightarrow \dfrac{\left(x+2+\sqrt{2}\right)\left(x+2-\sqrt{2}\right)}{x(x+1)(x+2)}$ I 0.



5.13-сурет

Жауабы: $[-2-\sqrt{2};\ -2)\cup(-1;\ -2+\sqrt{2}]\cup(0;\ +\infty)$.

B

5.75. 1) $\dfrac{3x^2+10x+3}{(3-x)^2(4-x^2)}>0$; 2) $\dfrac{(x-1)^3}{(5x+10)^2(-1-3x)}<0$;

3) $\dfrac{x^2(6-x)^3(x+3)}{(x+7)^5}$ I 0; 4) $\dfrac{(1-2x)^3(3-2x)^4}{(2x-5)^5}$ J 0.

5.76. 1) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}$ I $\dfrac{1}{x+2}$; 2) $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{2}{x}>\dfrac{3}{x-1}$;

3) $\dfrac{6}{x-1}$ J $\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{7}{x+2}$; 4) $\dfrac{21}{x+1}<\dfrac{16}{x-2}-\dfrac{6}{x}$.

5.77. 1) $\dfrac{14x(2x+3)}{x+1} < \dfrac{(9x-30)(2x+3)}{x-4}$;

2) $\dfrac{(5x+4)(3x-2)}{x+3}\ \mathrm{J}\ \dfrac{(3x-2)(x+2)}{1-x}$;

3) $\dfrac{(x+5)(3x^2-3x+1)}{x^2-6x+9} > \dfrac{(x+5)(x^2+2x-1)}{x^2-6x+9}$;

4) $\dfrac{(x^2-6x+9)(3x^2-2x-1)}{5-x} > \dfrac{(x^2-6x+9)(2+2x-4x^2)}{5-x}$.

5.78. 1) $\left(\dfrac{x^2-2}{x+1}\right)^2 > 0$; 2) $\dfrac{1}{(x-2)^2} - \dfrac{6}{x-2} + 9 > 0$;

3) $(x+3)^2 + (x^2+6x+9)^{-1} > 2$; 4) $x^2 + \dfrac{x^2-8x+16}{x^2-2x+1} > \dfrac{8x-2x^2}{x-1}$.

5.79. 1) $\dfrac{(x^2-7x-8)(x-8)^3}{(x+2)^2(5-x)}\ \mathrm{I}\ 0$; 2) $\dfrac{(x^2+2x-8)(x^3-4x)}{x^2+7x+10} > 0$.

5.80. 1) $\dfrac{(2x^2+4x)(3x-x^2)}{(2x+5)^3}\ \mathrm{J}\ 0$; 2) $\dfrac{x^2-2x-1}{(2x-5)(x+2)^2} < 0$.

5.81. 1) $\dfrac{1}{x+3} - \dfrac{1}{x-1}\ \mathrm{J}\ 1$; 2) $3x + \dfrac{x-1}{2x-1}\ \mathrm{I}\ \dfrac{2x^2-1}{2x-1}$.

5.82. Теңсіздіктің барлық бүтін шешімдерінің қосындысын табыңдар:

1) $\dfrac{x^3+2x^2+7}{7-x}\ \mathrm{I}\ 1$; 2) $\dfrac{x^3+17x}{x+8}\ \mathrm{J}\ 2x$.

C

5.83. $1\ \mathrm{J}\ \dfrac{5x-8}{2x+1}\ \mathrm{J}\ 2$ теңсіздігін қанағаттандыратын x-тің барлық бүтін мәндерін анықтаңдар.

5.84. $y = \dfrac{x-13}{x^2+x-6}$ функциясының графигі x-тің қандай мәндерінде $0\ \mathrm{J}\ y\ \mathrm{J}\ 1$ аралығында жатады?

5.85. x-тің қандай мәндерінде 1) $y = 1 - \dfrac{4}{x-2}$ функциясының графигі $y = \dfrac{5}{x^2-4x+4}$ функциясының графигінен төмен;

2) $y = \dfrac{2}{x-3}$ функциясының графигі $y = \dfrac{8}{x^2 - 6x + 9} - 1$ функциясының графигінен жоғары орналасады?

Теңсіздікті шешіңдер **(586–5.87)**:

5.86. 1) $\left|\dfrac{x+2}{x-1}\right| \text{I}\ 1$; 2) $\left|\dfrac{2x-1}{x-2}\right| > 2$.

5.87. 1) $x^2 - 2x - 8 < 7|x-4|$; 2) $|x - 2x^2| > 2x^2 - x$.

5.88. Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер **(5.88–5.89)**:

1) $\begin{cases} \dfrac{3x-2}{2} - \dfrac{x}{3}\ \text{I}\ \dfrac{2-x}{6}, \\ x\ \text{I}\ 1 - \dfrac{1+8x^2}{x-4}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x^2-7}{2} > 1, \\ \dfrac{3x-2}{5} - \dfrac{6-x}{2}\ \text{I}\ 2x - 7. \end{cases}$

5.89. 1) $\begin{cases} x\ \text{J}\ 3 - \dfrac{1}{x-1}, \\ |x+1| < 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x+7}{x-5} + \dfrac{3x+1}{2}\ \text{I}\ 0, \\ |5-x|\ \text{J}\ 2. \end{cases}$

5.90. $\dfrac{x^2-4x}{x-1}\ \text{J}\ 0$ теңсіздігінің $(x^2-1)(3-x)\ \text{I}\ 0$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық шешімдерін табыңдар.

ҚАЙТАЛАУҒА АРНАЛҒАН ЖАТТЫҒУЛАР

5.91. 10 саны $y = \sqrt{x^2 - 2x + 12}$ функциясының мәндері облысында жата ма?

5.92. Функцияның анықталу облысын табыңдар:

1) $y = \sqrt{x} + \sqrt{x-4}$; 2) $y = \sqrt{x(x-4)}$.

МАТЕМАТИКАНЫ ТЕРЕҢДЕТІП ОҚЫТУҒА АРНАЛҒАН ҚОСЫМША МАТЕРИАЛДАР

6*-бөлім. НАҚТЫ САНДАР

Бөлімді оқып үйрену-барысында келесі мақсаттарға қол жеткіземіз:

- Бүтін сандардың бөлінгіштік белгілерін дәлелдейді және қолдана біледі.
- Жай және құрама сандардың қасиеттерін біледі және ЕҮОБ мен ЕКОБ-ін анықтай біледі.
- Бүтін сандарды қалдықпен бөледі, Евклид алгоритмін қолданады.
- Дирихле принципін біледі және қолданады.

6.1*. Натурал сандар. Сандардың бөлінгіштік белгілері

Натурал сандар және олардың қасиеттері.

Мұны білесіңдер!

Қайсыбір нысандар жиынтығы элементтерін санау үшін қолданылатын сандарды **натурал сандар** деп атайды.

Кез келген натурал сан 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 цифрларының көмегімен жазылады.

Натурал сандарды өсу ретімен орналастырайық:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ...

Натурал сандардың осы жазылған түрін **натурал сандар қатары** деп атайды.

Кез келген n таңбалы a натурал санын былай жазуға болады:

$$a = a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_{n-1} \cdot 10 + a_n. \qquad (1)$$

Мұнда a натурал саны $a_1, a_2, \ldots, a_n$ цифрлары көмегімен жазылған. Оны қысқаша былай жазады:

$$a = \overline{a_1 a_2 \ldots a_n}\ .$$

Мысалы:

$428=4\cdot 10^2+2\cdot 10+8$,

$1403=1\cdot 10^3+4\cdot 10^2+3$,

$2837=2\cdot 10^3+8\cdot 10^2+3\cdot 10+7$ және т.с.с.

Тарихқа шолу

Біз қарастырып отырған санау жүйесін ***ондық санау жүйесі*** деп атайды. Себебі кез келген сан он таңба (цифрлар) арқылы жазылады. Жалпы ондық санау жүйелерінен де өзге санау жүйелері бар. Мәселен, Ежелгі Вавилон жерінде алпыстық санау жүйелері қолданылған және оның ықпалы осы күнге дейін сақталып келеді: сағатты 60 минутқа, шеңберді 360 градусқа бөлу және т.с.с. Осы күндері электронды есептеуіш техникаларында екілік санау жүйесі қолданылады.

Арифметикада сандарға түрлі амалдар қолданылады: қосу, азайту, көбейту, бөлу, дәрежеге шығару және т.с.с. Осы амалдардың алғашқы төртеуін (қосу, азайту, көбейту және бөлу) ***арифметикалық амалдар*** деп атайды. Натурал сандар жиынында бұл амалдардың екеуі (қосу және көбейту) ғана орындалады. Басқаша айтқанда, кез келген екі натурал санды қосқанда не көбейту нәтижесінде натурал сан аламыз. Ал натурал сандарға азайту не бөлу амалдарын қолданғанда натурал сан шыға бермейді. Мысалы, $2-5=-3$, $2:5=\frac{2}{5}$. Мұнда -3 және $\frac{2}{5}$ сандары натурал сандар емес.

Натурал сандарды қосу және көбейту амалдарының бірнеше заңы бар.

Мұны білесіңдер!

Ауыстырымдылық заңы	
$a+b=b+a$; $a\cdot b=b\cdot a$	Қосылғыштардың (көбейткіштердің) орындарын алмастырғаннан қосындының (көбейтіндінің) мәні өзгермейді.
Терімділік заңы	
$(a+b)+c=a+(b+c)$; $(ab)c=a(bc)$	Қосылғыштарды (көбейткіштерді) топтаудан қосындының (көбейтіндінің) мәні өзгермейді
Көбейтудің қосуға қатысты үлестірімділік заңы	
$(a+b)\cdot c=ac+bc$	Жақшаны ашу ережесі

Сандардың бөлінгіштік белгілері. *Егер a және b сандары үшін c саны табылып, $a=bc$ теңдігі орындалса, a санын b-ға қалдықсыз бөлінеді деп айтамыз.*

Оны былай жазады: $a:b=c$. Мұндағы a — бөлінгіш, b — бөлгіш, c бөлінді деп аталады. Мысалы, $12=4\cdot3$ болғандықтан, 12 саны 4-ке қалдықсыз бөлінеді: 12:4.

11–3457

Кейбір сандардың бөлінгіштік белгілері

1) **2-ге бөлінгіштік белгісі.** *Егер санның соңғы цифры нөл немесе жұп сан болса, онда бұл сан 2-ге қалдықсыз бөлінеді.*

2) **4-ке бөлінгіштік белгісі.** *Егер санның соңғы екі цифры да нөл болса немесе осы соңғы екі цифрдан құралған екі таңбалы сан 4-ке бөлінсе, онда бұл сан 4-ке қалдықсыз бөлінеді.*

3) **5-ке бөлінгіштік белгісі.** *Егер сан 0 немесе 5 цифрымен аяқталса, онда бұл сан 5-ке қалдықсыз бөлінеді.*

4) **3 пен 9-ға бөлінгіштік белгісі.** *Егер санның цифрларының қосындысы 3-ке (9-ға) бөлінсе, онда бұл сан 3-ке (9-ға) қалдықсыз бөлінеді.*

Салдар.

6-ға бөлінгіштік белгісі. *3-ке бөлінетін жұп сандар 6-ға қалдықсыз бөлінеді.*

5) **11-ге бөлінгіштік белгісі.** *Егер санның жазылуындағы тақ орындағы цифрлардың қосындысы мен оның жұп орындарындағы цифрлардың қосындысының айырмасы нөлге тең немесе 11-ге бөлінсе, бұл сан 11-ге қалдықсыз бөлінеді.*

Үлгі ретінде 2, 4 және 5-белгілердің дәлелдеуін көрсетейік.

2-белгінің дәлелдеуі. Берілген санды былай жазамыз:

$$\overline{a_1a_2\ldots a_{n-2}a_{n-1}a_n} = \overline{a_1a_2\ldots a_{n-2}}\cdot 100 + \overline{a_{n-1}\,a_n}.$$

Мұндағы бірінші қосылғыш 100-ге бөлінетіндіктен, 4-ке де бөлінеді. Онда $\overline{a_{n-1}\,a_n}$ екі таңбалы саны нөлге тең болуы немесе 4-ке бөлінуі керек.

4-белгінің дәлелдеуі.

$\overline{a_1a_2\ldots a_k} = a_1 10^{k-1} + a_2 10^{k-2} + \ldots + a_{k-1}10 + a_k$ саны берілсін. Онда 10=9+1, 100=99+1, 1000=999+1 және т.с.с. қарапайым теңдіктерді ескеріп,

$$\overline{a_1a_2\ldots a_k} = a_1\left(\underbrace{\overline{99\ldots9}}_{k-1}+1\right) + a_2\left(\underbrace{\overline{99\ldots9}}_{k-2}+1\right) + \ldots + a_{k-1}(9+1) + a_k =$$

$$= a_1\cdot\underbrace{99\ldots9}_{k-1} + a_2\cdot\underbrace{99\ldots9}_{k-2} + \ldots + a_{k-1}\cdot 9 + (a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} + a_k)$$

теңдігін аламыз. Мұнда тоғыздықтары бар қосылғыштардың барлығы 9-ға (3-ке) бөлінеді. Олай болса, $a_1+a_2+\ldots+a_k$ қосындысы да 3-ке немесе 9-ға бөлінуі керек.

