АЛГЕБРА

1-бөлім

Жалпы білім беретін мектептің 9-сыныбына арналған оқулық

Қазақстан Республикасының Білім және ғылым министрлігі бекіткен

9

Алматы "Мектеп" 2019

ӘОЖ 373.167.1
КБЖ 22.14я72
А39

Авторлары:
**А.Е. Әбілкасымова, Т.П. Кучер, В.Е. Корчевский,
З.Ә. Жұмағұлова**

Шартты белгілер:

— анықтамалар, қасиеттер, ережелер

— жаңа білімді меңгеру барысында шешілетін мәселе

— пысықтау сұрақтары

— теориялық материалды өзіндік игеруге арналған тапсырмалар

— теорема немесе қасиеттің дәлелдеуінің аяқталуы

— қосымша материалдар

A — барлығы үшін міндетті жаттығулар

B — орта деңгейлі жаттығулар

C — жоғары деңгейлі жаттығулар

— ерітінділер мен қоспаларға берілген жаттығулар

— практикаға бағытталған жаттығулар

— электронды ресурстарды қолдануға арналған жаттығулар

А39 **Алгебра:** Жалпы білім беретін мектептің 9-сыныбына арналған оқулық. 1-бөлім / А.Е. Әбілкасымова, Т.П. Кучер, В.Е. Корчевский, З.Ә. Жұмағұлова. — Алматы: Мектеп, 2019. — 176 б., сур.

ISBN 978—601—07—1093—1

А $\frac{4306020503—002}{404(05)—19}$ 11(1)—19

ӘОЖ 373.167.1
КБЖ 22.14я72

ISBN 978—601—07—1093—1

АЛҒЫ СӨЗ

9-сынып "Алгебра" оқулығында "Теңдеулер мен теңсіздіктер, теңдеулер мен теңсіздіктер жүйелері", "Сандар тізбегі" мен "Тригонометрия элементтері", "Комбинаторика және ықтималдықтар теориясы" тақырыптары қарастырылған.

Оқулық 32 параграфтан тұрады, әрбір параграфы теориялық материалды қолдануға арналған мысалдар және олардың шешімдері қарастырылған теориялық бөліктен тұрады. Теориялық материалды баяндау барысында өздігінен тұжырымдауға (дәлелдеуге) әкелетін кейбір тапсырмалар, оқушылардың өз бетінше жұмыс істеуіне мүмкіндік туғызатын өзіндік бақылау сұрақтары берілген.

Оқулықтың әрбір параграфында өткен материалды пысықтауға арналған жаттығулар үш деңгейде ұсынылып отыр. Бірінші деңгейдегі жаттығуларды (А) барлық оқушылардың орындауы міндетті деп саналады. Екінші деңгейдегі жаттығулардың (В) күрделілігі орташа. Үшінші деңгейдегі жаттығулар (С), оның ішінде (*) жұлдызшамен белгіленген жаттығулар, математикаға зерек және теориялық білімдерді шығармашылықпен қолдана алатын оқушыларға арналған. Сонымен қатар оқулықта практикаға бағытталған тапсырмалар және электронды ресурстарды қолдануға арналған есептер қамтылған.

Әр параграфтың соңында қайталауға арналған жаттығулар берілген. Мұндай жаттығуларды орындау барысында оқушылар келесі параграфтың материалын игеруге қажет материалды еске түсіреді. Әр тараудың соңында тест тапсырмалары берілген. Оқулық курс мазмұнына сәйкес глоссариймен толықтырылған. Жаттығулардың дұрыс орындалғанын тексеру мақсатында оқулықтың соңында жауаптар берілген.

Бойында табандылық пен еңбексүйгіштік қасиеттерді қалыптастырған оқушылардың математиканы игеруде жетістікке жететіні сөзсіз. Оқуда табыс тілейміз!

Авторлар

7-8-СЫНЫПТАРДАҒЫ АЛГЕБРА КУРСЫН ҚАЙТАЛАУҒА АРНАЛҒАН ЖАТТЫҒУЛАР

Бөлшек-рационал өрнектерді тепе-тең түрлендіру

1. Берілген өрнектерді ықшамдаңдар:

1) $\dfrac{8}{6+x}-\dfrac{8}{x-7}$; 2) $\dfrac{9a^2+y^2}{3a-y}+\dfrac{6ay}{y-3a}$;

3) $\dfrac{ay}{a-yb}+\dfrac{3a-by}{by-a}$; 4) $\dfrac{a^2x^2+36y^2}{ax-6y}+\dfrac{12axy}{6y-ax}$.

2. Берілген өрнектердің тепе-тең болатынын дәлелдеңдер:

1) $\dfrac{1}{6x+10}-\dfrac{1}{9x-15}+\dfrac{5}{9x^2-25}$ және $\dfrac{1}{6\cdot(3x-5)}$;

2) $\dfrac{1}{2x-8}+\dfrac{1}{40-10x}+\dfrac{1}{x^2-8x+16}$ және $\dfrac{2x-3}{5(x-4)^2}$;

3) $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{x-2}{x^2+2x+4}-\dfrac{6x}{x^3-8}$ және $\dfrac{2x-4}{x^2+2x+4}$;

4) $\dfrac{2a^2+7a+3}{a^3-1}-\dfrac{1-2a}{a^2+a+1}-\dfrac{1}{a-1}$ және $\dfrac{3}{a-1}$.

3. Төмендегі амалдарды орындаңдар:

1) $\dfrac{27c^2}{5d}:(-18c^3d^2)$; 2) $\dfrac{14a^2}{9x^3}:\dfrac{7a}{4x^2}$;

3) $\dfrac{7x^2}{10a^3}:\dfrac{x}{15a^5}$; 4) $27a^3\cdot\dfrac{a^2}{b^2}:\dfrac{18a^5}{7b^3}$.

4. Берілген өрнектерді ықшамдаңдар:

1) $\dfrac{9x^2}{5y^3}:\dfrac{27x^5}{2y^4}\cdot\dfrac{15}{4y(x-1)}$; 2) $\dfrac{25a(b-1)}{3^2d}:\dfrac{5cd^2}{27ab}:\dfrac{a^3(b-1)}{c^3d^2}$;

3) $\dfrac{28p^4}{5q^3}\cdot\dfrac{15q^2(p-2)}{7p^2}:\dfrac{3p^2}{4q^3}$; 4) $\dfrac{12x^5y^4}{13ab^2}:\dfrac{4xy^2}{13a^2b}:\dfrac{3x^2(y+3)}{ab}$.

5. Берілген өрнекті ықшамдаңдар және мәнін табыңдар:

1) $\dfrac{5-\dfrac{2}{3x}}{5+\dfrac{2}{3x}}+2$, мұндағы $x=0{,}5$;

2) $\dfrac{\dfrac{5n-3b}{b}+3}{\dfrac{25n+7b}{b}-7}$, мұндағы $n=2$;

3) $\dfrac{\dfrac{5x}{y^2} + \dfrac{y}{x^2}}{\dfrac{x}{y^2} - \dfrac{5y}{x^2}} - 1$, мұндағы $\dfrac{y}{x} = 1$;

4) $\left(\dfrac{x}{y} + 1\right)^2 - 2 + \left(\dfrac{x}{y} - 1\right)^2$, мұндағы $x = 0{,}25$ және $y = 0{,}5$;

5) $3a - \dfrac{2a}{1 - 2a} + \dfrac{c - 6a^2}{2a - 1}$, мұндағы $a = -3$, $c = 12$;

6) $\dfrac{a^2 - n}{a - 7} - \dfrac{6a}{7 - a} - a$, мұндағы $a = 2$, $n = -4$.

6. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\left(b - \dfrac{b^2 - 3}{b + 1}\right) : \dfrac{b + 3}{1 - b^2}$;

2) $\left(b - \dfrac{b^2 - 6}{b + 1}\right) : \dfrac{b + 6}{b^2 - 1}$;

3) $\left(1 + 2b - \dfrac{b^2 + b}{b + 1}\right) \cdot (1 - b)$.

7. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $\left(\dfrac{b^3 - 1}{b - 1} + b\right) : \dfrac{b^2 - 1}{b - 1} = b + 1$;

2) $\dfrac{1 + b}{1 - b^2} \cdot \left(\dfrac{1 + b^3}{1 + b} - b\right) = 1 - b$.

8. Берілген бөлшектерді қысқартыңдар:

1) $\dfrac{a^4 - 4}{a^3 + 2a}$; 2) $\dfrac{x^4 - 4x^2 + 4}{x^3 - 2x}$; 3) $\dfrac{x^4 - 6x^2 + 9}{3x - x^3}$; 4) $\dfrac{x^2 - 2x + 4}{x^3 + 8}$.

9. Берілген өрнектерді ықшамдаңдар:

1) $\left(\dfrac{p}{q} + \dfrac{q}{p}\right)^2 - \left(\dfrac{p}{q} - \dfrac{q}{p}\right)^2 - 2$;

2) $\left(\dfrac{a + y}{a} - \dfrac{a - y}{y}\right)^2 - \left(\dfrac{a + y}{a} + \dfrac{a - y}{y}\right)^2$;

3) $\dfrac{x}{x + 1} \cdot \left(\dfrac{4x}{x^2 - 1} + \dfrac{x - 1}{x + 1}\right) - \dfrac{x}{x - 1}$;

4) $a^4 \cdot \left(\dfrac{3a + b}{a} - 3\right)^2 + b^4 \cdot \left(\dfrac{a - 2b}{b} + 2\right)^2 - 4(ab)^2$;

5) $\dfrac{a}{a - 2} - \left(\dfrac{8a}{a^2 - 4} + \dfrac{a - 2}{a + 2}\right) \cdot \dfrac{a}{a + 2}$;

6) $2+\left(\frac{28c}{c^2-49}+\frac{c-7}{c+7}\right)\cdot\frac{c}{c+7}-\frac{c}{c-7}$;

7) $2+\frac{9x^2-4^{-1}}{3x+2^{-1}}-3x$;

8) $3+\frac{4x^2-9^{-1}}{2x+3^{-1}}-2(x-1)$;

9) $\frac{169^{-1}-a^2}{13^{-1}-a}-\left(a+5\frac{1}{13}\right)$.

10. Берілген пропорциялардағы белгісіз x-ті табыңдар:

1) $\frac{x}{a+c}=\frac{c}{c^2-a^2}$;

2) $\frac{x}{2n+c}=\frac{4c}{c^2-4n^2}$;

3) $\frac{x}{a-3c}=\frac{2c}{9c^2-a^2}$;

4) $\frac{6c}{25c^2-4a^2}=\frac{x}{5c+2a}$;

5) $\frac{c\cdot x}{2a-3c}=\frac{2ac}{9c^2-4a^2}$;

6) $\frac{2a\cdot x}{3b-a}=\frac{6ab}{9b^2-a^2}$.

Құрамында квадрат түбірі бар өрнектерді тепе-тең түрлендіру

11. Берілген өрнектердің мәнін табыңдар:

1) $7-\left(3\cdot\sqrt{\frac{4}{9}}+\sqrt{0,25}\right)-3,5$;

2) $6-(\sqrt{225}+3\sqrt{121}):\left(\frac{2}{3}\sqrt{0,09}+0,78\sqrt{100}\right)$;

3) $22:(0,15\sqrt{1600}-0,25\sqrt{400})-44$;

4) $\left(-6\sqrt{\frac{1}{4}}+\frac{\sqrt{324}}{2}\cdot\frac{\sqrt{0,16}}{0,2}\right):\sqrt{25}-2$.

12. Төменде берілген айнымалысы бар өрнектердің мәнін табыңдар:

1) $\sqrt{5x-10}$, мұндағы $x=2;\ 3,8;\ 7,2$;

2) $\sqrt{6-2c}$, мұндағы $c=2,5;\ -5;\ -15;\ -37,5$;

3) $\frac{5+\sqrt{a}}{5-\sqrt{a}}$, мұндағы $a=1;\ 16;\ 6,25$;

4) $\sqrt{2c-a}$, мұндағы $a=0$ мен $c=2$; $a=4$ пен $c=7$.

13. Төмендегі санды өрнектердің мәнін табыңдар:

1) $5+\sqrt{0,16}-(2\sqrt{0,1})^2$;

2) $(3\sqrt{3})^2+(-3\sqrt{3})^2-2$;

3) $(0,4\sqrt{10})^2+1,5\sqrt{16}-2$;

4) $(-5\sqrt{2})^2-(-2\sqrt{5})^2-4$;

5) $2-\sqrt{196\cdot 0,81\cdot 0,36}$;

6) $\sqrt{0,87\cdot 36+0,82\cdot 36}+1,2$;

7) $\sqrt{\dfrac{165^2 - 124^2}{41}}$; 8) $\sqrt{\dfrac{72}{176^2 - 112^2}}$;

9) $\sqrt{\dfrac{148^2 - 21^2}{104^2 - 23^2}}$; 10) $\sqrt{\dfrac{65{,}5^2 - 15{,}5^2}{13{,}5^2 - 11{,}5^2}}$.

14. 1) $\sqrt{3{,}4}$ және $\sqrt{3{,}6}$; 2) $\sqrt{3{,}335}$ және $\sqrt{3\frac{1}{6}}$; 3) $\sqrt{8{,}1}$ және 2,6; 4) $\sqrt{\frac{4}{9}}$ және $\sqrt{\frac{6}{11}}$; 5) 4,2 және $\sqrt{16{,}7}$ сандарын салыстырыңдар.

15. Берілген өрнектердің ішіндегі мағынасы бар өрнектің мәнін табыңдар:

1) $\sqrt{(-32)^2} - \sqrt{-40^2} + \sqrt{-(-15)^2}$;

2) $-\sqrt{20^2} - \sqrt{(-21)^2} - \sqrt{(-23)^2}$;

3) $4\sqrt{(-2)^2} + 0{,}4\sqrt{2^8} + 2\sqrt{(-2)^{10}}$;

4) $3 \cdot \sqrt{10^6} - 0{,}2\sqrt{(-4)^4} + 4{,}5 \cdot \sqrt{(-0{,}2)^2}$.

***16.** Айнымалының қандай мәндерінде:

1) $\sqrt{y^2} = y$; 2) $\sqrt{y^6} = y^3$; 3) $\sqrt{a^{10}} = -a^5$;

4) $\sqrt{x^{12}} = x^6$; 5) $\sqrt{c^{14}} = -c^7$; 6) $\sqrt{b^2} = -b$

теңдіктері тура болады?

17. 1) $\frac{4}{5}\sqrt{50}$; $\sqrt{31}$ және $4\sqrt{2}$; 2) $6\sqrt{0{,}6}$; $\sqrt{39}$ және $\frac{4}{5}\sqrt{75}$;

3) $3\sqrt{\frac{7}{2}}$; $\sqrt{15}$ және $\frac{1}{2}\sqrt{72}$; 4) $8\sqrt{0{,}5}$; $\sqrt{93}$ және $\frac{3}{4}\sqrt{160}$

сандарын өсу ретімен орналастырыңдар.

18. 1) $\dfrac{5}{11 - 2\sqrt{10}} + \dfrac{5}{11 + 2\sqrt{10}}$; 2) $\dfrac{\sqrt{11} - \sqrt{3}}{\sqrt{11} + \sqrt{3}} - \dfrac{\sqrt{11} + \sqrt{3}}{\sqrt{11} - \sqrt{3}}$;

3) $\dfrac{5}{3 - 2\sqrt{3}} + \dfrac{5}{3 + 2\sqrt{3}}$; 4) $\dfrac{12 + \sqrt{44}}{12 - \sqrt{44}} + \dfrac{12 - \sqrt{44}}{12 + \sqrt{44}}$

санды өрнегінің мәнін табыңдар.

19. 1) $\sqrt{9 - 2\sqrt{14}} = \sqrt{7} - \sqrt{2}$; 2) $\sqrt{6\sqrt{2} + 11} = \sqrt{2} + 3$;

3) $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = 4$; 4) $\sqrt{8 + 2\sqrt{7}} + \sqrt{8 - 2\sqrt{7}} = 2\sqrt{7}$

тепе-теңдігін дәлелдеңдер.

***20.** Төмендегі өрнектердің мәні натурал сан болатынын дәлелдеңдер:

1) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{6+4\sqrt{2}}\cdot\sqrt{6-4\sqrt{2}}$;

2) $\dfrac{7}{2\sqrt{2}+6}-\dfrac{7}{2\sqrt{2}-6}$;

3) $8+(\sqrt{7-2\sqrt{10}}+\sqrt{7+2\sqrt{10}})\cdot\sqrt{5}$;

4) $\dfrac{9}{8+2\sqrt{7}}+\dfrac{9}{8-2\sqrt{7}}$.

21. 1) $x=1-2\sqrt{5}$ болса, онда $x^2+4\sqrt{5}$;

2) $x=3+\sqrt{3}$ болса, онда x^2-6x+4;

3) $x=2-\sqrt{2}$ болса, онда x^2-4x өрнегінің мәнін табыңдар.

22. Берілген өрнектерді түрлендіріңдер:

1) $\sqrt{a^8b^2}$;

2) $\sqrt{\dfrac{16a^{16}}{9b^{14}}}$, мұндағы $b>0$;

3) $\sqrt{b^{10}x^8}$, мұндағы b ǀ 0;

4) $\sqrt{25x^8a^{12}}$;

5) $\sqrt{\dfrac{4x^6}{y^2}}$, мұндағы $x<0$, $y<0$;

6) $\sqrt{0,25p^6y^{10}}$, мұндағы p ǀ 0, y m0.

***23.** Көбейткішті түбір таңбасының алдына шығарыңдар:

1) $\sqrt{(-5x)^2}$;

2) $\sqrt{(-a)^2(-x)^8}$;

3) $0,5\sqrt{20y^2}$;

4) $0,1\sqrt{75x^3}$;

5) $a\sqrt{18x^2y}$;

6) $0,5\sqrt{169a^2}$;

7) $0,2\sqrt{2,25a^7}$;

8) $-m^2\sqrt{0,81ym^4}$;

9) $\sqrt{0,09a^2c}$, мұндағы $a<0$;

10) $\dfrac{1}{x^3}\sqrt{-x^3}$;

11) $2,1\sqrt{2500x^4}$, мұндағы $x>0$;

12) $\sqrt{1,96a^3b^3}$, мұндағы $a<0$, $b<0$;

13) $\sqrt{50y^4x^3}$;

14) $a\sqrt{-3x^3\cdot a^4}$.

***24.** Көбейткішті түбір таңбасының астына енгізіңдер:

1) $x\sqrt{10}$, мұндағы x ǀ 0;

2) $c\sqrt{\dfrac{7}{c}}$;

3) $a\sqrt{11}$, мұндағы $a<0$;

4) $4ab\sqrt{\dfrac{a}{8b}}$, мұндағы $a<0$, $b<0$;

5) $c\sqrt{6c}$;   6) $c^3\sqrt{11c^2}$;

7) $3x^5 \cdot \sqrt{\frac{1}{x}}$;   8) $3a^2b\sqrt{\frac{2b}{a}}$, мұндағы $a > 0,\ b > 0$;

9) $x \cdot \sqrt{-\frac{3}{x}}$;   10) $-a^2\sqrt{12}$;

11) $6x\sqrt{-\frac{x}{8}}$;   12) $\frac{2a}{b}\sqrt{\frac{b^5}{8a}}$, мұндағы $a < 0,\ b < 0$.

25. Бөлшектің алымын иррационалдықтан босатыңдар :

1) $\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$;   2) $\frac{2\sqrt{3}-3}{4\sqrt{3}}$;   3) $\frac{2-3\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$;

4) $\frac{x+\sqrt{7x}}{7\sqrt{x}}$;   5) $\frac{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}$;   6) $\frac{y+b\sqrt{y}}{b\sqrt{y}}$.

26. Бөлшектің бөлімін иррационалдықтан босатыңдар:

1) $\frac{2-\sqrt{2y}+y}{\sqrt{2}-\sqrt{y}}$;   2) $\frac{9+3\sqrt{c}+c}{3+\sqrt{c}}$;   3) $\frac{a^2b+3a\sqrt{b}+9}{3+a\sqrt{b}}$;

4) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}$;   5) $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}-1}$;   6) $\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}-1}$.

Квадрат үшмүше. Виет теоремасы

27. Квадрат үшмүшенің түбірлерін табыңдар:

1) $x^2 + 4x - 5$;   2) $x^2 - 14x - 15$;
3) $-x^2 + 4x + 12$;   4) $2x^2 + 3x - 5$.

28. Квадрат үшмүшені көбейткіштерге жіктеңдер:

1) $x^2 + 2x - 8$;   2) $3x^2 - 11x + 8$;
3) $-2x^2 + 5x - 3$;   4) $-3x^2 + 8x - 5$.

29. Квадрат үшмүшені көбейткіштерге жіктеңдер:

1) $-2x^2 + 10x - 8$;   2) $x^2 - 11x + 10$;
3) $-2x^2 + 7x - 5$;   4) $3x^2 + 4x - 7$;
5) $\frac{1}{2}x^2 + 1{,}5x - 2$;   6) $0{,}5x^2 - 6x + 5{,}5$;
7) $-2x^2 + 1\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$;   8) $0{,}3x^2 + 3x - 3{,}3$.

30. Берілген өрнектерді көбейткіштерге жіктеңдер:

1) $x^2 + 7x - 8$;   2) $x^2 - 10x - 11$;
3) $-2{,}5x^2 + 7{,}65x - 5{,}15$;   4) $3\frac{2}{3}x^2 + 4\frac{1}{3}x - 8$.

31. Берілген бөлшектерді қысқартыңдар:

1) $\dfrac{x^2-7x-8}{x-8}$; 2) $\dfrac{x^2-9x+8}{x-1}$; 3) $\dfrac{2x^2+7x-9}{x-1}$;

4) $\dfrac{3x^2-7x-10}{x+1}$; 5) $\dfrac{2x^2-7x-9}{x^2+x}$; 6) $\dfrac{3x^2-9x+6}{x^2-x}$;

7) $\dfrac{5x^2+7x-12}{x^2-1}$; 8) $\dfrac{2x^2-7x+6}{x^2-4}$.

32. Берілген түбірлері бойынша квадрат теңдеу құрастырыңдар:

1) 2; 7; 2) –3; 5; 3) –1; 4; 4) –2,1; –0,3;

5) 0,2; 5,3; 6) –5; 5; 7) $\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{3}{5}$; 8) $3\dfrac{4}{5}$; $2\dfrac{3}{5}$;

9) $-\sqrt{7}$; $\sqrt{7}$; 10) $5 \pm \sqrt{3}$; 11) $-3 \pm \sqrt{5}$; 12) $\sqrt{2}$; $\sqrt{11}$.

33. Виет теоремасына кері теореманы қолданып, төмендегі квадрат теңдеулердің түбірлерін табыңдар:

1) $x^2 - 10x + 24 = 0$; 2) $x^2 - 11x + 24 = 0$;
3) $x^2 - 12x + 27 = 0$; 4) $x^2 + 11x + 24 = 0$;
5) $x^2 + 42x + 441 = 0$; 6) $x^2 + 14x - 32 = 0$;
7) $x^2 - (\sqrt{2} + 3)x + 3\sqrt{2} = 0$; 8) $x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = 0$;
9) $x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$; 10) $x^2 - 3(\sqrt{5} + 4)x + 36\sqrt{5} = 0$;
11) $x^2 - 4\sqrt{5}x + 20 = 0$; 12) $x^2 - (\sqrt{2} - \sqrt{6})x - 2\sqrt{3} = 0$.

34. Төмендегі теңдеулердің түбірлерінің қосындысы және көбейтіндісінің мәндерін табыңдар:

1) $x^2 - 4x - 6 = 0$; 2) $x^2 + 12x - 2{,}5 = 0$;
3) $2x^2 - 14x + 5 = 0$; 4) $3x^2 - 5x + 2 = 0$.

35. $x^2 - 4x - 9 = 0$ теңдеуін шығармай төмендегі өрнектердің мәнін табыңдар (мұндағы x_1 және x_2 теңдеудің түбірлері):

1) $x_1^2 + x_2^2$; 2) $x_1^2x_2 + x_1x_2^2$; 3) $x_1^3 + x_2^3$; 4) $x_1^4 + x_2^4 + x_1x_2$.

Квадрат және бөлшек-рационал теңдеулер

36. Төмендегі теңдеулерді шешіңдер:

1) $x^2 - 5x - 12 = 6$; 2) $x^2 - 5x - 4 = 10$;
3) $x^2 + 8x = -16 - 2x$; 4) $x^2 + x - 2 = 2 - 2x$;
5) $-x^2 + 3x - 12 = -4x$; 6) $9x - x^2 = 6 + 2x$;

7) $-x^2 + 5x = 18 - 6x$; 8) $x - 2x^2 + 7 = -1 - 5x$;
9) $2x - 3x^2 + 8 = -1 - 6x$.

37. Төменде берілген бөлшек-рационал теңдеулердің түбірлерін табыңдар:

1) $\frac{x}{x-3} + \frac{x}{x+2} = 1$; 2) $\frac{2}{6+x} + \frac{5}{x-1} = 1$;

3) $\frac{1}{x^2 - 10x + 25} - \frac{1}{x+5} + \frac{10}{25 - x^2} = 0$;

4) $\frac{2}{x^2 + 12x + 36} - \frac{12}{36 - x^2} - \frac{1}{x-6} = 0$;

5) $\frac{x^3 + 8}{2x + 4} = 5x - 8$; 6) $\frac{8x^3 + 27}{2x + 3} = 6x - 5$;

7) $\frac{x^4 - 625}{25 - x^2} = -8x - 90$; 8) $\frac{x^4 - 256}{x^2 - 16} = 8x + 9$.

38. 1) Екі бүтін түбірі болатын;
2) екі рационал түбірі болатын;
3) екі иррационал түбірі болатын;
4) нақты түбірлері болмайтын $x^2 + n = 0$ түріндегі теңдеуге мысал келтіріңдер.

39. 1) Екі бүтін түбірі болатын;
2) екі рационал түбірі болатын;
3) екі иррационал түбірі болатын;
4) нақты түбірлері болмайтын $(x - a)^2 + n = 0$ түріндегі теңдеуге мысал келтіріңдер.

40. Айнымалысы модуль таңбасының ішінде берілген теңдеуді шешіңдер:

1) $x^2 - 8|x| + 15 = 0$; 2) $x^2 - |x| + 2 = 0$;
3) $4|x| - x^2 - 2x + 8 = 0$; 4) $x^2 - 2|x - 1| - 15 = 0$;
5) $x^2 - 5|x| + 4 = 0$; 6) $x^2 + 18|x| + 80 = 0$;
7) $x|x| - 9x + 18 = 0$; 8) $x|x| - 15x - 54 = 0$;
9) $x^2 - \frac{12x}{|x|} + 15 = 0$; 10) $x|x| + \frac{x}{|x|} = 0$.

41. Берілген теңдеулер түбірлерінің қосындысының мәнін табыңдар:

1) $x^2 + 2|x| - 48 = 0$; 2) $x^2 - 2|x| + 5x - 8 = 0$;
3) $x^2 - 2|x - 2| - 6 = 0$; 4) $-2x^2 - 2|x + 2| + 4 = 0$.

42. Теңдеудің бір түбірі нөлге тең болатындай a параметрінің мәндерін табыңдар:

1) $2x^2 - 5x + 2a - 8 = 0$; 2) $x^2 - 4x + a^2 - 25 = 0$;
3) $3x^2 - (a - 2)x + 2a^2 - 8 = 0$; 4) $3x^2 - (a + 1)x + 4a^2 - 4 = 0$.

***43.** a параметрінің қандай мәндерінде теңдеудің түбірлері модульдері бойынша тең, ал таңбалары бойынша әртүрлі болады:

1) $x^2 - (a - 6)x - 16 = 0$;
2) $3x^2 - (3a + 12)x - 24 = 0$;
3) $4x^2 - (2a^2 - 8)x - 144 = 0$;
4) $0{,}5x^2 - (a^2 - 25)x - 5 - a = 0$?

***44.** a параметрінің қандай мәндерінде берілген теңдеудің нақты түбірлері болады:

1) $x^2 - 2(a - 2)x + a = 0$; 2) $x^2 + 2(a - 4)x + 4 - a = 0$;
3) $x^2 - 2(a + 3)x + 4a - 1 = 0$; 4) $x^2 + 4(a - 5)x + 4a^2 - 4 = 0$?

45. Төмендегі теңдеулерді жаңа айнымалы енгізу тәсілі арқылы шығарыңдар:

1) $(x - 1)^2(x^2 - 2x) = 30$;
2) $(x + 2)^2(x^2 + 4x) = 21$;
3) $(x^2 - 4x + 3)(x^2 - 4x - 1) = 5$;
4) $(x^2 + 3x + 3)(x^2 + 3x + 1) = -1$;
5) $x^4 + 5x^2 - 6 = 0$;
6) $x^4 - x^2 - 56 = 0$;
7) $(x + 1)^4 - (x^2 + 2x + 1) = 12$;
8) $(x - 2)^4 + (x^2 - 4x) = 16$;
9) $(x^2 - 2x + 3)(x^2 - 2x - 1) = 12$;
10) $(x^2 - 3x + 3)(x^2 - 3x + 1) = -1$;
11) $x^4 + 2x^3 - 11x^2 + 4x + 4 = 0$;
12) $x^4 - 2x^3 - 23x^2 + 8x + 16 = 0$.

