Ә. Н. ШЫНЫБЕКОВ, Д. Ә. ШЫНЫБЕКОВ,
Р. Н. ЖҰМАБАЕВ

ГЕОМЕТРИЯ

Жалпы білім беретін мектептің 8-сыныбына
арналған оқулық

8

Алматы «Атамұра» 2018

1–2993

ӘОЖ 373.167.1(075.3)
КБЖ 22. 15 я 72
Ш 97

Жалпы редакциясын басқарған
физика-математика ғылымдарының
докторы, профессор,
ҚР ҰҒА академигі **М. Өтелбаев**

Пайдаланылған шартты белгілер:

? – тақырыптың негізгі материалдары бойынша сұрақтар;

ПТ – практикалық тапсырмалар;

Т – тарихи мәліметтер;

Ш – шығармашылық тапсырма;

А – I деңгейлі есептер;
В – II деңгейлі есептер;
С – III деңгейлі есептер;
***** – шығармашылық немесе күрделілігі жоғары есептер;
▲ – дәлелдеудің (есептің шешуінің) басталуы;
■ – дәлелдеудің (есептің шешуінің) соңы.

Ш 97 **Шыныбеков Ә.Н. және т.б.**
Геометрия: Жалпы білім беретін мектептің 8-сыныбына арналған оқулық / Ә.Н. Шыныбеков, Д.Ә. Шыныбеков, Р.Н. Жұмабаев – Алматы: Атамұра, 2018. – 152 бет.

ISBN 978-601-331-014-5

ӘОЖ 373.167.1(075.3)
КБЖ 22.15я 72

ISBN 978-601-331-014-5

АЛҒЫ СӨЗ

Бұл оқулық жалпы білім беретін мектептердің 8-сыныбына арналып жазылғанымен, оның көптеген өзіндік ерекшеліктері бар. Атап айтсақ, бұрынғы оқулықтармен салыстырғанда, мұнда жалпы білім беретін мектептер бағдарламасына енетін материалдар мен математиканы тереңдетіп оқытатын сыныптар мен мектептерге арналған бағдарламаға енетін материалдар да қамтылған. Олай болса, бұл оқулықты пайдаланудың кейбір ережелеріне тоқталайық.

Әрбір өтілген тақырыпты бекіту мақсатында сұрақтар, тапсырмалар мен есептер берілген. Есептер қиындық деңгейіне қарай үш топқа бөлінген: ***A***, ***B*** және ***C***. ***A*** және ***B*** тобындағы есептер жеңіл және қиындығы орташа деңгейде. ***C*** тобына қиындық деңгейі жоғары есептер жинақталған.

Осыған қоса, ***C*** тобының есептері негізінен математиканы тереңдетіп оқытатын сыныптар оқушыларына арналған. Дегенмен, бұл материалдарды қабілеті мен біліктілігі жоғары оқушылар сыныптан тыс уақыттарда өз беттерінше оқып-үйренулеріне болады. Өйткені математикалық олимпиадаларға және түрлі конкурстарға қатысып, нәтижелі орындарды иемденулері үшін осы материалдарды меңгеру аса қажет.

Ал математиканы тереңдетіп оқытатын сыныптар оқу жылын 7-сынып материалдарын қайталағаннан кейін, қосымша материалдардан бастағандары орынды, ал сонан соң оқу процесін оқулық бойынша жалғастырғандары жөн.

Әлемде алғаш рет диаметрі 22 метрлік, салмағы 300 тоннадан тұратын, күннің түсуіне қарай түсін өзгертетін әйнектен жасалынған шар биіктігі жағынан рекордқа ие болды. Біздің бас қаламызда бой көтерген бұл «Бәйтерек» монументі Астананың көрікті орны ғана емес, тәуелсіз Қазақстанның сәулеттік символына айналды. «Бәйтеректің» биіктігі 97 м (Астана қаласының елорда статусына ие болған жылға байланысты таңдалған), диаметрі 27 м; негізгі есікке бастайтын әшекейлі темірбетон саты жер бетінен 4,8 м жоғары орналасқан.

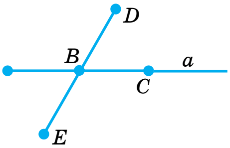
7-СЫНЫП МАТЕРИАЛДАРЫН ҚАЙТАЛАУ

Бөлімді оқып-үйрену барысында келесі мақсатқа қол жеткіземіз:

– өткен материалдарды қайталап, еске түсіру;

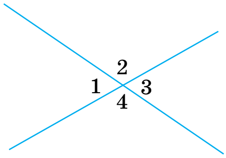
– келесі өтілетін жаңа материалдарды меңгеруге дайындық жасау.

Геометрия сұрақтары



0.1-сурет

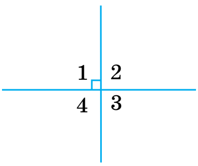
1) Планиметрия деп нені түсінесіңдер және оның негізгі фигураларын (анықтамасыз қабылданатын) атаңдар.



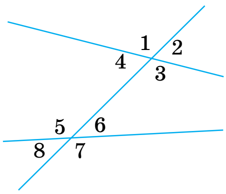
0.2-сурет

2) Кесінді деп нені түсінесіңдер? Сәуле деп нені түсінесіңдер? 0.1-суретте көрсетілген барлық сәулелер мен кесінділерді жазып көрсетіңдер.

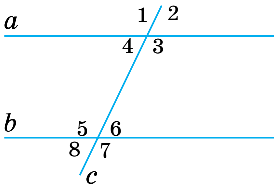
3) 0.2-суреттен вертикаль және сыбайлас бұрыштарды көрсетіңдер. Сыбайлас бұрыштардың қосындысы мен вертикаль бұрыштардың шамасы жөнінде не айтасыңдар?



0.3-сурет



0.4-сурет



0.5-сурет

4) Қандай түзулер перпендикуляр түзулер деп аталады? Тік бұрыштың шамасы неше градус (0.3 сурет)?

5) 0.4-суреттен барлық: 1) ішкі айқыш бұрыштар жұбын; 2) ішкі тұстас бұрыштар жұбын; 3) сәйкес бұрыштар жұбын жазып көрсетіңдер.

6) Қандай түзулерді өзара параллель түзулер деп атайды? Берілген нүкте арқылы берілген түзуге параллель болатын неше түзу жүргізуге болады?

7) 0.5-сурет бойынша түзулердің параллельдігінің үш белгісін тұжырымдап, оларды қысқаша жазу үлгісімен жазыңдар.

Мысалы:

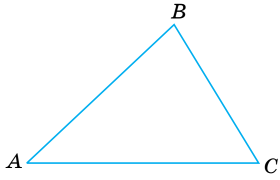
1-белгі. *Егер екі түзуді үшінші түзу қиып өткенде пайда болған ішкі айқыш бұрыштар тең болса, онда бұл екі түзу өзара параллель болады.* ≈

$\angle 3 = \angle 5 \Rightarrow a \,||\, b$

немесе

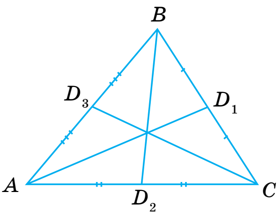
$\angle 4 = \angle 6 \Rightarrow a \,||\, b$

8) Үшбұрыш деп нені түсінесіңдер? Анықтама беріңдер. 0.6-суреттен үшбұрыштың элементтерін тізіп көрсетіп, тұсына атауларын жазыңдар.

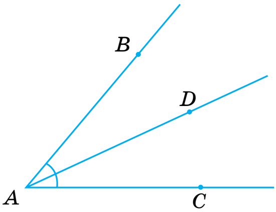


0.6-сурет

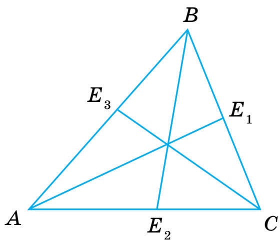
9) Үшбұрыштың медианалары деп нені түсінесіңдер (0.7-сурет)?



0.7-сурет



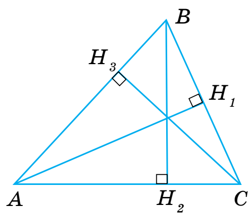
0.8-сурет



0.9-сурет

10) Бұрыш биссектрисасы деп нені айтады (0.8-сурет)? Үшбұрыштың биссектрисалары деп нені түсінесіңдер (0.9-сурет)?

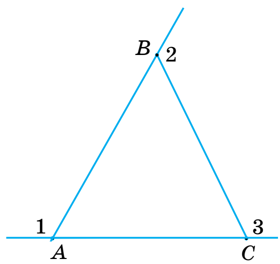
11) Үшбұрыш биіктігі деген не? Оны 0.10-суреттен көрсетіңдер.



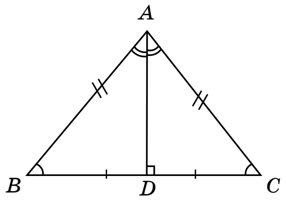
0.10-сурет

12) Үшбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы неше градус болады? Оны 0.11-сурет бойынша қысқаша жазып көрсетіңдер.

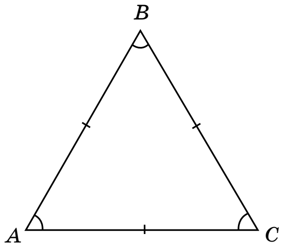
13) Үшбұрыштың сыртқы бұрышы деген не? Оны 0.11-суреттен көрсетіңдер. Үшбұрыштың сыртқы бұрыштары мен ішкі бұрыштары арасында қандай байланыс бар? Оларды әрбір сыртқы бұрыш үшін жазып көрсетіңдер.



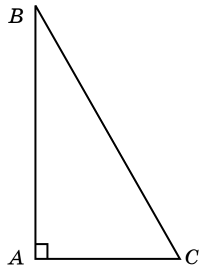
0.11-сурет



0.12-сурет



0.13-сурет

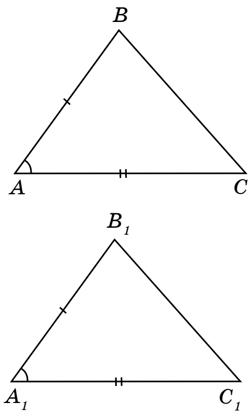


0.14-сурет

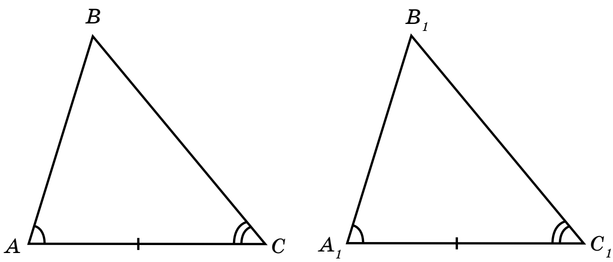
14) Тең бүйірлі үшбұрыш деген не? 0.12 - суреттен оның барлық элементтерін көрсетіңдер.

15) Тең қабырғалы үшбұрыш деп қандай үшбұрышты атайды (0.13-сурет)?

16) Тік бұрышты үшбұрыш деп қандай үшбұрышты атайды? 0.14-суреттен оның барлық элементтерін көрсетіп, қысқаша жазып көрсетіңдер.

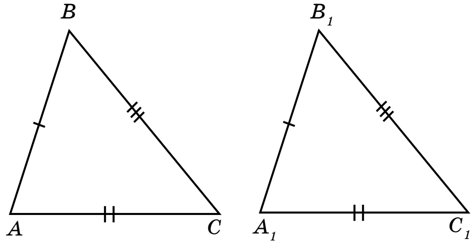


0.15-сурет



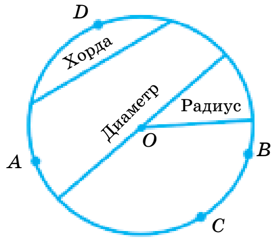
0.16-сурет

17) 0.15-0.17-суреттерге сәйкес келетін үшбұрыштар теңдігі белгісін тұжырымдап, оны қысқаша жазу үлгісімен жазып көрсетіңдер.

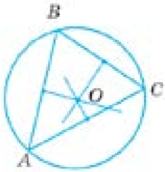


0.17-сурет

18) Шеңбер дегеніміз не? Шеңбердің центрі деп нені атайды? Радиусы деп нені атайды (0.18-сурет)?



0.18-сурет



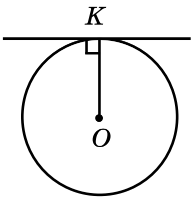
0.19-сурет

19) Хорда деп нені атайды? Қандай хорда диаметр болады?

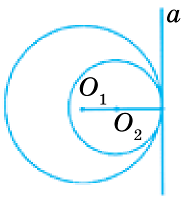
20) Үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбер деп нені айтады (0.19-сурет)?

21) Үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбер центрі қалай анықталады?

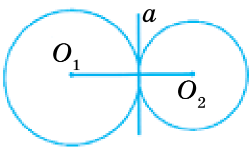
22) Қандай түзуді шеңберге жанама деп атайды (0.20-сурет)?



0.20-сурет



0.21-сурет

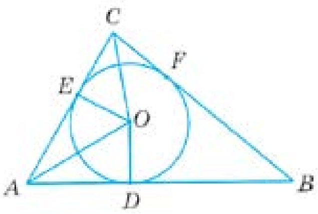


0.22-сурет

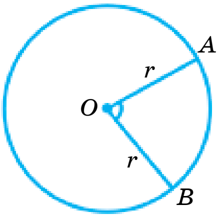
23) Екі шеңбердің іштей, сырттай жанасуын қалай түсінесіңдер (0.21; 0.22-суреттер)?

24) Қандай шеңберді үшбұрышқа іштей сызылған деп айтады (0.23-сурет)?

25) Үшбұрышқа іштей сызылған шеңбер центрі қалай анықталады?



0.23-сурет



0.24-сурет

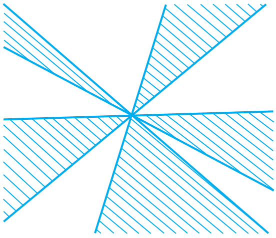
26) Центрлік бұрыш деп нені атайды? Доғаның градустық өлшемі қалай анықталады (0.24-сурет)?

ЕСЕПТЕР

А

0.1. Сыбайлас бұрыштардың біреуі екіншісінен екі есе үлкен. Осы бұрыштардың градустық өлшемдерін табыңдар.

0.2. Екі түзу қиылысқанда пайда болған екі бұрыштың қосындысы 60°-қа тең. Осы бұрыштардың градустық өлшемдерін табыңдар.

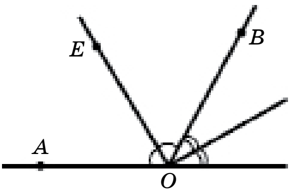


0.25-сурет

0.3. 0.25-суретте бес түзу бір нүктеде қиылысқан. Боялған бұрыштардың қосындысын табыңдар.

0.4. Екі түзу қиылысқанда пайда болатын бұрыштардың үшеуінің қосындысы 270°-қа тең. Осы бұрыштардың градустық өлшемдерін табыңдар.

0.5. Сыбайлас бұрыштардың биссектрисаларының арасындағы бұрышты табыңдар (0.26-сурет).

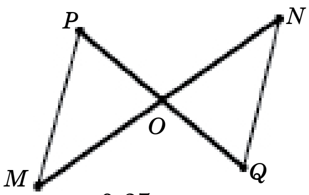


0.26-сурет

0.6. Тең бүйірлі үшбұрыштың табаны 10 см, ал бүйір қабырғасы 7 см. Осы үшбұрыштың периметрін табыңдар.

0.7. Тең бүйірлі үшбұрыштың периметрі 32 см, ал бүйір қабырғасы 10 см. Оның табанын анықтаңдар.

0.8. Егер үшбұрыштың екі бұрышы 60°-қа тең болса, онда бұл үшбұрыш тең қабырғалы болатынын дәлелдеңдер.



0.27-сурет

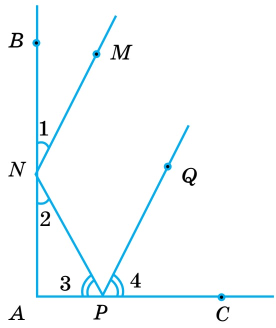
0.9. MN және PQ кесінділері әрқайсысының ортасы болатын O нүктесінде қиылысады. $\Delta MOP = \Delta NOQ$ теңдігін дәлелдеңдер (0.27-сурет).

0.10. Егер екі параллель түзуді қиюшымен қиғанда пайда болған ішкі тұстас бұрыштардың айырмасы 20° болса, онда осы түзулердің қиылысуынан пайда болған барлық 8 бұрыштың шамасын анықтаңдар.

B

0.11. Вертикаль бұрыштардың биссектрисалары бір түзудің бойында жататынын дәлелдеңдер.

0.12. 0.28-суреттегі MN және PQ түзулері параллель болатынын дәлелдеңдер. Мұнда $\angle BAC=90°$, $\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$.



0.28-сурет

0.13. Әрбір ABC үшбұрышы үшін төмендегі тұжырымдар орындалатынын дәлелдеңдер:

1) A бұрышының биссектрисасы осы төбеден түсірілген биіктікпен $\frac{1}{2}(\angle B-\angle C)$-ға тең бұрыш жасайды.

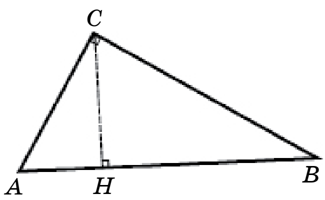
2) B бұрышының сыртқы бұрышының биссектрисасы мен C бұрышының биссектрисасы $\frac{1}{2}(\angle A)$-ға тең бұрыш жасайды.

3) B және C бұрыштарының биссектрисалары $\frac{1}{2}(\angle A)+$ $+90°$-қа тең бұрыш жасайды.

0.14. Егер α және β үшбұрыштың екі бұрышы болса, онда олардың биссектрисалары қандай бұрышпен қиылысады?

0.15. Үшбұрыштың екі бұрышының биссектрисалары өзара перпендикуляр болуы мүмкін бе?

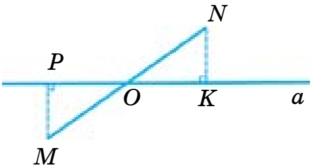
0.16. Тік бұрышты үшбұрыштың сүйір бұрышы 30°-қа тең, ал гипотенузасы 32 см. Тік бұрыштың төбесінен жүргізілген биіктігі гипотенузаны екі кесіндіге бөледі. Осы кесінділердің ұзындықтарын табыңдар (0.29-сурет).



0.29-сурет

0.17. A нүктесінен бір шеңберге AB және AC жанамалары жүргізілген. Мұнда B және C – жанасу нүктелері. $AB=AC$ теңдігін дәлелдеңдер.

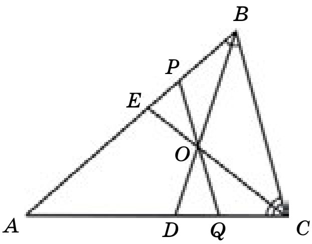
0.18. Тең бүйірлі үшбұрыштың табаны бүйір қабырғасынан екі есе кіші, ал периметрі 50 см. Үшбұрыштың қабырғаларын табыңдар.



0.30-сурет

0.19. *a* түзуі *MN* кесіндісінің ортасы арқылы өтеді, *M* және *N* нүктелері *a* түзуінен бірдей қашықтықта жататынын дәлелдеңдер (0.30-сурет).

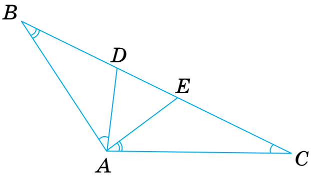
C



0.31-сурет

0.20. 0.31-суретте *BD* және *CE* – үшбұрыштың биссектрисалары, $PQ \parallel BC$. $PQ=BP+CQ$ теңдігі орындалатынын дәлелдеңдер.

0.21. Тең бүйірлі үшбұрыштың төбесінен өтетін оның табанына параллель түзу сол төбедегі сыртқы бұрыштың биссектрисасы болатынын дәлелдеңдер.



0.32-сурет

0.22. *ABC* үшбұрышында (0.32-сурет) *A* төбесінен *BC* қабырғасына *AD* және *AE* кесінділері жүргізілген. Олардың біреуі *AB* қабырғасымен *C* бұрышына тең бұрыш, екіншісі *AC* қабырғасымен *B* бұрышына тең бұрыш жасайды. *ADE* үшбұрышы тең бүйірлі болатынын дәлелдеңдер.

Медеу — Іле Алатауы баурайында теңіз деңгейінен 1691,2 м биіктікте орналасқан ірі спорттық кешен. Медеу кешенінің құрылысы 1949 жылдың күз айында басталған, алғашқы ресми ойындар 1951 жылдың 4 ақпанында өтті. Стадионға жасанды мұз тек 1972 жылғы ғана төселді. Медеу — қысқы спорттық ойындарға арналған мұз айдыны, жасанды мұз алаңының аумағы 10,5 мың ш.м., айдындағы мұз жабындысының қалыңдығы 2,3 метрді құрайды.

«Қазақстан» — қонақ үйі Алматы қаласының орталығында орналасқан республикалық дәрежедегі жоғарғы класты мейманхана. Өзінің ерекше пішіні оны Алматы қаласының символдарының біріне айналдырды. Қазақстан қонақ үйі — елдегі жер сілкіну қаупі бар аймақта орналасқан, сейсмикалық жағынан берік, биіктігі 102 м алғашқы заңғар ғимарат.

1-бөлім. ТӨРТБҰРЫШТАР

Бөлімді оқып-үйрену барысында келесі мақсаттарға қол жеткіземіз:

– көпбұрыш, дөңес көпбұрыш, көпбұрыш элементтері анықтамаларын білу;

– көпбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысының және сыртқы бұрыштарының қосындысының формулаларын қорытып шығару;

– параллелограмм анықтамасын білу;

– параллелограмм қасиеттерін қорытып шығару және қолдану;

– параллелограмм белгілерін қорытып шығару және қолдану;

– тік төртбұрыш, ромб, шаршы анықтамаларын білу және олардың қасиеттері мен белгілерін қорытып шығару;

– Фалес теоремасын білу және қолдану;

– пропорционал кесінділер туралы теоремаларды білу және қолдану;

– циркуль мен сызғыштың көмегімен кесіндіні өзара тең n бөлікке бөлу;

– пропорционал кесінділерді салу;

– трапецияның анықтамасын, түрлерін және қасиеттерін білу;

– үшбұрыштың орта сызығының қасиетін дәлелдеу және қолдану;

– трапецияның орта сызығының қасиетін дәлелдеу және қолдану.

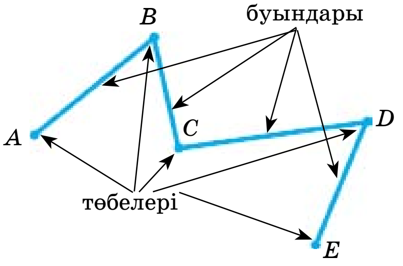
– үшбұрыштың қабырғаларына жүргізілген медианалар, биссектрисалар, биіктіктер және орта перпендикулярлар қасиеттерін білу және қолдану.

1. ТӨРТБҰРЫШТАР

1. 1. КӨПБҰРЫШТАР

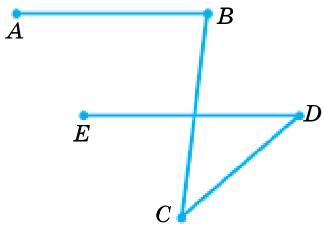
1.1.1. Көпбұрыш ұғымы

Жазықтықта берілген нүктелерді тізбектеп қосқанда шығатын фигураны **сынық сызық** деп атайды. 1.1-суретте *ABCDE* сынық сызығы бейнеленген. *A*, *B*, *C*, *D*, *E* нүктелері сынық сызықтың **төбелері** деп, ал *AB*, *BC*, *CD* және *DE* кесінділері оның **буындары** деп аталады.



1.1-сурет

Сынық сызық буындары өзара қиылыспаса, онда мұндай сынық сызықты **жай сынық сызық** деп (1.1-сурет), ал сынық сызық буындары өзара қиылысатын болса, оны **күрделі сынық сызық** деп атайды. 1.2-суреттегі фигура жай сынық сызық емес, күрделі сынық сызық.

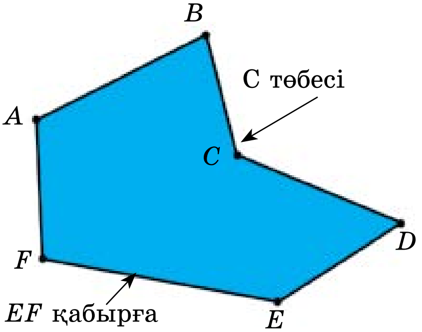


1.2-сурет

Егер жай сынық сызықтың екі ұшы (бастапқы және соңғы) беттесетін болса, онда шыққан фигура **тұйық сынық сызық** деп аталады.

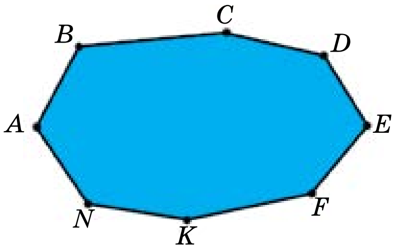
1.3-суретте *ABCDEF* тұйық сынық сызығы бейнеленген.

Жазықтықтың жай тұйық сынық сызықпен шектелген бөлігін **көпбұрыш** деп атайды.



1.3-сурет

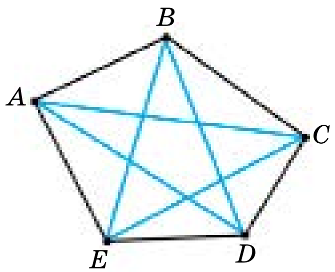
Егер *тұйық* сынық сызықтың n төбесі бар болса, онда көпбұрышты *n-бұрыш* деп атайды. 1.3-суретте *ABCDEF* алтыбұрышы бейнеленген. Тұйық сынық сы-



1.4-сурет

зық төбелері **көпбұрыш төбелері** деп, ал буындары **көпбұрыштың қабырғалары** деп аталады. 1.4-суретте $ABCDEFKN$ — сегізбұрышы бейнеленген.

Көпбұрыштың әрбір қабырғасының ұштарын оның **көршілес төбелері** деп атайды. Ал көпбұрыштың көршілес емес әрбір екі төбесін қосатын кесіндіні көпбұрыштың **диагоналы** деп атайды. 1.5-суреттегі $ABCDE$ бесбұрышының барлық диагональдары жүргізілген.



1.5-сурет

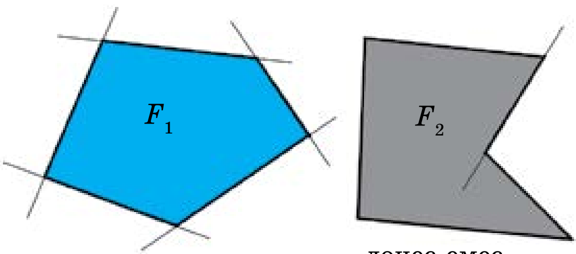
Көпбұрыштың барлық қабырғаларының ұзындықтарының қосындысын көпбұрыштың **периметрі** деп атайды.

1.5-суреттегі $ABCDE$ бесбұрышының периметрі $P=AB+BC+CD+DE+$ $+\ EA$ қосындысына тең.

1.1.2. Дөңес көпбұрыштар. Төртбұрыштар

Егер көпбұрыш оның кез келген қабырғасы арқылы өтетін түзудің бір жағында ғана, яғни бір жарты жазықтықта жатса, онда мұндай көпбұрыш **дөңес көпбұрыш** деп аталады.

1.6-суретте бейнеленген F_1 көпбұрышы – дөңес көпбұрыш, ал F_2 дөңес емес.

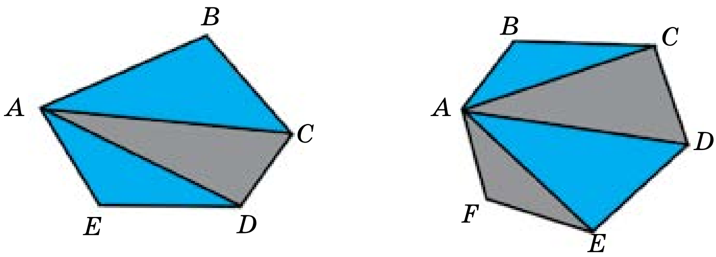


дөңес көпбұрыш

дөңес емес көпбұрыш

1.6-сурет

Көпбұрыштың ортақ төбесі бар екі қабырғасының арасындағы бұрыш осы **көпбұрыштың бұрышы** деп аталады. Дөңес n-бұрыштың әрбір төбесінен жүргізілген диагональдары оны $(n-2)$ үш-



1.7 – сурет

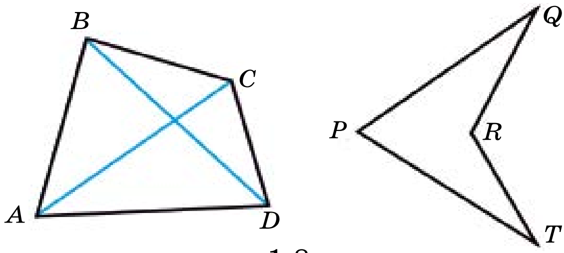
бұрыштарға бөледі. 1.7-суретте $ABCDE$ бесбұрышы (5−2) = 3 үшбұрышқа, ал $ABCDEF$ алтыбұрышы (6−2) = 4 үшбұрышқа бөлінген.

Теорема 1. Дөңес n-бұрыштың бұрыштарының қосындысы $(n-2)\cdot 180^\circ$-қа тең.

▲ Дөңес n-бұрыш бір төбесінен шығатын диагональдармен $(n-2)$ үшбұрыштарға бөлінеді. Ал үшбұрыш бұрыштарының қосындысы 180°-қа тең болғандықтан, n-бұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы $(n-2)\cdot 180^\circ$-қа тең. ■

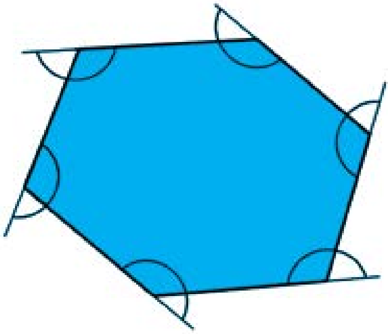
4 төбесі бар көпбұрыш *төртбұрыш* деп аталады.

Төртбұрыштың 4 төбесі, 4 қабырғасы және 2 диагоналы бар. Ортақ төбелері болмайтын қабырғалар **қарама-қарсы қабырғалар** деп, ал көршілес емес екі төбесі оның **қарама-қарсы төбелері** деп аталады. 1.8-суреттегі $ABCD$ – дөңес төртбұрыш, ал $PQRT$ – дөңес емес төртбұрыш. Көпбұрыштың ішкі бұрышына сыбайлас бұрышты оның сыртқы бұрышы деп атайды.



1.8-сурет

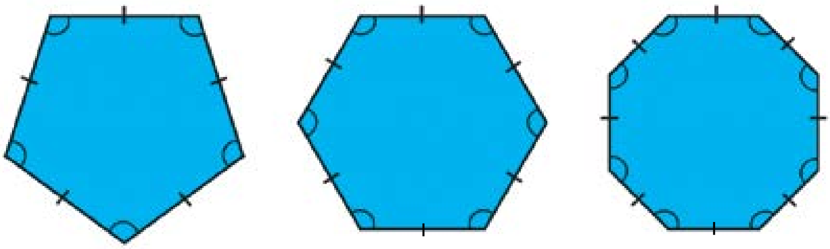
Теорема 2. *Дөңес көпбұрыштың әрбір төбесінен бір-бірден алынған сыртқы бұрыштарының қосындысы 360°-қа тең.*



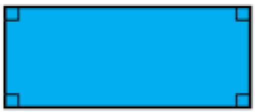
1.9-сурет

▲ Көпбұрыштың әрбір төбесіндегі сыртқы және ішкі бұрыштарының қосындысы $180°$-қа тең (1.9-сурет), ал оның барлық төбелеріндегі осындай қос бұрыштардың қосындысы $n \cdot 180°$-қа тең. Көпбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы $(n - 2) \cdot 180°$-қа тең. Онда сыртқы бұрыштарының қосындысы $n \cdot 180° - (n - 2) \cdot 180° = 360°$-қа тең. ■

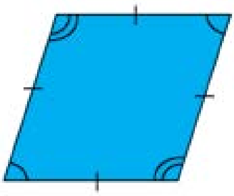
Егер берілген көпбұрышта: 1) барлық бұрыштары өзара тең; 2) барлық қабырғалары өзара тең болса, онда бұл көпбұрыш ***дұрыс*** көпбұрыш деп аталады. 1.10-суретте дұрыс бесбұрыш, алтыбұрыш және сегізбұрыштар бейнеленген.



1.10-сурет



1.11-сурет

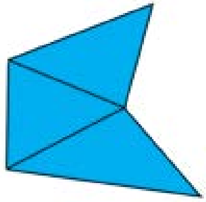


1.12-сурет

Шаршы — дұрыс төртбұрыш болып табылады.

Көпбұрыш дұрыс көпбұрыш болуы үшін 1) және 2) шарттардың екеуін де қанағаттандыруы қажет. Олардың тек біреуі ғана орындалуы жеткіліксіз. Мысалы, 1.11-суретте төртбұрыштың барлық бұрыштары тік болғанымен, қабырғалары тең емес, ал 1.12-суретте төртбұрыштың барлық қабырғалары тең болғанымен, бұрыштары әртүрлі. Бұл төртбұрыштар дұрыс төртбұрыш (шаршы) болмайды.

Ескерту. Көпбұрыш бұрыштарының қосындысы туралы теорема дөңес емес көпбұрыштар үшін де орындалады. Мысалы, 1.13-суретте дөңес емес бесбұрыштың бұрыштарының қосындысы үш үшбұрыштың бұрыштарының қосындысына тең, яғни 3·180°. Екінші жағынан, формула бойынша $n = 5$ болғанда $(5 - 2) \cdot 180° = 3 \cdot 180°$ болады.



1.13-сурет

?

1. Қандай фигураны көпбұрыш деп атайды? Оның қандай элементтерін білесіңдер?
2. Дөңес көпбұрыш дегеніміз не?
3. Дөңес көпбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы неге тең? Оны дәлелдеңдер.
4. Қандай фигураны дөңес төртбұрыш деп атайды? Оның элементтерін атап көрсетіңдер.
5. Дөңес көпбұрыштың сыртқы бұрыштарының қосындысы 360°-қа тең болатынын дәлелдеңдер.

ПТ

1. Дөңес: 1) бесбұрыш; 2) алтыбұрыш салып, оның элементтерін көрсетіңдер.
2. Қандай да бір *ABCD* төртбұрышын салып, оның қарама-қарсы қабырғалары мен бұрыштарын атап көрсетіңдер.
3. *ABCD* төртбұрышын салып, оның диагональдарын жүргізіңдер. Осыдан шыққан барлық үшбұрыштарды жазып көрсетіңдер.

ЕСЕПТЕР

A

1.1. Дөңес төртбұрыштың бұрыштары бір-біріне тең. Оның бұрыштарын табыңдар.

1.2. Бұрыштары 2, 2, 4, 5, 5 сандарына пропорционал болса, онда осы дөңес бесбұрыштың бұрыштарын табыңдар.

1.3. Дөңес: 1) онбұрыштың; 2) он екібұрыштың бұрыштарының қосындысы неге тең?

1.4. Бұрыштарының қосындысы: 1) 1080°-қа; 2) 1620°-қа; 3) 3960°-қа; 4) 1440°-қа тең көпбұрыштың неше қабырғасы бар?

▲ 1) $(n-2)\,180° = 1080° \Rightarrow (n-2)\cdot 18 = 108 \Rightarrow n-2=6 \Rightarrow n=8.$ ■

Ескерту: Мұнда және әрі қарай жазықтықта (немесе кеңістікте) қажетті сызбаларды салу барысында Geo Gebra бағдарламасы мүмкіндіктерін кеңінен қолдануға болады. (https://www. geogebra.org/?lang=ru)

1.5. Әрбір бұрышы: 1) 144°-қа; 2) 150°-қа; 3) 170°-қа; 4) 171°-қа тең көпбұрыштың неше қабырғасы бар?

▲ 1) $(n-2) \cdot 180° = n \cdot 144° \Rightarrow 180° \cdot n - 360° = n \cdot 144° \Rightarrow$
$\Rightarrow (180° - 144°)n = 360° \Rightarrow 36n = 360° \Rightarrow n = 10.$ ■

1.6. Көпбұрыш бұрыштарының қосындысы: 1) 9180°-қа; 2) 3600°-қа; 3) 2040°-қа тең болуы мүмкін бе?

1.7. Көпбұрыш бұрыштарының қосындысы саны тақ тік бұрыштардың қосындысына тең болуы мүмкін бе? Жауаптарыңды негіздеңдер.

1.8. Дөңес n-бұрыштың бір төбесінен неше диагональ жүргізуге болады? 1) n=4; 2) n=5; 3) n=6; 4) n=10 деп алыңдар.

B

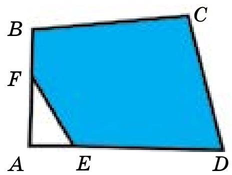
1.9. Дөңес төртбұрыштың бір бұрышы өзге үш бұрышының қосындысынан артық болуы мүмкін бе? Жауаптарыңды негіздеңдер.

1.10. Дөңес төртбұрыштың: 1) кіші бұрышы 90°-тан артық; 2) үлкен бұрышы 90°-тан кем болуы мүмкін бе? Жауаптарыңды негіздеңдер.

1.11. Сыртқы тік бұрыштарының саны төрттен артық болатын; сыртқы доғал бұрыштарының саны үштен артық болатын көпбұрыштың болмайтынын дәлелдеңдер.

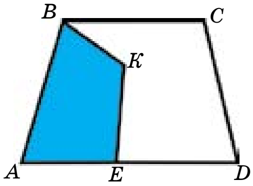
1.12. *ABCD* төртбұрышынан: 1) *FAE* үшбұрышын (1.14-сурет); 2) *ABKE* төртбұрышын (1.15-сурет) «қиып алса», көпбұрыш бұрыштарының қосындысы қалай өзгереді?

а)



1. 14-сурет

б)



1. 15-сурет

1.13. 1) Барлық ішкі бұрыштарының қосындысы оның барлық сыртқы бұрыштарының қосындысына тең көпбұрыштың неше бұрышы бар? 2) Сыртқы бұрыштарының барлығы да доғал болып келген көпбұрыштың неше төбесі бар?

1.14. Дөңес төртбұрыштың: 1) үш бұрышы доғал; 2) екі бұрышы доғал, ал өзге екі бұрышы тік болуы мүмкін бе? Жауаптарыңды негіздеңдер.

1.15. $MNKP$ дөңес төртбұрышының M, N төбелерінен бірдей қашықтықта және K, P төбелерінен бірдей қашықтықта орналасатын O нүктесін қалай табуға болады? Мұндай нүкте үнемі табыла бере ме? Мұндай нүктелер бірнешеу болуы мүмкін бе?

C

1.16. Дөңес n-бұрыштың сүйір бұрыштарының саны нешеу болуы мүмкін? Жауаптарыңды негіздеңдер.

1.17. Дөңес n-бұрыштың диагональдарының саны нешеу?

1.18. Егер $ABCD$ төртбұрышының AC диагоналы A және C бұрыштарын қақ бөлетін болса, онда төртбұрыш қабырғалары жөнінде қандай қорытынды жасауға болады?

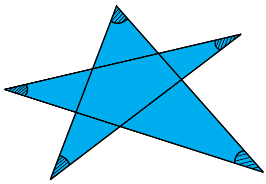
1.19. Дөңес $n+1$-бұрыштың диагональдарының саны n-бұрыштың диагональдарының санынан нешеуі артық?

1.20. n-нің қандай мәндерінде дөңес n-бұрыш диагональдарының саны n-ге тең?

1.21. Мынадай теорема дұрыс па: «Егер бір төртбұрыштың қабырғалары екінші төртбұрыштың сәйкес қабырғаларына тең болса, онда мұндай төртбұрыштар өзара тең болады»?

1.22. Бесбұрышты жұлдыздың (1.16-сурет) белгіленген барлық сүйір бұрыштарының қосындысын табыңдар.

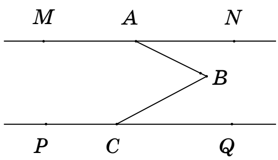
1.23. Дөңес көпбұрыш бұрыштарының қосындысы туралы теореманы өзгеше дәлелдеп көріңдер.



1.16-сурет

1.24. $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$ және $\angle A = 26°$ деп алып, $ABCD$ төртбұрышының басқа бұрыштарын табыңдар.

1.25. 1.17-суретте $MN \parallel PQ$. Онда $\angle ABC = \angle NAB + \angle BCQ$ болатынын дәлелдеңдер.

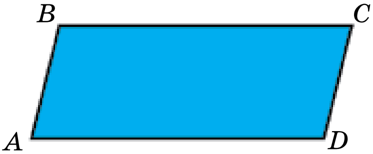


1.17-сурет

1.2. ПАРАЛЛЕЛОГРАММ ЖӘНЕ ОНЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ

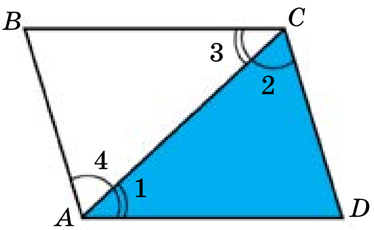
1.2.1. Параллелограмның қасиеттері

Анықтама. *Қарама-қарсы қабырғалары параллель болып келген төртбұрыш* ***параллелограмм*** *деп аталады.*



1.18-сурет

1.18-суретте $AB \parallel CD$ және $AD \parallel BC$. Параллелограмм — дөңес төртбұрыш. Топтасып, осы мәліметті өз беттеріңше түсіндіріңдер.

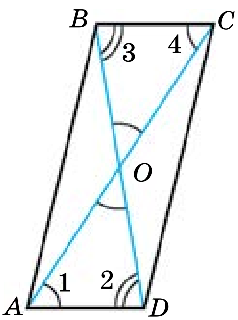


1.19-сурет

Теорема 1. *Параллелограмның қарама-қарсы қабырғалары тең және қарама-қарсы бұрыштары да тең.*

$ABCD$ – параллелограмм $\Rightarrow \begin{cases} \underline{AB = CD}, \ \underline{AD = BC}, \\ \angle A = \angle C, \ \angle B = \angle D \end{cases}$ (1.19-сурет).

▲ $ABCD$ — параллелограмм, AC — диагоналы. $AD \parallel BC \Rightarrow$ $\Rightarrow \angle 1 = \angle 3$, $AB \parallel CD \Rightarrow \angle 2 = \angle 4$ — айқыш бұрыштар $\Rightarrow$ $\Rightarrow \triangle ABC = \triangle CDA$, себебі AC ортақ қабырғаға іргелес бұрыштары тең (Үшбұрыштар теңдігінің II белгісі).
$\Rightarrow \angle A = \angle 1 + \angle 4 = \angle 3 + \angle 2 = \angle C$, $\angle B = \angle D$. $AB = CD$, $AD = BC$. ■



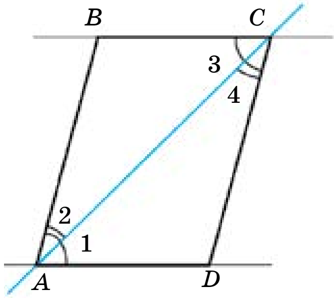
1.20-сурет

Теорема 2. *Параллелограмның диагональдары қиылысу нүктесінде қақ бөлінеді.*
$ABCD$ – параллелограмм, AC және BD диагональдары O нүктесінде қиылысады, $AO = OC$, $BO = OD$ (1.20-сурет).

▲ $ABCD$ параллелограмм, $AC \cap BD = O$.
$AD \parallel BC$ болғандықтан, $\angle 1 = \angle 4$, $\angle 2 = \angle 3$ және теорема 1 бойынша $AD = BC$. Онда үшбұрыштар теңдігінің II белгісі бойынша $\triangle AOD = \triangle COB \Rightarrow AO = OC$, $BO = OD$. ■

1.2.2. Параллелограмның белгілері

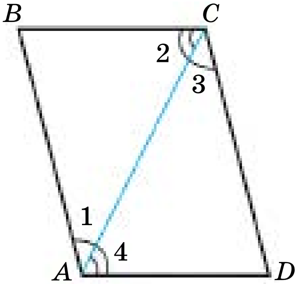
1-белгі. *Егер төртбұрыштың қарама-қарсы екі қабырғасы тең және параллель болса, онда бұл төртбұрыш параллелограмм болады:* $ABCD$ төртбұрышында $AB=CD$, $AB \parallel CD \Rightarrow ABCD$ – параллелограмм (1.21- сурет).



1.21-сурет

▲ $ABCD$ төртбұрышында $AD \| BC$, $AB = CD$ болсын. Онда $\angle 1 = \angle 3$, – айқыш бұрыштар. AC ортақ болғандықтан, I белгі бойынша $\Delta ABC = \Delta CDA$. Онда $\angle 2 = \angle 4$ және олар AD мен BC түзулері үшін айқыш бұрыштар. Олай болса $AD \| BC$, яғни $ABCD$ – параллелограмм. ■

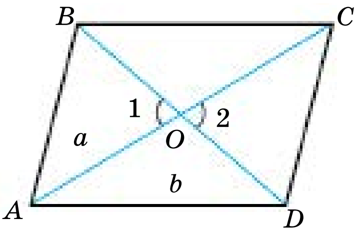
2-белгі. *Егер төртбұрыштың қарама-қарсы қабырғалары қос-қостан тең болса, онда бұл төртбұрыш параллелограмм болады:* $ABCD$ төртбұрышында $AB = CD$, $AD=BC \Rightarrow ABCD$ – параллелограмм (1.22-сурет).



