

Г. Н. Солтан, А. Е. Солтан, А. Ж. Жумадилова

АЛГЕБРА

*Жалпы білім беретін мектептің
8-сынып оқушыларына арналған*

ОҚУЛЫҚ



Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігі ұсынған



КӨКШЕТАУ

ӘОЖ 373.167.1
КБЖ 22.14я72
С64

Солтан Г. Н. және т. б.

С64 Алгебра: жалпы білім беретін мектептің 8-сынып оқушыларына арналған оқулық + CD / Г. Н. Солтан, А. Е. Солтан, А. Ж. Жумадилова. – Көкшетау: Келешек-2030, 2018. – 216 б.: ил.

ISBN 978-601-317-342-9

Оқулықтың электрондық нұсқасы: <http://keleshek-2030.kz/books/algbk.php>

ӘОЖ 373.167.1
КБЖ 22.14я72

ISBN 978-601-317-342-9

© «Келешек-2030» ЖШС, 2018

МАЗМУНЫ

Алғы сөз.....	5
7-сыныптағы алгебра курсың қайталау.....	7
I. Квадрат түбірлер және иррационал өрнектер	16
1. Рационал сандар.....	17
2. Иррационал және нақты сандар.....	20
3. Квадрат түбірлер.....	27
4. Квадрат түбірлердің қасиеттері.....	35
5. Квадрат түбірі бар өрнектерді түрлендіру.....	44
6. $y = \sqrt{x}$ функциясы, оның қасиеттері және графигі.....	51
7. «Квадрат түбірлер және иррационал өрнектер» тақырыбын қайталауға арналған жаттығулар.....	56
II. Квадрат теңдеулер	61
8. Квадрат теңдеу. Толымсыз квадрат теңдеулер.....	62
9. Квадрат теңдеу түбірлерінің формулалары.....	67
10. Виет теоремасы.....	73
11. Квадрат үшмүшені көбейткіштерге жіктеу.....	78
12. Квадрат теңдеулерді пайдаланып, мәтінді есептерді шешу.....	82
13. Квадрат теңдеулерге келтірілетін теңдеулер.....	85
14. Бүтін және бөлшек-рационал теңдеулер.....	90
15. Бөлшек-рационал теңдеулерді пайдаланып, мәтінді есептерді шешу.....	96
16. «Квадрат теңдеулер» тақырыбын қайталауға арналған жаттығулар.....	100
III. Квадраттық функция	105
17. Квадраттық функцияның анықтамасы. $y = ax^2 + n$ функциясы және оның графигі.....	106
18. $y = a(x - m)^2$ функциясы және оның графигі.....	112
19. $y = a(x - m)^2 + n$ функциясы және оның графигі.....	117
20. $y = ax^2 + bx + c$ функциясы және оның графигі.....	122

21. Квадраттық функцияның қасиеттерін пайдаланып, мәтінді есептерді шешу	130
22. «Квадраттық функция» тақырыбын қайталауға арналған жаттығулар	134
IV. Статистика элементтері	137
23. Жиілік кестелері, алқаптары және гистограммалары	138
24. Дисперсия және стандартты ауытқу	144
25. «Статистика элементтері» тақырыбын қайталауға арналған жаттығулар	149
V. Теңсіздіктер.....	155
26. Квадрат теңсіздіктер	156
27. Теңсіздіктерді интервал әдісімен шешу	163
28. Теңсіздіктерді пайдаланып, мәтінді есептерді шешу.....	171
29. Бір айнымалысы бар сызықтық емес теңсіздіктер жүйесі....	175
30. Теңсіздіктер жүйесін пайдаланып, мәтінді есептерді шешу	182
31. «Теңсіздіктер» тақырыбын қайталауға берілген жаттығулар	185
8-сыныптағы алгебра курсың қайталау.....	191
Жауаптар мен нұсқаулар	196
Пәндік көрсеткіш	212
Қосымша	214
10-нан 99-ға дейінгі натурал сан квадраттарының кестесі	214
Қосымша әдебиет	215

АЛҒЫ СӨЗ

Құрметті оқушылар! Осы оқу жылында сендер «Алгебра» пәнін оқуды жалғастырасыңдар. Сандар жиыны, функциялар, теңдеулер мен теңсіздіктерді шешу әдістері туралы білімдерінді кеңейтесіңдер. Бұл оқулыққа алгебраның «Квадрат түбірлер мен иррационал өрнектер», «Квадрат теңдеулер», «Квадраттық функция», «Теңсіздіктер» тараулары, статистика элементтері туралы тарау, сондай-ақ 7 және 8-сыныптың алгебра курсың қайталауға арналған материалдар енгізілген.

Оқулықта теория кеңінен баяндалып, күрделілігі әртүрлі жаттығулар мен мәтінді есептерді шығару тәсілдері (1) берілген. Теориялық білімнің қаншалықты игерілгенін тексеру үшін бақылау сұрақтары (2) бар. Анықтамалар, формулалар, алгебралық ережелер арнайы қаріппен (3) ерекшеленген.

1. Рационал сандар

Рационал сандар, яғни $\frac{p}{q}$ түрінде көрсетуге болатын сандарды, мұндағы $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, көрсетуі оңай болатын немесе жазылуы арқылы оңай болатын түрінде жазуға болады. Мысалы:

$$\frac{3}{5} = 0,6; \frac{1}{4} = 0,25; \frac{7}{11} = 0,63\overline{63}; \frac{1}{2} = 0,5; \frac{23}{12} = 1,91\overline{6}$$

Теорема Егер көрсеткішінің n бөлшегінің бөлшегінің m -іне 2 және 5-ке бөлсе жай бөлшегі болады, онда ондай бөлшекті онестуді оңай болатын түрінде жазуға болады.

Дәлелдеуі $10 = 2 \cdot 5$ болатын, мұндағы 4-ші дәрежеде:

$$\frac{10^m}{10^n} = \frac{2^m \cdot 5^m}{2^n \cdot 5^n} = \frac{2^{m-n} \cdot 5^m}{2^n \cdot 5^n} = \frac{2^{m-n}}{2^n} \cdot \frac{5^m}{5^n} = \frac{1}{10^n}$$

мынадай $10^m = 2^m \cdot 5^m$ болатын.

1-ші бөлшекті жазуға оңай болатын қарастырылғандықтан:

$$\frac{1}{10^n} = \frac{1}{2^n \cdot 5^n} = \frac{1 \cdot 2^n}{2^n \cdot 5^n} = \frac{2^n}{10^n} = 0,2^n$$

$$\frac{201}{100} = \frac{201}{2^2 \cdot 5^2} = \frac{201 \cdot 2}{2^2 \cdot 5^2} = \frac{402}{100} = 4,02$$

Егер көрсеткішінің бөлшегінің бөлшегі 2 мен 5-ке жете жай сандар бөлшегі бір бола, онда ондай бөлшекті онестуді арқылы оңай болатын түрінде жазуға болады. Оған мысал ретінде:

$$\frac{1}{10} = \frac{1}{2 \cdot 5} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 5} = \frac{2}{10} = 0,2$$

Первый раз мы не можем найти «правильный» знаменатель, но будем считать, что он равен 10. Тогда получим: $\frac{1}{10} = \frac{1}{2 \cdot 5} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 5} = \frac{2}{10} = 0,2$.

Следовательно, мы можем рациональные числа записать в виде десятичных дробей.

Егер теңдеуді де дәлел: негізгі теңсіздікті арқылы өзінің бөлшегінің жай бөлшегі түрінде жазуға болады.

Мысалы, $4,42(7)$ санды жай бөлшегі түрінде жазу үшін оны x деп белгілесек, $x = 4,42(7)$ теңдігінен екі жағын үшкірмен көбейтсек:

ондай алгебра қалыптастырған 10 -ға екі жағын көбейтсек, мынадай теңдік: $10x = 42,7$, яғни $100x = 427$.

$$\text{Сонда } 100x - 10x = 427(7) - 42(7) \text{ бұдан } x = \frac{385}{90} = \frac{77}{18}$$

СУРАҚТАР

1. Қандай сандар рационал сан деп аталады?
2. Қай теңдеу рационал санды жай бөлшегі түрінде көрсетуге болады? Мысалдар келтіріңдер.

ЖАТТЫҒУЛАР

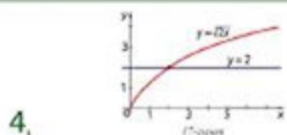
- 1-Ашық**
26. Мына бөлшектің сәйкесінше онестуді оңай болатын түрінде көрсетуге болады:
- а) $\frac{3}{5}$; б) $\frac{12}{25}$; в) $\frac{15}{344}$; г) $\frac{12}{109}$; д) $\frac{1}{40}$.
27. Берілген жай бөлшегінен тең болатын ондай бөлшекті табыңдар:
- а) $\frac{7}{45}$; б) $\frac{8}{5}$; в) $\frac{1}{11}$; г) $\frac{3}{625}$; д) $-\frac{8}{7}$.

2-Ашық

28. Первостепенное уравнение жай бөлшегіне жазыңдар:
- а) $6(x)$; б) $2(7)$; в) $4(2)$; г) $0,1(2)$; д) $2,5(5)$.
29. Сандарды салыстырыңдар:
- а) $3,6$ және $\frac{22}{7}$; б) $2,6(1)$ және $2,6(4)$;
- в) $0,65$ және $0,6(5)$; г) $\frac{2}{3}$ және $0,666(6)$.
30. $\frac{2}{14}$ мен $\frac{3}{22}$ бөлшектерінің орташа арифметик бөлшегі 21-ге тең болатын жай бөлшекті табыңдар.
31. Адамның өмір бойына көбейткісі 550-ге тең болатын және онестуді оңай болатын арақатынаста көрсетілетін бөлшекті табыңдар.

Практикалық біліктілік пен дағдыны қалыптастыру үшін оқулықта күрделілігі бойынша А, В, С деңгейлеріне бөлінген әртүрлі жаттығулар қамтылған. Әр тармақтың соңында қызықты есептер, шығармашылық си-

паттағы жаттығулар берілген. Оқу материалын, соның ішінде 7-сыныптағы алгебра курсың қайталауға арналған тапсырмалар жасыл түспен ерекшеленіп, түрлі түсті жиектемемен (4) белгіленген.



4

194. Оқулықпен жұмыс:

а) $\sqrt{a+2} + \sqrt{a+b}$;

б) $\frac{1}{\sqrt{2a} + \sqrt{2a+1}} + \frac{1}{\sqrt{2a} - \sqrt{2a+1}}$;

в) $\sqrt{a^2 - c^2} - \sqrt{b^2 - c^2} = \sqrt{a^2 - b^2}$;

г) $\left(\frac{a}{ab-a} + \frac{b}{ab+a} \right) \cdot \frac{a+b}{ab}$.

195. Мына өрнектің қайсысы біреуі болды:

а) $2\sqrt{a}$; б) $\sqrt{5ab}$; в) $\sqrt{2ab}$; г) $\sqrt{a^2 \cdot b^2}$.

196. Мына өрнектің қайсысы біреуіне теңсіздік берілді:

а) $\sqrt{16a^2}$; б) $\sqrt{a^2}$;

в) $\sqrt{a^2 + 2a^2}$; г) $\sqrt{a^2 + 2a^2}$, мұндағы $a < 0$?

197. Мына өрнектің қайсысы нөлге тең болды:

а) $2 - \sqrt{5}$; б) $3x - \sqrt{7}$; в) $\sqrt{a} + \sqrt{b}$; г) $x + 2\sqrt{a} + y$.

198. Мына өрнектің қайсысы нөлге теңсіздік берілді:

а) $\sqrt{3 - \sqrt{2}}$; б) $\sqrt{b^2 - 5}$;

в) $\sqrt{a^2 + 1}$; г) $\sqrt{3a^2 + 12a^2 + 9a^2}$.

199. $a^2 + b^2 = 14 + b - \sqrt{2ab}$ және $\sqrt{2ab} = b + \sqrt{2ab}$ теңсіздігі орындалады. Топтастырып, он жағындағы көбейтінділер нөлге тең болуы мүмкін?

С. Аманжол

200. Төмендегі адрис екі:

а) $\sqrt{\frac{3}{5}} + \sqrt{\frac{3}{5}} > \sqrt{\frac{4}{5}}$; б) $\sqrt{3-2\sqrt{2}} + 2 - \sqrt{2} \geq 1$?

в) $\sqrt{5+2\sqrt{6}} + \sqrt{5-2\sqrt{6}} < 4$;

201. Бірінші сандың мәні $\sqrt{3}$ -ге артық, ал екінші сандың $2\sqrt{3}$ -ге артық екенін 25 %-ға $\sqrt{2}$ -ге артық. Осы сандарды табыңдар.

202. Оқулықпен жұмыс:

а) $\sqrt{4+2\sqrt{3}} + \sqrt{4-2\sqrt{3}}$; б) $\sqrt{6+4\sqrt{2}} - \sqrt{6-4\sqrt{2}}$;

в) $\sqrt{11+6\sqrt{2}} + \sqrt{11-6\sqrt{2}}$; г) $\sqrt{3-2\sqrt{2}} \cdot (3 + \sqrt{5}) \cdot (10 - \sqrt{2})$.

203. Дәлелдеңдер: $\sqrt{10+24} + \sqrt{40} + \sqrt{60} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$. Осы теңсіздіктің Буксирин-Артуровский еңбегі (б. 300 т.)

5

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

204. 1А) Сандары осы ретпен жазылған $0,5; \sqrt{11}; \sqrt{25}; 2; \sqrt{0,7}$.

2Б) Екі санды $\left(\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \sqrt{2} - \sqrt{\frac{2}{3}-1} \right)$.

3В) Бірлесіп қабырғалары ұзындықтарына көбейтіндісі $\sqrt{14}$ екенін, ал екі қабырғаның ұзындықтары $\sqrt{10}$ екенін тек біреуіне теңсіздік берілді деп қабылдай отырып табыңдар.

4В) а) мән a -ның барлық мүмкін мәнінде он екі санды $\frac{\sqrt{a^2 - b^2} - b - \sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 - b^2} - b - \sqrt{a^2 - b^2}}$ теңсіздігінің дұрыс болғанын анықтаңдар.

5С) $y = -\sqrt{x} + 4$ функциясының графигін салып, a -нің қандай мәндерінде: 1) $y = 0$; 2) $y > 0$; 3) $y < 0$ болатынын табыңдар.

6

КҮЛ ҚЫЗЫҚТЫ!

Шығарманың аяғындағы екі қабырғаның ұзындықтарына көбейтіндісі $\sqrt{14}$ екенін, ал екі қабырғаның ұзындықтары $\sqrt{10}$ екенін тек біреуіне теңсіздік берілді деп қабылдай отырып табыңдар.

Тараулар бойынша білімдеріңді жүйелеп, жиынтық бағалауға дайындалуларың үшін жеке тармақтарда «Өзіңді тексер!» айдарымен (5) тапсырмалар берілген. Әр тармақтың соңында «Бұл қызықты!» айдарында (6) тарихи мәліметтер ұсынылған.

Оқулықта Қазақстанның көрікті жерлері, қорықтары жайлы материалдар, сонымен қатар ҚР Ұлттық экономика министрлігі Статистика комитетінің мәліметтері пайдаланылған. Қазақстанның көрікті жерлері туралы білімдеріңді ғаламтор арқылы кеңейте аласыңдар.

Кітаптың соңында жаттығулардың жауаптары мен қиын есептердің шешімін табуға арналған нұсқаулар берілген.

Оқулық алгебраны оқып-білуде айнымас серіктерің болсын.

Сәттілік тілейміз!

Авторлар

7-СЫНЫПТАҒЫ АЛГЕБРА КУРСЫН ҚАЙТАЛАУ

Бүтін көрсеткішті дәрежелер

Анықтама	Қасиеттері
$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ көбейткіш}}, n \in \mathbb{N}, n > 1;$ $a^1 = a; a^0 = 1, a \neq 0;$ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}, n \in \mathbb{N}, a \neq 0.$	$a^p \cdot a^k = a^{p+k}, \quad a^p : a^k = a^{p-k},$ $(a^p)^k = a^{p \cdot k}, \quad (ab)^p = a^p \cdot b^p,$ $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}, \text{ мұндағы } a \neq 0, b \neq 0,$ $p \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}.$

Қысқаша көбейту формулалары

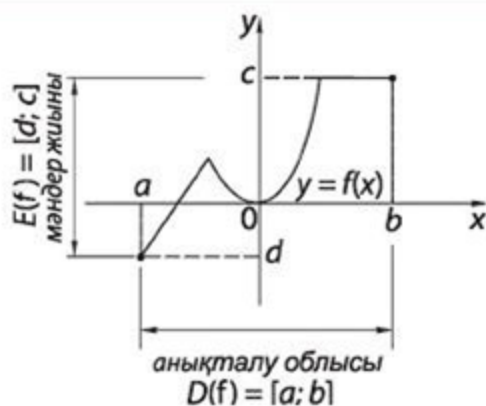
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
---	--

Бүтін көрсеткішті дәреженің қасиеттері мен қысқаша көбейту формулалары тепе-теңдіктер болады. **Тепе-теңдік** – құрамына кіретін барлық айнымалының мүмкін болатын мәндерінде ақиқат болатын теңдік. Ақиқат болатын сандық теңдік те тепе-теңдік болып есептеледі.

Сандар мен натурал көрсеткішті айнымалылар дәрежелерінің көбейтіндісі **бірмүше** деп аталады. Бірмүшелердің алгебралық қосындысы **көпмүше** деп аталады.

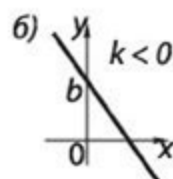
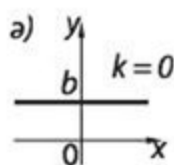
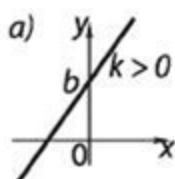
Функциялар және олардың графиктері

Егер x -тің қайсыбір сандар жиынындағы әрбір мәніне y -тің тек бір ғана мәні сәйкес келетін болса, y айнымалысының x айнымалысына тәуелділігі *функция* деп аталады. Тәуелсіз айнымалы x -ті *аргумент* деп атайды.



1-сурет

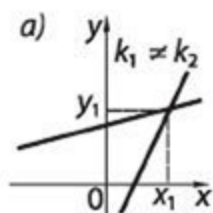
Сызықтық функция: $y = kx + b$
 графигі – түзу



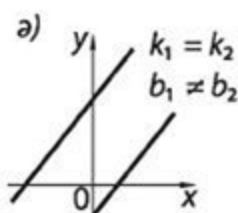
2-сурет

Екі сызықтық теңдеулер жүйесінің шешімі

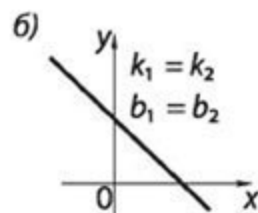
$$\begin{cases} y = k_1x + b_1, \\ y = k_2x + b_2 \end{cases}$$



$(x_1; y_1)$ – бір шешім



шешімі жоқ

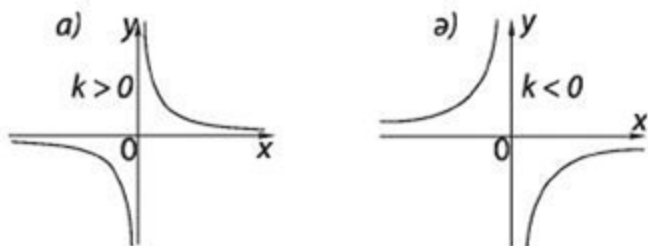


шексіз көп шешім

3-сурет

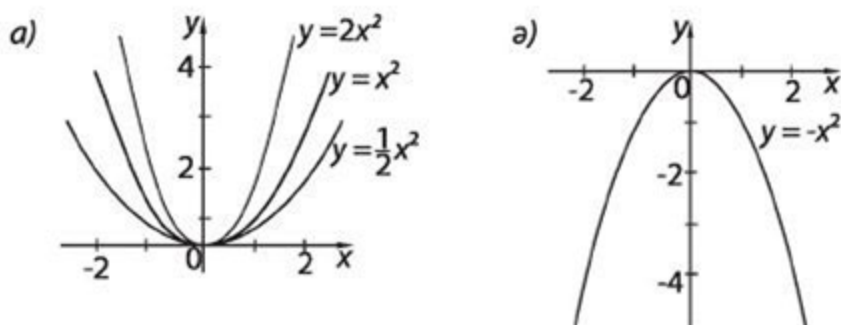
Кері пропорционалдык: $y = \frac{k}{x}$, ($x \neq 0$)

графигі – гипербола



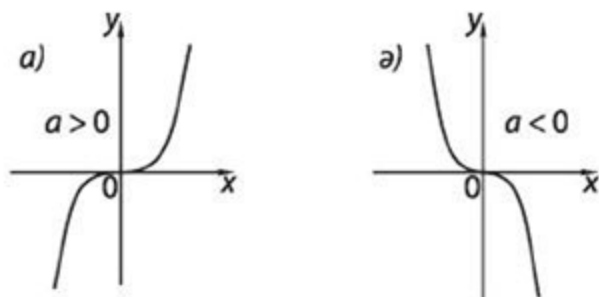
4-сурет

$y = ax^2$ функциясы
графигі – парабола



5-сурет

$y = ax^3$ функциясы
графигі – кубтык парабола



6-сурет

Статистика элементтері

Бас жиынтыққа кіретін әрбір шама **варианта** деп аталады. Өсу ретімен көрсетілген варианттар тізбегі **вариациялық қатар** деп аталады. Оның соңғы және бірінші варианттарының айырымы вариациялық қатардың **құлашы** болады.

Вариациялық қатардың **медианасы**: а) варианттарының саны тақ болса, мысалы, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 , оның ортаңғы варианты болатын x_3 -ке; ә) варианттарының саны жұп болса, мысалы, $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$, $\frac{x_3 + x_4}{2}$ -ке тең болады. Вариациялық қатардың жиі кездесетін варианты оның **модасы** болады.

Таңдамадағы вариантаның қайталану саны оның **абсолютті жиілігі** деп аталады. Егер n объектіні қамтитын бас жиынтықтағы вариантаның абсолюттік жиілігі m -ге тең болса, онда $\frac{m}{n}$ саны оның **салыстырмалы жиілігі** деп аталады.

Төбелерінің координаталары: а) $(x_1; m_1), (x_2; m_2), \dots, (x_n; m_n)$ болатын сынық сызық, мұндағы x_1, x_2, \dots, x_n – варианттар, ал m_1, m_2, \dots, m_n – олардың абсолютті жиіліктері, **абсолютті жиіліктер алқабы** деп; ә) $(x_1; f_1), (x_2; f_2), \dots, (x_n; f_n)$, мұндағы x_1, x_2, \dots, x_n – варианттар, ал f_1, f_2, \dots, f_n – олардың салыстырмалы жиіліктері, **салыстырмалы жиіліктер алқабы** деп аталады.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

1. Қазақстанның ауданы (2725 мың км²) Әзірбайжан (87 мың км²), Армения (30 мың км²) және Грузияның (70 мың км²) аудандарының қосындысынан 1000-нан астам %-ға артық деген ақиқат па?

2. Есептеңдер:

а) $-5 + 0,2^{-2}$; ә) $7^{-1} - 21^{-1}$; б) $4^{-2} : \frac{-1}{64}$; в) $0,008^0 : (-3)^{-3}$.

3. Амалдарды орындаңдар:

а) $(1,5a^{-2}b) \cdot (4a^3b^{-4})$; б) $(0,2cd^{-3})^{-2}$;
 ә) $(49x^5y^{-1}) : (0,7x^3y^{-2})$; в) $(8p^{-3}k^2 \cdot 0,5pk^{-2})^{-3}$.

4. Сандарды стандарт түрге келтіріп, оларды өсу ретімен орналастырыңдар:

а) $0,59 \cdot 10^{-7}$; $3400 \cdot 10^{-9}$; $0,078 \cdot 10^{-10}$;

ә) $42 \cdot 10^{-15}$; $0,073 \cdot 10^{-17}$; $8300 \cdot 10^{-16}$.

В деңгейі

5. Өрнектің мәнін табыңдар:

а) $\frac{4^8 \cdot 9^7 + 6^{12} \cdot 180}{8^6 \cdot 3^{14} - 6^{14}}$; б) $\frac{26 \cdot (3 \cdot 2^{18} + 15 \cdot 2^{15})}{(13 \cdot 4^4)^2}$;

ә) $\frac{6^{10} \cdot 2^8 + 12^9 \cdot 21}{3^{10} \cdot 2^{19} - 12^{10}}$; в) $\frac{21 \cdot (3 \cdot 7^{12} - 14 \cdot 7^{11})}{(3 \cdot 7^6)^2}$.

6. Қайсысы үлкен:

а) $\frac{4^{12} - 1}{4^{11} - 1}$ немесе $\frac{4^{11} - 1}{4^{10} - 1}$; ә) $\frac{9^6 - 1}{9^7 - 1}$ немесе $\frac{9^7 - 1}{9^8 - 1}$?

7. Теңдеуді шешіңдер: а) $4x^{-2} + 4x^{-1} + 1 = 0$; ә) $9x^{-2} - 12x^{-1} + 4 = 0$.

8. а) 476 плакат басып шығару үшін екі көшірме мәшинесі пайдаланылған. Біріншісі – 14 минут, ал екіншісі 21 минут жұмыс істеген. Егер бірінші мәшине екіншіге қарағанда минутына 4 плакат артық басатын болса, әрбір мәшине минутына неше плакат көшірмесін басып шығарған?

ә) Көктемгі себу жұмысын бригада 8 күнде бітірмекші болған еді. Бірақ себу мөлшерін (нормасын) күніне 40 га-ға арттырып, себуді 6 күнде аяқтады. Бригада күніне неше гектар жер септі және барлығы неше гектар себілді?

9. а) Екітаңбалы санның цифрларының қосындысы 12-ге тең. Егер сол цифрлардың орнын ауыстырса, онда шыққан сан бастапқы саннан 18-ге артық болады. Бастапқы санды табыңдар.

ә) Екітаңбалы санның ондық цифрын 2-ге арттырғанда, ол оның бірлік цифрынан 2 есе артық болады. Егер цифрларының орындарын ауыстырса, онда шыққан сан бастапқы саннан 27-ге кем болады. Бастапқы санды табыңдар.

10. Бөлшекті қысқартыңдар:

а) $\frac{45a^3b^7}{15a^4b^2}$; ә) $\frac{36 - 4x^2}{2x + 6}$; б) $\frac{a^3 - 27}{a^2 + 3a + 9}$; в) $\frac{16 - 8x + x^2}{(x - 4)^3}$.

11. Амалдарды орындандар:

а) $\frac{3x+2}{4x-y} + \frac{2x-1}{y-4x}$;

ә) $(m-2n) : \frac{(2n-m)^2}{5mn}$;

б) $\left(\frac{a+5b}{a^2-5ab} - \frac{a-5b}{a^2+5ab}\right) \cdot \frac{25b^2-a^2}{5b^2}$.

12. Айнымалының барлық мүмкін болатын мәндерінде өрнектің мәні тұрақты болатынын дәлелдендер:

а) $\frac{a}{a+7} - \frac{(a-7)^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{a^2-49} + \frac{1}{a^2-14a+49}\right)$;

ә) $(a-4) \cdot \left(\frac{1}{a^2-8a+16} - \frac{1}{a^2-16}\right) - \frac{24-a^2}{a^2-16}$.

13. Натурал b санын 7-ге бөлгенде қалдық 3-ке тең болады. $(b^2 - 7b + 15)$ өрнегін 7-ге бөлгенде де қалдық 3-ке тең болатыны ақиқат па?

14. а) Егер пойыз жолдың бірінші жартысын 81 км/сағ жылдамдықпен, ал екінші жартысын 99 км/сағ жылдамдықпен жүріп өткен болса, оның орташа жылдамдығын табындар.

ә) A пунктiнен B пунктiне шыққан автобус жолдың бірінші жартысын 50 км/сағ жылдамдықпен, ал екіншісін 75 км/сағ жылдамдықпен жүріп өткен. B пунктiнен A пунктiне қарай автобус 60 км/сағ жылдамдықпен жүрген. Автобустың барлық жолдағы орташа жылдамдығын табындар.

15. Қазақстан облыстарындағы халықтың тығыздығы туралы статистикалық кестеде (Астана мен Алматы қалаларындағы халықты есепке алмағанда) бір облысқа қатысты мәлімет жоқ екен. Халықтың орташа тығыздығын ескере отырып, сол мәліметті табындар. Қазақстан облыстарындағы халық тығыздығының вариациялық қатарын құрып, медианасын табындар.

01.01.2016 ж. деректер бойынша

№	Облыс	Тығыздық (адам/кв. км)	№	Облыс	Тығыздық (адам/кв. км)
1.	Ақмола	5,09	8.	Қарағанды	3,24
2.	Ақтөбе	2,78	9.	Қостанай	4,51
3.	Алматы	8,70	10.	Қызылорда	3,56
4.	Атырау	5,01	11.	Маңғыстау	3,78
5.	Шығыс Қазақстан	4,93	12.	Павлодар	6,08
6.	Жамбыл	7,70	13.	Солтүстік Қазақстан	5,81
7.	Батыс Қазақстан	4,21	14.	Оңтүстік Қазақстан	

Барлық облыс халқының орташа тығыздығы – 6,15 (Астана мен Алматы халқын есепке алмағанда)



С деңгейі

16. Теңдеуді шешіңдер:

а) $\frac{1}{x} + \frac{5x}{x+1} = 5$; ә) $\frac{3x^2 - 48}{x+4} = 0$; б) $\frac{10}{x-3} - \frac{8}{x} = 1$.

17. n -нің кез келген натурал мәнінде:

а) $11^{n+4} - 11^n$ өрнегінің мәні 61-ге; ә) $7^{n+3} + 7^n$ өрнегінің мәні 43-ке бөлінетінін дәлелдеңдер.

18. Алымын көбейткіштерге жіктеп, бөлшекті қысқартыңдар:

$$\frac{a^4 + 3a^2 + 4}{a^2 - a + 2}.$$

19. Бөлшектің негізгі қасиетін пайдаланып, мына өрнектің:

а) $\frac{10y^2 - 3xy + 20x^2}{8x^2 + xy + y^2}, \frac{y}{x} = 4$ болғандағы;

ә) $\frac{6b^2 + 10ab + a^2}{a^2 - ab + 3b^2}, \frac{a}{b} = 3$ болғандағы мәнін табыңдар.

20. а) Екі көтергіш кран бірге жұмыс істеп, баржаны 2 сағатта тиеп бітірді. Егер бір кранмен баржаны екіншісіне қарағанда 3 сағатқа тезірек тиейтін болса, әр кранға сондай баржаны тиеуге қанша уақыт қажет болады?

ә) Екі станок бірге қайсыбір жұмысты 6 сағатта орындайды. Егер олардың біреуі осы жұмысты екіншісіне қарағанда 5 сағатқа тезірек орындайтын болса, олардың әрқайсысы қанша уақытта орындайды?

21. Екі өрнектің квадраттары айырымының формуласын пайдаланып есептеңдер:

а) $(11 + 1)(11^2 + 1)(11^4 + 1)(11^8 + 1) - 0,1 \cdot 11^{16}$;

ә) $0,04 \cdot 26^{32} - (26^{16} + 1)(26^8 + 1)(26^4 + 1)(26^2 + 1)(26 + 1)$.

22. Функцияның анықталу облысын көрсетіп, оның графигін салыңдар:

а) $y = -2x + x^0$; б) $y = \frac{1}{2}x^2$;

ә) $y = -x^{-1}$; в) $y = -\frac{1}{4}x^3$.

23. Функцияның $[0; 5]$ аралығындағы ең кіші және ең үлкен мәндерін табыңдар:

а) $y = 3x - 2$; б) $y = -\frac{1}{2}x^2$;

ә) $y = \frac{4}{x}$; в) $y = 2x^3$.

24. Өрнектің мәні құрама сан болатынын дәлелдеңдер:

а) $2^{14} + 7^{16}$; ә) $2^{10} + 11^{12}$.

25. а) Арасы 3 км болатын A пунктiнен B пунктiне қарай жаяу адам шықты, ал 30 минуттан соң оның артынан жылдамдығы жаяу адамның жылдамдығынан 11 км/сағ-қа артық болатын велосипедші шықты. Велосипедші B пунктiне жаяу адамға қарағанда 3 минут ерте жетті. Велосипедшінің жылдамдығын табыңдар.

ә) Ауылдан 5 км қашықтықтағы қалаға қарай велосипедші шықты, ал 15 минуттан соң оның артынан жылдамдығы велосипедшінің жылдамдығынан 20 км/сағ-қа артық болатын мотоциклші шығып, қалаға велосипедшіден 5 минут ерте жетті. Велосипедшінің жылдамдығын табыңдар.

I. КВАДРАТ ТҮБІРЛЕР ЖӘНЕ ИРРАЦИОНАЛ ӨРНЕКТЕР



Бөлімді оқу нәтижесінде

- иррационал және нақты сандардың, квадрат және арифметикалық квадрат түбірлердің анықтамаларын;
- нақты сандардың саралануын;
- нақты сандарға және арифметикалық квадрат түбірлерге қолданылатын амалдардың қасиеттерін;
- $y = \sqrt{x}$ функциясының графигі мен қасиеттерін білу керек.
- нақты сандарға арифметикалық амалдар қолдануды және оларды салыстыруды;
- арифметикалық квадрат түбірдің қасиеттерін дәлелдеуді;
- квадрат түбірлері бар өрнектерді тепе-тең түрлендіруді;
- $y = \sqrt{x}$ функциясының графигін салуды;
- есеп шығарғанда нақты сандардың қасиеттерін қолдануды орындай алу керек.

1. Рационал сандар

Рационал сандарды, яғни $\frac{a}{b}$ түрінде көрсетуге болатын сандарды, мұндағы $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$, шектеулі ондық бөлшектер немесе шектеусіз периодты ондық бөлшектер түрінде жазуға болады. Мысалы:

$$\frac{3}{5} = 0,6; \frac{1}{8} = 0,125; \frac{7}{11} = 0,6363\dots = 0,(63); \frac{25}{12} = 2,08333\dots = 2,08(3).$$

Теорема. Егер қысқармайтын $\frac{m}{n}$ бөлшегінің бөліміндегі n -нің 2 мен 5-тен басқа жай бөлгіштері болмаса, онда ондай бөлшекті шектеулі ондық бөлшек түрінде жазуға болады.

Дәлелдеуі. $n = 2^k \cdot 5^p$ болсын, мұндағы $k \geq p$. Сонда

$$\frac{m}{n} = \frac{m}{2^k \cdot 5^p} = \frac{m \cdot 5^{k-p}}{2^k \cdot 5^p \cdot 5^{k-p}} = \frac{m \cdot 5^{k-p}}{2^k \cdot 5^k} = \frac{m \cdot 5^{k-p}}{(2 \cdot 5)^k} = \frac{t}{10^k},$$

мұндағы $t = m \cdot 5^{k-p}$ – бүтін сан.

$k < p$ болатын жағдайды өздігінен қарастырыңдар.

$$\text{Мысалы: } \frac{3}{8} = \frac{3}{2^3} = \frac{3 \cdot 5^3}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{3 \cdot 125}{(2 \cdot 5)^3} = \frac{375}{1000} = 0,375;$$

$$\frac{501}{500} = \frac{501}{4 \cdot 125} = \frac{501}{2^2 \cdot 5^3} = \frac{501 \cdot 2}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{1002}{1000} = 1,002.$$

Егер қысқармайтын бөлшектің бөлімінің 2 мен 5-тен өзге жай сан болатын бөлгіші бар болса, онда ондай бөлшекті шектеусіз периодты ондық бөлшек түрінде жазуға болады. Оған мысал ретінде $\frac{4}{15}$, $\frac{7}{22}$, $\frac{13}{12}$ бөлшектерін қарастырып көз жеткізіндер.

Период ретінде оң жағына 0-ді тіркеп, шектеулі ондық бөлшекті не бүтін санды да шектеусіз периодты ондық бөлшек деп санауға болады, мысалы, $3,5 = 3,500\dots$, $-7 = -7,00\dots$.

Сонымен, кез келген рационал санды шектеусіз периодты ондық бөлшек түрінде жазуға болады.

Кері тұжырым да дұрыс: кез келген шектеусіз периодты ондық бөлшекті жай бөлшек түрінде жазуға болады.

Мысалы, 0,42(7) санын жай бөлшек түрінде жазу үшін оны x деп белгілеп, $x = 0,42(7)$ теңдігінің екі жағын үтірден кейін тек периоды-

ның цифрлары қалатындай етіп 10-ның дәрежесіне көбейтіп, мынаны аламыз: $100x = 42,77\dots$ және $1000x = 427,77\dots$.

$$\text{Сонда } 1000x - 100x = 427,(7) - 42,(7), \text{ бұдан } x = \frac{385}{900} = \frac{77}{180}.$$

СҰРАҚТАР

1. Қандай санды рационал сан деп атайды?
2. Кез келген рационал санды қандай ондық бөлшек түрінде көрсетуге болады? Мысалдар келтіріңдер.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

26. Мына бөлшектердің қайсысын шектеулі ондық бөлшек түрінде көрсетуге болады:

а) $\frac{2}{3}$; ә) $\frac{12}{25}$; б) $\frac{15}{300}$; в) $\frac{12}{1000}$; г) $\frac{1}{90}$?

27. Берілген жай бөлшекке тең болатын ондық бөлшекті табыңдар:

а) $\frac{7}{40}$; ә) $\frac{8}{9}$; б) $\frac{4}{11}$; в) $\frac{3}{625}$; г) $-\frac{8}{7}$.

В деңгейі

28. Периодты бөлшекті жай бөлшек түрінде жазыңдар:

а) 0,(1); ә) 2,(7); б) 4,(12); в) 0,1(23); г) 2,53(35).

29. Сандарды салыстырыңдар:

а) 3,14 және $\frac{22}{7}$; б) 2,4(1) және 2,(41);

ә) 0,45 және 0,(45); в) $\frac{5}{13}$ және 0,3846152... .

30. $\frac{5}{14}$ пен $\frac{5}{12}$ бөлшектерінің арасында жататын, бөлімі 21-ге тең болатын жай бөлшекті табыңдар.

31. Алымы мен бөлімінің көбейтіндісі 550-ге тең болатын және шектеулі ондық бөлшекпен өрнектелетін қысқармайтын бөлшекті табыңдар.

32. $3,(13) + 0,2(3)$ сандарының қосындысы рационал сан болатынын дәлелдендер. Осы санды жай бөлшек түрінде жазыңдар.

33. Квадратының ондығы: а) жұп; ә) тақ сан болатын екітаңбалы санның бірлік цифрын табыңдар (есепті шығарғанда 10-нан 99-ға дейінгі натурал сандар квадраттарының кестесін пайдаланыңдар).

С деңгейі

34. Тізбектес екі бүтін санның квадраттарының қосындысын 4-ке бөлгенде қалдығы 1-ге тең болатынын дәлелдендер.

35. Бірінші қорапта қызыл, ал екіншіде көк шарлар бар. Қызыл шарлар саны көк шарлар санының $\frac{15}{19}$ бөлігін құрайды. Қораптардан қызыл шарлардың $\frac{3}{7}$ және көк шарлардың $\frac{2}{5}$ бөлігін алып тастағанда, бірінші қорапта 1000-нан кем шар, ал екіншіде 1000-нан артық шар қалды. Бастапқыда әр қорапта қанша шар болған?

2. Иррационал және нақты сандар

Кесіндінің ұзындығы оң санмен өрнектелетіні белгілі. Екі кесіндіні салыстыру үшін олардың ұзындықтарын бірдей өлшем бірлігімен өлшейді. *Екі кесіндінің ортақ өлшем бірлігі* ретінде әр кесіндіге бүтін сан рет салынатын кесінді алынады.

Мысалы, 7-суретте e -ге тең кесінді AB кесіндісіне алты рет, ал CD кесіндісіне бес рет салынады, сонда $\frac{AB}{CD} = \frac{6}{5}$ болады. Егер ортақ өлшем e бір кесіндіге m рет, ал екіншіге n рет салынатын болса, онда осы екі кесіндінің ұзындықтарының қатынасы $\frac{m}{n}$ рационал санымен өрнектеледі, мұндағы $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$.



7-сурет

Кері тұжырым да дұрыс: *егер екі кесінді ұзындықтарының қатынасы рационал санмен өрнектелетін болса, онда ондай кесінділердің ортақ өлшемі бар болады.*

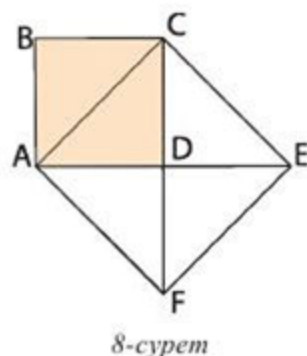
Шынымен де, AB мен CD кесінділері ұзындықтарының қатынасы $\frac{m}{n}$ -ге тең болсын, мұндағы $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$. Сонда олардың ортақ өлшемі ретінде CD кесіндісінің $\frac{1}{n}$ бөлігіне тең кесіндіні алуға болады, сондықтан $e = \frac{1}{n}CD$ болады. Бұдан $CD = ne, AB = me$ болатыны шығады.

Екі кесіндінің ортақ өлшемі ылғи да бар бола бермейді және олардың ұзындықтарының қатынасы да рационал санмен өрнектеле бермейді екен.

Теорема. Шаршы диагоналінің оның қабырғасына қатынасы рационал сан болмайды.

Дәлелдеуі. Кері жорып, шаршының қабырғасы мен диагоналінің ортақ өлшемі бар болады делік. Яғни $ABCD$ шаршысының қабырғасына да, диагоналіне де бүтін сан рет салынатын қандай да бір l кесіндісі табылады делік. Сонда $AB = nl$, $AC = ml$, $\frac{AC}{AB} = \frac{ml}{nl} = \frac{m}{n}$, мұндағы $\frac{m}{n}$ – қысқармайтын бөлшек. Демек, $\frac{AC^2}{AB^2} = \frac{m^2}{n^2}$.

AC^2 өрнегі – қабырғасы AC -ға тең шаршының ауданы (8-сурет), ал AB^2 – қабырғасы AB -ға тең шаршының ауданы. $AC^2 = 2AB^2$ болғандықтан (мұны 8-суретті пайдаланып түсіндіріңдер), $\frac{m^2}{n^2} = 2$, $m^2 = 2n^2$ болады. Демек, m^2 – жұп сан, ендеше m де жұп сан, яғни $m = 2p$ болады. Бұдан $m^2 = 4p^2 = 2n^2$. Сонда $n^2 = 2p^2$, яғни n де жұп сан болады екен. Сонымен, $\frac{m}{n}$ – қысқармайтын бөлшек дегенге қайшы келдік.

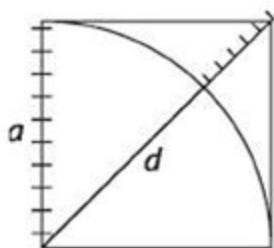


Ендеше, шаршының қабырғасы мен диагоналінің ортақ өлшемі бар деген жорамал қате екен деген қорытынды жасаймыз.

Бұл теоремадан шығатыны, егер шаршының қабырғасын өлшем бірлігі ретінде алсақ, онда диагональды осы өлшеммен өлшеу нәтижесі бүтін сан да, бөлшек сан да болмайды. Демек, бізге белгілі сандардың арасында шаршы диагоналінің ұзындығын өрнектейтін сан жоқ екен. Бірақ ондай шаршының диагоналі бар болғандықтан, оның ұзындығын өрнектейтін сан да болуы тиіс. Ол бізге белгілі рационал сандардан басқа сан. Бұл жаңа санды **иррационал** (мұндағы «ир» қосымшасы «емес» дегенді білдіреді) сан деп атап, оны цифрлармен көрсету тәсілін қарастырайық.

Иррационал сан қабырғасы өлшем бірлігі ретінде алынған шаршы диагоналінің ұзындығын өрнектейтін болсын. Шаршының диагоналінің оның қабырғасына қатынасының жуық мәнін алдымен

1-ге дейінгі дәлдікпен, содан кейін 0,1; 0,01 үлеске дейінгі дәлдіктермен іздейтін боламыз (9-сурет).



9-сурет

$1 < \frac{d}{a} < 2$, демек, $\frac{d}{a} \approx 1$ (кемімен) және $\frac{d}{a} \approx 2$ (артығымен) болады.

Осы қатынасты 0,1-ге дейінгі дәлдікпен табу үшін шаршының a қабырғасын тең 10 бөлікке бөліп, оның $\frac{1}{10}$ бөлігін диагональға саламыз.

Нәтижесінде мынаны аламыз: $1,4 < \frac{d}{a} < 1,5$,

яғни $\frac{d}{a} \approx 1,4$ (кемімен) және $\frac{d}{a} \approx 1,5$ (артығымен) болады.

$\frac{d}{a}$ қатынасын 0,01-ге дейінгі дәлдікпен табу үшін шаршының қабырғасын тең 100 бөлікке бөліп, оның $\frac{1}{100}$ бөлігін диагональға салу керек болады. Одан біз мынандай нәтиже алар едік: $1,41 < \frac{d}{a} < 1,42$; демек, $\frac{d}{a} \approx 1,41$ (кемімен) және $\frac{d}{a} \approx 1,42$ (артығымен) болады.

Егер $\frac{d}{a}$ қатынасын дәлірек табу үдерісін әрі қарай жалғастыра берсек, онда да шектеулі ондық бөлшек алу мүмкін болмайды, себебі ол шаршының диагоналі мен қабырғасының қатынасы туралы теоремаға қайшы келер еді. Демек, мұндай үдерістің нәтижесінде біз шексіз ондық бөлшекпен жазылатын сан алар едік. Бұл бөлшек периодты болмайды, себебі периодты бөлшектен рационал сан алынар еді. Сонымен, иррационал санды цифрлармен көрсету тәсілі анықталды. Енді иррационал санның анықтамасын беруге болады.

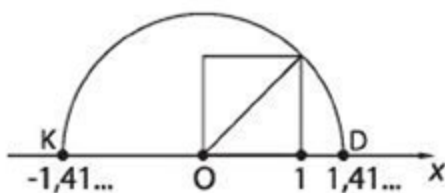
Шектеусіз периодсыз ондық бөлшекпен өрнектелген сан иррационал сан деп аталады.

Мысалы, 0,101001000100001... санының әрбір 1 санынан кейін нөлдер топтамасы бар және ол алдыңғы нөлдер топтамасынан бір нөлге артып отырады, сондықтан бұл сан периодты бөлшек болмайды, яғни иррационал сан болады. Шеңбердің ұзындығының оның

диаметріне қатынасына тең болатын $\pi = 3,1415926\dots$ саны да иррационал сан болады.

Барлық рационал сандар мен барлық иррационал сандардың бірігуі нақты сандар жиыны деп аталады да, R әрпімен белгіленеді.

Сонымен, нақты сандар – ол шектеусіз периодты немесе периодсыз ондық бөлшектер. Нақты сандар жиыны геометриялық түрде *сандық түзу* деп аталатын түзу түрінде бейнеленеді. Әрбір нақты санға сандық түзудің тек бір ғана нүктесі және осы түзудің әрбір нүктесіне тек бір ғана нақты сан сәйкес келеді. Мысалы, егер бірлік кесіндіге шаршының қабырғасын алсақ, онда оның диагоналінің ұзындығын өрнектейтін иррационал санға Ox сандық түзуіндегі D нүктесі (10-сурет) сәйкес келеді, ал $OD = OK$ болатын K нүктесіне оған қарама-қарсы иррационал сан сәйкес келеді.



10-сурет

Шектеусіз ондық бөлшектер арқылы өрнектелген нақты сандарды салыстыру шектеулі ондық бөлшектерді салыстыру ережесімен орындалады. Мысалы:

$$2,363667\dots < 2,370112\dots,$$

себебі бұл оң шектеусіз ондық бөлшектердің бүтін бөліктері мен ондық үлестері тең, ал жүздік үлестерінде бірінші бөлшектің жүздік үлесінің саны екінші бөлшектікінен кем;

$$0,33(5) > 0,33452\dots \text{ (өздігінен түсіндіріңдер).}$$

Іс жүзіндегі есептеулерде шектеусіз ондық бөлшек түрінде берілген екі нақты санның қосындысына қосылғыштардың қандай да бір дәлдікпен кемімен алынған жуық мәндерінің қосындысынан артық, бірақ артығымен алынған жуық мәндерінің қосындысынан кем бо-

латын сан алынады. Сондай сандардың көбейтіндісі де осылай табылады. Жуықтау дәлдігін арттыру арқылы дәлірек нәтиже алуға болады. Қазіргі кезде ондай бөлшектерді есептеу электронды-есептеуіш техникасының көмегімен оңай орындалады.

СҰРАҚТАР

1. Қандай сан иррационал сан деп аталады?
2. Нақты сандар жиыны қандай жиындардан тұрады? Оны схема түрінде көрсетіңдер.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

36. $-5,38000\dots$; $0,237373\dots$; $-3,2121121112\dots$; $\frac{8}{23}$; $1,234567891011\dots$;

4,(5) сандардың қайсысы: а) рационал; ә) иррационал сан болады?

37. Иррационал сандарды мыңдық үлеске дейін дөңгелектеңдер:

а) $-2,02122232425\dots$; б) $3,5151151115\dots$;

ә) $0,758595105\dots$; в) $10,899898897\dots$

38. Нақты сандарды салыстырыңдар:

а) $0,01234\dots$ және $0,0(12)$; б) $\frac{3}{7}$ және $0,42857190\dots$;

ә) $-23,5$ және $-23,(5)$; в) $4\frac{7}{8}$ және $4,8(75)$.

В деңгейі

39. Сандық түзуде $3,5$ пен $3,51$ -дің арасында орналасқан 3 санды жазыңдар. $3,5$ пен $3,51$ сандарының арасында неше нақты сан бар?

40. Дұрыс тұжырымды тандап алыңдар:

а) кез келген рационал сан нақты сан болады;

ә) әрбір нақты сан иррационал сан болады;

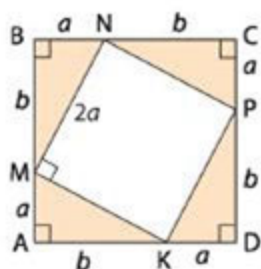
б) барлық иррационал сан нақты сандар болады.

41. a , b , c кесінділері берілген. a мен b , b мен c кесінділерінің ортақ өлшемдері бар болса, a мен c кесінділерінің ортақ өлшемі бар бола ма?

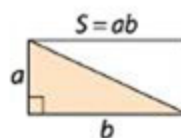
42. а) Тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасы мен оған жүргізілген медианасының ортақ өлшемі бар бола ма?

ә) Тікбұрышты үшбұрыштың сүйір бұрыштарының бірі 60° -қа тең. Осы үшбұрыштың кіші катетін өлшем бірлігі ретінде алып, оның үлкен катетін рационал санмен өрнектеуге болмайтынын дәлелдендер. (Есепті шығару үшін 11-суретті пайдаланыңдар).

а)



ә)



11-сурет

43. Теңдіктердің қайсысы ақиқат:

а) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty) = R$; ә) $(-\infty; 0] \cap [0; +\infty) = R$; б) $(-\infty; +\infty) = R$?

44. а) $a \approx 1,42$ және $b \approx 0,34$ сандарын көбейтіп, $ab \approx 0,4828$ санын алдық. Жуық мәндерді көбейту ережесін пайдаланып, нәтижені дөңгелектендер.

ә) Егер: 1) $a \approx 1,845$, $b \approx 0,173$; 2) $a \approx 34,81$, $b \approx 0,075$ болса, $\frac{a}{b}$ бөліндінің неше мәнді цифрын сақтап қалу керек болады?

45. Егер $a \approx 0,728$, $b \approx 2,5$, $c \approx 0,17$ болса, $\frac{a}{b} - c$ өрнегінің жуық мәні қандай болады?

С деңгейі

46. $x \approx 5,1 \cdot 10^{-2}$, $y \approx 3,68 \cdot 10^{-2}$, $z \approx 7,121 \cdot 10^4$ болса, а) $(x - y) \cdot z$;

ә) $(x + y) : z$ өрнегінің мәнін табыңдар.

47. Картадағы екі қаланың арасы $(24,6 \pm 0,2)$ см-ге тең. Карта-ның масштабы $1 : 2\,500\,000$ болса, екі қаланың нақты арақашықтығы қандай болатынын анықтап, қатесін көрсетіңдер.

48. Бөлменің көлемі $127,4 \text{ м}^3$. Егер 1 м^3 ауаның массасы $(1,29 \pm 0,01) \text{ кг}$ -ға тең болса, осы бөлмедегі ауаның массасы қандай болғаны?

49. Егер $|x - a| = |x - b|$, $a \neq b$ болса, онда $x = \frac{1}{2}(a + b)$ болатынын дәлелдендер.

50. Теңдеуді шешіндер: а) $|x + 3| = |x - 5|$; ә) $|x + 6| = |x + 10|$.

51. Теңсіздікті шешіндер:

а) $|x + 3| < 5$; ә) $|x + 6| \geq 10$; б) $2|x - 4| \leq 8$; в) $-0,5|x - 6| < 2$.

52. Теңдеудің барлық түбірлерін табындар:

а) $x^2 = 16$; ә) $x^2 = 100$; б) $x^2 = 1,44$; в) $x^2 = 6\frac{1}{4}$.

53. Екітаңбалы сан мен оның цифрларының орнын ауыстырғанда шыққан екітаңбалы санның айырымы натурал санның квадраты болатындай шарт құрастырындар.

54. Теңсіздіктер жүйесін шешіндер:

а) $\begin{cases} x - 1 \leq 2x + 2, \\ 3x + 5 \leq x + 1; \end{cases}$ ә) $\begin{cases} 3 - x < x + 2, \\ 3x - 1 > 1 - 2x. \end{cases}$

55. а) Ұзындығы 364 см болатын сырықты екіге бөлгенде, оның бөліктерінің біреуі екіншісінен 18% -ға қысқа болып шықты. Әр бөліктің ұзындығын табындар.

ә) Егер шаршының периметрін 10% -ға арттырса, оның ауданы неше пайызға артады?

3. Квадрат түбірлер

Теңдеуді шешейік: $x^2 = 49$, $x^2 - 49 = 0$, $(x - 7)(x + 7) = 0$,
 $x - 7 = 0$ немесе $x + 7 = 0$, $x = 7$ немесе $x = -7$.

Әрқайсысының квадраты 49-ға тең болатын 7 мен -7 сандары 49 санының *квадрат түбірлері* деп аталады.

a санының квадрат түбірі деп квадраты a -ға тең болатын санды айтады. a санының теріс емес квадрат түбірі a санының **арифметикалық квадрат түбірі** деп аталады. Оны \sqrt{a} деп белгілейді, мұндағы $\sqrt{\quad}$ – арифметикалық квадрат түбірдің белгісі. \sqrt{a} жазуы былай оқылады: « a санының арифметикалық квадрат түбірі».

Арифметикалық квадрат түбірдің анықтамасынан шығатыны:

1) тек $a \geq 0$ болғанда ғана \sqrt{a} өрнегінің мағынасы бар, яғни оның анықталу облысы $[0; +\infty)$ аралығы болады;

2) кез келген теріс емес a саны үшін $\sqrt{a} \geq 0$ теңсіздігі дұрыс, яғни арифметикалық квадрат түбірдің мәндері тек теріс емес сандар болады;

3) кез келген теріс емес a саны үшін $(\sqrt{a})^2 = a$ теңдігі дұрыс, яғни түбірдің квадраты түбір астындағы санға тең болады.

Мектептегі математика курсында «арифметикалық» сөзін қолдану міндетті емес.

Санның квадрат түбірін табу амалы *санды квадрат түбірдің астынан шығару* деп аталады. b саны a санының арифметикалық квадрат түбірі болатынын анықтау үшін:

1) $b \geq 0$, 2) $b^2 = a$ шарттарының орындалуын тексеру керек.

Мысалы: $\sqrt{225} = 15$, себебі $15 > 0$ және $15^2 = 225$;

$\sqrt{0} = 0$, себебі 0 – теріс сан емес және $0^2 = 0$;

$\sqrt{\frac{16}{81}} = \frac{4}{9}$, себебі $\frac{4}{9} > 0$ және $(\frac{4}{9})^2 = \frac{16}{81}$;

$\sqrt{0,36} \neq -0,6$, себебі $-0,6 < 0$; $\sqrt{1000} \neq 100$, себебі $100^2 \neq 1000$.

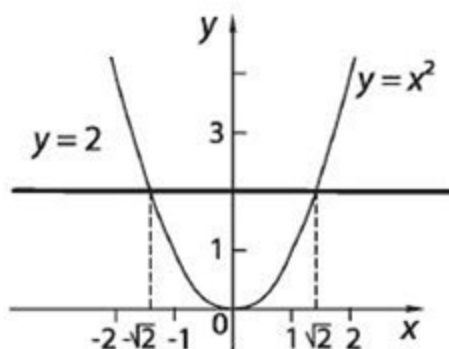
\sqrt{a} және $-\sqrt{a}$ сандарын қысқаша қарама-қарсы түбірлер деп атайды. Мысалы, $x^2 = 64$ теңдеуінің екі түбірі бар: $x_1 = \sqrt{64} = 8$ және $x_2 = -\sqrt{64} = -8$.

Кез келген оң a санынан тек бір ғана арифметикалық квадрат түбір табуға болады.

a санынан әртүрлі екі арифметикалық квадрат түбір табылатын болсын: $\sqrt{a} = b$ және $\sqrt{a} = c$, мұндағы $b \neq c$. Сонда $a = b^2$ және $a = c^2$, бұдан $b^2 = c^2$, $b^2 - c^2 = 0$, $(b - c)(b + c) = 0$, $b = c$ немесе $b = -c$. Бұлай болуы мүмкін емес, себебі b мен c – тең емес оң сандар, яғни a санынан әртүрлі екі арифметикалық квадрат түбір табылмайды.

$x^2 = 2$ теңдеуін график арқылы шешейік (12-сурет). Бұл теңдеудің екі түбірі бар: оң $\sqrt{2} \approx 1,4$ және теріс $-\sqrt{2} \approx -1,4$. Бұл түбірлердің екеуі де $\sqrt{2}$ және $-\sqrt{2}$ – иррационал сандар, себебі квадраты 2-ге тең рационал сан болмайды.

Арифметикалық квадрат түбірдің белгісін пайдаланып, әртүрлі иррационал сандарды жазуға болады, мысалы, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $-\sqrt{7}$, $-\sqrt{13}$.



12-сурет

Егер натурал санды бірдей көбейткіштердің көбейтіндісі түрінде жазуға келмесе, онда ол санның арифметикалық квадрат түбірі иррационал сан болады.

Квадрат түбір түрінде жазылған иррационал сандарды есептегенде, оларды ондық бөлшек түрінде жазылған жуық мәндерімен

алмастырады. Егер $b^2 < a < (b + h)^2$ болса, онда b саны \sqrt{a} квадрат түбірінің h -қа дейінгі дәлдікпен, мұндағы $h > 0$, кемімен алынған жуық мәні деп аталады. Бұл жағдайда $b + h$ саны сол түбірдің h -қа дейінгі дәлдікпен артығымен алынған жуық мәні деп аталады.

Мысалы, $\sqrt{2}$ -нің жуық мәнін табайық.

$1^2 < 2 < 2^2$ болғандықтан, $1 < \sqrt{2} < 2$ болады. Демек, $\sqrt{2}$ иррационал саны ондық бөлшек түрінде $\sqrt{2} = 1,...$ болып жазылады. Әрі қарай ондық үлесінің цифрын табамыз, ол үшін $1,1; 1,2, \dots$ бөлшектерін 2 саны араларында жататын сандарды тапқанға дейін квадраттап, $1,4^2 < 2 < 1,5^2$ аламыз. Демек, $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$, $\sqrt{2} = 1,4\dots$. Дәл осылай жүздік үлесінің цифрын тауып, $1,41^2 < 2 < 1,42^2$ аламыз. Демек, $\sqrt{2} = 1,41\dots$. Сонымен, $\sqrt{2} \approx 1,4$.

Осы көрсетілген тәсілмен сандарды әртүрлі дәлдікпен квадрат түбір таңбасының алдына шығаруға болады. Іс жүзіндегі есептеулерде квадрат түбірлердің жуық мәндерін табу үшін есептеуіш техникасын немесе кестелерді пайдаланады (сондай кестенің бірі оқулықтың қосымшасында берілген).

Мысал. $\sqrt{\frac{59^3 - 41^3}{18} + (50 + 9)(50 - 9)}$ өрнегінің мәнін табу керек.

$$\begin{aligned} \text{Шешуі. } & \sqrt{\frac{59^3 - 41^3}{18} + (50 + 9)(50 - 9)} = \\ & = \sqrt{\frac{(59 - 41)(59^2 + 59 \cdot 41 + 41^2)}{18} + 59 \cdot 41} = \\ & = \sqrt{59^2 + 2 \cdot 59 \cdot 41 + 41^2} = \sqrt{(59 + 41)^2} = \sqrt{100^2} = 100. \end{aligned}$$

Жауабы. 100.

Есеп. Кәсіпорынның өнімділігі бір жылда 4 %-ға өсті. Келесі жылы ол тағы 8 %-ға артты. Осы уақыт аралығындағы өнімнің орташа жылдық өсімін 0,01 %-ға дейінгі дәлдікпен табу керек.

Шешуі. Есептің шартын кесте түрінде жазайық:

Жұмыс уақыты	100 %-ды құрайтын өнім мөлшері	Нақты өндірілген өнім мөлшері
Бірінші жыл	1	$1 + \frac{4}{100} = \frac{104}{100}$
Екінші жыл	$\frac{104}{100}$	$\frac{104}{100} \cdot \frac{108}{100}$

Өнімнің орташа жылдық өсімін $x\%$ деп белгілейік. Сонда өнім өндіру бірінші жылы $(1 + \frac{x}{100})$, ал екінші жылы:

$$(1 + \frac{x}{100}) + \frac{x}{100}(1 + \frac{x}{100}) = (1 + \frac{x}{100})^2 \text{ болар еді.}$$

Есептің шарты бойынша $\frac{104}{100} \cdot \frac{108}{100} = (\frac{100+x}{100})^2$. Бұдан, $100 + x = \sqrt{104 \cdot 108}$, $x = \sqrt{11232} - 100$, $x \approx 105,98 - 100$, $x \approx 5,98$.

Ж а у а б ы. $\approx 5,98\%$.

