Г. Н. Солтан, А. Е. Солтан, А. Ж. Жумадилова

АЛГЕБРА

Учебник для учащихся 8 класса общеобразовательной школы

+CD

Рекомендовано Министерством образования и науки Республики Казахстан

КОКШЕТАУ

УДК 373.167.1
ББК 22.14я72
С60

Солтан Г. Н. и др.
С60 **Алгебра:** учебник для учащихся 8 класса общеобразовательной школы + CD / Г. Н. Солтан, А. Е. Солтан, А. Ж. Жумадилова. – Кокшетау: Келешек-2030, 2018. – 216 с.: ил.

ISBN 978-601-317-332-0

Электронный вариант учебника: http://keleshek-2030.kz/books/algbr.php

УДК 373.167.1
ББК 22.14я72

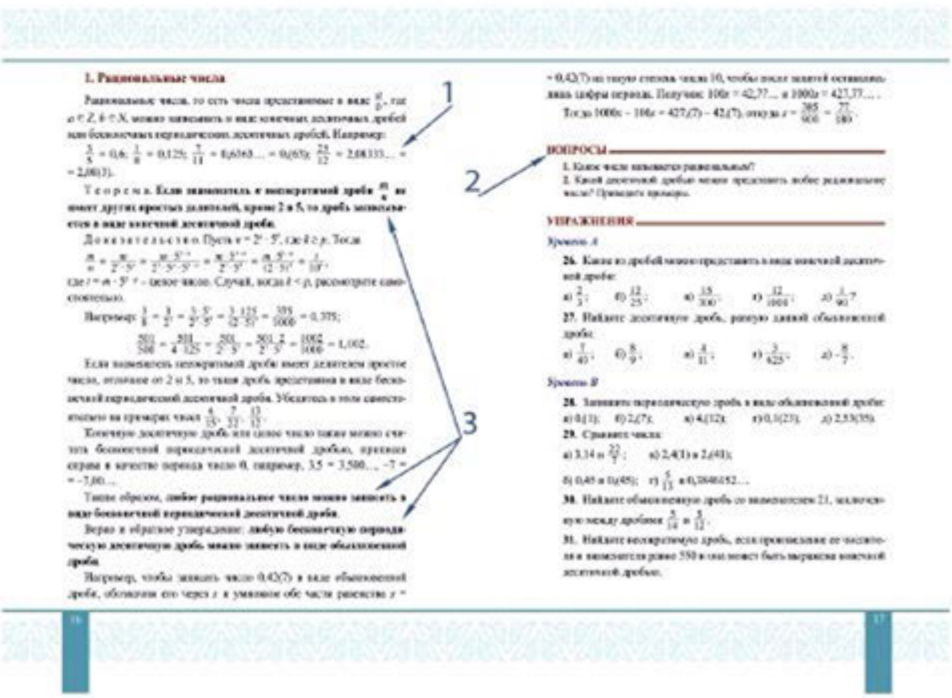
ISBN 978-601-317-332-0

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

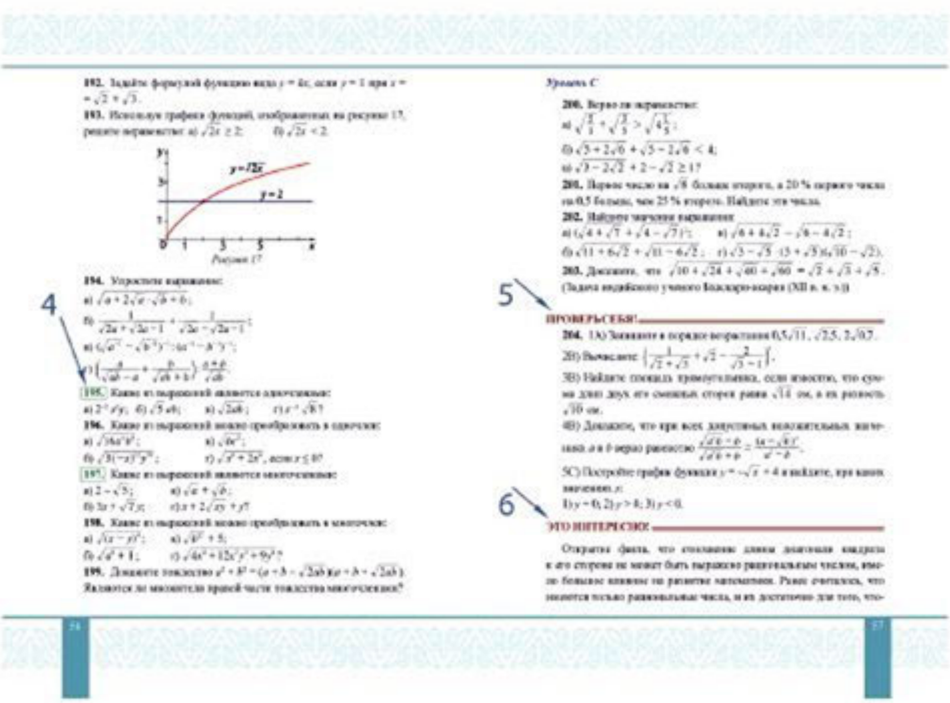
Дорогие восьмиклассники! В этом учебном году вы продолжите изучать алгебру. Вы расширите свои знания о множествах чисел, функциях, методах решения уравнений и неравенств. В данный учебник включены разделы по алгебре: «Квадратные корни и иррациональные выражения», «Квадратные уравнения», «Квадратичная функция», «Неравенства», раздел по элементам статистики, а также материалы для повторения курса алгебры 7 и 8 класса.

В учебнике подробно изложена теория, приведены примеры решений упражнений и текстовых задач различной сложности (1). Для проверки усвоения теоретических знаний предложены контрольные вопросы (2). Определения, формулы, алгебраические правила выделены специальными шрифтами (3).



В учебник включены разнообразные упражнения для формирования практических умений и навыков, разделенные на три уровня сложности – A, B, C. В конце пунктов предлагаются занимательные задачи, упражнения творческого характера. Задания для повторения учебного материала, в том числе по курсу алгебры 7 класса, выделены зеленым цветом и отмечены цветной рамкой (4).

Для систематизации знаний по разделам и подготовки к суммативному оцениванию выделены отдельные пункты, в которых предлагаются задания под рубрикой «Проверь себя!» (5). В конце каждого раздела имеются исторические сведения под рубрикой «Это интересно!» (6).



В учебнике используются материалы о заповедниках Казахстана, его достопримечательностях, а также данные Комитета по Статистике Министерства Национальной Экономики РК. Знания о достопримечательностях Казахстана вы можете расширить, используя Интернет.

К упражнениям даются ответы, а к поиску решения более трудных из них – указания.

Надеемся, что учебник, который вы держите в руках, будет вам верным помощником в изучении алгебры.

Желаем успехов!

Авторы

ПОВТОРЕНИЕ КУРСА АЛГЕБРЫ 7 КЛАССА

Степени с целыми показателями

Определение	Свойства
$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множителей}}, n \in N, n > 1;$ $a^1 = a;\ \ a^0 = 1,\ \ a \neq 0;$ $a^{-n} = \frac{1}{a^n},\ n \in N,\ a \neq 0.$	$a^p \cdot a^k = a^{p+k},\quad a^p : a^k = a^{p-k},$ $(a^p)^k = a^{p \cdot k},\quad (ab)^p = a^p \cdot b^p,$ $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$, где $a \neq 0, b \neq 0,$ $p \in Z, k \in Z.$

Формулы сокращенного умножения

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Свойства степени с целым показателем и формулы сокращенного умножения являются тождествами. **Тождество** – это равенство, верное при всех допустимых значениях входящих в него переменных. Верное числовое равенство также считается тождеством.

Произведение чисел и степеней переменных с натуральными показателями называется **одночленом**. Алгебраическая сумма одночленов называется **многочленом**.

Функции и их графики

Зависимость переменной y от переменной x называется *функцией*, если каждому значению x из некоторого множества чисел соответствует единственное значение y. Независимую переменную x называют также *аргументом*.

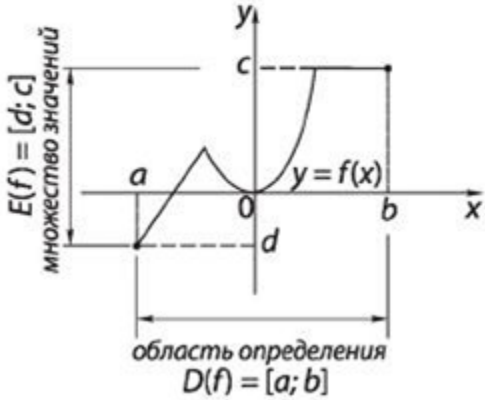


Рисунок 1

Линейная функция: $y = kx + b$

график – прямая

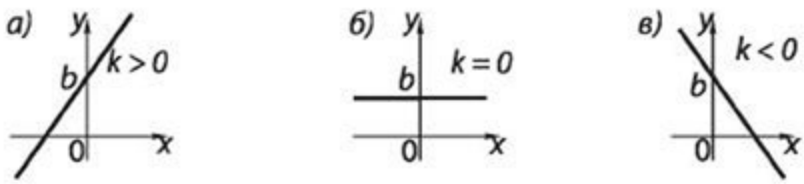
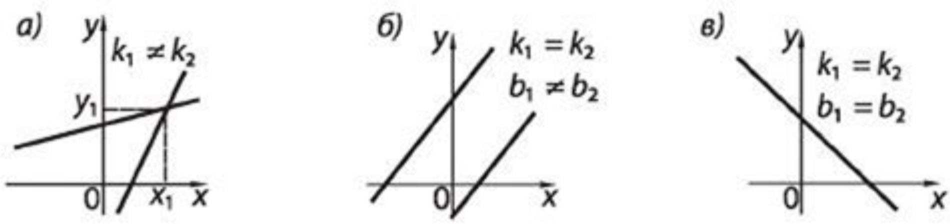


Рисунок 2

Решение систем двух линейных уравнений

$$\begin{cases} y = k_1x + b_1, \\ y = k_2x + b_2 \end{cases}$$



$(x_1; y_1)$ – *одно решение* *нет решений* *бесконечно много решений*

Рисунок 3

Обратная пропорциональность: $y = \frac{k}{x}$, $(x \neq 0)$

график – гипербола

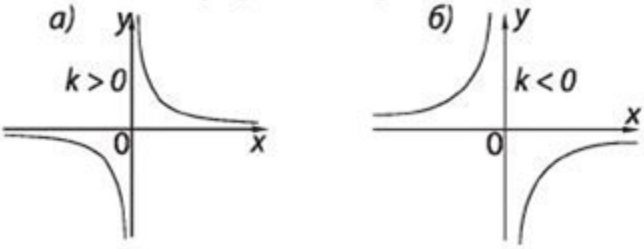


Рисунок 4

Функция $y = ax^2$

график – парабола

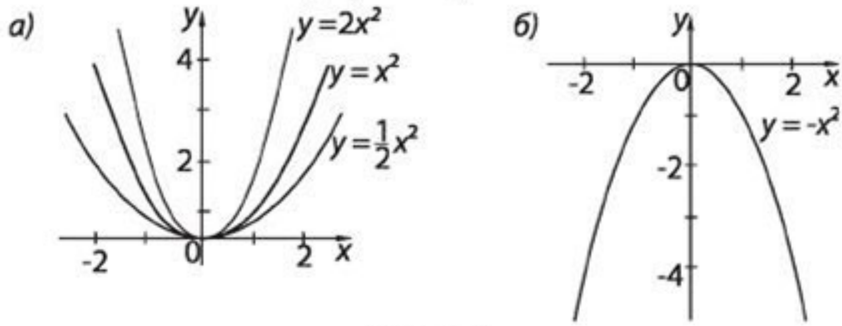


Рисунок 5

Функция $y = ax^3$

график – кубическая парабола

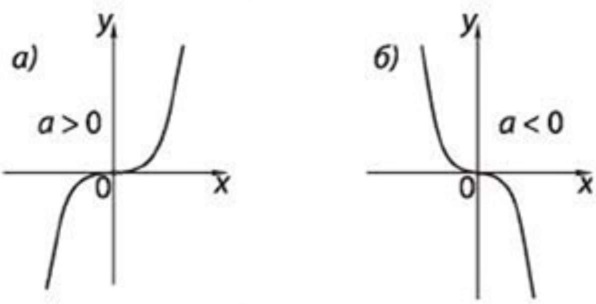


Рисунок 6

Элементы статистики

Каждая из величин, содержащихся в генеральной совокупности, называется **вариантой**. Последовательность вариант, представленных в порядке их возрастания, называется **вариационным рядом**. **Размах** вариационного ряда – это разность между его последней и первой вариантами.

Медиана вариационного ряда: а) с нечетным числом вариант, например x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 равна его средней варианте x_3; б) с четным числом вариант, например $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ равна $\frac{x_3 + x_4}{2}$. **Мода** вариационного ряда – это наиболее часто встречающаяся его варианта.

Количество повторений варианты в выборке называется ее **абсолютной частотой**. Если в генеральной совокупности, содержащей n объектов, варианта имеет абсолютную частоту, равную m, то число $\frac{m}{n}$ называется ее **относительной частотой**.

Ломаная, вершины которой имеют координаты: а) $(x_1;\ m_1)$, $(x_2;\ m_2)$, …, $(x_n;\ m_n)$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – варианты, $m_1, m_2, \ldots, m_n$ – их абсолютные частоты, называется **полигоном абсолютных частот**; б) $(x_1; f_1)$, $(x_2; f_2)$, …, $(x_n; f_n)$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – варианты, $f_1, f_2, \ldots, f_n$ – их относительные частоты, называется **полигоном относительных частот**.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

1. Верно ли, что площадь Казахстана (2725 тыс. кв. км) более чем на 1000 % больше суммы площадей Азербайджана (87 тыс. кв. км), Армении (30 тыс. кв. км) и Грузии (70 тыс. кв. км)?

2. Вычислите:

а) $-5 + 0{,}2^{-2}$; б) $7^{-1} - 21^{-1}$; в) $4^{-2} : \frac{-1}{64}$; г) $(0{,}008)^0 : (-3)^{-3}$.

3. Выполните действия:

а) $(1{,}5a^{-2}b) \cdot (4a^3b^{-4})$; в) $(0{,}2cd^{-3})^{-2}$;

б) $(49x^5y^{-1}) : (0{,}7x^3y^{-2})$; г) $(8p^{-3}k^2 \cdot 0{,}5pk^{-2})^{-3}$.

4. Представьте числа в стандартном виде и расположите их в порядке возрастания:

а) $0{,}59 \cdot 10^{-7}$; $3400 \cdot 10^{-9}$; $0{,}078 \cdot 10^{-10}$;

б) $42 \cdot 10^{-15}$; $0{,}073 \cdot 10^{-17}$; $8300 \cdot 10^{-16}$.

Уровень B

5. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{4^8 \cdot 9^7 + 6^{12} \cdot 180}{8^6 \cdot 3^{14} - 6^{14}}$; в) $\dfrac{26 \cdot (3 \cdot 2^{18} + 15 \cdot 2^{15})}{(13 \cdot 4^4)^2}$;

б) $\dfrac{6^{10} \cdot 2^8 + 12^9 \cdot 21}{3^{10} \cdot 2^{19} - 12^{10}}$; г) $\dfrac{21(3 \cdot 7^{12} - 14 \cdot 7^{11})}{(3 \cdot 7^6)^2}$.

6. Что больше: а) $\dfrac{4^{12} - 1}{4^{11} - 1}$ или $\dfrac{4^{11} - 1}{4^{10} - 1}$; б) $\dfrac{9^6 - 1}{9^7 - 1}$ или $\dfrac{9^7 - 1}{9^8 - 1}$?

7. Решите уравнение: а) $4x^{-2} + 4x^{-1} + 1 = 0$; б) $9x^{-2} - 12x^{-1} + 4 = 0$.

8. а) Для распечатки 476 плакатов были использованы две копировальные машины. Первая работала 14 минут, а вторая – 21 минуту. Сколько плакатов в минуту копировала каждая машина, если первая печатала в минуту на 4 плаката больше, чем вторая?

б) Весенний сев бригада наметила закончить за 8 дней. Но, увеличив норму сева на 40 га в день, бригада закончила сев за 6 дней. Сколько гектаров засевала ежедневно бригада и сколько гектаров всего засеяно?

9. а) Сумма цифр двузначного числа равна 12. Если эти цифры поменять местами, то полученное число будет больше исходного на 18. Найдите первоначальное число.

б) В двузначном числе цифра десятков, увеличенная на 2, в 2 раза больше цифры единиц. Если же их поменять местами, то полученное число будет меньше первоначального на 27. Найдите исходное число.

10. Сократите дробь:

а) $\dfrac{45a^3b^7}{15a^4b^2}$; в) $\dfrac{a^3 - 27}{a^2 + 3a + 9}$;

б) $\dfrac{36 - 4x^2}{2x + 6}$; г) $\dfrac{16 - 8x + x^2}{(x - 4)^3}$.

11. Выполните действия:

а) $\frac{3x+2}{4x-y}+\frac{2x-1}{y-4x}$;

б) $(m-2n):\frac{(2n-m)^2}{5mn}$;

в) $\left(\frac{a+5b}{a^2-5ab}-\frac{a-5b}{a^2+5ab}\right)\cdot\frac{25b^2-a^2}{5b^2}$.

12. Докажите, что при всех допустимых значениях переменной значение выражения постоянно:

а) $\frac{a}{a+7}-\frac{(a-7)^2}{2}\cdot\left(\frac{1}{a^2-49}+\frac{1}{a^2-14a+49}\right)$;

б) $(a-4)\cdot\left(\frac{1}{a^2-8a+16}-\frac{1}{a^2-16}\right)-\frac{24-a^2}{a^2-16}$.

13. При делении натурального числа b на 7 получается остаток 3. Верно ли, что и при делении выражения $(b^2-7b+15)$ на 7 получится остаток 3?

14. а) Найдите среднюю скорость движения поезда, если первую половину пути он шел со скоростью 81 км/ч, а вторую половину пути – со скоростью 99 км/ч.

б) При движении из пункта A в пункт B автобус первую половину пути шел со скоростью 50 км/ч, а вторую – со скоростью 75 км/ч. Из пункта B в пункт A автобус шел со скоростью 60 км/ч. Найдите среднюю скорость автобуса на всем пути.

15. В таблице статистических данных о плотности населения областей Казахстана (без учета населения городов Астана и Алматы) оказалось незаполненным сведение, относящееся к одной из них. Найдите его, учитывая среднюю плотность населения, составьте вариационный ряд плотности населения областей Казахстана и найдите его медиану.

По состоянию на 01.01.2016 г.

№	Область	Плотность (чел./кв. км)	№	Область	Плотность (чел./кв. км)
1.	Акмолинская	5,09	8.	Карагандинская	3,24
2.	Актюбинская	2,78	9.	Костанайская	4,51

3.	Алматинская	8,70	10.	Кызылординская	3,56
4.	Атырауская	5,01	11.	Мангистауская	3,78
5.	Восточно-Казахстанская	4,93	12.	Павлодарская	6,08
6.	Жамбылская	7,70	13.	Северо-Казахстанская	5,81
7.	Западно-Казахстанская	4,21	14.	Южно-Казахстанская	
Средняя плотность населения всех областей без учета населения Астаны и Алматы – 6,15					

Уровень С

16. Решите уравнение:

а) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{5x}{x+1} = 5$; б) $\dfrac{3x^2 - 48}{x+4} = 0$; в) $\dfrac{10}{x-3} - \dfrac{8}{x} = 1$.

17. Докажите, что при любом натуральном n значение выражения:

а) $11^{n+4} - 11^n$ делится на 61; б) $7^{n+3} + 7^n$ делится на 43.

18. Разложите числитель на множители и сократите дробь $\dfrac{a^4 + 3a^2 + 4}{a^2 - a + 2}$.

19. Используя основное свойство дроби, найдите значение выражения:

а) $\frac{10y^2 - 3xy + 20x^2}{8x^2 + xy + y^2}$, если $\frac{y}{x} = 4$; б) $\frac{6b^2 + 10ab + a^2}{a^2 - ab + 3b^2}$, если $\frac{a}{b} = 3$.

20. а) При совместной работе двух подъемных кранов баржа была загружена за 2 часа. Сколько времени потребуется на загрузку такой же баржи каждым краном, если одним краном баржу можно загрузить на 3 часа быстрее, чем другим?

б) Два станка выполняют некоторую работу за 6 часов. Сколько часов потребуется для выполнения этой работы каждым станком, если один может выполнить ее на 5 часов быстрее другого?

21. Вычислите, используя формулу разности квадратов двух выражений:

а) $(11 + 1)(11^2 + 1)(11^4 + 1)(11^8 + 1) - 0{,}1 \cdot 11^{16}$;

б) $0{,}04 \cdot 26^{32} - (26^{16} + 1)(26^8 + 1)(26^4 + 1)(26^2 + 1)(26 + 1)$.

22. Укажите область определения и постройте график функции:

а) $y = -2x + x^0$; б) $y = -x^{-1}$; в) $y = \frac{1}{2}x^2$; г) $y = -\frac{1}{4}x^3$.

23. Найдите на промежутке [0; 5] наименьшее и наибольшее значение функции:

а) $y = 3x - 2$; б) $y = \frac{4}{x}$; в) $y = -\frac{1}{2}x^2$; г) $y = 2x^3$.

24. Докажите, что является составным числом значение выражения:

а) $2^{14} + 7^{16}$; б) $2^{10} + 11^{12}$.

25. а) Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 3 км, отправился пешеход, а через 30 мин вслед за ним выехал велосипедист, скорость которого на 11 км/ч больше скорости пешехода. В пункт B велосипедист прибыл на 3 мин раньше пешехода. Найдите скорость велосипедиста.

б) Из поселка в город, расстояние между которыми 5 км, отправился велосипедист, а через 15 мин вслед за ним выехал мотоциклист, скорость которого на 20 км/ч больше скорости велосипедиста. В город мотоциклист приехал на 5 мин раньше велосипедиста. Найдите скорость велосипедиста.

I. КВАДРАТНЫЕ КОРНИ И ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

В результате изучения раздела надо

знать

- определения:
иррационального и действительного чисел,
квадратного и арифметического квадратного корней;
- классификацию действительных чисел;
- свойства действий над действительными числами и арифметическими квадратными корнями;
- свойства и график функции $y = \sqrt{x}$.

уметь

- выполнять арифметические действия над действительными числами и сравнивать их;
- доказывать свойства арифметического квадратного корня;
- выполнять тождественные преобразования выражений, содержащих квадратные корни;
- строить график функции $y = \sqrt{x}$, применять свойства действительных чисел при решении задач.

1. Рациональные числа

Рациональные числа, то есть числа представимые в виде $\frac{a}{b}$, где $a \in Z$, $b \in N$, можно записывать в виде конечных десятичных дробей или бесконечных периодических десятичных дробей. Например:

$\frac{3}{5} = 0,6$; $\frac{1}{8} = 0,125$; $\frac{7}{11} = 0,6363... = 0,(63)$; $\frac{25}{12} = 2,08333... = 2,08(3)$.

Теорема. **Если знаменатель *n* несократимой дроби $\frac{m}{n}$ не имеет других простых делителей, кроме 2 и 5, то дробь записывается в виде конечной десятичной дроби.**

Доказательство. Пусть $n = 2^k \cdot 5^p$, где $k \geq p$. Тогда

$$\frac{m}{n} = \frac{m}{2^k \cdot 5^p} = \frac{m \cdot 5^{k-p}}{2^k \cdot 5^p \cdot 5^{k-p}} = \frac{m \cdot 5^{k-p}}{2^k \cdot 5^k} = \frac{m \cdot 5^{k-p}}{(2 \cdot 5)^k} = \frac{t}{10^k},$$

где $t = m \cdot 5^{k-p}$ – целое число. Случай, когда $k < p$, рассмотрите самостоятельно.

Например: $\frac{3}{8} = \frac{3}{2^3} = \frac{3 \cdot 5^3}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{3 \cdot 125}{(2 \cdot 5)^3} = \frac{375}{1000} = 0,375$;

$$\frac{501}{500} = \frac{501}{4 \cdot 125} = \frac{501}{2^2 \cdot 5^3} = \frac{501 \cdot 2}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{1002}{1000} = 1,002.$$

Если знаменатель несократимой дроби имеет делителем простое число, отличное от 2 и 5, то такая дробь представима в виде бесконечной периодической десятичной дроби. Убедитесь в этом самостоятельно на примерах чисел $\frac{4}{15}$, $\frac{7}{22}$, $\frac{13}{12}$.

Конечную десятичную дробь или целое число также можно считать бесконечной периодической десятичной дробью, приписав справа в качестве периода число 0, например, $3,5 = 3,500...$, $-7 = -7,00...$.

Таким образом, **любое рациональное число можно записать в виде бесконечной периодической десятичной дроби**.

Верно и обратное утверждение: **любую бесконечную периодическую десятичную дробь можно записать в виде обыкновенной дроби**.

Например, чтобы записать число 0,42(7) в виде обыкновенной дроби, обозначим его через x и умножим обе части равенства $x =$

$= 0{,}42(7)$ на такую степень числа 10, чтобы после запятой оставались лишь цифры периода. Получим: $100x = 42{,}77...$ и $1000x = 427{,}77...$.

Тогда $1000x - 100x = 427{,}(7) - 42{,}(7)$, откуда $x = \frac{385}{900} = \frac{77}{180}$.

ВОПРОСЫ

1. Какое число называется рациональным?

2. Какой десятичной дробью можно представить любое рациональное число? Приведите примеры.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень A

26. Какие из дробей можно представить в виде конечной десятичной дроби:

а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{12}{25}$; в) $\frac{15}{300}$; г) $\frac{12}{1000}$; д) $\frac{1}{90}$?

27. Найдите десятичную дробь, равную данной обыкновенной дроби:

а) $\frac{7}{40}$; б) $\frac{8}{9}$; в) $\frac{4}{11}$; г) $\frac{3}{625}$; д) $-\frac{8}{7}$.

Уровень B

28. Запишите периодическую дробь в виде обыкновенной дроби:

а) 0,(1); б) 2,(7); в) 4,(12); г) 0,1(23); д) 2,53(35).

29. Сравните числа:

а) 3,14 и $\frac{22}{7}$; в) 2,4(1) и 2,(41);

б) 0,45 и 0,(45); г) $\frac{5}{13}$ и 0,3846152... .

30. Найдите обыкновенную дробь со знаменателем 21, заключенную между дробями $\frac{5}{14}$ и $\frac{5}{12}$.

31. Найдите несократимую дробь, если произведение ее числителя и знаменателя равно 550 и она может быть выражена конечной десятичной дробью.

32. Докажите, что сумма чисел 3,(13) + 0,2(3) равна рациональному числу. Запишите это число в виде обыкновенной дроби.

33. Найдите цифру единиц двузначного числа, если его квадрат имеет: а) четное; б) нечетное число десятков. (При решении задачи используйте таблицу квадратов натуральных чисел от 10 до 99.)

Уровень C

34. Докажите, что сумма квадратов двух последовательных целых чисел при делении на 4 дает в остатке 1.

35. В первой коробке находились красные шары, а во второй – синие, причем число красных шаров составляло $\frac{15}{19}$ от числа синих шаров. Когда из коробок взяли $\frac{3}{7}$ красных шаров и $\frac{2}{5}$ синих, то в первой коробке осталось менее 1000 шаров, а во второй – более 1000 шаров. Сколько шаров было первоначально в каждой коробке?

2. Иррациональные и действительные числа

Как известно, длины отрезков выражаются положительными числами. Для того, чтобы сравнить два отрезка, их длины измеряют общей мерой. За *общую меру двух отрезков* принимается такой отрезок, который укладывается целое число раз в каждом из них.

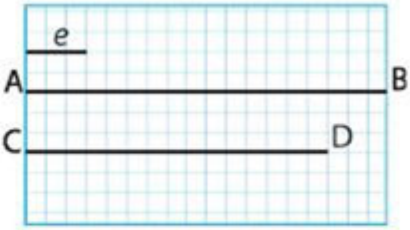


Рисунок 7

Например, на рисунке 7 отрезок, равный e, укладывается в отрезке AB шесть раз, а в отрезке CD – пять раз, тогда отношение $\frac{AB}{CD}=\frac{6}{5}$. Если общая мера e укладывается в одном отрезке m раз, а в другом – n раз, то отношение длин этих отрезков выражается рациональным числом $\frac{m}{n}$, где $m \in N, n \in N$.

Справедливо и обратное: *если отношение длин двух отрезков выражается рациональным числом, то такие отрезки имеют общую меру*.

Действительно, пусть отношение длин отрезков AB и CD равно $\frac{m}{n}$, где $\frac{m}{n} \in Q$. Тогда за их общую меру можно взять отрезок, равный $\frac{1}{n}$-й части отрезка CD, поэтому $e=\frac{1}{n}CD$. Тогда $CD = ne$, $AB = me$.

Оказывается, что не всегда два отрезка имеют общую меру и не всегда отношение их длин выражается рациональным числом.

Теорема. **Отношение диагонали квадрата к его стороне не может быть выражено рациональным числом**.

Доказательство. Допустим, что это не так: сторона и диагональ квадрата имеют общую меру. То есть существует такой отрезок l, который укладывается целое число раз и на стороне, и на диагонали квадрата $ABCD$. Тогда $AB = nl$, $AC = ml$, $\frac{AC}{AB} = \frac{ml}{nl} = \frac{m}{n}$, где $\frac{m}{n}$ – несократимая дробь. Следовательно, $\frac{AC^2}{AB^2} = \frac{m^2}{n^2}$.

Выражение AC^2 – это площадь квадрата со стороной, равной AC (рисунок 8), а AB^2 – площадь квадрата со стороной, равной AB. Так как $AC^2 = 2AB^2$ (объясните это, используя рисунок 8), то $\frac{m^2}{n^2} = 2$, $m^2 = 2n^2$. Следовательно, m^2 – четное число, значит и m – четное, то есть $m = 2p$. Тогда $m^2 = 4p^2 = 2n^2$. Значит, $n^2 = 2p^2$, то есть и n – четное. Приходим к противоречию с предположением о том, что $\frac{m}{n}$ – несократимая дробь.

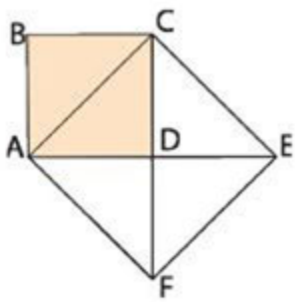


Рисунок 8

Полученное противоречие дает основание заключить, что допущение о том, что сторона и диагональ квадрата имеют общую меру – ошибочное. Следовательно, верно то, что требовалось доказать.

Из этой теоремы следует, что если принять сторону квадрата за единицу измерения, то результат измерения диагонали этой единицей не может дать ни целого, ни дробного числа. Следовательно, среди известных нам чисел нет числа, выражающего длину диагонали квадрата. Но диагональ такого квадрата существует, поэтому должно существовать и число, выражающее ее длину. Это число иное, чем известные нам рациональные числа. Назовем это новое число **иррациональным** (поскольку приставка «ир» означает «не») и выясним способ его записи при помощи цифр.

Пусть иррациональное число выражает длину диагонали квадрата, сторона которого принята за единицу измерения. Будем искать приближенное значение отношения диагонали квадрата к его стороне, сначала с точностью до 1, потом с точностью до 0,1, до 0,01 (рисунок 9).

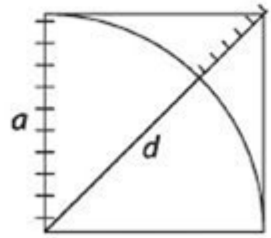


Рисунок 9

$1 < \frac{d}{a} < 2$, следовательно, $\frac{d}{a} \approx 1$ (с недостатком) и $\frac{d}{a} \approx 2$ (с избытком).

Чтобы найти это отношение с точностью до 0,1, разделим сторону a квадрата на 10 равных частей и будем укладывать $\frac{1}{10}$ часть ее на диагонали. В результате получим: $1{,}4 < \frac{d}{a} < 1{,}5$, т. е. $\frac{d}{a} \approx 1{,}4$ (с недостатком) и $\frac{d}{a} \approx 1{,}5$ (с избытком).

Чтобы найти отношение $\frac{d}{a}$ с точностью до 0,01, надо было бы разделить сторону квадрата на 100 равных частей и укладывать $\frac{1}{100}$ часть ее на диагонали. Мы пришли бы к следующему результату: $1{,}41 < \frac{d}{a} < 1{,}42$; следовательно, $\frac{d}{a} \approx 1{,}41$ (с недостатком) и $\frac{d}{a} \approx 1{,}42$ (с избытком).

Если представить процесс нахождения более точного значения $\frac{d}{a}$ продолженным дальше, то невозможно получить конечную десятичную дробь, так как это противоречило бы теореме об отношении диагонали и стороны квадрата. Следовательно, в результате такого процесса мы придем к числу, записанному в виде бесконечной десятичной дроби. Эта дробь не может быть периодической, так как тогда она могла бы быть преобразована в обыкновенную дробь. Итак, способ представления иррационального числа с использованием цифр выяснен. Тем самым появляется возможность определения понятия иррационального числа.

Иррациональным числом называют число, выраженное бесконечной десятичной непериодической дробью.

Например, число 0,101001000100001…, у которого за каждой единицей идет группа нулей, содержащая на один нуль больше, чем предыдущая группа, не является периодической дробью, т. е. является иррациональным числом. Иррациональным является также число $\pi = 3{,}1415926\ldots$, равное отношению длины окружности к ее диаметру.

Объединение всех рациональных и всех иррациональных чисел называется множеством действительных чисел, которое обозначается буквой $\boldsymbol{R}$.

Таким образом, действительные числа – это бесконечные периодические или непериодические десятичные дроби. Геометрически множество действительных чисел изображается прямой, которая называется *числовой прямой*. Каждому действительному числу соответствует единственная точка числовой прямой и каждой точке этой прямой соответствует единственное действительное число. Например, если за единичный отрезок взять сторону квадрата, то иррациональному числу, выражающему длину его диагонали, соответствует точка D на числовой прямой Ox (рисунок 10), а точке K, где $OD = OK$, соответствует противоположное ему иррациональное число.

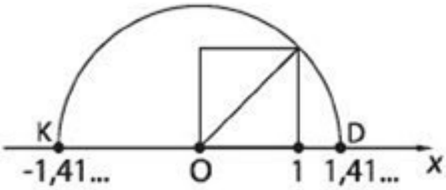


Рисунок 10

Действительные числа, выраженные бесконечными десятичными дробями, сравнивают по тем же правилам, что и конечные десятичные дроби. Например,

$$2{,}363667\ldots < 2{,}370112\ldots,$$

так как в этих положительных бесконечных десятичных дробях целые части и десятые доли равны, а в разряде сотых у первой дроби число сотых меньше, чем у второй;

$0,33(5) > 0,33452\ldots$ (объясните самостоятельно).

В практических расчетах за сумму двух действительных чисел, представленных бесконечными десятичными дробями, принимается такое число, которое больше суммы приближенных значений слагаемых, взятых с недостатком с некоторой точностью, но меньше суммы приближенных значений слагаемых, взятых с избытком с той же точностью. Аналогично находится и произведение таких чисел. Повышая точность, с которой берутся приближенные значения, получают более точное значение результата. В современных условиях вычисления с такими дробями легко выполняются с использованием электронно-вычислительной техники.

ВОПРОСЫ

1. Какое число называется иррациональным?

2. Из каких множеств состоит множество действительных чисел? Покажите это схематически.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

36. Какие из чисел: $-5,38000\ldots$; $0,237373\ldots$; $-3,2121121112\ldots$; $\frac{8}{23}$; $1,234567891011\ldots$; $4,(5)$ являются:

а) рациональными; б) иррациональными?

37. Округлите до тысячных иррациональные числа:

а) $-2,02122232425\ldots$;
б) $0,758595105\ldots$;
в) $3,5151151115\ldots$;
г) $10,899898897\ldots$.

38. Сравните действительные числа:

а) $0,01234\ldots$ и $0,0(12)$;

б) $-23,5$ и $-23,(5)$;

в) $\frac{3}{7}$ и $0,42857190\ldots$;

г) $4\frac{7}{8}$ и $4,8(75)$.

Уровень В

39. Запишите 3 числа, расположенных на числовой прямой между числами 3,5 и 3,51. Сколько действительных чисел имеется между числами 3,5 и 3,51?

40. Выберите верные утверждения:

а) любое рациональное число является действительным;

б) каждое действительное число является иррациональным;

в) все иррациональные числа являются действительными числами.

41. Даны три отрезка a, b, c. Известно, что имеют общую меру отрезки a и b, b и c. Имеют ли общую меру отрезки a и c?

42. а) Имеют ли общую меру гипотенуза прямоугольного треугольника и медиана, проведенная к ней?

б) Один из острых углов прямоугольного треугольника равен 60°. Приняв меньший катет этого треугольника за единицу измерения докажите, что длину большего катета нельзя выразить рациональным числом. (Для решения задачи используйте рисунок 11.)

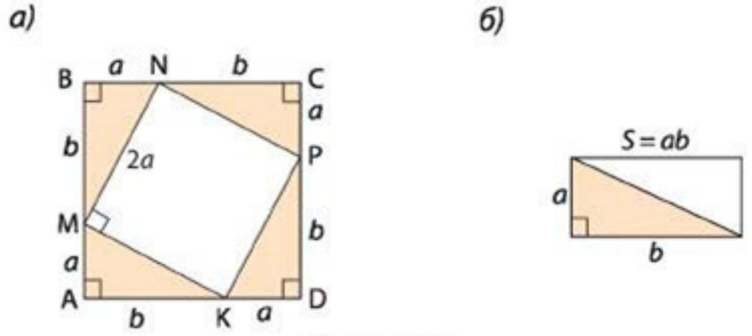


Рисунок 11

43. Какое из равенств верное:

а) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty) = R$; б) $(-\infty; 0] \cap [0; +\infty) = R$; в) $(-\infty; +\infty) = R$?

44. а) При умножении чисел $a \approx 1{,}42$ и $b \approx 0{,}34$ получили: $ab \approx$ $\approx 0{,}4828$. Округлите результат, пользуясь правилом умножения приближенных значений.

б) Сколько значащих цифр следует сохранить в частном $\frac{a}{b}$, если:
1) $a \approx 1{,}845$, $b \approx 0{,}173$; 2) $a \approx 34{,}81$, $b \approx 0{,}075$?

45. Найдите приближенное значение выражения $\frac{a}{b} - c$, если $a \approx 0{,}728$, $b \approx 2{,}5$, $c \approx 0{,}17$.

Уровень С

46. Известно, что $x \approx 5{,}1 \cdot 10^{-2}$, $y \approx 3{,}68 \cdot 10^{-2}$, $z \approx 7{,}121 \cdot 10^{4}$. Найдите значение выражения: а) $(x - y) \cdot z$; б) $(x + y) : z$.

47. Расстояние между двумя городами по карте равно $(24{,}6 \pm 0{,}2)$ см. Найдите действительное расстояние между этими городами, если масштаб карты 1 : 2 500 000; определите погрешность.

48. Объем комнаты 127,4 м^3. Какова масса воздуха, содержащегося в этой комнате, если масса 1 м^3 равна $(1{,}29 \pm 0{,}01)$ кг?

49. Докажите, что если $|x - a| = |x - b|$, где $a \neq b$, то $x = \frac{1}{2}(a + b)$.

50. Решите уравнение: а) $|x + 3| = |x - 5|$; б) $|x + 6| = |x + 10|$.

51. Решите неравенство:
а) $|x + 3| < 5$; в) $2|x - 4| \leq 8$;
б) $|x + 6| \geq 10$; г) $-0{,}5|x - 6| < 2$.

52. Найдите все корни уравнения:
а) $x^2 = 16$; в) $x^2 = 1{,}44$;
б) $x^2 = 100$; г) $x^2 = 6\frac{1}{4}$.

53. Найдите условие, при котором разность между данным двузначным числом и числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, представляет точный квадрат натурального числа.

54. Решите систему неравенств:
а) $\begin{cases} x - 1 \leq 2x + 2, \\ 3x + 5 \leq x + 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3 - x < x + 2, \\ 3x - 1 > 1 - 2x. \end{cases}$

55. а) Брус длиной 364 см распилили на две части так, что первая из них оказалась короче второй на 18 %. Найдите длину каждой части.
б) На сколько процентов увеличится площадь квадрата, если его периметр увеличить на 10 %?

3. Квадратные корни

Решим уравнение: $x^2 = 49$, $x^2 - 49 = 0$, $(x - 7)(x + 7) = 0$,
$x - 7 = 0$ или $x + 7 = 0$, $x = 7$ или $x = -7$.

Числа 7 и –7, квадрат каждого из которых равен 49, называются *квадратными корнями* из числа 49.

Квадратным корнем из числа a называется число, квадрат которого равен a. Неотрицательный квадратный корень из числа a называется **арифметическим квадратным корнем** из числа a. Его обозначение: $\sqrt{a}$, где $\sqrt{}$ – знак арифметического квадратного корня. Выражение a, находящееся под знаком этого корня, называется *подкоренным выражением*. Запись $\sqrt{a}$ читается так: «арифметический квадратный корень из числа a».

Из определения арифметического квадратного корня следует, что:

1) выражение $\sqrt{a}$ имеет смысл только при $a \geq 0$, то есть его область определения промежуток $[0; +\infty)$;

2) для любого неотрицательного числа a верно неравенство $\sqrt{a} \geq 0$, то есть значениями арифметического квадратного корня могут быть только неотрицательные числа;

3) для любого неотрицательного числа a верно равенство $(\sqrt{a})^2 = \boldsymbol{a}$, то есть квадрат корня равен подкоренному выражению.

При изучении школьного курса математики слово «арифметический» можно не использовать, если иное не предусмотрено.

Действие нахождения квадратного корня из числа называется *извлечением квадратного корня из этого числа*. Для того чтобы установить, что число b является арифметическим квадратным корнем из числа a, надо проверить выполняются ли два условия:

$$1)\ b \geq 0,\quad 2)\ b^2 = a.$$

Например: $\sqrt{225} = 15$, так как $15 > 0$ и $15^2 = 225$;

$\sqrt{0} = 0$, так как число 0 – неотрицательное и $0^2 = 0$;

$\sqrt{\frac{16}{81}} = \frac{4}{9}$, так как $\frac{4}{9} > 0$ и $\left(\frac{4}{9}\right)^2 = \frac{16}{81}$;

$\sqrt{0,36} \neq -0,6$, так как $-0,6 < 0$; $\sqrt{1000} \neq 100$, так как $100^2 \neq 1000$.

Числа $\sqrt{a}$ и $-\sqrt{a}$ кратко называют *противоположными корнями*. Например, уравнение $x^2 = 64$ имеет два корня: $x_1 = \sqrt{64} = 8$ и $x_2 = -\sqrt{64} = -8$.

Из любого положительного числа a можно извлечь *только один* арифметический квадратный корень. Действительно, допустим, что существуют два различных арифметических квадратных корня из числа a: $\sqrt{a} = b$ и $\sqrt{a} = c$, где $b \neq c$. Тогда $a = b^2$ и $a = c^2$, откуда $b^2 = c^2$, $b^2 - c^2 = 0$, $(b - c)(b + c) = 0$, $b = c$ или $b = -c$. Но этого быть не может, так как по условию b и c – неравные положительные числа.

Решим графически уравнение $x^2 = 2$ (рисунок 12). Это уравнение имеет два корня: положительный $\sqrt{2} \approx 1,4$ и отрицательный $-\sqrt{2} \approx$ $\approx -1,4$. Оба этих корня $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$ – иррациональные числа, так как не существует рационального числа, квадрат которого равен 2.

Используя знак арифметического квадратного корня, можно записывать различные иррациональные числа, например, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $-\sqrt{7}$, $-\sqrt{13}$.

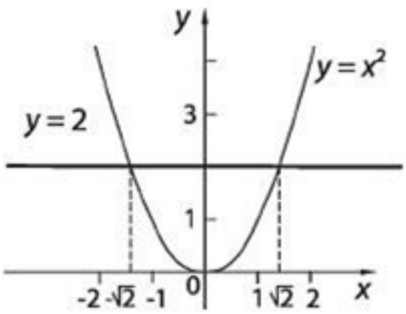


Рисунок 12

Отметим, что если натуральное число нельзя представить в виде произведения двух одинаковых множителей, то арифметический квадратный корень из него является иррациональным числом.

На практике в вычислениях иррациональные числа, записанные в виде квадратных корней, заменяют их приближенными значениями, выраженными десятичными дробями. Число b называется **приближенным значением квадратного корня** $\sqrt{a}$ **с недостатком** с точностью до h, где $h > 0$, если $b^2 < a < (b + h)^2$. При этом число $b + h$ называется приближенным значением этого корня с избытком с точностью до h.

Найдем, например, приближенное значение $\sqrt{2}$.

Поскольку $1^2 < 2 < 2^2$, то $1 < \sqrt{2} < 2$. Значит, запись иррационального числа $\sqrt{2}$ в виде десятичной дроби начинается так: $\sqrt{2} = 1,\ldots$. Далее найдем цифру десятых, для чего будем возводить в квадрат дроби 1,1; 1,2; …, пока не отыщем числа, между которыми находится число 2. Получим: $1{,}4^2 < 2 < 1{,}5^2$. Следовательно, $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$, $\sqrt{2} = 1{,}4\ldots$. Аналогично, находя цифру сотых, получим: $1{,}41^2 < 2 < 1{,}42^2$. Следовательно, $\sqrt{2} = 1{,}41\ldots$ Таким образом, $\sqrt{2} \approx 1{,}4$.

Рассмотренным способом можно извлекать квадратные корни из чисел с различной точностью. В практических расчетах для нахождения приближенных значений квадратных корней используют вычислительную технику или таблицы (одна из таких таблиц дана в приложении к учебнику).

Пример. Найти значение выражения

$$\sqrt{\frac{59^3 - 41^3}{18} + (50 + 9)(50 - 9)}.$$

Решение. $\sqrt{\frac{59^3 - 41^3}{18} + (50 + 9)(50 - 9)} =$

$$= \sqrt{\frac{(59 - 41)(59^2 + 59 \cdot 41 + 41^2)}{18} + 59 \cdot 41} =$$

$$= \sqrt{59^2 + 2 \cdot 59 \cdot 41 + 41^2} = \sqrt{(59 + 41)^2} = \sqrt{100^2} = 100.$$

Ответ. 100.

Задача. Выработка продукции за год работы предприятия возросла на 4 %. На следующий год она увеличилась еще на 8 %. Найти с точностью до 0,01 % средний годовой прирост продукции за указанный период.

Решение. Запишем условие задачи в виде таблицы:

Время работы	Количество продукции, составляющее 100 %	Количество фактически выработанной продукции
Первый год	1	$1+\frac{4}{100}=\frac{104}{100}$
Второй год	$\frac{104}{100}$	$\frac{104}{100}\cdot\frac{108}{100}$

Обозначим искомый средний годовой прирост продукции через x %. Тогда за первый год выработка продукции была бы $\left(1+\frac{x}{100}\right)$, а за второй: $\left(1+\frac{x}{100}\right)+\frac{x}{100}\left(1+\frac{x}{100}\right)=\left(1+\frac{x}{100}\right)^2$. По условию задачи $\frac{104}{100}\cdot\frac{108}{100}=\left(\frac{100+x}{100}\right)^2$.

Отсюда, $100+x=\sqrt{104\cdot108}$, $x=\sqrt{11232}-100$, $x\approx105{,}98-100$, $x\approx5{,}98$.

Ответ. $\approx 5{,}98$ %.

ВОПРОСЫ

1. Что называется арифметическим квадратным корнем из числа?

2. При каких значениях x имеет смысл выражение $\sqrt{x}$?

3. Можно ли извлечь арифметический квадратный корень из нечетной степени отрицательного числа?

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

56. Используя символ $\sqrt{\ }$, запишите корни уравнения и вычислите их:

а) $x^2=81$; б) $x^2=0{,}36$; в) $x^2=1{,}21$; г) $x^2=-25$.

57. Какие из следующих выражений имеют смысл:

а) $\sqrt{36}$; г) $\sqrt{(-7)^2}$; ж) $\sqrt{b-1}$, где $b\geq1$;

б) $\sqrt{-4}$; д) $\sqrt{-9^2}$; з) $\sqrt{3-c}$, где $c>3$?

в) $-\sqrt{0{,}01}$; е) $\sqrt{-a}$, где $a<0$;

58. Проверьте равенство:

а) $\sqrt{16}=4$; в) $\sqrt{11^0}=1$; д) $\sqrt{0}=0$;

б) $\sqrt{(-5)^2}=5$; г) $\sqrt{|-0,25|}=0{,}5$; е) $\sqrt{1\frac{7}{9}}=1\frac{1}{3}$.

59. Объясните, почему неверно равенство:

а) $\sqrt{81}=-9$; в) $\sqrt{(-12)^2}=-12$;

б) $-\sqrt{0,01}=0,1$; г) $\sqrt{-2^{-2}}=0,5$.

60. Извлеките арифметический квадратный корень из чисел: 64; 0,49; 1,44; 22500.

61. Найдите значение выражения:

а) $(\sqrt{23})^2$; в) $(-\sqrt{13})^2$; д) $(2\cdot\sqrt{5})^2$;

б) $\left(\sqrt{\frac{3}{7}}\right)^2$; г) $-(\sqrt{15})^2$; е) $\left(3\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^4$.

62. При каких значениях b имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{b+3}$; в) $\sqrt{-b-\sqrt{9}}$;

б) $\sqrt{12-b}$; г) $\sqrt{\frac{2}{7}b-\frac{1}{2}}$?

Уровень В

63. Найдите все трехзначные числа, квадратные корни из которых являются простыми числами.

64. Квадратные корни из каких чисел, обозначающих годы XX и XXI столетий, являются натуральными числами?

65. Вычислите:

а) $3+\sqrt{4}$; г) $4:\sqrt{0,01}$; ж) $\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2+\sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2}$;

б) $7-\sqrt{36}$; д) $(\sqrt{49})^2+(\sqrt{0,9})^2$; з) $-\sqrt{2,5^2}-(\sqrt{2,5})^2$.

в) $\frac{1}{3}\cdot\sqrt{0,81}$; е) $(\sqrt{8})^2-(\sqrt{0,5})^2$;

66. Сколько всего существует двузначных чисел $\overline{ab}$, для которых $\sqrt{\overline{ab}-\overline{ba}}$ является натуральным числом?

67. В таблице приведены данные о протяженности крупных рек, протекающих по территории Казахстана. При решении задачи используйте калькулятор.

Река	Общая протяженность (км)	По территории Казахстана (км)
Иртыш	4248	1700
Ишим	2450	1400

Урал	2428	1082
Сыр-Дарья	2219	1400
Или	1001	815
Чу	1186	800
Тобол	1191	800

Найдите длину (в км) реки Нуры, полностью протекающей по территории Казахстана, если она численно равна разности между числом 1060 и корнем квадратным (с точностью до единиц) из суммы протяженностей этих рек на территории других государств.

Река Нура

68. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x} = 18$; в) $\sqrt{x+4} = 5$;

б) $\sqrt{x} = 0{,}01$; г) $\sqrt{x} + 4 = 5$.

69. а) Решите графически уравнения $x^2 = 3$ и $x^2 = 5$.

б) Найдите приближенные значения $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}$ с точностью до десятых.

70. Какие из следующих чисел являются иррациональными:

а) $\sqrt{4}$; в) $\sqrt{36}$; д) $\sqrt{0}$;

б) $\sqrt{15}$; г) $\sqrt{54}$; е) $-\sqrt{160}$?

71. Сколько иррациональных чисел в последовательности:

а) $\sqrt{2^{-1}}, \sqrt{2^0}, \sqrt{2}, \sqrt{2^2}, \sqrt{2^3}, \sqrt{2^{2017}}$;

б) $\sqrt{10^{-5}}, \sqrt{10^{-4}}, \sqrt{10^{-3}}, \sqrt{10^{-2}}, \sqrt{10^{-1}}$?

72. Верно ли, что: а) $4{,}5 < \sqrt{21} < 4{,}6$; б) $9{,}2 < \sqrt{85} < 9{,}3$?

73. Извлеките квадратный корень из числа:

а) $\sqrt{1,69}$; в) $\sqrt{0,3025}$;

б) $\sqrt{12,25}$; г) $\sqrt{0,5929}$.

74. Найдите с точностью до десятых сторону квадрата, площадь которого равна:

а) 67 см^2; б) 26 см^2; в) 3,6 дм^2; г) 7,3 дм^2.

75. Найдите значение выражения:

а) $2^3 + 5\sqrt{16}$; г) $\sqrt{(2^5 - 2) \cdot 5 - 6}$;

б) $3\sqrt{121} - 2\sqrt{144}$; д) $\sqrt{3^2 + 4^2}$;

в) $2\sqrt{3 \cdot 27} - 6\sqrt{2 \cdot 18}$; е) $\sqrt{17^2 - 15^2}$.