1.22-сурет

▲ $\Delta ABC = \Delta CDA$ (үш қабырғасы бойынша) $\Rightarrow \angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$ – айқыш бұрыштар $\Rightarrow AB \,||\, CD$ және $AD \,||\, BC \Rightarrow ABCD$ – параллелограмм. ■

3-белгі: *Егер төртбұрыштың диагональдары қиылысу нүктесінде қақ бөлінсе, онда бұл төртбұрыш параллелограмм болады:* $ABCD$ төртбұрышында $AC \cap BD = O$, $AO = OC$, $BO=OD \Rightarrow ABCD$ – параллелограмм (1.23-сурет).



1.23-сурет

▲ $AO = OC$, $BO = OD$ және $\angle 1 = \angle 2$ вертикаль бұрыштар. $\Rightarrow \Delta ABO = \Delta CDO \Rightarrow AB = CD$. Осы сияқты $\Delta ADO = \Delta CBO \Rightarrow$ $\Rightarrow AD = BC$ $\Rightarrow$ 2-белгі бойынша $ABCD$ параллелограмм болады. ■

Мысал: *Іргелес қабырғалары а-ға және b-ға тең параллелограмның периметрі $P = 2\ (a+b)$ формуласымен анықталатынын көрсетейік.*

▲ $ABCD$ – параллелограмм, $AB = a$, $AD = b$ болсын. Онда $CD = AB = a$ және $BC = AD = b$ (1.23 – сурет). Сондықтан $P = AB + BC + CD + DA = a + b + a + b = 2(a + b)$. ■

?

1. Қандай төртбұрыш параллелограмм деп аталады?
2. Параллелограмның қандай қасиеттерін білесіңдер?
3. Параллелограмның белгілерін тұжырымдап, дәлелдеңдер.
4. Параллелограмның барлық бұрыштары сүйір болуы мүмкін бе?
5. Параллелограмның тек бір ғана тік бұрышы болуы мүмкін бе?
6. Әртүрлі екі сүйір бұрыш бір параллелограмның бұрыштары болуы мүмкін бе?
7. Параллелограмның бұрыштары арасында қандай байланыс бар?

ПТ

1. Көз мөлшерімен параллелограмм салып, оны: 1) 1-белгі; 2) 2-белгі; 3) 3-белгі бойынша тексеріңдер.
2. Үшбұрыш салып, оның төбелері параллелограмның төбесі болатындай етіп, параллелограмға дейін толықтырыңдар. Мұндай параллелограмның неше түрін салуға болады?

ЕСЕПТЕР

А

1.26. Егер: 1) $\angle A = 80°$; 2) $\angle B - \angle A = 30°$; 3) $\angle A + \angle C = 140°$; 4) $\angle B = 2\angle A$; 5) $\angle ABD = 90°$, $\angle ADB = 30°$ болса, $ABCD$ параллелограмының бұрыштарын табыңдар.

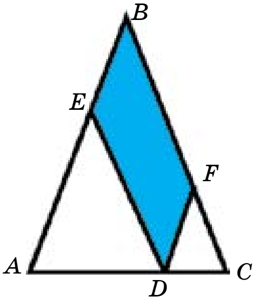
1.27. Параллелограмның екі бұрышының қосындысы: 1) 90°; 2) 120°; 3) 200° деп алып, оның бұрыштарын табыңдар.

1.28. Параллелограмның екі бұрышының айырмасы: 1) 40°; 2) 80°; 3) 120° деп алып, оның бұрыштарын табыңдар.

1.29. Параллелограмның екі қабырғасының ұзындықтары 10 см және 12 см. Оның өзге екі қабырғасының ұзындықтары қандай? Жауаптарыңды негіздеңдер.

1.30. $ABCD$ параллелограмының BD диагоналында $PB=QD$ болатындай P және Q нүктелері берілген. $APCQ$ төртбұрышының параллелограмм екенін дәлелдеңдер.

1.31. Тең бүйірлі үшбұрыштың бүйір қабырғасы 5 м. Оның табанындағы бір нүктеден бүйір қабырғаларына параллель екі түзу жүргізілген. Осының нәтижесінде пайда болған параллелограмның периметрін анықтаңдар (1.24-сурет).



1.24-сурет

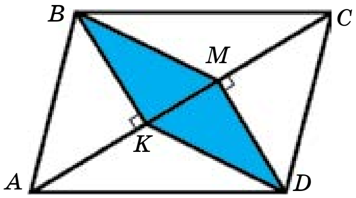
1.32. $ABCD$ параллелограмының периметрі 10 см, ал ABD үшбұрышының периметрі 8 см. BD диагоналының ұзындығы қандай?

1.33. $ABCD$ параллелограмында E нүктесі – BC қабырғасының, ал F нүктесі – AD қабырғасының ортасы. $BEDF$ төртбұрышының параллелограмм болатынын дәлелдеңдер.

1.34. $ABCD$ параллелограмының периметрі 50 см, ал $BD = 7$ см. ABD үшбұрышының периметрін табыңдар.

B

1.35. $ABCD$ дөңес төртбұрышы берілген: 1) $\angle BAC = \angle ACD$ және $\Delta BAC = \Delta CDA$; 2) $AB \parallel CD$, $\angle A = \angle C$ болса, $ABCD$ төртбұрышы параллелограмм болатынын көрсетіңдер.



1.25-сурет

1.36. *ABCD* параллелограмының *B* және *D* төбелерінен *AC* диагоналына *BK* және *DM* перпендикулярлары жүргізілген. *BMDK* төртбұрышы параллелограмм екенін дәлелдеңдер (1.25-сурет).

1.37 *ABCD* параллелограмының *A* төбесінен жүргізілген биссектрисасы *BC* қабырғасын *E* нүктесінде қиып өтеді. Егер *AB*=9 см, *AD*=15 см болса, онда *BE* және *EC* кесінділерінің ұзындықтарын табыңдар.

1.38. Параллелограмның екі қабырғасының қатынасы 3:4 қатынасына тең, ал оның периметрі 2,8 м. Параллелограмның қабырғаларын табыңдар.

1.39. *ABCD* параллелограмының *B* төбесінен *AD* қабырғасына түсірілген перпендикуляр осы қабырғаны қақ бөледі. Параллелограмның периметрі 3,8 см, ал *ABD* үшбұрышының периметрі 3 см. Параллелограмның *BD* диагоналын және қабырғаларын табыңдар.

1.40. Параллелограмның қабырғалары 3 см және 5 см. Бұл параллелограмның диагональдары: 1) 10 см; 2) 8 см; 3) 4 см болуы мүмкін бе?

1.41. Параллелограмның қарама-қарсы қабырғаларының орталарын қосатын кесінді оның өзге екі қабырғасына параллель болатынын дәлелдеңдер.

1.42. Параллелограмды өзара тең екі: 1) үшбұрыштарға; 2) төртбұрыштарға бөлетіндей етіп түзу жүргізіңдер.

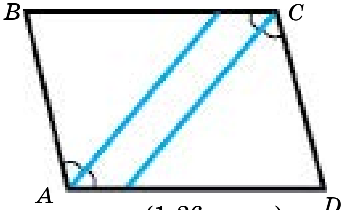
1.43. Диагональдарының қиылысу нүктесінің және көршілес екі төбесінің орны бойынша параллелограмм салыңдар.

1.44. Егер төртбұрыштың көршілес екі қабырғасының әрқайсысына іргелес екі бұрыштың қосындысы 180°-қа тең болса, онда бұл төртбұрыш параллелограмм болатынын дәлелдеңдер.

1.45. Көршілес екі қабырғасы мен олардың арасындағы бұрышы бойынша параллелограмм салыңдар.

C

1.46. Бір қабырғасы мен екі диагоналы бойынша параллелограмм салыңдар.



(1.26-сурет)

1.47. Параллелограмның қарама-қарсы екі бұрышының биссектрисалары параллель болатынын дәлелдеңдер (1.26-сурет).

1.48. Параллелограмның периметрі 50 см. Оның диагональдары параллелограмды төрт үшбұрышқа бөледі және бұл үшбұрыштардың екеуінің периметрлерінің айырмасы 5 см. Параллелограмның қабырғаларын табыңдар.

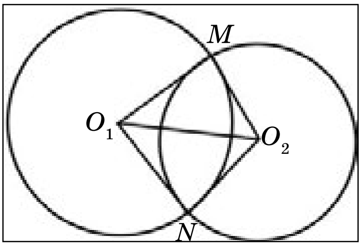
1.49. KL түзуі – қабырғалары өзара тең $ABCD$ параллелограмының A төбесіндегі сыртқы бұрыштың биссектрисасы және $AK=AL$. KCL үшбұрышының тең бүйірлі екенін дәлелдеңдер.

ҚАЙТАЛАУҒА АРНАЛҒАН ЖАТТЫҒУЛАР

1.50. Үшбұрыштың тең емес қабырғаларының арасындағы бұрыштың медианасының сол қабырғалардың кішісімен жасайтын бұрышы екінші қабырғасымен жасайтын бұрышынан үлкен болатынын дәлелдеңдер.

1.51. Параллелограмм бұрыштарының биссектрисалары қиылысқанда пайда болатын төртбұрыштың: а) параллелограмм болатынын; ә) барлық бұрыштарының тік болатынын дәлелдеңдер.

1.52. 1.27-суретте екі шеңбер M және N нүктелерінде қиылысқан. 1) $\Delta\ O_1MO_2 = \Delta\ O_1NO_2$ теңдігін; 2) $\Delta\ MO_1N$ және $\Delta\ MO_2N$ тең бүйірлі үшбұрыштар болатынын дәлелдеңдер.

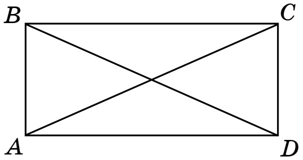


1.27-сурет

1.3. Тіктөртбұрыш, ромб, шаршы және олардың қасиеттері.

1.3.1. Тіктөртбұрыш

Анықтама. *Тіктөртбұрыш деп барлық бұрыштары тік болатын параллелограмды айтады.*



1.28-сурет

Теорема 1. *Тіктөртбұрыштың диагональдары тең.* $ABCD$ – тік төртбұрыш $\Rightarrow AC = BD$ (1.28-сурет)

▲ $ABCD$ – тіктөртбұрыш, AC, BD — диагональдары (1.28- сурет). $\triangle ABD = \triangle DCA$ (катеттері тең $AB=CD$, ал AD ортақ) $\Rightarrow AC = BD$. ■

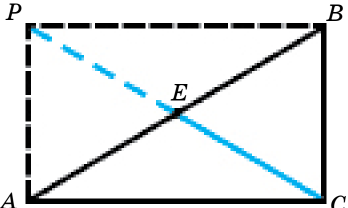
Теорема 2. *Диагональдары тең параллелограмм тіктөртбұрыш болады.* $ABCD$ параллелограмында $AC = BD \Rightarrow$ $ABCD$ – тік төртбұрыш.

▲ $ABCD$ параллелограмының диагональдары тең: $AC = BD$ (1.28-сурет) $\Rightarrow \Delta ABD = \Delta CDA$ (үш қабырғасы бойынша) $\Rightarrow \Delta BAD = \angle ADC$. $\angle BAD + \angle ADC = 180^\circ$ — параллелограмның бір қабырғасына іргелес бұрыштар. Онда $\angle BAD = \angle ADC = 90^\circ$. Осы сияқты $\angle ABC = \angle BCD = 90^\circ$. $\Rightarrow ABCD$ – тіктөртбұрыш. ■

Салдар: Тік бұрышты үшбұрыштың гипотенузасына жүргізілген медиана гипотенузаның жартысына тең.

Δ ABC — тік бұрышты, $\angle C = 90^\circ$, CE медианасы $\Rightarrow CE = \frac{1}{2}AB$ (1.29-сурет).

▲ ABC тікбұрышты үшбұрышын 1.29-суретте көрсетілгендей тік төртбұрышқа дейін толықтырсақ *(APBC)*, онда CE медианасы CP диагоналының жартысы болады. Сонда $CE = \frac{1}{2}CP = \frac{1}{2}AB$. ■



1.29-сурет

1.3.2. Ромб.

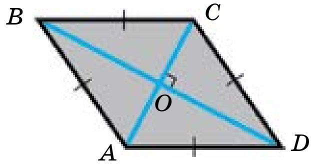
Анықтама: *Барлық қабырғалары тең параллелограмды* ***ромб*** *деп атайды.*

Теорема 3. *Ромбының диагональдары өзара перпендикуляр және оның бұрыштарын қақ бөледі.* $ABCD$ *– ромб* $\Rightarrow AC \perp BD$, AC диагоналы A және C бұрыштарының биссектрисасы, ал BD диагоналы B және D бұрыштарының биссектрисасы.

Қабырғасының ұзындығы a-ға ромбының диагональдары: $d_1 = 2a\sin\frac{\alpha}{2}$, $d_2 = 2a\cos\frac{\alpha}{2}$ формуласымен есептеледі.

▲ $ABCD$ – ромб. $\triangle ABC$ – тең бүйірлі. $BO=OD$, $AO=OC$ $\Rightarrow BO$ кесіндісі ABC үшбұрышының медианасы. $\Rightarrow BO$ – әрі биіктік, әрі биссектриса болады, яғни $BO \perp AC$. ■

Теорема 4 (Кері теорема). Диагональдары перпендикуляр әрбір параллелограмм ромб болады: $ABCD$ параллелограмда $AC \perp BD \Rightarrow ABCD$ – ромб (1.30-сурет).

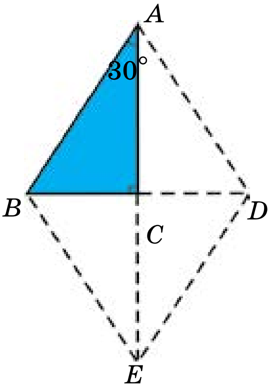


1.30-сурет

▲ $ABCD$ – параллелограмм $AC \perp BD \Rightarrow AC$ және BD диагональдары бір-бірінің орта перпендикуляры. Олай болса, $ABCD$ параллелограмның көршілес төбелері бір-бірінен бірдей қашықтықта орналасқан, яғни $ABCD$ – ромб. ■

Мысал. 30° бұрышқа қарсы жатқан катет гипотенузаның жартысына тең: $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ \Rightarrow$

$$\Rightarrow BC = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}AB$$ (1.31-сурет).



1.31-сурет

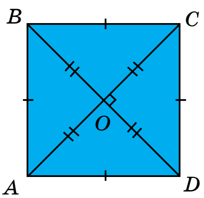
▲$\triangle ABC$ тік бұрышты: $\angle C = 90^\circ$, $\angle A=30^\circ$ болсын. Бұл үшбұрышты 1.31-суретте көрсетілгендей етіп, сүйір бұрышы 60°-қа тең ромбыға дейін толықтырамыз. Онда $\triangle ABD$-тең қабырғалы үшбұрыш, яғни $AB=BD=AD$. Екінші жағынан,

$$BC = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}AB\ .$$ ■

1.3.3. Шаршы.

Анықтама. Барлық қабырғалары тең тіктөртбұрыш шаршы деп аталады (1.32–сурет).

Шаршы – әрі тік төртбұрыш, әрі ромб.



1.32-сурет

Сондықтан: 1) Шаршының барлық бұрыштары тік;

2) Шаршының барлық қабырғалары тең;

3) Шаршының диагональдары тең, өзара перпендикуляр, қиылысу нүктесінде қақ бөлінеді және олар шаршы бұрыштарының биссектрисасы да болады (1.32-сурет).

?

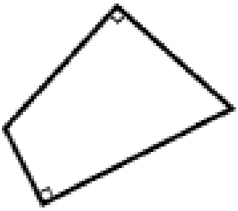
1. Тіктөртбұрыш дегеніміз не?
2. Тіктөртбұрышқа қандай анықтамалар беруге болады?
3. Параллелограмды былай анықтауға бола ма: «Параллелограмм деп қарама-қарсы қабырғалары параллель және өзара тең болатын төртбұрышты айтамыз»? Бұл анықтаманың кемшілігі неде?
4. Тіктөртбұрыштың диагональдары тең екенін дәлелдеңдер.
5. Ромб дегеніміз не?
6. Ромбының диагональдары: 1) өзара перпендикуляр; 2) оның бұрыштарының биссектрисасы болатынын көрсетіңдер.
7. Шаршы дегеніміз не, оның қандай қасиеттерін білесіңдер?
8. Барлық биіктіктері өзара тең параллелограмм жөнінде не айтуға болады?

ПТ

1. Көз мөлшерімен тіктөртбұрыш салыңдар (қабырғалары дәптер сызықтарына параллель болмасын). Сызбаның дұрыстығын өлшеу жұмыстары арқылы және тіктөртбұрыштың қасиеттері арқылы тексеріңдер.
2. 1-тапсырманы шаршы мен ромб үшін де орындаңдар.

ЕСЕПТЕР

А



1.33, *а*-сурет

1.53. Екі бұрышы тік болып келген төртбұрыштың тіктөртбұрыш бола бермейтінін көрсетіңдер (1.33, *а*-сурет).

1.54. Тіктөртбұрыш болмайтын, бірақ диагональдары өзара тең төртбұрышты салыңдар.

1.55. 1.53 және **1.54**-есептердегі төртбұрыштар әр уақытта тіктөртбұрыш болуы үшін есептерді қандай шарттармен толықтыру керек?

1.56. Барлық бұрыштары өзара тең төртбұрыштың тік төртбұрыш болатынын дәлелдеңдер.

1.57. Ортақ төбесі бар екі қабырғасы тең параллелограмм ромб болатынын дәлелдеңдер.

1.58. Параллелограмның диагональдары: а) өзара перпендикуляр; ә) бұрыштарының биссектрисасы болады деп алып, оның ромб болатынын дәлелдеңдер.

1.59. Диагональдары перпендикуляр төртбұрыш ромб бола ала ма?

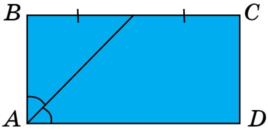
1.60. Диагональдары тең әрі перпендикуляр төртбұрыш шаршы бола ала ма?

1.61. Қандай шарт орындалса: 1) «Параллелограмм»; 2) «тіктөртбұрыш»; 3) «ромб»;

3) ▲«Барлық бұрыштары тік болып келетін ромб шаршы болады» ■.

4) «төртбұрыш» шаршы болады.

1.62. Тіктөртбұрыш пен ромбының бірнеше белгілерін атап көрсетіңдер.



1.33, *ә*-сурет

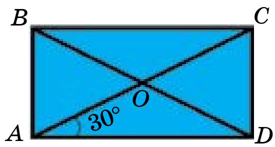
1.63. Тіктөртбұрыштың бір бұрышының биссектрисасы оның қабырғасын қақ бөледі. Оның кіші қабырғасы 10 см. Тіктөртбұрыштың периметрін табыңдар (1.33, ә-сурет).

1.64. Тіктөртбұрыштың диагональдарының қиылысу нүктесі үлкен қабырғасына қарағанда кіші қабырғасынан 4 см қашық орналасқан және тіктөртбұрыштың периметрі 56 см. Оның қабырғаларын табыңдар.

1.65. Ромбының бір диагоналы оның қабырғасына тең. Ромбының бұрыштарын табыңдар.

B

1.66. *ABCD* тіктөртбұрышының диагональдары *O* нүктесінде қиылысады.
1) *AOD* және *AOB* үшбұрыштарының тең бүйірлі екенін дәлелдеңдер;
2) $\angle CAD = 30°$, $AC=12$ см болса, *AOB* үшбұрышының периметрін табыңдар (1.34-сурет).

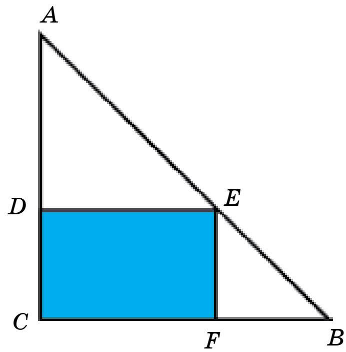


1.34-сурет

1.67. Тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасына жүргізілген медианасы осы үшбұрыштан тең қабырғалы үшбұрыш бөледі. Берілген үшбұрыштың сүйір бұрыштарын табыңдар.

1.68. Шеңбердің бір нүктесінен жүргізілген өзара перпендикуляр екі хорданың центрден қашықтықтары 6 см және 10 см. Хордалардың ұзындықтарын табыңдар.

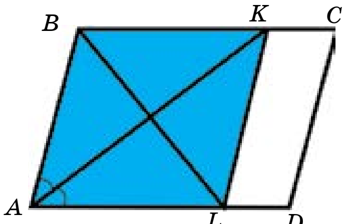
1.69. Әр катеті 6 см болатын тік бұрышты үшбұрышқа іштей сызылған тіктөртбұрыш пен үшбұрыштың бір бұрышы ортақ. Тіктөртбұрыштың периметрін табыңдар (1.35-сурет).



1.35-сурет

1.70. Тең бүйірлі тік бұрышты үшбұрышқа іштей сызылған тіктөртбұрыштың екі төбесі гипотенузада, ал қалған екі төбесі катеттерінде орналасқан. Тіктөртбұрыштың қабырғаларының қатынасы 5:2 қатынасына тең, ал үшбұрыштың гипотенузасы 45 см. Тіктөртбұрыштың үлкен қабырғасы гипотенузада жатса, оның қабырғаларын табыңдар.

1.71. *ABCD* параллелограмында $AD > AB$. *A* мен *B* бұрыштарының биссектрисалары параллелограмның *BC* және *AD*



1.36-сурет

қабырғаларына сәйкес K және L нүктелерінде қияды. $ABKL$ төртбұрышы ромб болатынын дәлелдеңдер (1.36-сурет).

1.72. Ромбының диагональдарының қиылысу нүктесі арқылы оның қабырғаларына перпендикулярлар жүргізілген. Осы перпендикулярлардың ромб қабырғаларымен қиылысу нүктелері тік төртбұрыштың төбелері болатынын дәлелдеңдер.

1.73. Ромб қабырғаларының оның диагональдарымен жасайтын бұрыштарының қатынасы 4:5 қатынасына тең. Ромбының бұрыштарын табыңдар.

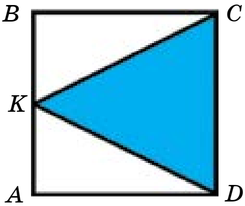
1.74. Ромбының периметрі 16 см, биіктігі 2 см. Ромбының бұрыштарын табыңдар.

1.75. Әрбір катеті 2 м болатын тең бүйірлі тік бұрышты үшбұрышқа іштей сызылған шаршы мен осы үшбұрыштың бір бұрышы ортақ. Шаршының периметрін табыңдар.

1.76. Тік бұрышты үшбұрыштың тік бұрышының биссектрисасының гипотенузамен қиылысу нүктесі арқылы катеттеріне параллель түзулер жүргізілген. Осы шыққан төртбұрыштың шаршы екенін дәлелдеңдер.

1.77. Шаршының диагоналы 4 м. Оның қабырғасы екінші бір шаршының диагоналына тең. Соңғы шаршының қабырғасын табыңдар.

1.78. Шеңберге бір нүктеден өзара перпендикуляр екі жанама жүргізілген. Шеңбердің радиусы 10 см. Жанамалардың ұзындығын (берілген нүктеден жанасу нүктесіне дейінгі қашықтықты) табыңдар.



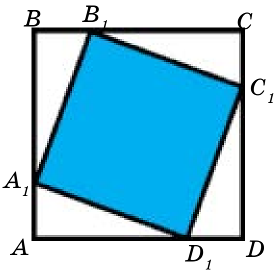
1.37-сурет

1.79. $ABCD$ шаршысының AB қабырғасынан K нүктесі алынған: $AK=BK$. CDK үшбұрышы тең бүйірлі екенін дәлелдеңдер (1.37-сурет).

C

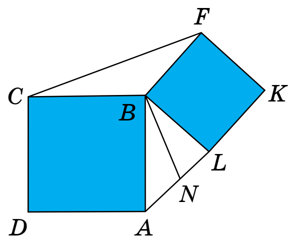
1.80. Шаршының төбелері арқылы оның диагональдарына параллель түзулер жүргізілген. Шыққан төртбұрыштың шаршы болатынын дәлелдеңдер.

1.81. *ABCD* шаршысының әрбір қабырғасына өзара тең кесінділер өлшеп салынған: $AA_1=BB_1=CC_1=DD_1$. $A_1B_1C_1D_1$ төртбұрышы шаршы болатынын дәлелдеңдер (1.38-сурет).



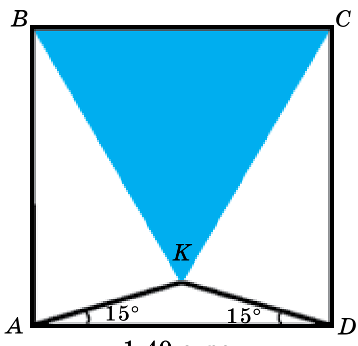
1.38-сурет

1.82. *ABCD* және *BFKL* шаршыларының *B* төбесі ортақ (1.39-сурет). *ABL* үшбұрышының *BN* медианасы *CF* кесіндісіне перпендикуляр болатынын дәлелдеңдер.



1.39-сурет

1.83. *ABCD* шаршысының ішінен $\angle KAD = \angle KDA = 15°$ болатындай етіп, *K* нүктесі алынған. *BCK* үшбұрышы тең қабырғалы екенін дәлелдеңдер (1.40-сурет).



1.40-сурет

1.84. Диагональдары бұрыштарының биссектрисасы болатын әрбір дөңес төртбұрыш ромб болады. Ромбының осы белгісін дәлелдеңдер.

1.85. *ABCD* тік төртбұрышының төбесінен оның диагоналына түсірілген перпендикуляр оның бұрышын 3:1 қатынасында бөледі. Осы перпендикуляр мен екінші диагоналының арасындағы бұрышты табыңдар.

1.86. Ромбының диагоналы оның $2p$-ға тең периметрінің 25%-ін құрайды. Ромбының осы диагоналын, қабырғасын және бұрыштарын табыңдар.

1.4. ТӨРТБҰРЫШТАРДЫ ЭЛЕМЕНТТЕРІ БОЙЫНША САЛУ

Салу есептері белгілі бір қалыптасқан жоба бойынша шешіледі:

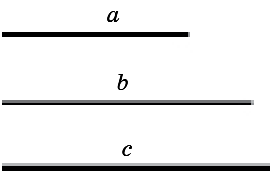
I. Талдау: Бұл кезеңде берілген мәліметтер мен салуды қажет тұтатын фигура (оның элементтері) арасындағы байланыстар мен қатынастарды анықтап, есепті шешу жолдары іздестіріледі.

II. Салу: Талдау кезеңінде есепті шешу үшін айқындалған іс-шараны рет-ретімен тізіп жазып, қажетті салу жұмыстарын орындайды.

III. Дәлелдеу: Алдыңғы кезеңде салынған фигураның шынымен есеп шартын қанағаттандыратыны дәлелденеді.

IV. Зерттеу: Мұнда қандай шарт орындалғанда есептің шешімі бар; жалғыз немесе бірнеше шешімі бар; шешімі мүлде болмайтыны анықталады.

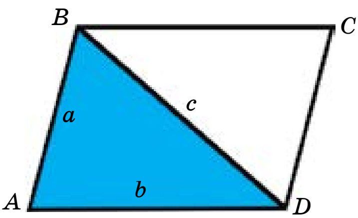
1-мысал: *Көршілес екі қабырғасы мен диагоналы бойынша параллелограмм салу керек.*



1.41-сурет

Есеп шартын былай түсіну керек: 1.41-суретте көрсетілгендей, ұзындықтары a, b және c-ға тең үш кесінді берілген. Көршілес қабырғалары ұзындықтары a мен b-ға ал диагоналының ұзындығы c-ға тең болатын параллелограмм салу керек.

I. Талдау: Бізге қажет $ABCD$ параллелограмы салынды делік (1.42-сурет). Онда $\triangle ABD$-ның қабырғалары берілген кесінділерге (1.41-сурет) тең екенін көреміз: $AB=a$, $AD=b$ және $BD=c$. Олай болса, қажет параллелограмды салу үшін үш қабырғасы бойын-



1.42-сурет

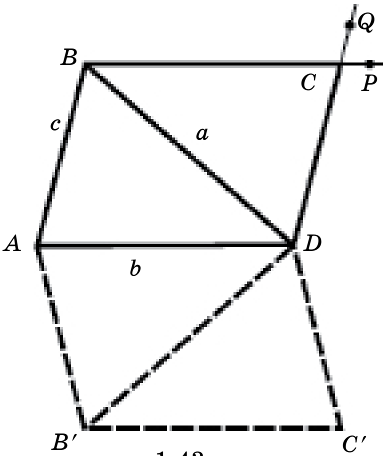
ша ABD үшбұрышын салып, оны $ABCD$ параллелограмына дейін толықтыру керек.

II. Салу: 1) $AB=a$, $AD=b$, $BD=c$ болатындай етіп, ABD үшбұрышын саламыз;

2) B нүктесі арқылы $BP \parallel AD$ болатындай етіп, BP түзуін, ал D нүктесі арқылы $DQ \parallel AB$ болатындай етіп, DQ түзулерін жүргіземіз;

3) $BP \cap DQ = C$ деп аламыз. Онда $ABCD$ – бізге қажет параллелограмм.

III. Дәлелдеу. Салуымыз бойынша $AD \parallel BC$, $AB \parallel CD$ және $AB=a$, $AD=b$ және $BD=c$. Сондықтан $ABCD$ параллелограмы есеп шартын толық қанағаттандырады.



1.43-сурет

IV. Зерттеу. $ABCD$ параллелограмын салу ABD үшбұрышын салуға келіп тіреледі. Онда a, b, c сандары үшбұрыштар теңсіздігін қанағаттандыруы қажет: $a<b+c$; $b<a+c$; $c<a+b$. Егер бұл теңсіздіктердің біреуі орындалмаса, онда есептің шешімі болмайды. Бұл теңсіздіктер түгел орындалған жағдайда есептің екі шешімі бар. Өйткені, үш қабырғасы бойынша екі үшбұрыш салынады: ABD және $AB'D$. Онда $ABCD$ және $AB'C'D$ параллелограмдары есеп шартын толық қанағаттандырады (1.43-сурет). ■

Т Салу есептері ежелгі математиктердің еңбектері арасынан елеулі орын алған. Өйткені бұл кезеңде барлық математикалық деректер сызба көмегімен геометриялық тілде негізделген. Сызғыш пен циркульді пайдаланып көпбұрыштарды, оның ішінде дұрыс көпбұрыштарды салу мәселесі немістің ұлы математигі Карл Гаусска (1777–1855) дейін өз шешімін таппай келді. Бұл мәселені тек 1801 жылы ғана К.Гаусс алгебралық жолмен толық шешті. Оның дәлелдемесі бойынша дұрыс n-бұрышты циркульді және сызғышты пайдаланып салу үшін $n = 2^m \cdot P_1 \cdot \ldots \cdot P_k$, $M \in Z$, $M \geqslant 0$, $P_1, \ldots,$ $P_K{}^2 + 1\,(K \geqslant 0)$ түріндегі жай сан болады. Мысалы, $5 = 2^{21} + 1$, ал 7 мұндай түрде жазылмайды, яғни дұрыс жеті бұрышты циркульді және сызғышты пайдаланып салуға болмайды.

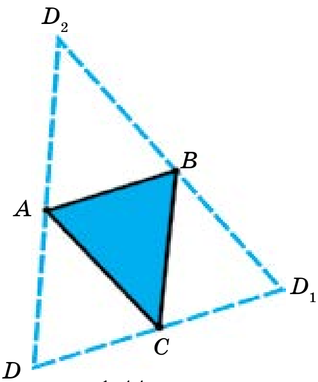
Карл Гаусс
(1777–1855)

?

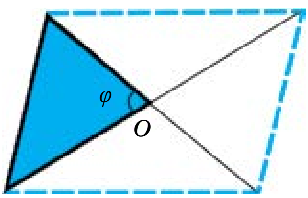
1. Салу есептері неше кезеңнен тұрады? Бұл кезеңдерді атап, олардың мәні мен мағынасын ашып көрсетіңдер.
2. Егер барлық қабырғалары берілген болса, онда: 1) параллелограмм; 2) тік төртбұрыш; 3) ромб; 4) шаршы анықтала ма, яғни оларды салу мүмкін бе? Мүмкін болған жағдайларда аталған фигураларды салып көрсетіңдер.

ЕСЕПТЕР

B



1.44-сурет



1.45-сурет

1.87. Төбелері бір түзудің бойында жатпайтын берілген үш нүктеде орналасатын неше түрлі параллелограмм салуға болады? (1.44-сурет).

1.88. Бір қабырғасы мен екі диагоналы бойынша параллелограмм салыңдар.

1.89. Екі қабырғасы мен бір бұрышы бойынша параллелограмм салыңдар.

1.90. Екі диагоналы мен олардың арасындағы бұрышы бойынша параллелограмм салыңдар (1.45-сурет).

1.91. 1) Сүйір бұрышы мен екі биіктігі бойынша; 2) биіктігі және екі диагоналы бойынша параллелограмм салыңдар.

1.92. 1) Көршілес екі қабырғасы; 2) қабырғасы және диагоналы; 3) диагональдары мен олардың арасындағы бұрышы бойынша тік төртбұрыш салыңдар.

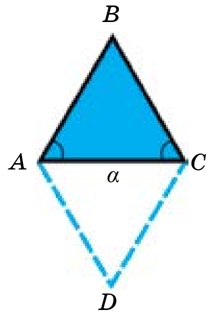
1.93. 1) Екі диагоналы; 2) қабырғасы және бұрышы бойынша ромб салыңдар.

1.94. 1) Қабырғасы; 2) диагоналы бойынша шаршы салыңдар.

1.95. 1) Қабырғасы, диагоналы және диагональдарының арасындағы бұрышы; 2) екі биіктігі мен қабырғасы бойынша параллелограмм салыңдар.

1.96. 1) Диагоналы және бұрышы (1.46-сурет);

2) диагоналы және биіктігі бойынша ромб салыңдар.



1.46-сурет

1.97. 1) Берілген екі төбесі; 2) қарама-қарсы екі қабырғасының орталары; 3) көршілес екі қабырғасының орталары; 4) центрі (диагональдарының қиылысу нүктесі) және бір қабырғасында жатқан екі нүктесі бойынша шаршы салыңдар.

C

1.98. *ABC* бұрышының ішкі *D* нүктесі арқылы өтетін және осы бұрыштың қабырғаларымен шектелетін кесіндісі *D* нүктесінде қақ бөлінетіндей етіп, түзу жүргізіңдер.

1.99. Екі қабырғасы мен үшінші қабырғасына жүргізілген медианасы бойынша үшбұрыш салыңдар.

1.100. Диагоналы және көршілес екі қабырғасының қосындысы бойынша тік төртбұрыш салыңдар.

1.101. Параллель екі түзу және олардың арасында орналасқан екі нүкте берілген. Екі қабырғасы берілген екі түзудің бойында жататын және былайғы екі қабырғасы берілген екі нүкте арқылы өтетін ромб салыңдар.

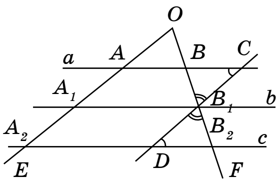
1.102. Үш қабырғасындағы бір-бір нүктелердің орындары бойынша шаршы салыңдар.

1.5. ФАЛЕС ТЕОРЕМАСЫ. ҮШБҰРЫШТЫҢ ОРТА СЫЗЫҒЫ

1.5.1. Фалес теоремасы

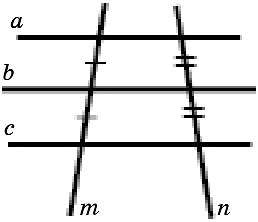
Теорема 1. *(Фалес теоремасы) Егер бұрыш қабырғаларын қиып өтетін параллель түзулер оның бір қабырғасынан тең кесінділер қиып өтсе, онда бұл түзулер бұрыштың екінші қабырғасынан да тең кесінділер қиып өтеді.* Берілгені: $\angle EOF$, $a \parallel b \parallel c$ түзулері; $OE \cap a = A$; $OE \cap b = A_1$; $OE \cap c = A_2$; $AA_1 = A_1A_2$, $OF \cap a = B$; $OF \cap b = B_1$; $OF \cap c = B_2$.

Дәлелдеу керек $BB_1 = B_1B_2$.



1.47-сурет

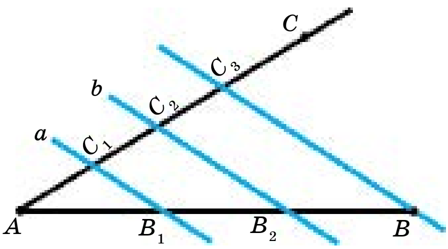
▲B_1 нүктесі арқылы $CD \parallel OE$ болатындай CD түзуін жүргіземіз: $C \in a$, $D \in c$ (1.47-сурет). AA_1B_1C және $A_1A_2DB_1$ – параллелограмдар. $\Rightarrow AA_1 = CB_1$ және $A_1A_2 = B_1D$, ал $AA_1 = A_1A_2$ $\Rightarrow CB_1 = B_1D$. $\angle BB_1C = \angle DB_1B_2$ – вертикаль бұрыштар. $\angle BCB_1 = \angle B_1DB_2$ – айқыш бұрыштар. Онда $\triangle BCB_1 = \triangle B_2DB_1 \Rightarrow BB_1 = B_1B_2$.■



1.48-сурет

Мысал. Берілген AB кесіндісін тең үш бөлікке бөлу керек.

Фалес теоремасында бұрыш қабырғаларының орнына кез келген екі түзуді алуға болады (1.48-сурет).



1.49-сурет

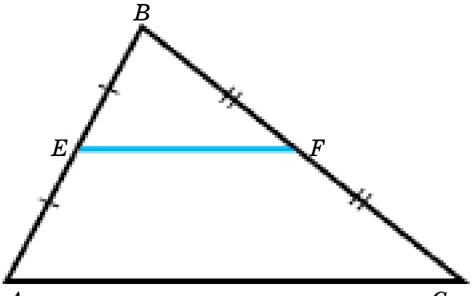
▲ AC сәулесін жүргіземіз. $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3$, болатындай етіп, $C_1, C_2, C_3 \in AC$ нүктелерін аламыз. C_1 және C_2 нүктелері арқылы $a \parallel C_3B$, $b \parallel C_3B$ болатындай a және b түзулерін жүргіземіз (1.49-сурет). $B_1 = a \cap AB$, $B_2 = b \cap AB$ деп белгілейміз.

Онда Фалес теоремасы бойынша $AB_1 = B_1B_2 = B_2B$ ■.

1.5.2. Үшбұрыштың орта сызығы

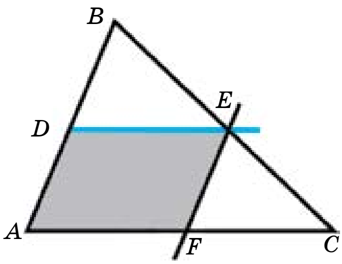
Анықтама. *Екі қабырғасының орталарын қосатын кесіндіні үшбұрыштың* **орта сызығы** *деп атайды*: (1.50-суретте).

$AE = EB,\ BF = FC \Rightarrow$
$\Rightarrow EF$ – **орта сызық.**



1.50-сурет

Теорема 2. Үшбұрыштың орта сызығы оның үшінші қабырғасына параллель және осы қабырғаның жартысына тең: ABC үшбұрышында DE – орта сызық. Онда $DE \parallel AC$ және $DE = \frac{1}{2} AC$ (1.51-сурет).



1.51-сурет

▲ $AD=DB$ болсын (1.51-сурет). $DE \parallel AC$ болатындай DE түзуін жүргіземіз: $E \in BC \Rightarrow$ Фалес теоремасы бойынша $BE=EC$, яғни DE–орта сызық. E нүктесі арқылы $EF \parallel AB$ болатындай, EF түзуін жүргіземіз: $F \in AC$. Фалес теоремасы бойынша $AF=FC$, ал $ADEF$ – параллелограмм. Сондықтан $DE = AF = \frac{1}{2} AC$. ■

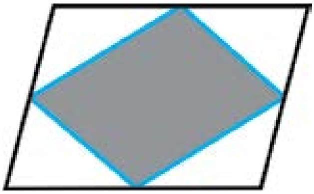
Т Милеттік Фалес (б. з. б. VI ғ.) ежелгі грек ғалым-философы. Ол ежелгі грек философиясы мен ғылымының негізін қалаушы болып саналады. Кейбір геометриялық теоремалардың дәлелдемесі Фалес есімімен байланыстырылады. Мәселен, вертикаль бұрыштардың теңдігі, дөңгелекті диаметрі бойымен қақ бөлу жөніндегі және т. б. теоремалар.

Фалес
(б.з.б.VI ғ.)

?
1. Фалес теоремасын тұжырымдап, оны дәлелдеңдер.
2. Үшбұрыштың орта сызығы дегеніміз не?
3. Үшбұрыштың орта сызығының қасиетін тұжырымдап, оны дәлелдеңдер.

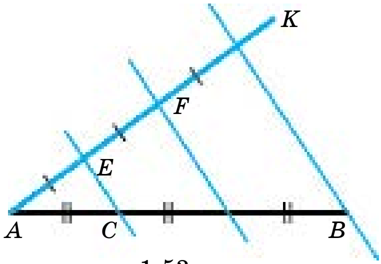
ЕСЕПТЕР

А



1.52-сурет

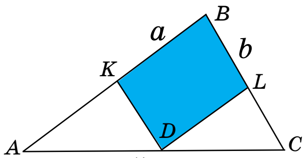
1.103. 1) Параллелограмм (1.52-сурет); 2) тік төртбұрыш; 3) ромб; 4) квадрат қабырғаларының орталарын тізбектеп қосқанда шығатын төртбұрыштың түрін анықтаңдар.



1.53-сурет

1.104. Берілген кесіндіні: 1) өзара тең төрт; 2) өзара тең бес кесіндіге бөліңдер.

1.105. Берілген кесіндіні: 1) 1:2 (1.53-сурет); 2) 2:3 қатынасында екі бөлікке бөліңдер.



1.54-сурет

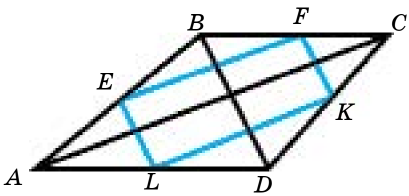
1.106. Үшбұрыштың екі қабырғасы a мен b-ға тең. Үшінші қабырғасының ортасынан берілген қабырғаларына параллель түзулер жүргізгенде пайда болатын төртбұрыштың периметрін табыңдар (1.54-сурет).

1.107. Үшбұрыштың периметрі P-ға тең. Төбелері берілген үшбұрыш қабырғаларының орталары болып келген үшбұрыштың периметрін табыңдар.

1.108. Төртбұрыш диагональдары 3 дм және 8 дм. Төбелері төртбұрыш қабырғаларының орталарында жататын төртбұрыштың периметрін табыңдар.

▲ **Берілгені:** $ABCD$ төртбұрышы; $AC = 8$ дм, $BD = 3$ дм. E, F, K, L нүктелері – төртбұрыш қабырғаларының орталары.

Табу керек: $EFKL$ периметрін (1.55-сурет).



1.55-сурет

▲ EF кесіндісі – $\triangle ABC$ -ның орта сызығы: $EF = \frac{1}{2}\ AC = 4$ дм. LK кесіндісі – $\triangle ADC$ -ның орта сызығы: $LK = \frac{1}{2}\ AC = 4$ дм.

Осы сияқты, EL және FK – сәйкес ABD және BCD үшбұрыштарының орта сызықтары. Сондықтан $EL=FK=\frac{1}{2}BD=$ $= 1{,}5$ дм. Онда $P_{EFKL}=EF+FK+KL+LE=4+1{,}5+4+1{,}5=11$ дм.

Жауабы: 11 дм. ■

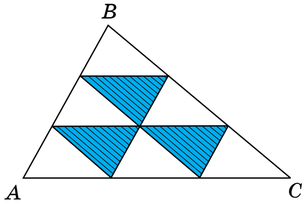
B

1.109. Сүйір бұрышты ABC үшбұрышының B төбесінен түсірілген биіктігі AC қабырғасын ұзындықтары 6 см және 4 см болатын кесінділерге бөледі. Осы үшбұрыштың медианаларының AC қабырғасына түсірілген проекцияларының ұзындықтарын табыңдар.

1.110. Дөңес төртбұрыш қабырғаларының орталары параллелограмның төбелері болатынын дәлелдеңдер. (Вариньон теоремасы)

1.111. Тік төртбұрыш қабырғаларының орталары ромб төбелері болатындығын, керісінше, ромб қабырғаларының орталары тік төртбұрыштың төбелері болатынын дәлелдеңдер.

1.112. Әрбір үшбұрышты параллелограмм құрастыруға болатындай екі бөлікке бөлуге болатынын көрсетіңдер.



1.56-сурет

1.113. ABC үшбұрышының әрбір қабырғасы өзара тең үш кесіндіге бөлініп, бөлу нүктелері үшбұрыш қабырғаларына параллель кесінділер мен қосылған (1.56-сурет). ABC үшбұрышының периметрі p-ға тең болса, онда боялған фигураның периметрі қандай болады?

1.114. Үшбұрыштың медианалары бір нүктеде қиылысып, қиылысу нүктесінде төбесінен бастап 2:1 қатынасында бөлінетінін дәлелдеңдер.

1.115. Ромб диагональдары d_1-ге және d_2-ге тең. Төбелері осы ромб қабырғаларының орталарында жататын төртбұрыштың периметрін табыңдар.

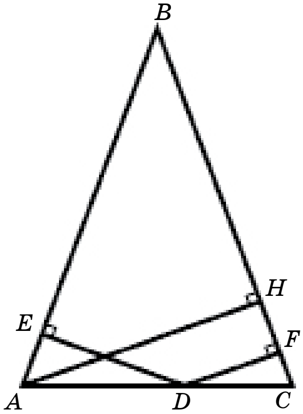
C

1.116. Өзеннің екі жақ жағалауында орналасқан пункттердің арақашықтығын анықтау үшін үшбұрыштың орта сызығының қасиетін қалай қолдануға болады?

1.117. Дөңес төртбұрыштың қарама-қарсы қабырғаларының орталарын қосып тұрған кесінді оның басқа екі қабырғасының жарым қосындысына тең деп алып, оның соңғы қарама-қарсы қабырғалары параллель болатынын дәлелдеңдер.