***46.** Берілген теңдеулерді шешіңдер:

1) $x^2 - 4\left(\sqrt{x}\right)^2 - 12 = 0$; 2) $x^2 - 2\left(\sqrt{x - 2}\right)^2 - 7 = 0$;
3) $x^2 - \sqrt{x^2} - 20 = 0$; 4) $x^2 - 7\sqrt{x^2} - 8 = 0$;
5) $(x^2 - 25)\sqrt{4 - x} = 0$; 6) $(x^2 - 49)\sqrt{8 - 2x} = 0$;
7) $(81 - x^2)\sqrt{9 - 2x} = 0$; 8) $(144 - x^2)\sqrt{5x - 15} = 0$.

Функция және оның графигі

47. Төменде берілген $y = f(x)$ функциясының графигін салыңдар. Функция графигінің Ox осімен және Oy осімен қиылысу нүктелерінің координаталарын табыңдар:

1) $f(x) = x - 1,5$; 2) $f(x) = 2x + 0,5$;

3) $f(x) = |x|$; 4) $f(x) = |x| - 1$;

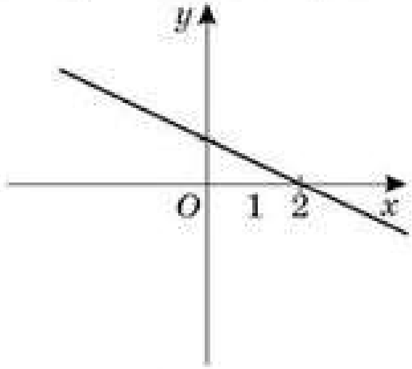
5) $f(x) = x^2 - 2$; 6) $f(x) = x^2 + 1,5$;

7) $f(x) = -x^2 + 4$; 8) $f(x) = -x^2 + 2,5$;

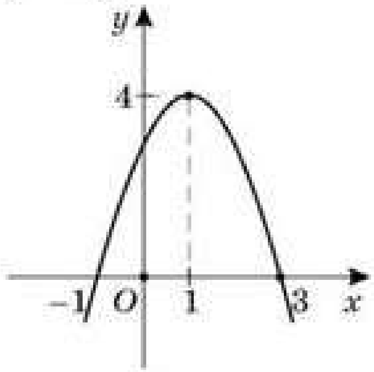
9) $f(x) = x^2 - 2$; 10) $f(x) = 2x + x^2$;

11) $f(x) = -1\frac{1}{3}x + 3x^2$; 12) $f(x) = 1,25x + 5x^2$.

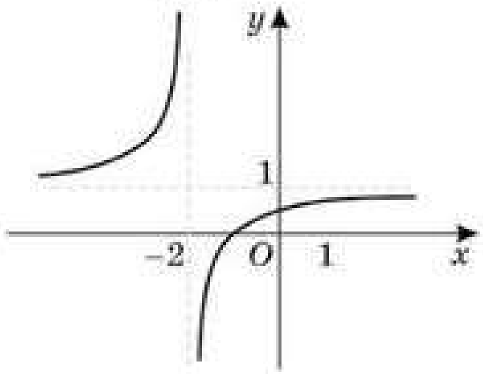
48. Төменде берілген $y = f(x)$ функциясының графигін қолданып, айнымалының қандай мәндерінде функция: а) оң мәндер; ә) теріс мәндер; б) мүмкін болса, ең үлкен немесе ең кіші мәнді қабылдайтынын көрсетіңдер (1—4-суреттер):



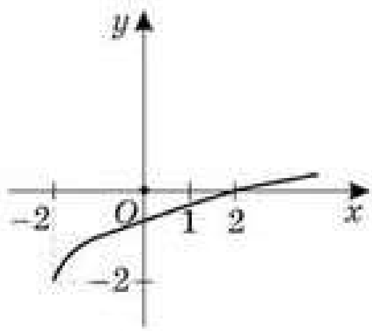
1-сурет



2-сурет



3-сурет



4-сурет

49. Төменде берілген $y = f(x)$ функциясының графигін салыңдар. Графикті қолданып, айнымалының қандай мәндерінде функция: а) оң мәндер; ә) теріс мәндер; б) ең үлкен немесе ең кіші мәнді қабылдайтынын табыңдар:

1) $f(x) = x^2 + 2$; 2) $f(x) = 2x^2 - 2,5$;

3) $f(x) = -4x^2 + 4$; 4) $f(x) = -1{,}5\,x^2 - 3$;
5) $f(x) = 2x - 3x^2$; 6) $f(x) = x - 4x^2$;
7) $f(x) = 4x^2 - 8x$; 8) $f(x) = x^2 - 6x$;
9) $f(x) = 6x^2 - 2x - 3$; 10) $f(x) = 3 - 4x + 2x^2$;
11) $f(x) = x^2 - 3x + 2$; 12) $f(x) = 2 - 2x - x^2$.

50. Төменде берілген функциялардың графигін салыңдар :

1) $y = \dfrac{3x-2}{x}$; 2) $y = \dfrac{2x+3}{2x}$; 3) $y = \sqrt{x-2}$;
4) $y = 1 - \sqrt{(x-2)^2}$; 5) $y = \dfrac{3}{|x|}$; 6) $y = \dfrac{1}{|x-3|}$;
7) $y = -x|x| + 2x^2$; 8) $y = \dfrac{|x|}{x^2} + 2$.

51. 1) $y = x^2$ функциясының графигін оңға қарай 2 бірлікке және жоғары қарай 3 бірлікке параллель көшіру арқылы алынған функцияның теңдеуін жазыңдар;
2) $y = 2x^2$ функциясының графигін оңға қарай 3 бірлікке және төмен қарай 2 бірлікке параллель көшіру арқылы алынған функцияның теңдеуін жазыңдар;
3) $y = x^2$ функциясының графигінің төбесін $(-1;\ 2)$ нүктесіне көшіргенде шығатын функцияның теңдеуін жазыңдар;
4) $y = 2x^2$ функциясының графигінің төбесін $(3;\ -2)$ нүктесіне көшіргенде шығатын функцияның теңдеуін жазыңдар.

52. Тәжірибе арқылы қандай да бір өзеннің v(м/с) ағыс жылдамдығының оның h(м) тереңдігіне тәуелділігі $v(t) = -h^2 + 2h + 3$ формуласымен анықталған. "Жанды геометрия" бағдарламасын қолданып, функцияның графигін салыңдар және график бойынша өзеннің тереңдігін (яғни $v = 0$ болғандағы тереңдігін) және ағысы ең қатты болатын тереңдігін табыңдар.

Теңсіздіктер және олардың жүйелері

53. Теңсіздікті шешіңдер:

1) $(x-8)(x+3)$ l 0; 2) $(7+x)(2-x)$ m 0;
3) $x(9-x) < 0$; 4) $x(x-6) > 0$;
5) $\dfrac{x+4}{5-x} > 0$; 6) $\dfrac{6-x}{6+x}$ m 0;
7) $\dfrac{x+4{,}5}{x(4{,}5-x)}$ l 0; 8) $\dfrac{x(x+1)}{2-x} > 0$;

9) $(x-3)(x+3)$ l x^2+5x-4; 10) x^2+5x-4 m 2;

11) $x^2+3x-4>6x$; 12) $9x^2-6x+1$ m 0.

54. Берілген теңсіздікті тура теңсіздікке айналдыратын ең кіші бүтін санды табыңдар:

1) $(x+1)^2(x-4)>0$; 2) $(x+2)(x-3)^2$ l 0;

3) $x^2-5x<-x+5$; 4) $-2x^2-x>2x-5$.

55. Берілген теңсіздікті тура теңсіздікке айналдыратын ең үлкен бүтін санды табыңдар:

1) $(x-2)^2(x-7)$ m 0; 2) $(x+4)(x-5)^2<0$;

3) $(x^2+14x+13)(x-10)$ m 0; 4) $(-7x^2-6x+1)(x-5)$ l 0.

56. x-тің қандай мәндерінде өрнектің мағынасы болады:

1) $x+\sqrt{x^2-3x-10}$; 2) $2x-\sqrt{x^2-4x-12}$;

3) $\sqrt{3x^2-5x-8}+\dfrac{1}{x-2}$; 4) $\sqrt{5x^2+4x-1}+\dfrac{1}{x-8}$;

5) $\sqrt{x^2-4x-5}+\dfrac{1}{x^2-1}$; 6) $\sqrt{-x^2+4x+32}+\dfrac{1}{x^2-9}$;

7) $\sqrt{2x^2-6x-9}+\sqrt{x+2}$; 8) $\sqrt{-2x^2-4x+10}-\sqrt{3-x}$?

57. Берілген теңсіздіктер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases}\dfrac{x+7}{x-1}>0,\\ \dfrac{x-9{,}3}{x+3}<0;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\dfrac{x+4}{x-25}\leqslant 0,\\ \dfrac{22-x}{4+x}<0;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}x^2-25\leqslant 0,\\ x^2+2x-8>0;\end{cases}$

4) $\begin{cases}x^2-x-2\geqslant 0,\\ x^2-3x-18<0;\end{cases}$ 5) $\begin{cases}x^2-4\geqslant 0,\\ x^2-2x-15<0;\end{cases}$ 6) $\begin{cases}x^2+x-2\geqslant 0,\\ x^2+3x-10<0.\end{cases}$

Мәтінді есептерді шығару

58. 1) A пунктінен B пунктіне алдымен автобус, сосын 0,5 сағ-тан кейін жеңіл мәшине шықты. Жеңіл мәшине 1,1 сағ-тан кейін автобусты басып озды және олардың аралығы 2 км болды. Автобустың жылдамдығы жеңіл мәшиненің жылдамдығынан 20 км/сағ-қа кем болса, автобустың жылдамдығын табыңдар.
2) A пунктінен B пунктіне жүк мәшинесі шықты. Жүк мәшинесінің соңынан 1,2 сағ-тан кейін шыққан автобус 0,8 сағ-тан соң жүк мәшинесінен 24 км-ге қалып қойған. Автобустың жылдам-

дығы жүк мәшинесінің жылдамдығынан 30 км/сағ-қа артық болса, автобустың жылдамдығын табыңдар.

3) Автокөлік 360 км жүріп өткен. Жолдың бірінші жартысын 90 км/сағ, екінші жартысын 60 км/сағ жылдамдықпен жүріп өткен. Автокөліктің орташа жылдамдығын табыңдар.

59. 1) Жұмысты екі жұмысшы бірігіп 24 сағ-та орындайды. Егер бірінші жұмысшы бір өзі жұмыстың жартысын орындаса, одан кейін оны екінші жұмысшы алмастырса, онда барлық жұмыс 49 сағ-та орындалады. Жұмысты әр жұмысшы жеке қанша сағатта орындайды?

2) Екі бригада бірігіп жұмысты 12 күнде орындайды. Егер алдымен бірінші бригада жұмыстың жартысын орындаса, одан кейін оны екінші бригада алмастырса, онда барлық жұмыс 25 күнде орындалады. Жұмысты әр бригада жеке қанша күнде орындайды?

60. 1) Моторлы қайық өзен ағысы бойымен 45 км және ағысқа қарсы 22 км жол жүріп, барлық жолға 5 сағ уақыт жіберді. Егер өзен ағысының жылдамдығы 2 км/сағ болса, онда қайықтың тынық судағы жылдамдығын табыңдар.

2) Моторлы қайық өзен ағысына қарсы 10 км және ағыс бойымен 7 км жол жүреді. Өзен ағысы бойымен жүзген уақыты өзен ағысына қарсы жүзген уақытқа қарағанда 30 мин-қа кем. Қайықтың меншікті жылдамдығы 12 км/сағ. Өзен ағысының жылдамдығын табыңдар.

61. 1) Бақшаға тіктөртбұрыш пішінді жер телімі бөлінген. Егер осы жер телімін ауданы дәл сондай ауданға тең болатын шаршы пішінді жер телімімен алмастырса, онда бақшаны қоршауға аз материал жұмсалады. Сондықтан жер телімінің ұзындығын 40 м-ге қысқартып, енін 30 м-ге ұзарту қажет. Алғашқы жер телімінің ұзындығын және енін табыңдар.

2) Мектеп алаңына тіктөртбұрыш пішінді жер телімі бөлінген. Егер бөлінген телімді ауданы алғашқы ауданға тең болатын шаршы пішінді жер телімімен алмастырса, онда мектеп алаңын қоршауға аз материал кетеді. Сондықтан алғашқы жер телімінің ұзындығын 12 м-ге қысқартып, енін 10 м-ге ұзарту қажет. Шаршы пішінді жер телімінің қабырғасын табыңдар.

3) Жер телімінің ұзындығы енінен 10 м-ге артық. Телімнің ауданын 400 $м^2$-ге арттыру қажет болды. Ол үшін жер телімінің ұзындығы 10 м-ге, ені 2 м-ге арттырылды. Жаңа жер телімінің ауданын табыңдар.

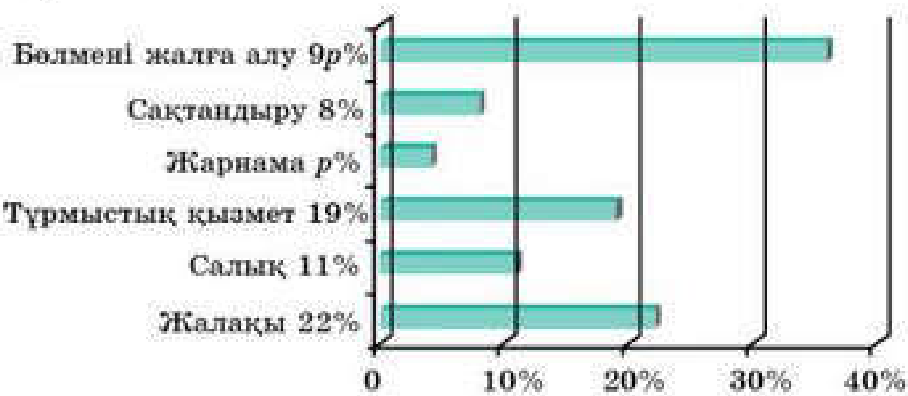
4) Құрылыс жүргізетін алаңға ұзындығы енінен 25 м-ге артық тіктөртбұрыш пішінді жер телімі бөлінді. Құрылыстың жоспары бекітілген кезде жер телімінің ұзындығы 5 м-ге, ал ені 4 м-ге ұзартылып, нәтижесінде оның ауданы 300 $м^2$-ге ұлғайды. Жоспар бекітілгеннен кейінгі құрылыс алаңының ауданын табыңдар.

62. 1) Салымшы депозитке 100 000 тг салған. "А" банкінде бір жылдық пайыз 12%-ға өседі, "В" банкінде ай сайын депозитке 1% қосылады. Қай банктің өсімі үлкен және қаншаға артық?
2) 400 000 тұрғыны бар қала халқының 60%-ы футболды қызықтайды. Футболдан болған әлем чемпионатын жанкүйерлердің 75%-ы теледидардан қараған.
а) Қала тұрғындарының қаншасы жарысты теледидардан қараған?
ә) Қала тұрғындарының қанша пайызы жарысты қарамаған?
3) Жеңілдіктер кезінде заттың бағасы 50 теңгеге арзандаған. Заттың алғашқы бағасы 300 тг. Заттың алғашқы бағасын алу үшін заттың жаңа бағасын қанша пайызға көтеру керек?

63. 1) Екітаңбалы санның цифрларының қосындысының мәні 15-ке тең. Егер осы санның цифрларының орнын алмастырса, онда берілген саннан 27-ге кем сан шығады. Осы сандарды табыңдар.
2) Екітаңбалы санның цифрларының қосындысының мәні 12-ге тең. Егер осы санды керісінше жазса, онда берілген санның $\frac{4}{7}$-ін құрайтын сан шығады. Осы сандарды табыңдар.

БИЗНЕСТЕГІ МАТЕМАТИКА

64. Кәсіпорынның бір айдағы шығыны диаграмма түрінде берілген (5-сурет). Жалпы шығын 2 500 000 теңгені құраған. Кәсіпорынның бөлмені жалға алуы мен жарнамаға жіберген шығынын табыңдар.



5-сурет

МЕНІҢ ӨМІРІМДЕГІ МАТЕМАТИКА

65. Сынып оқушыларының: а) бойының ұзындығын (см); ә) массасын (кг) өлшеңдер. Өлшеу нәтижелерін жазыңдар. Осы нәтижелердің:
1) арифметикалық ортасын;
2) ауытқуын;
3) модасын табыңдар.

66. 1-кестеде Әлияның 8-сыныптағы жылдық бағалары берілген.

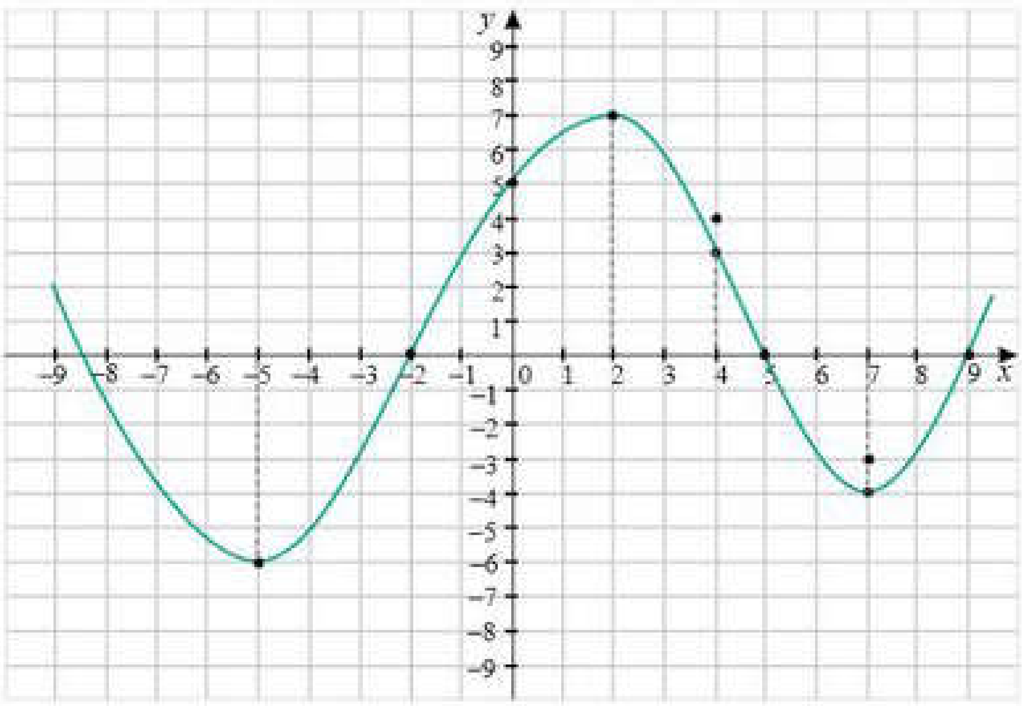
1-кесте

Баға	3	4	5
Абсолют жиілік	5	6	4
Салыстырмалы жиілік			

Кестені толтырыңдар.
1) Арифметикалық ортаны;
2) дисперсияны табыңдар.

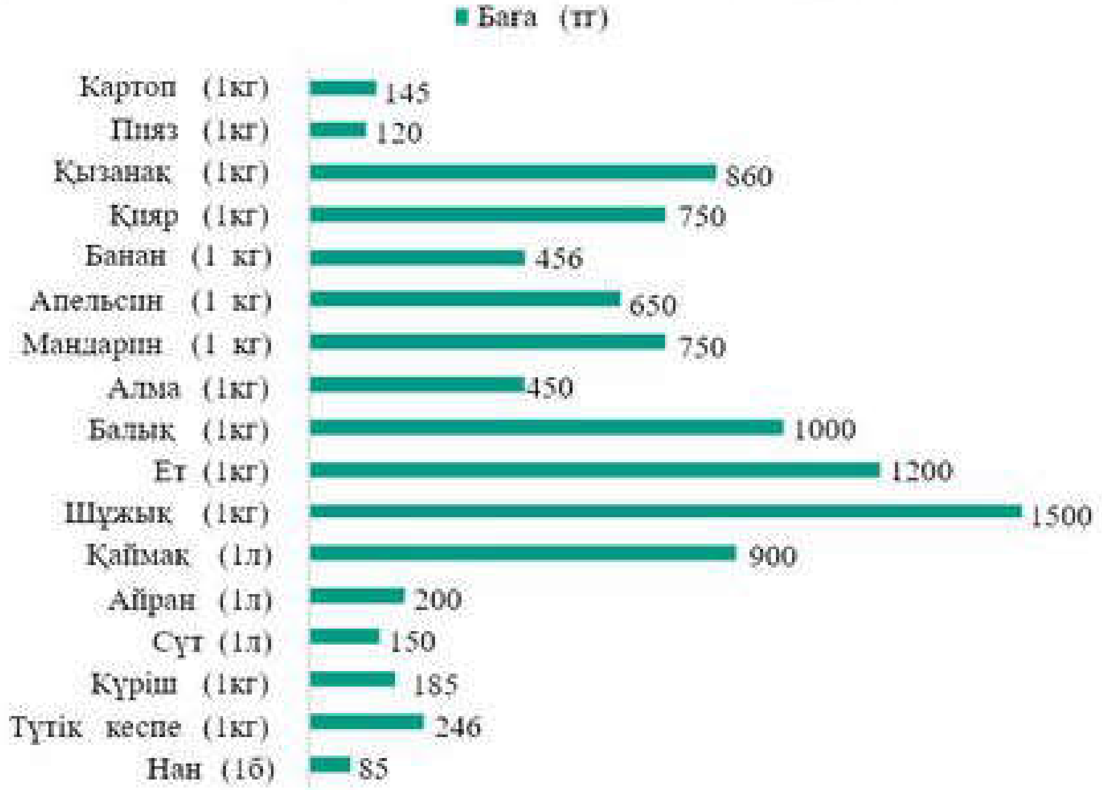
67. 1) $y = x^2 - 4x + a$ функциясының ең кіші мәні 2-ге тең. a параметрін табыңдар және функцияның графигін салыңдар;
2) $y = -x^2 + 6x + a$ функциясының ең үлкен мәні 4-ке тең. a параметрін табыңдар және функцияның графигін салыңдар.

68. График бойынша функцияның өсу және кему аралықтарын табыңдар (6-сурет).



6-сурет

69. 2018 жылдың қаңтар айындағы Алматы қаласындағы тағамдардың бағасы диаграммада көрсетілген (7-сурет).



7-сурет

Барлығы 50 000 тг болса, онда 1 кг жеміс-жидек, 2 бөлке нан, 1 кг түтік кеспе, 1 кг күріш, 1 л сүт пен 1 кг шұжық алуға жіберілген ақша барлық ақшаның қанша пайызын құрайды?

I тарау. ЕКІ АЙНЫМАЛЫСЫ БАР ТЕҢДЕУЛЕР, ТЕҢСІЗДІКТЕР ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ ЖҮЙЕЛЕРІ

§1. ЕКІ АЙНЫМАЛЫСЫ БАР СЫЗЫҚТЫҚ ЕМЕС ТЕҢДЕУЛЕР

Түйінді ұғымдар

Сызықтық теңдеу, сызықтық емес теңдеу, көпмүшенің дәрежесі

Екі айнымалысы бар сызықтық және сызықтық емес теңдеулер ұғымдарымен танысасыңдар;

екі айнымалысы бар сызықтық және сызықтық емес теңдеулерді ажыратуды үйренесіңдер.

Құрамында x және y екі айнымалысы бар: 1) $x(x + y) = 3$; 2) $2x^2 - 5y = -2$; 3) $x(x - y^2) = x + 10$ түріндегі теңдеулерді қарастырайық.

$f(x; y) = q(x; y)$ *түрінде берілген теңдеулер* ***екі айнымалысы бар*** *(x пен y)* ***теңдеулер*** *деп аталады, мұндағы $f(x; y)$ және $q(x; y)$ — x пен y айнымалылары бар өрнектер.*

Кез келген екі айнымалысы бар теңдеуді $F(x; y) = 0$ түріне, яғни сол жағы стандарт көпмүше болатын түрге келтіруге болады. Мысалы, $2x(3x + y^2) = 4x - 1$ теңдеуін сол жағы стандарт түрдегі көпмүше болатын теңдеуге келтіруге болады. Сонда $2xy^2 + 6x^2 - 4x + 1 = 0$ теңдеуін аламыз.

$F(x; y) = 0$ түрінде берілген *екі айнымалысы бар теңдеудің дәрежесі* деп $F(x; y)$ көпмүшесінің дәрежесін айтады (мұндағы $F(x; y)$ — стандарт түрде берілген көпмүше).

МЫСАЛ

1. $2x(3x + y^2) = 4x - 1$ теңдеуі үшінші дәрежелі теңдеу, өйткені оны үшінші дәрежелі стандарт түрдегі көпмүше, яғни $2xy^2 + 6x^2 - 4x + 1 = 0$ түрінде (бірінші қосылғыштың айнымалыларының дәреже көрсеткіштерінің қосындысы 3-ке тең) жазуға болады.

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР

$ax + by = c$ (мұндағы a мен b — бір мезетте нөлге тең болмайтын нақты сандар; c — нақты сан; x, y — айнымалылар) түріндегі екі айнымалысы бар теңдеу — бірінші дәрежелі теңдеуі екі айнымалысы бар сызықтық теңдеу болып табылады.

Екі айнымалысы бар $-65xy + 35y = 70$ теңдеуі сызықтық теңдеу болмайды, өйткені $-65xy + 35y - 70$ көпмүшесі екінші дәрежелі көпмүше.

Мұнда бірінші қосылғыштың айнымалыларының дәреже көрсеткіштерінің қосындысы 2-ге тең.

ТҮСІНДІРІҢДЕР

Неліктен $3x - xy + 2 = 0$ және $6y^3 - 4xy + 5x = 18$ теңдеулері екі айнымалысы бар сызықтық теңдеулер болмайтынын түсіндіріңдер.

Жоғарыдағы теңдеулерді екі айнымалысы бар сызықтық емес теңдеулер деп атайды.

Екі айнымалысы бар $F(x; y) = 0$ сызықтық емес теңдеуін $F(x_0; y_0) = 0$ тура санды теңдігіне айналдыратын $(x_0; y_0)$ сандар жұбы ***екі айнымалысы бар сызықтық емес теңдеудің шешімі*** *деп аталады.*

МЫСАЛ

2. Екі айнымалысы бар $x(x - y) = 4$ сызықтық емес теңдеудегі x-тің орнына -1 санын, y-тің орнына 3 санын қойсақ, онда $-1 \cdot (-1 - 3) = 4$ тура теңдігі шығады.

Демек, x пен y айнымалыларының мәндері болатын $(-1; 3)$ сандар жұбы $x(x - y) = 4$ екі айнымалысы бар сызықтық емес теңдеуінің шешімі болып табылады.

ТҮСІНДІРІҢДЕР

1) Неліктен x және y айнымалыларының мәндері болатын $(4; 3)$ сандар жұбы $x(x - y) = 4$ екі айнымалысы бар сызықтық емес теңдеуінің шешімі болады, ал x және y айнымалыларының мәндері болатын $(0; -4)$ сандар жұбы бұл теңдеудің шешімі болмайды?

2) $(1; 0)$ сандар жұбы: а) $y + x^3 = 1$; ә) $xy + 1 = x$; б) $(y - x) \cdot y = 0$ екі айнымалысы бар сызықтық емес теңдеуінің шешімі бола ма?

Әдетте, екі айнымалысы бар теңдеулердің шексіз көп шешімі болады. Көп шешімі болмайтын екі айнымалысы бар сызықтық емес теңдеулер де кездеседі. Мысалы, $x^2 + (y^2 - 9)^2 = 0$, немесе $7x^2 + 8y^2 = 0$, немесе $x^4 + 12 + y^4 = 0$ теңдеулері. Бірінші теңдеудің $(0; -3)$ және $(0; 3)$ болатын тек қана екі шешімі, екінші теңдеудің $(0; 0)$ болатын тек қана бір шешімі бар, ал соңғы теңдеудің шешімі болмайды.

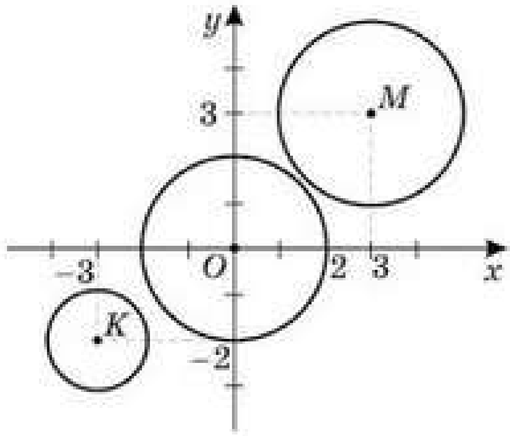
Егер екі айнымалысы бар теңдеуді шығару кезінде бүтін сандар жұбын табу қажет болса, онда теңдеуді бүтін сандар жиынында шешу керек деп айтады.

