Ә.Н. Шыныбеков, Д.Ә. Шыныбеков, Р.Н. Жұмабаев

АЛГЕБРА

Жалпы білім беретін мектептің
9-сыныбына арналған оқулық

9

Қазақстан Республикасының
Білім және ғылым министрлігі ұсынған

Алматы «Атамұра» 2019

1–4337

ӘОЖ 373.167.1
КБЖ 22.14я72
Ш 98

Оқулық Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігі бекіткен негізгі орта білім беру деңгейінің 7—9-сыныптарына арналған«Алгебра» пәнінің жаңартылған мазмұндағы Типтік оқу бағдарламасына сәйкес дайындалды.

Жалпы редакциясын басқарған физика-математика ғылымдарының докторы профессор, ҚР ҰҒА академигі М. Өтелбаев

Пайдаланылған шартты белгілер:

— жаңа материалды бекіту сұрақтары
— практикалық және шығармашылық жұмыстар
— тарихқа шолу
— шығармашылық немесе күрделілігі жоғары тапсырмалар мен материалдар
— дәлелдеудің (есептің шешуінің) басы
— дәлелдеудің (есептің шешуінің) соңы

Есептер:

A — бастапқы деңгей
B — орта деңгей
C — жоғары деңгей

Шыныбеков Ә. Н., т.б.

Ш 98 Алгебра: Жалпы білім беретін мектептің 9-сыныбына арналған оқулық. Ә. Н. Шыныбеков, Д. Ә. Шыныбеков, Р.Н. Жұмабаев. — Алматы: Атамұра, 2019. — 240 бет.

ISBN 978–601–331–571–3

ӘОЖ 373.167.1
КБЖ 22.14я72

ISBN 978–601–331–571–3

АЛҒЫ СӨЗ

Оқулық жалпы білім беретін мектептердің 9-сыныбына арналған, оның бірқатар өзіндік ерекшеліктері бар. Атап айтсақ, автордың «Алгебра – 8» оқулығына ұқсас мұнда да бағдарламаларға енетін материалдармен қатар, математиканы тереңдетіп оқытатын сыныпқа арналған материалдарда ұсынылып, (*) таңбасымен ерекшеленген. Осыған қоса **C** тобының есептері де негізінен математиканы тереңдетіп оқытатын сынып оқушыларына лайықталған. Дегенмен бұл материалдарды сыныптан тыс уақыттарда оқып-үйренулеріңе болады. Бұл материалдардың математикалық олимпиадаларға және түрлі конкурстарға қатысып, нәтижелі орындарды иемденуге ықпалы тиеді.

Оқулықпен дәріс алу барысында оқушының жалпы білім беретін мектепте немесе математиканы тереңдетіп оқытатын сыныпта оқуына байланыссыз мынадай қағиданы ұстанған дұрыс: жаңа өтілген тақырыпты пысықтау барысында, ең алдымен **A** тобы материалдарын толық меңгеріп алу қажет. Онсыз келесі **B**, **C** топтары есептерін шығару және келесі тақырыптарды меңгеру мүмкін емес. Оқулықта практикалық, шығармашылық және күрделілігі жоғары тапсырмалар ұсынылған. Бұл тапсырмалар жаңа білімді күнделікті өмірде пайдалану мен ойлау қабілетті дамытуға ықпал етеді.

Оқуда табыс, өмірде сәттілік тілейміз!

Авторлар

8-СЫНЫПТА ӨТІЛГЕН МАТЕРИАЛДАРДЫ ҚАЙТАЛАУ

Бөлімді оқып-үйрену барысында сендер:

- 8-сыныпта өтілген материалдарды еске түсіресіңдер;
- 9-сыныпта өтілетін жаңа материалдарды меңгеруге дайындық жасайсыңдар.

8-сыныпта өткен материалдарды қайталау сұрақтары

1) Квадрат түбір деп нені айтады? Мысал келтір.

2) Арифметикалық квадрат түбір деп нені айтады? Оның қандай қасиеттерін білесіңдер?

3) Иррационал сан деп қандай санды айтады? Мысал келтіріңдер.

4) Нақты сан және нақты сандар жиыны деп нені түсінесіңдер?

5) Санның бүтін (бөлшек) бөлігі қалай анықталады? Мысал келтіріңдер.

6) Сан өсіндегі нүктенің координатасы деп нені түсінесіңдер? Мысал келтіріңдер.

7) Қандай сан аралықтарын білесіңдер? Оларды теңсіздіктер арқылы өрнектеңдер. Мысал келтіріңдер.

8) $y = \sqrt{x}$ функциясының қасиеттерін атап, графигін салыңдар.

9) Квадраттық функция қалай анықталады? Коэффициенттер мен дискриминанты бойынша функция графигінің орналасу ерекшеліктерін атап көрсетіңдер.

10) Квадрат теңдеу түбірлерінің формулаларын жазыңдар. Дискриминант деп нені айтады? Мысал келтір.

11) Виет теоремасы мен оған кері теореманы тұжырымдаңдар. Мысал келтір.

12) $a \pm b + c = 0$ болғанда квадрат теңдеу түбірлері қалай анықталады? Мысал келтіріңдер.

13) Квадрат теңдеу, квадрат үшмүшелер және квадраттық функция ұғымдарының ортақ элементтері мен ерекшеліктерін атап көрсетіңдер. Мысал келтіріңдер.

14) Квадрат үшмүшені көбейткіштерге қалай жіктейді?

15) Квадрат теңсіздіктер қалай шешіледі? Мысал келтіріңдер.

16) Теңсіздіктердің негізгі қасиеттерін атаңдар. Оларды мысал арқылы көрсетіңдер.

17) Теңсіздіктерді дәлелдеудің қандай тәсілдерін білесіңдер? Мысал арқылы түсіндіріңдер.

18) Рационал теңсіздік деп нені айтады? Интервалдар тәсілін қалай қолданады?

ЕСЕПТЕР

А

0.1. Өрнектің мәнін табыңдар:

1) $0,5\sqrt{256}$; 2) $-5\sqrt{0,64}$; 3) $0,3\sqrt{\dfrac{25}{9}}$;

4) $\dfrac{\sqrt{0,16}}{2\sqrt{0,04}}$; 5) $\sqrt{4900}-\sqrt{289}$; 6) $0,07\sqrt{10000}-\sqrt{36}$;

7) $\dfrac{\sqrt{81}}{\sqrt{361}}+\sqrt{\dfrac{1}{4}}$; 8) $\sqrt{1\dfrac{9}{16}}+\sqrt{\dfrac{121}{25}}$; 9) $\sqrt{2\dfrac{7}{81}}-\dfrac{1}{\sqrt{36}}$.

9) $\sqrt{2\dfrac{7}{81}}-\dfrac{1}{\sqrt{36}}=\sqrt{\dfrac{162+7}{81}}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{13}{9}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{26-3}{18}=\dfrac{23}{18}=1\dfrac{5}{18}$.

0.2. Есептеңдер:

1) $\sqrt{360} \cdot \sqrt{2,5}$; 2) $\sqrt{90 \cdot 4,9}$; 3) $\sqrt{72 \cdot 32}$;

4) $\sqrt{3,6 \cdot 12,1}$; 5) $\sqrt{13} \cdot \sqrt{52}$; 6) $\sqrt{63} \cdot \sqrt{7}$;

7) $\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{3}{8}}$; 8) $\sqrt{1,2} \cdot \sqrt{3\frac{1}{3}}$; 9) $\sqrt{20} \cdot \sqrt{45}$.

0.3. Теңсіздіктің дұрыстығын көрсетіңдер:

1) $3,4 < \sqrt{12} < 3,6$; 2) $5 < \sqrt{30} < 6$;

3) $5 < \sqrt{26} < 5,1$; 4) $7,9 < \sqrt{63} < 8$.

0.4. Теңдеуді шешіңдер:

1) $\sqrt{x} = 4$; 2) $\sqrt{y} = 0,4$; 3) $3\sqrt{x} = 7$; 4) $10\sqrt{z} = 3$.

0.5. Квадрат теңдеудің түбірлерін табыңдар:

1) $2x^2-5x-3=0$; 2) $3x^2-3x+1=0$;
3) $3x^2-8x+5=0$; 4) $x^2+9x-22=0$;
5) $5x^2+9x+4=0$; 6) $7x^2-11x-6=0$;
7) $36x^2-12x+1=0$; 8) $3x^2+x-2=0$.

Алгебра және инженерлік құрылыс

Алматы қаласындағы Абай атындағы метро бекеті — терең орналасқан бекеттердің бірі. Негізгі платформасының ені 15,2 м және ұзындығы 104 м. Бекетке төрт жолақты эскалаторлармен кіріп-шығуға болады. Эскалатордың көтерілу биіктігі 46 м, ұзындығы 92 м. $x^2-75x-234=0$ теңдеуін шешіп, бекеттің тереңдігін табыңдар.

0.6. Виет теоремасы бойынша төмендегі квадрат теңдеулердің түбірлерін анықтаңдар:

1) $x^2-5x+6=0$; 2) $4x^2-12x+9=0$;
3) $x^2+2x-24=0$; 4) $x^2+9x+14=0$;
5) $x^2-7ax+12a^2=0$; 6) $x^2+5bx+6b^2=0$;
7) $x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}=0$; 8) $x^2+\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)x+2\sqrt{3}=0$.

0.7. Теңсіздікті графиктік тәсілмен шешіңдер:

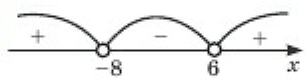
1) $x^2-3x-4<0$; 2) $x^2-3x-4>0$;
3) $2x^2+3x-5\geqslant 0$; 4) $-6x^2+6x+36\geqslant 0$.

0.8. Теңсіздікті екі тәсілмен шешіңдер:

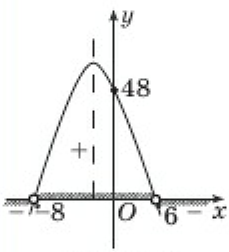
1) $x^2-x-9<0$; 2) $6x^2-7x+2>0$;
3) $-x^2-2x+48<0$; 4) $8x^2+10x-3\geqslant 0$;
5) $25x^2-10x+1\geqslant 0$; 6) $49x^2-28x+4<0$;
7) $-x^2-12x-100\leqslant 0$; 8) $4x^2-4x+15\leqslant 0$;
9) $5x^2+3x-8>0$.

1-тәсіл: 3) $-x^2-2x+48<0 \Leftrightarrow x^2+2x-48>0$
$\Leftrightarrow (x+8)(x-6)>0$ (0.1-сурет).

Ж а у а б ы: $x \in (-\infty; -8) \cup (6; +\infty)$.



0.1-сурет



0.2-сурет

2-тәсіл: $y=-x^2-2x+48$ функциясының графигі — тармағы төмен бағытталған парабола. Ол Ox өсін -8 және 6 нүктелерінде қияды (0.2-сурет).

Ж а у а б ы: $x \in (-\infty; -8) \cup (6; +\infty)$

0.9. 1) $6x-x^2>0$; 2) $3x+x^2>0$; 3) $x^2-4\leqslant 0$; 4) $5-x^2>0$ теңсіздіктерін қанағаттандыратын барлық бүтін сандарды анықтаңдар.

0.10. Теңсіздік шешімдерінің жиынын анықтаңдар:

1) $3x^2+40x+10<-x^2+11x+3$;
2) $9x^2-x+9\geqslant 3x^2+18x-6$;
3) $2x^2+8x-111<(3x-5)(2x+6)$;
4) $(5x+1)(3x-1)>(4x-1)(x+2)$;
5) $2x(3x-1)>4x^2+5x+9$;
6) $(5x+7)(x-2)<21x^2-11x-13$.

0.11. 1) $y=3(x-5)^2-2$; 2) $y=2x^2-1$;
3) $y=-2(x+1)^2+3$; 4) $y=(x-5)^2$
параболасының төбесі мен өсін анықтап, оның графигін салыңдар.

0.12. Квадрат үшмүшені көбейткіштерге жіктеңдер:

1) $x^2-16x+48$; 2) x^2-x-12;
3) $x^2+5x-14$; 4) $x^2+6x-16$;
5) $x^2+12x+27$; 6) $2x^2-5x+2$.

0.13. Түбірлері бойынша квадрат теңдеу құрыңдар:

1) 2 және 5; 2) -3 және 4; 3) -2 және -7;
4) 0,5 және 4; 5) $\frac{2}{3}$ және $\frac{3}{2}$; 6) $-\frac{1}{3}$ және $-\frac{1}{9}$.

B

0.14. Есептеңдер:

1) $6-\left(3\sqrt{\frac{4}{9}}+\sqrt{0,25}\right)$; 2) $11:\left(0,15\sqrt{1600}-0,29\sqrt{400}\right)$;

3) $\dfrac{\sqrt{225}+3\sqrt{121}}{\frac{2}{3}\sqrt{0,09}+0,78\sqrt{100}}$; 4) $\left(\dfrac{\sqrt{324}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{0,16}}{0,2}-6\sqrt{\dfrac{1}{4}}\right):\sqrt{25}$.

0.15. Өрнектің анықталу облысын табыңдар:

1) $\sqrt{x-3}$; 2) $\sqrt{x+3}$; 3) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{4x-1}$;

4) $\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}$; 5) $\sqrt{x^2-9}$; 6) $\sqrt{|x|-3}$.

0.16. Сандарды салыстырыңдар:

1) $\sqrt{14}$ және $\sqrt{6}+\sqrt{8}$; 2) $7-\sqrt{2}$ және $5+\sqrt{2}$;
3) $\sqrt{15}-2$ және $\sqrt{3}+2$; 4) $\sqrt{10}$ және $\sqrt{20}-\sqrt{5}$.

1) $\left(\sqrt{14}\right)^2-\left(\sqrt{6}+\sqrt{8}\right)^2=14-\left(6+2\sqrt{48}+8\right)=-2\sqrt{48}<0$

$\Rightarrow\left(\sqrt{14}\right)^2<\left(\sqrt{6}+\sqrt{8}\right)^2\Rightarrow\sqrt{14}<\sqrt{6}+\sqrt{8}$.

0.17. Өрнекті квадраттардың айырымына келтіріп, көбейткіштерге жіктеңдер:

1) x^2-3; 2) $4a^2-5$; 3) $3y^2-2$; 4) $5b^2-6$;
5) $x-9$, $x>0$; 6) $y-5$, $y>0$; 7) $4-9b$, $b>0$; 8) $7c^2-3x^2$.

0.18. Бөлшек бөліміндегі иррационалдықтан құтылыңдар:

1) $\frac{1}{\sqrt{x-2}}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$; 3) $\frac{1}{2\sqrt{a}+3\sqrt{b}}$; 4) $\frac{\sqrt{2a}+\sqrt{3b}}{\sqrt{2a}-\sqrt{3b}}$.

0.19. $ax^2+2kx+p=0$ теңдеуінің түбірлерін $x_{1/2}=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-ap}}{a}$ формуласы бойынша есептеуге болатынын дәлелдеңдер.

0.20. Квадрат теңдеулердің түбірлерін 0.19-есепте көрсетілген формула бойынша анықтаңдар:

1) $3x^2-10x+3=0$; 2) $x^2+14x+33=0$;
3) $y^2-8y-84=0$; 4) $5y^2+26y+24=0$;
5) $16x^2+8x+1=0$; 6) $x^2-34x+289=0$.

0.21. Квадрат үшмүшенің түбірлерін анықтап, оны көбейткіштерге жіктеңдер:

1) $2x^2-5x+3$; 2) $2x^2-5x-7$; 3) $-y^2+6y-5$;
4) $5y^2+2y-3$; 5) $x^2-11x+30$; 6) $-x^2-5x+6$.

0.22. Мүмкін болса, квадрат үшмүшені көбейткіштерге жіктеңдер:

1) $4x^2-9x+5$; 2) $16a^2-24a+9$; 3) $3x^2-12x+12$;
4) $4b^2-9b+7$; 5) x^2-x-2; 6) $-48a^2-8a+1$;
7) $-3y^2+8y+11$; 8) $y^2-7y+11$; 9) $4x^2+x+0,04$.

0.23. Қатты қағаздан $y=0,5x^2$ параболасының үлгісін (трафаретін) жасап, төмендегі функциялардың графиктерін салыңдар:

1) $y=0,5(x-1)^2+2$; 2) $y=0,5x^2+4$;
3) $y=-0,5(x+2,5)^2-3$; 4) $y=0,5(x+4)^2$.

0.24. $y=2x^2$ параболасының үлгісін пайдаланып,

1) $y=-2x^2$; 2) $y=2x^2-1$;
3) $y=-2(x-4)^2-4$; 4) $y=-2(x+3)^2$

функцияларының графиктерін салыңдар.

0.25. Функцияның графигін салыңдар. Оның төбесі мен өсін анықтаңдар:

1) $y=x^2-4$; 2) $y=(x-4)^2$; 3) $y=x^2-4x+4$; 4) $y=2x^2+x-3$.

0.26. Функцияның графигін салыңдар:

1) $y=x^2+2x-3$; 2) $y=\dfrac{x^2}{2}-4x+6$;
3) $y=-2x^2-5x-2$; 4) $y=-x^2+6x-10$;
5) $y=x^2-4x$; 6) $y=-x^2+5$.

0.27. Төмендегі теңдеулерді бүтін теңдеулермен алмастырғанда бөгде түбірлердің пайда болатынын көрсетіңдер:

1) $\dfrac{1}{x-2}+3=\dfrac{3-x}{x-2}$; 2) $5+\dfrac{1}{x-4}=\dfrac{5-x}{x-4}$;

3) $\dfrac{1}{x-5}+6=\dfrac{6-x}{x-5}$; 4) $\dfrac{8-x}{x-7}=8+\dfrac{1}{x-7}$.

0.28 – 0.34-есептерде көрсетілген теңдеулерді шешіңдер.

0.28. 1) $\dfrac{2x-1}{2x+1}=\dfrac{2x+1}{2x-1}+\dfrac{8}{1-4x^2}$;

2) $\dfrac{12}{1-9x^2}=\dfrac{1-3x}{1+3x}+\dfrac{1+3x}{1-3x}$;

3) $\dfrac{t^2-3}{1-t^2}+\dfrac{t+1}{t-1}=\dfrac{4}{1+t}$;

4) $\dfrac{y^2+17}{y^2-1}=\dfrac{y-2}{y+1}-\dfrac{5}{1-y}$.

0.29. 1) $x+2-\dfrac{3x+8}{x+2}=\dfrac{x}{x+2}$;

2) $\dfrac{6}{4x^2-1}+\dfrac{3}{2x+1}=\dfrac{2}{2x-1}+1$;

3) $\dfrac{4}{(x-3)(x-1)}+\dfrac{2}{3-x}+\dfrac{5}{x-1}=7;$

4) $\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{3}{x-2}=\dfrac{4}{4-x^2}+1.$

0.30. 1) $x^4-29x^2+100=0;$ 2) $x^4+7x^2+10=0;$
3) $5y^4+2y^2-3=0;$ 4) $2y^4-5y^2-7=0;$
5) $x^4-(a^2+9)x^2+9a^2=0;$ 6) $x^4-(9a^2+4)x^2+36a^2=0.$

0.31. 1) $(x+3)^4-13(x+3)^2+36=0;$ 2) $(2x-1)^4-(2x-1)^2-12=0;$
3) $(x-1)^4-x^2+2x-73=0;$ 4) $(x+2)^4+2x^2+8x-16=0.$

0.32. 1) $x^4+x^3-4x^2+x+1=0;$ 2) $6x^4+5x^3-38x^2+5x+6=0;$
3) $x^3-3x^2-3x+1=0;$ 4) $3x^3-7x^2-7x+3=0;$
5) $5x^4-12x^3+11x^2-12x+5=0;$ 6) $x^4+5x^3+4x^2-5x+1=0.$

0.33. 1) $\sqrt{y+2}-\sqrt{y-6}=2;$ 2) $\sqrt{22-x}-\sqrt{10-x}=2;$
3) $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x-1}=2;$ 4) $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x-2}=7;$
5) $\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+3}=1;$ 6) $\sqrt{3x-2}=2\sqrt{x+2}-2.$

2) ММЖ: $x \leqslant 10.$

$\sqrt{22-x}=2+\sqrt{10-x} \Rightarrow 22-x=4+4\sqrt{10-x}+10-x \Rightarrow$
$\Rightarrow 8=4\sqrt{10-x} \Rightarrow 4=10-x \Rightarrow x=6 \in$ ММЖ.

Ж а у а б ы: $x=6$

0.34. 1) $|x-3|+2|x+1|=4;$ 2) $|5-2x|+|x+3|=2-3x;$
3) $|5-x|+|x-1|=10;$ 4) $|4-x|+|x-2|=2.$

0.35. a параметрінің қандай мәндерінде:

1) $ax^2-6x+9=0$;
2) $x^2+ax+0,25=0$;
3) $4x^2-ax+a-3=0$;
4) $(a-1)x^2-2(a+1)x+a-2=0$

теңдеулерінің бір түбірі болады?

0.36. Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases} 21x^2+39x-6<0, \\ x<0; \end{cases}$
2) $\begin{cases} 4x^2+5x-6>0, \\ 7x>0; \end{cases}$
3) $\begin{cases} x^2-3x-4<0, \\ 3x-12>0; \end{cases}$
4) $\begin{cases} x^2+7x+10<0, \\ 4x-3,6>0; \end{cases}$
5) $\begin{cases} x+7>0, \\ x^2+5x\geqslant 0; \end{cases}$
6) $\begin{cases} 2x^2+5x+20\leqslant 0, \\ x-1,5\geqslant 0. \end{cases}$

C

0.37. Бөлшекті қысқартыңдар:

1) $\dfrac{7x^2+x-8}{7x-7}$;
2) $\dfrac{5a+10}{2a^2+13a+18}$;
3) $\dfrac{b^2-8b+15}{b^2-25}$;
4) $\dfrac{y^2-5y-36}{81-y^2}$;
5) $\dfrac{c^2-10c-11}{22+9c-c^2}$;
6) $\dfrac{5a^2+8a+3}{14+3a-11a^2}$.

0.38. Егер $a>0$ және $D=b^2-4ac<0$ болса, онда $y=ax^2+bx+c$ квадраттық функциясының тек оң мәндер қабылдайтынын дәлелдеңдер.

0.39. Егер $a<0$ және $D=b^2-4ac<0$ болса, онда $y=ax^2+bx+c$ квадраттық функциясының тек теріс мәндер қабылдайтынын дәлелдеңдер.

0.40. Функцияның графигін салыңдар:

1) $y=|2-x^2|$;
2) $y=|x^2+x-2|$;
3) $y=5x^2-7|x|+2$;
4) $y=2x^2-5|x|-3$.

0.41. Көпмүшелерді көбейткіштерге жіктеңдер:

1) x^3-4x;
2) x^3-10x^2+25x;
3) x^3+8;
4) y^3+12y^2+36y;
5) x^4-9;
6) x^3+10x^2-x-10;
7) z^5-1;
8) $z^3-8z^2-2z+16$.

0.42. Егер $a+b+c=0$ болса, онда $ax^2+bx+c=0$ теңдеуінің $\frac{c}{a}$ түбірлері 1 және $\frac{c}{a}$ болатынын дәлелдеңдер.

0.43. Егер $a-b+c=0$ болса,онда $ax^2+bx+c=0$ теңдеуінің түбірлері -1 және $-\frac{c}{a}$ болатынын дәлелдеңдер.

0.44. Функцияның таңба тұрақтылық аралығын табыңдар:

1) $y=x-2$;
2) $y=2-3x$;
3) $y=x^2-3x+2$;
4) $y=-3x^2+5x-2$;
5) $y=(3x-10)(x+6)$;
6) $y=\dfrac{6-x}{x}$;
7) $y=\dfrac{4+2x}{5+x}$;
8) $y=\dfrac{6}{(x-1)(x+8)}$.

0.45. Функцияның анықталу облысын, мәндер облысын, нөлдерін (бар болса), үзіліс нүктелерін, таңба тұрақтылық аралықтарын, өсу және кему аралықтарын, экстремумдарын табыңдар және графигін салыңдар:

1) $y=x^2+2$;
2) $y=3-4x^2$;
3) $y=3x^2-6x+1$;
4) $y=\dfrac{5}{x-2}$;
5) $y=\dfrac{x}{x+1}$;
6) $y=\dfrac{x+1}{x}$;
7) $y=\begin{cases} x-1, \text{егер } x\geqslant 0, \\ -x^2, \text{егер } x<0; \end{cases}$
8) $y=\begin{cases} x^2, \text{егер } x\geqslant 0, \\ \dfrac{1}{x-1}, \text{егер } x<0. \end{cases}$

0.46. a-ның қандай мәндерінде $x^2-(a^2-2a-3)x-a^3+3a+2\leqslant 0$ теңсіздігінің шешімдері $[-2;\ 4]$ аралығында болады?

0.47. Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases} x^2+x-6<0, \\ -x^2+2x+3>0; \end{cases}$
2) $\begin{cases} x^2+4x-5>0, \\ x^2-2x-8<0. \end{cases}$

0.48. Теңсіздіктер мәндес бола ма:

1) $\frac{x-3}{x+1} \geqslant 0$ және $(x-3)(x+1) \geqslant 0$;

2) $\frac{x+5}{x-8} < 0$ және $(x+5)(x-8) < 0$?

0.49 — 0.51-есептердегі теңдеулерді шешіңдер.

0.49. 1) $\frac{2x-7}{x^2-9x+14} - \frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{x-1}$;

2) $\frac{2x+7}{x^2+5x-6} + \frac{3}{x^2+9x+18} = \frac{1}{x+3}$;

3) $\frac{9}{4x^2+1} - \frac{8x+29}{16x^4-1} = \frac{18x+5}{8x^3+4x^2+2x+1}$;

4) $\frac{\frac{1}{6}}{x^3+3x^2+x+3} + \frac{1}{x^4-1} = \frac{\frac{1}{6}}{x^3-3x^2-x+3}$.

0.50. 1) $28x^3+3x^2+3x+1=0$;

2) $126x^3-3x^2+3x-1=0$;

3) $(x^2+4x)(x^2-6x+8)=(x^3-16x)(x^2+2x-8)$;

4) $(x^2+5x)(x^2-3x-28)=(x^3-16x)(x^2-2x-35)$.

0.51. 1) $|x-2|x^2=10-5x$;

2) $(x^2-5x+6)^2+3|x-3|=0$;

3) $(7x^2-3x-4)^2+|7x+4|(x^2-1)^2=0$;

4) $6x-12=x^2|x-2|$.

0.52. Түбірлері $\sqrt{2}$ және $-\sqrt{3}$ сандарына тең болатындай етіп, биквадрат теңдеу құрастырыңдар.

0.53. a және b параметрлерінің қандай мәндерінде $x^4+x^3-18x^2+ax+b=0$ теңдеуінің үш бүтін түбірі өзара тең болады?

0.54. a параметрінің қандай мәндерінде $(a+4x-x^2-1)(a+1-|x-2|)=0$ теңдеуінің үш түбірі болады?

0.55. $y = \dfrac{x-13}{x^2+x-6}$ функциясының графигі x-тің қандай мәндерінде $0 < y < 1$ аралығында жатады?

0.56. 100-ден кем жай бөлгіштері болмайтын төрт таңбалы санның жай сан болатынын дәлелдеңдер.

0.57. а) $\underbrace{77...7}_{2004 \text{ рет}} \cdot 3$ саны; ә) $100^{100} - 1$ саны құрама сандар болатынын көрсетіңдер.

0.58. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\sqrt{7+\sqrt{24}}$;
2) $\sqrt{7-\sqrt{24}}$;
3) $\sqrt{5+\sqrt{24}}$;
4) $\sqrt{7+\sqrt{48}}$;
5) $\sqrt{17-4\sqrt{9+4\sqrt{5}}}$;
6) $2\sqrt{6+2\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$.

0.59. Бөлшектің бөліміндегі иррационалдықтан құтылыңдар:

1) $\dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$;
2) $\dfrac{x^2-2x}{\sqrt{x+2}-2}$;
3) $\dfrac{x}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1-2x}}$.

1-бөлім. ЕКІ АЙНЫМАЛЫСЫ БАР ТЕҢДЕУЛЕР, ТЕҢСІЗДІКТЕР ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ ЖҮЙЕЛЕРІ

1.1. Екі айнымалысы бар теңдеулер және олардың геометриялық мағынасы

Тақырыпты оқып-үйрену барысында сендер:

- екі айнымалысы бар сызықтық және сызықтық емес теңдеулерді ажырата білесіңдер;
- екі айнымалысы бар теңдеулердің геометриялық мағынасын анықтай білесіңдер.

Екі айнымалысы бар теңдеулер

Топтық жұмыс

Кестені толтырыңдар:

Функция	Атауы	Теңдеуге келтіру	Теңдеу атауы
1	2	3	4
$y=kx+n$	Сызықтық функция	$kx-y+n=0$	Екі айнымалысы бар сызықтық теңдеу
	Квадраттық функция		
		$ax^2-y=0$	

жалғасы

1	2	3	4
$y = \frac{k}{x}$			
			Радиусы $R-v$ және центрі (a,b) нүктесінде орналасқан шеңбердің теңдеуі

• Алынған теңдеулердің дәрежелерін анықтаңдар.

• Теңдеулердің барлығын да сызықтық теңдеу деп атауға бола ма? Олардың арасынан сызықтық емес теңдеулерді көрсетіңдер.

• Теңдеулердің барлығы бірдей функционалды тәуелдікті анықтай ма?

• Дәреже көрсеткішіне байланысты қандай теңдеулерді сызықтық емес деп атау керек?

Жауаптарыңды негіздеп, сыныппен бірге талқылаңдар. Қорытынды жасаңдар. Көрсетілген функциялар мен теңдеулерге нақты мысал келтіріп, олардың графиктерін салыңдар.

Сонымен, теңдеудің құрамында бір емес, бірнеше айнымалы бар болса, бұл теңдеуді **көп (бірнеше) айнымалысы бар теңдеу** *деп атайды.* Мысалы, $x^2+y^2+z^2-xy+xz+2yz+2=0$, $xyz+9=0$ теңдеулерінің әрқайсысы – үш айнымалысы бар теңдеулер. $x^2+2xy-x+2=0$, $3xy=4$, $2x+y^2-y=0$ — екі айнымалысы бар теңдеулер. Көп айнымалысы бар теңдеулердің дәрежелерін анықтау үшін оның құрамындағы әрбір қосылғыштағы айнымалылардың дәрежелерін қосады. Осыдан шыққан сандарды салыстырып, олардың ең үлкенін анықтайды. Осы анықталған сан теңдеудің **дәрежесі** деп аталады. Мысалы, $x^2+y^2+xyz+2z-2=0$ – үш айнымалысы бар үшінші дәрежелі теңдеу, $xy^2+x^2-4=0$ – екі айнымалысы бар үшінші дәрежелі теңдеу, $x^2+3xy-y+4=0$, $2xy=5$, $2x-y^2-y=0$ — екі айнымалысы бар екінші дәрежелі теңдеулер.

Жалпы екі айнымалысы бар сызықтық теңдеу

$$ax+by+c=0 \qquad (1)$$

түрінде жазылады. Мұндағы a, b, c — берілген нақты сандар және a мен b коэффициенттерінің екеуі бірдей нөлге тең емес. Егер $b \neq 0$ болса, (1) теңдеуді $y=kx+n$ түріне оңай келтіруге болады. Ол үшін мына белгілеулерді енгізсе жеткілікті:

$$k = -\frac{a}{b}; \quad n = -\frac{c}{b}.$$

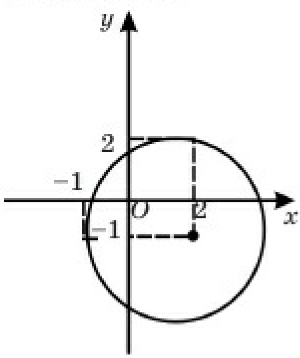
Екі айнымалысы бар екінші дәрежелі теңдеу

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+k=0 \qquad (2)$$

түрінде жазылады. Мұндағы a, b, c, d, e, k — берілген сандар және a, b, c сандарының бәрі бірдей нөлге тең болмайды деп есептейміз, өйткені $a=b=c=0$ болғанда (2) теңдеу екінші дәрежелі теңдеу болмайды. Теңдеудегі k саны *бос мүше* деп аталады.

1.1.2. Екі айнымалысы бар теңдеулердің геометриялық мағынасы

Жоғарыда атап өткеніміздей, x және y айнымалыларының арасында орнатылған әрбір функционалдық тәуелділікті екі айнымалысы бар теңдеу деп қарастыруға болады. Мұндай тәуелділіктердің геометриялық мағынасы сәйкес функцияның графигімен анықталатынын жақсы білеміз. Мысалы, екі айнымалысы бар сызықтық теңдеудің геометриялық мағынасы (графигі) түзу сызық, $y=ax^2+bx+c$ теңдеуінің графигі — парабола, ал $xy=k$ теңдеуімен гиперболаның анықталатынын жақсы білеміз. Сонымен қатар функционалдық тәуелділіктерді анықтай бермейтін екі айнымалысы бар теңдеулер де кездеседі.



1.1-сурет

Мысалы, $x^2+y^2-4x+2y-4=0$ теңдеуін қарастырайық. Теңдеудің сол жақ бөліліндегі өрнекті түрлендірсек, $x^2+y^2-4x+2y-4=x^2-4x+4+y^2+2y+1-9=(x-2)^2+(y+1)^2-9$. Берілген теңдеу

$$(x-2)^2+(y+1)^2=3^2 \qquad (3)$$

түріне келіп ықшамдалады. Oxy декарттық координаталар жүйесінде (3) теңдеумен центрі $(2;-1)$ нүктесі болатын радиусы 3-ке тең шеңбер анықталады (1.1-сурет).

Жалпы алғанда, екі айнымалысы бар теңдеуді

$$F(x;\ y)=0 \tag{4}$$

түрінде жазады. Мұндағы $F(x;\ y)$ — x және y айнымалыларына тәуелді өрнек. Мысалы, егер $F(x;\ y)= x^2-2y$ болса, (4) теңдікпен $x^2-2y=0$ теңдеуі, $F(x;y)=\dfrac{2x-y}{x+y}-\dfrac{3-y}{x-y}$ болса, $\dfrac{2x-y}{x+y}=\dfrac{3-y}{x-y}$ теңдеуі анықталады және т.с.с.

Егер x_0 және y_0 сандары (4) теңдеуді санды тепе-теңдікке айналдырса, $(x_0;\ y_0)$ сандар жұбын осы теңдеудің шешімі (түбірлері) деп атайды. (4) теңдеудің барлық шешімдерінің жиыны координаталық жазықтықта қандай да бір фигураны анықтайды. Осы фигураны (4) теңдеудің **графигі** деп атайды. Мысалы, (2; 2) және (−1;−1) сандар жұбы (3) теңдеуді санды тепе-теңдікке айналдыратынын, ал шеңбер бойында жатпайтын (2; 0) сандар жұбы (3) теңдеуді қанағаттандырмайтынын тексеру оңай. Олай болса, (2; 2), (−1; −1) сандар жұбы (3) теңдеудің шешімдері. (2;0) сандар жұбы оның шешімі болмайды. Теңдеудің бұл шешімдер жиыны координаталық жазықтықта қандай да бір қисық сызықты анықтайды. Десек те, шешімдері санаулы немесе нақты сандар жиынында мүлде шешімдері болмайтын екі айнымалысы бар теңдеулер де кездеседі. Мысалы, $(x-3)^2+(y+1)^2=0$ теңдеуінің жалғыз шешімі бар: $x=3$, $y=-1$, ал $x^2+y^2+9=0$ теңдеуінің нақты сандар жиынында шешімі жоқ.

1. Қандай теңдеулерді бірнеше айнымалысы бар теңдеулер деп атайды? Мысал келтіріңдер.
2. Теңдеудің дәрежесі деп нені түсінесіңдер? Мысал келтіріңдер.
3. Екі айнымалысы бар сызықтық теңдеу мен екінші дәрежелі теңдеулердің жалпы түрін жазып көрсетіңдер.
4. Екі айнымалысы бар теңдеулердің геометриялық мағынасы қандай?
5. Екі айнымалысы бар теңдеудің шешімі деп нені түсінесіңдер?

Практикалық жұмыс

$C(4; 3)$ нүктесі берілген.

1. Центрі C нүктесінде орналасатын және координаталар бас нүктесі арқылы өтетін шеңбер салыңдар.
2. Шеңбердің радиусын сызғышпен өлшеп анықтаңдар.
3. Өлшеу нәтижесінің дәлдігін аналитикалық жолмен тексеріңдер, яғни шеңбердің радиусын нүктелердің арақашықтығын есептейтін формуламен табыңдар.
4. Шеңбердің теңдеуін жазыңдар.
5. Жақшаны ашып, шеңбердің теңдеуін екінші ретті теңдеулердің жалпы түріне келтіріңдер. Алынған теңдеудің бос мүшесі жөнінде қорытынды жасаңдар.

ЕСЕПТЕР

A

1.1. Теңдеудің дәрежесін анықтаңдар:

1) $4x^6-2x^7+x-1=0$; 2) $5y^2-y-2=0$;
3) $4xy+xy^2-5x^2+y=0$; 4) $8x^4y+5x^2y^2=11$;
5) $xy+xz+zy=1$; 6) $xyz-x^2-y^2-z^2=2$;
7) $(x-y)z^2+(x+y)z=z^2$; 8) $(x^2+y^2-xy)^2=xy^2$;
9) $(z^2+x-y)^3=x^2y^3z^4+1$; 10) $xyz^2+x^3-3xy^2-2z+9=0$.

1.2. Центрі $(x_0; y_0)$ нүктесінде жатқан, радиусы R шеңбердің теңдеуін жазыңдар: 1)$(0; 0)$, $R=4$; 2) $(-1; 0)$, $R=2$; 3) $(2; 3)$, $R=3$.

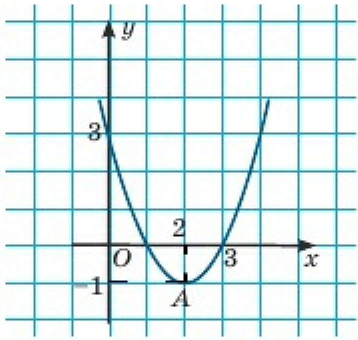
1.3. Түзудің бұрыштық коэффициентін тауып, графигін салыңдар:

1) $y=3x-5$; 2) $y=-0,7x+1$;
3) $2x+y-4=0$; 4) $x-2y+2=0$;
5) $3x+2y-4=0$; 6) $-5x+3y+16=0$.

1.4. Теңдеудің графигін салыңдар:

1) $x^2+y^2=16$;　　2) $(x-3)^2+(y-1)^2=9$;
3) $(x+2)^2+y^2=4$;　　4) $y=(x-2)^2-1$;
5) $y=x^2-4x+3$;　　6) $y=x^2-2$.

5) $y=x^2-4x+3 \Rightarrow y=x^2-4x+4-1 \Rightarrow y=(x-2)^2-1$. Бұл теңдеумен жазықтықта төбесі $A(2;-1)$ нүктесінде орналасқан және тармақтары жоғары бағытталған парабола анықталады (1.2-сурет).



1.2-сурет

1.5. $A(1;\ 4)$, $B(-1;\ 4)$, $C\left(3;\dfrac{4}{3}\right)$, $D\left(\dfrac{1}{2};-8\right)$ нүктелерінің қайсысы $xy=4$ теңдеуінің графигіне тиісті болады?

1.6. Абсциссасы 3-ке тең және

1) $x^2-2xy+2y^2+x-6y+6=0$;　　2) $2xy=9$;
3) $3x-2y+4=0$;　　4) $x^2-3x-y+2=0$ теңдеуінің графигіне тиісті нүктенің ординатасын табыңдар.

B

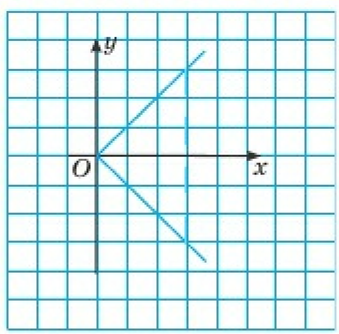
1.7. Теңдеудің графигін салыңдар:

1) $y-|x|=0$;　　2) $|x|+y=5$;　　3) $|y|-x=0$;　　4) $x+|y|=5$.

3) $|y|-x=0 \Rightarrow |y|=x \Rightarrow x\geqslant 0$. Егер $y\geqslant 0$ болса, $y=x$, ал $y<0$ болса, $-y=x$. Сондықтан берілген теңдеу мына теңдеулер жиынтығымен тең шамалы:

$$|y|=x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x,\ x\geqslant 0 \\ y=-x,\ x\geqslant 0 \end{array}\right.$$

Оның графигі 1.3-суретте бейнеленген.



1.3-сурет

1.8. Шеңбердің радиусы мен центрінің координаталарын анықтаңдар:

1) $x^2+y^2-6x+8y+9=0$; 2) $x^2+y^2+3x-4y=0$;
3) $x^2+y^2+7y=0$; 4) $x^2+y^2-x-y-3=0$.

1.9. Теңдеудің геометриялық мағынасын анықтаңдар:

1) $x^2+3x-y+7=0$; 2) $y^2+3y-x+7=0$;
3) $x^2+y^2-8x+7=0$; 4) $xy=2$.

1.10. Теңдеудің графигін салыңдар:

1) $2x^2-4x-y+5=0$; 2) $x^2+y^2-x+5y+\dfrac{1}{4}=0$;

3) $x^2+y^2-\dfrac{8}{3}y-\dfrac{20}{9}=0$; 4) $x^2-8x-y+13=0$.

1.11. Теңдеудің графигін салыңдар:

1) $xy=3$; 2) $xy=-3$; 3) $x(y-2)=-3$; 4) $(x+1)(y-2)=3$.

1.12. Параболаның төбесін анықтаңдар:

1) $3x^2-2x+y-5=0$; 2) $2x^2+3x-y+5=0$.

1.13. Гиперболаның асимптоталарының теңдеуін жазыңдар:

1) $xy-x+y=2$; 2) $xy+3x-2y=8$.

C

1.14–1.18-есептерде берілген теңдеулердің графигін салыңдар.

1.14. 1) $|x|=y$; 2) $x=|y|$; 3) $|x|=|y|$.

1.15. 1) $x^2+y^2-3x-3y+2=0$; 2) $|x^2+y^2-3x-3y+4{,}5|=2{,}5$;
3) $x^2+y^2-3|x|-3|y|+2=0$; 4) $|x^2+y^2-3|x|-3|y|+4{,}5|=2{,}5$.

1.16. 1) $y=x^2-4x+3$; 2) $y=|x^2-4x+3|$;
3) $y=x^2-4|x|+3$; 4) $y=|x^2-4|x|+3|$.

1.17. 1) $y=x^2-1$; 2) $|y|=x^2-1$; 3) $|y|=|x^2-1|$.

1.18. 1) $xy=2$; 2) $|x|y=2$; 3) $x|y|=2$; 4) $|x|\cdot|y|=2$.

1.19. n және m параметрлерінің қандай мәндерінде $y=nx^2+mx$ параболасының төбесі (2; 3) нүктесінде орналасады?

Қайталауға арналған жаттығулар

1.20. $y = \dfrac{2}{x}$ функциясының графигін салыңдар. Осы графиктің $y=2x$ түзуімен қиылысу нүктелерін табыңдар.

1.21. Егер $3<a<4$ және $4<b<5$ болса, 1) $a+b$; 2) $a-b$; 3) $a \cdot b$; 4) $\dfrac{a}{b}$ өрнегін бағалаңдар.

1.22. Теңдеулер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases} x + y = 4, \\ x - y = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 3, \\ 3y - x = 1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} |x| + y = 5, \\ x + 4y = 5. \end{cases}$

1.2. Екі айнымалысы бар сызықтық емес теңдеулер жүйесін шешу

Тақырыпты оқып-үйрену барысында сендер:

- екі айнымалысы бар сызықтық теңдеулер жүйесін шешу тәсілдерін қайталап естеріңе түсіресіңдер;
- екі айнымалысы бар сызықтық емес теңдеулер жүйесін шешу тәсілдерін меңгересіңдер.

1.2.1. Сызықтық теңдеулер жүйесін шешу тәсілдері

Сендер 6-сыныпта екі айнымалысы бар екі сызықтық теңдеулер жүйесін шешуді толық қарастырдыңдар. Енді осы өткен материалдарды қайталап, еске түсірелік.

1-мысал (алмастыру тәсілі). $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ жүйесін шешейік.

Бұл *тәсілдің мағынасы: жүйенің бір теңдеуінен айнымалылардың біреуін екіншісі арқылы өрнектеп, оны жүйенің екінші теңдеуіне қойып, айнымалылардың мәндерін анықтау.* Берілген жүйенің бірінші теңдеуінен x-ті y арқылы өрнектесек, $x=2y+3$ теңдігін аламыз. Оны жүйенің екінші теңдеуіндегі x-тің орнына қоямыз: $2(2y+3)+y=1$. Осыдан $5y+6=1 \Rightarrow y=-1$. Енді $x=2y+3$ теңдеуіндегі y-тің орнына -1-ді қойып, x-тің мәнін анықтаймыз: $x=1$.

Ж а у а б ы: $x=1$, $y=-1$.

Жалпы іс жүзінде тең шамалылық белгілерін қолданып, есепті былай шығарады:

$$\begin{cases} x - 2y = 3, \\ 2x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 3, \\ 2(2y + 3) + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 3, \\ 5y + 6 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 3, \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = -1. \end{cases}$$

Ж а у а б ы: (1; −1).

2-мысал (алгебралық қосу тәсілі). Енді осы жүйені өзге тәсілмен шешіп көрелік. *Алгебралық қосу тәсілінің негізгі мәні: жүйенің теңдеулерін қандай да бір сандарға көбейтіп, оларды қосу (не азайту) арқылы айнымалылардың біреуінен арылады. Шыққан теңдеуден бір айнымалыны анықтап, сонан соң оны пайдаланып, берілген жүйенің бір теңдеуінен екінші айнымалының мәнін анықтайды.*

$$\begin{cases} x - 2y = 3, \\ 2x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y = 3, \\ 4x + 2y = 2 \end{cases} \Rightarrow 5x = 5 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow 2 \cdot 1 + y = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = -1.$$

Ж а у а б ы: (1; −1).

Өзге екі айнымалысы бар сызықтық теңдеулер жүйесінің кез келгені көрсетілген екі тәсілдің бірін қолдансақ оңай шешіледі. Бұл тәсілдерді сызықтық емес теңдеулер жүйесін шешу барысында да кеңінен қолданады.

1.2.2. Екінші дәрежелі теңдеулер жүйесін шешу

Егер теңдеулер жүйесінің бір теңдеуінің дәрежесі 2, екінші теңдеуінің дәрежесі 2-ден артық болмаса, бұл теңдеулер жүйесін ***екінші дәрежелі*** теңдеулер жүйесі деп атайды. Мысалы,

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 3 \end{cases} \quad \text{және} \quad \begin{cases} x^2 + 3y^2 + xy = 4, \\ 2x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$$

Бұл екінші дәрежелі теңдеулер жүйелері. Теңдеулер жүйесінің ***шешімі*** деп осы жүйенің әрбір теңдеуін тепе-теңдікке айналдыратын x пен y-тің мәндерін айтамыз. Мысалы,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ x - y = 1 \end{cases}$$

теңдеулер жүйесінің екі шешімі бар: 1) $x_1=-1$, $y_1=-2$; 2) $x_2=2$, $y_2=1$. Бұл сандардың берілген жүйенің шешімі болатынына тексеру жүргізіп көз жеткізейік:

1) $\begin{cases} (-1)^2 + (-2)^2 = 5, \\ (-1) - (-2) = 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 = 5, \\ 1 = 1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2^2 + 1^2 = 5, \\ 2 - 1 = 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 = 5, \\ 1 = 1. \end{cases}$

Екінші дәрежелі теңдеулер жүйесін шешудің бірнеше тәсілі бар. Енді осы тәсілдерді мысалдар арқылы көрсетейік.

3-мысал. Бір айнымалыны екіншісі арқылы өрнектеу (алмастыру тәсілі).

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2y - 9 = 0, \\ 3x - y - 1 = 0 \end{cases}$$ жүйесін шешейік.

Екінші теңдеуден y-ті x арқылы өрнектесек, $y=3x-1$. Оны бірінші теңдеуге апарып қойсақ,

$$x^2+(3x-1)^2+2(3x-1)-9=0 \text{ немесе } x^2-1=0.$$

Бұл теңдеудің екі түбірі бар: $x_1=-1$, $x_2=1$. y-тің сәйкес мәндерін $y=3x-1$ теңдеуінен табамыз: $y_1=-4$, $y_2=2$.

Сонымен, $x_1=-1$, $y_1=-4$ және $x_2=1$, $y_2=2$.

Кейбір жағдайларда алмастыру тәсілінің орнына Виет теоремасын қолданған тиімді. Осыған бірер мысалдар қарастырайық.

4-мысал. Теңдеулер жүйесін шешу керек:

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6. \end{cases}$$

Виет теоремасы бойынша берілген жүйені қанағаттандыратын x және y сандары $z^2-5z+6=0$ квадрат теңдеуінің түбірлері болады. Ал бұл теңдеудің түбірлері $z_1=2$, $z_2=3$ және берілген жүйеде x пен y тең мүмкіндікті (симметриялы) болғандықтан, оларды z_1мен z_2-нің кез келгенімен теңестіреміз. Сондықтан жүйенің екі шешімі бар: $x_1=2$, $y_1=3$ және $x_2=3$, $y_2=2$.

5-мысал. Теңдеулер жүйесін шешу керек:

$$\begin{cases} x - y = 7, \\ xy = -10. \end{cases}$$

Берілген жүйені мына түрде жазамыз:

$$\begin{cases} x + (-y) = 7, \\ x(-y) = 10. \end{cases}$$

Онда x пен $(-y)$ сандары $z^2-7z+10=0$ теңдеуінің түбірлері болады. Сондықтан есептің жауабы мынадай: $x_1=2$, $y_1=-5$; $x_2=5$, $y_2=-2$.

6-мысал. Теңдеулер жүйесін шешу керек:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 20, \\ xy = 8. \end{cases}$$

1-тәсіл. Бұл жүйенің екінші теңдеуін 2-ге көбейтіп, шыққан теңдеуді біріншісіне қоссақ, $(x+y)^2=36$ немесе $x+y=\pm6$ теңдеулерін аламыз. Онда берілген теңдеулер жүйесін мынадай екі жүйеге жіктеуге болады:

$$1)\begin{cases} x + y = 6, \\ xy = 8; \end{cases} \qquad 2)\begin{cases} x + y = -6, \\ xy = 8. \end{cases}$$

Бұлардың әрқайсысы 4-мысалдағы жүйе сияқты шешіледі. Сонымен, есептің 4 шешімі бар: $x_1=-4$, $y_1=-2$; $x_2=-2$, $y_2=-4$; $x_3=4$, $y_3=2$; $x_4=2$, $y_4=4$.

2-тәсіл. $x^2=u$, $y^2=v$ деп белгілесек, берілген жүйені былай жазамыз:

$$\begin{cases} u + v = 20, \\ uv = 64. \end{cases}$$

Теңдеуді шешеміз. Егер $u_1=16$ болса, $x_1=\pm4$; $v_1=4$ болса, $y_1=\pm2$; $u_2=4$ болса, $x_2=\pm2$; $v_2=16$ болса, $y_2=\pm4$ түбірлерін аламыз. x пен y-тің таңбаларының бірдей болатынын ескеріп, жауапты былай жазамыз: $(-4; 2)$, $(-2; -4)$, $(2; 4)$, $(4; 2)$.

7-мысал. Мына жүйені шешейік:

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3, \\ 2x^2 - xy - y^2 = 5. \end{cases}$$

Жүйенің бірінші теңдеуін 5-ке, екіншісін 3-ке көбейтіп, олардың екіншісінен біріншісін шегерсек,

$$x^2+2xy-8y^2=0$$

теңдеуін аламыз. $y=0$ мәні жүйенің шешімі бола алмайды.

Сондықтан $y \neq 0$ деп алып, бұл теңдеуді y^2-қа бөлсек, $\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{y}\right) - 8 = 0$. Осыдан $\frac{x}{y} = z$ белгілеуін енгізіп, $z^2+2z-8=0$ теңдеуін аламыз. Оның түбірлері $z_1=-4$, $z_2=2$ болғандықтан, $\frac{x}{y} = -4$, $\frac{x}{y} = 2$ немесе $x=-4y$, $x=2y$. Олай болса, берілген жүйе мынадай екі жүйеге жіктеледі:

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3, \\ x = -4y \end{cases} \quad \text{немесе} \quad \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3, \\ x = 2y. \end{cases}$$

Бұл жүйелерді 3-мысал сияқты шешсек, есептің 4 шешімін аламыз:

$$x_{1,2} = \pm\frac{4}{\sqrt{7}}, \quad x_{3,4} = \pm2, \quad y_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{7}}, \quad y_{3,4} = \pm1.$$

1. Теңдеулер жүйесін шешкенде қолданылатын алмастыру және алгебралық қосу тәсілдерінің мәні қандай?
2. Қандай теңдеулер жүйесін екінші дәрежелі теңдеулер жүйесі деп атайды?
3. Квадрат теңдеулер жүйесін шешкенде қандай тәсілдерді қолданады?
4. Виет теоремасы арқылы шешілетін теңдеулер жүйесінің жалпы түрі қандай? Оны алмастыру тәсілімен шешуге бола ма?

Практикалық жұмыс

Бір координаталар жүйесінде $y=x+2$ түзуі мен $y=4-x^2$ параболасын салыңдар және олардың қиылысу нүктелерінің координаталарын жуықтап анықтаңдар.

Алынған жауаптарыңды $\begin{cases} x^2 + y = 4, \\ y = x + 2 \end{cases}$ жүйесінің шешімдерін аналитикалық тәсілмен шешу арқылы тексеріңдер.

ЕСЕПТЕР

А

1.23–1.38-есептерде көрсетілген теңдеулер жүйесін шешіңдер.

1.23. 1) $\begin{cases} x + y = 1, \\ x - y = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x - 7y = 39, \\ x + y = -3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5x - 2y = -12, \\ 3x + 4y = -2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + 2y = 5, \\ -x + 7y = 13. \end{cases}$

1.24. 1) $\begin{cases} x + y = 6, \\ xy = 8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = 4, \\ xy = -3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - 6xy + 9y^2 = 16, \\ x - y = 6. \end{cases}$

1.25. 1) $\begin{cases} x^2 - y^2 = -21, \\ x + y = -3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 74, \\ x - y = 2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 34, \\ x + y = 7; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 - 2xy - y^2 = 1, \\ x + y = 2. \end{cases}$

1) $\begin{cases} x^2 - y^2 = -21, \\ x + y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x+y) = -21, \\ x + y = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 7, \\ x + y = -3 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 4, \\ 2y = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = -5. \end{cases}$

Ж а у а б ы: $x=2$, $y=-5$.

1.26. 1) $\begin{cases} x + 2y = 13, \\ xy = 15; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - 2y = 2, \\ xy = 12; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5(x - y) = 4y, \\ x^2 + 4y^2 = 181. \end{cases}$

1.27. 1) $\begin{cases} x^2 + 3xy - y^2 + 2x - 5y = -64, \\ x - y = -7; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + 3y^2 - 4x - 5y - 8 = 0, \\ x - y + 1 = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4x^2 + 5y^2 = 16, \\ x^2 + 5y^2 = 25; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + xy = 15, \\ y^2 + xy = 10. \end{cases}$

B

1.28. 1) $\begin{cases} 2x - 3y = -18, \\ xy = -12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^2 - 3y^2 = -19, \\ xy = -6; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 65, \\ xy = 28. \end{cases}$

1.29. 1) $\begin{cases} y - x = 1, \\ x + |y| = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} |x - 1| + y = 4, \\ x + y = 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - 3y = -5, \\ 7x + 3y = -1. \end{cases}$

1.30. 1) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4, \\ x + y - 3\sqrt{xy} = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{1}{y-1} - \dfrac{1}{y+1} = \dfrac{1}{x}, \\ y^2 - x - 9 = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y = 5, \\ x^3 + y^3 = 35. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y = 5, \\ x^3 + y^3 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 5, \\ (x+y)(x^2 - xy + y^2) = 35 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 5, \\ x^2 - xy + y^2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 5, \\ (x+y)^2 - 3xy = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 5, \\ 25 - 3xy = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2, y = 3, \\ x = 3, y = 2. \end{array} \right.$

Ж а у а б ы: (2;3), (3;2).

1.31. 1) $\begin{cases} 2x^2 - 3xy - 19y^2 = 25, \\ x^2 - 6y^2 = 250; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7x^2 - 6xy + 12y^2 = 108, \\ x^2 - \dfrac{5}{6}xy + \dfrac{7}{8}y^2 = 18. \end{cases}$

1.32. 1) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x} = 18, \\ x + y = 12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x} = 3, \\ x + y = 2. \end{cases}$

1.33. 1) $\begin{cases} \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{x} = 1, \\ x + y = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y - x = 2, \\ \dfrac{10x + y}{xy} = 3. \end{cases}$

1.34. 1) $\begin{cases} xy = 36, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2\sqrt{xy}, \\ x + y = 20. \end{cases}$

C

1.35. 1) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 1, \\ x + y = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + xy = 12, \\ xy - y^2 = 2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 8, \\ x - y = 2. \end{cases}$

1.36. 1) $\begin{cases} \dfrac{5}{x^2+xy}+\dfrac{4}{y^2+xy}=\dfrac{13}{6}, \\ \dfrac{8}{x^2+xy}-\dfrac{1}{y^2+xy}=1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{2}{x^2+3xy}+\dfrac{3}{y^2-xy}=\dfrac{25}{14}, \\ \dfrac{3}{x^2+3xy}-\dfrac{2}{y^2-xy}=-\dfrac{4}{7}. \end{cases}$

1.37. 1) $\begin{cases} \dfrac{x+2y}{x-y}+\dfrac{x-2y}{x+y}=4, \\ x^2+xy+y^2=21; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{3x-9y}{x+y}+\dfrac{2x+y}{x-y}=4, \\ x^2-y^2=48. \end{cases}$

1) $\begin{cases} \dfrac{x+2y}{x-y}+\dfrac{x-2y}{x+y}=4, \\ x^2+xy+y^2=21; \end{cases} \left| \begin{matrix} x\neq y \\ x\neq -y \end{matrix} \right| \Rightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+2y)(x+y)+(x-2y)(x-y)=4\left(x^2-y^2\right), \\ x^2+xy+y^2=21, \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2=4y^2, \\ x^2+xy+y^2=21 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2y, \\ x^2+xy+y^2=21, \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2y, \\ x^2+xy+y^2=21 \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\pm 2\sqrt{3}, \\ y=\pm\sqrt{3}; \end{cases} \\ \begin{cases} x=\pm 2\sqrt{7}, \\ y=\mp\sqrt{7}. \end{cases} \end{array} \right.$

Ж а у а б ы: $\left(\pm 2\sqrt{3};\pm\sqrt{3}\right),\left(\pm 2\sqrt{7};\mp\sqrt{7}\right)$.

1.38. 1) $\begin{cases} x+y+xy=-1, \\ x^2+xy+y^2=3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^3y^2-x^2y^3=36, \\ 2x^2y-xy^2=6. \end{cases}$

1.39*. a-ның қандай мәндерінде 1) $\begin{cases} x+y=a, \\ xy=9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y=a, \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$

жүйелерінің тек бір ғана шешімі болады?

1.40*. a параметрінің қандай мәндерінде $\begin{cases} x^2+y^2=a, \\ x-y=a \end{cases}$

теңдеулер жүйесінің тек бір ғана шешімі бар?

Қайталауға арналған жаттығулар

1.41. $y=x^2-4x+3$ функциясының графигі 1) $A(2;-1)$; 2) $B(2;1)$ нүктесі арқылы өте ме?

1.42. Салу жұмыстарын орындамай-ақ, 1) $y=x^2+4$; 2) $xy=-4$ функциясының графигі қай координаталық ширектерде орналасқанын айтыңдар.

1.3. Теңдеулер жүйесін құру арқылы шығарылатын мәтінді есептер

Тақырыпты оқып-үйрену барысында сендер:

- мәтінді есептерді теңдеулер жүйесі арқылы шешуді үйренесіңдер;
- есеп шарты бойынша математикалық модель құру дағдыларыңды пысықтайсыңдар.

Көптеген мәтінді есептерде белгісіздер саны бірнешеу болып келеді. Осындай есептерді шешу барысында белгісіз шамаларды айнымалылар арқылы белгілеп, есеп шартын қанағаттандыратындай етіп бірнеше айнымалысы (көп жағдайларда екі айнымалысы) бар теңдеулер жүйесін құрады. Құрылған теңдеулер жүйесін шешіп, берілген есептің жауабын алады. Енді осы айтылғандарды мысалдар арқылы қарастырайық.

1-мысал. Екі таңбалы санның бірінші цифры екіншісінен екі есе кем. Олардың қосындысы 9-ға тең. Осы екі таңбалы санды табу керек.

Бізге қажет екі таңбалы санның бірінші цифры x, екінші цифры y десек, есеп шарты бойынша $y=2x$ және $x+y=9$ болуы қажет. Сонымен, біз мынадай екі айнымалысы бар теңдеулер жүйесін алдық:

$$\begin{cases} y = 2x, \\ x + y = 9. \end{cases}$$

Бұл жүйе берілген мәтінді есептің математикалық моделі болып табылды. Оның шешімі: $x=3$, $y=6$.

Ж а у а б ы: 36.

2-мысал. Саяжайға бөлінген тіктөртбұрышты жер телімінің ауданы 600 м². Оны үш рет айналдыра орап қоршап шығу үшін 420 м сым темір қажет. Осы жер телімінің ені мен ұзындығын табу керек.

x және y арқылы жер телімінің сәйкесінше ені мен ұзындығын белгілесек, есеп шарты бойынша $x \cdot y=600$ теңдігі орындалуы қажет. Осы жерді сым темірмен үш орап қоршап шығу үшін 420 м сым қажет. Қоршауды бір рет айналдыра орау үшін 420:3=140 м сым қажет. Демек, жер телімінің периметрі 140 м. Олай болса, $2x+2y=140$, яғни $x+y=70$ теңдігі орындалуы керек. Сонымен, есептің математикалық моделі ретінде екі айнымалысы бар теңдеулер жүйесін құрамыз:

$$\begin{cases} xy = 600, \\ x + y = 70. \end{cases}$$

Виет теоремасы бойынша $x=10$, $y=60$.

Ж а у а б ы: 10 м, 60 м.

3-мысал. Екі тракторшы егістік жерді бірігіп жыртса, бірінші тракторшы жалғыз өзі жыртқан уақыттан 18 сағ ертерек, екінші тракторшы жалғыз жыртқан уақыттан 32 сағ ертерек жыртып бітірген болар еді. Осы жерді тракторшылардың әрқайсысы жеке-жеке қанша уақытта жыртып бітірер еді?

Есепті шығару үшін үш айнымалы енгіземіз: жер телімін 1-тракторшы t_1 сағатта, екіншісі t_2 сағатта, екеуі бірігіп t сағатта жыртып бітірсін. Есеп шарты бойынша мынадай математикалық модель алынады:

$$\begin{cases} t_1 - t = 18, \\ t_2 - t = 32, \\ \dfrac{1}{t_1} + \dfrac{1}{t_2} = \dfrac{1}{t}. \end{cases}$$

Осыдан $t_1=t+18$, $t_2=t+32$ болғандықтан, үшінші теңдеуден

$$\frac{1}{t+18}+\frac{1}{t+32}=\frac{1}{t}\Rightarrow t^2+32t+t^2+18t=t^2+50t+576\Rightarrow$$

$$t^2=576\Rightarrow t=\pm 24.$$

Бұл математикалық модельдің шешімі. Есеп шарты бойынша $t=24$ сағ. Осыдан: $t_1=42$ сағ, $t_2=56$ сағ.

Ж а у а б ы: 42 сағ; 56 сағ.

Бұл есептегі $\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}=\frac{1}{t}$ теңдеуінің қалай құрылғанын түсіндірелік. Мұндай теңдеулер жұмыс өнімділігімен тығыз байланысты. Мәселен, 3-мысалда берілген жер алқабының жалпы ауданы S болса, онда бірінші тракторшының осы жерді жыртып шығу «жылдамдығы» (жұмыс өнімділігі) $\frac{S}{t_1}$, екіншісінікі $\frac{S}{t_2}$. Екеуі бірігіп жыртқандағы өнімділігі $\frac{S}{t}$. Бірігіп жыртқанда олардың жұмыс өнімділіктері қосылады: $\frac{S}{t_1}+\frac{S}{t_2}=\frac{S}{t}$. Бұл теңдеуді S-ке қысқартсақ, $\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}=\frac{1}{t}$.

Практикалық жұмыс

1) $\begin{cases} m+n=11, \\ mn=28, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3t_1=2t_2, \\ \frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}=\frac{1}{3} \end{cases}$ теңдеулер жүйесімен шешілетін мәтінді есептер құрастырыңдар және оны шығарыңдар.

ЕСЕПТЕР

А

1.43. Тіктөртбұрыштың ені ұзындығынан 3 см қысқа, олардың қосындысы 27 см. Тіктөртбұрыштың ауданын табыңдар.

1.44. Бақта жұмыс істеп жүрген Нұрлан мен Самат қалталарына алма салып шықты. Олар көшеде Берікті кезіктіріп, Нұрлан оған бір алмасын, Самат 2 алмасын берді. Сонда үшеуінің алмаларының саны бірдей болды. Нұрлан мен Саматтың әрқайсысы бақтан неше алмадан алып шыққан?

1.45. Тік бұрышты үшбұрыштың гипотенузасы 10 см, катеттерінің қосындысы 14 см. Осы үшбұрыштың ауданын табыңдар.

1.46. Екі таңбалы санның бірінші цифры оның екінші цифрынан 4-ке артық. Цифрлардың көбейтіндісі 21-ге тең. Осы екі таңбалы санды табыңдар.

Алдымен есептің математикалық моделін құралық. $\overline{xy}$ бізге қажет екі таңбалы сан десек, есепшарты бойынша $x=y+4$ және $x \cdot y=21$ болуы қажет. Есептің математикалық моделі жүйе түрінде жазылады:

$$\begin{cases} x = y + 4, \\ xy = 21. \end{cases}$$

Енді осы жүйені шешеміз:

$$\begin{cases} x = y + 4, \\ (y+4)y = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 4, \\ y^2 + 4y - 21 = 0. \end{cases}$$

Екінші теңдеудің түбірлері: $y_1=3$, $y_2=-7$.
Онда $x_1=7$, $x_2=-3$. Мұнда $x_2=-3$, $y_2=-7$. Бұл есеп шартына қайшы, өйткені теріс цифр болмайды.

Ж а у а б ы: 73.

1.47. Үш қой мен бір сиыр күніне 11 кг жем жейді, бір қой мен үш сиыр күніне 17 кг жем жейді. Күніне бір қой неше килограмм және бір сиыр неше килограмм жем жейді?