5-белгінің дәлелдеуі. Берілген санды жұп сан деп алайық (тақ сандар үшін де дәлелдеу осы сияқты жүргізіледі). Онда

$$\overline{a_1a_2\ldots a_{2k}}=a_1 10^{2k-1}+a_2 10^{2k-2}+\ldots+a_{2k-1}10+a_{2k}=a_1(10^{2k-1}+$$
$$+10^{2k-2})+(a_2-a_1)10^{2k-2}+\ldots+a_{2k-1}10+a_{2k}=a_1 11\cdot 10^{2k-2}+(a_2-a_1)\times$$
$$\times(10^{2k-2}+10^{2k-3})+(a_3-a_2+a_1)11\cdot 10^{2k-3}+\ldots+a_{2k-1}10+$$
$$+a_{2k}=\ldots=a_1 11\cdot 10^{2k-2}+(a_2-a_1)11\cdot 10^{2k-3}+(a_3-a_2+a_1)11\cdot 10^{2k-4}+$$
$$+\ldots+(a_{2k-1}-a_{2k-2}+\ldots-a_2+a_1)11+(a_{2k}-a_{2k-1}+a_{2k-2}-\ldots+a_2-a_1).$$

Осыдан берілген сан 11-ге бөлінуі үшін
$a_{2k}-a_{2k-1}+a_{2k-2}-\ldots+a_2-a_1=(a_2+a_4+\ldots+a_{2k})-(a_1+a_3+\ldots+a_{2k-1})$ айырмасы 11-ге бөлінуі керек немесе 0-ге тең болуы керек.

Өздерің дәлелдеңдер

2,4,5-белгілердің дәлелдеулеріне ұқсас 1,3-белгілерді өздерің дәлелдеңдер.

Шығармашылық жұмыс

Асан жазғы каникулда ауылда демалды. Бірде шие жеп отырып, шие сүйектерінен 6.1-суретте көрсетілгендей фигуралар құрастыра бастады.

1) Оның 5-фигурасында неше сүйек бар?

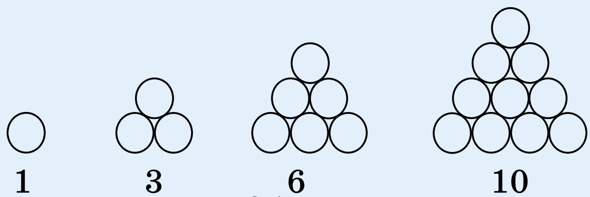
2) Жалпы n-фигурасында ше?

Бұл сандарды үшбұрышты сандар деп атайды. Ертеде Пифагор мектебінің өкілдері осы тәртіппен құрастырылатын сандарды зерттеген және оларды *фигуралы сандар* деп атаған.

3) Ромбылық сандар жөнінде не айтасыңдар?

4) Алтыбұрыштық сандарды қалай құрастыруға болар еді?

5) Олардың жалпы мүшесін (n-санды) қалай анықтауға болатынын көрсетіңдер.



6.1-сурет

ЕСЕПТЕР

А

6.1. Қосу және азайту амалдарының заңдылықтарын пайдаланып, төмендегі амалдарды ауызша орындаңдар:

1) $345+73+18+235+2$;   2) $25\cdot13\cdot8\cdot4\cdot250$;

3) $4\cdot7\cdot25\cdot8\cdot3\cdot125$;   4) $1+2+3+\ldots+98+99$.

6.2. 1581, 2874, 89751, 2890, 9745, 12387, 2835, 78,33, 4456 сандарының 3-ке қалдықсыз бөлінетіндерін теріп жазыңдар.

6.3. 2835, 1575, 7333, 5874, 10304, 37571, 4456 сандарының ішінен 9-ға қалдықсыз бөлінетіндерін теріп жазыңдар.

B

6.4. Санның 25-ке бөлінгіштік белгісін тұжырымдап, дәлелдеңдер.

6.5. Санның 10-ға бөлінгіштік белгісін тұжырымдап, дәлелдеңдер.

6.6. $91 \cdot 92 \cdot \ldots \cdot 98 \cdot 99$ көбейтіндісі қандай цифрмен аяқталады?

6.7. 1) $\overline{5431a}$; 2) $\overline{6547\,a}$ саны 9-ға бөлінуі үшін a-ның орнына қандай цифр жазу керек?

6.8. $\overline{28c}$ саны 1) 2-ге; 2) 3-ке; 3) 4-ке; 4) 5-ке; 5) 6-ға; 6) 10-ға; 7) 11-ге қалдықсыз бөлінуі үшін c-ны қандай цифрлармен алмастыру керек?

6.9. 1) $\overline{ab} - \overline{ba}$; 2) $\overline{abc} - \overline{cba}$; 3) $\overline{a_1a_2\ldots a_k} - \overline{a_ka_{k-1}\ldots a_2a_1}$ айырмалары 9-ға еселік болатынын дәлелдеңдер.

6.10. 1) $\overline{123\,c}$; 2) $\overline{3120\,c}$ сандары c-нің қандай мәндерінде 11-ге еселік болады?

6.11. $24m+3n+6p$ өрнегінің мәндері әрбір натурал m, p және жұп n сандары үшін 6-ға бөлінбейтінін дәлелдеңдер.

C

6.12. Тізбектес екі жұп санның біреуі 4-ке бөлінетінін дәлелдеңдер.

6.13. Цифрларының үш еселенген қосындысына тең екі таңбалы санды табыңдар.

6.14. Цифрларының екі еселенген көбейтіндісіне тең екі таңбалы санды табыңдар.

6.15. Цифрларының үш еселенген көбейтіндісіне тең екі таңбалы санды табыңдар.

6.16*. Тізбектес бес натурал санның квадраттарының қосындысы 135-ке тең. Осы сандарды табыңдар.

6.17*. Тізбектес бес натурал санның квадраттарының қосындысы толық квадрат болмайтынын дәлелдеңдер.

6.18*. $\overline{ab}-\overline{ba}$ $(a>b)$ айырмасы толық квадрат болатындай барлық екі таңбалы сандарды табыңдар.

6.19. 1) $41^{10}-1$ саны 10-ға; 2) $46^{46}-1$ саны 5-ке; 3) $67^{8}-1$ саны 10-ға; 4) $89^{26}-45^{25}$ саны 2-ге еселік болатынын көрсетіңдер.

6.20*. 45-ке еселі үш таңбалы саннан оның цифрларын кері тәртіппен жазу арқылы алынатын санды азайтқанда 297 шығады. Осы санды табыңдар.

6.2*. Жай және құрама сандар

Жай және құрама сандар. 1-ден өзге кез келген натурал сан кем дегенде екі санға қалдықсыз бөлінеді: 1-ге және өз-өзіне. Егер санның 1 мен өзінен басқа бөлгіші болмаса, онда бұл санды ***жай сан*** деп атайды. Ал 1 мен өзінен басқа бөлгіштері бар сандарды ***құрама сандар*** деп атайды. 1 саны жай сан да, құрама сан да болмайды деп есептелінеді. Мысалы,

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ... — жай сандар.

Мұнда 2 — жалғыз жұп жай сан, ал өзге жай сандардың барлығы тақ сандар.

Жай сандардың шексіздігін біздің заманымызға дейінгі III ғасырда Евклид дәлелдеген болатын. Енді осы дәлелдеуді келтірейік.

Айталық, жай сандар санаулы ғана болсын. Онда бұларды өсу тәртібімен тізіп жазуға болады:

$$2,\ 3,\ 5,\ \ldots,\ p. \qquad (1)$$

Сонымен, (1) тізімге барлық жай сандар енген деп есептейміз. Онда мынадай санды қарастырайық: $a=2\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot p+1$. Бұл санның өзі жай сан болуы мүмкін немесе оның қандай да бір жай бөлгіші болуы керек. Егер a-ны жай сан десек, онда ол (1) тізімге енбегендіктен, жай сан болмай шығады. Екінші жағынан, a саны (1) тізімдегі ешбір жай санға бөлінбейді, демек, a-ның жай бөлгіштері жоқ. Сонымен, a жай сан да, құрама сан да емес. Бұл алынған қайшылық жай сандар санаулы емес, шексіз көп екенін көрсетеді.

Арифметиканың негізгі теоремасы. Натурал санның қарапайым жіктелуі. Әрбір құрама санды жай сандардың көбейтіндісі ретінде жіктеп жазуға болады. Мысалы, 252=2·2·3·3·7 немесе $252=2^2\cdot3^2\cdot7$. Бұл мысалдан кейбір жай сандар көбейткіш ретінде бірнеше рет қайталанатындығын көреміз. Мына теореманы дәлелдеусіз қабылдаймыз.

Теорема (арифметиканың негізгі теоремасы). ***Бірден өзге әр натурал сан жай сандардың көбейтіндісіне бір ғана түрде жіктеледі.***

Айталық, a саны жай көбейткіштерге жіктелсін. Бұл жіктелудегі бірдей көбейткіштерді біріктіріп, мынадай формула аламыз:

$$a = p_1^{n_1}\cdot p_2^{n_2}\dots p_k^{n_k}. \qquad (2)$$

Мұндағы p_1, p_2, ..., p_k — әртүрлі жай сандар. Олар берілген a санының жай бөлгіштері деп аталады. n_1, n_2, ..., n_k — теріс емес бүтін сандар. Санның (2) түрінде жіктелуі оның ***қарапайым жіктелуі*** деп аталады. Мысалы: $1176=2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot7\cdot7=2^3\cdot3\cdot7^2$.

Жалпы санның қарапайым жіктелуін табу (сан өте үлкен болғанда) күрделі. Мысалы, ЭЕМ-ның көмегі арқылы $2^{19937}-1$ санының жай сан болатындығы жақында ғана анықталған және бұл санның жазылуына 60 000-нан астам цифр қажет екен.

Дегенмен өте үлкен емес сандардың қарапайым жіктелулерін анықтау жолын қарастырайық.

1-мысал. 612, 1080 сандарын қарапайым көбейткіштерге жіктейік.

$$\begin{array}{r|l} 612 & 2 \\ 306 & 2 \\ 153 & 3 \\ 51 & 3 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 1080 & 2 \\ 540 & 2 \\ 270 & 2 \\ 135 & 3 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Сонымен, $612=2^2\cdot3^2\cdot17$; $1080=2^3\cdot3^3\cdot5$.

ЕСЕПТЕР

А

6.21. 1 мен 100-дің арасындағы барлық жай сандарды тізіп жазыңдар.

6.22. 1 мен 50-дің арасындағы барлық құрама сандарды тізіп жазыңдар.

6.23. 28, 44, 27, 43, 75, 1684, 546, 79, 740, 1001, 67, 1036, 31, 885, 83 сандарының ішінен жай сандарды теріп жазыңдар.

6.24. Ортақ бөлгіші жоқ 1) екі; 2) үш; 3) төрт таңбалы құрама сандарды жазыңдар.

6.25. 100, 216, 360, 310, 4608, 3240 сандарын қарапайым көбейткіштерге жіктеңдер.

6.26. 180, 612, 972, 1225, 2304, 2463, 11440 сандарының барлық жай бөлгіштерін анықтаңдар.

6.27. 234, 510, 1449, 3190, 2220, 3690, 1593 сандарының 1 саны мен өзінен басқа ең кіші және ең үлкен жай бөлгіштерін анықтаңдар.

B

6.28. 6, 28, 196 сандарының әрқайсысы өзінен басқа барлық бөлгіштерінің қосындысына тең болатынын көрсетіңдер.

6.29. 12, 75, 56, 72, 108, 120 сандарының барлық бөлгіштерін анықтаңдар.

6.30. Қорапта 300-ден кем, бірақ 200-ден артық қалам бар. Егер барлық қаламдар саны 10-ға және 12-ге қалдықсыз бөлінсе, қорапта неше қалам бар?

C

6.31. Егер $p \geqslant 5$ жай сан болса, онда p^2-1 саны 24-ке бөлінетінін дәлелдеңдер.

6.32. 3-ке бөлінбейтін натурал санның квадратынан 1-ді азайтқанда үшке бөлінетін сан шығатынын дәлелдеңдер.

6.33*. a натурал санының, 1 саны мен өзін қосқандағы барлық бөлгіштерінің санын $\tau(a)$ арқылы белгілейік. Мысалы, $24=2\cdot2\cdot2\cdot3$ болғандықтан, оның барлық бөлгіштері мынадай: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. Осыдан $\tau(24)=8$. Егер $a = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_k^{n_k}$ саны берілсе, онда

$$\tau(a)=(n_1+1)(n_2+1)\ldots(n_k+1)$$

болатынын дәлелдеңдер.

6.34*. Егер a саны 12-ге бөлінсе және $\tau(a)=14$ болса, a санын табыңдар.

6.35*. Егер $a = p_1^{n_1} p_2^{n_2}$, $\tau(a^2) = 81$ болса, онда $\tau(a^3)$ неге тең?

6.36*. Егер $a = 2\tau(a)$ болса, онда a неге тең?

6.37*. $p^2-2q^2=1$ теңдігін қанағаттандыратын барлық p және q жай сандарын табыңдар.

6.38. Бірдей цифрлармен жазылған әрбір үш таңбалы сан 37-ге еселік болатынын дәлелдеңдер.

6.39. Кез келген үш таңбалы тақ сан мен осы санның цифрларын кері тәртіппен жазғанда шығатын екінші тақ сандарды қарастырайық. Осы сандардың үлкенінен кішісін азайтқанда а) 198-ге; ә) 9-ға бөлінетін сан шығатынын көрсетіңдер.

6.40. Кез келген тақ санның квадратынан 1-ді азайтқанда 8-ге бөлінетін сан шығатынын көрсетіңдер.

6.41. Екі тақ санның квадраттарының айырмасы 8-ге еселік болатынын дәлелдеңдер.

6.42. Кез келген бірдей цифрлармен жазылған жұп таңбалы санның 11-ге бөлінетінін дәлелдеңдер.

6.3*. Ең үлкен ортақ бөлгіш және ең кіші ортақ еселік

Сандардың ең үлкен ортақ бөлгіші және ең кіші ортақ еселігі. Егер a және b сандары d санына қалдықсыз бөлінсе, d санын a және b сандарының ***ортақ бөлгіші*** деп атаймыз. Мысалы, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36 сандары — 108 және 144 сандарының ортақ бөлгіштері. Осы сияқты бірнеше санның ортақ бөлгішін анықтауға болады. Мысалы, 1, 2, 3, 4, 6 сандары — 24, 66 және 84 сандарының ортақ бөлгіштері.