Шешімдер жиыны бірдей болатын екі теңдеу ***мәндес теңдеулер*** *деп аталады.*

Егер екі айнымалысы бар теңдеудің барлық шешімдерін координаталық жазықтықта нүктелер арқылы белгілесек, онда екі айнымалысы бар теңдеудің графигі шығады.

Екі айнымалысы бар теңдеудің графигі *деп координаталары осы теңдеудің шешімдері болатын координаталық жазықтықтың нүктелер жиынын айтады.*

1) $ax + by + c = 0$; 2) $y = ax^2 + bx + c$; 3) $y = x^3$, 4) $xy = k$ $(k \neq 0)$ теңдеуінің графигі қалай аталады?



8-сурет

Мысалы, 8-суретте:
$x^2 + y^2 = 4$,
$(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 4$,
$(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 1$ теңдеулерінің графиктері кескінделген.

?

1. Бірінші, екінші, үшінші, төртінші дәрежелі екі айнымалысы бар сызықтық теңдеулерге мысалдар келтіріңдер.
2. Екі айнымалысы бар сызықтық және сызықтық емес теңдеулерге мысалдар келтіріңдер.
3. Екі айнымалысы бар сызықтық және сызықтық емес теңдеулердің қандай ұқсастығы мен айырмашылығы бар?
4. Екі айнымалысы бар теңдеудің қанша шешімі болады?
5. Графигі парабола, гипербола, түзу, шеңбер болатын теңдеуге мысалдар келтіріңдер.

Жаттығулар

A

1.1. 1) $3x - 2y + 5 = 0$; 2) $2x - 5y = 7$;

3) $-x^2 + 2y = 0$; 4) $3y + 3x^2 - 6 = 0$;

5) $y - \frac{1}{2}x^2 - 1,5 = 0$; 6) $2y - |x| + 5 = 0$;

7) $y + 2|x| - 6 = 0$; 8) $|y| - x + 2 = 0$;

9) $y - |x + 1| - 2 = 0$ теңдеуімен берілген сызықтың графигін салыңдар.

1.2. $A(2; -3)$; $B(0,4; 2)$; $C(-1; 2)$; $M\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$ нүктелерінің қайсысы төменде беріл ген теңдеулер дің графигіне тиісті болады:

1) $3x - y - 9 = 0$; 2) $2x - 5y + 12 = 0$;

3) $-x^2 - 2y + 4,16 = 0$; 4) $2y + 3x^2 - 3 = 0$;

5) $y - \frac{1}{2}x^2 - 1,5 = 0$; 6) $2y - 3|x| - 1 = 0$?

1.3. Ординатасы 2-ге тең және берілген теңдеудің графигіне тиісті болатын нүктенің абсциссасын табыңдар:

1) $y - |x - 2| - 2 = 0$; 2) $y - 3|x + 1| - 6 = 0$;

3) $2y + |x + 1| - 3 = 0$; 4) $y - (x - 2)^2 - 2 = 0$;

5) $3y - (x + 1)^2 - 3 = 0$; 6) $yx - x^2 + 8 = 0$.

1.4. Төмендегі теңдеулердің дәрежесін атаңдар:

1) $xy - 3x = 0$; 2) $3x^2 - xy = 5$;

3) $(2x - y)^2 + x^2 - 5 = 0$; 4) $-1\frac{3}{7}x^2 + yx^2 - x = 7$;

5) $x^2y^2 + xy = 4$; 6) $(x^2 - 3y)^2 + x^3 = 9$.

B

1.5. Төмендегі теңдеулердің графигін салыңдар:

1) $3xy = 5$; 2) $y(x - 2) = 2$;

3) $y(x + 1) = -3$; 4) $y\,|x - 3| = 4$;

5) $y = |x^2 - 4|$; 6) $y = |3 - x^2|$.

1.6. Қандай бүтін сандар жұбының жиыны берілген теңдеудің шешімі болады:

1) $x^2 + y^2 = 4$; 2) $3x^2 + y^2 = 7$; 3) $x^2 + 3y^2 = 16$?

1.7. Координаталары берілген теңдеудің шешімдері болатын нүктелер жиыны координаталық жазықтықта қандай фигураны береді:

1) $y = 3x - 2x^2$; 2) $y = -0,3x^2 - 2x$;

3) $xy - 3 = 0$; 4) $(2x - 3)y = 2$?

C

1.8. a және b-ның қандай мәндерінде $y = ax^2 - bx$ параболасының төбесі $M(-1;\ 3)$ нүктесі болады?

1.9. Төменде берілген теңдеулердің графигін салыңдар:

1) $y = x^2 - 2|x| + 2$; 2) $y = x^2 - |x - 1| - 2$;
3) $|x| \cdot y = 2$; 4) $|x| \cdot y = -1$;
5) $|y| = |x|$; 6) $|y| + |x| = 2$;
7) $|y| + 2|x| = 3$; 8) $y \cdot x^2 = 2$; 9) $y = ||x - 2| - 2|$.

ҚАЙТАЛАУ

1.10. Теңдеулер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases} 2x - y = 3, \\ 3x + y = -4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -3x + 5y = 4, \\ 2x + y = 7; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x - 7y = 23, \\ 3x - y = 14; \end{cases}$

4) $\begin{cases} -5x - y = 26, \\ 3x - 2y = -15; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} -5x - 3y = 36, \\ 4x + y = -29; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 7x + 8y = 31, \\ 3x - 4y = -24. \end{cases}$

1.11. Ұялы байланыс серіктестігі өзінің тұрақты клиенттеріне жеңілдіктердің бірін таңдауды ұсынған. Атап айтқанда, республика бойынша басқа серіктестердің абоненттеріне телефон шалуға 20%, шетел операторларына 25%, мобильді интернетке 15% жеңілдіктер қарастырылған. Клиент телефонының бір айдағы шығыны республика бойынша 3000 тг, шетел операторларына 2500 тг және мобильді интернетке 2000 тг болды. Ол келесі айда да осындай шығын шығатынын түсінді.
1) Клиентке қай жеңілдікті таңдаған тиімді болады?
2) Жеңілдік қанша тұрады?
3) Егер бір ай бойы республика ішінде 3500 тг жұмсалса, онда республикадағы серіктестер абоненттеріне телефон шалудың 20%-дық жеңілдігін алған тиімді ме және қаншаға тиімді болады?

1.12. Теңсіздікті интервалдар әдісімен шешіңдер:

1) $(x - 2)^2(x + 1)(2x - 5) > 0$;

2) $(3x - 5)^2(x - 1)^3(2x + 5) < 0$;

3) $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 16}$ I 0; 4) $\dfrac{2x^2 - 7x + 6}{x^2 - 9}$ m 0.

Жаңа білімді меңгеруге дайындаламыз

1.13. (2; –5) сандар жұбы теңдеулер жүйесінің шешімі бола ма:

1) $\begin{cases} x + y = -3, \\ 2x - y = 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = 7, \\ 2x + 3y = -11; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x + 2y = 3, \\ 2x - y = 9; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x + y = -1, \\ 3x - 2y = 16? \end{cases}$

1.14. Теңдеумен берілген шеңбердің радиусын табыңдар:

1) $x^2 + y^2 = 9$; 2) $x^2 + y^2 = 49$;

3) $x^2 + y^2 = 72$; 4) $x^2 + 2x + y^2 = 15$.

1.15. Теңдеудің графигін салыңдар:

1) $x^2 + y = 2$; 2) $x^2 + y^2 - 4 = 0$;

3) $\frac{1}{x} - y = 0$; 4) $x^2 - 2x + y^2 = 8$.

Жаңа білімді меңгеруге арналған тірек ұғымдар

Теңдеу, сызықтық емес теңдеу, теңдеудің түбірлері, теңдеуді шешу, теңдеулер жүйесі, теңдеулер жүйесін шешу, теңдеудің графигі.

§ 2. ЕКІ АЙНЫМАЛЫСЫ БАР СЫЗЫҚТЫҚ ЕМЕС ТЕҢДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІ

Түйінді ұғымдар

Сызықтық емес теңдеулер жүйесі

?

Екі айнымалысы бар сызықтық емес теңдеулер жүйесі ұғымымен және шешу тәсілдерімен танысасыңдар;

екі айнымалысы бар сызықтық емес теңдеулер жүйесінің шешімін табуды үйренесіңдер.

Құрамында ең болмағанда бір теңдеуі сызықтық теңдеу болмайтын екі айнымалысы бар теңдеулер жүйесі ***екі айнымалысы бар сызықтық емес теңдеулер жүйесі*** *деп аталады.*

МЫСАЛ

1. $\begin{cases} 7x + y = 21, \\ x^2 + 2y - 8xy = -37; \end{cases}$ $\begin{cases} x^3 + y^3 = 78, \\ x - y = 9; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = -5 \end{cases}$ жүйелері

екі айнымалысы бар сызықтық емес теңдеулер жүйесі болады.

Жүйенің әрбір теңдеуін тура санды теңдікке айналдыратын $(x_0; y_0)$ сандар жұбы ***екі айнымалысы бар сызықтық емес теңдеулер жүйесінің шешімі*** *деп аталады.*

МЫСАЛ

2. (0; –1) сандар жұбы $\begin{cases} x + 5y^2 = 5, \\ x - 5y = -5 \end{cases}$ екі айнымалысы бар сызықтық емес теңдеулер жүйесінің шешімі болмайды, өйткені жүйеге x және y айнымалыларының орындарына сәйкесінше 0 және –1 сандарын қойғанда, бірінші теңдеу $0 + 5 = 5$ тура санды теңдігіне, ал екінші теңдеу $0 + 5 = -5$ тура емес санды теңдігіне айналады.

(0; 1) сандар жұбы $\begin{cases} x + 5y^2 = 5, \\ x - 5y = -5 \end{cases}$ екі айнымалысы бар сызықтық емес теңдеулер жүйесінің шешімі болады, өйткені жүйеге x және y айнымалыларының орындарына сәйкесінше 0 және 1 сандарын қойғанда, жүйенің әрбір теңдеуі тура санды теңдікке айналады:

$$\begin{cases} 0 + 5 = 5, \\ 0 - 5 = -5. \end{cases}$$

Екі айнымалысы бар сызықтық емес теңдеулер жүйесін шешу *деп оның шешімдер жиынын табуды айтады.*

Екі айнымалысы бар сызықтық емес теңдеулер жүйелері алгебралық қосу тәсілімен, алмастыру тәсілімен, графиктік тәсілмен, жаңа айнымалы енгізу тәсілімен және т. б. тәсілдермен шығарылады.

$\begin{cases} x + 7y = 12, \\ x - 7y = -2 \end{cases}$ екі айнымалысы бар сызықтық теңдеулер жүйесін алгебралық қосу тәсілімен шығарыңдар.

АЛГОРИТМ **Алгебралық қосу тәсілі**

Жүйені алгебралық қосу тәсілімен шығару үшін келесі алгоритм қолданылады (*алгоритм* — қандай да бір мақсатқа жету үшін орындалатын қарапайым іс-әрекеттер тізбегі):

1) егер екі теңдеудегі ұқсас қосылғыштардың коэффициенттері қарама-қарсы сандар болмаса, онда екі теңдеудегі ұқсас қосылғыштардың коэффициенттері қарама-қарсы сандар болатындай етіп жүйенің теңдеулерін көбейткіштерге көбейту;

2) жүйе теңдеулерінің сол және оң жақтарын мүшелеп қосу;

3) шыққан бір айнымалысы бар теңдеуді шешу;

4) екінші айнымалының сәйкес мәнін табу;

5) жауабын айнымалылардың мәндері болып табылатын сандар жұбының жиыны түрінде жазу.

МЫСАЛ

3. $\begin{cases} x^2 + 7y = 58, \\ -x^2 + 12y = 75 \end{cases}$ теңдеулер жүйесін шығарайық.

Шешуі. Жүйенің теңдеулерін мүшелеп қосамыз. Сонда бір айнымалысы бар $19y = 133$ теңдеуін аламыз. Бұдан $y = 7$. Бірінші теңдеудегі y-тің орнына 7-ні қоямыз. Сонда $x^2 + 49 = 58$ немесе $x^2 = 9$. Бұдан $x_1 = -3$ және $x_2 = 3$. Демек, жүйенің $(-3; 7)$ және $(3; 7)$ болатын екі шешімі бар.

Жауабы: $\{(-3; 7), (3; 7)\}$.

$\begin{cases} x + 4y = -6, \\ 6x + 4y - 4 = 0 \end{cases}$ екі айнымалысы бар сызықтық теңдеулер жүйесін алмастыру тәсілімен шығарыңдар.

АЛГОРИТМ **Алмастыру тәсілі**

Жүйені алмастыру тәсілімен шығару үшін келесі алгоритм қолданылады:

1) жүйенің кез келген теңдеуіндегі бір айнымалыны екінші айнымалы арқылы өрнектеу;

2) алынған өрнекті екінші теңдеудегі айнымалының орнына қою;

3) шыққан бір айнымалысы бар теңдеуді шешу;

4) екінші айнымалының сәйкес мәнін табу;

5) жауабын айнымалылардың мәндері болып табылатын сандар жұбының жиыны түрінде жазу.

МЫСАЛ

4. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20, \\ x + y = 6 \end{cases}$ теңдеулер жүйесін шығарайық.

Шешуі. Екінші теңдеуден x-ті өрнектейміз: $x = 6 - y$. Енді $6 - y$ өрнегін бірінші теңдеудегі x-тің орнына қойып, $\begin{cases} (6 - y)^2 + y^2 = 20, \\ x = 6 - y. \end{cases}$ жүйесін аламыз. Жүйенің бірінші теңдеуін, яғни $(6 - y)^2 + y^2 = 20$ теңдеуін шешеміз. Сонда $y_1 = 4$ және $y_2 = 2$ аламыз.

y-тің шыққан мәндерін $x = 6 - y$ теңдеуіне қоямыз. Бұдан $x_1 = 2$, $x_2 = 4$.

Демек, жүйенің $(2; 4)$ және $(4; 2)$ болатын екі шешімі бар.

Жауабы: $\{(2; 4), (4; 2)\}$.

$\begin{cases} y - 2x = 2, \\ y = 7x - 3 \end{cases}$ екі айнымалысы бар сызықтық теңдеулер жүйесін графиктік тәсілмен шығарыңдар.

АЛГОРИТМ **Графиктік тәсіл**

Жүйені графиктік тәсілмен шығару үшін келесі алгоритм қолданылады:

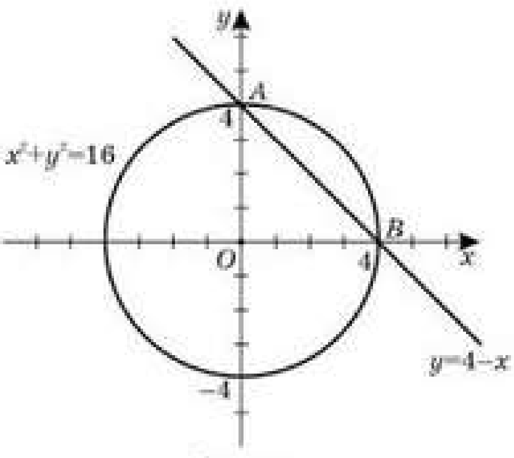
1) бір координаталар жүйесінде жүйенің әрбір теңдеуінің графигін салу;
2) теңдеулер графиктерінің қиылысу нүктелерінің координаталарын табу;
3) жауабын айнымалылардың мәндері болып табылатын сандар жұбының жиыны түрінде жазу.

МЫСАЛ

5. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ y = 4 - x \end{cases}$ теңдеулер жүйесін графиктік тәсілмен шығарайық.

Шешуі. Бір координаталық жазықтыққа $x^2 + y^2 = 16$ және $y = 4 - x$ теңдеулерінің графиктерін саламыз.

$x^2 + y^2 = 16$ теңдеуінің графигі центрі координаталар басында жататын және радиусы 4-ке тең шеңбер болады (9-сурет).



9-сурет

$y = 4 - x$ теңдеуінің графигі түзу болады (9-сурет).

Шеңбер мен түзу $A(0; 4)$ және $B(4; 0)$ болатын екі нүктеде қиылысады.

Сондықтан $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ y = 4 - x \end{cases}$ екі айнымалысы бар сызықтық емес теңдеулер жүйесінің (0; 4) және (4; 0) болатын екі шешімі бар.

Жауабы: {(0; 4); (4; 0)}.

АЛГОРИТМ **Жаңа айнымалы енгізу тәсілі**

Жүйені жаңа айнымалы енгізу тәсілімен шығару үшін келесі алгоритм қолданылады:

1) жүйе теңдеулеріндегі айнымалылардың қатынасын өрнектеу үшін жаңа айнымалыны (немесе жаңа айнымалыларды) енгізу;
2) жүйенің теңдеулерін енгізілген жаңа айнымалылар арқылы жазу;
3) теңдеулер жүйесін енгізілген жаңа айнымалы (жаңа айнымалылар) арқылы шешу;
4) енгізілген айнымалының (айнымалылардың) мәндері арқылы бастапқы айнымалылардың мәндерін табу;
5) жауабын бастапқы айнымалылардың мәндері болып табылатын сандар жұбының жиыны түрінде жазу.

МЫСАЛ

6. $\begin{cases} x + 3y + 5xy = 17, \\ 4xy - 7(x + 3y + 5) = -76 \end{cases}$ теңдеулер жүйесін шығарайық.

Шешуі. a мен b жаңа айнымалыларын енгізіп, $a = x + 3y$ және $b = xy$ деп белгілейік.

Сонда $\begin{cases} a + 5b = 17, \\ 4b - 7(a + 5) = -76 \end{cases}$ немесе $\begin{cases} a = 17 - 5b, \\ 4b - 7(17 - 5b + 5) = -76. \end{cases}$

Соңғы теңдеулер жүйесін шығарып, $a = 7$ жән е $b = 2$ екенін аламыз.

Бастапқы x және y айнымалыларына көшіп, $\begin{cases} x + 3y = 7, \\ xy = 2 \end{cases}$ теңдеулер жүйесіне келеміз. Соңғы теңдеулер жүйесін шығару үшін алмастыру тәсілін қолданайық. Сонда $\begin{cases} x = 7 - 3y, \\ (7-3y)y = 2. \end{cases}$ Енді жүйені ң екінші теңдеуін шешеміз: $3y^2 - 7y + 2 = 0$, бұдан $y_1 = 2$; $y_2 = \frac{1}{3}$.

Жүйенің $x = 7 - 3y$ теңдеуінен сәйкесінше $x_1 = 1$ және $x_2 = 6$ шығады.

Сонымен, $\begin{cases} x + 3y + 5xy = 17, \\ 4xy - 7(x+3y+5) = -76 \end{cases}$ екі айнымалысы бар сызықтық емес теңдеулер жүйесінің $(1; 2)$ және $(6; \frac{1}{3})$ болатын екі шешімі бар.

Жауабы : $\left\{(1; 2); \left(6; \frac{1}{3}\right)\right\}$.

?

1. Екі айнымалысы бар сызықтық емес теңдеулерге мысал келтіріңдер.
2. Сызықтық теңдеуден және екінші дәрежелі теңдеуден тұратын жүйелерді шешу үшін қандай тәсілдер қолданылады?
3. Екі айнымалысы бар сызықтық теңдеулерден тұратын жүйелерді және екі айнымалысы бар сызықтық емес теңдеулерден тұратын жүйелерді шешу үшін қандай тәсілдер қолданылады?

Жаттығулар

А

2.1. $(-2; 3)$ және $(1; 2)$ сандар жұбының қайсысы берілген теңдеулер жүйесінің шешімі болады:

1) $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 9, \\ 3x - 5y = -7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^2 - y^2 + y = 2, \\ -x^2 + 2y^2 = 14; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} -3x^2 + 2y^2 = 5, \\ x - 5y = -9? \end{cases}$

2.2. Теңдеулер жүйесін графиктік тәсілмен шығарыңдар (шешімінің жуық мәндерін көрсетіңдер):

1) $\begin{cases} 2x + y = 3, \\ 3x^2 - y = -1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^2 + y = 2, \\ -x + 2y = 8; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} -x^2 + y = -3, \\ 4x - 2y = -5. \end{cases}$

2.3. Жүйе шешімдерінің санын графиктік тәсілмен табыңдар:

1) $\begin{cases} 0,5x - y = 2, \\ x^2 - 2y = -1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^2 + 2y = 5, \\ -x + 3y = 6; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x^2 + 3y = -3, \\ 4x^2 - 2y = -5. \end{cases}$

B

2.4. Теңдеулер жүйесінің шешімі болмайтынын дәлелдеңдер:

1) $\begin{cases} |x| - y = -2, \\ x - 2y = -1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^2 - y + 1 = 0, \\ -x^2 - 2y = 4; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x^2 + y = -3, \\ 4|x| - 2y = -5. \end{cases}$

2.5. Теңдеулер жүйесін графиктік тәсілмен шешіңдер:

1) $\begin{cases} xy = 2, \\ x^2 - 2y = -3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^2 + 2y = 10, \\ -x + 3y = 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + 3y = 6, \\ -x^2 - 2y = -7; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y^2 + x^2 = 4, \\ y + x = 0. \end{cases}$

2.6. $x - y = 4$ және $y = 5 - 5x + x^2$ теңдеулерінің графиктері бір ғана нүктеде қиылысатынын дәлелдеңдер. Осы нүктенің координаталарын табыңдар.

C

2.7. 1) $\begin{cases} y - x^2 = 1, \\ y + x = p; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y - x^2 = -2, \\ y + |x| = p; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y^2 + x^2 = 4, \\ y + x = p \end{cases}$ теңдеулер жүйесінің: а) екі шешімі болатындай; ә) бір ғана шешімі болатындай; б) шешімі болмайтындай p параметрінің мәндерін табыңдар.

2.8. p параметрінің қандай мәндерінде $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ y - |x| = p \end{cases}$ теңдеулер жүйесінің: 1) үш шешімі болады; 2) бір шешімі болады; 3) шешімі болмайды?

ҚАЙТАЛАУ

2.9. Төмендегі теңдеулерді шешіңдер:

1) $x^4 - 8x^2 + 4 = 0$;
2) $3x^4 - 5x^2 + 2 = 0$;
3) $(4x^2 - 1)^2 - 3(1 - 8x^2) + 6 = 0$;
4) $(x^2 + 1)^2 - 3(1 - x^2) - 4 = 0$.

2.10. Теңдеулер жүйесін алмастыру тәсілімен шығарыңдар:

1) $\begin{cases} 3x - y = 2, \\ 16x - 5 = 4y; \end{cases}$
2) $\begin{cases} 11x - 37 = 9y, \\ x - 2y = 1; \end{cases}$
3) $\begin{cases} 2x - 85 = y, \\ 5x - 2y = 127. \end{cases}$

2.11. 1) Тасжол бойымен аралығы 540 км болатын A қаласынан B қаласына бір мезетте екі автокөлік шықты. Бірінші автокөлік екіншіге қарағанда 10 км/сағ артық жылдамдықпен жүріп, B қаласына 45 мин бұрын келді. Әрбір автокөліктің жылдамдығын табыңдар.

2) Пойызға үлгеру үшін велосипедші 48 км жолды жүріп өтуі керек. Бірақ ол 48 мин-қа кешігіп шықты. Бекетке уақытында келу үшін велосипедші бастапқы жылдамдығын 3 км/сағ-қа арттырды. Велосипедші қандай жылдамдықпен жүрген?

3) Пойыз семафорда 16 мин аялдағандықтан, жылдамдығын 10 км/сағ-қа арттырып, 80 км жүрген жолында кешіккен уақытын қуып жетті. Кесте бойынша пойыздың жылдамдығы қандай болу керек?

2.12. Теңсіздікті шешіңдер:

1) $\dfrac{x^2 - 2x}{x + 2} | \ 4$;
2) $\dfrac{3x^2 - 8x}{x - 2} < 4x$;
3) $\dfrac{2x^2 - 3x}{5 - x} | \ 3$;
4) $\dfrac{2x^2 + 7x}{7 - 2x} | \ x$.

Жаңа білімді меңгеруге дайындаламыз

2.13. (2; –1) сандар жұбы теңдеулер жүйесінің шешімі бола ма:

1) $\begin{cases} x^2 + y = 3, \\ 2x - y^2 = 3; \end{cases}$
2) $\begin{cases} xy = -2, \\ 2x^2 - y = 9; \end{cases}$
3) $\begin{cases} 3xy = 1, \\ 3x - y^2 = 5; \end{cases}$
4) $\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 9, \\ 3xy = 1? \end{cases}$

Жаңа білімді меңгеруге дайындаламыз

2.14. Бір координаталық жазықтыққа берілген функциялардың графиктерін салыңдар және қиылысу нүктелерінің координаталарын табыңдар:

1) $y = -x$ және $x^2 + y^2 = 8$;

2) $y = 2x$ және $x^2 + y^2 = 20$;

3) $y = \frac{1}{x}$ және $x^2 + y^2 = 2$.

Жаңа білімді меңгеруге арналған тірек ұғымдар

Теңдеу, сызықтық емес теңдеу, теңдеудің түбірлері, теңдеуді шешу, теңдеулер жүйесі, теңдеулер жүйесін шешу, теңдеудің графигі, біртекті теңдеу, мәндес теңдеулер.

§ 3. ЕКІ АЙНЫМАЛЫСЫ БАР СЫЗЫҚТЫҚ ЕМЕС ТЕҢДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІН ШЕШУ

Түйінді ұғымдар

Сызықтық емес теңдеулер жүйесі, біртекті теңдеулер

? Екі айнымалысы бар сызықтық емес теңдеулер жүйесін шешуді үйренесіңдер.

Екі айнымалысы бар сызықтық емес теңдеулер жүйесін шешудің тағы бір тәсілін, яғни мүшелеп көбейту және бөлу тәсілін қарастырайық.

МЫСАЛ

$\begin{cases} x^2y = 9, \\ xy^2 = 3 \end{cases}$ теңдеулер жүйесін мүшелеп көбейту және бөлу тәсілімен шығарайық.

ТҮСІНДІРІҢДЕР

Неліктен берілген теңдеулер жүйесі үшін $x \neq 0$ және $y \neq 0$?

Шешуі. $x \neq 0$ және $y \neq 0$ болғандықтан, жүйенің теңдеулерін мүшелеп көбейтеміз және бөлеміз. Сонда $\begin{cases} (xy)^3 = 3^3 \\ \frac{x}{y} = 3 \end{cases}$ теңдеулер жүйесін аламыз. Шыққан жүйе берілген теңдеулер жүйесіне мәндес болмауы мүмкін. Расында да, $\begin{cases} x^2y = 9, \\ xy^2 = 3 \end{cases}$ теңдеулер жүйесінің шешімі тек қана оң сандар, ал $\begin{cases} (xy)^3 = 3^3, \\ \dfrac{x}{y} = 3 \end{cases}$ теңдеулер жүйесінің шешімі оң сандармен қатар теріс сандар да болуы мүмкін. Демек, мұндай тәсілді қолданғанда бөгде түбірлердің пайда болуы мүмкін, сондықтан міндетті түрде тексеру жүргізу қажет. $\begin{cases} (xy)^3 = 3^3, \\ \dfrac{x}{y} = 3 \end{cases}$ теңдеулер жүйесін ықшамдап, оған мәндес $\begin{cases} xy = 3, \\ x = 3y \end{cases}$ теңдеулер жүйесін аламыз. Шыққан жүйені алмастыру тәсілімен шығарамыз. Сонда $y_1 = -1$, $y_2 = 1$, $x_1 = -3$, $x_2 = 3$.

$(-3; -1)$ сандар жұбы $\begin{cases} (xy)^3 = 3^3, \\ \dfrac{x}{y} = 3, \end{cases}$ теңдеулер жүйесінің шешімі болады, ал $\begin{cases} x^2y = 9, \\ xy^2 = 3 \end{cases}$ теңдеулер жүйесінің шешімі болмайды.

Демек, теңдеулерді мүшелеп көбейту және бөлу барысында бөгде түбірлер пайда болады. Мұндай тәсілмен екі айнымалысы бар теңдеулер жүйесін шығарған кезде міндетті түрде тексеру жүргізу қажет.

Жауабы : $\{(3; 1)\}$.

МЫСАЛ

$\begin{cases} x^2 - 4xy + 3y^2 = 0, \\ 2x^2 - 3xy + y^2 = 10 \end{cases}$ теңдеулер жүйесін шешейік.

Шешуі . Бұл теңдеулер жүйесі *екі айнымалысы бар біртекті* $x^2 - 4xy + 3y^2 = 0$ *теңдеуінен* тұрады, себебі теңдеудің сол жағында екі айнымалыдан тұратын екінші дәрежелі біртекті көпмүше, ал оң жағында 0 саны берілген.

