А.Н. ШЫНЫБЕКОВ, Д.А. ШЫНЫБЕКОВ, Р.Н. ЖУМАБАЕВ

ГЕОМЕТРИЯ

Учебник для 8 класса
общеобразовательной школы

8

Рекомендовано Министерством образования и науки
Республики Казахстан

Алматы «Атамұра» 2018

УДК 373.167.1
ББК 22.151 я 72
Ш 97

Учебник подготовлен в соответствии с Типовой учебной программой обновленного содержания по предмету «Геометрия» для 8 класса уровня основного среднего образования, утвержденной Министерством образования и науки РК.

Под редакцией М. Отелбаева – доктора физико-математических наук, профессора, академика НАН Республики Казахстан.

Условные обозначения

- Вопросы по основным материалам темы
- Практические и творческие работы
- Материалы из истории

A Задачи первого уровня сложности
B Задачи второго уровня сложности
C Задачи третьего уровня сложности
✻ Задачи повышенной трудности
▲ Начало решения (доказательства) задачи
■ Конец решения (доказательства) задачи

Шыныбеков А. и др.
Ш 97 Геометрия: Учебник для 8 кл. общеобразоват. шк. / А. Шыныбеков, Д. Шыныбеков, Р. Жумабаев – Алматы: Атамұра, 2018. – 112 с.

ISBN 978-601-331-161-6

УДК 373.167.1
ББК 22.151 я 72

ISBN 978-601-331-161-6

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данный учебник предназначен для 8-х классов общеобразовательных школ. Он имеет ряд специфических особенностей. Остановимся на некоторых правилах пользования данным учебником.

Задачи, приведенные в учебнике, после каждой темы по степени сложности условно разделены на три группы: **A, B** и **C**. В группах **A** и **B** сосредоточены соответственно задачи легкие и средней сложности, а задачи из группы **C**, в основном, предназначены для учащихся классов с углубленным изучением математики. Тем не менее учащиеся, обладающие математическими способностями, могут самостоятельно изучить эти материалы во внеурочное время.

В учебнике имеются практические задания и задания на развитие творческих способностей, материалы из истории. Они приведены в конце каждой темы.

Решать задачи по геометрии непросто, но интересно. Не всегда удается сразу найти решение. В таком случае не унывайте, проявите терпение и настойчивость. Неустанный поиск, неутомимый труд и высокие стремления, несомненно, принесут вам свои плоды.

Доброго вам пути, ребята!

ПОВТОРЕНИЕ МАТЕРИАЛА ЗА 7 КЛАСС

Изучив материалы данного раздела, мы достигнем следующих целей:

- вспомним и повторим пройденные материалы;
- подготовимся к изучению новых материалов.

Повторим некоторые основные сведения, изученные в 7 классе.

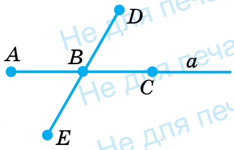


Рис. 0.1

1) Как вы понимаете термин «планиметрия»? Назовите ее основные фигуры, которые принимаются без определения.

2) Что такое отрезок и луч? Запишите все отрезки и лучи, изображенные на рис. 01.

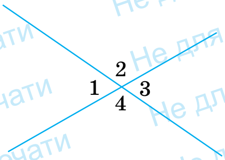


Рис. 0.2

3) Покажите все пары смежных и вертикальных углов на рис. 02. Какова сумма смежных углов и каковы величины вертикальных углов?

4) Какие прямые называются перпендикулярными? Какова градусная мера прямого угла? (Рис. 03.)

5) Покажите все пары: 1) внутренних накрест лежащих углов; 2) внутренних односторонних углов; 3) соответственных углов (рис. 04).

6) Какие прямые называются параллельными? Сколько прямых, параллельных данной прямой, можно провести через заданную точку?

7) По рис. 05 сформулируйте три признака параллельности прямых и запишите их коротко на математическом языке.

Образец.

I признак. *Если при пересечении двух прямых третьей (секущей) внутренние накрест лежащие углы равны, то эти две прямые параллельны.*	$\Rightarrow$	$\angle 3 = \angle 5 \Rightarrow a \parallel b$ или $\angle 4 = \angle 6 \Rightarrow a \parallel b$

Рис. 0.3

Рис. 0.4

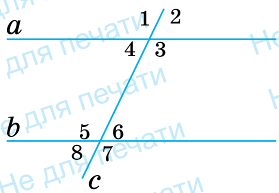


Рис. 0.5

8) Какую фигуру называют треугольником? Сформулируйте его определение. По рис. 06 назовите и укажите все его элементы.

9) Что называется медианой треугольника? (Рис. 0.7.)

10) Что называется биссектрисой угла? (Рис. 0.8.)

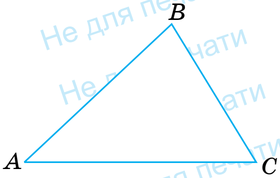


Рис. 0.6

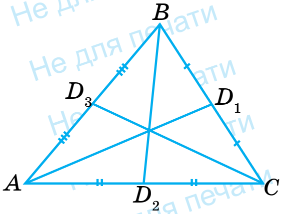


Рис. 0.7

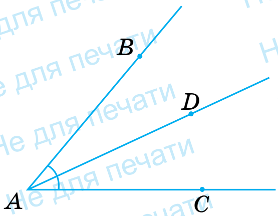


Рис. 0.8

11) Что такое биссектриса треугольника? (Рис. 0.9.)

12) Что такое высота треугольника? (Рис. 0.10.)

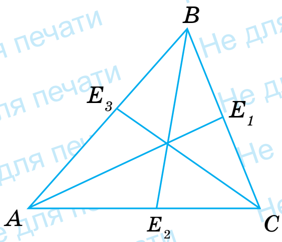


Рис. 0.9

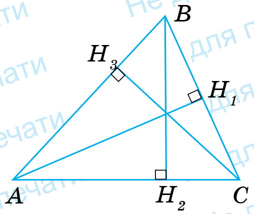


Рис. 0.10

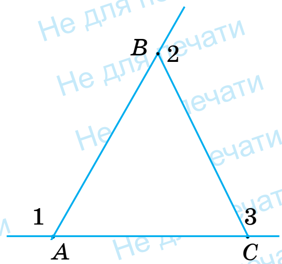


Рис. 0.11

13) Какова сумма внутренних углов треугольника? По рис. 0.11 запишите это коротко на математическом языке.

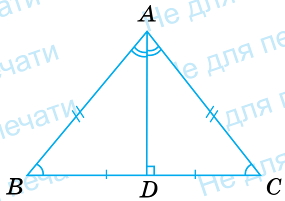


Рис. 0.12

14) Что такое внешний угол треугольника? Покажите их на рис. 0.11. Какова зависимость между внутренним и внешним углами треугольника? Запишите эту зависимость для каждого внешнего угла.

15) Какой треугольник называется равнобедренным? Назовите все элементы треугольника (рис. 0.12).

16) Какой треугольник называется равносторонним? (Рис. 0.13.)

17) Какой треугольник называется прямоугольным? Запишите все элементы треугольника (рис. 0.14).

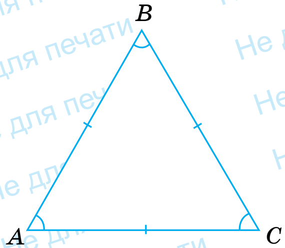


Рис. 0.13

Рис. 0.14

18) Сформулируйте и запишите в краткой форме признаки равенства треугольников, соответствующих рисункам 0.15 – 0.17.

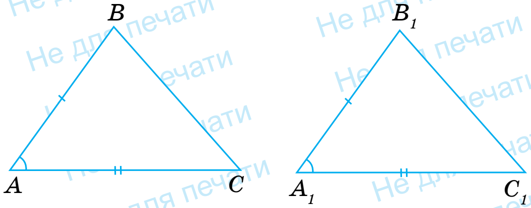


Рис. 0.15

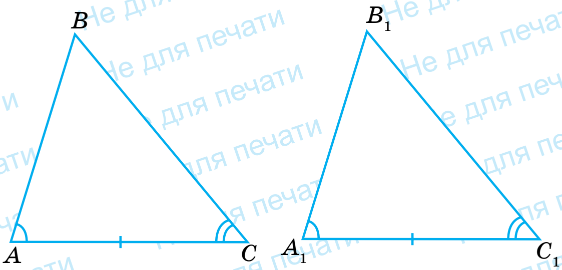


Рис. 0.16

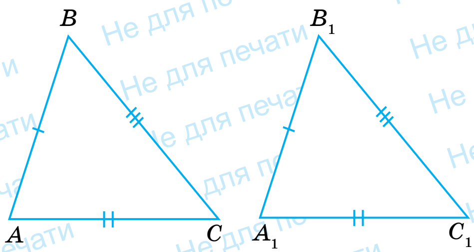


Рис. 0.17

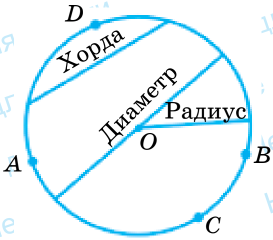


Рис. 0.18

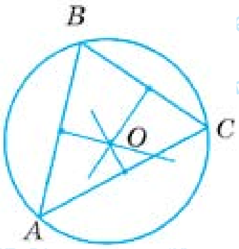


Рис. 0.19

19) Какая фигура называется окружностью? Что такое центр и радиус окружности? (Рис. 0.18.)

20) Что такое хорда?

21) Какая окружность называется описанной около данного треугольника? (Рис. 0.19.)

Рис. 0.20

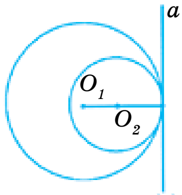


Рис. 0.21

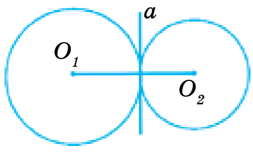


Рис. 0.22

22) Как определяется центр описанной окружности?

23) Какая прямая называется касательной к окружности? (Рис. 0.20.)

24) Какие окружности называются касающимся друг друга внутренним (внешним) образом? (Рис. 0.21, 0.22.)

25) Какая окружность называется вписанной в данный треугольник? (Рис. 0.23.)

26) Как определяется центр вписанной в треугольник окружности?

27) Какой угол называется центральным? Как определяется градусная мера дуги окружности? (Рис. 0.24.)

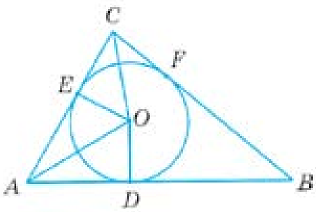


Рис. 0.23

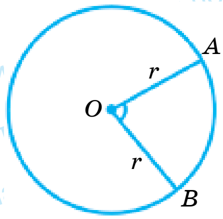


Рис. 0.24

Задачи

A

0.1. Найдите градусную меру смежных углов, один из которых в два раза больше другого.

0.2. Сумма двух углов, которые получаются при пересечении двух прямых, равна $60°$. Найдите градусную меру этих углов.

0.3. На рис. 0.25 пять прямых пересекаются в одной точке. Найдите сумму заштрихованных углов.

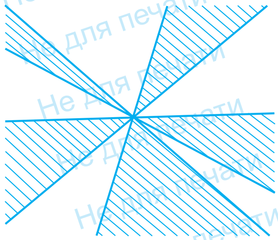


Рис. 0.25

0.4. Найдите градусную меру углов, которые получаются при пересечении двух прямых, если сумма трех из этих углов равна $270°$.

0.5. Найдите угол между биссектрисами смежных углов (рис. 0.26).

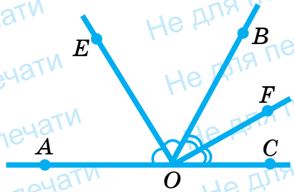


Рис. 0.26

0.6. Основание равнобедренного треугольника равно 10 см, а каждая из боковых сторон – 7 см. Найдите периметр треугольника.

0.7. Периметр равнобедренного треугольника равен 32 см, а боковая сторона – 10 см. Определите его основание.

0.8. Если каждый из двух углов треугольника равен $60°$, то такой треугольник равносторонний. Докажите это.

0.9. Отрезки MN и PQ пересекаются в точке O и делятся этой точкой пополам. Докажите, что $\Delta MOP = \Delta NOQ$ (рис. 0.27).

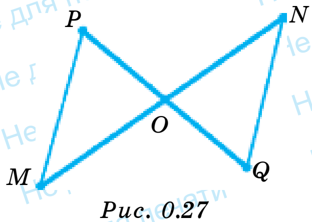


Рис. 0.27

0.10. При пересечении двух параллельных прямых секущей разность внутренних односторонних углов равна 20°. Найдите величину каждого из восьми углов, образованных при пересечении этих прямых.

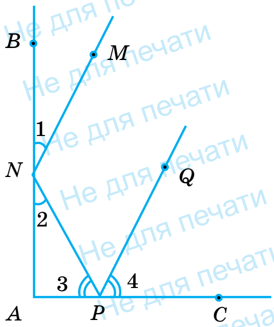


Рис. 0.28

B

0.11. Докажите, что биссектрисы вертикальных углов лежат на одной прямой.

0.12. На рис. 0.28 $\angle BAC = 90^\circ, \angle 1 = \angle 2, \angle 3 = \angle 4$. Докажите, что прямые MN и PQ параллельны.

0.13. Докажите, что для любого треугольника ABC выполняются следующие утверждения:

1) биссектриса угла A с высотой, проведенной из этой вершины, образует угол, равный $\frac{1}{2}(\angle B - \angle C)$;

2) биссектриса внешнего угла B и биссектриса угла C образуют угол, равный $\frac{1}{2}(\angle A)$;

3) биссектрисы углов B и C образуют угол, равный $\frac{1}{2}(\angle A) + 90^\circ$.

0.14. Если α и β – два угла треугольника, то под каким углом пересекаются биссектрисы этих углов?

0.15. Могут ли быть взаимно перпендикулярными биссектрисы двух углов треугольника?

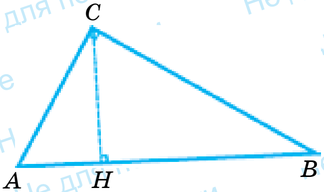


Рис. 0.29

0.16. Острый угол прямоугольного треугольника равен 30°, а его гипотенуза – 32 см. Найдите длины отрезков гипотенузы, на которые ее делит высота, проведенная из вершины прямого угла (рис. 0.29).

0.17. Из точки A к окружности проведены касательные AB и AC, где B и C – точки касания. Докажите, что $AB = AC$.

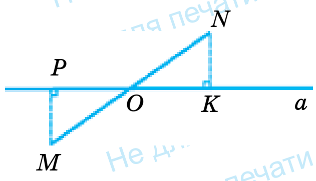


Рис. 0.30

0.18. Периметр равнобедренного треугольника равен 50 см, а его основание в два раза меньше боковой стороны. Найдите стороны треугольника.

0.19. Прямая a проходит через середину отрезка MN. Докажите, что точки M и N находятся на одинаковом расстоянии от прямой a (рис. 0.30).

C

0.20. На рис. 0.31 BD и CE – биссектрисы треугольника, $PQ \| BC$. Докажите, что выполняется равенство $PQ = PB + CQ$.

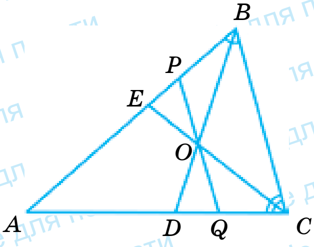


Рис. 0.31

0.21. Прямая, проведенная через вершину равнобедренного треугольника параллельно его основанию, является биссектрисой внешнего угла треугольника при той же вершине. Докажите это.

0.22. Через вершину A треугольника ABC к стороне BC проведены прямые AD и AE. Одна из них образует со стороной AB угол, равный углу C, а другая – со стороной AC угол, равный углу B. Докажите, что треугольник ADE – равнобедренный (рис. 0.32).

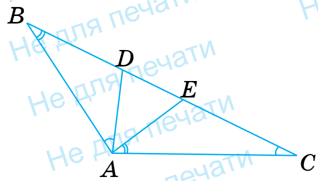


Рис. 0.32

0.23. Найдите сумму внутренних углов фигур (рис. 0.33).

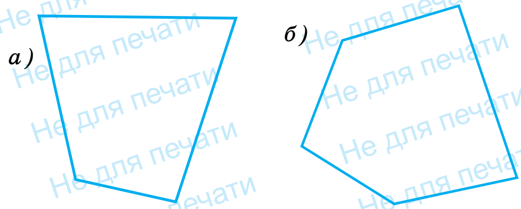


Рис. 0.33

0.24. Найдите углы, под которыми пересекаются прямые, касающиеся окружности в концах хорды, равной радиусу.

0.25. Постройте треугольник, зная его угол, биссектрису и высоту, выходящие из вершины этого угла.

Раздел 1. МНОГОУГОЛЬНИКИ. ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

Изучив материалы данного раздела, мы достигнем следующих целей:

- будем знать определения многоугольника, выпуклого многоугольника, элементов многоугольника;
- будем выводить формулы суммы внутренних углов и суммы внешних углов многоугольника;
- будем знать определение параллелограмма;
- будем знать и применять свойства параллелограмма;
- будем знать и применять признаки параллелограмма;
- будем знать определения прямоугольника, ромба и квадрата, выводить их свойства и признаки;
- будем знать и применять теорему Фалеса;
- будем знать и применять теорему о пропорциональных отрезках;
- будем делить отрезок на n равных частей с помощью циркуля и линейки;
- будем строить пропорциональные отрезки;
- будем знать определение, виды и свойства трапеции;
- будем доказывать и применять свойство средней линии треугольника;
- будем доказывать и применять свойство средней линии трапеции;
- будем знать и применять свойства медиан, биссектрис, высот и серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

1.1. МНОГОУГОЛЬНИК. ВЫПУКЛЫЙ МНОГОУГОЛЬНИК

Понятие многоугольника

Определение. Фигура, полученная последовательным соединением точек плоскости отрезками (при этом имеющие общую точку отрезки не лежат на одной прямой) называется **ломаной**. На рис. 1.1 дана ломаная $ABCDE$. Точки A, B, C, D, E являются вершинами, а отреки AB, BC, CD, DE – звеньями этой ломаной. Если звенья ломаной не имеют точек пересечения, то ее называют **простой ломаной**.

Фигура на рис. 1.2 не является простой ломаной.

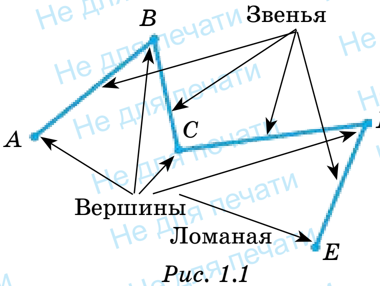


Рис. 1.1

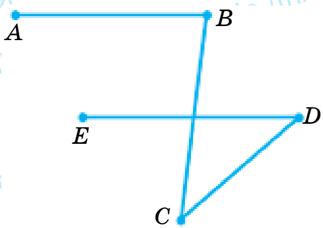


Рис. 1.2

Если концы ломаной (начальная и конечная вершины ломаной) совпадают, то полученная фигура называется **замкнутой ломаной.**

На рис. 1.3 изображена замкнутая ломаная $ABCDEF$.

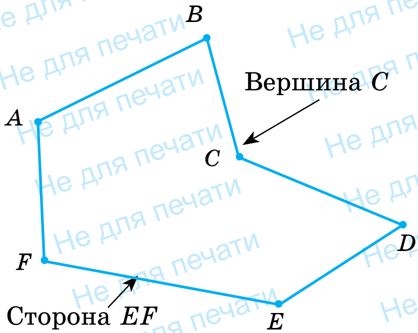


Рис. 1.3

Определение. Часть плоскости, ограниченная простой замкнутой ломаной, называется **многоугольником.**

Если эта ломаная имеет n вершин, то ограниченный ею многоугольник называется ***n*-угольником.** Вершины замкнутой ломаной называются **вершинами** соответствующего многоугольника, а звенья – **сторонами** этого многоугольника. На рис. 1.4 изображен 8-угольник $ABCDEFKN$.

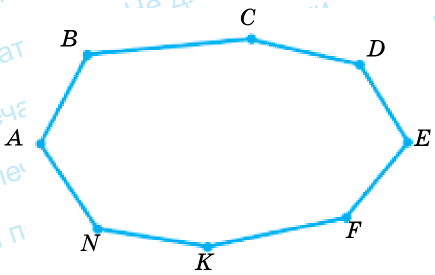


Рис. 1.4

Концы сторон многоугольника называются **соседними вершинами**, а отрезок, соединяющий каждые две несоседние вершины многоугольника, называется **диагональю** многоугольника. На рис. 1.5 проведены все диагонали пятиугольника $ABCDE$ (синим цветом).

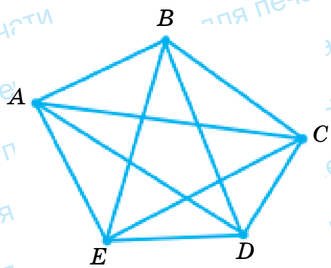


Рис. 1.5

Определение. Сумма длин всех сторон многоугольника называется **периметром** этого многоугольника.

Периметр пятиугольника $ABCDE$ (рис. 1.5) таков:

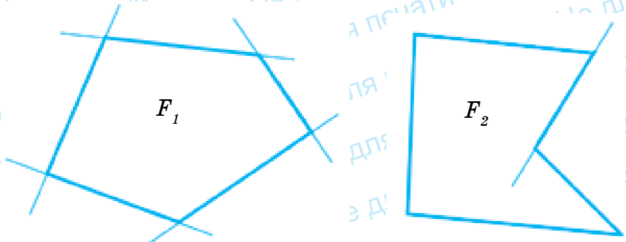
$$P = AB + BC + CD + DE + EA.$$

Выпуклые многоугольники. Четырехугольники

Определение. Многоугольник называется **выпуклым,** если он лежит в одной полуплоскости относительно любой прямой, содержащей любую его сторону.

На рис. 1.6 многоугольник F_1 является выпуклым, а F_2 – невыпуклым.

Угол между сторонами многоугольника, имеющими общую вершину, называется углом многоугольника. Диагонали выпуклого n-уголь-



Выпуклый многоугольник

Невыпуклый многоугольник

Рис. 1.6

ника, проведенные из одной вершины, делят этот многоугольник на $(n-2)$ треугольников. На рис. 1.7 пятиугольник $ABCDE$ разделен на 3 треугольника $(5-2=3)$, а шестиугольник $ABCDEF$ – на 4 треугольника $(6-2=4)$.

Теорема 1. *Сумма углов выпуклого n-угольника равна* $(n-2)\cdot 180°$.

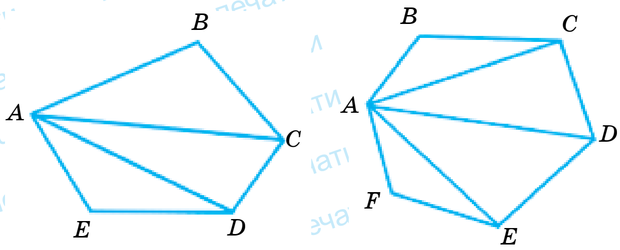


Рис. 1.7

▲ Все диагонали, проведенные из одной вершины n-угольника, делят его на $(n-2)$ треугольников. Т. к. сумма внутренних углов треугольника равна 180°, то сумма внутренних углов n-угольника равна $(n-2)\cdot 180°$. ■

Определение. Многоугольник, имеющий 4 вершины, называется **четырехугольником.**

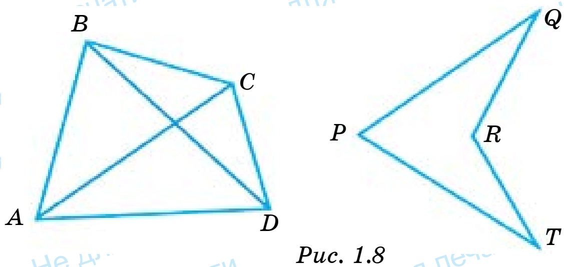


Рис. 1.8

Четырехугольник имеет 4 вершины, 4 стороны и 2 диагонали. Две стороны четырехугольника, не имеющие общих вершин, называются **противоположными сторонами**, а две несоседние вершины – **противоположными вершинами.** На рис. 1.8 $ABCD$ – выпуклый четырехугольник, а $PQRT$ – невыпуклый. **Внешним углом** многоугольника называется угол, смежный с его внутренним углом.

Теорема 2. *Сумма внешних углов выпуклого многоугольника, взятых по одному при каждой вершине, равна* 360° (рис. 1.9).

▲ Сумма внутреннего и внешнего углов при каждой вершине мно гоугольника равна 180°. Т. к. многоугольник имеет n вершин, то сумма всех внутренних и внешних углов равна $n \cdot 180°$, а сумма внутренних углов n-угольника равна $(n-2) \cdot 180°$. Тогда сумма внешних углов многоугольника такова: $n \cdot 180° - (n-2) \cdot 180° = 360°$. ■

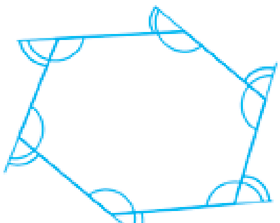


Рис. 1.9

Если в данном многоугольнике все углы равны между собой (1) и все стороны равны между собой (2), то этот многоугольник называется **правильным**. На рис. 1.10 изображены правильные пятиугольник, шестиугольник и восьмиугольник. Квадрат является правильным четырехугольником. Чтобы многоугольник был правильным, выполнение только одного из условий (1 или 2) недостаточно. Необходимо, чтобы были выполнены оба эти условия.

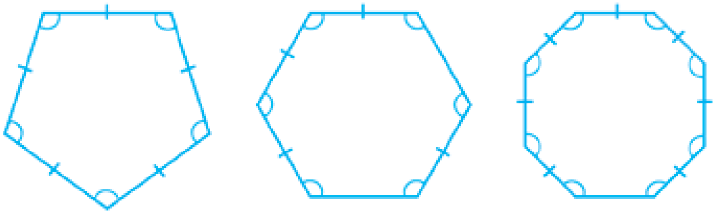


Рис. 1.10

Например, на рис. 1.11 стороны четырехугольника не равны между собой, но углы равны и являются прямыми. А на рис. 1.12 все стороны четырехугольника равны, но углы не равны между собой. Поэтому данные четырехугольники не являются правильными, т.е. они не являются квадратами.

Запомните

Теорема о сумме углов многоугольника выполняется и для невыпуклых многоугольников. Например, на рис. 1.13 сумма углов невыпуклого пятиугольника равна сумме углов трех треугольников, т. е. $3 \cdot 180°$. По формуле при $n = 5$ имеем $(5-2) \cdot 180° = 3 \cdot 180°$.

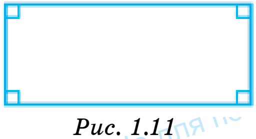


Рис. 1.11

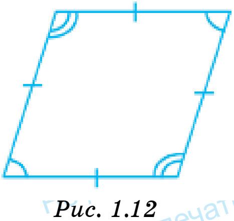


Рис. 1.12

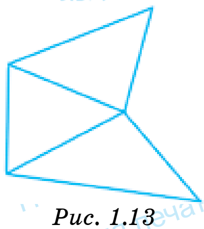


Рис. 1.13

1. Какая фигура называется многоугольником? Назовите его элементы.
2. Чему равна сумма внутренних углов выпуклого многоугольника?
3. Какая фигура называется выпуклым четырехугольником? Назовите и покажите его элементы.
4. Докажите, что сумма внешних углов выпуклого многоугольника равна $360°$.

Практическая работа

1. Постройте выпуклый: 1) пятиугольник; 2) шестиугольник. Укажите их элементы.
2. Постройте произвольный четырехугольник $ABCD$, укажите его противоположные стороны и углы.
3. Постройте четырехугольник $ABCD$, проведите его диагонали. Запишите все треугольники, которые при этом получились.

Замечание. Здесь и далее в процессе построения необходимых фигур на плоскости (в пространстве) можно использовать возможности Geo Gebra (https://www. geogebra.org/?lang=ru).

Задачи

A

1.1. Углы выпуклого четырехугольника равны между собой. Найдите эти углы.

1.2. Найдите углы выпуклого пятиугольника, если они пропорциональны числам 2, 2, 4, 5, 5.

1.3. Чему равна сумма углов выпуклого: а) десятиугольника; б) двенадцатиугольника?

1.4. Сколько сторон имеет многоугольник, если сумма его углов равна: 1) $1080°$; 2) $1620°$; 3) $3960°$; 4) $1800°$?

1) ▲ $(n-2)\cdot 180° = 1080° \Rightarrow (n-2)\cdot 18 = 108 \Rightarrow n - 2 = 6 \Rightarrow n = 8.$ ■

1.5. Сколько сторон имеет многоугольник, если каждый его угол равен: 1) $144°$; 2) $150°$; 3) $170°$; 4) $171°$?

1) ▲ $(n-2)\cdot 180° = n\cdot 144° \Rightarrow 180°\cdot n - 360° = n\cdot 144° \Rightarrow (180° - 144°)n = 360° \Rightarrow 36°n = 360° \Rightarrow n = 10.$ ■

1.6. Существует ли многоугольник, сумма углов которого равна: 1) $9180°$; 2) $3600°$; 3) $2040°$?

1.7. Может ли сумма углов многоугольника равняться сумме нечетного числа прямых углов? Обоснуйте ответ.

1.8. Сколько диагоналей можно провести через вершину выпуклого n-угольника? Решите задачу при:

1) $n = 4$; 2) $n = 5$; 3) $n = 6$; 4) $n = 10$.

B

1.9. Может ли один из углов выпуклого четырехугольника быть больше, чем сумма трех остальных его углов? Обоснуйте ответ.

1.10. Может ли в выпуклом четырехугольнике: 1) меньший угол быть больше, чем 90°; 2) больший угол быть меньше, чем 90°? Обоснуйте ответ.

1.11. Докажите, что не существует многоугольника, у которого: 1) число внешних прямых углов больше четырех; 2) число внешних тупых углов больше трех.

1.12. Как изменится сумма углов многоугольника, если из четырехугольника $ABCD$ «вырезать»: а) треугольник FAE (рис. 1.14); б) четырехугольник $ABKE$ (рис. 1.15)?

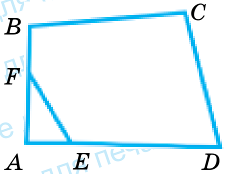


Рис. 1.14

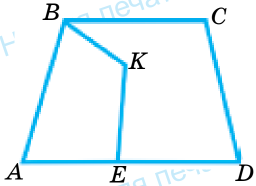


Рис. 1.15

1.13. 1) Сколько углов имеет многоугольник, у которого сумма всех внутренних углов равна сумме всех внешних его углов? 2) Сколько вершин имеет многоугольник, если все его внешние углы тупые?

1.14. Может ли выпуклый четырехугольник иметь: 1) три тупых угла; 2) два тупых и два прямых угла? Обоснуйте ответ.

1.15. Как найти точку O, которая находится на одинаковом расстоянии от вершин M и N выпуклого четырехугольника $MNKP$ и на одинаковом расстоянии от вершин K и P? Можно ли найти несколько таких точек?

C

1.16. Сколько острых углов может иметь выпуклый n-угольник? Обоснуйте ответ.

1.17. Сколько диагоналей имеет выпуклый n-угольник?

1.18. Диагональ AC делит углы A и C четырехугольника $ABCD$ пополам. Какой вывод можно сделать о сторонах этого четырехугольника?

1.19. На сколько больше число диагоналей у выпуклого $(n + 1)$-угольника, чем у n-угольника.

1.20. При каких значениях n число диагоналей выпуклого n-угольника равно n?

1.21. Верна ли следующая теорема: «Если стороны одного четырехугольника равны соответственно сторонам другого четырехугольника, то такие четырехугольники равны между собой»?

1.22. Найдите сумму всех отмеченных острых углов пятиугольной звезды (рис. 1.16).

1.23. Попробуйте доказать по-другому теорему о сумме углов выпуклого многоугольника.

1.24. Пусть $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$ $\angle A = 26°$. Найдите остальные углы четырехугольника $ABCD$.

1.25. На рис. 1.17 $MN \parallel PQ$. Докажите, что $\angle ABC = \angle NAB + \angle BCQ$.