1.118. Тең бүйірлі үшбұрыштың табанындағы кез келген нүктеден бүйір қабырғаларына дейінгі қашықтықтардың қосындысы төбелерінің бірінен бүйір қабырғасына түсірілген биіктіктің ұзындығына тең болатынын дәлелдеңдер (1.57-сурет).

1.119. Бір түзудің бойында жатпайтын үш нүктеден бірдей қашықтықта өтетін түзу салыңдар. Есептің неше шешімі бар?



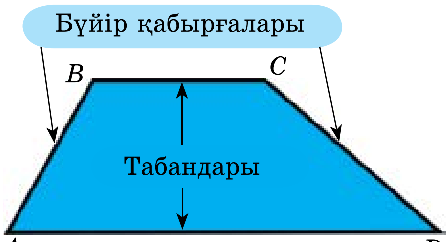
1.57-сурет

1.120. Үшбұрыш суретінен оның қабырғаларының орталары болып табылатын үш нүкте ғана сақталған. Осы үшбұрышты қалпына келтіріңдер.

1.121. Екі қабырғасы және оларға қарсы жатқан бұрыштардың айырмасы бойынша үшбұрыш салыңдар.

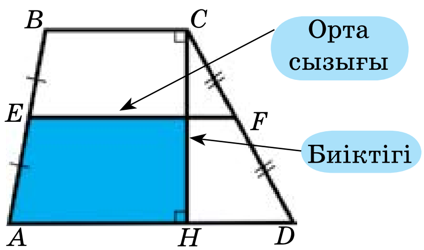
1.122. Бұрыш қабырғаларымен шектелетін кесіндісі A нүктесінде 2:1 қатынасында бөлінетіндей етіп, бұрыштың ішкі A нүктесі арқылы өтетін түзу жүргізіңдер.

1.6. ТРАПЕЦИЯ ЖӘНЕ ОНЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ



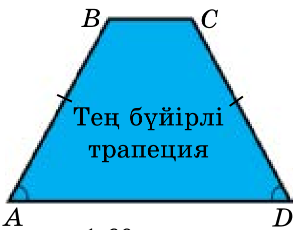
1.58-сурет

Анықтама: *Қарама-қарсы екі қабырғасы параллель, ал өзге екі қабырғасы параллель емес болып келген төртбұрыш трапеция деп аталады* (1.58-сурет):
$BC \parallel AD$; BC, AD – ***табандары***, $AB \nparallel CD$, AB, CD – ***бүйір қабырғалары***.

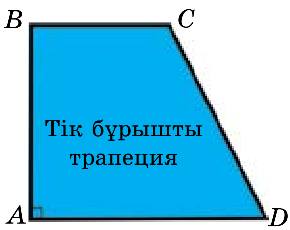


1.59-сурет

Табандарына перпендикуляр және табандарымен шектелетін кесінді ***биіктігі*** деп, ал бүйір қабырғаларының орталарын қосатын кесінді трапецияның ***орта сызығы*** деп аталады (1.59-сурет).



1.60-сурет

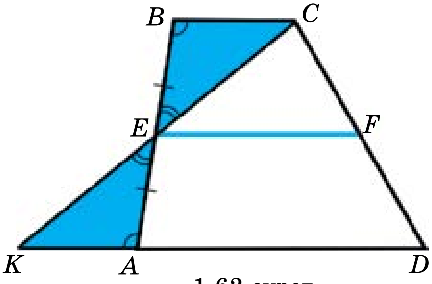


1.61-сурет

Бүйір қабырғалары тең трапеция тең бүйірлі трапеция деп, ал тік бұрышы бар трапеция ***тік бұрышты трапеция*** деп аталады. 1.60-суретте тең бүйірлі трапеция және 1.61-суретте тік бұрышты трапеция бейнеленген.

Теорема. *Трапецияның орта сызығы табандарына параллель және олардың жарым қосындысына тең:* $ABCD$ – *трапеция,* EF – *орта сызығы* $\Rightarrow EF \parallel AD$; $EF \parallel BC$, $EF = \dfrac{AD + BC}{2}$ (1.62-сурет).

▲ $AD \cap CE = K$ болсын (1.62-сурет). $AE = BE$; $\angle AEK = \angle BEC$ – вертикаль бұрыштар; $\angle EAK = \angle EBC$ – айқыш бұрыштар $\Rightarrow \triangle AEK = \triangle BEC \Rightarrow \Rightarrow BC = AK \Rightarrow KD = AD + BC$, екінші жағынан, EF кесіндісі – $\triangle KCD$-ның орта сызығы:



1.62-сурет

$$EF \parallel KD \text{ және } EF = \frac{1}{2}KD \Rightarrow$$

$$\Rightarrow EF \parallel AD \text{ және } EF = \frac{AD + BC}{2}.$$ ■

?

1. Қандай төртбұрышты трапеция деп атайды?
2. Трапецияның орта сызығы деген не?
3. Трапецияның орта сызығының қасиетін тұжырымдап, оны дәлелдеңдер.
4. Трапецияның неше доғал бұрышы болуы мүмкін?

ПТ Дәптерлеріңе: 1) кез келген трапеция; 2) тең бүйірлі трапеция; 3) тік бұрышты трапеция салыңдар, олардың биіктіктерін, орта сызығын салып көрсетіңдер.

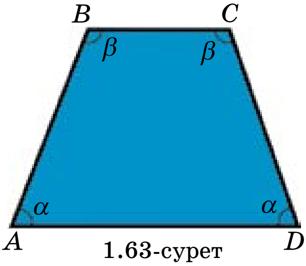
ЕСЕПТЕР

A

1.123. Трапецияның үш сүйір бұрышы болуы мүмкін бе?

1.124. Трапецияның бұрыштарын рет-ретімен алғанда: 1) 6, 3, 4, 2; 2) 8, 7, 13, 12 сандарына пропорционал болуы мүмкін бе?

1.125. Тең бүйірлі трапецияның: 1) диагональдары тең; 2) табандарындағы бұрыштары тең болатынын дәлелдеңдер.



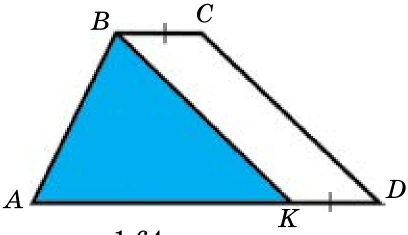
1.63-сурет

1.126. Егер тең бүйірлі трапецияның қарама-қарсы төбелеріндегі бұрыштарының айырмасы 40° болса, онда оның әрбір бұрышы неге тең (1.63-сурет)?

1.127. Трапецияның бір табанындағы бұрыштары 68° және 71°. Трапецияның басқа бұрыштарын табыңдар.

1.128. *ABCD* трапециясының *BD* диагоналы *AB* қабырғасына перпендикуляр, ал $\angle BAD = 40°$. Трапецияның кіші табанын екінші бүйір қабырғасына тең деп алып, оның басқа бұрыштарын табыңдар.

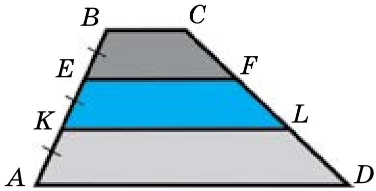
1.129. *ABCD* трапециясының *BC* табаны 4 см. *B* төбесі арқылы *CD* қабырғасына параллель түзу жүргізілген. Сонда пайда болған үшбұрыштың периметрі 12 см болса, онда трапецияның периметрі неге тең (1.64-сурет)?



1.64-сурет

B

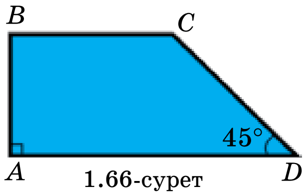
1.130. Табандары 2 м және 5 м болатын трапецияның бүйір қабырғасы тең үш бөлікке бөлініп, осы бөлік нүктелерінен екінші бүйір қабырғасына дейін трапеция табандарына параллель кесінділер жүргізілген. Осы кесінділердің ұзындықтарын табыңдар (1.65-сурет).



1.65-сурет

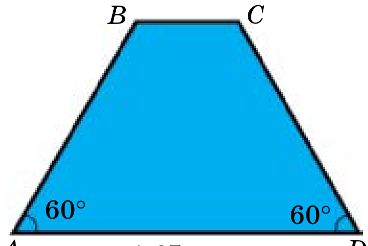
1.131. Тең бүйірлі трапецияның бір бұрышы 60°, бүйір қабырғасы 24 см, ал табандарының қосындысы 44 см. Трапеция табандарының ұзындықтарын табыңдар.

1.132. Тік бұрышты трапецияның табандары 10 см және 15 см, бір бұрышы 45°. Трапецияның кіші бүйір қабырғасын табыңдар. (1.66-сурет).



1.66-сурет

1.133. Трапецияның: 1) бүйір қабырғаларының қосындысы табандарының айырмасынан; 2) диагональдарының қосындысы табандарының қосындысынан; 3) табандарының айырмасы бүйір қабырғаларының айырмасынан артық болатынын дәлелдеңдер.



1.67-сурет

1.134. Тең бүйірлі трапецияның бір бұрышы 60°, ал табандары 15 см және 49 см. Оның периметрін табыңдар (1.67-сурет).

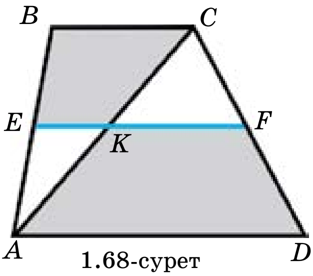
1.135. Диагональдары тең трапецияның тең бүйірлі екенін дәлелдеңдер.

1.136. Тең бүйірлі трапецияның доғал бұрышының төбесінен жүргізілген биіктік үлкен табанын ұзындықтары a-ға және b-ға тең ($a>b$) бөліктерге бөледі. Трапецияның орта сызығын табыңдар. Есепті a=30 см, b=6 см деп алып, шығарыңдар.

1.137. A мен B ауылдары түзу тартылған темір жолдың бір жағында орналасқан және олардың темір жолға дейінгі қашықтықтары сәйкес 10 км және 20 км. A мен B ауылдарын қосатын түзу даңғылдың қақ ортасында орналасқан C ауылынан темір жолға дейінгі қашықтық қандай?

1.138. Трапецияның табандарының қатынасы 2:3 қатынасына тең, ал орта сызығы 5 м. Трапецияның табандарын табыңдар.

1.139. Трапецияның орта сызығы 7 см, ал табандарының айырмасы 4 см. Табандарын табыңдар.



1.68-сурет

1.140. Трапецияның орта сызығы 10 см. Диагональдарының бірі оның айырмасы 2 см болатын екі кесіндіге бөледі. Трапецияның табандарын табыңдар. (1.68-сурет).

1.141. Трапецияның табандары 4 см және 10 см. Трапецияның орта сызығын оның диагональдарының бірі қиғанда шығатын кесінділердің ұзындықтарын табыңдар.

1.142. Трапецияның табандары 8,2 см және 14,2 см. Диагональдарының орта нүктелерінің арақашықтығын табыңдар.

1.143. Трапецияның кіші табанының ұзындығы 6,2 см, ал диагональдарының орта нүктелерінің арақашықтығы 4 см. Трапецияның үлкен табанын табыңдар.

C

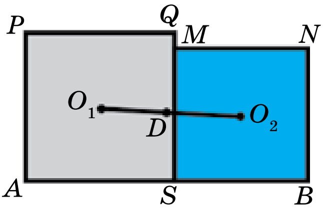
1.144. Трапецияны: 1) параллелограмм құрастыруға болатындай екі бөлікке; 2) үшбұрыш құрастыруға болатындай екі бөлікке; 3) тік төртбұрыш құрастыруға болатындай үш бөлікке қалай бөлуге болады?

1.145. Тең бүйірлі трапецияның диагональдарының қиылысу нүктесі мен бүйір қабырғаларының созындысының қиылысу нүктелері арқылы өтетін түзу трапецияның табандарына перпендикуляр және оларды қақ бөлетінін дәлелдеңдер.

1.146. Тең бүйірлі трапецияның бүйір қабырғасы кіші табанына тең және диагоналына перпендикуляр. Трапецияның бұрыштарын табыңдар.

1.147. Трапецияның диагональдарының орталарын қосатын кесінді оның табандарының жарым айырмасына тең болатынын дәлелдеңдер.

1.148. Ұзындығы a-ға тең AB кесіндісінің бір жағына қарай екі шаршы $APQS$ және $SMNB$ салынған (1.69-сурет). $APQS$ және $SMNB$ шаршыларының центрлерін қосатын барлық кесінділердің орталарының (D нүктелерінің) геометриялық орны қандай фигура болады?



1.69-сурет

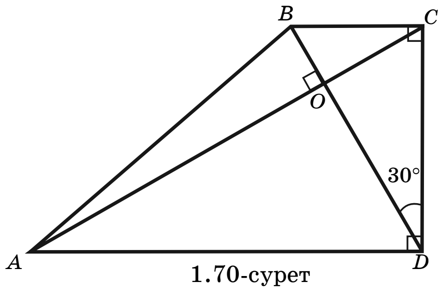
1.149. Табандары мен бүйір қабырғалары бойынша трапеция салыңдар.

1.150. Табандары мен диагональдары бойынша трапеция салыңдар.

1.151. Тең бүйірлі трапецияны: 1) AD табаны; A бұрышы және AB бүйір қабырғасы бойынша; 2) BC табаны, AB бүйір қабырғасы және BD диагоналы бойынша салыңдар.

1.152. *ABCD* тік бұрышты трапецияны табандары және оларға перпендикуляр *AB* бүйір қабырғасы бойынша салыңдар.

1.153. 1.70-суретте бейнеленген тік бұрышты *ABCD* трапециясында: $AC \perp BD$, $BC=2$ см, $DC=4$ см және $\angle BDC=30°$. Осы мәліметтер бойынша, топтасып, есеп құрастырыңдар.



1.70-сурет

1.154. Табандары, биіктігі және бір диагоналы бойынша трапеция салыңдар.

1.155. Табандары, биіктігі және бір бұрышы бойынша трапеция салыңдар.

1.156. Үлкен табаны, бүйір қабырғалары және сүйір бұрышы бойынша трапеция салыңдар.

1.157. Кіші табаны, бір бүйір қабырғасы және екі доғал бұрышы бойынша трапеция салыңдар.

1.158. Табандарының айырмасы, екі сүйір бұрышы және диагоналы бойынша трапеция салыңдар.

1.159.*. Ұзындықтары *a, b, c, d, e* болатын кесінділер берілген. Ұзындығы: 1) $x = \frac{ab}{d}$; 2) $x = \frac{abc}{de}$ болатын кесінділер салыңдар.

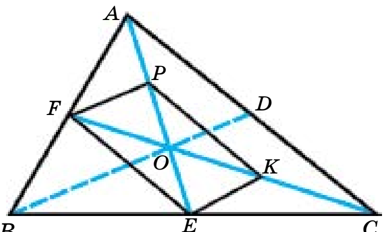
1.7. ҮШБҰРЫШТЫҢ ТАМАША НҮКТЕЛЕРІ. ҮШБҰРЫШҚА СЫРТТАЙ ЖӘНЕ ІШТЕЙ СЫЗЫЛҒАН ШЕҢБЕРЛЕР

1.7.1. Үшбұрыш медианаларының қасиеті

Теорема 1. *Үшбұрыштың медианалары бір нүктеде қиылысады және қиылысу нүктесінде төбесінен бастап* 2 : 1 *қатынасында бөлінеді.* (*Бұл нүкте үшбұрыштың* ***ауырлық центрі*** *деп аталады.*) 1.71-суретте AE, BD, CF − медианалар: $AO : OE = 2 : 1$; $BO:OD=2:1$; $CO:OF=2:1$.

▲ $AE \cap CF=O$ болсын. $AP=PO$, $CK=KO$ болатындай P және K нүктелерін аламыз. EF кесіндісі $\triangle ABC$-ның, ал PK кесіндісі $\triangle AOC$-ның орта сызықтары $\Rightarrow EF \| AC$, $EF=\frac{1}{2}AC$ және $PK \| AC$, $PK=\frac{1}{2}\cdot AC$ $\Rightarrow EF=PK$, $EF \| PK$ $\Rightarrow EFPK$ − параллелограмм (1.71-сурет) және оның диагональдары O нүктесінде қақ бөлінеді.

Сондықтан $AP=PO=OE$ және $CK=KO=OF$ $\Rightarrow AO:OE=$ $=2:1$ және $CO:OF=2:1$. Енді $AE \cap BD=O_1$ болсын, онда $O_1A : O_1E= BO_1 : O_1D=2:1$ шығады. Ал $AO:OE=2:1$ болғандықтан, O және O_1 нүктелері беттеседі. Олай болса, BD медианасы да O нүктесі арқылы өтетіні және $BO:OD=2:1$ теңдігі дәлелденеді. ■

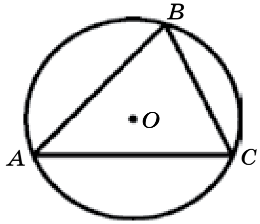


1.71-сурет

Ескерту. Механикада біртекті материалдан жасалған үшбұрыштың медианаларының қиылысу нүктесін оның ***ауырлық центрі*** деп атайды. Ал геометрияда бұл нүктені центроид деп атайды.

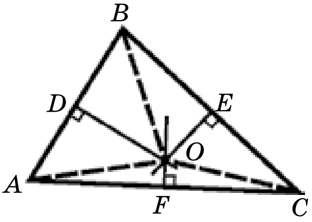
1.7.2. Үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбер

Анықтама. *Үшбұрыштың барлық төбелері арқылы өтетін шеңберді осы* ***үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбер*** *деп атайды* (1.72-сурет).



1.72-сурет

Теорема 2. *Үшбұрыштың қабырғаларына жүргізілген орта перпендикулярлар бір нүктеде қиылысады.* (*Бұл нүкте үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің центрі болады.*)



1.73-сурет

▲1.73-суретте AB және BC қабырғаларының орта перпендикулярлары O нүктесінде қиылысқан.

AOD және BOD үшбұрыштарында $AD=BD$, $\angle ADO=\angle BDO=90°$ және DO ортақ болғандықтан, $\Delta AOD = \Delta BOD$.

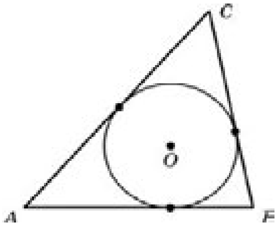
Онда $OA=OB=R$ және сол сияқты $OC=OB=R$ болады, яғни $OA=OC=R$ $\Rightarrow$ AC-ның орта перпендикуляры O нүктесі арқылы өтеді. ■

Салдар: Кез келген үшбұрышқа сырттай бір ғана шеңбер сызуға болады.

Теорема 2 бойынша $AO=BO=CO=R$ (1.73-сурет). Мұндағы R-үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің радиусы.

Онда A, B, C нүктелері радиусы R-ге тең және центрі O нүктесінде орналасқан шеңбер бойында жатыр және бұл шеңбер жалғыз (берілген центрі мен радиусы бойынша).

1.7.3. Үшбұрышқа іштей сызылған шеңбер.

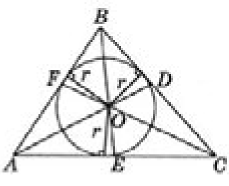


1.74-сурет

Анықтама. *Шеңбер көпбұрыштың барлық қабырғаларын жанайтын болса, онда оны* ***көпбұрышқа іштей сызылған шеңбер*** *деп атайды* (1.74 сурет).

Бұл шеңбер центрін кейде **инцентр** деп атайды.

Теорема 3. *Кез келген үшбұрыштың биссектрисалары бір нүктеде қиыласады.*



1.75-сурет

▲ 1.75-суреттегі AD және BE биссектрисалары O нүктесінде қиылыссын: $AD\cap BE=O$. (AB және BE биссектрисаларының қиылысатынын өз беттерінше негіздеп көріңдер. 1.169 (2)-ші есепті қараңдар). Биссектриса нүктелері бұрыш қабырғаларынан бірдей қашықтықта орналасады.

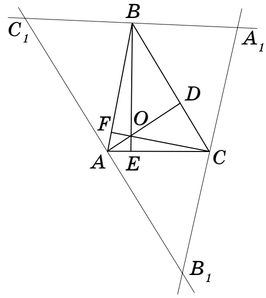
Сондықтан O нүктесі AB және AC қабырғаларынан бірдей r қашықтығында жатады. Осы сияқты, O нүктесі BA және BC қабырғаларынан да бірдей r қашықтығында жатады $\Rightarrow$ O нүктесі CA және CB қабырғаларынан бірдей r қашықтықта жатады, яғни O нүктесі CF биссектрисасы бойында жатады. ■

Салдар: *Кез келген үшбұрышқа іштей тек бір ғана шеңбер сызуға болады және оның центрі үшбұрыш биссектрисаларының қиылысу нүктесінде орналасады.*

▲ 1.75-суреттегі O нүктесі үшбұрыш қабырғаларынан бірдей r қашықтығында орналасқан. Олай болса, центрі O нүктесінде болатын және радиусы r-ге тең шеңбер үшбұрыштың барлық қабырғаларын іштей жанайды және бұл шеңбер жалғыз. Мұндағы r – іштей сызылған шеңбердің радиусы. ■

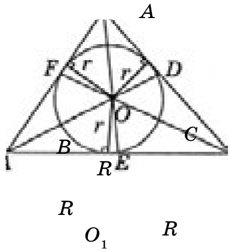
1.7.4. Үшбұрыш биіктіктерінің қиылысу нүктесі.

Теорема 4. *Кез келген үшбұрыштың биіктіктері немесе олардың созындысы бір нүктеде қиылысады.* (*Бұл нүкте ортоцентр деп аталады.*)



1.76-сурет

▲ $A_1B_1 \| AB$; $A_1C_1 \| AC$; $B_1C_1 \| BC$ түзулерін жүргіземіз (1.76-сурет). Сонда AB, AC және BC қабырғалары $\triangle A_1B_1C_1$ үшін орта сызықтар болады (оны өз бетіңше дәлелдеңдер). Ал $A_1B_1C_1$ үшбұрышының орта перпендикулярлары: AD, BE және CF бір O нүктесінде қиылысады. Екінші жағынан, бұл орта перпендикулярлар $\triangle ABC$-ның биіктіктері бір нүктеде қиылысады. ■ Үшбұрыш биіктіктеріннің қиылысу нүктесін ортоцентр деп атайды.

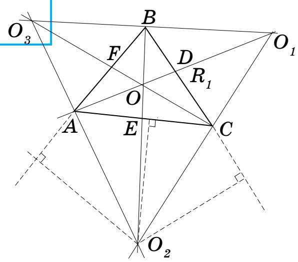


1.77-сурет

1.7.5*. Үшбұрышқа сырттай жанасатын шеңберлер.

Анықтама. *Үшбұрыштың бір қабырғасымен сырттай және басқа екі қабырғасының созындыларымен жанасатын шеңбер* ***үшбұрышпен сырттай жанасатын шеңбер*** *деп аталады* (1.77-сурет).

Теорема 5. *Үшбұрыштың бір бұрышының биссектрисасы басқа бұрыштарының сыртқы бұрыштарының биссектрисаларымен бір нүктеде қиылысады.* (*Бұл нүкте сәйкесінше үшбұрышқа сырттай жанасатын шеңбердің центрі болады.*) (1.78-сурет). Теорема 3 сияқты дәлелденеді.



1.78-сурет

Салдар. Кез келген үшбұрыштың әрбір қабырғасымен сырттай жанасатын бір ғана шеңбер сызуға болады және оның центрі осы қабырғаға қарсы жатқан төбеден жүргізілген биссектриса мен басқа төбелерінің сыртқы бұрыштарының биссектрисаларының қиылысу нүктесі болады. Теорема 3-тің салдары сияқты дәлелденеді.

Ескерту. Сонымен, біз әрбір үшбұрыштың төрт нүктесі болатынын көрдік, олар: медианаларының қиылысу нүктесі, орта перпендикулярларының қиылысу нүктесі, биссектрисаларының қиылысу нүктесі, биіктіктерінің қиылысу нүктесі. Бұл нүктелерге сырттай жанасқан шеңберлердің центрлерін қосуға болады. Осы нүктелерді ***үшбұрыштың тамаша нүктелері*** деп атайды.

?

1. Үшбұрыш медианаларының қасиетін тұжырымдап, дәлелдеңдер.
2. Қандай шеңберлерді үшбұрышқа сырттай (іштей) сызылған шеңбер деп атайды?
3. Сырттай сызылған шеңбер центрі қалай анықталады? Сәйкес теореманы тұжырымдап, дәлелдеңдер.
4. Іштей сызылған шеңбердің центрі қалай анықталады? Сәйкес теореманы тұжырымдап, дәлелдеңдер.
5. Қандай шеңберлерді сырттай жанасқан шеңберлер деп атайды, олардың саны нешеу?
6. Сырттай жанасатын шеңбер центрін қалай анықтайды? Сәйкес теореманы тұжырымдап, дәлелдеңдер.
7. Үшбұрыш биіктіктерінің қасиетін тұжырымдап, дәлелдеңдер.

ПТ

1. Өз қалауларыңша ABC үшбұрышын салыңдар. Осы үшбұрыштың:
   а) медианаларының қиылысу нүктесін;
   ә) биіктіктерінің қиылысу нүктесін;
   б) сырттай сызылған шеңберді;
   в) іштей сызылған шеңберді;
   г) сырттай жанасатын шеңберлерді салып көрсетіңдер.

ЕСЕПТЕР

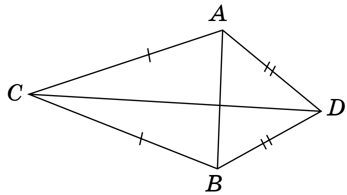
A

1.160. Берілген үшбұрышқа: 1) іштей сызылған; 2) сырттай сызылған; 3) сырттай жанасатын шеңберлерді салыңдар.

1.161. Егер үшбұрышқа: 1) сырттай және іштей сызылған шеңберлердің центрлері беттесетін болса; 2) сырттай сызылған шеңбердің центрі оның қабырғасында жатса; 3) іштей сызылған шеңбердің центрі оның биіктігінде жатса; 4) сырттай сызылған шеңбердің центрі оның биіктігі арқылы өтетін түзуде жатса, онда үшбұрыштың түрі қандай болады?

1.162. Тең қабырғалы үшбұрыштың биіктігі 3 см. Оған іштей және сырттай сызылған шеңберлердің радиустарын анықтаңдар.

1.163. *AB* – тең бүйірлі *ABC* және *ABD* үшбұрыштарының ортақ табандары. *CD* кесіндісі *AB*-ның ортасы арқылы өтетінін дәлелдеңдер (1.79-сурет).



1.79-сурет

1.164. Тік бұрышты үшбұрыштың гипотенузасы c-ға, ал катеттерінің қосындысы s-ке тең деп алып, осы үшбұрышқа іштей сызылған шеңбердің диаметрін анықтаңдар.

1.165. Тең бүйірлі үшбұрыштың бүйір қабырғасы 2 см, ал төбесіндегі бұрышы 120°. Сырттай сызылған шеңбердің диаметрін табыңдар.

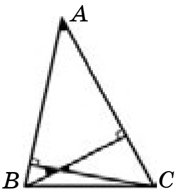
1.166. Егер берілген үшбұрышқа: 1) сырттай жанасатын екі шеңбердің радиустары тең болса; 2) сырттай жанасатын шеңберлердің центрлері медианаларының созындысында жатса, онда бұл үшбұрыштың түрі қандай?

1.167. Гипотенузасы 12 см болатын тік бұрышты үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің радиусын табыңдар.

B

1.168. Үшбұрыштың екі қабырғасының орталары белгілі. Сызғыштың ғана көмегімен оның үшінші қабырғасының ортасын табыңдар.

1.169. Үшбұрыштың екі биссектрисасы өзара: 1) перпендикуляр; 2) параллель болуы мүмкін бе? Жауаптарыңды негіздеңдер.



1.80-сурет

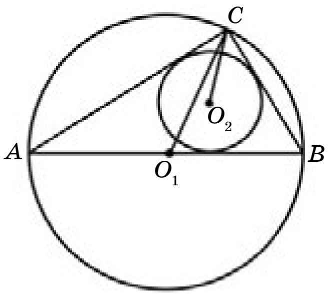
1.170. Үшбұрыштың кез келген бұрышы оның басқа екі бұрышының төбелерінен түсірілген биіктіктері арқылы өтетін түзулердің қиылысуынан алынған вертикаль бұрыштар жұбына тең болатынын дәлелдеңдер (1.80-сурет).

1.171. Үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің радиусы оның әрбір қабырғасынан: 1) үлкен; 2) кіші; 3) оған тең болуы мүмкін бе?

1.172. Тең қабырғалы үшбұрышқа сырттай және іштей сызылған шеңберлердің центрлері беттесетінін және радиустарының қатынасы 2:1 қатынасындай болатынын дәлелдеңдер.

1.173. Егер ABC үшбұрышының AB және AC қабырғалары тең болмаса, онда A төбесінен түсірілген медианасы осы төбеден түсірілген биіктікпен беттеспейтінін дәлелдеңдер.

1.174. Тең бүйірлі ABC үшбұрышының AB қабырғасына жүргізілген орта перпендикуляр BC қабырғасын E нүктесінде қияды. Егер AEC үшбұрышының периметрі 27 см, ал $AB=$ $=18$ см болса, онда үшбұрыштың AC табанын табыңдар.



1.81-сурет

1.175. Тік бұрышты үшбұрыштың тік бұрышының төбесінен іштей және сырттай сызылған шеңберлердің центрлерін қосатын кесінді жүргізілген. Осы кесінділердің арасындағы бұрыш 7°-қа тең. Үшбұрыштың сүйір бұрыштарын табыңдар (1.81-сурет).

Берілгені: $\triangle ABC$, $\angle C=90°$, $\angle O_1CO_2=7°$, O_1 және O_2 – сәйкес сырттай және іштей сызылған шеңбер центрі (1.81-сурет).

Т/к-к: $\angle A$, $\angle B$?

▲ Шешуі: $AO_1=BO_1=CO_1 \Rightarrow$ $\triangle AO_1C$ – тең бүйірлі үшбұрыш CO_2 – биссектриса $\Rightarrow \angle ACO_2=$ $=45° \Rightarrow \angle A=\angle ACO_1=\angle ACO_2-$ $-\angle O_1CO_2=45°-7°=38°$.
$\Rightarrow \angle B=90°-\angle A=90°-38°=52°$.

Жауабы: 38°, 52°. ■

1.176. ABC үшбұрышының AB және AC қабырғаларының орта перпендикулярлары BC қабырғасындағы D нүктесінде қиылысады: 1) D нүктесі – BC қабырғасының ортасы; 2) $\angle A=\angle B+\angle C$ болатынын дәлелдеңдер.

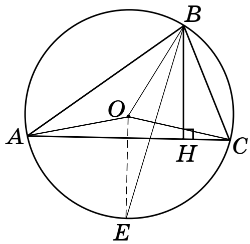
1.177. Қос-қостан қиылысатын және бір нүктеден өтпейтін үш түзуді жанайтын неше шеңбер бар? Солардың барлығын салыңдар.

C

1.178. Тік бұрышты үшбұрышқа іштей және сырттай сызылған шеңберлердің диаметрлерінің қосындысы оның катеттерінің қосындысына тең болатынын дәлелдеңдер.

1.179. Табаны мен сырттай сызылған шеңбердің радиусы бойынша тең бүйірлі үшбұрыш салыңдар.

1.180. ABC үшбұрышының B төбесінен BH биіктігі, BE биссектрисасы және BO сырттай сызылған шеңбердің радиусы жүргізілген. BE түзуі OBH бұрышының биссектрисасы болатынын дәлелдеңдер (1.82-сурет).

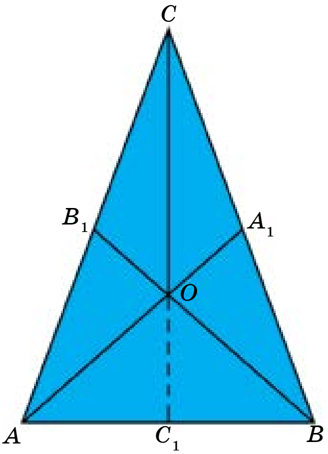


1.82-сурет

1.181. O нүктесі арқылы өтетін үш түзу мен олардың бірінде жататын A нүктесі берілген: 1) Бір төбесі A нүктесінде және биіктіктері берілген түзулердің бойында жататын үшбұрыш салыңдар;
2) Бір төбесі A нүктесінде және медианалары берілген түзулердің бойында жататын үшбұрыш салыңдар;
3) Бір төбесі A нүктесінде және биссектрисалары берілген түзулердің бойында жататын үшбұрыш салыңдар;
4) Бір төбесі A нүктесінде және берілген түзулер оның орта перпендикулярлары болатындай үшбұрыш салыңдар.

1.182. Әрбір ABC үшбұрышының AE биссектрисасы AN медианасы мен AH биіктігінің арасында жататынын дәлелдеңдер.

1.183. Бір төбесінен жүргізілген биссектрисасы, медианасы және биіктігі бойынша үшбұрыш салыңдар.



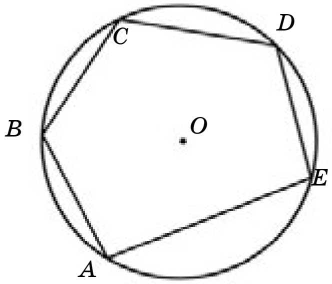
1.83-сурет

1.184. *ABC* үшбұрышынан тысқары қабырғалары *AB*-ға және *AC*-ға тең *ABDE* және *ACFG* квадраттары салынған. Мұнда *D* және *F* нүктелері – *A* төбесіне қарама-қарсы орналасқан төбелер. *EG* кесіндісі үшбұрыштың *A* төбесінен жүргізілген медианаға перпендикуляр және осы медианадан екі есе ұзын болатынын дәлелдеңдер.

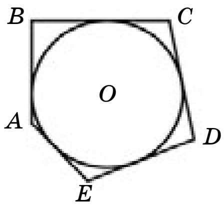
1.185. *ABC* үшбұрышының AA_1 және BB_1 медианалары *O* нүктесінде тік бұрыш жасап қиылысады. $AB=CO$ теңдігі орындалатынын дәлелдеңдер (1.83-сурет).

1.8*. ШЕҢБЕРГЕ ІШТЕЙ ЖӘНЕ СЫРТТАЙ СЫЗЫЛҒАН ТӨРТБҰРЫШТАР

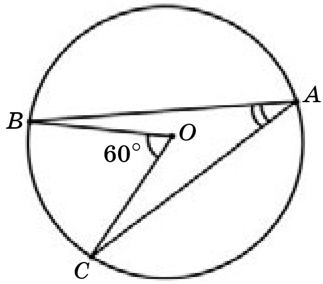
1.8.1. Шеңберге іштей сызылған бұрыш қасиеті.



1.84-сурет



1.85-сурет



1.86-сурет

Анықтама: 1) *Егер көпбұрыштың барлық төбелері шеңбер бойында жатса, онда бұл көпбұрышты іштей сызылған көпбұрыш деп атайды.* 1.84-суретте $ABCDE$ іштей сызылған бесбұрыш.

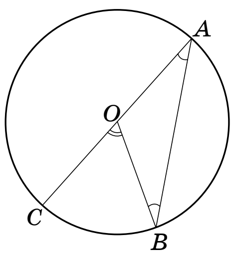
2) *Егер шеңбер көпбұрыштың барлық қабырғаларын жанайтын болса, онда көпбұрышты шеңберге* ***сырттай сызылған көпбұрыш*** *деп атайды.*

1.85-суретте $ABCDE$ – сырттай сызылған бесбұрыш.

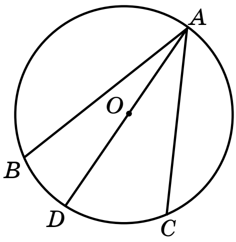
3) *Шеңбердің бір нүктесінен шығатын екі хордасы арасындағы бұрышты шеңберге іштей сызылған бұрыш деп атайды. 1.86-суреттегі $\angle BAC$ – шеңберге іштей сызылған бұрыш.* BC доғасы $\angle BAC$ бұрышына **керілген доға** деп аталады. BOC бұрышы BC доғасына тірелген **центрлік бұрыш** деп аталады. BC доғасы BOC центрлік бұрышы шамасымен өлшенеді. Мысалы, 1.86-суретте $\angle BOC = 60° \Rightarrow \smile BC=60°$.

Теорема 1. *Шеңберге іштей сызылған бұрыштың шамасы өзі тірелген доғаның градустық өлшемінің жартысына тең.*

1-жағдай: ▲ $\angle BAC$ іштей сызылған бұрыш, AC – диаметр (1.87-сурет) $\Rightarrow OA=OB=R \Rightarrow \triangle AOB$ тең бүйірлі. $\Rightarrow \angle OAB = \angle OBA \Rightarrow \angle COB$ – сыртқы бұрыш $\Rightarrow 2(\angle CAB) = \angle OAB + {}$ $+\angle OBA = \angle COB = \smile BC \Rightarrow \angle CAB = \frac{1}{2} \smile BC$.

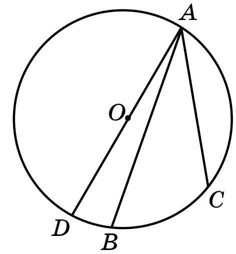


1.87-сурет



1.88-сурет

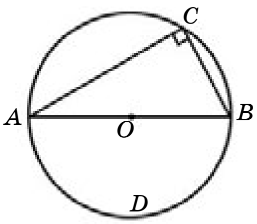
2-жағдай: ▲ O нүктесі $\angle BAC$-ның ішкі нүктесі болсын (1.88-сурет). AD диаметрін жүргіземіз. Оны 1-жағдай бойынша $\angle BAC = \angle BAD + DAC = \frac{1}{2} \smile BD + \frac{1}{2} \smile DC = \frac{1}{2} \smile BC$.



1.89-сурет

3-жағдай: ▲ O нүктесі $\angle BAC$-ның сыртқы нүктесі болсын (1.89-сурет). AD диаметрін жүргіземіз. Онда $\angle BAC = \angle CAD - \angle BAD = \frac{1}{2} \smile DC - \frac{1}{2} \smile BD = \frac{1}{2} \smile BC$. ■

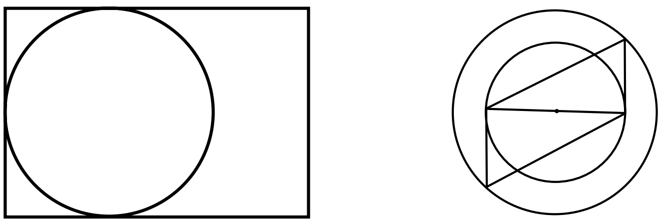
Салдар: Диаметрге тірелген іштей сызылған бұрыш 90°-қа тең.



1.90-сурет

1.90-суретте AB – диаметр $\Rightarrow \smile ADB = 180°. \Rightarrow \angle ACB = \frac{1}{2} (\smile ADB) = \frac{1}{2} (180°) = 90°$. ■

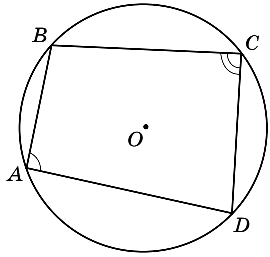
1.8.2. Шеңберге іштей және сырттай сызылған төртбұрыштар.


1.91-сурет

Үшбұрыштағыға ұқсас, кез келген төртбұрышқа іштей не сырттай шеңбер сыза беруге болмайды. Мысалы, шаршы болмайтын тік төртбұрышқа іштей, тік төртбұрыш болмайтын параллелограмға сырттай шеңбер сызуға болмайды (1.91-сурет). Дегенмен, шеңберге іштей және сырттай сызылған төртбұрыштар табылады. Солардың кейбір қасиеттерін қарастырайық.

Теорема 2. *Іштей сызылған төртбұрыштың қарама-қарсы бұрыштарының қосындысы 180°-қа тең.*

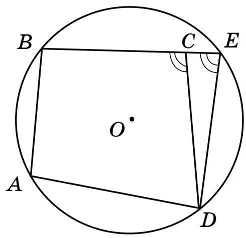
Дәлелдеуі. ▲ Айталық, $ABCD$ төртбұрышы шеңберге іштей сызылған болсын (1.92-сурет). Онда іштей сызылған бұрыштардың қасиеті бойынша $\angle A = \frac{1}{2} \smile BCD$, $\angle C = \frac{1}{2} \smile BAD$. Олай болса, $\angle A + \angle C = \frac{1}{2} \smile BCD + \frac{1}{2} \smile BAD = \frac{1}{2}(\smile BCD + \smile BAD)$. Алайда, BCD және BAD доғаларының бірігуі толық шеңбер болады. Сондықтан $\angle A + \angle C = \frac{1}{2}(360°) = 180°$. Теорема дәлелденді. ■



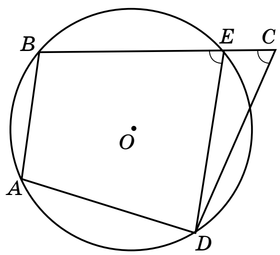
1.92-сурет

Теорема 3. *Егер төртбұрыштың қарама-қарсы бұрыштарының қосындысы 180°-қа тең болса, онда бұл төртбұрышқа сырттай шеңбер сызуға болады.*

Дәлелдеуі. ▲ Айталық, $ABCD$ төртбұрышы үшін $\angle A + \angle C = 180°$ болсын. Онда ABD үшбұрышына сырттай шеңбер сызамыз. Енді C төбесі осы шеңбердің бойында жататынын дәлелдейік. Егер бұлай болмаса, онда C нүктесі шеңбердің ішінде не шеңбердің сыртында орналасуы керек. Айталық, C нүктесі шеңбердің ішінде орналасқан болсын және BC түзуімен шеңбер E нүктесінде қиылыссын (1.93-сурет). Онда $\angle A + \angle C = 180°$ және $\angle A + \angle E = 180°$ теңдігінен $\angle C = \angle E$ теңдігін аламыз. Бірақ бұл теңдіктің орындалуы мүмкін емес. Алынған қайшылық C нүктесі шеңбердің ішінде орналаса алмайтынын көрсетеді. Осы сияқты, C нүктесі шеңбердің сыртында жатпайтынына (1.94-сурет) көз жеткіземіз. Сондықтан C нүктесі шеңбердің бойында жатады, яғни $ABCD$ төртбұрышына сырттай шеңбер сызуға болады. Теорема дәлелденді. ■

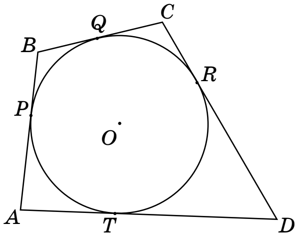


1.93-сурет



1.94-сурет

Теорема 4. *Шеңберге сырттай сызылған төртбұрыштың қарама-қарсы қабырғаларының қосындылары тең.*

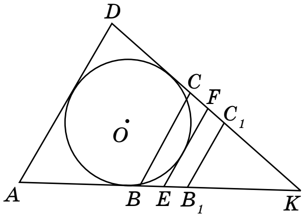


1.95-сурет

Дәлелдеуі. ▲ $ABCD$ төртбұрышы шеңберге сырттай сызылған болсын (1.95-сурет) және P,Q,R,T нүктелері оның сәйкес қабырғалары мен шеңбердің жанасу нүктелері болсын. Бір нүктеден жүргізілген жанаманың қасиеті бойынша $AP=AT$, $BP=BQ$, $CR=CQ$, $DR=DT$. Осы теңдіктерді мүшелеп қоссақ, $(AP+BP)+(CR+DR)=(AT+DT)+(BQ+CQ)$ немесе $AB+CD=AD+BC$ теңдігін аламыз. Теорема дәлелденді. ■

Теорема 5. *Егер дөңес төртбұрыштың қарама-қарсы қабырғаларының қосындысы тең болса, онда бұл төртбұрышқа іштей шеңбер сызуға болады.*

▲ **Дәлелдеуі.** $ABCD$ төртбұрышында $AB+CD=AD+BC$ теңдігі орындалсын. AB және CD қабырғаларының созындысының қиылысу нүктесін K арқылы белгілейміз (1.96-сурет). (Егер бұл екі қабырға қиылыспайтын болса, AD және BC қабырғаларының созындысының қиылысу нүктесін K деп белгілейміз. Ал егер де бұлар да қиылыспайтын болса, онда $ABCD$ ромб болып (осы деректі топпен бірге талқылап, оны негіздеңдер), оған іштей шеңбер сызуға болар еді.) 3-теоремадағы көрсетілген тәсілді қолдана отырып, ADK үшбұрышына іштей сызылған шеңбер $ABCD$ төртбұрышының BC қабырғасын да жанайтынын көрсетуді өздеріңе тапсырамыз. ■



1.96-сурет

?

1. Шеңберге іштей және сырттай сызылған көпбұрыш дегеніміз не?
2. Шеңберге іштей сызылған бұрыш деп нені айтады?
3. Шеңберге іштей сызылған бұрыш пен оған керілген доға (сәйкес центрлік бұрыш) арасында қандай байланыс бар? Сәйкес қасиетті тұжырымдап дәлелдеңдер.
4. Шеңберге іштей сызылған төртбұрыш бұрыштарының қо-

сындысы жөніндегі теоремаларды тұжырымдап, дәлелдеңдер.

5. Шеңберге сырттай сызылған төртбұрыштар жөніндегі теоремаларды тұжырымдап, дәлелдеңдер.
6. Параллелограмның қандай түрлеріне: 1) сырттай; 2) іштей шеңбер сызуға болады?
7. Шеңберге: 1) іштей; 2) сырттай сызылған трапецияның түрі қандай?

ПТ

1. 1) Тең қабырғалы үшбұрышқа; 2) шаршыға іштей және сырттай шеңбер сызыңдар.
2. Берілген шеңберге іштей және сырттай трапеция сызыңдар.

ЕСЕПТЕР

А

1.186. 1) Берілген шеңберге іштей сызылған; 2) берілген шеңберге сырттай сызылған; 3) сырттай сызылған шеңбер радиусы бойынша; 4) іштей сызылған шеңбердің радиусы бойынша квадрат салыңдар.