76. Решите уравнение:

а) $x^2 = \frac{16}{25}$; г) $2x^2 = \frac{18}{81}$; ж) $x^2 = 6$;

б) $x^2 = 0{,}04$; д) $\frac{1}{7}x^2 = \frac{7}{64}$; з) $x^2 = 15$.

в) $x^2 = \frac{28}{343}$; е) $x^2 = 5\frac{20}{121}$;

77. Найдите все значения x, при которых имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{-x}$; в) $\sqrt{\sqrt{7} - x}$; д) $\sqrt{|x| - 9}$;

б) $\sqrt{1 - 5x}$; г) $\sqrt{8 - |x|}$; е) $\sqrt{-|x - 10|}$.

78. Найдите значение выражения $x^2 - 4x + 3$ при $x = 2 + \sqrt{3}$.

79. Найдите число, 5 % которого равны значению выражения $\sqrt{5{,}6^2 - 1{,}6 \cdot 10^{-1} + 4\frac{4}{5}}$.

80. При обработке деревянного бруса его длина уменьшилась на 2 %, ширина – на 3 % и толщина – на 1 %. Сколько процентов от первоначального объема бруса составили отходы при обработке? (Ответ дайте с точностью до 0,1 %.)

81. Используя формулу разности квадратов, разложите на множители выражение:

а) $a^2 - 7$; б) $-b^2 + 17$; в) $2c^2 - 3$; г) $5a^2 - 6b^2$.

82. Сократите дробь:

а) $\frac{\sqrt{7} + 7}{\sqrt{7}}$; в) $\frac{(1 - \sqrt{7})^2}{\sqrt{7} - 4}$;

б) $\frac{15 - \sqrt{15}}{\sqrt{15}}$; г) $\frac{(1 + \sqrt{2})^2}{\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}}$.

83. Вычислите:

а) $\sqrt{\dfrac{12,5\cdot 76,4-12,5\cdot 74,4}{4\cdot 5,7+4\cdot 3,3}}$; в) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{113^2-112^2}}{19^2-11^2}}$;

б) $\sqrt{\dfrac{65^2-32^2-97\cdot 17}{61^2-36^2}}$; г) $\sqrt{\dfrac{83^2-79^2}{\sqrt{170^2-154^2}}}$.

84. Решите уравнение:

а) $5\sqrt{x}=4$; в) $\dfrac{3\sqrt{x}}{5}=21$;

б) $0,5\sqrt{x}+8=10$; г) $(-\sqrt{2})^2=\sqrt{x+2}$.

Уровень С

85. При каких значениях a имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{2a-a^2-1}$; г) $\sqrt{3-2a}+\sqrt{1-a}$;

б) $\sqrt{a^2-2a+3}$; д) $\sqrt{2a-4}-\sqrt{8-4a}$;

в) $\sqrt{a^2-4a+5}$; е) $\sqrt{2-a}+\dfrac{5}{\sqrt{a-2}}$?

86. а) Найдите все тройки таких последовательных однозначных чисел, чтобы квадратный корень из суммы чисел каждой тройки был натуральным числом.

б) Найдите пять последовательных натуральных чисел, квадратный корень из суммы которых является натуральным числом. Приведите три примера таких последовательностей чисел.

87. Расшифруйте ребус $\sqrt{1aabc9}=m1n$, в котором разным буквам соответствуют различные цифры.

88. а) Численность населения города увеличивается ежегодно на p % по сравнению с численностью предыдущего года. В настоящее время в городе 168100 жителей. Найдите значение p, если 2 года назад было 160000 жителей.

б) Первоначально вещь стоила 4000 тенге, затем ее цену дважды снижали на одно и то же число процентов, в результате чего вещь стала стоить 2560 тенге. На сколько процентов снижали каждый раз цену вещи? (Цены даны условно.)

89. Докажите, что квадратный корень из суммы квадратов пяти последовательных натуральных чисел не является целым числом.

4. Свойства квадратных корней

Т е о р е м а 1. **Для любого действительного числа *a* верно равенство** $\sqrt{a^2} = |a|$.

То есть, *арифметический квадратный корень из квадрата любого числа равен модулю этого числа.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Если $a \geq 0$, то $\sqrt{a^2} = a$ по определению арифметического квадратного корня. 2) Если $a < 0$, $-a > 0$ и $\sqrt{a^2} = \sqrt{(-a)^2} = -a$. Поскольку

$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \\ -a, & \text{если } a < 0, \end{cases}$ то $\sqrt{a^2} = |a|$. Что и требовалось доказать.

Из этой теоремы следует правило извлечения арифметического квадратного корня из степени с четным показателем: *чтобы извлечь корень из степени с четным показателем, можно представить подкоренное выражение в виде квадрата и воспользоваться тождеством* $\sqrt{a^2} = |a|$.

П р и м е р 1. Упростить выражение: а) $\sqrt{a^{16}}$; б) $\sqrt{x^{10}}$, где $x < 0$.

Р е ш е н и е. а) $\sqrt{a^{16}} = \sqrt{(a^8)^2} = |a^8|$. Так как $a^8 \geq 0$ при любом $a \in R$, то $|a^8| = a^8$. Следовательно, $\sqrt{a^{16}} = a^8$.

б) $\sqrt{x^{10}} = \sqrt{(x^5)^2} = |x^5|$. Так как $x < 0$, то $x^5 < 0$, $|x^5| = -x^5$. Значит, при $x < 0$ $\sqrt{x^{10}} = -x^5$.

О т в е т. а) a^8; б) $-x^5$.

Т е о р е м а 2. **Для любых неотрицательных чисел *a* и *b* верно равенство**

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Поскольку $\sqrt{a} \geq 0$ и $\sqrt{b} \geq 0$, то $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geq$ ≥ 0.

2) По свойству степени $(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = ab$. Теорема доказана.

Доказанная теорема распространяется на случаи, когда число множителей под знаком корня больше 2. Например, если $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$, то $\sqrt{abc} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c}$.

Итак, *арифметический квадратный корень из произведения неотрицательных множителей равен произведению корней из этих множителей.*

Пример 2. Вычислить: $\sqrt{12}\cdot\sqrt{48}$.

Решение. $\sqrt{12}\cdot\sqrt{48}=\sqrt{12\cdot 48}=\sqrt{12\cdot 12\cdot 4}=12\cdot 2=24.$

Ответ. 24.

Пример 3. Доказать, что числа $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ и $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ – взаимно обратные.

Доказательство. Докажем, что произведение этих чисел равно 1:

$$\sqrt{7-4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{(7-4\sqrt{3})(7+4\sqrt{3})}=\sqrt{7^2-(4\sqrt{3})^2}=$$
$$=\sqrt{49-48}=1.$$

Следовательно, числа $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ и $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ взаимно обратные.

Теорема 3. **Для любых $a\geq 0$ и $b>0$ верно равенство** $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

То есть, *арифметический квадратный корень из дроби с неотрицательным числителем и положительным знаменателем равен частному от деления корня из числителя на корень из знаменателя этой дроби.* (Эту теорему докажите самостоятельно.)

Пример 4. Вычислить: $\sqrt{1\frac{81}{144}}$.

Решение. $\sqrt{1\frac{81}{144}}=\sqrt{\frac{144+81}{144}}=\sqrt{\frac{225}{144}}=\frac{15}{12}=\frac{5}{4}$.

Ответ. $\frac{5}{4}$.

Пример 5. Упростить выражение $\sqrt{27}+\sqrt{\frac{1}{3}}-\sqrt{\frac{1}{48}}$.

Решение. $\sqrt{27}+\sqrt{\frac{1}{3}}-\sqrt{\frac{1}{48}}=\sqrt{9\cdot 3}+\sqrt{\frac{1\cdot 3}{3\cdot 3}}-\sqrt{\frac{1\cdot 3}{16\cdot 3\cdot 3}}=$

$=3\sqrt{3}+\frac{1}{3}\sqrt{3}-\frac{1}{12}\sqrt{3}=\sqrt{3}\left(3+\frac{1}{3}-\frac{1}{12}\right)=3\frac{1}{4}\cdot\sqrt{3}$.

Ответ. $3{,}25\sqrt{3}$.

Теорема 4. **Если $a > b > 0$, то $\sqrt{a} > \sqrt{b}$.**

То есть, *большему положительному числу соответствует больший арифметический квадратный корень.*

Доказательство. Допустим, что $\sqrt{a} \le \sqrt{b}$. Тогда по свойству неравенств $(\sqrt{a})^2 \le (\sqrt{b})^2$, откуда $a \le b$. Но последнее неравенство противоречит условию $a > b$. Значит, допущение неверно, следовательно, $\sqrt{a} > \sqrt{b}$. Что и требовалось доказать.

Докажите самостоятельно, что верно и обратное утверждение: **если $\sqrt{a} > \sqrt{b}$, то $a > b > 0$.**

Пример 6. Что больше: $\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2}$ или $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$?

Решение. $\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$, $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$, $3\sqrt{2} > 2\sqrt{2}$. Следовательно, $\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} > \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$.

Задача. Соседние стороны первого прямоугольника равны $\sqrt{10}$ см и $\sqrt{15}$ см, а второго – $\sqrt{11}$ см и $\sqrt{14}$ см. Сравнить площади и периметры этих прямоугольников.

Решение. $S_1 = \sqrt{10} \cdot \sqrt{15} = \sqrt{150}$, $S_2 = \sqrt{11} \cdot \sqrt{14} = \sqrt{154}$. Так как $154 > 150$, то $\sqrt{154} > \sqrt{150}$, поэтому $S_2 > S_1$.

$P_1 = 2(\sqrt{10} + \sqrt{15})$, $P_2 = 2(\sqrt{11} + \sqrt{14})$. Сравним квадраты полупериметров:

$$\left(\frac{1}{2}P_1\right)^2 = (\sqrt{10} + \sqrt{15})^2 = (\sqrt{10})^2 + 2\sqrt{10} \cdot \sqrt{15} + (\sqrt{15})^2 = 25 + 2\sqrt{150}.$$

$$\left(\frac{1}{2}P_2\right)^2 = (\sqrt{11} + \sqrt{14})^2 = (\sqrt{11})^2 + 2\sqrt{11} \cdot \sqrt{14} + (\sqrt{14})^2 = 25 + 2\sqrt{154}.$$

Так как $\sqrt{154} > \sqrt{150}$, то $\left(\frac{1}{2}P_2\right)^2 > \left(\frac{1}{2}P_1\right)^2$. Учитывая, что P_1 и P_2 положительные числа, заключаем, что $P_2 > P_1$.

Ответ. Площадь и периметр второго прямоугольника больше.

ВОПРОСЫ

1. Докажите тождество $\sqrt{a^2} = |a|$.

2. Сформулируйте и докажите теорему о квадратном корне: а) из произведения; б) из дроби.

3. Докажите, что арифметический квадратный корень из большего числа больше.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

90. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{(-3)^4}$; в) $3\sqrt{n^2}$ при $n = -9; 0; 3\frac{1}{3}$;

б) $\sqrt{(-3)^6}$; г) $4\sqrt{m^2} + |m|$ при $m = -0{,}5; 0; 4{,}5$.

91. а) Может ли квадратный корень из куба какого-либо простого числа быть целым числом?

б) Сколько корней имеет уравнение $|x| = \sqrt{|x|}$?

92. Извлеките корень:

а) $\sqrt{0,25b^2}$; г) $\sqrt{\frac{x^8}{9y^4}}$ ж) $\sqrt{2,56b^{10}}$, если $b < 0$;

б) $\sqrt{81a^4}$; д) $\sqrt{(6a)^2}$, если $a < 0$; з) $\sqrt{\frac{441x^2}{y^6}}$, если $xy > 0$.

в) $\sqrt{49a^{16}}$; е) $\sqrt{(4b)^6}$, если $b > 0$;

93. Даны два произвольных числа a и b. Найдите ошибку в следующих рассуждениях:

«Так как $(a-b)^2 = (b-a)^2$, то $\sqrt{(a-b)^2} = \sqrt{(b-a)^2}$, следовательно, $a - b = b - a$, $2a = 2b$, $a = b$. То есть, любые два числа равны.»

94. Упростите выражение:

а) $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$; г) $\sqrt{(y-5)^2}$, если $y < 5$;

б) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$; д) $\sqrt{x^2+4x+4}$, если $x < -2$;

в) $\sqrt{(x-4)^2}$, если $x \geq 4$; е) $\sqrt{y^4+8y^2+16}$.

95. Решите неравенство: а) $\sqrt{x^2} < 4$; б) $\sqrt{x^2} \geq 7$.

96. Вычислите:

а) $\sqrt{196 \cdot 81}$; г) $\sqrt{0,04 \cdot 6400 \cdot 0,25}$;

б) $\sqrt{1,21 \cdot 49}$; д) $\sqrt{36 \cdot 1\frac{7}{9} \cdot 0,09}$;

в) $\sqrt{0,01 \cdot 144}$; е) $\sqrt{1,69 \cdot 289 \cdot \frac{4}{169}}$.

Уровень В

97. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{24 \cdot 54}$; в) $\sqrt{75 \cdot 27}$; д) $\sqrt{14 \cdot 10 \cdot 35}$;

б) $\sqrt{128 \cdot 18}$; г) $\sqrt{63 \cdot 175}$; е) $\sqrt{13 \cdot 45 \cdot 65}$.

Рисунок 13

98. Казахстан занимает первое место в мире как по производству, так и по разведанным запасам редкого и самого тугоплавкого металла вольфрама. Найдите числа, выражающие температуру (в °C), при которой вольфрам может быть вытянут в тонкую нить, используемую, например, в электрических лампочках (рисунок 13), температуру его плавления и кипения, вычислив соответственно значения выражений $\sqrt{0,256\cdot 10^7}$, $\sqrt{\left(26\frac{47}{64}\right)^2\cdot 2^{14}}$ и $\sqrt{25\cdot 121\cdot 10201}$.

99. Упростите выражение:

а) $\sqrt{3x\cdot 5y\cdot 12x\cdot 20y}$, если $x\le 0$ и $y\le 0$;

б) $\sqrt{15x\cdot 18y\cdot 24x\cdot 45y}$, если $x\le 0$ и $y\ge 0$;

в) $\sqrt{6x^3\cdot 9y^2\cdot 10x^5\cdot 15y^6}$;

г) $\sqrt{7x^4\cdot 8y^7\cdot 21x^8\cdot 54y^9}$.

100. Докажите тождество $(\sqrt{a^2})^3-(\sqrt{b^2})^3=(\sqrt{a^3})^2-(\sqrt{b^3})^2$, при $a\ge 0$, $b\ge 0$.

101. Докажите, что если $a<0$ и $b<0$, то $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}$.

102. Упростите выражение $3y^5\cdot\sqrt{\frac{x^6}{9y^{10}}}$, если:

а) $x<0$, $y>0$; б) $x<0$, $y<0$.

103. Являются ли взаимно обратными числа:

а) $3-\sqrt{7}$ и $3+\sqrt{7}$; в) $5+2\sqrt{6}$ и $5-2\sqrt{6}$;

б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; г) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$ и $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$?

104. Используя приближенное значение $\sqrt{6}\approx 2,48$, вычислите:

а) $\sqrt{\frac{2}{3}}$; б) $\sqrt{\frac{3}{2}}$; в) $\sqrt{24}$; г) $\sqrt{150}$.

105. Сравните:

а) $\sqrt{26}$ и 5; б) $\sqrt{35}$ и 6; в) $6\sqrt{3}$ и $5\sqrt{4}$; г) $5\sqrt{6}$ и $4\sqrt{7}$.

106. Что больше:

а) $\sqrt{108 \cdot 27}$ или $\sqrt{27 \cdot 12 \cdot 16}$;

б) $\sqrt{(36 \cdot 25)^{-2}}$ или $\sqrt{(49 \cdot 10)^{-2}}$;

в) $\sqrt{7} + \sqrt{3}$ или $\sqrt{10}$;

г) $\sqrt{13} + \sqrt{12}$ или $\sqrt{14} + \sqrt{11}$;

д) $\sqrt{15} - \sqrt{6}$ или $\sqrt{14} - \sqrt{7}$;

е) $\sqrt{7} - \sqrt{19}$ или $\sqrt{8} - \sqrt{18}$?

107. Верно ли равенство:

а) $(2 + \sqrt{5})^2 + \sqrt{(4\sqrt{5} - 11)^2} = 20$;

б) $(1 + \sqrt{7})^2 + \sqrt{(2\sqrt{7} - 10)^2} = 18$?

108. Докажите неравенство:

а) $(5 - 2\sqrt{3})(6 + 5\sqrt{3}) > 13$;

б) $(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{2} + 1) > (\sqrt{2} + 2)(\sqrt{3} - 2)$.

109. Решите уравнение:

а) $(2 + x\sqrt{8}) \cdot \sqrt{2} = 2(x + \sqrt{18})$;

б) $(12 - x\sqrt{8}) \cdot \sqrt{2} = 2(x + \sqrt{144})$;

в) $\sqrt{(x-1)^2} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$;

г) $\sqrt{(2-x)^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{50}$.

110. Найдите длины сторон прямоугольника, если известно, что их отношение равно 2, а площадь – 196 см^2.

111. Зная, что $\sqrt{10} \approx 3{,}16$, найдите значение выражения:

$$10\sqrt{0{,}4} - 0{,}5\sqrt{160} + 3\sqrt{1\frac{1}{9}}.$$

112. Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{x^2}}{x} - \frac{x^0}{\sqrt{x^2}}$, если $x = 2^{-3}$.

113. Укажите верные равенства:

а) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}}$ при $x \geq 0, y > 0$;

б) $\sqrt{xy} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$ при $x \geq 0, y \geq 0$;

в) $\sqrt{x + y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ при $x \geq 0, y \geq 0$;

г) $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{xy}}{y}$ при $x \geq 0, y > 0$;

д) $\sqrt{x^2} = -x$ при $x < 0$;

е) $\sqrt{(x-y)^2} = y - x$ при $y \geq x$.

114. Вычислите:

а) $\sqrt{18}\cdot\sqrt{50}-\sqrt{2,25}$;

б) $(2\sqrt{2,5})^2+\sqrt{3}\cdot\sqrt{0,27}-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{32}}$;

в) $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{96}}+\sqrt{56,25}$;

г) $\dfrac{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2+2\sqrt{6}}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$;

д) $\sqrt{25^2-24^2}$;

е) $\sqrt{15^2+8^2}$.

115. Решите уравнение:

а) $5\sqrt{9x}-\sqrt{4x}=26$;

б) $\frac{1}{4}\sqrt{16x}+\frac{2}{5}\sqrt{25x}=1$;

в) $\sqrt{x^2}-6\sqrt{\frac{x}{4}}=0$;

г) $\sqrt{x^2}=12\sqrt{\frac{x}{9}}-4$.

116. Верно ли найдено значение выражения:

$$\frac{(5+2\sqrt{6})^2+(5-2\sqrt{6})^2}{(5+2\sqrt{6})(5-2\sqrt{6})}=\frac{(5+2\sqrt{6})+(5-2\sqrt{6})}{1\cdot 1}=10?$$

Если неверно, то найдите ошибку и выполните упражнение правильно.

117. Вычислите:

а) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{8}-\sqrt{32}}{-\sqrt{2}}$;

б) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{27}+\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$;

в) $\dfrac{10-\sqrt{125}}{\sqrt{5(2-\sqrt{5})^2}}$;

г) $\dfrac{(\sqrt{2}+1)^3+(\sqrt{2}-1)^3}{\sqrt{8}}$.

118. Представьте числитель в виде квадрата выражения или разложите его на множители и сократите дробь:

а) $\dfrac{15+2\sqrt{26}}{\sqrt{13}+\sqrt{2}}$;

б) $\dfrac{14-2\sqrt{33}}{\sqrt{11}-\sqrt{3}}$;

в) $\dfrac{\sqrt{30}+\sqrt{6}-\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$;

г) $\dfrac{\sqrt{14}+\sqrt{7}-2\sqrt{2}-2}{\sqrt{7}-2}$.

119. Верно ли равенство:

а) $\sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{7})^4}=(\sqrt{5}-\sqrt{7})^2$;

б) $\sqrt{(\sqrt{7}-\sqrt{11})^6}=(\sqrt{7}-\sqrt{11})^3$;

в) $\sqrt{(\sqrt{15}-\sqrt{21})^8}=(\sqrt{15}-\sqrt{21})^4$;

г) $\sqrt{(6-\sqrt{37})^{10}}=(6-\sqrt{37})^5$?

Уровень С

120. Упростите выражение, представив подкоренное выражение в виде квадрата суммы или разности двух чисел:

а) $\sqrt{6+2\sqrt{5}}$; в) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$;

б) $\sqrt{13+2\sqrt{12}}$; г) $\sqrt{12-6\sqrt{3}}$.

121. Решите неравенство:

а) $\sqrt{x^2}-\sqrt{2}<\sqrt{6-4\sqrt{2}}$; б) $\sqrt{x^2}+\sqrt{7}\geq\sqrt{16+6\sqrt{7}}$.

122. Докажите, что $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}>\sqrt{5}$.

123. Выполните действия:

а) $\sqrt{3}\cdot(\sqrt{27}+0,4\sqrt{75})$;

б) $(\sqrt{20}-6\sqrt{5}+\sqrt{45})\cdot\sqrt{5}$;

в) $(2\sqrt{8}+3\sqrt{5}-7\sqrt{2})(2\sqrt{2}+2\sqrt{5})$;

г) $(\sqrt{15}-\sqrt{6})^2+(\sqrt{3}+\sqrt{30})^2$.

124. Расшифруйте ребус: а) $\sqrt{(\text{ЛИК})^4}$ = БУБЛИК; б) $\sqrt{(\text{ТОМ})^4}$ = = ФАНТОМ, где различным буквам соответствуют разные цифры, а одинаковым буквам – одинаковые цифры.

125. В раствор объемом 8 л, содержащий 60 % кислоты, долили раствор с 20 % содержанием кислоты. Получили смесь, содержащую 40 % кислоты. Сколько литров 20 % раствора кислоты долили?

126. Найдите два числа, отношение которых равно 3, а отношение суммы квадратов этих чисел к их сумме равно 5.

5. Преобразования выражений, содержащих квадратные корни

Алгебраические выражения, содержащие переменные под знаком корня, называются **иррациональными**. Рассмотрим примеры тождественных преобразований таких выражений.

Представим выражение $\sqrt{a^2b}$, где $a \in R$, $b \geq 0$, в виде $|a| \cdot \sqrt{b}$. Такое преобразование называется *вынесением множителя a из-под знака корня.*

Если выражение $a \cdot \sqrt{b}$, где $a > 0$, $b > 0$, заменить тождественно равным выражением $\sqrt{a^2b}$ или выражение $a \cdot \sqrt{b}$, где $a < 0$, $b > 0$, заменить выражением $-\sqrt{a^2b}$, то такое преобразование называется *внесением множителя a под знак корня.*

Пример 1. Упростить выражение $5m\sqrt{\frac{n}{m}} - 4n\sqrt{\frac{m}{n}}$, где $m > 0$, $n > 0$.

Решение. $5m\sqrt{\frac{n}{m}} - 4n\sqrt{\frac{m}{n}} = 5\sqrt{\frac{m^2n}{m}} - 4\sqrt{\frac{n^2m}{n}} =$
$= 5\sqrt{mn} - 4\sqrt{mn} = \sqrt{mn}$.

Ответ. $\sqrt{mn}$.

Пример 2. Вынести множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt{144x^2y^3}$, если $x < 0$, $y > 0$; б) $\sqrt{25c^3p^3}$, если $c < 0$, $p < 0$;

в) $\sqrt{-8a^4b^3}$.

Решение. а) $\sqrt{144x^2y^3} = 12|xy| \cdot \sqrt{y} = -12xy\sqrt{y}$, так как $x < 0$, $y > 0$;

б) $\sqrt{25c^3p^3} = 5|cp|\sqrt{cp} = 5cp\sqrt{cp}$, так как при $c < 0$ и $p < 0$ произведение $cp > 0$;

в) так как выражение $\sqrt{-8a^4b^3}$ имеет смысл при любом значении a и $b < 0$, то $\sqrt{-8a^4b^3} = -2a^2b\sqrt{-2b}$.

Ответ. а) $-12xy\sqrt{y}$; б) $5cp\sqrt{cp}$; в) $-2a^2b\sqrt{-2b}$.

Запишем дробь $\frac{a}{\sqrt{b}}$, где $b > 0$, умножив ее числитель и знаменатель на $\sqrt{b}$, в виде $\frac{a\sqrt{b}}{b}$. О тождественных преобразованиях, в которых дроби записывают без выражений под знаком корня в знаменателе, говорят, что таким образом *избавились от иррациональности в знаменателе дроби*. Например, избавиться от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{c}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$, где $a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$, можно, умножив ее числитель и знаменатель на выражение $\sqrt{a}+\sqrt{b}$. Получим:

$$\frac{c(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\frac{c(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2}=\frac{c(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}.$$

Пример 3. Упростить выражение

$$\frac{1}{\sqrt{2a}-\sqrt{2a-1}}+\frac{1}{\sqrt{8a}-\sqrt{8a+1}}.$$

Решение.

$$\frac{1}{\sqrt{2a}-\sqrt{2a-1}}+\frac{1}{\sqrt{8a}-\sqrt{8a+1}}=\frac{\sqrt{2a}+\sqrt{2a-1}}{(\sqrt{2a})^2-(\sqrt{2a-1})^2}+$$

$$+\frac{\sqrt{8a}+\sqrt{8a+1}}{(\sqrt{8a})^2-(\sqrt{8a+1})^2}=\sqrt{2a}+\sqrt{2a-1}-2\sqrt{2a}-\sqrt{8a+1}=$$

$$=\sqrt{2a-1}-\sqrt{2a}-\sqrt{8a+1}.$$

Ответ. $\sqrt{2a-1}-\sqrt{2a}-\sqrt{8a+1}$.

Задача 1. Два специалиста выполняли почасовую работу по разным ставкам. Первому за нее начислено 625 тенге, а второму, который работал меньше первого на 1 час, 400 тенге. Если бы первый работал столько часов, сколько второй, а второй столько, сколько первый, то они получили бы поровну денег. Сколько часов работал каждый?

Решение. Пусть первый специалист работал x ч, тогда второй работал $(x-1)$ ч. За 1 час работы первому начислено $\frac{625}{x}$ тенге, второму – $\frac{400}{x-1}$ тенге. Если бы первый специалист работал $(x-1)$ ч, а второй x ч, то первый заработал бы $\frac{625(x-1)}{x}$ тенге, а второй – $\frac{400x}{x-1}$ тенге. По условию задачи $\frac{625(x-1)}{x}=\frac{400x}{x-1}$. Решим полученное уравнение, используя основное свойство пропорции: $625(x-1)^2 = 400x^2$, $\sqrt{625(x-1)^2} = \sqrt{400x^2}$, $25|x-1| = 20|x|$. Так как $x > 1$, то $25(x-1) = 20x$, $x = 5$; $x - 1 = 4$.

О т в е т. Первый специалист работал 5 часов, второй – 4 часа.

З а д а ч а 2*. Доказать, что из всех прямоугольников с данной площадью S наименьший периметр имеет квадрат со стороной $\sqrt{S}$.

Р е ш е н и е. Обозначим стороны прямоугольника a и b, тогда $ab = S$.

Если прямоугольник является квадратом, то $a = b = \sqrt{S}$, а его периметр $2(a+b) = 4\sqrt{S}$.

Если прямоугольник не является квадратом, то $a \neq b$. Пусть $a = b + c$, где $c \neq 0$ и $a + b = p$, где p – полупериметр. Тогда $b + c + b = p$, $b = \dfrac{p-c}{2}$, $a = \dfrac{p+c}{2}$, $ab = \dfrac{p^2-c^2}{4} = S$. Отсюда $p^2 = 4S + c^2$, $p = \sqrt{4S + c^2}$. По свойству арифметического квадратного корня $\sqrt{4S+c^2} > \sqrt{4S}$. Следовательно, в этом случае $2(a+b) > 2\sqrt{4S} = 4\sqrt{S}$. Таким образом, при указанном условии наименьший периметр имеет квадрат со стороной $\sqrt{S}$.

ВОПРОСЫ

1. Какое преобразование называется внесением множителя под знак корня и вынесением множителя из-под знака корня? Приведите примеры.

2. Что значит избавиться от иррациональности в знаменателе дроби? Приведите примеры.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

127. Найдите: а) $\sqrt{202\,500\,000\,000}$; б) $\sqrt{0{,}00000784}$.

128. Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt{\dfrac{72}{121}}$; б) $\sqrt{\dfrac{48}{225}}$; в) $\sqrt{\dfrac{81}{125}}$; г) $\sqrt{\dfrac{49}{216}}$.

129. Вычислите:

а) $5\sqrt{28} - 3\sqrt{63}$; в) $\frac{1}{3}(2\sqrt{180} - 3\sqrt{125})$;

б) $5\sqrt{18}-8\sqrt{8}$; г) $-\frac{1}{3}(4\sqrt{192}-5\sqrt{147})$.

130. Внесите положительный множитель под знак корня и установите, что больше:

а) $0{,}5\sqrt{10}$ или $3\sqrt{\frac{1}{3}}$; в) $-6\sqrt{\frac{1}{3}}$ или $-0{,}5\sqrt{46}$;

б) $3\sqrt{0{,}5}$ или $0{,}25\sqrt{70}$; г) $-\frac{1}{2}\sqrt{56}$ или $-9\sqrt{\frac{1}{6}}$.

131. Запишите числа в порядке возрастания:

а) $0{,}6\sqrt{5}$; $\frac{1}{3}\sqrt{7{,}2}$; $\frac{3}{4}\sqrt{7{,}2}$; $0{,}2\sqrt{7}$;

б) $-0{,}2\sqrt{2{,}5}$; $-0{,}3\sqrt{1{,}8}$; $-1{,}2\sqrt{0{,}1}$; $-2{,}3\sqrt{0{,}02}$.

132. Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt{75a^2}$, где $a \geq 0$; в) $\sqrt{144y^7}$;

б) $\sqrt{72b^2}$, где $b<0$; г) $\sqrt{-81x^3}$.

133. Внесите множитель под знак корня и упростите подкоренное выражение:

а) $x\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$, где $x>0$; в) $(a-2)\cdot\sqrt{\frac{1}{a-2}}$;

б) $y^3\sqrt{\frac{1}{y^2}+\frac{1}{y^4}}$, где $y<0$; г) $(4-b)\cdot\sqrt{\frac{1}{b-4}}$.

134. Найдите допустимые значения переменной в уравнении и решите его:

а) $\sqrt{x}=\sqrt{-x}$; в) $x\cdot\sqrt{\frac{5}{x}}=\sqrt{x^2}$;

б) $x\cdot\sqrt{-\frac{3}{x}}+9=0$; г) $-x\cdot\sqrt{\frac{-4}{x}}=\sqrt{x^2}$.

Уровень В

135. а) Из квадрата со стороной 13 см вырезан другой квадрат, как показано на рисунке 14. Найдите его сторону, если площадь полученной фигуры равна 144 см².

б) Найдите стороны прямоугольника, если их отношение равно $\frac{m}{n}$, а его площадь равна S.

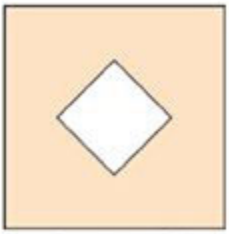


Рисунок 14

136. Упростите выражение:

а) $2\sqrt{20}-3\sqrt{45}+3\sqrt{80}-\sqrt{125}$; в) $(\sqrt{15}-\sqrt{6})^2+6\sqrt{10}$;

б) $10\sqrt{\frac{2}{5}}-0,5\sqrt{160}+3\sqrt{1\frac{1}{9}}$; г) $\left(\frac{3}{\sqrt{3}}+\frac{7}{\sqrt{7}}\right)(\sqrt{7}-\sqrt{3})$.

137. Докажите, что при любом $a>1$ верно равенство

$$\sqrt{a+\frac{a}{a^2-1}}=a\sqrt{\frac{a}{a^2-1}}.$$

138. Найдите пару последовательных натуральных чисел, квадратный корень из разности квадратов которых является натуральным числом. Сколько существует пар таких: а) однозначных; б) двузначных чисел?

139. Освободите от знака корня знаменатель дроби:

а) $\frac{10a}{\sqrt{2}}$; в) $\frac{m}{2\sqrt{3}}$; д) $\frac{58}{2\sqrt{5}-7}$; ж) $\frac{2}{5\sqrt{2}+7}$;

б) $\frac{5b}{2\sqrt{b}}$; г) $\frac{-n}{2\sqrt{5}}$; е) $\frac{\sqrt{2}}{7\sqrt{2}-5}$; з) $\frac{1}{7-4\sqrt{3}}$.

140. Сократите дробь и избавьтесь от иррациональности в ее знаменателе:

а) $\frac{\sqrt{6}+3}{2+\sqrt{6}}$; г) $\frac{7-\sqrt{35}}{5-\sqrt{35}}$;

б) $\frac{\sqrt{10}+5}{2+\sqrt{10}}$; д) $\frac{\sqrt{xy}-x}{\sqrt{xy}-y}$, где $x>0$, $y>0$;

в) $\frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{15}}$; е) $\frac{25x-y}{5\sqrt{xy}+y}$, где $x>0$, $y>0$.

141. Вычислите:

а) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$; б) $\frac{\sqrt{8}-3}{\sqrt{8}+3}+\frac{2\sqrt{2}+3}{2\sqrt{2}-3}$.

142. Найдите значение выражения:

а) $\frac{1}{2+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{8}}+\frac{1}{\sqrt{8}+3}$;

б) $\frac{2}{3-\sqrt{7}}-\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}+\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{3}-1}$.

143. Решите неравенство:

а) $\dfrac{x}{2-\sqrt{3}} < x\sqrt{3}$; б) $\dfrac{x^2}{\sqrt{2}+1} \le x^2\sqrt{2}+1$.

144. Найдите значение выражения:

а) a^2+b^2-2ab, если $a=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$, $b=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$;

б) $\left(\dfrac{1}{3}c^2+\dfrac{1}{\sqrt{3}}c+1\right)\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}c\right)$, если $c=\sqrt{3}$.

145. Двое мужчин продали на рынке 210 кг фруктов. Первый больше второго, но оба получили одинаковые суммы. По пути домой первый сказал: «Если бы у меня были твои фрукты, то я выручил бы за них 8000 тенге». Второй ответил: «За твои фрукты я получил бы только 2000 тенге». Сколько килограммов фруктов продал каждый из них?

146. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\dfrac{4}{\sqrt{2}}$; в) $\dfrac{10}{3\sqrt{5}}$; д) $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$; ж) $\dfrac{7-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$;

б) $\dfrac{8}{\sqrt{6}}$; г) $\dfrac{\sqrt{8}-\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$; е) $\dfrac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$; з) $\dfrac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$.

147. Вычислите:

а) $(\sqrt{5}-\sqrt{125})^2$; г) $(5\sqrt{3}+6\sqrt{2})\cdot(5\sqrt{3}-6\sqrt{2})$;

б) $(\sqrt{7}+\sqrt{28})^2$; д) $(\sqrt{2}-\sqrt{8})^3$;

в) $(\sqrt{13}-\sqrt{12})\cdot(\sqrt{13}+\sqrt{12})$; е) $(\sqrt{3}-\sqrt{12})^3$.

148. Сократите дробь:

а) $\dfrac{b^3}{b\sqrt{b}}$; г) $\dfrac{a+\sqrt{7}}{a^2-7}$;

б) $\dfrac{y^2-y}{\sqrt{y}}$; д) $\dfrac{b^3-11\sqrt{11}}{b-\sqrt{11}}$;

в) $\dfrac{x^2-3}{x-\sqrt{3}}$; е) $\dfrac{a^3+3a^2\sqrt{5}+15a+5\sqrt{5}}{a+\sqrt{5}}$.

149. Докажите, что является целым числом значение выражения:

а) $(4+\sqrt{3})^2+\sqrt{(8\sqrt{3}-14)^2}$; в) $(5-2\sqrt{3})^2-10\sqrt{37-20\sqrt{3}}$;

б) $\sqrt{(4\sqrt{5}-17)^2}-(\sqrt{5}-2)^2$; г) $(5\sqrt{2}-7)^2+14\sqrt{99-70\sqrt{2}}$.

Уровень С

150. Выполните действия:

а) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}+\frac{\sqrt{x}+5}{6-2\sqrt{x}}\cdot\frac{18}{5\sqrt{x}+x}$;

б) $\frac{3}{2\sqrt{x}-4}-\frac{1}{\sqrt{x}+2}+\frac{4}{4-x}$;

в) $\frac{10\sqrt{x}}{3\sqrt{x}-1}-\frac{5}{2\sqrt{x}-1}:\frac{3\sqrt{x}-1}{4x-1}$;

г) $\frac{\sqrt{x}+3}{x-2\sqrt{x}+1}:\frac{x-9}{10\sqrt{x}-10}-\frac{5}{\sqrt{x}-3}$.

151. Упростите выражение:

а) $\sqrt{\frac{9}{x^2}+\frac{6}{x}+1}$;

б) $\sqrt{4+\frac{20}{y}+\frac{25}{y^2}}$;

в) $\sqrt{14+8x^2+\sqrt{x^8+4x^4+4}}$;

г) $\sqrt{29+12y^2+\sqrt{y^8+14y^4+49}}$.

152. Найдите все двузначные числа такие, что $\sqrt{\overline{ab}}=a+\sqrt{b}$.

153. Вычислите: а) $\sqrt{5+12\sqrt{26-6\sqrt{9+4\sqrt{5}}}}$;

б) $\sqrt{17+6\sqrt{7-2\sqrt{6+4\sqrt{2}}}}$.

154. а) К стене примыкает участок в форме прямоугольника, площадь которого равна 5 м^2. При каких размерах этого участка длина изгороди вокруг него наименьшая?

б) Участок в форме прямоугольника, площадь которого равна 3 га, надо обтянуть проволокой в два ряда. Какое наименьшее количество метров проволоки понадобится для этого?

155. Докажите неравенство:

а) $\sqrt{a+b}<\sqrt{a}+\sqrt{b}$ при $a>0$, $b>0$;

б) $\frac{x+y}{2}\le\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$;

в) $\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2\ge 4$ при $a>0$.

6. Функция $y = \sqrt{x}$, ее свойства и график

Функция, заданная формулой $y = \sqrt{x}$, определена для любого неотрицательного числа, то есть $D(y) = [0; +\infty)$. Множество значений этой функции также состоит из множества неотрицательных чисел, то есть $E(y) = [0; +\infty)$. Функция имеет наименьшее значение, равное 0.

Функция называется ***возрастающей*** *на некотором промежутке*, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее значение функции. Если таким промежутком является область определения функции, то она называется *возрастающей функцией*.

Функция называется ***убывающей*** *на некотором промежутке*, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует меньшее значение функции. Если таким промежутком является область определения функции, то она называется *убывающей функцией*.

Ранее было установлено, что большему положительному числу соответствует большее значение арифметического квадратного корня из него. Следовательно, функция $y = \sqrt{x}$ является возрастающей.

Построим график функции $y = \sqrt{x}$, где $x \in [0; +\infty)$. Для этого составим таблицу некоторых соответственных значений x и y.

x	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9
y	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3

Отметим в координатной плоскости точки, координаты которых указаны в таблице. Проведем через эти точки плавную линию, получим график функции $y = \sqrt{x}$ (рисунок 15).

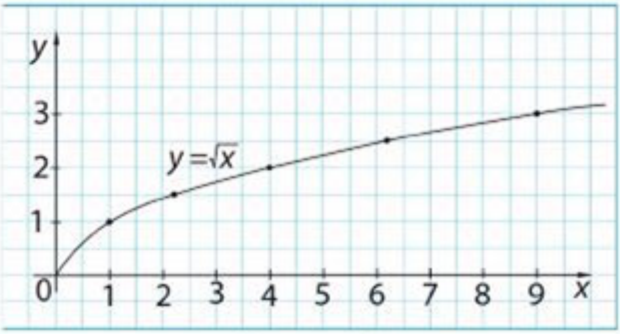


Рисунок 15

З а д а ч а. Доказать, что графики функций $y = x^2$, где $x \geq 0$ и $y = \sqrt{x}$ симметричны относительно прямой $y = x$, содержащей биссектрису первого координатного угла (рисунок 16).

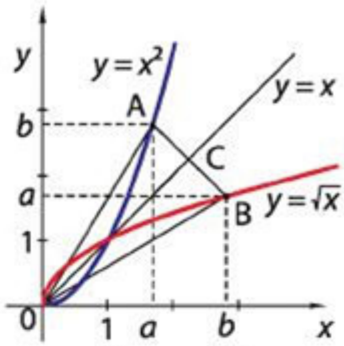


Рисунок 16

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $A(a; b)$ – произвольная точка графика функции $y = x^2$, где $x \geq 0$. Тогда $b = a^2$, $a = \sqrt{b}$. Следовательно, точка B $(b; a)$ принадлежит графику функции $y = \sqrt{x}$. Докажем, что точки A $(a; b)$ и B $(b; a)$ симметричны относительно прямой $y = x$. Для этого рассмотрим ΔAOB. В нем $OA = OB$ как гипотенузы равных прямоугольных треугольников с катетами a и b. $\angle AOC = \angle BOC$, так как $\angle AOC = 45° - \angle AOY$, $\angle BOC = 45° - \angle BOX$, а $\angle AOY = \angle BOX$ (как соответственные острые углы равных прямоугольных треугольников). Получили: треугольник AOB – равнобедренный, OC – его биссектриса. Она является его медианой и высотой. Следовательно, прямая

$y = x$ является серединным перпендикуляром отрезка AB, значит точки A $(a; b)$ и B $(b; a)$ симметричны относительно этой прямой.

Если $a = 0$ или $a = 1$, то утверждение также верно. (Объясните почему.)

ВОПРОСЫ

1. Укажите область определения и множество значений функции $y = \sqrt{x}$.

2. Докажите, что функция $y = \sqrt{x}$ – возрастающая.

3. Имеет ли функция $y = \sqrt{x}$ наименьшее и наибольшее значение?

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень A

156. Существует ли значение x, при котором значение функции $y = \sqrt{x}$ равно: а) -2; б) 10^{-1}? Ответ поясните.

157. Какие из точек принадлежат графику функции $y = \sqrt{x}$:
$A(49; 7)$; $B(-100; 10)$; $C(14; \sqrt{14})$; $D(10^6; 1000)$?

158. На графике функции $y = \sqrt{x}$ постройте точку, расстояние от которой:
а) до оси абсцисс равно 3; б) до оси ординат равно 4.

159. Сколько общих точек имеют графики функций $y = \sqrt{x}$ и:
а) $y = x^2$; б) $y = \dfrac{-4}{x}$; в) $y = \dfrac{1}{2}x$?

160. Найдите координаты точек пересечения графика функции $y = \sqrt{x}$ и прямой:
а) $y = 0{,}5$; б) $y = -x + 2$.

Уровень B

161. Укажите область определения и постройте график функции:
а) $y = -\sqrt{x}$; в) $y = -\sqrt{-x}$;
б) $y = \sqrt{-x}$; г) $y = \sqrt{|x|}$.

162. Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt{\dfrac{1}{x-1}}$; г) $y = \sqrt{\dfrac{3-x}{5} + 8}$;

б) $y = \sqrt{\dfrac{-4}{x+0,1}}$; д) $y = \sqrt{\dfrac{9}{2x^2}}$;

в) $y = \sqrt{\dfrac{x-5}{4} - 9}$; е) $y = \sqrt{\dfrac{16}{3x^2+1}}$.

163. Какие значения принимает функция $y = \sqrt{x}$, если ее аргумент принимает значения из промежутка:

а) $[1; 9]$; в) $\left[\dfrac{1}{36}; 16\right]$;

б) $[0; 0,64]$; г) $[5; 7]$?

164. Постройте в одной системе координат графики функций:
а) $y = 2\sqrt{x}$ и $y = 3\sqrt{x}$; б) $y = 2 + \sqrt{x}$ и $y = 3 + \sqrt{x}$. Сделайте вывод об изменении положения графика функции $y = \sqrt{x}$.

165. Постройте график функции: а) $y = -2\sqrt{x}$, если $D(y) = [0; 9]$; б) $y = \sqrt{2x}$, если $D(y) = [0; 8]$; в) $y = \sqrt{2+x}$, если $D(y) = [-2; 7]$.

166. При каком значении a точка $C(1; 2)$ принадлежит графику функции:

а) $y = -a\sqrt{x}$; в) $y = \sqrt{x+a}$;

б) $y = \sqrt{-ax}$; г) $y = \sqrt{\dfrac{2x}{|a|}}$?

167. Известно, что площадь круга может быть найдена по формуле $S = \pi R^2$, где R – его радиус, $\pi \approx 3,14$. Задайте формулой зависимость R от S. Какой, возрастающей или убывающей, является полученная функция?

168. Докажите, что функция $y = -\sqrt{x}$ является убывающей.

169. Найдите значение функции:

а) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+2}{x+4}}$ при $x = \sqrt{2} - 3$;

б) $f(x) = \sqrt{\dfrac{4-x}{x}}$ при $x = 2 - \sqrt{3}$.

Уровень C

170. Укажите область определения функции, заданной формулой:

а) $y = \sqrt{3x + 15} - \sqrt{2x - 4}$;

б) $y = \sqrt{2x + 12} + \sqrt{8 - 4x}$;

в) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$.

171. Постройте в одной системе координат графики функций $y = \sqrt{-x}$ и $y = x^2$, где $x \le 0$, и установите, что они симметричны относительно прямой $y = -x$.

172. Решите уравнение, используя определение арифметического квадратного корня:

а) $\sqrt{2x - 1} = 4$;

б) $\sqrt{3 - 4x} = 5$;

в) $\sqrt{x} = 2 - \sqrt{3}$;

г) $\sqrt{6 - x} = 3\sqrt{5} - 7$.

173. Докажите, что график функции $y = \sqrt{x}$ не имеет общих точек с прямой:

а) $y = x + \frac{1}{2}$;

б) $y = \frac{1}{2}x + 1$.

174. Решите неравенство:

а) $(\sqrt{x})^2 < 3$;

б) $\sqrt{x^2} \le 4$;

в) $\frac{x}{\sqrt{x}} < 1$;

г) $\frac{x}{\sqrt{x}} \ge 1$.

175. Мальчик и девочка измеряли шагами одно и то же расстояние в 143 метра. Шаг девочки 55 см. Найдите длину шага мальчика, если известно, что она выражается целым числом сантиметров, а их следы совпали 20 раз.

176. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{5}{8}, \\ 4x + 0,25y = 11; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x + y = 0, \\ xy = -12; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 11x^{-1} + 8y^{-1} = 1, \\ 9x^{-1} + 12y^{-1} = 1. \end{cases}$

7. Упражнения на повторение по теме «Квадратные корни и иррациональные выражения»

Уровень A

177. Запишите выражения в порядке возрастания их значений:

а) $\sqrt{2,75}$, $\sqrt{2,57}$, $\sqrt{1,98}$, $\sqrt{3,02}$; б) $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{15}$, $\sqrt{\frac{1}{12}}$, $\sqrt{\frac{1}{15}}$.

178. Разложите на множители подкоренное выражение и вычислите:

а) $\sqrt{7840000}$; в) $\sqrt{893025}$;

б) $\sqrt{462400}$; г) $\sqrt{419904}$.

179. Вычислите:

а) $\sqrt{2113^2 - 2112^2}$;

б) $\sqrt{192^2 + 256^2}$;

в) $\sqrt{49^2 - 2^7 \cdot 7^2 + 4^6}$.

180. Что больше:

а) $2\sqrt{3}$ или $3\sqrt{2}$; г) $\sqrt{15} - \sqrt{6}$ или $\sqrt{14} + \sqrt{7}$;

б) $-5\sqrt{3}$ или $-3\sqrt{10}$; д) $5\sqrt{7} - 12$ или $3\sqrt{10} - 11$;

в) $\sqrt{10}$ или $\sqrt{7} + \sqrt{3}$; е) $25 - 4\sqrt{6}$ или $9 - 6\sqrt{5}$?

Уровень B

181. Докажите, что является иррациональным число:

а) $3\sqrt{2} - 4$; в) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$;

б) $2\sqrt{3} + 5$; г) $\sqrt{5} - \sqrt{3}$.

182. При каких значениях переменной имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{3x}$; г) $\sqrt{1-b}$; ж) $\sqrt{121 - a^2}$;

б) $\sqrt{-2y}$; д) $\sqrt{-x^2 - 2x - 1}$; з) $\sqrt{b^2 + 144}$?

в) $\sqrt{a - 5}$; е) $\sqrt{-x^4 + x^2 - 0,25}$;

183. Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt{\frac{2}{5}}$; б) $\sqrt{4\frac{1}{2}}$; в) $\sqrt{\frac{2a^3}{b^2}}$; г) $\sqrt{2x^2 - 4x + 2}$, где $x < 1$.

184. Внесите множитель под знак корня:

а) $4\sqrt{0{,}5}$; в) $a\sqrt{\frac{b}{a}}$, где $a > 0$, $b > 0$; д) $x\sqrt{\frac{4}{x}}$;

б) $-\frac{1}{3}\sqrt{2{,}7}$; г) $a\sqrt{\frac{b}{a}}$, где $a < 0$, $b < 0$; е) $x\sqrt{\frac{-4}{x}}$.

185. При каких значениях x верно равенство:

а) $\sqrt{(x-8)^2} = x - 8$; в) $\sqrt{(x+9)^2} = x + 9$;

б) $\sqrt{(x-8)^2} = 8 - x$; г) $\sqrt{(x+9)^2} = -x - 9$?

186. Решите уравнение:

а) $\sqrt{(x+4)^2} = 25$; в) $\sqrt{(7-x)^2} = 0$;

б) $\sqrt{(x-3)^2} = 16$; г) $\sqrt{(9+x)^2} = -4$.

187. Максат и Фариза находили значение выражения $x + 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 1}$ при $x = 0{,}13$. Максат подставил вместо x данное число и получил: «$1{,}13 + \sqrt{0{,}0169 - 0{,}26 + 1} = 1{,}13 + \sqrt{0{,}7569} = 1{,}13 + 0{,}87 = 2$.»

Фариза выполнила задание так:

«$x + 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 1} = x + 1 + \sqrt{(x-1)^2} = x + 1 + |x - 1| = x + 1 - x + 1 = 2$.»

Правильно ли они выполнили задание? Если правильно, то чье решение рациональнее?

188. Аквариум емкостью 5 литров и высотой 3 дм имеет квадратное дно. Найдите сторону этого квадрата.

189. Верно ли, что $\sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(2-x)^2} = 1$:

а) при $x \in R$; б) при $x \in [1; 2]$?

190. Упростите выражение:

а) $\sqrt{(a+7)^2} - \sqrt{(a-7)^2}$ при $a \in [-7; 7]$;

б) $\sqrt{(b-2)^2} + \sqrt{(b-8)^2}$ при $b < 2$;

в) $\sqrt{a^2 - 12a + 36} - \sqrt{a^2 - 10a + 25}$ при $a < -5$;

г) $\sqrt{b^2 - 16b + 64} + \sqrt{b^2 + 14b + 49}$ при $b \in [-7; 8]$.

191. Решите уравнение:

а) $\sqrt{\frac{x+1}{5}} = 3$; в) $\sqrt{x} + 1 = \frac{1}{\sqrt{x} - 1}$;

б) $\sqrt{\frac{x^2-1}{4}} = 2$; г) $\sqrt{x} - 1 = \frac{2}{\sqrt{x} + 1}$.

192. Задайте формулой функцию вида $y = kx$, если $y = 1$ при $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

193. Используя графики функций, изображенных на рисунке 17, решите неравенство: а) $\sqrt{2x} \geq 2$; б) $\sqrt{2x} < 2$.

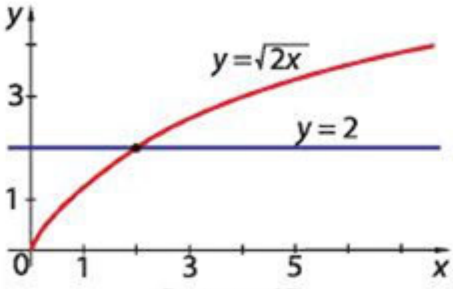


Рисунок 17

194. Упростите выражение:

а) $\sqrt{a + 2\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} + b}$;

б) $\dfrac{1}{\sqrt{2a} + \sqrt{2a-1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2a} - \sqrt{2a-1}}$;

в) $(\sqrt{a^{-1}} - \sqrt{b^{-1}})^{-1} : (a^{-1} - b^{-1})^{-1}$;

г) $\left(\dfrac{a}{\sqrt{ab} - a} + \dfrac{b}{\sqrt{ab} + b}\right) : \dfrac{a + b}{\sqrt{ab}}$.