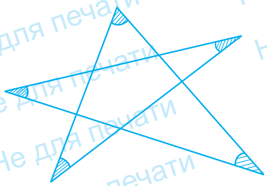


Рис. 1.16

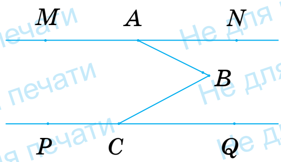


Рис. 1.17

1.2. ПАРАЛЛЕЛОГРАММ И ЕГО СВОЙСТВА

Свойства параллелограмма

Определение. **Параллелограммом** называется четырехугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны.

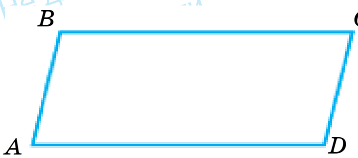


Рис. 1.18

$AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$. Параллелограмм – выпуклый четырехугольник. (Рис. 1.18.) Объединитесь в группы и докажите выпуклость параллелограмма.

Теорема 1. *У параллелограмма противоположные стороны и противоположные углы равны.*

ABCD – параллелограмм (рис. 1.19) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} AB = CD, AD = BC, \\ \angle A = \angle C, \angle B = \angle D. \end{cases}$$

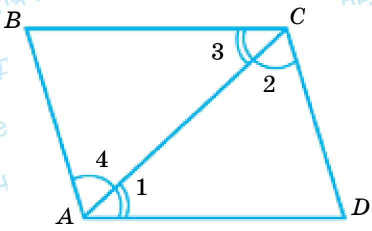


Рис. 1.19

▲ *ABCD* – параллелограмм, *AC* – его диагональ. $AB \parallel CD \Rightarrow \angle 2 = \angle 4$, $AD \parallel BC \Rightarrow \angle 1 = \angle 3$ (как накрест лежащие углы), $\Delta ABC = \Delta CDA$ (по стороне и двум прилежащим углам) $\Rightarrow$ $\Rightarrow \angle A = \angle 1 + \angle 4 = \angle 3 + \angle 2 = \angle C$, $\angle B = \angle D$, $AB = CD$, $AD = BC$. ■

Теорема 2. *Диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам.*

В параллелограмме *ABCD AC* и *BD* – диагонали, пересекающиеся в точке *O*, $\Rightarrow AO = OC$, $BO = OD$ (рис. 1.20).

▲ *ABCD* – параллелограмм, $AC \cap BD = O$. Т.к. $AD \parallel BC$, то $\angle 3 = \angle 2$, $\angle 1 = \angle 4$ (как накрест лежащие углы), и т.к. $AD = BC$, то $\triangle AOD = \triangle COB$. Следовательно, $AO = OC$, $BO = OD$. ■

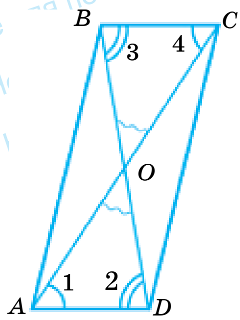


Рис. 1.20

Признаки параллелограмма

Признак 1. *Если у четырехугольника две противоположные стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник является параллелограммом.*

В четырехугольнике *ABCD* $AB = CD$, $AB \parallel CD \Rightarrow$ $\Rightarrow ABCD$ – параллелограмм (рис. 1.21).

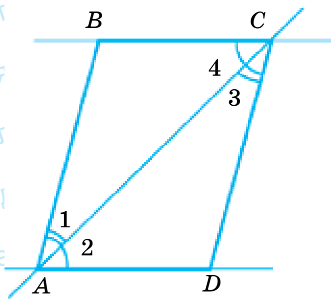


Рис. 1.21

▲ В четырехугольнике *ABCD* $AB \parallel CD$, $AB = CD$. Проведем прямую *AC*. Тогда $\angle 1 = \angle 3$ (как накрест лежащие углы). Поэтому $\triangle ABC = \triangle CDA$ (по углу и двум прилежащим к нему сторонам) $\Rightarrow$ $\Rightarrow \angle 2 = \angle 4$, они являются накрест лежащими и для прямых *AD* и *BC* $\Rightarrow$ $\Rightarrow AD \parallel BC \Rightarrow ABCD$ – параллелограмм. ■

Признак 2. *Если в четырехугольнике противоположные стороны попарно равны, то такой четырехугольник является параллелограммом.*

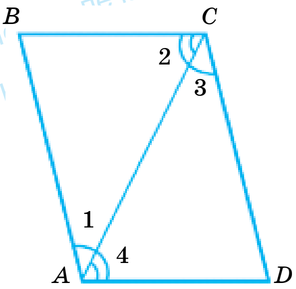


Рис. 1.22

В четырехугольнике $ABCD$ $AB = CD, AD = BC \Rightarrow$ $\Rightarrow ABCD$ – параллелограмм (рис. 1.22).

▲ $\Delta ABC = \Delta CDA$ (по трем сторонам) $\Rightarrow \angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$ (как соответствующие углы равных треугольников). Но они являются накрест лежащими углами при прямых AB, CD и AD, BC соответственно $\Rightarrow$ $\Rightarrow AB \parallel CD$ и $AD \parallel BC \Rightarrow ABCD$ – параллелограмм. ■

Признак 3. *Если диагонали четырехугольника в точке их пересечения делятся пополам, то такой четырехугольник является параллелограммом.*

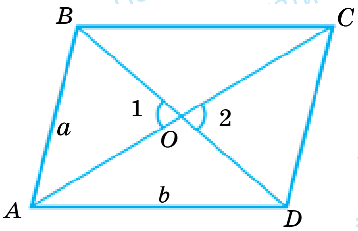


Рис. 1.23

В четырехугольнике $ABCD$ $AC \cap BD = O$, $AO = OC$, $BO = OD \Rightarrow$ $ABCD$ – параллелограмм (рис. 1.23).

▲ $AO = OC$, $BO = OD$ и $\angle 1 = \angle 2 \Rightarrow \Delta ABO = \Delta CDO \Rightarrow AB = CD$. Аналогично $\Delta ADO = \Delta CBO \Rightarrow$ $\Rightarrow AD = BC \Rightarrow$ По признаку 2 $ABCD$ – параллелограмм. ■

Пример. Покажем, что периметр параллелограмма, смежные стороны которого равны a и b, вычисляется с помощью формулы $P = 2 \cdot (a + b)$ (рис. 1.23).

▲ Пусть $AB = a$ и $AD = b$ (рис. 1.23). В силу доказанного признака $BC = AD = b$ и $CD = AB = a$. Поэтому $P = AB + BC + CD + DA = a + b + a + b = 2(a + b)$. ■

1. Какой четырехугольник называется параллелограммом?
2. Какие свойства параллелограмма вы знаете?
3. Сформулируйте признаки параллелограмма, докажите их.
4. Могут ли все углы параллелограмма быть острыми?
5. Может ли только один из углов параллелограмма быть прямым?
6. Могут ли два различных острых угла быть углами одного параллелограмма?
7. Какова связь между углами параллелограмма?

Практическая работа

1. Постройте эскиз параллелограмма. Проверьте измерением, используя: 1) признак 1; 2) признак 2; 3) признак 3.

2. Постройте треугольник. Дополните его до параллелограмма так, чтобы вершины треугольника были и вершинами параллелограмма. Сколько таких параллелограммов существует?

Задачи

A

1.26. Найдите все углы параллелограмма $ABCD$, если: 1) $\angle A = 80°$; 2) $\angle B - \angle A = 30°$; 3) $\angle A + \angle C = 140°$; 4) $\angle B = 2\angle A$; 5) $\angle ABD = 90°$, $\angle ADB = 30°$.

1.27. Найдите все углы параллелограмма, если сумма двух из них равна: 1) $90°$; 2) $120°$; 3) $200°$.

1.28. Найдите все углы параллелограмма, если разность двух из них равна: 1) $40°$; 2) $80°$; 3) $120°$.

1.29. Две стороны параллелограмма равны 10 см и 12 см. Чему равны две другие его стороны? Объясните ответ.

1.30. На диагонали BD параллелограмма $ABCD$ даны точки P и Q так, что $PB = QD$. Докажите, что четырехугольник $APCQ$ является параллелограммом.

1.31. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 5 м. Из точки, взятой на основании этого треугольника, проведены две прямые, параллельные боковым сторонам. Найдите периметр получившегося параллелограмма (рис. 1.24).

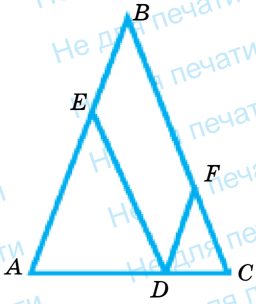


Рис. 1.24

1.32. Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 10 см, а периметр треугольника ABD – 8 см. Какова длина диагонали BD?

1.33. В параллелограмме $ABCD$ точка E – середина стороны BC, а точка F – середина стороны AD. Докажите, что четырехугольник $BEDF$ – параллелограмм.

1.34. Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 50 см, а $BD = 7$ см. Найдите периметр треугольника ABD.

B

1.35. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$: а) $\angle BAC = \angle ACD$, $\Delta BAC = \Delta CDA$; б) $AB \parallel CD$, $\angle A = \angle C$. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом.

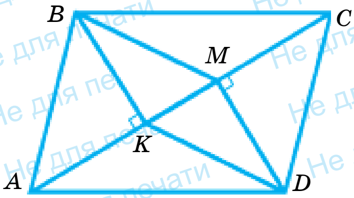


Рис. 1.25

1.36. Из вершин B и D параллелограмма $ABCD$ проведены перпендикуляры BK и DM к диагонали AC. Докажите, что четырехугольник $BMDK$ – параллелограмм (рис. 1.25).

1.37. В параллелограмме $ABCD$ проведена биссектриса угла A, которая пересекает сторону BC в точке E. Найдите длины отрезков BE и EC, если $AB = 9$ см, $AD = 15$ см.

1.38. Две стороны параллелограмма относятся как $3 : 4$, а его периметр равен 2,8 м. Найдите стороны параллелограмма.

1.39. В параллелограмме $ABCD$ перпендикуляр, опущенный из вершины B на сторону AD, делит ее пополам. Периметр параллелограмма равен 3,8 м, а периметр треугольника ABD – 3 м. Найдите диагональ BD и стороны параллелограмма.

1.40. Стороны параллелограмма равны 3 см и 5 см. Может ли одна из диагоналей этого параллелограмма быть равна: а) 10 см; б) 8 см; в) 4 см?

1.41. Докажите, что отрезок, соединяющий середины противоположных сторон параллелограмма, параллелен двум другим его сторонам.

1.42. Проведите прямую так, чтобы разделить параллелограмм на два равных между собой: 1) треугольника; 1) четырехугольника.

1.43. Постройте параллелограмм, если дана точка пересечения его диагоналей и места расположения двух соседних вершин.

1.44. В четырехугольнике сумма углов, прилежащих к каждой из двух соседних сторон, равна 180°. Докажите, что этот четырехугольник является параллелограммом.

1.45. Постройте параллелограмм по равным смежным сторонам и углу между ними.

C

1.46. Постройте параллелограмм по стороне и двум диагоналям.

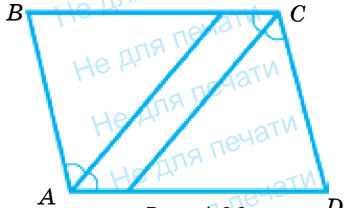


Рис. 1.26

1.47. Докажите, что биссектрисы двух противолежащих углов параллелограмма параллельны (рис. 1.26).

1.48. Периметр параллелограмма равен 50 см. Диагонали параллелограмма делят его на четыре треугольника, разность периметров двух из них равна 5 см. Найдите стороны параллелограмма.

1.49. Прямая KL – биссектриса внешнего угла при вершине A параллелограмма $ABCD$. Докажите, что треугольник KCL равнобедренный, если $AK = AL$ (точки K и L – точки пересечения продолжений сторон параллелограмма и биссектрисы KL).

1.50. Докажите, что угол, образованный медианой, проходящей между неравными сторонами треугольника, с меньшей из сторон, больше угла, образованного этой медианой с большей из сторон.

1.51. Докажите, что: а) четырехугольник, полученный при пересечении биссектрис углов параллелограмма, является параллелограммом; б) все углы в таком четырехугольнике прямые.

1.52. Окружности пересекаются в точках M и N (рис. 1.27). Докажите: 1) $\Delta O_1MO_2 = \Delta O_1NO_2$; 2) ΔMO_1N и ΔMO_2N являются равнобедренными треугольниками.

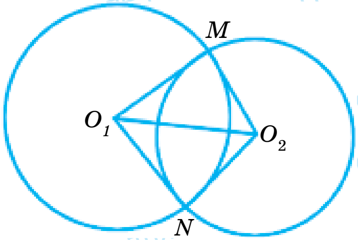


Рис. 1.27

1.3. ПРЯМОУГОЛЬНИК, РОМБ, КВАДРАТ И ИХ СВОЙСТВА

Прямоугольник

Определение. Прямоугольником называется параллелограмм, у которого все углы прямые.

Теорема 1. *Диагонали прямоугольника равны.*

$ABCD$ – прямоугольник $\Rightarrow AC = BD$ (рис. 1.28).

▲ $ABCD$ – прямоугольник, AC и BD – его диагонали (рис. 1.28). $\Delta ABD = \Delta DCA$, т. к. $AB = CD$, а AD – общий катет $\Rightarrow AC = BD$. ■

Теорема 2. (Обратная теорема.) *Параллелограмм с равными диагоналями является прямоугольником.*

В параллелограмме $ABCD$ $AC = BD \Rightarrow ABCD$ – прямоугольник.

▲ Диагонали параллелограмма $ABCD$ равны: $AC = BD$ (рис. 1.28) $\Rightarrow$ $\Rightarrow \Delta ABD = \Delta DCA$ (по трем сторонам: AD – общая сторона и $AB = CD$) $\Rightarrow$ $\Rightarrow \angle BAD + \angle ADC = 180^\circ$ – углы, прилежащие к одной стороне параллелограмма (как сумма внутренних односторонних углов). Тогда $\angle BAD = \angle ADC = 90^\circ$. Аналогично, $\angle ABC = \angle BCD = 90^\circ \Rightarrow ABCD$ – прямоугольник. ■

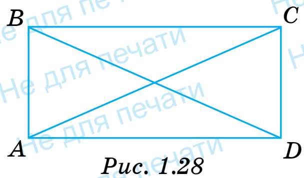


Рис. 1.28

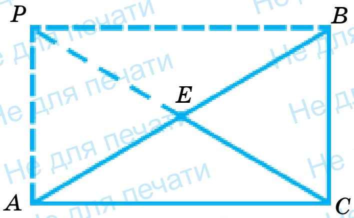


Рис. 1.29

Следствие. *В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы.*

ΔABC – прямоугольный, $\angle C = 90°$, CE – медиана $\Rightarrow CE = \frac{1}{2}AB$ (рис. 1.29).

▲ ABC – прямоугольный трегольник. Дополним его до прямоугольника $APBC$ так, как показано на рис. 1.29. Тогда медиана CE равна половине диагонали CP. Поэтому $CE = \frac{1}{2}CP = \frac{1}{2}AB$. ■

Ромб

Определение. **Ромбом** называется параллелограмм, все стороны которого равны между собой (рис. 1.30).

Теорема 3. *Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят его углы пополам.*

$ABCD$ – ромб $\Rightarrow AC$ – биссектриса углов A и C, а BD – биссектриса углов B и D, $AC \perp BD$.

▲ $ABCD$ – ромб $\Rightarrow \Delta ABC$ – равнобедренный. Т.к. $ABCD$ – параллелограмм, то его диагонали в точке их пересечения O делятся пополам: $BO = OD$, $AO = OC \Rightarrow BO$ является медианой треугольника $ABC \Rightarrow BO$ является также и высотой, и биссектрисой, т. е. $BO \perp AC$. ■

Теорема 4. *Параллелограмм, диагонали которого перпендикулярны, является ромбом.*

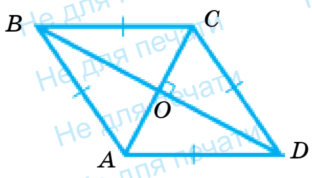


Рис. 1.30

$ABCD$ – параллелограмм, $AC \perp BD \Rightarrow ABCD$ – ромб (рис. 1.30).

▲ Пусть $ABCD$ – параллелограмм и $AC \perp BD \Rightarrow$ Диагонали AC и BD в точке пересечения делятся пополам и поэтому являются серединными перпендикулярами по отношению друг к другу. Следовательно, все вершины A, B, C, и D расположены попарно на одинаковом расстоянии друг от друга (за исключением AC и BD), т. е. $ABCD$ – ромб. ■

Пример. Покажем, что катет, противолежащий углу 30°, равен половине гипотенузы.

Дано: ΔABC, $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ \Rightarrow BC = \frac{1}{2}AB$ (рис. 1.31).

▲ В ΔABC $\angle A = 30^\circ$, $\angle C = 90^\circ$. На продолжении катетов AC и BC отложим отрезки CE и CD, соответственно так, чтобы $AC = CE$ и $BC = CD$ (рис. 1.31). Тогда фигура $ABED$ является ромбом, т.к. ее диагонали взаимно перпендикулярны и делятся пополам в точке их пересечения. Тогда ΔABD – равносторонний, т.е. $AB = AD = BD$. С другой стороны, $BC = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}AB\cdot$ ■

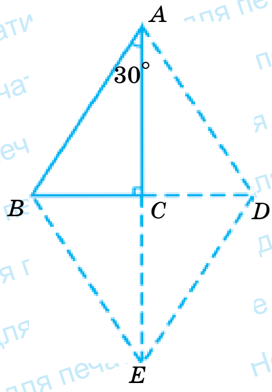


Рис. 1.31

Задумайтесь

Назовите общие признаки четырехугольников, которые вы знаете. Используя их, попробуйте дать определение квадрата.

Квадрат

Определение. Квадрат – это прямоугольник, все стороны которого равны (рис. 1.32).

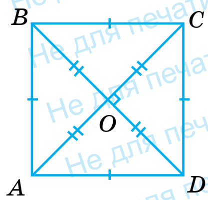


Рис. 1.32

Квадрат является и прямоугольником, и ромбом.

Поэтому:

1) *у квадрата все углы прямые*;

2) *у квадрата все стороны равны*;

3) *диагонали квадрата равны, взаимно перпендикулярны, делятся в точке пересечения пополам и делят его углы пополам* (рис. 1.32).

1. Какая фигура называется прямоугольником?
2. Можно ли параллелограмм определить так: «Параллелограммом называется четырехугольник, противоположные стороны которого равны между собой и параллельны»?
3. Докажите, что диагонали прямоугольника равны.
4. Что такое ромб?
5. Докажите, что диагонали ромба: 1) взаимно перпендикулярны; 2) являются биссектрисами его углов.
6. Что такое квадрат и какие его свойства вы знаете?
7. Что можно сказать о параллелограмме, все высоты которого равны между собой?

Практическая работа

1. На глаз постройте прямоугольник (пусть его стороны будут не параллельны линиям тетради в клетку). Проверьте чертеж, используя свойства прямоугольника и проведя необходимые измерения.
2. Выполните задание 1 для квадрата и ромба.

Задачи

А

Рис. 1.33

1.53. Докажите, что четырехугольник, имеющий два прямых угла, не всегда является прямоугольником (рис. 1.33).

1.54. Постройте четырехугольник, диагонали которого равны, но он не является прямоугольником.

1.55. Какими условиями следует дополнить задачи 1.53 и 1.54, чтобы четырехугольники всегда были прямоугольниками?

1.56. Докажите, что четырехугольник, все углы которого равны между собой, является прямоугольником.

1.57. Докажите, что параллелограмм, две смежные стороны которого равны (они имеют общую вершину), является ромбом.

1.58. Если диагонали параллелограмма: а) взаимно перпендикулярны; б) являются биссектрисами его углов, то он является ромбом. Докажите.

1.59. Всегда ли четырехугольник, диагонали которого равны и перпендикулярны, является ромбом?

1.60. Всегда ли четырехугольник, диагонали которого перпендикулярны, является ромбом?

1.61. При каких условиях фигура является:
1) параллелограммом; 2) прямоугольником; 3) четырехугольником? При каких условиях ромб является квадратом?

▲ 4) Ромб, все углы которого прямые, является квадратом. ■

Рис. 1.34

1.62. Попробуйте перечислить несколько признаков прямоугольника и ромба.

1.63. Биссектриса одного из углов прямоугольника делит его сторону пополам. Меньшая сторона этого прямоугольника равна 10 см (рис. 1.34). Найдите периметр прямоугольника.

1.64. В прямоугольнике точка пересечения диагоналей отстоит от меньшей стороны на 4 см дальше, чем от большей стороны. Периметр прямоугольника равен 56 см. Найдите его стороны.

1.65. В ромбе одна из диагоналей равна стороне. Найдите углы ромба.

B

1.66. Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. а) Докажите, что треугольники AOD и AOB равнобедренные. б) Найдите периметр треугольника AOB, если $\angle CAD=30^\circ$, $AC = 12$ см (рис. 1.35).

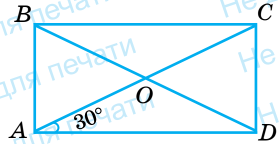


Рис. 1.35

1.67. В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, отсекает от этого треугольника равносторонний треугольник. Найдите острые углы данного треугольника.

1.68. Из одной точки окружности проведены две взаимно перпендикулярные хорды, которые удалены от центра на 6 см и 10 см. Найдите длины хорд.

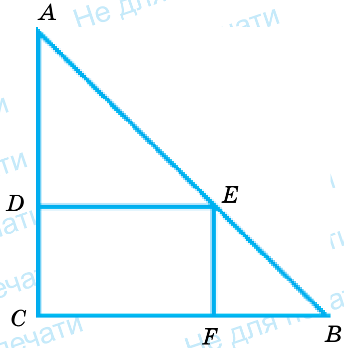


Рис. 1.36

1.69. В прямоугольный треугольник, каждый катет которого равен 6 см, вписан прямоугольник, имеющий с треугольником общий угол. Найдите периметр прямоугольника (рис. 1.36).

1.70. В равнобедренный прямоугольный треугольник вписан прямоугольник так, что две его вершины находятся на гипотенузе, а две другие – на катетах. Стороны прямоугольника относятся как 5 : 2, а гипотенуза треугольника равна 45 см. Найдите стороны прямоугольника.

1.71. В параллелограмме $ABCD$ $AD > AB$. Биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке K, а биссектриса угла B пересекает сторону AD в точке L. Докажите, что четырехугольник $ABKL$ является ромбом (рис. 1.37).

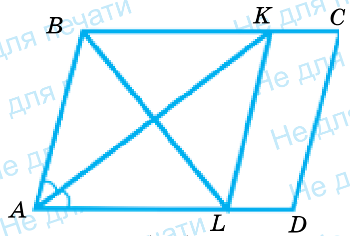


Рис. 1.37

1.72. Через точку пересечения диагоналей ромба к его сторонам проведены перпендикуляры. Докажите, что точки пересечения этих перпендикуляров со сторонами ромба являются вершинами прямоугольника.

1.73. Углы, образуемые диагоналями ромба с его стороной, относятся как 4 : 5. Найдите углы ромба.

1.74. Периметр ромба равен 16 см, высота – 2 см. Найдите углы ромба.

1.75. В равнобедренный прямоугольный треугольник, каждый катет которого равен 2 м, вписан квадрат, имеющий с ним общий угол. Найдите периметр квадрата.

1.76. В прямоугольном треугольнике через точку пересечения биссектрисы прямого угла и гипотенузы проведены прямые, параллельные катетам. Докажите, что полученный четырехугольник является квадратом.

1.77. Диагональ квадрата равна 4 м. Сторона его равна диагонали другого квадрата. Найдите сторону последнего.

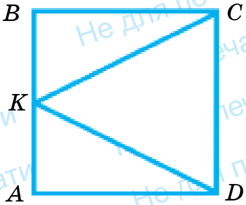


Рис. 1.38

1.78. Из данной точки проведены к окружности две взаимно перпендикулярные касательные. Радиус окружности равен 10 см. Найдите длины касательных (расстояние от данной точки до точек касания).

1.79. На стороне AB квадрата $ABCD$ взята точка K, причем $AK = BK$. Докажите, что треугольник CDK равнобедренный (рис. 1.38).

C

1.80. Через вершины квадрата проведены прямые, параллельные его диагоналям. Докажите, что полученный четырехугольник является квадратом.

1.81. На каждой стороне квадрата $ABCD$ отложены равные отрезки: $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$. Докажите, что четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ – квадрат (рис. 1.39).

1.82. Квадраты $ABCD$ и $BFKL$ имеют общую вершину B (рис. 1.40). Докажите, что медиана BN треугольника ABL перпендикулярна отрезку CF.

1.83. Внутри квадрата $ABCD$ взята точка K так, что $\angle KAD = \angle KDA = 15°$. Докажите, что треугольник BCK равносторонний (рис. 1.41).

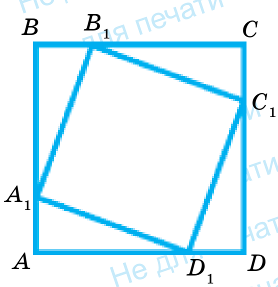


Рис. 1.39

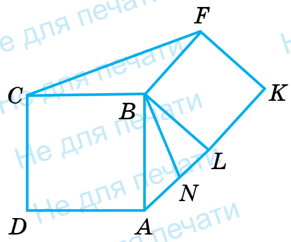


Рис. 1.40

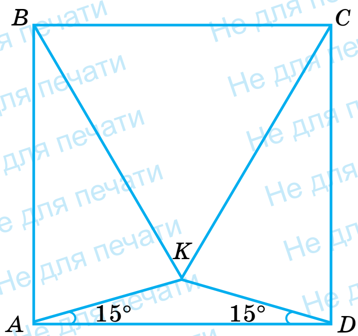


Рис. 1.41

1.84. Любой выпуклый четырехугольник, диагонали которого являются биссектрисами его углов, является ромбом. Докажите этот признак ромба.

1.85. Из вершины прямоугольника $ABCD$ на его диагональ опущен перпендикуляр, который делит угол прямоугольника в отношении $3 : 1$. Найдите угол между этим перпендикуляром и второй диагональю.

1.86. Диагональ ромба составляет 25% от его периметра, равного $2p$. Найдите сторону, эту диагональ и углы ромба.

1.4. ПОСТРОЕНИЕ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКОВ ПО ИХ ЭЛЕМЕНТАМ

Задачи на построение решаются по схеме, данной ниже.

I. Анализ. На этом этапе устанавливают связь между данными элементами и неизвестными элементами искомой фигуры.

II. Построение. На этом этапе реализуют план решения задачи, определенный на предыдущем этапе, и последовательно выполняют необходимые построения с помощью циркуля и линейки.

III. Доказательство. На этом этапе доказывают, что построенная фигура удовлетворяет условию задачи.

IV. Исследование. На этом этапе выясняют, при каких условиях задача имеет решение (единственное или несколько) или не имеет решения.

Пример. Построить параллелограмм по двум смежным сторонам и диагонали.

Условие задачи нужно понимать так, как дано ниже.

Даны три отрезка, длины которых равны a, b и c (рис. 1.42). Здесь a и b – длины смежных сторон, а c – диагональ искомого параллелограмма. Нужно построить этот параллелограмм.

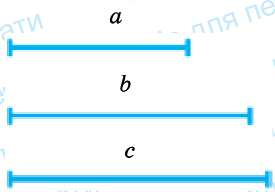


Рис. 1.42

I. Анализ. Допустим, что необходимый нам параллелограмм $ABCD$ построен (рис. 1.43): $AB = a$, $AD = b$ и $BD = c$. Чтобы построить данный параллелограмм, нам достаточно построить треугольник ABD (по трем сторонам) и дополнить его до параллелограмма.

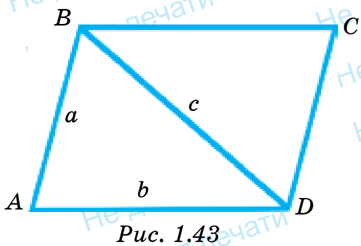


Рис. 1.43

II. Построение. 1) Построим $\triangle ABD$ так, чтобы $AB = a$, $AD = b$ и $BD = c$. 2) Через точки B и D проведем прямые BP и DQ так, чтобы $BP \parallel AD$ и $DQ \parallel AB$. 3) Найдем точку $C = BP \cap DQ$. Фигура $ABCD$ – искомый параллелограмм.

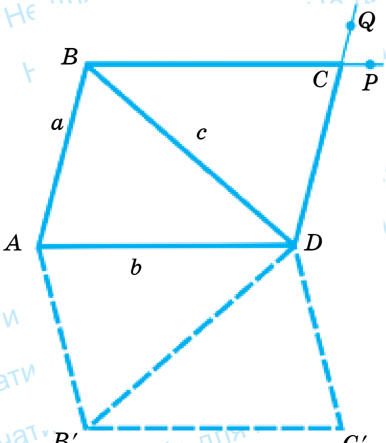


Рис. 1.44

III. Доказательство. По построению $AD \parallel BC$, $AB \parallel DC$, $AB = a$, $AD = b$ и $BD = c$, т. е. $ABCD$ является параллелограммом и удовлетворяет условию задачи.

IV. Исследование. Задача сводится к построению $\triangle ABD$. Числа a, b, c должны удовлетворять неравенствам треугольника: $a < b + c$, $b < a + c$, $c < a + b$. Если хотя бы одно из этих неравенств неверное, то задача не имеет решения. Если все указанные неравенства верные, то задача имеет 2 решения, так как по трем сторонам строятся 2 треугольника ABD и $AB'D$ (рис. 1.44). Тогда параллелограммы $ABCD$ и $AB'C'D$ удовлетворяют условию задачи.

Материалы из истории

Задачи на построение занимали достойное место в трудах математиков древности, потому что в то время все математические факты обосновывались при помощи чертежей на геометрическом языке. Проблема построения многоугольников (в частности, правильных многоугольников) оставалась нерешенной до великого немецкого математика Карла Гаусса. Он полностью решил эту проблему алгебраическим методом в 1801 году. Он доказал, что с помощью циркуля и линейки можно построить правильный n-угольник только в том случае, если число n имеет вид:
$n = 2^m \cdot P_1 \cdot \ldots \cdot P_k$, $m \in Z$, $m \geqslant 0$, где $P_1, \ldots, P_k$ – различные простые числа вида $P_k = 2^{2^k} + 1$ $(k \geqslant 0)$. Например, $5 = 2^{2^1} + 1$. Число 7 в этом виде не записывается, т. е. нельзя с помощью циркуля и линейки построить правильный семиугольник.


Карл Гаусс (1777–1855)

1. Из скольких этапов состоит решение задачи на построение? Назовите эти этапы, раскройте их смысл и значение.
2. Если заданы все стороны, то можно ли построить: 1) параллелограмм; 2) прямоугольник; 3) ромб; 4) квадрат? Определяются ли они своими сторонами? Постройте те фигуры, которые по условию задания можно построить.

Задачи

В

1.87. Сколько можно построить различных параллелограммов с вершинами в трех заданных точках, не лежащих на одной прямой? (Рис. 1.45.)

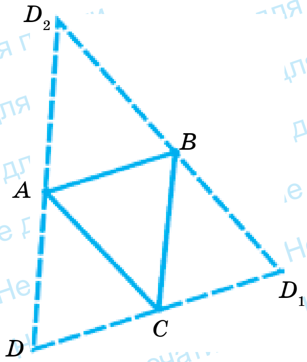


Рис. 1.45

1.88. Постройте параллелограмм по стороне и двум диагоналям.

1.89. Постройте параллелограмм по двум сторонам и углу.

1.90. Постройте параллелограмм по двум диагоналям и углу между ними (рис. 1.46).

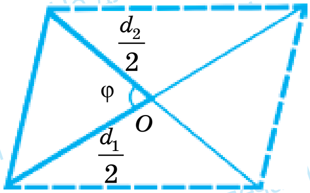


Рис. 1.46

1.91. Постройте параллелограмм: 1) по двум высотам и острому углу; 2) по двум диагоналям и высоте.

1.92. Постройте прямоугольник: 1) по двум смежным сторонам; 2) по стороне и диагонали; 3) по диагоналям и углу между ними.

1.93. Постройте ромб: 1) по двум диагоналям; 2) по стороне и углу.

1.94. Постройте квадрат: 1) по стороне; 2) по диагонали.

1.95. Постройте параллелограмм: 1) по стороне, диагонали и углу между диагоналями; 2) по стороне и двум высотам.