СҰРАҚТАР

1. Санның арифметикалық квадрат түбірі деп нені айтады?
2. x -тің қандай мәндерінде \sqrt{x} өрнегінің мағынасы бар болады?
3. Теріс санның тақ дәрежесінің арифметикалық квадрат түбірін табуға бола ма?

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

56. $\sqrt{\quad}$ белгісін пайдаланып, теңдеудің түбірлерін жазып, оны есептеңдер:

а) $x^2 = 81$; ә) $x^2 = 0,36$; б) $x^2 = 1,21$; в) $x^2 = -25$.

57. Мына өрнектердің қайсысының мағынасы бар:

- а) $\sqrt{36}$; в) $\sqrt{(-7)^2}$; д) $\sqrt{b-1}$, мұндағы $b \geq 1$;
 ә) $\sqrt{-4}$; г) $\sqrt{-9^2}$; е) $\sqrt{3-c}$, мұндағы $c > 3$?
 б) $-\sqrt{0,01}$; ғ) $\sqrt{-a}$, мұндағы $a < 0$;

58. Теңдікті тексеріңдер:

а) $\sqrt{16} = 4$; б) $\sqrt{11^0} = 1$; г) $\sqrt{0} = 0$;
 ә) $\sqrt{(-5)^2} = 5$; в) $\sqrt{|-0,25|} = 0,5$; ғ) $\sqrt{1\frac{7}{9}} = 1\frac{1}{3}$.

59. Теңдіктің неге дұрыс еместігін түсіндіріңдер:

а) $\sqrt{81} = -9$; б) $\sqrt{(-12)^2} = -12$;
 ә) $-\sqrt{0,01} = 0,1$; в) $\sqrt{-2^{-2}} = 0,5$.

60. 64; 0,49; 1,44; 22500 сандарының арифметикалық квадрат түбірін табыңдар.

61. Өрнектің мәнін табыңдар:

а) $(\sqrt{23})^2$; в) $-(\sqrt{15})^2$;
 ә) $(\sqrt{\frac{3}{7}})^2$; г) $(2 \cdot \sqrt{5})^2$;
 б) $(-\sqrt{13})^2$; ғ) $(3 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}})^4$.

62. b -ның қандай мәндерінде өрнектің мағынасы бар болады:

а) $\sqrt{b+3}$; б) $\sqrt{-b-\sqrt{9}}$;
 ә) $\sqrt{12-b}$; в) $\sqrt{\frac{2}{7}b-\frac{1}{2}}$?

В деңгейі

63. Квадрат түбірі жай сан болатын барлық үштаңбалы сандарды табыңдар.

64. XX және XXI ғасыр жылдарын белгілейтін сандардың қайсыларының квадрат түбірлері натурал сан болады?

65. Есептеңдер:

а) $3 + \sqrt{4}$; в) $4 : \sqrt{0,01}$; д) $(\sqrt{\frac{3}{4}})^2 + \sqrt{(-\frac{3}{4})^2}$;
 ә) $7 - \sqrt{36}$; г) $(\sqrt{49})^2 + (\sqrt{0,9})^2$; е) $-\sqrt{2,5^2} - (\sqrt{2,5})^2$.
 б) $\frac{1}{3} \cdot \sqrt{0,81}$; ғ) $(\sqrt{8})^2 - (\sqrt{0,5})^2$;

66. $\sqrt{ab} - \sqrt{ba}$ натурал сан болатын барлығы неше екітаңбалы \overline{ab} саны бар болады?

67. Кестеде Қазақстан аумағынан өтетін ірі өзендердің ұзындықтары туралы мәліметтер келтірілген. Есепті шешу барысында калькуляторды пайдаланыңдар.

Өзен	Жалпы ұзындығы (км)	Қазақстан аумағындағы (км)
Ертіс	4248	1700
Есіл	2450	1400
Орал	2428	1082
Сырдария	2219	1400
Іле	1001	815
Шу	1186	800
Тобыл	1191	800



Нұра өзені

Толығымен Қазақстан аумағынан өтетін, ұзындығы 1060 саны мен осы өзендердің басқа елдердің аумағынан өтетін ұзындықтары қосындысының квадрат түбірінің (бірлікке дейінгі дәлдікпен) айырымына тең болатын Нұра өзенінің ұзындығын табыңдар.

68. Теңдеуді шешіңдер:

а) $\sqrt{x} = 18$; ә) $\sqrt{x} = 0,01$; б) $\sqrt{x+4} = 5$; в) $\sqrt{x} + 4 = 5$.

69. а) $x^2 = 3$ және $x^2 = 5$ теңдеулерін графикалық тәсілмен шешіңдер.

ә) $\sqrt{3}$ пен $\sqrt{5}$ -тің жуық мәндерін ондық үлеске дейінгі дәлдікпен табыңдар.

70. Мына сандардың қайсысы иррационал сан болады:

а) $\sqrt{4}$; б) $\sqrt{36}$; г) $\sqrt{0}$;
 ә) $\sqrt{15}$; в) $\sqrt{54}$; ғ) $-\sqrt{160}$?

71. Тізбекте қанша иррационал сан бар:

а) $\sqrt{2^{-1}}, \sqrt{2^0}, \sqrt{2}, \sqrt{2^2}, \sqrt{2^3}, \sqrt{2^{2017}}$;
 ә) $\sqrt{10^{-3}}, \sqrt{10^{-4}}, \sqrt{10^{-3}}, \sqrt{10^{-2}}, \sqrt{10^{-1}}$?

72. Теңсіздік дұрыс па: а) $4,5 < \sqrt{21} < 4,6$; ә) $9,2 < \sqrt{85} < 9,3$?

73. Санды квадрат түбір таңбасының астынан шығарындар:

а) $\sqrt{1,69}$; ә) $\sqrt{12,25}$; б) $\sqrt{0,3025}$; в) $\sqrt{0,5929}$.

74. Ауданы: а) 67 см^2 ; ә) 26 см^2 ; б) $3,6 \text{ дм}^2$; в) $7,3 \text{ дм}^2$ болатын шаршының қабырғасын ондық үлеске дейінгі дәлдікпен табыңдар.

75. Өрнектің мәнін табыңдар:

а) $2^3 + 5\sqrt{16}$; б) $2\sqrt{3 \cdot 27} - 6\sqrt{2 \cdot 18}$; г) $\sqrt{3^2 + 4^2}$;
 ә) $3\sqrt{121} - 2\sqrt{144}$; в) $\sqrt{(2^3 - 2) \cdot 5 - 6}$; ф) $\sqrt{17^2 - 15^2}$.

76. Теңдеуді шешіңдер:

а) $x^2 = \frac{16}{25}$; б) $x^2 = \frac{28}{343}$; г) $\frac{1}{7}x^2 = \frac{7}{64}$; д) $x^2 = 6$;
 ә) $x^2 = 0,04$; в) $2x^2 = \frac{18}{81}$; ф) $x^2 = 5\frac{20}{121}$; е) $x^2 = 15$.

77. Өрнектің мағынасы болатындай x -тің барлық мәндерін табыңдар:

а) $\sqrt{-x}$; б) $\sqrt{\sqrt{7} - x}$; г) $\sqrt{|x| - 9}$;
 ә) $\sqrt{1 - 5x}$; в) $\sqrt{8 - |x|}$; ф) $\sqrt{-|x - 10|}$.

78. $x^2 - 4x + 3$ өрнегінің $x = 2 + \sqrt{3}$ болғандағы мәнін табыңдар.

79. 5 %-ы $\sqrt{5,6^2 - 1,6 \cdot 10^{-1} + 4\frac{4}{5}}$ өрнегінің мәніне тең болатын санды табыңдар.

80. Қырлы ағаш бөренені өңдегенде оның ұзындығы 2 %-ға, ені 3 %-ға, ал қалыңдығы 1 %-ға кеміді. Бөренені өңдегенде шыққан қалдық оның бастапқы көлемінің неше пайызын құрайды? (Жауабын 0,1 %-ға дейінгі дәлдікпен беріңдер.)

81. Квадраттар айырымының формуласын пайдаланып, өрнекті көбейткіштерге жіктендер:

а) $a^2 - 7$; ә) $-b^2 + 17$; б) $2c^2 - 3$; в) $5a^2 - 6b^2$.

82. Бөлшекті қысқартыңдар:

а) $\frac{\sqrt{7} + 7}{\sqrt{7}}$; ә) $\frac{15 - \sqrt{15}}{\sqrt{15}}$; б) $\frac{(1 - \sqrt{7})^2}{\sqrt{7} - 4}$; в) $\frac{(1 + \sqrt{2})^2}{\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}$.

83. Есептеңдер:

$$а) \sqrt{\frac{12,5 \cdot 76,4 - 12,5 \cdot 74,4}{4 \cdot 5,7 + 4 \cdot 3,3}};$$

$$б) \sqrt{\frac{\sqrt{113^2 - 112^2}}{19^2 - 11^2}};$$

$$ә) \sqrt{\frac{65^2 - 32^2 - 97 \cdot 17}{61^2 - 36^2}};$$

$$в) \sqrt{\frac{83^2 - 79^2}{\sqrt{170^2 - 154^2}}}.$$

84. Теңдеуді шешіндер:

$$а) 5\sqrt{x} = 4;$$

$$б) \frac{3\sqrt{x}}{5} = 21;$$

$$ә) 0,5\sqrt{x} + 8 = 10;$$

$$в) (-\sqrt{2})^2 = \sqrt{x+2}.$$

С деңгейі

85. a -ның қандай мәндерінде өрнектің мағынасы бар болады:

$$а) \sqrt{2a - a^2 - 1};$$

$$б) \sqrt{a^2 - 4a + 5};$$

$$г) \sqrt{2a - 4} - \sqrt{8 - 4a};$$

$$ә) \sqrt{a^2 - 2a + 3};$$

$$в) \sqrt{3 - 2a} + \sqrt{1 - a};$$

$$ғ) \sqrt{2 - a} + \frac{5}{\sqrt{a - 2}}?$$

86. а) Әрбір үштігі қосындысының квадрат түбірі натурал сан болатын барлық тізбектес біртаңбалы сандар үштігін табыңдар.

ә) Қосындыларының квадрат түбірі натурал сан болатын бес тізбектес натурал санды табыңдар. Осындай тізбектес сандардың үш мысалын келтіріңдер.

87. Әртүрлі әрпіне әртүрлі цифр сәйкес келетін $\sqrt{1aabc9} = m1n$ сандық ребусын шешіндер.

88. а) Қала тұрғындарының саны алдыңғы жылмен салыстырғанда әр жыл сайын p %-ға артып отырады. Қазіргі кезде қалада 168 100 тұрғын бар. Егер 2 жыл бұрын 160 000 тұрғын болса, p -ның мәнін табыңдар.

ә) Заттың бастапқы бағасы 4000 теңге болды. Оның бағасын екі рет бірдей пайызға түсіргенде зат 2560 теңге тұратын болды. Әр жолы заттың бағасын қанша пайызға түсірген? (Бағалары шартты түрде берілген.)

89. Тізбектес бес натурал санның квадраттары қосындысының квадрат түбірі бүтін сан болмайтынын дәлелдеңдер.

4. Квадрат түбірлердің қасиеттері

1-теорема. Кез келген нақты a саны үшін $\sqrt{a^2} = |a|$ теңдігі ақиқат.

Яғни, кез келген санның квадратының арифметикалық түбірі сол санның модуліне тең.

Дәлелдеуі. 1) Егер $a \geq 0$ болса, онда арифметикалық квадрат түбірдің анықтамасы бойынша $\sqrt{a^2} = a$. 2) Егер $a < 0$ болса, $-a > 0$ және $\sqrt{a^2} = \sqrt{(-a)^2} = -a$ болады.

$|a| = \begin{cases} a, \text{ егер } a \geq 0, \\ -a, \text{ егер } a < 0, \end{cases}$ болғандықтан, $\sqrt{a^2} = |a|$ болады. Дәлелдеу

керегі де осы еді.

Осы теоремадан жұп көрсеткішті дәрежені арифметикалық квадрат түбірдің астынан шығару ережесі шығады: *жұп көрсеткішті дәрежені түбірдің астынан шығару үшін түбір астындағы өрнекті квадрат түрінде көрсетіп, $\sqrt{a^2} = |a|$ теңе-теңдігін пайдалану керек.*

1-мысал. а) $\sqrt{a^{16}}$; ә) $\sqrt{x^{10}}$ өрнегін ықшамдау керек, мұндағы $x < 0$.

Шешуі. а) $\sqrt{a^{16}} = \sqrt{(a^8)^2} = |a^8|$. Кез келген $a \in R$ үшін $a^8 \geq 0$ болатындықтан, $|a^8| = a^8$ болады. Демек, $\sqrt{a^{16}} = a^8$.

ә) $\sqrt{x^{10}} = \sqrt{(x^5)^2} = |x^5|$. $x < 0$ болғандықтан, $x^5 < 0$, $|x^5| = -x^5$ болады. Демек, $x < 0$ болғанда $\sqrt{x^{10}} = -x^5$ болады.

Жауабы. а) a^8 ; ә) $-x^5$.

2-теорема. Кез келген теріс емес a және b сандары үшін $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ теңдігі ақиқат.

Дәлелдеуі. 1) $\sqrt{a} \geq 0$ және $\sqrt{b} \geq 0$ болғандықтан, $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geq 0$ болады.

2) Дәреженің қасиеті бойынша $(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = ab$. Теорема дәлелденді.

Дәлелденген теорема түбір таңбасының ішіндегі көбейткіштердің саны 2-ден артық болған жағдайда да дұрыс болады. Мысалы, егер $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ болса, онда $\sqrt{abc} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c}$ болады.

Сонымен, *теріс емес көбейткіштердің арифметикалық квадрат түбірі сол көбейткіштердің түбірлерінің көбейтіндісіне тең.*

2 - м ы с а л. $\sqrt{12} \cdot \sqrt{48}$ -ді есептеу керек.

Ш е ш у і. $\sqrt{12} \cdot \sqrt{48} = \sqrt{12 \cdot 48} = \sqrt{12 \cdot 12 \cdot 4} = 12 \cdot 2 = 24.$

Ж а у а б ы. 24.

3 - м ы с а л. $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ және $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ – өзара кері сандар екенін дәлелдеу керек.

Д ә л е л д е у і. Ол үшін осы сандардың көбейтіндісі 1-ге тең болатынын дәлелдейік:

$\sqrt{7-4\sqrt{3}} \cdot \sqrt{7+4\sqrt{3}} = \sqrt{(7-4\sqrt{3})(7+4\sqrt{3})} = \sqrt{7^2 - (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{49-48} = 1.$ Демек, $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ және $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ – өзара кері сандар.

3 - т е о р е м а. Кез келген $a \geq 0$ және $b > 0$ үшін $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ теңдігі ақиқат.

Яғни, *алымы теріс емес және бөлімі оң сан болатын бөлшектің арифметикалық квадрат түбірі алымының түбірін бөлімінің түбіріне бөлгендегі бөліндіге тең болады.* (Бұл теореманы өздігінен дәлелдендер.)

4 - м ы с а л. $\sqrt{1\frac{81}{144}}$ -ді есептеу керек.

Ш е ш у і. $\sqrt{1\frac{81}{144}} = \sqrt{\frac{144+81}{144}} = \sqrt{\frac{225}{144}} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}.$

Ж а у а б ы. $\frac{5}{4}.$

5 - м ы с а л. $\sqrt{27} + \sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{1}{48}}$ өрнегін ықшамдау керек.

Ш е ш у і. $\sqrt{27} + \sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{1}{48}} = \sqrt{9 \cdot 3} + \sqrt{\frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 3}} - \sqrt{\frac{1 \cdot 3}{16 \cdot 3 \cdot 3}} =$
 $= 3\sqrt{3} + \frac{1}{3}\sqrt{3} - \frac{1}{12}\sqrt{3} = \sqrt{3}(3 + \frac{1}{3} - \frac{1}{12}) = 3\frac{1}{4} \cdot \sqrt{3}.$

Жауабы. $3,25\sqrt{3}.$

4 - т е о р е м а. Егер $a > b > 0$ болса, онда $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ болады.

Яғни, үлкен оң санға үлкен арифметикалық квадрат түбір сәйкес келеді.

Дәлелдеуі. $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$ болсын. Сонда теңсіздіктің қасиеті бойынша $(\sqrt{a})^2 \leq (\sqrt{b})^2$, бұдан $a \leq b$. Бірақ соңғы теңсіздік $a > b$ шартына қайшы келеді, сондықтан жоруымыз дұрыс емес, демек, $\sqrt{a} > \sqrt{b}$. Дәлелдеу керегі де осы еді.

Кері тұжырымның да дұрыс болатынын өздігінен дәлелдендер: **егер $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ болса, онда $a > b > 0$ болады.**

6 - м ы с а л. $\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2}$ және $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$ өрнектерін салыстыру керек.

Ш е ш у і. $\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$, $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$, $3\sqrt{2} > 2\sqrt{2}$. Демек, $\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} > \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$.

Е с е п. Бірінші тіктөртбұрыштың іргелес қабырғалары $\sqrt{10}$ см және $\sqrt{15}$ см, ал екіншінікі – $\sqrt{11}$ см және $\sqrt{14}$ см. Осы тіктөртбұрыштардың аудандары мен периметрлерін салыстыру керек.

Ш е ш у і. $S_1 = \sqrt{10} \cdot \sqrt{15} = \sqrt{150}$, $S_2 = \sqrt{11} \cdot \sqrt{14} = \sqrt{154}$. $154 > 150$ болғандықтан, $\sqrt{154} > \sqrt{150}$ болады, сондықтан $S_2 > S_1$.

$P_1 = 2(\sqrt{10} + \sqrt{15})$, $P_2 = 2(\sqrt{11} + \sqrt{14})$. Жартыпериметрлердің квадраттарын салыстырайық:

$$\left(\frac{1}{2}P_1\right)^2 = (\sqrt{10} + \sqrt{15})^2 = (\sqrt{10})^2 + 2\sqrt{10} \cdot \sqrt{15} + (\sqrt{15})^2 = 25 + 2\sqrt{150}.$$

$$\left(\frac{1}{2}P_2\right)^2 = (\sqrt{11} + \sqrt{14})^2 = (\sqrt{11})^2 + 2\sqrt{11} \cdot \sqrt{14} + (\sqrt{14})^2 = 25 + 2\sqrt{154}.$$

$\sqrt{154} > \sqrt{150}$ болғандықтан, $\left(\frac{1}{2}P_2\right)^2 > \left(\frac{1}{2}P_1\right)^2$ болады. P_1 мен P_2 -нің оң сандар екенін ескере отырып, $P_2 > P_1$ деген қорытынды жасаймыз.

Ж а у а б ы. Екінші тіктөртбұрыштың ауданы мен периметрі бірінші төртбұрыштың ауданы мен периметрінен үлкен.

СҰРАҚТАР

- $\sqrt{a^2} = |a|$ тепе-теңдігін дәлелдендер.
- а) Көбейтіндінің; ә) бөлшектің квадрат түбірі туралы теореманы тұжырымдап, дәлелдендер.

3. Үлкен санның арифметикалық квадрат түбірі үлкен болатынын дәлелдендер.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

90. Өрнектің мәнін табыңдар:

а) $\sqrt{(-3)^4}$; б) $3\sqrt{n^2}$, мұндағы $n = -9; 0; 3\frac{1}{3}$;

ә) $\sqrt{(-3)^6}$; в) $4\sqrt{m^2} + |m|$, мұндағы $m = -0,5; 0; 4,5$.

91. а) Жай санның кубының квадрат түбірі бүтін сан болуы мүмкін бе? ә) $|x| = \sqrt{|x|}$ теңдеуінің неше түбірі бар?

92. Түбір таңбасының алдына шығарыңдар:

а) $\sqrt{0,25b^2}$; г) $\sqrt{(6a)^2}$, мұндағы $a < 0$;

ә) $\sqrt{81a^4}$; ғ) $\sqrt{(4b)^6}$, мұндағы $b > 0$;

б) $\sqrt{49a^{16}}$; д) $\sqrt{2,56b^{10}}$, мұндағы $b < 0$;

в) $\sqrt{\frac{x^8}{9y^4}}$; е) $\sqrt{\frac{441x^2}{y^6}}$, мұндағы $xy > 0$.

93. a және b сандары берілген. « $(a - b)^2 = (b - a)^2$ болатындықтан, $\sqrt{(a - b)^2} = \sqrt{(b - a)^2}$ болады. Демек, $a - b = b - a$, $2a = 2b$, $a = b$. Яғни, кез келген екі сан тең болады» деген тұжырымның қатесін табыңдар.

94. Өрнекті ықшамдандар:

а) $\sqrt{(1 - \sqrt{2})^2}$; в) $\sqrt{(y - 5)^2}$, мұндағы $y < 5$;

ә) $\sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2}$; г) $\sqrt{x^2 + 4x + 4}$, мұндағы $x < -2$;

б) $\sqrt{(x - 4)^2}$, мұндағы $x \geq 4$; ғ) $\sqrt{y^4 + 8y^2 + 16}$.

95. Теңсіздікті шешіңдер: а) $\sqrt{x^2} < 4$; ә) $\sqrt{x^2} \geq 7$.

96. Есептеңдер:

а) $\sqrt{196 \cdot 81}$; в) $\sqrt{0,04 \cdot 6400 \cdot 0,25}$;

ә) $\sqrt{1,21 \cdot 49}$; г) $\sqrt{36 \cdot 1\frac{7}{9} \cdot 0,09}$;

б) $\sqrt{0,01 \cdot 144}$; ғ) $\sqrt{1,69 \cdot 289 \cdot \frac{4}{169}}$.

В деңгейі

97. Өрнектің мәнін табыңдар:

а) $\sqrt{24 \cdot 54}$; б) $\sqrt{75 \cdot 27}$; в) $\sqrt{14 \cdot 10 \cdot 35}$;

ә) $\sqrt{128 \cdot 18}$; в) $\sqrt{63 \cdot 175}$; г) $\sqrt{13 \cdot 45 \cdot 65}$.

98. Қазақстан сирек кездесетін, бал-

қыту температурасы жоғары воль-

фрам металын өндіруде де, барлан-

ған қоры бойынша да әлемде бірінші

орын алады. Вольфрамның электр

шамында (13-сурет) қолданылатын

жіңішке сымға созылатындай темпе-

ратурасын, балқу және қайнау тем-

ператураларын ($^{\circ}\text{C}$ -пен) өрнектейтін

сандарды мына өрнектердің сәйкес мәндерін есептеу арқылы

табыңдар: $\sqrt{0,256 \cdot 10^7}$, $\sqrt{\left(26\frac{47}{64}\right)^2 \cdot 2^{14}}$ және $\sqrt{25 \cdot 121 \cdot 10201}$.

99. Өрнекті ықшамдаңдар:

а) $\sqrt{3x \cdot 5y \cdot 12x \cdot 20y}$, мұндағы $x \leq 0$ және $y \leq 0$;

ә) $\sqrt{15x \cdot 18y \cdot 24x \cdot 45y}$, мұндағы $x \leq 0$ және $y \geq 0$;

б) $\sqrt{6x^3 \cdot 9y^2 \cdot 10x^5 \cdot 15y^6}$;

в) $\sqrt{7x^4 \cdot 8y^7 \cdot 21x^8 \cdot 54y^9}$.

100. Тепе-теңдікті дәлелдендер: $(\sqrt{a^2})^3 - (\sqrt{b^2})^3 = (\sqrt{a^3})^2 - (\sqrt{b^3})^2$, мұндағы $a \geq 0$, $b \geq 0$.101. Егер $a < 0$ және $b < 0$ болса, онда $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}$ болатынын дәлелдендер.102. Егер: а) $x < 0$, $y > 0$; ә) $x < 0$, $y < 0$ болса, $3y^5 \cdot \sqrt{\frac{x^6}{9y^{10}}}$ өрнегін ықшамдаңдар.103. а) $3 - \sqrt{7}$ және $3 + \sqrt{7}$; ә) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ және $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; б) $5 + 2\sqrt{6}$ және $5 - 2\sqrt{6}$; в) $\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}}$ және $\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}}$ өзара кері сандар бола ма?

13-сурет

104. $\sqrt{6} \approx 2,48$ жуық мәнін пайдаланып, түбірді есептендер:

а) $\sqrt{\frac{2}{3}}$; ә) $\sqrt{\frac{3}{2}}$; б) $\sqrt{24}$; в) $\sqrt{150}$.

105. Салыстырыңдар:

а) $\sqrt{26}$ және 5; б) $6\sqrt{3}$ және $5\sqrt{4}$;

ә) $\sqrt{35}$ және 6; в) $5\sqrt{6}$ және $4\sqrt{7}$.

106. Қайсысы үлкен:

а) $\sqrt{108 \cdot 27}$ немесе $\sqrt{27 \cdot 12 \cdot 16}$;

ә) $\sqrt{(36 \cdot 25)^{-2}}$ немесе $\sqrt{(49 \cdot 10)^{-2}}$;

б) $\sqrt{7} + \sqrt{3}$ немесе $\sqrt{10}$;

в) $\sqrt{13} + \sqrt{12}$ немесе $\sqrt{14} + \sqrt{11}$;

г) $\sqrt{15} - \sqrt{6}$ немесе $\sqrt{14} - \sqrt{7}$;

ғ) $\sqrt{7} - \sqrt{19}$ немесе $\sqrt{8} - \sqrt{18}$?

107. Теңдік дұрыс па:

а) $(2 + \sqrt{5})^2 + \sqrt{(4\sqrt{5} - 11)^2} = 20$;

ә) $(1 + \sqrt{7})^2 + \sqrt{(2\sqrt{7} - 10)^2} = 18$?

108. Теңсіздікті дәлелдендер:

а) $(5 - 2\sqrt{3})(6 + 5\sqrt{3}) > 13$;

ә) $(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{2} + 1) > (\sqrt{2} + 2)(\sqrt{3} - 2)$.

109. Теңдеуді шешіндер:

а) $(2 + x\sqrt{8}) \cdot \sqrt{2} = 2(x + \sqrt{18})$; б) $\sqrt{(x-1)^2} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$;

ә) $(12 - x\sqrt{8}) \cdot \sqrt{2} = 2(x + \sqrt{144})$; в) $\sqrt{(2-x)^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{50}$.

110. Егер тіктөртбұрыш қабырғалары ұзындықтарының қатынасы

2-ге тең, ал ауданы 196 см^2 болса, оның қабырғаларын табыңдар.

111. $\sqrt{10} \approx 3,16$ екенін біле отырып, өрнектің мәнін табыңдар:

$$10\sqrt{0,4} - 0,5\sqrt{160} + 3\sqrt{1\frac{1}{9}}.$$

112. Егер $x = 2^{-3}$ болса, $\frac{\sqrt{x^2}}{x} - \frac{x^0}{\sqrt{x^2}}$ өрнегінің мәнін табыңдар.

113. Дұрыс теңдікті көрсетіндер:

а) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}}$, мұндағы $x \geq 0, y > 0$;

ә) $\sqrt{xy} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$, мұндағы $x \geq 0, y \geq 0$;

б) $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$, мұндағы $x \geq 0, y \geq 0$;

в) $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{xy}}{y}$, мұндағы $x \geq 0, y > 0$;

г) $\sqrt{x^2} = -x$, мұндағы $x < 0$;

ғ) $\sqrt{(x-y)^2} = y-x$, мұндағы $y \geq x$.

114. Есептеңдер:

а) $\sqrt{18} \cdot \sqrt{50} - \sqrt{2,25}$;

в) $\frac{(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 + 2\sqrt{6}}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)}$;

ә) $(2\sqrt{2,5})^2 + \sqrt{3} \cdot \sqrt{0,27} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{32}}$;

г) $\sqrt{25^2 - 24^2}$;

б) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{96}} + \sqrt{56,25}$;

ғ) $\sqrt{15^2 + 8^2}$.

115. Теңдеуді шешіндер:

а) $5\sqrt{9x} - \sqrt{4x} = 26$;

ә) $\frac{1}{4}\sqrt{16x} + \frac{2}{5}\sqrt{25x} = 1$;

б) $\sqrt{x^2} - 6\sqrt{\frac{x}{4}} = 0$;

в) $\sqrt{x^2} = 12\sqrt{\frac{x}{9}} - 4$.

116. Өрнектің мәні дұрыс табылған ба:

$$\frac{(5 + 2\sqrt{6})^2 + (5 - 2\sqrt{6})^2}{(5 + 2\sqrt{6})(5 - 2\sqrt{6})} = \frac{(5 + 2\sqrt{6}) + (5 - 2\sqrt{6})}{1 \cdot 1} = 10? \text{ Егер дұрыс}$$

болмаса, қатені тауып, жаттығуды дұрыс орындандар.

117. Есептендер:

$$а) \frac{\sqrt{2} + \sqrt{8} - \sqrt{32}}{-\sqrt{2}};$$

$$ә) \frac{\sqrt{3} - \sqrt{27} + \sqrt{48}}{\sqrt{3}};$$

$$б) \frac{10 - \sqrt{125}}{\sqrt{5}(2 - \sqrt{5})^2};$$

$$в) \frac{(\sqrt{2} + 1)^3 + (\sqrt{2} - 1)^3}{\sqrt{8}}.$$

118. Бөлшектің алымын өрнектің квадраты түріне келтіріп немесе көбейткіштерге жіктеп, оны қысқартыңдар:

$$а) \frac{15 + 2\sqrt{26}}{\sqrt{13} + \sqrt{2}};$$

$$ә) \frac{14 - 2\sqrt{33}}{\sqrt{11} - \sqrt{3}};$$

$$б) \frac{\sqrt{30} + \sqrt{6} - \sqrt{5} - 1}{\sqrt{5} + 1};$$

$$в) \frac{\sqrt{14} + \sqrt{7} - 2\sqrt{2} - 2}{\sqrt{7} - 2}.$$

119. Теңдік дұрыс па:

$$а) \sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{7})^4} = (\sqrt{5} - \sqrt{7})^2;$$

$$ә) \sqrt{(\sqrt{7} - \sqrt{11})^6} = (\sqrt{7} - \sqrt{11})^3;$$

$$б) \sqrt{(\sqrt{15} - \sqrt{21})^8} = (\sqrt{15} - \sqrt{21})^4;$$

$$в) \sqrt{(6 - \sqrt{37})^{10}} = (6 - \sqrt{37})^5?$$

С деңгейі

120. Түбір таңбасының ішіндегі өрнекті екі санның қосындысының немесе айырымының квадраты түріне келтіріп, өрнекті ықшамдаңдар:

$$а) \sqrt{6 + 2\sqrt{5}}; \quad б) \sqrt{7 - 4\sqrt{3}};$$

$$ә) \sqrt{13 + 2\sqrt{12}}; \quad в) \sqrt{12 - 6\sqrt{3}}.$$

121. Теңсіздікті шешіндер:

а) $\sqrt{x^2} - \sqrt{2} < \sqrt{6 - 4\sqrt{2}}$;

ә) $\sqrt{x^2} + \sqrt{7} \geq \sqrt{16 + 6\sqrt{7}}$.

122. $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} > \sqrt{5}$ болатынын дәлелдендер.

123. Амалдарды орындандар:

а) $\sqrt{3} \cdot (\sqrt{27} + 0,4\sqrt{75})$;

ә) $(\sqrt{20} - 6\sqrt{5} + \sqrt{45}) \cdot \sqrt{5}$;

б) $(2\sqrt{8} + 3\sqrt{5} - 7\sqrt{2})(2\sqrt{2} + 2\sqrt{5})$;

в) $(\sqrt{15} - \sqrt{6})^2 + (\sqrt{3} + \sqrt{30})^2$.

124. Сандық ребусты шешіндер: а) $\sqrt{(\text{ТАС})^4} = \text{КӨКТАС}$; ә) $\sqrt{(\text{ГҮЛ})^4} = \text{НАЗГҮЛ}$, мұндағы әртүрлі әріптерге әртүрлі цифрлар, ал бірдей әріптерге бірдей цифрлар сәйкес келеді.

125. Құрамында 60 % қышқылы бар көлемі 8 л ерітіндіге құрамында 20 % қышқылы бар ерітінді қосып, 40 % қышқылы бар қоспа алды. 20 % қышқылы бар ерітіндіден неше литр қосқан?

126. Екі санның қатынасы 3-ке тең, ал олардың квадраттары қосындысының сандардың қосындысына қатынасы 5-ке тең. Сол сандарды табыңдар.

5. Квадрат түбірі бар өрнектерді түрлендіру

Түбір таңбасының ішінде айнымалысы бар алгебралық өрнектер **иррационал өрнектер** деп аталады. Сондай өрнектерді тепе-тең түрлендірудің мысалдарын қарастырайық.

$\sqrt{a^2b}$ өрнегін, мұндағы $a \in R, b \geq 0, |a| \cdot \sqrt{b}$ түріне келтірейік. Мұндай түрлендіру *a* көбейткішін түбір таңбасының алдына шығару деп аталады.

Егер $a \cdot \sqrt{b}$ өрнегін, мұндағы $a > 0, b > 0$, оған тепе-тең $\sqrt{a^2b}$ өрнегімен немесе $a \cdot \sqrt{b}$ өрнегін, мұндағы $a < 0, b > 0, -\sqrt{a^2b}$ өрнегімен алмастырса, онда мұндай түрлендіру *a* көбейткішін түбір таңбасының ішіне енгізу деп аталады.

1 - м ы с а л. $5m\sqrt{\frac{n}{m}} - 4n\sqrt{\frac{m}{n}}$ өрнегін ықшамдау керек, мұндағы $m > 0, n > 0$.

$$\begin{aligned} \text{Ш е ш у і. } 5m\sqrt{\frac{n}{m}} - 4n\sqrt{\frac{m}{n}} &= 5\sqrt{\frac{m^2n}{m}} - 4\sqrt{\frac{n^2m}{n}} = \\ &= 5\sqrt{mn} - 4\sqrt{mn} = \sqrt{mn}. \end{aligned}$$

Ж а у а б ы. \sqrt{mn} .

2 - м ы с а л. Көбейткішті түбір таңбасының алдына шығарайық:

а) $\sqrt{144x^2y^3}$, мұндағы $x < 0, y > 0$; ә) $\sqrt{25c^3p^3}$, мұндағы $c < 0, p < 0$; б) $\sqrt{-8a^4b^3}$.

Ш е ш у і. а) $\sqrt{144x^2y^3} = 12|xy| \cdot \sqrt{y} = -12xy\sqrt{y}$, себебі $x < 0, y > 0$;

ә) $\sqrt{25c^3p^3} = 5|cp| \sqrt{cp} = 5cp\sqrt{cp}$, себебі $c < 0$ және $p < 0$ болғандықтан, $cp > 0$ болады;

б) $\sqrt{-8a^4b^3}$ өрнегінің a мен $b < 0$ болатын кез келген мәндерінде мағынасы бар болғандықтан, $\sqrt{-8a^4b^3} = -2a^2b\sqrt{-2b}$ болады.

Ж а у а б ы. а) $-12xy\sqrt{y}$; ә) $5cp\sqrt{cp}$; б) $-2a^2b\sqrt{-2b}$.

$\frac{a}{\sqrt{b}}$, мұндағы $b > 0$ бөлшегінің алымы мен бөлімін \sqrt{b} -ға көбейтіп, $\frac{a\sqrt{b}}{b}$ түрінде жазайық. Бөлшектің бөлімін түбір астындағы өрнексіз жазу үшін орындалатын тепе-тең түрлендіру бөлшектің бө-

лімін *иррационалдықтың арылту* деп аталады. Мысалы, $\frac{c}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ бөлшегінің, мұндағы $a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$ бөлімін иррационалдықтың арылту үшін оның алымы мен бөлімін $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ өрнегіне, яғни бөлімінің түйіндесіне көбейту керек. Сонда: $\frac{c(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} = \frac{c(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2} = \frac{c(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{a - b}$ болады.

3 - м ы с а л. $\frac{1}{\sqrt{2a}-\sqrt{2a-1}} + \frac{1}{\sqrt{8a}-\sqrt{8a+1}}$ өрнегін ықшамдау керек.

Ш е ш у і. $\frac{1}{\sqrt{2a}-\sqrt{2a-1}} + \frac{1}{\sqrt{8a}-\sqrt{8a+1}} = \frac{\sqrt{2a} + \sqrt{2a-1}}{(\sqrt{2a})^2 - (\sqrt{2a-1})^2} + \frac{\sqrt{8a} + \sqrt{8a+1}}{(\sqrt{8a})^2 - (\sqrt{8a+1})^2} = \sqrt{2a} + \sqrt{2a-1} - 2\sqrt{2a} - \sqrt{8a+1} = \sqrt{2a-1} - \sqrt{2a} - \sqrt{8a+1}$.

Ж а у а б ы. $\sqrt{2a-1} - \sqrt{2a} - \sqrt{8a+1}$.

1 - е с е п. Екі маман әртүрлі сағаттық жалақымен жұмыс істеді. Біреуіне 625 теңге, ал одан 1 сағат кем жұмыс істеген екіншісіне 400 теңге төленді. Егер бірінші маман екінші маманның, ал екінші маман бірінші маманның уақыт көлеміндей жұмыс істеген болса, онда олар бірдей жалақы алар еді. Әр маман неше сағат жұмыс істеген?

Ш е ш у і. Бірінші маман x сағат жұмыс істеген болсын, сонда екінші $(x - 1)$ сағат жұмыс істеген болады. 1 сағаттық жұмыс үшін біріншіге $\frac{625}{x}$ теңге, ал екіншіге $\frac{400}{x-1}$ теңге төленген. Егер бірінші маман $(x - 1)$ сағат, ал екінші x сағат жұмыс істеген болса, онда бірінші $\frac{625(x-1)}{x}$ теңге, ал екінші $\frac{400}{x-1}$ теңге алар еді. Есептің шарты бойынша $\frac{625(x-1)}{x} = \frac{400x}{x-1}$. Пропорцияның негізгі қасиетін пайдаланып, мынаны аламыз: $625(x-1)^2 = 400x^2$, $\sqrt{625(x-1)^2} = \sqrt{400x^2}$, $25|x-1| = 20|x|$. $x > 1$ болғандықтан, $25(x-1) = 20x$, $x = 5$; $x-1 = 4$ болады.

Ж а у а б ы. Бірінші маман 5 сағат, екіншісі 4 сағат жұмыс істеген. $2 - е с е п^*$. Аудандары S -ке тең болатын барлық тіктөртбұрыштардың ішіннен ең кіші периметр қабырғасы \sqrt{S} -ке тең шаршынікі болатынын дәлелдеу керек.

Ш е ш у і. Тіктөртбұрыштың қабырғаларын a және b деп белгілейік, сонда $ab = S$ болады.

Егер тіктөртбұрыш шаршы болса, онда $a = b = \sqrt{S}$, ал оның периметрі $2(a + b) = 4\sqrt{S}$ болады.

Егер тіктөртбұрыш шаршы болмаса, онда $a \neq b$. $a = b + c$ болсын, мұндағы $c \neq 0$ және $a + b = p$, мұндағы p – жартыпериметр. Сонда $b + c + b = p$, $b = \frac{p - c}{2}$, $a = \frac{p + c}{2}$, $ab = \frac{p^2 - c^2}{4} = S$. Бұдан $p^2 = 4S + c^2$, $p = \sqrt{4S + c^2}$. Арифметикалық квадрат түбірдің қасиеті бойынша $\sqrt{4S + c^2} > \sqrt{4S}$. Демек, бұл жағдайда $2(a + b) > 2\sqrt{4S} = 4\sqrt{S}$. Сонымен, ең кіші периметр қабырғасы \sqrt{S} -ке тең шаршынікі болады екен.

СҰРАҚТАР

1. Қандай түрлендіру көбейткішті түбір таңбасының ішіне енгізу және көбейткішті түбір таңбасының алдына шығару деп аталады? Мысалдар келтіріңдер.
2. Бөлшектің бөлімін иррационалдыктан арылту деген нені білдіреді? Мысалдар келтіріңдер.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

127. а) $\sqrt{202\,500\,000\,000}$; ә) $\sqrt{0,00000784}$ табыңдар.

128. Көбейткішті түбір таңбасының алдына шығарыңдар:

а) $\sqrt{\frac{72}{121}}$; ә) $\sqrt{\frac{48}{225}}$; б) $\sqrt{\frac{81}{125}}$; в) $\sqrt{\frac{49}{216}}$.

129. Есептеңдер:

а) $5\sqrt{28} - 3\sqrt{63}$; б) $\frac{1}{3}(2\sqrt{180} - 3\sqrt{125})$;

ә) $5\sqrt{18} - 8\sqrt{8}$; в) $-\frac{1}{3}(4\sqrt{192} - 5\sqrt{147})$.

130. Оң көбейткішті түбір таңбасының ішіне енгізіп, қайсысы үлкен екенін анықтаңдар:

- а) $0,5\sqrt{10}$ немесе $3\sqrt{\frac{1}{3}}$; б) $-6\sqrt{\frac{1}{3}}$ немесе $-0,5\sqrt{46}$;
 ә) $3\sqrt{0,5}$ немесе $0,25\sqrt{70}$; в) $-\frac{1}{2}\sqrt{56}$ немесе $-9\sqrt{\frac{1}{6}}$.

131. Сандарды өсу ретімен жазыңдар:

- а) $0,6\sqrt{5}$; $\frac{1}{3}\sqrt{7,2}$; $\frac{3}{4}\sqrt{7,2}$; $0,2\sqrt{7}$;
 ә) $-0,2\sqrt{2,5}$; $-0,3\sqrt{1,8}$; $-1,2\sqrt{0,1}$; $-2,3\sqrt{0,02}$.

132. Көбейткішті түбір таңбасының алдына шығарыңдар:

- а) $\sqrt{75a^2}$, мұндағы $a \geq 0$; б) $\sqrt{144y^2}$;
 ә) $\sqrt{72b^2}$, мұндағы $b < 0$; в) $\sqrt{-81x^3}$.

133. Көбейткішті түбір таңбасының ішіне енгізіп, өрнекті ықшамдаңдар:

- а) $x\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$, мұндағы $x > 0$; б) $(a-2) \cdot \sqrt{\frac{1}{a-2}}$;
 ә) $y^3\sqrt{\frac{1}{y^2} + \frac{1}{y^4}}$, мұндағы $y < 0$; в) $(4-b) \cdot \sqrt{\frac{1}{b-4}}$.

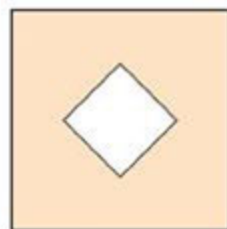
134. Теңдеудегі айнымалының мүмкін болатын мәндерін тауып, оны шешіңдер:

- а) $\sqrt{x} = \sqrt{-x}$; б) $x \cdot \sqrt{\frac{5}{x}} = \sqrt{x^2}$;
 ә) $x \cdot \sqrt{-\frac{3}{x}} + 9 = 0$; в) $-x \cdot \sqrt{\frac{-4}{x}} = \sqrt{x^2}$.

В деңгейі

135. а) Қабырғасы 13 см-ге тең шаршыдан 14-суретте көрсетілгендей басқа шаршыны қиып алғанда, қалған фигураның ауданы 144 см^2 -ге тең болса, қиып алынған шаршының қабырғасын табыңдар.

ә) Егер тіктөртбұрыштың қабырғаларының қатынасы $\frac{m}{n}$ -ге, ал ауданы S -ке тең болса, оның қабырғаларын табыңдар.



14-сурет

136. Өрнекті ықшамдаңдар:

а) $2\sqrt{20} - 3\sqrt{45} + 3\sqrt{80} - \sqrt{125}$; б) $(\sqrt{15} - \sqrt{6})^2 + 6\sqrt{10}$;
 ә) $10\sqrt{\frac{2}{5}} - 0,5\sqrt{160} + 3\sqrt{1\frac{1}{9}}$; в) $\left(\frac{3}{\sqrt{3}} + \frac{7}{\sqrt{7}}\right)(\sqrt{7} - \sqrt{3})$.

137. Кез келген $a > 1$ мәндерінде $\sqrt{a + \frac{a}{a^2 - 1}} = a\sqrt{\frac{a}{a^2 - 1}}$ теңдігінің дұрыс болатынын дәлелдендер.

138. Тізбектес екі натурал санның квадраттары айырымының квадрат түбірі натурал сан болатындай екі жұбын табыңдар. Сондай сандардың: а) біртаңбалы; ә) екітаңбалы болатын қанша жұбы бар болады?

139. Бөлшектің бөлімін иррационалдықтан арылтыңдар:

а) $\frac{10a}{\sqrt{2}}$; б) $\frac{m}{2\sqrt{3}}$; г) $\frac{58}{2\sqrt{5} - 7}$; д) $\frac{2}{5\sqrt{2} + 7}$;
 ә) $\frac{5b}{2\sqrt{b}}$; в) $\frac{-n}{2\sqrt{5}}$; г) $\frac{\sqrt{2}}{7\sqrt{2} - 5}$; е) $\frac{1}{7 - 4\sqrt{3}}$.

140. Бөлшекті қысқартып, бөлімін иррационалдықтан арылтыңдар:

а) $\frac{\sqrt{6} + 3}{2 + \sqrt{6}}$; б) $\frac{3 - \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{15}}$; г) $\frac{\sqrt{xy} - x}{\sqrt{xy} - y}$, мұндағы $x > 0, y > 0$;
 ә) $\frac{\sqrt{10} + 5}{2 + \sqrt{10}}$; в) $\frac{7 - \sqrt{35}}{5 - \sqrt{35}}$; г) $\frac{25x - y}{5\sqrt{xy} + y}$, мұндағы $x > 0, y > 0$.

141. Есептендер:

а) $\frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{\sqrt{7} + \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{\sqrt{7} - \sqrt{3}}$; ә) $\frac{\sqrt{8} - 3}{\sqrt{8} + 3} + \frac{2\sqrt{2} + 3}{2\sqrt{2} - 3}$.

142. Өрнектің мәнін табыңдар:

а) $\frac{1}{2 + \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{8} + 3}$;
 ә) $\frac{2}{3 - \sqrt{7}} - \frac{2}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3} - 1}$.

143. Теңсіздікті шешіндер:

$$\text{a) } \frac{x}{2-\sqrt{3}} < x\sqrt{3}; \quad \text{ә) } \frac{x^2}{\sqrt{2}+1} \leq x^2\sqrt{2}+1.$$

144. Егер:

$$\text{a) } a = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}, b = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \text{ болса, } a^2 + b^2 - 2ab \text{ өрнегінің;}$$

$$\text{ә) } c = \sqrt{3} \text{ болса, } \left(\frac{1}{3}c^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}c + 1\right)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}c\right) \text{ өрнегінің мәнін табындар.}$$

145. Екі жігіт базарда 210 кг жеміс сатты. Бірінші жігіт екіншіден көбірек жеміс сатты, бірақ екеуі бірдей мөлшерде ақша тапты. Үйге барар жолда бірінші жігіт: «Егер сенің жемістерің менде болғанда, мен одан 8000 теңге табыс табар едім», – деді. Екіншісі: «Сенің жемістерің үшін мен тек 2000 теңге алар едім», – деді. Олардың әрқайсысы неше кг жеміс сатқан?

146. Бөлшектің бөлімін иррационалдықтан арылтындар:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \frac{4}{\sqrt{2}}; & \text{б) } \frac{10}{3\sqrt{5}}; & \text{г) } \frac{1}{2+\sqrt{3}}; & \text{д) } \frac{7-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}; \\ \text{ә) } \frac{8}{\sqrt{6}}; & \text{в) } \frac{\sqrt{8}-\sqrt{6}}{\sqrt{6}}; & \text{ғ) } \frac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}; & \text{е) } \frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}. \end{array}$$

147. Есептендер:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } (\sqrt{5}-\sqrt{125})^2; & \text{в) } (5\sqrt{3}+6\sqrt{2}) \cdot (5\sqrt{3}-6\sqrt{2}); \\ \text{ә) } (\sqrt{7}+\sqrt{28})^2; & \text{г) } (\sqrt{2}-\sqrt{8})^3; \\ \text{б) } (\sqrt{13}-\sqrt{12}) \cdot (\sqrt{13}+\sqrt{12}); & \text{ғ) } (\sqrt{3}-\sqrt{12})^3. \end{array}$$

148. Бөлшекті қыскартындар:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \frac{b^3}{b\sqrt{b}}; & \text{в) } \frac{a+\sqrt{7}}{a^2-7}; \\ \text{ә) } \frac{y^2-y}{\sqrt{y}}; & \text{г) } \frac{b^3-11\sqrt{11}}{b-\sqrt{11}}; \\ \text{б) } \frac{x^2-3}{x-\sqrt{3}}; & \text{ғ) } \frac{a^3+3a^2\sqrt{5}+15a+5\sqrt{5}}{a+\sqrt{5}}. \end{array}$$

149. Өрнектің мәні бүтін сан болатынын дәлелдендер:

- а) $(4 + \sqrt{3})^2 + \sqrt{(8\sqrt{3} - 14)^2}$; б) $(5 - 2\sqrt{3})^2 - 10\sqrt{37 - 20\sqrt{3}}$;
 ә) $\sqrt{(4\sqrt{5} - 17)^2} - (\sqrt{5} - 2)^2$; в) $(5\sqrt{2} - 7)^2 + 14\sqrt{99 - 70\sqrt{2}}$.

С деңгейі

150. Амалдарды орындандар:

- а) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 3} + \frac{\sqrt{x} + 5}{6 - 2\sqrt{x}} \cdot \frac{18}{5\sqrt{x} + x}$;
 ә) $\frac{3}{2\sqrt{x} - 4} - \frac{1}{\sqrt{x} + 2} + \frac{4}{4 - x}$;
 б) $\frac{10\sqrt{x}}{3\sqrt{x} - 1} - \frac{5}{2\sqrt{x} - 1} : \frac{3\sqrt{x} - 1}{4x - 1}$;
 в) $\frac{\sqrt{x} + 3}{x - 2\sqrt{x} + 1} : \frac{x - 9}{10\sqrt{x} - 10} - \frac{5}{\sqrt{x} - 3}$.

151. Өрнекті ықшамдандар:

- а) $\sqrt{\frac{9}{x^2} + \frac{6}{x} + 1}$; б) $\sqrt{14 + 8x^2 + \sqrt{x^8 + 4x^4 + 4}}$;
 ә) $\sqrt{4 + \frac{20}{y} + \frac{25}{y^2}}$; в) $\sqrt{29 + 12y^2 + \sqrt{y^8 + 14y^4 + 49}}$.

152. $\sqrt{ab} = a + \sqrt{b}$ болатын барлық екітаңбалы сандарды табыңдар.

153. Есептеңдер:

- а) $\sqrt{5 + 12\sqrt{26} - 6\sqrt{9} + 4\sqrt{5}}$; ә) $\sqrt{17 + 6\sqrt{7} - 2\sqrt{6} + 4\sqrt{2}}$.

154. а) Ауданы 5 м^2 -ге тең тіктөртбұрышты жер телімі қабырғаға жанаса орналасқан. Жер телімінің өлшемдері қандай болғанда оның қоршауының ұзындығы ең аз болады?

ә) Ауданы 3 га -ға тең тіктөртбұрыш тәрізді жер телімін сыммен екі қатар етіп қоршау үшін ең аз дегенде неше метр сым қажет болады?

155. Теңсіздікті дәлелдендер: а) $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$, мұндағы $a > 0$,

$b > 0$; ә) $\frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$; б) $\left(\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 \geq 4$, мұндағы $a > 0$.

6. $y = \sqrt{x}$ функциясы, оның қасиеттері және графигі

$y = \sqrt{x}$ формуласымен берілген функция кез келген теріс емес сан үшін анықталған, яғни $D(y) = [0; +\infty)$. Бұл функцияның мәндер жиыны да теріс емес сандар жиынынан тұрады, яғни $E(y) = [0; +\infty)$. Функцияның ең кіші мәні 0-ге тең.

Қандай да бір аралықта аргументтің үлкен мәніне функцияның үлкен мәні сәйкес келетін болса, онда функция *осы аралықта өспелі* деп аталады. Егер ондай аралық функцияның анықталу облысы болса, онда ол *өспелі функция* деп аталады.

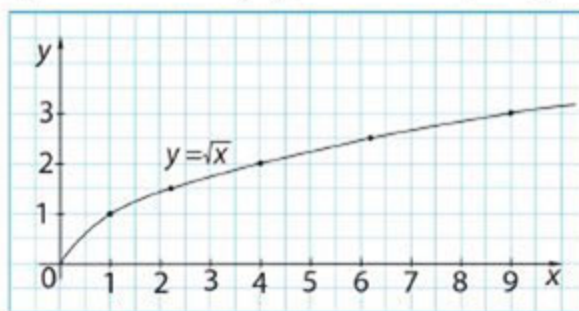
Қандай да бір аралықта аргументтің кіші мәніне функцияның үлкен мәні сәйкес келетін болса, онда функция *осы аралықта кемімелі* деп аталады. Егер ондай аралық функцияның анықталу облысы болса, онда ол *кемімелі функция* деп аталады.

Алдыңғы тақырыптарда үлкен оң санға оның арифметикалық квадрат түбірінің үлкен мәні сәйкес келетіні анықталған болатын. Демек, $y = \sqrt{x}$ өспелі функция болады.

$y = \sqrt{x}$ функциясының графигін салайық, мұндағы $x \in [0; +\infty)$. Ол үшін x пен y -тің кейбір мәндерінің кестесін құрамыз.

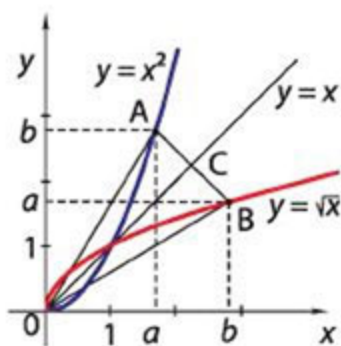
x	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9
y	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3

Координаталық жазықтыққа кестеде координаталары көрсетілген нүктелерді белгілейміз. Осы нүктелер арқылы жатық сызық жүргізіп, $y = \sqrt{x}$ функциясының графигін аламыз (15-сурет).



15-сурет

Е с е п. $y = x^2$, мұндағы $x \geq 0$ және $y = \sqrt{x}$ функцияларының графиктері бірінші координаталық бұрыштың биссектрисасын қамтитын $y = x$ түзуіне қарағанда симметриялы болатынын дәлелдеу керек (16-сурет).



16-сурет

Д ә л е л д е у і. $A(a; b)$ $y = x^2$, мұндағы $x \geq 0$, функциясы графигінің қайсыбір нүктесі болсын. Сонда $b = a^2$, $a = \sqrt{b}$ болады. Сондықтан, $B(b; a)$ нүктесі де $y = \sqrt{x}$ графигіне тиісті болады. $A(a; b)$ мен $B(b; a)$ нүктелері $y = x$ түзуіне қарағанда симметриялы екенін дәлелдейік. Ол үшін $\triangle AOB$ -ны қарастырайық. Катеттері a және b болатын тең тікбұрышты үшбұрыштардың гипотенузалары болғандықтан, $OA = OB$ болады. $\angle AOC = \angle BOC$, себебі $\angle AOC = 45^\circ - \angle AOY$, $\angle BOC = 45^\circ - \angle BOX$, ал $\angle AOY = \angle BOX$ (тең тікбұрышты үшбұрыштардың сәйкес сүйір бұрыштары ретінде). Бұдан, $\triangle AOB$ -ның теңбүйірлі, OC оның биссектрисасы екені анықталды. OC медиана да, биіктік те болатындықтан, $y = x$ түзуі AB кесіндісінің орта перпендикуляры болады. Демек, $A(a; b)$ мен $B(b; a)$ нүктелері сол түзуге қарағанда симметриялы.

Егер $a = 0$ немесе $a = 1$ болса, онда да осы тұжырым дұрыс болады. (Себебін түсіндіріңдер.)

СУРАҚТАР

1. $y = \sqrt{x}$ функциясының анықталу облысы мен мәндер жиынын көрсетіңдер.

2. $y = \sqrt{x}$ өспелі функция болатынын дәлелдеңдер.
 3. $y = \sqrt{x}$ функциясының ең үлкен және ең кіші мәндері бар бола ма?

ЖАТТЫГУЛАР

А деңгейі

156. $y = \sqrt{x}$ функциясының мәні: а) -2 -ге; ә) 10^{-1} -не тең болатындай x -тің мәні бар бола ма? Жауабын түсіндіріңдер.
 157. $A(49; 7)$; $B(-100; 10)$; $C(14; \sqrt{14})$; $D(10^6; 1000)$ нүктелерінің қайсысы $y = \sqrt{x}$ функциясының графигіне тиісті?
 158. $y = \sqrt{x}$ функциясының графигіне одан: а) абсцисса осіне дейінгі қашықтығы 3 -ке; ә) ордината осіне дейінгі қашықтығы 4 -ке тең болатын нүкте салыңдар.
 159. $y = \sqrt{x}$ функция графигінің және: а) $y = x^2$; ә) $y = \frac{-4}{x}$; б) $y = \frac{1}{2}x$ графиктерінің неше ортақ нүктесі бар?
 160. $y = \sqrt{x}$ функциясының графигі мен: а) $y = 0,5$; ә) $y = -x + 2$ түзуінің қиылысу нүктелерінің координаталарын табыңдар.

В деңгейі

161. Функцияның анықталу облысын көрсетіп, графигін салыңдар:
 а) $y = -\sqrt{x}$; ә) $y = \sqrt{-x}$; б) $y = -\sqrt{-x}$; в) $y = \sqrt{|x|}$.
 162. Функцияның анықталу облысын табыңдар:
 а) $y = \sqrt{\frac{1}{x-1}}$; в) $y = \sqrt{\frac{3-x}{5} + 8}$;
 ә) $y = \sqrt{\frac{-4}{x+0,1}}$; г) $y = \sqrt{\frac{9}{2x^2}}$;
 б) $y = \sqrt{\frac{x-5}{4} - 9}$; е) $y = \sqrt{\frac{16}{3x^2+1}}$.
 163. $y = \sqrt{x}$ функциясы: а) $[1; 9]$; ә) $[0; 0,64]$; б) $[\frac{1}{36}; 16]$; в) $[5; 7]$ аралықтарда қандай мәндерді қабылдайды?

164. Бір координаталар жүйесіне:

а) $y = 2\sqrt{x}$ және $y = 3\sqrt{x}$; ә) $y = 2 + \sqrt{x}$ және $y = 3 + \sqrt{x}$ функцияларының графиктерін салыңдар. $y = \sqrt{x}$ функциясы графигінің өзгеруі туралы қорытынды жасаңдар.

165. Егер: а) $D(y) = [0; 9]$ болса, $y = -2\sqrt{x}$; ә) $D(y) = [0; 8]$ болса, $y = \sqrt{2x}$; б) $D(y) = [-2; 7]$ болса, $y = \sqrt{2+x}$ функциясының графигін салыңдар.

166. a -ның қандай мәнінде $C(1; 2)$ нүктесі:

а) $y = -a\sqrt{x}$; б) $y = \sqrt{x+a}$;

ә) $y = \sqrt{-ax}$; в) $y = \sqrt{\frac{2x}{|a|}}$ функциясының графигіне тиісті болады?

167. Дөңгелектің ауданы $S = \pi R^2$ формуласымен табылатыны белгілі, мұндағы R – радиус, $\pi \approx 3,14$. R -дің S -тен тәуелділігін формуламен беріңдер. Шыққан функция қандай болады, өспелі ме, әлде кемімелі ме?

168. $y = -\sqrt{x}$ функциясының кемімелі болатынын дәлелдендер.

169. Функцияның мәнін табыңдар:

а) $f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x+4}}$, мұндағы $x = \sqrt{2} - 3$;

ә) $f(x) = \sqrt{\frac{4-x}{x}}$, мұндағы $x = 2 - \sqrt{3}$.

С деңгейі

170. Мына формуламен берілген функцияның анықталу облысын табыңдар:

а) $y = \sqrt{3x+15} - \sqrt{2x-4}$;

ә) $y = \sqrt{2x+12} + \sqrt{8-4x}$;

б) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$.

171. Бір координаталар жүйесіне $y = \sqrt{-x}$ және $y = x^2$, мұндағы $x \leq 0$, функцияларының графиктерін салып, олар $y = -x$ түзуіне қарағанда симметриялы бола ма, соны анықтаңдар.

172. Арифметикалық квадрат түбірдің анықтамасын пайдаланып, теңдеуді шешіндер:

а) $\sqrt{2x-1} = 4$; б) $\sqrt{x} = 2 - \sqrt{3}$;
 ә) $\sqrt{3-4x} = 5$; в) $\sqrt{6-x} = 3\sqrt{5} - 7$.

173. $y = \sqrt{x}$ функциясы графигінің: а) $y = x + \frac{1}{2}$; ә) $y = \frac{1}{2}x + 1$ түзуімен ортақ нүктесі болмайтынын дәлелдендер.

174. Теңсіздікті шешіндер:

а) $(\sqrt{x})^2 < 3$; ә) $\sqrt{x^2} \leq 4$; б) $\frac{x}{\sqrt{x}} < 1$; в) $\frac{x}{\sqrt{x}} \geq 1$.

175. Ұл мен қыз 143 метрге тең қашықтықты адымдап өлшеді. Қыздың адымы 55 см. Егер ұлдың адымының ұзындығы бүтін сантиметрмен өрнектелетіні, ал олардың іздерінің 20 рет беттескені белгілі болса, ұлдың адымының ұзындығын табыңдар.

176. Теңдеулер жүйесін шешіндер:

а) $\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{5}{8}, \\ 4x + 0,25y = 11; \end{cases}$ ә) $\begin{cases} 3x + y = 0, \\ xy = -12; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 11x^{-1} + 8y^{-1} = 1, \\ 9x^{-1} + 12y^{-1} = 1. \end{cases}$

7. «Квадрат түбірлер және иррационал өрнектер» тақырыбын қайталауға арналған жаттығулар

А деңгейі

177. Өрнектерді олардың мәндерінің өсу ретімен жазындар:

а) $\sqrt{2,75}$, $\sqrt{2,57}$, $\sqrt{1,98}$, $\sqrt{3,02}$; ә) $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{15}$, $\sqrt{\frac{1}{12}}$, $\sqrt{\frac{1}{15}}$.

178. Түбір таңбасының ішіндегі өрнекті көбейткіштерге жіктеп, оны есептеңдер:

а) $\sqrt{7840000}$; ә) $\sqrt{462400}$; б) $\sqrt{893025}$; в) $\sqrt{419904}$.

179. Есептеңдер:

а) $\sqrt{2113^2 - 2112^2}$; ә) $\sqrt{192^2 + 256^2}$; б) $\sqrt{49^2 - 2^7 \cdot 7^2 + 4^6}$.

