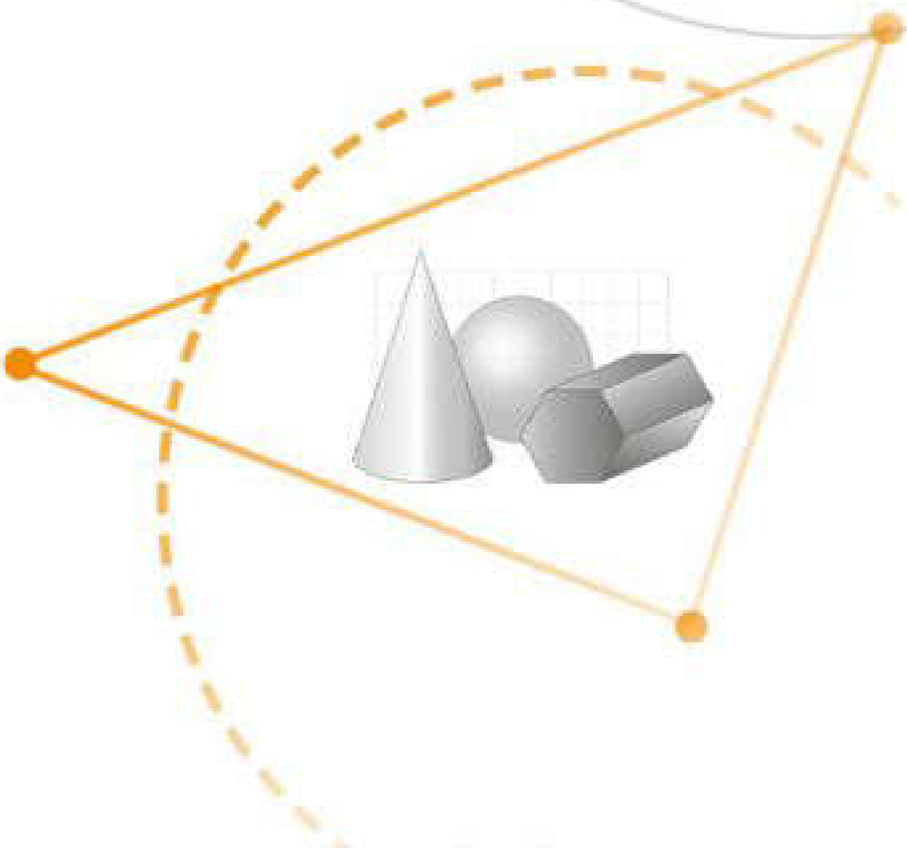
В. А. Смирнов, Е. А. Туяков

ГЕОМЕТРИЯ 8

Учебник для 8 классов общеобразовательных школ

Утверждено Министерством образования и науки Республики Казахстан



Алматы "Мектеп" 2018

УДК 373.167.1
ББК 22.1я72
С53

Условные обозначения:

— определения, свойства, правила

— проблема, которая будет решена при овладении новыми знаниями

— вопросы для закрепления

— задания для самостоятельного изучения теоретического материала

— конец доказательства теоремы или свойства

A — обязательные упражнения для всех учащихся

B — упражнения средней сложности

C — упражнения повышенной сложности

Смирнов В. А., Туяков Е. А.
С53 **Геометрия.** Учебник для 8 кл. общеобразоват. шк. — Алматы: Мектеп, 2018. — 152 с., илл.

ISBN 978—601—07—0959—1

$С\,\dfrac{4306020502—027}{404(05)—18}\,32(1)—18$

УДК 373.167.1
ББК 22.1я72

ISBN 978—601—07—0959—1

ПРЕДИСЛОВИЕ

Дорогие ребята !

Настоящий учебник предназначен для учащихся 8 классов. Вы познакомитесь с основными свойствами геометрических фигур, научитесь решать задачи на доказательство, на нахождение длин отрезков, величин углов, площадей фигур, познакомитесь с координатным методом и др.

Весь материал учебника разбит на главы и пункты, которые содержат теоретический материал, задания для самостоятельной работы, вопросы для повторения, задачи различного уровня трудности.

Конец доказательства теоремы помечен знаком □.

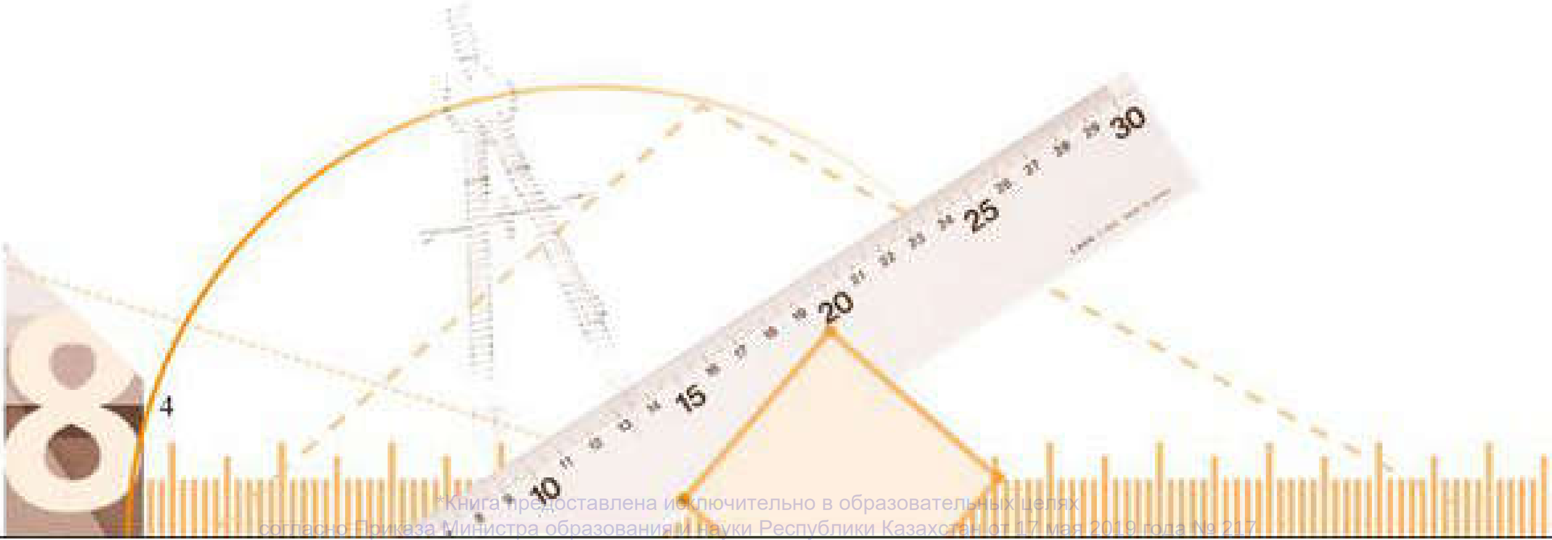
Задачи разделены по уровням А, В и С. Задачи уровня А имеют начальный уровень трудности и отвечают за понимание основного материала. Задачи уровня В являются базовыми. Их выполнение свидетельствует об освоении учебного материала данного пункта. Задачи уровня С имеют повышенный уровень трудности.

Пункты, отмеченные звездочкой (*), содержат дополнительный материал, не входящий в учебную программу, научно-популярного и прикладного характера. Он может быть использован как на основных уроках, так и на дополнительных занятиях по математике (кружках, курсах по выбору и т. п.), а также при организации проектной и исследовательской деятельности учащихся и написании рефератов.

В конце каждой главы предлагается тест на проверку освоения пройденного учебного материала.

В конце учебника приведены ответы к задачам.

Желаем успехов в изучении геометрии !



ПОВТОРЕНИЕ КУРСА ГЕОМЕТРИИ 7 КЛАССА

Глава 1. НАЧАЛЬНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

1. Изобразите прямую и точки, принадлежащие этой прямой и не принадлежащие ей.
2. Изобразите: а) четыре точки; б) пять точек; в) шесть точек, никакие три из которых не принадлежат одной прямой. Проведите прямые, проходящие через различные пары из этих точек. Сколько всего таких прямых?
3. Изобразите четыре прямые так, чтобы у них было: а) три точки; б) четыре точки; в) пять точек; г) шесть точек попарных пересечений.
4. На прямой отмечены: а) три точки; б) четыре точки; в) пять точек; г) n точек. Сколько имеется лучей, лежащих на данной прямой, с вершинами в этих точках?
5. На прямой отмечены: а) три точки; б) четыре точки; в) пять точек; г) n точек. Сколько имеется отрезков с концами в этих точках?
6. Точка C лежит на прямой между точками A и B. Найдите длину отрезка AB, если: а) $AC = 2$ см, $CB = 3$ см; б) $AC = 3$ дм, $CB = 4$ дм; в) $AC = 12$ м, $CB = 5$ м.
7. Точки A, B и C принадлежат одной прямой. Известно, что $AB = 4$ см, $AC = 7$ см, $BC = 3$ см. Какая из точек A, B, C лежит между двумя другими?
8. Могут ли точки A, B, C принадлежать одной прямой, если $AB = 2$ см, $BC = 3$ см, $AC = 4$ см?
9. На прямой последовательно отложены три отрезка: AB, BC и CD так, что $AB = 3$ см, $BC = 5$ см, $CD = 4$ см. Найдите расстояние между серединами отрезков AB и CD.
10. Сколько имеется углов, смежных данному?
11. Сколько имеется углов, вертикальных с данным?
12. Изобразите три попарно пересекающиеся прямые, не пересекающиеся в одной точке. На сколько частей они разбивают плоскость?
13. Один из углов, который получается при пересечении двух прямых, равен 30°. Чему равны остальные углы?
14. Один из двух углов, образованных при пересечении двух прямых, на 20° меньше другого. Найдите эти углы.
15. Один из углов, образованных при пересечении двух прямых, в четыре раза больше другого. Найдите эти углы.
16. Сумма трех углов, образованных при пересечении двух прямых, равна 306°. Найдите больший из них.
17. Докажите, что если два угла равны, то равны и смежные им углы.

18. С помощью транспортира постройте углы величиной 10°, 30°, 70°, 100°, 150°.
19. Некоторый угол равен 38°. Чему равен смежный с ним угол?
20. Найдите градусные величины двух смежных углов, если один из них в два раза больше другого.
21. Луч OC лежит внутри угла AOB, равного 60°. Найдите угол AOC, если он на 30° больше угла BOC.
22. Колесо имеет: а) 10 спиц; б) 12 спиц. Найдите величину угла (в градусах), который образуют две соседние спицы.
23. Чему равен угол между минутной и часовой стрелками на часах в: а) 3 ч; б) 6 ч; в) 5 ч?
24. Докажите, что биссектрисы смежных углов перпендикулярны.

Глава 2. ТРЕУГОЛЬНИКИ

1. Треугольники ABC и EFG равны. Известно, что $AB = 5$ см, $BC = 6$ см, $AC = 7$ см. Найдите стороны треугольника EFG.
2. Треугольники ABC и EFG равны. Известно, что $\angle A = 40°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 80°$. Найдите углы треугольника EFG.
3. Сторона AB треугольника ABC равна 17 см. Сторона AC вдвое больше стороны AB, сторона BC на 10 см меньше стороны AC. Найдите периметр треугольника ABC.
4. Периметр треугольника равен 48 см, одна из сторон равна 18 см. Найдите две другие стороны, если их разность равна 10 см.
5. Периметр треугольника равен 54 см. Найдите его стороны, если они относятся как 2 : 3 : 4.
6. Докажите, что если прямая пересекает одну сторону треугольника и не проходит через его вершины, то она пересекает и одну из двух других его сторон.
7. Докажите, что в равных треугольниках равны соответствующие медианы.
8. Докажите, что в равных треугольниках равны соответствующие биссектрисы.
9. Периметр равнобедренного треугольника равен 15,6 м. Найдите его стороны, если: а) основание меньше боковой стороны на 3 м; б) основание больше боковой стороны на 3 м.
10. Основание и боковая сторона равнобедренного треугольника относятся как 3 : 8. Найдите стороны этого треугольника, если его периметр равен 38 см.
11. Докажите, что если биссектриса треугольника является высотой, то треугольник равнобедренный.
12. Докажите, что медианы равнобедренного треугольника, проведенные к его боковым сторонам, равны.

13. Докажите, что биссектрисы равнобедренного треугольника, проведенные к его боковым сторонам, равны.
14. Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, если у них равны стороны AB и A_1B_1, AC и A_1C_1, медианы CM и C_1M_1.
15. Сравните углы треугольника ABC, если $AB = 7$ см, $BC = 10$ см и $AC = 5$ см.
16. Сравните стороны треугольника ABC, если $\angle A > \angle B > \angle C$.
17. Докажите, что в прямоугольном треугольнике имеется два острых угла.
18. Докажите, что гипотенуза прямоугольного треугольника больше его катетов.

Глава 3. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ

1. Может ли медиана треугольника быть больше высоты, проведенной из той же вершины треугольника?
2. Может ли биссектриса треугольника быть больше высоты, проведенной из той же вершины треугольника?
3. Из точки A к прямой b проведены перпендикуляр AB и наклонные AB_1, AB_2. Какая из двух наклонных меньше, если: а) B_1 лежит между B и B_2; б) B лежит между B_1, B_2 и $BB_1 < BB_2$?
4. Докажите, что из двух наклонных, проведенных из данной точки к данной прямой, больше та, проекция которой больше.
5. Найдите углы, образованные при пересечении двух параллельных прямых секущей, если: а) один из углов равен 150°; б) один из углов на 70° больше другого.
6. Докажите, что биссектрисы внутренних накрест лежащих углов, образованных двумя параллельными прямыми и секущей, параллельны, т. е. лежат на параллельных прямых.
7. Докажите, что если некоторая прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую.
8. В треугольнике ABC угол A равен 40°, $AC = BC$. Найдите угол C.
9. В треугольнике ABC угол C равен 120°, $AC = BC$. Найдите угол A.
10. Один из углов равнобедренного треугольника равен 98°. Найдите два других угла.
11. В равнобедренном треугольнике один угол на 90° меньше другого угла. Найдите больший угол.
12. Углы треугольника относятся как 1 : 2 : 3. Найдите меньший из них.
13. В треугольнике ABC угол C равен 64°, внешний угол при вершине B равен 104°. Найдите угол A.
14. В треугольнике ABC $AB = BC$. Внешний угол при вершине B равен 138°. Найдите угол C.

15. Найдите сумму всех трех внешних углов треугольника по одному при каждой вершине.
16. В треугольнике ABC угол C равен $60°$, AD и BE — биссектрисы, пересекающиеся в точке O. Найдите угол AOB.
17. Два угла треугольника равны $54°$ и $66°$. Найдите острый угол, который образуют высоты треугольника, выходящие из вершин этих углов.
18. Можно ли построить треугольник со сторонами: а) 13 см, 2 см, 8 см; б) 1 м, 0,5 м, 0,5 м?
19. Найдите сторону равнобедренного треугольника, если две другие стороны равны: а) 6 см и 3 см; б) 8 см и 2 см.
20. Докажите, что медиана треугольника меньше его полупериметра.

Глава 4. ОКРУЖНОСТЬ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ

1. Какому неравенству удовлетворяют точки A, лежащие: а) в круге с центром в точке O и радиусом R; б) вне круга с центром в точке O и радиусом R?
2. Найдите диаметр окружности, если известно, что он на 55 мм больше радиуса этой окружности.
3. Сколько окружностей может проходить через две заданные точки?
4. Расстояние между точками A и B равно 2 см. Найдите наименьший возможный радиус окружности, проходящий через эти точки.
5. Точка A расположена вне окружности радиуса R и удалена от центра O этой окружности на расстояние d. Чему равны наименьшее и наибольшее расстояния от точки A до точек данной окружности?
6. Наибольшее и наименьшее расстояния от данной точки, расположенной вне окружности, до точек окружности равны соответственно 50 см и 20 см. Найдите радиус данной окружности.
7. Сколько касательных к данной окружности можно провести через данную точку, расположенную: а) внутри окружности; б) вне окружности; в) на окружности?
8. Каково взаимное расположение прямой и окружности, если радиус окружности равен 3 см, а расстояние от центра окружности до прямой равно: а) 2 см; б) 3 см; в) 4 см?
9. Дана окружность радиуса 3 см и точка A на расстоянии, равном 5 см от центра окружности. Найдите радиус окружности с центром в точке A и касающейся данной окружности: а) внешним образом; б) внутренним образом.
10. Расстояние между центрами двух окружностей равно 5 см. Как расположены эти окружности по отношению друг к другу, если их радиусы равны: а) 2 см и 3 см; б) 2 см и 2 см?

11. Расстояние между центрами двух окружностей равно d и больше суммы их радиусов R_1 и R_2. Найдите наименьшее и наибольшее расстояния между точками, расположенными на данных окружностях.
12. Пусть A и B — точки плоскости. Укажите геометрическое место точек C, для которых: а) $AC = BC$; б) $AC > BC$; в) $AC < AB$.
13. Найдите геометрическое место центров окружностей, проходящих через две данные точки A и B.
14. Найдите геометрическое место центров окружностей, касающихся двух данных пересекающихся прямых a и b.
15. Постройте середину заданного отрезка.
16. Постройте биссектрису данного угла.
17. Постройте треугольник по трем данным сторонам.
18. Постройте треугольник ABC по двум данным сторонам и углу между ними.
19. Постройте треугольник ABC по данной стороне и двум данным прилежащим к ней углам.

ГЛАВА 1

МНОГОУГОЛЬНИКИ. ИССЛЕДОВАНИЕ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКОВ

§ 1. ЛОМАНЫЕ

Ломаной называется фигура, образованная конечным набором отрезков, расположенных так, что конец первого является началом второго, конец второго — началом третьего и т. д. (рис. 1.1). Отрезки называются *сторонами ломаной*, а их концы — *вершинами ломаной*.

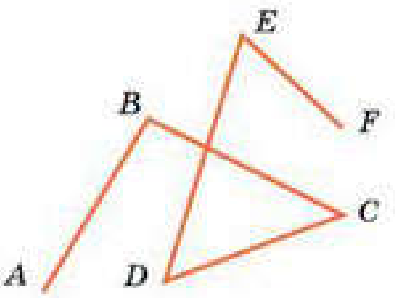


Рис. 1.1

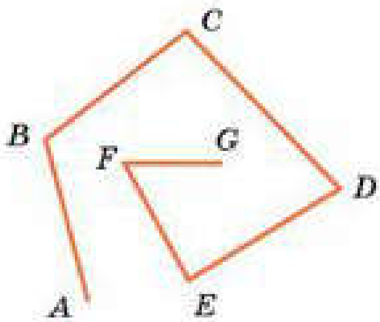


Рис. 1.2

Сумма длин сторон ломаной называется *длиной ломаной*. Ломаная обозначается последовательным указанием ее вершин. Например, ломаная $ABCDE$, ломаная $A_1A_2...A_n$.

Простой ломаной называется ломаная, не имеющая точек самопересечения (рис. 1.2).

Замкнутой ломаной называется ломаная, у которой начало первого отрезка ломаной совпадает с концом последнего (рис. 1.3, а).

Замкнутую ломаную, у которой точками самопересечения являются только начальная и конечная точки, также называют *простой* (рис. 1.3, б).

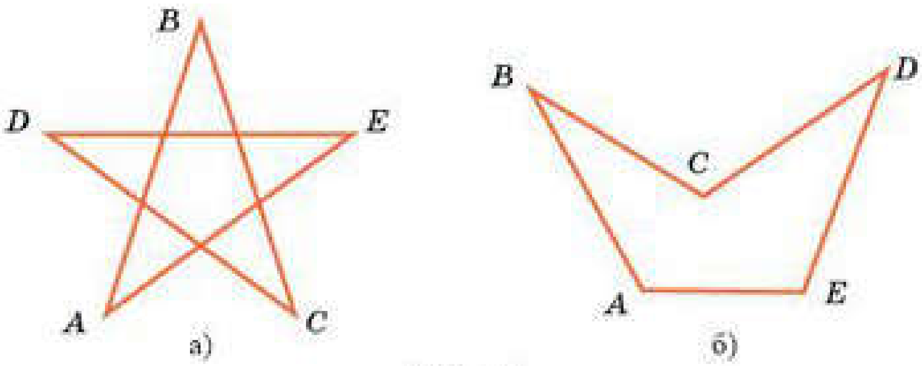


Рис. 1.3

1. Какая фигура называется *ломаной* ?
2. Что называется: а) *сторонами* ; б) *вершинами* *ломаной* ?
3. Как обозначается ломаная?
4. Что называется *длиной ломаной* ?
5. Какая ломаная называется: а) *простой* ; б) *замкнутой* ?

Задачи

А

1. Изобразите замкнутую ломаную с пятью вершинами.
2. Изобразите простую замкнутую ломаную с шестью сторонами.
3. Простая ломаная имеет 10 вершин. Сколько у нее сторон?
4. Простая замкнутая ломаная имеет 20 сторон. Сколько у нее вершин?
5. Укажите, какие фигуры, изображенные на рисунке 1.4, являются простыми ломаными.

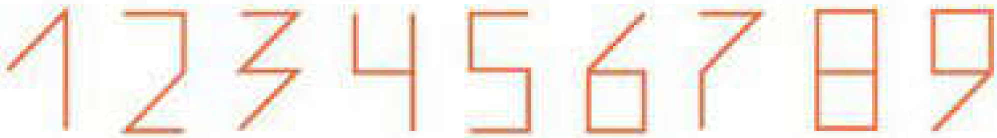


Рис. 1.4

В

6. Изобразите замкнутую пятистороннюю ломаную, которая имеет: а) две точки самопересечения; б) три точки самопересечения; в) пять точек самопересечения.
7. Найдите длины ломаных с концами A, B, изображенных на рисунке 1.5. Стороны клеток равны 1.

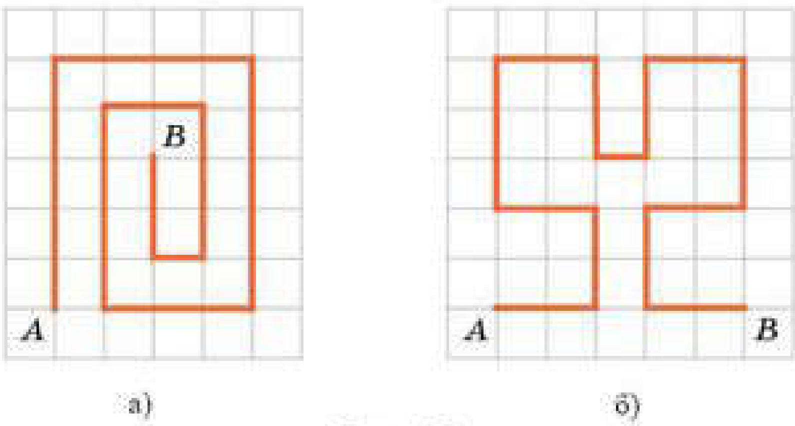


Рис. 1.5

8. Сравните длины ломаных $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$ на рисунке 1.6, не измеряя их.

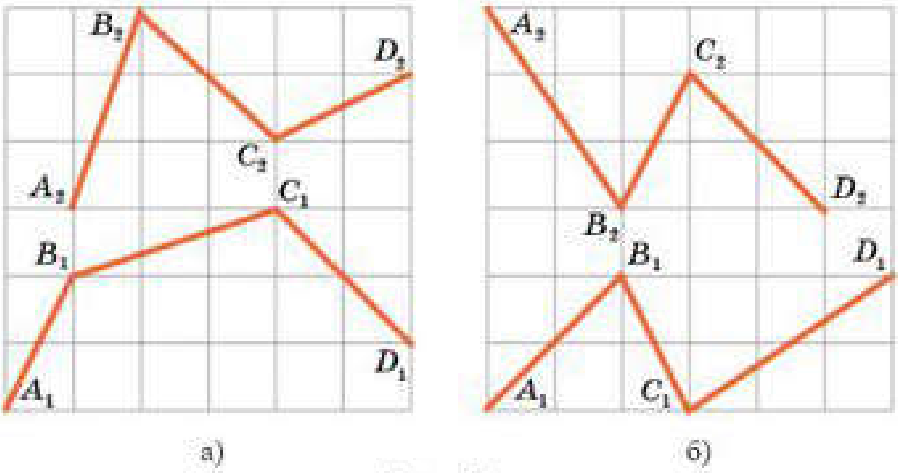


Рис. 1.6

С

9. Сколько ломаных: а) длиной 4; б) длиной 5, проходящих по сторонам сетки, состоящей из единичных квадратов, соединяют точки A и B (рис. 1.7)?

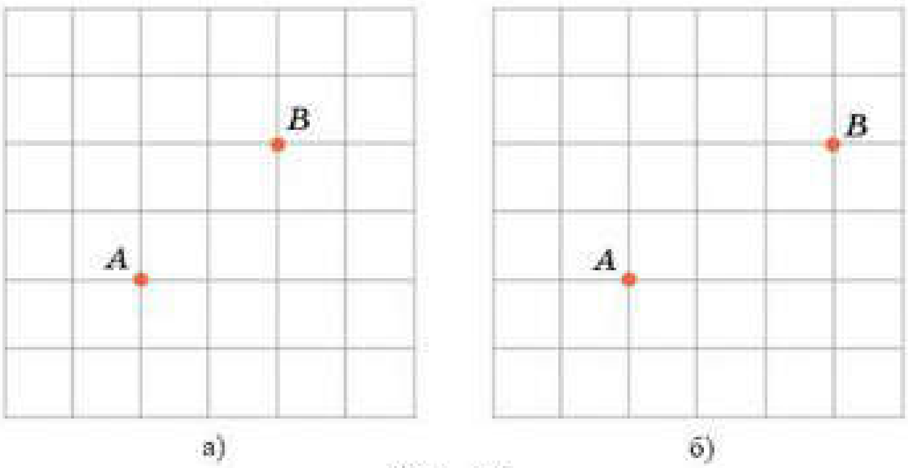


Рис. 1.7

10. Сколько ломаных длиной 6, проходящих по сторонам сетки, состоящей из единичных квадратов, соединяют точки A, B и C (рис. 1.8)?

11. Изобразите: а) четырехстороннюю ломаную; б) шестистороннюю ломаную, проходящую через все данные точки на рисунке 1.9.

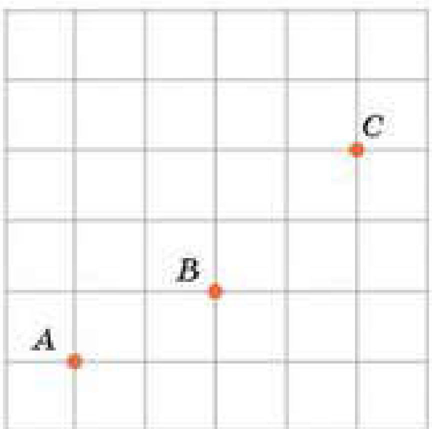
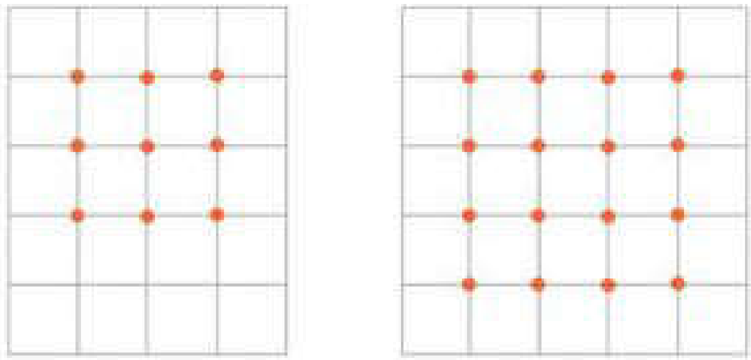


Рис. 1.8



а) б)

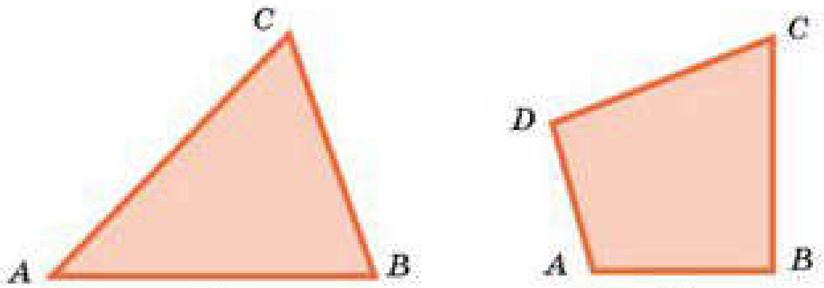
Рис. 1.9

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

12. На сколько частей разбивает плоскость простая замкнутая ломаная? Нарисуйте простую замкнутую ломаную, у которой: а) три стороны; б) четыре стороны; в) пять сторон. Закрасьте внутреннюю область, кото рую ограничивает эта ломаная.

§ 2. МНОГОУГОЛЬНИК

Прост ая замкнутая ломаная разбивает плоскость на две области — внутреннюю и внешнюю. На рисунке 2.1 внутренние области закрашены.



а) б)

Рис. 2.1

Фигура, образова нная простой замкнутой ломаной, ограниченной внутренней областью, называется *многоугольником* . Вершины ломаной называются *вершинами многоугольника* , стороны ломаной — *сторонами многоугольника* , а углы, образованные соседними сторонами, — *углами многоугольника* . Точки многоугольника, не принадлежащие его сторонам, называются *внутренними* .

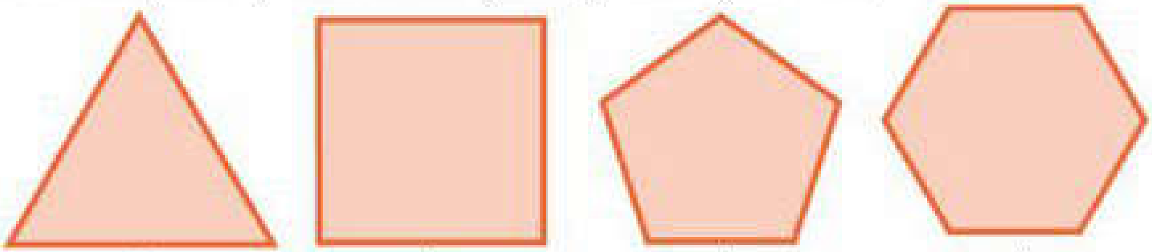
Многоугольник обозначается последовательным указанием его вершин. Например, многоугольник *ABCD* (рис. 2.1, б), многоугольник $A_1A_2...A_n$ и т. д.

Периметром многоуго льника называе тся сумма длин всех его сторон.

Многоугольн ики делятся на *треугольники* — многоугольники с тремя углами (рис. 2.1, а), *четырехугольники* — многоугольники с четырьмя углами (рис. 2.1, б) и т. д. Многоугольник, у которого n углов, называется *n-угольником.*

В четырехугольнике $ABCD$ (рис. 2.1, б) вершины A и C, B и D, а также стороны AB и CD, AD и BC будем называть *противолежащими.* Стороны четырехугольника, имеющие общую вершину, будем называть *соседними* .

Правильным многоугольником называется многоугольник, у которого все стороны равны и все углы равны (рис. 2.2).



а) б) в) г)

Рис. 2.2

Правильный четырехугольник называется также *квадратом* .

Прямоугольником называется четырехугольник, у которого все углы прямые.

Выпуклым называется многоугольник, который вместе с любыми двумя своими точками содержит и соединяющий их отрезок (рис. 2.3).

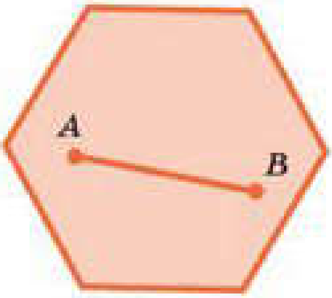
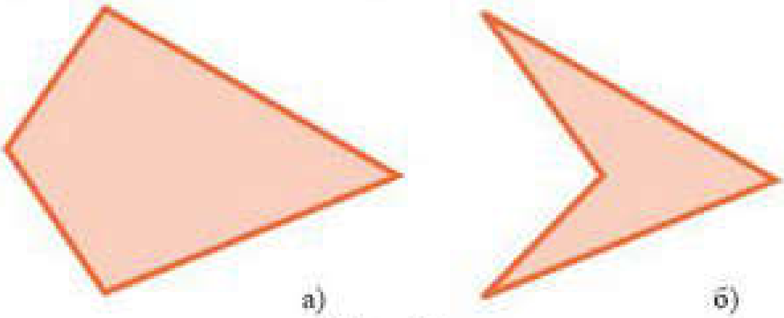


Рис. 2.3

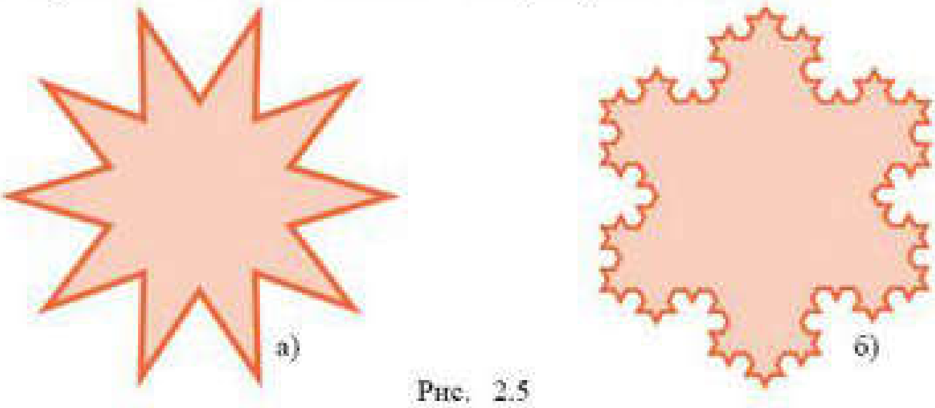


а) б)

Рис. 2.4

Многоугольники могут быть выпуклые (рис. 2.4, а) и невыпуклые (рис. 2.4, б).

Многоугольники могут иметь и более сложные формы. Примеры таких многоугольников показаны на рисунке 2.5.

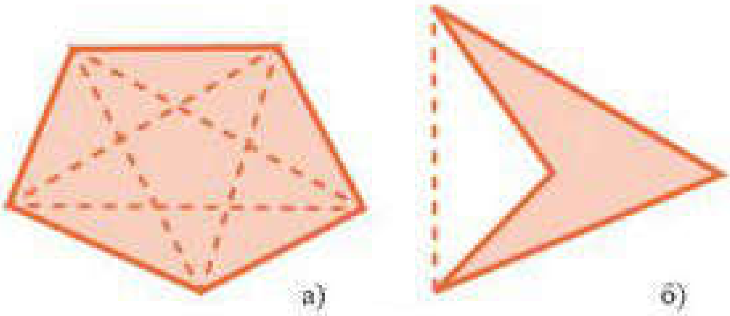


а) б)

Рис. 2.5

Отрезок, соединяющий две несоседние вершины многоугольника, называется *диагональю* многоугольника (рис. 2.6).

Выпуклый многоугольник содержит все свои диагонали (рис. 2.6, а). Невыпуклый многоугольник может не содержать некоторые свои диагонали (рис. 2.6, б).



а) б)

Рис. 2.6

Попробуйте обосновать выпуклость треугольника.

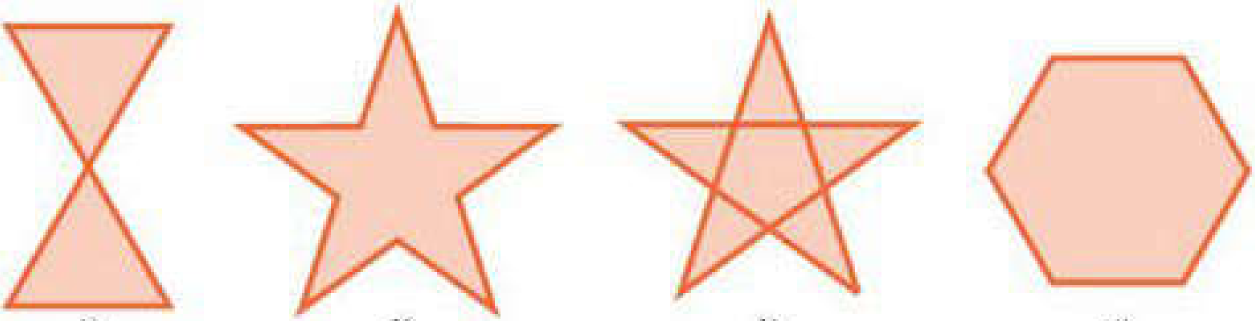
Верно ли, что если многоугольник содержит все свои диагонали, то он является выпуклым?

1. На сколько частей разбивает плоскость простая замкнутая ломаная?
2. Какая фигура называется *многоугольником*? Что называется: а) *вершинами*; б) *сторонами*; в) *углами* многоугольника?
3. Какие точки многоугольника называются *внутренними*?
4. Что называется *периметром* многоугольника?
5. Какой многоугольник называется *n-угольником*?
6. Какой многоугольник называется *правильным*?
7. Какой многоугольник называется *выпуклым*?
8. Что называется *диагональю* многоугольника?
9. Какой многоугольник содержит все свои диагонали?

Задачи

А

1. Укажите, какие из представленных на рисунке 2.7 фигур являются многоугольниками.



1) 2) 3) 4)

Рис. 2.7

2. Укажите, какие из представленных на рисунке 2.8 фигур являются: а) выпуклыми многоугольниками; б) невыпуклыми многоугольниками.

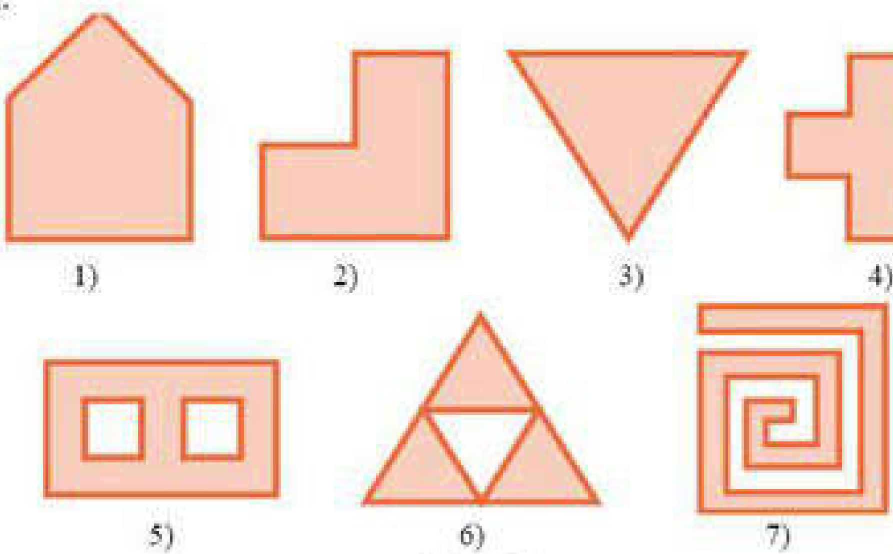


Рис. 2.8

3. Найдите периметры многоугольников, изображенных на рисунке 2.9. Стороны клеток равны 1.

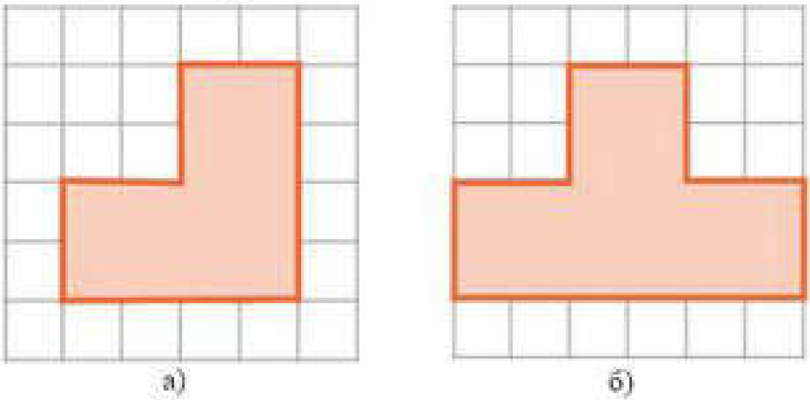


Рис. 2.9

4. Являются ли многоугольники, изображенные на рисунке 2.10, правильными?

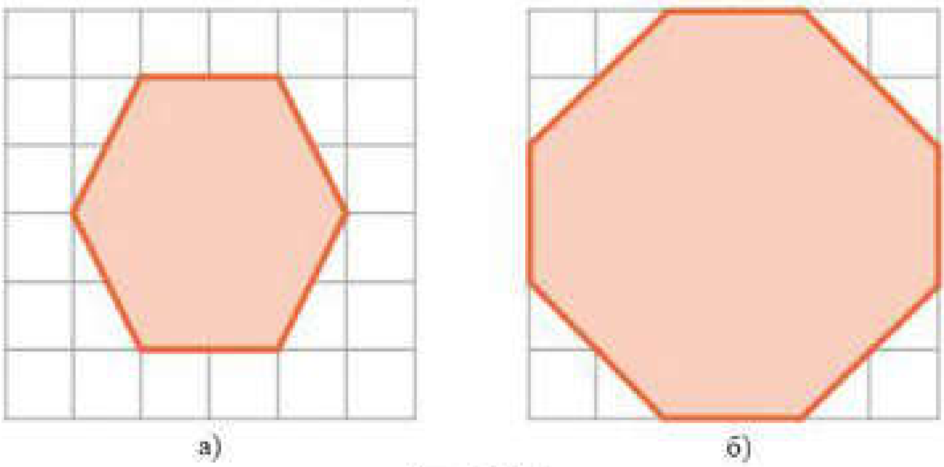


Рис. 2.10

B

5. Нарисуйте правильный треугольник; четырехугольник; пятиугольник; шестиугольник. Проверьте правильность нарисованных многоугольников с помощью линейки и транспортира.
6. На сколько треугольников делится выпуклый: а) четырехугольник; б) пятиугольник; в) шестиугольник; г) n-угольник своими диагоналями, проведенными из одной вершины?
7. Сколько всего диагоналей имеет: а) четырехугольник; б) пятиугольник; в) шестиугольник?
8. Может ли многоугольник иметь: а) одну диагональ; б) три диагонали; в) четыре диагонали; г) пять диагоналей?

C

9. Сколько всего диагоналей имеет n-угольник?
10. Существует ли многоугольник: а) число диагоналей которого равно числу его сторон; б) число диагоналей которого меньше числа его сторон; в) число диагоналей которого больше числа его сторон?
11. Выпуклый многоугольник имеет 14 диагоналей. Сколько у него сторон?
12. На клетчатой бумаге изобразите какой-нибудь четырехугольник, вершинами которого являются точки A, B, C и D (рис. 2.11). Сколько таких четырехугольников?

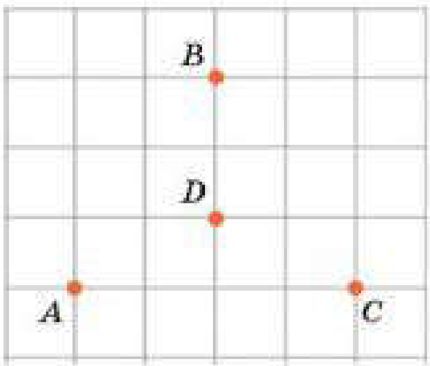


Рис. 2.11

13. Изобразите два треугольника так, чтобы их общей частью был: а) треугольник; б) четырехугольник; в) пятиугольник; г) шестиугольник.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

14. Докажите, что сумма углов выпуклого четырехугольника равна 360°.

§ 3. СУММА УГЛОВ ВЫПУКЛОГО МНОГОУГОЛЬНИКА

В 7 классе было доказано, что сумма углов треугольника равна 180°. Здесь мы выясним, чему равна сумма внутренних и внешних углов выпуклого многоугольника.

Теорема. ***Сумма внутренних углов выпуклого n-угольника равна 180°(n – 2).***

Доказательство. Рассмотрим выпуклый n-угольник. Из какой-нибудь его вершины проведем все диагонали. Этими диагоналями многоугольник разобьется на $(n - 2)$ треугольника. На рисунке 3.1 изображен пятиугольник, разбитый диагоналями на три треугольника.

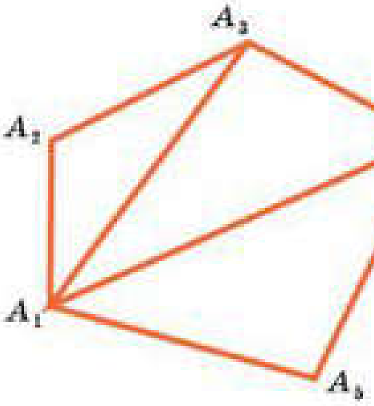


Рис. 3.1

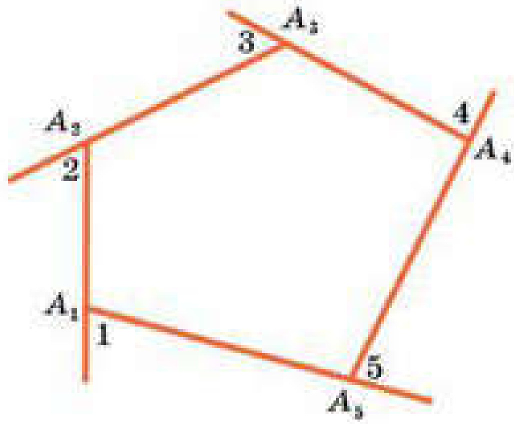


Рис. 3.2

В каждом треугольнике сумма углов равна 180°, и эти углы составляют внутренние углы многоугольника. Следовательно, сумма внутренних углов n-угольника равна $180°(n - 2)$. □

Внешним углом выпуклого многоугольника называется угол, смежный с каким-нибудь внутренним углом этого многоугольника.

На рисунке 3.2 изображен пятиугольник и его внешние углы 1, 2, 3, 4, 5.

Попробуйте самостоятельно найти сумму этих углов.

Теорема. ***Сумма внешних углов выпуклого n-угольника, взятых по одному при каждой вершине, равна 360°.***

Доказательство. Каждый внешний угол выпуклого n-угольника равен 180° минус соответствующий внутренний угол n-угольника. Следовательно, сумма всех внешних углов выпуклого n-угольника, взятых по одному при каждой вершине, равна $180° \cdot n$ минус сумма всех его внутренних углов. Так как сумма внутренних углов равна $180°(n - 2)$, то сумма внешних углов будет равна разности $180° \cdot n - 180° \cdot (n - 2)$, т. е. равна 360°. □

1. Чему равна сумма внутренних углов выпуклого n-угольника?
2. Какой угол называется *внешним углом* выпуклого многоугольника?
3. Чему равна сумма внешних углов выпуклого n-угольника, взятых по одному при каждой вершине?

Задачи

A

1. Чему равна сумма углов выпуклого: а) четырехугольника; б) пятиугольника; в) шестиугольника; г) семиугольника; д) восьмиугольника?

2. Чему равны углы правильного: а) треугольника; б) четырехугольника; в) пятиугольника; г) шестиугольника?

3. Сумма углов выпуклого многоугольника равна 900°. Сколько у него сторон?

4. Найдите внешние углы правильного: а) четырехугольника; б) пятиугольника; в) шестиугольника; г) восьмиугольника.

B

5. Найдите внешние углы правильного n-угольника.

6. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, если каждый из его внешних углов равен: а) 90°; б) 72°; в) 60°; г) 45°; д) 36°; е) 24°?

7. Углы выпуклого четырехугольника пропорциональны числам 1, 2, 3, 4. Найдите их.

8. Докажите, что сумма внутренних углов невыпуклого четырехугольника равна 360° (рис. 3.3).

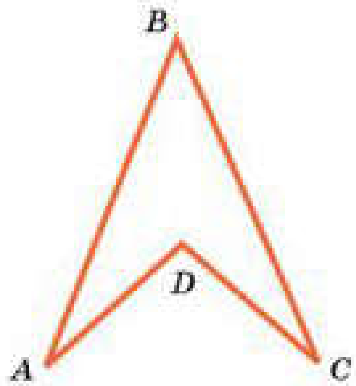


Рис. 3.3

C

9. Найдите угол, образованный диагоналями: а) AD и AE; б) AE и AC; в) AE и CF правильного шестиугольника $ABCDEF$ (рис. 3.4).

10. Докажите, что у выпуклого многоугольника может быть не более трех тупых внешних углов.

11. Докажите, что у выпуклого многоугольника может быть не более трех острых внутренних углов.

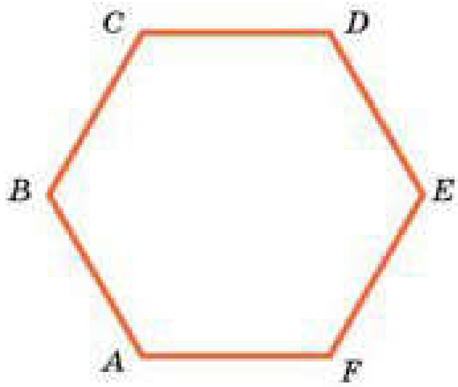


Рис. 3.4

12. Докажите, что в правильном шестиугольнике $ABCDE$ (рис. 3.4) диагональ AD параллельна стороне FE.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

13. Изобразите четырехугольник, у которого противолежащие стороны попарно параллельны. Что можно сказать о сторонах и углах такого четырехугольника?

§ 4. ПАРАЛЛЕЛОГРАММ

Четырехугольник, у которого противолежащие стороны попарно параллельны, называется *параллелограммом* (рис. 4.1).

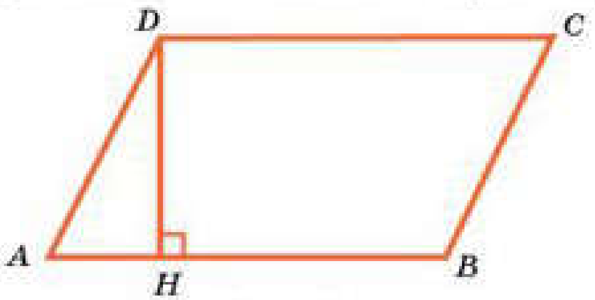


Рис. 4.1

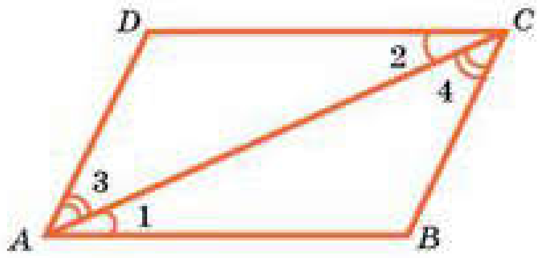


Рис. 4.2

Попробуйте обосновать выпуклость параллелограмма.

Высотой параллелограмма называется перпендикуляр, опущенный из его вершины на прямую, содержащую противолежащую ей сторону параллелограмма.

Свойство 1. *Сумма углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, равна* 180°.

Доказательство. Рассмотрим параллелограмм $ABCD$. Докажем, например, что сумма углов A и D, прилежащих к стороне AD, равна 180°. Действительно, углы A и D являются внутренними односторонними углами при параллельных прямых AB, DC и секущей AD. В седьмом классе доказывалось, что если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то внутренние односторонние углы составляют в сумме 180°. Следовательно, сумма углов A и D равна 180°. Аналогичным образом доказывается, что суммы углов параллелограмма, прилежащих к другим его сторонам, также равны 180°. □

Свойство 2. *В параллелограмме противолежащие стороны равны и противолежащие углы равны*.

Доказательство. Рассмотрим параллелограмм $ABCD$ (рис. 4.2).

Диагональ AC разбивает его на два треугольника ABC и CDA. Эти треугольники равны по второму признаку равенства треугольников (AC — общая сторона, $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$, как внутренние накрест лежащие углы при двух параллельных прямых и секущей). Следовательно, $AB = CD$, $BC = AD$ и $\angle B = \angle D$. Кроме того, $\angle A = \angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4 = \angle C$. □

Свойство 3. *Диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам*.

Доказательство. Рассмотрим параллелограмм $ABCD$. Обозначим O точку пересечения его диагоналей AC и BD (рис. 4.3).

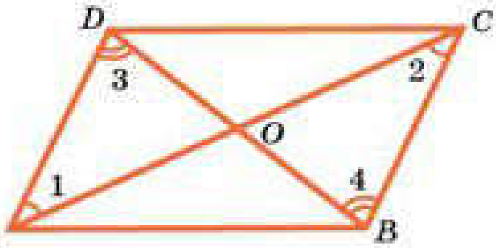


Рис. 4.3

Треугольники AOD и COB равны по второму признаку равенства треугольников ($AD = BC$ по свойству 2 параллелограмма, $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$ как внутренние накрест лежащие углы при двух параллельных прямых и секущей). Следовательно, $AO = OC$ и $BO = OD$. □

Попробуйте объяснить, почему диагонали параллелограмма пересекаются.

1. Какой четырехугольник называется *параллелограммом*?
2. Что называется *высотой параллелограмма*?
3. Чему равна сумма углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне?
4. Что можно сказать о противолежащих сторонах параллелограмма?
5. Что можно сказать о противолежащих углах параллелограмма?
6. Что можно сказать о диагоналях параллелограмма?

Задачи

A

1. У параллелограмма две стороны равны 10 см и 15 см. Чему равны две другие стороны?

2. Один из углов параллелограмма равен 30°. Чему равны остальные углы?

3. Диагональ параллелограмма образует с двумя его сторонами углы 25° и 35°. Найдите углы параллелограмма.

4. Расстояния от точки пересечения диагоналей параллелограмма до двух его вершин равны 3 см и 4 см. Найдите от нее расстояния до двух других вершин.

B

5. Может ли высота параллелограмма быть больше: а) одной из его сторон; б) всех его сторон?

6. Три параллельные прямые пересечены тремя параллельными прямыми (рис. 4.4). Сколько при этом получилось параллелограммов?

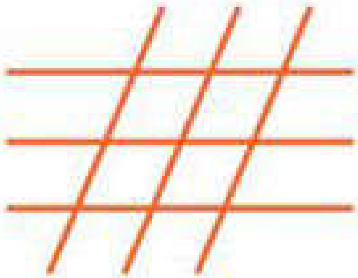


Рис. 4.4

7. На рисунке 4.5 $ABCD$ — параллелограмм, $BE \parallel DF$. Какой фигурой является четырехугольник $BFDE$?