1.96. Постройте ромб: 1) по углу и диагонали (рис. 1.47); 2) по диагонали и высоте.

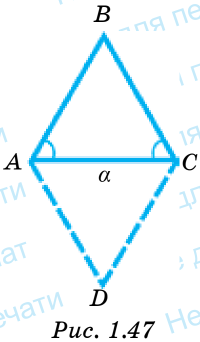


Рис. 1.47

1.97. Постройте квадрат: 1) по двум данным вершинам; 2) по серединам двух противоположных сторон; 3) по серединам двух соседних сторон; 4) по центру (точка пересечения диагоналей) и двум точкам, лежащим на одной стороне.

C

1.98. Через внутреннюю точку D угла ABC проведите прямую так, чтобы отрезок этой прямой, отсекаемый сторонами угла, в точке D делился пополам.

1.99. Постройте треугольник по двум сторонам и медиане, проведенной к третьей стороне.

1.100. Постройте прямоугольник по диагонали и сумме двух его смежных сторон.

1.101. Даны две параллельные прямые и две точки, расположенные между ними. Постройте ромб так, чтобы две его стороны лежали на двух данных прямых, а другие две стороны проходили через две данные точки.

1.102. Постройте квадрат, если заданы 4 точки, взятые по одной с каждой стороны этого квадрата.

1.5. ТЕОРЕМА ФАЛЕСА. СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА

Теорема Фалеса

Теорема 1. (Теорема Фалеса.) *Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне.*

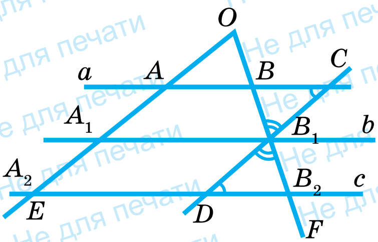


Рис. 1.48

Дано: $\angle EOF$, $a \parallel b \parallel c$, $OE \cap a = A$, $OE \cap b = A_1$, $OE \cap c = A_2$, $AA_1 = A_1A_2$, $OF \cap a = B$, $OF \cap b = B_1$, $OF \cap c = B_2$.

Доказать: $BB_1 = B_1B_2$.

▲ Через точку B_1 проведем прямую CD так, чтобы $CD \parallel OE$: $C \in a$, $D \in c$ (рис. 1.48). Тогда AA_1B_1C и $A_1A_2DB_1$ – параллелограммы $\Rightarrow AA_1 = CB_1$ и $A_1A_2 = B_1D$. Т.к. $AA_1 = A_1A_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow CB_1 = B_1D$. $\angle BB_1C = DB_1B_2$ – вертикальные углы. $\angle BCB_1 = \angle B_1DB_2$ – накрест лежащие углы. Поэтому $\Delta BCB_1 = \Delta B_2DB_1 \Rightarrow BB_1 = B_1B_2$. ■

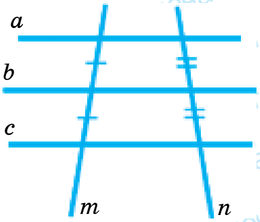


Рис. 1.49

В условии теоремы Фалеса вместо сторон угла можно взять любые две прямые m и n (рис. 1.49).

Пример. Разделить данный отрезок AB на три равные части.

▲ Проведем луч AC так, чтобы $\angle BAC > 0°$. Возьмем точки $C_1, C_2, C_3 \in AC$ так, чтобы $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3$. Через точки C_1 и C_2 проведем прямые a и b так, чтобы $a \parallel C_3B$, $b \parallel C_3B$ (рис. 1.50). Пусть $B_1 = a \cap AB$, $B_2 = b \cap AB$. По теореме Фалеса $AB_1 = B_1B_2 = B_2B$. ■

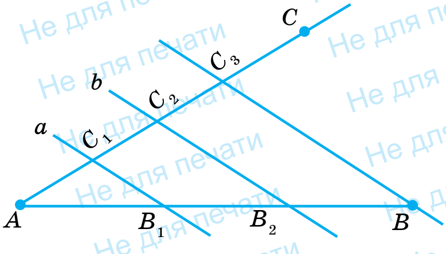


Рис. 1.50

Средняя линия треугольника

Определение. Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон (рис. 1.51).

$AE = EB$, $BF = FC$ $\Rightarrow EF$ – средняя линия.

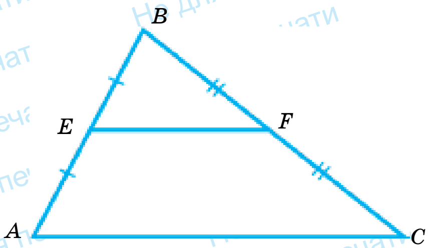


Рис. 1.51

Теорема 2. *Средняя линия треугольника параллельна третьей стороне и равна ее половине.*

В ΔABC отрезок DE – средняя линия. Тогда $DE \parallel AC$ и $DE = \frac{1}{2}AC$ (рис. 1.52).

▲ Пусть $AD = DB$ (рис. 1.52). Проведем прямую DE так, чтобы $DE \parallel AC$, $E \in BC \Rightarrow$ по теореме Фалеса $BE = EC$, т.е. DE является средней линией. Через точку E проведем прямую EF так, чтобы $EF \parallel AB$, $F \in AC$. По теореме Фалеса $AF = FC$, а $ADEF$ – параллелограмм. Поэтому $DE = AF = \frac{1}{2}AC$. ■

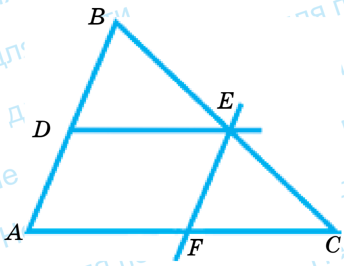


Рис. 1.52

Материалы из истории

Фалес Милетский – древнегреческий ученый-философ. Он считается основателем древнегреческой философии и науки. Некоторые доказательства геометрических теорем связывают с именем Фалеса. Например, равенство вертикальных углов, деление круга диаметром пополам и другие теоремы.

Фалес (VI в. до н. э.)

1. Сформулируйте и докажите теорему Фалеса.
2. Что называется средней линией треугольника?
3. Сформулируйте теорему о средней линии треугольника и докажите ее.

Задачи

А

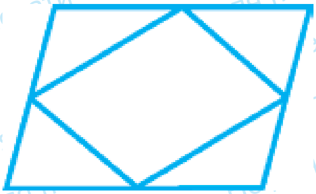


Рис. 1.53

1.103. Какой четырехугольник образуется, если последовательно соединить середины сторон: 1) параллелограмма (рис. 1.53); 2) прямоугольника; 3) ромба; 4) квадрата?

1.104. Разделите данный отрезок: 1) на четыре равные части; 2) на пять равных частей.

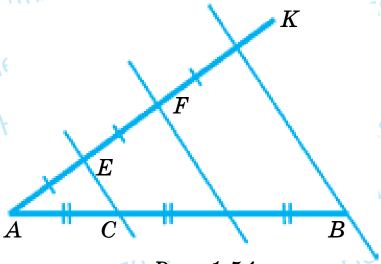


Рис. 1.54

1.105. Разделите данный отрезок на две части так, чтобы они относились как: 1) 1 : 2 (рис. 1.54); 2) 2 : 3.

1.106. Две стороны треугольника равны a и b. Через середину третьей стороны проведены прямые, параллельные данным сторонам. Найдите периметр полученного четырехугольника (рис. 1.55).

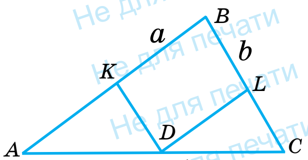


Рис. 1.55

1.107. Периметр треугольника равен p. Найдите периметр треугольника, вершинами которого служат середины сторон данного треугольника.

1.108. Диагонали четырехугольника 3 дм и 8 дм. Найдите периметр четырехугольника, вершинами которого служат середины сторон данного четырехугольника.

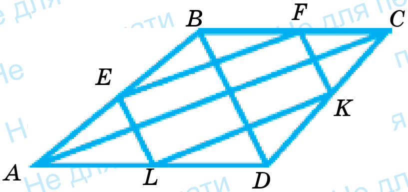


Рис. 1.56

1.109. Дано: $ABCD$ – четырехугольник, $AC = 8$ дм, $BD = 3$ дм. Точки E, F, K, L – середины сторон четырехугольника. (рис. 1.56).

Найти периметр $EFKL$.

▲ EF – средняя линия ΔABC: $EF = \frac{1}{2}AC = 4$ дм. LK – средняя линия ΔADC: $LK = \frac{1}{2}AC = 4$ дм. Аналогично EL и FK являются средними линиями ΔABD и ΔBCD соответственно. Поэтому $EL = FK = \frac{1}{2}BD = 1{,}5$ дм. Тогда $P_{EFKL} = EF + FK + +KL + LE = 4 + 1{,}5 + 4 + 1{,}5 = 11$ дм.

Ответ: 11 дм. ■

B

1.110. Длины проекций двух сторон остроугольного треугольника ABC на сторону AC равны 6 см и 4 см. Найдите длины проекций на сторону AC всех медиан данного треугольника.

1.111. Докажите, что середины сторон выпуклого четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

1.112. Докажите, что середины сторон прямоугольника являются вершинами ромба, и наоборот, середины сторон ромба являются вершинами прямоугольника.

1.113. Разделите произвольный треугольник на две части так, чтобы из них можно было составить параллелограмм.

1.114. Каждая сторона треугольника ABC разделена на три равных между собой отрезка, точки деления соединены отрезками, параллельными сторонам треугольника. Периметр треугольника ABC равен p. Каков периметр заштрихованной фигуры? (Рис. 1.57.)

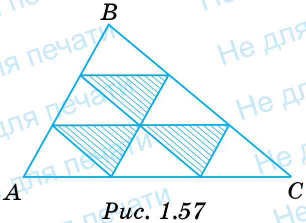


Рис. 1.57

1.115. Докажите, что все медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2 : 1, считая от вершины.

1.116. Диагонали ромба равны d_1 и d_2. Найдите периметр четырехугольника, вершинами которого являются середины сторон данного ромба.

C

1.117. Как использовать свойство средней линии треугольника для определения расстояния между двумя пунктами, расположенными на разных берегах реки?

1.118. Отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон выпуклого четырехугольника, равен полусумме двух других его сторон. Докажите, что эти последние противоположные стороны параллельны.

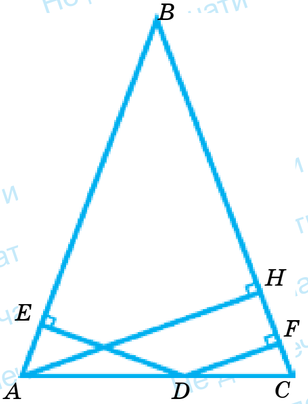


Рис. 1.58

1.119. Докажите, что сумма расстояний от любой точки, лежащей на основании равнобедренного треугольника, до его боковых сторон равна длине высоты, проведенной из вершины при основании (рис. 1.58).

1.120. Постройте прямую, которая равноудалена от трех точек, не лежащих на одной прямой. Сколько решений имеет задача?

1.121. От чертежа треугольника сохранились только три точки, которые были серединами его сторон. Восстановите чертеж треугольника.

1.122. Постройте треугольник по двум сторонам и разности противолежащих им углов.

1.123. Через данную внутри угла точку A проведите прямую так, чтобы отрезок этой прямой, заключенный между сторонами угла, делился в точке A в отношении $2 : 1$.

1.6. ТРАПЕЦИЯ И ЕЕ СВОЙСТВА

Задумайтесь

В чем отличие четырехугольника из рисунка 1.59 от четырехугольников, которые вы знаете.

Определение. Трапецией называется четырехугольник, у которого только две противоположные стороны параллельны (рис. 1.59).

$BC \parallel AD$, BC, AD – основания, $AB \nparallel CD$, AB, CD – боковые стороны.

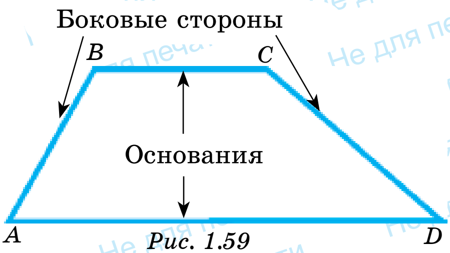


Рис. 1.59

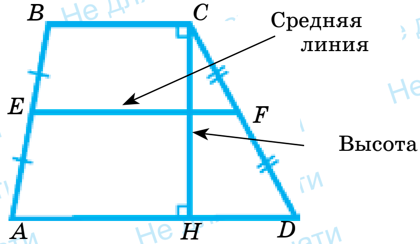


Рис. 1.60

Любой отрезок, концы которого лежат на основаниях и который перпендикулярен основаниям трапеции, называется **высотой** трапеции. Отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции, называется ее **средней линией** (рис. 1.60).

Трапеция с равными боковыми сторонами называется **равнобокой трапецией**, а трапеция, имеющая прямой угол, называется прямоугольной трапецией.

Работа с рисунком

Обратите внимание на рисунки 1.61 и 1.62. В чем отличие трапеций? Почему эти трапеции называют равнобокой и прямоугольной? Обоснуйте ответ.

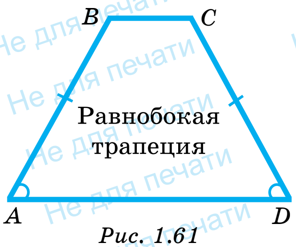


Рис. 1.61

Рис. 1.62

Теорема 1. *Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.*

$ABCD$ – трапеция, EF – средняя линия $\Rightarrow EF \parallel AD$, $EF \parallel BC$, $EF = \dfrac{AD + BC}{2}$ (рис. 1.63).

▲ Пусть $AD \cap EC = K$ (рис. 1.63). $AE = BE$, $\angle AEK = \angle BEC$ (как вертикальные углы), $\angle EAK = \angle EBC$ (как накрест лежащие при прямых BC и KD) $\Rightarrow \triangle AEK = \triangle BEC \Rightarrow BC = AK \Rightarrow KD = AD + BC$.

С другой стороны, EF является средней линией $\triangle KCD$: $EF \parallel KD$ и

$EF = \dfrac{1}{2} KD \Rightarrow EF \parallel AD$ и $EF = \dfrac{AD + BC}{2}$. ■

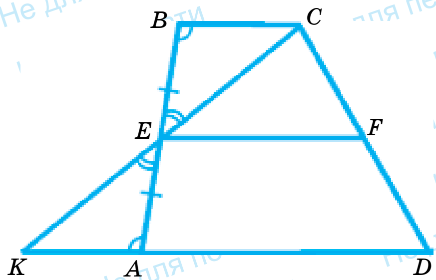


Рис. 1.63

1. Какой четырехугольник называется трапецией?
2. Что называется средней линией трапеции?
3. Сформулируйте свойство средней линии трапеции, докажите его.
4. Сколько тупых углов может быть в трапеции?

Практическая работа

В тетради постройте: 1) произвольную трапецию; 2) равнобокую трапецию; 3) прямоугольную трапецию. Постройте и укажите их высоту и среднюю линию.

Задачи

А

1.124. Может ли трапеция иметь три острых угла?

1.125. Могут ли углы трапеции, взятые в последовательном порядке, быть пропорциональны числам:

1) 6, 3, 4, 2; 2) 8, 7, 13, 12?

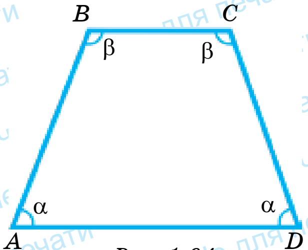


Рис. 1.64

1.126. Докажите, что в равнобокой трапеции: 1) диагонали равны; 2) углы при основании равны.

1.127. Чему равны углы равнобокой трапеции, если известно, что разность противоположных углов равна 40° (рис. 1.64)?

1.128. Углы при одном основании трапеции равны 68° и 71°. Найдите остальные углы трапеции.

1.129. Диагональ *BD* трапеции *ABCD* перпендикулярна боковой стороне *AB* и $\angle BAD = 40°$. Полагая, что меньшее основание трапеции равно ее второй боковой стороне, найдите другие углы трапеции.

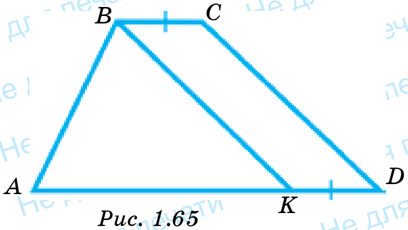


Рис. 1.65

1.130. Меньшее основание *BC* трапеции *ABCD* равно 4 см. Через вершину *B* проведена прямая, параллельная стороне *CD*. Чему равен периметр трапеции, если периметр полученного треугольника равен 12 см (рис. 1.65)?

B

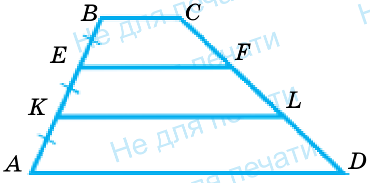


Рис. 1.66

1.131. Боковая сторона трапеции разделена на три равные части и из точек деления к другой стороне проведены отрезки, параллельные основаниям. Найдите длины этих отрезков, если основания трапеции равны 2 м и 5 м (рис. 1.66).

1.132. Один угол равнобокой трапеции равен 60°, боковая сторона – 24 см, а сумма оснований – 44 см. Найдите длины оснований трапеции.

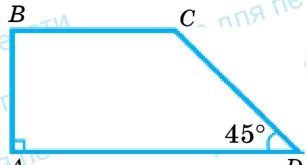


Рис. 1.67

1.133. Один угол прямоугольной трапеции равен 45°, а ее основания – 10 см и 15 см. Найдите меньшую боковую сторону трапеции (рис. 1.67).

1.134. Докажите, что в трапеции: 1) сумма боковых сторон больше разности оснований; 2) сумма диагоналей больше суммы оснований; 3) разность оснований больше разности боковых сторон.

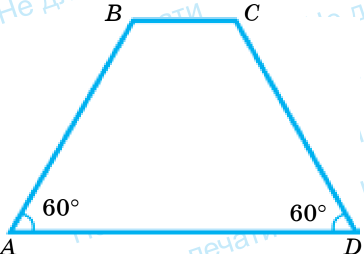


Рис. 1.68

1.135. В равнобокой трапеции один из углов равен 60°, а основания – 15 см и 49 см. Найдите ее периметр (рис. 1.68).

1.136. Докажите, что трапеция является равнобокой, если ее диагонали равны.

1.137. Высота, проведенная из вершины тупого угла равнобокой трапеции, делит большее основание на части, имеющие длины a и b ($a > b$). Найдите среднюю линию трапеции. Решите задачу при $a = 30$ см, $b = 6$ см.

1.138. Два села A и B расположены по одну сторону прямолинейной железной дороги на расстоянии соответственно 10 км и 20 км. Чему равно расстояние от железной дороги до села C, расположенного посередине прямой дороги, соединяющей села A и B?

1.139. Основания трапеции относятся как 2 : 3, а средняя линия равна 5 м. Найдите основания трапеции.

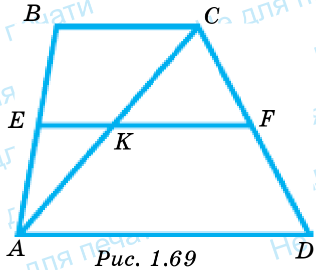


Рис. 1.69

1.140. Средняя линия трапеции равна 7 см, а разность оснований – 4 см. Найдите основания трапеции.

1.141. Средняя линия трапеции равна 10 см. Одна из диагоналей делит ее на два отрезка, разность которых равна 2 см. Найдите основания трапеции (рис. 1.69).

1.142. Основания трапеции равны 4 см и 10 см. Найдите длины отрезков, на которые одна из диагоналей трапеции делит ее среднюю линию.

1.143. Основания трапеции равны 8,2 см и 14,2 см. Найдите расстояние между серединами ее диагоналей.

1.144. Длина меньшего основания трапеции равна 6,2 см, расстояние между серединами ее диагоналей – 4 см. Найдите большее основание трапеции.

C

1.145. Как разделить трапецию: 1) на две части, чтобы из них составить параллелограмм; 2) на две части, чтобы из них составить треугольник; 3) на три части, чтобы из них составить прямоугольник?

1.146. Докажите, что прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей равнобедренной трапеции и точку пересечения продолжений ее боковых сторон, перпендикулярна основаниям трапеции и делит их пополам.

1.147. Боковая сторона равнобедренной трапеции равна меньшему основанию и перпендикулярна ее диагонали. Найдите углы трапеции.

1.148. Докажите, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности оснований.

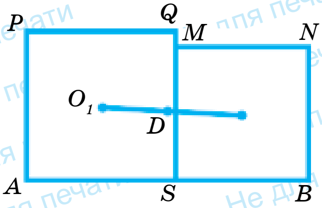


Рис. 1.70

1.149. По одну сторону отрезка AB, длина которого равна a, построили два квадрата: $APQS$ и $SMNB$ (рис. 1.70). Какая фигура является геометрическим местом точек середин отрезков (точек D), соединяющих центры всех возможных квадратов $APQS$ и $SMNB$?

1.150. Постройте трапецию по основаниям и боковым сторонам.

1.151. Постройте трапецию по основаниям и диагоналям.

1.152. Постройте равнобокую трапецию, если даны: 1) угол A, основание AD и боковая сторона AB; 2) основание BC, боковая сторона AB и диагональ BD.

1.153. Постройте прямоугольную трапецию $ABCD$ по основаниям и боковой стороне AB, которая перпендикулярна основаниям.

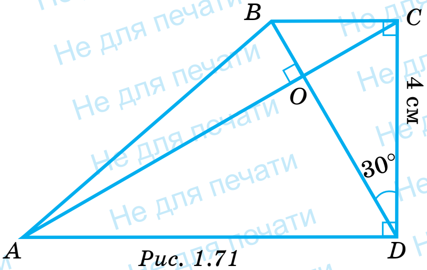


Рис. 1.71

1.154. На рис. 1.71 изображена прямоугольная трапеция $ABCD$, в которой $AC \perp BD$, $BC = 2$ см и $\angle BDC = 30°$. По этим условиям самостоятельно сформулируйте задачу. (Выполните работу в группе.)

1.155. Постройте трапецию по основаниям, высоте и одной диагонали.

1.156. Постройте трапецию по основаниям, высоте и одному углу.

1.157. Постройте трапецию по большему основанию, боковым сторонам и острому углу.

1.158. Постройте трапецию по меньшему основанию, боковой стороне и двум тупым углам.

1.159 Постройте трапецию по разности оснований, двум острым углам и диагонали.

1.160.**. Даны отрезки, длины которых a, b, c, d, e. Постройте отрезки, длины которых: 1) $x = \frac{ab}{d}$; 2) $x = \frac{abc}{de}$.

1.7. ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ ТРЕУГОЛЬНИКА. ОКРУЖНОСТЬ, ОПИСАННАЯ ОКОЛО ТРЕУГОЛЬНИКА, И ОКРУЖНОСТЬ, ВПИСАННАЯ В ТРЕУГОЛЬНИК

Свойства медианы треугольника

Теорема 1. *Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2 : 1, считая от вершины* (рис. 1.72).

AE, BD, CF – медианы, $AO : OE = 2 : 1$, $BO : OD = 2 : 1$, $CO : OF = 2 : 1$.

▲ Пусть $AE \cap CF = O$. Возьмем точки P и K так, чтобы $AP = PO$, $CK = KO$. Отрезок EF – средняя линия $\triangle ABC$, а PK – средняя линия $\triangle AOC \Rightarrow EF \| AC$, $EF = \frac{1}{2}AC$ и $PK \| AC$, $PK = \frac{1}{2}AC \Rightarrow EF = PK, EF \| PK \Rightarrow EFPK$ – параллелограмм (рис.1.72), его диагонали в точке O делятся пополам. Поэтому $AP = PO = OE$ и $CK = KO = OF \Rightarrow AO : OE = 2 : 1$ и $CO : OF = 2 : 1$. Пусть $AE \cap BD = O_1$, то аналогично можем доказать, что $AO_1 : O_1E = BO_1 : O_1D = 2 : 1$. Но мы также доказали, что $AO : OE = 2 : 1$. Поэтому точки О и O_1 совпадают. Следовательно, медиана BD также проходит через точку O и $BO : OD = 2 : 1$. ■

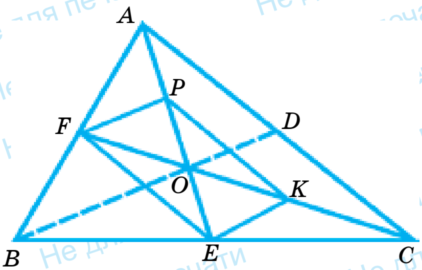


Рис. 1.72

Запомните

В механике точку пересечения медиан треугольника, сделанного из однородного материала, называют его центром тяжести, или центром масс. А в геометрии эта точка называется **центроидом**.

Окружность, описанная около треугольника

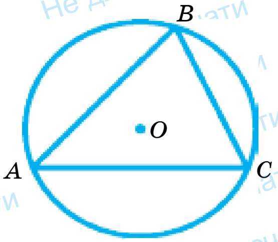


Рис. 1.73

Определение. Окружность, проходящая через все вершины треугольника, называется окружностью, описанной около этого треугольника (рис. 1.73).

Теорема 2. *Серединные перпендикуляры, проведенные к сторонам треугольника, пересекаются в одной точке, являющейся центром окружности, описанной около треугольника.*

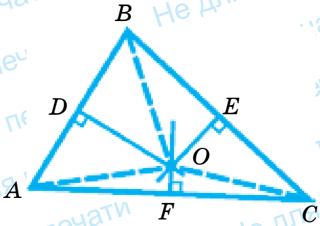


Рис. 1.74

▲ На рис. 1.74 серединные перпендикуляры, проведенные к сторонам AB и BC, пересекаются в точке O. (Самостоятельно покажите, что серединные перпендикуляры сторон AB и BC пересекаются, т.е. не могут не пересекаться.) Тогда $OA = OB = R$ и $OC = OB = R$, т. е. $OA = OC = R \Rightarrow$ серединный перпендикуляр, проведенный к стороне AC, также проходит через точку O. ■

Следствие. *Около любого треугольника можно описать единственную окружность.*

▲ По теореме 2 $AO = BO = CO = R$ (рис. 1.74). Тогда точки A, B, C расположены на окружности с радиусом R с центром в точке O, и эта окружность единственная (по заданному радиусу и центру). ■

Окружность, вписанная в треугольник

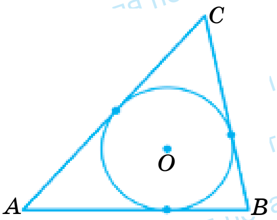


Рис. 1.75

Определение. Окружность называется вписанной в треугольник, если она касается всех его сторон (рис. 1.75). Центр этой окружности иногда называют **инцентром**.

Теорема 3. *В каждом треугольнике биссектрисы пересекаются в одной точке.*

▲ На рис. 1.76 биссектрисы AD и BE пересекаются в точке O. (Самостоятельно обоснуйте этот факт, см. задачу 1.170 (2).) $AD \cap BE = O$. Точки биссектрисы равноудалены от сторон угла. Поэтому точка O расположена на одинаковом расстоянии r от сторон AB и AC. Также точка O находится на одинаковом расстоянии r от сторон BA и BC. Следовательно, точка O находится на одинаковом расстоянии от AC и BC, т. е. точка O лежит на биссектрисе CF. ■

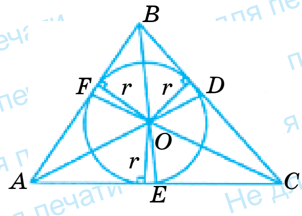


Рис. 1.76

Следствие. *В любой треугольник можно вписать единственную окружность, центр которой находится в точке пересечения биссектрис треугольника.*

▲ Точка O находится на одинаковом расстоянии r от сторон треугольника (рис. 1.76). Тогда окружность с центром в точке O и радиусом r касается всех сторон треугольника, и эта окружность единственная. ■

Точка пересечения высот треугольника

Теорема 4. *Высоты любого треугольника пересекаются в одной точке.*

▲ Проведем прямые A_1B_1, A_1C_1, B_1C_1 так, чтобы $A_1B_1 \| AB$, $A_1C_1 \| AC$, $B_1C_1 \| BC$ (рис. 1.77). Тогда отрезки AB, AC и BC являются средними линиями $\triangle A_1B_1C_1$ (докажите это самостоятельно). Следовательно, отрезки AD, BE и CF как серединные перпендикуляры $\triangle A_1B_1C_1$ пересекаются в одной точке O. С другой стороны, отрезки AD, BE и CF являются высотами $\triangle ABC$, которые пересекаются в точке O. ■

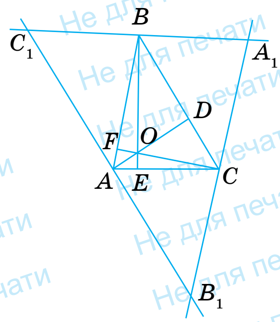


Рис. 1.77

Точка пересечения высот треугольника называется **ортоцентром.**

Вневписанная в треугольник окружность

Определение. Вневписанной в треугольник окружностью называется окружность, касающаяся одной стороны треугольника и продолжения двух других его сторон (рис. 1.78.)

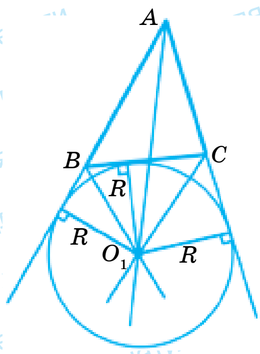


Рис. 1.78

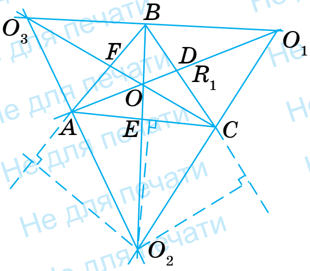


Рис. 1.79

Теорема 5. *Биссектриса одного угла с биссектрисами внешних углов при других вершинах пересекаются в одной точке* (рис. 1.79).

Следствие. *При каждой стороне любого треугольника можно построить единственную вневписанную окружность, центром которой является точка пересечения биссектрисы, проведенной из вершины, противолежащей этой стороне, и биссектрис внешних углов при двух других вершинах.* Доказывается так же, как следствие теоремы 3.

Докажите самостоятельно

Теорема 5 доказывается так же, как и теорема 3. Следствие теоремы 5 доказывается так же, как и следствие теоремы 3.

Обратите внимание! Итак, мы узнали, что любой треугольник имеет точки, называемые *замечательными точками треугольника*: точку пересечения медиан, точку пересечения серединных перпендикуляров, точку пересечения биссектрис, точку пересечения высот.

1. Сформулируйте свойство медиан треугольника.
2. Какая окружность называется описанной около треугольника (вписанной в треугольник)?
3. Как найти центр описанной около треугольника окружности?
4. Как найти центр вписанной в треугольник окружности? Сформулируйте и докажите соответствующую теорему.
5. Какие окружности называются вневписанными? Сколько их?
6. Как найти центр вневписанной окружности? Сформулируйте и докажите соответствующую теорему.
7. Сформулируйте и докажите свойства высот треугольника.

Практическая работа

Постройте треугольник *ABC* по своему усмотрению. Для этого треугольника постройте:

а) точку пересечения медиан;

б) точку пересечения высот;

в) описанную окружность;

г) вписанную окружность;

д) вневписанную окружность.

Задачи

А

1.161. Дан треугольник. Постройте окружность: а) вписанную в него; б) описанную около него; б) вневписанную.

1.162. Какой вид имеет треугольник, если: 1) центры вписанной и описанной окружностей совпадают; 2) центр описанной окружности лежит на его стороне; 3) центр вписанной окружности лежит на его высоте; 4) центр описанной окружности лежит на прямой, проходящей через его высоту?

1.163. Высота равностороннего треугольника равна 3 см. Найдите радиус описанной около него окружности и радиус вписанной в него окружности.

1.164. Равнобедренные треугольники ABC и ABD имеют общее основание AB. Докажите, что отрезок CD проходит через середину AB (рис. 1.80).

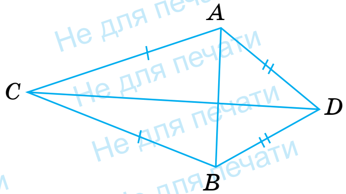


Рис. 1.80

1.165. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна c, а сумма его катетов – S. Найдите диаметр окружности, вписанной в этот треугольник.