180. Қайсысы үлкен:

а) $2\sqrt{3}$ немесе $3\sqrt{2}$; в) $\sqrt{15} - \sqrt{6}$ немесе $\sqrt{14} + \sqrt{7}$;
 ә) $-5\sqrt{3}$ немесе $-3\sqrt{10}$; г) $5\sqrt{7} - 12$ немесе $3\sqrt{10} - 11$;
 б) $\sqrt{10}$ немесе $\sqrt{7} + \sqrt{3}$; ғ) $25 - 4\sqrt{6}$ немесе $9 - 6\sqrt{5}$?

В деңгейі

181. Төмендегі сандардың иррационал сан болатынын дәлелдендер:

а) $3\sqrt{2} - 4$; ә) $2\sqrt{3} + 5$; б) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$; в) $\sqrt{5} - \sqrt{3}$.

182. Айнымалының қандай мәндерінде өрнектің мағынасы болады:

а) $\sqrt{3x}$; в) $\sqrt{1-b}$; д) $\sqrt{121-a^2}$;
 ә) $\sqrt{-2y}$; г) $\sqrt{-x^2-2x-1}$; е) $\sqrt{b^2+144}$?
 б) $\sqrt{a-5}$; ғ) $\sqrt{-x^4+x^2-0,25}$;

183. Көбейткішті түбір таңбасының алдына шығарындар:

а) $\sqrt{\frac{2}{5}}$; ә) $\sqrt{4\frac{1}{2}}$; б) $\sqrt{\frac{2a^3}{b^2}}$; в) $\sqrt{2x^2-4x+2}$, мұндағы $x < 1$.

184. Көбейткішті түбір таңбасының ішіне енгізіндер:

а) $4\sqrt{0,5}$; б) $a\sqrt{\frac{b}{a}}$, мұндағы $a > 0, b > 0$; г) $x\sqrt{\frac{4}{x}}$;
 ә) $-\frac{1}{3}\sqrt{2,7}$; в) $a\sqrt{\frac{b}{a}}$, мұндағы $a < 0, b < 0$; ғ) $x\sqrt{\frac{-4}{x}}$.

185. x -тің қандай мәндерінде теңдік дұрыс болады:

- а) $\sqrt{(x-8)^2} = x-8$; б) $\sqrt{(x+9)^2} = x+9$;
 ә) $\sqrt{(x-8)^2} = 8-x$; в) $\sqrt{(x+9)^2} = -x-9$?

186. Теңдеуді шешіңдер:

- а) $\sqrt{(x+4)^2} = 25$; б) $\sqrt{(7-x)^2} = 0$;
 ә) $\sqrt{(x-3)^2} = 16$; в) $\sqrt{(9+x)^2} = -4$.

187. Мақсат пен Фариза $x+1+\sqrt{x^2-2x+1}$ өрнегінің $x=0,13$ болғандағы мәнін тапты. Мақсат x -тің мәнін қойып, мынаны алды: « $1,13+\sqrt{0,0169-0,26+1} = 1,13+\sqrt{0,7569} = 1,13+0,87 = 2$ ».

Фариза тапсырманы былай орындады:

« $x+1+\sqrt{x^2-2x+1} = x+1+\sqrt{(x-1)^2} = x+1+|x-1| = x+1-x+1 = 2$ ». Олар тапсырманы дұрыс орындады ма? Егер дұрыс болса, кімнің шығару тәсілі тиімдірек?

188. Сыйымдылығы 5 литр, биіктігі 3 дм аквариумның түбі шаршы тәрізді. Сол шаршының қабырғасын табыңдар.

189. а) $x \in \mathbb{R}$; ә) $x \in [1; 2]$ болғанда, $\sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(2-x)^2} = 1$ болатыны ақиқат па?

190. а) $\sqrt{(a+7)^2} - \sqrt{(a-7)^2}$ өрнегінің $a \in [-7; 7]$;

ә) $\sqrt{(b-2)^2} + \sqrt{(b-8)^2}$ өрнегінің $b < 2$;

б) $\sqrt{a^2-12a+36} - \sqrt{a^2-10a+25}$ өрнегінің $a < -5$;

в) $\sqrt{b^2-16b+64} + \sqrt{b^2+14b+49}$ өрнегінің $b \in [-7; 8]$ болғандағы мәнін есептеңдер.

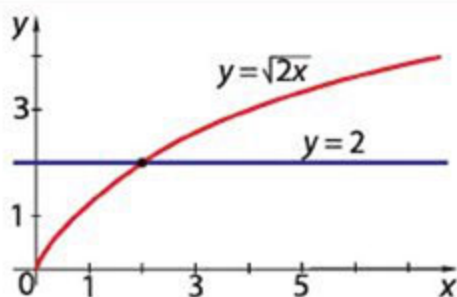
191. Теңдеуді шешіңдер:

а) $\frac{\sqrt{x+1}}{5} = 3$; б) $\sqrt{x} + 1 = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$;

ә) $\frac{\sqrt{x^2-1}}{4} = 2$; в) $\sqrt{x} - 1 = \frac{2}{\sqrt{x}+1}$.

192. $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ болғанда, $y = 1$ болатын $y = kx$ түріндегі функцияны формуламен беріңдер.

193. 17-суретте кескінделген функциялардың графиктерін пайдаланып: а) $\sqrt{2x} \geq 2$; ә) $\sqrt{2x} < 2$ теңсіздігін шешіңдер.



17-сурет

194. Өрнекті ықшамдаңдар:

а) $\sqrt{a + 2\sqrt{a \cdot b} + b}$;

ә) $\frac{1}{\sqrt{2a} + \sqrt{2a-1}} + \frac{1}{\sqrt{2a} - \sqrt{2a-1}}$;

б) $(\sqrt{a^{-1}} - \sqrt{b^{-1}})^{-1} : (a^{-1} - b^{-1})^{-1}$;

в) $\left(\frac{a}{\sqrt{ab} - a} + \frac{b}{\sqrt{ab} + b}\right) : \frac{a+b}{\sqrt{ab}}$.

195. Мына өрнектердің қайсысы бірімүше болады:

а) $2^{-5}x^2y$; ә) $\sqrt{5ab}$; б) $\sqrt{2ab}$; в) $x^{-1}\sqrt{8}$?

196. Мына өрнектердің қайсысын бірімүшеге түрлендіруге болады:

а) $\sqrt{16a^4b^8}$;

б) $\sqrt{bc^2}$;

ә) $\sqrt{3(-x)^{12}y^{20}}$;

в) $\sqrt{x^6 + 2x^6}$, мұндағы $x \leq 0$?

197. Мына өрнектердің қайсысы көпмүше болады:

а) $2 - \sqrt{5}$;

ә) $3x + \sqrt{7y}$;

б) $\sqrt{a} + \sqrt{b}$;

в) $x + 2\sqrt{xy} + y$?

198. Мына өрнектердің қайсысын көпмүшеге түрлендіруге болады:

а) $\sqrt{(x-y)^4}$;

б) $\sqrt{b^{12}} + 5$;

ә) $\sqrt{a^8 + 1}$;

в) $\sqrt{4x^4 + 12x^2y^2 + 9y^4}$?

199. $a^2 + b^2 = (a + b - \sqrt{2ab})(a + b + \sqrt{2ab})$ тепе-теңдігін дәлелдендер. Тепе-теңдіктің оң жағындағы көбейткіштер көпмүше бола ма?

С деңгейі**200.** Теңсіздік дұрыс па:

а) $\sqrt{\frac{5}{3}} + \sqrt{\frac{3}{5}} > \sqrt{4\frac{1}{5}}$; б) $\sqrt{3-2\sqrt{2}} + 2 - \sqrt{2} \geq 1?$

ә) $\sqrt{5+2\sqrt{6}} + \sqrt{5-2\sqrt{6}} < 4$;

201. Бірінші сан екіншіден $\sqrt{8}$ -ге артық, ал бірінші санның 20 %-ы екінші санның 25 %-нан 0,5-ке артық. Осы сандарды табыңдар.**202.** Өрнектің мәнін табыңдар:

а) $(\sqrt{4+\sqrt{7}} + \sqrt{4-\sqrt{7}})^2$; б) $\sqrt{6+4\sqrt{2}} - \sqrt{6-4\sqrt{2}}$;

ә) $\sqrt{11+6\sqrt{2}} + \sqrt{11-6\sqrt{2}}$; в) $\sqrt{3-\sqrt{5}} \cdot (3+\sqrt{5})(\sqrt{10}-\sqrt{2})$.

203. Дәлелдендер: $\sqrt{10+\sqrt{24}} + \sqrt{40+\sqrt{60}} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$.
(Үнді оқымыстысы Бхаскари-акарияның есебі (б. з. XII ғ.))**ӨЗІңДІ ТЕКСЕР!****204.** 1А) Сандарды өсу ретімен жазыңдар: $0,5\sqrt{11}$, $\sqrt{2,5}$, $2\sqrt{0,7}$.2В) Есептендер: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{3}-1}\right)^2$.3В) Іргелес қабырғалары ұзындықтарының қосындысы $\sqrt{14}$ см-ге, ал олардың айырымы $\sqrt{10}$ см-ге тең болатын тіктөртбұрыштың ауданын табыңдар.4В) a мен b -ның барлық мүмкін болатын оң мәндерінде $\frac{\sqrt{a^2b} - b}{\sqrt{a^2b} + b} = \frac{(a - \sqrt{b})^2}{a^2 - b}$ теңдігінің дұрыс болатынын дәлелдендер.5С) $y = -\sqrt{x} + 4$ функциясының графигін салып, x -тің қандай мәндерінде: 1) $y = 0$; 2) $y > 0$; 3) $y < 0$ болатынын табыңдар.**БҰЛ ҚЫЗЫҚТЫ!**

Шаршы диагоналі ұзындығының оның қабырғасына қатынасы рационал санмен өрнектелмейтіні туралы дерек математиканың дамуына зор үлес қосты. Ертеректе тек рационал сандар ғана бар, олар кез келген шаманы өрнектеуге жеткілікті деп есептелген. Иррационал сандардың бар екенін біздің дәуірімізге дейінгі V ғасырда Пифагор математикалық мектебінің оқымыстылары анықтаған болатын.



Герон
Александрийский



Бхаскари-акария

Ерте заманда іс жүзіндегі есептерді шығарғанда, мысалы, ауданы берілген шаршы жер телімінің қабырғасын табу үшін квадрат түбір табу керек болған. Ежелгі Вавилонда біздің дәуірімізге дейінгі 2000 жыл бұрын натурал сандардың квадрат түбірлерінің жуық мәндерін таба білген. Қазіргі кездегі жазу бойынша олардың тәсілін мына формуламен өрнектеуге болады: $\sqrt{m} = \sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}$. Осы формуламен табылған \sqrt{m} -нің жуық мәні b саны a санына қарағанда неғұрлым аз болса, соғұрлым дәлірек болады. Квадрат түбірді табудың көрсетілген тәсілін ежелгі грек ғалым-энциклопедисі Герон Александрийский біздің дәуіріміздің I ғасырында егжей-тегжейлі сипаттап жазған болатын.

Алгебраның дамуына, оның ішінде квадрат түбірлерді есептеуге үнділік атақты математик және астроном Бхаскари-акария (1114–1185) зор үлес қосты. Оның «Астрономиялық ілімнің тәжі» еңбегі Азия елдерінде кеңінен тарап, оның бір бөлігі 1816 жылы Калькуттада басылып, бірнеше рет математика оқулығы ретінде қайталанып басылған болатын.

Қайта өрлеу дәуірінде еуропалық математиктер квадрат түбірді Radix (түбір) сөзімен атап, R әрпімен белгілеген. Осыдан «радикал» атауы шығып, оны қазіргі уақытта түбір белгісі деп атауға келісілген. $\sqrt{\quad}$ белгісін 1525 жылы чех математигі К. Рудольф (1499–1545) енгізген.

-
- Ғаламтор көздерін пайдалана отырып, мынадай деректерді жинаңдар:
- Пифагордың өмірбаяны және математикалық мұрасы туралы деректер;
 - тақ санды екі натурал санның квадраттарының айырмасы түрінде беру бойынша Пифагор есебі және оның шешуі;
 - Бхаскари-акарияның өмірбаяны және оның алгебраның дамуына қосқан үлесі;
 - Бхаскари-акария құрастырған арифметикалық квадрат түбірді табу бойынша бір мысал және оның шешуі.

II. КВАДРАТ ТЕҢДЕУЛЕР



Бөлімді оқу нәтижесінде

- квадрат, биквадрат, бөлшек-рационал теңдеулердің анықтамаларын;
- квадрат теңдеулердің түрлерін;
- Виет теоремасы мен оған кері теореманы;
- квадрат үшмүше мен оның түбірінің анықтамасын;
- квадрат теңдеулер мен оған келтірілетін теңдеулерді шешуді;
- квадрат үшмүшені көбейткіштерге жіктеу тәсілдерін **білу керек.**
- әртүрлі квадрат теңдеулер мен оларға келтірілетін теңдеулерді, бөлшек-рационал теңдеулерді шешуді;
- квадрат теңдеу түбірлерінің және квадрат үшмүшені көбейткіштерге жіктеу формулаларын қорытып шығаруды;
- Виет теоремасы мен оған кері теореманы дәлелдеуді;
- квадрат және бөлшек-рационал теңдеулерді пайдаланып, мәтінді есептерді шығаруды **орындай алу керек.**

8. Квадрат теңдеу. Толымсыз квадрат теңдеулер

$ax^2 + bx + c = 0$ түріндегі теңдеу квадрат теңдеу деп аталады, мұндағы x – айнымалы, a, b, c – нақты сандар және $a \neq 0$. a, b, c сандары – квадрат теңдеудің коэффициенттері: a – бірінші коэффициент, b – екінші коэффициент, c коэффициенті бос мүше деп аталады. $x^2 + px + q = 0$ түріндегі теңдеу *келтірілген квадрат теңдеу* деп аталады.

b немесе c коэффициенттерінің бірі не екеуі де 0-ге тең болатын квадрат теңдеу **толымсыз квадрат теңдеу** деп аталады, мысалы, $x^2 - 5 = 0$, $3x^2 + 4x = 0$, $14x^2 = 0$. Мұндай теңдеулерді сендер алдыңғы тақырыптарда қарастырдыңдар.

$ax^2 = 0$ түріндегі толымсыз квадрат теңдеудің бір түбірі бар: $x = 0$.

$ax^2 + bx = 0$ түріндегі толымсыз квадрат теңдеу оның сол жағын көбейткіштерге жіктеу арқылы шешіледі: $x(ax + b) = 0$. Бұл теңдеудің екі түбірі бар: $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{b}{a}$.

$ax^2 + c = 0$ толымсыз квадрат теңдеуі былай шешіледі: $ax^2 = -c$, $x^2 = \frac{-c}{a}$. Егер $\frac{-c}{a} > 0$ болса, онда теңдеудің екі қарама-қарсы түбірі бар болады: $x_1 = \sqrt{\frac{-c}{a}}$, $x_2 = -\sqrt{\frac{-c}{a}}$. Егер $\frac{-c}{a} < 0$ болса, онда теңдеудің түбірі болмайды.

Толық квадрат теңдеулерді шешу мысалдарын қарастырайық, яғни b мен c коэффициенттері нөлге тең болмасын.

1 - м ы с а л. $2x^2 + 28x - 30 = 0$ теңдеуін шешу керек.

Ш е ш у і. Теңдеуді 2-ге қысқартып, сол жағынан екімүшенің квадратын бөліп шығарамыз: $x^2 + 14x - 15 = 0$, $(x^2 + 2 \cdot 7x + 7^2) - 7^2 - 15 = 0$, $(x + 7)^2 - 64 = 0$. Шыққан теңдеуді былай шешеміз: $(x + 7)^2 = 64$,

$$x + 7 = -\sqrt{64} \text{ немесе } x + 7 = \sqrt{64},$$

$$x = -8 - 7 \text{ немесе } x = 8 - 7,$$

$$x = -15 \text{ немесе } x = 1.$$

Ж а у а б ы. $-15; 1$.

Қарастырылған әдіс квадрат теңдеуді *екімүшенің квадратын бөліп шығару* тәсілімен шешу деп аталады.

2 - м ы с а л. $3x^2 - 12x - 3 = 0$ теңдеуін шешу керек.

Ш е ш у і. Теңдеуді екімүшенің квадратын бөліп шығару тәсілімен шешейік.

$$3x^2 - 12x - 3 = 0, x^2 - 4x - 1 = 0, (x^2 - 2 \cdot 2x + 4) - 4 - 3 = 0, (x - 2)^2 = 7.$$

$$\text{Бұдан } x - 2 = \pm\sqrt{7}, x_1 = 2 - \sqrt{7}, x_2 = 2 + \sqrt{7}.$$

$$\text{Ж а у а б ы. } 2 - \sqrt{7}; 2 + \sqrt{7}.$$

3 - м ы с а л. $3x^2 - 5x + 2 = 0$ теңдеуін шешу керек.

Ш е ш у і. Теңдеуді екімүшенің квадратын бөліп шығару тәсілімен шешейік.

$$3x^2 - 5x + 2 = 0, x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{3} = 0, \left(x^2 - 2 \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{3}x + \left(\frac{5}{6}\right)^2\right) - \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \frac{2}{3} = 0,$$

$$\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}, x - \frac{5}{6} = \pm\sqrt{\frac{1}{36}}; x_1 = \frac{5}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}, x_2 = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} = 1.$$

$$\text{Ж а у а б ы. } \frac{2}{3}; 1.$$

СҰРАҚТАР

1. Квадрат теңдеудің анықтамасын беріңдер.
2. Квадрат теңдеудің мысалын келтіріп, оның коэффициенттерін атаңдар.
3. Қандай теңдеулер толымсыз квадрат теңдеулер деп аталады?

ЖАТТЫГУЛАР

А деңгейі

205. Мына теңдеулердің қайсысы квадрат теңдеу болады:

- | | |
|---------------------------------|--|
| а) $x^2 = 2$; | в) $2x^{-2} + x^2 + 1 = 0$; |
| ә) $3x - 0,5 = 0$; | г) $3^{-2}x^2 - 4x = 0$; |
| б) $0 \cdot x^2 + 4x + 5 = 0$; | ғ) $x\sqrt{5} - x^2\sqrt{3} + 2 = 0$? |

206. Егер x – айнымалы: а) $c \neq 0$; $c = 0$ болса, $cx^2 - dx = 0$; ә) $m \neq 0$; $m = 0$ болса, $mx^2 + nx + p = 0$ түріндегі теңдеу қалай аталады?

207. Толымсыз квадрат теңдеуді ауызша шешіңдер:

- | | |
|---------------------|-----------------------|
| а) $x^2 - 4 = 0$; | в) $x^2 - 8x = 0$; |
| ә) $x^2 + 5 = 0$; | г) $(x - 3)^2 = 0$; |
| б) $x^2 + 3x = 0$; | ғ) $(2x + 5)^2 = 0$. |

208. Теңдеуді шешіңдер:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } x^2 + \frac{1}{3}x = 0; & \text{в) } 1 - 4x = \frac{(2 - 5x)^2}{4}; \\ \text{ә) } x^2 - x\sqrt{2} = 0; & \text{г) } 2(3x - 4)^2 = 7(6x + 4\frac{4}{7}); \\ \text{б) } \frac{x^2 - 2x}{3} = \frac{3x^2 + 4x}{5}; & \text{ғ) } 5(2x - 3)^2 = 15(3 - 2x). \end{array}$$

209. Теңдеудің түбірін табыңдар:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } (x + 2)^2 = 1,44; & \text{в) } (3x + 2)^2 = 12x + 40; \\ \text{ә) } 4(5 - 0,25x)^2 = 9; & \text{г) } (x - 1)(x + 1) = 2(x - 2)(x + 2); \\ \text{б) } (x + 1)^2 = 2(x - 1); & \text{ғ) } 48 - 3(x^2 - 5)^2 = 0. \end{array}$$

210. а) Бір түбірі 0-ге тең болатын; ә) түбірлері қарама-қарсы сандар болатын квадрат теңдеулерге мысал келтіріңдер.

В деңгейі

211. k -ның қандай мәндерінде теңдеудің бір түбірі 0-ге тең болады:

$$\text{a) } 5x^2 - 3x + 4k + 20 = 0; \quad \text{ә) } 3x^2 + kx - 9k^2 + 1 = 0?$$

212. k -ның қандай мәндерінде теңдеудің түбірлері қарама-қарсы сандар болады:

$$\text{a) } x^2 + (7k - 35)x - 4 = 0; \quad \text{ә) } 5x^2 + (k^2 - 2k)x - 25 = 0?$$

213. Екі еселенген ауданы қабырғасы 7 см-ге тең шаршының ауданынан: а) 1 см²-ге; ә) 8 есеге артық болатын шаршының қабырғасын табыңдар.

214. а) Екі еселенген санның квадраты оның 80 %-на тең болатын санды табыңдар.

ә) Тізбектес натурал екі жұп санның көбейтіндісі мен олардың кішісінің екі еселенген айырымы 64-ке тең. Сол сандарды табыңдар.

215. а) $\frac{14x - 5}{x^2 - 9}$; ә) $\frac{2x^2 + 3}{3x^2 - 48}$; б) $\frac{7x^2 + 2}{x^2 - x}$; в) $\frac{15 - x}{x^2 + 11x}$ өрнегінің мағынасы болатындай x айнымалысының барлық мәндерін табыңдар.

216. Теңдеуді шешіндер:

а) $\frac{x-1}{2} = \frac{4}{x+1}$; б) $\frac{x+3}{2} = \frac{3x+9}{x+3}$;

ә) $\frac{x+2}{2} = \frac{6}{x-2}$; в) $\frac{7}{x-7} = \frac{x+7}{x-7}$.

217. Оқушылардың біріне $mx^2 + n = 0$, мұндағы $m > 0$, $n < 0$, толымсыз квадрат теңдеуінің үлкен түбірін табу, ал екіншісіне табылған түбірді берілген теңдеуге қойып тексеру ұсынылды.

Бірінші оқушының шешуі: « $mx^2 = -n, x^2 = \frac{-n}{m}, x_1 = \sqrt{\frac{-n}{m}}, x_2 = -\sqrt{\frac{-n}{m}}$;

$x_1 > x_2$, себебі оң сан теріс саннан үлкен. Жауабы. $\sqrt{\frac{-n}{m}}$ ».

Екінші оқушының тексеруі: « $m\left(\sqrt{\frac{-n}{m}}\right)^2 + n = 0, m \cdot \frac{n}{m} + n = 0,$

$n + n = 0$ – дұрыс емес. Жауабы. $\sqrt{\frac{-n}{m}}$ саны берілген теңдеудің түбірі болмайды».

Оқушылардың қайсысы қателесті және ол қандай қателік?

218. Теңдеуді шешіндер:

а) $x^2 - 4|x| = 0$; в) $9x^2 + 3|x| = 0$;

ә) $2x^2 - 5|x| = 0$; г) $x^2 - \frac{4x^2}{|x|} = 0$;

б) $5x^2 - 7|x| = 0$; ғ) $x^2 + \frac{8x^2}{|x|} = 0$.

219. Теңдеудің түбірлерін табындар:

а) $\frac{x^2 - 49}{|x| - 7} = 0$; б) $\frac{x(x^2 - 121)}{|x| - 11} = 0$;

ә) $\frac{x^2 - 81}{|x| + 9} = 0$; в) $(x^2 - 36) \cdot \frac{x}{|x| + 6} = 0$.

220. Көп нүктені екімүшенің квадраты шығатындай етіп санмен алмастырындар:

а) $x^2 - 2x \cdot 7 + \dots$; б) $x^2 + 6x + \dots$; г) $x^2 - 3x + \dots$;

ә) $x^2 - 2 \cdot 1,5x + \dots$; в) $x^2 - 8x + \dots$; ғ) $x^2 + 5x + \dots$.

221. k -ның қандай мәнінде өрнекті екімүшенің квадраты түрінде көрсетуге болады:

а) $x^2 - kx + \frac{1}{9}$; б) $x^2 - 14x - 1\frac{1}{4}k$;

ә) $x^2 + kx + 6\frac{1}{4}$; в) $x^2 + 9x - 7\frac{1}{4} + k$?

С деңгейі

222. Теңдеуді екімүшенің квадратын бөліп шығару тәсілімен шешіңдер:

а) $x^2 - 2x - 15 = 0$; в) $3x^2 + 18x + 15 = 0$;

ә) $x^2 + 4x + 3 = 0$; г) $x^2 + x - 2 = 0$;

б) $2x^2 - 16x - 18 = 0$; ғ) $x^2 - 3x - 10 = 0$.

223. Бөлшектің бөлімінде екімүшенің квадратын бөліп шығарып,

а) 1) $\frac{6}{x^2 + 4x + 5}$; 2) $\frac{23}{x^2 - 6x + 8}$ бөлшегінің ең үлкен мәнін;

ә) 1) $\frac{10}{-x^2 + 8x - 14}$; 2) $\frac{4}{-x^2 - 10x - 21}$ бөлшегінің ең кіші мәнін

табыңдар.

224. Цифрларының қосындысынан 4 есе үлкен, ал көбейтіндісінен 2 есе үлкен болатын екітаңбалы санды табыңдар.

225. Теңдеудің сол жағын көбейткіштерге жіктеп, оны шешіңдер:

а) $x^2 - (2 \cdot 6,7 \cdot 0,2 + 1)x + 2 \cdot 6,7 \cdot 0,2 = 0$;

ә) $x^2 - 8,3x - (8,3 \cdot 0,3 + 0,3^2) = 0$.

9. Квадрат теңдеу түбірлерінің формулалары

$ax^2 + bx + c = 0$, мұндағы $a \neq 0$, теңдеудің екі жағын a -ға бөліп шығару тәсілімен шешейік. Теңдеудің екі жағын a -ға бөліп, $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ аламыз. Теңдеудің сол жағынан екімүшенің квадратын бөліп шығарамыз: $(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + (\frac{b}{2a})^2) - (\frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a} = 0$, $(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$. Бұдан $(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$. Шыққан теңдеудің сол жағы тек теріс емес сандарды ғана қабылдайды, оң жағындағы бөлшектің бөлімі нөлден артық, сондықтан теңдеудің түбірлерінің бар болуы $b^2 - 4ac$ өрнегінің мәніне тәуелді болады. Бұл өрнек *квадрат теңдеудің дискриминанты* деп аталады да, D әрпімен белгіленеді. («Дискриминант» сөзі латынның *discriminantis* сөзінен шыққан, ол *анықтаушы* дегенді білдіреді.)

Егер $D > 0$ болса, онда $(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{D}{4a^2}$, $x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{D}}{2a}$,
 $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$. Теңдеудің екі түбірі бар болады: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$,
 $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$.

Егер $D = 0$ болса, онда теңдеудің екі тең түбірі бар болады: $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$. (Кейде теңдеудің бір түбірі бар деп те саналады: $x = \frac{-b}{2a}$.)

Егер $D < 0$ болса, онда теңдеудің түбірі болмайды.

Шыққан формулаларды пайдаланып, кез келген квадрат теңдеуді шешуге болады.

1 - м ы с а л. $2x^2 - x - 1 = 0$ теңдеуді шешу керек.

Ш е ш у і. Берілген теңдеуде $a = 2$, $b = -1$, $c = -1$. D -ны табамыз: $D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9$. $D > 0$ болғандықтан, теңдеудің екі түбірі бар: $x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2}$; $x_1 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1+3}{4} = 1$.

Ж а у а б ы. $-0,5; 1$.

2 - м ы с а л. $2x^2 - 3x + 4 = 0$ теңдеуін шешу керек.

Ш е ш у і. Берілген теңдеуде $a = 2$, $b = -3$, $c = 4$. D -ны табамыз:
 $D = b^2 - 4ac = 9 - 32 = -23 < 0$. Демек, берілген теңдеудің түбірі болмайды.

Ж а у а б ы. Теңдеудің түбірі болмайды.

3 - м ы с а л. $25x^2 + 4x + 0,16 = 0$ теңдеуін шешу керек.

Ш е ш у і. Берілген теңдеуде $a = 25$, $b = 4$, $c = 0,16$. D -ны табамыз:
 $D = b^2 - 4ac = 16 - 4 \cdot 25 \cdot 0,16 = 0$. Берілген теңдеудің бір түбірі бар:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{50} = -\frac{2}{25}.$$

Ж а у а б ы. $-\frac{2}{25}$.

$ax^2 + bx + c = 0$ квадрат теңдеуі түбірлерінің формуласын былай да жазуға болады:

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}.$$

Квадрат теңдеудің екінші коэффициенті жұп сан болған жағдайда оның түбірлерін осы формуламен табуға болады.

4 - м ы с а л. $5x^2 - 18x + 3,4 = 0$ теңдеуін шешу керек.

Ш е ш у і. Квадрат теңдеудің екінші коэффициентінің жұп сан екенін ескере отырып, түбірлерін табу формуласын пайдаланайық:

$$x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 5 \cdot 3,4}}{5} = \frac{9 \pm \sqrt{64}}{5} = \frac{9 \pm 8}{5}; x_1 = \frac{1}{5} = 0,2, x_2 = \frac{17}{5} = 3,4.$$

Ж а у а б ы. 0,2; 3,4.

$x^2 + px + q = 0$ келтірілген квадрат теңдеуінің түбірлерінің формуласын $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ түрінде жазуға болады.

СҰРАҚТАР

1. Квадрат теңдеу түбірлерінің формуласын қорытып шығарындар.
2. Екінші коэффициенті жұп сан болатын квадрат теңдеудің түбірлерін қандай формуламен тапқан ыңғайлы?
3. Келтірілген квадрат теңдеудің түбірлерін қандай формуламен табуға болады?

ЖАТТЫҒУЛАР***А деңгейі***

226. Мына теңдеулердің қайсысы квадрат теңдеу болатынын анықтап, олардың коэффициенттерінің неге тең екенін көрсетіндер:

а) $15x^2 - 14x + 21 = 0$; б) $\frac{1}{x^2} + 36 = 0$; г) $x^3 - 7x + 8 = 0$;
 ә) $\frac{2}{7}x^2 + x\sqrt{11} + 3^{-2} = 0$; в) $-x^2 + 2 = 0$; ф) $-x + 5x^2 - 3^2 = 0$.

227. Сәйкесінше берілген бірінші, екінші коэффициенттері мен бос мүшесі бойынша квадрат теңдеу құрындар:

а) 2; 3; 4; ә) -1; 0; $\frac{2}{9}$; б) 1; -0,5; 0; в) 14; $-\sqrt{3}$; 0,(3).

228. Келесі теңдеулерді шешпестен, қайсысының түбірі бар болатынын анықтаңдар:

а) $2x^2 + 5x - 7 = 0$; б) $m^2 - 2m + 2 = 0$; г) $4z^2 + 4z + 1 = 0$;
 ә) $3y^2 - 7y - 8 = 0$; в) $p^2 - 10p + 21 = 0$; ф) $9t^2 - 6t + 1 = 0$.

229. Теңдеудің неше түбірі бар:

а) $5x^2 - 7x + 1 = 0$; б) $3y^2 + 8y + 4 = 0$; г) $\sqrt{2}z^2 + 0,4z + 1 = 0$;
 ә) $4x^2 - 12x + 9 = 0$; в) $7y^2 + 6y + 5 = 0$; ф) $4z^2 + 4\sqrt{3}z + 3 = 0$?

230. Теңдеудің түбірлерін табындар:

а) $x^2 + 3x - 130 = 0$; б) $x^2 - 6x + 34 = 0$; г) $\frac{x^2}{2} - \frac{x}{3} + 7\frac{3}{8} = 8$;
 ә) $x^2 - 2x + 10 = 0$; в) $4x^2 - 4x = 3$; ф) $\frac{x^2}{3} - \frac{7x}{18} + 4 = 5\frac{1}{9}$.

231. Квадрат теңдеуді шешіндер:

а) $3x^2 + x - 4 = 0$; б) $3p^2 - 10p + 3 = 0$; г) $12z^2 + 5z - 2 = 0$;
 ә) $2y^2 + y - 10 = 0$; в) $5v^2 - 9v - 2 = 0$; ф) $17s^2 - 19s + 2 = 0$.

В деңгейі

232. Теңдеудің түбірлерін 0,1-ге дейінгі дәлдікпен есептендер:

а) $3x^2 + 15x - 7 = 0$;
 ә) $-2x^2 - 11x + 3 = 0$.

233. Қазақстан жер қойнауының пайдалы қазбаларынан табылған Менделеев кестесіндегі элементтердің санын табыңдар. Ол мына теңдеудің кіші түбіріне тең: $x^2 - 1000x + 89199 = 0$.



79 Алтын

Au

196,9666

$4f^{14}5d^{10}6s^1$

234. 13 санын көбейтіндісі 40-қа тең болатын екі санның қосындысы түрінде жазыңдар.

235. $ax^2 + bx + c = 0$ квадрат теңдеуі түбірлерінің формуласын Бхаскари-акария (XII ғ. үнді математигі) тәсілімен қорытып шығарайық.

c -ны теңдеудің оң жағына шығарамыз: $ax^2 + bx = -c$.

Теңдеудің екі жағын $4a$ -ға көбейтеміз: $4a^2x^2 + 4abx = -4ac$.

Теңдеудің екі жағына b^2 -ты қосамыз: $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$.

Бұдан: $(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$, $2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$, $2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Квадрат теңдеудің түбірлерінің

формуласы тағы да екімүшенің квадратын бөліп шығару тәсілімен алынды ма? Бұл тәсілдің алдыңғы 9-тармақта айтылғаннан қандай айырмашылығы бар?

236. Теңдеудің әртүрлі екі түбірі болатындай k -ның барлық мәндерін табыңдар:

а) $x^2 + 3x + k = 0$; ә) $kx^2 + 3x + 2 = 0$; б) $3x^2 - 2kx + 5 = 0$.

237. m -нің қандай мәндерінде теңдеудің бір түбірі ғана болады:

а) $-2x^2 + mx - 8 = 0$; ә) $mx^2 - 2x + m = 0$; б) $mx^2 - 12x + 6 = 0$?

238. x -тің қандай мәндерінде үшмүше m -ге тең мәнді қабылдайды:

а) $x^2 + 7x - 8$, $m = -20$; б) $3x^2 - x + 13$, $m = 17$;

ә) $2x^2 - 5x + 5$, $m = 8$; в) $6x^2 + 5x + 3,5$, $m = 4,5$?

239. Теңдеудің түбірлерін табыңдар:

а) $x^2 + \sqrt{5}x + \sqrt{5} - 1 = 0$; б) $x^2 - (4 - \sqrt{2})x + 3 - \sqrt{2} = 0$;
 ә) $x^2 - \sqrt{7}x - 2\sqrt{7} - 4 = 0$; в) $x^2 + (2 + \sqrt{3})x + 4\sqrt{3} - 8 = 0$.

240. Теңдеуді шешіңдер:

а) $(x - 2)^2 = 2(3x - 10)$; б) $(3x - 2)^2 = 8(x + 1)^2 - 100$;
 ә) $(3x + 2)^2 = (3x + 2)$; в) $(3x + 1)^2 = 7(x - 1)^2 + 19x - 3$.

241. а) Екі натурал санның көбейтіндісі 180-ге тең және олардың біреуі екіншісінен 3-ке артық. Осы сандарды табыңдар.

ә) Бірі екіншісінен 7-ге кем, олардың көбейтіндісі 330-ға тең болатын екі санды табыңдар.

242. Теңдеуді шешіңдер:

а) $(5x - 2)(x + 4) - x^2 = 28$; б) $12x^2 - (2x - 1)(x + 6) = 70 + 13x$;
 ә) $(2x - 3)(x + 4) - x^2 = 60 - x$; в) $4x^2 - (2x - 1)(x + 5) = 19x - 21$.

243. Теңдеудің түбірлерін табыңдар:

а) $\frac{(x + 2)^2}{3} - \frac{(x + 1)^2}{2} = 1^{-2}$;
 ә) $\frac{(x - 1)^2}{4} - \frac{(x - 2)^2}{5} = 0,25^{-1}$;
 б) $\frac{(3x - 4)^2}{5} - \frac{(x + 2)^2}{5} = 1 - \frac{(2x - 5)(x - 1)}{2}$;
 в) $\frac{(3x - 1)(x + 2)}{3} - \frac{(2x - 1)^2}{3} = 4\frac{1}{6} - \frac{(x + 7)^2}{2}$.

244. Теңдеуді шешіңдер:

а) $\frac{x - 7}{2(x + 3)} = \frac{x - 6}{x + 24}$; в) $\frac{2x^2 - 30x}{2x + 1} = \frac{15 - x}{2x + 1}$;
 ә) $\frac{2 - 5x}{10x - 5} = \frac{5x}{3 - 5x}$; г) $\frac{x^2 + 5x}{x + 7} = \frac{7 - x}{x + 7}$;
 б) $\frac{x + 1}{x - 2} = \frac{3x - 7}{x - 1}$; ф) $\frac{x^2 + 6x}{x - 1} = \frac{2x - 9}{1 - x}$.

245. Теңдеуді шешіңдер:

а) $|x^2 + 9x + 25| = 5$; б) $|2x^2 + 5x + 15| = 12$;
 ә) $|x^2 - 5x + 8| = 4$; в) $| -x^2 - 8x - 1,5 | = 10,5$.

С деңгейі

246. Теңдеудің түбірлерін табындар:

а) $x^2 + 3 = |3x + 1|$; б) $x^2 = |5x - 6|$; г) $5x^2 = |2 - 3x|$;
 ә) $x^2 - 2 = |1 - 2x|$; в) $x^2 = |2x - 1|$; ғ) $3x^2 = |10x + 8|$.

247. а) Тіктөртбұрыш тәрізді жер телімінің ауданы 2800 м^2 , оның ұзындығы енінен 30 м -ге артық. Жер телімінің ұзындығы мен енін табындар.

ә) Тіктөртбұрыш тәрізді бақтың ауданы 7200 м^2 , оның ұзындығы енінен 60 м -ге артық. Бақтың ұзындығы мен енін табындар.

248. Айнымалысы x болатын квадрат теңдеудің түбірлерін табындар:

а) $x^2 + 3kx - 4k^2 = 0$; б) $x^2 + 7tx - 8t^2 = 0$;
 ә) $x^2 - 10kx + 9k^2 = 0$; в) $x^2 - 6tx + 5t^2 = 0$.

249. Квадрат теңдеуді x -қа қатысты шешіндер:

а) $ax^2 - (a + 2)x + 2 = 0$; ә) $(a + 2)x^2 + 4x + (2 - a) = 0$.

250. Теңдеудегі айнымалының мүмкін мәндерін көрсетіп, оның түбірлерін табындар:

а) $x^2 - 7(\sqrt{x})^2 - 8 = 0$; б) $-x^2 + 3\sqrt{x^2} + 4 = 0$;
 ә) $2x^2 + 5(\sqrt{x})^2 - 7 = 0$; в) $9x^2 - 6\sqrt{x^2} + 1 = 0$.

251. Теңдеуді шешіндер:

а) $x^2 - 3(\sqrt{-x})^2 - 10 = 0$; б) $x^2 - 8(\sqrt{x - 5})^2 - 28 = 0$;
 ә) $x^2 - (\sqrt{-3x})^2 - 40 = 0$; в) $x^2 + 4(\sqrt{3 - x})^2 - 72 = 0$.

252. Бастапқы n натурал санның қосындысы $\frac{n(n+1)}{2}$ формуласымен есептеледі. Қосындыда 171 шығу үшін неше n натурал санды қосу керек?

253. Егер екі санның квадраттары айырымының сол сандардың көбейтіндісіне қатынасы $\frac{8}{3}$ -ке тең болса, сол екі санның қатынасын табындар.

10. Виет теоремасы

$x^2 - 7x + 10 = 0$ теңдеуінің түбірлері 2 мен 5-ке тең. Олардың қосындысы 7-ге, ал көбейтіндісі 10-ға тең. $x^2 + 4x - 5 = 0$ теңдеуінің түбірлері -5 пен 1 -ге тең, олардың қосындысы -4 -ке, ал көбейтіндісі -5 -ке тең. Осы келтірілген квадрат теңдеулердің әрқайсысының түбірлерінің қосындысы қарама-қарсы таңбамен алынған екінші коэффициентке, ал көбейтіндісі бос мүшеге тең болады. Түбірлері бар болатын кез келген келтірілген квадрат теңдеу осындай қасиетке ие. Мұны француз математигі Франсуа Виет (1540–1603) анықтаған.

Виет теоремасы. Егер x_1 мен x_2 $x^2 + px + q = 0$ теңдеуінің түбірлері болса, онда $x_1 + x_2 = -p$ және $x_1 \cdot x_2 = q$ болады.

Дәлелдеуі. Келтірілген квадрат теңдеу түбірлерінің формуласымен:

$$x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} + \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) = -p;$$

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) \cdot \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) = \\ = \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)^2 = \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = q \text{ анықталады. Теорема дәлелденді.}$$

$ax^2 + bx + c = 0$ квадрат теңдеуін келтірілген квадрат теңдеуге түрлендіруге болады: $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Егер оның x_1 және x_2 түбірлері бар болса, онда $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

Теорема (Виет теоремасына кері). Егер m және n сандарының қосындысы $-p$ -ға, ал көбейтіндісі q -ге тең болса, онда олар $x^2 + px + q = 0$ теңдеуінің түбірлері болады.

Дәлелдеуі. Егер $m + n = -p$, ал $m \cdot n = q$ болса, онда $x^2 + px + q = 0$ теңдеуі мына түрде жазылады: $x^2 - (m + n)x + mn = 0$. Мұндағы x -тің орнына m және n сандарын қойып, ақиқат болатын сандық теңдіктер аламыз: $m^2 - (m + n)m + mn = 0$ және $n^2 - (m + n)n + mn = 0$. Яғни, m және

n сандары $x^2 + px + q = 0$ теңдеуінің түбірлері болады, дәлелдеу керекті де осы еді.

1 - мысал. m және n сандары $x^2 + px + q = 0$ теңдеуінің түбірлері. $m^2 + n^2$ табу керек.

Шешуі. Виет теоремасы бойынша $m + n = -p$, $m \cdot n = q$. Сонда

$$m^2 + n^2 = (m + n)^2 - 2mn = p^2 - 2q.$$

Жауабы. $p^2 - 2q$.

2 - мысал. 2018 және 0,5 сандары түбірлері болатын келтірілген квадрат теңдеу құру керек.

Шешуі. Виет теоремасына кері теорема бойынша ондай теңдеу $x^2 - 2018,5x + 1009 = 0$ болады.

3 - мысал. $x^2 - 6x + 8 = 0$ теңдеуін шешу керек.

Шешуі. Қосындысы 6-ға, ал көбейтіндісі 8-ге тең болатын сандарды аламыз. Олар 2 мен 4. Виет теоремасына кері теорема бойынша олар $x^2 - 6x + 8 = 0$ теңдеуінің түбірлері болады.

Жауабы. 2 және 4.

4 - мысал*. $x^2 + (1 - \sqrt{2})x - 3 + \sqrt{2} = 0$ теңдеуінің түбірлері кубтарының қосындысын табу керек.

Шешуі. m және n берілген теңдеудің түбірлері болсын. Сонда $m^3 + n^3 = (m + n)(m^2 - mn + n^2) = (m + n)((m + n)^2 - 3mn) =$
 $= (\sqrt{2} - 1)((\sqrt{2} - 1)^2 - 3(\sqrt{2} - 3)) = (\sqrt{2} - 1)(2 - 2\sqrt{2} + 1 - 3\sqrt{2} + 9) =$
 $= (\sqrt{2} - 1)(12 - 5\sqrt{2}) = 12\sqrt{2} - 10 - 12 + 5\sqrt{2} = 17\sqrt{2} - 22.$

Жауабы. $17\sqrt{2} - 22$.

Есеп. Тіктөртбұрыштың ауданы 15 м^2 -ге, ал іргелес қабырғаларына тұрғызылған шаршылардың аудандарының қосындысы 34 м^2 -ге тең. Тіктөртбұрыштың қабырғаларын табу керек.

Шешуі. Тіктөртбұрыштың қабырғалары $x \text{ м}$ және $y \text{ м}$ болсын. Есептің шарты бойынша $xy = 15$ және $x^2 + y^2 = 34$. Сонда $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$, $34 = (x + y)^2 - 30$, $(x + y)^2 = 64$, $x + y = 8$. Бұдан $y = 8 - x$, сонда $x \cdot (8 - x) = 15$. $x^2 - 8x + 15 = 0$ теңдеуін аламыз.

$x_1 = 5$ және $x_2 = 3$ сандары: $5 + 3 = 8$, $5 \cdot 3 = 15$. Демек, Виет теоремасына кері теорема бойынша олар $x^2 - 8x + 15 = 0$ теңдеуінің

түбірлері болады. Егер $x = 5$ болса, онда $y = 3$; ал егер $x = 3$ болса, онда $y = 5$ болады. Қабырғалары 5 м және 3 м болатын тіктөртбұрыш алдық.

Ж а у а б ы. 5 м және 3 м.

СҰРАҚТАР

1. Виет теоремасын тұжырымдап, дәлелдендер.
2. $ax^2 + bx + c = 0$ квадрат теңдеуінің түбірлерінің қосындысы мен көбейтіндісі неге тең?
3. Виет теоремасына кері теореманы тұжырымдап, дәлелдендер.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

254. $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ сандарының қайсысы мына теңдеудің түбірлері болады:

- а) $x^2 - 5x + 4 = 0$; б) $x^2 - x - 2 = 0$;
 ә) $x^2 + x - 6 = 0$; в) $x^2 + 2x - 3 = 0$?

255. Теңдеудің түбірлерінің қосындысы мен көбейтіндісін табындар:

- а) $x^2 - 6x + 9 = 0$; б) $3x^2 - 7x + 4 = 0$;
 ә) $x^2 + 4x + 4 = 0$; в) $4x^2 + 7x - 15 = 0$.

256. Мына сандар түбірлері болатын квадрат теңдеу құрындар:

- а) -3 және 5 ; б) 0 және 6 ; г) $1 + \sqrt{3}$ және $1 - \sqrt{3}$;
 ә) 4 және -5 ; в) $\frac{3}{4}$ және $-\frac{3}{4}$; г) $1 - \sqrt{2}$ және $\frac{1}{\sqrt{2} - 1}$.

257. m саны теңдеудің түбірі болатынын анықтаңдар және Виет теоремасын пайдаланып, екінші түбірін табындар:

- а) $x^2 - 10x + 1 = 0, m = 5 - 2\sqrt{6}$; ә) $x^2 - 6x + 1 = 0, m = 3 + 2\sqrt{2}$.

В деңгейі

258. Түбірлерінің біреуі: а) $\sqrt{5}$; ә) $-\sqrt{3}$; б) $2 + \sqrt{3}$; в) $3 - \sqrt{2}$ санына тең болатын рационал коэффициентті квадрат теңдеу құрындар.

259. Теңдеулерді ауызша шешіңдер:

а) $x^2 - 5x + 6 = 0$; б) $x^2 + 8x + 15 = 0$; г) $x^2 + 4x - 21 = 0$;

ә) $x^2 - 5x + 4 = 0$; в) $x^2 + 9x + 14 = 0$; ғ) $x^2 + 4x - 5 = 0$.

260. Теңдеудің x_1 түбірі белгілі болса, b -ның мәнін табыңдар:

а) $x^2 - bx + 30 = 0, x_1 = 6$; б) $3x^2 - bx - 36 = 0, x_1 = -3$;

ә) $x^2 + bx - 14 = 0, x_1 = -2$; в) $2x^2 + bx - 3 = 0, x_1 = 0,5$.

261. Теңдеудің түбірлерінің таңбаларын анықтаңдар:

а) $x^2 - x - 12 = 0$; б) $x^2 - 15x + 16 = 0$;

ә) $x^2 + 5x + 6 = 0$; в) $-x^2 + 2x + 24 = 0$.

262. $x^2 + px + q = 0$ келтірілген квадрат теңдеуінің түбірлері x_1 және x_2 болсын. Виет теоремасын пайдаланып, кестедегі берілгендер бойынша түбірлердің таңбаларын анықтаңдар. Егер таңбалар әртүрлі болса, қай түбірдің модулі үлкен болады?

а)

$q > 0$	$P > 0$
	$P < 0$

ә)

$q < 0$	$P > 0$
	$P < 0$

263. а) k -ның қандай мәндерінде $x^2 + (k^2 - 10k + 9)x - k = 0$ теңдеуінің түбірлерінің қосындысы нөлге тең болады? ә) k -ның қандай мәндерінде $x^2 - 12x + (k^2 - 2k - 35) = 0$ теңдеуінің түбірлерінің көбейтіндісі нөлге тең болады?

264. а) $x^2 - 4x + c = 0$ теңдеуінің түбірлерінің біреуі $2 + \sqrt{3}$ -ке тең. Оның екінші түбірі мен c -ның мәнін табыңдар.

ә) Егер $x^2 - 8x + c = 0$ теңдеуінің түбірлері үшін $x_1 + 2x_2 = 11$ қатынасы орындалса, теңдеудегі c -ның мәнін табыңдар.

265. а) Түбірлері $x^2 - 6x + 8 = 0$ теңдеуінің түбірлеріне кері сандар болатын квадрат теңдеу құрыңдар.

ә) Түбірлері $x^2 - 2x - 15 = 0$ теңдеуінің түбірлерінің қосындысы мен көбейтіндісіне тең болатын квадрат теңдеу құрыңдар.

266. а) Қосындысы 3-ке, квадраттарының қосындысы 5-ке тең болатын екі санды табыңдар.

ә) Айырымы 10-ға, квадраттарының қосындысы 178-ге тең болатын екі санды табыңдар.

267. а) Тіктөртбұрыштың бір қабырғасы екіншісінен 5 дм-ге артық, ал ауданы 84 дм²-ге тең. Оның қабырғаларын табыңдар.
 ә) Периметрі 48 см-ге, ал ауданы 135 см²-ге тең болатын тіктөртбұрыштың қабырғаларын табыңдар.

С деңгейі

268. $x^2 + 3x + k = 0$ теңдеуінің x_1 мен x_2 түбірлері төмендегі шартты қанағаттандыратындай k -ның барлық мәндерін табыңдар:

- а) $x_1 - x_2 = 6$; б) $\frac{x_1}{x_2} = -\frac{2}{5}$;
 ә) $3x_1 - x_2 = 4$; в) $x_1^2 + x_2^2 = 34$.

269. Теңдеуді шешпестен, k -ның қандай мәндерінде: а) $4x^2 - 28x + k = 0$ теңдеуінің түбірлері квадраттарының қосындысы 22,5-ке; ә) $5x^2 - 35x + k = 0$ теңдеуінің түбірлері квадраттарының қосындысы 30-ға тең болатынын табыңдар.

270. 1) $x^2 - 7x + 12 = 0$; 2) $2x^2 + 7x + 6 = 0$ теңдеуінің x_1 және x_2 түбірлерін есептемей-ақ, мыналарды табыңдар:

- а) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; б) $x_1x_2^3 + x_2x_1^3$;
 ә) $x_1^2 + x_2^2$; в) $x_1^4 + x_2^4$.

11. Квадрат үшмүшені көбейткіштерге жіктеу

$ax^2 + bx + c$, мұндағы $a \neq 0$ өрнегі *квадрат үшмүше* деп аталады. Квадрат үшмүше нөлге тең болатындай x айнымалысының мәнін оның *түбірі* деп атайды.

Т е о р е м а. Егер x_1 мен x_2 $ax^2 + bx + c$ үшмүшесінің түбірлері болса, онда $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Д ә л е л д е у і. Виет теоремасы бойынша $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$. Сондықтан,

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2) = \\ &= a(x^2 - x_1 \cdot x - x_2 \cdot x + x_1 \cdot x_2) = a((x^2 - x_1 \cdot x) - (x_2 \cdot x - x_1 \cdot x_2)) = \\ &= a(x(x - x_1) - x_2(x - x_1)) = a(x - x_1)(x - x_2). \end{aligned}$$

Теорема дәлелденді.

1 - м ы с а л. $13x^2 - 14x + 1$ квадрат үшмүшені көбейткіштерге жіктеу керек.

Ш е ш у і. $13x^2 - 14x + 1 = 0$ тендеуін шешіп, үшмүшенің түбірлерін табамыз:

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 13}}{13} = \frac{7 \pm 6}{13}, x_1 = \frac{1}{13}, x_2 = 1.$$

$$\text{Яғни } 13x^2 - 14x + 1 = 13\left(x - \frac{1}{13}\right)(x - 1) = (13x - 1)(x - 1).$$

2 - м ы с а л. $\frac{x^2 + 6x + 9}{2x^2 + 5x - 3}$ бөлшегін қысқарту керек.

Ш е ш у і. $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$ аламыз. Бөлшектің бөлімін көбейткіштерге жіктейміз: $2x^2 + 5x - 3 = 0$, $x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} = \frac{-5 \pm 7}{4}$, $x_1 = -3$, $x_2 = 0,5$, $2x^2 + 5x - 3 = 2(x + 3)(x - 0,5) = (x + 3)(2x - 1)$. Сонда $\frac{x^2 + 6x + 9}{2x^2 + 5x - 3} = \frac{(x + 3)^2}{(x + 3)(2x - 1)} = \frac{x + 3}{2x - 1}$.

Квадрат үшмүшенің жіктелуіндегі $ax + b$ түріндегі көбейткіштерді *сызықтық көбейткіштер* деп атайтынын айта кетелік. Квадрат үшмүшені иррационал өрнек болатын әртүрлі көбейткіштерге жіктеуге болады.

Мысалы,

$$x^2 + 3 - 4x = (\sqrt{x^2 + 3})^2 - (2\sqrt{x})^2 = (\sqrt{x^2 + 3} - 2\sqrt{x})(\sqrt{x^2 + 3} + 2\sqrt{x}).$$

Қажеттілігі болмаса, «квадрат үшмүшені көбейткіштерге жіктендер» деген тапсырмалардың шарттарында «сызықтық көбейткіштер» сөздері қолданылмайды.

СҰРАҚТАР

1. Қандай өрнек квадрат үшмүше деп аталады?
2. Квадрат үшмүшенің түбірі деп нені атайды?
3. Квадрат үшмүшені көбейткіштерге жіктеу туралы теореманы тұжырымдап, дәлелдендер.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

271. t -ның қандай мәндерінде квадрат үшмүше нөлге айналады:

а) $t^2 + 5t - 6$; б) $2t^2 - t - 3$; г) $4t^2 - 12t + 9$;

ә) $t^2 + 3t - 10$; в) $-3t^2 - 11t + 4$; ғ) $-3t^2 + 5t + 2$?

272. Квадрат үшмүшенің түбірлерін табындар:

а) $y^2 - 6y - 7$; б) $2y^2 - y - 6$; г) $6y^2 + 7y - 3$;

ә) $y^2 + 7y + 10$; в) $3y^2 + 10y - 8$; ғ) $4y^2 + 28y + 49$.

273. Көпмүшені көбейткіштерге жіктендер:

а) $x^2 - 2x - 35$; б) $2x^2 - 7x + 3$; г) $9x^2 - 12x + 4$;

ә) $x^2 - 2x - 48$; в) $4x^2 + 11x + 6$; ғ) $4x^2 + 36x + 81$.

274. Түбірлері:

а) 3 және 4; б) 6 және -7 ; г) a және 1;

ә) 10 және 0; в) $2 - \sqrt{5}$ және $2 + \sqrt{5}$; ғ) $2a$ және $-3a$ сандарына тең болатын квадрат теңдеу құрындар.

В деңгейі

275. Бөлшекті қыскартындар:

а) $\frac{x^2 - 3x}{x^2 - 15x + 36}$; б) $\frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 5x + 4}$; г) $\frac{2x^2 + 5x - 3}{4x^2 + 11x - 3}$;

ә) $\frac{4 - x^2}{x^2 + 3x + 2}$; в) $\frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 + 3x - 10}$; ғ) $\frac{3x^2 - 13x - 10}{3x^2 - 17x + 10}$.

276. Бөлшектің анықталу облысын тауып, оны қысқартыңдар:

а) $\frac{x-5}{x^2-7x+10}$; ә) $\frac{x^2-4}{x^2-9x+14}$; б) $\frac{2x+5}{2x^2+3x-5}$; в) $\frac{3x+1}{3x^2+7x+2}$.

277. а) Егер жай бөлшектің алымын квадрат дәрежеге шығарып, ал бөлімін 1-ге кемітсе, онда 2-ге тең бөлшек шығады. Егер де бөлшектің алымын 1-ге кемітіп, ал бөлімін 1-ге арттырса, онда $\frac{1}{4}$ -ге тең бөлшек шығады. Осы бөлшекті табыңдар.

ә) Егер жай бөлшектің алымын 7-ге арттырып, ал бөлімін квадрат дәрежеге шығарса, онда $\frac{3}{4}$ -ке тең бөлшек шығады. Егер алымын өзгертпей, ал бөлімін 6-ға арттырса, онда $\frac{1}{2}$ -ге тең бөлшек шығады. Осы бөлшекті табыңдар.

278. Амалдарды орындаңдар:

а) $\frac{1-2a}{2a-3} - \frac{1-5a}{3-2a}$; б) $\left(\frac{a+5b}{a^2-5ab} - \frac{a-5b}{a^2+5ab}\right) \cdot \frac{25b^2-a^2}{5b^2}$;

ә) $\frac{b^2-5b}{b+2} : \frac{b^2-25}{b^2-4}$; в) $\left(\frac{a+2b}{a^2-2ab} - \frac{a-2b}{a^2+2ab}\right) : \frac{4b^2}{4b^2-a^2}$.

279. Өрнекті алгебралық бөлшек түрінде жазып, оны ықшамдаңдар:

а) $\frac{1}{a^2-3a+2} + \frac{1}{a-1}$; в) $\frac{2b-1}{b^2-b-12} - \frac{1}{b+3}$;

ә) $\frac{3}{a^2+9a+18} - \frac{1}{a+3}$; г) $\frac{m^2-3m+2}{m+4} \cdot \frac{m-3}{m^2-5m+6}$;

б) $\frac{2b-1}{b^2-b-6} - \frac{1}{b+2}$; ф) $\frac{m^2-m-20}{m-5} \cdot \frac{m+6}{m^2+3m-18}$.

280. x -тің қандай мәндерінде бөлшек нөлге тең болады:

а) $\frac{x^2-x-2}{x-2}$; б) $\frac{x^2+x-2}{x^2-1}$; г) $\frac{2x-x^2+3}{x^2-x-6}$;

ә) $\frac{x^2+3x+2}{x+1}$; в) $\frac{2x^2-x-6}{x^2-4}$; ф) $\frac{3x-x^2+4}{x^2+5x+4}$?

281. k -ның қандай мәнінде m саны квадрат үшмүшенің түбірі болады:

а) $x^2 - kx + 18, m = 3$; ә) $x^2 + kx - 14, m = 2$; б) $kx^2 - 5x + 2, m = 0,5$?

282. p -ның қандай мәнінде квадрат үшмүшенің екі тең түбірі бар болады:

а) $9x^2 + 30x + p$; б) $25x^2 - px + 16$;

ә) $4x^2 - 12x + p$; в) $px^2 + 36x + 81$?

283. Үшмүшені көбейткіштерге жіктендер:

а) $x^2 - 5ax + 6a^2$; б) $x^2 + 5bx - 6b^2$; г) $6x^2 - ax - a^2$;

ә) $x^2 + ax - 6a^2$; в) $2x^2 + bx - 3b^2$; ғ) $4x^2 + 28ax + 49a^2$.

284. Бөлшекті қысқартыңдар:

а) $\frac{2 - 5x - 7x^2}{21x^2 + x - 2}$; б) $\frac{8a^3 - 1}{4a^2 + 2a + 1}$;

ә) $\frac{2a^2 + 5a - 3}{a^2 + 27}$; в) $\frac{x^2 - 12ax - 28a^2}{x^2 + 3x + 6a - 4a^2}$.

С деңгейі

285. x -тің қандай мәндерінде үшмүше ең үлкен мәнді қабылдайды:

а) $-x^2 - 4x + 21$; б) $-5x^2 - 14x + 3$;

ә) $-x^2 + 8x + 9$; в) $-2x^2 + 3x + 1$?

286. Үшмүшенің ең кіші мәнін табыңдар:

а) $x^2 + 2x - 15$; б) $2x^2 + x - 1$;

ә) $x^2 - 8x + 19$; в) $3x^2 - 3x + 2$.

287. Квадраттарының қосындысы 116-ға тең болатын тізбектес натурал үш жұп сан бар бола ма?

288. Екітаңбалы санның цифрларының қосындысы 10-ға тең. Егер оның бірінші цифрынан екіншісін азайтып, айырымды екітаңбалы санның өзіне көбейтсе, онда 128 шығады. Сол санды табыңдар.

12. Квадрат теңдеулерді пайдаланып, мәтінді есептерді шешу

1 - е с е п. 77 диагоналі бар дөңес көпбұрыш бола ма?

Ш е ш у і. Дөңес n -бұрыштың $\frac{n(n-3)}{2}$ диагоналі бар, себебі оның әрбір төбесінен $n-3$ диагональ жүргізуге болады. Есепте қойылған сұраққа жауап беру үшін мына теңдеуді шешеміз: $\frac{n(n-3)}{2} = 77$. Оны былай түрлендіреміз: $n^2 - 3n - 154 = 0$. Сонда $n_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 154}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{625}}{2} = \frac{3 \pm 25}{2}$. Есептің шарты бойынша n – натурал сан болғандықтан, $n = 14$ болады.

Ж а у а б ы. Болады, ол дөңес 14-бұрыш.

2 - е с е п. Өлшемі $3 \text{ м} \times 4 \text{ м}$ тіктөртбұрыш тәрізді гүлзарды айналдыра ені бірдей жол салған. Егер жолдың алып жатқан ауданы гүлзардың ауданының жартысына тең болса, жолдың енін 0,01 м-ге дейінгі дәлдікпен табу керек.

Ш е ш у і. Жолдың енін x м деп белгілейік, сонда оның ауданы $(14x + 4x^2) \text{ м}^2$ болады (18-сурет). Есептің шарты бойынша бұл аудан 6 м^2 -ге тең. Теңдеу құрып шешейік:

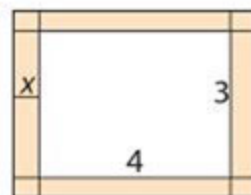
$$4x^2 + 14x - 6 = 0,$$

$$2x^2 + 7x - 3 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 24}}{4} = \frac{-7 \pm \sqrt{73}}{4}.$$

Есептің шарты бойынша $x > 0$, сонда $x = \frac{\sqrt{73} - 7}{4} \approx 0,39$.