1.48. Оқушы дүкеннен 20 дәптер және бір күнделік сатып алып, оған 125 теңге төледі. Егер бір дәптер мен бір күнделікті сатып алу үшін 30 теңге төлеу қажет болса, күнделік пен дәптердің әрқайсысының бағасы қандай?

1.49. 24 жұмысшыдан құрылған бригада тапсырманы 6 күнде орындады. Осы тапсырманы 36 жұмысшыдан құрылған бригада неше күнде орындайды?

B

1.50. Катер өзен ағысымен 15 км және тынық суда 4 км жүзген жолына 1 сағ уақыт жұмсады. Егер өзен ағысының жылдамдығы катер жылдамдығынан 4 есе кем болса, өзен ағысының жылдамдығы қандай?

1.51. Шаруа қожалығы егістікке арналған жерді үш күнде жыртып бітірді. Бірінші күні екінші күнмен салыстырғанда 2310 га жер артық жыртылды. Үшінші күні қалған 330 га жер жыртылды, бұл барлық жер алқабының 2%-ін құрайды. Бірінші және екінші күндердің әр күнінде неше гектар жер жыртылды?

1.52. Аулада жүрген тауықтар мен қойлардың аяқтарының саны 40, бастарының саны 15. Аулада неше тауық пен неше қой жүр?

1.53. Турбазаға демалысқа келген 83 адам жалпы саны 25-ке тең үйлер мен шатырларға орналастырылды. Егер әрбір үйге 5 адамнан, әрбір шатырға 2 адамнан орналасқаны белгілі болса, турбазада неше үй бар? Неше шатыр бар?

1.54. Бір мезгілде екі елді мекеннен бір-біріне қарама-қарсы бағытта жолға шыққан екі велосипедші бір-бірімен 3 сағаттан соң кездесті. Бір велосипедші екіншісіне қарағанда сағатына 2 км жол артық жүретіні және бұл елді мекендердің арақашықтығы 66 км екені белгілі. Әр велосипедшінің жылдамдығын табыңдар.

1.55. Катердің жылдамдығы өзен ағысының жылдамдығынан 16 км/сағ артық. Егер катер өзен ағысымен 18 км, өзен ағысына қарсы 20 км жүрген жолына 2 сағ жұмсаса, катердің, өзен ағысының жылдамдықтары қандай?

x — катердің тынық судағы жылдамдығы, y — өзен ағысының жылдамдығы болса, есеп шартына сәйкес $x=y+16$ болуы керек. Сонымен қатар катер өзен ағысымен 18 км жолды $\frac{18}{x+y}$ сағ, өзен ағысына қарсы 20 км қашықтықты $\frac{20}{x-y}$ сағ жүріп өтеді. Есеп шарты бойынша $\frac{18}{x+y}+\frac{20}{x-y}=2$ сағ. Олай болса, есептің математикалық моделі жүйе түрінде жазылады:

$$\begin{cases} x = y + 16, \\ \frac{18}{x+y}+\frac{20}{x-y}=2. \end{cases}$$ Оның шешуі: $x=20$, $y=4$.

Жауабы: $x=20$ км/сағ; $y=4$ км/сағ.

1.56. Үш жер алқабының ауданы 60 га. Бірінші алқаптың ауданы барлық ауданның 25%-ына тең. Екінші және үшінші алқаптар аудандарының қатынасы 4:5. Алқаптардың әрқайсысының ауданы қандай?

1.57. Ағынсыз судағы жылдамдығы 25 км/сағ катер 2 сағ ішінде өзен ағысымен 30 км және ағысқа қарсы 20 км жол жүрді. Өзен ағысының жылдамдығы қандай?

1.58. A және B теміржол бекеттерінің арақашықтығы 120 км. A-дан B-ға аттанған пойыздың соңынан 3 сағ өткен соң одан жылдамдығы 10 км/сағ артық екінші пойыз шықты. Егер екінші пойыз B бекетіне біріншісіне қарағанда 2 сағ кеш келсе, екінші пойыз A мен B бекеттерінің арасына қанша уақыт жұмсаған?

C

1.59. Екі жұмысшы бірдей 131 тетік жасап шығарды және оның 65-ін бірінші жұмысшы жасап, бұл жұмысқа екіншісіне қарағанда 1 күн кем уақыт жұмсады. Егер бірінші жұмысшы екінші жұмысшыдан күніне екі тетік артық дайындап отырса, олар бірлесіп күніне неше тетік жасаған?

1.60. Екі бригада өнімді 12 күнде жинап бітіре алады. Олар бірігіп 8 күн жұмыс істегеннен кейін бірінші бригада басқа жұмысқа ауысып, қалған жұмысты екінші бригада 7 күнде аяқтады. Осы бригадалардың әрқайсысы өнімді жеке өзі неше күнде жинап бітірер еді?

1.61. Екі жұмысшыға белгілі бір тетіктер жасау тапсырылды. Бірінші жұмысшы 7 сағ, екіншісі 4 сағ жұмыс істегеннен кейін барлық жұмыстың $\frac{5}{9}$ бөлігі біткені белгілі болды. Олар бірігіп тағы да 4 сағ жұмыс істегеннен кейін барлық жұмыстың $\frac{1}{18}$ бөлігі қалды. Барлық тапсырманы әрбір жұмысшы жеке өзі орындағанда неше сағатта бітірер еді?

1.62. Бір егін алқабынан 2880 ц астық, ауданы одан кіші жерден 2160 ц бидай жиналды. Бірінші алқаптың әр гектарынан екіншісіне қарағанда 4 ц бидай артық жиналды және бірінші алқаптың ауданы екіншісінен 12 га артық. Әр алқаптың ауданын табыңдар.

1.63. Алюминий мен магнийдің қоспасында 22 кг алюминий бар. Бұл қоспаға 15 кг магний қосылып, қайта балқытылды. Осыдан шыққан жаңа қоспаның құрамындағы магнийдің үлесі 45%-ға өсті. Алғашқы қоспаның салмағы қандай болған?

1.64. Шеңбер бойымен қозғалатын екі дененің біреуі екіншісінен 2 с жылдамырақ қозғалады. Егер екі дене бір бағытта қозғалып, әрбір 60 с өткен сайын кездесіп отырса, олардың әрқайсысы 1 с-та шеңбердің қандай бөлігін жүріп өтеді?

Қайталауға арналған жаттығулар

1.65. Теңдеулер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases} 2x - 3y = 5, \\ 3x + y = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - 2y = 0, \\ x + 3y = 5. \end{cases}$

1.66. Теңсіздікті шешіңдер:

1) $|x - 2| < 3;$ 2) $x^2 - 5x + 60 \geqslant 0.$

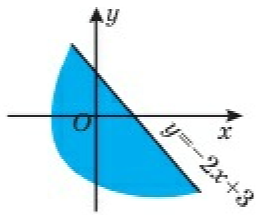
1.4. Екі айнымалысы бар теңсіздіктер

Тақырыпты оқып-үйрену барысында сендер:

- екі айнымалысы бар теңсіздіктерді шешу ұғымымен танысасыңдар;
- екі айнымалысы бар сызықтық емес теңсіздіктер жүйесін шеше білесіңдер.

1.4.1. Екі айнымалысы бар теңсіздіктерді шешу ұғымы

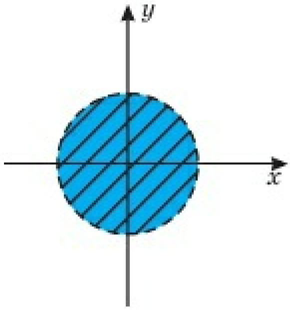
Енді екі айнымалысы бар теңсіздіктердің геометриялық мағынасын анықтайық. Мысалы, $2x+y-3\leqslant 0$ теңсіздігін қарастырайық. $2x+y-3=0$ немесе $y=-2x+3$ теңдеуімен түзу сызық анықталады (1.4-сурет). Ал $2x+y-3\leqslant 0$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық $(x;y)$ нүктелер жиыны осы түзуден төмен немесе осы түзудің бойында орналасады. Мысалы, $(0;0)$ нүктесі теңсіздікті қанағаттандырады: $2\cdot 0+0-3<0$. Олай болса, берілген теңсіздікті қанағаттандыратын нүктелер жиыны — осы жазықтықтағы $y=-2x+3$ түзуінен төмен орналасқан жарты жазықтық.



1.4-сурет

Сонымен, екі айнымалысы бар теңсіздіктерді шешу деп айнымалылардың осы теңсіздікті қанағаттандыратын барлық мәндерінің жиынын анықтауды айтады. Мысалы, теңсіздік x және y айнымалыларына тәуелді болса, $(x;y)$ сандар жұбы координаталық жазықтықта нүктені анықтайды. x және y айнымалыларына тәуелді теңсіздікті шешу деп координаталары осы теңсіздікті қанағаттандыратындай барлық $(x;y)$ нүктелері жиынын жазықтықта бейнелеп көрсетуді айтады. Енді $x^2+y^2<4$ теңсіздігін қарастырайық. $x^2+y^2=4$ теңдеуімен радиусы 2-ге тең, центрі координаталар бас нүктесінде орналасқан шеңбер анықталады.

$(x_0;y_0)$ нүктесі үшін $x_0^2+y_0^2<4$ теңсіздігі орындалса, $(x_0;y_0)$ нүктесінен $(0;0)$ нүктесіне дейінгі қашықтық 2-ден кіші деген сөз. Олай болса, $(x_0;\ y_0)$ нүктесі осы шеңбермен шектелген дөңгелек ішінде орналасады. Сонымен, $x^2+y^2<4$ теңсіздігін қанағаттандыратын нүктелер жиыны центрі



1.5-сурет

координаталар бас нүктесінде орналасқан, радиусы 2-ге тең дөңгелекті (дөңгелекті шектейтін шеңбер нүктелері енбейді, өйткені теңсіздік таңбасы қатаң) анықтайды (1.5-сурет). Онда $x^2+y^2<4$ теңсіздігімен осы шеңбердің сыртқы бөлігі анықталады. Тағы бірнеше мысал қарастырайық.

1.4.2. Екі айнымалысы бар теңсіздіктер жүйесін шешу

Алдымен мына мысалды қарастырайық.

1-мысал. Төбелері $A(-1;0)$, $B(1;3)$, $C(4,-2)$ нүктелерінде орналасқан үшбұрышты теңсіздіктер арқылы анықтау керек.

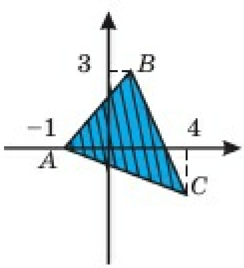
Үшбұрыштың AB, AC, және BC қабырғалары арқылы өтетін түзулерінің формулаларын жазайық:

$$AB \text{ түзуі: } 3x-2y+3=0 \Rightarrow y=\frac{3x+3}{2};$$

$$AC \text{ түзуі: } 2x+5y+2=0 \Rightarrow y=\frac{-2x-2}{5};$$

$$BC \text{ түзуі: } 5x+3y-14=0 \Rightarrow y=\frac{-5x+14}{3}.$$

Үшбұрыш AB және BC түзулерінен төмен, AC түзуінен жоғары орналасқандықтан,



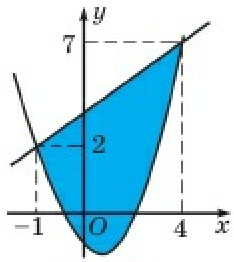
1.6-сурет

$$\begin{cases} y\leqslant \frac{1}{2}(3x+3), \\ y\geqslant \frac{1}{5}(-2x-2), \\ y\leqslant \frac{1}{3}(-5x+14) \end{cases} \text{ немесе } \begin{cases} 3x-2y+3\geqslant 0, \\ 2x+5y+2\geqslant 0, \\ 5x+3y-14\leqslant 0. \end{cases}$$

теңсіздіктер жүйесімен анықтаймыз (1.6-сурет).

2-мысал. $\begin{cases} x^2 - y - 2x - 1 \leqslant 0 \\ x - y + 3 \geqslant 0. \end{cases}$ теңсіздіктер жүйесімен анықталатын фигураның графигін (бейнесін) салу керек.

$x^2-y-2x-1\leqslant 0$ теңсіздігін $y\geqslant x^2-2x-1$ немесе $y\geqslant (x-1)^2-2$ түрінде жазсақ, бізге керек фигура $y=(x-1)^2-2$ параболасынан жоғары орналасады. $x-y+3\geqslant 0$ немесе $y\leqslant x+3$ болғандықтан, фигура $y=x+3$ түзуінен төмен орналасады. Олай болса, фигура $y=(x-1)^2-2$ параболасымен және $y\leqslant x+3$ түзуімен шектелген (1.7-сурет).



1.7-сурет

Шығармашылық жұмыс

Бір аграрлық өндіріске тиесілі екі сүт комбинаты бір-бірінен 120 км қашықтықта орналасқан. Олардың өнім ассортименттері, сапасы және дайын өнімдерінің құндары да бірдей. Комбинаттар орналасқан жер қыртысы ерекшеліктеріне байланысты дайын өнімнің тұтынушыға ұсынылатын соңғы құнына тек тасымалдау шығыны ғана әсер ете алады. Бірінші комбинат өнімнің бір бірлігін (мысалы, бір қорабын) тасымалдауға 6 тг/км жұмсаса, онда екінші комбинат осындай өнім бірлігін тасымалдау үшін 12 тг/км жұмсайды. Бұл екі комбинат, бірлестікке тиімді болатындай етіп, тұтынушылар аумағын қалай бөліскендері орынды?

1. Бірінші комбинат A нүктесінде, екіншісі B нүктесінде орналасқан, Ox осі $\overline{AB}$ векторымен бағыттас, координаталар бас нүктесі AB кесіндісінің ортасы деп алып, A және B нүктелерінің координаталарын анықтаңдар.
2. $P(x,y)$ нүктесінде орналасқан дүкен үшін екі комбинаттың өнімдері бірдей бағамен жеткізілді деп алып, осындай барлық P нүктелерінің координаталары $(x-100)^2+y^2=80^2$ теңдеуін қанағаттандыратынын көрсетіңдер.
3. Екінші комбинатқа тиесілі аумақ қандай теңсіздікпен анықталады? Бұл облысты сызбада штрихтап көрсетіңдер.
4. Математикалық жолмен алынған жауапты (бірлестік басшылығына берілетін ұсынысты) баршаға түсінікті етіп тұжырымдаңдар.

ЕСЕПТЕР

А

1.67 Теңсіздіктердің дәрежесін және айнымалылар санын анықтаңдар:

1) $4x^6-2x^7+x-1<0$;
2) $5y^2-y-2>0$;
3) $4xy+xy^2-5x^2+y\leqslant 0$;
4) $8x^4y+5x^2y^2\geqslant 11$;
5) $xy+xz+zy>1$;
6) $xyz-x^2-y^2-z^2>2$;
7) $(x-y)z^2+(x+y)z\geqslant z^2$;
8) $(x^2+y^2-xy)^2\leqslant xy^2$;
9) $(z^2+x-y)^3<x^2y^3z^4+1$.

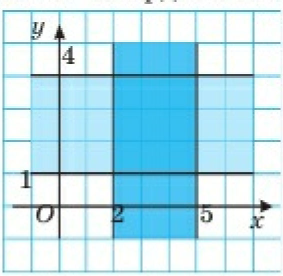
1.68. Центрі $(x_0; y_0)$ нүктесі, радиусы R болатын шеңбердің теңдеуін, оның сыртқы және ішкі бөліктерін анықтайтын теңсіздіктерді жазыңдар: 1) $(0;0)$, $R=4$; 2) $(-1; 0)$, $R=2$; 3) $(2;3)$, $R=3$.

1.69. Координаталық жазықтықта 1) $y>3x-4$; 2) $y\leqslant 5-x$; 3) $x+y\geqslant 2$; 4) $0,5y-x<3$ теңсіздіктерімен анықталатын фигураны кескіндеңдер.

1.70. Теңсіздіктің графигін салыңдар:

1) $x^2+y^2\leqslant 81$; 2) $x^2+y^2>9$; 3) $(x-3)^2+(y+1)^2<25$.

1.71. Координаталық жазықтықта



1.8-сурет

1) $\begin{cases} y\leqslant x+3, \\ y\geqslant 5-3x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2\leqslant x\leqslant 5, \\ 1\leqslant y\leqslant 4 \end{cases}$ (1.8-сурет);

3) $\begin{cases} -1<x\leqslant 2, \\ -5\leqslant y<-1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y-2x+4\geqslant 0, \\ 3y-9x+6<0 \end{cases}$

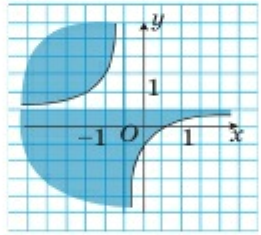
теңсіздіктерімен анықталатын фигураны кескіндеңдер.

В

1.72. Центрі координаталар бас нүктесінде жатқан және радиусы 3-ке тең дөңгелекке 1) $A(-1; 2)$; 2) $B(0;-5)$; 3) $C\left(\frac{1}{3}; 4\right)$; 4) $D(2; 2)$ нүктесі тиісті бола ма?

1.73. Теңсіздіктің графигін салыңдар: 1) $y\leqslant 3x^2$; 2) $y\geqslant 2x^2-3$; 3) $y<x^2-3x+2$; 4) $x^2+y^2-2x+4y\geqslant 4$; 5) $xy<5$; 6) $y\geqslant \dfrac{x-1}{x+1}$.

6) Берілген өрнекті түрлендіріп, оны $y \geqslant 1 - \dfrac{2}{x+1}$ түрінде жазып аламыз. Бұл теңсіздікті қанағаттандыратын облыс 1.9-суретте боялып көрсетілген.



1.9-сурет

1.74. Теңсіздіктер жүйесінің графигін салыңдар:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 64, \\ x > 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 25, \\ y \geqslant 5 - x; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 16, \\ x \leqslant y. \end{cases}$

Төмендегі теңдеулермен анықталатын фигуралардың графиктерін салыңдар (**1.75 — 1.76**):

1.75. 1) $2x-y=3$; 2) $x+y-2=0$; 3) $2|x| - y = 3$;

4) $|x| + y - 2 = 0$; 5) $2x-y=3,\ -1 \leqslant x \leqslant 3$;

6) $x+y=2,\ -1 \leqslant x \leqslant 2$; 7) $|x| + y = 2,\ -1 \leqslant x \leqslant 2$.

1.76. 1) $x^2+y^2=16$; 2) $(x+1)^2+(y+1)^2=9$;

3) $x^2+y^2-4x+6y=12$; 4) $x^2+y^2-x-y=\dfrac{7}{4}$;

5) $x^2+2x+y=0$; 6) $2x^2-4x-y=5$.

1.77. Төмендегі теңсіздіктермен анықталатын фигураларды координаталық жазықтықта кескіндеңдер:

1) $x-2y+1 \geqslant 0$; 2) $2x+y \leqslant 4$;

3) $|x| - 2y + 1 < 0$; 4) $2|x| + y > 4$;

5) $y+x^2 \leqslant 2x$; 6) $y-x^2+x > 1$;

7) $x^2+y^2-2x+4y \leqslant 4$; 8) $(x+1)^2+(y-1)^2 > 4$;

9) $xy \leqslant 2$; 10) $(x-2)y > 1$.

C

1.78*. Төбелері 1) $A(-3;4)$, $B(2;1)$, $C(4;-2)$; 2) $A(-4;0)$, $B(0;5)$, $C(4;0)$, $D(0;-5)$; 3) $A(-4;-1)$, $B(-2;2)$, $C(2;3)$, $D(4;0)$, $E(1;-4)$ нүктелерінде орналасқан көпбұрыштарды теңсіздіктер арқылы анықтаңдар.

Координаталық жазықтықта төмендегі теңсіздіктермен анықталатын фигураны кескіндеңдер (**1.79–1.82**):

1.79. 1) $(x-2)(|y|-3)\leqslant 0$; 2) $(|x|-1)(y+3)\leqslant 0$;

3) $|y|<2|x|-3$.

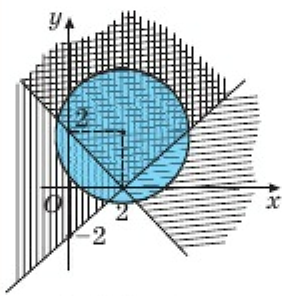
1.80. 1) $xy\leqslant 1$; 2) $|x|y\leqslant 1$; 3) $x|y|\leqslant 1$; 4) $|xy|\leqslant 1$.

1.81. 1) $y\geqslant x^2-5|x|+6$; 2) $y<|x^2-5x+6|$.

1.82*. 1) $\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 4(x+y-1), \\ y\geqslant |x-2|; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} |x-y|\leqslant 2, \\ (x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\leqslant 0. \end{cases}$

1) $\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 4(x+y)-1, \\ y\geqslant |x-2| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+y^2-4y\leqslant -1, \\ -y\leqslant x-2\leqslant y \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2+(y-2)^2\leqslant 7, \\ x+y\geqslant 2, \\ x-y\leqslant 2. \end{cases}$



1.10-сурет

Әр теңсіздіктің шешімі 1.10-суретте көрсетілген.

Қайталауға арналған жаттығулар

1.83. Теңдеулер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases} x + y = 11, \\ xy = 24; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ y = \dfrac{4}{3}x; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - y = 3, \\ xy = 40; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 96, \\ x - y = 8. \end{cases}$

1.84. Теңсіздікті шешіңдер:

1) $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2x-1} \leqslant 0;$ 2) $\dfrac{2\sqrt{2}-3}{4+5x} > 0;$ 3) $\dfrac{2x+1}{x-2} < 2.$

ТЕРМИНДЕР АТАУЫНЫҢ СӨЗДІГІ

Қазақ тіліндегі нұсқасы	Орыс тіліндегі нұсқасы	Ағылшын тіліндегі нұсқасы
Екі айнымалысы бар теңдеулер	Уравнения с двумя переменными	Equations with two variables
Екі айнымалысы бар теңсіздіктер	Неравенства с двумя переменными	Inequations with two variables
Екі айнымалысы бар теңдеулер (теңсіздіктер) жүйесі	Система уравнений (неравенств) с двумя переменными	Systems of equations (inequations) with two variables
Екі айнымалысы бар теңдеудің (теңсіздіктің) геометриялық мағынасы	Геометрический смысл уравнения (неравенства) с двумя переменными	Geometric value of equations (inequations) with two variables

2-бөлім. КОМБИНАТОРИКА ЭЛЕМЕНТТЕРІ

Бөлімді оқып-үйрену барысында сендер мына мақсаттарға қол жеткізесіңдер:

- комбинаториканың ережелерін білу (қосу және көбейту ережелері);
- санның факториалы анықтамасын білу;
- қайталанбалы және қайталанбайтын орналастыру, алмастыру және терудің анықтамаларын білу;
- қайталанбайтын орналастыру, алмастыру және теруді есептеу үшін комбинаторика формулаларын білу;
- Ньютон биномы формуласын және оның қасиеттерін білу және қолдану;
- қайталанбайтын орналастыру, алмастыру және теруді есептеу үшін комбинаториканы қолдану.

2.1. Қосу ережесі

Өмірде адамға заттардың өзара орналасуының барлық мүмкін жағдайларын есептеуге немесе қандай да бір іс-әрекеттің барлық мүмкін нәтижелерін және оны орындауға қажетті барлық мүмкін тәсілдер санын есептеуге тура келеді.

Ойтүрткі

1. Әртүрлі 5 кітапты екі оқушыға неше тәсілмен үлестіріп беруге болады?
2. Футболдан әлем біріншілігінде жартылай финалға шыққан 4 команда арасында алтын, күміс және қола медальдары неше тәсілмен иемделеді? Есепті шығару тәсілін ұсынып көріңдер.

Бұл есептерде заттардың өзара орналасуының немесе іс-әрекеттің барлық мүмкін комбинациялары қарастырылады. Сондықтан мұндай есептерді ***комбинаторикалық*** есептер деп атайды. Ал комбинаторикалық есептерді шығаруды үйрететін математика саласын ***комбинаторика*** деп атайды. Комбинаторика есептерін шығарғанда қолданылатын өзіндік заңдылықтар мен формулалар бар.

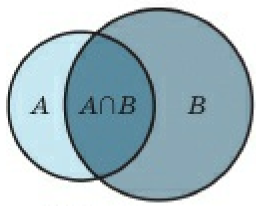
A жиынының элементтер санын $n(A)$ арқылы белгілейді. Мынадай заңдылық орындалады:

1-теорема. ***Кез келген санаулы элементтері бар A және B жиындары үшін***

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \qquad (1)$$

теңдігі орындалады.

$n(A)+n(B)$ қосындысы A және B жиындарының элементтерін жеке-жеке есептеп қосқанға тең. Сондықтан бұл қосынды құрамына AB қиылысуына тиісті элементтер саны екі рет еніп отыр: бір рет $n(A)$ құрамында, екінші рет $n(B)$ құрамында (2.1-сурет). Олай болса,



2.1-сурет

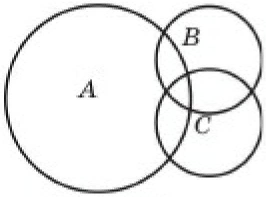
$$n(A) + n(B) = n(A \cup B) + n(A \cap B)$$

теңдігі орындалады. Осыдан (1) формула шығады.

Егер $m=3$ болса, (1) формула былай жазылады:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - \\ - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C). \qquad (2)$$

1-мысал. Сыныптағы 32 оқушының 14-і мектепте өткен футбол турниріне, 10-ы баскетбол турниріне және 8-і волейбол ойынына жарысқа қатысқан. Мұнда 6 оқушы әрі футбол, әрі баскетбол жарысына, 5 оқушы әрі футбол, әрі волейбол жарысына, 4 оқушы әрі баскетбол, әрі волейбол турниріне, ал 3 оқушы барлық үш ойыннан жарысқа қатысқан. Сынып оқушыларының нешеуі осы турнирлердің бірде-біреуіне қатыспаған?



2.2-сурет

Көрнекілік үшін Эйлер — Венн дөңгелектерін қолданайық (2.2-сурет). A — футболға қатысқан оқушылар жиыны; B — баскетболға қатысқан оқушылар жиыны; C — волейболға қатысқан оқушылар жиыны; U — сыныптағы барлық оқушылар жиыны болсын. Есеп шартына сәйкес: $n(U)=32$, $n(A)=14$, $n(B)=10$, $n(C)=8$, $n(A\cap B)=6$, $n(A\cap C)=5$, $n(B\cap C)=4$, $n(A\cap B\cap C)=3$. (2) формула бойынша сыныптағы оқушылардың жарыстың қандай да бір түріне қатысқандарының саны $n(A\cup B\cup C)=14+$ $+10+8-6-5-4+3=20$. Демек, сыныпта $n(U)-n(A\cup B\cup C)=32-$ $-20=12$ оқушы жарыстың бірде-бір түріне қатыспаған.

Жауабы: 12 оқушы.

Салдар. *Егер $A\cap B=\varnothing$ болса, онда $n(A\cup B) = n(A) + n(B)$ теңдігі орындалады.*

$A\cap B=\varnothing$ болғандықтан, $n(A\cap B)=0$. Онда (1) формулада көрсетілген теңдік шығады.

2.2. Көбейту ережесі

Алдымен мынадай мысал қарастырайық.

2-мысал. Бірлестіктің директорлар кеңесінің мүшелері арасынан үшеуі кеңес төрағалығына, екеуі оның орынбасары қызметіне сайлануға үміткер. Олардың ішінен неше тәсілмен төраға мен оның орынбасарын сайлауға болады?

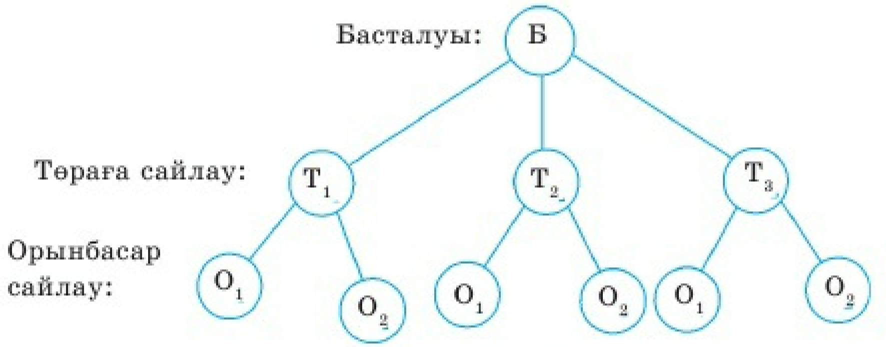
Төрағалыққа үміткерлерді T_1, T_2, T_3 әріптерімен, орынбасарлыққа үміткерлерді O_1, O_2 арқылы белгілейік. Кез келген төрағалыққа үміткер адам кез келген орынбасарлыққа үміткер адаммен топтасып төраға—орынбасар жұбын құра алады. Оны кестеге түсіреміз (2.1-кесте):

2.1-*кесте*

O \ T	T_1	T_2	T_3
O_1	$(T_1;O_1)$	$(T_2;O_1)$	$(T_3;O_1)$
O_2	$(T_1;O_2)$	$(T_2;O_2)$	$(T_3;O_2)$

Осыдан төраға мен оның орынбасарын 3·2=6 түрлі тәсілмен сайлауға болады.

2.3-суретте бұл шешім графиктік жолмен кескінделген. Осы суреттегі сұлбаны *талдау ағашы* деп атайды. Оның басынан бастап кез келген бұтағымен жүріп өтсек, белгілі бір төраға—орынбасар жұбын аламыз.



2.3-сурет

Осы мысалдан шығатын қорытынды жалпы жағдайда былай тұжырымдалады.

2-теорема. *Кез келген санаулы элементтері бар А және В жиындары үшін барлық $(a;\ b)$, $(a\in A)$, $(b\in B)$ қос элементтер саны m осы жиындардың элементтері сандарының көбейтіндісіне тең:*

$$m = n(A)\cdot n(B). \qquad (4)$$

Айталық, $A=\{a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_p\}$, $B=\{b_1,\ b_2,\ldots,\ b_k\}$ жиындары берілсін ($n(A)=p$, $n(B)=k$). Онда (4) формуланың орындалатынын көрсету үшін 2-мысалдағыдай кесте құрастырса, жеткілікті.

2.2-кесте

b \ a	a_1	a_2	…	a_p
b_1	$(a_1;b_1)$	$(a_2;b_1)$	…	$(a_p;b_1)$
b_2	$(a_1;b_2)$	$(a_2;b_2)$	…	$(a_p;b_2)$
…	…	…	…	…
b_k	$(a_1 b_k)$	$(a_2;b_k)$	…	$(a_p;b_k)$

2.2-кестеден $m = p\cdot k = n(A)\cdot n(B)$ теңдігі орындалатынын көреміз.

4–4337

2.3. Қайталанбалы орналастырулар

Айталық, бізге бос емес X жиыны берілсін. Осы жиынның элементтерінен құрастырылған мынадай тізімді қарастырайық:

$$(x_1, x_2, \dots, x_k), (x_i \in X). \tag{5}$$

Мұнда кейбір элементтер қайталанып орналасуы мүмкін. (5) түрдегі әрбір элементтер тізімін X жиынының элементтерінен түзілген ұзындығы k-ға тең шеру деп атайды.

Анықтама. *Егер $n(X)=n$ болса, онда X жиынының элементтерінен құралған ұзындығы k-ға тең әрбір шеруді n-нен k бойынша алынған* ***қайталанбалы орналастыру*** *деп атайды.*

Ал барлық n-нен k бойынша алынған қайталанбалы шерулер санын A_n^k арқылы белгілейді. Бұл санды мына формуламен анықтайды:

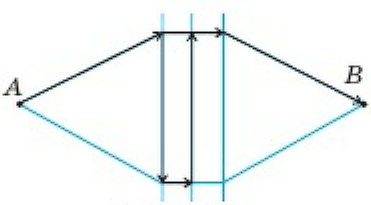
$$A_n^k = n^k. \tag{6}$$

Шынында да, (5) шерудің әрбір орнында X жиынының кез келген элементі орналаса алады. Онда көбейту ережесі бойынша

$$\tilde{A}_n^k = \underbrace{n(X)\cdot n(X)\cdot \dots \cdot n(X)}_{k \text{ рет}} = \underbrace{n\cdot n\cdot \dots \cdot n}_{k \text{ рет}} = n^k.$$

Дәлелдеу керегі де осы.

3-мысал. A және B пункттері 2.4-суретте көрсетілгендей екі жолмен қосылған (төменгі және жоғарғы жолдармен). A мен B аралығында бұл жолдарды өзара параллель үш көше қиып өтеді. Бір жүріп өткен жолын қайта жүрмейтіндей етіп, A пунктінен B пунктіне неше тәсілмен жетуге болады?



2.4-сурет

Өзара параллель үш көшемен жоғарғы және төменгі көшелер 4 бөлікке бөлінеді. A-дан B-ға жету үшін жолаушы осы бөліктердің бірімен жүруі қажет. Мысалы, 2.4-суретте жүрілген жолды қысқаша (*ж*, *т*, *ж*, *ж*) шеруімен жазуға болады. Мұнда *ж* — жоғарғы жол, *т* — төменгі жол бөлігін білдіреді. Сонда A-дан B-ға жету тәсілдері $\{ж;\ т\}$ жиынының элементтерінен ұзындығы 4-ке тең қайталанбалы орналастырулар деп түсіну керек. (6) формула бойынша $A_2^4=2^4=16$. A пунктінен B пунктіне 16 түрлі тәсілмен жетуге болады.

4-мысал. Құны әртүрлі 5 монетаны екі қалтаға неше тәсілмен бөліп салуға болады?

Екі қалтаны оң және сол жақ қалталар деп екіге ажыратайық. Онда әрбір монетаны, қай қалтаға түскеніне байланысты, «о» немесе «с» әріптерімен белгілеп шығуға болады, яғни ұзындығы 5-ке тең екі элементтен құралған шеру монеталарды қалталарға үлестірудің бір тәсілін анықтайды. Мысалы, (о, с, с, с, о) шеруі бірінші және бесінші тиындар оң қалтаға, қалғаны сол қалтаға салынғанын білдіреді. (6) формула бойынша 5 тиынды екі қалтаға $A_2^5=2^5=32$ түрлі тәсілмен бөліп салуға болады.

2.4. Қайталанбайтын орналастырулар. Алмастырулар

Комбинаторикада алғашқы бірнеше натурал сандардың көбейтіндісі жиі қолданылады. Оны санның факториалы деп атайды. Мысалы, 1-ден n-ге дейінгі натурал сандардың көбейтіндісін қысқаша $n!$ арқылы белгілейді және оны «эн факториал» деп оқиды. Сонымен,

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n \qquad (7)$$

Мысалы, $3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$, $5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$ және т.с.с. Анықтама бойынша $\mathbf{0! = 1}$ деп есептеледі.

X жиыны n элементтен құралған жиын болсын. Онда X-тің элементтерінен құралған, ұзындығы k-ға тең және элементтері қайталанбайтын әрбір шеруді ***n-нен k бойынша алынған қайталанбайтын орналастыру*** деп атайды. Қайталанбалы орналастыруда n және k кез келген натурал сандар болуы мүмкін. Қайталанбайтын орналастыруларда $n \geqslant k$ болуы қажет. X жиынының элементтерінен құралған барлық n-нен k бойынша алынған қайталанбайтын орналастырулар санын A_n^k арқылы белгілейді және мынадай формула орындалады:

$$A_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1) \qquad (8)$$

немесе

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \qquad (8')$$

Шынында да, ұзындығы k-ға тең шерудің бірінші орнында X жиынының n түрлі элементтерінің кез келгені орналаса алады. Екінші орында элементтері қайталанбайтындықтан, қалған $n-1$ түрлі элементтердің кез келгені орналаса алады және т.с.с. k-орында әртүрлі $n-k+1$ элементтер орналаса алады. Сондықтан көбейту ережесі бойынша $A_n^k = n(n-1)...(n-k+1)$ теңдігі орындалады.

Осыдан $A_n^k = \dfrac{n(n-1)...(n-k+1)(n-k)!}{(n-k)!} = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

(8) және (8′) формулалары толық дәлелденді.

Егер $n=k$ болса, онда қайталанбайтын орналастыруды *n элементтің алмастыруы* деп атайды. Барлық n элементтен алынған алмастырулар санын P_n арқылы белгілейді және

$$P_n = n! \qquad (9)$$

формуласы орындалады. Шынында да, $0!=1$ болатынын ескерсек, (8′) формуладан

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

5-мысал. 4 оқушыны 7 орындыққа неше тәсілмен отырғызуға болады?

Мұнда X жиыны 7 элементтен (орындықтардан) тұрады. Онда бізге қажетті сан барлық 7-ден 4 бойынша қайталанбайтын орналастырулар санына тең. Өйткені бірнеше оқушы бір орындыққа отырмайды деп есептеу қажет. Сонда

$$A_7^4 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840.$$

6-мысал. Бес адамды кезекке неше тәсілмен тұрғызуға болады?

Бізге қажетті сан 5 элементтен алынған барлық алмастырулар санына тең: $P_5 = 5! = 120$.

7-мысал. 7 оқушыны бірқатарда орналасқан 7 орындыққа үш құрбы қатар отыратындай етіп неше тәсілмен отырғызуға болады?

Мынадай белгілеулер енгізейік: A_1, A_2, A_3 арқылы есеп шартындағы үш құрбыны, B, C, D, E арқылы өзге оқушыларды белгілейік және $A=\{A_1, A_2, A_3\}$ болсын. Онда A, B, C, D, E элементтерінің барлық алмастырулары кезінде үш құрбы қатар отырады. Бұл алмастырулар саны $P_5=5!=120$-ға тең. Екіншіден, құрбылар өзара алмасып отыра беруі мүмкін, яғни құрбылар A, B, C, D, E элементтерінің әрбір алмастырулары кезінде $P_3=3!=6$ түрлі тәсілмен өзара алмасып отыра алады. Сондықтан үш құрбы қатар отыратындай етіп, 7 оқушыны $P_5 \cdot P_3=120 \cdot 6 = 720$ түрлі тәсілмен отырғыза аламыз.

2.5. Қайталанбайтын терулер

Анықтама. *n элементі бар X жиынының әрбір k элементтен тұратын ішкі жиынын n-нен k бойынша алынған **қайталанбайтын теру** деп атайды. Ал барлық n-нен k бойынша алынған қайталанбайтын терулер санын C_n^k арқылы белгілейді.*

3-теорема.
$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{10}$$
формуласы орындалады. Мұндағы C_n^k санын теру коэффициенті деп атайды.

$A_n^k = P_k C_n^k$ теңдігі орындалады. Шынында да, әрбір n-нен k бойынша алынған қайталанбайтын теруді (әрбір k элементтен құралған ішкі жиынды) $P_k=k!$ түрлі тәсілмен алмастыру арқылы барлық n-нен k бойынша алынған қайталанбайтын орналастыруды аламыз. Онда бұл теңдіктен (10) формуланы алу қиын емес.

8-мысал. Шахмат турниріне 12 ойыншы қатысты және шахматшылардың әрқайсысы өзгелермен бір-бір ойыннан ойнады. Турнирде барлығы неше партия ойналды?

Әр партияға екі ойыншы қатысады. Онда барлық өткізілген партиялар саны 12-ден 2 бойынша алынған терулер санына тең: $C_{12}^2 = \frac{12!}{2!10!} = \frac{12 \cdot 11}{2} = 66.$

2.6. Ньютон биномы және оның қасиеттері

Мұны білесіңдер

Қысқаша көбейту формулалары:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2+b^3$$

Теру коэффициенттерінің қасиеттері бойынша $C_2^0 = \dfrac{2!}{0!2!} = 1$, $C_2^1 = \dfrac{2!}{1!1!} = 2$, $C_2^2 = \dfrac{2!}{2!0!} = 1$ және $C_3^0 = 1$, $C_3^1 = 3$; $C_3^2 = 3$; $C_3^3 = 1$ болатынын ескеріп, келтірілген қысқаша көбейту формулаларын теру коэффициенттері көмегімен былай жазамыз:

$$(a+b)^2 = C_2^0 a^2 \cdot b^0 + C_2^1 a^1 \cdot b^1 + C_2^2 \cdot a^0 \cdot b^2,$$

$$(a+b)^3 = C_3^0 a^3 \cdot b^0 + C_3^1 a^2 \cdot b^1 + C_3^2 a^1 \cdot b^2 + C_3^3 a^0 b^3.$$

Жұптық жұмыс

Көрсетілген заңдылықтар бойынша $(a+b)^4$, $(a+b)^5$ өрнектерін ашып жазыңдар және оның дұрыстығын $(a+b)^4 = (a+b)^3(a+b)$, $(a+b)^5=(a+b)^4(a+b)$ теңдіктерін қолданып тексеріңдер.

Осылайша, кез келген $n \in N$ үшін

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^k a^{n-k} \cdot b^k + \dots + C_n^n b^n \quad (11)$$

формуласы орындалатынын көреміз. Бұл формуланы **Ньютон биномы** деп атайды.

$(a+b)^0 = 1$ және $(a+b)^1 = a+b$ екенін ескерсек, биномдық коэффициенттерді төмендегі тәсілмен анықтауға болады:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

Бұны Паскаль үшбұрышы деп атайды және осыдан

$$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

теңдігін аламыз.

9-мысал. n элементтен тұратын жиынның барлық ішкі жиындар санын анықтайық.

Жиынның 1 элементтен тұратын ішкі жиындарының саны C_n^1-ге, 2 элементтен тұратын ішкі жиындарының саны C_n^2-ге және т.с.с. k элементтен тұратын ішкі жиындарының саны C_n^k-ға тең. Мұндағы $k=1,\ 2,\ \dots,\ n$. Бос жиын — кез келген жиынның ішкі жиыны. Сонда бізге қажетті m саны былай анықталады:

$$m = 1 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^k + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n.$$

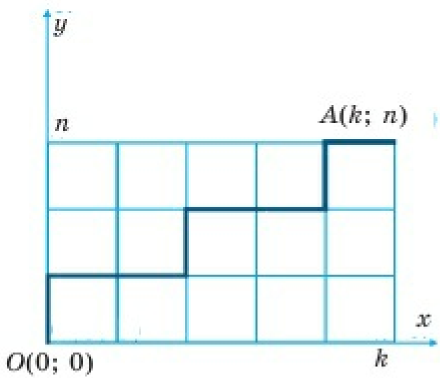
$1 = C_n^0 = \dfrac{n!}{0!\,n!}$ болатынын ескерсек, $m = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k$.

Ньютон биномы формуласында $a=1$, $b=1$ деп алсақ,

$$m = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot 1^{n-k} \cdot 1^k = (1+1)^n = 2^n.$$

Сонымен, n элементті жиынның ішкі жиындарының саны 2^n-ге тең.

10-мысал. 2.5-суретте көрсетілген «бүтін» нүктелер арқылы өтетін торкөздердің қабырғалары арқылы $O(0;\ 0)$ нүктесінен $A(k;\ n)$ нүктесіне оңға және жоғары бағытта жылжып, неше тәсілмен жетуге болады?



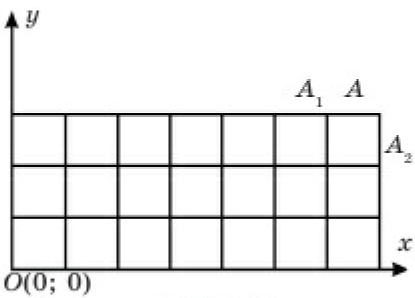
2.5-сурет

$O(0;\ 0)$ нүктесінен $A(k;\ n)$ нүктесіне дейін көрсетілген тәсілмен жету үшін біз n вертикаль кесінділер мен k горизонталь кесінділерді басып өтуіміз қажет. Сондықтан әр жүрісте $k + n$ кесінділер арқылы өтеміз. Бұл жүрістер бір-бірінен вертикаль және горизонталь кесінділердің өзара кезектесіп орналасуы тәртібімен ғана өзгеше болады. Егер n вертикаль кесінділерді таңдап алсақ, онда белгілі бір жолды көрсетеміз. Сонда барлық осындай жолдар саны $k + n$ кесінділерден n кесіндіні таңдап алу саны C_{k+n}^{k} -ға тең.

Ескерту. Бұл есептегі талдауды қайталап, $k+n$ кесінділердің ішінен k горизонталь кесіндіні таңдап алуға болар еді. Сонда C_{k+n}^{k} санын аламыз. $C_{k+n}^{k} = C_{k+n}^{n}$ теңдігі (10) формуладан шығады.

Біз C_n^k санын биномдық коэффициент деп атағанбыз. Енді осы C_n^k санының бірнеше қасиетін қарастырайық:

$$1^\circ.\ C_n^k = C_n^{n-k}; \qquad 2^\circ.\ \sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n; \qquad 3^\circ.\ C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k}.$$



2.6-сурет

1°-қасиеттің дәлелдеуі (10) формуладан шығады. 2°-қасиет 9-мысалда көрсетілді. Енді 3°-қасиетті дәлелдейік. 2.6-суретте $O(0;0)$ нүктесінен $A(k;\ n-k)$ нүктесіне дейін оңға және жоғары бағытта торкөздер қабырғалары бойымен жылжыту арқылы жету тәсілдері 10-мысал бойынша $C_{k+(n-k)}^{k} = C_n^k$ -ға тең. O нүктесінен A нүктесіне жету тәсілдерін екі топқа бөлуге болады: бірі A_1 нүктесі арқылы, екіншісі A_2 арқылы өтетін жолдар (2.6-сурет). A_1 арқылы өтетін жолдар саны 10-мысал бойынша $C_{k+(n-1-k)}^{k} = C_{n-1}^{k}$; A_2 арқылы өтетін жолдар саны $C_{k-1+(n-1)}^{k-1} = C_{n-1}^{k-1}$.

Сонымен, $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k}$.

ЕСЕПТЕР

A

2.1. Дүкенде шоколадтың 6 түрі және карамельдің 10 түрі бар. Кәмпиттердің 1) бір түрінен; 2) шоколадтың бір түрі және карамельдің бір түрінен неше тәсілмен кәмпит сатып алуға болады?

2.2. Асхана мәзірінде 3 бірінші, 4 екінші және 5 үшінші тағамдар тізімі бар. Осылардан барлығы неше «түскі ас» алуға болады?

2.3. Кітап сөресіне комбинаторикадан 2 кітап, ықтималдықтар теориясынан 5 кітап, алгебрадан 4 кітап, тарихтан 3 кітап және әдебиеттен 6 кітап қойылған. Неше тәсілмен 1) математикадан бір кітап, 2) математикадан бір кітап немесе әдебиеттен бір кітап таңдап алуға болады?

2.4. Әрі 3-ке, әрі 4-ке бөлінетін неше екі таңбалы натурал сан бар?

2.5. Поштада үш түрлі конверт пен 5 түрлі марка бар. Хат жолдау үшін бір конверт пен бір марканы неше тәсілмен таңдап алуға болады?

2.6. Екі оқушы 5 түрлі кітапты неше тәсілмен бөлісе алады?

2.7. Поштада маркалардың 5 түрі бар. Олардан 3 түрлі марканы неше тәсілмен таңдап алуға болады?

2.8. 1, 2, 3, 4, 5, 6 цифрларының көмегімен неше 1) үш таңбалы; 2) цифрлары қайталанбайтын үш таңбалы сандар құрастыруға болады?

2.9. «Логарифм» сөзінің әріптерінен 1) 5 әріптен; 2) 8 әріптен тұратын неше «сөз» құрастыруға болады?

1) Логарифм сөзінде 8 әріп бар және олар қайталанбайды. Онда 5 әріптен құралған барлық "сөздер" саны A_8^5 санына тең, яғни 8 әріп арасынан 5 әріпті алып, оларды 5 орынға әріптері қайталанбайтындай етіп орналастыру керек.

Жауабы: $A_8^5=8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4=6720$ түрлі «сөз» құрастыруға болады.

2.10. 6 адамды 1) бір қатарға; 2) дөңгелек үстел басына неше тәсілмен отырғызуға болады?

2.11. 25 оқушының ішінен екі кезекшіні неше тәсілмен таңдап алуға болады?

2.12. Ұштары шеңбер бойынан алынған 10 нүктеде болатындай неше хорда жүргізуге болады?

2.13. Төбелері алдыңғы есептегі нүктелерде орналасатын неше үшбұрыш бар?

2.14. Шахмат тақтасының қара түсті торларына бес дойбы тастарын неше тәсілмен қойып шығуға болады?

2.15. Екі оқушының бірінде 7 кітап, екіншісінде 8 кітап бар. Олар екі кітапты екі кітапқа алмастыруды неше тәсілмен орындай алады?

> Бірінші оқушы өзінің 7 кітабы арасынан алмастыруға 2 кітапты $C_7^2 = \dfrac{7 \cdot 6}{2} = 21$ түрлі тәсілмен, екінші оқушы 8 кітап арасынан 2 кітапты $C_8^2 = \dfrac{8 \cdot 7}{2} = 28$ түрлі тәсілмен таңдап алады.
> Бір оқушының таңдауы екіншісінің таңдауына әсер етпейтін болғандықтан (тәуелсіз), олар 2 кітапты 2 кітапқа барлығы 21·28=588 түрлі тәсілмен алмастырады.

2.16. Құны әртүрлі 6 тиынды екі қалтаға неше тәсілмен бөліп салуға болады?

B

2.17. 2, 5 немесе 7-ге бөлінбейтін неше үш таңбалы натурал сан бар?

2.18. 2, 5 және 7 сандарының тек екеуіне ғана бөлінетін және үшіншісіне бөлінбейтін неше үш таңбалы натурал сан бар?

2.19. Сыныптағы 35 оқушының 15-і қыз бала. Осы оқушылардан 1) бір қыз бала мен бір ұлды; 2) екі ұлды; 3) екі қыз баланы неше тәсілмен таңдап алуға болады?

2.20. Шахмат тақтасынан неше тәсілмен 1) бір ақ және бір қара түсті шаршыны; 2) бір вертикаль мен бір горизонтальда орналаспайтындай етіп, бір ақ және бір қара түсті шаршыны таңдап алуға болады?

2.21. Сыртқы істер министрлігінің бір бөліміндегі қызметкерлердің әрқайсысы кем дегенде бір шет тілін меңгерген (ағылшын, неміс және француз тілдері). Олардың 10-ы – ағылшын, 6-уы — неміс, 4-еуі — француз, 4-еуі — әрі ағылшын, әрі неміс, 3-еуі — әрі ағылшын, әрі француз, 2-еуі – әрі неміс, әрі француз және біреуі барлық үш тілді де меңгерген. Бөлімде 1) неше қызметкер бар; 2) нешеуі тек бір тілді ғана меңгерген?

2.22. Сыныптағы 35 оқушының арасынан старостаны, оның орынбасарын, редколлегия және спорттық жұмысқа жауапты 4 оқушыны неше тәсілмен сайлауға болады?

2.23. 1) Цифрлары қайталануы мүмкін; 2) цифрлары қайталанбайтындай етіп, 4 таңбалы неше сан құрастыруға болады?

2.24. Екінші, төртінші және алтыншы орындарда дауысты дыбыстар тұратындай етіп, **логарифм** сөзіндегі дыбыстарды неше тәсілмен алмастыруға болады?

2.25. Егер цифрлар жазылған қағазды 180°-қа бұрсақ, онда 0, 1, 8 цифрлары өзгермейді, ал 6 және 9 цифрлары бір-біріне көшеді. Қағазды 180°-қа бұрғанда өзгермейтін неше 5 таңбалы сан бар?

5 таңбалы санның ортаңғы цифры 0,1,8 цифрларының біреуі ғана болуы мүмкін, оны $C_3^1 = 3$ түрлі тәсілмен таңдай аламыз. Бірінші орынға 1,8,6,9 цифрларының кез келгенін орналастырамыз және бұл $C_4^1 = 4$ түрлі тәсілмен орындалады. Екінші орынға 0,1,8,6,9-дың кез келгенін қоя аламыз, оны $C_5^1 = 5$ түрлі тәсілмен орындай аламыз. Соңғы екі цифр алдыңғы екі цифрды қайталайды (0,1,8 цифрлары өзгермейді) немесе 6 санының орнына 9-ды, 9 санының орнына 6-ны жазу керек. Мұнда бес таңбалы санның разрядтық орындарына қойылатын цифр бір-біріне тәуелсіз болғандықтан, жоғарыда анықталған мүмкіндіктер санын көбейту қажет.

Ж а у а б ы: барлығы $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ түрлі сан жазылады.

2.26. Жолаушылар пойызында 15 вагон бар. Белгілі бір үш жолаушыны әртүрлі вагондарға неше түрлі тәсілмен отырғызуға болады?

2.27. Баскетбол ойынынан жарысқа қатысу үшін жаттықтырушы 14 баланың ішінен құрамында 5 ойыншысы бар команда құрастырды. Егер іріктеліп алынған екі баланың командаға міндетті түрде енетіні белгілі болса, онда жаттықтырушы команданы неше тәсілмен құрастыра алады?

2.28. n параллель түзу өзге m параллель түзумен қиылысады. Осының нәтижесінде неше параллелограмм пайда болады?

2.29. Кітап сөресінде математикадан 8 кітап және физикадан 5 кітап орналасқан. Осыдан 3 математика және 2 физика кітаптарын неше тәсілмен алуға болады?

2.30. Әрқайсысында 3 адамнан кем болмайтындай етіп, 8 адамды екі жеңіл автокөлікке неше тәсілмен отырғызуға болады?

2.31. «Логарифм» сөзінің құрамынан екі дауыссыз және бір дауысты дыбыстарды неше тәсілмен таңдап алуға болады?

C

2.32. 0, 4, 5 цифрларының көмегімен 10^4 санынан кіші неше жұп сан жазуға болады?

2.33 Сыныпта 35 оқушы бар. Староста директордың орынбасарына мектепте өткен спорттық ойындар жарысына сынып оқушыларының қатысуы жөнінде мынадай ақпарат берді: 16 оқушы футбол, 15 оқушы волейбол, 14 оқушы баскетбол, 4 оқушы әрі футбол, әрі волейбол, 3 оқушы әрі волейбол, әрі баскетбол, 3 оқушы әрі футбол, әрі баскетбол жарысына және 2 оқушы жарыстың барлық түрлеріне қатысты. Директордың орынбасары берілген ақпаратты неге жарамсыз деп тапты?

2.34. Сыныптағы оқушылардың әрқайсысы не қыз бала, не бойлары 165 сантиметрден аласа, не математиканы жақсы көреді. Сыныптағы 18 қыз баланың 14-нің бойлары 165 см-ден аласа. Жалпы 165 см-ден аласа 22 оқушы бар және олардың 12-сі математиканы жақсы көреді. Сыныпта математиканы жақсы көретін 18 оқушының 8-і қыз бала. Бойлары 165 см-ден артық емес қыз балалардың алтауы математиканы жақсы көреді. Сыныпта неше оқушы бар?

2.35. Дөңгелек үстел басында n адам отыр. Осы адамдардың шеңбер бойымен жылжитын барлық алмастырулар саны $\frac{P_n}{n} = (n-1)!$ формуласымен анықталатынын көрсетіңдер.

2.36. Теміржол бекетінде m бағдаршам бар. Егер әрбір бағдаршам «қызыл», «сары» және «жасыл» түсті үш түрлі белгі бере алса, онда осы m бағдаршамдар көмегімен барлығы неше белгі беруге болады?

2.37. Дөңгелек үстел басына 5 қыз бала мен 5 ұл баланы, 2 қыз бала не 2 ұл бала қатар отырмайтындай етіп, неше тәсілмен отырғыза аламыз?

2.38. 2, 4, 5 цифрларының көмегімен 10^4-нен кіші неше 1) тақ сан; 2) жұп сан жазып шығуға болады?

2.39. Сабақ үстінде тақтаға 5 оқушы шықты. Егер олардың ешқайсысы «екілік» алмайтыны белгілі болса, онда бұл оқушыларға неше тәсілмен бағалар қойып шығуға болады?

2.40. 4 оқушыға 12 кітапты неше тәсілмен тең бөліп беруге болады?

2.41. 30 оқушыны ағылшын, неміс және француз тілдерін оқыту үшін он-оннан үш топқа бөлу қажет. Оны неше тәсілмен орындауға болады?

2.42. Тоғызқұмалақ ойыны турниріне қатысушылардың әрқайсысы қалғандарымен бір-бір партия ойнап шығуы қажет еді. Турнирге қатысушылардың екеуі әрқайсысы үш-үш партия ойнағаннан кейін денсаулығына байланысты турнирден шығып қалды. Егер бұл жарыста барлығы 16 партия ойналған болса, онда басында турнирге неше ойыншы қатысқан?

2.43. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \ldots + \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$;

2) $C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + nC_n^n = n2^{n-1}$;

3) $C_n^1 - 2C_n^2 + \ldots + (-1)^{n-1} nC_n^n = 0$.

2.44. Қосындыны анықтаңдар:

1) $C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2 C_n^2 + \ldots + 2^n C_n^n$;

2) $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots$;

3) $C_n^0 + C_n^2 + C_n^5 + \ldots$.

2.45. Теңдеуді шешіңдер:

1) $\frac{C_x^3 + C_x^4}{C_{x+1}^2} = 11$;

2) $\frac{C_{x+1}^3 - C_x^2}{C_x^2} = 11$.

2.46. $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$ теңдігі орындалатынын дәлелдеңдер.

Қайталауға арналған жаттығулар

2.47. 10 саны $y = \sqrt{x^2 - 2x + 12}$ функциясының мәндері облысында жата ма?

2.48. Функцияның анықталу облысын табыңдар:

1) $y = \sqrt{x} + \sqrt{x-4}$

2) $y = \sqrt{x(x-4)}$.

2.49. Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases} x \leqslant 3 - \frac{1}{x-1}, \\ |x+1| < 4; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \frac{x+7}{x-5} + \frac{3x+1}{2} \geqslant 0, \\ |5-x| \leqslant 2. \end{cases}$

2.50. $\frac{x^2 - 4x}{x-1} \leqslant 0$ теңсіздігінің $(x^2-1)(3-x) \geqslant 0$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық шешімдерін табыңдар.

ТЕРМИНДЕР АТАУЫНЫҢ СӨЗДІГІ

1	2	3	4
Формуласы	Қазақ тіліндегі нұсқасы	Орыс тіліндегі нұсқасы	Ағылшын тіліндегі нұсқасы
$n(A\cup B)=n(A)+$ $+n(B)-n(A\cap B)$	Қосу ережесі	Правило суммы	Addition rules
$n(AxB)=$ $=n(A)\cdot n(B)$	Көбейту ережесі	Правило произведения	Multiplication rules
$A_n^k=n^k$	Барлық n-нен k бойынша алынған қайталанбалы орналастырулар саны	Количество всех размещении из n по k с повторениями	Humber of all repetitive placements of elements from n by k
$A_n^k=\dfrac{n}{(n-k)!}$	Барлық n-нен k бойынша алынған қайталанбайтын орналастырулар саны	Количество всех размещении из n по k без повторений	Humber of all none repetitive placements of elements from n by k
$P_n=n!$	n элементтің барлық алмастырулар саны	Количество всех перестановок из n элементов	Humber of rear-rangements of n elements
$C_n^k=\dfrac{n!}{k(n-k)!}$	Барлық n-нен k бойынша алынған терулер саны (теру коэффициенті)	Количество всех сочетании из n по k без повторении (коэффициент сочетание)	Humber of combinations out of all elements from n by k (combination coefficient)
$(a+b)^n=C_n^0a^n+$ $+C_n^1a^{n-1}\cdot b+\ldots+$ $+C_n^ka^{n-k}\cdot b^k+\ldots+$ $+C_n^n\cdot b^n$	Ньютон биномы	Бином Ньютона	Binominal theorem

3-бөлім. ТІЗБЕКТЕР

Тарихқа шолу

"Бастамалар" (лат. Elementa) – Евклидтің б.з.д. 300 жылдар шамасында жазған және геометрияны жүйелі баяндауға арналған алғашқы еңбегі. Евклид бұл еңбегінде геометриялық прогрессия тақырыбын да қарастырып, бірнеше теоремалар дәлелдейді.

3.1. Сан тізбегі туралы түсінік

Тақырыпты оқып-үйрену барысында сендер:

- сан тізбегі ұғымын білетін боласыңдар;
- сан тізбегінің жалпы мүшесінің формуласын жаза білесіңдер;
- өспелі және кемімелі тізбектерді ажырата білетін боласыңдар.

3.1.1. Сан тізбегінің анықтамасы

Осыған дейін біз сан тізбектерін жиі қарастырып келдік. Атап айтсақ, нақты сандар ұғымындағы шексіз ондық бөлшектердің өзі сан тізбектерімен тығыз байланысты. Мысалы, $\sqrt{2}$ санын кемімен әртүрлі дәлдіктермен жуықтау үшін

$$1;\ 1,4;\ 1,41;\ 1,414;\ 1,4142;\ \ldots$$

сан тізбегін қарастырамыз. Оң жұп сандарды өсу ретімен орналастырсақ,

$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ \ldots$$

тізбегін аламыз. Бұл тізбектің бірінші мүшесі 2-ге; екінші мүшесі 4-ке; үшінші мүшесі 6-ға; 25-мүшесі 50-ге; 100-ші мүшесі 200-ге тең және т.с.с.

Сонымен, ***мүшелерін нөмірлеп шығуға болатын шексіз сандар жиынын сан тізбегі*** деп атайды. Тізбекті құрайтын сандар рет-ретімен, тізбектің бірінші, екінші, үшінші, төртінші, т.с.с. *мүшелері* деп аталады. Тізбектің мүшелерін, әдетте оның реттік нөмірлерін көрсететін индекстер жазылған әріптермен белгілейді:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

Тізбектің n-мүшесін оның *жалпы мүшесі* деп атайды және оны a_n, ал тізбектің өзін қысқаша $\{a_n\}$ арқылы белгілейді. Мысалы, $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ тізбегінің мүшелерін рет-ретімен $1,\ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ түрінде жазуға болады.

1-мысал. $\frac{1}{2\cdot 3}, \frac{1}{3\cdot 4}, \frac{1}{4\cdot 5}, \frac{1}{5\cdot 6}, \ldots$ тізбегінің жалпы мүшесін табу керек.

Тізбектің әрбір мүшесінің бөлімінде тізбектес натурал сандар орналасқан және $a_1 = \frac{1}{2\cdot 3}$. $a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ деп алсақ, тізбектің кез келген мүшесін табамыз:

Ж а у а б ы: $a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Егер тізбектің кез келген мүшесін жазып көрсету мүмкін болса, бұл тізбекті берілген деп есептейміз.

3.1.2. Сан тізбегінің берілу тәсілдері

Жалпы сан тізбектерін әртүрлі тәсілдермен анықтауға болады. Бұл тәсілдердің ең қолайлысы және жиі қолданылатыны — тізбекті n-ші *мүшесінің формуласымен анықтау*. Мысалы, $a_n = n^2$ формуласы арқылы $n=1$ болғанда $a_1=1$; $n=2$ болғанда $a_2=4$; $n=3$ болғанда $a_3=9$; $n=4$ болғанда $a_4=16$ және т.с.с. тізбектің кез келген мүшесін анықтай аламыз. Сонда $a_n=n^2$ формуласымен 1, 4, 9, 16, 25, ..., n^2, ... сан тізбегі анықталады. $a_n=\dfrac{n}{n+1}$ формуласымен $\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{4},\dfrac{4}{5},\ldots,\dfrac{n}{n+1},\ldots$ тізбегін анықтаймыз.

Кейде тізбекті оның ***мүшелерін сипаттау*** арқылы анықтауға болады. Мысалы, $\sqrt{2}$ санының кемімен алынған жуықтауы 1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; ... тізбегін сандар тізбегі деп анықтадық.

Сонымен бірге кейбір тізбектің алғашқы мүшелері беріліп, қалған мүшелері оның алдыңғы мүшелері арқылы анықталады. Мысалы, $a_1=1$, $a_2=1$ болсын. Тізбектің қалған мүшелері оның алдыңғы екі мүшесінің қосындысы арқылы анықталсын: $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$, $(n\geqslant 3)$. Онда 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... тізбегі анықталады. Бұл тізбекті Фибоначчи сандары деп атайды (Фибоначчи (Пизандық Леонардо) 1170–1250, италья математигі). Тізбектердің осындай тәсілмен анықталуын, яғни оның кез келген мүшесін (белгілі бір нөмірден бастап) алдыңғы мүшелері арқылы анықтайтын тәсілді ***рекурренттік тәсіл*** (латынның қайта оралу деген сөзінен шыққан), оған сәйкес формуланы ***рекурренттік формула*** деп атайды.

3.1.3. Бірсарынды тізбектер

Егер $\{a_n\}$ сан тізбегі үшін $a_{n+1}>a_n$ теңсіздігі орындалса, яғни оның екінші мүшесінен бастап әрбір мүшесі алдыңғы мүшесінен артық болса, онда мұндай тізбекті *өспелі тізбек* деп атайды. Егер $a_{n+1}<a_n$ $(n\in N)$ теңсіздігі орындалса, яғни оның әрбір мүшесі кейінгі мүшесінен артық болса, онда мұндай тізбекті *кемімелі тізбек* деп атайды.

Егер жоғарыда келтірілген $a_{n+1}>a_n$($a_{n+1}<a_n$) теңсіздіктерінің орнына $a_{n+1}\geqslant a_n$ ($a_{n+1}\leqslant a_n$) теңсіздіктері орындалса, бұл тізбекті *кемімейтін (не өспейтін) тізбектер* деп атайды. Жалпы өспелі және кемімелі, кемімейтін және өспейтін тізбектерді бір атпен *бірсарынды тізбектер* деп атайды. Мысалы,

$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \ldots,\ 2n,\ \ldots$$

$$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\ldots,\frac{n}{n+1},\ldots$$

тізбектері — өспелі тізбектер.

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{n}, \ldots; \quad \frac{4}{5}, \frac{5}{7}, \frac{6}{9}, \ldots, \frac{n+1}{2n-1}; \ldots$$

тізбектері — кемімелі тізбектер. Мұнда $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ тізбегінің кемімелі болатыны күмән келтірмесе, $\frac{n+1}{2n-1}$ тізбегінің кемімелі екенін дәлелдеу керек.

$$a_n = \frac{n+1}{2n-1}, \quad a_{n+1} = \frac{n+2}{2n+1}$$

болғандықтан, $a_{n+1} - a_n$ айырымының таңбасын анықтайық:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+2}{2n+1} - \frac{n+1}{2n-1} =$$

$$= \frac{2n^2 + 3n - 2 - 2n^2 - 3n - 1}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{-3}{(2n+1)(2n-1)} < 0.$$

Олай болса, $a_{n+1} < a_n$. Демек, $\left\{a_n = \frac{n+1}{2n-1}\right\}$ тізбегі кемімелі.

Осы сияқты $1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \ldots$ тізбегі — кемімейтін тізбек.

Өйткені бұл тізбектің кейбір мүшелері өзара тең және оның әрбір мүшесі алдыңғы мүшесінен артық емес.