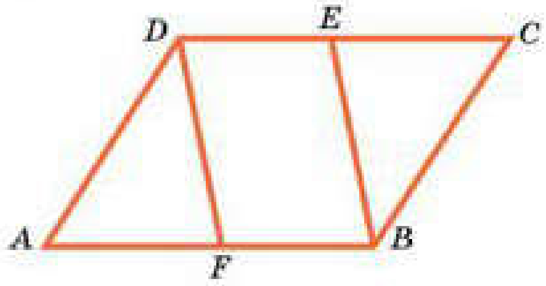


Рис. 4.5

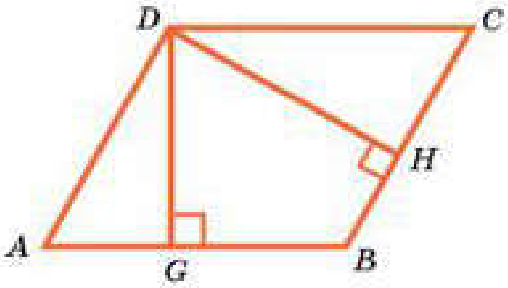


Рис. 4.6

8. Найдите углы параллелограмма, если сумма двух из них равна: а) 80°; б) 100°; в) 160°.
9. Найдите углы параллелограмма, если один из его углов: а) больше другого на 40°; б) меньше другого в 5 раз.
10. Найдите углы параллелограмма, если два его угла относятся как 3 : 7.
11. Острый угол параллелограмма $ABCD$ равен 60° (рис. 4.6). DG и DH — высоты. Найдите углы образовавшегося четырехугольника $BHDG$.
12. Периметр параллелограмма равен 48 см. Найдите стороны параллелограмма, если: а) одна сторона на 2 см больше другой; б) разность двух сторон равна 6 см; в) одна из сторон в два раза больше другой.
13. Две стороны параллелограмма относятся как 3 : 4, а периметр его равен 2,8 м. Найдите стороны параллелограмма.

C

14. Каково взаимное расположение биссектрис углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне?
15. Каково взаимное расположение биссектрис углов параллелограмма (с неравными смежными сторонами), противолежащих друг другу?
16. Существует ли параллелограмм, в котором две стороны и одна диагональ соответственно равны: а) 5 см, 2 см, 2 см; б) 7 см, 4 см, 11 см; в) 2 см, 3 см, 4 см; г) 3 см, 8 см, 10 см?
17. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 5 м. Из точки, взятой на основании этого треугольника, проведены две прямые, параллельные боковым сторонам (рис. 4.7). Найдите периметр получившегося четырехугольника.
18. Докажите, что биссектриса угла параллелограмма отсекает от этого параллелограмма равнобедренный треугольник.

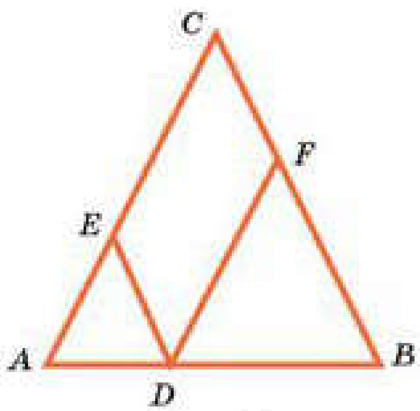


Рис. 4.7

19. Постройте параллелограмм по: а) двум сторонам и диагонали; б) стороне и двум диагоналям.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

20. Изобразите четырехугольник, у которого две стороны равны и параллельны. Будет ли этот четырехугольник параллелограммом?

21. Изобразите четырехугольник, у которого противолежащие стороны попарно равны. Будет ли этот четырехугольник параллелограммом?

§ 5. ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

Признаками параллелограмма называются условия, из выполнимости которых для четырехугольника следует, что он является параллелограммом.

Теорема. ***Если в четырехугольнике две стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник является параллелограммом.***

Доказательство. Рассмотрим четырехугольник $ABCD$, стороны AB и CD которого равны и параллельны. Проведем диагональ AC (рис. 5.1).

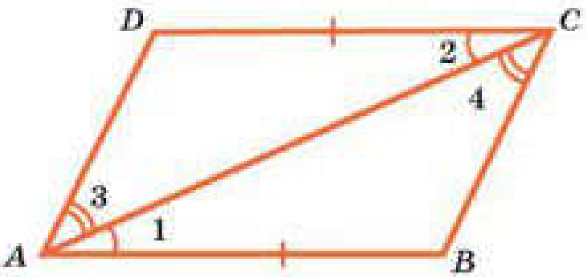


Рис. 5.1

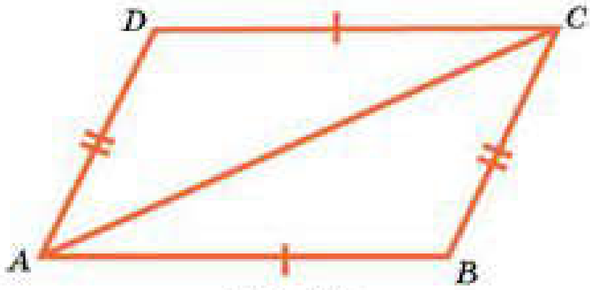


Рис. 5.2

Треугольники ABC и CDA равны по первому признаку равенства треугольников (AC — общая сторона, $AB = CD$ по условию, $\angle 1 = \angle 2$ как внутренние накрест лежащие углы при двух параллельных прямых и секущей). Значит, внутренние накрест лежащие углы $\angle 3$ и $\angle 4$ равны, а прямые AD и BC параллельны. Таким образом, противолежащие стороны четырехугольника $ABCD$ параллельны, следовательно, четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм. □

Теорема. ***Если в четырехугольнике противолежащие стороны попарно равны, то этот четырехугольник является параллелограммом.***

Доказательство. Рассмотрим четырехугольник $ABCD$, в котором $AB = CD$, $BC = AD$. Проведем диагональ AC, разбивающую его на два треугольника (рис. 5.2).

Треугольники ABC и CDA равны по третьему признаку равенства треугольников. Следовательно, $\angle CAB = \angle ACD$, значит, прямые AB и CD параллельны. Аналогично, $\angle ACB = \angle CAD$, значит, прямые BC и AD параллельны. Таким образом, противолежащие стороны четырехугольника $ABCD$ параллельны, следовательно, четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм. ▢

Докажите следующий признак параллелограмма.

Если диагонали четырехугольника точкой пересечения делятся пополам, то такой четырехугольник является параллелограммом.

1. Какие условия называют *признаками параллелограмма* ?
2. Сформулируйте первый признак параллелограмма.
3. Сформулируйте второй признак параллелограмма.

Задачи

А

1. На сторонах параллелограмма $ABCD$ (рис. 5.3) отложены равные отрезки $AE = CF$. Является ли четырехугольник $BFDE$ параллелограммом?

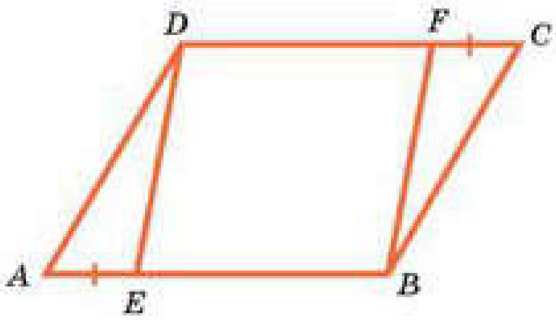


Рис. 5.3

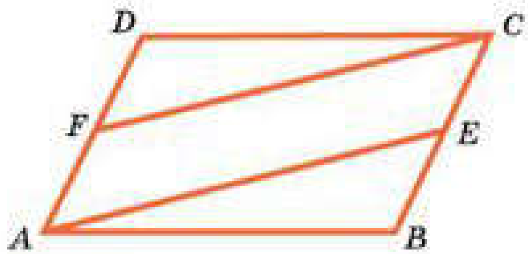


Рис. 5.4

2. В параллелограмме $ABCD$ проведены параллельные прямые AE и CF (рис. 5.4). Будет ли четырехугольник $AECF$ параллелограммом?
3. Дан параллелограмм $ABCD$ (рис. 5.5). E, F, G, H — середины его сторон. Будет ли четырехугольник $EFGH$ параллелограммом? Почему?
4. На сторонах параллелограмма $ABCD$ (рис. 5.6) отложены две пары равных отрезков: $BE = DG$ и $BF = DH$. Будет ли четырехугольник $EFGH$ параллелограммом? Почему?

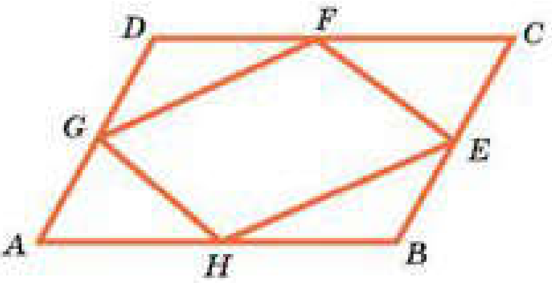


Рис. 5.5

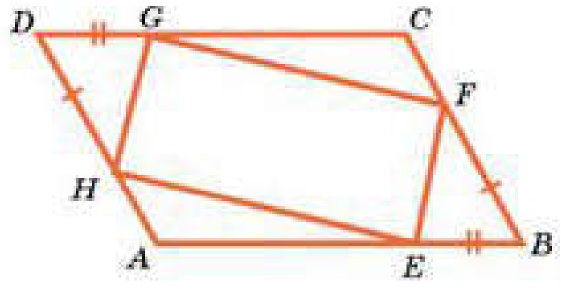


Рис. 5.6

B

5. Является ли равенство двух противолежащих углов четырехугольника признаком параллелограмма?
6. Две стороны четырехугольника параллельны, а две другие равны. Верно ли утверждение о том, что этот четырехугольник является параллелограммом?
7. На продолжении противолежащих сторон параллелограмма $ABCD$ отложены равные отрезки AE, CF (рис. 5.7) и проведены отрезки BE, DF. Докажите, что полученный четырехугольник $BFDE$ — параллелограмм.

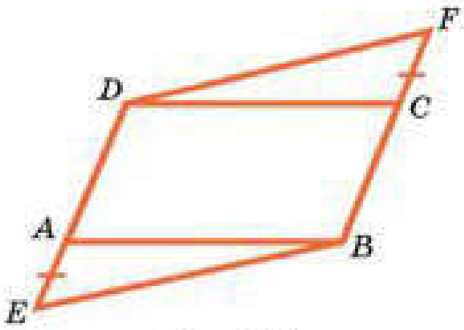


Рис. 5.7

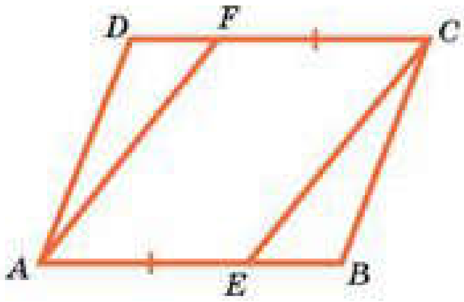


Рис. 5.8

8. На рисунке 5.8 четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, $AE = CF$. Докажите, что точки A, E, C, F являются вершинами параллелограмма.

C

9. В параллелограмме $ABCD$ (рис. 5.9) биссектрисы углов B и D пересекают диагональ AC в точках E и F, которые соединены соответственно с вершинами параллелограмма B и D. Докажите, что четырехугольник $BEDF$ является параллелограммом.
10. Точка пересечения биссектрис двух углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, принадлежит противолежащей стороне (рис. 5.10). Как связаны между собой стороны данного параллелограмма?

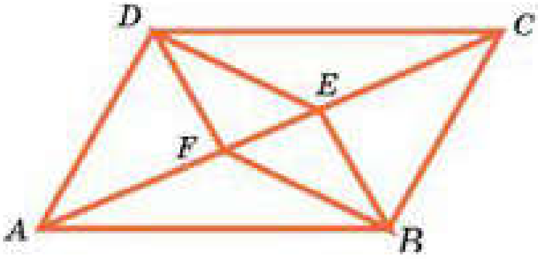


Рис. 5.9

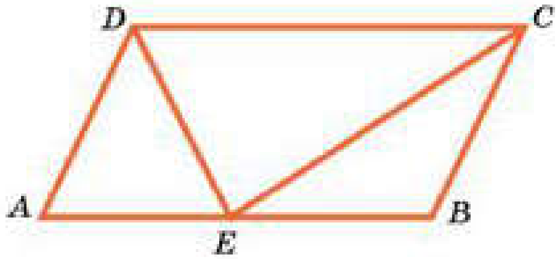


Рис. 5.10

11. Постройте параллелограмм по: а) двум сторонам и углу между ними; б) стороне, углу и диагонали; в) * стороне, перпендикуляру, опущенному на нее из вершины, и пересекающей его диагонали.

12. Укажите способ построения прямой, проходящей через данную точку и параллельной данной прямой.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

13. Является ли прямоугольник параллелограммом?

14. Какому условию должны удовлетворять диагонали параллелограмма, чтобы этот параллелограмм был прямоугольником?

§ 6. ПРЯМОУГОЛЬНИК

Напомним, что *прямоугольником* называется четырехугольник, у которого все углы прямые (рис. 6.1).

Рис. 6.1

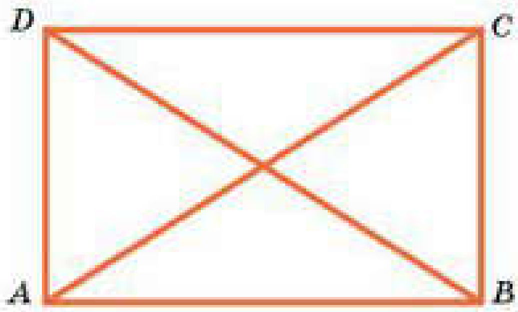


Рис. 6.2

Поскольку прямоугольник является частным случаем параллелограмма, то он обладает всеми свойствами параллелограмма. Например, в прямоуго льнике противоположные стороны попарно равны и диагонали в точке пересечения делятся пополам.

Теорема. ***(Признак прямоугольника.)*** ***Если в параллелограмме диагонали равны, то этот параллелограмм является прямоугольником*** .

Доказательство. Рассмотрим параллелограмм $ABCD$, у которого равны диагонали $AC = BD$ (рис. 6.2).

Треугольники ABC и BAD равны по третьему признаку равенства треугольников (AB — общая сторона, $AC = BD$, $BC = AD$). Следовательно, $\angle ABC = \angle BAD$. Но эти углы в сумме составляют $180°$. Значит, каждый из них равен $90°$. Так как в параллелограмме противолежащие углы равны, то и остальные его углы также равны $90°$, т. е. параллелограмм $ABCD$ является прямоугольником. □

Докажите, что диагонали прямоугольника равны.

Расстоянием между двумя параллельными прямыми называется длина перпендикуляра, опущенного из точки, принадлежащей одной прямой, на другую прямую (рис. 6.3).

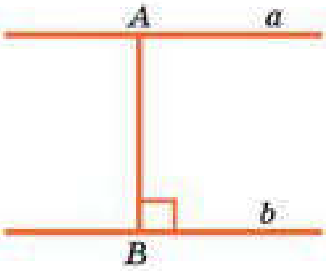


Рис. 6.3

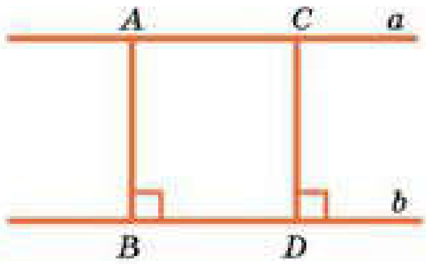


Рис. 6.4

Теорема. ***Расстояние между двумя параллельными прямыми не зависит от выбора точки на одной прямой, из которой опускается перпендикуляр на другую прямую.***

Доказательство. Пусть a и b — параллельные прямые, AB и CD — два перпендикуляра, опущенных из точек A и C прямой a на прямую b (рис. 6.4). $BDCA$ — прямоугольник, следовательно, его противолежащие стороны AB и CD равны. □

1. Какой параллелограмм называется *прямоугольником*?
2. Сформулируйте признак прямоугольника.
3. Что называется *расстоянием между двумя параллельными прямыми*?

Задачи

А

1. Существует ли четырехугольник, не являющийся прямоугольником, диагонали которого были бы равны?
2. Верно ли утверждение о том, что если в четырехугольнике один угол прямой, а диагонали равны, то он является прямоугольником?
3. В прямоугольнике острый угол между его диагоналями равен $50°$. Найдите углы, которые образуют диагонали со сторонами прямоугольника.

4. Меньшая сторона прямоугольника равна 5 см, диагонали пересекаются под углом 60°. Найдите диагонали прямоугольника.

5. Изобразите какой-нибудь прямоугольник $ABCD$, одна сторона которого показана на рисунке 6.5.

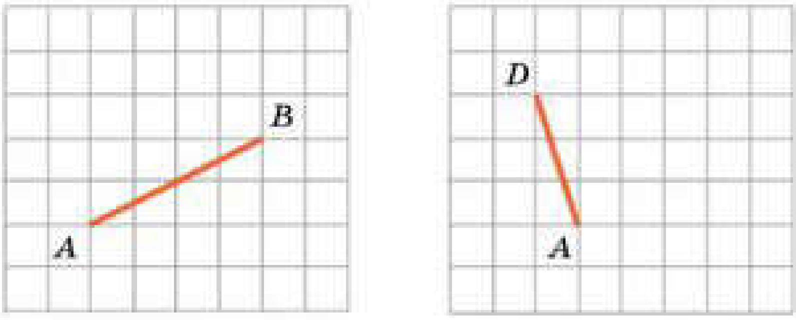
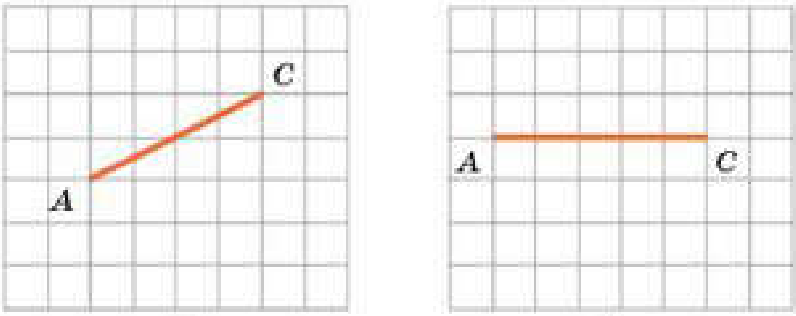


Рис. 6.5

B

6. Изобразите какой-нибудь прямоугольник $ABCD$, диагональ AC которого показана на рисунке 6.6.



а) б)

Рис. 6.6

7. В прямоугольнике диагональ делит угол в отношении 1 : 2, меньшая его сторона равна 5 см. Найдите диагонали данного прямоугольника.

8. Диагональ прямоугольника вдвое больше одной из его сторон. Какие углы образуют диагонали со сторонами прямоугольника?

9. Тупой угол между диагоналями прямоугольника равен 120°. Чему при этом будет равно отношение его меньшей стороны к диагонали?

10. Найдите диагонали прямоугольника, если его периметр равен 34 см, а периметр одного из треугольников, на которые диагональ разделила прямоугольник, равен 30 см.

11. В прямоугольном треугольнике ABC (рис. 6.7) из вершины прямого угла C опущена высота CH,

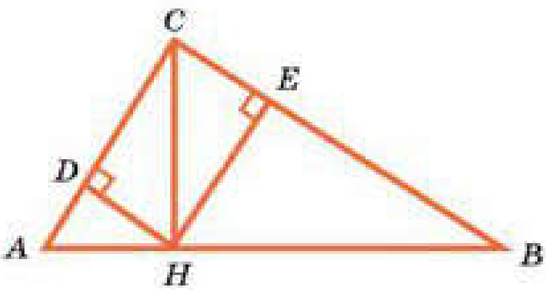


Рис. 6.7

равная 3 см. Из точки H опущены перпендикуляры HD и HE на катеты треугольника. Найдите расстояние между точками D и E.

12. Биссектриса одного из углов прямоугольника делит пересекаемую ею сторону на отрезки, равные 4 см и 5 см (рис. 6.8). Найдите стороны данного прямоутол ьника.

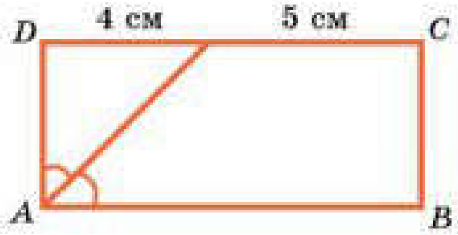


Рис. 6.8

C

13. Докажите , что биссектрисы углов параллелограмма с неравными соседними сторонами при пересечении образуют прямоугольник.

14. Перпендикуляр DH (рис. 6.9), опущенный из вершины D прямоугольника $ABCD$ на его диагональ AC, делит угол D в отношении 2 : 3. Найдите: а) углы, которые образуют диагонали данного прямоугольника с его сторонами; б) угол между перпендикуляром DH и диагональю BD.

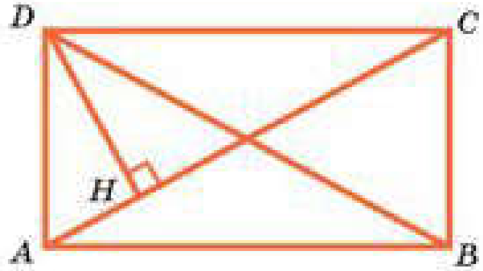


Рис. 6.9

15. Постройте прямоугольник по: а) двум соседним сторонам; б) стороне и диагонали.

16. Проведите прямую. Постройте параллельную ей прямую так, чтобы расстояние между этими прямыми было равно 2 см. Сколько таких прямых?

17. Укажите геометрическое место точек, удаленных от данной прямой на данное расстояние.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

18. Изобразите параллелограмм, у которого все стороны равны. Что можно сказать об углах, которые образуют диагонали такого параллелограмма?

§ 7. РОМБ, КВАДРАТ

Рассмотрим еще один частный случай параллелограмма.

Ромбом называется параллелограмм, у которого все стороны равны (рис. 7.1).

Конечно, ромб обладает всеми свойствами параллелограмма.

Приведем еще одно свойство ромба.

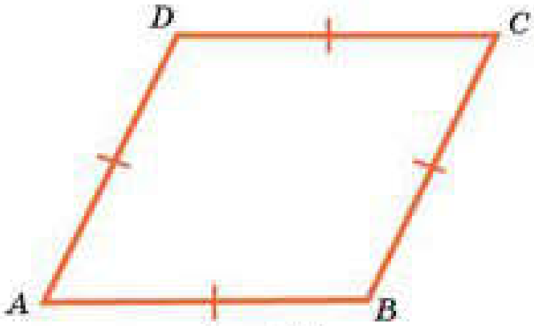


Рис. 7.1

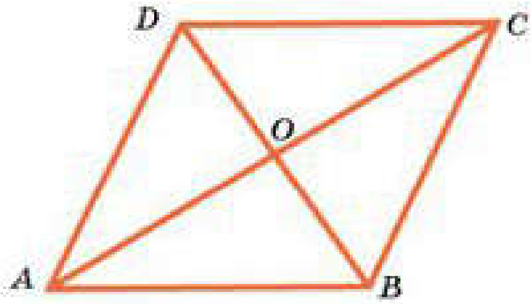


Рис. 7.2

Теорема. ***Диагонали ромба перпендикулярны и лежат на биссектрисах соответствующих углов этого ромба.***

Доказательство. Пусть AC и BC диагонали ромба $ABCD$, O — точка их пересечения (рис. 7.2). Так как стороны ромба равны, то треугольник ABD равнобедренный ($AB = AD$). Так как диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам, то отрезок AO является медианой равнобедренного треугольника ABD, следовательно, является биссектрисой и высотой этого треугольника. Значит, диагональ AC лежит на биссектрисе угла A и перпендикулярна диагонали BD.

Аналогичным образом доказывается, что диагональ BD лежит на биссектрисе угла B.

Докажите это самостоятельно.

Теорема. ***(Признак ромба.) Если в параллелограмме диагонали перпендикулярны, то этот параллелограмм является ромбом.***

Доказательство. Рассмотрим параллелограмм $ABCD$, у которого диагонали AC и BD перпендикулярны. Обозначим O точку пересечения этих диагоналей (рис. 7.2).

Прямоугольные треугольники AOB и AOD равны (по двум катетам: AO — общий, $OB = OD$). Следовательно, $AB = AD$. Так как в параллелограмме противолежащие стороны равны, то и остальные его стороны равны, т. е. параллелограмм $ABCD$ является ромбом. □

Докажите следующий признак ромба.

Если диагональ параллелограмма лежит на биссектрисе его угла, то этот параллелограмм является ромбом.

Квадратом называется прямоугольник, у которого все стороны равны (рис. 7.3).

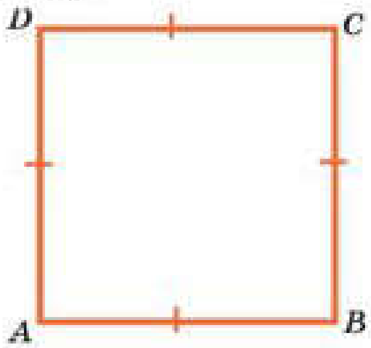


Рис. 7.3

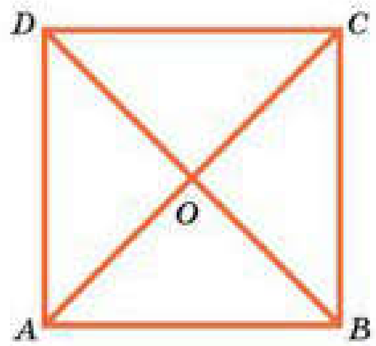


Рис. 7.4

Можно также сказать, что квадратом является ромб, у которого все углы прямые.

Квадрат обладает всеми свойствами прямоугольника и ромба.

Теорема. ***(Признак квадрата.) Если в прямоугольнике диагонали перпендикулярны, то этот прямоугольник является квадратом.***

Доказательство. Рассмотрим прямоугольник $ABCD$, у которого диагонали AC и BD перпендикулярны. Обозначим O точку пересечения этих диагоналей (рис. 7.4).

Прямоугольные треугольники AOB и AOD равны (по двум катетам: AO — общий, $OB = OD$). Следовательно, $AB = AD$. Так как в прямоугольнике противолежащие стороны равны, то и остальные его стороны равны, т. е. прямоугольник $ABCD$ является квадратом. □

Придумайте еще какой-нибудь признак квадрата.

1. Какой параллелограмм называется *ромбом*?
2. Сформулируйте признак ромба.
3. Какой прямоугольник называется *квадратом*?
4. В каком случае ромб является квадратом?
5. Сформулируйте признак квадрата.

Задачи

А

1. Чему равен угол между: а) диагоналями квадрата; б) диагональю и стороной квадрата?

2. Изобразите какой-нибудь квадрат $ABCD$, одна сторона которого показана на рисунке 7.5.

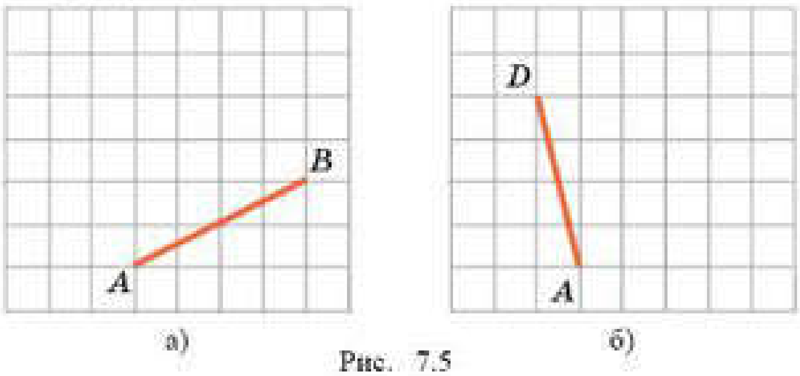


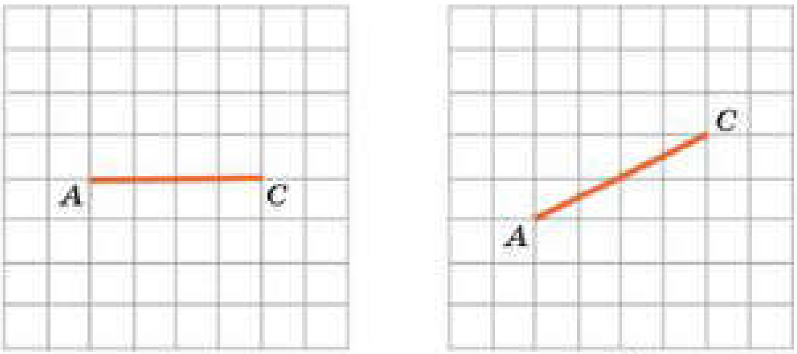
Рис. 7.5

3. Чему равна меньшая диагональ ромба со стороной a и острым углом в 60°?

4. В ромбе одна из диагоналей равна его стороне. Найдите углы ромба.

B

5. Изобразите какой-нибудь квадрат $ABCD$, диагональ AC которого показана на рисунке 7.6.



а) б)

Рис. 7.6

6. В квадрате расстояние от точки пересечения диагоналей до одной из его сторон равно 5 см. Найдите периметр квадрата.
7. Вершинами какого четырехугольника являются середины сторон прямоугольника?
8. Вершинами какого четырехугольника являются середины сторон квадрата?
9. Докажите, что диагональ квадрата лежит на биссектрисе его угла.
10. Докажите, что если диагональ прямоугольника лежит на биссектрисе его угла, то он является квадратом.

C

11. Углы, образуемые диагоналями ромба с одной из его сторон, относятся как 4 : 5. Найдите углы ромба.
12. Докажите, что если в ромбе диагонали равны, то этот ромб является квадратом.
13. На сторонах квадрата $ABCD$ последовательно отложены равные отрезки: $AE = BF = CG = DH$ (рис. 7.7). Докажите, что четырехугольник $EFGH$ — квадрат.

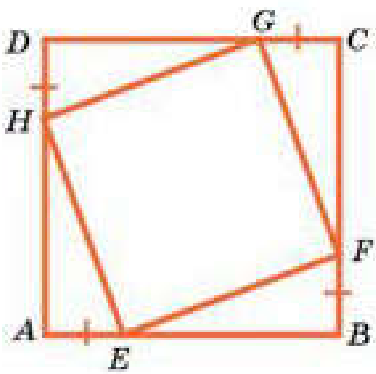


Рис. 7.7

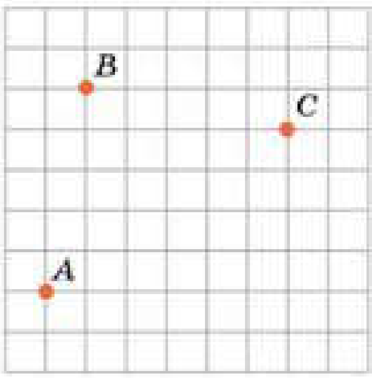


Рис. 7.8

14. Постройте ромб по: а) стороне и диагонали; б) двум диагоналям.
15. Постройте квадрат по: а) стороне; б) диагонали.

16. На листе бумаги в клетку отмечены три вершины квадрата $ABCD$ (рис.7.8). Пользуясь линейкой без делений, постройте четвертую вершину и центр квадрата.

17. На рисунке 7.9 изображен прямоугольник $ABCD$, на сторонах которого внутри него построены равные равнобедренные треугольники: $\Delta ABM = \Delta CDP$ и $\Delta BCN = \Delta ADQ$. Докажите, что четырехугольник $MNPQ$ — ромб.

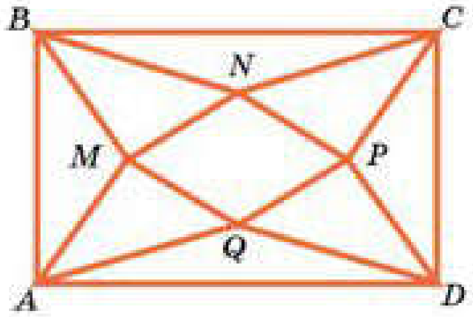


Рис. 7.9

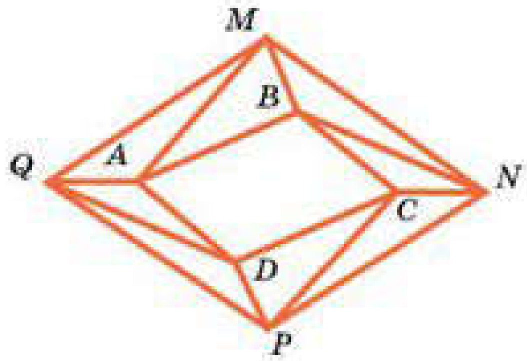


Рис. 7.10

18. На рисунке 7.10 изображен параллелограмм $ABCD$, на сторонах которого вне его построены равные треугольники: $\Delta ABM = \Delta CDP$ и $\Delta BCN = \Delta DAQ$. Является ли четырехугольник $MNPQ$ ромбом?

19. На сторонах квадрата $ABCD$ вне его построили равные треугольники (рис. 7.11). Точками E, F, G, H обозначили пересечения их высот. Докажите, что четырехугольник $EFGH$ является квадратом.

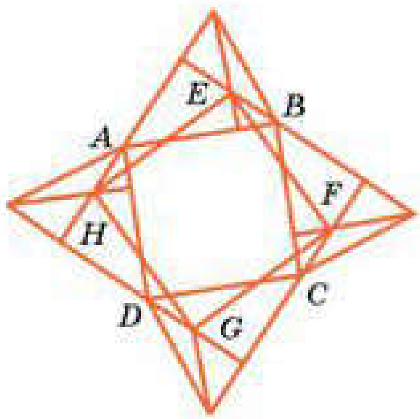


Рис. 7.11

20. В центре площади расположен фонтан, около которого надо разбить 4 одинаковые клумбы с розами. Как рассадить 36 кустов роз — по 10 кустов на каждой клумбе — с таким расчетом, чтобы фонтан был равноудален от всех клумб?

21. Жители трех домов, расположенных в вершинах равнобедренного треугольника с углом 120°, решили построить общий колодец. Какое место для колодца им следут выбрать, чтобы все три дома находились от него на одинаковом расстоянии?

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

22. Изобразите какой-нибудь треугольник. Проведите отрезок, соединяющий середины двух сторон этого треугольника. Какими свойствами обладает этот отрезок?

§ 8. СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА

Рассмотрим треугольник ABC. Обозначим D и E середины сторон AC и BC соответственно. Соединим эти точки отрезком DE (рис. 8.1).

Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, называется *средней линией треугольника*.

Изобразите несколько треугольников с данной стороной AB. Проведите их средние линии, соединяющие середины двух других сторон. Измерьте их длины. Будут ли они равны для всех этих треугольников?

Теорема. ***Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна ее половине.***

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC, в котором DE — средняя линия, соединяющая середины сторон соответственно AC и BC (рис. 8.2).

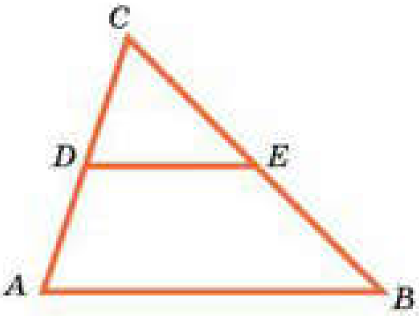


Рис. 8.1

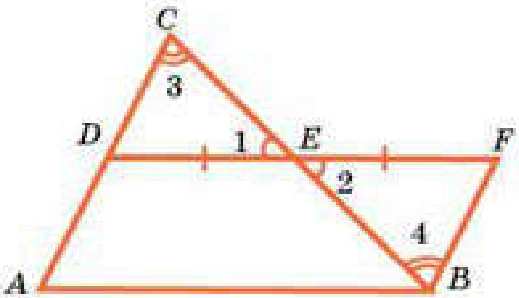


Рис. 8.2

Докажем, что эта средняя линия параллельна стороне AB и равна ее половине. Отложим на луче DE отрезок $EF = DE$ и соединим отрезком точки B и F. Треугольники ECD и EBF равны по первому признаку равенства треугольников ($CE = BE$ по условию, $DE = FE$ по построению, $\angle 1 = \angle 2$ как вертикальные углы). Следовательно, $BF = CD$, значит, $BF = AD$. Угол 3 равен углу 4, значит, прямые AC и BF параллельны. Четырехугольник $ABFD$ — параллелограмм по первому признаку параллелограмма, следовательно, его сторона AB параллельна и равна стороне DF. Средняя линия DE треугольника ABC равна половине DF, следовательно, половине AB. □

Докажите, что прямая, проходящая через середину одной стороны треугольника и параллельная другой стороне этого треугольника, делит третью сторону данного треугольника пополам.

1. Что называется *средней линией треугольника*?
2. Сформулируйте теорему о средней линии треугольника.

Задачи

A

1. Стороны треугольника равны 8 см, 10 см и 12 см. Найдите стороны треугольника, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника.
2. Стороны треугольника равны 2 см, 3 см и 4 см. Его вершины являются серединами сторон другого треугольника. Найдите периметры обоих треугольников.
3. Периметр равностороннего треугольника равен 72 см. Найдите его среднюю линию.
4. Периметр треугольника равен 15 см. Найдите периметр треугольника, отсекаемого от данного какой-нибудь его средней линией.

B

5. Стороны треугольника относятся как 3 : 4 : 5, периметр его равен 60 см. Найдите стороны треугольника, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника.
6. Докажите, что средние линии треугольника делят его на четыре равных треугольника.
7. Средняя линия равнобедренного треугольника, параллельная основанию, равна 3 см. Найдите стороны треугольника, если его периметр равен 16 см.
8. Докажите, что середины сторон произвольного четырехугольника являются вершинами параллелограмма.
9. Диагонали четырехугольника равны a и b. Найдите периметр четырехугольника, вершинами которого являются середины сторон данного четырехугольника.
10. В прямоугольнике меньшая сторона равна 20 см и образует с диагональю угол в 60°. Середины сторон прямоугольника последовательно соединены. Найдите периметр полученного четырехугольника.
11. Докажите, что середины сторон прямоугольника являются вершинами ромба и, наоборот, середины сторон ромба являются вершинами прямоугольника.

C

12. В треугольнике ABC проведены медианы AD и BE, которые пересекаются в точке M (рис. 8.3). В треугольнике AMB проведена средняя линия $FG \parallel AB$. Докажите, что четырехугольник $FGDE$ — параллелограмм.

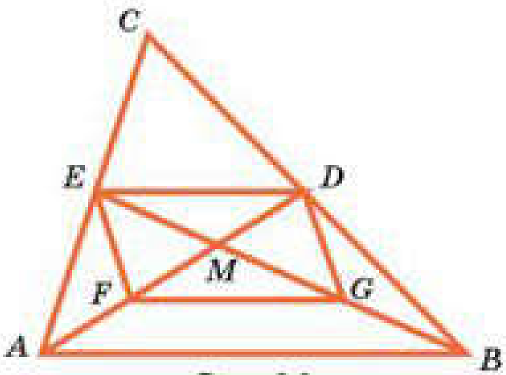


Рис. 8.3

13. Докажите, что вершины треугольника находятся на равном расстоянии от прямой, на которой лежит средняя линия этого треугольника (рис. 8.4).

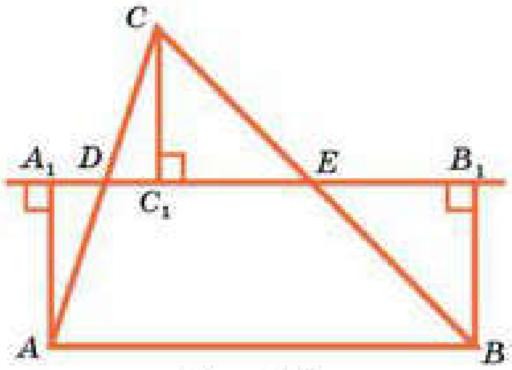


Рис. 8.4

14. Даны три точки, не принадлежащие одной прямой. Как будет расположена прямая, равноудаленная от этих точек? Сколько существует таких прямых?

15. На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC отложены равные отрезки AD и BE. Докажите, что середина отрезка DE принадлежит средней линии треугольника ABC, параллельной его основанию.

16. Постройте треугольник, если заданы середины его сторон D, E, F (рис. 8.5).

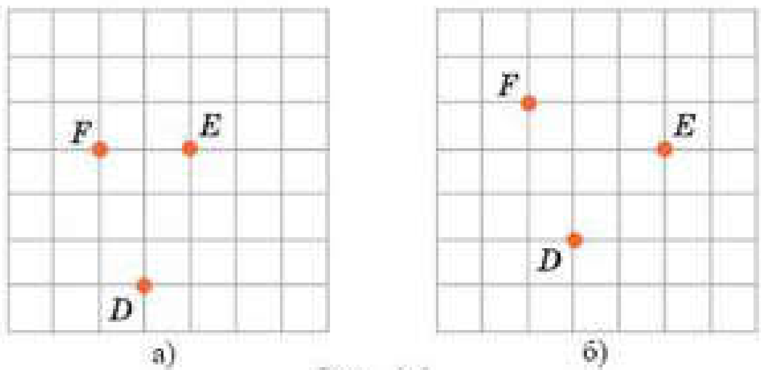


Рис. 8.5

17. Восстановите ромб по точке пересечения его диагоналей O и серединам E, F двух смежных сторон (рис. 8.6).

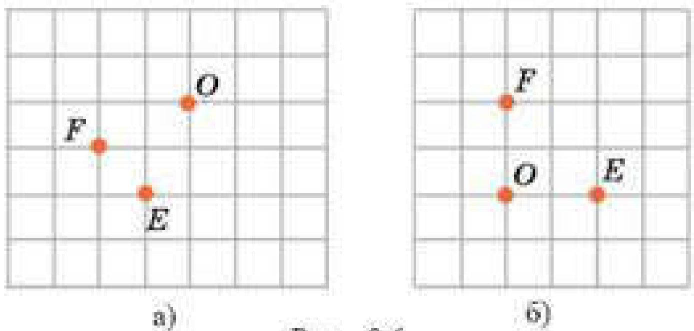


Рис. 8.6

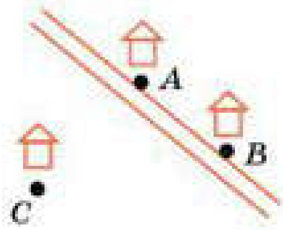


Рис. 8.7

18. Как, используя свойство средней линии треугольника, провести через пункт C дорогу, параллельную дороге, соединяющей пункты A и B (рис. 8.7)?

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

19. Изобразите четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны. Может ли у такого четырехугольника быть: а) три прямых угла; б) три острых угла?

§ 9. ТРАПЕЦИЯ

Четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны, называется *трапецией* (рис. 9.1).

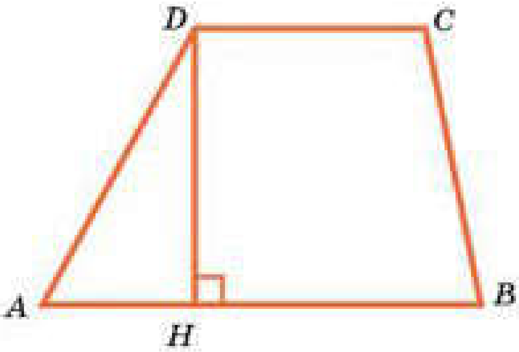


Рис. 9.1

Параллельные стороны трапеции называются ее *основаниями*, а непараллельные стороны — *боковыми сторонами*.

Высотой трапеции называется перпендикуляр, опущенный из ее вершины, на противолежащее ей основание или его продолжение.

Трапеция называется *равнобедренной*, если ее боковые стороны равны (рис. 9.2, а).

Трапеция называется *прямоугольной*, если один из ее углов прямой (рис. 9.2, б).

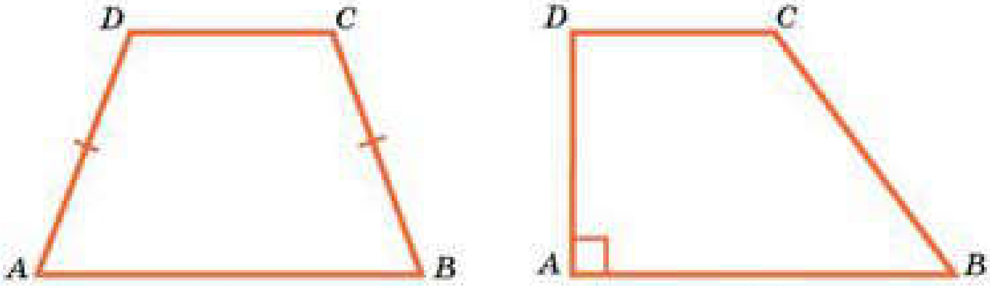


Рис. 9.2

Рассмотрим некоторые свойства равнобедренной трапеции.

Свойство 1. *Углы при основании равнобедренной трапеции равны.*

Доказательство. Пусть $ABCD$ — равнобедренная трапеция, CD — ее меньшее основание (рис. 9.3). Докажем, что углы при основании AB равны.

Проведем высоты CF и DE трапеции. Прямоугольные треугольники ADE и BCF равны по гипотенузе и катету ($AD = BC$, $DE = CF$). Следовательно, равны углы A и B.

Так как углы A и D, B и C в сумме составляют $180°$, то из равенства углов A и B следует также равенство углов D и C. □

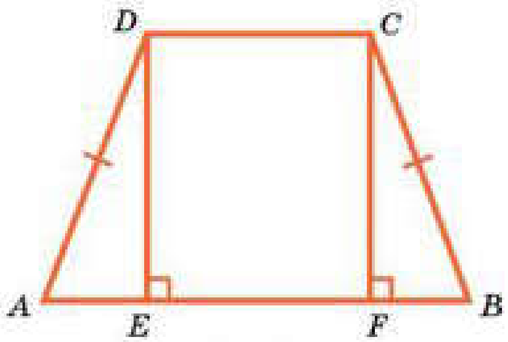


Рис. 9.3

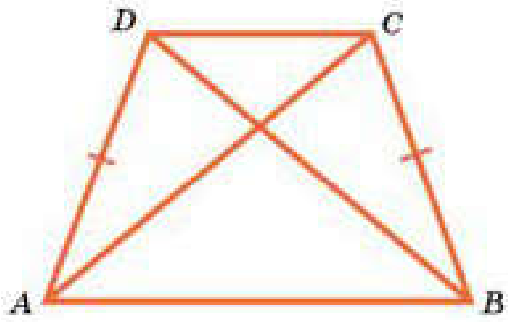


Рис. 9.4

Свойство 2. *Диагонали равнобедренной трапеции равны.*

Доказательство. Пусть $ABCD$ — равнобедренная трапеция ($AB \parallel CD$), AC, BD — ее диагонали (рис. 9.4). Треугольники ABC и BAD равны по первому признаку равенства треугольников (AB — общая сторона, $BC = AD$, $\angle ABC = \angle BAD$). Следовательно, $AC = BD$.

Придумайте какой-нибудь признак равнобедренной трапеции.

1. Какой четырехугольник называется *трапецией*?
2. Какие стороны трапеции называются: а) *основаниями*; б) *боковыми сторонами*?
3. Что называется *высотой трапеции*?
4. Какая трапеция называется: а) *равнобедренной*; б) *прямоугольной*?
5. Какое соотношение имеется между углами при основании равнобедренной трапеции?
6. Какое соотношение имеется между диагоналями равнобедренной трапеции?

Задачи

А

1. Изобразите равнобедренную трапецию с тремя данными вершинами (рис. 9.5).

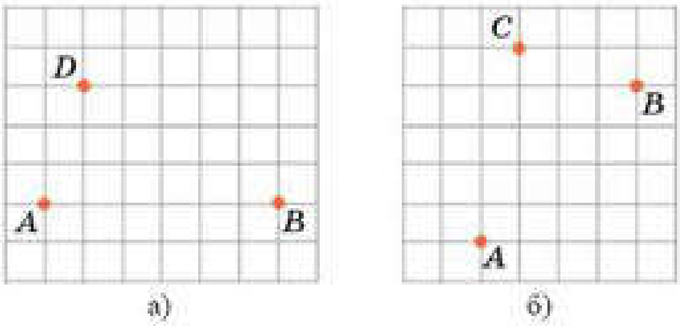
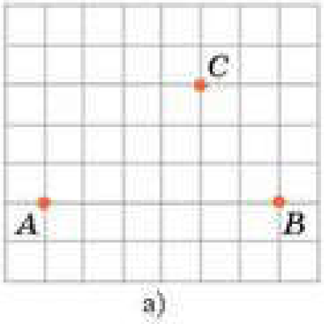


Рис. 9.5

2. Изобразите прямоугольную трапецию с тремя данными вершинами (рис. 9.6).



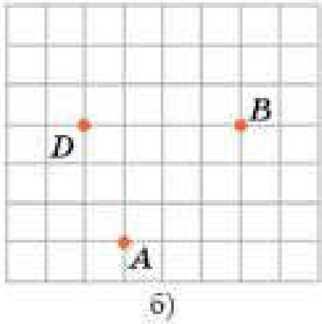


Рис. 9.6

3. Боковые стороны прямоугольной трапеции равны 4 и 5. Найдите высоту этой трапеции.
4. Перпендикуляр, опущенный из вершины тупого угла на большее основание равнобедренной трапеции, делит его на части, имеющие длины 10 см и 4 см. Найдите меньшее основание трапеции.
5. Чему равны углы равнобедренной трапеции, если известно, что разность противолежащих углов равна 40°?
6. Могут ли углы, прилежащие к основанию трапеции, быть один острым, а другой тупым?

B

7. Может ли у трапеции быть: а) три прямых угла; б) три острых угла?
8. Определите вид четырехугольника, который получится, если последовательно соединить отрезками середины сторон равнобедренной трапеции.
9. В четырехугольнике диагонали равны. Будет ли он равнобедренной трапецией?
10. Прямая, проведенная параллельно боковой стороне трапеции через конец меньшего основания, равного 3 см (рис. 9.7), отсекает треугольник, периметр которого равен 15 см. Найдите периметр трапеции.

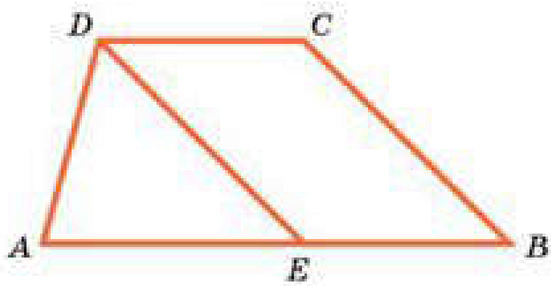


Рис. 9.7

C

11. Докажите, что если углы при основании трапеции равны, то эта трапеция равнобедренная.
12. Докажите, что если диагонали трапеции равны, то эта трапеция равнобедренная.
13. Докажите: 1) сумма боковых сторон трапеции больше разности оснований; 2) сумма диагоналей трапеции больше суммы осно-

ваний; 3) разность оснований больше разности боковых сторон; 4) диагонали трапеции в точке их пересечения не делятся пополам.

14. Докажите, что прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей равнобедренной трапеции и точку пересечения продолжения боковых сторон, перпендикулярна основаниям трапеции и делит их пополам.

15. Постройте прямоугольную трапецию, основания которой равны 5 см и 3 см, а меньшая боковая сторона равна 2 см.

16. Постройте равнобедренную трапецию, основания которой равны 6 см и 3 см, а боковые стороны равны 2 см.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

17. По аналогии с определением средней линии треугольника попробуйте определить понятие средней линии трапеции. Какими свойствами она обладает?

§ 10. СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ ТРАПЕЦИИ

Отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции, называется *средней линией трапеции* (рис. 10.1).

Изобразите несколько трапеций с данными основаниями AB и CD. Проведите их средние линии. Измерьте их длины. Будут ли они равны для всех этих трапеций?

Теорема. ***Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.***

Доказательство. Рассмотрим трапецию $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Обозначим EF среднюю линию, соединяющую середины боковых сторон соответственно AD и BC. Проведем прямую DF и обозначим G ее точку пересечения с прямой AB (рис. 10.2).

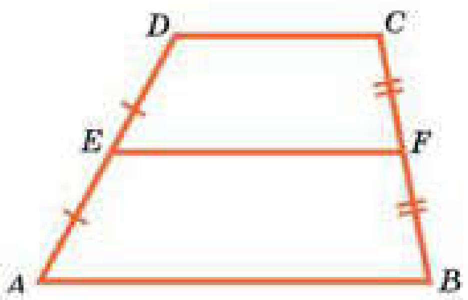


Рис. 10.1

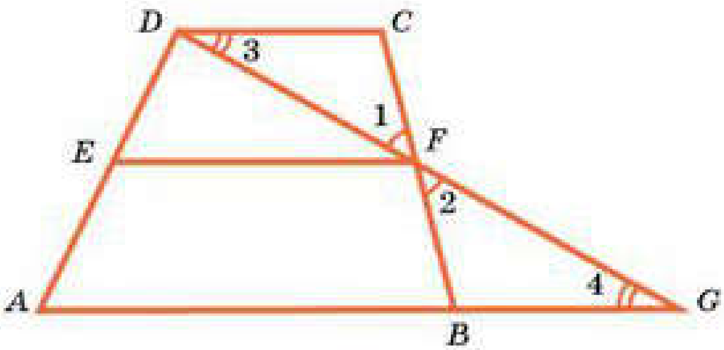


Рис. 10.2

Треугольники DFC и GFB равны по второму признаку равенства треугольников ($CF = BF$ по условию, $\angle 1 = \angle 2$ как вертикальные углы, $\angle 3 = \angle 4$ как накрест лежащие углы при двух параллельных прямых и секущей). Следовательно, $DF = GF$, значит, EF — средняя линия треугольника AGD. Из теоремы о средней линии треугольника следует, что средняя линия EF параллельна стороне AB и $EF = \frac{1}{2}AG$. Так как $AB \parallel CD$, то EF будет параллельна обоим основаниям. Кроме того, $EF = \frac{1}{2}AG = \frac{1}{2}(AB + BG) = \frac{1}{2}(AB + CD)$. □

Докажите, что прямая, проходящая через середину одной боковой стороны трапеции и параллельная основаниям этой трапеции, делит вторую боковую сторону трапеции пополам.