Егер екі немесе бірнеше санның 1-ден өзге ортақ бөлгіштері болмаса, онда мұндай сандарды ***өзара жай сандар*** деп атайды. Мысалы, 35 және 169 — өзара жай сандар. Кез келген a және b сандарының санаулы ғана ортақ бөлгіштері бар. Осы ортақ бөлгіштердің ең үлкенін a және b сандарының ***ең үлкен ортақ бөлгіші*** (ЕҮОБ) деп атайды және оны былай белгілейді: (a, b). Мысалы, $(108, 144)=36$; $(35, 169)=1$. Бірнеше санның ЕҮОБ де осылай белгіленеді: $(24, 66, 84)=6$.

Сандардың ЕҮОБ табу үшін бұл сандарды қарапайым көбейткіштерге жіктеу тәсілін қолданады. Ол үшін берілген сандардың қарапайым жіктелулеріндегі ортақ жай көбейткіштерін ең кіші дәрежелерімен алып көбейтсе, жеткілікті. Екі мысал қарастырайық.

1-мысал. 680 және 612 сандарының ЕҮОБ-ін табайық.

$680=2\cdot2\cdot2\cdot5\cdot5\cdot17$, $612=2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot17$ болғандықтан, осы жіктелулердегі ортақ көбейткіштердің көбейтіндісі берілген сандардың ЕҮОБ-і болады: $(680, 612)=2\cdot2\cdot17=68$.

2-мысал. 150, 180 және 240 сандарының ЕҮОБ-ін табу керек.

$150=2\cdot3\cdot5\cdot5$, $180=2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot5$, $240=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot5$. Осыдан 2, 3 және 5 ортақ көбейткіштер болатындығын көреміз: $(150, 180, 240)=2\cdot3\cdot5=30$.

Егер k саны a және b сандарының әрқайсысына бөлінсе, онда k саны a мен b сандарының ***ортақ еселігі*** деп аталады. Мысалы, ab саны — a мен b-ның ортақ еселігі. a мен b сандарының барлық ортақ еселіктерінің ең кішісін осы сандардың ***ең кіші ортақ еселігі*** (ЕКОЕ) деп атайды және оны былай белгілейді: $[a, b]$. Осы сияқты бірнеше санның да ЕКОЕ-ін анықтайды: $[a, b, c, ..., f]$. Сандардың ЕКОЕ-ін анықтау үшін бұл сандарды жай көбейткіштерге жіктеп, олардағы барлық жай көбейткіштерді ең үлкен дәрежелерімен алып, көбейтсе, жеткілікті. Мысалдар қарастырайық.

3-мысал. 680 және 612 сандарының ЕКОЕ-ін табайық.

Берілген сандарды жай көбейткіштерге жіктейік: $680=2^3\cdot5\cdot17$, $612=2^2\cdot3^2\cdot17$. $[680, 612] = 2^3\cdot5\cdot17\cdot3^2 = = 6120$.

Ортақ бөлгіштер және ортақ еселіктер қасиеттері. Енді ортақ бөлгіштер мен ортақ еселіктердің кейбір қасиеттерін қарастырайық.

1. *Егер d саны a мен b сандарының ортақ бөлгіші болса, онда $k=\dfrac{ab}{d}$ саны a мен b сандарының ортақ еселігі болады.*

d саны a мен b сандарының ортақ бөлгіші болғандықтан, a_1, b_1 сандары табылып, $a=a_1d$, $b=b_1d$ теңдіктері орындалады. Сонда

$$k=\frac{ab}{d}=\frac{a_1d\cdot b_1d}{d}=a_1db_1=a_1(db_1)=a_1b$$

теңдігінен k саны b-ға еселік болатынын көреміз. Осы сияқты $k=a_1db_1=(a_1d)b_1=ab_1$ теңдігінен k-ның a-ға да бөлінетіндігі шығады. Эндеше k саны — a мен b сандарының ортақ еселігі.

2. $(a,b)=\dfrac{ab}{[a,b]}$ *теңдігі орындалады.*

Айталық, $\dfrac{ab}{[a,b]}=d$ болсын. $[a,b]\cdot d=a\cdot b$ және 1-қасиет бойынша d натурал сан болады. $[a, b]$ санының b-ға қалдықсыз бөлінетіндігінен $a[a,b]$

санының да ab көбейтіндісіне қалдықсыз бөлінетіндігі шығады. Олай болса, $d[a, b] = ab$ теңдігінен $a[a, b]$ өрнегі $d[a, b]$ санына бөлінетіндігін аламыз. Демек, a саны d-ға қалдықсыз бөлінеді. Осы сияқты b санының да d санына бөлінетіндігін көрсетуге болады. d саны — a мен b сандарының ортақ бөлгіші.

Енді d саны a мен b сандарының ЕҮОБ-і болатынын көрсетейік. Айталық, $d_1>d$ теңсіздігін қанағаттандыратын және a, b сандарының ортақ бөлгіші болатын d_1 саны табылсын дейік. Онда 1-қасиет бойынша $k_1 = \dfrac{ab}{d_1}$ саны a мен b сандарының ортақ еселігі болады. Ал $d_1>d$ болғандықтан, $k_1 < [a,b]$ теңсіздігі орындалып, a, b сандарының ЕКО-нен кіші k_1 ортақ еселігі табылды. Бұлай болуы мүмкін емес. Алынған қайшылық a, b сандарының d-дан үлкен ортақ бөлгіші болмайтындығын көрсетеді: $d=(a, b)$. ◀

1-салдар. $[a, b]\cdot(a, b)=ab$ *теңдігі орындалады.*

2-салдар. *Егер* $(a, b)=1$ *болса, онда* $[a,b] = ab$.

3. (a, b) *саны* a *және* b *сандарының кез келген ортақ бөлгішіне қалдықсыз бөлінеді.*

▶ Егер d_1 саны a, b сандарының ортақ бөлгіші болса, 1-қасиет бойынша $k_1 = \dfrac{ab}{d_1}$ саны a, b сандарының ортақ еселігі болады. Сондықтан $k_1 = m\cdot[a, b]$ теңдігі орындалатындай m саны табылып, k_1 саны $[a, b]$-ге қалдықсыз бөлінеді. Осыдан $[a, b] = \dfrac{ab}{(a,b)}$ теңдігін ескеріп, $\dfrac{ab}{d_1} = \dfrac{mab}{(a,b)}$ немесе $ab(a,b)=abmd_1$ теңдіктерін аламыз. Олай болса, $(a, b)=md_1$, яғни (a, b) саны d_1-ге қалдықсыз бөлінеді. ◀

4. *Егер* a *саны* n *мен* m *сандарына бөлінсе және* $(n, m)=1$ *болса, онда* a *саны* nm *көбейтіндісіне қалдықсыз бөлінеді.*

▶ Қасиеттің шарттарынан a саны n және m сандарының ортақ еселігі болатыны шығады. Онда a саны $[n,m] = nm$ санына қалдықсыз бөлінеді. ◀

Енді жай сандарды анықтау үшін және сандарды жай көбейткіштерге жіктеу үшін қолданылатын маңызды қасиетті қарастырайық.

5. *Егер a саны $\sqrt{a}$ санынан кіші жай сандардың біреуіне де бөлінбесе, онда a — жай сан.*

Алдымен, егер a санының p ең кіші жай бөлгіші болса, $p \leqslant \sqrt{a}$ теңсіздігі орындалатынын көрсетейік. Шынында да, p саны a-ның ең кіші жай бөлгіші болса, $a=bp$, $b \geqslant p$ болатындай b саны табылады. Осыдан $p^2 \leqslant bp = a$ немесе $p \leqslant \sqrt{a}$ теңсіздігін аламыз. a санының $\sqrt{a}$ -дан кіші жай бөлгіші болмаса, онда оның ешқандай жай бөлгіші болмайды. Демек, a — жай сан.

4-мысал. 137 санының жай немесе құрама болатынын анықтайық.

Шешуі. $11 < \sqrt{137} < 12$ болғандықтан және 137 саны 2, 3, 5, 7, 11 жай сандарының біреуіне де бөлінбейтіндіктен, 137 жай сан болады.

ЕСЕПТЕР

A

6.43. Төмендегі сандардың ЕҮОБ-ін табыңдар:
1) 96 және 34; 2) 105 және 135; 3) 360 және 252;
4) 436 және 729; 5) 232 және 132; 6) 320 және 1152.

6.44. 1) (220, 138); 2) (344, 476); 3) (78, 15);
4) (891, 33); 5) (335, 490); 6) (1122, 121) сандарын анықтаңдар.

6.45. 1) (204, 230, 170); 2) (224, 168, 392);
3) (108, 126, 882); 4) (112, 124, 420) сандарын табыңдар.

6.46. 1) 3; 2) 15; 3) 12 және 5; 4) 12 және 3; 5) 6 және 10 сандарының еселігі болатын бірнеше санды атаңдар.

B

6.47. Егер $a=a_1d$, $b=b_1d$, $(a,b)=d$ болса, $(a_1,b_1)=1$ екенін дәлелдеңдер.

6.48. $[a,b,c]=[[a,b],c]$ теңдігін дәлелдеңдер.

6.49. $(a, b, c)=((a, b), c)$ теңдігін дәлелдеңдер.

6.50. $\dfrac{7}{192}$ және $\dfrac{187}{1620}$ бөлшектерін ортақ бөлімге келтіріңдер.

6.51. 27346 санын 1) 3-ке; 2) 5-ке; 3) 9-ға; 4) 11-ге бөлгенде қалатын қалдықты ауызша анықтауға бола ма? Осы қалдықтарды жазыңдар.

6.52. 59 142 727 346 санын 1) 3-ке; 2) 5-ке; 3) 9-ға; 4) 25-ке бөлгенде қалатын қалдықты ауызша атап беріңдер.

6.53. Ең үлкен үш таңбалы санның барлық бөлгіштерін анықтаңдар.

6.54. Егер $a=a_1 d$, $b=b_1 d$, $(a, b)=d$ болса, онда $[a_1, b_1]=a_1 b_1 d$ екенін дәлелдеңдер.

6.55. Төмендегі мәліметтер бойынша a мен b-ны табыңдар:

1) $a:b=11:13$, $(a, b)=5$;
2) $(a, b)=5$, $[a,b]=105$;
3) $(a, b)=7$, $ab=294$;
4) $[a,b]=75$, $ab=375$;
5) $[a,b]=915$, $(a, b)=3$;
6) $a:b=17:14$, $(a, b)=3$;
7) $[a,b]=224$, $a:b=7:8$;
8) $a:b=9:14$, $(a, b)=378$;
9) $a:b=5:6$, $(a, b)=13$.

6.56. 1) $2\cdot3\cdot5$; 2) $2\cdot5\cdot7$; 3) $3\cdot7\cdot11$ көбейтінділерінің барлық бөлгіштерін табыңдар.

6.57. Егер $a=2^5\cdot3^4\cdot5^2\cdot11$, $b=2^3\cdot3^6\cdot5^3\cdot7^2$ болса, $a\cdot b$, (a, b) және $[a; b]$ сандарын жай көбейткіштерге жіктеңдер.

6.58. 10-нан кіші және 10-мен өзара жай сан болатын сандарды жазыңдар.

6.59. 12-ден кіші және 12-мен өзара жай сан болатын сандарды жазыңдар.

C

6.60. Егер $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — жай сандар және $u_1, u_2, \ldots, u_n$ — натурал сандар болса, $a=p_1^{u_1} p_2^{u_2} \ldots p_n^{u_n}$ санының (1 мен өзін қоса есептегенде) неше бөлгіші болатынын анықтаңдар.

6.61. Кез келген бүтін n саны үшін n^4+4 саны құрама сан болатынын дәлелдеңдер.

6.62. Арбаның алдыңғы доңғалағы шеңберінің ұзындығы 225 см, артқы доңғалағы шеңберінің ұзындығы 325 см. Ең кем дегенде неше метр жүргеннен кейін арбаның екі доңғалағы да жасайтын толық айналымының саны бүтін санға тең болады?

6.63. 4 ат алаңды айнала шауып жүр. Бірінші ат алаңды 20 минутта, екіншісі 15 минутта, үшіншісі 12 минутта, ал төртіншісі 10 минутта айналып өтеді. Егер олар мәреден бір уақытта шаба жөнелсе, онда қанша уақыттан кейін төрт аттың барлығы мәреде қайта кездеседі?

6.64. Үш теплоходтың біріншісі портқа 3 күндік, екіншісі 4 күндік, үшіншісі 5 күндік жолдан кейін қайта оралады. Дүйсенбі күні олардың портта кездескені белгілі болса, онда ең кем дегенде неше күннен кейін а) бірінші теплоход екіншісімен; ә) бірінші теплоход үшіншісімен; б) екінші теплоход үшіншісімен; в) үшеуі де портта қайта кездеседі және бұл кездесулер аптаның қай күндері болады?

6.65*. Егер $ab+cd$ саны $(a-c)$-ға бөлінсе, $ad+bc$ санының да $(a-c)$-ға бөлінетінін дәлелдеңдер.

6.66*. Егер $(a, m)=1$, $ad-bc$ айырмасы m-ге және $a-b$ өрнегі де m-ге бөлінсе, $c-d$ айырмасы да m-ге бөлінетінін дәлелдеңдер.

6.67. Тізбектес екі тақ сан өзара жай сандар болатынын дәлелдеңдер.

6.68. Тізбектес екі жұп санның ЕҮОБ-і 2-ге тең болатынын көрсетіңдер.

6.69. Егер n құрама сан болса, онда 2^n-1 саны да құрама сан болатынын көрсетіңдер.

6.70. Егер $n!$ саны $(n+1)$-ге бөлінбесе, онда $n+1$ жай сан болатынын дәлелдеңдер. Мұндағы $n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$ («эн факториал» деп оқылады).

6.4*. Бүтін сандарды қалдықпен бөлу

Азайту амалы. Бүтін сандар.