Ж а у а б ы. $\approx 0,39 \text{ м}$.



18-сурет

ЖАТТЫҒУЛАР*А деңгейі*

289. Үш сан берілген: 100, 60 және 30. Қандай санды осы үш санның біріншісінен азайтып, үшіншісіне қосып, сонда шыққан екі санды көбейткенде екінші санның квадратына тең болады?

290. Маймылдар ойнап жүр: олардың санының сегізден бір бөлігінің квадратына теңі – тоғайда, ал қалған он екісі тау басында жүр. Барлық маймылдар саны нешеу? (Көне үндіс есебі.)

В деңгейі

291. 136 санын қандай натурал санға бөлгенде бөліндіде бөлгіштен 3-ке кем, ал қалдықта бөлгіштен 7-ге кем сан шығады?

292. Тіктөртбұрыш тәрізді алаңның ауданы 375 м^2 , оның бір қабырғасы екіншісінің 60 %-ын құрайды. Осы алаңның өлшемдерін табыңдар.

293. Қабырғаларының қатынасы $5 : 4$ болатын екі шаршы берілген. Егер шаршылардың әрбір қабырғасын 2 см-ге қысқартса, онда пайда болған шаршылардың аудандарының айырымы 28 см^2 -ге тең болады. Берілген шаршылардың периметрлерін табыңдар.

294. Залдағы бір қатардағы орындар саны ондағы қатарлар санынан 8-ге артық. Егер залдағы барлық орындар саны 884 болса, қатарлар саны қанша?

295. а) Бірнеше еңбек ардагері демалыс үйінен кетерде суреттерімен алмасты. Соған 56 сурет қажет болса, қанша еңбек ардагері болған?

ә) Бірнеше оқушы жазғы лагерьден қайтарда базарлықтармен алмасты. Егер 72 базарлық қажет болған болса, қанша оқушы болған?

296. Жазықтыққа кез келген үшеуі бір түзуде жатпайтын бірнеше нүкте белгіленген. Егер әрбір екі нүкте арқылы жүргізілген түзулер саны 45 болса, неше нүкте белгіленген?

297. Ұзындығы 84 см, ені 60 см айна жиектемесінің барлық ені бірдей, ал ауданы айнаның ауданының $\frac{1}{3}$ -не тең. Жиектеменің енін 0,1 см-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

298. Ғимараттың табаны – периметрі 60 м-ге тең тіктөртбұрыш. Оны айналдыра барлық ені бірдей асфальт жол салынған. Егер жолдың алып жатқан ауданы 64 м^2 -ге тең болса, оның енін табыңдар.

С деңгейі

299. 2500 теңге тұратын заттың бағасын екі рет бірдей пайызға арзандатқанда, ол 2025 теңге тұратын болды. Заттың бағасын әр жолы неше пайызға арзандатқан? (Баға шартты түрде алынған.)

300. Бидай ұнынан пісірілген нанның құрамында x кг ұн және ұнның массасының $x\%$ -дай су болады. Қара бидай ұнынан пісірілген нанның құрамында $(x + 10)$ кг ұн және ұнның массасының $(x + 10)\%$ -дай су болады. Егер барлығы 112,5 кг нан пісірілген болса, бидай ұны мен қара бидай ұнының әрқайсысынан неше кг жұмсалған?

13. Квадрат теңдеулерге келтірілетін теңдеулер

Кез келген $ax^{2n} + bx^n + c = 0$, мұндағы n – натурал сан, $n \geq 2$; a , b , c – нақты сандар, $a \neq 0$, теңдеуін шешу $y = x^n$ жаңа айнымалыны енгізу арқылы квадрат теңдеуді шешуге келтіріледі. $n = 2$ болғанда, мұндай теңдеуді *биквадрат* теңдеу деп атайды.

1 - м ы с а л. $3x^4 - 11x^2 - 14 = 0$ теңдеуін шешу керек.

Ш е ш у і. $x^2 = y$ деп белгілейік. Сонда $3y^2 - 11y - 14 = 0$ теңдеуін аламыз, мұндағы $y > 0$. Оның түбірлері $y_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 + 12 \cdot 14}}{6} = \frac{11 \pm \sqrt{289}}{6} = \frac{11 \pm 17}{6}$, $y_1 = -1$ түбірі $y > 0$ шартын қанағаттандырмайды, $y_2 = \frac{14}{3}$. Демек, $x^2 = \frac{14}{3}$, $x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{14}{3}}$.

Ж а у а б ы. $\pm \sqrt{\frac{14}{3}}$.

2 - м ы с а л. $x^6 + 19x^3 - 216 = 0$ теңдеуін шешу керек.

Ш е ш у і. $y = x^3$ жаңа айнымалыны енгізіп, $y^2 + 19y - 216 = 0$ теңдеуін аламыз. Оның түбірлерін табайық:

$$y_{1,2} = \frac{-19 \pm \sqrt{361 + 4 \cdot 216}}{2} = \frac{-19 \pm \sqrt{1225}}{2} = \frac{-19 \pm 35}{2}, y_1 = -27, y_2 = 8.$$

Бұдан $x^3 = -27$ немесе $x^3 = 8$; $x = -3$ немесе $x = 2$.

Ж а у а б ы. $-3; 2$.

3 - м ы с а л. $3t^2 - 7|t| + 2 = 0$ теңдеуін шешу керек.

Ш е ш у і. $|t| = x$ деп белгілейік, сонда $t^2 = |t|^2 = x^2$ болады.

$3x^2 - 7x + 2 = 0$ теңдеуін шешейік, $x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 12 \cdot 2}}{6} = \frac{7 \pm 5}{6}$, $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = 2$. Бұдан мынаны аламыз:

$|t| = \frac{1}{3}$ немесе $|t| = 2$. Сонда $t = \pm \frac{1}{3}$ немесе $t = \pm 2$ болады.

Ж а у а б ы. $-2; -\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 2$.

4 - м ы с а л. $|2x^2 + 5x| - 3 = 0$ теңдеуін шешу керек.

Ш е ш у і. $|2x^2 + 5x| = 3$, бұдан $2x^2 + 5x = -3$ немесе $2x^2 + 5x = 3$. Осы теңдеулерді шешейік: $2x^2 + 5x + 3 = 0$ немесе $2x^2 + 5x - 3 = 0$,

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} = \frac{-5 \pm 7}{4}, x_1 = -3, x_2 = 0,5;$$

$$x_{3,4} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{4} = \frac{-5 \pm 1}{4}, x_3 = -1,5, x_4 = -1.$$

Ж а у а б ы. $-3; -1,5; -1; 0,5.$

5 - м ы с а л*. $(x + 3)(x + 4)(x + 7)x = 1120$ теңдеуін шешу керек.

Ш е ш у і. Теңдеуді былай түрлендірейік: $(x^2 + 7x + 12)(x^2 + 7x) = 1120$. Жаңа айнымалыны енгізейік: $y = x^2 + 7x$, сонда $(y + 12)y = 1120$, $y^2 + 12y - 1120 = 0$, $y_{1,2} = -6 \pm \sqrt{36 + 1120} = -6 \pm 34$, $y_1 = -40$, $y_2 = 28$.

Бұдан $x^2 + 7x + 40 = 0$ немесе $x^2 + 7x - 28 = 0$ шығады. Бірінші теңдеудің түбірі жоқ, себебі дискриминант нөлден кіші. Екінші теңдеуді шешіп, $x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 4 \cdot 28}}{2} = \frac{-7 \pm \sqrt{161}}{2}$ аламыз.

Ж а у а б ы. $\frac{-7 \pm \sqrt{161}}{2}.$

СҰРАҚТАР

1. Қандай теңдеуді биквадрат теңдеу деп атайды?
2. Квадрат теңдеуге келтірілетін теңдеулердің тағы қандай түрлерін білесіңдер? Мысал келтіріңдер.

ЖАТТЫГУЛАР

А деңгейі

301. Теңдеудің неше түбірі бар:

а) $x^4 - 81 = 0$; ә) $x^4 + 169 = 0$; б) $25x^4 - 49 = 0$; в) $16x^4 - 144 = 0$?

302. Теңдеуді шешіңдер:

а) $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$; б) $2x^4 - 5x^2 - 12 = 0$; г) $x^6 + 9x^3 + 8 = 0$;
 ә) $x^4 - 11x^2 + 30 = 0$; в) $3x^4 - 2x^2 - 1 = 0$; ғ) $27x^6 - 28x^3 + 1 = 0$.

303. Теңдеуді шешіңдер:

а) $(x + 5)^4 - 5(x + 5)^2 + 4 = 0$; б) $(2x + 1)^4 - 13(2x + 1)^2 + 36 = 0$;
 ә) $(x - 4)^4 - 8(x - 4)^2 - 9 = 0$; в) $(3x - 1)^4 - (3x - 1)^2 - 12 = 0$.

В деңгейі

304. 1) $x^4 - 8x^2 + p = 0$; 2) $x^4 + 10x^2 + p = 0$ теңдеуінің:

а) төрт түбірі; ә) екі түбірі; б) түбірі болмайтындай p -ның екі мәнін табыңдар.

305. Түбірлері:

а) $-5; -1; 1; 5;$ б) $-3; -\sqrt{2}; \sqrt{2}; 3;$

ә) $-4; -\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; 4;$ в) $-\sqrt{5}; -\sqrt{3}; \sqrt{3}; \sqrt{5}$ болатын биквадрат теңдеу құрындар.

306. Теңдеу түбірлерінің қосындысын табындар:

а) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0;$ б) $2x^4 - 6x^2 + 2,5 = 0;$

ә) $x^4 - 7x^2 + 12 = 0;$ в) $-3x^4 + 12\frac{1}{3}x^2 - 1\frac{1}{3} = 0.$

307. Теңдеудің түбірлерін табындар:

а) $(x-1)(x+1)(x^2+1) = 10x^2 - 10;$ б) $(x-4)(x+4)(x^2+16) = 4x^2 - 196;$

ә) $(x-2)(x+2)(x^2+4) = 8x^2 - 32;$ в) $(2x-3)(2x+3)(4x^2+9) = 10x^2 - 82.$

308. Теңдеуді шешіндер:

а) $(x-12)^4 - 13(x-12)^2 + 36 = 0;$ б) $(x^2-3)^4 - 20(x^2-3)^2 + 64 = 0;$

ә) $(2x+5)^4 - 23(2x+5)^2 - 50 = 0;$ в) $(x^2-2x)^4 - 5(x^2-2x)^2 + 4 = 0.$

309. а) Бақта 180 ағаш болған еді. Бақты кеңейту барысында қатар санын 5-ке арттырып, әр қатарға 3 ағаштан қосты. Нәтижесінде ағаштардың жалпы саны 120-ға артты. Кеңейткенге дейін бақта неше қатар болған еді?

ә) Көрермендер залында 208 орын болған еді. Жөндеу барысында залдағы қатар саны мен әр қатардағы орын саны 1-ге кеміді, нәтижесінде жалпы орын саны 28-ге азайды. Залда неше қатар қалды?

310. Теңдеудің түбірлерін табындар:

а) $x^2 - |x| - 6 = 0;$ б) $2x^2 - |x| - 1 = 0;$ г) $|2x^2 + 5x| = 3;$

ә) $x^2 + 2|x| - 15 = 0;$ в) $2x^2 + 3|x| - 2 = 0;$ ғ) $|3x^2 + 5x| = 2.$

311. $36x^2 - 1996|x| + 178 = 0$ теңдеуі былай құрылған: 1996 саны – Қазақстанның «Іле-Алатауы» ұлттық саябағының ашылған жылын, 36 – ондағы «Қызыл кітапқа» енгізілген өсімдіктер, ал 178 – осы саябақтағы құс түрінің санын біл-



Орақтұмсық

діреді. Осы теңдеудің үлкен түбірін бірлікке дейінгі дәлдікпен табу арқылы осындағы құстардың неше түрінің саябақта ұя салмайтынын, яғни ұшып келетінін білуге болады.

312. Теңдеуді шешіндер:

а) $x^2 - 4|x| - 5 = 0$; б) $3x^2 - 5|x| + 2 = 0$;
 ә) $x^2 + 7|x| - 8 = 0$; в) $-3x^2 + 2|x| + 8 = 0$.

313. Екі оң санның арифметикалық ортасы 13-ке, ал геометриялық ортасы (олардың көбейтіндісінің арифметикалық түбірі) 12-ге тең. Сол сандарды табындар.

314. Теңдеуді шешіндер:

а) $(x + 2)^2 - 7|x + 2| + 6 = 0$; б) $(2x + 5)^2 - 8|2x + 5| + 15 = 0$;
 ә) $(x - 3)^2 - 4|x - 3| - 21 = 0$; в) $(4x - 7)^2 - |4x - 7| - 30 = 0$.

315. Теңдеудің түбірлерін табындар:

а) $(x - 5)^2 - 3|x - 5| + 2 = 0$; б) $(7x^2 - 3)^2 - |7x^2 - 3| - 12 = 0$;
 ә) $(x^2 - 5)^2 - 3|x^2 - 5| - 4 = 0$; в) $\left(\frac{x^2 - 1}{2}\right)^2 + 9\left|\frac{x^2 - 1}{2}\right| - 10 = 0$.

316. Теңдеудегі айнымалының мүмкін мәндерін тауып, оны шешіндер:

а) $x^2 - 10(\sqrt{x - 3})^2 - 14 = 0$; б) $(x - 3)^2 + 5\sqrt{(x - 3)^2} - 6 = 0$;
 ә) $x^2 + 5(\sqrt{x - 4})^2 - 16 = 0$; в) $(x - 4)^2 + \sqrt{(x - 4)^2} - 6 = 0$.

317. Теңдеуді жаңа айнымалы енгізу арқылы шешіндер:

а) $x - 2\sqrt{x} = 63$; б) $3x + 5\sqrt{x} = 12$;
 ә) $x - 3\sqrt{x} = 10$; в) $14x - 3\sqrt{x} = 5$.

318. Теңдеудің түбірлерін табындар:

а) $2x - 1 = 5 + 4\sqrt{2x - 1}$; б) $2\sqrt{x + 7} = x - 41$;
 ә) $3x - 5 = 12\sqrt{3x - 5} - 35$; в) $4\sqrt{x - 4} = 16 - x$.

319. а) 300 санын айырымы 13-ке тең болатын екі көбейткішке жіктендер.

ә) 210 санын қосындысы 30-ға тең болатын екі көбейткішке жіктендер.

320. Жаңа айнымалы енгізіп, теңдеуді шешіңдер:

а) $(x^2 - 24x)^2 - 26(x^2 - 24x) + 25 = 0$; б) $2(x^2 + 5x)^2 + 5(x^2 + 5x) - 12 = 0$;

ә) $(x^2 - 3x)^2 + 4(x^2 - 3x) - 32 = 0$; в) $3(x^2 + x)^2 - 5(x^2 + x) - 2 = 0$.

321. Теңдеудің түбірлерін табыңдар:

а) $(x^2 + 1)^2 - 3(x^2 + 1) + 2 = 0$;

ә) $(x^2 - 5x)^2 + 12(x^2 - 5x) + 36 = 0$;

б) $5(x^2 - 2x + 3)^2 - 9(x^2 - 2x + 3) - 2 = 0$;

в) $-4\left(\frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{3}{2}\right)^2 - 8\left(\frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{3}{2}\right) + 5 = 0$.

С деңгейі

322. Теңдеуді шешіңдер:

а) $(x^2 + 4x)(x^2 + 4x + 9) = -20$; б) $(x^2 - 8x)(x^2 - 8x + 5) = 14$;

ә) $(x^2 + x - 3)(x^2 + x - 4) = 30$; в) $(2x^2 - 3x + 1)(2x^2 - 3x - 8) = -18$.

323. Теңдеудің түбірлерін табыңдар:

а) $(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 3x + 3) = -1$; б) $(x + 2)(x + 6)(x + 4)^2 = 32$;

ә) $(x^2 - 5x + 2)(x^2 - 5x - 1) = 28$; в) $(x - 5)(x - 9)(x - 10)(x - 4) = 750$.

324. Модуль таңбасын ашып, теңдеуді шешіңдер:

а) $x^2 - 2|x - 4| = 0$; б) $\frac{1}{9}y^2 + 2|y - 1| = 5$;

ә) $y^2 - 4|y - 1| = 0$; в) $\frac{1}{4}x^2 - |3x + 7| = 0$.

325. Арифметикалық квадрат түбірдің анықтамасын пайдаланып, теңдеуді шешіңдер және дұрыстығын тексеріңдер:

а) $\sqrt{2x} = x - 4$; б) $\sqrt{x + 7} = 1 + x$;

ә) $\sqrt{5x - 1} = 3 - x$; в) $x + 2 = \sqrt{8 + x}$.

326. а) Екітаңбалы санның бірлік цифры ондық цифрынан 3-ке артық, ал сол сан мен оның цифрлары қосындысының көбейтіндісі 175-ке тең. Сол санды табыңдар.

ә) Екітаңбалы санның цифрларының бірі екіншісінен 4-ке кем, ал сол санның квадраты мен цифрларының орнын ауыстырғанда шыққан санның қосындысы 2826-ға тең. Сол санды табыңдар.

14. Бүтін және бөлшек-рационал теңдеулер

Көпмүше түрінде көрсетуге болатын өрнектен немесе алгебралық бөлшектен тұратын бір айнымалысы бар теңдеу *рационал теңдеу* деп аталады. Сол жағы мен оң жағы көпмүшеден тұратын рационал теңдеуді *бүтін рационал теңдеу* деп атайды. Мысалы, сызықтық, квадрат теңдеулер бүтін рационал теңдеу болады.

Егер рационал теңдеудің бөлімінде айнымалысы бар өрнек болса, ол *бөлшек-рационал теңдеу* деп аталады. Мысалы: $\frac{1}{x^2} = 1$, $\frac{x-4}{2x+1} = \frac{x+5}{x}$.

Бөлшек-рационал теңдеулерді шешу мысалдарын қарастырайық.

1 - м ы с а л. $\frac{x-2}{x-3} + \frac{4}{x} = \frac{x}{x(x-3)}$ теңдеуін шешу керек.

Ш е ш у і. Теңдеудің сол жағы мен оң жағын ондағы бөлшектердің ортақ бөлімі болатын $x(x-3)$ -ке көбейтіп, $x(x-2) + 4(x-3) = x$ теңдеуін аламыз. Бұдан $x^2 + x - 12 = 0$ шығады. Виет теоремасына кері теорема бойынша $x_1 = -4$, $x_2 = 3$ болады. Бұл сандарды $x(x-3)$ ортақ бөліміне қойып тексеріп, оны нөлге тең ететіндерін алып тастаймыз.

$x = 3$ болғанда $x(x-3) = 0$ болады, демек, 3 саны бастапқы теңдеудің түбірі болмайды. $x = -4$ болғанда $x(x-3) \neq 0$, демек, -4 бастапқы теңдеудің түбірі болады.

Ж а у а б ы. -4 .

2 - м ы с а л. $\frac{x+2}{x+1} + \frac{3}{x-2} = 1 + \frac{3}{x^2-x-2}$ теңдеуін шешу керек.

Ш е ш у і. Теңдеудегі бөлшектердің ортақ бөлімін табамыз. Ол үшін $x^2 - x - 2$ квадрат үшмүшені көбейткіштерге жіктейміз. Оның түбірлері: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, демек, $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$. Теңдеудің сол жағы мен оң жағын ондағы бөлшектердің ортақ бөлімі болатын $(x+1)(x-2)$ -ге көбейтіп, мына теңдеуді аламыз:

$$(x+2)(x-2) + 3(x+1) = (x+1)(x-2) + 3.$$

Осы бүтін рационал теңдеуді шешеміз:

$$x^2 - 4 + 3x + 3 = x^2 - x - 2 + 3, 4x = 2, x = 0,5.$$

Осы $x = 0,5$ мәнінде ортақ бөлім $(x + 1)(x - 2)$ нөлге тең емес.

Ж а у а б ы. 0,5.

Қарастырылған бөлшек-рационал теңдеулерді шешу тәсілі былай орындалады:

- 1) теңдеуге кіретін алгебралық бөлшектердің ортақ бөлімін табамыз;
- 2) теңдеудің сол жағы мен оң жағын осы ортақ бөлімге көбейтеміз;
- 3) шыққан бүтін рационал теңдеуді шешеміз;
- 4) шыққан түбірлердің ішінен ортақ бөлімді нөлге айналдыратындарын алып тастаймыз;
- 5) жауабын жазамыз.

СҰРАҚТАР

1. Қандай теңдеу: а) рационал; ә) бүтін; б) бөлшек-рационал теңдеу деп аталады?
2. Бөлшек-рационал теңдеуді қалай шешуге болатынын түсіндіріңдер.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

327. Теңдеудің түбірлерін табыңдар:

а) $\frac{5x^2 - 4x}{x - 0,8} = 0;$ б) $\frac{x^2 - 15x + 56}{x - 7} = 0;$

ә) $\frac{x^2 - 7x}{x^2 + 49} = 0;$ в) $\frac{2x^2 + 7x + 3}{x + 3} = 0.$

328. Теңдеуді шешіндер:

а) $\frac{2x^2 - 5x + 2}{x - 2} = 4x + 1;$ б) $\frac{4x^2 - 14x + 6}{x - 3} = 5x + 2;$

ә) $\frac{2x^2 + x - 1}{x + 1} = 3x + 1;$ в) $\frac{2x^2 + x - 28}{x + 4} = 3x - 2.$

329. Теңдеуді шешіндер:

$$а) \frac{1}{x} - \frac{4}{x-1} = 1;$$

$$в) \frac{7}{x+4} + x = 4;$$

$$ә) \frac{10}{x-3} - \frac{8}{x} = 1;$$

$$г) \frac{x^2 - 3x}{x-2} - \frac{1-3x}{2-x} = 4;$$

$$б) \frac{x}{x+3} + \frac{x+3}{x} = \frac{5}{2};$$

$$ғ) \frac{x^2 - 5x - 2}{x-4} + \frac{x+2}{4-x} = 3.$$

330. Теңдеуді шешіндер:

$\frac{1}{x^2} + 2 \cdot \frac{1}{x} = 1\frac{1}{4}$ (ортаазиялық атақты ақын, математик, өзінің төртжол өлендерімен белгілі болған Омар Хайямның (1048–1131) «Алгебра» атты шығармасынан).

В деңгейі

331. Теңдеудің түбірі болмайтынын дәлелдендер:

$$а) \frac{3}{3x^2 - 3x + 1} = \frac{2}{2x^2 - 2x - 7};$$

$$ә) \frac{5}{(x-2)(x-3)} + \frac{4}{(x-3)(x-4)} = \frac{9}{(x-4)(x-2)}.$$

332. а) Дұрыс бөлшектің бөлімі алымынан 4-ке артық. Егер алымы мен бөлімін 3-ке кемітсе, онда шыққан бөлшек бастапқы бөлшектен $\frac{2}{9}$ -ге кем болады. Осы бөлшекті табыңдар.

ә) Дұрыс бөлшектің алымы бөлімінен 7-ге кем. Егер оның алымы мен бөлімін 6-ға кемітсе, онда шыққан бөлшек бастапқы бөлшектен 2,4 есеге кем болады. Осы бөлшектерді табыңдар.

333. а) $\frac{2x}{x-1}$ және $\frac{3x}{x-2}$ бөлшектерінің қосындысы 2-ге;

ә) $\frac{2}{y+1}$ және $\frac{y}{y-1}$ бөлшектерінің қосындысы олардың көбейтіндісіне тең болатындай айнымалының барлық мәнін табыңдар.

334. Теңдеуді шешіндер:

$$а) \frac{x+3}{x-3} + \frac{x-3}{x+3} = 3\frac{1}{3};$$

$$ә) \frac{2x+1}{x} + \frac{4x}{2x+1} = 5;$$

$$б) \frac{6}{x^2-1} - \frac{2}{x-1} = 2 - \frac{x+4}{x+1};$$

$$в) \frac{x}{2x-1} + \frac{25}{4x^2-1} = \frac{1}{27} - \frac{13}{1-2x};$$

$$г) \left(\frac{3x}{x+1} - 1\right) \cdot \frac{1-x}{2x-1} = \frac{5-2x}{x+2};$$

$$ғ) \left(\frac{4x}{2-x} - x\right) : \frac{x+2}{x-2} = \frac{10}{3-x}.$$

335. Теңдеудің түбірлерін табындар:

$$а) \frac{2x^2+9x-35}{2x-5} = 0;$$

$$в) \frac{(y^2+4y+4)(2y^2-y-6)}{y^4-16} = 0;$$

$$ә) \frac{y^2-81}{(y+2)^2-49} = 0;$$

$$г) \frac{x^3-4x^2+4x}{x^2+3x-10} = 0;$$

$$б) \frac{(x+4)^2-(5x-1)^2}{2x+1} = 0;$$

$$ғ) \frac{y^3-y^2-9y+9}{y^2-10y+21} = 0.$$

336. а) Бірнеше бала 24 кәмпитті өзара тең бөліп алды. Егер балалар саны 2-ге кем болса, онда әрқайсысы қосымша 2 кәмпиттен алар еді. Барлығы неше бала болған?

ә) Қорапшаларға 192 фломастер тең бөліп салынды. Егер әр қорапшаға 4 фломастерден артық салса, қорапша саны 4-ке азаяды. Бір қорапшаға неше фломастерден салынған?

337. Теңдеуді шешіндер:

$$а) \frac{5t^2}{t^2-4} = \frac{10t}{t^2-4};$$

$$в) \frac{2}{b^4+2b^2-1} = \frac{1}{b^4-b^2+1};$$

$$ә) \frac{y^2}{4-y} = \frac{16}{4-y};$$

$$г) \frac{3-y}{y+3} = \frac{y-15}{y^2+3y};$$

$$б) \frac{3}{a^2-0,5a} = \frac{1}{a^2-0,5a-1};$$

$$ғ) \frac{m^2}{m^2-9} = \frac{12-7m}{9-m^2}.$$

338. а) Екі велосипедші бір мезгілде A және B пункттерінен бір-біріне қарама-қарсы бағытта жолға шықты. Бірінші велосипедшінің жылдамдығы екіншісінен 2 км/сағ-қа артық болғандықтан, ол B пунктіне екіншінің A пунктіне жеткен уақытынан 10 мин ерте келді. Егер AB қашықтығы 10 км болса, олардың әрқайсысының жылдамдығын табыңдар.

ә) Екі ұшақ аэродромнан 1600 км қашықтықтағы белгіленген жерге қарай бір мезгілде ұшып шықты. Екіншіден 40 км/сағ-қа артық жылдамдықпен ұшқан бірінші ұшақ одан 2 сағат бұрын жетті. Ұшақтардың жылдамдығын табыңдар.

339. Теңдеудің бір түбірі бар болатынын дәлелдеңдер:

$$а) \frac{x}{10-x} + \frac{10-x}{x} = 2;$$

$$ә) \frac{x^2+x}{x-1} - \frac{2x^2+4}{3x-3} = \frac{4}{3};$$

$$б) \frac{2}{x^2-4} - \frac{1}{x^2-2x} = \frac{4-x}{x^2+2x};$$

$$в) \frac{2x+1}{x-2} - \frac{x-3}{x+2} = \frac{20}{4-x^2};$$

$$г) 1 + \frac{4x}{x^2+x-6} - \frac{x+3}{x-2} = 0;$$

$$ғ) \frac{3x^2-7x-24}{x^2-6x+9} - \frac{4x}{x-3} + 3 = 0.$$

340. Теңдеуді шешіңдер:

$$а) \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} = 2 - \frac{1}{x^2-3x+2};$$

$$ә) \frac{7}{x^2+x-12} - \frac{2}{x(x+4)} + \frac{6}{9-x^2} = 0;$$

$$б) \frac{2x}{x^2+2x-3} + \frac{3x}{x^2+x-2} = \frac{4x}{x^2+5x+6};$$

$$в) \frac{3x^2-30x+74}{(x-4)(x-5)(x-6)} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{x-5} + \frac{1}{x-6}.$$

С деңгейі**341.** Жаңа айнымалы енгізіп, теңдеуді шешіндер:

а) $(t - \frac{1}{t})^2 - 5(t - \frac{1}{t}) = 6;$ б) $\frac{p^2}{8 - p^2} + \frac{8 - p^2}{p^2} = 2;$

ә) $(\frac{k^2 + 1}{k})^2 - \frac{9}{2}(\frac{k^2 + 1}{k}) + 5 = 0;$ в) $q^2 - 4 + \frac{1}{q^2 - 4} = 5\frac{1}{5}.$

342. а) Екі санның айырымы 2-ге, ал олардың көбейтінділерінің жартысы сол сандардың арифметикалық ортасына тең. Осы сандарды табыңдар.

ә) Біреуі екіншісінен 21-ге артық болатын екі натурал санды көбейткенде оқушы көбейтіндінің ондық цифрын 5-ке кемітіп, қате жіберді. Шыққан көбейтіндіні көбейткіштердің кішісіне бөлгенде бөлінді 46-ға, ал қалдығы 4-ке тең болды. Бастапқы санды табыңдар.

343. Теңдеудің түбірлерін табыңдар:

а) $\frac{6}{x^2 - 36} + \frac{1}{x^2 + 12x + 36} + \frac{1}{2x + 12} = 0;$

ә) $\frac{3}{x^2 - 9} + \frac{1}{x^2 - 6x + 9} - \frac{3}{2x^2 + 6x} = 0;$

б) $\frac{2x - 7}{x^2 - 9x + 14} - \frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{x - 1};$

в) $\frac{2x + 1}{x^2 + 5x + 6} + \frac{3}{x^2 + 9x + 18} = \frac{1}{x + 3}.$

344. Теңдеуді шешіндер:

а) $x^2 + \frac{4}{x^2} + 5(x + \frac{2}{x}) + 10 = 0;$ ә) $3(\frac{y^2}{9} + \frac{16}{y^2}) = 10(\frac{y}{3} + \frac{4}{y}).$

345. Сандық ребусты шешіндер: $(AA)^n = ANNA$, мұндағы бірдей әріптерге бірдей цифрлар сәйкес келеді.**346.** 5 пен 7 сандарының қайсысы функцияның мәндер жиынына тиісті:

а) $y = \frac{7x}{x + 1};$ ә) $y = \frac{x^2 - 19}{x - 5}?$

15. Бөлшек-рационал теңдеулерді пайдаланып, мәтінді есептерді шешу

1 - е с е п. Автомобиль жүргізушісі 160 км жол жүріп өтті. Ол осы жолдың 62,5 %-ын бір жылдамдықпен, ал қалған бөлігін 20 км/сағ кем жылдамдықпен жүріп, жолдың бірінші бөлігіне қарағанда 15 минут кем жұмсады. Жолдың екінші бөлігіндегі жылдамдықты табу керек.

Ш е ш у і. Изделінді жылдамдық x км/сағ болсын, сонда автомобиль жүргізушісінің жолдың бірінші бөлігіндегі жылдамдығы $(x + 20)$ км/сағ болады. Жолдың бірінші бөлігі $0,625 \cdot 160 = 100$ (км), ал екінші бөлігі – 60 км. Жолдың бірінші бөлігіне жұмсалған уақыт $\frac{100}{x + 20}$ сағ, ал екіншісіне – $\frac{60}{x}$ сағ.

Есептің шарты бойынша $\frac{100}{x + 20} - \frac{60}{x} = \frac{1}{4}$. Осы теңдеуді шешу үшін оның екі жағын теңдеудегі бөлшектердің ортақ бөлімі болатын $4x(x + 20)$ -ға көбейтіп, мынаны аламыз:

$$400x - 240(x + 20) = x^2 + 20x, x^2 - 140x + 4800 = 0.$$

Виет теоремасына кері теорема бойынша 60 пен 80 сандары осы теңдеудің түбірлері болады. Екі түбір де есептің шартын қанағаттандырады, демек, жолдың екінші бөлігіндегі жылдамдық 60 км/сағ немесе 80 км/сағ-қа тең.

Ж а у а б ы. 60 км/сағ немесе 80 км/сағ.

2 - е с е п*. Анасы a теңгеге алмұрт және сонша теңгеге алма сатып алды. Барлығы n кг болды. Егер 1 кг алмұрт 1 кг алмадан b теңгеге қымбат болса, анасы неше кг алмұрт және неше кг алма сатып алған?

Ш е ш у і. x кг алмұрттың 1 кг-ын $\frac{a}{x}$ теңгеден сатып алған болсын. Сонда $(n - x)$ кг алманың 1 кг-ын $\frac{a}{n - x}$ теңгеден сатып алған болады. Есептің шарты бойынша теңдеу құрып, оны шешеміз:

$$\frac{a}{x} - \frac{a}{n - x} = b, \quad a(n - x) - ax = bx(n - x), \quad an - 2ax = bnx - bx^2,$$

$$bx^2 - (2a + bn)x + an = 0, x_{1,2} = \frac{2a + bn \pm \sqrt{(2a + bn)^2 - 4abn}}{2b} =$$

$$= \frac{2a + bn \pm \sqrt{4a^2 + b^2n^2}}{2b}, x_1 = \frac{2a + bn - \sqrt{4a^2 + b^2n^2}}{2b},$$

$$x_2 = \frac{2a + bn + \sqrt{4a^2 + b^2n^2}}{2b};$$

$$\text{Сонда } n - x_1 = \frac{2bn - 2a - bn - \sqrt{4a^2 + b^2n^2}}{2b} =$$

$$= \frac{bn - 2a - \sqrt{4a^2 + b^2n^2}}{2b} < 0, \text{ себебі } (bn - 2a)^2 < 4a^2 + b^2n^2. \text{ Демек,}$$

x_1 теңдеудің шартын қанағаттандырмайды.

$$\text{Ал } n - x_2 = \frac{2bn - 2a - bn + \sqrt{4a^2 + b^2n^2}}{2b} =$$

$$= \frac{bn - 2a + \sqrt{4a^2 + b^2n^2}}{2b} > 0, \text{ демек, } x_2 \text{ есептің шартын қанағат-}$$

тандырады.

$$\text{Ж а у а б ы. } \frac{2a + bn - \sqrt{4a^2 + b^2n^2}}{2b} \text{ кг алмұрт және}$$

$$\frac{bn - 2a + \sqrt{4a^2 + b^2n^2}}{2b} \text{ кг алма.}$$

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

347. Бөлімі алымынан 5-ке артық болатын қысқармайтын бөлшектің алымынан 2-ні азайтып, бөліміне 2-ні қосса, берілген бөлшек $\frac{11}{40}$ -ге кемиді. Осы бөлшекті табыңдар.

348. Бірінші егістіктен 450 т, ал ауданы одан 5 га-ға кем екінші егістіктен 400 т картоп жинады. Егер екінші егістіктің 1 га-нан біріншіге қарағанда 2 т картоп артық жинаған болса, әр егістіктің 1 га-нан неше тонна картоп жинаған?

349. Тетікті өңдеуге токарь өзінің шәкіртінен 7 мин кем уақыт жұмсады. Егер 4 сағатта токарь шәкіртінен 28 тетік артық өңдеген болса, осы уақыт ішінде әрқайсысы қанша тетік өңдеген?

В деңгейі

350. Бірінің құрамында 24 г, екіншісінде 10 г йодты калий бар екі ерітіндіні араластырып, 100 г жаңа ерітінді алынды. Бірінші ерітіндінің концентрациясы екіншісінен 15 %-ға артық болса, ерітінділердің әрқайсысының концентрациясы қандай болады?

351. Катер ағысқа қарсы 5 км және ағыспен 14 км жүзіп, соның бәріне көлде 18 км жүзетіндей уақыт жұмсады. Өзен ағысының жылдамдығы 3 км/сағ болса, катердің меншікті жылдамдығын табындар.

352. а) Шеберхана белгіленген уақыт ішінде 5400 жұп аяқкиім шығаруы тиіс еді. Бірақ күніне 30 жұп аяқкиім артық шығарып, тапсырманы 9 күн ерте орындады. Тапсырма неше күнде орындалды?

ә) Екі бригада қоймаға 45 т көгөніс қабылдады. Бірінші бригада екіншіге қарағанда сағатына 8 т көбірек қабылдап, жұмысты одан 2 сағат ерте аяқтады. Әр бригада сағатына неше тонна көгөніс қабылдаған?

353. а) 10 км қашықтықты шаңғышылардың бірі екіншісінен 10 мин-қа тезірек жүріп өтті. Егер бірінші шаңғышының жылдамдығы екіншінің жылдамдығынан 3 км/сағ-қа артық болса, әрқайсысының жылдамдығын табындар.

ә) 400 км қашықтықты пойыздардың бірі екіншісінен 1 сағатқа тезірек жүріп өтті. Егер екінші пойыз біріншіден 20 км/сағ баяуырақ жүрген болса, әрқайсысының орташа жылдамдығын табындар.

354. Магний мен алюминийден тұратын қоспада 22 кг алюминий бар. Осы қоспаға 15 кг магний қосқаннан кейін жаңа қоспадағы алюминийдің мөлшері 33 %-ға азайған. Бастапқы қоспа неше кг болған?

355. а) Екі комбайн бірігіп, егістіктегі мақтаны бірінші комбайнға карағанда 9 күнге, екінші комбайнға карағанда 4 күнге тезірек жинайды. Әр комбайн жеке барлық мақтаны неше күнде жинай алады?

ә) Екі құрылысшы бірігіп қабырғаны 20 күнде қалап бітірді. Бірінші құрылысшы жеке өзі осы жұмысты екіншіден 9 күнге тезірек орындайтын болса, әрқайсысы осы жұмысты неше күнде орындар еді?

356. а) Моторлы қайық өзен ағысымен 56 км, ағысқа қарсы 30 км жүзді. Барлық жолға 9,5 сағат, оның 2,5 сағаты аялдамаға жұмсалды. Ағыстың жылдамдығы 2 км/сағ болса, қайықтың меншікті жылдамдығын табыңдар.

ә) Арасы 40 км болатын бір айлақтан екінші айлаққа барып қайту үшін катер барлығы 6 сағат, оның 1,5 сағатын аялдамаға жұмсады. Катердің меншікті жылдамдығы 18 км/сағ болса, өзен ағысының жылдамдығын табыңдар.

С деңгейі

357. а) Катердің меншікті жылдамдығы v км/сағ. Арасы d км қашықтықты катер өзен ағысымен, содан соң өзен ағысына қарсы жүзіп өтті. Өзен ағысына қарсы жолға ол өзен ағысымен жүрген жолға карағанда t сағат артық жұмсады. Өзен ағысының жылдамдығын табыңдар.

ә) Пойыз жолда t сағат тоқтап тұрғандықтан, жоғалтқан уақытын қайтару үшін жолдың s км бөлігінде жылдамдығын v км/сағ-қа арттырды. Пойыздың бастапқы жылдамдығын табыңдар.

358. Кітапхананың бірнеше сөресіне 100-ден аспайтын m алгебра оқулығын теңдей бөліп орналастырған. Егер әр сөреге 5 оқулық артық қойса, онда 2 сөре бос қалар еді. Оқулықтар неше сөреге қойылған?

16. «Квадрат теңдеулер» тақырыбын қайталауға арналған жаттығулар

А деңгейі

359. p -ның қандай мәндерінде теңдеудің екі түбірі болады:

а) $2x^2 - 3x + p - 1 = 0$; б) $3x^2 - 7x + 2 - 5p = 0$;

ә) $5x^2 + 4x + 3 - 2p = 0$; в) $7x^2 + 8x + 3p - 3\frac{5}{7} = 0$?

360. Теңдеуді шешіндер:

а) $x^2 - (3 + \sqrt{2})x + 3\sqrt{2} = 0$; ә) $y^2 + (5 + \sqrt{3})y + 5\sqrt{3} = 0$.

361. а) $x_1 = 2$ болса, $x^2 - 6x + q = 0$ теңдеуінің; ә) $x_1 = 4,5$ болса, $x^2 - px + 18 = 0$ теңдеуінің белгісіз коэффициенттері мен түбірін табындар.

362. Түбірлері: а) 5 және $\frac{1}{5}$; ә) $\sqrt{5}$ және $\frac{1}{\sqrt{5}}$ болатын келтірілген квадрат теңдеу құрындар.

363. Қазақстанда минералды шикізаттың қанша түрі бар екенін $x^2 - 33x - 34 = 0$ теңдеуінің түбірлері айырымының квадратын есептеу арқылы анықтаңдар.



Агат минералы

В деңгейі

364. -4 ; $-\sqrt{2}$; 1 ; $0, (3)$; 2 ; 5 сандарының арасынан квадрат үшмүшенің түбірі болатындарын табындар:

а) $x^2 + 2x - 8$; б) $3p^2 + 11p - 4$;

ә) $t^2 - (1 - \sqrt{2})t - \sqrt{2}$; в) $3k^2 - 16k + 5$.

365. Үшмүшені сызықтық көбейткіштерге жіктеңдер:

а) $15a^2 + 13a + 2$; б) $4k^4 - 17k^2 + 4$;

ә) $-3b^2 + 7b + 6$; в) $-9t^4 + 10t^2 - 1$.

366. Бөлшекті қысқартындар:

а) $\frac{b^2 + b - 90}{81 - b^2}$; б) $\frac{c^4 - 5c + 4}{8 - 6c^2 + c^4}$;

ә) $\frac{a^2 - 25}{10 + 3a - a^2}$; в) $\frac{n^4 + 4n^2 + 3}{n^4 - 6n^2 - 27}$.

367. Теңдеуді шешіндер:

а) $x^2 - 13\sqrt{x^2} + 40 = 0;$

б) $x^2 - 2x + \frac{2-x}{|2-x|} = 0;$

ә) $(x^2 - 4)^2 - 3\sqrt{(x^2 - 4)^2} - 10 = 0;$

в) $x^2 - 6x \cdot \frac{|x-3|}{x-3} + 5 = 0.$

368. Теңдеудің түбірлерін табыңдар:

а) $2(x-5)^2 - 7|x-5| + 3 = 0;$

б) $2(x-7)^2 - 5|x-7| + 2 = 0;$

ә) $3(x+4)^2 + |x+4| - 2 = 0;$

в) $2,5(x+8)^2 - 4|x+8| - 2 = 0.$

369. Теңдеудің неше түбірі бар:

а) $\frac{|x^2 - 5x + 4|}{x - 4} = 0;$

б) $\frac{(x^2 - 25)(x + 7)}{x^2 - 49} = 0;$

ә) $\frac{x - 4}{|x^2 - 5x + 4|} = 0;$

в) $\frac{(x^3 - 1)(x^4 - 81)}{x^2 - 6x + 9} = 0?$

370. Теңдеудің сол жағын көбейткіштерге жіктеп, оның түбірлерін табыңдар:

а) $x^4 - 144 + 4x(x^2 + 12) = 0;$

б) $81 - x^4 - 8x(x^2 + 9) = 0;$

ә) $16 - x^4 - 5x(4 - x^2) = 0;$

в) $x^4 - 256 - 10x(x^2 - 16) = 0.$

371. Теңдеудің түбірлерін табыңдар:

а) $2y^3 - 18y - y^2 + 9 = 0;$

б) $2y^3 - 32y - (y^2 - 16)^2 = 0;$

ә) $y^3 + 3y^2 - 16y - 48 = 0;$

в) $y^3 + 5y^2 - 4(y + 5)^2 = 0.$

С деңгейі

372. Теңдеуді шешіндер:

а) $(x^2 - 6x + 9)^2 - (x - 2)(x - 4) = 1;$

б) $(x^2 - 5x + 7)^2 - (x - 3)(x - 2) = 1;$

ә) $(x^2 - 8x + 14)^2 - (x - 3)(x - 5) = 1;$

в) $(x^2 - 9x + 22)^2 - (x - 4)(x - 5) = 8.$

373. а) Диагональдары қабырғаларынан 25-ке артық; ә) қабырғалары диагональдарынан 7-ге кем көпбұрыш бар бола ма?

374. Футбол чемпионатында 240 ойын өтті. Әр команда әрқайсысымен 2 ойын өткізсе, чемпионатқа қанша команда қатысты?

375. Шаршы қаңылтырдың әр бұрышынан қабырғасы 5 см-ге тең кішкене шаршылар қиып алып тастады да, қаңылтырдың шеттерін майыстырып, көлемі 2 дм³-ге тең қорапша жасады. Бастапқы шаршы қаңылтырдың ауданын табыңдар.

376. Теңдеуді шешіңдер:

$$a) \frac{2x}{x-1} + \frac{3}{x+1} = \frac{3x+1}{x^2-1};$$

$$ә) \frac{3}{2x-1} + \frac{7}{2x+1} = \frac{4-20x^2}{1-4x^2};$$

$$б) \frac{t+5}{t+1} + \frac{3t+1}{t^2+3t+2} = \frac{5}{2};$$

$$в) \frac{5t}{2t^2-t-1} - \frac{4t-5}{t^2-1} = \frac{5}{2t+1};$$

$$г) \frac{3y+2}{y^2-y-12} - \frac{1}{y+3} + 1 = 0;$$

$$ғ) \frac{-6y^2-5y-1}{4y^2+4y+1} - \frac{6y}{2y+1} + 5 = 0.$$

377. а) Екі бригада ағаш отырғызды. Бірінші бригада екіншіден күніне 40 түп артық отырғызып, барлығы 270 түп ағаш отырғызды. Екінші бригада біріншіден 2 күн артық жұмыс істеп, барлығы 250 түп ағаш отырғызды. Әр бригада неше күн жұмыс істеген?

ә) Жұмысшы жоспар бойынша белгіленген уақытқа дейін 150 тетік дайындау керек еді. Ол күндік нормасын 3 тетікке артық орындай отырып, белгіленген уақыттың бітуіне бір күн қалғанда тапсырманы 8 %-ға асыра орындады. Жұмысшы неше тетік дайындады және оларды неше күнде жасап бітірді?

ӨЗІңДІ ТЕКСЕР!

378. 1А) Теңдеуді шешіңдер: 1) $3x^2 + 4x + 5 = 0$; 2) $x - \frac{1}{x} = 4,8$.

2В) Бөлшекті қысқартыңдар: $\frac{x^2 - 8x - 9}{x^2 + 9x + 8}$.

3В) Теңдеуді шешіңдер: $\frac{2x+7}{x^2+5x-6} + \frac{3}{x^2+9x+18} = \frac{1}{x+3}$.

4С) Шебер бір тетікті шәкіртінен 2 минутқа тез дайындайды. Шебер бір сағатта шәкіртінен 1 тетік артық жасаса, әрқайсысы бір сағатта неше тетік дайындайды?

5С) b -ның кез келген мәнінде $7x^2 + bx - 2 = 0$ теңдеуі түбірлерінің таңбалары әртүрлі болатынын дәлелдендер.

БҮЛ ҚЫЗЫҚТЫ!

Кейбір квадрат теңдеулер мен соған келтірілетін есептерді біздің дәуірімізге дейінгі II мыңжылдықта Ежелгі Вавилонда шеше білген. Ежелгі грек математиктері ондай есептерді геометриялық тәсілмен шешкен. Квадрат теңдеулерді шешу теориясын дамытуда Орта Азияның көрнекті ғалымы әл-Хорезмидің (783–850) орны бөлек. Ол әртүрлі квадрат теңдеулерді шешудің нақты жолдарын (алгоритмін) жазып кеткен. «Алгоритм» деп осы ғұламаның құрметіне аталған.

Мысалы, $x^2 + 10x = 39$ теңдеуін қабырғалары x және 5 болатын шаршылардан және қабырғалары x және 5 болатын екі төртбұрыштан тұратын шаршының ауданын пайдаланып шешкен (19-сурет). Шын мәнінде, ол берілген теңдеуден геометриялық жолмен екімүшенің квадратын бөліп шығарып, мына түрге келтірген: $x^2 + 2 \cdot 5x + 25 = 39 + 25$, $(x + 5)^2 = 8^2$, бұдан $x + 5 = 8$, $x = 3$. Ол кезде теріс түбірлерді қарастырмаған.



әл-Хорезми

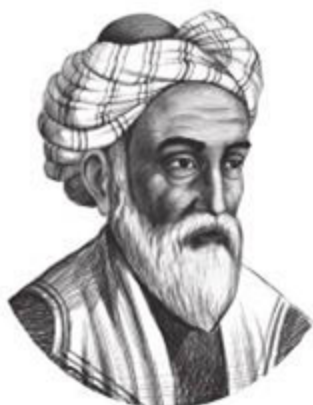
$5x$	x^2
5^2	$5x$

19-сурет

Ғұламаның еңбектерінде мәтіндер негізінен хабарлы сөйлем түрінде баяндалған. Мысалы, $\frac{10-x}{x} + \frac{x}{10-x} = 2\frac{1}{6}$ теңдеуінің (өздерің шешіп көріңдер) шешуін былай берген: «Сен онды екі бөлікке бөлдің және оның біреуін екіншісіне бөлдің және керісінше, сонда қосындыда мұның бәрі екі және алтыдан бір болып шықты».

X–XII ғасырларда үнді және қытай математиктері әл-Хорезмидің еңбектеріне сүйеніп, квадрат теңдеулерді шешу тәсілдерін едәуір жетілдірді.

Еуропада квадрат теңдеулерді шешу формулаларын XIII–XV ғасырларда пайдалана бастады. Қазіргі белгілемелерді XVI ғасырда француз математигі Ф. Виет және италиялық ғалымдар Д. Кардано мен Н. Тарталья ұсынған болатын.



Омар Хайям

Ғаламтор көздерін пайдалана отырып, мынадай дерек жинаңдар:

а) әл-Хорезмидің өмірбаяны және квадраттық теңдеулерді шешу теориясына қосқан үлесі;

ә) әл-Хорезми құрастырған квадраттық теңдеу бойынша қандай да бір есеп және оның шешуі;

б) Омар Хайямның өмірбаяны және математикалық, ақындық мұрасы туралы мәліметтер;

в) Д. Карданоның өмірбаяны және оның алгебраның дамуына қосқан үлесі;

г) Д. Кардано құрастырған квадраттық теңдеу бойынша қандай да бір есеп және оның шешуі.

III. КВАДРАТТЫҚ ФУНКЦИЯ



Бөлімді оқу нәтижесінде

- квадраттық функцияның анықтамасы мен қасиеттерін;
- квадраттық функцияның түрлерін;
- әртүрлі квадрат функциялардың графиктерін салу тәсілдерін білу керек.
- әртүрлі квадраттық функциялардың графиктерін салуды және оқуды;
- квадраттық функцияның қасиеттерін анықтауды;
- квадраттық функцияның қасиеттерін пайдаланып, мәтінді, оның ішінде қолданбалы есептер шығаруды орындай алу керек.

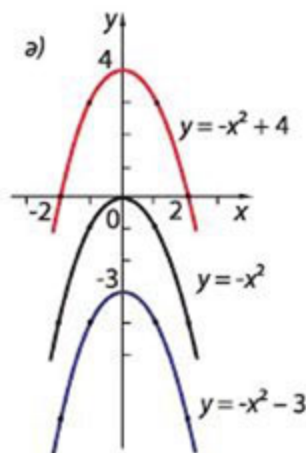
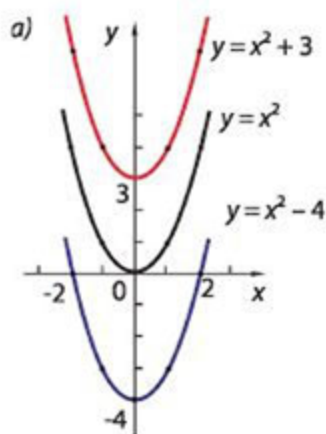
17. Квадраттық функцияның анықтамасы.

$y = ax^2 + n$ функциясы және оның графигі

$y = ax^2 + bx + c$ түріндегі функция **квадраттық функция** деп аталады, мұндағы x – аргумент, a, b және c – нақты сандар және $a \neq 0$. Бұған дейін сендер $y = ax^2$ түріндегі квадраттық функцияны қарастырып, оның графигін – параболаны салған болатынсыңдар. Параболаның төбесімен бөлінетін екі бөлігін *параболаның тармақтары* деп атайды.

$y = ax^2$ функциясының графигі Oy осіне қарағанда симметриялы, мұндай функцияларды *жұп функциялар* деп атайды. Егер $y(x)$ жұп функция болса, онда оның анықталу облысына кіретін аргументтің кез келген x және $-x$ мәндері үшін $y(-x) = y(x)$ теңдігі орындалады.

$y = ax^2 + n$ түріндегі функцияның графигін салуды қарастырайық. Бұл функцияның әрбір мәнінің $y = ax^2$ функциясының сәйкес мәндерінен айырмашылығы n санында екенін байқауға болады. Демек, оның графигі $y = ax^2$ параболасын $n > 0$ болғанда Oy осі бойымен n бірлікке жоғары, ал $n < 0$ болғанда n бірлікке төмен жылжыту арқылы алынған парабола болады (20, а, ә-суреттер).



20-сурет

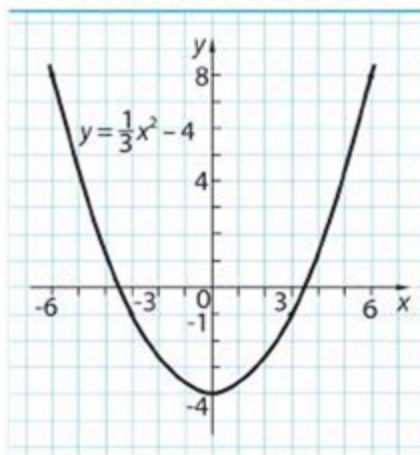
$y = ax^2 + n$ параболасының төбесі координатасы $(0; n)$ -ге тең нүкте болады. Егер $a > 0$ болса, параболаның тармақтары жоғары қарай, $a < 0$ болса, төмен қарай бағытталады. $y = ax^2 + n$ – жұп функция, оның графигі ордината осіне қарағанда симметриялы. $y = ax^2 + n$ функциясының $a > 0$ және $a < 0$ болғандағы кейбір қасиеттерін қарастырайық.

Функцияның қасиеті	$y = ax^2 + n, a > 0$	$y = ax^2 + n, a < 0$
Анықталу облысы	$D(y) = R$	$D(y) = R$
Мәндер жиыны	$E(y) = [n; +\infty)$	$E(y) = (-\infty; n]$
Кему аралығы	$x \in (-\infty; 0]$	$x \in [0; +\infty)$
Өсу аралығы	$x \in [0; +\infty)$	$x \in (-\infty; 0]$

Мысал. $y = \frac{1}{3}x^2 - 4$ функциясының графигін салып: а) мәндер жиынын; ә) кему, өсу аралықтарын; б) нөлдерін, яғни $y = 0$ болғандағы аргументтің мәндерін; в) функцияның таңбатұрақтылық аралықтарын, яғни $y < 0$; $y > 0$ болғандағы x -тің барлық мәнін табу керек.

Шешуі. Графигі – тармақтары жоғары қарай бағытталған парабола болады (себебі $a = \frac{1}{3} > 0$). Параболаның төбесі – $(0; -4)$ нүктесі. $y = \frac{1}{3}x^2 - 4$ функциясының x пен y -тің сәйкес мәндерінің кестесін құрып, графигін салайық (21-сурет).

x	-6	-3	0	3	6
y	8	-1	-4	-1	8



21-сурет

- а) $E(y) = [-4; +\infty)$;
 ә) функция $x \in (-\infty; 0]$ аралығында кемиді, $x \in [0; +\infty)$ аралығында өседі;
 б) функцияның нөлдері – графиктің Ox осімен қиылысу нүктелерінің абсциссалары: $x_1 \approx -3,5$ және $x_2 \approx 3,5$; функцияның нөлдерін

дәл табу үшін мына теңдеуді шешеміз: $\frac{1}{3}x^2 - 4 = 0$, $x^2 = 12$, $x = \pm\sqrt{12}$,

$x_1 = -2\sqrt{3}$, $x_2 = 2\sqrt{3}$;

в) $x \in (-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3})$ болғанда $y < 0$; $x \in (-\infty; -2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{3}; +\infty)$ болғанда $y > 0$.

СҰРАҚТАР

1. Квадраттық функцияның анықтамасын беріңдер.
2. $y = ax^2 + n$ функциясының графигін қалай салуға болатынын мысал келтіріп түсіндіріңдер.
3. $y = ax^2 + n$ функциясының қандай қасиеттерін білесіңдер?

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

379. Функциялардың графиктерін бір координата жүйесіне салып, әрқайсысының анықталу облысы мен мәндер жиынын көрсетіңдер:

а) $y = -x^2 - 2$ және $y = -x^2 + 2$; ә) $y = 0,5x^2 - 3$ және $y = 0,5x^2 + 3$.

380. k -ның қандай мәндерінде $y = (k - 3)x^2 + 5$ функциясының графигі: а) парабола; ә) түзу болады?

381. а) 1) $y = 4x^2 - 2$; 2) $y = -2x^2 + 4$ функцияларының ең кіші мәндерін;

ә) 1) $y = 3x^2 - 2,5$; 2) $y = -2,5x^2 + 3$ функцияларының ең үлкен мәндерін табыңдар.

382. $A(0; 5)$, $B(1; -195)$, $C(-1; 205)$, $D(-0,1; 3)$ нүктелерінің қайсысы $y = -200x^2 + 5$ функциясының графигіне тиісті болатынын тексеріңдер.

383. $M(\sqrt{2} - 1; 2 - 4\sqrt{2})$ және $N(1 - \sqrt{2}; 2 - 4\sqrt{2})$ нүктелері $y = 2x^2 - 4$ функциясының графигіне тиісті ме?

384. Егер x аргументі 1; -2; 3-ке тең болса, $y = \frac{1}{3}x^2 - 8x + \frac{2}{3}$ функциясының мәні қандай болады?

385. $y = 1,5x^2 - 3x - 4,5$ функциясы берілген. Егер: а) $y(x) = 7,5$; ә) $y(x) = 18$ болса, x аргументінің мәнін табыңдар.

386. Парабола төбесінің координаталарын, оның Ox осімен қиылысу нүктелерін тауып, функцияның графигін салыңдар: а) $y = -4x^2 + 9$; ә) $y = 0,2x^2 - 5$. Осы функциялардың қасиеттерін атаңдар.

387. Куб бетінің ауданы S оның қабырғасы x -тің ұзындығына тәуелді. $S(x)$ тәуелділігін формуламен беріңдер және бұл тәуелділік квадраттық функция бола ма, соны анықтаңдар. а) Қыры 3,5 дм-ге тең куб бетінің ауданын; ә) бетінің ауданы 108 см²-ге тең кубтың қырын табыңдар.

388. Функцияның нөлдерін табыңдар: а) $y = -x^2 + 4$; ә) $y = 24x^2 - 6$.

389. a -ның қандай мәндерінде $y = ax^2 - 5$ функциясының: а) нөлдері бар; ә) нөлдері жоқ болады?

390. Квадраттық функция $f(x) = x^2 + x + c$ формуласымен берілген. а) $f(-1)$; ә) $f(2)$; б) $f(c - 1)$; в) $f(c + 1)$ табыңдар.

391. Функцияның графиктерін салыңдар: а) $y = x^2 - 4$; ә) $y = -x^2 + 9$. Графикті пайдаланып: 1) $y \geq 0$; 2) $y < 0$ болатындай x -тің барлық мәндерін табыңдар.

392. Егер $y = ax^2 + c$ параболасы: а) $A(2; -1)$ және $B(4; 5)$; ә) $C(\frac{1}{2}; -\frac{1}{4})$ және $D(\frac{1}{\sqrt{2}}; -1)$ нүктелерінен өтетін болса, a мен c -ның мәндері қандай болады?

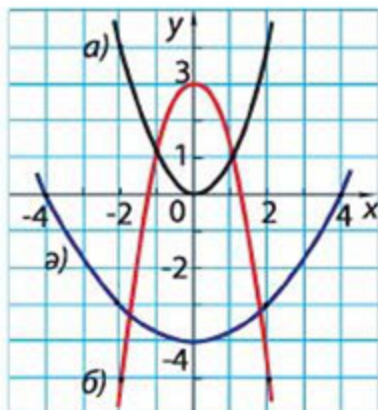
В деңгейі

393. 1) $y = -0,25x^2 + 4$; 2) $y = 0,5x^2 - 4,5$ функциясының графигін салыңдар.

Графиктен: а) функцияның мәндер жиынын; ә) функцияның өсу, кему аралықтарын; б) функцияның нөлдерін; в) $y \geq 0$; $y < 0$ болатындай x -тің барлық мәндерін табыңдар.

394. Бір отбасында төрт бала бар: Нариман, Батыр, Айжан және Жанар. Қыздардың біреуі мектеп жасына жетпеген, оның жасы мен Айжанның жасының қосындысы 3-ке бөлінеді. Айжан Батырдан үлкен. Егер олар 5, 8, 13, 15 жаста болса, балалардың қайсысы ең үлкені, қайсысы ең кішісі болады?

395. 22-суретте $y = ax^2 + n$ түріндегі формуламен берілген функциялардың графиктері бейнеленген. Әр функция үшін a мен n -нің сәйкес мәндерін табыңдар.



22-сурет

396. Бір координата жүйесіне $y = x^2 - 5$ және $y = -1$ функцияларының графиктерін салыңдар. а) $x^2 - 5 < -1$; ә) $x^2 - 5 \geq -1$ болатындай x -тің барлық мәндерін табыңдар.

397. а) $y = 0,6x^2$; ә) $y = -0,6x^2$; б) $y = 0,6x^2 + 3,5$; в) $y = -0,6x^2 - 7$ функциясының жұп болатынын дәлелдендер.

398. $y = \frac{1}{5}x^2 - 9$ параболасы мен: а) $y = -4$; ә) $y = 16$; б) $y = -2,4x$; в) $y = 0,6x - 1$ түзуінің қиылысу нүктелерінің абсциссаларын табыңдар.

399. а) $y = -x^2 + 5$ және $y = 2x - 3$; ә) $y = 2x^2 - 36$ және $y = 14x - 20$ функцияларының қиылысу нүктелерінің координаталарын табыңдар.

С деңгейі

400. Функцияның графигін салыңдар:

а) $y = \sqrt{x^4 + 6x^2 + 9}$;

б) $y = \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(x^2 - \frac{3}{2}\right)^2$;

ә) $y = 1 - \sqrt{x^4 + 8x^2 + 16}$;

в) $y = (x^2 - 2)^2 - (x^2 - 1)^2$.

401. Функцияның анықталу облысын тауып, графигін салындар:

а) $y = x|x| - 2$; б) $y = x^2 + \frac{|x|}{x}$;

ә) $y = -0,5x|x| + 3$; в) $y = x^2 - 2x - (\sqrt{2 - 2x})^2$.