Тізбектің барлығы бірдей бірсарынды бола бермейді. Мысалы, $-1, 1, -1, \ldots, (-1)^n, \ldots$ тізбегі (тербелмелі) бірсарынды болмайды.

Егер A саны табылып, $\{a_n\}$ тізбегінің әрбір мүшесі үшін $a_n > A$ теңсіздігі орындалса, онда $\{a_n\}$ тізбегін *төменнен шенелген* деп айтамыз. Ал қандай да бір B саны табылып, $a_n < B$ теңсіздігі орындалса, $\{a_n\}$ тізбегін *жоғарыдан шенелген* деп атаймыз. Егер тізбек әрі төменнен, әрі жоғарыдан шенелген болса, яғни A және B сандары табылып, $\{a_n\}$ тізбегінің әрбір мүшесі үшін $A < a_n < B$ теңсіздігі орындалса, бұл тізбекті *шенелген* деп атайды. Мысалы,

1) $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots;$ 2) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$

3) $1;\ 1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ \ldots;$ 4) $-1, -2, -3, \ldots, -n, \ldots$

5) $-1, 2, -3, \ldots, (-1)^n n, \ldots$

тізбектерін қарастырайық. Мұнда 1), 2) және 3) тізбектер төменнен шенелген, себебі бұл тізбектердің әрбір мүшесі нөлден үлкен. 2), 3) және 4) тізбектер жоғарыдан шенелген, себебі бұл тізбектердің әрбір мүшесі 2-ден кем. Онда 2) және 3) тізбектер әрі төменнен, әрі жоғарыдан шенелгендіктен, олар шенелген тізбектер болады. 5) тізбек төменнен де, жоғарыдан да шенелмеген.

1. Сан тізбегі дегеніміз не?
2. Сан тізбегінің жалпы мүшесі деген не?
3. Сан тізбегінің берілуінің қандай тәсілдерін білесіңдер?
4. Қандай тізбекті өспелі (кемімелі) деп атайды?
5. Жоғарыдан (төменнен) шенелген тізбек деген не? Қандай тізбектерді шенелген деп атайды?
6. Қандай тізбекті бірсарынды тізбек деп атайды?

Практикалық жұмыс

$\{a_n\}$ сан тізбегінің бірінші мүшесі $a_1 = \frac{1}{5}$.

Тізбектің кейінгі мүшелері алдыңғы мүшесінің алымы мен бөліміне бірдей 2 санын қосу арқылы алынады.

Тапсырма

1) $\{a_n\}$ тізбегі өспелі ме, әлде кемімелі ме?

2) Тізбектің жалпы мүшесінің формуласын жазыңдар.

3) Тізбектің бірінші мүшесі $a_1 = \frac{p}{q} > 0$ түріндегі дұрыс (бұрыс) бөлшек. Оның алымы мен бөліміне қосылатын санды $r > 0$ деп алып, 1) және 2) сұрақтарға жалпы түрде жауап беріңдер және жауаптарыңды негіздеңдер.

ЕСЕПТЕР

А

3.1. Төмендегі тізбектердің алғашқы бес мүшесін жазыңдар:

1) $x_n = 2n - 1$; 2) $x_n = n^2 + 1$; 3) $x_n = \frac{1}{n+1}$; 4) $y_n = (-1)^n$;

5) $y_n = 2^{n-3}$; 6) $a_n = 0{,}5 \cdot 4^n$; 7) $b_n = \frac{2n-1}{2n+1}$; 8) $c_n = \frac{1}{2^n}$.

3.2. Төмендегі тізбектердің алғашқы бес мүшесін жазыңдар:

1) $a_n = 2^n + \dfrac{1}{2^n}$; 2) $x_n = 3n^2 + 2n + 1$;

3) $a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, \text{ егер } n \text{ жұп болса}, \\ \dfrac{n-1}{n}, \text{ егер } n \text{ тақ болса}; \end{cases}$ 4) $c_n = \dfrac{2n-1}{2n+3}$;

5) $b_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ түбір}}$; 6) $y_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{2^n}$;

7) $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$; 8) $d_n = \dfrac{2}{(-1)^n} + 2$;

9) $b_n = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{27} + \ldots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}$.

3) Тізбек мүшесі нөмірінің жұп не тақ болуына тәуелді бірінші немесе екінші формуланы қолданамыз:

$a_1 = \dfrac{1-1}{1} = 0$; $a_2 = \dfrac{1}{2}$; $a_3 = \dfrac{3-1}{3} = \dfrac{2}{3}$; $a_4 = \dfrac{1}{4}$; $a_5 = \dfrac{5-1}{5} = \dfrac{4}{5}$;...

Ж а у а б ы: $0; \dfrac{1}{2}; \dfrac{2}{3}; \dfrac{1}{4}; \dfrac{4}{5}$.

B

3.3. 3-ке еселік натурал сандар тізбегінің жалпы мүшесінің формуласын жазыңдар.

3.4. 7-ге еселік натурал сандар тізбегінің жалпы мүшесінің формуласын жазыңдар.

3.5. 4-ке бөлгенде қалдығы 1-ге тең болатын натурал сандар тізбегінің жалпы мүшесінің формуласын жазыңдар.

4-ке еселік сандар $4n(n \in N)$ түрінде жазылады. 4-ке бөлгенде қалдығы $r=1$-ге тең натурал сандар тізбегінің жалпы мүшесі $a_n=4n+1$ түрінде жазылады.

3.6. 5-ке бөлгенде қалдығы 2-ге тең болатын натурал сандар тізбегінің жалпы мүшесінің формуласын жазыңдар.

3.7. Төмендегі тізбектердің жалпы мүшесінің формуласын жазыңдар:

1) 1, 5, 9, 13, 17, ...,
2) 2, −2, 2, −2, ...;
3) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots,$
4) $\frac{1}{4}, \frac{1}{7}, \frac{1}{10}, \frac{1}{13}, \ldots;$
5) 3, 6, 12, 24, 48, ...;
6) 1, −2, 3, −4, ...;
7) $\frac{1}{3}, \frac{4}{9}, \frac{9}{27}, \frac{16}{81}, \ldots;$
8) $\frac{1}{3}, \left(\frac{2}{5}\right)^2, \left(\frac{3}{7}\right)^3, \left(\frac{4}{9}\right)^4, \ldots.$

3.8. Егер $a_n = \frac{1}{2n+1}$ болса, онда a_{10}, a_{n+1}, a_{2n} мүшелерін табыңдар.

3.9. Егер $x_n = \frac{1}{2^n+1}$ болса, онда x_3, x_5, x_{n+1}, x_{2n+1} мүшелерін жазыңдар.

3.10. Төмендегі тізбектердің өспелі не кемімелі, жоғарыдан не төменнен шенелгенін анықтаңдар:

1) $a_n = \frac{1}{n^2+1}$;
2) $x_n = \frac{2^n-1}{2^n}$;
3) $y_n=(-0,5)^n$;
4) $u_n = \frac{2n^2+1}{3n^2}$;
5) $b_n = \frac{n^2-1}{2n}$;
6) $c_n = \frac{(-1)^n}{n}$;
7) $x_n = \frac{2n^2+1}{4n^2+5}$;
8) $a_n = \frac{2n^2+1}{n^2}$;
9) $y_n = \frac{n^2}{n^2+1}$;
10) $b_n = \frac{2n+1}{2^n}$;
11) $z_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$;
12) $p_n=1+(-1)^n$.

7) $x_n = \frac{2n^2+1}{4n^2+5}; x_{n+1} = \frac{2(n+1)^2+1}{4(n+1)^2+5} = \frac{2n^2+4n+3}{4n^2+8n+9} \Rightarrow x_n - x_{n+1} = \frac{2n^2+1}{4n^2+5} -$

$$-\frac{2n^2+4n+3}{4n^2+8n+9} = \frac{(2n^2+1)(4n^2+8n+9)-(4n^2+5)(2n^2+4n+3)}{(4n^2+5)(4n^2+8n+9)} =$$

$$= \frac{8n^4+16n^3+22n^2+8n+9-(8n^2+16n^3+22n^2+20n+15)}{(4n^2+5)(4n^2+8n+9)} =$$

$$= \frac{-12n-6}{(4n^2+5)(4n^2+8n+9)} < 0 \Rightarrow x_n - x_{n+1} < 0 \Rightarrow x_n < x_{n+1}.$$

Олай болса, тізбек өспелі.

C

3.11. Егер $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}$ болса, a_1, a_2, a_{n+1}, a_{2n} мүшелерін жазыңдар.

3.12. $\{x_n\}$ тізбегі рекуррентті формуламен берілген. 1) $x_1=3$, $x_{n+1}=2x_n$, $n \geqslant 1$; 2) $x_1=1$, $x_{n+1}=1-x_n$, $n \geqslant 1$ тізбегінің жалпы мүшесінің формуласын жазып, тізбегінің алғашқы 4 мүшесін көрсетіңдер.

3.13. $a_n = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ тізбегінің a_1, a_{n+1}, a_{n-1} мүшелерін жазыңдар.

3.14. Жалпы мүшесі $x_n = \frac{3n-1}{5n+2}$ формуласымен берілген тізбектің өспелі болатынын дәлелдеңдер.

3.15. Жалпы мүшесі $a_n = \frac{n+1}{2n+1}$ формуласымен берілген тізбектің кемімелі болатынын дәлелдеңдер.

3.16. Жалпы мүшесі $x_n = \frac{an+2}{bn+1}$ формуласымен берілген тізбек a-ның және b-ның қандай мәндерінде өспелі не кемімелі болады?

Қайталауға арналған жаттығулар

3.17. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\frac{ap+aq-bp-bq}{ap-aq-bp+bq}$; 2) $\frac{mc-nc+md-nd}{mc+nc+md+nd}$.

3.18. Теңдеулер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases} 3x+y+4=0, \\ x^2-y^2=2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{3x-2y}{3} - \frac{x-y}{2} = 5, \\ 7x+3y=38. \end{cases}$

3.19. Функцияның анықталу облысын табыңдар:

1) $y = \frac{4}{\sqrt{18x^2-3x-1}}$; 2) $y = \sqrt{(x+4)(7-x)}$.

3.20. Графигі $A(3;-6)$ нүктесі арқылы өтетін кері пропорционалдық функцияны жазыңдар.

3.2*. Математикалық индукция принципі

Тақырыпты оқып-үйрену барысында сендер:

- математикалық индукция принципін біліп, оны есептер шығарғанда қолдануды үйренесіңдер.

*Дербес тұжырымдардан жалпы қорытынды шығару тәсілін **индукция*** деп атайды. Мысалы, тізбектес орналасқан алғашқы тақ натурал сандардың қосындысын қарастырайық:

$$1=1^2,$$
$$1+3=4=2^2,$$
$$1+3+5=9=3^2,$$
$$1+3+5+7=16=4^2,$$
$$1+3+5+7+9=25=5^2,$$
. . . .

Мұнда бірінші жолды бір қосылғыштан тұратын қосынды деп қарастыру керек. Осындай «қосындыларды» математикалық талдауларда жиі қолданады. Осы дербес мысалдардан, қосылғыштардың алғашқы тақ сандар қосындысы қосылғыштар санының квадратына тең деген болжам (гипотеза) айтуға болады, яғни әрбір натурал n үшін $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$ теңдігі орындалады деп есептейміз. Әрине, бұл дәлелденбеген болжам. Оның ақиқаттығын кейінірек дәлелдейміз.

Тағы бір мысал қарастырайық. Әрбір натурал n үшін анықталған $P(n)=n^2+n+41$ квадрат үшмүшесі берілсін. Бұл квадрат үшмүшенің n санының 1, 2, 3, 4, 5-ке тең болғандағы мәндері жай сандар екенін тексеру қиын емес: $P(1)=43$; $P(2)=47$; $P(3)=53$; $P(4)=61$; $P(5)=71$ т.с.с. Осыдан $P(n)$ квадрат үшмүшесінің мәні әрбір натурал n саны үшін жай сан болады деген болжам айтуға болады. Дегенмен бұл топшылауымыз қате. Өйткені $n=41$ жағдайында

$$P(41)=41^2+41+41=41\cdot 43$$

өрнегінің мәні жай сан болмайды.

Осы екі мысалдан, бірдей талдау тәсілдерін қолданып, әртүрлі нәтижелер шығатынын көреміз. Егер бірінші мысалдың қорытындысы ақиқат болса, екінші мысалдың қорытындысы жалған болып шықты. Сондықтан топшылаудың бұл тәсілі дәлелдеу емес. Дегенмен бұл тәсіл көп жағдайларда, ақиқаттығы өзге тәсілдермен дәлелденетін болжамдар айтуға септігін тигізеді. Осы тәсілмен алынатын болжамдар бірнеше дербес мысалдардың қорытындысы болғандықтан, оны ***толымсыз индукция*** деп атайды.

Егер қорытынды барлық мүмкін болатын дербес жағдайларды талдау нәтижесінде алынса, мұндай пайымдаулар тәсілін ***толық индукция*** деп атайды. Әрине, мұндай тәсілді мүмкін жағдайлар саны аз болғанда қолданған тиімді. Енді толық индукцияны қолдануға мысалдар келтірейік.

1-мысал. $2 \leqslant n \leqslant 15$ теңсіздігін қанағаттандыратын әрбір натурал n саны үшін оның жай көбейткіштерінің саны 3-тен артпайтынын дәлелдейік.

Шынында да, 2, 3, 5, 7, 11, 13 — берілген теңсіздікті қанағаттандыратын жай сандар. Сондықтан оларды бір көбейткіштен тұрады деп есептейміз. Ал 4, 6, 9, 10, 14, 15 сандары екі жай көбейткішке жіктеледі. Соңында 8 және 12 сандары үш жай көбейткішке жіктеледі. Сонымен, біз барлық мүмкін жағдайларды толық қарастырдық. Олай болса, берілген тұжырым ақиқат.

2-мысал. $3m^2-4n^2=13$ теңдігі m мен n-нің ешбір бүтін мәндерінде орындалмайтынын дәлелдейік.

Екі түрлі жағдай қарастырайық:

1) m — кез келген жұп сан, n кез келген бүтін сан десек, $m=2k$, k бүтін сан болғандықтан, $12k^2-4n^2=13$. Бұл теңдіктің орындалуы мүмкін емес, себебі теңдіктің сол жағы 4-ке бөлінеді, ал оң жағы 4-ке бөлінбейді.

2) $m=2k+1$ — кез келген тақ сан, n кез келген бүтін сан болсын. Онда $3(2k+1)^2-4n^2=13$ немесе $12k^2+12k-4n^2=10$ немесе $6k^2+6k-2n^2=5$ теңдігі шығады. Бұл теңдіктің де орындалуы мүмкін емес, өйткені оның сол жақ бөлігінде жұп сан, оң жақ бөлігінде тақ сан тұр.

Сонымен, $3m^2-4n^2=13$ теңдігі n — кез келген бүтін сан, m — кез келген тақ немесе жұп сан болса да орындалмайтынын көреміз. Олай болса, $3m^2-4n^2=13$ теңдігі m мен n-нің ешбір бүтін мәндері үшін орындалмайды. Дәлелдеу керегі де осы.

Енді

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2 \qquad (1)$$

теңдігінің кез келген натурал n саны үшін орындалатынын дәлелдейік.

Жоғарыда айтылғандай, (1) теңдікпен болжам анықталады және бұл болжам n-ге тәуелді. Қолайлы болуы үшін (1) теңдікпен анықталатын болжамды $A(n)$ арқылы белгілейік. $A(1)$, $A(2)$, $A(3)$, $A(4)$, $A(5)$ пікірлері жоғарыда тексерілген. $A(5)$ тұжырымын жазалық: $1+3+5+7+9=5^2$. Осы тұжырым дәлелденді деп есептеп, оның салдары ретінде $A(6)$ пікірінің ақиқаттығын көрсетейік. Шынында да,

$$1+3+5+7+9+11=5^2+11=5^2+2\cdot5+1=(5+1)^2=6^2.$$

Жалпы, егер $A(k)$ пікірі ақиқат болып,

$$1+3+5+\ldots+(2k-1)=k^2$$

теңдігі орындалады деп есептесек, $A(k+1)$ тұжырымының ақиқаттығын оңай тексеруге болады:

$$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+2k+1=(k+1)^2.$$

Осыдан мынадай қорытындылар тізбегі шығады:

$$A(5)\Rightarrow A(6)\Rightarrow A(7)\Rightarrow A(8)\Rightarrow A(9)\ldots$$

Бұл жазу «егер $A(5)$ ақиқат болса, онда $A(6)$ ақиқат; егер $A(6)$ ақиқат болса, онда $A(7)$ ақиқат және т.с.с.» деп оқылады. Сонымен, осы тізбекті жалғастыра отырып, $A(1)$ пікірінің ақиқаттығынан бастап, кез келген n натурал саны үшін $A(n)$ пікірінің ақиқаттығына көз жеткізу қиын емес.

Осы қолданылған дәлелдеу тәсілін ***математикалық индукция принципі*** деп атайды. Енді осы принцип ережесін тұжырымдайық:

Егер $A(n)$ пікірі $n=1$ үшін ақиқат болса және оның $n=k$ үшін де ақиқат болатындығынан (k — кез келген натурал сан) бұл тұжырымның келесі $n=k+1$ саны үшін де ақиқаттығы шықса, $A(n)$ пікірі кез келген натурал сан үшін ақиқат болады.

Бұл математикалық индукция принципі — натурал сандар теориясының негізгі аксиомаларының бірі және оны математикалық тұжырымдарды дәлелдеуге жиі қолданады.

Сонымен, математикалық индукция принципі негізінен мынадай екі кезеңнен тұрады:

1-кезең: $A(1)$ пікірінің ақиқаттығын тексеру;

2-кезең: $n=k$ болғанда $A(k)$ пікірін ақиқат деп қабылдап, $n=k+1$ болғандағы $A(k+1)$ пікірінің ақиқаттығын дәлелдеп, $A(k)\Rightarrow A(k+1)$ болатынын көрсету керек.

Егер осы кезеңдердің екеуі де дәлелденсе, $A(n)$ пікірі математикалық индукция принципі бойынша кез келген натурал n саны үшін орындалады.

Енді (1) теңдіктің ақиқаттығына оралайық. Дәлелдеуіміз бойынша $A(1)$ ақиқат және $A(k)$-ның ақиқаттығынан $A(k+1)$-дің ақиқаттығына көз жеткіздік. Олай болса, (1) теңдік кез келген натурал n саны үшін орындалады.

3-мысал. Кез келген натурал n саны үшін

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)} \qquad (2)$$

қосындысын табу қажет.

Алдымен толымсыз индукция тәсілін қолданып, дербес жағдайларда шығатын қосындылардың заңдылығын анықтайық. Ол үшін (2) қосындыны S_n арқылы белгілейік:

$$S_1=\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}$$

$$S_2=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{2}{3},$$

$$S_3=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{3}{4}$$

$$S_4=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}=\frac{4}{5}$$

Осыдан әр қосындының алымы қосылғыштар санына тең, бөлімі алымынан 1-ге артық болатынын көреміз.

Олай болса, кез келген n натурал саны үшін

$$S_n=\frac{n}{n+1} \qquad (3)$$

теңдігі орындалады деген болжам шығады. Енді осы болжамды математикалық индукция принципі бойынша дәлелдейік:

1) $n=1$ болғанда $S_1=\frac{1}{2}$. Олай болса, $A(1)$ сөйлемі ақиқат.

2) Енді $A(k)$ сөйлемін ақиқат деп қабылдап, $A(k+1)$-дің ақиқаттығын, яғни $S_k=\frac{k}{k+1} \Rightarrow S_{k+1}=\frac{k+1}{k+2}$ болатындығын дәлелдеу керек.

Айталық, $S_k = \dfrac{k}{k+1}$ теңдігі дұрыс болса,

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} =$$

$$= \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2} \Rightarrow S_{k+1} = \frac{k+1}{k+2}.$$

Дәлелдеу керегі де осы.

Сонымен, математикалық индукция принципі бойынша $S_n = \dfrac{n}{n+1}$ формуласы кез келген натурал n үшін орындалады.

Ескерту. Кейде берілген $A(n)$ сөйлемі $n=1$, $n=2$, ..., $n=m-1$ үшін орындалмағанымен, $n=m$ мәнінен бастап орындалуы мүмкін. Математикалық индукция принципін $A(m)$ пікірін дәлелдеуден бастап, $A(k)$, $(k \geqslant m)$ сөйлемінің дұрыстығынан $A(k+1)$ сөйлемінің ақиқаттығы шығатынын дәлелдейді.

4-мысал. Әрбір натурал $n \geqslant 5$ үшін $2^n > n^2$ теңсіздігінің орындалатындығын дәлелдейік.

1) $n=5$ болғанда $2^n=2^5=32$ және $n^2=5^2=25$. Берілген теңсіздік орындалады.

2) $n=k$, $k \geqslant 5$ болғанда $2^k > k^2$ теңсіздігі орындалсын. Бізге $2^{k+1} > (k+1)^2$ теңсіздігі орындалатынын көрсету керек.

Ол үшін $2^k > k^2$ теңсіздігін 2-ге көбейтіп, $2^{k+1} > 2k^2$ теңсіздігін аламыз. Енді $k \geqslant 5$ болғанда $2k^2 > (k+1)^2$ немесе $2k^2-(k+1)^2>0$ теңсіздігі орындалатынын дәлелдесек, жеткілікті.

Шынында да, $2k^2-(k+1)^2=k^2-2k-1=(k-1)^2-2$. $k \geqslant 5$ болғандықтан, $(k-1)^2 \geqslant 4^2$ немесе $(k-1)^2-2>0$ теңсіздігі орындалып, $2k^2-(k+1)^2>0$ теңсіздігінің ақиқаттығы шығады. Сонымен, берілген теңсіздік кез келген натурал $n \geqslant 5$ үшін дәлелденді.

1. Индукция деген не?
2. Толық (толымсыз) индукция дегенді қалай түсінесіңдер?
3. Математикалық индукция принципін тұжырымдаңдар.

ЕСЕПТЕР

B

3.21. Математикалық индукция принципін қолданып, төмендегі тұжырымдарды дәлелдеңдер:

1) $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$;

2) $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

3) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$;

4) $1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)$;

5) $1^2+2^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2=\dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$;

6) $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\ldots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

7) $1\cdot4+2\cdot7+3\cdot10+\cdots+n(3n+1)=n(n+1)^2$;

8) $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\cdots+n(n+1)(n+2)=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$;

9) $\dfrac{1}{1\cdot4}+\dfrac{1}{4\cdot7}+\dfrac{1}{7\cdot10}+\ldots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\dfrac{n}{3n+1}$;

10) $\dfrac{1}{1\cdot5}+\dfrac{1}{5\cdot9}+\dfrac{1}{9\cdot13}+\ldots+\dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\dfrac{n}{4n+1}$.

7) Егер $n=1$ болса, $1\cdot4=1\cdot(1+1)^2=1\cdot4$ тұжырымы ақиқат. Енді $n=k$ болғанда $1\cdot4+2\cdot7+\ldots+k(3k+1)=k(k+1)^2$ тепе-теңдігі орындалады деп алып, $n=k+1$ жағдайында $1\cdot4+2\cdot7+\ldots+k(3k+1)+(k+1)(3k+4)=(k+1)(k+2)^2$ тепе-теңдігі орындалатынын көрсетейік.

Шынындада, $1\cdot4+2\cdot7+\ldots+k(3k+1)+(k+1)(3k+4)=k(k+1)^2\times(k+1)(3k+4)=(k+1)[k(k+1)+3k+4]=(k+1)(k^2+4k+4)=(k+1)\times(k+2)^2$.

Дәлелдеу керегі де осы.

3.22. Әрбір натурал n саны үшін төмендегі тұжырымдарды дәлелдеңдер:

1) $n^3+5n \vdots 6$; 2) $7^n+3n-1 \vdots 9$; 3) $8^n+6 \vdots 7$;
4) $10^n+18n-28 \vdots 27$; 5) $9^n-8n-9 \vdots 8$, $n>1$;
6) $n^4+6n^3+11n^2+6n \vdots 24$.

C

3.23. Кез келген натурал n саны үшін

$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ қосындысын табыңдар.

3.24. Арасында өзара параллель түзулер болмайтын және олардың ешқандай үш түзуі бір нүкте арқылы өтпейтін, бір жазықтықта орналасқан n түзуі осы жазықтықты $\frac{n^2+n+2}{2}$ бөлікке бөлетінін дәлелдеңдер.

3.25. $\{a_n\}$ тізбегі рекурренттік формуламен берілген: $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+8n$. Тізбектің кез келген мүшесі бүтін санның толық квадратын анықтайтынын көрсетіңдер.

3.26. $\{b_n\}$ тізбегі рекурренттік формуламен берілген: $b_1=3$, $b_{n+1}=7b_n+3$. Бұл тізбектің жалпы мүшесі $b_n=\frac{7^n-1}{2}$ формуласымен анықталатынын көрсетіңдер.

$n=1$ болса, $b_1=\frac{7^1-1}{2}=3$ тұжырымы ақиқат. Енді $n=k$ болғанда $b_k=\frac{7^k-1}{2}$ теңдігі орындалады деп алып, $n=k+1$ $b_{k+1}=\frac{7^{k+1}-1}{2}$ теңдігі орындалатынын көрсетелік. Шынында да, $b_{k+1}=7\cdot b_k+3=7\cdot\frac{7^k-1}{2}+3=\frac{7^{k+1}-7+6}{2}=\frac{7^{k+1}-1}{2}$.

3.27. Төмендегі тұжырымдардың n-нің кез келген натурал мәнінде орындалатынын көрсетіңдер:

1) $6^n+20n+24$ саны 25-ке еселік;

2) егер $0<a<b$ болса, онда $a^n<b^n$.

3.28. Натурал n санының көрсетілген мәндері үшін төмендегі теңсіздіктерді дәлелдеңдер:

1) $2^n>n$, $n\geqslant0$;

2) $2^n>2n+1$, $n\geqslant3$;

3) $2^n>n^3$, $n\geqslant10$;

4) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}, n\geqslant2.$

3.29. Егер $h>-1$, $h\neq0$ болса, онда $(1+h)^n>1+nh$ теңсіздігінің әрбір натурал $n\geqslant2$ үшін орындалатынын дәлелдеңдер. Бұл ***Бернулли теңсіздігі*** деп аталады.

Қайталауға арналған жаттығулар

3.30. Функцияның графигін салыңдар:

1) $y=7-3x-x^2$;

2) $y=\frac{2x+3}{x+1}$.

3.31. $f(x)=\frac{\sqrt{x-x^2+2}}{x}$ функциясының анықталу облысын табыңдар.

3.3. Арифметикалық прогрессия. Арифметикалық прогрессияның n-мүшесінің формуласы

Тақырыпты оқып-үйрену барысында сендер:

- тізбектер арасынан арифметикалық прогрессияларды ажырата білуді үйренесіңдер:
- арифметикалық прогрессияның n-мүшесін анықтап үйренесіңдер.

3.3.1. Арифметикалық прогрессия ұғымы

3-ке бөлгенде қалдығы 1-ге тең натурал сандар тізбегін қарастырайық: 1, 4, 7, 10, 13, 16, ... Бұл тізбектің екінші мүшесінен бастап, әрбір мүшесі өзінің алдындағы көршілес мүшеге 3-ті қосқанда алынып тұр. Бұл тізбек *арифметикалық прогрессияға* мысал болады. Прогрессия термині латынның *progressio* деген сөзінен шыққан. Ол «алға қарай қозғалыс» дегенді білдіреді. Енді арифметикалық прогрессияның анықтамасын келтірейік.

Анықтама. *Егер a_2, a_2, ..., a_n, ... тізбегінің екінші мүшесінен бастап, әрбір мүшесі алдындағы көршілес мүшеге тұрақты санды қосқанға тең болса, онда бұл тізбекті* ***арифметикалық прогрессия*** *деп атайды.*

Басқаша айтқанда, кез келген n натурал саны үшін

$$a_{n+1}=a_n+d \qquad (1)$$

теңдігі орындалса, $\{a_n\}$ тізбегін арифметикалық прогрессия, d санын арифметикалық прогрессияның ***айырымы*** *деп атайды.*

Сонымен, арифметикалық прогрессияның айырымы үшін

$$d=a_{n+1}-a_n \qquad (2)$$

теңдігі орындалады. Жоғарыда келтірілген мысалда $a_n=3n-2$, $a_{n+1}=3n+1$ болғандықтан, $d=a_{n+1}-a_n=3n+1-(3n-2)=3$.

3.3.2. Арифметикалық прогрессияның n-мүшесінің формуласы

Енді арифметикалық прогрессияны бірінші мүшесі a_1 мен айырымы d арқылы толық анықтауға болатынын көрсетейік. Ол үшін n-мүшесі a_n-ді d мен a_1 арқылы өрнектесе, жеткілікті.

Арифметикалық прогрессияның анықтамасы бойынша

$$a_2=a_1+d,$$
$$a_3=a_2+d=(a_1+d)+d=a_1+2d,$$
$$a_4=a_3+d=(a_1+2d)+d=a_1+3d,$$
$$a_5=a_4+d=(a_1+3d)+d=a_1+4d,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Осыдан мынадай болжам шығады: $a_n=a_1+(n-1)d$.

Бұл формуланы математикалық индукция принципін қолданып, дәлелдейік:

1) $n=2$ болғанда $a_2=a_1+d$.

2) $n=k$ болғанда $a_k=a_1+(k-1)d$ формуласын дұрыс деп қабылдап, $n=k+1$ болғанда $a_{k+1}=a_1+kd$ теңдігінің орындалатынын көрсетейік.

Шынында да, анықтама бойынша

$a_{k+1}=a_k+d=(a_1+(k-1)d)+d=a_1+((k-1)d+d)=a_1+kd$.

Дәлелдеу керегі де осы.

Сонымен, арифметикалық прогрессияның n-мүшесінің формуласы

$$a_n=a_1+(n-1)d \qquad (3)$$

түрінде жазылады. Бірнеше мысал қарастырайық.

1-мысал. $a_1=-2$, $d=0,5$ болатын $\{a_n\}$ арифметикалық прогрессиясының 25-мүшесін табу керек.

(3) формула бойынша $a_{25}=a_1+24d=-2+24\cdot0,5=10$.

2-мысал. 9 және 5 сандарының арасына осы сандармен бірге арифметикалық прогрессия құрайтындай етіп жеті сан жазу керек.

Егер 9 және 5 сандары біз іздеген жеті санмен бірге арифметикалық прогрессия құраса, $a_1=9$, $a_9=5$ болғаны. Біз a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8 сандарын анықтауымыз керек. (3) формула бойынша $5=a_9=a_1+8d=9+8d\Rightarrow 8d=-4\Rightarrow d=-0,5$. $a_2=a_1+$ $+d=9-0,5=8,5$; $a_3=8$; $a_4=7,5$; $a_5=7$; $a_6=6,5$; $a_7=6$; $a_8=5,5$.

(3) формуладан $a_n=dn+(a_1-d)$ теңдігін аламыз. Олай болса, $\{a_n\}$ арифметикалық прогрессиясының n-мүшесін $a_n= kn+b$ түрінде жазуға болатынын көреміз. Мұнда k және b — берілген сандар. Бұған кері тұжырым да орындалады. Әрбір берілген k және b сандары үшін

$$a_n=kn+b \qquad (4)$$

формуласымен анықталатын $\{a_n\}$ тізбегі арифметикалық прогрессия болады.

$\{a_n\}$ тізбегінің $n+1$ және n-мүшелерінің айырымын қарастырайық:

$$a_{n+1}-a_n=k(n+1)+b-(kn+b)=k.$$

Демек, кез келген n натурал саны үшін $a_{n+1}-a_n=k$ теңдігі орындалады. Анықтама бойынша $\{a_n\}$ — арифметикалық прогрессия. Оның айырымы k-ға тең.

Сонымен қатар арифметикалық прогрессияның екінші мүшесінен бастап, оның әрбір мүшесі өзімен көршілес екі мүшесінің *арифметикалық ортасына* тең болады:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}. \tag{5}$$

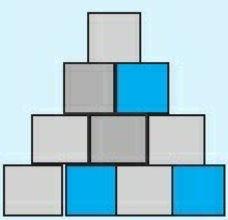
Анықтама бойынша $a_n=a_{n-1}+d$, $a_n=a_{n+1}-d$. Осы екі теңдікті мүшелеп қоссақ,

$$2a_n=(a_{n-1}+d)+(a_{n+1}-d) = a_{n-1}+a_{n+1}$$

немесе $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$.

1. Қандай сан тізбегін арифметикалық прогрессия деп атайды?
2. Арифметикалық прогрессияның айырымы деп қандай санды айтады?
3. Арифметикалық прогрессияның n-мүшесінің формуласын жазыңдар.

Практикалық жұмыс



3.1-сурет

Балалар бақшасында ойнап жүрген балалар қыры 8 см болатын текшелерден үшбұрыш тәрізді 3.1-суретте көрсетілгендей баспалдақ «қабырға» тұрғызды және оның биіктігі 56 см болды. «Қабырға» табанында неше текше орналасқан? Егер табанында 11 текше орналасса, қабырғаның биіктігі қандай болар еді?

ЕСЕПТЕР

A

3.32. 1) 19, 15, 11, ...; 2) −1, 3, 7, ... арифметикалық прогрессиясының бесінші мүшесін анықтаңдар.

3.33. $\{a_n\}$ арифметикалық прогрессиясының алғашқы төрт мүшесін жазыңдар:

1) $a_1=10$; $d=4$; 2) $a_1=1,7$; $d=-0,2$;

3) $a_1=-3,5$; $d=0,6$; 4) $a_1=\frac{4}{3}$; $d=\frac{1}{6}$.

3.34. 1) $a_1=-3$, $d=0,7$ болса, a_{11}-ді; 2) $a_1=18$, $d=-0,5$ болса, a_{20} -ны; 3) $a_1=20$, $d=3$ болса, a_5-ті; 4) $b_1=5,8$, $d=-1,5$ болса, b_{21}-ді табыңдар.

3.35. 1) $\frac{1}{3}$; −1, ...; 2) 2,3; 1; ...; 3) −8; −6,5; ...; 4) 11; 7; ...

арифметикалық прогрессиясының бесінші және n-мүшелерін анықтаңдар.

1) $a_1=\frac{1}{3}$; $a_2=-1 \Rightarrow d=a_2-a_1=-1-\frac{1}{3}=-\frac{4}{3}$.

$a_n=a_1+(n-1)d=\frac{1}{3}+(n-1)(-\frac{4}{3})=\frac{1-4n+4}{3}=\frac{5-4n}{3}$.

$a_5=\frac{5-4\cdot 5}{3}=-5$. Ж а у а б ы: $a_5=-5$, $a_n=\frac{5-4n}{3}$.

3.36. $\{a_n\}$ арифметикалық прогрессиясының a_1 бірінші мүшесі мен d айырымы берілген. a_n-ді табыңдар:

1) $a_1=2$; $d=0,1$; $n=5$; 2) $a_1=2,3$; $d=-1$; $n=10$;

3) $a_1=-3$; $d=0,8$; $n=16$; 4) $a_1=-1\frac{5}{6}$; $d=\frac{1}{3}$; $n=61$.

3.37. 1) $a_1=2$, $a_{10}=92$; 2) $a_1=-7$, $a_{16}=2$; 3) $a_1=0$, $a_{66}=-92$ болса, d-ны табыңдар.

B

3.38. 1) 6-ға қалдықсыз бөлінетін; 2) 13-ке қалдықсыз бөлінетін неше екі таңбалы натурал сан бар?

3.39. Алтауы да арифметикалық прогрессияның тізбектес орналасқан мүшелері болатындай етіп, 1) 5 және 1; 2) 2,5 және 4 сандарының арасына төрт санды орналастырыңдар.

2) $a_1=2{,}5$; $a_6=4$. (3) формула бойынша $a_6=a_1+5d \Rightarrow 4=2{,}5+5d \Rightarrow 5d=1{,}5 \Rightarrow d=0{,}3$. Сонда $a_2=a_1+d=2{,}8$; $a_3=a_2+d=3{,}1$; $a_4=a_3+d=3{,}4$; $a_5=a_4+d=3{,}7$.
Ж а у а б ы: 2,5 пен 4 арасына 2,8; 3,1; 3,4; 3,7 сандарын орналастыру керек.

3.40. 1) $c_5=27$, $c_{27}=60$; 2) $c_{20}=0$, $c_{66}=-92$ болса, онда $\{c_n\}$ арифметикалық прогрессиясының бірінші мүшесі мен айырымын табыңдар.

3.41. Егер $a_1=32$; $d=-1{,}5$ болса, 1) 0; 2) -28 саны осы $\{a_n\}$ арифметикалық прогрессиясының мүшесі бола ма?

3.42. 1 және 16 сандарының арасына, осы сандармен бірге арифметикалық прогрессия құрайтындай етіп, қандай 8 санды орналастыру қажет?

3.43. Арифметикалық прогрессияның бірінші мүшесі мен айырымын табыңдар:

1) $\begin{cases} a_1+a_{10}=12, \\ a_8-a_5=4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} a_5+a_{11}=-0{,}2, \\ a_4+a_{10}=2{,}6. \end{cases}$

3.44. 1) 156; 2) 295 саны 2, 9, ... арифметикалық прогрессиясының мүшесі бола ма?

3.45. $x_1=8{,}7$; $d=-0{,}3$ болса, n-нің қандай мәнінде $\{x_n\}$ арифметикалық прогрессиясының мүшелері үшін $x_n \geqslant 0$ және $x_{n+1}<0$ теңсіздіктері орындалады?

$\begin{cases} x_n=8{,}7-(n-1)0{,}3\geqslant 0, \\ x_{n+1}=8{,}7-0{,}3n<0 \end{cases}$ теңсіздіктер жүйесі орындалуы керек. Осыдан $\begin{cases} 9-0{,}3n\geqslant 0, \\ 8{,}7-0{,}3n<0 \end{cases} \Leftrightarrow 8{,}7<0{,}3n\leqslant 9 \Leftrightarrow 29<n\leqslant 30.$

Сонымен, $x_{31}=-0{,}3<0$, $x_{30}=0$.

Ж а у а б ы: $n=30$.

3.46. 1) $a_n=3n+1$; 2) $a_n=n^2-5$; 3) $a_n=4+n$; 4) $a_n=\dfrac{1}{n+4}$; 5) $a_n=-0{,}5n+1$; 6) $a_n=6n$ формуласымен анықталған $\{a_n\}$ тізбегі арифметикалық прогрессия бола ма?

C

3.47. $a_p=q$, $a_q=p$ болса, онда $\{a_n\}$ арифметикалық прогрессиясының n-мүшесін n, p және q арқылы өрнектеңдер.

3.48. 5, 8, 11, ... және 3, 7, 11, ... арифметикалық прогрессияларының $n=100$ болғанда неше ортақ мүшесі бар?

3.49. $\{a_n\}$ өспелі арифметикалық прогрессиясы үшін $a_2a_5=52$ және $a_2+a_3+a_4+a_5=34$ теңдіктері орындалады. Прогрессияның жиырмасыншы мүшесін анықтаңдар.

3.50. $(a+x)^2$, a^2+x^2, $(a-x)^2$, ... тізбегі арифметикалық прогрессия құрайтынын дәлелдеңдер.

3.51. a_1, a_2, ..., a_n сандары арифметикалық прогрессияның тізбектес мүшелері болса, $\dfrac{1}{a_1a_2}+\dfrac{1}{a_2a_3}+...+\dfrac{1}{a_{n-1}a_n}=\dfrac{n-1}{a_1a_n}$ формуласы орындалатынын көрсетіңдер. Мұндағы $a_1\neq0$, $a_2\neq0$, ..., $a_n\neq0$.

3.52. 1) $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, 2) $\sqrt{5}-\sqrt{2}$, 1, $\dfrac{1+4\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}+2}$ сандары арифметикалық прогрессияның тізбектес мүшелері болуы мүмкін бе?

3.53. Барлық мүшелері натурал сандар болатын арифметикалық прогрессияның құрамында натурал санның квадратына тең болатындай тура 2004 мүшесі болуы мүмкін бе?

Қайталауға арналған жаттығулар

3.54. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $\dfrac{ac+bx+ax+bc}{ay+2bx+2ax+by}=\dfrac{x+c}{2x+y}$; 2) $\dfrac{x-xy+z-zy}{1-3y+3y^2-y^3}=\dfrac{x+z}{(1-y)^2}$.

3.55. Теңдеуді шешіңдер:

1) $x^4-17x^2+16=0$; 2) $3x^4+x^2-4=0$.

3.4. Геометриялық прогрессия. Геометриялық прогрессияның n-мүшесінің формуласы

Тақырыпты оқып-үйрену барысында сендер:

- тізбектер арасынан геометриялық прогрессияларды ажырата білуді үйренесіңдер;
- геометриялық прогрессияның n-мүшесін анықтап үйренесіңдер.

3.4.1. Геометриялық прогрессия ұғымы

Айталық, бізге $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ тізбегі берілсін.

Анықтама. *Егер $\{a_n\}$ тізбегінің екінші мүшесінен бастап, әрбір мүшесі алдындағы көршілес мүшені тұрақты, нөлден өзгеше санға көбейткенде шықса, бұл тізбекті **геометриялық прогрессия** деп атайды.*

Басқаша айтқанда, егер кез келген натурал n саны үшін

$$a_{n+1}=a_n\cdot q,\ q \neq 0,\ q \neq 1,\ a_1 \neq 0 \quad (1)$$

*теңдігі орындалса, $\{a_n\}$ тізбегін геометриялық прогрессия, q санын оның **еселігі** деп атайды.*

Мысалы, мүшелері 2-нің натурал көрсеткішті дәрежелері болатын тізбекті қарастырайық: $2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^n, \ldots$. Бұл тізбектің екінші мүшесінен бастап, әрбір мүшесі өзінің алдындағы мүшені 2-ге көбейткенде шығады: $a_{n+1}=a_n\cdot 2$. Бұл тізбек — геометриялық прогрессия. Еселігі $q=2$. Мұндағы

$$a_1=2,\ a_2=2^2,\ \ldots,\ a_n=2^n,\ \ldots$$

геометриялық прогрессияның мүшелері деп аталады. Әрине, әрбір $\{a_n\}$ геометриялық прогрессиясының бірінші мүшесі нөлден өзгеше: $a_1 \neq 0$. Өйткені, егер $a_1=0$ болса, тізбектің барлық мүшелері нөлге айналады.

Егер $a_1=1$ және $q=0,1$ болса, $1; 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; \ldots$ тізбегі геометриялық прогрессия болады.

$a_1=-3$ және $q=3$ болса, $-3, -9, -27, -81 \ldots$ тізбегі геометриялық прогрессия болады.

$a_1=2$ және $q=-5$ болса, $2, -10, 50, -250, \ldots$ тізбегі геометриялық прогрессия болады.

$a_1=4$ және $q=1$ болса, $4, 4, 4, 4, \ldots$ тізбегі геометриялық прогрессия болмайды.

3.4.2. Геометриялық прогрессияның n-мүшесінің формуласы

Енді геометриялық прогрессияның n-мүшесінің формуласын анықтайық. Анықтама бойынша

$$a_2=a_1q;$$
$$a_3=a_2q=(a_1q)q=a_1q^2;$$
$$a_4=a_3q=(a_1q^2)q=a_1q^3;$$
$$a_5=a_4q=(a_1q^3)q=a_1q^4;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

Осыдан

$$a_n=a_1\cdot q^{n-1} \qquad (2)$$

формуласы орындалады деген болжам жасаймыз.

Енді осы болжамды математикалық индукция принципін қолданып дәлелдейік.

Шынында да, $n=2$ болғанда $a_2=a_1q$ теңдігі орындалатыны анықтамадан шығады. $n=k$ жағдайында $a_k=a_1q^{k-1}$ теңдігі ақиқат болады делік. Онда $n=k+1$ үшін $a_{k+1}=a_1q^k$ теңдігі орындалатынын дәлелдеу керек. Шынында да, анықтама бойынша $a_{k+1}=a_kq=(a_1q^{k-1})q=a_1q^k$. Дәлелдеу керегі де осы.

Сонымен, геометриялық прогрессияның n-мүшесі (2) формуламен анықталады.

1-мысал. $\{a_n\}$ геометриялық прогрессиясының 8-мүшесін табу керек: $a_1=27$, $q=\dfrac{1}{3}$.

(2) формула бойынша $a_8=a_1q^7=27\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^7=\dfrac{1}{81}$.

2-мысал. 12,24,...геометриялық прогрессиясының төртінші және n-мүшесін анықтау керек.

$a_1=12$; $a_2=24$ болғандықтан, $q=\dfrac{24}{12}=2$.

$a_4=a_1q^3=12\cdot2^3=96$; $a_n=a_1\cdot q^{n-1}=12\cdot2^{n-1}=3\cdot2^{n+1}$.

Енді мына тұжырымды дәлелдейік.

Теорема. ***Оң мүшелі геометриялық прогрессияның екінші мүшесінен бастап әрбір мүшесі өзімен көршілес екі мүшенің геометриялық ортасына тең:***

$$a_n=\sqrt{a_{n-1}\cdot a_{n+1}}.$$

Шынында да, $a_n=a_{n-1}q$, $a_n=a_{n+1}\dfrac{1}{q}$. Осыдан $a_n^2=(a_{n-1}q)\cdot\left(a_{n+1}\dfrac{1}{q}\right)=a_{n-1}a_{n+1}$. Онда $a_n=\sqrt{a_{n-1}\cdot a_{n+1}}$.

Ескерту: геометриялық прогрессияның еселігі теріс сан (q<0) болған жағдайда да $a_n^2=a_{n-1}\cdot a_{n+1}$ теңдігі орындалады.

1. Қандай сан тізбегін геометриялық прогрессия деп атайды?
2. Геометриялық прогрессияның еселігі деген не?
3. Геометриялық прогрессияның n-мүшесінің формуласын жазыңдар.

Практикалық жұмыс

Үміткер фирмаға келісімшарт бойынша жұмысқа орналасады. Келісім бойынша қызметкер алғашқы кварталда (3 айда) 1 000 000 теңге көлемінде жалақы алады. Келесі кварталдарда жақсы жұмыс істеген жағдайда алдыңғы кварталдағы табысы 1,3-ке көбейтіледі. Жұмысы ойдан шықпаған жағдайда бұл табысы 0,75-ке көбейтіледі. Қызметкердің жұмысы алғашқы кварталда ойдағыдай болмағанымен, келесі кварталдарда өте жақсы жұмыс істеді. Соңғы 4-кварталда қызметкердің айлық табысы қандай болды? Бұл табыс үнемі жақсы (нашар) жұмыс істеген жағдайда қандай болар еді?

ЕСЕПТЕР

А

3.56. $\{a_n\}$ геометриялық прогрессиясының алғашқы төрт мүшесін анықтаңдар: 1) $a_1=6$, $q=2$; 2) $a_1=-16$, $q=0,5$; 3) $a_1=-24$, $q=-1,5$; 4) $a_1=0,4$, $q=\sqrt{2}$.

3.57. $\{x_n\}$ геометриялық прогрессиясы үшін 1) $x_1=16$, $q=0,5$ болса, x_7-ні; 2) $x_1=-810$, $q=\dfrac{1}{3}$ болса, x_8-ді; 3) $x_1=\sqrt{2}$, $q=-\sqrt{2}$ болса, x_{10}-ды; 4) $x_1=125$, $q=0,2$ болса, x_6-ны табыңдар.

3.58. 1) 2, –6, ...; 2) –0,125; 0,25; ...; 3) –40, –20, ...; 4) –10, 10, –10, ... геометриялық прогрессиясының жетінші және n-мүшелерін табыңдар.

2) $b_1=-0,125$; $b_2=0,25$. (1) формула бойынша

$$b_2=b_1\cdot q \Rightarrow 0,25=-0,125\cdot q \Rightarrow q=-\frac{0,25}{0,125}=-2.$$

$b_7=b_1\cdot q^6=-0,125\cdot(-2)^6=-0,125\cdot 64=-8.$

$b_n=b_1\cdot q^{n-1}=-0,125\cdot(-2)^{n-1}=-0,125\cdot(-2)^3\cdot(-2)^{n-4}=(-2)^{n-4}.$

Ж а у а б ы: $b_7=-8$; $b_n=(-2)^{n-4}$.

3.59. 1) 48, 12, ...; 2) $\frac{64}{9}, \frac{32}{3}, \ldots$; 3) $-0,001$, $-0,01$, ...; 4) -100, 10, ... геометриялық прогрессиясының алтыншы және n-мүшелерін табыңдар.

3.60. Жалпы мүшесінің формуласымен берілген геометриялық прогрессияның q еселігін, b_1, b_6, b_{n+3} мүшелерін жазыңдар:

1) $b_n=2\cdot 7^{n-1}$; 2) $b_n=\frac{3}{5^n}$;

3) $b_n=5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$; 4) $b_n=\frac{(-1)^{n-1}}{3^n}$.

3.61. $\{b_n\}$ геометриялық прогрессиясының еселігін табыңдар: 1) $b_1=1$; $b_4=64$; 2) $b_6=25$; $b_8=9$; 3) $b_2=25$; $b_4=1$.

B

3.62. $\{b_n\}$ — геометриялық прогрессия. 1) $b_6=3$, $q=3$ болса, b_1-ді; 2) $b_5=17,5$, $q=-2,5$ болса, b_1-ді; 3) $b_5=-6$, $b_7=-54$ болса, q-ді; 4) $b_6=25$, $b_8=9$ болса, q-ді; 5) $b_1=125$, $b_3=5$ болса, b_6-ны; 6) $b_4=-1$, $b_6=-100$ болса, b_1-ді табыңдар.

3.63. Егер 2, c_2, c_3, $0,25c_2$ геометриялық прогрессияның алғашқы төрт мүшесі болса, c_2, c_3-ті табыңдар.

3.64. $\{b_n\}$ геометриялық прогрессиясы үшін 1) $q=3$, $b_1=2$, $b_n=162$; 2) $q=\frac{1}{2}$, $b_1=128$, $b_n=1$; 3) $q=-\frac{2}{3}$, $b_1=\frac{81}{4}$, $b_n=4$; 4) $q=0,1$, $b_1=2$, $b_n=0,002$ болса, n-ді анықтаңдар.

3.65. 10, 13, 14 сандары (көршілес болуы міндетті емес) бір геометриялық прогрессияның мүшелері болуы мүмкін бе?

3.66. Бесеуі де геометриялық прогрессияның тізбектес мүшелері болатындай етіп, 1 және 256 сандарының арасына үш сан орналастырыңдар.

3.67. Бірінші және үшінші мүшелерінің қосындысы 52-ге, екінші мүшесінің квадраты 100-ге тең болатын геометриялық прогрессияның алғашқы мүшелері болатын үш санды табыңдар.

3.68. Үшінші және бірінші мүшелерінің айырымы 9-ға, бесінші және үшінші мүшелерінің айырымы 36-ға тең болатын геометриялық прогрессияның алғашқы бірнеше мүшесін жазыңдар.

$b_3=b_1\cdot q^2,\ b_5=b_1\cdot q^4 \Rightarrow \begin{cases} b_3-b_1=9, \\ b_5-b_3=36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1(q^2-1)=9, \\ b_1(q^4-q^2)=36 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} b_1(q^2-1)=9, \\ q^2=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1=3, \\ q=\pm 2. \end{cases}$

Ж а у а б ы: $q=2$ болса, $b_1=3$, $b_2=6$, $b_3=12, \ldots$;
$q=-2$ болса, $b_1=3$, $b_2=-6$, $b_3=12, \ldots$

3.69. $a_1+a_4=27$ және $a_2a_3=72$ болса, $\{a_n\}$ геометриялық прогрессиясының еселігін табыңдар.

3.70. $a_1+a_4=35$ және $a_2+a_3=30$ болса, $\{a_n\}$ геометриялық прогрессиясының алғашқы бірнеше мүшесін жазыңдар.

C

3.71. 195 санын геометриялық прогрессия құрайтындай етіп, үш бүтін қосылғышқа жіктеңдер. Сонда бірінші қосылғыш үшіншісінен 120-ға кем болсын.

3.72. $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}, \dfrac{1}{2-\sqrt{2}}, \dfrac{1}{2}, \ldots$ тізбегі геометриялық прогрессия құрайтынын дәлелдеңдер.

3.73. Үш сан геометриялық прогрессия құрайды. Егер үшінші санды 4-ке азайтса, онда бұл үшеуінен арифметикалық прогрессия алынады. Арифметикалық прогрессияның 2-және 3-мүшелерін сәйкесінше 1-ге және 5-ке азайтса, онда қайтадан геометриялық прогрессия алынады. Берілген сандарды табыңдар.

3.74. x, y, z геометриялық прогрессияның тізбектес мүшелері болса, $\dfrac{x^2+y^2}{x}=\dfrac{y^2+z^2}{z}$ теңдігі орындала ма?

Қайталауға арналған жаттығулар

3.75. Бөлшекті қысқартыңдар:

1) $\dfrac{7^n-3\cdot 7^{n-1}}{4}$; 2) $\dfrac{5^{2n+1}-5^{2n-1}}{12\cdot 5^{n-1}}$.

3.76. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\dfrac{a^2+3a+2}{a^2+6a+5}$; 2) $\dfrac{b^2+2b+1}{b^2+8b+7}$.

3.5. Арифметикалық және геометриялық прогрессиялардың алғашқы n мүшесінің қосындысының формулалары

Тақырыпты оқып-үйрену барысында сендер:

- арифметикалық прогрессияның алғашқы n мүшесінің қосындысы формуласының сипаттамалық қасиеттерін біліп оны қолдануды үйренесіңдер;
- геометриялық прогрессияның алғашқы n мүшесінің қосындысы формуласының сипаттамалық қасиеттерін біліп, оны қолданасыңдар;
- прогрессияларға байланысты мәтінді есептерді шешуді үйренесіңдер.

3.5.1. Арифметикалық прогрессияның алғашқы n мүшесінің қосындысы

Арифметикалық прогрессияның тағы бір қасиетін қарастырайық. *Егер* $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$ *сандары арифметикалық прогрессияның алғашқы* n *мүшесі болса, бұл тізбек-*

тің ұштарынан бірдей «қашықтықтарда» орналасқан мүшелерінің қосындысы оның шеткі мүшелерінің қосындысына тең болады. $1 \leqslant k \leqslant n$ саны үшін

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n \qquad (1)$$

теңдігі орындалады.

Шынында да, $a_k + a_{n-k+1} = a_1 + (k-1)d + a_1 + (n-k)d = 2a_1 + (n-1)d = a_1 + (a_1 + (n-1)d) = a_1 + a_n$. Дәлелдеу керегі де осы.

Енді арифметикалық прогрессияның алғашқы n мүшесінің қосындысын анықтайық. Оны S_n арқылы белгілейік.

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

немесе

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1.$$

Осы екі теңдікті мүшелеп қосайық:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

(1) формуланы қолдансақ,

$$2 \cdot S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n)}_{n} = n \cdot (a_1 + a_n).$$

Осыдан

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}. \qquad (2)$$

Немесе $a_n = a_1 + (n-1)d$ теңдігін ескерсек,

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n. \qquad (3)$$

1-мысал. 3-ке еселік барлық екі таңбалы сандардың қосындысын табу керек.

$a_1 = 12$ және $a_n = 99$ болатыны белгілі. n-ді анықтау керек. $a_n = a_1 + (n-1)d$ формуласы бойынша

$99 = 12 + (n-1)3 \Rightarrow n = 30$. Осыдан $S_{30} = \frac{1}{2}(12+99) \cdot 30 = 1665$.

3.5.2. Геометриялық прогрессияның алғашқы n мүшесінің қосындысы

Енді геометриялық прогрессияның алғашқы n мүшесінің қосындысының формуласын қорытып шығарамыз. Айталық, a_1, a_2, …, a_{n-1}, a_n геометриялық прогрессиясының алғашқы n мүшесі, q оның еселігі болсын. Геометриялық прогрессияның алғашқы n мүшесінің қосындысын S_n арқылы белгілесек,

$$S_n=a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+a_n$$

теңдігінен $a_k=a_1q^{k-1}$ формуласын ескеріп,

$$S_n=a_1+a_1q+\ldots+a_1q^{n-2}+a_1q^{n-1} \qquad (4)$$

теңдігін аламыз. Бұл теңдікті q-ге көбейтсек,

$$qS_n=a_1q+a_1q^2+\ldots+a_1q^{n-1}+a_1q^n. \qquad (5)$$

(4) теңдіктен (5) теңдікті азайтып,

$$S_n-qS_n=a_1-a_1q^n \text{ немесе } S_n=\frac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q} \qquad (6)$$

формуласын аламыз. Мұнда $q\neq1$.

2-мысал. Геометриялық прогрессия үшін $S_3=9$, $S_6=-63$ болса, S_{10}-ды табу керек.

(6) формула бойынша

$$\left.\begin{aligned} S_3 &= a_1\frac{1-q^3}{1-q}=9,\\ S_6 &= a_1\frac{1-q^6}{1-q}=-63 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{1-q^6}{1-q^3}=-7 \Rightarrow 1+q^3=-7 \Rightarrow q^3=-8 \Rightarrow$$

$$q=-2;\ a_1=3.$$

Енді (6) формуланы қолдансақ,

$$S_{10}=\frac{3\left(1-(-2)^{10}\right)}{1-(-2)}=\frac{3\left(1-2^{10}\right)}{3}=-1023.$$

Ж а у а б ы: -1023.

1. Арифметикалық прогрессияның алғашқы n мүшесінің қосындысының формуласын жазып, дәлелдеңдер.
2. Геометриялық прогрессияның алғашқы n мүшесінің қосындысының формуласын жазып, дәлелдеңдер.

Практикалық жұмыс

Алдыңғы тақырыптағы практикалық тапсырманың әр жағдайында (баспалдақтың биіктігі 56 см және баспалдақ табанында II текше орналасқан жағдайда) барлығы неше текше пайдаланылғанын анықтаңдар.

ЕСЕПТЕР

А

3.77. Арифметикалық прогрессияның алғашқы 10 мүшесінің қосындысын табыңдар:
1) $-23, -20; \ldots;$ 2) $14{,}2; 9{,}6; \ldots;$ 3) $b_1=-17$, $d=6$;
4) $b_1=6{,}4$; $d=0{,}8$; 5) $a_1=3$, $a_{10}=17$; 6) $a_1=-10{,}5$; $a_{10}=12$.

3.78. Геометриялық прогрессияның алғашқы 5 мүшесінің қосындысын табыңдар:
1) $b_1=8$, $q=\frac{1}{2}$; 2) $b_1=500$, $q=\frac{1}{5}$; 3) $3, -6, \ldots;$
4) $54, 36, \ldots;$ 5) $-32, 16, \ldots;$ 6) $1, -\frac{1}{2}, \ldots;$
7) $c_1=-4$, $q=3$; 8) $c_1=1$, $q=-2$; 9) $u_1=3$, $q=2$.

3.79. $\{a_n\}$ арифметикалық прогрессиясының алғашқы 15 мүшесінің қосындысын табыңдар:
1) $a_5=27$, $a_{27}=60$; 2) $a_{20}=0$, $a_{66}=-92$;
3) $a_1=-3$, $a_{61}=57$; 4) $a_1=-10{,}5$, $a_{63}=51{,}5$.

3.80. $\{b_n\}$ геометриялық прогрессиясының алғашқы 6 мүшесінің қосындысын табыңдар:
1) $b_5=-6$, $b_7=-54$; 2) $b_6=25$, $b_8=9$;
3) $b_1=125$, $b_3=5$; 4) $b_4=-1$, $b_6=-100$.

3.81. Жалпы мүшесінің формуласымен берілген тізбектің арифметикалық прогрессия болатынын көрсетіп, S_{10}-ды табыңдар:
1) $a_n=5n+3$; 2) $a_n = 5-\frac{n}{2}$.

3.82. Жалпы мүшесінің формуласымен берілген тізбектің геометриялық прогрессия болатынын көрсетіп, S_{10}-ды табыңдар:
1) $b_n=2\cdot3^{n+1}$; 2) $b_n = -\frac{3}{2^n}$.

1) $b_n=2\cdot3^{n+1} \Rightarrow b_{n+1}=2\cdot3^{n+2} \Rightarrow b_{n+1} : b_n=2\cdot3^{n+2}: 2\cdot3^{n+1}=3$. Тізбектің әр мүшесінің алдыңғы мүшесіне қатынасы тұрақты сан 3-ке тең. Олай болса, $\{b_n\}$ еселігі $q=3$-ке тең геометриялық прогрессия болады. $b_1=18$ және (6) формула бойынша $S_{10} = \frac{18(1-3^{10})}{1-3} = 9(3^{10}-1) = 9(531441-1) = 4\ 782\ 960$.

Жауабы: 4 782 960.

3.83. 1) 100-ге дейінгі барлық натурал сандардың; 2) 16-дан 160-қа дейінгі барлық натурал сандардың қосындысын табыңдар.

B

3.84. 1) $2+4+6+...+2n$; 2) $1+3+5+...+(2n-1)$ қосындысын табыңдар.

3.85. Егер $a_1=2$, $d=2$ болса, онда $\{a_n\}$ арифметикалық прогрессиясының 20-мүшесінен бастап 25-мүшесіне дейінгі мүшелерінің қосындысын табыңдар.

3.86. 1) 200-ден аспайтын, 3-ке еселік натурал сандардың; 2) 250-ден аспайтын, 9-ға еселік натурал сандардың қосындысын табыңдар.

1) 3-ке еселік натурал сандар тізбегінің жалпы мүшесі $a_n=3n$ түрінде жазылады және $a_n=3n<200$ болуы қажет $\Rightarrow$ $n<\frac{200}{3}=66\frac{2}{3}$. Сонда $n=66$. Осы $\{3n\}$ арифметикалық прогрессиясының айырымы $d=3$. Сондықтан $3+6+9+...+198=$

$$=\frac{2\cdot 3+(66-1)\cdot 3}{2}\cdot 66=(6+195)\cdot 33=6633.$$

Ж а у а б ы: 6633.

3.87. Геометриялық прогрессияның алғашқы 8 мүшесінің қосындысы $\frac{85}{64}$-ке, еселігі $q=-\frac{1}{2}$-ге тең. Оның бірінші мүшесін табыңдар.

3.88. Егер геометриялық прогрессия үшін $S_2=4$ және $S_3=13$ болса, S_5-ті табыңдар.

3.89. Егер арифметикалық прогрессия үшін $S_4=-28$, $S_6=58$ болса, S_{16}-ны табыңдар.

3.90. Егер арифметикалық прогрессия үшін $a_6+a_9+a_{12}+a_{15}=20$ теңдігі орындалса, S_{20}-ны табыңдар.

3.91. 1) $1, 3, 3^2, ...$; 2) $2, 2^2, 2^3, ...$; 3) $1, -x, x^2, ...; x\neq\pm 1$; 4) $1, x^2, x^4, ...; x\neq\pm 1$; 5) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ...$; 6) $1, -x^3, x^6, ...; x\neq -1$

геометриялық прогрессияларының n мүшесінің қосындысын табыңдар.

3.92. 1) $a_n=3n+1$; 2) $a_n=n+4$; 3) $a_n=-0,5n+1$; 4) $b_n=0,2\cdot5^n$; 5) $b_n=3\cdot2^{n-1}$; 6) $b_n=3^{1+n}$ формулаларымен берілген тізбектің бес мүшесінің қосындысын анықтаңдар.

C

3.93. Арифметикалық прогрессия құрайтын үш санның қосындысы 15-ке тең. Егер осы сандарға сәйкесінше 1; 4 және 19 сандарын қоссақ, геометриялық прогрессияның алғашқы үш мүшесі шығады. Осы үш санды табыңдар.

3.94. Айырымы нөлден өзгеше арифметикалық прогрессияның екінші, бірінші және үшінші мүшелері осы тәртіппен алғанда геометриялық прогрессияның алғашқы үш мүшесін береді. Геометриялық прогрессияның еселігін табыңдар.

3.95. x, y, z сандары геометриялық прогрессия, x, $2y$, $3z$ сандары арифметикалық прогрессия құрайды. Геометриялық прогрессияның 1-ден өзгеше еселігін табыңдар.

3.96. Бірінші мүшесі a-ға, еселігі q-ге тең геометриялық прогрессияның n мүшесінің квадраттарының қосындысын анықтаңдар.

3.97. Геометриялық прогрессияның алғашқы n мүшесінің көбейтіндісін a_1 және a_n- мүшелері арқылы өрнектеңдер.

3.98. $\{u_n\}$ геометриялық прогрессиясы үшін $u_1+u_5=51$ және $u_2+u_6=102$ теңдіктері орындалады. n-нің қандай мәнінде $S_n=3069$ болады?

3.99. 1; 11; 111; 1111; ... тізбегінің n мүшесінің қосындысын анықтаңдар.

3.100. $\{a_n\}$ арифметикалық прогрессиясы үшін $d = 2a_1$ болса, $\dfrac{S_n - S_k}{S_{n+k}} = \dfrac{n-k}{n+k}$ теңдігінің орындалатынын дәлелдеңдер.

3.101. Сүйір бұрышқа бір-бірін сырттай жанайтын бірнеше шеңбер іштей сызылған. Шеңберлердің радиустары геометриялық прогрессия құрайтынын дәлелдеңдер.

3.102. $a_n=2(n+3^{n-1})-3$ тізбегінің алғашқы n мүшесінің қосындысын табыңдар.

Қайталауға арналған жаттығулар

3.103. Тізбектің жалпы мүшесін жазыңдар:

1) 1; 4; 9; 25; 36; ...; 2) $-\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; -\frac{3}{4}; \frac{4}{5}; -\frac{5}{6}; ...$.

3.104. $\frac{9-4\sqrt{5}}{9+4\sqrt{5}}+\frac{9+4\sqrt{5}}{9-4\sqrt{5}}$ өрнегінің мәні бүтін сан болатынын көрсетіңдер.

3.105. $x^2-x-2=0$ теңдеуін графиктік тәсілмен шешіңдер.