$\boxed{195.}$ Какие из выражений являются одночленами:

а) $2^{-5} x^2 y$; б) $\sqrt{5}\,ab$; в) $\sqrt{2ab}$; г) $x^{-1}\sqrt{8}$?

196. Какие из выражений можно преобразовать в одночлен:

а) $\sqrt{16a^4b^8}$; в) $\sqrt{bc^2}$;

б) $\sqrt{3(-x)^{12}y^{20}}$; г) $\sqrt{x^6 + 2x^6}$, если $x \leq 0$?

$\boxed{197.}$ Какие из выражений являются многочленами:

а) $2 - \sqrt{5}$; в) $\sqrt{a} + \sqrt{b}$;

б) $3x + \sqrt{7}\,y$; г) $x + 2\sqrt{xy} + y$?

198. Какие из выражений можно преобразовать в многочлен:

а) $\sqrt{(x-y)^4}$; в) $\sqrt{b^{12}} + 5$;

б) $\sqrt{a^8 + 1}$; г) $\sqrt{4x^4 + 12x^2y^2 + 9y^4}$?

199. Докажите тождество $a^2 + b^2 = (a + b - \sqrt{2ab})(a + b + \sqrt{2ab})$. Являются ли множители правой части тождества многочленами?

Уровень С

200. Верно ли неравенство:

а) $\sqrt{\frac{5}{3}}+\sqrt{\frac{3}{5}}>\sqrt{4\frac{1}{5}}$;

б) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}<4$;

в) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}+2-\sqrt{2}\geq 1$?

201. Первое число на $\sqrt{8}$ больше второго, а 20 % первого числа на 0,5 больше, чем 25 % второго. Найдите эти числа.

202. Найдите значение выражения:

а) $(\sqrt{4+\sqrt{7}}+\sqrt{4-\sqrt{7}})^2$;

в) $\sqrt{6+4\sqrt{2}}-\sqrt{6-4\sqrt{2}}$;

б) $\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}$;

г) $\sqrt{3-\sqrt{5}}\cdot(3+\sqrt{5})(\sqrt{10}-\sqrt{2})$.

203. Докажите, что $\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$. (Задача индийского ученого Бхаскари-акария (XII в. н. э.))

ПРОВЕРЬСЕБЯ!

204. 1А) Запишите в порядке возрастания $0{,}5\sqrt{11}$, $\sqrt{2{,}5}$, $2\sqrt{0{,}7}$.

2В) Вычислите: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{3}-1}\right)^2$.

3В) Найдите площадь прямоугольника, если известно, что сумма длин двух его смежных сторон равна $\sqrt{14}$ см, а их разность $\sqrt{10}$ см.

4В) Докажите, что при всех допустимых положительных значениях a и b верно равенство $\frac{\sqrt{a^2b}-b}{\sqrt{a^2b}+b}=\frac{(a-\sqrt{b})^2}{a^2-b}$.

5С) Постройте график функции $y=-\sqrt{x}+4$ и найдите, при каких значениях x:

1) $y=0$; 2) $y>0$; 3) $y<0$.

ЭТО ИНТЕРЕСНО!

Герон Александрийский

Открытие факта, что отношение длины диагонали квадрата к его стороне не может быть выражено рациональным числом, имело большое влияние на развитие математики. Ранее считалось, что имеются только рациональные числа, и их достаточно для того, чтобы выразить любую величину. Существование иррациональных чисел было установлено учеными математической школы Пифагора в V веке до нашей эры.

К извлечению квадратного корня еще в древние времена приводили задачи практического характера, например, нахождение стороны квадратного участка земли данной площади. В Древнем Вавилоне приближенные значения квадратных корней из натуральных чисел умели находить еще за 2000 лет до нашей эры. В современной записи их способ может быть выражен формулой $\sqrt{m} = \sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}$. Найденное по этой формуле приближенное значение $\sqrt{m}$ будет тем точнее, чем меньше число b по сравнению с a. Указанный способ извлечения квадратного корня был подробно описан древнегреческим ученым-энциклопедистом Героном Александрийским в I веке нашей эры.

Большой вклад в развитие алгебры, в частности, в искусство вычисления квадратных корней, внес выдающийся индийский математик и астроном Бхаскари-акария (1114–1185). Его труд «Венец астрономического учения» имел широкое распространение в странах Азии, часть которого была напечатана в 1816 году в Калькутте и с тех пор неоднократно переиздавалась в качестве учебника математики.

В эпоху Возрождения европейские математики обозначали квадратный корень словом Radix (корень), а затем буквой R. Отсюда произошел термин «радикал», которым в настоящее время принято называть знак корня. Знак $\sqrt{}$ ввел чешский математик К. Рудольф (1499–1545) в 1525 году.

Бхаскари-акария

Найдите, пользуясь Интернетом:

а) сведения о биографии Пифагора и его математическом наследии;

б) задачу Пифагора о представлении нечетного числа в виде разности квадратов двух натуральных чисел и ее решение;

в) сведения о биографии Бхаскари-акария и его вкладе в развитие алгебры;

г) какой-либо пример на извлечение арифметического квадратного корня, составленный Бхаскари-акария, и его решение.

II. КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В результате изучения раздела надо

знать

- определения уравнений: квадратного, биквадратного, дробно-рационального;
- виды квадратных уравнений;
- теорему Виета и теорему, обратную ей;
- определение квадратного трехчлена и его корня;
- способы решения квадратных уравнений и уравнений, приводимых к ним;
- методы разложения квадратного трехчлена на множители.

уметь

- решать: квадратные уравнения различных видов и уравнения, приводимые к ним, дробно-рациональные уравнения;
- выводить формулы корней квадратного уравнения и разложения квадратного трехчлена на множители;
- доказывать теорему Виета и теорему, обратную ей;
- решать текстовые задачи с использованием квадратных и дробно-рациональных уравнений.

8. Квадратное уравнение. Неполные квадратные уравнения

Квадратным уравнением называется уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где x – переменная, a, b, c – некоторые действительные числа, причем $a \neq 0$. Числа a, b, c называются коэффициентами квадратного уравнения: a – первым коэффициентом, b – вторым коэффициентом, коэффициент c – свободным членом. Уравнение вида $x^2 + px + q = 0$ называется *приведенным квадратным уравнением*.

Квадратное уравнение, в котором хотя бы один из коэффициентов b или c равен 0, называется **неполным квадратным уравнением**, например, $x^2 - 5 = 0$, $3x^2 + 4x = 0$, $14x^2 = 0$. Такие уравнения вы уже решали.

Неполное квадратное уравнение вида $ax^2 = 0$ имеет один корень $x = 0$.

Решение неполного квадратного уравнения вида $ax^2 + bx = 0$ осуществляется путем разложения его левой части на множители: $x(ax + b) = 0$. Это уравнение имеет два корня $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{b}{a}$.

Неполное квадратное уравнение $ax^2 + c = 0$ решается так: $ax^2 = -c$, $x^2 = \frac{-c}{a}$. Если $\frac{-c}{a} > 0$, то уравнение имеет два противоположных корня $x_1 = \sqrt{\frac{-c}{a}}$, $x_2 = -\sqrt{\frac{-c}{a}}$. Если $\frac{-c}{a} < 0$, то уравнение не имеет корней.

Рассмотрим примеры решения полных квадратных уравнений, то есть таких, в которых коэффициенты b и c отличны от нуля.

Пример 1. Решить уравнение $2x^2 + 28x - 30 = 0$.

Решение. Разделим части уравнения на 2 и выделим из его левой части квадрат двучлена: $x^2 + 14x - 15 = 0$, $(x^2 + 2 \cdot 7x + 7^2) - 7^2 - 15 = 0$, $(x + 7)^2 - 64 = 0$. Далее решаем полученное уравнение так:

$$(x + 7)^2 = 64,$$
$$x + 7 = -\sqrt{64} \text{ или } x + 7 = \sqrt{64},$$
$$x = -8 - 7 \text{ или } x = 8 - 7,$$
$$x = -15 \text{ или } x = 1.$$

Ответ. –15; 1.

Рассмотренный прием называется решением квадратного уравнения способом *выделения квадрата двучлена*.

Пример 2. Решить уравнение $3x^2 - 12x - 3 = 0$.

Решение. Решим уравнение способом выделения квадрата двучлена.

$3x^2 - 12x - 3 = 0$, $x^2 - 4x - 1 = 0$, $(x^2 - 2 \cdot 2x + 4) - 4 - 3 = 0$, $(x - 2)^2 = 7$.

Далее получаем $x - 2 = \pm\sqrt{7}$, $x_1 = 2 - \sqrt{7}$, $x_2 = 2 + \sqrt{7}$.

Ответ. $2 - \sqrt{7}$, $2 + \sqrt{7}$.

Пример 3. Решить уравнение $3x^2 - 5x + 2 = 0$.

Решение. Решим уравнение способом выделения квадрата двучлена.

$$3x^2 - 5x + 2 = 0,\ x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{3} = 0,$$

$$\left(x^2 - 2 \cdot \frac{5}{3 \cdot 2}x + \left(\frac{5}{6}\right)^2\right) - \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \frac{2}{3} = 0,$$

$$\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{1}{36},\ x - \frac{5}{6} = \pm\sqrt{\frac{1}{36}};$$

$$x_1 = \frac{5}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3},\quad x_2 = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} = 1.$$

Ответ. $\frac{2}{3}$, 1.

ВОПРОСЫ

1. Дайте определение квадратного уравнения.

2. Приведите пример квадратного уравнения и назовите его коэффициенты.

3. Какие уравнения называются неполными квадратными уравнениями?

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

205. Какие из уравнений являются квадратными уравнениями:

а) $x^2 = 2$; в) $0 \cdot x^2 + 4x + 5 = 0$; д) $3^{-2}x^2 - 4x = 0$;

б) $3x - 0,5 = 0$; г) $2x^{-2} + x^2 + 1 = 0$; е) $x\sqrt{5} - x^2\sqrt{3} + 2 = 0$?

206. Как называется уравнение, в котором x – переменная, вида:

а) $cx^2 - dx = 0$, если $c \neq 0$; $c = 0$;

б) $mx^2 + nx + p = 0$, если $m \neq 0$; $m = 0$?

207. Решите устно неполное квадратное уравнение:

а) $x^2 - 4 = 0$; в) $x^2 + 3x = 0$; д) $(x - 3)^2 = 0$;

б) $x^2 + 5 = 0$; г) $x^2 - 8x = 0$; е) $(2x + 5)^2 = 0$.

208. Решите уравнение:

а) $x^2 + \frac{1}{3}x = 0$; г) $1 - 4x = \frac{(2-5x)^2}{4}$;

б) $x^2 - x\sqrt{2} = 0$; д) $2(3x - 4)^2 = 7(6x + 4\frac{4}{7})$;

в) $\frac{x^2 - 2x}{3} = \frac{3x^2 + 4x}{5}$; е) $5(2x - 3)^2 = 15(3 - 2x)$.

209. Найдите корни уравнения:

а) $(x + 2)^2 = 1{,}44$; г) $(3x + 2)^2 = 12x + 40$;

б) $4(5 - 0{,}25x)^2 = 9$; д) $(x - 1)(x + 1) = 2(x - 2)(x + 2)$;

в) $(x + 1)^2 = 2(x - 1)$; е) $48 - 3(x^2 - 5)^2 = 0$.

210. Приведите примеры квадратных уравнений, в которых:

а) один из корней равен 0;

б) корни являются противоположными числами.

Уровень В

211. При каких значениях k равен нулю один из корней уравнения:

а) $5x^2 - 3x + 4k + 20 = 0$; б) $3x^2 + kx - 9k^2 + 1 = 0$?

212. При каких значениях k уравнение имеет два корня, являющиеся противоположными числами:

а) $x^2 + (7k - 35)x - 4 = 0$; б) $5x^2 + (k^2 - 2k)x - 25 = 0$?

213. Найдите сторону квадрата, удвоенная площадь которого больше площади квадрата со стороной 7 см: а) на 1 см^2; б) в 8 раз.

214. а) Найдите число, если его удвоенный квадрат равен 80 % этого числа.

б) Найдите два натуральных последовательных четных числа, если разность между их произведением и удвоенным меньшим из них равна 64.

215. Найдите все значения переменной x, при которых имеет смысл выражение:

а) $\frac{14x-5}{x^2-9}$; в) $\frac{7x^2+2}{x^2-x}$;

б) $\frac{2x^2+3}{3x^2-48}$; г) $\frac{15-x}{x^2+11x}$.

216. Решите уравнение:

а) $\frac{x-1}{2}=\frac{4}{x+1}$; в) $\frac{x+3}{2}=\frac{3x+9}{x+3}$;

б) $\frac{x+2}{2}=\frac{6}{x-2}$; г) $\frac{7}{x-7}=\frac{x+7}{x-7}$.

217. Одному ученику было предложено найти больший корень неполного квадратного уравнения $mx^2+n=0$, где $m>0$, $n<0$, а второму – выполнить проверку найденного корня его подстановкой в исходное уравнение.

Решение первого ученика: «$mx^2=-n$, $x^2=\frac{-n}{m}$, $x_1=\sqrt{\frac{-n}{m}}$, $x_2=-\sqrt{\frac{-n}{m}}$; $x_1>x_2$, так как положительное число больше отрицательного. Ответ. $\sqrt{\frac{-n}{m}}$».

Проверка второго ученика: «$m\left(\sqrt{\frac{-n}{m}}\right)^2+n=0$, $m\cdot\frac{n}{m}+n=0$, $n+n=0$ – не верно. Ответ. Число $\sqrt{\frac{-n}{m}}$ не является корнем данного уравнения».

Какой из учеников допустил ошибку и в чем она заключается?

218. Решите уравнение:

а) $x^2-4|x|=0$; г) $9x^2+3|x|=0$;

б) $2x^2-5|x|=0$; д) $x^2-\frac{4x^2}{|x|}=0$;

в) $5x^2-7|x|=0$; е) $x^2+\frac{8x^2}{|x|}=0$.

219. Найдите корни уравнения:

а) $\frac{x^2-49}{|x|-7}=0$; в) $\frac{x(x^2-121)}{|x|-11}=0$;

б) $\frac{x^2-81}{|x|+9}=0$; г) $(x^2-36)\cdot\frac{x}{|x|+6}=0$.

220. Замените многоточие числом так, чтобы получился квадрат двучлена:

а) $x^2 - 2x \cdot 7 + \ldots$; в) $x^2 + 6x + \ldots$; д) $x^2 - 3x + \ldots$;

б) $x^2 - 2 \cdot 1{,}5x + \ldots$; г) $x^2 - 8x + \ldots$; е) $x^2 + 5x + \ldots$.

221. При каком значении k можно представить в виде квадрата двучлена выражение:

а) $x^2 - kx + \frac{1}{9}$; в) $x^2 - 14x - 1\frac{1}{4}k$;

б) $x^2 + kx + 6\frac{1}{4}$; г) $x^2 + 9x - 7\frac{1}{4} + k$?

Уровень C

222. Решите уравнение способом выделения квадрата двучлена:

а) $x^2 - 2x - 15 = 0$; г) $3x^2 + 18x + 15 = 0$;

б) $x^2 + 4x + 3 = 0$; д) $x^2 + x - 2 = 0$;

в) $2x^2 - 16x - 18 = 0$; е) $x^2 - 3x - 10 = 0$.

223. Выделив квадрат двучлена в знаменателе дроби, найдите ее:

а) наибольшее значение: 1) $\frac{6}{x^2 + 4x + 5}$; 2) $\frac{23}{x^2 - 6x + 8}$;

б) наименьшее положительное значение: 1) $\frac{10}{-x^2 + 8x - 14}$;
2) $\frac{4}{-x^2 - 10x - 21}$.

224. Найдите двузначное число, которое в 4 раза больше суммы его цифр и в 2 раза больше произведения его цифр.

225. Решите уравнение, разложив его левую часть на множители:

а) $x^2 - (2 \cdot 6{,}7 \cdot 0{,}2 + 1)x + 2 \cdot 6{,}7 \cdot 0{,}2 = 0$;

б) $x^2 - 8{,}3x - (8{,}3 \cdot 0{,}3 + 0{,}3^2) = 0$.

9. Формулы корней квадратного уравнения

Решим, используя способ выделения квадрата двучлена, уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$. Разделим обе части уравнения на a, получим: $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Выделим в левой части уравнения квадрат двучлена: $\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$, $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$. Отсюда $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$. Левая часть полученного уравнения может принимать только неотрицательные значения, знаменатель дроби в правой части больше нуля, поэтому наличие корней уравнения зависит от значений выражения $\boldsymbol{b^2 - 4ac}$. Это выражение называется *дискриминантом квадратного уравнения* и обозначается буквой D. (Слово «дискриминант» происходит от латинского *discriminantis*, что означает *отличающий*.)

Если $D > 0$, то $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{4a^2}$, $x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{D}}{2a}$, $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

Уравнение имеет два корня $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$.

Если $D = 0$, то уравнение имеет два равных корня $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$. (Иногда считают, что уравнение имеет один корень $x = \frac{-b}{2a}$.)

Если $D < 0$, то уравнение не имеет корней.

Используя полученные формулы, можно решить любое квадратное уравнение.

П р и м е р 1. Решить уравнение $2x^2 - x - 1 = 0$.

Р е ш е н и е. В данном уравнении $a = 2$, $b = -1$, $c = -1$. Найдем: $D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9$. Так как $D > 0$, то уравнение имеет два корня $x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2}$; $x_1 = \frac{1 - 3}{4} = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1 + 3}{4} = 1$.

О т в е т. –0,5; 1.

П р и м е р 2. Решить уравнение $2x^2 - 3x + 4 = 0$.

Р е ш е н и е. В данном уравнении $a = 2$, $b = -3$, $c = 4$. Найдем: $D = b^2 - 4ac = 9 - 32 = -23 < 0$. Следовательно, данное уравнение не имеет корней.

О т в е т. Уравнение не имеет корней.

П р и м е р 3. Решить уравнение $25x^2 + 4x + 0{,}16 = 0$.

Р е ш е н и е. В данном уравнении $a = 25$, $b = 4$, $c = 0{,}16$. Найдем: $D = b^2 - 4ac = 16 - 4 \cdot 25 \cdot 0{,}16 = 0$. Данное уравнение имеет один корень $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{50} = -\frac{2}{25}$.

О т в е т. $-\frac{2}{25}$.

Формулу корней квадратного уравнения $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$ можно записать и так:

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}.$$

Эта формула удобна для нахождения корней квадратного уравнения, если его второй коэффициент является четным числом.

П р и м е р 4. Решить уравнение $5x^2 - 18x + 3{,}4 = 0$.

Р е ш е н и е. Используем формулу корней квадратного уравнения, учитывая, что его второй коэффициент – четное число:

$$x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 5 \cdot 3{,}4}}{5} = \frac{9 \pm \sqrt{64}}{5} = \frac{9 \pm 8}{5};\ x_1 = \frac{1}{5} = 0{,}2,\ x_2 = \frac{17}{5} = 3{,}4.$$

О т в е т. 0,2; 3,4.

Для приведенного квадратного уравнения $\boldsymbol{x^2 + px + q = 0}$ формулу корней можно записать в виде: $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$.

ВОПРОСЫ

1. Выведите формулу корней квадратного уравнения.

2. По какой формуле удобно находить корни квадратного уравнения со вторым четным коэффициентом?

3. По какой формуле можно найти корни приведенного квадратного уравнения?

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

226. Установите, какие из перечисленных уравнений являются квадратными, и укажите, чему равны их коэффициенты:

а) $15x^2 - 14x + 21 = 0$;
б) $\frac{2}{7}x^2 + x\sqrt{11} + 3^{-2} = 0$;
в) $\frac{1}{x^2} + 36 = 0$;
г) $-x^2 + 2 = 0$;
д) $x^3 - 7x + 8 = 0$;
е) $-x + 5x^2 - 3^2 = 0$.

227. Составьте квадратное уравнение, если даны соответственно его первый, второй коэффициенты и свободный член:

а) 2; 3; 4;
б) -1; 0; $\frac{2}{9}$;
в) 1; $-0{,}5$; 0;
г) 14; $-\sqrt{3}$; 0,(3).

228. Не решая следующих уравнений, установите, какие из них имеют корни:

а) $2x^2 + 5x - 7 = 0$;
б) $3y^2 - 7y - 8 = 0$;
в) $m^2 - 2m + 2 = 0$;
г) $p^2 - 10p + 21 = 0$;
д) $4z^2 + 4z + 1 = 0$;
е) $9t^2 - 6t + 1 = 0$.

229. Сколько корней имеет уравнение:

а) $5x^2 - 7x + 1 = 0$;
б) $4x^2 - 12x + 9 = 0$;
в) $3y^2 + 8y + 4 = 0$;
г) $7y^2 + 6y + 5 = 0$;
д) $\sqrt{2}z^2 + 0{,}4z + 1 = 0$;
е) $4z^2 + 4\sqrt{3}z^2 + 3 = 0$?

230. Найдите корни уравнения:

а) $x^2 + 3x - 130 = 0$;
б) $x^2 - 2x + 10 = 0$;
в) $x^2 - 6x + 34 = 0$;
г) $4x^2 - 4x = 3$;
д) $\frac{x^2}{2} - \frac{x}{3} + 7\frac{3}{8} = 8$;
е) $\frac{x^2}{3} - \frac{7x}{18} + 4 = 5\frac{1}{9}$.

231. Решите квадратное уравнение:

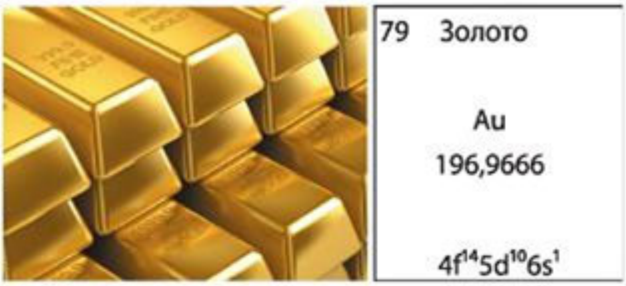
а) $3x^2 + x - 4 = 0$;
б) $2y^2 + y - 10 = 0$;
в) $3p^2 - 10p + 3 = 0$;
г) $5v^2 - 9v - 2 = 0$;
д) $12z^2 + 5z - 2 = 0$;
е) $17s^2 - 19s + 2 = 0$.

Уровень В

232. Вычислите с точностью до 0,1 корни уравнения:

а) $3x^2 + 15x - 7 = 0$; б) $-2x^2 - 11x + 3 = 0$.

233. Сколько элементов таблицы Менделеева выявлено в различных полезных ископаемых, обнаруженных в недрах Казахстана, если их число равно меньшему корню уравнения $x^2 - 1000x + 89199 = 0$?



234. Запишите число 13 в виде суммы двух чисел, произведение которых равно 40.

235. Рассмотрите вывод формулы корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ способом Бхаскари-акария (индийского математика XII в.).

Перенесем c в правую часть уравнения: $ax^2 + bx = -c$.

Умножим обе части уравнения на $4a$: $4a^2x^2 + 4abx = -4ac$.

Прибавим b^2 к обеим частям уравнения: $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$.

Отсюда: $(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$, $2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$, $2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$, $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Можно ли считать, что формула корней квадратного уравнения также получена способом выделения квадрата двучлена? Чем отличается этот способ от изложенного выше в пункте 9?

236. Найдите все значения k, при которых имеет два различных корня уравнение:

а) $x^2 + 3x + k = 0$; б) $kx^2 + 3x + 2 = 0$; в) $3x^2 - 2kx + 5 = 0$.

237. При каких значениях m имеет один корень уравнение:

а) $-2x^2 + mx - 8 = 0$; б) $mx^2 - 2x + m = 0$; в) $mx^2 - 12x + 6 = 0$?

238. При каких значениях x трехчлен принимает значение, равное m:

а) $x^2 + 7x - 8,\ m = -20$; в) $3x^2 - x + 13,\ m = 17$;

б) $2x^2 - 5x + 5,\ m = 8$; г) $6x^2 + 5x + 3{,}5,\ m = 4{,}5$?

239. Найдите корни уравнения:

а) $x^2 + \sqrt{5}x + \sqrt{5} - 1 = 0$; в) $x^2 - (4 - \sqrt{2})x + 3 - \sqrt{2} = 0$;

б) $x^2 - \sqrt{7}x - 2\sqrt{7} - 4 = 0$; г) $x^2 + (2 + \sqrt{3})x + 4\sqrt{3} - 8 = 0$.

240. Решите уравнение:

а) $(x - 2)^2 = 2(3x - 10)$; в) $(3x - 2)^2 = 8(x + 1)^2 - 100$;

б) $(3x + 2)^2 = (3x + 2)$; г) $(3x + 1)^2 = 7(x - 1)^2 + 19x - 3$.

241. а) Произведение двух натуральных чисел равно 180, причем одно число больше другого на 3. Найдите эти числа.

б) Найдите два числа, если одно меньше другого на 7, а их произведение равно 330.

242. Решите уравнение:

а) $(5x - 2)(x + 4) - x^2 = 28$; в) $12x^2 - (2x - 1)(x + 6) = 70 + 13x$;

б) $(2x - 3)(x + 4) - x^2 = 60 - x$; г) $4x^2 - (2x - 1)(x + 5) = 19x - 21$.

243. Найдите корни уравнения:

а) $\frac{(x+2)^2}{3} - \frac{(x+1)^2}{2} = 1^{-2}$;

б) $\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(x-2)^2}{5} = 0{,}25^{-1}$;

в) $\frac{(3x-4)^2}{5} - \frac{(x+2)^2}{5} = 1 - \frac{(2x-5)(x-1)}{2}$;

г) $\frac{(3x-1)(x+2)}{3} - \frac{(2x-1)^2}{3} = 4\frac{1}{6} - \frac{(x+7)^2}{2}$.

244. Решите уравнение:

а) $\frac{x-7}{2(x+3)} = \frac{x-6}{x+24}$; г) $\frac{2x^2-30x}{2x+1} = \frac{15-x}{2x+1}$;

б) $\frac{2-5x}{10x-5} = \frac{5x}{3-5x}$; д) $\frac{x^2+5x}{x+7} = \frac{7-x}{x+7}$;

в) $\frac{x+1}{x-2} = \frac{3x-7}{x-1}$; е) $\frac{x^2+6x}{x-1} = \frac{2x-9}{1-x}$.

245. Решите уравнение:

а) $|x^2 + 9x + 25| = 5$; в) $|2x^2 + 5x + 15| = 12$;

б) $|x^2 - 5x + 8| = 4$; г) $|-x^2 - 8x - 1{,}5| = 10{,}5$.

Уровень C

246. Найдите корни уравнения:

а) $x^2 + 3 = |3x + 1|$; г) $x^2 = |2x - 1|$;

б) $x^2 - 2 = |1 - 2x|$; д) $5x^2 = |2 - 3x|$;

в) $x^2 = |5x - 6|$; е) $3x^2 = |10x + 8|$.

247. а) Участок имеет форму прямоугольника площадью 2800 м², причем его длина больше ширины на 30 м. Найдите длину и ширину участка.

б) Найдите длину и ширину сада, имеющего форму прямоугольника, если его площадь равна 7200 м² и длина больше ширины на 60 м.

248. Найдите корни квадратного уравнения, в котором x – переменная:

а) $x^2 + 3kx - 4k^2 = 0$; в) $x^2 + 7tx - 8t^2 = 0$;

б) $x^2 - 10kx + 9k^2 = 0$; г) $x^2 - 6tx + 5t^2 = 0$.

249. Решите квадратное уравнение относительно x:

а) $ax^2 - (a + 2)x + 2 = 0$; б) $(a + 2)x^2 + 4x + (2 - a) = 0$.

250. Укажите допустимые значения переменной в уравнении и найдите его корни:

а) $x^2 - 7(\sqrt{x})^2 - 8 = 0$; в) $-x^2 + 3\sqrt{x^2} + 4 = 0$;

б) $2x^2 + 5(\sqrt{x})^2 - 7 = 0$; г) $9x^2 - 6\sqrt{x^2} + 1 = 0$.

251. Решите уравнение:

а) $x^2 - 3(\sqrt{-x})^2 - 10 = 0$; в) $x^2 - 8(\sqrt{x-5})^2 - 28 = 0$;

б) $x^2 - (\sqrt{-3x})^2 - 40 = 0$; г) $x^2 + 4(\sqrt{3-x})^2 - 72 = 0$.

252. Сумма n первых натуральных чисел вычисляется по формуле $\frac{n(n+1)}{2}$. Сколько n первых натуральных чисел надо сложить, чтобы получить в сумме 171?

253. Найдите отношение двух чисел, если отношение разности квадратов этих чисел к их произведению равно $\frac{8}{3}$.

10. Теорема Виета

Уравнение $x^2 - 7x + 10 = 0$ имеет корни 2 и 5. Заметим, что их сумма равна 7, а произведение равно 10. Уравнение $x^2 + 4x - 5 = 0$ имеет корни –5 и 1, их сумма равна –4, а произведение равно –5. Как видим, сумма корней каждого из этих приведенных квадратных уравнений равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно его свободному члену. Таким свойством обладает любое приведенное квадратное уравнение, имеющее корни. Это свойство установил французский математик Франсуа Виет (1540–1603).

Теорема Виета. **Если x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2 + px + q = 0$, то $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$.**

Доказательство. Используя формулу корней приведенного квадратного уравнения, получим:

$$x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} + \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) = -p;$$

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) \cdot \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) =$$

$$= \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)^2 = \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(-\frac{p}{2}\right)^2 + q = q.$$ Теорема доказана.

Квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ можно преобразовать в приведенное квадратное уравнение $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Если оно имеет корни x_1 и x_2, то $\mathbf{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}}$, $\mathbf{x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}}$.

Теорема (обратная теореме Виета). **Если числа m и n такие, что их сумма равна $-p$, а произведение равно q, то они являются корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$.**

Доказательство. Если $m + n = -p$, а $m \cdot n = q$, то уравнение $x^2 + px + q = 0$ записывается в виде $x^2 - (m + n)x + mn = 0$. Подставив в него вместо x числа m и n, получим верные числовые равенства $m^2 - (m + n)m + mn = 0$ и $n^2 - (m + n)n + mn = 0$. То есть, числа m и n – корни уравнения $x^2 + px + q = 0$, что и требовалось доказать.

П р и м е р 1. Числа m и n – корни уравнения $x^2 + px + q = 0$. Найти $m^2 + n^2$.

Р е ш е н и е. По теореме Виета $m + n = -p$, $m \cdot n = q$. Тогда

$$m^2 + n^2 = (m + n)^2 - 2mn = p^2 - 2q.$$

О т в е т. $p^2 - 2q$.

П р и м е р 2. Составить приведенное квадратное уравнение, корнями которого являются числа 2018 и 0,5.

Р е ш е н и е. По теореме, обратной теореме Виета, таким уравнением является $x^2 - 2018{,}5x + 1009 = 0$.

П р и м е р 3. Решить уравнение $x^2 - 6x + 8 = 0$.

Р е ш е н и е. Подберем два числа таких, чтобы их сумма была равна 6, а произведение 8. Это числа 2 и 4. По теореме, обратной теореме Виета, они являются корнями уравнения $x^2 - 6x + 8 = 0$.

О т в е т. 2 и 4.

П р и м е р 4*. Найти сумму кубов корней уравнения $x^2 + (1 - \sqrt{2})x - 3 + \sqrt{2} = 0$.

Р е ш е н и е. Пусть m и n – корни данного уравнения. Тогда

$m^3 + n^3 = (m + n)(m^2 - mn + n^2) = (m + n)((m + n)^2 - 3mn) =$
$= (\sqrt{2} - 1)((\sqrt{2} - 1)^2 - 3(\sqrt{2} - 3)) = (\sqrt{2} - 1)(2 - 2\sqrt{2} + 1 - 3\sqrt{2} + 9) =$
$= (\sqrt{2} - 1)(12 - 5\sqrt{2}) = 12\sqrt{2} - 10 - 12 + 5\sqrt{2} = 17\sqrt{2} - 22.$

О т в е т. $17\sqrt{2} - 22$.

З а д а ч а. Площадь прямоугольника равна 15 м^2, а сумма площадей квадратов, построенных на двух его соседних сторонах, равна 34 м^2. Найти стороны прямоугольника.

Р е ш е н и е. Пусть стороны прямоугольника равны x м и y м. По условию задачи $xy = 15$ и $x^2 + y^2 = 34$. Тогда $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$, $34 = (x + y)^2 - 30$, $(x + y)^2 = 64$, $x + y = 8$. Отсюда $y = 8 - x$, тогда $x \cdot (8 - x) = 15$. Получим уравнение $x^2 - 8x + 15 = 0$.

Заметим, что числа $x_1 = 5$ и $x_2 = 3$ таковы, что $5 + 3 = 8$, $5 \cdot 3 = 15$. Следовательно, по теореме, обратной теореме Виета, они являются корнями квадратного уравнения $x^2 - 8x + 15 = 0$. Если $x = 5$, то $y = 3$; если $x = 3$, то $y = 5$. Получили прямоугольник со сторонами 5 м и 3 м.

О т в е т. 5 м и 3 м.

ВОПРОСЫ

1. Сформулируйте и докажите теорему Виета.
2. Чему равны сумма и произведение корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$?
3. Сформулируйте и докажите теорему, обратную теореме Виета.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

254. Какие из чисел –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4 являются корнями уравнения:

а) $x^2 - 5x + 4 = 0$; в) $x^2 - x - 2 = 0$;

б) $x^2 + x - 6 = 0$; г) $x^2 + 2x - 3 = 0$?

255. Найдите сумму и произведение корней уравнения:

а) $x^2 - 6x + 9 = 0$; в) $3x^2 - 7x + 4 = 0$;

б) $x^2 + 4x + 4 = 0$; г) $4x^2 + 7x - 15 = 0$.

256. Составьте квадратное уравнение, корнями которого являются числа:

а) –3 и 5; в) 0 и 6; д) $1 + \sqrt{3}$ и $1 - \sqrt{3}$;

б) 4 и –5; г) $\frac{3}{4}$ и $-\frac{3}{4}$; е) $1 - \sqrt{2}$ и $\frac{1}{\sqrt{2} - 1}$.

257. Установите, что число m является корнем уравнения, и, используя теорему Виета, найдите его второй корень:

а) $x^2 - 10x + 1 = 0$, $m = 5 - 2\sqrt{6}$;

б) $x^2 - 6x + 1 = 0$, $m = 3 + 2\sqrt{2}$.

Уровень B

258. Составьте квадратное уравнение с рациональными коэффициентами, один из корней которого равен:

а) $\sqrt{5}$; б) $-\sqrt{3}$; в) $2 + \sqrt{3}$; г) $3 - \sqrt{2}$.

259. Решите устно уравнения:

а) $x^2 - 5x + 6 = 0$; г) $x^2 + 9x + 14 = 0$;

б) $x^2 - 5x + 4 = 0$; д) $x^2 + 4x - 21 = 0$;

в) $x^2 + 8x + 15 = 0$; е) $x^2 + 4x - 5 = 0$.

260. Найдите значение b, если известен корень x_1 уравнения:

а) $x^2 - bx + 30 = 0$, $x_1 = 6$;
б) $x^2 + bx - 14 = 0$, $x_1 = -2$;
в) $3x^2 - bx - 36 = 0$, $x_1 = -3$;
г) $2x^2 + bx - 3 = 0$, $x_1 = 0{,}5$.

261. Определите знаки корней уравнения:

а) $x^2 - x - 12 = 0$;
б) $x^2 + 5x + 6 = 0$;
в) $x^2 - 15x + 16 = 0$;
г) $-x^2 + 2x + 24 = 0$.

262. Приведенное квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Используя теорему Виета, установите по данным в таблице знаки корней и, если они имеют разные знаки, то модуль какого корня больше.

а)

$q > 0$	$P > 0$
	$P < 0$

б)

$q < 0$	$P > 0$
	$P < 0$

263. а) При каких значениях k сумма корней уравнения $x^2 + (k^2 - 10k + 9)x - k = 0$ равна нулю? б) При каких значениях k равно нулю произведение корней уравнения $x^2 - 12x + (k^2 - 2k - 35) = 0$?

264. а) Один корень уравнения $x^2 - 4x + c = 0$ равен $2 + \sqrt{3}$. Найдите другой корень и значение c.

б) Найдите значение c в уравнении $x^2 - 8x + c = 0$, если его корни связаны соотношением $x_1 + 2x_2 = 11$.

265. а) Составьте квадратное уравнение, корнями которого были бы числа, обратные корням уравнения $x^2 - 6x + 8 = 0$.

б) Составьте квадратное уравнение, корни которого были бы равны сумме и произведению корней уравнения $x^2 - 2x - 15 = 0$.

266. а) Найдите два числа, сумма которых равна 3, а сумма их квадратов равна 5.

б) Найдите два числа, разность которых равна 10, а сумма их квадратов равна 178.

267. а) Одна сторона прямоугольника на 5 дм больше другой, а его площадь равна 84 дм². Найдите стороны этого прямоугольника.

б) Найдите стороны прямоугольника, если его периметр равен 48 см, а площадь – 135 см².

Уровень С

268. Найдите все значения k, при которых корни x_1 и x_2 уравнения $x^2 + 3x + k = 0$ удовлетворяют условию:

а) $x_1 - x_2 = 6$; в) $\frac{x_1}{x_2} = -\frac{2}{5}$;

б) $3x_1 - x_2 = 4$; г) $x_1^2 + x_2^2 = 34$.

269. Не решая уравнение, найдите, при каких значениях k сумма квадратов корней уравнения: а) $4x^2 - 28x + k = 0$ равна 22,5; б) $5x^2 - 35x + k = 0$ равна 30?

270. Не вычисляя корней x_1 и x_2 уравнения: 1) $x^2 - 7x + 12 = 0$, 2) $2x^2 + 7x + 6 = 0$, найдите:

а) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; в) $x_1x_2^3 + x_2x_1^3$;

б) $x_1^2 + x_2^2$; г) $x_1^4 + x_2^4$.

11. Разложение квадратного трехчлена на множители

Выражение $ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, называется *квадратным трехчленом*. Значение переменной x, при котором квадратный трехчлен равен нулю, называется его *корнем*.

Теорема. **Если x_1 и x_2 – корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.**

Доказательство. По теореме Виета $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.
Тогда $ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2) =$
$= a(x^2 - x_1 \cdot x - x_2 \cdot x + x_1 \cdot x_2) = a((x^2 - x_1 \cdot x) - (x_2 \cdot x - x_1 \cdot x_2)) =$
$= a(x(x - x_1) - x_2(x - x_1)) = a(x - x_1)(x - x_2)$. Теорема доказана.

Пример 1. Разложить на множители квадратный трехчлен $13x^2 - 14x + 1$.

Решение. Найдем корни этого трехчлена, решив уравнение $13x^2 - 14x + 1 = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 13}}{13} = \frac{7 \pm 6}{13}, x_1 = \frac{1}{13}, x_2 = 1.$$

Тогда $13x^2 - 14x + 1 = 13(x - \frac{1}{13})(x - 1) = (13x - 1)(x - 1)$.

Пример 2. Сократить дробь $\frac{x^2 + 6x + 9}{2x^2 + 5x - 3}$.

Решение. Имеем $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$. Разложим на множители знаменатель дроби: $2x^2 + 5x - 3 = 0$, $x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} = \frac{-5 \pm 7}{4}$,
$x_1 = -3$, $x_2 = 0{,}5$, $2x^2 + 5x - 3 = 2(x + 3)(x - 0{,}5) = (x + 3)(2x - 1)$. Тогда
$\frac{x^2 + 6x + 9}{2x^2 + 5x - 3} = \frac{(x + 3)^2}{(x + 3)(2x - 1)} = \frac{x + 3}{2x - 1}$.

Отметим, что множители вида $ax + b$, на которые раскладывается квадратный трехчлен, называются *линейными множителями*. Квадратный трехчлен можно разложить на различные множители, являющиеся иррациональными выражениями. Например, $x^2 + 3 - 4x = (\sqrt{x^2 + 3})^2 - (2\sqrt{x})^2 = (\sqrt{x^2 + 3} - 2\sqrt{x})(\sqrt{x^2 + 3} + 2\sqrt{x})$.

Если иное не предусмотрено, то слова «линейные множители» не используются в условиях заданий типа: «разложить квадратный трехчлен на множители». Отметим, что если квадратный трехчлен не имеет корней, то его нельзя разложить на линейные множители.

ВОПРОСЫ

1. Какое выражение называется квадратным трехчленом?

2. Что называется корнем квадратного трехчлена?

3. Сформулируйте и докажите теорему о разложении квадратного трехчлена на множители.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень A

271. При каких значениях t обращается в нуль квадратный трехчлен:

а) $t^2 + 5t - 6$; г) $-3t^2 - 11t + 4$;
б) $t^2 + 3t - 10$; д) $4t^2 - 12t + 9$;
в) $2t^2 - t - 3$; е) $-3t^2 + 5t + 2$?

272. Найдите корни квадратного трехчлена:

а) $y^2 - 6y - 7$; г) $3y^2 + 10y - 8$;
б) $y^2 + 7y + 10$; д) $6y^2 + 7y - 3$;
в) $2y^2 - y - 6$; е) $4y^2 + 28y + 49$.

273. Разложите на множители многочлен:

а) $x^2 - 2x - 35$; г) $4x^2 + 11x + 6$;
б) $x^2 - 2x - 48$; д) $9x^2 - 12x + 4$;
в) $2x^2 - 7x + 3$; е) $4x^2 + 36x + 81$.

274. Составьте квадратное уравнение, если его корни равны:

а) 3 и 4; г) $2 - \sqrt{5}$ и $2 + \sqrt{5}$;
б) 10 и 0; д) a и 1;
в) 6 и –7; е) $2a$ и $-3a$.

Уровень B

275. Сократите дробь:

а) $\dfrac{x^2 - 3x}{x^2 - 15x + 36}$; г) $\dfrac{x^2 - 7x + 10}{x^2 + 3x - 10}$;

б) $\frac{4-x^2}{x^2+3x+2}$; д) $\frac{2x^2+5x-3}{4x^2+11x-3}$;

в) $\frac{x^2+x-2}{x^2-5x+4}$; е) $\frac{3x^2-13x-10}{3x^2-17x+10}$.

276. Найдите область определения дроби и сократите ее:

а) $\frac{x-5}{x^2-7x+10}$; в) $\frac{2x+5}{2x^2+3x-5}$;

б) $\frac{x^2-4}{x^2-9x+14}$; г) $\frac{3x+1}{3x^2+7x+2}$.

277. а) Если числитель обыкновенной дроби возвести в квадрат, а знаменатель уменьшить на 1, то получится дробь, равная 2. Если же числитель дроби уменьшить на 1, а знаменатель увеличить на 1, то получится дробь, равная $\frac{1}{4}$. Найдите эту дробь.

б) Если числитель обыкновенной дроби увеличить на 7, а знаменатель возвести в квадрат, то получится дробь, равная $\frac{3}{4}$. Если же числитель оставить без изменения, а знаменатель увеличить на 6, то получится дробь, равная $\frac{1}{2}$. Найдите эту дробь.

278. Выполните действия:

а) $\frac{1-2a}{2a-3}-\frac{1-5a}{3-2a}$; в) $\left(\frac{a+5b}{a^2-5ab}-\frac{a-5b}{a^2+5ab}\right)\cdot\frac{25b^2-a^2}{5b^2}$;

б) $\frac{b^2-5b}{b+2}:\frac{b^2-25}{b^2-4}$; г) $\left(\frac{a+2b}{a^2-2ab}-\frac{a-2b}{a^2+2ab}\right):\frac{4b^2}{4b^2-a^2}$.

279. Запишите выражение в виде алгебраической дроби и упростите ее:

а) $\frac{1}{a^2-3a+2}+\frac{1}{a-1}$; г) $\frac{2b-1}{b^2-b-12}-\frac{1}{b+3}$;

б) $\frac{3}{a^2+9a+18}-\frac{1}{a+3}$; д) $\frac{m^2-3m+2}{m+4}\cdot\frac{m-3}{m^2-5m+6}$;

в) $\frac{2b-1}{b^2-b-6}-\frac{1}{b+2}$; е) $\frac{m^2-m-20}{m-5}\cdot\frac{m+6}{m^2+3m-18}$.

280. При каких значениях x равна нулю дробь:

а) $\frac{x^2-x-2}{x-2}$; г) $\frac{2x^2-x-6}{x^2-4}$;

б) $\frac{x^2+3x+2}{x+1}$; д) $\frac{2x-x^2+3}{x^2-x-6}$;

в) $\dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}$; е) $\dfrac{3x-x^2+4}{x^2+5x+4}$?

281. При каком значении k число m является корнем квадратного трехчлена:

а) $x^2 - kx + 18$, $m = 3$;

б) $x^2 + kx - 14$, $m = 2$;

в) $kx^2 - 5x + 2$, $m = 0{,}5$?

282. При каком значении p квадратный трехчлен будет иметь два равных корня:

а) $9x^2 + 30x + p$; в) $25x^2 - px + 16$;

б) $4x^2 - 12x + p$; г) $px^2 + 36x + 81$?

283. Разложите на множители трехчлены:

а) $x^2 - 5ax + 6a^2$; г) $2x^2 + bx - 3b^2$;

б) $x^2 + ax - 6a^2$; д) $6x^2 - ax - a^2$;

в) $x^2 + 5bx - 6b^2$; е) $4x^2 + 28ax + 49a^2$.

284. Сократите дробь:

а) $\dfrac{2-5x-7x^2}{21x^2+x-2}$; в) $\dfrac{8a^3-1}{4a^2+2a+1}$;

б) $\dfrac{2a^2+5a-3}{a^3+27}$; г) $\dfrac{x^2-12ax-28a^2}{x^2+3x+6a-4a^2}$.

Уровень C

285. При каких значениях x трехчлен принимает наибольшее значение:

а) $-x^2 - 4x + 21$; в) $-5x^2 - 14x + 3$;

б) $-x^2 + 8x + 9$; г) $-2x^2 + 3x + 1$?

286. Найдите наименьшее значение трехчлена:

а) $x^2 + 2x - 15$; в) $2x^2 + x - 1$;

б) $x^2 - 8x + 19$; г) $3x^2 - 3x + 2$.

287. Существуют ли три последовательных натуральных четных числа, сумма квадратов которых равна 116?

288. Сумма цифр двузначного числа равна 10. Если из первой цифры этого числа вычесть вторую и разность умножить на само число, то получится 128. Найдите это число.

12. Решение текстовых задач с использованием квадратных уравнений

З а д а ч а 1. Существует ли выпуклый многоугольник, имеющий 77 диагоналей?

Р е ш е н и е. Выпуклый n-угольник имеет $\frac{n(n-3)}{2}$ диагоналей, так как из каждой его вершины можно провести $n - 3$ диагонали. Для ответа на поставленный в задаче вопрос решим уравнение $\frac{n(n-3)}{2} = 77$. Преобразуем его так: $n^2 - 3n - 154 = 0$. Тогда $n_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 154}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{625}}{2} = \frac{3 \pm 25}{2}$. Так как по условию задачи n – натуральное число, то $n = 14$.

О т в е т. Существует, это выпуклый 14-угольник.

З а д а ч а 2. Клумба прямоугольной формы размером 3 м × 4 м окаймлена дорожкой одинаковой ширины. Найти с точностью до 0,01 м ширину этой дорожки, если ее площадь равна половине площади клумбы.

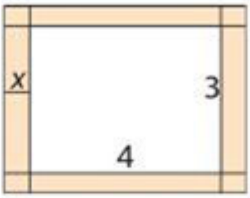


Рисунок 18

Р е ш е н и е. Обозначим ширину дорожки x м, тогда ее площадь $(14x + 4x^2)$ м^2 (рисунок 18). По условию задачи эта площадь равна 6 м^2. Составим и решим уравнение:

$$4x^2 + 14x - 6 = 0,$$
$$2x^2 + 7x - 3 = 0,$$
$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 24}}{4} = \frac{-7 \pm \sqrt{73}}{4}.$$

Так как по условию задачи $x > 0$, то $x = \frac{\sqrt{73} - 7}{4} \approx 0{,}39$.

О т в е т. $\approx 0{,}39$ м.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

289. Даны три числа 100, 60 и 30. Какое число нужно отнять от первого и прибавить к третьему, чтобы квадрат второго числа оказался равным произведению вновь полученных чисел?

290. Обезьяны забавляются: квадрат восьмой части их числа – в роще, остальные двенадцать – на вершине горы. Сколько всего обезьян? (Старинная индусская задача.)

Уровень В

291. На какое натуральное число надо разделить 136, чтобы в частном получить на 3 меньше делителя, и в остатке на 7 меньше делителя?

292. Площадь площадки прямоугольной формы равна 375 $м^2$, причем одна сторона прямоугольника составляет 60 % от другой. Найдите размеры этой площадки.

293. Даны два квадрата, стороны которых относятся как 5 : 4. Если каждую сторону квадратов уменьшить на 2 см, то разность площадей двух новых квадратов будет равна 28 $см^2$. Найдите периметры данных квадратов.

294. В зале число мест в одном ряду на 8 больше числа рядов. Сколько рядов в зале, если всего в нем 884 места?

295. а) Несколько ветеранов труда, покидая дом отдыха, обменялись фотоснимками. Сколько было ветеранов труда, если на этот обмен понадобилось 56 фотоснимков?

б) Несколько школьников, уезжая из летнего лагеря домой, обменялись сувенирами. Сколько было школьников, если понадобилось 72 сувенира?

296. На плоскости отмечено несколько точек, причем никакие три из них не лежат на одной прямой. Через каждые две точки проведена прямая. Сколько точек взято, если проведено 45 прямых?

297. Зеркало длиной 84 см и шириной 60 см имеет рамку, ширина которой везде одинакова, а площадь равна $\frac{1}{3}$ площади зеркала. Найдите с точностью до 0,1 см ширину рамки.

298. Основание здания является прямоугольником с периметром 60 м. Вокруг него заасфальтирована дорожка одинаковой ширины. Найдите ширину этой дорожки, если ее площадь равна 64 $м^2$.

Уровень C

299. Цена вещи 2500 тенге была дважды снижена на одно и то же число процентов. После чего она стала 2025 тенге. На сколько процентов снижали цену вещи? (Цены даны условно.)

300. Для выпечки пшеничного хлеба взяли x кг муки и воду, масса которой в испеченном хлебе составила x % от массы муки. Для выпечки ржаного хлеба взяли $(x + 10)$ кг муки и воду, масса которой в испеченном хлебе составила $(x + 10)$ % от массы взятой муки. Сколько килограммов взято той и другой муки, если всего испекли 112,5 кг хлеба?

13. Уравнения, приводимые к квадратным уравнениям

Решение любого уравнения $ax^{2n} + bx^n + c = 0$, где n – натуральное число, большее или равное 2, a, b, c – некоторые действительные числа, причем $a \neq 0$, сводится к решению квадратного уравнения введением новой переменной $y = x^n$. При $n = 2$ такое уравнение называется *биквадратным* уравнением.

Пример 1. Решить уравнение $3x^4 - 11x^2 - 14 = 0$.

Решение. Обозначим $x^2 = y$. Получим уравнение $3y^2 - 11y - 14 = 0$, где $y > 0$. Его корни $y_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 + 12 \cdot 14}}{6} = \frac{11 \pm \sqrt{289}}{6} = \frac{11 \pm 17}{6}$, $y_1 = -1$ не удовлетворяет условию $y > 0$, $y_2 = \frac{14}{3}$. Следовательно, $x^2 = \frac{14}{3}$, $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{14}{3}}$.

Ответ. $\pm\sqrt{\frac{14}{3}}$.

Пример 2. Решить уравнение $x^6 + 19x^3 - 216 = 0$.

Решение. Введем новую переменную $y = x^3$, получим уравнение $y^2 + 19y - 216 = 0$. Находим его корни:
$y_{1,2} = \frac{-19 \pm \sqrt{361 + 4 \cdot 216}}{2} = \frac{-19 \pm \sqrt{1225}}{2} = \frac{-19 \pm 35}{2}$, $y_1 = -27$, $y_2 = 8$.
Отсюда $x^3 = -27$ или $x^3 = 8$; $x = -3$ или $x = 2$.

Ответ. -3; 2.

Пример 3. Решить уравнение $3t^2 - 7|t| + 2 = 0$.

Решение. Обозначим $|t| = x$, тогда $t^2 = |t|^2 = x^2$. Решим уравнение $3x^2 - 7x + 2 = 0$, $x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 12 \cdot 2}}{6} = \frac{7 \pm 5}{6}$, $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = 2$. Учитывая замену, имеем: $|t| = \frac{1}{3}$ или $|t| = 2$. Тогда $t = \pm\frac{1}{3}$ или $t = \pm 2$.

Ответ. -2; $-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$; 2.

Пример 4. Решить уравнение $|2x^2 + 5x| - 3 = 0$.