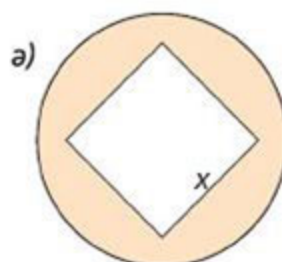
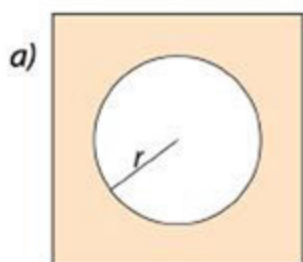
402. а) Тікбұрышты үшбұрыштың қабырғалары тізбектес үш жұп сандармен өрнектеледі. Осы қабырғаларды табындар.

ә) Тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасы бір катетінен 9 см-ге, ал екіншісінен 18 см-ге артық. Оның қабырғаларын табындар.

403. а) Қабырғасы 10 см-ге тең шаршыдан радиусы r 3 см-ден артық болмайтын дөңгелек қиып алынды (23, а-сурет). Қалған фигураның ауданын өрнектейтін $S(r)$ тәуелділігін формуламен беріп, $S(r)$ функциясының мәндер жиынын табындар.

ә) Радиусы 5 см-ге тең дөңгелектен x қабырғасы 2 см-ден артық болмайтын шаршы қиып алынды (23, ә-сурет).

Алынған фигураның ауданын өрнектейтін $S(x)$ тәуелділігін формуламен беріп, $S(x)$ функциясының мәндер жиынын табындар.



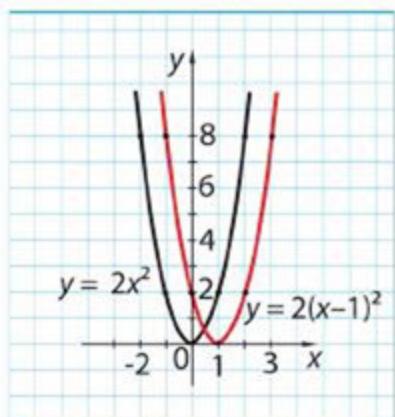
23-сурет

18. $y = a(x - m)^2$ функциясы және оның графигі

$y = a(x - m)^2$ түріндегі функцияны қарастырайық. Мысалы, $y = 2(x - 1)^2$ болсын. $y = 2x^2$ және $y = 2(x - 1)^2$ функцияларының сәйкес мәндерінің кестесін құрайық.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$2x^2$	18	8	2	0	2	8	18	
$2(x - 1)^2$		18	8	2	0	2	8	18

Кестеден $y = 2x^2$ функциясының аргументі $y = 2(x - 1)^2$ функциясының аргументінен 1-ге кем болғанда, функциялардың сәйкес мәндерінің тең болатынын байқауға болады.



24-сурет

Бұл $y = 2(x - 1)^2$ функциясының графигін $y = 2x^2$ параболасын Ox осі бойымен оңға қарай 1-ге жылжыту арқылы алуға болатынын көрсетеді (24-сурет).

Сонымен, $y = a(x - m)^2$ түріндегі функцияның графигін $y = ax^2$ функциясының графигінен оны абсцисса осі бойымен m бірлікке: а) егер $m > 0$ болса, оңға қарай; ә) егер $m < 0$ болса, солға қарай жылжыту арқылы алуға болады. $y = a(x - m)^2$ параболасының

төбесі координатасы $(m; 0)$ болатын нүкте, графигі $x = m$ түзуіне қарағанда **симметриялы**.

$y = a(x - m)^2$ функциясының кейбір қасиеттерін атап өтейік.

Функцияның қасиеті	$y = a(x - m)^2, a > 0$	$y = a(x - m)^2, a < 0$
Анықталу облысы	$D(y) = R$	$D(y) = R$
Мәндер жиыны	$E(y) = [0; +\infty)$	$E(y) = (-\infty; 0]$
Кему аралығы	$x \in (-\infty; m]$	$x \in [m; +\infty)$
Өсу аралығы	$x \in [m; +\infty)$	$x \in (-\infty; m]$

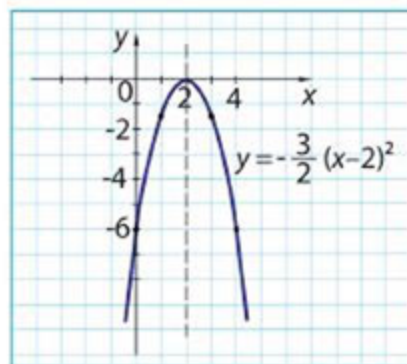
Мысал. $y = -\frac{3}{2}x^2 + 6x - 6$ функциясының графигін салып, оның қасиеттерін анықтау керек.

Шешуі. x^2 -тың алдындағы коэффициентті жақшаның сыртына шығарып, квадрат үшмүшені $y = -\frac{3}{2}(x^2 - 4x + 4)$ түріне келтіреміз. Яғни, мынаны аламыз: $y = -\frac{3}{2}(x - 2)^2$. Бұл функцияның графигі тармақтары төмен қарай бағытталған парабола болады, себебі $a = -\frac{3}{2} < 0$. $x = 2$ түзуі осы параболаның симметрия осі болады. Осы түзуге қарағанда симметриялы болатын парабола нүктелерінің екі жұбын табайық. Бұл параболаның Oy осімен қиылысатын $(0; -6)$ нүктесі мен оған симметриялы $(4; -6)$ нүктесі және $(1; -\frac{3}{2})$, $(3; -\frac{3}{2})$ нүктелері. Осы нүктелерді координаталық жазықтыққа белгілеп, параболаны салайық (25-сурет).

$y = -\frac{3}{2}x^2 + 6x - 6$ функциясының қасиеттері:

- 1) $D(y) = (-\infty; +\infty)$, $E(y) = (-\infty; 0]$.
- 2) $x \in (-\infty; 2]$ аралығында функция өседі, $x \in [2; +\infty)$ аралығында кемиді.
- 3) Функцияның нөлдері: $x = 2$.
- 4) Ең үлкен мәні: $y = 0$.
- 5) Функцияның таңбатұрақтылық аралығы:

$x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$ болғанда $y < 0$.



25-сурет

СҰРАҚТАР

1. $y = a(x - m)^2$ функциясының графигін қалай салу керектігін мысал келтіріп түсіндіріңдер.
2. $y = a(x - m)^2$ функциясының қандай қасиеттерін білесіңдер?

ЖАТТЫҒУЛАР*А деңгейі*

404. Бір координата жүйесіне функциялардың графиктерін салыңдар:

а) $y = x^2 + 3$ және $y = (x + 3)^2$, олардың симметрия осьтерінің теңдеулерін жазыңдар;

ә) $y = x^2 - 4$ және $y = -(x - 4)^2$, функциялардың мәндер жиынын көрсетіңдер.

405. $y = 3x^2$ функциясының графигінен келесі функцияның графигін қалай алуға болады:

а) $y = 3x^2 - 1$; б) $y = 3(x - 1)^2$;

ә) $y = 3x^2 + 5$; в) $y = 3(x + 5)^2$?

406. $y = 4x^2$ параболасын:

а) Oy осі бойымен: 1) 3 бірлікке жоғары; 2) 4 бірлікке төмен;

ә) Ox осі бойымен: 1) 2 бірлікке оңға; 2) 5 бірлікке солға жылжитқанда алынған параболаның теңдеуін жазыңдар.

407. Парабола төбесінің координаталарын көрсетіңдер:

а) $y = (x - 3)^2$; в) $y = -4x^2 + 5$;

ә) $y = 5(x + 2)^2$; г) $y = x^2 + 6x + 9$;

б) $y = \frac{3}{7}x^2 - 7$; ғ) $y = x^2 - 8x + 16$.

В деңгейі

408. 4, 5, 6, 7 сандарының әрқайсысына бірдей нақты a саны қосылған. Шеткі мүшелерінің көбейтіндісін шыққан тізбектің ортаңғы мүшелерінің көбейтіндісімен салыстырыңдар.

409. Функцияны $y = a(x - m)^2$ түріне келтіріп, оның графигін салыңдар және осы функцияның кему, өсу аралықтарын көрсетіңдер:

а) $y = x^2 - 4x + 4$; б) $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 2$;

ә) $y = -x^2 - 6x - 9$; в) $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2x - 3$.

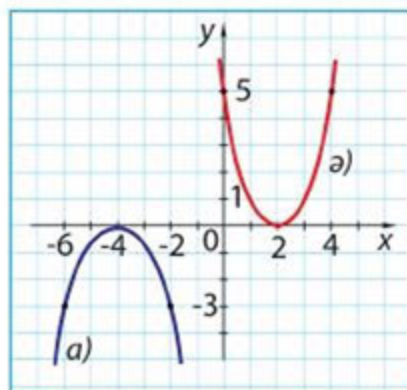
410. Графигі 26, а, ә-суреттерде бейнеленген квадраттық функцияны формуламен беріңдер.

411. $y = 4x^2$ функциясының графигінен:

а) $y = 4(x - 5)^2$; ә) $y = 4(x + 3)^2$;

б) $y = 4x^2 - 8x + 4$;

в) $y = 4x^2 + 8\sqrt{5}x + 20$ функциясының графигін қалай алуға болады?



26-сурет

412. Мына функциялардың әрқайсысы үшін:

а) $y = (x - 3)^2$; б) $y = 2(x - 1)^2$;

ә) $y = -(x + 2)^2$; в) $y = -\frac{1}{2}(x + 3)^2$;

- 1) параболаның төбесін; 2) параболаның симметрия осін;
- 3) параболаның симметрия осіне қарағанда симметриялы болатын екі нүктесін;
- 4) Оу осімен қиылысу нүктесін және оған параболаның симметрия осіне қарағанда симметриялы болатын нүктені тауып, графигін салыңдар.

413. Егер $y = a(x - 12)^2$ функциясының графигі: а) $A(0; -24)$; ә) $B(-10; 20)$; б) $C(6; 9)$; в) $D(15; -27)$ нүктесінен өтетін болса, a -ның мәнін табыңдар.

414. Графиктердің қиылысу нүктелерінің координаталарын табыңдар:

а) $y = (x + 7)^2$ және $y = 49$; б) $y = -4(x - 5)^2$ және $y = 20x - 100$;

ә) $y = \frac{1}{2}(x - 2)^2$ және $y = -4x$; в) $y = -\frac{1}{8}(x + 3)^2$ және $y = x - 5\frac{1}{8}$.

415. Функцияны $y = a(x - m)^2$ түріне келтіріп, графигін салыңдар және оның қасиеттерін анықтаңдар:

а) $y = x^2 + x + \frac{1}{4}$; б) $y = 2x^2 + 8x + 8$;

ә) $y = -x^2 + 14x - 49$; в) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 5x - 12,5$.

416. а) Егер тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасы оның бір катетінен 0,5 м-ге артық, ал екінші катеті 2 м-ге тең болса, гипотенузаның ұзындығын табыңдар.

ә) Катеттері a және $a + 1$ болатын тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасы $\sqrt{a(a + 1)}$ -ге тең бола ала ма?

417. m -нің қандай мәнінде $y = (x - m)^2$ параболасы:

а) $M(0; 9)$; ә) $N(5; 0)$; б) $K(-4; 1)$; в) $P(-\frac{1}{4}; \frac{1}{16})$ нүктесінен өтеді?

418. m -нің қандай мәнінде $y = (x - m)^2$ параболасы мен $y = 2x - 2$ түзуі абсциссасы 1-ге тең нүктеде қиылысады? Осы функциялардың қиылысу нүктелерінің координаталарын тауып, графиктерін салыңдар.

С деңгейі

419. Теңсіздіктерді графиктік тәсілмен шешіңдер:

а) $(x - 2)^2 \leq 4$; б) $\frac{1}{2}(x + 2)^2 \geq 2$;

ә) $-(x + 3)^2 \geq -1$; в) $-\frac{3}{4}(x - 3)^2 \leq -3$.

420. Егер $y = ax^2 + bx + c$ квадраттық функциясының графигі:

а) $(0; -4)$, $(1; -2)$, $(-1; -12)$; ә) $(-1; 0)$, $(3; 0)$, $(0; 2)$ нүктелерінен өтетін болса, оны формуламен беріңдер.

421. Салымшы банкке жылдық $p\%$ өсіммен 100 мың теңге салды, 2 жылдан кейін алатын өсімін есептеуге болатын формуланы құрыңдар. $p = 8\%$ болғанда салымшы қандай өсім алады?

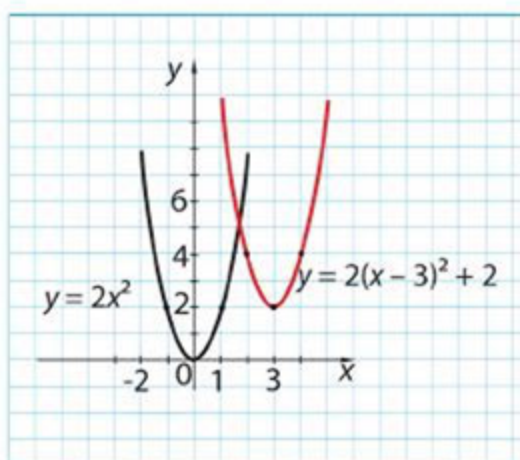
422. Жазық жерде өсіп тұрған, биіктіктері 30 м және 20 м екі ағаштың басында екі құс отыр. Ағаштардың арақашықтығы 50 м. 1 м-ге дейінгі дәлдікпен өлшенгендегі: а) құстардың арақашықтығын; ә) қоянның құстардан бірдей қашықтықта отырғандығы белгілі болса, осы арақашықтықты табыңдар.

423. Егер \overline{PAK} саны 37-ге бөлінсе, онда \overline{AKP} саны да 37-ге бөлінетінін дәлелдендер.

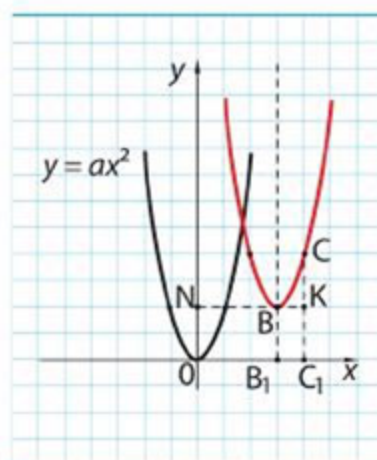
19. $y = a(x - m)^2 + n$ функциясы және оның графигі

$y = a(x - m)^2 + n$ функциясының графигін $y = ax^2$ функциясының графигінен оны абсцисса осі бойымен m бірлікке және ордината осі бойымен n бірлікке жылжыту арқылы алуға болады (27-сурет). Осылай жылжытудан кейін парабола **төбесінің** координаталары $(m; n)$, ал **симметрия осінің** теңдеуі $x = m$ болады.

Көрсетілген жылжыту арқылы $y = ax^2$ параболасынан алынған парабола $y = a(x - m)^2 + n$ формуласымен берілетінін дәлелдейік.



27-сурет



28-сурет

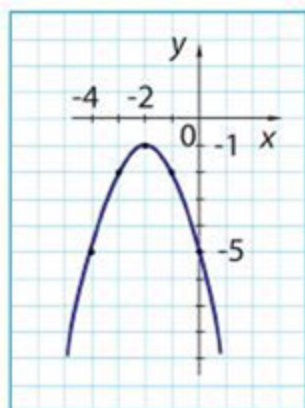
Параболада жататын кез келген $C(x; y)$ нүктесін алайық, оның Ox осіндегі проекциясын C_1 деп, ал параболаның B төбесінің проекциясын B_1 деп белгілейік. B нүктесі арқылы Ox осіне параллель түзу жүргізіп, оның Oy осімен және CC_1 түзуімен қиылысу нүктелерін сәйкесінше N және K деп белгілейік (28-сурет). Сонда $x = OC_1$, $y = C_1C$, $BK = x - m$, $KC = y - n = a \cdot (BK)^2$ болады. Демек, $y - n = a(x - m)^2$, $y = a(x - m)^2 + n$. Бұл дәлелдеуді a , m және n – оң сандар болған жағдайдағы суретті пайдаланып жүргізгенімізді айта кетелік. Бұлай дәлелдеу кез келген m , n және $a \neq 0$ болғанда да дұрыс болады.

$y = a(x - m)^2 + n$ функциясының кейбір қасиеттерін қарастырайық.

Функцияның қасиеті	$y = a(x - m)^2 + n, a > 0$	$y = a(x - m)^2 + n, a < 0$
Анықталу облысы	$D(y) = R$	$D(y) = R$
Мәндер жиыны	$E(y) = [n; +\infty)$	$E(y) = (-\infty; n]$
Кему аралығы	$x \in (-\infty; m]$	$x \in [m; +\infty)$
Өсу аралығы	$x \in [m; +\infty)$	$x \in (-\infty; m]$

Мысал. Егер $x < 0$ және $y < 0$ болса, квадраттық функцияның әрбір мәнінің модулі оған сәйкес аргумент мәнінің модулінен 2 есе артық болады (графикі 29-суретте бейнеленген). Осы функцияның барлық мәнін табу керек.

Шешуі. Квадрат функцияны $y = a(x - m)^2 + n$ түріне келтірейік. Парабола төбесінің координаталары $(-2; -1)$ болғандықтан,



29-сурет

$y = a(x + 2)^2 - 1$ болады. Шыққан формулаға параболаның қандай да бір нүктесінің координаталарын қойып, мысалы, $(0; -5)$, a коэффициентінің мәнін табамыз. Сонда, $-5 = a(0 + 2)^2 - 1$ аламыз, бұдан $a = -1$ шығады. Сонымен, берілген функцияның формуласы $y = -(x + 2)^2 - 1$ болады. Есептің шарты бойынша $y = 2x$ немесе $x = \frac{y}{2}$. x -тің осы мәнін формулаға қойып, шыққан теңдеуді түрлендіреміз: $y = -\left(\frac{y}{2} + 2\right)^2 - 1, y + \left(\frac{y^2}{4} + 2y + 4\right) + 1 = 0,$
 $\frac{y^2}{4} + 3y + 5 = 0, y^2 + 12y + 20 = 0.$

Виет теоремасына кері теорема бойынша соңғы теңдеудің түбірлері: $y_1 = -10$ және $y_2 = -2$.

Жауабы. $-10; -2$.

СҰРАҚТАР

1. $y = a(x - m)^2 + n$ түріндегі функцияның графигін қалай салуға болатынын мысал келтіріп түсіндіріңдер.
2. $y = a(x - m)^2 + n$ функциясының қандай қасиеттерін білесіңдер?

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

424. Парабола төбесінің координаталарын көрсетіңдер:

- а) $y = (x - 15)^2 + 24$; б) $y = -5(x - 7,5)^2 - 31$;
 ә) $y = (x + 23)^2 - 35$; в) $y = -4(x + 8,5)^2 + 29$.

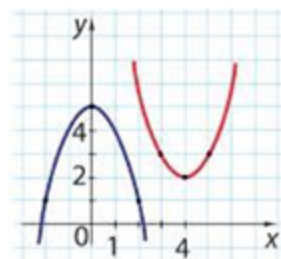
425. $y = x^2$ функциясы графигін пайдаланып, мына функцияның графигін салыңдар:

- а) $y = (x - 2)^2 + 1$; б) $y = -(x + 2)^2 - 1$;
 ә) $y = (x - 3)^2 - 2$; в) $y = -(x + 3)^2 + 2$.

426. 30-суретте мына функциялардың қайсыларының графигері бейнеленген:

- а) $y = x^2 - 5$; б) $y = (x + 2)^2 + 4$;
 ә) $y = (x - 4)^2 + 2$; в) $y = -x^2 + 5$?

427. $y = 2(x + 1,5)^2 - 2,5$ функциясының графигін салып, оның қасиеттерін анықтаңдар.



30-сурет

В деңгейі

428. $y = (x - m)^2 + n$ квадраттық функциясын $y = x^2 + px + q$ түріне келтіріңдер. Егер $y = x^2 + px + q$ парабола төбесінің координаталары:

- а) (7; 8); ә) (2; -3); б) (-4; 5); в) (-2; -4) белгілі болса, p мен q -ді табыңдар.

429. а) $y = -3x^2$ параболасын Oy осі бойымен 3 бірлікке жоғары және Ox осі бойымен 2 бірлікке оңға; ә) $y = \frac{1}{4}x^2$ параболасын Oy осі бойымен 3 бірлікке төмен және Ox осі бойымен солға жылжытқанда алынған параболаның теңдеуін жазыңдар және графигін салып, оның Ox осімен қиылысу нүктелерін табыңдар.

430. а) Тіктөртбұрышты гүлзардың ұзындығы 5 м, ені 3 м. Гүлзарды айналдыра енін бірдей етіп жол салған. Егер жолдың ауданы гүлзардың ауданынан 2 есе үлкен болса, жолдың енін 0,1 м-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

ә) Ұзындығы енінен 0,5 м-ге артық сурет жақтауға салынған. Оның ені 10 см, ауданы суреттің ауданының $\frac{5}{6}$ -ін құрайды. Жақтаудың өлшемдерін табыңдар.

431. а) $y = -1,5(x + 1)^2 + 6$; ә) $y = 2(x - 1)^2 - 8$ функциясының графигін салып: 1) мәндер жиынын; 2) функцияның нөлдерін; 3) функцияның өсу, кему аралықтарын; 4) $y \geq 0$; $y < 0$ болғандағы x -тің барлық мәндерін көрсетіндер.

432. Өрнектің ең кіші мәні қандай болады:

а) $\sqrt{3(x - 2)^2 + 4}$; ә) $\sqrt{2(x + \sqrt{3})^2 + 81}$?

433. Өрнектің ең үлкен мәні қандай болады:

а) $\sqrt{-(x - 1)^2 + 5}$; ә) $\sqrt{-4(x - \sqrt{2})^2 + 6}$?

434. Функцияны $y = a(x - m)^2 + n$ түріне келтіріп, графигін салыңдар:

а) $y = x^2 - 4x + 3$; б) $y = -(x - 2)^2 + 2(x - 2) + 3$;

ә) $y = -x^2 + 2x - 3$; в) $y = (x + 1)^2 - 6(x + 1) + 10$.

435. Берілген квадраттық функцияны $y = a(x - m)^2 + n$ түріне келтіріп: а) $y = x^2 - 2x + 2018$ функциясының ең кіші мәнін; ә) $y = -2x^2 - 8x + 18$ функциясының ең үлкен мәнін табыңдар.

436. Диагонали d -ға, ал қабырғаларының айырымы c -ға тең болатын тіктөртбұрыштың ауданын табыңдар.

437. а) $x \in [1; 6]$ болса, $y = \frac{3}{4}(x - 4)^2 + 1$ функциясының;

ә) $x \in (-6; -2]$ болса, $y = -(x + 5)^2 + 4$ функциясының графигін салыңдар.

438. $n \in \mathbb{N}$ және $n \leq 5$ болғанда:

а) $y = 0,5n^2 - 1$; ә) $y = -n^2 + 4n$ формуласымен берілген функцияның графигін салыңдар.

439. n -нің қандай мәнінде $y = -\frac{1}{2}(x - 4)^2 + n$ параболасы $y = -x + 1$ түзуімен абсциссасы 2-ге тең нүктеде қиылысады? Осы функциялардың графиктерін салып, қиылысу нүктелерінің координаталарын табыңдар.

С деңгейі

440. Теңсіздікті графиктік тәсілмен шешіңдер:

а) $-(x + 2)^2 + 5 \geq 1$; б) $\frac{2}{3}(x - 3)^2 - 4 \geq 2$;

ә) $\frac{1}{2}(x - 4)^2 - 4 \leq -2$; в) $-2(x + 1)^2 + 3 \leq 1$.

441. $y = -x^2 + 2x + 2$ функциясын $y = a(x - m)^2 + n$ түріне келтіріп:

1) $y = -x^2 + 2x + 2$ параболасының симметрия осін;

2) осы параболаның Oy осімен қиылысу нүктесінің және оған параболаның симметрия осіне қарағанда симметриялы болатын нүктенің координаталарын;

3) параболаның симметрия осіне қарағанда симметриялы болатын екі нүктенің координаталарын табыңдар.

$y = -x^2 + 2x + 2$ функциясының графигін салыңдар.

442. Малика Нариманға мына тапсырманы тексеруді ұсынды: «Егер $a^2 + a + 4 < 0$ болса, онда $a < 0$ болады». Біраз ойланған соң, Нариман бұл есептің шартында қате бар екенін айтты. Ол қандай қате?

443. $(x - 2)(x + 2) = 5$ теңдеуінің қайсыбір түбірі $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$ теңдеуінің түбірі бола ма?

444. Бөлшекті қысқартыңдар:

а) $\frac{a^4 - 1}{a^3 + a^2 + a + 1}$; ә) $\frac{b^5 - b^4 + (b^4 - b^3) + b^3 - 1}{b^4 + b^3 + b^2 + b + 1}$.

445. Натурал k -ның кез келген мәнінде $\frac{(2k + 1)^4 - 1}{4k^2 + 4k + 2}$ өрнегінің мәні 8-ге бөлінетінін дәлелдендер.

20. $y = ax^2 + bx + c$ функциясы және оның графигі

$y = ax^2 + bx + c$, мұндағы $a \neq 0$ функциясын $y = a(x - m)^2 + n$ түріне келтіруге болады. Шынымен де, $y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$,
 $y = a\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right)$, $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$.
 $-\frac{b}{2a} = m$, $\frac{-b^2 + 4ac}{4a} = n$ деп белгілейміз, сонда $y = a(x - m)^2 + n$.

Сонымен, $y = ax^2 + bx + c$ квадраттық функциясының графигі $\left(-\frac{b}{2a}; \frac{-b^2 + 4ac}{4a}\right)$ нүктесі **төбесі** болатын парабола болады. $x = -\frac{b}{2a}$ түзуі осы параболаның **симметрия осі** болады. Егер $a > 0$ болса, онда параболаның тармақтары жоғары қарай, $a < 0$ болса, төмен қарай бағытталады.

Квадраттық функцияның қасиеттерін қарастырайық.

Функцияның қасиеті	$y = ax^2 + bx + c, a > 0$	$y = ax^2 + bx + c, a < 0$
Анықталу облысы	$D(y) = R$	$D(y) = R$
Мәндер жиыны	$E(y) = \left[\frac{-b^2 + 4ac}{4a}; +\infty\right)$	$E(y) = \left(-\infty; \frac{-b^2 + 4ac}{4a}\right]$
Кему аралығы	$x \in \left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$	$x \in \left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$
Өсу аралығы	$x \in \left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$	$x \in \left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$
Функцияның нөлдері	$D = b^2 - 4ac \geq 0$ болса, $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$, $D < 0$ болса, нөлдері болмайды (график Ox осін қимайды)	
Ең үлкен мәні	—	$x = -\frac{b}{2a}$ болғанда $\frac{-b^2 + 4ac}{4a}$
Ең кіші мәні	$x = -\frac{b}{2a}$ болғанда $\frac{-b^2 + 4ac}{4a}$	—

Квадраттық функцияның өсетінін (кемитінін) дәлелдейік. Егер $a > 0$ болса, онда еркімізше алынған $x_2 > x_1 \geq -\frac{b}{2a}$ болатын x_1 мен x_2 мәндері үшін:

$$\begin{aligned} y_2 - y_1 &= a\left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 = \\ &= a\left(x_2 + \frac{b}{2a} - x_1 - \frac{b}{2a}\right)\left(x_2 + \frac{b}{2a} + x_1 + \frac{b}{2a}\right) = \\ &= a(x_2 - x_1)\left(\left(x_2 - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right) + \left(x_1 - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right)\right) > 0, \text{ себебі әрбір көбейт-} \end{aligned}$$

кіш оң сан. Сонымен $y_2 > y_1$, яғни $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$ аралығында аргументтің үлкен мәніне функцияның үлкен мәні сәйкес келеді, демек $y = ax^2 + bx + c$ функциясы $a > 0$ болғанда осы аралықта **өседі**.

Егер $a > 0$ және $-\frac{b}{2a} \geq x_2 > x_1$ болса, онда үшінші көбейткіш теріс, ал қалғандары оң сан болады, сондықтан $y_2 - y_1 < 0$, ендеше, $y_2 < y_1$. Бұдан $(-\infty; -\frac{b}{2a}]$ аралығында аргументтің үлкен мәніне функцияның кіші мәні сәйкес келеді, демек, $y = ax^2 + bx + c$ функциясы $a > 0$ болғанда, осы аралықта **кемиді**.

$a < 0$ болатын жағдайды өздігінен зерттендер.

Мысал. $y = -\frac{1}{4}x^2 - x + 3$ функциясының графигін салып, оның: а) анықталу облысы мен мәндер жиынын; ә) өсу және кему аралықтарын; б) таңбатұрақтылық аралықтарын табу керек.

Шешуі. 1) Бұл функцияның графигі – тармақтары төмен қарай бағытталған парабола болады, себебі $a = -\frac{1}{4} < 0$.

2) Параболаның төбесі $A(x_0; y_0)$, мұндағы $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$,
 $y_0 = y(x_0) = -1 + 2 + 3 = 4$, $A(-2; 4)$.

3) $x = -2$ түзуі – параболаның симметрия осі.

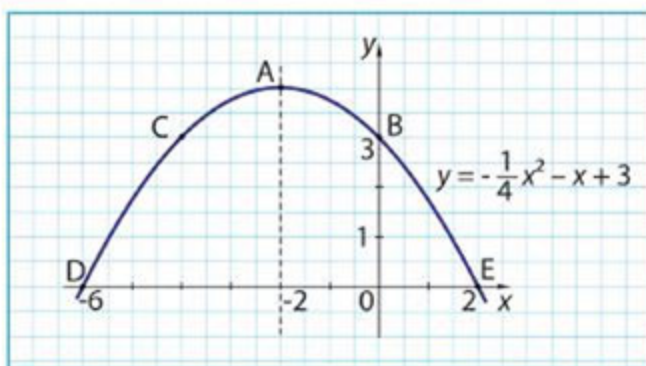
4) Парабола Oy осін $B(0; 3)$ нүктесінде қияды, параболаның симметрия осіне қарағанда ол нүктеге симметриялы нүкте $C(-4; 3)$ болады.

5) Функцияның нөлдерін табу үшін $-\frac{1}{4}x^2 - x + 3 = 0$ теңдеуін шешу керек. Бұл теңдеуден $x^2 + 4x - 12 = 0$ шығады. Виет теоремасына кері теорема бойынша, бұл теңдеудің түбірлері -6 мен 2 -ге тең. Демек, парабола Ox осін $D(-6; 0)$ және $E(2; 0)$ нүктелерінде қияды.

Табылған нүктелер арқылы параболаны саламыз (31-сурет).

а) $D(y) = (-\infty; +\infty)$, $E(y) = (-\infty; 4]$;

ә) $x \in (-\infty; -2]$ аралығында функция өседі, ал $x \in [-2; +\infty)$ аралығында кемиді;



31-сурет

б) $x \in (-6; 2)$ болғанда $y > 0$, $x \in (-\infty; -6) \cup (2; +\infty)$ болғанда $y < 0$.

Сонымен, $y = ax^2 + bx + c$ квадраттық функциясының графигін салу реті былай болуы мүмкін:

1) параболаның төбесі болатын $(x_0; y_0)$ нүктесін салу керек, мұндағы $x_0 = \frac{-b}{2a}$, $y_0 = y(x_0)$;

2) параболаның төбесі арқылы Oy осіне параллель түзу, яғни параболаның симметрия осін жүргізу керек;

3) функцияның нөлдерін (бар болса) тауып, параболаның Ox осімен қиылысу нүктелерін (болған жағдайда) салу керек;

4) тағы да, параболаның симметрия осіне қарағанда симметриялы болатын бір нүктені салу керек;

5) салынған нүктелер арқылы жатық қисық сызық – параболаны саламыз.

СҰРАҚТАР

- $y = ax^2 + bx + c$ квадраттық функцияның графигін қалай салуға болатынын мысал келтіріп түсіндіріңдер.
- $y = ax^2 + bx + c$ функциясының $a > 0$ және $a < 0$ болғандағы қасиеттерін тұжырымдаңдар.
- $x = -\frac{b}{2a}$ болғанда $y = ax^2 + bx + c$ функциясының $\frac{-b^2 + 4ac}{4a}$ мәні, егер $a > 0$ болса, оның ең кіші, ал егер $a < 0$ болса, ең үлкен мәні болатынын дәлелдеңдер.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

446. $A(-3; 5)$ нүктесі – төбесі болатын $y = ax^2 - 12x + c$ параболасын салыңдар.

447. Функцияның мәндер жиынын табыңдар:

- а) $y = x^2 - 8x + 12$; б) $y = (x - 4)(x - 6) + 3$;
 ә) $y = 6x - 4x^2$; в) $y = 10 - (x - 7)(x + 3)$.

448. Парабола төбесінің координаталарын және оның Ox , Oy осьтерімен қиылысу нүктелерін табыңдар:

- а) $y = 9x^2 - 6x - 3$; б) $y = -2x^2 + x - \frac{1}{9}$;
 ә) $y = -4x^2 + 12x + 7$; в) $y = 8x^2 - x - \frac{1}{4}$.

449. Функцияның графигін салыңдар:

- а) $y = x^2 + 7x + 10$; б) $y = -x^2 + x - 0,25$; г) $y = 0,5x^2 - 3x + 5$;
 ә) $y = x^2 - 4x + 4$; в) $y = 2x^2 - 4\sqrt{2}x + 4$; ғ) $y = -2x^2 + 3x - 2$.

450. Егер: а) $f(x) = x^2 - 7x + p$ және $M(10; -1)$; ә) $f(x) = x^2 + px - 8$ және $M(-13; 31)$ болса, p -ның қандай мәнінде $f(x)$ функциясының графигі M нүктесі арқылы өтеді?

В деңгейі

451. Егер: а) $x = 6$ болғанда $y = 0$, ал $x = 4$ болғанда функцияның ең кіші мәні -4 ;

ә) $x = -6$ болғанда $y = 0$, ал $x = -2$ болғанда функцияның ең үлкен мәні 4 екені белгілі болса, $y = ax^2 + bx + c$ түріндегі квадраттық функцияны формуламен беріңдер.

452. а) Арбаның артқы доңғалағының шеңбері алдыңғы доңғалағының шеңберінен 2 есе үлкен. Егер артқы доңғалағының шеңберін 2 дм-ге қысқартып, ал алдыңғысын 4 дм-ге ұзартса, онда 120 м қашықтықта артқы доңғалақ алдыңғы доңғалақтан 20 айналым кем жасар еді. Бастапқы екі доңғалақтың шеңберлерінің ұзындықтарын табыңдар.

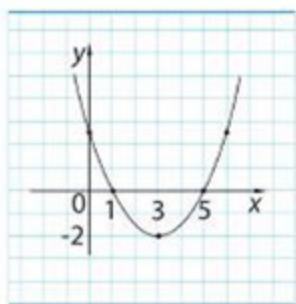
ә) Арбаның алдыңғы доңғалағының шеңбері артқы доңғалағының шеңберінен 3 есе кіші. Егер алдыңғы доңғалағының шеңберін 3 дм-ге, ал артқысын 2 дм-ге үлкейтсе, онда 140 м қашықтықта алдыңғы доңғалақ артқысынан 60 айналым артық жасар еді. Бастапқы екі доңғалақтың шеңберлерінің ұзындықтарын табыңдар.

453. $y = -\frac{1}{2}x^2 - 3x$ параболасының симметрия осі: а) (3; 5);

ә) (-3; -5); б) (-6; 10); в) (-3; 20) нүктесі арқылы өте ме?

454. а) $a = 0,5$ және (2; -1) нүктесі графигінің төбесі екені;

ә) $c = 3$ және графигі (-2; 2) және (1; 3) нүктелерінен өтетіні белгілі болса, функцияны $y = ax^2 + bx + c$ түріндегі формуламен беріңдер.



32-сурет

455. Графигі 32-суретте кескінделген квадраттық функцияны формуламен беріңдер.

456. $y = 0,5x^2 - 3x + 2,5$ функциясының графигін салып, оның:

а) анықталу облысы мен мәндер жиынын;

ә) өсу және кему аралықтарын;

б) ең кіші мәнін;

в) нөлдерін;

г) таңбатұрақтылық аралықтарын табыңдар.

457. Функцияның ең кіші және ең үлкен мәндерін табыңдар:

а) $y = \sqrt{2}x^2 - x + 1$; б) $y = \sin 60^\circ \cdot x^2 - 2x - 1$;

ә) $y = -\sqrt{3}x^2 - 2x + 3$; в) $y = -\cos 45^\circ \cdot x^2 - 3x + 4$.

458. Егер: а) $x \in [-3; 5]$ болса, $y = x^2 - 2x - 8$; ә) $x \in [-3; 0]$ болса, $y = -x^2 + 2x + 15$; б) $x \in [\frac{1}{4}; 1]$ болса, $y = 4x^2 - 4x - 3$; в) $x \in [3; 6]$ болса, $y = -x^2 + 6x - 8$ функциясының ең кіші және ең үлкен мәндерін табындар.

459. а) Кескішті жетілдірген соң жұмысшы жоспарланғаннан күніне 10 тетік артық дайындап, 300 тетікті белгіленген мерзімнен 1 күн ерте бітірді. Жұмысшы тапсырманы неше күнде орындауды жоспарлаған еді?

ә) Бір бригада 500 бұйым, екінші бригада сол мерзімде 420 бұйым жасауы керек еді. Бірінші бригада жұмысты белгіленген мерзімнен 7 күн, екінші – 4 күн ерте бітірді және бірінші бригада екіншіге қарағанда күніне 5 бұйым артық жасады. Екінші бригада бір күнде қанша бұйым жасаған?

460. Егер $y = ax^2 + bx + c$ параболасы: а) $(-1; 0)$, $(3; 0)$ және $(0; -6)$; ә) $(-2; 0)$, $(1; 0)$ және $(0; 2)$ нүктелерінен өтетін болса, оның төбесінің координаталарын тауып, графигін салындар.

461. Қазақстан барланған мырыштың қоры бойынша дүние жүзінде бірінші орын алатыны белгілі. Табылған мырыш минералы түрінің саны $y = -5x^2 + 10x + 46$ функциясының ең үлкен мәніне тең болса, сол санды табындар.



Цинкит

462. а) $x^2 + px + q$ квадрат үшмүшенің түбірлері -2 мен 7 -ге тең. Оның ең кіші мәнін табындар.

ә) $-x^2 + px + q$ квадрат үшмүшенің түбірлері 10 мен 15 -ке тең. Оның ең үлкен мәнін табындар.

463. Егер: а) $y = x^2 + 8x + c$ функциясының ең кіші мәні 1 -ге;

ә) $y = -x^2 + 6x + c$ функциясының ең үлкен мәні -1 -ге тең болса, оның графигін салындар.

464. $y = x^2 + px + q$ функциясының нөлдері: а) -1 және 19 ; ә) 2020 және -2010 сандарына тең болса, оның $x = 2019$ болғандағы мәнін табыңдар.

465. 10 мен 14 сандары $y = 4x^2 + bx + c$ функциясының нөлдері болады. Функцияның: а) $x = -12$; ә) $x = 13$ болғандағы мәндерін табыңдар.



Гренландиялық ұлттық саябақ

466. Әлемдегі табиғат қорғау аймағының жалпы ауданы $1,93 \cdot 10^7$ км²-ге тең, ал дүние жүзіндегі ең үлкен Гренландия ұлттық саябағының ауданы $- 2,43 \cdot 10^8$ акр. Осы жалпы ауданның қанша пайызын ($0,01$ %-ға дейінгі дәлдікпен) Гренландиялық саябақтың ауданы құрайды? (Акр –

Ұлыбритания, АҚШ, Канада, Аустралия және тағы басқа елдерде қолданылатын жер өлшемі; $1 \text{ акр} \approx 0,004 \text{ км}^2$).

467. k -ның қандай мәндерінде $y = x^2 + 5x + k$ функциясының мәндер жиыны мен $f(x) = \sqrt{4x + 1}$ функциясының анықталу облысы бірдей болады?

468. Егер: а) $D(y) = [-4; 0]$ болса, $y = -x^2 - x + 5$; ә) $D(y) = [0; 3]$ болса, $y = -2x^2 + 4x + 7$; б) $D(y) = (-2; 1]$ болса, $y = x(x - 1) - 1,5(x - 1)^2$ функциясының графигін салыңдар.

469. k -ның қандай мәндерінде $y = 1 - 2x - 2kx^2$ және $f = 5x^2 + 2kx - 2$ функцияларының графигтері екі нүктеде қиылысады?

С деңгейі

470. Егер: а) $y = x^2 + (k + 1)x + k$ функциясының x_1 және x_2 нөлдері $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{6}{5}$ қатынасымен; ә) $y = x^2 - kx + 3$ функциясының x_1 және x_2 нөлдері $x_1^2 + x_2^2 = 10$ қатынасымен байланысқан болса, функцияның графигін салыңдар.

471. Функцияның графигін салындар: а) $y = \frac{(x^2 + 3x + 2)(x + 3)}{x + 1}$;

ә) $y = \frac{(x - 1)(x^2 - 5x + 6)}{x - 2}$.

472. Теңдеуді графигтік тәсілмен шешіндер:

а) $\frac{2}{x} = x^2 + 4x + 1$; ә) $2\sqrt{x} = 0,5x^2 - 3x + 4,5$; б) $-\frac{4}{3}x^2 + \frac{7}{3} = \frac{1}{|x|}$.

473. а) 15 т көгөністі тасымалдау үшін жүккөтергіштігі бірдей бірнеше жүк мәшинесін пайдаланбақ болған еді. Бірақ, іс жүзінде жүккөтергіштігі 0,5 тоннаға кем мәшинелер пайдаланылғандықтан тағы 1 жүк мәшинесі қажет болды. Әр жүк мәшинесіне неше тонна көгөніс тиелген?

ә) Тракторшылар бригадасына белгілі бір мерзімге дейін 200 га жерге тұқым себу тапсырылған еді. Бірақ бригада жоспарланғаннан күніне 5 га жерге артық тұқым сеуіп, тапсырманы 2 күн бұрын бітірді. Бригада тапсырманы неше күнде орындаған?

474. $\frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right)$ өрнегінің: а) $n = 1$; ә) $n = 2$ болғандағы мәнін табындар.

475. Сандық ребусты шешіндер: $\overline{aba} = (\overline{ab})^2$.

21. Квадраттық функцияның қасиеттерін пайдаланып, мәтінді есептерді шешу



33-сурет

1 - е с е п. Қабырғалары 10 дм және 25 дм болатын тіктөртбұрыш берілген. Оның кіші қабырғасы 2 дм/с жылдамдықпен үлкейіп, ал үлкені – 1 дм/с жылдамдықпен кішірейіп барады (33-сурет). t с уақыт өткенде оның ауданы қалай өзгереді және t -ның қандай мәнінде оның ең үлкен болатынын анықтау керек.

Ш е ш у і. Тіктөртбұрыштың ауданы: $S = (10 + 2t)(25 - t)$, $S = -2t^2 + 40t + 250$, $t \in (0; 25)$.

S функциясы ең үлкен мәнді $t = \frac{-40}{-4} = 10$ болғанда қабылдайды.

Сонда $S(10) = -200 + 400 + 250 = 450$.

Ж а у а б ы. Тіктөртбұрыштың ауданы $S(t) = -2t^2 + 40t + 250$ формуласы бойынша өзгереді, мұндағы $t \in (0; 25)$, ол ең үлкен мәнді, $t = 10$ с болғанда қабылдайды, $S(10) = 450$ дм².



34-сурет

2 - е с е п. Дене 40 м/с бастапқы жылдамдықпен тігінен жоғары қарай лақтырылды (34-сурет). g жерге тартылу үдеуін $9,8$ м/с² деп алып және ауаның кедергісін есептемей, осы дененің қандай ең үлкен биіктікке көтерілетінін анықтау керек.

Ш е ш у і. Тігінен жоғары қарай лақтырылған дененің t с өткенде жететін h м биіктігі физика курсынан белгілі $h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$ формуласымен табылады, v_0 – бастапқы жылдамдық.

$h(t) = 40t - 4,9t^2$ функциясы ең үлкен мәнді $t = -\frac{40}{-9,8} \approx 4,1$ болғанда қабылдайды, $h(4,1) \approx 164 - 82 = 82$.

Ж а у а б ы. ≈ 82 м.

3 - е с е п*. Көпбұрыш диагональдарының саны қабырғаларының санынан m -ге артық. Диагональдарының саны u -тің оның қабырға-

ларының саны x -ке тәуелділігін өрнектейтін формула құрып, m -нің мүмкін болатын мәндер жиынын табу керек.

Шешуі. Көпбұрыш диагональдарының саны: $y = \frac{x(x-3)}{2}$.

Есептің шарты бойынша $\frac{x(x-3)}{2} - x = m$. Бұдан $x^2 - 3x - 2x = 2m$,

$x^2 - 5x - 2m = 0$. Сонда $x = \frac{5 + \sqrt{25 + 8m}}{2}$. Егер $25 + 8m$ тақ санның квадратына тең болса, көпбұрыштың қабырғалары x натурал сан болады. $25 + 8m = (2k + 1)^2$ болсын. Сонда $8m = (2k + 1)^2 - 5^2$,

$8m = (2k - 4)(2k + 6)$, $m = \frac{(k-2)(k+3)}{2}$. Кез келген $k \geq 3$ натурал саны үшін m -нің мәні натурал сан болады.

Жауабы. $y = \frac{x(x-3)}{2}$; $m = \frac{(k-2)(k+3)}{2}$, мұндағы $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$.

ЖАТТЫГУЛАР

А деңгейі

476. а) 2018 санын көбейтіндісі ең үлкен болатын екі санның қосындысы түрінде жазыңдар.

ә) Берілген оң санды көбейтіндісі ең үлкен болатын екі санның қосындысы түрінде көрсетіндер.

477. а) Тіктөртбұрыштың периметрі 16 см-ге тең. Ауданы ең үлкен болуы үшін оның өлшемдері қандай болуы керек?

ә) Периметрі 1,2 м болатын тіктөртбұрыштың ауданы ең үлкен болуы үшін оның қабырғалары қандай болуы керек?

478. Бір жағынан қоршалған ауданы 0,1 га тіктөртбұрышты жер телімінің қалған үш қабырғасын қоршауға: а) 120 м; ә) 80 м сым жеткілікті бола ма?

В деңгейі

479. Бір жағынан қоршалған тіктөртбұрышты жер телімін ұзындығы 100 м шарбақпен қоршау керек. Қоршалған жер телімінің ең үлкен ауданы қандай болуы мүмкін?

480. Тіктөртбұрыштың үлкен қабырғасы b -ға тең. Тіктөртбұрыштың бір төбесінен радиусы оның кіші қабырғасына тең шеңбер жүргізілген, ол тіктөртбұрыштан дөңгелектің бөлігін бөледі. Тіктөртбұрыштың қалған бөлігі ең үлкен болуы үшін оның кіші қабырғасының b -ға қатынасы қандай болуы керек? Жауабын 0,01-ге дейінгі дәлдікпен беріңдер.

481. Қабырғасы 4 см-ге тең шаршыға іштей төбелері осы шаршының қабырғаларында жататын басқа шаршы салынған. Іштей сызылған шаршының ауданы ең кіші болуы үшін берілген шаршының төбесінен іштей сызылған шаршының оған жақын төбесіне дейінгі қашықтық қандай болуы керек?

482. $y = 8 - \frac{1}{2}x^2$ параболасы мен Ox осімен шектелген фигураға екі төбесі параболада, ал екеуі – Ox осінде жататын тіктөртбұрыш салынған. Сондай тіктөртбұрыштар периметрлерінің ең үлкенін табыңдар.

483. Дене 25 м биіктіктен 40 м/с бастапқы жылдамдықпен жоғары қарай тік лақтырылды. g жерге тартылу үдеуін $9,8 \text{ м/с}^2$ -қа тең деп алып, ауаның кедергісін ескермей, 0,1 с дейінгі дәлдікпен, ол неше секундтан кейін: а) 75 м биіктікте; ә) ең үлкен биіктікте болатынын табыңдар.

484. Дене 30 м/с жылдамдықпен жоғары қарай тік лақтырылды. Ол: а) 45 м; ә) 51 м биіктікке жете ала ма?

485. $A(0; 8)$ және $B(6; 0)$ нүктелерінен осьтер бойымен $O(0; 0)$ нүктесіне екі дене қозғалып келеді. Екеуі де минутына 5 бірлікке тең бірдей жылдамдықпен бірқалыпты қозғалса, неше минуттан кейін денелердің арақашықтығы ең аз болатынын анықтаңдар.

486. Үшбұрыштың қабырғасы мен оған түсірілген биіктігінің ұзындықтарының қосындысы 15 см-ге тең. Осындай үшбұрыштың мүмкін болатын ең үлкен ауданын табыңдар. Осы үшбұрыштың ауданы: а) 20 см^2 ; ә) 30 см^2 -ге тең бола ала ма?

С деңгейі

487. Табанының периметрі 20 дм, биіктігі 4 дм болатын тікбұрышты параллелепипед жасау керек. Көлемі ең үлкен болуы үшін оның табан қабырғалары қандай болуы керек?

488. Диагональдарының саны қабырғаларының санынан: а) 25-ке; ә) 20-ға артық болатын көпбұрыш бола ма?

489. p -ның қандай мәнінде $x^2 + (p - 2)x + p - 3 = 0$ теңдеуінің түбірлері квадраттарының қосындысы ең кіші мәнді қабылдайды?

490. Екі оң санның қосындысы 13-ке тең. Олардың кубтарының қосындысы ең аз болатын сол екі санды табындар.

491. Өрнекті көбейткіштерге жіктеңдер:

а) $9^{2m} - 3^{2m} - 2$; ә) $4 \cdot 25^{2n} + 11 \cdot 5^{2n} - 3$.

492. Өрнектің мәнін табындар: $\left(1 + \frac{2020^{-1} + 505^{-1}}{2020^{-1} - 505^{-1}}\right)^{-2}$.

22. «Квадраттық функция» тақырыбын қайталауға арналған жаттығулар

А деңгейі

493. k -ның қандай мәнінде $y = kx$ түзуі мен $y = x^2 + 4x + 1$ параболасының тек бір ғана ортақ нүктесі бар болады?

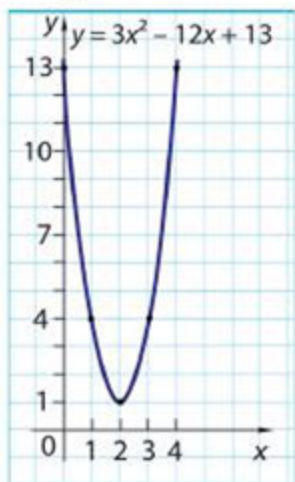
494. Функциялардың сәйкес мәндері тең болатындай аргументтің мәні бар ма: а) $y = 0,45x^2 + 0,18x$ және $y = 1,5x + 0,09$; ә) $y = 0,8x^2 + 0,62$ және $y = 0,2x + 0,72$?

В деңгейі

495. $y = a(x - m)^2 + n$ параболасы: а) (2; 5) нүктесі арқылы өтсе және (-1; -4) нүктесі оның төбесі болса; ә) (-4; 5) нүктесі арқылы өтсе және (-2; 9) нүктесі оның төбесі болса, a , m және n -нің мәндерін табыңдар.

496. Функцияның графигін салыңдар:

а) $y = x^2 - 1$; б) $y = x^2 - 5^0x - 6$;
ә) $y = -x^2 + 5x - 4^{-1}$; в) $y = -x^2 + 4x^0$.



35-сурет

497. Толқын $y = 3x^2 - 12x + 13$ функциясының графигін былай салды: параболаның төбесі болатын (2; 1) нүктесін, содан кейін (0; 13) және (4; 13), тағы (1; 4), (3; 4) нүктелерін белгіледі. Осы бес нүкте арқылы $y = 3x^2 - 12x + 13$ функциясының графигі болатын жатық сызық жүргізді (35-сурет). Оның бес нүкте арқылы парабола салу тәсілін түсіндіріңдер.

498. Функцияның графигін салып, сол арқылы оның қасиеттерін анықтаңдар:

а) $y = x^2 + 10x + 25$; б) $y = x^2 + 10x + 16$;
ә) $y = -2x^2 + 4x - 2$; в) $y = -2x^2 + 4x + 6$.

499. Анасы үйдің іргесіне жалғастырып тіктөртбұрыш тәрізді аула жасамақшы және оның үш қабырғасын берілген ұзындықтағы шарбақпен қоршамақшы. Ауланың ауданы ең үлкен болуы

үшін тіктөртбұрыштың үйдің іргесіне қарсы жатқан қабырғасы басқа қабырғасынан неше есе үлкен болуы керек?

500. Графигі төбесі (1; 2) нүктесі болатын және (-1; 6) нүктесінен өтетін параболаны квадраттық функцияның формуласымен беріңдер.

501. а) Нөлдерінің бірі -3-ке тең болатын $y = x^2 + 2x + q$;

ә) Нөлдерінің бірі -4-ке тең болатын $y = -x^2 + px - 8$ квадраттық функциясының графигін салыңдар.

502. а) $y = x^2 + px + q$ квадрат үшмүше $x = 1$ болғанда -4-ке тең ең кіші мәнді қабылдайды. $y(0)$ -ді табыңдар.

ә) $y = -x^2 + bx + c$ квадрат үшмүше $x = 1$ болғанда -4-ке тең ең үлкен мәнді қабылдайды. $y(-1)$ -ді табыңдар.

б) Егер $y = ax^2 + bx + c$ квадрат үшмүше $x = 1$ болғанда 3-ке тең ең үлкен мәнді қабылдайтын болса және $y(0) = 0$ болса, a , b , c коэффициенттерін табыңдар.

С деңгейі

503. Координаталық осьтердің бойымен қандай жылжытулар арқылы: а) $y = x^2$ функциясының графигінен $y = x^2 + 6x + 11$ функциясының графигін;

ә) $y = x^2 - 6x - 8$ функциясының графигінен $y = x^2 + 4x + 5$ функциясының графигін алуға болады?

504. Бір координаталар жүйесіне $f(x) = -\frac{4}{3}(x + 1)^2 + 2$, $g(x) = 1,5(x - 2)^2 + 1$ функциялары мен $y = n$ түзуінің графиктері салынған. Осы графиктердің n -ге байланысты қиылысу нүктелерінің санын табыңдар.

505. Дене 49 м/с бастапқы жылдамдықпен жоғары қарай тік лақтырылған. Неше секундтан кейін ол 102,9 м биіктікте болады?

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

506. 1А) 1) $y = a^2x + x - 1$; 2) $y = (x - 4)(x - 5)$; 3) $y = (x - 1)^{-2}$;

4) $y = -\frac{x^2}{15}$ функциялардың қайсысының графигі парабола болады?

2B) $y = -2x^2 - 14x + 7$ функциясы графигінің симметрия осі болатын түзудің теңдеуін жазыңдар.

3B) $y = 2x^2 - x - 1$ функциясының өсу және кему аралықтарын табыңдар.

4B) Ең кіші мәні -1 -ге тең болатын $y = x^2 - 6x + c$ функциясының графигін салып, функцияның таңбатұрақтылық аралықтарын табыңдар.

5C) Катеттерінің қосындысы 10 м-ге тең болатын тікбұрышты үшбұрыш тәрізді гүлзарды ауданы ең үлкен болатындай етіп қайта жасамақшы. Сонда осы үшбұрыш катеттерінің ұзындықтары қандай болуы керек?

БҰЛ ҚЫЗЫҚТЫ!



Н. И. Лобачевский



П. Дирихле

Бір айнаымалыны екіншімен байланыстыратын формула ретіндегі функция ұғымы XVIII ғасырда, ал жалпы функция ұғымы XIX ғасырда қалыптасқан болатын. Көрнекті орыс математигі Н. И. Лобачевский (1792–1856) өзінің 1834 жылғы еңбектерінің бірінде «функция – ол аналитикалық өрнекпен (формуламен), не қандай да бір шартпен, бар болуы да, белгісіз болып қалуы да мүмкін бір айнаымалының екіншіге тәуелділігі» деген болатын.

Белгілі неміс математигі П. Дирихле (1805–1859) 1837 жылы функцияның жалпы анықтамасын былай тұжырымдаған: « x -тің әрбір мәніне y -тің белгілі бір мәні сәйкес келсе, y x айнаымалысының функциясы болады, бұл сәйкестік аналитикалық формула, график, кесте, тіпті жай сөз түрінде болуы мүмкін».

Ғаламтор көздерін пайдалана отырып: а) Н. И. Лобачевскийдің өмірбаяны және оның математика саласындағы ұлы жетістіктері; ә) П. Дирихленің өмірбаяны мен «Дирихле функциясы» туралы деректер тауып; б) «Дирихле функциясының» графигін салуға бола ма, соны анықтаңдар.

IV. СТАТИСТИКА ЭЛЕМЕНТТЕРІ



Бөлімді оқу нәтижесінде

- жиіліктердің аралық кестесін, жинақталған жиілік ұғымдарын;
- жиіліктердің гистограммалары мен алқаптарын құру тәсілдерін;
- дисперсия мен стандартты ауытқудың анықтамаларын;
- дисперсия мен стандартты ауытқуды табу формулаларын білу керек.
- гистограмманың және жиіліктер алқаптарының кестелерін салуды;
- дисперсия мен стандартты ауытқуды табуы;
- дисперсия мен стандартты ауытқуды табу формулаларын қолдануға берілген мәтіндік есептерді шығаруды орындай алу керек.

23. Жиіліктердің кестелері, алқаптары және гистограммалары

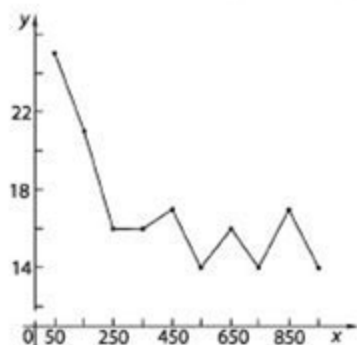
6–7-сыныптағы математика курсында статистиканың бірқатар элементтері (арифметикалық орта, мода, медиана, варианта, вариациялық қатар, құлаш, вариантаның абсолют не салыстырмалы жиілігі, жиілік алқаптары) туралы сөз болды. Онда көбінесе нақты мәліметтер негізге алынып, аралық мәндері ескерілмеді. Ондай мәліметтер *дискретті* (латынның «discretus» – «үзілісті» деген сөзінен) деп аталады. Дискретті мәліметтер көбінесе натурал не рационал сандармен белгіленеді. Қандай да бір үздіксіз үдерісті сипаттайтын статистикалық мәлімет нақты санмен берілуі мүмкін. Ондай мәліметтер *үзіліссіз* деп аталады.

Көп саннан құралған деректі сипаттайтын вариациялық қатардың мәліметі де тым күрделі болады. Сол себепті деректі топтастырған жөн. Оны өзара тең бірнеше аралыққа бөліп алу керек. Осылайша топтастырылған деректер *аралық кесте* немесе *аралық статистикалық қатар* деп аталады. Ондай кестелерге ортақ сипат – барлық аралықтың ортасы, олардың орташа арифметикалық мәні болады. x_1, x_2, \dots, x_n іріктелген мәліметтердің арифметикалық ортасы \bar{x} -пен (x сызықшасымен деп оқылады) таңбаланады да қарастырылатын мәндер жиынтығы грек әліпбиіндегі Σ (сигма) белгісімен таңбаланады. Сонда $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$ деуге болады, мұндағы i 1-ден n -ға дейінгі барлық натурал санды қамтиды. x_1, x_2, \dots, x_n іріктелген деректердің аралық қатары ретінде аралықтардың ортасы алынады. Ондай деректерді сипаттау үшін әрбір аралық үшін соған қатысты варианттар жиілігінің жиынтығын тауып, жиілік кестесін анықтау керек.

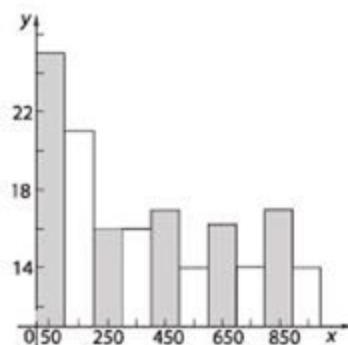
Бастапқы мың натурал сандағы қарапайым сандардың таралымындағы жиіліктің аралық кестесін құрастыру үшін алдымен 10 аралыққа бөліп, әрбір аралықтағы қарапайым сандардың жиілігін анықтап аламыз:

1– 100	101– 200	201– 300	301– 400	401– 500	501– 600	601– 700	701– 800	801– 900	901– 1000
25	21	16	16	17	14	16	14	17	14

Жиілік алқабын салу үшін абсцисса осіндегі аралықтардың орташа мәндерін белгілеп алу керек. Қарастырылып отырған деректердің жиілік алқабы 36-суретте көрсетілген.



36-сурет



37-сурет

Статистикалық мәліметтердің графикалық көрінісі бағаналы диаграмма түрінде де беріледі, ол *гистограмма* (грек тілінен сөзбе-сөз аударғанда *iotos* – бағана және *γραφια* – жазу, әріп) деп те аталады. Жиілік гистограммасын салу үшін абсцисса осіндегі аралықтарды бірізділікпен белгілеп алып, тікбұрыштардың көмегімен ордината осінде оған сәйкес келетін жиіліктерді анықтап алу керек. Қарастырылып отырған деректердің жиілік гистограммасы 37-суретте берілген.

Вариациялық қатарда әр вариантының абсолют жиілігі белгіленеді. Ол мәнге келесі мәндерді қосу арқылы жиынтық мән анықталады. Осылайша қосу нәтижесінде дерек көлеміне тең сан шығады. Жиынтық мән берілген мәнге дейінгі мәліметтер жиынтығындағы абсолют жиіліктердің өзгерісін көрсетеді, мұндағы бірінші деректің жиынтық мәні абсолют мәніне тең болады. Төмендегі кестеде 50 бұлдіршіннің бойларын өлшеу нәтижелері көрсетіліп, абсолют және жиынтық жиіліктері берілген.