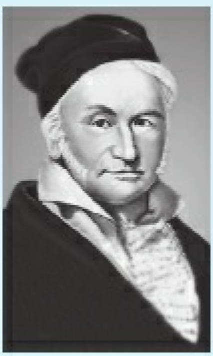
Тарихқа шолу

Ежелгі заманнан бастап адамзат арифметикалық және геометриялық прогрессиялардың заңдылықтарын қолдана білген. Мәселен, біздің заманымызға дейінгі вавилондықтардың сына жазу кестелерінде, ежелгі мысырлықтар мен гректердің папирустарында арифметикалық және геометриялық прогрессияларға көптеген мысалдар кездеседі. Ежелгі грек ғалымдары прогрессиялардың кейбір қасиеттерін және олардың қосындысын таба білген. Архимед (б.з.д. III ғ.) фигуралардың аудандары мен денелердің көлемдерін есептегенде сан тізбегінің бірнеше мүшелерінің қосындысын тапқан. Ол $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ теңдігін қорытып шығарған. Ежелгі заманнан геометриялық прогрессия мүшелерінің еселігі 1-ден үлкен болғанда ($q>1$) өте жылдам қарқынмен өсетіндігі жөнінде мынадай аңыз бар. Ежелгі үнді патшасы Шерам шахмат ойынын ойлап тапқан өнертапқышты (оның аты Сета) марапаттау мақсатында оған қалағанын алуды ұсынады. Сонда Сета шахмат тақтасындағы 64 шаршының біріншісіне 1 дән, екіншісіне 2 дән, үшіншісіне 4 дән, төртіншісіне 8 дән және т.с.с., әр шаршыға алдыңғысынан 2 есе көп дән беруді өтінеді. Патша өнертапқыштың бұл «тым болмашы» тілегіне таң қалып, келіседі. Артынша бұл тілекті орындауға өз қазынасының жетпейтініне көзі жетеді. Өнертапқыш сұраған дәндер саны $1+2+2^2+..+2^{63}$ қосындысына тең. Бұл қосынды 18 446 744 073 709 551 615 санына тең. Егер бір пұт астықта 40 000 дән бар десек, бұл тілекті орындау үшін 230 584 300 921 369 пұт астық қажет екен. Қазақстанда бір жылда жиналатын астық мөлшері орта есеппен 1 000 000 000 пұтқа тең десек, бұл тілекті орындау үшін еліміз ішпей-жемей 230 584 жыл еңбек етуі қажет.

7–4337

Жалпы арифметикалық прогрессия атауы сандардың арифметикалық ортасы $\left(a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}\right)$ ұғымынан, геометриялық прогрессия атауы кесінділердің геометриялық пропорционалдығынан $\left(\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \dfrac{b_n}{b_{n-1}}\right)$ шыққан.

Арифметикалық прогрессия мүшелері қосындысының формуласын грек оқымыстысы Диофант (ІІІ ғ.) дәлелдеген. Геометриялық прогрессия мүшелері қосындысының формуласы Евклидтің «Бастамаларында» (б.з.д. ІІІ ғ.), сондай-ақ бірқатар деректер итальян математигі Л. Фибоначчидің «Абак кітабында» (1202) кездеседі. Шексіз кемімелі геометриялық прогрессия мүшелерінің қосындысын анықтау формулалары француз математигі Никола Шюкенің «Үш бөліктен тұратын сандар туралы ғылым» (1484) атты еңбегінде берілген. Арифметикалық прогрессиялар үшін жазылған $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ формуласына байланысты



Карл Фридрих Гаусс

(1777–1855)

атақты неміс математигі Карл Фридрих Гаусстың өмірінен қызықты эпизод аңызға айналған. Мұғалім өзге сынып оқушыларының жұмыстарын тексеру мақсатында алдындағы оқушыларына 1-ден 40-қа дейінгі сандардың қосындысын табуды тапсырады. Бұл есепті 9 жасар Гаусс бір минутта шығарып, жауабын айтқан. Оның есепті шығару тәсілі мынадай еді:

$$\begin{array}{r} 1,\ \ 2,\ \ 3,\ \ldots,20 \\ +\quad 40,\ 39,\ 38,\ldots,21 \\ \hline 41,\ 41,\ 41,\ldots,41 \end{array}$$

Мұндай сандар жұбы 20 болғандықтан, берілген қосынды 41·20=820-ға тең. Гаусс арифметикалық прогрессия заңдылықтарын қолданған.

Практикалық жұмыс

5 түйір дәннің салмағы 1 грамм деп алып, Сета сұраған бидай салмағын анықтаңдар. Жауабын тонна арқылы санның стандарт түрінде жазыңдар. Бір вагонға шамамен 50 т бидай тиеуге болады десек, Сетаның сұраған бидайын тиеу үшін неше вагон қажет? Егер бір вагонның ұзындығы 12 м деп алсақ, осынша бидай тиелген вагондар тізбегі қандай қашықтыққа созылар еді?

3.6. Шексіз кемімелі геометриялық прогрессия

Тақырыпты оқып-үйрену барысында сендер:

- шексіз кемімелі геометриялық прогрессия ұғымын білесіңдер;
- кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысы формуласын қолдануды үйренесіңдер;
- шексіз кемімелі геометриялық прогрессия қосындысы формуласын периодты ондық бөлшекті жай бөлшекке айналдыру үшін қолданасыңдар;
- арифметикалық және геометриялық прогрессияларға байланысты мәтінді есептер шығарасыңдар.

3.6.1. Шексіз кемімелі геометриялық прогрессия ұғымы

Кестемен жұмыс

Геометриялық прогрессияның бірінші мүшесі b_1-ге тең, еселігі q болсын. Жұптасып немесе топпен бірге калькулятор көмегімен берілген кестені толтырыңдар. Қорытынды жасап, оны сыныппен бірге талқылаңдар.

q	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	...	b_{10}	...	b_{15}	...	b_{20}	...	b_n
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	...	$\frac{1}{512}$	...	$\frac{1}{32768}$	...	$\frac{1}{1048576}$	...	$\frac{1}{2^{n-1}}$
$-\frac{1}{3}$	3					...		...		...		...	
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$					...		...		...		...	
$-\frac{3}{5}$	2					...		...		...		...	

Жалғасы

Тапсырма

- Келтірілген геометриялық прогрессиялардың қандай ортақ қасиеттері бар? Модулі бойынша еселіктері қандай сан?
- Тізбек мүшелерінің модульдерін салыстырыңдар.
- n нөмірі өскен сайын $|b_n|$ санының мәні қандай санға "шексіз жақындайтынын" бағалаңдар.

Анықтама. $|q|<1$ *болғанда*

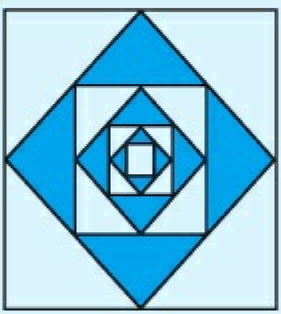
$$b,\ b_q,\ b \cdot q^2,\ b \cdot q^3,\ \dots\ bq^{n-1},\ \dots \qquad (1)$$

сан тізбегін ***шексіз кемімелі геометриялық прогрессия*** *деп атайды.*

Сонымен, егер $|q|<1$ болса, онда q^n санының шексіз нөлге жақындайтынын көрдік. Оны былай жазады: $n \to \infty$ болғанда $q^n \to 0$.

Сондықтан шексіз кемімелі геометриялық прогрессиялардың жалпы мүшесі $n \to \infty$ ұмтылғанда $b_n = b \cdot q^{n-1} \to 0$ нөлге ұмтылады.

3.6.2. Шексіз кемімелі геометриялық прогрессия мүшелерінің қосындысы



3.2-сурет

Топтық жұмыс

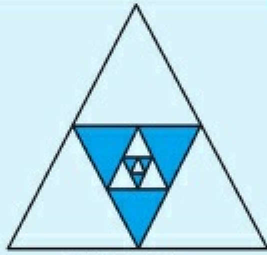
Екі топқа бөлініп тапсырманы орындаңдар.

1-топ есебі: 3.2-суретте көрсетілгендей бір-біріне іштей сызылған шексіз көп шаршылардың аудандарының қосындысын табыңдар. Мұнда үлкен квадраттың қабырғасы 1-ге тең.

2-топ есебі: 3.3-суретте көрсетілгендей бірінің қабырғасы екіншісінің

Жалғасы

орта сызығы болатындай етіп бір-біріне іштей сызылған шексіз көп теңқабырғалы үшбұрыштар аудандарының қосындысын табыңдар. Мұнда үлкен үшбұрыштың қабырғасы 1-ге тең.



3.3-сурет

$|q|<1$ болғанда әрбір шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның жалпы түрі (1) түрінде жазылады. Енді осы прогрессияның барлық мүшелерінің қосындысын анықтайық:

$$S=b+bq+bq^2+\ldots+bq^{n-1}+\ldots=b(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}+\ldots).$$

Ол үшін прогрессияның алғашқы n мүшесінің қосындысын табамыз:

$$S_n=\frac{b\left(1-q^n\right)}{1-q}=\frac{b}{1-q}\left(1-q^n\right).$$

$|q|<1$ болғандықтан, жоғарыда айтқанымыздай, $n\to\infty$ болғанда $q^n\to 0$.

Сондықтан $S_n=\dfrac{b}{1-q}(1-0)=\dfrac{b}{1-q}$ және $S_n\to S$.

Олай болса, $S=\dfrac{b}{1-q}$. (2)

Сонымен, біз мына теореманың орындалатынын көрдік.

Теорема. ***Шексіз кемімелі геометриялық прогрессия мүшелерінің қосындысы оның бірінші мүшесін 1 саны мен еселіктің айырымына бөлгенге тең.***

Енді (2) формуланың көмегімен жоғарыда келтірілген шаршылар мен үшбұрыштар тізбегі аудандары қосындысын табайық.

1) Шаршы аудандары тізбегі $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$ түрінде жазылады.

Сонда $b=1$, $q=\dfrac{1}{2}$ болғандықтан, (2) формула бойынша

$$S=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2.$$

Барлық шаршылар аудандарының қосындысы 2-ге тең.

2) Осы сияқты үшбұрыштар аудандарының тізбегі $\frac{\sqrt{3}}{4}$; $\frac{\sqrt{3}}{8}$, $\frac{\sqrt{3}}{16}$, ... түрінде жазылады. Сонда $S = \frac{\sqrt{3}}{4} : \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Барлық үшбұрыштар аудандарының қосындысы $\frac{\sqrt{3}}{2}$-ге тең.

3-мысал.

1) $$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = ... + \frac{1}{2^n} + ... = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1;$$

2) $$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - ... + \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} + ... = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{3};$$

3) $$\frac{4}{5} + \frac{8}{15} + \frac{16}{45} + ... + \frac{4}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + ... = \frac{\frac{4}{5}}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{12}{5}.$$

Периодты ондық бөлшектерді жай бөлшекке айналдыру. Мұнда шексіз кемімелі геометриялық прогрессия мүшелерінің қосындысының формуласын пайдаланып, периодты ондық бөлшектерді жай бөлшектерге айналдыруды мысалдар арқылы қарастырамыз.

4-мысал. 2,7(31) санын жай бөлшек түрінде жазу керек.

$$2{,}7(31) = 2 + \frac{7}{10} + \left(\frac{3}{10^2} + \frac{1}{10^3}\right) + \left(\frac{3}{10^4} + \frac{1}{10^5}\right) + ... =$$

$$= 2 + \frac{7}{10} + \frac{31}{10^3} + \frac{31}{10^5} ... = \frac{27}{10} + \frac{31}{10^3}\left(1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + ...\right).$$

$1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + ...$ қатары — еселігі $\frac{1}{10^2}$ болатын шексіз кемімелі геометриялық прогрессия мүшелерінің қосындысы.

(2) формула бойынша $1+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^4}+...=\frac{1}{1-0,01}=\frac{100}{99}$.

Сондықтан $2,7(31)=\frac{27}{10}+\frac{31}{10^3}\cdot\frac{100}{99}=\frac{27}{10}+\frac{31}{990}=\frac{2704}{990}=\frac{1352}{495}$.

5-мысал. 0,2(3) санын жай бөлшек түрінде жазайық.

$$0,2(3)=\frac{2}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+...=\frac{2}{10}+\frac{3}{10^2}\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+...\right)=$$

$$=\frac{2}{10}+\frac{3}{10^2}\cdot\frac{1}{1-0,1}=\frac{2}{10}+\frac{3}{90}=\frac{18+3}{90}=\frac{7}{30}.$$

1. Мына тұжырымдар дұрыс па: а) бірсарынды тізбектердің әрқайсысының шегі бар; ә) шенелген тізбектердің әрқайсысының шегі бар? Мысал келтіріңдер.
2. Сандық қатар, шексіз кемімелі геометриялық прогрессия деген не?
3. Сандық қатардың қосындысын қалай түсінесіңдер?
4. Шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысының формуласын жазып, оны дәлелдеңдер.

ЕСЕПТЕР

А

3.106. Төмендегі тізбектердің қайсысы шексіз кемімелі геометриялық прогрессия болады:

1) $x_n=\frac{1}{3^n}$; 2) $y_n=\frac{3^n-2}{3^n}$; 3) $z_n=\frac{64}{2^n}$?

3.107. 1) 1,21(32); 2) 0,27(345); 3) −2,3(9); 4) 0,(1); 5) 0,(6); 6) 0,(36) сандарын жай бөлшекке айналдырыңдар.

3.108. 1) 0,2(3); 2) 1,(81); 3) 0,32(45); 4) 1,6(3201) сандарын жай бөлшекке айналдырыңдар.

3.109. 1) 0,9(285714); 2) 0,(04109589) сандарын жай бөлшекке айналдырыңдар.

B

3.110. Егер $\{a_n\}$ геометриялық прогрессия және

1) $a_1=1;\ a_2=\dfrac{1}{2};$ 2) $a_1=3;\ a_2=-1;$

3) $a_2=1;\ a_3=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1};$ 4) $a_1=\sqrt{2};\ a_2-a_1=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2};$

5) $a_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}};\ a_3=\dfrac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}};\ a_2>0;$ 6) $\begin{cases} a_1+a_4=\dfrac{7}{16}, \\ a_1-a_2+a_3=\dfrac{7}{8} \end{cases}$

болса, оның еселігі қандай? Ол шексіз кемімелі прогрессия бола ма?

3.111. Берілген қатардың қосындысын табыңдар:

1) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\ldots+\dfrac{1}{3^n}+\ldots;$ 2) $\dfrac{4}{25}-\dfrac{8}{125}+\ldots+\left(-\dfrac{2}{5}\right)^n+\ldots;$

3) $\sqrt{3}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\ldots\dfrac{\sqrt{3}}{3^{n-1}}+\ldots;$ 4) $\dfrac{5}{7}-\dfrac{25}{49}+\ldots+(-1)^{n-1}\left(\dfrac{5}{7}\right)^n+\ldots$.

3.112. x-тің қандай мәндерінде берілген қатарлардың шектеулі қосындысы болады:

1) $1+x^4+x^8+\ldots+x^{4(n-1)}+\ldots;$

2) $1-x^3+x^6-\ldots+(-1)^{(n-1)}x^{3(n-1)}+\ldots;$

3) $\dfrac{1-x}{x}+\dfrac{(1-x)^2}{x^2}+\ldots+\left(\dfrac{1-x}{x}\right)^n+\ldots?$

3) Қосылғыштар тізбегінің жалпы мүшесі $b_n=\left(\dfrac{1-x}{x}\right)^n$ және ол геометриялық прогрессия болады. Оның қосындысы бар болуы үшін берілген қатар шексіз кемімелі прогрессия болуы қажет: $|q|=\left|\dfrac{1-x}{x}\right|<1$. Енді осы теңсіздіктің шешімдерін анықтайық:

$\frac{|x-1|}{|x|}<1$ және $x \neq 0 \Rightarrow |x-1|<|x|$.

Егер $x<0 \Rightarrow -(x-1)<-x \Rightarrow +1<0$. Бұл мүмкін емес, $x \in \varnothing$;

Егер $0<x<1 \Rightarrow -(x-1)<x \Rightarrow x>\frac{1}{2} \Rightarrow x \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

Егер $x>1 \Rightarrow x-1<x \Rightarrow -1<0$ — ақиқат теңсіздік, $x \in (1; +\infty)$.
Егер $x=1 \Rightarrow b_n=0$ болса, $\{b_n\}$ прогрессия болмайды.

Ж а у а б ы: $x \in \left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup (1; +\infty)$.

C

3.113. 1) Шегі иррационал сан болатын рационал сандар тізбегіне мысалдар келтіріңдер. 2) Барлық мүшелері иррационал сан, шегі рационал сан болатын тізбекке мысалдар келтіріңдер.

2) $C_n = \frac{2 \cdot \pi^n + 7}{\pi^n} \Rightarrow C_n = 2 + \frac{7}{\pi^n}$ — бұл тізбектің барлық мүшелері иррационал сан. n саны өскен сайын $\frac{7}{\pi^n}$ саны шексіз кеміп, шегі 0-ге тең болады. Демек, $C_n \to 2$.

3.114. $x_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ түбір}}$ тізбегінің шегі бар болатынын дәлелдеп, оның шегін табыңдар.

3.115. Теңдеуді шешіңдер:

1) $x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots=\frac{3}{7}$;

2) $x-x^2+x^3-\ldots+(-1)^{n-1}+x^n+\ldots=-4$.

3.116. 1) $a-a^2+a^3-a^4+\ldots+(-1)^{n-1}a^n+\ldots$ қатарының қосындысы a-ның қандай да мәндерінде 1) 0,25-ке; 2) −0,6-ға; 3) 0,5-ке тең болуы мүмкін?

3.117. $\left(4\sqrt{3}+8\right)\left(\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-2\right)+\frac{3-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}}+\ldots\right)$

қосындысын табыңдар.

3.118. Оң мүшелі шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның бірінші мүшесі 4-ке, үшінші және бесінші мүшелерінің айырымы $\frac{32}{81}$-ге тең. Осы прогрессияның қосындысын анықтаңдар.

3.119. $\{a_n\}$ шексіз кемімелі геометриялық прогрессиясы үшін $a_1+a_4=54$, $a_2+a_3=36$ болса, осы прогрессияның қосындысын табыңдар.

3.120. Шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның тақ орындардағы мүшелерінің қосындысы 36-ға, жұп орындардағы мүшелерінің қосындысы 12-ге тең. Осы прогрессияның жалпы мүшесін анықтаңдар.

3.121. Шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысы 56-ға, оның мүшелерінің квадраттарының қосындысы 448-ге тең. Прогрессияның бірінші мүшесі мен еселігін табыңдар.

3.122. Бірінші мүшесі 3-ке, қосындысы $\frac{7}{2}$-ге тең шексіз кемімелі геометриялық прогрессияны жазыңдар.

3.123. Әрбір мүшесі өзінен кейінгі мүшелерінің қосындысынан 10 есе үлкен болатын шексіз кемімелі геометриялық прогрессияны жазыңдар.

3.124. Еселігі 0,5-ке тең әрбір шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысы оның 4 еселенген екінші мүшесіне тең болатынын дәлелдеңдер.

3.125. Шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысы 3-ке, оның мүшелерінің кубтарының қосындысы $\frac{108}{13}$-ге тең. Осы прогрессияны жазыңдар.

3-БӨЛІМГЕ ҚОСЫМША ЕСЕПТЕР

3.126. $\{a_n\}$ тізбегінің алғашқы 5 мүшесін жазыңдар:

1) $a_n = \dfrac{n-1}{3n+2}$; 2) $a_n = (-1)^{n-1}$; 3) $a_n = \cos\dfrac{\pi n}{4}$.

3.127. Тізбектің жалпы мүшесінің формуласын жазыңдар:

1) 1, 4, 7, 10, ...; 2) 4, 16, 36, 64, ...; 3) $1, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{8}, \dots$.

3.128. Берілген тізбектердің өспелі (кемімелі) болатынын, төменнен (жоғарыдан) шенелгендігін не шенелмегендігін анықтаңдар:

1) 2, 4, 6, 8, ...; 2) $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dots$;

3) 1; –0,5; 0,05; –0,005; .... .

3.129. $a_n = \left(\dfrac{a^2+1}{2a}\right)^n$, $a > 0$ тізбегінің бірсарынды өспелі болатынын дәлелдеңдер.

3.130. $b_n = \dfrac{2n+3}{6n-5}$ тізбегінің бірсарынды кемімелі болатынын дәлелдеңдер.

3.131. 1) Жоғарыдан шенелген, бірақ төменнен шенелмеген; 2) төменнен шенелген, бірақ жоғарыдан шенелмеген; 3) жоғарыдан да, төменнен де шенелмеген сан тізбектеріне мысал келтіріңдер.

3.132. Арифметикалық прогрессияның жалпы мүшесінің формуласын жазыңдар:

1) $a_1=6$; $a_4=0$; 2) $a_1=5$; $a_2=-5$;

3) $a_4=-4$; $a_{17}=-17$; 4) $a_{10}=0$; $a_{40}=-30$.

3.133. Геометриялық прогрессияның жалпы мүшесінің формуласын жазыңдар:

1) $a_1=7$; $a_2=8$; 2) $a_1=3$; $a_3=\dfrac{1}{3}$; 3) $a_4=a_6=-1$;

3.134. Берілген мәліметтер бойынша арифметикалық прогрессия құрастырыңдар:

1) $\begin{cases} a_2 + a_4 = 16, \\ a_1 \cdot a_5 = 28; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} a_2 + a_{10} = 24, \\ a_1 \cdot a_{11} = 44. \end{cases}$

3.135. Берілген мәліметтер бойынша геометриялық прогрессия құрыңдар:

1) $\begin{cases} a_2 - a_1 = -4, \\ a_3 - a_1 = 8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} a_1 + a_4 = 0,4375, \\ a_3 - a_2 + a_1 = 0,875. \end{cases}$

3.136. Айырымы нөлге тең емес, оң мүшелі $\{a_n\}$ арифметикалық прогрессиясы үшін $a_1a_n < a_2a_{n-1} < a_3a_{n-2} < \ldots$ теңсіздіктері орындалатынын көрсетіңдер.

3.137. $\dfrac{1}{y+z}, \dfrac{1}{z+x}, \dfrac{1}{x+y}$ сандары арифметикалық прогрессия мүшелері болуы үшін x^2, y^2, z^2 сандарының да арифметикалық прогрессия мүшелері болуы қажетті және жеткілікті болатынын дәлелдеңдер.

3.138. Әрбір натурал n саны үшін $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = n$ шарты орындалатындай етіп, $\{a_n\}$ арифметикалық прогрессиясын анықтаңдар.

3.139. Мүшелерінің саны жұп болатын геометриялық прогрессияның жұп орындарындағы мүшелері қосындысының тақ орындарындағы мүшелері қосындысына қатынасы оның еселігіне тең болатынын дәлелдеңдер.

3.140. Егер x_1, x_2 сандары $x^2+ax+4=0$ теңдеуінің түбірлері, x_3, x_4 сандары $x^2+bx+16=0$ теңдеуінің түбірлері және x_1, x_3, x_2, x_4 сандары осы тәртіпте геометриялық прогрессия құраса, a мен b-ны табыңдар.

3.141. Тік бұрышты үшбұрыштың қабырғаларының ұзындығы: 1) арифметикалық прогрессия; 2) геометриялық прогрессия құруы мүмкін бе?

3.142. $\dfrac{0,1(2)+0,3(4)}{0,4(5)-0,2(3)}$ өрнегінің мәнін есептеп табыңдар.

3.143. Егер $\{a_n\}$ шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның бірінші мүшесі a, еселігі q болса, төмендегі қатардың қосындысын табыңдар:

1) $a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots$; 2) $a_1^3+a_2^3+a_3^3+\ldots$;

3) $(a_1+a_2)^2+(a_3+a_4)^2+(a_5+a_6)^2+\ldots$;

4) $(a_1-a_2)^2+(a_3-a_4)^2+(a_5-a_6)^2+\ldots$;

5) $a_1+\dfrac{1}{2}a_2+\dfrac{1}{4}a_3+\ldots$; 6) $\left(a_1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(a_2-\dfrac{1}{4}\right)+\ldots$;

7) $\dfrac{a_2}{a_1}+\dfrac{a_4}{a_2}+\dfrac{a_6}{a_3}+\ldots$; 8) $(a_1+a_2+a_3)^2+(a_4+a_5+a_6)^2+\ldots$.

3.144. Теңдеуді шешіңдер:

1) $1+x+x^2+\ldots+x^9=0$; 2) $1+x+x^2+\ldots+x^{10}=0$.

3.145. Қосындыны табыңдар:

1) $\left(c+\dfrac{1}{c}\right)^2+\left(c^2+\dfrac{1}{c^2}\right)^2+\ldots+\left(c^n+\dfrac{1}{c^n}\right)^2$;

2) $1\cdot1!+2\cdot2!+3\cdot3!+\ldots+n\cdot n!$;

3) $\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\dfrac{3}{4!}+\ldots+\dfrac{n}{(n+1)!}$

3.146. Егер $\{a_n\}$ оң мүшелі арифметикалық прогрессия болса, төмендегі тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $\dfrac{1}{a_1a_2}+\dfrac{1}{a_2a_3}+\ldots+\dfrac{1}{a_{n-1}a_n}=\dfrac{n-1}{a_1a_n}$;

2) $\dfrac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\dfrac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\dfrac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}$.

3.147. Қосындыны табыңдар:

1) $\dfrac{1}{4\cdot 11}+\dfrac{1}{11\cdot 18}+\ldots+\dfrac{1}{(7n-3)(7n+4)}$;

2) $\dfrac{1}{3\cdot 7}+\dfrac{1}{7\cdot 11}+\ldots+\dfrac{1}{(4n-1)(4n+3)}$.

3.148. 1) $y=x+\dfrac{x}{1+x^2}+\dfrac{x}{\left(1+x^2\right)^2}+\ldots$;

2) $y=x^2+\dfrac{x^2}{1+x^2}+\dfrac{x^2}{\left(1+x^2\right)^2}+\ldots$ функциясының графигін салыңдар.

3.149. $\{a_n\}$ арифметикалық прогрессия болса, $\{|a_n|\}$ тізбегі арифметикалық прогрессия бола ма?

3.150. $\{a_n\}$ геометриялық прогрессия болса, $\{|a_n|\}$ тізбегі геометриялық прогрессия бола ма?

3.151. Қосындыны табыңдар:

1) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{(n-1)\cdot n}+\ldots$

2) $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\dfrac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\dfrac{1}{(n-1)n(n+1)}+\ldots$

ТЕРМИНДЕР АТАУЫНЫҢ СӨЗДІГІ

Қазақ тіліндегі нұсқасы	Орыс тіліндегі нұсқасы	Ағылшын тіліндегі нұсқасы
Сан тізбегі	Числовая последовательность	Sequence of numbers
Жалпы мүшесі	Общий член	General term
Арифметикалық (геометриялық прогрессия)	Арифметическая (геометрическая) прогрессия	Arithmetig-geometrical progression
Жалпы мүшесі формуласы	Формула общего члена	Formula of common member
Арифметикалық прогрессияның айырымы	Разность арифметической прогрессии	Remainder of arithmetic progression
Геометриялық прогрессияның еселігі	Знаменатель геометрической прогреcии	Denominator of geometric progression
Арифметикалық (геометриялық) прогрессияның алғашқы n мүшелерінің қосындысы	Формула суммы первых n членов арифметической (геометрической) прогреcии	Addition of n members of arithmetic-geometrical progression
Шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысы	Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии	Addition of infinite decreasing geometrical progression

4-бөлім. ТРИГОНОМЕТРИЯ

4.1. Бұрыш пен доғаның градустың және радиандық өлшемдері

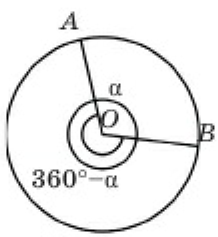
Тақырыпты оқып-үйрену барысында сендер:

- бұрыштың радиандық өлшемін меңгересіңдер;
- градусты радианға және радианды градусқа айналдыруды үйренесіңдер;
- бірлік шеңбер бойында 0; $\frac{\pi}{2}$; π; $\frac{3\pi}{2}$; 2π сандарын белгілеуді үйренесіңдер.

4.1.1. Бұрыштар мен доғалар

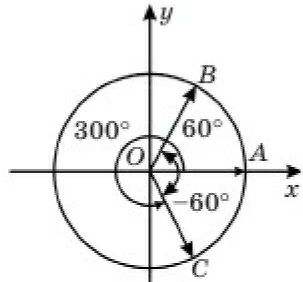
sin α, cos α, tg α және ctg α тригонометриялық функцияларымен сендер 8-сынып геометриясы курсында қысқаша таныстыңдар. Енді біз тригонометриялық функцияларды жүйелі түрде оқып-үйренеміз. Ол үшін алдымен бұрыштар ұғымымен тереңірек танысайық.

Геометрия курсында сендер, негізінен, 360°-қа дейінгі бұрыштарды, ал тригонометриялық функцияларды 180°-қа дейінгі бұрыштар үшін ғана қарастырдыңдар. Сонымен бірге 360°-тан үлкен бұрыштарды да қарастырған кездеріміз болды. Мысалы, дөңес n бұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы $(n-2)\cdot180°$ өрнегінің мәніне тең. Атап айтсақ, дөңес бесбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы $3\cdot180°=540°$ болады. Сендер градустық өлшемі 360°-тан аспайтын бұрыштардың геометриялық мағынасын жақсы білесіңдер: егер $\alpha\leqslant360°$ болса, бұл бұрыштың шамасы 4.1-суретте көрсетілгендей болады. Сондықтан, мысалы, 540°-қа тең бұрышты қалай түсінуге болады? Оның геометриялық мағынасы қандай деген заңды сұрақтар туындайды. Осы сұрақтарға жауап беру үшін



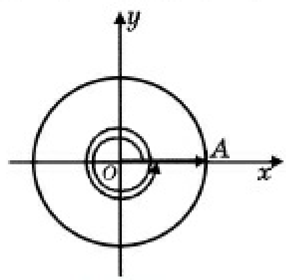
4.1-сурет

центрі координаталар бас нүктесінде және радиусы R-ге тең шеңберді қарастырайық (4.2-сурет). Координаталар бас нүктесі мен осы шеңбердің A нүктесін қосатын векторды A нүктесінің *радиус-векторы* деп атап, оны $\overrightarrow{OA}$ арқылы белгілейік. Онда кез келген бұрышты $\overrightarrow{OA}$ радиус-векторын O нүктесінен айналдырғанда шығатын фигура деп есептеуге болады.



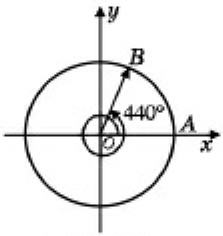
4.2-сурет

$\overrightarrow{OA}$ радиус-векторын екі бағытта айналдыруға болады: сағат тілінің қозғалысына қарама-қарсы немесе сағат тілі қозғалысымен бірдей бағытта. Сағат тіліне қарсы бағытты *оң бағыт*, сағат тілімен бірдей бағытты *теріс бағыт* деп атайды. Егер $\overrightarrow{OA}$ векторын оң бағытта айналдырсақ, онда оң мәнді бұрыштар, теріс бағытта айналдырсақ, теріс мәнді бұрыштар шығады деп айтамыз. Мысалы, 4.2-суретте $60°$ және $-60°$-қа тең бұрыштар бейнеленген. Мұнда $\angle AOB=60°$, $\angle AOC=-60°$. $\overrightarrow{OA}$ векторы мен Ox өсінің оң бағытымен жасайтын бұрышын (4.3-сурет), яғни радиус-векторын айналдырмай орнында қалдырсақ, біз $0°$-қа тең бұрыш алдық деп есептейміз. Дегенмен $\overrightarrow{OA}$ векторы өз орнына шеңберді сағат тіліне қарама-қарсы бағытта бір немесе бірнеше рет айналып барып, қайта келуі мүмкін. Мұндай жағдайларда, яғни $\overrightarrow{OA}$ радиус-векторы сағат тіліне қарсы шеңберді n рет айналып, орнына қайта келсе, онда $\overrightarrow{OA}$ радиус-векторы Ox өсінің оң бағытымен $n\cdot360°$-қа тең бұрыш жасайды деп есептейміз. Мысалы, 4.3-суретте $\overrightarrow{OA}$ векторы Ox өсімен $2\cdot360°=720°$-қа тең бұрыш жасайды. Ал $\overrightarrow{OA}$ векторы өз орнына теріс бағытта шеңберді m рет айналып қайта келсе, $\overrightarrow{OA}$ векторы Ox өсімен $-m\cdot360°$-қа тең бұрыш жасайды деп есептейміз. Осы сияқты, кез келген бұрыштың геометриялық мағынасын қарастыруға болады.

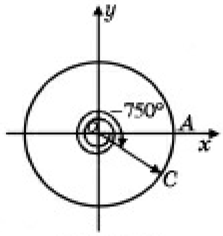


4.3-сурет

Мысалы, $440°$-қа тең бұрышты $440°=80°+360°$ түрінде жазамыз. Онда Ox өсінің оң бағытымен $80°$ бұрыш жасайтын



4.4-сурет



4.5-сурет

$\overline{OB}$ векторын өз орнына шеңберді толық бір айналып қайта оралды деп есептеу керек (сағат тіліне қарсы бағытта, 4.4-сурет). Ал $-750°=-30°-2\cdot360°$ болғандықтан, 4.5-суретте көрсетілгендей $\overline{OC}$ векторы сағат тілімен бір бағытта шеңбер бойымен толық екі рет айналып, Ox өсімен $-30°$ бұрыш жасайтындай болып орналасады.

4.1.2. Бұрыштың радиандық өлшемі

Сонымен, біз осы уақытқа дейін кез келген бұрыштың шамасын градустық өлшем бірлігімен өлшеп келдік және шамасы кез келген градусқа тең бұрышты бейнелей алатын болдық.

Енді біздер бұрыштардың тағы бір *радиан* деп аталатын өлшем бірлігін қарастырайық.

Анықтама. ***Ұзындығы радиусқа тең доғаға керілетін центрлік бұрыштың шамасын бір радиан деп атаймыз.***

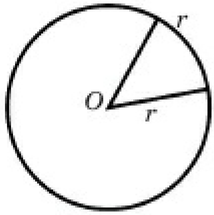
Радиан шеңбер радиусы арқылы анықталған. Бізге бұрыштың радиандық өлшемі шеңберді таңдап алуымызға тәуелсіз болатынын көрсету керек. Шынында да, радиусы r-ге тең шеңбердің ұзындығы $2\pi r$. Бұл шеңбердің ұзындығы r-ге тең доғасы осы шеңбердің $\frac{1}{2\pi}$ бөлігін құрайды. Сондықтан осы доғаға керілетін центрлік бұрыш 360°-тың $\frac{1}{2\pi}$ бөлігіне тең болуы керек:

$$\frac{1}{2\pi}\,360°\approx57°17'45'' \text{ (4.6, 4.7-суреттер).}$$

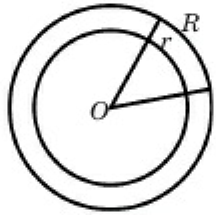
Мұндай бұрыш шеңбердің радиусына тәуелсіз.

Сонымен,

$$1 \text{ радиан} \sim \frac{1}{2\pi}360° = \frac{180°}{\pi} \approx 57°17'45''. \qquad (1)$$



4.6-сурет



4.7-сурет

Осыдан

$$1° \sim \frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180} \approx 0{,}017 \text{ радиан.} \qquad (2)$$

Әдетте $\alpha=1$ радиан, $\alpha=-0{,}5$ радиан, $\alpha=\frac{4}{3}$ радиан, т.с.с. деп жазғанның орнына $\alpha=1$; $\alpha=-0{,}5$; $\alpha=\frac{4}{3}$ деп жаза береді.

Бұрыштардың градустық өлшемдері көрсетілмесе, мұндай бұрыштарды радиандық өлшем бірліктерімен берілді деп есептеу керек. Бұрыштың градустық өлшемін радианға және керісінше, оның радиандық өлшемін градусқа айналдыру үшін (1) және (2) формулалар қолданылады.

Жалпы алғанда, бұрыштың градустық өлшемінен радиандық өлшеміне және керісінше оның радиандық өлшемінен градустық өлшеміне көшу формулаларын кесте түрінде есте сақтау жеңіл.

Бұрыштың градустық өлшемі	Көшу бағыты	Бұрыштың радиандық өлшемі
$n°$	$\rightarrow$	$\frac{n°}{360°}\cdot 2\pi = \frac{n}{180}\cdot\pi$
$\frac{\alpha}{2\pi}\cdot 360° = \frac{\alpha}{\pi}\cdot 180°$	$\leftarrow$	α радиан

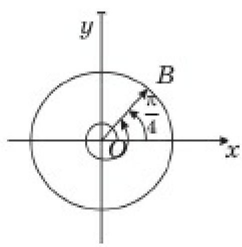
Кестемен жұмыс

Жұптасып, жоғарыдағы кесте көмегімен мына кестені толтырыңдар

Бұрыштың градустық өлшемі	$30°$		$60°$		$180°$	
Бұрыштың радиандық өлшемі	$\frac{30}{180}\cdot\pi=\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$

Жоғарыда көрсетілгендей, кез келген радиандық өлшеммен берілген бұрышты суретте бейнелеп көрсетуге болады.

4.8-суретте $\overline{OB}$ векторы $\frac{\pi}{4}$ және $\frac{\pi}{4}+2\pi$ бұрыштарын анықтағанымен, бұл бұрыштар өзара тең емес.



4.8-сурет

Ескерту. Осы тақырыпта қарастырылған шеңберді ***тригонометриялық шеңбер*** деп атайды. Бұл шеңбердің радиусы 1-ге тең деп алу келісілген.

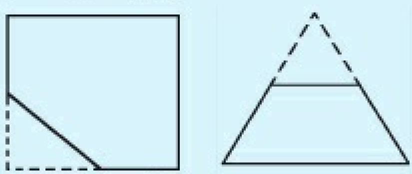
Топтық жұмыс

Жұптасып (топпен) бірлік шеңбер бойынан радиандық өлшемі $0, \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{6}; \pi; \frac{3\pi}{2}; 2\pi$ -ге сәйкес келетін доғаны шектейтін нүктелерді белгілеп көрсетіңдер.

1. Нүктенің радиус-векторы дегеніміз не?
2. Бұрыштың оң және теріс бағыттардағы өлшемдерін қалай анықтайды?
3. Қандай доғаға керілген центрлік бұрышты бір радианға тең деп алады? Бұрыштың радиандық өлшемі дегенді қалай түсінесіңдер?
4. Бұрыштың градустық өлшемінен радиандық өлшеміне және керісінше радиандық өлшемінен оның градустық өлшеміне қалай көшеді?

Практикалық жұмыс

4.9-суретте көрсетілген шаршы мен тең қабырғалы үшбұрыш төбелері ортақ қабырғаларының орталарын қосатын кесінді бойымен қиылған. Алынған бесбұрыш пен төртбұрыш бұрыштарының градустық және радиандық өлшемдерін табыңдар.



4.9-сурет

ЕСЕПТЕР

А

4.1. Тригонометриялық шеңбердің көмегімен 150°, 210°, 540°, –45°, –135°, –720°-қа тең бұрыштарды кескіндеңдер.

4.2. Төмендегі бұрыштардың радиус векторы қай ширекте жатады:

1) 179°; 2) 325°; 3) –150°; 4) –10; 5) 800°; 6) 10000°?

4.3. Төмендегі бұрыштарға сәйкес радиус-вектор қай ширекке тиісті:

1) $289°$; 2) $190°$; 3) $100°$; 4) $-20°$; 5) $-110°$; 6) $4200°$?

4.4. $40°$, $150°$, $315°$, $1000°$, $-20°$, -120, $-300°$-қа тең бұрыштарды радиан арқылы өрнектеңдер.

4.5. $\frac{\pi}{3}; -\frac{2\pi}{3}; \frac{21\pi}{4}; \frac{\pi}{8}; 3; 100; 0,8; \frac{5\pi}{2}$ -ге тең бұрыштарды градус арқылы өрнектеңдер.

B

4.6. Бірлік шеңбер доғасының радиандық өлшемі $\frac{3\pi}{4}$-ке тең. Осы доғаның ұзындығы қандай?

4.7. Доғаны керетін центрлік бұрыштың шамасы $\frac{3\pi}{2}$. Шеңбердің радиусы 8. Осы доғаның ұзындығын табыңдар.

4.8. Үшбұрыш бұрыштары шамаларының қатынасы 3:4:5. Осы бұрыштардың градустық және радиандық өлшемін табыңдар.

Үшбұрыштың бұрыштары α, β, γ болса, $\alpha:\beta:\gamma=3:4:5$. Осыдан $\alpha=3k$, $\beta=4k$, $\gamma=5k$.

а) Градустық өлшем бойынша:

$$\alpha+\beta+\gamma=180° \Rightarrow 3k+4k+5k=180° \Rightarrow 12k=180° \Rightarrow k=15°.$$

Сонда $\alpha=45°$, $\beta=60°$, $\gamma=75°$.

ә) Радиандық өлшем бойынша $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ болуы керек.

$3k+4k+5k=\pi \Rightarrow k=\frac{\pi}{12}$. Сондықтан $\alpha=\frac{\pi}{4}; \beta=\frac{\pi}{3}; \gamma=\frac{5\pi}{12}$.

Ж а у а б ы: $45°$, $60°$, $75°$ немесе $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{12}$.

4.9. а) катеттері өзара тең; ә) бір катеті гипотенузасының жартысына тең тік бұрышты үшбұрыштың бұрыштарының градустық және радиандық өлшемдерін табыңдар.

4.10. Дұрыс n бұрыштың бұрыштарын радиан арқылы өрнектеңдер:

1) $n=3$; 2) $n=4$; 3) $n=5$; 4) $n=6$; 5) $n=9$; 6) $n=18$.

4.11. Бірлік тригонометриялық шеңбер мен координаталар өстерінің қиылысу нүктелеріне сәйкес келетін ең кіші теріс емес радиандық бұрышты көрсетіңдер. Осы нүктелерге сәйкес келетін радиандық бұрыштардың жалпы түрін жазыңдар.

C

4.12. Сан өсінде және тригонометриялық шеңбер бойында мына сандарға сәйкес келетін нүктелер қалай орналасқан:

1) x және $-x$; 2) x және $x+\pi$;

3) x және $x+2n\pi$; 4) $x-\pi$ және $x+\pi$?

4.13. Тригонометриялық шеңберде координаталары

1) $y = \frac{1}{2}$, $x > 0$; 2) $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y > 0$;

3) $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x < 0$; 4) $x = -\frac{1}{2}$, $y < 0$

шарттарын қанағаттандыратын нүктелерді көрсетіңдер. Бұл нүктелерге сәйкес келетін сандар жиынын жазыңдар.

4.14. 1) Абсциссалар өсінің оң бөлігінде; 2) абсциссалар өсінің теріс бөлігінде; 3) ординаталар өсінің оң бөлігінде; 4) ординаталар өсінің теріс бөлігінде; 5) координаталар өстерінің бірінде; 6) үшінші ширектің биссектрисасында; 7) бірінші немесе үшінші ширектің биссектрисасында; 8) төртінші ширектің биссектрисасында аяқталатын бұрыштың градустық және радиандық өлшемдерінің жалпы түрін жазып көрсетіңдер.

4.15. Минутына толық 300 айналым жасайтын дискінің рад/с есебімен бұрыштық жылдамдығын табыңдар.

Қайталауға арналған жаттығулар

4.16. Теңдеуді шешіңдер:

1) $x^2-7x+6=0$; 2) $4x^2+5x+1=0$;
3) $3x^2-8x+5=0$; 4) $2x^2+x+1=0$.

4.17. Функцияның графигін салыңдар:

1) $y=(x-2)^2+3$; 2) $y=x^2-4x$.

4.18. Көпмүшені көбейткіштерге жіктеңдер:

1) $5x^3-3x^2-2x$; 2) $3x^2+2x-2$.

4.19. x-тің қандай мәндерінде $y=\dfrac{x^2+1}{2x+1}$ функциясы 1-ге тең мән қабылдайды?

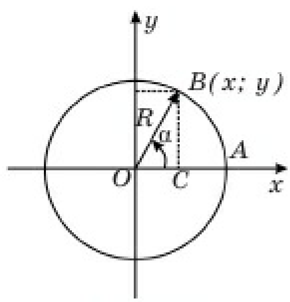
4.2. Тригонометриялық функцияларды анықтау

Тақырыпты оқып-үйрену барысында сендер:

- тригонометриялық функциялардың анықтамаларын білесіңдер;
- бірлік шеңбер бойындағы нүктенің координаталары ($\cos\alpha$, $\sin\alpha$) түрінде жазылатынын және тригонометриялық функциялардың байланысын білесіңдер;
- тригонометриялық функциялардың кейбір бұрыштарындағы мәндерін анықтауды үйренесіңдер.

4.2.1. Тригонометриялық функциялардың кез келген бұрыштар үшін анықтамасы

Енді кез келген α бұрышының *синус*, *косинус*, *тангенс* және *котангенсін* анықтайық. Ол үшін центрі координаталар бас нүктесінде, радиусы R-ге тең шеңбер алайық. $\overline{OB}$ векторы мен Ox өсінің оң бағыты арасындағы бұрышы α-ға тең болатындай етіп, осы шеңбердің бойынан B нүктесін алайық. B нүктесінің координаталары $(x;\ y)$ болсын: $B(x;\ y)$ (4.10-сурет).



4.10-сурет

Анықтама. 1) *B нүктесінің ординатасының радиусқа қатынасы α бұрышының синусы деп аталады:*

$$\sin\alpha=\frac{y}{R}. \qquad (1)$$

2) *B нүктесінің абсциссасының радиусқа қатынасы α бұрышының косинусы деп аталады:*

$$\cos\alpha=\frac{x}{R}. \qquad (2)$$

3) *α бұрышының синусының осы бұрыштың косинусына қатынасы α бұрышының тангенсі деп аталады:*

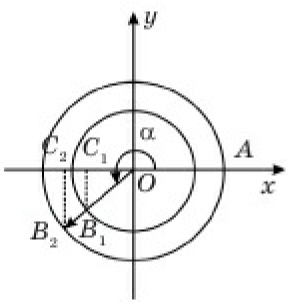
$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}. \qquad (3)$$

4) *α бұрышының косинусының осы бұрыштың синусына қатынасы α бұрышының котангенсі деп аталады:*

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \qquad (4)$$

$0°\leqslant\alpha\leqslant180°$ болғанда геометрия курсында α бұрышының синусы, косинусы, тангенсі және котангенсі тік бұрышты үшбұрышты таңдап алуға тәуелсіз, тек α-ға тәуелді болатынын көрсеткенбіз. Осы сияқты, кез келген α үшін жоғарыда анықталған синус, косинус, тангенс және котангенстер мәнінің шеңбердің радиусы R-ге тәуелсіз болатындығын көрсетейік. $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ және $\operatorname{ctg}\alpha$ мәндері таңдап алынған шеңберге тәуелсіз.

4.11-суретте көрсетілгендей, центрі O нүктесінде, радиустары R_1 және R_2 болатын екі шеңбер алайық. $\overrightarrow{OB_2}$ векторы Ox өсінің оң бағытымен α бұрыш жасасын. OB_2 сәулесінің радиусы R_1 шеңбермен қиылысу нүктесін B_1 арқылы белгілейік. $B_1(x_1;\ y_1)$ және $B_2(x_2;\ y_2)$ болсын. B_1 және B_2 нүктелерінен абсциссалар өсіне түсірілген перпендикулярдың табандарын сәйкесінше C_1 және C_2 арқылы белгілейік. B_1C_1O және B_2C_2O тік бұрышты үшбұрыштарының ұқсастығынан $\frac{B_1C_1}{B_1O}=\frac{B_2C_2}{B_2O}$ теңдігін аламыз.



4.11-сурет

$B_1C_1=|y_1|$, $B_2C_2=|y_2|$, $B_1O=R_1$ және $B_2O=R_2$

болатынын ескерсек, $\frac{|y_1|}{R_1} = \frac{|y_2|}{R_2}$. B_1 және B_2 нүктелері бір координаталық ширекте жататындықтан, y_1 және y_2 сандарының таңбалары бірдей. Сондықтан $\frac{y_1}{R_1} = \frac{y_2}{R_2}$ теңдігі орындалуы керек. Олай болса, $\frac{y}{R}$ қатынасы шеңбер радиусы R-ге тәуелді емес.

Сонымен, $\frac{y}{R}$ қатынасы кез келген α бұрышы үшін анықталғандықтан, $\sin\alpha$ өрнегі де кез келген α бұрышы үшін анықталады. Осы сияқты $\cos\alpha$ өрнегі де кез келген α бұрышы үшін анықталады. Керісінше, $\mathrm{tg}\alpha$ және $\mathrm{ctg}\alpha$ өрнектері кез келген α бұрышы үшін анықтала бермейді. Мысалы, $\mathrm{tg}\alpha$ өрнегі $\cos\alpha \neq 0$ теңсіздігін қанағаттандыратын α бұрыштары үшін ғана анықталады.

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{y}{R} : \frac{x}{R} = \frac{y}{x},\ x \neq 0.$$ Олай болса, $\alpha \neq 90° + n \cdot 180°$.

Мұндағы n — кез келген бүтін сан. Сонымен, $\mathrm{tg}\alpha$ өрнегі $\pm 90°$; $\pm 270°$; $\pm 450°$; ... бұрыштары үшін анықталмайды, өйткені $\frac{y}{x}$ қатынасының мағынасы болмайды. Осы сияқты, $\mathrm{ctg}\,\alpha$ өрнегі $0°$; $\pm 180°$; $\pm 360°$; ... бұрыштары үшін анықталмайды. Ол $\alpha = n \cdot 180°$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ мәндерінен басқа бұрыштар үшін ғана анықталады.

Кез келген x санын қандай да бір бұрыштың радиандық өлшемі ретінде қарастырып, осы санға сәйкес келетін $\sin x$, $\cos x$-тің мәндерін табуға болады. Кез келген x нақты саны үшін $\sin x$, $\cos x$ өрнектері анықталады. Сондықтан $\sin x$ және $\cos x$ өрнектерін x аргументіне тәуелді функциялар деп қарастырамыз. Осы сияқты, егер $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in Z$ болса, $\mathrm{tg}x$ функциясын, ал $x \neq n\pi$, $n \in Z$ болса, $\mathrm{ctg}x$ функциясын анықтаймыз (мұндағы Z — бүтін сандар жиыны). Жалпы $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg}x$ және $y = \mathrm{ctg}x$ функцияларын ***тригонометриялық функциялар*** деп атайды. Жоғарыда айтылғандардан $y = \sin x$ және $y = \cos x$ функцияларының анықталу облыстары барлық нақты сандар жиыны болатыны шығады.

$-1 \leqslant \frac{x}{R} \leqslant 1$ және $-1 \leqslant \frac{y}{R} \leqslant 1$ теңсіздіктерінен $|\cos x| \leqslant 1$ және $|\sin x| \leqslant 1$. Олай болса, $[-1;1]$ кесіндісі $y = \sin x$ және $y = \cos x$ функцияларының мәндер облысы болып табылады.

$y = \mathrm{tg}\, x$ функциясының анықталу облысы $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in Z$ теңсіздігімен анықталады; $y = \mathrm{ctg}\, x$ функциясының анықталу облысы $x \neq n\pi$, $n \in Z$ теңсіздігімен беріледі. Сонымен қатар $-\infty < \frac{y}{x} < +\infty$ және $-\infty < \frac{x}{y} < +\infty$ теңсіздіктерінен $\mathrm{tg}\, x$ және $\mathrm{ctg}\, x$ функцияларының мәндер облысы барлық нақты сандар жиыны болатынын көреміз.

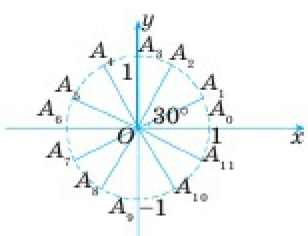
4.10-суреттен $OC^2 + BC^2 = OB^2$ теңдігінің орындалатынын көреміз. $x^2 + y^2 = R^2$ немесе $\left(\frac{x}{R}\right)^2 + \left(\frac{y}{R}\right)^2 = 1$ теңдіктері орындалады. Сондықтан тригонометриялық функциялардың анықтамасы бойынша кез келген x үшін

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad (5)$$

тепе-теңдігі ақиқат. Бұл тепе-теңдік ***тригонометрияның негізгі тепе-теңдігі*** деп аталады.

Ескерту. Кейде анықтамада қарастырылған радиусы R-ге тең шеңбердің орнына радиусы 1-ге тең шеңберді алады. $OB = 1$ болғандықтан, $\sin\alpha$-ны B нүктесінің ординатасына тең, $\cos\alpha$-ны осы нүктенің абсциссасына тең деп қарастырады. Сондықтан бұл бірлік шеңберді ***тригонометриялық шеңбер*** деп атайды.

4.2.2. Тригонометриялық функциялардың кейбір бұрыштардағы мәндері



4.12-сурет

1-мысал. Центрі координаталар бас нүктесінде, радиусы 1-ге тең шеңбер $A_0(1; 0)$ нүктесінен бастап $A_1, A_2, \ldots, A_{11}$ нүктелері арқылы өзара тең 12 бөлікке бөлінген. Нүктелер шеңбер бойында рет-ретімен сағат тіліне қарсы бағытта орналасқан. Тригонометриялық функциялардың осы нүктелерге сәйкес келетін бұрыштарындағы мәндерінің кестесін құрастыру керек.

$A_0, A_1, A_2, \dots, A_{11}$ нүктелеріне $0°$, $30°$, $60°$, $90°$, $120°$, $150°$, $180°$, $210°$, $240°$, $270°$, $300°$, $330°$-қа немесе $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}, \frac{11\pi}{6}$ радианға тең бұрыштар сәйкес келеді (4.12-сурет).

$A_0(1;0)$, $A_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$, $A_2\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $A_3(0;1)$, $A_4\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

$A_5\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$, $A_6(-1;0)$, $A_7\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$, $A_8\left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

$A_9(0;-1)$, $A_{10}\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $A_{11}\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$ болғандықтан,

$\sin 0°=0, \sin 30°=\frac{1}{2}$, $\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 90°=1$, ... және

$\cos 0°=1$, $\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60°=\frac{1}{2}$, $\cos 90°=0$, ...

Сонымен қатар $\sin 45°=\sin 135°=\cos 45°=\cos 315°=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$\sin 225°=\sin 315°=\cos 135°=\cos 225°=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

болатынын ескерсек, 4.1-кестені аламыз.

4.1-кесте

α	$0°$ 0	$30°$ $\frac{\pi}{6}$	$45°$ $\frac{\pi}{4}$	$60°$ $\frac{\pi}{3}$	$90°$ $\frac{\pi}{2}$	$120°$ $\frac{2\pi}{3}$	$135°$ $\frac{3\pi}{4}$	$150°$ $\frac{5\pi}{6}$	$180°$ π
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

Жалғасы

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
tgα	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	–1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
ctgα	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	–1	$-\sqrt{3}$	–

4.1-кестенің жалғасы

α	210° $\frac{7\pi}{6}$	225° $\frac{5\pi}{4}$	240° $\frac{4\pi}{3}$	270° $\frac{3\pi}{2}$	300° $\frac{5\pi}{3}$	315° $\frac{7\pi}{4}$	330° $\frac{11\pi}{6}$	360° 2π
sinα	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	–1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cosα	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tgα	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	–1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
ctgα	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	–1	$-\sqrt{3}$	–

1. Тригонометриялық функциялардың кез келген бұрыш үшін берілген анықтамасын тұжырымдаңдар.
2. Тригонометриялық функциялардың анықтамасы тригонометриялық шеңбердің радиусына тәуелсіз болатынын көрсетіңдер.
3. Негізгі тригонометриялық тепе-теңдіктерді жазып, олардың ақиқаттығын дәлелдеңдер.

Практикалық жұмыс

Тригонометриялық функциялардың 1) 30°; 2) 45°; 3) 60° бұрыштағы мәндерін жазып көрсетіңдер.

ЕСЕПТЕР

А

4.20. 1) 0; 2) $\frac{\pi}{2}$ санының синусы мен косинусын табыңдар.

4.21. 1) $\sin\alpha=\frac{21}{29}$, $\cos\alpha=\frac{20}{29}$; 2) $\sin\alpha=-\frac{12}{37}$, $\cos\alpha=\frac{35}{37}$;

3) $\sin\alpha=\frac{1}{3}$, $\cos\alpha=\frac{2}{5}$; 4) $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $\cos\alpha=\frac{3}{5}$

теңдіктері орындалатындай α бұрышы табыла ма?

3) Осындай α бұрыш табылса, $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ болуы қажет. Осы тепе-теңдіктің орындалатынын тексереміз:

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{1}{9}+\frac{4}{25}=\frac{61}{225}\neq 1$. Олай болса,

$\sin\alpha=\frac{1}{3}$ және $\cos\alpha=\frac{2}{5}$ болатындай α бұрышы табылмайды.

4.22. α-ның қандай да бір мәнінде $\sin\alpha$-ның мәні 1) 0,67; 2) $\frac{12}{11}$; 3) $\frac{4}{\sqrt{15}}$; 4) $\frac{\sqrt{15}}{4}$ сандарына тең болуы мүмкін бе?

4.23. $\cos\alpha$-ның мәні 1) $\sqrt{2}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 3) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ сандарына тең болатындай α табыла ма?

4.24. Өрнектің мәнін табыңдар:

1) $2\cos60°+\sqrt{3}\cos30°$; 2) $5\sin30°-\mathrm{ctg}45°$;
3) $2\sin45°-4\cos30°$; 4) $6\mathrm{ctg}60°-2\sin60°$.

4.25. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ тепе-теңдігін қолданып, төмендегі өрнектерді ықшамдаңдар:

1) $\sin^2\alpha-1$; 2) $\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha$;
3) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2$; 4) $\cos^2\alpha-\cos^4\alpha+\sin^4\alpha$.

B

4.26. $-1<m<1$ теңсіздігін қанағаттандыратын кез келген m санын таңдап алып, 1) $\sin\varphi=m$; 2) $\cos\varphi=m$ теңдіктерін қанағаттандыратын бұрышты салыңдар. Мұндай неше бұрыш болуы мүмкін? Жауаптарыңды негіздеңдер.

4.27. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\sin^4\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha$; 2) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha-\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$;

3) $\dfrac{\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$; 4) $\dfrac{1-2\sin^2\alpha}{2\cos^2\alpha-1}$.

4.28. Есептеңдер:

1) $2\cos\dfrac{\pi}{3}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3}$; 2) $7\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{6}\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{6}$; 3) $2\sin\dfrac{\pi}{6}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}$;

4) $3\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3}$; 5) $4\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{4}\sin\dfrac{\pi}{3}$; 6) $12\sin\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{3}$.

4.29. Өрнектің мәнін табыңдар:

1) $\sin\dfrac{3\pi}{4}\cos\dfrac{3\pi}{4}-\operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{4}+1,5\operatorname{ctg}\dfrac{3\pi}{4}$;

2) $\operatorname{tg}^2\dfrac{2\pi}{3}-\operatorname{ctg}^2\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{10}{3}\sin^2\dfrac{2\pi}{3}+\cos^2\dfrac{2\pi}{3}$;

3) $4\cos\dfrac{5\pi}{6}\sin\dfrac{5\pi}{6}+3\operatorname{tg}^2\dfrac{5\pi}{6}$; 4) $\operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{4}\sin\dfrac{3\pi}{2}-\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{\pi}{6}$.

4.30. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $(1+\operatorname{tg}^2\alpha)\cos^2\alpha$; 2) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$; 3) $\dfrac{\cos^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha}{\sin^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}$.

4.31. 1) $\varphi=\dfrac{4\pi}{3}$; 2) $\varphi=\dfrac{5\pi}{3}$; 3) $\varphi=\dfrac{5\pi}{4}$; 4) $\varphi=\dfrac{7\pi}{4}$

деп алып, $\sin^2\varphi-\cos\varphi+\sqrt{3}\operatorname{tg}\varphi$ өрнегінің мәнін табыңдар.

4.32. 1) $x=\dfrac{\pi}{4}$; 2) $x=\dfrac{3\pi}{4}$ деп алып,

$\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)+2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)+4\cos x+2\cos\left(x+\dfrac{3\pi}{4}\right)$ өрнегінің мәнін табыңдар.

C

4.33. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$; 2) $\dfrac{1-2\sin^2\alpha}{2\cos^2\alpha-1}=1$.

4.34. 1) $\mathrm{tg}\varphi=2$; 2) $\mathrm{ctg}\varphi=0,5$ болса, $\dfrac{4\cos\varphi-3\sin\varphi}{\sin\varphi+2\cos\varphi}$ өрнегінің мәнін табыңдар.

> 2) $\mathrm{ctg}\varphi=0,5\Rightarrow\dfrac{4\cos\varphi-3\sin\varphi}{\sin\varphi+2\cos\varphi}=\dfrac{\sin\varphi\left(4\dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi}-3\right)}{\sin\varphi\left(1+2\dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\right)}=$
>
> $=\dfrac{4\mathrm{ctg}\varphi-3}{1+2\mathrm{ctg}\varphi}=\dfrac{2-3}{1+1}=-0,5.$
>
> Ж а у а б ы: $-0,5$.

4.35. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $\dfrac{\sin^2\gamma}{\sin\gamma-\cos\gamma}+\dfrac{\sin\gamma+\cos\gamma}{1-\mathrm{tg}^2\gamma}=\sin\gamma+\cos\gamma$;

2) $\dfrac{1-4\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{(\sin\varphi+\cos\varphi)^2}=1-2\sin\varphi\cos\varphi$;

3) $\dfrac{\mathrm{tg}^2\beta+\mathrm{tg}\beta+1}{\mathrm{ctg}^2\beta+\mathrm{ctg}\beta+1}=\mathrm{tg}^2\beta$;

Қайталауға арналған жаттығулар

4.36. Квадрат теңсіздікті шешіңдер:

1) $x^2-4x+3<0$; 2) $2x^2-5x+3\geqslant0$;
3) $4x^2+x+1\leqslant0$; 4) $3x^2-x-1>0$.

4.37. 1) $\left(5+3\sqrt{7}\right)^2+\left(5-3\sqrt{7}\right)^2$;

2) $\left(\sqrt{\sqrt{45}+2\sqrt{5}}+\sqrt{\sqrt{45}-2\sqrt{5}}\right)^2-6\sqrt{5}$

санының рационал сан болатынын көрсетіңдер.

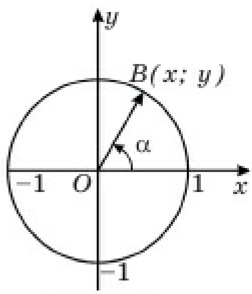
4.3. Тригонометриялық функциялардың қасиеттері

Тақырыпты оқып-үйрену барысында сендер:

- бірлік шеңбер көмегімен тригонометриялық функциялардың анықталу облысы мен мәндері жиынын тауып үйренесіңдер;
- бірлік шеңбер көмегімен тригонометриялық функциялардың жұптығын (тақтығын), периодтылығын, бірсарындылығын және таңба тұрақтылық аралықтарын анықтап үйренесіңдер.

4.3.1. Тригонометриялық функциялардың таңбалары

Анықтама бойынша бірлік тригонометриялық шеңберде $\sin\alpha=y$, $\cos\alpha=x$, $\mathrm{tg}\alpha=\dfrac{y}{x}$, $x\neq 0$, $\mathrm{ctg}\alpha=\dfrac{x}{y}$, $y\neq 0$ теңдіктері орындалады (4.13-сурет).



4.13-сурет

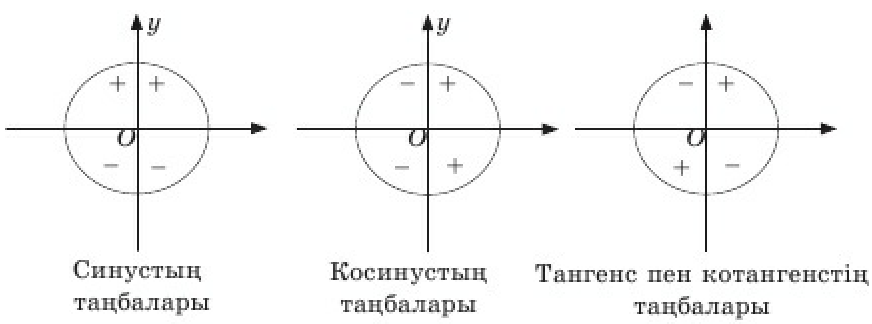
Егер $B(x;\ y)\in$ I, бірінші ширекте жатса, $x>0$, $y>0$. Сондықтан $\sin\alpha>0$, $\cos\alpha>0$, $\mathrm{tg}\alpha>0$, $\mathrm{ctg}\alpha>0$ теңсіздіктері орындалады.

Егер $B(x;\ y)\in$ II, екінші ширекке тиісті болса, $x<0$, $y>0$. Сондықтан $\sin\alpha>0$, $\cos\alpha<0$, $\mathrm{tg}\alpha<0$, $\mathrm{ctg}\alpha<0$ теңсіздіктері орындалады.

$B(x;\ y)\in$ III ширекте болса, $x<0$, $y<0$. Сондықтан $\sin\alpha<0$, $\cos\alpha<0$, $\mathrm{tg}\alpha>0$, $\mathrm{ctg}\alpha>0$ теңсіздіктері орындалады.

$B(x;\ y)\in$ IV ширекте жатса, $x>0$, $y<0$. Олай болса, $\sin\alpha<0$, $\cos\alpha>0$, $\mathrm{tg}\alpha<0$, $\mathrm{ctg}\alpha<0$ теңсіздіктері орындалады.

4.14-суретте тригонометриялық функциялардың әртүрлі ширектердегі таңбалары бейнеленген.



4.14-сурет

1-мысал. а) $\alpha=350°$; ә) $\alpha=\frac{3\pi}{5}$ үшін $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$ және $\mathrm{ctg}\,\alpha$ таңбаларын анықтау қажет.

а) $350°$-қа тең бұрыш IV ширекте жатады. Сондықтан $\sin 350°<0$, $\cos 350°>0$, $\mathrm{tg}\,350°<0$, $\mathrm{ctg}\,350°<0$.

ә) $\frac{\pi}{2}<\frac{3\pi}{5}<\pi$ болғандықтан, сәйкес бұрыш II ширекте аяқталады.

Онда $\sin\frac{3\pi}{5}>0$, $\cos\frac{3\pi}{5}<0$, $\mathrm{tg}\,\frac{3\pi}{5}<0$, $\mathrm{ctg}\,\frac{3\pi}{5}<0$.

4.3.2. Тригонометриялық функциялардың тақ-жұптығы

Функция тақ немесе жұп болуы үшін оның анықталу облысы координаталар бас нүктесіне қатысты симметриялы болуы керек. Себебі функцияның анықталу облысында a нүктесімен бірге $-a$ нүктесі де жатады. Сонда ғана функцияның тақ-жұптығын төмендегі анықтамалар арқылы тексере аламыз.

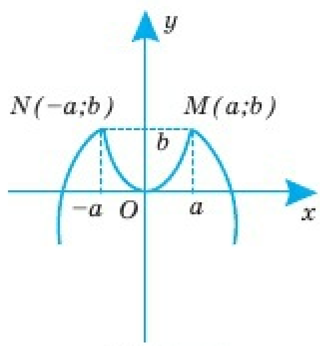
1-анықтама. *Егер $y=f(x)$ функциясы анықталу облысындағы әрбір x үшін*

$$f(-x)=f(x) \tag{1}$$

теңдігі орындалса, функцияны ***жұп функция*** *деп атайды.*

Мысалы, $y=x^2$, $y=|x|$ — жұп функциялар, өйткені $(-x)^2=x^2$, $|-x|=|x|$ теңдіктері орындалады.