Бірінші теңдеудегі $x = 0$ болса, онда $y = 0$ аламыз. Бірақ $(0; 0)$ сандар жұбы екінші теңдеудің шешімі болмайды, демек берілген теңдеулер жүйесінің де шешімі болмайды. Сондықтан берілген теңдеулер жүйесі үшін $x \neq 0$ және $y \neq 0$.

Бірінші теңдеудің екі жағын $y^2 \neq 0$ шамасына бөліп, берілген теңдеулер жүйесіне мәндес $\begin{cases} \left(\dfrac{x}{y}\right)^2 - 4\left(\dfrac{x}{y}\right) + 3 = 0, \\ 2x^2 - 3xy + y^2 = 10 \end{cases}$ теңдеулер жүйесін аламыз. Енді $z = \dfrac{x}{y}$ жаңа айнымалысын қолданып, жүйенің бірінші теңдеуін, яғни $z^2 - 4z + 3 = 0$ теңдеуін шешеміз. Оның шешімі: $z_1 = 1$, $z_2 = 3$.

Олай болса, $x = y$ немесе $x = 3y$.

Егер $x = y$ болса, онда екінші теңдеу $2x^2 - 3x^2 + x^2 = 10$ немесе $0 \cdot x^2 = 10$ түріне келеді. Соңғы теңдеудің шешімі болмайды.

Егер $x = 3y$ болса, онда екінші теңдеу $18y^2 - 9y^2 + y^2 = 10$ немесе $10y^2 = 10$ түріне келеді. Демек, $y^2 = 1$. Онда $y_1 = -1$, $y_2 = 1$ және сәйкесінше $x_1 = -3$, $x_2 = 3$.

Жауабы : $\{(-3; -1); (3; 1)\}$.

?

1. Егер екінші жүйе бірінші жүйенің теңдеулерінен көбейту және бөлу арқылы алынған болса, онда мұндай теңдеулер жүйесі мәндес бола ма?
2. Қандай теңдеу екі айнымалысы бар біртекті теңдеу болады?

Жаттығулар

A

3.1. 1) $y = x^2 - 6x + 5$ формуласымен берілген парабола мен $y = 3x - 3$ формуласымен берілген түзудің;

2) $x^2 + y^2 = 16$ формуласымен берілген шеңбер мен $y = x + 4$ формуласымен берілген түзудің;

3) $x^2 + y^2 = 25$ формуласымен берілген шеңбер мен $y = x^2 + 5$ формуласымен берілген параболаның қиылысу нүктелерінің координаталарын табыңдар.

3.2. Теңдеулер жүйесін алмастыру тәсілімен шешіңдер:

1) $\begin{cases} x - y = 6, \\ x + xy = -4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 9, \\ x + y^2 = 29; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x - y = 1, \\ x^2 - 2y = 26; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x - y = -8, \\ x^2 + y = 14; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x - 1 = y^2, \\ y - x + 3 = 0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 0{,}5x - 1 = y^2, \\ y + 3x - 7 = 0; \end{cases}$

7) $\begin{cases} xy = -7, \\ y - x - 8 = 0; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x + y - 5 = 0, \\ y \cdot x - 6 = 0. \end{cases}$

3.3. Теңдеулер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases} x+1=-y, \\ xy+3x-1=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^2-4=-y, \\ 3y-x=-14; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 4x+3=4y^2, \\ 3y-x-2=0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x+1=2y, \\ 5xy+y^2-16=0; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x^2+y^2=17, \\ y-x+3=0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2+y^2=100, \\ 4y-3x=0; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^2+y^2=8{,}5, \\ y-x+4=0; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 3x^2+2y^2=11, \\ 2y+x-3=0. \end{cases}$

3.4. Жүйенің шешімін табыңдар:

1) $\begin{cases} x^2+y^2=x-y, \\ 2y-3x+5=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^2-3y^2+6-y=0, \\ 2y-3x+2=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2-y^2-x-y=0, \\ 2x+3y-1=0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2-y^2=xy+19, \\ y-x+7=0. \end{cases}$

3.5. Теңдеулер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases} x^2+y^2+2xy=9, \\ x-y=1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+y^2-2xy=16, \\ x+y=-2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2+y^2+2xy=4, \\ x-y=4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} xy+x+y=11, \\ xy(x+y)=30; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2-5y^2=-1, \\ 3xy+7y^2=1; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2-y^2=3, \\ x^3-y^3=7(x-y). \end{cases}$

3.6. Теңдеулер жүйесін алгебралық қосу тәсілімен шешіңдер:

1) $\begin{cases} 2x^2+y^2=9, \\ y^2-x^2+3=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^2-y^2=1, \\ 2y^2-3x^2+1=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x^2+yx=16, \\ 3x^2+xy=x+18; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2-3y^2=x-6 \\ 3y^2-2x^2-4=0. \end{cases}$

3.7. Жүйенің шешімін табыңдар:

1) $\begin{cases} x^2+y^2=\frac{5}{16}, \\ xy=0{,}125; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2-y^2=0{,}75, \\ xy=-0{,}5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2+y^2=10, \\ xy=3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2+y^2=61, \\ x^2-y^2=11; \end{cases}$

5) $\begin{cases} xy + 2 = 2x, \\ 9 = y - xy; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} xy + y = 7 - x, \\ x + 4 = y + 2xy; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2xy = 10 + x, \\ 2 = y + xy; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} xy + 12 = 0, \\ y - 6x = \frac{2}{3}. \end{cases}$

3.8. Теңдеулер жүйесін алмастыру тәсілімен шешіңдер:

1) $\begin{cases} x + y = 4, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = 2, \\ \frac{10}{x} + \frac{1}{y} = 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y - 12 = 0, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 0,375; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x - y = 4, \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = -0,8; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x - y = 5, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6}; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 0,5x - y = 1, \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = -\frac{1}{3}. \end{cases}$

3.9. Теңдеулер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases} (x + 5) \cdot (y + 2) = 12, \\ 3x + 9 = 5y - 7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (x - 1) \cdot (y + 10) = 9, \\ x - y = 11; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2(x - y) = 5 - y, \\ (2x - y)^2 - 5x = 15; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x^2 - yx = -x, \\ 2(4x - 3y) + 3y - 9 = 0. \end{cases}$

3.10. Теңдеулер жүйесін графиктік тәсілмен және алмастыру тәсілімен шешіңдер:

1) $\begin{cases} xy = 1, \\ y = x^2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = 4, \\ x^2 + y^2 = 16; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + 2y = 5, \\ y = x^2 + 1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x - y = 2, \\ y = 0,5x^2 - 2. \end{cases}$

3.11. Теңдеулер жүйесінің бүтін шешімдерін табыңдар:

1) $\begin{cases} x^2 + xy = -3, \\ y - 3x = 7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - xy = -1, \\ y + 4x = 6; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x^2 + xy = 14, \\ y - 3x = -3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 37, \\ y + x = 4. \end{cases}$

3.12. Теңдеулер жүйесінің шешімдерін табыңдар:

1) $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 7, \\ x - y - 2 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 1, \\ x - y = 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - y^2 = -8, \\ xy = 3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + xy - y^2 = -1, \\ xy = 2. \end{cases}$

3.13. Теңдеулер жүйесінің шешімдерін табыңдар:

1) $\begin{cases} \frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{26}{5}, \\ xy = 6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{x+y}{x-y} + \frac{6(x-y)}{x+y} = 5, \\ xy = 2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{10}{3}, \\ x^2 + y^2 = 5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{x+y}{x-y} + \frac{5(x-y)}{x+y} = -6, \\ x^2 + y^2 = 13. \end{cases}$

3.14. Теңдеулер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases} x^2 + z^2 = 5, \\ x^4 - z^4 = 15; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^4 + x^2z^2 = 90, \\ x^2 + z^2 = 10; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - z^2 = 3, \\ x^4 - z^4 = 15; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} zx^2 + z^3 = 5, \\ x^3 + xz^2 = 10. \end{cases}$

B

3.15. Теңдеулер жүйесін алгебралық қосу тәсілімен шешіңдер:

1) $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0, \\ x^2 + y^2 = 20; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + xy - 6y^2 = 0, \\ x^2 - 5xy + 2y^2 + 4 = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 0, \\ x^2 - y^2 = -12; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y^2 - 3x^2 - 2xy = 0, \\ y^2 - xy - 4x^2 = 4. \end{cases}$

3.16. Теңдеулер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases} x^2 + 3xy = 54, \\ 4y^2 + xy = 115; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 17, \\ x^2 - 2xy = -3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - xy + 3x + 7y = y^2 - 3, \\ 2y^2 + xy = x^2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y^2 - 3xy = 2, \\ y^2 - 4xy + x^2 = 3; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x^2 - 3xy = 3 - y^2, \\ x^2 - 2y^2 + 2xy = 6; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 3x^2 + xy - 2x = 5 - y, \\ 2x^2 - 3x - xy = 5 + y; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^2 - 3y + x = 2 - y^2, \\ x^2 + y^2 - 5x = 2 + y; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x^2 + x + y = 18 - y^2, \\ x^2 + y^2 + xy = 12; \end{cases}$

9) $\begin{cases} 3x^2 - 2xy = 35 - 5y^2, \\ x^2 - 2y^2 = 1. \end{cases}$

3.17. Теңдеулер жүйесі мәндес бола ма:

1) $\begin{cases} 2xy - 3y^2 = 0, \\ 5x^2 + 2y = 3 \end{cases}$ және $\begin{cases} 2x - 3y = 0, \\ 5x^2 + 2y = 3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} (x + y)^2 = 9, \\ xy = 2 \end{cases}$ және $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ xy = 2? \end{cases}$

3.18. Теңдеулер жүйесін шешіңдер (мұндағы a — параметр):

1) $\begin{cases} x + y = 3a, \\ xy = 2a^2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 4a, \\ xy = 3a^2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - y = 3a, \\ xy = 4a^2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5a^2, \\ xy = 2a^2. \end{cases}$

3.19. Теңдеулер жүйесінің шешімін табыңдар:

1) $\begin{cases} x^3 + xy^2 = 10, \\ x^3 + x^2y = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ y^6 + x^2y^4 = 80; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ y^4 + x^2y^2 = 90; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y^2 = 3, \\ y^4 + x^4 + 6x = 29. \end{cases}$

3.20. Теңдеулер жүйесін алмастыру тәсілімен және қосу тәсілімен шешіңдер:

1) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 7, \\ xy^2 + x^2y = -2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 65, \\ xy^2 - x^2y = 20; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 65, \\ xy^2 - x^2y = 20; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 - xy = 2, \\ y^2 - xy = -1. \end{cases}$

Теңдеулер жүйесін шешіңдер **(3.21-3.22)** :

3.21. 1) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + 2xy - y = 0, \\ x^2 + y^2 + xy + y = 2 - 2x; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^3 + y^3 - x + 2xy - y = 2, \\ x^3 + y^3 - xy + 2y = 5 - 2x; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^3 + xy^2 - x + 2x^2y - y = 2, \\ y^3 + 2xy^2 + x^2y + y = 6 - x; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^3 + xy^2 - x^2y - y^3 = 5, \\ y^3 + xy^2 + x^2y + x^3 = 15. \end{cases}$

3.22. 1) $\begin{cases} x^2 - 5y^2 + 4xy = 0, \\ x^2 - 3xy + 4y = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^2 + y^2 - 3xy = 0, \\ x^2 + 9xy - y^2 = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5x^2 + 10y^2 - 15xy = 14, \\ 3x^2 - 9xy + 6y^2 = 7. \end{cases}$

3.23. Теңдеулер жүйесінің шешімін табыңдар:

1) $\begin{cases} |x| + |y| = 6, \\ x^2 - y^2 = 24; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} |x| + |y| = 1, \\ x^2 + y^2 = 0{,}5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} |x| + |y| = 3, \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$

3.24. Теңдеулер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases} x^2 - y^2 = \frac{13}{4}, \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = -2{,}5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 68, \\ \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{17}{4}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y = 2, \\ \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = 3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y = 12, \\ \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = 18. \end{cases}$

3.25. Теңдеулер жүйесінің шешімін табыңдар:

1) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5, \\ xy = 36; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1, \\ xy = 4; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{5}{2}, \\ x + y = 10. \end{cases}$

3.26. Жүйенің теңдеулерін мүшелеп көбейту және бөлу тәсілімен төмендегі теңдеулер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases} x^5y^7 = 32, \\ x^7y^5 = 128; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^8y^6 = 64, \\ x^6y^8 = 256; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2y^3 = 16, \\ x^3y^2 = 2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} (y + x) \cdot xy = 6, \\ (y - x) \cdot xy = -2; \end{cases}$

5) $\begin{cases} (x - y) \cdot (x + 2y) - 4 = 0, \\ (x + y) \cdot (x + 2y) - 12 = 0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} (y - 1) \cdot x = 2, \\ (y - 1) \cdot xy^2 = 8; \end{cases}$

7) $\begin{cases}(y+1)\cdot x=6,\\(y+1)\cdot xy^2=24;\end{cases}$ 8) $\begin{cases}(y-1)\cdot x=0,\\(y-1)\cdot xy^2=0;\end{cases}$

9) $\begin{cases}(y^2-1)\cdot x=9,\\(y^2-1)\cdot xy=18.\end{cases}$

Теңдеулер жүйесін шешіңдер (**3.27—3.31**):

3.27. 1) $\begin{cases}5y^2-x^2=1,\\7y^2+3xy=1;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}y^2-x^2=12,\\y^2-3xy+x^2=0;\end{cases}$

3) $\begin{cases}y^2-x^2=-3,\\2y^2-3xy+2x^2=4;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}4x^2+xy=5,\\x^2+3xy-4=0;\end{cases}$

5) $\begin{cases}x^2-2xy+3y=2x,\\y^2-3xy+6y=4x;\end{cases}$ 6) $\begin{cases}x^2=3+y^2,\\2x^2-3xy=4-2y.\end{cases}$

3.28. 1) $\begin{cases}x^3+y^3-65=0,\\xy\cdot(x+y)-20=0;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x^2+y^4=5,\\xy^2=2;\end{cases}$

3) $\begin{cases}x^3+y^3=7,\\xy\cdot(x+y)=-2;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x^3+y^3=35,\\x+y=5.\end{cases}$

3.29. 1) $\begin{cases}\dfrac{x^2+y^2}{x+y}=\dfrac{10}{3},\\\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=0{,}75;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{xy}=\dfrac{5}{6},\\x^2-y^2=5;\end{cases}$

3) $\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{xy}=\dfrac{5}{6},\\x^2+y^2=15;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}\dfrac{x-1}{y}+\dfrac{y}{x-1}=2,\\x^2+xy=6;\end{cases}$

5) $\begin{cases}\dfrac{x^2+y^2}{xy}=\dfrac{26}{5},\\x^2-y^2=24;\end{cases}$ 6) $\begin{cases}\dfrac{x}{y}-\left(\dfrac{y-x}{x}\right)^2=1,\\2y^2-x^2=1.\end{cases}$

3.30. 1) $\begin{cases}2x^2-y^2=2,\\|x+y|=1;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x^2+y^2=37,\\|x-y|=7;\end{cases}$

3) $\begin{cases}x^2+y^2=41,\\|x+y|=9;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}3x^3+2xy=9,\\|2x+y|=5.\end{cases}$

3.31. 1) $\begin{cases} x^3 - x = z^3 - z, \\ 2x^2 - 5xz + 2z^2 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^3 - 7x = z^3 - 7z, \\ x^2 - z^2 = 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^3 - x = z^3 - z, \\ 2x^2 - 5xz + 3z^2 = 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 - 2zx = 5z^2 - 2, \\ 3x^2 + 2xz + z^2 = 2. \end{cases}$

C

3.32. Теңдеулер жүйесін жаңа айнымалы енгізу тәсілімен шешіңдер:

1) $\begin{cases} (u+v)^2 - 5(u+v) + 4 = 0, \\ (u-v)^2 - (u-v) - 2 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (u+v)^2 - 4(u+v) - 45 = 0, \\ (u-v)^2 - 2(u-v) - 3 = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} u + uv + v = 5, \\ u^2 + uv + v^2 = 7; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} u - uv + v = 1, \\ u^2 + 2u + 2v + v^2 = 11. \end{cases}$

Теңдеулер жүйесін шешіңдер (**3.33—3.37**):

3.33. 1) $\begin{cases} (z-1)\cdot(y-1) = 1, \\ zy\cdot(z+y) = 16; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (z-2)\cdot(y-2) = 4, \\ zy + z^2 + y^2 = 3. \end{cases}$

3.34. 1) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} + xy = 5, \\ \dfrac{6(x-y)}{x+y} + xy = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{1}{xy} + \dfrac{1}{x+y} = 0{,}5, \\ xy^2 + x^2y = -2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{2}{z} + \dfrac{y}{3} = 3, \\ \dfrac{z}{2} + \dfrac{3}{y} = 1{,}5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} zy - \dfrac{y}{z} = 0{,}5, \\ zy - \dfrac{z}{y} = 2. \end{cases}$

3.35. 1) $\begin{cases} \dfrac{5}{x^2+xy} + \dfrac{4}{xy+y^2} = \dfrac{13}{6}, \\ \dfrac{8}{x^2+xy} - \dfrac{1}{xy+y^2} = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{2}{x^2+3xy} + \dfrac{3}{y^2-xy} = \dfrac{25}{14}, \\ \dfrac{3}{x^2+3xy} - \dfrac{2}{y^2-xy} = -\dfrac{4}{7}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{3}{2x-y} + \dfrac{2}{x+y} = \dfrac{4}{x}, \\ x^2 + 2y^2 = 72; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{y^2}{x^2-xy} + \dfrac{x^2}{y^2-xy} = 1, \\ x^3 - y^3 = 2. \end{cases}$

3.36. 1) $\begin{cases} x+y=3, \\ y+z=-1, \\ xz=-3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+y^2=5, \\ y-2z=3, \\ x+z=1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} z - x = 4, \\ y - z = -3, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 30; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} xy = 6, \\ yz = 2, \\ x^2 + z^2 = 10. \end{cases}$

***3.37.** 1) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 12, \\ xy + xz + yz = 12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3, \\ x + z + y = 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 108, \\ x + z + y = 18. \end{cases}$

***3.38.** 1) $\begin{cases} x + y = p, \\ x^2 + y^2 = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + y = p, \\ x^2 - y = -1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y = p, \\ 2x + y^2 = 1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x - y = p, \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

теңдеулер жүйесінің бір ғана шешімі болатындай p параметрінің мәндер жиынын табыңдар.

ҚАЙТАЛАУ

3.39. Теңсіздікті шешіңдер:

1) $0{,}4x(3x - 1) - x - 1{,}1 < 1{,}2x(x - 3)$;

2) $4 + 0{,}2x(x - 1) - x(0{,}2x + 0{,}5) < 0{,}6x$;

3) $15y^2 - 12y - 30 > 10y + 7$;

4) $(y + 0{,}6) \cdot (y + 1{,}6) \cdot (1{,}2 - y) > 0$.

3.40. Айнымалының қандай мәндерінде:

1) $-x^2 - 2x + 120$; 2) $2x^2 - 9x - 45$; 3) $\frac{9}{x} - \frac{x}{4}$; 4) $\frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 - 2x}$

өрнегі теріс емес мәндерді қабылдайды?

3.41. 1) Тіктөртбұрыштың ұзындығы енінен 5 см артық. Егер тіктөртбұрыштың ауданы 36 см^2 болса, онда оның ұзындығын табыңдар.

2) Тіктөртбұрыш пішінді жер телімінің ұзындығы енінен 7 м артық. Жер телімінің ауданы 60 см^2-ге артық болу үшін оның енін табыңдар.

АУЫЛ ШАРУАШЫЛЫҒЫНДАҒЫ МАТЕМАТИКА

3) Құс фермасын қоршау үшін ұзындығы 96 м шарбақ қою керек. Ауданы 54 а (1 а = 100 м^2) болатын тіктөртбұрыш пішінді қашаның қабырғаларының ұзындықтарын табыңдар.

3.42. $y = f(x)$ функциясының графигін салыңдар. Графикті қолданып, функцияның кему және өсу аралықтарын табыңдар:
1) $f(x) = x^2 - 6x$; 2) $f(x) = -x^2 + 4x$; 3) $f(x) = 2x^2 - 6x + 3$; 4) $f(x) = -x^2 - 6x + 2$.

Жаңа білімді меңгеруге дайындаламыз

3.43. 1) Ара қашықтығы 57 км екі елді мекеннен бір-біріне қарама-карсы бағытта меншікті жылдамдықтары бірдей екі моторлы қайық жолға шықты. Өзен ағысымен жүзген моторлы қайық 1 сағ, өзен ағысына қарсы жүзген моторлы қайық 2 сағ жүзген соң олар кездесті. Өзен ағысының жылдамдығы 3 км/сағ. Әр қайықтың меншікті жылдамдығын табыңдар.
2) A және B пункттерінің өзен бойымен арақашықтығы 45 км. Бір-біріне қарама-карсы бағытта меншікті жылдамдықтары бірдей екі моторлы қайық жолға шықты. Олар 1,5 сағ-тан кейін кездесті. Өзен ағысының жылдамдығы 3 км/сағ. Әрбір қайықтың меншікті жылдамдығын табыңдар.
3) Катердің өзен ағысы бойымен 2 сағ-та жүзген жолы өзен ағысына қарсы 2 сағ 15 мин-та жүзген жолына тең. Өзен ағысының жылдамдығы 3 км/сағ. Катердің меншікті жылдамдығын табыңдар.
4) Катердің өзен ағысы бойымен 7 сағ-та жүзген жолы өзен ағысына қарсы 8 сағ -та жүзген жолына тең. Катердің меншікті жылдамдығы 30 км/сағ. Өзен ағысының жылдамдығын табыңдар.

3.44. 1) Жәшіктегі печеньелер бірдей қораптарға салынған. Егер жәшіктен 7 қорап печенье алынса, онда жәшікте оған салуға болатын барлық қораптар санының $\frac{1}{4}$-і қалады. Егер жәшікке онда бар қораптар санының $\frac{3}{4}$-іне тең қорап салынса, онда бір қорап сыймай қалады. Жәшікте қанша қорап бар?
2) Шелекте бірнеше литр су бар. Егер судың жартысы алынса, онда шелекте оған сыятын судан 7 л кем су қалады. Егер 2 л суды қосса, онда шелектегі су оған сыятын судың $\frac{2}{3}$-сіне тең болады. Шелекке қанша литр су сыяды?

3.45. 1) Арақашықтығы 80 км болатын A пунктінен B пунктіне шыққан автобус жолдың ортасында 10 мин-қа аялдады. B пункіне уақытында жету үшін ол жылдамдығын 20 км/сағ-қа арттырды. Жолдың бірінші бөлігін автобус қандай жылдамдықпен жүрген?

2) Туристік лагерьге уақытында жету үшін шаңғышы 10 км жол жүруі керек. Жолдың ортасына жеткенде шаңғышы 15 мин аялдады. Бірақ шаңғышы жылдамдығын 10 км/сағ-қа арттырып, лагерьге уақытында жетті. Шаңғышының алғашқы жылдамдығын табыңдар.

Жаңа білімді меңгеруге арналған тірек ұғымдар

Мәтінді есептер, математикалық модель, мәтінді есепті шығару алгоритмі, теңдеулер жүйесі, теңдеулер жүйесін шешу.

§4. ЕКІ АЙНЫМАЛЫСЫ БАР СЫЗЫҚТЫҚ ЕМЕС ТЕҢДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІ КӨМЕГІМЕН МӘТІНДІ ЕСЕПТЕРДІ ШЫҒАРУ

Түйінді ұғымдар

Мәтінді есеп, теңдеулер жүйесі, математикалық модель

?

Мәтінді есептерді теңдеулер жүйелері арқылы шығаруды;

мәтінді есептерге шарты бойынша математикалық модель құруды үйренесіңдер.

Мәтінді есептерді екі айнымалысы бар сызықтық емес теңдеулер арқылы шығару барысында екі айнымалы енгізіледі.

Теңдеуді құрастыру үшін мәтінді есепте берілген процестерді сипаттайтын шарттарды нақты көрсете білу керек.

АЛГОРИТМ

Мәтінді есептерді теңдеулер жүйесінің көмегімен шығару үшін мынадай алгоритм қолданылады:

1) есептің шарты мен сұрағын ұқыпты зерделеу;
2) бастапқы немесе қандай да бір белгісіз шаманы әріппен белгілеу;
3) бастапқы немесе белгісіз шаманы берілген шамалар арқылы өрнектеу;
4) екі айнымалысы бар теңдеулерді және оларға сәйкес теңдеулер жүйесін құрастыру;
5) жүйені шығару;
6) есептің шартын қанағаттандыратын шешімді табу.

МЫСАЛ

1. Пароход A пунктінен B пунктіне дейін 5 сағ, B пунктінен A пунктіне дейін 7 сағ жүрді. A пунктінен B пунктіне дейін өзен ағысы бойымен сал қанша сағат жүреді?

Шешуі. A пунктінен B пунктіне дейінгі жолдың ұзындығын (арақашықтығын) 1-ге тең деп алайық. Сал өзен ағысы бойымен A

пунктінен B пунктіне дейін x сағ жүрсін. Онда салдың жылдамдығы мен өзен ағысының жылдамдығы $\frac{1}{x}$ км/сағ болады.

Пароходтың жылдамдығы y км/сағ болсын. Онда пароход A пунктінен B пунктіне дейін $(y + \frac{1}{x})$ км/сағ, B пунктінен A пунктіне дейін $(y - \frac{1}{x})$ км/сағ жылдамдықпен жүреді.

Пароход A пунктінен B пунктіне дейін $(y + \frac{1}{x}) \cdot 5$ км, B пунктінен A пунктіне дейін $(y - \frac{1}{x}) \cdot 7$ км жол жүреді. Жолдың ұзындығы 1-ге тең деп алынды. Сонда $\begin{cases} \left(y + \frac{1}{x}\right) \cdot 5 = 1, \\ \left(y - \frac{1}{x}\right) \cdot 7 = 1 \end{cases}$ теңдеулер жүйесі шығады.

Шыққан жүйені оған мәндес $\begin{cases} y + \frac{1}{x} = \frac{1}{5}, \\ y - \frac{1}{x} = \frac{1}{7} \end{cases}$ теңдеулер жүйесімен алмастырамыз. Соңғы жүйені алгебралық қосу тәсілімен немесе $\frac{1}{x}$-ді z әрпімен белгілеп, жаңа айнымалы енгізу тәсілімен шығаруға болады.

$\begin{cases} y + \frac{1}{x} = \frac{1}{5}, \\ y - \frac{1}{x} = \frac{1}{7} \end{cases}$ теңдеулер жүйесін шешіңдер.

Жауабы : 35 сағ.

МЫСАЛ

2. Екі бригада жұмысты бірге атқарып, тасжолды 18 күнде жөндейді. Алдымен, бірінші бригада жолдың $\frac{2}{3}$ бөлігін жеке жөндеп, қалған бөлікті екінші бригада жөндесе, онда тас жолды жөндеуге барлығы 40 күн қажет. Тасжолды әрбір бригада жеке қанша күнде жөндеуі мүмкін?

Шешуі . Барлық жұмысты бірінші бригада x күнде, екінші бригада y күнде орындасын. Демек, олардың өнімділігі сәйкесінше $\frac{1}{x}$ және $\frac{1}{y}$-ге тең болады. Есептің шарты бойынша олардың бірге атқарған жұмысының өнімділігі $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{18}$.

Тасжолды жөндеуге барлығы $\frac{2}{3} : \frac{1}{x} + \frac{1}{3} : \frac{1}{y} = 40$ (күн) кетті.

Сонымен, $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{18}, \\ \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y = 40 \end{cases}$ теңдеулер жүйесін аламыз.

Бұдан $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{18}, \\ 2x + y = 120 \end{cases}$ немесе $\begin{cases} 18y + 18x = xy, \\ y = 120 - 2x \end{cases}$ немесе

$$\begin{cases} 18(120-2x) + 18x = x(120-2x), \\ y = 120 - 2x. \end{cases}$$

$\begin{cases} 18(120-2x) + 18x = x(120-2x), \\ y = 120 - 2x \end{cases}$ теңдеулер жүйесін өздерің шешіңдер .

Жауабы : 45 күн және 30 күн немесе 24 күн және 72 күн.

Қорытпа мен қоспаға арналған есептерді шығару барысында концентрация, пайыздық құрамы және тағы да басқа ұғымдар қолданылып, барлық қоспалар (қорытпалар, ерітінділер) біртекті деп қарастырылады және сыйымдылық бірлігі ретінде алынған литр мен массаның бірлігі ретінде алынған литрдің арасында айырмашылық жоқ деп есептелінеді.