1. Что называется *средней линией трапеции* ?
2. Сформулируйте теорему о средней линии трапеции.

Задачи

A

1. Основания трапеции равны 6 и 8. Найдите ее среднюю линию.
2. Средняя линия трапеции равна 5. Одно снование равно 4. Найдите другое основание.
3. Средняя линия трапеции равна 7 см, а одно из ее оснований больше другого на 4 см. Найдите основания трапеции.
4. Периметр трапеции равен 50 см, а сумма непараллельных сторон равна 20 см. Найдите среднюю линию трапеции.
5. Периметр равнобедренной трапеции равен 80 см, ее средняя линия равна боковой стороне. Найдите боковую сторону данной трапеции.
6. Перпендикуляр, опущенный из вершины тупого угла на большее основание равнобедренной трапеции, делит его на части, имеющие длины 5 см и 2 см. Найдите среднюю линию трапеции.
7. Основания трапеции относятся как 5 : 2, а их разность равна 18 см. Найдите среднюю линию трапеции.
8. Основания трапеции относятся как 2 : 3, а средняя линия равна 5 м. Найдите основания.
9. На одной прямой на равном расстоянии друг от друга стоят три телеграфных столба. Крайние столбы находятся от дороги на расстояниях 18 м и 48 м (рис. 10.3). Найдите расстояние, на котором от дороги находится средний столб.

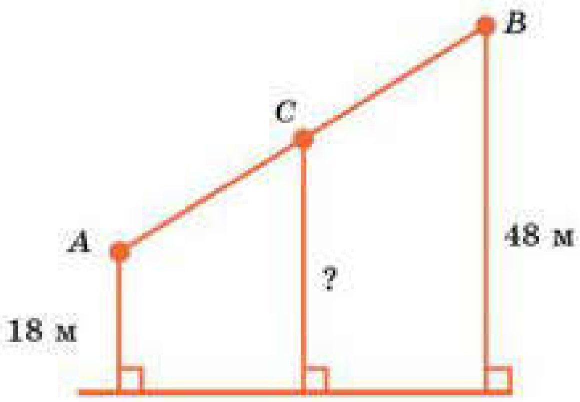


Рис. 10.3

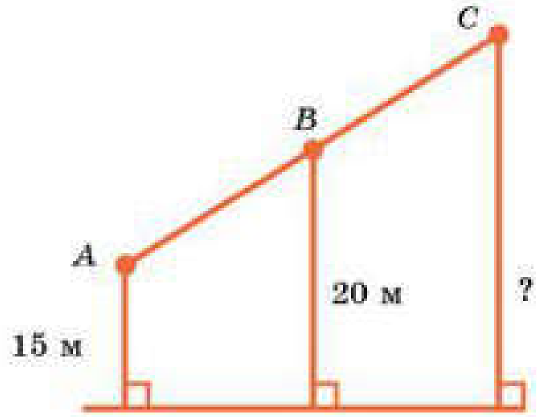


Рис. 10.4

10. На одной прямой на равном расстоянии друг от друга стоят три телеграфных столба. Первый и второй столбы находятся от дороги на расстояниях 15 м и 20 м (рис. 10.4). Найдите расстояние, на котором находится от дороги третий столб.

B

11. Средняя линия трапеции равна 10 см. Одна из диагоналей делит ее на два отрезка, разность которых равна 2 см. Найдите основания трапеции.

12. Основания трапеции равны 4 см и 10 см. Найдите отрезки, на которые делит среднюю линию трапеции одна из ее диагоналей.

13. Диагональ трапеции делит ее среднюю линию на отрезки, равные a и b. Найдите основания трапеции.

14. Постройте трапецию, если заданы две ее вершины A, C и средняя линия EF (рис. 10.5).

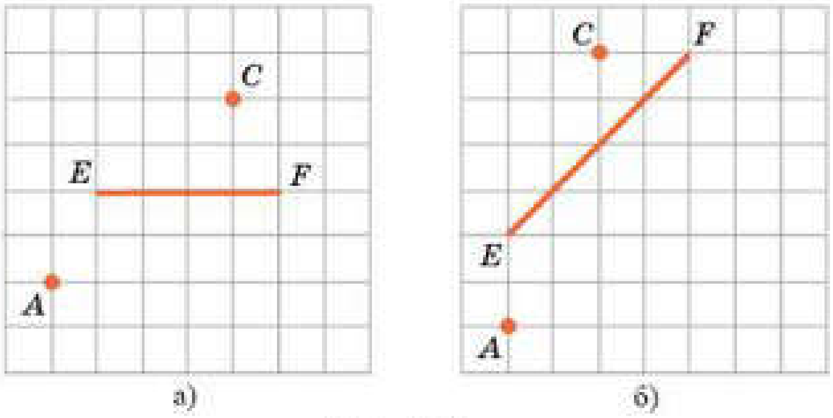


Рис. 10.5

C

15. В треугольнике ABC сторона BC разделена на четыре равные части и через полученные точки деления проведены прямые, параллельные стороне AC, равной 18. Найдите отрезки этих прямых, заключенные внутри треугольника (рис. 10.6).

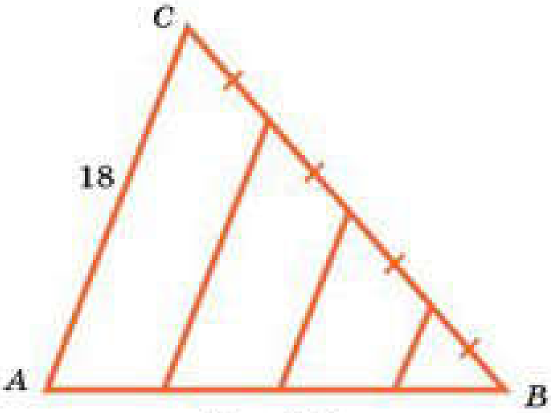


Рис. 10.6

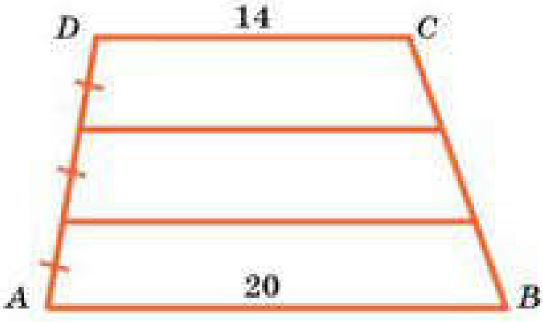


Рис. 10.7

16. Основания трапеции равны 14 и 20. Одна из боковых сторон разделена на три равные части и через точки деления проведены прямые, параллельные основаниям трапеции (рис. 10.7). Найдите отрезки этих прямых, заключенные внутри трапеции.

17. Докажите, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен ее основаниям и равен полуразности оснований.

18. Может ли средняя линия трапеции пройти через точку пересечения диагоналей?

19. Пользуясь линейкой без делений, постройте среднюю линию трапеции *ABCD* (рис. 10.8).

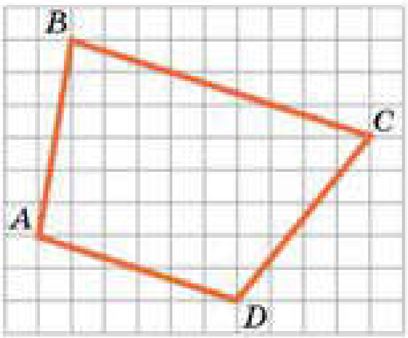


Рис. 10.8

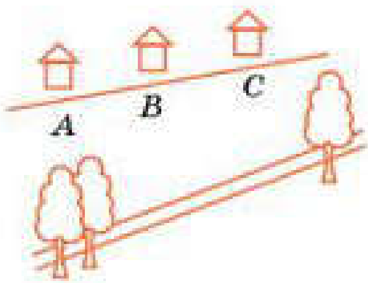


Рис. 10.9

20. Три дома *A*, *B*, *C* расположены вдоль одной прямой на разных расстояниях от прямолинейной дороги, причем $AB = BC$ (рис. 10.9). На каком расстоянии от дороги находится средний дом, если два крайних дома удалены от нее соответственно на 72 м и 54 м?

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

21. Изобразите угол. Отложите на одной его стороне несколько равных отрезков. Проведите через их концы параллельные прямые, пересекающие вторую сторону угла. Что можно сказать об отрезках, которые отсекаются этими прямыми на второй стороне угла?

§ 11. ТЕОРЕМА ФАЛЕСА. ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ ОТРЕЗКИ

Следующая теорема является обобщением теорем о средних линиях треугольника и трапеции. Она носит имя древнегреческого ученого Фалеса.

Теорема. ***(Фалеса.) Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне.***

Доказательство. Рассмотрим угол AOB. Пусть A_1, A_2, A_3 — точки пересечения параллельных прямых с одной из сторон угла; B_1, B_2, B_3 — соответствующие точки пересечения параллельных прямых с другой стороной угла (рис. 11.1).

Если $A_1A_2 = A_2A_3$, то A_2B_2 — средняя линия трапеции $A_1A_3B_3B_1$, следовательно, $B_1B_2 = B_2B_3$. □

Теорему Фалеса можно использовать для деления отрезка на n равных частей. Например, разделим отрезок AB на 3 равные части. С вершиной в точке A проведем луч a, не лежащий на прямой AB, и отложим на нем равные отрезки $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$ (рис. 11.2).

Проведем прямую A_3B. Через точки A_1, A_2 проведем прямые, параллельные прямой A_3B, и их точки пересечения с отрезком AB обозначим соответственно B_1, B_2. По теореме Фалеса будут выполняться равенства $AB_1 = B_1B_2 = B_2B$.

Предложите способ деления отрезка на пять равных частей.

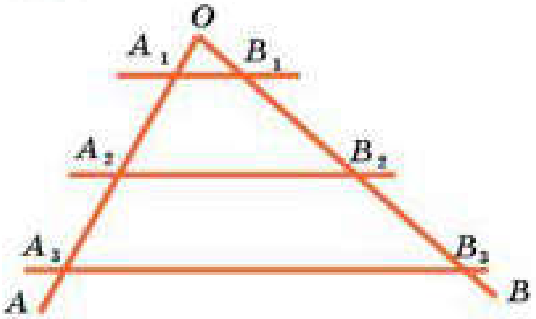


Рис. 11.1

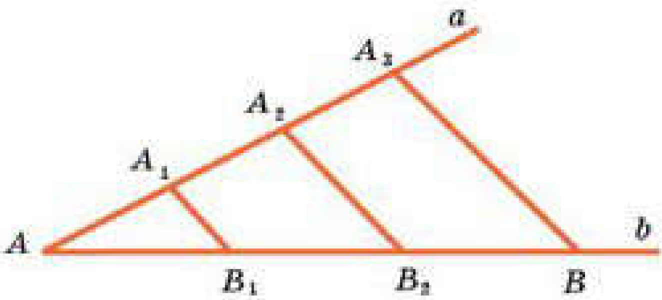


Рис. 11.2

Рассмотрим два отрезка AB и CD (рис. 11.3). Приняв отрезок CD за единичный, измерим длину отрезка AB. Полученное число называется *отношением отрезков* AB и CD. Оно обозначается $\frac{AB}{CD}$ или $AB : CD$.

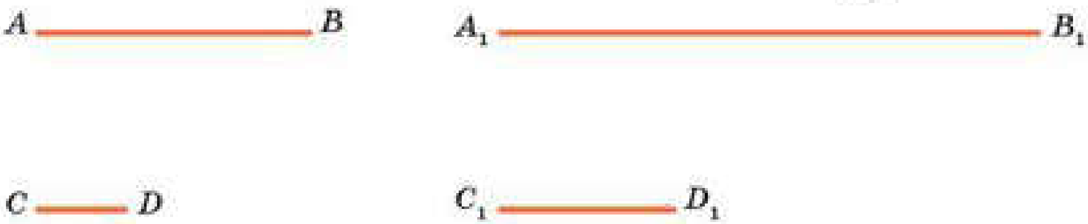


Рис. 11.3

Отрезки AB, CD называются *пропорциональными* отрезкам A_1B_1, C_1D_1, если равны их отношения, т. е. $\frac{AB}{CD} = \frac{A_1B_1}{C_1D_1} = k$. Число k называется *коэффициентом пропорциональности*.

Теорема. ***(О пропорциональных отрезках.) Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают от сторон угла пропорциональные отрезки.***

Идея доказательства состоит в следующем. Рассмотрим угол с вершиной O, стороны которого пересекаются параллельными прямыми в точках A, B и E, F соответственно (рис. 11.4).

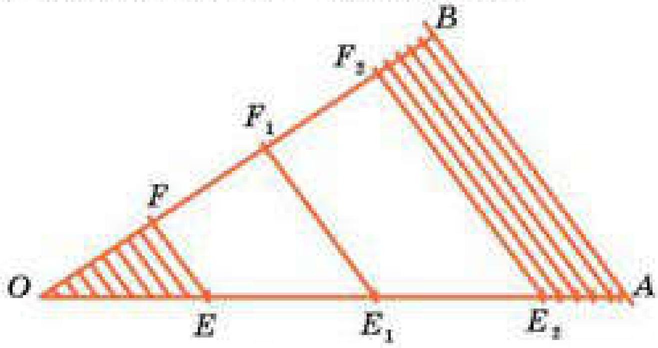


Рис. 11.4

Покажем, что имеет место равенство

$$\frac{OA}{OE} = \frac{OB}{OF}.$$

Заметим, что отношение $\frac{OA}{OE}$ показывает, сколько раз отрезок OE укладывается в отрезке OA, а отношение $\frac{OB}{OF}$ показывает, сколько раз отрезок OF укладывается в отрезке OB. Теорема Фалеса позволяет установить соответствие между процессами измерения отрезков OA и OB с единичными отрезками соответственно OE и OF. Действительно, прямые, параллельные прямой AB, переводят равные отрезки на прямой OA в равные отрезки на прямой OB. Отрезок OE переходит в отрезок OF. Одна десятая часть отрезка OE переходит в одну десятую часть отрезка OF и т. д. Поэтому, если отрезок OE и его части укладываются в отрезке OA k раз, то отрезок OF и его части будут укладываться в отрезке OB также k раз, т. е. $\frac{OA}{OE} = \frac{OB}{OF} = k$. □

Следствие. *Если стороны угла пересекаются параллельными прямыми в точках A, B и E, F* (рис. 11.4)*, то имеет место равенство*

$$\frac{EA}{OE} = \frac{FB}{OF}.$$

Доказательство. Действительно, $OA = OE + EA$ и $OB = OF + FB$. Подставляя эти выражения в равенство

$$\frac{OA}{OE} = \frac{OB}{OF},$$

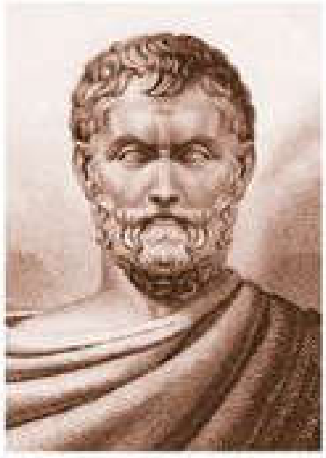
получим:

$$1 + \frac{EA}{OE} = 1 + \frac{FB}{OF}.$$

Следовательно, выполняется требуемое равенство. ☐

Используя теорему о пропорциональных отрезках, укажите, как по данным трем отрезкам с длинами a, b, c построить отрезок, длина d которого равна $\frac{a \cdot b}{c}$.

Исторические сведения



Фалес
(624—547 гг. до н.э.)

По преданию, Фалес был родом из Милета, греческого города на берегу Эгейского моря, в котором он создал свою философскую школу. Фалес считается одним из первых ученых-геометров. Им были установлены первые теоремы геометрии как истины, обобщающие практические наблюдения и требующие логических доказательств. В частности, им были доказаны теоремы о равенстве вертикальных углов; о равенстве углов при основании равнобедренного треугольника; о том, что два треугольника равны, если они имеют по одной равной стороне и по два равных угла, прилежащих к этой стороне, и многое другое.

1. Сформулируйте теорему Фалеса.
2. Обобщением каких теорем является теорема Фалеса?
3. Как, используя теорему Фалеса, разделить отрезок на n равных частей?
4. Что называется *отношением двух отрезков*?
5. Какие отрезки называются *пропорциональными*?
6. Сформулируйте теорему о пропорциональных отрезках.

Задачи

А

1. Стороны угла с вершиной O пересечены двумя параллельными прямыми в точках A, C и B, D соответственно (рис. 11.5). Найдите OC, если $OB = BD = 5$ и $OA = 4$.

2. Стороны угла с вершиной O пересечены двумя параллельными прямыми в точках A, C и B, D соответственно (рис. 11.6). Найдите OD, если $OA = 6$, $AC = 12$ и $OB = 5$.

3. На одной из сторон угла расположены два отрезка 3 см и 4 см. Через их концы проведены параллельные прямые, образующие на другой стороне также два отрезка. Больший из отрезков равен 6 см. Чему равен другой отрезок?

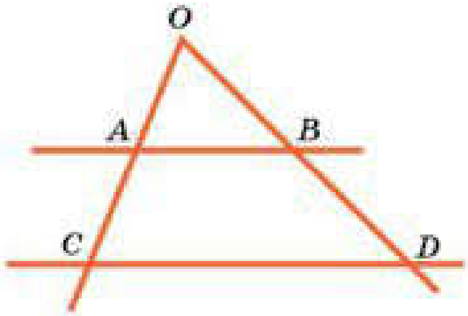


Рис. 11.5

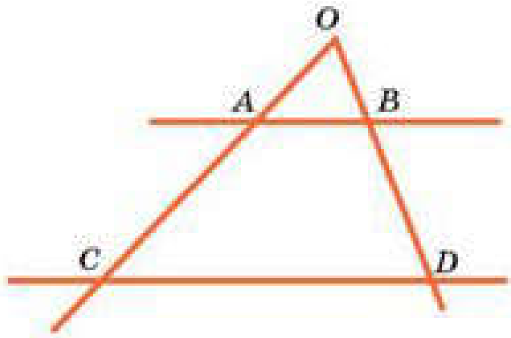


Рис. 11.6

4. Определите, пропорциональны ли пары отрезков a, b и c, d, если: а) $a = 0{,}8$ см, $b = 0{,}3$ см, $c = 2{,}4$ см, $d = 0{,}9$ см; б) $a = 50$ мм, $b = 6$ см, $c = 10$ см, $d = 2$ см.
5. Среди отрезков a, b, c, d, e выберите пары пропорциональных отрезков, если $a = 2$ см, $b = 17{,}5$ см, $c = 16$ см, $d = 35$ см, $e = 4$ см.

B

6. Стороны угла с вершиной O пересечены двумя параллельными прямыми в точках A, B и C, D соответственно. Найдите: а) CD, если $OA = 8$ см, $AB = 4$ см, $OD = 6$ см; б) OC и OD, если $OA : OB = 3 : 5$ и $OD - OC = 8$ (см); в) OA и OB, если $OC : CD = 2 : 3$ и $OA + OB = 14$ (см).
7. Даны три отрезка: a, b, и c. Какова должна быть длина четвертого отрезка d, чтобы из них можно было образовать две пары пропорциональных отрезков, если $a = 6$ см, $b = 3$ см, $c = 4$ см и отрезок d больше каждого из этих отрезков.
8. Каждая из сторон треугольника разделена на три равных отрезка и точки деления соединены отрезками. Найдите периметр образовавшейся при этом фигуры, состоящей из трех закрашенных треугольников (рис. 11.7), если периметр исходного треугольника равен p.

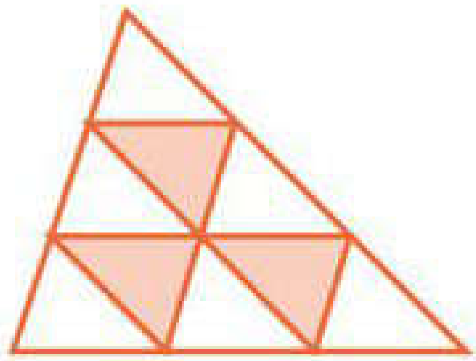


Рис. 11.7

9. Через вершины треугольника проведены прямые, параллельные его противолежащим сторонам. Докажите, что стороны получившегося треугольника в два раза больше сторон исходного треугольника.
10. С помощью циркуля и линейки разделите данный отрезок на: а) 3 равные части; б) 5 равных частей; в) 6 равных частей.
11. Дворец Мира и Согласия — пирамида — одна из достопримечательностей столицы Казахстана. Пирамида стала символом единения

различных религий, этносов и культур, открытости народа и государства всему миру (рис. 11.8). Боковые грани пирамиды являются равносторонними треугольниками. Каждая из сторон треугольника разделена на пять равных частей и точки деления соединены отрезками. Найдите периметр образовавшейся при этом фигуры, состоящей из десяти треугольников, если периметр исходного треугольника равен 186 м.

Рис. 11.8

C

12. В параллелограмме $ABCD$ точка E — середина стороны CD. Отрезок AE пересекает диагональ BD в точке F (рис. 11.9). Найдите отношение $DF : FB$.

13. На продолжении стороны AB треугольника ABC взята точка D, $AB = BD$. Через нее и середину E стороны AC проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке F (рис. 11.10). Найдите отношение $BF : FC$.

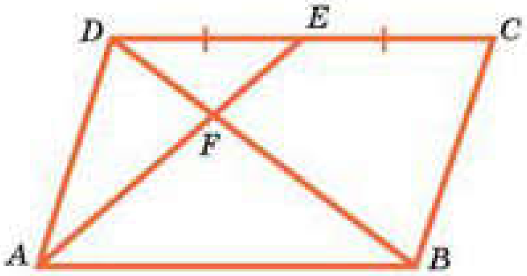


Рис. 11.9

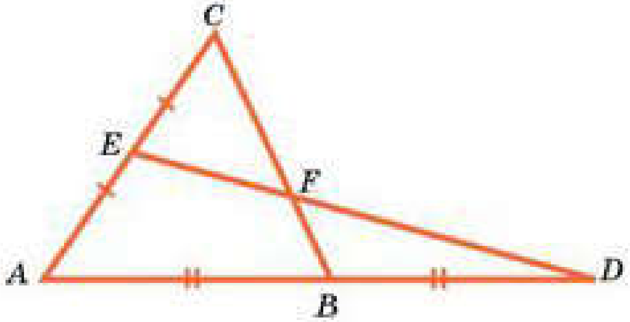


Рис. 11.10

14. На продолжении стороны AB треугольника ABC взята точка D, $AB = BD$. Через нее и середину E стороны BC проведена прямая, пересекающая сторону AC в точке F (рис. 11.11). Найдите отношение $AF : FC$.

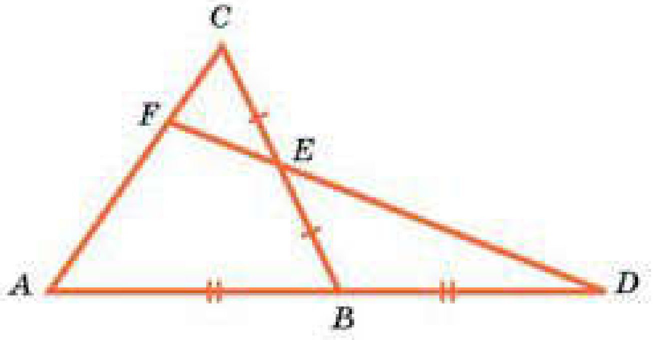


Рис. 11.11

15. Используя рисунок 11.12, докажите, что биссектриса угла треугольника делит противолежащую сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам.

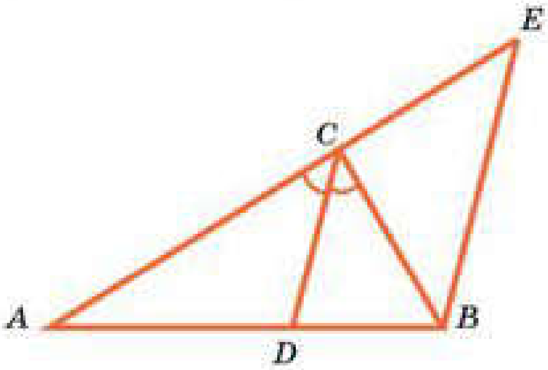


Рис. 11.12

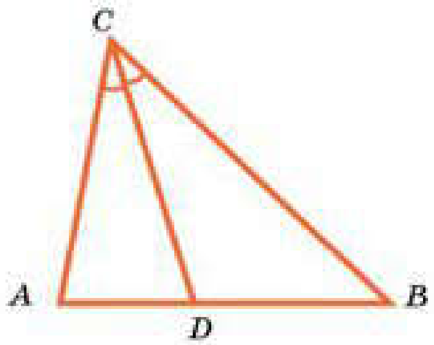


Рис. 11.13

16. В треугольнике ABC CD — биссектриса, $AB = 5$, $AC = 4$, $BC = 6$ (рис. 11.13). Найдите длины отрезков AD и BD.

Подготовьте сообщение

17. Великий ученый Фалес Милетский основал одну из прекраснейших наук — геометрию (www.math.ru, www.mccme.ru).

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

18. Изобразите какой-нибудь треугольник. Проведите его медианы.

19. Изобразите какой-нибудь: а) остроугольный; б) тупоугольный треугольник. Проведите его высоты.

§ 12. ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ ТРЕУГОЛЬНИКА

К числу замечательных точек треугольника относятся:

а) точка пересечения биссектрис (центр вписанной окружности);

б) точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника (центр описанной окружности);

в) точка пересечения медиан (*центр тяжести*);

г) точка пересечения высот или их продолжений (*ортоцентр*).

Ранее было доказано, что три биссектрисы треугольника и серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.

Изобразите какой-нибудь треугольник. Проведите его медианы. Пересекаются ли они в одной точке?

Теорема. ***Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в этой точке в отношении 2 : 1, считая от вершин* (рис. 12.1).**

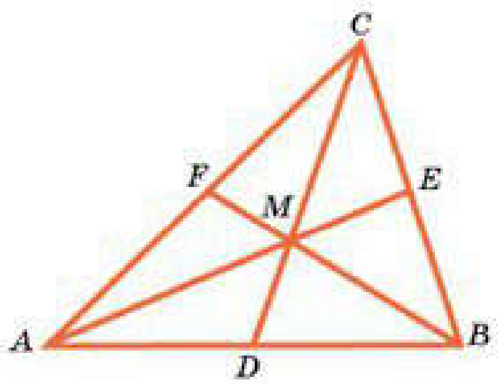


Рис. 12.1

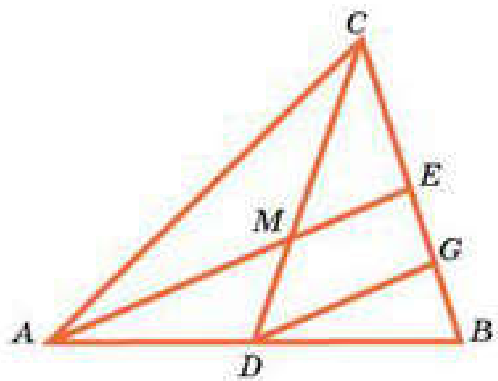


Рис. 12.2

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC. Проведем медианы CD, AE и их точку пересечения обозначим через M (рис. 12.2).

В треугольнике ABE проведем среднюю линию DG. Так как точка E — середина отрезка BC, а точка G — середина отрезка BE, то точка E делит отрезок CG в отношении 2 : 1, считая от вершины C. По теореме о пропорциональных отрезках точка M будет делить отрезок CD в отношении 2 : 1, считая от вершины C. Таким образом, медиана AE делит медиану CD в отношении 2 : 1, считая от вершины C. Аналогично доказывается, что медиана BF делит медиану CD в отношении 2 : 1, считая от вершины C. Следовательно, медианы AE и BF пересекают медиану CD в одной точке M. ☐

Изобразите какой-нибудь треугольник. Проведите его высоты. Пересекаются ли они в одной точке?

Теорема. ***Высоты треугольника или их продолжения пересекаются в одной точке* (рис. 12.3).**

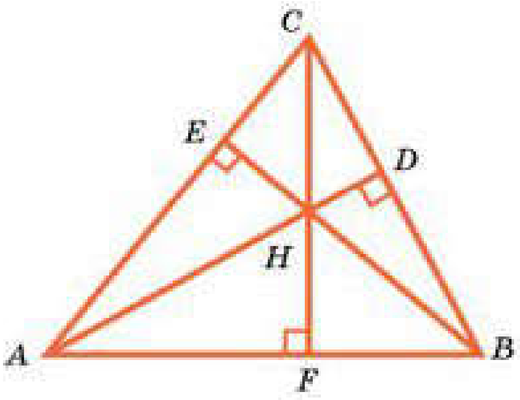


Рис. 12.3

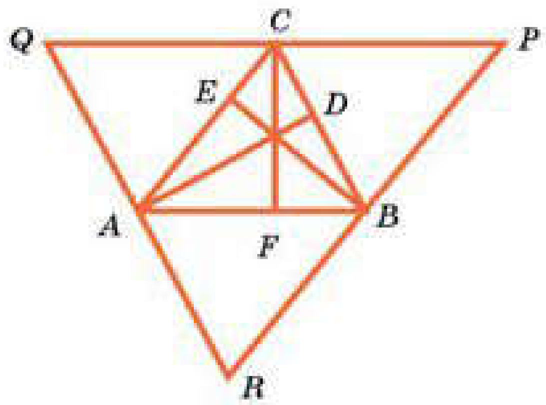


Рис. 12.4

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC. Через его вершины проведем прямые, параллельные противолежащим сторонам (рис. 12.4). Эти прямые образуют новый треугольник PQR, для которого точки A, B и C служат серединами сторон. Действительно, $CP = AB$ и $AB = CQ$ как противолежащие стороны параллелограммов $ABPC$ и $ABCQ$ соответственно. Значит, $CP = CQ$. Аналогично доказывается, что $BP = BR$, $AQ = AR$. Следовательно, высоты треугольника ABC лежат на серединных перпендикулярах к сторонам треугольника PQR. Значит, высоты треугольника ABC или их продолжения пересекаются в одной точке. □

Сами высоты треугольника могут не пересекаться. На рисунке 12.5 изображен тупоугольный треугольник ABC, в котором продолжения высот AD, BE CF пересекаются в одной точке H, а сами высоты не пересекаются.

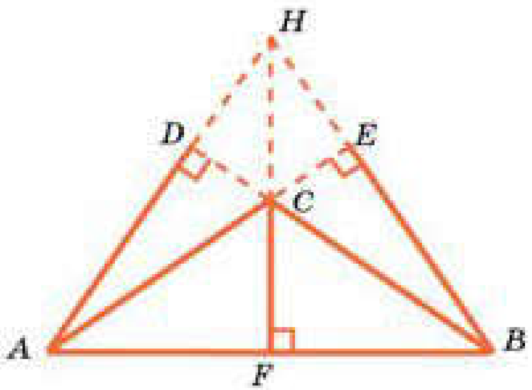


Рис. 12.5

1. Какие точки относятся к числу замечательных точек треугольника?
2. Как называется точка пересечения медиан треугольника?
3. Всегда ли высоты треугольника пересекаются?
4. Как называется точка пересечения высот или их продолжений?

Задачи

A

1. Может ли точка пересечения биссектрис треугольника находиться вне этого треугольника?
2. Может ли точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника находиться вне этого треугольника?
3. Где расположена точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам прямоугольного треугольника?

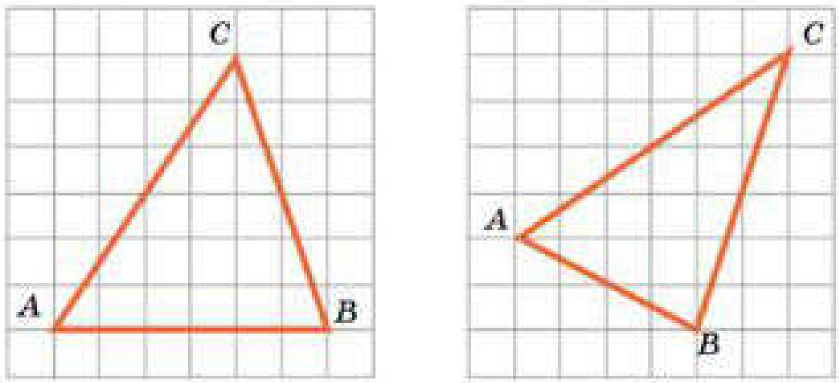
4. Может ли точка пересечения медиан треугольника находиться вне этого треугольника?

5. Может ли точка пересечения высот треугольника или их продолжений находиться вне этого треугольника?

6. Где расположена точка пересечения высот прямоугольного треугольника?

B

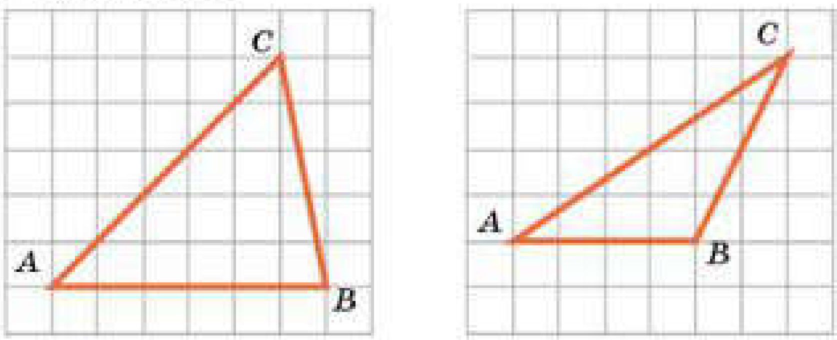
7. Постройте точку пересечения медиан треугольника, изображенного на рисунке 12.6.



а) б)

Рис. 12.6

8. Постройте точку пересечения высот треугольника ABC или их продолжений (рис. 12.7).



а) б)

Рис. 12.7

9. Докажите, что если AA_1, BB_1 — высоты треугольника ABC, то угол A_1AC равен углу B_1BC (рис. 12.8).

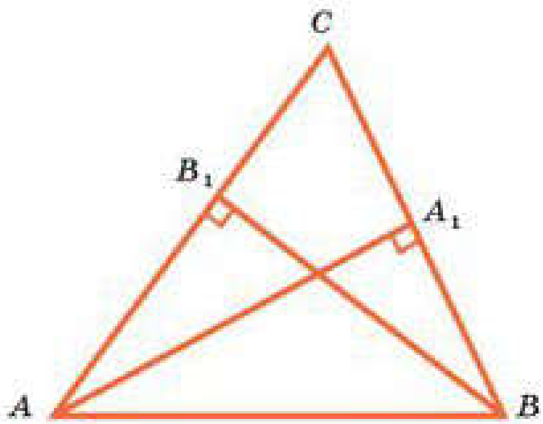


Рис. 12.8

C

10. К какой из сторон треугольника ближе расположен центр описанной окружности?

11. К какой из вершин треугольника ближе расположен центр вписанной окружности?

12. Может ли одна биссектриса треугольника проходить через середину другой?
13. Докажите, что медиана прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.
14. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 10. Укажите положение центра описанной окружности и найдите ее радиус.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

15. Изобразите острый угол с вершиной A. На одной его стороне отметьте точки B_1, B_2. Опустите из них перпендикуляры B_1C_1, B_2C_2 на другую сторону угла. Измерьте стороны получившихся треугольников AB_1C_1 и AB_2C_2. Найдите отношения

$$\frac{B_1C_1}{AB_1} \text{ и } \frac{B_2C_2}{AB_2};\ \frac{AC_1}{AB_1} \text{ и } \frac{AC_2}{AB_2};\ \frac{B_1C_1}{AC_1} \text{ и } \frac{B_2C_2}{AC_2}.$$

Что можно сказать об этих отношениях?

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Найдите углы четырехугольника, если они пропорциональны числам 1, 2, 4, 5:

A. 10°, 20°, 40°, 50 °. B. 20°, 160°, 30°, 150°.
C. 30°, 60°, 120°, 150°. D. 30°, 60°, 90°, 90°.

2. Найдите сумму внешних углов четырехугольника (по одному при каждой вершине):

A. 90°. B. 180°. C. 270°. D. 360°.

3. Сумма двух углов четырехугольника, прилежащих к одной стороне, равна 90°. Найдите угол между биссектрисами этих углов:

A. 30°. B. 45°. C. 90°. D. 135°.

4. Три параллельные прямые пересечены тремя параллельными прямыми. Сколько при этом образовалось параллелограммов:

A. 4. B. 6. C. 8. D. 9?

5. Сколько различных параллелограммов можно получить из двух равных разносторонних треугольников, прикладывая их друг к другу различными способами:

A. 2. B. 3. C. 4. D. 6?

6. Высота, проведенная из вершины тупого угла параллелограмма, делит этот угол в отношении 1 : 2. Найдите углы параллелограмма:

A. 30°, 150°. B. 60°, 120°. C. 45°, 135°. D. 45°, 90°.

7. В прямоугольнике один из углов между диагоналями равен 120°. Найдите отношение между его меньшей стороной и диагональю и углы, которые образуют диагонали со сторонами прямоугольника:

A. 1 : 2; 60°, 120°. B. 2 : 3; 30°, 60°.
C. 1 : 3; 30°, 30°. D. 1 : 2; 30°, 60°.

8. Через середину гипотенузы прямоугольного треугольника, равной 13 см, проведены прямые, параллельные его катетам. Определите вид образовавшегося четырехугольника и найдите его диагональ:

A. Параллелограмм; 13 см. B. Прямоугольник; 13 см.
C. Квадрат; 6,5 см. D. Прямоугольник; 6,5 см.

9. Высоты, проведенные из вершины ромба, образуют угол 100°. Найдите углы, которые образуют диагонали ромба с его сторонами:

A. 80°, 100°. B. 50°, 130°.
C. 40°, 50°. D. 25°, 65°.

10. В ромбе последовательно соединены середины сторон. Определите вид получившегося четырехугольника:

A. Параллелограмм. B. Прямоугольник.
C. Ромб. D. Квадрат.

11. Дан квадрат, сторона которого равна 1 см, его диагональ служит стороной другого квадрата. Найдите диагональ второго квадрата:

A. 0,5 см. B. 1 см. C. 2 см. D. 4 см.

12. В равнобедренный прямоугольный треугольник вписан квадрат таким образом, что они имеют один общий угол, а противолежащая ему вершина принадлежит гипотенузе данного треугольника. Найдите периметр квадрата, если катет треугольника равен 12 см:

A. 12 см. B. 16 см. C. 24 см. D. 48 см.

13. Стороны треугольника относятся как 3 : 4 : 5. Его периметр равен 72 см. Найдите стороны треугольника, вершины которого находятся в серединах сторон данного треугольника:

A. 3 см, 4 см, 5 см. B. 18 см, 24 см, 30 см.
C. 12 см, 24 см, 30 см. D. 9 см, 12 см, 15 см.

14. Диагональ трапеции перпендикулярна боковой стороне, острый угол, лежащий против этой диагонали, равен 40°. Найдите остальные углы трапеции, если меньшее основание равно другой боковой стороне:

A. 40°, 140°, 40°. B. 100°, 80°, 90°.
C. 80°, 100°, 140°. D. 50°, 100°, 40°.

15. В равнобедренной трапеции один из углов равен 60°, боковая сторона равна 24 см, сумма оснований равна 43 см. Найдите основания:

A. 9,5 см; 33,5 см.
B. 19 см; 24 см.
C. 12 см; 31 см.
D. 21,5 см; 21,5 см.

16. В равнобедренной трапеции диагональ делит острый угол пополам. Периметр трапеции равен 132 см. Основания относятся как 2 : 5. Найдите среднюю линию трапеции:

A. 66 см.
B. 41 см.
C. 42 см.
D. 43 см.

17. Какой четырехугольник получится, если последовательно соединить середины сторон равнобедренной трапеции:

A. Параллелограмм.
B. Прямоугольник.
C. Ромб.
D. Квадрат?

18. Из двух противолежащих вершин параллелограмма проведены биссектрисы его углов до пересечения с противоположными сторонами. Определите вид получившегося четырехугольника:

A. Параллелограмм.
B. Прямоугольник.
C. Ромб.
D. Квадрат.

19. Сколько можно построить квадратов с вершинами в двух данных точках:

A. 1.
B. 2.
C. 3.
D. 4?

20. У прямоугольника срезаны углы таким образом, что образовался правильный шестиугольник. Найдите отношение сторон данного прямоугольника:

A. 1 : 2.
B. $2 : \sqrt{3}$.
C. $1 : \sqrt{2}$.
D. 2 : 3.

ГЛАВА 2

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

§ 13. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ОСТРОГО УГЛА

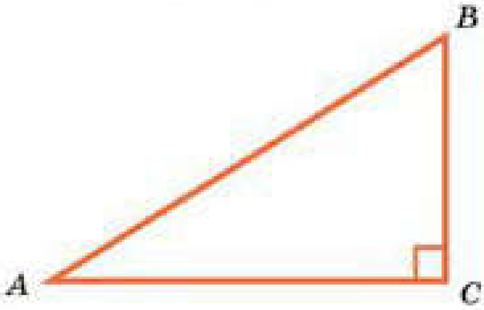


Рис. 13.1

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$) и его острый угол A (рис. 13.1).

Отношение противолежащего углу A катета к гипотенузе называется *синусом* угла A прямоугольного треугольника и обозначается $\sin A$. По определению,

$$\sin A = \frac{BC}{AB}.$$

Отношение прилежащего углу A катета к гипотенузе называется *косинусом* угла A прямоугольного треугольника и обозначается $\cos A$. По определению,

$$\cos A = \frac{AC}{AB}.$$

Отношение противолежащего углу A катета к прилежащему называется *тангенсом* угла A прямоугольного треугольника и обозначается $\operatorname{tg} A$. По определению,

$$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}.$$

Отношение прилежащего углу A катета к противолежащему называется *котангенсом* угла A прямоугольного треугольника и обозначается $\operatorname{ctg} A$. По определению,

$$\operatorname{ctg} A = \frac{AC}{BC}.$$

Непосредственно из этих определений следуют равенства:

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A}, \ \operatorname{ctg} A = \frac{\cos A}{\sin A}.$$

Синус, косинус, тангенс и котангенс называются *тригонометрическими функциями острого угла*.

Изобразите какой нибудь прямоугольный треугольник. Измерьте его стороны. Найдите тригонометрические функции его острых углов.

Теорема. ***Синус, косинус, тангенс и котангенс острого угла прямоугольного треугольника зависят только от угла и не зависят от***

выбора прямоугольного треугольника, т. е. у двух прямоугольных треугольников с соответственно равными углами значения синусов, косинусов, тангенсов и котангенсов равных острых углов равны.

Доказательство. Докажем, что косинус угла A не зависит от выбора треугольника. Рассмотрим два прямоугольных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ ($\angle C = \angle C_1 = 90°$), у которых $\angle A = \angle A_1$ (рис. 13.2).

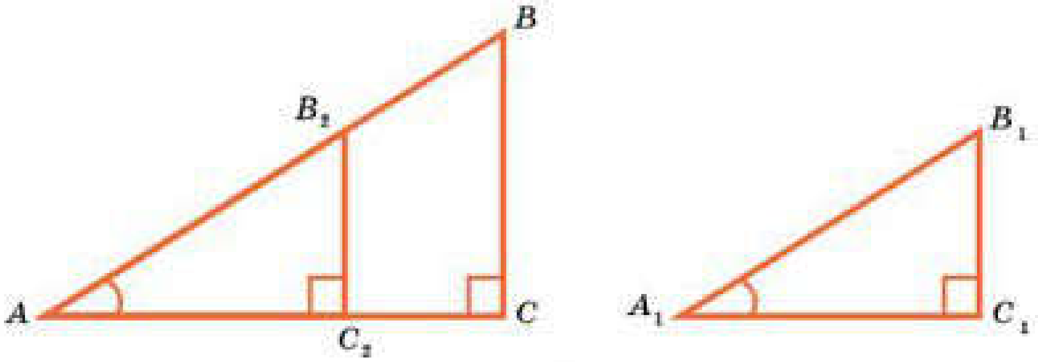


Рис. 13.2

Отложим на сторонах угла BAC отрезки AB_2 и AC_2, соответственно равные отрезкам A_1B_1 и A_1C_1. Прямоугольные треугольники $A_1B_1C_1$ и AB_2C_2 равны по катету и гипотенузе. По теореме о пропорциональных отрезках имеет место равенство $\frac{AC}{AB} = \frac{AC_2}{AB_2}$. Следовательно, имеет место требуемое равенство $\frac{AC}{AB} = \frac{A_1C_1}{A_1B_1}$.

Для доказательства независимости синуса заметим, что синус угла A прямоугольного треугольника ABC равен косинусу угла B. По доказанному косинус угла B не зависит от выбора прямоугольного треугольника. Значит, синус угла A также не зависит от выбора прямоугольного треугольника.

Из равенств $\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A}$, $\operatorname{ctg} A = \frac{\cos A}{\sin A}$ и независимости синуса и косинуса угла A от выбора треугольника следует независимость тангенса и котангенса угла A от выбора треугольника. ☐

Найдем значения некоторых тригонометрических функций для углов, равных 30°, 45°, 60°.

Пусть в прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) острый угол A равен 30°, а катет BC равен 1 (рис. 13.3).

Так как катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы, то гипотенуза AB этого треугольника равна 2. Следовательно,

$$\sin 30° = \frac{1}{2}, \quad \cos 60° = \frac{1}{2}.$$

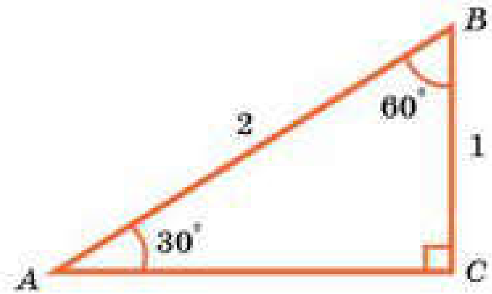


Рис. 13.3

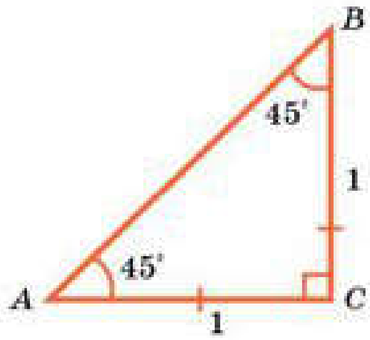


Рис. 13.4

Так как катеты прямоугольного треугольника с острым углом 45° равны (рис. 13.4), то

$$\mathrm{tg}\ 45° = 1,\ \mathrm{ctg}\ 45° = 1.$$

Для нахождения приближенных значений тригонометрических функций острых углов можно использовать таблицу, помещенную на с.139 учебника.

Например,

$$\sin 45° = \cos 45° \approx 0{,}71,\ \ \sin 60° = \cos 30° \approx 0{,}87.$$

$$\mathrm{tg}\ 30° = \mathrm{ctg}\ 60° \approx 0{,}58,\ \ \mathrm{tg}\ 60° = \mathrm{ctg}\ 30° \approx 1{,}73.$$

Исторические сведения

Л. Эйлер (1707—1783 гг.)

Слово “тригонометрия” произошло от греческих слов *тригонон* — “треугольник” и *метрео* — “измеряю”. Тригонометрия зародилась и развивалась в Вавилоне, Египте, Китае, Индии и других странах древности. Возникновение тригонометрии было связано с астрономическими наблюдениями, необходимостью определения положения звезд, вычисления расстояний и углов.

Первые тригонометрические таблицы были составлены древнегреческим ученым Гиппархом. Современный вид тригонометрия получила благодаря трудам Л. Эйлера, который ввел обозначения $\sin x$, $\mathrm{tg}\ x$, ... и разработал науку о тригонометрических функциях.

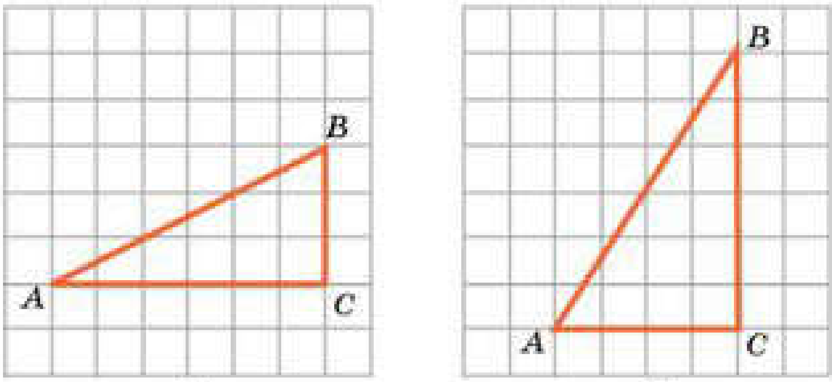
Используя таблицу приближенных значений синуса и тангенса острых углов прямоугольного треугольника, по заданному углу можно находить приближенное значение синуса и тангенса и, наоборот, зная приближенное значение синуса или тангенса, можно находить приближенное значение соответствующего острого угла.

1. Что называется *синусом острого угла* прямоугольного треугольника?
2. Что называется *косинусом острого угла* прямоугольного треугольника?
3. Что называется *тангенсом острого угла* прямоугольного треугольника?
4. Что называется *котангенсом острого угла* прямоугольного треугольника?
5. Что называется *тригонометрическими функциями* острого угла?

Задачи

A

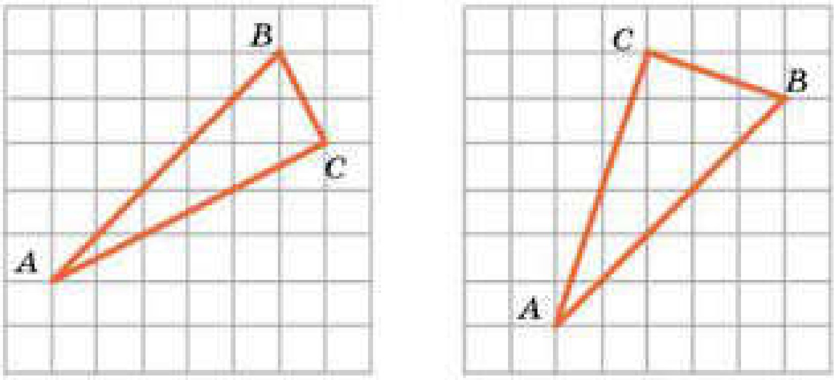
1. Найдите тангенс и котангенс угла: а) A; б) B, изображенного на рисунке 13.5.



а) б)

Рис. 13.5

2. Найдите тангенс и котангенс угла: а) A; б) B, изображенного на рисунке 13.6.



а) б)

Рис. 13.6

3. На клетчатой бумаге изобразите угол, тангенс которого равен: а) 0,5; б) 2.
4. Используя таблицу приближенных значений тригонометрических функций, найдите приближенное значение: а) $\sin 45°$; б) $\operatorname{tg} 30°$; в) $\sin 60°$; г) $\operatorname{tg} 60°$.
5. Может ли: а) синус; б) косинус угла быть больше 1?
6. Может ли: а) тангенс; б) котангенс угла равняться 10?
7. На клетчатой бумаге изобразите угол, котангенс которого равен: а) 0,75; б) 1,25.

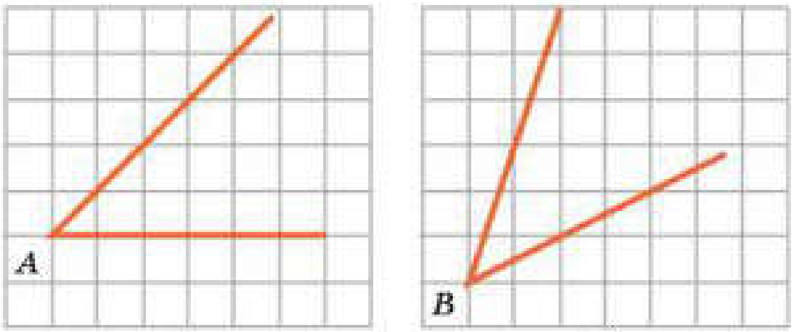
B

8. В каких пределах могут изменяться: а) синус; б) косинус острого угла?

9. В каких пределах могут изменяться: а) тангенс; б) котангенс острого угла?
10. Для каких углов синус равен косинусу?
11. Для каких острых углов: а) синус меньше косинуса; б) синус больше косинуса?
12. Существует ли угол, для которого синус равен тангенсу?
13. Для каких углов тангенс равен котангенсу?
14. В равнобедренном треугольнике ABC ($AC = BC$) основание равно 6, боковые стороны равны 5. Найдите косинус угла A.
15. В равнобедренном треугольнике ABC ($AC = BC$) боковые стороны равны 6, высота, опущенная на основание, равна 4. Найдите синус угла A.
16. В равнобедренном треугольнике ABC ($AC = BC$) основание равно 10, высота, опущенная на основание, равна 8. Найдите тангенс угла A.

C

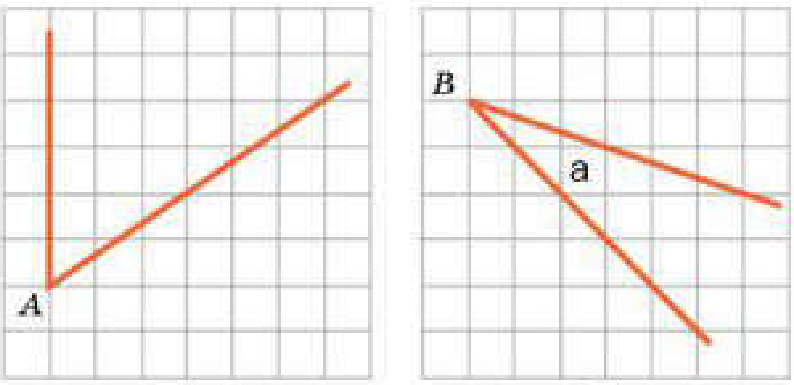
17. Найдите тангенс и котангенс угла: а) A; б) B, изображенного на рисунке 13.7.