Егер $M(a;b)$ нүктесі $y=f(x)$ жұп функциясының графигінде жатса, $b=f(a)$ теңдігі орындалады. (1) теңдікке сәйкес $f(-a)=f(a)=b$. Олай болса, $N(-a;\ b)$ нүктесі де $y=f(x)$ функциясының графигінде жатады. Демек, *жұп* функциялардың графиктері Oy өсіне қарағанда симметриялы (4.15-сурет).



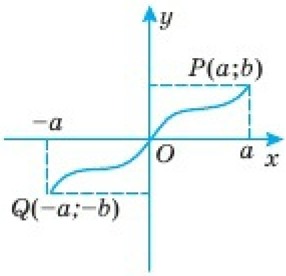
4.15-сурет

2-анықтама. *Егер $y=f(x)$ функциясының анықталу облысындағы әрбір x үшін*

$$f(-x)=-f(x) \tag{2}$$

теңдігі орындалса, бұл функцияны ***тақ функция*** *деп атайды.*

Мысалы, $y=x$, $y=x^3$ — тақ функциялар.



4.16-сурет

Егер $P(a;b)$ нүктесі $y=f(x)$ тақ функциясының графигінде жатса, $b=f(a)$ теңдігі орындалады. Анықтама бойынша $f(-a)=-f(a)=-b$. Демек, функцияның графигінде $Q(-a;-b)$ нүктесі де жатады. Тақ функцияның графигі координаталар бас нүктесіне қарағанда симметриялы (4.16-сурет).

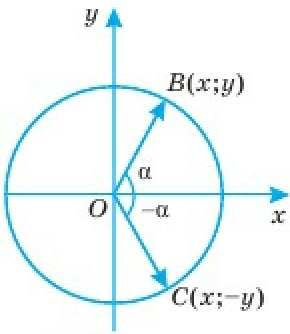
Дегенмен, кез келген функция тақ немесе жұп бола бермейді. Мысалы, $f(x)=x+x^2$ функциясы тақ та, жұп та болмайды. Өйткені

$$f(-x)=-x+x^2,$$

яғни

$$f(-x) = f(x) \text{ және } f(-x) = -f(x)$$

теңдіктерінің екеуі де орындалмайды.



4.17-сурет

Тақ та, жұп та болмайтын функцияларды ***жалпы жағдайдағы функциялар*** (ЖЖФ) деп атаймыз.

$f(x)=x+x^2$ — жалпы жағдайдағы функция. 4.17-суретте α және $-\alpha$ бұрыштарына B және C нүктелері сәйкес келеді. Егер $B(x;y)$ болса, $C(x;-y)$.

Сондықтан

$$\sin(-\alpha)=-y=-\sin\alpha;\ \cos(-\alpha)=x=\cos\alpha;\ \mathrm{tg}(-\alpha)=\frac{(-y)}{x}=-\mathrm{tg}\alpha;$$

$\mathrm{ctg}(-\alpha)=\dfrac{x}{-y}=-\mathrm{ctg}\alpha$ теңдіктерін аламыз. Анықтама бойынша $\sin\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$ және $\mathrm{ctg}\alpha$ функциялары тақ, $\cos\alpha$ — жұп функция.

2-мысал. $f(x)=\sin x\,\mathrm{tg}^2 x$ функциясының тақ-жұптығын анықтау керек.

Кез келген x үшін $f(-x)=-f(x)$ теңдігі орындалса, $f(x)$ функциясы — тақ. $f(-x)=f(x)$ теңдігі орындалса, функция — жұп. Осы анықтамадан және $\sin x$, $\mathrm{tg}x$ функцияларының тақ екенін ескеріп,

$$f(-x)=\sin(-x)\mathrm{tg}^2(-x)=(-\sin x)(-\mathrm{tg}x)^2=-\sin x\,\mathrm{tg}^2x=-f(x)$$

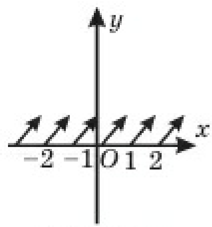
теңдігін аламыз. Демек, $f(x)$ — тақ функция.

4.3.3. Тригонометриялық функциялардың периодтылығы

3-анықтама. *Егер $y=f(x)$ функциясы үшін $T\neq 0$ саны табылып, x аргументінің кез келген мәні үшін*

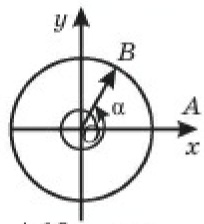
$$f(x+T)=f(x) \tag{3}$$

теңдігі орындалса, T санын $f(x)$ функциясының ***периоды*** *деп атайды.* (3) теңдіктен $y=f(x)$ функциясының мәні ұзындығы T-ға тең аралықтан кейін қайталанып отыратындығын көреміз. Периодты функциялардың бұл қасиетін олардың графиктерін салу үшін қолданады. Мысалы, $y=\{x\}$ ($\{x\}$ өрнегі x санының бөлшек бөлігін анықтайды) функциясы — периодты функция. Оның периоды $T=1$. Шынында да, егер x-ке 1-ді қоссақ, санның бүтін бөлігі ғана 1-ге артады. Оның бөлшек бөлігі өзгермейді: $\{x+1\}=\{x\}$. Функцияның $[0;1)$ аралығындағы графигі мен $[1;\ 2)$, $[2;\ 3)$ және т.с.с. аралықтарындағы графиктерінің түрлері бірдей (4.18-сурет). Егер T саны $y=f(x)$ функциясының периоды болса, $\pm 2T$, $\pm 3T$, $\pm 4T,\ldots$ сандары да осы функцияның периоды болып табылады. Шынында да,



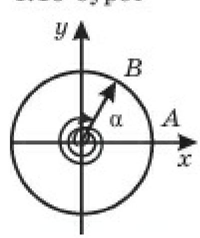
4.18-сурет

$f(x+2T)=f((x+T)+T)=f(x+T)=f(x)$,
$f(x+3T)=f((x+2T)+T)=f(x+2T)=f(x),\ldots$
Осы сияқты
$f(x-T)=f((x-T)+T)=f(x)$,
$f(x-2T)=f((x-2T)+2T)=f(x),\ \ldots$



4.19-сурет

Сонымен, периодты функцияның шексіз көп периодтары болады. Есептеулер кезінде ең кіші оң периодты аламыз. Мысалы, $y=\{x\}$ функциясының периодтары ± 1, ± 2, ± 3, ± 4 сандары. 1 саны — оның ең кіші оң периоды.

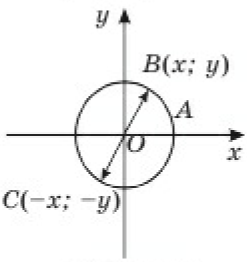


4.20-сурет

4.19-суретте B нүктесі α бұрышымен немесе $\alpha+2\pi$ бұрышымен, 4.20-суретте B нүктесі α бұрышымен немесе $\alpha-4\pi$ бұрышымен анықталады. Олай болса, анықтамаға сәйкес $\sin\alpha=y$, $\sin(\alpha+2\pi)=y$, $\sin(\alpha-4\pi)=y$ теңдіктерін аламыз. Онда $\sin\alpha=\sin(\alpha+2\pi)=$ $=\sin(\alpha-4\pi)$ теңдіктері орындалады. Жалпы осы сияқты α және $\alpha+2n\pi$, $n\in Z$ бұрыштары B нүктесін анықтағандықтан,

$\sin(\alpha+2n\pi)=\sin\alpha$ теңдігі орындалады. Демек, $\sin\alpha$ функциясы периодты функция. Оның периоды $2n\pi$-ге тең. Мұндағы n — кез келген бүтін сан. Осы сияқты $\cos(\alpha+2n\pi)=\cos\alpha$, $n\in Z$ теңдігін және $\cos\alpha$ функциясының да периоды $2n\pi$-ге тең болатынын көреміз ($n\in Z$). $\sin\alpha$ және $\cos\alpha$ функцияларының ең кіші оң периоды 2π, өйткені бұл сан тригонометриялық шеңбердің сағат тіліне қарсы толық бір айналымына сәйкес келеді.

$\mathrm{tg}\alpha$ және $\mathrm{ctg}\alpha$ функцияларының ең кіші оң периоды π-ге ($180°$-қа) тең. Шынында да, α және $\alpha+\pi$ бұрыштарына сәйкес келетін радиус-векторлар қарама-қарсы шиектерде орналасады. Егер α бұрышымен бірлік тригонометриялық шеңбердің бойында $B(x;y)$ нүктесі анықталса, $\alpha+\pi$ бұрышымен $C(-x;-y)$ нүктесі анықталады (4.21-сурет). $\sin(\alpha+\pi)=-\sin\alpha$, $\cos(\alpha+\pi)=-\cos\alpha$ болғандықтан,



4.21-сурет

$$\mathrm{tg}(\alpha+\pi)=\frac{\sin(\alpha+\pi)}{\cos(\alpha+\pi)}=\frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha}=\mathrm{tg}\,\alpha,$$

$$\mathrm{ctg}(\alpha+\pi)=\frac{\cos(\alpha+\pi)}{\sin(\alpha+\pi)}=\frac{-\cos\alpha}{-\sin\alpha}=\mathrm{ctg}\,\alpha.$$

Осыдан $\mathrm{tg}\alpha$ және $\mathrm{ctg}\alpha$ функцияларының периоды $n\pi$, $n\in Z$ болатынын көреміз.

Сонымен, $\sin\alpha$ және $\cos\alpha$ функцияларының периоды $2n\pi$ ($360°\cdot n$) және ең кіші периодтары 2π ($360°$). Ал $\mathrm{tg}\alpha$ және $\mathrm{ctg}\alpha$ функцияларының периоды $n\pi$ ($180°\cdot n$). Ең кіші периодтары π-ге ($180°$) тең. Мұндағы $n=0;\ \pm1;\ \pm2;\ \pm3;\ \pm4;\ \ldots$ кез келген бүтін сан.

3-мысал. а) $\alpha=-1125°$; ә) $\alpha=\frac{25\pi}{3}$ болса, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$ және $\mathrm{ctg}\alpha$ мәндерін табу керек.

Тригонометриялық функциялардың периодтылығы ескеріледі: а) $1125° = 3\cdot360° + 45°$ болғандықтан,

$$\sin(-1125°) = -\sin1125° = -\sin(3\cdot360°+45°) = -\sin45° = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos(-1125°) = \cos1125° = \cos(3\cdot360°+45°) = \cos45° = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\mathrm{tg}(-1125°) = -\mathrm{tg}1125° = -\mathrm{tg}45° = -1;$$

$$\mathrm{ctg}(-1125°) = -\mathrm{ctg}45° = -1.$$

ә) $\dfrac{25\pi}{3} = 4 \cdot 2\pi + \dfrac{\pi}{3}$ болғандықтан,

$$\sin\frac{25\pi}{3} = \sin\left(4\cdot 2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2};\ \cos\frac{25\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg}\frac{25\pi}{3} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3};\ \operatorname{ctg}\frac{25\pi}{3} = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

1. Тригонометриялық функциялардың негізгі қасиеттерін атап көрсетіп, дәлелдеңдер: а) таңбаларын; ә) тақ-жұптығын; б) периодтылығын.
2. Негізгі тригонометриялық функциялардың ең кіші оң периодтарын атап көрсетіңдер.

Практикалық жұмыс

$\left(-\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$ аралығын 1) $y = \sin x$; 2) $y = \cos x$ функциясының таңбасы тұрақты болып қалатындай етіп екі бөлікке бөліңдер.

ЕСЕПТЕР

А

4.38. Төменде берілген бұрыштар үшін тригонометриялық функциялардың таңбаларын анықтаңдар:

1) $143°$; 2) $-243°$; 3) $735°$; 4) $-735°$; 5) $300°$;

6) $\dfrac{3\pi}{5}$; 7) $\dfrac{4\pi}{3}$; 8) $-0,5$; 9) 4; 10) $-7,3$.

4.39. Төмендегі өрнектердің таңбаларын анықтаңдар:

1) $\sin 300° \cdot \cos 200°$; 2) $\sin 193° \cdot \operatorname{tg} 202°$;

3) $\cos 40° \cdot \sin 120° \cdot \operatorname{tg} 150°$; 4) $\operatorname{tg} 97° \cdot \operatorname{ctg} 197° \cdot \cos 297°$;

5) $\sin\dfrac{3\pi}{5} \cdot \cos\dfrac{4\pi}{3}$; 6) $\operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{3} \cdot \operatorname{ctg}\dfrac{7\pi}{6}$;

7) $\cos 8 \cdot \cos 5 \cdot \operatorname{tg} 1$; 8) $\operatorname{tg} 5 \cdot \operatorname{ctg} 3 \cdot \sin 2$; 9) $\operatorname{ctg}(-3) \cdot \cos(-5)$.

8) $\mathrm{tg}5\cdot\mathrm{ctg}3\cdot\sin 2$ өрнегінің таңбасын анықтау керек. $4{,}75<\frac{3\pi}{2}<5<2\pi$; $\frac{\pi}{2}<3<\pi$, $\frac{\pi}{2}<2<\pi$ болғандықтан, $\mathrm{tg}5<0$, $\mathrm{ctg}3<0$, $\sin 2>0$. Сондықтан $\mathrm{tg}5\cdot\mathrm{ctg}3\cdot\sin 2>0$.

4.40. 1) $\sin\alpha>0$ және $\cos\alpha>0$; 2) $\sin\alpha<0$ және $\cos\alpha>0$; 3) $\sin\alpha>0$ және $\cos\alpha<0$; 4) $\mathrm{tg}\alpha<0$ және $\cos\alpha>0$; 5) $\sin\alpha>0$ және $\mathrm{tg}\alpha>0$; 6) $\mathrm{ctg}\alpha>0$ және $\sin\alpha<0$ болса, α қай ширекте аяқталады?

4.41. Қай ширекте 1) $\sin\alpha$ және $\cos\alpha$; 2) $\mathrm{tg}\alpha$ және $\mathrm{ctg}\alpha$; 3) $\cos\alpha$ және $\mathrm{tg}\alpha$ өрнектерінің таңбалары бірдей болады?

4.42. Функцияның тақ-жұптығын анықтаңдар (ауызша):

1) $y=x^{10}$; 2) $y=x^{-2}$; 3) $y=\sqrt{x}$;
4) $y=\sqrt{x^6}$; 5) $y=x^4-2x^2+3$; 6) $y=x^3-5x$;
7) $y=x+\sin x$; 8) $y=x^2-\cos x$; 9) $y=x^5\cdot\mathrm{tg}x$.

4.43. Функцияның тақ-жұптығын зерттеңдер:

1) $f(x)=9$; 2) $g(x)=0$; 3) $h(x)=(2-3x)^3+(2+3x)^3$;
4) $f(x)=(5x-2)^4+(5x+2)^4$; 5) $f(x)=(x-6)^9(x+3)^5+(x+6)^9(x-3)^5$.

B

4.44. Функцияның тақ-жұптығын анықтаңдар:

1) $y=(x+3)|x-1|+(x-3)|x+1|$; 2) $y=(x+5)|x-3|-(x-5)|x+3|$;

3) $y=\frac{|x-7|}{x+1}+\frac{|x+7|}{x-1}$; 4) $y=\frac{|x-4|}{x+2}+\frac{|x+4|}{x-2}$;

5) $f(x)=\frac{x^3-2x^2}{x+1}-\frac{x^3+2x^2}{x-1}$; 6) $g(x)=\frac{(x-1)^5}{(3x+4)^3}-\frac{(x+1)^6}{(3x-4)^3}$.

4.45. Төмендегі функциялардың ең кіші оң периодын көрсетіңдер:

1) $y=\{2x\}$; 2) $y=\cos\left(\frac{x}{2}\right)$; 3) $y=\left\{\frac{x}{3}\right\}$;

4) $y=\mathrm{tg}3x$; 5) $y=\sin 2x$; 6) $y=\mathrm{ctg}\left(\frac{x}{3}\right)$.

3) $y=\left\{\frac{x}{3}\right\} \Rightarrow 0\leqslant\frac{x}{3}<1 \Rightarrow 0\leqslant x<3 \Rightarrow$ ең кіші оң периоды $T=3$.

Ж а у а б ы: 3.

4.46. 1) $\sin\frac{5\pi}{6}\cdot\cos\frac{2\pi}{5}$; 2) $\mathrm{tg}\frac{5\pi}{4}\cdot\mathrm{ctg}\frac{\pi}{6}$;

3) $\cos\frac{5\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{4}$; 4) $\mathrm{tg}\frac{\pi}{8}+\mathrm{ctg}\frac{\pi}{8}$

өрнектерінің таңбаларын анықтаңдар.

4.47. Төменде берілген функциялардың тақ-жұптығын немесе жалпы жағдайдағы функция болатынын анықтаңдар:

1) $y=1-\cos x$; 2) $y=x-\sin x$; 3) $y=x^2-\cos x$;

4) $y=x^3+\sin x$; 5) $y=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$; 6) $y=\frac{\mathrm{tg}\,x+1}{\mathrm{tg}\,x-1}$;

7) $y=\frac{x+\sin x}{x-\sin x}$; 8) $y=\frac{x^2-\sin^2 x}{1+\sin^2 x}$; 9) $y=\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$;

10) $y=\cos x\cdot\sin x$; 11) $y=\mathrm{tg}\,x\cdot\sin^2 x$; 12) $y=\sin x\cdot\mathrm{ctg}^2 x$.

4.48. Тригонометриялық функциялардың периодтылығын пайдаланып, төмендегі өрнектердің мәндерін анықтаңдар:

1) $\sin 390°$; 2) $\cos 420°$; 3) $\mathrm{tg}\,540°$; 4) $\mathrm{ctg}\,450°$;

5) $\mathrm{tg}\frac{7\pi}{3}$; 6) $\sin\frac{11\pi}{6}$; 7) $\cos\frac{9\pi}{4}$; 8) $\mathrm{ctg}\frac{10\pi}{3}$.

4.49. Төмендегі тұжырымдардың ақиқаттығын тексеріңдер:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{6}$; 2) $\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{6}<1$.

а) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$; ә) $\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}=$

$=\frac{\sqrt{3}+1}{2}>1$.

Олай болса, $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\neq\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{6}$.

C

4.50. 1) $|\sin\alpha|=\sin\alpha$; 2) $|\cos\alpha|=-\cos\alpha$; 3) $|\mathrm{tg}\alpha|=-\mathrm{tg}\alpha$; 4) $|\mathrm{ctg}\alpha|=\mathrm{ctg}\alpha$ теңдіктерін қанағаттандыратын α бұрышы қай ширекте аяқталуы мүмкін?

4.51. 1) $\sin\alpha=1$; 2) $\sin\alpha=0$; 3) $\sin\alpha=-1$; 4) $\cos\alpha=1$; 5) $\cos\alpha=0$; 6) $\cos\alpha=-1$ теңдіктерін қанағаттандыратын барлық α бұрыштарын ортақ формуламен жазып көрсетіңдер.

4.52. Үшбұрыштың бұрыштары α, β, γ болса, $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma$ қосындысының таңбасы қандай?

4.53. 1) $1+\sin\alpha$; 2) $1-\cos\alpha$; 3) $2-3\sin\alpha$; 4) $2\cos^2\alpha-1$; 5) $|2-5\cos\alpha|$; 6) $2-5|\cos\alpha|$ өрнектерінің ең үлкен және ең кіші мәндерін көрсетіңдер.

4.54. 1) $\sin\alpha+2\cos\alpha=3$; 2) $3\sin\alpha-2\cos\alpha=5$; 3) $5\cos\alpha-3\sin\alpha=8$; 4) $2\sin\alpha+5\cos\alpha=-7$ теңдіктерінің орындалуы мүмкін бе?

4.55. $y=f(x)$ функциясы жұп және 1) $f(x)=\sqrt{x}$, $x\geqslant 0$; 2) $f(x)=x^2-3x$, $x\geqslant 0$; 3) $f(x)=x^2-2x$, $x\leqslant 0$; 4) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$, $x\leqslant 0$ болса, $f(x)$ функциясын бір формуламен анықтап, оның графигін салыңдар.

4.56. $y=f(x)$ функциясы тақ және 1) $f(x)=x^2$, $x\geqslant 0$; 2) $f(x)=x^2$, $x\leqslant 0$; 3) $f(x)=x^2-2x$, $x\geqslant 0$; 4) $f(x)=\sqrt{x}$, $x>0$ болса, $f(x)$ функциясын формуламен жазып, оның графигін салыңдар.

4.57. $y=\{x\}+\cos\pi x$ функциясының ең кіші оң периодын анықтаңдар.

4.58. Төмендегі функцияның ең кіші оң периодын анықтаңдар:
1) $y=\sin 2\pi x$; 2) $y=|\cos x|$; 3) $y=1+\sin^2 x$;
4) $y=\sin 2x+3\cos 3x$; 5) $y=\mathrm{tg}3x+5\mathrm{ctg}2x$.

Қайталауға арналған жаттығулар

4.59. $y=x^2+6x-1$ функциясы 1) -1; 2) -8; 3) -11-ге тең мән қабылдауы мүмкін бе?

4.60. Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases} 2x-6<3-x, \\ x^2-5x+4\leqslant 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2-3x+2\geqslant 0, \\ 2x^2-9x<0. \end{cases}$

4.4. Келтіру формулалары

Тақырыпты оқып-үйрену барысында сендер:

- келтіру формулаларын қорытып шығаруды және оны есептер шығарғанда қолдануды үйренесіңдер.

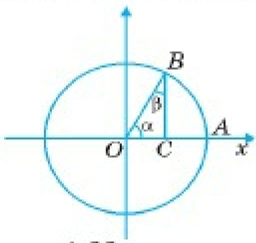
Егер $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$ теңдігі орындалса, онда α және β бұрыштары $\dfrac{\pi}{2}$-ге дейінгі бір-бірінің ***толықтауыш бұрыштары*** деп аталады. Синус және косинус, тангенс және котангенс функцияларын атаулары бойынша бір-біріне ***ұқсас функциялар*** деп атайды.

Теорема. ***Толықтауыш бұрыштардағы ұқсас функциялардың мәндері тең болады.***

α және $\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ толықтауыш бұрыштары үшін

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha,\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha \qquad (1)$$

теңдіктерінің орындалатынын көрсетейік. Айталық, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ болсын (4.22-сурет). Бұл бұрыш бірлік шеңбердің бойында $B(x;y)$ нүктесімен анықталсын. $C(x;0)$ болса, $\beta=\angle OBC=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$. Осыдан тік бұрышты үшбұрыштардың қасиеті бойынша $\cos\alpha=x$, $\sin\beta=x$, $\cos\beta=y$, $\sin\alpha=y$. Онда $\sin\beta=\cos\alpha$ және $\cos\beta=\sin\alpha$ теңдіктерінен

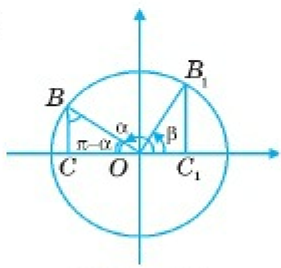


4.22-сурет

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha \text{ және } \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$$

теңдіктерін аламыз.

Енді $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ болсын (4.23-сурет).



4.23-сурет

Мұнда $B(x;\ y)$, $C(x;0)$, $\angle BOC=\pi-\alpha$ деп алсақ,

$$\angle CBO=\frac{\pi}{2}-\angle BOC=-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right).$$

Бірлік шеңбердің бойынан $\beta=-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ бұрышына сәйкес келетін $B_1(x_1;\ y_1)$ нүктесін алайық. OBC және OB_1C_1 тік бұрышты үшбұрыштарының теңдігінен $y_1=-x$, $x_1=y$. Демек, $\sin\beta=\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=y_1=-x=-\cos\alpha$.

$$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

теңдігін ескерсек,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha.$$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$ теңдігі де осы сияқты дәлелденеді. Жалпы осы сияқты (1) формулаларды кез келген α үшін дәлелдеуге болады.

Тангенс пен котангенс функциялары үшін теорема төмендегідей дәлелденеді:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha,$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha. \qquad (2)$$

$\frac{\pi}{2}\pm\alpha$, $\pi\pm\alpha$, $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$ және $2\pi\pm\alpha$ түріндегі бұрыштардың тригонометриялық функцияларын α бұрышының функциялары арқылы өрнектейтін формулаларды *келтіру формулалары* деп атайды.

а) Егер (1) және (2) формулаларда α-ны − α-мен алмастырсақ,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos(-\alpha)=\cos\alpha,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sin(-\alpha)=-\sin\alpha,$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{ctg}\alpha,\quad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{tg}\alpha. \qquad (3)$$

ә) Осы сияқты

$$\sin(\pi+\alpha)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha,$$

$$\cos(\pi+\alpha)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha, \qquad (4)$$

$$\operatorname{tg}(\pi+\alpha)=\operatorname{tg}\alpha,\quad \operatorname{ctg}(\pi+\varphi)=\operatorname{ctg}\alpha$$

теңдіктері де орындалады.

б) (4) формулаларда α-ны −α-мен алмастырсақ,

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha,\quad \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha, \qquad (5)$$
$$\operatorname{tg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha,\quad \operatorname{ctg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha.$$

в) $\frac{3\pi}{2}+\alpha$ бұрышы үшін

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+(\pi+\alpha)\right)=\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha,$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+(\pi+\alpha)\right)=-\sin(\pi+\alpha)=\sin\alpha,$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{ctg}\alpha,\quad \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{tg}\alpha. \qquad (6)$$

г) (6) формулада α-ны −α-мен алмастырсақ,

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha,\quad \cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha,$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\alpha,\quad \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{tg}\alpha. \qquad (7)$$

ғ) 2π саны тригонометриялық функциялардың периоды болатынын ескерсек,

$$\sin(2\pi-\alpha)=\sin(-\alpha)=-\sin\alpha,\quad \cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha, \qquad (8)$$
$$\mathrm{tg}(2\pi-\alpha)=-\mathrm{tg}\alpha,\quad \mathrm{ctg}(2\pi-\alpha)=-\mathrm{ctg}\alpha$$

және

$$\sin(2\pi+\alpha)=\sin\alpha,\quad \cos(2\pi+\alpha)=\cos\alpha,$$
$$\mathrm{tg}(2\pi+\alpha)=\mathrm{tg}\alpha,\quad \mathrm{ctg}(2\pi+\alpha)=-\mathrm{ctg}\alpha. \qquad (9)$$

Сонымен, (1) — (9) формулаларды біріктіріп келтіру формулаларын аламыз. Оларды кесте түрінде жазған қолайлы.

4.2-*кесте*

x	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$
	$90°-\alpha$	$90°+\alpha$	$180°-\alpha$	$180°+\alpha$	$270°-\alpha$	$270+\alpha$	$360°-\alpha$
$\sin x$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos x$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\mathrm{tg}x$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$
$\mathrm{ctg}x$	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$

1-мысал. а) $\beta=\frac{10\pi}{3}$; ә) $\beta=-960°$ болса, $\sin\beta$, $\cos\beta$, $\mathrm{tg}\beta$ және $\mathrm{ctg}\beta$-ның мәндерін табу қажет.

а) $\beta=\frac{10\pi}{3}=3\pi+\frac{\pi}{3}=2\pi+\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)$ болғандықтан, келтіру формулаларын қолдансақ,

$$\sin\frac{10\pi}{3}=\sin\left(2\pi+\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos\frac{10\pi}{3}=\cos\left(2\pi+\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2},$$

$$\mathrm{tg}\frac{10\pi}{3}=\mathrm{tg}\left(3\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3},$$

$$\mathrm{ctg}\frac{10\pi}{3}=\mathrm{ctg}\left(3\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\mathrm{ctg}\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

ә) $\beta=-960^\circ=-3\cdot360^\circ+120^\circ=-3\cdot360^\circ+(90^\circ+30^\circ)$. Ендеше,

$\sin(-960^\circ)=\sin(-3\cdot360^\circ+(90^\circ+30^\circ))=\sin(90^\circ+30^\circ)=\cos30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$\cos(-960^\circ)=\cos(-3\cdot360^\circ+(90^\circ+30^\circ))=\cos(90^\circ+30^\circ)=-\sin30^\circ=-\dfrac{1}{2}$,

$$\operatorname{tg}(-960^\circ)=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}=-\sqrt{3},\quad \operatorname{ctg}(-960^\circ)=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

2-мысал. Кез келген α үшін

$$\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos^2\alpha}{1-\cos^2(\pi+\alpha)}+\frac{\cos^2(2\pi-\alpha)\sin^2\alpha}{1-\sin^2(2\pi+\alpha)}=1$$

теңдігі орындалатынын дәлелдейік.

Келтіру формулаларын қолданамыз: $\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sin^2\alpha$;

$\cos^2(\pi+\alpha)=\cos^2\alpha$; $\cos^2(2\pi-\alpha)=\cos^2\alpha$; $\sin^2(2\pi+\alpha)=\sin^2\alpha$.

$$\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos^2\alpha}{1-\cos^2(\pi+\alpha)}+\frac{\cos^2(2\pi-\alpha)\sin^2\alpha}{1-\sin^2(2\pi+\alpha)}=\frac{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}+$$

$$+\frac{\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1.$$

Ескерту: Келтіру формулалары кез келген α бұрышы үшін орындалады. Мысалы, $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$ формуласын былай ұғыну қажет: кез келген α бұрышы үшін $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$ теңдігі орындалады. $\alpha=\frac{\pi}{12}$ деп алсақ, $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{12}\right)=-\sin\frac{\pi}{12}$ теңдігі; $\alpha=\frac{7\pi}{12}$ десек, $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{7\pi}{12}\right)=-\sin\frac{7\pi}{12}$ алынады.

Келтіру формуларын жоғарыдағы кесте түрінде есте сақтау қиын.

$\sin x$ пен $\cos x$, $\mathrm{tg}x$ пен $\mathrm{ctg}x$ функциялары — өзара «ұқсас» функциялар. Келтіру формулалары кестесін мұқият талдасақ, аргументке тәуелді функцияның атауы өзгермейді немесе ұқсас функцияға өзгереді, таңбасы да «+» не «–» таңбаларымен ауысып отыратынын көреміз.

Сондықтан α-ны сүйір бұрыш деп алып, төмендегі келтіру формулаларын қолдану ережелерін есте сақтаса жеткілікті.

1-ереже (таңбасын анықтау). α бұрышын сүйір деп алып, $k\cdot\dfrac{\pi}{2}+\alpha$ немесе $(90°k+\alpha)$ бұрышына, $\pi k+\alpha$ немесе $(180°k+\alpha)$ бұрышына сәйкес келетін радиус-вектор қай координаталық ширекте орналасқанын анықтап, берілген функцияның осы ширектегі таңбасын қоямыз.

2-ереже (функцияның атауына қатысты). Егер функцияның аргументінде тек $\dfrac{\pi}{2}$-ге ($90°$-қа) еселі $\dfrac{\pi}{2}\cdot k$, яғни $90°\cdot k$ түріндегі қосылғыштар бар болса және π-ге ($180°$-қа) еселі болмаса, функцияның атауы ұқсас функцияға ауысады және $\dfrac{\pi}{2}\cdot k$ $(90°\cdot k)$ түріндегі қосылғыштар алынып тасталады. Мұндағы $k\in Z$.

Егер функция аргументінде πk, яғни $180°\cdot k$ түріндегі қосылғыштар бар болса, функцияның атауы өзгермейді.

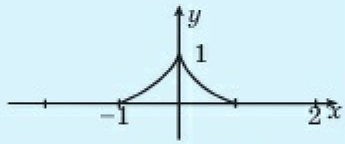
Мысалы, $\sin\left(\dfrac{7\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha$, себебі $\dfrac{7\pi}{2}+\alpha=3\pi+\dfrac{\pi}{2}+\alpha$ бұрышы IV координаталық ширекте орналасады. Бұл ширекте синустың таңбасы теріс, сондықтан «–» таңбасы қойылды.

Қосылғыш $7\cdot\dfrac{\pi}{2}$ $\left(\dfrac{\pi}{2}\text{-ге еселі}\right)$ болғандықтан, синус ұқсас функция косинусқа өзгерді.

1. Қандай бұрыштарды толықтауыш бұрыштар деп атайды?
2. Қандай тригонометриялық функцияларды ұқсас функциялар деп атайды?
3. Толықтауыш бұрыштардағы ұқсас функциялар мәндерінің теңдігін дәлелдеңдер.
4. Келтіру формулалары дегеніміз не? Оны қалай түсінесіңдер?

Практикалық жұмыс

4.24-суретте периоды $T = 2$ болатын $y = f(x)$ функциясы графигінің $[-1;1]$ аралығындағы бөлігі бейнеленген. Бұл функция графигінің $[-2;5]$ аралығындағы бейнесін салыңдар.



4.24-сурет

ЕСЕПТЕР

А

4.61. 1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$; 2) $\cos(2\pi-\alpha)$; 3) $\mathrm{ctg}(360^\circ-\alpha)$;

4) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$; 5) $\sin(2\pi+\alpha)$; 6) $\cos(90^\circ-\alpha)$;

7) $\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$; 8) $\mathrm{tg}(180^\circ-\alpha)$; 9) $\sin(270^\circ-\alpha)$

өрнектерін α бұрышының тригонометриялық функцияларымен алмастырыңдар.

4.62. $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ аралығындағы бұрыштың тригонометриялық функциясына келтіріңдер:

1) $\cos 0{,}7\pi$; 2) $\mathrm{ctg}\left(-\frac{3\pi}{7}\right)$; 3) $\sin 1{,}6\pi$; 4) $\mathrm{tg}\left(-\frac{9\pi}{5}\right)$.

4.63. $(0^\circ;\ 90^\circ)$ аралығындағы бұрыштың тригонометриялық функциясына келтіріңдер:

1) $\mathrm{tg}137^\circ$; 2) $\sin(-178^\circ)$; 3) $\sin680^\circ$; 4) $\cos(-1000^\circ)$.

4.64. 1) $\alpha=\frac{3\pi}{2}$; 2) $\alpha=\frac{3\pi}{4}$; 3) $\alpha=\frac{5\pi}{6}$ деп алып, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$ және $\mathrm{ctg}\alpha$-ны табыңдар.

Өрнектің мәнін табыңдар (**4.65 – 4.66**):

4.65. 1) $\sin240^\circ$; 2) $\cos(-210^\circ)$; 3) $\cos\frac{7\pi}{6}$; 4) $\cos\frac{4\pi}{3}$.

3) $\cos\frac{7\pi}{6}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4.66. 1) $\sin 330°$; 2) $\mathrm{tg}\,300°$; 3) $\mathrm{ctg}(-225°)$;
4) $\sin(-150°)$; 5) $\mathrm{tg}(-225°)$; 6) $\cos 120°$.

5) $\mathrm{tg}(-225°)=-\mathrm{tg}\,225°=-\mathrm{tg}(180°+45°)=-\mathrm{tg}\,45°=-1$.

B

4.67. $\mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{10}{11}$ деп алып, $\mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$-ның мәнін табыңдар.

4.68. Есептеңдер:

1) $3\sin\frac{\pi}{2}+4\cos\frac{2\pi}{3}+6\sin\frac{13\pi}{6}$;

2) $2\mathrm{tg}\,180°-0{,}5\sin(-270°)+0{,}5\cos 180°$.

4.69. $\mathrm{tg}\,15°=2-\sqrt{3}$ деп алып, $2\mathrm{tg}\,1095°+\mathrm{ctg}\,975°-\mathrm{tg}(-195°)$ өрнегінің мәнін табыңдар.

4.70. Егер α, β және γ үшбұрыштың бұрыштары болса,

1) $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\frac{\gamma}{2}$; 2) $\mathrm{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\frac{\gamma}{2}$

тепе-теңдіктерін дәлелдеңдер.

4.71. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\sin^2(\pi+\alpha)$; 2) $\mathrm{tg}^2\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$; 3) $\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$;

4) $\sin^2(180°-x)+\sin^2(270°-x)$; 5) $\cos^2(\pi+x)+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$.

2) $\mathrm{tg}^2\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=(-\mathrm{ctg}\,\alpha)^2=\mathrm{ctg}^2\,\alpha$.

4.72. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\left(\sin(\pi+\alpha)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)^2+\left(\cos(2\pi-\alpha)-\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\right)^2$;

2) $\left(\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)^2-\left(\mathrm{ctg}(\pi+\alpha)+\mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\right)^2$;

3) $\sin 160°\cos 110° + \sin 250°\cos 340° + \operatorname{tg} 110°\operatorname{tg} 340°$;

4) $\operatorname{tg} 18°\operatorname{tg} 288° + \sin 32°\sin 148° - \sin 302°\sin 122°$.

C

4.73. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $\sin(60°-\alpha)=\cos(30°+\alpha)$; 2) $\operatorname{ctg}(80°-\alpha)=\operatorname{tg}(10°+\alpha)$;

3) $$\frac{\cos^2(\pi-\alpha)+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos(\pi+\alpha)\cos(2\pi-\alpha)}{\operatorname{tg}^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{ctg}^2\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}=\cos^2\alpha.$$

4.74. Өрнектің мәнін табыңдар:

1) $\operatorname{tg} 15°\operatorname{tg} 30°\operatorname{tg} 45°\operatorname{tg} 60°\operatorname{tg} 75°$; 2) $\operatorname{ctg} 18°\operatorname{ctg} 36°\operatorname{ctg} 54°\operatorname{ctg} 72°$;

3) $\operatorname{tg} 1°\operatorname{tg} 2°\ldots\operatorname{tg} 88°\operatorname{tg} 89°$; 4) $\operatorname{ctg} 88°\operatorname{ctg} 86°\ldots\operatorname{ctg} 4°\operatorname{ctg} 2°$.

4.75. Есептеңдер:

1) $\sin 225°\cdot\cos 120°\cdot\operatorname{tg} 330°\cdot\operatorname{ctg} 240°$;

2) $\sin\frac{7\pi}{4}\cdot\cos\frac{7\pi}{6}\cdot\operatorname{tg}\frac{5\pi}{3}\cdot\operatorname{ctg}\frac{4\pi}{3}$;

3) $\cos(-7{,}9\pi)\cdot\operatorname{tg}(-1{,}1\pi)-\sin 5{,}6\pi\cdot\operatorname{ctg} 4{,}4\pi$;

4) $\sin 5{,}9\pi\cdot\operatorname{tg}(-0{,}6\pi)+\cos 3{,}6\pi\cdot\operatorname{ctg}(-4{,}9\pi)$.

Қайталауға арналған жаттығулар

4.76. 1) $36°$; 2) $240°$; 3) $\frac{5\pi}{6}$; 4) 3-ке тең бұрыштардың тригонометриялық функцияларының таңбаларын анықтаңдар.

4.77. Теңсіздікті шешіңдер:

1) $\frac{2x^2-7x+5}{4-x^2}<0$; 2) $\frac{3x^2+4x-7}{x^2+8x+7}\leqslant 0$.

Оқы, қызық!

Халықаралық Ғарыш станциясының Canadarm-2 манипуляторының әр буынының иілуі, бұрылуы тригонометриялық есептеулер арқылы басқарылады. Осы манипулятордың көмегімен ғарышкердің кеңістіктегі орны да бақыланады.

4.5. Тригонометрия формулалары

Тақырыпты оқып-үйрену барысында сендер:

- негізгі тригонометриялық тепе-теңдіктерді есептер шығарғанда қолданасыңдар;
- бұрыштардың қосындысы мен айырымының, қос және жарты бұрыштың тригонометриялық формулаларын қорытып шығарасыңдар, қолданасыңдар;
- тригонометриялық қосындыны көбейтіндіге және көбейтіндіні қосындыларға түрлендіруді үйреніп, оны қолданасыңдар;
- тригонометриялық өрнектерді тепе-тең түрлендіруді үйренесіңдер.

4.5.1. Негізгі тригонометриялық тепе-теңдіктерді тригонометриялық өрнектерді түрлендіруде қолдану

Бірдей аргументті тригонометриялық өрнектерді түрлендіргенде негізгі тригонометриялық тепе-теңдікті

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \qquad (1)$$

және анықтамадан алынатын

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \mathrm{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad (2)$$

формулаларынан шығатын салдарларды қолданады.
Айталық, (2) формуладан

$$\mathrm{tg}\alpha\ \mathrm{ctg}\alpha=1 \qquad (3)$$

тепе-теңдігін, ал (1) тепе-теңдікті сәйкесінше $\sin^2\alpha$ және $\cos^2\alpha$ өрнектеріне мүшелеп бөліп,

$$1+\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}, \qquad (4)$$

$$1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha} \qquad (5)$$

формулаларын аламыз. Енді осы формулаларды күрделірек тригонометриялық өрнектерді түрлендіруге қолданайық.

1-мысал. $\sin\alpha\cos^2\alpha(1+\mathrm{tg}^2\alpha)+\cos\alpha\sin^2\alpha(1+\mathrm{ctg}^2\alpha)$ өрнегін ықшамдайық.

(4) және (5) формулалар бойынша $\sin\alpha\cos^2\alpha(1+\mathrm{tg}^2\alpha)+\cos\alpha\times$ $\times\sin^2\alpha(1+\mathrm{ctg}^2\alpha)=\sin\alpha\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\cos^2\alpha+\cos\alpha\sin^2\alpha\dfrac{1}{\sin^2\alpha}=\sin\alpha+\cos\alpha.$

2-мысал. $2(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)-3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)$ өрнегін ықшамдайық.

(1) формуланың екі жақ бөлігін де квадраттап,

$$1=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2=\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha$$

теңдігін аламыз. Осыдан

$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2\cos^2\alpha\sin^2\alpha.$$

Осы сияқты

$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=(\sin^2\alpha)^3+(\cos^2\alpha)^3=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\times$ $\times\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)=\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\times$ $\times\cos^2\alpha=1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha.$

Берілген өрнекті былай түрлендіруге болады:

$2(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)-3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)=2(1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha)-3(1-2\sin^2\alpha\cos^2)=$ $=2-6\sin^2\alpha\cos^2\alpha-3+6\sin^2\alpha\cos^2\alpha=-1.$

3-мысал. $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\cos^{-1}\alpha}{\cos\alpha-\operatorname{ctg}\alpha}=\operatorname{tg}\alpha\cos^{-1}\alpha$ тепе-теңдігін дәлелдейік.

Әдетте тепе-теңдікті дәлелдеу үшін оның бір бөлігін тепе-тең түрлендірулер арқылы берілген тепе-теңдіктің екінші бөлігіне тең болатынын көрсетсе, жеткілікті. Берілген тепе-теңдіктің сол жақ бөлігін түрлендірсек,

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha-\cos^{-1}\alpha}{\cos\alpha-\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{\cos^{-1}\alpha(\sin\alpha-1)}{\cos\alpha\left(1-\dfrac{1}{\sin\alpha}\right)}=\frac{\cos^{-1}\alpha(\sin\alpha-1)}{\operatorname{ctg}\alpha(\sin\alpha-1)}=\operatorname{tg}\alpha\cos^{-1}\alpha.$$

Дәлелдеу керегі де осы.

4-мысал. Егер $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=2{,}3$ болса, $\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha$-ның мәнін табу керек.

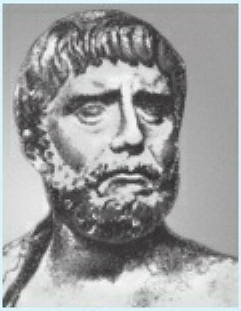
$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=2{,}3$ теңдігінің екі жақ бөлігін квадраттасақ,

$$2{,}3^2=5{,}29=\operatorname{tg}^2\alpha+2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha=\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha+2,$$

$\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha+2=5{,}29$. Осыдан $\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha=5{,}29-2=3{,}29$.

Тарихқа шолу

Тригонометрия элементтерін адамзат ежелгі замандардан бастап, бұрыштарды өлшеу мұқтаждықтары барысында қолдана бастаған. Мәселен, біздің заманымызға дейінгі екі мыңыншы жылдары ежелгі вавилондықтар дөңгелек хордасының ұзындығын дөңгелектің диаметрі мен сәйкес сегмент биіктіктері арқылы есептей білгендіктері жөнінде осы күнге дейінгі сақталған қыш кестелері растайды.

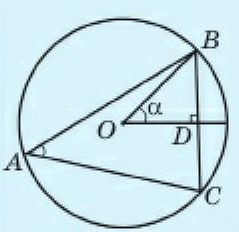

Фалес

Ал Милеттік Фалес (шамамен б.з.д. 625–547 жылдар) өз еңбектерінде Ежелгі мысырлық ғалымдар дененің биіктігін оның көлеңкесінің ұзындығы бойынша таба білгендерін атап өткен.

Ең алғашқы жүйелі тригонометриялық кестелерді К. Птолемей (б.з.д. II ғ.) жасаған. Ол өз еңбектерінде 60-тық санау жүйесін қолданып, шеңберді өзара тең 360 бөлікке бөліп қарастырған және оның ықпалы осы күнге дейін сақталып келеді (360°; минут, секунд және т.с.с.). Жалпы б.з.д. II ғасырда грек ғалымдары шеңбер хордалары ұзындықтарының кестесін кеңінен қолдана білген. Бұл хордалардың жартысы осы күнгі синус ұғымына келеді.


Ұлықбек
(1394–1449)

Шынында да, 4.25-суретте BC хордасына керілген шеңберге іштей сызылған α бұрышының синусы BC хордасының жартысына тең: $\sin\alpha = \dfrac{BD}{BO} = BD$, себебі $BO = 1$.



4.25-сурет

Ал үнді ғалымдары есептеу жұмыстарында синуспен қатар косинусты да қолданған және олар үлкен дәлдікпен синус пен косинустың кестелерін құрастырған. Синустар мен тангенстер кестелері әл-Хорезмидің (787–850) астрономиялық трактаттарында да кездеседі. Тригонометрияны астрономияға қатыссыз жүйелі түрде зерттеген Туса қаласында туып-өскен (Әзербайжанның оңтүстігі) Насиреддин ат-Туси (1201–1274) болды. Ол өз трактаттарында синустар теоремасын дәлелдеген.

Сонымен, Орта Азия ғалымдары араб тілінде тригонометриялық функциялардың арақатынастары жөнінде түсініктемелері мен дәлелдеулері бар астрономиялық және тригонометриялық кестелер — зиджилерді жасап шығара бастады. Осы күнге дейін жүздеген зиджилер сақталған, оның ішінде самарқандық Ұлықбектің кестелері де бар олар көпке дейін дәлдігі ең жоғары кестелер болды.

Ұлықбек обсерваториясының бұрыш өлшеуіш құралы

Ол обсерватория салғызып, арнайы құралдар көмегімен көптеген өлшеулер жүргізген. Сол құралдардың бірі — ұзындығы 60 м болатын бұрыш өлшеуіш құралы.

Еуропалық математиктер ішінде тригонометрияны жүйелі түрде мазмұндағандардың алғашқысы неміс математигі И. Мюллер (1436–1476, оны көбінесе туған жеріне байланысты Региомонтан деп атайды). XVIII ғасырға дейін тригонометрия толық қалыптаса қоймаған еді. Бірыңғай шартты белгілер болмағандықтан, тригонометриялық формулалар сөзбен жазылып келді, дөңгелек ширектеріндегі тригонометриялық функциялардың таңбасында толық анықталмаған еді.

Л. Эйлер (1707–1783) тригонометриялық функцияларды анықтағанда тригонометриялық шеңберлерді қарастырып, бірнеше негізгі формулалар көмегімен өзге барлық формулаларды қорытып шығарды. Ол тригонометриялық функцияларды өлшемсіз сандар ретінде қарастырып, оның кез келген сан аргументіндегі таңбасы жөніндегі сұрақты толық шешті.

Тригонометриялық функциялардың қазіргі атаулары XVI–XVIII ғасырларда пайда болған. Синус сөзі латын тілінен аударғанда «дөңестік» деген мағынаны білдіреді. Косинустағы «ко» қосымшасы латынның complementom — толықтауыш деген мағынаны білдіреді. Осы күнгі қолданылып жүрген $\sin x$ және $\cos x$ белгілеулері 1739 жылы И. Бернуллидің Л. Эйлерге жазған хатында алғаш рет ұсынылған. Бұл белгілеулерді соңынан Л. Эйлер және өзгелер кеңінен қолдана бастады.

ЕСЕПТЕР

A

4.78. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\mathrm{ctg}\beta - \dfrac{\cos\beta - 1}{\sin\beta}$; 2) $\dfrac{1}{\sin\alpha - 1} - \dfrac{1}{\sin\alpha + 1}$;

3) $\dfrac{1 - \mathrm{ctg}\gamma}{\mathrm{tg}\gamma - 1}$; 4) $\dfrac{\sin^2\theta - 1}{\cos^2\theta - 1} + \mathrm{tg}\theta\,\mathrm{ctg}\theta$;

5) $\mathrm{tg}^2\alpha(\sin^2\alpha - 1)$; 6) $\cos^2\alpha - (\mathrm{ctg}^2\alpha + 1)\sin^2\alpha$.

4.79. Өрнекті түрлендіріңдер:

1) $\mathrm{tg}(-\alpha)\cos\alpha + \sin\alpha$; 2) $\cos^2\alpha\,\mathrm{tg}^2(-\alpha) - 1$;

3) $\dfrac{\mathrm{ctg}(-\beta)\sin\beta}{\cos\beta}$; 4) $\dfrac{1 - \mathrm{tg}(-x)}{\sin x + \cos(-x)}$;

5) $\mathrm{ctg}\alpha\sin(-\alpha) - \cos(-\alpha)$; 6) $\mathrm{tg}(-u)\,\mathrm{ctg}u + \sin^2 u$;

7) $\dfrac{1 - \sin^2(-y)}{\cos y}$; 8) $\dfrac{\mathrm{tg}(-x) + 1}{1 - \mathrm{ctg}\,x}$.

4.80. Өрнектің мәні α-ға тәуелсіз болатынын көрсетіңдер:

1) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$; 2) $(\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{ctg}\alpha)^2 - (\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{ctg}\alpha)^2$;

3) $\dfrac{1}{1 + \mathrm{tg}^2\alpha} + \dfrac{1}{1 + \mathrm{ctg}^2\alpha}$; 4) $\dfrac{1 + \sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \dfrac{1 - \sin\alpha}{\cos\alpha}$;

5) $\dfrac{2 - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{3\sin^2\alpha + 3\cos^2\alpha}$; 6) $\dfrac{\sin^4\alpha - \cos^4\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$.

3)

$$\frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2\alpha} + \frac{1}{1 + \mathrm{ctg}^2\alpha} = \left| \begin{array}{l} 1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \\ 1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha} \end{array} \right| = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

B

4.81. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер (**4.81—4.82**):

1) $\dfrac{1+2\sin\alpha\cos\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}=1;$ 2) $\dfrac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha+1}{\sin^2\alpha}=2;$

3) $(2-\sin\alpha)(2+\sin\alpha)+(2-\cos\alpha)(2+\cos\alpha)=7;$

4) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha.$

4.82. 1) $\mathrm{ctg}\,\alpha+\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{1}{\sin\alpha};$

2) $\dfrac{1-2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\sin\alpha-\cos\alpha;$

3) $\dfrac{1-\sin^2 x}{1-\cos^2 x}=\dfrac{1}{\mathrm{tg}^2 x};$ 4) $\dfrac{\mathrm{ctg}\,x}{\mathrm{ctg}\,x+\mathrm{tg}\,x}=\cos^2 x.$

4) $\dfrac{\mathrm{ctg}\,x}{\mathrm{ctg}\,x+\mathrm{tg}\,x}=\dfrac{\dfrac{\cos x}{\sin x}}{\dfrac{\cos x}{\sin x}+\dfrac{\sin x}{\cos x}}=\dfrac{\cos x}{\sin x\left(\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin x\cdot\cos x}\right)}=\cos^2 x.$

4.83. Өрнектің ең үлкен мәнін табыңдар:

1) $1-(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha);$ 2) $1-\sin\alpha\ \cos\alpha\ \mathrm{tg}\,\alpha;$

3) $\cos^2\alpha\ \mathrm{tg}^2\alpha+5\cos^2\alpha-1;$ 4) $\sin\alpha+3\sin^2\alpha+3\cos^2\alpha.$

4.84. Есептеңдер:

1) $1+\sin\dfrac{\pi}{6}+\sin^2\dfrac{\pi}{6}+\sin^3\dfrac{\pi}{6};$ 2) $1-\cos\dfrac{\pi}{4}+\cos^2\dfrac{\pi}{4}-\cos^3\dfrac{\pi}{4};$

3) $1-\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{6}+\mathrm{tg}^2\dfrac{\pi}{6}-\mathrm{tg}^3\dfrac{\pi}{6};$ 4) $1+\cos\dfrac{\pi}{6}+\cos^2\dfrac{\pi}{6}+\cos^3\dfrac{\pi}{6}.$

4.85. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}+\mathrm{tg}\,\alpha;$ 2) $\mathrm{ctg}\,x+\dfrac{\sin x}{1+\cos x};$

3) $\dfrac{1-\sin^2 x}{1-\cos^2 x}+\mathrm{tg}\,x\cdot\mathrm{ctg}\,x;$ 4) $(1-\cos^2\alpha)\mathrm{tg}^2\alpha+1-\mathrm{tg}^2\alpha;$

5) $(\mathrm{ctg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\alpha)^2-(\mathrm{ctg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\alpha)^2;$ 6) $\mathrm{ctg}^6 x-\dfrac{\cos^2 x-\mathrm{ctg}^2 x}{\sin^2 x-\mathrm{tg}^2 x}.$

6) $\operatorname{ctg}^6 x - \dfrac{\cos^2 x - \operatorname{ctg}^2 x}{\sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x} = \operatorname{ctg}^6 x - \dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \cdot \dfrac{1 - \dfrac{1}{\sin^2 x}}{1 - \dfrac{1}{\cos^2 x}} =$

$= \operatorname{ctg}^6 x - \operatorname{ctg}^2 x \cdot \dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \cdot \dfrac{\sin^2 x - 1}{\cos^2 x - 1} = \operatorname{ctg}^6 x - \operatorname{ctg}^4 x \cdot \dfrac{-\cos^2 x}{-\sin^2 x} =$

$= \operatorname{ctg}^6 x - \operatorname{ctg}^6 x = 0.$

4.86. Өрнекті түрлендіріңдер:

1) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2} + \alpha\right)\operatorname{tg}(\pi - \alpha) + \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right)\sin(\pi - \alpha);$

2) $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2} + \alpha\right)\operatorname{ctg}(\pi - \alpha) + \operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right)\operatorname{tg}(2\pi - \alpha);$

3) $(\operatorname{ctg}(6,5\pi-\alpha)\cos(-\alpha)+\cos(\pi-\alpha))^2+2\sin^2(\pi-\alpha)\operatorname{ctg}(\alpha-\pi);$

4) $\left(\cos(2,5 - \alpha)\operatorname{tg}(3\pi + \alpha) + \sin(-\alpha)\operatorname{tg}\left(\dfrac{5\pi}{2} + \alpha\right)\right)^2 +$

$+ \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2} + \alpha\right).$

C

4.87. Жүйелердегі t параметрінен құтылыңдар:

1) $\begin{cases} x = 5\cos t, \\ y = 5\sin t; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 5\sin t; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = \sin t + \cos t, \\ y = \sin t \cos t. \end{cases}$

4.88. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $(\operatorname{ctg}\alpha-\cos\alpha)(\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha)=(1+\cos\alpha)(1-\sin\alpha);$
2) $1+\cos\alpha-\sin\alpha-\operatorname{ctg}\alpha=(1-\operatorname{ctg}\alpha)(1-\sin\alpha).$

4.89. Егер $\operatorname{tg}\alpha=2$ болса,

1) $\dfrac{3\sin\alpha - 5\cos\alpha}{4\sin\alpha + \cos\alpha};$ 2) $\dfrac{2\sin^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}{3\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha};$

3) $\dfrac{\sin^3\alpha - 2\cos^3\alpha}{2\sin^3\alpha + \cos^3\alpha};$ 4) $\dfrac{\sin\alpha + 3\cos\alpha}{(\sin\alpha - \cos\alpha)\operatorname{ctg}^2\alpha}$

өрнектерінің мәндерін есептеңдер.

4.90. Егер $\operatorname{ctg}\alpha=-2$ болса,

1) $\dfrac{2\sin\alpha+3\cos\alpha}{5\sin\alpha-\cos\alpha}$; 2) $\dfrac{2\cos^2\alpha-7\sin^2\alpha}{3\cos^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha}$;

3) $\dfrac{\cos\alpha+2\sin\alpha}{\sin^3\alpha-2\cos^3\alpha}$; 4) $\dfrac{(\sin\alpha+3\cos\alpha)\operatorname{tg}^2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$

өрнектерінің мәндерін есептеңдер.

4.91. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $\dfrac{\cos\alpha\operatorname{ctg}\alpha-\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-\sin\alpha\cos\alpha}=\dfrac{1}{\sin\alpha}-\dfrac{1}{\cos\alpha}$;

2) $\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha-\cos^2\alpha\sin\alpha-\sin^2\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha+\cos\alpha\operatorname{ctg}\alpha}=\sin\alpha\cos\alpha$.

4.92. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $\sin^2\alpha\cos^2\beta-\cos^2\alpha\sin^2\beta=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$;

2) $\cos^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$;

3) $(\sin\alpha+\sin\beta)(\sin\alpha-\sin\beta)-(\cos\alpha+\cos\beta)(\cos\beta-\cos\alpha)=0$;

4) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$.

Қайталауға арналған жаттығулар

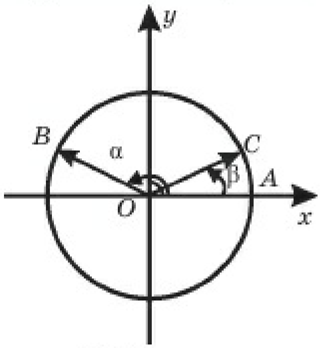
4.93. $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$, $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ деп алып, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ және $\operatorname{ctg}\alpha$-ның мәндерін табыңдар.

4.94. $\begin{cases} x+2y\leqslant 4, \\ y\leqslant x^2+6x-7 \end{cases}$ теңсіздіктер жүйесімен анықталатын фигураны кескіндеңдер.

4.95. $x^2-3x+2=0$ теңдеуін графиктік тәсілмен шешіңдер.

4.5.2. Қосу формулалары

Екі бұрыштың қосындысы мен айырымының тригонометриялық функцияларын осы бұрыштардың тригонометриялық функциялары арқылы өрнектейтін формулаларды ***қосу формулалары*** деп атайды. Енді осы формулаларды қорытып шығарайық.



4.25-сурет

Айталық, бізге α және β бұрыштары берілсін және $\alpha \geqslant \beta$, $\alpha-\beta \leqslant \pi$ болсын. Бірлік тригонометриялық шеңбердің бойында $B(x_1;\ y_1)$ нүктесі α бұрышын, $C(x_2;\ y_2)$ нүктесі β бұрышын анықтасын (4.25-сурет). $\overrightarrow{OB}$ векторының координаталары $(x_1;y_1)$, $\overrightarrow{OC}$ векторының координаталары $(x_2;y_2)$ болады. Векторлардың скалярлық көбейтіндісінің анықтамасы бойынша

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=x_1x_2+y_1y_2. \qquad (1)$$

Синус пен косинустың анықтамасына сәйкес $\sin\alpha=y_1$, $\sin\beta=y_2$, $\cos\alpha=x_1$, $\cos\beta=x_2$. (1) теңдікті былай жазамыз:

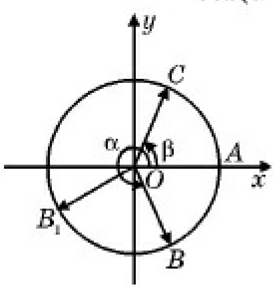
$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta. \qquad (2)$$

Екінші жағынан, $\angle BOC=\alpha-\beta$ болғандықтан және векторлардың скалярлық көбейтіндісінің екінші анықтамасы бойынша

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\left|\overrightarrow{OB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OC}\right|\cos(\angle BOC)=\cos(\alpha-\beta). \qquad (3)$$

(2) және (3) теңдіктерді салыстырып,

$$\boldsymbol{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta} \qquad (4)$$



4.26-сурет

формуласын аламыз. Мұнда $\left|\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OC}\right|=1$ теңдігі ескеріледі.

$\alpha-\beta>\pi$ болса (4.26-сурет),

$\angle BOC=2\pi-(\alpha-\beta)<\pi$ және

$\cos(\angle BOC)=\cos(2\pi-(\alpha-\beta))=\cos(\alpha-\beta)$

теңдігі орындалады. Бұл жағдайда да (4) формула орындалады.

Ескерту. (4) формуланы қорытып шығарғанда $0\leqslant\alpha<2\pi$, $0\leqslant\beta<2\pi$ теңсіздіктері орындалады деп есептедік. Іс жүзінде бұл формула кез келген α және β бұрыштары үшін орындалады. Бұл жағдайларда қосымша $2n\pi$ қосылғышы ғана пайда болуы мүмкін.

Сонымен, кез келген α және β бұрыштары үшін

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\ \cos\beta+\sin\alpha\ \sin\beta$$

формуласы орындалатынын дәлелдедік. Осыдан

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\ \cos\beta-\sin\alpha\ \sin\beta \qquad (5)$$

формуласы алынады. Шынында да,

$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha-(-\beta))=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)=\cos\alpha\cos\beta-$ $-\sin\alpha\ \sin\beta$.

Дәлелдеу керегі де осы.

Орындап көріңдер

Дәл осылай

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\ \cos\beta+\cos\alpha\ \sin\beta, \qquad (6)$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\ \cos\beta-\cos\alpha\ \sin\beta \qquad (7)$$

формулаларын өздерің дәлелдеп көріңдер.

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)=$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

және

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha+(-\beta))=\sin\alpha\ \cos(-\beta)+\cos\alpha\ \sin(-\beta)=$$
$$=\sin\alpha\ \cos\beta-\cos\alpha\ \sin\beta.$$

(4)–(7) формулаларды синус пен косинус үшін ***қосу формулалары*** деп атайды. Сонымен қатар

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta};\qquad \operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta};$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta};\qquad \operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta}. \qquad (8)$$

Шынында да,

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}=$$

$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Орындап көріңдер

Өзге формулалар да осы сияқты дәлелденеді. Оны өздерің дәлелдеп көріңдер.

1-мысал. а) $\cos\frac{7\pi}{12}$; ә) $\sin 105°$; б) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$ өрнектерінің мәндерін анықтау қажет.

а) $\cos\frac{7\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}\left(1-\sqrt{3}\right)}{4}.$$

ә) $\sin105°=\sin(60°+45°)=\sin60°\cos45°+\cos60°\sin45°=$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)}{4}.$$

б) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}.$

2-мысал. $\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha$ өрнегінің ең үлкен мәнін анықтау қажет.

Берілген өрнекті $\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha=2\left(\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)$

түрінде жазып және $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$, $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ болатынын ескерсек, $\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha=2\left(\sin\frac{\pi}{6}\cos\alpha-\cos\frac{\pi}{6}\sin\alpha\right)=2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$.

Теңдіктегі $2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$ өрнегінің ең үлкен мәні 2-ге тең. Онда берілген өрнектің де ең үлкен мәні 2.

1. Қандай формулаларды қосу формулалары деп атайды?
2. (4)–(8) формулаларды дәлелдеп көрсетіңдер.

Практикалық жұмыс

Банк 2016 жылы депозитке теңгемен салынған қаражаттың 10,5%-ын құрайтын жылдық сыйақы төлейді. Депозитке салынған 1 000 000 теңге мөлшері 2 жылдан соң қандай болады?

ЕСЕПТЕР

А

4.96. Қосу формулаларын пайдаланып, өрнекті түрлендіріңдер:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$; 2) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+y\right)$; 3) $\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$;

4) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$; 5) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$; 6) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+y\right)$;

7) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$; 8) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$.

4.97. Есептеңдер:

1) $\cos40°\cos20°-\sin40°\sin20°$; 2) $\cos70°\cos40°+\sin70°\sin40°$.

Өрнекті ықшамдаңдар **(4.98 — 4.100):**

4.98. 1) $\cos5x\cos2x+\sin5x\sin2x$; 2) $\cos3x\cos x-\sin3x\sin x$;
3) $\cos\beta\sin5\beta-\sin\beta\cos5\beta$; 4) $\sin3\alpha\cos2\alpha+\sin2\alpha\cos3\alpha$.

4.99. 1) $\sin(x+y)-\cos x\sin y$; 2) $\cos(x-y)-\sin x\sin y$;
3) $\sin\alpha\cos\beta-\sin(\alpha-\beta)$; 4) $\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha-\beta)$.

4.100. 1) $\frac{\operatorname{tg}2x+\operatorname{tg}3x}{1-\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}3x}$; 2) $\frac{\operatorname{tg}5x-\operatorname{tg}2x}{1+\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}5x}$;

3) $\frac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}$; 4) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$;

5) $\frac{\cos\frac{3\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}-\sin\frac{3\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)}$; 6) $\frac{\cos\frac{5\pi}{6}\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{5\pi}{6}\sin\frac{\pi}{3}}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)}$.

6) $$\frac{\cos\frac{5\pi}{6}\cdot\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{5\pi}{6}\cdot\sin\frac{\pi}{3}}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)}=\frac{\cos\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)}=\frac{\cos\frac{3\pi}{6}}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)}=0.$$

B

4.101. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $\sin(30^\circ+x)\cos x-\cos(30^\circ+x)\sin x=0,5$;

2) $\cos(60^\circ+x)\cos x+\sin(60^\circ+x)\sin x=0,5$;

3) $\dfrac{0,5\sin 20^\circ-\cos 10^\circ}{\sin 3^\circ\sin 17^\circ-\cos 3^\circ\cos 17^\circ}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

4) $\dfrac{\sin^2(x+y)+\sin^2(x-y)}{2\cos^2 x\cos^2 y}=\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}^2 y$;

5) $\dfrac{\operatorname{tg}(x-y)+\operatorname{tg} y}{\operatorname{tg}(x+y)-\operatorname{tg} y}=\dfrac{\cos(x+y)}{\cos(x-y)}$.

4.102. Теңдіктердің ақиқаттығын көрсетіңдер:

1) $\dfrac{\sin 24^\circ\cos 6^\circ-\sin 6^\circ\sin 66^\circ}{\sin 21^\circ\cos 39^\circ-\sin 39^\circ\cos 21^\circ}=-1$;

2) $\dfrac{\sin 20^\circ\cos 10^\circ+\cos 160^\circ\cos 100^\circ}{\sin 21^\circ\cos 9^\circ+\cos 159^\circ\cos 99^\circ}=1$;

3) $\dfrac{\cos 63^\circ\cos 3^\circ+\cos 87^\circ\cos 27^\circ}{\cos 132^\circ\cos 72^\circ-\cos 42^\circ\cos 18^\circ}=1$;

4) $\dfrac{\cos 64^\circ\cos 4^\circ-\cos 86^\circ\cos 26^\circ}{\cos 71^\circ\cos 3^\circ+\cos 87^\circ\cos 19^\circ}=1$;

5) $\dfrac{\cos 66^\circ\cos 4^\circ-\cos 86^\circ\cos 24^\circ}{\cos 65^\circ\cos 5^\circ+\cos 85^\circ\cos 25^\circ}=1$;

6) $\dfrac{\cos 70^\circ\cos 10^\circ+\cos 80^\circ\cos 20^\circ}{\cos 68^\circ\cos 8^\circ+\cos 82^\circ\cos 22^\circ}=1$.