Решение. Имеем: $|2x^2 + 5x| = 3$, отсюда $2x^2 + 5x = -3$ или $2x^2 + 5x = 3$. Решим эти уравнения: $2x^2 + 5x + 3 = 0$ или $2x^2 + 5x - 3 = 0$,

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{4} = \frac{-5 \pm 7}{4}, x_1 = -3, x_2 = 0{,}5;$$

$$x_{3,4} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{4} = \frac{-5 \pm 1}{4}, x_3 = -1{,}5, x_4 = -1.$$

Ответ. –3; –1,5; –1; 0,5.

Пример 5*. Решить уравнение $(x+3)(x+4)(x+7)x = 1120$.

Решение. Преобразуем уравнение так: $(x^2+7x+12)(x^2+7x) = 1120$. Введем замену $y = x^2 + 7x$, тогда $(y+12)y = 1120$, $y^2 + 12y - 1120 = 0$,

$$y_{1,2} = -6 \pm \sqrt{36+1120} = -6 \pm 34, y_1 = -40, y_2 = 28.$$

Учитывая замену, получаем $x^2 + 7x + 40 = 0$ или $x^2 + 7x - 28 = 0$. Первое уравнение корней не имеет, так как его дискриминант меньше нуля. Решаем второе уравнение $x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 4 \cdot 28}}{2} = \frac{-7 \pm \sqrt{161}}{2}$.

Ответ. $\frac{-7 \pm \sqrt{161}}{2}$.

ВОПРОСЫ

1. Какое уравнение называется биквадратным уравнением?
2. Какие еще виды уравнений, приводимых к квадратным уравнениям, вы знаете? Приведите пример.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

301. Сколько корней имеет уравнение:

а) $x^4 - 81 = 0$;
б) $x^4 + 169 = 0$;
в) $25x^4 - 49 = 0$;
г) $16x^4 - 144 = 0$?

302. Решите уравнение:

а) $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$;
б) $x^4 - 11x^2 + 30 = 0$;
в) $2x^4 - 5x^2 - 12 = 0$;
г) $3x^4 - 2x^2 - 1 = 0$;
д) $x^6 + 9x^3 + 8 = 0$;
е) $27x^6 - 28x^3 + 1 = 0$.

303. Решите уравнение:

а) $(x+5)^4-5(x+5)^2+4=0$; в) $(2x+1)^4-13(2x+1)^2+36=0$;

б) $(x-4)^4-8(x-4)^2-9=0$; г) $(3x-1)^4-(3x-1)^2-12=0$.

Уровень В

304. Приведите по два примера значений p, чтобы уравнение:

1) $x^4-8x^2+p=0$; 2) $x^4+10x^2+p=0$ имело:

а) четыре корня; б) два корня; в) не имело корней.

305. Составьте биквадратное уравнение, если его корни равны:

а) -5; -1; 1; 5; в) -3; $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; 3;

б) -4; $-\frac{3}{2}$; $\frac{3}{2}$; 4; г) $-\sqrt{5}$; $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$.

306. Найдите сумму корней уравнения:

а) $x^4-3x^2+2=0$; в) $2x^4-6x^2+2{,}5=0$;

б) $x^4-7x^2+12=0$; г) $-3x^4+12\frac{1}{3}x^2-1\frac{1}{3}=0$.

307. Найдите корни уравнения:

а) $(x-1)(x+1)(x^2+1)=10x^2-10$;

б) $(x-2)(x+2)(x^2+4)=8x^2-32$;

в) $(x-4)(x+4)(x^2+16)=4x^2-196$;

г) $(2x-3)(2x+3)(4x^2+9)=10x^2-82$.

308. Решите уравнение:

а) $(x-12)^4-13(x-12)^2+36=0$; в) $(x^2-3)^4-20(x^2-3)^2+64=0$;

б) $(2x+5)^4-23(2x+5)^2-50=0$; г) $(x^2-2x)^4-5(x^2-2x)^2+4=0$.

309. а) В саду было 180 деревьев. При расширении сада количество рядов увеличили на 5 и в каждом ряду добавили по 3 дерева. В результате общее количество деревьев увеличилось на 120. Сколько рядов в саду было до расширения?

б) В зрительном зале было 208 мест. После реконструкции зала число рядов и число мест в ряду уменьшилось на 1, в результате чего общее число мест уменьшилось на 28. Сколько рядов стало в зале?

310. Найдите корни уравнения:

а) $x^2-|x|-6=0$; г) $2x^2+3|x|-2=0$;

б) $x^2+2|x|-15=0$; д) $|2x^2+5x|=3$;

в) $2x^2-|x|-1=0$; е) $|3x^2+5x|=2$.

311. Уравнение $36x^2 - 1996|x| + 178 = 0$ составлено так: 1996 – число, обозначающее год открытия Иле-Алатауского национального парка Казахстана, 36 – число видов растений в нем, занесенных в Красную книгу, 178 – число видов птиц в этом парке. Найдите с точностью до единиц больший корень этого уравнения и вы узнаете, сколько из этих видов птиц не гнездятся в парке, то есть являются перелетными.

Серпоклюв

312. Решите уравнение:

а) $x^2 - 4|x| - 5 = 0$;   в) $3x^2 - 5|x| + 2 = 0$;

б) $x^2 + 7|x| - 8 = 0$;   г) $-3x^2 + 2|x| + 8 = 0$.

313. Среднее арифметическое двух положительных чисел равно 13, а среднее геометрическое (арифметический квадратный корень из их произведения) – 12. Найдите эти числа.

314. Решите уравнение:

а) $(x + 2)^2 - 7|x + 2| + 6 = 0$;   в) $(2x + 5)^2 - 8|2x + 5| + 15 = 0$;

б) $(x - 3)^2 - 4|x - 3| - 21 = 0$;   г) $(4x - 7)^2 - |4x - 7| - 30 = 0$.

315. Найдите корни уравнения:

а) $(x - 5)^2 - 3|x - 5| + 2 = 0$;   в) $(7x^2 - 3)^2 - |7x^2 - 3| - 12 = 0$;

б) $(x^2 - 5)^2 - 3|x^2 - 5| - 4 = 0$;   г) $\left(\frac{x^2 - 1}{2}\right)^2 + 9\left|\frac{x^2 - 1}{2}\right| - 10 = 0$.

316. Найдите допустимые значения переменной в уравнении и решите его:

а) $x^2 - 10(\sqrt{x - 3})^2 - 14 = 0$;   в) $(x - 3)^2 + 5\sqrt{(x - 3)^2} - 6 = 0$;

б) $x^2 + 5(\sqrt{x - 4})^2 - 16 = 0$;   г) $(x - 4)^2 + \sqrt{(x - 4)^2} - 6 = 0$.

317. Используя подстановку, решите уравнение:

а) $x - 2\sqrt{x} = 63$;   в) $3x + 5\sqrt{x} = 12$;

б) $x - 3\sqrt{x} = 10$;   г) $14x - 3\sqrt{x} = 5$.

318. Найдите корни уравнения:

а) $2x - 1 = 5 + 4\sqrt{2x - 1}$;   в) $2\sqrt{x + 7} = x - 41$;

б) $3x - 5 = 12\sqrt{3x - 5} - 35$;   г) $4\sqrt{x - 4} = 16 - x$.

319. а) Разложите число 300 на два множителя такие, что их разность равна 13.

б) Разложите число 210 на два множителя такие, что их сумма равна 30.

320. Решите уравнение, используя подстановку:

а) $(x^2 - 24x)^2 - 26(x^2 - 24x) + 25 = 0$;

б) $(x^2 - 3x)^2 + 4(x^2 - 3x) - 32 = 0$;

в) $2(x^2 + 5x)^2 + 5(x^2 + 5x) - 12 = 0$;

г) $3(x^2 + x)^2 - 5(x^2 + x) - 2 = 0$.

321. Найдите корни уравнения:

а) $(x^2 + 1)^2 - 3(x^2 + 1) + 2 = 0$;

б) $(x^2 - 5x)^2 + 12(x^2 - 5x) + 36 = 0$;

в) $5(x^2 - 2x + 3)^2 - 9(x^2 - 2x + 3) - 2 = 0$;

г) $-4\left(\frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{3}{2}\right)^2 - 8\left(\frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{3}{2}\right) + 5 = 0$.

Уровень C

322. Решите уравнение:

а) $(x^2 + 4x)(x^2 + 4x + 9) = -20$;

б) $(x^2 + x - 3)(x^2 + x - 4) = 30$;

в) $(x^2 - 8x)(x^2 - 8x + 5) = 14$;

г) $(2x^2 - 3x + 1)(2x^2 - 3x - 8) = -18$.

323. Найдите корни уравнения:

а) $(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 3x + 3) = -1$;

б) $(x^2 - 5x + 2)(x^2 - 5x - 1) = 28$;

в) $(x + 2)(x + 6)(x + 4)^2 = 32$;

г) $(x - 5)(x - 9)(x - 10)(x - 4) = 750$.

324. Раскройте знак модуля и решите уравнение:

а) $x^2 - 2|x - 4| = 0$;

б) $y^2 - 4|y - 1| = 0$;

в) $\frac{1}{9}y^2 + 2|y - 1| = 5$;

г) $\frac{1}{4}x^2 - |3x + 7| = 0$.

325. Используя определение арифметического квадратного корня, решите уравнение и сделайте проверку:

а) $\sqrt{2x} = x - 4$;

б) $\sqrt{5x - 1} = 3 - x$;

в) $\sqrt{x + 7} = 1 + x$;

г) $x + 2 = \sqrt{8 + x}$.

326. а) Найдите двузначное число, если цифра единиц на 3 больше цифры десятков, а произведение числа и суммы его цифр равно 175.

б) Найдите двузначное число, если одна из его цифр на 4 меньше другой, а сумма квадратов этого числа и числа, полученного перестановкой его цифр, равна 2826.

14. Целые и дробно-рациональные уравнения

Уравнение с одной переменной, содержащее выражения, представимые в виде многочлена или алгебраической дроби, называется *рациональным уравнением*. Рациональное уравнение, левая и правая части которого выражаются многочленами, называется *целым рациональным уравнением*. Например, линейные, квадратные уравнения являются целыми рациональными уравнениями.

Рациональное уравнение, содержащее алгебраическую дробь с переменной в ее знаменателе, называется *дробно-рациональным уравнением*. Например, $\frac{1}{x^2} = 1$, $\frac{x-4}{2x+1} = \frac{x+5}{x}$.

Рассмотрим примеры решения дробно-рациональных уравнений.

Пример 1. Решить уравнение $\frac{x-2}{x-3} + \frac{4}{x} = \frac{x}{x(x-3)}$.

Решение. Умножим левую и правую части уравнения на общий знаменатель $x(x - 3)$ входящих в него дробей. Получим уравнение: $x(x - 2) + 4(x - 3) = x$. Решим его: $x^2 + x - 12 = 0$, по теореме, обратной теореме Виета, $x_1 = -4$, $x_2 = 3$. Исключим из этих чисел те, при которых общий знаменатель $x(x - 3)$ равен нулю.

При $x = 3$ получаем $x(x - 3) = 0$, следовательно, 3 не является корнем исходного уравнения. При $x = -4$ имеем $x(x - 3) \neq 0$, следовательно, -4 является корнем исходного уравнения.

Ответ. -4.

Пример 2. Решить уравнение $\frac{x+2}{x+1} + \frac{3}{x-2} = 1 + \frac{3}{x^2-x-2}$.

Решение. Найдем общий знаменатель содержащихся в уравнении дробей. Для этого разложим на множители квадратный трехчлен $x^2 - x - 2$. Его корни $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, следовательно, $x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$. Умножим левую и правую части уравнения на общий знаменатель $(x + 1)(x - 2)$ имеющихся в нем дробей. Получим уравнение:

$$(x + 2)(x - 2) + 3(x + 1) = (x + 1)(x - 2) + 3.$$

Решаем это целое рациональное уравнение: $x^2 - 4 + 3x + 3 = x^2 - x - 2 + 3$, $4x = 2$, $x = 0{,}5$. При $x = 0{,}5$ общий знаменатель $(x + 1)(x - 2)$ дробей не равен нулю.

Ответ. 0,5.

Рассмотренный способ решения дробно-рациональных уравнений заключается в следующем:

1) находим общий знаменатель алгебраических дробей, входящих в уравнение;

2) умножаем левую и правую части уравнения на этот общий знаменатель;

3) решаем получившееся целое рациональное уравнение;

4) исключаем из его корней те, которые обращают в нуль общий знаменатель;

5) записываем ответ.

ВОПРОСЫ

1. Какое уравнение называется: а) рациональным; б) целым; в) дробно-рациональным уравнением?

2. Объясните, как можно решить дробно-рациональное уравнение.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

327. Найдите корни уравнения:

а) $\dfrac{5x^2 - 4x}{x - 0{,}8} = 0$; в) $\dfrac{x^2 - 15x + 56}{x - 7} = 0$;

б) $\dfrac{x^2 - 7x}{x^2 + 49} = 0$; г) $\dfrac{2x^2 + 7x + 3}{x + 3} = 0$.

328. Решите уравнение:

а) $\dfrac{2x^2 - 5x + 2}{x - 2} = 4x + 1$; в) $\dfrac{4x^2 - 14x + 6}{x - 3} = 5x + 2$;

б) $\dfrac{2x^2 + x - 1}{x + 1} = 3x + 1$; г) $\dfrac{2x^2 + x - 28}{x + 4} = 3x - 2$.

329. Решите уравнение:

а) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{4}{x - 1} = 1$; г) $\dfrac{7}{x + 4} + x = 4$;

б) $\dfrac{10}{x-3}-\dfrac{8}{x}=1;$

в) $\dfrac{x}{x+3}+\dfrac{x+3}{x}=\dfrac{5}{2};$

д) $\dfrac{x^2-3x}{x-2}-\dfrac{1-3x}{2-x}=4;$

е) $\dfrac{x^2-5x-2}{x-4}+\dfrac{x+2}{4-x}=3.$

330. Решите уравнение $\dfrac{1}{x^2}+2\cdot\dfrac{1}{x}=1\dfrac{1}{4}$ (из сочинения «Алгебра» знаменитого среднеазиатского поэта и математика Омара Хайяма (1048–1131), известного своими четверостишиями).

Уровень В

331. Докажите, что не имеет корней уравнение:

а) $\dfrac{3}{3x^2-3x+1}=\dfrac{2}{2x^2-2x-7};$

б) $\dfrac{5}{(x-2)(x-3)}+\dfrac{4}{(x-3)(x-4)}=\dfrac{9}{(x-4)(x-2)}.$

332. а) Знаменатель правильной дроби на 4 больше числителя. Если числитель и знаменатель уменьшить на 3, то полученная дробь будет меньше на $\dfrac{2}{9}$. Найдите эти дроби.

б) Числитель некоторой правильной дроби на 7 меньше знаменателя. Если числитель и знаменатель уменьшить на 6, то полученная дробь будет в 2,4 раза меньше исходной. Найдите обе дроби.

333. Найдите все значения переменной, при которых сумма дробей:

а) $\dfrac{2x}{x-1}$ и $\dfrac{3x}{x-2}$ равна 2;

б) $\dfrac{2}{y+1}$ и $\dfrac{y}{y-1}$ равна их произведению.

334. Решите уравнение:

а) $\dfrac{x+3}{x-3}+\dfrac{x-3}{x+3}=3\dfrac{1}{3};$

б) $\dfrac{2x+1}{x}+\dfrac{4x}{2x+1}=5;$

в) $\dfrac{6}{x^2-1}-\dfrac{2}{x-1}=2-\dfrac{x+4}{x+1};$

г) $\dfrac{x}{2x-1}+\dfrac{25}{4x^2-1}=\dfrac{1}{27}-\dfrac{13}{1-2x};$

д) $\left(\frac{3x}{x+1}-1\right)\cdot\frac{1-x}{2x-1}=\frac{5-2x}{x+2}$;

е) $\left(\frac{4x}{2-x}-x\right):\frac{x+2}{x-2}=\frac{10}{3-x}$.

335. Найдите корни уравнения:

а) $\frac{2x^2+9x-35}{2x-5}=0$;

б) $\frac{y^2-81}{(y+2)^2-49}=0$;

в) $\frac{(x+4)^2-(5x-1)^2}{2x+1}=0$;

г) $\frac{(y^2+4y+4)(2y^2-y-6)}{y^4-16}=0$;

д) $\frac{x^3-4x^2+4x}{x^2+3x-10}=0$;

е) $\frac{y^3-y^2-9y+9}{y^2-10y+21}=0$.

336. а) Несколько детей разделили поровну между собой 24 конфеты. Если бы число детей было на 2 меньше, то каждый получил бы дополнительно 2 конфеты. Сколько было детей?

б) Фасовщик укладывает поровну по пачкам 192 фломастера. Если в каждую пачку укладывать на 4 фломастера больше, то пачек станет на 4 меньше. Сколько фломастеров должно быть в одной пачке?

337. Решите уравнение:

а) $\frac{5t^2}{t^2-4}=\frac{10t}{t^2-4}$;

б) $\frac{y^2}{4-y}=\frac{16}{4-y}$;

в) $\frac{3}{a^2-0{,}5a}=\frac{1}{a^2-0{,}5a-1}$;

г) $\frac{2}{b^4+2b^2-1}=\frac{1}{b^4-b^2+1}$;

д) $\frac{3-y}{y+3}=\frac{y-15}{y^2+3y}$;

е) $\frac{m^2}{m^2-9}=\frac{12-7m}{9-m^2}$.

338. а) Два велосипедиста выезжают одновременно из пунктов A и B навстречу друг другу. Скорость первого на 2 км/ч больше скорости второго, поэтому в пункт B он приезжает на 10 минут раньше, чем второй в пункт A. Найдите скорость каждого из них, если расстояние AB равно 10 км.

б) Два самолета вылетели одновременно с одного аэродрома в одно и то же место назначения, находящееся на расстоянии 1600 км от аэродрома. Первый самолет, летевший со скоростью на 40 км/ч быстрее второго, прибыл на 2 часа раньше. Найдите скорость самолетов.

339. Докажите, что уравнение имеет один корень:

а) $\frac{x}{10-x}+\frac{10-x}{x}=2$;

б) $\frac{x^2+x}{x-1}-\frac{2x^2+4}{3x-3}=\frac{4}{3}$;

в) $\frac{2}{x^2-4}-\frac{1}{x^2-2x}=\frac{4-x}{x^2+2x}$;

г) $\frac{2x+1}{x-2}-\frac{x-3}{x+2}=\frac{20}{4-x^2}$;

д) $1+\frac{4x}{x^2+x-6}-\frac{x+3}{x-2}=0$;

е) $\frac{3x^2-7x-24}{x^2-6x+9}-\frac{4x}{x-3}+3=0$.

340. Решите уравнение:

а) $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}=2-\frac{1}{x^2-3x+2}$;

б) $\frac{7}{x^2+x-12}-\frac{2}{x(x+4)}+\frac{6}{9-x^2}=0$;

в) $\frac{2x}{x^2+2x-3}+\frac{3x}{x^2+x-2}=\frac{4x}{x^2+5x+6}$;

г) $\frac{3x^2-30x+74}{(x-4)(x-5)(x-6)}=\frac{1}{x-4}+\frac{1}{x-5}+\frac{1}{x-6}$.

Уровень С

341. Используя введение новой переменной, решите уравнение:

а) $\left(t-\frac{1}{t}\right)^2-5\left(t-\frac{1}{t}\right)=6$;

б) $\left(\frac{k^2+1}{k}\right)^2-\frac{9}{2}\left(\frac{k^2+1}{k}\right)+5=0$;

в) $\frac{p^2}{8-p^2}+\frac{8-p^2}{p^2}=2$;

г) $q^2-4+\frac{1}{q^2-4}=5\frac{1}{5}$.

342. а) Найдите два числа, если их разность равна 2, а половина их произведения равна среднему арифметическому этих чисел.

б) При умножении двух натуральных чисел, из которых одно на 21 больше другого, ученик допустил ошибку, уменьшив на 5 цифру десятков в произведении. При делении полученного произведения на меньший из множителей он получил в частном 46, а в остатке 4. Найдите исходные числа.

343. Найдите корни уравнения:

а) $\frac{6}{x^2-36}+\frac{1}{x^2+12x+36}+\frac{1}{2x+12}=0;$

б) $\frac{3}{x^2-9}+\frac{1}{x^2-6x+9}-\frac{3}{2x^2+6x}=0;$

в) $\frac{2x-7}{x^2-9x+14}-\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{x-1};$

г) $\frac{2x+1}{x^2+5x+6}+\frac{3}{x^2+9x+18}=\frac{1}{x+3}.$

344. Решите уравнение:

а) $x^2+\frac{4}{x^2}+5(x+\frac{2}{x})+10=0;$

б) $3\left(\frac{y^2}{9}+\frac{16}{y^2}\right)=10\left(\frac{y}{3}+\frac{4}{y}\right).$

345. Расшифруйте ребус $(АА)^Н = АННА$, где одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры.

346. Какое из чисел 5; 7 принадлежит множеству значений функции:

а) $y=\frac{7x}{x+1};$ б) $y=\frac{x^2-19}{x-5}?$

15. Решение текстовых задач с использованием дробно-рациональных уравнений

З а д а ч а 1. Автомобилист проехал 160 км, причем 62,5 % этого пути он ехал с одной скоростью, а остальную часть – со скоростью на 20 км/ч меньше. Найти скорость автомобилиста на втором участке пути, если на него он потратил на 15 минут меньше, чем на первый.

Р е ш е н и е. Пусть искомая скорость равна x км/ч, тогда скорость автомобилиста на первом участке пути равна $(x + 20)$ км/ч. Первый участок пути составляет $0{,}625 \cdot 160 = 100$ (км), второй – 60 км. Время движения на первом участке $\frac{100}{x+20}$ ч, на втором – $\frac{60}{x}$ ч.

По условию задачи $\frac{100}{x+20} - \frac{60}{x} = \frac{1}{4}$. Решим это уравнение. Умножим обе его части на общий знаменатель $4x(x + 20)$ содержащихся в уравнении дробей, получим:

$$400x - 240(x + 20) = x^2 + 20x,\ x^2 - 140x + 4800 = 0.$$

По теореме, обратной теореме Виета, корнями этого уравнения являются числа 60 и 80. Оба корня удовлетворяют условию задачи, следовательно, искомая скорость равна 60 км/ч или 80 км/ч.

О т в е т. 60 км/ч или 80 км/ч.

З а д а ч а 2*. Мама купила на a тенге груш и на такую же сумму яблок. Всего n кг. Сколько килограммов груш и сколько килограммов яблок купила мама, если известно, что 1 кг груш на b тенге дороже 1 кг яблок?

Р е ш е н и е. Пусть куплено x кг груш по цене $\frac{a}{x}$ тенге за 1 кг. Тогда яблок куплено $(n - x)$ кг по цене $\frac{a}{n-x}$ тенге за 1 кг. По условию задачи составим и решим уравнение:

$$\frac{a}{x} - \frac{a}{n-x} = b,\quad a(n-x) - ax = bx\,(n-x),\quad an - 2ax = bnx - bx^2,$$

$$bx^2 - (2a + bn)x + an = 0,\quad x_{1,2} = \frac{2a + bn \pm \sqrt{(2a+bn)^2 - 4abn}}{2b} =$$

$$= \frac{2a + bn \pm \sqrt{4a^2 + b^2n^2}}{2b},$$

$$x_1 = \frac{2a + bn - \sqrt{4a^2 + b^2n^2}}{2b},\ x_2 = \frac{2a + bn + \sqrt{4a^2 + b^2n^2}}{2b}.$$

Тогда $n - x_1 = \frac{2bn - 2a - bn - \sqrt{4a^2 + b^2n^2}}{2b} = \frac{bn - 2a - \sqrt{4a^2 + b^2n^2}}{2b} <$ < 0, так как $(bn - 2a)^2 < 4a^2 + b^2n^2$. Следовательно, x_1 не удовлетворяет условию задачи.

Находим $n - x_2 = \frac{2bn - 2a - bn + \sqrt{4a^2 + b^2n^2}}{2b} =$

$= \frac{bn - 2a + \sqrt{4a^2 + b^2n^2}}{2b} > 0$, следовательно, x_2 удовлетворяет условию задачи.

Ответ. $\frac{2a + bn - \sqrt{4a^2 + b^2n^2}}{2b}$ кг груш и $\frac{bn - 2a + \sqrt{4a^2 + b^2n^2}}{2b}$ кг яблок.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

347. Дана несократимая дробь, знаменатель которой на 5 больше числителя. Если от числителя этой дроби отнять 2, а к знаменателю прибавить 2, то данная дробь уменьшится на $\frac{11}{40}$. Найдите эту дробь.

348. С одного участка собрали 450 т, а с другого, площадь которого на 5 га меньше, – 400 т картофеля. Найдите урожайность картофеля на каждом участке, если на втором участке она была на 2 т выше, чем на первом.

349. На обработку детали токарь затрачивает на 7 мин меньше своего ученика. Сколько деталей каждый из них обрабатывает за 4 часа, если за это время токарь обработал на 28 деталей больше, чем его ученик?

Уровень В

350. Смешали два раствора, один из которых содержит 24 г, а другой – 10 г йодистого калия и получили 100 г нового раствора. Найдите концентрацию каждого из первоначальных растворов, если концентрация первого была на 15 % больше, чем концентрация второго раствора.

351. Катер прошел 5 км против течения реки и 14 км по течению, затратив на это столько же времени, сколько ему потребовалось бы для того, чтобы пройти 18 км по озеру. Найдите собственную скорость катера, если скорость течения реки 3 км/ч.

352. а) Мастерская должна была к определенному сроку выпустить 5400 пар обуви. Но, выпуская в день на 30 пар обуви больше, чем предполагалось, мастерская выполнила заказ на 9 дней раньше срока. За сколько дней был выполнен заказ?

б) Две бригады приняли на склад по 45 т овощей. Первая бригада принимала в час на 8 т больше, чем вторая, поэтому завершила работу на 2 часа раньше. Сколько тонн овощей в час принимала каждая бригада?

353. а) Расстояние в 10 км один из двух лыжников прошел на 10 мин быстрее другого. Найдите среднюю скорость каждого лыжника, если скорость первого на 3 км/ч больше скорости второго.

б) Расстояние 400 км один поезд прошел на 1 час быстрее другого. Какова средняя скорость каждого поезда, если второй поезд двигался на 20 км/ч медленнее первого?

354. Сплав магния и алюминия содержит 22 кг алюминия. После того, как в сплав добавили 15 кг магния, содержание алюминия в новом сплаве уменьшилось на 33 %. Сколько килограммов весил сплав первоначально?

355. а) Два комбайна могут собрать хлопок с поля на 9 дней быстрее, чем первый комбайн, и на 4 дня быстрее, чем второй комбайн. За сколько дней может собрать весь хлопок каждый комбайн?

б) Два каменщика сложили вместе стену за 20 дней. За сколько дней мог бы выполнить эту работу каждый из них отдельно, если известно, что первый каменщик может выполнить эту работу на 9 дней быстрее второго?

356. а) Моторная лодка прошла 56 км по течению реки, а затем 30 км против течения. На весь путь затрачено 9,5 ч, из которых 2,5 ч – на остановки. Найдите собственную скорость лодки, если скорость течения реки равна 2 км/ч.

б) Расстояние 40 км между пристанями катер преодолевает туда и обратно за 6 ч, причем 1,5 ч из них тратит на остановки. Найдите скорость течения реки, по которой движется катер, если его собственная скорость равна 18 км/ч.

Уровень C

357. а) Собственная скорость катера v км/ч. Расстояние d км катер преодолел дважды: сначала по течению реки, затем против течения. На путь против течения он затратил на t ч больше, чем на путь по течению. Найдите скорость течения реки.

б) Поезд был задержан на t часов и затем наверстал упущенное время на участке пути в s км, увеличив на v км/ч начальную скорость. Найдите начальную скорость поезда.

358. На нескольких полках в библиотеке размещено m учебников по алгебре, поровну на каждой, причем m не больше 100. Если на каждую полку поместить на 5 учебников больше, то понадобилось бы на 2 полки меньше. На скольких полках размещены эти учебники?

16. Упражнения на повторение по теме «Квадратные уравнения»

Уровень A

359. При каких значениях p уравнение имеет два корня:

а) $2x^2 - 3x + p - 1 = 0$; в) $3x^2 - 7x + 2 - 5p = 0$;

б) $5x^2 + 4x + 3 - 2p = 0$; г) $7x^2 + 8x + 3p - 3\frac{5}{7} = 0$?

360. Решите уравнение:

а) $x^2 - (3 + \sqrt{2})x + 3\sqrt{2} = 0$; б) $y^2 + (5 + \sqrt{3})y + 5\sqrt{3} = 0$.

361. Найдите неизвестные коэффициент и корень уравнения:

а) $x^2 - 6x + q = 0$, если $x_1 = 2$; б) $x^2 - px + 18 = 0$, если $x_1 = 4{,}5$.

Минерал агат

362. Составьте приведенное квадратное уравнение, корнями которого являются числа:

а) 5 и $\frac{1}{5}$; б) $\sqrt{5}$ и $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

363. Сколько видов минерального сырья обнаружено в Казахстане, если их число равно квадрату разности корней уравнения $x^2 - 33x - 34 = 0$?

Уровень B

364. Среди чисел -4; $-\sqrt{2}$; 1; 0,(3); 2; 5 найдите те, которые являются корнями квадратного трехчлена:

а) $x^2 + 2x - 8$; в) $3p^2 + 11p - 4$;

б) $t^2 - (1 - \sqrt{2})t - \sqrt{2}$; г) $3k^2 - 16k + 5$.

365. Разложите трехчлен на линейные множители:

а) $15a^2 + 13a + 2$; в) $4k^4 - 17k^2 + 4$;

б) $-3b^2 + 7b + 6$; г) $-9t^4 + 10t^2 - 1$.

366. Сократите дробь:

а) $\frac{b^2 + b - 90}{81 - b^2}$; в) $\frac{c^4 - 5c^2 + 4}{8 - 6c^2 + c^4}$;

б) $\frac{a^2 - 25}{10 + 3a - a^2}$; г) $\frac{n^4 + 4n^2 + 3}{n^4 - 6n^2 - 27}$.

367. Решите уравнение:

а) $x^2 - 13\sqrt{x^2} + 40 = 0$;

б) $(x^2 - 4)^2 - 3\sqrt{(x^2 - 4)^2} - 10 = 0$;

в) $x^2 - 2x + \dfrac{2 - x}{|2 - x|} = 0$;

г) $x^2 - 6x \cdot \dfrac{|x - 3|}{x - 3} + 5 = 0$.

368. Найдите корни уравнения:

а) $2(x - 5)^2 - 7|x - 5| + 3 = 0$;

б) $3(x + 4)^2 + |x + 4| - 2 = 0$;

в) $2(x - 7)^2 - 5|x - 7| + 2 = 0$;

г) $2{,}5(x + 8)^2 - 4|x + 8| - 2 = 0$.

369. Сколько корней имеет уравнение:

а) $\dfrac{|x^2 - 5x + 4|}{x - 4} = 0$;

б) $\dfrac{x - 4}{|x^2 - 5x + 4|} = 0$;

в) $\dfrac{(x^2 - 25)(x + 7)}{x^2 - 49} = 0$;

г) $\dfrac{(x^3 - 1)(x^4 - 81)}{x^2 - 6x + 9} = 0$?

370. Разложите на множители левую часть уравнения и найдите его корни:

а) $x^4 - 144 + 4x(x^2 + 12) = 0$;

б) $16 - x^4 - 5x(4 - x^2) = 0$;

в) $81 - x^4 - 8x(x^2 + 9) = 0$;

г) $x^4 - 256 - 10x(x^2 - 16) = 0$.

371. Найдите корни уравнения:

а) $2y^3 - 18y - y^2 + 9 = 0$;

б) $y^3 + 3y^2 - 16y - 48 = 0$;

в) $2y^3 - 32y - (y^2 - 16)^2 = 0$;

г) $y^3 + 5y^2 - 4(y + 5)^2 = 0$.

Уровень C

372. Решите уравнение:

а) $(x^2 - 6x + 9)^2 - (x - 2)(x - 4) = 1$;

б) $(x^2 - 8x + 14)^2 - (x - 3)(x - 5) = 1$;

в) $(x^2 - 5x + 7)^2 - (x - 3)(x - 2) = 1$;

г) $(x^2 - 9x + 22)^2 - (x - 4)(x - 5) = 8$.

373. Существует ли выпуклый многоугольник, в котором: а) диагоналей на 25 больше, чем сторон; б) сторон на 7 меньше, чем диагоналей?

374. В чемпионате по футболу состоялось 240 матчей, причем каждая команда сыграла с каждой 2 раза. Сколько команд участвовало в чемпионате?

375. Из квадратного листа жести вырезали по углам квадратики со стороной 5 см и загнули его края так, что получился короб, объем которого равен 2 дм³. Найдите площадь этого листа.

376. Решите уравнение:

а) $\frac{2x}{x-1}+\frac{3}{x+1}=\frac{3x+1}{x^2-1}$;

б) $\frac{3}{2x-1}+\frac{7}{2x+1}=\frac{4-20x^2}{1-4x^2}$;

в) $\frac{t+5}{t+1}+\frac{3t+1}{t^2+3t+2}=\frac{5}{2}$;

г) $\frac{5t}{2t^2-t-1}-\frac{4t-5}{t^2-1}=\frac{5}{2t+1}$;

д) $\frac{3y+2}{y^2-y-12}-\frac{1}{y+3}+1=0$;

е) $\frac{-6y^2-5y-1}{4y^2+4y+1}-\frac{6y}{2y+1}+5=0$.

377. а) На посадке деревьев работали две бригады. Первая бригада ежедневно высаживала на 40 деревьев больше, чем вторая, и посадила 270 деревьев. Вторая бригада работала на 2 дня дольше первой и посадила 250 деревьев. Сколько дней работала на посадке деревьев каждая бригада?

б) Рабочий по плану должен к определенному сроку изготовить 150 деталей. Перевыполняя дневную норму на 3 детали, он за день до срока перевыполнил задание на 8 %. Сколько деталей изготовил рабочий и за сколько дней?

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

378. 1A) Решите уравнение: 1) $3x^2+4x+5=0$; 2) $x-\frac{1}{x}=4{,}8$.

2B) Сократите дробь: $\frac{x^2-8x-9}{x^2+9x+8}$.

3B) Решите уравнение: $\frac{2x+7}{x^2+5x-6}+\frac{3}{x^2+9x+18}=\frac{1}{x+3}$.

4C) Мастер изготавливает одну деталь на 2 мин быстрее, чем его ученик. Сколько деталей изготавливает каждый из них за один час, если мастер изготавливает за один час на одну деталь больше, чем ученик?

5C) Докажите, что уравнение $7x^2 + bx - 2 = 0$ при любом значении b имеет корни разных знаков.

ЭТО ИНТЕРЕСНО!

Отдельные квадратные уравнения и задачи, приводимые к ним, умели решать еще в Древнем Вавилоне во II тысячелетии до нашей эры. Древнегреческие математики решали такие уравнения геометрическим способом. Основная заслуга в развитии теории решения квадратных уравнений принадлежит выдающемуся ученому Средней Азии аль-Хорезми (783–850), который сформулировал точные предписания (алгоритмы) решения квадратных уравнений различных видов. Понятие «алгоритм», широко используемое в настоящее время практически во всех сферах человеческой деятельности, получило название в честь этого выдающегося ученого.

Аль-Хорезми

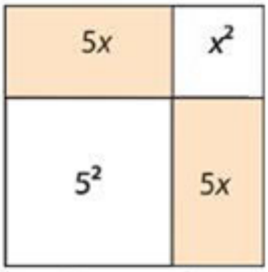


Рисунок 19

Например, уравнение $x^2 + 10x = 39$ он решал, используя площадь квадрата, составленного из квадратов со сторонами x и 5 и двух прямоугольников со сторонами x и 5 (рисунок 19). По сути, он геометрически выделял квадрат двучлена и представлял данное уравнение в виде $x^2 + 2 \cdot 5x + 25 = 39 + 25$, $(x + 5)^2 = 8^2$, откуда $x + 5 = 8$, $x = 3$. Отрицательные корни в те времена не рассматривались. Тексты в его сочинениях излагались в большей мере повествовательно. Например, уравнение $\frac{10 - x}{x} + \frac{x}{10 - x} = 2\frac{1}{6}$ (решите его) он представлял так: «Ты разделил десять на две части и разделил одну на другую и наоборот, и в сумме все это оказалось двумя и одной шестой».

В X–XII веках индийские и китайские математики, опираясь на труды аль-Хорезми, значительно усовершенствовали способы решения квадратных уравнений. В Европе формулами решения квадратных уравнений стали пользоваться в XIII–XV веках. В современных символических обозначениях они были представлены в XVI веке французским математиком Ф. Виетом и итальянскими учеными Д. Кардано и Н. Тарталья.

Омар Хайям

Найдите, пользуясь Интернетом:

а) сведения о биографии аль-Хорезми и его вкладе в развитие теории решения квадратных уравнений;

б) какое-либо квадратное уравнение, составленное аль-Хорезми, и его решение;

в) сведения о биографии О. Хайяма, его математическом и поэтическом наследии;

г) сведения о биографии Д. Кардано и его вкладе в развитие алгебры;

д) какое-либо квадратное уравнение, составленное Д. Кардано, и его решение.

III. КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ

В результате изучения раздела надо

знать

- определение квадратичной функции и ее свойства;
- виды квадратичной функции;
- способы построения графиков квадратичных функций различных видов.

уметь

- строить и читать графики квадратичных функций различных видов;
- устанавливать свойства квадратичной функции;
- решать текстовые задачи, в том числе прикладные, с использованием свойств квадратичной функции.

17. Определение квадратичной функции. Функция $y = ax^2 + n$ и ее график

Квадратичной функцией называется функция вида $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$, где x – аргумент, a, b и c – некоторые действительные числа, причем $a \neq 0$. Ранее вы изучали квадратичную функцию вида $y = ax^2$, строили ее график – параболу. Две части параболы, на которые она разделяется вершиной, называют *ветвями параболы*.

График функции $y = ax^2$ симметричен относительно оси Oy, такие функции называются *четными*. То есть, функция $y(x)$ называется *четной*, если для любых значений аргумента x и $-x$, входящих в ее область определения, верно равенство $y(-x) = y(x)$.

Построим теперь график функции вида $y = ax^2 + n$. Заметим, что каждое значение этой функции отличается от соответствующего значения функции $y = ax^2$ на число n. Следовательно, ее графиком также является парабола, полученная сдвигом параболы $y = ax^2$ вдоль оси Oy на n единиц вверх, если $n > 0$ или на n единиц вниз, если $n < 0$ (рисунок 20, *а*, *б*).

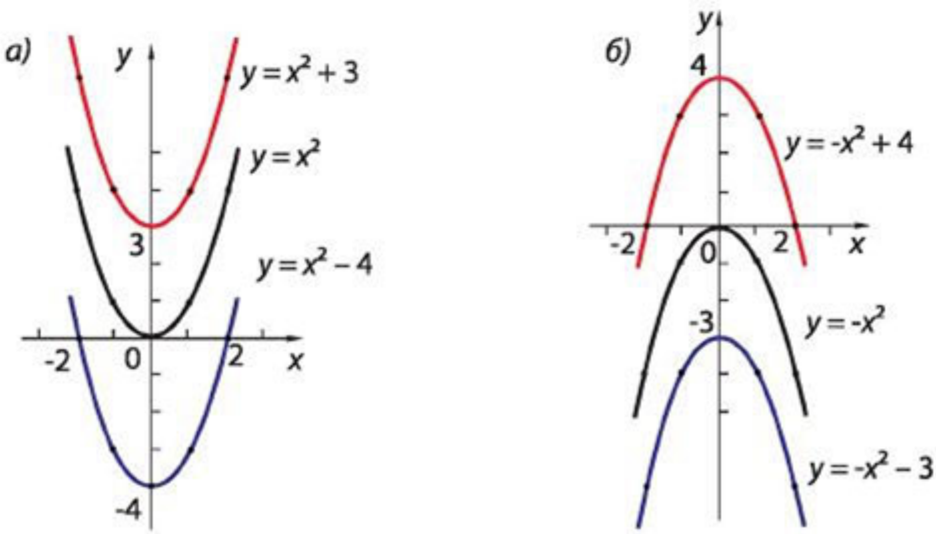


Рисунок 20

Вершиной параболы $y = ax^2 + n$ является точка с координатами **(0; *n*)**. Ветви параболы направлены вверх, если $a > 0$; вниз, если $a < 0$. Функция $y = ax^2 + n$ – **четная**, ее график симметричен относительно оси ординат. Рассмотрим некоторые свойства функции $y = ax^2 + n$ при $a > 0$ и при $a < 0$.

Свойство функции	$y = ax^2 + n,\ a > 0$	$y = ax^2 + n,\ a < 0$
Область определения	$D(y) = R$	$D(y) = R$
Множество значений	$E(y) = [n; +\infty)$	$E(y) = (-\infty; n]$
Промежуток убывания	$x \in (-\infty; 0]$	$x \in [0; +\infty)$
Промежуток возрастания	$x \in [0; +\infty)$	$x \in (-\infty; 0]$

П р и м е р. Построить график функции $y = \frac{1}{3}x^2 - 4$ и найти: а) множество значений функции; б) промежуток убывания; возрастания; в) нули функции, то есть значения аргумента, при которых $y = 0$; г) промежутки знакопостоянства функции, то есть все значения x, при которых $y < 0$; $y > 0$.

Р е ш е н и е. Графиком является парабола, ветви которой направлены вверх (так как $a = \frac{1}{3} > 0$). Вершина параболы – точка $(0; -4)$. Составим таблицу соответственных значений x и y функции $y = \frac{1}{3}x^2 - 4$ и построим ее график (рисунок 21).

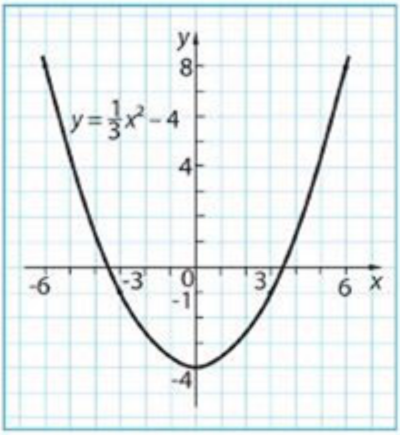


Рисунок 21

x	–6	–3	0	3	6
y	8	–1	–4	–1	8

а) $E(y) = [-4; +\infty)$;

б) функция убывает при $x \in (-\infty; 0]$ и возрастает при $x \in [0; +\infty)$;

в) нули функции – это абсциссы точек пересечения графика с осью Ox: $x_1 \approx -3{,}5$ и $x_2 \approx 3{,}5$; для точного нахождения нулей функции решим уравнение: $\frac{1}{3}x^2 - 4 = 0$, $x^2 = 12$, $x = \pm\sqrt{12}$,

$x_1 = -2\sqrt{3}$, $x_2 = 2\sqrt{3}$

г) $y < 0$ при $x \in (-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3})$;

$y > 0$ при $x \in (-\infty; -2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{3}; +\infty)$.

ВОПРОСЫ

1. Дайте определение квадратичной функции.

2. Объясните на примерах, как можно построить график функции $y = ax^2 + n$.

3. Какие свойства функции $y = ax^2 + n$ вы знаете?

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

379. В одной системе координат постройте графики функций и укажите область определения и множество значений каждой из них:

а) $y = -x^2 - 2$ и $y = -x^2 + 2$; б) $y = 0{,}5x^2 - 3$ и $y = 0{,}5x^2 + 3$.

380. При каких значениях k графиком функции $y = (k - 3)x^2 + 5$ является: а) парабола; б) прямая?

381. Найдите: а) наименьшие значения функций 1) $y = 4x^2 - 2$; 2) $y = -2x^2 + 4$;

б) наибольшие значения функций 1) $y = 3x^2 - 2{,}5$; 2) $y = -2{,}5x^2 + 3$.

382. Проверьте, принадлежит ли графику функции $y = -200x^2 + 5$ точка: $A(0; 5)$, $B(1; -195)$, $C(-1; 205)$, $D(-0{,}1; 3)$.

383. Принадлежат ли графику функции $y = 2x^2 - 4$ точки $M(\sqrt{2} - 1; 2 - 4\sqrt{2})$ и $N(1 - \sqrt{2}; 2 - 4\sqrt{2})$?

384. Вычислите значение функции $y = \frac{1}{3}x^2 - 8x + \frac{2}{3}$, если аргумент x равен 1; –2; 3.

385. Дана функция $y = 1{,}5x^2 - 3x - 4{,}5$. Найдите значение аргумента x, если: а) $y(x) = 7{,}5$; б) $y(x) = 18$.

386. Укажите координаты вершины параболы, точек пересечения ее с осью Ox и постройте график функции: а) $y = -4x^2 + 9$; б) $y = 0{,}2x^2 - 5$. Перечислите свойства этих функций.

387. Площадь поверхности куба S зависит от длины x его ребра. Задайте формулой зависимость $S(x)$ и установите, является ли эта зависимость квадратичной функцией. Найдите: а) площадь поверхности куба, ребро которого равно 3,5 дм; б) ребро куба, площадь поверхности которого равна 108 см^2.

388. Найдите нули функции: а) $y = -x^2 + 4$; б) $y = 24x^2 - 6$.

389. При каких значениях a функция $y = ax^2 - 5$: а) имеет нули; б) не имеет нулей?

390. Квадратичная функция задана формулой $f(x) = x^2 + x + c$. Найдите: а) $f(-1)$; б) $f(2)$; в) $f(c - 1)$; г) $f(c + 1)$.

391. Постройте график функции: а) $y = x^2 - 4$; б) $y = -x^2 + 9$. Используя график, найдите все значения x, при которых: 1) $y \geq 0$; 2) $y < 0$.

392. Найдите значения a и c, если парабола $y = ax^2 + c$ проходит через точки:

а) $A(2; -1)$ и $B(4; 5)$; б) $C(\frac{1}{2}; -\frac{1}{4})$ и $D(\frac{1}{\sqrt{2}}; -1)$.

Уровень B

393. Постройте график функции: 1) $y = -0{,}25x^2 + 4$; 2) $y = 0{,}5x^2 - 4{,}5$.

Найдите по графику: а) множество значений функции; б) промежуток, на котором функция возрастает; убывает; в) нули функции; г) все значения x, при которых $y \geq 0$; $y < 0$.

394. В одной семье четверо детей: Нариман, Батыр, Айжан и Жанар. Известно, что одна из девочек дошкольница, а сумма лет ее и Айжан делится на 3, Айжан старше Батыра. Кто самый старший и кто самый младший из детей, если лет им 5, 8, 13 и 15?

395. На рисунке 22 изображены графики функций, заданных формулой вида $y = ax^2 + n$. Найдите для каждой из функций соответствующее значение a и n.

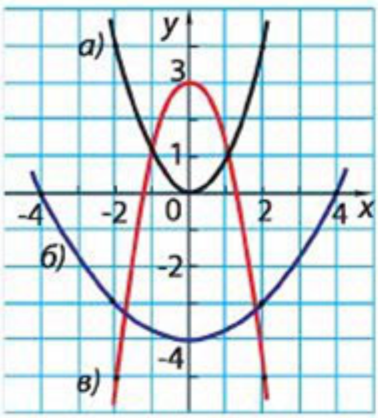


Рисунок 22

396. В одной системе координат постройте графики функций $y = x^2 - 5$ и $y = -1$. Найдите все значения x, при которых:
а) $x^2 - 5 < -1$; б) $x^2 - 5 \geq -1$.

397. Докажите, что является четной функция:
а) $y = 0{,}6x^2$; в) $y = 0{,}6x^2 + 3{,}5$;
б) $y = -0{,}6x^2$; г) $y = -0{,}6x^2 - 7$.

398. Укажите абсциссы точек пересечения параболы $y = \frac{1}{5}x^2 - 9$ и прямой: а) $y = -4$; б) $y = 16$; в) $y = -2{,}4x$; г) $y = 0{,}6x - 1$.

399. Найдите координаты точек пересечения функций:
а) $y = -x^2 + 5$ и $y = 2x - 3$; б) $y = 2x^2 - 36$ и $y = 14x - 20$.

Уровень С

400. Постройте график функции:
а) $y = \sqrt{x^4 + 6x^2 + 9}$; в) $y = \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(x^2 - \frac{3}{2}\right)^2$;
б) $y = 1 - \sqrt{x^4 + 8x^2 + 16}$; г) $y = (x^2 - 2)^2 - (x^2 - 1)^2$.

401. Найдите область определения функции и постройте ее график:

а) $y = x|x| - 2$;

б) $y = -0{,}5x|x| + 3$;

в) $y = x^2 + \frac{|x|}{x}$;

г) $y = x^2 - 2x - (\sqrt{2 - 2x})^2$.

402. а) Стороны прямоугольного треугольника выражаются тремя последовательными четными числами. Найдите эти стороны.

б) В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше одного катета на 9 см, а другого – на 18 см. Найдите его стороны.

403. а) Из квадрата со стороной 10 см вырезали круг радиуса r не больше 3 см (рисунок 23, *а*). Задайте формулой зависимость $S(r)$, выражающую площадь полученной фигуры, и найдите множество значений функции $S(r)$.

б) Из круга радиуса 5 см вырезан квадрат со стороной x не больше 2 см (рисунок 23, *б*). Задайте формулой зависимость $S(x)$, выражающую площадь полученной фигуры, и найдите множество значений функции $S(x)$.

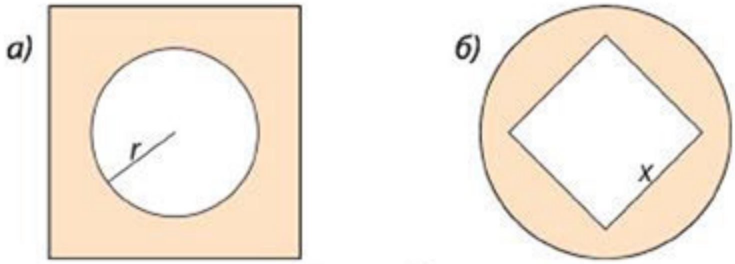


Рисунок 23

18. Функция $y = a(x - m)^2$ и ее график

Рассмотрим функцию вида $y = a(x - m)^2$. Пусть, например, $y = 2(x - 1)^2$. Составим таблицу соответственных значений функций $y = 2x^2$ и $y = 2(x - 1)^2$.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$2x^2$	18	8	2	0	2	8	18	
$2(x-1)^2$		18	8	2	0	2	8	18

Заметим, что функции $y = 2x^2$ и $y = 2(x - 1)^2$ принимают одинаковые значения, если аргумент первой из них на 1 меньше соответствующего аргумента второй.

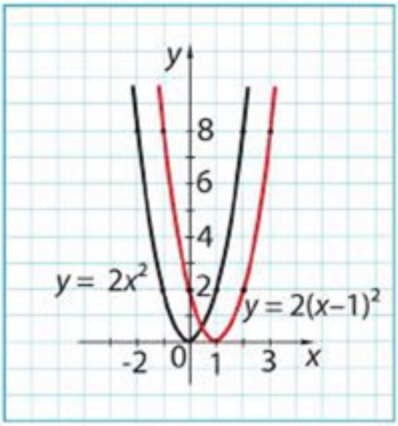


Рисунок 24

Это означает, что график функции $\boldsymbol{y = 2(x - 1)^2}$ можно получить сдвигом параболы $\boldsymbol{y = 2x^2}$ вдоль оси Ox на 1 вправо (рисунок 24).

Также график функции вида $\boldsymbol{y = a(x - m)^2}$ можно получить из графика функции $\boldsymbol{y = ax^2}$ сдвигом его вдоль оси абсцисс на m единиц: а) вправо, если $m > 0$; б) влево, если $m < 0$. **Вершиной** параболы $\boldsymbol{y = a(x - m)^2}$ является точка с координатами $\boldsymbol{(m; 0)}$, ее график **симметричен** относительно прямой $\boldsymbol{x = m}$.

Отметим некоторые свойства функции $y = a(x - m)^2$.

Свойство функции	$y = a(x - m)^2$, $a > 0$	$y = a(x - m)^2$, $a < 0$
Область определения	$D(y) = R$	$D(y) = R$
Множество значений	$E(y) = [0; +\infty)$	$E(y) = (-\infty; 0]$
Промежуток убывания	$x \in (-\infty; m]$	$x \in [m; +\infty)$
Промежуток возрастания	$x \in [m; +\infty)$	$x \in (-\infty; m]$

Пример. Построить график функции $y = -\frac{3}{2}x^2 + 6x - 6$ и, используя его, установить ее свойства.