а) б)

Рис. 13.7

18. Найдите тангенс и котангенс угла: а) A; б) B, изображенного на рисунке 13.8.



а) б)

Рис. 13.8

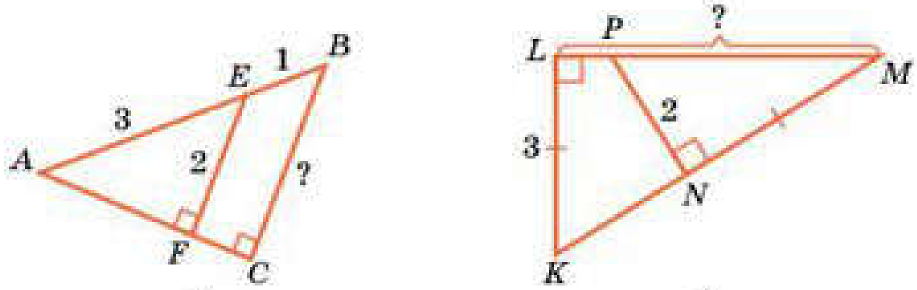
19. Для каких углов: а) тангенс меньше котангенса; б) тангенс больше котангенса?

20. Докажите, что для любого острого угла A выполняются неравенства: а) $\sin A < \operatorname{tg} A$; б) $\cos A < \operatorname{ctg} A$.

21. Постройте угол, синус которого равен: а) 0,4; б) 0,6.

22. Постройте угол, косинус которого равен: а) 0,2; б) 0,8.

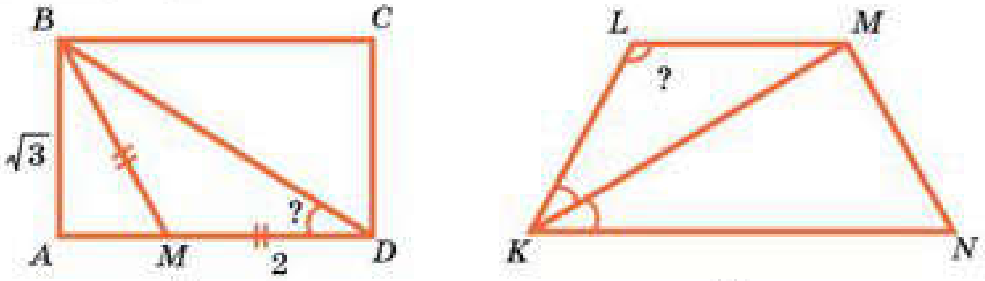
23. Вычислите длину неизвестного отрезка на рисунке 13.9.



а) б)

Рис. 13.9

24. Найдите неизвестные углы в прямоугольнике $ABCD$ (рис. 13.10, а) и в трапеции $KLMN$, у которой $KM \perp MN$, $KM : KN = \sqrt{3} : 2$ (рис. 13.10, б).



а) б)

Рис. 13.10

25. Чтобы измерить недоступное расстояние между точками A и B (рис. 13.11), строят отрезок $BC \perp AB$ и соединяют точки A и C. Затем измеряют угол C и отрезок AC (или BC). Чему равно расстояние между точками A и B?

26. Как, используя тригонометрию, измерить расстояние между точками A и B (рис. 13.12)?

Рис. 13.11

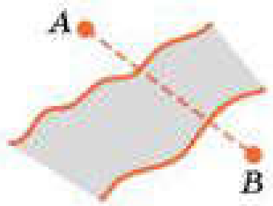


Рис. 13.12

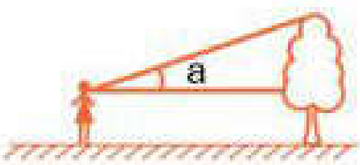


Рис. 13.13

27. Находясь на некотором расстоянии от дерева, человек видит его верхушку под углом α (рис. 13.13). Как определить высоту дерева?

28. Человек спускается по канатной дороге под углом 7° к поверхности земли с высоты 240 м. Чему равна длина спуска?

29. Самоле т взлетает под углом $6°$ к поверхности земли. На какую высоту он поднимется, пролетев 20 км? На каком расстоянии от аэропорта будет самолет, поднявшись на высоту 5 км над землей?

30. Чему равен угол, под которым видно солнце над горизонтом, когда длина тени человека равна его росту; в два раза длиннее роста человека?

31. Определите расстояние от Земли до Луны, если радиус Луны равен 1680 км и виден с Земли под углом $\alpha = 15'$.

32. Под дождем, капли которого падают вертикально со скоростью 7 м/с, едет автобус. Пассажирам этого автобуса кажется, что идет косой дождь. Под каким углом к поверхности земли им кажется падают капли, если скорость автобуса составляет 35 км/ч?

33. Как можно вычислить угол: а) подьема лестницы в доме; б) наклона крыши дома? Какие измерения при этом надо выполнить?

34. Архитектурное сооружение "Астана — Байтерек" считается символом обновления, символом Астаны, символом Казахстана. Оно представляет собой высокую металлическую конструкцию с огромным позолоченным стеклянным шаром на вершине (рис. 13.14). Высота сооружения составляет 97 м, а с шаром, венчающим конструкцию — 105 м. Человек, находясь на некотором расстоянии от Байтерека, видит его верхушку и людей в панорамном зале. Как можно вычислить углы B, D? Какие измерения при этом надо вы полнить?

Рис. 13.14

35. Челов ек спускает ся по канатной дороге под углом $83°$ от горнолыжного курорта "Шымбулак" до базовой станции катка "Медеу", которая является третьей в мире по протяженности (рис. 13.15). Медеу расположен на высоте 1691 м над уровнем моря, а Шымбулак — 2260 м. Найд ите длину канатной дороги.

Рис. 13.15

36. Международный комплекс лыжных трамплинов Сункар в Алматы является одним из пяти лучших в мире (рис. 13.16). Это комбинированный трамплин, на котором можно прыгать как в зимнее время на снегу, так и на искусственном покрытии. Наблюдатель, находящийся в пункте A (рис. 13.17), видит конец шеста C и верхнюю точку D трамплина, расположенные на одной прямой. Какова высота трамплина, если $AE = 80$ м, $AB = 6$ м и $BC = 3$ м?

Рис. 13.16

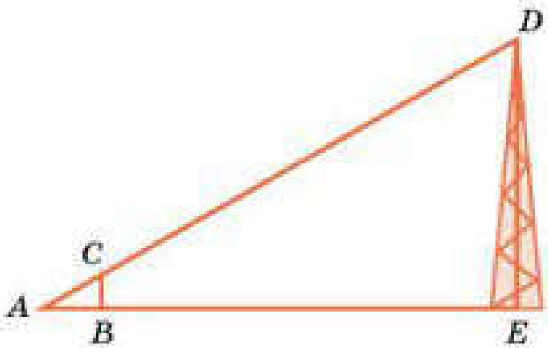


Рис. 13.17

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

37. Изобразите прямоугольный треугольник, катеты которого равны: а) 3, 4; б) 6, 8; в) 5, 12. Измерьте его гипотенузу. Попробуйте найти формулу, выражающую гипотенузу через катеты.

§ 14. ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

Древнегреческ ий ученый Пифагор доказал замечательное соотношение между сторонами прямоугольного треугольника. Соответствующая теорема носит его имя.

Теорема. (Пифагора.) ***В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.***

Доказательство. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C (рис. 14.1).

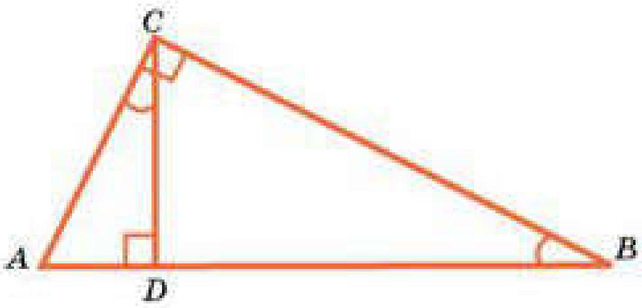


Рис. 14.1

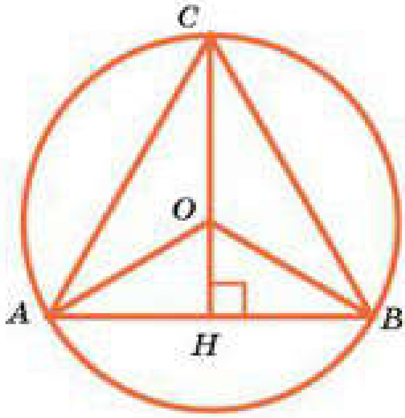


Рис. 14.2

Проведем высоту CD. Тогда $\cos B = \frac{BD}{BC} = \frac{BC}{AB}$. Следовательно, имеет место равенство

$$AB \cdot BD = BC^2.$$

Так как $\angle B = \angle ACD$, то $\sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC}$. Следовательно, имеет место равенство

$$AB \cdot AD = AC^2.$$

Складывая эти равенства почленно, и замечая, что $AD + DB = AB$, получим равенство $AB^2 = AC^2 + BC^2$, означающее, что квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов его катетов. ☐

Если стороны прямоугольного треугольника ABC обозначить соответственно $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, то в силу теоремы Пифагора будет иметь место формула

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Эта формула позволяет по известным катетам находить гипотенузу

$$c = \sqrt{a^2 + b^2},$$

а также по известным гипотенузе и катету находить другой катет

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}, \; b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

Используя третий признак равенства треугольников, докажите следующую теорему, обратную теореме Пифагора.

Теорема. ***Если у треугольника квадрат одной стороны равен сумме квадратов двух других сторон, то этот треугольник является прямоугольным*** .

Применим теорему Пифагора для нахождения радиуса окружности, описанной около равнобедренного треугольника.

Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC, основание AB которого равно c, а высота CH равна h (рис. 14.2).

Обозначим O центр, R радиус описанной окружности. Учитывая, что $OC = R$, применим теорему Пифагора к треугольнику AOH. Получим уравнение

$$R^2 = \frac{c^2}{4} + (h - R)^2.$$

Решая его относительно R, находим

$$R = \frac{c^2 + 4h^2}{8h}.$$

В частности, радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника со стороной 1, равен $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Конечно, не следует запоминать эту формулу. Важен сам метод нахождения радиуса описанной окружности через составление уравнения. Используя теорему Пифагора, найдем значения тригонометрических функций некоторых углов.

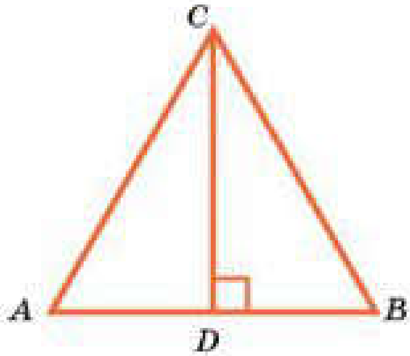


Рис. 14.3

Рассмотрим равносторонний треугольник ABC, стороны которого равны 1. Проведем в нем высоту CD (рис. 14.3).

В этом треугольнике $\angle A = 60°$, $\angle ACD = 30°$, $AD = \frac{1}{2}$, $CD = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Следовательно,

$$\sin 30° = \frac{1}{2},\ \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3},\ \operatorname{ctg} 30° = \sqrt{3};$$

$$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos 60° = \frac{1}{2},\ \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3},\ \operatorname{ctg} 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Рассмотрим равнобедренный прямоугольный треугольник, катеты которого равны 1 (рис. 14.4).

В этом треугольнике $\angle A = \angle B = 45°$, $AB = \sqrt{2}$. Следовательно,

$$\sin 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \operatorname{tg} 45° = \operatorname{ctg} 45° = 1.$$

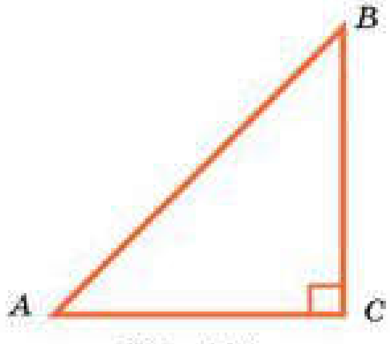


Рис. 14.4

Докажите, что высота CD, опущенная на гипотенузу прямоугольного треугольника ABC (рис. 14.1), является средним геометрическим отрезков AD и BD, на которые основание D этой высоты делит гипотенузу. Воспользуйтесь равенством углов ACD и CBD и равенством их тангенсов.

Исторические сведения

Пифаго р — один из величайших ученых Древней Греции, а теорема Пифагора — одна из самых красивых в геометрии. Имеется более 500 различных ее доказательств. Простейший случай теоремы Пифагора

Пифагор
(580—500 гг. до н. э.)

для треугольника со сторонами 3, 4 и 5 был известен до Пифагора египетским жрецам, а еще ранее — китайским ученым (около 11 000 лет до н. э.). Пифагор, долго живший в Египте, специально изучал науку египетских жрецов и ознакомился с тем, как они строили на земле прямой угол при помощи веревочного треугольника со сторонами 3, 4 и 5 единиц. Пифагор обратил внимание на замечательное соотношение между числами 3, 4 и 5, а именно: $3^2 + 4^2 = 5^2$, и доказал, что такое соотношение имеет место для сторон произвольного прямоугольного треугольника. Целые числа, представляющие длины сторон прямоугольных треугольников, носят название *пифагорейских чисел*.

1. Сформулируйте теорему Пифагора.
2. Когда жил Пифагор?
3. Какие тройки целых чисел называются *пифагорейскими*?
4. Назовите значения тригонометрических функций угла 30°.
5. Назовите значения тригонометрических функций угла 45°.
6. Как выражается радиус описанной окружности через основание равнобедренного треугольника и высоту, опущенную на это основание?

Задачи

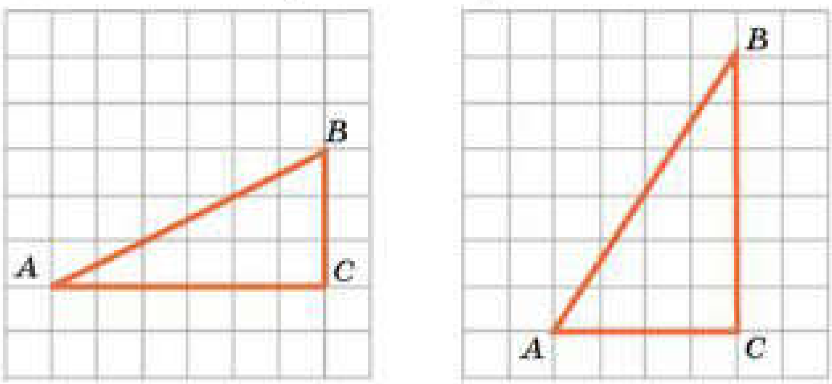
А

1. У прямоугольного треугольника заданы катеты a и b. Найдите гипотенузу c, если: а) $a = 3$, $b = 4$; б) $a = 5$, $b = 12$; в) $a = 8$, $b = 15$.

2. У прямоугольного треугольника заданы гипотенуза c и катет a. Найдите второй катет, если: а) $c = 5$, $a = 3$; б) $c = 13$, $a = 5$; в) $c = 10$, $a = 8$.

3. Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника ABC, изображенного на рисунке 14.5. Стороны квадратных клеток равны 1.

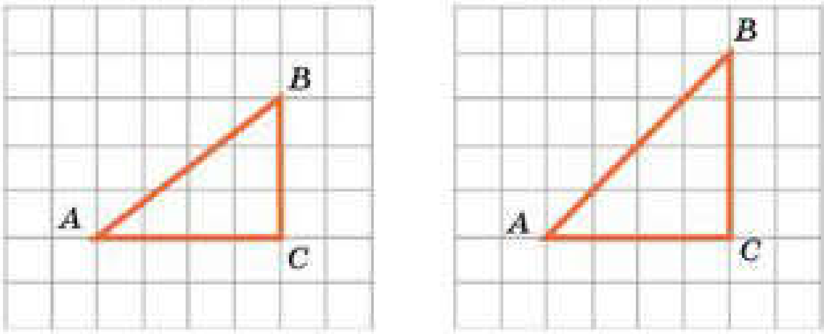
4. Найдите диагональ квадрата со стороной 1.



а) б)

Рис. 14.5

5. Укажите какие-нибудь тройки пифагорейских чисел.
6. Найдите синус и косинус угла A прямоугольного треугольника ABC, изображенного на рисунке 14.6.



а) б)

Рис. 14.6

В

7. Найдите длины отрезков, изображенных на рисунке 14.7. Стороны клеток равны 1.

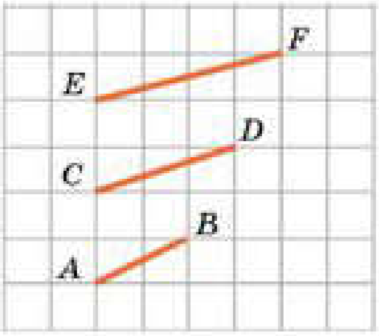


Рис. 14.7

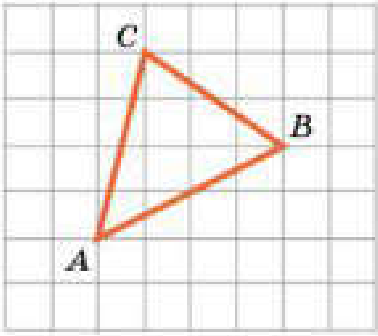


Рис. 14.8

8. Найдите стороны треугольника, изображенного на рисунке 14.8. Стороны клеток равны 1.
9. Найдите стороны прямоугольного треугольника, в котором: а) гипотенуза равна 10 см, разность катетов — 2 см; б) гипотенуза равна 26 см, а отношение катетов — 5 : 12.
10. Гипотенуза прямоугольного треугольника на 1 больше одного из катетов, а сумма катетов на 4 больше гипотенузы. Найдите стороны этого треугольника.
11. Диагональ квадрата равна 2. Найдите его сторону.
12. Найдите высоту равностороннего треугольника со стороной 1.
13. Найдите высоту, опущенную на основание равнобедренного треугольника со сторонами 5, 5, 6.
14. Найдите радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника, основание которого равно 1, а высота равна 2. Изобразите эту окружность.
15. Найдите радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника, основание которого равно 2, а высота равна 1. Изобразите эту окружность.

16. Мальчик прошел от дома по направлению на восток 800 м, затем повернул на север и прошел 600 м (рис. 14.9). На каком расстоянии от дома оказался мальчик?

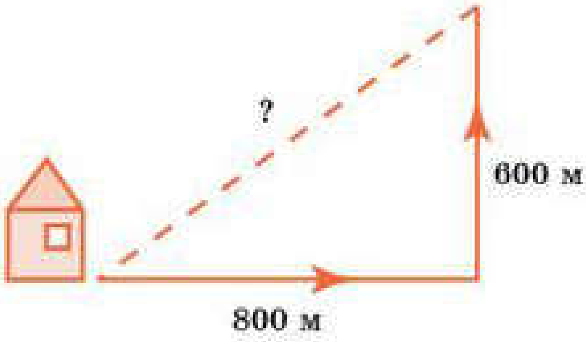


Рис. 14.9

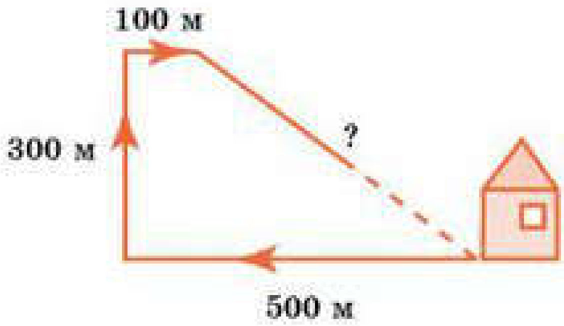


Рис. 14.10

17. Девочка прошла от дома по направлению на запад 500 м, затем повернула на север и прошла 300 м. После этого она повернула на восток и прошла еще 100 м (рис. 14.10). На каком расстоянии от дома оказалась девочка?

18. Два парохода вышли из порта, следуя один на север, другой на запад. Скорости их равны соответственно 15 км/ч и 20 км/ч (рис. 14.11). Какое расстояние будет между ними через 2 ч?

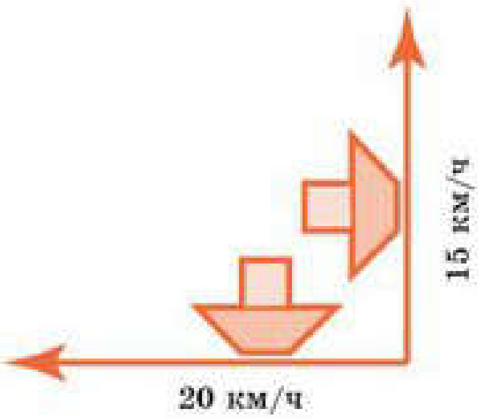


Рис. 14.11

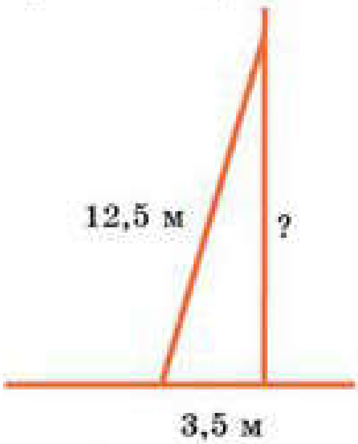


Рис. 14.12

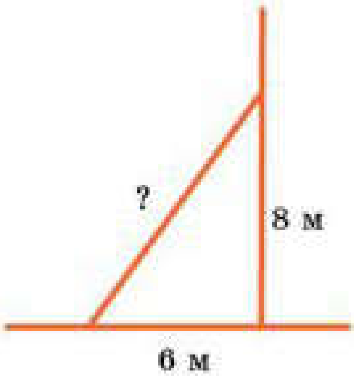


Рис. 14.13

19. Лестница длиной 12,5 м приставлена к стене так, что расстояние от ее нижнего конца до стены равно 3,5 м (рис. 14.12). На какой высоте от земли находится верхний конец лестницы?

20. Какой длины должна быть лестница, чтобы она достала до окна дома на высоте 8 м, если ее нижний конец отстоит от дома на 6 м (рис. 14.13)?

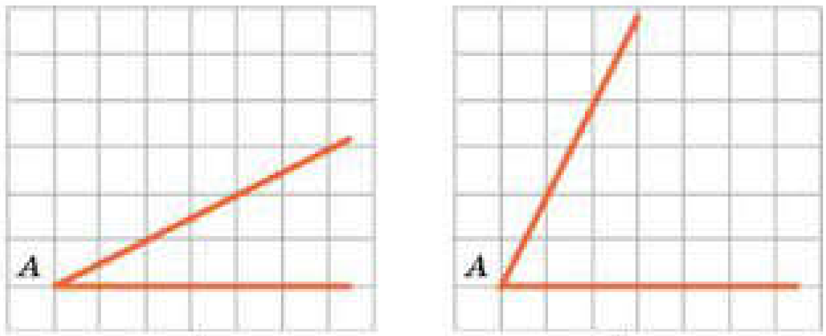
C

21. Найдите сторону ромба, если его диагонали равны 6 см и 8 см.

22. В прямоугольном треугольнике с катетами 3 и 4 опущена высота на гипотенузу. Найдите эту высоту и отрезки, на которые она делит гипотенузу.

23. Выведите формулу для радиуса окружности, описанной около равнобедренного треугольника, основание которого равно c, а боковая сторона равна b.

24. Найдите синус и косинус угла A, изображенного на рисунке 14.14.



а) б)

Рис. 14.14

25. Стебель камыша выступает из воды озера на 1 м (рис. 14.15). Его верхний конец отклонили от вертикального положения на 2 м, и он оказался на уровне воды. Найдите глубину озера в месте, где растет камыш.

26. Найдите неизвестные отрезки (рис. 14.16).

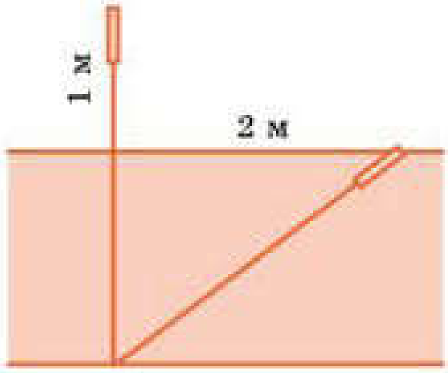


Рис. 14.15

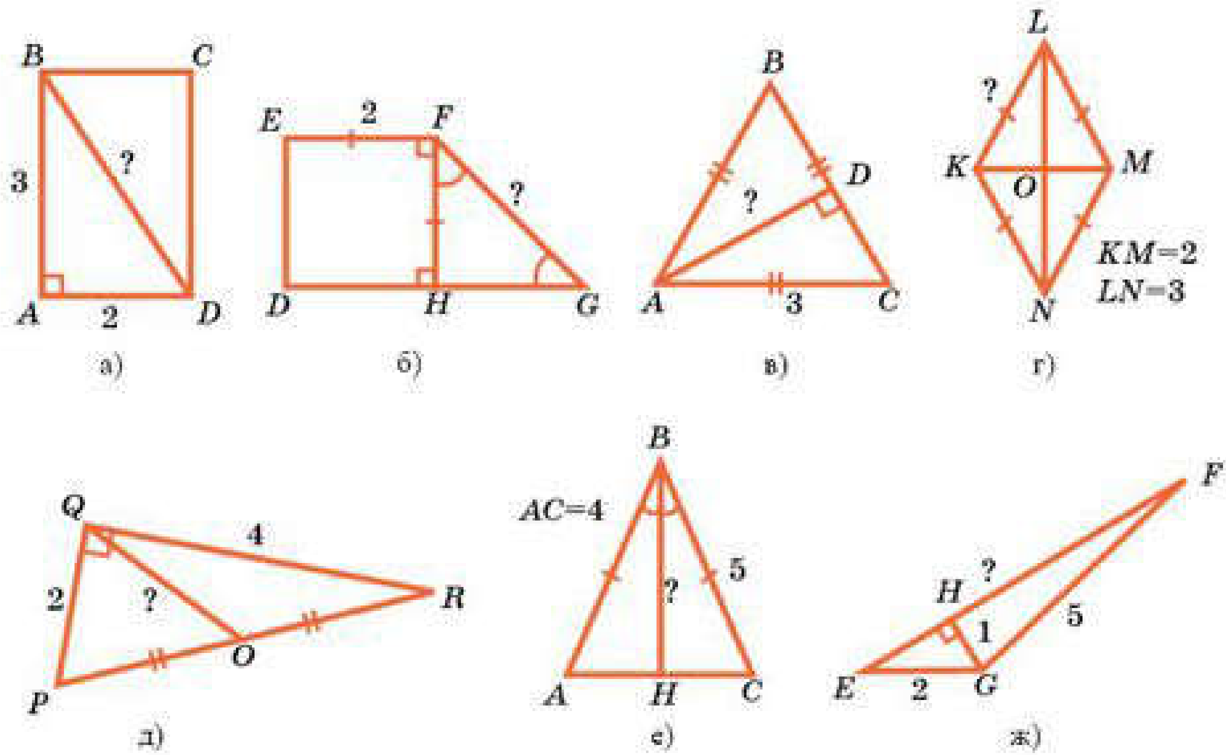


Рис. 14.16

27. Есть ли ошибки на рисунках 14.17, 14.18? Объясните ответы.

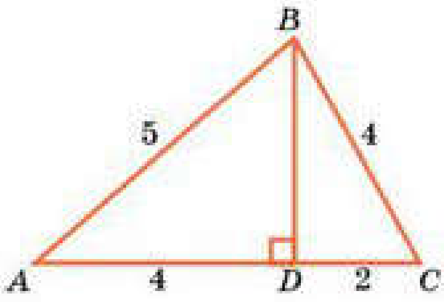


Рис. 14.17

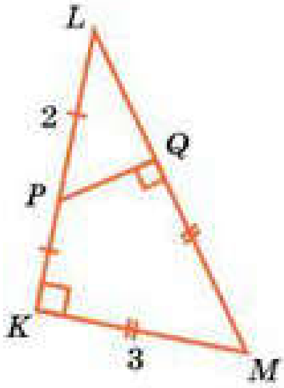


Рис. 14.18

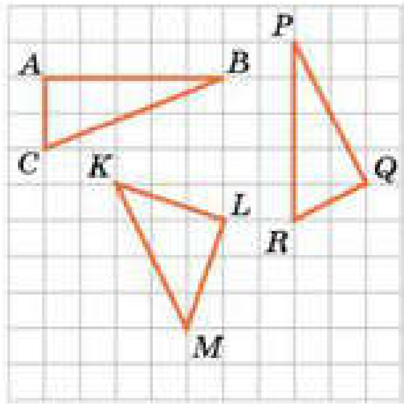


Рис. 14.19

28. Какой из треугольников ABC, KLM, PQR имеет наименьший периметр (рис. 14.19)?

29. Группа туристов прошла 7 км на юг, затем 4 км на восток и столько же на север. На какое расстояние ушли туристы от начальной точки пути?

30. Чему равно расстояние от точки C на берегу реки до плота, находящегося в точке A (рис. 14.20), если $\angle ACB = 45°$, $BC = 60$ м?

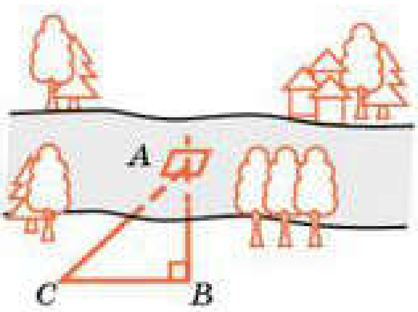


Рис. 14.20

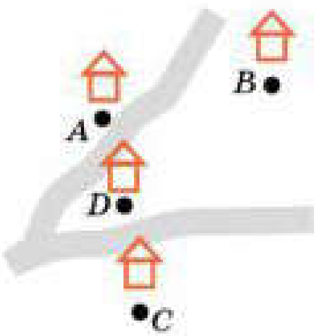


Рис. 14.21

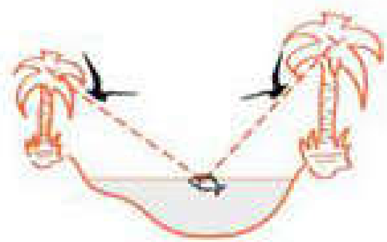


Рис. 14.22

31. Пункты A, B и C, стоящие на берегах реки, расположены в вершинах прямоугольного равнобедренного треугольника, а пункты A, D и C лежат на одной прямой, причем пункт D одинаково удален от A и C (рис. 14.21). Как определить расстояние между любыми двумя пунктами?

32. *Арабская задача*. На разных берегах реки растет по пальме. Высота одной — 30 локтей, другой — 20 локтей, а расстояние между основаниями пальм — 50 локтей. На верхушке каждой пальмы сидит птица. Обе птицы заметили рыбу, всплывшую на поверхность реки между пальмами (рис. 14.22). Птицы кинулись разом и достигли ее одновременно. На каком расстоянии от более высокой пальмы всплыла рыба?

33. Одна из башен в полтора раза выше другой. Расстояние между основаниями башен равно 120 м, а между шпилями — 125 м (рис. 14.23). Чему равна высота каждой башни?

34. Аня, Витя и Сережа живут в домах A, B, C, расстояния между которыми равны соответственно 400 м, 680 м и 840 м (рис. 14.24). Дороги BD и AC пересекаются под прямым углом, и на их пересечении находится школа, в которой учатся ребята. Чему равны расстояния от школы до каждого из домов?

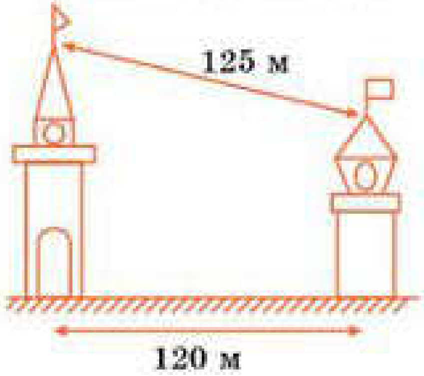


Рис. 14.23

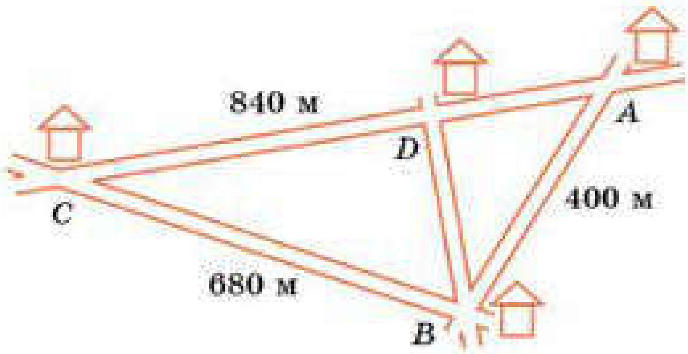


Рис. 14.24

35. Как далеко видит вокруг себя наблюдатель, находящийся на воздушном шаре, на высоте 10 км над землей? ($R_{\text{земли}} \approx 6400$ км).

36. Кереге — сборно-раздвижное основание юрты, которое состоит из отдельных секций решеток (канат), соединенных друг с другом, и образует тем самым круговую стенку (рис. 14.25). Размер юрты зависит от размера ромбовидных отверстий решетки — кереге (рис. 14.26). Один канат имеет по вертикали — 8, по горизонтали — 10 ромбовидных отверстий решеток. Найдите периметр ромба (одного ромбовидного отверстия решетки), если высота и длина каната составляют соответственно 1,6 м и 2,4 м.

Рис. 14.25

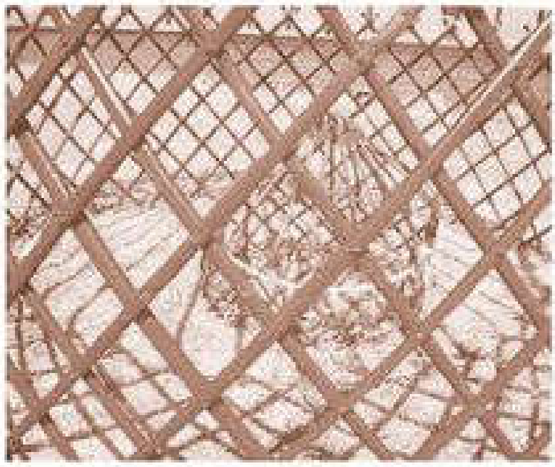


Рис. 14.26

37. Международный комплекс лыжных трамплинов Сункар в Алматы является одним из пяти лучших в мире. Он состоит из двух трамплинов, на которых можно прыгать как в зимнее время на снегу, так и на искусственном покрытии (рис. 14.27). Один из трамплинов в полтора раза выше другого. Расстояние между основаниями трамплинов равно 15 м, а между их верхушками — 25 м. Чему равна высота каждого трамплина?

Рис. 14.27

Подготовьте сообщение

38. Пифагор — один из величайших ученых Древней Греции, а теорема Пифагора — одна из самых главных теорем геометрии (www.math.ru, www.mccme.ru).

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

39. Используя теорему Пифагора, попробуйте выяснить, чему равна сумма $\sin^2 A + \cos^2 A$.

§ 15. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ТОЖДЕСТВА

Из определений тригонометрических функций острого угла A прямоугольного треугольника следует, что имеют место следующие тождества:

$$\sin(90° - A) = \cos A, \ \cos(90° - A) = \sin A;$$
$$\operatorname{tg}(90° - A) = \operatorname{ctg} A, \ \operatorname{ctg}(90° - A) = \operatorname{tg} A.$$

Используя эти тождества, с помощью таблицы приближенных значений тригонометрических функций, приведенной в конце учебника, можно находить приближенные значения косинуса и котангенса острого угла прямоугольного треугольника.

Например , $\cos 40° = \sin 50° \approx 0{,}77$, $\operatorname{ctg} 40° = \operatorname{tg} 50° \approx 1{,}19$.

Теорема. (Основное тригонометрическое тождество.) ***Синус и косинус острого угла А связаны между собой основным тригонометрическим тождеством*** :

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1.$$

Доказательство. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$) (рис. 15.1).

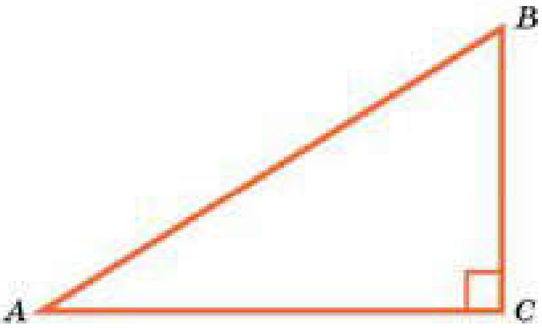


Рис. 15.1

По определениям синуса и косинуса в прямоугольном треугольнике имеем:

$$\sin^2 A + \cos^2 A = \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 + \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 = \frac{BC^2 + AC^2}{AB^2}.$$

В силу теоремы Пифагора имеет место равенство $BC^2 + AC^2 = AB^2$. Следовательно, имеет место требуемое равенство $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$. □

Основное тригонометрическое тождество позволяет выразить косинус острого угла через его синус и, наоборот, а именно:

$$\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A}, \ \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A}.$$

Теорема. ***Тангенс и косинус острого угла A связаны между собой тождеством*** :

$$\operatorname{tg}^2 A + 1 = \frac{1}{\cos^2 A}.$$

Доказательство. Разделим обе части основного тригонометрического тождества на $\cos^2 A$ и воспользуемся равенством $\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A}$. Получим равенство

$$\operatorname{tg}^2 A + 1 = \frac{1}{\cos^2 A}. \ □$$

По аналогии с доказанным тождеством попробуйте установить тождество, связывающее между собой котангенс и синус острого угла.

1. Какие тригонометрические тождества непосредственно следуют из определений тригонометрических функций острого угла?
2. В чем заключается основное тригонометрическое тождество?
3. Как выражаются синус угла через его косинус и, наоборот, косинус угла через его синус?
4. Как связаны между собой тангенс и косинус острого угла?

Задачи

A

1. Упростите выражение: а) $1 - \sin^2 A$; б) $1 + \sin^2 A + \cos^2 A$.

2. Найдите $\sin A$, если: а) $\cos A = \frac{1}{2}$; б) $\cos A = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. Найдите $\cos A$, если: а) $\sin A = \frac{1}{3}$; б) $\sin A = \frac{\sqrt{2}}{3}$.
4. Могут ли синус и косинус одного угла равняться: а) $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{2}$ и $\frac{\sqrt{3}}{2}$?
5. Упростите выражение: а) $\frac{1}{\cos^2 A} - 1$; б) $\frac{1}{\sin^2 A} - 1$.
6. Используя таблицу приближенных значений тригонометрических функций, найдите приближенное значение: а) $\cos 30°$; б) $\cos 45°$; в) $\operatorname{ctg} 30°$; г) $\operatorname{ctg} 60°$.

B

7. Какой из углов больше A или B, если: а) $\operatorname{tg} A = 2$, $\operatorname{tg} B = 3$; б) $\operatorname{tg} A = 8$, $\operatorname{tg} B = 5$?
8. Найдите $\operatorname{tg} A$, если: а) $\cos A = \frac{5}{13}$; б) $\cos A = 0{,}8$.
9. Найдите $\cos A$, если: а) $\operatorname{tg} A = 3$; б) $\operatorname{tg} A = 0{,}5$.
10. Упростите выражение: а) $\cos^2 A + \operatorname{tg}^2 A \cos^2 A$; б) $\sin^2 A + \operatorname{ctg}^2 A \sin^2 A$.
11. Упростите выражение: а) $\cos A + \operatorname{tg} A \sin A$; б) $\sin A + \operatorname{ctg} A \cos A$.
12. Докажите тождество $\operatorname{tg} A = \frac{1}{\operatorname{ctg} A}$.
13. Найдите $\operatorname{tg} A$, если: а) $\operatorname{ctg} A = 2$; б) $\operatorname{ctg} A = 0{,}2$.

C

14. Докажите, что если $\angle A < \angle B$, то $\sin A < \sin B$, а $\cos A > \cos B$.
15. Докажите тождество $1 + \operatorname{ctg}^2 A = \frac{1}{\sin^2 A}$.
16. Найдите $\operatorname{ctg} A$, если: а) $\sin A = \frac{\sqrt{5}}{5}$; б) $\sin A = 0{,}8$.
17. Найдите $\sin A$, если: а) $\operatorname{ctg} A = 2$; б) $\operatorname{ctg} A = \frac{1}{3}$.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

18. Чему равно произведение гипотенузы прямоугольного треугольника на: а) синус противолежащего острого угла; б) косинус прилежащего угла?
19. Чему равно произведение катета прямоугольного треугольника на: а) тангенс прилежащего острого угла; б) котангенс противолежащего угла?

§ 16. РЕШЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Из определения тригонометрических функций вытекают следующие соотношения между сторонами прямоугольного треугольника и тригонометрическими функциями его острых углов.

1. Катет прямоугольного треугольника равен произведению гипотенузы на синус противолежащего острого угла.

Таким образом, для прямоугольного треугольника ABC (рис. 16.1) выполняется соотношение

$$BC = AB \cdot \sin A.$$

2. Катет прямоугольного треугольника равен произведению гипотенузы на косинус прилежащего острого угла.

Таким образом, для прямоугольного треугольника ABC (рис. 16.1) выполняется соотношение

$$BC = AB \cdot \cos B.$$

3. Катет прямоугольного треугольника равен произведению второго катета на тангенс противолежащего острого угла.

Таким образом, для прямоугольного треугольника ABC (рис. 16.1) выполняется соотношение

$$BC = AC \cdot \operatorname{tg} A.$$

4. Катет прямоугольного треугольника равен произведению второго катета на котангенс прилежащего острого угла.

Таким образом, для прямоугольного треугольника ABC (рис. 16.1) выполняется соотношение

$$BC = AC \cdot \operatorname{ctg} B.$$

Решение прямоугольного треугольника означает нахождение его сторон через другие его стороны и тригонометрические функции острых углов.

Приведем примеры нахождения катетов прямоугольного треугольника.

Пример 1. Найдите катет BC прямоугольного треугольника ABC, гипотенуза AB которого равна 6, а синус противолежащего острого угла A равен 0,4 (рис. 16.1).

Решение. Имеем $BC = AB \cdot \sin A = 6 \cdot 0{,}4 = 2{,}4$.

Пример 2. Найдите катет AC прямоугольного треугольника ABC, гипотенуза AB которого равна 5, а косинус прилежащего острого угла A равен 0,6.

Решение. Имеем $AC = AB \cdot \cos A = 5 \cdot 0{,}6 = 3$.

Пример 3. Найдите катет BC прямоугольного треугольника ABC, катет AC которого равен 4, а тангенс противолежащего острого угла A равен 0,5.

Решение . Имеем $BC = AC \cdot \operatorname{tg} A = 4 \cdot 0{,}5 = 2$.

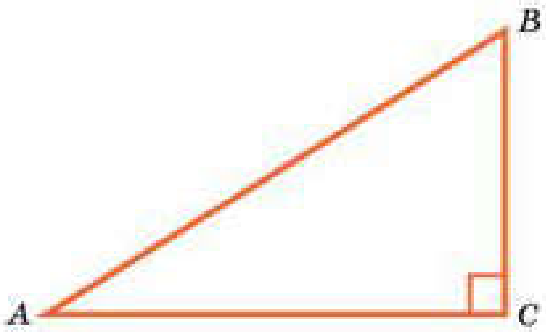


Рис. 16.1

Пример 4. Найдите катет AC прямоугольного треугольника ABC, катет BC которого равен 3, а котангенс прилежащего острого угла A равен 1,5.

Решение. Имеем $AC = BC \cdot \operatorname{ctg} A = 3 \cdot 1{,}5 = 4{,}5$.

По аналогии с указанными соотношениями напишите соотношения, выражающие гипотенузу прямоугольного треугольника через катет и тригонометрические функции острого угла.

1. Как выражается катет прямоугольного треугольника через гипотенузу и синус противолежащего угла?
2. Как выражается катет прямоугольного треугольника через гипотенузу и косинус прилежащего угла?
3. Как выражается катет прямоугольного треугольника через второй катет и тангенс противолежащего угла?
4. Как выражается катет прямоугольного треугольника через второй катет и котангенс прилежащего угла?

Задачи

А

1. В треуголь нике ABC угол C равен 90°, угол A равен 30°, $AB = 2$. Найдите BC.

2. В треугольнике ABC угол C равен 90°, угол A равен 30°, $AB = 2$. Найдите AC.

3. В треугольнике ABC угол C равен 90°, угол A равен 30°, $BC = 1$. Найдите AB.

4. В треугольнике ABC угол C равен 90°, угол A равен 30°, $AC = 2$. Найдите AB.

5. В треугольнике ABC угол C равен 90°, угол A равен 30°, $AC = 2$. Найдите BC.

6. В треугольнике ABC угол C равен 90°, угол A равен 30°, $BC = 1$. Найдите AC.

7. В треугольнике ABC угол C равен 90°, угол A равен 45°, $AB = 1$. Найдите BC.

8. В треугольнике ABC угол C равен 90°, угол A равен 45°, $AC = 1$. Найдите AB.

9. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $BC = 8$, $\sin A = 0{,}8$. Найдите AB.

10. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\cos A = \frac{2}{3}$, $AC = 6$. Найдите AB.

11. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\operatorname{tg} A = \frac{3}{4}$, $BC = 6$. Найдите AC.

B

12. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, угол A равен $45°$, $AC = 1$. Найдите высоту CH.
13. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, угол A равен $45°$, $AB = 1$. Найдите высоту CH.
14. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, CH — высота, угол A равен $45°$, $AB = 1$. Найдите AH.
15. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, CH — высота, угол A равен $45°$, $AB = 1$. Найдите BH.
16. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\sin A = \frac{3}{5}$, $AC = 4$. Найдите AB.
17. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\cos A = \frac{4}{5}$, $BC = 3$. Найдите AB.
18. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\operatorname{tg} A = \frac{3}{4}$, $AC = 4$. Найдите AB.
19. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, угол A равен $30°$, $AC = 1$. Найдите высоту CH.
20. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, угол A равен $30°$, $BC = 1$. Найдите высоту CH.

C

21. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, угол A равен $30°$, $AB = 1$. Найдите высоту CH.
22. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, CH — высота, угол A равен $30°$, $AB = 1$. Найдите AH.
23. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, CH — высота, угол A равен $30°$, $AB = 1$. Найдите BH.
24. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, CH — высота, угол A равен $30°$, $AC = 1$. Найдите BH.
25. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, CH — высота, угол A равен $30°$, $BC = 1$. Найдите AH.
26. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\sin A = \frac{3}{5}$, $AC = 4$. Найдите высоту CH.
27. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\cos A = \frac{4}{5}$, $AC = 4$, CH — высота. Найдите AH.
28. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\cos B = \frac{3}{5}$, $BC = 3$. CH — высота. Найдите BH.
29. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, CH — высота, $AB = 5$, $\cos A = 0{,}8$. Найдите AH.
30. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, CH — высота, $AB = 5$, $\sin A = 0{,}6$. Найдите BH.

31. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\sin A = \frac{3}{5}$, $BC = 3$. Найдите высоту CH.

32. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\cos A = \frac{4}{5}$, $BC = 3$, CH — высота. Найдите AH.

33. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\sin A = \frac{3}{5}$, $AC = 4$, CH — высота. Найдите BH.

34. В треугольнике ABC $AB = BC$, $AC = 6$, $\sin C = \frac{4}{5}$. Найдите высоту CH.

35. В треугольнике ABC $AB = BC$, $AC = 5$, $\cos C = 0{,}8$. Найдите высоту CH.

36. В треугольнике ABC $AC = BC = 1$, угол C равен $120°$. Найдите высоту AH.

37. В треугольнике ABC $AC = BC$, угол C равен $120°$, $AB = 1$. Найдите AC.

38. В треугольнике ABC $AC = BC$, угол C равен $120°$, $AC = 1$. Найдите AB.

39. В треугольнике ABC $AC = BC = 1$, угол C равен $135°$. Найдите высоту AH.

40. В треугольнике ABC $AC = BC = 1$, угол C равен $150°$. Найдите высоту AH.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

41. Попробуйте определить тригонометрические функции для прямого и тупого углов.

§ 17. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ПРЯМОГО И ТУПОГО УГЛОВ

Распространим определение тригонометрических функций на случай прямых и тупых углов.

Рассмотрим тупой угол BAD (рис. 17.1).

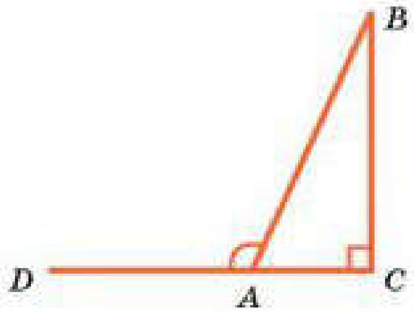


Рис. 17.1

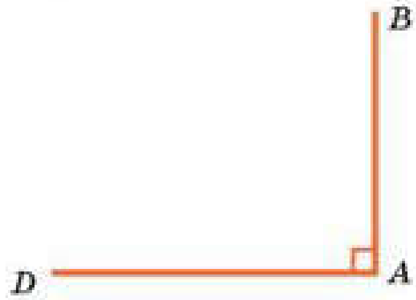


Рис. 17.2

Из точки B опустим перпендикуляр BC на прямую AD. Синусом тупого угла A будем называть *отношение* BC к AB, т. е.

$$\sin A = \frac{BC}{AB}.$$

Иначе говоря, синус тупого угла A равен синусу угла, смежного с углом A, т. е.

$$\sin A = \sin(180° - A).$$

В случае прямого угла A (рис. 17.2) основание C построенного перпендикуляра совпадает с точкой A, а отрезок AB совпадает с отрезком CB. В этом случае полагают, что синус прямого угла равен 1, т. е.

$$\sin 90° = 1.$$

Косинусом тупого угла A называют *отношение* AC к AB, взятое со знаком минус, т. е.

$$\cos A = -\frac{AC}{AB}.$$

Иначе говоря, косинус тупого угла A равен косинусу угла, смежного с углом A, взятым со знаком минус, т. е.

$$\cos A = -\cos(180° - A).$$

В случае прямого угла A (рис. 17.2) основание C построенного перпендикуляра совпадает с точкой A. В этом случае полагают, что косинус прямого угла равен 0, т. е.

$$\cos 90° = 0.$$

Тангенс и котангенс тупого угла A определяются равенствами:

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A}, \quad \operatorname{ctg} A = \frac{\cos A}{\sin A}.$$

В случае прямого угла A $\operatorname{tg} A$ не определен, так как в этом случае $\cos A = 0$. Котангенс прямого угла считается равным нулю, т. е. $\operatorname{ctg} 90° = 0$.

Теорема. ***Для прямых и тупых углов A выполняется основное тригонометрическое тождество***

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1.$$

Доказательство. Для острых углов требуемое равенство было доказано ранее. Докажем выполнимость этого равенства для тупого угла. Рассмотрим тупой угол BAD (рис. 17.1). Назовем его просто угол A. Так как $\sin A = \sin\angle BAC$ и $\cos A = -\cos\angle BAC$, то $\sin^2 A + \cos^2 A = \sin^2\angle BAC + \cos^2\angle BAC$. Для треугольника ABC воспользуемся основным тригонометрическим тождеством $\sin^2\angle BAC + \cos^2\angle BAC = 1$. Следовательно, выполняется и требуемое тождество $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$.

В случае прямого угла A имеем $\sin A = 1$, $\cos A = 0$. Следовательно, $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$. ☐

Определим также тригонометрические функции для 0° и 180°, положив

$$\sin 0° = 0,\ \sin 180° = 0;$$
$$\cos 0° = 1,\ \cos 180° = -1;$$
$$\mathrm{tg}\ 0° = 0,\ \mathrm{tg}\ 180° = 0.$$

Проверьте, что для 0° и 180° выполняется основное тригонометрическое тождество.

Используя соотношения между тригонометрическими функциями тупого и острого углов, можно находить приближенные значения тригонометрических функций тупых углов (с помощью таблицы приближенных значений тригонометрических функций, приведенной в конце учебника).

Например, $\sin 130° = \sin 50° \approx 0{,}77$; $\mathrm{tg}\ 130° = -\mathrm{tg}\ 50° \approx -1{,}19$.

1. Как определяется синус тупого угла?
2. Как определяется косинус тупого угла?
3. Чему равен: а) $\sin 90°$; б) $\cos 90°$?
4. Как определяются тангенс и котангенс тупого угла?
5. Для какого угла тангенс не определен?
6. В чем заключается основное тригонометрическое тождество?
7. Чему равен: а) $\sin 0°$; б) $\sin 180°$?
8. Чему равен: а) $\cos 0°$; б) $\cos 180°$?
9. Чему равен: а) $\mathrm{tg}\ 0°$; б) $\mathrm{tg}\ 180°$?

Задачи

А

1. Какой знак имеет синус тупого угла A?
2. Какой знак имеет косинус тупого угла A?
3. Какой знак имеет тангенс тупого угла A?
4. Какой знак имеет котангенс тупого угла A?
5. Чему равен синус: а) 120°; б) 135°; в) 150°?
6. Чему равен косинус: а) 120°; б) 135°; в) 150°?
7. Чему равен тангенс: а) 120°; б) 135°; в) 150°?
8. Чему равен котангенс: а) 120°; б) 135°; в) 150°?

В

9. Расположите в порядке возрастания синусы углов: 60°; 90°; 135°; 150°.
10. Расположите в порядке возрастания косинусы углов: 60°; 90°; 135°; 150°.
11. Расположите в порядке возрастания тангенсы углов: 60°; 90°; 135°; 150°.
12. Расположите в поряд ке возрастания котангенсы углов: 60°; 120°; 135°; 150°.
13. Синус тупого угла равен 0,8. Найдите косинус этого угла.
14. Косинус тупого угла равен –0,8. Найдите синус этого угла.

15. Упростите выражение : а) $1 - \sin^2 A$; б) $1 + \sin^2 A + \cos^2 A$; в) $\cos^2 A + \operatorname{tg}^2 A \cos^2 A$.
16. Упростите выражение $(1 - \cos A)(1 + \cos A)$.