Егер a, b және x сандары үшін

$$b+x=a \qquad (1)$$

теңдігі орындалса, $x=a-b$ саны a және b сандарының ***айырмасы*** деп аталады. Мұндағы a саны — ***азайғыш,*** b саны — ***азайтқыш.*** Жалпы x санын анықтау үрдісін a санынан b санын ***азайту амалы*** деп атайды.

Кез келген a және b натурал сандары үшін (1) теңдікті қанағаттандыратын x натурал саны табыла бермейді. Егер $a>b$ болса, онда x натурал саны табылады және ол жалғыз болады, (1) теңдеудің натурал сандар жиынында шешімі болуы үшін $a>b$ теңсіздігі орындалуы қажет. Өзге жағдайларда бұл теңдеудің натурал шешімі болмайды. Мысалы, $3-5$ айырмасы натурал сан емес. Сондықтан натурал сандар жиынын кеңейту қажеттілігі туындайды.

0 (нөл) мен ($-n$) түріндегі минус таңбалы сандарды қарастырайық, мұндағы n — натурал сан, ал $-n$ санын ***теріс бүтін сан*** деп атайды. $-n$ саны n натурал санына ***қарама-қарсы сан*** деп те аталады.

Егер m және n натурал сандары тең болса, онда $-m$ және $-n$ теріс бүтін сандары да тең деп аталады. Енді барлық натурал сандардан, нөлден және барлық теріс бүтін сандардан құралатын жиынды қарастырайық. Бұл жиынды ***бүтін сандар жиыны*** деп атайды және оны $\boldsymbol{Z}$ арқылы белгілейді. Сонымен, $\boldsymbol{Z}$ жиыны төмендегі сандардан тұрады:

$$\ldots, -n, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots \qquad (2)$$

және бұл жиынның кез келген элементін ***бүтін сан*** деп атайды. Бүтін сандар жиынында сандардың қосындысы, айырмасы және көбейтіндісі толық анықталады. Егер a және b оң сандар болса, мына теңдіктер орындалады:

$a-b=a+(-b)$; $\quad a-(-b)=a+b$; $\quad a+0=0+a=a$;

$(-a)b=a(-b)=-ab$; $\quad (-a)(-b)=ab$; $\quad (-1)a=-a$;

$0 \cdot a=a \cdot 0=0$; $\quad a^0=1$; $a \neq 0$.

Бүтін сандарды қосу және көбейту амалдарының негізгі ережелері натурал сандарды қосу және көбейту ережелерімен бірдей. Бүтін сандар жиынында қосу және көбейту амалдарына кері амалдар — азайту және бөлу амалдары анықталады. Бұл жиында азайту амалы толық анықталғанымен, екі бүтін санның бөліндісі бүтін сан бола бермейді. Мысалы, 5:7 бүтін сан емес.

Бүтін сандарды қалдықпен бөлу. Евклид алгоритмі. Бүтін сандар жиынында қалдықпен бөлу амалы орындалады.

Анықтама. *Егер a бүтін саны мен b натурал саны үшін q және r ($0 \le r < b$) бүтін сандары табылып, $a=bq+r$ теңдігі орындалса, онда a саны b санына r* ***қалдығымен бөлінеді*** *деп айтылады.* Мұндағы q — толымсыз бөлінді. Егер $r=0$ болса, онда a саны b-ға ***қалдықсыз бөлінеді*** делінеді.

1-теорема. *Кез келген a бүтін және b натурал сандары үшін*

$$a = bq + r \; (0 \le r < b) \qquad (1)$$

теңдігі орындалатындай q және r бүтін сандары табылады және бұл сандар бір ғана түрде анықталады.

Бұл теореманы дәлелдеусіз қабылдаймыз.

Салдар. а) *Кез келген жұп санды $n=2k$ түрінде жазуға болады. Мұндағы k — бүтін сан.* ә) *Кез келген тақ санды $n=2k+1$ түрінде жазуға болады. Мұндағы k — бүтін сан.*

Мысалы, $6=2\cdot3$; $7=2\cdot3+1$ және т.с.с.

Шағын сандардың ең үлкен ортақ бөлгішін (ЕҮОБ) табу үшін оларды жай көбейткіштерге жіктеу тәсілін қолдандық. Ал үлкен сандарды жай көбейткіштерге жіктеу оңайға соқпайды. Енді осындай үлкен сандардың ЕҮОБ-ін табуға арналған *Евклид ережесін* қарастырайық. Бұл ереже-де сандарды қалдықпен бөлу амалы қолданылады. Алдымен төмендегі тұжырымды дәлелдейік.

2-теорема. *Егер $a=bq+r$ болса, онда $(a, b)=(b, r)$ теңдігі орындалады.*

Дәлелдеуі. $r=0$ немесе $r \neq 0$ болуы мүмкін.

1) Егер $r=0$ болса, онда $a=bq$. a саны b-ға қалдықсыз бөлінеді. Сондықтан $(a, b)=b=(b, 0)=(b, r)$ теңдігімен бірге теорема дәлелденеді.

2) Айталық, $r \neq 0$ және $d=(b, r)$ болсын. Онда $bq \vdots d, r \vdots d$ болғандықтан, $a=bq+r$ саны да d-ға бөлінеді. d саны — a мен b-ның ортақ бөлгіші. Енді $d=(a, b)$ екенін көрсетсе жеткілікті. Айталық, бұлай болмай $d_1>d$ теңсіздігін қанағаттандыратын a және b сандарының d_1 ортақ бөлгіші табылсын. Онда $a \vdots d_1, b \vdots d_1$ болғандықтан, $r=a-bq$ саны да d_1-ге бөлінуі керек. Осыдан d_1 саны b және r сандарының ортақ бөлгіші болатыны және $d_1>d=(b, r)$ теңсіздігі орындалатыны шығады. Бұл мүмкін емес. Алынған қайшылық теореманы дәлелдейді.

Енді a және b сандарының ЕҮОБ-ін табуға арналған Евклид ережесін келтірейік. Айталық, $a \geqslant b$ болсын. Егер $a \vdots b$ болса, онда $(a,b)=b$. Ал a санын b-ға бөлгенде r қалдық қалса, дәлелденген теорема бойынша $(a, b)=(b, r)$. (a, b)-ны табу есебі b және r сандарының ЕҮОБ-ін табуға келіп тіреледі. Егер $b \vdots r$ болса, онда $(b, r)=r$ және $(a, b)=r$. Ал b санын r-ге бөлгенде r_1 қалдығы қалса, яғни $b=rq_1+r_1$ теңдігі орындалса, онда теорема бойынша $(r, r_1)=(b, r)=(a, b)$ теңдігін аламыз. Осы процесті жалғастырып, ең соңғы қалдыққа оның алдындағы қалдық бөлінетін жағдайға жетеміз. Онда ең соңғы нөлге тең емес қалдық a мен b сандарының ЕҮОБ-і болады.

1-мысал. Евклид ережесі бойынша (15283, 10013) санын табу керек.

Евклид алгоритміндегі тізбектеп бөлу процесі төмендегі тәсілмен орындалады:

$$\begin{array}{r|l} 15283 & 10013 \\ -10013 & 1 \\ \hline 5270 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 10013 & 5270 \\ -5270 & 1 \\ \hline 4743 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 5270 & 4743 \\ -4743 & 1 \\ \hline 527 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 4743 & 527 \\ -4743 & 9 \\ \hline 0 & \end{array}$$

$15283=1\cdot10013+5270,$

$10013=1\cdot5270+4743,$

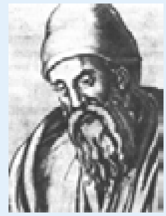
$5270=1\cdot4743+527,$

$4743=9\cdot527.$

Ең соңғы нөлге тең емес қалдық 527-ге тең. Олай болса, (15283, 10013)=527.

Тарихқа шолу

Евклид — Александрияда өмір сүрген грек математигі. Евклид өзінің атақты «Бастамалар» деп аталатын 13 кітаптан тұратын еңбектерінде сол кезеңдегі белгілі мәліметтерді жинақтап, геометрияны қатаң аксиоматикалық тұрғыдан жазуға тырысқан. 20 ғасырдан астам уақыт бойы математиктер геометрияны осы «Бастамалар» бойынша оқып-үйренген.



Евклид
(б.з.д. III ғ.)

ЕСЕПТЕР

A

6.71. Евклид алгоритмін қолданып, төмендегі сандардың ЕҮОБ-ін табыңдар:

1) 846 және 246;
2) 1960 және 588;
3) 21120 және 30720;
4) 15283 және 10013;
5) 2956 және 13302;
6) 1426 және 420.

6.72. 2939 және 3271 өзара жай сандар болатынын көрсетіңдер.

6.73. (6120, 36360) саны (1260, 55260) санынан неше есе үлкен?

6.74. 1) (475, 570, 741);
2) (112, 124, 420);
3) (250, 320, 810, 490);
4) (660, 1080, 1200, 1500) сандарын анықтаңдар.

B

6.75. Ұзындықтары төмендегідей кесінділердің ең үлкен ортақ өлшеуіш кесінділерінің ұзындығын табыңдар: 1) 3 м 20 см және 5 дм 4 см; 2) 7 м және 45 см; 3) 1 км 300 м және 400 м; 4) 3 км 200 м және 600 м.

6.76. Кез келген натурал санды 1) $2k$ немесе $2k+1$; 2) $3k$, $3k+1$ немесе $3k+2$ түрінде жазуға болатынын дәлелдеңдер. Мұндағы k — натурал сан.

6.77. Егер берілген екі санның екеуін де 3-ке бөлгендегі қалдық 1-ге тең болса, онда олардың көбейтіндісін 3-ке бөлгенде 1-ге тең қалдық қалатынын көрсетіңдер.

6.78. Егер екі натурал санды 3-ке бөлгенде, біреуінен 1-ге тең, екіншісінен 2-ге тең қалдық қалса, онда олардың көбейтіндісін 3-ке бөлгенде 2-ге тең қалдық қалатынын дәлелдеңдер.

6.79. Егер екі бүтін санды белгілі бір натурал санға бөлгенде тең қалдықтар қалса, онда бұл сандардың айырмасы берілген натурал санға бөлінетінін көрсетіңдер.

C

6.80. Тақ натурал санның квадратынан 1-ді шегерсе, 8-ге бөлінетін сан шығатынын дәлелдеңдер.

6.81. Тізбектес екі тақ санның квадраттарының айырмасы 8-ге бөлінетінін дәлелдеңдер.

6.82. Тақ бүтін санның квадратын 4-ке бөлгенде 1-ге тең қалдық қалатынын көрсетіңдер.

6.83. 5-ке бөлінбейтін санның квадратына 1-ді қосқанда немесе 1-ді азайтқанда 5-ке бөлінетінін дәлелдеңдер.

6.84*. k-ның кез келген натурал мәнінде k^3+11k саны 6-ға бөлінетінін дәлелдеңдер.

6.85*. $k^2(k^4-1)$ саны әрбір натурал k үшін 60-қа бөлінетінін дәлелдеңдер.

6.86. Егер a және k натурал сандар болса, $a^{k+4}-a^k$ саны 30-ға бөлінетінін дәлелдеңдер.

6.87. k^5-5k^3+4k көпмүшесі әрбір натурал k үшін 120-ға бөлінетінін көрсетіңдер.

6.88. x^3+3x^2-x-3 өрнегі x-тің әрбір тақ мәнінде 48-ге бөлінетінін көрсетіңдер.

6.5*. Дирихле принципі

Бұл қарапайым принципті бірінші болып неміс математигі Лежен Дирихле (1805–1859) тұжырымдаған. Оның мағынасы мынадай:

n үйшікке n+1-ден кем емес қояндар отырғызылған. Сонда кем дегенде екі қоян отыратын үйшік табылады.

Бұл соншалықты қарапайым ақиқат тұжырым болғанымен, оның көмегімен көптеген күрделі есептерді шешуге болады. Тек есеп шартынан оңтайлы түрде «үйшіктерді» таңдап алып, оларға «қояндарды» орналастыра білу керек. Енді бірер мысалдар қарастырайық.

1-мысал. Кез келген 13 оқушының ішінен туған айлары бірдей кем дегенде екі оқушы табылатынын көрсетейік.

Шынында да, барлығы 12 ай болғандықтан, 13 оқушының кем дегенде екеуі бір айда туады. Мұндағы «үйшіктер» — 12 ай, «қояндар» — 13 оқушы.

2-мысал. Кез келген 6 натурал санның ішінен айырмасы 5-ке бөлінетін кем дегенде екі сан табылатынын көрсетейік.

Санды 5-ке бөлгенде бес түрлі қалдықтың бірі қалуы мүмкін: 0, 1, 2, 3, 4 (бұлар — «үйшіктер»). Ал берілген 6 санның («қояндардың») 5-ке бөлгенде кем дегенде екеуінде қалдықтары бірдей болады. Олардың арасынан a және b сандары табылып, $a=5n+r$, $b=5m+r$, ($r=0$, 1, 2, 3, 4) теңдіктері орындалады. Егер $n>m$ болса, онда $a-b=(5n+r)-(5m+r)=$ $=5n-5m=5(n-m)\vdots 5$.

ЕСЕПТЕР

B

6.89. Дүкенге алманың үш сортынан 10 қорап алма әкелінді. Әрбір қорапқа алманың тек бір ғана сорты салынған. Алманың бірдей сорты салынған 4 қорап табыла ма?

6.90. Кез келген әртүрлі 100 натурал санның ішінен айырмасы 99-ға бөлінетін кем дегенде екі сан табылатынын көрсетіңдер.

6.91. Кез келген әртүрлі 100 натурал санның ішінен қосындысы 197-ге бөлінетін кем дегенде екі сан табылатынын дәлелдеңдер.

6.92. Бірі екіншісінен екі есе үлкен болмайтындай етіп, 10-нан кіші натурал сандардың нешеуін алуға болады?