Решение. Преобразуем квадратный трехчлен, вынеся за скобки коэффициент при x^2, получим $y = -\frac{3}{2}(x^2 - 4x + 4)$. Тогда выражение в скобках представляет квадрат двучлена и данную функцию можно представить в виде: $y = -\frac{3}{2}(x - 2)^2$. Графиком этой функции является парабола, ветви которой направлены вниз, так как $a = -\frac{3}{2} < 0$. Осью симметрии этой параболы является прямая $x = 2$. Найдем две пары точек параболы симметричных относительно этой прямой. Это точка $(0; -6)$ пересечения параболы с осью Oy и симметричная ей точка $(4; -6)$, а также точки $(1; -\frac{3}{2})$ и $(3; -\frac{3}{2})$. Отметим эти точки в координатной плоскости и построим параболу (рисунок 25).

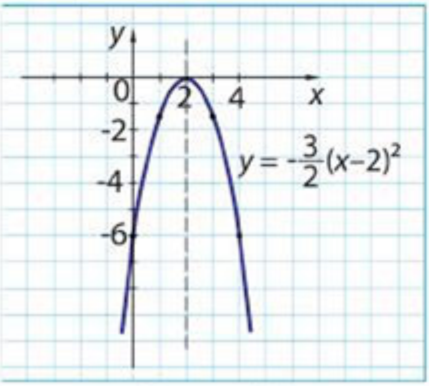


Рисунок 25

Свойства функции $y = -\frac{3}{2}x^2 + 6x - 6$:

1) $D(y) = (-\infty; +\infty)$, $E(y) = (-\infty; 0]$.

2) Функция возрастает при $x \in (-\infty; 2]$, убывает при $x \in [2; +\infty)$.

3) Нули функции: $x = 2$.

4) Наибольшее значение: $y = 0$.

5) Промежутки знакопостоянства функции:

$y < 0$ при $x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

ВОПРОСЫ

1. Объясните на примерах, как можно построить график функции $y = a(x - m)^2$.

2. Какие свойства функции $y = a(x - m)^2$ вы знаете?

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

404. В одной системе координат постройте графики функций:

а) $y = x^2 + 3$ и $y = (x + 3)^2$, запишите уравнения их осей симметрии;

б) $y = x^2 - 4$ и $y = -(x - 4)^2$, укажите множество значений этих функций.

405. Как из графика функции $y = 3x^2$ можно получить график функции:

а) $y = 3x^2 - 1$;

б) $y = 3x^2 + 5$;

в) $y = 3(x - 1)^2$;

г) $y = 3(x + 5)^2$?

406. Запишите уравнение параболы, полученной из параболы $y = 4x^2$ сдвигом ее:

а) вдоль оси Oy на: 1) 3 единицы вверх; 2) 4 единицы вниз;

б) вдоль оси Ox на: 1) 2 единицы вправо; 2) 5 единиц влево.

407. Укажите координаты вершины параболы:

а) $y = (x - 3)^2$;

б) $y = 5(x + 2)^2$;

в) $y = \frac{3}{7}x^2 - 7$;

г) $y = -4x^2 + 5$;

д) $y = x^2 + 6x + 9$;

е) $y = x^2 - 8x + 16$.

Уровень B

408. К каждому из чисел 4, 5, 6, 7 прибавили одно и то же действительное число a. Сравните произведение средних членов получившейся последовательности с произведением крайних.

409. Представьте функцию в виде $y = a(x - m)^2$, постройте ее график и укажите промежутки убывания и возрастания этой функции:

а) $y = x^2 - 4x + 4$; в) $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 2$;

б) $y = -x^2 - 6x - 9$; г) $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2x - 3$.

410. Задайте формулой квадратичную функцию, график которой изображен на рисунке 26, *а*, *б*.

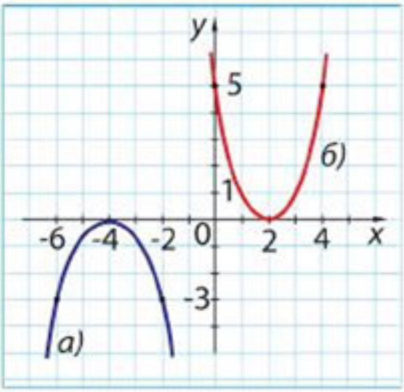


Рисунок 26

411. Как из графика $y = 4x^2$ можно получить график функции:

а) $y = 4(x - 5)^2$; в) $y = 4x^2 - 8x + 4$;

б) $y = 4(x + 3)^2$; г) $y = 4x^2 + 8\sqrt{5}x + 20$?

412. Для каждой из функций:

а) $y = (x - 3)^2$; в) $y = 2(x - 1)^2$;

б) $y = -(x + 2)^2$; г) $y = -\frac{1}{2}(x + 3)^2$ найдите:

1) вершину параболы; 2) ось симметрии параболы;

3) две точки параболы, симметричные относительно ее оси симметрии; 4) точку пересечения с осью Oy и точку, симметричную ей относительно оси симметрии параболы, и постройте ее график.

413. Найдите значение a, если известно, что график функции $y = a(x - 12)^2$ проходит через точку: а) $A(0; -24)$; б) $B(-10; 20)$; в) $C(6; 9)$; г) $D(15; -27)$.

414. Найдите координаты точек пересечения графиков функций:

а) $y = (x + 7)^2$ и $y = 49$;

б) $y = \frac{1}{2}(x - 2)^2$ и $y = -4x$;

в) $y = -4(x - 5)^2$ и $y = 20x - 100$;

г) $y = -\frac{1}{8}(x + 3)^2$ и $y = x - 5\frac{1}{8}$.

415. Постройте график функции, представив ее в виде $y = a(x - m)^2$, и установите свойства этой функции:

а) $y = x^2 + x + \frac{1}{4}$;

б) $y = -x^2 + 14x - 49$;

в) $y = 2x^2 + 8x + 8$;

г) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 5x - 12{,}5$.

416. а) Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника, если она на 0,5 м длиннее одного из катетов, а другой катет равен 2 м.
б) Может ли гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами a и $a + 1$ быть равной $\sqrt{a(a+1)}$?

417. При каких значениях m парабола $y = (x - m)^2$ проходит через точку:

а) $M(0; 9)$; в) $K(-4; 1)$;

б) $N(5; 0)$; г) $P(-\frac{1}{4}; \frac{1}{16})$?

418. При каком значении m парабола $y = (x - m)^2$ и прямая $y = 2x - 2$ пересекаются в точке с абсциссой 1? Найдите координаты точек пересечения графиков этих функций и постройте их графики.

Уровень C

419. Решите графически неравенство:

а) $(x-2)^2 \le 4$; в) $\frac{1}{2}(x+2)^2 \ge 2$;

б) $-(x+3)^2 \ge -1$; г) $-\frac{3}{4}(x-3)^2 \le -3$.

420. Задайте формулой квадратичную функцию $y = ax^2 + bx + c$, если ее график проходит через точки: а) (0; –4), (1; –2), (–1; –12); б) (–1; 0), (3; 0), (0; 2).

421. Составьте формулу, по которой можно вычислить доход, получаемый вкладчиком банка через 2 года, если вкладчик внес 100 тыс. тенге и на них ежегодно начисляется p % прибыли. Какую прибыль получит вкладчик при $p = 8$?

422. На верхушках двух деревьев, высоты которых 30 м и 20 м, растущих на ровной местности, сидят две птицы. Расстояние между деревьями равно 50 м. Найдите с точностью до 1 м расстояние: а) между птицами; б) от зайца, сидящего на земле между деревьями, до каждой из птиц, если оно одинаковое.

423. Докажите, что если число $\overline{PAK}$ делится на 37, то и число $\overline{AKP}$ делится на 37.

19. Функция $y = a(x - m)^2 + n$ и ее график

График функции $y = a(x - m)^2 + n$ можно получить из графика функции $y = ax^2$ сдвигами его вдоль оси абсцисс на m единиц и вдоль оси ординат на n единиц (рисунок 27). После таких перемещений **вершина** параболы имеет координаты $(m; n)$, а ее **ось симметрии** задается уравнением $x = m$.

Докажем, что парабола, полученная из параболы $y = ax^2$ указанным перемещением, задается формулой $y = a(x - m)^2 + n$.

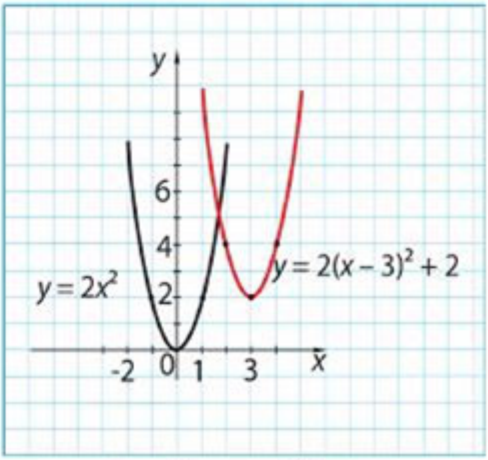


Рисунок 27

Возьмем на ней произвольную точку $C(x; y)$, проекцию этой точки на ось Ox обозначим C_1, а проекцию вершины B параболы – B_1. Проведем через точку B прямую, параллельную оси Ox, и обозначим точки N и K ее пересечения с осью Oy и прямой CC_1 соответственно (рисунок 28). Тогда $x = OC_1$, $y = C_1C$, $BK = x - m$, $KC = y - n = a \cdot (BK)^2$. Следовательно, $y - n = a(x - m)^2$, $y = a(x - m)^2 + n$. Отметим, что это доказательство мы провели, пользуясь рисунком, на котором числа a, m и n – положительные. Оно верно при любых m, n и $a \neq 0$.

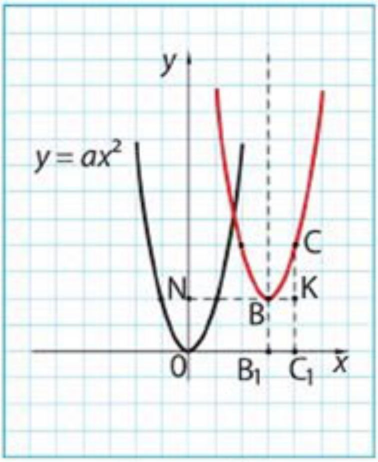


Рисунок 28

Рассмотрим некоторые свойства функции $y = a(x - m)^2 + n$.

Свойство функции	$y = a(x - m)^2 + n$, $a > 0$	$y = a(x - m)^2 + n$, $a < 0$
Область определения	$D(y) = R$	$D(y) = R$
Множество значений	$E(y) = [n; +\infty)$	$E(y) = (-\infty; n]$
Промежуток убывания	$x \in (-\infty; m]$	$x \in [m; +\infty)$
Промежуток возрастания	$x \in [m; +\infty)$	$x \in (-\infty; m]$

Пример. Найти все значения квадратичной функции (ее график изображен на рисунке 29), модуль каждого из которых в 2 раза больше модуля соответствующего ему значения аргумента, если $x < 0$ и $y < 0$.

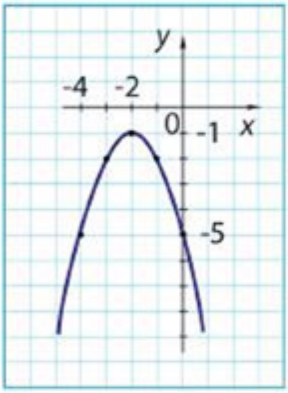


Рисунок 29

Р е ш е н и е. Представим квадратичную функцию в виде $y = a(x - m)^2 + n$. Так как вершина параболы имеет координаты $(-2; -1)$, то $y = a(x + 2)^2 - 1$. Найдем значение коэффициента a, подставив в полученную формулу координаты какой-либо точки параболы, например, $(0; -5)$. Получим уравнение $-5 = a(0 + 2)^2 - 1$, откуда $a = -1$. Итак, данная функция задается формулой $y = -(x + 2)^2 - 1$. По условию задачи $y = 2x$ или $x = \frac{y}{2}$. Подставим это выражение x в формулу и преобразуем полученное уравнение: $y = -(\frac{y}{2} + 2)^2 - 1$,

$$y + (\frac{y^2}{4} + 2y + 4) + 1 = 0, \qquad \frac{y^2}{4} + 3y + 5 = 0, \qquad y^2 + 12y + 20 = 0.$$

По теореме, обратной теореме Виета, корнями последнего уравнения являются числа $y_1 = -10$ и $y_2 = -2$.

О т в е т. -10; -2.

ВОПРОСЫ

1. Объясните на примере, как можно построить график функции вида $y = a(x - m)^2 + n$.

2. Какие свойства функции $y = a(x - m)^2 + n$ вы знаете?

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

424. Укажите координаты вершины параболы:

а) $y = (x - 15)^2 + 24$;
б) $y = (x + 23)^2 - 35$;
в) $y = -5(x - 7{,}5)^2 - 31$;
г) $y = -4(x + 8{,}5)^2 + 29$.

425. Используя шаблон графика функции $y = x^2$, постройте график функции:

а) $y = (x - 2)^2 + 1$; в) $y = -(x + 2)^2 - 1$;

б) $y = (x - 3)^2 - 2$; г) $y = -(x + 3)^2 + 2$.

426. Графики каких из указанных функций изображены на рисунке 30:

а) $y = x^2 - 5$; в) $y = (x + 2)^2 + 4$;

б) $y = (x - 4)^2 + 2$; г) $y = -x^2 + 5$?

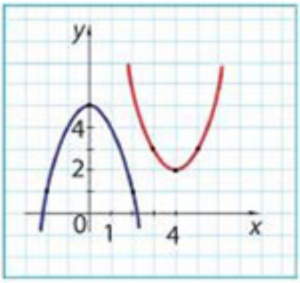


Рисунок 30

427. Постройте график функции $y = 2(x + 1{,}5)^2 - 2{,}5$ и установите ее свойства.

Уровень B

428. Квадратичная функция $y = (x - m)^2 + n$ представлена в виде $y = x^2 + px + q$. Найдите p и q, если известны координаты вершины параболы $y = x^2 + px + q$:

а) (7; 8); б) (2; –3); в) (–4; 5); г) (–2; –4).

429. Напишите уравнение параболы, начертите ее и найдите точки пересечения с осью Ox, если она получена из параболы: а) $y = -3x^2$ сдвигом вдоль оси Oy на 3 единицы вверх и вдоль оси Ox на 2 единицы вправо; б) $y = \frac{1}{4}x^2$ сдвигом вдоль оси Oy на 3 единицы вниз и вдоль оси Ox на 4 единицы влево.

$\boxed{\textbf{430.}}$ а) Длина прямоугольной клумбы 5 м, ширина 3 м. Клумба окаймлена дорожкой, имеющей везде одинаковую ширину. Найдите с точностью до 0,1 м ширину дорожки, если ее площадь в 2 раза больше площади клумбы.

б) Картина, длина которой на 0,5 м больше ее ширины, вставлена в рамку. Ширина рамки 10 см, а ее площадь составляет $\frac{5}{6}$ площади картины. Найдите размеры рамки.

431. Постройте график функции: а) $y = -1{,}5(x + 1)^2 + 6$; б) $y = 2(x - 1)^2 - 8$ и укажите: 1) множество ее значений; 2) нули функции; 3) промежуток, на котором функция возрастает; убывает; 4) все значения x, при которых $y \geq 0$; $y < 0$.

432. Какое наименьшее значение может иметь выражение:

а) $\sqrt{3(x-2)^2+4}$; б) $\sqrt{2(x+\sqrt{3})^2+81}$?

433. Какое наибольшее значение может иметь выражение:

а) $\sqrt{-(x-1)^2+5}$; б) $\sqrt{-4(x-\sqrt{2})^2+6}$?

434. Представьте функцию в виде $y = a(x-m)^2 + n$ и постройте ее график:

а) $y = x^2 - 4x + 3$;

б) $y = -x^2 + 2x - 3$;

в) $y = -(x-2)^2 + 2(x-2) + 3$;

г) $y = (x+1)^2 - 6(x+1) + 10$.

435. Представьте данную квадратичную функцию в виде $y = a(x-m)^2 + n$ и найдите:

а) наименьшее значение функции $y = x^2 - 2x + 2018$;

б) наибольшее значение функции $y = -2x^2 - 8x + 18$.

436. Найдите площадь прямоугольника, диагональ которого равна d, а разность сторон равна c.

437. Постройте график функции:

а) $y = \frac{3}{4}(x-4)^2 + 1$, если $x \in [1; 6]$;

б) $y = -(x+5)^2 + 4$, если $x \in (-6; -2]$.

438. Постройте график функции, заданной формулой, при $n \in N$ и $n \leq 5$:

а) $y = 0{,}5n^2 - 1$ б) $y = -n^2 + 4n$.

439. При каком значении n парабола $y = -\frac{1}{2}(x-4)^2 + n$ пересекается с прямой $y = -x + 1$ в точке с абсциссой 2? Постройте графики этих функций и найдите координаты точек их пересечения.

Уровень C

440. Решите графически неравенство:

а) $-(x+2)^2 + 5 \geq 1$; в) $\frac{2}{3}(x-3)^2 - 4 \geq 2$;

б) $\frac{1}{2}(x-4)^2 - 4 \leq -2$; г) $-2(x+1)^2 + 3 \leq 1$.

441. Представьте функцию $y = -x^2 + 2x + 2$ в виде $y = a(x - m)^2 + n$. Найдите:

1) ось симметрии параболы $y = -x^2 + 2x + 2$;

2) координаты точки пересечения этой параболы с осью Oy и точки, симметричной ей относительно оси симметрии данной параболы;

3) координаты двух точек параболы симметричных относительно ее оси симметрии.

Постройте график функции $y = -x^2 + 2x + 2$.

442. Малика предложила Нариману выполнить задание: «Доказать, что если $a^2 + a + 4 < 0$, то $a < 0$». После некоторого размышления он ответил, что в условии этого задания имеется ошибка. В чем она заключается?

443. Является ли какой-либо из корней уравнения $(x - 2)(x + 2) = 5$ корнем уравнения $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$?

444. Сократите дробь:

а) $\frac{a^4 - 1}{a^3 + a^2 + a + 1}$; б) $\frac{b^5 - b^4 + (b^4 - b^3) + b^3 - 1}{b^4 + b^3 + b^2 + b + 1}$.

445. Докажите, что значение выражения $\frac{(2k+1)^4 - 1}{4k^2 + 4k + 2}$ делится на 8 при любом натуральном k.

20. Функция $y = ax^2 + bx + c$ и ее график

Функцию $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$ можно представить в виде $y = a(x - m)^2 + n$. Действительно, $y = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$, $y = a(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a})$, $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$. Обозначим $-\frac{b}{2a} = m$, $\frac{-b^2 + 4ac}{4a} = n$, тогда $y = a(x - m)^2 + n$.

Итак, графиком квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ является парабола, **вершина** которой – точка $\left(-\frac{b}{2a};\ \frac{-b^2 + 4ac}{4a}\right)$. **Ось симметрии** этой параболы – прямая $x = -\frac{b}{2a}$. Если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх, если $a < 0$ – вниз.

Рассмотрим свойства квадратичной функции.

Свойство функции	$y = ax^2 + bx + c$, $a > 0$	$y = ax^2 + bx + c$, $a < 0$
Область определения	$D(y) = R$	$D(y) = R$
Множество значений	$E(y) = \left[\frac{-b^2 + 4ac}{4a};\ +\infty\right)$	$E(y) = \left(-\infty;\ \frac{-b^2 + 4ac}{4a}\right]$
Промежуток убывания	$x \in \left(-\infty;\ -\frac{b}{2a}\right]$	$x \in \left[-\frac{b}{2a};\ +\infty\right)$
Промежуток возрастания	$x \in \left[-\frac{b}{2a};\ +\infty\right)$	$x \in \left(-\infty;\ -\frac{b}{2a}\right]$
Нули функции	$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$, если $D = b^2 - 4ac \geq 0$; Нулей нет (график не пересекает ось Ox), если $D < 0$	
Наибольшее значение	–	$\frac{-b^2 + 4ac}{4a}$ при $x = -\frac{b}{2a}$
Наименьшее значение	$\frac{-b^2 + 4ac}{4a}$ при $x = -\frac{b}{2a}$	–

Докажем свойство возрастания (убывания) квадратичной функции. Действительно, если $a > 0$, то для произвольных значений x_1 и x_2, таких, что $x_2 > x_1 \geq -\frac{b}{2a}$, имеем

$$y_2 - y_1 = a(x_2 + \frac{b}{2a})^2 - a(x_1 + \frac{b}{2a})^2 =$$

$$= a(x_2 + \frac{b}{2a} - x_1 - \frac{b}{2a})(x_2 + \frac{b}{2a} + x_1 + \frac{b}{2a}) =$$

$= a(x_2 - x_1)\left(\left(x_2 - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right) + \left(x_1 - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right)\right) > 0$, так как каждый из сомножителей положителен. Отсюда заключаем, что $y_2 > y_1$, то есть большему значению аргумента из промежутка $\left[-\frac{b}{2a};\ +\infty\right)$ соответствует большее значение функции, следовательно, функция $y = ax^2 + bx + c$ при $a > 0$ **возрастает** на этом промежутке.

Если $a > 0$ и $-\frac{b}{2a} \geq x_2 > x_1$, то третий множитель отрицателен, а остальные – положительны, поэтому $y_2 - y_1 < 0$ и, значит, $y_2 < y_1$. Получили, что большему значению аргумента из промежутка $\left(-\infty;\ -\frac{b}{2a}\right]$ соответствует меньшее значение функции, следовательно, функция $y = ax^2 + bx + c$ при $a > 0$ **убывает** на этом промежутке.

Случай, когда $a < 0$, исследуйте самостоятельно.

П р и м е р. Построить график функции $y = -\frac{1}{4}x^2 - x + 3$ и найти: а) область определения и множество ее значений; б) промежутки возрастания и убывания; в) промежутки знакопостоянства функции.

Р е ш е н и е. 1) Графиком этой функции является парабола, ветви которой направлены вниз, так как $a = -\frac{1}{4} < 0$.

2) Вершина параболы точка $A\ (x_0; y_0)$, где $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$, $y_0 = y(x_0) = -1 + 2 + 3 = 4$, $A\ (-2; 4)$.

3) Ось симметрии параболы – прямая $x = -2$.

4) Парабола пересекает ось Oy в точке $B(0; 3)$, ей симметричная относительно оси симметрии параболы точка $C(-4; 3)$.

5) Найдем нули функции, для чего решим уравнение $-\frac{1}{4}x^2 - x + 3 = 0$. Заменим его равносильным уравнением $x^2 + 4x - 12 = 0$ (уравнения являются равносильными, если они имеют одни и те же корни или не имеют корней). По теореме, обратной теореме Виета, корнями этого уравнения являются числа –6 и 2. Следовательно, парабола пересекает ось Ox в точках $D(-6; 0)$ и $E(2; 0)$.

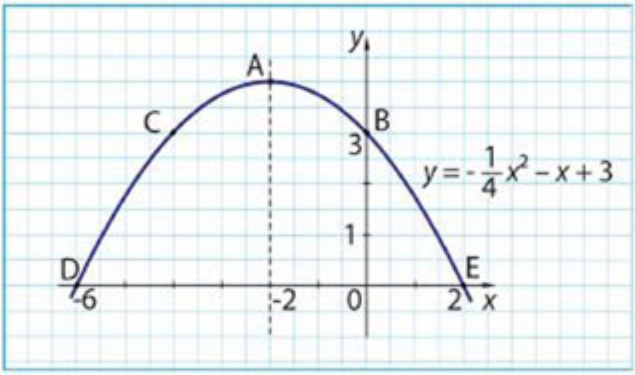


Рисунок 31

Проводим через построенные точки параболу (рисунок 31).

а) $D(y) = (-\infty; +\infty)$, $E(y) = (-\infty; 4]$;

б) функция возрастает при $x \in (-\infty; -2]$ и убывает при $x \in [-2; +\infty)$;

в) $y > 0$ при $x \in (-6; 2)$, $y < 0$ при $x \in (-\infty; -6) \cup (2; +\infty)$.

Таким образом, схема построения графика квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ может быть следующей:

1) построить вершину параболы – точку $(x_0; y_0)$, где $x_0 = \frac{-b}{2a}$, $y_0 = y(x_0)$;

2) провести через вершину параболы прямую, параллельную оси Oy, – ось симметрии параболы;

3) найти нули функции (если они существуют) и построить точки пересечения параболы с осью Ox (если они есть);

4) построить еще какие-либо точки параболы, симметричные относительно ее оси симметрии, например, точку пересечения параболы с осью Oy $(0; c)$ и ей симметричную;

5) провести через построенные точки плавную кривую линию – параболу.

ВОПРОСЫ

1. Объясните на примере, как можно построить график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$.

2. Сформулируйте свойства функции $y = ax^2 + bx + c$ при $a > 0$ и при $a < 0$.

3. Докажите, что при $x = -\dfrac{b}{2a}$ значение $\dfrac{-b^2 + 4ac}{4a}$ функции $y = ax^2 + bx + c$ является наименьшим, если $a > 0$ и наибольшим, если $a < 0$.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

446. Постройте параболу $y = ax^2 - 12x + c$, если точка $A(-3; 5)$ является ее вершиной.

447. Найдите множество значений функции:

а) $y = x^2 - 8x + 12$;
б) $y = 6x - 4x^2$;
в) $y = (x - 4)(x - 6) + 3$;
г) $y = 10 - (x - 7)(x + 3)$.

448. Найдите координаты вершины параболы и точек ее пересечения с осями Ox и Oy:

а) $y = 9x^2 - 6x - 3$;
б) $y = -4x^2 + 12x + 7$;
в) $y = -2x^2 + x - \dfrac{1}{9}$;
г) $y = 8x^2 - x - \dfrac{1}{4}$.

449. Постройте график функции:

а) $y = x^2 + 7x + 10$;
б) $y = x^2 - 4x + 4$;
в) $y = -x^2 + x - 0,25$;
г) $y = 2x^2 - 4\sqrt{2}\,x + 4$;
д) $y = 0,5x^2 - 3x + 5$;
е) $y = -2x^2 + 3x - 2$.

450. При каком значении p график функции $f(x)$ проходит через точку M, если:

а) $f(x) = x^2 - 7x + p$ и $M(10; -1)$; б) $f(x) = x^2 + px - 8$ и $M(-13; 31)$?

Уровень В

451. Задайте формулой квадратичную функцию вида $y = ax^2 + bx + c$, если известно, что: а) при $x = 6$, $y = 0$, а при $x = 4$ значение функции, равное -4, – наименьшее;

б) при $x = -6$, $y = 0$, а при $x = -2$ значение функции, равное 4, – наибольшее.

452. а) Окружность заднего колеса экипажа в 2 раза больше окружности переднего. Если окружность заднего колеса уменьшить на 2 дм, а переднего увеличить на 4 дм, то на расстоянии 120 м заднее колесо сделало бы на 20 оборотов меньше переднего. Каковы длины окружностей обоих колес?

б) Окружность переднего колеса экипажа в 3 раза меньше окружности заднего. Если окружность переднего колеса увеличить на 3 дм, а заднего на 2 дм, то на расстоянии 140 м переднее колесо сделало бы на 60 оборотов больше заднего. Каковы длины окружностей обоих колес?

453. Установите, проходит ли ось симметрии параболы $y = -\frac{1}{2}x^2 - 3x$ через точку:

а) (3; 5); в) (–6; 10);

б) (–3; –5); г) (–3; 20).

454. Задайте формулой вида $y = ax^2 + bx + c$ функцию, если известно, что:

а) $a = 0{,}5$ и точка (2; –1) является вершиной ее графика;

б) $c = 3$ и ее график проходит через точки (–2; 2) и (1; 3).

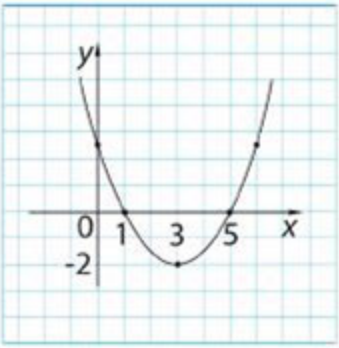


Рисунок 32

455. Задайте формулой квадратичную функцию, график которой изображен на рисунке 32.

456. Постройте график функции $y = 0{,}5x^2 - 3x + 2{,}5$ и найдите:

а) область определения и множество значений функции;

б) промежутки возрастания и убывания функции;

в) наименьшее значение функции;

г) нули функции;

д) промежутки знакопостоянства функции.

457. Найдите наименьшее и наибольшее значение функции:

а) $y = \sqrt{2}x^2 - x + 1$; в) $y = \sin 60° \cdot x^2 - 2x - 1$;

б) $y = -\sqrt{3}x^2 - 2x + 3$; г) $y = -\cos 45° \cdot x^2 - 3x + 4$.

458. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции:
а) $y = x^2 - 2x - 8$, если $x \in [-3; 5]$;
б) $y = -x^2 + 2x + 15$, если $x \in [-3; 0]$;
в) $y = 4x^2 - 4x - 3$, если $x \in [\frac{1}{4}; 1]$;
г) $y = -x^2 + 6x - 8$, если $x \in [3; 6]$.

459. а) После усовершенствования резца рабочий стал изготовлять ежедневно на 10 деталей больше, чем планировалось, поэтому задание в 300 деталей выполнил на 1 день раньше намеченного срока. За сколько дней рабочий планировал выполнить задание?
б) Одна бригада должна изготовить 500 изделий, а другая за тот же срок – 420 изделий. Первая бригада закончила работу на 7 дней, а вторая – на 4 дня раньше намеченного срока, причем первая бригада изготовляла ежедневно на 5 изделий больше, чем вторая. По сколько изделий в день изготовляла вторая бригада?

460. Найдите координаты вершины параболы $y = ax^2 + bx + c$ и постройте ее график, если она проходит через точки: а) $(-1; 0)$, $(3; 0)$ и $(0; -6)$; б) $(-2; 0)$, $(1; 0)$ и $(0; 2)$.

461. Известно, что Казахстан занимает первое место в мире по разведанным запасам цинка. Сколько видов минералов цинка обнаружено в его недрах, если их число равно наибольшему значению функции $y = -5x^2 + 10x + 46$?


Цинкит

462. а) Квадратный трехчлен $x^2 + px + q$ имеет корни -2 и 7. Найдите его наименьшее значение.
б) Квадратный трехчлен $-x^2 + px + q$ имеет корни 10 и 15. Найдите его наибольшее значение.

463. Постройте график функции:

а) $y = x^2 + 8x + c$, если ее наименьшее значение равно 1;

б) $y = -x^2 + 6x + c$, если ее наибольшее значение равно -1.

464. Найдите значение функции $y = x^2 + px + q$ при $x = 2019$, если ее нулями являются числа: а) -1 и 19; б) 2020 и -2010.

465. Нулями функции $y = 4x^2 + bx + c$ являются числа 10 и 14. Найдите ее значение при: а) $x = -12$; б) $x = 13$.

Гренландский национальный парк

466. Общая площадь природоохранной зоны мира равна $1{,}93 \cdot 10^7$ км², а площадь самого большого в мире Гренландского национального парка – $2{,}43 \cdot 10^8$ акр. Сколько процентов (с точностью до 0,01 %) от этой общей площади составляет площадь Гренландского парка? (Акр – земельная мера, используемая в Великобритании, США, Канаде, Австралии и других странах; 1 акр $\approx 0{,}004$ км²).

467. При каких значениях k множество значений функции $y = x^2 + 5x + k$ совпадает с областью определения функции $f(x) = \sqrt{4x + 1}$?

468. Постройте график функции:

а) $y = -x^2 - x + 5$, если $D(y) = [-4; 0)$;

б) $y = -2x^2 + 4x + 7$, если $D(y) = [0; 3]$;

в) $y = x(x - 1) - 1{,}5(x - 1)^2$, если $D(y) = (-2; 1]$.

469. При каких значениях k графики функций $y = 1 - 2x - 2kx^2$ и $f = 5x^2 + 2kx - 2$ пересекаются в двух точках?

Уровень С

470. Постройте график функции:

а) $y = x^2 + (k + 1)x + k$, если ее нули x_1 и x_2 связаны соотношением $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{6}{5}$;

б) $y = x^2 - kx + 3$, если ее нули x_1 и x_2 связаны соотношением $x_1^2 + x_2^2 = 10$.

471. Постройте график функции:

а) $y = \frac{(x^2 + 3x + 2)(x + 3)}{x + 1}$; б) $y = \frac{(x - 1)(x^2 - 5x + 6)}{x - 2}$.

472. Решите графически уравнение:

а) $\frac{2}{x} = x^2 + 4x + 1$;

б) $2\sqrt{x} = 0{,}5x^2 - 3x + 4{,}5$;

в) $-\frac{4}{3}x^2 + \frac{7}{3} = \frac{1}{|x|}$.

473. а) Для перевозки 15 т овощей планировалось использовать несколько грузовиков определенной грузоподъемности. Но фактически использовали грузовиков на 1 больше с грузоподъемностью на 0,5 т меньше. Сколько тонн овощей взял каждый из грузовиков?

б) Бригаде трактористов было дано задание засеять 200 га к определенному сроку. Но бригада засевала ежедневно на 5 га больше, чем намечалось по плану, поэтому закончила сев на 2 дня раньше срока. За сколько дней бригада выполнила задание?

474. Найдите значение выражения

$\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$, если: а) $n = 1$; б) $n = 2$.

475. Расшифруйте числовой ребус $\overline{aba} = (\overline{aa})^2$.

21. Решение текстовых задач с использованием свойств квадратичной функции

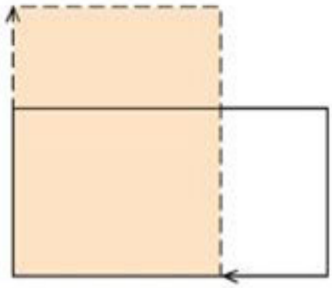


Рисунок 33

Задача 1. Дан прямоугольник со сторонами 10 дм и 25 дм. Меньшая его сторона увеличивается со скоростью 2 дм/с, а большая – уменьшается со скоростью 1 дм/с (рисунок 33). Установить, как со временем t изменяется площадь этого прямоугольника, и при каком значении t она наибольшая. Найти это значение.

Решение. Площадь S прямоугольника равна:

$S = (10 + 2t)(25 - t)$, $S = -2t^2 + 40t + 250$, $t \in (0; 25)$.

Наибольшее значение функция S принимает при $t = \frac{-40}{-4} = 10$. Оно равно $S(10) = -200 + 400 + 250 = 450$.

Ответ. Площадь прямоугольника изменяется по формуле $S(t) = -2t^2 + 40t + 250$, где $t \in (0; 25)$, она наибольшая при $t = 10$ с, $S(10) = 450$ дм^2.

Рисунок 34

Задача 2. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью 40 м/с (рисунок 34). Считая ускорение g земного притяжения равным 9,8 м/с^2 и не учитывая сопротивление воздуха, найти, на какую наибольшую высоту взлетит это тело.

Решение. Из курса физики известно, что высота h м, на которой окажется брошенное вертикально вверх тело через t с, находится по формуле $h = v_0t - \frac{gt^2}{2}$, где v_0 – начальная скорость.

Функция $h(t) = 40t - 4{,}9t^2$ принимает наибольшее значение при $t = -\frac{40}{-9{,}8} \approx 4{,}1$, $h(4{,}1) \approx 164 - 82 = 82$.

Ответ. ≈ 82 м.

Задача 3*. Число диагоналей многоугольника на m больше числа его сторон. Составить формулу, выражающую зависимость числа диагоналей y от числа x его сторон, и найти множество допустимых значений m.

Р е ш е н и е. Число диагоналей многоугольника равно: $y = \frac{x(x-3)}{2}$. По условию задачи $\frac{x(x-3)}{2} - x = m$. Отсюда $x^2 - 3x - 2x = 2m$, $x^2 - 5x - 2m = 0$. Тогда $x = \frac{5 + \sqrt{25 + 8m}}{2}$. Число x сторон многоугольника будет натуральным, если $25 + 8m$ является квадратом нечетного числа. Пусть $25 + 8m = (2k + 1)^2$. Тогда $8m = (2k + 1)^2 - 5^2$, $8m = (2k - 4)(2k + 6)$, $m = \frac{(k-2)(k+3)}{2}$. При любом натуральном $k \geq 3$ значение m – натуральное число.

О т в е т. $y = \frac{x(x-3)}{2}$; $m = \frac{(k-2)(k+3)}{2}$, где $k \in N$, $k \geq 3$.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень A

476. а) Запишите число 2018 в виде суммы двух чисел, произведение которых наибольшее.

б) Данное положительное число t представьте в виде суммы двух слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.

477. а) Периметр прямоугольника равен 16 см. Какими должны быть его размеры, чтобы площадь была наибольшей?

б) Какими должны быть стороны прямоугольника, периметр которого 1,2 м, чтобы площадь прямоугольника была наибольшей?

478. Прямоугольный участок площадью 0,1 га примыкает к готовому ограждению. Достаточно ли: а) 120 м; б) 80 м проволоки, чтобы огородить его с трех оставшихся сторон?

Уровень B

479. Забором длиной 100 м нужно огородить прямоугольный участок, примыкающий к стене. Какую наибольшую площадь может иметь огражденный участок?

480. Большая сторона прямоугольника равна b. Проводится окружность с центром в одной из вершин прямоугольника, радиус которой равен его меньшей стороне, и от прямоугольника отделяется часть круга. Каким должно быть отношение меньшей стороны к b, чтобы площадь оставшейся части прямоугольника была наибольшей? Ответ дайте с точностью до 0,01.

481. В квадрат со стороной 4 см вписывается другой квадрат так, что вершины его лежат на сторонах данного квадрата. Каким должно быть расстояние от вершины данного квадрата до ближайшей к ней вершины вписанного квадрата, чтобы вписанный квадрат имел наименьшую площадь?

482. В фигуру, ограниченную параболой $y = 8 - \frac{1}{2}x^2$ и осью Ox, поместили прямоугольник, две вершины которого лежат на параболе, а две – на оси Ox. Найдите наибольший из периметров этих прямоугольников.

483. Тело брошено вертикально вверх с высоты 25 м с начальной скоростью 40 м/с. Считая ускорение g земного притяжения равным 9,8 м/с^2 и не учитывая сопротивление воздуха, найдите с точностью до 0,1 с, через сколько секунд оно окажется: а) на высоте 75 м; б) на наибольшей высоте.

484. Тело брошено вертикально вверх со скоростью 30 м/с. Может ли оно достичь высоты: а) 45 м; б) 51 м?

485. Из точек $A(0; 8)$ и $B(6; 0)$ движутся по осям координат к точке $O(0; 0)$ два тела. Через сколько минут при равномерном движении с одинаковой скоростью, равной 5 единицам в минуту, тела будут находиться на кратчайшем расстоянии друг от друга?

486. В треугольнике сумма длин стороны и высоты, опущенной на нее, равна 15 см. Найдите наибольшую возможную площадь такого треугольника. Может ли площадь этого треугольника быть равной: а) 20 см^2; б) 30 см^2?

Уровень С

487. Нужно изготовить прямоугольный параллелепипед с периметром основания 20 дм и высотой 4 дм. Какими должны быть стороны основания, чтобы его объем был наибольшим?

488. Существует ли многоугольник, в котором число диагоналей больше числа его сторон: а) на 25; б) на 20?

489. При каком значении p принимает наименьшее значение сумма квадратов корней уравнения $x^2 + (p - 2)x + p - 3 = 0$?

490. Сумма двух положительных чисел равна 13. Найдите эти числа, если сумма их кубов является наименьшей.

491. Разложите на множители выражение:

а) $9^{2m} - 3^{2m} - 2$; б) $4 \cdot 25^{2n} + 11 \cdot 5^{2n} - 3$.

492. Найдите значение выражения: $\left(1 + \dfrac{2020^{-1} + 505^{-1}}{2020^{-1} - 505^{-1}}\right)^{-2}$.

22. Упражнения на повторение по теме «Квадратичная функция»

Уровень А

493. При каком значении k прямая $y = kx$ и парабола $y = x^2 + 4x + 1$ имеют только одну общую точку?

494. Существует ли значение аргумента, при котором равны соответствующие ему значения функций: а) $y = 0{,}45x^2 + 0{,}18$ и $y = 1{,}5x + 0{,}09$; б) $y = 0{,}8x^2 + 0{,}62$ и $y = 0{,}2x + 0{,}72$?

Уровень В

495. Найдите значение a, m и n, если парабола $y = a(x - m)^2 + n$:
а) имеет вершиной точку $(-1; -4)$ и проходит через точку $(2; 5)$;
б) проходит через точку $(-4; 5)$ и имеет вершиной точку $(-2; 9)$.

496. Постройте график функции:

а) $y = x^2 - 1$;   в) $y = x^2 - 5^0x - 6$;

б) $y = -x^2 + 5x - 4^{-1}$;   г) $y = -x^2 + 4x^0$.

497. Толкын строила график функции $y = 3x^2 - 12x + 13$. Отметила точку $(2; 1)$ – вершину параболы, далее точки $(0; 13)$ и $(4; 13)$, затем точки $(1; 4)$, $(3; 4)$. Провела через эти пять точек плавную линию – график функции $y = 3x^2 - 12x + 13$ (рисунок 35). Объясните ее способ построения параболы по пяти точкам.

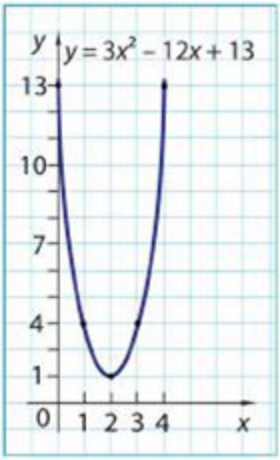


Рисунок 35

498. Постройте график функции и, используя его, выясните ее свойства:

а) $y = x^2 + 10x + 25$;
в) $y = x^2 + 10x + 16$;
б) $y = -2x^2 + 4x - 2$;
г) $y = -2x^2 + 4x + 6$.

499. Мама планирует у стены дома разбить палисадник прямоугольной формы, огородив три его стороны забором данной длины. Во сколько раз сторона прямоугольника, противолежащая стене, должна быть больше другой его стороны, чтобы площадь палисадника была наибольшей?

500. Задайте формулой квадратичную функцию, если ее график – парабола с вершиной (1; 2) проходит через точку (–1; 6).

501. Постройте график квадратичной функции:

а) $y = x^2 + 2x + q$, одним из нулей которой является число –3;
б) $y = -x^2 + px - 8$, одним из нулей которой является число –4.

502. а) Квадратный трехчлен $y = x^2 + px + q$ принимает при $x = 1$ наименьшее значение, равное –4. Найдите $y(0)$.

б) Квадратный трехчлен $y = -x^2 + bx + c$ принимает при $x = 1$ наибольшее значение, равное –4. Найдите $y(-1)$.

в) Найдите коэффициенты a, b, c квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + c$, если он при $x = 1$ принимает наибольшее значение, равное 3 и $y(0) = 0$.

Уровень С

503. Установите, какими сдвигами вдоль осей координат из графика функции:

а) $y = x^2$ можно получить график функции $y = x^2 + 6x + 11$;
б) $y = x^2 - 6x - 8$ можно получить график функции $y = x^2 + 4x + 5$.

504. В одной системе координат построены графики функций $f(x) = -\frac{4}{3}(x + 1)^2 + 2$, $q(x) = 1{,}5(x - 2)^2 + 1$ и прямая $y = n$. Найдите число точек пересечения этих графиков в зависимости от n.

505. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью 49 м/с. Через сколько секунд оно окажется на высоте 102,9 м?

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

506. 1А) Графики каких из функций, заданных указанными формулами, являются параболами: 1) $y = a^2x + x - 1$; 2) $y = (x - 4)(x - 5)$; 3) $y = (x - 1)^{-2}$; 4) $y = -\frac{x^2}{15}$?

2В) Запишите уравнение прямой, являющейся осью симметрии графика функции $y = -2x^2 - 14x + 7$.

3В) Найдите промежутки возрастания и убывания функции $y = 2x^2 - x - 1$.

4В) Постройте график функции $y = x^2 - 6x + c$, наименьшее значение которой равно -1 и укажите промежутки знакопостоянства функции.

5С) Клумбу формы прямоугольного треугольника, сумма катетов которого равна 10 м, хотят сделать такой, чтобы ее площадь была наибольшей. Каковы должны быть длины катетов этого треугольника?

ЭТО ИНТЕРЕСНО!

Н. И. Лобачевский

Понятие функции как формулы, связывающей одну переменную с другой, сформировалось в XVIII в., а более общее понятие функции – в XIX в. Выдающийся русский математик Н. И. Лобачевский (1792–1856) в одной из своих работ в 1834 г. отмечал, что функция – это зависимость одной переменной от другой, которая может быть задана аналитическим выражением (формулой) или каким-либо другим условием, или которая может существовать и оставаться неизвестной.

Известный немецкий математик П. Дирихле (1805–1859) в 1837 г. сформулировал общее определение функции так: «y есть функция переменной x, если каждому значению x соответствует совершенно определенное значение y, причем безразлично, каким образом установлено это соответствие – аналитической формулой, графиком, таблицей либо даже просто словами».

П. Дирихле

Найдите, пользуясь Интернетом:

а) сведения о биографии Н. И. Лобачевского и его выдающихся достижениях в области математики;

б) сведения о биографии П. Дирихле и «функции Дирихле»;

в) ответ на вопрос, можно ли построить график «функции Дирихле».

IV. ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИКИ

В результате изучения раздела надо

знать

• понятия: интервальной таблицы частот, накопленной частоты;
• способы построения гистограмм и полигонов частот;
• определения дисперсии и стандартного отклонения;
• формулы для нахождения дисперсии и стандартного отклонения.

уметь

• строить таблицы, гистограммы и полигоны частот;
• находить дисперсию и стандартное отклонение;
• решать текстовые задачи на применение формул нахождения дисперсии и стандартного отклонения.

23. Таблицы, полигоны и гистограммы частот

В курсах математики 6–7 классов рассматривались некоторые элементы статистики (среднее арифметическое, мода, медиана, варианта, вариационный ряд, размах, абсолютная и относительная частоты варианты, полигоны частот). При этом в основном исследовались конкретные данные, между которыми не было промежуточных значений. Такие данные называются *дискретными* (от латинского слова discretus – прерывистые). Дискретные данные часто выражаются натуральными и рациональными числами. Числовые значения статистических данных, характеризующие какой-либо непрерывный процесс, могут выражаться и действительными числами. Такие данные называются *непрерывными*.

Если исследуется некоторая многочисленная выборка, то характеризующий ее вариационный ряд может состоять из очень большого количества данных. В этом случае удобнее группировать выборку. Для этого ее разбивают на несколько равных интервалов. Сгруппированную таким образом выборку называют *интервальной таблицей* или *интервальным статистическим рядом*. Характеристиками такой таблицы являются середины всех интервалов и их среднее арифметическое значение. Среднее арифметическое выборочных данных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ обозначается $\overline{x}$ (читается: икс с чертой), а сумма всех рассматриваемых значений – прописной буквой Σ (сигма) греческого алфавита. В этих обозначениях можно записать, что $\overline{x} = \frac{\Sigma x_i}{n}$, где i принимает все натуральные значения от 1 до n. Для интервального ряда в качестве выборочных данных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ берутся середины интервалов. Для характеристики такой выборки находят также для каждого интервала сумму частот вариант, принадлежащих ему, получают соответствующую таблицу частот.

Составим, например, интервальную таблицу частот распределения простых чисел в первой тысяче натуральных чисел, для чего разобьем ее на 10 интервалов и найдем частоту простых чисел в каждом интервале, получим:

1–100	101–200	201–300	301–400	401–500	501–600	601–700	701–800	801–900	901–1000
25	21	16	16	17	14	16	14	17	14

Для построения полигона частот на оси абсцисс откладывают средние значения интервалов. Полигон частот для рассмотренной выборки показан на рисунке 36.

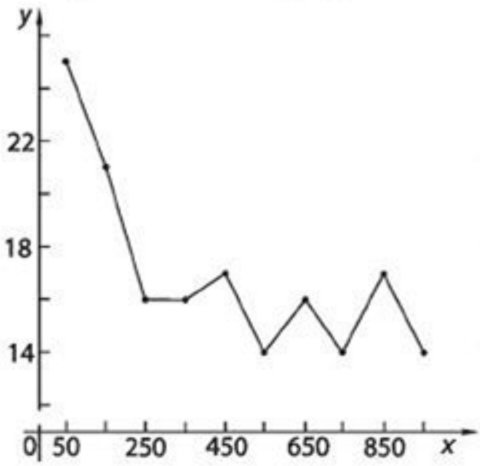


Рисунок 36

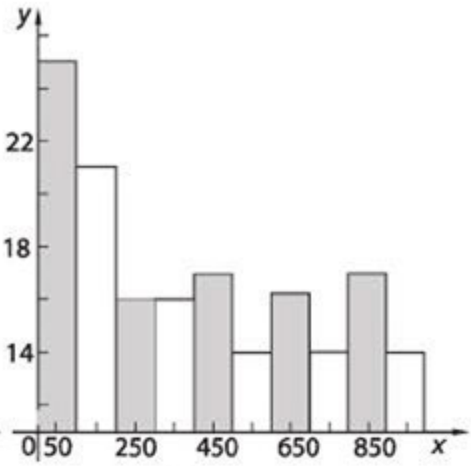


Рисунок 37

Графическое представление статистических данных осуществляется также в виде столбчатых диаграмм, которые называются *гистограммами* (в буквальном смысле от греческих слов *ιστος* – столб и *γραμμα* – написание, буква). Для построения гистограммы частот на оси абсцисс обозначают последовательно интервалы, а на оси ординат соответствующие им частоты, получая при этом прямоугольники. Гистограмма частот для рассмотренной выборки изображена на рисунке 37.

В вариационном ряду каждой варианте ставят в соответствие абсолютную частоту. Прибавляя к ее значению каждую последующую, получаем так называемую *накопленную* частоту. В результате такого суммирования получается число, равное объему выборки. Накопленная частота показывает, как изменяются абсолютные частоты в наборе данных до заданного значения, причем накопленная частота для первого данного такая же, как и его абсолютная частота. Например, в следующей таблице представлены результаты измерения роста 50 малышей и указаны соответствующие абсолютная и накопленная частоты.

Рост	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
Частота	2	1	3	4	10	12	9	5	2	2
Накопленная частота	2	3	6	10	20	32	41	46	48	50

Пример. По данным интервального вариационного ряда распределения рабочих по полученным ими на некотором предприятии доходам, приведенным в таблице:

а) найти его среднее значение; б) построить гистограмму; в) изобразить график накопленных частот.

Доходы, тыс. тенге (x)	Меньше 100	100–120	120–140	140–160	Больше 160
Абсолютная частота (y)	5	10	20	10	5
Накопленная частота (f)	5	15	35	45	50

Решение. а) Для нахождения среднего значения вычислим середины всех интервалов. При этом неизвестные границы первого и последнего интервала принимаются соответственно равными 80 и 180, учитывая длину интервала. Тогда середины интервалов: $x_1 = 90$, $x_2 = 110$, $x_3 = 130$, $x_4 = 150$, $x_5 = 170$. Отсюда

$$\bar{x} = \frac{90 \cdot 5 + 110 \cdot 10 + 130 \cdot 20 + 150 \cdot 10 + 170 \cdot 5}{50} = 130.$$

б) Гистограмма распределения рабочих по их доходам показана на рисунке 38.

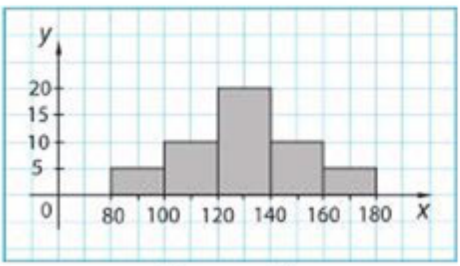


Рисунок 38

в) Для построения графика накопленных частот отметим точки, абсциссы которых равны верхним границам интервалов, а ордината – накопленным частотам, и соединим их отрезками (рисунок 39).

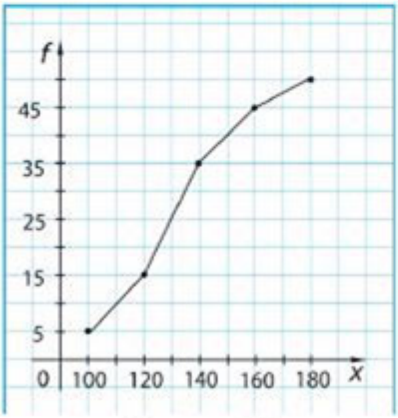


Рисунок 39

ВОПРОСЫ

1. Что такое «интервальная таблица»? Приведите пример.
2. Что такое накопленная частота и что она характеризует?
3. Как строится гистограмма частот? Приведите пример для дискретных данных и для непрерывных данных, заданных интервальной таб-лицей.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

507. По приведенным данным о размерах временных заработков (в тысячах тенге) 20 рабочих постройте таблицу частот с равными интервалами по 30 тыс. тенге: 60; 25; 12; 10; 68; 35; 17; 2; 51; 3; 9; 130; 24; 85; 152; 100; 6; 7; 18; 42.