C

17. Докажите, что для тупых углов A имеют место равенства:
$$\operatorname{tg} A = -\operatorname{tg}(180° - A);\ \operatorname{ctg} A = -\operatorname{ctg}(180° - A).$$
18. Докажите, что для острых углов A имеют место равенства:
$$\sin(90° + A) = \cos A,\ \cos(90° + A) = -\sin A.$$
19. Используя таблицу приближенных значений тригонометрических функций, найдите приближенное значение:
а) $\sin 140°$; б) $\cos 145°$; в) $\operatorname{tg} 150°$; г) $\operatorname{ctg} 160°$.

§ 18. ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НА НАХОЖДЕНИЕ РАССТОЯНИЙ И УГЛОВ

Для решения предлагаемых ниже задач используйте таблицу приближенных значений тригонометрических функций, помещенную в конце учебника. В ней даны приближенные значения синусов и тангенсов острых углов. Используя формулы:
$$\cos A = \sin(90° - A),\ \operatorname{ctg} A = \operatorname{tg}(90° - A),$$
можно находить соответствующие значения косинусов и котангенсов.

1. Мальчик прошел от дома по направлению на восток 400 м, затем повернул на север и прошел 300 м (рис. 18.1). Под каким углом к направлению на запад он должен идти, чтобы вернуться домой? (В ответе укажите цел ое число градусов.)

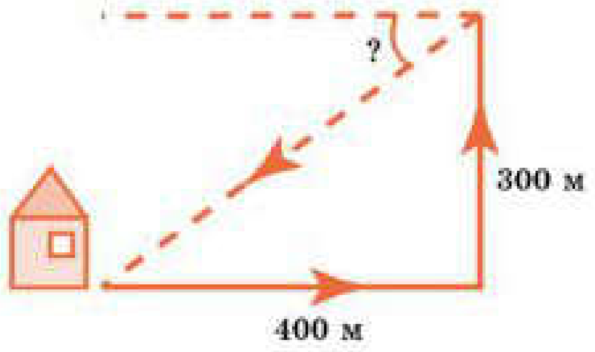


Рис. 18.1

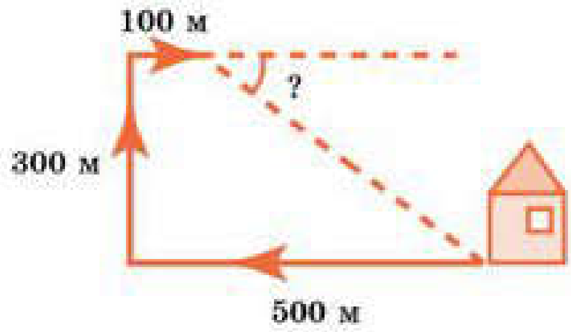


Рис. 18.2

2. Девочка прошла от дома по направлению на запад 500 м, затем повернула на север и прошла 300 м. После этого она повернула на восток и прошла еще 100 м (рис. 18.2). Под каким углом к направлению на восток она должна идти, чтобы вернуться домой? (В ответе укажите целое число градусов.)
3. Грибник, войдя в лес, в течение двух часов шел в направлении на север, затем с той же скоростью в течение полутора часов — на

восток (рис. 18.3). Под каким углом к направлению на юг он должен идти, чтобы вернуться к месту, где он вошел в лес? (В ответе укажите целое числ о градусов.)

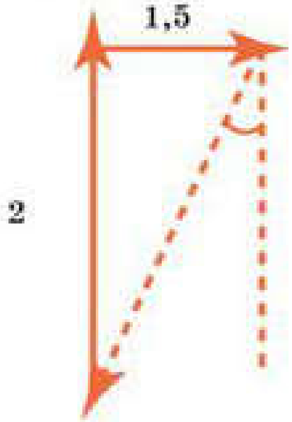


Рис. 18.3

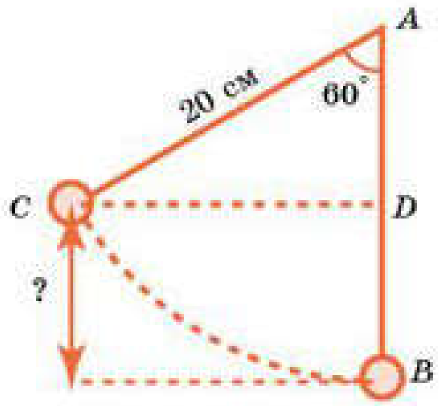


Рис. 18.4

4. Маятник в виде груза, подвешенного на нитке, отклонили от положения равновесия на угол 60°. Длина AC маятника равна 20 см (рис. 18.4). На сколько изменилась высота груза по сравнению с положением равновесия?

5. Маятник в виде груза, подвешенного на нитке, отклонили от положения равновесия на угол 60°. Длина AB маятника равна 20 см (рис. 18.5). Найдите расстояние CD от груза C до прямой AB, проходящей через начальное положение маятника.

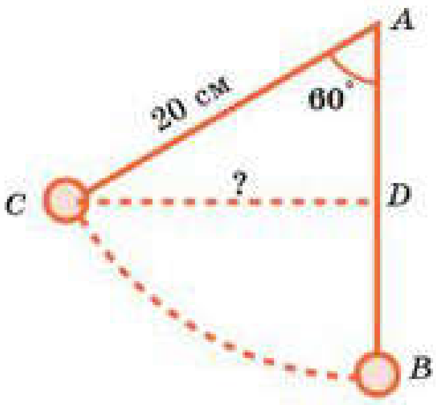


Рис. 18.5

Рис. 18.6

6. Маятник AB длиной 50 см откл онили от положения равновесия на расстояние CD, равное 12 см (рис. 18.6). Найдите угол, который образует новое положение AC маятника с положением равновесия AB. (В ответе укажите приближенное значение, выражаемое целым числом градусов.)

7. Горная железная дорога поднимается на 1 м на каждые 30 м пути (рис. 18.7). Найдите угол подъема в градусах. (В ответе укажите приближенное значение, выражаемое целым числом градусов.)

Рис. 18.7

8. Человек, пройдя вверх по склону холма 1000 м, поднялся на 90 м над плоскостью основания холма (рис. 18.8). Найдите (в среднем) угол наклона холма в градусах. (В ответе укажите приближенное значение, выражаемое целым числом градусов.)

Рис. 18.8

9. Угол подъема дороги равен 7° (рис. 18.9). Найдите высоту, на которую поднимется пешеход, пройдя 200 м.

Рис. 18.9

10. Найдите приближенное значение угла, под которым виден столб высотой 3 м, находящийся от наблюдателя на расстоянии 100 м (рис. 18.10). (В ответе укажите целое число градусов.)

Рис. 18.10

11. Самолет приближается к аэропорту A на высоте 8000 м. Пилот имеет предписание производить снижение для посадки под постоянным углом в 6° (рис. 18.11). Найдите расстояние AB от посадочной полосы до того места, над которым самолет должен начать снижение. (В ответе укажите приближенное значение, равное целому числу метров.)

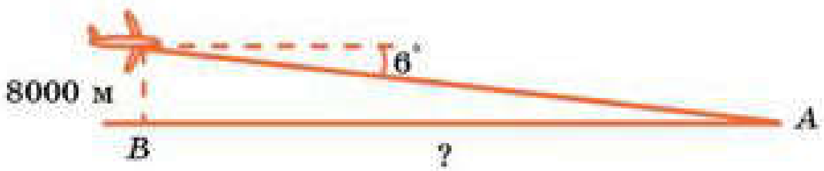


Рис. 18.11

Подготовьте сообщение

12. Измерение углов и расстояний на местности. Практические задачи на нахождение расстояний и углов (www.math.ru).

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

13. Попробуйте определить понятие площади фигуры. Какие вы знаете единицы измерения площади?
14. Сформулируйте какие-нибудь свойства площади.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Чему равен $\sin 60°$:
   A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. C. $\sqrt{3}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$?
2. Чему равен $\cos 30°$:
   A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. C. $\sqrt{3}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$?
3. Чему равен $\mathrm{tg}\ 45°$:
   A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. 1. C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. D. $\sqrt{3}$?
4. Чему равен $\mathrm{ctg}\ 30°$:
   A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. 1. C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. D. $\sqrt{3}$?
5. Для какого угла a $\sin a = \cos a$:
   A. 30°. B. 45°.
   C. 60°. D. Ни для какого?
6. Для какого угла a $\mathrm{tg}\, a = \mathrm{ctg}\, a$:
   A. 30°. B. 45°.
   C. 60°. D. Ни для какого?
7. Для какого угла a $\sin a = \mathrm{tg}\, a$:
   A. 30°. B. 45°.
   C. 60°. D. Ни для какого?
8. Для какого угла a $\cos a = \mathrm{ctg}\, a$:
   A. 30°. B. 45°.
   C. 60°. D. Ни для какого?

9. Найдите высоту равностороннего треугольника, стороны которого равны 2:

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\sqrt{2}$. C. $\sqrt{3}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

10. Найдите высоту CD равнобедренного треугольника ABC, для которого $AC = BC = 10$, $AB = 16$:

A. 4. B. 6. C. 8. D. 10.

11. В треугольнике ABC угол C равен 90°, угол A равен 30°, $AC = 2$. Найдите высоту CH:

A. 1. B. $\sqrt{2}$. C. 2. D. $\sqrt{3}$.

12. В треугольнике ABC угол C равен 90°, угол A равен 45°, $AC = 2$. Найдите высоту CH:

A. 1. B. $\sqrt{2}$. C. 2. D. $\sqrt{3}$.

13. $\sin A = \frac{3}{5}$. Найдите $\cos A$:

A. $\frac{3}{4}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{3}{5}$. D. $\frac{4}{5}$.

14. $\sin A = \frac{4}{5}$. Найдите $\operatorname{tg} A$:

A. $\frac{3}{4}$. B. $\frac{3}{5}$. C. $\frac{4}{3}$. D. $\frac{4}{5}$.

15. $\operatorname{tg} A = \frac{3}{4}$. Найдите $\sin A$:

A. $\frac{3}{5}$. B. $\frac{4}{5}$. C. $\frac{4}{3}$. D. $\frac{5}{4}$.

16. $\operatorname{ctg} A = \frac{3}{4}$. Найдите $\cos A$:

A. $\frac{3}{5}$. B. $\frac{4}{5}$. C. $\frac{4}{3}$. D. $\frac{5}{4}$.

17. В треугольнике ABC $AC = BC$, угол C равен 120°, $AC = 2$. Найдите AB:

A. $\sqrt{2}$. B. $2\sqrt{2}$. C. $\sqrt{3}$. D. $2\sqrt{3}$.

18. В треугольнике ABC $AC = BC = 2$, угол C равен 120°. Найдите высоту AH:

A. $\sqrt{2}$. B. $2\sqrt{2}$. C. $\sqrt{3}$. D. $2\sqrt{3}$.

19. В треугольнике ABC $AC = BC = 2$, угол C равен 135°. Найдите высоту AH:

A. $\sqrt{2}$. B. $2\sqrt{2}$. C. $\sqrt{3}$. D. $2\sqrt{3}$.

20. В треугольнике ABC $AC = BC = 2$, угол C равен 150°. Найдите высоту AH:

A. 1. B. $\sqrt{2}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\sqrt{3}$.

ГЛАВА 3

ПЛОЩАДИ

§ 19. ПОНЯТИЕ ПЛОЩАДИ. ПЛОЩАДЬ ПРЯМОУГОЛЬНИКА

Площадь фигуры характеризует величину части плоскости, которую занимает эта фигура.

Измерение площади фигуры, как и измерение длины отрезка, основано на сравнении этой фигуры с фигурой, площадь которой принимается за единицу.

За единицу измерения площади принимается квадрат, сторона которого равна единице измерения длины. Он называется *единичным квадратом* .

Например, если за единицу измерения длины принимается 1 мм, 1 см или 1 м, то за единицу измерения площади принимается квадрат, сторона которого равна соответственно 1 мм, 1 см или 1 м. Такой квадрат называется *квадратным миллиметром* , *квадратным сантиметром* или *квадратным метром*, соответственно.

Поскольку площадь фигуры зависит от единицы измерения, то в случаях, когда могут возникнуть недоразумения, после величины площади S указывают единицу измерения. Например, S мм^2, S см^2, S м^2.

Для измерения площади фигуры Φ сначала выясняют, сколько раз в ней целиком укладывается единичный квадрат.

Если единичный квадрат укладывается в фигуре Φ n раз без остатка, то процесс измерения на этом заканчивается, и полученное число n считается площадью фигуры Φ.

На рисунке 19.1 показана фигура, в которой единичный квадрат целиком укладывается шесть раз без остатка. Ее площадь равна 6.

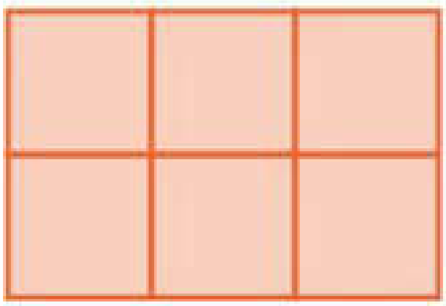


Рис. 19.1

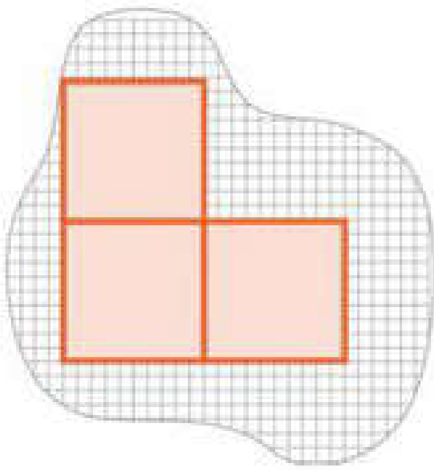


Рис. 19.2

Если единичный квадрат укладывается в фигуре Φ с остатком Φ', то число n считается приближенным значением площади фигуры Φ. На рисунке 19.2 число n равно 3.

В этом случае единичный квадрат разбивается на 100 квадратов со стороной, равной одной десятой единичного отрезка. Площадь каждого такого маленького квадрата считается равной одной сотой. Подсчитывается число m этих квадратов, целиком укладывающихся в остатке Φ'. Если при этом квадраты укладываются в фигуре Φ' без остатка, то процесс измерения считается законченным, и число $n + m \cdot 0{,}01$ считается площадью фигуры Φ.

Если квадраты укладываются в фигуре Φ' с остатком Φ'', то единичный квадрат разбивается на 10 000 квадратов со стороной, равной одной сотой единичного отрезка, и повторяется описанная процедура измерения.

В результате процесс измерения площади может на некотором шаге закончиться. В этом случае площадь фигуры будет выражаться конечной десятичной дробью. Однако может случиться, что процесс измерения не закончится ни на каком шаге. В этом случае площадь фигуры может выражаться бесконечной десятичной дробью.

Таким образом, *площадь фигуры* — это число, получающееся в результате измерения и показывающее, сколько раз единичный квадрат и его части укладываются в данной фигуре.

Две фигуры называются *равновеликими*, если они имеют одинаковую площадь.

Для площадей плоских фигур справедливы свойства, аналогичные свойствам длин отрезков.

Свойство 1. *Площадь фигуры является неотрицательным числом*.

Свойство 2. *Равные фигуры имеют равные площади*.

Свойство 3. *Если фигура Φ составлена из двух неперекрывающихся фигур Φ_1 и Φ_2* (рис. 19.3), *то площадь фигуры Φ равна сумме площадей фигур Φ_1 и Φ_2, т. е. $S(\Phi) = S(\Phi_1) + S(\Phi_2)$.*

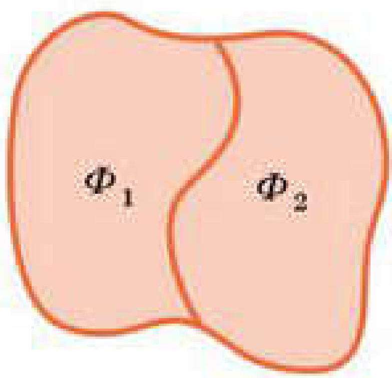


Рис. 19.3

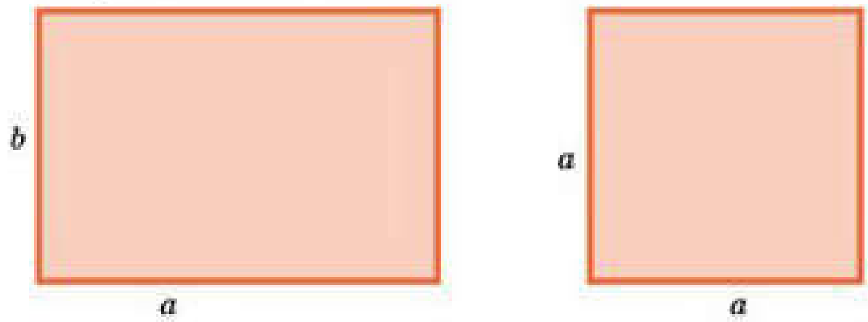
Из этих свойств, в частности, следует, что если фигура Φ разбита на n равных неперекрывающихся частей, то площадь каждой части равна одной n-й площади всей фигуры Φ.

Замечание. Две фигуры называются *равными*, если существует движение (перемещение), переводящее одну из них в другую.

Строгое определение движения будет дано в учебнике геометрии 9-го класса. Здесь же мы будем использовать наглядные представления о движении и равенстве фигур.

Попробуйте объяснить это самостоятельно.

Простейшей фигурой, с точки зрения вычисления площади, является прямоугольник (рис. 19.4, а).



а) б)

Рис. 19.4

Площадь S прямоугольника, смежные стороны которого равны a, b, вычисляется по формуле

$$S = a \cdot b.$$

В частности, площадь квадрата со стороной a (рис. 19.4, б) вычисляется по формуле

$$S = a^2.$$

1. Что принимается за единицу измерения площади?
2. Что такое *площадь фигуры* ?
3. Как измеряется площадь фигуры?
4. Какие две фигуры называются *равновеликими* ?
5. Сформулируйте свойства площади.
6. Как вычисляется площадь прямоугольника?
7. Чему равна площадь квадрата со стороной a?

Задачи

A

1. Сколько единичных квадратов целиком укладываются в фигуре, изображенной на рисунке 19.5? Стороны квадратных клеток равны 1.

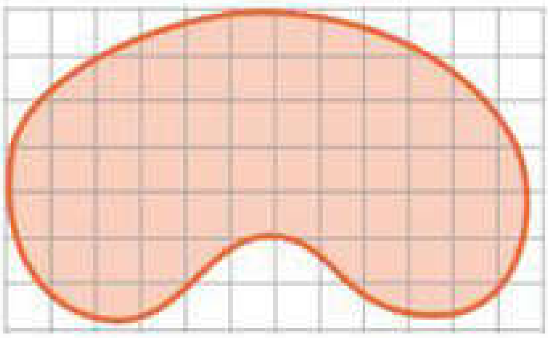
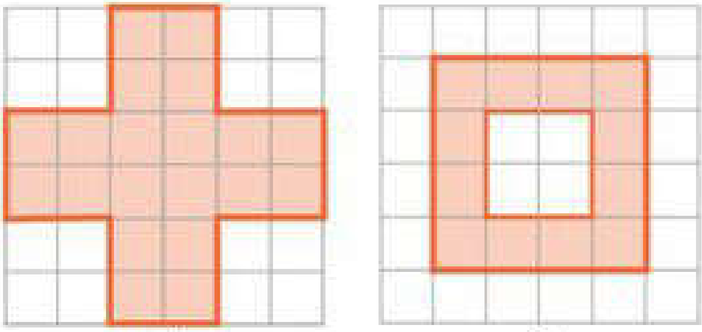


Рис. 19.5

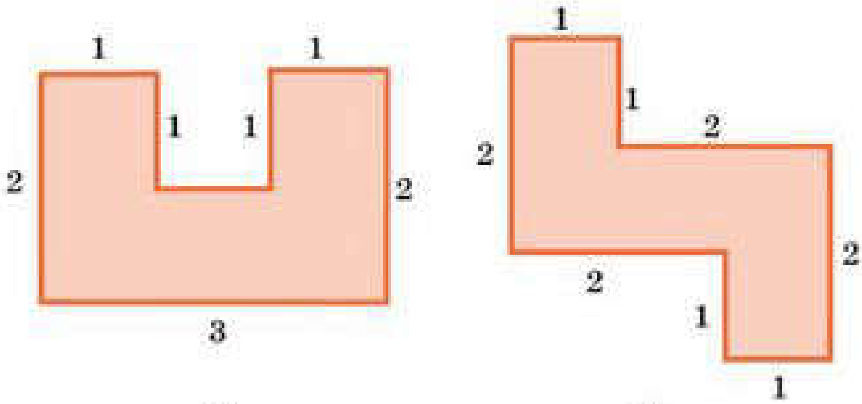
2. Найдите площади фигур на рисунке 19.6. Стороны квадратных клеток равны 1.



а) б)

Рис. 19.6

3. Найдите площади фигур, изображенных на рисунке 19.7, все углы которых прямые.



а) б)

Рис. 19.7

4. На рисунке 19.8 укажите равновеликие фигуры (стороны квадратных клеток равны 1).

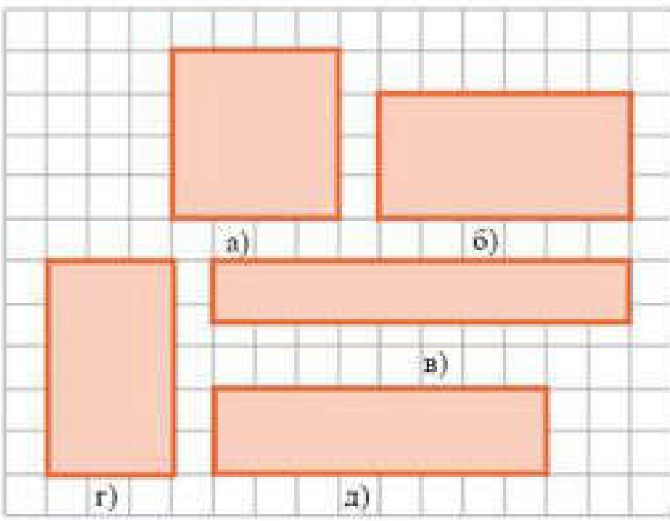


Рис. 19.8

Рис. 19.9

5. Найдите площадь квадрата, сторона которого равна: а) 2 см; б) 10 см; в) 3 м.
6. Найдите площадь квадрата, если его периметр равен 80 см.
7. Сторона квадрата равна 1. Какую площадь имеют части квадрата, на которые он разбивается своими диагоналями (рис. 19.9)?
8. Найдите площадь прямоугольника, сторона которого равна 6, а диагональ равна 10.
9. Как изменится площадь прямоугольника, если его стороны: а) увеличатся в 2 раза; б) уменьшатся в 3 раза?
10. Самый высокий в стране флагшток с самым большим флагом республики развевается на площади государственных символов в Астане. На сегодня Государственный флаг занимает 4 место в мире по величине и возвышается над городом на 111 м, что позволяет видеть его из любой точки Астаны. Его длина 30 м, а ширина составляет $\frac{1}{2}$ его длины. Сколько квадратных метров ткани понадобится для шитья этого флага?

B

11. Найдите площадь квадрата по его диагонали a.
12. Найдите сторону квадрата, площадь которого равна площади прямоугольника со сторонами 8 м и 18 м.
13. Найдите площадь квадрата, изображенного на рисунке 19.10 (стороны квадратных клеток равны 1).

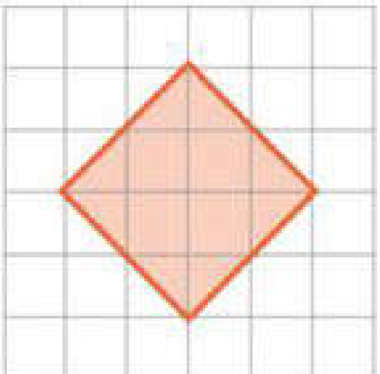


Рис. 19.10

14. Найдите площадь прямоугольника, изображенного на рисунке 19.11 (стороны квадратных клеток равны 1).
15. Площадь квадрата равна 1. Найдите площадь квадрата, вершинами которого являются середины сторон данного квадрата (рис. 19.12).

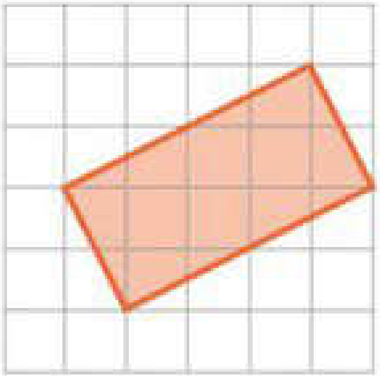


Рис. 19.11

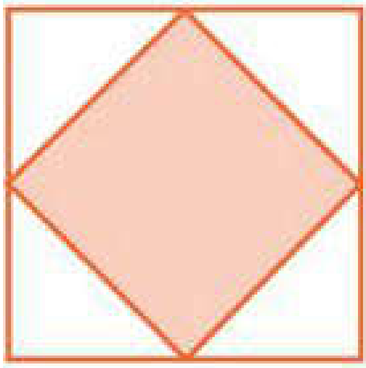
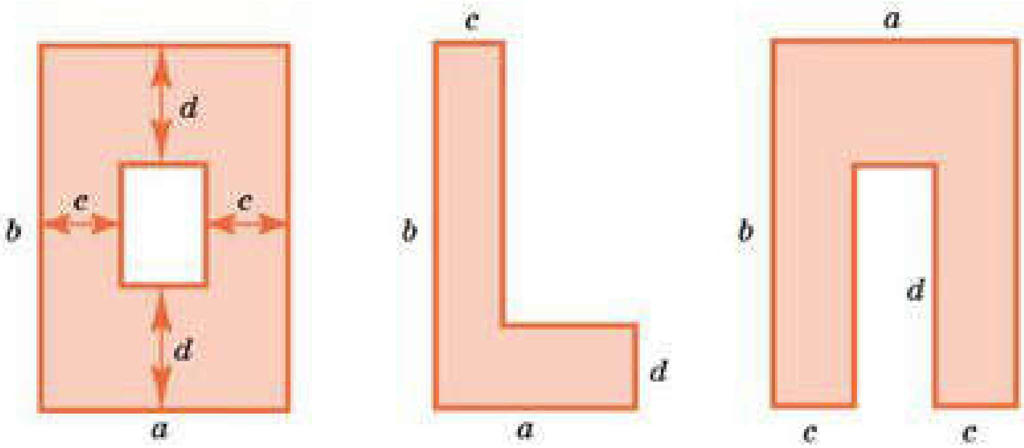


Рис. 19.12

16. Найдите площади фигур, изображенных на рисунке 19.13.



а) б) в)

Рис. 19.13

C

17. Найдите периметр прямоугольника, если его площадь равна 72 см^2, а отношение соседних сторон равно 1 : 2.

18. Найдите стороны прямоугольника, если его периметр равен 10 м, а площадь — 6 м^2.

19. Найдите площадь многоугольника на рисунке 19.14. Стороны квадратных клеток равны 1.

20. Найдите площадь фигуры на рисунке 19.15. Стороны квадратных клеток равны 1.

21. Найдите площадь фигуры на рисунке 19.16. Стороны квадратных клеток равны 1.

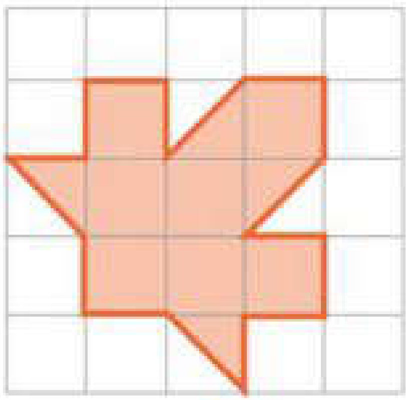


Рис. 19.14

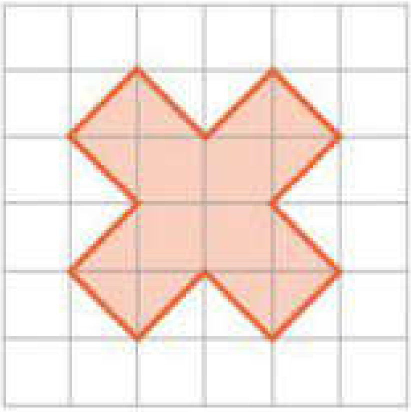


Рис. 19.15

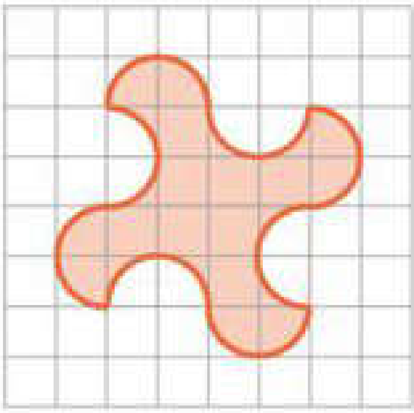


Рис. 19.16

22. Пол комнаты имеет форму прямоугольника 4×6 (м). Сколько прямоугольных плиток 10×20 (см) потребуется для настила ими пола этой комнаты?

23. Пол комнаты имеет форму прямоугольника 4×6 (м). Высота потолка 3 м, площадь двери 2 м^2, площадь окна 3 м^2. Сколько рулонов обоев $0{,}5 \times 10$ (м) потребуется для оклейки ими стен этой комнаты?

24. Докажите, что из всех прямоугольников данного периметра наибольшую площадь имеет квадрат.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

25. Попробуйте найти формулу, выражающую площадь параллелограмма через его сторону и высоту, проведенную к этой стороне.

§ 20. ПЛОЩАДЬ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

Теорема. ***Площадь параллелограмма равна произведению его стороны на высоту, проведенную к этой стороне.***

Доказательство. Рассмотрим параллелограмм $ABCD$ (рис. 20.1).

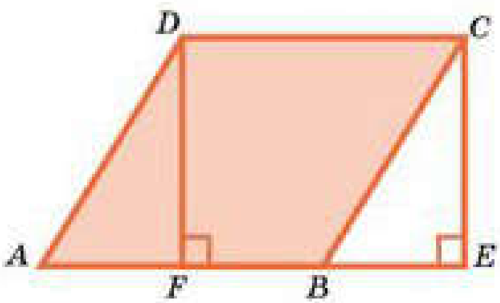


Рис. 20.1

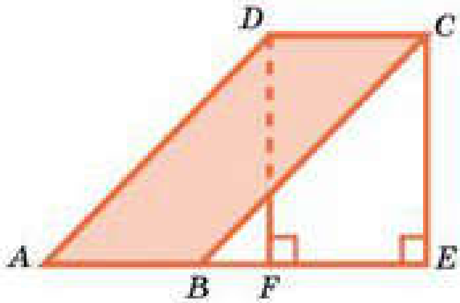


Рис. 20.2

Из его вершин C и D проведем высоты соответственно CE и DF. Рассмотрим случай, когда точка F лежит внутри отрезка AB. Докажем, что прямоугольник $FECD$ и параллелограмм равновелики. Действительно, данный параллелограмм составлен из трапеции $FBCD$ и треугольника

AFD. Прямоугольник составлен из той же трапеции и треугольника BEC. Причем прямоугольные треугольники AFD и BEC равны по гипотенузе и катету. Следовательно, площадь параллелограмма равна площади прямоугольника, т. е. равна произведению стороны на высоту, проведенную к этой стороне.

Случай, когда точка F лежит вне отрезка AB (рис. 20.2), рассмотрите самостоятельно. □

Итак, площадь S параллелограмма со стороной a и высотой h, проведенной к ней, вычисляется по формуле

$$S = a \cdot h.$$

Выведем еще одну формулу площади параллелограмма.

Теорема. ***Площадь параллелограмма равна произведению двух его соседних сторон на синус угла между ними.***

Доказательство. Пусть в параллелограмме $ABCD$ (рис. 20.3) $AB = a$, $AD = b$. Высота DE равна стороне AD, умноженной на синус угла A. Значит, площадь S параллелограмма выражается формулой

$$S = a \cdot b \cdot \sin A.$$

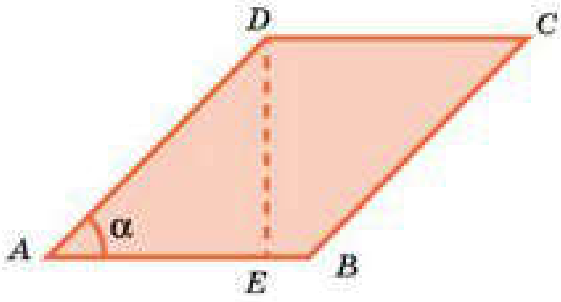


Рис. 20.3

Ромб является параллелограммом, следовательно, его площадь можно находить так же, как и площадь параллелограмма. Значит, площадь ромба равна произведению его стороны на высоту:

$$S = a \cdot h,$$

где a — сторона, h — высота.

Самостоятельно докажите следующую формулу нахождения площади ромба: $S = a^2 \sin A$, где a — сторона, $\angle A$ — угол ромба.

1. Что называется *высотой параллелограмма*?
2. Сформулируйте первую теорему о площади параллелограмма.
3. Сформулируйте вторую теорему о площади параллелограмма.

Задачи

А

1. Найдите площадь параллелограмма, стороны которого равны 10 см и 4 см, а одна из высот равна 5 см.
2. Найдите площадь ромба, сторона которого равна 5, а высота равна 4.
3. Найдите площадь параллелограмма, если его стороны равны 8 см и 10 см, а угол между ними равен: а) 30°; б) 45°; в) 60°.

4. Найдите площадь ромба, если его стороны равны 6 см, а один из углов равен: а) 120°; б) 135°; в) 150°.

5. На рисунке 20.4 укажите равновеликие параллелограммы.

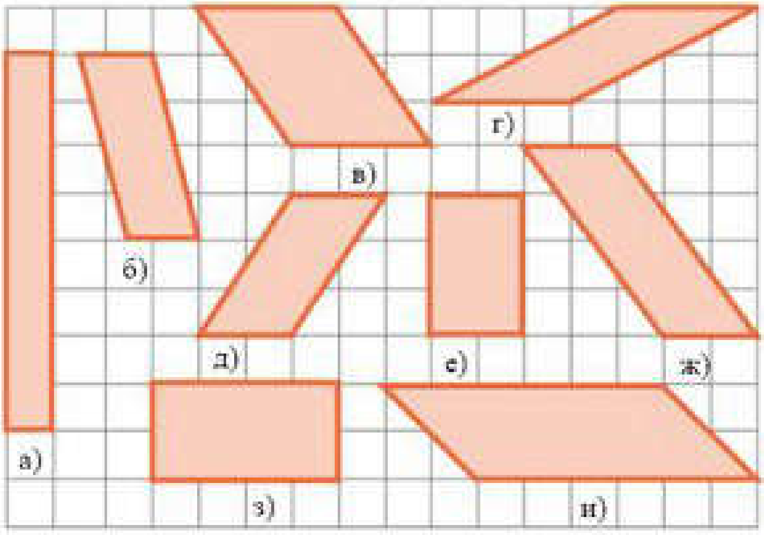
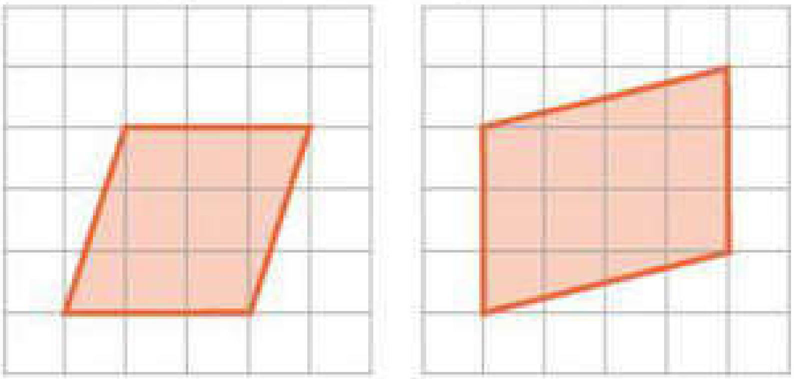


Рис. 20.4

6. Найдите площади параллелограммов, изображенных на рисунке 20.5. Стороны квадратных клеток равны 1.



а) б)

Рис. 20.5

B

7. Площадь параллелограмма равна 40 см^2, стороны — 5 см и 10 см. Найдите высоты этого параллелограмма.

8. Прямоугольник и параллелограмм имеют соответственно равные стороны. Какая из этих фигур имеет большую площадь? Почему?

9. Прямоугольник и параллелограмм имеют соответственно равные стороны. Найдите острый угол параллелограмма, если его площадь равна половине площади прямоугольника.

10. Соседние стороны параллелограмма равны a и b. Какой угол должен быть между ними, чтобы площадь параллелограмма была наибольшей?

11. Квадрат и ромб имеют одинаковые периметры. Сравните их площади.

12. Квадрат и ромб имеют соответственно равные стороны. Найдите острый угол ромба, если его площадь равна половине площади квадрата.

C

13. Докажите, что площадь ромба равна половине произведения его диагоналей (рис. 20.6).
14. Найдите площадь ромба, если его диагонали равны 6 см и 8 см.
15. Найдите площади четырехугольников, изображенных на рисунке 20.7. Стороны квадратных клеток равны 1.

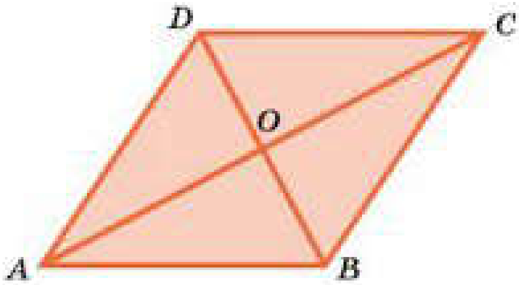


Рис. 20.6

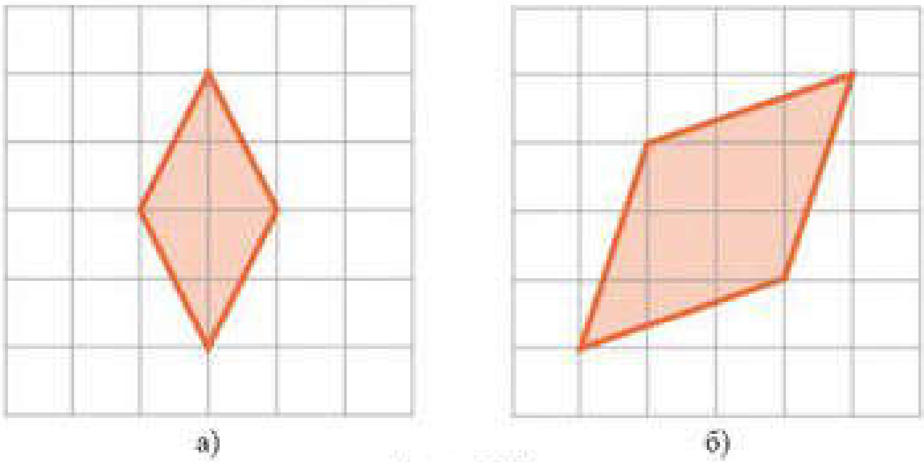


Рис. 20.7

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

16. Попробуйте найти формулу, выражающую площадь треугольника через его сторону и высоту, проведенную к этой стороне.

§ 21. ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА

Теорема. ***Площадь треугольника равна половине произведения его стороны на высоту, проведенную к этой стороне.***

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC. Достроим его до параллелограмма $ABDC$ (рис. 21.1).

Треугольники ABC и DCB равны по трем сторонам, следовательно, равны и их площади. Поэтому площадь треугольника ABC равна половине площади параллелограмма $ABDC$. Сторона AB этого параллелограмма равна стороне треугольника, а высота, проведенная к ней, — высоте треугольника. Следовательно, площадь треугольника ABC равна половине произведения его стороны на высоту, проведенную к этой стороне. □

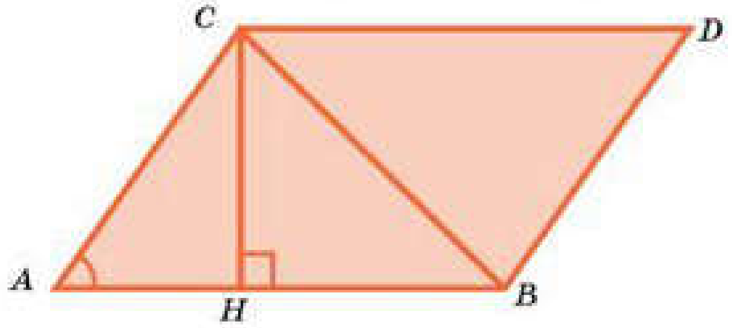


Рис. 21.1

Итак, площадь S треугольника со стороной a и высотой h, проведенной к ней, вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h.$$

Следствие. *Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов* .

Используя формулу площади треугольника, сравните высоты треугольника, для сторон a, b, c которого выполняются неравенства a m b m c.

Выведем еще одну формулу площади треугольника.

Теорема. ***Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними*** .

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC. Проведем в нем высоту CH (рис. 21.1). Так как $CH = AC \cdot \sin A$, то площадь треугольника ABC равна $\frac{1}{2} AB \cdot CH = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A$. □

Таким образом, площадь S треугольника ABC, для которого $AB = c$, $AC = b$, вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin A.$$

Воспользуемся понятием *площади* еще для одного доказательства теоремы Пифагора.

Теорема. (Пифагора.) ***В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.***

Доказательство . Пусть ABC — прямоугольный треугольник ($\angle C = 90°$), $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Рассмотрим квадрат со стороной $a + b$. Разобьем его на четыре прямоугольных треугольника, равных треугольнику ABC, и квадрат со стороной c (рис. 21.2). С одной стороны, площадь этого квадрата равна $(a + b)^2$. С другой стороны, она равна сумме площадей четырех прямоугольных треугольников с катетами a, b и квадрата со стороной c, т. е. равна $4 \cdot \frac{1}{2} a \cdot b + c^2$. Таким образом, имеет место равенство $(a+b)^2 = 2a \cdot b + c^2$, из которого получаем равенство $a^2 + b^2 = c^2$.

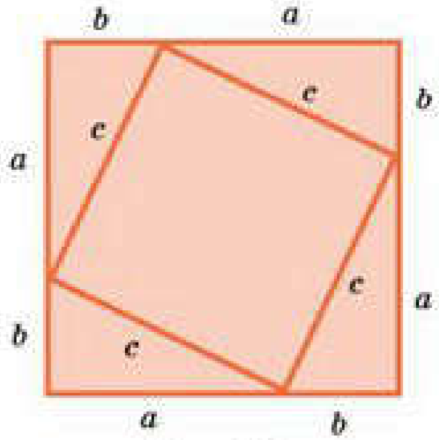


Рис. 21.2

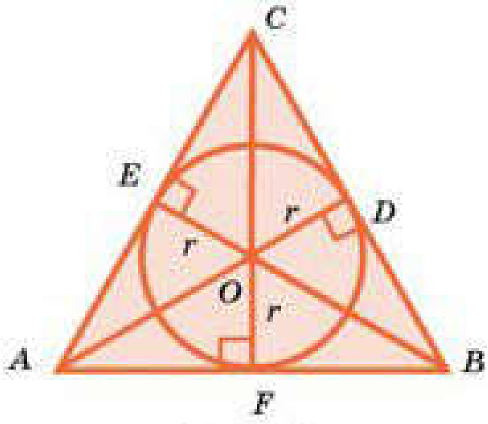


Рис. 21.3

Воспользуемся формулой площади треугольника для нахождения радиуса окружности, вписанной в треугольник.

Пусть в треугольнике ABC $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ и площадь равна S. Обозначим O центр и r радиус вписанной окружности. Соединим центр O отрезками с вершинами треугольника (рис. 21.3).

Площади треугольников BOC, AOC и AOB равны соответственно $\frac{1}{2}a \cdot r$, $\frac{1}{2}b \cdot r$ и $\frac{1}{2}c \cdot r$. Складывая их, получим площадь треугольника ABC.

$$S = \frac{1}{2}a \cdot r + \frac{1}{2}b \cdot r + \frac{1}{2}c \cdot r = \frac{1}{2}(a+b+c) \cdot r = p \cdot r,$$

где $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ — полупериметр треугольника ABC. Следовательно, для радиуса r вписанной окружности имеет место формула

$$r = \frac{S}{p}.$$

1. Сформулируйте теорему о площади треугольника.
2. Чему равна площадь прямоугольного треугольника?
3. Сформулируйте вторую теорему о площади треугольника.
4. Как выражается радиус вписанной окружности через площадь и периметр треугольника?
5. Как выражается радиус вписанной окружности через катеты прямоугольного треугольника?
6. Как выражается радиус вписанной окружности через основание равнобедренного треугольника и высоту, опущенную на это основание?

Задачи

А

1. На рисунке 21.4 укажите равновеликие треугольники.

2. Вычислите площадь прямоугольного треугольника, если его катеты равны: а) 4 см и 7 см; б) 1,2 м и 35 дм.

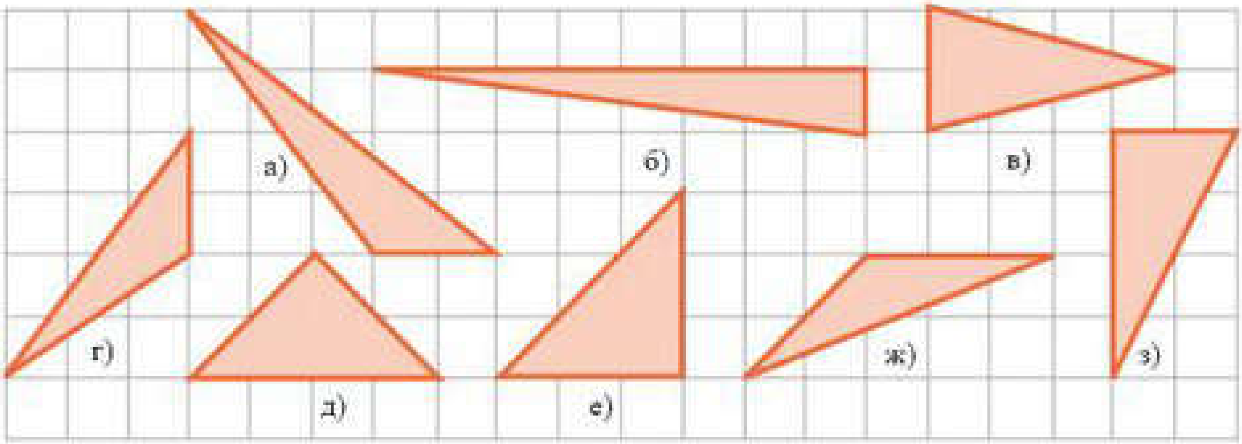


Рис. 21.4

3. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 5, а основание равно 6. Найдите площадь треугольника.

4. Площадь треугольника равна 30. Одна его сторона равна 10. Найдите высоту, опущенную на эту сторону.

5. Найдите площадь треугольника, две стороны которого равны 3 см и 8 см, а угол между ними равен: а) 30°; б) 45°; в) 60°; г) 90°.

B

6. Найдите площадь треугольника, две стороны которого равны 6 см и 8 см, а угол между ними равен: а) 120°; б) 135°; в) 150°.

7. В треугольнике ABC сторона AB в три раза больше стороны AC. Чему равно отношение высот, проведенных из вершин B и C?

8. Как изменится площадь треугольника, если: а) не изменяя его сторону, увеличить опущенную на нее высоту в два раза; б) не изменяя его высоты, уменьшить сторону, на которую она опущена, в три раза; в) одну сторону увеличить в четыре раза, а высоту, опущенную на нее, уменьшить в восемь раз?

9. Площадь треугольника ABC равна 4. Точки D, E — середины сторон соответственно AC и BC (рис. 21.5). Найдите площадь треугольника CDE.

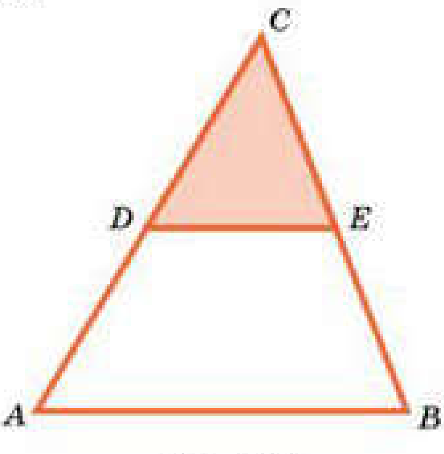


Рис. 21.5

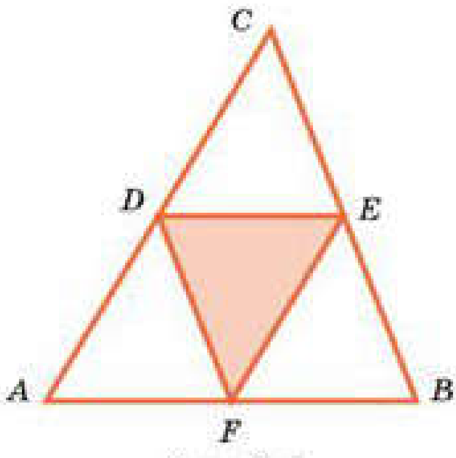


Рис. 21.6

10. В треугольнике проведены все средние линии (рис. 21.6). Какую часть площади данного треугольника составляет площадь треугольника, образованного этими линиями?

11. Две стороны треугольника равны 6 см и 5 см. Может ли его площадь быть равна: а) 10 см^2; б) 15 см^2; в) 20 см^2?

12. Найдите площади треугольников, изображенных на рисунке 21.7. Стороны квадратных клеток равны 1.

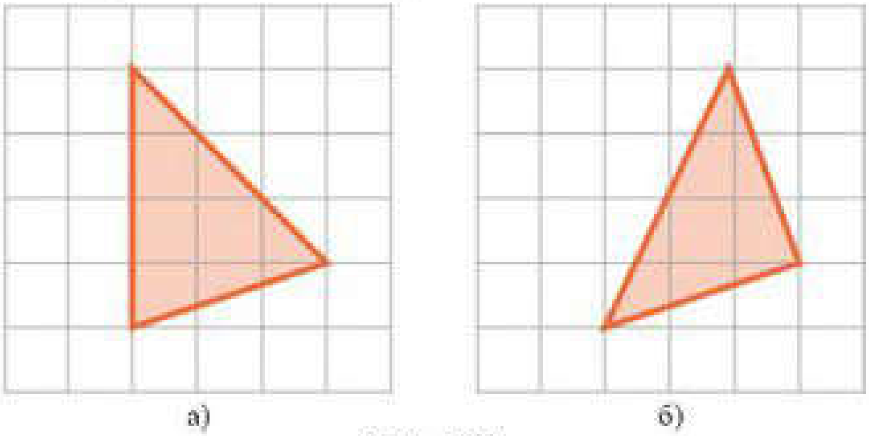


Рис. 21.7

13. Докажите, что медиана разбивает треугольник на два равновеликих треугольника.

C

14. Площадь равнобедренного треугольника равна 48, а основание равно 16. Найдите боковую сторону треугольника.

15. В треугольнике ABC две стороны равны a и b. При каком угле между ними площадь треугольника будет наибольшей?

16. Середины сторон параллелограмма последовательно соединены между собой (рис. 21.8). Какой получился четырехугольник и какова его площадь, если площадь данного параллелограмма равна 16?

17. Докажите, что медианы треугольника делят его на шесть равновеликих треугольников (рис. 21.9).

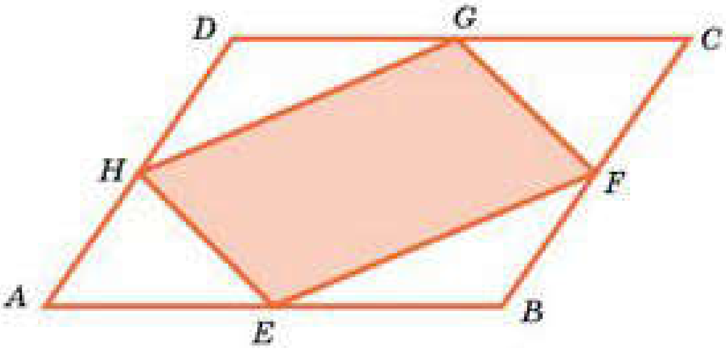


Рис. 21.8

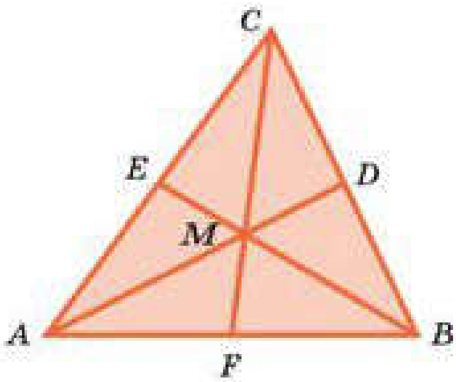


Рис. 21.9

18. Найдите геометрическое место вершин C треугольников, равновеликих данному треугольнику ABC и имеющих с ним общую сторону AB.

19. Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки равностороннего треугольника до его сторон постоянна и равна высоте этого треугольника (рис. 21.10).

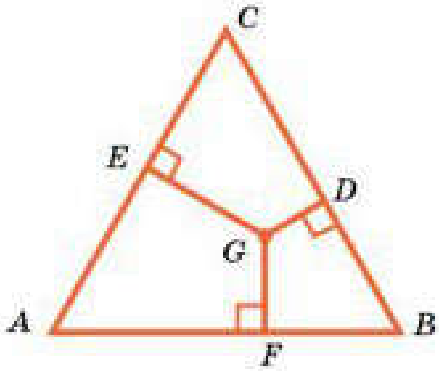


Рис. 21.10

20. Найдите радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, катеты которого равны 3 и 4.

21. Найдите радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, основание которого равно 3, а высота, опущенная на это основание, равна 2.

22. Какую часть от площади треугольника ABC составляет площадь закрашенной фигуры (рис. 21.11)?