6.93. Кез келген 100 натурал санның ішінен қосындысы 100-ге бөлінетіндей бірнеше сан табылатынын көрсетіңдер.

6.94. 50-ден аспайтын кез келген 30 натурал санның ішінен бірі екіншісінен екі есе үлкен болатындай екі сан табыла ма?

6.95. Мектептегі 25 сыныпта барлығы 801 оқушы оқиды. Оқушылар саны 33-тен аз емес кем дегенде бір сынып табылатынын көрсетіңдер.

C

6.96. 2004-ке бөлінетін 20032003...20032...3 түріндегі сан табылатынын дәлелдеңдер.

6.97. Кез келген n натурал санына бөлінетін 11...100...0 түріндегі сан табылатынын дәлелдеңдер.

6.98. 2003-ке бөлінетін және 2004 цифрларымен аяқталатын сан табылатынын көрсетіңдер.

6.99. 0001 цифрларымен аяқталатын сан 3-тің натурал дәрежесі бола ма?

6.100. Әрбір үш бүтін санның ішінен қосындысы 2-ге бөлінетін екі сан табылатынын көрсетіңдер.

6.101. Егер адам басындағы шаштар саны 400 мыңнан артық болмайды деп есептесек, онда Алматы тұрғындары ішінен шаштарының саны бірдей екі адам табылатынын көрсетіңдер.

6.102. Бірлік квадраттың ішінен кездейсоқ 51 нүкте белгіленді. Қандай да бір үш нүктенің радиусы $\frac{1}{7}$-ге тең дөңгелек ішінде жататынын дәлелдеңдер.

ЖАУАПТАРЫ

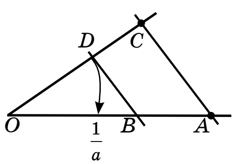
7-сынып материалдарын қайталауға арналған жаттығулар

0.1. 1) a^{16}; 5) a^{10}; 8) a^6. **0.2.** 2) 25; 4) 1; 5) 81. **0.3.** 2) $-a^5b^7$; 4) $4a$; 6) m^4n^4. **0.4.** 1) $3a^2b-ab^2$; 3) $3xy+y^2$; 5) $10p^2-18pq+8q^2$. **0.5.** 2) $5a(a^2-3ab+4b^2)$; 6) $3x^2(-2a+3-4x^2-a^2)$. **0.10.** 1) 1; 2) $\frac{4x+4}{a}$; 3) $\frac{3an-2bm}{36mn}$; 4) $\frac{5mn}{14x}$; 5) $-3abpq$; 6) $\frac{x+2y}{3}$. **0.11.** 4) $(x+y)^2(x-y)$; 5) $(a-b)^2(a-b-3)$; 6) $(m+n)^2(1-n)$. **0.13.** 1) 1; 2) $\frac{m-n}{n}$; 3) b; 4) $-x$. **0.14.** 2) $1\frac{2}{3}=1,67, \alpha=0,00(3)$; $\beta<0,002$. **0.15.** 2) $-x^2$; 3) $-7x^2-14$; 6) $a+0,3b+1$. **0.16.** 3) mn^3; 5) $\frac{b}{9}$; 6) $\frac{4}{5}p^2qk$. **0.17.** 1) $2x^2-12$; 2) $2y^2-4$; 3) $2a^2+10a+14$; 4) $2c^2-10c+14$. **0.18.** 4) $-8c^3+10c^2+c-3$; 8) $c^3+c^2-14c-24$. **0.19.** 1) -7; 2) 1; 3) 2; 4) 2. **0.20.** 1) $(a-2)(a^2-2)$; 2) $(x+6)(x^2-2)$; 3) $c(c+1)(c^2-2)$; 4) $y^3(1-y)(1+y)$; 5) $(b+c)(a^2-bc)$; 6) $(x-y)(2x^2+y^2)$; 7) $(16a-5c)(b^2+2c^2)$; 8) $(2a-7b)(3a^2+b^2)$; 9) $(a+c)(c-2)(c+2)$. **0.21.** 1) 0; $-\frac{5}{6}$; 2) 0;1,6; 3) 0; 2; 4) 0; 0,2; 5) 0; $\frac{15}{8}$; 6) 0; 1. **0.22.** 1) $a^k(1+a)$; 2) $5x^3(x^k+2)$; 6) $5x^{k+1}(3x^k-5)$. **0.23.** 3) $66^3+34^3=$ $=2^3(33^3+17^3)=8\cdot(33+17)(33^2-17\cdot 33+17^2):400$. **0.25.** 8) $(x-1)^2-36$. **0.26.** 1) 1; 2) 3; 3) 100; 4) $\frac{3}{4}$. **0.27.** 1) $\frac{2-b}{5}$; 2) $-\frac{7}{3}$; 3) $-\frac{3}{8}$; 4) $\frac{x+2}{5}$; 5) $\frac{1}{3-a}$; 6) x^2; 7) $-x^4$; 8) $-b^4$; 9) $c^2(c-1)$. **0.28.** 5) $\frac{40x}{15x^2y^2}$; 7) $\frac{a^2}{a^2-2a}$. **0.29.** 1) $y-b$; 2) $x+a$; 3) $x+y$; 4) $b-3c$. **0.30.** 3) $\frac{n^2-1}{n}$; 6) $-\frac{2x^2}{(1+x)^2}$. **0.31.** 1) a^2-b^2; 4) $(c+2)^2$. **0.33.** 4) x^8x^0; 5) $x^{10}x^{-2}$. **0.34.** $n=11$. **0.35.** $n=52$. **0.36.** $a=348$. **0.45.** 1) $(a+b)^2+(a-b)^2$. **0.48.** $(a+b)^3-(a-b)^3$. **0.49.** $a=2$; $b=-7$; $c=-5$. **0.50.** 1) Жауаптарының бірі x^6+1. **0.52.** 2) $\frac{a^2+3}{a-1}$; 4) $\frac{a-b}{a+b}$. **0.53.** 1) 2; 2) $\frac{1}{3}$; 3) 1; 4) $\frac{1}{2}$. **0.54.** 1) $\frac{1}{a^2+a+1}$; 4) $\frac{1}{2-p}$; 8) 0. **0.55.** 3) $\frac{20}{3}$; 4) 5.

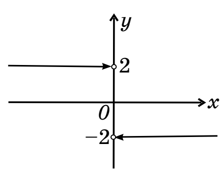
1-бөлім. Квадрат түбір

1.4. 1) 8; 2) 5; 3) 6; 4) 10; 9) 0,7; 10) 1,5. **1.5.** 2) 50; 7) 2,5; 10) 1,4. **1.7.** 3) Жоқ; 4) бар. **1.8.** 2) 35; 5) 3. **1.9.** 1) 4; 2) 8; 3) 0,39; 4) 5. **1.10.** 1) ± 8; 2) ± 5; 3) $\pm 0,3$; 4) $\pm\sqrt{3}$. **1.11.** 1) 4; 4) 1,44; 9) 1,5. **1.12.** 3) 5; 6) 21; 8) $\frac{1}{3}$. **1.13.** 1) xI0; 5) xI0; 8) $x=0$. **1.14.** 3) 9; 4) 0. **1.15.** 5) $(\sqrt{7})^2$; 8) $\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2$. **1.16.** 4) $\pm\frac{\sqrt{19}}{2}$; 6) $\pm\sqrt{1,5}$. **1.17.** 2) 0,5; 6) 7. **1.18.** 1) a; 2) $2x$. **1.19.** 1) $|x-2|$;

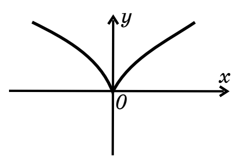
3) $1-a$; 6) $|-b-6|$. **1.20.** 3) $2\sqrt{x}$; 5) $\sqrt{3}-1$; 8) $a\sqrt{a}+a$. **1.22.** 1) $x\text{I}5$; 4) $x>3$. **1.23.** 2) $(b-\sqrt{2}c)(b+\sqrt{2}c)$; 3) $(\sqrt{13}-\sqrt{12x})(\sqrt{13}+\sqrt{12x})$. **1.24.** 1) 2; 4) -37. **1.25.** 1) $x\geqslant1$; 2) $a\leqslant3$; 3) $y\in(-\infty;+\infty)$. **1.26.** 1) $\sqrt{a}+\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{2x}-\sqrt{5}$; 3) $\sqrt{a}+\sqrt{b}$. **1.27.** 1) $3-x^2$; 2) $-m^2$. **1.28.** 1) a^2; 2) x^2; 3) y^3; 4) $-m^3$. **1.29.** 180 тг; 220 тг. **1.30.** 3) $0{,}8<a<0{,}9$; $0{,}83<a<0{,}84$. **1.31.** $(2{,}6)^2<7<(2{,}7)^2$. **1.33.** 3) 0,02; 0,6; 0,2. **1.34.** 2) 0,01; 4) 8,15. **1.35.** 1) $-\frac{1}{12}$; 3) $\frac{8}{3}$. **1.36.** 2) $-0{,}5(3)$; $10{,}28(0)$; $-17{,}(0)$; $0{,}1875(0)$. **1.37.** 3) $10{,}21(4)=\frac{9193}{900}$; $-2{,}1(12)=-2\frac{37}{330}$; 4) $0{,}(312)=\frac{104}{333}$. **1.38.** 1) $\sqrt{2112}$ С $45{,}9565$; 4) $\sqrt{0{,}28452}$ С $0{,}5334$. **1.39.** 1) $\approx0{,}97$. **1.40.** Мүмкін емес. **1.41.** Мүмкін, мысалы, $1-\sqrt{2}$ және $\sqrt{2}$. **1.45.** 1) 0,(6); 3) 9,(9)=10. **1.48.** Егер $\frac{m}{n}$ және $\frac{k}{p}$ қысқармайтын бөлшектер болса, онда: 1) $mp+kn=lnp$; 2) $mp\ nk=lnp$; 3) $m=l_1p$; $k=l_2n$. **1.49.** 1) $mp+kn=mk$. **1.50.** 1) $\approx5{,}3$; 2) 11,18. **1.53.** 1) 4,92; 2) 1,95; 3) 22,72; 4) 0,85. **1.58.** 1) A жатады; 2) B жатады; 3) C жатпайды. **1.62.** 1) 3,5; 2) 16,5; 3) 3,6; 4) 4,7. **1.63.** 2) $|x+1|<3{,}5$; 3) $|x+4{,}5|\leqslant0{,}2$. **1.64.** $AB=12$; $AC=9$; $BC=3$. **1.65.** 2) $(-\infty;3)$; 4) $[-3;3]$; 6) $(-\infty;11]$; 7) $(-5;0]$. **1.66.** 1) $x\geqslant2$; 3) $-2<x<0$; 5) $x\leqslant5$; 8) $-2<x\leqslant1$. **1.67.** 3) 8; 4) 10; 5) 15; 6) 34. **1.68.** 1) 3; 2) 5; 3) 9; 4) 11; 5) 16; 6) 46. **1.74.** 1) $\approx\pm2{,}08$; 2) $\approx1{,}32$. **1.76.** 1) $(7;+\infty)$; 3) $[0;4)$; 6) $\varnothing$. **1.77.** 2) $(-2;+\infty)$; 4) $(-\infty;15]$; $(-\text{u};15]$; 6) $(-3;0]\,2\,[5;+\text{u})$, яғни $\varnothing$. **1.78.** 3) $8<\sqrt{67}<9$; 5) $14<\sqrt{222}<15$. **1.80.** 1-сурет. $OA=a$, $OB=OC=1$, $OD:OB=OC:OA\Rightarrow OD=\frac{1}{a}$. **1.82.** 3) $x\in[0;6]$; 4) $x\in(-\text{u};-6)\,2\,(2;+\text{u})$. **1.83.** 1) $(-2;1)$; 2) $(-\text{u};2]\,2\,[5;+\text{u})$; 3) $[0;6]$. **1.85.** 1) $[1;5]$; 2) $[-5;-1]$; 3) $(2;8)$; 4) $(-2;-1)$. **1.86.** 1) 30 мин; 2) 15 мин; 3) 20 мин; 4) 3 мин. **1.87.** 0,6 кг. **1.88.** 1) $\frac{10}{14}$ — ең кішісі; $\frac{8}{9}$ — ең үлкені. **1.89.** 1) 25; 2) 10; 3) $\frac{34}{3}$; 4) $\frac{152}{7}$. **1.90.** $x\in[-8;0]$. $x\in[0;6]$. **1.92.** 1) 88; 2) 4,2; 5) 9; 6) 0,24. **1.93.** 1) 180; 2) 30; 3) 48; 4) 60; 5) 6; 6) 42; 7) 24; 8) 32. **1.94.** 2) 12; 5) 12; 8) 1. **1.95.** 3) 9; 7) 26; 8) 5. **1.96.** 2) $7\sqrt{2}$; 6) $15\sqrt{3}$; 9) $8\sqrt{6}$; 12) $2\sqrt{3}$. **1.97.** 1) $\sqrt{12}$; 5) $\sqrt{2}$; 10) $\sqrt{15}$; 12) $\sqrt{7}$. **1.98.** 3) $3\sqrt{2}$; 6) 2. **1.99.** 2) $\sqrt{27}<4\sqrt{3}$; 4) $7\sqrt{2}>\sqrt{72}$. **1.100.** 1) $4x$; 3) $1{,}2\ ax^3$. **1.101.** 1) 5; 2) 9;