508. Учащимися 8 классов одной из школ показаны следующие результаты в подтягивании на перекладине: 9; 5; 7; 10; 11; 10; 14; 7; 10; 11; 8; 10; 8; 9; 12; 13; 8; 11; 9; 9; 10; 6; 9; 13; 9; 17; 11; 15; 8. По этим данным составьте вариационный ряд с интервалом, равным 2, распределения учащихся по количеству подтягиваний и найдите накопленные частоты, соответствующие каждому интервалу.

509. В хоккейном туре КХЛ (Континентальной хоккейной лиги) состоялись 10 игр. Их результаты следующие: 3 : 1; 0 : 2; 5 : 0; 0 : 1; 3 : 2; 0 : 3; 1 : 0; 2 : 1; 4 : 1; 4 : 2. Найдите среднюю результативность игр в этом туре.

510. Имеются данные о количестве учащихся в классах одной школы: 16, 18, 18, 20, 21, 20, 22, 23, 22, 20, 23, 24, 24, 25, 24, 23, 25, 25, 21, 20, 22, 23. Составьте таблицу частот распределения учащихся и найдите их среднее количество в классе.

Уровень В

511. Найдите среднее арифметическое значение интервального ряда распределения доходов предприятий от реализации продукции по данным таблицы:

Доходы предприятий (млн тенге)	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60
Количество предприятий	2	8	14	9	3

512. Данные о распределения 100 000 населения города по возрастам приведены в таблице. Найдите средний возраст жителей этого города.

Возраст (лет)	до 10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	70 и старше
Численность (тыс. чел.)	12,1	15,7	13,6	16,1	15,3	10,1	9,8	7,3

513. Один из кандидатов в депутаты получил следующую сводку данных о проголосовавших за него избирателей по пяти участкам одного округа (всего избирателей 100 тыс.). Сколько процентов голосов по этому округу набрал этот кандидат? Избран ли он депутатом, если для этого надо не меньше 50 % голосов всех избирателей?

Избирательный участок	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5
Число проголосовавших за кандидата (тыс. чел.)	14	12	10	20	11

514. Известно распределение банков по накопленной ими денежной массе, данные о которой приведены в таблице. Какова средняя денежная масса накоплений?

Накоплено млн долл.	[60–80)	[80–100)	[100–120)	[120–140)	[140–60)	[160–180)	[180–200)
Количество банков	1	3	10	14	9	4	2

515. Постройте гистограмму распределения 30 работников фирмы по размеру временного заработка по данным, приведенным в таблице:

Размер заработка (в тыс. тенге)	до 50	50–100	100–150	150–200
Численность работников (чел.)	4	12	8	6

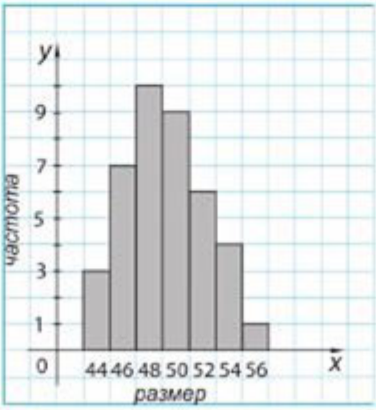


Рисунок 40

516. На уроке физкультуры несколько восьмиклассников показали следующие результаты (в см) по прыжкам в высоту: 100, 120, 105, 105, 130, 115, 105, 110, 115, 95, 115, 100, 125, 105, 130, 110, 130, 120, 125, 130. Представьте эту последовательность в виде интервального вариационного ряда с интервалом 10 см и постройте гистограмму его частот.

Уровень C

517. По гистограмме (рисунок 40) распределения размеров брюк среди опрошенных мужчин: а) составьте таблицу накопленных частот этой выборки; б) найдите общее число опрошенных; в) определите моду, медиану и среднее арифметическое этой выборки.

518. Ателье получило заказ на изготовление тюбетеек разных размеров: 54-го размера – 10, 55-го – 24, 56-го – 34, 57-го – 20, 58-го – 18. Постройте таблицу абсолютных и накопленных частот этого заказа и их графики.

24. Дисперсия и стандартное отклонение

При исследовании характеристик выборочных данных в статистике применяются разные методы оценки различий между ними. Например, рассматривают их отклонения от среднего арифметического, то есть разности между данными величинами и этим средним. Распределение данных около него называют *дисперсией* (что в переводе означает рассеивание).

Если вычесть $\overline{x}$ из каждого значения x_i и сложить все эти разности, то получится 0. Действительно, $(x_1 - \overline{x}) + (x_2 - \overline{x}) + \ldots + (x_n - \overline{x}) = \Sigma x_i - n \cdot \frac{\Sigma x_i}{n} = 0$.

Кроме того, эти разности принимают положительные или отрицательные значения, или равны 0, поэтому для оценки рассеивания многочисленных данных около их среднего арифметического используются не сами эти разности, а их квадраты. *Среднее арифметическое квадратов всех этих разностей называется дисперсией* и обозначается σ^2, то есть $\boldsymbol{\sigma^2} = \frac{\Sigma(x_i - \overline{x})^2}{n}$ (σ – строчная буква сигма греческого алфавита).

Для того чтобы эта характеристика и данные x_i имели одинаковую размерность, из нее извлекают квадратный корень. **Квадратный корень из дисперсии называется стандартным отклонением**, то есть $\boldsymbol{\sigma} = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - \overline{x})^2}{n}}$.

Рассмотрим примеры вычисления дисперсии и стандартного отклонения.

Пример 1. Измерение роста (в см) детей младшей группы детского сада приведено в таблице:

Рост (x_i)	92	94	95	96	97	98
Число детей (n_i)	1	2	2	3	3	4

Найти для данной выборки: а) дисперсию; б) стандартное отклонение.

Р е ш е н и е. а) Воспользуемся формулой $\sigma^2 = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n}$. Сначала найдем

$\bar{x} = \frac{92 + 94 \cdot 2 + 95 \cdot 2 + 96 \cdot 3 + 97 \cdot 3 + 98 \cdot 4}{15} \approx 96$. Тогда

$$\sigma^2 \approx \frac{(92-96)^2 + 2(94-96)^2 + 2(95-96)^2 + 3(96-96)^2}{15} +$$

$$+ \frac{3(97-96)^2 + 4(98-96)^2}{15} = \frac{16 + 8 + 2 + 0 + 3 + 16}{15} = 3.$$

б) Найдем стандартное отклонение $\sigma \approx \sqrt{3} \approx 1{,}7$ (см).

О т в е т. а) ≈ 3; б) $\approx 1{,}7$ см.

Пользоваться рассмотренной формулой для вычисления дисперсии и стандартного отклонения не всегда удобно, например, если целочисленных значений x_i немало, а их среднее арифметическое равно дробному числу. В таких случаях можно пользоваться формулой $\sigma^2 = \frac{\Sigma x_i^2}{n} - \frac{(\Sigma x_i)^2}{n^2}$. *Докажем, что $\frac{\Sigma x_i^2}{n} - \frac{(\Sigma x_i)^2}{n^2} = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$$\frac{\Sigma x_i^2}{n} - \frac{(\Sigma x_i)^2}{n^2} = \frac{1}{n}\left((x_1^2 + \ldots + x_n^2) - \frac{(x_1 + \ldots + x_n)^2}{n}\right).$$

$$\frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{1}{n}\left(\left(x_1 - \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right)^2 + \ldots + \left(x_n - \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\left((x_1^2 + \ldots + x_n^2) - 2(x_1 + \ldots + x_n) \cdot \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} + n \cdot \left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\left((x_1^2 + \ldots + x_n^2) - \frac{(x_1 + \ldots + x_n)^2}{n}\right).$$

Следовательно, $\frac{\Sigma x_i^2}{n} - \frac{(\Sigma x_i)^2}{n^2} = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n}$.

П р и м е р 2. Получены следующие данные о 12 измерениях температуры (в °С) в течение суток: –3; –2; 0; 1; 3; 4; 5; 3; 2; 1; 0; –1. Найти: а) дисперсию; б) стандартное отклонение этих измерений.

Р е ш е н и е.

$$а)\ \sigma^2 = \frac{\Sigma x_i^2}{n} - \frac{(\Sigma x_i)^2}{n^2} = \frac{(-3)^2 + (-2)^2 + 0^2 + 1^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 3^2}{12} +$$

$$+\frac{2^2+1^2+0^2+(-1)^2}{12}-\frac{13^2}{12^2}=\frac{79}{12}-\frac{169}{144}=\frac{948-169}{144}=\frac{779}{144}\approx 5{,}41.$$

б) $\sigma \approx \sqrt{5{,}41} \approx 2{,}3°$.

Ответ. а) $\approx 5{,}41$; б) $\approx 2{,}3°$.

ВОПРОСЫ

1. Что называется дисперсией?

2. Дайте определение стандартного отклонения.

3. Какие формулы для нахождения дисперсии и стандартного отклонения вы знаете?

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

519. Данные об итоговых отметках по истории, полученных выпускниками одной из школ, таковы: 5; 4; 3; 4; 4; 4; 5; 3; 4; 5; 5; 3; 3; 3; 4; 5; 4; 5; 5; 5; 4; 4; 5; 5. Составьте таблицу распределения итоговых отметок по истории. Вычислите дисперсию и стандартное отклонение этого распределения отметок.

Уровень В

520. В следующей последовательности записаны результаты наблюдений атмосферного давления (в мм. рт. ст.) в Астане в течение 15 дней: 720, 722, 723, 724, 723, 720, 721, 724, 725, 727, 730, 727, 725, 725, 723. Найдите для данной выборки: а) дисперсию; б) стандартное отклонение.

521. По приведенным данным ежедневного расхода холодной воды (в м^3) в течение недели жильцами одной из квартир: 1,0; 1,2; 1,0; 1,1; 0,9; 1,0; 0,8 вычислите:

а) средний расход воды; б) стандартное отклонение.

522. По приведенным в таблице данным о распределении сотрудников по стажу их работы вычислите с точностью до единиц: а) средний стаж сотрудников; б) стандартное отклонение.

Стаж (лет)	1	2	3	8	9	10	15	20	38	40
Число сотрудников	2	1	2	10	8	12	4	2	1	1

523. Фигурист получил за произвольную программу следующие оценки: 5,8; 5,8; 5,7; 5,8; 5,9; 6,0; 5,9. Найдите стандартное отклонение данных этой выборки.

524. В письменной работе, изложенной в 25 строках, ученик в первых 20 строках не пропустил ни одной запятой, в 21-й строке пропустил одну запятую, в 22-й – две, в 23-й – одну, в 24-й – три и в 25-й – одну. Найдите, с точностью до единиц, стандартное отклонение распределения пропущенных запятых в этой работе.

525. При изучении влияния рекламы на размер среднемесячного вклада в двух банках получили данные, приведенные в таблице. Сравните стандартное отклонение вкладов в этих банках.

Размер месячного вклада (в долларах)	Численность вкладчиков	
	в банках с рекламой	в банках без рекламы
480–500	2	3
500–520	0	4
520–540	3	17
540–560	11	10
560–580	13	6
580–600	18	5

526. На испытательном стенде уточняли и корректировали прицел ружья. Данные о горизонтальных отклонениях (в см) от цели при 10 выстрелах из него следующие: +1; 0; –1,5; +1,5; –0,5; –1,5; +2; +1; –1; + 2. Найдите стандартное отклонение результатов измерений проведенных испытаний этого ружья.

527. Восьмиклассница Ажар предложила однокласснику Марату найти стандартное отклонение по выборке данных о высотах хребтов Жабаглы (2898 м), Сайрам (4220 м), Коксу

Сайрам

(3468 м), Огем (3560 м), Каржантау (2839 м), Боралдай (1860 м), Кызыгурт (1700 м) гор Тянь-Шаня Казахстана. Марат решил воспользоваться для выполнения задания формулой $\sigma = \frac{\sqrt{\Sigma(x_i - \overline{x})^2}}{n}$. Получит ли он правильный ответ? Если нет, то объясните почему. Найдите ответ в задаче.

Уровень С

528. а) Из пяти подтягиваний восьмиклассника на перекладине известны результаты четырех: 10; 9; 7; 8. Найдите число подтягиваний на перекладине этого восьмиклассника в пятый раз, если среднее арифметическое всех пяти результатов равно 8.

б) Известны накопления (в млрд тенге) 60; 80; 140 трех банков из четырех. Найдите накопление денег в четвертом банке, если оно выражается целым числом и дисперсия накоплений в четырех банках равна 1000.

25. Упражнения на повторение темы «Элементы статистики»

Пример. Для оценки силовой подготовки мальчиков 8 класса проведен тест на количество подтягиваний на перекладине. Данные теста следующие: 9, 9, 10, 11, 8, 7, 10, 7, 9, 11, 7, 8, 9, 8, 9. Найти для этого ряда: а) моду; б) медиану; в) среднее арифметическое значение; г) размах; д) дисперсию; е) стандартное отклонение для данной выборки (с точностью до единиц).

Решение. а) Значение $x = 9$ встречается в выборке чаще других (5 раз), следовательно, мода равна 9.

б) Для нахождения медианы представим данную выборку так: 7, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 11, 11. Ее объем $n = 15$ – число нечетное, поэтому медианой является 8-е значение выборки, то есть медиана равна 9.

в) Находим среднее арифметическое значение выборки:

$$\overline{x} = \frac{\Sigma x_i}{n} = \frac{7 \cdot 3 + 8 \cdot 3 + 9 \cdot 5 + 10 \cdot 2 + 11 \cdot 2}{15} = \frac{132}{15} = 8{,}8.$$

г) В вариационном ряду данной выборки наименьшее значение равно 7, а наибольшее – 11. Следовательно, размах равен: 11 – 7 = 4.

д) Для вычисления дисперсии составим таблицу.

i	1–3	4–6	7–11	12–13	14–15
x_i	7	8	9	10	11
$x_i - \overline{x}$	–1,8	–0,8	0,2	1,2	2,2
$(x_i - \overline{x})^2$	3,24	0,64	0,04	1,44	4,84
$\Sigma(x_i - \overline{x})^2$	$3{,}24 \cdot 3 + 0{,}64 \cdot 3 + 0{,}04 \cdot 5 + 1{,}44 \cdot 2 + 4{,}84 \cdot 2 = 24{,}4$				

Пользуясь формулой $\sigma^2 = \frac{\Sigma(x_i - \overline{x})^2}{n}$, находим дисперсию: $\sigma^2 = \frac{24{,}4}{15} \approx 1{,}63$.

е) Вычисляем стандартное отклонение: $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - \overline{x})^2}{n}} \approx \sqrt{1{,}63} \approx 1{,}3$.

Ответ. а) 9; б) 9; в) 8,8; г) 4; д) ≈ 1,63; е) ≈ 1,3.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

529. По данным распределения числа семей от количества в них детей, приведенным в таблице, найдите: а) накопленные частоты; б) среднее количество детей в семье.

Число детей	0	1	2	3	4	5	6
Количество семей	4	29	22	20	15	6	4

530. В лаборатории измерили длины (в мм) 30 зерен пшеницы и получили следующий вариационный ряд: 5,21; 5,23; 5,24; 5,26; 5,28; 5,32; 5,34; 5,35; 5,37; 5,39; 5,40; 5,41; 5,42; 5,44; 5,47; 5,49; 5,50; 5,51; 5,53; 5,54; 5,55; 5,57; 5,59; 5,60; 5,61; 5,62; 5,64; 5,66; 5,68; 5,70. Преобразуйте этот ряд в интервальный с интервалом 0,1 и постройте его гистограмму.

531. Сведения о заработке сотрудников одного предприятия представлены в следующей таблице. Постройте по данной интервальной таблице гистограмму.

Заработок (в долларах)	200–300	300–400	400–500	500–600	600–700	700–800	800–900
Количество сотрудников	5	14	30	12	7	4	2

532. В таблице приведены данные об урожайности некоторой культуры в фермерских хозяйствах. Какова средняя урожайность этой культуры?

Урожайность (ц/га)	2–6	6–10	10–14	14–18	18–22
Число хозяйств	2	8	17	12	6

Уровень В

533. Сахар хранился в сыром помещении, поэтому при взвешивании 10 его пакетов по 1 кг в каждом получились следующие результаты: 1,005; 1,01; 1,005; 1,001; 1,015; 1,02; 1,015; 1,03; 1,03; 1,03. Каков средний «привес» пакета сахара?

534. Дана таблица распределения 45 рабочих по количеству деталей, изготовленным одним рабочим за смену. Какова средняя производительность рабочего за смену? Постройте гистограмму распределения рабочих в зависимости от их производительности.

Изготовлено деталей рабочим за смену	280–300	300–320	320–340	340–360	360–380
Число рабочих (чел.)	3	9	15	12	6

535. Составьте вариационный ряд распределения частот размеров обуви по данной выборке: 22; 22,5; 23; 22,5; 22; 21,5; 23; 23; 24; 21; 22; 22; 23; 23,5; 23,5; 24; 24,5; 23; 22,5; 23; 23; 21,5; 25; 23,5; 23,5 и найдите: а) среднее значение; б) стандартное отклонение.

536. В нескольких классах проведен диктант по казахскому языку. На рисунке 41 изображена гистограмма полученных отметок. Заполните таблицу распределения данных и постройте график накопленных частот.

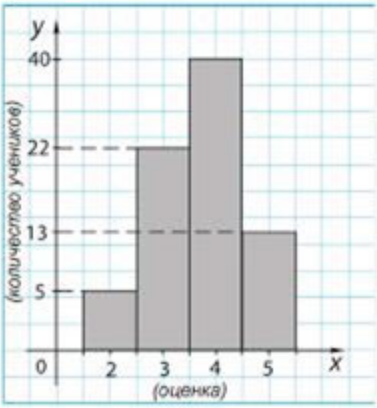


Рисунок 41

537. Данные о возрасте жильцов нескольких домов представлены в таблице. Найдите: а) среднее значение; б) дисперсию; в) стандартное отклонение.

Возраст	1–15	16–30	31–45	46–60	61–75	76–90
Частота	11	14	12	25	9	5

Уровень C

538. Численность населения областных центров Казахстана по состоянию на 01.01.2016 г. приведена в таблице. Округлив данные до сотен тысяч человек, составьте таблицу частот и найдите стандартное отклонение этой выборки (в сот. тыс. чел.).

№	Город	Население	№	Город	Население
1	Шымкент	885 799	8	Костанай	231 911
2	Караганда	497 824	9	Кызылорда	227 499
3	Актобе	397 575	10	Атырау	226 110
4	Тараз	362 993	11	Петропавловск	215 306
5	Павлодар	335 214	12	Актау	183 233
6	Усть-Каменогорск	321 536	13	Кокшетау	159 845
7	Уральск	232 493	14	Талдыкорган	140 656

539. Самыми высокими зданиями мира являются: 1) небоскреб Бурдж-Халифа в Дубае, 2) телебашня «Небесное дерево» (634 м) в Токио, 3) небоскреб Шанхай-Тауэр (632 м) в Китае, 4) мачта KVLY-TV (629) в Бланшаре (США), 5) телебашня Гуанчжоу (610 м) в Китае. Найдите высоту небоскреба в Дубае, если среднее значение этой выборки равно 666,6 м.


1


2


3


4


5

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

540. 1A) По следующим данным 5,3; 5,4; 5,5; 5,6; 5,4; 5,8; 5,4; 5,4; 5,6; 5,6 составьте таблицу частот и найдите накопленные частоты.

2A) Ученик выписал за некоторый период свои отметки: 4; 4; 3; 5; 3; 4; 5; 4; 4; 4; 5; 4; 2; 4; 4; 5. Найдите среднее значение отметок за этот период.

3B) По гистограмме распределения 100 000 книг в зависимости от их цен (рисунок 42) составьте таблицу их распределения.

4B) Проведены все диагонали выпуклых n-угольников, где n равно 5; 6; 7; 8; 9. Запишите количество диагоналей для каждого многоугольника и постройте гистограмму их распределения.

5C) Среди учащихся одного из классов школы провели опрос о том, сколько минут каждый из них тратит на дорогу в школу. Получены следующие данные: 5; 15; 7; 10; 25; 20; 10; 5; 8; 8; 15; 12; 20; 14; 20; 25; 10; 15; 10; 16. Найдите стандартное отклонение данных этой выборки.

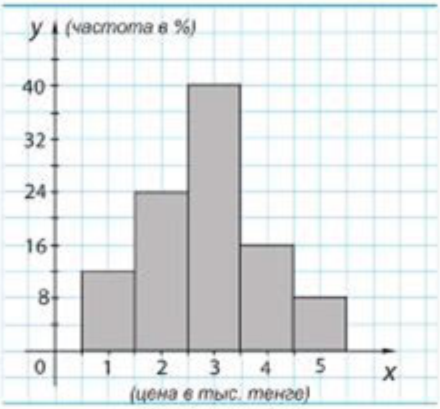


Рисунок 42

ЭТО ИНТЕРЕСНО!

К. Пирсон

Значение статистики в нашей жизни велико. Люди, часто не задумываясь, постоянно используют элементы статистики не только в трудовой деятельности, но и в повседневном быту, анализируя и используя информацию об окружающем нас мире. Как только человеку в его деятельности потребовались количественные характеристики, возникла необходимость сбора и обработки информации. Самые первые статистические данные можно обнаружить и в древних египетских папирусах, и на вавилонских глиняных табличках. Возникновение статистики было связано также с государственным управлением. Государства нуждались в данных о населении и его составе, имущественном положении граждан, количестве скота, земельных угодий. Были необходимы методы сбора, хранения и обработки различных данных. Это положило начало становлению статистики как науки, которая стала бурно развиваться с конца XIX века.

Р. Фишер

Основными задачами математической статистики являются разработка методов сбора, анализа и использования статистических данных для получения научных и практических выводов. Значительные достижения в создании таких методов принадлежат английским ученым К. Пирсону (1857–1936) и Р. Фишеру (1890–1962). Например, К. Пирсон разработал статистические методы, широко применяемые в биологии, а Р. Фишер предложил целый комплекс идей и методов статистики, применяемых для оценки характеристик генеральной совокупности по данным выборки, разработал методику планирования экспериментов и статистической проверки гипотез.

Найдите, пользуясь Интернетом, сведения о первых научных трудах по математической статистике и их авторах.

V. НЕРАВЕНСТВА

В результате изучения раздела надо

знать

- определения квадратного и рационального неравенств;
- понятие системы неравенств;
- сущность метода интервалов;
- способы решения неравенств и их систем.

уметь

- решать квадратные неравенства, в том числе с использованием графика квадратичной функции;
- решать рациональные неравенства и системы неравенств;
- решать текстовые задачи с использованием: квадратных и рациональных неравенств, систем неравенств.

26. Квадратные неравенства

Квадратным неравенством называется неравенство вида:

$ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$, где x – переменная, a, b, c – некоторые действительные числа, причем $a \neq 0$. Например, $x^2 - 3x + 2 < 0$; $2x^2 + 4x > 0$; $3x^2 \geq 4$; $x - 13x^2 \leq -3x$ – квадратные неравенства.

Как известно, *решениями неравенства с одной переменной являются значения переменной, при которых оно преобразуется в верное числовое неравенство*. Например, число 5 – решение неравенства $x^2 - 4x + 3 > 0$, т. к. $5^2 - 4 \cdot 5 + 3 = 8$, $8 > 0$.

Напомним, что ***решить неравенство – значит найти все его решения или доказать, что их нет***. Отметим, что если два неравенства имеют одни и те же решения или не имеют решений, то их называют ***равносильными неравенствами***.

При решении квадратного неравенства используют свойства соответствующей квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ и особенности расположения относительно оси Ox ее графика в зависимости от коэффициента a и дискриминанта $D = b^2 - 4ac$.

Пример 1. Решить неравенство $x^2 - 3x + 2 < 0$.

Построим схематически (рисунок 43) график функции $y = x^2 - 3x + 2$, для чего находим нули функции, решив уравнение $x^2 - 3x + 2 = 0$: $x = 1$, $x = 2$. Отметив на оси Ox промежутки знакопостоянства функции, заключаем, что $x^2 - 3x + 2 < 0$ при $1 < x < 2$.

Ответ. (1; 2).

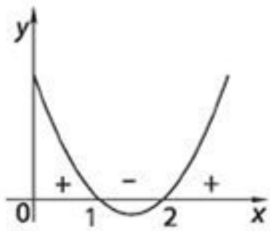


Рисунок 43

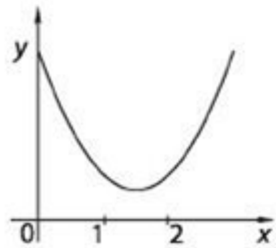


Рисунок 44

П р и м е р 2. Решить неравенство $x^2 - 3x + 3 > 0$.

Для схематического построения графика функции $y = x^2 - 3x + 3$ ищем ее нули. Их нет, так как дискриминант квадратного уравнения $x^2 - 3x + 3 = 0$ отрицателен: $D = -3$. Поскольку первый коэффициент квадратного трехчлена $x^2 - 3x + 3$ положителен, то график функции $y = x^2 - 3x + 3$ расположен в верхней полуплоскости с границей Ox. Поэтому неравенство $x^2 - 3x + 3 > 0$ выполняется при любых действительных значениях x (рисунок 44).

О т в е т. R.

П р и м е р 3. Решить неравенство $-2x^2 - x + 1 \le 0$.

Находим нули функции $y = -2x^2 - x + 1$: $-2x^2 - x + 1 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0{,}5$. Коэффициент при x^2 равен -2, поэтому ветви параболы $y = -2x^2 - x + 1$ направлены вниз. Изобразим схематически график функции (рисунок 45) и выделим на оси Ox промежутки ее знакопостоянства. Как видим, множество решений исходного неравенства состоит из объединения числовых промежутков $(-\infty; -1]$ и $[0{,}5; +\infty)$.

О т в е т. $(-\infty; -1] \cup [0{,}5; +\infty)$.

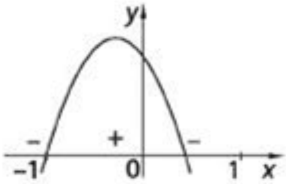


Рисунок 45

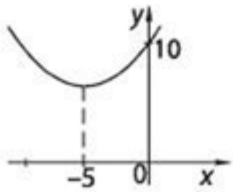


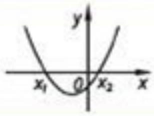
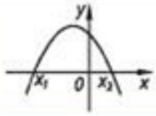
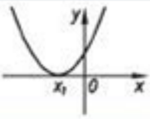
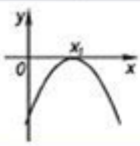
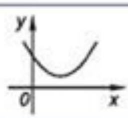
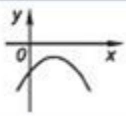
Рисунок 46

П р и м е р 4. Решить неравенство $0{,}1x^2 + x + 10 \le 0$.

График квадратичной функции $y = 0{,}1x^2 + x + 10$ расположен в верхней полуплоскости с границей Ox, потому что она не имеет нулей ($D < 0$) и коэффициент 0,1 при x^2 – положительный (рисунок 46). Поскольку ни при каком значении x неравенство $0{,}1x^2 + x + 10 \le 0$ не выполняется, то делаем вывод, что оно не имеет решений.

О т в е т. Нет решений.

Покажем рассмотренный способ решения квадратных неравенств в таблице:

$D = b^2 - 4ac$	a	Графическая иллюстрация	$ax^2 + bx + c < 0$	$ax^2 + bx + c > 0$
$D > 0$, $x_1 < x_2$	$a > 0$		$(x_1; x_2)$	$(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$
	$a < 0$		$(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$	$(x_1; x_2)$
$D = 0$, $x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a}$	$a > 0$		Нет решений	$(-\infty; x_1) \cup (x_1; +\infty)$
	$a < 0$		$(-\infty; x_1) \cup (x_1; +\infty)$	Нет решений
$D < 0$	$a > 0$		Нет решений	$(-\infty; +\infty)$
	$a < 0$		$(-\infty; +\infty)$	Нет решений

Составьте таблицу решений неравенств $ax^2 + bx + c \leq 0$ и $ax^2 + bx + c \geq 0$ самостоятельно.

ВОПРОСЫ

1. Что значит решить неравенство с одной переменной?
2. Что называется решением неравенства с одной переменной?
3. Что называется квадратным неравенством с одной переменной?
4. Какие неравенства называются равносильными?
5. Какие точки параболы играют существенную роль для отыскания промежутков, где функция $y = ax^2 + bx + c$ принимает отрицательные или положительные значения?

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

541. Какие из следующих неравенств являются квадратными:

а) $x^2 - 4 > 0$; г) $x^2 - 1 \geq 0$;

б) $4x - 5 < 0$; д) $3x + 4 > 0$;

в) $x^2 - 3x - 5 \leq 0$; е) $x^4 - 16 < 0$?

542. Преобразуйте к квадратным следующие неравенства:

а) $x^2 < 3x + 4$; в) $3x^2 \leq x^2 - 5x + 6$;

б) $3x^2 - 1 > x$; г) $2x(x + 1) \geq x + 5$.

543. При каких значениях a следующие неравенства сводятся к квадратным:

а) $(a - 1)x^2 + 3x - 4 < 0$; в) $3(x + 1) \leq (a^2 - 4)x^2$;

б) $x(x + 1) > (a + 1)x^2$; г) $5x^2 \geq ax + 4$?

544. Является ли число 0; 2; –3 решением неравенства:

а) $x^2 \leq 0$; б) $x^2 > 2$?

545. Равносильны ли неравенства:

а) $x^2 \leq 16$ и $x \leq 4$; в) $125x^2 < 5x$ и $25x < 1$;

б) $x^2 \geq 49$ и $x \geq 7$; г) $-x^2 + x > 0$ и $x^2 - x < 0$?

546. На рисунке 47, *а*, *б*, *в* изображен график функции $y = ax^2 + bx + c$. Определите знак: 1) коэффициента a; 2) дискриминанта D.

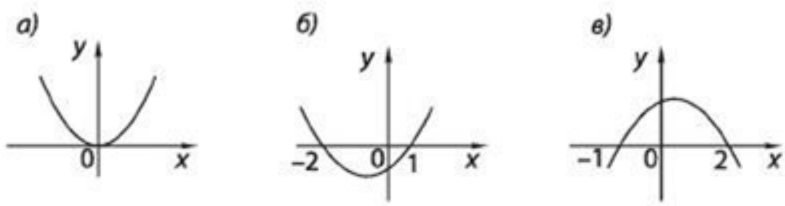


Рисунок 47

547. Используя график функции $y = ax^2 + bx + c$ (рисунок 47, *а*, *б*, *в*), укажите, при каких значениях x: 1) $y = 0$; 2) $y > 0$; 3) $y < 0$.

548. Пользуясь рисунком 48, *а*, *б*, запишите решение неравенства:

1) $ax^2 + bx + c > 0$; 2) $ax^2 + bx + c \leq 0$.

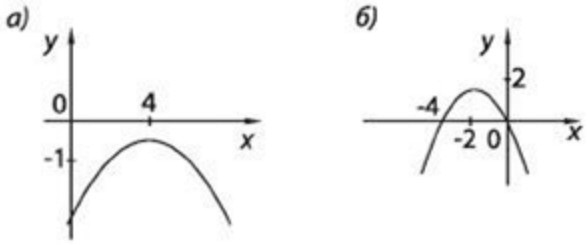


Рисунок 48

Уровень B

549. Используя график квадратичной функции, решите неравенство:

а) $x^2 - 6x + 8 > 0$; г) $-5x^2 - 11x - 6 \geq 0$;
б) $x^2 + 6x + 8 < 0$; д) $9x^2 - 12x + 4 > 0$;
в) $-x^2 - 2x + 15 \leq 0$; е) $4x^2 - 12x + 9 \leq 0$.

550. Двое рабочих выполнили некоторое задание за 10 дней, причем последние два дня первый из них не работал. За сколько дней первый выполнил бы все задание, если известно, что за первые 7 дней они совместно выполнили 80 % всего задания?

551. Решите неравенство:

а) $9x^2 - 4 > 0$; г) $x^2 - 30x + 200 > 0$;
б) $-2x^2 + 7x < 0$; д) $-3x^2 + 7x \geq 5$;
в) $2x^2 + 7x - 4 < 0$; е) $25x^2 + 10x + 1 \geq 0$.

552. Решите неравенство:

а) $x^2 < 25$; г) $0{,}5x^2 \geq 13$; ж) $2x^2 + 4 \geq 0$;
б) $0{,}02x^2 \leq 2$; д) $2x^2 \leq 3x$; з) $x^2 + 10x + 27 > 0$;
в) $x^2 > 10$; е) $-2x^2 < 7x$; и) $x^2 + 4x + 7 \leq 0$.

553. Запишите какое-нибудь квадратное неравенство, решением которого является: а) любое действительное число; б) только одно действительное число.

554. а) Существует ли какое-нибудь квадратное неравенство, решениями которого являются только два действительных числа? б) Запишите какое-нибудь квадратное неравенство, которое не имеет решений.

555. Приведите пример квадратного неравенства, решениями которого является промежуток:

а) $(1; 4)$; в) $(-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$;

б) $[0; 8]$; г) $(-\infty; 0{,}2] \cup [10; +\infty)$.

556. Найдите все значения переменной, при которых квадратный трехчлен:

а) $2x^2 - 7x + 6$ принимает положительные значения;

б) $-3x^2 - x - 12$ принимает отрицательные значения.

557. При каких значениях x имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{x^2+1}$; в) $\sqrt{x^2-4x+4}$;

б) $\sqrt{-x^2}$; г) $\sqrt{-5x^2+7x-2}$?

558. Найдите все положительные решения неравенства:

а) $4x^2 - 27x - 7 > 0$; б) $-3x^2 + 17x + 6 < 0$.

559. Сколько целочисленных решений имеет неравенство:

а) $x^2 - x \le 6$; б) $x^2 + 8x \le 20$?

$\boxed{\textbf{560.}}$ Моторная лодка прошла 9 км по течению реки и 8 км против течения, затратив на путь против течения на 15 мин больше, чем на путь по течению. Найдите собственную скорость лодки, если скорость течения реки равна 2 км/ч.

561. Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt{-x^2+6x-8}$; б) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x-8}}$.

562. Известно, что Казахстан располагает очень большими запасами каменного угля. Как велики (в миллиардах тонн) эти запасы в Карагандинском угольном бассейне, если они равны наименьшему решению неравенства $x^2 - 110x + 3000 \le 0$?

Добыча угля открытым способом

563. Решите неравенство:

а) $6x^2 - 2x \le 4x^2 + 5x + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$;

б) $3x^2 + 35x + \left(\frac{1}{9}\right)^{-1} \le -x^2 + 6x + 2$;

в) $((0,2)^{-1}x + 1)(3x - 2) \ge ((0,5)^{-2}x - 1)(x + 2)$;

г) $(3x - 4^{-1})(x + 6) \le (6x - 2^{-2})(x + 6)$.

564. Найдите все отрицательные решения неравенства:

а) $\frac{4x^2 - 5x}{4} - 1,25 \le \frac{5x^2 - 3}{2}$;

б) $\frac{7x^2 - 2x}{5} \ge 1 + \frac{2x^2 + 1}{2}$.

565. Найдите область определения выражения:

а) $\frac{x + 4}{\sqrt{-x^2 + x + 30}}$; б) $\frac{\sqrt{19 - 24x + 9x^2}}{x + 5}$.

566. Верно ли при любом значении x неравенство:

а) $6x^2 - 10x + 7 > 0$; в) $x^2 + 8x + 1 > -x^2 + 10x - 2$;

б) $2x^2 + 7x + 1 > 10x - 1$; г) $-2x^2 + 10x < 18 - 2x$?

Уровень C

567. Докажите, что:

а) при $q > 1$ решениями неравенства $x^2 - 2x + q > 0$ являются все значения $x \in R$;

б) при $q > 4$ неравенство $x^2 - 4x + q < 0$ не имеет решений.

568. Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 7 и в остатке 6. Если это же двузначное число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 3, а в остатке число, равное сумме цифр исходного числа. Найдите исходное число.

569. Найдите все значения t, для которых при всех $x \in R$ выполняется неравенство:

а) $x^2 - (t + 2)x + 4 > 0$; б) $-x^2 + 2(t - 1)x - 9 < 0$.

570. Решите неравенство относительно переменной x:

а) $x^2 - 2x + p > 0$; б) $2x^2 + px + 8 < 0$.

27. Решение неравенств методом интервалов

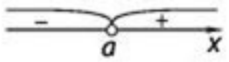


Рисунок 49

Отметим следующее свойство двучлена $x - a$: значения двучлена $x - a$ – отрицательные при всех x, находящихся на координатной прямой слева от числа a, и положительные при всех x, находящихся справа от a (рисунок 49). Это свойство двучлена используется при определении знака функции, записанной в виде $f(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$ в каждом из промежутков, на которые область определения разбивается нулями функции $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$.

Например, рассмотрим функцию $f(x) = (x + 4)(x - 2)(x - 10)$. Областью определения этой функции является множество всех чисел. Нули функции, числа –4, 2, 10, разбивают ее область определения на промежутки $(-\infty; -4)$, $(-4; 2)$, $(2; 10)$, $(10; +\infty)$. Выражение $(x + 4)(x - 2)(x - 10)$ представляет собой произведение трех множителей. Знак каждого из этих множителей в рассматриваемых промежутках указан в таблице:

	$(-\infty; -4)$	$(-4; 2)$	$(2; 10)$	$(10; +\infty)$
$x + 4$	–	+	+	+
$x - 2$	–	–	+	+
$x - 10$	–	–	–	+

Отсюда находим, что $f(x) < 0$ при $x \in (-\infty; -4) \cup (2; 10)$,

$f(x) > 0$ при $x \in (-4; 2) \cup (10; +\infty)$ (рисунок 50).

Рисунок 50

Заметим, что в каждом из промежутков, на которые область определения разбивается нулями функции, знак функции сохраняется, а при переходе через нуль ее знак изменяется. Это свойство используется для решения неравенств вида:

$(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n) < 0$, $\quad (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n) > 0$,

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – числа, являющиеся нулями функции

$$f(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n).$$

П р и м е р 1. Решить неравенство $x^2 - 3x + 2 > 0$.

Р е ш е н и е. Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

Рисунок 51

1) $f(x) = 0$ при $x = 1$ или $x = 2$. Тогда $f(x) = (x - 1) \cdot (x - 2)$.

2) Отметим на координатной прямой точки 1 и 2, разбивающие ее на три промежутка: $(-\infty; 1)$, $(1; 2)$, $(2; +\infty)$. Определим знаки функции $f(x)$ на каждом из этих интервалов (рисунок 51).

Таким образом, множеством решений неравенства $x^2 - 3x + 2 > 0$ является объединение промежутков $(-\infty; 1)$ и $(2; +\infty)$.

О т в е т. $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

Рассмотренный способ решения неравенств называют *методом интервалов*.

П р и м е р 2. Решить неравенство $(x + 3) \cdot (x - 1) \cdot (x - 4)^2 \cdot (5 - x) \leq 0$.

Р е ш е н и е. Преобразуем неравенство так, чтобы каждый множитель имел вид $x - a$. Для этого в четвертом множителе вынесем за скобки -1 и умножим обе части неравенства на -1, изменив при этом знак неравенства. Получим: $(x + 3) \cdot (x - 1) \cdot (x - 4)^2 \cdot (x - 5) \geq 0$.

1) Область определения функции $f(x) = (x + 3) \cdot (x - 1) \cdot (x - 4)^2 \cdot (x - 5)$ – все действительные числа.

2) Отметим на числовой прямой нули функции: -3; 1; 4; 5. Так как данное неравенство нестрогое, то эти числа входят во множество решений неравенства (это принято обозначать «закрашенными» точками на числовой прямой).

3) Определим знаки функции на промежутках (рисунок 52). Так как выражение $(x - 4)^2$ при любых значениях x неотрицательно, то при переходе через точку 4 знак функции не изменится.

Рисунок 52

Следовательно, множество решений данного неравенства состоит из двух промежутков [–3; 1], [5; +∞) и числа 4. (Множество, состоящее из каких-либо элементов, принято обозначать символом { }.)

О т в е т. $[-3; 1]\cup[5; +\infty)\cup\{4\}$.

Неравенство с одной переменной, которое можно представить в виде $\frac{A(x)}{B(x)} < 0$ или $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$, где $A(x)$ и $B(x)$ – многочлены называется *дробно-рациональным* неравенством. Обе части таких неравенств (или хотя бы одна часть) являются дробно-рациональными выражениями. Например, неравенства $\frac{5x-2}{x+1} < 4$; $\frac{7}{x-3} > \frac{x}{x+3}$ являются дробно-рациональными. Неравенство $\frac{7}{x-3} > \frac{x}{x+3}$ можно преобразовать так: $\frac{7}{x-3} - \frac{x}{x+3} > 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{7(x+3)-x(x-3)}{(x-3)(x+3)} > 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+10x+21}{(x-3)(x+3)} > 0$.

Неравенства $\frac{A(x)}{B(x)} < 0$ и $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$, где $A(x)$ и $B(x)$ – многочлены, равносильны соответственно неравенствам $A(x)\cdot B(x) < 0$ и $A(x)\cdot B(x) > 0$, поэтому для их решения можно использовать метод интервалов.

П р и м е р 3. Решить неравенство $\frac{2x-3}{4-x} > \frac{1}{x}$.

Р е ш е н и е. Преобразуем данное неравенство к виду $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$:

$$\frac{2x-3}{4-x} - \frac{1}{x} > 0, \quad \frac{(2x-3)x-(4-x)}{(4-x)x} > 0, \quad \frac{2x^2-2x-4}{-(x-4)x} > 0.$$

Умножим обе части неравенства на –1, получим неравенство $\frac{2(x^2-x-2)}{(x-4)x} < 0$, равносильное данному. Далее рассмотрим функцию $f(x) = \frac{2(x^2-x-2)}{(x-4)x}$.

1) Область определения этой функции – все числа, кроме 0 и 4.

2) Нули функции – числа 2 и –1.

3) Отметим на числовой прямой точки, в которых функция не определена или равна нулю и определим знаки функции на полученных промежутках (рисунок 53).

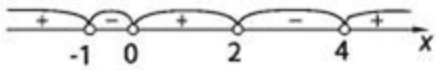


Рисунок 53

$f(x) < 0$ на промежутках $(-1; 0)$ и $(2; 4)$, следовательно, их объединение является множеством решений данного неравенства.

Ответ. $(-1; 0) \cup (2; 4)$.

Пример 4. Решить неравенство $\dfrac{(x-2)^2(x+1)}{x-3} \geq 0$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{(x-2)^2(x+1)}{x-3}$.

1) Область определения этой функции – все действительные числа, кроме 3.

2) Нули функции – числа 2 и –1.

3) Отметим на числовой прямой нули функции и точки, в которых она не определена. Причем нули функции – «закрашенными» точками, так как они входят во множество решений данного неравенства. Найдем знаки функции на полученных промежутках (рисунок 54).

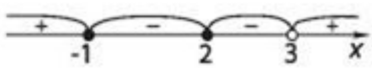


Рисунок 54

$f(x) \geq 0$ на промежутках $(-\infty; -1]$, $(3; +\infty)$ и в точке 2, поэтому объединение этих числовых множеств является решением данного неравенства.

Ответ. $(-\infty; -1] \cup (3; +\infty) \cup \{2\}$.

Пример 5. Решить неравенство $x^4 - 10x^2 + 16 \leq 0$.

Решение. Разложим трехчлен $x^4 - 10x^2 + 16$ на множители. Обозначим $x^2 = t$, тогда получим квадратный трехчлен $t^2 - 10t + 16$, нулями которого являются числа 2 и 8. Отсюда $t^2 - 10t + 16 = (t-2) \times \times (t-8)$. Следовательно, $x^4 - 10x^2 + 16 = (x^2-2)(x^2-8) = (x-\sqrt{2}) \times \times (x+\sqrt{2})(x-2\sqrt{2})(x+2\sqrt{2})$. Решим методом интервалов неравенство $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-2\sqrt{2})(x+2\sqrt{2}) \leq 0$ (рисунок 55).

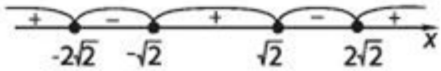


Рисунок 55

О т в е т. $[-2\sqrt{2}; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; 2\sqrt{2}]$.

П р и м е р 6*. Решить неравенство $x^2 + 2x + a > 0$ (1) для каждого значения параметра a.

Р е ш е н и е. Вычислим дискриминант трехчлена $x^2 + 2x + a$ (учитывая, что второй коэффициент – четное число): $D = 1 - a$.

Если $D = 0$, то есть при $a = 1$, неравенство (1) примет вид: $(x + 1)^2 > 0$. Оно верно при любых действительных значениях x, кроме $x = -1$, то есть $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

Если $D < 0$, то есть $1 - a < 0$, $a > 1$, неравенство (1) справедливо при любых действительных значениях x (объясните почему), то есть $x \in (-\infty; +\infty)$.

Если $D > 0$, то есть при $a < 1$, трехчлен $x^2 + 2x + a$ имеет два корня: $x_1 = -1 - \sqrt{1-a}$ и $x_2 = -1 + \sqrt{1-a}$ и решением неравенства (1) будет объединение промежутков $(-\infty; x_1)$ и $(x_2; +\infty)$, то есть $x \in (-\infty; -1 - \sqrt{1-a}) \cup (-1 + \sqrt{1-a}; +\infty)$.

О т в е т. $(-\infty; -1 - \sqrt{1-a}) \cup (-1 + \sqrt{1-a}; +\infty)$ при $a < 1$;
$(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$ при $a = 1$; $(-\infty; +\infty)$ при $a > 1$.

ВОПРОСЫ

1. В чем заключается метод интервалов решения неравенств?
2. Как можно решать квадратные неравенства?
3. Что называется дробно-рациональным неравенством?
4. Как можно решать дробно-рациональные неравенства?

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

571. Решите неравенство:

а) $x^2 < 1$; б) $x^2 > x$; в) $x^2 < -2$; г) $x^2 > -1$.

572. Решите неравенство:

а) $x^2 - 3x < 4$; в) $x^2 + 5x - 24 > 0$;

б) $x^2 - 3x + 2 \le 0$; г) $x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} \le 0$.

573. Решите неравенство:

а) $(x+4)(x+1)(x-3)>0$;
в) $(x+9)(x-8)(10-x)>0$;
б) $(x-5)(x-7)(x+3)<0$;
г) $(12+x)(6-x)(x-11)<0$.

574. Найдите область определения функции:

а) $y=\sqrt{x^2-169}$;
в) $y=\sqrt{121-9x^2}$;
б) $y=\sqrt{225-x^2}$;
г) $y=\sqrt{-x^2+2x+63}$.

575. Решите неравенство:

а) $(x-1)(x+3)(x-2)(x^2+1)\le 0$;
б) $(x^2-5x+6)(x^2+5x+6)\le 0$;
в) $(x^2+2x-3)(-2x^2+5x-2)\ge 0$;
г) $(x+2)^2(x+5)(x-1)(x+4)\ge 0$.

576. Грибники условились пройти путь до леса, равный 6 км, за определенное время. Но в действительности они вынуждены были идти со скоростью на 1 км/ч меньшей, чем намечалось, поэтому пришли в лес на 18 минут позже запланированного вначале. Сколько времени грибники затратили на дорогу к лесу?

Уровень B

577. а) Найдите все целые значения переменной x, при которых выражение $\sqrt{2-x-x^2}$ имеет смысл.

б) Найдите все целые значения переменной x, при которых выражение $\dfrac{5}{\sqrt{9x^2-3x-2}}$ не имеет смысла.

578. Найдите все значения x, при которых выполняется равенство:

а) $|-5x^2+11x-6|=5x^2-11x+6$;
в) $\sqrt{x^2-6x+9}=x-3$;
б) $|2x^2+5x-18|=2x^2+5x-18$;
г) $\sqrt{x^2+4x+4}=-x-2$.

579. Решите неравенство:

а) $x^3-4x\le 0$;
г) $2x^3-50x\ge 0$;
б) $27x^4-3x^2\ge 0$;
д) $-x^4+5x^3-6x^2\ge 0$;
в) $4x^3+36x^2\le 0$;
е) $x^4+3x^3+2x^2\le 0$.

580. Решите неравенство:

а) $(x^2-2x+6)(x-4)>0$;
в) $(x^2+2x+1)(x-2)\ge 0$;
б) $(3x+6)(-3x^2-3x-4)\le 0$;
г) $(x-4)^2(-x^2-4x-4)(x-2)\ge 0$.

581. Решите неравенство:

а) $(x^2-16)(x^2+1)\le 0$;
б) $(x^2+9)(x^2-4)>0$;
в) $(25-x^2)(x+6)^2\ge 0$;
г) $(1-x^2)(x-4)^2\ge 0$;
д) $x^4-13x^2+36<0$;
е) $x^4+15x^2-16\ge 0$.

582. 60 деталей первый рабочий изготавливает на 3 ч быстрее второго. За сколько часов второй рабочий изготавливает 90 деталей, если совместно они изготавливают за один час 30 деталей?

583. Равносильны ли неравенства:

а) $x^2+7x+10>0$ и $(x+2)(x+5)>0$;
б) $x(x-15)\le 0$ и $3x-45\le 0$;
в) $(x-7)(x+9)>0$ и $(7-x)(9+x)>0$;
г) $\frac{6x+1}{x-11}\le 0$ и $(6x+1)(x-11)\le 0$?

584. Решите неравенство:

а) $\frac{5}{x}<-2$;
б) $-\frac{2}{x}>10$;
в) $x+2x^{-1}>3$;
г) $x-3x^{-1}<2$.

585. Решите неравенство:

а) $\frac{12-x}{x+13}>0$;
б) $\frac{6-5x}{x+0,5}<0$;
в) $\frac{x+2}{3-x}>(0,5)^{-1}$;
г) $\frac{1}{x-3}\le -(0,1)^{-1}$.

586. Решите неравенство:

а) $\frac{(x+2)(x-4)}{(x+3)x}\le 0$;
б) $\frac{x^2+4x+5}{x^2-5x-6}<0$;
в) $\frac{x^2+4x+7}{x^2-6x+5}>0$;
г) $\frac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12}\ge 0$.

587. Решите неравенство:

а) $\frac{x^3+2x^2-9x-18}{x+1}\le 0$;
б) $\frac{x^3-5x^2+8x-40}{x+4}\ge 0$;
в) $\frac{(x+6)^3(x-5)^2}{(x-2)(x+4)}\le 0$;
г) $\frac{(x+7)^4(x-4)^3}{(x+5)(x-3)^2}\le 0$.

588. Сплав серебра с золотом, содержащий 8 г золота, сплавлен с 10 г чистого золота. В результате содержание золота в сплаве повысилось по сравнению с первоначальным на 20 %. Сколько серебра в сплаве?

589. Решите неравенство:

а) $x \geq 2 - \frac{1}{x-4}$;

б) $\frac{x+7}{x-2} > x - 1$;

в) $\frac{x^2+1}{x^2+3x-4} < 0$;

г) $\frac{10-x}{5+x^2} > \frac{1}{2}$.

Уровень С

590. Найдите все значения x, при которых верно равенство:

а) $\left|\frac{x^2+x-2}{x-3}\right| = \frac{x^2+x-2}{x-3}$;

б) $\left|\frac{x^2+x-6}{x^2+4x}\right| = -\frac{x^2+x-6}{x^2+4x}$;

в) $\sqrt{\left(\frac{x^2-x-20}{x^2-9}\right)^2} = \frac{x^2-x-20}{x^2-9}$;

г) $\sqrt{\left(\frac{x^2+x}{x^2+x-2}\right)^2} = -\frac{x^2+x}{x^2+x-2}$.

591. Решите неравенство:

а) $\frac{x+1}{x-1} < \frac{x-1}{x} - 2$;

б) $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+3} - \frac{3}{x+2} < 0$;

в) $\frac{3}{x+1} + \frac{7}{x+2} \leq \frac{6}{x-1}$;

г) $\frac{x^{-1}}{x^2+3x+2} \leq \frac{x^{-1}}{x^2+7x+12}$.

592. Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt{x - \frac{4}{x-3}}$;

б) $y = \sqrt{\frac{8}{x^2-4} + 1}$;

в) $y = \sqrt{\frac{x^2+5x+4}{-x^2-9}}$;

г) $y = \sqrt{\frac{-|x|+7}{x^2-8x+7}}$.

593. Решите неравенство:

а) $\frac{x-3}{x^4-8x^2-9} \geq 0$;

б) $\frac{x^4-20x^2+64}{x+4} \leq 0$;

в) $\frac{x^4-3x^2-4}{4-2x} \leq 0$;

г) $\frac{(x-1)^2}{x^4-10x^2+9} \geq 0$.