1.187. Бұрыштары рет-ретімен: 1) $90°$, $90°$, $60°$, $120°$-қа; 2) $70°$, $130°$, $110°$, $50°$-қа; 3) $45°$, $75°$, $135°$, $105°$-қа тең болатын төртбұрышқа сырттай шеңбер сызуға бола ма?

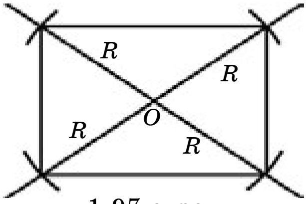
1.188. Бұрыштарының қатынасы: 1) 2, 3, 4, 3; 2) 7, 2, 4, 5 сандарының қатынасындай болатын төртбұрышқа сырттай шеңбер сызуға бола ма?

1.189. 1) Шеңберге сырттай сызылған әрбір трапеция тең бүйірлі; 2) шеңберге іштей сызылған әрбір параллелограмның тік төртбұрыш; 3) шеңберге іштей сызылған әрбір ромбының шаршы болатынын дәлелдеңдер.

1.190. Төртбұрыштың тізбектеп алынған қабырғалары ұзындықтарының қатынасы: 1) 2, 2, 3, 3; 2) 2, 5, 3, 4; 3) 3, 5, 3, 1 сандарының қатынасындай болса, онда осы төртбұрышқа іштей шеңбер сызуға бола ма?

1.191. Шеңберге сырттай сызылған төртбұрыштың екі қарама-қарсы қабырғаларының қосындысы 15 см. Төртбұрыштың периметрін табыңдар.

B



1.97-сурет

1.192. Сырттай сызылған шеңбердің радиусы мен диагоналының арасындағы бұрышы бойынша тік төртбұрыш салыңдар (1.97-сурет).

1.193. Іштей сызылған шеңбердің радиусы мен қабырғасы бойынша ромб салыңдар.

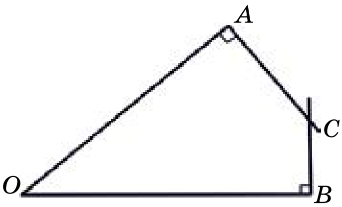
1.194. Егер параллелограмға іштей шеңбер сызу мүмкін болса, онда бұл параллелограмды сипаттауға болады? Жауаптарыңды негіздеңдер.

1.195. Егер ромбыға сырттай шеңбер сызу мүмкін болса, онда оның шаршы болатынын дәлелдеңдер.

1.196. Тік төртбұрыштың диагоналы мен бір қабырғасының арасындағы бұрыш 30°, ал оған сырттай сызылған шеңбер радиусы R-ге тең. Тік төртбұрыштың кіші қабырғасын табыңдар.

1.197. Кез келген тік төртбұрышқа сырттай шеңбер сызуға болатынын дәлелдеңдер.

1.198. Шеңберге сырттай сызылған тең бүйірлі трапецияның бүйір қабырғасы 14 см. Трапецияның периметрін табыңдар.



1.98-сурет

1.199. AOB бұрышының қабырғаларына A және B нүктелерінде жүргізілген перпендикулярлар C нүктесінде қиылысады. $ACBO$ төртбұрышына сырттай шеңбер сызуға болатынын дәлелдеңдер (1.98-сурет).

1.200. Параллелограмға сырттай және іштей шеңбер сызуға болатын болса, онда оның квадрат болатынын дәлелдеңдер.

C

1.201. Әрбір дөңес төртбұрыштың биссектрисаларының қиылысуынан пайда болатын төртбұрышқа сырттай шеңбер сызуға болатынын дәлелдеңдер.

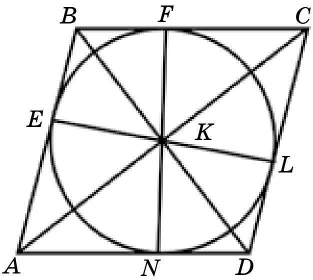
1.202. Әрбір дөңес төртбұрыштың сыртқы бұрыштарының биссектрисалары арқылы құрастырылған төртбұрышқа сырттай шеңбер сызуға болатынын дәлелдеңдер.

1.203. Дөңес төртбұрыштың барлық қабырғаларынан өзара тең хордалар қиып өтетін шеңбер жүргізілген. Осы төртбұрыштың қарама-қарсы қабырғаларының қосындысы тең болатынын көрсетіңдер.

1.204. Табандары 24 см және 16 см болатын тең бүйірлі трапецияға іштей сызылған шеңбердің радиусы 8 см болуы мүмкін бе?

ҚАЙТАЛАУҒА АРНАЛҒАН ЖАТТЫҒУЛАР

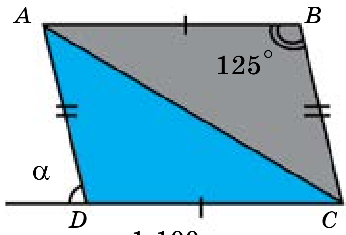
1.205. Сырттай сызылған тең бүйірлі трапецияның қарама-қарсы қабырғаларының жанасу нүктелерін қосатын түзулер оның диагональдарының қиылысу нүктесі арқылы өтетінін дәлелдеңдер.



1.99-сурет

1.206. 1.205-есептің қорытындысы кез келген сырттай сызылған төртбұрыш үшін орындалатынын көрсетіңдер. (1.99-сурет).

1.207. 1.100-суретте $AB = DC$, $AD = BC$ және $\angle ABC = 125°$. α-ны табыңдар.



1.100-сурет

Бейбітшілік және сарайы — Қазақстан астанасы Астанада әйгілі сәулетші Норман Фостер салған пирамида. Сарай 2006 жылы «Бейбітшілік және дәстүрлі дін көшбасшыларының съезін» өткізу үшін арнайы салынған. Пирамиданың табанында қабырғасы 62 м (61,80339887) болатын шаршы орналасқан және пирамиданың биіктігі де осындай, «алтын қима» пропорциясына толық сәйкес келеді.

2-бөлім. ТІК БҰРЫШТЫ ҮШБҰРЫШТЫҢ ҚАБЫРҒАЛАРЫ МЕН БҰРЫШТАРЫ АРАСЫНДАҒЫ ҚАТЫНАСТАР

Бөлімді оқып-үйрену барысында келесі мақсаттарға қол жеткіземіз:

– бұрыштың синусы, косинусы, тангенсі және котангенсінің тік бұрышты үшбұрыштың қабырғалары мен бұрыштарының арасындағы қатынастары арқылы берілген анықтамаларын білу;

– Пифагор теоремасын дәлелдеу және қолдану;

– тік бұрышты үшбұрыштың тік бұрышының төбесінен гипотенузасына түсірілген биіктігінің қасиеттерін дәлелдеу және қолдану;

– Пифагор теоремасын пайдаланып, $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ формуласын қорытып шығару және есептер шешуде қолдану;

– негізгі тригонометриялық теңбе-теңдіктерді қорытып шығару және қолдану;

– α және $(90-\alpha)$ бұрыштарының синусы, косинусы, тангенсі және котангенсі арасындағы байланыстарды білу және қолдану;

– $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ және $\operatorname{ctg}\alpha$ мәндерін олардың біреуінің;

– бұрышты оның синусы, косинусы, тангенсі және котангенсінің белгілі мәні бойынша салу;

– тік бұрышты үшбұрышты 30°, 45°, 60°-қа тең бұрыштардың синус, косинус, тангенс және котангенсінің мәндерін табу үшін қолдану;

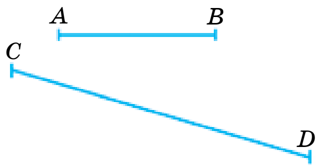
– тік бұрышты үшбұрыштың элементтерін табу үшін 30°, 45°, 60°-қа тең бұрыштардың синус, косинус, тангенс және котангенсінің мәндерін қолдану;

– берілген екі элементі бойынша тік бұрышты үшбұрыштың бұрыштары мен қабырғаларын табу.

2.1. ПРОПОРЦИОНАЛ КЕСІНДІЛЕР ТУРАЛЫ ТЕОРЕМА. ПИФАГОР ТЕОРЕМАСЫ

2.1.1. Пропорционал кесінділер.

AB және CD кесінділерінің **қатынасы** деп олардың ұзындықтарының қатынасын айтады.

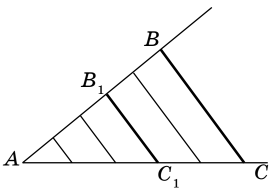


2.1-сурет

AB=2см, CD=4см, $\frac{AB}{CD}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$, яғни AB және CD кесінділерінің қатынасы $\frac{1}{2}$ -ге тең (2.1-сурет).

Егер $\frac{AB}{CD}=\frac{A_1B_1}{C_1D_1}$ болса, онда AB және CD кесінділерін A_1B_1 және C_1D_1 кесінділеріне **пропорционал** деп атайды.

Егер $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{CD}{C_1D_1}=\frac{PQ}{P_1Q_1}$ болса, онда AB, CD, PQ кесінділері A_1B_1, C_1D_1, P_1Q_1 кесінділеріне пропорционал болады.



2.2-сурет

$\triangle ABC$: AB=10 см, AC=7 см $AB_1=6$ см, $AC_1=4,2$ см.

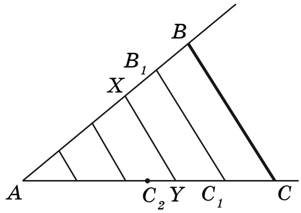
$\frac{AB}{AC}=\frac{10}{7}$; $\frac{AB_1}{AC_1}=\frac{6}{4,2}=\frac{10}{7}$, яғни AB және AC кесінділері AB_1 және AC_1 кесінділеріне пропорционал (2.2–сурет).

Теорема 1. *Бұрыштың қабырғаларын қиып өтетін параллель түзулер бұрыштың қабырғаларынан пропорционал кесінділер қиып өтеді.*

▲ Параллель түзулер A бұрышы қабырғаларын сәйкес B,C және B_1,C_1 нүктелерінде қиып өтсін (2.3-сурет). Онда $\frac{AB_1}{AB}=\frac{AC_1}{AC}$ теңдігі орындалатынын дәлелдеу керек.

Айталық, AC және AC_1 кесінділеріне бүтін сан рет өлшеп салынатындай, ұзындығы ε-ға тең кесінді табылсын. Яғни, n және m натурал сандары табылып, $AC=n\cdot\varepsilon$, $AC_1=m\cdot\varepsilon$, $(n>m)$ теңдіктері орындалсын.

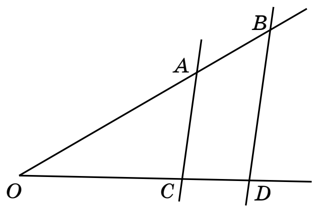
AC кесіндісін ұзындықтары ε-ға тең n бөлікке бөліп, бөлік нүктелері арқылы BC кесіндісіне параллель түзулер жүргіземіз (2.3-сурет). Онда C_1 нүктесі осы бөлу нүктелерінің бірімен беттеседі. Фалес теоремасы бойынша жүргізілген параллель түзулер AB кесіндісін ұзындықтары δ-ға тең бірдей n бөлікке бөледі. Сонда $AB = n\delta$. $AB_1 = n\delta$. Осыдан $\frac{AC_1}{AC}=\frac{m\varepsilon}{n\varepsilon}=\frac{m}{n}$ және $\frac{AB_1}{AB}=\frac{m\delta}{n\delta}=\frac{m}{n}$ болғандықтан, $\frac{AB_1}{AB}=\frac{AC_1}{AC}$ теңдігін аламыз.



2.3-сурет

Дегенмен, AC және AC_1 кесінділеріне бірдей бүтін сан рет өлшеп салуға болатындай ε кесіндісі табылмауы да мүмкін. Мұндай жағдайда да $\frac{AB_1}{AB}=\frac{AC_1}{AC}$ теңдігі орындалатынын көрсетуге болады. ■

1-мысал. Ұзындықтары a, b, c болатын кесінділер берілген. Ұзындығы $x=\frac{bc}{a}$ болатын кесінді салу керек.

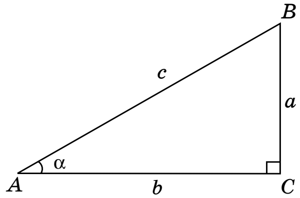


2.4-сурет

▲ Төбесі O нүктесінде жататын жазыңқы емес бұрыштың бір қабырғасына $OA=a$, $OB=b$ кесінділерін, ал екінші қабырғасына $OC=c$ кесіндісін өлшеп саламыз (2.4-сурет). Сонан соң, A және C нүктелерін түзумен қосып, B нүктесі арқылы түзуге параллель түзу жүргіземіз. Бұл түзу бұрыштың екінші қабырғасын D нүктесінде қиып өтсін. Онда теорема 1 бойынша $\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}$ немесе $OD=\frac{OB\cdot OC}{OA}=\frac{bc}{a}$ теңдіктерін аламыз, яғни OD бізге керек кесінді. ■

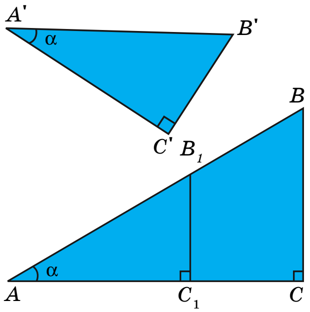
2.1.2. Сүйір бұрыштың косинусы.

Анықтама. *Тік бұрышты үшбұрыштың сүйір бұрышының* ***косинусы*** *деп іргелес жатқан катеттің гипотенузаға қатынасын атайды.* α бұрышының косинусы былай белгіленеді: cos α. 2.5-суреттегі ABC тік бұрышты үшбұрышының A бұрышы α-ға тең, оған іргелес жатқан катет $AC=b$, ал гипотенузасы $AB=c$ болса, онда анықтама бойынша $\cos\alpha = \dfrac{AC}{AB}$ немесе $\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$.



2.5-сурет

Теорема 2. *Бұрыштың косинусы тік бұрышты үшбұрыштың қалай орналасқаны мен оның өлшемдеріне тәуелді емес, бұрыштың градустық өлшеміне ғана тәуелді.*



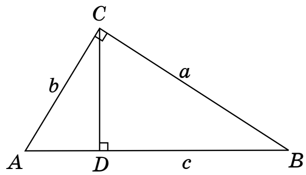
2.6-сурет

▲ **Дәлелдеуі.** ABC және $A'B'C'$ тік бұрышты үшбұрыштарының A және A' бұрыштары бірдей және α-ға тең болсын (2.6-сурет). Онда $\dfrac{A'C'}{A'B'} = \dfrac{AC}{AB}$ болатынын дәлелдеу керек. 2.5-суретте көрсетілгендей, $A'B'C'$ үшбұрышына тең AB_1C_1 үшбұрышын саламыз. $AC \perp BC$, $AC \perp B_1C_1$ болғандықтан, $BC \parallel B_1C_1$ болады. Онда пропорционал кесінділердің қасиеті бойынша $\dfrac{AC_1}{AB_1} = \dfrac{AC}{AB}$. Салу бойынша $AC_1=A'C'$, $AB_1=A'B'$ болғандықтан, $\dfrac{A'C'}{A'B'} = \dfrac{AC}{AB}$ теңдігі орындалады. Теорема дәлелденді. ■

2.1.3. Пифагор теоремасы.

Теорема. *Тік бұрышты үшбұрыштың гипотенузасының квадраты катеттерінің квадраттарының қосындысына тең:* $a^2+b^2=c^2$.

▲ **Дәлелдеуі.** ABC тік бұрышты үшбұрышының C төбесінен биіктік жүргіземіз (2.7-сурет). Косинустың анықтамасы бойынша $\cos(\angle A) = \frac{AC}{AB}$.



2.7-сурет

Ал ACD тік бұрышты үшбұрышынан $\cos(\angle A) = \frac{AD}{AC}$ теңдігін аламыз. Осыдан $AB \cdot AD = AC^2$ болатынын көреміз. Осы сияқты $\cos(\angle B) = \frac{BD}{BC} = \frac{BC}{AB}$ теңдігінен $AB \cdot BD = BC^2$ теңдігі шығады. Осы шыққан теңдіктерді мүшелеп қосып, $AD + BD = AB$ екенін ескерсек,

$$AC^2 + BC^2 = AB \cdot AD + AB \cdot BD = AB(AD + BD) = AB^2$$

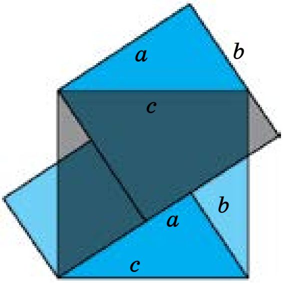
теңдігін аламыз. Теорема дәлелденді. ■

Пифагор теоремасынан тік бұрышты үшбұрыштың әрбір катеті гипотенузадан кіші болатынын, кез келген α сүйір бұрышы үшін $\cos \alpha < 1$ теңсіздігі орындалатынын байқауға болады.

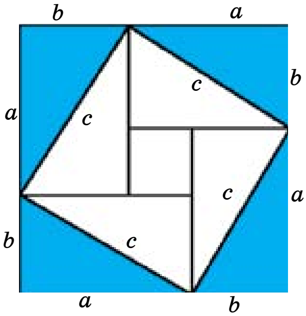
Сол сияқты, Пифагор теоремасына кері теореманың дұрыстығын байқаймыз (**2.28** және **2.35**-есептерді қарастырыңдар).

Т Дәлелденген теорема ежелгі грек ғалымы Пифагор (б.з.б. VI ғ.) есімімен байланыстырылған. Дегенмен бұл теорема Пифагорға дейін белгілі болған. Ежелгі Вавилон мен Мысыр елінде бұл теореманы өлшеу жұмыстарына қолдана білген. Мысалы, тік бұрыш алу үшін олар жуан жіпті бірдей 12 бөлікке түйіндермен бөліп, жіптің ұштарын байлаған. Осы түйіндері бар жіпті керіп, қабырғалары 3-ке, 4-ке және 5-ке тең үшбұрыш құрастырған. Сонда 5 бөліктен тұратын қабырғаға қарсы жататын бұрыш тік бұрыш болады ($3^2+4^2=5^2$). Сондықтан осы үшбұрышты ***Египет үшбұрышы*** деп атап кеткен. Сонымен бұл теорема Пифагорға дейін белгілі болғанымен, оған Пифагордың қосқан үлесі – теореманың дәлелдемесін тапқандығында болса керек. Бізге жеткен аңыз-


Пифагор
(б. з. б. VI ғ.)



2.8-сурет



2.9-сурет

дарға сүйенсек, Пифагор осы теореманың құрметіне құрбандыққа өгіз шалған деседі. Осы күндері бұл теореманың әртүрлі дәлелдемелерінің саны 100-ден асады. Мысалы, олардың бірқатары, аудандары a^2, b^2 және c^2-қа тең шаршыларды бірдей бөліктерге бөлу арқылы $c^2 = a^2 + b^2$ теңдігін дәлелдесе (2.8-сурет), онда екіншілері аудан ұғымын қолданады. Мәселен, 2.9-сурет бойынша, шаршы ауданын 2 жолмен анықтауға болады.

$$S = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2};$$

$$S = c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2.$$ Мұнда $\frac{ab}{2}$ – боялған тік бұрышты үшбұрыштың ауданы.

?

1. Қандай кесінділерді пропорционал кесінділер деп атайды?
2. Пропорционал кесінділер жөніндегі теореманы тұжырымдап, дәлелдеңдер.
3. Сүйір бұрыштың косинусы деген не? Оны қалай белгілейді?
4. Бұрыштың косинусы тік бұрышты үшбұрыштың өлшемдеріне тәуелсіз, тек бұрыш шамасына ғана тәуелді болатынын көрсетіңдер.
5. Пифагор теоремасын тұжырымдап, оны дәлелдеңдер.
6. Қандай үшбұрышты Египет үшбұрышы деп атайды?

ПТ

1. Кесінді салып, оны өзара тең: 1) 3; 2) 4; 3) 5 бөлікке бөліңдер.
2. Көз мөлшерімен тік бұрышты үшбұрыш салып, сызбаның дұрыстығын өлшеу арқылы және Пифагор теоремасы арқылы тексеріңдер (микрокалькуляторды пайдаланыңдар).
3. Бөлім басында Астанадағы “Бейбітшілік және келісім” сарайы бейнеленген. Пирамиданың табанында қабырғасы 61,8 м болатын шаршы орналасқан, ал бүйір қырлары шамамен 75,7 м болады. Пирамиданың әрбір бүйір жағы үшбұрыш қабырғаларына параллель кесінділермен бөлінген.

1) Осы кесінділердің ұзындығын 0,1 см-ге дейінгі дәлдікпен өлшеп, анықтаңдар; 2) өлшеу нәтижесін Фалес теоремасы бойынша тексеріңдер; 3) ABC үшбұрышының биіктігін метр есебімен анықтаңдар.

ЕСЕПТЕР

A

2.1. Тік бұрышты үшбұрыштың катеті a, гипотенузасы c. Берілген катетіне қарсы орналасқан бұрыштың косинусын анықтаңдар: 1) $a=10$, $c=12$; 2) $a=3$, $c=5$; 3) $a=1{,}5$, $c=3$.

2.2. Косинусы: 1) $\frac{3}{5}$-ке; 2) $\frac{4}{9}$-ке; 3) 0,5-ке; 4) 0,8-ге тең болатын бұрыш салыңдар.

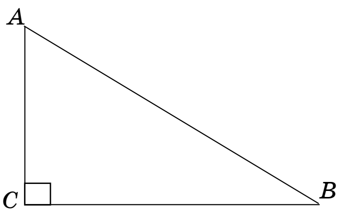
2.3. Тік бұрышты үшбұрыштың катеттері a және b. Оның гипотенузасын табыңдар: 1) $a=3$, $b=4$; 2) $a=1$, $b=1$; 3) $a=5$, $b=6$; 4) $a=0{,}5$, $b=1{,}2$.

2.4. Үшбұрыштың қабырғаларының қатынасы 5:12:13 қатынасындай. Оның тік бұрышты үшбұрыш болатынын дәлелдеңдер.

2.5. Тік бұрышты үшбұрыштың a катеті мен c гипотенузасы берілген. Оның екінші катетін анықтаңдар: 1) $a=3$, $c=5$; 2) $a=5$, $c=13$; 3) $a=0{,}5$, $c=1{,}3$.

2.6. Тік бұрышты үшбұрыштың екі қабырғасы 3 м және 4 м. Оның үшінші қабырғасын табыңдар.

2.7. Тік бұрышты үшбұрыштың қабырғалары 5, 6, 7 сандарына пропорционал болуы мүмкін бе?



2.10-сурет

▲ Егер мүмкін болса, онда $AC=5k$, $BC=6k$ және $AB=7k$ болуы керек (2.10-сурет), мұнда k – пропорционалдық коэффициенті. Ал ABC – тік бұрышты үшбұрыш болса, онда $AB^2 = AC^2 + BC^2$ теңдігі орындалуы керек. Бірақ $AC^2 + BC^2 = (5k)^2 + (6k)^2 = 61k^2 \neq 49k^2$, яғни тік бұрышты үшбұрыш қабырғалары 5,6,7 сандарына пропорционал болуы мүмкін емес. ■

2.8. Ромбының диагональдары: 1) 6 см және 8 см; 2) 16 см және 30 см; 3) 5 м және 12 м. Оның қабырғаларын табыңдар.

2.9. Тік төртбұрыштың қабырғалары 60 см және 91 см. Оның диагоналын табыңдар.

2.10. Қабырғалары: 1) 6, 8, 10; 2) 5, 6, 7; 3) 9, 12, 15; 4) 10, 24, 26; 5) 3, 4, 6; 6) 11, 9, 13; 7) 15, 20, 25 сандарымен өрнектелетін үшбұрыш тік бұрышты үшбұрыш бола ма?

2.11. Тік бұрышты үшбұрыштың барлық қабырғалары: 1) жұп сандармен; 2) тақ сандармен өрнектелуі мүмкін бе?

2.12. Тік бұрышты үшбұрыштың екі қабырғасы ғана: 1) жұп сандармен; 2) тақ сандармен өрнектелуі мүмкін бе?

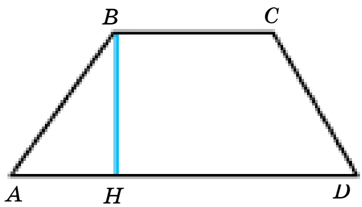
2.13. Тік бұрышты үшбұрыштың қабырғалары қандай тізбектес үш натурал санмен өрнектелуі мүмкін?

2.14. Тік бұрышты үшбұрыштың бір катеті 8 см, ал оған қарсы жатқан бұрыштың косинусы 0,8-ге тең. Гипотенуза мен екінші катетті табыңдар.

2.15. Тік бұрышты үшбұрыштың катеттері 12 см және 5 см. Сырттай сызылған шеңбердің диаметрін табыңдар.

B

2.16. Тең бүйірлі трапецияның табандары 5 м және 11 м, ал бүйір қабырғасы 5м. Трапецияның биіктігін табыңдар. (2.11-сурет).



2.11-сурет

2.17. Қабырғасы a-ға тең болатын тең қабырғалы үшбұрыштың биіктігін табыңдар.

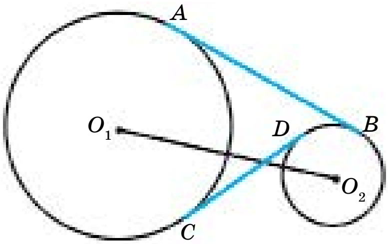
2.18. Берілген a және b кесінділері бойынша ұзындығы: 1) $\sqrt{a^2+b^2}$; 2) $\sqrt{a^2-b^2}$, $a>b$ болатын кесінді салыңдар.

2.19. Қабырғасы 10 см, ал бір диагоналы 12 см болатын ромбының екінші диагоналын анықтаңдар.

2.20. Қабырғалары бүтін сандармен өрнектелетін тік бұрышты үшбұрыштарды ***Пифагор үшбұрышы*** деп атайды. Қабырғалары $a = 2mn$, $b = m^2 - n^2$, $c = m^2 + n^2$ (мұндағы $m>n$, m, n – натурал сандар) формулаларымен өрнектелетін үшбұрыштар Пифагор үшбұрышы болатынын дәлелдеңдер.

2.21. Материал тасымалдау үшін фабриканың екі ғимаратының арасынан көлбеу науа жасалған. Бұл екі ғимараттың арақашықтығы 10 м, ал науаның екі басы жер бетінен 8 м және 4 м биіктікте. Науаның ұзындығын табыңдар.

2.22. Егер: 1) a=9 см, b=12 см болса, онда c, h, a_c, b_c-ны; 2) a=12 см, b=13 см болса, онда c, h, a_c, b_c-ны анықтаңдар. Мұнда c – гипотенуза, a, b – катеттер, h – гипотенузаға түсірілген биіктік, a_c, b_c – тікбұрыш төбесінен түсірілген биіктіктің гипотенузаны бөлген бөліктері.



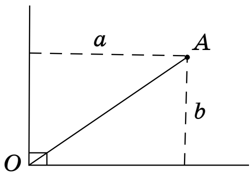
2.12-сурет

2.23. Радиустары 6 см және 2 см болатын шеңберлердің центрлерінің арақашықтығы 10 см. Олардың ішкі және сыртқы ортақ жанамаларының ұзындықтарын табыңдар (2.12-сурет).

2.24. Тең емес екі хорданың центрге жақынырақ орналасқаны екіншісінен ұзын болатынын дәлелдеңдер.

2.25. Тік бұрышты үшбұрыштың гипотенузасы c-ға тең, ал сүйір бұрышының бірі α-ға тең. Екінші сүйір бұрышы мен катеттерін табыңдар.

2.26. Тік бұрышты үшбұрыштың гипотенузасы c-ға тең, ал сүйір бұрышының бірі α-ға тең. Катеттерін, гипотенузаның биіктікпен бөлінетін бөліктерін және биіктігін табыңдар.



2.13-сурет

2.27. Тік бұрыштың ішінде орналасқан нүкте оның қабырғаларынан a және b қашықтығында орналасқан. Осы нүктеден бұрыштың төбесіне дейінгі қашықтықты анықтаңдар (2.13-сурет).

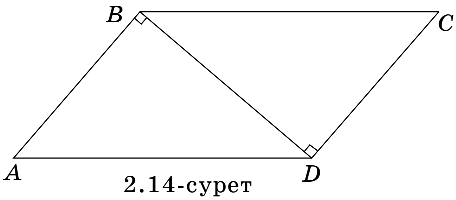
2.28. Пифагор теоремасына кері теореманы тұжырымдаңдар.

2.29. Радиустары r-ге тең екі шеңбер бір-бірінің центрлері арқылы өтеді. r-ді олардың ортақ хордалары арқылы өрнектеңдер.

2.30. Радиусы 5 см-ге тең шеңбердің 8 см-ге тең хордасынан оның центріне дейінгі қашықтықты табыңдар.

C

2.31. Параллелограмның диагональдарының бірі оның биіктігі болып табылады. Параллелограмның периметрі 50 см, ал екі қабырғасының айырмасы 1 см болса, онда оның қабырғалары мен диагональдарын анықтаңдар (2.14-сурет).



2.14-сурет

2.32. Тік бұрышты үшбұрыштың катеттері бойынша оның гипотенузасына түсірілген биіктігін табыңдар: 1) 5 м, 12 м; 2) 12 м, 16 м.

2.33. Қабырғалары: 1) 24 см, 25 см, 7 см; 2) 15 дм, 17 дм, 8 дм болатын үшбұрыштың қысқа биіктігін табыңдар.

2.34. a және b кесінділері бойынша $x=\sqrt{ab}$ кесіндісін қалай салуға болады?

2.35. Үшбұрыштың a, b, c қабырғалары үшін $a^2+b^2=c^2$ теңдігі орындалады деп алып, осы үшбұрыштың тік бұрышты үшбұрыш болатынын дәлелдеңдер.

2.36. Тік бұрышты үшбұрыштың биссектрисасы гипотенузасын 12 см және 5 см болатын бөліктерге бөледі деп, осы үшбұрыштың катеттерін табыңдар.

2.37. Тік бұрышты үшбұрышқа іштей сызылған шеңбер жанасу нүктесі арқылы гипотенузаны m және n-ге тең кесінділерге бөледі, ($m > n$). Осы шеңбердің радиусын табыңдар.

2.38. Шеңбердің өзара тең және бір-біріне перпендикуляр екі хордасы қиылысу нүктелерінде 10 см және 16 см болатын бөліктерге бөлінеді. Шеңбердің радиусын анықтаңдар.

2.39. Диагональдары перпендикуляр төртбұрыштың қарама-қарсы қабырғаларының квадраттарының қосындысы өзара тең болатынын дәлелдеңдер.

2.40. Тік бұрышты үшбұрыштың бір бұрышы қалған екі бұрышының арифметикалық ортасына тең. Гипотенузасы c болса, оның катеттерін табыңдар.

2.2. СҮЙІР БҰРЫШТЫҢ СИНУСЫ, ТАНГЕНСІ ЖӘНЕ КОТАНГЕНСІ

2.2.1. Сүйір бұрыштың синусы, тангенсі және котангенсінің анықтамасы

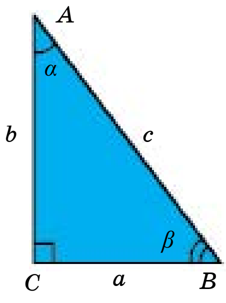
$\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$ Іргелес жатқан катеттің гипотенузаға қатынасы α бұрышының косинусы деп аталады.

$\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$ α сүйір бұрышына қарсы жатқан катеттің гипотенузаға қатынасы α бұрышының синусы деп аталады.

$\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{a}{b}$ α бұрышының синусының косинусына қатынасы немесе қарсы жатқан катеттің іргелес жатқан катетке қатынасы α бұрышының тангенсі деп аталады.

$\mathrm{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{a}$ α бұрышының косинусының синусына қатынасы немесе іргелес жатқан катеттің қарсы жатқан катетке қатынасы α бұрышының котангенсі деп аталады.

$a = c \cdot \sin\alpha$ α бұрышына қарсы жатқан катет гипотенуза мен $\sin\alpha$-ның көбейтіндісіне тең.



2.15-сурет

$b = c \cdot \cos\alpha$ α бұрышына іргелес жатқан катет гипотенуза мен $\cos\alpha$-ның көбейтіндісіне тең.

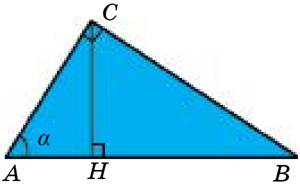
$a = b \cdot \mathrm{tg}\alpha$ α бұрышына қарсы жатқан катет іргелес жатқан катет пен tg α-ның көбейтіндісіне тең.

$b = a \cdot \mathrm{ctg}\alpha$ α бұрышына іргелес жатқан катет қарсы жатқан катет пен ctg α-ның көбейтіндісіне тең.

Бұл формулалар тікелей анықтамадан шығады.

1-мысал. Берілгені: ΔABC–тік бұрышты үшбұрыш. $\angle C = 90°$, $AB=c$, $\angle A = \alpha$, $CH \perp AB$.

Табу керек: AC, BC, CH, AH және BH (2.16–сурет).



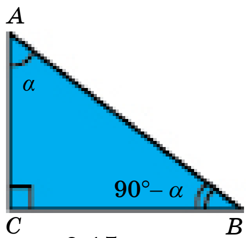
2.16-сурет

▲ $AC = AB \cdot \cos\alpha = c \cdot \cos\alpha$; $BC = AB \cdot \sin\alpha = c \cdot \sin\alpha$.
$\angle AHC = 90° \Rightarrow \triangle ACH$, $\triangle BCH$ – тік бұрышты үшбұрыштар және $\angle BCH = \alpha$.

Онда
$$AH = AC \cdot \cos\alpha = c \cdot \cos\alpha \cdot \cos\alpha = c \cdot \cos^2\alpha;$$
$$BH = BC \cdot \sin\alpha = c \cdot \sin\alpha \cdot \sin\alpha = c \cdot \sin^2\alpha;$$
$$CH = AC \cdot \sin\alpha = c \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha.$$

Жауабы: $AC = c \cdot \cos\alpha$; $BC = c \cdot \sin\alpha$; $CH = c \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha$; $AH = c \cdot \cos^2\alpha$; $BH = c \cdot \sin^2\alpha$. ■

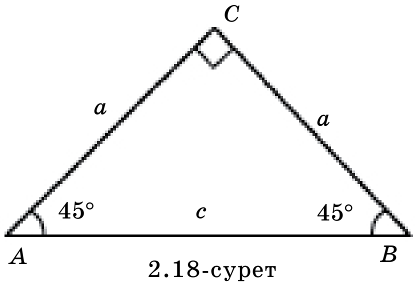
2.2.2. Кейбір бұрыштардың синусының, косинусының, тангенсінің және котангенсінің мәндері.

$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$	$\cos\alpha = \dfrac{AC}{AB}$; $\sin(90° - \alpha) = \dfrac{AC}{AB}$.	2.17-сурет
$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$	$\cos(90° - \alpha) = \dfrac{BC}{AB}$; $\sin\alpha = \dfrac{BC}{AB}$.	

1. $\alpha = 45°$. $\angle A = \angle B = 45°$; $AC=BC=a$ болсын (2.18-сурет).

Пифагор теоремасы бойынша:

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a.$$



2.18-сурет

$$\sin 45° = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{\sqrt{2} \cdot a} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos 45° = \frac{AC}{AB} = \frac{a}{\sqrt{2} \cdot a} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\mathrm{tg}45° = (\sin 45°) : (\cos 45°) = \frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{\sqrt{2}}{2} = 1; \ \mathrm{ctg}45° = 1.$$

2. $\angle A = 30°$, $\angle B = 60°$, $BC=a$ болсын. $30°$ бұрышқа қарсы жатқан катет гипотенузаның жартысына тең:

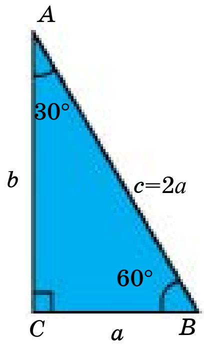
$$AB=2a \ \text{(2.19-сурет)}.$$

Пифагор теоремасы бойынша:

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = \sqrt{3} \cdot a.$$

Онда

$$\sin 30° = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2};$$



2.19-сурет

$$\cos 30° = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \ \mathrm{tg}30° = \left(\frac{1}{2}\right) : \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$\mathrm{ctg}30° = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) : \left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}$. $60° = 90° - 30°$ болғандықтан,

$$\sin 60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}; \cos 60° = \sin 30° = \frac{1}{2}; \ \mathrm{tg}\ 60° = \sqrt{3}; \ \mathrm{ctg}\ 60° = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

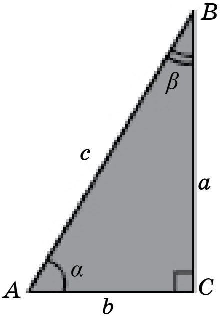
Сонымен $\sin\ \alpha$, $\cos\ \alpha$, $\mathrm{tg}\ \alpha$, және $\mathrm{ctg}\ \alpha$ өрнектері үшін төмендегідей кесте құрастыруға болады:

α	30°	45°	60°
sin α	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos α	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg α	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
ctg α	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{c^2}=1\Rightarrow\boxed{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1}$$

Бұл **негізгі тригонометриялық теңбе-теңдік** деп аталады.

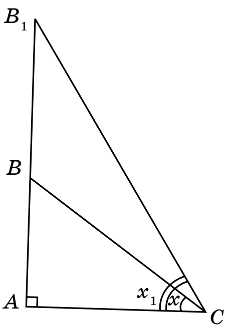
Осыдан $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ яғни, косинус сияқты, синус та тек бұрыш шамасына тәуелді болады. Ал $\text{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\text{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ болғандықтан, тангенс пен котангенс те тек бұрыш шамасына тәуелді.



2.20-сурет

2.2.3. Тригонометриялық функциялар және олардың мәндерін анықтау.

2.21-суреттен ABC тік бұрышты үшбұрышының x сүйір бұрышы өзгеретін болса, онда сәйкес sin$x$, cos$x$, tg$x$, ctg$x$-тің өзгеретінін көреміз. Шынында да, $x<x_1$ болсын. Онда $\cos x=AC:AB>AC:AB_1=\cos x_1$, яғни x бұрышының шамасы өскен сайын cos$x$ кеми түседі және cos$x$-ті x айнымалысына тәуелді функция деп қарастыруға болады. Осы сияқты, x айнымалы болғанда sin$x$, tg$x$, ctg$x$ шамаларын да функция деп қарастырамыз. Бұл функцияларды ***тригонометриялық функциялар*** деп атайды.



2.21-сурет

Сонымен, cos$x$ функциясы $0°<x<90°$ аралығында кемімелі. Ал $\sin x=\sqrt{1-\cos^2 x}$ болғандықтан, sin$x$ функциясы $0°<x<90°$ аралығында өспелі болады.

$\operatorname{tg}x=\sin x:\cos x$ теңдігінен $\cos x$ кемімелі, $\sin x$ өспелі болғандықтан, $0°<x<90°$ аралығында $\operatorname{tg}x$ өспелі функция, ал $\operatorname{ctg}x$ кемімелі. $0°<x<90°$ аралығында x бұрыштарының синустары мен косинустарының мәндерін кесте бойынша немесе микрокалькуляторды, не компьютерді пайдаланып анықтайды.

Мысалы, $\sin 70°36' \approx 0{,}9432$; $\sin 74°55' \approx 0{,}9656$;

$\cos 16°12' \approx 0{,}9603$; $\cos 18°50' \approx 0{,}9464$; т. с. с.

?

1. Сүйір бұрыштың синусына, тангенсіне және котангенсіне анықтама беріңдер. Оларды тікбұрышты үшбұрыштың катеттері мен гипотенузасы арқылы өрнектеңдер.
2. 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°-қа тең бұрыштар үшін тригонометриялық функциялардың мәндерін айтып беріңдер.
3. Тригонометриялық функциялар арасында қандай байланыс бар? Негізгі тригонометриялық теңбе-теңдікті жазыңдар.
4. Тригонометриялық функциялардың мәндерін кесте бойынша қалай анықтайды?

ПТ Жоғарыда айтқанымыздай $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ теңдіктерін негізгі тригонометриялық теңбе-теңдіктер. Олардың қатарына келесі теңбе-теңдіктер де енеді. $\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$; $1+\operatorname{tg}^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$; $1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$. Бұл теңбе-теңдіктерді өз беттеріңше дәлелдеңдер.

ЕСЕПТЕР

А

2.41. ABC үшбұрышында $\angle C=90°$: 1) $BC=8$, $AB=17$; 2) $BC=21$, $AC=20$; 3) $BC=1$, $AC=2$; 4) $AC=24$, $AB=25$ болса, онда A және B бұрыштарының синусын, косинусын және тангенсін табыңдар.

2.42. 1) $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{2}$; 2) $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{3}{4}$; 3) $\cos\alpha=0{,}2$; 4) $\cos\alpha\ \dfrac{2}{3}$; 5) $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$; 6) $\sin\alpha=0{,}4$ деп алып, α бұрышын салыңдар.

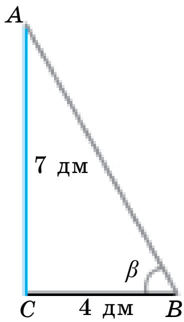
2.43. Тік бұрышты үшбұрыштың бір катеті b-ға тең, ал оған қарама-қарсы бұрышы β-ға тең. b мен β арқылы үшбұрыштың екінші сүйір бұрышын, катетін және гипотенузасын өрнектеңдер.

2.44. Тік бұрышты үшбұрыштың b катеті мен оған іргелес жатқан α бұрышы берілген. Оның өзге қабырғалары мен бұрыштарын b мен α арқылы өрнектеңдер.

2.45. Тік бұрышты үшбұрыштың гипотенузасы c мен сүйір бұрышы α арқылы катеттері мен екінші сүйір бұрышын өрнектеңдер.

2.46. Тең бүйірлі тік бұрышты үшбұрыштың табаны a-ға тең. Бүйір қабырғасын табыңдар.

2.47. Ұзындығы 7 дм қазықтың көлеңкесі 4 дм. Күннің көкжиектен (горизонттан) биіктігін градус есебімен табыңдар. (2.22-сурет).



2.22-сурет

2.48. Тік бұрышты үшбұрыштың белгісіз қабырғалары мен бұрыштарын төмендегі деректер бойынша табыңдар.

1) Екі катеті бойынша:

а) $a=3$, $b=4$; в) $a=11$, $b=60$;
ә) $a=9$, $b=10$; г) $a=6$, $b=8$;
б) $a=20$, $b=21$; д) $a=5$, $b=12$.

2) Гипотенузасы және катеті бойынша:

а) $c=13$, $a=5$; б) $c=17$, $a=8$;
ә) $c=25$, $a=7$; в) $c=85$, $a=84$.

3) Гипотенузасы және сүйір бұрышы бойынша:

а) $c=2$, $\alpha=20°$; б) $c=8$, $\alpha=70°36'$;
ә) $c=25$, $\alpha=50°20'$; в) $c=16$, $\alpha=76°21'$.

4) Катеті және оған қарсы жатқан сүйір бұрышы бойынша:

а) $a=3$, $\alpha=30°27'$; б) $a=7$, $\alpha=60°35'$;
ә) $a=5$, $\alpha=40°48'$; в) $a=9$, $\alpha=68°$.

2.49. Тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасы c, ал сүйір бұрышы 60°. Осы бұрышқа қарсы жатқан катетті табыңдар.

2.50. Айырманың таңбасын анықтаңдар: 1) $\sin 31° - \sin 30°$; 2) $\sin 26° - \sin 27°$; 3) $\cos 31° - \cos 30°$; 4) $\cos 26° - \cos 27°$.

B

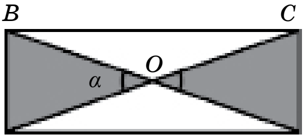
2.51. 1) $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$ болса, онда $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ және $\operatorname{ctg}\alpha$-ны;

2) $\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$ болса, онда $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ және $\operatorname{ctg}\alpha$-ны;

3) $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ болса, онда $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ және $\operatorname{ctg}\alpha$-ны;

4) $\sin\alpha = \dfrac{1}{4}$ болса, онда $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ және $\operatorname{ctg}\alpha$-ны табыңдар.

2.52. Тең бүйірлі үшбұрыштың биіктігі 12,4 м, ал табаны 40,6 м. Үшбұрыштың бұрыштарын және бүйір қабырғасын табыңдар.



2.23-сурет

2.53. Тіктөртбұрыштың қабырғалары 12,4 см және 26 см. Диагональдарының арасындағы бұрышты анықтаңдар (2.23-сурет).

2.54. Ромбының диагональдары 4,73 см және 2,94 см. Оның бұрыштарын табыңдар.

2.55. Ромбының қабырғасы 241 м, биіктігі 120 м. Бұрыштарын табыңдар.

2.56. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) 1) $1-\sin^2\alpha$;

2) $1-\cos^2\alpha$;

3) $(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)$;

4) $1+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$;

5) $\sin\alpha-\sin\alpha\cos^2\alpha$;

6) $\cos 45°\ \mathrm{tg}\ 45°$;

7) $\sin 85°\mathrm{tg}5°$;

8) $1-\sin 18°\cos 72°$;

9) $\dfrac{2\cos 2°}{\sin 88°+\cos 2°}$;

10) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$;

11) $\mathrm{tg}^2\alpha(2\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-1)$;

12) $\cos^2\alpha+\mathrm{tg}^2\alpha\cos^2\alpha$;

13) $\mathrm{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\alpha$;

14) $(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)$;

15) $\mathrm{tg}5°\mathrm{tg}25°\mathrm{tg}45°\mathrm{tg}65°\mathrm{tg}85°$.

2.57. Егер:

1) $\cos\alpha = \dfrac{5}{13}$; 2) $\cos\alpha = \dfrac{15}{17}$; 3) $\cos\alpha = 0{,}6$ болса, $\mathrm{ctg}\ \alpha$, $\sin\alpha$ және $\mathrm{tg}\ \alpha$-ны табыңдар.