1.166. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 120°, а боковая сторона – 2 см. Найдите диаметр окружности, описанной около него.

1.167. Какой вид имеет треугольник, если для данного треугольника: 1) радиусы двух вневписанных окружностей равны; 2) центры вневписанных окружностей лежат на продолжениях медиан?

1.168. Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна 12 см.

В

1.169. Известны середины двух сторон треугольника. Найдите середину третьей его стороны, используя только линейку.

1.170. Могут ли две биссектрисы треугольника быть: 1) перпендикулярными; 2) параллельными? Обоснуйте ответ.

1.171. Докажите, что любой угол треугольника равен паре вертикальных углов, образованных при пересечении прямых, проходящих через высоты, опущенные из двух других вершин треугольника (рис. 1.81).

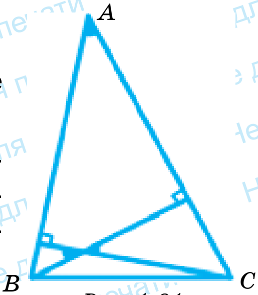


Рис. 1.81

1.172. Может ли радиус описанной около треугольника окружности быть: 1) больше каждой стороны; 2) меньше каждой стороны; 3) равным каждой стороне этого треугольника?

1.173. Докажите, что центры вписанной в равносторонний треугольник окружности и описанной около него совпадают, а их радиусы относятся как 2 : 1.

1.174. Стороны AB и AC треугольника ABC не равны между собой. Докажите, что медиана и высота, проведенные из вершины A, не совпадают.

1.175. В равнобедренном треугольнике ABC серединный перпендикуляр, проведенный к стороне AB, пересекает сторону BC в точке E. Периметр треугольника AEC равен 27 см, а сторона AB равна 18 см. Найдите основание AC треугольника.

1.176. Вершина прямого угла прямоугольного треугольника соединена с центрами описанной и вписанной окружностей отрезками, угол между которыми равен 7°. Найдите острые углы треугольника.

Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90°$, $\angle O_1CO_2 = 7°$, O_1 и O_2 – центры описанной и вписанной в треугольник окружностей (рис. 1.82).

Найти $\angle A$, $\angle B$.

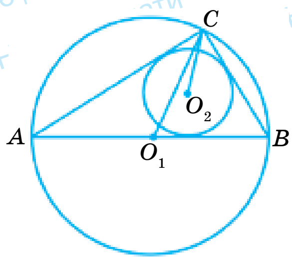


Рис. 1.82

▲ $AO_1 = BO_1 = CO_1 \Rightarrow \triangle AO_1C$ – равнобедренный, CO_2 – биссектриса $\Rightarrow \angle ACO_2 = 45° \Rightarrow \angle A = \angle ACO_1 = \angle ACO_2 - \angle O_1CO_2 = 45° - 7° = 38° \Rightarrow \angle B = 90° - \angle A = 90° - 38° = 52°$.

Ответ: 38°, 52°. ■

1.177. Серединные перпендикуляры к сторонам AB и AC треугольника ABC пересекаются в точке D на стороне BC. Докажите, что: а) точка D – середина отрезка BC; б) $\angle A = \angle B + \angle C$.

1.178. Сколько существует окружностей, касающихся трех попарно пересекающихся прямых, не проходящих через одну точку? Постройте эти окружности.

C

1.179. Докажите, что сумма диаметров вписанной в прямоугольный треугольник окружности и описанной около него равна сумме катетов этого треугольника.

1.180. Постройте равнобедренный треугольник по основанию и радиусу описанной окружности.

1.181. Из вершины B треугольника ABC проведена высота BH, биссектриса BE и радиус BO описанной окружности. Докажите, что прямая BE является биссектрисой угла OBH (рис. 1.83).

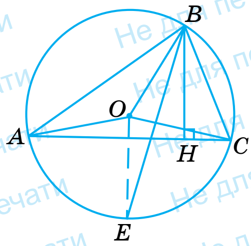


Рис. 1.83

1.182. Даны три прямые, проходящие через точку O, и точка A, лежащая на одной из них. Постройте треугольник так, чтобы: 1) одна из его вершин была бы в точке A и высоты лежали бы на данных прямых; 2) одна из его вершин была бы в точке A и медианы лежали бы на данных прямых; 3) одна из его вершин была бы в точке A и биссектрисы лежали бы на данных прямых; 4) середина одной из сторон совпала бы с точкой A и данные прямые были бы серединными перпендикулярами к его сторонам.

1.183. Докажите, что в любом треугольнике ABC биссектриса AE лежит между медианой AN и высотой AH.

1.184. Постройте треугольник, если даны биссектриса, медиана и высота, проведенные из одной вершины.

1.185. Вне треугольника ABC построены квадраты $ABDE$ и $ACFG$ со сторонами AB и AC, причем точки D и F расположены напротив вершины A. Докажите, что отрезок EG перпендикулярен медиане треугольника, проведенной из вершины A, и что он в два раза длиннее этой медианы.

1.186. Медианы AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке O под прямым углом (рис. 1.84). Докажите, что выполняется равенство $AB = CO$.

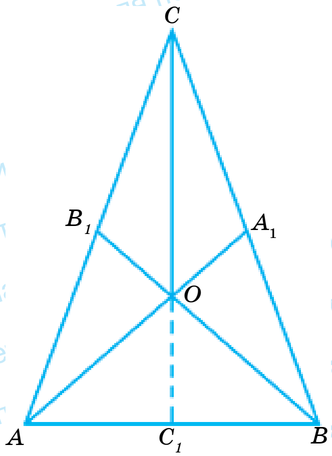


Рис. 1.84

1.8*. ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

Свойство угла, вписанного в окружность

Определения. 1) Многоугольник называется **вписанным** в окружность, если все его вершины лежат на этой окружности. На рис. 1.85 пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность.

2) Многоугольник называется **описанным** около окружности, если все его стороны касаются этой окружности. На рис. 1.86 пятиугольник $ABCDE$ описан около окружности.

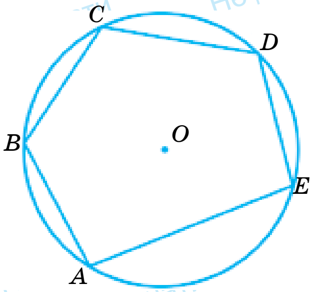


Рис. 1.85

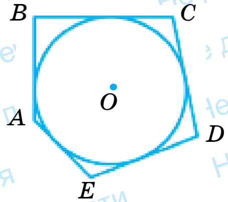


Рис. 1.86

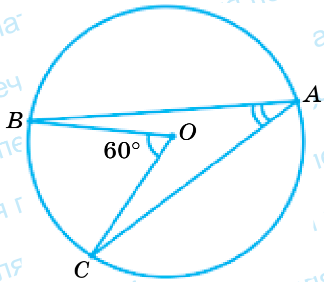


Рис. 1.87

3) Угол, образованный двумя хордами, исходящими из одной точки, называется вписанным в окружность (рис.1.87). Общую точку этих хорд называют вершиной угла. Дуга BC называется дугой, на которую опирается вписанный угол. Угол BOC называется центральным углом. Градусная мера дуги BC измеряется величиной центрального угла BOC. Например, если $\angle BOC = 60^\circ$, то по определению считается, что $\smile BC = 60^\circ$.

Теорема 1. *Величина вписанного угла равна половине градусной меры дуги, на которую он опирается.*

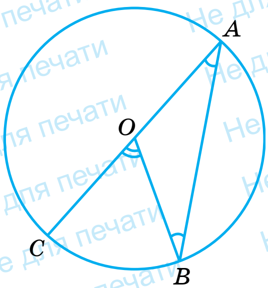


Рис. 1.88

I случай. ▲ Пусть центр окружности лежит на стороне вписанного угла (рис. 1.88). AC − диаметр $\Rightarrow$ $\Rightarrow AO = OB = R \Rightarrow \triangle AOB$ − равнобедренный $\Rightarrow \angle OAB =$ $= \angle OBA$ и $\angle COB$ − внешний угол $\Rightarrow 2(\angle CAB) = \angle OAB +$ $+ \angle OBA = \angle COB = \smile BC \Rightarrow \angle CAB = \frac{1}{2} \smile BC.$ ■

II случай. ▲ Пусть O является внутренней точкой $\angle BAC$. (рис. 1.89). Проведем диаметр AD. Тогда по доказанному: $\angle BAC = \angle BAD + \angle DAC = \frac{1}{2}(\smile BD) +$ $+ \frac{1}{2}(\smile DC) = \frac{1}{2}(\smile BC)$. ■

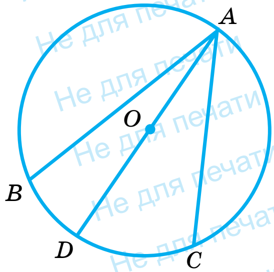


Рис. 1.89

III случай. ▲ Пусть точка О находится вне угла $\angle BAC$ (рис. 1.90). Проведем диаметр AD. Тогда $\angle BAC =$ $= \angle CAD - \angle BAD = \frac{1}{2}(\smile DC) - \frac{1}{2}(\smile BD) = \frac{1}{2}(\smile BC)$. ■

Следствие. *Вписанный угол, опирающийся на диаметр, равен 90°.*

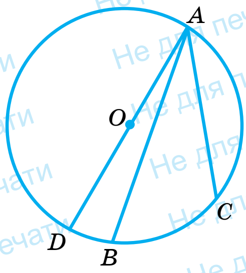


Рис. 1.90

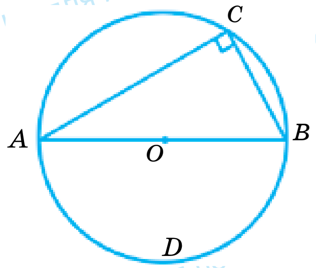


Рис. 1.91

▲ На рис. 1.91 AB – диаметр $\Rightarrow \smile ADB = 180° \Rightarrow \angle ACB = \frac{1}{2}(\smile ADB) = \frac{1}{2} \times$ $\times\, 180° = 90°$. ■

Вписанные и описанные четырехугольники

Задумайтесь

Можно ли назвать фигуры из рисунка 1.92 вписанными в окружность и описанными около окружности? Обосуйте ответ.

Не в любой четырехугольник можно вписать окружность или описать около него окружность. Например, в прямоугольник, не являющийся квадратом, нельзя вписать окружность, а около параллелограмма, не являющегося прямоугольником, нельзя описать окружность (рис. 1.92). Но все же существуют вписанные и описанные четырехугольники. Рассмотрим некоторые их свойства.

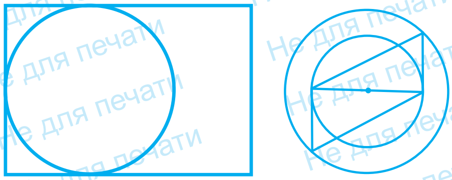


Рис. 1.92

Теорема 2. *Сумма противоположных углов вписанного четырехугольника равна* $180°$.

▲ Пусть $ABCD$ – вписанный четырехугольник (рис. 1.93). Тогда по свойству вписанных углов имеем:

$$\angle A = \frac{1}{2} \smile BCD, \quad \angle C = \frac{1}{2} \smile BAD.$$

Значит, $\angle A + \angle C = \frac{1}{2} \smile BCD + \frac{1}{2} \smile BAD =$ $= \frac{1}{2}(\smile BCD + \smile BAD)$. Но сумма дуг $\smile BCD$ и $\smile BAD$ составляет полную окружность. Поэтому

$$\angle A + \angle C = \frac{1}{2} \cdot 360° = 180°. \ ■$$

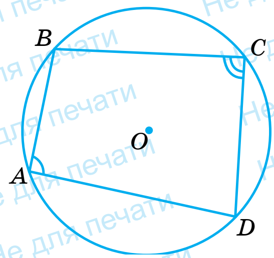


Рис. 1.93

Теорема 3. *Если сумма противоположных углов четырехугольника равна 180°, то около этого четырехугольника можно описать окружность.*

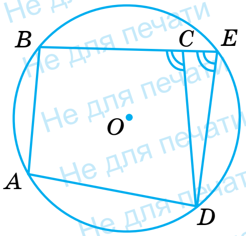


Рис. 1.94

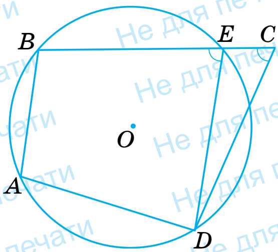


Рис. 1.95

▲ Пусть в четырехугольнике $ABCD$ $\angle A + \angle C = 180°$. Около треугольника ABD опишем окружность. Теперь докажем, что точка C лежит на окружности. Предположим, что точка C не лежит на окружности, тогда точка C должна находиться внутри или вне окружности. Пусть точка C находится внутри окружности (рис. 1.93). Пусть прямая BC пересекает окружность в точке E. Тогда $\angle A + \angle C = 180°$ и $\angle A + \angle E = 180°$, откуда получим $\angle C = \angle E$, что невозможно. Полученное противоречие показывает, что точка C не может находится внутри окружности. Аналогично можно доказать, что точка C не лежит вне окружности (рис. 1.95). Поэтому точка C лежит на окружности, т. е. около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность. ■

Теорема 4. *В описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны.*

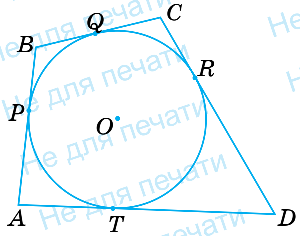


Рис. 1.96

▲ Пусть четырехугольник $ABCD$ описан около окружности. Обозначим точки касания вписанной окружности со сторонами четырехугольника через P, Q, R, T (рис. 1.96). Мы знаем, что касательные к окружности, проведенные из одной точки, равны: $AP = AT$, $BP = BQ$, $CR = CQ$, $DR = DT$. Сложив почленно эти равенства, получим: $(AP + BP) + (CR + DR) = (AT + DT) + (BQ + CQ)$ или $AB + CD = AD + BC$. ■

Теорема 5. *Если в выпуклом четырехугольнике суммы противоположных сторон равны, то в этот четырехугольник можно вписать окружность.*

▲ Пусть в четырехугольнике $ABCD$ имеет место равенство: $AB + CD = AD + BC$. Обозначим через K точку пересечения продолжения сторон AB и CD (рис. 1.97). (Если эти стороны не пересекаются, то обозначим через K точку пересечения продолжения сторон AD и BC. Но если и они не пересекаются, то $ABCD$ является ромбом (обоснуйте этот факт, предварительно обсудив его в группе) и в него можно вписать окружность.) ■

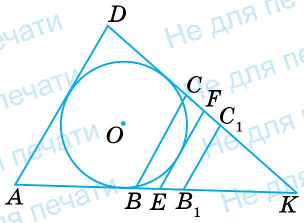


Рис. 1.97

Докажите самостоятельно

Используя метод, показанный в теореме 3, докажите, что окружность, вписанная в треугольник ADK, касается стороны BC четырехугольника $ABCD$.

1. Что такое вписанный и описанный многоугольники?
2. Какой угол называют вписанным?
3. Какая зависимость существует между вписанным углом и дугой, на которую он опирается (соответствующим центральным углом)? Сформулируйте и докажите соответствующее свойство.
4. Сформулируйте и докажите теорему о сумме углов вписанного четырехугольника.
5. Сформулируйте и докажите теорему об описанных четырехугольниках.
6. В какие параллелограммы можно вписать окружность? Около каких параллелограммов можно описать окружность?
7. Какой вид имеет трапеция:
1) вписанная в окружность;
2) описанная около окружности?

Практическая работа

1. Постройте вписанную и описанную окружности, если даны:
   1) равносторонний треугольник; 2) квадрат.
2. В данную окружность впишите трапецию и около нее опишите трапецию.

Задачи

А

1.187. Постройте квадрат: 1) вписанный в данную окружность; 2) описанный около данной окружности; 3) по радиусу описанной окружности; 4) по радиусу вписанной окружности.

1.188. Можно ли описать окружность около четырехугольника, если его углы, взятые в последовательном порядке, равны: 1) 90°, 90°, 60°, 120°; 2) 70°, 130°, 110°, 50°; 3) 45°, 75°, 135°, 105°?

1.189. Можно ли описать окружность около четырехугольника, углы которого, взятые в последовательном порядке, относятся как: 1) 2, 3, 4, 3; 2) 7, 2, 4, 5?

1.190. Докажите, что: 1) любая трапеция, вписанная в окружность, равнобедренная; 2) любой параллелограмм, вписанный в окружность, есть прямоугольник; 3) любой ромб, вписанный в окружность, есть квадрат.

1.191. Можно ли вписать окружность в четырехугольник, углы которого, взятые в последовательном порядке, относятся как: 1) 2, 2, 3, 3; 2) 2, 5, 3, 4; 3) 3, 5, 3, 1?

1.192. Сумма двух противоположных сторон описанного четырехугольника равна 15 см. Найдите периметр четырехугольника.

B

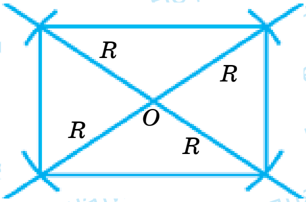


Рис. 1.98

1.193. Постройте прямоугольник по радиусу описанной окружности и углу между диагоналями (рис. 1.98).

1.194. Постройте ромб по стороне и радиусу вписанной окружности.

1.195. Докажите, что если в параллелограмм можно вписать окружность, то он является ромбом.

1.196. В параллелограмм вписана окружность. Как можно охарактеризовать этот параллелограмм?

1.197. В прямоугольнике диагональ образует с одной из сторон угол в 30°, а радиус окружности, описанной около него, равен R. Найдите меньшую сторону прямоугольника.

1.198. Докажите, что около всякого прямоугольника можно описать окружность.

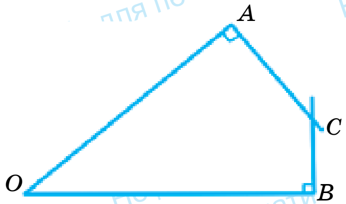


Рис. 1.99

1.199. Боковая сторона равнобедренной трапеции, описанной около окружности, равна 14 см. Найдите периметр трапеции.

1.200. Перпендикуляры, проведенные к сторонам угла AOB в точках A и B, пересекаются в точке C, лежащей внутри этого угла. Докажите, что около четырехугольника $ACBO$ можно описать окружность (рис. 1.99).

1.201. Если в параллелограмм можно вписать и около него описать окружность, то он является квадратом. Докажите.

C

1.202. Докажите, что около четырехугольника, полученного при пересечении биссектрис произвольного выпуклого четырехугольника, можно описать окружность.

1.203. Докажите, что около четырехугольника, полученного при пересечении биссектрис внешних углов произвольного выпуклого четырехугольника, можно описать окружность.

1.204. Окружность на сторонах выпуклого четырехугольника отсекает равные между собой хорды. Докажите, что суммы противоположных сторон этого четырехугольника равны.

1.205. Может ли радиус окружности, вписанной в равнобедренную трапецию с основаниями 24 см и 16 см, равняться 8 см?

Упражнения для повторения

1.206. Докажите, что прямые, соединяющие точки касания противоположных сторон описанной равнобедренной трапеции, проходят через точку пересечения ее диагоналей.

1.207. Покажите, что заключение задачи **1.206** выполняется для любого четырехугольника, описанного около окружности (рис. 1.100).

1.208. На рисунке 1.101 $AB = DC$, $AD = BC$, $\angle ABC = 125°$. Найдите угол α.

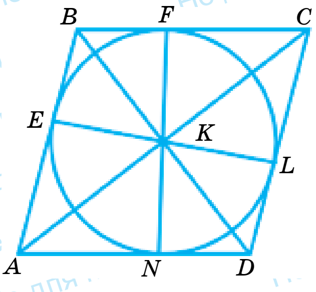


Рис. 1.100

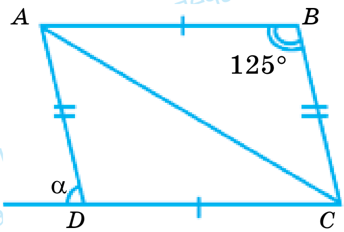


Рис. 1.101

Раздел 2. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

Изучив материалы данного раздела, мы достигнем следующих целей:

- будем знать определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса углов через отношения сторон в прямоугольном треугольнике;
- будем доказывать и применять теорему Пифагора;
- будем доказывать и применять свойства высоты, опущенной из вершины прямого угла на гипотенузу;
- будем выводить формулу $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, используя теорему Пифагора, и применять при решении задач;
- будем выводить и применять основные тригонометрические тождества;
- будем знать и применять взаимосвязь между синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом углов α и $(90° - \alpha)$;
- будем находить значения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$ и $\mathrm{ctg}\alpha$ по данному значению одного из них;
- будем строить угол по известному значению его синуса, косинуса, тангенса или котангенса;
- будем использовать прямоугольный треугольник для вывода значений синуса, косинуса, тангенса и котангенса углов 30°, 45°, 60°;
- будем применять значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса углов 30°, 45°, 60° для нахождения элементов прямоугольного треугольника;
- будем находить стороны и углы прямоугольного треугольника по двум заданным элементам.

2.1. ТЕОРЕМА О ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫХ ОТРЕЗКАХ. ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

Пропорциональные отрезки

Определение. Отношением отрезков AB и CD называется отношение их длин.

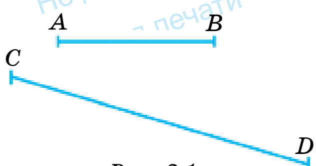


Рис. 2.1

$AB = 2$ см, $CD = 4$ см.

$\frac{AB}{CD} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, т. е. отношение отрезков AB и CD равно $\frac{1}{2}$ (рис. 2.1).

Если выполняется равенство $\frac{AB}{CD} = \frac{A_1B_1}{C_1D_1}$, то говорят, что отрезки AB и CD пропорциональны отрезкам A_1B_1 и C_1D_1.

Если $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{CD}{C_1D_1} = \dfrac{PQ}{P_1Q_1}$, то отрезки AB, CD, PQ пропорциональны отрезкам A_1B_1, C_1D_1, P_1Q_1.

$\Delta\ ABC$: $AB = 10$ см, $AC = 7$ см.

$AB_1 = 6$ см, $AC_1 = 4{,}2$ см. $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{10}{7}$, $\dfrac{AB_1}{AC_1} = \dfrac{6}{4{,}2} = \dfrac{10}{7}$,

т. е. отрезки AB и AC пропорциональны отрезкам AB_1 и AC_1.

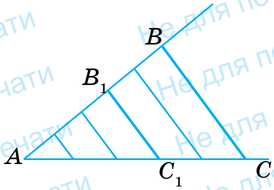


Рис. 2.2

Теорема 1. *Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают от сторон угла пропорциональные отрезки.*

Пусть параллельные прямые пересекают стороны угла A в точках B, C и B_1, C_1 соответственно (рис. 2.3). Доказать, что $\dfrac{AB_1}{AB} = \dfrac{AC_1}{AC}$.

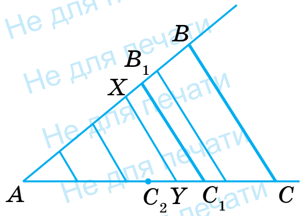


Рис. 2.3

▲ Допустим, что существует отрезок длиной ε, который можно целое число раз отложить на отрезках AC и AC_1, т. е. существуют целые числа n и m такие, что $AC = n \cdot \varepsilon$, $AC_1 = = m \cdot \varepsilon$, $n > m$.

Разобьем отрезок AC на n равных частей и проведем через точки деления прямые, параллельные BC. Тогда точка C_1 совпадет с одной из точек деления. По теореме Фалеса, проведенные параллельные прямые разбивают отрезок AB на равные отрезки с некоторой длиной δ. Следовательно, $AB = n\delta$, $AB_1 = m\delta$, получим, что $\dfrac{AC_1}{AC} = \dfrac{m\varepsilon}{n\varepsilon} = \dfrac{m}{n}$, $\dfrac{AB_1}{AB} = \dfrac{m\delta}{n\delta} = \dfrac{m}{n}$, т. е. получили равенство $\dfrac{AB_1}{AB} = \dfrac{AC_1}{AC}$.

Однако может случиться так, что нет отрезка длиной ε, который можно было бы целое число раз отложить на отрезках AC и AC_1. В этом случае также можно доказать пропорциональность указанных отрезков. ■

Косинус острого угла

Определение. Косинусом острого угла α прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе. Косинус угла α обозначается так: cos α.

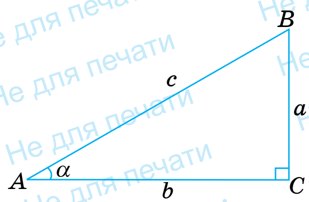


Рис. 2.4

На рис. 2.4 показан прямоугольный треугольник ABC с острым углом A, равным α. Прилежащий к нему катет $AC = b$, а гипотенуза $AB = c$. По определению получим: $\cos\alpha = \dfrac{AC}{AB}$, или $\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$.

Теорема 2. *Косинус угла зависит только от градусной меры угла и не зависит от расположения и размеров треугольника.*

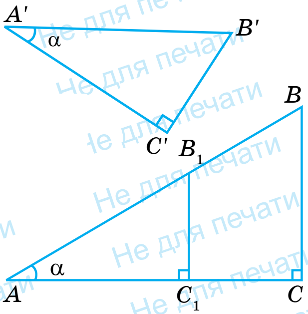


Рис. 2.5

▲ Пусть ABC и $A'B'C'$ – два прямоугольных треугольника с одним и тем же углом при вершинах A и A', равным α (рис. 2.5).

Доказать, что $\dfrac{A'C'}{A'B'} = \dfrac{AC}{AB}$.

Построим треугольник AB_1C_1, равный треугольнику $A'B'C'$, как показано на рис. 2.5. Так как $AC \perp BC, AC \perp B_1C_1$, то $BC \parallel B_1C_1$. Тогда по свойству пропорциональных отрезков $\dfrac{AC_1}{AB_1} = \dfrac{AC}{AB}$. А так как по построению $AC_1 = A'C'$, $AB_1 = A'B'$, то выполняется равенство $\dfrac{A'C'}{A'B'} = \dfrac{AC}{AB}$. ■

Пример. Даны отрезки длиной a, b, c. Построим отрезок $x = \dfrac{bc}{a}$.

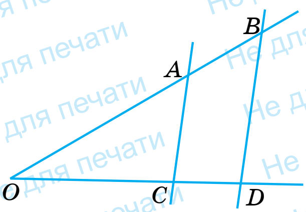


Рис. 2.6

▲ Построим любой неразвернутый угол с вершиной в точке O. Отложим на одной стороне угла отрезки $OA = a$, $OB = b$, а на другой стороне – отрезок $OC = c$ (рис. 2.6). Затем соединим точки A и C прямой и проведем параллельную ей прямую через точку B. Пусть эта прямая пересечет вторую сторону угла в точке D. Тогда по теореме 1 получим равенства $\dfrac{OA}{OB} = \dfrac{OC}{OD}$ или $OD = \dfrac{OB \cdot OC}{OA} = \dfrac{bc}{a}$, т. е. отрезок OD и есть искомый отрезок. ■

Теорема Пифагора

Задумайтесь

Землемеры Древнего Египта и Вавилона при измерении земельных участков использовали нижеследующий способ. Они делили веревку узлами на 12 равных частей и концы связывали. Затем веревку растягивали на земле так, что получался треугольник со сторонами с 3, 4 и 5 делениями. Угол треугольника, противолежащий стороне с 5 делениями, был прямым ($3^2 + 4^2 = 5^2$). Поэтому этот треугольник стали называть *египетским*. Почему использовали египетский треугольник при измерении земельных участков?

Теорема. *В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов:* $a^2 + b^2 = c^2$.

▲ Проведем высоту из вершины прямого угла C прямоугольного треугольника ABC (рис. 2.7). По определению косинуса угла $\cos(\angle A) = \dfrac{AC}{AB}$. Из прямоугольного треугольника ACD получим равенство $\cos(\angle A) = \dfrac{AD}{AC}$. Отсюда получим $AB \cdot AD = AC^2$. Аналогично из равенства $\cos(\angle B) = \dfrac{BD}{BC} = \dfrac{BC}{AB}$ получим равенство $AB \cdot BD = BC^2$. Складывая почленно полученные равенства и учитывая, что $AD + BD = AB$, получим равенство $AC^2 + BC^2 = AB \cdot AD + AB \cdot BD = AB(AD + BD) = AB^2$. ■

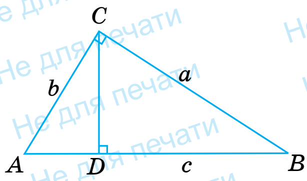


Рис. 2.7

Из теоремы Пифагора следует, что в прямоугольном треугольнике любой из катетов меньше гипотенузы. Отсюда также следует, что для любого острого угла α выполняется неравенство $\cos\alpha < 1$. Также заметим, что верна теорема, обратная теореме Пифагора (см. задачи 2.28 и 2.35). Например, если в некоторых доказательствах равенство $c^2 = a^2 + b^2$ обосновывается по принципу равносоставленности, где площади квадратов a^2, b^2 и c^2 делятся на равные части (рис. 2.8), то в других доказательствах применяется понятие площади. Например, по рис. 2.9 площадь квадрата можно определить двумя способами:

$$S = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2};$$

$S = c^2 + 4 \cdot \dfrac{ab}{2} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$. Здесь $\dfrac{ab}{2}$ – площадь закрашенного прямоугольного треугольника. Аналогично прокомментируйте доказательство теоремы Пифагора (рис. 2.8).

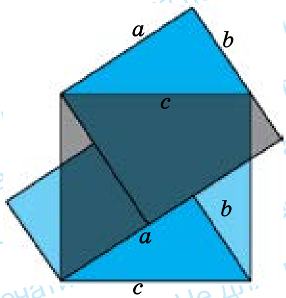


Рис. 2.8

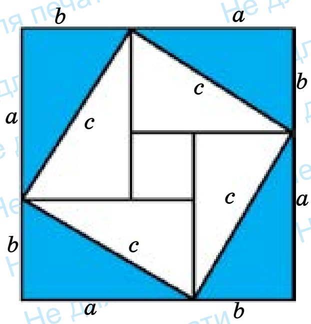


Рис. 2.9

Материалы из истории

Пифагор
(VI в. до н. э.)

Доказанная теорема приписывается древнегреческому ученому Пифагору, хотя она была известна издавна.

Хотя теорема Пифагора была известна и до него, сам Пифагор внес определенный вклад в ее математическое обоснование: он нашел ее доказательство. Если верить легендам, дошедшим до нас, то говорят, что Пифагор, обрадованный открытием, принес в жертву богам быка. В наши дни известно более ста разных доказательств теоремы Пифагора.

1. Какие отрезки называют пропорциональными?
2. Сформулируйте и докажите теорему о пропорциональных отрезках.
3. Что называют косинусом острого угла? Как его обозначают?
4. Докажите, что косинус угла зависит только от градусной меры и не зависит от расположения и размеров треугольника.
5. Сформулируйте и докажите теорему Пифагора.
6. Какой треугольник называется египетским?

Практическая работа

1. Постройте отрезок и разделите его на указанное число равных частей: 1) 3; 2) 4; 3) 5.
2. Постройте на глаз прямоугольный треугольник, проверьте правильность построения чертежа при помощи измерений и теоремы Пифагора (используйте калькулятор).

ГЕОМЕТРИЯ И АРХИТЕКТУРА

Дворец Мира и Согласия имеет форму правильной четырехгранной пирамиды и является символом дружбы, единения и мира на земле Казахстана. Автором проекта является известный британский архитектор Норман Фостер. Эта пирамида заключает в себе пропорции золотого сечения Фибоначчи: сторона основания имеет длину 61,80339887 м, высота равна 61,80339887 м, т. е. в размерах дан коэффициент золотого сечения, умноженный на 100 и выраженный в метрах.

Творческая работа

Основанием пирамиды, построенной в Астане, является квадрат со стороной, равной 61,8 м, боковые ребра примерно равны 75,7 м. Каждая боковая грань пирамиды разделена отрезками, параллельными боковым ребрам треугольника.

1) Определите длину отрезков, округляя результат до 0,1 см.

2) Проверьте результат, применяя теорему Фалеса.

3) Определите высоту боковых граней данной пирамиды, выражая результат в мерах.

Задачи

А

2.1. В прямоугольном треугольнике один из катетов равен a, гипотенуза – c. Найдите косинус угла, противолежащего данному катету, если: 1) $a = 10$, $c = 12$; 2) $a = 3$, $c = 5$; 3) $a = 1{,}5$ $c = 3$.