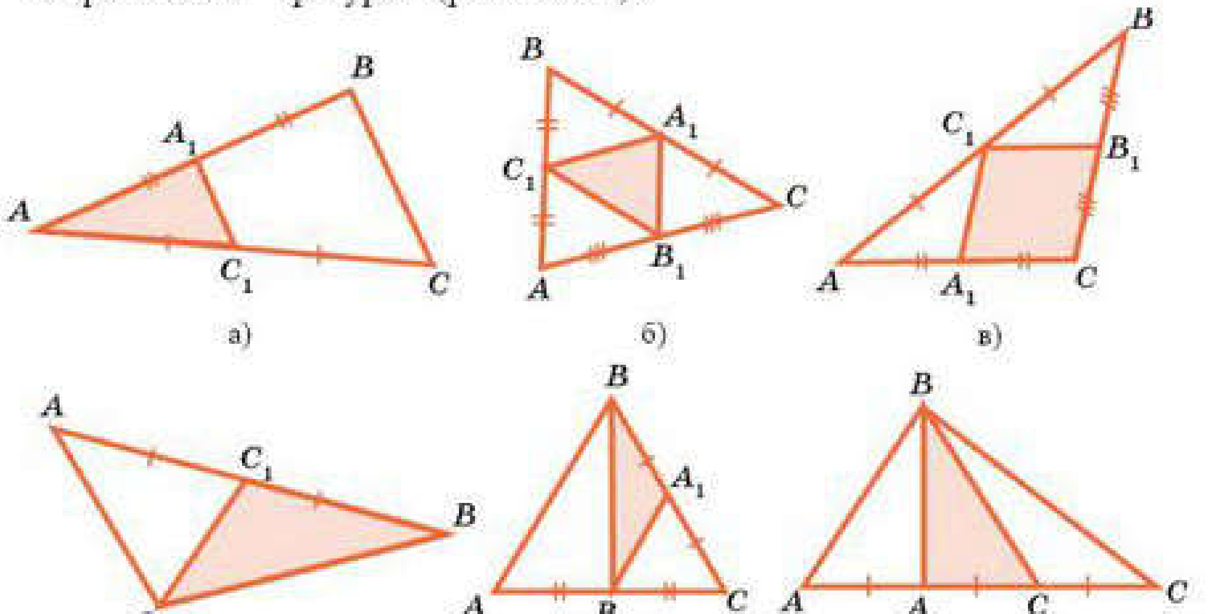


Рис. 21.11

23. Сравните площади треугольников, изображенных на рисунках (рис. 21.12, 21.13).

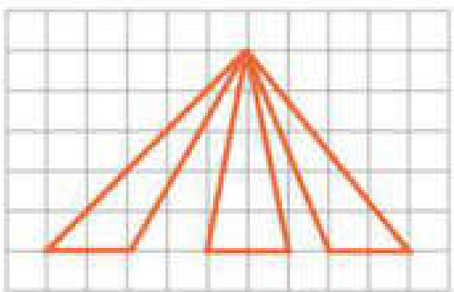


Рис. 21.12

24. Вершины треугольника ABC лежат на окружности, причем точки A и C зафиксированы, а точка B движется по дуге AC от A к C (рис. 21.14). Как при этом меняется площадь треугольника ABC?

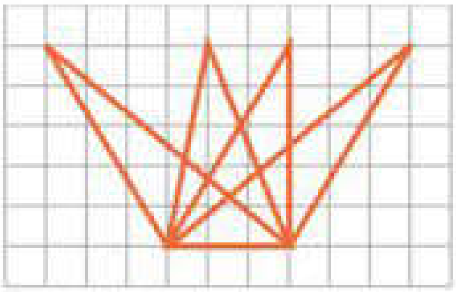


Рис. 21.13

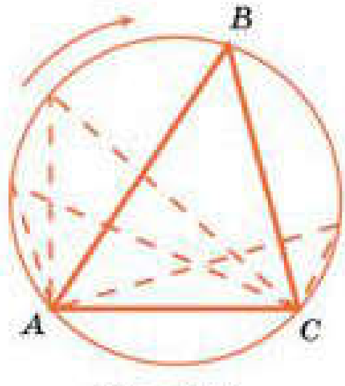


Рис. 21.14

25. Дан равнобедренный треугольник ABC (рис. 21.15). Переместите одну из его вершин так, чтобы получился равнобедренный:
а) прямоугольный треугольник, площадь которого равна площади треугольника ABC;
б) прямоугольный треугольник, площадь которого в два раза меньше площади треугольника ABC;
в) тупоугольный треугольник, площадь которого равна площади треугольника ABC;
г) тупоугольный треугольник, площадь которого в три раза меньше площади треугольника ABC;
д) остроугольный треугольник, площадь которого равна площади треугольника ABC;
е) остроугольный треугольник, площадь которого в полтора раза больше площади треугольника ABC.

26. Точки K и M делят диагональ AC прямоугольника $ABCD$ на равные три отрезка (рис. 21.16). Какую часть от площади прямоугольника $ABCD$ составляет площадь треугольника KBM?

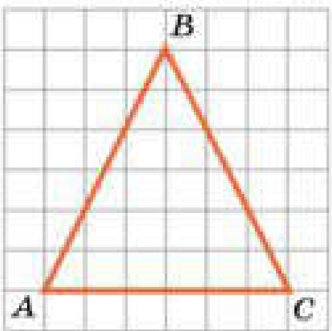


Рис. 21.15

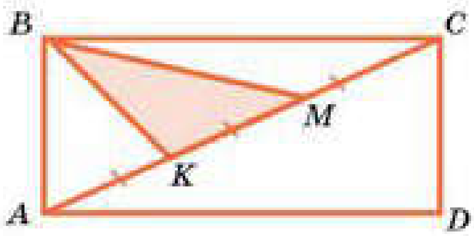


Рис. 21.16

27. Точки M и N — середины сторон BC и AD параллелограмма $ABCD$ (рис. 21.17, 21.18, 21.19). Чему равна сумма площадей закрашенных частей параллелограмма, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 56?

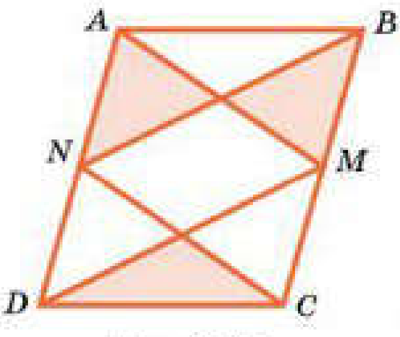


Рис. 21.17

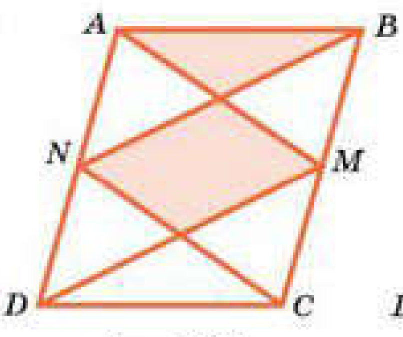


Рис. 21.18

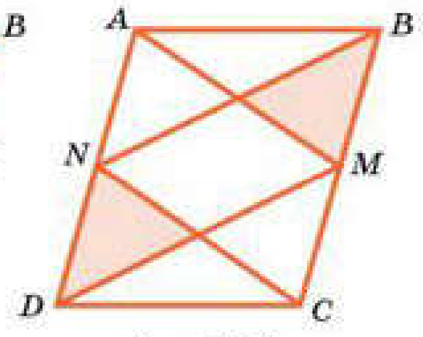


Рис. 21.19

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

28. Попробуйте найти формулу, выражающую площадь трапеции через ее основания и высоту.

§ 22. ПЛОЩАДЬ ТРАПЕЦИИ

Теорема. ***Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту .***

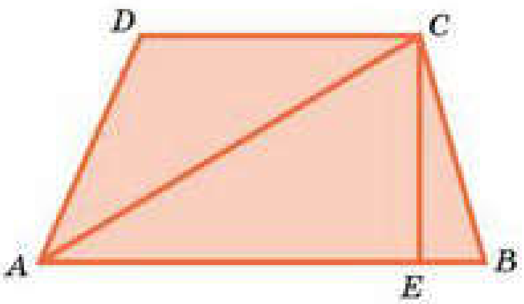


Рис. 22.1

Доказательство. Рассмотрим трапецию $ABCD$ ($AB \parallel CD$, рис. 22.1).

Диагональ AC разбивает ее на два треугольника ABC и ACD, высоты которых, опущенные на стороны соответственно AB и CD, равны высоте CE трапеции. Следовательно, площадь трапеции равна сумме площадей этих треугольников, т. е.

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC} = \frac{1}{2}AB \cdot CE + \frac{1}{2}CD \cdot CE = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot CE. \square$$

Таким образом, площадь S трапеции с основаниями a, b и высотой h вычисляется по формуле

$$S = \frac{a + b}{2} \cdot h.$$

Следствие. *Площадь трапеции равна произведению средней линии на высоту.*

Докажите это следствие самостоятельно.

1. Сформулируйте теорему о площади трапеции.
2. Как найти площадь трапеции, зная ее среднюю линию и высоту?

Задачи

А

1. Найдите площадь трапеции, основания которой 12 см и 16 см, а высота 15 см.
2. Средняя линия трапеции равна 3, высота равна 2. Найдите площадь трапеции.
3. Основания трапеции равны 10 см и 35 см, площадь равна 225 $см^2$. Найдите ее высоту.
4. Высота трапеции равна 20 см, площадь — 400 $см^2$. Найдите среднюю линию трапеции.
5. Площадь трапеции равна 200 $см^2$. Одно основание равно 26 см, высота равна 10 см. Найдите второе основание трапеции.

В

6. Основания равнобедренной трапеции равны 14 и 26, а ее периметр равен 60. Найдите площадь трапеции.
7. Основания трапеции равны 36 см и 12 см, боковая сторона, равная 7 см, образует с одним из оснований трапеции угол 150°. Найдите площадь трапеции.
8. Найдите площади трапеций, изображенных на рисунке 22.2. Стороны квадратных клеток равны 1.

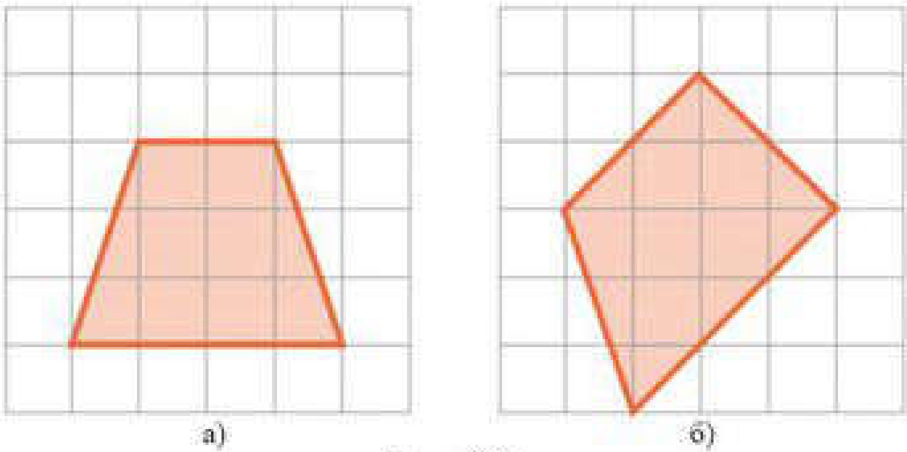


Рис. 22.2

9. Найдите площадь прямоугольной трапеции, основания которой равны 3 см и 1 см, большая боковая сторона составляет с основанием угол 45°.
10. Найдите площадь трапеции, у которой средняя линия равна 10 см, боковая сторона — 6 см и составляет с одним из оснований угол 150°.

C

11. Докажите, что отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, разбивает ее на две равновеликие части (рис. 22.3).

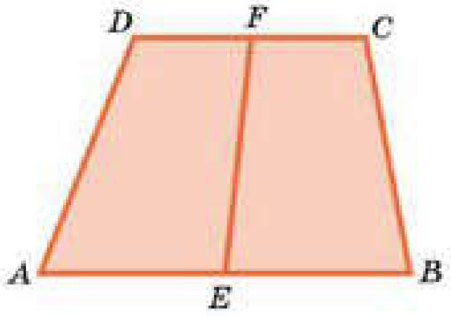


Рис. 22.3

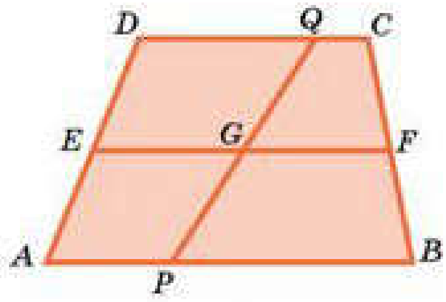


Рис. 22.4

12. Докажите, что прямая, проходящая через середину средней линии трапеции и пересекающая основания (рис. 22.4), делит эту трапецию на две равновеликие части.

13. В параллелограмме $ABCD$ точка E — середина стороны CD (рис. 22.5). Площадь треугольника ADE равна 6. Найдите площадь трапеции $ABCE$.

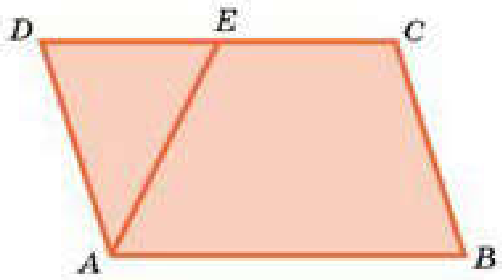


Рис. 22.5

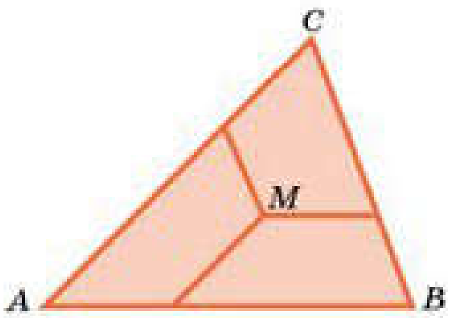


Рис. 22.6

14. В треугольнике ABC через точку M пересечения его медиан проведены отрезки, параллельные сторонам треугольника (рис. 22.6). Докажите, что образовавшиеся при этом три трапеции равновелики.

15. В трапеции $ABCD$ точка E — середина боковой стороны AD (рис. 22.7). Докажите, что площадь треугольника BCE равна половине площади трапеции $ABCD$.

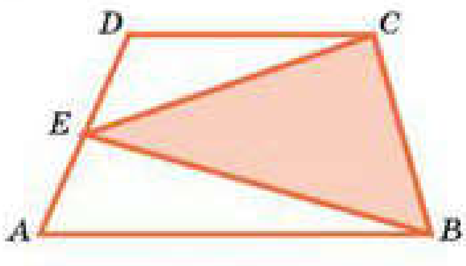


Рис. 22.7

16. Чему равна площадь трапеции $ABCD$ (рис. 22.8), если площадь закрашенного треугольника равна 3 см?

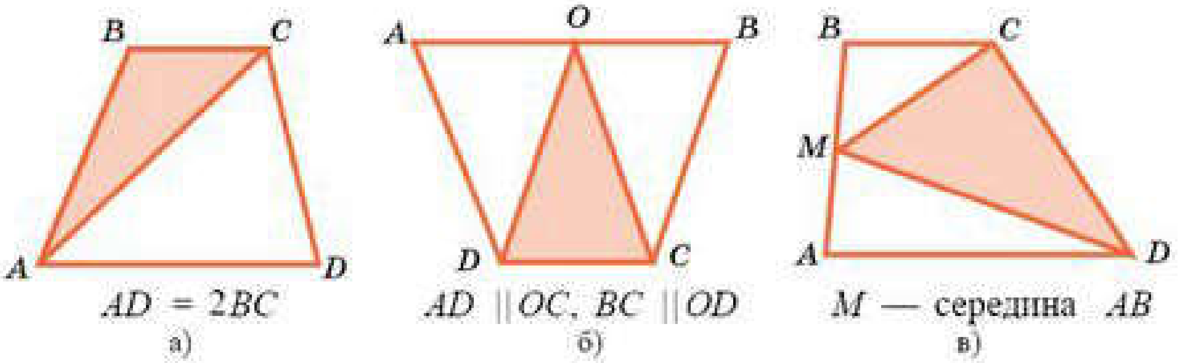


Рис. 22.8

17. Докажите, что площадь равнобедренной трапеции, диагонали которой пересекаются под прямым углом, равна квадрату ее высоты.

18. Докажите, что в трапеции $ABCD$ $S_2 = \frac{S_1 + S_3}{2}$ (рис. 22.9).

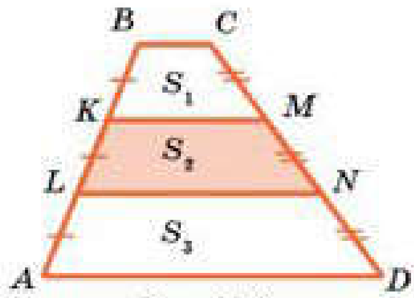


Рис. 22.9

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

19. Укажите какой-нибудь способ нахождения площади произвольного многоугольника.

§ 23. ПЛОЩАДЬ МНОГОУГОЛЬНИКА

Площадь многоугольника можно находить, разбивая его на треугольники. При этом площадь многоугольника будет равна сумме площадей этих треугольников (рис. 23.1).

Теорема. ***Площадь выпуклого четырехугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.***

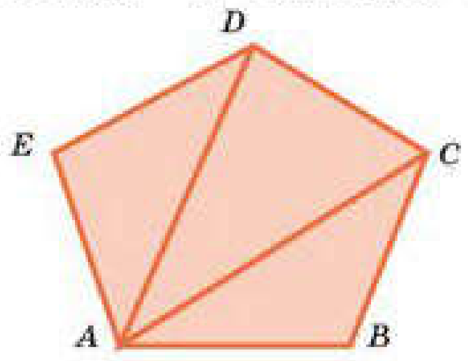


Рис. 23.1

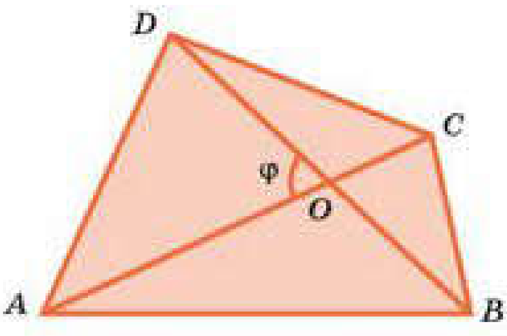


Рис. 23.2

Доказательство. Рассмотрим выпуклый четырехугольник $ABCD$. Обозначим O точку пересечения его диагоналей (рис. 23.2). Пусть φ — угол между этими диагоналями. Тогда

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \sin \angle AOB,\ S_{BOC} = \frac{1}{2} OC \cdot OB \cdot \sin \angle BOC,$$

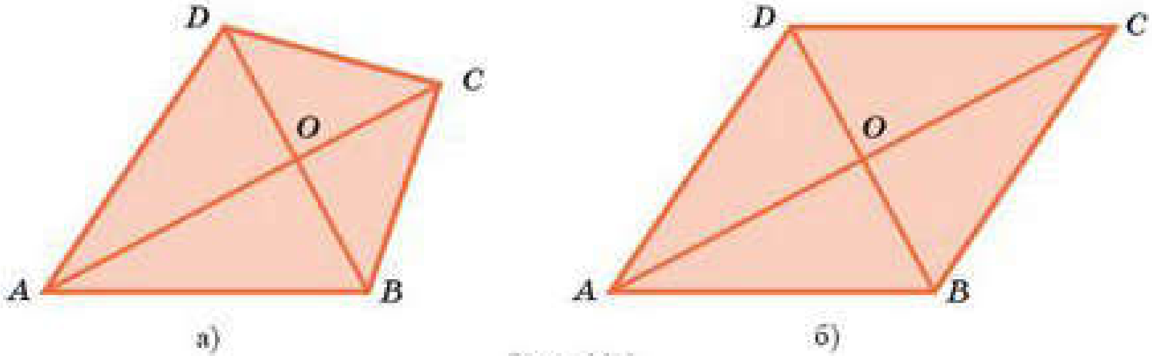
$$S_{AOD} = \frac{1}{2}OA \cdot OD \cdot \sin\angle AOD,\ S_{COD} = \frac{1}{2}OC \cdot OD \cdot \sin\angle COD.$$

Складывая эти равенства и учитывая, что синусы всех указанных углов равны синусу угла ϕ, получим искомую формулу площади выпуклого четырехугольника

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD \cdot \sin\phi. \square$$

Следствие 1. *Площадь параллелограмма равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.*

Следствие 2. *Площадь выпуклого четырехугольника, диагонали которого перпендикулярны, равна половине произведения этих диагоналей (рис. 23.3, а).*



а) б)

Рис. 23.3

Следствие 3. *Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей (рис. 23.3, б).*

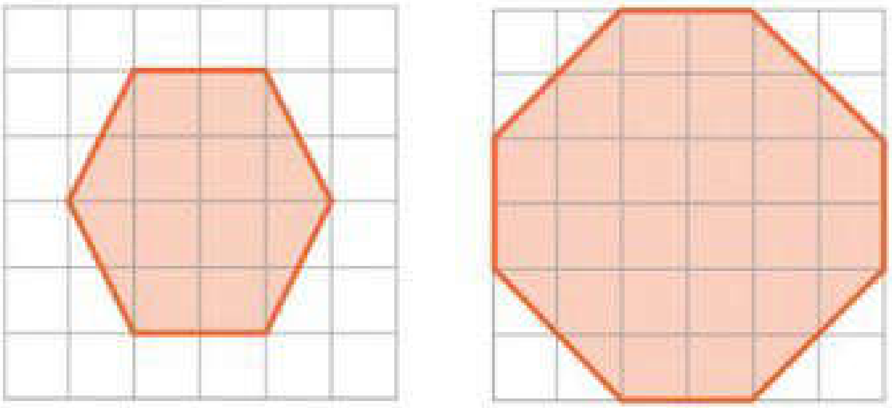
Выясните, верны ли эти теорема и следствие 2 для невыпуклых четырехугольников.

1. Как можно найти площадь выпуклого многоугольника?
2. Чему равна площадь выпуклого четырехугольника?
3. Чему равна площадь выпуклого четырехугольника, диагонали которого перпендикулярны?

Задачи

А

1. Найдите площадь правильного шестиугольника, сторона которого равна 1 см.
2. Диагонали выпуклого четырехугольника равны 6 см и 8 см, угол между ними равен 30°. Найдите площадь этого четырехугольника.
3. Диагонали четырехугольника перпендикулярны и равны 4 см и 5 см. Найдите площадь этого четырехугольника.
4. Найдите площади многоугольников, изображенных на рисунке 23.4. Стороны квадратных клеток равны 1.

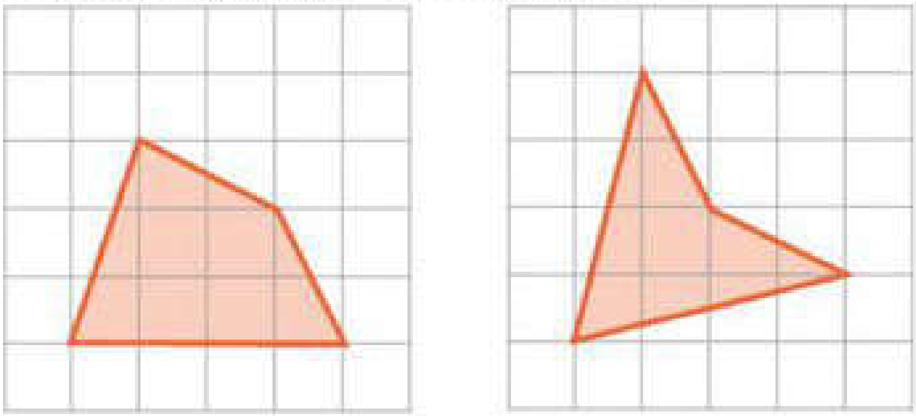


а) б)

Рис. 23.4

B

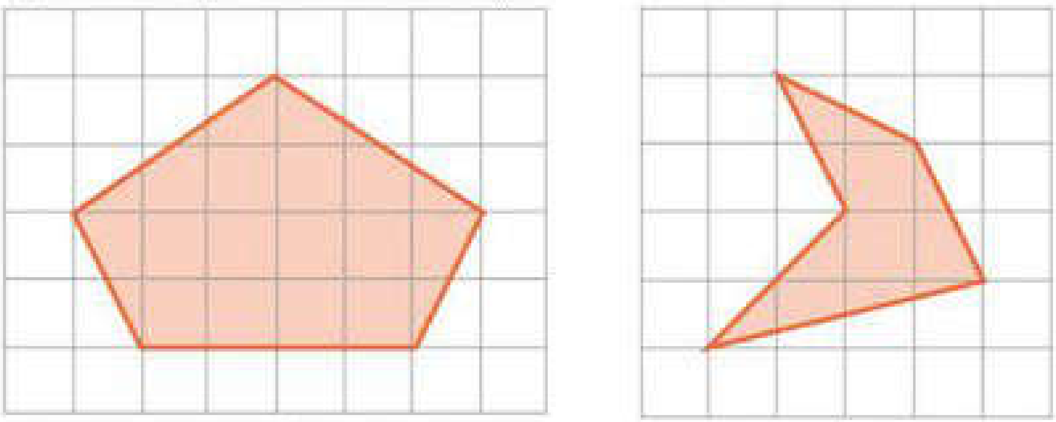
5. Найдите площади четырехугольников, изображенных на рисунке 23.5. Стороны квадратных клеток равны 1.



а) б)

Рис. 23.5

6. Найдите площади пятиугольников, изображенных на рисунке 23.6. Стороны квадратных клеток равны 1.



а) б)

Рис. 23.6

C

7. Диагонали выпуклого четырехугольника равны 8 и 10. Какую наибольшую площадь может иметь этот четырехугольник?

8. Докажите, что если через вершины выпуклого четырехугольника провести прямые, параллельные его диагоналям, то площадь четырехугольника, образованного этими прямыми, в два раза больше площади данного четырехугольника (рис. 23.7).

9. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки E и F — середины сторон соответственно BC и AD (рис. 23.8). Докажите, что площадь четырехугольника $AECF$ равна половине площади четырехугольника $ABCD$.

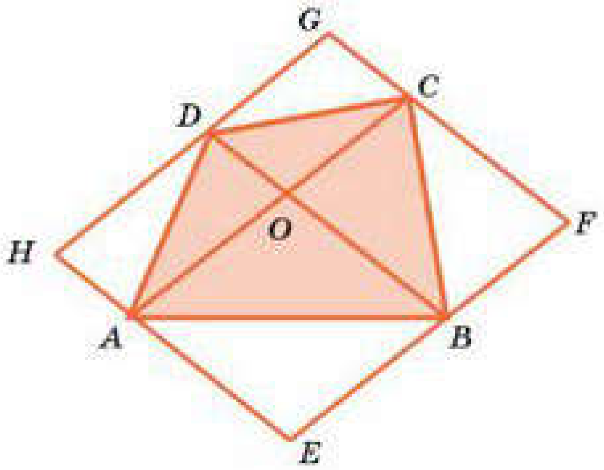


Рис. 23.7

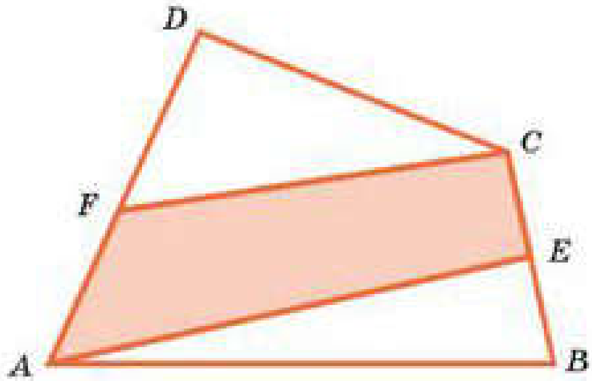


Рис. 23.8

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

10. Две фигуры называются *равносоставленными*, если они могут быть разрезаны на одинаковое число попарно равных фигур. Приведите примеры равносоставленных фигур. Что можно сказать о площадях равносоставленных фигур?

§ 24. РАВНОВЕЛИКОСТЬ И РАВНОСОСТАВЛЕННОСТЬ

Две фигуры называются *равносоставленными*, если они могут быть разрезаны на одинаковое число попарно равных фигур.

Из свойств площади следует, что равносоставленные фигуры равновелики. В частности, равносоставленные многоугольники равновелики. Например, изображенные на рисунке 24.1 правильный шестиугольник и параллелограмм — равносоставленные фигуры, так как они составлены из шести равносторонних треугольников.

Естественно поставить обратный вопрос: "Всякие ли два равновеликих многоугольника равносоставлены?". Утвердительный ответ был получен в начале XIX в.

В качестве применения равносоставленности рассмотрим еще одно доказательство теоремы Пифагора. С точки зрения площадей, ее можно переформулировать в следующем виде.

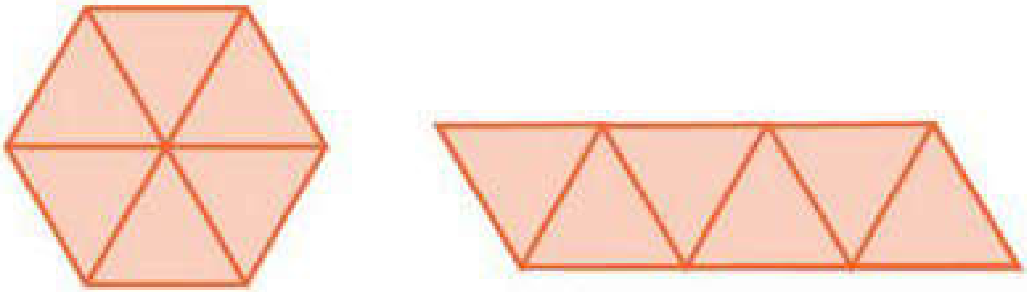


Рис. 24.1

Теорема. ***Площадь квадрата, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах*** .

Доказательство. Пусть дан прямоугольный треугольник с катетами a, b и гипотенузой c. Доказательство следует из рассмотрения двух квадратов со стороной, равной сумме катетов данного прямоугольного треугольника, в которых проведены отрезки, как показано на рисунке 24.2.

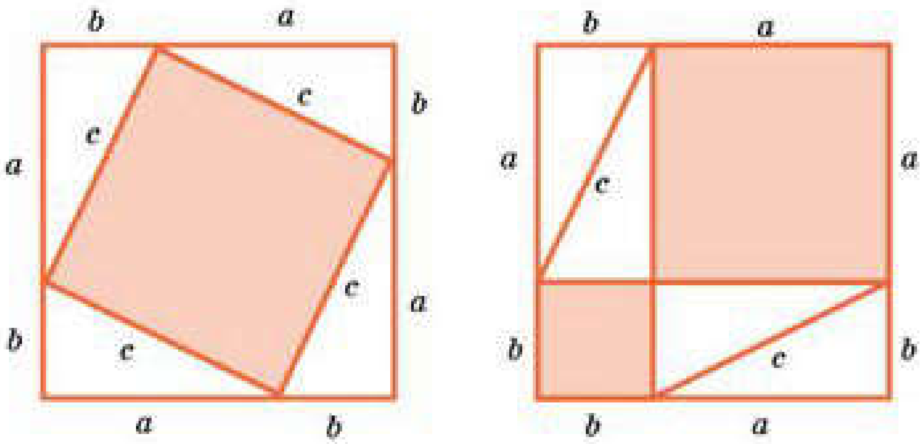


Рис. 24.2

В первом случае квадрат разобьется на квадрат, построенный на гипотенузе данного треугольника и четыре треугольника, равных данному. Во втором случае квадрат разобьется на два квадрата, построенных на катетах данного треугольника и четыре треугольника, равных данному. Таким образом, $c^2 = a^2 + b^2$. □

Сравните площади квадратов, построенных на сторонах: а) остроугольного; б) тупоугольного треугольников.

1. Какие фигуры называются *равносоставленными* ?
2. Какие фигуры называются *равновеликими* ?
3. Как связаны между собой равновеликость и равносоставленность произвольных фигур?
4. Как связаны между собой равновеликость и равносоставленность многоугольников?

Задачи

A

1. Разрежьте квадрат (рис. 24.3) на четыре равных: а) квадрата; б) треугольника.

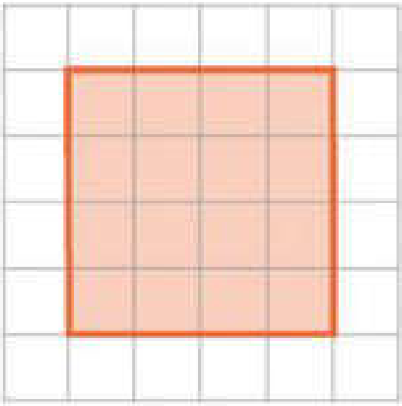


Рис. 24.3

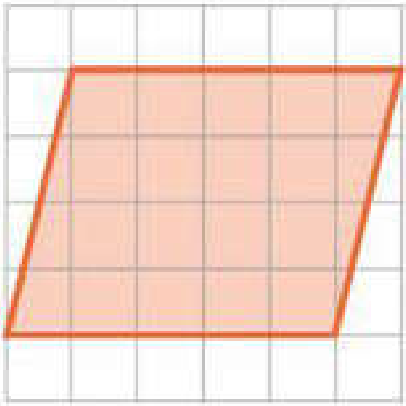


Рис. 24.4

2. Разрежьте параллелограмм (рис. 24.4) на: а) два; б) четыре равновеликих треугольника.
3. Разрежьте прямоугольник (рис. 24.5) на две части, из которых можно сложить треугольник.
4. Разрежьте шестиугольник (рис. 24.6) на две равные трапеции, из которых можно сложить параллелограмм.

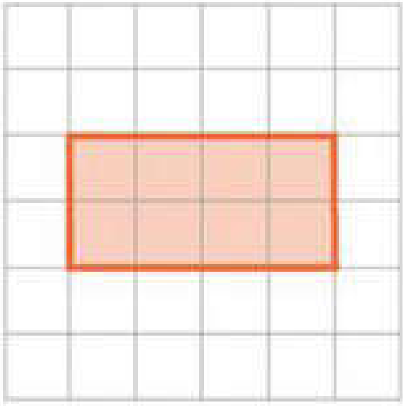


Рис. 24.5

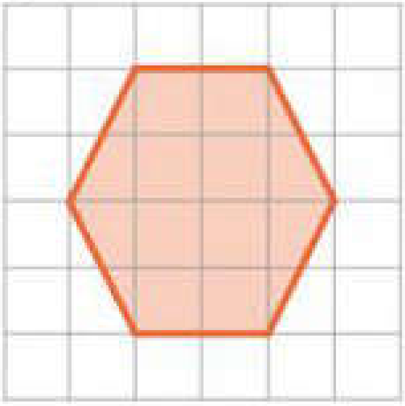


Рис. 24.6

B

5. Параллелограмм (рис. 24.7) разрежьте на две части, из которых можно сложить прямоугольник.
6. Треугольник (рис. 24.8) разрежьте на две части, из которых можно сложить параллелограмм.
7. Трапецию (рис. 24. 9) разрежьте на две части, из которых можно сложить треугольник.

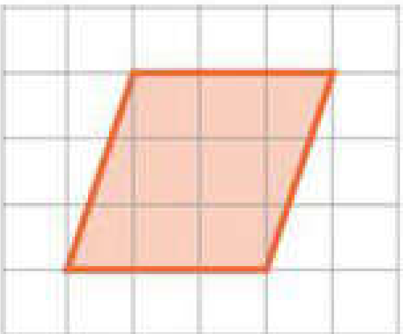


Рис. 24.7

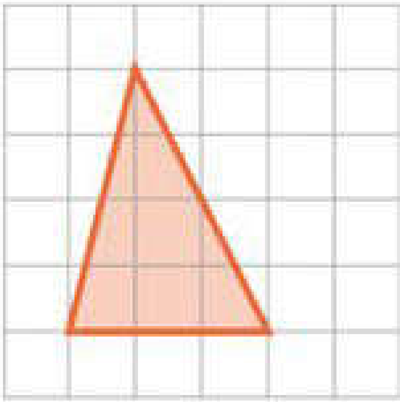


Рис. 24.8

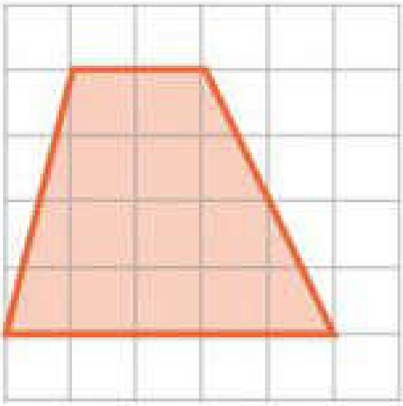


Рис. 24.9

8. Трапецию (рис. 24.10) разрежьте на две части, из которых можно сложить параллелограмм.

9. Трапецию (рис. 24.10) разрежьте на три части, из которых можно сложить прямоугольник.

10. Через вершину C треугольника ABC (рис. 24.11) проведите прямую, делящую этот треугольник на две равновеликие части.

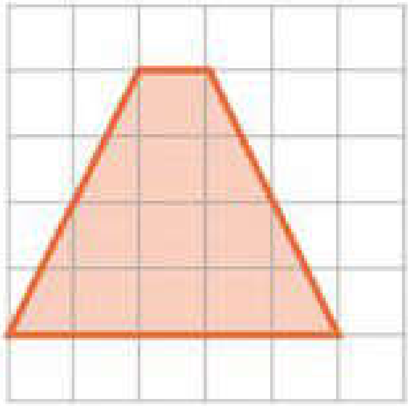


Рис. 24.10

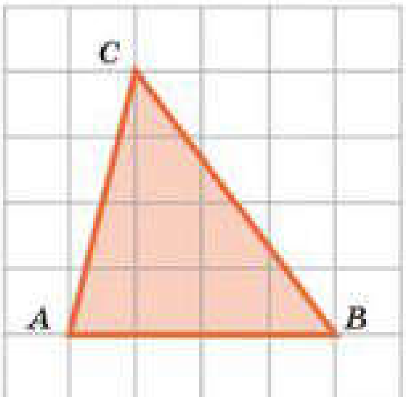


Рис. 24.11

11. Через точку E проведите прямую, делящую квадрат $ABCD$ (рис. 24.12) на две равновеликие части.

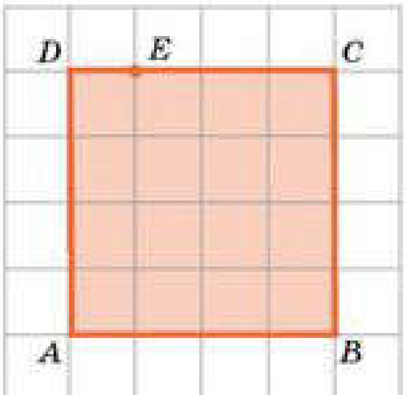


Рис. 24.12

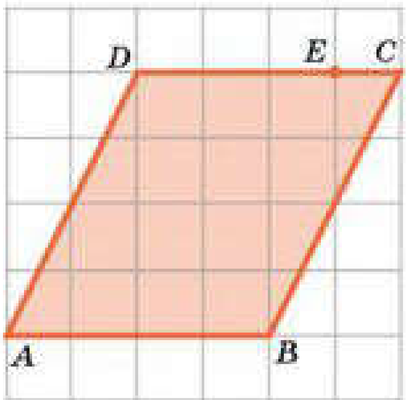


Рис. 24.13

12. Через точку E проведите прямую, делящую параллелограмм $ABCD$ (рис. 24.13) на две равновеликие части.

13. Через вершину C проведите прямую, делящую трапецию $ABCD$ (рис. 24.14) на две равновеликие части.

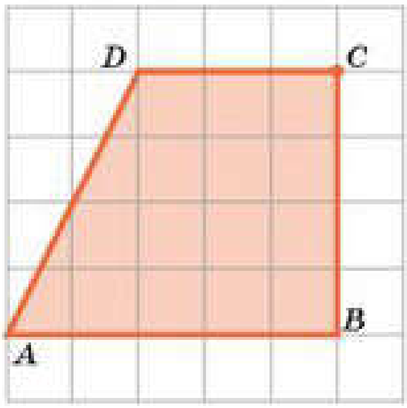


Рис. 24.14

C

14. Используя разрезания, показанные на рисунке 24.15 пунктиром, докажите, что площадь правильного восьмиугольника равна произведению его наибольшей и наименьшей диагоналей.

15. Разрежьте фигуру, изображенную на рисунке 24.16, на четыре равные части.

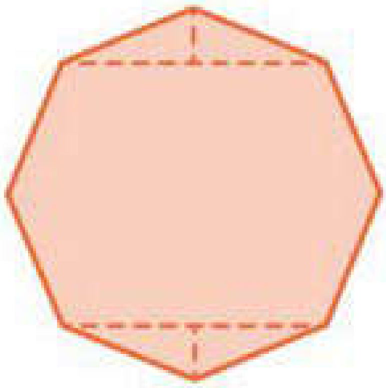


Рис. 24.15

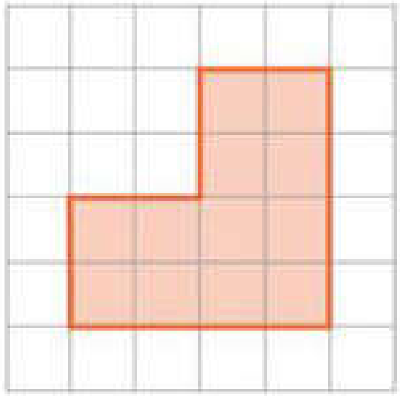


Рис. 24.16

16. Разрежьте фигуру, изображенную на рисунке 24.17, на четыре равные части.

17. Разрежьте правильный: а) шестиугольник; б) восьмиугольник на параллелограммы (рис. 24.18).

18. Разрежьте фигуру, изображенную на рисунке 24.19, на две равные части.

19. Разрежьте фигуру, изображенную на рисунке 24.20, на две равные части.

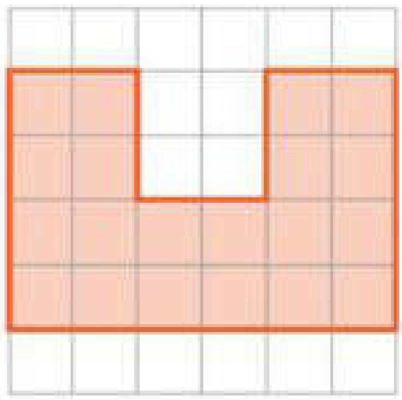
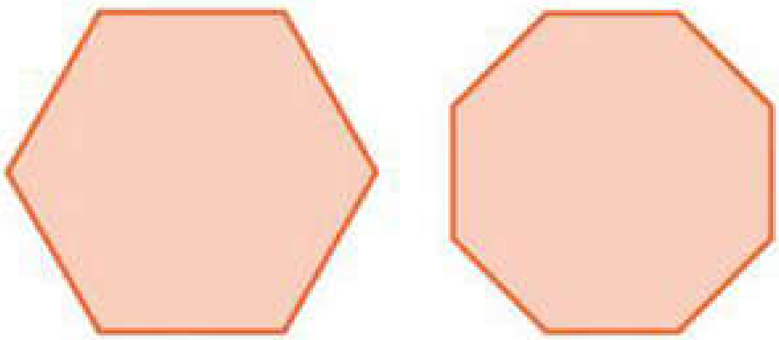


Рис. 24.17


а) б)
Рис. 24.18

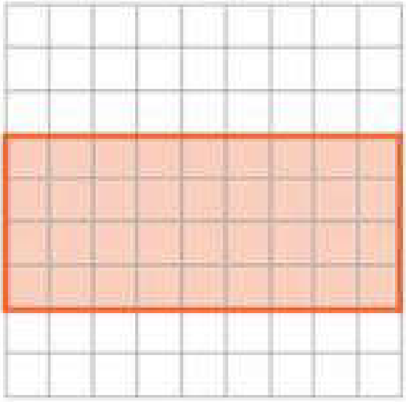


Рис. 24.19

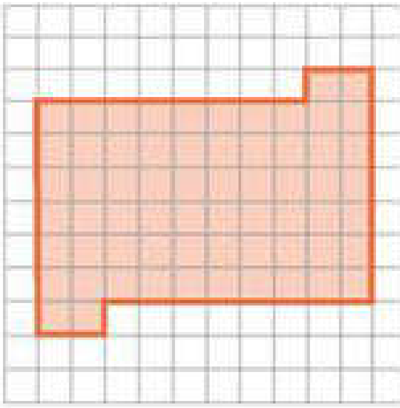


Рис. 24.20

20. Греческий крест (рис. 24.21) разрежьте на несколько частей, из которых можно сложить квадрат.

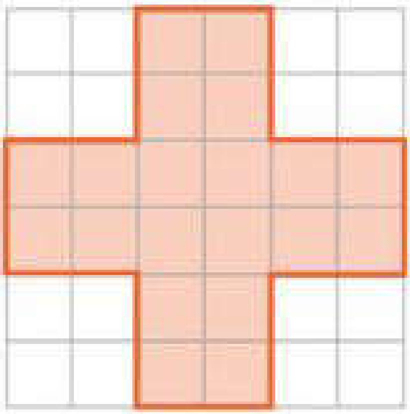


Рис. 24.21

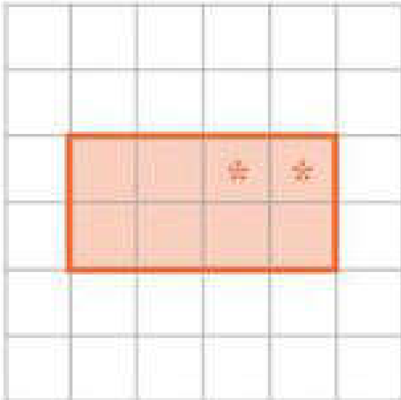


Рис. 24.22

21. Разрежьте прямоугольник, изображенный на рисунке 24.22, на две равные части так, чтобы в каждой из них была звездочка.

22. Разрежьте прямоугольник, изображенный на рисунке 24.23, на две равные части так, чтобы в каждой из них была звездочка.

23. Из квадрата 8×8 вырезали два угловых квадрата 1×1 (рис. 24.24). Докажите, что оставшуюся фигуру нельзя разрезать на прямоугольники, состоящие из двух квадратных клеток.

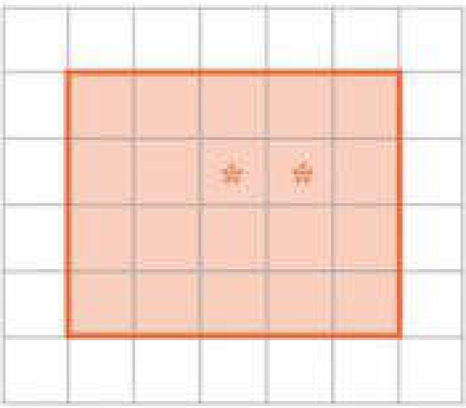


Рис. 24.23

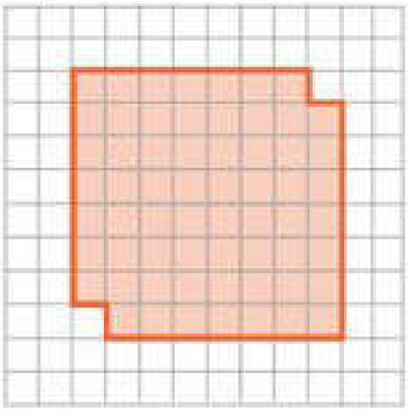


Рис. 24.24

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

24. Изобразите прямую. Отметьте на ней точку O. Отложите на этой прямой отрезок OE, который принимается за единичный отрезок. Как можно установить соответствие между числами и точками на этой прямой?

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Найдите площадь параллелограмма, если его стороны равны 4 см и 6 см, а один из углов равен 30°:

A. 3 см². B. 12 см². C. 24 см². D. 48 см².

2. Площадь параллелограмма равна 24 см². Найдите расстояние между его сторонами, равными 8 см:

A. 3 см. B. 4 см. C. 8 см. D. 12 см.

3. В параллелограмме, площадь которого равна 72 дм², стороны равны 6 дм и 10 дм. Найдите его высоты:

A. 1,2 дм, 1,5 дм. B. 1,5 дм, 18 дм.
C. 72 см, 120 см. D. 720 дм, 12 дм.

4. Площадь параллелограмма равна 36 см². Расстояния от точки пересечения диагоналей до его сторон равны 2 см и 3 см. Найдите периметр параллелограмма:

A. 7,2 см. B. 15 см. C. 30 см. D. 60 см.

5. Найдите стороны прямоугольника, если они относятся как 2 : 5, а его площадь равна 400 см²:

A. 10 см, 40 см. B. $4\sqrt{10}$ см, $10\sqrt{10}$ см.
C. 16 см, 25 см. D. $8\sqrt{5}$ см, $20\sqrt{5}$ см.

6. Площадь прямоугольника равна 400 см². Одну из его сторон увеличили в 2 раза, а другую уменьшили в 4 раза. Найдите площадь получившегося прямоугольника:

A. 50 см². B. 80 см². C. 100 см². D. 200 см².

7. Найдите площадь ромба, если его диагонали равны 6 см и 8 см:

A. 12 см². B. 24 см². C. 28 см². D. 48 см².

8. Найдите площадь квадрата, если его диагональ равна d:

A. d^2. B. $2d^2$. C. $\frac{d^2}{4}$. D. $\frac{d^2}{2}$.

9. Площадь ромба равна 2 м², тупой угол равен 150°. Найдите периметр ромба:

A. 1 м. B. 2 м. C. 8 м. D. 16 м.

10. Высота трапеции равна 12 см, площадь — 120 $см^2$. Найдите ее среднюю линию:

A. 5 см. B. 10 см. C. 12 см. D. 20 см.

11. Найдите площадь равнобедренной трапеции, у которой основания равны 15 см и 17 см, и боковая сторона составляет с одним из оснований угол 45°:

A. 8 $см^2$. B. 16 $см^2$. C. 32 $см^2$. D. 127,5 $см^2$.

12. Найдите площадь прямоугольной трапеции, у которой меньшие стороны равны по 12 см каждая, а наибольший угол равен 135°:

A. 216 $см^2$. B. 144 $см^2$. C. 72 $см^2$. D. 48 $см^2$.

13. Площадь трапеции равна 60 $см^2$, а ее высота равна 2 см. Найдите основания трапеции, если они относятся как 5 : 7:

A. 25 см и 35 см. B. 30 см и 42 см.
C. 10 см и 14 см. D. 5 см и 25 см.

14. Две стороны треугольника равны 8 см и 6 см. Высота, проведенная к первой стороне, равна 3 см. Найдите высоту, проведенную ко второй стороне треугольника:

A. 2 см. B. 3 см. C. 4 см. D. 6 см.

15. Найдите площадь прямоугольного треугольника, в котором гипотенуза равна 5 см, а один из катетов равен 4 см:

A. 10 $см^2$. B. 5 $см^2$. C. 12 $см^2$. D. 6 $см^2$.

16. Найдите площадь прямоугольного равнобедренного треугольника по его гипотенузе c:

A. $\frac{c^2}{2}$. B. $\frac{c^2}{4}$. C. $2c^2$. D. $\sqrt{2}\,c^2$.

17. Найдите площадь равностороннего треугольника со стороной 1:

A. $2\sqrt{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{6}$.

18. Найдите площадь равнобедренного треугольника, если его основание равно 6 см, а боковая сторона равна 10 см:

A. $3\sqrt{91}$ $см^2$. B. 27 $см^2$. C. 16 $см^2$. D. 30 $см^2$.

19. Стороны треугольника равны 10 см и 16 см, угол между ними равен 60°. Найдите площадь треугольника:

A. 40 $см^2$. B. $40\sqrt{3}$ $см^2$. C. 80 $см^2$. D. $40\sqrt{2}$ $см^2$.

20. Найдите наибольшую возможную площадь треугольника, две стороны которого равны 10 см и 20 см:

A. 40 $см^2$. B. 100 $см^2$. C. 200 $см^2$. D. 400 $см^2$.

ГЛАВА 4

ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ

§ 25. КООРДИНАТЫ ТОЧКИ

Прямая, на которой выбраны точка O и единичный отрезок OE, указывающий положительное направление, называется *координатной прямой*, или *координатной осью* (рис. 25.1). Точка O называется *началом координат*.

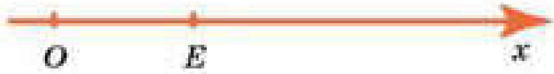


Рис. 25.1

Расстояние x от точки A координатной прямой до начала координат O, взятое со знаком "+", если A принадлежит положительной полуоси, и со знаком "–", если A принадлежит отрицательной полуоси, называется *координатой точки* A.

Теорема. ***Расстояние между точками A_1, A_2 на координатной прямой с координатами соответственно x_1, x_2 выражается формулой***

$$A_1A_2 = |x_2 - x_1|.$$

Доказательство проводится разбором различных случаев взаимного расположения точек на координатной прямой. Например, если точки A_1, A_2 расположены на положительной полуоси и точка A_1 лежит между точками O и A_2, $OA_1 = x_1$, $OA_2 = x_2$ (рис. 25.2), то в этом случае $x_1 < x_2$ и $A_1A_2 = OA_2 - OA_1 = x_2 - x_1 = |x_2 - x_1|$. ◻

Рис. 25.2

Другие случаи взаимного расположения точек на координатной прямой рассмотрите самостоятельно.

Перейдем теперь от прямой к плоскости.

Пара перпендикулярных координатных прямых с общим началом координат и равными единичными отрезками называется *прямоугольной системой координат* на плоскости. Начало координат обозначается буквой O, а координатные прямые обозначаются Ox, Oy и называются соответственно *осью абсцисс* и *осью ординат* (рис. 25.3).