4) $\dfrac{\cos 64^\circ \cdot \cos 4^\circ - \cos 86^\circ \cdot \cos 26^\circ}{\cos 71^\circ \cdot \cos 3^\circ + \cos 87^\circ \cdot \cos 19^\circ} =$

$$= \frac{\cos 64^\circ \cdot \cos 4^\circ - \cos(90^\circ - 4^\circ) \cdot \cos(90^\circ - 64^\circ)}{\cos 71^\circ \cdot \cos 3^\circ + \cos(90^\circ - 3^\circ)\cos(90^\circ - 71^\circ)} =$$

$$= \frac{\cos 64^\circ \cdot \cos 4^\circ - \sin 4^\circ \cdot \sin 64^\circ}{\cos 71^\circ \cdot \cos 3^\circ + \sin 3^\circ \cdot \sin 71^\circ} = \frac{\cos(64^\circ + 4^\circ)}{\cos(71^\circ - 3^\circ)} = \frac{\cos 68^\circ}{\cos 68^\circ} = 1.$$

4.103. Есептеңдер:

1) $\cos 105^\circ$; 2) $\cos 15^\circ$; 3) $\sin\dfrac{\pi}{12}$;

4) $\sin\dfrac{7\pi}{12}$; 5) $\mathrm{tg}\,75^\circ$; 6) $\mathrm{ctg}\,15^\circ$.

4.104. 1) $\cos\alpha = \dfrac{5}{13}$; $\sin\beta = -0{,}6$, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$; $\pi<\beta<\dfrac{3\pi}{2}$ деп алып, $\sin(\alpha-\beta)$-ны;

2) $\mathrm{ctg}\,\alpha = \sqrt{3}$ деп алып, $\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{6}+\alpha\right)$-ны;

3) $\sin\alpha = -\dfrac{40}{41}$, $\mathrm{tg}\,\beta = \dfrac{9}{40}$, $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$ деп алып, $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)$-ны анықтаңдар.

4.105. α, β және γ — үшбұрыштың бұрыштары.

$$\sin\gamma = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

теңдігінің орындалатынын дәлелдеңдер.

4.106. 1) $\sin\alpha = \dfrac{8}{17}$, $\cos\beta = \dfrac{4}{5}$, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ деп алып, $\sin(\alpha+\beta)$ мен $\cos(\alpha-\beta)$-ны;

2) $\sin\alpha = \dfrac{9}{41}$, $\sin\beta = -\dfrac{40}{41}$, $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, $\dfrac{3\pi}{2}<\beta<2\pi$ деп алып, $\cos(\alpha+\beta)$ мен $\sin(\alpha-\beta)$-ны табыңдар.

C

4.107. 1) $\cos x = 0{,}6$; $\cos(x+y) = 0$; $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, $\pi<y<\dfrac{3\pi}{2}$ деп алып, $\cos y$-ті;

2) $\operatorname{tg}\alpha=0,5$; $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{3}$; $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$ деп алып, $\alpha+\beta$-ны;

3) $\sin\alpha=\frac{40}{41}$, $\sin\beta=-\frac{9}{41}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}<\beta<0$ деп алып, $\alpha-\beta$-ны;

4) $\operatorname{tg}\alpha=3$, $\operatorname{tg}\beta=-0,5$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}<\beta<0$ деп алып, $\alpha+\beta$-ны анықтаңдар.

4.108. 1) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{5}{11}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{3}{8}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$ болса, $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$;

2) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{3a}}{4-a}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{a-1}{\sqrt{3}}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$ болса,

$\alpha-\beta=\frac{\pi}{6}$ теңдігін дәлелдеңдер.

4.109. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $\frac{\sin(x-y)}{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y}=\cos x\cos y$; 2) $\frac{\operatorname{ctg}x+\operatorname{ctg}y}{\sin(x+y)}=\frac{1}{\sin x\sin y}$;

3) $\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y}=\frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)}$; 4) $\frac{\sin(x-y)}{\sin(x+y)}=\frac{\operatorname{ctg}y-\operatorname{ctg}x}{\operatorname{ctg}y+\operatorname{ctg}x}$.

4.110. Өрнектің ең кіші және ең үлкен мәндерін анықтаңдар:

1) $\sin x+\cos x$; 2) $\sqrt{3}\cos y-\sin y$; 3) $\sin u-\sqrt{3}\cos u$;

4) $\sqrt{2}\sin x+\sqrt{6}\cos x$; 5) $3\sin x+4\cos x$; 6) $2\sin y-5\cos y$.

4.111. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\sin^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+\sin^2 x$;

2) $\cos^2 x+\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}+x\right)$;

3) $\cos(x-y)(\operatorname{tg}x\ \operatorname{tg}y-1)+(1+\operatorname{tg}x\ \operatorname{tg}y)\cos(x+y)$;

4) $(\operatorname{ctg}x\ \operatorname{ctg}y+1)\cos(x+y)+(1-\operatorname{ctg}x\ \operatorname{ctg}y)\cos(x-y)$;

5) $\dfrac{\sin^2(x-y)+\sin^2(x+y)}{2\cos^2 x\cos^2 y}-\operatorname{tg}^2 x$;

6) $\operatorname{ctg}^2 x\operatorname{ctg}^2 y-\dfrac{\cos^2(x-y)+\cos^2(x+y)}{2\sin^2 x\sin^2 y}$.

4.5.3. Қос бұрыштың формулалары

Қосу формулаларындағы $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$, $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ және $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)$ өрнектерінде $\alpha=\beta$ деп алсақ, 2α қос аргументінің тригонометриялық функцияларын α-ға тәуелді функциялар арқылы өрнектейміз:

$$\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\cos\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha.$$

Сонымен,

$$\mathbf{\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,} \qquad (1)$$
$$\mathbf{\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha} \qquad (2)$$

Осы сияқты

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha};\qquad \operatorname{ctg}2\alpha=\frac{1}{2}(\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha). \qquad (3)$$

Бұл формулаларды *қос бұрыштың формулалары* деп атайды. (2) формуланы түрлендіріп, былай да жазуға болады:

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-2\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha$$

және

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=2\cos^2\alpha-1.$$

Осы теңдіктерден төмендегі формулалар алынады:

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2};\qquad \cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}. \qquad (4)$$

1-мысал. $\sin 3\alpha$-ны $\sin\alpha$ арқылы өрнектейік.

$\sin 3\alpha=\sin(2\alpha+\alpha)=\sin 2\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\cos 2\alpha=$
$=2\sin\alpha\cos\alpha\cos\alpha+(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\sin\alpha=$
$=2\sin\alpha\cos^2\alpha+\cos^2\alpha\sin\alpha-\sin^3\alpha=3\sin\alpha\cos^2\alpha-\sin^3\alpha=$
$=3\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)-\sin^3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha.$

Сонымен, $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$. Осы сияқты

$$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$$

формуласын да қорытып шығаруға болады.

4.5.4. Жарты бұрыштың формулалары

Егер қос бұрыштың (1)–(4) формулаларында α-ны $\frac{\alpha}{2}$ өрнегімен алмастырсақ, *жарты бұрыштың* формулаларын аламыз:

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}; \qquad \cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}; \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right); \quad (5)$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}; \qquad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}.$$

Осы теңдіктерді қолданып, төмендегі формуланы алуға болады:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Осы сияқты

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}; \qquad \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}.$$

2-мысал. Кестені қолданбай, tg22°30′-тың мәнін есептейік.

$$\operatorname{tg}22°30' = \operatorname{tg}\frac{45°}{2} = \frac{\sin 45°}{1+\cos 45°} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1 \approx 0,41.$$

1. Қос бұрыштың тригонометриялық функцияларын жазып, дәлелдеп көрсетіңдер.
2. Жарты бұрыштың тригонометриялық функцияларын жазып, дәлелдеп көрсетіңдер.

ЕСЕПТЕР

А

4.112. Бөлшекті қысқартыңдар:

1) $\dfrac{\sin 2\alpha}{2\cos\alpha}$; 2) $\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}$; 3) $\dfrac{2\cos^2\alpha}{\sin 2\alpha}$; 4) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$.

Өрнекті ықшамдаңдар **(4.113 – 4.115)**:

4.113. 1) $\cos 2\alpha + \sin^2\alpha$; 2) $\cos^2\alpha - \cos 2\alpha$;

3) $\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}$; 4) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} - \cos\alpha$.

4.114. 1) $\cos^4 2x - \sin^4 2x$; 2) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha} - \dfrac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}$;

3) $1 + \cos 2x + 2\sin^2 x$; 4) $2\sin^2\alpha - 1$;

5) $\sin^2 x + \cos^4 x - 0,75$; 6) $2\cos^2 x - 1$.

3) $1+\cos 2x+2\sin^2 x=1+\cos^2 x-\sin^2 x+2\sin^2 x=1+\cos^2 x+$ $+\sin^2 x=2$.

4.115. 1) $\cos^2\alpha - 4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$; 2) $1 - 4\sin^2 x\cos^2 x$;

3) $\mathrm{ctg}\,\alpha - \mathrm{ctg}\,2\alpha$; 4) $\dfrac{\cos 2x}{\sin x} + \dfrac{\sin 2x}{\cos x}$;

5) $\dfrac{\cos^2 x}{\mathrm{tg}\dfrac{x}{2} - \mathrm{ctg}\dfrac{x}{2}}$; 6) $\cos^4\dfrac{\alpha}{2} - \sin^4\dfrac{\alpha}{2}$.

4.116. Бөлшекті қысқартыңдар:

1) $\dfrac{\sin 40^\circ}{\sin 20^\circ}$; 2) $\dfrac{\cos 80^\circ}{\cos 40^\circ + \sin 40^\circ}$;

3) $\dfrac{\sin 100^\circ}{\cos 50^\circ}$; 4) $\dfrac{\cos 36^\circ + \sin^2 18^\circ}{\cos 18^\circ}$.

B

4.117. 1) $\mathrm{tg}\alpha=\frac{3}{4}$, $180°<\alpha<270°$ деп алып, $\sin2\alpha$, $\cos2\alpha$, $\mathrm{tg}2\alpha$ мен $\mathrm{ctg}2\alpha$-ны;

2) $\sin\alpha=-\frac{12}{13}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ деп алып, $\cos2\alpha$ мен $\sin2\alpha$-ны анықтаңдар.

2) $\sin\alpha=-\frac{12}{13}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}\Rightarrow\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{144}{169}}=$ $=-\frac{5}{13}$. $\sin2\alpha=2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha=2\cdot\left(-\frac{12}{13}\right)\cdot\left(-\frac{5}{13}\right)=\frac{120}{169}$; $\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\left(-\frac{12}{13}\right)^2-\left(-\frac{5}{13}\right)^2=\frac{144-25}{169}=\frac{119}{169}$.

4.118. $\cos\alpha=\frac{7}{25}$, $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$ деп алып, $\sin2\alpha$, $\cos2\alpha$, $\mathrm{tg}2\alpha$-ны табыңдар.

4.119. 1) $\sin\alpha=\frac{5}{13}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$; 2) $\cos\alpha=-\frac{12}{13}$, $\frac{5\pi}{2}<\alpha<3\pi$;

3) $\cos\alpha=-\frac{3}{4}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$; 4) $\sin\alpha=-0{,}8$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ деп алып,

$\cos\frac{\alpha}{2}$, $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$ мен $\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$-ны анықтаңдар.

Өрнекті ықшамдаңдар **(4.120–4.121)**:

4.120. 1) $\dfrac{1-2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}-1}$; 2) $2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3x}{2}\right)-1$;

3) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha-\cos2\alpha$; 4) $2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{3x}{2}\right)-1$.

4.121. 1) $\dfrac{1+\cos42°}{1-\cos42°}$; 2) $\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)-\sin^2 x$;

3) $\dfrac{1-2\cos\frac{x}{2}+\cos x}{1+2\cos\frac{x}{2}+\cos x}$; 4) $\dfrac{1-2\sin\frac{x}{2}-\cos x}{1+2\sin\frac{x}{2}-\cos x}$.

4.122. $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$ және $\mathrm{ctg}\,\alpha$-ны $\mathrm{tg}\,\dfrac{\alpha}{2}$ арқылы өрнектеңдер.

4.123. $\mathrm{tg}\,\dfrac{\alpha}{2}=3$ деп алып, $\dfrac{2\sin\alpha-3\cos\alpha}{4\sin\alpha+5\cos\alpha}$ өрнегінің мәнін есептеңдер.

C

4.124. 1) $\dfrac{\cos\alpha-2\sin\alpha}{\sin\alpha-2\cos\alpha}=-0,5$ деп алып, $\cos 2\alpha$-ны;

2) $\dfrac{\cos\alpha+2\sin\alpha}{2\sin\alpha-3\cos\alpha}=-2$ деп алып, $\sin 2\alpha$-ны анықтаңдар.

4.125. Есептеңдер:

1) $8\sin^2\dfrac{15\pi}{16}\cdot\cos^2\dfrac{17\pi}{16}$; 2) $\sin^4\dfrac{23\pi}{12}-\cos^4\dfrac{13\pi}{12}$;

3) $\mathrm{tg}\,\dfrac{7\pi}{8}+\mathrm{ctg}\,\dfrac{7\pi}{8}$; 4) $\mathrm{ctg}\,\dfrac{5\pi}{8}+\mathrm{ctg}\,\dfrac{9\pi}{8}$;

5) $\sin^2\dfrac{2\pi}{13}+\sin^2\dfrac{11\pi}{26}$; 6) $\cos^2\dfrac{3\pi}{34}+\cos^2\dfrac{7\pi}{17}$.

4.126. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $4\sin\alpha\cos^3\alpha-2\sin 2\alpha\sin^2\alpha=\sin 4\alpha$;

2) $\dfrac{\mathrm{tg}\,x}{1+\mathrm{tg}^2 x}+\dfrac{\mathrm{ctg}\,x}{1+\mathrm{ctg}^2 x}=\sin 2x$;

3) $\mathrm{tg}^4\alpha(8\cos^2(\pi-\alpha)-\cos(\pi+4\alpha)-1)=8\sin^4\alpha$;

4) $2\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\alpha}{2}(\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{ctg}\,\alpha)\left(1-\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}\right)=\dfrac{1}{\cos^4\dfrac{\alpha}{2}}$.

4.127. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $0,125\cos 4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha$; 2) $\sin^2\gamma\,\mathrm{tg}\gamma-\cos^2\gamma\,\mathrm{ctg}\gamma+2\mathrm{ctg}2\gamma$;

3) $\dfrac{1}{\mathrm{tg}^2 x}-\dfrac{2\cos 2x}{1+\sin(2x+1,5\pi)}$;

4) $\dfrac{1}{1-\mathrm{tg}\,x}-\dfrac{\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)\sin x}{\cos 2x}$.

4.5.5. Қосынды мен айырымды көбейтіндіге түрлендіру

Көптеген есептеулер мен түрлендірулерде тригонометриялық функциялардың қосындысы мен айырымын көбейтіндіге түрлендіру қажеттігі туындайды. Сондықтан $\sin\alpha+\sin\beta$, $\sin\alpha-\sin\beta$, $\cos\alpha+\cos\beta$, $\cos\alpha-\cos\beta$ өрнектерін көбейтіндіге түрлендірейік: $\alpha=x+y$, $\beta=x-y$ деп алып, қосу формулаларын қолдансақ,

$$\sin\alpha+\sin\beta=\sin(x+y)+\sin(x-y)=$$

$$=\sin x\cdot\cos y+\sin y\cdot \cos x+\sin x\cdot\cos y-\sin y\cdot\cos x=2\sin x\cos y$$

теңдігін аламыз. $\alpha=x+y, \beta=x-y$ теңдіктерінен $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$, $y=\frac{\alpha-\beta}{2}$ теңдіктері шығады. Сондықтан

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (1)$$

Дәл осылай

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}, \qquad (2)$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \qquad (3)$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad (4)$$

формулаларын қорытып шығаруға болады.

4.5.6. Көбейтіндіні қосындыға түрлендіру

1–4-формулаларымен қатар

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta,\ \sin\alpha\cdot\sin\beta \text{ және } \sin\alpha\cdot\cos\beta$$

көбейтінділерін қосындыға түрлендіретін формулалар орындалады:

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right], \qquad (5)$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right], \qquad (6)$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]. \qquad (7)$$

Бұл формулалардың дәлелдеулері бір-біріне ұқсас. (5) формуланың дәлелдеуін көрсетейік. Қосу формулалары бойынша $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$, $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+$ $+\sin\alpha\cdot\sin\beta$ теңдіктерін мүшелеп қоссақ,

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cdot\cos\beta$$

немесе

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta]).$$

(6) және (7) формулалар да осы сияқты дәлелденеді.

1-мысал. $\sin84°+\sin36°$ өрнегін ықшамдайық.

(1) формулаға сәйкес $\sin 84° + \sin 36° = 2\sin\frac{84° + 36°}{2} \times$

$\times \cos\frac{84° - 36°}{2} = 2\sin 60° \cos 24° = \sqrt{3}\cos 24°.$

2-мысал. $\cos12°-2\sin36°\sin24°$ өрнегінің мәнін табу керек.

(6) формула бойынша

$\cos 12° - 2\frac{1}{2}\left[\cos(36° - 24°) - \cos(63° + 24°)\right] = \cos 12° -$

$- \cos 12° + \cos 60° = 0,5.$

3-мысал. $\mathrm{tg}x+\mathrm{tg}y$ өрнегін көбейтіндіге түрлендіру керек.

$$\mathrm{tg}\, x + \mathrm{tg}\, y = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y} = \frac{\sin(x + y)}{\cos x \cos y}.$$

1. Қосындыны көбейтіндіге түрлендіретін формулаларды жазып, дәлелдеңдер.
2. Көбейтіндіні қосындыға түрлендіретін формулаларды жазып, дәлелдеңдер.
3. $\sin\alpha\pm\cos\beta$ қосындысын көбейтіндіге қалай түрлендіруге болады?

Практикалық жұмыс

Ертеректе жарық көрген оқулықтарда $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$ (секанс) және $\mathrm{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$ (косеканс) белгілеулері кездеседі.

1) $\sec\alpha\pm\sec\beta$; 2) $\mathrm{cosec}\alpha \pm \mathrm{cosec}\beta$ қосындыларын көбейтіндіге түрлендіріңдер.

ЕСЕПТЕР

А

4.128. Көбейтіндіге түрлендіріңдер:

1) $\cos 47°-\cos 15°$; 2) $\cos 58°+\cos 24°$;
3) $\sin 70°+\sin 30°$; 4) $\sin 17°-\sin 35°$.

Өрнекті көбейтінді түрінде жазыңдар (**4.129–4.130**):

4.129. 1) $\sin\frac{2\pi}{5}+\sin\frac{\pi}{5}$; 2) $\cos\frac{11\pi}{12}+\cos\frac{3\pi}{4}$;

3) $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)+\cos\alpha$; 4) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$;

5) $\sin\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{9}$; 6) $\sin\alpha-\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$.

4.130. 1) $\sin 15°+\cos 65°$; 2) $\cos 40°-\sin 16°$; 3) $\cos 50°+\sin 80°$;

4) $\sin 40°-\cos 40°$; 5) $\cos 18°-\sin 22°$; 6) $\cos 36°+\sin 36°$.

4.131. Өрнекті көбейткіштерге жіктеңдер:

1) $\sin 3\alpha+\sin\alpha$; 2) $\cos 2\alpha+\cos 3\alpha$;
3) $\cos x-\cos 3x$; 4) $\sin y-\sin 5y$.

4.132. Көбейтіндіні қосынды түрінде жазыңдар:

1) $\sin\left(x+\frac{\pi}{8}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{8}\right)$; 2) $\cos(x+y)\cos(x-y)$;

3) $\sin 75°\ \sin 15°$; 4) $\cos 40°\cos 20°$;

5) $\sin(30°+x)\cos(30°-x)$; 6) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+y\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-y\right)$.

5) $\sin(30°+x)\cos(30°-x)=\frac{1}{2}\left[\sin(30°+x+30°-x)+\right.$

$\left.+\sin(30°+x-30°+x)\right]=\frac{1}{2}(\sin 60°-\sin 2x)=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{2}\sin 2x.$

4.133. Көбейтінді түрінде жазыңдар:

1) $\cos x+\sin y$; 2) $\sin x-\cos y$; 3) $\sin^2 x-\sin^2 y$;
4) $\cos^2 x-\cos^2 y$; 5) $\sin^2 x-\cos^2 y$; 6) $\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} y$.

B

4.134. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$;

2) $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$.

4.135. Көбейтіндіге түрлендіріңдер:

1) $\mathrm{ctg}x+\mathrm{ctg}y$; 2) $\mathrm{ctg}x-\mathrm{ctg}y$; 3) $1+\mathrm{tg}x$; 4) $1+\mathrm{ctg}x$.

4.136. Өрнекті көбейткіштерге жіктеңдер:

1) $1 + \cos\beta + \cos\frac{\beta}{2}$; 2) $3-\mathrm{tg}^2\beta$; 3) $\cos\beta-\sin\beta\ \sin2\beta$;

4) $\mathrm{ctg}^2\beta-3$; 5) $\cos\beta+\sin2\beta-\cos3\beta$; 6) $1 - \mathrm{tg}\,\beta + \frac{1}{\cos\beta}$;

7) $3-4\sin^2\beta$; 8) $1-4\cos^2\beta$.

5) $\cos\beta + \sin 2\beta - \cos 3\beta = (\cos\beta - \cos 3\beta) + \sin 2\beta =$

$= -2\sin\frac{\beta + 3\beta}{2}\cdot\sin\frac{\beta - 3\beta}{2} + \sin 2\beta = 2\sin 2\beta\cdot\sin\beta + \sin 2\beta =$

$= \sin 2\beta(2\sin\beta + 1)$.

4.137. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$; 2) $\frac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y}$; 3) $\frac{2\sin y - \sin 2y}{2\sin y + \sin 2y}$;

4) $\frac{\mathrm{tg}\,2y + \mathrm{tg}\,y}{\mathrm{tg}\,2y - \mathrm{tg}\,y}$; 5) $\frac{1}{\mathrm{tg}\,2x\,\mathrm{tg}\,x + 1}$; 6) $\frac{\sin(x + y) + \sin(x - y)}{\sin(x + y) - \sin(x - y)}$.

4.138. Есептеңдер:

1) $\sin15°\cos7°-\cos11°\cos79°-\sin4°\sin86°$;

2) $\cos17°\cos73°-\cos13°\cos21°-\cos4°\cos86°$.

C

4.139. Көбейтінді түрінде жазыңдар:

1) $\sqrt{2}-2\cos\beta$; 2) $0{,}5+\sin\beta$.

4.140. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $1+2\cos 2x=4\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$;

2) $\sqrt{3}-2\sin 2y=4\sin\left(\frac{\pi}{6}-y\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}+y\right)$;

3) $1-4\sin^2 x=4\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$;

4) $3-4\cos^2 y=-4\sin\left(\frac{\pi}{6}+y\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-y\right)$.

4.141. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta-\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)$;

2) $\sin^2\varphi+\sin^2\psi+\cos(\varphi+\psi)\cos(\varphi-\psi)$;

3) $\cos^2\left(\varphi-\frac{5\pi}{8}\right)-\sin^2\left(\varphi-\frac{5\pi}{8}\right)$.

4.142. 1) $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$; 2) $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$;

3) $\operatorname{tg} 3\alpha=\frac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}$; 4) $\operatorname{ctg} 3\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^3\alpha-3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha-1}$

формулаларының орындалатынын дәлелдеңдер.

4.143. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $\frac{\sin 5\varphi-2\sin 3\varphi\cos 3\varphi}{1-\cos 5\varphi-2\sin^2 3\varphi}=\operatorname{ctg} 5{,}5\varphi$;

2) $\frac{2\cos^2 2\alpha+\cos 5\alpha-1}{\sin 5\alpha+2\cos 2\alpha\sin 2\alpha}=\operatorname{ctg} 4{,}5\alpha$;

3) $\frac{\sin 4\beta+2\sin 2\beta}{2(\cos\beta+\cos 3\beta)}=\cos\beta\operatorname{tg} 2\beta$;

4) $\frac{2\cos\psi+\cos 3\psi+\cos 5\psi}{\cos 3\psi+\sin\psi\sin 2\psi}=4\cos 2\psi$.

4.144. Көбейтінді түрінде жазыңдар:

1) $\sqrt{3}-2\cos\varphi$; 2) $2\sin\varphi-\sqrt{3}$; 3) $\sqrt{2}+2\cos\varphi$; 4) $0{,}5-\sin\varphi$.

4.145. Көбейткіштерге жіктеңдер:

1) $\sin\gamma+\sin 2\gamma+\sin 3\gamma+\sin 4\gamma$; 2) $\cos 2\gamma-\cos 4\gamma-\cos 6\gamma+\cos 8\gamma$.

4.146. 1) $\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$ деп алып, $\cos 2\gamma-\cos 6\gamma$ өрнегінің;

2) $\sin\gamma = \frac{2}{\sqrt{5}}$ деп алып, $\sin 5\gamma - \sin 3\gamma$ өрнегінің мәнін анықтаңдар.

4-БӨЛІМГЕ ҚОСЫМША ЕСЕПТЕР

4.147. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $\dfrac{\operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} 3y}{\operatorname{ctg} 2x + \operatorname{tg} 3y} = \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} 3y}$;

2) $\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{tg} 3\gamma + \operatorname{ctg} 3\gamma = \dfrac{8\cos^2 2\gamma}{\sin 6\gamma}$;

3) $\dfrac{\sin 2x - \sin 3x + \sin 4x}{\cos 2x - \cos 3x + \cos 4x} = \operatorname{tg} 3x$;

4) $\sin^6 \dfrac{y}{2} - \cos^6 \dfrac{y}{2} = \dfrac{\sin^2 y - 4}{4} \cdot \cos y$;

5) $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + 4\alpha\right) + \sin(3\pi - 8\alpha) - \sin(4\pi - 12\alpha) = 4\cos 2\alpha \times$
$\times \cos 4\alpha \sin 6\alpha$;

6) $(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 = 4\sin^2 \dfrac{\alpha - \beta}{2}$;

7) $\dfrac{1 - \operatorname{tg}(90^\circ + \beta)}{1 + \operatorname{ctg}(360^\circ - \beta)} = \dfrac{\operatorname{tg}(180^\circ + \beta) + 1}{\operatorname{ctg}(270^\circ - \beta) - 1}$;

8) $\dfrac{1 - 2\sin^2 x}{1 + \sin 2x} = \dfrac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}$;

9) $\cos 4\beta - \sin 4\beta \operatorname{ctg} 2\beta = \cos 2\beta - 2\cos^2\beta$;

10) $\cos^2 y - \sin^2 2y = \cos^2 y(1 - 4\sin^2 y)$.

4.148. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $1 - \sin^2\left(\dfrac{x}{2} - 3\pi\right) - \cos^2\left(\dfrac{x}{4}\right) + \sin^2\left(\dfrac{x}{4}\right)$;

2) $\sin^2\left(\dfrac{\alpha}{2} + 2\gamma\right) - \sin^2\left(\dfrac{\alpha}{2} - 2\gamma\right)$;

3) $\cos^2(\varphi + 2\beta) + \sin^2(\varphi - 2\beta) - 1$;

4) $\sin^2(x + 2y) + \sin^2(x - 2y) - 1$;

5) $(\cos\alpha - \cos 2\beta)^2 + (\sin\alpha + \sin 2\beta)^2$;

6) $\dfrac{\operatorname{ctg}^2\left(\beta+\dfrac{\pi}{2}\right)-\cos^2\left(\beta-\dfrac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}^2\left(\beta-\dfrac{\pi}{2}\right)-\cos^2\left(\beta+\dfrac{\pi}{2}\right)}$;

7) $\dfrac{\operatorname{ctg}(270^\circ-x)}{1-\operatorname{tg}^2(x-180^\circ)}\cdot\dfrac{\operatorname{ctg}^2(360^\circ-x)-1}{\operatorname{ctg}(180^\circ+x)}$.

4.149. Көбейткіштерге жіктеңдер:

1) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\beta}{2}\right)+\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\beta}{2}\right)+2$;

2) $\sin4\beta-2\cos^2 2\beta+1$;

3) $\cos^{-4}y-\sin^{-4}y$;

4) $\dfrac{\operatorname{tg}^4\beta-\operatorname{tg}^6\beta}{\operatorname{ctg}^4\beta-\operatorname{ctg}^2\beta}$;

5) $\dfrac{\sin\varphi-2\cos3\varphi-\sin5\varphi}{-\cos\varphi-2\sin3\varphi+\cos5\varphi}$;

6) $\dfrac{\sin4\varphi+\sin5\varphi+\sin6\varphi}{\cos4\varphi+\cos5\varphi+\cos6\varphi}$;

7) $\sin5\varphi-\sin6\varphi-\sin7\varphi+\sin8\varphi$;

8) $\cos3\varphi-\cos4\varphi-\cos5\varphi+\cos6\varphi$;

9) $\sin2\alpha+\sin4\alpha+\sin6\alpha$;

10) $3+4\cos4\alpha+\cos8\alpha$.

4.150. Есептеңдер:

1) $\sin^2\dfrac{\pi}{8}+\cos^2\dfrac{3\pi}{8}+\sin^2\dfrac{5\pi}{8}+\cos^2\dfrac{7\pi}{8}$;

2) $\operatorname{tg}435^\circ+\operatorname{tg}375^\circ$;

3) $\operatorname{tg}255^\circ-\operatorname{tg}195^\circ$;

4) $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{13\pi}{12}\right)-\operatorname{ctg}\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$;

5) $\operatorname{tg}x=\dfrac{2}{3}$ деп алып, $\sin\left(2x+\dfrac{5\pi}{4}\right)$-ді;

6) $\operatorname{ctg}x=\dfrac{2}{3}$ деп алып, $\cos\left(2x+\dfrac{7\pi}{4}\right)$-ді;

7) $\sin x-\cos x=p$ деп алып, $\sin2x$-ті;

8) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)=0{,}75$ деп алып, $\operatorname{tg}\left(\dfrac{5\pi}{4}+x\right)+\operatorname{tg}\left(\dfrac{5\pi}{4}-x\right)$-ті;

9) $\sin x+\sin y=-\dfrac{21}{65}$, $\cos x+\cos y=-\dfrac{27}{65}$, $\dfrac{5\pi}{2}<x<3\pi$ және

$-\dfrac{\pi}{2}<y<0$ деп алып, $\sin\dfrac{x+y}{2}$ және $\cos\dfrac{x+y}{2}$-ні табыңдар.

4.151. $\dfrac{2\cos^2 x+\cos 4x-1}{\cos^4\dfrac{x}{2}-\sin^4\dfrac{x}{2}}$ өрнегінің ең кіші және ең үлкен мәндерін табыңдар.

4.152. Есептеңдер:

1) $\sin18°$; 2) $\sin42°$; 3) $\sin15°$; 4) $\sin\dfrac{3\pi}{10}\cdot\sin\dfrac{\pi}{10}$.

4.153. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\sin^3 2\alpha\cdot\cos6\alpha+\cos^3 2\alpha\cdot\sin6\alpha$;

2) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\,\sin\beta\,\cos(\alpha+\beta)$;

3) $9\sin\alpha\,\cos3\alpha+9\sin\alpha\,\cos\alpha-3\sin3\alpha\,\cos3\alpha-3\sin3\alpha\,\cos\alpha$;

4) $4(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)-4(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)-1$.

4.154. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}2\alpha-\mathrm{tg}3\alpha=-\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}2\alpha\,\mathrm{tg}3\alpha$;

2) $\dfrac{1}{\mathrm{tg}\,3x-\mathrm{tg}\,x}-\dfrac{1}{\mathrm{ctg}\,3x-\mathrm{ctg}\,x}=\mathrm{ctg}\,2x$;

3) $\sin\alpha+\sin3\alpha+\sin5\alpha+\sin7\alpha=4\cos\alpha\,\cos2\alpha\,\sin4\alpha$;

4) $\sin^6\alpha-\cos^6\alpha=\cos2\alpha(0{,}25\sin^2 2\alpha-1)$.

4.155. Егер A, B, C үшбұрыштың ішкі бұрыштары болса, мына тепе-теңдіктің орындалатынын көрсетіңдер:

1) $\mathrm{tg}A+\mathrm{tg}B+\mathrm{tg}C=\mathrm{tg}A\,\mathrm{tg}B\,\mathrm{tg}C$;

2) $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$;

3) $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-2\cos A\,\cos B\,\cos C$;

4) $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2+2\cos A\,\cos B\,\cos C$.

4.156. Көбейтіндіге түрлендіріңдер:

1) $\mathrm{tg}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\mathrm{tg}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$; 2) $\cos2\varphi+\sin2\varphi\cdot\mathrm{tg}\varphi$;

3) $2+\mathrm{tg}2\varphi+\mathrm{ctg}2\varphi$; 4) $1-0{,}25\sin^2 2\varphi-\cos^2 2\varphi-\cos^4\varphi$.

4.157. $\cos(n+1)x=2\cos nx\cdot\cos x-\cos(n-1)x$ формуласының орындалатынын көрсетіңдер. Осы формуланың көмегімен $\cos3x$ пен $\cos4x$-ті $\cos x$-ке тәуелді көпмүше түрінде жазыңдар.

4.158. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $\dfrac{3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}{3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}=\operatorname{tg}^4\alpha$;

2) $\cos^6\alpha+\sin^6\alpha=\dfrac{5+3\cos 4\alpha}{8}$;

3) $16\sin^5\alpha-20\sin^3\alpha+5\sin\alpha=\sin 5\alpha$;

4) $\cos^8\alpha-\sin^8\alpha=0{,}25\cos 2\alpha(3+\cos 4\alpha)$.

4.159. $\cos^2\alpha+\cos^2\varphi+\cos^2(\alpha-\beta)-2\cos\alpha\cos\varphi\cos(\alpha-\varphi)$ өрнегі α мен φ-ге тәуелсіз болатынын көрсетіңдер.

4.160. A, B, C үшбұрыштың ішкі бұрыштары болса,

1) $\sin 2nA+\sin 2nB+\sin 2nC=(-1)^{n+1}4\sin nA\sin nB\sin nC$;

2) $\sin(2n+1)A+\sin(2n+1)B+\sin(2n+1)C=$

$=(-1)^n 4\cos\dfrac{2n+1}{2}A\cdot\cos\dfrac{2n+1}{2}B\cdot\cos\dfrac{2n+1}{2}C$

теңдіктерін дәлелдеңдер.

4.161. $0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$ болғанда $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{\cos 4\alpha+1}$ өрнегінің ең кіші мәнін табыңдар.

4.162. $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ болғанда $\dfrac{\cos 2\alpha+1}{\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}$ өрнегінің ең үлкен мәнін табыңдар.

4.163. $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=1$ болса, а) $\sin 2\alpha=\sin 2\beta$; ә) $\cos 2\alpha=-\cos 2\beta$ теңдіктерінің орындалатынын көрсетіңдер.

4.164. $\cos(\alpha+\beta)=0$ болса, $\sin(\alpha+2\beta)=\sin\alpha$ болатынын көрсетіңдер.

4.165. $\cos\alpha=m$ болса, $\cos\dfrac{\alpha}{3}$-ті анықтайтын теңдеу құрыңдар.

4.166. $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{5}$ болса, $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$-ні табыңдар.

4.167. Қосындыны табыңдар:

1) $\cos 3\alpha+\cos 5\alpha+\cos 7\alpha+\cos 9\alpha$;

2) $\dfrac{\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x}{\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x}$.

4.168. $3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)-2(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)=1$ тепе-теңдігін дәлелдеңдер.

4.169. $\sin^2 2\varphi \cdot 0{,}5\cos 4\varphi + 2\sin^2\varphi + \cos 2\varphi$ өрнегінің мәні φ-ге тәуелсіз болатынын көрсетіңдер.

4.170. $y=\cos^2 x$ функциясы периодты бола ма? Периодты болса, оның ең кіші периодын табыңдар.

4.171. $\cos^2 x + \cos^2(\alpha + x) - 2\cos\alpha \cdot \cos x \cdot \cos(\alpha + x)$ өрнегінің мәні x-ке тәуелсіз болатынын көрсетіңдер.

4.172. Өрнекті ықшамдаңдар:

$$\frac{\sin^2\varphi}{\sin\varphi - \cos\varphi} + \frac{\sin\varphi + \cos\varphi}{1 + \operatorname{tg}^2\varphi} - \sin\varphi.$$

4.173. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

$$\operatorname{tg}^3\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}\alpha + 1 - \frac{\sin\alpha}{\cos^3\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

ТЕРМИНДЕР АТАУЫНЫҢ СӨЗДІГІ

Қазақ тіліндегі нұсқасы	Орыс тіліндегі нұсқасы	Ағылшын тіліндегі нұсқасы
Бұрыштың радиандық өлшемі	Радианная мера угла	Radiant value of angle
Бұрыштың градустық өлшемі	Градусная мера угла	Degree value of angle
Бірлік тригонометриялық шеңбер	Единичная тригонометрическая окружность	One unit trigonometric disc
Тригонометриялық функциялар	Тригонометрические функции	Trigonometric functions
Негізгі тригонометриялық тепе-теңдік	Основное тригономе-тричское тождество	Main trigonometric eguation
Негізгі период	Основной период	Main period
Келтіру формулалары	Формулы приведения	Adduction formula
Қосу формулалары	Формулы суммы	Addition formulas
Қос (жарты) бұрыштың формулалары	Формулы двойного (половинного) угла	Double (half) angle formulas

5-бөлім. ЫҚТИМАЛДЫҚТАР ТЕОРИЯСЫНЫҢ ЭЛЕМЕНТТЕРІ

5.1. Ықтималдықтар теориясының негіздері
5.2. Геометриялық ықтималдық

Нұр-Сұлтан қаласындағы ортақ сауда-саттық, ойын-сауық платформасы бар тұрғын үй кешені төрт ғимараттан құралған. Олар сәйкесінше 20, 28, 38 және 43 қабатты ғимараттар. Бөлімді оқып-үйрену барысында сендер әрбір ғимараттың 1-қабатында лифтке отырған тұрғынның 15-қабатта түруы ықтималдығын анықтай аласыңдар.

5.1. Ықтималдықтар теориясының негіздері

Тақырыпты оқып-үйрену барысында сендер:

- оқиға, кездейсоқ оқиға, ақиқат оқиға, мүмкін емес оқиға, қолайлы нәтижелер, тең мүмкіндікті және қарама-қарсы оқиғалар ұғымын меңгересіңдер;
- элементар және элементар емес оқиғаларды ажыратасыңдар;
- ықтималдықтың классикалық анықтамасын біліп, оны есептер шығарғанда қолданасыңдар;
- ықтималдықтың статистикалық анықтамасын білесіңдер.

5.1.1. Элементар оқиғалар кеңістігі

Ықтималдықтар теориясының негізгі түсініктері қатарына элементар оқиғалар мен элементар оқиғалар кеңістігі жатады.

Элементар оқиғалар деп сынақтың (тәжірибенің) қандай да бір нәтижесінің орындалуын (немесе орындалмауын), яғни сынақтың қандай да бір «жіктелмейтін» нәтижесін айтады. Мысалы, ойын сүйегін тастағанда 1, 2, 3, 4, 5, 6 ұпайларының бірі түсуі мүмкін. Бұл сынақ (ойын сүйегін тастау) нәтижесінде бірдей мүмкіндікті алты элементар оқиғалардың бірі орындалады: $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$. Мұнда A_k оқиғасы сынақ нәтижесінде k ұпай (k=1, 2, 3, 4, 5, 6) түскенін білдіреді. Егер ойын сүйегін тастау барысында бізді жұп ұпай түсуі қызықтырса, онда бұл да («жұп ұпай түсуі») кездейсоқ оқиға, бірақ ол элементар оқиға бола алмайды. Себебі, жұп ұпай түсуін білдіретін кездейсоқ оқиға A_2, A_4, A_6 элементар оқиғаларына жіктеліп, осы элементар оқиғалардың бірінің орындалуымен анықталады. Осы сияқты, сынақ ретінде тиынды бір рет тастауды алсақ, екі түрлі нәтиже күтуге болады: E — тиынның елтаңба жағымен түсуі, C — тиынның сан жағымен түсуі.

U жиынының әрбір элементі сынақтың қандай да бір нәтижесін білдірсе және, керісінше, осы сынақтың әрбір элементар нәтижесі U жиынының элементі болса, онда U жиынын ***элементар оқиғалар кеңістігі*** деп атайды. Біз мұнда жеңілдік үшін элементар оқиғалар саны санаулы деп есептейміз. Мысалы, ойын сүйегін тастағанда, жоғарыда көрсетілгендей, элементар оқиғалар кеңістігі 6 элементтен тұрады: $U = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$, ал тиын тастағанда $U = \{E, C\}$ кеңістігін аламыз.

Элементар оқиғалар кеңістігінің әрбір ішкі жиынын ***кездейсоқ оқиға*** деп атайды. Мысалы, ойын сүйегін тастағанда $A=\{A_2, A_4, A_6\}$ ішкі жиыны «жұп ұпай түсті» деген кездейсоқ оқиғаны анықтайды.

Оқиғаның күні бұрын орындалатыны белгілі болса, мұндай оқиғаны ***ақиқат оқиға***, оқиғаның ешбір сынақ нәтижесінде орындалмайтыны белгілі болса, оны ***жалған (мүмкін емес) оқиға*** деп атайды.

Ақиқат оқиғаны U, мүмкін емес оқиғаны $\varnothing$ арқылы белгілейді. Мысалы, ойын сүйегін бір рет тастағанда 1-ден кем емес ұпай түсуін білдіретін оқиға — ақиқат, 7-ден артық ұпай түсуі жалған оқиға.

12–4337

Екі кездейсоқ оқиғаның бір сынақ нәтижесінде қатар орындалуы мүмкін емес болса, оларды ***үйлесімсіз оқиғалар***, өзге жағдайларда ***үйлесімді*** деп атайды. Мысалы, қарастырылған $U = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$ элементар оқиғалар кеңістігінің элементтері қос-қостан үйлесімсіз. Осы сияқты $A = \{A_2, A_4, A_6\}$ және $B = \{A_1, A_3\}$ оқиғалары да үйлесімсіз. $A = \{A_2, A_4, A_6\}$ және $C = \{A_1, A_2, A_3\}$ оқиғалары үйлесімді, себебі бұл ішкі жиындарда A_2 ортақ элементі бар.

Сонымен, $A \subset U$ *оқиғасының орындалуы үшін оның құрамына енетін элементар оқиғалардың біреуінің орындалуы қажетті және жеткілікті.*

P және Q оқиғалары бірдей элементар оқиғалардан құралса, оларды *тең* (*бірдей*) оқиғалар деп атап, былай жазады: $P = Q$. Мысалы, ойын сүйегін тастағанда P оқиғасы «4-тен кем ұпай түсуін», Q — «3-тен артық емес ұпай түсуін» білдірсін. Онда $P = \{A_1, A_2, A_3\}$, $Q = \{A_1, A_2, A_3\}$ және $P = Q$.

A оқиғасының орындалмайтынын білдіретін кездейсоқ оқиғаны **қарама-қарсы оқиға** деп атайды және оны $\overline{A}$ арқылы белгілейді. Мысалы, $A = \{A_2, A_4, A_6\}$ оқиғасына қарама-қарсы оқиға $\overline{A} = \{A_1, A_3, A_5\}$ — «тақ ұпайдың түсуін» білдіреді.

Егер A оқиғасының орындалуы немесе орындалмауы B оқиғасының орындалуына немесе орындалмауына әсер етпесе, A және B оқиғаларын өзара *тәуелсіз оқиғалар* деп атайды. Қалған жағдайларда оқиғаларды бір-біріне *тәуелді оқиғалар* деп атайды. Мысалы, екі ойын сүйегін қатар тастағанда олардың бірінен түсетін ұпайлар саны екіншісінен түсетін ұпайлар санына тәуелсіз.

5.1.2. Оқиғаларға қолданылатын амалдар

A және B оқиғаларының *қосындысы* деп A немесе B оқиғаларының кем дегенде біреуінің орындалатынын білдіретін оқиғаны айтады және оны $A + B$ арқылы белгілейді. $A + B$-ның құрамына A-ға не B-ға тиісті элементар оқиғалар енеді. Мысалы, ойын сүйегін тастағанда «жұп ұпай түсуі» мен «үштен кем ұпай түсуін» білдіретін оқиғаларды қосу қажет болса, $A = \{A_2, A_4, A_6\}$ және $B = \{A_1, A_2\}$ оқиғаларын қосамыз: $A + B = \{A_1, A_2, A_4, A_6\}$.

A және B оқиғаларының *көбейтіндісі* деп A және B оқиғаларының қатар орындалуын білдіретін оқиғаны айтады және оны $A \cdot B$ арқылы белгілейді. Сонымен, $A \cdot B$-ның құрамына A-ға да және B-ға да тиісті элементар оқиғалар енеді. Мысалы, $A=\{A_2, A_4, A_6\}$ және $B=\{A_1, A_2\}$ оқиғалары үшін $A \cdot B=\{A_2\}$ болады.

A және B оқиғаларының ***айырымы*** деп тек A ғана орындалып, B-ның орындалмайтынын білдіретін оқиғаны айтады және оны $A-B$ арқылы белгілейді. $A-B$-ның құрамына тек A-ға ғана енетін және B-ға тиісті емес элементар оқиғалар енеді. Мысалы, $A=\{A_2, A_4, A_6\}$ және $B=\{A_1, A_2\}$ оқиғалары үшін $A-B=\{A_4, A_6\}$, $B-A=\{A_1\}$ теңдіктері орындалады.

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ элементар оқиғалары үшін

$$A_1+A_2+\ldots+A_n=U \text{ және } A_i \cdot A_j=\varnothing \ (i \neq j)$$

шарттары орындалса, бұл оқиғаларды ***оқиғалардың толық тобы (группасы)*** деп атайды. Мысалы, ойын сүйегін тастағанда $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ элементар оқиғалары толық топ құрайды. Шынында да, ойын сүйегін тастағанда алты ұпайдың бірі түсері анық.

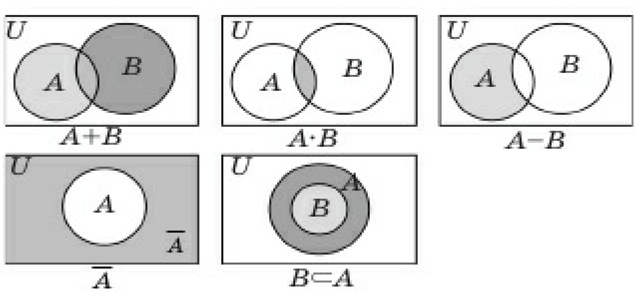
$$A_1+A_2+A_3+A_4+A_5+A_6=U$$

қосындысы — ақиқат оқиға. Сонымен қатар бір тастағанда екі түрлі ұпай түсуі мүмкін емес: $A_i \cdot A_j=\varnothing$, $(i \neq j)$ — жалған оқиға.

Осы орайда өзара қарама-қарсы A және $\overline{A}$ оқиғалар жұбы да оқиғалардың тобын құрайды: $A \cdot \overline{A}=\varnothing$ және $A+\overline{A}=U$.

B оқиғасы орындалғанда A оқиғасы да орындалып отырса, A-ны B оқиғасының ***салдары*** деп атайды және оны былай белгілейді: $B \subset A$. Мысалы, $A=\{A_2, A_4, A_6\}$ және $B=\{A_2, A_4\}$ болса, A оқиғасы — B-ның салдары. Өзара кері A және $\overline{A}$ оқиғалары үшін $A \cdot \overline{A}=\varnothing$ және $A+\overline{A}=U$ теңдіктері орындалады.

Кездейсоқ оқиғаларды жиындарға қолданылған Эйлер–Венн дөңгелектерімен бейнелеген қолайлы (5.1-сурет).



5.1-сурет

Сонымен бірге *әрбір A және B оқиғалары үшін*:

1) $\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$;

2) $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ *теңдіктері орындалады.*

Дәлелдеу. 1) Айталық, $A_i \in \overline{A+B}$ болсын. Онда $\{A_i \notin A+B\} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \{A_i \notin A$ және $A_i \notin B\} \Leftrightarrow \{A_i \notin \overline{A}$ және $A_i \notin \overline{B}\} \Leftrightarrow \{A_i \notin \overline{A} \cdot \overline{B}\}$. Осыдан $\overline{A+B}$ және $\overline{A} \cdot \overline{B}$ оқиғалары бірдей элементар оқиғалардан құралғанын көреміз: $\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$.

2) Осы сияқты дәлелденеді.

1-мысал. Үш мергеннің біріншісінің нысанаға тигізуін A оқиғасы, екіншісінің тигізуін B оқиғасы және үшіншісінің тигізуін C оқиғасы деп алып, 1) $A + B$; 2) $AB\overline{C}$; 3) $AB + AC + BC$ өрнектерімен анықталатын оқиғалардың мағынасын ашып көрсетейік.

1) нысанаға бірінші немесе екінші мерген тигізді;

2) нысанаға бірінші және екінші мерген тигізіп, үшіншісі мүлт кетті; 3) кем дегенде екі мерген нысанаға тигізді.

2-мысал. Алдыңғы мысал шартында нысанаға 1) тек бірінші мерген тигізді; 2) тек екі мерген тигізді; 3) мергендердің ешқайсысы тигізе алмады деген оқиғаларды A, B және C арқылы өрнектеу керек.

1) Нысанаға тек бірінші мерген тигізіп, қалған екеуі мүлт кеткен. Демек, A, $\overline{B}$ және $\overline{C}$ оқиғалары орындалды. Сондықтан оқиғаларды көбейту ережесі бойынша бұл оқиға $A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$ арқылы өрнектеледі.

2) Бұл жағдайда нысанаға 2 мерген тигізіп, үшіншісі міндетті түрде тигізбеуі қажет, яғни $AB\overline{C}$ немесе $A\overline{B}C$ немесе $\overline{A}BC$ оқиғаларының біреуі орындалады. Сондықтан бізге қажет оқиға $AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC$ қосындысымен өрнектеледі.

3) Мергендердің біреуі де нысанаға тигізе алмаса, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ оқиғалары қатар орындалады, яғни $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ оқиғасы орындалады.

1. Қандай оқиғаларды элементар оқиға деп атайды?
2. Элементар оқиғалар кеңістігі деген не? Мысал келтіріңдер.

3. Ақиқат — жалған, үйлесімді — үйлесімсіз оқиғалар деп қандай оқиғаларды айтады? Мысал келтіріңдер.
4. Кездейсоқ оқиға дегеніміз не? Мысал келтіріңдер.
5. Кері оқиға, салдар деген не? Мысал келтіріңдер.
6. Тәуелді, тәуелсіз оқиғалар деп нені түсінесіңдер?
7. Оқиғаларға қандай амалдар қолданылады? Оларды Эйлер–Венн дөңгелектерімен түсіндіріңдер.

Практикалық жұмыс

1) $\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$; 2) $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ қасиеттерін Эйлер — Венн диаграммалары көмегімен дәлелдеңдер.

ЕСЕПТЕР

А

5.1. Қорапта ақ, қызыл және көк түсті асықтар бар. A, B және C оқиғалары қораптан кездейсоқ алынған асықтың сәйкесінше ақ, қызыл және көк түсті болатынын білдірсін. 1) $A + C$; 2) A; 3) $A + B$ оқиғаларының мағынасын түсіндіріңдер.

5.2. Элементар оқиғалар кеңістігі $U=\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ бес элементар оқиғалардан тұрсын. $A = \{A_1, A_2\}$, $B = \{A_3, A_4\}$, $C = \{A_4, A_5\}$, $D = \{A_1, A_3, A_5\}$ кездейсоқ оқиғаларын алып, олардың ішінен 1) қос-қостан үйлесімсіз оқиғалар жұбын; 2) үйлесімді оқиғалар жұбын; 3) әрқайсысының кері оқиғаларын жазып көрсетіңдер.

5.3. Алдыңғы есеп шартында 1) $A+B$; 2) $B+C$; 3) $A+D$; 4) $A \cdot B$; 5) $B \cdot C$; 6) $A \cdot D$; 7) $A-B$; 8) $B-C$; 9) $A-D$; 10) $D-A$; 11) $(\overline{A}+C)-\overline{D}$; 12) $\overline{C} \cdot D-A$ оқиғаларына енетін элементар оқиғаларды көрсетіңдер.

5.4. Егер A оқиғасы ойын сүйегін бір рет тастағанда 1) алтылық ұпай түскенін; 2) тақ ұпай түскенін; 3) үштен кем емес ұпай түскенін; 4) 2-ден үлкен және 6-дан кем ұпай түскенін білдірсе, $\overline{A}$ оқиғасын анықтаңдар.

5.5. $A=\{A_2\}, B=\{A_1, A_3\}, C=\{A_1, A_2, A_3\}, D=\{A_1, A_3, A_5\}$ оқиғалары $U = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ элементар оқиғалары кеңістігінде анықталған. 1) C; 2) D; 3) $\overline{A}$ оқиғалары берілген оқиғалардың қайсыларының салдары болады?

5.6. Тиын екі рет тасталды. Элементар оқиғалар кеңістігін жазып көрсетіңдер.

Е әрпі тиынның елтаңба жағымен түсуін, С әрпі оның сан жағымен түсуін білдірсін. Онда тиынды екі рет тастағанда, келесі элементар оқиғалар орын алады: ЕЕ; ЕС, СЕ; СС, яғни U={ЕЕ, ЕС, СЕ, СС}.

5.7. 1) Ақиқат; 2) жалған оқиғаларды көрсетіңдер:

A — тиынды екі рет тастағанда екі рет елтаңба жағы түсуі;

B — кездейсоқ жазылған екі таңбалы санның 99-дан артық болмауы;

C — ойын сүйегін тастағанда түскен ұпайдың 5-тен артық болмауы;

D — екі ойын сүйегін тастағандағы түскен ұпайлар қосындысының 12-ден артық болуы.

B

5.8. A оқиғасы B-ның салдары болса, 1) $A + B$; 2) $A \cdot B$ өрнектерінің мәнін табыңдар.

5.9. Жабық қорапта шарлар бар. A оқиғасы қораптағы шарлардың кем дегенде біреуі ақ түсті болатынын білдіреді деп алып, $\overline{A}$ оқиғасын анықтаңдар.

$\overline{A}$ белгісі «қорапта ақ шар жоқ» дегенді білдіреді.

5.10. Екі түрлі лотерея ойындарына бір-бірден билет алынған. A—бірінші ойыннан ұтыс, B — екінші ойыннан ұтыс түскенін білдірсін. 1) $P = A\overline{B} + \overline{A}B$; 2) $Q = A\overline{B} + \overline{A}B + AB$ оқиғаларының мағынасы қандай?

5.11. A, B, C — кездейсоқ оқиғалары берілген. 1) $ABC = A$; 2) $A + B + C = A$ теңдіктерінің мағынасы қандай?

1) $ABC=A$ болса, B және C оқиғалары A-ның салдары болады.

5.12. A, B, C кездейсоқ оқиғаларынан 1) тек A оқиғасының орындалғанын; 2) A және B орындалып, C-ның орындалмағанын; 3) барлық үш оқиғаның да орындалғанын; 4) кем дегенде бір оқиға орындалғанын; 5) кем дегенде екі оқиға орындалғанын; 6) тек бір ғана оқиғаның орындалғанын; 7) тек қана 2 оқиғаның орындалғанын; 8) бірде-бір оқиғаның орындалмағанын; 9) орындалған оқиғалар саны екіден артық емес болатынын A, B, C арқылы өрнектеңдер.

5.13. $A \subset B$ болса, 1) $A + B + C$; 2) $(A + B) \cdot C$; 3) $A \cdot B + C$ өрнектерін ықшамдаңдар.

5.14. Екі ойын сүйегі қатар тасталды. Элементар оқиғалар кеңістігінің неше элементтен тұратынын табыңдар.

C

5.15. Үш мерген нысанаға бір-бірден оқ атты. A — бірінші мергеннің тигізуін, B — екінші мергеннің тигізуін, C — үшінші мергеннің тигізуін білдіретін оқиғалар болсын. Егер бірінші және екінші мергеннің оқтары нысанаға тигені, үшінші атқыштың мүлт кеткені белгілі болса, 1) $A + B \cdot \overline{C}$; 2) $(A + B)\overline{C}$; 3) $\overline{A}B + C$; 4) ABC; 5) $AB\overline{C}$ оқиғаларының орындалғанын не орындалмағанын анықтаңдар.

5.16. Кез келген A, B, C оқиғалары үшін 1) $A + B$; 2) $A + B + C$ қосындыларын үйлесімсіз оқиғалар қосындысы түрінде жазыңдар.

5.17. A, $\overline{A}B$, $\overline{A + B}$ оқиғаларының толық топ құрайтынын дәлелдеңдер.

5.18. 1) $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$; 2) $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ теңдіктері орындалатынын дәлелдеңдер.

5.19. A және B оқиғалары тең болуы үшін $A \subset B$ және $B \subset A$ шарттарының орындалуы қажетті және жеткілікті болатынын көрсетіңдер.

5.20. Мергенге 5 оқ берілді. Ол нысанаға тигізгенше атады. Элементар оқиғалар кеңістігін жазыңдар.

Қайталауға арналған жаттығулар

5.21. Теңдеулер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases} 2x + y = 7; \\ xy = 6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - xy = -3, \\ y^2 - xy = 12. \end{cases}$

5.22. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\cos 2\alpha + 2\sin(\alpha + 30°)\sin(\alpha - 30°)$;

2) $2\cos^2\dfrac{\varphi}{2} - \cos\varphi$.

5.23. 5-ке бөлгендегі қалдығы 1-ге тең болатындай барлық үштаңбалы натурал сандардың қосындысын табыңдар.

5.1.3. Оқиға ықтималдығының классикалық анықтамасы

$U = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ элементар оқиғалар кеңістігінде $A = \{A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots, A_{n_m}\}(A_{ni} \in U)$ кездейсоқ оқиғасы берілсін. Мұнда $A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots, A_{n_m}$ элементар оқиғаларын A оқиғасына *қолайлы нәтижелер* деп атайды. Мысалы, ойын сүйегін тастағанда жұп ұпайдың түсуін білдіретін $A = \{A_2, A_4, A_6\}$ кездейсоқ оқиғасына үш қолайлы нәтиже бар: A_2, A_4, A_6.

Анықтама. *$A \subset U$ кездейсоқ оқиғасының* ***ықтималдығы*** *деп A-ға қолайлы нәтижелер санының барлық мүмкін нәтижелер (барлық элементар оқиғалар) санына қатынасын айтады және оны $P(A)$ арқылы белгілейді.* Сонымен,

$U = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ және $A = \{A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots, A_{n_m}\}$ $(A_{ni} \notin U)$ деп алсақ, анықтама бойынша

$$P(A) = \frac{m}{n} \qquad (1)$$

формуласымен A оқиғасының ықтималдығы анықталады. Бұл анықтаманы ықтималдықтың ***классикалық анықтамасы*** деп атайды. Өйткені U элементар оқиғалар кеңістігіне енетін элементар оқиғаларды тең мүмкіндікті оқиғалар деп қабылдаймыз. Мұндағы әр элементар оқиғаның ықтималдығы $\dfrac{1}{n}$.

$U \subset U$ болғандықтан, оны да оқиға ретінде қарастырамыз. Сонда U — ақиқат оқиға және (1) формула бойынша

$$P(U) = \frac{n}{n} = 1.$$

Ақиқат оқиғаның ықтималдығы 1, жалған $\varnothing$ оқиғасының ықтималдығы 0-ге тең.

Себебі $\varnothing$ жалған оқиғасына бірде-бір қолайлы нәтиже табылмайды ($m = 0$). Онда $P(\varnothing) = \dfrac{0}{n} = 0$.

1-мысал. Қалтада 6 ақ және 4 қызыл түсті асық бар. Қалтадан кездейсоқ алынған асықтың қызыл түсті болу ықтималдығын анықтайық.

Қалтадағы асықтардың формалары бірдей деп алып, A арқылы қалтадан кездейсоқ алынған асықтың қызыл түсті болатынын белгілейік. Онда $n = 4 + 6 = 10$ тең мүмкіндікті нәтижелер ішінен 4-еуі A оқиғасына қолайлы. Сондықтан (1) формула бойынша $P(A) = \dfrac{4}{10} = 0,4.$

2-мысал. Шаруашылық қожалығындағы тракторлардың 65%-ы Павлодар зауытынан шығарылған. Кездейсоқ алынған трактордың Павлодар зауытынан шықпау ықтималдығын табу керек.

Көптеген жағдайларда бізге қолайлы нәтижелер осы мысалдағыдай пайыздармен беріледі. Мұндай жағдайларда барлық мүмкін нәтижелерді 100% деп алады. Сонда бізге қолайлы нәтижелер $100\% - 65\% = 35\%$ құрайды. Сондықтан іздеген ықтималдық $P(A) = \dfrac{35\%}{100\%} = 0,35.$

5.1.4. Оқиғаның ықтималдығының статистикалық анықтамасы

Оқиға ықтималдығының классикалық анықтамасы тек қана бірдей мүмкіндікті оқиғалардың ықтималдықтарын анықтауға қолданылады. Мысалы, ойын сүйегін тастағанда алты түрлі ұпайдың түсуі, қалтадағы асықтардың бірін кездейсоқ алу және т.с.с. мүмкін оқиғалар.

Ойтүрткі

Жұптасып немесе шағын топтарға бірігіп асықты 50 рет иіріп, нәтижесін келесі кестеге жазыңдар.

Жалғасы

Асықтың түскен саны	Алшы	Тәйке	Шік	Бүк

Асықтың төрт жағының түсуі тең мүмкіндікті оқиғалар бола ма? Барлық топтардың мәліметтерін жинақтап, әр жағдай үшін мәліметтердің арифметикалық ортасын анықтап, пікірлеріңді ортаға салыңдар. Сыныппен бірге талқылаңдар. Қорытынды жасаңдар.

Айталық, сынақты n рет жүргізу нәтижесінде бізге қажет A оқиғасы m рет орындалсын. Онда m саны A оқиғасының орындалу **жиілігі** деп, $\frac{m}{n}$ саны оқиғаның **салыстырмалы жиілігі** деп аталады. Сынақ саны n өскен сайын оқиғаның салыстырмалы жиілігі $\frac{m}{n}$ оқиғаның ықтималдығына мейлінше жақындай түседі. Мысалы, ағылшын математигі Карл Пирсон (1857–1936) тиынды 24 000 рет тастап, оның 12 012-де тиынның елтаңба жағымен түскенін тіркеген. Пирсон жүргізген сынақ нәтижесінде тиынның елтаңба жағымен түсуі жиілігі 12 012, салыстырмалы жиілігі

$$\frac{12\,012}{24\,000} = 0{,}5005.$$

Екінші жағынан, тиынның елтаңба жағымен түсуі не түспеуі бірдей мүмкіндікті оқиғалар болғандықтан, оның ықтималдығы (классикалық анықтама бойынша) 0,5-ке тең.

Осыдан бірдей мүмкіндікті емес оқиғалар үшін салыстырмалы жиіліктің мәнін оның ықтималдығын бағалау деп қабылдауға болатынын көреміз. Оқиға ықтималдығын салыстырмалы жиілік арқылы бағалауды **ықтималдықты статистикалық жолмен анықтау** деп атайды. Сонымен, n сынақтар сериясында A оқиғасы орта есеппен m рет орындалса, A оқиғасының орындалу ықтималдығы ретінде $\frac{m}{n}$ (немесе $\frac{m}{n} \cdot 100\%$) санын алады.

Мысалы, қайсыбір атақты баскетболшының допты себетке түсіру ықтималдығы 80%-ға тең деп жатады. Мұны ойыншы допты себетке 100 рет лақтырғанда, орта есеппен 80 рет түсуі деп түсіну қажет. Әрине, ойыншы допты себетке

100 рет лақтырған сайын оның себетке тура 80 рет түспеуі де мүмкін: кейде доп себетке 78 немесе 79 рет, кейде 82 рет немесе 84 рет түсуі де мүмкін. Ал кейбір сирек жағдайларда себетке түскен доптар саны 80-нен анағұрлым артық немесе айтарлықтай кем болуы мүмкін. Бірақ орта есеппен допты себетке лақтыру санын көбейткен сайын ойыншының оң нәтижелі лақтырулар ықтималдығы 0,8-ге (80%-ға) тең. 80 саны ойыншының шеберлік деңгейін көрсетеді және бұл көрсеткіш, әдетте, өте **орнықты** сан болады.

5.1.5. Ықтималдықтың қасиеттері

Оқиға ықтималдығының мынадай қасиеттері бар:

1°. *Әрбір A оқиғасы үшін* $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$ *теңсіздігі орындалады.*

Шынында да, барлық элементар оқиғалар саны n-ге тең болғанда, кез келген A оқиғасына қолайлы нәтижелердің m саны $0 \leqslant m \leqslant n$ теңсіздігін қанағаттандырады.

Осыдан $0 \leqslant \frac{m}{n} \leqslant 1$ немесе $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$. Егер A ақиқат оқиға десек, жоғарыда көрсетілгендей $P(A)=1$. A жалған оқиға десек, $P(A) = 0$ теңдіктері орындалады.

2°. (**Қосу ережесі**). *Егер A және B оқиғалары үйлесімсіз болса,*

$$P(A+B) = P(A) + P(B) \qquad (2)$$

теңдігі орындалады.

A оқиғасына қолайлы нәтижелер саны m, B оқиғасына қолайлы нәтижелер саны k, барлық мүмкін нәтижелер саны n дейік. A және B оқиғалары үйлесімсіз болғандықтан, $A+B$ оқиғасына қолайлы нәтижелер саны $m + k$-ға тең.

(2) формуладан

$$P(A+B) = \frac{m+k}{n} = \frac{m}{n} + \frac{k}{n} = P(A) + P(B).$$

3-мысал. Қорапта 6 ақ, 4 қызыл және 5 көк шар бар. Қораптан кездейсоқ алынған шардың ақ немесе көк болу ықтималдығын табу керек.

A оқиғасы қораптан «ақ шар алынғанын», B оқиғасы қораптан «көк шар алынғанын» және C оқиғасы «ақ немесе көк шар алынғанын» білдірсін. Онда оқиғаларды қосу ережесі бойынша $C=A+B$. Мұнда A және B оқиғалары үйлесімсіз (алынған шар әрі ақ, әрі көк бола алмайды) болғандықтан, 2°-қасиет бойынша $P(C)=P(A+B)=P(A)+P(B)$. Мұнда

$$P(A)=\frac{6}{15}+\frac{5}{15}=\frac{11}{15}.$$

Сондықтан $P(C)=\frac{6}{15}+\frac{5}{15}=\frac{11}{15}$.