Массасы m болатын қоспадағы (қорытпадағы, ерітіндідегі) *массасы m_1* ***заттың концентрациясы*** *деп $\frac{m_1}{m}$ шамасын айтады.*

Массасы m болатын қоспадағы (қорытпадағы, ерітіндідегі) *массасы m_1* ***заттың пайыздық құрамы*** *деп $\frac{m_1}{m} \cdot 100\,\%$ шамасын айтады.*

Егер массасы m болатын қоспа (қорытпа, ерітінді) сәйкесінше массалары m_1, m_2 және m_3 болатын заттардан тұрса, онда $\frac{m_1}{m} + \frac{m_2}{m} + \frac{m_3}{m} = 1$.

МЫСАЛ

3. Алтын мен темірден тұратын екі қоспа бар. Алдымен 117 кг бірінші қоспа мен 468 кг екінші қоспаны қайта балқыту арқылы құрамында 10% алтын болатын қоспа алынды. Сосын 186 кг бірінші қоспа мен 279 кг екінші қоспаны қайта балқыту арқылы құрамында 91% темір болатын қоспа алынды. Алғашқы қоспалардағы алтынның пайыздық құрамын табыңдар.

Шешуі . Бірінші қоспада алтынның пайыздық құрамы $p\%$, екінші қоспада $r\%$ болсын.

Кесте құрамыз .

2-кесте

Қоспа		Масса (кг)	Қоспадағы алтынның пайыздық құрамы	Қоспадағы алтынның массасы (кг)
Бірінші қайта балқыту	бірінші қоспаның массасы	117	$p\%$	$\frac{117p}{100}$
	екінші қоспаның массасы	468	$r\%$	$\frac{468r}{100}$
	жаңа қоспаның массасы	117+468=585	10%	58,5
Екінші қайта балқыту	бірінші қоспаның массасы	186	$p\%$	$\frac{186p}{100}$
	екінші қоспаның массасы	279	$r\%$	$\frac{279r}{100}$
	екінші қоспаның массасы	186+279=465	9%	41,85

2-кестеден екі теңдеу аламыз:

$$\frac{117p}{100}+\frac{468r}{100}=58{,}5 \text{ және } \frac{186p}{100}+\frac{279r}{100}=41{,}85.$$

Екі теңдеуді де 100 санына көбейтіп келесі теңдеулер жүйесін жазамыз: $\begin{cases}117p+468r=5850,\\186p+279r=4185.\end{cases}$

Алынған теңдеулер жүйесін шешіп, $p=6\%$, $r=11\%$ аламыз.

Жауабы: 6% және 11%.

1. Екі айнымалысы бар сызықтық емес теңдеулер жүйесін құрастыру арқылы мәтінді есептердің қандай түрлерін шығаруға болады?
2. Мәтінді есептерді екі айнымалысы бар сызықтық емес теңдеулер жүйесі арқылы шығару үшін қандай шамаларды (бастапқы немесе белгісіз) әріптермен белгілеу керек?
3. Мәтінді есепті шығару барысында қарастырылған екі айнымалысы бар сызықтық емес теңдеулер жүйесінің шешімі мәтінді есептегі сұрақтың жауабы бола ма?

Жаттығулар

A

4.1. 1) Екі дөңгелектің радиустарының ұзындықтарының қосындысы 14 см, ал аудандарының айырымы 28π см^2. Дөңгелектердің радиустарының ұзындықтарын табыңдар.
2) Екі санның квадраттарының қосындысының мәні 202, ал осы сандардың квадраттарының айырымының мәні 40. Берілген сандарды табыңдар.
3) Қатынастары 3-ке, ал квадраттарының қосындысының мәнінің осы сандардың қосындысының мәніне қатынасы 5-ке тең екі санды табыңдар (Диофант есебі, III ғ).
4) Цифрларының қосындысының мәнінен 4 есе артық және цифрларының көбейтіндісінің мәнінен 16-ға артық екітаңбалы сан берілген. Осы санды табыңдар.
5) Цифрларының қосындысының мәнінен 4 есе артық және цифрларының көбейтіндісінің мәнінен 2 есе артық екітаңбалы сан берілген. Осы санды табыңдар.

4.2. 1) Арифметикалық ортасы 35-ке, ал геометриялық ортасы 28-ге тең екі натурал санды табыңдар.
2) Арифметикалық ортасы 61-ге, ал геометриялық ортасы 60-қа тең екі натурал санды табыңдар.

4.3. 1) Өзен бойымен жүзгенде екі айлақтың аралығы 60 км. Теплоход осы жолды өзен ағысы бойымен және өзен ағысына қарсы 5,5 сағ-та жүріп өтеді. Егер өзен ағысының жылдамдығы теплоходтың тынық судағы жылдамдығынан 20 км/сағ-қа кем болса, онда теплоходтың тынық судағы жылдамдығын және өзен ағысының жылдамдығын табыңдар.
2) Катер өзен ағысы бойымен 3 сағ және өзен ағысына қарсы 2 сағ жүзіп, барлығы 88 км жол жүрген. Ол өзен ағысы бойымен өзен ағысына қарсы жүзген жолынан 32 км артық жүзсе, онда

өзен ағысының жылдамдығын және катердің тынық судағы жылдамдығын табыңдар.

4.4. 1) Фермер мәшинемен 110 км қашықтықтағы қалаға бару үшін жолға шықты. 20 мин-тан кейін баласы қаладан фермаға жылдамдығы мәшиненің жылдамдығынан 5 км/сағ-қа артық көлікпен жолға шықты. Екеуі қаладан 50 км жерде кездессе, фермер қандай жылдамдықпен жүрген?
2) Аралығы 40 км болатын A және B ауылдарынан бір мезетте бір-біріне қарама-қарсы бағытта екі турист жолға шықты. 4 сағ-тан кейін олардың кездесуіне дейін 4 км жол қалды. Егер A ауылынан шыққан турист 1 сағ бұрын шықса, онда олар жолдың ортасында кездесетін еді. Туристердің әрқайсысының жылдамдығын табыңдар.

4.5. 1) Екі жұмысшы бірігіп, тапсырманы 3 сағ 45 мин-та орындады. Бірінші жұмысшы жұмысты жеке орындаса, тапсырманы екінші жұмысшыға қарағанда 4 сағ бұрын бітіреді. Тапсырманы жеке орындау үшін әрбір жұмысшыға қанша уақыт қажет?
2) Бірінші тракторшы жерді жыртқанда, жұмысты екіншіге қарағанда 24 сағ-қа ерте бітіреді. Егер осы жерді олар бірге жыртатын болса, онда жұмысты 35 сағ-та орындайды. Жерді жеке жырту үшін әрбір тракторшыға қанша уақыт қажет?

4.6. 1) Тасжолмен аралығы 180 км болатын A және B пункттерінен бір мезетте бір-біріне қарама-қарсы бағытта екі мотоциклші шығып, 3 сағ-тан кейін кездесті. Бірінші мотоциклші A пунктіне кездескеннен соң 2 сағ-тан кейін, ал екіншісі B пунктіне 4,5 сағ-тан кейін жетті. Әрбір мотоциклшінің жылдамдығын табыңдар.
2) Тасжол бойымен жүргенде екі қаланың аралығы 480 км. Автокөлік осы жолды автобусқа қарағанда 2 сағ-қа жылдам жүріп өтеді. Егер автокөлік жылдамдығын 5 км/сағ-қа азайтса, онда ол осы жолды автобусқа қарағанда 1,6 сағ-қа жылдам жүріп өтеді. Автобус пен автокөліктің жылдамдығын табыңдар.

4.7. 1) Тасжолмен аралығы 80 км болатын A және B пункттерінен бір мезетте бір-біріне қарама-қарсы бағытта екі автокөлік шықты. Екеуі жолда кездескеннен кейін бірінші автокөлік A пунктіне 20 мин-тан соң, ал екіншісі B пунктіне 45 мин-тан соң жетті. Әр автокөліктің жылдамдығын табыңдар.
2) Аралығы 270 км болатын екі теміржол бекетінен бір мезетте бір-біріне қарама-қарсы бағытта екі пойыз шығып, 3 сағ-тан кейін кездесті. Белгіленген бекетке бірінші пойыз 1 сағ 20 мин бұрын жетті. Пойыздардың жылдамдығын табыңдар.

4.8. 1) 108 түлек шығарма жазды. Оларға 480 парақ қағаз таратылды. Әрбір қыз бала ер балаға қарағанда бір парақ қағаз артық алды. Қыз балалар алған парақтың санымен ер балалар алған парақтың саны бірдей. Емтиханға қанша қыз бала және қанша ер бала қатысқан?

2) Велосипедші әр минутта мотоциклшіге қарағанда 500 м кем жол жүреді, сондықтан велосипедші 30 км жолға мотоциклшіге қарағанда 0,5 сағ артық уақыт жұмсайды. Велосипедші мен мотоциклшінің жылдамдықтарын табыңдар.

4.9. 1) A-дан B пунктіне дейінгі теміржол бойының ұзындығы 88 км-ге тең, ал теплоход өзен бойымен 108 км жүзеді. Пойыз A пунктінен теплоходқа қарағанда 1 сағ кеш шығып, B пунктіне одан 15 мин ерте жетеді. Егер пойыздың жылдамдығы теплоходтың жылдамдығынан 40 км/сағ-қа артық болса, онда пойыздың жылдамдығын табыңдар.

2) Мотоциклші жанармай құю үшін 12 мин-қа аялдады. Бұдан кейін қозғалыс жылдамдығын 15 км/сағ-қа арттыра отырып 60 км жол жүріп, жоғалған уақыттың есесін толтырды. Ол аялдамадан кейін қандай жылдамдықпен жүрген?

4.10. 1) 500 кг металл кенінің құрамында темір бар. Берілген кеннен құрамында 12,5 % темірі бар 200 кг қоспа алғаннан кейін қалған кендегі темірдің құрамы 20 %-ға артты. Кенде қалған темірдің мөлшері қандай?

2) Жалпы массасы 12 кг болатын мыс пен қалайының қорытпа кесегінің құрамында 45 % мыс бар. Құрамында 40 % мыс болатын жаңа қорытпа алу үшін берілген қорытпа кесегіне қанша таза қалайы қосу керек?

4.11. Бассейнді толтыру үшін бірінші құбырды 12 мин, ал екіншісін 7 мин қосу керек. Егер екі құбырды бірдей 6 мин қосса, онда бассейн көлемінің $\frac{2}{3}$-сі толады. Тек екінші құбыр арқылы бассейнді толтыру үшін қанша уақыт қажет?

2) Екі құбыр бірдей қосылса, бассейн 6 сағ-та толады. Бір ғана құбырды қосса, онда екінші құбырға қарағанда 5 сағ артық уақыт керек. Бассейнді әр құбырмен жеке толтыру үшін қанша уақыт қажет?

B

4.12. 1) Бір мезгілде A қаласынан бір бағытта жылдамдықтары 80 км/сағ және 100 км/сағ болатын екі мәшине жолға шықты.

1 сағ-тан кейін осы бағытта A қаласынан жеңіл көлік шығып, бірінші мәшинені қуып жеткеннен кейін 3 сағ-тан соң екінші мәшинені қуып жетті. Жеңіл көліктің жылдамдығын табыңдар.
2) A пунктінен B пунктіне жүк мәшинесі жолға шықты. 1 сағ-тан кейін A пунктінен шыққан жеңіл көлік 2 сағ-тан соң жүк мәшинесін қуып жетіп, B пунктіне одан 3 сағ ерте келді. Жүк мәшинесі A пунктінен B пунктіне дейін қанша уақыт жүрді?

4.13. 1) A кемежайынан бір бағытта сал мен катер шықты. 90 км жол жүргеннен кейін катер сол кемежайға қайтып оралды және барлық жолға 12,5 сағ жіберді. Ол қайтар жолда кемежайдан 30 км қашықтықта салды кездестірді. Өзен ағысының жылдамдығы мен катердің жылдамдығын табыңдар.
2) A кемежайынан өзен ағысы бойымен сал мен катер шықты. Катер 96 км жол жүргеннен кейін A кемежайына қайта оралды және барлық жолға 14 сағ жіберді. Ол кері қайтқанда айлақтан 24 км қашықтықта салды кездестірді. Өзен ағысының жылдамдығы мен катердің жылдамдығын табыңдар.

4.14. 1) Алтын мен күмістің екі қорытпасы бар. Бірінші қорытпадағы металдар массасының қатынасы 2 : 3, екіншісінде 3 : 7. Алтын мен күмістің массаларының қатынасы 5 : 11 болатын 8 кг жаңа қорытпа алу үшін әр қорытпадан қанша алу керек?
2) Массасы бірдей екі кесек шойынды құрамы әртүрлі хроммен ерітіп, құрамында 12 кг хром бар қорытпа алынды. Егер бірінші кесек екіншіден екі есе ауыр болса, қорытпада 16 кг хром болар еді. Егер бірінші кесекте хром екіншіге қарағанда 5%-ға кем болса, онда шойынның әрбір кесегіндегі хромның пайыздық құрамын табыңдар.

4.15. 1) Глицерин толтырылған бактан 8 л құйып алынды. Содан кейін бакқа су құйылды және 6 л қоспа құйып алынды. Мұнан кейін бакқа қайта су құйылып, нәтижесінде құрамында 68% глицерині бар қоспа алынды. Бактың сыйымдылығын табыңдар.
2) Сыйымдылығы 40 л ыдыс таза спиртпен толтырылған. Одан спирттің біраз мөлшері құйып алынып, сумен толтырылды. Кейін дәл сондай қоспа құйып алынды. Бұдан соң ыдыста 22,5 л таза спирт қалды. Әрбір жағдайда қанша литрден сұйық құйып алынып отырылды?

4.16. 1) 4 кг және 6 кг-нан тұратын бір қышқылдың әртүрлі ерітіндісі бар екі ыдыс берілген. Егер оларды қосса, онда

құрамында 35% қышқылы бар ерітінді алынады. Егер осы ерітінділердің бірдей массасын косса, онда құрамында 36% қышқылы бар ерітінді алынады. Әр ерітіндіде қанша килограмм қышқыл бар?
2) Құрамында 11% және 4% платина бар алюминий мен платинаның екі қорытпасы берілген. Құрамында 7% платина бар жаңа қорытпа шығу үшін бұл қорытпаларды қандай қатынаста алу керек?

4.17. 1) Күмістің екі түрлі қорытпасы берілген. Массасы 25 кг болатын бірінші қорытпа құрамында 84%, массасы 12,5 кг болатын екінші қорытпа құрамында 72% күміс бар. Олардың ерітіндісінен алынған қорытпада қанша пайыз күміс бар?
2) Күмістің екі түрлі қорытпасы берілген. Массасы 12 кг болатын бірінші қорытпа құрамында 75%, массасы 10 кг болатын екінші қорытпа құрамында 20% күміс бар. Олардың ерітіндісінен алынған қорытпада қанша пайыз күміс бар?

C

4.18. Салымшы банк депозитіне белгілі бір соманы сала отырып, бір жылдан кейін 42 200 тг пайда (кіріс) тапты. Бірақ ол банктен ақшаны алмай, оның үстіне 58 000 тг қосып, салымын тағы бір жылға қалдырды. Бір жылдан кейін депозитте 456 000 тг болды. Банкке алғашында қанша теңге салынды және банктің жылдық пайызы қандай?

4.19. Қуаттылығы әртүрлі екі сорғының бірдей уақытта жұмыс істеуі барысында бассейн 8 сағ-та толады. Сорғыларды жөндеуден кейін бірінші сорғының өнімділігі 1,2 есеге, екіншінікі 1,6 есеге артты. Осыдан кейін олардың бірдей уақытта жұмыс істеуі барысында бассейн 6 сағ-та толатын болды. Жөндеуге дейінгі және жөндеуден кейінгі бірінші сорғының жеке бассейнді толтыру уақытын табыңдар.

4.20. Екі шаңғышы бірдей уақытта тұрақты жылдамдықпен бір бағытта жолға шықты және біріншісінің жылдамдығы екіншісінің жылдамдығының $\frac{7}{6}$-сін құрайды. Олардың соңынан 20 мин-тан кейін жылдамдығы 18 км/сағ болатын үшінші шаңғышы шықты. Үшінші шаңғышы екінші шаңғышыны біріншіге қарағанда 30 мин ерте қуып жетті. Бірінші және екінші шаңғышының жылдамдығын табыңдар.

4.21. Құрамындағы пайыздық мөлшері әртүрлі магний бар массалары 7 кг және 3 кг болатын екі құймадан массасы бірдей кесектер алынды. Бірінші құймадан кесіп алынған кесек екінші құйманың қалдығымен, ал екінші құймадан кесіп алынған кесек бірінші құйманың қалдығымен ерітіліп, құрамындағы магнийдің пайыздық мөлшері бірдей құймалар алынды. Әрбір кесіп алынған кесектің массасын табыңдар.

4.22. 1) Екі бригаданың жасайтын жұмыс көлемі бірдей. Бірінші бригада жұмысты екіншіге қарағанда 30 мин ерте бітірді. Егер бірінші бригадада 5 адам артық болса, онда жұмысты 2 сағ бұрын орындайды. Екі бригаданың жұмысшыларының өнімділігі бірдей болса, әр бригадада жұмысшылар саны қандай?
2) Екі сорғы бірге жұмыс істегенде бассейн 10 сағ-та толады. Екінші сорғы бассейннің жартысын бірінші сорғыға қарағанда 7,5 сағ кеш толтырады. Бірінші сорғыны сағат 6-да қосқан соң 2 сағ-тан кейін екіншісі қосылды және сағат 12-де бассейнде 400 $м^3$ су болды. Бассейннің сыйымдылығын табыңдар.

4.23. Үш бригада жұмысты бірігіп тапсырманы 8 күнде орындайды. Екінші бригадаға бұл тапсырманы орындау үшін біріншіге қарағанда 8 күн артық, ал үшіншіге қарағанда екі есеге кем күн қажет. Әр бригада жұмысты жеке қанша күнде орындайды?

4.24. A, B және C элементтерінен тұратын үш ерітінді бар. Бірінші ерітінді массалары 1 : 2 қатынасындай болатын A және B, екінші ерітінді массалары 1 : 3 қатынасындай болатын B және C, үшінші ерітінді массалары 2 : 1 қатынасындай болатын A және C екі элементтен тұрады. Ерітінді массалары 11 : 3 : 8 қатынасындай болатын A, B және C үш элементтен тұруы үшін берілген ерітінділерді қандай қатынаста алу керек?

ҚАЙТАЛАУ

4.25. Теңсіздікті шешіңдер:

1) $\dfrac{49 - x^2}{x + 2} > 0$; 2) $\dfrac{x}{4} - \dfrac{16}{x} < 0$; 3) $\dfrac{5}{2x} - \dfrac{3}{3 - x} < 0$; 4) $\dfrac{9 - x^2}{x^2 - 16} > 0$.

4.26. Сызықтық теңсіздіктер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases} 3x - 2 \geq 5 - 6x, \\ |2x + 4| \geq 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7x - 2,2 \geq 5,3 - 9x, \\ |x - 7,4| < 3. \end{cases}$

Жаңа білімді меңгеруге дайындаламыз

4.27. $y = f(x)$ функциясының графигін салып, оның таңбатұрақтылық аралықтарын табыңдар:

1) $f(x) = -0{,}5\,x^2 + 2$; 2) $f(x) = -2x^2 + 4x$;

3) $f(x) = x^2 + 6x + 9$; 4) $f(x) = x^2 - 5x - 10$.

4.28. Функциялар графиктерін бір координаталық жазықтыққа салыңдар және графиктердің қиылысу нүктелерінің санын табыңдар:

1) $y = x^3$ және $y = x^2 - 2x$;

2) $y = 2x - 3$ және $y = -x^2 - 3x$;

3) $y = |x + 1|$ және $y = x^2 + 4x + 3$;

4) $y = |x - 1|$ және $y = |x^2 - 4x + 3|$.

4.29. Теңдеумен берілген шеңберді салыңдар. $M(-1;\ 2)$ нүктесі шеңберге қатысты қалай орналасқанын анықтаңдар:

1) $x^2 + y^2 = 9$; 2) $x^2 + 2x + y^2 = 8$;

3) $x^2 - 2x + y^2 = 24$; 4) $x^2 + y^2 - 2y = 15$.

Жаңа білімді меңгеруге арналған тірек ұғымдар

Теңсіздік, теңсіздікті шешу, мәндес теңсіздіктер, екі айнымалысы бар теңсіздік, теңсіздіктің шешімдер жиыны, координаталық жазықтық.

§5. ЕКІ АЙНЫМАЛЫСЫ БАР ТЕҢСІЗДІКТЕР

Түйінді ұғымдар

Теңсіздік

? Екі айнымалысы бар теңсіздіктерді шешуді үйренесіңдер.

$f(x;\ y) > g(x;\ y)$; $f(x;\ y) < g(x;\ y)$; $f(x;\ y) \geq g(x;\ y)$, $f(x;\ y) \leq g(x;\ y)$ *түріндегі теңсіздіктер* (мұндағы $f(x;\ y)$ және $g(x;\ y)$ — екі айнымалысы бар өрнектер) ***екі айнымалысы бар теңсіздіктер*** *деп аталады.*

Мысалы, $4 + x > y$; $y^2 + x^2 < 16$; $y - 4 \geq x^2 + 2x$ — екі айнымалысы бар теңсіздіктер.

Екі айнымалысы бар теңсіздіктер шешімі *деп теңсіздікті тура санды теңсіздікке айналдыратын айнымалылардың мәндер жұбын айтады.*

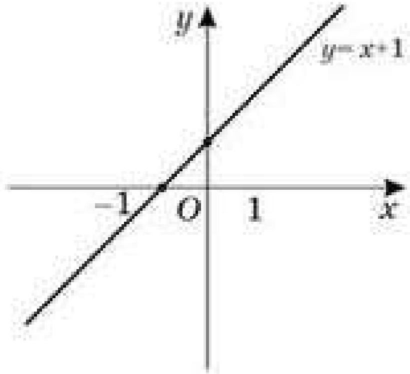
Мысалы, (1; 0) сандар жұбы $4 + x > y$; $y^2 + x^2 < 16$ теңсіздіктерінің шешімі болады, бірақ $y - 4 \geq x^2 + 2x$ теңсіздігінің шешімі болмайды.

Кез келген сандар жұбына координаталық жазықтықтың нүктесі сәйкес болғандықтан, екі айнымалысы бар теңсіздіктердің шешімдер жиынын координаталық жазықтықта кескіндеуге болады.

МЫСАЛ

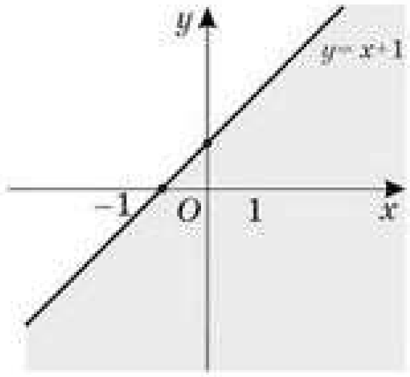
Координаталық жазықтықта $y - x \leq 1$ теңсіздігінің шешімдер жиынын кескіндейік.

Шешуі. Алдымен y-ті x арқылы өрнектейік. Сонда $y \leq x + 1$ теңсіздігін аламыз. Енді $y = x + 1$ функциясының графигін, яғни түзу саламыз (10.1-сурет).



10.1-сурет

Абсциссасы 3-ке тең $y = x + 1$ функциясының графигіне тиісті нүктенің ординатасы мен осы түзуден жоғары және төмен орналасқан абсциссасы 3-ке тең нүктелердің ординаталарын салыстырыңдар.

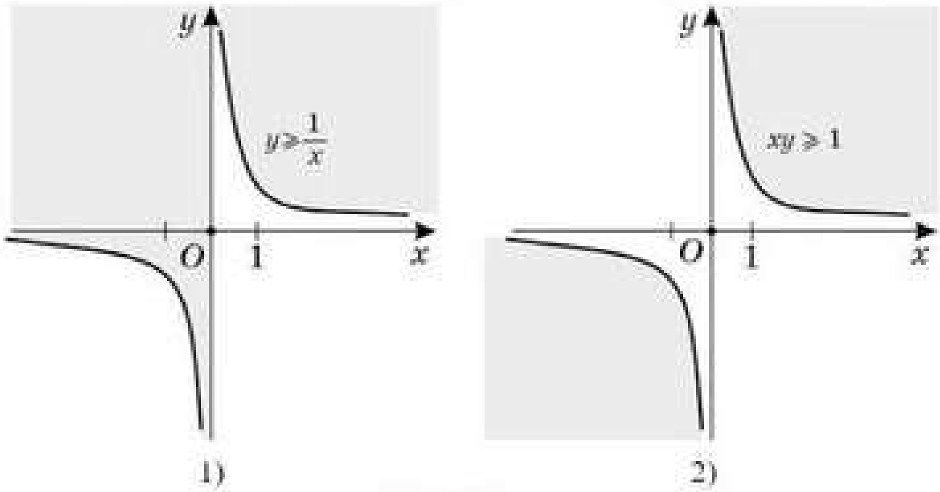


10.2-сурет

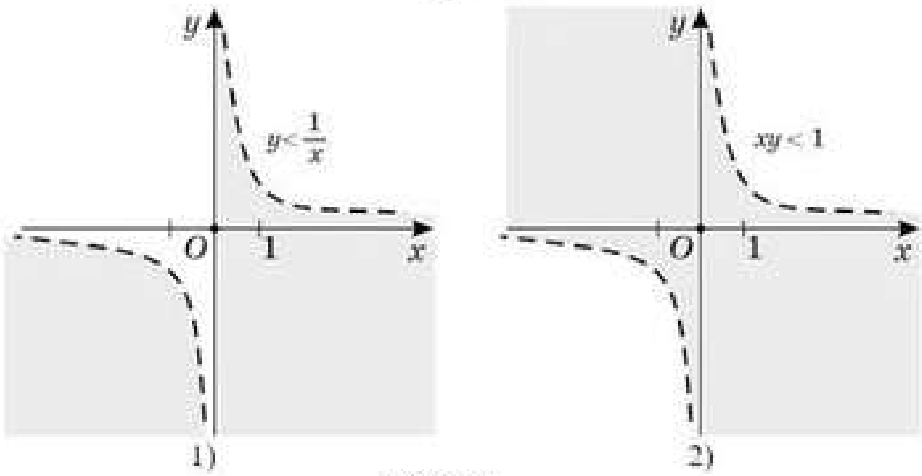
Салыстыру барысында $y = x + 1$ түзуінен төмен орналасқан кез келген нүктенің ординатасы осы түзуге тиісті нүктенің ординатасынан кіші болатынын көруге болады. Демек, түзуге тиісті және одан төмен орналасқан нүктелер жиыны $y \leq x + 1$ теңсіздігінің шешімдер жиынын береді (10.2-сурет).

ТҮСІНДІРІҢДЕР

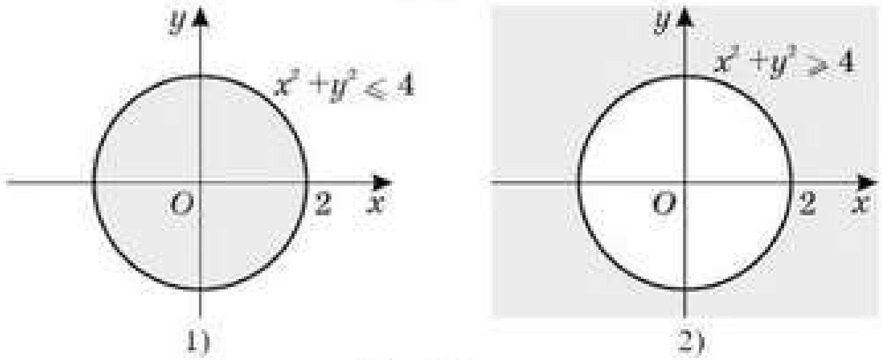
11—14-суреттерді қолданып, 1) $y \geq \frac{1}{x}$ және $xy \geq 1$; 2) $y < \frac{1}{x}$ және $xy < 1$; 3) $x^2 + y^2 \leq 4$ және $x^2 + y^2 \geq 4$; 4) $y \leq x^2$ және $y \geq x^2$ теңсіздіктерінің шешімдері қалай кескінделгенін түсіндіріңдер.



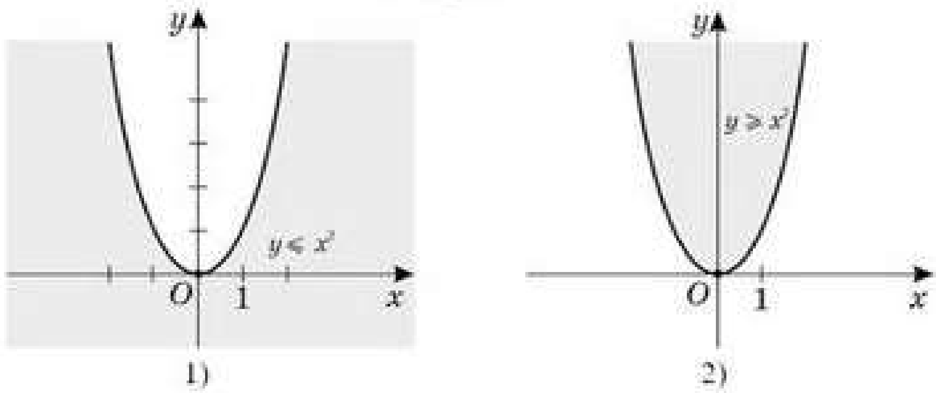
11-сурет



12-сурет



13-сурет



14-сурет

1. $A(2;\ 0)$, $B\ (2;\ 4)$, $C(2;\ -3)$ нүктелерінің арасынан 1) $y = 4 - x$; 2) $y = 4 - x^2$ функциясының графигінен жоғары орналасқан нүктелерді көрсетіңдер.
2. $A(-2;\ 0)$, $B\ (-3;\ 4)$, $C(-5;\ 4)$ нүктелерінің арасынан центрі координаталар басы және радиусы 6 болатын дөңгелекке тиісті нүктелерді көрсетіңдер.
3. Екі айнымалысы бар қатаң теңсіздіктің шешімдер жиынының кескіні мен екі айнымалысы бар қатаң емес теңсіздіктің шешімдер жиынының кескіні арасында қандай айырмашылық бар?