Бойы	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
Жиілік	2	1	3	4	10	12	9	5	2	2
Жиынтық жиілік	2	3	6	10	20	32	41	46	48	50

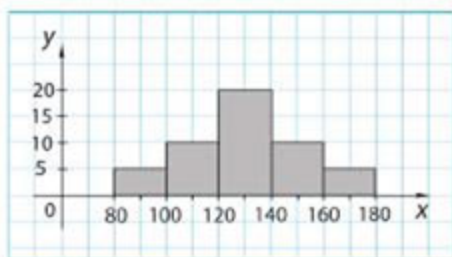
Мысал. Кестеде көрсетілгендей, жұмысшыларды бірқатар кәсіпорындардағы табыстарына қарай жіктеудің аралық вариациялық қатарының деректері бойынша: а) орташа мәнін анықтау; ә) гистограмма құру; б) жиынтық мәндерінің графигін салу керек.

Табыстары, мың теңге (x)	100-ден төмен	100–120	120–140	140–160	160-тан жоғары
Абсолют жиілік (y)	5	10	20	10	5
Жиынтық жиілік (f)	5	15	35	45	50

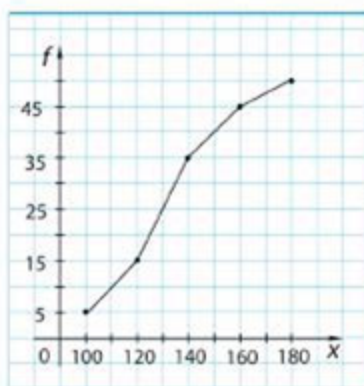
Шешуі. а) Орташа мәнін табу үшін барлық аралықтың ортасын анықтап алу керек. Мұнда аралықтың ұзындығы есепке алынып, алғашқы және соңғы аралықтың белгісіз шегі 80–180 мөлшерінде болды. Аралықтардың ортасы: $x_1 = 90$, $x_2 = 110$, $x_3 = 130$, $x_4 = 150$, $x_5 = 170$. Мұндағы

$$\bar{x} = \frac{90 \cdot 5 + 110 \cdot 10 + 130 \cdot 20 + 150 \cdot 10 + 170 \cdot 5}{50} = 130.$$

ә) Жұмысшыларды табысы бойынша жіктеу гистограммасы 38-суретте берілген.



38-сурет



39-сурет

б) Жиынтық жиіліктерді графикке түсіру үшін абсциссалары аралықтың жоғары шегіне, ординаталары жиынтық жиіліктерге тең

болатын нүктелерді белгілеп алып, кесінділермен қосамыз (39-сурет).

СҰРАҚТАР

1. Аралық кесте дегеніміз не? Мысал келтіріңдер.
2. Жиынтық жиілік деген не? Ол нені білдіреді?
3. Жиілік гистограммасы қалай салынады? Аралық кестеде берілген үзіліссіз мәліметтер мен дискретті деректерге мысал келтіріңдер.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

507. 20 жұмысшының уақытша жалақысының мөлшерін (мың теңгемен) негізге ала отырып, 30 мың теңге көлеміндегі тең аралықпен жиілік кестесін салыңдар: 60; 25; 12; 10; 68; 35; 17; 2; 51; 3; 9; 130; 24; 85; 152; 100; 6; 7; 18; 42.

508. 8-сынып оқушыларының белтемірге тартылу нәтижелері бойынша көрсеткіштері: 9; 5; 7; 10; 11; 10; 4; 7; 10; 11; 8; 10; 8; 9; 12; 13; 8; 11; 9; 9; 10; 6; 9; 13; 9; 17; 11; 15; 8. Осы деректерді негізге ала отырып, оқушылардың тартылу саны бойынша аралығы 2-ге тең болатын вариациялық қатар құраңдар.

509. ҚХО (құрлықтық хоккей одағы) хоккей турында 10 ойын өтті. Нәтижесі: 3 : 1; 0 : 2; 5 : 0; 0 : 1; 3 : 2; 0 : 3; 1 : 0; 2 : 1; 4 : 1; 4 : 2. Осы турдағы ойындардың орташа нәтижелігін табыңдар.

510. Бір мектеп сыныптарындағы оқушы саны туралы мәлімет бар: 16, 18, 18, 20, 21, 20, 22, 23, 22, 20, 23, 24, 24, 25, 24, 23, 25, 25, 21, 20, 22, 23. Оқушыларды сыныптар бойынша бөлу жиіліктерінің кестесін құрып, ондағы оқушылардың орташа санын табыңдар.

В деңгейі

511. Кәсіпорындар өнімдерін өткізуден тапқан табысының аралық қатары орналасуының арифметикалық ортасының мәнін кестедегі мәліметтерден табыңдар:

Кәсіпорын табысы (млн теңге)	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60
Кәсіпорын саны	2	8	14	9	3

512. Кестеде қаланың 100 000 тұрғынын жас шамасы бойынша орналастырғаны туралы мәлімет келтірілген. Қала тұрғындарының орташа жасын табыңдар.

Жас шамасы (жас)	10-ға дейін	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	70 және одан жоғары
Саны (мың адам)	12,1	15,7	13,6	16,1	15,3	10,1	9,8	7,3

513. Депутаттыққа үміткер бір аймақтың бес учаскесі бойынша өзіне дауыс берген сайлаушылар туралы (барлығы 100 мың сайлаушы) ақпаратты алды. Үміткер аймақ бойынша неше пайыз дауыс жинаған? Депутаттыққа сайлану үшін сайлаушылардың 50 %-дан астам дауысын жинау қажет болса, ол депутат болып сайлана ала ма?

Дауыс беру учаскесі	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5
Дауыс бергендер саны (мың адам)	14	12	10	20	11

514. Кестеде банктер жинақтаған ақша мөлшеріне қарай орналастырылған. Жинақталған ақшаның орташа мөлшері қандай?

Жинақталған ақша млн долл.	[60–80)	[80–100)	[100–120)	[120–140)	[140–160)	[160–180)	[180–200)
Банктер саны	1	3	10	14	9	4	2

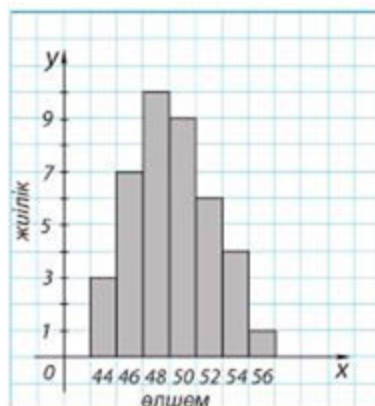
515. Фирмадағы 30 жұмысшының уақытша жалақы мөлшері көрсетілген кестедегі мәлімет бойынша гистограмма салыңдар.

Жалақы мөлшері (мың теңге)	50-ге дейін	50–100	100–150	150–200
Жұмысшылар саны (адам)	4	12	8	6

516. Денешынықтыру сабағында сегізінші сынып оқушылары биіктікке секіруден (см есебімен) төмендегідей нәтижелер көрсетті: 100, 120, 105, 105, 130, 115, 105, 110, 115, 95, 115, 100, 125, 105, 130, 110, 130, 120, 125, 130. Осы тізбекті аралығы 10 см болатын аралық вариациялық қатар түрінде көрсетіп, жиілігінің гистограммасын салыңдар.

С деңгейі

517. Шалбарлардың өлшемі бойынша сауалнама жүргізіліп, гистограмма құрылған (40-сурет): а) таңдаманың жинақталған жиілік кестесін құрыңдар; ә) сауалнамаға қатысушылардың жалпы санын табыңдар; б) таңдаманың модасын, медианасы мен арифметикалық ортасын табыңдар.



40-сурет

518. Ателье әртүрлі өлшемдегі тақиялар тігуге тапсырыс алды: 54-өлшемнен – 10, 55-өлшемнен – 24, 56-өлшемнен – 34, 57-өлшемнен – 20, 58-өлшемнен – 18 дана. Осы тапсырыстың абсолютті және жинақталған жиіліктерінің кестесін құрып, графигін салыңдар.

24. Дисперсия және стандартты ауытқу

Статистикада таңдалған мәліметтердің сипаттамаларын зерттегенде олардың айырмашылығы түрлі әдістермен анықталады. Мысалы, олардың арифметикалық ортадан ауытқуы, яғни шама мен арифметикалық ортаның айырымы есепке алынады. Мәліметтерді айналасына тарату *дисперсия* деп аталады (аудармасы шашырату дегенді білдіреді).

Егер \bar{x} -ті x_i -дің әрбір мәнінен азайтып, содан кейін сол барлық айырымдарды қосса, онда 0 шығады. Шынымен де, $(x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + \dots + (x_n - \bar{x}) = \sum x_i - n \cdot \frac{\sum x_i}{n} = 0$.

Бұл айырымдар оң, теріс не 0-ге тең мәндерді қабылдайды. Сондықтан арифметикалық ортасының айналасындағы көп мәліметті анықтау үшін айырымдардың өзін емес, квадраттарын пайдаланады. Барлық айырым квадраттарының арифметикалық ортасы *дисперсия* деп аталады да, σ^2 түрінде белгіленеді, яғни $\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$ (σ – сигма, грек әліпбиінің кіші әрпі).

Осы сипаттама мен x_i – берілгендерінің өлшемдері бірдей болуы үшін одан квадрат түбір алынады. Дисперсиядан алынған квадрат түбір **стандартты ауытқу** деп аталады, яғни $\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}}$.

Дисперсия мен стандартты ауытқуды есептеп көрейік.

1 - м ы с а л. Кестеде балабақшаның кіші топ балаларының бойларын (см-мен) өлшегенде алынған мәлімет келтірілген:

Бойы (x_i)	92	94	95	96	97	98
Бала саны (n_i)	1	2	2	3	3	4

Оның: а) дисперсиясын; ә) стандартты ауытқуын табу керек.

Ш е ш у і. а) $\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$ формуласын пайдаланамыз. Алдымен \bar{x} -ті табамыз:

$$\bar{x} = \frac{92 + 94 \cdot 2 + 95 \cdot 2 + 96 \cdot 3 + 97 \cdot 3 + 98 \cdot 4}{15} \approx 96.$$

Сонда

$$\sigma^2 \approx \frac{(92-96)^2 + 2(94-96)^2 + 2(95-96)^2 + 3(96-96)^2}{15} + \\ + \frac{3(97-96)^2 + 4(98-96)^2}{15} = \frac{16+8+2+0+3+16}{15} = 3.$$

ә) Стандартты ауытқуын табайық $\sigma \approx \sqrt{3} \approx 1,7$ (см).

Ж а у а б ы. а) ≈ 3 ; ә) $\approx 1,7$ см.

Бұл формуланы дисперсия мен стандартты ауытқуды есептеуде үнемі қолдана беруге болмайды. Егер x_i -дің бүтін санды мәні аз емес, олардың арифметикалық ортасы бөлшек сан болса, мына формуланы пайдалануға болады:

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \frac{(\sum x_i)^2}{n^2}.$$

$\frac{\sum x_i^2}{n} - \frac{(\sum x_i)^2}{n^2} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$ болатынын дәлелдейік.

Д ә л е л д е у і. $\frac{\sum x_i^2}{n} - \frac{(\sum x_i)^2}{n^2} = \frac{1}{n} \left((x_1^2 + \dots + x_n^2) - \frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{n} \right).$

$$\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{1}{n} \left(\left(x_1 - \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right)^2 + \dots + \left(x_n - \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right)^2 \right) = \\ = \frac{1}{n} \left((x_1^2 + \dots + x_n^2) - 2(x_1 + \dots + x_n) \cdot \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} + n \cdot \left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right)^2 \right) = \\ = \frac{1}{n} \left((x_1^2 + \dots + x_n^2) - \frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{n} \right).$$

Демек, $\frac{\sum x_i^2}{n} - \frac{(\sum x_i)^2}{n^2} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}.$

2 - м ы с а л. Бір тәулікте 12 рет өлшенген температура ($^{\circ}\text{C}$ -пен) туралы келесі мәлімет алынды: $-3; -2; 0; 1; 3; 4; 5; 3; 2; 1; 0; -1$. Осы өлшеудің: а) дисперсиясын; ә) стандартты ауытқуын табу керек.

Ш е ш у і.

$$\text{а) } \sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \frac{(\sum x_i)^2}{n^2} = \\ = \frac{(-3)^2 + (-2)^2 + 0^2 + 1^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 + 0^2 + (-1)^2}{12} - \frac{13^2}{12^2} = \\ = \frac{79}{12} - \frac{169}{144} = \frac{948 - 169}{144} = \frac{779}{144} \approx 5,41.$$

$$a) \sigma \approx \sqrt{5,41} \approx 2,3^\circ.$$

Ж а у а б ы. а) $\approx 5,41$; ә) $\approx 2,3^\circ$.

СҰРАҚТАР

1. Дисперсия дегеніміз не?
2. Стандартты ауытқудың анықтамасын беріңдер.
3. Дисперсия мен стандартты ауытқу қандай формула арқылы анықталады?

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

519. Мектеп бітірушілерінің тарих пәнінен алған қорытынды бағалары 5; 4; 3; 4; 4; 4; 5; 3; 4; 5; 5; 3; 3; 3; 4; 5; 4; 5; 5; 5; 4; 4; 5; 5 болды. Тарих пәнінен алынған қорытынды бағаларды тарату кестесін құрыңдар. Осы бағаларды таратудың дисперсиясы мен стандартты ауытқуын есептеңдер.

В деңгейі

520. Астанада 15 күн бойы атмосфералық қысымды (сынап бағ. мм есебімен) байқаудың нәтижесі келесі тізбекте келтірілген: 720, 722, 723, 724, 723, 720, 721, 724, 725, 727, 730, 727, 725, 725, 723. Оның: а) дисперсиясын; ә) стандартты ауытқуын табыңдар.

521. Бір пәтердегі тұрғындардың бір апта бойы күнделікті жұмсайтын суық су мөлшері (m^3 есебімен) 1,0; 1,2; 1,0; 1,1; 0,9; 1,0; 0,8 құрады. а) Судың орташа шығынын; ә) стандартты ауытқуын табыңдар.

522. Қызметкерлерді еңбек өтіліне қарай тарату кестесіндегі дерек бойынша бірлікке дейінгі дәлдікпен: а) қызметкерлердің орташа еңбек өтілін; ә) стандартты ауытқуын есептеңдер.

Өтілі (жыл)	1	2	3	8	9	10	15	20	38	40
Қызметкер саны	2	1	2	10	8	12	4	2	1	1

523. Мәнерлеп сырғанаушы ерікті бағдарламасы үшін 5,8; 5,8; 5,7; 5,8; 5,9; 6,0; 5,9 деген бағаларға ие болды. Мәліметтің стандартты ауытқуын табыңдар.

524. Жазбаша жұмыс 25 жолмен баяндалған. Оқушы алғашқы 20 жолда үтірлерді дұрыс қойыпты, ал 21-жолда – бір, 22-де – екі, 23-де – бір, 24-де – үш, 25-де бір үтір қойылмай қалыпты. Қойылмаған үтірлерді таратудың стандартты ауытқуын бірлікке дейінгі дәлдікпен табыңдар.

525. Кестеде жарнаманың орташа айлық салым мөлшеріне әсері екі банк мәліметтерінің негізінде берілген. Банктердегі салымдардың стандартты ауытқуын салыстырыңдар.

Айлық салымның мөлшері (доллармен)	Салымшы саны	
	жарнамалы банкте	жарнамасыз банкте
480–500	2	3
500–520	0	4
520–540	3	17
540–560	11	10
560–580	13	6
580–600	18	5

526. Сынақ тақтасында мылтық нысанасы айқындалып түзетілді. Мылтықтан 10 рет атқанда, нысанадан ауытқуы (см-мен) +1; 0; –1,5; +1,5; –0,5; –1,5; +2; +1; –1; +2 түрінде болды. Осы мылтыққа жүргізілген сынақ нәтижелерінің стандартты ауытқуын табыңдар.

527. Сегізінші сыныптағы Ажар өзінің сыныптасы Маратқа Қазақстанның Тянь-Шань тауының жоталары Жабағылы (2898 м), Сайрам (4220 м), Көксу (3468 м), Өгем (3560 м), Қаржантау (2839 м), Боралдай (1860 м), Қазығұрт (1700 м) биіктіктері туралы деректер таңдамасының стандартты ауытқуын табууды ұсынды.

Марат тапсырманы орындау үшін $\sigma = \frac{\sqrt{\sum(x_i - \bar{x})^2}}{n}$ формуласын пайдаланбақ болды. Онысы дұрыс па? Жауаптарыңды негіздеңдер. Есептің шешімін табыңдар.



Сайрам

С деңгейі

528. а) Сегізінші сынып оқушысының белтемірге бес мәрте тартылғандағы төртеуінің нәтижесі белгілі болды: 10; 9; 7; 8. Оқушының белтемірге 5 мәрте тартылғандағы нәтижелерінің арифметикалық ортасы 8-ге тең. Оқушының белтемірге бесінші тартылғандағы нәтижесін табыңдар.

ә) Төрт банктің үшеуінің жинақ қоры (млрд теңгемен) 60; 80; 140 екені белгілі болды. Төртінші банктің қаржысы бүтін санмен өрнектеліп, төрт банктің жинақ қорларының дисперсиясы 1000-ға тең болса, төртінші банктің жинақ қоры қанша болғаны?

25. «Статистика элементтері» тақырыбын қайталауға арналған жаттығулар

Мысал. 8-сынып ұлдарының қайрат-күшін тексеру үшін белтемірге қаншалық тартыла алатыны тексерілді. Байқау қорытындысы 9, 9, 10, 11, 8, 7, 10, 7, 9, 11, 7, 8, 9, 8, 9 түрінде болды. Осы қатардың: а) модасын; ә) медианасын; б) арифметикалық ортасының мәнін; в) құлашын; г) дисперсиясын; ғ) стандартты ауытқуын (бірлікке дейінгі дәлдікпен) табу керек.

Шешуі. а) Басқалармен салыстырғанда, $x = 9$ мәні жиі кездеседі (5 рет), демек, модасы 9-ға тең.

ә) Медианасын табу үшін таңдаманы 7, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 11, 11 түрінде жазамыз. Оның көлемі $n = 15$ – тақ сан, сондықтан медианасы таңдаманың 8-ші саны болады, яғни медианасы 9-ға тең.

б) Таңдаманың арифметикалық ортасының мәнін табайық:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{7 \cdot 3 + 8 \cdot 3 + 9 \cdot 5 + 10 \cdot 2 + 11 \cdot 2}{15} = \frac{132}{15} = 8,8.$$

в) Берілген таңдаманың вариациялық қатарының ең кіші мәні 7-ге, ең үлкені 11-ге тең. Демек, құлашы: $11 - 7 = 4$.

г) Дисперсияны есептеу үшін кесте құрамыз.

I	1–3	4–6	7–11	12–13	14–15
x_j	7	8	9	10	11
$x_j - \bar{x}$	-1,8	-0,8	0,2	1,2	2,2
$(x_j - \bar{x})^2$	3,24	0,64	0,04	1,44	4,84
$\Sigma(x_j - \bar{x})^2$	$3,24 \cdot 3 + 0,64 \cdot 3 + 0,04 \cdot 5 + 1,44 \cdot 2 + 4,84 \cdot 2 = 24,4$				

$\sigma^2 = \frac{\Sigma(x_j - \bar{x})^2}{n}$ формуласын пайдаланып, дисперсияны табамыз:

$$\sigma^2 = \frac{24,4}{15} \approx 1,63.$$

ғ) Стандартты ауытқуды есептейік: $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x_j - \bar{x})^2}{n}} \approx \sqrt{1,63} \approx 1,3$.

Жауабы. а) 9; ә) 9; б) 8,8; в) 4; г) $\approx 1,63$; ғ) $\approx 1,3$.

ЖАТТЫҒУЛАР*А деңгейі*

529. Отбасы саны бала санына қарай таратылған кестедегі мәлімет бойынша: а) жинақталған жиіліктерді; ә) отбасындағы балалардың орташа санын табыңдар.

Бала саны	0	1	2	3	4	5	6
Отбасы саны	4	29	22	20	15	6	4

530. Зертханада 30 бидай дәнінің ұзындығын (мм-мен) өлшеп, келесі вариациялық қатарды алды: 5,21; 5,23; 5,24; 5,26; 5,28; 5,32; 5,34; 5,35; 5,37; 5,39; 5,40; 5,41; 5,42; 5,44; 5,47; 5,49; 5,50; 5,51; 5,53; 5,54; 5,55; 5,57; 5,59; 5,60; 5,61; 5,62; 5,64; 5,66; 5,68; 5,70. Бұл қатарды аралығы 0,1-ге тең аралық қатарға түрлендіріп, гистограммасын салыңдар.

531. Кестеде кәсіпорын қызметкерлерінің жалақысы туралы мәлімет келтірілген. Берілген аралық кесте бойынша гистограмма салыңдар.

Жалақы (доллармен)	200–300	300–400	400–500	500–600	600–700	700–800	800–900
Қызметкер саны	5	14	30	12	7	4	2

532. Кестеде фермерлік шаруашылықтардағы дақылдың өнімділігі туралы мәлімет келтірілген. Дақылдың орташа өнімділігі қандай?

Өнімділігі (ц/га)	2–6	6–10	10–14	14–18	18–22
Шаруашылық саны	2	8	17	12	6

В деңгейі

533. Қант дымқыл жерде сақталғандықтан, 1 кг-дық 10 пакетті өлшегенде әрқайсысы 1,005; 1,01; 1,005; 1,001; 1,015; 1,02; 1,015; 1,03; 1,03; 1,03 салмақ тартты. Қант пакеттеріне қосылған орташа салмақты анықтаңдар.

534. 45 жұмысшының бір ауысымда дайындаған тетіктерінің саны жеке-жеке көрсетіліп, тарату кестесіне түсірілген. Жұмысшы-

ның бір ауысымдағы орташа еңбек өнімділігі қандай? Жұмысшыларды еңбек өнімділігіне қарай тарату гистограммасын салыңдар.

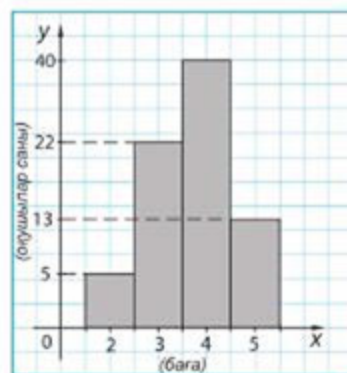
Бір ауысымда дайындалған тетік саны	280–300	300–320	320–340	340–360	360–380
Жұмысшы саны (адам)	3	9	15	12	6

535. 22; 22,5; 23; 22,5; 22; 21,5; 23; 23; 24; 21; 22; 22; 23; 23,5; 23,5; 24; 24,5; 23; 22,5; 23; 23; 21,5; 25; 23,5; 23,5 бойынша аяқкіім өлшемдері жиілігін таратудың вариациялық қатарын құрып: а) орташа мәнін; ә) стандартты ауытқуын табыңдар.

536. Бірнеше сыныпта қазақ тілінен диктант жүргізілді. 41-суретте қойылған бағалардың гистограммасы берілген. Мәлімет кестесін толтырып, жиілік графигін салыңдар.

537. Кестедегі тұрғындардың жас мөлшері туралы мәлімет бойынша: а) орташа мәнін; ә) дисперсиясын; б) стандартты ауытқуын табыңдар.

Жасы	1–15	16–30	31–45	46–60	61–75	76–90
Жиілігі	11	14	12	25	9	5



41-сурет

С деңгейі

538. Кестеде Қазақстанның облыс орталықтарындағы 2016 жылдың 1 қаңтарындағы халық саны келтірілген. Мәліметтерді жүз мың адамға дейін дөңгелектеп, жиілік кестесін құрып, стандартты ауытқуын (жүз мың адаммен) табыңдар.

№	Қала	Халқы	№	Қала	Халқы
1.	Шымкент	885 799	8.	Қостанай	231 911
2.	Қарағанды	497 824	9.	Қызылорда	227 499
3.	Ақтөбе	397 575	10.	Атырау	226 110
4.	Тараз	362 993	11.	Петропавл	215 306
5.	Павлодар	335 214	12.	Ақтау	183 233
6.	Өскемен	321 536	13.	Көкшетау	159 845
7.	Орал	232 493	14.	Талдықорған	140 656

539. Әлемдегі ең биік ғимараттар:

- 1) Дубайдағы Бурдж-Халифа зәулім үйі;
- 2) Токиодағы «Аспан ағашы» телемұнарасы (634 м);
- 3) Қытайдағы Шанхай Тауэр зәулім үйі (632 м);
- 4) Бланшардағы (АҚШ) KVLV-TV дінгегі (629 м);
- 5) Қытайдағы Гуанчжоу телемұнарасы (610 м).

Олардың орташа мәні 666,6 м болса, Дубайдағы зәулім үйдің биіктігі қандай болғаны?



1



2



3



4



5

ӨЗІНДІ ТЕКСЕР!

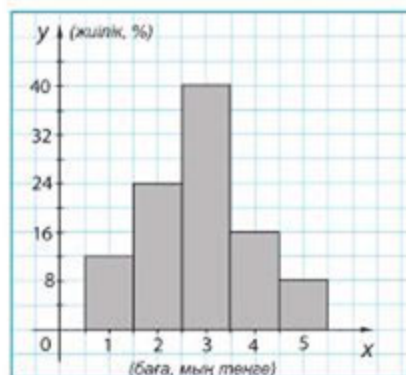
540. 1А) 5,3; 5,4; 5,5; 5,6; 5,4; 5,8; 5,4; 5,4; 5,6; 5,6 мәліметтері бойынша жиіліктер кестесін құрып, жинақталған жиіліктерді табыңдар.

2А) Оқушы белгілі бір уақыт аралығындағы алған бағаларын 4; 4; 3; 5; 3; 4; 5; 4; 4; 4; 5; 4; 2; 4; 4; 5 түрінде жазып шықты. Осы аралықтағы бағалардың орташа мәнін табыңдар.

3В) 100 000 кітапты бағасына қарай тарату гистограммасы бойынша (42-сурет) кесте құрыңдар.

4В) Дұрыс n -бұрыштардың барлық диагональдары жүргізілген, мұндағы n 5; 6; 7; 8; 9-ға тең. Әр көпбұрыштың диагональ санын жазып, таралу гистограммасын салыңдар.

5С) Мектептегі бір сыныптың оқушыларына сауалнама жүргізіліп, әрқайсысының мектепке дейін неше минут жүретіні анықталды. Нәтижесі 5; 15; 7; 10; 25; 20; 10; 5; 8; 8; 15; 12; 20; 14; 20; 25; 10; 15; 10; 16 түрінде болды. Мәліметтердің стандартты ауытқуын табыңдар.



42-сурет

БҰЛ ҚЫЗЫҚТЫ!*К. Пирсон**Р. Фишер*

Статистиканың өміріміздегі мәні зор. Адамдар түрлі ақпараттар негізінде статистика элементтерін жұмыста ғана емес, күнделікті тұрмыста да қолданады. Санап үйренген соң адамзат баласы ол мәліметтерді жинақтап, жүйелеуге тырысты. Алғашқы статистикалық мәліметтер ертедегі мысыр папирустары мен вавилондық саз тақтайларға да жазылған. Статистика ел басқару үшін де тиімді болды. Тұрғындар саны, құрамы, тұрмыс жағдайы, мал саны және пайдаланылатын жер аумағы туралы мәліметтер ел басқару ісіне қажет болды. Сондай-ақ, бұл мәліметтерді жинау, сақтау және өңдеу тәсілдері де керек болды. Бұл статистиканың ғылым ретінде қалыптасуына ықпал етті. XIX ғасырдың соңына қарай ол қарқынды түрде дами бастады.

Математикалық статистиканың негізгі міндеті – жинақтау, талдау әдістерін жетілдіру, статистикалық мәліметтерді ғылыми тұжырым үшін пайдалану. Ағылшын оқымыстылары К. Пирсон (1857–1936) мен Р. Фишер (1890–1962) осындай әдістерді құруда айрықша жетістіктерге жетті. Мәселен, К. Пирсон биологияда кең

қолданысқа ие статистикалық әдістерді ойлап тапса, Р. Фишер таңдама мәліметтері бойынша негізгі жиынтықты сипаттамаларды бағалауда пайдаланылатын статистика әдістері мен идеялардың бүтін бір кешенін ұсынды, эксперименттерді жоспарлау және болжамдарды статистикалық тұрғыдан тексеру әдіснамасын жасады.

Ғаламтор көздерін пайдалана отырып, математикалық статистика туралы алғашқы ғылыми еңбектер мен олардың авторлары туралы дерек жинаңдар.

V. ТЕҢСІЗДІКТЕР



Бөлімді оқу нәтижесінде

- квадрат және рационал теңсіздіктердің анықтамаларын;
 - теңсіздіктер жүйесі ұғымын;
 - интервалдар әдісінің түпкі мәнін;
 - теңсіздіктер мен олардың жүйелерін шешу тәсілдерін білу керек.
- квадрат теңсіздіктерді, оның ішінде квадраттық функцияның графигін пайдаланып шешуді;
 - рационал теңсіздіктер мен теңсіздіктер жүйелерін шешуді;
 - квадрат теңсіздіктер мен теңсіздіктер жүйесін пайдаланып, мәтінді есептер шығаруды орындай алу керек.

26. Квадрат теңсіздіктер

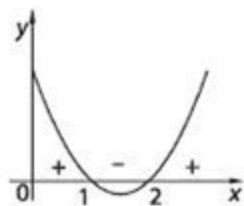
$ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$ түріндегі теңсіздікті **квадрат теңсіздік** деп атайды, мұндағы x – айнымалы, a, b, c – нақты сандар, $a \neq 0$. Мысалы, $x^2 - 3x + 2 < 0$; $2x^2 + 4x > 0$; $3x^2 \geq 4$; $x - 13x^2 \leq -3x$ – квадрат теңсіздіктер.

Бір айнымалысы бар теңсіздіктің шешімдері оны дұрыс сандық теңсіздікке айналдыратын айнымалының мәндері болатыны белгілі. Мысалы, 5 саны $x^2 - 4x + 3 > 0$ теңсіздігінің шешімі, себебі $5^2 - 4 \cdot 5 + 3 = 8, 8 > 0$.

Теңсіздікті шешу дегеніміз – оның барлық шешімдерін табу немесе шешімі жоқ екенін дәлелдеу. Егер екі теңсіздіктің шешімдері бірдей немесе шешімдері жоқ болса, онда оларды **мәндес теңсіздіктер** деп атайды.

Квадрат теңсіздікті шешкенде оған сәйкес $y = ax^2 + bx + c$ квадрат функциясының қасиеттерін және оның графигінің a коэффициенті мен $D = b^2 - 4ac$ дискриминантына байланысты Ox осіне қарағандағы орналасу ерекшеліктерін пайдаланады.

1 - м ы с а л. $x^2 - 3x + 2 < 0$ теңсіздігін шешу керек.



43-сурет

$y = x^2 - 3x + 2$ функциясының жобалы графигін салайық (43-сурет), ол үшін $x^2 - 3x + 2 = 0$ теңдеуін шешіп, функцияның нөлдері болатын $x = 1$, $x = 2$ -ні табамыз. Ox осіне функцияның таңбатұрақтылық аралықтарын белгілеп, $1 < x < 2$ болғанда $x^2 - 3x + 2 < 0$ болатынын көреміз.

Ж а у а б ы. (1; 2).

2 - м ы с а л. $x^2 - 3x + 3 > 0$ теңсіздігін шешу керек.

$y = x^2 - 3x + 3$ функциясының жобалы графигін салу үшін оның нөлдерін табамыз.

$x^2 - 3x + 3 = 0$ квадрат теңдеуінің дискриминанты $D = -3$ теріс сан болғандықтан, нөлдері жоқ. $x^2 - 3x + 3$ квадрат үшмүшесінің бірінші коэффициенті оң сан, сондықтан $y = x^2 - 3x + 3$ функциясының

графикі шегарасы Ox осі болатын жоғары жартыжазықтықта орналасқан. Демек, $x^2 - 3x + 3 > 0$ теңсіздігі x -тің кез келген нақты мәндерінде орындалады (44-сурет).

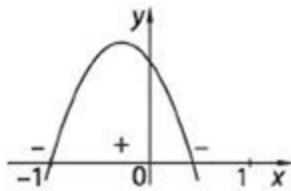
Ж а у а б ы. R .

3 - м ы с а л. $-2x^2 - x + 1 \leq 0$ теңсіздігін шешу керек.

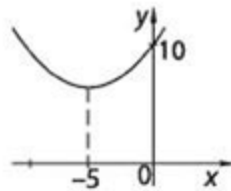
$y = -2x^2 - x + 1$ функциясының нөлдерін табамыз: $-2x^2 - x + 1 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0,5$.

x^2 -тың алдындағы коэффициенті -2 -ге тең, сондықтан $y = -2x^2 - x + 1$ параболасының тармақтары төмен қарай бағытталған. Функцияның жобалы графикін кескіндеп (45-сурет), Ox осіне таңбатұрақтылық аралықтарын белгілейміз. Көріп отырғанымыздай, берілген теңсіздіктің шешімдер жиыны $(-\infty; -1]$ және $[0,5; +\infty)$ сандық аралықтардың бірігуінен тұрады екен.

Ж а у а б ы. $(-\infty; -1] \cup [0,5; +\infty)$.



45-сурет



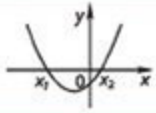
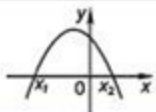
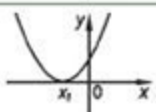
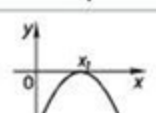

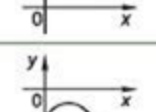
46-сурет

4 - м ы с а л. $0,1x^2 + x + 10 \leq 0$ теңсіздігін шешу керек.

$y = 0,1x^2 + x + 10$ квадрат функциясының графикі шегарасы Ox осі болатын жоғары жартыжазықтықта орналасқан, себебі $D < 0$ және x^2 -тың алдындағы коэффициенті $-0,1$ оң сан (46-сурет). $0,1x^2 + x + 10 \leq 0$ теңсіздігі x -тің ешбір мәнінде орындалмайтын болғандықтан, оның шешімі жоқ деген қорытынды жасаймыз.

Ж а у а б ы. Шешімі жоқ.

Квадрат теңсіздіктерді шешудің қарастырылған тәсілдерін кестеде көрсетейік:

$D = b^2 - 4ac$	a	Графигі	$ax^2 + bx + c < 0$	$ax^2 + bx + c > 0$
$D > 0$ $x_1 < x_2$	$a > 0$		$(x_1; x_2)$	$(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$
	$a < 0$		$(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$	$(x_1; x_2)$
$D = 0$ $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$	$a > 0$		шешімі жоқ	$(-\infty; x_1) \cup (x_1; +\infty)$
	$a < 0$		$(-\infty; x_1) \cup (x_1; +\infty)$	шешімі жоқ
$D < 0$	$a > 0$		шешімі жоқ	$(-\infty; +\infty)$
	$a < 0$		$(-\infty; +\infty)$	шешімі жоқ

$ax^2 + bx + c \leq 0$ және $ax^2 + bx + c \geq 0$ теңсіздіктері шешімдерінің кестесін өздігінен құрыңдар.

СҰРАҚТАР

1. Бір белгісізі бар теңсіздікті шешу деген нені білдіреді?
2. Бір белгісізі бар теңсіздіктің шешімі деп нені атайды?
3. Бір белгісізі бар квадрат теңсіздік деп нені атайды?
4. Қандай теңсіздіктер мәндес деп аталады?
5. $y = ax^2 + bx + c$ функциясының оң не теріс мәндер қабылдайтын аралықтарын табуда параболаның қай нүктелерінің ерекше мәні бар?

ЖАТТЫГУЛАР

А деңгейі

541. Мына теңсіздіктердің қайсысы квадрат теңсіздік болады:

- а) $x^2 - 4 > 0$; в) $x^2 - 1 \geq 0$;
 ә) $4x - 5 < 0$; г) $3x + 4 > 0$;
 б) $x^2 - 3x - 5 \leq 0$; д) $x^4 - 16 < 0$?

542. Мына теңсіздіктерді квадрат теңсіздіктерге түрлендіріңдер:

- а) $x^2 < 3x + 4$;
 ә) $3x^2 - 1 > x$;
 б) $3x^2 \leq x^2 - 5x + 6$;
 в) $2x(x + 1) \geq x + 5$.

543. a -ның қандай мәндерінде келесі теңсіздіктер квадрат теңсіздіктерге келеді:

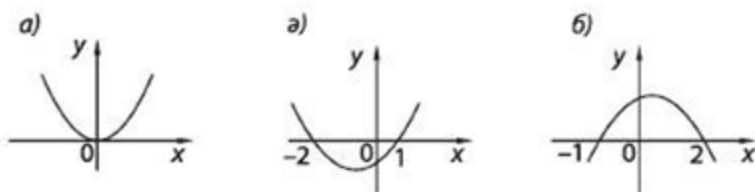
- а) $(a - 1)x^2 + 3x - 4 < 0$; б) $3(x + 1) \leq (a^2 - 4)x^2$;
 ә) $x(x + 1) > (a + 1)x^2$; в) $5x^2 \geq ax + 4$?

544. 0; 2; -3 сандары: а) $x^2 \leq 0$; ә) $x^2 > 2$ теңсіздіктерінің шешімі бола ма?

545. Мына теңсіздіктер мәндес пе:

- а) $x^2 \leq 16$ және $x \leq 4$; б) $125x^2 < 5x$ және $25x < 1$;
 ә) $x^2 \geq 49$ және $x \geq 7$; в) $-x^2 + x > 0$ және $x^2 - x < 0$?

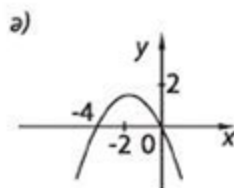
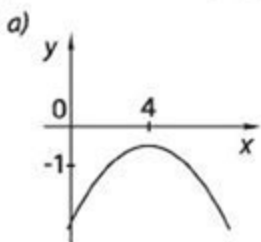
546. 47, а, ә, б-суреттерде $y = ax^2 + bx + c$ функциясының графигі кескінделген. 1) a коэффициентінің; 2) D дискриминантының таңбасын анықтаңдар.



47-сурет

547. $y = ax^2 + bx + c$ функциясының графигін пайдаланып (47, а, ә, б-суреттер), x -тің қандай мәндерінде: 1) $y = 0$; 2) $y > 0$; 3) $y < 0$ болатынын көрсетіңдер.

548. 48, а, ә-суреттерді пайдаланып, теңсіздіктің шешімін жазыңдар: 1) $ax^2 + bx + c > 0$; 2) $ax^2 + bx + c \leq 0$.



48-сурет

В деңгейі

549. Квадрат функцияның графигін пайдаланып, теңсіздікті шешіңдер:

- а) $x^2 - 6x + 8 > 0$; б) $-x^2 - 2x + 15 \leq 0$; г) $9x^2 - 12x + 4 > 0$;
 ә) $x^2 + 6x + 8 < 0$; в) $-5x^2 - 11x - 6 \geq 0$; ғ) $4x^2 - 12x + 9 \leq 0$.

550. Екі жұмысшы қандай да бір тапсырманы 10 күнде орындады және де соңғы екі күнде бірінші жұмысшы жұмысқа шықпады. Егер екеуі бірге бастапқы 7 күнде барлық тапсырманың 80 %-ын орындағаны белгілі болса, барлық тапсырманы бірінші жұмысшы жеке неше күнде орындар еді?

551. Теңсіздікті шешіңдер:

- а) $9x^2 - 4 > 0$; б) $2x^2 + 7x - 4 < 0$; г) $-3x^2 + 7x \geq 5$;
 ә) $-2x^2 + 7x < 0$; в) $x^2 - 30x + 200 > 0$; ғ) $25x^2 + 10x + 1 \geq 0$.

552. Теңсіздікті шешіңдер:

- а) $x^2 < 25$; в) $0,5x^2 \geq 13$; д) $2x^2 + 4 \geq 0$;
 ә) $0,02x^2 \leq 2$; г) $2x^2 \leq 3x$; е) $x^2 + 10x + 27 > 0$;
 б) $x^2 > 10$; ғ) $-2x^2 < 7x$; ж) $x^2 + 4x + 7 \leq 0$.

553. Шешімі: а) кез келген сан; ә) тек бір ғана нақты сан болатын қандай да бір квадрат теңсіздікті жазыңдар.

554. а) Шешімі тек екі нақты сан болатын квадрат теңсіздік бар бола ма?

ә) Шешімі болмайтын қандай да бір квадрат теңсіздік жазыңдар.

555. Шешімі: а) (1; 4); ә) [0; 8]; б) $(-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$; в) $(-\infty; 0,2] \cup [10; +\infty)$ аралығы болатын квадрат теңсіздікке мысал келтіріндер.

556. Квадрат үшмүше:

а) $2x^2 - 7x + 6$ оң мәндерді қабылдайтын;

ә) $-3x^2 - x - 12$ теріс мәндерді қабылдайтындай айнымалының барлық мәндерін табыңдар.

557. x -тің қандай мәндерінде өрнектің мағынасы болады:

а) $\sqrt{x^2 + 1}$; б) $\sqrt{x^2 - 4x + 4}$;

ә) $\sqrt{-x^2}$; в) $\sqrt{-5x^2 + 7x - 2}$?

558. Теңсіздіктің барлық оң шешімін табыңдар:

а) $4x^2 - 27x - 7 > 0$; ә) $-3x^2 + 17x + 6 < 0$.

559. Теңсіздіктің неше бүтін шешімі бар:

а) $x^2 - x \leq 6$; ә) $x^2 + 8x \leq 20$?

560. Моторлы қайық 9 км ағыспен және 8 км ағысқа қарсы жүзіп, ағыспен жүзген жолмен салыстырғанда, ағысқа қарсы жолға 15 мин артық жұмсады. Егер өзен ағысының жылдамдығы 2 км/сағ болса, қайықтың меншікті жылдамдығын анықтаңдар.

561. Функцияның анықталу облысын табыңдар:

а) $y = \sqrt{-x^2 + 6x - 8}$; ә) $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x - 8}}$.

562. Қазақстанда таскөмірдің өте үлкен қоры бар екені белгілі. Егер Қарағанды көмір бассейніндегі қор $x^2 - 110x + 3000 \leq 0$ теңсіздігінің ең кіші шешіміне тең болса, сол қордың қаншалықты көп (миллиард тоннамен) екенін анықтаңдар.



Көмірді ашық тәсілмен алу

563. Теңсіздікті шешіңдер:

а) $6x^2 - 2x \leq 4x^2 + 5x + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$;

ә) $3x^2 + 35x + \left(\frac{1}{9}\right)^{-1} \leq -x^2 + 6x + 2$;

б) $((0,2)^{-1}x + 1)(3x - 2) \geq ((0,5)^{-2}x - 1)(x + 2)$;

в) $(3x - 4^{-1})(x + 6) \leq (6x - 2^{-2})(x + 6)$.

564. Теңсіздіктің барлық теріс шешімдерін табыңдар:

а) $\frac{4x^2 - 5x}{4} - 1,25 \leq \frac{5x^2 - 3}{2}$;

ә) $\frac{7x^2 - 2x}{5} \geq 1 + \frac{2x^2 + 1}{2}$.

565. Өрнектің анықталу облысын табыңдар:

а) $\frac{x + 4}{\sqrt{-x^2 + x + 30}}$; ә) $\frac{\sqrt{19 - 24x + 9x^2}}{x + 5}$.

566. x -тің кез келген мәнінде мына теңсіздік ақиқат па:

а) $6x^2 - 10x + 7 > 0$; б) $x^2 + 8x + 1 > -x^2 + 10x - 2$;

ә) $2x^2 + 7x + 1 > 10x - 1$; в) $-2x^2 + 10x < 18 - 2x$?

С деңгейі

567. а) $q > 1$ болғанда $x^2 - 2x + q > 0$ теңсіздігінің шешімі $x \in R$;

ә) $q > 4$ болғанда $x^2 - 4x + q < 0$ теңсіздігінің шешімі болмайтынын дәлелдендер.

568. Егер екітаңбалы санды оның цифрларының қосындысына бөлсе, онда бөлінді 7-ге, қалдығы 6-ға тең болады. Егер осы екітаңбалы санды оның цифрларының көбейтіндісіне бөлсе, онда бөлінді 3-ке, қалдығы бастапқы санның цифрларының қосындысына тең болады. Бастапқы санды табыңдар.

569. x -тің кез келген $x \in R$ мәндерінде: а) $x^2 - (t + 2)x + 4 > 0$;

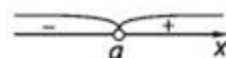
ә) $-x^2 + 2(t - 1)x - 9 < 0$ теңсіздігі орындалатындай t -ның барлық мәндерін табыңдар.

570. Теңсіздікті x айнымалысына байланысты шешіңдер:

а) $x^2 - 2x + p > 0$; ә) $2x^2 + px + 8 < 0$.

27. Теңсіздіктерді интервал әдісімен шешу

$x - a$ екімүшесінің қасиеті: $x - a$ екімүшесінің мәндері координаталық түзудегі a санының сол жағындағы x -тің барлық мәндерінде теріс және a санының оң жағындағы x -тің барлық мәндерінде оң болады (49-сурет). Екімүшенің осы қасиетін $f(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$ түрінде жазылған, анықталу облысы функцияның $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ нөлдерімен бөлінген, аралықтардың әрқайсысындағы функцияның таңбасын анықтау үшін де пайдаланады.



49-сурет

Мысалы, $f(x) = (x + 4)(x - 2)(x - 10)$ функциясын қарастырайық. Бұл функцияның анықталу облысы барлық сандар жиыны болады. Функцияның нөлдері болатын $-4, 2, 10$ сандары оның анықталу облысын $(-\infty; -4), (-4; 2), (2; 10), (10; +\infty)$ аралықтарға бөледі. $(x + 4)(x - 2)(x - 10)$ өрнегі үш көбейткіштен тұрады. Әрбір көбейткіштің қарастырып отырған аралықтардағы таңбасы кестеде көрсетілген:

	$(-\infty; -4)$	$(-4; 2)$	$(2; 10)$	$(10; +\infty)$
$x + 4$	-	+	+	+
$x - 2$	-	-	+	+
$x - 10$	-	-	-	+

Бұдан $x \in (-\infty; -4) \cup (2; 10)$ болғанда $f(x) < 0$, ал $x \in (-4; 2) \cup (10; +\infty)$ болғанда $f(x) > 0$ болатынын көреміз (50-сурет).



50-сурет

Функцияның анықталу облысының оның нөлдерімен бөлінетін аралықтарының әрқайсысында функцияның таңбасы сақталатынын, ал нөлдік нүктеден өткенде оның таңбасының өзгеретінін байқаймыз. Бұл қасиет $(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n) < 0$,

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n) > 0,$$

түріндегі теңсіздіктерді шешкенде пайдаланылады, мұндағы x_1, x_2, \dots, x_n сандары $f(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$ функциясының нөлдері.

1 - м ы с а л. $x^2 - 3x + 2 > 0$ теңсіздігін шешу керек.

Ш е ш у і. $f(x) = x^2 - 3x + 2$ функциясын қарастырайық.



51-сурет

1) $x = 1$ және $x = 2$ функцияның түбірлері болғандықтан, $f(x) = (x - 1) \cdot (x - 2)$ болады.

2) Координаталық түзуге оны үш аралыққа $(-\infty; 1)$, $(1; 2)$, $(2; +\infty)$ бөлетін 1 және 2 нүктелерін

белгілейміз. $f(x)$ функциясының осы аралықтардың әрқайсысындағы таңбасын анықтаймыз (51-сурет).

Сонымен, $x^2 - 3x + 2 > 0$ теңсіздігінің шешімдер жиыны $(-\infty; 1)$ және $(2; +\infty)$ аралықтарының бірігуі болады екен.

Ж а у а б ы. $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

Теңсіздіктерді шешудің бұл тәсілі *интервалдар әдісі* деп аталады.

2 - м ы с а л. $(x + 3) \cdot (x - 1) \cdot (x - 4)^2 \cdot (5 - x) \leq 0$ теңсіздігін шешу керек.

Ш е ш у і. Теңсіздікті оның әрбір көбейткіші $x - a$ түрінде болатындай етіп түрлендіреміз. Ол үшін төртінші көбейткіштен -1 -ді жақшаның сыртына шығарып, теңсіздіктің екі жағын -1 -ге көбейтеміз де, теңсіздіктің таңбасын өзгертеміз. Сонда $(x + 3) \cdot (x - 1) \cdot (x - 4)^2 \cdot (x - 5) \geq 0$ шығады.

1) $f(x) = (x + 3) \cdot (x - 1) \cdot (x - 4)^2 \cdot (x - 5)$ функциясының анықталу облысы – барлық нақты сандар жиыны.

2) Координаталық түзуге функцияның нөлдері болатын $-3; 1; 4; 5$ сандарын белгілейміз. Берілген теңсіздік қатаң болмағандықтан, бұл сандар теңсіздіктің шешімдер жиынына кіреді (оларды координаталық түзуде қою қарамен белгілейді).

3) Функцияның аралықтардағы таңбаларын анықтаймыз (52-сурет). $(x - 4)^2$ өрнегі x -тің кез келген мәнінде теріс болмайтындықтан, 4 нүктесінен өткенде таңба өзгермейді.



52-сурет

Демек, берілген теңсіздіктің шешімдер жиыны екі аралықтан $[-3; 1]$, $[5; +\infty)$ және 4 санынан тұрады. (Белгілі бір элементтен тұратын жиын $\{ \}$ таңбасымен белгіленеді.)

Ж а у а б ы. $[-3; 1] \cup [5; +\infty) \cup \{4\}$.

$\frac{A(x)}{B(x)} < 0$ немесе $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$ түрінде беруге болатын бір айнымалысы бар теңсіздік *бөлшек-рационал* теңсіздік деп аталады. Мұндағы $A(x)$ және $B(x)$ – *көпмүшелер*. Мұндай теңсіздіктердің екі (немесе ең болмағанда бір) жағы бөлшек-рационал өрнек болады.

Мысалы, $\frac{5x-2}{x+1} < 4$; $\frac{7}{x-3} > \frac{x}{x+3}$ – бөлшек-рационал теңсіздіктер.

$\frac{7}{x-3} > \frac{x}{x+3}$ теңсіздікті түрлендірсек, $\frac{7}{x-3} - \frac{x}{x+3} > 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \frac{7(x+3) - x(x-3)}{(x-3)(x+3)} > 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2 + 10x + 21}{(x-3)(x+3)} > 0$ болады.

$\frac{A(x)}{B(x)} < 0$ және $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$ теңсіздіктері, мұндағы $A(x)$ және $B(x)$ – көпмүшелілер, сәйкесінше $A(x) \cdot B(x) < 0$ және $A(x) \cdot B(x) > 0$ теңсіздіктерімен мәндес, сондықтан оларды шешу үшін де интервалдар әдісін қолдануға болады.

3 - м ы с а л. $\frac{2x-3}{4-x} > \frac{1}{x}$ теңсіздігін шешу керек.

Ш е ш у і. Берілген теңсіздікті $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$ түріне келтіреміз:

$$\frac{2x-3}{4-x} - \frac{1}{x} > 0, \quad \frac{(2x-3)x - (4-x)}{(4-x)x} > 0, \quad \frac{2x^2 - 2x - 4}{-(x-4)x} > 0.$$

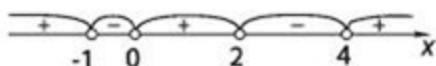
Теңсіздіктің екі жағын -1 -ге көбейтіп, оған мәндес $\frac{2(x^2 - x - 2)}{(x-4)x} < 0$

теңсіздігін аламыз. Әрі қарай $f(x) = \frac{2(x^2 - x - 2)}{(x-4)x}$ функциясын қарастырамыз.

1) Бұл функцияның анықталу облысы – 0 мен 4-тен басқа барлық сандар жиыны.

2) 2 мен -1 сандары – функцияның нөлдері.

3) Сан осіне функцияның мәні жоқ немесе нөлге тең болатын нүктелерін белгілеп, функцияның пайда болған аралықтардағы таңбаларын анықтаймыз (53-сурет).



53-сурет

$(-1; 0)$ және $(2; 4)$ аралықтарында $f(x) < 0$, демек, олардың бірігуі берілген теңсіздіктің шешімі болады.

Ж а у а б ы. $(-1; 0) \cup (2; 4)$.

4 - м ы с а л. $\frac{(x-2)^2(x+1)}{x-3} \geq 0$ теңсіздігін шешу керек.

Ш е ш у і. $f(x) = \frac{(x-2)^2(x+1)}{x-3}$ функциясын қарастырайық.

1) Бұл функцияның анықталу облысы – 3-тен өзге барлық нақты сандар жиыны.

2) 2 мен -1 сандары – функцияның нөлдері.

3) Сан осіне функцияның нөлдері мен мәндері жоқ нүктелерді белгілейміз. Функцияның нөлдерін қою қара нүктемен белгілейміз, себебі олар берілген теңсіздіктің шешімдер жиынына кіреді. Пайда болған аралықтардағы функцияның таңбаларын табамыз (54-сурет).



54-сурет

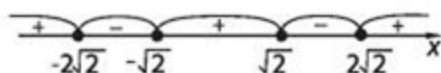
$(-\infty; -1]$, $(3; +\infty)$ аралықтары мен 2-ге тең нүктеде $f(x) \geq 0$, сондықтан осы сандық жиындардың бірігуі берілген теңсіздіктің шешімі болады.

Ж а у а б ы. $(-\infty; -1] \cup (3; +\infty) \cup \{2\}$.

5 - м ы с а л. $x^4 - 10x^2 + 16 \leq 0$ теңсіздігін шешу керек.

Ш е ш у і. $x^4 - 10x^2 + 16$ үшмүшесін көбейткіштерге жіктейміз. $x^2 = t$ деп белгілеп, $t^2 - 10t + 16$ квадрат үшмүшесін аламыз, оның нөлдері 2 мен 8-ге тең. Бұдан $t^2 - 10t + 16 = (t - 2)(t - 8)$. Демек,

$x^4 - 10x^2 + 16 = (x^2 - 2)(x^2 - 8) = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x - 2\sqrt{2})(x + 2\sqrt{2})$.
 $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x - 2\sqrt{2})(x + 2\sqrt{2}) \leq 0$ теңсіздігін интервалдар әдісімен шешеміз (55-сурет).



55-сурет

Ж а у а б ы. $[-2\sqrt{2}; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; 2\sqrt{2}]$.

6 - м ы с а л*. $x^2 + 2x + a > 0$ (1) теңсіздігін a параметрінің әрбір мәні үшін шешу керек.

Ш е ш у і. $x^2 + 2x + a$ үшмүшесінің дискриминантын есептейік (екінші коэффициенттің жұп сан екенін ескерейік): $D = 1 - a$.

$a = 1$ болғанда, $D = 0$, (1) теңсіздік $(x + 1)^2 > 0$ түріне келеді. Бұл теңсіздік $x = -1$ -ден басқа барлық нақты мәндерде ақиқат, яғни $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

$1 - a < 0$, $a > 1$ болғанда, $D < 0$ болса, (1) теңсіздік x -тің кез келген нақты мәндерінде орындалады (себебін түсіндіріндер), яғни $x \in (-\infty; +\infty)$.

$a < 1$ болғанда, $D > 0$ болса, $x^2 + 2x + a$ үшмүшелігінің екі түбірі $x_1 = -1 - \sqrt{1 - a}$ және $x_2 = -1 + \sqrt{1 - a}$ бар болады және (1) теңсіздіктің шешімі $(-\infty; x_1)$ және $(x_2; +\infty)$ аралықтарының бірігуі болады, яғни $x \in (-\infty; -1 - \sqrt{1 - a}) \cup (-1 + \sqrt{1 - a}; +\infty)$.

Ж а у а б ы. $a < 1$ болғанда, $(-\infty; -1 - \sqrt{1 - a}) \cup (-1 + \sqrt{1 - a}; +\infty)$; $a = 1$ болғанда, $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$; $a > 1$ болғанда, $(-\infty; +\infty)$.

СҰРАҚТАР

1. Теңсіздіктерді шешуде интервалдар әдісі неге негізделеді?
2. Квадрат теңсіздіктерді қалай шешуге болады?
3. Қандай теңсіздік бөлшек-рационал теңсіздік деп аталады?
4. Бөлшек-рационал теңсіздіктерді қалай шешуге болады?

ЖАТТЫҒУЛАР*А деңгейі*

571. Теңсіздікті шешіңдер:

а) $x^2 < 1$; ә) $x^2 > x$; б) $x^2 < -2$; в) $x^2 > -1$.

572. Теңсіздікті шешіңдер:

а) $x^2 - 3x < 4$; б) $x^2 + 5x - 24 > 0$;

ә) $x^2 - 3x + 2 \leq 0$; в) $x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} \leq 0$.

573. Теңсіздікті шешіңдер:

а) $(x + 4)(x + 1)(x - 3) > 0$; б) $(x + 9)(x - 8)(10 - x) > 0$;

ә) $(x - 5)(x - 7)(x + 3) < 0$; в) $(12 + x)(6 - x)(x - 11) < 0$.

574. Функцияның анықталу облысын табыңдар:

а) $y = \sqrt{x^2 - 169}$; б) $y = \sqrt{121 - 9x^2}$;

ә) $y = \sqrt{225 - x^2}$; в) $y = \sqrt{-x^2 + 2x + 63}$.

575. Теңсіздікті шешіңдер:

а) $(x - 1)(x + 3)(x - 2)(x^2 + 1) \leq 0$; б) $(x^2 + 2x - 3)(-2x^2 + 5x - 2) \geq 0$;

ә) $(x^2 - 5x + 6)(x^2 + 5x + 6) \leq 0$; в) $(x + 2)^2(x + 5)(x - 1)(x + 4) \geq 0$.

576. Саңырауқұлақ терушілер орманға дейінгі 6 км жолды белгілі бір уақыт аралығында өтпекші болып келіскен еді. Бірақ олар келіскеннен 1 км/сағ кем жылдамдықпен жүруге мәжбүр болып, орманға жоспарланған уақыттан 18 минутқа кеш жетті. Олар орманға қанша уақытта жетті?

*В деңгейі*577. а) $\sqrt{2 - x - x^2}$ өрнегінің мағынасы болатындай x айнымалысының барлық бүтін мәндерін табыңдар.ә) $\frac{5}{\sqrt{(9x^2 - 3x - 2)}}$ өрнегінің мағынасы болмайтын x айнымалысының барлық бүтін мәндерін табыңдар.578. Теңдік орындалатындай x -тің барлық мәндерін табыңдар:

а) $|-5x^2 + 11x - 6| = 5x^2 - 11x + 6$; б) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = x - 3$;

ә) $|2x^2 + 5x - 18| = 2x^2 + 5x - 18$; в) $\sqrt{x^2 + 4x + 4} = -x - 2$.

579. Теңсіздікті шешіндер:

а) $x^3 - 4x \leq 0$; б) $4x^3 + 36x^2 \leq 0$; г) $-x^4 + 5x^3 - 6x^2 \geq 0$;
 ә) $27x^4 - 3x^2 \geq 0$; в) $2x^3 - 50x \geq 0$; ғ) $x^4 + 3x^3 + 2x^2 \leq 0$.

580. Теңсіздікті шешіндер:

а) $(x^2 - 2x + 6)(x - 4) > 0$; б) $(x^2 + 2x + 1)(x - 2) \geq 0$;
 ә) $(3x + 6)(-3x^2 - 3x - 4) \leq 0$; в) $(x - 4)^2(-x^2 - 4x - 4)(x - 2) \geq 0$.

581. Теңсіздікті шешіндер:

а) $(x^2 - 16)(x^2 + 1) \leq 0$; б) $(25 - x^2)(x + 6)^2 \geq 0$; г) $x^4 - 13x^2 + 36 < 0$;
 ә) $(x^2 + 9)(x^2 - 4) > 0$; в) $(1 - x^2)(x - 4)^2 \geq 0$; ғ) $x^4 + 15x^2 - 16 \geq 0$.

582. 60 тетік дайындауға бір жұмысшы екіншіге қарағанда 3 сағат кем уақыт жұмсайды. Егер екеуі бірге бір сағатта 30 тетік дайындайтын болса, екінші жұмысшы 90 тетікті неше сағатта дайындайды?

583. Теңсіздіктер мәнделсе:

а) $x^2 + 7x + 10 > 0$ және $(x + 2)(x + 5) > 0$;
 ә) $x(x - 15) \leq 0$ және $3x - 45 \leq 0$;
 б) $(x - 7)(x + 9) > 0$ және $(7 - x)(9 + x) > 0$;
 в) $\frac{6x + 1}{x - 11} \leq 0$ және $(6x + 1)(x - 11) \leq 0$?

584. Теңсіздікті шешіндер:

а) $\frac{5}{x} < -2$; ә) $-\frac{2}{x} > 10$; б) $x + 2x^{-1} > 3$; в) $x - 3x^{-1} < 2$.

585. Теңсіздікті шешіндер:

а) $\frac{12 - x}{x + 13} > 0$; ә) $\frac{6 - 5x}{x + 0,5} < 0$; б) $\frac{x + 2}{3 - x} > (0,5)^{-1}$; в) $\frac{1}{x - 3} \leq -(0,1)^{-1}$.

586. Теңсіздікті шешіндер:

а) $\frac{(x + 2)(x - 4)}{(x + 3)x} \leq 0$; б) $\frac{x^2 + 4x + 7}{x^2 - 6x + 5} > 0$;
 ә) $\frac{x^2 + 4x + 5}{x^2 - 5x - 6} < 0$; в) $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 7x + 12} \geq 0$.

587. Теңсіздікті шешіндер:

а) $\frac{x^3 + 2x^2 - 9x - 18}{x + 1} \leq 0$; б) $\frac{(x + 6)^3(x - 5)^2}{(x - 2)(x + 4)} \leq 0$;
 ә) $\frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 40}{x + 4} \geq 0$; в) $\frac{(x + 7)^4(x - 4)^3}{(x + 5)(x - 3)^2} \leq 0$.

588. Құрамында 8 г алтын бар күміс пен алтынның қорытпасына таза 10 г алтын қосып қорытылды. Нәтижесінде қорытпадағы алтынның мөлшері бастапқымен салыстырғанда 20 %-ға артты. Қорытпада қанша күміс бар?

589. Теңсіздікті шешіңдер:

а) $x \geq 2 - \frac{1}{x-4}$; б) $\frac{x^2+1}{x^2+3x-4} < 0$;

ә) $\frac{x+7}{x-2} > x-1$; в) $\frac{10-x}{5+x^2} > \frac{1}{2}$.