2.58. Егер: 1) $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$; 2) $\sin\alpha = \dfrac{40}{41}$; 3) $\sin\alpha = 0{,}5$ болса, онда $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\ \alpha$, $\mathrm{ctg}\ \alpha$-ны табыңдар.

2.59. Егер: 1) $\cos\alpha=\dfrac{4}{7}$; 2) $\sin\alpha=\dfrac{4}{7}$; 3) $\sin\alpha=0{,}5$; 4) $\mathrm{tg}\alpha=\dfrac{3}{5}$; 5) $\mathrm{tg}\alpha=0{,}7$; 6) $\mathrm{ctg}\alpha=1{,}5$ болса, онда α бұрышын салып көрсетіңдер.

2.60. Тең қабырғалы үшбұрыштың қабырғасы a. Оған сырттай және іштей сызылған шеңберлердің радиустарын табыңдар.

2.61. Тіктөртбұрыштың диагоналы оның бір қабырғасынан екі есе ұзын. Диагональдарының арасындағы бұрышты табыңдар.

2.62. Ромб диагональдары a және $a\sqrt{3}$-ке тең. Ромбының бұрыштарын табыңдар.

2.63. Төмендегі мәліметтер бойынша α және β бұрыштарын салыстырыңдар:

1) $\sin\alpha=\frac{1}{3}$, $\sin\beta=\frac{1}{4}$;

2) $\sin\alpha=\frac{2}{3}$, $\sin\beta=\frac{3}{4}$;

3) $\cos\alpha=\frac{3}{7}$, $\cos\beta=\frac{2}{5}$;

4) $\cos\alpha=0{,}75$, $\cos\beta=0{,}71$;

5) $\mathrm{tg}\alpha=2{,}1$, $\mathrm{tg}\beta=2{,}5$;

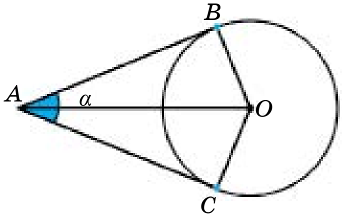
6) $\mathrm{tg}\alpha=\frac{8}{3}$, $\mathrm{tg}\beta=\frac{5}{2}$;

7) $\mathrm{ctg}\alpha=1{,}2$, $\mathrm{ctg}\beta=1{,}1$;

8) $\mathrm{ctg}\alpha=\frac{3}{2}$, $\mathrm{ctg}\beta=\frac{7}{3}$.

2.64. Төбесіндегі бұрышы 120° болатын тең бүйірлі үшбұрыштың табаны b-ға тең. Бүйір қабырғасын табыңдар.

2.65. Шеңбердің радиусы 5 м. Оның центрінен 13 м қашықтықтағы нүктеден шеңберге жанамалар жүргізілген. Жанамалардың ұзындықтарын және арасындағы бұрыштарын табыңдар (2.24-сурет).



2.24-сурет

C

2.66. Үшбұрыштың табанындағы үлкен бұрышы 45°, ал биіктігі табанын 20 см және 21 см болатын бөліктерге бөледі. Үшбұрыштың үлкен бүйір қабырғасын табыңдар.

2.67. 30 м биіктікте тұрған аңшыға ойпаңдау жерде тұрған аң 20° бұрышпен көрінді. Аңшы мен аңның арақашықтығын табыңдар.

2.68. Егер 200 м қашықтықтағы көтерілу биіктігі 6 м болса, онда тас жолдың көтерілу бұрышын анықтаңдар.

2.69. Диаметрі 2 см шеңберге сырттай тең бүйірлі трапеция сызылған. Табандарындағы бұрыштары 45°-тан болса, трапецияның орта сызығын анықтаңдар.

2.70. Өзеннің бір жиегі 30 метрлік жар, ал оның ені 40 м.

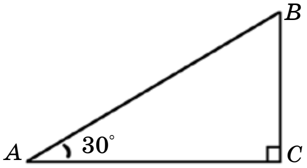
1) Жарда отырған бақылаушыдан өзеннің екінші жиегіне дейінгі қашықтық қандай?

2) Бақылаушыға қайық өзеннің дәл ортасында тұрған сияқты болады (бақылаушыға қайық пен өзен жиектері бірдей бұрыштармен көрінеді). Шын мәнінде қайықтан өзен жағалауларына дейінгі қашықтықтар қандай?

2.3. ТІК БҰРЫШТЫ ҮШБҰРЫШТАРДЫ ШЕШУ
2.3.1. Тік бұрышты үшбұрыштарды шешу.

Жалпы үшбұрыштарды шешу деп, оны анықтайтын берілген үш элементі бойынша осы үшбұрыштың өзге белгісіз элементтерін анықтау үрдісін айтады. Тік бұрышты үшбұрыштарды шешу де осы сияқты. Тік бұрышты үшбұрышты толық анықтау үшін оның екі элементі берілсе, жеткілікті, өйткені оның бір бұрышы тік бұрыш болатыны белгілі. Мұнда тәуелсіз ұғымын былай түсіну қажет: егер тік бұрышты үшбұрыштың α және β сүйір бұрыштары (екі элементі) берілсе, онда бұл мәліметтер бойынша осы үшбұрышты толық анықтай алмаймыз, себебі бұл екі бұрыш $\alpha+\beta=90^\circ$ теңдігімен өзара тәуелді шамалар болады. Сондықтан үшбұрыштың тағы бір элементі берілуге тиіс. Енді бірер мысалдар қарастырайық.

1-мысал. Сүйір бұрышы 30° болатын тік бұрышты үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбер радиусы 8 см. Үшбұрыш катеттерін табу керек.



2.25-сурет

▲ ABC тік бұрышты үшбұрышында $\angle A=30^\circ$ (2.25-сурет), ал сырттай сызылған шеңбер радиусы $R=8$ см. Тік бұрышты үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбер центрі гипотенузаның ортасы болатындықтан,

$$AB = 2R = 16 \text{ см}.$$

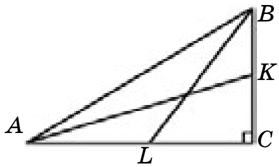
Онда

$$AC = AB\cdot\cos(\angle A) = 16\cdot\cos 30^\circ = 16\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3} \quad \text{см} \quad \text{және}$$

$$BC = AB\cdot\sin(\angle A) = 16\cdot\frac{1}{2} = 8 \text{ см}.$$

Жауабы: 8 см және $8\sqrt{3}$ см. ■

2-мысал. Тік бұрышты үшбұрыштың катеттеріне түсірілген медианаларының қатынасы $\sqrt{13}:\sqrt{7}$ қатынасына тең. Үшбұрыштың бұрыштарын табу керек.



2.26-сурет

▲ 2.26-суреттегі тік бұрышты үшбұрышта AK және BL медианалары есеп шарты бойынша $\frac{AK}{BL}=\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{7}}$ теңдігін қанағаттандырады. Егер мұнда $BC=a$, $AC=b$ деп алсақ, онда $KC=\frac{a}{2}$ және $LC=\frac{b}{2}$. Сондықтан

$$AK=\sqrt{b^2+\frac{a^2}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{4b^2+a^2};\quad BL=\sqrt{a^2+\frac{b^2}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+b^2}.$$

Онда $\frac{4b^2+a^2}{4a^2+b^2}=\frac{13}{7}\Rightarrow 28b^2+7a^2=52a^2+13b^2\Rightarrow 15b^2=45a^2\Rightarrow$

$\Rightarrow\frac{a^2}{b^2}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ теңдігін аламыз.

Ал екінші жағынан $\operatorname{tg}(\angle A)=\frac{CB}{AC}=\frac{a}{b}=\frac{1}{\sqrt{3}}$, яғни $\angle A=60°$.

Олай болса, $\angle B=30°$ және $\angle C=90°$.

Жауабы: 60°, 30°, 90°. ■

2.3.2. Тік бұрышты үшбұрыштарды салу.

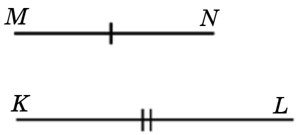
Бұл тақырып 7-сынып геометриясында берілген элементтері бойынша үшбұрыштарды салу жұмыстарын орындау барысында қарастырылған. Десек те, тік бұрышты үшбұрыштардың өзіндік ерекшеліктері бар болғандықтан (оның бір бұрышы тік бұрыш), бұл тақырыпты арнайы тік бұрышты үшбұрыштар үшін қайталап өтуді жөн санаймыз. Өйткені салу есептерін шешу қарастырылатын фигураны, оның элементтерін және осы элементтер арасындағы қатынастарды (байланыстарды) жете меңгеруді талап етеді. Әдетте салу есептерін шешу үрдісі төрт кезеңге бөлініп орындалатынын естеріңе түсіріп алыңдар: I. Талдау; II. Салу; III. Дәлелдеу; IV. Зерттеу[1].

Енді осы айтылғандар толыққанды түсінікті болуы үшін бірер мысалдар қарастырайық.

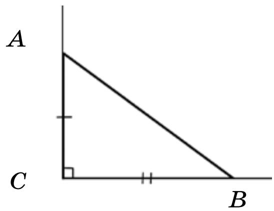
[1] Ал кейбір қарапайым салу есептерін орындау барысында, яғни есеп күрделі болмаса, онда осы көрсетілген төрт кезеңді түгел орындау міндетті емес.

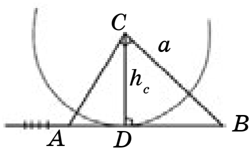
3-мысал. Берілген катеттері бойынша тік бұрышты үшбұрыш салу қажет.

▲ Есеп шарты бойынша MN және KL кесінділері берілген. Сонда бізге бір катеті MN кесіндісіне, екінші катеті KL кесіндісіне тең болатындай етіп ($MN=AC$, $KL=$ $=BC$), ABC үшбұрышын салу керек (2.27-сурет). Ол үшін жазықтықта қайсыбір тік бұрыш салып ($\angle ACB=90°$), оның қабырғаларынан $AC = MN$ және $BC = KL$ болатындай етіп, A және B нүктелерін алса, жеткілікті. Онда ΔACB– бізге қажет тік бұрышты үшбұрыш. ■



2.27-сурет





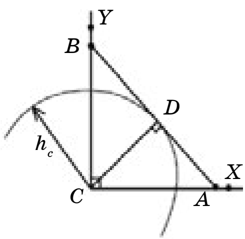
2.28-сурет

4-мысал. Катеті және гипотенузасына түсірілген биіктігі бойынша тік бұрышты үшбұрыш салу керек.

▲**I. Талдау.** Бізге қажет тік бұрышты үшбұрыш салынды делік. 2.28-суретте $\angle C = 90°$, $BC = a$, $CD \perp AB$, $CD = h_c$ болсын. $\omega(C; h_c)$ шеңберін жүргізетін болсақ, онда бұл шеңбер AB гипотенузасын D нүктесінде жанайды.

Сонымен қатар $CD = h_c$ теңдігі де орындалады, өйткені жанасу нүктесіне түсірілген радиус осы жанамаға перпендикуляр болады. Яғни үшбұрыштың A төбесі $\omega(C; h_c)$ шеңберіне B нүктесі арқылы жүргізілген жанамасы мен тік бұрыштың екінші қабырғасының қиылысу нүктесі болады.

II. Салу. 1) $OY \perp OX$ болатындай тік OX және OY түзулерін жүргіземіз. (2.29-сурет).



2.29-сурет

2) $CB = a$ болатындай $B \in CY$ нүктесін аламыз.

3) $\omega(C; h_c)$ шеңберін жүргіземіз.

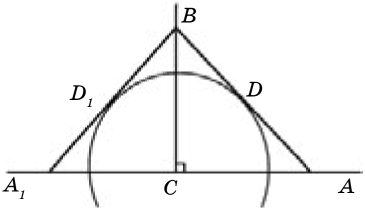
4) B нүктесі арқылы осы шеңберге BD жанамасын жүргіземіз.

5) $A = CX \cap BD$ нүктесін белгілейміз.

6) Алынған ABC үшбұрышы бізге қажет тік бұрышты үшбұрыш (2.29 сурет).

III. Дәлелдеуі. Шынында да, салу нәтижесінде алынған ABC үшбұрышында $\angle C = 90°$, $BC = a$, және $CD = h_c$, $CD \perp AB$, яғни CD гипотенузаға түсірілген биіктік. Олай болса, ABC үшбұрышы есеп шартын толық қанағаттандырады.

IV. Зерттеу. Есепті шешу үшін B нүктесінен $\omega(C; h_c)$ шеңберіне жанама жүргізу мүмкіндігі болуы қажет, яғни B нүктесі шеңбердің сыртқы бөлігінде жатуы керек. Олай болса, $a > h_c$ болуы қажет, бұл жағдайда есептің екі шешімі бар (2.30-сурет). Ал $a \leqslant h_c$ болса, онда есептің шешуі болмайды. ■



2.30-сурет

?

1. Тік бұрышты үшбұрышты шешу ұғымын қалай түсінесіңдер?
2. Тік бұрышты үшбұрышты толық бірмәнді түрде анықтау үшін оның неше тәуелсіз элементтерін білсе, жеткілікті болады? Себебін түсіндіріңдер.
3. Салу есептері неше кезеңге бөлініп орындалады? Олар қандай кезеңдер? Әрқайсысының мағынасын ашып көрсетіңдер.

ПТ

1. Берілген кесіндінің ортасын салып көрсетіңдер.
2. Берілген бұрыштың биссектрисасын салыңдар.
3. Берілген нүкте арқылы өтетін және берілген түзуге параллель болатын түзуді салыңдар.
4. Берілген шеңбер сыртында орналасқан нүкте арқылы өтетін осы шеңберге жанама түзуді салыңдар.
5. Берілген үш қабырғасы бойынша үшбұрыш салыңдар. Есептің шешімі бар болуы үшін қандай шарт орындалуы қажет?

ЕСЕПТЕР

А

2.71. Тік бұрышты үшбұрыштың a катеті мен оған қарсы жатқан α сүйір бұрышы берілген. Оның қалған қабырғалары мен бұрыштарын табыңдар:

1) a=5 см, $\alpha = 30°$; 2) $a = \sqrt{2}$ дм, α=45°;
3) $a = \sqrt{3}$ см, α=60°.

2.72. Тік бұрышты үшбұрыштың a катеті мен оған іргелес β сүйір бұрышы берілген. Үшбұрыштың қалған қабырғалары мен бұрыштарын табыңдар:
1) a=6 см, β=30°; 2) a=4 дм, β=45°; 3) a=8 см, β=60°.

2.73. Тік бұрышты үшбұрыштың a және b катеттері берілген. Оның c гипотенузасы мен бұрыштарын табыңдар:
1) $a = 4$ см, $b = 3$ см; 2) $a = 12$ см, $b = 5$ см;
3) $a = b = 3\sqrt{2}$ см.

2.74. Тік бұрышты үшбұрыштың c гипотенузасы мен α сүйір бұрышы берілген. Оның катеттері мен екінші сүйір бұрышын табыңдар:

1) $c = 16$ см, $\alpha = 30°$; 2) $c = 4\sqrt{2}$ см, α =45°;
3) $c = 6\sqrt{3}$ см, α=60°.

2.75. Тік бұрышты үшбұрыштың a катеті мен c гипотенузасы берілген. Оның екінші катеті мен сүйір бұрыштарын табыңдар:
1) $a = 8$ см, $c = 10$ см; 2) $a = 5$ см, $c = 13$ см;
3) $a = 6$ см, $c = 9$ см.

2.76. 2.71-ші есепте берілген мәліметтер бойынша тік бұрышты үшбұрыш салыңдар.

2.77. 2.72-ші есепте берілген мәліметтер бойынша тік бұрышты үшбұрыш салыңдар.

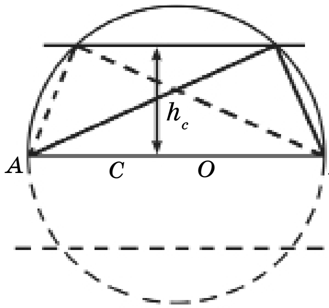
2.78. 2.73-ші есепте берілген мәліметтер бойынша тік бұрышты үшбұрыш салыңдар.

2.79. 2.74-ші есепте берілген мәліметтер бойынша тік бұрышты үшбұрыш салыңдар.

2.80. 2.75-ші есепте берілген мәліметтер бойынша тік бұрышты үшбұрыш салыңдар.

В

2.81. Тік бұрышты үшбұрышты c гипотенузасы мен оған түсірілген h_c биіктігі бойынша салыңдар (2.31-сурет).



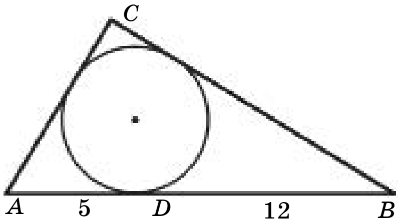
2.31-сурет

2.82. Тік бұрышты үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбер радиусы R=4 см және бір катеті де a=4 см. Оның барлық белгісіз элементтерін табыңдар.

2.83. Алдыңғы есепте берілген тік бұрышты үшбұрышты салыңдар.

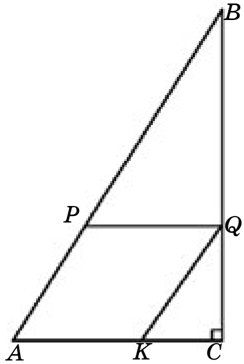
2.84. Тік бұрышты үшбұрышқа іштей сызылған шеңбер жанасу нүктесі арқылы гипотенузаны 2 см және 3 см болатын кесінділерге бөледі. Осы шеңбердің радиусын табыңдар.

2.85. Тік бұрышты үшбұрышқа іштей сызылған шеңбермен жанасу нүктесі гипотенузаны 5 см және 12 см болатын кесінділерге бөледі. Үшбұрыштың катеттерін табыңдар (2.32-сурет).



2.32-сурет

2.86. Бір бұрышы 60° болатын тік бұрышты үшбұрышқа қабырғасы 6 см, 60° бұрышы осы үшбұрышпен ортақ болатындай және барлық төбелері үшбұрыш қабырғаларында жататындай етіп, іштей ромб сызылған (2.33-сурет). Үшбұрыш қабырғаларын табыңдар.



2.33-сурет

2.87. Катеттері a, b, ал гипотенузасы c болатын тік бұрышты үшбұрышқа іштей сызылған шеңбер радиусы r үшін

$$r = \frac{1}{2}(a + b - c)$$

теңдігі орындалатынын көрсетіңдер.

2.88. Тік бұрышты үшбұрыш катеттерінің қосындысы 17 см, ал гипотенузасы 13 см. Үшбұрыш катеттерін табыңдар.

2.89. Гипотенузасы мен катеттерінің қосындысы бойынша тік бұрышты үшбұрыш салыңдар.

2.90. Катеті және гипотенузаға түсірілген биіктігі бойынша тік бұрышты үшбұрыш салыңдар.

C

2.91. Тік бұрышты үшбұрыштың периметрі 24 см, ал катеттерінің көбейтіндісі 48 см^2-ге тең. Үшбұрышқа сырттай және іштей сызылған шеңберлердің радиустарын табыңдар.

2.92. Катеттері 5 см, 12 см болатын тік бұрышты үшбұрышқа, онымен бір бұрышы ортақ болатындай етіп іштей квадрат сызылған. Квадраттың периметрін табыңдар.

2.93. Катеттері a, b, ал гипотенузасы c болатын тік бұрышты үшбұрыш үшін $b=\sqrt{ac}$ теңдігі орындалады.

Оның сүйір бұрыштарын анықтаңдар.

2.94. Тік бұрышты үшбұрыш катеттеріне түсірілген медианалар сәйкесінше $\sqrt{52}$ см және $\sqrt{73}$ см-ге тең. Оның гипотенузасын табыңдар.

2.95. Тік бұрышты үшбұрышқа іштей сызылған шеңбермен жанасу нүктесі гипотенузаны 2:3 қатынасында бөледі, ал оның центрі тік бұрыш төбесінен $\sqrt{8}$ см қашықтықта орналасқан. Үшбұрыш қабырғаларын табыңдар.

2.96. Тік бұрышының төбесінен түсірілген биіктігі мен биссектрисасы бойынша тік бұрышты үшбұрыш салыңдар.

Астана қаласындағы «Солтүстік шұғыла» тұрғын үй кешені.

3-бөлім. АУДАН

Бөлімді оқып-үйрену барысында келесі мақсатқа қол жеткіземіз:

– көпбұрыш ауданының анықтамасы мен қасиеттерін білу;

– тең шамалас және тең құрамдас фигуралардың анықтамаларын білу;

– параллелограммның, ромбының ауданы формулаларын қорытып шығару және қолдану;

– үшбұрыштың ауданы формулаларын қорытып шығару және қолдану;

– трапецияның ауданы формулаларын қорытып шығару және қолдану.

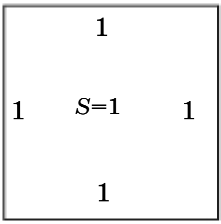
3.1. ТІКТӨРТБҰРЫШТЫҢ АУДАНЫ

3.1.1. Жазық фигуралардың ауданы ұғымы.

Кесінді ұзындығы	$\Rightarrow$	белгілі бір бірлік кесіндімен салыстырғандағы осы кесіндінің өлшемі.

Жазық фигура ауданы ұғымы да осы сияқты анықталады. Ауданды өлшеу эталоны ретінде қабырғасы 1-ге тең шаршы ауданы алынады. Мұндай шаршы ауданы 1-ге тең деп қабылданады. Аудан S әрпімен белгіленеді. Мысалы,

Эталондық кесінді	Эталондық шаршы ауданы
1мм	S=1мм^2
1см	S=1см^2
1м	S=1м^2
және т.с.с	



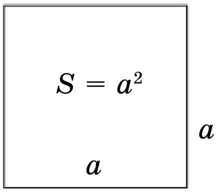
3.1-сурет

Сонымен,	фигура ауданы	$\Rightarrow$	белгілі бір эталондық шаршы ауданымен салыстырғандағы осы фигураның өлшемі

Қабырғасы a-ға тең шаршы ауданы оның қабырғасының квадратына тең:

$$S = a^2 .$$

Бұл тұжырымды дәлелдеусіз қабылдаймыз. Бұл формуланың толық дәлелдеуін келесі сайттан көруге болады: edu.glavshrav.ru/info/ploshad-kvadrata/

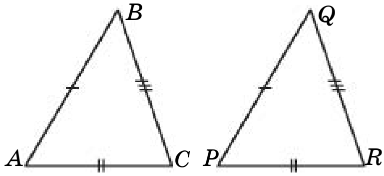


3.2-сурет

Сонымен қатар аудан ұғымының мынадай қасиеттері бар.

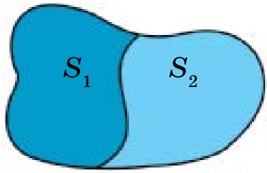
1. Тең фигуралардың аудандары да тең: 3.3-суретте

$\triangle ABC=\triangle PQR \Rightarrow S_{ABC}=S_{PQR}$.



3.3-сурет

2. Егер фигура қандай да бір сызықпен екі фигураға бөлінсе, онда берілген фигураның ауданы осы бөліктер аудандарының қосындысына тең, 3.4-суретте: $S = S_1 + S_2$.



$S = S_1 + S_2$

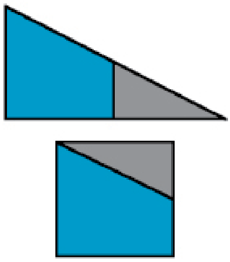
3.4-сурет

Осы екі қасиет пен «эталондық шаршы ауданы 1-ге тең» деген тұжырым бірігіп, аудан ұғымының аксиомаларын құрайды.

Аудандары бірдей фигуралар **тең шамалы** фигуралар деп аталады.

Бірдей бөліктерден құралған фигуралар **тең құрамды** деп аталады.

Мысалы, 3.5-суреттегі фигуралар, әрі тең шамалы, әрі тең құрамды.



3.5-сурет

Әрине, бұл аксиомалар аудан ұғымының көрнекілігінен шығатын қарапайым қасиеттер және олар фигура ауданын өлшеу процесін анықтайды. Осы аксиомалардан мынадай салдарлар шығады.

Салдар 1. *Егер бір фигура екінші фигураның бөлігі болса, онда бұл фигураның ауданы екінші фигураның ауданынан кем болады.*

Салдар 2. *Тең құрамды фигуралардың аудандары да тең болады.*

Бұған кері тұжырым орындала бермейді, яғни аудандары тең (тең шамалы) фигуралар тең құрамды бола бермейді. Мысалы, дөңгелек пен шаршының аудандары тең болуы мүмкін, ал бұл фигуралар тең құрамды бола алмайтындығы жоғары математика курсында дәлелденеді.

3.1.2. Тіктөртбұрыштың ауданы.

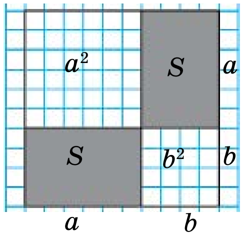
Теорема 1. *Қабырғалары a және b болатын тіктөртбұрыштың ауданы мына формуламен анықталады:*

$$S=ab. \qquad (1)$$

▲ Қабырғасы $(a+b)$-ға тең болатындай шаршы салып, оны 3.6-суретте көрсетілгендей етіп, 4 бөлікке бөлеміз. Екі шаршыға (аудандары a^2 және b^2 болатын) және қабырғалары

a мен b-ға тең екі тіктөртбұрышқа тұрғызылған шаршы ауданын екі жолмен анықтауға болады:

$$\left.\begin{array}{l}1)\ (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab; \\ 2)\ a^2 + b^2 + S + S = a^2 + b^2 + 2S\end{array}\right\} \Rightarrow S = ab \ \blacksquare$$



3.6-сурет

?

1. Фигураның ауданы деп нені түсінеміз?
2. Жазық фигуралардың ауданын қалай есептеуге болады?
3 Қабырғасы a-ға тең шаршы ауданы қалай анықталады?
4. Тең шамалы және тең құрамды фигуралар дегеніміз не? Олардың қандай айырмашылығы бар?
5. Фигураның ауданы ұғымының қандай аксиомаларын білесіңдер?
6. Тік төртбұрыштың ауданын қалай есептейді? Сәйкес теореманы тұжырымдап, дәлелдеңдер.

ПТ

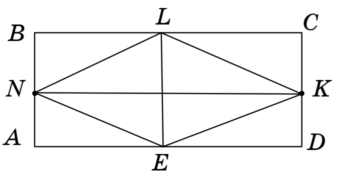
1. Парта бетінің ауданын анықтаңдар.
2. Сынып бөлмесінің ауданын есептеңдер. Егер 1 м^2 еденді сыр лау үшін 50 г сыр жұмсалатын болса, онда сынып еденін сырлап шығу үшін неше килограмм сыр қажет?
3. Бөлім басында Астана қаласындағы "Северное сияние" тұрғын үй кешені бейнеленген. Мұнда әрбір ғимараттардағы бір торкөз шаршысының қабырғасы 3,3 м деп алып: 1) алдыңғы бейнеленген 38 қабатты ғимараттың бүйір жақтары ауданын жуықтап есептеңдер; 2) оның биіктігін бағалап, оны нақты биіктігімен салыстырыңдар (АТҚ-ны қолданыңдар).

ЕСЕПТЕР

А

3.1. Қабырғалары a-ға және b-ға тең тік төртбұрыштың ауданын табыңдар: 1) a=3,4 см, b=5,5 см; 2) a=2 м, a=7 м; 3) $a=\dfrac{2}{3}$ дм, $b=\dfrac{3}{2}$ дм.

3.2. N, E, L және K нүктелері – $ABCD$ тік төртбұрышының сәйкес AB, AD, BC және CD қабырғаларының орталары: 1) ΔABD; 2) ΔABE; 3)$ABKD$; 4) $ABLKD$; 5) $ABLKE$; 6) $LKEN$; 7) ALD және BEC үшбұрыштарының қиылысуының ауданы $ABCD$ тік төртбұрышы ауданының қандай бөлігіне тең (3.7-сурет)?



3.7-сурет

3.3. Қабырғасы: 1) 1,2 см; 2) $\frac{3}{4}$ дм; 3) $3\sqrt{2}$ м болатын шаршының ауданын табыңдар.

3.4. Ауданы: 1)16 $см^2$; 2) 2,25 $дм^2$; 3) 12 $м^2$ болатын шаршының қабырғасын табыңдар.

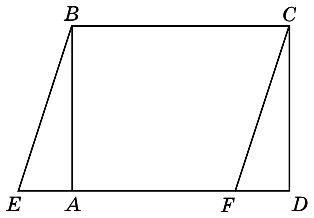
3.5. Ауданы: 16 $см^2$ шаршы берілген. Оның ауданын: 1) $мм^2$; 2) $дм^2$; 3) $м^2$ арқылы өрнектеңдер.

3.6. Тіктөртбұрыштың қабырғалары a және b, ал ауданы S арқылы белгіленген. Төмендегі мәліметтер бойынша белгісіз элементтерін анықтаңдар:

1) a=8,5 см, b=3,2 см; 2) $a=2\sqrt{2}$ м, b=3 м;
3) a=32 см, S=684,8 $см^2$; 4) a=4,5 м, S=12,15 $м^2$.

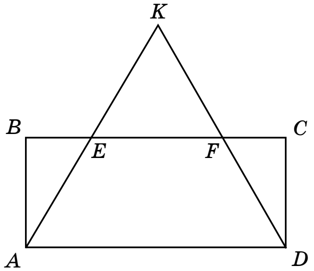
B

3.7. 3.8-суретте көрсетілген $ABCD$ тіктөртбұрышы мен $EBCF$ параллелограмы тең құрамды болатынын дәлелдеңдер. Мұнда $EA = FD$.



3.8-сурет

3.8. 3.9-суретте көрсетілген $ABCD$ тіктөртбұрышы мен AKD үшбұрышы тең құрамды болатынын дәлелдеңдер. Мұнда AE=EK.



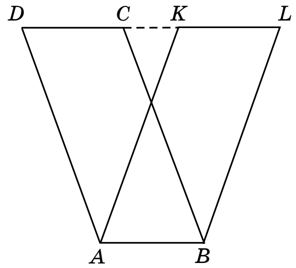
3.9-сурет

3.9. 3.10-суретте көрсетілген $ABCD$ және $AKLB$ параллелограмдары тең шамалы болатынын дәлелдеңдер.

3.10. Тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасына тұрғызылған шаршының ауданы оның катеттеріне тұрғызылған шаршылардың аудандарының қосындысына тең болатынын дәлелдеңдер.

3.11. Тіктөртбұрыштың: 1) қарама-қарсы қабырғаларының бір парын екі есе арттырса; 2) әрбір қабырғасын екі есе арттырса;

3) қарама-қарсы қабырғаларының бір жұбын екі есе арттырып, екінші жұбын екі есе кемітсе, ауданы қалай өзгереді?



3.10-сурет

3.12. Тіктөртбұрыштың: 1) ауданы: 250 см^2, ал бір қабырғасы екіншісінен 2,5 есе үлкен болса; 2) ауданы 9 м^2, ал периметрі 12 м болса, онда оның қабырғаларын табыңдар.

3.13. Қабырғаларының ұзындығы 5,5 м және 6 м болатын бөлмені өлшемі 30×5 см^2 болатын тіктөртбұрыш пішінді паркеттермен қаптау үшін неше паркет тақтайшалары қажет болады?

3.14. Екі жер алқабы ұзындықтары бірдей қоршаулармен қоршалған. Тіктөртбұрыш пішінді жер алқабының ені 60 м, ұзындығы 100 м, ал екіншісі шаршы пішінді. Осы жер алқаптарының қайсысының ауданы үлкен?

C

3.15. Шаршыны параллелограмм құрастыруға болатындай етіп, қалай үш бөлікке бөлуге болады?

3.16. Шаршыны ромб құрастыруға болатындай етіп, қалай үш бөлікке бөлуге болады?

3.17. Шаршыны тең шамалы екі бөлікке бөлетіндей етіп, қалай екінші шаршыны қиып алуға болады?

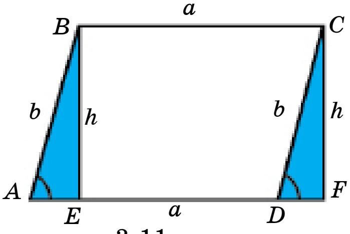
3.18. Ауданы берілген шаршының ауданынан екі есе артық шаршы салыңдар.

3.19. Барлық тең шамалы тіктөртбұрыштардың ішінде шаршының периметрі ең кіші болатынын дәлелдеңдер.

3.2. ПАРАЛЛЕЛОГРАМНЫҢ, ҮШБҰРЫШТЫҢ ЖӘНЕ ТРАПЕЦИЯНЫҢ АУДАНДАРЫ

3.2.1. Параллелограмның ауданы.

Параллелограмның ауданы оның табаны мен биіктігінің көбейтіндісіне тең (3.11-сурет):



3.11-сурет

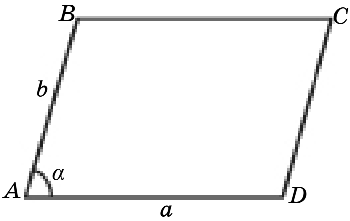
$$S=ah. \qquad (1)$$

▲$ABCD$ параллелограмында $AD=a$, $BE=h$, $BE \perp AD$ болсын. CF биіктігін жүргіземіз (3.11-сурет). $\triangle ABE=\triangle DCF$ (гипотенуза мен сүйір бұрыштары тең). Олай болса, $ABCD$ паралеллологрaмы мен $EBCF$ тіктөртбұрыштары тең құрамды, яғни $S_{ABCD}=S_{EBCF}$. $S_{EBCF}=BC\cdot BE=a\cdot h$. Осыдан $S_{ABCD}=ah$. Егер E нүктесі AD қабырғасынан тысқары орналасатын болса, онда формула осы сияқты дәлелденеді. Оны өз беттерінше дәлелдеп көріңдер. ■

Салдар 1. *Қабырғалары a-ға және b-ға тең, ал сүйір бұрышы α-ға тең параллелограмның ауданы*

$$S = a \cdot b \sin\alpha \qquad (2)$$

формуласымен есептеледі (3.12-сурет).



3.12-сурет

▲ Шынында да, (1) формула бойынша $S=ah$, ал ABE тік бұрышты үшбұрышынан $h = BE = AB\sin\alpha = b \cdot \sin\alpha$. Онда $S = a \cdot b\sin\alpha$ теңдігі орындалады. ■

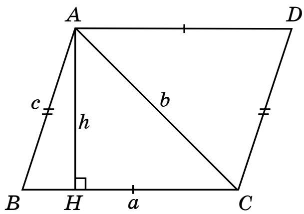
Параллелограмның ауданын есептеу формуласына сүйене отырып, ромбының ауданын $S=ah$ немесе $S=a^2 sin\alpha$ есептеуге болатынын байқауға болады.

3.2.2. Үшбұрыштың ауданы.

Үшбұрыштың ауданы оның табаны мен биіктігінің жарым көбейтіндісіне тең:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h. \qquad (3)$$

▲ ABC үшбұрышында $BC=a$, $AH=h$, $AH \perp BC$ болсын. Онда 3.13-суретте көрсетілгендей, ABC үшбұрышын $ABCD$ параллелограмына толықтырайық. $AD=BC$, $AB=CD$ және AC қабырғасы ортақ болғандықтан, үшбұрыштар теңдігінің үшінші белгісі бойынша $\Delta ABC = \Delta CDA$. Сонда $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{CDA} = 2 \cdot S_{ABC}$ Екінші жағынан, $S_{ABCD} = BC \cdot AH = a \cdot h$ болғандықтан, $S_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot h$. ■

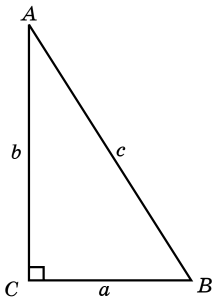


3.13-сурет

Салдар 2. *Тік бұрышты үшбұрыштың ауданы оның катеттерінің жарым көбейтіндісіне тең:*

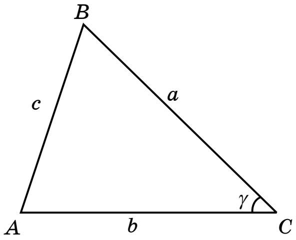
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot b. \qquad (4)$$

▲ (3) формуладан шығады. Өйткені, егер тік бұрышты үшбұрыштың бір катетін оның табаны ретінде алсақ, онда екінші катеті осы табанға түсірілген биіктік болады (3.14-сурет).



3.14-сурет

Салдар 3. *a-ға және b-ға тең қабырғаларының арасындағы бұрышы γ-ға тең үшбұрыштың ауданы*



3.15-сурет

$$S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\gamma \qquad (5)$$

формуласымен есептеледі.

▲ (3) формуланың дәлелдеуіне ұқсас және 1-салдарды ескеру керек (3.15-сурет). ■

Мысал 1: *ABC* үшбұрыштарында *AH* биіктігін *a, b* және *c* қабырлғалары арқылы өрнектеу керек (3.15–сурет).

▲ Егер $BH=x$, $AH=h$ деп алсақ, онда $CH=a-x$ және Пифагор теоремасы бойынша аламыз. Осыдан $h^2=c^2-x^2$ және $h^2=b^2-(a-x)^2=b^2-a^2+2ax-x^2$ теңдіктерін аламыз. Осыдан $b^2-a^2-c^2+2ax=0$, яғни $x=-\frac{b^2-a^2-c^2}{2a}$ теңдігі шығады. Онда $h=\frac{\sqrt{4a^2c^2-(b^2-a^2-c^2)^2}}{2a}$. ■

Салдар 4. (Герон формуласы). *Қабырғалары a-ға, b-ға және c-ға тең үшбұрыштың ауданы*

$$S=\sqrt{p(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)} \qquad (6)$$

формуласымен анықталады. Мұндағы $p=\frac{a+b+c}{2}$ *– үшбұрыштың жарты периметрі.*

(Герон – ежелгі грек ғалымы, б.з.б. І ғасыр).

▲ 1-мысал бойынша: $AH=\frac{1}{2a}\sqrt{4a^2c^2-\left(b^2-c^2-a^2\right)^2}$.

Онда екі өрнектің квадраттары айырмасының формуласы бойынша: $4a^2c^2-(b^2-c^2-a^2)^2=(2ac-b^2+a^2+c^2)\cdot(2ac+b^2-a^2-c^2)=$

$=\left[(a+c)^2-b^2\right]\cdot\left[b^2-(a-c)^2\right]=(a+b+c)\cdot(a+c-b)\cdot(b+c-a)\cdot(b+a-c)=$ $=(a+b+c)\ (a+b+c-2a)\ (a+b+c-2b)\ (a+b+c-2c)=2p\ (2p-2a)\ (2p-2b)\ (2p-2c)=16p\ (p-a)\ (p-b)\ (p-c)$.

Осыдан және (3) формула бойынша:

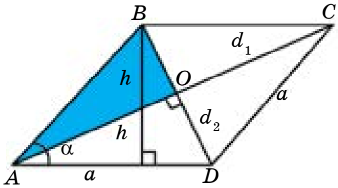
$$S=\frac{1}{2}BC \bullet AH=\frac{1}{2}a \bullet \frac{1}{2a}\sqrt{16p(p-a)(p-b)(p-c)}=$$

$=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Формула дәлелденді. ■

Ескерту 2. Герон формуласын Пифагор теоремасын және косинустар теоремасын қолданып дәлелдеуге болады. (Оны өз беттеріңше қарастырыңдар.)

3.2.3 Ромб ауданы.

Ромб параллелограмның дербес жағдайы. Сондықтан, ромб ауданы (1) және (2) формулалар көмегімен анықтауға болады. Мұнда $AB=AD=a$ болғандықтан (2) формула былай жазылады



$$S = a^2 \cdot \sin\alpha \qquad (7)$$

Ромб диагональдары өзара перпендукуляр болғандықтан, ромб өзінің диагональдарымен бірдей 4 тік бұрышты үшбұрыштарға бөлінеді (3.16-сурет). Егер $AC=d$, $BD=d_2$ болса, онда $AO = \frac{d_1}{2}, BO = \frac{d_2}{2}$ болады. Сондықтан (4) формула бойынша

$$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} AO \cdot BO = \frac{1}{8} d_1 d_2 .$$

Олай болса $S_{ABCD} = 4 \cdot S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} d_1 d_2$, яғни ромб ауданы диагональдарының жарым көбейтіндісіне тең:

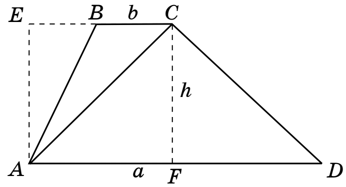
$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \qquad (8)$$

3.2.3. Трапецияның ауданы.

Трапецияның ауданы оның табандарының жарым қосындысы мен биіктігінің көбейтіндісіне тең:

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h . \qquad (9)$$

▲ $ABCD$ трапециясының табандары $AD=a$, $BC=b$ және биіктіктері $AE=CF=h$ болсын (3.17-сурет). AC диагоналы трапецияны екі үшбұрышқа бөледі: ΔABC және ΔACD. Онда $S_{\text{тр}}=S_{ABC}+S_{ACD}$. (3) формула бойынша:

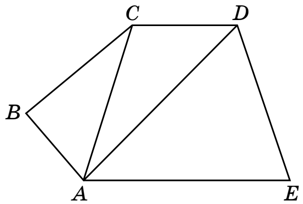


3.17-сурет

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}BC\cdot AE = \frac{1}{2}h\cdot b \text{ және } S_{ACD} = \frac{1}{2}AD\cdot CF = \frac{1}{2}a\cdot h.$$

Сонда $S_{\text{тр}} = \frac{1}{2}a\cdot h + \frac{1}{2}b\cdot h = \frac{a+b}{2}\cdot h.$ Формула дәлелденді. ■

Ескерту 3. Осы сияқты кез келген көпбұрыштың ауданын оны бірнеше үшбұрыштарға бөлу арқылы анықтайды. Мысалы, 3.18-суретте бейнеленген бесбұрыштың ауданы үш үшбұрыштың аудандарының қосындысына тең болады. Әрине, кез келген көпбұрышты көптеген тәсілдермен үшбұрыштарға бөлуге болады. Сондықтан көпбұрыштың ауданын есептеу үшін оны қолайлы тәсілмен үшбұрыштарға бөлуге тырысады.



3.18-сурет

Т Ежелден-ақ адамзат түрлі қарапайым фигуралардың аудандарын есептей білген. Мәселен, біздің заманымыздан бұрынғы 2000 жылдары мысырлықтар тең қабырғалы үшбұрыштың ауданын есептеу үшін жуықтау формуласын қолданған. Ал Герон формуласы б. з. I ғасырында өмір сүрген александриялық Геронның «Математика» атты кітабында кездеседі. Жалпы, үш қабырғасы бойынша үшбұрыштың ауданын есептеуді тұңғыш рет Архимед ойлап тапқан (б. з. б. III ғ.).

?

1. Параллелограмның ауданы қандай формуламен анықталады?
2. Үшбұрыштың ауданын анықтайтын формулаларды жазыңдар.
3. Трапецияның ауданын қандай формуламен анықтауға болады?
4. Трапецияның, үшбұрыштың және параллелограмның аудандарын қандай ортақ формуламен есептеуге болады?
5. Герон формуласын жазып, оны дәлелдеңдер.

ЕСЕПТЕР

А

3.20. S – параллелограмның ауданы, a – табаны, h – табанына түсірілген биіктігі деп алып, кестені толтырыңдар:

a	7		$2\sqrt{2}$	6		$\sqrt{3}$	
h	8	2		$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{7}$		7
S		12	8		4	$2\sqrt{6}$	$4\sqrt{7}$

3.21. S – үшбұрыштың ауданы, a – табаны, h – табанына түсірілген биіктігі деп алып, кестені толтырыңдар:

a	3		3	$\sqrt{3}$		$\sqrt{2}$
h	2	2			$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$
S		4	6	3	2	

3.22. S – трапецияның ауданы, a және b – табандары, h – биіктігі деп алып, кестені толтырыңдар:

a	4	5	7		$2\sqrt{2}$		4	
b	2	3		2	$\sqrt{2}$	1		3
h	3		5	3	$\frac{2}{3}$	2	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$
S		24	25	21		7	$8\sqrt{2}$	27

3.23. Қабырғасы $\sqrt{3}$ см ромбының сүйір бұрышы 60°. Ромбының ауданын табыңдар.

3.24. Катеттері: 1) 3 см және 4 см; 2) 1,2 м және 3 м болатын тік бұрышты үшбұрыштың ауданын табыңдар.

3.25. a және b қабырғалары мен олардың арасындағы α бұрышы бойынша үшбұрыштың ауданын табыңдар:

1) $a=2$ см, $b=3$ см, $\alpha=30°$; 2) $a = 2\sqrt{2dm}$, $b = 5\sqrt{dm}$, $\alpha=45°$; 3) $a=2$ м, $b=\sqrt{3}$ м, $\alpha=90°$; 4) $a=0,4$ см, $b=0,8$ см, $\alpha=60°$.

3.26. Үш қабырғасы бойынша үшбұрыштың ауданын табыңдар:

1) 2 см; 3 см; 4 см; 2) 2,5 см; 1 см; 2 см; 3) 5 м; 7 м; 9 м; 4) 5 дм; 5 дм; 6 дм.

B

3.27. Көршілес қабырғалары 2 см және 5 см болатын параллелограмның ауданы 5 $см^2$. Параллелограмның сүйір бұрышы мен биіктігін анықтаңдар.

3.28. Параллелограмның ұзындығы 13 см-ге тең диагоналы оның ұзындығы 12 см-ге тең қабырғасына перпендикуляр. Параллелограмның ауданын табыңдар.

3.29. Параллелограмм мен тік төртбұрыштың қабырғаларының ұзындықтары бірдей. Егер тік төртбұрыштың ауданы параллелограмның ауданынан екі есе үлкен болса, онда параллелограмның сүйір бұрышын анықтаңдар.

3.30. Ромбының қабырғасы 10 см, ал бір диагоналі 12 см. Ромбының екінші диагоналі мен биіктігін табыңдар.