594. Решите неравенство, в котором x – переменная, $k \in R$:

а) $x^2 - 2x + k > 0$;

б) $2x^2 + kx + 3 < 0$;

в) $kx^2 - x - 1 > 0$;

г) $kx^2 + 12x - 5 < 0$.

28. Решение текстовых задач с использованием неравенств

З а д а ч а. Лодка должна проплыть по реке из пункта A в пункт B и обратно. Скорость течения реки 2 км/ч. Известно, что при движении против течения скорость лодки увеличивается в 1,5 раза. Какой может быть собственная скорость лодки, чтобы продолжительность пути по течению составляла не менее $\frac{4}{5}$ продолжительности пути против течения?

Р е ш е н и е. Пусть собственная скорость лодки x км/ч, тогда ее скорость по течению $(x + 2)$ км/ч, а против течения $1,5(x - 2)$ км/ч. Обозначим расстояние AB через S км, тогда время движения по течению равно $\frac{S}{x+2}$ ч, а против течения – $\frac{S}{1,5(x-2)}$ ч. По условию задачи составим и решим неравенство: $\frac{S}{x+2} \geq \frac{4}{5} \cdot \frac{S}{1,5(x-2)}$.

Преобразуем неравенство, перемножив числа в его правой части и разделив обе его части на S, учитывая, что $S > 0$. Получим $\frac{1}{x+2} \geq \frac{8}{15(x-2)} \Leftrightarrow \frac{15x-30-8x-16}{15(x-2)(x+2)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{7x-46}{15(x-2)(x+2)} \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{7\left(x-6\frac{4}{7}\right)}{15(x-2)(x+2)} \geq 0.$$

Решаем последнее неравенство методом интервалов (рисунок 56).

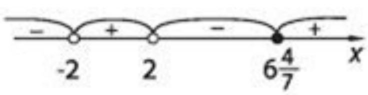


Рисунок 56

Решением неравенства является любое число промежутка $[6\frac{4}{7}; +\infty)$, так как по условию задачи $x > 2$.

О т в е т. Не менее $6\frac{4}{7}$ км/ч.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

595. а) Найдите два натуральных числа, если известно, что одно из них на 6 меньше удвоенного второго, а их произведение меньше 20.

б) Найдите меньшее из двух натуральных чисел, сумма которых равна 17, а сумма их квадратов не больше 185.

596. а) Сравните сумму квадратов трех первых из пяти последовательных натуральных чисел с суммой квадратов двух остальных чисел.

б) Известно, что произведение двух последовательных целых чисел больше их суммы не более чем на 11. Найдите меньшее из этих чисел.

597. а) Одну сторону квадрата уменьшили на 2 дм, а другую – на 4 дм. При этом получился прямоугольник, площадь которого не больше 24 дм^2. Чему равна сторона квадрата?

б) Участок, имеющий форму прямоугольника, обнесен изгородью. Какова длина изгороди, если известно, что длина участка на 15 м больше его ширины, а его площадь не больше 700 м^2?

Уровень В

598. а) Один из катетов прямоугольного треугольника на 12 см меньше другого, а площадь этого треугольника меньше 14 см^2. Найдите больший катет, если его длина выражается целым числом.

б) Один из катетов прямоугольного треугольника вдвое больше другого. Каким наибольшим целым числом выражается длина меньшего катета, если гипотенуза этого треугольника не больше 13?

599. а) От вершины прямого угла одновременно отправились и двигаются по его сторонам два тела, одно со скоростью 3 км/ч, другое – со скоростью 4 км/ч. Через сколько часов расстояние между ними будет не более 7 км?

б) Основания равнобедренной трапеции 16 см и 28 см, а высота не больше 8 см. Какова длина боковой стороны этой трапеции?

600. а) Какое наименьшее и наибольшее число сторон имеет многоугольник, в котором диагоналей меньше 60?

б) Несколько друзей обменялись каждый с каждым фотографиями. Сколько было друзей, если передано меньше 6 фотографий?

601. Продано несколько килограммов овощей не менее чем на 120 тенге. Сколько килограммов овощей продано, если известно, что цена одного килограмма в тенге на 2 меньше количества килограммов?

602. а) Грузовик отправился из пункта *A* в пункт *B*, расстояние между которыми 120 км, со скоростью 40 км/ч. В это же время из *B* в *A* вышел легковой автомобиль. После встречи легковой автомобиль достиг пункта *A* и немедленно повернул обратно. Какой должна быть скорость легкового автомобиля, чтобы он прибыл в пункт *B* раньше грузовика?

б) Из пунктов *A* и *B*, расстояние между которыми 100 км, одновременно выехали навстречу друг другу две машины. Скорость первой машины больше скорости второй на 10 км/ч. Она делала остановку в пути на 50 минут и приехала в пункт *B* не позднее, чем вторая машина приехала в пункт *A*. Найдите скорость первой машины.

603. Лодка спускается по течению реки на расстояние 10 км, а затем поднимается против течения на расстояние 6 км. Скорость течения реки 1 км/ч. Какой должна быть собственная скорость лодки, чтобы все путешествие заняло не более 4 часов?

604. а) Танкер может заполняться через 2 трубы, причем его заполнение через первую трубу происходит на 5 ч медленнее, чем через вторую. Найдите время заполнения танкера через вторую трубу, если его заполнение через обе трубы одновременно занимает не более 6 ч.

б) Токарь планировал обработать 120 деталей к определенному сроку, но обрабатывал в час на 2 детали больше, чем наметил.

Сколько деталей в час планировал обрабатывать токарь, если уже за 3 часа до срока он обработал не менее 136 деталей?

Уровень С

605. а) Морская вода содержит 5 % соли. Сколько килограммов пресной воды нужно добавить к 30 кг морской воды, чтобы концентрация соли не превышала 2 %?

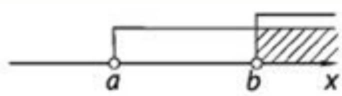
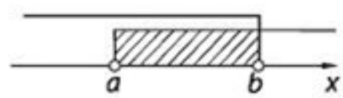
б) Сколько граммов воды надо добавить к 100 г 30-процентного раствора соляной кислоты, чтобы получить не более чем 10-процентный раствор соляной кислоты?

606. В одном классе не менее 80 % учащихся хорошо знают казахский язык и не менее 70 % – русский. Сколько процентов учащихся этого класса хорошо знают оба языка?

29. Системы нелинейных неравенств с одной переменной

Напомним, что если требуется найти все общие решения двух или более неравенств, то говорят о системе этих неравенств, которую надо решить. **Значение переменной, при котором каждое неравенство системы обращается в верное числовое неравенство, называется решением системы неравенств**. Решить систему неравенств – значит найти все ее решения или установить, что решений нет. Системы неравенств называются равносильными, если они имеют одно и то же множество решений или этих решений нет. Равносильность систем неравенств обозначается знаком $\Leftrightarrow$.

Решения систем линейных неравенств с одной переменной рассматривались ранее. Например, для систем из двух строгих линейных неравенств с одной переменной, их возможные решения показаны схематически на рисунках 57–60 (где $a < b$).

а) $\begin{cases} x > a, \\ x > b. \end{cases}$ О т в е т. $(b; +\infty)$.	 *Рисунок 57*
б) $\begin{cases} x > a, \\ x < b. \end{cases}$ О т в е т. $(a; b)$.	 *Рисунок 58*
в) $\begin{cases} x < a, \\ x < b. \end{cases}$ О т в е т. $(-\infty; a)$.	 *Рисунок 59*
г) $\begin{cases} x < a, \\ x > b. \end{cases}$ О т в е т. Нет решений	 *Рисунок 60*

Такое же окончательное оформление используется и для решения систем двух неравенств с одной переменной, одно из которых линейное, а второе квадратное, или оба неравенства квадратные.

П р и м е р 1. Найти область определения функции
$y = \sqrt{4,2 + 0,5x} + \dfrac{1}{\sqrt{15 - 6,5x - 0,5x^2}}$.

Р е ш е н и е. Областью определения данной функции является множество решений системы неравенств $\begin{cases} 0,5x + 4,2 \geq 0, \\ -0,5x^2 - 6,5x + 15 > 0. \end{cases}$

Решим каждое неравенство системы:

$$\begin{cases} 0,5x + 4,2 \geq 0, \\ -0,5x^2 - 6,5x + 15 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,5x \geq -4,2, \\ x^2 + 13x - 30 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -8,4, \\ (x + 15)(x - 2) < 0. \end{cases}$$

Покажем схематически на числовой прямой решения каждого неравенства и штриховкой выделим те из них, которые являются решениями и одного, и другого неравенства, то есть являются решениями исходной системы неравенств (рисунок 61).

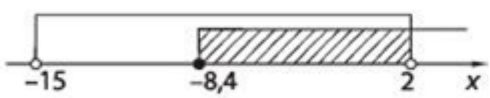


Рисунок 61

О т в е т. [–8,4; 2).

П р и м е р 2. Решить неравенство $\dfrac{x^2 + x - 6}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}} \leq 0$.

Р е ш е н и е. Данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 + x - 6 \leq 0, \\ x^2 - 2x - 3 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + 3)(x - 2) \leq 0, \\ (x + 1)(x - 3) > 0. \end{cases}$$

Покажем схематически на числовой прямой решение каждого неравенства этой системы и найдем их общие решения (рисунок 62):

Рисунок 62

О т в е т. [–3; –1).

Аналогично решаются системы, содержащие более двух неравенств. Отметим, что если одно из неравенств системы не имеет решений, то и система не имеет решений.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

607. На рисунке 63 (*а–е*) изображены схематически решения неравенств некоторой системы. Покажите штриховкой решение системы и запишите ответ.

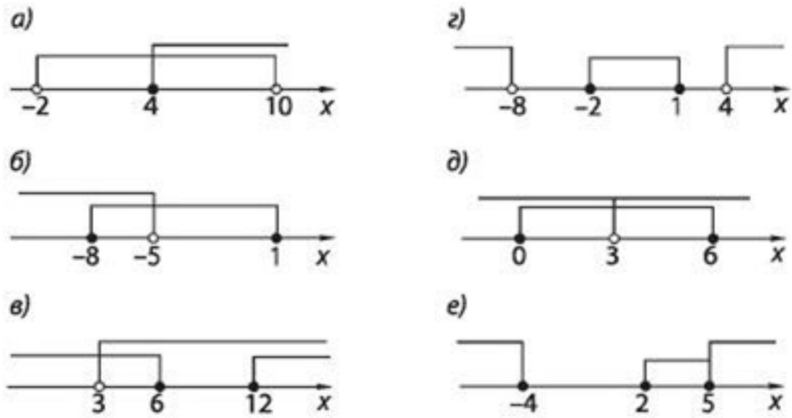


Рисунок 63

608. Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt{3 - 2x} - \sqrt{1 - x^2}$; в) $y = \sqrt{9 - x^2} + \sqrt{3x - 9}$;

б) $y = \sqrt{x^2} - \sqrt{3x - 1}$; г) $y = \sqrt{2x + 2} - \sqrt{16 - 4x^2}$.

609. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 - x - 2 < 0, \\ 5 - 2x < 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 - 8x + 15 < 0, \\ \frac{1}{2}x + 1 \geq 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 4 + 3x - x^2 > 0, \\ 2 - x > 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} -x^2 + 6x - 8 < 0, \\ 4x - 3 \leq 0. \end{cases}$

Уровень В

610. Решите неравенство:

а) $(x^2-25)\sqrt{x-2}\geq 0$; в) $\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{3-x}}\geq 0$;

б) $(4x^2-9)\sqrt{1-x}\leq 0$; г) $\dfrac{\sqrt{x-2}}{x^2-3x+2}\leq 0$.

611. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases}x^2-9x+14\leq 0,\\ 2-\frac{x}{2}<3;\end{cases}$ в) $\begin{cases}6x^2+x-2\leq 0,\\ \frac{x}{2}-x>1;\end{cases}$

б) $\begin{cases}3+2x+x^2<0,\\ 5x+2>1;\end{cases}$ г) $\begin{cases}9x^2+48x+64>0,\\ 7x+5\geq 0.\end{cases}$

$\boxed{\textbf{612.}}$ По окружности длиной 60 м равномерно в одном направлении движутся две точки. Одна из них проходит полный круг на 5 с быстрее, чем другая. При этом они встречаются каждую минуту. Найдите скорость, с которой движется каждая точка.

613. При каких значениях переменной имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{x^2-9}+\sqrt{6-2x}$; в) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2}}-\sqrt{7-x}$;

б) $\sqrt{16-x^2}+\sqrt{-2x-8}$; г) $\sqrt{x(x-2)}-\sqrt{-x^{-1}}$?

614. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases}(x-2)^2\leq 9,\\ x^2-5x>0;\end{cases}$ в) $\begin{cases}x^2-4x\leq 0,\\ x^2-8x+12>0;\end{cases}$

б) $\begin{cases}(x+1)^2\geq 25,\\ x^2+4x\leq 0;\end{cases}$ г) $\begin{cases}2x^2+5x>0,\\ x^2-3x-4\geq 0.\end{cases}$

615. Решите неравенство:

а) $\sqrt{x^2-18x+45}\cdot(x-5)\leq 0$;

б) $\sqrt{3x^2-7x-26}\cdot(0,5x-2,5)\leq 0$;

в) $\sqrt{x^2-3x+2}\cdot(x+3)(4-x)>0$;

г) $\sqrt{-5x^2+9x+2}\cdot(x^2-3x+2)<0$.

616. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases}|x|-5\geq 0,\\ x^2-5x+4>0;\end{cases}$ в) $\begin{cases}x^2+2x-3>0;\\ |2x-3|\leq 8;\end{cases}$

б) $\begin{cases} 2|x|-6>0, \\ x^2-3x-4\le 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2+3x-4<0; \\ 2|x-1|\le 0{,}8. \end{cases}$

617. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} (x-3)^2<(x-3)(x+1), \\ x^2-5x+6\ge 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} (x-4)(x-5)\ge -x(x-4), \\ 4-4x+x^2\le 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (x-2)(x-3)\ge x(x-3), \\ 2x^2-3x+1>0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x^2-6x+7\le 0, \\ (x+1)(x+4)\ge 0. \end{cases}$

618. Составьте какую-нибудь систему двух неравенств с одной переменной, одно из которых линейное, а второе квадратное, решением которой является следующее множество чисел:
а) $[0; 14]$; б) $(-\infty; 1]$; в) $(4; +\infty)$; г) $[-5; 0)\cup(0; +\infty)$.

619. В круг радиуса 2,5 дм требуется вписать прямоугольник, площадь которого 6,72 дм². Найдите стороны этого прямоугольника.

620. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} x^2-5x-6\le 0, \\ x^2+5x-6>0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2-13x+36>0, \\ x^2-11x+10\le 0. \end{cases}$

621. Найдите наибольшее целое решение неравенства:

а) $0<x^2+6x\le 7$; в) $8x<x^2-9\le 16$;

б) $x\le x^2+20\le 9x$; г) $3x-1\le x^2+x\le 2x+2$.

622. Решите неравенство:

а) $|x^2-5|<4$; в) $|3x^2+3x-1|\le 5$;

б) $|x^2-4x|\le 5$; г) $|x^2-7x+3|<3$.

623. Решите неравенство:

а) $2\le x+\dfrac{6}{x}\le 5$; в) $\dfrac{15x^4+\sqrt{x^2-16}}{x^2-8x+15}\le 0$;

б) $\dfrac{4}{x+2}\le x-1<\dfrac{2}{x}$; г) $\dfrac{3+8x-3x^2}{7x^6+\sqrt{x^2-2x}}\ge 0$.

624. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 2x^2-5x-3\ge 0, \\ \dfrac{16}{x^2}>1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \dfrac{x}{6}+\dfrac{6}{x}\ge \dfrac{x}{4}+\dfrac{4}{x}, \\ 4x-5\le \dfrac{15}{x-3}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x^2 - 5x - 8 \geq 0, \\ \dfrac{1-x}{3x+12} \geq 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{x}{5} - \dfrac{5}{x} \leq \dfrac{x}{3} - \dfrac{3}{x}, \\ 2x + 3 \geq \dfrac{6}{x+4}. \end{cases}$

625. Постройте график функции и найдите промежутки ее знакопостоянства:

а) $y = \begin{cases} -4, \text{ если } x \leq 0, \\ x^2 - 4, \text{если } x \geq 0; \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} x + 1, \text{ при } x < -1, \\ 1 - x^2, \text{ при } x \geq -1; \end{cases}$

Уровень С

626. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} \dfrac{x^2 - (7 + 4\sqrt{3})}{x^2 - (11 + 6\sqrt{2})} \leq 0, \\ x^2 + 3x - 4 > 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (x^2 - (6 + 2\sqrt{5}))(x^2 - (5 + 2\sqrt{6})) \leq 0, \\ x^2 + 11x - 5{,}75 > 0; \end{cases}$

627. Найдите среднее арифметическое целочисленных решений системы неравенств:

а) $\begin{cases} 5x^2 - 2x - 3 \geq 0, \\ x^2 - (\sqrt{2} + 3\sqrt{3})x + 3\sqrt{6} < 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 12x^2 - 4x - 5 > 0, \\ x^2 + (4\sqrt{3} - \sqrt{2})x - 4\sqrt{6} \leq 0. \end{cases}$

628. Что больше: $\dfrac{10^{2018} + 1}{10^{2019} + 1}$ или $\dfrac{10^{2019} + 1}{10^{2020} + 1}$?

30. Решение текстовых задач с использованием систем неравенств

З а д а ч а. По прямой из пункта A начали двигаться одновременно в одном направлении две точки: первая равноускоренно с начальной скоростью 3 м/с и ускорением 2 м/с^2, вторая – равномерно. В каких границах должна изменяться скорость второй точки, чтобы она сначала обогнала первую точку, но чтобы затем первая точка догнала вторую на расстоянии, не большем 10 м от A?

Р е ш е н и е. Пусть v м/с – скорость движения второй точки, t с – время, за которое вторая точка после начала движения догнала первую точку, тогда vt м – расстояние, которое прошла вторая точка. По условию задачи $vt \le 10$ (1).

За это же время t с первая точка проходит тот же путь vt м. Как известно из физики, при равноускоренном движении точка проходит расстояние, равное $v_0t + \frac{at^2}{2}$. По условию задачи $v_0 = 3$ м/с, $a = 2$ м/с^2. Получим $vt = 3t + \frac{2t^2}{2}$, откуда находим, что $t = v - 3$. Подставим это значение t в неравенство (1), получим $v(v - 3) \le 10$.

Для того чтобы вторая точка могла вначале перегнать первую, ей надо иметь скорость большую, чем начальная скорость первой, то есть $v > 3$. Решим систему неравенств: $\begin{cases} v(v-3) \le 10, \\ v > 3; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v^2 - 3v - 10 \le 0, \\ v > 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (v-5)(v+2) \le 0, \\ v > 3. \end{cases}$$

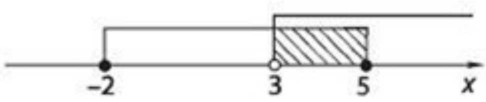


Рисунок 64

О т в е т. Больше 3 м/с, но не более 5 м/с.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

629. Один катет прямоугольного треугольника равен 8 дм, а его гипотенуза не больше 12 дм, но не меньше 10 дм. Оцените площадь квадрата, стороной которого является другой катет.

630. Может ли боковая сторона равнобедренного треугольника с основанием 8 см быть равна целому числу сантиметров, если его площадь не меньше 3 см^2, но не больше 4 см^2?

631. Лестница длиной 13 м приставлена к стене. При этом ее нижний конец отстоит от стены не более чем на 7 м, но более чем на 5 м. На какой высоте находится второй конец лестницы, если эта высота выражается целым числом метров?

632. Площадь ромба меньше 15 см^2, но больше 8 см^2, а одна из его диагоналей на 1 см длиннее другой. Найдите длину меньшей диагонали этого ромба, если она выражена целым числом сантиметров.

633. Произведение двух последовательных натуральных чисел не больше 420, но не меньше 240. Найдите среднее арифметическое наименьшего и наибольшего из таких чисел.

Уровень В

634. Найдите двузначное число, если цифра его единиц на 2 больше цифры десятков, а произведение этого числа на сумму его цифр меньше 460, но больше 144.

635. В обыкновенной дроби с натуральным числителем знаменатель на 1 меньше квадрата числителя. Если к числителю и знаменателю прибавить по 2, то дробь будет больше $\frac{1}{3}$, а если из числителя и знаменателя вычесть по 3, то дробь станет меньше $\frac{1}{10}$. Найдите эту дробь.

636. В однокруговом шахматном турнире было сыграно не больше 55, но не меньше 15 партий. Каково наименьшее и каково наибольшее количество участников этого турнира?

637. Если одну сторону квадрата уменьшить на 2 м, а соседнюю увеличить на 3 м, то получится прямоугольник, площадь которого больше 14 м^2, но меньше 24 м^2. Какой могла быть площадь квадрата?

638. На плоскости отмечены точки $A(3; 5)$ и $B(8; m)$. Найдите все точки B с целочисленными координатами, для которых расстояние AB меньше, чем 5,5, но не меньше 5.

639. Некоторая точка, двигаясь равномерно по прямой, должна пройти расстояние 630 м. Известно, что при увеличении скорости на 3 м/с будет сэкономлено времени не меньше, чем 1 с, но не больше, чем 5 с. Какой может быть скорость этой точки?

640. Механизатору было поручено обработать к определенному сроку 52 га посевов. Известно, что за день до этого срока он обработал не больше 54,6 га, но не меньше 48 га. Сколько гектаров посевов в день планировалось обрабатывать, если механизатор ежедневно перевыполнял норму на 3 га?

Уровень C

641. Лодка прошла по течению реки 7 км и по озеру 6 км, затратив на весь путь 1 ч. Какова собственная скорость лодки, если скорость течения реки больше 2 км/ч, но меньше 4,4 км/ч?

642. От пристани вниз по реке, скорость течения (в км/ч) которой постоянна, отплывает плот. Через один час вслед за ним – лодка, собственная скорость которой равна 10 км/ч. Догнав плот, лодка возвращается. Найдите все значения скорости течения реки, при которых к моменту возвращения лодки на пристань плот проходит более 15 км.

31. Упражнения на повторение темы «Неравенства»

Уровень А

643. Равносильны ли неравенства:

а) $\frac{x^2-2x}{x-2}>0$ и $(x^2-2x)(x-2)>0$; б) $\frac{x^2-4}{x+2}\le 0$ и $(x^2-4)(x+2)\le 0$?

644. Найдите наименьшее целое положительное решение неравенства:

а) $x(x+11)-8>4x$; б) $11-(x+1)^2\ge x$.

645. Найдите наибольшее целое отрицательное решение неравенства:

а) $x(x+5)\le 2(x^2-3)$; б) $(x+4)(x+5)\le x+5$.

Озеро Щучье

646. Казахстанский национальный парк «Бурабай» знаменит своими озерами. Найдите их количество, если оно численно равно наибольшему целому решению неравенства $\frac{x}{x^2-200}<0$.

Уровень В

647. Запишите какой-либо промежуток, ни одно из чисел которого не является решением неравенства:

а) $(x-3)^2<16$; б) $(3-x)^2<4$.

648. Решите неравенство:

а) $\frac{x^2}{\sqrt{2}+1}<x(\sqrt{2}-1)$; б) $\frac{x^2}{\sqrt{3}-2}\le x(\sqrt{3}+2)$.

649. В банк положен вклад под 5 % годовых. Известно, что через 2 года этот вклад составил не более 22050 тенге, но не менее 11025 тенге. Каким мог быть первоначальный вклад?

650. Решите неравенство:

а) $(5x-8)(2x^2+x+5)<0$; в) $(6x^2-x-2)x^2\ge 0$;

б) $(-4x^2+5x-7)(2x+7)\ge 0$; г) $(x^2+9x+18)(x-2)^2\le 0$.

651. Решите неравенство:

а) $x^4 - 8x^2 - 9 \le 0$;
б) $x^4 - 2x^2 - 3 > 0$;
в) $7x^6 - 28x^4 \ge 0$;
г) $8x^2 - 4x^4 \ge 0$.

652. Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt{1 - \frac{27}{x^3}}$;
б) $y = \sqrt{\frac{8}{x} - x^2}$;
в) $y = \sqrt{(x^2 - 1)(x^3 - 64)}$;
г) $y = \sqrt{(4 - x^2)(x^3 - 125)}$;
д) $y = \sqrt{x^2 + x + x^0}$;
е) $y = \sqrt{-\frac{1}{2}x^2 - x + x^0}$.

653. Решите неравенство:

а) $\frac{2}{x} - \left(\frac{2}{x}\right)^2 > 0$;
б) $2 - \frac{16}{x^3} < 0$;
в) $9x^2 - \frac{1}{3}x^5 \le 0$;
г) $\frac{1}{9}x^5 - \frac{1}{4}x^3 \ge 0$;
д) $(1 + x)^3 \le 1 + 3x$;
е) $(1 - x)^3 > 1 - 3x$.

654. Обыкновенная дробь, числитель которой натуральное число, а знаменатель на 3 больше числителя, в сумме с обратной ей дробью больше 4. Найдите эту дробь.

655. Длины сторон прямоугольника выражены целыми числами, и одна из них на 7 см меньше другой. Какую длину может иметь большая сторона этого прямоугольника, чтобы его площадь была больше 30 см², но меньше 60 см²?

656. Найдите область определения функции:

а) $y = \frac{1}{\sqrt{144 - 9x^2}}$;
б) $y = \frac{\sqrt{x^2 - x - 42}}{x - 11}$;
в) $y = \frac{\sqrt{9x^2 - 24x + 16}}{x + 2}$;
г) $y = \frac{x - 3}{\sqrt{-x^2 + x + 30}}$.

657. Марат предложил Алисе решить задачу: «Каков объем куба, ребро которого равно целому числу сантиметров, если площадь всех его граней, уменьшенная на 1 см², меньше 95 см², но больше 89 см²?» После непродолжительной паузы Алиса ответила, что такого куба не существует. Права ли она?

658. Найдите наименьшее целое решение системы неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 - 121 < 0, \\ 3x - 18 > 0; \end{cases}$
б) $\begin{cases} x^2 - 4x - 5 > 0, \\ \frac{1}{2}x - 2 \ge 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 5x^2 - 7x - 34 \le 0, \\ 2x \ge \sqrt{12}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 8 + 2x - x^2 \le 0, \\ x^2 - 4x - 5 < 0. \end{cases}$

659. Найдите все пары натуральных чисел, одно из которых на 6 больше другого, а их произведение не больше 135, но не меньше 112.

660. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} (x-2)^2 - 25 \le 0, \\ (x+2)^2 - 9 \ge 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 - 16 > 0, \\ 7x - x^2 \le 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (2x-3)^2 - 16 \le 0, \\ (2x+3)^2 - 1 < 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 - 16x + 55 \ge 0, \\ 2x^2 - 9x + 4 \ge 0. \end{cases}$

661. Найдите дроби с числителем 1 и натуральными знаменателями $n + 1$ и $n + 2$, сумма которых меньше $\frac{1}{2}$, но больше $\frac{1}{3}$.

Уровень C

662. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} -2x^2 + 3x - 1 \le 0, \\ \frac{x+4}{2} - \frac{4-3x}{4} > \frac{1}{2}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 - 7x + 12 \le 0, \\ \frac{3x-6}{x+3} > 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 4x^2 - 4x + 1 \ge 0, \\ \frac{3}{x} - 8x \le x - \frac{1}{x}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x^2 - 5x - 8 \le 0, \\ \frac{x-1}{x+2} \ge 0. \end{cases}$

663. Известно, что одна сторона треугольника на 2 см больше другой, а угол между ними равен 30°. Какую длину может иметь меньшая из этих сторон, если площадь треугольника не больше 30 см², но не меньше 20 см²?

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

664. 1A) На рисунке 65 изображен график функции $y = x^2 + 2x - 3$. Используя рисунок 65, запишите решение неравенства: 1) $x^2 + 2x - 3 < 0$; 2) $x^2 + 2x - 3 \ge 0$.

2B) Найдите область определения функции $y = \sqrt{\frac{x^2 - 196}{10 - x}}$.

3B) Решите неравенство $(x-3)(x-1)^2(x+2)(x+4) \ge 0$.

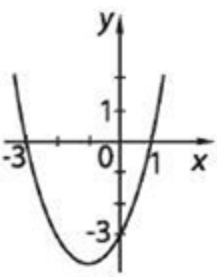


Рисунок 65

4B) В зрительном зале рядов на 3 меньше, чем мест в нем. Известно, что в зале мест больше 208, но меньше 270 и в каждом ряду их поровну. Сколько рядов в этом зале?

5C) Решите систему неравенств $\begin{cases} \frac{3x-1}{x^2} < 2, \\ (x^2-5x+8)^2 \geq (x^2+11x-8)^2. \end{cases}$

ЭТО ИНТЕРЕСНО!

Неравенства и системы неравенств широко используются как в теоретических исследованиях, так и при решении важных практических задач. Например, квадратные неравенства применяются для отыскания наибольших и наименьших значений величин. Одним из наиболее общих методов, применяемых для решения неравенств и их систем, является метод интервалов. В основе этого метода лежит понятие непрерывности функции, график которой мы представляем как нигде не прерывающуюся линию.

Б. Больцано

Строгое определение этого понятия одним из первых дал чешский математик Б. Больцано (1781–1848). В изданном в 1851 году его научном труде «Парадоксы бесконечного» имеется теорема о том, что если непрерывная функция принимает положительное и отрицательное значение на отрезке [a; b], то ее значение равно 0 при некотором x из этого промежутка. То есть график этой функции пересекает ось Ox в точке x отрезка [a; b]. Эта теорема используется для нахождения промежутков знакопостоянства непрерывной функции при решении неравенств методом интервалов.

Найдите, пользуясь Интернетом:

а) сведения о биографии Б. Больцано и его вкладе в развитие теории функций;

б) определение понятия функции, данное Б. Больцано, и приведите пример.

ПОВТОРЕНИЕ КУРСА АЛГЕБРЫ 8 КЛАССА

Уровень А

665. Могут ли быть рациональными числами сумма и произведение каких-нибудь двух иррациональных чисел?

666. Верно ли, что если один из корней квадратного уравнения является иррациональным числом, то и второй его корень – число иррациональное?

667. Вычислите:

а) $\dfrac{\sqrt{18}-\sqrt{8}}{2\sqrt{50}}$; в) $(2\sqrt{5,5})^2-\sqrt{3}\cdot\sqrt{1,08}+\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{28}}$;

б) $\dfrac{\sqrt{45}+\sqrt{75}-3\sqrt{5}}{5\sqrt{27}}$; г) $2\sqrt{147}+\dfrac{1}{6}\sqrt{42^2-6^2}-9\sqrt{33\dfrac{1}{3}}$.

Уровень В

668. Докажите, что является целым числом значение выражения:
а) $(1+\sqrt{2017})^3+(1-\sqrt{2017})^3$; б) $\sqrt{10-4\sqrt{6}}-\sqrt{10+4\sqrt{6}}$.

669. Решите уравнение и выразите его корни числами, не содержащими иррациональности в знаменателе дроби:
а) $15x^2-10=0$; б) $5x^2-162=0$.

670. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}-\dfrac{7}{\sqrt{3}-\sqrt{10}}-\dfrac{4}{\sqrt{10}-\sqrt{6}}$;

б) $\dfrac{30}{8-\sqrt{34}}-\dfrac{20}{7+\sqrt{29}}-\dfrac{5}{\sqrt{34}-\sqrt{29}}$.

671. Разность периметров двух равносторонних треугольников равна 120 см, а их отношение равно квадрату некоторого положительного числа. Найдите это число, если сторона одного из треугольников равна 10 см.

672. Решите уравнение:

а) $x(x-15)=3(108-5x)$;

б) $47-x(3x+4)=2(17-2x)-62$;

в) $(y-7)(y+3)+(y-1)(y+5)=94$;

г) $(3y-8)^2-(4y-6)^2=96-(5y-2)(5y+2)$.

673. Найдите корни уравнения:

а) $|3y^2-5y+6|=4$; б) $|-6y^2+7y-1|=1$.

674. Разложите на множители квадратный трехчлен:

а) $x^2+2x-35$; в) $6x^2+x-2$;

б) $x^2-2x-15$; г) $-5x^2+9x+2$.

675. Сократите дробь:

а) $\frac{5x^2+12x+4}{5x+2}$; в) $\frac{x^2-11x+28}{x^2-14x+49}$;

б) $\frac{3x^2-7x+2}{1-3x}$; г) $\frac{5x^2+10x+10}{(x+1)^4-1}$.

676. Решите уравнение:

а) $\frac{x}{x-2}-\frac{7}{x+2}=\frac{8}{x^2-4}$;

б) $\frac{3}{x^2-9}+\frac{1}{x^2-6x+9}=\frac{3}{2x^2+6x}$.

677. Найдите:

а) произведение корней уравнения $x^4-6x^2+5=0$;

б) сумму корней уравнения $x^6-9x^3+8=0$.

678. Используя введение новой переменной, найдите корни уравнения:

а) $(x+5)^4-(x+5)^2-12=0$;

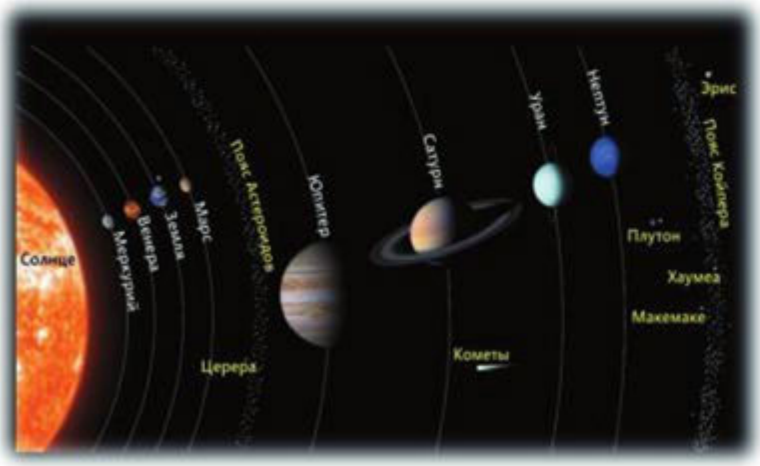
б) $(x^2-5x+7)^2-(x-3)(x-2)=1$;

в) $(x^2+2x+1)^2+(x^2+2x+2)^2=60+(x^2+2x+3)^2$;

г) $x^2+\frac{1}{x^2}+2(x+\frac{1}{x})=6$.

679. Одну сторону квадрата увеличили на $\sqrt{2}$ см, а соседнюю уменьшили на $\sqrt{2}$ см. При этом получился прямоугольник, площадь которого на 20 % меньше площади квадрата. Найдите сторону квадрата.

680. Найдите квадрат большего корня уравнения $x^2 - 11\sqrt{10}x + 100 = 0$ и вы узнаете, примерно во сколько раз Солнце весит больше, чем все планеты Солнечной системы (Меркурий, Венера, Земля, Марс, Юпитер, Сатурн, Уран и Нептун) вместе взятые.



681. Задайте формулой квадратичную функцию вида $y = x^2 + px + q$, нулями которой являются: а) tg 45° и sin 30°; б) cos 60° и sin 45°.

682. Постройте график функции $y = ax^2 + bx + c$, если известно, что $y(0) = -3$, $y(3) = 0$, $y(-2) = 5$.

683. Найдите наименьшее значение выражения:

а) $\sqrt{(x-3)^2 + (x+3)^2}$; б) $x^4 - 14x^2 + 50$.

684. Найдите область значений функции:

а) $y = x^2 + 6x + 5$; б) $y = -x^2 + 4x + 3$.

685. Постройте график функции $y = -x^2 + 6x - 5$. Найдите все значения x, при которых: а) $y < 0$; б) $y \geq 0$; в) функция возрастает; г) функция убывает.

686. Решите графически уравнение: а) $x^2 - 7 = \frac{6}{x}$; б) $x^2 - 4x = \sqrt{5x}$.

687. Задайте формулой функцию, график которой симметричен графику функции $y = x^2 + 8x + 15$ относительно: а) оси ординат; б) оси абсцисс.

688. При каком значении a сумма квадратов нулей функции $y = x^2 - ax + a - 1$ наименьшая?

689. В прямоугольном треугольнике высота, проведенная к гипотенузе, делит ее на два отрезка, один из которых на 1 см больше катета. Найдите площадь этого треугольника, если его гипотенуза равна 25 см.

690. Докажите, что для любых значений x верно неравенство:

а) $2x^2 + 4x + 1 > x - 1$; б) $-3x^2 + 7x < 2x^2 + 4x + 5$.

691. Решите неравенство:

а) $2x^2 + x - 6 \geq 0$; в) $64x^{-2} > x$;

б) $4x^2 + x - 5 \leq 0$; г) $25x^{-3} > x^{-1}$.

Уровень С

692. Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt{\dfrac{7 - x}{169 - x^2}}$; в) $y = \sqrt{x^2 - 1} + \dfrac{1}{\sqrt{1 - |x - 1|}}$;

б) $y = \sqrt{\dfrac{x - 12}{144 - x^2}}$; г) $y = \sqrt{36 - x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{6 - |x + 1|}}$.

693. Вещь подешевела не меньше, чем на 20 %, а потом еще не меньше, чем на 30 %. На сколько процентов подешевела вещь по сравнению с первоначальной ценой?

694. Коробка формы прямоугольного параллелепипеда имеет квадратное дно, а ее высота на 1 дм меньше стороны основания. Какой может быть сторона основания этой коробки, если площадь всех ее граней меньше 32 дм^2, но больше 16 дм^2?

695. Решите неравенство:

а) $x^4 + 17 < 8x^2 + 2$; б) $x(x + 8)(x + 3)(x + 5) + 56 < 0$.

696. Из пунктов A и B выезжают одновременно навстречу друг другу два автомобиля и движутся с постоянными скоростями. К моменту встречи первый автомобиль проехал на m км меньше второго, а на путь от места встречи до пункта B он затратил времени вдвое больше, чем второй на путь до пункта A. Найдите расстояние от пункта A до места встречи автомобилей?

ПРОВЕРЬСЕБЯ!

697. 1А) Решите уравнение: $\sqrt{x} = -2$.

2А) Найдите значение выражения:

$\left(1,5\sqrt{24} + 1,5\sqrt{\frac{1}{6}} - \frac{1}{5}\sqrt{150}\right) : \sqrt{\frac{1}{8}}$.

3В) Постройте график функции $y = x^2 - 6x + 8$, найдите ее нули и промежутки знакопостоянства.

4В) Рыбак на лодке проплыл 1800 м по течению реки и столько же против течения, затратив на весь путь 1 ч 12 мин. Найдите собственную скорость лодки, если скорость течения реки равна 2 км/ч.

5С) Найдите все значения b, при которых неравенство $bx^2 + 4x + b + 3 < 0$ верно при всех действительных значениях x.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К УПРАЖНЕНИЯМ

1. Верно. **2.** а) 20; б) $\frac{2}{21}$; в) –4; г) –27. **3.** а) $\frac{6a}{b^3}$; б) $70x^2y$; в) $25c^{-2}d^6$; г) $\frac{1}{64}p^6$. **4.** а) $0{,}078 \cdot 10^{-10} < 0{,}59 \cdot 10^{-7} < 3400 \cdot 10^{-9}$. **5.** а) 0,6; б) –4; в) 3; г) $2\frac{1}{3}$. **6.** а), б) – вторая дробь больше. Приведите дроби к общему знаменателю и сравните их числители. **7.** а) –2; б) 1,5. Умножьте левую и правую часть уравнения на x^2 и представьте его левую часть в виде квадрата выражения. **8.** а) 12 и 16 плакатов; б) 160 га, 960 га. **9.** а) 57; б) 85. **10.** а) $\frac{3b^5}{a}$; б) $6 - 2x$; в) $a - 3$; г) $\frac{1}{x-4}$. **11.** а) $\frac{x+3}{4x-y}$; б) $\frac{5mn}{m-2n}$; в) $-\frac{4}{b}$. **12.** а) 0; б) 1. **13.** Верно. **14.** а) 89,1 км/ч; б) 60 км/ч. **15.** Плотность населения Южно-Казахстанской области 20,7 чел./км², медиана вариационного ряда 4,97. **16.** а) 0,25; б) 4; в) –3 и 8. Выполнив действия в левой части уравнений, запишите их в виде пропорций. Далее используйте основное свойство пропорции и допустимые значения переменной. **17.** Разложите выражение на множители, используя вынесение общего множителя за скобки и формулы сокращенного умножения. **18.** В числителе дроби прибавьте и отнимите a^2, получите $(a^2 + 2)^2 - a^2$. Далее разложите на множители как разность квадратов. **19.** а) 6; б) 5. Разделите числитель и знаменатель на: а) xy; б) ab. **20.** а) 3 часа и 6 часов; б) 10 и 15 часов. **21.** а) $-\frac{1}{10}$; б) $\frac{1}{25}$. Умножьте и разделите выражение на: а) 11 – 1; б) 26 – 1. **23.** а) –2 и 13; б) наименьшее 0,8, наибольшего значения нет; в) –12,5 и 0; г) 0 и 250. **24.** Представьте данные слагаемые в виде квадратов и выделите полный квадрат выражения, прибавив и отняв нужное слагаемое. Далее разложите разность квадратов на множители. **25.** а) 15 км/ч; б) 10 км/ч. **26.** б), в), г). **28.** а) $\frac{1}{9}$; б) $2\frac{7}{9}$; в) $4\frac{4}{33}$; г) $\frac{61}{495}$; д) $2\frac{2641}{4950}$. **30.** $\frac{8}{21}$. **31.** $\frac{11}{50}$, $\frac{22}{25}$, $\frac{275}{2}$. **32.** $3\frac{361}{990}$. **34.** Преобразуйте сумму квадратов двух последовательных чисел к виду $2n(n + 1) + 1$ и учтите, что произведение $n(n + 1)$ двух последовательных целых чисел делится на 2. **35.** 1575 красных и 1995 синих шаров. При выборе ответа учтите, что число синих шаров должно быть кратно произведению $5 \cdot 7 \cdot 19$. **36.** б) –3,2121121112…, 1,234567891011… . **37.** г) ≈10,900. **39.** б) Бесконечно много. **40.** а), в) – верные утверждения. **41.** Имеют. **42.** а) Имеют, т. к. $c = 2m$, где c – гипотенуза, m – медиана, проведенная к ней. б) Выразите площадь квадрата, изображенного на рисунке 11, двумя способами: $(a + b)^2$ и $(2a)^2 + 2ab$. Получив равенство $b^2 = 3a^2$, докажите, что отношение $\frac{b}{a}$ нельзя выразить рациональным числом. **43.** Верное равенство в). **45.** ≈ 0,12. **46.** а) $\approx 1,0 \cdot 10^3$; б) $\approx 1,2 \cdot 10^{-6}$. **47.** (615 ± 5) км. **48.** ≈ 164 кг. **49.** Используйте представление расстояния между двумя точками на числовой прямой. **50.** а) 1; б) –8. **51.** а) (–8; 2); б) $(-\infty; -16] \cup [4; +\infty)$; в) [0; 8]; г) $(-\infty; +\infty)$. **52.** г) $\pm \frac{5}{2}$. **53.** Если $\overline{ab}$ – данное число, то $a - b = 1$ или $a - b = 4$. **54.** а) [–3; –2]; б) $(0,5; +\infty)$. **55.** а) 164 см и 200 см; б) на 21 %. **56.** г) Нет корней. **57.** Имеют смысл выражения: а), в), г), е), ж). **61.** в) 13; г) –15. **62.** а) $[-3; +\infty)$; б) $(-\infty; 12]$; в) $(-\infty; -3]$; г) $[1,75; +\infty)$. **63.** Всего 7 чисел. **64.** 1936 и 2025. **65.** г) 40; д) 49,9; ж) 1,5; з) –5. **66.** Всего 13 чисел. **67.** 978. **68.** б) 0,0001; в) 21. **69.** б) $\sqrt{3} \approx 1,7$; $\sqrt{5} \approx 2,2$. **70.** б), г), е). **71.** а) 4; б) 3. **73.** б) 3,5; в) 0,55. **74.** а) ≈ 8,2 см; б) ≈ 5,1 см; в) ≈ 1,9 дм; г) ≈ 2,7 дм. **75.** а) 28; б) 9; в) –18; г) 12; д) 5; е) 8. **76.** е) $\pm 2\frac{3}{11}$; ж) $\pm\sqrt{6}$; з) $\pm\sqrt{15}$. **77.** в) $(-\infty; \sqrt{7}]$; г) [–8; 8]; д) $(-\infty; -9] \cup [9; +\infty)$; е) $x = 10$. **78.** 2. **79.** 120. **80.** ≈ 5,9 %. **81.** б) $(\sqrt{17} - b)(\sqrt{17} + b)$; в) $(c\sqrt{2} - \sqrt{3}) \times$ $\times (c\sqrt{2} + \sqrt{3})$. **82.** в) –2; г) $1 + \sqrt{2}$. **83.** а) $\frac{5}{6}$; б) $\frac{4}{5}$; в) $\frac{1}{4}$; г) 3. **84.** б) 16; г) 2. **85.** а) $a = 1$; б), в) $a \in R$; г) $(-\infty; 1]$; д) $a = 2$; е) нет таких значений a. **86.** а) 2, 3, 4; б) 3, 4, 5, 6, 7; 18, 19, 20, 21, 22; 43, 44, 45, 46, 47. **87.** $317^2 = 100489$. **88.** а) 2,5 %; б) на 20 %. **89.** Обозначьте пять последовательных натуральных чисел так: $n - 2$, $n - 1$, n, $n + 1$, $n + 2$. Упростив сумму квадратов этих чисел, получите $5(n^2 + 2)$. Установите, какой цифрой оканчивается множитель $(n^2 + 2)$ и сделайте вывод о значении выражения $\sqrt{5(n^2 + 2)}$. **90.** б) 27; г) 2,5; 0; 22,5. **91.** а) Не может; б) три: ±1 и 0. **92.** а) $0,5|b|$; в) $7a^8$; д) $-6a$; ж) $-1,6b^5$. **94.** а) $\sqrt{2} - 1$; в) $x - 4$; д) $-x - 2$. **95.** а) (–4; 4); б) $(-\infty; 7] \cup [7; +\infty)$. **96.** б) 7,7; г) 8;

е) 3,4. **97.** б) 48; г) 105; е) 195. **98.** 1600 °С, 3422 °С, 5555 °С. **99.** а) $60xy$; б) $-540xy$; в) $90x^4y^4$; г) $252x^6y^8$. **102.** а) $-x^3$; б) x^3. **103.** а) Не являются; б), в), г) – являются. **104.** а) $\approx 0{,}83$; б) $\approx 1{,}24$; в) $\approx 4{,}96$; г) $\approx 12{,}4$. **106.** б) $\sqrt{(49\cdot 10)^{-2}}$; г) $\sqrt{13}+\sqrt{12}$; е) $\sqrt{8}-\sqrt{18}$. **107.** а), б) – верно. **109.** а) $2\sqrt{2}$; б) $2\sqrt{2}-4$; в) -5 и 7; г) -8 и 12. **110.** $7\sqrt{2}$ см и $14\sqrt{2}$ см. **111.** $\approx 3{,}16$. **112.** -7. **113.** а), б), г), д), е). **114.** а) 28,5; б) 10,65; в) 7,75; г) 2,5; д) 7; е) 17. **115.** а) 4; б) $\frac{1}{9}$; в) 0 и 9; г) 4. **116.** 98. **117.** а) 1; б) 2; в) $-\sqrt{5}$; г) 5. **118.** а) $\sqrt{13}+\sqrt{2}$; б) $\sqrt{11}-\sqrt{3}$; в) $\sqrt{6}-1$; г) $\sqrt{2}+1$. **119.** а), в) – верно; б), г) – неверно. **120.** а) $1+\sqrt{5}$; б) $1+2\sqrt{3}$; в) $2-\sqrt{3}$; г) $3-\sqrt{3}$. **121.** а) $(-2;\ 2)$; б) $(-\infty;\ -3]\cup[3;\ +\infty)$. **122.** Умножьте обе части неравенства на $\sqrt{5}$. **123.** а) 15; б) -5; в) 18; г) 54. **124.** а) $376^2 = 141376$; б) $625^2 = 390625$. **125.** 8 литров. **126.** 6 и 2. **127.** а) $4{,}5\cdot 10^5$; б) $2{,}8\cdot 10^{-3}$. **128.** а) $\frac{6\sqrt{2}}{11}$; б) $\frac{4\sqrt{3}}{15}$; в) $\frac{9\sqrt{5}}{25}$ г) $\frac{7\sqrt{6}}{36}$. **129.** а) $\sqrt{7}$; б) $-\sqrt{2}$; в) $-\sqrt{5}$; г) $\sqrt{3}$. **130.** б) $\sqrt{4{,}5}>\sqrt{4{,}375}$; в) $-\sqrt{12}<-\sqrt{11{,}5}$. **131.** а) $0{,}2\sqrt{7}<\frac{1}{3}\sqrt{7{,}2}<0{,}6\sqrt{5}<\frac{3}{4}\sqrt{7{,}2}$; б) $-0{,}3\sqrt{1{,}8}<-1{,}2\sqrt{0{,}1}<-2{,}3\sqrt{0{,}02}<-0{,}2\sqrt{2{,}5}$. **132.** в) $12y^3\sqrt{y}$; г) $-9x\sqrt{-x}$. **133.** а) $\sqrt{x+1}$; б) $-\sqrt{y^4+y^2}$; в) $\sqrt{a-2}$; г) $-\sqrt{b-4}$. **134.** а) 0; б) -27; в) 5; г) -4. **135.** а) 5 см; б) $\sqrt{\frac{Sm}{n}}$, $\sqrt{\frac{Sn}{m}}$. **136.** а) $2\sqrt{5}$; б) $\sqrt{10}$; в) 21; г) 4. **138.** а) Одна пара: 4 и 5; б) три пары: 12 и 13, 24 и 25, 40 и 41. **139.** б) $2{,}5\sqrt{b}$; г) $\frac{-n\sqrt{5}}{10}$; е) $\frac{14+5\sqrt{2}}{73}$. **140.** а) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{10}}{2}$; в) $-\frac{\sqrt{15}}{5}$; г) $-\frac{\sqrt{35}}{5}$; д) $-\frac{\sqrt{xy}}{y}$; е) $\frac{5\sqrt{xy}-y}{y}$. **141.** а) 5; б) -34. **142.** а) 1; б) 2. **143.** а) $(-\infty;\ 0)$; б) $(-\infty;\ +\infty)$. **144.** а) 96; б) 0. **145.** 140 кг и 70 кг. **146.** г) $\frac{2\sqrt{3}-3}{3}$; д) $2-\sqrt{3}$; е) $2\sqrt{2}+1$; ж) $4+\sqrt{5}$; з) $4\sqrt{15}+6\sqrt{6}$. **147.** а) 80; б) 63; в) 1; г) 3; д) $-2\sqrt{2}$; е) $-3\sqrt{3}$. **148.** а) $b\sqrt{b}$; б) $\sqrt{y}(y-1)$; в) $x+\sqrt{3}$; г) $\frac{1}{a-\sqrt{7}}$; д) $b^2+b\sqrt{11}+11$; е) $(a+\sqrt{5})^2$. **149.** а) 33; б) 8; в) -13; г) 1. **150.** а) $\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}}$; б) $\frac{1}{2(\sqrt{x}-2)}$; в) $\frac{5}{1-3\sqrt{x}}$; г) $\frac{5}{1-\sqrt{x}}$. **151.** а) $\left|\frac{3}{x}+1\right|$; б) $\left|2+\frac{5}{y}\right|$; в) $4+x^2$; г) $6+y^2$.