2.2. Постройте угол, косинус которого равен: 1) $\frac{3}{5}$; 2) $\frac{4}{9}$; 3) 0,5; 4) 0,8.

2.3. В прямоугольном треугольнике даны катеты a и b. Найдите его гипотенузу, если: 1) $a = 3$, $b = 4$; 2) $a = 1$, $b = 1$; 3) $a = 5$, $b = 6$; 4) $a = 0{,}5$, $b = 1{,}2$.

2.4. Стороны треугольника относятся как 5 : 12 : 13. Докажите, что этот треугольник является прямоугольным.

2.5. В прямоугольном треугольнике даны катет a и гипотенуза c. Найдите его второй катет, если 1) $a = 3$, $c = 5$; 2) $a = 5$, $c = 13$; 3) $a = 0{,}5$, $c = 1{,}3$.

2.6. Две стороны прямоугольного треугольника равны 3 м и 4 м. Найдите его третью сторону.

2.7. Могут ли стороны прямоугольного треугольника быть пропорциональны числам 5, 6, 7?

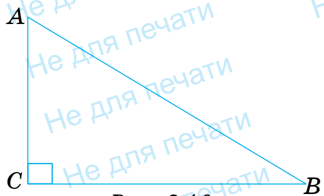


Рис. 2.10

▲ Если это возможно, то верны равенства $AC = 5\,k$, $BC = 6\,k$ и $AB = 7\,k$, где k – коэффициент пропорциональности (рис. 2.10), $\triangle ABC$ – прямоугольный, необходимо, чтобы $AB^2 = AC^2 + BC^2$. Однако $AC^2 + BC^2 = (5\,k)^2 + (6\,k)^2 = 61\,k^2 \neq 49\,k^2 = AB^2$, т. е. стороны прямоугольного треугольника не могут быть пропорциональны числам 5, 6, 7. ■

2.8. Диагонали ромба равны: 1) 6 см и 8 см; 2) 16 см и 30 см; 3) 5 м и 12 м. Найдите его стороны.

2.9. Стороны прямоугольника равны 60 см и 91 см. Найдите его диагональ.

2.10. Будет ли треугольник прямоугольным, если его стороны выражены числами: 1) 6, 8, 10; 2) 5, 6, 7; 3) 9, 12, 15; 4) 10, 24, 26; 5) 3, 4, 6; 6) 11, 9, 13; 7) 15, 20, 25?

2.11. Могут ли все стороны прямоугольного треугольника выражаться: 1) четными числами; 2) нечетными числами?

2.12. Могут ли только две стороны прямоугольного треугольника выражаться: 1) четными числами; 2) нечетными числами?

2.13. Какими тремя последовательными натуральными числами могут выражаться стороны прямоугольного треугольника?

2.14. В прямоугольном треугольнике один из катетов равен 8 см, а косинус прилежащего к нему угла – 0,8. Найдите гипотенузу и второй катет.

2.15. Катеты прямоугольного треугольника равны 12 см и 5 см. Найдите диаметр окружности, описанной около него.

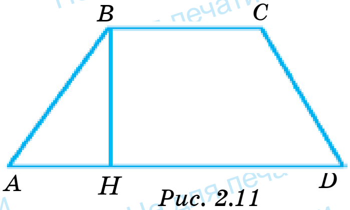


Рис. 2.11

B

2.16. Основания равнобедренной трапеции равны 5 м и 11 м, а боковая сторона – 5 м. Найдите высоту трапеции (рис. 2.11).

2.17. Найдите высоту равностороннего треугольника со стороной a.

2.18. Даны отрезки a и b. Постройте отрезок, длина которого равна: 1) $\sqrt{a^2+b^2}$; 2) $\sqrt{a^2-b^2}$, $a > b$.

2.19. Сторона ромба равна 10 см, одна из диагоналей – 12 см. Найдите вторую диагональ ромба.

2.20. Если длины сторон прямоугольного треугольника выражаются целыми числами, то их называют *пифагорейскими*. Докажите, что треугольники, стороны которых выражаются формулами $a = 2mn$, $b = m^2 - n^2$, $c = m^2 + n^2$, $m > n$, где m, n – натуральные числа, являются пифагорейскими.

2.21. Между двумя фабричными зданиями устроен покатый желоб для передачи материалов. Расстояние между зданиями равно 10 м, а концы желоба расположены на высоте 8 м и 4 м над землей. Найдите длину желоба.

2.22. Пусть c – гипотенуза, a, b – катеты, h – высота, проведенная к гипотенузе, a_c, b_c – проекции катетов на гипотенузу прямоугольного треугольника. Найдите: 1) c, h, a_c, b_c, если $a = 9$ см, $b = 12$ см; 2) b, h, a_c, b_c, если $a = 12$ см, $c = 13$ см.

2.23. Расстояние между центрами двух окружностей с радиусами 6 см и 2 см равно 10 см. Найдите длины их общих внутренних и внешних касательных (рис. 2.12).

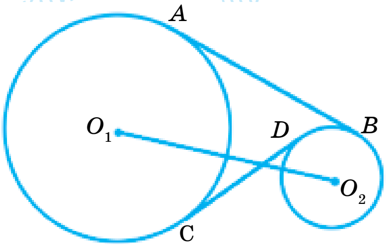


Рис. 2.12

2.24. Докажите, что из двух неравных хорд окружности большую длину имеет та, которая расположена ближе к центру.

2.25. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна c, а один из острых углов – α. Найдите второй острый угол и катеты.

2.26. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна c, а один из острых углов – α. Найдите катеты, их проекции на гипотенузу и высоту, проведенную к гипотенузе.

2.27. Внутри прямого угла взята точка, которая находится на расстоянии a и b от его сторон. Найдите расстояние от этой точки до вершины угла (рис. 2.13).

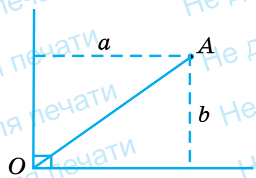


Рис. 2.13

2.28. Сформулируйте теорему, обратную теореме Пифагора.

2.29. Две окружности, радиусы которых равны r, проходят через центры друг друга. Выразите r через их общую хорду.

2.30. Найдите расстояние от центра окружности до хорды длиной 8 см, если радиус окружности равен 5 см.

C

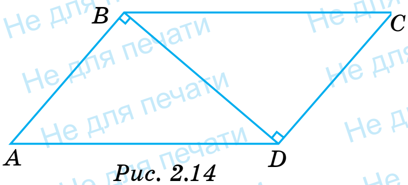


Рис. 2.14

2.31. Одна из диагоналей параллелограмма является его высотой. Найдите стороны и диагонали параллелограмма, если разность двух его сторон равна 1 см, а периметр равен 50 см (рис. 2.14).

2.32. Найдите высоту, проведенную к гипотенузе прямоугольного треугольника, если его катеты равны: 1) 5 м, 12 м; 2) 12 м, 16 м.

2.33. Найдите меньшую высоту треугольника, если его стороны равны: 1) 24 см, 25 см, 7 см; 2) 15 дм, 17 дм, 8 дм.

2.34. Как построить отрезок $x = \sqrt{ab}$, если даны отрезки a и b?

2.35. Пусть a, b, c – стороны треугольника, для которых выполняется равенство $a^2 + b^2 = c^2$. Докажите, что этот треугольник является прямоугольным.

2.36. Найдите катеты прямоугольного треугольника, если его биссектриса делит гипотенузу на части, равные 12 см и 5 см.

2.37. Вписанная в прямоугольный треугольник окружность точкой касания делит гипотенузу на части, равные m и n, ($m > n$). Найдите радиус этой окружности.

2.38. Две равные и взаимно перпендикулярные хорды окружности в точке пересечения делятся на части длиной 10 см и 16 см. Найдите радиус окружности.

2.39. Диагонали четырехугольника взаимно перпендикулярны. Докажите, что суммы квадратов его противоположных сторон равны.

2.40. В прямоугольном треугольнике один из углов равен среднему арифметическому двух других углов. Найдите катеты этого треугольника, если его гипотенуза равна c.

2.2. СИНУС, ТАНГЕНС И КОТАНГЕНС ОСТРОГО УГЛА

Определение синуса, тангенса и котангенса острого угла

$\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$ **Косинус острого угла α** равен отношению прилежащего катета к гипотенузе.

$\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$

Синус острого угла α равен отношению противолежащего катета к гипотенузе.

$\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{a}{b}$

Тангенсом угла α называется отношение синуса угла α к его косинусу, или отношение противолежащего катета к прилежащему.

$\mathrm{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{a}$

Котангенсом угла α называется отношение косинуса угла α к его синусу, или отношение прилежащего катета к противолежащему катету.

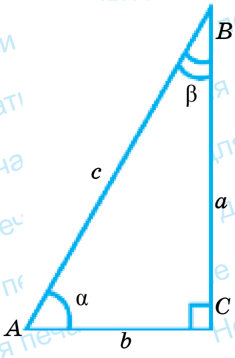


Рис. 2.15

Из данных определений можно вывести формулы:

$$\begin{aligned} &1.\ a = c \cdot \sin\alpha \\ &2.\ b = c \cdot \cos\alpha \\ &3.\ a = b \cdot \mathrm{tg}\,\alpha \\ &4.\ b = a \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha \end{aligned} \qquad (1)$$

Прочитайте самостоятельно

Прочитайте формулы (1), используя рисунок 2.16.
Например, формула $a = c \cdot \sin\alpha$ читается так: «Катет a, противолежащий углу α, равен произведению гипотенузы c и синуса этого угла ($\sin\alpha$)».

Рассмотрим примеры с использованием формул (1).

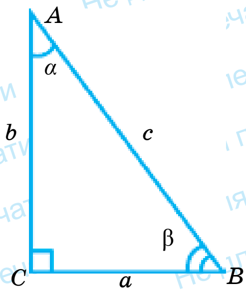


Рис. 2.16

Пример. Дано: ABC – прямоугольный треугольник, $\angle C = 90°$, $AB = c$, $\angle A = \alpha$, $CH \perp AB$ (рис. 2.17).

Найти AC, BC, CH, AH и BH.

▲ $AC = AB \cdot \cos\alpha = c \cdot \cos\alpha$, $BC = AB \cdot \sin\alpha = c \times \sin\alpha$, $\angle AHC = 90° \Rightarrow \Delta ACH$, ΔBCH – прямоугольные и $\angle BCH = \alpha$.

Тогда $AH = AC \cdot \cos\alpha = c \cdot \cos\alpha \cdot \cos\alpha = c \cdot \cos^2\alpha$,
$BH = BC \cdot \sin\alpha = c \cdot \sin\alpha \cdot \sin\alpha = c \cdot \sin^2\alpha$,
$CH = AC \cdot \sin\alpha = c \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha$.

Ответ: $AC = c \cdot \cos\alpha$, $BC = c \cdot \sin\alpha$, $CH = c \cdot \cos\alpha \times \sin\alpha$. $AH = c \cdot \cos^2\alpha$, $BH = c \cdot \sin^2\alpha$. ■

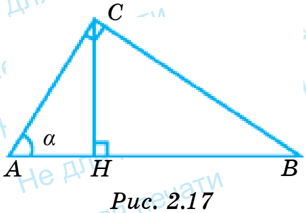
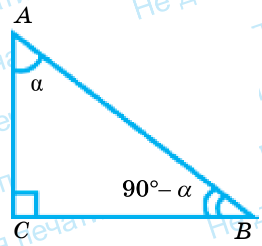


Рис. 2.17

Запомните!

Значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса некоторых углов

$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$	$\cos\alpha = \dfrac{AC}{AB}$, $\sin(90^\circ - \alpha) = \dfrac{AC}{AB}$.	 Рис. 2.18
$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$	$\cos(90^\circ - \alpha) = \dfrac{BC}{AB}$, $\sin\alpha = \dfrac{BC}{AB}$.	

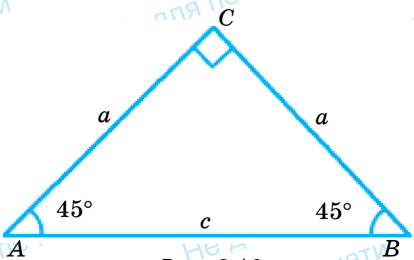


Рис. 2.19

1. $\alpha = 45^\circ$, $\angle A = \angle B = 45^\circ$.
Пусть $AC = BC = a$ (рис. 2.19).
По теореме Пифагора имеем:

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a,$$

$$\sin 45^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos 45^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

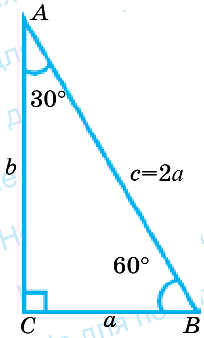


Рис. 2.20

$$\operatorname{tg} 45^\circ = (\sin 45^\circ) : (\cos 45^\circ) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) : \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1, \ \operatorname{ctg} 45^\circ = 1.$$

2. Пусть $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $BC = a$. (рис. 2.20).
Катет, противолежащий углу в 30°, равен половине гипотенузы: $AB = 2a$.
По теореме Пифагора имеем:

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = \sqrt{3} \cdot a.$$

Тогда $\sin 30^\circ = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{a}{2a} = \dfrac{1}{2}$, $\cos 30^\circ = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{\sqrt{3}a}{2a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \left(\frac{1}{2}\right) : \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}, \ \operatorname{ctg} 30^\circ = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) : \left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}.$$

Т. к. $60^\circ = 90^\circ - 30^\circ$, то имеем: $\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^\circ = \sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}$, $\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$, $\operatorname{ctg} 60^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Итак, для выражений sin α, cos α, tg α, ctg α можно составить нижеследующую таблицу.

α	30°	45°	60°
sin α	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos α	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg α	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
ctg α	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{c^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$. Это равенство называется **основным тригонометрическим тождеством.**

Отсюда $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$, т. е. sin α так же, как cos α, зависит только от величины угла α. А т.к. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, то значения тангенса и котангенса зависят только от величины угла α и не зависят от вида прямоугольного треугольника.

Тригонометрические функции и определение их значений.

Из рисунка 2.21 видно, что при изменении острого угла x прямоугольного треугольника ABC соответственно изменяются величины sin$x$, cos$x$, tg$x$, ctg$x$. Действительно, пусть $x < x_1$. Тогда $\cos x = \frac{AC}{AB} > \frac{AC}{AB_1} = \cos x_1$, т.е. при увеличении величины угла x cos$x$ уменьшает-ся и функция cos x зависит от переменной x. Аналогично, если x – переменная, то величины sin$x$, tg$x$, ctg$x$ тоже являются функциями. Они называются **тригонометрическими функциями.**

Рис. 2.21

Итак, при $0° < x < 90°$ функция cos$x$ – убывающая функция. А т.к. $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}$, то при $0° < x < 90°$ функция sin$x$ – возрастающая функция. Из равенства $\mathrm{tg}x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ следует, что $\mathrm{tg}x$ – возрастающая функция в промежутке $0° < x < 90°$, т. к. $\cos x$ убывает, а $\sin x$ возрастает, и в этом промежутке $\mathrm{ctg}x$ – убывающая функция. В промежутке $0° < x < 90°$ значения синусов и косинусов угла x определяют с помощью таблицы, калькулятора или компьютера.

Например, $\sin 70°36' \approx 0{,}9432$, $\sin 74°55' \approx 0{,}9656$,

$\cos 16°12' \approx 0{,}9603$, $\cos 18°50' \approx 0{,}9464$ и т. д.

Докажите самостоятельно

Выражения $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\mathrm{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ называются основными тригонометрическими тождествами. К их числу также относятся следующие тождества: $\mathrm{tg}x \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = 1$, $1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, $1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$.

1. Дайте определения синуса, тангенса и котангенса острого угла. Выразите их через катеты и гипотенузу прямоугольного треугольника.
2. Назовите значения тригонометрических функций для углов, равных: 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°.
3. Какая зависимость существует между тригонометрическими функциями?

Задачи

А

2.41. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$. Найдите синус, косинус и тангенс углов A и B, если: 1) $BC = 8$, $AB = 17$; 2) $BC = 21$, $AC = 20$; 3) $BC = 1$, $AC = 2$; 4) $AC = 24$, $AB = 25$.

2.42. Постройте угол α, если: 1) $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{1}{2}$; 2) $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{3}{4}$; 3) $\cos\alpha = 0{,}2$; 4) $\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$; 5) $\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$; 6) $\sin\alpha = 0{,}4$.

2.43. Один катет прямоугольного треугольника равен b, а противолежащий ему угол – β. Выразите через b и β другой катет, гипотенузу и второй острый угол треугольника.

2.44. В прямоугольном треугольнике дан катет b и прилежащий к нему угол α. Выразите через b и α остальные его стороны и углы.

2.45. Через гипотенузу c и острый угол α прямоугольного треугольника выразите катеты и второй острый угол.

2.46. Основание прямоугольного равнобедренного треугольника равно a. Найдите боковую сторону.

2.47. Тень от вертикально стоящего шеста, высота которого 7 дм, составляет 4 дм. Выразите в градусах высоту солнца над горизонтом (рис 2.22).

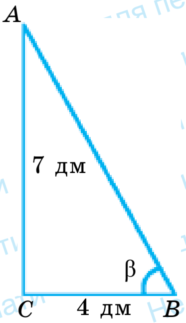


Рис. 2.22

2.48. Найдите неизвестные стороны и острые углы прямоугольного треугольника по следующим данным:

1) по двум катетам:
а) $a = 3$, $b = 4$; б) $a = 9$, $b = 10$; в) $a = 20$, $b = 21$;
г) $a = 11$, $b = 60$; д) $a = 6$, $b = 8$; е) $a = 5$, $b = 12$.

2) по гипотенузе и катету:
а) $c = 13$, $a = 5$; б) $c = 25$, $a = 7$;
в) $c = 17$, $a = 8$; г) $c = 85$, $a = 84$.

3) по гипотенузе и острому углу:
а) $c = 2$, $\alpha = 20°$; б) $c = 25$, $\alpha = 50°20'$;
в) $c = 8$, $\alpha = 70°36'$; г) $c = 16$, $\alpha = 76°21'$.

4) по катету и противолежащему углу:
а) $a = 3$, $\alpha = 30°27'$; б) $a = 5$, $\alpha = 40°48'$;
в) $a = 7$, $\alpha = 60°35'$; г) $a = 9$, $\alpha = 68°$.

2.49. В прямоугольном треугольнике с гипотенузой c и углом 60° найдите катет, противолежащий этому углу.

2.50. Определите знак разности: 1) $\sin 31° - \sin 30°$; 2) $\sin 26° - \sin 27°$; 3) $\cos 31° - \cos 30°$; 4) $\cos 26° - \cos 27°$.

B

2.51. Найдите: 1) $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{1}{2}$; 2) $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{2}{3}$; 3) $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\frac{1}{4}$.

2.52. Высота равнобедренного треугольника равна 12,4 м, а основание – 40,6 м. Найдите углы и боковую сторону треугольника.

5–3456

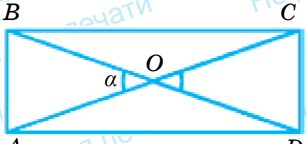


Рис. 2.23

2.53. Стороны прямоугольника равны 12,4 см и 26 см. Найдите угол между диагоналями (рис. 2.23).

2.54. Диагонали ромба равны 4,73 см и 2,94 см. Найдите углы.

2.55. Сторона ромба 241 м, высота 120 м. Найдите углы.

2.56. Упростите выражения:

1) $1-\sin^2\alpha$; 2) $1-\cos^2\alpha$;

3) $(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)$; 4) $1+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$;

5) $\sin\alpha-\sin\alpha\cos^2\alpha$; 6) $\cos 45°\ \mathrm{tg}\ 45°$;

7) $\sin 85°\ \mathrm{tg}\ 5°$; 8) $1-\sin 18°\cos 72°$;

9) $\dfrac{2\cos 2°}{\sin 88°+\cos 2°}$; 10) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$;

11) $\mathrm{tg}^2\alpha(2\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-1)$; 12) $\cos^2\alpha+\mathrm{tg}^2\alpha\cos^2\alpha$;

13) $\mathrm{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha\ \mathrm{tg}^2\alpha$; 14) $(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)$;

15) $\mathrm{tg}\ 5°\ \mathrm{tg}\ 25°\ \mathrm{tg}\ 45°\ \mathrm{tg}\ 65°\ \mathrm{tg}\ 85°$.

2.57. Найдите $\mathrm{ctg}\ \alpha$, $\sin\alpha$ и $\mathrm{tg}\ \alpha$, если: 1) $\cos\alpha = \dfrac{5}{13}$;

2) $\cos\alpha = \dfrac{15}{17}$; 3) $\cos\alpha = 0{,}6$.

2.58. Найдите $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\ \alpha$, $\mathrm{ctg}\ \alpha$, если: 1) $\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$;

2) $\sin\alpha = \dfrac{40}{41}$; 3) $\sin\alpha = 0{,}5$

2.59. $ABCD$ – равнобокая трапеция, в которой $AC \perp CD$, $AB = BC = CD = \dfrac{1}{2}AD$. Найдите углы этой трапеции.

2.60. Найдите радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник со стороной a, и радиус окружности, описанной около него.

2.61. Диагональ прямоугольника в два раза больше одной из его сторон. Найдите углы между диагоналями.

2.62. Диагонали ромба равны a и $a\sqrt{3}$. Найдите углы ромба.

2.63. Сравните углы α и β по следующим данным:

1) $\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$, $\sin\beta=\dfrac{1}{4}$; 5) $\mathrm{tg}\ \alpha=2{,}1$, $\mathrm{tg}\ \beta=2{,}5$;

2) $\sin\alpha=\dfrac{2}{3}$, $\sin\beta=\dfrac{3}{4}$; 6) $\mathrm{tg}\ \alpha=\dfrac{8}{3}$, $\mathrm{tg}\ \beta=\dfrac{5}{2}$;

3) $\cos\alpha = \frac{3}{7}$, $\cos\beta = \frac{2}{5}$;
7) $\operatorname{ctg}\alpha = 1{,}2$, $\operatorname{ctg}\beta = 1{,}1$;

4) $\cos\alpha = 0{,}75$, $\cos\beta = 0{,}71$;
8) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{3}{2}$, $\operatorname{ctg}\beta = \frac{7}{3}$.

2.64. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 120°, а его основание – b. Найдите боковую сторону.

2.65. Радиус окружности равен 5 м. Из точки, отстоящей от центра на 13 м, проведены касательные к окружности. Найдите длины касательных и угол между ними (рис. 2.24).

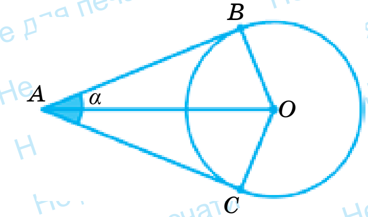


Рис. 2.24

C

2.66. В треугольнике больший угол при основании равен 45°, а высота делит основание на части длиной 20 см и 21 см. Найдите большую боковую сторону.

2.67. Охотник, стоящий на высоте 30 м, видит зверя, стоящего во впадине, под углом 20°. Найдите расстояние между охотником и зверем.

2.68. Определите угол наклона шоссейной дороги, если на расстоянии 200 м высота подъема равна 6 м.

2.69. Около окружности с диаметром 2 см описана равнобедренная трапеция. Определите среднюю линию трапеции, если углы при основании равны по 45°.

2.70. Берег реки, ширина которой равна 40 м, представляет собой 30 метровый обрыв.

1) Каково расстояние от наблюдателя, сидящего на обрыве, до другого берега реки?

2) Наблюдателю кажется, что лодка стоит посередине реки (лодка и берега реки видны наблюдателю под одинаковыми углами). Каково расстояние от лодки до берегов реки фактически?

2.3. РЕШЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Решение прямоугольных треугольников

В целом, под решением треугольника понимают процесс нахождения неизвестных элементов треугольника по трем его заданным элементам. Решение прямоугольных треугольников имеет аналогичный смысл. Чтобы однозначно задать прямоугольный треугольник, достаточно знать два его независимых элемента, так как известно, что один из его углов прямой.

Здесь независимость элементов следует понимать так: если задать величину острых углов α и β (два элемента) прямоугольного треугольника, то с помощью этих двух элементов мы не сможем однозначно определить прямоугольный треугольник, т. к. эти два элемента являются зависимыми посредством равенства $\alpha + \beta = 90°$.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника с острым углом 30°, равен 8 см. Найдем катеты этого треугольника.

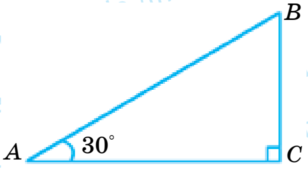


Рис. 2.25

▲ Пусть ΔABC – прямоугольный треугольник и $\angle A = 30°$ (рис. 2.25), а радиус описанной окружности $R = 8$ см. Так как центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, является серединой гипотенузы, то $AB = 2R = 16$ (см).

Тогда $AC = AB \cdot \cos(\angle A) = 16 \cdot \cos 30° = 16 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$ (см) и $BC = AB \cdot \sin(\angle A) = 16 \cdot \sin 30° = 16 \cdot \dfrac{1}{2} = 8$ (см).

Ответ: 8 см и $8\sqrt{3}$ см. ■

Пример 2. Медианы, проведенные к катетам прямоугольного треугольника, относятся как $\sqrt{13} : \sqrt{7}$. Найти углы треугольника.

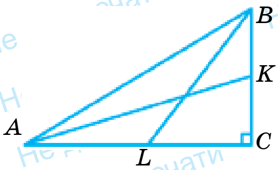


Рис. 2.26

▲ Пусть AK и BL – медианы прямоугольного треугольника ABC, $\angle C = 90°$ (рис. 2.26). По условию задачи $AK : BL = \sqrt{13} : \sqrt{7}$. Пусть $BC = a$, $AC = b$, тогда $CK = \dfrac{a}{2}$ и $CL = \dfrac{b}{2}$.

Поэтому $AK = \sqrt{b^2 + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{4b^2 + a^2}$, $BL = \sqrt{a^2 + \dfrac{b^2}{4}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{4a^2 + b^2}$.

Тогда $\dfrac{4b^2 + a^2}{4a^2 + b^2} = \dfrac{13}{7} \Rightarrow 28b^2 + 7a^2 = 52a^2 + 13b^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 15b^2 = 45a^2 \Rightarrow \dfrac{a^2}{b^2} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

С другой стороны, $\operatorname{tg}(\angle A) = \dfrac{CB}{AC} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, т. е. $\angle A = 60°$.

Тогда $\angle B = 90° - 60° = 30°$ и $\angle C = 90°$.

Ответ: $60°$, $30°$, $90°$. ■

Построение прямоугольных треугольников

Данная тема отчасти была рассмотрена в 7 классе в процессе построения треугольников по трем его заданным элементам. Тем не менее, поскольку прямоугольные треугольники обладают сугубо специфическими свойствами (один из его углов прямой), мы считаем необходимым дополнительно рассмотреть методы построения прямоугольных треугольников, так как для решения задачи на построение нужно очень хорошо знать все свойства рассматриваемой фигуры и ее элементов. Как правило, процесс решения задач на построение выполняется в четыре этапа: I. Анализ. II. Построение. III. Доказательство. IV. Исследование. Отдельные (несложные) простейшие задачи на построение могут быть решены без обязательного соблюдения указанных четырех этапов процесса решения. Рассмотрим примеры.

Пример 3. С помощью заданных катетов нужно построить прямоугольный треугольник.

▲ По условию задачи, даны два отрезка MN и KL, которые должны быть равны катетам прямоугольного треугольника ABC, ($\angle C = 90°$, $MN = AC$, $KL = BC$) (рис. 2.27). Для этого достаточно на плоскости взять прямой угол ACB ($\angle ACB = 90°$) и на его сторонах отложить отрезки $AC = MN$ и $BC = KL$. Тогда $\Delta\, ABC$ – искомый прямоугольный треугольник. ■

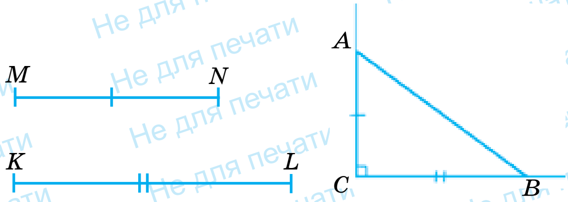


Рис. 2.27

Пример 4. Построить прямоугольный треугольник по катету и по высоте, проведенной к гипотенузе.

▲ **I. Анализ.** Пусть искомый треугольник ABC построен:
$\angle C = 90°$, $BC = a$, $CD \perp AB$, $CD = h_c$ (рис. 2.28). Проведем окружность $\omega(C;\, h_c)$ с центром в точке C и радиу-

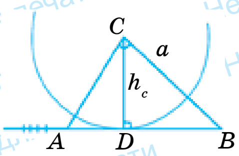


Рис. 2.28

сом $R = h_c$. Т. к. $CD \perp AB$, то по свойству касательной прямая AB касается этой окружности в точке D, т. е. вершина A треугольника ABC является точкой пересечения второй стороны прямого угла и касательной, проведенной к окружности $\omega(C;\ h_c)$ из точки B.

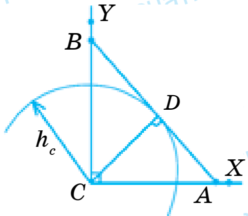


Рис. 2.29

II. Построение.

1) Построим прямой угол $\angle XCY = 90°$ (рис. 2.29).
2) Отметим точку $B \in CY$ так, чтобы $BC = a$.
3) Проведем окружность $\omega(C;\ h_c)$.
4) Через точку B проведем касательную BD к этой окружности.
5) Находим точку $A = CX \cap BD$.
6) ΔABC – искомый (рис. 2.29).

III. Доказательство. Действительно, по построению в ΔABC $\angle C = 90°$, $BC = a$, $CD \perp AB$, $CD = h_c$, т. е. CD есть высота, проведенная к гипотенузе. Т.о., ΔABC полностью удовлетворяет требованиям задачи.

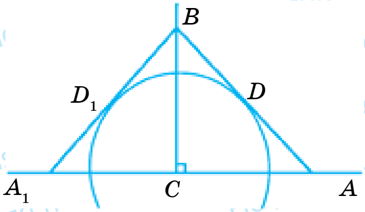


Рис. 2.30

IV. Исследование. Для решения этой задачи у нас должна быть возможность из точки B провести касательную к окружности $\omega(C;\ h_c)$. Тогда необходимо, чтобы $a > h_c$. При этом задача имеет 2 решения (т. к. можно провести 2 касательные) (рис. 2.30). А если $a \leqslant h_c$, то задача не имеет решения. ■

1. Что вы понимаете под решением прямоугольных треугольников?
2. Сколько независимых элементов нужно задать, чтобы однозначно определить прямоугольный треугольник? Поясните ответ.
3. На сколько этапов делится процесс решения задач на построение? Поясните суть каждого из этих этапов.

Практическая работа

1. Покажите, как находят середину данного отрезка.
2. Постройте биссектрису данного угла.
3. Постройте прямую, проходящую через данную точку параллельно данной прямой.
4. Через точку вне окружности проведите касательную к этой окружности.
5. По трем заданным сторонам постройте треугольник. При каком условии задача имеет решение?

Задачи

A

2.71. Даны катет a и противолежащий острый угол α прямоугольного треугольника. Найдите другие стороны и углы этого треугольника.

1) $a = 5$ см, $\alpha = 30°$ 2) $a = \sqrt{2}$ дм, $\alpha = 45°$;

3) $a = \sqrt{3}$ см, $\alpha = 60°$.

2.72. Даны катет a и прилежащий острый угол β прямоугольного треугольника. Найдите другие стороны и углы этого треугольника.

1) $a = 6$ см, $\beta = 30°$; 2) $a = 4$ см, $\beta = 45°$; 3) $a = 8$ см, $\beta = 60°$.

2.73. Даны катеты a и b прямоугольного треугольника. Найдите гипотенузу и углы треугольника.

1) $a = 4$ см, $b = 3$ см; 2) $a = 12$ см, $b = 5$ см;

3) $a = b = 3\sqrt{2}$ см.

2.74. Даны гипотенуза c и острый угол α прямоугольного треугольника. Найдите катеты и углы этого треугольника.

1) $c = 16$ см, $\alpha = 30°$; 2) $c = 4\sqrt{2}$ см, $\alpha = 45°$;

3) $c = 6\sqrt{3}$ см, $\alpha = 60°$.