3.31. Диагональдары: 1) 3,2 см-ге және 14 см-ге; 2) 4,6 м-ге және 2 м-ге тең ромбының ауданын табыңдар.

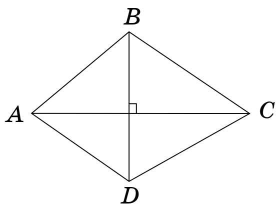
3.32. Ромб диагональдарының бірі екіншісінен 1,5 есе үлкен, ал оның ауданы 27 $см^2$. Ромбының диагональдарын табыңдар.

3.33. ABC үшбұрышында: $AB=16$ см, $BC=22$ см, ал C төбесінен түсірілген биіктігі 11 см. Үшбұрыштың BC қабырғасына түсірілген биіктігін табыңдар.

3.34. Қабырғасы a-ға тең тең қабырғалы үшбұрыштың ауданын табыңдар.

3.35. Үшбұрыштың a-ға тең қабырғасына іргелес жатқан бұрыштары α және β. Үшбұрыштың ауданын табыңдар.

3.36. Диагональдары перпендикуляр дөңес төртбұрыштың ауданы оның диагональдарының жарым көбейтіндісіне тең болатынын дәлелдеңдер (3.19-сурет).

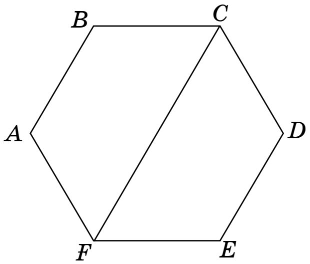


3.19-сурет

3.37. Трапецияның параллель қабырғалары 60 см және 20 см, ал бүйір қабырғалары – 13 см, 37 см. Трапецияның ауданын табыңдар.

3.38. Көршілес екі кіші қабырғалары 6 см-ден, ал үлкен бұрышы 135° болатын тік бұрышты трапецияның ауданын табыңдар.

3.39. Берілген тең бүйірлі трапециямен тең құрамды: 1) параллелограмм; 2) тік төртбұрыш салыңдар.

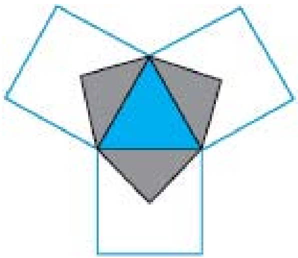


3.20-сурет

3.40. Тең қабырғалы *ABCDEF* алтыбұрышы ортақ табандары *CF* болатын екі трапециядан құралған. Егер AC=13 см, AE=10 см болса, алтыбұрыштың ауданын табыңдар (3.20-сурет).

3.41. Қабырғасы a-ға тең дұрыс үшбұрышқа іштей сызылған квадраттың ауданын табыңдар.

3.42. Катеттерінің қосындысы l, ал тік бұрышынан түсірілген биіктігі h болатын тік бұрышты үшбұрыштың ауданын табыңдар.


3.21-сурет

3.43. Тең қабырғалы үшбұрыштың қабырғаларына үшбұрыштан тысқары шаршылар салынған. Шаршылардың центрлерін үшбұрыштың сәйкес қабырғаларының ұштарымен қосқанда шығатын алтыбұрыштың ауданын табыңдар. Үшбұрыштың қабырғасы a-ға тең (3.21-сурет).

3.44. Қабырғасы a-ға тең шаршының бұрыштары дұрыс сегізбұрыш шығатындай етіп қиылған. Осы сегізбұрыштың ауданын табыңдар.

3.45. Тең бүйірлі трапецияның табандары 24 см және 40 см, ал диагональдары өзара перпендикуляр. Трапецияның ауданын табыңдар.

3.46. Ауданы 594 м^2 болатын трапецияның биіктігі 22 м, ал табандарының айырмасы 6 м. Трапецияның табандарын табыңдар.

3.47. Радиусы R-ге тең шеңберге ауданы S-ке тең тең бүйірлі трапеция сырттай сызылған. Трапецияның табандарын табыңдар.

3.48. *ABCD* параллелограмының *AC* диагоналынан алынған нүкте арқылы оның қабырғаларына параллель түзулер параллелограмды төрт параллелограмға бөледі. Олардың екеуінің диагональдары *AC* диагоналында жатады. Басқа екі параллелограмның өзара тең шамалы болатынын дәлелдеңдер.

3.49. Әрбір трапецияда оның диагональдарымен және параллель емес екі қабырғасымен шектелген екі үшбұрыш өзара тең шамалы болатынын дәлелдеңдер.

C

3.50. Герон формуласын Пифагор теоремасын қолданып дәлелдеңдер.

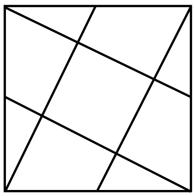
3.51. Қабырғасы a-ға тең квадраттың екі көршілес қабырғаларының орталары бір-бірімен және қарама-қарсы төбесімен қосылған. Пайда болған үшбұрыштың ауданын табыңдар.

3.52. Бір қабырғасы тең бүйірлі үшбұрыштың табанында жататындай етіп, осы үшбұрышқа іштей шаршы сызылған. Егер шаршы мен үшбұрыштың ауырлық центрлері беттесетін болса, осы үшбұрыштың ауданын табыңдар. Мұнда шаршының ауданы 16 см^2.

3.53. Тең бүйірлі үшбұрыштың ауданы осы үшбұрыштың табанын қабырғасы етіп тұрғызылған шаршы ауданының $\frac{1}{3}$ бөлігіне тең және үшбұрыштың бүйір қабырғалары оның табанынан 1 см қысқа. Үшбұрыштың қабырғалары мен табанына түсірілген биіктігін табыңдар.

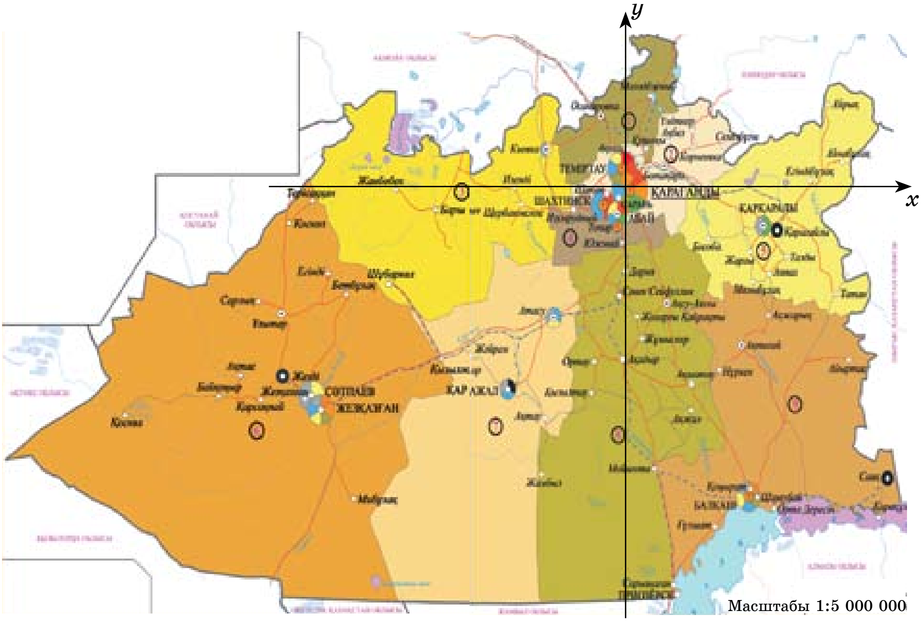
3.54. Табаны b, ал бүйір қабырғасына түсірілген биіктігі h болатын тең бүйірлі үшбұрыштың ауданын табыңдар.

3.55. 3.22-суретте көрсетілгендей, квадраттың әрбір төбесі белгілі бір бағытта оның бір қабырғасының ортасымен қосылған. Осыдан шығатын кішкене шаршының ауданы берілген шаршының ауданының $\frac{1}{5}$ бөлігіне тең болатынын дәлелдеңдер.


3.22-сурет

3.56. Әрбір тең бүйірлі үшбұрыштың ауданы оның бір бүйір қабырғасы мен келесі бүйір қабырғасының ортасынан осы бүйір қабырғасына түсірілген перпендикулярдың көбейтіндісіне тең болатынын дәлелдеңдер.

Қарағанды облысы — Қазақстанның орталық бөлігіндегі облыс, Солтүстік Мұзды мұхиты және Үнді, Атлант және Тынық мұхиттарынан бірдей қашықтықта, Еуразия континентінің орталығында орналасқан. Облыс аумағы жаңа шекарада 428 мың шаршы метрді алып жатыр. Облыста Қазақстанда тұратын барлық халықтың оннан бір бөлігі тұрады және 113-тен аса ұлт өкілдері өмір сүреді. Қарғанды облысы — минералдар мен шикізатқа бай, аумағы мен өнеркәсіптік әулеті бойынша бұл еңірі облыс болып табылады. Бұл ірі индустриалды орталық.



4-бөлім. ЖАЗЫҚТЫҚТАҒЫ ТІК БҰРЫШТЫ КООРДИНАТАЛАР ЖҮЙЕСІ

Бөлімді оқып-үйрену барысында келесі мақсаттарға қол жеткіземіз:

– жазықтықта координаталарымен берілген екі нүктенің арақашықтығын есептеу;

– кесінді ортасының координаталарын табу;

– кесіндіні берілген қатынаста бөлетін нүктенің координаталарын табу;

– центрі (a, b), радиусы r болатын шеңбердің теңдеуін $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ білу;

– берілген теңдеуі бойынша шеңбер салу;

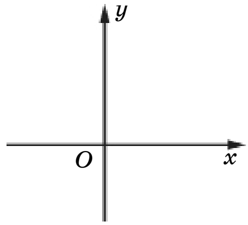
– түзудің жалпы теңдеуін және берілген екі нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуін жазу: $ax+by+c=0$, $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

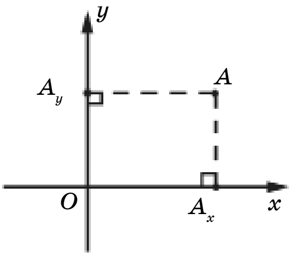
– координаталармен берілген қарапайым есептерді шығару.

4.1. НҮКТЕНІҢ КООРДИНАТАЛАРЫ. ЕКІ НҮКТЕНІҢ АРАҚАШЫҚТЫҒЫ.

4.1.1. Тік бұрышты координаталар жүйесі.

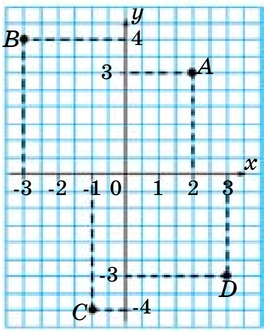
Тік бұрышты декарттық координаталар жүйесімен сендер төменгі сыныптардан таныссыңдар.

Ox және Oy сан өстерін O нүктесінде қиылысатындай етіп, бір-біріне перпендикуляр орналастырамыз. Осылай Oxy тік бұрышты декарттық *координаталар жүйесі* салынады (4.1-сурет). Мұнда, *Ox абсциссалар өсі*, *Oy ординаталар өсі* деп, ал O нүктесі *координаталар бас нүктесі* деп аталады.	 4.1-сурет



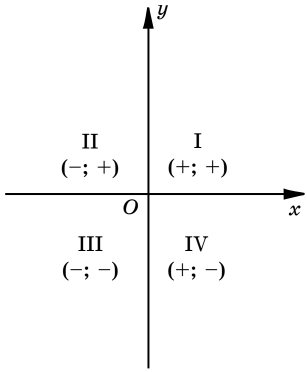
4.2-сурет

Жазықтықтағы A нүктесінен Ox және Oy өстеріне түсірілген перпендикуляр табандарын, сәйкесінше, A_x және A_y арқылы белгілейік. A_x нүктесіне Ox өсінен x саны, ал A_y нүктесіне Oy өсінен y саны сәйкес келсін. Онда $(x;y)$ қос саны A нүктесінің O_{xy} тік бұрышты координаталар жүйесіндегі *координатасы* деп аталады және оны былай жазады: $A\ (x;y)$ (4.2-сурет). Мысалы, 4.3-суретте $A\ (2;3)$, $B\ (-3;4)$, $C\ (-1;-4)$, $D\ (3;-3)$ нүктелері бейнеленген.



4.3-сурет

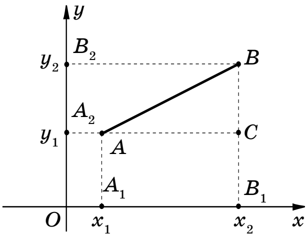
Координаталар өстері жазықтықты төрт бөлікке бөледі және бұл бөліктер, сәйкесінше, I,II,III, IV *координаталық ширектер* деп аталады. 4.4-суретте осы аталған координаталық ширектер мен оларда орналасқан нүктелер координаталарының таңбалары көрсетілген.



4.4-сурет

Бұл координаталар жүйесін тұңғыш рет қолданған француз ғалымы Рене Декарт (1596–1650) болғандықтан, оны ***декарттық координаталар жүйесі*** деп атайды.

4.1.2. Екі нүктенің арақашықтығы. Декарттық координаталар жүйесінде $A\ (x_1;\ y_1)$ және $B\ (x_2;\ y_2)$ нүктелері берілсін. Осы A және B нүктелерінің арақашықтығын табу керек.



4.5-сурет

Ол үшін A және B нүктелері арқылы координаталар өстеріне параллель түзулер жүргізейік (4.5-сурет). Сонда ABC тік бұрышты үшбұрышын аламыз. Ал $A_1\ (x_1;0)$, $B_1(x_2;\ 0)$, $A_2\ (0;\ y_1)$, $B_2(0;\ y_2)$ болғандықтан, A_1 және B_1 нүктелерінің арақашықтығы $|x_2-x_1|$-ге тең, ал A_2 және B_2 нүктелерінің арақашықтығы $|y_2-y_1|$-ге тең. Екінші жағынан, $A_1B_1=AC$, $A_2B_2=BC$ болғандықтан, $AC=|x_2-x_1|$, $BC=|y_2-y_1|$. Пифагор теоремасы бойынша $AB^2=$ $=AC^2+BC^2$, немесе $AB^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$ теңдігін аламыз. Осыдан

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \qquad (1)$$

формуласы шығады. Сонымен $A(x_1;\ y_1)$ және $B(x_2;\ y_2)$ нүктелерінің арақашықтығы (1) формуламен есептеледі.

4.1.3. Кесіндіні берілген қатынаста бөлу. Кесінді ортасының координаталары.

Анықтама. *Егер C нүктесі AB кесіндісінде жатса, және*

$$\frac{AC}{CB}=\lambda, \qquad (2)$$

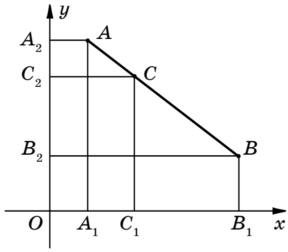
теңдігі орындалса, онда C нүктесі AB кесіндісін λ ***қатынасында бөледі*** *деп айтамыз.*

Мұнда, егер $\lambda=1$ болса, онда $AC=CB$ теңдігі шығады, яғни C нүктесі AB кесіндісінің ортасы болады.

$A(x_1;\ y_1)$ және $B(x_2;\ y_2)$ нүктелері берілсін. Енді осы AB кесіндісін λ қатынасында бөлетін C нүктесінің координаталарын анықтайық.

Ол үшін A, B және C нүктелері арқылы координаталар өстеріне параллель түзулер жүргізіп, олардың Ox және Oy өстерімен қиылысу нүктелерін сәйкес A_1, B_1,C_1 және A_2, B_2,

C_2 арқылы белгілейік (4.6-сурет). C нүктесінің белгісіз координаталарын (x, y) арқылы белгілейік. Онда $A_1(x_1; 0)$, $B_1(x_2; 0)$, $C_1(x; 0)$ және $A_2(0; y_1)$, $B_2(0; y_2)$, $C_2(0; y)$. Сонымен, біздің мақсатымыз: белгісіз x пен y-ті x_1, x_2, y_1 және y_2 арқылы өрнектеу.



4.6-сурет

AB түзуі мен Ox өсін AA_1, CC_1 және BB_1 параллель түзулері қиып өтеді. Онда пропорционал кесінділердің қасиеті бойынша: $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$ немесе $\frac{AC}{BC} = \frac{A_1C_1}{B_1C_1}$. Ал C нүктесі AB кесіндісін λ қатынасында бөлетін болғандықтан, $\frac{AC}{BC} = \lambda$, яғни $\frac{A_1C_1}{B_1C_1} = \lambda$ болады. Екіншіден, $A_1C_1 = x - x_1$, $B_1C_1 = x_2 - x$ болғандықтан, $\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda$ теңдігінен $x - x_1 = \lambda(x_2 - x)$ немесе $(1+\lambda)x = x_1 + \lambda x_2$ теңдіктерін аламыз. Осыдан $x = \frac{x_1 + \lambda \cdot x_2}{1+\lambda}$ формуласы шығады. Осы сияқты $\frac{AC}{BC} = \frac{A_2C_2}{B_2C_2}$ теңдігінен $y = \frac{y_1 + \lambda \cdot y_2}{1+\lambda}$ формуласын аламыз. Сонымен AB кесіндісін λ қатынасында бөлетін C $(x; y)$ нүктесінің координаталарын мына формулалар бойынша анықтаймыз:

$$x = \frac{x_1 + \lambda \cdot x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda \cdot y_2}{1+\lambda}. \qquad (3)$$

Егер $\lambda = 1$ болса, онда C нүктесі AB кесіндісінің ортасы болады. Олай болса, (3) формуладан кесіндінің ортасы болатын нүктенің координаталары мына формула бойынша табылады:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \qquad (4)$$

1-мысал. ABC үшбұрышының төбелері берілген: $A(0; 6)$, $B(4; -2)$, $C(3; 8)$.

1. Үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің центрі мен радиусын табыңдар.

2. Үшбұрыш медианаларының қиылысу нүктесін табыңдар.

▲ **Шешуі. 1.** ABC үшбұрышына сырттай сызылған шеңбердің центрін $S(x;\ y)$ деп белгілесек, онда бұл шеңбердің радиусы $R=SA=SB=SC$ теңдігін қанағаттандырады.

Онда $SC = \sqrt{(x-3)^2 + (y-8)^2}$,

$$SC = \sqrt{(x-3)^2 + (y-8)^2}$$

болғандықтан, $SA^2=SB^2$ және $SA^2=SC^2$ теңдіктерін ескере отырып,

$$\begin{cases} x^2 + (y-6)^2 = (x-4)^2 + (y+2)^2, \\ x^2 + (y-6)^2 = (x-3)^2 + (y-8)^2 \end{cases}$$

теңдеулер жүйесін аламыз. Бұл теңдеулердегі жақшаларды ашамыз және ұқсас мүшелерін топтап жазып, сызықтық теңдеулер жүйесіне келтіреміз:

$$\begin{cases} 6x + 4y = 37, \\ 8x - 8y = -16 \end{cases} \text{ немесе } \begin{cases} 6x + 4y = 37, \\ x - y = -2. \end{cases}$$

Бұл теңдеулер жүйесінің шешімі $x=2,9$; $y=4,9$. Онда ABC үшбұрышына сырттай сызылған шеңбердің центрі $S(2,9;\ 4,9)$. Ал $R=SA$ теңдігінен шеңбердің радиусын анықтаймыз:

$$R = \sqrt{2,9^2 + (4,9-6)^2} = \sqrt{8,41+1,21} = \sqrt{9,62}.$$

Жауабы: (2,9; 4,9) және $R = \sqrt{9,62}$. ■

▲ **Шешуі. 2.** Үшбұрыштың медианалары қиылысу нүктесінде төбесінен бастап, 2:1 қатынасында бөлінеді. Айталық, ABC үшбұрышының медианалары $E\ (x_1;\ y_1)$ нүктесінде қиылыссын және оның C төбесінен жүргізілген медианасы CD болса, онда $D\ (x_2;\ y_2)$ болсын. Медианалардың қасиеті бойынша $\frac{CE}{ED} = 2$ болады. Ал D нүктесі AB қабырғасының ортасы болғандықтан, (4) формула бойынша $x_2 = \frac{0+4}{2} = 2$; $y_2 = \frac{6-2}{2} = 2$, Яғни D (2; 2). Енді $\lambda = 2$ болғандықтан, (3) формула бойынша $x_1 = \frac{3+2\cdot 2}{1+2} = \frac{7}{3}$; $y_1 = \frac{8+2\cdot 2}{1+2} = 4$ болады, яғни $E\left(\frac{7}{3};4\right)$. *Жауабы*: $E\left(\frac{7}{3};4\right)$. ■

Т Координаталар жүйесін тұңғыш рет қолданған француз ғалымы Рене Декарт (1596–1650) болғандықтан, оны декарттық координаталар жүйесі деп атайды. Аналитикалық геометрияның негізін қалаушылар қатарында француз математигі Пьер Ферма (1601–1665) да болған. Ол Тулуз қаласында құқықтық қызметкер болған. Математикамен қызметтен бос уақытында ғана шұғылданған және бірде-бір еңбегін баспаға бермеген. Ол сандар теориясы, геометрия, шексіз аз шамалар анализі мен оптика салалары бойынша қомақты нәтижелер алған. Бұл еңбектері жайында Ферма замандастарына жазған хаттарында, түрлі пікір таластарда жариялаған. Оның көптеген еңбектері өзі қайтыс болған соң 1679 жылы жарық көрген.

Рене Декарт (1596–1650)

Пьер Ферма (1601–1665)

? 1. Тік бұрышты декарттық координаталар жүйесі қалай құрылады?
2. Координаталық ширектердегі нүктелер координаталарының таңбалары қандай?
3. а) Ox өсіндегі; ә) Oy өсіндегі нүктелер координаталарының жалпы түрі қандай?
4. Екі нүктенің арақашықтығының формуласын жазыңдар.
5. Кесіндіні берілген қатынаста бөлу формуласын жазыңдар.
6. Кесіндінің ортасын қандай формула бойынша анықтайды?

ПТ Қарағанды облысы картасында тік бұрышты координаталар жүйесін 102-беттегі суретте көрсетілгендей етіп алыңдар. Көрсетілген масштабпен Жезқазған, Балқаш және Теміртау қалалары координаталарын жуықтап (км есебімен) анықтаңдар. Сынып бойынша алынған нәтижелердің орта мәнін табыңдар. Қорытынды жасаңдар.

ЕСЕПТЕР

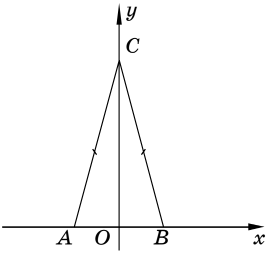
А

4.1. Декарттық координаталар жүйесін алып: $A(2;\ 1)$; $B\left(\frac{1}{2}; 1\right)$; $C\ (1;\ -4)$; $D\ (0;\ 1)$; $E\ (-3;\ 2)$; $F\ (-3;\ 3)$ нүктелерін салыңдар.

4.2. A және B нүктелері сәйкес Ox және Oy өстерінің оң жақ бөліктерінде орналасқан; 1) $OA=5$; $OB=3$; 2) $OA=a$; $OB=b$ деп алып, ABO үшбұрышының төбелерінің координаталарын табыңдар.

4.3. Тік бұрышты үшбұрыштың катеттері Ox және Oy өстерінде жатыр және олардың ұзындықтары сәйкесінше a-ға және b-ға тең. Егер үшбұрыш: 1) бірінші ширекте; 2) екінші ширекте; 3) үшінші ширекте; 4) төртінші ширекте жатса, онда оның төбелерінің координаталары қандай болады?

4.4. Координаталар бас нүктесі қабырғасының ұзындығы $2a$-ға тең болатын квадраттың центрінде орналасқан. Егер: 1) квадраттың қабырғалары координаталар өстеріне параллель болса;



4.7-сурет

2) квадраттың диагональдары координаталар өстерінің бойларында жатса, онда квадрат төбелерінің координаталары қандай?

4.5. 4.7-суреттегі тең бүйірлі ABC үшбұрышында $AB=2a$, $OC=h$ болса, онда үшбұрыштың төбелерінің координаталары неге тең?

4.6. (–3; 4) нүктесінен: 1) Ox өсіне; 2) Oy өсіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

4.7. A (2; 3), B (–1; 2) деп алып, AB кесіндісін: 1) $\lambda = 1$; 2) $\lambda = \frac{1}{2}$; 3) $\lambda = 2$; 4) $\lambda = \frac{2}{3}$ қатынасында бөлетін нүктенің координаталарын табыңдар.

4.8. 1) A (2; –1), B (1; 2); 2) A (1; 5), B (1; 1); 3) A (–3; 1), B (1; –2); 4) A (–1; 2), B (3; 0) деп алып, A және B нүктелерінің арақашықтығын табыңдар.

4.9. 1) A (0; 1), B(1; –4), C(5; 2); 2) A(–4; 1), B(–2; 4), C(0; 1) деп алып, ABC үшбұрышының тең бүйірлі екенін дәлелдеңдер.

4.10. Центрі (2; –3) нүктесінде болатын және (–2; 1) нүктесі арқылы өтетін шеңбердің радиусын табыңдар.

4.11. Төмендегі кестені дәптерлеріңе сызып, AB кесіндісінің ортасы – C нүктесінің координаталарын есептейтін формуланы қолдана отырып, кестенің бос көздерін толтырыңдар:

A	(2; –3)		(0;1)	(0;0)	(c;d)	(3;5)	(3t+5;7)
B	(–3; 1)	(4;7)		(–3;7)		(3;8)	(t+7;–7)
C		(–3; –2)	(3;–5)		(a;b)		

4.12. $ABCD$ параллелограмының екі іргелес төбелері A (−4; 4), B (2; 8) және диагональдарының қиылысу нүктесі E (2; 2) берілген. Оның C және D төбелерінің координаталарын табыңдар.

B

4.13. $A(0;0)$, $B(5;0)$, $C(12;3)$ деп алып, $ABCD$ параллелограмының D төбесінің координаталарын табыңдар.

▲ **Нұсқау:** D $(x;y)$ деп алып, $AB=CD$ және $AD=BC$ теңдіктерін қолданыңдар. ■

4.14. A (−1; 2), B (2; 5), C (2; 1), D (−1; −2) деп алып, $ABCD$ төртбұрышы параллелограмм болатынын дәлелдеңдер.

4.15. $A_1A_2=A_2A_3=A_3A_4=A_4A_5=A_5A_6$ шартын қанағаттандыратын және бір түзудің бойында орналасқан A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 нүктелері берілген. Егер A_2 (5; 5) және A_5 (−1; 7) болса, онда қалған нүктелердің координаталарын табыңдар.

4.16. Төбелері A (2;1), B (3;4), C (1;6) нүктелерінде орналасқан үшбұрыштың медианаларының қиылысу нүктесінің координаталарын табыңдар.

4.17. A (4; 0), B (12; −2), C (5; −9) деп алып, ABC үшбұрышының: 1) периметрін; 2) AN медианасының ұзындығын; 3) сырттай сызылған шеңбердің радиусы мен центрінің координаталарын табыңдар.

4.18. Төбелері: 1) A (0; 1), B (1; −4), C (5; x); 2) A (−4; 1), B (−2; 4), C (0; x) нүктелері болатын ABC үшбұрышының тең бүйірлі екені белгілі болса, x-ті табыңдар.

4.19. Ординаталар өсінен: 1) A (−3; 5) және B (6; 4); 2) C (1; 1) және D (8; 1) нүктелерінен бірдей қашықтықта жататын нүктені табыңдар.

4.20. Абсциссалар өсінен: 1) A (1; 2) және B (−3; 4); 2) C (4; −3) және D (3; 5) нүктелерінен бірдей қашықтықта жататын нүктені табыңдар.

4.21. 1) A (−3; −1), B (1; −1), C (1; −3), D (−3; −3); 2) A (4; 1), B (3; 5), C (−1; 4), D (0; 0) деп алып, $ABCD$ төртбұрышының тік төртбұрыш болатынын дәлелдеңдер.

4.22. Пифагор теоремасына кері теорема бойынша төбелері A (1; 1), B (3; 5), C (9; 2) нүктелерінде орналасқан үшбұрыштың тік бұрышты екенін дәлелдеңдер. Оның тік бұрышын көрсетіңдер.

C

4.23. Үшбұрыш қабырғаларының орталары (5; 2), (2; −3), (2; 1) нүктелерінде орналасады деп алып, осы үшбұрыштың төбелерінің координаталарын табыңдар.

4.24. Төбелері $A\ (x_1;\ y_1)$, $B\ (x_2;\ y_2)$, $C\ (x_3;\ y_3)$ нүктелерінде орналасқан үшбұрыштың медианаларының қиылысу нүктесінің координаталары

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

формулаларымен анықталатынын дәлелдеңдер. Осы формуланы қолдана отырып, төбелері: 1) $A\ (-3;\ -1)$, $B\ (1;\ 4)$, $C\ (1;\ 1)$; 2) $A\ (-2;\ 3)$, $B\ (5;\ -2)$, $C\ (-3;\ -1)$ нүктелерінде орналасқан үшбұрыштың мединаларының қиылысу нүктесінің координаталарын табыңдар.

4.25. $ABCD$ төртбұрышы берілген: $A\ (-1;\ 7)$, $B\ (5;\ 5)$; $C\ (7;\ -5)$, $D\ (3;\ -7)$. 1) AB және CD, AD және BC қабырғаларының орталарын қосатын кесінділер қиылысу нүктесінде қақ бөлінетінін; 2) төбелері берілген төртбұрыштың қабырғаларының орталарында орналасқан төртбұрыш параллелограмм болатынын дәлелдеңдер.

4.26. Ox өсін $A\ (-6;\ 0)$ нүктесінде жанайтын және $B\ (-10;\ 4)$ нүктесі арқылы өтетін шеңбердің центрі мен радиусын табыңдар.

4.27. $A\ (-2;\ 1)$ нүктесі арқылы өтетін және координаталар өстерін жанайтын шеңбердің центрі мен радиусын анықтаңдар.

4.28. Тік бұрышты үшбұрыштың гипотенузасының ортасы оның төбелерінен бірдей қашықтықта жататынын дәлелдеңдер.

4.29. Параллелограмның барлық қабырғаларының квадраттарының қосындысы оның диагональдарының квадраттарының қосындысына тең болатынын дәлелдеңдер.

4.30. Тең бүйірлі үшбұрыштың табанына жүргізілген медиана 160 см, ал табаны 80 см. Осы үшбұрыштың қалған екі медианасын табыңдар.

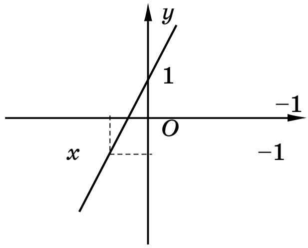
4.31. Үшбұрыштың ұзындығы 10 см-ге тең биіктігі табанын 10 см және 4 см болатын кесінділерге бөледі. Үшбұрыштың қалған екі қабырғасының кішісіне жүргізілген медианасын табыңдар.

4.32. $ABCD$ – тік төртбұрыш деп алып, жазықтықтың кез келген O нүктесі үшін $AO^2+CO^2=BO^2+DO^2$ теңдігі орындалатынын дәлелдеңдер.

4.2. ТҮЗУ МЕН ШЕҢБЕРДІҢ ТЕҢДЕУЛЕРІ

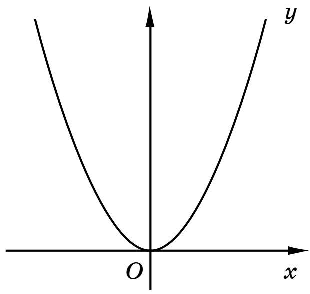
4.2.1. Фигура теңдеуі ұғымы. Түзу теңдеуі

Анықтама. *Егер x және y айнымалылары бар теңдеуді L фигурасының кез келген нүктесінің координаталары қанағаттандырса және осы фигурада жатпайтын әрбір нүктенің координаталары берілген теңдеуді қанағаттандырмайтын болса, онда бұл теңдеуді **L фигурасының теңдеуі** деп атайды.*



4.8-сурет

Алгебра курсынан $y=2x+1$ теңдеуінің графигі түзу сызық болатынын (4.8-сурет), ал $y=x^2$ функциясының графигі парабола болатынын жақсы білеміз (4.9-сурет).



4.9-сурет

Координаталар әдісін фигураға қолданғанда төмендегідей екі түрлі мәселе туындайды:

1. *Берілген фигураның геометриялық қасиеттері бойынша оның теңдеуін табу;*

2. *Керісінше, берілген теңдеу бойынша сәйкес фигураның геометриялық қасиеттерін зерттеу.*

Екінші мәселені алгебра курсында берілген функция графиктерін салуда қолданғанбыз. Мысалы, түзу теңдеуі

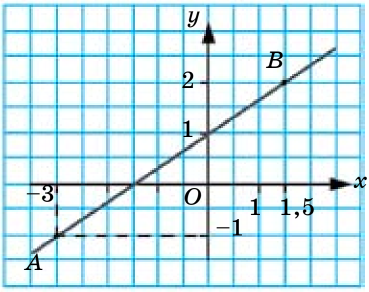
$$y=kx+b \qquad (1)$$

түрінде жазылатынын көрсеттік. Мұнда k түзудің *бұрыштық коэффициенті* деп аталады, b – бос мүше және түзу Oy өсін $(0;b)$ нүктесінде қиып өтеді.

1-мысал. $A(-3;-1)$ және $B\left(\frac{3}{2};2\right)$ нүктелері арқылы өтетін түзу теңдеуін жазу керек.

▲Егер түзу теңдеуі $y=kx+b$ түрінде жазылатын болса, онда A және B нүктелерінің координаталары осы теңдеуді қанағаттандыруы керек.

$$\begin{cases} -1 = k(-3) + b, \\ 2 = k\left(\frac{3}{2}\right) + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3k + b = -1, \\ 3k + 2b = 4 \end{cases} + \Rightarrow \begin{cases} 3b = 3, \\ 3k + 2b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1, \\ 3k + 2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1, \\ k = \frac{2}{3}. \end{cases}$$



4.10-сурет

Сонымен, $k = \dfrac{2}{3}$; b=1 болуы керек, яғни бізге қажет түзу теңдеуі былай жазылады: $y = \dfrac{2}{3}x + 1$ (4.10-сурет) ■

4.2.2. Екі нүкте арқылы өтетін түзу теңдеуі.

$M_1(x_1;y_1)$ және $M_2(x_2;y_2)$ нүктелері арқылы өтетін түзу теңдеуі

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \qquad (2)$$

формуласымен анықталатынын көрсетелік.

▲ Егер $y=kx+b$ түзуі M_1 және M_2 нүктелері арқылы өтетін болса, онда $\begin{cases} y_2 = kx_2 + b, \\ y_1 = kx_1 + b \end{cases}$ болуы мүмкін.

Бірінші теңдеуден екіншісін азайтып $y_2 - y_1 = k\left(x_2 - x_1\right) \Rightarrow$ $\Rightarrow k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ теңдігін аламыз. Бұл табылғанды жүйенің екінші теңдеуіне қоямыз. $y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 + b \Rightarrow b = y_1 - \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1$.

Онда $y=kx+b$ теңдеуі былай жазылады:

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x + y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 \Rightarrow y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \left(x - x_1\right) \Rightarrow$$

$\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$. Егер $x_1 = x_2$ болса, онда $M_1\ M_2$ түзуі теңдеуі $x = x_1$ түрінде жазылады, ал $y_1 = y_2$ болса, онда бұл түзу теңдеуі $y = y_1$ түрінде жазылады. Соңғы мәліметтерді өз беттеріңше түсіндіріп көріңдер. ■

Осы формула көмегімен 1-мысал жеңілірек шешіледі: x_1=–3; y_1=–1, $x_2 = \dfrac{3}{2}$; y_2=2 деп алсақ, онда (1) формула бойынша

$$\frac{x + 3}{\frac{3}{2} + 3} = \frac{y + 1}{2 + 1} \Rightarrow \frac{2x + 6}{9} = \frac{y + 1}{3} \Rightarrow y + 1 = \frac{2}{3}x + 2 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + 1$$

теңдеуін аламыз.

(1) және (2) теңдеулер x және y айнымалыларына тәуелді сызықтық теңдеулер. Ал сызықтық теңдеу жалпы түрде былай жазылады:

$$ax+by+c=0. \qquad (3)$$

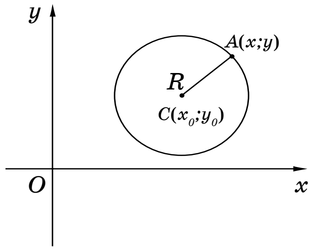
Мұнда, a, b — коэффициенттер, ал c бос мүше деп аталады. (3) теңдеу — түзудің **жалпы теңдеуі.**

Егер $a=0$, $b \neq 0$ болса, онда (3)-ден $y = -\frac{c}{b}$ теңдеуін аламыз. Осыдан түзудің бойында жататын әрбір нүктенің ординатасы $-\frac{c}{b}$-ға тең екенін көреміз, яғни түзу Ox өсіне параллель. Осы сияқты $a \neq 0$, $b=0$ болғанда $x = -\frac{c}{a}$ теңдеуі ординаталар өсіне параллель түзуді анықтайтынын көреміз. Дербес жағдайда $y=0$ теңдеуі Ox өсінің, ал $x=0$ теңдеуі Oy өсінің теңдеуі болады.

4.2.3. Шеңбердің теңдеуі.

Енді шеңбердің теңдеуін оның анықтамасына сүйене отырып, қорытып шығарамыз. Жалпы, ***шеңбер*** деп C нүктесінен (центрінен) бірдей R қашықтығында орналасқан жазықтық нүктелерінен тұратын фигураны айтады. Мұндағы R шеңбердің ***радиусы*** деп аталады. Сонымен, егер $C\ (x_0;\ y_0)$ — шеңбердің центрі, ал R радиусы болса, онда шеңбер бойындағы әрбір $A(x;\ y)$ нүктесі үшін $AC=R$ немесе $AC^2=R^2$ теңдігі орындалады. Қашықтық формуласы бойынша $AC = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ болғандықтан, шеңбер бойындағы нүктелер

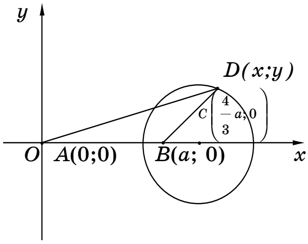
$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2 \qquad (4)$$



4.11-сурет

теңдеуін қанағаттандырады (4.11-сурет). Егер $B(x;\ y)$ нүктесі шеңбер бойында жатпаса, онда $R^2 \neq BC^2$ теңсіздігі орындалып, B нүктесінің координаталары (4) теңдеуді қанағаттандырмайды. Олай болса, (4) теңдеу шеңбердің теңдеуі болады. Сонымен декарттық координаталар жүйесінде центрі $C\ (x_0;\ y_0)$ нүктесінде орналасқан, ал радиусы R-ге тең шеңбердің теңдеуі (4) формуламен анықталады. Осыдан центрі координаталар бас нүктесінде орналасқан, радиусы R-ге тең шеңбердің теңдеуі мына түрде жазылады:

$$x^2+y^2=R^2.$$



4.12-сурет

1-мысал. A және B нүктелері берілген. A нүктесінен қашықтығы B нүктесіне дейінгі қашықтықтан екі есе үлкен болатындай жазықтықтағы барлық нүктелер жиынын анықтау керек.

▲ 4.12-суретте көрсетілгендей етіп, тік бұрышты декарттық координаталар жүйесін алайық. Онда $A(0;0)$, $B(a;0)$ болады. Есептің шарты бойынша бізге керекті жиынға тиісті әрбір $D(x;y)$ нүктесі үшін $AD=2\cdot BD$ немесе $AD^2=4BD^2$ теңдігі орындалуы керек. $AD^2=x^2+y^2$, $BD^2=(x-a)^2+y^2$ болғандықтан, $D(x;y)$ нүктесінің координаталары

$$x^2+y^2=4((x-a)^2+y^2) \qquad (5)$$

теңдеуін қанағаттандыратынын көреміз. Ал бұл жиынға тиісті емес нүктелердің координаталары бұл теңдеуді қанағаттандырмайды. Олай болса, (5) теңдеу бізге керекті жиынның теңдеуі болады. Жақшаларды ашып, ұқсас мүшелерін топтап, (5) теңдеуді мына түрде жазуға болады:

$$\left(x-\frac{4a}{3}\right)^2+y^2=\left(\frac{2a}{3}\right)^2.$$

Сонымен біз іздеген нүктелер жиыны центрі $C=\left(\frac{4a}{3};0\right)$ нүктесінде орналасқан, радиусы $\frac{2a}{3}$-ға тең шеңбер болады. ■

Ескерту. Осыған ұқсас $AD=kBD$ шартын қанағаттандыратын барлық D нүктелері жиыны центрі $\left(\frac{k^2\cdot a}{k^2-1};0\right)$ нүктесінде орналасқан және радиусы $\frac{k\cdot a}{k^2-1}$-ге тең шеңбер болатынын дәлелдеуге болады. Мұнда $k \neq 0$, $k>0$. Бұл шеңберді ***Аполлоний шеңбері*** деп атайды. Егер $k=1$ болса, онда A және B нүктелерінен бірдей қашықтықта орналасқан барлық D нүктелері жиынын табу керек. Бұл жиын AB кесіндісінің орта перпендикуляры болады.

?

1. Фигура теңдеуі деп нені түсінесіңдер?
2. Бұрыштық коэффициентпен берілген түзу теңдеуі қалай жазылады?

3. Екі нүкте арқылы өтетін түзу теңдеуі қалай жазылады? Мысал келтіріңдер.

4. Шеңбер теңдеуі қалай жазылады? Оның центрі мен радиусы қалай анықталады. Мысал келтіріңдер.

ПТ 4.1 бабы бойынша берілген ПТ жалғасы:

1) Жазқазған және Балқаш қалаларын қосатын түзу теңдеуін жазыңдар (қала координаталарын сыныптың орта мәні бойынша алыңдар).

2) Жезқазған, Балқаш және Қарағанды қалалары арқылы өтетін шеңбер центрі Қарағанды қаласынан қандай қашықтықта орналасады?

ЕСЕПТЕР

А

4.33. $A(-1;\ 1)$ және $B(1;\ 0)$ нүктелері арқылы өтетін түзудің теңдеуін жазыңдар.

4.34. 1) $A(1;\ -1)$ және $B(-3;\ 2)$; 2) $C(2;\ 5)$, $D(5;\ 2)$ нүктелері арқылы өтетін түзулердің теңдеулерін жазыңдар.

4.35. Төмендегі теңдеулермен берілген түзулердің координаталар өстерімен қиылысу нүктелерін анықтаңдар:

1) $x+2y+3=0$; 3) $3x-2y+6=0$; 5) $3x-4y+1=0$;
2) $3x+4y=12$; 4) $4x-2y-10=0$; 6) $x-y=0$.

4.36. Төмендегі теңдеулермен берілген түзулердің қиылысу нүктелерін анықтаңдар:

1) $4x+3y-6=0$ және $2x+y-4=0$;
2) $x+2y+3=0$ және $4x+5y+6=0$;
3) $3x-y-2=0$ және $2x+y-8=0$;
4) $4x+5y+8=0$ және $4x-2y-6=0$.

4.37. Координаталар өстеріне параллель және $M\ (2;\ 3)$ нүктесі арқылы өтетін түзулердің теңдеулерін жазыңдар.

4.38. 1) $y=-3$; 2) $x=2$; 3) $y=4$; 4) $x=-7$ теңдеулерімен берілген түзулерді салыңдар.

4.39. 1) $A\,(1;\ 2)$, $B\,(3;\ 4)$, $C\,(-3;\ 4)$, $D\,(0;\ 5)$, $E\,(5;\ -1)$ нүктелерінің қайсысы $x^2+y^2=25$ теңдеуімен берілген шеңбердің бойында жатады?

4.40. 1) $x^2+y^2=9$; 4) $(x-1)^2+y^2=4$;
2) $(x-1)^2+(y+2)^2=4$; 5) $x^2+(y+2)^2=2$;
3) $(x+5)^2+(y-3)^2=25$; 6) $(x+2)^2+(y+3)^2=3$
теңдеулерімен берілген шеңберлердің центрлерінің координаталарын және радиустарын анықтап, графиктерін салыңдар.

4.41. A (2; 0) және C (−4; 8) нүктелері берілген. Центрі C нүктесінде болып, A нүктесі арқылы өтетін шеңбердің теңдеуін жазыңдар.

B

4.42. ABC үшбұрышы төбелерінің координаталары арқылы берілген A(4; 6), B(−4; 0), C(−1; −4). Осы үшбұрыштың A төбесінен жүргізілген медианасының теңдеуін жазыңдар.

4.43. $ABCD$ трапециясы төбелерінің координаталары арқылы берілген: A (−2; −2); B (−3; 1); C (7; 7); D (3; 1). 1) AC және BD диагональдары; 2) орта сызығы арқылы өтетін түзулердің теңдеулерін жазыңдар.

4.44. $x+2y=3$, $2x-y=1$ және $3x+y=4$ теңдеулерімен берілген түзулердің бір нүктеде қиылысатынын дәлелдеңдер.

4.45. A (0; 1), B (2; 3) және C (3; 2) нүктелерінде орналасқан үшбұрыштың медианаларының қиылысу нүктесінің координаталарын анықтаңдар.

4.46. A(1; 2), B (3; 4), C (−2; 4), D (−5; −3) және E(−7; −2) нүктелерінің қайсысы $(x+5)^2+(y-1)^2=16$ шеңберінің: 1) бойында; 2) ішінде; 3) сыртында жатады?

4.47. A (3; 1) және B(−3; 5) нүктелері берілген. Диаметрі AB-ға тең шеңбердің теңдеуін жазыңдар.

4.48. Центрі C(1; 2) нүктесінде болатын және Ox өсін жанайтын шеңбердің теңдеуін жазыңдар.

4.49. Центрі (−3; 4) нүктесінде болатын және координаталар бас нүктесі арқылы өтетін шеңбердің теңдеуін жазыңдар.