152. 49, 64, 81. **153.** а) $6-\sqrt{5}$; б) $3+\sqrt{2}$. **154.** а) Если прямоугольник является квадратом со стороной $\sqrt{5}$ м; б) 1386 м. **155.** Возведите в квадрат правую и левую части неравенств а) и б). В неравенстве в) раскройте скобки, а затем возведите в квадрат обе части полученного неравенства. **157.** A, C, D. **159.** а), в) – две; б) нет общих точек. **160.** а) (0,25; 0,5); б) (1; 1). **162.** а) $(1; +\infty)$; б) $(-\infty; -0{,}1)$; в) $[41; +\infty)$; г) $(-\infty; 43]$; д) $(-\infty; 0)\cup(0; +\infty)$; е) $(-\infty; +\infty)$. **163.** г) $[\sqrt{5}; \sqrt{7}]$. **166.** а) –2; б) –4; в) 3; г) $\pm\frac{1}{2}$. **169.** а) $\sqrt{2}-1$; б) $2+\sqrt{3}$. **170.** а) $[2; +\infty)$; б) $[-6; 2]$; в) $(-\infty; +\infty)$. **173.** а) Установите, что уравнение $\sqrt{x}=x+\frac{1}{2}$ не имеет корней. Для чего возведите в квадрат его левую и правую части. б) Аналогично заданию а). **174.** а) [0; 3); б) [–4; 4]; в) (0; 1); г) $[1; +\infty)$. **175.** 65 см. Найдите делители числа, выражающего длину отрезка, на котором следы мальчика и девочки совпадают. **176.** а) (2,5; 4); б) (–2; 6), (2; –6); в) (15; 30). **179.** а) 65; б) 320; в) 15. **180.** д) $5\sqrt{7}-12$; е) $25-4\sqrt{6}$. **181.** Используйте способ доказательства «от противного». **182.** д) –1; е) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$; ж) [–11; 11]; з) $(-\infty; +\infty)$. **183.** в) $\frac{a\sqrt{2a}}{|b|}$; г) $(1-x)\sqrt{2}$. **184.** д) $\sqrt{4x}$; е) $-\sqrt{-4x}$. **186.** а) –29; 21; б) –13; 19; в) 7; г) нет корней. **189.** а) Нет; б) верно. **190.** а) $2a$; б) $10-2b$; в) 1; г) 15. **191.** а) 44; б) $\pm\sqrt{17}$; в) 2; г) 3. **192.** $y=(\sqrt{3}-\sqrt{2})x$. **193.** а) $[2; +\infty)$; б) [0; 2). **194.** а) $\sqrt{a}+\sqrt{b}$; б) $2\sqrt{2a}$; в) $\frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}$; г) $\frac{\sqrt{ab}}{b-a}$. **195.** а), б). **196.** а), б), г). **197.** а), б). **198.** а), в), г). **200.** а), б), в) – верно. **201.** $10\sqrt{2}-10$; $8\sqrt{2}-10$. **202.** а) 14; б) 6; в) $2\sqrt{2}$; г) 8. В заданиях б) и в) представьте подкоренные выражения в виде квадрата двучлена; в задании г) внесите под знак первого корня множитель $\sqrt{2}$ и представьте полученное подкоренное выражение в виде квадрата двучлена. **203.** Используйте определение арифметического квадратного корня и формулу $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$. **204.** 1A) Внесите множители под знак корня; 2B) 1; 3B) 1 см^2; 5C) 1) 16; 2) [0; 16); 3) $(16; +\infty)$. **205.** а), д), е). **208.** в) 0; –5,5; г) 0; $\frac{4}{25}$; д) 0; 5; е) 0;

$\frac{3}{2}$. **209.** а) –3,2; –0,8; б) 14; 26; в) нет корней; г) ± 2; д) $\pm\sqrt{7}$; е) ±3; ±1. **211.** а) –5; б) $\pm\frac{1}{3}$. **212.** а) 5; б) 0 или 2. **213.** а) 5 см; б) 14 см. **214.** а) 0 или 0,4; б) 8 и 10. **215.** а) $(-\infty; -3)\cup(-3; 3)\cup(3; +\infty)$; б) $(-\infty; -4)\cup(-4; 4)\cup$ $\cup(4; +\infty)$; в) $(-\infty; 0)\cup(0; 1)\cup(1; +\infty)$; г) $(-\infty; -11)\cup(-11; 0)\cup(0; +\infty)$. **216.** а) ±3; б) ±4; в) 3; г) 0. **218.** а) –4; 0; 4; г) 0; д) –4; 4; е) нет корней. **219.** а) Нет корней; б) ±9; в) 0; г) –6; 0; 6. **221.** а) $\pm\frac{2}{3}$; б) ±5; в) –39,2; г) 27,5. **222.** а) –3; 5; б) –3; –1; в) –1; 9; г) –5; –1; д) –2; 1; е) –2; 5. **223.** а) 1) 6; 2) –23; б) 1) 5; 2) 1. **224.** 36. **225.** а) 1; 2,68; б) –0,3; 8,6. **228.** Имеют корни уравнения а), б), г), д), е). **229.** а), в) – 2 корня; б), е) – 1 корень; г), д) – нет корней. **230.** а) –13; 10; б), в) – нет корней; г) $-\frac{1}{2}$; $\frac{3}{2}$; д) $-\frac{5}{6}$; $\frac{3}{2}$; е) $-\frac{4}{3}$; $\frac{5}{2}$. **231.** а) $-\frac{4}{3}$ и 1; б) $-\frac{5}{2}$ и 2; в) $\frac{1}{3}$ и 3; г) $-\frac{1}{5}$ и 2; д) $-\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{4}$; е) $\frac{2}{17}$ и 1. **232.** а) ≈ –5,4, ≈ 0,4; б) ≈ –5,8, ≈ 0,3. **233.** 99. **234.** 5 + 8. **236.** а) $(-\infty; 2{,}25)$; б) $(-\infty; 1{,}125)$; в) $(-\infty; -\sqrt{15})\cup(\sqrt{15}; +\infty)$. **237.** а) ± 8; б) ±1 и 0; в) 0 и 6. **238.** а) –3; –4; б) $-\frac{1}{2}$; 3; в) –1; $\frac{4}{3}$; г) –1; $\frac{1}{6}$. **239.** а) $1-\sqrt{5}$; –1; б) –2; $2+\sqrt{7}$; в) $3-\sqrt{2}$; 1; г) –4; $2-\sqrt{3}$. **240.** а) 4; 6; б) $-\frac{2}{3}$; $-\frac{1}{3}$; в) 4; 24; г) $-\frac{3}{2}$; 1. **241**. а) 12 и 15; б) –15 и –22 или 22 и 15. **242.** а) –6 и 1,5; б) –12 и 6; в) –1,6 и 4; г) 1 и 13. **243.** а) 1; б) –13 и 7; в) 0,5 и 3; г) –58 и –2. **244.** а) 11; 12; б) $\pm\frac{\sqrt{6}}{5}$; в) 1,5; 5; г) 15; д) 1; е) –9. **245.** а) –5; –4; б) 1; 4; в) $-\frac{3}{2}$; –1; г) –9; –6; –2; 1. **246.** а) 1; 2; б) –3; $1+\sqrt{2}$; в) –6; 1; 2; 3; г) $-1\pm\sqrt{2}$; 1; д) –1; 0,4; е) –2; $-\frac{4}{3}$; $-\frac{2}{3}$; 4. **247.** а) 40 м и 70 м; б) 60 м и 120 м. **248.** а) $-4k$, k; б) k, $9k$; в) $-8t$ и t; г) t и $5t$. **249.** а) 1 и $\frac{2}{a}$; б) –1 и $\frac{a-2}{a+2}$. **250.** а) 8; б) 1; в) ±4; г) $\pm\frac{1}{3}$. **251.** а) –5; б) –8; в) 6; г) –6. **252.** 18. **253.** $-\frac{1}{3}$ или 3. Пусть надо найти $\frac{a}{b}$. Составив по условию задачи пропорцию и разделив $a^2 - b^2$ на ab, получим $\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{8}{3}$. Если обозначить $\frac{a}{b} = x$, тогда $\frac{b}{a} = \frac{1}{x}$. Получим $x - \frac{1}{x} = \frac{8}{3}$. Умножьте обе части этого уравнения на $3x$ и решите квадратное уравнение. **258.** а) $x^2 - 5 = 0$; в) $x^2 - 4x + 1 = 0$. **263.** а) 1 и 9; б) –5 и 7. **264.** а) $2-\sqrt{3}$; $c = 1$; б) 15. **265.** Например, а) $8y^2 - 6y + 1 = 0$;

б) $y^2 + 13y - 30 = 0$. **266.** б) –13 и –3 или 3 и 13. **267.** а) 7 дм, 12 дм; б) 9 см, 15 см. **268.** а) $-\frac{27}{4}$; б) $-\frac{13}{16}$; в) –10; г) –12,5. **269.** а) 53; б) 47,5. **270.** 1) а) $\frac{7}{12}$; б) 25; в) 300; г) 337; 2) а) $-\frac{7}{6}$; б) $6\frac{1}{4}$; в) $18\frac{3}{4}$; г) $21\frac{1}{16}$. **271.** в) –1 и 1,5; г) –4 и $\frac{1}{3}$; д) 1,5; е) $-\frac{1}{3}$; 2. **272.** в) –1,5 и 2; г) –4 и $\frac{2}{3}$; д) $-\frac{3}{2}$; $\frac{1}{3}$; е) –3,5. **273.** в) $(2x - 1)(x - 3)$; г) $(4x + 3)(x + 2)$; д) $(3x - 2)^2$. **274.** Например, в) $x^2 + x - 42 = 0$; д) $x^2 - (a + 1)x + a = 0$; е) $x^2 + ax - 6a^2 = 0$. **275.** а) $\frac{x}{x - 12}$; б) $\frac{2 - x}{x + 1}$; в) $\frac{x + 2}{x - 4}$; г) $\frac{x - 5}{x + 5}$; д) $\frac{2x - 1}{4x - 1}$; е) $\frac{3x + 2}{3x - 2}$. **276.** а) $\frac{1}{x - 2}$, где $x \in (-\infty; 2) \cup (2; 5) \cup (5; +\infty)$; в) $\frac{1}{x - 1}$, где $x \in (-\infty; -2{,}5) \cup (-2{,}5; 1) \cup (1; +\infty)$. **277.** а) $\frac{2}{3}$ или $\frac{6}{19}$; б) $\frac{5}{4}$. **278.** а) $\frac{2 - 7a}{2a - 3}$; б) $\frac{b^2 - 2b}{b + 5}$; в) $\frac{-4}{b}$; г) $\frac{-2}{b}$. **279.** а) $\frac{1}{a - 2}$; б) $-\frac{1}{a + 6}$; в) $\frac{1}{b - 3}$; е) $\frac{m + 4}{m - 3}$. **283.** а) $(x - 2a)(x - 3a)$; в) $(x + 6b)(x - b)$; д) $(2x - a)(3x + a)$. **284.** а) $-\frac{x + 1}{3x + 1}$; б) $\frac{2a - 1}{a^2 - 3a + 9}$; в) $2a - 1$; г) $\frac{x - 14a}{x - 2a + 3}$. **285.** Выделите квадрат двучлена. а) При $x = -2$; б) $x = 4$; в) $x = -\frac{7}{5}$; г) $x = \frac{3}{4}$. **286.** а) –16; б) 3; в) $-\frac{9}{8}$; г) $\frac{5}{4}$. **287.** Существуют: 4, 6, 8. **288.** 64. **289.** 10 или 60. **290.** 16 или 48 обезьян. **291.** 13. **292.** 25 м × 15 м. **293.** 40 см, 32 см. **294.** 26 рядов. **295.** а) 8 ветеранов; б) 9 школьников. **296.** 10 точек. **297.** ≈ 5,4 см. **298.** 1 м. **299.** 10 %. **300.** 35 кг и 45 кг. **301.** а), в), г) – два; б) нет корней. **302.** а) ±1; ±4; б) $\pm\sqrt{5}$; $\pm\sqrt{6}$; в) ±2; ±1,5; г) ±1; д) –1; –2; е) $\frac{1}{3}$; 1. **303.** а) –7, –6, –4, –3; б) 1; 7; в) –2; –1,5; 0,5; 1; г) $-\frac{1}{3}$; 1. **304.** 2) а) нет таких значений p; б) например, –56; –11; в) 9; 24. **305.** в) $x^4 - 11x^2 + 18 = 0$. **306.** а), б), в), г) – 0. **307.** а) ±1; ±3; б) ±2; в) $\pm\sqrt{10}$; г) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$. **308.** а) 9; 10; 14; 15; б) –5; 0; в) $\pm\sqrt{7}$; $\pm\sqrt{5}$; ±1; г) $1\pm\sqrt{3}$; $1\pm\sqrt{2}$; 1. **309.** а) 15 или 20 рядов; б) 12 или 15. **310.** а) ±3; б) ±3; в) ± 1; г) ±0,5; д) –3; –1,5; –1; $\frac{1}{2}$. **311.** 55. **312.** а) ±5; б) ±1; в) ±1; $\pm\frac{2}{3}$; г) ± 2. **313.** 8 и 18. **314.** а) –8; –3; –1; 4; б) –4; 10; в) –5; –4; –1; 0; г) $\frac{1}{4}$; $3\frac{1}{4}$. **315.** а) 3; 4; 6;

7; б) ±3; ±1; в) ±1; г) $\pm\sqrt{3}$. **316.** а) 8; б) 4; в) 2; 4; г) 2; 6. **317.** а) 81; б) 25; в) $1\frac{7}{9}$; г) $\frac{25}{49}$. **318.** а) 13; б) 10; 18; в) 57; г) 8. **319.** а) $12 \cdot 25$ или $(-12) \cdot (-25)$. **320.** а) –1; 25; $12 \pm \sqrt{145}$; б) –1; 4; в) $\frac{-5 \pm \sqrt{31}}{2}$; –4; –1; г) –2; 1. **321.** а) ±1; 0; б) 2; 3; в) 1; г) 2; 4; $3\pm\sqrt{7}$. **322.** а) –2; б) $\frac{-1 \pm \sqrt{37}}{2}$; в) 1; 7; $4 \pm 3\sqrt{2}$; г) –1; –0,5; 2; 2,5. **323.** а) –1; –2; б) $\frac{5 \pm 3\sqrt{5}}{2}$; 2; 3; в) $-4 \pm 2\sqrt{2}$; г) $7 \pm \sqrt{34}$. **324.** а) –4; 2; б) 2; $-2 \pm \sqrt{8}$; в) 3; $9 - 6\sqrt{3}$; г) $-6 \pm 2\sqrt{2}$; –2; 14. **325.** а) 8; б) 1; в) 2; г) 1. **326.** а) 25; б) 51 или 15. **327.** а) 0; б) 0; 7; в) 8; г) –0,5. **328.** а) –1; б) –2; в) –4; г) –5. **329.** а) –1; б) –3; 8; в) –6; 3; г) ±3; д) 1; 9; е) 1; 8. **330.** $-\frac{2}{5}$; 2. **332.** а) $\frac{5}{9}$ и $\frac{1}{3}$; б) $\frac{8}{15}$ и $\frac{2}{9}$. **333.** а) –1; $1\frac{1}{3}$; б) –2. **334.** а) ±6; б) –1; 0,5; в) 2; г) 13; д) $2 \pm \sqrt{7}$; е) 5. **335.** а) –7; б) 9; в) $1\frac{1}{4}$; г) –1,5; д) 0; е) –3; 1. **336.** а) 6; б) 12. **337.** а) 0; б) –4; в) –1; 1,5; г) ±1; $\pm\sqrt{3}$; д) 5; е) 4. **338.** а) 10 км/ч, 12 км/ч; б) 160 км/ч, 200 км/ч. **339.** а) 5; б) 0; в) 3; г) –8. **340.** а) 3; б) –6; в) –17; 0; г) любое число, кроме 4; 5; 6. **341.** а) $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$; $3 \pm \sqrt{10}$; б) $\frac{1}{2}$; 1; 2; в) ±2; г) ±3; $\pm\sqrt{4{,}2}$. **342.** а) $\sqrt{2}$; $\sqrt{2}+2$ или $-\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}+2$; б) 27 и 48. **343.** а) –2; –12; б) 1,8; в) 0; г) –8; 0. **344.** а) –2; –1; б) $6 \pm 2\sqrt{6}$. **345.** $11^3 = 1331$. **346.** а) 5; б) 5. **347.** $\frac{3}{8}$. **348.** 18 т/га, 20 т/га. **349.** 48 и 20 деталей. **350.** 40 %, 25 %. **351.** 18 км/ч или 9 км/ч. **352.** а) 36 дней; б) 10 т/ч, 18 т/ч. **353.** а) 12 км/ч, 15 км/ч; б) 100 км/ч, 80 км/ч. **354.** 25 кг. **355.** а) 15 и 10 дней; б) 36 и 45 дней. **356.** а) 12 км/ч; б) 2 км/ч. **357.** а) $\frac{\sqrt{d^2 + v^2t^2} - d}{t}$ км/ч; б) $\frac{\sqrt{t^2v^2 + 4tvs} - tv}{2t}$ км/ч. **358.** На 4 или 6 полках. **359.** а) $p \in (-\infty; 2\frac{1}{8})$; б) $p \in (1{,}1; +\infty)$; в) $p \in (-\frac{5}{12}; +\infty)$; г) $p \in (-\infty; 2)$. **363.** 1225. **364.** в) –4 и 0,(3). **365.** а) $(3a + 2)(5a + 1)$; б) $(3 - b)(3b + 2)$; в) $(2k - 1)(2k + 1)(k - 2)(k + 2)$; г) $(t - 1)(t + 1)(1 - 3t)(1 + 3t)$. **366.** а) $-\frac{b + 10}{b + 9}$; б) $-\frac{a + 5}{a + 2}$; в) $\frac{c^2 - 1}{c^2 - 2}$; г) $\frac{n^2 + 1}{n^2 - 9}$. **367.** а) ±8; ±5; б) ±3; в) 1; $1 + \sqrt{2}$; г) ±5; –1. **368.** а) 2; 4,5; 5,5; 8; б) $-3\frac{1}{3}$; $-4\frac{2}{3}$; в) 5; 6,5; 7,5; 9; г) –10; –6. **369.** а) Один; б) нет корней;

в) два; г) два. **370.** а) –6; 2; б) –2; 1; 2; 4; в) –9; 1; г) –4; 2; 4; 8. **371.** а) ±3; 0,5; б) ±4; –3; в) ±4; $1 \pm \sqrt{17}$; г) –5; $2 \pm 2\sqrt{6}$. **372.** а) 2; 3; 4; б) 2; 3; 5; 6; в) 2; 3; г) $\frac{9 \pm \sqrt{5}}{2}$. **373.** Существует: а) $n = 10$; б) $n = 7$. **374.** 16. **375.** 900 см^2. **376.** а) –2; б) 0; 1; в) $-1\frac{1}{3}$; 3; г) $-\frac{5}{8}$; 2; д) 2; е) –4. **377.** а) 3 дня и 5 дней; б) 162 детали за 9 дней. **378.** 1А) 1) нет корней; 2) $-\frac{1}{5}$; 5; 2В) $\frac{x-9}{x+8}$; 3В) –8; 4С) 6 и 5 деталей. **380.** а) Если k – любое число, неравное 3; б) при $k = 3$. **381.** а) 1) –2; 2) наименьшего значения нет; б) 1) наибольшего значения нет; 2) 3. **382.** Графику данной функции принадлежат точки A, B, D. **383.** Принадлежат. **384.** $y(1) = -7$, $y(-2) = 18$, $y(3) = -20\frac{1}{3}$. **385.** а) –2 и 4; б) –3 и 5. **387.** $S(x) = 6x^2$; а) 73,5 дм^2; б) $3\sqrt{2}$ см. **389.** а) При $a > 0$; б) при $a \le 0$. **390.** а) $f(-1) = c$; в) $f(c-1) = c^2$. **391.** а) 1) $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$; 2) $(-2; 2)$. **392.** а) $a = 0,5$, $c = -3$; б) $a = -3$, $c = 0,5$. **393.** 1) а) $E(y) = (-\infty; 4]$; б) возрастает при $x \in (-\infty; 0]$, убывает при $x \in [0; +\infty)$; в) –4 и 4; г) $y \ge 0$ при $x \in [-4; 4]$, $y < 0$ при $x \in (-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$. **394.** Самый старший – Нариман, самая младшая – Жанар. **395.** б) $y = \frac{1}{4}x^2 - 4$; в) $y = -2x^2 + 3$. **396.** а) $(-2; 2)$; б) $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$. **398.** а) ±5; б) $\pm 5\sqrt{5}$; в) –15 и 3; г) –5 и 8. **399.** а) (–4; –11) и (2; 1); б) (–1; –34) и (8; 92). **401.** а) График состоит из двух частей парабол: $y = x^2 - 2$ для $x \in [0; +\infty)$ и $y = -x^2 - 2$ для $x \in (-\infty; 0)$; в) область определения не содержит число 0, поэтому на графике, который состоит из двух частей парабол $y = x^2 - 1$ при $x < 0$ и $y = x^2 + 1$ при $x > 0$, отсутствуют точки (0; –1) и (0; 1), их отмечают незакрашенными кружками; г) $D(y) = (-\infty; 1]$, графиком является часть параболы $y = x^2 - 2$. **402.** а) 6 см, 8 см, 10 см; б) 27 см, 36 см, 45см. **403.** а) $S(r) = 100 - \pi r^2$, $E(S) = [100 - 9\pi; 100)$; б) $S(x) = 25\pi - x^2$, $E(S) = [25\pi - 4; 25\pi)$. **406.** а) 1) $y = 4x^2 + 3$; 2) $y = 4x^2 - 4$; б) 1) $y = 4(x-2)^2$; 2) $y = 4(x+5)^2$. **408.** Произведение средних членов последовательности больше произведения ее крайних членов. **410.** а) $y = -\frac{3}{4}(x+4)^2$; б) $y = \frac{5}{4}(x-2)^2$. **412.** б) 1) (–2; 0); 2) $x = -2$; 3) (–1; –1) и (–3; –1); 4) (0; –4) и (–4; –4). **413.** а) $-\frac{1}{6}$;

б) $\frac{5}{121}$. **414.** а) (–14; 49) и (0; 49); б) (–2; 8). **416.** а) 4,25 м; б) не может. **417.** а) ±3; б) 5; в) –5 и –3; г) $-\frac{1}{2}$ и 0. **418.** При $m = 1$, (1; 0) и (3; 4). **419.** а) [0; 4]; б) [–4; –2]; в) $(-\infty; -4] \cup [0; +\infty)$; г) $(-\infty; 1] \cup [5; +\infty)$. **420.** а) $y = -3x^2 + 5x - 4$; б) $y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2$. **421.** $f(p) = 100(1 + \frac{p}{100})^2 - 100$. Прибыль равна 16640 тенге. **422.** а) ≈ 51 м; б) ≈ 36 м. **423.** Учитывая, что число $\overline{PAK}$ делится на 37, можно записать: $100P + \overline{AK} = 37 \cdot n$. Выразите из этого равенства число $\overline{AK}$ и используйте его в разложении числа $\overline{AKP} = 10\overline{AK} + P$. **426.** б) и г). **428.** а) $p = -14$, $q = 57$; б) $p = -4$, $q = 1$; в) $p = 8$, $q = 21$; г) $p = 4$, $q = 0$. **430.** а) ≈ 1,4 м; б) 0,6 м и 1,1 м. **435.** а) 2017; б) 26. **436.** $\frac{d^2 - c^2}{2}$. **437.** а) Графиком является часть параболы, ограниченная точками $(1; 7\frac{3}{4})$ и (6; 4); б) график – часть параболы с концами в точках (–6; 3) и (–2; –5), причем точка (–6; 3) графику не принадлежит. **440.** а) [–4; 0]; б) [2; 6]; в) $(-\infty; 0] \cup [6; +\infty)$; г) $(-\infty; -2] \cup [0; +\infty)$. **441.** $y = -(x-1)^2 + 3$. **442.** Выделив в выражении $a^2 + a + 4$ квадрат двучлена, установите, что $a^2 + a + 4 > 0$ при любых значениях a. **443.** Является. **444.** а) $a - 1$; б) $b - 1$. **447.** а) $[-4; +\infty)$; б) $(-\infty; 2\frac{1}{4}]$; в) $[2; +\infty)$; г) $(-\infty; 35]$. **448.** а) $(\frac{1}{3}; -4)$, (0; –3), $(-\frac{1}{3}; 0)$, (1; 0); б) $(1\frac{1}{2}; 16)$, (0; 7), $(-\frac{1}{2}; 0)$, $(3\frac{1}{2}; 0)$; в) $(\frac{1}{4}; \frac{1}{72})$, $(0; -\frac{1}{9})$, $(\frac{1}{6}; 0)$, $(\frac{1}{3}; 0)$; г) $(\frac{1}{16}; -\frac{9}{32})$, $(0; -\frac{1}{4})$, $(-\frac{1}{8}; 0)$, $(\frac{1}{4}; 0)$. **450.** а) –31; б) 10. **451.** а) $y = x^2 - 8x + 12$; б) $y = -\frac{1}{4}x^2 - x + 3$. **452.** а) 11 дм, 22 дм или 16 дм, 32 дм; б) 11 дм, 33 дм. **453.** б) и г) – проходит. **454.** а) $y = 0{,}5x^2 - 2x + 1$; б) $y = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}x + 3$. **455.** $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2\frac{1}{2}$. **457.** а) $y_{\text{наим.}} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{8} \approx 0{,}82$, наибольшего значения функция не имеет; б) $y_{\text{наиб.}} = \frac{\sqrt{3}}{3} + 3 \approx 3{,}58$, наименьшего значения функция не имеет; в) $y_{\text{наим.}} = -1 - \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx -2{,}15$, наибольшего значения функция не имеет; г) $y_{\text{наиб.}} = \frac{9\sqrt{2}}{4} + 4 \approx 7{,}18$, наименьшего значения функция не имеет. **458.** Постройте график каждой функции. а) $y_{наим.} = y(1) = -9$, $y_{наиб.} = y(-3) = y(5) = 7$; б) $y_{наим.} = y(-3) = 0$, $y_{наиб.} = y(0) = 15$; в) $y_{наим.} = y(\frac{1}{2}) = -4$, $y_{наиб.} = y(1) = -3$; г) $y_{наим.} = y(6) = -8$, $y_{наиб.} = y(3) = 1$. **459.** а) За 6 дней; б) по 15 изделий в день. **460.** а) Вершина параболы $y = 2x^2 - 4x - 6$ точка $(1; -8)$; б) вершина параболы $y = -x^2 - x + 2$ точка $(-\frac{1}{2}; 2\frac{1}{4})$. **461.** 51. **462.** а) $y_{наим.} = y(\frac{5}{2}) = -20\frac{1}{4}$; б) $y_{наиб.} = y(12{,}5) = 6{,}25$. **464.** Зная корни, разложите квадратный трехчлен $x^2 + px + q$ на множители. а) 4040000; б) –4029. **465.** а) 2288; б) –12. Используйте разложение на множители квадратного трехчлена $4x^2 + bx + c = 4(x - 10)(x - 14)$. **466.** ≈ 5,04 %. **467.** При $k = 6$. **469**. При любом k, кроме –4 и –2,5. **470.** Используя данное соотношение и теорему Виета, найдите k: а) $k = 5$; б) $k = \pm 4$. **471.** Учитывая область определения данных функций, на их графиках будут отсутствовать точки: а) $(-1; 2)$; б) $(2; -1)$. **472.** а) ≈ –3,5; –1; ≈ 0,6; б) 1; ≈ 6,2; в) $\pm\frac{1}{2}$; ±1. **473.** а) 2,5 тонны; б) 8 дней. **474.** а) 1; б) 2. **476.** а) 1009 + + 1009; б) $\frac{l}{2} + \frac{l}{2}$. **477.** а) 4 см, 4 см; б) 0,3 м, 0,3 м. **478.** а) Достаточно; б) нет. **479.** 1250 м^2. **480.** ≈ 0,64. **481.** 2 см. Используйте теорему Пифагора. **482.** 20. **483**. а) Через ≈ 1,6 с и ≈ 6,6 с; б) ≈ 4,1 с. **484.** а) Может; б) нет. **485.** Через 1,4 минуты. Используя теорему Пифагора, выразите квадрат расстояния между телами и исследуйте полученную функцию на наименьшее значение. **486.** Наибольшая площадь равна $28\frac{1}{8}$ см^2. **487.** 5 дм и 5 дм. **488.** а) Существует; б) нет. **489.** При $p = 3$. Используйте теорему Виета. **490.** 6,5 и 6,5. **491.** Введите замену и используйте формулу разложения квадратного трехчлена на множители. а) $(9^m - 2)(9^m + 1)$; б) $(4 \cdot 25^n - 1)(25^n + 3)$. **492.** 2,25. **493.** При $k = 2$ или $k = 6$. **494.** Существует: а) $-\frac{1}{15}$ и 3; б) $-\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{2}$. **495.** а) $a = 1$, $m = -1$, $n = -4$; б) $a = -1$, $m = -2$, $n = 9$. **496.** г) На графике нет точки $(0; 4)$. **499.** В 2 раза. **500.** $y = x^2 - 2x + 3$. **502.** а) –3; б) –8; в) $a = -3$, $b = 6$, $c = 0$. **504.** Две точки при $n \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$; три точки при $n = 1$ или $n = 2$; четыре точки при $n \in (1; 2)$. **505.** Через 3 и 7 секунд. **506.** 1А) 2) и 4);

2В) $x = -3{,}5$; 3В) убывает при $x \in (-\infty; \frac{1}{4}]$, возрастает при $x \in [\frac{1}{4}; +\infty)$; 4В) $y > 0$ при $x \in (-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$, $y < 0$ при $x \in (2; 4)$; 5С) 5 м и 5 м. **509.** 3,5. **510.** ≈ 22 ученика. **511.** ≈ 35,8 млн тенге. **512.** ≈ 36 лет. **513.** 67 %. **514.** ≈ 131,86 млн дол. **517.** б) 40; в) 48; 50; 49,2. **519.** ≈ 0,58; ≈ 0,76. **520.** а) ≈ 7; б) ≈ 2,6 мм рт. ст. **521.** а) 1 м^3; б) ≈ 0,12 м^3. **522.** а) ≈ 11 лет; б) ≈ 7 лет. **523.** ≈ 0,09. **524.** ≈ 1. **525.** В банке без рекламы стандартное отклонение больше. **526.** ≈ 1,3 см. **527.** ≈ 846,6 м. **528.** а) 6; б) 120 млрд тенге. **529.** б) 2. **532.** ≈ 13 ц/га. **533.** 16 грамм. **534.** ≈ 334 детали за смену. **535.** а) ≈ 23; б) ≈ 1. **537.** а) ≈ 42 года; б) ≈ 464; в) ≈ 22 года. **538.** ≈ 2 сотни тыс. чел. **539.** 828 метров. **540.** 2А) 4; 5С) ≈ 6 минут. **543.** а) При $a \neq 1$; б) $a \neq 0$; в) $a \neq \pm 2$; г) $a \in R$. **545.** а), б), в) – нет; г) равносильны. **548.** а) 1) Нет решений; 2) $(-\infty; +\infty)$; б) 1) $(-4; 0)$; 2) $(-\infty; -4] \cup [0; +\infty)$. **549.** а) $(-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$; б) $(-4; -2)$; в) $(-\infty; -5] \cup [3; +\infty)$; г) $[-1{,}2; -1]$; д) $(-\infty; \frac{2}{3}) \cup (\frac{2}{3}; +\infty)$; е) 1,5. **550.** За 14 дней. Обозначьте производительность труда первого рабочего через x. Тогда, зная их общую производительность, найдете производительность труда второго рабочего: $\frac{4}{35} - x$. Приняв объем работы за 1 и зная, сколько дней работал каждый рабочий, составьте и решите уравнение. **551.** а) $(-\infty; -\frac{2}{3}) \cup (\frac{2}{3}; +\infty)$; б) $(-\infty; 0) \cup (3{,}5; +\infty)$; в) $(-4; \frac{1}{2})$; г) $(-\infty; 10) \cup (20; +\infty)$; д) нет решений; е) $(-\infty; +\infty)$. **552.** а) $(-5; 5)$; б) $[-10; 10]$; в) $(-\infty; -\sqrt{10}) \cup (\sqrt{10}; +\infty)$; г) $(-\infty; -\sqrt{26}] \cup [\sqrt{26}; +\infty)$; д) $[0; 1{,}5]$; е) $(-\infty; -3{,}5) \cup (0; +\infty)$; ж) $(-\infty; +\infty)$; з) $(-\infty; +\infty)$; и) нет решений. **554.** а) Не существует. **556.** а) $(-\infty; 1{,}5) \cup (2; +\infty)$; б) $(-\infty; +\infty)$. **557.** а) $(-\infty; +\infty)$; б) 0; в) $(-\infty; +\infty)$; г) $[0{,}4; 1]$. **558.** а) $(7; +\infty)$; б) $(6; +\infty)$. **559.** а) 6; б) 13. **560.** 10 км/ч. **561.** а) $[2; 4]$; б) $(-\infty; -2) \cup (4; +\infty)$. **562.** 50 млрд тонн. **563.** а) $[-1; 4{,}5]$; б) $[-7; -\frac{1}{4}]$; в) $(-\infty; 0] \cup [1\frac{3}{11}; +\infty)$; г) $(-\infty; -6] \cup [0; +\infty)$. **564.** а) $(-\infty; -1]$; б) $(-\infty; -1{,}5]$. **565.** а) $(-5; 6)$; б) $(-\infty; -5) \cup (-5; +\infty)$. **566.** а), б), в) – верно; г) неверно. **568.** 83. **569.** а) $(-6; 2)$; б) $(-2; 4)$. **570.** а) $(-\infty; 1 - \sqrt{1-p}) \cup (1 + \sqrt{1-p}; +\infty)$ при $p < 1$; $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$ при $p = 1$; $(-\infty; +\infty)$; при $p > 1$; б) $\left(\frac{-p-\sqrt{p^2-64}}{4}; \frac{-p+\sqrt{p^2-64}}{4}\right)$

при $p\in(-\infty;\ -8)\cup(8;\ +\infty)$; нет решений при $p\in[-8;\ 8]$. **571.** а) $(-1;\ 1)$; б) $(-\infty;\ 0)\cup(1;\ +\infty)$; в) нет решений; г) $(-\infty;\ +\infty)$. **572.** а) $(-1;\ 4)$; б) $[1;\ 2]$; в) $(-\infty;\ -8)\cup(3;\ +\infty)$; г) $\frac{1}{4}$. **573.** а) $(-4;\ -1)\cup(3;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ -3)\cup(5;\ 7)$; в) $(-\infty;\ -9)\cup(8;\ 10)$; г) $(-12;\ 6)\cup(11;\ +\infty)$. **574.** а) $(-\infty;\ -13]\cup[13;\ +\infty)$; б) $[-15;\ 15]$; в) $[-3\frac{2}{3};\ 3\frac{2}{3}]$; г) $[-7;\ 9]$. **575.** а) $(-\infty;\ -3]\cup[1;\ 2]$; б) $[-3;\ -2]\cup[2;\ 3]$; в) $[-3;\ 0{,}5]\cup[1;\ 2]$; г) $[-5;\ -4]\cup[1;\ +\infty)\cup\{-2\}$. **576.** 1,5 часа. **577.** а) $-2;\ -1;\ 0;\ 1$; б) 0. **578.** а) $(-\infty;\ 1]\cup[1{,}2;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ -4{,}5]\cup[2;\ +\infty)$; в) $[3;\ +\infty)$; г) $(-\infty;\ -2]$. **579.** а) $(-\infty;\ -2]\cup[0;\ 2]$; б) $(-\infty;\ -\frac{1}{3}]\cup\{0\}\cup[\frac{1}{3};\ +\infty)$; в) $(-\infty;\ -9]\cup\{0\}$; г) $[-5;\ 0]\cup[5;\ +\infty)$; д) $[2;\ 3]\cup\{0\}$; е) $[-2;\ -1]\cup\{0\}$. **580.** а) $(4;\ +\infty)$; б) $[-2;\ +\infty)$; в) $[2;\ +\infty)\cup\{-1\}$; г) $(-\infty;\ -2]\cup\{4\}$. **581.** а) $[-4;\ 4]$; б) $(-\infty;\ -2)\cup(2;\ +\infty)$; в) $[-5;\ 5]\cup\{-6\}$; г) $[-1;\ 1]\cup\{4\}$; д) $(-3;\ -2)\cup(2;\ 3)$; е) $(-\infty;\ -1]\cup[1;\ +\infty)$. **582.** За 9 часов. **583.** а) – равносильны; б) в), г) – не равносильны. **584.** а) $(-2{,}5;\ 0)$; б) $(-0{,}2;\ 0)$; в) $(0;\ 1)\cup(2;\ +\infty)$; г) $(-\infty;\ -1)\cup(0;\ 3)$. **585.** а) $(-13;\ 12)$; б) $(-\infty;\ -0{,}5)\cup(1{,}2;\ +\infty)$; в) $(1\frac{1}{3};\ 3)$; г) $[2{,}9;\ 3)$. **586.** а) $(-3;\ -2]\cup(0;\ 4]$; б) $(-1;\ 6)$; в) $(-\infty;\ 1)\cup(5;\ +\infty)$; г) $(-\infty;\ 1)\cup[2;\ 3)\cup(4;\ +\infty)$. **587.** а) $[-3;\ -2]\cup(-1;\ 3]$; б) $(-\infty;\ -4)\cup[5;\ +\infty)$; в) $(-\infty;\ -6]\cup(-4;\ 2)\cup\{5\}$; г) $\{-7\}\cup(-5;\ 3)\cup(3;\ 4]$. **588.** 12 граммов. **589.** а) $(4;\ +\infty)\cup\{3\}$; б) $(-\infty;\ -1)\cup(2;\ 5)$; в) $(-4;\ 1)$; г) $(-5;\ 3)$. **590.** а) $[-2;\ 1]\cup(3;\ +\infty)$; б) $(-4;\ -3]\cup(0;\ 2]$; в) $(-\infty;\ -4)\cup(-3;\ 3)\cup[5;\ +\infty)$; г) $(-2;\ -1]\cup[0;\ 1)$. **591.** а) $(-1;\ 0)\cup(0{,}5;\ 1)$; б) $(-\infty;\ -3)\cup(-2;\ -1)\cup(1;\ +\infty)$; в) $(-\infty;\ -2)\cup[-1\frac{1}{4};\ -1)\cup(1;\ 5]$; г) $(-4;\ -3)\cup[-2{,}5;\ -2)\cup(-1;\ 0)$. **592.** а) $[-1;\ 3)\cup[4;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ -2)\cup(2;\ +\infty)$; в) $[-4;\ -1]$; г) $[-7;\ 1)$. **593.** а) $(-3;\ 3)\cup(3;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ -4)\cup(-4;\ -2]\cup[2;\ 4]$; в) $[-2;\ 2)\cup(2;\ +\infty)$; г) $(-\infty;\ -3)\cup(-1;\ 1)\cup(3;\ +\infty)$. **594.** а) $(-\infty;\ 1-\sqrt{1-k})\cup(1+\sqrt{1-k};\ +\infty)$ при $k<1$; $(-\infty;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$ при $k=1$; $(-\infty;\ +\infty)$ при $k>1$; б) $\left(\frac{-k-\sqrt{k^2-24}}{4};\ \frac{-k+\sqrt{k^2-24}}{4}\right)$ при $k\in(-\infty;\ -2\sqrt{6})\cup(2\sqrt{6};\ +\infty)$; нет решений при $k\in[-2\sqrt{6};\ 2\sqrt{6}]$; в) нет решений при $k\in(-\infty;\ -\frac{1}{4}]$; $\left(\frac{1-\sqrt{1+4k}}{2k};\ \frac{1+\sqrt{1+4k}}{2k}\right)$ при $k\in(-\frac{1}{4};\ 0)$; $(-\infty;\ -1)$ при $k=0$; $(-\infty;\ \frac{1-\sqrt{1+4k}}{2k})\cup(\frac{1+\sqrt{1+4k}}{2k};\ +\infty)$ при $k\in(0;\ +\infty)$;

г) $(-\infty; +\infty)$ при $k \in (-\infty; -7{,}2)$; $(-\infty; \frac{5}{6}) \cup (\frac{5}{6}; +\infty)$ при $k = -7{,}2$; $\left(-\infty; \frac{-6-\sqrt{36+5k}}{k}\right) \cup \left(\frac{-6+\sqrt{36+5k}}{k}; +\infty\right)$ при $k \in (-7{,}2; 0)$; $(-\infty; \frac{5}{12})$ при $k = 0$; $\left(\frac{-6-\sqrt{36+5k}}{k}; \frac{-6+\sqrt{36+5k}}{k}\right)$ при $k \in (0; +\infty)$. **595.** а) 4 и 2; б) 4, или 5, или 6, или 7, или 8. **596.** а) Пусть сумма квадратов трех первых из пяти последовательных натуральных чисел равна $A(x)$, а сумма квадратов двух остальных чисел равна $B(x)$. Рассмотрите разность $A(x) - B(x)$ и исследуйте ее знаки на разных промежутках. Установите, что при $1 \le x < 10$ $A(x) - B(x) < 0$, при $x = 10$ $A(x) - B(x) = 0$, при $x > 10$ $A(x) - B(x) > 0$. Сделайте соответствующие выводы. б) –3. **597.** а) Больше 4 дм, но не более 8 дм; б) больше 30 м, но не более 110 м. **598.** а) 13 см; б) 5. **599.** а) Не больше, чем через 1,4 часа; б) не более 10 см. **600.** а) 4 и 12 сторон; б) двое или трое друзей. **601.** Не менее 12 кг. **602.** а) Больше 80 км/ч; б) больше 10 км/ч, но не более 40 км/ч. **603.** Не менее 4 км/ч. **604.** а) Не более 10 ч; б) не более 6 деталей. **605.** а) Не менее 45 кг; б) не меньше 200 г. **606.** Не менее 50 %. **607.** в) $(3; 6] \cup [12; +\infty)$; г) нет решений; д) $[0; 3) \cup (3; 6]$; е) $\{5\}$. **608.** а) $[-1; 1]$; б) $[\frac{1}{3}; +\infty)$; в) $\{3\}$; г) $[-1; 2]$. **609.** а) Нет решений; б) $(-1; 2)$; в) $[4; 5)$; г) $(-\infty; \frac{3}{4}]$. **610.** а) $[5; +\infty) \cup \{2\}$; б) $[-1{,}5; 1]$; в) $(-\infty; -2] \cup [2; 3)$; г) нет решений. **611.** а) $[2; 7]$; б) нет решений; в) нет решений; г) $[-\frac{5}{7}; +\infty)$. **612.** 4 м/с, 3 м/с. **613.** а) $(-\infty; -3] \cup \{3\}$; б) $\{-4\}$; в) $(-\infty; 0) \cup (0; 7]$; г) $(-\infty; 0)$. **614.** а) $[-1; 0)$; б) нет решений; в) $[0; 2)$; г) $(-\infty; -2{,}5) \cup [4; +\infty)$. **615.** а) $(-\infty; 3] \cup \{15\}$; б) $(-\infty; -2] \cup [4\frac{1}{3}; 5]$; в) $(-3; 1) \cup (2; 4)$; г) $(1; 2)$. **616.** а) $(-\infty; -5] \cup [5; +\infty)$; б) $(3; 4]$; в) $(1; 5{,}5]$; г) $[0{,}6; 1)$. **617.** а) $(3; +\infty)$; б) $(-\infty; \frac{1}{2}) \cup (1; 3]$; в) $\{2\}$; г) нет решений. **619.** 1,4 дм, 4,8 дм. **620.** а) $(1; 6]$; б) $[1; 4) \cup (9; 10]$. **621.** а) 1; б) 5; в) –2; г) 2. **622.** а) $(-3; -1) \cup (1; 3)$; б) $[-1; 5]$; в) $[-2; 1]$; г) $(0; 1) \cup (6; 7)$. **623.** а) $[2; 3]$; б) $[-3; -2)$; в) $[4; 5)$; г) $\left[-\frac{1}{3}; 0\right) \cup [2; 3]$. **624.** а) $(-4; -\frac{1}{2}] \cup [3; 4)$; б) $(-4; -1]$; в) $(-\infty; -2\sqrt{6}\,] \cup (3; 4{,}25]$; г) $(0; +\infty)$. **625.** а) $y < 0$ при $x \in (-\infty; 2)$, $y > 0$ при

$x \in (2; +\infty)$; б) $y < 0$ при $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, $y > 0$ при $x \in (-1; 1)$. **626.** а) $(-3-\sqrt{2}; -4) \cup [2+\sqrt{2}; 3+\sqrt{2})$; б) $[\sqrt{2}+\sqrt{3}; \sqrt{5}+1]$. **627.** а) 3,5; б) $-2\frac{6}{7}$. **628.** $\frac{10^{2018}+1}{10^{2019}+1} > \frac{10^{2019}+1}{10^{2020}+1}$. Установите знак разности этих дробей, обозначив 10^{2019} через a, например. **629.** Не менее 36 дм², но не более 80 дм². **630.** Не может. **631.** 11 м. **632.** 4 см или 5 см. **633.** 18. **634.** 35. **635.** $\frac{3}{8}$ или $\frac{4}{15}$. **636.** 6 и 11. **637.** Больше 16 м², но меньше 25 м². **638.** B_1 (8; 3), B_2 (8; 4), B_3 (8; 5), B_4 (8; 6), B_5 (8; 7). **639.** Не менее 18 м/с, но не более 42 м/с. **640.** Не менее 10 га, но не более 13 га в день. **641.** Больше 11 км/ч, но меньше 12 км/ч. **642.** Больше 5 км/ч, но меньше 10 км/ч. **643.** а) Равносильно; б) нет. **644.** а) 2; б) 1. **645.** а) –1; б) –3. **646.** 14. **647.** Например: а) $(-\infty; -1]$; б) $[5; +\infty)$. **648.** а) $(0; 1)$; б) $(-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$. **649.** Не менее 10000, но не более 20000 тенге. **650.** а) $(-\infty; 1{,}6)$; б) $(-\infty; -3{,}5]$; в) $(-\infty; -\frac{1}{2}] \cup \{0\} \cup [\frac{2}{3}; +\infty)$; г) $[-6; -3] \cup \{2\}$. **651.** а) $[-3; 3]$; б) $(-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$; в) $(-\infty; -2] \cup \{0\} \cup [2; +\infty)$; г) $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$. **652.** а) $(-\infty; 0) \cup [3; +\infty)$; б) $(0; 2]$; в) $[-1; 1] \cup [4; +\infty)$; г) $(-\infty; -2] \cup [2; 5]$; д) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; е) $[-1-\sqrt{3}; 0) \cup (0; -1+\sqrt{3}]$. **653.** а) $(2; +\infty)$; б) $(0; 2)$; в) $[3; +\infty) \cup \{0\}$; г) $[-\frac{3}{2}; 0] \cup [\frac{3}{2}; +\infty)$; д) $(-\infty; -3] \cup \{0\}$; е) $(-\infty; 0) \cup (0; 3)$. **654.** $\frac{1}{4}$. **655.** 11 см. **656.** а) $(-4; 4)$; б) $(-\infty; -6] \cup [7; 11) \cup (11; +\infty)$; в) $(-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$; г) $(-5; 6)$. **657.** Права. **658.** а) 7; б) 6; в) 2; г) 4. **659.** 8 и 14 или 9 и 15. **660.** а) $[1; 7]$; б) нет решений; в) $(-\infty; -4) \cup [7; +\infty)$; г) $(-\infty; 0{,}5] \cup [4; 5] \cup [11; +\infty)$. **661.** $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{5}$ или $\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{6}$. **662.** а) $(-0{,}4; 0{,}5] \cup [1; +\infty)$; б) $[-\frac{2}{3}; 0) \cup [\frac{2}{3}; +\infty)$; в) $[3; 4]$; г) $[1; 2\frac{2}{3}]$. **663.** Не менее 8 см, но не более 10 см. **664.** 1A) 1) $(-3; 1)$; 2) $(-\infty; -3] \cup [1; +\infty)$; 2B) $(-\infty; -14] \cup (10; 14]$; 3B) $[-4; -2] \cup \{1\} \cup [3; +\infty)$; 4B) 14 рядов; 5C) $(-\infty; -3] \cup (0; \frac{1}{2})$. **665.** Может, приведите пример. **666.** Неверно, приведите пример. **667.** а) 0,1; б) $\frac{1}{3}$; в) 20,7; г) $-12\sqrt{3}$. **668.** а) 12104; используйте формулу суммы кубов. б) Представьте подкоренное выражение в виде квадрата двучлена. Или обозначьте выражение через x и возведите в квадрат обе части полученного равенства. Далее найдите x, учитывая его знак по условию. **669.** а) $\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$; б) $\pm\frac{9\sqrt{10}}{5}$. **670.** а) 0; б) 1. **671.** $\sqrt{5}$. **672.** а) ±18; б) ±5; в) $\pm2\sqrt{15}$; г) ±2. **673.** а) $\frac{2}{3}$; 1; б) 0; $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $1\frac{1}{6}$. **674.** в) $(3x + 2)(2x - 1)$; г) $(2 - x)(5x + 1)$. **675.** а) $x + 2$; б) $2 - x$; в) $\frac{x-4}{x-7}$; г) $\frac{5}{x(x+2)}$. **676.** а) 3; б) 1,8. **677.** а) 5; б) 3. **678.** а) –7 и –3; б) 2 и 3; в) –4 и 2; г) 1; $-2 \pm \sqrt{3}$. **679.** $\sqrt{10}$ см. **680.** В 1000 раз. **681.** а) $y = x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$; б) $y = x^2 - \frac{1+\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{4}$. **682.** $y = x^2 - 2x - 3$. **683.** а) $3\sqrt{2}$; б) 1. **684.** а) $[-4; +\infty)$; б) $(-\infty; 7]$. **685.** а) $(-\infty; 1)\cup(5; +\infty)$; б) $[1; 5]$; в) $(-\infty; 3]$; г) $[3; +\infty)$. **686.** а) –2; –1; 3; б) 0; 5. **687.** а) $y = x^2 - 8x + 15$; б) $y = -x^2 - 8x - 15$. **688.** 1. **689.** 150 см^2. **691.** а) $(-\infty; -2]\cup[\frac{3}{2}; +\infty)$; б) $[-\frac{5}{4}; 1]$; в) $(-\infty; 0)\cup(0; 4)$; г) $(-\infty; -5)\cup(0; 5)$. **692.** а) $(-13; 7]\cup(13; +\infty)$; б) $(-\infty; -12)$; в) $[1; 2)$; г) $[-6; 5)$. **693.** Не меньше, чем на 44 %. **694.** Больше 2 дм, но меньше $2\frac{2}{3}$ дм. **695.** а) $(-\sqrt{5}; -\sqrt{3})\cup(\sqrt{3}; \sqrt{5})$; б) $(-7; -4-2\sqrt{2})\cup(-4+2\sqrt{2}; -1)$. **696.** $m(1 + \sqrt{2})$. **697.** 1A) Нет корней; 2A) $9\sqrt{3}$; 3B) $y = 0$ при $x = 2$ и при $x = 4$; $y > 0$ при $x\in(-\infty; 2)\cup(4; +\infty)$; $y < 0$ при $x\in(2; 4)$; 4B) 4 км/ч; 5C) $b\in(-\infty; -4)$.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Алгебра

Элементы статистики

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица квадратов натуральных чисел от 10 до 99

Единицы/ десятки	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Глейзер Г. И. История математики в школе: 4–6 классы. – М.: Просвещение, 1981.
2. Мордкович А. Г. Алгебра, 8 класс. Учебник для общеобразовательных учреждений. – М.: Мнемозина, 2001.
3. Перельман Я. И. Живая математика. Математические рассказы и головоломки. – М.: ООО «Астрель», 2007.
4. Сергеев И. Н., Олехник С. Н., Гашков С. Б. Примени математику. – М.: Наука, 1990.
5. Энциклопедический словарь юного математика / Сост. А. П. Савин. – М.: Педагогика, 1985.

Список фотоснимков, использованных в иллюстрациях на шмуцтитулах

1. Большое Алматинское озеро – 15 стр.
2. Каньон Чарын – 60 стр.
3. Меловые горы Актау – 105 стр.
4. Табун лошадей – 140 стр.
5. Каньон Аксу – 159 стр.

СОЛТАН Геннадий Николаевич
СОЛТАН Алла Евгеньевна
ЖУМАДИЛОВА Аманбала Жумадиловна

Алгебра

УЧЕБНИК
для учащихся 8 класса
общеобразовательной школы
+ CD

Редактор	С. Ш. Алибеков
Художник	А. Б. Жусупов
Технический редактор	Е. Б. Муташев
Дизайн	Н. В. Лузгарёва
	Б. К. Еслямов
Дизайн обложки	Е. Е. Велькер
Корректоры	Е. В. Вентлянд
	С. В. Юрченко
	М. О. Джусупова

Подписано в печать 01.06.2018 г.
Формат 70×100 $^{1}/_{16}$. Объем 17,55 усл. печ. л.
Гарнитура «Times New Roman». Офсетная печать.
Заказ № 578-1. Тираж 20 000 экз.

Код **6**13014

ТОО «Келешек-2030»
Республика Казахстан,
020000, г. Кокшетау.
Офис издательства: ул. Абая, 112а,
тел.: 8 (7162) 72-29-43 (приемная),
+7 708 444 18 64, 8 (7162) 44-18-64,
моб. тел.: +7 702 781 06 78, +7 705 745 09 75.
http://www.keleshek-2030.kz, E-mail: torg@keleshek-2030.kz

Отпечатано с электронных носителей издательства.
ОАО «Тверской полиграфический комбинат». 170024, г. Тверь, пр-т Ленина, 5.
Телефон: (4822) 44-52-03, 44-50-34, телефон/факс: (4822) 44-42-15.
Home page - www.tverpk.ru, Электронная почта (E-mail) - sales@tverpk.ru