Жаттығулар

А

5.1. $(2;\ 5)$, $(-3;\ 1)$, $(-2;\ -4)$ және $(-2{,}6;\ 0)$ сандар жұбы:
1) $-2x + 5y \ge 0$; 2) $x^2 - 2x + 2y < 0$;
3) $4xy - 2x + 5y \ge 0$; 4) $x - 2x^2 - 3y \le 0$ теңсіздігінің шешімі бола ма?

5.2. Теңсіздіктің шешімдер жиынын кескіндеңдер:
1) $4x + 3y - 5 \le 0$; 2) $2x^2 + 3y - 3x - 1 > 0$;
3) $x^2 - 2y - 3 > 3x$; 4) $0{,}5x^2 + y - 2x < 1$.

5.3. Координаталары берілген теңсіздікті қанағаттандыратын нүктелер жиынын координаталық жазықтықта кескіндеңдер:
1) $xy \ge 3$; 2) $xy \le 0{,}5$; 3) $3xy - 4 \ge 0$; 4) $xy - y \ge 2$.

5.4. 1) $x^2 + y^2 \le 4$; 2) $x^2 + y^2 \ge 16$;
3) $x^2 + y^2 < 12$; 4) $x^2 > 8 - y^2$;
5) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 \le 9$; 6) $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 \le 10$;
7) $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 \ge 4$; 8) $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 > 10$;
9) $(2 - x)^2 + (y - 2)^2 > 16$ теңсіздігімен берілген нүктелер жиынын координаталық жазықтықта кескіндеңдер.

5.5. 1) $(x + 2)^2 + y^2 \ge 5$; 2) $x^2 + (y - 2)^2 \le 7$;
3) $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 \ge 4$; 4) $x^2 + (y + 1)^2 \le 8$ теңсіздігімен берілген жазықтықтың нүктелер жиыны қандай геометриялық фигураны береді?

В

5.6. $x^2 - xy + y^2 \le 5$ теңсіздігінің шешімдер жиыны шегарасы L болатын қандай да бір фигурамен кескінделген. Ұштары $A(5;\ 1)$ және $B(-1;\ 1)$ нүктелері болатын кесінді L сызығын қиып өте ме?

5.7. Шешімдер жиыны:
1) центрі (1; 2) нүктесі және радиусының ұзындығы 5-ке тең дөңгелек;
2) центрі (–2; 2) нүктесі және радиусының ұзындығы 7-ге тең дөңгелектен тыс жатқан нүктелер жиыны;
3) дөңгелектің шегарасы болып табылатын шеңбер кірмейтін, центрі (0; 2,5) нүктесі және радиусының ұзындығы 3-ке тең дөңгелек;
4) дөңгелектің шегарасы болып табылатын шеңбер кірмейтін, центрі (3,5; 0) нүктесі және радиусының ұзындығы 1-ге тең дөңгелектен тыс жатқан нүктелер жиыны болатын теңсіздікті жазыңдар.

5.8. Теңсіздік координаталық жазықтықта қандай нүктелер жиынын береді:
1) $x^2 + y^2 + 4x - 2y \le 4$; 2) $x^2 + y^2 - 6x - 4y \le 0$;
3) $x^2 + y^2 - x + 4y \le 1$; 4) $x^2 + y^2 - 2x - y \ge 0$?

C

5.9. Шешімдер жиыны: 1) A (0; 0) және B (2; 2); 2) A (–1; 2) және B (2; –3); 3) A (3; –2) және B(–2; 3); 4) A (–4; –1) және B(–2; –1) нүктелері арқылы өтетін түзуден жоғары орналасқан координаталық жазықтықтың нүктелерімен кескінделген теңсіздікті жазыңдар.

5.10. Шешімдер жиыны: 1) A(2; –1), C(–1; 5) және B(1; –3); 2) A(–1; 10), C(2; 7) және B(1; 4) нүктелері арқылы өтетін параболадан жоғары орналасқан координаталық жазықтықтың нүктелерімен кескінделген теңсіздікті жазыңдар.

5.11. Координаталары берілген теңсіздіктің шешімі болатын нүктелер жиынын координаталық жазықтықта кескіндеңдер:
1) $|y| \ge x$; 2) $|y| \le 2x$; 3) $|y| + |x| \ge 1$;
4) $|y| + |x| \ge 3$; 5) $|y| + 2|x| \ge 2$; 6) $2|y| + |x| \le 4$.

ҚАЙТАЛАУ

5.12. Теңсіздікті шешіңдер:
1) $x^2 - 5x - 5 > 2x^2 + 1$; 2) $3x^2 - 5x > 2x^2 - 6$.

***5.13.** $y = \max\{x^2 - 3;\ 3x + 7\}$ функциясының графигін салыңдар.

5.14. Екітаңбалы санның цифрларының қосындысының мәні 9-ға, ал цифрларының көбейтіндісінің мәні 18-ге тең. Берілген екітаңбалы санды табыңдар.

5.15. Жаңа технология колданылғаннан кейін бұршақ тектес дақылдардың өнімділігі 4 ц/га-ға өсті. Нәтижесінде алдыңғы жылмен салыстырғанда бұршақ дақылдарына 1 га кем аудан бөлінгеніне қарамастан 3 ц-ге артық, 150 ц өнім жиналды. Алдыңғы және ағымдағы жылдары бұршақ тектес дақылдарға қандай аудан бөлінген және өнімділігі қандай болған?

Жаңа білімді меңгеруге дайындаламыз

5.16. Теңдеудің графигін салыңдар:

1) $3x - 4y + 5 = 0$; 2) $-2x - y + 3 = 0$; 3) $3xy - 2 = 0$; 4) $xy + 2 = 0$; 5) $xy - y - 2 = 0$; 6) $xy + 2y - 3 = 0$; 7) $xy - 3y + 1 = 0$; 8) $xy - 5y + 1 = 0$.

5.17. Координаталары берілген теңсіздікті қанағаттандыратын нүктелер жиынын координаталық жазықтықта кескіндеңдер:

1) $|x - 1| \le 3$; 2) $|x - 2| \ge 2$; 3) $|y - 1| \le 3$; 4) $|y - 1| \ge 1$; 5) $xy \ge 1$; 6) $xy \le 2$; 7) $xy - 2 \ge 0$; 8) $xy - 7y < 2$.

5.18. Теңсіздікпен берілген нүктелер жиынын координаталық жазықтықта кескіндеңдер:

1) $x^2 + y^2 \le 9$; 2) $x^2 + y^2 \ge 4$;

3) $x^2 + y^2 < 8$; 4) $(x - 1)^2 + y^2 \le 9$;

5) $x^2 + (y - 1)^2 \ge 10$; 6) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 \le 5$;

7) $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 \ge 8$; 8) $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 > 10$;

9) $(2 - x)^2 + (y + 2)^2 \le 16$.

5.19. Теңсіздікпен берілген нүктелер жиынын атаңдар:

1) $(x - 1)^2 + y^2 \ge 12$; 2) $x^2 + (y - 3)^2 < 3$;

3) $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 \ge 9$; 4) $x^2 + (y - 21)^2 \le 0$;

5) $(x + 2)^2 + y - 2 \ge 0$; 6) $(x - 2)^2 + y + 3 \le 0$.

Жаңа білімді меңгеруге арналған тірек ұғымдар

Теңсіздік, теңсіздікті шешу, мәндес теңсіздіктер, екі айнымалысы бар теңсіздік, теңсіздіктің шешімдер жиыны, координаталық жазықтық, сызықтық емес теңсіздіктер жүйесі.

§6. ЕКІ АЙНЫМАЛЫСЫ БАР СЫЗЫҚТЫҚ ЕМЕС ТЕҢСІЗДІКТЕР ЖҮЙЕСІ

Түйінді ұғымдар

Сызықтық емес теңсіздіктер жүйесі

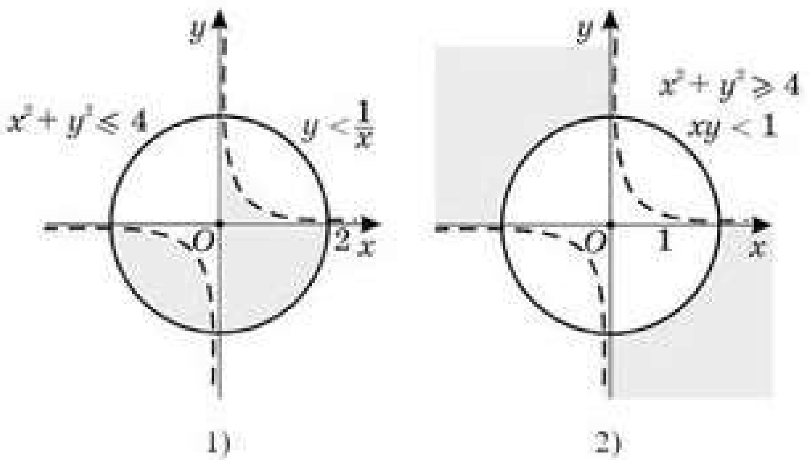
Екі айнымалысы бар сызықтық емес теңсіздіктер жүйесін шешуді үйренесіңдер.

Бір немесе бірнеше теңсіздігі сызықтық емес болатын бір айнымалысы бар сызықтық емес теңсіздіктер жүйесін қарастырайық.

Мысалы, $\begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 4, \\ y < \dfrac{1}{x}; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+y^2 \geqslant 4, \\ xy < 1; \end{cases}$ $\begin{cases} y \leqslant x^2, \\ y \geqslant \dfrac{1}{x}; \end{cases}$ $\begin{cases} y \leqslant x^2, \\ xy \geqslant 1 \end{cases}$ теңсіздіктер жүйесі екі айнымалысы бар сызықтық емес теңсіздіктер жүйесін береді.

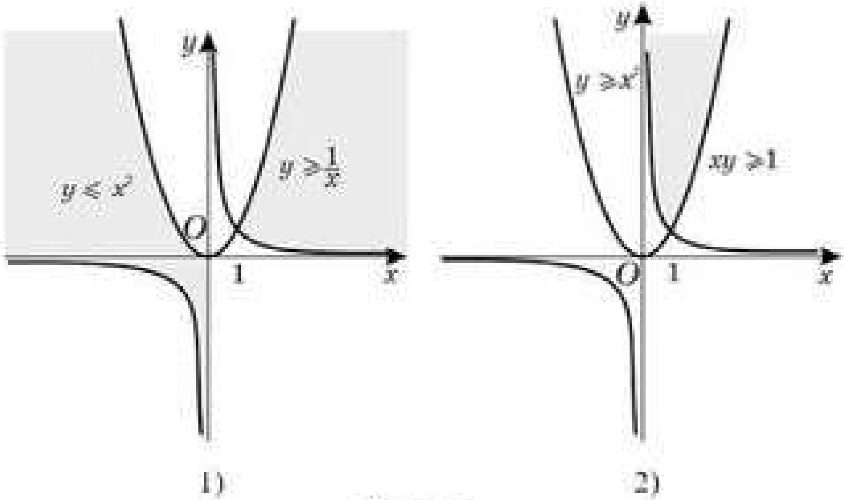
Екі айнымалысы бар сызықтық емес теңсіздіктер жүйесінің шешімі координаталық жазықтықта кескінделеді. Ол үшін жүйенің әрбір теңсіздігінің шешімін бір координаталық жазықтықта кескіндеп, олардың ортақ шешімін табу керек .

15-, 16-суретті қолданып, $\begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 4, \\ y < \dfrac{1}{x}; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+y^2 \geqslant 4, \\ xy < 1; \end{cases}$ $\begin{cases} y \leqslant x^2, \\ y \geqslant \dfrac{1}{x}; \end{cases}$ $\begin{cases} y \leqslant x^2, \\ xy \geqslant 1 \end{cases}$ екі айнымалысы бар теңсіздіктер жүйесінің шешімін қалай табуға және шешімдер жиынын координаталық жазықтықта қалай көрсетуге болатынын түсіндіріңдер.



15-сурет

Екі айнымалысы бар теңсіздіктер жүйесінің шешімі координаталық жазықтықта кескінделетін болғандықтан, екі айнымалысы бар теңсіздіктер жүйесінің шешімі координаталық жазықтықта нүктелер жиынын немесе қандай да бір геометриялық фигураны береді деп айтады.



16-сурет

1. Екі айнымалысы бар сызықтық емес теңсіздіктер жүйесінің шешімі нені береді?
2. Екі айнымалысы бар сызықтық емес теңсіздіктер жүйесінің қанша шешімі болуы мүмкін?

Жаттығулар

A

6.1. 1) $\begin{cases} y - x < 0, \\ 2x + y \leqslant 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y - 2x < 0, \\ 3x + y \leqslant 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2y - x \geqslant 0, \\ 2x - y \leqslant 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y - 3x + 1 \geqslant 0, \\ x + 2y \leqslant 6 \end{cases}$

теңсіздіктер жүйесімен берілген нүктелер жиынын координаталық жазықтықта кескіндеңдер.

6.2. x және y айнымалыларының мәндері болатын: 1) (2; –1); 2) (1; 6); 3) (–4; 7); 4) (0; 4) сандар жұбы $\begin{cases} 2x + y + 4 > 0, \\ y - 2 \geqslant x^2 \end{cases}$ теңсіздіктер жүйесінің шешімі бола ма?

6.3. 1) $\begin{cases} 3x - y - 1 < 0, \\ y < 3 - x^2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y - 2 < 0, \\ y < 4{,}5 - x^2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - y + 4 > 0, \\ y \geqslant x^2 - 1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x - y + 3 > 0, \\ y \leqslant x^2 + 2 \end{cases}$ теңсіздіктер жүйесін қанағаттандыратын нүктелер жиынын координаталық жазықтықта кескіндеңдер.

6.4. Координаталық жазықтықтың: 1) I ширегін; 2) II ширегін; 3) III ширегін; 4) IV ширегін теңсіздіктер жүйесі арқылы беріңдер.

6.5. 1) $\begin{cases}-2 \leqslant y \leqslant 3,\\ -1 \leqslant x \leqslant 3;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}-3 \leqslant y \leqslant 4,\\ -2 \leqslant x \leqslant 5;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}-2 \leqslant y \leqslant 0,\\ 1 \leqslant x \leqslant 3;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}2{,}1 \leqslant y \leqslant 3,\\ 1{,}2 \leqslant x \leqslant 3{,}5\end{cases}$ теңсіздікт ер жүйесімен берілген тіктөртбұрышты координаталық жазықтықта салыңдар және оның ауданын табыңдар.

6.6. 1) $\begin{cases}0 \leqslant x - y \leqslant 3,\\ -1 \leqslant x + y \leqslant 3;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}0 \leqslant x - y \leqslant 5,\\ -2 \leqslant x + y \leqslant 5;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}0 \leqslant 2x - y \leqslant 4,\\ -1 \leqslant 0{,}5x + y \leqslant 2\end{cases}$ теңсіздіктер жүйесімен берілген төртбұрыш тіктөртбұрыш болатынын көрсетіңдер.

6.7. 1) $\begin{cases}y - x^2 < 0,\\ 2x + y \leqslant 4;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}y - 2x^2 < 0,\\ 3x + y \leqslant 3;\end{cases}$
3) $\begin{cases}2y - x^2 \geqslant 0,\\ 2x^2 + y \leqslant 3;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}y - 3x^2 + 1 \geqslant 0,\\ x^2 + 2y \leqslant 6\end{cases}$ теңсіздіктер жүйесін қана ғаттандыратын нүктелер жиынын координаталық жазықтықта кескіндеңдер.

6.8. x және y айнымалыларының мәндері болатын: 1) (1; 2); 2) (2; 9); 3) (–3; 0); 4) (–2; –2) сандар жұбы $\begin{cases}x^2 + y^2 \geqslant 9,\\ y \geqslant x^2 - 3\end{cases}$ теңсіздіктер жүйесінің шешімі бола ма?

B

6.9. 1) $\begin{cases}y - 1 < 0,\\ x^2 + y^2 < 4;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}y \geqslant 0,\\ x^2 + y^2 < 5;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}x - 1 < 0,\\ x^2 + y^2 \leqslant 9;\end{cases}$
4) $\begin{cases}x + 1 \geqslant 0,\\ x^2 + y^2 \leqslant 16;\end{cases}$ 5) $\begin{cases}y + x < 0,\\ x^2 + y^2 \leqslant 1;\end{cases}$ 6) $\begin{cases}y - x \geqslant 0,\\ x^2 + y^2 \leqslant 4;\end{cases}$
7) $\begin{cases}y + 2x \geqslant 0,\\ x^2 + y^2 \geqslant 9;\end{cases}$ 8) $\begin{cases}y - 0{,}5x \leqslant 0,\\ x^2 + y^2 \geqslant 16\end{cases}$ теңсіздіктер жүйесін қанағаттандыратын нүктелер жиы нын координаталық жазықтықта кескіндеңдер.

6.10. 1) $\begin{cases}y - x^2 \geqslant 0,\\ x^2 + y^2 \leqslant 4;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}y - 0{,}5x^2 \leqslant 0,\\ x^2 + y^2 \leqslant 9;\end{cases}$
3) $\begin{cases}y - x^2 \geqslant 1,\\ x^2 + y^2 \geqslant 1;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}y - x^2 \geqslant -2{,}5,\\ x^2 + y^2 > 16\end{cases}$ теңсіздіктер жүйесімен берілген координат алық жазықтықтың нүктелер жиынын кескіндеңдер.

6.11. 1) $\begin{cases} x + y < 2, \\ x^2 + y^2 \leqslant 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + y < 1, \\ x^2 + y^2 \leqslant 4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x - y \geqslant 3, \\ x^2 + y^2 \leqslant 1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} -x + y < 2, \\ x^2 + y^2 \leqslant 25 \end{cases}$ теңсіздіктер жүйесімен берілген жазықтықтың нүктелер жиынын көрсетіңдер.

6.12. 1) $\begin{cases} y^2 + x^2 \geqslant 1, \\ x^2 + y^2 \leqslant 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y - 0{,}5x^2 \leqslant 1, \\ x^2 + y^2 \leqslant 9; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y - 2x^2 + x \leqslant 1, \\ x^2 + y^2 \geqslant 1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y^2 + x^2 \geqslant 5, \\ x^2 + y^2 \leqslant 16 \end{cases}$ теңсіздіктер жүйесінің шешімі болатын координаталық жазықтықтың нүктелер жиынын кескіндеңдер.

6.13. 1) $\begin{cases} 2y - 5 \leqslant 3x, \\ 2x + y \leqslant 6, \\ y + 3 \geqslant 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y - 3 \leqslant 4x, \\ 3x + y \leqslant 7, \\ y + 2 \geqslant 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y - 4 \leqslant -3x, \\ 2x - y \leqslant 6, \\ x \geqslant -4 \end{cases}$

теңсіздіктер жүйесімен берілген үшбұрышты салыңдар.

6.14. 1) Центрі $A(2;\ 5)$ және радиустары 2 мен 4;

2) Центрі $A(-1;\ 2)$ және радиустары 1 мен 3;

3) Центрі $A(-2;\ -1)$ және радиустары $\sqrt{3}$ пен $\sqrt{6}$;

4) Центрі $A(1{,}5;\ -2)$ және радиустары $\sqrt{5}$ пен $2\sqrt{2}$ болатын шеңберлермен шектелген сақинаны беретін теңсіздіктер жүйесін жазыңдар.

C

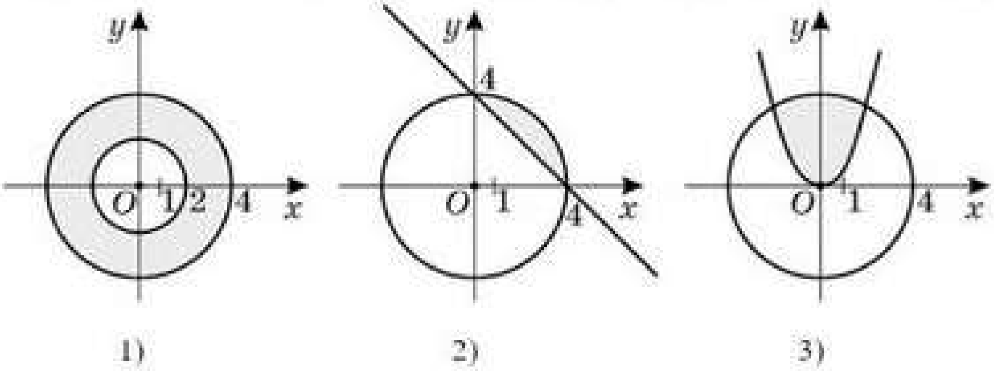
6.15. 1) $\begin{cases} |x| < 2, \\ x^2 + y^2 \leqslant 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} |x| \geqslant 1, \\ x^2 + y^2 \leqslant 4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} |x| \leqslant 3, \\ x^2 + y^2 \geqslant 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} |x| < 4, \\ x^2 + y^2 \geqslant 1; \end{cases}$

5) $\begin{cases} |y| < 2, \\ x^2 + y^2 > 8; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} |y| < 1{,}5, \\ x^2 + y^2 \leqslant 9; \end{cases}$

7) $\begin{cases} |y| < 4{,}5, \\ x^2 + y^2 \geqslant 2{,}89; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} |y| \geqslant 2, \\ x^2 + y^2 \leqslant 16 \end{cases}$ теңсіздіктер жүйесімен берілген координаталық жазықтықтың нүктелер жиынын кескіндеңдер.

6.16. Координаталық жазықтықтың 17-суретте кескінделген нүктелер жиынын беретін теңсіздіктер жүйесін жазыңдар.



17-сурет

6.17. 1) $\begin{cases} y \geqslant |x|, \\ x + y \leqslant 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y \geqslant 3 - |x|, \\ 3x - y \leqslant 4; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y \geqslant 2 - |x|, \\ 0{,}5x + y \leqslant 3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y \geqslant 3 - |x|, \\ 3x - y \leqslant 2 \end{cases}$

теңсіздіктер жүйесімен берілген коорди наталық жазықтықт ың нүктелер жиынын кескіндеңдер.

6.18. 1) $\begin{cases} y \geqslant |x|, \\ x^2 + y \leqslant 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y \geqslant |x|, \\ x^2 + y \leqslant 4; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y \geqslant 2 - |x|, \\ x^2 + y \leqslant 3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y \geqslant 3 - |x|, \\ x^2 - y \leqslant 3 \end{cases}$

теңсіздіктер жүйесімен беріл ген координаталық жазықтықтың нүктелер жиынын кескіндеңдер.

***6.19.** a мен c-ның қандай мәндерінде $\begin{cases} 2x - y \leqslant 3c, \\ ax + y \leqslant 3 \end{cases}$ теңсіздіктер жүйесі координаталық жазықтықта жолақты береді? Мысал келтіріңдер.

6.20. 1) $\begin{cases} |y| \geqslant |x|, \\ x^2 + y^2 \leqslant 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} |y| \leqslant |x|, \\ x^2 + y^2 \leqslant 4; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y \geqslant 2 - |x|, \\ x^2 + y^2 \leqslant 5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y \geqslant 3 - |x|, \\ x^2 + y^2 \leqslant 7 \end{cases}$

теңсіздіктер жүйесімен берілген координаталық жазықтықтың нүктелер жиынын кескіндеңдер.

ҚАЙТАЛАУ

6.21. Теңдеудің түбірлерін табыңдар:
1) $x^3 - 2x^2 - 4x = -8$; 2) $x^3 - 5x^2 = 2x - 10$;
3) $x^4 - 2x^2 - 4x^3 = -8x$.

6.22. Екі санның квадраттарының айырымы 100-ге тең. Егер үш еселенген бірінші саннан екі еселенген екінші санды азайтса, онда 30 саны шығады. Берілген сандарды табыңдар.

6.23. Теңдеудің графигін салыңдар:

1) $\frac{2x-y}{x-1}=0$; 2) $\frac{x^2-y}{x+1}=0$;

3) $\frac{2x+x^2-y}{x+1}=0$; 4) $\frac{4x-x^2-y}{x-1}=0$.

6.24. Кітап дүкенінде мектепке дейінгі балаларға арналған кітаптардың 60 түрі сатылады. Кітаптар саны бағасына қарай 3-кестеге енгізілген.

3-кесте

Баға (теңге)	150-ге дейін	150-ден 300-ге дейін	300-ден 500-ге дейін	500—600	600-ден артық
Кітаптар саны	7	8	?	20	5

Кестедегі мәліметтерді қолданып: 1) құны 300 тг-ден 500 тг-ге дейінгі кітаптар санын; 2) ең қымбат кітаптар санының кітаптардың жалпы санына қатынасын; 3) бағасы 500 тг-ден артық тұратын кітаптар саны кітаптардың жалпы санының қанша пайызын құрайтынын табыңдар.

Жаңа білімді меңгеруге дайындаламыз

6.25. 17 жастағы балалар санының 200 м аралыққа жүгіру нәтижелері 4-кестеде берілген.

4-кесте

Жүгіру нәтижелерінің интервалдары (секундпен алынған)	24-25	26-27	28-29	30-31	32-33
17 жастағы балалар саны	2	7	8	10	3

1) Жарысқа барлығы қанша бала қатысқан?
2) 28 с пен 31 с аралығындағы нәтижелерді көрсеткен балалар саны қанша?
3) Қанша бала 29 с-тан кем нәтижені көрсеткен?

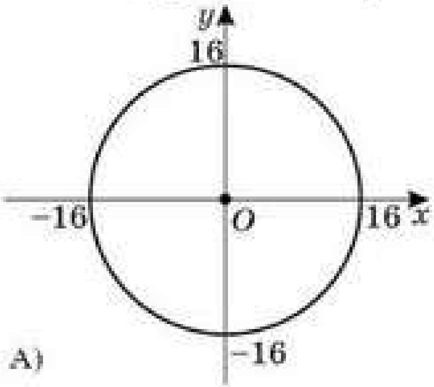
6.26. 0, 5 және 6 цифрларынан қанша екітаңбалы сандар құрастыруға болады?

Жаңа білімді меңгеруге арналған тірек ұғымдар

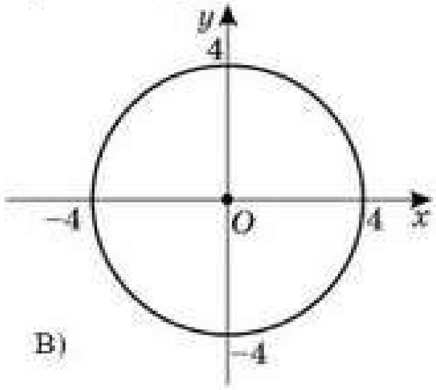
Жиын, жиынның элементі, жиындар арасындағы қатынастар, ішкі жиын, жиындардың қиылысуы мен бірігуі, бос жиын.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

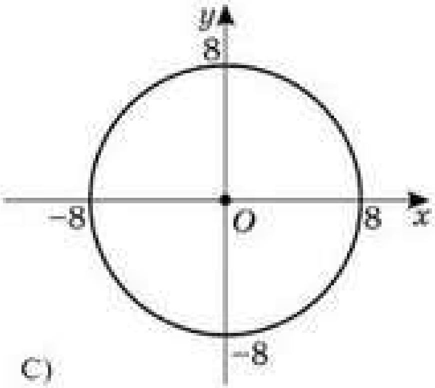
1. Қай суретте $x^2 + y^2 = 16$ теңдеуінің графигі салынған?