2.75. Даны катет a и гипотенуза c прямоугольного треугольника. Найдите второй катет и углы треугольника.

1) $a = 8$ см, $c = 10$ см; 2) $a = 5$ см, $c = 13$ см;

3) $a = 6$ см, $c = 9$ см.

В задачах 2.76 – 2.80 необходимые построения нужно выполнять на листе А4, предварительно объединившись в группы.

2.76. Постройте треугольник из задачи **2.71.**

2.77. Постройте треугольник из задачи **2.72.**

2.78. Постройте треугольник из задачи **2.73.**

2.79. Постройте треугольник из задачи **2.74.**

2.80. Постройте треугольник из задачи **2.75.**

B

2.81. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе c и проведенной к ней высоте h_c (рис. 2.31).

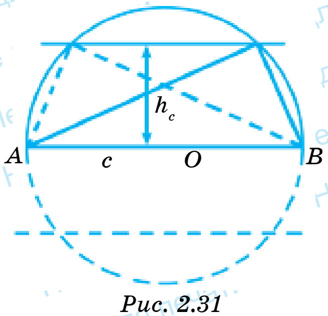


Рис. 2.31

2.82. Один катет и радиус описанной около прямоугольного треугольника $a = R = 4$ см. Найдите все неизвестные элементы этого треугольника.

2.83. Постройте прямоугольный треугольник, заданный в предыдущей задаче.

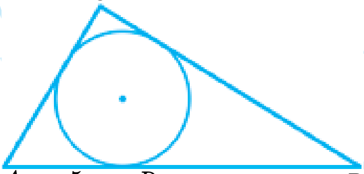


Рис. 2.32

2.84. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник, делит гипотенузу на отрезки, равные 2 см и 3 см. Найдите радиус этой окружности.

2.85. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник, делит гипотенузу на отрезки, равные 5 см и 12 см. Найдите катеты (рис. 2.32).

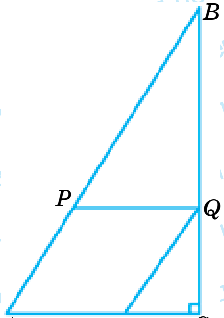


Рис. 2.33

2.86. В прямоугольный треугольник с углом 60° вписан ромб со стороной, равной 6 см, так, что угол в 60° у них общий и все вершины ромба лежат на сторонах треугольника. Найдите стороны треугольника (рис. 2.33).

2.87. Если r – радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами a, b и гипотенузой c, то докажите, что $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$.

2.88. Сумма катетов прямоугольного треугольника равна 17 см, а гипотенуза – 13 см. Найдите катеты треугольника.

2.89. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и сумме катетов.

2.90. Постройте прямоугольный треугольник по катету и по высоте, проведенной к гипотенузе.

C

2.91. Периметр прямоугольного треугольника равен 24 см, а произведение катетов – 48 см^2. Найдите радиусы описанной около треугольника и вписанной в треугольник окружностей.

2.92. В прямоугольный треугольник с катетами 5 см и 12 см вписан квадрат, имеющий с треугольником общий прямой угол. Найдите периметр квадрата.

2.93. В прямоугольном треугольнике с катетами a, b и гипотенузой c выполнено равенство $b = \sqrt{ac}$. Найдите острые углы треугольника.

2.94. Медианы, проведенные к катетам прямоугольного треугольника, равны $\sqrt{52}$ и $\sqrt{73}$. Найдите гипотенузу.

2.95. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник, точкой касания делит гипотенузу в отношении 2 : 3, а ее центр удален от вершины прямого угла на расстояние, равное $\sqrt{8}$ см. Найдите стороны треугольника.

2.96. По высоте, проведенной к гипотенузе, и биссектрисе прямого угла постройте прямоугольный треугольник.

Раздел 3. ПЛОЩАДЬ

Изучив материалы данного раздела, мы достигнем следующих целей:

- будем знать определение площади многоугольника и ее свойства;
- будем знать определения равновеликих и равносоставленных фигур;
- будем выводить и применять формулы площадей параллелограмма, ромба;
- будем выводить и применять формулы площади треугольника;
- будем выводить и применять формулы площади трапеции.

3.1. ПЛОЩАДЬ ПРЯМОУГОЛЬНИКА

Определение. **Длина отрезка** – это мера отрезка, полученная при сравнении с масштабным (эталонным) отрезком.

Аналогично определяется понятие площади плоской фигуры. В качестве эталона измерения плоской фигуры берут квадрат со стороной, равной единице длины. Считается, что площадь этого квадрата равна 1. Площадь обозначается буквой S.

Масштабный отрезок	Площадь квадрата, взятого за эталон
1 мм	$S = 1$ мм^2
1 см	$S = 1$ см^2
1 м	$S = 1$ м^2
и т. д.	

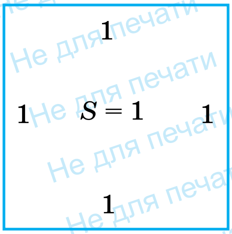


Рис. 3.1

Определение. **Площадь фигуры** – это мера фигуры, полученная при сравнении с площадью квадрата, взятого за эталон.

Площадь квадрата со стороной a равна квадрату его стороны (рис. 3.2):

$$S = a^2$$

Это утверждение примем без доказательства. Доказательство этой формулы можно найти на сайте edu.glavshrav.ru/info/ploshad-kvadrata/

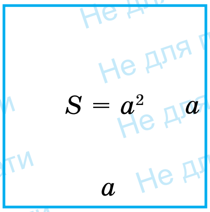


Рис. 3.2

Кроме того, понятие площади обладает простейшими свойствами, приведенными ниже.

1. Равные фигуры имеют равные площади. На рис. 3.3
$\Delta ABC = \Delta PQR \Rightarrow S_{\Delta ABC} = S_{\Delta PQR}$

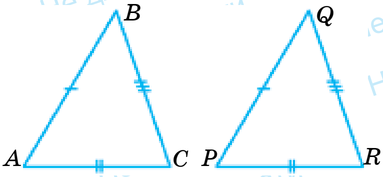
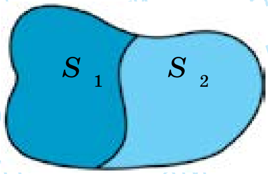


Рис. 3.3



$S = S_1 + S_2$

Рис. 3.4

2. Если одна фигура с помощью некоторой линии разделена на две другие, то площадь данной фигуры равна сумме площадей образовавшихся частей:

$$S = S_1 + S_2 \quad \text{(рис. 3.4).}$$

Утверждение о том, что площадь квадрата, взятого за эталон, равна единице, вместе с приведенными двумя свойствами являются аксиомами понятия площади плоской фигуры.

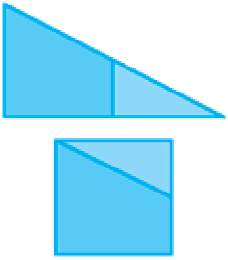


Рис. 3.5

Фигуры, имеющие равные площади, называются **равновеликими**. А фигуры, составленные из одинаковых частей, называются **равносоставленными**. Например, фигуры, изображенные на рис. 3.5, являются как равновеликими, так и равносоставленными.

Разумеется, что указанные аксиомы являются простейшими свойствами фигур, которые вытекают из наглядностей. Из этих аксиом выводятся следствия, данные ниже.

Следствие 1. *Если одна фигура содержит внутри себя другую, то площадь первой фигуры не меньше площади второй.*

Следствие 2. *Равносоставленные фигуры имеют равные площади.*

Утверждение, обратное этому, не всегда выполняется, т. е. фигуры, имеющие равные площади (равновеликие), не всегда бывают равносоставленными. Например, круг и квадрат могут иметь равные площади. В курсе высшей математики доказывается, что эти фигуры не могут быть равносоставленными.

Площадь прямоугольника

Теорема 1. *Если стороны прямоугольника равны* a *и* b, *то его площадь определяется по формуле*

$$S = ab. \qquad (1)$$

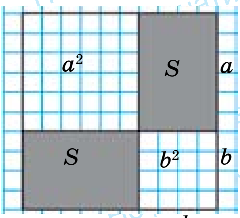


Рис. 3.6

▲ Построим квадрат со стороной, равной $a + b$, и разделим его на 4 части так, как показано на рис. 3.6: на два квадрата с площадями a^2 и b^2 соответственно и на два равных прямоугольника со сторонами a и b. Площадь построенного квадрата можно определить двумя способами:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab; \\ &2)\ a^2 + b^2 + S + S = a^2 + b^2 + 2S \end{aligned}\right\} \Rightarrow S = ab. \ ■$$

1. Что понимают под площадью фигуры?
2. Как вычислить площадь плоской фигуры?
3. Как определяется площадь квадрата со стороной, равной a?
4. Что такое равновеликие и равносоставленные фигуры? Чем они отличаются?
5. Какие аксиомы о площадях фигур вы знаете?
6. Как вычислить площадь прямоугольника? Сформулируйте и докажите соответствующую теорему.

Практическая работа

1. Найдите площадь поверхности парты, за которой вы сидите.
2. Вычислите площадь пола классной комнаты. Для покраски 1 м^2 пола расходуется 50 г краски. Сколько килограммов краски потребуется?

ГЕОМЕТРИЯ И АРХИТЕКТУРА

Творческая работа

На рисунке изображен жилой комплекс «Северное сияние», г. Астана. Полагая, что каждый квадратик на гранях всех зданий имеет размерность $3{,}3 \times 3{,}3$ м, оцените: 1) площадь боковых граней здания, расположенного в центре на переднем плане; 2) высоту этого здания; 3) пользуясь ресурсами ИКТ, проверьте и найдите абсолютную и относительную погрешность результатов ваших вычислений.

Задачи

А

3.1. Найдите площадь прямоугольника, стороны которого равны a и b:
1) $a = 3{,}4$ см, $b = 5{,}5$ см; 2) $a = 2$ м, $b = 7$ м;
3) $a = \frac{2}{3}$ дм, $b = \frac{3}{2}$ дм.

3.2. Точки N, E, L и K – середины соответствующих сторон AB, AD, BC и CD прямоугольника $ABCD$ (рис. 3.7). Какую часть площади прямоугольника $ABCD$ составляют площади следующих фигур:
1) ΔABD; 2) ΔABE; 3) $ABKD$; 4) $ABLKD$;
5) $ABLKE$; 6) $LKEN$; 7) ALD и BEC?

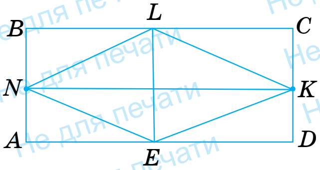


Рис. 3.7

3.3. Найдите площадь квадрата, если его стороны равны: 1) 1,2 см; 2) $\frac{3}{4}$ дм; 3) $3\sqrt{2}$ м.

3.4. Найдите сторону квадрата, если его площадь равна: 1) 16 см^2; 2) 2,25 дм^2; 3) 12 м^2.

3.5. Квадрат имеет площадь 16 см^2. Выразите это значение в: 1) мм^2; 2) дм^2; 3) м^2.

3.6. Стороны прямоугольника равны a и b, а его площадь – S. Найдите неизвестные величины по следующим данным:

1) $a = 8{,}5$ см, $b = 3{,}2$ см;
2) $a = 2\sqrt{2}$ м, $b = 3$ м;
3) $a = 32$ см, $S = 684{,}8$ см^2;
4) $a = 4{,}5$ м, $S = 12{,}15$ м^2.

B

3.7. Докажите, что прямоугольник $ABCD$ и параллелограмм $EBCF$, изображенные на рис. 3.8, равновелики.

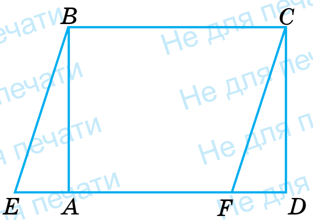


Рис. 3.8

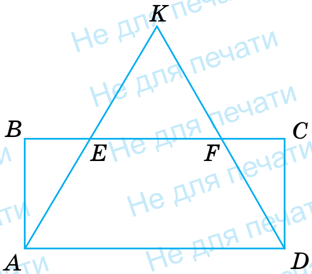


Рис. 3.9

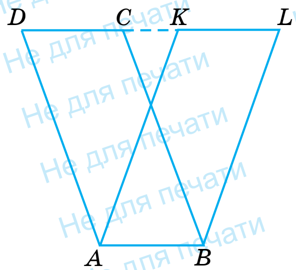


Рис. 3.10

3.8. Докажите, что прямоугольник $ABCD$ и треугольник AKD, изображенные на рис. 3.9, равновелики. Здесь $AE = EK$.

3.9. Докажите, что параллелограммы $ABCD$ и $AKLB$, изображенные на рис. 3.10, равновелики.

3.10. Докажите, что сумма площадей квадратов, построенных на катетах прямоугольного треугольника, равна площади квадрата, построенного на гипотенузе.

3.11. Как изменится площадь прямогольника, если: 1) одну пару противоположных сторон увеличить в 2 раза; 2) каждую его сторону увеличить в 2 раза; 3) одну пару противоположных сторон увеличить в 2 раза, а другую пару – уменьшить в 2 раза?

3.12. Найдите стороны прямоугольника, если: 1) его площадь равна 250 см^2, а одна сторона в 2,5 раза больше другой; 2) его площадь равна 9 м^2, а периметр – 12 м.

3.13. Длины сторон комнаты 5,5 м и 6 м. Сколько дощечек паркета нужно для обивки пола, если каждая дощечка имеет форму прямоугольника с размерами 30×5 см^2?

3.14. Два участка земли огородили забором одинаковой длины. Первый участок имеет форму прямоугольника со сторонами 60 м и 100 м, а второй – форму квадрата. Какой из этих участков больше по площади?

C

3.15. Как разделить квадрат на три части, чтобы из них сложить параллелограмм?

3.16. Как разделить квадрат на три части, чтобы из них сложить ромб?

3.17. Как разделить квадрат на две равновеликие части, вырезав из него второй квадрат?

3.18. Постройте квадрат, площадь которого в два раза больше площади данного квадрата.

3.19. Докажите, что среди всех равновеликих прямоугольников наименьший периметр имеет квадрат.

3.2. ПЛОЩАДИ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА, ТРЕУГОЛЬНИКА И ТРАПЕЦИИ

Площадь параллелограмма

Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту (рис. 3.11):

$$S = ah. \qquad (1)$$

▲ Пусть дан параллелограмм $ABCD$ и $AD = a$, $BE = h$, $BE \perp AD$ (рис. 3.11). Из точки C проведем перпендикуляр CF к прямой AD, тогда $BE = CF$. Так как $\angle BAE = \angle CDF$, то прямоугольные треугольники ABE и CDF равны между собой. Поэтому параллелограмм $ABCD$ и прямоугольник $EBCF$ являются равносоставленными. (Случай, когда E лежит вне отрезка AD, рассмотрите самостоятельно.)

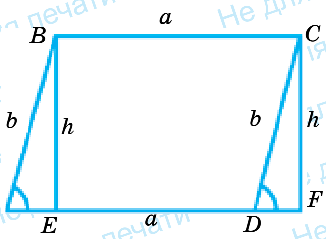


Рис. 3.11

Тогда $S_{ABCD} = S_{EBCF} = BE \cdot EF = BE \cdot BC$. Так как $BC = AD$, то получим равенство $S_{ABCD} = BE \cdot AD = ha$. Формула (1) доказана. ■

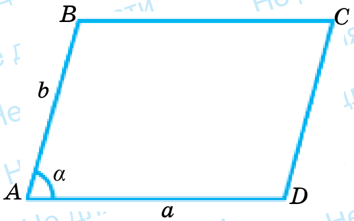


Рис. 3.12

Следствие 1. *Площадь параллелограмма со сторонами **a** и **b**, острым углом α вычисляется по формуле*

$$S = a \cdot b \cdot \sin\alpha \text{ (рис. 3.12).} \qquad (2)$$

▲ Действительно, по формуле (1) $S = ah$, но из прямоугольного треугольника ABE $h = BE = AB \sin\alpha = b \sin\alpha$. Тогда выполняется равенство $S = a \cdot b \cdot \sin\alpha$. ■

Площадь треугольника

Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h. \qquad (3)$$

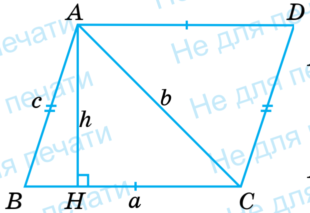


Рис. 3.13

▲ Пусть в треугольнике ABC сторона $BC = a$, $AH \perp BC$, $AH = h$. Дополним треугольник ABC до параллелограмма $ABCD$ (рис. 3.13). Тогда по третьему признаку равенства треугольников $\Delta ABC = \Delta CDA$, т. к. $AD = BC$, $AB = CD$ и сторона AC – общая. Значит, $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = 2 \cdot S_{ABC}$. С другой сторны, т. к. $S_{ABCD} = BC \cdot AH = a \cdot h$, то $S_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot h$. ■

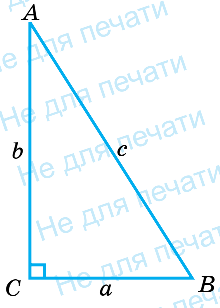


Рис. 3.14

Следствие 2. *Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов:*

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot b. \qquad (4)$$

Доказательство следует из формулы (3), так как за основание можно принять один из катетов прямоугольного треугольника, а за высоту – другой катет (рис. 3.14).

Следствие 3. *Площадь треугольника, у которого стороны равны **a** и **b**, а угол между ними равен γ, вычисляется по формуле*

$$S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\gamma. \qquad (5)$$

Докажите самостоятельно

Доказательство аналогично доказательству формулы (3) с применением следствия 1 (рис. 3.15).

Пример. В треугольнике ABC высоту AH нужно выразить через длины сторон a, b и c (рис 3.15).

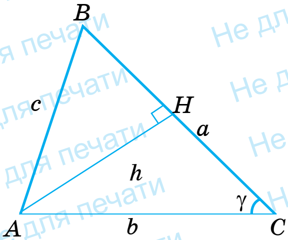


Рис. 3.15

▲ Пусть $BH = x$, $AH = h$, тогда $CH = a - x$. По теореме Пифагора имеем: $h^2 = c^2 - x^2$ и $h^2 = b^2 - (a - x)^2 = b^2 - a^2 + 2ax - x^2$. Из этих двух равенств получим $b^2 - a^2 - c^2 + 2ax = 0$, т.е. $x = -\frac{b^2 - a^2 - c^2}{2^a}$.

Тогда $h = \frac{\sqrt{4a^2c^2 - (b^2 - a^2 - c^2)^2}}{2a}$. ■

Следствие 4. (формула Герона). *Если стороны треугольника равны* a, b *и* c, *то площадь треугольника вычисляется по формуле*

$$S = \sqrt{p(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}, \qquad (6)$$

где $p = \frac{a+b+c}{2}$ – *полупериметр треугольника.*

(Герон, I в. н. э.)

▲ На основании примера 1 имеем:

$$AH = \frac{1}{2a}\sqrt{4a^2c^2 - \left(b^2 - c^2 - a^2\right)^2}.$$

Тогда по формуле разности квадратов двух выражений имеем:

$$4a^2c^2 - (b^2 - c^2 - a^2)^2 = (2ac - b^2 + a^2 + c^2)(2ac + b^2 - a^2 - c^2) = \left[(a+c)^2 - b^2\right]\cdot\left[b^2 - (a-c)^2\right] =$$

$$= (a+b+c)(a+c-b)(b+c-a)(b+a-c) = (a+b+c)(a+b+c-2a)(a+b+c-2b)(a+b+c-$$

$$-2c) = 2p(2p-2a)(2p-2b)(2p-2c) = 16p(p-a)(p-b)(p-c).$$

Отсюда и по формуле (3) получим:

$$S = \frac{1}{2}BC \cdot AH = \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2a}\sqrt{16p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$ ■

Докажите самостоятельно

Формулу Герона можно доказать, используя теорему Пифагора и теорему косинусов.

Площадь ромба

Ромб является частным случаем параллелограмма. Поэтому для вычисления площади ромба можно применять формулы (1) и (2). Так как $AB = AD = a$, то формула (2) для ромба записывается так:

$$S = a^2 \cdot \sin\alpha. \qquad (7)$$

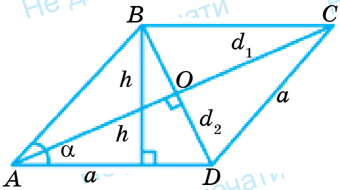


Рис. 3.16

Т.к. диагонали ромба взаимно перпендикулярны, то они делят ромб на 4 равные между собой прямоугольные треугольники (рис. 3.16). Если $AC=d_1$ и $BD=d_2$, то $AO = \frac{d_1}{2}, BO = \frac{d_2}{2}$. Тогда по формуле (4) имеем: $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} AO \cdot BO = \frac{1}{8} d_1 d_2$.

Поэтому $S_{ABCD} = 4 \cdot S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} d_1 d_2$, т.е. площадь ромба равна половине произведения его диагоналей:

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2. \qquad (8)$$

Площадь трапеции

Площадь трапеции равна произведению полусуммы ее оснований на высоту:

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h. \qquad (7)$$

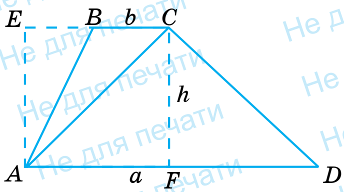


Рис. 3.17

▲ Пусть $AD = a$, $BC = b$ – основания трапеции $ABCD$ и $AE = CF = h$ – ее высоты (рис. 3.17). Диагональ AC делит трапецию на два треугольника: ΔABC и ΔACD. Тогда $S_{тр.} = S_{ABC} + S_{ACD}$. По формуле (3)

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AE = \frac{1}{2} h \cdot b \text{ и } S_{ACD} = \frac{1}{2} AD \cdot CF = \frac{1}{2} a \cdot h.$$

Тогда

$$S_{тр.} = \frac{1}{2} a \cdot h + \frac{1}{2} b \cdot h = \frac{a+b}{2} \cdot h. \ ■$$

Запомните

Аналогично площадь любого многоугольника можно найти, разделив его на несколько треугольников. Например, площадь пятиугольника, изображенного на рис. 3.18, равна сумме площадей трех треугольников. Конечно, любой многоугольник можно разбить на треугольники различными способами. Поэтому при вычислении площади нужно разбить многоугольник на треугольники наиболее подходящим и рациональным способом.

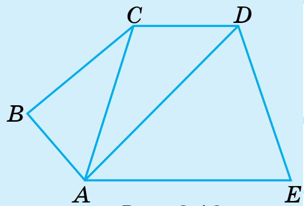


Рис. 3.18

Материалы из истории

Еще в глубокой древности люди умели вычислять площади различных простейших фигур. Например, в XX в. до н. э. египтяне применяли приближенную формулу для вычисления площади равностороннего треугольника. Формула Герона встречается в книге под названием «Математика» Герона Александрийского, жившего в I веке н. э. Вообще, площадь треугольника по трем его сторонам впервые вычислил Архимед (III век до н. э.).

1. По какой формуле вычисляется площадь параллелограмма?
2. Напишите формулы для вычисления площади треугольника.
3. По какой формуле вычисляется площадь трапеции?
4. По какой общей формуле можно вычислить площади трапеции, треугольника и параллелограмма?
5. Напишите формулу Герона и докажите ее.

Задачи

А

3.20. Пусть S – площадь параллелограмма, a – основание, h – высота, проведенная к основанию. Заполните следующую таблицу:

A	7		$2\sqrt{2}$	6		$\sqrt{3}$	
h	8	2		$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{7}$		7
S		12	8		4	$2\sqrt{6}$	$4\sqrt{7}$

3.21. Пусть S – площадь треугольника, a – основание, h – высота, проведенная к основанию. Заполните следующую таблицу:

a	3		3	$\sqrt{3}$		$\sqrt{2}$
h	2	2			$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$
S		4	6	3	2	

3.22. Пусть S – площадь трапеции, a и b – основания, h – высота, проведенная к основанию. Заполните следующую таблицу:

A	4	5	7		$2\sqrt{2}$		4	
B	2	3		2	$\sqrt{2}$	1		3
H	3		5	3	$\frac{2}{3}$	2	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$
S		24	25	21		7	$8\sqrt{2}$	27

3.23. Найдите площадь ромба, если его сторона равна $\sqrt{3}$ см, а острый угол – 60°.

3.24. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если его катеты равны: 1) 3 см и 4 см; 2) 1,2 м и 3 м.

3.25. Найдите площадь треугольника по двум его сторонам a и b и углу α между ними:

1) $a = 2$ см, $b = 3$ см, $\alpha = 30°$;

2) $a = 2\sqrt{2dm}$, $b = 5\sqrt{dm}$, $\alpha = 45°$;

3) $a = 2$ м, $b = \sqrt{3}$ м, $\alpha = 90°$;

4) $a = 0{,}4$ см, $b = 0{,}8$ см, $\alpha = 60°$.

3.26. Найдите площадь треугольника по трем его сторонам: 1) 2 см; 3 см; 4 см; 2) 2,5 см; 1 см; 2 см; 3) 5 м; 7 м; 9 м; 4) 5 дм; 5 дм; 6 дм.

B

3.27. Площадь параллелограмма равна 5 см^2, а две его смежные стороны – 2 см и 5 см. Найдите острый угол и высоты параллелограмма.

3.28. Диагональ параллелограмма, равная 13 см, перпендикулярна его стороне, равной 12 см. Найдите площадь параллелограмма.

3.29. Параллелограмм и прямоугольник имеют равные стороны. Площадь прямоугольника в два раза больше площади параллелограмма. Найдите острый угол параллелограмма.

3.30. Сторона ромба равна 10 см, а одна из диагоналей – 12 см. Найдите высоту и диагональ ромба.

3.31. Найдите площадь ромба, если его диагонали равны: 1) 3,2 см и 14 см; 2) 4,6 м и 2 м.

3.32. Одна из диагоналей ромба в 1,5 раза больше другой, а его площадь равна 27 см^2. Найдите диагонали ромба.

3.33. В треугольнике ABC сторона AB равна 16 см, сторона BC – 22 см, а высота, проведенная из вершины C, равна 11 см. Найдите высоту, проведенную к стороне BC.

3.34. Найдите площадь равностороннего треугольника со стороной, равной a.

3.35. Найдите площадь треугольника, если его сторона равна a, а прилежащие к ней углы – α и β.

3.36. Докажите, что площадь выпуклого четырехугольника, диагонали которого взаимно перпендикулярны, равна половине произведения его диагоналей (рис. 3.19).

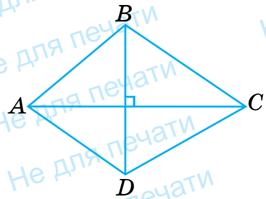


Рис. 3.19

3.37. Параллельные стороны трапеции равны 60 см и 20 см, а боковые – 13 см и 37 см. Найдите площадь трапеции.

3.38. Найдите площадь прямоугольной трапеции, у которой каждая из двух меньших смежных сторон равна 6 см, а наибольший угол – 135°.

3.39. Постройте: 1) параллелограмм; 2) прямоугольник, равносоставленные с данной равнобокой трапецией.

3.40. Шестиугольник $ABCDEF$, стороны которого равны между собой, состоит из двух трапеций с общим основанием CF. Найдите площадь шестиугольника, если $AC = 13$ см, $AE = 10$ см, $AD = 16$ см (рис. 3.20).

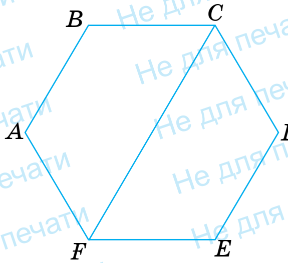


Рис. 3.20

3.41. Найдите площадь квадрата, вписанного в правильный треугольник со стороной, равной a.

3.42. Найдите площадь прямоугольного треугольника, сумма катетов которого равна l, а высота, проведенная из вершины прямого угла, равна h.

3.43. На сторонах равностороннего треугольника вне его построены квадраты. Центры квадратов соединены с концами соответствующей стороны треугольника. Найдите площадь полученного шестиугольника. Сторона треугольника равна a (рис. 3.21).

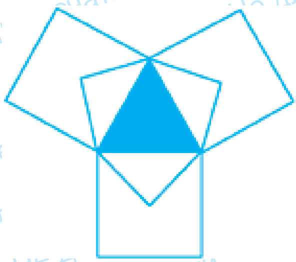


Рис. 3.21

3.44. У квадрата со стороной a углы отрезаны так, что получился правильный восьмиугольник. Найдите площадь этого восьмиугольника.

3.45. Диагонали равнобедренной трапеции взаимно перпендикулярны, ее основания равны 24 см и 40 см. Найдите площадь трапеции.

3.46. Разность оснований трапеции составляет 6 м, высота равна 22 м, площадь – 594 м^2. Найдите основания трапеции.

3.47. Около окружности радиуса R описана равнобедренная трапеция, площадь которой равна S. Найдите основания трапеции.

3.48. Через точку, взятую на диагонали AC параллелограмма $ABCD$, проведены прямые, параллельные его сторонам. При этом образуются четыре параллелограмма. Диагонали двух из них лежат на диагонали AC. Докажите, что два других параллелограмма равновелики.

3.49. Докажите, что в любой трапеции два треугольника, образованных его диагоналями и непараллельными сторонами, равновелики.

C

3.50. Докажите формулу Герона, используя теорему Пифагора.

3.51. Середины двух смежных сторон квадрата со стороной a соединены между собой и с противолежащей вершиной. Найдите площадь полученного треугольника.

3.52. В равнобедренный треугольник вписан квадрат так, что одна его сторона лежит на основании треугольника. Площадь квадрата 16 см^2. Найдите площадь треугольника, если центры тяжестей треугольника и квадрата совпадают.

3.53. Площадь равнобедренного треугольника равна $\frac{1}{3}$ площади квадрата, стороной которого является основание этого треугольника, причем боковые стороны треугольника на 1 см меньше его основания. Найдите стороны треугольника и высоту, опущенную на основание.

3.54. Найдите площадь равнобедренного треугольника, если его основание равно b, а высота, проведенная к боковой стороне, равна h.

3.55. Каждая вершина квадрата соединена с серединой одной из сторон так, как это показано на рис. 3.22. Докажите, что площадь квадрата, образованного этими отрезками, равна $\frac{1}{5}$ площади данного квадрата.

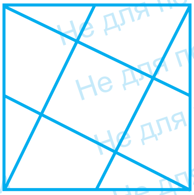


Рис. 3.22

3.56. Докажите, что площадь любого равнобедренного треугольника равна произведению боковой стороны на перпендикуляр, проведенный из середины второй боковой стороны к первой.

РАЗДЕЛ 4. ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ

Изучив материалы данного раздела, мы достигнем следующих целей:

- будем вычислять расстояние между двумя точками на плоскости по их координатам;
- будем находить координаты середины отрезка;
- будем находить координаты точки, делящей отрезок в заданном отношении;
- будем знать уравнение окружности с центром в точке (a; b) и радиусом r: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$;
- будем строить окружность по заданному уравнению;
- будем записывать общее уравнение прямой и уравнение прямой, проходящей через две заданные точки: $ax + by + c = 0$, $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.
- будем решать простейшие задачи в координатах.

4.1. КООРДИНАТЫ ТОЧКИ. РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ДВУМЯ ТОЧКАМИ

Прямоугольная система координат

С понятием прямоугольной системы координат вы знакомы с младших классов.

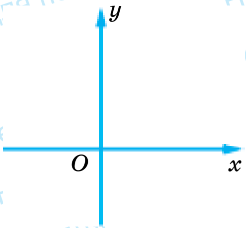


Рис. 4.1

Расположим числовые оси Ox и Oy так, чтобы они пересекались в точке O и были взаимно перпендикулярными. Так строится прямоугольная система координат Oxy (рис. 4.1). Числовая ось Ox называется осью абсцисс, Oy – осью ординат, а точка O – началом координат.

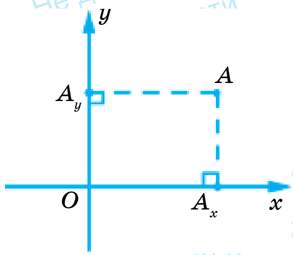


Рис. 4.2

Основания перпендикуляров, опущенных из точки A на координатные оси Ox и Oy, обозначим через A_x и A_y соответственно. Пусть x является координатой точки A_x на оси Ox, а y – координатами точки A_y на оси Oy. Тогда пара чисел (x, y) называется координатами точки A в прямоугольной системе координат Oxy и записывается так: $A(x; y)$ (рис. 4.2).