1-сурет



2-сурет



3-сурет

3) 3; 4) 3. **1.102.** 1) $(-\infty;+\infty)$; 6) $x\geqslant 0$; 8) $[0;1)\cup(1;+\infty)$ **1.103.** 3) $\sqrt{0,1}>\sqrt{0,01}$; 7) $3,2>\sqrt{9,8}$. **1.104.** 1) 8,5; 2) $\frac{7}{96}$; 3) $\frac{15}{29}$; 4) $\frac{77}{135}$. **1.105.** 1) 9,1; 2) 1,08. **1.106.** 3) $x\geqslant 0$; 4) $c\leqslant 0$. **1.107.** 1) 1; 2) 4; 3) 3; 4) 1. **1.108.** 1) $8a^5b^3$; 3) $\frac{1}{b}$. **1.109.** 1) $|a|\sqrt{15}$; 3) $-c\sqrt{-3c}$; 6) $3a|a|\sqrt{2b}$; 8) $-m^3\sqrt{-5m}$. **1.110.** 2) $\sqrt{ab^3}$; 4) $-\sqrt{5x^4}$; 5) $\sqrt{-2x}$. **1.112.** 3) $8\sqrt{0,2}<0,4\sqrt{250}<\sqrt{41}$. **1.113.** 1) $a\sqrt{b}+b\sqrt{a}$; 3) $2x+y+3\sqrt{xy}$. **1.114.** 2) $m\sqrt{m}-n\sqrt{n}$; 4) $x^3+y\sqrt{y}$. **1.115.** 1) 4; 2) 10; 3) $4\sqrt{30}$; 4) 8. **1.116.** 3) $\sqrt{2}-\sqrt{x}$; 5) $\sqrt{2,5}$; 7) $\sqrt{2}$; 9) $\sqrt{10}-\sqrt{3}-1$. **1.117.** 6) $\frac{a\sqrt{b}+b}{ab}$; 10) $0,25\left(2+\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)$. **1.118.** 2) $\frac{\left(\sqrt{2x}\right)^5+1}{\sqrt{2x}+1}$. **1.119.** 2) 2-сурет. **1.121.** 1) n. **1.122.** 1) 1; 2) 2. **1.123.** a. **1.124.** $0,5\left(\sqrt{-2a}+\sqrt{2-2a}\right)$. **1.125.** 2) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$; 3) $2\left(\sqrt{2}-1\right)$. **1.127.** 2) 10; 3) −6. **1.128.** 9. **1.29.** $ab=1$. **1.130.** 1) 0; 8; 2) ±0,5. 3) ∅. **1.136.** 5 см. **1.137.** 1) $OA=5$; 2) $BC=5$; 3) $ED=7$; 4) $MN=10$. **1.138.** 1) $c=13$ см. 2) $b=4$ м; 3) $a=24$ м. **1.141.** 1) $a=4$; 2) $a=5$; 3) $a=5$; 4) $a=\sqrt{7}$. **1.142.** [1; 2]. **1.143.** 1) 25; 2) 121; 3) 7; 4) 12. **1.145.** 25 м. **1.146.** $AB=5$, $AC=\sqrt{26}$, $BC=\sqrt{41}$. **1.147.** $AB=\sqrt{10}$, $AC=\sqrt{50}$, $BC=\sqrt{40}\Rightarrow AC^2=AB^2+BC^2$. **1.148.** −5 не 11. **1.149.** 1) [0;16;]; 2) [0; 0016; 1]; 3) [625; 50625]. **1.150.** 3-сурет. **1.151.** 3) $\frac{1}{3}$. **1.153.** 1) −2,4; 2) 2,7. **1.154.** 1) $x\text{J}\frac{4}{3}$; 2) $y>5$; 3) [0;25); (25; +∞); 4) [0; +∞). **1.156.** 2 км/сағ. **1.157.** $a+b-2\sqrt{ab}=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\text{I}0$. **1.158.** 1) 3; 2) 1; 3) $\sqrt{3}-1$; 4) $2-\sqrt{2}$. **1.159.** 2) $\sqrt{3}\left(\sqrt{2}+3-\sqrt{6}\right)$; 6) $\left(n+\sqrt{m}\right)\left(m+\sqrt{n}\right)$. **1.160.** 1)$x\leqslant 0$; 2) (−∞; +∞); 3) ∅; 4) $m\leqslant 0,5$; 5) (−∞; +∞); 6) $a\leqslant 0,5$. **1.161.** 1) 128; 2) 108; 4) $1\frac{4}{7}$. **1.162.** 3) $\sqrt{\frac{a}{b}}$; 4) 1. **1.163.** 1) $8\sqrt{3}$; 2) $8a^2\sqrt{a}$; 3) $4\sqrt{10}$; 4) $2\sqrt{2}$. **1.164.** 1) 5; 2) 1. **1.165.** 1) $\sqrt{6}+1$; 2) $\sqrt{6}-1$; 3) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$; 4) $2+\sqrt{3}$; 5) 6) $2\left(\sqrt{3}+1\right)$. **1.166.** 1) $\sqrt{x+3}+2$. **1.167.** 2) $3+\sqrt{5+\sqrt{8}}<3+2\sqrt{2}=\left(1+\sqrt{2}=\left(1+\sqrt{2}\right)^2\right.$. **1.168.** 1) $\sqrt{2x^3y}$. **1.169.** 2) $\sqrt{3}$; 4) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **1.170.** 1) 6; 2) 10. **1.171.** 3) $\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}-5\right)$; 4) $\left(\sqrt{y}-1\right)\left(2\sqrt{y}+3\right)$. **1.175.** 1) 11; 2) 2,2. **1.176.** 1) 7; 2) 9. **1.177.** 1) $\frac{m^2+n^2}{2mn}$; 2) $\frac{m^2n^2+1}{2mn}$.

2-бөлім. Квадрат теңдеулер

2.2. 5) $b=0$; 6) $b=c=0$. **2.3.** 3) $x^2-8x=0$; 6) $4x^2-5x+1=0$. **2.4.** 2) x^2+ $+20x+4=0$. **2.5.** 1) ±8; 4) $\pm\sqrt{3}$; 6) ±5; 8) $\pm\frac{4}{3}$. **2.6.** 2) 0; −1,4;

5) 0; 4. **2.7.** 1) $\varnothing$; 2) ± 2; 3) 0; 4) 0; $\frac{1}{3}$; 5) $\varnothing$; 6) $\varnothing$. **2.8.** 3) 0; 1,2; 4) $\pm\sqrt{3}$; 8) 0; -2. **2.9.** 2) $5x^2+2x=0$; 5) $x^2-72x+27=0$. **2.10.** 1) ± 5; 2)$\pm\frac{5}{6}$; 3) $\pm 0,6$; 6) ± 1. **2.11.** 1) 0; $-\frac{14}{9}$; 2) 0; $\frac{19}{7}$; 3) 0; $\frac{20}{17}$; 4) 0; $\frac{1}{48}$. **2.12.** 1) -5; 9; 2) $-\frac{7}{3}$; $-\frac{2}{3}$; 3) $-\frac{5}{3}$; $-0,5$; 4) -1; $\frac{1}{3}$. **2.13.** 1) 0; -17; 2) 0; -4. **2.14.** 0; 2. **2.15.** 2; 3. **2.16.** 3 м, 15 м. **2.17.** 12 см; 60 см. **2.18.** 1) ± 2; 2) ± 4; 3) ± 4; 4) $-2\pm\sqrt{6}$. **2.19*.** 1) 0; ± 3; 3) 0; $\pm 0,8$; 4) 0; 1; 6) 0; 3. **2.20*.** 1) 0; ± 5; 2) 1; 3) $-\frac{1}{3}$; 4) $\frac{1}{3}$; 5) $\pm\frac{4}{3}$; 6) $\varnothing$. **2.21*.** 1) 0; 5; 2) 2. **2.22.** 1) $ax^2+bx=0$; 2) $ax^2+c=0$ $(ac<0)$; 3) $ax^2=0$. **2.24.** 1) -3; 2) ± 3. **2.25.** 1 сағ. **2.26.** 3) $3-2\sqrt{2}$; 4) $\frac{\sqrt{17}+\sqrt{8}}{3}$. **2.27.** 1) 4; 2) -4; 3) 1. **2.28.** $\begin{cases} y \text{ Ј } x+2, \\ y \text{ І } -0,5x+2. \end{cases}$

2.29. 1) 2; 3; 6) $-0,2$; 2; 7) -4; 5; 8) $x_1=x_2=0,25$. **2.30.** 2) -2; 12; **2.31.** 3) $x_1=x_2=1$. **2.32.** 1) -1; $-0,5$; 2) $\varnothing$; 3) $-0,5$; 4) -6; 1. **2.33.** 1) $-\frac{1}{7}$; $\frac{1}{2}$; 2)$\varnothing$; 3) -6; 2,5; 6) $\frac{5}{3}$; 7) $\frac{1}{9}$; 8) 19; -8. **2.34.** 1) 2; $\frac{8}{3}$; 2) -10; 8; 3) -1; $\frac{37}{15}$; 4) 0,2; 1; 5) 3,5; 5,5; 6) -1; 23. **2.35.** 2) $5\pm 5\sqrt{2}$; 4) -6; 14; 5) -9; 3. **2.36.** 1) 0; 1; 2) 0; 9; 3) 0; $\frac{2}{3}$; 4) $\pm\sqrt{1,5}$; 5) $\pm\sqrt{4,5}$; 6) 1; 10. **2.37.** 1) $x^2-3x+2=0$; 2) $x^2-9=0$; 3) $x^2+6x-40=0$; 4) $x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}=0$. **2.38.** 1) -8; 3; 2) 1,75; 4; 3) -91; 87; 4) -59; 53. **2.39.** 1) 0,2; 0,4; 2) -7; 5; 3) $-0,2$; 1,8; 4) $\varnothing$; 5) 25; 6) -9; 3. **2.40.** 1) 7; 2) -5; 2; 3) 0,6; 2; 4) $-\frac{3}{4}$; 2,5. **2.41.** 1) $-0,6$; $-0,4$; 2) $-\frac{10}{3}$; -3; 3) $\frac{8}{3}$; 4; 4) $-\frac{25}{11}$; -1. **2.42.** $a=8$. **2.44.** 1) $\frac{a-b}{2}$; $\frac{a+b}{2}$; 2) $\frac{1}{a}$; 2; 5) $\frac{b-a}{a+b}$; -1; 6) $\frac{b}{n}$; $\frac{a}{m}$. **2.45.** 1) $-\frac{m}{2}$; $-\frac{m}{3}$; 2) $-2a$; $2b$; 3) $-\frac{a}{7}$; $\frac{a}{8}$; 4) $-\frac{b}{a}$; $\frac{a}{b}$; 5) $-c$; $\frac{b}{2}$; 6) $\frac{m}{m-n}$; -1. **2.46.** 1) $a=-22$; $a=-10$; 2) $a=2$. **2.47.** $k=-18$. **2.48.** 1) ± 2; ± 3; 2) ± 5; 3) ± 1; $\pm\frac{1}{3}$; 4) ± 5. **2.49.** 1) 2; 4; 2) 0,5; 1,25; 3) 0,2. **2.50.** $n=5$. **2.52.** $n=8$. **2.55.** ± 6. **2.56.** $\frac{1}{3}$; 3. **2.58.** $28x^2-20x+1=0$. **2.59.** $bx^2-2a\sqrt{a}x+a^2=0$. **2.61.** 9. **2.62.** 1) $x\geqslant 2$; 2) $x\notin(-\infty;\ +\infty)$. **2.64.** 1) 2;3; 4) -1; 3; 6) -3; -9. **2.65.** 2) 1; $\sqrt{2}$; 3) $3a$; $4a$; 5) $\sqrt{2}$; $\sqrt{6}$. **2.66.** 1) $x^2+9x+14=0$; 4) $x^2-5x-24=0$; 9) $x^2-\left(\sqrt{2}-\sqrt{7}\right)x-\sqrt{14}=0$. **2.67.** 2) $1\pm\sqrt{10}$; 3) -2; $-1,5$. **2.68.** 2) -1; $-1,4$; 4) -1; -3. **2.69.** 4) $x^2-6x=0$; 9) $x^2-5=0$; 10) $x^2=0$. **2.70.** 1) $x^2\ 6=0$; 2) $x^2-7=0$; 3) $x^2-4x-1=0$; 4) $x^2-6x+6=0$. **2.71.** 1) (2;2); 2) $(-6;8)$; $(8;-6)$; 3) $(-2;5)$; $(5;\ -2)$; 4) $(-2;\ -3)$; $(-3;\ -2)$; 5) $(-6;\ 3)$; $(3;\ -6)$; 6) $(7;\ 8)$; $(8;\ 7)$. **2.72.** 1) 66; 2) -66; 3) -66; 4) 4354. **2.74.** $r=\pm 1$. **2.76.** 1) $p=-2$; $q=1$. **2.77.** $p=0$.

2.79. 2) $m=-3$; 3) $m=-2$. **2.80.** $a=-\frac{8}{25}$. **2.81.** 1) $-\frac{80}{3}$; 2) $-3{,}75$. **2.83.** 14. **2.84.** $\frac{2}{3}$. **2.85.** $+1$. **2.86.** $p=q=0$ немесе $p=1$, $q=-6$. **2.87.** $p=q=0$; $p=1$, $q=-2$. **2.89.** $1{,}25\sqrt{17}$.