2°-қасиет қос-қостан үйлесімсіз бірнеше қосылғыштар үшін де орындала береді. Мысалы, үйлесімсіз A, B, C оқиғалары үшін $P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)$ теңдігі орындалады. Осы сияқты A және $\overline{A}$ оқиғалары да үйлесімсіз және $A+\overline{A}=U$ теңдігін қанағаттандырады. (2) формула бойынша

$$P(A)+P(\overline{A})=P(A+\overline{A})=P(U)=1$$

теңдігінен

$$P(\overline{A})=1-P(A) \qquad (3)$$

формуласын аламыз.

3°. **(Көбейту ережесі).** *Егер A және B оқиғалары өзара тәуелсіз болса,*

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B) \qquad (4)$$

теңдігі орындалады.

Айталық, A оқиғасына барлық n_1 элементар оқиғалар арасынан m_1-і қолайлы, B оқиғасына барлық n_2 элементар оқиғалар арасынан m_2-сі қолайлы болсын (мұнда тәуелсіз оқиғалар әртүрлі элементар оқиғалар кеңістігінде анықталатыны ескерілді). A және B тәуелсіз оқиғалар болғандықтан, $A\cdot B$ оқиғасына барлығы $n_1\cdot n_2$ элементар оқиғалар арасынан $m_1\cdot m_2$ көбейтіндісі қолайлы болады:

$$P(A\cdot B)=\frac{m_1\cdot m_2}{n_1\cdot n_2}=\frac{m_1}{n_1}\cdot\frac{m_2}{n_2}=P(A)\cdot P(B).$$

(4) формула өзара тәуелсіз бірнеше көбейткіштер үшін орындала береді. Мысалы, A, B, C өзара тәуелсіз оқиғалары үшін

$$P(A\cdot B\cdot C)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$$

теңдігі орындалады.

4-мысал. Нысанаға екі мерген, сәйкесінше 0,7 және 0,8-ге тең ықтималдықтармен тигізе алады. Олар бір-бірден оқ атқанда нысанаға кем дегенде бір оқтың тию ықтималдығын табу керек.

A нысанаға бірінші мергеннің тигізуін, B нысанаға екінші мергеннің тигізуін білдіретін оқиғалар болсын. $C = A+B$ оқиғасының ықтималдығын табу қажет. A және B үйлесімді (бірақ тәуелсіз) болғандықтан, 2°-қасиетті қолдана алмаймыз. $P(C)$ ықтималдығын (3) және (4) формула бойынша есептеген тиімді. $\overline{C} = \overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ және

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1-0,7 = 0,3; \; P(\overline{B}) = 1-0,8=0,2$$

болғандықтан, $P(C) = P(A+B) = 1-P(\overline{A} \cdot \overline{B}) = 1-P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = 1-$ $-0,3 \cdot 0,2 = 0,94$.

4°. **(Қосу ережесінің жалпылама түрі.)** *Кез келген A және B оқиғалары үшін*

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) \qquad (5)$$

теңдігі орындалады.

Оқиғаны үйлесімсіз оқиғалар қосындысына жіктеуге болады: $A=AB+A\cdot\overline{B}$; $B=AB+\overline{A}\cdot B$. Осыдан

$$A+B=(AB + A\cdot\overline{B})+(AB+\overline{A}\cdot B) = AB + A\overline{B} + \overline{A}B.$$

Олай болса, $P(A+B) = P(AB) + P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B)$. (6)

Екінші жағынан,

$$P(A) = P(AB) + P(A\overline{B}),$$

$$P(B) = P(AB) + P(\overline{A}B).$$

Соңғы екі теңдіктен (6)-ны ескерсек,

$$P(A) + P(B) = 2P(AB) + P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B) =$$

$$= (P(AB) + P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B)) + P(AB) = P(A+B) + P(A\cdot B).$$

Бұдан (5) формула шығады.

4-мысалда келтірілген есеп (5) формуланы қолданса оңай шығады: $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0,7+0,8-P(A)\cdot P(B)=$ $=1,5-0,7\cdot 0,8=0,94$.

4°-қасиетті бірнеше қосылғыштар үшін де жазуға болады. Мысалы, кез келген A, B, C оқиғалары үшін

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(A\cdot B\cdot C).$$

Шартты ықтималдық ұғымын анықтайық. Ойын сүйегін бір рет тастағанда A оқиғасы «тақ ұпай түсуін», B оқиғасы «4-тен кем ұпай түсуін» білдірсін. Бұл оқиғалар өзара үйлесімді және олардың әрқайсысының ықтималдықтарын есептеуге болады: $P(A)=\frac{3}{6}=0,5$; $P(B)=\frac{3}{6}=0,5$.

Енді B оқиғасы орындалды деп алып, A оқиғасының ықтималдығын анықтайық. Мұндай ықтималдықтарды ***шартты ықтималдықтар*** деп атайды. Оның белгіленуі: $P_B(A)$.

$U=\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$ элементар оқиғалар кеңістігінде $A=\{A_1, A_3, A_5\}$, $B=\{A_1, A_2, A_3\}$ болғандықтан, B оқиғасы орындалған жағдайда A оқиғасына A_1, A_2, A_3 элементар оқиғалары арасынан екеуі қолайлы: A_1 және A_3. Онда $P_B(A)=\frac{2}{5}$.

5°. **(Көбейту ережесінің жалпылама түрі.)** *Кез келген A және B оқиғалары үшін*

$$P(A\cdot B)=P(B)\cdot P_B(A)=P(A)\cdot P_A(B) \qquad (7)$$

теңдіктері орындалады.

n элементі бар элементар оқиғалар кеңістігінде A оқиғасына m элементар оқиғалар, B оқиғасына k элементар оқиғалар қолайлы:

$$P(A)=\frac{m}{n},\ P(B)=\frac{k}{n}.$$

B оқиғасы орындалса, A оқиғасына B құрамындағы l элементар оқиғалар қолайлы болсын делік. Басқаша айтқанда, $A\cdot B$ көбейтіндісіне l элементар оқиғалары қолайлы:

$$P_B(A)=\frac{l}{k}=\frac{l}{n}:\frac{k}{n}=\frac{P(A\cdot B)}{P(B)}.$$

Осыдан

$$P(A\cdot B)=P(B)\cdot P_B(A).$$

(7) формуланың екінші жартысы да осы сияқты дәлелденеді.

Егер A және B оқиғалары тәуелсіз болса, $P_B(A)=P(A)$ теңдігі орындалып, (7) формуладан (4) формула шығады.

1. Қолайлы нәтижелер және барлық мүмкін нәтижелер деген не?
2. Тең мүмкіндікті оқиғалар кеңістігіндегі кездейсоқ оқиғаның ықтималдығы қалай есептеледі?
3. Оқиғаның орындалу жиілігі мен салыстырмалы жиілігі деп нені айтады? Мысал келтіріңдер.
4. Оқиғаның ықтималдығын салыстырмалы жиілігі арқылы қалай анықтайды? Оның дәлдігін қалай жетілдіруге болады? Мысал келтіріңдер.
5. Ақиқат және жалған оқиғалардың ықтималдықтары неге тең?
6. Оқиғаның ықтималдығы қай аралықта өзгереді?
7. Үйлесімсіз оқиғалардың қосу ережесін тұжырымдап, дәлелдеңдер.
8. Тәуелсіз оқиғалардың көбейту ережесін тұжырымдап, дәлелдеңдер.
9. Қосу ережесінің жалпылама түрін тұжырымдап, дәлелдеңдер.
10. Шартты ықтималдық деген не? Мысал келтіріңдер.
11. Көбейту ережесінің жалпылама түрін тұжырымдап, дәлелдеңдер.

Практикалық жұмыс

Сыныптағы оқушылар арасынан тақтаға тапсырманы орындауға екі оқушы шығарылса, олардың 1) екеуі де қыз бала; 2) екеуі де ұл бала; 3) бірі қыз бала, екіншісі ұл болу ықтималдығын есептеңдер.

ЕСЕПТЕР

А

5.24. Техникалық бақылау бөлімі 1000 бұйымның 8-і жарамсыз болатынын анықтады. Жарамсыз бұйым жасалу жиілігі қандай?

5.25. Нысанаға атылған 20 оқтың 18-і дәл тиген. Нысанаға тигізу жиілігі қандай?

5.26. Құралдар партиясын сынақтан өткізу барысында құралдардың жарамды болу жиілігі 0,9-ға тең болды. Егер барлығы 200 құрал тексерілсе, олардың ішіндегі жарамды құралдар саны нешеу болғаны?

5.27. Өнімділігін тексеру мақсатында 200 дән егілді және олардың 170-і өніп шықты. Егілген әрбір 1000 дәннің орта есеппен нешеуі өніп шығады?

Алдымен дәннің өнімділігінің салыстырмалы жиілігін (өнімділік ықтималдығын) анықталық:

$\frac{m}{n} = \frac{170}{200} = \frac{17}{20}$. Онда 1000 дәннің, шамамен,

$1000 \cdot \frac{27}{20} = 50 \cdot 17 = 850$ -і өніп шығады.

5.28. Оқулықтың осы бетінде кездесетін «*к*» әрпінің жиілігін анықтаңдар.

5.29. Кез келген газет мәтінінде кездесетін алты әріптен тұратын сөздер жиілігін табыңдар.

5.30. Кез келген газет мәтінінде кездесетін зат есімдер жиілігін анықтаңдар.

5.31. Мәтінді компьютерге теру барысында екі сөз арасындағы «аралықты» да «әріп» есебіне алады. Кез келген газет мәтінінде кездесетін «аралықтар» жиілігін анықтаңдар.

5.32. 9-сыныпта оқитын барлық оқушылардың әр айға келетін туған күндерінің жиілігін табыңдар.

5.33. 1) Тиынды бір рет тастағанда оның елтаңба жағымен түсуінің; 2) ойын сүйегін бір рет тастағанда алты ұпайының түсу ықтималдығы қандай?

5.34. Қораптағы өзара бірдей 10 асықтың 4-еуі боялған. Қораптан кездейсоқ алынған асықтың 1) боялған; 2) боялмаған болу ықтималдығы қандай?

5.35. Тиын екі рет тасталды. Оның 1) екі рет елтаңба жағымен түсуі; 2) тек қана бір рет елтаңба жағымен түсуі; 3) кем дегенде бір рет елтаңба жағымен түсу ықтималдығын табыңдар.

5.36. Оқушы дәптеріне екі таңбалы кездейсоқ сан жазды. Осы жазылған санның 1) тақ болуы; 2) 3-ке еселік болу ықтималдығы қандай?

5.37. 35 оқушының 5-еуі сабаққа дайындалмай келген. Тақтаға кездейсоқ шақырылған оқушының сабаққа дайындалмай келу ықтималдығы қандай?

5.38. Екі мерген нысанаға бір-бірден оқ атады. Бірінші мергеннің нысанаға тигізу ықтималдығы 0,7-ге, екіншісінікі 0,8-ге тең. Нысанаға 1) тек бір ғана мергеннің тигізуі; 2) кем дегенде бір мергеннің тигізуі; 3) екеуінің де тигізуі; 4) екеуінің де тигізбеуі; 5) кем дегенде бір мергеннің мүлт кету ықтималдығы қандай?

5.39. Зауыт өнімдерінің 27%-ы жоғары сапалы және 70%-ы I сортты. Кездейсоқ алынған өнімнің жоғары не I сортты болу ықтималдығын табыңдар.

А оқиғасы зауыт өнімінің жоғары сапалы болуын, B оқиғасы I сортты болуын білдірсін. Бізге $P(A+B)$ ықтималдығын табу керек. A және B үйлесімсіз оқиғалар және $P(A)=0,27$, $P(B)=0,7$ болғандықтан,

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=0,27+0,7=0,97.$$

5.40. Мерген өзара қиылыспайтын үш бөлікке бөлінген нысанаға тигізді. Нысананың I бөлігіне тигізу ықтималдығы 0,45, II бөлігіне тигізу ықтималдығы 0,35. Мергеннің нысананың 1) I не II бөліктеріне тигізу; 2) II не III бөліктеріне тигізу; 3) III бөлігіне тигізу ықтималдығы қандай?

5.41. Дүкендегі әрбір 100 электр шамының орта есеппен біреуі жарамсыз болып келеді. Дүкеннен кездейсоқ алынған екі электр шамының 1) екеуі де жарамды; 2) біреуі ғана жарамсыз; 3) екеуі де жарамсыз болу ықтималдығын табыңдар.

5.42. «Ықтималдық» сөзінің әрбір әрпі жазылған карточкалар араластырылып, келесі бетіне аударылып тасталды. Осыдан кездейсоқ алынған карточкада дауысты әріп болуы ықтималдығы қандай?

5.43. 20-дан артпайтын кез келген натурал санның 1) 5-ке еселік; 2) 3-ке еселік; 3) жай сан; 4) құрама сан болу ықтималдығы қандай?

5.44. Қалтадағы бірдей 11 асықтың 5-еуі боялған. Қалтадан алғашқы алынған асық боялған болса, екінші алынған асықтың да боялған болу ықтималдығы қандай?

5.45. Қораптағы 15 тетіктің 10-ы боялған. Қораптан құрастырушының кездейсоқ алған тетігінің боялған болу ықтималдығын табыңдар.

5.46. Тиын екі рет тасталды. Тиынның кем дегенде бір рет Елтаңба жағымен түсу ықтималдығын табыңдар.

5.47. Қорапта 10 ақ және 15 қара түсті шар бар. Қораптан кездейсоқ алынған шардың ақ болу ықтималдығын табыңдар.

5.48. Техникалық байқау бөлімі кездейсоқ алынған 100 кітаптың арасынан 5 жарамсыз кітап тапты. Жарамсыз кітаптың алынуының салыстырмалы жиілігін анықтаңдар.

5.49. Екі ойыншы кезекпен тиын тастайды және келісім бойынша кімнің тастаған тиыны бірінші болып Елтаңба жағымен түссе, сол ұтады. Осы ойынды 20 рет қайталағандағы бірінші ойыншының ұтуының салыстырмалы жиілігін табыңдар.

5.50. Қазақ әліпбиі әріптерінің Қазақстан Республикасының Әнұраны мәтінінде кездесетін жиіліктерін анықтаңдар.

5.51. 5.27-есептегі жеке дәннің өніп шығу ықтималдығын бағалаңдар.

5.52. Зауыт өнімдерінің сапасын тексеру үшін дайын өнімдер партиясының әрқайсысынан тексеруге 100 бұйым алынды. Тексеруге алынған бұйымдардың орта есеппен 8-і жарамсыз болып отырды. Осы зауыт өнімдерінен кездейсоқ алынған бұйымның сапалы болу ықтималдығын бағалаңдар. 1000 бұйымның орта есеппен нешеуі жарамсыз?

5.53. Тиын үш рет тасталды. Тиынның кем дегенде бір рет Елтаңба жағымен түсу ықтималдығы қандай?

E_i арқылы тиынды i рет тастағанда оның елтаңба жағымен түсуін білдіретін оқиғаны белгілейік. Мұнда $i=1,2,3$. Бізге $P(E_1+E_2+E_3)$ ықтималдығын табу керек. (3) формуласы бойынша

$$P\left(E_1+E_2+E_3\right)=1-P\left(\overline{E_1+E_2+E_3}\right)=1-P\left(\overline{E_1}\cdot\overline{E_2}\cdot\overline{E_3}\right)=$$

$$=1-P\left(\overline{E_1}\right)\cdot P\left(\overline{E_2}\right)P\left(\overline{E_3}\right)=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{7}{8}.$$

Ж а у а б ы: $\frac{7}{8}$.

5.54. Кездейсоқ алынған екі таңбалы санды 8-ге бөлгенде 1-ге қалдық қалу ықтималдығы қандай?

5.55. Ойын сүйегі екі рет тасталғанда 1) кем дегенде бір рет үштен кем ұпай түсуі; 2) тура бір рет үштен кем ұпайдың түсу ықтималдығын табыңдар.

5.56. Алдыңғы есеп шартында A — «түскен ұпайлар қосындысы тақ», B — «кем дегенде бір рет бірлік ұпай түсті» деген оқиғалар үшін мына оқиғалардың ықтималдығын табыңдар: 1) $A+B$; 2) $A\cdot B$; 3) $A\cdot\overline{B}$.

5.57. 9-сынып бойынша аудандық математика олимпиадасына қатысқан 12 оқушының 5-еуі — оқу озаты. Алғашқы үш орынды иемденген оқушылардың барлығы да оқу озаттары болу ықтималдығы қандай? Мұнда олимпиадаға қатысқан оқушылардың мүмкіндіктері бірдей деп есептеу қажет.

5.58. Кәсіпорында өрт басталғанын хабарлайтын екі автоматтандырылған қондырғылар орнатылған. Өрт болған жағдайда бірінші қондырғының іске қосылу ықтималдығы 0,95-ке, екіншісінің іске қосылу ықтималдығы 0,8-ге тең. Өрт болған жағдайда тек бір ғана қондырғының іске қосылу ықтималдығын табыңдар.

5.59. Бір жұмыс күні ішінде станоктың істен шығу ықтималдығы 0,01-ге тең. Оның екі күн жұмыс істегенінде бірде-бір рет істен шықпау ықтималдығы қандай?

A_i — станоктың i-рет істен шықпауын білдіретін оқиға болсын. $P\left(\bar{A}_i\right)=0,01$ және $P(A_i)=0,99$. Мұндағы $i=1,2$. Табу керек: $P(A_1A_2)=P(A_1)\cdot P(A_2)=0,99\cdot 0,99=0,9801$.

5.60. Техникалық қондырғының өзара тәуелсіз жұмыс істейтін үш элементі бар және олардың істен шығу ықтималдықтары сәйкесінше 0,05; 0,03 және 0,04-ке тең. Бұл элементтердің біреуі істен шықса, қондырғының өзі істен шығады. Қондырғының істен шығу ықтималдығы қандай?

5.61. Барлық жақтары боялған куб өзара тең 1000 кішкене кубтарға бөлінетіндей етіп қиылып, мұқият араластырылған. Кездейсоқ алынған кубтың 1) бір; 2) екі; 3) үш жағының боялу ықтималдығы қандай?

5.62. Жаудың көпірін істен шығару үшін оған бір бомбаны дәл тигізсе, жеткілікті. Көпірге дәл тигізу ықтималдықтары 0,6-ға және 0,7-ге тең болатындай, екі бомба тасталды. Көпірдің істен шығу ықтималдығын табыңдар.

5.63. Мергеннің 4 рет атқанда нысанаға кем дегенде бір рет тигізу ықтималдығы 0,9984. Оның бір рет атқанда нысанаға дәл тигізу ықтималдығы қандай?

5.64. Электр желісіне бір-біріне тізбектеп үш элемент қосылған. Элементтердің істен шығу ықтималдықтары 0,1; 0,15 және 0,2. Бұл тізбектің токты өткізбеу ықтималдығы қандай?

C

5.65. Қалтада 4 ақ және 2 қызыл асық бар. Қалтадан кездейсоқ алынған 2 асықтың түстері әртүрлі болу ықтималдығын табыңдар.

5.66. Ұзындықтары 2 см, 5 см, 6 см және 10 см болатын таяқшалардан кездейсоқ үш таяқша алынды. Алынған таяқшалардың үшбұрыш құрастыру ықтималдығы қандай?

5.67. Екі ойын сүйегі тасталды. n түскен ұпайлар қосындысына тең. $n=7$ немесе $n=8$ болу ықтималдықтарының қайсысы басым?

5.68*. Сарыарқа өңіріндегі ақбөкендердің 400-іне ен салынған. Зерттеу үшін кездейсоқ ұсталған 20 бөкеннің 8-інде ен бар болып шықты. Осы өңірде жуық шамамен неше ақбөкен бар?

5.69. Қалтада (қапшықта) 20 асық бар, олардың 5-еуі қызыл түске және 8-і көк түске боялған, қалғаны боялмаған. Қалтадан кездейсоқ алынған асықтың мүмкін болатын түстерінің барлық элементар нәтижелерін атап көрсетіңдер. Осы нәтижелердің ықтималдық шкаласын жасаңдар.

5.70. Тиын екі рет тасталды. Барлық элементар нәтижелерді атап көрсетіңдер. Ықтималдықтар шкаласын толтырыңдар.

5.71. Нысанаға бір рет атқанда тигізу ықтималдығы 0,6-ға тең. Нысанаға тигенше оқ атыла береді. Нысанаға үштен артық оқ атылмау ықтималдығын табыңдар.

5.72. Екі ойыншы кезекпен тиын тастап ойнайды. Келісім бойынша кімнің тиыны бірінші болып елтаңба жағымен түссе, сол ұтады. Әр ойыншының ұту ықтималдығын табыңдар.

5.73. Алдыңғы есепті үш ойыншы үшін шешіңдер.

5.74. Егер $P_B(A)>P(A)$ болса, онда $P_A(B)>P(B)$ теңсіздігі орындалатынын көрсетіңдер.

5.75. $P(AB)=0,72$, $P(A\overline{B})=0,18$ болса, $P(A)$-ны табыңдар.

5.76. $P(A)=a$, $P(B)=b$, $P(A+B)=c$ болса, $P(A\overline{B})$-ны табыңдар.

$$c = P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = a + b - P(A \cdot B) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P(AB) = a + b - c.$$
$$A \cdot B + A\overline{B} = A(B + \overline{B}) = A \Rightarrow P(AB + A\overline{B}) = P(A) \Rightarrow$$
$$P(AB) + P(A\overline{B}) = P(A) \Rightarrow a + b - c + P(A\overline{B}) = a \Rightarrow P(A\overline{B}) = c - b.$$

5.77. 1 және 2 цифрларымен нөмірленген ойын сүйектері тасталды. Бірінші сүйекте түскен ұпай саны екіншісіне қарағанда артық болу ықтималдығы қандай?

5.78. 1-ден n-ге дейін нөмірленген асықтар дорбаға салынған. Әрбір жүрісте дорбадан бір асық алынып, ол дорбаға қайта салынбайды. Кем дегенде бір рет асық нөмірі мен жүріс нөмірінің сәйкес келу ықтималдығы қандай?

Қайталауға арналған жаттығулар

5.79. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\left(\dfrac{ax-y}{x+y}-\dfrac{ay+x}{y-x}\right)\cdot\left(\dfrac{x^2-y^2}{a^2-1}:\dfrac{x^2+y^2}{a-1}\right)$;

2) $\left(\dfrac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-1}+b^{-1}}-\dfrac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-1}-b^{-1}}\right)\cdot\left(\dfrac{4ab}{b^2-a^2}\right)^{-1}$.

5.80. $|x+3|=2x-1$ теңдеуін шешіңдер.

5.81. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\sin x+\sin(\pi-x)}-\dfrac{\operatorname{tg} x\cdot\cos(\pi-x)}{2}$;

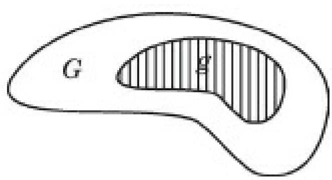
2) $\dfrac{2\sin\varphi\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\varphi\right)}{2\cos^2\varphi-1}$.

5.2. Геометриялық ықтималдық

Тақырыпты оқып-үйрену барысында сендер:

- мәтінді есеп ретінде берілген геометриялық ықтималдықтарды шығару дағдысын меңгересіңдер.

Көптеген жағдайларда оқиғалардың ықтималдығын анықтауды белгілі классикалық анықтама бойынша есептеу мүмкін бола бермейді. Әдетте мұндай жағдайларда сынақтың барлық мүмкін нәтижелері мен оқиғаға қолайлы нәтижелер саны шексіз көп болып келеді. Мысалы, жазықтықтағы G облысының ішінде кішілеу g облысы орналассын (5.2-сурет). Бізге G облысынан кездейсоқ алынған M нүктесі g облысына тиісті болу ықтималдығын анықтау керек. Мұнда сынақтың, яғни M нүктесін G облысынан таңдап алудың барлық



5.2-сурет

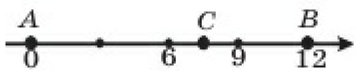
мүмкін жағдайларының саны G облысының нүктелері «санына» тең. Осы сияқты g облысының нүктелер «саны» да шексіз көп. Сондықтан бұл оқиғаның ықтималдығын $P(A) = \frac{m}{n}$ формуласымен анықтау мүмкін емес.

Осындай ықтималдықтарды геометриялық тәсілмен орындайды. Бұл ықтималдықты берілген g және G фигуралары аудандарының қатынасы түрінде анықтайды:

$$P = \frac{S_g}{S_G}. \qquad (1)$$

(1) формуланы барлық шектеусіз нәтижелі оқиғаларға қолданатын универсал формула деп қарастырмау қажет. Өйткені кесінді бойында да, кеңістік денелерінде де шексіз көп нүктелер бар. Сондықтан берілген есептің шарты бойынша қажетті ықтималдықтар сәйкесінше кесінді бойындағы нүктелер үшін ұзындықтардың қатынасы, жазық фигуралар үшін аудандардың қатынасы және кеңістік нүктелері үшін көлемдердің қатынасы ретінде анықталады.

1-мысал. Ұзындығы 12 см AB кесіндісінен кездейсоқ C нүктесі алынды. Қабырғасы AC-ға тең квадраттың ауданы 36 см^2-ден үлкен және 81 см^2-ден кіші болу ықтималдығын табу керек.



5.3-сурет

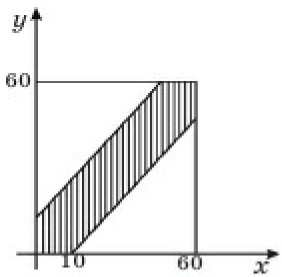
Қабырғасы $AC=x$ болатын квадраттың ауданы x^2-қа тең. Есеп шарты бойынша $36<x^2<81 \Rightarrow 6<x<9$ теңсіздігі орындалуы қажет. Сан өсінде A нүктесінің координатасы $A(0)$ деп алсақ, $B(12)$, $C(x)$ болады. Сонда $x \in (6; 9)$ аралығында жатуы қажет (5.3-сурет). Бұл интервалдың ұзындығы 3-ке тең. Сондықтан бізге қажет ықтималдық 3:12 қатынасымен анықталады: $P = \frac{3}{12} = 0,25.$

2-мысал. Жұмысшы өзара тәуелсіз екі станоктың жұмысын бақылайды. Көп жылғы бақылау нәтижесі бойынша әр станок (бір-біріне тәуелсіз) бір сағат ішінде жұмысшының оған 10 минут көңіл бөлуін қажет етеді. Жұмысшының бір станокпен айналысып жатқан уақыт аралығында екінші станокқа да көңіл бөлу қажеттілігінің ықтималдығын анықтайық.

x арқылы жұмысшының I станокқа көңіл бөлу уақытын, y арқылы II станокқа көңіл бөлу уақытын белгілейік. Жұмысшының I станокпен айналысып жатқан уақытында II станокқа да көңіл бөлуі қажет болса, $|x-y|<10$ теңсіздігі орындалуы керек. Осыдан $-10<x-y<10$ қос теңсіздігін аламыз. Есеп шарты бойынша, алдымен I станок істен шығып, сонан соң екінші станок бұзылған ($x\geqslant y$) болып көрінгенімен, $y\geqslant x$ жағдайында да (бірінші болып II станок істен шықса да) бізді жұмысшының II станокпен айналысып жатқан уақытында I станоктың істен шығуы толық қанағаттандырады. Олай болса, жазықтықтағы бізге қолайлы нүктелердің координаталары

$$\begin{cases} y > x - 10, \\ y < x + 10, \\ 0 \leqslant x \leqslant 60, \\ 0 \leqslant y \leqslant 60 \end{cases}$$

теңсіздіктер жүйесімен анықталады. Барлық мүмкін нәтижелер жиыны $0\leqslant x\leqslant 60$, $0\leqslant y\leqslant 60$ теңсіздіктерімен анықталады. 5.4-суретте барлық мүмкін нәтижелер қабырғасы 60-қа тең квадратпен, бізге қолайлы нәтижелер боялып бейнеленген фигурамен анықталады. (1) формуладан



5.4-сурет

$$P = \frac{60^2 - 50 \cdot 50}{60^2} = \frac{11}{36}.$$

Әдетте есепті геометриялық тәсілмен шешу қажеттігі бірден байқала қоймайды. Сондықтан есептің шартына толық талдау жасап, оның мынадай тұстарына көңіл бөлу қажет:

- сынақтың барлық мүмкін нәтижелері және бізге қолайлы нәтижелері шексіз көп мәндер (нақты сандар жиынында) қабылдауы қажет;
- егер есепті шешу барысында тәуелсіз айнымалылар енгізіп, олар нақты сандар аралығында өзгерсе, енгізілген айнымалылар санына байланысты бір айнымалысы бар есеп түзу бойында; екі айнымалысы бар есеп жазықтықта шешіледі және т.с.с.

ЕСЕПТЕР

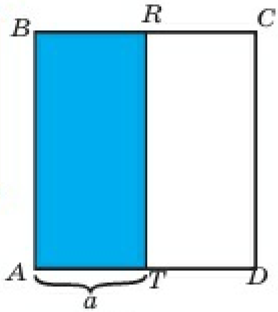
A

5.82. $AB=20$ см кесіндінің ортасы C нүктесі. AB кесіндісінен кездейсоқ алынған нүктенің BC кесіндісіне тиісті болу ықтималдығы қандай? Мұнда AB кесіндісінің нүктелері бірдей мүмкіндіктермен алынады деп есептейміз.

5.83. Кесінді өзара тең үш бірлікке бөлінген. Кесінді бойынан кездейсоқ белгіленген нүктенің ортаңғы бөлікке тиісті болу ықтималдығы қандай?

5.84. Қабырғасы 1-ге тең квадрат ішінен кездейсоқ A нүктесі алынды. A нүктесінен квадраттың белгілі қабырғасына дейінгі қашықтығы a санынан артық болмау ықтималдығы қандай? Мұнда $0<a<0,5$.

Бізге қажет ықтималдық $S_{ABRT} : S_{ABCD}$ қатынасына тең. $AB=1$ болғандықтан, $S_{ABCD}=1$, ал $S_{ABRT}= =1\cdot a=a$ (5.5-сурет). Демек, $P=a$.



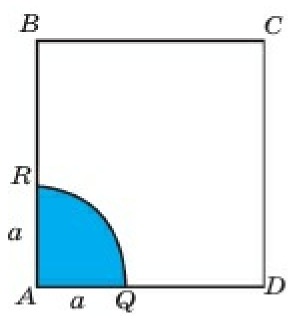
5.5-сурет

5.85. Қабырғасы a-ға тең квадрат ішінен кездейсоқ алынған нүктенің оған іштей сызылған дөңгелекке тиісті болу ықтималдығы қандай?

5.86. Қабырғасы a болатын тең қабырғалы үшбұрыш ішінен кездейсоқ алынған нүкте осы үшбұрыштың орта сызықтары арқылы құрастырылған үшбұрышқа тиісті болуы ықтималдығы қандай?

B

5.87. 5.84-есеп шартында A нүктесі квадраттың 1) белгілі бір төбесіне дейінгі қашықтығы; 2) центріне дейінгі қашықтығы a $(0<a<0,5)$ санынан артық болмау ықтималдығын табыңдар.



5.6-сурет

1) Бізге қажет ықтималдық $S_{сек.ARQ} : S_{ABCD}$ қатынасына тең (5.6–сурет). Мұнда $AR=AQ=a$ болғандықтан, $S_{секAPQ}=\frac{1}{4}\pi a^2$, $S_{ABCD}=1$. Демек, $P=\frac{\pi a^2}{4}$.

5.88. Радиусы R-ге тең дөңгелек ішінен кездейсоқ алынған A нүктесі осы дөңгелекке іштей сызылған 1) квадратқа; 2) дұрыс үшбұрышқа; 3) бір қабырғасы $2a$-ға ($0<a<R$) тең тіктөртбұрышқа; 4) табандары $2a$ және $2b$ ($0<a<R$, $0<b<R$) болатын тең бүйірлі трапецияға тиісті болу ықтималдығы қандай?

5.89. Радиустары 2 см және 4 см болатын екі концентрлі дөңгелектер берілген. Үлкен дөңгелек ішінен кездейсоқ белгіленген нүктенің 1) кіші дөңгелекке; 2) осы шеңберлермен шектелген сақинаға тиісті болу ықтималдығы қандай?

5.90. Берілген квадраттың қабырғаларының орталарын тізбектей қосып екінші квадрат алынды. Екінші квадраттың қабырғаларының орталарын қосып, үшінші квадрат алынды. Берілген квадраттың ішінен кездейсоқ алынған нүктенің 1) 3-квадратқа; 2) 3-квадраттың сыртқы бөлігі болып табылатын 2-квадратқа; 3) 3-квадратқа іштей сызылған дөңгелекке тиісті болу ықтималдығы қандай?

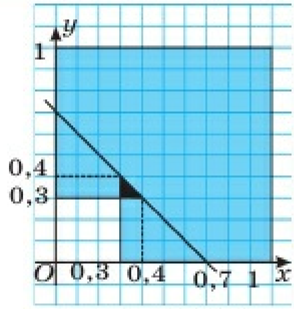
5.91. Алдыңғы есепті квадраттың орнына тең қабырғалы үшбұрыш алып, шығарыңдар.

5.92. Дөңгелек өзара тең 6 секторға бөлініп, бұл секторлар ретімен қызыл, көк және сары түстерге боялған. Центрінен айналдырылған дөңгелекке тир мылтығынан оқ атылды. Оқтың сары түсті секторға тию ықтималдығы қандай?

C

5.93. Ұзындығы 1 м болатын шыбық сынып, екіге бөлініп қалды. Оның әр бөлігінің ұзындығы 30 см-ден кем болмау ықтималдығын табу керек. Шыбықтың кез келген нүктеде сыну мүмкіндігі бірдей.

Сынған шыбықтың бірінші бөлігінің ұзындығы x, екінші бөлігінің ұзындығы y болсын. Үшінші бөлігінің ұзындығы $1-x-y$. Есеп шарты бойынша мына теңсіздіктер жүйесі орындалады:



5.7-сурет

$$\begin{cases} x\geqslant 0,3, \\ y\geqslant 0,3, \\ 1-x-y\geqslant 0,3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant 0,3, \\ y\geqslant 0,3, \\ x+y\leqslant 0,7. \end{cases}$$

$0<x<1$, $0<y<1$ болғандықтан, (x, y) нүктелері 5.7-суретте көрсетілген шаршыны толтырады. Ал теңсіздіктер жүйесін қанағаттандыратын (x, y) нүктелері қара түспен боялған үшбұрышты толтырады. Бұл үшбұрыштың катеттері 0,1-ге тең, ауданы $\frac{1}{2}\cdot 0,1\cdot 0,1 = 0,005$.

Шаршының ауданы 1-ге тең. Бізге қажет ықтималдық $\frac{0,005}{1} = 0,005$.

5.94. Ұзындығы l-ге тең шыбық сынып, үшке бөлініп қалды. 1) Осы бөліктерден үшбұрыш құрастыру; 2) әр бөліктің ұзындығы $\frac{l}{4}$-тен кем болмау ықтималдығы қандай?

5.95. Шахмат тақтасындағы шаршы қабырғасының ұзындығы $2a$. Оған диаметрі $2r$-ге тең ($r < a$) тиын тасталды. Тиынның тұтасымен 1) бір шаршының ішінде; 2) қара түсті шаршының ішінде жату ықтималдығын табыңдар.

5.96. Ұзындығы l-ден артпайтын кездейсоқ алынған үш кесіндіден үшбұрыш құрастыру ықтималдығын табыңдар.

5.97. Сақина радиустарының бірі екіншісінен екі есе үлкен болатындай етіп центрлері ортақ (концентрлі) екі шеңбермен шектелген. Кіші шеңбер бойынан алынған бір нүктеге жарық көзі орнатылған. Сақинаның кездейсоқ алынған нүктесіне жарық түсу ықтималдығы қандай?

5.98. Алдыңғы есепті шеңберлердің орнына сфераларды алып, шығарыңдар. (Қажетті формулаларды анықтамалардан қарап қолданыңдар.)

5.99. (Кездесу есебі). Екі адам белгілі бір жерде сағат 17 мен 18 аралығында кездесуге уәделеседі. Уәде бойынша олардың әрқайсысы белгіленген жерге келгеннен кейін екіншісін тура T минут күтіп, келмеген жағдайда кетіп қалады. Бұл екеуінің кездесу ықтималдығы қандай? Есепті 1) T=15 мин; 2) T=20 мин; 3) T=30 мин деп алып, шешіңдер.

Қайталауға арналған жаттығулар

5.100. Теңдеуді шешіңдер:

1) $\frac{4}{x}+5=\frac{1}{x^2}$; 2) $\frac{2}{x^2+3}+\frac{4}{x^2+7}=1$.

5.101. $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=-2$ деп алып, $\mathrm{tg}x$-ті табыңдар.

5.102. Геометриялық прогрессияның бірінші мүшесі 150, төртінші мүшесі 1,2. Прогрессияның бесінші мүшесін табыңдар.

5-БӨЛІМГЕ ҚОСЫМША ЕСЕПТЕР

5.103. Тиынды елтаңба жағы түскенше немесе 4 рет қатарынан сан жағы түскенше тастайды. Элементар оқиғалар кеңістігін анықтаңдар.

5.104. 1-ден 9-ға дейінгі цифрлар арасынан кездейсоқ бір цифр алынды. Алынған санның 1) жұп; 2) тақ; 3) жай сан болу ықтималдығы қандай?

5.105. Бір кәсіпорын өндіретін өнімдердің 1,5%-ы жарамсыз болатыны анықталған. Осы мекеме жасаған 1000 өнімнің арасында орта есеппен неше тетікті жарамсыз деп күтуге болады?

5.106. Ойын сүйегін үш рет тастағанда кем дегенде бір рет алтылық жағымен түсу ықтималдығы қандай?

5.107. Кез келген 9 адамның ішінен бірін-бірі танитын 3 адам немесе бірін-бірі танымайтын 4 адам табылатынын дәлелдеңдер.

5.108. Шахмат тақтасының бір диагоналының бойында жатқан қарама-қарсы екі бұрышындағы шаршылар қиып алынды. Тақтаның қалған бөлігін бір ақ және бір қара шаршыдан құрастырылған тіктөртбұрышпен толық жауып шығуға бола ма?

5.109. Поштадағы 10 түрлі маркадан неше тәсілмен 1) 8 марка; 2) әртүрлі 8 марка сатып алуға болады?

5.110. Қорапта 5 ақ, 4 қызыл және 2 көк асық бар. Қораптан неше тәсілмен 1) 3 асық; 2) әртүрлі 3 асық; 3) екеуі бір түсті болатындай етіп 3 асық алуға болады?

5.111. 15 күннің ішінде оқушылар 5 емтихан тапсыруы қажет. Бұл емтихандардың бірі алгебрадан, екіншісі геометриядан. Алгебра және геометрия бойынша емтихандар бірінен соң бірі келмейтіндей етіп, емтихан кестесін неше тәсілмен құрастыруға болады?

5.112. 1, 2, 3, 5, 6, 7 цифрларының көмегімен 3 тақ, 2 жұп цифрлардан құрастырылған және цифрлары қайталанбайтындай етіп, неше тәсілмен бес таңбалы сандар жазуға болады?

5.113. Екі дауысты дыбыстың арасында екі дауыссыз дыбыс келетіндей етіп, **торпақ** сөзіндегі әріптерді неше тәсілмен алмастыруға болады?

5.114. 1) $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$; 2) $C_n^1 + 6C_n^2 + 6C_n^3 = n^3$;

3) $C_n^0 + 7C_n^1 + 12C_n^2 + 6C_n^3 = (n+1)^3$ теңдіктері орындалатынын дәлелдеңдер.

5.115. $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^m$ биномының жіктелуіндегі бірінші және үшінші қосылғыштардың коэффициенттерінің қосындысы 46 болса, бұл жіктелудің x-і жоқ мүшесін табыңдар.

5.116. 1) $(1+x-x^2)^3$; 2) $(1+x^2-x^3)^4$ көпмүшелеріндегі x^5-інің коэффициентін анықтаңдар.

5.117. A және B пункттері үш жолмен қосылған. Осы аралықта бұл жолдарды өзара параллель 4 жол қиып өтеді. Бір жүріп өткен жолын қайта жүрмей, A пунктінен B пунктіне неше тәсілмен баруға болады?

5.118. Егер B және C үйлесімсіз, $P(A)\neq 0$ болса,

$$P_A(B+C) = P_A(B) + P_A(C)$$

теңдігі орындалатынын дәлелдеңдер.

5.119. Егер $P(A)\neq 0$ болса, $P_A(B+C) = P_A(B) + P_A(C) - P_A(BC)$ теңдігі орындалатынын дәлелдеңдер.

5.120. Шахмат тақтасындағы шаршы қабырғасының ұзындығы $2a$. Оған радиусы $r<a$ болатын тиын тасталды. Тиынның тұтасымен бір шаршыда жату ықтималдығы қандай?

5.121. 1) Ертеректе бір хан жалшыны жазаламақшы болып, оған екі ақ және екі қызыл түсті асықтарды екі дорбаға үлестіріп салуды бұйырады. Жендет екі дорбаның біреуінен бір асықты кездейсоқ таңдап алады. Егер алынған асық қызыл түсті болса, жалшы басынан айырылады, алынған асықтың түсі ақ болған жағдайда жалшыға рақымшылық жасалады. Жалшыға рақымшылық жасалу ықтималдығы ең үлкен болуы үшін асықтарды дорбаларға қандай тәсілдермен үлестіріп салған жөн?

2) Іштей сызылған дөңгелегі бар шаршыға кездейсоқ 4 нүкте тасталды. Осы нүктелердің тура екеуінің дөңгелекке түсу ықтималдығы қандай?

Тарихқа шолу

Кейбір комбинаторикалық есептермен ежелгі грек математиктері де айналысқан. Дегенмен бұл саладағы маңызды нәтижелерді алгебра мен ықтималдықтар теориясының дамуына байланысты XVII және XVIII ғасыр математиктері ала бастаған. Алғашында ықтималдықтар теориясы, негізінен, құмар ойындардың (ойын сүйегін тастау, карта ойындары және т.с.с.) мұқтаждығынан туындаған. Мәселен, XIV Людовик тұсында құмар ойындардың шынайы әуесқойы Кавалер де Мере үш ойын сүйегін қатар тастау нәтижесінде қосындысында 12 ұпайдан гөрі 11 ұпайдың жиірек түсетінін байқаған. Бірақ оның ойынша бұл

ұпайлардың екеуін де әртүрлі 6 комбинациямен алуға болады деп санаған.
11 ұпай үшін: (6, 4, 1), (6, 3, 2), (5, 5, 1), (5, 4, 2), (5, 3, 3), (4, 4, 3).
12 ұпай үшін: (6, 5, 1), (6, 4, 2), (6, 3, 3), (5, 5, 2), (5, 4, 3), (4, 4, 4).

Де Меренің қатесін француз математигі Блез Паскаль (1623—1662) көрсетті. Де Мере көрсетілген комбинацияларды өзара тең мүмкіндікті оқиғалар деп есептеген. Ал шын мәнінде, бұлар тең мүмкіндікті оқиғалар емес. Мысалы, (6, 4, 1) комбинациясын 6 түрлі тәсілмен алуға болады (6, 4, 1), (6, 1, 4), (4, 1, 6), (4, 6, 1), (1, 4, 6), (1, 6, 4). Ал (4, 4, 4) комбинациясының тек бір ғана мүмкіндігі бар. (Үш ойын сүйегін тастағанда қосындысында 11 және 12 ұпай түсу ықтималдығын өз беттеріңше есептеп, Де Меренің қатесін көрсетіңдер).
XVII ғасырдың екінші жартысында Паскаль мен Ферма арасындағы хат алысу кезінде ғалымдар құмар ойындарында кездесетін заңдылықтарды ғылыми тұрғыдан негіздеп бақты. Тарихшы ғалымдар ықтималдық теориясының пайда болуын осы хат алмасулардан бастау алады деп бағалайды. Бұл теорияның дамуына нидерланд математигі Х. Гюйгенс (1629—1695), неміс ғалымы Г. В. Лейбниц (1646—1716), швейцар математигі Я. Бернулли (1654—1705) және өзгелер қомақты үлес қосты.
XVIII ғасырда жаратылыстану және тұрмыс-тіршілік мұқтаждықтары (бақылау қателіктері теориясы, оқ ату теориясының есептері, статистика мәселелері т.с.с. ықтималдықтар теориясының дамуын жаңа сатыға көтерді. Ықтималдықтар теориясында аналитикалық тәсілдерді қолдануға үлкен үлес қосқандар қатарында А. Муавр (1667—1754), П. С. Лаплас (1749—1827), К. Гаусс (1777—1855), С. Пуассон (1781—1840) сынды ғұлама математиктер болды. XIX—XX ғасырларда ықтималдықтар теориясы мен математикалық статистиканың қалыптасып дамуына орыс математиктерінің қосқан үлесі зор. Олардың қатарына П. Л. Чебышев (1821—1894), А. А. Марков (1856—1922), А. М. Ляпунов (1857—1918), С. Н. Бернштейн (1880—1968), А. Я. Хинчин (1894—1959), А. Н. Колмогоров (1903—1987) және басқа да ғалымдарды қосуға болады. Мәселен, А. Н. Колмогоров ықтималдықтар теориясын аксиоматикалық жолмен жазды.

ТЕРМИНДЕР АТАУЫНЫҢ СӨЗДІГІ

Қазақ тіліндегі нұсқасы	Орыс тіліндегі нұсқасы	Ағылшын тіліндегі нұсқасы
Кездейсоқ оқиға	Случайное событие	Random event
Элементар оқиға	Элементарное событие	Elementary event
Элементар оқиғалар кеңістігі	Пространство элементарных событий	Elementary event space
Үйлесімді оқиғалар	Совместные события	Joint events
Үйлесімсіз оқиғалар	Несовместные события	Non concurrent events
Тәуелсіз оқиғалар	Независимые события	Independent events
Тәуелді оқиғалар	Зависимые события	Dependent events
Қарама-қарсы оқиғалар	Противоположные события	Opposite events
Қолайлы жағдайлар саны	Количество благоприятству-ющих исходов	Number of favourable outcomes
Барлық мүмкін жағдайлар саны	Количество всех возможных исходов	The number of all possible outcomes
Ықтималдықтың классикалық анықтамасы	Классическое определение вероятности	The classic definition of probability
Ықтималдықтың статистикалық анықтамасы	Статистическое определение вероятности	Statistical definition of probability
Геометриялық ықтималдық	Геометрическая вероятность	Geometric probability

6-бөлім. VII–IX СЫНЫПТАР КУРСЫ МАТЕРИАЛДАРЫН ҚАЙТАЛАУҒА АРНАЛҒАН ЖАТТЫҒУЛАР

6.1. Натурал және бүтін сандар. Сандардың бөлінгіштігі

6.1. $\overline{5431a}$ саны 1) 2-ге; 2) 3-ке; 3) 4-ке; 4) 5-ке; 5) 6-ға; 6) 9-ға; 7) 10-ға; 8) 11-ге еселік болуы үшін a-ның орнына қандай цифрлар жазу керек?

6.2. Бүтін санның 1) 18-ге; 2) 25-ке бөлінгіштік белгілерін айтыңдар.

6.3. Егер $a>c$ болса, онда $\overline{abc}-\overline{cba}$ саны 9-ға бөлінетінін дәлелдеңдер.

6.4. Әрбір натурал n үшін 1) n^4-n^2 саны 12-ге; 2) n^9-n^3 саны 504-ке; 3) n^4+14n^2+49 саны n тақ болғанда 64-ке; 4) 5^n-5 саны 20-ға; 5) 7^n-7 саны 42-ге бөлінетінін дәлелдеңдер.

6.5. Тізбектес орналасқан төрт санның көбейтіндісі 24-ке бөлінетінін дәлелдеңдер.

6.6. Санның кубынан өзін шегергенде 24-ке бөлінетінін дәлелдеңдер.

6.7. Тақ санның квадратын 1-ге кеміткенде 8-ге еселік сан шығатынын дәлелдеңдер.

6.8. Егер 3-тен үлкен 3 жай сан арифметикалық прогрессия құраса, бұл прогрессияның айырымы 6-ға еселік болатынын дәлелдеңдер.

6.9. Кез келген тақ жай санды $4m-1$ немесе $4m+1$ түрінде жазуға болатынын дәлелдеңдер. Мұндағы m — натурал сан.

6.10. 1) $a:b=4:7$ және $(a, b)=8$; 2) $[a, b]=124$ және $(a, b)=31$; 3) $ab=375$ және $[a, b]=75$ деп алып, a және b сандарын анықтаңдар.

6.2. Рационал және иррационал сандар. Квадрат түбірлер

6.11. Есептеңдер:

1) $15\frac{6}{7}-12\frac{6}{7}\cdot\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{15}\right)$; 2) $\left(2,125\cdot1\frac{15}{17}-1\frac{7}{12}\right):7,25$;

3) $\dfrac{12,8 : 0,64 + 3,05 : 0,05}{8\frac{2}{3} : 1\frac{4}{9} - 1}$;

4) $\dfrac{203,4 : 9 - (5,39 - 7,39)}{\frac{3}{14} \cdot \frac{7}{9} - \frac{1}{3}}$;

5) $\left(1\frac{1}{3} \cdot 0,27 - 3\frac{1}{3} \cdot 0,15\right) - 1500 \cdot (-0,1)^3$;

6) $\left(\frac{6}{64} \cdot 5\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) : \left(-\frac{1}{3}\right)^3 + (-1)^5$;

7) $(0,3)^{-3} + \left(\frac{3}{7}\right)^{-1} + (-0,5)^{-2} \cdot \frac{3}{4} + (-1)^6 \cdot 6$;

8) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{9}\right)^{-1} + \left(\frac{6}{17}\right)^0 \cdot \frac{1}{8} - 0,25^{-2} \cdot 16$.

6.12. Есептеңдер:

1) $\sqrt{\left(\sqrt{5} - 1\right)^2} + 1$;

2) $\sqrt{\left(\sqrt{5} - 3\right)^2} - 3$;

3) $\sqrt{\left(\sqrt{5} - 1\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{5} - 3\right)^2}$;

4) $\left(\sqrt{5} - 3\right) \cdot \sqrt{14 + 6\sqrt{5}}$;

5) $\left(\sqrt{5} - 2\right) \cdot \sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$;

6) $\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right) \cdot \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$;

7) $\dfrac{1}{\sqrt{2} + 1} + \dfrac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}}$.

6.13. Сандарды салыстырыңдар:

1) $\sqrt{0,63}$ және $\sqrt{0,83}$;

2) $\sqrt{0,63}$ және $\sqrt[3]{0,63}$;

3) $\sqrt{1,63}$ және $\sqrt[3]{0,63}$;

4) $\sqrt{2}$ және $\sqrt[3]{3}$.

6.14. 1) $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{3}$; 3) $\sqrt{5}$ сандарының иррационал болатынын көрсетіңдер.

6.15. 1) $y = \sqrt{x}$; 2) $y = \sqrt{x^2}$; 3) $y = \left(\sqrt{x}\right)^2$ функцияларының графиктерін салыңдар.

14–4337

6.3. Қысқаша көбейту формулалары

6.16. Төмендегі формулаларды дәлелдеңдер:

1) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$;
2) $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$;
3) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
4) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$;
5) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^4 + ab + b^2)$;
6) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b+3ab^2+b^3$;
7) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$;
8) $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$;
9) $a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1}+a^{n-2} + \ldots + a + 1)$;
10) $a^n-b^n = (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+ \ldots +ab^{n-2}+b^{n-1})$;
11) $a^{2n+1} + 1 = (a+1)(a^{2n}-a^{2n-1} + \ldots - a+1)$;
12) $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n}-a^{2n-1}b+\ldots-ab^{2n-1}+b^{2n})$.

6.17. Өрнекті көбейткіштерге жіктеңдер:

1) $9(x+5)^2 - (x-7)^2$;
2) $49(y-4)^2 - 9(y+2)^2$;
3) $x^3+y^3+2xy(x+y)$;
4) $5a^2 - 5 - 4(a-1)^2$;
5) $2(x+y)^2 + x^2 - y^2$;
6) $a^4+ab^3 - a^3b - b^4$;
7) $(x-y+4)^2 - x^2 + 2xy - y^2$;
8) $(a-b)^3 + (a+b)^3$;
9) $(x+2y)^3+(2x-y)^3$.

6.18. Өрнекті көбейткіштерге жіктеңдер:

1) $5xy^3+30x^2z^2-6x^3yz-25y^2z$;
2) $15m^3n^2p-35p^2nq^3+25mn^3q^2-21m^2p^2q$;
3) $32c^5-3^5$; 4) $(4a)^5+(2b)^5$; 5) $(2x)^6+(3y)^6$.

6.19. Өрнекті екімүше түрінде жазыңдар:

1) $(2x+1)(16x^4-8x^3+4x^2-2x+1)$;
2) $\left(\frac{2}{3}x - 3ab\right)\cdot\left(\frac{8}{27}x^3 + \frac{4}{3}x^2ab + 6xa^2b^2 + 27a^3b^3\right)$.

6.20. 1) $143^{15}-81^{15}$ саны 62-ге; 2) $12^{31}+28^{31}$ саны 80-ге еселік болатынын көрсетіңдер.

6.4. Квадрат теңдеу. Виет теоремасы

6.21. Егер $k^2-ac > 0$ болса, онда $ax^2 + 2kx + c = 0$ теңдеуінің түбірлері

$$x_1 = \frac{-k - \sqrt{k^2 - ac}}{a}; \qquad x_2 = \frac{-k + \sqrt{k^2 - ac}}{a}$$

формулаларымен анықталатынын дәлелдеңдер.

6.22. Виет теоремасын дәлелдеңдер.

6.23. Теңдеуді шешіп, сәйкес квадрат үшмүшені көбейткіштерге жіктеңдер:

1) $2x^2 + 5x - 7 = 0$; 2) $4x^2 - x - 14 = 0$;
3) $3x^2 - 8x + 5 = 0$; 4) $7x^2 + x - 8 = 0$.

6.24. $a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = ax^2 + bx + c = 0$ теңдігін дәлелдеңдер.

6.25. $a+b+c = 0$ болса, $ax^2 + bx + c = 0$ теңдеуінің түбірлері $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{c}{a}$ болатынын көрсетіңдер.

6.26. $a - b + c = 0$ болса, $ax^2 + bx + c = 0$ теңдеуінің түбірлері $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{c}{a}$ болатынын көрсетіңдер.

6.27. a-ның қандай мәндерінде $(x^2 - a)(x^2 + 3ax + a) = 0$ теңдеуінің тура екі түбірі болады?

6.28. a-ның қандай мәндерінде $(x^2 - 3x - 4)(x^2 - a) = 0$ теңдеуінің тура үш түбірі болады?

6.29. $3x^2 - x - 1 = 0$ теңдеуінің түбірлерін таппай-ақ

1) $x_1 + x_2$; 2) x_1x_2; 3) $x_1^2 + x_2^2$; 4) $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$;

5) $x_1^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + x_2^3$; 6) $x_1x_2^4 + x_1^4x_2$; 7) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$

өрнектерінің мәндерін анықтаңдар.

6.30. Түбірлері бойынша квадрат теңдеу құрастырыңдар:

1) $x_1 = -3$, $x_2 = 5$; 4) $x_1 = 6 - \sqrt{5}$, $x_2 = 6 + \sqrt{5}$;
2) $x_1 = x_2 = 7$; 5) $x_1 = \sqrt{7} - \sqrt{6}$, $x_2 = \sqrt{7} + \sqrt{6}$;
3) $x_1 = 3a + 1$, $x_2 = 5a - 2$; 6) $x_1 = -2 - \sqrt{3}$, $x_2 = -2 + \sqrt{3}$.

6.31. Теңдеулер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases} x + y = 7, \\ xy = 6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + 2y = 7, \\ xy = 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - 3y = 7, \\ xy = -2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y + xy = 11, \\ xy(x + y) = 30. \end{cases}$

6.5. Көпмүшелер және олардың түбірлері

6.32. Көпмүшені көпмүшеге қалдықпен бөліңдер:

1) x^4+x^2+1-ді $x+5$-ке; 2) x^7-1-ді x^3+x+1-ге;
3) x^6-64-ті $x-3$-ке.

6.33. $(x^3+6x^2+ax+12):(x+4)$ өрнегі a-ның қандай мәнінде қалдықсыз бөлінеді?

6.34. $f(x)$ көпмүшесін $x-a$ екімүшесіне бөлгенде $f(a)$-ға тең қалдық қалатынын дәлелдеңдер (Безу теоремасы).

6.35. Егер α саны $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$ көпмүшесінің бүтін түбірі болса, онда a_n саны α-ға қалдықсыз бөлінетінін көрсетіңдер. Мұндағы a_1, a_2, ..., a_n — бүтін сандар.

6.36. Көпмүшелердің бүтін түбірлерін тауып, оларды көбейткіштерге жіктеңдер:

1) x^3-7x-6; 2) $x^3+9x^2+11x-21$;
3) x^3-5x^2+3x+1; 4) $x^3+9x^2+23x+15$;
5) $x^4+3x^3-12x^2-38x-24$; 6) $x^4-6x^3-14x^2-11x-4$.

6.37. Кез келген натурал n саны үшін n^5-5n^3+4n өрнегінің мәні 120-ға қалдықсыз бөлінетінін дәлелдеңдер.

6.38. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\left(\dfrac{x^2-y^2}{xy}-\dfrac{1}{x+y}\left(\dfrac{x^2}{y}-\dfrac{y^2}{x}\right)\right):\dfrac{x-y}{x}$;

2) $\left(\dfrac{m^2+n^2}{m^2n^2}\cdot\left(\dfrac{1}{m^2}-\dfrac{1}{n^2}\right)-\left(\dfrac{1}{p^2}-\dfrac{1}{n^2}\right)\cdot\dfrac{p^2+n^2}{p^2n^2}\right):\dfrac{p^2+m^2}{p^2m^2}$;

3) $\left(\dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{b^3}\right)\cdot\left(\dfrac{a(b-a)}{a^2-ab+b^2}+1\right)$;

4) $\left(\dfrac{a^2+b^2}{ab}-2\right):\left(\dfrac{2a^2+2ab}{a^2+2ab+b^2}-1\right)\cdot\left(\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a-b}\right)$;

5) $\dfrac{(x^2-y^2-z^2-2yz)(x+y-z)}{(x+y+z)(x^2+z^2-2xz-y^2)}$;

6) $\dfrac{a^2-3ab+ac+2b^2-2bc}{a^2-b^2+2bc-c^2}$.

6.6. Теңдеулер және теңдеулер жүйесі

6.39. Теңдеуді шешіңдер:

1) $\frac{3x+1}{5x-6}=0;$ 2) $\frac{9x^2-1}{3x+1}=0;$ 3) $\frac{5x+7}{49-25x^2}=0;$

4) $\frac{x^2-3x}{x^2+7x-30}=\frac{5x^2-x-42}{x^2+7x-30};$ 5) $x^2+\frac{3x-1}{x+4}=16-\frac{1-3x}{x+4};$

6) $\frac{1}{3x+2}+\frac{3}{5x+6}=\frac{2}{7x+8};$ 7) $\frac{12}{x^2-9}+\frac{x}{x+3}=\frac{2}{x-3}.$

6.40. a параметрінің барлық мәні үшін теңдеуді шешіңдер:

1) $a(a-1)x=a;$ 2) $x^2+ax+36=0;$ 3) $x^4-(2a+1)x+a^2+a=0;$

4) $\frac{x-a}{x-3}=0;$ 5) $\frac{x^2-a^2}{x-3}=0;$ 6) $\frac{x+a}{x+3}=0.$

6.41. Теңдеуді шешіңдер:

1) $x^4-5x^2+4=0;$ 2) $7x^4-x^2-6=0;$ 3) $3x^4-5x^2+2=0;$

4) $(5x^2+x-1)^2-(5x^2+x-1)-2=0;$ 5) $(3x^2-x-1)^2-18x^2+6x-1=0;$

6) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+6=0;$ 7) $x^2+5x+8+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}=0;$

8) $x^4-5x^3+8x^2-5x+1=0;$ 9) $10x^4-29x^3+30x^2-29x+10=0;$

10) $\frac{2x^2-5x+4}{3x-2}+\frac{15x-10}{2x^2-5x+4}=0;$

11) $\frac{x^2+5x-1}{2x-1}+\frac{2x-1}{x^2+5x-1}=5,2.$

6.42. Теңдеулер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases}3x+5y=11,\\2x-3y=17;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}20x-15y=51,\\4x-3y=10,2;\end{cases}$

3) $\begin{cases}3x+5y=20,\\6x+10y=7;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x+2y=3,\\x^2-3xy+5y^2=3;\end{cases}$

5) $\begin{cases}3x+4y=12,\\x^2+y^2=5,76;\end{cases}$ 6) $\begin{cases}5x-12y=60,\\x^2+y^2=4;\end{cases}$

7) $\begin{cases} x = 3y, \\ x^2 + 5xy + 7y^2 = 31; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 2x - 3y = 0, \\ x^2 + 3xy + 5y^2 = 47; \end{cases}$

9) $\begin{cases} x^2 - 5xy + 4y^2 = 0, \\ x^2 + 3xy + 5y^2 = 5. \end{cases}$

6.43. a-ның қандай мәндерінде:

$$\begin{cases} y^2 + 2y(2 + x) + (x^2 + 2x)(4 - x^2) = 0, \\ y - ax - 3a = 0 \end{cases}$$

жүйесінің кем дегенде әртүрлі үш түбірі болады?

6.7. Теңсіздіктерді дәлелдеу

6.44. Теңсіздіктерді дәлелдеңдер:

1) $(6u-1)(u+2)<(3u+4)(2u+1)$;

2) $(3v-1)(2v+1)>(2v-1)(2+3v)$;

3) $\dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$; 4) $a + \dfrac{1}{a} \geqslant 2$, $a>0$;

5) $\dfrac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}$; 6) $(x+y)\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right) \geqslant 4$, $(x>0,\ y>0)$;

7) $a+b+c \geqslant \sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{bc}$, $(a \geqslant 0,\ b \geqslant 0,\ c \geqslant 0)$;

8) $(1-a)(1-b)(1-c) \geqslant 8abc$, $(a \geqslant 0,\ b \geqslant 0,\ c \geqslant 0,\ a+b+c=1)$.

6.45. Үшбұрыштың әрбір қабырғасы оның жарты периметрінен кем болатынын дәлелдеңдер.

6.46. Сандарды салыстырыңдар: 1) $\dfrac{86}{87}$ және $\dfrac{87}{88}$; 2) $\dfrac{113}{112}$ және $\dfrac{112}{111}$; 3) $\sqrt{23} - \sqrt{11}$ және $\sqrt{22} - \sqrt{10}$; 4) $\sqrt{38} + \sqrt{20}$ және $\sqrt{37} + \sqrt{21}$; 5) $b+5$ және $2b+3$; 6) a^4+1 және $2a|a|$.

6.47. Моторлы қайықтың тұнық суда 20 км қашықтыққа жұмсаған уақыты мен оның өзен ағысымен 10 км және өзен ағысына қарсы 10 км жүрген жолына жұмсайтын уақыттарын салыстырыңдар.

6.8. Теңсіздіктерді шешу. Интервалдар әдісі

6.48. Теңсіздікті шешіңдер:

1) $17-x>10-6x$;
2) $30+5x\leqslant 18-17x$;
3) $6x-34\geqslant x+1$;
4) $3u-1<6u-1$;
5) $5x^2-5x(x+4)\geqslant 100$;
6) $p(p-1)p^2>12-6p$.

6.49. Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases} -3<2x-3<-1, \\ 1-4x<0; \end{cases}$
2) $\begin{cases} 0<1-3x<1, \\ 3-4x<2; \end{cases}$
3) $\begin{cases} 2x-3\leqslant 0, \\ \dfrac{2x-5}{x-2}\geqslant 4; \end{cases}$
4) $\begin{cases} 3x-2\leqslant 5x-8, \\ \dfrac{2x-1}{2-x}<4. \end{cases}$

6.50. Теңсіздіктерді интервалдар әдісімен шешіңдер:

1) $(2x+7)(3x-4)(x+5)>0$;
2) $(x-6)(0,5x+4)(5x+10)<0$;
3) $\dfrac{x^2-2x+3}{x^2-4x+3}>-3$;
4) $\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}>3$;
5) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x+3}>\dfrac{3}{x+2}$;
6) $\dfrac{x-2}{x+2}\geqslant\dfrac{2x-3}{4x-1}$.

6.51. Теңсіздікті шешіңдер:

1) $x^2-3x-4>0$;
2) $x^2-5x-6\leqslant 0$;
3) $x^2\geqslant 16$;
4) $|x^2-7x+5|\leqslant 5$;
5) $|x^2-3x|\leqslant x$;
6) $|x^2-3x|>x$.

6.52. a-ның қандай мәнінде $x^2-3ax+1>0$ теңсіздігі кез келген x үшін орындалады?

6.53. a-ның қандай мәнінде $x=1$ саны $ax^2+(3a^2+1)x-3>0$ теңсіздігінің шешімі болады?

6.54. a-ның қандай мәнінде $x^2-3x-4<0$ теңсіздігінің әрбір шешімі $x^2-a^2<0$ теңсіздігінің шешімі болады?

6.55. a-ның қандай мәнінде $x^2-5x+4\leqslant 0$ теңсіздігінің әрбір шешімі $x^2-a^2>0$ теңсіздігінің шешімі болады?

6.9. Бүтін және рационал көрсеткішті дәреже

6.56. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\dfrac{x^{-1}+y^{-1}}{(x+y)^2}$; 2) $\dfrac{ab^{-1}-a^{-1}b}{a^{-1}-b^{-1}}$; 3) $\dfrac{a^5+a^6+a^7}{a^{-5}+a^{-6}+a^{-7}}$;

4) $\dfrac{a^{-n}+b^{-n}}{a^{-2n}-b^{-2n}}:\left(\dfrac{1}{b^{-n}}-\dfrac{1}{a^{-n}}\right)^{-1}$; 5) $\dfrac{a^{-2n}-b^{-2n}}{a^{-n}-b^{-n}}\cdot\left(\dfrac{1}{b^{-n}}+\dfrac{1}{a^{-n}}\right)^{-1}$.

6.57. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $a^{\frac{5}{3}}b^{-\frac{1}{6}}\left(a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}\right)^4$; 2) $\left(c^{-\frac{3}{7}}x^{-0,4}\right)^3\cdot c^{\frac{2}{7}}x^{0,2}$; 3) $\sqrt[10]{c^3\sqrt{c^2}}$;

4) $\sqrt[3]{y^2\cdot\sqrt[4]{y^{-3}}}$; 5) $\sqrt[7]{x^4}:\sqrt[14]{x}$; 6) $\sqrt[5]{m^2\sqrt{m}}:\sqrt[3]{m\sqrt{m}}$.