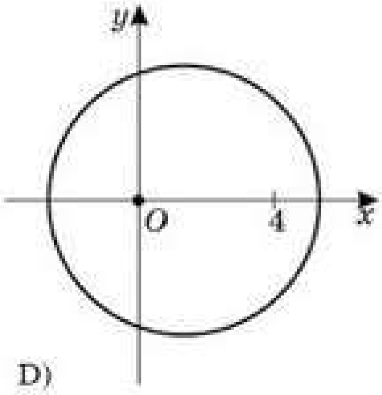
A)



B)

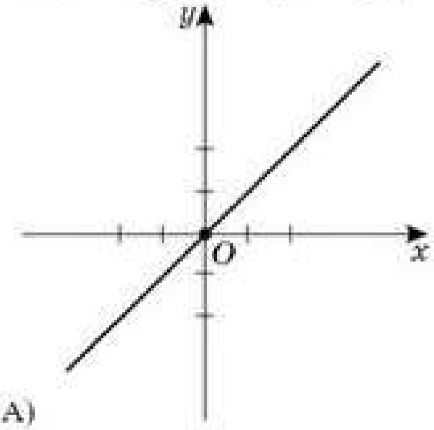


C)

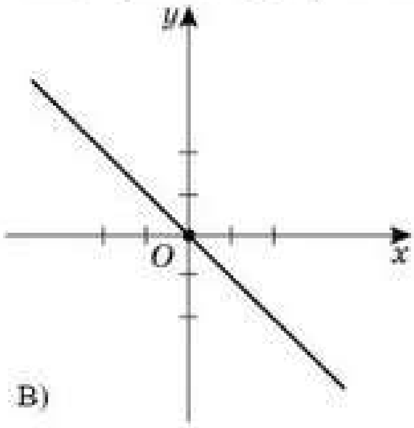


D)

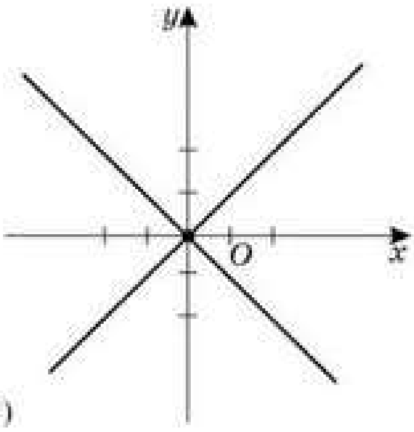
2. Қай суретте $(x - y)(x + y) = 0$ теңдеуінің графигі салынған?



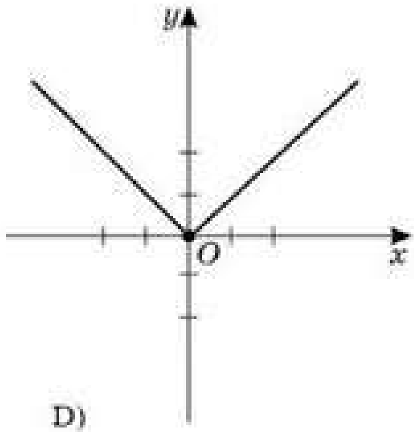
A)



B)



C)



D)

3. Центрі координаталар басы болатын және $A(5;\ 12)$ нүктесі арқылы өтетін шеңбердің теңдеуін жазыңдар.

A) $x^2 + y^2 = 169$; B) $(x + 5)^2 + (y + 12)^2 = 169$;
C) $x^2 + y^2 = 13$; D) $(x - 5)^2 + (y - 12)^2 = 169$.

4. Берілген нүктелердің қайсысы $x^2 + y^2 = 144$ шеңберіне тиісті?

A) $(6;\ 10)$; B) $(0;\ 12)$; C) $(9;\ 8)$; D) $(-12;\ 12)$.

5. Сандар жұптарының қайсысы $x^2 - y = -2$ теңдеуінің шешімі болады?

A) $(1;\ 3)$; B) $(0;\ 0)$; C) $(-2;\ 2)$; D) $(-1;\ -3)$.

6. Айнымалылардың қай мәндері $(x^2 + 1)y = 0$ теңдеуінің шешімі болады?

A) $x = -1;\ y = 1$; B) $x = 1;\ y = 0$;
C) $x = -1;\ y = -1$; D) $x = 0;\ y = 5$.

7. Айнымалылардың қай мәндері $x(1 - y) = 15$ теңдеуінің шешімі болады?

A) $x = 15;\ y = 0$; B) $x = 0;\ y = 16$;
C) $x = 15;\ y = 1$; D) $x = 16;\ y = 0$.

8. Айнымалылардың қай мәндері $(x - 1)(y - 2) = 0$ теңдеуін қанағаттандырмайды?

A) $x = -1;\ y = 2$; B) $x = 1;\ y = -2$;
C) $x = 1;\ y = 2$; D) $x = -1;\ y = -2$.

9. Айнымалылардың қай мәндері $x - 3y = 1$ теңдеуінің шешімі болады?

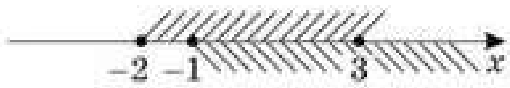
A) $x = 0;\ y = 0$; B) $x = 4;\ y = -1$;
C) $x = 0;\ y = -1$; D) $x = 4;\ y = 1$.

10. $(x + 5)^2 + (y - 3)^2 = -1$ теңдеуінің неше шешімі бар?

A) Шешімі жоқ. B) Бір шешімі бар.
C) Екі шешімі бар. D) Дұрыс жауап көрсетілмеген.

11. $\begin{cases} x^2 - x \geqslant 6, \\ x + 1 \geqslant 0 \end{cases}$ теңсіздіктер жүйесінің шешімі кескінделген сан түзуін табыңдар.

A) 

B) 

C) 

D) 

12. $y = \dfrac{\sqrt{x^3 - 4x}}{x}$ функциясының анықталу облысын табыңдар.

A) $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$;
B) $[-2;\ 0)\cup(0;\ 2]$;
C) $(-\infty;\ 0]\cup(0;\ +\infty)$;
D) $[-2;\ 0)\cup(0;\ +\infty]$;
E) $(-2;\ 0)\cup(2;\ +\infty)$.

13. $\begin{cases} x^3\cdot y^5 = 8, \\ x^5\cdot y^3 = 32 \end{cases}$ теңдеулер жүйесін шешіңдер.

A) $\{(2;\ 1),\ (-2;\ -1)\}$;
B) $\{(1;\ 1),\ (0;\ 1)\}$;
C) $\{(1;\ -1),\ (1;\ 1)\}$;
D) $\{(0;\ -2),\ (-2;\ 0)\}$;
E) $\{(-1;\ 2),\ (2;\ -1)\}$.

14. $\begin{cases} x + y = -1, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ теңдеулер жүйесін шешіңдер.

A) $\{(-1;\ 0),\ (0;\ -1)\}$;
B) $\{(1;\ 0),\ (0;\ 1)\}$;
C) $\{(-2;\ 0),\ (0;\ -2)\}$;
D) $\{(1;\ 1),\ (-1;\ 1)\}$;
E) $\left\{\left(0;\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2};0\right)\right\}$.

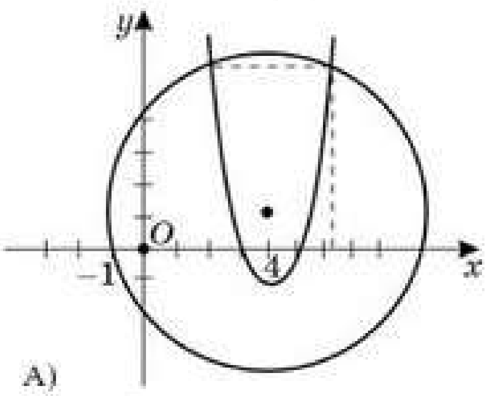
15. $\begin{cases} xy + x = -4, \\ x - y = 6 \end{cases}$ теңдеулер жүйесін шешіңдер.

A) $\left\{(-1;5),\left(5;\frac{1}{2}\right)\right\}$;
B) $\{(5;\ -1),(-1;\ -5)\}$;
C) $\{(1;\ -5),\ (4;\ -2)\}$;
D) $\{(2;\ 4),\ (-5;\ -1)\}$;
E) $\{(-2;\ -4),\ (5;\ 1)\}$.

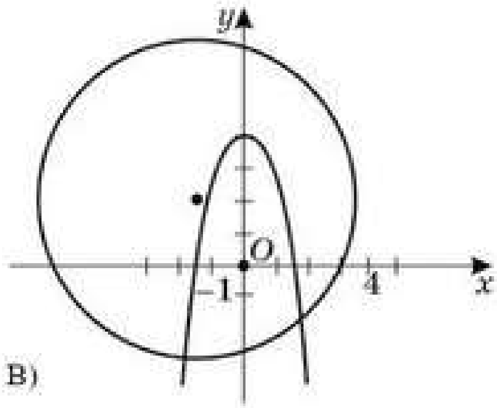
16. $\begin{cases} x + y = 14, \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2\frac{1}{12} \end{cases}$ теңдеулер жүйесін шешіңдер.

A) $\{(6;\ 8),\ (8;\ 6)\}$;
B) $\{(10;\ 4),\ (4;\ 10)\}$;
C) $\{(-18;\ 4),\ (4;\ -18)\}$;
D) $\{(-6;\ -8),\ (-8;\ -6)\}$;
E) $\{(4;\ 2),\ (-2;\ -4)\}$.

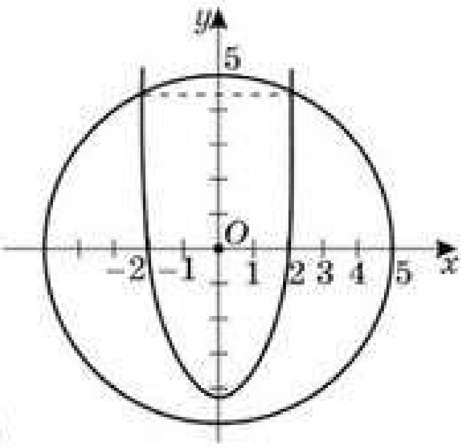
17. $\begin{cases} (x-3)^2 + (y+2)^2 = 25, \\ y = x^2 - 4 \end{cases}$ теңдеулер жүйесінің графиктік шешімі қай суретте көрсетілген?



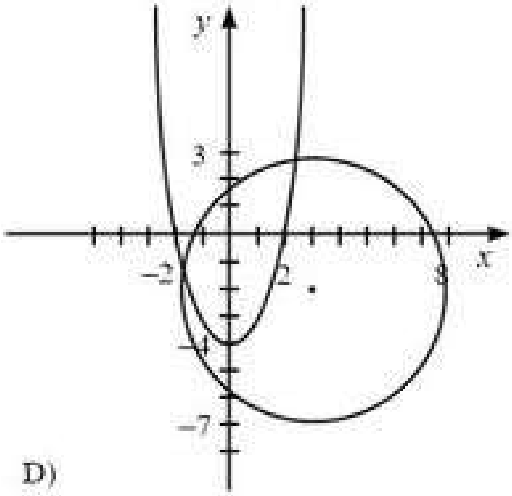
A)



B)



C)



D)

18. Төменде берілген сандар жұптарының қайсысы $\begin{cases} x^2 - y^2 = -40, \\ x + y = 4 \end{cases}$ теңдеулер жүйесінің шешімі болады?

A) (–7; 3); B) (–3; 7); C) (7; –3); D) (–7; –3); E) (7; 3).

19. $\begin{cases} x - 2y = -3, \\ y^2 - 2x = 3 \end{cases}$ теңдеулер жүйесінің шешімі $(x_0; y_0)$ сандар жұбы болса, онда $x_0 + 2y_0$ өрнегінің мәнін табыңдар.

A) –1 немесе 9; B) 1 немесе 6; C) 1 немесе 9;
D) –1 немесе 6; E) 0 немесе 9.

20. Қай жүйенің шешімі жоқ?

A) $\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 2; \end{cases}$ B) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17, \\ xy = 4; \end{cases}$ C) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ x + y = 5; \end{cases}$

D) $\begin{cases} x - y = 1, \\ xy = -1; \end{cases}$ E) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 23, \\ xy = 1. \end{cases}$

21. Төменде берілген сандар жұптарының қайсысы $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ x + y = -4: \end{cases}$ теңдеулер жүйесінің шешімі болады?

A) (–1; 3), (3; –1); B) (–1; –3), (5; 1);
C) (1; 3), (–5; –1); D) (–1; –3), (–3; –1);
E) (1; –3), (–5; 1).

22. $\begin{cases} x + 2y = 4, \\ y^2 + 2x = 5 \end{cases}$ теңдеулер жүйесінің шешімі $(x_0; y_0)$ сандар жұбы болса, онда $2x_0 - y_0$ өрнегінің мәнін табыңдар.

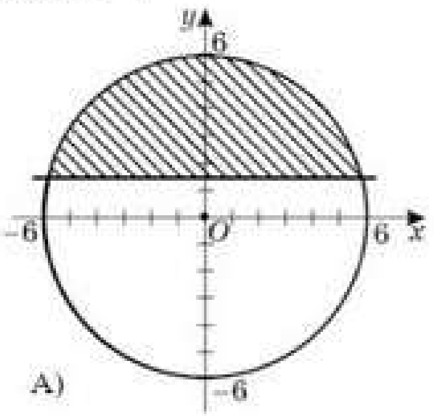
A) 0 немесе 4; B) 1 немесе –3; C) 3 немесе –7;
D) –3 немесе 3; E) 1 немесе –7.

23. Қай жүйенің шешімі болады?

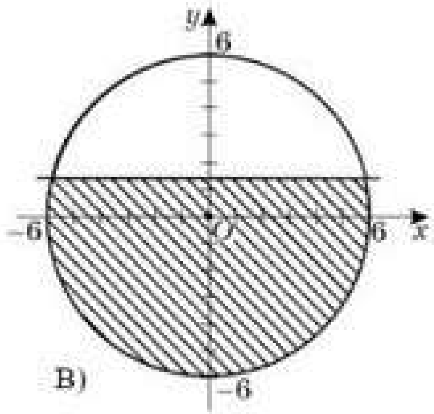
A) $\begin{cases} x^2 + y^2 = -3, \\ x + y = 2; \end{cases}$ B) $\begin{cases} x + y = 2, \\ xy = 2; \end{cases}$ C) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ xy = 2; \end{cases}$

D) $\begin{cases} x - y = 1, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = -1; \end{cases}$ E) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = 2, \\ xy = -2. \end{cases}$

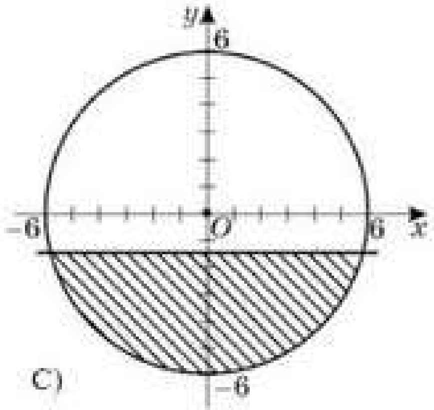
24. $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 36, \\ y \geqslant 1{,}5 \end{cases}$ теңсіздіктер жүйесінің шешімі қай суретте кескінделген ?



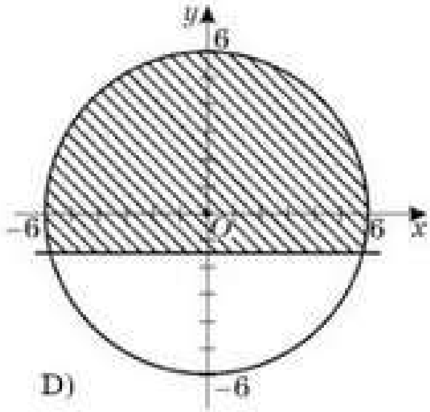
A)



B)

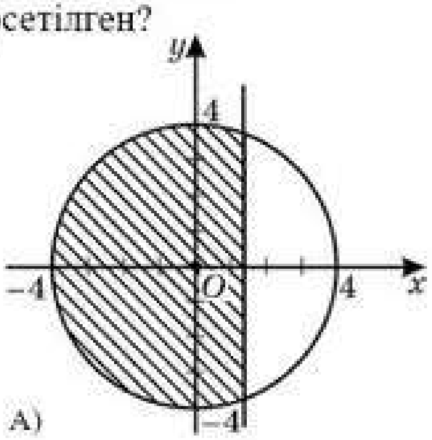


C)

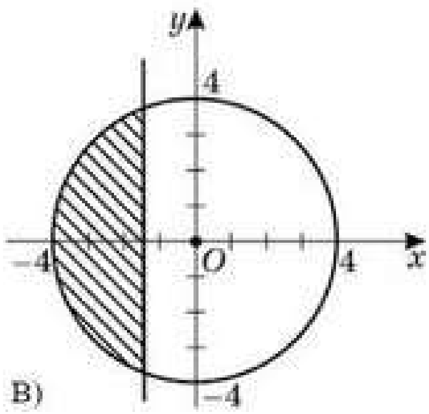


D)

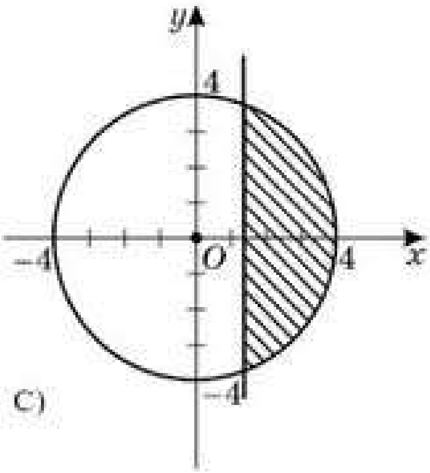
25. $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 16, \\ x \geqslant -1{,}5 \end{cases}$ теңсіздіктер жүйесінің шешімі қай суретте көрсетілген?



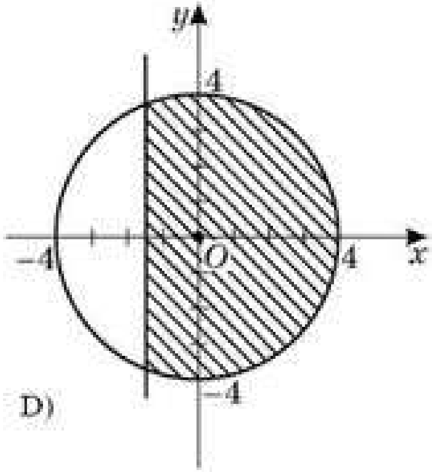
A)



B)

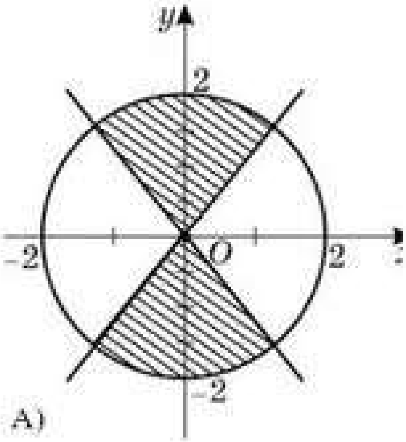


C)

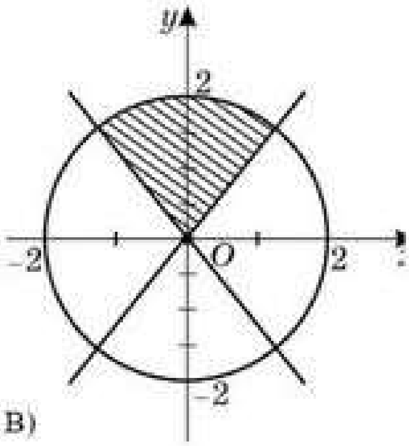


D)

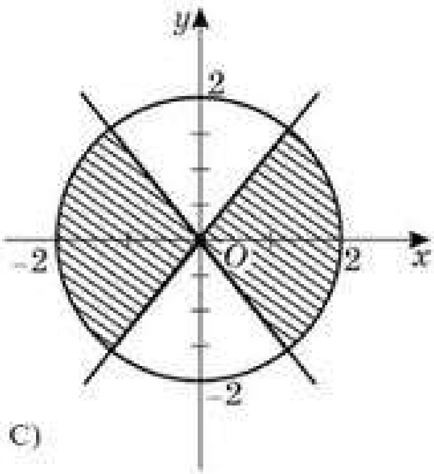
26. $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 4, \\ x^2 - y^2 \geqslant 0 \end{cases}$ теңсіздіктер жүйесінің геометриялық кескінін табыңдар.



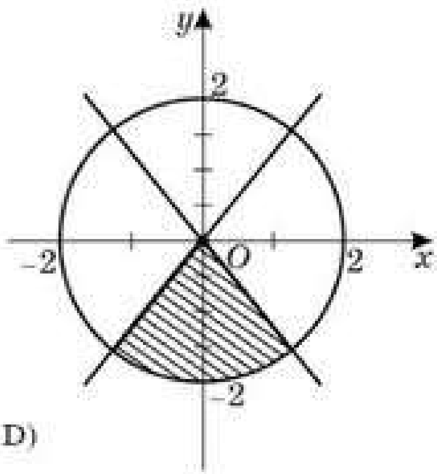
A)



B)

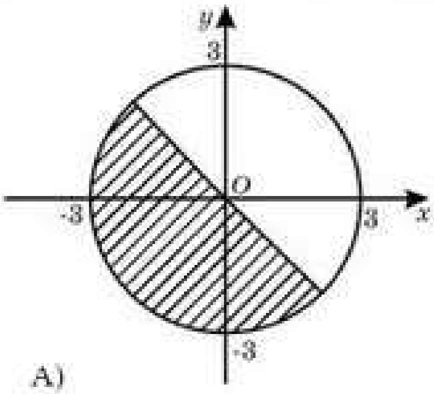


C)

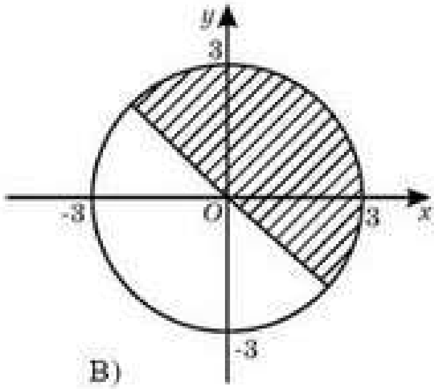


D)

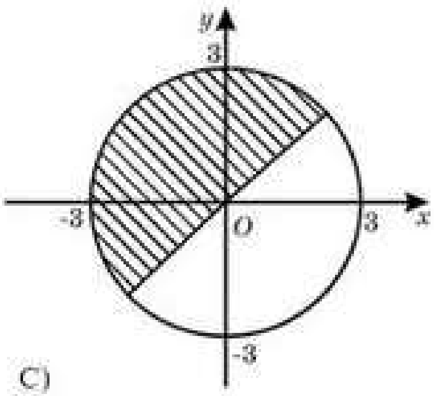
27. $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 9, \\ 2x^2 + 3y^2 \geqslant 0 \end{cases}$ теңсіздіктер жүйесінің мәндер жиынын координаталар жазықтығында кескіндеңдер.



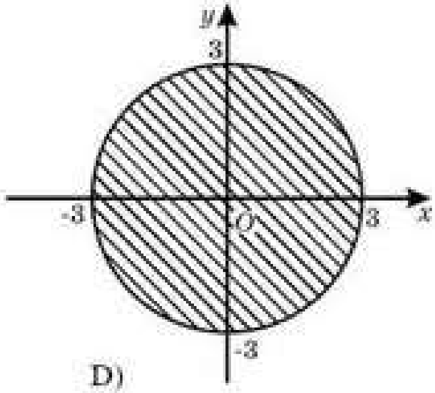
A)



B)



C)



D)

II тарау. КОМБИНАТОРИКА ЭЛЕМЕНТТЕРІ

§ 7. КОМБИНАТОРИКАНЫҢ НЕГІЗГІ ҰҒЫМДАРЫ МЕН ЕРЕЖЕЛЕРІ (ҚОСЫНДЫ ЕРЕЖЕСІ ЖӘНЕ КӨБЕЙТІНДІ ЕРЕЖЕСІ)

Түйінді ұғымдар

Комбинаторика, қосынды ережесі, көбейтінді ережесі

?

Комбинаторлық есеп ұғымымен, қосынды ережесімен, көбейтінді ережесімен танысасыңдар;

қосынды ережесін, көбейтінді ережесін қолданып, комбинаторлық есептерді шешуді үйренесіңдер.

Шектелген жиынның элементтерінен қандай да бір ережелер бойынша әртүрлі комбинациялар құрастырылатын және олардың саны табылатын есептерді ***комбинаторикалық есептер*** *деп атайды.*

Комбинаторикалық есептерді қарастыратын математиканың бөлігі комбинаторика деп аталады.

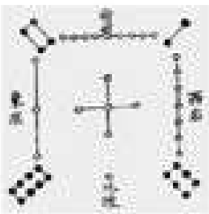
Êîìáèíàòîðèêàëûқ åñåïòåðäі åðòåäåí åæåëãі òàíûñ. Àðòèåöü ìûí æûë áұðûí Åæåëãі Қûòàéäà ñèқûðëû øàðøûëàð (àðèôìåòèêàëûқ æәíå ãåîìåòðèÿëûқ òðîãðåññèÿëàð ìåí ïàéäàëàíûëãàí ñàíäàðäûң қîñûíäûñû ìәíі áіðäåé áîëàòûíäàé òîïòàð æàçûëғàí) құðàñòûðûëғàí.

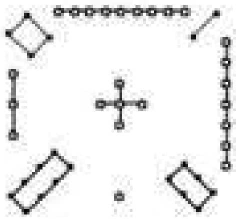
Êîìáèíàòîðèêàëûқ åñåïòåðäå øàðòàðäû құðàñòûðó æәíå àíûқòàóäàí, åæåëãі қîëæàçáàëàðäû çåðòòåóäі àêàäåìèêàëûқ ìàòåìàòèêàëàð äà қàðàñòûðғàí.

Êîìáèíàòîðèêà XVII ғàñûðäà ғûëûì ғûëûì ðåòіíäå қàðàñòûðûëғàí. Îë êåçäå ûқòèìàëäûқòàð òåîðèÿñû ïàéäà áîëғàí åäі.

Ло Шу квадраты — 3 · 3 өлшемдерімен берілген квадрат. Мұндай квадрат б.з.д. 2200 жылы Ежелгі Қытай жазбаларында кездеседі (18-сурет).

4	9	2
3	5	7
8	1	6





18-сурет

Комбинаторика ғылым ретінде XVII ғасырдан бастап қарастырылған. Осы кезеңде ықтималдықтар теориясы пайда болды.

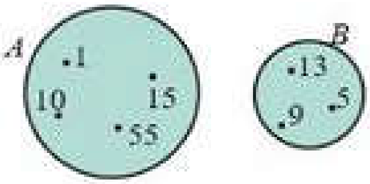
Қосынды ережесі *екі жиынның бірігуіндегі элементтер санын* табуға мүмкіндік береді.

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР

X және Y жиындарының бірігуі деп X және Y жиындарының ең болмағанда біреуіне тиісті болатын элементтерден тұратын жиынды айтады.

X және Y жиындарының бірігуінің белгіленуі: $X \cup Y$.

Жиындардың ортақ элементі болмайтын жағдайды қарастырайық.



19-сурет

A және B жиындары қандай қатынаста берілген (19-сурет)?
$n(A)$, $n(B)$ және $n(A \cup B)$ мәндерін табыңдар.

Қосынды ережесі:

> *Егер X және Y жиындарының ортақ элементі болмаса және X жиынында à элемент, Y жиынында b элемент болса, онда X және Y жиындарының бірігуі (à + b) элементтен тұрады.*

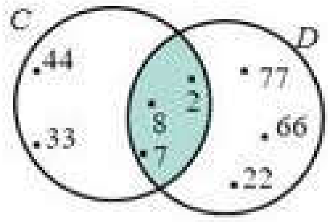
$$X \cap Y = \varnothing \Rightarrow n(X \cup Y) = n(X) + n(Y)$$

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР

X және Y жиындарының қиылысуы деп X және Y жиындарына бір мезетте тиісті болатын элементтерден тұратын жиынды айтады.

X және Y жиындарының қиылысуының белгіленуі: $X \cap Y$.

Жиындардың ортақ элементтері болатын жағдайды қарастырайық.



20-сурет

C және D жиындары қандай қатынаста берілген (20-сурет)?
$n(C)$, $n(D)$ және $n(C \cap D)$ мәндерін табыңдар.

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР

Бірде-бір элементі болмайтын жиын *бос жиын* деп аталады. Бос жиынның белгіленуі: $\varnothing$.

ТҮСІНДІРІҢДЕР

Неліктен $X \cap Y \neq \varnothing \Rightarrow n(X \cup Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cap Y)$ орындалады?

МЫСАЛ

1. Сыныптың 10 оқушысы музыка мектебіне барады, 17 оқушысы спорт үйірмесіне қатысады. 2 оқушы музыка мектебіне де, спорт үйірмесіне де барады. Сыныпта қанша оқушы бар?

Шешуі. A — музыка мектебіне баратын оқушылар жиыны болсын, онда $n(A) = 10$.

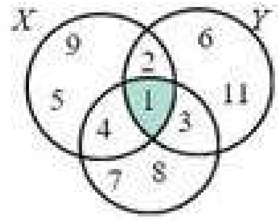
B — спорт үйірмесіне қатысатын оқушылар жиыны болсын, онда $n(B) = 17$.

$A \cap B$ — музыка мектебіне де, спорт үйірмесіне де баратын оқушылар саны болсын, онда $n(A \cap B) = 2$.