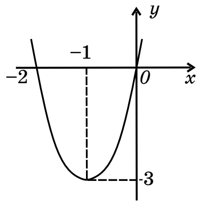
2.95. $a=9$. **2.97.** $0<c<2$. **2.98.** 2) $(x-1)(2x-3)$; 8) $(x+11)(x-2)$; 12) $(x-1)(2x-5)$. **2.99.** 1) $c<0{,}8$; 2) $c=0{,}8$; 3) $c>0{,}8$. **2.100.** 1) $b=-\frac{13}{3}$; 2) $b\in(-\infty;\ -4)\cup(4;\ +\infty)$; 3) $b=\pm 4$; 4) $b\in(-4;\ 4)$. **2.101.** 5) $(8x+25)(x-3)$; 9) $4\cdot\left(y-\frac{7+\sqrt{33}}{8}\right)\left(y-\frac{7-\sqrt{33}}{8}\right)$. **2.102.** 2) $(2x+m)(3x+m)$; 4) $(x+1)((m-n)\times x-m)$. **2.103.** 0. **2.104.** 2. **2.105.** ±1; $\pm\frac{2}{3}$. **2.106.** $k=1$. **2.107.** 1) 6; 10; 2) -2. **2.108.** 3; 4. **2.110.** 1) ±12; 3) $\frac{10\pm2\sqrt{70}}{9}$. **2.111.** 1) 0,5; 1; 2) 3; 7; 3) 0; 4) $\frac{-21\pm\sqrt{297}}{18}$. **2.112.** 1) $(-3;\ 2)$; 2) $(4{,}5)$. **2.113.** 2) $x^2-12x=0$; 5) $x^2-x-1=0$. **2.117.** 1) ±1; ±2; 4) $\varnothing$; 6) $\pm\frac{2}{3}$. **2.118.** 2) $\varnothing$; 5) ±3; $\pm a$; 6) ±2; $\pm3a$. **2.120.** 1) 0; -1; -5; -6; 3) 4; -2. **2.121.** 2) 1; ±2; 4) -1; ±2. **2.122.** 1) -3; 1; 3) -2; -1. **2.123.** 2) $\varnothing$; 4) -3; 2; 6) -6; 1. **2.125.** 1) -3; 1; $-7\pm\sqrt{61}$; 3) $-4{,}5$; 0,1; $\frac{8}{11}$; 2,4. **2.126.** 1) $-\frac{2}{3}$; 2) 0. **2.127.** $x^4-5x^2+6=0$. **2.131.** 1) 0;1; 2) 1; 3) 1; $-0{,}5$; 5) $-0{,}2$; 6) 3; 7) 1,5; 8) $\frac{2}{11}$. **2.132.** 2) -3; 7; 3) 12; 6) 2; $-4{,}5$. **2.133.** 1) $(2{,}5;\ 0)$; 2) $(4;0)$; $(5;0)$; 3) $(3;0)$; 4) $(0;\ 0)$; $(4;\ 0)$. **2.134.** 1) $(-3{,}5;\ -4)$; $(7;\ 17)$. **2.136.** 4) 5. **2.137.** 1) 2; 2) 1; 3) 3; 4) 5; 5) -1; 0,2; 6) 2; 4. **2.138.** 1) $\frac{-3a\pm a\sqrt{3}}{2}$; 4) $-\frac{b}{6}$; $\frac{b}{2}$; 6) -1; $\frac{n+1}{n-1}$. **2.139.** 3) 0; 4) 1; $\frac{2}{3}$. **2.140.** 36 км/сағ; 32 км/сағ. **2.141.** 21. **2.142.** 450 м^3. **2.143.** 13. **2.144.** 4 км/сағ. **2.145.** 40 км/сағ. **2.146.** 3 сағ. **2.147.** 5 км/сағ. **2.148.** 800 км/сағ, 600 км/сағ. **2.149.** 42 сағ, 56 сағ. **2.150.** 28 күн, 21 күн. **2.151.** 18 сағ, 24 сағ. **2.152.** 10 м/с; 70 м. **2.153.** 72 га, 60 га; 108 га; 120 га. **2.154.** 25 кг. **2.155.** 5 км/сағ. **2.156.** $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{12}$. **2.158.** 1) $(1;\ -1)$; 2) $(2;\ 1)$. **2.159.** 1) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$; 2) $2+3\sqrt{5}$. **2.161.** 1) 3; 2) 5; 3) 3; 4) 2; 5) 2; 6) 1; 7) 8; 8) 3. **2.162.** 1) $(2;\ -5)$; 2) $(7;\ 5)$, $(-5;\ -7)$; 3) $\varnothing$; 4) $\left(\sqrt{2{,}5};\ 2-\sqrt{2{,}5}\right)$; $\left(-\sqrt{2{,}5};\ 2+\sqrt{2{,}5}\right)$. **2.163.** 2) $(6;2)$, $(-4;\ -3)$. **2.164.** 1) $\left(-\frac{10}{3};\frac{11}{3}\right)$, $(2;9)$. **2.165.** 3) $(\pm4;\pm7)$, $(\pm7;\pm4)$. **2.166.** 1) $(4;\ 8)$, $(8;\ 4)$. **2.167.** 1) $(2;\ 2)$. **2.168.** 1) $(4;\ 9)$, $(9;4)$. **2.169.** 1) $(\pm20;\ \pm5)$; 2) $\varnothing$. **2.170.** 1) $(1;\ 0)$, $(0;\ 1)$; 3) $(2;\ 0)$, $(0;\ -2)$. **2.171.** 2) $(\pm1;\ \pm2)$, $(\pm3{,}5;\ 0{,}5)$. **2.172.** 2) $(\pm8;\ \pm4)$, $(\pm7;\ \pm1)$.

2.173. 1) $(-1;\ -1)$, $(-1;\ 2)$, $(2;\ -1)$. **2.174.** 1) $a = \pm 6$; 2) $a = \pm 2$. **2.175.** 2) $5;\ -8$; 4) $-2;\ 2{,}75$. **2.176.** 3) $\sqrt{2};\ 2\sqrt{2}$; 5) $1-\sqrt{7};\ 2+\sqrt{7}$. **2.177.** 2) $-1{,}75;\ 1$. **2.178.** 1) $-c;\ 2c$; 2) $-6a;\ a$; 3) $\frac{1}{a};\ 1$; 4) $\frac{1-a}{1+a};\ 1$. **2.179.** 1) $a=-b$ не $a=4b$. **2.180.** $\frac{a}{b}=-\frac{1}{3}$ не $\frac{a}{b}=3$. **2.182.** 3) $\pm 2\sqrt{2};\ -1\pm\sqrt{3}$; 4) $1;\ 1\frac{2}{3};-1;\ 2\frac{1}{3}$. **2.183.** 2) -2; 4) -8. **2.185.** 1) $a=-1$. **2.186.** $k=3$ не $k=4$. **2.187.** 5%. **2.188.** 32 оқушы. **2.189.** 1) $-4;\ 3$. **2.190.** 1) $(\pm 2;\ -1)$; 2) $(\pm 1;\ \pm 1)$.

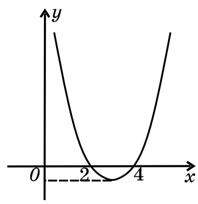
3-бөлім. Квадраттық функция

3.3. 1) 9; 2) 2; 3) -1; 4) 2; 5) 5. **3.4.** 3) $(-1;\ 0)$; $(2;\ 0)$; 4) $\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2};1\right)$; 5) ондай нүкте жоқ. **3.7.** 1) 4-сурет; 4) 5-сурет. **3.9.** 2) x^2-4x+3; 3) $-x^2-6x-5$. **3.10.** 1) $2x^2+1$; 3) $-x^2+4x$. **3.11.** $p\in(-1;1)$. **3.12.** $a=1$. **3.18.** 2) 6-сурет. **3.19.** $a=3$. **3.23*.** $\frac{5}{3}$ м; $\frac{8}{3}$ м; 3м; $\frac{8}{3}$ м $\frac{5}{3}$ м. **3.25.** $(\pm 1;\ \pm\ 2)$. **3.26.** 2) $-2<a-b<0$; 4) $\frac{3}{5}<\frac{a}{b}<1$. **3.31.** 1) $(5;\ 2)$; $x=5$; 2) $(0;\ -1)$; $x=0$; 3) $(-1;\ 3)$, $x=-1$; 4) $(5;0)$, $x=5$. **3.35.** 1) $f(0)=1$; 2) $f(2)=-3$; 5) $f\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{a+1}{a-1}$. **3.36.** 2) 54; 5) $(a-1)^3-10$. **3.38.** 1) $x=0$, $x=-4$; 2) $x=-1$. **3.41.** 1) $(4;+\infty)$; 2) $(-\infty;-1]\cup[1;3)$; 3) $[-1;1]$; 4$[-0{,}2;1]$. **3.42.** 24. **3.43.** 1) 7,5; 2) 1; 3) 1,5. **3.44.** 2) 7-сурет; 3) 8-сурет. **3.45.** 2) $y=2+\frac{5}{x-3}$; 4) $y=-2-\frac{3}{x-2}$. **3.46.** 2) $\left(\frac{1}{3};0\right)$. $(0;\ 0{,}5)$; 3) $(1{,}5;\ 0)$; $(0;-1{,}5)$; 4) $(0;0)$. **3.47.** $k=-5$; $y=2-\frac{5}{x-3}$. **3.48.** 2) -4.

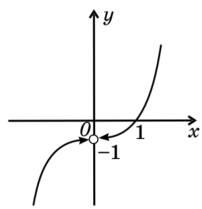
3.50. $S(x)=\begin{cases}\left(\sqrt{2a}-x\right)^2, \frac{\sqrt{2}}{2}a \leq x \leq \sqrt{2a}, \\ a^2-x^2, 0<x<\frac{\sqrt{2}}{2}a.\end{cases}$ **3.55.** $P(x)=4x$.



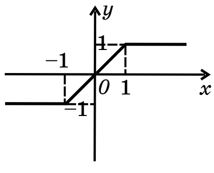
4-сурет



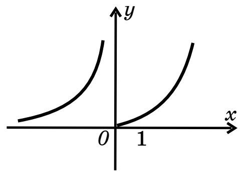
5-сурет



6-сурет



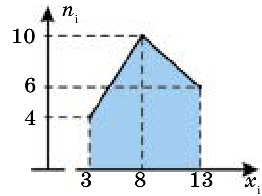
7-сурет



8-сурет

4-бөлім. Статистика элементтері

4.2. Mo=10; Me=10; $\overline{x}$=8,9; (9-сурет).

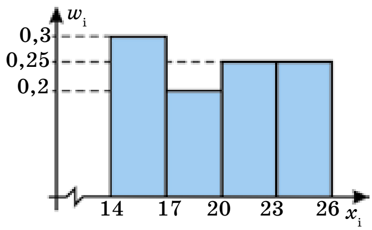


9-сурет

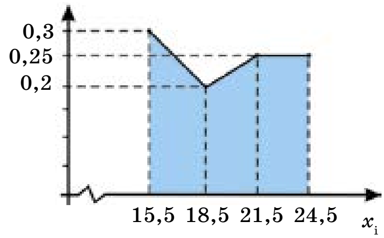
4.8. 10-суретті қараңыз.

4.14. 1)

X*	15,5	18,5	21,5	24,5
w_i	0,3	0,2	0,25	0,25
S	0,	0,5	0,75	1



10-сурет



11-сурет

2) M_o=15,5; M_e=20; $\overline{x}$=14,85; 11-суретті қараңыз. **4.21.** 2) $y_1=1$, $y_2=-9$. **4.23.** $(x-1)(x+1)(x^2+3)$. **4.24.** D=9,81; δ=3,13 (4.1), D=12,25; δ=3,5 (4,2). **4.25.** D≈186,63; δ≈13,66 (4,8). **4.26.** D≈62,49; δ≈7,905 (4,16). **4.27.** $\overline{x}$=1,262; D=0,142; δ=0,377. **4.33.** $x^2-2\sqrt{5}x+2=0$. **4.34.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) 3; 3) $\frac{1}{2}$. **4.35.** $A(3;\ 4)$.

5-бөлім. Теңсіздіктер

5.2. 1) $a>b>4>0$; 3) $b<a<-12<0$. **5.3.** 2) $a-2>b-2$; 6) $-10a<-10b$. **5.4.** 3) $5<a+2<6$; 5) $1<5-a<2$. **5.5.** 3) $-80<-10x<-50$; 4) $17<3x+2<26$. **5.9.** 1) $\frac{1}{8}<\frac{1}{y}<\frac{1}{5}$. **5.12.** 8) $\frac{1}{2}-\frac{c}{c^2+1}=$ $=\frac{(c-1)^2}{c^2+1}\,\mathrm{I}\,0$. **5.14.** 4) $a^2+b^2+2-2(a+b)=(a-1)^2+(b-1)^2\,\mathrm{I}\,0$. **5.15.** 2) $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)<4$ болсын. $\Rightarrow (a+b)\frac{a+b}{ab}-4<0 \Rightarrow \frac{(a+b)^2-4ab}{ab}<0 \Rightarrow \frac{(a-b)^2}{ab}<\ 0$ — қайшылық $\Rightarrow (a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\mathrm{I}\,4$. **5.16.** 4) $1-a=b+c\,\mathrm{I}\,2\sqrt{bc}$; $1-b\,\mathrm{I}\,2\sqrt{ac}$; $1-c\,\mathrm{I}\,2\sqrt{ab} \Rightarrow (1-a)(1-b)(1-c)\,\mathrm{I}\,8abc$. **5.17.** 5) $\sqrt{23}-\sqrt{11}=\frac{12}{\sqrt{23}+\sqrt{11}}<\frac{12}{\sqrt{22}+\sqrt{10}}=\sqrt{22}-\sqrt{10}$. **5.18.** 2) $a^2+1=|a|^2+1\,\mathrm{I}\,2\sqrt{|a|^2}=2|a|$.

5.20. $\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}-\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{\sqrt{ab}}\,\mathrm{I}\,0$. **5.24.** $a+\frac{1}{2}>2\ (a\neq 1)$ қолдану керек.

5.27. $\begin{cases} a<b+c, \\ b<a+c, \\ c<a+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2<ab+ac, \\ b^2<ab+bc, \\ c^2<ac+bc \end{cases} \Rightarrow a^2+b^2+c^2<2(ab+ac+bc)$. **5.29.** 1) $(4;+\infty)$; 2) $(17;+\infty)$.