6.58. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\dfrac{\left(m^{\frac{5}{6}}n^{-\frac{1}{6}}+m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}\right)^2+\left(m^{\frac{5}{6}}n^{-\frac{1}{6}}-m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}\right)^2}{\left(n^{-\frac{1}{3}}-m^{-\frac{1}{3}}\right)\left(n^{\frac{2}{3}}+m^{\frac{2}{3}}+n^{\frac{1}{3}}m^{\frac{1}{3}}\right)}-2n+\dfrac{4n^2}{n-m}$;

2) $\dfrac{\left(a^{\frac{5}{9}}b^{-\frac{1}{9}}-a^{\frac{2}{9}}b^{\frac{2}{9}}\right)^3+3\left(\sqrt[3]{a^4}-\sqrt[3]{a^3b}\right)}{\left(\sqrt[3]{a^{-1}}+\sqrt[3]{b^{-1}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)}-\dfrac{(a-b)^2}{2(a+b)}+\dfrac{a+b}{2}$.

6.59. x пен y-тің арасындағы тәуелділікті анықтаңдар:

1) $x=t^{\frac{1}{2}},\ y=t^{-\frac{1}{2}}$; 2) $x=t^{\frac{1}{3}},\ y=t^{\frac{1}{6}}$;

3) $x=3t^{\frac{1}{2}},\ y=2t^{-\frac{1}{3}}$; 4) $x=0,5t^{-\frac{1}{2}},\ y=0,4t^{-\frac{1}{2}}$.

6.10. Функцияны зерттеу және графигін салу

6.60. Функцияның графигін салыңдар:

1) $y=x^2$; 2) $y=\dfrac{1}{x}$; 3) $y=|x|$; 4) $y=x^3$;

5) $y=\sqrt{x}$; 6) $y=\sqrt[3]{x}$; 7) $y=\dfrac{1}{x^2}$; 8) $y=\sqrt{1-x^2}$.

6.61. Функцияның анықталу облысын анықтаңдар:

1) $y=\dfrac{1}{2x-5}$; 2) $y=\dfrac{x}{x^2-5x+6}$; 3) $y=\sqrt{3x-9}$;

4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{-4x+2}}$; 5) $y=\dfrac{2}{\sqrt{x}-3}$; 6) $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$;

7) $y=\dfrac{3}{x-2\sqrt{x}}$; 8) $y=\dfrac{2}{\sqrt{x^2-6x+8-2}}$.

6.62. Функцияны зерттеп, оның графигін салыңдар:

1) $y=|x-1|+|x|$; 2) $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$; 3) $y=x^2-6x+3$;

4) $y=|x^2-6x+3|$; 5) $y=x^2-6|x|+3$; 6) $y=|x^2-6|x|+3|$.

6.63. Функцияның графигін салыңдар:

1) $y=\dfrac{1}{x+2}$; 2) $y=\dfrac{1}{x}-3$; 3) $y=\dfrac{1}{x-3}+1$;

4) $y=\dfrac{x-2}{x-3}$; 5) $y=\left|\dfrac{x-2}{x-3}\right|$; 6) $y=\dfrac{|x|-2}{|x|-3}$;

7) $y=\left|\dfrac{|x|-2}{|x|-3}\right|$; 8) $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$.

6.11. Сан тізбегі. Арифметикалық және геометриялық прогрессиялар

6.64. Тізбектің алғашқы бес мүшесін жазыңдар:

1) $x_n=2n+3$; 2) $x_n=(-1)^n 2$;

3) $x_n=\dfrac{3n-1}{2n+3}$; 4) $x_n=\dfrac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$.

6.65. Тізбектің жалпы мүшесін формуламен жазыңдар:

1) $1, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{16}, \ldots$; 2) 3, 6, 12, 24, 48, …;

3) $1, \dfrac{2}{101}, \dfrac{4}{201}, \dfrac{8}{301}, \ldots$; 4) $\dfrac{2}{3}, -\dfrac{4}{9}, \dfrac{8}{27}, -\dfrac{16}{81}, \ldots$.

6.66. Егер a_1, a_2, …, a_n, … тізбегі айырымы d-ға тең арифметикалық прогрессия болса,

$$a_n=a_1+(n-1)d, \quad 2a_n=a_{n-1}+a_{n+1}, \quad S_n=\frac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n$$

формулаларын дәлелдеңдер. Мұндағы S_n — алғашқы n мүшесінің қосындысы.

6.67. Егер b_1, b_2, …, b_n, … тізбегі еселігі q-ге тең геометриялық прогрессия болса, $b_n=b_1q^{n-1}$, $b_n^2=b_{n-1}b_{n+1}$,

$S_n=\dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ формулаларын дәлелдеңдер. Мұндағы

S_n — алғашқы n мүшесінің қосындысы.

6.68. b_1, b_2, …, b_n, … шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның еселігі q ($|q|<1$) болса, $b_1+b_2+\ldots+b_n+\ldots=\dfrac{b_1}{1-q}$ формуласын дәлелдеңдер.

6.69. Арифметикалық прогрессияның алғашқы 10 мүшесінің қосындысын табыңдар: 1) $a_2=7$; $a_4=11$; 2) $a_3=5$; $a_8=13$; 3) $a_5+a_6=11$.

6.70. $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ арифметикалық прогрессиясында $a_1=a, a_n=b$ $(a>0, b>0)$ болса, $\dfrac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\dfrac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}$ қосындысын a, b және n арқылы өрнектеңдер.

6.71. -7; 11; 29; .... және -3; 11; 25; .... арифметикалық прогрессияларының жалпы мүшелерін формулалармен жазыңдар.

6.72. Геометриялық прогрессияның алғашқы мүшесі мен еселігін анықтаңдар:

1) $b_2=7$, $b_3=-1$; 2) $b_3=2$, $b_5=8$;
3) $b_{12}=-131$, $b_{185}=243$; 4) $b_2+b_3=7$, $b_3+b_4=49$.

6.73. 5 және 25 сандарының арасына, осы сандармен бірге геометриялық прогрессия құрайтындай етіп, жеті мүше орналастырыңдар.

6.74. a-ның қандай мәндерінде $x^2-5x+4=0$ және $2x-a=0$ теңдеулерінің түбірлері геометриялық прогрессияның үш мүшесін анықтайды?

6.75. $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ шексіз кемімелі геометриялық прогрессия болса, 1) $b_1+b_2+b_3+\ldots$; 2) $b_1^2+b_2^2+b_3^2+\ldots$; 3) $b_1^3+b_2^3+b_3^3+\ldots$ қатарларының қосындыларын b_1 мен q арқылы өрнектеңдер.

6.76. Шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның бірінші мүшесі 0,3-ке, қосындысы 0,9-ға тең. Прогрессияның еселігін табыңдар.

6.77. Қатардың қосындысын табыңдар:

1) $1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{27}+\ldots$; 2) $1+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{25}-125+\ldots$.

6.78. Периодты бөлшекті жай бөлшекке айналдырыңдар:

1) 1,21(32); 2) 0,27(345); 3) 3, (31); 4) 2,1(4).

6.79. Біріншісі 1-ге тең үш сан геометриялық прогрессия құрайды. Егер бұл үш санның біреуін екі еселеп, берілген ретімен алсақ, онда арифметикалық прогрессия аламыз. Осы сандарды табыңдар.

6.80. Арифметикалық прогрессияның 8-мүшесі 60-қа тең. Егер a_1, a_7 және a_{25} мүшелері геометриялық прогрессия құраса, осы прогрессияның еселігін табыңдар.

6.12. Тригонометриялық өрнектер

6.81. 1) $\sin\alpha = -\dfrac{3}{5}, \pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$; 2) $\cos\alpha = -\dfrac{12}{13}, \dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

3) $\operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt{2}, 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$; 4) $\operatorname{ctg}\alpha = -2\sqrt{6}, \dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

деп алып, α бұрышының қалған тригонометриялық функцияларын анықтаңдар.

6.82. a-ның қандай мәнінде $\dfrac{\pi}{6}$ саны $3\sin 6x+2\sin 5x+5\cos 4x-$ $-3\sin 3x+2\cos 2x-\sin^2 x=a$ теңдеуінің түбірі болады?

6.83. Егер $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ болса, онда бірлік шеңбердің бойынан

1) x, $\pi-x$, $\pi+x$, $\dfrac{\pi}{2}-x$, $\dfrac{\pi}{2}+x$; 2) $x + 2k\pi$, $k\in Z$;

3) $\pm x + 2k\pi$, $k\in Z$; 4) $x + k\pi$, $k\in Z$;

5) $(-1)^k + k\pi$, $k\in Z$ бұрыштарына сәйкес келетін нүктелерді табыңдар.

6.84. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $1+\sin(\pi-\varphi)\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-\varphi\right)$; 2) $1-\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}-\varphi\right)\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right)$;

3) $1 + \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}2\beta$; 4) $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}2\alpha$.

6.85. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)(1-\sin^2\alpha)=\operatorname{ctg}^2\alpha$; 2) $(1+\operatorname{tg}^2\beta)(1-\cos^2\beta)=\operatorname{tg}^2\beta$;

3) $\dfrac{\sin x + \cos x \operatorname{tg} x}{\cos x + \sin x \operatorname{ctg} x} = 2\operatorname{tg} x$; 4) $\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2 y + 1} - \dfrac{1}{\operatorname{ctg}^2 y + 1} = \cos 2y$.

6.86. Өрнектің мәні y-ке тәуелсіз болатынын көрсетіңдер:

1) $\cos(38°+y)\cos(52°-y)-\sin(38°+y)\sin(52°-y)$;

2) $\sin\left(\dfrac{\pi}{10}-y\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{15}+y\right)+\cos\left(\dfrac{\pi}{10}-y\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{15}+y\right)$.

ЖАУАПТАРЫ

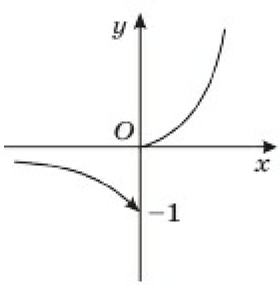
8-сынып материалдарын қайталау

0.1. 1) 8; 2) –4; 3) 0,5; 4) 1; 5) 53; 6) 1; 7) $\frac{37}{38}$; 8) $3\frac{9}{20}$; 9) $1\frac{5}{18}$. **0.2.** 1) 30; 2) 21; 3) 48; 4) 6,6; 5) 26; 6) 21; 7) 0,5; 8) 2. **0.4.** 1) $x = 16$; 2) $y = 0,16$; 3) $x=5\frac{4}{9}$; 4) $z = 0,09$. **0.5.** 1) –0,5; 3; 2) $\varnothing$; 3) 1; $\frac{5}{3}$; 4) –11; 2; 5) –1; –0,8; 6) $-\frac{3}{7}$; 2; 7) 8; 4; 8) $\frac{1}{6}$; 9) –1; $\frac{2}{3}$. **0.6.** 1) 2; 3; 2) 1,5; 3) –6; 4; 4) –7; –2; 5) $3a$; $4a$; 6) $-3b$; $-2b$; 7) 1; $\sqrt{2}$; 8) $-\sqrt{6}$; $-\sqrt{2}$. **0.7.** 1) $(-1; 4)$; 2) $(-\infty; -1)\cup(4; +\infty)$; 3) $(-\infty; -2,5]\cup[1; +\infty)$; 4) $[-2; 3]$. **0.8.** 2) $(-\infty; 0,5)\cup\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$; 4) $(-\infty; -1,5]\cup[0,25; +\infty)$; 5) $(-\infty; +\infty)$; 6) $\varnothing$; 8) $\varnothing$. **0.9.** 1) 1; 2; 3; 4; 5; 2) –3; –2; –1; 0; 3) –2; –1; 0; 1; 2; 4) –2; –1; 0; 1; 2, **0.10.** 1) $(-7; -0,25)$; 2) $(-\infty; 1,5]\cup\left[\frac{5}{3}; +\infty\right]$; 3) $(-\infty; +\infty)$; 4 $\left(-\infty; \frac{9-\sqrt{37}}{22}\right) \cup \left(\frac{9+\sqrt{37}}{22}; +\infty\right)$; 5) $(-\infty; -1)\cup(4,5; +\infty)$; 6) $x \neq 0,25$. **0.12.** 1) $(x-4)(x-12)$; 2) $(x+3)(x-4)$; 3) $(x+7)(x-2)$; 4) $(x+8)(x-2)$; 5) $(x+3)(x+9)$; 6) $(2x-1)(x-2)$. **0.13.** 1) $x^2-7x+10=0$; 2) $x^2-x-12=0$; 3) $x^2+9x+14=0$; 4) $2x^2-9x+4=0$; 5) $6x^2-13x+6=0$; 6) $27x^2+12x+1=0$. **0.14.** 1) 3; 2) 55; 3) 6; 4) 3. **0.15.** 1) $x \geqslant 3$; 2) $x \geqslant -3$; 3) $x \geqslant 0,25$; 4) $x > 3$; 5) $(-\infty; -3]\cup[3; +\infty)$; 6) $(-\infty; -3]\cup[3; +\infty)$. **0.16.** 1) $\sqrt{14} < \sqrt{6}+\sqrt{8}$; 2) $7-\sqrt{2}+5\sqrt{2}$; 3) $\sqrt{15}-2 < \sqrt{3}+2$; 4) $\sqrt{10} > \sqrt{20}-\sqrt{5}$. **0.17.** 1) $\left(x-\sqrt{3}\right)\times$ $\times\left(x+\sqrt{3}\right)$; 2) $\left(2a-\sqrt{5}\right)\left(2a+\sqrt{5}\right)$; 6) $\left(\sqrt{y}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{y}+\sqrt{5}\right)$; 7) $\left(2-3\sqrt{b}\right)\left(2+3\sqrt{b}\right)$. **0.18.** 1) $\frac{\sqrt{x}-2}{x-2}$; 2) $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{x-2}$; 3) $\frac{2\sqrt{a}-3\sqrt{b}}{4a-9b}$; 4) $\frac{2a+3b+2\sqrt{6ab}}{2a-3b}$. **0.20.** 1) $\frac{1}{3}$, 3; 2) –11; –3; 3) –6; 14;

4) -4; $-1{,}2$; 5) $-0{,}25$; 6) 17. **0.21.** 1) $(x-1)(2x-3)$; 2) $(x+1)(2x-7)$; 3) $(y-1)(5-y)$; 4) $(5y-3)(y+1)$; 5) $(x-5)(x-6)$; 6) $(1-x)(x+6)$. **0.22.** 1) $(x-1)(4x-5)$; 2) $(4a-3)^2$; 3) $3(x-2)^2$; 4) жіктелмейді; 5) $(x+1)(x-2)$; 6) $(4a+1)(1-12a)$; 7) $(y+1)(11-3y)$; 8) $\left(y-\dfrac{7-\sqrt{5}}{2}\right)\left(y-\dfrac{7+\sqrt{5}}{2}\right)$; 9) $(4x+0{,}2)(x+0{,}2)$. **0.27.** 1) 2; 2) 4; 3) 5; 4) 7. **0.28.** 1) 1; 2) $\pm\dfrac{\sqrt{5}}{3}$; 3) 4; 4) 5. **0.29.** 1) 2; 2) 1; 3) $\dfrac{10}{7}$; 4) 0. **0.30.** 1) ±2; ±5; 2) $\varnothing$; 3) $\pm\sqrt{0{,}6}$; 4) $\pm\sqrt{3{,}5}$; 5) ±3; $\pm a$; 6) ±2; $\pm3a$. **0.31.** 1) -1; -5; 0; -6; 2) $-0{,}5$; 1,5; 3) 4; -2; 4) 0; -4. **0.32.** 1) 1; $\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$; 2) -3, $-\dfrac{1}{3}$; $\dfrac{1}{2}$; 2; 3) -1; $2\pm\sqrt{3}$; 4) -1; $\dfrac{1}{3}$; 3; 5) $\dfrac{6+\sqrt{31\pm\sqrt{12\sqrt{31}-33}}}{10}$; 6) $-1\pm\sqrt{2}$; $\dfrac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$.

0.33. 1) 7; 2) 6; 3) 1; 5; 4) 6; 5) -1; 6) 34; 2. **0.34.** 1) -1; 2) $(-\infty; -3]$; 3) -2; 8; 4) $[2; 4]$. **0.35.** 1) 0; 1; 2) ±1; 3) 4; 12; 4) 0,2. **0.36.** 1) $(-2; 0)$; 2) $(0{,}75; +\infty)$; 3) $\varnothing$; 4) $\varnothing$; 5) $(-7; -5] \cup [0; +\infty)$; 6) $\varnothing$. **0.37.** 1) $x+\dfrac{8}{7}$; 2) $\dfrac{5}{2a+9}$; 3) $\dfrac{b-3}{b+5}$; 4) $-\dfrac{y+4}{y+9}$; 5) $-\dfrac{c+1}{c+2}$; 6) $\dfrac{5a+3}{14-11a}$. **0.41.** 1) $x(x-2)(x+2)$; 2) $x(x-5)^2$; 3) $(x+2)\times(x^2-2x+4)$; 4) $y(y+6)^2$; 5) $\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x^2+3\right)$; 6) $(x-1)\times(x+1)(x+10)$; 7) $(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1$; 8) $\left(z-\sqrt{2}\right)\cdot\left(z+\sqrt{2}\right)(z-8)$.

0.44. 6) $(-\infty;0)\cup(6;+\infty)$ аралықтарында теріс, $(0;6)$ аралығында оң мән қабылдайды. **0.45.** 8) $(-\infty; +\infty)$ анықталу облысы, $(-1;+\infty)$ — мәндер облысы; нөлі $x=0$; үзіліс нүктесі $x=0$; $(-\infty; 0)$ аралығында — теріс, $(0; +\infty)$ аралығында оң мән қабылдайды. $(-\infty; 0)$ аралығында кемиді, $(0;+\infty)$-те өседі; экстремумдары жоқ (1-сурет). **0.46.** $a \in [-2;0]\cup\{1\}$. **0.47.** 1) $(-1; 2)$; 2) $(1; 4)$. **0.48.** 1) Мәндес емес; 2) мәндес. **0.49.** 1) 0; 2) -8; 3) $\varnothing$; 4) -27.



1-сурет

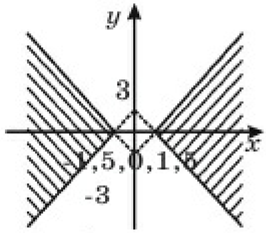
0.50. 1) $-0,25$; 2) $\frac{1}{6}$; 3) ±4; 0; -3; 2; 4) ±5; 0; -4; 7. **0.51.** 1) 2; $-\sqrt{5}$; 2) 3; 4) 2; $\sqrt{6}$. **0.52.** $x^4-5x^2+6=0$. **0.53.** $a=-52$, $b=-40$. **0.54.** $a=-1$. **0.55.** $[13; +\infty)$. **0.58.** 1) $\sqrt{6}+1$; 2) $\sqrt{6}-1$; 3) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; 4) $\sqrt{3}+2$; 5) $\sqrt{5}-2$; 6) $2\sqrt{3}+2$.

1-бөлім

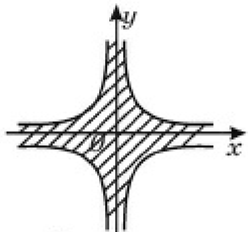
1.3. 2) $k=-0,7$; 6) $k=\frac{5}{3}$. **1.6.** 1) 3; 4) 2. **1.8.** 2) $R=2,5$; $C(-1,5; 2)$; 3) $R=3,5$; $C(0; -3,5)$. **1.12.** 1) $\left(\frac{1}{3}; 5\frac{1}{3}\right)$; 2) $\left(-\frac{3}{4}; 3\frac{7}{8}\right)$; **1.13.** 2) $x=2$ және $y=-3$. **1.19.** $n=-\frac{3}{4}$; $m=-3$. **1.22.** 1) (3;1); 3) (5; 0), (−3; 2). **1.23.** 1) (3; −2); 3) (−2; 1). **1.24.** 2) (3; −1); (1; −3); 3) (7; 1); (11; 5). **1.25.** 2) (7; 5), (−5; −7); 3) ∅. **1.26.** 2) (6; 2), (−4; −3). **1.27.** 1) $\left(-\frac{10}{3}; \frac{11}{3}\right)$; (2; 9). 3) ∅. **1.28.** 3) (±4; ±7), (±7; ±4). **1.29.** 1) (0; 1). **1.30.** 3) (2; 3), (3; 2). **1.31.** 1) (±20; ±5); 2) ∅. **1.32.** 1) (4; 8), (8; 4). **1.33.** 1) (2; 2). **1.34.** 1) (4; 9), (9; 4). **1.35.** 1) (1; 0), (0; 1); 3) (2; 0), (0; −2). **1.36.** 2) (±1; ±2), (±3,5. ±0,5). **1.37.** 2) (±8; ±4), (±7; ±1). **1.38.** 1) (−1; −1), (−1; 2), (2; −1). **1.39.** 1) $a=\pm6$; 2) $a=\pm2$. **1.40.** 0; 2. **1.43.** 180 см^2. **1.44.** 4 және 5 алма. **1.45.** 24 см^2. **1.46.** 73. **1.47.** 2 кг, 5 кг. **1.48.** 25 тг, 5 тг. **1.49.** 4 күн. **1.50.** 4 км/сағ. **1.51.** 9240 га, 6930 га. **1.52.** 10 тауық, 5 қой. **1.53.** 11 үй, 14 шатыр. **1.54.** 12 км/сағ, 10 км/сағ. **1.55.** 20 км/сағ, 4 км/сағ. **1.56.** 15 га, 20 га, 25 га. **1.57.** 5 км/сағ. **1.58.** 3 сағ. **1.59.** 24 тетік. **1.60.** 28 күн, 21 күн. **1.61.** 18 сағ, 24 сағ. **1.62.** 72 га, 60 га; 108 га, 120 га. **1.63.** 25 кг. **1.64.** $\frac{1}{10}, \frac{1}{12}$. **1.68.** 1) $x^2+y^2=16$; 2) $(x+1)^2+y=4$; 3) $(x-2)^2+(y-3)^3=9$.

1.78. 3) Фигура $3x-2y+10\geqslant0$; $3x+5y+17\geqslant0$; $x-4y+10\geqslant0$; $3x+2y-12\leqslant0$, $4x-3y-16\leqslant0$ теңсіздіктері жүйесімен анықталады. **1.79.** 3) 2-сурет. **1.80.** 4) 3-сурет. **1.82*.** 2) 4-сурет.

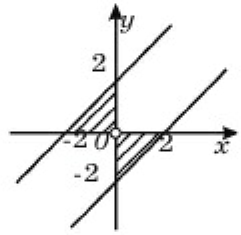
1.83. 1) (3; 8), (8; 3); 2) $(\pm 3;\ \pm 4)$; 3) (8; 5), (−5; −8); 4) $\left(4 \pm 4\sqrt{2}; -4 \pm 4\sqrt{2}\right)$. **1.84.** 1) $(-\infty;\ 0{,}5)$; 2) $(-\infty;\ -0{,}8)$; 3) $(-\infty; 2)$.



2-сурет



3-сурет



4-сурет

2-бөлім

2.1. 1) 16; 2) 60. **2.2.** 60. **2.3.** 1) 11; 2) 17. **2.4.** 8. **2.5.** 15. **2.6.** 32. **2.7.** 2) 10. **2.8.** 1) 216; 2) 120. **2.9.** 1) A_8^5; 2) 8! **2.10.** 1) 720; 2) 120. **2.11.** 300. **2.12.** 45. **2.13.** 120. **2.14.** C_{32}^5. **2.15.** 588. **2.17.** 888. **2.19.** 1) 300; 2) 190; 3) 105. **2.20.** 1) 1024; 2) 768. **2.21.** 1) 12; 2) 5. **2.22.** A_{35}^4. **2.23.** 1) $9 \cdot 10^3$; 2) $9 \cdot A_9^3$. **2.24.** 720. **2.25.** 60. **2.26.** $3! \cdot C_{15}^3$. **2.27.** 220. **2.28.** $C_n^2 \cdot C_m^2$. **2.29.** 560. **2.30.** 126. **2.31.** 30. **2.34.** 32. **2.35.** Математикалық индукция принципін қолдану керек: $n=3 \Rightarrow 2$ түрлі тәсілмен отыра алады, яғни $2 = 2! = \dfrac{3!}{3} = \dfrac{P_3}{3}$; $n=k \Rightarrow N(k) = \dfrac{P_k}{k}$ дұрыс болсын. Енді $n=k+1$ болса, үстел басында отырған k адамдар арасына $k+1$ адамды k түрлі әдіспен отырғызуға болады. Онда $N(k+1) = N(k) \cdot k = (k-1)! \cdot k = k! = \dfrac{(k+1)!}{k+1} = \dfrac{P_{k+1}}{k+1}$. **2.36.** 3^m. **2.37.** 5!5! **2.38.** 1) 13; 2) 26. **2.39.** $3^5 = 243$. **2.40.** $C_{12}^3 \cdot C_9^3 \cdot C_6^3$. **2.41.** $C_{30}^{10} \cdot C_{20}^{10}$. **2.42.** 7. Ойыннан шығып қалған екі ойыншының өзара кездесіп үлгермегенін көрсетіңдер. **2.44.** 1) Егер $m<n \Rightarrow (-1)^m C_{n-1}^m$; егер $n=m \Rightarrow 0$; 2) 2^{n-1}; 3) 2^{n-1}. **2.45.** 1) 13; 2) 35.

3-бөлім

3.2. 3) $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{4}{5}$. **3.3.** $a_n=3n$. **3.4.** $7n$. **3.5.** $4n+1$. **3.6.** $5n+2$. **3.7.** 1) $4n-3$; 2) $(-1)^{n-1}\cdot 2$; 3) $\frac{1}{n^2}$; 4) $\frac{1}{3n+1}$. **3.8.** $a_{10}=\frac{1}{21}$; $a_{n+1}=\frac{1}{2n+3}$ $a_{2n}=\frac{1}{4n+1}$. **3.10.** 1) $0<a_n<1$; $a_{n+1}-a_n<0$, тізбек кемімелі, шенелген; 9) шенелген, өспелі. **3.12.** 1) $x_n=3\cdot 2^{n-1}$; 3; 6; 12; 24; ... **3.16.** $x_{n+1}-x_n=\frac{a-2b}{(b\cdot n+b+1)(b\cdot n+1)}$. Егер $a>2b$ болса, $x_{n+1}>x_n$ өспелі; $a<2b$ болса, $x_{n+1}<x_n$ кемімелі; $a=2b\Rightarrow x_n=2$ — тұрақты тізбек. **3.17.** 1) $\frac{p+q}{p-q}$. **3.18.** 1) $(-1{,}5; 0{,}5)$; 2) $(8; -6)$. **3.19.** 2) $[-4; 7]$. **3.20.** $y=-\frac{18}{x}$. **3.21.** 3) $n=1$ болса, $S_1=1^3=$ $1, \frac{n^2(n+1)^2}{4}=\frac{4}{4}=1$; $n=k$ үшін $S_k=1^3+2^3+...+k^3=$ $=\frac{k^2(k+1)^2}{4}$ дұрыс болсын. Онда $n=k+1$ үшін $S_{k+1}=S_k+(k+1)^3=$ $=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3=\frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4}=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$. Дәлелдеу керегі осы. 10) $n=1\Rightarrow\frac{1}{1\cdot 5}=\frac{1}{5}$; $n=k\Rightarrow S_k=\frac{1}{1\cdot 5}+$ $+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}=\frac{k}{4k+1}$ дұрыс болсын. Онда $n=k+1\Rightarrow$ $\Rightarrow S_{k+1}=S_k+\frac{1}{(4k+1)(4k+5)}=\frac{k}{4k+1}+\frac{1}{(4k+1)(4k+5)}=$ $=\frac{(4k+1)(k+1)}{(4k+1)(4k+5)}=\frac{k+1}{4k+5}$. **3.22.** 6) $n=1\Rightarrow 1+6+11+6=24\vdots 24$. $n=k\Rightarrow k^4+6k^3+11k^2+6k\vdots 24$ болсын, $n=k+1\Rightarrow(k+1)^4+6(k+1)^3+11\times$ $\times(k+1)^2+6(k+1)=(k^4+6k^3+11k^2+6k)+4(k+1)(k+2)(k+3)\vdots 24$. Себебі

$k+1$, $k+2$, $k+3$ қатар орналасқан үш санның көбейтіндісі әрі 2-ге, әрі 3-ке, яғни 6-ға бөлінеді. **3.25.** $a_n=(2n-1)^2$ формуласымен анықталатынын көрсетсе, жеткілікті. **3.27.** $n=$ $=1\Rightarrow 6+20+24=50⋮25$. $n=k\Rightarrow 6^k+20k+24⋮25$ дұрыс болсын. Онда $n=k+1\Rightarrow 6^{k+1}+20(k+1)+24=6\cdot 6^k+20k+20+24=(6^k+20k+24)+$ $+5\cdot 6^k+20=(6^k+20k+24)+5\cdot(6^k+4)⋮25$, себебі 6^k+4 саны 0-ге аяқталады. **3.28.** 4) $n=2\Rightarrow 1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}>\dfrac{2,41}{1,42}>1,6>\sqrt{2}$.

$n=k\Rightarrow S_k=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{k}}>\sqrt{k}$ дұрыс болсын. Онда $n=k+1\Rightarrow$

$$S_{k+1}=S_k+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}=\frac{\sqrt{k(k+1)}+1}{\sqrt{k+1}}>\frac{\sqrt{k^2}+1}{\sqrt{k+1}}=\sqrt{k+1}.$$

3.31. $[-1;0)\cup(0;2]$. **3.32.** 1) $a_5=3$; 2) $a_5=15$. **3.33.** 1) 10; 14; 18; 22; 2)1,7; 1,5; 1,3; 1,1. 3) −3,5; −2,9; −2,3; −1,7; 4) $\dfrac{4}{3},\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{3},\dfrac{11}{6}$.

3.34. 1) $a_{11}=4$; 2) $a_{20}=8,5$; 3) $a_5=32$; 4) $b_{21}=-24,2$. **3.35.** 1) $a_5=-5$; $a_n=\dfrac{5-4n}{3}$; 2) $a_5=-2,9$; $a_n=3,6-1,3n$. 3) $a_5=-2$; $an=1,5n-9,5$. 4) $a_5=-5$, $a_n=15-4n$. **3.36.** 2) $a_{10}=-6,7$; 4) $a_{61}=\dfrac{109}{6}$. **3.37.** 1) 10; 2) 0,6; 3) $-\dfrac{92}{65}$. **3.38.** 1) 15; 2) 7. **3.39.** 2) 2,5; 2,8; 3,1; 3,4; 3,7; 4.

3.40. 1) $d=1,5$; $c_1=21$; 2) $d=-2$; $c_1=38$. **3.41.** 1) болмайды; 2) $a_{41}=-28$.

3.42. $1; 2\dfrac{2}{3}; 4\dfrac{1}{3}; 6; 7\dfrac{2}{3}; 9\dfrac{1}{3}; 11; 12\dfrac{2}{3}; 14\dfrac{1}{3}; 16$. **3.43.** 1) $a_1=0$; $d=1\dfrac{1}{3}$; 2) $a_1=9,7$; $d=-1,4$. **3.44.** 1) $a_{23}=156$; 2) болмайды. **3.45.** 1) $n\leqslant 30$; 2) $n>30$. **3.46.** 1) Иә; 2) жоқ; 3) иә; 4) жоқ; 5) иә; 6) иә. **3.47.** $a_n=p+q-n$. **3.48.** 25 ортақ мүшелері бар. **3.49.** $a_1=1$, $d=3$; $a_{20}=58$. **3.50.** $d=-2ax$. **3.51.** 1) жоқ; 2) иә; $d=1+\sqrt{2}-\sqrt{5}$. **3.52.** Мүмкін емес. Құрамында бір толық квадраты бар арифметикалық прогрессияның шексіз көп мүшелері толық квадрат болады. **3.55.** 1) ±1; ±4. 2) ±1. **3.56.** 1) 6; 12; 24; 48;

4) $0,4; 0,4\sqrt{2}; 0,8; 0,8\sqrt{2}$. **3.57.** 1) $x_7=0,25$; 2) $x_8=-\frac{10}{27}$; 3) $x_{10}=-32$; 4) $x_6=0,04$. **3.58.** 1) $a_7=1458$; $a_n=2(-3)^{n-1}$; 3) $a_7=-\frac{5}{8}$, $a_n=-\frac{5}{2^{n-4}}$. **3.59.** 2) $a_6=54$; $a_n=\frac{3^{n-3}}{2^{n-7}}$; 4) $a_6=0,001$; $a_n=(-1)^n\cdot 10^{3-n}$. **3.60.** 3) $q=-\frac{1}{2}$, $b_1=5$, $b_6=-\frac{5}{32}$, $b_{n+3}=5\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+2}$. **3.61.** 2) $\pm\frac{3}{5}$. **3.62.** 1) $b_1=\frac{1}{81}$; 2) $b_1=\frac{56}{125}$; 3) ±3; 4) $\pm\frac{3}{5}$; 5) $\pm0,2$; 6) $\varnothing$. **3.63.** $C_2=\pm1$; $C_3=\frac{1}{2}$. **3.64.** 1) 5; 2) 8; 3) 5; 4) 4. **3.65.** Мүмкін емес. **3.66.** 1; ±4; 16; ±64; 256. **3.67.** 50; 10; 2 немесе 50; −10; 2, не 2; 10; 50, не 2; −10; 50. **3.68.** 3; ±6; 12; ±24; … . **3.69.** $q=2$ не $q=\frac{1}{2}$. **3.70.** 8; 12; 18; 27; … не 27; 18; 12; 8; … . **3.71.** 15; 45; 135; не 125; −175; 245. **3.72.** $\frac{u_2}{u_1}=\frac{u_3}{u_1}$ теңдігін көрсетсе, жеткілікті. **3.73.** 1, 3, 9 не $\frac{1}{9}, \frac{7}{9}, \frac{49}{9}$. **3.74.** Орындалады. **3.75.** 1) 7^{n-1}; 2) $2\cdot5^n$. **3.76.** 1) $\frac{a+2}{a+5}$; 2) $\frac{b+1}{b+7}$. **3.77.** 1) −95; 2) −65; 3) 100; 5) 100; 6) 7,5. **3.78.** 1) 15,5; 2) 624,8; 3) 33; 4) $\frac{422}{3}$; 5) −22; 6) $\frac{11}{16}$; 7) −484; 8) 11. **3.79.** 1) 472,5; 2) 360; 3) 60; 4) −52,5. **3.80.** 1) $q=3\Rightarrow S_6=-\frac{728}{27}$; $q=-3\Rightarrow S_6=\frac{364}{27}$; 3) $q=\frac{1}{5}\Rightarrow S_6=\frac{3906}{25}$; $q=-\frac{1}{5}\Rightarrow S_6=\frac{2604}{25}$. **3.81.** 1) 305; 2) 22,5. **3.82.** 1) $9(3^{10}-1)$; 2) $-\frac{3069}{1024}$. **3.83.** 1) 5050; 2) 12760. **3.84.** 1) $n(n+1)$; 2) n^2. **3.85.** 270. **3.86.** 1) 6633; 2) 3402. **3.87.** $b_1=2$. **3.88.** $q=3\Rightarrow S_5=121$;

$q=-\frac{3}{4} \Rightarrow S_5=\frac{181}{16}$. **3.90.** 100. **3.91.** 1) $\frac{3^n-1}{2}$; 2) $2(2^n-1)$;

3) $\frac{1-(-x)^n}{1+x}$; 4) $\frac{x^{2n}-1}{x^2-1}$; 5) $\frac{2^n-(-1)^n}{2^n\cdot 3}$; 6) $\frac{1-(-x)^{3n}}{1+x^3}$.

3.92. 1) 50; 2) 35; 3) −2,5; 4) 781; 5) 93; 6) 1089. **3.93.** 2; 5; 8 не 26; 5; −16. **3.94.** $q=-2$. **3.95.** $q=\frac{1}{3}$. **3.96.** $\frac{a^2\left(1-q^{2n}\right)}{1-q^2}$.

3.97. $\sqrt{(a_1a_n)^n}$. **3.98.** $n=10$. **3.99.** $\frac{1}{9}\left[\frac{10\left(10^n-1\right)}{9}-n\right]$.

3.102 $S_n=3^n+(n+1)^2-2$. **3.103.** 1) $a_n=n^2$; 2) $a_n=(-1)^n\frac{n}{n+1}$.

3.106. 1) Шегі 0, тербелмелі; 2) $-1<y_n<1$ өспелі, сондықтан жинақты. **3.107.** 1) $\frac{12011}{9900}$; 2) $\frac{4553}{16650}$; 3) $-\frac{12}{5}$; 4) $\frac{1}{9}$; 5) $\frac{2}{3}$; 6) $\frac{4}{11}$.

3.108. 1) $\frac{7}{30}$; 2) $\frac{20}{11}$; 3) $\frac{357}{1100}$; 4) $\frac{989}{606}$. **3.110.** 1) $\frac{6253}{6734}$; 2) $\frac{3}{73}$.

3.110. 1) 0,5; 2) $-\frac{1}{3}$; 4) $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$; 6) −0,5. **3.111.** 1) 0,5; 2) $\frac{4}{35}$;

3) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{5}{12}$. **3.112.** 1) $|x|<1$; 2) $|x|<1$. **3.114.** $\sqrt{2}\leqslant x_n<2$ шенелген, $x_n<x_{n+1}$ өспелі. Тізбектің шегі a болсын. Онда

$a=\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\ldots}}} \Rightarrow a^2=2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\ldots}}}=2+a$

$\Rightarrow a^2-a-2=0 \Rightarrow a=2$. **3.115.** 1) 0,7; 2) −0,8. **3.116.** 1) $\frac{1}{3}$;

2) $-\frac{3}{8}$; 3) мүмкін емес. **3.117.** $-6\left(\sqrt{3}+1\right)$. **3.118.** $q=\frac{1}{3} \Rightarrow S=6$;

$q=\frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow S=12\left(3+2\sqrt{2}\right)$. **3.119.** $S=96$.

3.120. $a_n = \frac{32}{3^{n-1}}$. **3.121.** $a_1=14$; $q=0,75$. **3.122.** 3; $\frac{3}{7}$; $\frac{3}{49}$; ...

3.123. a_1; $\frac{a_1}{11}$; $\frac{a_1}{121}$; ... . **3.125.** $a_1=2$; $q = \frac{1}{3}$.

3-бөлімге қосымша есептер

3.126. 2) 1; −1; 1; −1; 1; ... **3.127.** 1) $3n-2$; 2) $4n^2$; 3) $\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. **3.128.** 1) $1<a_n$, өспелі, төменнен шенелген; жоғарыдан шенелген, шенелмеген; 2) $0<a_n\leqslant 1$, шенелген, $a_{n+1}<a_n$ кемімелі; 3) $-1\leqslant a_n\leqslant 1$, шенелген, тербелмелі. **3.132.** 1) $8-2n$; 2) $15-10n$; 3) $-n$; 4) $10-n$. **3.133.** 1) $\frac{8^{n-1}}{7^{n-2}}$; 2) $(\pm1)^{n-1}\cdot 3^{2-n}$. **3.134.** 1) $a_1=2$, $d=3$ не $a_1=14$, $d=-3$. **3.135.** 2) $a_1=0,5$, $q=-0,5$. **3.138.** $a_1=1$, $d=2$. **3.140.** $a=\pm5$, $b=\pm10$, не $a=\pm5$, $b=\mp10$. **3.141.** 2) Мүмкін, $q = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$.

3.142. 2,1. **3.143.** 1) $\frac{a^2}{1-q^3}$; 2) $\frac{a^3}{1-q^3}$; 3) $\frac{a^2(1+q)^2}{1-q^4}$; 4) $\frac{a^2(1-q)^2}{1-q^4}$; 5) $\frac{2a}{2-q}$; 6) $\frac{a-1+q}{1-q}$; 7) $\frac{q}{1-q}$; 8) $\frac{a^2(1+q+q^2)^2}{1-q^6}$. **3.144.** 1) $x=-1$; 2) $\varnothing$. **3.145.** 1) $\frac{(c^{2n}-1)(c^{2n+2}+1)}{c^{2n}(c^2-1)}+2n$; 2) $(n+1)!-1$; 3) $\frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$ теңдігін қолданыңдар. $1-\frac{1}{(n+1)!}$. **3.147.** 1) $\frac{n}{7n+4}$; 2) $\frac{n}{4n+3}$. **3.148.** 1) $y = x + \frac{1}{x}$; 2) $y=1+x^2$. **3.149.** Егер $\{a_n\}$ таңбасы тұрақты тізбек болса, онда $\{|a_n|\}$ арифметикалық прогрессия болады. Егер $\{a_n\}$ таңбалары ауысатын тізбек болса, $\{|a_n|\}$ арифметикалық прогрессия болмайды. **3.150.** Болады.

4-бөлім

4.2. 1) II; 2) IV; 3) III; 4) IV; 5) I; 6) IV. **4.3.** 1) IV; 2) III; 3) II; 4) IV; 5) III; 6) III. **4.4.** $\frac{2\pi}{9}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{4}, \frac{50\pi}{9}, -\frac{\pi}{9}, -\frac{2\pi}{3}, -\frac{5\pi}{3}$. **4.5.** 60°; −120°; 945°; 22°30′; $\frac{540°}{\pi}$; $\frac{18000°}{\pi}$; $\frac{144°}{\pi}$; 450°. **4.6.** $\frac{3\pi}{4}$. **4.7.** 12π. **4.8.** 45°; 60°; 75° немесе $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{12}$. **4.9** 1) 45°; 45°; 90° немесе $\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$; 2) 30°; 60°; 90° немесе $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$. **4.10.** 1) $\frac{\pi}{3}$; 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) $\frac{3\pi}{5}$; 4) $\frac{2\pi}{3}$; 5) $\frac{7\pi}{9}$; 6) $\frac{8\pi}{9}$. **4.11.** 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{4}$. **4.13.** 1) $\frac{\pi}{6}+2k\pi$; 2) $\frac{\pi}{4}+2k\pi$; $k\in Z$; 3) $\frac{3\pi}{4}+2k\pi$; $k\in Z$; 4) $\frac{7\pi}{6}+2k\pi$, $k\in Z$. **4.14.** 1) $n\cdot 360°$ не $2n\pi$; 4) $-\frac{\pi}{2}+2n\pi$ не $-90°+n360°$; 8) $-\frac{\pi}{4}+2n\pi$ не $-45°+$ $+n360°$, $n\in Z$. **4.15.** 10π рад/сек. **4.16.** 1) 1; 6; 2) −1; $-\frac{1}{4}$; 3) 1; $\frac{5}{3}$; 4) $\varnothing$. **4.18.** 1) $x(x-1)(5x+2)$. **4.19.** 0; 2. **4.20.** 1) $\sin 0°=0$; $\cos 0° = 1$. **4.21.** 1) Табылады; 2) табылады; 3) жоқ, табылмайды; 4) табылады. **4.22.** 1) Иә; 2) жоқ; 3) жоқ; 4) иә. **4.23.** 1) Жоқ; 2) табылады; 3) жоқ; 4) табылады. **4.24.** 1) 2,5; 2) 1,5; 3) $\sqrt{2}-2\sqrt{3}$; 4) $\sqrt{3}$. **4.25.** 1) $-\cos^2\alpha$; 2) 1; 3) 2; 4) $\sin^2\alpha$. **4.27.** 1) 1; 2) 0; 3) 1; 4) 1. **4.28.** 1) $\sqrt{3}$; 2) 7; 3) 1; 4) $3\sqrt{3}$; 5) $2\sqrt{3}$; 6) $3\sqrt{3}$. **4.29** 1) −1; 2) $\frac{5}{12}$; 3) $1-\sqrt{3}$; 4) 1. **4.30.** 1) 1; 2) $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta$; 3) $\operatorname{ctg}^6\alpha$.

4.31. 1) $\frac{17}{4}$; 3) $\frac{1+\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{1-\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{2}$. **4.32.** 2) $-2-2\sqrt{2}$. **4.34.** 1) $-0,5$; 2) $-0,5$. **4.36.** 2) $(-\infty;\ 1]\cup[1,5;\ +\infty)$; 3) $\varnothing$. **4.38.** 10) $\sin(-7,3) = -\sin 7,3 < 0$; $\cos(-7,3) > 0$; $\mathrm{tg}(-7,3) < 0$; $\mathrm{ctg}(-7,3) < 0$. **4.39.** 1) «+»; 6) «–»; 9) «+». **4.40.** 1) I; 2) IV; 3) II; 4) IV; 5) I; 6) III. **4.41.** 1) I; III; 2) I ; II; III; IV; 3) I; II. **4.43.** 1) Жұп; 2) жұп әрі тақ; 3) жұп; 4) жұп; 5) жұп. **4.44.** 1) Тақ; 2) жұп; 3) тақ; 4) тақ; 5) тақ; 6) жұп. **4.45.** 1) 0,5; 2) 4π; 3) 3; 4) $\frac{\pi}{3}$; 5) π; 6) 3π. **4.46.** 1) «+»; 2) «+»; 3) «–»; 4) «+». **4.47.** 1) Жұп; 2) тақ; 3) жұп; 4) тақ; 5) жұп; 6) ЖЖФ; 7) жұп; 8) жұп; 9) ЖЖФ; 10) тақ; 11) тақ; 12) тақ. **4.48.** 1) 0,5; 2) 0,5; 3) 0; 4) 0; 5) $\sqrt{3}$; 6) $-0,5$; 7) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 8) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **4.50.** 2) II және III; 4) I және III. **4.51.** 1) $\frac{\pi}{2}+2n\pi$; $n\in Z$; 5) $\frac{\pi}{2}+n\pi$; $n\in Z$; 6) $(2n+1)\pi$; $n\in Z$. **4.52.** Оң. **4.53.** 1) 0; 2; 2) 0; 2; 3) -1; 5; 4) -1; 1; 5) 0; 7; 6) -3; 2. **4.54.** 1) Орындалмайды, себебі $\sin\alpha=1$ және $\cos\alpha=1$ теңдіктерін қанағаттандыратын α бұрышы табылмайды. **4.55.** 1) $f(x)=\sqrt{|x|}$; 4) $f(x)=\frac{1}{1-|x|}$. **4.56.** 2) $f(x)=-x\,|x|$; 3) $f(x)=x(|x|-2)$. **4.57.** 2. **4.58.** 1) 1; 2) π; 3) π; 4) 2π; 5) π. **4.59.** 1) Иә; 2) иә; 3) жоқ. **4.60.** 1) $[1;\ 3)$; 2) $(0;\ 1]\cup[2;4,5)$. **4.61.** 1) $\cos\alpha$; 4) $\sin\alpha$; 6) $\sin\alpha$; 9) $-\cos\alpha$. **4.62.** 2) $-\mathrm{ctg}\frac{3\pi}{7}$; 3) $-\cos 0,1\pi$. **4.63.** 1) $-\mathrm{ctg}47°$; 2) $-\sin 2°$; 3) $-\sin 40°$; 4) $\sin 10°$.

4.64. 2) $\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\mathrm{tg}\frac{3\pi}{4}=\mathrm{ctg}\frac{3\pi}{4}=-1$.

4.65. 1) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $-0,5$. **4.66.** 1) $-0,5$; 2) $-\sqrt{3}$; 3) -1; 4) $-0,5$; 5) -1; 6) $-0,5$. **4.67.** $-1,1$. **4.68.** 1) 4; 2) -1.

4.69. $8-4\sqrt{3}$. **4.71.** 1) $\sin^2\alpha$; 3) $\sin^2\alpha$; 5) 1. **4.72.** 1) 4; 2) 4; 3) 0; 4) 0. **4.74.** 1) 1; 2) 1; 3) 1; 4) 1. **4.75.** 1) $-\dfrac{\sqrt{2}}{12}$; 2) $-\dfrac{\sqrt{6}}{4}$; 3) 0; 4) 0. **4.77.** 1) $(-\infty;\ -2)\cup(1;\ 2)\cup(2{,}5;+\infty)$; 2) $\left(-7;-\dfrac{7}{3}\right]\cup(-1;\ 1]$.

4.78. 1) $\dfrac{1}{\sin\beta}$; 2) $-\dfrac{2}{\cos^2\alpha}$; 3) $\mathrm{ctg}\gamma$; 4) $\dfrac{1}{\sin^2\theta}$; 5) $-\sin^2\alpha$; 6) $-\sin^2\alpha$.

4.79. 1) 0; 2) $-\cos^2\alpha$; 3) -1; 4) $\dfrac{1}{\cos x}$; 5) $-2\cos\alpha$; 6) $-\cos^2 u$; 7) $\cos y$; 8) $-\mathrm{tg}x$. **4.80.** 1) 2; 2) 4; 3) 1; 4) 1; 5) $\dfrac{1}{3}$; 6) 1. **4.83.** 1) 2; 4) 4. **4.84.** 1) $\dfrac{15}{8}$; 2) $\dfrac{6-3\sqrt{2}}{4}$; 3) $\dfrac{12-4\sqrt{3}}{9}$; 4) $\dfrac{14+7\sqrt{3}}{8}$. **4.85.** 1) $\dfrac{1}{\cos\alpha}$; 2) $\dfrac{1}{\sin\alpha}$; 3) $\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$; 4) $\cos^2\alpha$. **4.86.** 1) $\cos^2\alpha$; 2) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$; 3) 1; 4) $\mathrm{tg}^2\alpha$.

4.87. 1) $x^2+y^2=25$; 2) $25x^2+9y^2=225$; 3) $x^2-2y=1$. **4.89.** 1) $\dfrac{1}{9}$; 2) $\dfrac{3}{7}$; 3) $\dfrac{6}{17}$; 4) 20. **4.90.** 1) $-\dfrac{4}{7}$; 2) $\dfrac{1}{4}$; 3) 0; 4) $-\dfrac{5}{12}$. **4.93.** $\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}$, $\mathrm{tg}\alpha=-\dfrac{3}{4}$, $\mathrm{ctg}\alpha=-\dfrac{4}{3}$. **4.96.** 1) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha-\sin x)$; 2) $\dfrac{1}{2}\cos y+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin y$; 3) $\dfrac{1}{2}\cos x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x$; 5) $\dfrac{1-\mathrm{tg}x}{1+\mathrm{tg}x}$. **4.97.** 1) $\dfrac{1}{2}$; 2) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **4.98.** 1) $\cos 3x$; 2) $\cos 4x$; 3) $\sin 4\beta$; 4) $\sin 5\alpha$. **4.99.** 1) $\sin x\cos y$; 2) $\cos x\cos y$; 3) $\sin\beta\cos\alpha$; 4) $-\sin\alpha\sin\beta$. **4.100.** 1) $\mathrm{tg}5x$; 2) $\mathrm{tg}3x$; 3) $\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$; 4) 1; 5) 0; 6) 0. **4.101.** 1) $\dfrac{\sqrt{2}\left(1-\sqrt{3}\right)}{4}$; 2) $\dfrac{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)}{4}$; 3) $\dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}$; 4) $\dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{4}$; 5) $2+\sqrt{3}$; 6) $2+\sqrt{3}$. **4.104.** 1) $-\dfrac{33}{65}$; 2) $\sqrt{3}$; 3) $-\dfrac{1519}{720}$.

4.106. 1) $\frac{77}{85}$, $\frac{84}{85}$; 2) 0; $\frac{1519}{1681}$. **4.107.** 1) $-\frac{4}{5}$; 3) $\frac{\pi}{2}$. **4.110.** 1) $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$; 2) -2; 2; 3) -2; 2; 4) $-2\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$; 5) -5; 5; 6) $-\sqrt{29}$; $\sqrt{29}$. **4.111.** 1) 1,5; 2) 1,5; 3) 0; 4) 0; 5) $\mathrm{tg}^2 y$; 6) -1. **4.112.** 1) $\sin\alpha$; 4) $\cos\alpha-\sin\alpha$. **4.113.** 2) $\sin^2\alpha$; 3) $\frac{1}{2}\mathrm{tg}2\alpha$. **4.114.** 1) $\cos 4x$; 3) 2; 5) $\frac{1}{4}\cos^2 2x$. **4.115.** 2) $\cos^2 2x$; 4) $\frac{1}{\sin x}$; 6) $\cos\alpha$. **4.116.** 1) $2\cos 20°$; 4) $\cos 18°$. **4.117.** 1) $\mathrm{tg}2\alpha=\frac{24}{7}$; $\sin 2\alpha=\frac{24}{25}$; $\cos 2\alpha=\frac{7}{25}$; $\mathrm{ctg}2\alpha=\frac{7}{24}$. **4.118.** $\sin 2\alpha=-\frac{336}{625}$; $\cos 2\alpha=-\frac{527}{625}$; $\mathrm{tg}2\alpha=\frac{336}{527}$. **4.119.** 1) $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{\sqrt{26}}$, $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{5}{\sqrt{26}}$, $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=5$; 4) $\cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=-2$. **4.120.** 1) 1; 2) $\sin 3x$; 3) 0; 4) $\sin 3x$. **4.121.** 1) $\mathrm{ctg}^2 21°$; 2) $\cos^2 x$; 3) $-\mathrm{tg}^2\frac{x}{4}$; 4 $\frac{\sin\frac{x}{2}-1}{\sin\frac{x}{2}+1}$ **4.123.** $-2{,}25$. **4.124.** 1) 1; 2) $\frac{60}{61}$. **4.125.** 1) $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$; 2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $-2\sqrt{2}$; 4) 2; 5) 1; 6) 1. **4.127.** 1) $\frac{1}{8}$; 2) 0; 3) 1; 4) 1. **4.129.** 4) $\sqrt{3}\sin\alpha$; 6) $-\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$. **4.130.** 1) $2\sin 20°\cdot\cos 5°$. **4.133.** 4) $-\sin(x+y)\sin(x-y)$. **4.135.** 3) $\frac{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\cos x}$; 4) $\frac{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\sin\alpha}$. **4.136.** 1) $4\cos\frac{\beta}{4}\times\times\left(\frac{\beta}{4}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\beta}{4}-\frac{\pi}{6}\right)$; 6) $\frac{2\sqrt{2}\frac{\beta}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right)}{\cos\beta}$. **4.137.** 1) $\mathrm{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$; 2) $\mathrm{tg}\frac{x+y}{2}$; 3) $\mathrm{tg}^2\frac{y}{2}$; 4) $\frac{\sin 3y}{\sin y}$; 5) $\cos 2x$; 6) $\mathrm{tg}x\,\mathrm{ctg}y$. **4.138.** 1) 0; 2) 0.

4.139. 2) $2\sin\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\pi}{12}\right)$. **4.141.** 1) 1. **4.144.** 2) $4\sin\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$. **4.145.** 1) $4\sin\frac{5\gamma}{2}\cos\gamma\cos\frac{\gamma}{2}$; 2) $-4\cos5\gamma\cdot\sin2\gamma\times\sin\gamma$. **4.146.** 1) $-\frac{32}{27}$; 2) $-\frac{28\sqrt{5}}{125}$. **4.148.** 2) $\sin\alpha\sin4\gamma$; 3) $-\sin2\varphi\times\sin4\beta$; 6) 1; 7) 1. **4.149.** 4) $\mathrm{tg}^8\beta$; 5) $\mathrm{ctg}3\varphi$; 6) $\mathrm{tg}5\varphi$; 10) $8\cos^4 2\alpha$. **4.150.** 1) 2; 2) 4; 3) $2\sqrt{3}$; 7) $1-p^2$. **4.151.** $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ болса, $\min A=-6$; $x=k\pi$ болса, $\max A=2$. **4.152.** 3) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$. **4.153.** 4) $-\cos^2 2\alpha$. **4.156.** 2) 1. **4.161.** 2. **4.162.** 0,5. **4.165.** $4\cos^3\frac{\alpha}{3}-3\cos\frac{\alpha}{3}=m$. **4.166.** 2, $-\frac{1}{3}$. **4.167.** 1) $4\cos\alpha\cos2\alpha\cos6\alpha$; 2) $\mathrm{tg}\frac{5x}{2}$. **4.170.** Иә, болады: $T=\pi$. **4.172.** $\cos\varphi$.

5-бөлім

5.1. 3) Қораптан ақ немесе қызыл асық алынды. **5.3.** 5) $BC=\{A_4\}$; 12) $\{A_3\}$. **5.4.** 4) $\overline{A}=\{A_1, A_2, A_6\}$. **5.5.** 1) $A\subset C$; $B\subset C$. **5.8.** 2) B. **5.10.** 2) Кем дегенде бір ұтыс шықты. **5.11.** 1) $A\subset B$, $A\subset C$. **5.12.** 8) $\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}$. **5.13.** 2) BC. **5.14.** 36. **5.15.** 3) жалған; 5) ақиқат. **5.16.** 1) $A+\overline{A}\cdot B$. **5.21.** 1) (2; 3), (1,5; 4); 2) (1; 4); (−1; −4). **5.22.** 1) 0,5; 2) 1. **5.23.** 98730. **5.24.** 0,008. **5.25.** Жиілігі 18, ал салыстырмалы жиілігі 0,9. **5.26.** 180. **5.27.** 850. **5.33.** 2) $\frac{1}{6}$. **5.34.** 1) 0,4. **5.35.** 3) 0,75. **5.36.** 2) $\frac{1}{3}$. **5.37.** $\frac{1}{7}$. **5.38.** 2) 0,94; 5) 0,44. **5.39.** 0,97. **5.40.** 3) 0,2. **5.41.** 2) 0,0198. **5.43.** 1) $\frac{1}{5}$; 2) 0,3; 3) 0,4; 4) 0,55. **5.44.** 0,4. **5.45.** $\frac{2}{3}$. **5.46.** 0,75. **5.47.** $\frac{2}{5}$. **5.48.** 0,05. **5.51.** 0,85. **5.52.** 0,92; 80 жарамсыз бұйым. **5.53.** $\frac{7}{8}$. **5.54.** $\frac{11}{90}$. **5.55.** 1) $\frac{5}{9}$;

2) $\frac{4}{9}$. **5.56.** 1) 0,75; 2) $\frac{1}{18}$; 3) $\frac{1}{3}$. **5.57.** $\frac{1}{22}$. **5.58.** 0,23. **5.59.** 0,9801. **5.60.** 0,12. **5.61.** 1) 0,384. 2) 0,096; 3) 0,008. **5.63.** 0,8. **5.64.** 0,388. **5.65.** $\frac{8}{15}$. **5.66.** $\frac{1}{2}$. **5.67.** $P(7)=\frac{1}{6}>P(8)=\frac{5}{36}$. **5.68.** Шамамен 1000. **5.69.** Қызыл $\frac{1}{4}$; көк $\frac{2}{5}$; боялмаған $\frac{7}{20}$. **5.71.** 0,936. **5.72.** $\frac{2}{3}$ және $\frac{1}{3}$. **5.73.** $\frac{4}{7}, \frac{2}{7}\,\frac{1}{7}$. **5.74.** $P(B)P_B(A)=P(A)P_A(B)$ теңдігін қолданыңдар. **5.75.** 0,9. **5.76.** $P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})\Rightarrow P(A\overline{B})=$ $=P(A)-P(AB)$; $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)\Rightarrow P(AB)=P(A)+P(B)-$ $-P(A+B)\Rightarrow P(AB)=a+b-c\Rightarrow P(A\overline{B})=P(A)-a-b+c=c-b$. **5.77.** $\frac{5}{12}$. **5.78.** $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$. **5.79.** 1) 1; 2) −1. **5.80.** 4. **5.81.** 1) $\sin x$; 2) $\operatorname{tg}2\varphi$. **5.82.** 0,5. **5.83.** $\frac{1}{3}$. **5.84.** a. **5.85.** $\frac{\pi}{4}$. **5.86.** 0,25. **5.87.** 1) $\frac{\pi a^2}{4}$; 2) πa^2. **5.88.** 1) $\frac{2}{\pi}$; 2) $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$; 3) $\frac{2a\sqrt{R^2-\alpha^2}}{\pi R^2}$; 4) $\frac{(a+b)\left(\sqrt{R^2-a^2}+\sqrt{R^2-b^2}\right)}{\pi R^2}$. **5.89.** 1) 0,25; 2) 0,75. **5.90.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $\frac{\pi}{16}$. **5.91.** 1) $\frac{1}{16}$; 2) $\frac{3}{16}$; 3) $\frac{3\pi}{144}$. **5.92.** $\frac{1}{3}$. **5.94.** 1) $\frac{1}{8}$; 2) $\frac{1}{32}$. **5.95.** 1) $\frac{(a-r)^2}{a^2}$; 2) $\frac{(a-r)^2}{2a^2}$. **5.96.** 0,5. **5.97.** $\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{9\pi}$. **5.98.** $\frac{1}{24}$. **5.99.** 1) $\frac{7}{16}$; 2) $\frac{5}{9}$; 3) $\frac{3}{4}$. **5.100** 1) −1; 0,2; 2) ±1. **5.101.** −3. **5.102.** 0,24. **5.103.** $\{e; ce; cce; ccce; cccc\}$. **5.104.** 1) $\frac{4}{9}$; 2) $\frac{5}{9}$; 3) $\frac{4}{9}$. **5.105.** Шамамен 15. **5.106.** $\frac{91}{216}$. **5.108.** Жоқ, болмайды. **5.109.** 1) 8^{10}; 2) A_{10}^{8}. **5.110.** 1) 1320; 2) 40; 3) 111. **5.111.** 72. **5.112.** 1440. **5.113.** 144.

5.115. 252. **5.116.** 1) 3; 2) −12. **5.117.** 243. **5.120.** $\frac{(a-r)^2}{a^2}$.

5.121. 1) Бір қалтаға бір ақ асық, ал екіншісіне қалған асықтарды салу қажет; 2) $\frac{8\pi^2(4-\pi)^2}{128}$.

7—9-сыныптар курсын қайталауға арналған жаттығулар

6.1. 4) 0; 5; 5) 2; 8; 7) 0; 8) 8. **6.10.** 1) $a=32$; $b=56$. **6.11.** 2) $\frac{1}{3}$; 5) 1,36. **6.12.** 1) $\sqrt{5}$; 2) $-\sqrt{5}$; 3) 2; 4) −4; 5) 1; 6) 1; 7) 9. **6.17.** 1) $8(x+11)(x+2)$; 4) $(a-1)(a+9)$; 8) $2a\cdot(a^2+3b^2)$.

6.18. 2) $(5mn^2-7p^2q)(3m^2p+5nq^2)$. **6.31.** 1) (1; 6), (6;1); 2) (1; 3); (6; 05); 3) (1;−2), $\left(6;-\frac{1}{3}\right)$; 4) (1; 5); (5; 1), (2; 3),(3; 2).

6.32. 2) $x^7-1=(x^3+x+1)(x^4-x^2-x+1)+2x^2-2$. **6.33.** $a=11$.

6.36. 3) $(x-1)(x^2-4x-1)$; 6) $(x+1)(x^3-7x^2-7x-4)$. **6.38.** 4) $\frac{2}{b}$; 5) 1.

6.39. 1) $-\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\varnothing$; 4) −3,5; 5) 4; 6) 2. **6.40.** 3) $a\in(-\infty;+\infty)\Rightarrow$ $\Rightarrow x_1=a$; $x_2=a+1$; 4) $a\neq 3 \Rightarrow x=a$; $a=3 \Rightarrow x\in\varnothing$. **6.41.** 1) ±1; ±2.

6.42. 1) $x=\frac{145}{19}$, $y=-\frac{29}{19}$; 2) шексіз көп шешімдері бар; 3) $\varnothing$; 4) (2,2; 0,4), (1;1). **6.43. Нұсқау:** жүйенің бірінші теңдеуін y-ке тәуелді квадрат үшмүше ретінде қарастырыңдар.

6.49. 1) $\left(\frac{1}{4};1\right)$; 2) $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{3}\right)$; 4) $[3;+\infty)$. **6.51.** 2) $[-1;6]$; 3) $(-\infty;-4]\cup$ $\cup[4;+\infty)$; 5) $x=0$; $x\in[2;4]$; 6) $x\in(-\infty;0)\cup(0;3)\cup(4;+\infty)$.

6.52. $a\in\left(-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$. **6.53.** $a\in(-\infty;-1)\cup\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$. **6.54.** $a\in[4;+\infty)$.

6.55. $a \in (-1;\ 1)$. **6.56.** 2) $-(a + b)$; 5) $\dfrac{1}{a^n b^n}$. **6.57.** 5) $\sqrt{x}$.

6.59. 1) $xy = 1$; 4) $4x = 5y$. **6.61.** 3) $[3;\ +\infty)$; 6) $[0;1) \cup (1;\ +\infty)$;

8) $(-\infty;\ 3-\sqrt{5}) \cup (3-\sqrt{5};\ 2) \cup [4; 3+\sqrt{5}) \cup (3+\sqrt{5};\ +\infty)$.

6.65. 1) $a_n = \dfrac{1}{n^2}$; 2) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$; 4) $a_n = (-1)^{n-1}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$. **6.69.** 2) 90.

6.70. $\dfrac{n-1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$. **6.71.** $a_n = 18n - 25$ және $b_n = 14n - 17$. **6.72.** 1) $b_1 = -$ -49; $q = -\dfrac{1}{7}$; 4) $b_1 = \dfrac{1}{8}$, $q = 7$. **6.74.** $a = 32$ немесе $a = \dfrac{1}{2}$ т.с.с.

6.75. 3) $\dfrac{b_1^3}{1-q^3}$. **6.76.** $q = \dfrac{2}{3}$. **6.77.** 1) $\dfrac{3}{4}$; 2) $\dfrac{5}{4}$. **6.79.** $q = 2 \pm \sqrt{3}$.

6.80. 3. **6.81.** 1) $\cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{3}{4}$; 2) $\sin\alpha = -\dfrac{1}{5}$, $\cos\alpha = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{\sqrt{6}}{12}$. **6.82** $a = -\dfrac{15}{4}$. **6.84.** 2) 0; 3) $\dfrac{1}{\cos 2\beta}$.

МАЗМҰНЫ

4-бөлім: Тригонометрия

5-бөлім. Ықтималдықтар теориясының элементтері

6-бөлім. VII–IX сыныптар курсы материалдарын қайталауға арналған жаттығулар

О қ у б а с ы л ы м ы

Шыныбеков Әбдухали Насырұлы
Шыныбеков Данияр Әбдухалиұлы
Жұмабаев Ринат Нұрланұлы

АЛГЕБРА

Жалпы білім беретін мектептің 9-сыныбына арналған оқулық

Редакторы *Ж. Баданова*
Көркемдеуші редакторы *А. Искаков*
Техникалық редакторы *Ү. Рысалиева*
Корректоры *Б. Жанпейісова*
Компьютерде беттеген *А. Куватова*

ИБ №085

Теруге 11.02.2019 берілді. Басуға 31.05.2019 қол қойылды.
Пішімі $60\times90^1/_{16}$. Офсеттік қағаз. Шартты баспа табағы 15,0.
Есептік баспа табағы 9,29. Таралым 20000 дана. Тапсырыс №4337.

«Атамұра» корпорациясы» ЖШС, 050000, Алматы қаласы, Абылай хан даңғылы, 75.

Қазақстан Республикасы «Атамұра» корпорациясы» ЖШС-нің
Полиграфкомбинаты, 050002, Алматы қаласы, М. Мақатаев көшесі, 41.