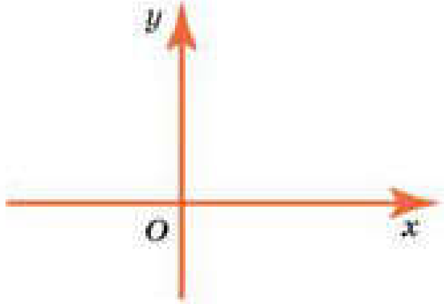


Рис. 25.3

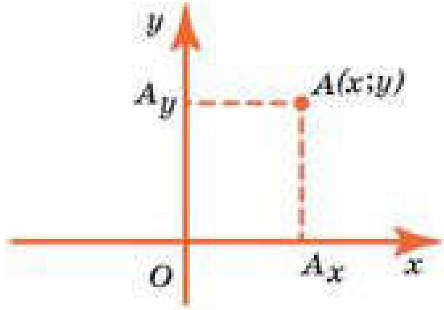


Рис. 25.4

Плоскос ть с заданной прямоугольной системой координат называется *координатной плоскостью*.

Рассмотрим точку A на координатной плоскости. Проведем через нее прямую, перпендикулярную оси Ox. Точку пересечения этой прямой с осью Ox обозначим A_x. Координата этой точки на оси Ox обозначается x и называется *абсциссой* точки A. Аналогично через точку A проведем прямую, перпендикулярную оси Oy. Точку ее пересечения с осью Oy обозначим A_y. Координата этой точки на оси Oy обозначается y и называется *ординатой* точки A (рис. 25.4).

Таким образом, каждой точке A на координатной плоскости соответствует пара $(x; y)$, называемая *координатами точки* на плоскости относительно данной системы координат. Точка A с координатами $(x; y)$ обозначается $A(x; y)$.

Для точек A_1, A_2 с заданными координатами найдем координаты середины отрезка A_1A_2.

Теорема. ***Середина A отрезка, соединяющего точки $A_1(x_1; y_1)$, $A_2(x_2; y_2)$ на координатной плоскости, имеет координаты*** $A\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}\right)$.

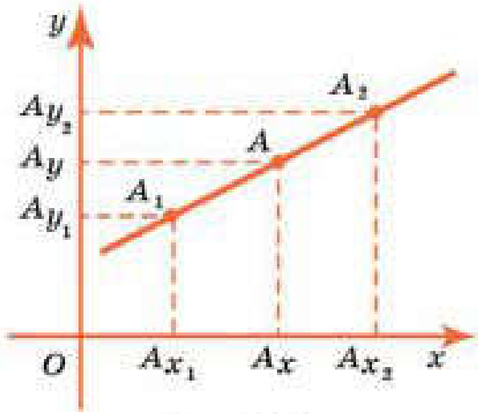


Рис. 25.5

Доказательство. Рассмотрим случай, когда прямая A_1A_2 не параллельна осям координат и не совпадает с ними. Соединим эти точки отрезком и обозначим A его середину (рис. 25.5). Опустим из точек A_1, A, A_2 перпендикуляры на оси координат. Основани я перпендикуляров обозначим соответственно A_{x_1}, A_x, A_{x_2}, A_{y_1}, A_y, A_{y_2}. Четырехугольники $A_{x_1}A_{x_2}A_2A_1$, $A_{y_1}A_{y_2}A_2A_1$ являются трапециями. Отрезки AA_x, AA_y — их средние линии. Значит, точки A_x, A_y являются серединами соответственно отрезков $A_{x_1}A_{x_2}$, $A_{y_1}A_{y_2}$. Следовательно, точка A имеет координаты

$$A\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}\right).$$

Случай, когда прямая A_1A_2 параллельна или совпадает с одной из осей координат, рассмотрите самостоятельно.

Используя теорему о пропорциональных отрезках, докажите, что если точка A принадлежит отрезку, соединяющему точки $A_1(x_1; y_1)$ и $A_2(x_2; y_2)$, и делит его в отношении k, т. е. $\frac{A_1A}{AA_2} = k$, то она имеет координаты $A\left(\frac{x_1 + kx_2}{1 + k}; \frac{y_1 + ky_2}{1 + k}\right)$.

Исторические сведения

Р. Декарт
(1596—1650 гг.)

Впервые прямоугольные координаты были введены Р. Декартом, поэтому прямоугольную систему координат называют также *декартовой системой координат*, а сами координаты — *декартовыми координатами*. Введение прямоугольных координат на плоскости позволило свести многие геометрические задачи к чисто алгебраическим и, наоборот, алгебраические задачи — к геометрическим. Метод, основанный на этом, называется *методом координат*.

Рене Декарт — один из выдающихся ученых XVII в. Им получены глубокие результаты в области философии, математики, физики, биологии, медицины и др.

Наибольшую известность и славу принесла Декарту книга, вышедшая в 1637 г. По обычаям того времени, она имела довольно длинное название: "Рассуждение о методе, позволяющем направлять разум и отыскивать истину в науках. Кроме того, Диоптрика, Метеоры и Геометрия, которые являются приложениями этого метода".

"Геометрия" Декарта, являющаяся приложением к "Рассуждению о методе...", произвела переворот в геометрии того времени. За короткое время "Геометрия" выдержала четыре издания и была настольной книгой каждого математика XVII в. В XVIII—XIX вв. на основе метода координат Декарта возникли многомерная, а затем и бесконечномерная геометрии. Сегодня без метода координат невозможно представить себе ни математику, ни физику.

1. Какая прямая называется *координатной* ?
2. Что называется *координатой точки на координатной прямой* ?
3. Как выражается расстояние между двумя точками на координатной прямой?
4. Что называется *прямоугольной системой координат* ?
5. Какая плоскость называется *координатной плоскостью* ?
6. Как называются *координатные прямые* на координатной плоскости?
7. Что называется *абсциссой* и *ординатой* точки на координатной плоскости?
8. Что такое *координаты точки* на координатной плоскости?
9. Кто впервые ввел координаты на плоскости?
10. Какой метод называется *методом координат* ?

Задачи

А

1. Для заданных точек на координатной плоскости (рис. 25.6) найдите их координаты.

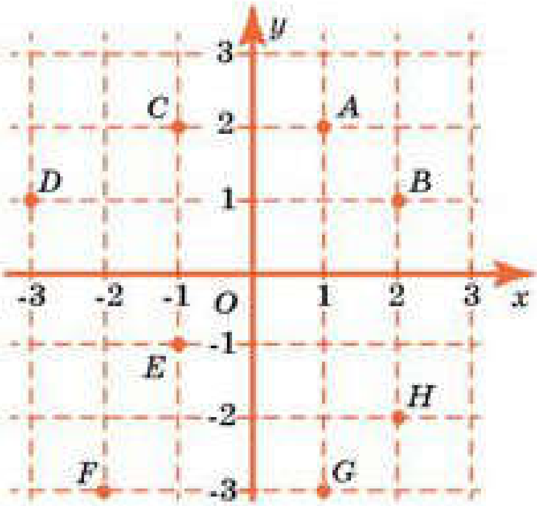


Рис. 25.6

2. На координатной плоскости изобразите точки $A(2;\ 1)$, $B(1;\ 3)$, $C(4;\ 2)$, $D(-3;\ 2)$, $E(-2;\ -3)$, $F(3;\ -2)$.
3. На прямой, параллельной оси абсцисс, взяты две точки. У одной из них ордината равна 2. Чему равна ордината другой точки?
4. На прямой, перпендикулярной оси абсцисс, взяты две точки. У одной из них абсцисса равна 3. Чему равна абсцисса другой точки?
5. Из точки $A(2;\ 3)$ опущен перпендикуляр на ось абсцисс. Найдите координаты основания перпендикуляра.
6. Через точку $A(2;\ 3)$ проведена прямая, параллельная оси абсцисс. Найдите координаты ее точки пересечения с осью ординат.
7. Найдите координаты середины отрезка AB, если: а) $A(1;\ -2)$, $B(5;\ 6)$; б) $A(-3;\ 4)$, $B(1;\ 2)$; в) $A(5;\ 7)$, $B(-3;\ -5)$.

В

8. Для данной системы координат на плоскости изобразите точки $A(1;\ 1)$ и $B(1;\ -1)$. Изобразите отрезок AB. Пересекает ли он какую-нибудь ось координат? Найдите координаты точек пересечения (если они есть).
9. Изобразите геометрическое место точек на координатной плоскости, для которых: а) x ǀ 0; б) $y < 0$; в) x m 0, y ǀ 0; г) $xy > 0$.
10. Нарисуйте ломаную, вершины которой имеют координаты: $(4;\ 0)$, $(3;\ 1{,}5)$, $(1;\ 2)$, $(-1;\ 2)$, $(-4;\ 0{,}5)$, $(-6;\ 2)$, $(-5{,}5;\ 0)$, $(-6;\ -2)$, $(-4;\ -0{,}5)$, $(-1;\ -2)$, $(1;\ -2)$, $(3;\ -1{,}5)$, $(4;\ 0)$. Кто изображен на рисунке?

C

11. Точки $O(0;\ 0)$, $A(6;\ 2)$, $B(x;\ y)$ и $C(0;\ 6)$ являются последовательными вершинами параллелограмма. Найдите координаты точки B.

12. Точки $O(0;\ 0)$, $A(8;\ 2)$, $B(10;\ 8)$, $C(2;\ 6)$ являются вершинами четырехугольника. Найдите координаты точки P пересечения его диагоналей.

13. Точки $O(0;\ 0)$, $A(8;\ 0)$, $B(7;\ 6)$ являются вершинами треугольника. Найдите координаты точки M пересечения его медиан.

Подготовьте сообщение

14. Рене Декарт — великий математик и мыслитель XVII века (www.math.ru).

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

15. Попробуйте найти формулу, выражающую расстояние между двумя точками $A_1(x_1;\ y_1)$, $A_2(x_2;\ y_2)$ через их координаты.

§ 26. РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ДВУМЯ ТОЧКАМИ. УРАВНЕНИЕ ОКРУЖНОСТИ

Найдем формулу, выражающую расстояние между точками $A_1(x_1;\ y_1)$, $A_2(x_2;\ y_2)$ на координатной плоскости.

Рассмотрим сначала случай, когда $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$. Обозначим A точку с координатами $(x_2;\ y_1)$. В прямоугольном треугольнике AA_1A_2 имеем $A_1A = |x_2 - x_1|$, $AA_2 = |y_2 - y_1|$ (рис. 26.1).

По теореме Пифагора получаем следующую формулу расстояния между точками

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

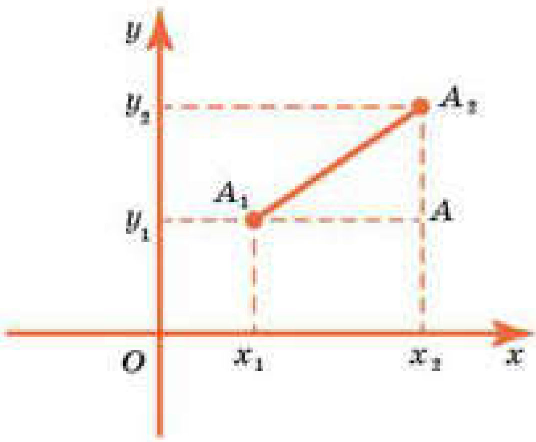


Рис. 26.1

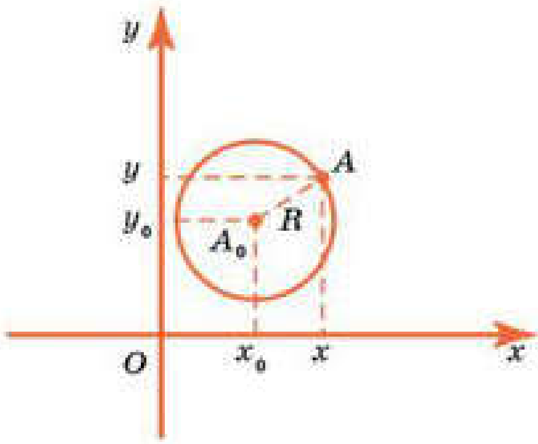


Рис. 26.2

Легко видеть, что если $x_1 = x_2$ или $y_1 = y_2$, то формула расстояния между точками на плоскости остается верной.

Убедитесь в этом самостоятельно.

Непосредственно из определения окружности и круга следует, что координаты точек окружности с центром в точке $A_0(x_0; y_0)$ и радиусом R (рис. 26.2) удовлетворяют равенству

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2,$$

а координаты точек соответствующего круга — неравенству

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \le R^2.$$

В частности, окружность с центром в начале координат $O(0; 0)$ и радиусом R задается уравнением

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

а соответствующий круг — неравенством

$$x^2 + y^2 \le R^2.$$

1. Как выражается расстояние между точками через их координаты?
2. Каким уравнением задается окружность на координатной плоскости?
3. Каким неравенством задается круг на координатной плоскости?

Задачи

A

1. Найдите расстояние между точками: а) $A_1(1; 2)$ и $A_2(-1; 1)$; б) $B_1(3; 4)$ и $B_2(3; -1)$.

2. Найдите расстояние от точки $A(2; 3)$ до оси: а) Ox; б) Oy.

3. Какая из точек A (2; 1) или B (–2; 1) лежит ближе к началу координат?

4. Найдите координаты центра C и радиус R окружности, заданной уравнением: а) $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 9$; б) $x^2 + (y - 6)^2 = 16$.

5. Напишите уравнение окружности: а) с центром в точке $O(0; 0)$ и радиусом 1; б) с центром в точке $C(1; -2)$ и радиусом 4.

6. Выясните, как расположена точка относительно окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 = 25$, если она имеет координаты: а) (1; 2); б) (3; 4); в) (–4; 3); г) (0; 5); д) (5; –1).

B

7. Даны точки $M(1; -2)$, $N(-2; 3)$ и $K(3; 1)$. Найдите периметр треугольника MNK.

8. Определите вид треугольника ABC, если его вершины имеют координаты:

а) $A(-2; -1)$, $B(2; -1)$, $C(-2; 1)$;

б) $A(-2; -2)$, $B(2; -2)$, $C(0; 1)$.

9. Определите вид четырех угольника, если его вершины имеют координаты:
а) $A(-2;0)$, $B(0;-2)$, $C(2;0)$, $D(0;2)$;
б) $A(-2;1)$, $B(2;-1)$, $C(3;1)$, $D(-1;3)$;
в) $A(-2;1)$, $B(2;2)$, $C(1;4)$, $D(-3;3)$;
г) $A(-2;-1)$, $B(2;-1)$, $C(1;2)$, $D(-1;2)$.

10. Найдите уравнение окружности с центром в точке $C(1;2)$, касающейся оси абсцисс.

11. Составьте уравнение окружности с центром в точке $C(-3;4)$, проходящей через начало координат.

12. Каким неравенством задается геометрическое место точек, не принадлежащих кругу с центром в точке $C(x_0;y_0)$ и радиусом R?

C

13. На оси абсцисс найдите точку, равноудаленную от точек:
а) $A(1;2)$, $B(3;2)$;
б) $A(1;2)$, $B(2;3)$.

14. На оси ординат найдите точку, равноудаленную от точек:
а) $A(2;2)$, $B(2;4)$;
б) $A(1;5)$, $B(3;1)$.

15. Найдите точку, равноудаленную от точек:
а) $O(0;0)$, $B(2;0)$, $C(0;2)$;
б) $A(0;2)$, $B(-1;1)$, $C(1;1)$.

16. Докажите, что уравнение: а) $x^2-4x+y^2=0$; б) $x^2+2x+y^2-4y+4=0$ задает окружность. Найдите ее радиус и координаты центра.

17. Точка $A(0;\sqrt{2})$ принадлежит окружности с центром $C(3;0)$. Напишите уравнение этой окружности.

18. Даны точки $A(2;0)$, $B(-2;6)$. Найдите уравнение окружности, диаметром которой является отрезок AB.

19. Выясните, как расположены относительно друг друга окружность, заданная уравнением $x^2+y^2=1$, и окружность, заданная уравнением: а) $x^2+6x+y^2-8y-11=0$; б) $x^2+6x+y^2-8y=0$; в) $x^2+6x+y^2-8y+9=0$; г) $x^2+6x+y^2-8y+16=0$.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

20. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $A(1;1)$, и: а) параллельную оси абсцисс; б) параллельную оси ординат; в) через начало координат.

§ 27. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ

Составим уравнение прямой, проходящей через две данные точки $A_1(x_1;\ y_1)$ и $A_2(x_2;\ y_2)$.

Рассмотрим различные случаи расположения точек $A_1(x_1;\ y_1)$ и $A_2(x_2;\ y_2)$.

1. Если $y_1 = y_2 = b$, то точка $A(x;\ y)$ принадлежит прямой, проходящей через точки $A_1(x_1;\ b)$ и $A_2(x_2;\ b)$, если ее координаты удовлетворяют уравнению $y = b$ (рис. 27.1). В этом случае прямая перпендикулярна оси Oy.

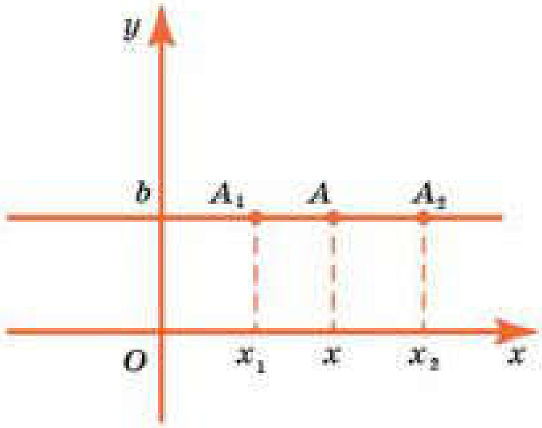


Рис. 27.1

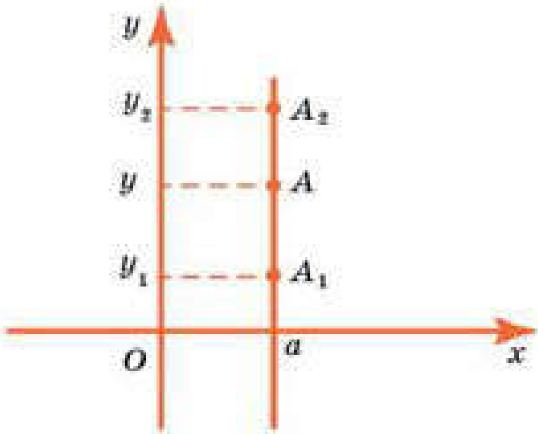


Рис. 27.2

2. Если $x_1 = x_2 = a$, то точка $A(x;\ y)$ принадлежит прямой, проходящей через точки $A_1(a;\ y_1)$ и $A_2(a;\ y_2)$, если ее координаты удовлетворяют уравнению $x = a$ (рис. 27.2). В этом случае прямая перпендикулярна оси Ox.

3. В остальных случаях отметим дополнительно точки $B(x;\ y_1)$, $B_2(x_2;\ y_1)$ (рис. 27.3).

Выразим ординату y точки $A(x;\ y)$, принадлежащей данной прямой, через x. Обозначим k тангенс угла $A_2A_1B_2$.

Рассмотрим случай, когда $x_2 > x_1$ и $y_2 > y_1$ (рис. 27.3). Для треугольника $A_1A_2B_2$ имеем: $A_1B_2 = x_2 - x_1$, $A_2B_2 = y_2 - y_1$. Следовательно, тангенс угла $A_2A_1B_2$ выражается формулой

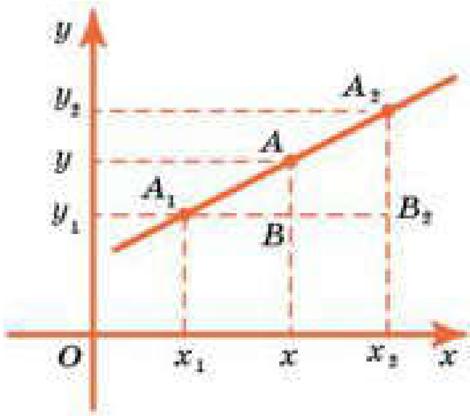


Рис. 27.3

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Для треугольника AA_1B имеем: $A_1B = x - x_1$, $AB = y - y_1$, $AB = A_1B\,\mathrm{tg}\,\angle AA_1B$. Следовательно, имеет место равенство $y - y_1 = k(x - x_1)$, из которого получаем уравнение прямой

$$y = y_1 + k(x - x_1).$$

В случае, если $x_2 > x_1$ и $y_2 < y_1$ (рис. 27.4), тангенс угла $A_2A_1B_2$ выражается формулой

$$k = \frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1},$$

а уравнение прямой имеет тот же вид $y = y_1 - k(x - x_1)$.

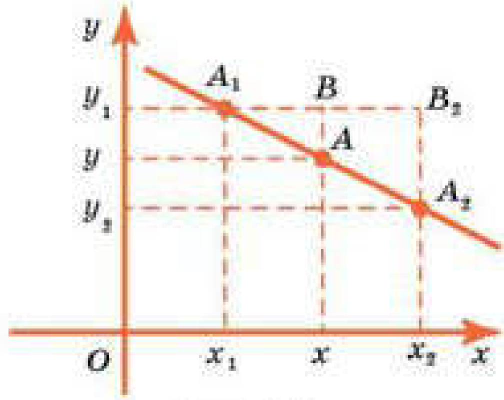


Рис. 27.4

Таким образом, и в том, и в другом случае уравнение прямой, проходящей через точки $A_1(x_1; y_1)$ и $A_2(x_2; y_2)$, имеет вид

$$y = k(x - x_1) + y_1,$$

где $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (см. рис. 27.3).

Подставляя это выражение k в уравнение прямой и делая равносильные преобразования, получим, что в случае $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$, уравнение прямой, проходящей через точки $A_1(x_1; y_1)$ и $A_2(x_2; y_2)$, можно переписать в виде

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Коэффициент k называется *угловым коэффициентом* прямой. По определению он равен тангенсу угла, который образует прямая с осью абсцисс, взятому со знаком "+" или "–". Угловой коэффициент прямой, параллельной оси Ox, будем считать равным нулю.

Например, для прямой, проходящей через точки $A_1(1; 3)$, $A_2(3; 1)$, угловой коэффициент k равен -1, а уравнение этой прямой имеет вид $y = -(x - 1) + 3$.

Делая преобразования, окончательно получаем уравнение $y = -x + 4$.

Рассмотрим случаи взаимного расположения двух прямых, в зависимости от их уравнений.

Пусть две прямые заданы уравне ниями

$$y = k_1x + l_1,\ y = k_2x + l_2.$$

Если $k_1 = k_2$ и $l_1 \neq l_2$, то из равенства угловых коэффициентов k_1 и k_2 следует равенство соответственных углов α_1 и α_2, которые эти прямые образуют с осью Ox (рис. 27.5). Значит, в этом случае прямые параллельны.

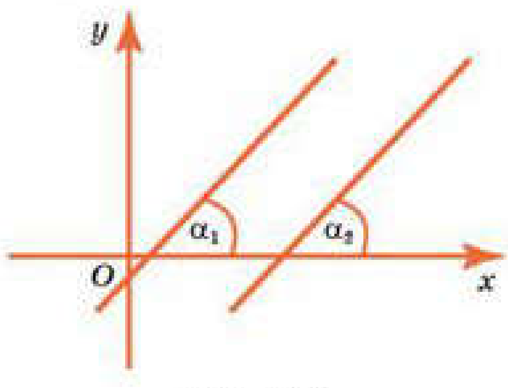


Рис. 27.5

Если $k_1 \neq k_2$, то углы α_1 и α_2, которые эти прямые образуют с осью Ox, не равны. Значит, в этом случае прямые пересекаются (рис. 27.6).

Если две прямые, заданные уравнениями $y = k_1x + l_1$, $y = k_2x + l_2$, перпендикулярны (рис. 27.7), то углы α_1 и α_2, которые эти прямые образуют с осью Ox, в сумме составляют $90°$.

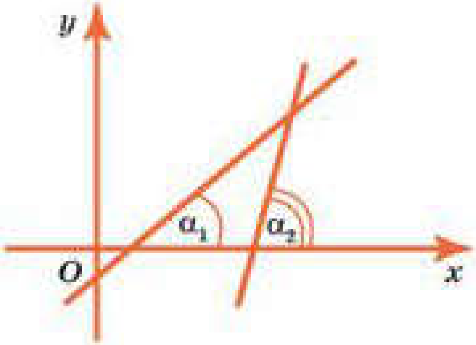


Рис. 27.6

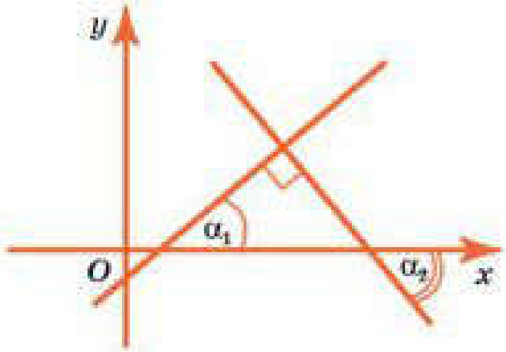


Рис. 27.7

Следовательно, для тангенсов этих углов имеет место равенство

$$\operatorname{tg} \alpha_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2 = 1.$$

Учитывая, что для угловых коэффициентов k_1 и k_2 имеют место равенства

$$k_1 = \operatorname{tg} \alpha_1 \text{ и } k_2 = -\operatorname{tg} \alpha_2,$$

получаем, что условием перпендикулярности двух прямых является выполнимость равенства

$$k_1 \cdot k_2 = -1.$$

Например, для прямой, проходящей через точку $A(0;\ 1)$, и перпендикулярной прямой $y = -x + 4$, угловой коэффициент равен 1, а само уравнение этой прямой имеет вид $y = x + 1$.

В общем случае уравнение прямой имеет вид

$$ax + by + c = 0,$$

где a и b — числа, одновременно не равные нулю.

Если $a = 0$, то это уравнение сводится к виду $y = -\frac{c}{b}$.

Если $b = 0$, то это уравнение сводится к виду $x = -\frac{c}{a}$.

Если a и b не равны нулю, то это уравнение сводится к виду

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}.$$

Отметим, что если в уравнениях $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ все коэффициенты пропорциональны, т. е. $a_2 = d \cdot a_1$, $b_2 = d \cdot b_1$, $c_2 = d \cdot c_1$, то эти уравнения задают одну и ту же прямую.

Если же коэффициенты a_1, a_2 и b_1, b_2 пропорциональны, а c_1 и c_2 нет, т. е. $a_2 = d \cdot a_1$, $b_2 = d \cdot b_1$, $c_2 \neq d \cdot c_1$, то эти уравнения задают параллельные прямые.

Если для коэффициентов уравнений этих прямых выполняется равенство

$$a_1a_2 = -b_1b_2,$$

то данные прямые перпендикулярны.

Попробуйте объяснить это самостоятельно.

1. Каким уравнением задается прямая на плоскости?
2. Что называется *угловым коэффициентом прямой* ?
3. Какой вид имеет уравнение прямой в общем случае?
4. Какие уравнения задают одну и ту же прямую?
5. Какие уравнения задают параллельные прямые?
6. Какие уравнения задают пересекающиеся прямые?
7. Какие уравнения задают перпендикулярные прямые?

Задачи

A

1. Какие уравнения имеют координатные прямые: а) Ox; б) Oy?

2. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $A(1;\ 2)$ и параллельную оси: а) Ox; б) Oy.

3. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;\ 3)$ и перпендикулярную оси: а) Ox; б) Oy.

4. Найдите угловые коэффициенты прямых, изображенных на рисунке 27.8.

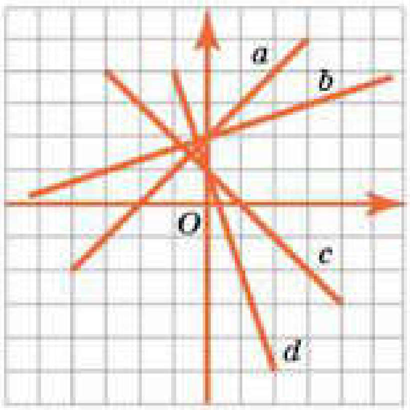


Рис. 27.8

5. Напишите уравнение прямой, проходящей через начало координат с угловым коэффициентом: а) $k = 1$; б) $k = 2$; в) $k = \frac{1}{2}$; г) $k = -1$; д) $k = -2$; е) $k = -\frac{1}{2}$. Изобразите эти прямые.

6. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;\ -1)$ с угловым коэффициентом: а) $k = 1$; б) $k = 2$; в) $k = \frac{1}{2}$; г) $k = -1$; д) $k = -2$; е) $k = -\frac{1}{2}$. Изобразите эти прямые.

B

7. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки: а) $A_1(1;\ 2)$, $A_2(3;\ 2)$; б) $A_1(1;\ 2)$, $A_2(2;\ 3)$; в) $A_1(1;\ 2)$, $A_2(2;\ 1)$.

8. Изобразите прямую, заданную уравнением:
а) $y = x$; б) $y = 2x + 1$; в) $y = 1 - x$; г) $y = -1 - x$.

9. Изобразит е прямую, заданную уравнением:
а) $x + y = 1$; б) $x + y = 0$; в) $x - y = 1$; г) $x - y = 0$.

10. Изобразите прямую, заданную уравнением:
а) $2x + 3y - 6 = 0$; б) $x - 2y + 1 = 0$;
в) $y - 2x + 1 = 0$.

11. Напишите уравнения прямых, изображенных на рисунке 27.9.

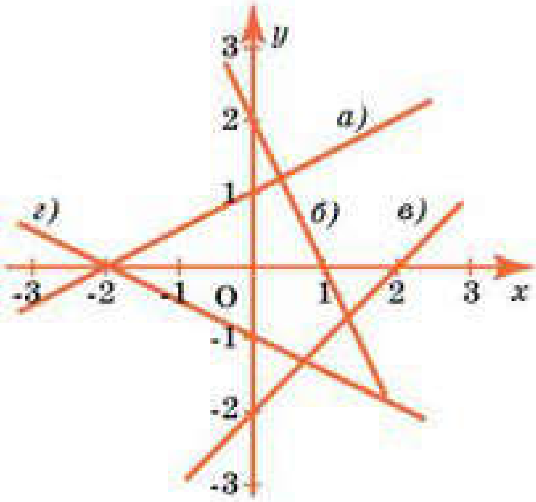


Рис. 27.9

C

12. Определите, какие из перечисленных ниже пар прямых:
а) параллельны; б) перпендикулярны:
1) $x + y - 2 = 0$, $x + y + 3 = 0$;
2) $x + y - 2 = 0$, $x - y - 3 = 0$;
3) $-7x + y = 0$, $7x - y + 4 = 0$;
4) $4x - 2y - 8 = 0$, $-x - 2y + 4 = 0$.

13. Найдите координаты точки пересечения прямых:
а) $x - y - 1 = 0$, $x + y + 3 = 0$; б) $x - 3y - 2 = 0$, $2x - 5y + 1 = 0$.

14. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $A(0; 1)$ и параллельную прямой: а) $y = x$; б) $y = 2x$.

15. Прямая a проходит через точки с координатами $(0; 4)$ и $(6; 0)$. Прямая b проходит через точку с координатами $(0; 8)$ и параллельна прямой a. Найдите абсциссу точки пересечения прямой b с осью Ox.

16. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $A(0; 1)$ и перпендикулярную прямой: а) $y = x$; б) $y = 2x$.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

17. Предложите какой-нибудь способ аналитического задания: а) полуплоскости; б) выпуклого многоугольника.

§ 28*. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ ФИГУР НА ПЛОСКОСТИ

Рассмотрим прямую, заданную уравнением $y = kx + l$.

Полуплоскость, ограниченная этой прямой и расположенная выше нее относительно оси Oy, состоит из точек с координатами $(x; y)$, для которых выполняется неравенство $y \geq kx + l$ (рис. 28.1).

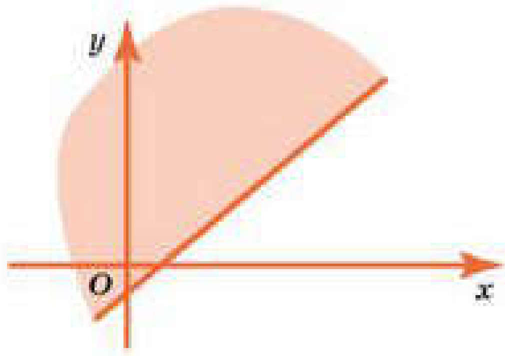


Рис. 28.1

Соответственно, полуплоскость, расположенная ниже данной прямой, состоит из точек с координатами $(x; y)$, для которых выполняется неравенство $y \le kx + l$.

Попробуйте объяснить это самостоятельно.

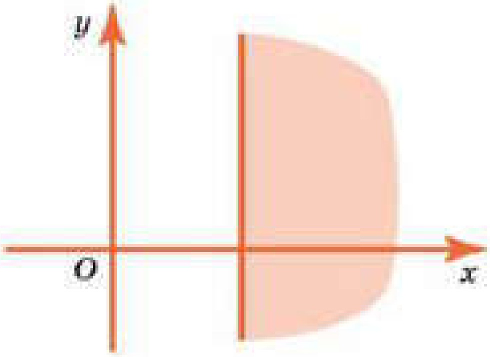


Рис. 28.2

Если прямая задана уравнением $x = a$, то полуплоскость, ограниченная этой прямой и расположенная правее нее относительно оси Ox, состоит из точек с координатами $(x; y)$, для которых выполняется неравенство $x \ge a$ (рис. 28.2).

Соответственно, полуплоскость, расположенная левее данной прямой, состоит из точек с координатами $(x; y)$, для которых выполняется неравенство $x \le a$.

В общем случае полуплоскость, ограниченная прямой $ax + by + c = 0$, задается неравенством $ax + by + c \ge 0$.

Учитывая, что выпуклый многоугольник можно представить как пересечение полупространств, ограниченных прямыми, содержащими стороны этого многоугольника (рис. 28.3), получаем, что выпуклый многоугольник на координатной плоскости можно задать системой неравенств:

$$\begin{cases} a_1x + b_1x + c_1 \geqslant 0, \\ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \\ a_nx + b_nx + c_n \geqslant 0. \end{cases}$$

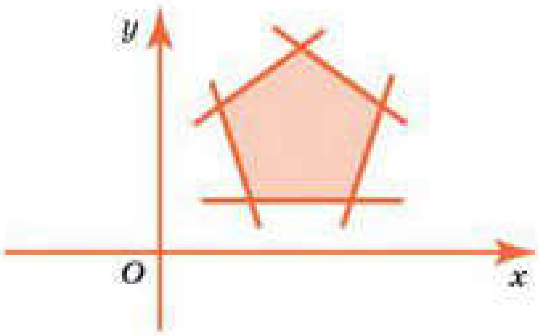


Рис. 28.3

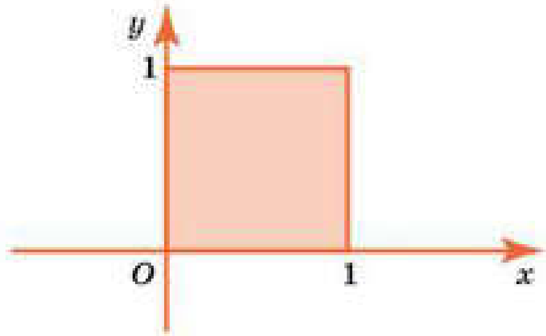


Рис. 28.4

Например, единичный квадрат, изображенный на рисунке 28.4, задается системой неравенств:

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 \leqslant y \leqslant 1. \end{cases}$$

Аналитическое задание фигур используется для решения геометрических задач алгебраическими методами, а также для компьютерного моделирования и составления математических моделей различных явлений.

1. Как задается полуплоскость?
2. Как задается выпуклый многоугольник?

Задачи

A

1. Укажите геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют неравенствам:
а) $x > 0$, $y > 0$; б) $x < 0$, $y > 0$;
в) $x > 0$, $y < 0$; г) $x < 0$, $y < 0$.

2. Изобразите геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют неравенствам:
а) $0 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq 3$;
б) $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 3$.

3. Две полуплоскости задаются неравенствами:
$a_1x + b_1y + c_1 \geq 0$, $a_2x + b_2y + c_2 \geq 0$.
Как будет задаваться пересечение этих полуплоскостей?

B

4. Нарисуйте многоугольник, координаты точек которого удовлетворяют неравенствам:

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 4, \\ 0 \leqslant y \leqslant 4, \\ x + y \geqslant 4. \end{cases}$$

5. Изобразите фигуру, координаты которых удовлетворяют неравенству $|x| + |y| \leq 3$.

6. Напишите неравенства, которым удовлетворяют координаты точек фигур, изображенных на рисунке 28.5.

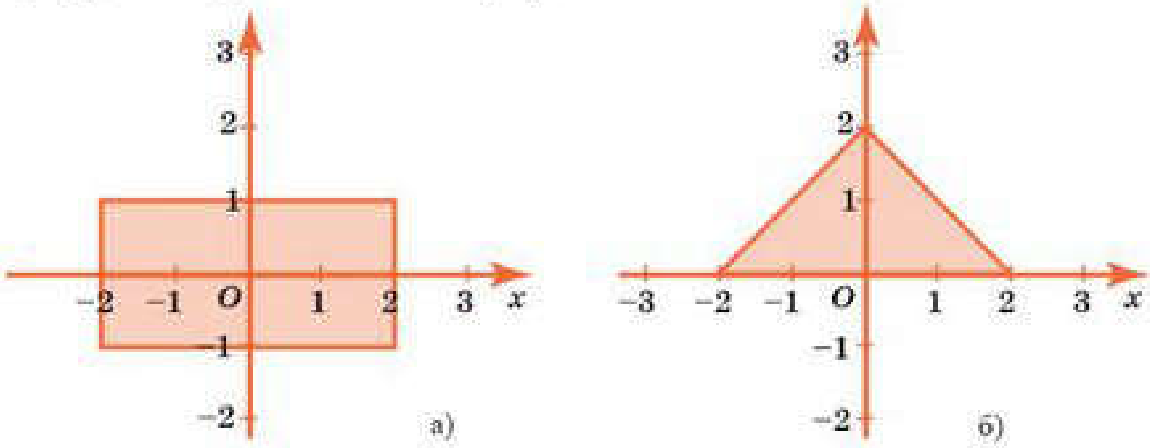


Рис. 28.5

C

7. На клетчатой бумаге изобразите прямые, заданные уравнениями $x = 2y$ и $y = 3x$. Найдите угол между этими прямыми.

8. Найдите периметр прямоугольника, координаты точек которого удовлетворяют неравенствам:

$$\begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 3, \\ 2 \leqslant y \leqslant 5. \end{cases}$$

9. Какого радиуса должна быть окружность с центром в точке $P(8; 6)$, чтобы она касалась внешним образом окружности с центром в начале координат и радиусом 4?

10. Напишите неравенства, задающие многоугольник, изображенный на рисунке 28.6.

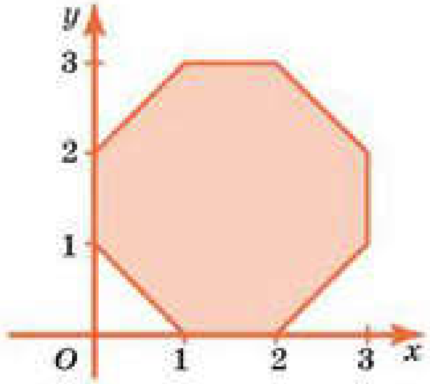


Рис. 28.6

11. Напишите неравенства, задающие треугольник с вершинами $A(3; 1)$, $B(0; 3)$, $C(2; 4)$.

12. Напишите неравенства, задающие четырехугольник с вершинами $O(0; 0)$, $A(1; 0)$, $B(2; 2)$, $C(1; 2)$.

13. Изобразите фигуру, координаты $(x; y)$ точек которой удовлетворяют равенству $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 2$.

14. Напишите неравенства, которым удовлетворяют координаты точек фигур, изображенных на рисунке 28.7.

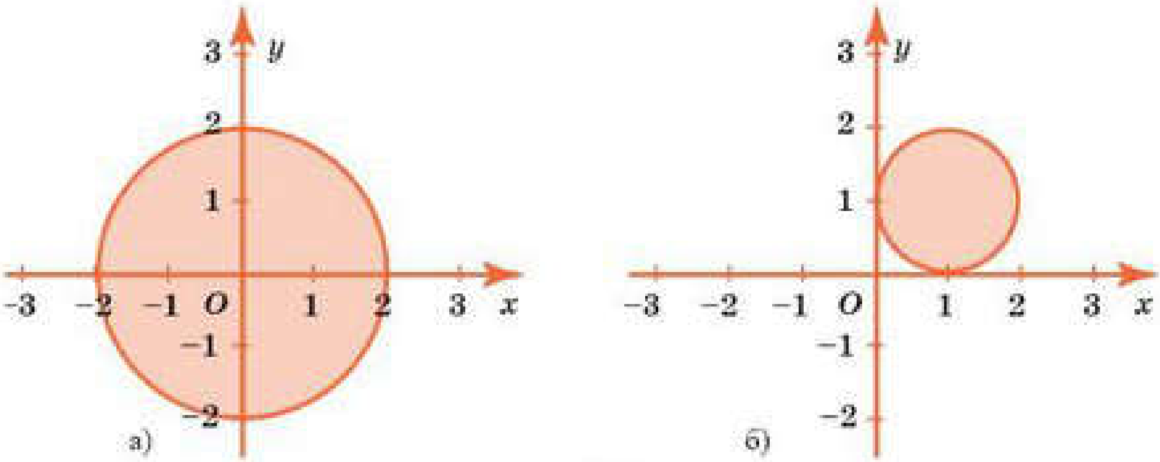


Рис. 28.7

15. Изобразите фигуру, координаты $(x; y)$ точек которой удовлетворяют неравенству $0 \leqslant x^2 + y^2 - 2x \leqslant 3$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. На прямой, перпендикулярной оси абсцисс, взяты две точки. У одной абсцисса равна –2. Чему равна абсцисса другой точки:

A. 2. B. 0.
C. –2. D. Нельзя определить?

2. На прямой, параллельной оси ординат, взяты две точки. Абсцисса одной из них равна 5. Чему равна абсцисса другой точки:

A. 5. B. 0.
C. –5. D. Нельзя определить?

3. Из точки $A(-1;\ 8)$ опущен перпендикуляр на ось абсцисс. Найдите координаты его основания:

A. $(-1;\ 0)$. B. $(0;\ 8)$. C. $(1;\ 0)$. D. $(0;\ -8)$.

4. Через точку $B(5;\ -4)$ проведена прямая, параллельная оси абсцисс. Найдите координаты ее точки пересечения с осью ординат:

A. $(5;\ 0)$. B. $(-5;\ 0)$. C. $(0;\ -4)$. D. $(0;\ 4)$.

5. Точки $O(0;\ 0)$, $A(x;\ y)$, $B(6;\ 8)$ и $C(0;\ 6)$ являются вершинами параллелограмма. Найдите координаты точки A:

A. $(2;\ 6)$. B. $(2;\ 8)$. C. $(6;\ 2)$. D. $(6;\ 0)$.

6. Найдите координаты точки пересечения прямых, заданных уравнениями $3x + 2y = 14$ и $y = 2x$:

A. $(1;\ 2)$. B. $(2;\ 4)$. C. $(3;\ 6)$. D. $(4;\ 8)$.

7. Найдите координаты середины отрезка CD, если $C(0;\ -9)$ и $D(-5;\ 16)$:

A. $(0;\ -3{,}5)$. B. $(-2{,}5;\ 3{,}5)$. C. $(-5;\ -7)$. D. $(-2{,}5;\ -3{,}5)$.

8. Точки $O(0;\ 0)$, $A(10;\ 8)$, $B(8;\ 2)$, $C(2;\ 6)$ являются вершинами четырехугольника. Найдите координаты точки P пересечения его диагоналей:

A. $(5;\ 4)$. B. $(4;\ 5)$. C. $(3;\ 4)$. D. $(4;\ 3)$.

9. Найдите геометрическое место точек на координатной плоскости, для которых $x = -y$:

A. Прямые, параллельные оси абсцисс.
B. Биссектрисы первого и третьего координатных углов.
C. Биссектрисы второго и четвертого координатных углов.
D. Прямые, перпендикулярные оси абсцисс.

10. Найдите расстояние между точками $M(0;\ -8)$ и $N(-1;\ 0)$:

A. –3. B. 3. C. $\sqrt{17}$. D. $\sqrt{65}$.

11. Найдите периметр квадрата, две противолежащие вершины которого имеют координаты (4; 4) и (8; 4):

A. 16. B. $4\sqrt{2}$. C. $4\sqrt{5}$. D. $8\sqrt{2}$.

12. Найдите уравнение прямой, проходящей через точки $A(2;\ 0)$, $B(0;\ 3)$:

A. $2x + 3y = 9$. B. $3x + 2y = 6$.
C. $2x - 3y = 9$. D. $3x - 2y = 6$.

13. Найдите уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;\ 1)$, и параллельную прямой $y = 2x$:

A. $x - 2y = 1$. B. $2x + y = 3$.
C. $2x - y = 3$. D. $x + 2y = 4$.

14. Найдите уравнение окружности с центром в точке $C(-2;\ 7)$, проходящей через начало координат:

A. $x^2 + y^2 = 9$. B. $(x - 2)^2 + (y + 7)^2 = 9$.
C. $(x + 2)^2 + (y - 7)^2 = 53$. D. $x^2 + y^2 = \sqrt{53}$.

15. Найдите координаты центра окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 - 12y + 4x = -15$:

A. (2; –6). B. (–2; 6). C. (6; –2). D. (–6; 2).

16. Какого радиуса должна быть окружность с центром в точке $P(8;\ 6)$, чтобы она касалась оси ординат:

A. 3. B. 4. C. 6. D. 8?

17. Какого радиуса должна быть окружность с центром в точке $P(4;\ 3)$, чтобы она касалась внешним образом окружности с центром в начале координат и радиусом 2:

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4?

18. На оси ординат найдите точку, равноудаленную от точек $E(1;\ 2)$ и $F(3;\ 4)$:

A. (2; 1). B. (–2; 0). C. (0; 2). D. (0; 5).

19. Определите вид треугольника ABC, если $A(0;\ -2)$, $B(-2;\ 0)$, $C(2;\ 2)$:

A. Прямоугольный. B. Равнобедренный.
C. Равносторонний. D. Произвольный.

20. Определите вид четырехугольника $OBCD$, если $O(0;\ 0)$, $B(4;\ 2)$, $C(6;\ 6)$, $D(2;\ 4)$:

A. Прямоугольник. B. Квадрат.
C. Ромб. D. Трапеция.

ПОВТОРЕНИЕ КУРСА ГЕОМЕТРИИ 8 КЛАССА

1. Простая ломана я имеет 10 вершин. Сколько у нее сторон?
2. Простая замкнутая ломаная имеет 20 сторон. Сколько у нее вершин?
3. Изобразите замкнутую пятистороннюю ломаную, которая имеет: а) две точки самопересечения; б) три точки самопересечения; в) пять точек самопересечения.
4. На сколько треугольников делится выпуклый: а) четырехугольник; б) пятиугольник; в) шестиугольник; г) n-угольник своими диагоналями, проведенными из одной вершины?
5. Сколько всего диагоналей имеет: а) четырехугольник; б) пятиугольник; в) шестиугольник?
6. Чему равны углы правильного: а) треугольника; б) четырехугольника; в) пятиугольника; г) шестиугольника?
7. Сумма углов выпуклого многоугольника равна $900°$. Сколько у него сторон?
8. Найдите внешние углы правильного: а) четырехугольника; б) пятиугольника; в) шестиугольника; г) восьмиугольника.
9. Углы выпуклого четырехугольника пропорциональны числам 1, 2, 3, 4. Найдите их.
10. Докажите, что у выпуклого многоугольника может быть не более трех острых внутренних углов.
11. Диагональ параллелограмма образует с двумя его сторонами углы $25°$ и $35°$. Найдите углы параллелограмма.
12. Найдите углы параллелограмма, если сумма двух из них равна: а) $80°$; б) $100°$; в) $160°$.
13. Две стороны параллелограмма относятся как $3:4$, а периметр его равен 2,8 м. Найдите стороны параллелограмма.
14. Как расположены биссектрисы углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне?
15. Как расположены биссектрисы углов параллелограмма (с неравными смежными сторонами), противолежащих друг другу?
16. На сторонах AB и CD параллелограмма $ABCD$ отложены равные отрезки $AE = CF$. Докажите, что четырехугольник $BFDE$ является параллелограммом.
17. Дан параллелограмм $ABCD$. E, F, G, H — середины его сторон. Докажите, что четырехугольник $EFGH$ является параллелограммом.
18. Постройте параллелограмм по двум сторонам и диагонали.
19. В прямоугольнике острый угол между его диагоналями равен $50°$. Найдите углы, которые образуют диагонали со сторонами прямоугольника.

20. Найдите диагонали прямоугольника, если его периметр равен 34 см, а периметр одного из треугольников, на которые диагональ разделила прямоугольник, равен 30 см.
21. Постройте прямоугольник по двум соседним сторонам.
22. Докажите, что середины сторон прямоугольника являются вершинами ромба.
23. Углы, образуемые диагоналями ромба с одной из его сторон, относятся как 4 : 5. Найдите углы ромба.
24. Стороны треугольника равны 8 см, 10 см и 12 см. Найдите стороны треугольника, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника.
25. Докажите, что середины сторон произвольного четырехугольника являются вершинами параллелограмма.
26. Диагонали четырехугольника равны a и b. Найдите периметр четырехугольника, вершинами которого являются середины сторон данного четырехугольника.
27. Боковые стороны прямоугольной трапеции равны 4 и 5. Найдите высоту этой трапеции.
28. Чему равны углы равнобедренной трапеции, если известно, что разность противолежащих углов равна 40°?
29. Средняя линия трапеции равна 5. Одно основание равно 4. Найдите другое основание.
30. Периметр трапеции равен 50 см, а сумма непараллельных сторон равна 20 см. Найдите среднюю линию трапеции.
31. Основания трапеции равны 4 см и 10 см. Найдите отрезки, на которые делит среднюю линию трапеции одна из ее диагоналей.
32. Стороны угла с вершиной O пересечены двумя параллельными прямыми в точках A, B и C, D соответственно. Найдите: а) CD, если $OA = 8$ см, $AB = 4$ см, $OD = 6$ см; б) OC и OD, если $OA : OB = 3 : 5$ и $OD - OC = 8$ (см); в) OA и OB, если $OC : CD = 2 : 3$ и $OA + OB = 14$ (см).
33. Разделите данный отрезок на: а) три равные части; б) пять равных частей.
34. В параллелограмме $ABCD$ точка E — середина стороны CD. Отрезок AE пересекает диагональ BD в точке F. Найдите отношение $DF : FB$.
35. К какой из сторон треугольника ближе расположен центр описанной окружности?
36. К какой из вершин треугольника ближе расположен центр вписанной окружности?
37. Постройте треугольник. Изобразите: а) точку пересечения медиан; б) точку пересечения биссектрис; в) точку пересечения высот или их продолжений.

38. Найдите: а) $\sin 30°$; б) $\cos 60°$; в) $\mathrm{tg}\ 45°$; г) $\mathrm{ctg}\ 45°$.
39. В каких пределах могут изменяться: а) синус; б) косинус острого угла?
40. В каких пределах могут изменяться: а) тангенс; б) котангенс острого угла?
41. Для каких углов синус равен косинусу?
42. Для каких острых углов: а) синус меньше косинуса; б) синус больше косинуса?
43. Для каких углов: а) тангенс меньше котангенса; б) тангенс больше котангенса?
44. У прямоугольного треугольника заданы катеты a и b. Найдите гипотенузу c, если: а) $a = 3$, $b = 4$; б) $a = 5$, $b = 12$; в) $a = 8$, $b = 15$.
45. У прямоугольного треугольника заданы гипотенуза c и катет a. Найдите второй катет, если: а) $c = 5$, $a = 3$; б) $c = 13$, $a = 5$; в) $c = 10$, $a = 8$.
46. Найдите диагональ квадрата со стороной 1.
47. Диагональ квадрата равна 2. Найдите его сторону.
48. Найдите высоту равностороннего треугольника со стороной 1.
49. Найдите высоту, опущенную на основание равнобедренного треугольника со сторонами 5, 5, 6.
50. Найдите сторону ромба, если его диагонали равны 6 см и 8 см.
51. Упростите выражение: а) $1 - \sin^2 A$; б) $1 + \sin^2 A + \cos^2 A$.
52. Найдите $\sin A$, если: а) $\cos A = \frac{1}{2}$; б) $\cos A = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
53. Найдите $\cos A$, если: а) $\sin A = \frac{1}{3}$; б) $\sin A = \frac{\sqrt{2}}{3}$.
54. Найдите $\mathrm{tg}\ A$, если: а) $\cos A = \frac{5}{13}$; б) $\cos A = 0{,}8$.
55. Докажите тождество $1 + \mathrm{ctg}^2 A = \frac{1}{\sin^2 A}$.
56. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, угол A равен $45°$, $AC = 1$. Найдите высоту CH.
57. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\cos A = \frac{4}{5}$, $BC = 3$. Найдите AB.
58. В треугольнике ABC $AC = BC = 1$, угол C равен $120°$. Найдите высоту AH.
59. Чему равен синус: а) $120°$; б) $135°$; в) $150°$?
60. Чему равен косинус: а) $120°$; б) $135°$; в) $150°$?
61. Чему равен тангенс: а) $120°$; б) $135°$; в) $150°$?
62. Чему равен котангенс: а) $120°$; б) $135°$; в) $150°$?
63. Докажите, что для тупых углов A имеют место равенства: $\mathrm{tg}\ A = -\mathrm{tg}\ (180° - A)$; $\mathrm{ctg}\ A = -\mathrm{ctg}\ (180° - A)$.