4.50. Төмендегі теңдеулермен берілген шеңберлердің центрлерінің координаталары мен радиустарын анықтаңдар:

1) $(x-1)^2+(y+2)^2=25$;
2) $x^2+(y+7)^2=1$;
3) $x^2+y^2+8x-4y+16=0$;
4) $x^2+y^2-2x+4y-20=0$;
5) $x^2+y^2-4x-2y+1=0$;
6) $x^2+y^2-6x+4y+4=0$.

C

4.51. AB түзуінде жататын C нүктесінің бірінші координатасы (абсциссасы) 5-ке тең екені белгілі. Егер A (−8; −6) және B (−31; −1) болса, онда C нүктесінің екінші координатасын табыңдар.

4.52. Ромбының 10 см және 4 см болатын диагональдары координаталар өстерінде жатыр. Ромбының қабырғалары арқылы өтетін түзулердің теңдеулерін жазыңдар.

4.53. $A(1; 4)$ нүктесі арқылы өтетін, радиусы 5-ке тең және центрі Ox өсінде жататын шеңбердің теңдеуін жазыңдар.

4.54. Центрі $y=x+2$ түзуінде жатқан A (3; 0), B (−1; 2) нүктелері арқылы өтетін шеңбердің теңдеуін жазыңдар.

4.55. Берілген: 1) $A(1; -4)$, $B(4; 5)$, $C(3; -2)$; 2) $A(3; -7)$, $B(8; -2)$, $C(6; 2)$ үш нүкте арқылы өтетін шеңбердің теңдеуін жазыңдар.

4.56. Төбелері $A(-7; 5)$, $B(3; -1)$, C (5; 3) нүктелерінде орналасқан ABC үшбұрышының: 1) орта перпендикулярлары; 2) қабырғалары; 3) орта сызықтары арқылы өтетін түзулердің теңдеулерін жазыңдар.

4.57. $ABCD$ параллелограмы мен кез келген F нүктесі үшін $(AF^2+CF^2)-(BF^2+DF^2)$ айырмасының мәні тұрақты және F нүктесіне тәуелсіз болатынын дәлелдеңдер.

4.58. 1) ABC үшбұрышының AA_1 медианасын $AA_1 = \dfrac{1}{2}\sqrt{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}$ формуласымен есептеуге болатынын дәлелдеңдер.

2) Осы формуланы қолдана отырып, екі медианасы тең болатын үшбұрыш тең бүйірлі болатынын дәлелдеңдер.

4.59 A және B нүктелері берілген: 1) $2AK^2-BK^2=2AB^2$; 2) $AK^2+2BK^2=6AB^2$ теңдіктерін қанағаттандыратын барлық K нүктелерінің геометриялық орны қандай фигура болады?

5*-бөлім. МАТЕМАТИКАНЫ ТЕРЕҢДЕТІП ОҚЫТУҒА АРНАЛҒАН ҚОСЫМША МАТЕРИАЛДАР

Бөлімді оқып-үйрену барысында келесі мақсаттарға қол жеткіземіз:

– Шаршы ауданы формуласын қатаң түрде дәлелдей білу;

– Тік бұрышты үшбұрыш катеттерінің гипотенузаға түсірілген проекцияларының қасиеттерін білу;

– Үшбұрыштың сүйір (доғал) бұрышына қарсы жатқан қабырға қасиеттерін білу;

– Стюарт теоремасын білу;

– Эллипс, гипербола және параболаның қарапайым теңдеулерін қорытып шығару және олардың қасиеттерін қолдана білу;

– 0°-тан 180°-қа дейінгі бұрыштардың тригонометриялық функциялары ұғымын білу;

– Келтіру формулалары ұғымын білу және оларды қолдана білу.

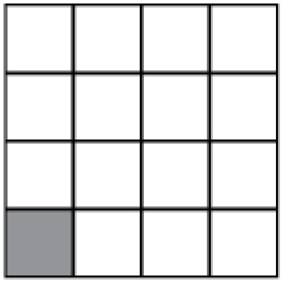
5*. МАТЕМАТИКАНЫ ТЕРЕҢДЕТІП ОҚЫТУҒА АРНАЛҒАН ҚОСЫМША МАТЕРИАЛДАР

5.1. ШАРШЫ АУДАНЫ ФОРМУЛАСЫНЫҢ ДӘЛЕЛДЕУІ

Теорема. Қабырғасы a-ға тең шаршы ауданы a^2-қа тең: $S = a^2$.

▲ Фигура ауданын анықтау аксиомасы бойынша қабырғасы 1-ге тең шаршы ауданы 1-ге тең деп қабылданған.

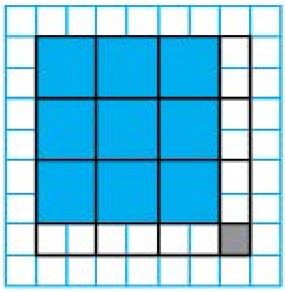
Мысалы, $a=4$ деп алсақ, онда 5.1-сурет бойынша $S=16=4^2$, яғни $S=a^2$ болады.



5.1-сурет

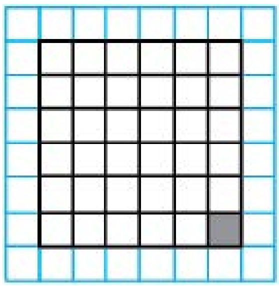
Алдымен $a=m$, бүтін сан болған жағдайды қарастырайық. Шаршының әрбір қабырғасын бірдей m бөлікке бөлеміз. Сонда 5.1-суретте көрсетілгендей қабырғасы 1-ге тең m^2 шаршы алынады. Олай болса, берілген шаршы ауданы m^2-қа тең, яғни $S = a^2$ формуласы орындалады.

a-бүтін емес сан болсын. Оның бүтін бөлігі $[a]=m$ және бөлшек бөлігі $\{a\}\neq 0$ болсын. Онда мұндай шаршы ауданын есептеу қабырғасы $\{a\}$-ға тең шаршы ауданын есептеуге келіп тіреледі (5.2-сурет).



5.2-сурет

$a = \frac{1}{n}$, n – натурал сан жағдайын қарастырайық. Қабырғасы 1-ге тең шаршының әрбір қабырғасын өзара тең n бөлікке бөлеміз. Бөлінген нүктелер арқылы шаршы қабырғаларына параллель түзулермен оны n^2 кішкене шаршыларға бөлеміз. Үлкен шаршы ауданы 1-ге тең болғандықтан, кіші шаршы ауданы $S = \frac{1}{n^2} = \left(\frac{1}{n}\right)^2 = a^2$ -қа тең (5.3-сурет).

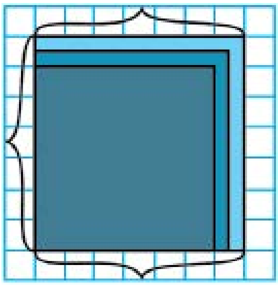


5.3-сурет

a=0, $a_1a_2...a_n$ – шектеулі ондық бөлшек болсын. $\overline{a_1a_2...a_n} = m$ бүтін санын $m = a \cdot 10^n$ түрінде жазамыз. Қабырғасы 1-ге тең шаршының әрбір қабырғасын өзара тең m бөлікке бөліп, шаршыны m^2 кішкене шаршыларға бөлеміз (5.3-сурет). Онда әрбір кішкене шаршы қабырғасы $\frac{a}{m}$ -ге тең. Осыдан $m = a \cdot 10^n$ теңдігін қолданып, $\frac{a}{m} = \frac{a}{a \cdot 10^n} = \frac{1}{10^n}$ аламыз. Сонымен, әрбір кішкене шаршы қабырғасы $\frac{1}{10^n}$-не тең, ал оның ауданы алдында көрсеткеніміз бойынша $\left(\frac{1}{10^n}\right)^2$-қа тең. Сондықтан қабырғасы a-ға тең шаршы ауданы былай есептелінеді $S = m^2\left(\frac{1}{10^n}\right)^2 = \left(\frac{m}{10^n}\right)^2 = a^2$, яғни $S = a^2$.

Енді a – шексіз ондық бөлшек болсын (периодты немесе периодсыз). a_n арқылы a санының үтірден соң алғашқы n цифрымен аяқталатын шектеулі ондық бөлшекті белгілейік.

Онда



5.4-сурет

Мысалы, a=0,5243...

a_3= 0,524;

$a_3 + \frac{1}{10^3} = 0,525;$

0,524<0,5243...<0,525;

$(0,524)^2 < a^2 < (0,524+0,001)^2;$

$(0,524)^2 < S^2 < (0,524+0,001)^2;$

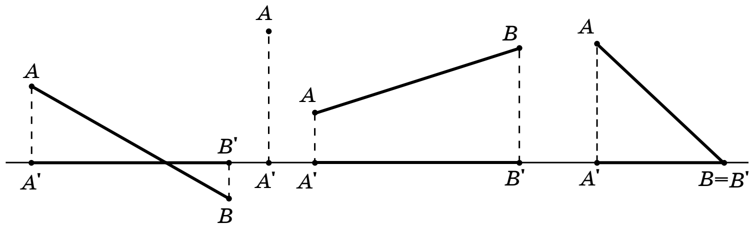
$(0,524)^2 = 0,274576;$ $(0,525)^2 = 0,275625.$

$a_n < a < a_n + \frac{1}{10^n}$ теңсіздігі орындалады. Осыдан $a_n^2 < a^2 < \left(a_n + \frac{1}{10^n}\right)^2$. 5.4-суреттен $a_n^2 < S < \left(a_n + \frac{1}{10^n}\right)^2$ теңсіздігі орындалатынын көреміз. Егер n өте үлкен сан болса, онда a_n^2 және $\left(a_n + \frac{1}{10^n}\right)^2$ сандарының айырмасы мейлінше аз сан болады. Сондықтан $S = a^2$ теңдігі орындалуы керек. ■

5.2. ҮШБҰРЫШТЫҢ ҚАБЫРҒАЛАРЫ МЕН БҰРЫШТАРЫ АРАСЫНДАҒЫ ҚАТЫНАСТАР

Нүктенің түзудегі проекциясы деп осы нүктеден түзуге түсірілген перпендикулярдың табанын айтады.

Кесіндінің түзудегі проекциясы деп осы кесіндінің ұштарының проекцияларымен шектелетін түзу бойындағы кесінділі айтады (5.5-сурет).



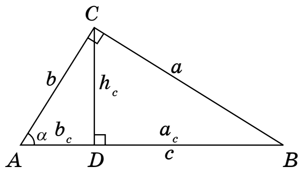
5.5-сурет

Егер a, b және x кесінділері үшін $\frac{a}{x}=\frac{x}{b}$ теңдігі орындалса, онда x кесіндісін a және b кесінділерінің ***геометриялық ортасы*** деп атайды. Бұл теңдікті көп жағдайда мына түрде жазады: $x^2=ab$. Енді үшбұрыштарға тән кейбір қасиеттерге тоқталайық.

> **Теорема 1.** *Тік бұрышты үшбұрыштың әрбір катеті гипотенузасы мен осы катеттің гипотенузадағы проекцияларының геометриялық ортасына тең.*

▲ **Дәлелдеуі.** 5.6-суретте $\cos(\angle A)=\frac{AC}{AB}$, ал ACD тік бұрышты үшбұрышынан $\cos(\angle A)=\frac{AD}{AC}$. Осыдан $\frac{AC}{AB}=\frac{AD}{AC}$ не $AC^2=$ $=AD\cdot AB$ теңдігі шығады. Теорема дәлелденді.

$a^2=c\cdot a_c$; $b^2=c\cdot b_c$ екені белгілі. $\angle BCD=\angle A$ болғандықтан, $\cos\angle A=\frac{AC}{AB}$, $\cos(\angle BCD)=\frac{CD}{BC}$. Онда $\frac{AC}{AB}=\frac{CD}{BC}$ немесе $AC\cdot BC=$ $=AB\cdot CD$. Яғни әрбір тік бұрышты үшбұрыштың катеттерінің көбейтіндісі гипотенузасы мен гипотенузаға түсірілген биіктіктің көбейтіндісіне тең: $a\cdot b=h_c\cdot c$. ■



5.6-сурет

Теорема 2. *Әрбір тік бұрышты үшбұрыштың гипотенузаға түсірілген биіктігі гипотенузаны өзі бөлген кесінділердің геометриялық ортасына тең болады:*

$$h_c^2=a_c\cdot b_c.$$

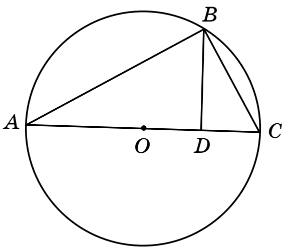
▲ **Дәлелдеуі.** ACD және BCD (5.6-сурет) үшбұрыштарына $\operatorname{tg}\angle A=\dfrac{CD}{AD}$, $\operatorname{tg}(\angle BCD)=\dfrac{BD}{CD}$ теңдіктері шығады. Осылардан $CD^2=AD\cdot BD$ теңдігін аламыз.

Теорема дәлелденді. ■

Осы теоремадан мынадай екі салдар шығады.

Салдар. 1) *Шеңбердің әрбір хордасы диаметр мен осы хорданың бір ұшы арқылы өтетін диаметрге проекциясының* ***геометриялық ортасына тең*** *болады.*

2) *Шеңбердің әрбір нүктесінен диаметрге түсірілген перпендикуляр осы диаметрдің бөлінген бөліктерінің* ***геометриялық ортасына тең*** *болады* (5.7-сурет).



5.7-сурет

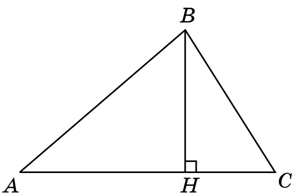
Теорема 3. *Әрбір үшбұрыштың екі қабырғасының квадраттарының айырмасы осы қабырғалардың үшбұрыштың үшінші қабырғасына түсірілген проекцияларының квадраттарының айырмасына тең.*

▲ **Дәлелдеуі.** 5.8-суретте ABH және BCH үшбұрыштары тік бұрышты. Онда Пифагор теоремасы бойынша:

$$AB^2=AH^2+BH^2,$$
$$BC^2=CH^2+BH^2.$$

Осы теңдіктерді бірінен-бірін азайтсақ, $AB^2-BC^2=AH^2-CH^2$ теңдігі шығады.

Теорема дәлелденді. ■



5.8-сурет

Теорема 4. *Кез келген үшбұрышта:*

1) *Сүйір бұрышқа қарсы жатқан қабырғаның квадраты оның басқа екі қабырғасының квадраттарының қосындысынан осы екі қабырғаның біреуінің екіншісінің осы қабырғадағы проекциясына екі еселенген көбейтіндісін азайтқанға тең:*

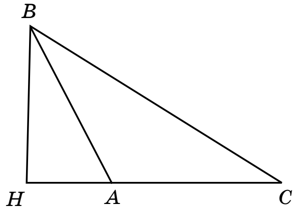
$$BC^2=AB^2+AC^2-2AC\cdot AH.$$

2) *Доғал бұрышқа қарсы жатқан қабырғаның квадраты басқа екі қабырғаның квадраттарының қосындысына осы екі қабырғаның біреуінің екіншісінің осы қабырғадағы проекциясына екі еселенген көбейтіндісін қосқанға тең:*

$$BC^2=AB^2+AC^2+2AC\cdot AH.$$

▲ **Дәлелдеуі.** 1) Алдыңғы теорема бойынша $BC^2=AB^2+CH^2-AH^2$. Ал $CH=AC-AH$ болғандықтан (5.8-сурет), $BC^2=AB^2+AC^2-2AC\cdot AH$.

2) Айталық, ABC үшбұрышының A бұрышы доғал болсын (5.9-сурет). Теорема 3 бойынша $BC^2=AB^2+CH^2-AH^2$. Мұнда $CH=AC+AH$ болғандықтан, $BC^2=$ $=AB^2+AC^2+2AC\cdot AH$. Теорема дәлелденді. ■



5.9-сурет

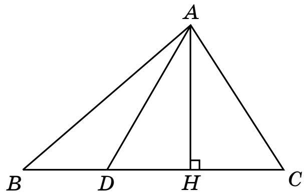
Осы теоремадан мынадай маңызды салдар аламыз.

Салдар. *Егер үшбұрыштың бұрышына қарсы жатқан қабырғасының квадраты өзге екі қабырғасының квадраттарының қосындысынан кем, тең немесе артық болса, онда сәйкес берілген бұрыш та сүйір, тік немесе доғал болады.*

Теорема 5 (Стюарт теоремасы). *Егер ABC үшбұрышының BC қабырғасында жататын D нүктесі берілсе, онда $AB^2\cdot DC+AC^2\cdot BD-AD^2\cdot BC=BC\cdot DC\cdot BD$ теңдігі орындалады.*

▲ **Дәлелдеуі.** 5.10-суретте көрсетілген A нүктесінен үшбұрыштың AH биіктігін жүргізейік. Анықтық үшін, H нүктесі D және C нүктелерінің арасында жатсын деп есептейік. Алдыңғы теореманы ACD ($\angle ADC$ сүйір) және ABD ($\angle ADB$ доғал) үшбұрыштарына қолданайық.

$$AC^2=AD^2+DC^2-2DC\cdot DH,$$
$$AB^2=AD^2+BD^2+2BD\cdot DH.$$



5.10-сурет

Бұл теңдіктердің біріншісін BD-ға, ал екіншісін DC-ға көбейтіп, бір-біріне қосамыз: $BD\cdot AC^2+DC\cdot AB^2=BD\cdot AD^2+$ $+BD\cdot DC^2-2BD\cdot DC\cdot DH+CD\cdot AD^2+DC\cdot BD^2+2\cdot BD\cdot DC\cdot DH=$ $=AD^2(BD+CD)+(BD+DC)\cdot BD\cdot DC=AD^2\cdot BC+BC\cdot BD\cdot DC.$

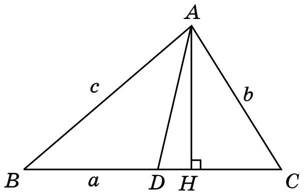
Теорема дәлелденді. ■

1-мысал. Берілгені: ABC үшбұрышы, $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$.

Табу керек: A төбесінен түсірілген AD медианасын (5.11-сурет).

▲ Алдыңғы теоремада AD-ны медиана деп қарастырып, $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$, $DC=BD=\dfrac{a}{2}$ деп алсақ, онда $c^2\cdot\dfrac{a}{2}+b^2\cdot\dfrac{a}{2}-$ $-AD^2\cdot a=a\cdot\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{a}{2}$ теңдігін a-ға бөліп, $\dfrac{b^2+c^2}{2}=AD^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2$ теңдігін аламыз. Осыдан $AD^2=\dfrac{b^2+c^2}{2}-\dfrac{a^2}{4}$ теңдігі шығады. ■

2-мысал. ABC үшбұрышында $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$. A төбесінен түсірілген AH биіктігін табу керек (5.11-сурет).



5.11-сурет

▲ ABC үшбұрышының B және C бұрыштарының бірі сүйір болуы керек (екі доғал не екі тік бұрыш болуы мүмкін емес). Айталық, B сүйір бұрыш болсын, онда 4-теорема бойынша (AB-ға қолданамыз):

$$b^2=a^2+c^2-2a\cdot BH.$$

Осыдан $BH=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2a}$. AHB тік бұрышты үшбұрышынан $AH^2=c^2-BH^2=c^2-\dfrac{\left(a^2+c^2-b^2\right)^2}{4a^2}$ теңдігін аламыз. Осы квадраттар айырмасын түрлендіре отырып,

$$AH^2=\left(c-\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)\cdot\left(c+\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)=$$

$$=\frac{\left(2ac-a^2-c^2+b^2\right)\left(2ac+a^2+c^2-b^2\right)}{4a^2}=$$

$$=\frac{(b+c-a)(a+b-c)(a+c-b)(a+b+c)}{4a^2}.$$

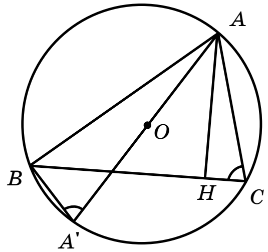
Мұнда $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ деп белгілесек (үшбұрыштың жарты периметрі), онда $AH^2=\dfrac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2}$ формуласын аламыз. ■

3-мысал. Үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің радиусын табыңдар.

Берілгені: ABC үшбұрышы, $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$.

Табу керек: Сырттай сызылған шеңбердің радиусы R.

▲ AH – үшбұрыштың биіктігі, ал AA' – сырттай сызылған шеңбердің диаметрі болсын (5.12-сурет). Бір доғаға керілгендіктен, $\angle A' = \angle C$ және $AA'B$, ACH үшбұрыштары тік бұрышты.



5.12-сурет

Онда $\dfrac{AH}{AC}=\sin C=\sin A'=\dfrac{AB}{AA'}$.

Осыдан $AA'=\dfrac{AB\cdot AC}{AH}$ не $R=AO=\dfrac{AB\cdot AC}{2AH}$ теңдігін аламыз. 2-мысалдан $AH=\dfrac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}$ екенін ескерсек және мәндерін орындарына қойсақ:

$R=\dfrac{a\cdot b\cdot c}{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$ формуласын аламыз. ■

ЕСЕПТЕР

B

5.1. Қос-қостан қиылысатын түзулерден бірдей қашықтықта орналасатын неше нүкте бар?

5.2. Үшбұрыштың бір биссектрисасы оның екінші биссектрисасының ортасы арқылы өтуі мүмкін бе?

5.3. Үшбұрыштың екі биссектрисасы: 1) перпендикуляр; 2) параллель болуы мүмкін бе?

5.4. Үшбұрыштың қабырғалары: 1) 2, 3, 4; 2) 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$; 3) m^2+n^2, m^2-n^2, $2mn$, $(m>n)$ сандарына тең болғандағы үшбұрыштың түрі қандай?

C

5.5. Үшбұрыш биіктіктерінің қиылысуынан шығатын үш пар вертикаль бұрыштар осы үшбұрыштың бұрыштарына тең болатынын дәлелдеңдер.

5.6. ABC үшбұрышының AA_1 және BB_1 медианалары O нүктесінде тік бұрыш жасап қиылысатын болса, онда $AB=OC$ болатынын дәлелдеңдер.

5.7. ABC тік бұрышты үшбұрышының тік бұрышының төбесінен CD биіктігі жүргізілген және D нүктесінен AC және BC катеттеріне DE және DF перпендикулярлары жүргізілген. Онда $AE^2+BF^2+3CD^2=AB^2$ болатынын дәлелдеңдер.

5.8. ABC үшбұрышының C төбесі мен AC және BC қабырғаларының орталары арқылы өтетін шеңбер үшбұрыштың медианаларының қиылысу нүктесі арқылы өтеді. Үшбұрыштың қабырғалары a, b және c болса, онда $2c^2=a^2+b^2$ болатынын дәлелдеңдер.

5.9. ABC үшбұрышының AH биіктігінен D нүктесі алынған. $AB>AC$ болса, онда $AB^2-AC^2=DB^2-DC^2$ теңдігі орындалатынын дәлелдеңдер.

5.10. ABC тең бүйірлі үшбұрышының AB табанындағы кез келген D нүктесі үшін $CD^2=AC^2-AD\cdot BD$ теңдігі орындалатынын дәлелдеңдер.

5.11. ABC үшбұрышының AD медианасы үшін $2AD=AB+AC$ теңдігі орындалса, онда $(AB-AC)^2=BC^2$ теңдігін дәлелдеңдер.

5.12. Шеңберге жүргізілген параллель екі жанамадан үшінші (жылжымалы) жанаманың қиып өтетін кесінділерінің көбейтіндісі тұрақты болатынын дәлелдеңдер.

5.13. Тік бұрышты үшбұрыштың гипотенузасына түсірілген h биіктігінің квадратына кері шама оның катеттерінің квадраттарына кері шамалардың қосындысына тең болатынын дәлелдеңдер.

5.14. Үшбұрыштың медианалары квадраттарының қосындысының үшбұрыш қабырғалары квадраттарының қосындысына қатынасын анықтаңдар.

5.15. $ABCD$ төртбұрышының E және F нүктелері – AC және BD диагональдарының орталары болса, онда $AB^2+BC^2+CD^2+AD^2=AC^2+BD^2+4EF^2$ теңдігі орындалатынын дәлелдеңдер.

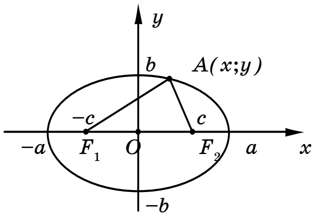
5.16. ABC үшбұрышының медианалары O нүктесінде қиылысады деп алып, жазықтықтағы кез келген G нүктесі үшін $OA^2+OB^2+OC^2=GA^2+GB^2+GC^2+3OG^2$ теңдігі орындалатынын дәлелдеңдер.

5.17. $ABCD$ параллелограмының диагональдарының қиылысу нүктесі K болса, онда жазықтықтағы кез келген O нүктесі үшін $AO^2+OC^2-OB^2-OD^2$ өрнегінің мәні O нүктесіне тәуелсіз, тұрақты болатынын дәлелдеңдер.

5.18. ABC үшбұрышының A төбесінен түсірілген медианасы AB және AC қабырғаларының геометриялық ортасына тең болса, онда қабырғасы үшбұрыштың осы қабырғаларының айырмасына тең шаршының диагоналы BC қабырғасына тең болатынын дәлелдеңдер.

5.3. ЭЛЛИПС, ГИПЕРБОЛА ЖӘНЕ ПАРАБОЛА ТЕҢДЕУЛЕРІ

5.3.1. Эллипс теңдеуі.



5.13-сурет

1-есеп. Жазықтықтың берілген F_1 және F_2 нүктелерінен қашықтықтарының қосындысы тұрақты, $2a$ санына тең болатын барлық нүктелері жиынының теңдеуін жазу керек. Бұл нүктелер жиынын ***эллипс*** деп атайды. F_1, F_2 нүктелерін эллипстің ***фокустары*** деп атайды.

▲ $F_1F_2=2c$ болса, онда $c<a$ болады. $F_1(-c;\ 0)$ және $F_2(c;\ 0)$ болатындай етіп, декарттық координаталар жүйесінде белгілейік (5.13-сурет). Эллипстің әрбір $A(x;\ y)$ нүктесі үшін $AF_1+AF_2=2a$ немесе

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a \qquad (1)$$

теңдігі орындалады. Сонымен қатар эллипстің бойында жатпайтын $B(x;\ y)$ нүктесінің координаталары (1) теңдеуді қанағаттандырмайды. Олай болса, (1) теңдеу эллипстің теңдеуі болады. Енді бұл теңдеуді

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

түрінде жазып, оның екі жақ бөлігін де квадраттаймыз:

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2.$$

Бұл теңдеудегі жақшаларды ашып, түбірі бар өрнекті теңдіктің сол жағына, ал өзге мүшелерін теңдіктің оң жағына шығарып, топтасақ, мынадай түрге келтіреміз:

$$a\cdot\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx.$$

Соңғы теңдеуді тағы да квадраттап, топтау арқылы мына түрге келтіреміз:

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

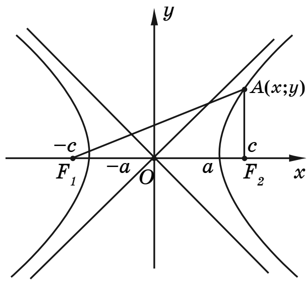
Осыдан $a>c$ болғандықтан, $a^2-c^2=b^2$ деп белгілеп, соңғы теңдеуді $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ немесе

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (2)$$

түрінде жазамыз. (2) теңдеуді ***эллипстің қарапайым теңдеуі*** деп атайды. a және b сандарын эллипстің сәйкес ***үлкен*** және ***кіші жарты өстері*** деп атайды.

5.3.2. Гипербола теңдеуі.

2-есеп. Жазықтықтың берілген F_1 және F_2 нүктелерінің қашықтықтарының айырмасының абсолют шамасы тұрақты $2a$ санына тең болатын барлық нүктелер жиынының теңдеуін жазу керек. Бұл нүктелер жиынын ***гипербола*** деп атайды. F_1, F_2 нүктелерін ***гиперболаның фокустары*** деп атаймыз.



5.14-сурет

▲ 5.14-суретте көрсетілгендей етіп, декарт координаталар өстерін таңдап аламыз. Онда $F_1(-c;\ 0)$, $F_2(c;\ 0)$ болады және гиперболаның әрбір $A(x;y)$ нүктесі үшін $|AF_1 - AF_2| = 2a$ немесе

$$\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a \qquad (3)$$

теңдігі орындалады және гипербола бойында жатпайтын $B(x;y)$ нүктесінің координаталары (3) теңдеуді қанағаттандырмайды. Олай болса, (3) теңдеу − гиперболаның теңдеуі. Айталық, $x>0$ болсын. Онда (3) теңдеуді мына түрде жазуға болады:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\ .$$

Бұл теңдеуді эллипс теңдеуі сияқты квадраттап, ықшамдап, былай жазуға болады:

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2).$$

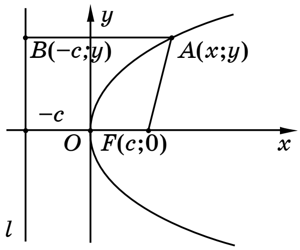
Мұнда $c>a$ болғандықтан, $c^2-a^2=b^2$ деп белгілеп, гиперболаның теңдеуін аламыз:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (4)$$

$x<0$ болғанда да гиперболаның теңдеуі (4) теңдеу түрінде жазылатындығын көрсетуге болады. (4) теңдеу ***гиперболаның қарапайым теңдеуі*** деп аталады. $x=0$ болуы мүмкін емес, өйткені абсциссасы нөлге тең нүктелер (4) теңдеуді қанағаттандырмайды. Мұнда a гиперболаның ***нақты жарты осі*** деп, ал b ***жорамал жарты осі*** деп аталады.

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$ және $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$ теңдеулерімен анықталатын түзулер гиперболаның ***асимптоталары*** болып табылады. Гипербола тармақтары $|x|$ мәні өскен сайын асимптоталарға мейлінше жақындай түседі, бірақ оларды қиып өтпейді. Асимптоталар қисық графигін салуды жеңілдетеді және жуықтап есептеу барысында жиі қолданылады. ■

5.3.3. Парабола теңдеуі.



5.15-сурет

3-мысал. l түзуінен қашықтығы осы түзуде жатпайтын F нүктесіне дейінгі қашықтыққа тең болатын барлық нүктелер жиынының теңдеуін жазу керек. Бұл нүктелер жиынын ***парабола*** деп атайды. l түзуі параболаның ***директрисасы,*** ал F нүктесі параболаның ***фокусы*** деп аталады.

▲ Декарттық координаталар жүйесін 5.15-суретте көрсетілгендей етіп таңдаймыз. F (c; 0) болса, онда параболаның кез келген A (x; y) нүктесі үшін $AB=AF$ теңдігі орындалады. Мұнда B нүктесі – A нүктесінен l түзуіне түсірілген перпендикулярдың табаны. Осыдан

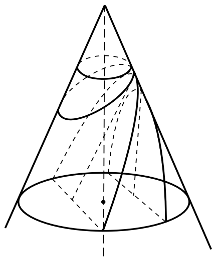
$$|x+c|=\sqrt{(x-c)^2+y^2} \qquad (5)$$

теңдеуін аламыз. Әрине, параболаның бойында жатпайтын нүктелердің координаталары (5) теңдеуді қанағаттандырмайды, яғни (5) теңдеу параболаның теңдеуі болады. Енді осы теңдеуді квадраттап, ықшамдайық:
$(x+c)^2=(x-c)^2+y^2$, не $x^2+2cx+c^2=x^2-2cx+c^2+y^2$, не $4cx=y^2$ теңдігін аламыз. Егер $2c=p$ (фокус пен директрисаның арақашықтығы) деп белгілесек, онда параболаның теңдеуін

$$y^2=2px \qquad (6)$$

түрінде жазамыз. Бұл ***параболаның қарапайым теңдеуі*** деп аталады. Мұндағы p – ***парабола параметрі.*** ■

Т Эллипс, гипербола және парабола атауларын тұңғыш рет ежелгі грек ғалымы Аполлоний (б.з.б. II ғ.) өзінің «Конустық қималар» атты еңбегінде енгізген. Шынында да, дөңгелек конусты жазықтықтармен қиғанда пайда болатын қисықтарды мына суреттен көруге болады. Егер конусты өсіне перпендикуляр бағытта қиса, онда шеңбер, ал өсіне көлбеу бағытта қиса – эллипс, жасаушысына параллель бағытта қиса – парабола, ал өсіне параллель бағытта қиса – гипербола шығатынын көреміз (5.16-сурет). Осы еңбектерді қолдана отырып, атақты француз математигі П. Ферма 1-ші дәрежелі теңдеулермен түзу сызық, ал 2-ші дәрежелі теңдеулермен (екі айнымалылы) конустық қималар анықталатынын көрсеткен.



5.16-сурет

ПТ Бөлім басында Алматы қаласындағы Эллипс пішінді “Халық арена” спорт кешені бейнеленген. Координаталар жүйесін осы суретте көрсетілгендей етіп алып, 0,1 см-ге дейінгі дәлдікпен өлшеу нәтижесі бойынша: 1) Эллипс теңдеуін жазыңдар; 2) Эллипстің жарты өстерін анықтаңдар; 3) Фокустары координаталарын табыңдар; 4) Суретте фокустары орнын 0,1 см дәлдікпен белгілеңдер.

ЕСЕПТЕР

А

5.19. a – эллипстің үлкен жарты өсі, b – кіші жарты өсі және $c^2=a^2-b^2$ деп алып: 1) $a=10$, $b=6$; 2) $a+b=9$, $c=3$; 3) $a=6$, $c=4$ болғандағы эллипстің қарапайым теңдеуін жазыңдар.

5.20. Төмендегі теңдеулермен берілген эллипстің фокустарының координаталары мен жарты өстерінің ұзындықтарын анықтаңдар:

1) $4x^2+9y^2=36$;
2) $4x^2+144y^2=576$;
3) $x^2+9y^2-9=0$;
4) $9x^2+25y^2-1=0$.

5.21. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ эллипсінде жататын және оның фокустарынан бірдей қашықтықта орналасқан нүктенің координаталарын анықтаңдар.

5.22. $M_1(3; 5)$, $M_2(-1; 2)$ және $M_3(0; 3)$ нүктелерінің қайсысы $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ теңдеуімен берілген эллипстің: 1) бойында; 2) ішінде; 3) сыртында орналасқан?

5.23. Төмендегі теңдеулермен берілген гиперболалардың жарты өстері мен фокустарының координаталарын табыңдар:

1) $9x^2-4y^2-36=0$;
2) $25x^2-16y^2-1=0$;
3) $x^2-y^2-5=0$;
4) $10x^2-2y^2-10=0$.

5.24. 1) $y^2=6x$; 2) $x^2=-4y$; 3) $y^2=-2x$; 4) $x^2=3y$; 5) $2x^2-3y=0$; 6) $3y^2+16x=0$ теңдеулерімен берілген параболаның фокустарының координаталары мен директрисаларының теңдеулерін жазыңдар.

В

5.25. 1) $M_1\left(2; \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ және $M_2(-3; 0)$ нүктелері; 2) $M_1(0; 3)$ және $M_2(4; 1)$ нүктелері арқылы өтетін эллипстің қарапайым теңдеуін жазыңдар.

5.26. Фокусы: 1) $F(3; 0)$; 2) $F(0; 5)$ нүктесінде орналасқан параболаның теңдеуін жазыңдар.

5.27. Директрисасы: 1) $x+15=0$; 2) $y+12=0$ теңдеуімен берілген параболаның теңдеуін жазыңдар.

5.28. 1) Төбелерінің арақашықтығы 8 см, ал фокустарының арақашықтығы 10 см болатын: 2) A (4; 0) және B $(4\sqrt{17};\ 4)$ нүктелері арқылы өтетін гиперболаның теңдеуін жазыңдар.

5.29. $\frac{x^2}{35}+\frac{y^2}{10}=1$ эллипсімен фокустары ортақ және $M(4\sqrt{2};3)$ нүктесі арқылы өтетін гиперболаның теңдеуін жазыңдар.

C

5.30. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{9}=1$ гиперболасымен фокустары ортақ $M(4;\ \sqrt{2})$ нүктесі арқылы өтетін гиперболаның теңдеуін жазыңдар.

5.31. Абсциссасы 8-ге тең M нүктесі $y^2=8x$ параболасының бойында жатыр деп есептеп, FM фокальды радиусын табыңдар. Мұнда F − парабола фокусы. Мұнда ***фокальды радиус*** деп парабола нүктесінен фокусқа дейінгі қашықтықты атайды.

5.32. $x^2=-12\,y$ теңдеуімен берілген параболаның бойынан фокальды радиусы 9-ға тең нүктенің координаталарын табыңдар.

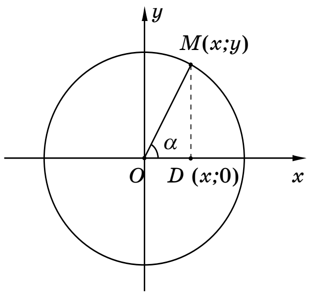
5.33. Жер бетімен сүйір бұрыш жасайтындай етіп, лақтырылған тас парабола бойымен ұшып, 24 м қашықтықта құлады. Тастың жер бетінен ең биік көтерілген нүктесі жерден 6 м биіктікте деп алып, осы тастың ұшу траекториясын табыңдар.

5.34. Параметрі p-ға тең параболаға ABC тең қабырғалы үшбұрышы іштей сызылған. Үшбұрыштың бір төбесі параболаның төбесімен беттеседі деп есептеп, үшбұрыштың қабырғасын табыңдар.

5.4. 0°-ТАН 180°-ҚА ДЕЙІНГІ АРАЛЫҚТАҒЫ БҰРЫШТАРДЫҢ ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ФУНКЦИЯЛАРЫ

5.4.1. 0°-тан 180°-қа дейінгі аралықтағы бұрыштардың синусы, косинусы және тангенсі.

Осыған дейін біз синустың, косинустың және тангенстің мәндерін тек сүйір бұрыштар үшін ғана анықтап келдік. Енді оларды 0°-тан 180°-қа дейінгі аралықтағы кез келген бұрыш үшін анықтайық.



5.17-сурет

xOy жазықтығындағы бірлік шеңбердің (радиусы 1-ге тең) (5.17-сурет) бойынан I ширекте жататын M (x, y) нүктесін алып, осы нүктеден Ox өсіне перпендикуляр түсіреміз. Перпендикулярдың табаны D $(x;$ $0)$ болады. Ox өсінің оң бағытымен OM сәулесі α бұрышын жасайды. Онда OMD тік бұрышты үшбұрышынан

$$\sin\alpha = \frac{MD}{OM};\ \cos\alpha = \frac{OD}{OM};\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{MD}{OD}$$

теңдіктерін аламыз.

Мұнда $MD=y$, $OD=x$ және $OM=1$ болғандықтан,

$$\sin\alpha=y,\ \cos\alpha=x,\ \operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}. \qquad (1)$$

Осы сияқты $0°\leqslant\alpha\leqslant180°$ теңсіздігін қанағаттандыратын кез келген α бұрышының синусын, косинусын және тангенсін анықтаймыз. Басқаша айтқанда, егер OM сәулесі Ox өсінің оң бағытымен α $(0°\leqslant\alpha\leqslant180°)$ бұрышын жасайтын болса, онда α бұрышының синусын, косинусын және тангенсін сәйкес (1) формула бойынша анықтаймыз. Мұнда α бұрышының тангенсін анықтағанда $\alpha\neq90°$ болатынын ескеру керек. Егер $\alpha\neq90°$ болса, онда $x=0$, $y=1$. Сондықтан $\sin90°=1$, $\cos90°=0$, ал $\operatorname{tg}90°$ анықталмайды, өйткені санды нөлге бөлуге болмайды.

Егер $\alpha=0°$ болса, онда $x=1$, $y=0$. Сондықтан $\sin0°=0$, $\cos 90° = 0$, $\operatorname{tg}90°= 0$.

Егер $\alpha=180°$ болса, онда $x=-1$, $y=0$. Олай болса, $\sin180°=0$, $\cos180°=-1$, $\operatorname{tg}180°=0$. Шеңбердің бойындағы кез келген $M(x;\ y)$ нүктесі үшін $x^2+y^2=1$ болатындықтан, $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha=1$

теңдігі орындалады. Олай болса, 0°-тан 180°-қа дейінгі аралықтағы кез келген α бұрышы үшін тригонометрияның негізгі теңдігі, сондай-ақ басқа да тригонометриялық формулалар орындалады:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, (\alpha \neq 90°)\,;\; \mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, (\alpha \neq 0°,\, \alpha \neq 180°)\,.$$

$0 \leqslant y \leqslant 1$ болғандықтан, $0 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1$ теңсіздігі, сол сияқты $-1 \leqslant x \leqslant 1$ болғандықтан, $-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$ теңсіздігі орындалады. Осыдан $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ болғанда $|\sin\alpha| = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$, $|\cos\alpha| = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$ формулалары орындалатынын көреміз.

5.5.2. Келтіру формулалары.

Біз осыған дейін $0° \leqslant \alpha \leqslant 90°$ болғанда $\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha$ $\cos(90°-\alpha)=\sin\alpha$,

$$\mathrm{tg}(90°-\alpha)=\mathrm{ctg}\alpha, \qquad \mathrm{ctg}(90°-\alpha)=\mathrm{tg}\alpha. \qquad (2)$$

формулаларының орындалатынын дәлелдедік. Осы сияқты бұл формулалардың кез келген $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$, бұрышы үшін орындалатынын дәлелдеуге болады. Яғни

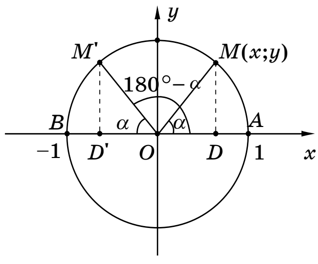
$$\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha, \qquad \cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha,$$
$$\mathrm{tg}(180°-\alpha)=\mathrm{tg}\alpha,\ (\alpha \neq 90°) \qquad \mathrm{ctg}(180°-\alpha)=-\mathrm{ctg}\alpha, \qquad (3)$$
$$(\alpha \neq 0°,\ \alpha \neq 180°)$$

формулаларының орындалатынын дәлелдейік.

Шынында да, OMD және $OM'D'$ тік бұрышты үшбұрыштарының сүйір бұрышы мен гипотенузалары тең (5.18-сурет). Олай болса, OMD және $OM'D'$ үшбұрыштарының теңдігінен $OD=OD'$, $OM=OM'$. Ал M' II ширекте жатқандықтан, M' $(-x,\ y)$ және $D'(-x,\ 0)$ болады. Онда анықтама бойынша $\sin(180°-\alpha)=y$ және $\sin\alpha=y$ теңдіктерінен $\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha$ теңдігін, ал $\cos(180°-\alpha)=-x$ және $\cos\alpha = x$ теңдіктерінен $\cos(180°-\alpha) = -\cos\alpha$ теңдігін аламыз. Енді $\alpha \neq 90°$ болғанда $\mathrm{tg}(180°-\alpha) = \sin(180°-\alpha) : \cos(180°-\alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$, ал $\alpha \neq 0°$, $\alpha \neq 180°$ болғанда $\mathrm{ctg}(180°-\alpha)=\cos(180°-\alpha):\sin(180°-\alpha)= -\cos\alpha : \sin\alpha = -\mathrm{ctg}\alpha$ теңдігін аламыз.

Дәлелдеу керегі де осы.

(2) және (3) формулаларды ***келтіру формулалары*** деп атаймыз. Оларды біріктіріп, төмендегі кесте түрінде есте сақтау оңай болады:



5.18-сурет

	$90°-\alpha$	$90°+\alpha$	$180°-\alpha$
sin	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$
cos	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$
tg	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$
ctg	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$

Мұнда $\cos(90°+\alpha)=\cos(180°-(90°-\alpha))=-\cos(90°-\alpha)=-\sin\alpha$. Басқа формулалар да $(90°-\alpha)$ айырмасы үшін осы сияқты дәлелденеді.

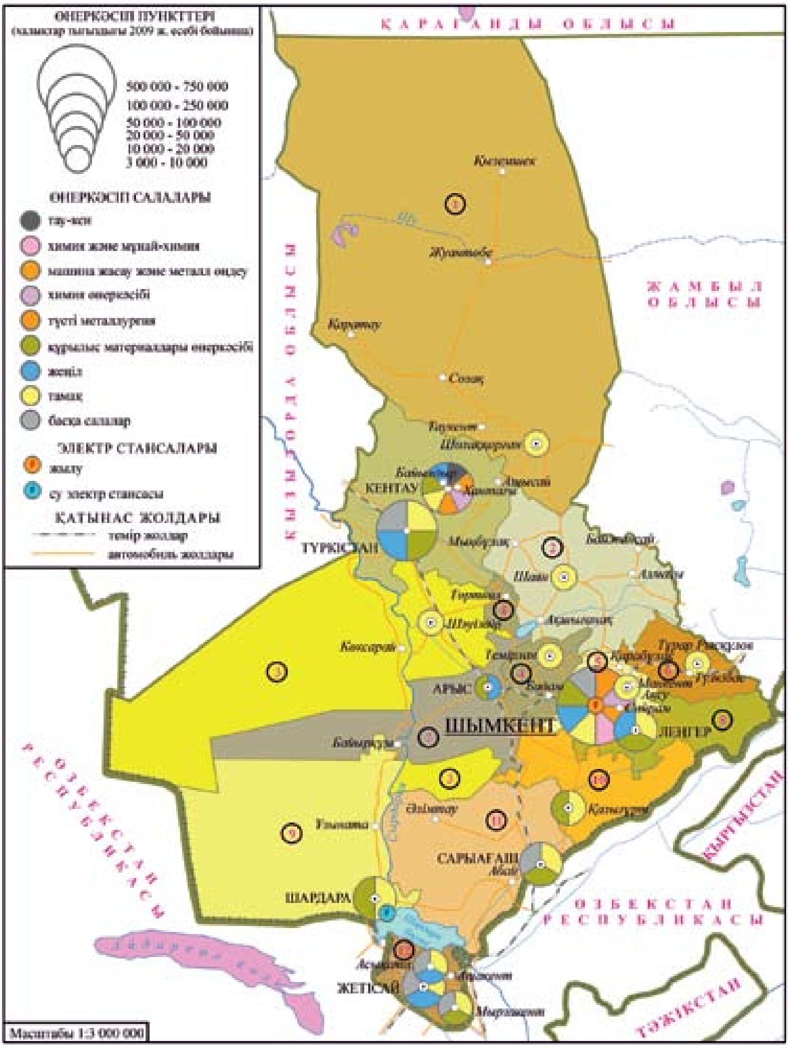
Т Ғалымдар тригонометрия элементтерін ежелгі замандарда-ақ қолдана білген. Біздің эрамызға дейінгі ІІ ғасырда грек ғалымдары дөңгелек хордаларының радиусқа байланысты кестелерін құрастырған ($a = 2R\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$, мұнда a – хорда ұзындығы, R – шеңбер радиусы, ал α – хордаға керілген центрлік бұрыш). Бұл, шын мәнінде, синустың кестесі еді. Ал үнді ғалымдары есептеу жұмыстарын жеңілдету үшін косинустарды қолдануды ұсынған және оларда аса үлкен дәлдікпен құрастырылған синус және косинус кестелері болды. Бұл салада Орта Азия ғалымдары да үлкен үлес қосқан. Мәселен, әл-Хорезмидің (XIII ғ.) астрономиялық трактаттарында синус пен тангенс кестелері кездеседі. Ал 1260 жылы Насир ад-Дин ат-Туси тригонометрияның астрономияға тәуелсіз, жүйелі кестесін ұсынған және мұнда «доғаның синусы», «бұрыштың тангенсі» ұғымдары кездеседі. Еуропалық ғалымдар арасынан алғаш рет тригонометрияны жүйелі түрде мазмұндаған неміс математигі Региомонтан (1436–1476) болды.