С деңгейі

590. Теңдік дұрыс болатындай x -тің барлық мәндерін табыңдар:

а) $\left| \frac{x^2+x-2}{x-3} \right| = \frac{x^2+x-2}{x-3}$; б) $\sqrt{\left(\frac{x^2-x-20}{x^2-9} \right)^2} = \frac{x^2-x-20}{x^2-9}$;

ә) $\left| \frac{x^2+x-6}{x^2+4x} \right| = -\frac{x^2+x-6}{x^2+4x}$; в) $\sqrt{\left(\frac{x^2+x}{x^2+x-2} \right)^2} = -\frac{x^2+x}{x^2+x-2}$.

591. Теңсіздікті шешіңдер:

а) $\frac{x+1}{x-1} < \frac{x-1}{x} - 2$; б) $\frac{3}{x+1} + \frac{7}{x+2} \leq \frac{6}{x-1}$;

ә) $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+3} - \frac{3}{x+2} < 0$; в) $\frac{x^{-1}}{x^2+3x+2} \leq \frac{x^{-1}}{x^2+7x+12}$.

592. Функцияның анықталу облысын табыңдар:

а) $y = \sqrt{x - \frac{4}{x-3}}$; б) $y = \sqrt{\frac{x^2+5x+4}{-x^2-9}}$;

ә) $y = \sqrt{\frac{8}{x^2-4} + 1}$; в) $y = \sqrt{\frac{-|x|+7}{x^2-8x+7}}$.

593. Теңсіздікті шешіңдер:

а) $\frac{x-3}{x^4-8x^2-9} \geq 0$; б) $\frac{x^4-3x^2-4}{4-2x} \leq 0$;

ә) $\frac{x^4-20x^2+64}{x+4} \leq 0$; в) $\frac{(x-1)^2}{x^4-10x^2+9} \geq 0$.

594. x – айнымалы, $k \in R$ болатын теңсіздікті шешіңдер:

а) $x^2 - 2x + k > 0$; б) $kx^2 - x - 1 > 0$;

ә) $2x^2 + kx + 3 < 0$; в) $kx^2 + 12x - 5 < 0$.

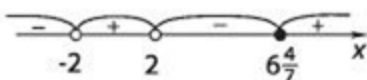
28. Теңсіздіктерді пайдаланып, мәтінді есептерді шешу

Е с е п. Қайық өзенмен A пунктiнен B пунктiне барып, керi қайтуы керек едi. Өзен ағысының жылдамдығы 2 км/сағ. Ағысқа қарсы жүзгенде қайықтың жылдамдығы $1,5$ есе артатыны белгiлi. Қайықтың ағыспен жүзгендегi жолы ағысқа қарсы жүзгендегi жолының $\frac{4}{5}$ -нен кем болмауы үшiн оның меншiктi жылдамдығы қандай болуы керек?

Ш е ш у і. Қайықтың өзiндiк жылдамдығы x км/сағ болсын, сонда оның ағыспен жүзгендегi жылдамдығы $(x + 2)$ км/сағ, ал ағысқа қарсы $1,5(x - 2)$ км/сағ болады. AB қашықтығын S км деп белгiлейiк, сонда ағыспен жүзгендегi уақыты $\frac{S}{x + 2}$ сағ, ал қарсы жүзгенде $-\frac{S}{1,5(x - 2)}$ сағат болады. Есептiң шарты бойынша теңсiздiк құрып, оны

шешейiк: $\frac{S}{x + 2} \geq \frac{4}{5} \cdot \frac{S}{1,5(x - 2)}$. Теңсiздiктiң оң жағындағы сандарды көбейтiп, екi жағын S -ке бөлемiз. $S > 0$ екенiн ескере отырып, $\frac{1}{x + 2} \geq \frac{8}{15(x - 2)} \Leftrightarrow \frac{15x - 30 - 8x - 16}{15(x - 2)(x + 2)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{7x - 46}{15(x - 2)(x + 2)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{7(x - 6\frac{4}{7})}{15(x - 2)(x + 2)} \geq 0$ аламыз.

Соңғы теңсiздiктi интервалдар әдiсiмен шешемiз (56-сурет).



56-сурет

Теңсiздiктiң шешiмi $[6\frac{4}{7}; +\infty)$ аралығындағы кез келген сан болады, себебi есептiң шарты бойынша $x > 2$.

Ж а у а б ы. $6\frac{4}{7}$ км/сағ-тан аз емес.

ЖАТТЫҒУЛАР*А деңгейі*

595. а) Екі натурал санның бірі екі еселенген екіншісінен 6-ға кем, ал олардың көбейтіндісі 20-дан кем болатын екі санды табыңдар.

ә) Екі натурал санның қосындысы 17-ге тең, ал олардың квадраттарының қосындысы 185-тен артық болмайтын екі санның кішісін табыңдар.

596. а) Тізбектес бес бүтін натурал санның бастапқы үшеуінің квадраттарының қосындысын қалған екеуінің квадраттарының қосындысымен салыстырыңдар.

ә) Тізбектес екі бүтін санның көбейтіндісі олардың қосындысынан 11-ге артық. Осы сандардың кішісін табыңдар.

597. а) Шаршының бір қабырғасын 2 дм-ге, ал екіншісін 4 дм-ге қысқартты. Сонда ауданы 24 дм² аспайтын тіктөртбұрыш шықты. Шаршының қабырғасы неге тең?

ә) Тіктөртбұрыш тәрізді жер телімі қоршаумен қоршалған. Жер телімінің ұзындығы енінен 15 м-ге артық, ал ауданы 700 м²-ден аспайтыны белгілі болса, қоршаудың ұзындығын табыңдар.

В деңгейі

598. а) Тікбұрышты үшбұрыштың катеттерінің бірі екіншісінен 12 см-ге кем, ал ауданы 14 см²-ден кіші. Оның ұзындығы бүтін санмен өрнектелетін үлкен катетін табыңдар.

ә) Тікбұрышты үшбұрыштың катеттерінің бірі екіншісінен 2 есе артық. Егер осы үшбұрыштың гипотенузасы 13-тен артық болмаса, оның кіші катетінің ұзындығы қандай ең үлкен бүтін санмен өрнектеледі?

599. а) Екі дене тік бұрыштың төбесінен бір мезгілде шығып, оның қабырғаларымен бірі 3 км/сағ, екіншісі 4 км/сағ жылдамдықпен қозғалып келеді. Қанша сағаттан соң екеуінің арақашықтығы 7 км-ден аспайтын болады?

ә) Теңбүйірлі трапецияның табандары 16 см және 28 см, ал биіктігі 8 см-ден аспайды. Трапецияның бүйір қабырғасының ұзындығы қандай?

600. а) Диагональдарының саны 60-тан кем көпбұрыш қабырғаларының саны қай уақытта ең аз және ең көп болады?

ә) Достар бір-бірімен суреттерімен алмасты. Егер бір-біріне берген суреттердің саны 6-дан артық болмаса, онда достардың саны қанша болғаны?

601. Бірнеше килограмм көгөніс 120 теңгеден артық сомаға сатылды. Егер бір килограмм көгөністің теңгемен бағасы килограмм санынан 2-ге кем болса, неше килограмм көгөніс сатылған?

602. а) Арақашықтығы 120 км A пунктiнен B пунктiне қарай 40 км/сағ жылдамдықпен жүк мәшинесi шықты. Дәл сол уақытта B -дан A -ға қарай жеңiл мәшине шықты. Кездескеннен кейiн жеңiл мәшине A пунктiне барып, кiдiрместен кейiн қайтты. Егер жеңiл мәшине B пунктiне жүк мәшинесiнен бұрын жеткен болса, оның жылдамдығы қандай болған?

ә) Арақашықтығы 100 км A мен B пункттерiнен бiр мезгiлде бiр-бiрiне қарсы екi мәшине шықты. Бiрiншi мәшиненiң жылдамдығы екiншiсiнен 10 км/сағ-қа артық. Ол жолда 50 минут тоқтап тұрды және B пунктiне жетуi екiншi мәшиненiң A пунктiне жеткенiнен кеш болмады. Бiрiншi мәшиненiң жылдамдығын табыңдар.

603. Қайық өзен ағысымен 10 км төмен барып, содан кейiн ағысқа қарсы 6 км жоғары көтерiлдi. Өзен ағысының жылдамдығы 1 км/сағ. Жолға барлығы 4 сағаттан артық уақыт жұмсамау үшiн қайықтың меншiктi жылдамдығы қандай болуы керек?

604. а) Танкер екi құбыр арқылы толтырылады және оны екiншi құбыр бiрiншiге қарағанда 5 сағатқа тез толтырады. Егер танкердi екi құбыр бiрге 6 сағаттан аспайтын уақытта толтыратын болса, оны екiншi құбыр жеке неше сағатта толтырады?

ә) Токарь белгiлi бiр уақытта 120 тетiктi өндемек болған едi, бiрақ жоспарлағанынан сағатына 2 тетiктен артық өндеп отырған.

Егер белгіленген уақытына 3 сағат қалғанда ол 136-дан кем емес тетік өңдеген болса, токарь сағатына неше тетік өңдеуді жоспарлаған еді?

С деңгейі

605. а) Теңіз суында 5 % тұз бар. Тұздың концентрациясы 2 %-дан аспау үшін 30 кг теңіз суына неше килограмм тұщы су қосу керек?


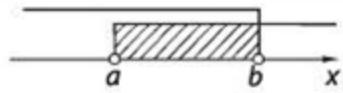


ә) 10 пайыздан аспайтын тұз қышқылының ерітіндісін алу үшін 100 г 30-пайыздық тұз қышқылының ерітіндісіне неше грамм су қосу керек?

606. Бір сыныптың 80 %-дан кем емес оқушысы қазақ тілін және 70 %-дан кем емес оқушы орыс тілін жақсы біледі. Осы сынып оқушыларының неше пайызы екі тілді де жақсы біледі?

29. Бір айнымалысы бар сызықтық емес теңсіздіктер жүйесі

Егер екі немесе одан да көп теңсіздіктердің барлық ортақ шешімдерін табу керек болса, онда сол теңсіздіктер жүйелерін шешу керектігі туралы айтылатынын еске сала кетелік. **Жүйенің әрбір теңсіздігін ақиқат сандық теңсіздікке айналдыратын айнымалының мәні теңсіздіктер жүйесінің шешімі деп аталады.** Теңсіздіктер жүйесін шешу дегеніміз – оның барлық шешімдерін табу немесе шешімі жоқ екенін анықтау. Егер теңсіздіктер жүйелерінің шешімдер жиыны бірдей болса немесе шешімдері болмаса, онда оларды мәндес теңсіздіктер жүйелері деп атайды. Теңсіздіктер жүйелерінің мәндестігі \Leftrightarrow таңбасымен белгіленеді.

Бір айнымалысы бар теңсіздіктер жүйесінің шешімдері ертеректе де қарастырылған болатын. Мысалы, бір айнымалысы бар екі қатаң сызықтық теңсіздіктер жүйелерінің мүмкін болатын шешімдері 57–60-суреттерде келтірілген (мұндағы $a < b$).

<p>a) $\begin{cases} x > a, \\ x > b. \end{cases}$ Ж а у а б ы. $(b; +\infty)$.</p>	 <p>57-сурет</p>
<p>ә) $\begin{cases} x > a, \\ x < b. \end{cases}$ Ж а у а б ы. $(a; b)$.</p>	 <p>58-сурет</p>
<p>б) $\begin{cases} x < a, \\ x < b. \end{cases}$ Ж а у а б ы. $(-\infty; a)$.</p>	 <p>59-сурет</p>
<p>в) $\begin{cases} x < a, \\ x > b. \end{cases}$ Ж а у а б ы. Шешімі жоқ.</p>	 <p>60-сурет</p>

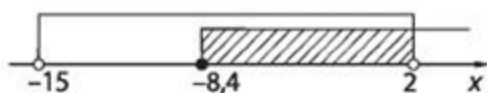
Біреуі сызықтық, ал екіншісі квадрат теңсіздік немесе екеуі де квадрат теңсіздік болатын бір айнымалысы бар теңсіздіктер жүйесін шешкенде де осындай жазулар қолданылады.

1 - м ы с а л. $y = \sqrt{4,2 + 0,5x} + \frac{1}{\sqrt{(15 - 6,5x - 0,5x^2)}}$ функциясының анықталу облысын табу керек.

Ш е ш у і. Бұл функцияның анықталу облысы мына теңсіздіктер жүйесінің шешімі болады: $\begin{cases} 0,5x + 4,2 \geq 0, \\ -0,5x^2 - 6,5x + 15 > 0 \end{cases}$ жүйенің әрбір теңсіздігін шешейік:

$$\begin{cases} 0,5x + 4,2 \geq 0, \\ -0,5x^2 - 6,5x + 15 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,5x \geq -4,2, \\ x^2 + 13x - 30 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -8,4, \\ (x + 15)(x - 2) < 0. \end{cases}$$

Әрбір теңсіздіктің шешімін сандық түзуге схемалық түрде салып көрсетейік. Бірінші теңсіздіктің де, екіншінің де шешімдері болатын аралықты штрихпен бөлейік, яғни бұл аралық бастапқы теңсіздіктер жүйесінің шешімі болады (61-сурет).



61-сурет

Ж а у а б ы. $[-8,4; 2)$.

2 - м ы с а л. $\frac{x^2 + x - 6}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}} \leq 0$ теңсіздігін шешу керек.

Ш е ш у і. Бұл теңсіздік мына теңсіздіктер жүйесімен мәндес:

$$\begin{cases} x^2 + x - 6 \leq 0, \\ x^2 - 2x - 3 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + 3)(x - 2) \leq 0, \\ (x + 1)(x - 3) > 0. \end{cases}$$



62-сурет

Сандық түзуге осы жүйенің әрбір теңсіздігінің шешімін схемалық түрде салып көрсетіп, олардың ортақ шешімдерін табайық (62-сурет).

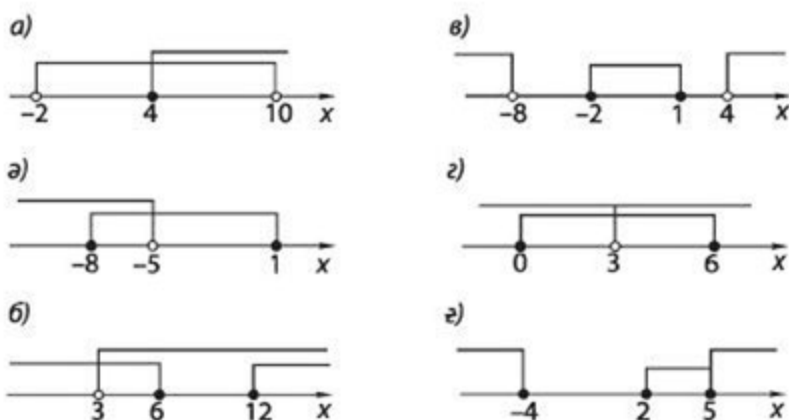
Ж а у а б ы. $[-3; -1)$.

Екіден артық теңсіздіктерден тұратын жүйе де осы сияқты шешіледі. Егер жүйенің бір теңсіздігінің шешімі жоқ болса, онда жүйенің де шешімі болмайды.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

607. 63-суретте қайсыбір жүйе теңсіздіктерінің шешімдері схемалық түрде бейнеленген. Жүйенің шешімін штрихтап көрсетіп, жауабын жазыңдар.



63-сурет

608. Функцияның анықталу облысын табыңдар:

а) $y = \sqrt{3-2x} - \sqrt{1-x^2}$; б) $y = \sqrt{9-x^2} + \sqrt{3x-9}$;
 в) $y = \sqrt{x^2} - \sqrt{3x-1}$; г) $y = \sqrt{2x+2} - \sqrt{16x-4x^2}$.

609. Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер:

а) $\begin{cases} x^2 - x - 2 < 0, \\ 5 - 2x < 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - 8x + 15 < 0, \\ \frac{1}{2}x + 1 \geq 3; \end{cases}$
 в) $\begin{cases} 4 + 3x - x^2 > 0, \\ 2 - x > 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} -x^2 + 6x - 8 < 0, \\ 4x - 3 \leq 0. \end{cases}$

В деңгейі**610.** Теңсіздікті шешіңдер:

а) $(x^2 - 25)\sqrt{x - 2} \geq 0;$

ә) $(4x^2 - 9)\sqrt{1 - x} \leq 0;$

б) $\frac{\sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{3 - x}} \geq 0;$

в) $\frac{\sqrt{x - 2}}{x^2 - 3x + 2} \leq 0.$

611. Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер:

а)
$$\begin{cases} x^2 - 9x + 14 \leq 0, \\ 2 - \frac{x}{2} < 3; \end{cases}$$

ә)
$$\begin{cases} 3 + 2x + x^2 < 0, \\ 5x + 2 > 1; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} 6x^2 + x - 2 \leq 0, \\ \frac{x}{2} - x > 1; \end{cases}$$

в)
$$\begin{cases} 9x^2 + 48x + 64 > 0, \\ 7x + 5 \geq 0. \end{cases}$$

612. Ұзындығы 60 м шеңбердің бойымен екі нүкте бір бағытта бірқалыпты қозғалып келеді. Олардың бірі екіншісінен толық айналымды 5 секунд бұрын өтеді. Олар минут сайын кездесе, әр нүктенің жылдамдығын табыңдар.

613. Айнымалының қандай мәндерінде өрнектің мағынасы болады:

а) $\sqrt{x^2 - 9} + \sqrt{6 - 2x};$

ә) $\sqrt{16 - x^2} + \sqrt{-2x - 8};$

б) $\frac{1}{\sqrt{x^2}} - \sqrt{7 - x};$

в) $\sqrt{x(x - 2)} - \sqrt{-x^{-1}}?$

614. Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \begin{cases} (x-2)^2 \leq 9, \\ x^2 - 5x > 0; \end{cases} & \text{б)} \begin{cases} x^2 - 4x \leq 0, \\ x^2 - 8x + 12 > 0; \end{cases} \\ \text{ә)} \begin{cases} (x+1)^2 \geq 25, \\ x^2 + 4x \leq 0; \end{cases} & \text{в)} \begin{cases} 2x^2 + 5x > 0, \\ x^2 - 3x - 4 \geq 0. \end{cases} \end{array}$$

615. Теңсіздікті шешіңдер:

$$\begin{array}{l} \text{а)} \sqrt{x^2 - 18x + 45} \cdot (x - 5) \leq 0; \\ \text{ә)} \sqrt{3x^2 - 7x - 26} \cdot (0,5x - 2,5) \leq 0; \\ \text{б)} \sqrt{x^2 - 3x + 2} \cdot (x + 3)(4 - x) > 0; \\ \text{в)} \sqrt{-5x^2 + 9x + 2} \cdot (x^2 - 3x + 2) < 0. \end{array}$$

616. Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \begin{cases} |x| - 5 \geq 0, \\ x^2 - 5x + 4 > 0; \end{cases} & \text{б)} \begin{cases} x^2 + 2x - 3 > 0, \\ |2x - 3| \leq 8; \end{cases} \\ \text{ә)} \begin{cases} 2|x| - 6 > 0, \\ x^2 - 3x - 4 \leq 0; \end{cases} & \text{в)} \begin{cases} x^2 + 3x - 4 < 0, \\ 2|x - 1| \leq 0,8. \end{cases} \end{array}$$

617. Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер:

$$\begin{array}{l} \text{а)} \begin{cases} (x-3)^2 < (x-3)(x+1), \\ x^2 - 5x + 6 \geq 0; \end{cases} \\ \text{ә)} \begin{cases} (x-2)(x-3) \geq x(x-3), \\ 2x^2 - 3x + 1 > 0; \end{cases} \\ \text{б)} \begin{cases} (x-4)(x-5) \geq -x(x-4), \\ 4 - 4x + x^2 \leq 0; \end{cases} \\ \text{в)} \begin{cases} 2x^2 - 6x + 7 \leq 0, \\ (x+1)(x+4) \geq 0. \end{cases} \end{array}$$

618. Бір айнымалысы бар екі теңсіздіктен тұратын жүйе құрыңдар. Олардың бірі сызықтық, екіншісі квадрат теңсіздік болсын және жүйенің шешімі мына сандар жиынына тең болсын:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} [0; 14]; & \text{б)} (4; +\infty); \\ \text{ә)} (-\infty; 1]; & \text{в)} [-5; 0) \cup (0; +\infty). \end{array}$$

619. Радиусы 2,5 дм шеңберге іштей ауданы $6,72 \text{ дм}^2$ -ге тең тіктөртбұрыш салу керек. Осы тіктөртбұрыштың қабырғаларын табыңдар.

620. Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер:

$$a) \begin{cases} x^2 - 5x - 6 \leq 0, \\ x^2 + 5x - 6 > 0; \end{cases}$$

$$ә) \begin{cases} x^2 - 13x + 36 > 0, \\ x^2 - 11x + 10 \leq 0. \end{cases}$$

621. Теңсіздіктің ең үлкен бүтін шешімін табыңдар:

$$a) 0 < x^2 + 6x \leq 7; \quad б) 8x < x^2 - 9 \leq 16;$$

$$ә) x \leq x^2 + 20 \leq 9x; \quad в) 3x - 1 \leq x^2 + x \leq 2x + 2.$$

622. Теңсіздікті шешіңдер:

$$a) |x^2 - 5| < 4; \quad б) |3x^2 + 3x - 1| \leq 5;$$

$$ә) |x^2 - 4x| \leq 5; \quad в) |x^2 - 7x + 3| < 3.$$

623. Теңсіздікті шешіңдер:

$$a) 2 \leq x + \frac{6}{x} \leq 5;$$

$$ә) \frac{4}{x+2} \leq x - 1 < \frac{2}{x};$$

$$б) \frac{15x^4 + \sqrt{x^2 - 16}}{x^2 - 8x + 15} \leq 0;$$

$$в) \frac{3 + 8x - 3x^3}{7x^6 + \sqrt{x^2 - 2x}} \geq 0.$$

624. Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер:

$$a) \begin{cases} 2x^2 - 5x - 3 \geq 0, \\ \frac{16}{x^2} > 1; \end{cases} \quad б) \begin{cases} \frac{x}{6} + \frac{6}{x} \geq \frac{x}{4} + \frac{4}{x}, \\ 4x - 5 \leq \frac{15}{x-3}; \end{cases}$$

$$ә) \begin{cases} 3x^2 - 5x - 8 \geq 0, \\ \frac{1-x}{3x+12} \geq 0; \end{cases} \quad в) \begin{cases} \frac{x}{5} - \frac{5}{x} \leq \frac{x}{3} - \frac{3}{x}, \\ 2x + 3 \geq \frac{6}{x+4}. \end{cases}$$

625. Функцияның графигін салып, таңбатұрақтылық аралықтарын табыңдар:

$$а) y = \begin{cases} -4, & x \leq 0 \text{ болғанда,} \\ x^2 - 4, & x \geq 0 \text{ болғанда;} \end{cases}$$

$$ә) y = \begin{cases} x + 1, & x < -1 \text{ болғанда,} \\ 1 - x^2, & x \geq -1 \text{ болғанда.} \end{cases}$$

С деңгейі

626. Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер:

$$а) \begin{cases} \frac{x^2 - (7 + 4\sqrt{3})}{x^2 - (11 + 6\sqrt{2})} \leq 0, \\ x^2 + 3x - 4 > 0; \end{cases}$$

$$ә) \begin{cases} (x^2 - (6 + 2\sqrt{5}))(x^2 - (5 + 2\sqrt{6})) \leq 0, \\ x^2 + 11x - 5,75 > 0. \end{cases}$$

627. Теңсіздіктер жүйесі шешімінің бүтін сандарының арифметикалық ортасын табыңдар:

$$а) \begin{cases} 5x^2 - 2x - 3 \geq 0, \\ x^2 - (\sqrt{2} + 3\sqrt{3})x + 3\sqrt{6} < 0; \end{cases}$$

$$ә) \begin{cases} 12x^2 - 4x - 5 > 0, \\ x^2 + (4\sqrt{3} - \sqrt{2})x - 4\sqrt{6} \leq 0. \end{cases}$$

628. Қайсысы үлкен: $\frac{10^{2018} + 1}{10^{2019} + 1}$ немесе $\frac{10^{2019} + 1}{10^{2020} + 1}$?

30. Теңсіздіктер жүйесін пайдаланып, мәтінді есептерді шешу

Е с е п. A пунктiнен түзу бойымен бiр мезгiлде бiр бағытта екi нүкте: бiрiншiсi – 3 м/с бастапқы жылдамдықпен және 2 м/с² үдеумен теңүдемелi, екiншiсi – бiрқалыпты қозғала бастады. Екiншi нүкте алдымен бiрiншi нүктенi басып озып, содан кейiн бiрiншi нүкте екiншiнi A -дан 10 м-ден артық емес қашықтықта қуып жетуi үшiн екiншi нүктенiң жылдамдығы қандай аралықта өзгеруi керек?

Ш е ш у i. Екiншi нүктенiң жылдамдығы v м/с, қозғалыс басталғаннан кейiн екiншi нүктенiң бiрiншiнi қуып жеткен уақыты t с болсын, vt м екiншi нүктенiң жүрiп өткен қашықтығы болады. Есептiң шарты бойынша $vt \leq 10$. (1)

t секундта бiрiншi нүкте де vt м жол жүредi. Физикадан белгiлi болғандай, теңүдемелi қозғалыста нүкте $v_0t + \frac{at^2}{2}$ қашықтықты өтедi. Есептiң шарты бойынша $v_0 = 3$ м/с, $a = 2$ м/с². Сонда $vt = 3t + \frac{2t^2}{2}$ аламыз, бұдан $t = v - 3$ шығады. t -ның осы мәнiн (1)-теңсiздiкке қойып, $v(v - 3) \leq 10$ аламыз.

Бастапқыда екiншi нүкте бiрiншiнi басып озу үшiн оның жылдамдығы бiрiншiнiң бастапқы жылдамдығынан артық болуы керек, яғни $v > 3$. Теңсiздiктер жүйесiн шешемiз:

$$\begin{cases} v(v - 3) \leq 10, \\ v > 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v^2 - 3v - 10 \leq 0, \\ v > 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (v - 5)(v + 2) \leq 0, \\ v > 3. \end{cases}$$



64-сурет

Ж а у а б ы. 3 м/с-тан артық, бiрақ 5 м/с-тан кем.

ЖАТТЫҒУЛАР*А деңгейі*

629. Тікбұрышты үшбұрыштың бір катеті 8 дм, ал гипотенузасы 12 дм-ден артық емес, бірақ 10 дм-ден кем емес. Басқа катет қабырғасы болатын шаршының ауданын бағалаңдар.

630. Ауданы 3 см^2 -ден кем емес, бірақ 4 см^2 -ден артық емес, ал табаны 8 см болатын теңбүйірлі үшбұрыштың бүйір қабырғасы бүтін санды сантиметрге тең бола ала ма?

631. Ұзындығы 13 м басқыш қабырғаға сүйеп қойылған. Оның төменгі ұшы қабырғадан 7 м-ден артық емес, бірақ 5 м-ден артық қашықтықта. Егер басқыштың биіктігі бүтін сан метрмен өрнектелетін болса, оның жоғарғы ұшы қандай биіктікте тұрғаны?

632. Ромбтың ауданы 15 см^2 -ден кем, бірақ 8 см^2 -ден артық, ал диагональдарының бірі екіншісінен 1 см-ге ұзын. Ромбтың ұзындығы бүтін сан сантиметрмен өрнектелетін кіші диагоналінің ұзындығын табыңдар.

633. Екі тізбектес натурал санның көбейтіндісі 420-дан артық емес, бірақ 240-тан кем емес. Осындай сандардың ең кішісі мен ең үлкенінің арифметикалық ортасын табыңдар.

В деңгейі

634. Бірлігінің цифры ондығының цифрынан 2-ге артық, ал осы санның оның цифрының қосындысына көбейтіндісі 460-тан кем, бірақ 144-тен артық болатын екітаңбалы санды табыңдар.

635. Алымы натурал сан болатын жай бөлшектің бөлімі алымының квадратынан 1-ге кем. Егер оның алымы мен бөліміне 2-ні қосса, онда бөлшек $\frac{1}{3}$ -ден артық болады, ал егер алымы мен бөлімінен 3-ті азайтса, онда бөлшек $\frac{1}{10}$ -ден кем болады. Осы бөлшекті табыңдар.

636. Бір айналымды шахмат турнирінде 55-тен артық емес, бірақ 15-тен кем емес партия ойналды. Осы турнирге ең аз және ең көп дегенде неше адам қатысты?

637. Егер шаршының бір қабырғасын 2 м-ге қысқартып, ал көршілес қабырғасын 3 м-ге ұзартса, онда ауданы 14 м^2 -ден артық, бірақ 24 м^2 -ден кем болатын тіктөртбұрыш шығады. Шаршының ауданы қандай болуы мүмкін?

638. Жазықтықта $A(3; 5)$ және $B(8; m)$ нүктелері белгіленген. AB қашықтығы 5,5-тен кем, бірақ 5-тен кем болмайтындай бүтін сан координаталы барлық B нүктелерін табыңдар.

639. Нүкте түзудің бойымен бірқалыпты қозғала отырып, 630 м қашықтықты өтуі тиіс. Жылдамдығын 3 м/с-қа арттырғанда 1 с-тан аз емес, бірақ 5 с-тан көп емес уақыт үнемделетіні белгілі. Осы нүктенің жылдамдығы қандай болуы мүмкін?

640. Механизаторға белгілі мерзімде 52 га егістікті өңдеу тапсырылған еді. Белгіленген мерзімге 1 күн қалғанда ол 54,6 га-дан көп емес, бірақ 48 га-дан аз емес жерді өңдегені белгілі. Егер механизатор күніне нормасын 3 га-ға артық орындап отырған болса, ол күніне неше га егістікті өңдеуді жоспарлаған еді?

С деңгейі

641. Қайық өзен ағысымен 7 км және көлде 6 км жүзіп, барлық жолға 1 сағат уақыт жұмсады. Егер өзен ағысының жылдамдығы 2 км/сағаттан артық, бірақ 4,4 км/сағаттан кем болса, қайықтың меншікті жылдамдығы қандай болғаны?

642. Айлақтан ағысының жылдамдығы (км/сағатпен) тұрақты өзенмен төмен қарай сал жіберілді. Бір сағаттан соң артынан меншікті жылдамдығы 10 км/сағатқа тең қайық шықты. Салды қуып жеткен соң қайық кері қайтты. Қайық айлаққа келіп жеткенде сал 15 км-ден артық жүзген болса, өзен ағысы жылдамдығының барлық мәндерін табыңдар.

31. «Теңсіздіктер» тақырыбын қайталауға берілген жаттығулар

А деңгейі

643. Теңсіздіктер мәндес пе:

а) $\frac{x^2 - 2x}{x - 2} > 0$ және $(x^2 - 2x)(x - 2) > 0$;

ә) $\frac{x^2 - 4}{x + 2} \leq 0$ және $(x^2 - 4)(x + 2) \leq 0$?

644. Теңсіздіктің ең кіші бүтін оң шешімін табындар:

а) $x(x + 11) - 8 > 4x$;

ә) $11 - (x + 1)^2 \geq x$.

645. Теңсіздіктің ең үлкен бүтін оң шешімін табындар:

а) $x(x + 5) \leq 2(x^2 - 3)$;

ә) $(x + 4)(x + 5) \leq x + 5$.

646. Қазақстанның «Бурабай» ұлттық саябағы өзінің көлдерімен атақты. Егер олардың санының мәні $\frac{x}{x^2 - 200} < 0$ теңсіздігінің ең үлкен бүтін шешіміне тең болса, көлдердің саны қанша болғаны?



Шортанды көлі

В деңгейі

647. Бірде-бір саны: а) $(x - 3)^2 < 16$; ә) $(3 - x)^2 < 4$ теңсіздігінің шешімі болмайтындай қандай да бір аралық жазыңдар.

648. Теңсіздікті шешіңдер:

а) $\frac{x^2}{\sqrt{2} + 1} < x(\sqrt{2} - 1)$; ә) $\frac{x^2}{\sqrt{3} - 2} \leq x(\sqrt{3} + 2)$.

649. Банкке 5 % жылдық өсіммен салым салынды. 2 жылдан соң ол салым 22 050 теңгеден артық емес, бірақ 11 025 теңгеден кем емес болды. Бастапқы салым қандай болуы мүмкін?

650. Теңсіздікті шешіңдер:

а) $(5x - 8)(2x^2 + x + 5) < 0$; б) $(6x^2 - x - 2)x^2 \geq 0$;
 ә) $(-4x^2 + 5x - 7)(2x + 7) \geq 0$; в) $(x^2 + 9x + 18)(x - 2)^2 \leq 0$.

651. Теңсіздікті шешіңдер:

а) $x^4 - 8x^2 - 9 \leq 0$; б) $7x^6 - 28x^4 \geq 0$;
 ә) $x^4 - 2x^2 - 3 > 0$; в) $8x^2 - 4x^4 \geq 0$.

652. Функцияның анықталу облысын табыңдар:

а) $y = \sqrt{1 - \frac{27}{x^3}}$; в) $y = \sqrt{(4 - x^2)(x^3 - 125)}$;
 ә) $y = \sqrt{\frac{8}{x} - x^2}$; г) $y = \sqrt{x^2 + x + x^0}$;
 б) $y = \sqrt{(x^2 - 1)(x^3 - 64)}$; ғ) $y = \sqrt{-\frac{1}{2}x^2 - x + x^0}$.

653. Теңсіздікті шешіңдер:

а) $\frac{2}{x} - \left(\frac{2}{x}\right)^2 > 0$; б) $9x^2 - \frac{1}{3}x^5 \leq 0$; г) $(1 + x)^3 \leq 1 + 3x$;
 ә) $2 - \frac{16}{x^3} < 0$; в) $\frac{1}{9}x^5 - \frac{1}{4}x^3 \geq 0$; ғ) $(1 - x)^3 > 1 - 3x$.

654. Алымы натурал сан, ал бөлімі 3-ке артық бөлшек пен оған кері бөлшектің қосындысы 4-тен артық. Осы бөлшекті табыңдар.

655. Тіктөртбұрыштың қабырғалары бүтін санмен өрнектелген және олардың бірі екіншісінен 7 см-ге қысқа. Тіктөртбұрыштың ауданы 30 см²-ден артық, бірақ 60 см²-ден кем болуы үшін оның үлкен қабырғасының ұзындығы қандай болуы керек?

656. Функцияның анықталу облысын табыңдар:

$$а) y = \frac{1}{\sqrt{144 - 9x^2}};$$

$$ә) y = \frac{\sqrt{x^2 - x - 42}}{x - 11};$$

$$б) y = \frac{\sqrt{9x^2 - 24x + 16}}{x + 2};$$

$$в) y = \frac{x - 3}{\sqrt{-x^2 + x + 30}}.$$

657. Марат Алисаға мына есепті шығаруды ұсынды: «Егер қыры бүтін сан сантиметр болатын кубтың барлық жақтарының 1 см^2 -ге кемітілген ауданы 95 см^2 -ден кем, бірақ 89 см^2 -ден артық болса, оның көлемі қандай болғаны?» Біраз уақыттан соң Алиса ондай куб болмайды деп жауап берді. Оның жауабы дұрыс па?

658. Теңсіздіктер жүйесінің ең кіші бүтін шешімін табыңдар:

$$а) \begin{cases} x^2 - 121 < 0, \\ 3x - 18 > 0; \end{cases}$$

$$ә) \begin{cases} x^2 - 4x - 5 > 0, \\ \frac{1}{2}x - 2 \geq 0; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} 5x^2 - 7x - 34 \leq 0, \\ 2x \geq \sqrt{12}; \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} 8 + 2x - x^2 \leq 0, \\ x^2 - 4x - 5 < 0. \end{cases}$$

659. Бірі екіншісінен 6-ға артық, ал олардың көбейтіндісі 135-тен артық емес, бірақ 112-ден кем емес болатын натурал сандардың барлық жұбын табыңдар.

660. Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер:

$$а) \begin{cases} (x-2)^2 - 25 \leq 0, \\ (x+2)^2 - 9 \geq 0; \end{cases}$$

$$ә) \begin{cases} (2x-3)^2 - 16 \leq 0, \\ (2x+3)^2 - 1 < 0; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} x^2 - 16 > 0, \\ 7x - x^2 \leq 0; \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} x^2 - 16x + 55 \geq 0, \\ 2x^2 - 9x + 4 \geq 0. \end{cases}$$

661. Алымдары 1-ге тең, бөлімдері $n+1$ және $n+2$ натурал сандар, ал олардың қосындысы $\frac{1}{2}$ -ден кем, бірақ $\frac{1}{3}$ -ден артық болатын бөлшектерді табыңдар.

С деңгейі

662. Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер:

$$а) \begin{cases} -2x^2 + 3x - 1 \leq 0, \\ \frac{x+4}{2} - \frac{4-3x}{4} > \frac{1}{2}; \end{cases}$$

$$ә) \begin{cases} 4x^2 - 4x + 1 \geq 0, \\ \frac{3}{x} - 8x \leq x - \frac{1}{x}; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} x^2 - 7x + 12 \leq 0, \\ \frac{3x-6}{x+3} > 0; \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} 3x^2 - 5x - 8 \leq 0, \\ \frac{x-1}{x+2} \geq 0. \end{cases}$$

663. Үшбұрыштың бір қабырғасы екіншісінен 2 см-ге үлкен, ал олардың арасындағы бұрышы 30° -қа тең екені белгілі. Егер үшбұрыштың ауданы 30 см^2 -ден артық емес, бірақ 20 см^2 -ден кем емес болса, кіші қабырғасының ұзындығы қандай болуы мүмкін?

ӨЗІНДІ ТЕКСЕР!

664. 1А) 65-суретте $y = x^2 + 2x - 3$ функциясының графигі кескінделген. Осы графигті пайдаланып: 1) $x^2 + 2x - 3 < 0$; 2) $x^2 + 2x - 3 \geq 0$ теңсіздіктің шешімін жазыңдар.

2В) $y = \sqrt{\frac{x^2 - 196}{10 - x}}$ функциясының анықталу облысын табыңдар.

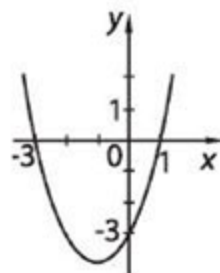
3В) Теңсіздікті шешіңдер:

$$(x - 3)(x - 1)^2(x + 2)(x + 4) \geq 0.$$

4В) Көрермендер залындағы қатар саны ондағы орын санынан 3-ке кем. Залдағы орын саны 208-ден артық, бірақ 270-тен кем және әр қатардағы орын саны бірдей екені белгілі. Залда неше қатар бар?

5С) Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер:

$$\begin{cases} \frac{3x - 1}{x^2} < 2, \\ (x^2 - 5x + 8)^2 \geq (x^2 + 11x - 8)^2. \end{cases}$$



65-сурет

БҮЛ ҚЫЗЫҚТЫ!

Теңсіздіктер мен теңсіздіктер жүйесі теориялық зерттеулер және маңызды практикалық есептерді шешуде кеңінен қолданылады. Мысалы, квадрат теңсіздіктерді шамалардың ең үлкен және ең кіші мәндерін табуға қолданады. Теңсіздіктер мен олардың жүйелерін шешуде жиі қолданылатын әдістердің бірі – интервалдар әдісі. Бұл әдістің негізінде функцияның үзіліссіздік ұғымы жатыр, оның графигін еш жерде үзілмейтін сызық түрінде елестетеміз.

Бұл ұғымның нақты анықтамасын алғашқылардың бірі болып чех математигі Б. Больцано (1781–1848) берген болатын. 1851 жылы басылып шыққан «Шексіздік парадоксы» атты ғылыми еңбегінде: «Егер $[a; b]$ кесіндісінде үзіліссіз функция оң және теріс мәндерді қабылдайтын болса, онда осы аралықтың қайсыбір x нүктесінде оның мәні 0-ге тең болады», – деген теорема бар. Яғни бұл функцияның графигі Ox осін $[a; b]$ кесіндісінің x нүктесінде қиып өтеді.



Б. Больцано

Бұл теореманы теңсіздіктерді интервалдар әдісімен шешкенде үздіксіз функцияның таңбатұрақтылық аралықтарын табуда қолданады.

Ғаламтор көздерін пайдалана отырып:

- а) Б. Больцаноның өмірбаяны, функциялар теориясын дамытуға қосқан үлесі;
- ә) функция түсінігіне Б. Больцано берген анықтама және оның мысалы туралы дерек жинаңдар.

8-СЫНЫПТАҒЫ АЛГЕБРА КУРСЫН ҚАЙТАЛАУ

А деңгейі

665. Қандай да бір екі иррационал санның қосындысы мен көбейтіндісі рационал сан болуы мүмкін бе?

666. Егер квадрат теңдеудің түбірлерінің бірі иррационал сан болса, онда екінші түбірі де иррационал сан болады деген ақиқат па?

667. Есептеңдер:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \frac{\sqrt{18} - \sqrt{8}}{2\sqrt{50}}; & \text{б) } (2\sqrt{5,5})^2 - \sqrt{3} \cdot \sqrt{1,08} + \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{28}}; \\ \text{ә) } \frac{\sqrt{45} + \sqrt{75} - 3\sqrt{5}}{5\sqrt{27}}; & \text{в) } 2\sqrt{147} + \frac{1}{6}\sqrt{42^2 - 6^2} - 9\sqrt{33\frac{1}{3}}. \end{array}$$

В деңгейі

668. Өрнектің мәні бүтін сан болатынын дәлелдеңдер:

$$\text{а) } (1 + \sqrt{2017})^3 + (1 - \sqrt{2017})^3; \quad \text{ә) } \sqrt{10 - 4\sqrt{6}} - \sqrt{10 + 4\sqrt{6}}.$$

669. Теңдеуді шешіп, түбірлерін бөлімінде иррационалы жоқ санмен өрнектер:

$$\text{а) } 15x^2 - 10 = 0; \quad \text{ә) } 5x^2 - 162 = 0.$$

670. Өрнектің мәнін табыңдар:

$$\text{а) } \frac{3}{\sqrt{3} + \sqrt{6}} - \frac{7}{\sqrt{3} - \sqrt{10}} - \frac{4}{\sqrt{10} - \sqrt{6}};$$

$$\text{ә) } \frac{30}{8 - \sqrt{34}} - \frac{20}{7 + \sqrt{29}} - \frac{5}{\sqrt{34} - \sqrt{29}}.$$

671. Екі теңқабырғалы үшбұрыштың периметрлерінің айырымы 120 см-ге, ал олардың қатынасы оң санының квадратына тең. Бір үшбұрыштың қабырғасы 10 см-ге тең болса, сол белгісіз санды табыңдар.

672. Теңдеуді шешіндер:

- а) $x(x - 15) = 3(108 - 5x)$;
 ә) $47 - x(3x + 4) = 2(17 - 2x) - 62$;
 б) $(y - 7)(y + 3) + (y - 1)(y + 5) = 94$;
 в) $(3y - 8)^2 - (4y - 6)^2 = 96 - (5y - 2)(5y + 2)$.

673. Теңдеудің түбірлерін табыңдар:

- а) $|3y^2 - 5y + 6| = 4$; ә) $|-6y^2 + 7y - 1| = 1$.

674. Квадрат үшмүшені көбейткіштерге жіктеңдер:

- а) $x^2 + 2x - 35$; б) $6x^2 + x - 2$;
 ә) $x^2 - 2x - 15$; в) $-5x^2 + 9x + 2$.

675. Бөлшекті қысқартыңдар:

- а) $\frac{5x^2 + 12x + 4}{5x + 2}$; б) $\frac{x^2 - 11x + 28}{x^2 - 14x + 49}$;
 ә) $\frac{3x^2 - 7x + 2}{1 - 3x}$; в) $\frac{5x^2 + 10x + 10}{(x + 1)^4 - 1}$.

676. Теңдеуді шешіндер:

- а) $\frac{x}{x - 2} - \frac{7}{x + 2} = \frac{8}{x^2 - 4}$; ә) $\frac{3}{x^2 - 9} + \frac{1}{x^2 - 6x + 9} = \frac{3}{2x^2 + 6x}$.

677. а) $x^4 - 6x^2 + 5 = 0$ теңдеуінің түбірлерінің көбейтіндісін;

ә) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$ теңдеуінің түбірлерінің қосындысын табыңдар.

678. Жана айнымалы енгізу арқылы теңдеудің түбірлерін табыңдар:

- а) $(x + 5)^4 - (x + 5)^2 - 12 = 0$;
 ә) $(x^2 - 5x + 7)^2 - (x - 3)(x - 2) = 1$;
 б) $(x^2 + 2x + 1)^2 + (x^2 + 2x + 2)^2 = 60 + (x^2 + 2x + 3)^2$;
 в) $x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) = 6$.

679. Шаршының бір қабырғасын $\sqrt{2}$ см-ге ұзартып, ал сыбайлас қабырғасын $\sqrt{2}$ см-ге қысқартқанда, ауданы шаршының ауданынан 20 %-ға кем тіктөртбұрыш шықты. Шаршының қабырғасын табыңдар.

680. $x^2 - 11\sqrt{10}x + 100 = 0$ теңдеуінің үлкен түбірінің квадратын тапсаңдар, Күннің салмағы Күн жүйесіндегі барлық планеталар

(Меркурий, Шолпан, Жер, Марс, Юпитер, Сатурн, Уран, Нептун) массасынан шамамен неше есе ауыр екенін білесіңдер.



681. Нөлдері: а) $\operatorname{tg} 45^\circ$ және $\sin 30^\circ$; ә) $\cos 60^\circ$ және $\sin 45^\circ$ болатын $y = x^2 + px + q$ түріндегі квадрат функцияны формуламен беріңдер.

682. Егер $y(0) = -3$, $y(3) = 0$, $y(-2) = 5$ екені белгілі болса, $y = ax^2 + bx + c$ функциясының графигін салыңдар.

683. Өрнектің ең кіші мәнін табыңдар:

а) $\sqrt{(x-3)^2 + (x+3)^2}$; ә) $x^4 - 14x^2 + 50$.

684. Функцияның мәндер жиынын табыңдар:

а) $y = x^2 + 6x + 5$; ә) $y = -x^2 + 4x + 3$.

685. $y = -x^2 + 6x - 5$ функциясының графигін салыңдар. а) $y < 0$; ә) $y \geq 0$; б) функция өседі; в) функция кемиді шарты орындалатындай x -тің барлық мәнін табыңдар.

686. Теңдеуді график арқылы шешіңдер:

а) $x^2 - 7 = \frac{6}{x}$; ә) $x^2 - 4x = \sqrt{5x}$.

687. Графигі $y = x^2 + 8x + 15$ функциясының графигіне: а) ордината осіне; ә) абсцисса осіне қарағанда симметриялы болатын функцияны формуламен беріңдер.

688. a -ның қандай мәнінде $y = x^2 - ax + a - 1$ функциясының нөлдері квадраттарының қосындысы ең аз болады?

689. Тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасына түсірілген биіктік оны екі кесіндіге бөледі, олардың біреуі катеттен 1 см-ге артық. Егер үшбұрыштың гипотенузасы 25 см-ге тең болса, оның ауданын табыңдар.

690. x -тің кез келген мәнінде теңсіздіктің дұрыс болатынын дәлелдендер:

а) $2x^2 + 4x + 1 > x - 1$; ә) $-3x^2 + 7x < 2x^2 + 4x + 5$.

691. Теңсіздікті шешіңдер:

а) $2x^2 + x - 6 \geq 0$; б) $64x^{-2} > x$;
 ә) $4x^2 + x - 5 \leq 0$; в) $25x^{-3} > x^{-1}$.

С деңгейі

692. Функцияның анықталу облысын табыңдар:

а) $y = \sqrt{\frac{7-x}{169-x^2}}$; б) $y = \sqrt{x^2-1} + \frac{1}{\sqrt{1-|x-1|}}$;

ә) $y = \sqrt{\frac{x-12}{144-x^2}}$; в) $y = \sqrt{36-x^2} + \frac{1}{\sqrt{6-|x+1|}}$.

693. Зат алдымен 20 %-дан, соңынан 30 %-дан кем болмайтындай арзандады. Зат алғашқы бағасымен салыстырғанда неше пайызға арзандады?

694. Тікбұрышты параллелепипед пішінді қораптың түбі шаршы тәрізді, ал биіктігі табан қабырғасынан 1 дм-ге кем. Егер қораптың барлық жақтарының ауданы 32 дм²-ден кем, бірақ 16 дм²-ден артық болса, оның табан қабырғасы қандай болуы мүмкін?

695. Теңсіздікті шешіңдер:

а) $x^4 + 17 < 8x^2 + 2$;
 ә) $x(x+8)(x+3)(x+5) + 56 < 0$.

696. A және B пункттерінен бір мезгілде бір-біріне қарама-қарсы екі мәшине шығып, тұрақты жылдамдықпен жүріп келеді. Кездескенге дейін бірінші мәшине екіншіге қарағанда m км жол кем жүрді, ал кездескеннен кейін B пунктіне дейін екіншінің A пунктіне

жеткенінен екі есе көп уақыт жұмсады. A пунктiнен мәшинелердің кездескен жеріне дейінгі қашықтықты табыңдар?

ӨЗІңДІ ТЕКСЕР!

697. 1А) Теңдеуді шешiндер: $\sqrt{x} = -2$.

2А) Өрнектің мәнін табыңдар: $\left(1,5\sqrt{24} + 1,5\sqrt{\frac{1}{6}} - \frac{1}{5}\sqrt{150}\right) : \sqrt{\frac{1}{8}}$.

3В) $y = x^2 - 6x + 8$ функциясының графигін салыңдар, оның нөлдері мен таңбатұрақтылық аралықтарын табыңдар.

4В) Балықшы қайықпен өзен ағысымен 1800 м және сонша метр ағысқа қарсы жүзіп, барлық жолға 1 сағ 12 мин жұмсады. Егер өзен ағысының жылдамдығы 2 км/сағ болса, қайықтың меншікті жылдамдығын табыңдар.

5С) x -тің барлық мәндерінде $bx^2 + 4x + b + 3 < 0$ теңсіздігі ақиқат болатындай b -ның барлық мәндерін табыңдар.

ЖАУАПТАР МЕН НҮСҚАУЛАР

1. Ақиқат. 2. а) 20; ә) $\frac{2}{21}$; б) -4; в) -27. 3. а) $\frac{6a}{b^3}$; ә) $70x^2y$; б) $25c^{-2}d^6$; в) $\frac{1}{64}p^6$. 4. а) $0,078 \cdot 10^{-10} < 0,59 \cdot 10^{-7} < 3400 \cdot 10^{-9}$. 5. а) 0,6; ә) -4; б) 3; в) $2\frac{1}{3}$. 6. а), ә) – екінші бөлшек үлкен. Бөлшектерді ортақ бөлімге келтіріп, олардың алымдарын салыстырыңдар. 7. а) -2; ә) 1,5. Теңдеудің сол жағы мен оң жағын x^2 -қа көбейтіп, сол жағын өрнектің квадраты түріне келтіріңдер. 8. а) 12 және 16 плакат; ә) 160 га, 960 га. 9. а) 57; ә) 85. 10. а) $\frac{3b^5}{a}$; ә) $6 - 2x$; б) $a - 3$; в) $\frac{1}{x-4}$. 11. а) $\frac{x+3}{4x-y}$; ә) $\frac{5mn}{m-2n}$; б) $-\frac{4}{b}$. 12. а) 0; ә) 1. 13. Ақиқат. 14. а) 89,1 км/сағ; ә) 60 км/сағ. 15. Оңтүстік Қазақстан облысы халқының тығыздығы 20,7 адам/км², вариациялық қатардың медианасы 4,97. 16. а) 0,25; ә) 4; б) -3 және 8. Теңдеудің сол жағындағы амалдарды орындап, оларды пропорция түрінде жазыңдар. Әрі қарай пропорцияның негізгі қасиеті мен айнымалының мүмкін мәндерін пайдаланыңдар. 17. Ортақ көбейткішті жақшаның сыртына шығарып және қысқаша көбейту формулаларын пайдаланып, өрнекті көбейткіштерге жіктеңдер. 18. Бөлшектің алымына a^2 -ты қосыңдар және азайтыңдар, сонда $(a^2 + 2)^2 - a^2$ аласыңдар. Әрі қарай квадраттардың айырымы ретінде көбейткіштерге жіктеңдер. 19. а) 6; ә) 5. Бөлшектің алымы мен бөлімін: а) $xу$; ә) ab -ға бөліңдер. 20. а) 3 сағат және 6 сағат; ә) 10 сағат және 15 сағат. 21. а) $-\frac{1}{10}$; ә) $\frac{1}{25}$. Өрнекті: а) 11 – 1-ге; ә) 26 – 1-ге көбейтіңдер және бөліңдер. 23. а) -2 және 13; ә) ең кіші мәні - 0,8, ең үлкен мәні жоқ; б) - 12,5 және 0; в) 0 және 250. 24. Берілген қосылғыштарды квадрат түріне келтіріп, содан кейін қажет қосылғышты қосып және азайтып, өрнектің толық квадратын бөліп шығарыңдар. Әрі қарай квадраттардың айырымын жіктеңдер. 25. а) 15 км/сағ; ә) 10 км/сағ. 26. ә), б), в). 28. а) $\frac{1}{9}$; ә) $2\frac{7}{9}$; б) $4\frac{4}{33}$; в) $\frac{61}{495}$; г) $2\frac{2641}{4950}$. 30. $\frac{8}{21}$. 31. $\frac{11}{50}$, $\frac{22}{25}$, $\frac{275}{2}$.

32. $3\frac{361}{990}$. 34. Тізбектес екі санның квадраттарының қосындысын $2n(n+1)+1$ түріне келтіріңдер және екі тізбектес бүтін сандардың көбейтіндісі $n(n+1)$ -дің 2-ге бөлінетінін ескеріңдер. 35. 1575 қызыл және 1995 көк шар. Жауапты таңдағанда, көк шардың саны $5 \cdot 7 \cdot 19$ көбейтіндісіне еселі болу керектігін ескеріңдер. 36. а) $-3,2121121112\dots$, $1,234567891011\dots$. 37. в) $\approx 10,900$. 39. а) Шексіз көп. 40. а), б) – дұрыс тұжырымдар. 41. Болады. 42. а) Болады, себебі $c = 2m$, мұндағы c – гипотенуза, m – оған жүргізілген медиана. ә) II-суретте бейнеленген шаршының ауданын екі тәсілмен өрнектеңдер: $(a+b)^2$ және $(2a)^2 + 2ab$. $b^2 = 3a^2$ теңдігін алып, $\frac{b}{a}$ қатынасын рационал санмен өрнектеуге болмайтынын дәлелдендер. 43. б) – ақиқат теңдік. 45. $\approx 0,12$. 46. а) $\approx 1,0 \cdot 10^3$; ә) $\approx 1,2 \cdot 10^{-6}$. 47. (615 ± 5) км. 48. ≈ 164 кг. 49. Сан осінде екі нүктенің арақашықтығын қалай көрсететінін қолданыңдар. 50. а) 1; ә) -8 . 51. а) $(-8; 2)$; ә) $(-\infty; -16] \cup [4; +\infty)$; б) $[0; 8]$; в) $(-\infty; +\infty)$. 52. в) $\pm \frac{5}{2}$. 53. Егер \overline{ab} берілген сан болса, онда $a - b = 1$ немесе $a - b = 4$. 54. а) $[-3; -2]$; ә) $(0,5; +\infty)$. 55. а) 164 см және 200 см; ә) 21 %-ға. 56. в) Түбірі жоқ. 57. Мағынасы бар өрнектер: а), б), в), ғ), д). 61. б) 13; в) -15 . 62. а) $[-3; +\infty)$; ә) $(-\infty; 12]$; б) $(-\infty; -3]$; в) $[1,75; +\infty)$. 63. Барлығы 7 сан. 64. 1936 және 2025. 65. в) 40; г) 49,9; д) 1,5; е) -5 . 66. Барлығы 13 сан. 67. 978. 68. а) 0,0001; б) 21. 69. а) $\sqrt{3} \approx 1,7$; $\sqrt{5} \approx 2,2$. 70. ә), в), ғ). 71. а) 4; ә) 3. 73. а) 3,5; б) 0,55. 74. а) $\approx 8,2$ см; ә) $\approx 5,1$ см; б) $\approx 1,9$ дм; в) $\approx 2,7$ дм. 75. а) 28; ә) 9; б) -18 ; в) 12; г) 5; ғ) 8. 76. ғ) $\pm 2\frac{3}{11}$; д) $\pm\sqrt{6}$; е) $\pm\sqrt{15}$. 77. б) $(-\infty; \sqrt{7}]$; в) $[-8; 8]$; г) $(-\infty; -9] \cup [9; +\infty)$; ғ) $x = 10$. 78. 2. 79. 120. 80. $\approx 5,9\%$. 81. а) $(\sqrt{17} - b)(\sqrt{17} + b)$; б) $(c\sqrt{2} - \sqrt{3})(c\sqrt{2} + \sqrt{3})$. 82. б) -2 ; в) $1 + \sqrt{2}$. 83. а) $\frac{5}{6}$; ә) $\frac{4}{5}$; б) $\frac{1}{4}$; в) 3. 84. а) 16; в) 2. 85. а) $a = 1$; ә), б) $a \in \mathbb{R}$; в) $(-\infty; 1]$; г) $a = 2$; ғ) a -ның ондай мәні жоқ. 86. а) 2, 3, 4; ә) 3, 4, 5, 6, 7; 18, 19, 20, 21, 22; 43, 44, 45, 46, 47. 87. $317^2 = 100\,489$. 88. а) 2,5%; ә) 20 %-ға. 89. Бес тізбектес натурал сандарды $n-2, n-1, n, n+1, n+2$ түрінде белгілеңдер. Осы сандардың квадраттарының қосындысын ықшамдап, $5(n^2 + 2)$ алыңдар. $(n^2 + 2)$

көбейткіші қандай санға аяқталатынын анықтап, $\sqrt{5(n^2+2)}$ өрнегінің мәні туралы қорытынды жасаңдар. **90.** а) 27; в) 2,5; 0; 22,5. **91.** а) Мүмкін емес; ә) үш: ± 1 және 0. **92.** а) $0,5|b|$; б) $7a^8$; г) $-6a$; д) $-1,6b^5$. **94.** а) $\sqrt{2} - 1$; б) $x - 4$; г) $-x - 2$. **95.** а) $(-4; 4)$; ә) $(-\infty; 7] \cup [7; +\infty)$. **96.** а) 7,7; в) 8; г) 3,4. **97.** а) 48; в) 105; г) 195. **98.** 1600 °C, 3422 °C, 5555 °C. **99.** а) $60xy$; ә) $-540xy$; б) $90x^4y^4$; в) $252x^6y^8$. **102.** а) $-x^3$; ә) x^3 . **103.** а) Болмайды; ә), б), в) – болады. **104.** а) $\approx 0,83$; ә) $\approx 1,24$; б) $\approx 4,96$; в) $\approx 12,4$. **106.** а) $\sqrt{(49 \cdot 10)^{-2}}$; в) $\sqrt{13} + \sqrt{12}$; г) $\sqrt{8} - \sqrt{18}$. **107.** а), ә) – дұрыс. **109.** а) $2\sqrt{2}$; ә) $2\sqrt{2} - 4$; б) -5 және 7; в) -8 және 12. **110.** $7\sqrt{2}$ см және $14\sqrt{2}$ см. **111.** $\approx 3,16$. **112.** -7 . **113.** а), ә), в), г), г). **114.** а) 28,5; ә) 10,65; б) 7,75; в) 2,5; г) 7; г) 17. **115.** а) 4; ә) $\frac{1}{9}$; б) 0 және 9; в) 4. **116.** 98. **117.** а) 1; ә) 2; б) $-\sqrt{5}$; в) 5. **118.** а) $\sqrt{13} + \sqrt{2}$; ә) $\sqrt{11} - \sqrt{3}$; б) $\sqrt{6} - 1$; в) $\sqrt{2} + 1$. **119.** а), б) – дұрыс; ә), в) – дұрыс емес. **120.** а) $1 + \sqrt{5}$; ә) $1 + 2\sqrt{3}$; б) $2 - \sqrt{3}$; в) $3 - \sqrt{3}$. **121.** а) $(-2; 2)$; ә) $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$. **122.** Теңсіздіктің екі жағын $\sqrt{5}$ -ке көбейтіндер. **123.** а) 15; ә) -5 ; б) 18; в) 54. **124.** а) $376^2 = 141\,376$; ә) $625^2 = 390\,625$. **125.** 8 литр. **126.** 6 және 2. **127.** а) $4,5 \cdot 10^5$; ә) $2,8 \cdot 10^{-3}$. **128.** а) $\frac{6\sqrt{2}}{11}$; ә) $\frac{4\sqrt{3}}{15}$; б) $\frac{9\sqrt{5}}{25}$; в) $\frac{7\sqrt{6}}{36}$. **129.** а) $\sqrt{7}$; ә) $-\sqrt{2}$; б) $-\sqrt{5}$; в) $\sqrt{3}$. **130.** а) $\sqrt{4,5} > \sqrt{4,375}$; б) $-\sqrt{12} < -\sqrt{11,5}$. **131.** а) $0,2\sqrt{7} < \frac{1}{3}\sqrt{7,2} < 0,6\sqrt{5} < \frac{3}{4}\sqrt{7,2}$; ә) $-0,3\sqrt{1,8} < -1,2\sqrt{0,1} < -2,3\sqrt{0,02} < -0,2\sqrt{2,5}$. **132.** б) $12y^3\sqrt{y}$; в) $-9x\sqrt{-x}$. **133.** а) $\sqrt{x+1}$; ә) $-\sqrt{y^4+y^2}$; б) $\sqrt{a-2}$; в) $-\sqrt{b-4}$. **134.** а) 0; ә) -27 ; б) 5; в) -4 . **135.** а) 5 см; ә) $\sqrt{\frac{Sm}{n}}$, $\sqrt{\frac{Sn}{m}}$. **136.** а) $2\sqrt{5}$; ә) $\sqrt{10}$; б) 21; в) 4. **138.** а) Бір жұбы: 4 және 5; ә) үш жұбы: 12 және 13, 24 және 25, 40 және 41. **139.** а) $2,5\sqrt{b}$; в) $\frac{-n\sqrt{5}}{10}$; г) $\frac{14+5\sqrt{2}}{73}$. **140.** а) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; ә) $\frac{\sqrt{10}}{2}$; б) $-\frac{\sqrt{15}}{5}$; в) $-\frac{\sqrt{35}}{5}$; г) $-\frac{\sqrt{xy}}{y}$; г) $\frac{5\sqrt{xy}-y}{y}$. **141.** а) 5; ә) -34 . **142.** а) 1; ә) 2. **143.** а) $(-\infty; 0)$; ә) $(-\infty; +\infty)$. **144.** а) 96; ә) 0. **145.** 140 кг және 70 кг. **146.** в) $\frac{2\sqrt{3}-3}{3}$; г) $2 - \sqrt{3}$; г) $2\sqrt{2} + 1$; д) $4 + \sqrt{5}$; е) $4\sqrt{15} + 6\sqrt{6}$.