5.30. 2 км/сағ. **5.31.** $b\in(+\infty;\ -12)\cup(12;\ +\infty)$. **5.32.** 1) $(-3;\ 3)$; 4 $(-\infty;\ -0{,}4]\cup$ $\cup(1{,}2;\ +\infty)$; 5) $(-\infty;\ +\infty)$. **5.33.** 3) $(-\infty;\ -4)\cup(0{,}2;\ +\infty)$; 6) $(-\infty;\ -3{,}5]\cup$ $\cup\ [0{,}6;\ +\infty)$. **5.34.** 2) $(-\infty;\ -1]\cup[4;\ +\infty)$; 5) $[-2;\ 3]$. **5.35.** 2) $(-\infty;\ +\infty)$; 3) $\varnothing$; 5) $[-3;\ -1{,}5]$; 6) $(-12;\ 5)$. **5.36.** 1) 1, 2, 3,4, 5; 2) -3, -2, -1, 0; 3) -2; -1, 0; 1; 2; 4) 0; ±1; ±2. **5.37.** 3) $[2;\ 5]$ 4) $[-0{,}75;\ 1{,}5]$. **5.38.** 3) $[3;\ +\infty]$; 4) $(-\infty;\ 2)$; 5) $(1;\ 3)$; 6) $(1;\ 3)$. **5.41.** 1) $\left(-7;-\dfrac{1}{4}\right)$; 3) $(-\infty;\ +\infty)$; 6) $x\neq0{,}25$. **5.42.** 2) $(5;\ +\infty)$; 3) $[-1;\ +\infty)$. **5.43.** 1) $(-\infty;\ -2)\cup$ $\cup(0{,}5;\ 2)$; 4) $\left(-u\ ;-\dfrac{7}{3}\right)2\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{2}\right]$. **5.44.** 1) $[-4;\ 4]$; 2) $(-\infty;\ -7]\cup[9;\ +\infty)$; 3) $(-\infty;\ +\infty)$; 4) $[-9;\ 4]$. **5.47.** 1) $(1;5)$; 3) $[-1;\ 0]$. **5.48.** 1) $(1;\ 7)$; 2) $(-2{,}5;\ 2)$. **5.49.** 3) $\left[-\sqrt{3};1\right)2\left(1;\sqrt{3}\right]$; 5) $(-\infty;\ 3)\cup(-3;\ 0]\cup[4;\ +\infty)$. **5.50.** 1) $(-2;\ 0)$; 2) $(0{,}75;\ +\infty)$; 3) $\varnothing$; 4) $\varnothing$; 5) $[-5;\ 0]$; 6) $\varnothing$. **5.52.** 1) $[0;\ 2]$; 3) $[0;3]$. **5.53.** $\varnothing$. **5.54.** $\varnothing$. **5.55.** $x\in(-\infty;\ +\infty)$. **5.56.** $[4;\ 6]$. **5.57.** 1) $(-3;\ 1)$; 2) $(1;\ 4)$. **5.58.** 1) Мәндес емес; 2) мәндес. **5.59.** 1) $a\in(-\infty;\ 0)$; 2) $a\in(-\infty;\ 4)$; 3) $a\in(0;\ +\infty)$; 4) $a\in[16;\ +\infty)$. **5.60.** 1) $a\in\left(-2\sqrt{7};2\sqrt{7}\right)$; 2) $a\in(0;\ 4)$. **5.61.** 1) $(-\infty;\ 4)\cup(4;\ +\infty)$; 2) $(-u\ ;0)2\left(\dfrac{4}{3};+u\ \right)$. **5.62.** 1) $(1;\ +\infty)$; 2) $(-\infty;\ 3)$; 3) $(-\infty;\ 0{,}75]$; 4) $\left[-\dfrac{7}{3};1\right]$. **5.64.** 1) $\varnothing$; 2) $\left(-\dfrac{53}{2};-\dfrac{7}{16}\right)$; 3) $\left(\dfrac{4}{7};\dfrac{8}{3}\right)$. **5.65.** 1) 2; 2) 6. **5.66.** 22 немесе 76. **5.67.** 1) $[-1;\ 1]$; 4) $(-\infty;\ -1]\cup[3;\ +\infty)$; 5) $[-1;\ 6]$. **5.68.** 2) $(-\infty;\ 2)\cup(10;\ +\infty)$; 3) $[-7;\ 3)\cup(3;\ +\infty)$. **5.69.** 1) $[0;\ 3)\cup(3;\ 6]$; 4) $(-4;\ 3)$. **5.70.** 2) $[-11;\ -5)$; 3) $(0;\ 6)$. **5.71.** 1) $(-2;\ -1)\cup(2;\ +\infty)$; 4) $(-1{,}5;\ 0)\cup(1;\ 2)$. **5.72.** 2) $(-1;\ 0{,}5)$; 3) $(-3;\ -2)$. **5.73.** 1) $(-2;\ -1)\cup(-1;\ 1)\cup(3;\ +\infty)$; 4) $[-2;\ -1)\cup\{0\}\cup[2;\ 3)\cup(3;\ +\infty)$. **5.74.** 2) $(-7;\ -4]\cup\{2\}$; 3) $(-u\ ;-1)2\left(-1;-\dfrac{1}{3}\right]2\left[1;+u\ \right)$. **5.75.** 1) $(-3;-2)2\left(-\dfrac{1}{3};2\right)$; 4) $(-\infty;\ 0{,}5]\cup\{1{,}5\}\cup(2{,}5;\ +\infty)$. **5.76.** 2) $(0;\ 1)\cap(2;\ 4)$; 3) $(-2;\ -1{,}25]\cup(-1;\ 1)\cup[5;\ +\infty)$. **5.77.** 1) $(-\infty;\ -1{,}5)\cup(-1;\ 1)\cup(4;\ 6)$; 4) $\left(-u\ ;-\dfrac{3}{7}\right)2$ $2\left(1;3\right)2\left(3;5\right)$. **5.78.** 2) $(-u\ ;+2)2\left(2;\dfrac{7}{3}\right)2\left(\dfrac{7}{3};+u\ \right)$; 3) $x\neq-4$; $x\neq-3$; $x\neq-2$. **5.79.** 1) $[-1;\ 5)\cup\{8\}$; 2) $(-5;\ -4)\cup(0;\ 2)\cup(2;\ +\infty)$. **5.80.** 2) $(-u\ ;-2)2\left(-2;1-\sqrt{2}\right)2\left(1+\sqrt{2};2{,}5\right)$. **5.81.** 2) $[0;0{,}5)\cup(0{,}5;+\infty)$. **5.82.** 1) 21; 2) -27. **5.83.** 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10. **5.84.** $[13;+\infty)$. **5.85.** 1) $(1;\ 2)\cup(2;\ 7)$; 2) $(-\infty;\ -1)\cup(5;\ +\infty)$. **5.86.** 1) $[-0{,}5;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$; 2) $(1{,}25;\ 2)\cup$ $\cup(2;\ +\infty)$. **5.87.** 1) $(-9;\ 4)\cup(4;\ 5)$; 2) $(0;\ 0{,}5)$. **5.88.** 1) $(4;\ +\infty)$; 2) $(-\infty;\ -3)\cup$ $\cup(3;\ 4]$. **5.89.** 1) $(-5;\ 1)\cup\{2\}$. **5.90.** $(-\infty;\ -1]\cup(1;\ 3]$. **5.92.** 1) $[4;\ +\infty)$; 2) $(-\infty;\ 0]\cup[4;\ +\infty)$.

6-бөлім. Нақты сандар.

6.13. $10a + b = 3a + 3b \Rightarrow 7a = 2b \Rightarrow a = 2; b = 7 \Rightarrow 27 = \overline{ab}$. **6.14.** 36. **6.15.** 15; 24. **6.16.** 3, 4, 5, 6, 7. **6.19.** 3) $67^8 = (67^4)^2$ саны 1-мен аяқталады. **6.20.** 360; 855. **6.23.** 31, 43, 79, 67, 83. **6.30.** 240. **6.33.** $a = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}$ болсын, мұнда p_1, $p_2, \ldots,$ p_k — жай сандар. a санының әрбір бөлгіші $p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}, (a\,\mathrm{J}\,a_i\,\mathrm{J}\,n_i, i = 1, 2, \ldots, k)$ түрінде жазылады. α_i әртүрлі n_i+1 мәндер қабылдайды. Олай болса, a санының әртүрлі $(n_1+1)(n_2+1)\ldots(n_k+1)$ бөлгіштері бар. **6.35*.** Егер $a = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2}$ болса, онда $\tau\left(a^2\right) = \tau\left(p_1^{2n_1} \cdot p_2^{2n_2}\right) = (2n_1+1)(2n_2+1) = 81$. Сонымен, 81-ді екі көбейткішке жіктеу керек: $2n_1+1=1$; $2n_2+1=81$; $2n_1+1=3$; $2n_2+1=27$; $2n_1+1=9$; $2n_2+1=9$. $n_1 \neq 0$ болғандықтан, $2n_1+1=1$ болуы мүмкін емес. Онда $n_1=1$, $n_2=13$ немесе $n_1=4$, $n_2=4$. Сондықтан $\tau\left(a^3\right) = \tau\left(p_1^{3n_1} \cdot p_2^{3n_2}\right) = (3n_1+1)(3n_2+1) = 160$ немесе $\tau(a^3) = (3n_1+1)(3n_2+1) = 13 \cdot 13 = 169$. **6.37*.** $p=3$, $q=2$. **6.43.** 2) 15; 5) 4. **6.44.** 1) 2; 2) 4; 3) 3; 4) 33. **6.45.** 1) 2; 2) 56; 3) 18; 4) 4. **6.51.** 1) 1; 2) 1; 3) 4; 4) 0. **6.53.** $3^3 \cdot 37$. **6.55.** 1) a=55, b=65; 2) a=15, b=35 немесе a=35, b=15; 3) a=14, b=21 немесе a=21, b=14; 4) a=15, b=25 немесе a=25, b=15; 5) a=15, b=183 немесе a=183, b=15; 6) a=51, b=42; 7) a=28, b=32; 8) a=27, b=42; 9) a=65, b=78. **6.58.** 3, 7, 9. **6.59.** 5,7, 11. **6.60.** $(u_1 + 1)(u_2 + 1) \ldots (u_n + 1)$. **6.33**-есепті қарандар. **6.61.** (n^2-2n+2) (n^2+2n+1). **6.62.** 29 м 25 см. **6.63.** 1 сағат. **6.64.** а) 12 күн, жұма; ә) 15 күн, дүйсенбі; б) 20 күн, сенбі; в) 60 күн, бейсенбі. **6.71.** 1) 6; 2) 196; 3) 1920; 4) 31; 5) 1478; 6) 2. **6.73.** 2 есе. **6.74.** 1) 19; 2) 4; 3) 10; 4) 60. **6.75.** 1) 2 см; 2) 5 см; 3) 100 м; 4) 200 м. **6.79.** $n = kl + r$, $m = kp + r \Rightarrow n - m = k(l-p) \vdots K$. **6.85*.** Санның квадратын 5-ке бөлгенде 0, 1, 4 қалдықтары қалатындығын қолданыңдар. **6.90.** 99 «тор», 100 «қоян» бар. Табылады. **6.92.** 6. **6.93.** n_1, n_2, ..., n_{100} берілген сандар болсын. n_1; n_1+n_2; $n_1+n_2+n_3$; ...; $n_1+n_2+\ldots+n_{100}$ қосындыларын қарастырамыз. Егер осы қосындылардың бірі 100-ге бөлінсе, онда есеп шешіледі. Егер бірде-біреуі бөлінбесе, онда 100-ге бөлгенде қалдықтары бірдей екі қосынды табылады және олардың айырмасы 100-ге бөлінеді. **6.94.** Табылады, тіпті 50-ден аспайтын және бірі екіншісінен тура 2 есе үлкен болмайтын 33 сан табылады. **6.95.** $801 = 25 \cdot 32 + 1$. **6.96.** 2003; 20032003,..., $\underbrace{20032003\ldots2003}_{2004}$ сандарын қарастырыңдар. **6.97.** 1; 11; 111; ...; $\underbrace{11\ldots1}_{n}$ сандарын қарастырыңдар. **6.98*.** 2004; 20042004;...; $\underbrace{20042004\ldots2004}_{2003}$ сандарын қарастырыңдар. **6.99*.** 3; 3^2; 3^3; ...; 3^{10^m} сандарын қарастырыңдар. $\Rightarrow 3^n - 3^m \vdots 10^4 \Rightarrow 3^m(3^{n-m} - 1) = 10^4 \times K$. $(3^m, 10^4) = 1$ болғандықтан, $3^{n-m} - 1 = 10^4 \cdot l \Rightarrow 3^{n-m} = 10^4 \cdot l + 1$, $l \in N$. **6.102*.** Бірлік квадратты қабырғасы $\dfrac{1}{5}$-ге тең болатын 25 кішкене квадраттарға бөліңдер.

АТАУ КӨРСЕТКІШІ

МАЗМҰНЫ

6*-бөлім. Нақты сандар

Ескерту: Мұнда (*) белгісімен міндетті емес (қосымша) тақырыптар белгіленген.

Оқу басылымы

Шыныбеков Әбдухали Насырұлы
Шыныбеков Данияр Әбдухалиұлы
Жұмабаев Ринат Нұрланұлы

АЛГЕБРА

Жалпы білім беретін мектептің 8-сыныбына арналған оқулық

Редакторы *Ж. Баданова*
Көркемдеуші редакторы *А. Қапсаланова*
Техникалық редакторы *Ү. Рысалиева*
Корректоры *Г. Нұрғазиева*
Компьютерде беттеген *А. Чагимкулова*

ИБ №080

Теруге 17.01.2018 берілді. Басуға 12.06.2018 қол қойылды. Пішімі 70х90 $^1/_{16}$. Офсеттік қағаз.
Әріп түрі «мектептік». Шартты баспа табағы 14,04. Есептік баспа табағы 7,72.
Таралымы 50000 дана. Тапсырыс № 3457.

«Атамұра» корпорациясы» ЖШС, 050000, Алматы қаласы, Абылай хан даңғылы, 75.

Қазақстан Республикасы «Атамұра» корпорациясы» ЖШС-нің
Полиграфкомбинаты, 050002, Алматы қаласы, М. Мақатаев көшесі, 41