Тригонометриялық функциялардың қазіргі атаулары XVI–XVIII ғасырларда пайда болды. Латын тілінен аударғанда «синус» термині «дөңестік» дегенді білдіреді. Косинус, котангенс атаулары латынның complementom – толықтауыш деген сөзінің қысқартылуынан «ко» қосымшасы алынған. $\sin x$ және $\cos x$ белгілеулерін алғаш рет И. Бернулли мен Л. Эйлер 1739 жылы ұсынып, өздері қолдана бастаған.

?

1. 0°-тан 180°-қа дейінгі аралықтағы бұрыштардың тригонометриялық функциялары қалай анықталады? Тригонометриялық бірлік дөңгелек деген не?
2. Келтіру формулаларын жазып көрсетіңдер.

ПТ 5.19-суретте Оңтүстік Қазақстан облысы картасы берілген. Көрсетілген масштаб бойынша: 1) Түркістан, Жетісай, Сарыағаш және Ленгер қалалары координаталарын жуықтап анықтаңдар және олардың сынып бойынша алынған орта мәнін табыңдар; 2) Жетісай мен Сарыағашты қосатын түзу теңдеуін жазыңдар; 3) Төбесі Шымкент қаласында болатын және Түркістан (Ленгер) қаласы арықылы өтетін парабола теңдеуін жазыңдар; 4) Шымкент, Түркістан және Жетысай қалалары арқылы өтетін шеңбер центрі Шымкент қаласынан қандай қашықтықта орналасады?



ЕСЕПТЕР

А

5.35. Төмендегі бұрыштардың синусын, косинусын және тангенсін табыңдар: 1) 120°; 2) 135°; 3) 150°.

5.36. 1) sin150°; 2) cos135°; 3) tg120°-тың мәндерін табыңдар.

5.37. 1) sin α=0,2; 2) cos α=–0,7; 3) tg α=–0,4 деп алып, сәйкес α бұрышын салыңдар.

В

5.38. $M_1(0;1)$, $M_2\left(0,5;\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $M_3\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $M_4\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2};\ 0,5\right)$, $A(1;0)$, $B(-1;0)$ нүктелері бірлік шеңбердің бойында жататынын көрсетіңдер. AOM_1, AOM_2, AOM_3, AOM_4, AOB бұрыштарының синусын, косинусын және тангенсін табыңдар.

5.39. 1) $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$; 2) cos α=–0,5; 3) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 4) $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; болса, сәйкес α бұрышы үшін sinα мен tg α-ның мәндерін табыңдар.

5.40. 1) sinα=0,6; 0°<α<90°; 2) $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$; 90°<$\alpha$<180°; 3) $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; 90°<$\alpha$<180° болса, сәйкес α бұрышы үшін cos α мен tg α-ның мәндерін табыңдар.

5.41. 1) cos α=0,5; 2) $\cos\alpha = -\dfrac{2}{3}$; 3) cos α=–1 болса, sinα-ның мәндерін табыңдар.

5.42. 1) $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 2) sin α=0,25; 3) sin α=0 деп алып, cos α-ның мәндерін табыңдар.

5.43. 1) $\mathrm{tg}\alpha = -\dfrac{5}{12}$ деп алып, sin α, cos α-ның мәндерін табыңдар.

5.44. A нүктесінің координаталарын: 1) (2; 2); 2) (0; 3); 3) $\left(-\sqrt{3};1\right)$; 4) $\left(-2\sqrt{2};2\sqrt{2}\right)$ деп алып, OA сәулесінің Ox өсінің оң бағытымен жасайтын бұрышын анықтаңдар.

5.45. 1) $\sin\angle A = \dfrac{2}{3}$; 2) $\cos\angle A = \dfrac{3}{4}$; 3) $\cos\angle A = -\dfrac{2}{5}$ деп алып, A бұрышын салып көрсетіңдер.

5.46. Бірлік шеңберді қиятын OA сәулесі Ox өсінің оң бағытымен α-ға тең бұрыш жасайды. Осындағы: 1) $OA=3$, $\alpha=45°$; 2) $OA=1,5$, $\alpha=90°$; 3) $OA=5$, $\alpha=150°$; 4) $OA=1$, $\alpha=180°$; 5) $OA=2$, $\alpha=30°$ болса, бірлік шеңбердің бойындағы A нүктесінің координаталарын анықтаңдар.

5.5. ҚИЫН ДЕҢГЕЙЛІ ҚОСЫМША ЕСЕПТЕР

5.47. Үшбұрышты оның бір төбесі арқылы өтетін екі түзумен тең шамалы үш бөлікке бөліңдер.

5.48. Алдыңғы есептегі үшбұрыштың орнына параллелограмды алып, есепті шығарыңдар.

5.49. Диагональдары берілген барлық параллелограмдардың ішінен ромбының ауданы ең үлкені болатынын дәлелдеңдер.

5.50. ABC үшбұрышының AA_1 және BB_1 медианалары O нүктесінде қиылысады. P және Q нүктелері – сәйкесінше AO және BO кесінділерінің орталары. A_1B_1PQ – параллелограмм болатынын дәлелдеңдер.

5.51. c-ның қандай мәндерінде $2x+y+c=0$ түзуі мен $x^2+y^2=4$ шеңбері: 1) қиылысады; 2) қиылыспайды; 3) жанасады?

5.52. Тең бүйірлі үшбұрыштың бір бұрышы $120°$, ал табаны 10 см. Бүйір қабырғасына жүргізілген биіктігін табыңдар.

5.53. $ABCD$ шаршысында P нүктесі CD қабырғасында жатыр, ал AK – BAP ($K \in BC$) бұрышының биссектрисасы. $AP=BK+DP$ теңдігін дәлелдеңдер.

5.54. AE және BF – табаны AC болатын тең бүйірлі ABC үшбұрышының биіктіктері. Егер $AE : BF = \frac{1}{2}$ болса, онда табанындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

5.55. Тік бұрышты трапецияның диагональдары өзара перпендикуляр. Егер трапецияның биіктігі 2 см, ал үлкен табаны 3 см болса, онда оның кіші табанын табыңдар.

5.56. Радиустары 1-ге, 2-ге және 3-ке тең шеңберлер бір-бірімен сырттай жанасқан және олардың әрқайсысы 4-шеңбермен іштей жанасады. 4-шеңбердің радиусын табыңдар.

5.57. Берілген үшбұрыш берілген бұрышпен көрінетіндей барлық нүктелер жиынын табыңдар.

5.58. Үшбұрыштың екі қабырғасы 6 см және 8 см. Осы қабырғаларға жүргізілген медианалары өзара перпендикуляр. Үшбұрыштың ауданын табыңдар.

5.59. ABC үшбұрышының биіктіктері O нүктесінде қиылысады. Егер $OC=AB$ болса, онда $\angle C$-ны табыңдар.

5.60. ABC үшбұрышында $MB=AC$, MB – медианасы. BA және AC қабырғаларының созындысынан $AD=AB$, $CE=CM$ болатындай D және E нүктелері алынған. $DM \perp BE$ екенін дәлелдеңдер.

5.61. Үшбұрыштың табаны 26 см, ал бүйір қабырғаларының медианалары 30 см және 39 см. Үшбұрыштың ауданын табыңдар.

5.62. Үшбұрыштың медианалары 3 см, 4 см, 5 см. Үшбұрыштың ауданын табыңдар.

5.63. Дөңес $ABCD$ төртбұрышының A және C бұрыштарының биссектрисалары B және D бұрыштарының биссектрисаларымен төрт нүктеде қиылысады. Осы төрт нүкте бір шеңбер бойында жататынын дәлелдеңдер.

5.64. Үшбұрыштың екі қабырғасы 14 см және 35 см, ал олардың арасындағы биссектрисасы 12 см. Үшбұрыштың ауданын табыңдар.

5.65. Жазықтықта берілген екі нүктеге дейінгі арақашықтықтарының қатынасы $m:n$ болатындай барлық нүктелер жиынын анықтаңдар.

5.66. Үшбұрыштың бір төбесінен жүргізілген биіктік пен медиана осы бұрышты өзара тең үш бөлікке бөледі. Үшбұрыштың бұрыштарын табыңдар.

5.67. ABC үшбұрышының ішінен $S_{ABP}=S_{ACP}=S_{BCP}$ болатындай етіп, P нүктесі алынған. P – үшбұрыш медианаларының қиылысу нүктесі болатынын дәлелдеңдер.

5.68. Параллелограмм диагональдарының қиылысу нүктесінде қиылысатын және параллелограмм қабырғаларына параллель екі түзу оны 4 бөлікке бөледі. Диагональдың екі жақ бөлігінде орналасқан бөліктер тең шамалы болатынын көрсетіңдер.

5.69. ABC үшбұрышының A төбесінен BC қабырғасын D нүктесінде қиып өтетін түзу жүргізілген. $\frac{CD}{BC} = \lambda (\lambda < \frac{1}{2})$. BC қабырғасының B және D нүктелері арасынан $CD=DE$ теңдігі орындалатындай етіп, E нүктесі алынған және осы нүкте арқылы AC-ға параллель, ал AB-ны F нүктесінде қиып өтетін түзу жүргізілген. $ACEF$ трапециясы мен ACD үшбұрышының аудандарының қатынасын табыңдар.

5.70. Табаны AC болатын ABC тең бүйірлі үшбұрышының биіктігі – AD. Егер $S_{ABD}=4$ см^2, $S_{ACD}=2$ см^2 болса, үшбұрыш қабырғаларын табыңдар.

5.71. Параллелограмм бұрыштарының биссектрисалары қиылысқаннан шығатын төртбұрыш тік төртбұрыш болатынын және оның диагоналы параллелограмм қабырғаларының айырмасына тең болатынын дәлелдеңдер.

5.72. Дөңес $ABCD$ төртбұрышында $\angle BAC = 20°$, $\angle BCA = 35°$, $\angle BDC = 40°$, $\angle BDA = 70°$. Төртбұрыш диагональдары арасындағы бұрышты табыңдар. Бұл бұрыш бір мәнді түрде анықтала ма?

5.73. ABC тік бұрышты үшбұрышының бір сүйір бұрышы 30°-қа тең. D нүктесі – AB гипотенузасының ортасы, ал O – оған іштей сызылған шеңбер центрі. CDO бұрышын табыңдар.

5.74. Қабырғасы a-ға тең тең қабырғалы ABC үшбұрышының ішкі нүктесінен оның AB, BC, CA қабырғаларына түсірілген перпендикулярлардың ұзындығы сәйкесінше m-ге, n-ге, k-ға тең. ABC үшбұрышы ауданының төбелері перпендикулярлар табандарында болатын үшбұрыштың ауданына қатынасын табыңдар.

5.75. Тең бүйірлі үшбұрыштың табанындағы және төбесіндегі бұрыштардың биссектрисалары жүргізілген. Егер үшбұрыш табанындағы бұрыштың синусы $\frac{\sqrt{975}}{32}$-ге тең болса, онда биссектрисалар арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

5.76. Тең бүйірлі үшбұрыштың табаны 12 см, ал іштей сызылған шеңбер радиусы 3 см. Үшбұрыштың ауданын табыңдар.

5.77. Параллелограмм төбелері оның ішінде орналасқан нүктемен қосылып, параллелограмды 4 үшбұрышқа бөлген. Қарама-қарсы орналасқан үшбұрыштар аудандарының қосындылары тең болатынын көрсетіңдер.

5.78. ABC үшбұрышының сыртына AB және BC қабырғаларына $ABFH$ және $BCDK$ шаршылары салынған. ABC үшбұрышының BE медианасының созындысы BFK үшбұрышының биіктігі болатынын дәлелдеңдер.

5.79. ABC үшбұрышында $\angle B = 90°$. AD және AE кесінділері A бұрышын тең үш бөлікке бөлетіндей етіп, BC катетінен D және E нүктелері алынған. Егер $AD=a$, $AE=b$ болса, онда $S_{ADB} : S_{AEB}$ -ны табыңдар.

5.80. ABC тең қабырғалы үшбұрышының ішінен алынған X нүктесінен оның қабырғаларына дейінгі қашықтықтардың қосындысы X нүктесіне тәуелсіз болатынын көрсетіңдер.

5.81. Үшбұрыштың екі биіктігі өздері түсірілген қабырғалардан кем емес. Үшбұрыштың бұрыштарын табыңдар.

5.82. Тең бүйірлі трапецияның ауданы S-ке, ал диагональдарының арасындағы бүйір қабырғасына қарсы жатқан бұрышы α-ға тең. Трапецияның биіктігін табыңдар.

5.83. Тең қабырғалы ABC үшбұрышының ішкі X нүктесінің AD, BE және CF биіктіктеріндегі проекциялары сәйкесінше K, P және Q. $AK+BP+CQ$ қосындысының мәні X нүктесіне тәуелсіз болатынын көрсетіңдер.

5.84. Әрбір үшбұрыштың медианаларының қосындысы үшбұрыш периметрінен кем, ал жарты периметрден артық болатынын көрсетіңдер.

5.85. Ауданы S-ке тең $ABCD$ тік төртбұрышының ішінен X нүктесі алынған. $S \leqslant AX \cdot CX + BX \cdot DX$ теңсіздігін дәлелдеңдер.

ЕСЕПТЕРДІҢ ЖАУАПТАРЫ

Қайталау: 0.1. 60°, 120°. **0.2.** 30°. **0. 3.** 180°. **0. 4.** 90°. **0. 5.** 90°. **0. 6.** 24 см. **0. 7.** 12 см. **0. 10.** 100°, 80°. **0. 14.** $180° - \frac{\alpha + \beta}{2}$. **0. 15.** Болмайды. **0. 16.** 8 см, 24 см. **0. 18.** 10 см, 20 см, 20 см. **0. 20.** ΔBPO және ΔCQO тең бүйірлі. Онда $PQ=PO+OQ=PB+QC$. **0. 21.** Параллельдік белгіні қолданыңдар.

I. Төртбұрыштар

1. 1.1. 90°. **1.2.** 60°, 60°, 120°, 150°, 150°. **1.3.** 1) 1440°; 2) 1800°. **1.4.** 1) 8; 2) 11; 3) 24; 4) 10. **1.5.** 1) 10; 2) 12; 3) 36; 4) 40. **1.6.** 1) Мүмкін, n=53; 2) Мүмкін, n=22; 3) Мүмкін емес. **1.7.** Мүмкін емес. **1.8.** $n-3$ диагональ өтеді; 1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 7. **1.9.** Мүмкін емес. **1.10.** 1) Мүмкін емес; 2) Мүмкін емес. **1.12.** 1) 540°-қа өседі. **1.13.** 1) 4; 2) 3. **1.14.** 1) Мүмкін; 2) Мүмкін емес. **1.15.** MN және PK-ның орта перпендикулярларын жүргізіңдер. **1.16.**3. **1.17.** $\frac{n(n-3)}{2}$. **1.18.** $AB=AD$, $BC=CD$. **1.19.** $n-1$. **1.20.** $n=5$. **1.21.** Дұрыс емес, мысалы, параллелограмм. **1.22.** 180°. **1.24.** 26°, 154°, 26°, 154°. **§2. 1.26.** 1) 80°, 100°; 2) 105°, 75°; 3) 70°, 110°; 4) 60°, 120°; 5) 60°, 120°. **1.27.** 1) 45°, 135°; 2) 60°, 120°; 3) 100°, 80°. **1.28.** 1) 110°, 70°; 2) 130°, 50°; 3) 150°, 30°. **1.29.** 10 см, 12 см. **1.2. 1.31.** 10 м. **1.32.** 3 см. **1.34.** 32 см. **1.37.** 9 см, 6 см. **1.38.** 0,6 м, 0,8 м. **1.39.** 1,1 см, 0,8 см, 1,1 см. **1.40.** 1) Мүмкін емес; 2) Мүмкін емес; 3) Мүмкін. **1.46.** Қабырғасы және екі жарты диагональдары бойынша үшбұрыш салу керек. **1.48.** 10 см, 15 см. **1.3. 1.59.** Жоқ. **1.60.** Жоқ. **1.63.** 60 см. **1.64.** 10 см, 18 см. **1.66.** 2) 18 см. **1.67.** 60° және 30°. **1.68.** 20 см, 12 см. **1.69.** 12 см. **1.70.** 10 см, 25 см. **1.73.** 80°, 100°. **1.74.** 30°, 150°. **1.75.** 4 м. **1.77.** 2 м. **1.78.** 10 см. **1.85.** 45°. **1.86.** $d_1 = \frac{4a}{4} = a$, $a = d_1 = \frac{p}{2}$. Осыдан ромб бұрыштары 60° және 120° болатыны шығады.

1.88. Қабырғасы мен диагональдарының жартысы бойынша үшбұрыш салыңдар. **1.98.** Егер AD түзуі BC-ны E нүктесінде қиып өтсе және $AD>DE$ болса, онда диагональдарының D қиылысу нүктесі болатындай, бір қабырғасы BC түзуінде жататындай және диагоналының жартысы DE болатындай параллелограмм салса, жеткілікті. (Егер $AD<DE$ болса, онда AD-ның орнына BD-ны не CD-ны алу керек). **1.102.** Егер P, Q, R, S шаршы қабырғаларындағы берілген нүктелер болса, онда $QT \perp PR$, $QT=PR$ болатындай T нүктесін салу керек. Онда ST түзуі шаршы қабырғасы арқылы өтетін түзу болады. **1.5. 1.103.** 1) Параллелограмм; 2) Ромб; 3) Тік төртбұрыш; 4) Шаршы. **1.105.** Кесіндіні тең: 1) 3 бөлікке; 2) 5 бөлікке бөлу керек. **1.106.** $a+b$.

1.107. $\frac{p}{2}$. **1.108.** 11 дм. **1.109.** 8 см, 7 см, 1см. **1.113.** *p*. **1.114.** d_1+d_2. **1.119.** Үшбұрыштың орта сызықтары. **1.121.** *ABC* үшбұрышында *CH* – биіктік, *CD* – биссектриса болса, онда $\angle DCH = \frac{1}{2}(\angle A - \angle B)$ және *AD:BD=AC:BC* теңдіктері орындалатынын қолданыңдар. **1.122.** *BOC* бұрышы және оның ішкі *A* нүктесі берілсін. *OA* сәулесін жүргізіп, оның бойынан *OA:AD*=2:1 болатындай *D* нүктесін аламыз. $DE \parallel OB$ жүргіземіз, $E \in OC$. Онда $EA \cap OB = K$ және *EA:AK*=1:2. Есептің 2 шешімі бар. **1.1.6. 1.123.** Мүмкін емес. **1.124.** 1) Мүмкін емес; 2) Мүмкін. **1.126.** 110°, 70°. **1.127.** 112°, 109°. **1.128.** 40°, 140°, 80°, 100°. **1.129.** 20 см. **1.130.** 3 м, 4 м. **1.131.** 10 см, 34 см. **1.132.** 5 см. **1.134.** 132 см. **1.136.** 30 см. **1.137.** 15 км. **1.138.** 4 м, 6 м. **1.139.** 5 см, 9 см. **1.140.** 8 см, 12 см. **1.141.** 2 см, 5 см. **1.142.** 3 см. **1.145.** 14,2 см. **1.146.** 60°, 120°. **1.150.** $d_1, d_2, a+b$ бойынша үшбұрыш салыңдар. **1.159*.** 2) Алдымен $y = \frac{a \cdot b}{d}$ кесіндісін салып, сонан соң $x = \frac{y \cdot c}{e}$ кесіндісін салу керек. **1.1.7. 1.161.** 1) Тең қабырғалы үшбұрыш; 2) Тікбұрышты үшбұрыш; 3) Тең бүйірлі үшбұрыш; 4) Тең бүйірлі үшбұрыш. **1.162.** 1 см, 2 см. **1.164.** $\frac{S-c}{2}$. **1.165.** 4 см. **1.166.** 1) Тең бүйірлі; 2) Тең қабырғалы. **1.167.** 6 см. **1.168.** Медианалар жүргізу керек. **1.169.** 1) Мүмкін емес; 2) Мүмкін емес. **1.171.** 1) Мүмкін; 2) Мүмкін; 3) Мүмкін емес. **1.174.** 9 см. **1.175.** 52°, 38°. **1.177.** 4 шеңбер бар. **1.180.** $\angle OAB = \angle OBA = x$, $\angle ACO = \angle CAO = y$, $\angle OBE = u$, $\angle EBH = v$, $\angle CBH = z$, деп алсақ, онда $x=z$ теңдігін көрсетсе, жеткілікті. Шынында да, $\angle A + \angle B + \angle C = 180° \Rightarrow x+y+y+\angle OCB + \angle OBC + x = 180° \Rightarrow 2x + 2y + 2(u+v+z) = 180° \Rightarrow 2x+2y+2(u+v+z)=180° \Rightarrow x+y+z+u+v=90°$. Екіншіден, $\angle C + \angle HBC = 90° \Rightarrow y+u+v+z+z=90°$. Сонымен, $x+y+u+v+z=y+u+v+2z \Rightarrow x=z$. **1.181.** 1.180-есепті қараңдар. **1.183.** 1.180-есепті қараңдар. Егер *BN* – медиана, *BE* – биссектриса, *BH* – биіктік болса, онда үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбер центрі *N* нүктесінен оның қабырғасына жүргізілген (орта) перпендикуляр бойында жатады. Ал $\angle OBE = \angle EBH$ бұрышын салып, *OA*-ның *NO*-мен қиылысу *O* нүктесін анықтаймыз. **1.184.** 1.182-есепті қараңдар. **1.185.** ΔAOB-ны тік төртбұрышқа дейін толықтырыңдар. **1.8. 1.187.** 1) Болмайды; 2) Болады; 3) Болады. **1.188.** 1) Болады; 2) Болмайды. **1.190.** 1) Болады; 2) Болмайды; 3) Болады. **1.191.** 30 см. **1.192.** *R*, α бойынша үшбұрыш салу керек. **1.196.** *R*. **1.198.** 56 см. **1.201.** Тік төртбұрыш. **1.203.** Оған іштей шеңбер сызуға болады, себебі, тең хордалар центрден бірдей қашықтықта жатады. **1.204.** Мүмкін емес. **1.205.** Алдымен екі қиылысатын хордалардың арасындағы бұрыш олармен керілетін (вертикаль бұрыштарға) екі доғаның жарым қосындысымен өлшенетінін көрсетіңдер. Егер O – диагональдарының қиылысу нүктесі, P, Q – бүйір қабырғаларының жанасу нүктелері болса, онда $\angle POQ = 180°$ болатынын көрсетсе, жеткілікті. **1.206. 1.** 205-есепке ұқсас.

II. Пифагор теоремасы

2.1. 1) $\frac{\sqrt{11}}{6}$; 2) $\frac{4}{5}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **2.3.** 1) 5; 2) $\sqrt{2}$; 3) $\sqrt{61}$: 4) 1,3. **2.5.** 1) 4; 2) 12; 3) 1,2. **2.6.** 5 м немесе $\sqrt{7}$ м. **2.7.** Мүмкін емес. **2.8.** 1) 5 см; 2) 17 см; 3) 6,5 м. **2.9.** 109 см. **2.10.** 1) Иә; 2) жоқ; 3) иә; 4) иә; 5) жоқ; 6) жоқ; 7) иә. **2.11.** 1) Мүмкін, 10, 24, 26; 2) мүмкін емес. **2.12.** 1) Мүмкін емес; 2) мүмкін, 3, 4, 5. **2.13.** 3, 4, 5. **2.14.** 10 см, 6 см. **2.15.** 13 см. **2.16.** 4 м. **2.17.** $\frac{\sqrt{3}}{2}a$. **2.19.** 16 см. **2.21.** $2\sqrt{29}$ м≈10,77 м. **2.22.** 1) $c=15$ см, $h=\frac{36}{5}$ см, $a_c=\frac{48}{5}$ см, $b_c=\frac{27}{5}$ см; 2) $b=5$ см, $h=\frac{60}{13}$ см, $a_c=\frac{144}{13}$ см, $b_c=\frac{25}{13}$ см. **2.23.** $2\sqrt{21}$ см, 6 см. **2.25.** $\beta=90°-\alpha$; $b=c\cdot\cos\alpha$; $a=c\cdot\sqrt{1-\cos^2\alpha}$. **2.27.** $\sqrt{a^2+b^2}$. **2.29.** $3\sqrt{2}$ кг. **2.30.** 3 см. **2.31.** $a=13$ см, $b=12$ см, $d_1=5$ см, $d_2=\sqrt{601}$ см. **2.32.** 1) $\frac{60}{13}$ м; 2) $\frac{48}{5}$ м. **2.33.** 1) $\frac{168}{25}$ см; 2) $\frac{120}{17}$ дм. **2.36.** $\frac{85}{13}$ см, $\frac{204}{13}$ см. **2.37.** a – орта хордасы болса, онда $r=\frac{\sqrt{3}}{3}a$. **2.38.** $\sqrt{178}$ см. **2.40.** $\frac{c}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}c$.

2.2. **2.41.** 1) $AC=15$; $\cos A=\frac{15}{17}$, $\cos B=\frac{8}{17}$, $\sin A=\frac{8}{17}$, $\sin B=\frac{15}{17}$, $\mathrm{tg}A=\frac{8}{15}$. $\mathrm{tg}B=\frac{15}{8}$. **2.42.** Тік бұрышты үшбұрыш салыңдар. **2.43.** $c=\frac{b}{\sin\beta}$, $a=b\cdot\mathrm{ctg}\beta$, $\cos\alpha=\frac{b}{c}=\sin\beta$. **2.44.** $c=\frac{b}{\cos\alpha}$, $a=b\cdot\mathrm{tg}\alpha$, $\sin\beta=\frac{b}{c}=\cos\alpha$. **2.45.** $a=c\cdot\sin\alpha$, $b=c\cdot\cos\alpha$, $\sin\beta=\cos\alpha$. **2.46.** $\frac{\sqrt{2}}{2}a$. **2.47.** $\mathrm{tg}\beta=\frac{7}{4}=1{,}75 \Rightarrow$ $\Rightarrow \beta=60°15'$. **2.48.** 4) а) $c=\frac{3}{\sin 30°27'}$, $b=\frac{3}{\mathrm{tg}30°27'}$, $\beta=59°33'$. **2.49.** $\frac{\sqrt{3}}{2}c$. **2.50.** 1) Оң; 2) теріс; 3) теріс; 4) оң. **2.51.** 4) $\sin\alpha=\frac{1}{4}$, $\mathrm{tg}\alpha=\frac{1}{\sqrt{15}}$. **2.52.** $c=\sqrt{565{,}85}\approx 23{,}79$, $\alpha\approx 31°25'$, $\beta\approx 117°10'$. **2.53.** $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{31}{65}\approx 0{,}4769 \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{\alpha}{2}\approx 25°30' \Rightarrow \alpha\approx 51°$. **2.54.** $\alpha\approx 29°51'$, $\beta\approx 150°09'$. **2.55.** $\alpha\approx 63°42'$, $\beta\approx 116°18'$ **2.56.** 1) $\cos^2\alpha$; 2) $\sin^2\alpha$; 3) $\sin^2\alpha$; 4) 2; 5) $\sin^3\alpha$; 6) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 7) $\sin 5°$; 8) $\cos^2 18°$; 9) 1; 10) 1; 11) $\sin^2\alpha$; 12) 1; 13) $\sin^2\alpha$;

14) $\cos^2\alpha$; 15) 1. **2.57.** 2) $\sin\alpha = \dfrac{8}{17}$; $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{8}{15}$. **2.58.** 3) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{3}$. **2.60.** $R = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a$, $r = \dfrac{\sqrt{3}}{6}a$. **2.61.** 60°. **2.62.** 60°,120°. **2.63.** 1) $\alpha > \beta$; 2) $\alpha < \beta$; 3) $\alpha < \beta$; 4) $\alpha < \beta$; 5) $\alpha < \beta$; 6) $\alpha < \beta$. **2.64.** $\dfrac{\sqrt{3}b}{3}$. **2.65.** 12 м, $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{5}{13} \Rightarrow \alpha \approx 45°14'$. **2.66.** 29 см. **2.67.** 87,72 м. **2.68.** $\angle A = 11'$. **2.69.** $2\sqrt{2}$ см. **2.70.** 1) 50 м; 2) 15 м, 25 м. **2.3.** **2.71.** 3) c=2 см, b=1 см, β=30°. **2.72.** 1) c=12 см, $b=6\sqrt{3}$ см, α=60°. **2.73.** 2) c=13 см, $\sin\alpha = \dfrac{12}{13}$, $\sin\beta = \dfrac{5}{13}$, $\gamma = 90^\circ$. **2.74.** а) c=8 см, $b = 8\sqrt{3}$ см, β=60°. **2.75.** 2) b=12 см, $\sin\alpha = \dfrac{5}{13}$, $\sin\beta = \dfrac{12}{13}$. **2.82.** c=8 см, $b = 4\sqrt{3}$ см, α=30°, β=60°. **2.84.** 1 см. **2.85.** 8 см, 15 см, **2.86.** 9 см, $9\sqrt{3}$ см, 18 см. **2.88.** 5 см, 12 см. **2.91.** R=5, r=2. **2.92.** $\dfrac{240}{17}$ см. **2.94.** 10. **2.95.** 6 см, 8 см, 10 см.

III. Төртбұрыштардың ауданы

3.1. **3.1.** 1) 18,7 см^2; 2) 14 м^2; 3) 1 дм^2. **3.2.** 1) $\dfrac{1}{2}$; 2) $\dfrac{1}{4}$; 3) $\dfrac{3}{4}$; 4) $\dfrac{7}{8}$; 5) $\dfrac{1}{2}$; 2) $\dfrac{1}{4}$; 3) $\dfrac{3}{4}$; 4) $\dfrac{7}{8}$ дм^2. 3) 18 м^2. **3.4.** 1) 4 см; 2) 1,5 дм; 3) $2\sqrt{3}$ м. **3.5.** 1) 1600 мм^2; 2) 0,16 дм^2; 3) 0,0016 м^2. **3.6.** 1) 27,2 см^2; 2) $6\sqrt{2}$ м^2; 3) 21,4 см; 4) 2,7 м. **3.11.** 1) 2 есе өседі; 2) 4 есе өседі; 3) өзгермейді. **3.12.** 1) 10 см, 25 см; 2) 3 м, 3 м. **3.13.** 2200 дана. **3.14.** Шаршы үлкен. **3.2.** **3.23.** $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ см^2. **3.24.** 1) 6 см^2; 2) 1,8 м^2. **3.25.** 1) 1,5 см^2; 2) $5d \cdot m$; 3) $\sqrt{3}$ м^2. **3.26.** 1) $\sqrt{8,4375}$ см^2; 2) $0,0625\sqrt{231}$ см^2; 3) $5,25\sqrt{11}$ м^2; м^2; 4) 12 дм^2. **3.27.** $\alpha = 30°$, h_1=1 см, h_2=2,5 см. **3.28.** 156 см^2. **3.29.** 30°. **3.30.** $\dfrac{d_1 d_2}{2}$. **3.31.** 1) 22,4 см^2; 2) 4,6 м^2. **3.32.** 6 см, 9 см. **3.33.** 8 см. **3.34.** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$. **3.35.** $\dfrac{a^2 \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}{2(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)}$. **3.37.** 480 см^2. **3.38.** 54 см^2. **3.40.** 120 см^2. **3.41.** $3\left(7 - 4\sqrt{3}\right)a^2$. **3.42.** $S = \dfrac{1}{2}\cdot\left(h\sqrt{l^2 + h^2} - h^2\right)$. **3.43.** $\dfrac{\sqrt{3}+3}{4}a^2$. **3.44.** $2\left(\sqrt{2}-1\right)a^2$. **3.45.** 1024 см^2. **3.46.** a=30 см, b=24 см. **3.47.** $a = \dfrac{S + \sqrt{S^2 - 16R^4}}{2R}$, $b = \dfrac{S - \sqrt{S^2 - 16R^4}}{2R}$. Нұсқау: $a + b = \dfrac{S}{R}$,

$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\left(\frac{a-b}{2}\right)^2+4R^2$ теңдіктерін қолданыңдар. **3.51.** $\frac{3}{8}a^2$. **3.52.** Тең бүйірлі тік бұрышты үшбұрыш болатынын көрсетіңдер. 36 см^2. **3.53.** a=6 см табаны, b=5 см, h=4 см. **3.54.** $\frac{hb^2}{4\cdot\sqrt{b^2-h^2}}$.

IV Жазықтықтағы тік бұрышты координаталар жүйесі

4.1. 4.2. 1) $A(5;\ 0)$, $B(0;\ 3)$, $O(0;\ 0)$. **4.3.** 3) $(-a;\ 0)$, $(0;\ -b)$, $(0;\ 0)$. **4.4.** 1) $(a;\ a)$, $(-a;\ a)$, $(-a;\ -a)$, $(a;\ -a)$; 2) $(\sqrt{2}a;\ 0)$, $(0;\ \sqrt{2}a)$, $(-\sqrt{2}a;\ 0)$, $(0;\ -\sqrt{2}a)$. **4.5.** $A(-a;\ 0)$, $B(a;\ 0)$, $C(0;h)$. **4.6.** 1) 4; 2) 3. **4.7.** 1) (0,5; 2,5); 2) $\left(1;\ \frac{8}{3}\right)$; 3) $\left(0;\ \frac{7}{3}\right)$; 4) $\left(\frac{4}{5};\frac{13}{5}\right)$. **4.8.** 1) $\sqrt{10}$; 2) 4; 3) 5; 4) $2\sqrt{5}$. **4.10.** $4\sqrt{2}$ **4.12.** $C(8;\ 0)$, $D(2;\ -4)$. **4.13.** $B(7;\ 3)$. **4.15.** $A_1\left(7;\frac{13}{3}\right)$, $A_3\left(3;\ \frac{17}{3}\right)$, $A_4\left(1;\ \frac{19}{3}\right)$, $A_6\left(-3;\ \frac{23}{3}\right)$. **4.16.** $E\left(2;\ \frac{11}{3}\right)$. **4.17.** $O\left(\frac{36}{5};-\frac{21}{5}\right)$, $R=\frac{\sqrt{697}}{5}$. **4.19.** 1) $C(0;\ -9)$; 2) $\varnothing$, ондай нүкте жоқ. **4.20.** 1) $C(-2{,}7;\ 0)$; 2) $C(-4{,}5;\ 0)$. **4.22.** $\angle B=90°$. **4.23.** $A(5;\ -2)$, $B(5;\ 6)$, $C(-1;\ -4)$. **4.24.** 1) $E\left(-\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)$; 2) $E(0;\ 0)$. **4.26.** $O(-6;\ 4)$, R=4. **4.27.** $O_1(-1;\ 1)$, R_1=1; $O_2(-5;\ 5)$, R_2=5. **4.30.** 100 см. **4.31.** 13 см. 4.2. **4.33.** $x+2y-1=0$. **4.34.** 1) $3x+4y+1=0$; 2) $x+y-7=0$. **4.35.** 2) $A(4;\ 0)$, $B(0;\ 3)$; 6) $O(0;\ 0)$. **4.36.** 1) (3; −2); 2) (1; −2); 3) (2; 4); 4) (0,5; −2). **4.40.** 4) $O(1;\ 0)$, R=2; 5) $O(0;\ -2)$, $R=\sqrt{2}$. **4.41.** $(x+4)^2+(y-8)^2=100$. **4.42.** $16x-13y+14=0$. **4.43.** 2) $3x-5y+5=0$. **4.44.** (1; 1) нүктесінде қиылысады. **4.45.** $E\left(\frac{5}{3};2\right)$. **4.46.**1) D – бойында; 2) E; 3) A, B, C – сыртында. **4.47.** $x^2+(y-3)^2=13$. **4.48** $(x-1)^2+(y-2)^2=4$. **4.49.** $(x+3)^2+(y-4)^2=25$. **4.50.** 4) $C(1;-2)$, R=5; 5) $C(2;\ 1)$, R=2; 6) $C(3;-2)$, R=3. **4.51.** $C\left(5;-\frac{203}{23}\right)$ **5.2. 5.1.** 4. **5.2.** Мүмкін емес. **5.3.** 1) Мүмкін емес; 2) Мүмкін емес. **5.4.** 1) Доғал бұрышты; 2) Тік бұрышты; 3) Тік бұрышты. **5.7.** $AB^2=AC^2+BC^2=(AE+CE)^2+$ $+(CF+FB)^2=(AE+BF^2)+2(AE\cdot CE+CF\cdot BF)+(CE^2+CF^2)=AE^2+BF^2+2$ $(ED^2+DF^2)+CD^2=AE^2+BF^2+2CD^2+CD^2=AE^2+BF^2+3\cdot CD^2$.

5.10. Стюарт теоремасы бойынша $AC^2 \cdot BD + BC^2 \cdot AD - CD^2 \cdot AB = AB \cdot$ $\cdot AD \cdot BD$. $\Delta\ ABC$ тең бүйірлі: $AC = BC$, $AD + BD = AB \Rightarrow$ $\Rightarrow AC^2(BD + AD) - CD^2 \cdot AB = AB \cdot AD \cdot D \Rightarrow AC^2 - CD^2 = AD \cdot BD \Rightarrow CD^2 =$ $= AC^2 - AD \cdot BD$. **5.14.** $\frac{3}{4}$. **5.18** $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$ және $m_a{}^2 = b \cdot c \Rightarrow a^2 =$ $= 2\left(b^2 + c^2 - 2bc\right) \Rightarrow a = \sqrt{2}\left|b - c\right|$. **5.19.** 3) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$. **5.20.** 1) $a=3$, $b=2$, $F_{1,2}\left(\pm\sqrt{5}; 0\right)$; 4) $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{5}$, $F_{1,2}\left(\pm\frac{4}{15}; 0\right)$. **5.21.** $A(-2;\ 0)$, $B(2; 0)$. **5.22.** 1) M_3; 2) M_2; 3) M_1. **5.23.** 2) $a = \frac{1}{5}$, $b = \frac{1}{4}$, $F_{1,2}\left(\pm\frac{\sqrt{41}}{20}; 0\right)$. **5.24.** 2) $y=1$, $F(0;\ -1)$, 6) $F\left(-\frac{4}{3}; 0\right)$, $x = \frac{4}{3}$. $R=2$; 6) $C(3;-2)$, $R=3$. **5.25.** 1) $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$; 2) $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$. **5.26.** 1) $y^2=12x$; 2) $x^2=20y$. **5.27.** 1) $y^2=60x$; 2) $x^2=48y$. **5.28.** 1) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$; 2) $\frac{x^2}{16} - y^2 = 1$. **5.29.** $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. **5.31.** $FM=10$. **5.32.** $M_{1,2}\left(\pm 6\sqrt{2}; -6\right)$. **5.33.** $(x^2-12)^2=24(y-6)$. **5.34.** $AB = 4\sqrt{3}p$. §4. **5.35.** 1) $\sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 120° = -\frac{1}{2}$; $\mathrm{tg}120° = -\sqrt{3}$. **5.36.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $-\sqrt{3}$. **5.37.** 1) $\approx 11°32'$; 2) $\approx 134°25$; 3) $\approx 158°12'$. **5.39.** 3) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\mathrm{tg}\alpha = 1$. **5.40.** 2) $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\mathrm{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4}$. **5.41.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{5}}{3}$; 3) 0. **5.42.** 1) $\pm 0{,}5$; 2) $\pm\frac{\sqrt{15}}{4}$; 3) ± 1. **5.43.** $\sin\alpha = \frac{5}{13}$; $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$. **5.44.** 3) $\alpha = 120°$. **5.46.** 1) $A\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}; \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$; 2) $A(0;\ 1{,}5)$; 3) $A\left(-\frac{5\sqrt{3}}{2}; \frac{5}{2}\right)$; 4) $A(-1;\ 0)$; 5) $A\left(\sqrt{3}; 1\right)$.

Қиын деңгейлі қосымша есептер

5.47. Табанын тең 3 бөлікке бөлу керек. **5.48.** Параллелограмды 2 үшбұрышқа бөліп, алдыңғы есепке ұқсас шешу керек. **5.49.** d_1, d_2 – диагональдары, α – арасындағы бұрышы болса, онда $S = \frac{d_1 d_2}{2}\sin\alpha \leqslant$ $\leqslant 0{,}5 d_1 d_2 \cdot \sin 90° = 0{,}5 \cdot d_1 d_2 = S_{\text{ромб}}$. **5.50.** Медианалар қиылысу нүктесінде 2:1 қатынасында бөлінетінін қолданыңдар. **5.51.** 1) $|c| <$ $< 2\sqrt{5} \Rightarrow$ қиылысады; 2) $|c| > 2\sqrt{5} \Rightarrow$ қиылыспайды; 3) $|c| = 2\sqrt{5} \Rightarrow$ жанайды. **5.52.** 5 см. **5.54.** $\frac{1}{4}$. **5.55.** $\frac{4}{3}$ см. **5.56.** $R=6$.

5.57. Нұсқау: Үшбұрыш қабырғалары арқылы өтетін түзулер оның әрбір төбесінде вертикаль бұрыштар жұбын құрайды. Бұл жұптардағы нүктелерден үшбұрыш осы төбеге қарсы жатқан қабырғасы сияқты көрінеді. **5.58.** $4\sqrt{11}$ см^2. **5.59.** $\angle C = 45°$. **5.60.** AE кесіндісі ΔBDE -нің медианасы болатынын көрсетіңдер. **5.61.** 720 см^2.

5.62. 8 см^2. **5.63.** Қарама-қарсы бұрыштарының қосындысы 180°-қа тең екенін көрсетсе, жеткілікті. **5.64.** 235,2 см^2. **5.65** Шеңбер болады.

5.66. $\angle A = 60°$, $\angle B = 90°$, $\angle C = 30°$. **5.67.** Ортақ табандары бар үшбұрыштар аудандарының теңдігін қолданыңдар. **5.68.** Диагональ бойындағы параллелограмм аудандарының қосындысы берілген параллелограмм ауданының жартысына тең екенін көрсетіңдер. **5.69.** $4(1-\lambda)$. Пропорционал кесінділер қасиетін қолданыңдар. **5.71.** Ішкі тұстас бұрыштардың қосындысы 180°, олардың биссектрисалары 90° жасап қиылысады. **5.72.** Бір мәнді анықталмайды. Тексеру арқылы 100°, 80°, 110°, 70°, 90°, 90° және т.с.с. бұрыштар жұбы есеп шартын қанағаттандыратынын көреміз. Осыны негіздеңдер. **5.73.** 15°. **5.74.** $\frac{a^2}{mn+mk+nk}$. **5.75.** $\frac{5}{8}$. **5.76.** 48 см^2. **5.78.** Өзара тең параллелограмдардың қабырғалары өзара перпендикуляр. Олай болса, олардың диагональдары да перпендикуляр болуы қажет. **5.80.** $0,5(NX+PX+QX)\cdot a=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \Rightarrow NX+PX+QX=h$, яғни x-ке тәуелсіз. **52.81.** Берілген үшбұрыштың тік бұрышты тең бүйірлі үшбұрыш болатынын көрсетіңдер. 45°, 45°, 90°. **5.82.** $h=\sqrt{S\cdot \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}$. **5.83.** 580-есепті қараңдар. **5.84.** Үшбұрыштар теңсіздігін қолданыңдар. **5.85.** Пифагор теоремасы мен $\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ $(a\geqslant 0,\ b\geqslant 0)$ теңсіздігін қолданыңдар.

Мазмұны

О қ у б а с ы л ы м ы

Шыныбеков Әбдухали Насырұлы
Шыныбеков Данияр Әбдухалиұлы

ГЕОМЕТРИЯ

Жалпы білім беретін мектептің 8-сыныбына арналған оқулық

Редакторы *Г. Ғалиева*
Көркемдеуші редакторы *А. Қапсаланова*
Техникалық редакторы *Ү. Рысалиева*
Корректоры *Ү. Бахова*
Компьютерде беттеген *А. Куватова*

ИБ №295

Теруге 00.00.0000 берілді. Басуға 00.00.0000 қол қойылды.
Пішімі $60x90^1/_{16}$. Офсеттік басылыс.
Шартты баспа табағы 9,0. Есептік баспа табағы 7,05.
Таралымы 000 дана. Тапсырыс № 0000.

«Атамұра» корпорациясы» ЖШС,050000, Алматы қаласы,
Абылай хан даңғылы, 75.

Қазақстан Республикасы «Атамұра» корпорациясы» ЖШС-нің
Полиграфкомбинаты, 050002, Алматы қаласы, М. Мақатаев көшесі, 41.