147. а) 80; ә) 63; б) 1; в) 3; г) $-2\sqrt{2}$; ғ) $-3\sqrt{3}$. 148. а) $b\sqrt{b}$; ә) $\sqrt{y}(y-1)$; б) $x+\sqrt{3}$; в) $\frac{1}{a-\sqrt{7}}$; г) $b^2+b\sqrt{11}+11$; ғ) $(a+\sqrt{5})^2$. 149. а) 33; ә) 8; б) -13; в) 1. 150. а) $\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}}$; ә) $\frac{1}{2(\sqrt{x}-2)}$; б) $\frac{5}{1-3\sqrt{x}}$; в) $\frac{5}{1-\sqrt{x}}$. 151. а) $|\frac{3}{x}+1|$; ә) $|2+\frac{5}{y}|$; б) $4+x^2$; в) $6+y^2$. 152. 49, 64, 81. 153. а) $6-\sqrt{5}$; ә) $3+\sqrt{2}$. 154. а) Егер тіктөртбұрыш қабырғасы $\sqrt{5}$ м-ге тең шаршы болса; ә) 1386 м. 155. а) мен ә) теңсіздіктерінің оң және сол жақтарын квадраттаңдар. б) теңсіздігінде жақшаларды ашып, шыққан теңсіздіктің екі жағын квадраттаңдар. 157. А, С, D. 159. а), б) – екі; ә) ортақ нүктесі жоқ. 160. а) (0,25; 0,5); ә) (1; 1). 162. а) (1; $+\infty$); ә) ($-\infty$; -0,1); б) [41; $+\infty$); в) ($-\infty$; 43]; г) ($-\infty$; 0) \cup (0; $+\infty$); ғ) ($-\infty$; $+\infty$). 163. в) $[\sqrt{5}; \sqrt{7}]$. 166. а) -2; ә) -4; б) 3; в) $\pm\frac{1}{2}$. 169. а) $\sqrt{2}-1$; ә) $2+\sqrt{3}$. 170. а) [2; $+\infty$); ә) [-6; 2]; б) ($-\infty$; $+\infty$). 173. а) $\sqrt{x} = x + \frac{1}{2}$ теңдеуінің түбірі болмайтынын анықтаңдар. Ол үшін оның сол және оң жақтарын квадраттаңдар. ә) а) тапсырмасы сияқты. 174. а) [0; 3); ә) [-4; 4]; б) (0; 1); в) [1; $+\infty$). 175. 65 см. Ұл мен қыздың іздері дәл түсетін кесіндінің ұзындығына тең санның бөлгіштерін табыңдар. 176. а) (2,5; 4); ә) (-2; 6), (2; -6); б) (15; 30). 179. а) 65; ә) 320; б) 15. 180. г) $5\sqrt{7}-12$; ғ) $25-4\sqrt{6}$. 181. «Кері жорып дәлелдеу» тәсілін пайдаланыңдар. 182. г) -1; ғ) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$; д) [-11; 11]; е) ($-\infty$; $+\infty$). 183. б) $\frac{a\sqrt{2a}}{|b|}$; в) $(1-x)\sqrt{2}$. 184. г) $\sqrt{4x}$; ғ) $-\sqrt{-4x}$. 186. а) -29; 21; ә) -13; 19; б) 7; в) түбірі жоқ. 189. а) Жоқ; ә) ақиқат. 190. а) $2a$; ә) $10-2b$; б) 1; в) 15. 191. а) 44; ә) $\pm\sqrt{17}$; б) 2; в) 3. 192. $y = (\sqrt{3} - \sqrt{2})x$. 193. а) [2; $+\infty$); ә) [0; 2). 194. а) $\sqrt{a} + \sqrt{b}$; ә) $2\sqrt{2a}$; б) $\frac{\sqrt{b} + \sqrt{a}}{\sqrt{ab}}$; в) $\frac{\sqrt{ab}}{b-a}$. 195. а), ә). 196. а), ә), в). 197. а), ә). 198. а), б), в). 200. а), ә), б) – дұрыс. 201. $10\sqrt{2}-10$; $8\sqrt{2}-10$. 202. а) 14; ә) 6; б) $2\sqrt{2}$; в) 8. в) тапсырмасында бірінші түбірге $\sqrt{2}$ көбейткішін енгізіп, шыққан түбір таңбасының ішіндегі өрнекті екімүшенің квадраты түріне келтіріңдер. 203. Ариф-

метикалық квадрат түбірдің анықтамасын және $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ формуласын пайдаланындар. **204.** 1А) Көбейткішті түбір таңбасының ішіне енгізіңдер; 2В) 1; 3В) 1 см^2 ; 5С) 1) 16; 2) $[0; 16]$; 3) $(16; +\infty)$. **205.** а), г), ғ). **208.** б) 0; -5,5; в) 0; $\frac{4}{25}$; г) 0; 5; ғ) 0; $\frac{3}{2}$. **209.** а) -3,2; -0,8; ә) 14; 26; б) түбірі жоқ; в) ± 2 ; г) $\pm \sqrt{7}$; ғ) ± 3 ; ± 1 . **211.** а) -5; ә) $\pm \frac{1}{3}$. **212.** а) 5; ә) 0 немесе 2. **213.** а) 5 см; ә) 14 см. **214.** а) 0 немесе 0,4; ә) 8 және 10. **215.** а) $(-\infty; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; +\infty)$; ә) $(-\infty; -4) \cup (-4; 4) \cup (4; +\infty)$; б) $(-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$; в) $(-\infty; -11) \cup (-11; 0) \cup (0; +\infty)$. **216.** а) ± 3 ; ә) ± 4 ; б) 3; в) 0. **218.** а) -4; 0; 4; в) 0; г) -4; 4; ғ) түбірі жоқ. **219.** а) Түбірі жоқ; ә) ± 9 ; б) 0; в) -6; 0; 6. **221.** а) $\pm \frac{2}{3}$; ә) ± 5 ; б) -39,2; в) 27,5. **222.** а) -3; 5; ә) -3; -1; б) -1; 9; в) -5; -1; г) -2; 1; ғ) -2; 5. **223.** а) 1) 6; 2) -23; ә) 1) 5; 2) 1. **224.** 36. **225.** а) 1; 2,68; ә) -0,3; 8,6. **228.** Түбірлері бар теңдеулер а), ә), в), г), ғ). **229.** а), б) - 2 түбір; ә), ғ) - 1 түбір; в), г) - түбірі жоқ. **230.** а) -13; 10; ә), б) - түбірі жоқ; в) $-\frac{1}{2}$; $\frac{3}{2}$; г) $-\frac{5}{6}$; $\frac{3}{2}$; ғ) $-\frac{4}{3}$; $\frac{5}{2}$. **231.** а) $-\frac{4}{3}$ және 1; ә) $-\frac{5}{2}$ және 2; б) $\frac{1}{3}$ және 3; в) $-\frac{1}{5}$ және 2; г) $-\frac{2}{3}$ және $\frac{1}{4}$; ғ) $\frac{2}{17}$ және 1. **232.** а) $\approx -5,4$, $\approx 0,4$; ә) $\approx -5,8$, $\approx 0,3$. **233.** 99. **234.** $5 + 8$. **236.** а) $(-\infty; 2,25)$; ә) $(-\infty; 1,125)$; б) $(-\infty; -\sqrt{15}) \cup (\sqrt{15}; +\infty)$. **237.** а) ± 8 ; ә) ± 1 және 0; б) 0 және 6. **238.** а) -3; -4; ә) $-\frac{1}{2}$; 3; б) -1; $\frac{4}{3}$; в) -1; $\frac{1}{6}$. **239.** а) $1 - \sqrt{5}$; -1; ә) -2; $2 + \sqrt{7}$; б) $3 - \sqrt{2}$; 1; в) -4; $2 - \sqrt{3}$. **240.** а) 4; б) $-\frac{2}{3}$; $-\frac{1}{3}$; б) 4; 24; в) $-\frac{3}{2}$; 1. **241.** а) 12 және 15; ә) -15 және -22 немесе 22 және 15. **242.** а) -6 және 1,5; ә) -12 және 6; б) -1,6 және 4; в) 1 және 13. **243.** а) 1; ә) -13 және 7; б) 0,5 және 3; в) -58 және -2. **244.** а) 11; 12; ә) $\pm \frac{\sqrt{6}}{5}$; б) 1,5; 5; в) 15; г) 1; ғ) -9. **245.** а) -5; -4; ә) 1; 4; б) $-\frac{3}{2}$; -1; в) -9; -6; -2; 1. **246.** а) 1; 2; ә) -3; $1 + \sqrt{2}$; б) -6; 1; 2; 3; в) $-1 \pm \sqrt{2}$; 1; г) -1; 0,4; ғ) -2; $-\frac{4}{3}$; $-\frac{2}{3}$; 4. **247.** а) 40 м және 70 м; ә) 60 м және 120 м. **248.** а) $-4k$, k ; ә) k , $9k$; б) $-8t$ және t ; в) t және $5t$. **249.** а) 1 және $\frac{2}{a}$; ә) -1 және $\frac{a-2}{a+2}$. **250.** а) 8;

- ә) 1; б) ± 4 ; в) $\pm \frac{1}{3}$. **251.** а) -5 ; ә) -8 ; б) 6 ; в) -6 . **252.** 18. **253.** $-\frac{1}{3}$ немесе 3 . $\frac{a}{b}$ -ны табу керек болсын. Есептің шарты бойынша пропорция құрып және $a^2 - b^2$ өрнегін ab -ға бөліп, мынаны аламыз: $\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{8}{3}$. Егер $\frac{a}{b} = x$ деп белгілесек, онда $\frac{b}{a} = \frac{1}{x}$ болады. Бұдан $x - \frac{1}{x} = \frac{8}{3}$. Осы теңдеудің екі жағын $3x$ -қа көбейтіп, квадрат теңдеуді шешіндер.
- 258.** а) $x^2 - 5 = 0$; б) $x^2 - 4x + 1 = 0$. **263.** а) 1 және 9 ; ә) -5 және 7 . **264.** а) $2 - \sqrt{3}$; $c = 1$; ә) 15 . **265.** Мысалы, а) $8y^2 - 6y + 1 = 0$; ә) $y^2 + 13y - 30 = 0$. **266.** ә) -13 және -3 немесе 3 және 13 . **267.** а) 7 дм, 12 дм; ә) 9 см, 15 см. **268.** а) $-\frac{27}{4}$; ә) $-\frac{13}{16}$; б) -10 ; в) $-12,5$. **269.** а) 53 ; ә) $47,5$. **270.** 1) а) $\frac{7}{12}$; ә) 25 ; б) 300 ; в) 337 ; 2) а) $-\frac{7}{6}$; ә) $6\frac{1}{4}$; б) $18\frac{3}{4}$; в) $21\frac{1}{16}$. **271.** б) -1 және $1,5$; в) -4 және $\frac{1}{3}$; г) $1,5$; ғ) $-\frac{1}{3}$; 2. **272.** б) $-1,5$ және 2 ; в) -4 және $\frac{2}{3}$; г) $-\frac{3}{2}$; $\frac{1}{3}$; ғ) $-3,5$. **273.** б) $(2x - 1)(x - 3)$; в) $(4x + 3)(x + 2)$; г) $(3x - 2)^2$. **274.** Мысалы, б) $x^2 + x - 42 = 0$; г) $x^2 - (a + 1)x + a = 0$; ғ) $x^2 + ax - 6a^2 = 0$. **275.** а) $\frac{x}{x - 12}$; ә) $\frac{2 - x}{x + 1}$; б) $\frac{x + 2}{x - 4}$; в) $\frac{x - 5}{x + 5}$; г) $\frac{2x - 1}{4x - 1}$; ғ) $\frac{3x + 2}{3x - 2}$. **276.** а) $\frac{1}{x - 2}$, мұндағы $x \in (-\infty; 2) \cup (2; 5) \cup (5; +\infty)$; б) $\frac{1}{x - 1}$, мұндағы $x \in (-\infty; -2,5) \cup (-2,5; 1) \cup (1; +\infty)$. **277.** а) $\frac{2}{3}$ немесе $\frac{6}{19}$; ә) $\frac{5}{4}$. **278.** а) $\frac{2 - 7a}{2a - 3}$; ә) $\frac{b^2 - 2b}{b + 5}$; б) $\frac{-4}{b}$; в) $\frac{-2}{b}$. **279.** а) $\frac{1}{a - 2}$; ә) $-\frac{1}{a + 6}$; б) $\frac{1}{b - 3}$; ғ) $\frac{m + 4}{m - 3}$. **283.** а) $(x - 2a)(x - 3a)$; б) $(x + 6b)(x - b)$; г) $(2x - a)(3x + a)$. **284.** а) $-\frac{x + 1}{3x + 1}$; ә) $\frac{2a - 1}{a^2 - 3a + 9}$; б) $2a - 1$; в) $\frac{x - 14a}{x - 2a + 3}$. **285.** Екімүшенің квадратын бөліп шығарындар. а) $x = -2$ болғанда; ә) $x = 4$; б) $x = -\frac{7}{5}$; в) $x = \frac{3}{4}$. **286.** а) -16 ; ә) 3 ; б) $-\frac{9}{8}$; в) $\frac{5}{4}$. **287.** Бар болады: $4, 6, 8$. **288.** 64 . **289.** 10 немесе 60 . **290.** 16 немесе 48 маймыл. **291.** 13 . **292.** $25 \text{ м} \times 15 \text{ м}$. **293.** 40 см , 32 см . **294.** 26 қатар. **295.** а) 8 ардагер; ә) 9 оқушы. **296.** 10 нүкте.

297. $\approx 5,4$ см. **298.** 1 м. **299.** 10 %. **300.** 35 кг және 45 кг. **301.** а), б), в) – екі; ә) түбірі жоқ. **302.** а) ± 1 ; ± 4 ; ә) $\pm \sqrt{5}$; $\pm \sqrt{6}$; б) ± 2 ; в) ± 1 ; г) -1 ; -2 ; Ғ) $\frac{1}{3}$;
1. 303. а) $-7, -6, -4, -3$; ә) 1; 7; б) $-2, -1,5, 0,5$; 1; в) $-\frac{1}{3}$; **1. 304.** 2) а) p -ның ондай мәндері жоқ; ә) мысалы, $-56, -11$; б) 9; 24. **305.** б) $x^4 - 11x^2 + 18 = 0$. **306.** а), ә), б), в) – 0. **307.** а) ± 1 ; ± 3 ; ә) ± 2 ; б) $\pm \sqrt{10}$; в) $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\pm \frac{\sqrt{2}}{4}$.
308. а) 9; 10; 14; 15; ә) $-5, 0$; б) $\pm \sqrt{7}$; $\pm \sqrt{5}$; ± 1 ; в) $1 \pm \sqrt{3}$; $1 \pm \sqrt{2}$; 1. **309.** а) 15 немесе 20 қатар; ә) 12 немесе 15. **310.** а) ± 3 ; ә) ± 3 ; б) ± 1 ; в) $\pm 0,5$; г) $-3, -1,5, -1, \frac{1}{2}$. **311.** 55. **312.** а) ± 5 ; ә) ± 1 ; б) ± 1 ; $\pm \frac{2}{3}$; в) ± 2 . **313.** 8 және 18. **314.** а) $-8, -3, -1, 4$; ә) $-4, 10$; б) $-5, -4, -1, 0$; г) $\frac{1}{4}, 3\frac{1}{4}$. **315.** а) 3; 4; 6; 7; ә) $\pm 3, \pm 1$; б) ± 1 ; в) $\pm \sqrt{3}$. **316.** а) 8; ә) 4; б) 2; 4; в) 2; 6. **317.** а) 81; ә) 25; б) $1\frac{7}{9}$; в) $\frac{25}{49}$. **318.** а) 13; ә) 10; 18; б) 57; в) 8. **319.** а) $12 \cdot 25$ немесе $(-12) \cdot (-25)$. **320.** а) $-1, 25, 12 \pm \sqrt{145}$; ә) $-1, 4$; б) $\frac{-5 \pm \sqrt{31}}{2}$; $-4, -1$; в) -2 ;
1. 321. а) $\pm 1, 0$; ә) 2; 3; б) 1; в) 2; 4; $3 \pm \sqrt{7}$. **322.** а) -2 ; ә) $\frac{-1 \pm \sqrt{37}}{2}$; б) 1; 7; $4 \pm 3\sqrt{2}$; в) $-1, -0,5, 2, 2,5$. **323.** а) $-1, -2$; ә) $\frac{5 \pm 3\sqrt{5}}{2}$; 2; 3; б) $-4 \pm 2\sqrt{2}$; в) $7 \pm \sqrt{34}$. **324.** а) $-4, 2$; ә) 2; $-2 \pm \sqrt{8}$; б) 3; $9 - 6\sqrt{3}$; в) $-6 \pm 2\sqrt{2}$; $-2, 14$.
325. а) 8; ә) 1; б) 2; в) 1. **326.** а) 25; ә) 51 немесе 15. **327.** а) 0; ә) 0; 7; б) 8; в) $-0,5$. **328.** а) -1 ; ә) -2 ; б) -4 ; в) -5 . **329.** а) -1 ; ә) $-3, 8$; б) $-6, 3$; в) ± 3 ; г) 1; 9; Ғ) 1; 8. **330.** $-\frac{2}{5}$; 2. **332.** а) $\frac{5}{9}$ және $\frac{1}{3}$; ә) $\frac{8}{15}$ және $\frac{2}{9}$.
333. а) $-1, 1\frac{1}{3}$; ә) -2 . **334.** а) ± 6 ; ә) $-1, 0,5$; б) 2; в) 13; г) $2 \pm \sqrt{7}$; Ғ) 5.
335. а) -7 ; ә) 9; б) $1\frac{1}{4}$; в) $-1,5$; г) 0; Ғ) -3 ; 1. **336.** а) 6; ә) 12. **337.** а) 0; ә) -4 ; б) $-1, 1,5$; в) $\pm 1, \pm \sqrt{3}$; г) 5; Ғ) 4. **338.** а) 10 км/сағ, 12 км/сағ; ә) 160 км/сағ, 200 км/сағ. **339.** а) 5; ә) 0; б) 3; в) -8 . **340.** а) 3; ә) -6 ; б) $-17, 0$; в) 4; 5; 6-дан басқа кез келген сан. **341.** а) $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$; $3 \pm \sqrt{10}$; ә) $\frac{1}{2}$; 1; 2; б) ± 2 ; в) ± 3 ; $\pm \sqrt{4,2}$. **342.** а) $\sqrt{2}$; $\sqrt{2} + 2$ немесе $-\sqrt{2}$; $-\sqrt{2} + 2$; ә) 27 және 48.

343. а) -2 ; -12 ; ә) $1,8$; б) 0 ; в) -8 ; 0 . 344. а) -2 ; -1 ; ә) $6 \pm 2\sqrt{6}$.
345. $11^3 = 1331$. 346. а) 5 ; ә) 5 . 347. $\frac{3}{8}$. 348. 18 т/га, 20 т/га. 349. 48 және 20 тетік. 350. 40% , 25% . 351. 18 км/сағ немесе 9 км/сағ.
352. а) 36 күн; ә) 10 т/сағ, 18 т/сағ. 353. а) 12 км/сағ, 15 км/сағ; ә) 100 км/сағ, 80 км/сағ. 354. 25 кг; 355. а) 15 және 10 күн; ә) 36 және 45 күн. 356. а) 12 км/сағ; ә) 2 км/сағ. 357. а) $\frac{\sqrt{d^2 + v^2 t^2} - d}{t}$ км/сағ; ә) $\frac{\sqrt{t^2 v^2 + 4tvs} - tv}{2t}$ км/сағ. 358. 4 немесе 6 сөреге. 359. а) $p \in (-\infty; 2\frac{1}{8})$; ә) $p \in (1, 1; +\infty)$; б) $p \in (-\frac{5}{12}; +\infty)$; в) $p \in (-\infty; 2)$. 363. 1225 . 364. б) -4 және $0, (3)$. 365. а) $(3a + 2)(5a + 1)$; ә) $(3 - b)(3b + 2)$; б) $(2k - 1)(2k + 1)(k - 2)(k + 2)$; в) $(t - 1)(t + 1)(1 - 3t)(1 + 3t)$. 366. а) $-\frac{b + 10}{b + 9}$; ә) $-\frac{a + 5}{a + 2}$; б) $\frac{c^2 - 1}{c^2 - 2}$; в) $\frac{n^2 + 1}{n^2 - 9}$.
367. а) ± 8 ; ± 5 ; ә) ± 3 ; б) 1 ; $1 + \sqrt{2}$; в) ± 5 ; -1 . 368. а) 2 ; $4,5$; $5,5$; 8 ; ә) $-3\frac{1}{3}$; $-4\frac{2}{3}$; б) 5 ; $6,5$; $7,5$; 9 ; в) -10 ; -6 . 369. а) Бір; ә) түбірі жоқ; б) екі; в) екі. 370. а) -6 ; 2 ; ә) -2 ; 1 ; 2 ; 4 ; б) -9 ; 1 ; в) -4 ; 2 ; 4 ; 8 . 371. а) ± 3 ; $0,5$; ә) ± 4 ; -3 ; б) ± 4 ; $1 \pm \sqrt{17}$; в) -5 ; $2 \pm 2\sqrt{6}$. 372. а) 2 ; 3 ; 4 ; ә) 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; б) 2 ; 3 ; в) $\frac{9 \pm \sqrt{5}}{2}$. 373. Бар болады: а) $n = 10$; ә) $n = 7$. 374. 16 . 375. 900 см².
376. а) -2 ; ә) 0 ; 1 ; б) $-1\frac{1}{3}$; 3 ; в) $-\frac{5}{8}$; 2 ; г) 2 ; ғ) -4 . 377. а) 3 күн және 5 күн; ә) 9 күнде 162 тетік. 378. 1А) 1 түбірі жоқ; $2) -\frac{1}{5}$; 5 ; 2В) $\frac{x - 9}{x + 8}$; 3В) -8 ; 4С) 6 және 5 тетік. 380. а) Егер k -ның мәні 3 -ке тең емес кез келген сан болса; ә) $k = 3$ болғанда. 381. а) $1) -2$; $2) ең кіші мәні жоқ$; ә) $1) ең үлкен мәні жоқ$; $2) 3$. 382. Берілген функцияның графигіне A, B, D нүктелері тиісті. 383. Тиісті. 384. $y(1) = -7$, $y(-2) = 18$, $y(3) = -20\frac{1}{3}$.
385. а) -2 және 4 ; ә) -3 және 5 . 387. $S(x) = 6x^2$; а) $73,5$ дм²; ә) $3\sqrt{2}$ см. 389. а) $a > 0$ болғанда; ә) $a \leq 0$ болғанда. 390. а) $f(-1) = c$; б) $f(c - 1) = c^2$. 391. а) $1) (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$; $2) (-2; 2)$. 392. а) $a = 0,5$, $c = -3$; ә) $a = -3$, $c = 0,5$. 393. 1) а) $E(y) = (-\infty; 4]$; ә) $x \in (-\infty; 0]$ аралығында өседі, $x \in [0; +\infty)$ аралығында кемиді; б) -4 және 4 ; в) $x \in [-4; 4]$ аралығында $y \geq 0$,

$x \in (-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$ аралығында $y < 0$. **394.** Ең үлкені – Нариман, ең кішісі – Жанар. **395.** а) $y = \frac{1}{4}x^2 - 4$; б) $y = -2x^2 + 3$. **396.** а) $(-2; 2)$; ә) $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$. **398.** а) ± 5 ; ә) $\pm 5\sqrt{5}$; б) -15 және 3 ; в) -5 және 8 . **399.** а) $(-4; -11)$ және $(2; 1)$; ә) $(-1; -34)$ және $(8; 92)$. **401.** а) График параболалардың екі бөлігінен тұрады: $x \in [0; +\infty)$ аралығында $y = x^2 - 2$ және $x \in (-\infty; 0)$ аралығында $y = -x^2 - 2$; б) 0 саны анықталу облысына тиісті емес, сондықтан $x < 0$ болғанда $y = x^2 - 1$ және $x > 0$ болғанда $y = x^2 + 1$ параболаларының бөліктерінен тұратын графикте $(0; -1)$ және $(0; 1)$ нүктелері болмайды, оларды боямай белгілейді; в) $D(y) = (-\infty; 1]$, графигі $y = x^2 - 2$ параболасының бөлігі болады. **402.** а) 6 см, 8 см, 10 см; ә) 27 см, 36 см, 45 см. **403.** а) $S(r) = 100 - \pi r^2$, $E(S) = [100 - 9\pi; 100]$; ә) $S(x) = 25\pi - x^2$, $E(S) = [25\pi - 4; 25\pi)$. **406.** а) 1) $y = 4x^2 + 3$; 2) $y = 4x^2 - 4$; ә) 1) $y = 4(x - 2)^2$; 2) $y = 4(x + 5)^2$. **408.** Тізбектің ортаңғы мүшелерінің көбейтіндісі оның шеткі мүшелерінің көбейтіндісінен артық. **410.** а) $y = -\frac{3}{4}(x + 4)^2$; ә) $y = \frac{5}{4}(x - 2)^2$. **412.** ә) 1) $(-2; 0)$; 2) $x = -2$; 3) $(-1; -1)$ және $(-3; -1)$; 4) $(0; -4)$ және $(-4; -4)$. **413.** а) $-\frac{1}{6}$; ә) $\frac{5}{121}$. **414.** а) $(-14; 49)$ және $(0; 49)$; ә) $(-2; 8)$. **416.** а) $4,25$ м; ә) бола алмайды. **417.** а) ± 3 ; ә) 5 ; б) -5 және -3 ; в) $-\frac{1}{2}$ және 0 . **418.** $m = 1$ болғанда, $(1; 0)$ және $(3; 4)$. **419.** а) $[0; 4]$; ә) $[-4; -2]$; б) $(-\infty; -4] \cup [0; +\infty)$; в) $(-\infty; 1] \cup [5; +\infty)$. **420.** а) $y = -3x^2 + 5x - 4$; ә) $y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2$. **421.** $f(p) = 100\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 - 100$. $16\ 640$ тг. **422.** а) ≈ 51 м; ә) ≈ 36 м. **423.** \overline{PAK} санының 37 -ге бөлінетінін ескере отырып: $100P + \overline{AK} = 37 \cdot n$ деп жазуға болады. Осы теңдіктен \overline{AK} санын өрнектерден және оны $\overline{AKP} = 10\overline{AK} + P$ жіктелуіне пайдаланындар. **426.** ә) және в). **428.** а) $p = -14$, $q = 57$; ә) $p = -4$, $q = 1$; б) $p = 8$, $q = 21$; в) $p = 4$, $q = 0$. **430.** а) $\approx 1,4$ м; ә) $0,6$ м және $1,1$ м. **435.** а) 2017 ; ә) 26 . **436.** $\frac{d^2 - c^2}{2}$. **437.** а) Графигі $(1; 7\frac{3}{4})$ және $(6; 4)$ нүктелерімен шектелген параболаның бөлігі болады; ә) графигі – ұштары $(-6; 3)$ және $(-2; -5)$ нүктелерінде болатын параболаның бөлігінен тұрады және $(-6; 3)$ нүктесі графикке тиісті емес. **440.** а) $[-4; 0]$; ә) $[2; 6]$; б) $(-\infty; 0] \cup$

$\cup [6; +\infty)$; в) $(-\infty; -2] \cup [0; +\infty)$. **441.** $y = -(x - 1)^2 + 3$. **442.** $a^2 + a + 4$ өрнегін екімүшенің квадратын бөліп шығарып, a -ның кез келген мәнінде $a^2 + a + 4 > 0$ болатынын анықтаңдар. **443.** Болады. **444.** а) $a - 1$; ә) $b - 1$. **447.** а) $[-4; +\infty)$; ә) $(-\infty; 2\frac{1}{4}]$; б) $[2; +\infty)$; в) $(-\infty; 35]$. **448.** а) $(\frac{1}{3}; -4)$, $(0; -3)$, $(-\frac{1}{3}; 0)$, $(1; 0)$; ә) $(1\frac{1}{2}; 16)$, $(0; 7)$, $(-\frac{1}{2}; 0)$, $(3\frac{1}{2}; 0)$; б) $(\frac{1}{4}; \frac{1}{72})$, $(0; -\frac{1}{9})$, $(\frac{1}{6}; 0)$, $(\frac{1}{3}; 0)$; в) $(\frac{1}{16}; -\frac{9}{32})$, $(0; -\frac{1}{4})$, $(-\frac{1}{8}; 0)$, $(\frac{1}{4}; 0)$. **450.** а) -31 ; ә) 10 . **451.** а) $y = x^2 - 8x + 12$; ә) $y = -\frac{1}{4}x^2 - x + 3$. **452.** а) 11 дм, 22 дм немесе 16 дм, 32 дм; ә) 11 дм, 33 дм. **453.** ә) және в) – өтеді. **454.** а) $y = 0,5x^2 - 2x + 1$; ә) $y = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}x + 3$. **455.** $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2\frac{1}{2}$. **457.** а) $y_{\text{ен кіші}} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{8} \approx 0,82$, функцияның ең үлкен мәні жоқ; ә) $y_{\text{ен үлк.}} = \frac{\sqrt{3}}{3} + 3 \approx 3,58$, функцияның ең кіші мәні жоқ; б) $y_{\text{ен кіші}} = -1 - \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx -2,15$, функцияның ең үлкен мәні жоқ; в) $y_{\text{ен үлк.}} = \frac{9\sqrt{2}}{4} + 4 \approx 7,18$, функцияның ең кіші мәні жоқ. **458.** Әр функцияның графигін салыңдар. а) $y_{\text{ен кіші}} = y(1) = -9$, $y_{\text{ен үлк.}} = y(-3) = y(5) = 7$; ә) $y_{\text{ен кіші}} = y(-3) = 0$, $y_{\text{ен үлк.}} = y(0) = 15$; б) $y_{\text{ен кіші}} = y(\frac{1}{2}) = -4$, $y_{\text{ен үлк.}} = y(1) = -3$; в) $y_{\text{ен кіші}} = y(6) = -8$, $y_{\text{ен үлк.}} = y(3) = 1$. **459.** а) 6 күнде; ә) күніне 15 бұйым. **460.** а) $y = 2x^2 - 4x - 6$ параболасының төбесі $(1; -8)$; ә) $y = -x^2 - x + 2$ параболасының төбесі $(-\frac{1}{2}; 2\frac{1}{4})$. **461.** 51 . **462.** а) $y_{\text{ен кіші}} = y(\frac{5}{2}) = -20\frac{1}{4}$; ә) $y_{\text{ен үлк.}} = y(12,5) = 6,25$. **464.** Түбірлерін біле отырып, $x^2 + px + q$ квадрат үшмүшені көбейткіштерге жіктендер. а) 4040000 ; ә) -4029 . **465.** а) 2288 ; ә) -12 . $4x^2 + bx + c = 4(x - 10)(x - 14)$ квадрат үшмүшенің көбейткіштерге жіктелуін пайдаланыңдар. **466.** $\approx 5,04\%$. **467.** $k = 6$ болғанда. **469.** k -ның -4 және $-2,5$ -тен басқа кез келген мәнінде. **470.** Берілген қатынас пен Виет теоремасын пайдаланып: а) $k = 5$; ә) $k = \pm 4$ табыңдар. **471.** Анықталу облысын ескеріп, функциялардың графиктерінде: а) $(-1; 2)$; ә) $(2; -1)$ нүктелері болмайды.

472. а) $\approx -3,5$; -1 ; $\approx 0,6$; ә) 1 ; $\approx 6,2$; б) $\pm \frac{1}{2}$; ± 1 . 473. а) 2,5 тонна; ә) 8 күн.
474. а) 1 ; ә) 2 . 476. а) $1009 + 1009$; ә) $\frac{t}{2} + \frac{t}{2}$. 477. а) 4 см, 4 см; ә) 0,3 м, 0,3 м. 478. а) Жеткілікті; ә) жоқ. 479. 1250 м^2 . 480. $\approx 0,64$. 481. 2 см. Пифагор теоремасын пайдаланындар. 482. 20. 483. а) $\approx 1,6$ с және $\approx 6,6$ с-тан кейін; ә) $\approx 4,1$ с. 484. а) Иә; ә) жоқ. 485. 1,4 минуттан кейін. Пифагор теоремасын пайдаланып, денелердің арақашықтығының квадратын өрнектеп, табылған функцияны ең кіші мәнге зерттеңдер.
486. Ең үлкен аудан $28 \frac{1}{8} \text{ см}^2$ -ге тең. 487. 5 дм және 5 дм. 488. а) Бар болады; ә) жоқ. 489. $p = 3$ болғанда. Виет теоремасын пайдаланындар. 490. 6,5 және 6,5. 491. Алмастыру енгізіңдер және квадрат үшмүшені көбейткіштерге жіктеу формуласын пайдаланындар. а) $(9^m - 2)(9^m + 1)$; ә) $(4 \cdot 25^n - 1)(25^n + 3)$. 492. 2,25. 493. $k = 2$ немесе $k = 6$ болғанда.
494. Бар болады: а) $-\frac{1}{15}$ және 3 ; ә) $-\frac{1}{4}$ және $\frac{1}{2}$. 495. а) $a = 1$, $m = -1$, $n = -4$; ә) $a = -1$, $m = -2$, $n = 9$. 496. в) Графикте $(0; 4)$ нүктесі жоқ. 499. 2 есе. 500. $y = x^2 - 2x + 3$. 502. а) -3 ; ә) -8 ; б) $a = -3$, $b = 6$, $c = 0$. 504. $n \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$ болғанда екі нүкте; $n = 1$ немесе $n = 2$ болғанда үш нүкте; $n \in (1; 2)$ болғанда төрт нүкте. 505. 3 және 7 секундтан кейін. 506. 1А) 2) және 4); 2В) $x = -3,5$; 3В) $x \in (-\infty; \frac{1}{4}]$ аралығында кемиді, $x \in [\frac{1}{4}; +\infty)$ аралығында өседі; 4В) $x \in (-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$ аралығында $y > 0$, $x \in (2; 4)$ аралығында $y < 0$; 5С) 5 м және 5 м. 509. 3,5. 510. ≈ 22 оқушы. 511. $\approx 35,8$ млн теңге. 512. ≈ 36 жас. 513. 67 %. 514. $\approx 131,86$ млн дол. 517. ә) 40; б) 48; 50; 49,2. 519. $\approx 0,58$; $\approx 0,76$. 520. а) ≈ 7 ; ә) $\approx 2,6$ мм сын. бағ. 521. а) 1 м^3 ; ә) $\approx 0,12 \text{ м}^3$. 522. а) ≈ 11 жыл; ә) ≈ 7 жыл. 523. 0,09. 524. ≈ 1 . 525. Жарнамасыз банктің стандартты ауытқуы көп. 526. $\approx 1,3$ см. 527. $\approx 846,6$ м. 528. а) 6; ә) 120 млрд теңге. 529. ә) 2. 532. ≈ 13 ц/га. 533. 16 грамм. 534. Бір ауысымда ≈ 334 тетік. 535. а) ≈ 23 ; ә) ≈ 1 . 537. а) ≈ 42 жас; ә) ≈ 464 ; б) ≈ 22 жас. 538. ≈ 2 жүз мың адам. 539. 828 метр. 540. 2А) 4; 5С) ≈ 6 минут. 543. а) $a \neq 1$ болғанда; ә) $a \neq 0$; б) $a \neq \pm 2$; в) $a \in R$. 545. а), ә), б) – жоқ; в) мәндес. 548. а) 1) Шешімі жоқ;

- 2) $(-\infty; +\infty)$; ә) 1) $(-4; 0)$; 2) $(-\infty; -4] \cup [0; +\infty)$. **549.** а) $(-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$; ә) $(-4; -2)$; б) $(-\infty; -5] \cup [3; +\infty)$; в) $[-1, 2; -1]$; г) $(-\infty; \frac{2}{3}) \cup (\frac{2}{3}; +\infty)$; Ғ) 1, 5.
- 550.** 14 күнде. Бірінші жұмысшының жұмыс өнімділігін x деп белгілеңдер. Сонда олардың жалпы жұмыс өнімділігінен екінші жұмысшының жұмыс өнімділігін табасыңдар: $\frac{4}{35} - x$. Жұмыс көлемін 1 деп алып, әрбір жұмысшының неше күн жұмыс істегенін біле отырып, теңдеу құрып шешіңдер. **551.** а) $(-\infty; -\frac{2}{3}) \cup (\frac{2}{3}; +\infty)$; ә) $(-\infty; 0) \cup (3, 5; +\infty)$; б) $(-4; \frac{1}{2})$; в) $(-\infty; 10) \cup (20; +\infty)$; г) шешімі жоқ; Ғ) $(-\infty; +\infty)$.
- 552.** а) $(-5; 5)$; ә) $[-10; 10]$; б) $(-\infty; -\sqrt{10}) \cup (\sqrt{10}; +\infty)$; в) $(-\infty; -\sqrt{26}] \cup [\sqrt{26}; +\infty)$; г) $[0; 1, 5]$; Ғ) $(-\infty; -3, 5) \cup (0; +\infty)$; д) $(-\infty; +\infty)$; е) $(-\infty; +\infty)$; ж) шешімі жоқ. **554.** а) Болмайды. **556.** а) $(-\infty; 1, 5) \cup (2; +\infty)$; ә) $(-\infty; +\infty)$.
- 557.** а) $(-\infty; +\infty)$; ә) 0; б) $(-\infty; +\infty)$; в) $[0, 4; 1]$. **558.** а) $(7; +\infty)$; ә) $(6; +\infty)$. **559.** а) 6; ә) 13. **560.** 10 км/сағ. **561.** а) $[2; 4]$; ә) $(-\infty; -2) \cup (4; +\infty)$.
- 562.** 50 млрд тонна. **563.** а) $[-1; 4, 5]$; ә) $[-7; -\frac{1}{4}]$; б) $(-\infty; 0] \cup [1\frac{3}{11}; +\infty)$; в) $(-\infty; -6] \cup [0; +\infty)$. **564.** а) $(-\infty; -1]$; ә) $(-\infty; -1, 5]$. **565.** а) $(-5; 6)$; ә) $(-\infty; -5) \cup (-5; +\infty)$. **566.** а), ә), б) – ақиқат; в) ақиқат емес. **568.** 83. **569.** а) $(-6; 2)$; ә) $(-2; 4)$. **570.** а) $p < 1$ болғанда $(-\infty; 1 - \sqrt{1-p}) \cup (1 + \sqrt{1-p}; +\infty)$; $p = 1$ болғанда $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$; $p > 1$ болғанда $(-\infty; +\infty)$; ә) $p \in (-\infty; -8) \cup (8; +\infty)$ болғанда $(\frac{-p - \sqrt{p^2 - 64}}{4}; \frac{-p + \sqrt{p^2 - 64}}{4})$; $p \in [-8; 8]$ болғанда шешімі жоқ. **571.** а) $(-1; 1)$; ә) $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$; б) шешімі жоқ; в) $(-\infty; +\infty)$.
- 572.** а) $(-1; 4)$; ә) $[1; 2]$; б) $(-\infty; -8) \cup (3; +\infty)$; в) $\frac{1}{4}$. **573.** а) $(-4; -1) \cup (3; +\infty)$; ә) $(-\infty; -3) \cup (5; 7)$; б) $(-\infty; -9) \cup (8; 10)$; в) $(-12; 6) \cup (11; +\infty)$. **574.** а) $(-\infty; -13] \cup [13; +\infty)$; ә) $[-15; 15]$; б) $[-3\frac{2}{3}; 3\frac{2}{3}]$; в) $[-7; 9]$. **575.** а) $(-\infty; -3] \cup [1; 2]$; ә) $[-3; -2] \cup [2; 3]$; б) $[-3; 0, 5] \cup [1; 2]$; в) $[-5; -4] \cup [1; +\infty) \cup \{-2\}$. **576.** 1,5 сағат. **577.** а) $-2; -1; 0; 1$; ә) 0. **578.** а) $(-\infty; 1] \cup [1, 2; +\infty)$; ә) $(-\infty; -4, 5] \cup [2; +\infty)$; б) $[3; +\infty)$; в) $(-\infty; -2]$. **579.** а) $(-\infty; -2] \cup [0; 2]$; ә) $(-\infty; -\frac{1}{3}] \cup \{0\} \cup [\frac{1}{3}; +\infty)$; б) $(-\infty; -9] \cup \{0\}$; в) $[-5; 0] \cup [5; +\infty)$; г) $[2; 3] \cup \{0\}$; Ғ) $[-2; -1] \cup \{0\}$. **580.** а) $(4; +\infty)$;

а) $[-2; +\infty)$; б) $[2; +\infty) \cup \{-1\}$; в) $(-\infty; -2] \cup \{4\}$. **581.** а) $[-4; 4]$; ә) $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$;
 б) $[-5; 5] \cup \{-6\}$; в) $[-1; 1] \cup \{4\}$; г) $(-3; -2) \cup (2; 3)$; ғ) $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.
582. 9 сағатта. **583.** а) – мәндес; ә), б), в) – мәндес емес. **584.** а) $(-2, 5; 0)$;
 ә) $(-0, 2; 0)$; б) $(0; 1) \cup (2; +\infty)$; в) $(-\infty; -1) \cup (0; 3)$. **585.** а) $(-13; 12)$; ә) $(-\infty; -0,5) \cup$
 $\cup (1, 2; +\infty)$; б) $(1\frac{1}{3}; 3)$; в) $[2, 9; 3)$. **586.** а) $(-3; -2] \cup (0; 4]$; ә) $(-1; 6)$; б) $(-\infty; 1) \cup$
 $\cup (5; +\infty)$; в) $(-\infty; 1) \cup [2; 3) \cup (4; +\infty)$. **587.** а) $[-3; -2] \cup (-1; 3]$; ә) $(-\infty; -4) \cup$
 $\cup [5; +\infty)$; б) $(-\infty; -6] \cup (-4; 2) \cup \{5\}$; в) $\{-7\} \cup (-5; 3) \cup (3; 4]$. **588.** 12 грамм.
589. а) $(4; +\infty) \cup \{3\}$; ә) $(-\infty; -1) \cup (2; 5)$; б) $(-4; 1)$; в) $(-5; 3)$. **590.** а) $[-2; 1] \cup$
 $\cup (3; +\infty)$; ә) $(-4; -3] \cup (0; 2]$; б) $(-\infty; -4) \cup (-3; 3) \cup [5; +\infty)$; в) $(-2; -1] \cup [0; 1)$.
591. а) $(-1; 0) \cup (0, 5; 1)$; ә) $(-\infty; -3) \cup (-2; -1) \cup (1; +\infty)$; б) $(-\infty; -2) \cup$
 $\cup [-1\frac{1}{4}; -1) \cup (1; 5]$; в) $(-4; -3) \cup [-2, 5; -2) \cup (-1; 0)$. **592.** а) $[-1; 3) \cup [4; +\infty)$;
 ә) $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$; б) $[-4; -1]$; в) $[-7; 1)$. **593.** а) $(-3; 3) \cup (3; +\infty)$; ә) $(-\infty; -4) \cup$
 $\cup (-4; -2] \cup [2; 4]$; б) $[-2; 2) \cup (2; +\infty)$; в) $(-\infty; -3) \cup (-1; 1) \cup (3; +\infty)$. **594.** а) $k < 1$
 болғанда $(-\infty; 1 - \sqrt{1-k}) \cup (1 + \sqrt{1-k}; +\infty)$; $k = 1$ болғанда $(-\infty; 1) \cup$
 $\cup (1; +\infty)$; $k > 1$ болғанда $(-\infty; +\infty)$; ә) $k \in (-\infty; -2\sqrt{6}) \cup (2\sqrt{6}; +\infty)$ бол-
 ғанда $(\frac{-k - \sqrt{k^2 - 24}}{4}; \frac{-k + \sqrt{k^2 - 24}}{4})$; $k \in [-2\sqrt{6}; 2\sqrt{6}]$ болғанда ше-
 шімі жоқ; б) $k \in (-\infty; -\frac{1}{4}]$ болғанда шешімі жоқ; $k \in (-\frac{1}{4}; 0)$ болған-
 да $(\frac{1 - \sqrt{1+4k}}{2k}; \frac{1 + \sqrt{1+4k}}{2k})$; $k = 0$ болғанда $(-\infty; -1)$; $k \in (0; +\infty)$ бол-
 ғанда $(-\infty; \frac{1 - \sqrt{1+4k}}{2k}) \cup (\frac{1 + \sqrt{1+4k}}{2k}; +\infty)$; в) $k \in (-\infty; -7, 2)$ болғанда
 $(-\infty; +\infty)$; $k = -7, 2$ болғанда $(-\infty; \frac{5}{6}) \cup (\frac{5}{6}; +\infty)$; $k \in (-7, 2; 0)$ болғанда
 $(-\infty; \frac{-6 - \sqrt{36+5k}}{k}) \cup (\frac{-6 + \sqrt{36+5k}}{k}; +\infty)$; $k = 0$ болғанда $(-\infty; \frac{5}{12})$;
 $k \in (0; +\infty)$ болғанда $(\frac{-6 - \sqrt{36+5k}}{k}; \frac{-6 + \sqrt{36+5k}}{k})$. **595.** а) 4 және 2;
 ә) 4 немесе 5, немесе 6, немесе 7, немесе 8. **596.** а) Тізбектес бес натурал
 санның бастапқы үшеуінің квадраттарының қосындысы $A(x)$ -қа, ал
 қалған екеуінің квадраттарының қосындысы $B(x)$ -қа тең болсын.
 $A(x) - B(x)$ айырымын қарастырып, оның әрбір аралықтағы таңбала-

рын зерттеңдер. $1 \leq x < 10$ болғанда $A(x) - B(x) < 0$, $x = 10$ болғанда $A(x) - B(x) = 0$, $x > 10$ болғанда $A(x) - B(x) > 0$ болатынын көрсетіңдер. Сәйкесінше қорытынды жасаңдар. **597.** а) 4 дм-ден артық, бірақ 8 дм-ден кем; ә) 30 м-ден артық, бірақ 110 м-ден аспайды. **598.** а) 13 см; ә) 5. **599.** а) 1,4 сағаттан артық емес; ә) 10 см-ден артық емес. **600.** а) Қабырға саны 4 және 12; ә) екі немесе 3 дос. **601.** 12 кг-нан аз емес. **602.** а) 80 км/сағ-тан артық; ә) 10 км/сағ-тан артық, бірақ 40 км/сағ-тан аспайтын. **603.** 4 км/сағ-тан кем емес. **604.** а) 10 сағ-тан аспайтын; ә) 6 тетіктен артық емес. **605.** а) 45 кг-нан аз емес; ә) 200 г-нан кем емес. **606.** 50 %-дан кем емес. **607.** б) (3; 6] ∪ [12; +∞); в) шешімі жоқ; г) [0; 3) ∪ (3; 6]; ғ) {5}. **608.** а) [-1; 1]; ә) $[\frac{1}{3}; +\infty)$; б) {3}; в) [-1; 2]. **609.** а) Шешімі жоқ; ә) (-1; 2); б) [4; 5); в) $(-\infty; \frac{3}{4}]$. **610.** а) [5; +∞) ∪ {2}; ә) [-1,5; 1]; б) $(-\infty; -2] \cup [2; 3)$; в) шешімі жоқ. **611.** а) [2; 7]; ә) – шешімі жоқ; б) – шешімі жоқ; в) $(-\frac{5}{7}; +\infty)$. **612.** 4 м/с, 3 м/с. **613.** а) $(-\infty; -3] \cup \{3\}$; ә) {-4}; б) $(-\infty; 0) \cup (0; 7]$; в) $(-\infty; 0)$. **614.** а) [-1; 0); ә) – шешімі жоқ; б) [0; 2); в) $(-\infty; -2,5) \cup [4; +\infty)$. **615.** а) $(-\infty; 3] \cup \{15\}$; ә) $(-\infty; -2] \cup [4\frac{1}{3}; 5]$; б) $(-3; 1) \cup (2; 4)$; в) (1; 2). **616.** а) $(-\infty; -5] \cup [5; +\infty)$; ә) (3; 4); б) (1; 5,5]; в) [0,6; 1). **617.** а) (3; +∞); ә) $(-\infty; \frac{1}{2}) \cup (1; 3]$; б) {2}; в) шешімі жоқ. **619.** 1,4 дм, 4,8 дм. **620.** а) (1; 6]; ә) [1; 4) ∪ (9; 10]. **621.** а) 1; ә) 5; б) -2; в) 2. **622.** а) $(-3; -1) \cup (1; 3)$; ә) [-1; 5]; б) [-2; 1]; в) (0; 1) ∪ (6; 7). **623.** а) [2; 3]; ә) [-3; -2); б) [4; 5); в) $[-\frac{1}{3}; 0) \cup [2; 3]$. **624.** а) $(-4; -\frac{1}{2}] \cup [3; 4)$; ә) (-4; -1]; б) $(-\infty; -2\sqrt{6}] \cup (3; 4,25]$; в) (0; +∞). **625.** а) $x \in (-\infty; 2)$ болғанда $y < 0$, $x \in (2; +\infty)$ болғанда $y > 0$; ә) $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ болғанда $y < 0$, $x \in (-1; 1)$ болғанда $y > 0$. **626.** а) $(-3 - \sqrt{2}; -4) \cup [2 + \sqrt{3}; 3 + \sqrt{2})$; ә) $[\sqrt{2} + \sqrt{3}, \sqrt{5} + 1]$. **627.** а) 3,5; ә) $-2\frac{6}{7}$. **628.** $\frac{10^{2018} + 1}{10^{2019} + 1} > \frac{10^{2019} + 1}{10^{2020} + 1}$. 10^{2019} -ды, мысалы, a деп белгілеп, осы бөлшектердің айырымының таңбасын анықтаңдар. **629.** 36 дм²-ден артық, бірақ

- 80 дм²-ден кем. **630.** Болмайды. **631.** 11 м. **632.** 4 см немесе 5 см. **633.** 18.
- 634.** 35. **635.** $\frac{3}{8}$ немесе $\frac{4}{15}$. **636.** 6 және 11. **637.** 16 м²-ден артық, бірақ 25 м²-ден кем. **638.** $B_1(8; 3)$, $B_2(8; 4)$, $B_3(8; 5)$, $B_4(8; 6)$, $B_5(8; 7)$. **639.** 18 м/с-тан кем емес, бірақ 42 м/с-тан артық емес. **640.** Күніне 10 га-дан кем емес, бірақ 13 га-дан артық емес. **641.** 11 км/сағ-тан артық, бірақ 12 км/сағ-тан кем. **642.** 5 км/сағ-тан артық, бірақ 10 км/сағ-тан кем.
- 643.** а) Мәндес; ә) жоқ. **644.** а) 2; ә) 1. **645.** а) -1; ә) -3. **646.** 14. **647.** Мысалы: а) $(-\infty; -1]$; ә) $[5; +\infty)$. **648.** а) $(0; 1)$; ә) $(-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$.
- 649.** 10 000 теңгеден аз емес, бірақ 20 000 теңгеден көп емес. **650.** а) $(-\infty; 1,6)$; ә) $(-\infty; -3,5]$; б) $(-\infty; -\frac{1}{2}] \cup \{0\} \cup [\frac{2}{3}; +\infty)$; в) $[-6; -3] \cup \{2\}$.
- 651.** а) $[-3; 3]$; ә) $(-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$; б) $(-\infty; -2] \cup \{0\} \cup [2; +\infty)$; в) $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.
- 652.** а) $(-\infty; 0) \cup [3; +\infty)$; ә) $(0; 2]$; б) $[-1; 1] \cup [4; +\infty)$; в) $(-\infty; -2] \cup [2; 5]$; г) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; е) $[-1 - \sqrt{3}; 0) \cup (0; -1 + \sqrt{3}]$. **653.** а) $(2; +\infty)$; ә) $(0; 2)$; б) $[3; +\infty) \cup \{0\}$; в) $[-\frac{3}{2}; 0] \cup [\frac{3}{2}; +\infty)$; г) $(-\infty; -3] \cup \{0\}$; е) $(-\infty; 0) \cup (0; 3)$.
- 654.** $\frac{1}{4}$. **655.** 11 см. **656.** а) $(-4; 4)$; ә) $(-\infty; -6] \cup [7; 11) \cup (11; +\infty)$; б) $(-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$; в) $(-5; 6)$. **657.** Дұрыс. **658.** а) 7; ә) 6; б) 2; в) 4. **659.** 8 және 14 немесе 9 және 15. **660.** а) $[1; 7]$; ә) шешімі жоқ; б) $(-\infty; -4) \cup [7; +\infty)$; в) $(-\infty; \frac{1}{2}] \cup [4; 5] \cup [11; +\infty)$. **661.** $\frac{1}{4}$ және $\frac{1}{5}$ немесе $\frac{1}{5}$ және $\frac{1}{6}$.
- 662.** а) $(-0,4; 0,5] \cup [1; +\infty)$; ә) $[\frac{2}{3}; 0) \cup [\frac{2}{3}; +\infty)$; б) $[3; 4]$; в) $[1; 2\frac{2}{3}]$.
- 663.** 8 см-ден кем емес, бірақ 10 см-ден артық емес. **664.** 1А) 1) $(-3; 1)$; 2) $(-\infty; -3] \cup [1; +\infty)$; 2В) $(-\infty; -14] \cup (10; 14]$; 3В) $[-4; -2] \cup \{1\} \cup [3; +\infty)$; 4В) 14 қатар; 5С) $(-\infty; -3] \cup (0; \frac{1}{2})$. **665.** Мүмкін, мысал келтіріңдер.
- 666.** Ақиқат емес, мысал келтіріңдер. **667.** а) 0,1; ә) $\frac{1}{3}$; б) 20,7; в) $-12\sqrt{3}$.
- 668.** а) 12104, кубтар қосындысының формуласын қолданыңдар; ә) түбір астындағы өрнекті екімүшенің квадраты түріне келтіріңдер. Немесе x -пен белгілеп, шыққан теңдеудің екі жағын квадраттаңдар.

- x -тің шарт бойынша таңбасын ескеріп, оны табыңдар. **669.** а) $\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$;
 ә) $\pm\frac{9\sqrt{10}}{5}$. **670.** а) 0; ә) 1. **671.** $\sqrt{5}$. **672.** а) ± 18 ; ә) ± 5 ; б) $\pm 2\sqrt{15}$; в) ± 2 .
673. а) $\frac{2}{3}$; 1; ә) 0; $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $1\frac{1}{6}$. **674.** б) $(3x + 2)(2x - 1)$; в) $(2 - x)(5x + 1)$.
675. а) $x + 2$; ә) $2 - x$; б) $\frac{x - 4}{x - 7}$; в) $\frac{5}{x(x + 2)}$. **676.** а) 3; ә) 1,8. **677.** а) 5;
 ә) 3. **678.** а) -7 және -3 ; ә) 2 және 3; б) -4 және 2; в) 1; $-2 \pm \sqrt{3}$.
679. $\sqrt{10}$ см. **680.** 1000 есе. **681.** а) $y = x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$; ә) $y = x^2 - \frac{1 + \sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{4}$. **682.** $y = x^2 - 2x - 3$. **683.** а) $3\sqrt{2}$; ә) 1. **684.** а) $[-4; +\infty)$; ә) $(-\infty; 7]$.
685. а) $(-\infty; 1) \cup (5; +\infty)$; ә) $[1; 5]$; б) $(-\infty; 3]$; в) $[3; +\infty)$. **686.** а) -2 ; -1 ; 3;
 ә) 0; 5. **687.** а) $y = x^2 - 8x + 15$; ә) $y = -x^2 - 8x - 15$. **688.** 1. **689.** 150 см^2 .
691. а) $(-\infty; -2] \cup [\frac{3}{2}; +\infty)$; ә) $[-\frac{5}{4}; 1]$; б) $(-\infty; 0) \cup (0; 4)$; в) $(-\infty; -5) \cup (0; 5)$.
692. а) $(-13; 7] \cup (13; +\infty)$; ә) $(-\infty; -12)$; б) $[1; 2)$; в) $[-6; 5)$. **693.** 44 %-дан
 кем емес. **694.** 2 дм-ден артық, бірақ $2\frac{2}{3}$ дм-ден кем. **695.** а) $(-\sqrt{5}; -\sqrt{3}) \cup$
 $\cup (\sqrt{3}; \sqrt{5})$; ә) $(-7; -4 - 2\sqrt{2}) \cup (-4 + 2\sqrt{2}; -1)$. **696.** $m(1 + \sqrt{2})$. **697.** 1А) Тү-
 бірі жоқ; 2А) $9\sqrt{3}$; 3В) $x = 2$ және $x = 4$ болғанда $y = 0$; $x \in (-\infty; 2) \cup$
 $\cup (4; +\infty)$ болғанда $y > 0$; $x \in (2; 4)$ болғанда $y < 0$; 4В) 4 км/сағ;
 5С) $b \in (-\infty; -4)$.

ПӘНДІК КӨРСЕТКІШ

Алгебра

- | | |
|--|-------------------------------|
| Аргумент 7 | Сандар |
| Арифметикалық квадрат түбір 27 | - нақты 23 |
| Бірмүше 7 | - иррационал 21 |
| Бір айнымалысы бар теңдеу | - рационал 17 |
| - биквадрат 85 | Сандық түзу 23 |
| - бөлшек-рационал 90 | Теңсіздікті шешу 156 |
| - бүтін рационал 90 | - теңсіздіктер жүйесі 175 |
| - квадрат 62 | Теорема |
| - толымсыз квадрат 62 | - Виет 73 |
| - рационал 90 | - Виет теоремасына кері 73 |
| Бір айнымалысы бар теңсіздіктер | Тепе-теңдік 7 |
| - квадрат 156 | Формулалар |
| - бөлшек-рационал 165 | - квадрат теңдеу түбірлері 67 |
| Интервалдар әдісі 164 | - қысқаша көбейту 7 |
| Иррационал өрнек 44 | Функция 7 |
| Квадрат түбір 27 | - өспелі 51 |
| Квадрат түбірдің жуық мәні 29 | - сызықтық 8 |
| Квадрат түбірі бар өрнектерді тепе-тең түрлендіру 44 | - квадраттық 106 |
| Квадрат үшмүше 78 | - жұп 107 |
| Квадрат үшмүшенің түбірлері 78 | - кемімелі 51 |
| Көпмүше 7 | Функцияның анықталу облысы 8 |
| Қасиеттері | Функцияның графигі 7 |
| - квадрат түбірлер 35, 51 | - сызықтық 8 |
| - квадраттық функцияның 122 | - кері пропорционал 9 |
| - бүтін көрсеткішті дәреженің 7 | - $y = ax^3$ 9 |
| Мәндес теңсіздік 156 | - $y = \sqrt{x}$ 51 |
| Ондық бөлшек 17 | - квадраттық 106 |
| - шектеусіз 17 | Функцияның мәндер жиыны 7 |
| - шектеулі 17 | Функцияның нөлі 107 |

Статистика элементтері

Абсолютті жиілік 10	Дисперсия 144
- салыстырмалы 10	Жиілік алқабы 10
- жиынтық 139	Құлаш 10
Берілгендердің арифметикалық ортасы 138	Медиана 10
Варианта 10	Мода 10
Вариациялық қатар 10	Стандартты ауытқу 144
- аралық 138	Формулалар
Гистограмма 139	- дисперсия 144, 145
Дискретті мәліметтер 138	- стандартты ауытқу 144, 145
- үзіліссіз 138	

ҚОСЫМША**10-нан 99-ға дейінгі натурал сандар
квадраттарының кестесі**

Бірліктер/ ондықтар	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

ҚОСЫМША ӘДЕБИЕТ

1. Глейзер Г. И. История математики в школе: 4–6 классы. – М.: Просвещение, 1981.
2. Мордкович А. Г. Алгебра, 8 класс. Учебник для общеобразовательных учреждений. – М.: Мнемозина, 2001.
3. Перельман Я. И. Живая математика. Математические рассказы и головоломки. – М.: ООО «Астрель», 2007.
4. Сергеев И. Н., Олехник С. Н., Гашков С. Б. примени математику. – М.: Наука, 1990.
5. Энциклопедический словарь юного математика. / Сост. А. П. Савин. – М.: Педагогика, 1985.
6. Закарян А. Абель. Галуа. Лобачевский. Эйнштейн: Математика ғалымдарының өмірі мен ғылыми еңбектері. – Алматы: Қазақстан, 1968.
7. Қаниев С. Математикадан конкурстық есептер. – Алматы: Мектеп, 1975.

Қосалқы беттердегі иллюстрацияларда қолданылған фотосуреттердің тізімі

1. Үлкен Алматы көлі – 16 б.
2. Шарын шатқалы – 61 б.
3. Ақтау борлы таулары – 105 б.
4. Жылқы табыны – 137 б.
5. Ақсу шатқалы – 155 б.

СОЛТАН Геннадий Николаевич
СОЛТАН Алла Евгеньевна
ЖУМАДИЛОВА Аманбала Жумадиловна

Алгебра

Жалпы білім беретін мектептің
8-сынып оқушыларына арналған

ОҚУЛЫҚ

+ CD

Редакторы	С. Ш. Алибеков
Суретші	А. Б. Жусупов
Техникалық редакторы	Б. К. Еслямов
Дизайны	Н. В. Лузгарёва
Мұқаба дизайны	Б. К. Еслямов
Корректоры	Е. Е. Велькер А. С. Есқара

Басуға 25.06.2019 ж. қол қойылды.

Пішімі 70×100 $\frac{1}{8}$. Көлемі 17,55 шартты баспа таб.

Гарнитурасы «Times New Roman». Офсеттік басылым.

Тапсырыс № 3093. Таралымы 1000 дана.

Коды 513013



«Келешек-2030» ЖШС

Қазақстан Республикасы,

020000, Көкшетау қ.

Баспа кеңсесі: Абай к-сі, 112а,

тел.: 8 (7162) 72-29-43 (кабылдау бөлімі),

8 (7162) 44-18-64, +7 708 444 18 64,

ұялы тел.: +7 702 781 06 78, +7 705 745 09 75.

<http://www.keleshek-2030.kz>, E-mail: torg@keleshek-2030.kz



«Можайский полиграфический комбинат» ААҚ-да басылып шығарылған

143200, Можайск қ-сы, Мир к-сі, 93

www.oaomrk.ru, тел.: (495) 745-84-28, (49638) 20-685