64. Докажите, что для острых углов A имеют место равенства: $\sin(90^\circ + A) = \cos A$, $\cos(90^\circ + A) = -\sin A$.
65. Горная железная дорога поднимается на 1 м на каждые 20 м пути. Найдите угол подъема в градусах. В ответе укажите приближенное значение, выражаемое целым числом градусов.
66. Человек, пройдя вверх по склону холма 1000 м, поднялся на 70 м над плоскостью основания холма. Найдите (в среднем) угол наклона холма в градусах. В ответе укажите приближенное значение, выражаемое целым числом градусов.
67. Угол подъема дороги равен 5°. Найдите высоту, на которую поднимется пешеход, пройдя 100 м.
68. Найдите приближенное значение угла, под которым виден столб высотой 2,5 м, находящийся от наблюдателя на расстоянии 50 м. В ответе укажите целое число градусов.
69. Найдите площадь квадрата, если его периметр равен 80 см.
70. Найдите площадь прямоугольника, сторона которого равна 6, а диагональ равна 10.
71. Как изменится площадь прямоугольника, если его стороны: а) увеличатся в два раза; б) уменьшатся в три раза?
72. Площадь квадрата равна 1. Найдите площадь квадрата, вершинами которого являются середины сторон данного квадрата.
73. Найдите стороны прямоугольника, если его периметр равен 10 м, площадь — 6 м^2.
74. Найдите площадь параллелограмма, стороны которого равны 10 см и 4 см, а одна из высот равна 5 см.
75. Найдите площадь ромба, если его стороны равны 6 см, а один из углов равен: а) 120°; б) 135°; в) 150°.
76. Площадь параллелограмма равна 40 см^2, стороны — 5 см и 10 см. Найдите высоты этого параллелограмма.
77. Прямоугольник и параллелограмм имеют соответственно равные стороны. Найдите острый угол параллелограмма, если его площадь равна половине площади прямоугольника.
78. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 5, основание равно 6. Найдите площадь треугольника.
79. Площадь треугольника равна 30. Одна его сторона равна 10. Найдите высоту, опущенную на эту сторону.
80. Найдите площадь треугольника, две стороны которого равны 3 см и 8 см, а угол между ними равен 30°.
81. Как изменится площадь треугольника, если: а) не изменяя его сторону, увеличить опущенную на нее высоту в два раза; б) не изменяя его высоты, уменьшить сторону, на которую она опущена, в три раза; в) одну сторону увеличить в четыре раза, а высоту, опущенную на нее, уменьшить в восемь раз?

82. Площадь треугольника ABC равна 4. Точки D, E — середины сторон соответственно AC и BC. Найдите площадь треугольника CDE.
83. Докажите, что медиана разбивает треугольник на два равновеликих треугольника.
84. В треугольнике ABC две стороны равны a и b. При каком угле между ними площадь треугольника будет наибольшей?
85. Найдите радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, катеты которого равны 3 и 4.
86. Найдите площадь трапеции, основания которой 12 см и 16 см, а высота 15 см.
87. Средняя линия трапеции равна 3, высота равна 2. Найдите площадь трапеции.
88. Основания трапеции равны 10 см и 35 см, площадь равна 225 см^2. Найдите ее высоту.
89. Высота трапеции равна 20 см, площадь — 400 см^2. Найдите среднюю линию трапеции.
90. Основания трапеции равны 36 см и 12 см, боковая сторона, равная 7 см, образует с одним из оснований трапеции угол 150°. Найдите площадь трапеции.
91. Найдите площадь прямоугольной трапеции, основания которой равны 3 см и 1 см, большая боковая сторона составляет с основанием угол 45°.
92. Докажите, что отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, разбивает ее на две равновеликие части.
93. Найдите площадь правильного шестиугольника, стороны которого равны 1 см.
94. Диагонали выпуклого четырехугольника равны 6 и 8, угол между ними равен 30°. Найдите площадь этого четырехугольника.
95. Диагонали четырехугольника перпендикулярны и равны 4 см и 5 см. Найдите площадь этого четырехугольника.
96. Диагонали выпуклого четырехугольника равны 8 и 10. Какую наибольшую площадь может иметь этот четырехугольник?
97. На координатной плоскости изобразите точки $A(2;\ 1)$, $B(1;\ 3)$, $C(4;\ 2)$, $D(-3;\ 2)$, $E(-2;\ -3)$, $F(3;\ -2)$.
98. Точки $O(0;\ 0)$, $A(6;\ 2)$, B и $C(0;\ 6)$ являются последовательными вершинами параллелограмма. Найдите координаты точки B.
99. Найдите координаты середины отрезка AB, если: а) $A(1;\ -2)$, $B(5;\ 6)$; б) $A(-3;\ 4)$, $B(1;\ 2)$; в) $A(5;\ 7)$, $B(-3;\ -5)$.
100. Найдите расстояние между точками: а) $A_1(1;\ 2)$ и $A_2(-1;\ 1)$; б) $B_1(3;\ 4)$ и $B_2(3;\ -1)$.
101. Найдите координаты центра C и радиус R окружности, заданной уравнением: а) $(x-2)^2+(y+5)^2=9$; б) $x^2+(y-6)^2=16$.

102. Напишите уравнение окружности: а) с центром в точке $O(0;\ 0)$ и радиусом 1; б) с центром в точке $C(1;\ -2)$ и радиусом 4.

103. Выясните, как расположена точка относительно окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 = 25$, если она имеет координаты: а) $(1;\ 2)$; б) $(3;\ 4)$; в) $(-4;\ 3)$; г) $(0;\ 5)$; д) $(5;\ -1)$.

104. Каким неравенством задается геометрическое место точек, не принадлежащих кругу с центром в точке $C(x_0;\ y_0)$ и радиусом R?

105. Докажите, что уравнение: а) $x^2 - 4x + y^2 = 0$; б) $x^2 + 2x + y^2 - 4y + 4 = 0$ задает окружность. Найдите ее радиус и координаты центра.

106. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $A(1;\ 2)$ и параллельную оси: а) Ox; б) Oy.

107. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;\ 3)$ и перпендикулярную оси: а) Ox; б) Oy.

108. Напишите уравнение прямой, проходящей через начало координат с угловым коэффициентом: а) $k = 1$; б) $k = 2$; в) $k = \frac{1}{2}$; г) $k = -1$; д) $k = -2$; е) $k = -\frac{1}{2}$. Изобразите эти прямые.

109. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки: а) $A_1(1;\ 2)$, $A_2(3;\ 2)$; б) $A_1(1;\ 2)$, $A_2(2;\ 3)$; в) $A_1(1;\ 2)$, $A_2(2;\ 1)$.

110. Изобразите прямую, заданную уравнением:
а) $y = x$; б) $y = 2x + 1$; в) $y = 1 - x$; г) $y = -1 - x$.

111. Определите, какие из перечисленных ниже пар прямых:
а) параллельны; б) перпендикулярны:
1) $x + y - 2 = 0$, $x + y + 3 = 0$;
2) $x + y - 2 = 0$, $x - y - 3 = 0$;
3) $-7x + y = 0$, $7x - y + 4 = 0$;
4) $4x - 2y - 8 = 0$, $-x - 2y + 4 = 0$.

112. Изобразите геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют неравенствам:
а) $0 \leqslant x \leqslant 3$; $0 \leqslant y \leqslant 3$;
б) $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant 3$.

113. Нарисуйте многоугольник, координаты точек которого удовлетворяют неравенствам:
$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 4, \\ 0 \leqslant y \leqslant 4, \\ x + y \geqslant 2. \end{cases}$$

114. Изобразите фигуру, координаты $(x;\ y)$ точек которой удовлетворяют неравенствам $0 \leqslant x^2 + y^2 - 2x \leqslant 1$.

ТАБЛИЦА ПРИБЛИЖЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

A	$\sin A$	$\operatorname{tg} A$	A	$\sin A$	$\operatorname{tg} A$	A	$\sin A$	$\operatorname{tg} A$
30′	0,0087	0,0087	30°	0,50	0,58	60°	0,87	1,73
1°	0,0175	0,0175	31°	0,52	0,60	61°	0,87	1,80
2°	0,035	0,035	32°	0,53	0,62	62°	0,88	1,88
3°	0,05	0,05	33°	0,54	0,65	63°	0,89	1,96
4°	0,07	0,07	34°	0,56	0,68	64°	0,90	2,02
5°	0,09	0,09	35°	0,57	0,70	65°	0,91	2,15
6°	0,10	0,11	36°	0,59	0,73	66°	0,91	2,25
7°	0,12	0,12	37°	0,60	0,75	67°	0,92	2,36
8°	0,14	0,14	38°	0,62	0,78	68°	0,93	2,48
9°	0,16	0,16	39°	0,63	0,81	69°	0,93	2,61
10°	0,17	0,18	40°	0,64	0,84	70°	0,94	2,78
11°	0,19	0,19	41°	0,66	0,87	71°	0,95	2,90
12°	0,21	0,21	42°	0,67	0,9	72°	0,95	3,08
13°	0,23	0,23	43°	0,68	0,93	73°	0,96	3,27
14°	0,24	0,25	44°	0,69	0,97	74°	0,96	3,49
15°	0,26	0,27	45°	0,71	1,00	75°	0,97	3,73
16°	0,28	0,29	46°	0,72	1,04	76°	0,97	4,01
17°	0,29	0,31	47°	0,73	1,07	77°	0,97	4,33
18°	0,31	0,32	48°	0,74	1,11	78°	0,98	4,71
19°	0,33	0,34	49°	0,75	1,15	79°	0,98	5,15
20°	0,34	0,36	50°	0,77	1,19	80°	0,98	5,67
21°	0,36	0,38	51°	0,78	1,23	81°	0,99	6,31
22°	0,37	0,40	52°	0,79	1,28	82°	0,99	7,12
23°	0,39	0,42	53°	0,80	1,33	83°	0,992	8,14
24°	0,41	0,45	54°	0,81	1,38	84°	0,994	9,51
25°	0,42	0,47	55°	0,82	1,43	85°	0,996	11,43
26°	0,44	0,49	56°	0,83	1,48	86°	0,998	14,30
27°	0,45	0,51	57°	0,84	1,54	87°	0,999	19,08
28°	0,47	0,53	58°	0,85	1,60	88°	1,00	28,64
29°	0,48	0,55	59°	0,86	1,66	89°	1,00	57,29

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОТВЕТЫ

ПОВТОРЕНИЕ КУРСА ГЕОМЕТРИИ 7 КЛАССА

Глава 1. НАЧАЛЬНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

2. а) 6; б) 10; в) 15. **4.** а) 6; б) 8; в) 10; г)* $2n$. **5.** а) 3; б) 6; в) 10; г)* $\frac{n(n-1)}{2}$. **6.** а) 5 см; б) 7 дм; в) 17 м. **7.** Точка B лежит между точками A и C. **8.** Нет. **9.** 8,5 см. **10.** 2. **11.** 1. **12.** 7. **13.** 30°, 150°, 150°. **14.** 80° и 100°. **15.** 36° и 144°. **16.** 126°. **19.** 142°. **20.** 120° и 60°. **22.** а) 36°; б) 30°. **23.** а) 90°; б) 180°; в) 150°.

Глава 2. ТРЕУГОЛЬНИКИ

1. $EF = 5$ см, $FG = 6$ см, $EG = 7$ см. **2.** $\angle E = 40°$, $\angle F = 60°$, $\angle G = 80°$. **3.** 75 см. **4.** 20 см и 10 см. **5.** 12 см, 18 см и 24 см. **9.** а) 3,2 м, 6, 2 м, 6,2 м; б) 7,2 м, 4,2 м, 4,2 м. **10.** 6 см, 16 см, 16 см. **15.** $\angle A > \angle C > \angle B$. **16.** а) $BC > AC > AB$; б) $BC > AC = AB$. **18.** Нет.

Глава 3. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ

1. Нет. **2.** Нет. **3.** а), б) AB_1. **5.** а) 150°, 30°; б) 55°, 125°. **8.** 100°. **9.** 30°. **10.** 41° и 41°. **11.** 120°. **12.** 30°.**13.** 40°. **14.** 69°. **15.** 360°. **16.** 120°. **17.** 60°. **18.** а), б) Нет. **19.** а) 6 см; б) 8 см.

Глава 4. ОКРУЖНОСТЬ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ

1. а) OA m R; б) $OA > R$. **2.** 110 мм. **3.** Бесконечно много. **4.** 1 см. **5.** $d - R$, $d + R$. **6.** 15 см. **7.** а) Ни одной; б) две; в) одну. **8.** а) Пересекаются; б) касаются; в) не имеют общих точек. **9.** а) 2 см; б) 8 см. **10.** а) Касаются внешним образом; б) не имеют общих точек, одна находится внутри другой. **11.** $d - R_1 - R_2$, $d + R_1 + R_2$. **12.** а) Полуплоскость, ограниченная серединным перпендикуляром к отрезку AB, содержащая точку A; б) ГМТ полуплоскости, ограниченной серединным перпендикуляром к отрезку AB, содержащая точку A, не принадлежащих самому серединному перпендикуляру. **13.** Серединный перпендикуляр к отрезку AB. **14.** Две перпендикулярные прямые, содержащие биссектрисы углов, образованных данными прямыми, без их точки пересечения.

Глава 1. МНОГОУГОЛЬНИКИ. ВИДЫ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКОВ

§ 1

3. 11. **4.** 20. **5.** 1, 2, 3, 5, 7. **7.** а) 29; б) 27. **8.** а), б) Равны. **9.** а) 6; б) 10. **10.** 18.

§ 2

2. а) 1, 3; б) 2, 4, 7. **3.** а) 16; б) 20. **4.** а), б) Нет. **6.** а) 2; б) 3; в) 4; г) $n - 2$. **7.** а) 2; б) 5; в) 9. **8.** а), б), в) Нет; г) да. **9.** $\frac{n(n-3)}{2}$. **10.** а), б), в) Да. **11.** 7. **12.** 3.

§ 3

1. а) 360°; б) 540°; в) 720°; г) 900°; д) 1080°. **2.** а) 60°; б) 90°; в) 108°; г) 120°. **3.** 7. **4.** а) 90°; б) 72°; в) 60°; г) 45°. **5.** $\frac{360°}{n}$. **6.** а) 4; б) 5; в) 6; г) 8; д) 10; е) 15. **7.** 36°, 72°, 108°, 144°. **9.** а) 30°; б) 60°; в) 90°.

§ 4

1. 10 см и 15 см. **2.** 30°, 150°, 150°. **3.** 60°, 60°, 120°, 120°. **4.** 3 см и 4 см. **5.** а) Да; б) нет. **6.** 9. **7.** Параллелограммом. **8.** а) 40°, 40°, 140°, 140°; б) 50°, 50°, 130°, 130°; в) 80°, 80°, 100°, 100°. **9.** а) 70°, 70°, 110°, 110°; б) 30°, 30°, 150°, 150°. **10.** 54°, 54°, 126°, 126°. **11.** 60°, 90°, 90°, 120°. **12.** а) 11 см, 11 см, 13 см, 13 см; б) 9 см, 9 см, 15 см, 15 см; в) 8 см, 8 см, 16 см, 16 см. **13.** 0,6 м, 0,6 м, 0,8 м, 0,8 м. **14.** Перпендикулярны. **15.** Параллельны. **16.** а), б) Нет; в), г) да. **17.** 10 м.

§ 5

1. Да. **2.** Да. **3.** Да. **4.** Да. **5.** Нет. **6.** Нет. **10.** Одна сторона в два раза больше другой.

§ 6

1. Да. **2.** Нет. **3.** 25° и 65°. **4.** 10 см. **7.** 10 см. **8.** 30° и 60°. **9.** 1 : 2. **10.** 13 см. **11.** 3 см. **12.** 4 см, 4 см, 9 см, 9 см. **14.** а) 36°, 54°; б) 18°.

§ 7

1. а) 90°; б) 45°. **3.** a. **4.** 60°, 60°, 120°, 120°. **6.** 40 см. **11.** 80°, 80°, 100°, 100°. **20.** По сторонам квадрата (рис. 1). **21.** Пусть дома находятся в точках A, B и C (рис. 2), тогда колодец надо строить в точке D — четвертой вершине ромба $ABCD$. Другое решение: эта же точка является точкой пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам AB и BC.

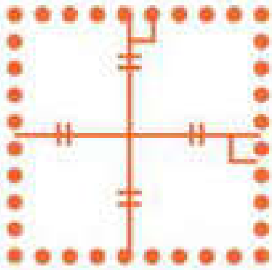


Рис. 1

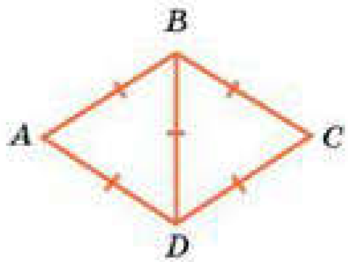


Рис. 2

§ 8

1. 4 см, 5 см и 6 см. **2.** 9 см и 18 см. **3.** 12 см. **4.** 7,5 см. **5.** 7,5 см, 10 см, 12,5 см. **7.** 5 см, 5 см, 6 см. **9.** $a + b$. **10.** 80 см. **14.** 3. **19.** На луче AC отложим отрезок $CD = CA$, соединим точки B и D и найдем середину E отрезка BD (рис. 3), тогда $CE \parallel AB$. Другое решение: на стороне AC взять точку O: $AO = OC$, на продолжении луча BO построим точку D: $OD = BO$, тогда $AB \parallel CD$.

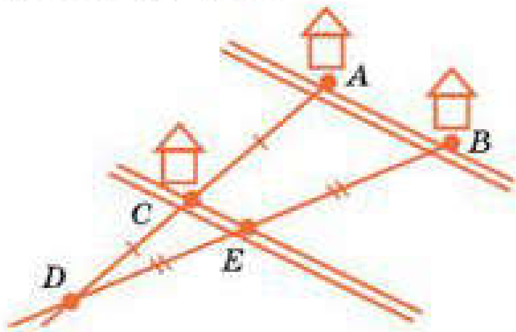


Рис. 3

§ 9

3. 4. **4.** 6 см. **5.** 70°, 70°, 110°, 110°. **6.** Да. **7.** а), б) Нет. **8.** Ромб. **9.** Да. **10.** 21 см.

§ 10

1. 7. **2.** 6. **3.** 5 см и 9 см. **4.** 15 см. **5.** 20 см. **6.** 5 см. **7.** 21 см. **8.** 4 м и 6 м. **9.** 33 м. **10.** 25 м. **11.** 8 см и 12 см. **12.** 2 см и 5 см. **13.** $2a$ и $2b$. **15.** 13,5; 9; 4,5. **16.** 16 и 18. **18.** Нет. **19**. *Указание*. Постройте средние линии прямоугольных треугольников с гипотенузами AB и CD. **20**. 63 м.

§ 11

1. 8. **2.** 15. **3.** 4,5 см. **4.** а) Да; б) нет. **5.** a, e и b, d; a, b и e, d. **6.** а) 2 см; б) 12 см и 20 см; в) 4 см и 10 см. **7.** 8 см. **8.** p. **11.** 372 м. **12.** 1 : 2. **13.** 1 : 2. **14.** 2 : 1. **16.** 2 и 3.

§ 12

1. Нет. **2.** Да. **3.** В середине гипотенузы. **4.** Нет. **5.** Да. **6.** В вершине прямого угла. **10.** К большей. **11.** Лежащей против большей стороны. **12.** Нет. **14.** Центром описанной окружности является середина гипотенузы, радиус окружности равен 5.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C	D	D	D	B	C	D	D	C	B	C	C	D	C	A	C	C	A	C	B

Глава 2. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

§ 13

1. а) $\frac{1}{2}$, 2; б) $\frac{2}{3}$, 1,5. **2.** а) $\frac{1}{3}$, 3; б) 2, $\frac{1}{2}$. **4.** а) 0,71; б) 0,58; в) 0,87; г) 1,73. **5.** а), б) Нет. **6.** а), б) Да. **8.** а), б) Больше нуля и меньше единицы. **9.** а), б) Больше нуля. **10.** 45°. **11.** а) Меньше 45°; б) больше 45°. **12.** 0°. **13.** 45°. **14.** 0,6. **15.** $\frac{2}{3}$. **16.** 1,6. **17.** а) 1, 1; б) 1, 1. **18.** а) 1,5, $\frac{2}{3}$; б) $\frac{1}{2}$, 2. **19.** а) Меньше 45°; б) больше 45°. **23**. а) $2\frac{2}{3}$; б) 4,5. **25**. $AB = AC \cdot \sin C$ или $AB = DC \cdot \operatorname{tg} C$. **27**. Если a — расстояние до дерева, h — рост человека, то высота дерева равна $a \cdot \operatorname{tg} \alpha + h$. **28**. Приблизительно 1969 м. **29**. Приблизительно 2,1 км; 47,8 км. **30**. 45°; 26°34′. **31**. 380 000 км. **32**. 35°45′. **35.** ≈4742 м. **36.** 40 м.

§ 14

1. а) 5; б) 13; в) 17. **2.** а) 4; б) 12; в) 6. **3.** а) $3\sqrt{5}$; б) $2\sqrt{13}$. **4.** $\sqrt{2}$. **5.** 3, 4, 5; 6, 8, 10; 5, 12, 13. **6.** а) 0,6, 0,8; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **7.** $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{17}$. **8.** $2\sqrt{5}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{17}$. **9.** а) 6 см, 8 см, 10 см; б) 10 см, 24 см, 26 см. **10.** 5, 12, 13. **11.** $\sqrt{2}$. **12.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **13.** 4. **14.** $1\frac{1}{16}$. **15.** 1. **16.** 1000 м. **17.** 500 м. **18.** 50 км. **19.** 12 м. **20.** 10 м. **21.** 5 см. **22.** 2,4; 1,8; 3,2. **23.** $R = \frac{b^2}{\sqrt{4b^2 - c^2}}$. **24.** а) $\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\frac{2\sqrt{5}}{5}$; б) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **25.** 1,5 м. **27**. На рис. 14.17 : $\sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{BC^2 - CD^2}$, но по данным рисунка $\sqrt{5^2 - 4^2} \neq \sqrt{4^2 - 2^2}$. На рис. 14.18: $LM = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$, тогда $LQ = LM - QM$, откуда $LQ = 2 = LP$, чего быть в прямоугольном треугольнике не может. **28**. KLM. **29**. 5 км. **30**. $AC \approx 84{,}9$ м. **31**. *Указание*. Достаточно измерить расстояние между пунктами B и D, тогда легко вычислить искомые расстояния: $AB = AC = \frac{2}{\sqrt{5}}BD$, $AD = DC = \frac{1}{\sqrt{5}}BD$, $BC = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}BD$. **32**. См. рис. 4: $(50 - x)^2 + 20^2 = x^2 + 30^2$, $x = 20$(локтей). **33.** См. рис. 5: $\frac{x^2}{4} = 125^2 - 120^2$, $x = 70$, тогда башни имеют высоты 70 м и 105 м. **34**. 240 м, 320 м и 600 м. **35**. См. рис. 6: $AB = \sqrt{(R + h)^2 - R^2} \approx 358$ км. **36.** ≈62,5. **37.** 40 м, 60 м.

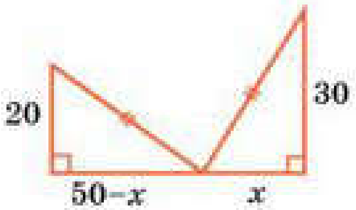


Рис. 4

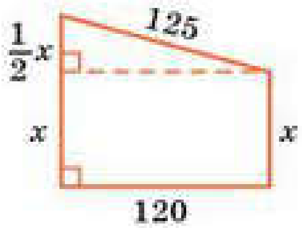


Рис. 5

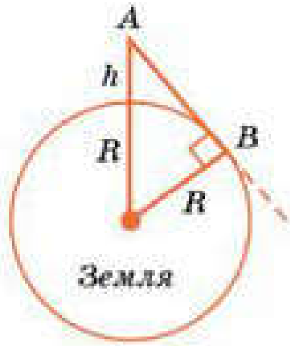


Рис. 6

§ 15

1. а) $\cos^2 A$; б) 2. **2.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **3.** а) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; б) $\frac{\sqrt{7}}{3}$. **4.** а) Нет; б) да. **5.** а) $\operatorname{tg}^2 A$; б) $\operatorname{ctg}^2 A$. **6.** а) 0,87; б) 0,71; в) 1,73; г) 0,58. **7.** а) B; A. **8.** а) 2,4; б) 0,75. **9.** а) $\frac{\sqrt{10}}{10}$; б) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **10.** а), б) 1. **11.** а) $\frac{1}{\cos A}$; б) $\frac{1}{\sin A}$. **13.** а) 0,5; б) 5. **16.** а) 2; б) 0,75. **17.** а) $\frac{\sqrt{5}}{5}$; б) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

§ 16

1. 1. **2.** $\sqrt{3}$. **3.** 2. **4.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. **5.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **6.** $\sqrt{3}$. **7.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **8.** $\sqrt{2}$. **9.** 10. **10.** 9. **11.** 8. **12.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **13.** 0,5. **14.** 0,5. **15.** 0,5. **16.** 5. **17.** 5. **18.** 5. **19.** 0,5. **20.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **21.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **22.** 0,75. **23.** 0,25. **24.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **25.** 1,5. **26.** 2,4. **27.** 3,2. **28.** 1,8. **29.** 3,2. **30.** 1,8. **31.** 2,4. **32.** 3,2. **33.** 1,8. **34.** 4,8. **35.** 3. **36.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **37.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **38.** $\sqrt{3}$. **39.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **40.** 0,5.

§ 17

1. Плюс. **2.** Минус. **3.** Минус. **4.** Минус. **5.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\frac{1}{2}$. **6.** а) $-\frac{1}{2}$; б) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **7.** а) $-\sqrt{3}$; б) -1; в) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **8.** а) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) -1; в) $-\sqrt{3}$. **9.** sin 150°, sin 135°, sin 120°, sin 90°. **10.** cos 150°, cos 135°, cos 90°, cos 60°. **11.** tg 135°, tg 150°, tg 90°, tg 60°. **12.** ctg 150°, ctg 135°, ctg 120°, ctg 60°. **13.** −0,6. **14.** 0,6. **15.** а) $\cos^2 A$; б) 2; в) 1. **16.** $\sin^2 A$. **19.** а) 0,64; б) −0,72; в) −0,58; г) −2,78.

§ 18

1. 37°. **2.** 37°. **3.** 37°. **4.** 10 см. **5.** $10\sqrt{3}$ см. **6.** 14°. **7.** 18°. **8.** 5°. **9.** 24 м. **10.** 2°. **11.** 76080 м.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	D	B	D	B	B	D	D	C	B	A	B	D	C	A	A	D	C	A	A

Глава 3. ПЛОЩАДИ

§ 19

1. 42. **2.** а) 20; б) 12. **3.** а) 5; б) 5. **4.** а) и д), в) и г). **5.** а) 4 см²; б) 100 см²; в) 9 м². **6.** 400 см². **7.** 0,25. **8.** 48. **9.** а) Увеличится в 4 раза; б) уменьшится в 9 раз. **10.** 450 м².

11. $\frac{a^2}{2}$. **12.** 12 м. **13.** 8. **14.** 10. **15.** 0,5. **16.** а) $2bc + 2ad - 4cd$; б) $ad + bc - cd$; в) $ab - ad + 2cd$. **17.** 36 см. **18.** 2 м и 3 м. **19.** 9. **20.** 10. **21.** 16. **22**. 1200. **23**. 11.

§ 20

1. 20 см^2. **2.** 20. **3.** а) 40 см^2; б) 40 $\sqrt{2}$ см^2; в) 40 $\sqrt{3}$ см^2. **4.** а) 18 $\sqrt{3}$ см^2; б) 18 $\sqrt{2}$ см^2; в) 18 см^2. **5.** а), ж), з); б), г), д), е). **6.** а) 9; б) 12. **7.** 8 см и 4 см. **8.** Прямоугольник. **9.** 30°. **10.** 90°. **11.** Площадь квадрата больше. **12.** 30°. **14.** 24 см^2. **15.** а) 4; б) 8.

§ 21

1. а), б), в), д), з); г), ж). **2.** а) 14 см^2; б) 21 м^2. **3.** 12. **4.** 6. **5.** а) 6 см^2; б) 6 $\sqrt{2}$ см^2; в) 6 $\sqrt{3}$ см^2; г) 12 см^2. **6.** а) 12 $\sqrt{3}$ см^2; б) 12 $\sqrt{2}$ см; в) 12 см. **7.** 3 : 1. **8.** а) Увеличится в 2 раза; б) уменьшится в 3 раза; в) уменьшится в 2 раза. **9.** 1. **10.** Одну четвертую. **11.** а), б) Да; в) нет. **12.** а) 6; б) 5. **14.** 10. **15.** 90°. **16.** Параллелограмм площадью 8. **18.** Две прямые, параллельные прямой AB. **20.** 1. **21.** 0,75. **23**. Площади треугольников равны. **25**. а) см. рис. 7; б) см. рис. 8; в) см. рис. 9; г) см. рис. 10; д) см. рис. 11; е) см. рис. 12. **26.** 1 : 6. **27**. а) 21; б) 21; в) 14.

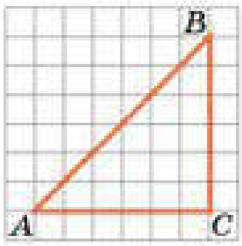


Рис. 7

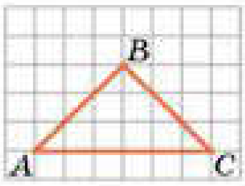


Рис. 8

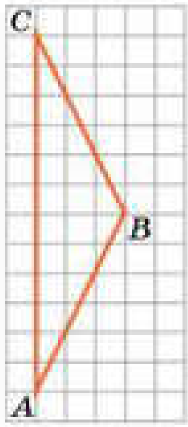


Рис. 9

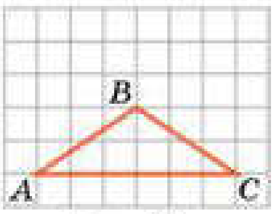


Рис. 10

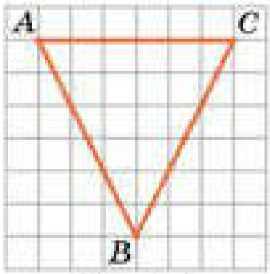


Рис. 11

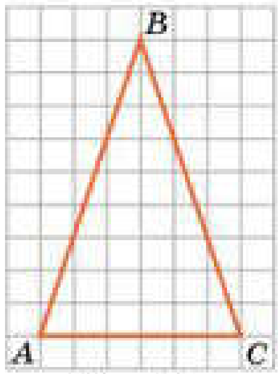


Рис. 12

§ 22

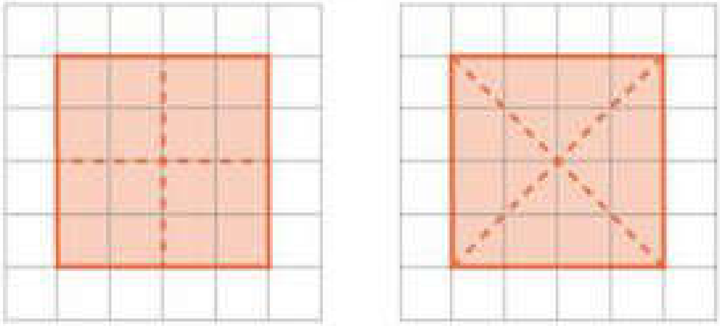
1. 210 см^2. **2.** 6. **3.** 10 см. **4.** 20 см. **5.** 14 см. **6.** 160. **7.** 84 см^2. **8.** а) 9; б) 10. **9.** 4 см^2. **10.** 30 см^2. **13.** 18. **16**. а) 9; б) 9; в) 6. *Указание*. Проведите через точку M прямую $KM \parallel CD$ (точки K и P лежат на прямых BC и AD соответственно) и докажите, что $S_{ABCD} = S_{CDPK}$.

§ 23

1. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ см^2. **2.** 12 см^2. **3.** 10 см^2. **4.** а) 12; б) 28. **5.** а) 7,5; б) 6. **6.** а) 16; б) 6. **7.** 40.

§ 24

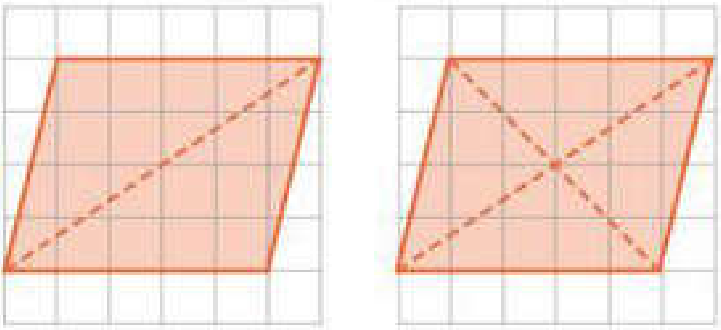
1. Линии разреза показаны на рисунке 13.



а) б)

Рис. 13

2. Линии разреза показаны на рисунке 14.



а) б)

Рис. 14

3. Линия разреза показана на рисунке 15. **4.** Линия разреза показана на рисунке 16. **5.** Линия разреза показана на рисунке 17.

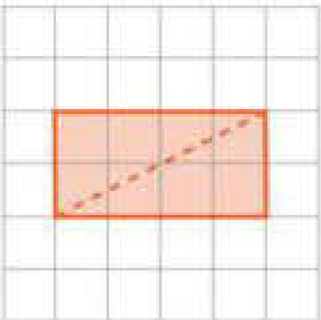


Рис. 15

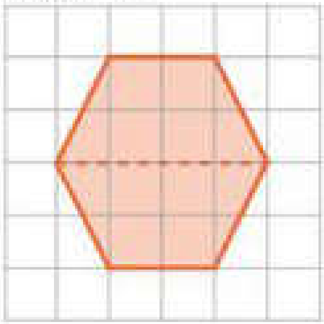


Рис. 16

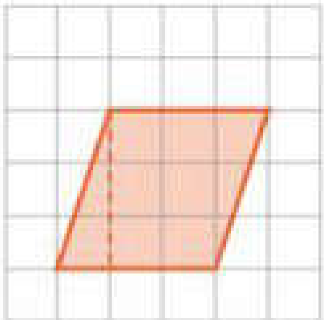


Рис. 17

6. Линия разреза показана на рисунке 18. **7.** Линия разреза показана на рисунке 19. **8.** Линия разреза показана на рисунке 20.

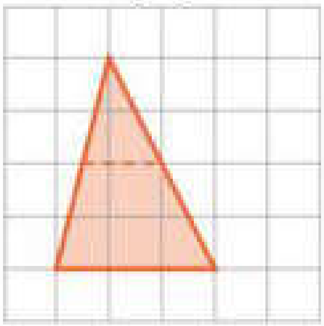


Рис. 18

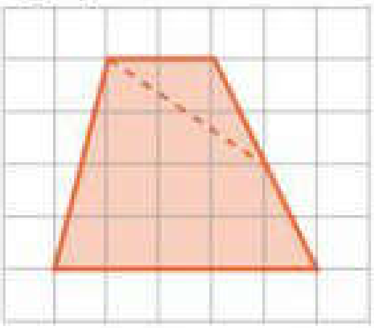


Рис. 19

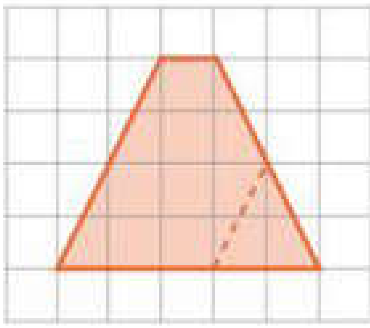


Рис. 20

9. Линия разреза показана на рисунке 21. **10.** Прямая показана на рисунке 22. **11.** Прямая показана на рисунке 23.

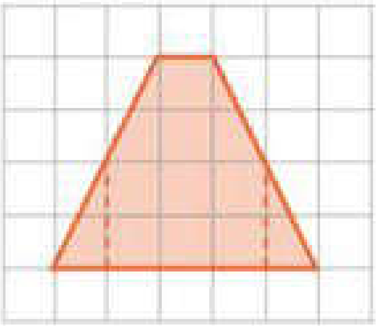


Рис. 21

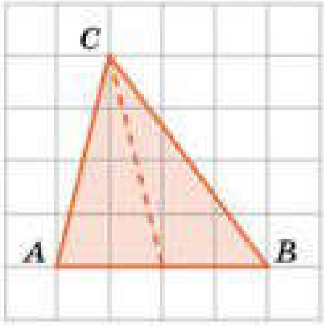


Рис. 22

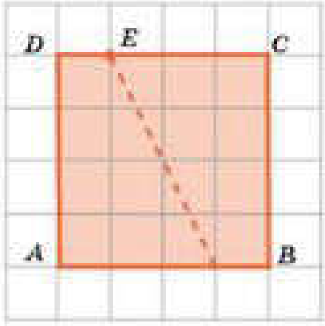


Рис. 23

12. Прямая показана на рисунке 24. **13.** Прямая показана на рисунке 25. **15.** Линии разреза показаны на рисунке 26.

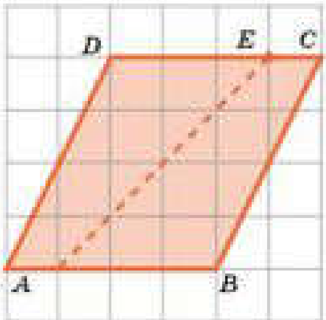


Рис. 24

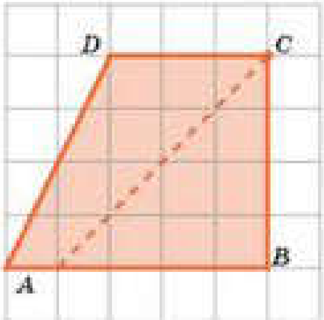


Рис. 25

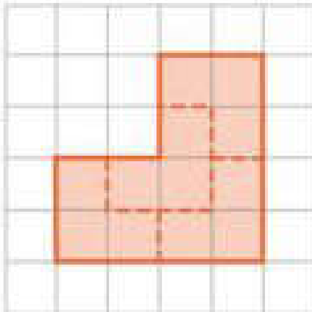


Рис. 26

16. Линии разреза показаны на рисунке 27. **17.** Линии разреза показаны на рисунке 28.

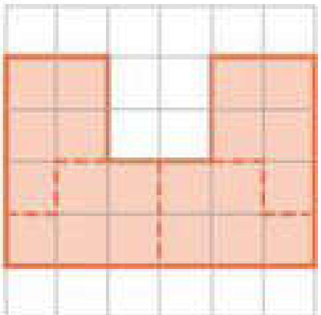
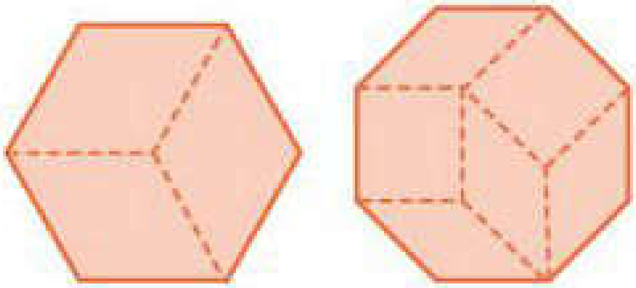


Рис. 27



а) Рис. 28 б)

18. Линия разреза показана на рисунке 29. **19.** Линия разреза показана на рисунке 30. **20.** Линии разреза показаны на рисунке 31.

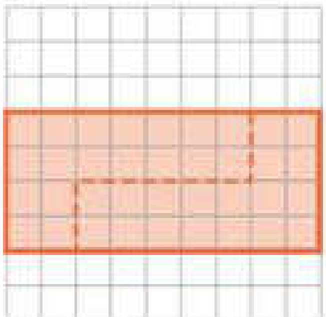


Рис. 29

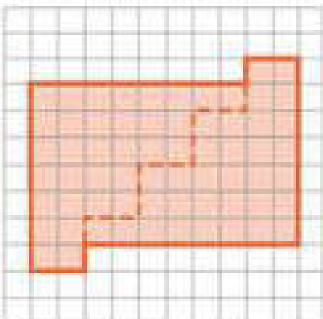


Рис. 30

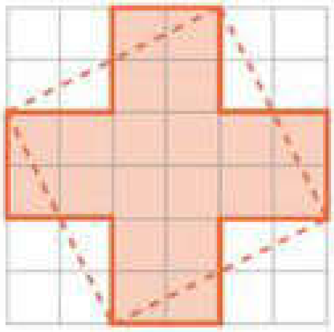


Рис. 31

21. Линия разреза показана на рисунке 32. **22.** Линия разреза показана на рисунке 33.

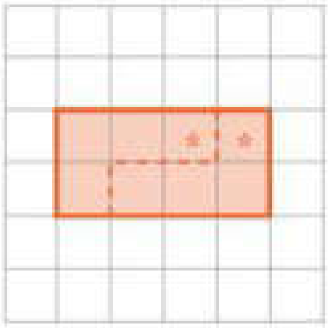


Рис. 32

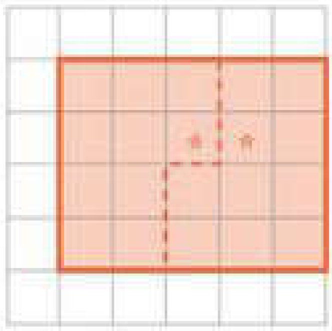


Рис. 33

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
B	A	C	C	B	D	B	D	C	B	B	A	A	C	D	B	C	A	B	B

Глава 4. ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ

§ 25

1. $A(1;\ 2)$, $B(2;\ 1)$, $C(-1;\ 2)$, $D(-3;\ 1)$, $E(-1;\ -1)$, $F(-2;\ -3)$, $G(1;\ -3)$, $H(2;\ -2)$. **3.** 2. **4.** 3. **5.** (2; 0). **6.** (0; 3). **7.** а) (3; 2); б) (–1; 3); в) (1; 1). **8.** (1; 0). **10.** Ломаная изображена на рисунке 34. **11.** $B(6;\ 8)$. **12.** (5; 4). **13.** (5; 2).

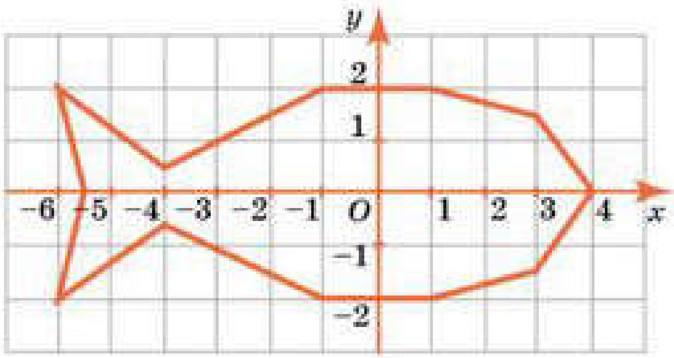


Рис. 34

§ 26

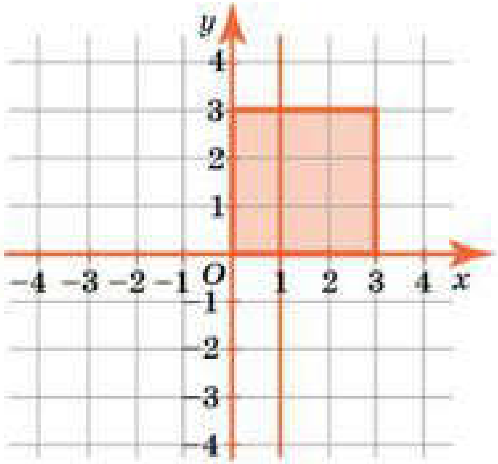
1. а) $\sqrt{5}$; б) 5. **2.** а) 3; б) 2. **3.** Точки находятся на одинаковом расстоянии. **4.** а) $C(2;\ -5)$, $R = 3$; б) $C(0;\ 6)$, $R = 4$. **5.** а) $x^2 + y^2 = 1$; б) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 16$. **6.** а) Внутри окружности; б), в), г) на окружности; д) вне окружности. **7.** $\sqrt{13} + \sqrt{29} + \sqrt{34}$. **8.** а) Прямоугольный; б) равнобедренный. **9.** а) Квадрат; б) прямоугольник; в) параллелограмм; г) равнобедренная трапеция. **10.** $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$. **11.** $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$. **12.** $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 > R$. **13.** а) (2; 0); б) (4; 0). **14.** а) (0; 3); б) (0; 2). **15.** а) (1; 1); б) (0; 1). **16.** а) 2, (2; 0); б) 1, (–1; 2). **17.** $(x - 3)^2 + y^2 = 11$. **18.** $x^2 + (y - 3)^2 = 13$. **19.** а) Касаются внутренним образом; б) пересекаются; в) касаются внешним образом; г) не имеют общих точек.

§ 27

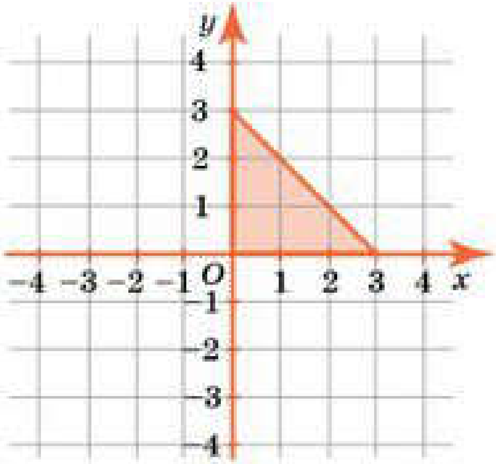
1. а) $y = 0$; б) $x = 0$. **2.** а) $y = 2$; б) $x = 1$. **3.** а) $x = 2$; б) $y = 3$. **4.** *a*) 1; *b*) $\frac{1}{3}$; *c*) –1; *d*) –3. **5.** а) $y = x$; б) $y = 2x$; в) $y = \frac{1}{2}x$; г) $y = -x$; д) $y = -2x$; е) $y = -\frac{1}{2}x$. **6.** а) $y = x - 3$; б) $y = 2x - 5$; в) $y = \frac{1}{2}x - 2$; г) $y = -x + 1$; д) $y = -2x + 3$; е) $y = -\frac{1}{2}x$. **7.** а) $y = 2$; б) $y = x + 1$; в) $y = -x + 3$. **11.** а) $y = 0{,}5x + 1$; б) $y = -2x + 2$; в) $y = x - 2$; г) $y = -0{,}5x - 1$. **12.** а) 1), 3); б) 2), 4). **13.** а) (–1; –2); б) (7; 3). **14.** а) $y = x + 1$; б) $y = 2x + 1$. **15.** 12. **16.** а) $y = -x + 1$; б) $y = -0{,}5x + 1$.

§ 28*

2. Геометрическое место точек изображено на рисунке 35.



а)



б)

Рис. 35

3. Системой неравенств. **4.** Многоугольник изображен на рисунке 36.

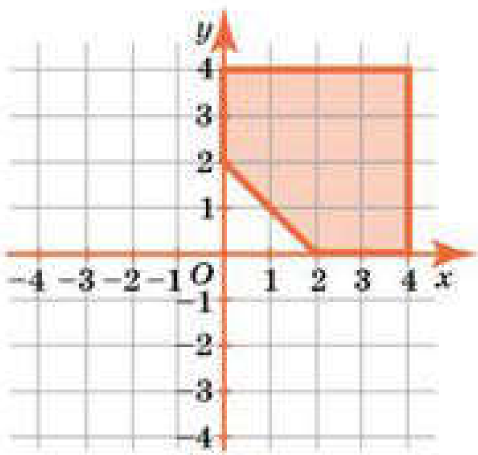


Рис. 36

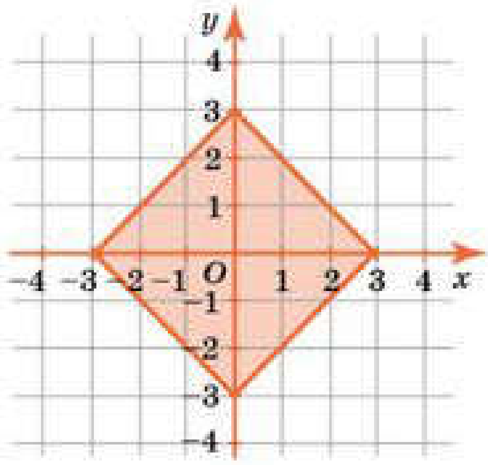


Рис. 37

5. Фигура изображена на рисунке 37. **6.** а) $|x| \leq 2$, $|y| \leq 1$; б) $|x| + |y| \leq 2$, $y \geq 0{,}7$. **7.** 45°. **8.** 10. **9.** 6. **10.** $0 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq 3$, $1 \leq x + y \leq 5$, $-2 \leq x - y \leq 2$. **11.** $x - 2y + 6 \geq 0$, $2x + 3y - 3 \geq 0$, $-3x + y + 10 \geq 0$. **12.** $0 \leq y \leq 2$, $2x - 2 \leq y \leq 2x$. **13.** Фигура изображена на рисунке 38. **14.** 6. а) $x^2 + y^2 \leq 4$; б) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 1$. **15.** Фигура изображена на рисунке 39.

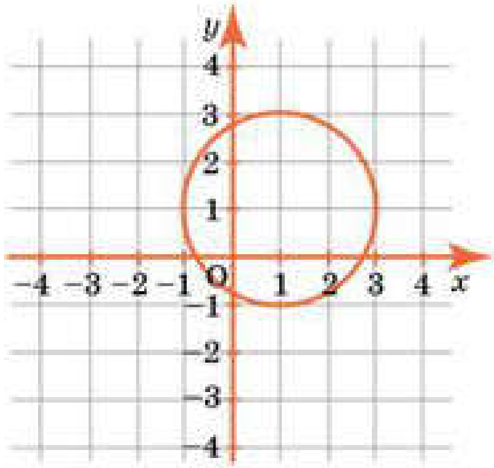


Рис. 38

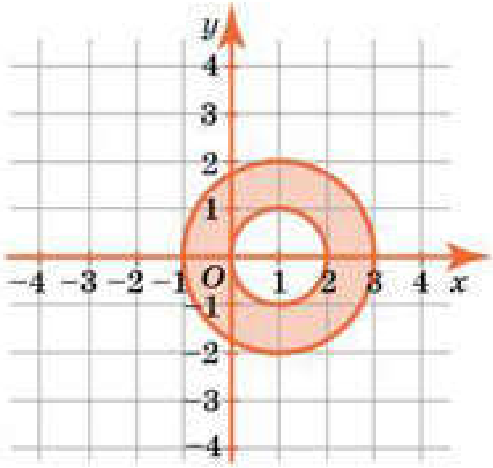


Рис. 39

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C	A	A	C	C	B	B	A	C	D	D	B	C	C	B	D	C	D	B	C

ПОВТОРЕНИЕ КУРСА ГЕОМЕТРИИ 8 КЛАССА

1. 9. **2.** 20. **4.** а) 2; б) 3; в) 4; г) $n-2$. **5.** а) 2; б) 5; в) 9. **6.** а) 60°; б) 90°; в) 108°; г) 120°. **7.** 7. **8.** а) 90°; б) 72°; в) 60°; г) 45°. **9.** 36°, 72°, 108°, 144°. **11.** 60°, 60°, 120°, 120°. **12.** а) 40°, 40°, 140°, 140°; б) 50°, 50°, 130°, 130°; в) 80°, 80°, 100°, 100°. **13.** 0,6 м, 0,6 м, 0,8 м, 0,8 м. **14.** Перпендикулярны. **15.** Параллельны. **16.** Да. **17.** Да. **19.** 25° и 65°. **20.** 13 см. **23.** 80°, 80°, 100°, 100°. **24.** 4 см, 5 см и 6 см. **26.** $a+b$. **27.** 4. **28.** 70°, 70°, 110°, 110°. **29.** 6. **30.** 15 см. **31.** 2 см и 5 см. **32.** а) 2 см; б) 12 см и 20 см; в) 4 см и 10 см. **34.** 1 : 2. **35.** К большей. **36.** Лежащей против большей стороны. **38.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{2}$; в) 1; г) 1. **39.** а), б) Больше нуля и меньше единицы. **40.** а), б) Больше нуля. **41.** 45°. **42.** а) Меньше 45°; б) больше 45°. **43.** а) Меньше 45°; б) больше 45°. **44.** а) 5; б) 13; в) 17. **45.** а) 4; б) 12; в) 6. **46.** $\sqrt{2}$. **47.** $\sqrt{2}$. **48.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **49.** 4. **50.** 5 см. **51.** а) $\cos^2 A$; б) 2. **52.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **53.** а) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; б) $\frac{\sqrt{7}}{3}$. **54.** а) 2,4; б) 0,75. **56.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **57.** 5. **58.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **59.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\frac{1}{2}$. **60.** а) $-\frac{1}{2}$; б) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **61.** а) $-\sqrt{3}$; б) -1; в) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **62.** а) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) -1; в) $-\sqrt{3}$. **65.** 3°. **66.** 4°. **67.** 9 м. **68.** 3°. **69.** 400 см^2. **70.** 48. **71.** а) Увеличится в 4 раза; б) уменьшится в 9 раз. **72.** 0,5. **73.** 2 м и 3 м. **74.** 20 см^2. **75.** а) $18\sqrt{3}$ см^2; б) $18\sqrt{2}$ см^2; в) 18 см^2. **76.** 8 см и 4 см. **77.** 30°. **78.** 12. **79.** 6. **80.** 6 см^2. **81.** а) Увеличится в 2 раза; б) уменьшится в 3 раза; в) уменьшится в 2 раза. **82.** 1. **84.** 90°. **85.** 1. **86.** 210 см^2. **87.** 6. **88.** 10 см. **89.** 20 см. **90.** 84 см^2. **91.** 4 см^2. **93.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **94.** 12. **95.** 10 см^2. **96.** 40. **98.** $B(6, 8)$. **99.** а) (3, 2); б) (−1, 3); в) (1, 1). **100.** а) $\sqrt{5}$; б) 5. **101.** а) (2, −5), 3; б) (0, 6), 4. **102.** а) $x^2+y^2=1$; б) $(x-1)^2+(y+2)^2=16$. **103.** а) Внутри окружности; б), в), г) на окружности; д) вне окружности. **104.** $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2>R$. **105.** а) 2, (2, 0); б) 1, (−1, 2). **106.** а) $y=2$; б) $x=1$. **107.** а) $x=2$; б) $y=3$. **108.** а) $y=x$; б) $y=2x$; в) $y=\frac{1}{2}x$; г) $y=-x$; д) $y=-2x$; е) $y=-\frac{1}{2}x$. **109.** а) $y=2$; б) $y=x+1$; в) $y=-x+3$. **111.** а) 1), 3); б) 2), 4).

СОДЕРЖАНИЕ