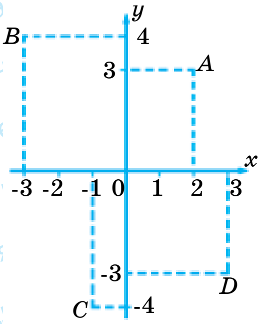


Рис. 4.3

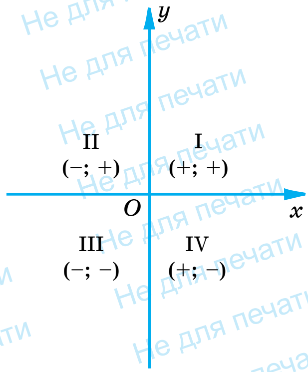


Рис. 4.4

Например, на рис. 4.3 изображены точки $A(2;\ 3)$, $B(-3;\ 4)$, $C(-1;\ -4)$, $D(3;\ -3)$.

Оси координат разбивают плоскость на четыре части (рис. 4.4). Эти части называются четвертями: I четверть, II четверть, III четверть, IV четверть. На рис. 4.4 изображены знаки координат точек, расположенных в разных координатных четвертях.

Так как эту систему координат впервые применил в своих исследованиях французский ученый Рене Декарт (1596–1650), то ее называют декартовой системой координат.

Расстояние между двумя точками

Пусть в декартовой системе координат даны точки $A\ (x_1;\ y_1)$ и $B\ (x_2;\ y_2)$. Найти расстояние между точками A и B.

Для этого проведем через точки A и B прямые, параллельные осям координат (рис. 4.5). Тогда получим прямоугольный треугольник ABC. Но т. к. $A_1\ (x_1;\ 0)$, $B_1(x_2;\ 0)$, $A_2\ (0;\ y_1)$, $B_2(0;\ y_2)$, то расстояние между точками A_1и B_1 равно $|x_2-x_1|$, а расстояние между точками A_2 и B_2 равно $|y_2-y_1|$.

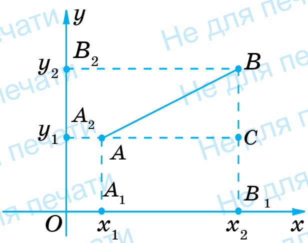


Рис. 4.5

С другой стороны, $A_1B_1= AC$, $A_2B_2=BC$, то

$$AC=|x_2-x_1|,\ BC=|y_2-y_1|.$$

По теореме Пифагора получим равенство $AB^2 = AC^2 + BC^2$ или $AB^2 = (x_2- x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$.

Откуда следует формула

$$AB = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2}. \qquad (1)$$

Итак, расстояние между точками $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$ вычисляется по формуле (1).

Деление отрезка в данном отношении. Координаты середины отрезка

Если для точки C, лежащей на отрезке AB, выполняется равенство $\dfrac{AC}{BC} = \lambda$ $(\lambda \neq -1)$, то говорят, что точка C делит отрезок AB в отношении λ.

Если $\lambda = 1$, то получим равенство $AC = BC$, т. е. точка C является серединой отрезка AB.

Пусть даны точки $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$. Теперь определим координаты точки C, которая делит отрезок AB в отношении λ.

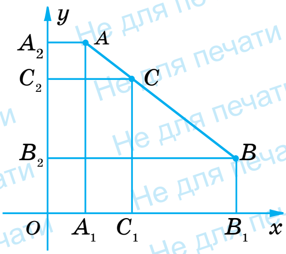


Рис. 4.6

Для этого через точки A, B и C проведем прямые, параллельные осям координат. Точки пересечения этих прямых с осями Ox и Oy обозначим соответственно через A_1, B_1, C_1 и A_2, B_2, C_2 (рис. 4.6). Обозначим неизвестные координаты точки C через $(x;\ y)$. Тогда $A_1(x_1;\ 0)$, $B_1(x_2;\ 0)$, $C_1(x;\ 0)$ и $A_2(0;\ y_1)$, $B_2(0;\ y_2)$, $C_2(0;\ y)$. Итак, наша цель – выразить неизвестные x и y через x_1, x_2, y_1 и y_2.

Прямую AB и ось Ox пересекают параллельные прямые AA_1, CC_1 и BB_1. Тогда по свойству пропорциональных отрезков выполняется равенство $\dfrac{AC}{A_1C_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1}$ или $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{A_1C_1}{B_1C_1}$. Так как точка C делит отрезок AB в отношении λ, то $\dfrac{AC}{BC} = \lambda$, т. е. $\dfrac{A_1C_1}{B_1C_1} = \lambda$. С другой стороны, т.к. $A_1C_1 = x - x_1$, $B_1C_1 = x_2 - x$, то получим равенство $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda$. Откуда имеем равенство: $x - x_1 = \lambda(x_2 - x)$ или $(1 + \lambda)x = x_1 + \lambda x_2$. Отсюда имеем формулу $x = \dfrac{x_1 + \lambda \cdot x_2}{1 + \lambda}$.
Аналогично из равенства $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{A_2C_2}{B_2C_2}$ получим формулу $y = \dfrac{y_1 + \lambda \cdot y_2}{1 + \lambda}$.

Итак, координаты точки C, которая делит отрезок AB в отношении λ, определяются по следующим формулам:

$$x = \frac{x_1 + \lambda \cdot x_2}{1 + \lambda},\quad y = \frac{y_1 + \lambda \cdot y_2}{1 + \lambda}. \qquad (3)$$

Если $\lambda = 1$, то точка C является серединой отрезка AB. Значит, из формулы (3) следует, что координаты середины отрезка находят по следующим формулам:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \qquad (4)$$

Пример. Даны координаты вершин треугольника ABC: $A(0;\ 6)$, $B(4;\ -2)$, $C(3;\ 8)$.

1. Найдите центр и радиус окружности, описанной около треугольника.
2. Найдите точку пересечения медиан треугольника.

Решение задачи 1. ▲ Обозначим через $S(x;\ y)$ центр окружности, описанной около треугольника ABC. Тогда радиусы этой окружности удовлетворяют равенству $R = SA = SB = SC$.

Учитывая, что $SA = \sqrt{x^2 + (y-6)^2}$, $SB = \sqrt{(x-4)^2 + (y+2)^2}$, $SC = \sqrt{(x-3)^2 + (y-8)^2}$, $SA^2 = SB^2$ и $SA^2 = SC^2$, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + (y-6)^2 = (x-4)^2 + (y+2)^2, \\ x^2 + (y-6)^2 = (x-3)^2 + (y-8)^2. \end{cases}$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены в этих уравнениях, получим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 6x + 4y = 37, \\ 8x - 8y = -16 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 6x + 4y = 37, \\ x - y = -2. \end{cases}$$

Решение этой системы уравнений: $x = 2{,}9$, $y = 4{,}9$. Тогда центром окружности, описанной около треугольника ABC, является точка $S(2{,}9;\ 4{,}9)$. А радиус окружности определим из равенства $R = SA$:

$$R = \sqrt{2{,}9^2 + (4{,}9-6)^2} = \sqrt{8{,}41 + 1{,}21} = \sqrt{9{,}62}.$$

Ответ: $(2{,}9;\ 4{,}9)$ и $R = \sqrt{9{,}62}$. ■

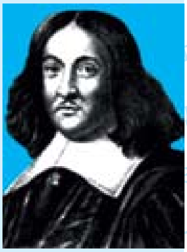
Решение задачи 2. ▲ Медианы треугольника в точке их пересечения делятся в отношении 2 : 1, считая от вершины. Пусть медианы треугольника ABC пересекаются в точке $E\ (x_1;\ y_1)$ и, если из вершины C проведена медиана CD, то $D\ (x_2; y_2)$. По свойству медиан $\dfrac{CE}{ED} = 2$. А т.к. точка D является серединой отрезка AB, то по формуле (4) $x_2 = \dfrac{0+4}{2} = 2$, $y_2 = \dfrac{6-2}{2} = 2$, т. е. $D(2;\ 2)$. Так как $\lambda = 2$, то по формуле (3) $x_1 = \dfrac{3 + 2\cdot 2}{1+2} = \dfrac{7}{3}$, $y_1 = \dfrac{8 + 2\cdot 2}{1+2} = 4$ т.е. $E\left(\dfrac{7}{3};\ 4\right)$.

Ответ: $E\left(\dfrac{7}{3};\ 4\right)$. ■

Материалы из истории

Как вы уже знаете, систему координат, которую впервые применил в своих исследованиях французский ученый Рене Декарт, называют декартовой системой координат. Одним из основоположников аналитической геометрии был французский математик Пьер Ферма (1601–1665), который работал юристом в городе Тулузе, а математикой увлекался в свободное время. Он получил весомые результаты в области теории чисел, геометрии, алгебры, анализа бесконечно малых величин и оптики. Большинство математических открытий Ферма стало известно из его писем к современникам. Многие его труды были опубликованы лишь после его смерти, в 1669 году.

Рене Декарт (1596–1650)



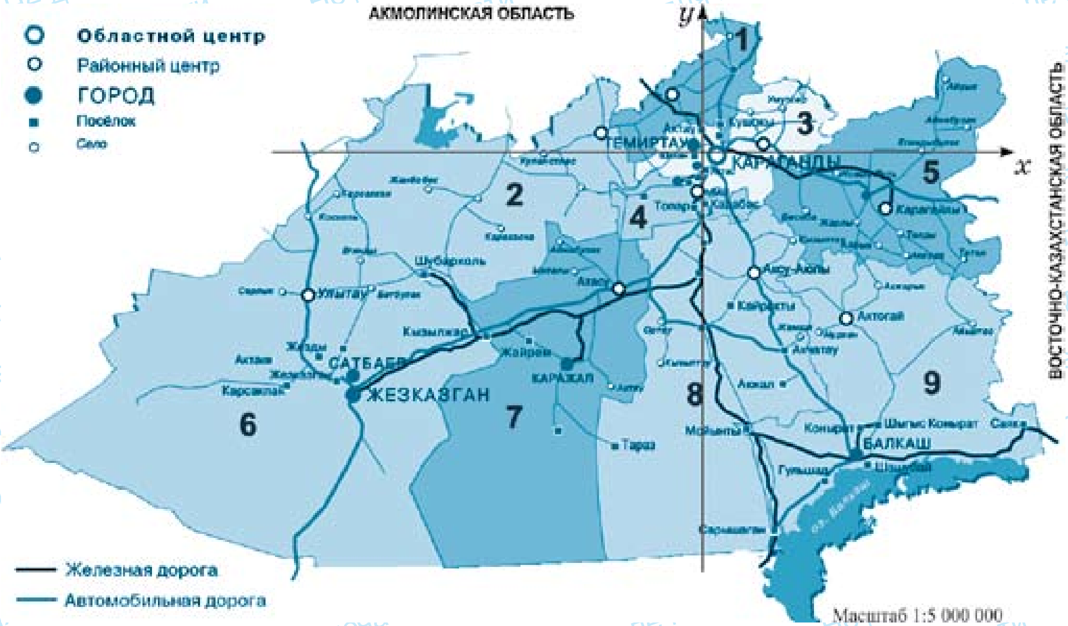
Пьер Ферма (1601–1665)

1. Как построить прямоугольную декартову систему координат?
2. Какие знаки имеют координаты точки, если она принадлежит первой (второй, третьей, четвертой) четверти?
3. Какой общий вид имеют координаты точки, лежащей а) на оси Ox; б) на оси Oy?
4. Напишите формулу для расстояния между двумя точками.
5. Напишите формулу для деления отрезка в данном отношении.
6. По какой формуле определяют координаты середины отрезка?

ГЕОМЕТРИЯ И ГЕОГРАФИЯ

Карагандинская область (*каз. Қарағанды облысы*) – область в центральной части Казахстана, находится в самом центре континента Евразия, почти равноудалена от Северного Ледовитого и Индийского, Атлантического и Тихого океанов. Климат резко континентальный и крайне засушливый. Область занимает наиболее возвышенную часть Казахского мелкосопочника – Сарыарки.

В настоящее время Карагандинская область – самая крупная по территории и промышленному потенциалу, богатая минералами и сырьём. Территория области в новых границах составляет 428 тыс. км^2 (15,7% общей площади территории Казахстана). В области проживает десятая часть всего населения Казахстана.



Творческая работа

Выше изображена карта Карагандинской области. Выберите прямоугольную систему координат так, как показано на этом рисунке. По указанному масштабу найдите приближенные значения координат городов Жезказган, Балкаш и Темиртау. Найдите среднее значение этих координат. Сделайте выводы.

Задачи

А

4.1. Постройте в декартовой системе координат точки:

$A(2;\ 1)$, $B\left(\frac{1}{2};\ 1\right)$, $C\ (1;\ -4)$, $D\ (0;\ 1)$, $E\ (-3;\ 2)$, $F\ (-3;\ 3)$.

4.2. Точки A и B лежат соответственно на осях Ox и Oy в их положительной части. Найдите координаты вершин треугольника ABO, если: 1) $OA = 5$, $OB = 3$; 2) $OA = a$, $OB = b$.

4.3. Катеты прямоугольного треугольника лежат на осях Ox и Oy, причем их длины соответственно равны a и b. Каковы координаты вершин треугольника, если он расположен: 1) в первой четверти; 2) во второй четверти; 3) в третьей четверти; 4) в четвертой четверти?

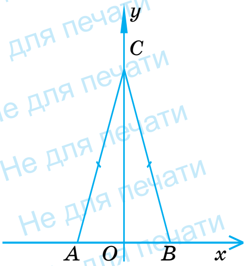


Рис. 4.7

4.4. Начало координат расположено в центре квадрата со стороной, равной $2a$. Каковы координаты вершин квадрата, если:

1) стороны квадрата параллельны осям координат;
2) диагонали квадрата лежат на осях координат?

4.5. В равнобедренном треугольнике ABC, изображенном на рис. 4.7, $AB = 2a$, $OC = h$. Чему равны координаты вершин треугольника?

4.6. Найдите расстояние от точки $(-3;\ 4)$ до: 1) оси Ox; 2) оси Oy.

4.7. Пусть $A\ (2;\ 3)$, $B\ (-1;\ 2)$. Найдите координаты точки, которая делит отрезок AB в отношении: 1) $\lambda = 1$; 2) $\lambda = \frac{1}{2}$; 3) $\lambda = 2$; 4) $\lambda = \frac{2}{3}$.

4.8. Найдите расстояние между точками A и B, если:
1) $A\ (2;\ -1)$, $B\ (1;\ 2)$; 2) $A\ (1;\ 5)$, $B\ (1;\ 1)$; 3) $A\ (-3;\ 1)$, $B\ (1;\ -2)$; 4) $A(-1;\ 2)$, $B(3;\ 0)$.

4.9. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный, если: 1) $A\ (0;\ 1)$, $B\ (1;\ -4)$, $C\ (5;\ 2)$; 2) $A\ (-4;\ 1)$, $B\ (-2;\ 4)$, $C\ (0;\ 1)$.

4.10. Найдите радиус окружности, если она проходит через точку $(-2;\ 1)$ и ее центр находится в точке $(2;\ -3)$.

4.11. Перечертите следующую таблицу в тетрадь и, используя формулу для вычисления координат точки C – середины отрезка AB, заполните пустые клетки таблицы:

A	$(2;\ -3)$		$(0;\ 1)$	$(0;\ 0)$	$(c;\ d)$	$(3;\ 5)$	$(3t+5;\ 7)$
B	$(-3;\ 1)$	$(4;\ 7)$		$(-3;\ 7)$		$(3;\ 8)$	$(t+7;\ -7)$
C		$(-3;\ -2)$	$(3;\ -5)$		$(a;\ b)$		

4.12. В параллелограмме $ABCD$ даны две соседние вершины $A\ (-4;\ 4)$, $B\ (2;\ 8)$ и точка пересечения его диагоналей $E(2;\ 2)$. Найдите координаты его вершин C и D.

B

4.13. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$ с вершинами в точках: $A(0;\ 0)$, $B(5;\ 0)$, $C(12;\ 3)$. Найдите координаты четвертой вершины D.

▲ *Указание*. Рассмотрите точку $D(x;\ y)$, удовлетворяющую равенствам $AB = CD$ и $AD = BC$. ■

4.14. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами в точках $A(-1; 2)$, $B(2; 5)$, $C(2; 1)$, $D(-1; -2)$ является параллелограммом.

4.15. Даны точки A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, лежащие на одной прямой и удовлетворяющие условию $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5 = A_5A_6$. Найдите координаты точек, если $A_2(5; 5)$ и $A_5(-1; 7)$.

4.16. Найдите координаты точки пересечения медиан треугольника с вершинами $A(2; 1)$, $B(3; 4)$, $C(1; 6)$.

4.17. Дано: $A(4; 0)$, $B(12; -2)$, $C(5; -9)$. Для треугольника ABC найдите: 1) его периметр; 2) длину медианы AN; 3) координаты центра описанной окружности и ее радиуса.

4.18. Докажите, что треугольник ABC – равнобедренный, если: 1) $A(0; 1)$, $B(1; -4)$, $C(5; x)$; 2) $A(-4; 1)$, $B(-2; 4)$, $C(0; x)$.

4.19. Найдите на оси ординат точку, равноудаленную от точек: 1) $A(-3; 5)$ и $B(6; 4)$; 2) $C(1; 1)$ и $D(8; 1)$.

4.20. Найдите на оси абсцисс точку, равноудаленную от точек: 1) $A(1; 2)$ и $B(-3; 4)$; 2) $C(4; -3)$ и $D(3; 5)$.

4.21. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами в точках: 1) $A(-3; -1)$, $B(1; -1)$; $C(1; -3)$, $D(-3; -3)$; 2) $A(4; 1)$, $B(3; 5)$, $C(-1; 4)$, $D(0; 0)$ является прямоугольником.

4.22. По теореме, обратной теореме Пифагора, докажите, что треугольник с вершинами в точках $A(1; 1)$, $B(3; 5)$; $C(9; 2)$ является прямоугольным. Укажите его прямой угол.

C

4.23. Точки (5; 2), (2; –3), (2; 1) являются серединами сторон треугольника. Найдите координаты его вершин.

4.24. Докажите, что координаты точки пересечения медиан треугольника с вершинами $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$ определяются по формулам:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

Используя эти формулы, найдите координаты точки пересечения медиан треугольника с вершинами в точках:

1) $A\ (3; 1)$, $B(-1; 4)$, $C(1; 1)$, 2) $A\ (-2; 3)$, $B(5; -2)$, $C(-3; -1)$.

4.25. Дан четырехугольник $ABCD$: $A(-1; 7)$, $B(5; 5)$; $C(7; -5)$, $D(3; -7)$. Докажите, что: 1) отрезки, соединяющие середины сторон AB и CD, AD и

BC, в точке их пересечения делятся пополам; 2) середины сторон данного четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

4.26. Найдите центр и радиус окружности, касающейся оси Ox в точке $A(-6; 0)$ и проходящей через точку $B(-10; 4)$.

4.27. Найдите центр и радиус окружности, касающейся осей координат и проходящей через точку $A(-2; 1)$.

4.28. Докажите, что в прямоугольном треугольнике середина гипотенузы равноудалена от его вершин.

4.29. Докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

4.30. Основание равнобедренного треугольника равно 80 см, а медиана, проведенная к нему, равна 160 см. Найдите остальные две медианы этого треугольника.

4.31. Высота треугольника, равная 10 см, делит его основание на отрезки, равные 10 см и 4 см. Найдите медиану, проведенную к меньшей из двух оставшихся сторон треугольника.

4.32. Докажите, что если $ABCD$ – прямоугольник, то для любой точки O плоскости выполняется равенство $AO^2 + CO^2 = BO^2 + DO^2$.

4.2. УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ И ОКРУЖНОСТИ

Понятие уравнения фигуры. Уравнение прямой

Определение. **Уравнением фигуры L** называется уравнение с переменными x и y, которому удовлетворяют координаты любой точки фигуры, а координаты каждой точки, не принадлежащей этой фигуре, не удовлетворяют данному уравнению.

Рис. 4.8

Из курса алгебры мы хорошо знаем, что графиком уравнения $y = 2x + 1$ является прямая линия (рис. 4.8), а графиком функции $y = x^2$ является парабола (рис. 4.9).

При изучении фигур с использованием метода координат рассматриваются две задачи, данные ниже.

1. *Нахождение уравнения данной фигуры по ее геометрическим свойствам.*

2. *И, наоборот, исследование геометрических свойств фигуры, соответствующих данному уравнению.*

Вторая задача была решена еще в курсе алгебры, например, при построении графиков заданных функций.

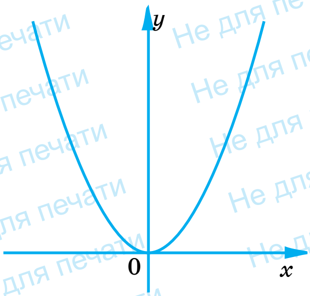


Рис. 4.9

Здесь мы показали, что прямая может быть задана уравнением

$$y = kx + b, \qquad (1)$$

где k – угловой коэффициент прямой, b – свободный член. При этом прямая пересекает ось Oy в точке $(0; b)$.

Пример 1. Написать уравнение прямой, проходящей через точки $A(-3; -1)$ и $B\left(\frac{3}{2}; 2\right)$ (рис. 4.10).

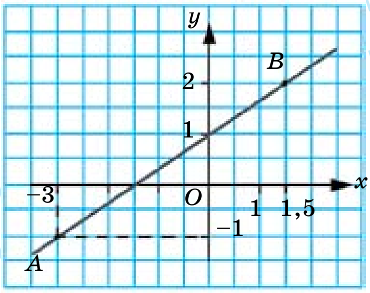


Рис. 4.10

▲ Если уравнение этой прямой записывается в виде $y = kx + b$, то координаты точек A и B должны удовлетворять этому уравнению:

$$\begin{cases} -1 = k(-3) + b, \\ 2 = k\left(\dfrac{3}{2}\right) + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3k + b = -1, \\ 3k + 2b = 4 \end{cases} \oplus \Rightarrow \begin{cases} 3b = 3, \\ 3k + 2b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1, \\ 3k + 2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1, \\ k = \dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Итак, необходимо, чтобы $k = \frac{2}{3}$; $b = 1$, т.е. искомое уравнение записывается так: $y = \frac{2}{3}x + 1$ (рис. 4.10). ■

Уравнение прямой, проходящей через две точки

Покажем, что уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, записывается так:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \qquad (2)$$

▲ Если прямая $y = kx + b$ проходит через точки M_1 и M_2, то необходимо, чтобы

$$\begin{cases} y_2 = kx_2 + b, \\ y_1 = kx_1 + b. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, имеем $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1) \Rightarrow$ $\Rightarrow k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Подставляя это во второе уравнение, получим $y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x +$ $+ b \Rightarrow b = y_1 - \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1$.

Тогда уравнение $y = kx + b$ записывается так:

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x + y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 \Rightarrow y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) \Rightarrow \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \blacksquare$$

В случае, когда $x_1 = x_2$, то уравнение прямой имеет вид $x = x_1$, а в случае, когда $y_1 = y_2$, то уравнение M_1M_2 записывается так: $y = y_1$. Объясните это самостоятельно.

Решим пример 1 с помощью этой формулы: $x_1 = -3$, $y_1 = -1$; $x_2 = \dfrac{3}{2}$, $y_2 = 2$. Тогда по формуле (2) имеем:

$$\frac{x+3}{\frac{3}{2}+3} = \frac{y+1}{2+1} \Rightarrow \frac{2x+6}{9} = \frac{y+1}{3} \Rightarrow y + 1 = \frac{2}{3}\,x + 2 \Rightarrow y = \frac{2}{3}\,x + 1.$$

Уравнения (1) и (2) являются линейными уравнениями относительно переменных x и y. А линейное уравнение в общем виде записывается так:

$$ax + by + c = 0, \tag{3}$$

здесь a, b называются коэффициентами, которые одновременно не равны нулю, c – свободным членом, а (3) называют **общим уравнением прямой.**

Если $a = 0$, $b \neq 0$, то из (3) получим $y = -\dfrac{c}{b}$. Отсюда видно, что все точки, лежащие на прямой, имеют одну и ту же ординату $-\dfrac{c}{b}$. Следовательно, прямая параллельна оси Ox. Аналогично, при $a \neq 0$, $b = 0$ уравнение $x = -\dfrac{c}{a}$ определяет прямую, параллельную оси ординат. В частности, уравнение $y = 0$ является уравнением оси Ox, а уравнение $x = 0$ – уравнением оси Oy.

Уравнение окружности

Теперь выведем уравнение окружности, опираясь на ее определение. Вообще, **окружностью** называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, находящихся на одинаковом расстоянии R от точки C, где число R называется радиусом окружности (рис. 4.11). Итак, если $C(x_0; y_0)$ –

центр окружности, а R – ее радиус, то для любой точки $A(x; y)$, лежащей на окружности, выполняется равенство $AC = R$ или $AC^2 = R^2$. Так как по формуле $AC = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, то координаты точек, лежащих на окружности, удовлетворяют уравнению

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \qquad (4)$$

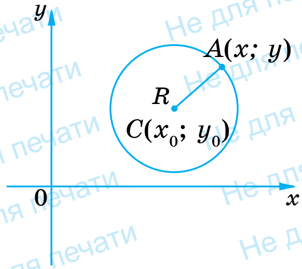


Рис. 4.11

Если $B\ (x; y)$ не лежит на окружности, то выполняется неравенство $R^2 \neq BC^2$ и координаты точки B не удовлетворяют уравнению (4). Заметим, что если центром окружности является начало координат, то уравнение окружности имеет вид:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Пример 2. Даны точки A и B. Надо определить множество всех точек плоскости, для которых расстояние до точки A в два раза больше, чем расстояние до точки B.

▲ Зададим прямоугольную декартову систему координат (как показано на рис. 4.12). Тогда имеем: $A(0; 0)$, $B(a; 0)$. По условию задачи для каждой точки $D(x; y)$ искомого множества должно выполняться равенство $AD = 2 \cdot BD$ или $AD^2 = 4BD^2$. Так как $AD^2 = x^2 + y^2$, $BD^2 = (x - a)^2 + y^2$, то координаты точки $D(x;y)$ удовлетворяют уравнению

Рис. 4.12

$$x^2 + y^2 = 4((x - a)^2 + y^2). \qquad (5)$$

А точки, не принадлежащие этому множеству, уравнению (5) не удовлетворяют. Значит, уравнение (5) является уравнением искомого множества. Раскрыв скобки и приведя подобные члены, уравнение (5) можно записать в виде:

$$\left(x - \frac{4a}{3}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2a}{3}\right)^2.$$

Итак, искомым множеством является окружность с центром в точке $C\left(\frac{4a}{3}; 0\right)$ и радиусом, равным $\frac{2a}{3}$. ■

7–3456

Обратите внимание! Аналогично можно доказать, что множеством точек D, удовлетворяющих условию $AD = kBD$, является окружность с центром в точке $\left(\frac{k^2 \cdot a}{k^2 - 1}; 0\right)$ и радиусом, равным $\frac{k \cdot a}{k^2 - 1}$, где $k \neq 0$, $k > 0$. Эту окружность называют окружностью Аполлония. Если $k = 1$, то надо найти множество точек D, равноудаленных от точек A и B. Этим множеством является серединный перпендикуляр к отрезку AB.

1. Что вы понимаете под уравнением фигуры?
2. Как записывается уравнение прямой, заданной с угловым коэффициентом?
3. Как записывается уравнение прямой, проходящей через две заданные точки? Приведите пример.
4. Как записывается уравнение окружности? Как определяются координаты центра и радиус окружности? Приведите пример.

Творческая работа

Продолжение творческой работы на стр. 91. Найдите: 1) Уравнение прямой, проходящей через города Жезказган и Балкаш (в качестве координат городов возьмите среднее значение по классу). 2) На каком расстоянии расположен центр окружности, проходящий через города Караганды, Жезказган и Балкаш от начала координат?

Задачи

А

4.33. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки $A(-1;\ 1)$ и $B(1;\ 0)$.

4.34. Напишите уравнение прямых, проходящих через точки: 1) $A(1; -1)$ $B(-3;\ 2)$; 2) $C(2;\ 5)$; $D(5;\ 2)$.

4.35. Определите точки пересечения с осями координат прямых, заданных следующими уравнениями:

1) $x + 2y + 3 = 0$; 2) $3x + 4y = 12$; 3) $3x - 2y + 6 = 0$;
4) $4x - 2y - 10 = 0$; 5) $3x - 4y + 1 = 0$; 6) $x - y = 0$.

4.36. Найдите точки пересечения прямых, заданных следующими уравнениями:

1) $4x + 3y - 6 = 0$ и $2x + y - 4 = 0$;

2) $x + 2y + 3 = 0$ и $4x + 5y + 6 = 0$;
3) $3x - y - 2=0$ и $2x + y - 8 = 0$;
4) $4x + 5y + 8 = 0$ и $4x - 2y - 6 = 0$.

4.37. Напишите уравнения прямых, параллельных каждой из осей координат и проходящих через точку $M(2; 3)$.

4.38. Постройте прямые, заданные уравнениями:

1) $y = -3$; 2) $x = 2$; 3) $y = 4$; 4) $x = -7$.

439. Какие из точек $A(1; 2)$, $B(3; 4)$, $C(-3; 4)$, $D(0; 5)$, $E(5; -1)$ лежат на окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 = 25$?

4.40. Постройте графики окружностей, определите их радиусы, координаты их центров, если заданы их уравнения:

1) $x^2 + y^2 = 9$; 2) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$;
3) $(x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 25$; 4) $(x - 1)^2 + y^2 = 4$;
5) $x^2 + (y + 2)^2 = 2$; 6) $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 3$.

4.41. Даны точки $A(2; 0)$ и $C(-4; 8)$. Напишите уравнение окружности, проходящей через точку A, с центром в точке C.

B

4.42. Треугольник ABC задан координатами своих вершин $A(4; 6)$, $B(-4; 0)$, $C(-1; -4)$. Напишите уравнение медианы, проведенной из вершины A.

4.43. Трапеция $ABCD$ задана координатами своих вершин $A(-2; -2)$, $B(-3; 1)$; $C(7; 7)$; $D(3; 1)$. Напишите уравнения прямых, проходящих через: 1) диагонали AC и BD; 2) среднюю линию.

4.44. Докажите, что прямые, заданные уравнениями $x + 2y = 3$, $2x - y = 1$ и $3x + y = 4$, пересекаются в одной точке.

4.45. Найдите координаты точки пересечения медиан треугольника с вершинами в точках $A(0; 1)$, $B(2; 3)$ и $C(3; 2)$.

4.46. Окружность задана уравнением $(x + 5)^2 + (y - 1)^2 = 16$. Какие из точек $A(1; 2)$, $B(3; 4)$, $C(-2; 4)$, $D(-5; -3)$ и $E(-7; -2)$ лежат: 1) на окружности; 2) внутри окружности; 3) вне окружности?

4.47. Даны точки $A(3; 1)$ и $B(-3; 5)$. Напишите уравнение окружности, диаметр которой равен AB.

4.48. Напишите уравнение окружности, касающейся оси Ox, с центром в точке $C(1;\ 2)$.

4.49. Напишите уравнение окружности с центром в точке $(-3;\ 4)$, проходящей через начало координат.

4.50. Найдите координаты центра и радиус окружностей, заданных следующими уравнениями:

1) $(x-1)^2+(y+2)^2=25$;
2) $x^2+(y+7)^2=1$;
3) $x^2+y^2+8x-4y+16=0$;
4) $x^2+y^2-2x+4y-20=0$;
5) $x^2+y^2-4x-2y+1=0$;
6) $x^2+y^2-6x+4y+4=0$.

C

4.51. Известно, что первая координата (абсцисса) точки C, лежащей на прямой AB, равна 5. Найдите вторую координату точки C, если $A(-8;\ -6)$ и $B(-31;\ -1)$.

4.52. Диагонали ромба, равные 10 см и 4 см, лежат на осях координат. Напишите уравнения прямых, проходящих через стороны ромба.

4.53. Напишите уравнение окружности, проходящей через точку $A(1;\ 4)$, с центром, лежащим на оси Ox, и радиусом, равным 5.

4.54. Напишите уравнение окружности, проходящей через точки $A(3;\ 0)$, $B(-1;\ 2)$, с центром, лежащим на прямой $y=x+2$.

4.55. Напишите уравнение окружности, которая проходит через три данные точки: 1) $A(1;\ -4)$, $B(4;\ 5)$, $C(3;\ -2)$; 2) $A(3;\ -7)$, $B(8;\ -2)$, $C(6;\ 2)$.

4.56. Вершины треугольника находятся в точках: $A(-7;\ 5)$, $B(3;\ -1)$, $C(5;\ 3)$. Напишите уравнение прямых, проходящих через: 1) серединные перпендикуляры; 2) стороны; 3) среднюю линию.

4.57. Докажите, что значение разности $(AF^2+CF^2)-(BF^2+DF^2)$ для точки F и параллелограмма $ABCD$ постоянно и не зависит от точки F.

4.58. 1) Докажите, что медиана AA_1 треугольника ABC вычисляется по формуле $AA_1=\dfrac{1}{2}\sqrt{2AB^2+2AC^2-BC^2}$.

2) Используя эту формулу, докажите, что треугольник с двумя равными медианами является равнобедренным.

4.59. Даны точки A и B. Какой фигурой является геометрическое место всех точек K, удовлетворяющих уравнению: 1) $2AK^2-BK^2=2AB^2$; 2) $AK^2+2BK^2=6AB^2$?

РАЗДЕЛ 5*. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ

5.1. Разделите треугольник на три равновеликие части двумя прямыми, проходящими через одну вершину.

5.2. Решите предыдущую задачу, взяв вместо треугольника параллелограмм.

5.3. Докажите, что среди всех параллелограммов с данными диагоналями наибольшую площадь имеет ромб.

5.4. Медианы AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке O. Точки P и Q – середины отрезков AO и BO соответственно. Докажите, что A_1B_1PQ является параллелограммом.

5.5. При каких значениях c прямая $2x + y + c = 0$ и окружность $x^2 + y^2 = 4$: 1) пересекаются; 2) не пересекаются; 3) касаются?

5.6. Основание равнобедренного треугольника 10 см, а один из его углов 120°. Найдите высоту, проведенную к боковой стороне.

5.7. Точка P лежит на стороне CD квадрата $ABCD$, а $AK(K \in BC)$ – биссектриса угла BAP. Докажите, что $AP = BK + DP$.

5.8. Отрезки AE и BF – высоты равнобедренного треугольника ABC с основанием AC. Найдите косинус угла при основании, если $AE : BF = \frac{1}{2}$.

5.9. Диагонали прямоугольной трапеции взаимно перпендикулярны. Высота трапеции равна 2 см, а большее основание – 3 см. Найдите меньшее основание.

5.10. Окружности с радиусами, равными 1, 2 и 3, касаются друг друга внешним образом, а каждая из них касается внутренним образом 4-й окружности. Найдите радиус 4-й окружности.

5.11. Найдите множество всех точек плоскости, из которых данный треугольник виден под данным углом.

5.12. Даны две стороны треугольника: 6 см и 8 см. Медианы, проведенные к этим сторонам, взаимно перпендикулярны. Найдите площадь треугольника.

5.13. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке O. Найдите угол C, если $OC = AB$.

5.14. В треугольнике ABC медиана MB равна стороне AC. На продолжении сторон BA и AC отмечены точки D и E так, что $AD = AB$, $CE = CM$. Докажите, что $DM \perp BE$.

5.15. Основание треугольника равно 26 см, а медианы, проведенные к боковым сторонам, равны 30 см и 39 см. Найдите площадь треугольника.

5.16. Медианы треугольника 3 см, 4 см, 5 см. Найдите площадь треугольника.

5.17. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ биссектрисы углов A и C пересекаются с биссектрисами углов B и D в четырех точках. Докажите, что все эти точки лежат на одной окружности.

5.18. Две стороны треугольника равны 14 см и 35 см, а биссектриса между ними – 12 см. Найдите площадь треугольника.

5.19. Найдите множество всех точек, расстояния которых от двух данных точек на плоскости находятся в отношении $m : n$.

5.20. В треугольнике из одной вершины проведены высота и медиана, которые делят этот угол на три равные части. Найдите углы треугольника.

5.21. Внутри треугольника ABC взята точка P так, чтобы выполнялось равенство $S_{ABP} = S_{ACP} = S_{BCP}$. Докажите, что точка P является точкой пересечения медиан треугольника.

5.22. Две прямые, проведенные параллельно сторонам параллелограмма, пересекаясь на его диагонали, делят параллелограмм на 4 части. Докажите, что части, расположенные по обе стороны от диагонали, равновелики.

5.23. Через вершину A трегольника ABC проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке D; $\frac{CD}{BC} = \lambda \left(\lambda < \frac{1}{2}\right)$. На стороне BC между точками B и D взята точка E так, что выполняется равенство $CD = DE$. Через точку E проведена прямая, параллельная AC и пересекающая AB в точке F. Найдите отношение площади трапеции $ACEF$ к площади треугольника ACD.

5.24. Отрезок AD – высота равнобедренного треугольника ABC с основанием AC. Найдите стороны треугольника, если $S_{ABD} = 4$ см^2, $S_{ACD} =$ $= 2$ см^2.

5.25. Докажите, что биссектрисы внутренних углов параллелограмма, пересекаясь, образуют прямоугольник, и что его диагональ равна разности сторон параллелограмма.

5.26. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle BAC = 20°$, $\angle BCA = 35°$, $\angle BDC = 40°$, $\angle BDA = 70°$. Найдите угол между диагоналями четырехугольника.

5.27. В четырехугольнике $ABCD$ $\angle BAC = 40°$, $\angle BCA = 70°$, $\angle BDC = 20°$, $\angle BDA = 35°$. Найдите угол между диагоналями четырехугольника.

5.28. Из точки внутри равностороннего треугольника ABC на его стороны AB, BC, CA проведены перпендикуляры, длины которых соответственно равны m, n, k. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника с вершинами в основаниях перпендикуляров.

5.29. В равнобедренном треугольнике проведены биссектрисы углов при вершине и при основании. Найдите косинус угла между биссектрисами, если синус угла при основании треугольника равен $\frac{\sqrt{975}}{32}$.

5.30. Основание равнобедренного треугольника 12 см, а радиус вписанной окружности 3 см. Найдите площадь треугольника.

5.31. Параллелограмм разделен на четыре треугольника отрезками, соединяющими точку внутри параллелограмма с его вершинами. Докажите, что суммы площадей противоположно расположенных треугольников равны.

5.32. Вне треугольника ABC на его сторонах AB и BC построены квадраты $ABFH$ и $BCDK$. Докажите, что продолжение медианы BE треугольника ABC является высотой треугольника BFK.

5.33. В треугольнике ABC $\angle B = 90°$. На катете BC взяты точки D и E так, что отрезки AD и AE делят угол A на три равные части. Найдите $S_{ADB} : S_{AEB}$, если $AD = a$, $AE = b$.

5.34. Докажите, что сумма расстояний от точки X, взятой внутри равностороннего треугольника ABC, до его сторон не зависит от точки X.

5.35. Две высоты треугольника не меньше сторон, к которым они проведены. Найдите углы треугольника.

5.36. Площадь равнобедренной трапеции равна S, а угол между диагоналями, противолежащий боковой стороне, равен α. Найдите высоту трапеции.

5.37. Внутри равностороннего треугольника ABC взята точка X, проекциями которой на высотах AD, BE и CF являются соответственно точки K, P и Q. Докажите, что сумма $AK + BP + CQ$ не зависит от положения точки X.

5.38. Докажите, что во всяком треугольнике сумма его медиан меньше периметра треугольника, но больше полупериметра.

5.39. Внутри прямоугольника $ABCD$, площадь которого равна S, взята точка X. Докажите неравенство $S \leqslant AX \cdot CX + BX \cdot DX$.

ОТВЕТЫ

Повторение. **0.1.** 60°, 120°. **0.2.** 30°. **0.3.** 180°. **0.4.** 90°. **0.5.** 90°. **0.6.** 24 см. **0.7.** 12 см. **0.10.** 100°, 80°. **0.14.** $180° - \frac{\alpha+\beta}{2}$. **0.15.** Не могут. **0.16.** 8 см, 24 см. **0.18.** 10 см, 20 см, 20 см. **0.20.** ΔBPO и ΔCQO равнобедренные; поэтому $PQ = PO + OQ = PB + QC$. **0.21.** Используйте признак параллельности. **0.23.** а) 360°; б) 540°. **0.24.** 120°.

Раздел 1

1.1. **1.1.** 90°. **1.6** 1) Существует, $n = 53$; 2) существует, $n = 22$; 3) не существует. **1.7.** Не может. **1.8.** $(n - 3)$ диагоналей; 1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 7. **1.9.** Не может. **1.10.** 1) Не может; 2) не может. **1.12.** 1) Возрастет до 540°. **1.13.** 1) 4; 2) 3. **1.14.** 1) Может; 2) не может. **1.15.** Проведите серединные перпендикуляры к MN и PK. **1.16.** 3. **1.17.** $\frac{n(n-3)}{2}$. **1.18.** $AB = AD$, $BC = CD$. **1.19.** На $(n - 1)$. **1.20.** $n = 5$. **1.21.** Не верна; например, параллелограмм. **1.22.** 180°. **1.24.** 26°, 154°, 26°, 154°. **1.2.** **1.31.** 10 м. **1.32.** 3 см. **1.34.** 32 см. **1.37.** 9 см, 6 см. **1.38.** 0,6 м; 0,8 м. **1.39.** 1,1 м; 0,8 м; 1,1 м. **1.40.** 1) Не может; 2) не может; 3) может. **1.46.** Нужно построить треугольник по стороне и полудиагоналям. **1.48.** 10 см, 15 см. **1.3.** **1.59.** Нет. **1.60.** Нет. **1.63.** 60 см. **1.64.** 10 см, 18 см. **1.66.** 2) 18 см. **1.67.** Дополните до прямоугольника. **1.68.** 20 см, 12 см. **1.69.** 12 см. **1.70.** 10 см, 25 см. **1.73.** 80°, 100°. **1.74.** 30°, 150°. **1.75.** 4 м. **1.77.** 2 м. **1.78.** 10 см. **1.85.** 45°. **1.86.** $d_1 = a = \frac{p}{2}$, углы ромба равны 60° и 120°. **1.4.** **1.88.** Постройте треугольник по стороне и полудиагоналям. **1.98.** Если прямая AD пересекает BC в точке E и $AD > DE$, то достаточно построить параллелограмм так, чтобы его диагонали пересекались в точке D. Половина диагонали равна DE и одна сторона лежит на прямой BC. (Если $AD < DE$, то вместо AD нужно взять CD.) **1.102.** Нужно построить точку T такую, что $QT \perp PR$, $QT = PR$, если P, Q, R, S – данные точки на сторонах квадрата. Тогда прямая ST проходит через сторону квадрата. **1.5.** **1.103.** 1) Параллелограмм; 2) ромб; 3) прямоугольник; 4) квадрат. **1.105.** Нужно разделить отрезок на равные: 1) 3 части; 2) 5 частей. **1.106.** $a + b$. **1.107.** $\frac{p}{2}$. **1.108.** 11 дм. **1.110.** 8 см, 7 см, 1 см. **1.114.** p. **1.116** $d_1 + d_2$. **1.120.** Средние линии треугольника. **1.122.** Если CH – высота, CD – биссектриса треугольника ABC, то нужно использовать соотношения $\angle DCH = \frac{1}{2}(\angle A - \angle B)$ и $AD : BD = AC : BC$. **1.123.** Пусть даны угол BOC и его внутренняя точка A. Проведем луч OA и отметим на нем точку D такую, чтобы $OA : AD = 2 : 1$, $DE \parallel OB$, $E \in OC$. Тогда $EA \cap OB = K$ и $AE : AK = 1 : 2$. Задача имеет 2 решения. 1.6. **1.124.** Не может. **1.125.** 1) Не могут; 2) могут. **1.127.** 110°, 70°. **1.128.** 112°, 109°. **1.129.** 40°, 140°, 80°, 100°. **1.130.** 20 см. **1.131.** 3 м, 4 м. **1.132.** 10 см, 34 см. **1.133.** 5 см. **1.135.** 132 см. **1.137.** 30 см. **1.138.** 15 км. **1.139.** 4 м, 6 м. **1.140.** 5 см, 9 см. **1.141.** 8 см, 12 см. **1.142.** 2 см, 5 см. **1.143.** 3 см. **1.144.** 14,2 см. **1.147.** 60°, 120°. **1.151.** Постройте треугольник со сторонами d_1, d_2, $a + b$. **1.160***. 2) Сначала нужно построить отрезок $y = \frac{a \cdot b}{d}$, а затем отрезок $x = \frac{y \cdot c}{e}$. 1.7. **1.162.** 1) Равносторонний треугольник; 2) прямоугольный треугольник; 3) равнобедренный треугольник; 4) равнобедренный треугольник. **1.163.** 1 см, 2 см. **1.165.** $S - c$. **1.166.** 4 см. **1.167.** 1) Равнобедренный; 2) равносторонний. **1.168.** 6 см. **1.169.** Нужно провести медианы. **1.170.** 1) Не могут; 2) не могут. **1.172.** 1) Может; 2) может; 3) не может. **1.175.** 9 см. **1.176.** 38°, 52°. **1.178.** 4 окружности. **1.181.** Если ввести обозначения $\angle OAB = \angle OBA = x$, $\angle ACO = \angle CAO = y$, $\angle OBE = u$, $\angle EBH = v$, $\angle CBH = z$, то достаточно доказать равенство $x = z$. Действительно, $\angle A + \angle B + \angle C = 180° \Rightarrow x + y + y + \angle OCB + \angle OBC + x = 180° \Rightarrow 2x + 2y + 2(u + v + z) = 180° \Rightarrow x + y + z + u + v = 90°$. С другой стороны, $\angle C + \angle HBC = 90° \Rightarrow y + u + v + z + z = 90° \Rightarrow x + y + u + v + z = y + u + v + 2 \Rightarrow x = z$. **1.183.** См. задачу 1.181. **1.184.** См. задачу 1.182. Если BN – медиана, BE – биссектриса и BH – высота, то центр описанной окружности лежит на перпендикуляре (срединный), проведенном из точки N на сторону треугольника. Построив угол $\angle OBE = \angle EBH$, находим точку O как пересечение прямых OA и ON. **1.185.** См. задачу 1.182. **1.186.** Дополните ΔAOB до прямоугольника. 1.8. **1.188.** 1) Нет; 2) да; 3) да. **1.189.** 1) Да; 2) нет. **1.191.** 1) Да; 2) нет; 3) да. **1.192.** 30 см. **1.193.** Нужно построить треугольник по R и углу α. **1.197.** R. **1.199.** 56 см. **1.202.** Покажите, что сумма противоположных сторон полученного четырехугольника равна 180°. **1.204.** В него можно вписать окружность, так как равные хорды находятся на равных расстояниях от центра окружности. **1.205.** Не может. **1.206.** Сначала нужно показать, что угол между пересекающимися хордами равен полусумме дуг, на которые они опираются. Если O – точка пересечения диагоналей, а P, Q – точки касания, то достаточно показать, что $\angle POQ = 180°$. **1.207.** См. задачу 1.206.

Раздел 2

2.1. **2.1.** 1) $\frac{\sqrt{11}}{6}$; 2) $\frac{4}{5}$. **2.3.** 1) 5; 2) $\sqrt{2}$; 3) $\sqrt{61}$: 4) 1,3. **2.5.** 1) 4; 2) 12; 3) 1,2. **2.6.** 5 м или $\sqrt{7}$ м. **2.7.** Не могут. **2.8.** 1) 5 см; 2) 17 см; 3) $\frac{\sqrt{129}}{2}$ м. **2.9.** 109 см. **2.10.** 1) Да; 2) нет; 3) да; 4) да; 5) нет; 6) нет; 7) да. **2.11.** 1) Да; 10, 24, 26; 2) не могут. **2.12.** 1) Не могут; 2) могут; 3, 4, 5. **2.13.** 3, 4, 5. **2.14.** 10 см, 6 см. **2.15.** 13 см. **2.16.** 4 м. **2.17.** $\frac{\sqrt{3}}{2}a$. **2.19.** 16 см. **2.21.** $2\sqrt{29}$ м $\approx 10{,}77$ м. **2.22.** 1) $c=15$ см, $h=\frac{36}{5}$ см, $a_c=\frac{48}{5}$ см, $b_c=\frac{27}{5}$ см; 2) $b=5$ см, $h=\frac{60}{13}$ см, $a_c=\frac{144}{13}$ см, $b_c=\frac{25}{13}$ см. **2.23.** $2\sqrt{21}$ см, 6 см. **2.25.** $\beta=90°-\alpha$; $b=c\cdot\cos\alpha$; $a=c\cdot\sqrt{1-\cos^2\alpha}$. **2.27.** $\sqrt{a^2+b^2}$. **2.29.** $\frac{85}{13}$ см, $\frac{204}{13}$ см. **2.30.** 3 см. **2.31.** $a=13$ см, $b=12$ см, $d_1=5$ см, $d_2=\sqrt{601}$ см. **2.32.** 1) $\frac{60}{13}$ м; 2) $\frac{48}{5}$ м. **2.33.** 1) $\frac{168}{25}$ см; 2) $\frac{120}{17}$ дм. **2.37.** Если a – общая хорда, то $r=\frac{\sqrt{3}}{3}a$. **2.38.** $\sqrt{178}$ см. **2.40.** $\frac{c}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}c$. 2.2. **2.41.** 1) $AC=15$; $\cos A=\frac{15}{17}$, $\cos B=\frac{8}{17}$, $\sin A=\frac{8}{17}$, $\sin B=\frac{15}{17}$, $\operatorname{tg}A=\frac{8}{15}$. **2.42.** Постройте прямоугольный треугольник. **2.43.** $c=\frac{b}{\sin\beta}$, $a=b\cdot\operatorname{ctg}\beta$, $\cos\alpha=\frac{b}{c}=\sin\beta$. **2.44.** $c=\frac{b}{\cos\alpha}$, $a=b\cdot\operatorname{tg}\alpha$, $\sin\beta=\frac{b}{c}=\cos\alpha$. **2.45.** $a=c\cdot\sin\alpha$, $b=c\cdot\cos\alpha$, $\sin\beta=\cos\alpha$. **2.46.** $\frac{\sqrt{2}}{2}a$. **2.47.** $\operatorname{tg}\beta=\frac{7}{4}=1{,}75 \Rightarrow \beta=60°15'$. **2.48.** 4) а) $c=\frac{3}{\sin 30°27'}$, $b=\frac{3}{\operatorname{tg}30°27'}$, $\beta=59°33'$. **2.49.** $\frac{\sqrt{3}}{2}c$. **2.50.** 1) Положительный; 2) отрицательный. **2.51.** 4) $\cos\alpha=\frac{\sqrt{15}}{4}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\sqrt{15}$. **2.52.** $c=\sqrt{565{,}85}\approx 23{,}79$, $\alpha\approx 31°25'$, $\beta\approx 117°10'$. **2.53.** $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{31}{65}\approx 0{,}4769 \Rightarrow \frac{\alpha}{2}\approx 25°30' \Rightarrow \alpha\approx 51°$. **2.54.** $\alpha\approx 29°51'$, $\beta\approx 150°09'$. **2.55.** $\alpha\approx 63°42'$, $\beta\approx 116°18'$ **2.56.** 1) $\cos^2\alpha$; 2) $\sin^2\alpha$; 3) $\sin^2\alpha$; 4) 2; 5) $\sin^3\alpha$; 6) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 7) $\sin 5°$; 8) $\cos^2 18°$; 9) 1; 10) 1; 11) $\sin^2\alpha$; 12) 1; 13) $\sin^2\alpha$; 14) $\cos^2\alpha$; 15) 1. **2.57.** 2) $\sin\alpha=\frac{8}{17}$; $\operatorname{tg}\alpha=\frac{8}{15}$. **2.58.** 3) $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\operatorname{ctg}\alpha=\sqrt{3}$. **2.60.** $R=\frac{\sqrt{3}}{3}a$, $r=\frac{\sqrt{3}}{6}a$. **2.61.** 60°. **2.62.** 60°,120°. **2.63.** 1) $\alpha>\beta$; 2) $\alpha<\beta$; 3) $\alpha<\beta$; 4) $\alpha<\beta$; 5) $\alpha<\beta$; 6) $\alpha<\beta$. **2.64.** $\frac{\sqrt{3}b}{3}$. **2.65.** 12 м, $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{5}{13}\Rightarrow \alpha\approx 45°14'$. **2.66.** 29 см. **2.67.** 87,72 м. **2.68.** $\angle A=11'$. **2.69.** $2\sqrt{2}$ см. **2.70.** 1) 50 м; 2) 15 м, 25 м. **2.71.** 3) $c=2$ см, $b=1$ см,

β=30°. **2.72.** 1) $c = 4\sqrt{3}$ см, $b = 2\sqrt{3}$ см, α=60°. **2.73.** 2) c=13 см, $\sin\alpha = \frac{12}{13}$, $\sin\beta = \frac{5}{13}$, $\gamma = 90^\circ$. **2.74.** а) c=8 см, $b = 8\sqrt{3}$ см, β=60°. **2.75.** 2) b=12 см, $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\sin\beta = \frac{12}{13}$. **2.82.** c=8 см, $b = 4\sqrt{3}$ см, α=30°, β=60°. **2.84.** 1 см. **2.85.** 8 см, 15 см, **2.86.** 9 см, $9\sqrt{3}$ см, 18 см. **2.88.** 5 см, 12 см. **2.91.** R = 5, r = 2. **2.92.** $\frac{240}{17}$ см. **2.94.** 10. **2.95.** 6 см, 8 см, 10 см.

Раздел 3

3.1. **3.1.** 1) 18,7 см²; 2) 14 м²; 3) 1 дм². **3.2.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $\frac{3}{4}$; 4) $\frac{7}{8}$; 5) $\frac{3}{4}$; 6) $\frac{1}{2}$; 7) $\frac{1}{2}$. **3.3.** 1) 1,44 см²; 2) $\frac{9}{16}$ дм². 3) 18 м². **3.4.** 1) 4 см; 2) 1,5 дм; 3) $2\sqrt{3}$ м. **3.5.** 1) 1600 мм²; 2) 0,16 дм²; 3) 0,0016 м². **3.6.** 1) 27,2 см²; 2) $6\sqrt{2}$ м²; 3) 21,4 см; 4) 2,7 м. **3.11.** 1) Увеличится в 2 раза; 2) увеличится в 4 раза; 3) не изменится. **3.12.** 1) 10 см, 25 см; 2) 3 м; 3 м. **3.13.** 2200 шт. **3.14.** Квадрат. **3.2.** **3.23.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ см². **3.24.** 1) 6 см²; 2) 1,8 м². **3.25.** 1) 1,5 см²; 2) $5d \cdot m$; 3) $\sqrt{3}$ м². **3.26.** 1) $\sqrt{8,4375}$ см²; 2) $0,0625\sqrt{231}$ см²; 3) $5,25\sqrt{11}$ м²; м²; 4) 12 дм². **3.27.** α=30°, h_1=1 см, h_2=2,5 см. **3.28.** 156 см². **3.29.** 30°. **3.30.** $\frac{d_1d_2}{2}$. **3.31.** 1) 22,4 см²; 2) 4,6 м². **3.32.** 6 см, 9 см. **3.33.** 8 см. **3.34.** $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$. **3.35.** $\frac{a^2 \cdot \mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta}{2(\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta)}$. **3.37.** 480 см². **3.38.** 54 см². **3.40.** 120 см². **3.41.** $3(7-4\sqrt{3})a^2$. **3.42.** $S = \frac{1}{2}\left(h\sqrt{l^2+h^2} - h^2\right)$. **3.43.** $\frac{\sqrt{3}+3}{4}a^2$. **3.44.** $2(\sqrt{2}-1)a^2$. **3.45.** 1024 см². **3.46.** a = 30 см, b = 24 см. **3.47.** $a = \frac{S+\sqrt{S^2-16R^4}}{2R}$, $b = \frac{S-\sqrt{S^2-16R^4}}{2R}$. *Указание*. Используйте соотношения $a+b = \frac{S}{R}$ $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + 4R^2$. **3.51.** $\frac{3}{8}a^2$. **3.53.** Основание a = 6 см, b = 5 см, h = 4 см. **3.54.** $\frac{hb^2}{4\cdot\sqrt{b^2-h^2}}$.

Раздел 4

4.1. **4.2.** 1) $A(5;\ 0)$, $B(0;\ 3)$, $O(0;\ 0)$. **4.3.** 3) $(-a;\ 0)$, $(0;\ -b)$, $(0;\ 0)$. **4.4.** 1) $(a;\ a)$, $(-a;\ a)$, $(-a;\ -a)$, $(a;\ -a)$; 2) $(\sqrt{2}a;\ 0)$, $(0;\ \sqrt{2}a)$, $(-\sqrt{2}a;\ 0)$, $(0;\ -\sqrt{2}a)$. **4.5.** $A(-a;\ 0)$, $B(a;\ 0)$, $C(0;h)$. **4.6.** 1) 4; 2) 3. **4.7.** 1) (0,5; 2,5); 2) $(1;\ \frac{8}{3})$; 3) $(0;\ \frac{7}{3})$; 4) $\left(\frac{4}{5};\frac{13}{5}\right)$. **4.8.** 1) $\sqrt{10}$; 2) 4; 3) 5; 4) $2\sqrt{5}$. **4.10.** $4\sqrt{2}$ **4.12.** $C(8;\ 0)$, $D(2;\ -4)$. **4.13.** $B(7;\ 3)$. **4.15.** $A_1\left(7;\frac{13}{3}\right)$, $A_3\left(3;\frac{17}{3}\right)$, $A_4\left(1;\frac{19}{3}\right)$, $A_6\left(-3;\frac{23}{3}\right)$. **4.16.** $E\left(2;\frac{11}{3}\right)$. **4.17.** $O\left(\frac{36}{5};-\frac{21}{5}\right)$, $R=\frac{\sqrt{697}}{5}$. **4.19.** 1) $C(0;\ -9)$; 2) $\varnothing$, нет такой точки. **4.20.** 1) $C(-2{,}7;\ 0)$; 2) $C(-4{,}5;\ 0)$. **4.22.** $\angle B = 90°$. **4.23.** $A(5;\ -2)$, $B(5;\ 6)$, $C(-1;\ -4)$. **4.24.** 1) $E\left(-\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)$; 2) $E(0;\ 0)$. **4.26.** $O(-6;\ 4)$, $R = 4$. **4.27.** $O_1(-1;\ 1)$, $R_1 = 1$; $O_2(-5;\ 5)$, $R_2 = 5$. **4.30.** 100 см. **4.31.** 13 см. **4.2.** **4.33.** $x + 2y - 1 = 0$. **4.34.** 1) $3x + 4y + 1 = 0$; 2) $x + y - 7 = 0$. **4.35.** 2) $A(4;\ 0)$, $B(0;\ 3)$; 6) $O(0;\ 0)$. **4.36.** 1) $(3;\ -2)$; 2) $(1;\ -2)$; 3) $(2;\ 4)$; 4) $(0{,}5;\ -2)$. **4.40.** 4) $O(1;\ 0)$, $R = 2$; 5) $O(0;\ -2)$, $R = \sqrt{2}$. **4.41.** $(x+4)^2+(y-8)^2=100$. **4.42.** $16x-13y+14=0$. **4.43.** 2) $3x-5y+5=0$. **4.44.** Пересекаются в точке (1;1). **4.45.** $E\left(\frac{5}{3};\ 2\right)$. **4.46.** 1) Точка D. **4.47.** $x^2 + (y - 3)^2 = 13$. **4.48.** $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$. **4.49.** $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$. **4.50.** 4) $C(1;\ -2)$, $R = 5$; 5) $C(2;\ 1)$, $R = 2$; 6) $C(3;\ -2)$, $R = 3$. **4.53.** $(x - 4)^2 + y^2 = 25$ и $(x + 2)^2 + y^2 = 25$. **4.54.** $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 25$. **4.55.** 1) $(x + 3{,}5)^2 + (y - 2{,}5)^2 = 62{,}5$; 2) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$. **4.56.** 1) $y = \frac{5}{3}x + \frac{16}{3}$; $y = 6x + 10$; $y=-\frac{1}{2}x+3$. **4.59.** 1) Окружность; 2) окружность.

*Раздел 5**

Дополнительные задачи повышенной трудности. **5.1.** Основание нужно разделить на 3 равные части. **5.2.** Разделите параллелограмм на два треугольника и решите задачу по аналогии с предыдущей задачей. **5.3.** Если d_1, d_2 – диагонали, α – угол между ними, то $S=\frac{d_1\cdot d_2}{2}\sin\alpha \leqslant 0{,}5\cdot d_1d_2\cdot\sin 90° = 0{,}5\cdot d_1\cdot d_2 = S_{\text{ромба}}$. **5.4.** Используйте то, что медианы в точке пересечения делятся в отношении 2:1. **5.5.** 1) $|c| < 2\sqrt{5} \Rightarrow$ пересекаются; 2) $|c| > 2\sqrt{5} \Rightarrow$ не пересекаются; 3) $|c| = 2\sqrt{5} \Rightarrow$ касаются. **5.6.** 5 см. **5.8.** $\frac{1}{4}$. **5.9.** $\frac{4}{3}$ см. **5.10.** $R = 6$. **5.11.** Прямые, проходящие через стороны треугольника, в каждой его вершине образуют пару вертикальных углов. В каждой точке этих пар углов треугольник виден как отрезок, равный противоположной стороне. **5.12.** $4\sqrt{11}$ см². **5.13.** $\angle C = 45°$. **5.14.** Покажите, что отрезок AE является медианой треугольника BDE. **5.61.** 720 см². **5.16.** 8 см². **5.17.** Достаточно показать, что сумма противоположных углов равна 180°. **5.18.** 235,2 см². **5.19.** Окружность. **5.20.** $\angle A = 60°$, $\angle B = 45°$, $\angle C = 30°$. **5.21.** Воспользуйтесь равенством площадей треугольников, имеющих общее основание. **5.22.** Покажите, что сумма площадей двух параллелограммов (на диагонали) равна половине площади данного параллелограмма. **5.23.** $4(1-\lambda)$. Воспользуйтесь свойством пропорциональных отрезков. **5.25.** Сумма внутренних односторонних углов равна 180°, а их биссектрисы пересекаются под прямым углом. **5.26.** Эта пара углов не определяется однозначно. Проверкой можно убедиться в том, что углы, равные 100°, 80°, 110°, 70°, 90° и т. д., удовлетворяют условию задачи. Обоснуйте это. **5.74.** $\frac{a^2}{mn+mk+nk}$. **5.27.** $\frac{5}{8}$. **5.28.** 48 см². **5.30.** Соответствующие стороны равных параллелограммов взаимно перпендикулярны. Тогда их диагонали также будут взаимно перпендикулярными. **5.34.** $0{,}5(NX+PX+QX)\cdot a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \Rightarrow NX+PX+QX = h$, т. е. сумма не зависит от x. **5.35.** Покажите, что данный треугольник является прямоугольным и равнобедренным. **5.36.** $h = \sqrt{S\cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$. **5.37.** См. задачу 5.34. **5.38.** Воспользуйтесь неравенством треугольников. **5.39.** Воспользуйтесь теоремой Пифагора и неравенством $\frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\ (a \geqslant 0,\ b \geqslant 0)$.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Шыныбеков Абдухали Насырулы
Шыныбеков Данияр Абдухалиулы
Жумабаев Ринат Нурланович

ГЕОМЕТРИЯ

Учебник для 8 класса общеобразовательной школы

Редактор *А. Изтлеуова*
Художник *А. Искаков*
Художественный редактор *В. Пак*
Технический редактор *О. Рысалиева*
Корректор *И. Кротов*
Компьютерная верстка *Ж. Есетовой*

ИБ № 079

Сдано в набор 11.01.2018. Подписано в печать 20.06.2018.
Формат 70×90 1/16. Бумага офсетное. Гарнитура «Школьная».
Печать офсетная. Усл. печ. л. 8,19. Уч. изд. л. 6,9.
Тираж 20 000 экз. Заказ № 3456.

ТОО «Корпорация «Атамұра», 050000, г. Алматы, пр. Абылай хана, 75.
Полиграфкомбинат ТОО «Корпорация «Атамұра»,
Республика Казахстан, 050002, г. Алматы, ул. М. Макатаева, 41.