Сондықтан $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 10 + 17 - 2 = 25$.

Жауабы : 25 оқушы.

21-суретте берілген мәліметтерді қолданып, $n(X \cup Y \cup Z) = n(X) + n(Y) + n(Z) - n(X \cap Y) - n(X \cap Z) - n(Y \cap Z) + n(X \cap Y \cap Z)$ теңдігінің ақиқаттығын өздерің тексеріп көріңдер.



21-сурет

МЫСАЛ

2. Математика пәнінен болған олимпиадаға 13 оқушы, физика пәнінен 12, химия пәнінен 10, математика мен химия пәндерінен 5, физика және химия пәндерінен 3, математика және физика пәндерінен 2, математика, физика және химия пәндерінен 1 оқушы қатысты. Олимпиадаға қанша оқушы қатысқан?

Шешуі. A_1 — математика пәнінен олимпиадаға қатысқан оқушылар жиыны болсын, онда $n(A_1) = 13$.

A_2 — физика пәнінен олимпиадаға қатысқан оқушылар жиыны болсын, онда $n(A_2) = 12$.

A_3 — химия пәнінен олимпиадаға қатысқан оқушылар жиыны болсын, онда $n(A_3) = 10$.

$A_1 \cap A_2$ — математика мен физика пәндерінен олимпиадаға қатысқан оқушылар жиыны болсын, онда $n(A_1 \cap A_2) = 2$.

$A_1 \cap A_3$ — математика мен химия пәндерінен олимпиадаға қатысқан оқушылар жиыны болсын, онда $n(A_1 \cap A_3) = 5$.

$A_2 \cap A_3$ — физика мен химия пәндерінен олимпиадаға қатысқан оқушылар жиыны болсын, онда $n(A_2 \cap A_3) = 3$.

$A_1 \cap A_2 \cap A_3$ — математика, физика және химия пәндерінен олимпиадаға қатысқан оқушылар жиыны болсын, онда $n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 1$.

$n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = ?$

Формула бойынша : $n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 13 + 12 + 10 - 2 - 3 - 5 + 1 = 26$.

Жауабы : 26 оқушы.

A және B жиындары қандай қатынаста берілген (22-сурет)? $a \in A$ элементін қанша тәсілмен таңдауға болады? $b \in B$ элементін қанша тәсілмен таңдауға болады? "a немесе b" бір элементін қанша тәсілмен таңдауға болады?

22-сурет

Алгебра

Қосынды ережесінің екінші тұжырымдамасы:

Егер $a \in A$ элементін m тәсілімен, $b \in B$ элементін n тәсілімен таңдауға және $A \cap B = \emptyset$ болса, онда ¶"а немесе b" элементін $m + n$ тәсілімен таңдауға болады.

МЫСАЛ

3. Егер бір сатушыда 4 қаз, екінші сатушыда 6 қаз болса, онда бір қазды қанша тәсілмен сатып алуға болады?

Шешуі . A — бірінші сатушыдағы қаз санының жиыны болсын, онда $n(A) = 4$. B — екінші сатушыдағы қаз санының жиыны болсын, онда $n(B) = 6$. Сонда қосынды ережесі бойынша $4 + 6 = 10$.

Жауабы : 10 тәсіл.

Көбейту ережесін қарастырайық.

$X = \{1, 3, 5, 7\}$ және $Y = \{2, 4\}$ берілген. X жиынынан x элементті ($x \in X$) қанша тәсілмен таңдап алуға болады? Y жиынынан y элементті ($y \in Y$) қанша тәсілмен таңдап алуға болады? ($x; y$) жұптарын құрастырыңдар. Қанша жұп жазуға болады? Қанша тәсілмен "x және y" жұптарын құрастыруға болады?

Көбейтінді ережесі:

Егер $x \in X$ элементін m тәсілімен, $y \in Y$ элементін k тәсілімен таңдауға болса, онда ô және y жұбын $m \cdot k$ тәсілімен таңдауға болады.

МЫСАЛ

4. Егер санның жазылуындағы цифрлар қайталанбайтын болса, онда 5, 6, 7 цифрларын қолданып, қанша үштаңбалы сан жазуға болады?

Шешуі . Ізделінді санның бірінші цифрын үш тәсілмен таңдауға болады (ол не 5, не 6, не 7 саны болуы мүмкін).

Ізделінді санның екінші цифрын екі тәсілмен таңдауға болады, өйткені санның жазылуындағы цифрлар қайталанбайды (егер бірінші цифры 5 болса, онда екінші цифры не 6, не 7 саны болуы мүмкін, егер бірінші цифры 6 болса, онда екінші цифры не 5, не 7 саны болуы мүмкін және т.с.с.).

Ізделінді санның үшінші цифрын 1 тәсілмен таңдауға болады. Сонда көбейтіндінің ережесі бойынша үштаңбалы сан $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ тәсілмен таңдалады.

Жауабы : 6 үштаңбалы сан.

Осы есепті мүмкін болатын нұсқаларды қарастырып шығарыңдар және шыққан сандарды жазыңдар.

1. Комбинаторикалық есепке мысал келтіріңдер.
2. Қандай жағдайда қосынды ережесі қолданылады?
3. Қандай жағдайда көбейтінді ережесі қолданылады?

Жаттығулар

A

7.1. Егер дүкенде алманың 4 түрлі сорты және алмұрттың 3 түрлі сорты болса, онда 1 кг алма немесе алмұртты қанша тәсілмен алуға болады?

7.2. Егер дүкенде кәмпиттің 10 түрлі сорты және тәтті нанның 12 түрлі сорты болса, онда 1 кг кәмпит пен 1 кг тәтті нанды қанша тәсілмен алуға болады?

7.3. Егер жазылуында цифрлар қайталанбайтын болса, онда 2; 4 және 9 цифрларынан қанша үштаңбалы сан құрастыруға болады?

7.4. 5 конверт және 4 пошта маркасы бар. Маркаларды қанша тәсілмен конверттерге желімдеуге болады?

7.5. Сынып оқушылары жүзумен немесе теннис ойнаумен айналысады. Сыныптың 12 оқушысы жүзуге, 18 оқушысы тенниске, 5 оқушысы жүзу мен тенниске қатысатын болса, онда сыныпта қанша оқушы бар?

7.6. Қызғалдақтан 7 гүлшоғы, нәркестен 9 гүлшоғы, қызғалдақ пен нәркестен 3 гүлшоғы жасалды. Барлығы қанша гүлшоғы жасалды?

B

7.7. 12 оқушы математика және физика бойынша емтихан тапсырды. Екі емтихан бойынша 1 оқушы математикадан, 3 оқушы физикадан, 1 оқушы екі пәннен емтихан тапсыра алмады. Үлгерімі төмен оқушылар саны қанша?

7.8. 42 оқушы математикадан, 37 оқушы информатикадан, 19 оқушы екі пән бойынша олимпиадаға қатысты. Осы пәндер бойынша олимпиадаға қанша оқушы қатысты?

7.9. 9 жай және жұп сандардың 7-еуі жай сан, біреуі жай жұп сан. Осы 9 санның қаншасы жұп сан?

7.10. 10 санынан үлкен 30 санның ішінде 20 жай сан, 25 тақ сан бар. Осы сандардың арасында қанша жай тақ сан бар?

7.11. Тіктөртбұрыш, ромб, шаршының барлық саны 20. Оның 14-і ромб, 9-ы тікт өртбұрыш. Шаршының саны қанша?

C

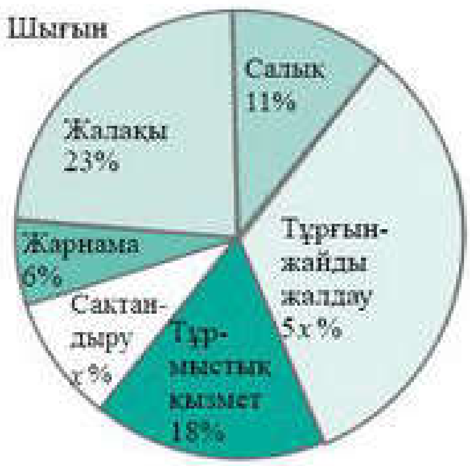
7.12. Топта 9 оқушы емтиханнан өте жақсы, 15-і жақсы, 7-еуі қанағаттанарлық, 6-уы өте жақсы және жақсы, 3-еуі қанағаттанарлық және жақсы, 3-еуі өте жақсы және қанағаттанарлық, 2-уі өте жақсы, қанағаттанарлық және жақсы баға алды. Топтағы оқушылар саны қанша?

7.13. 80 ашықхаттың 40-ында қызғалдақ, 20-сында нәркес, 10-ында қызғалдақ пен серігүл, 5-еуінде нәркес пен серігүл, 5-еуінде қызғалдақ пен нәркес, 10-ында қызғалдақ, нәркес, серігүл бейнеленген. Серігүл бейнеленген ашықхаттардың саны қанша?

7.14. 1) 100 сыйлық жинағының 50-інде конфет, 45-інде жаңғақ, 35-інде мандарин, 20-сында конфет, жаңғақ, мандарин, 25-інде конфет және жаңғақ, 15-інде жаңғақ және мандарин болды. Конфет пен мандариннен тұратын сыйлық жинағы қанша?
2) 50 қызметкердің 40-ы қазақ тілін, 20-сы ағылшын тілін, 10-ы түрік тілін, 15-і қазақ және ағылшын тілдерін, 5-еуі қазақ және түрік тілдерін, 5-еуі ағылшын және түрік тілдерін меңгерген. Қанша қызметкер қазақ, ағылшын, түрік тілдерін, яғни үш тілді меңгерген?

ҚАЙТАЛАУ

7.15. PISA Фирманың бір айдағы шығысы диаграмма түрінде берілген (23-сурет). Шығыстың жалпы сомасы 1 200 000 тг. Фирманың салық пен сақтандаруға жіберген шығысын табыңдар.



23-сурет

7.16. Пойыз 50 км/сағ жылдамдықпен жүрді. Жолаушы қарсы келе жатқан пойыз қасынан 3 с жүріп өткенін байқады. Егер пойыздың ұзындығы 80 м болса, онда оның жылдамдығын табыңдар.

7.17. Теңдеулер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 7, \\ 3x^2 - y^2 = 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^2 - 1 = y^2, \\ y^2 = x^2 - 0{,}5. \end{cases}$

7.18. Теңсіздіктер жүйесінің шешімдер жиынын координаталық жазықтықта кескіндеңдер:

1) $\begin{cases} ||x|| \geq 4; \\ y + 2x < 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y^2 + x^2 - 9 \leq 0; \\ y - 2|x| > 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} ||x|| < 2, \\ x^2 + y^2 - 16 > 0. \end{cases}$

Жаңа білімді меңгеруге дайындаламыз

7.19. Берілген сандардан жұп цифрларын қанша тәсілмен таңдап алуға болады:

1) 1; 2; 3; 4; 5; 7; 8; 2) 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9?

7.20. Егер жазылуында цифрлар қайталанбайтын болса, онда 0, 5, 7 және 9 цифрларынан барлық үштаңбалы сандарды құрастырыңдар.

Жаңа білімді меңгеруге арналған тірек ұғымдар

Жиын, сандар жиыны, ішкі жиын, жиын элементтері.

§8. САННЫҢ ФАКТОРИАЛЫ. ОРНАЛАСТЫРУЛАР МЕН АЛМАСТЫРУЛАР

Түйінді ұғымдар

Факториал, алмастырулар, орналастырулар

Орналастыру, алмастыру ұғымдарымен, қайталанатын және қайталанбайтын орналастырулар мен алмастыруларды есептеу формулаларымен танысасыңдар; қайталанатын және қайталанбайтын орналастырулар мен алмастыруларды есептеу формулаларын қолдануды үйренесіңдер.

Математикада 1 санынан бастап қандай да бір санға дейінгі натурал сандардың тізбектей алынған көбейтіндісі жиі кездеседі. Мысалы, $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$, немесе $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 700$ және т.с.с.

1 санынан n санына дейінгі тізбектей алынған натурал сандардың көбейтіндісін $n!$ белгісімен жазады.

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

Оқылуы:

$n!$ — эн факториал.

$1! = 1$ және $0! = 1$ деп есептеледі.

МЫСАЛ

1. $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$; $7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$.

Әрбір элементінің орнын анықтауды қажет ететін $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ жиынын қарастырайық. Мұндай реттелген жиындар жай жақшамен жазылады. (x_1, x_2) және (x_2, x_1) жазулары әртүрлі, өйткені оларда элементтердің орналасу реті бірдей емес: $(x_1, x_2) \neq (x_2, x_1)$. Бірақ $\{x_1, x_2\}$ және $\{x_2, x_1\}$ жиындары бірдей.

$A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ жиынының барлық n элементін қамтитын реттелген жиындар n элементтен тұратын ***қайталанбайтын алмастырулар*** *деп аталады.*

МЫСАЛ

2. $A = \{10, 17, 28, 9\}$ жиыны берілсе, онда (10, 17, 28, 9), (17, 10, 28, 9); (9, 17, 10, 28) жиындары A жиынының 4 элементінен тұратын қайталанбайтын алмастырулары болып табылады.

Белгіленуі : P_n — n элементтен тұратын қайталанбайтын алмастырулар саны.

Теорема. ***n элементтен тұратын қайталанбайтын алмастырулар саны $n!$-ға тең.***

Теореманың қысқаша жазылуы: $P_n = n!$

Дәлелдеуі . $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ жиынының n элементтен тұратын қайталанбайтын алмастыруларын құрастыру процесін қарастырайық.

Алмастыруды құрастыру дегеніміз A жиынының қай элементі бірінші, қайсысы екінші және т.с.с. болатынын анықтау. A жиынында n элемент болғандықтан, бірінші элементті n тәсілмен, екінші элементті $(n - 1)$ тәсілмен (себебі, элементтер қайталанбайды) таңдап алуға болады. Үшінші элементті таңдау $(n - 2)$ тәсілмен таңдалады. Осы процесті жалғастыра отырып, n-элементті бір ғана тәсілмен таңдауға болатынына көз жеткіземіз. Көбейтінді ережесі бойынша барлық n элемент $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$ тәсілімен таңд алады. ■

МЫСАЛ

3. Бір цифр екі рет қайталанбайтындай 9, 3, 7 цифрларынан үштаңбалы сандар құрастырайық.

Шешуі . {9, 3, 7} жиын берілген. Жиынды реттеп, алмастырулар санын табу керек: $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Осы санды іріктеп жазу арқылы табуға болады: 937; 973; 739; 793; 397; 379.

Жауабы : алты сан.

1, 2, 3, 4 төрт цифрын $P_4 = 4! = 24$ тәсілмен алмастыруға болады.

*n элементтен тұратын жиынның k элементінен реттелген жиындарды n элементтен алынған **k-дан құралған қайталанбайтын орналастырулар** деп айтады.*

Белгіленуі : A_n^k — n элементтен алынған k-дан құралған қайталанбайтын орналастырулар саны.

Демек, n элементтен алынған k-дан құралған ішкі жиындарда элементтердің реті есептеледі.

Теорема : $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$, **немесе** $A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n - k + 1)$.

Дәлелдеуі . $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ жиыны берілсін және $n(X) = n$.

n элементтен алынған k-дан құралған қайталанбайтын орналастыруларды құрастыруды қарастырайық.

Реттелген жиынның бірінші элементі n тәсілмен;

екінші элементі $(n - 1)$ тәсілмен;

үшінші элементі $(n - 2)$ тәсілмен және т.с.с.

k-элементі $(n - k + 1)$ тәсілмен таңдалады.

k-элементтерді таңдау тәсілінің санын көбейту ережесімен табамыз:

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n - k + 1) =$$
$$= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k) \cdot \ldots \cdot 1}{(n-k) \cdot \ldots \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

$A_n^k = \frac{P_n}{(n-k)!}$ формуласы ақиқат.

МЫСАЛ

4. Қазақ, орыс, ағылшын, француз және неміс тілдерінен осы тілдердің кез келгеніне аударма жасау үшін қанша сөздік басып шығару керек?

Шешуі : X = {қазақ, орыс, ағылшын, француз, неміс} және $n(X) = 5$. Реттелген жұптарды құрастыру керек (элементтері қайталанбайды), яғни екі элементтен тұратын реттелген жиынды құрастырамыз. Мысалы, (қазақша, орысша), (орысша, қазақша) және т.с.с.

Демек, $A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$.

Жауабы : 20 сөздік.

?

1. $n!$ белгісі нені білдіреді?
2. (x_1, x_2) және $\{x_1, x_2\}$ жазулары нені көрсетеді?
3. Қайталанбайтын алмастырулар мен орналастырулардың қандай ұқсастығы және қандай айырмашылығы бар?

4. Қайталанбайтын алмастырулар қандай жағдайларда қолданылады?
5. Қайталанбайтын орналастырулар қандай жағдайларда қолданылады?

Жаттығулар

A

8.1. 1) n элементтен тұратын қайталанбайтын алмастырулар саны қандай формуламен есептеледі?
2) n элементтен тұратын қайталанбайтын орналастырулар саны қандай формуламен есептеледі?

8.2. Есептеңдер:

1) P_4; 2) P_6; 3) $\frac{P_7}{P_5}$; 4) $\frac{P_6}{P_8}$; 5) $\frac{P_8}{P_7}+\frac{P_5}{P_6}$; 6) $\frac{P_9}{P_7}-\frac{P_7}{P_5}$.

8.3. 1) 3334 саны өзгеретіндей етіп цифрларды алмастыру санын табыңдар.
2) 3334 саны өзгермейтіндей етіп цифрларды алмастыру санын табыңдар.
3) Комбинаторика сөзі өзгермейтіндей етіп әріптерді алмастыру санын табыңдар.

8.4. 1) Бір цифр екі рет қайталанбайтындай 6, 7, 8, 9 цифрларынан құрастырылатын төрттаңбалы сандар қанша?

2) Үшбұрыш, дөңгелек және квадратты түстері әртүрлі болатындай етіп көк, қызыл және сары түстермен бояу тәсілдерінің санын табыңдар.

3) Жарыска қатысушы 7 ойыншыға 7 орынды үлестірудің қанша тәсілі бар?

8.5. Есептеңдер: 1) A_7^4; 2) A_5^4.

B

8.6. Теңдеуді шешіңдер:

1) $A_x^1=2$; 2) $A_x^1=2x$; 3) $A_x^2=2x$; 4) $A_x^2=3x+12$.

8.7. 1) 20 оқушыдан сынып басшысы мен спорт жұмыстарына жауап берушіні таңдаудың қанша тәсілі бар?

2) {3, 4 және 5} бағаларының бірін екі оқушыға қоюдың қанша тәсілі бар?

C

8.8. 1) 2 фигураны 6 түспен бояудың қанша тәсілі бар?
2) 1 және 2 цифрларының көмегімен жазылатын 1000-нан кіші натурал сандар қанша?

8.9. Теңдеуді шешіңдер:

1) $A_x^2 = 20$; 2) $P_x = 24$; 3) $A_x^2 = x(x - 1)$.

8.10. Теңдеудің түбірлерін табыңдар:

1) $A_x^3 = 14x - 2x^2$; 2) $A_x^3 = 20x + 4x^2$; 3) $A_x^3 = 2x^3 - 5x^2 - 6x$.

ҚАЙТАЛАУ

8.11. 1) Оң екітаңбалы санның цифрларының қосындысының мәні 13-ке тең. Егер берілген саннан 27 санын азайтса, онда бастапқы санның цифрларымен кері ретпен жазылған екітаңбалы сан шығады. Бастапқы санды табыңдар.
2) Оң екітаңбалы санның цифрларының квадраттарының қосындысының мәні 13-ке тең. Егер берілген саннан 9 санын азайтса, онда бастапқы санның цифрларымен кері ретпен жазылған екітаңбалы сан шығады. Бастапқы санды табыңдар.

8.12. Теңсіздіктер жүйесінің шешімдер жиынын координаталық жазықтықта кескіндеңдер:

1) $\begin{cases} x^2 \leqslant 9; \\ y + x^2 < 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y^2 + x^2 - 9 \leqslant 0; \\ y > x^2 - 2x; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} |x| \leqslant 3; \\ x^2 + y^2 - 9 \geqslant 0. \end{cases}$

8.13. Теңсіздікті қанағаттандыратын ең үлкен натурал санды табыңдар:

1) $(4 - x)(x - 6)^2 > 0$; 2) $(x - 3)^2(x - 10)$ m 0;
3) $\dfrac{x^2 - 81}{x + 5} < 0$; 4) $\dfrac{13x - x^2}{x - 5,5} \geqslant 0$.

8.14. Мырыш , мыс және қалайыдан тұратын екі құйма бар. Бірінші құйма 25% мырыштан, екінші құйма 50% мыстан тұрады. Бірінші құймадағы қалайының пайыздық құрамы екіншіге қарағанда екі есе көп. Бірінші құймадан 200 кг және екінші құймадан 300 кг қорытып, құрамында 28% қалайы бар жаңа құйма алынды. Алынған жаңа құймада қанша килограмм мыс бар?

Жаңа білімді меңгеруге дайындаламыз

8.15. 1) Әртүрлі 4 жейде мен әртүрлі 4 шалбардан жейде мен шалбардан тұратын қанша жинақталым құрастыруға болады?
2) Азық-түлік дүкенінде шұжықтың 4 сұрпы, кәмпиттің 2 сұрпы және нанның 3 сұрпы бар. 1 кг шұжық, 1 бөлке нан және 0,5 кг кәмпитті қанша тәсілмен сатып алуға болады?

8.16. $\{1, 2, 3, 4\}$ жиынының бір элементті, екі элементті, үш элементті ішкі жиындарын жазыңдар. Бір элементі де болмайтын, бір элементі, екі элементі, үш элементі болатын қанша ішкі жиын бар? Барлығы қанша ішкі жиын жазылды?

Жаңа білімді меңгеруге арналған тірек ұғымдар

Жиын, сандар жиыны, ішкі жиын, жиын элементтері, қайталанбайтын алмастырулар, қайталанбайтын орналастырулар.

§ 9. ҚАЙТАЛАНБАЙТЫН ТЕРУЛЕР. КОМБИНАТОРИКАНЫҢ НЕГІЗГІ ФОРМУЛАЛАРЫ

Түйінді ұғымдар

Терулер, жиын, ішкі жиын

Қайталанбайтын терулер ұғымымен танысасыңдар; қайталанбайтын терулердің формулаларын қолдануды үйренесіңдер.

n элементтен тұратын жиынның k элементінен құралған ішкі жиындарды n элементтен алынған ***k-дан құралған қайталанбайтын терулер*** *деп айтады.*

Белгіленуі : C_n^k — n элементтен алынған k-дан құралған қайталанбайтын терулер саны.

k элементтен тұратын ішкі жиындарда элемент реті есептелмейді, ішкі жиындардың ең болмағанда бір элементке айырмашылығы болады.

Теорема : $C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$.

Дәлелдеуі : $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ жиыны берілсін және $n(X) = n$. n элементтен алынған k-дан құралған қайталанбайтын терулерді құрастыру жолын қарастырайық. k элементті таңдау мен реттеу A_n^k тәсілмен жүргізіледі, яғни $\frac{n!}{(n-k)!}$, өйткені теруде элементтердің орна ласуы маңызды емес. Онда терулер саны k элементтен қанша алмастырулар жасалса, сонша есе, яғни $k!$ рет кіші болады: $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

МЫСАЛ

36 нөмірден 5 нөмірді қанша тәсілмен таңдауға болады?

Шешуі : $A = \{1, \ldots, 36\}$ нөмірлер жиыны берілген. Осы жиыннан 5 нөмірді таңдау қажет. Нөмірлерді таңдау реті рөл атқармайды. Қайталанбайтын терулер санын табамыз:

$$C_{36}^5 = \frac{36!}{5! \cdot (36-5)!} = \frac{36!}{5! \cdot 31!} = 376\ 992.$$

Жауабы : 376 992 тәсіл.

Қайталанбайтын терулердің кейбір қасиеттері

1-қасиет. $C_n^0 = C_n^n = 1.$

Дәлелдеуі. $C_n^0 = \dfrac{n!}{0!(n-0)!} = \dfrac{n!}{n!} = 1.$

$C_n^n = \dfrac{n!}{n!(n-n)!} = \dfrac{n!}{n!} = 1.$ Ендеше, $C_n^0 = C_n^n = 1.$

2-қасиет. $C_n^k = C_n^{n-k}.$

Дәлелдеуі. $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ және $C_n^{n-k} = \dfrac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}.$

Ендеше, $C_n^k = C_n^{n-k}.$

МЫСАЛ

1. $C_7^3 = C_7^4$; **2**. $C_9^6 = C_9^3$.

3-қасиет. $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k.$

Дәлелдеуі. $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = \dfrac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} + \dfrac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} =$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} \cdot \left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k}\right) =$$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} \cdot \frac{n}{(n-k)k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k.$$

МЫСАЛ

1. $C_7^3 + C_7^4 = C_8^4$. **2.** $C_5^2 = C_4^1 + C_4^2$.

4-қасиет. $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n.$

Теорема. *n элементтен тұратын жиынның 2^n ішкі жиыны бар*.

Дәлелдеуі. Дәлелдеу математикалық индукция әдісімен жүргізіледі.

Теореманың $n = 1$ болғандағы ақиқаттығын тексереміз: $C_1^0 + C_1^1 = 2$. 1-қасиет бойынша $C_1^0 = 1$ және $C_1^1 = 1$. Демек, $C_1^0 + C_1^1 = 1 + 1 = 2$ — теңдік тура.

$n = k$ болғанда тұжырым ақиқат деп есептейміз, яғни $C_k^0 + C_k^1 + ... + C_k^k = 2^k$.

Енді $n = k + 1$ үшін ақиқат екенін дәлелдейік, яғни $C_{k+1}^0 + C_{k+1}^1 + ... + C_{k+1}^{k+1} = 2^{k+1}$.

Алдымен, $C_k^0 + C_k^1 + ... + C_k^k = 2^k$ теңдігінің екі жағын да 2 санына көбейтеміз: $2(C_k^0 + C_k^1 + ... + C_k^k) = 2 \cdot 2^k$. Енді соңғы теңдіктің сол жағын түрлендіреміз:

$C_k^0 + (C_k^0 + C_k^1) + (C_k^1 + C_k^2) + (C_k^2 + C_k^3) + ... + (C_k^{k-1} + C_k^k) + C_k^k = 2^{k+1}$.

Мұндағы $C_k^0 + C_k^1 = C_{k+1}^1$; $C_k^1 + C_k^2 = C_{k+1}^2$; $C_k^{k-1} + C_k^k = C_{k+1}^k$; $C_k^0 = C_{k+1}^0$; $C_k^k = C_{k+1}^{k+1}$ (1—3-қасиеттер бойынша).

Демек, $C_{k+1}^0 + C_{k+1}^1 + ... + C_{k+1}^{k+1} = 2^{k+1}$. ■

?

1. k элементі бар қандай да жиынның n элементтен тұратын қайталанбайтын терулері осы жиын үшін не болады?
2. C_n^0; C_n^n; C_n^k жазулары нені білдіреді?
3. Қайталанбайтын терулер мен орналастырулардың қандай ұқсастығы және қандай өзгешелігі бар?
4. 16 ішкі жиыны бар жиынның қанша элементі бар?

Жаттығулар

A

9.1. Есептеңдер: 1) C_5^4; 2) C_5^3; 3) C_6^3; 4) C_{11}^9.

9.2. 1) 5 қаламның 2-уін және 3 қарындаштың 2-еуін таңдау тәсілінің санын табыңдар.

2) 10 раушангүлдің 3-еуін және 7 қалампырдың 4-уін таңдау тәсілінің санын табыңдар.

3) 20 ер баланың 2-еуін және 21 қыз баланың 2-еуін таңдау тәсілінің санын табыңдар.

9.3. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $C_8^4 + C_8^5 = C_9^4$; 2) $C_8^4 + C_8^5 + C_9^6 = C_{10}^6$;

3) $C_6^0 + C_6^1 + C_6^2 + ... + C_6^6 = 64$.

B

9.4. Теңдеуді шешіңдер:

1) $C_n^2 = 28$; 2) $C_n^{n-3} = 20$; 3) $C_n^{n-2} = 36$.

9.5. Асхана мәзірінде 7 түрлі сұйық тағам, 9 түрлі қою тағам және 4 түрлі сусын ұсынылған. Сұйық, қою және сусыннан тұратын түскі асты қанша тәсілмен таңдауға болады?

9.6. Теңдеуді шешіңдер:

1) $C_{2n+1}^{n-1} : C_{2n}^{n+1} = \frac{5}{3}$; 2) $A_{2x+3}^{x-1} : A_{2x}^{x+1} = \frac{1}{30}$; 3) $C_n^2 \cdot A_n^2 = 32$.

C

9.7. Шеңбердің бойында $A_1, A_2, \ldots, A_{17}, A_{18}$ нүктелері тізбектей белгіленген.

1) Ұштары осы нүктелерде болатын хордалар санын;
2) төбелері осы нүктелерде болатын үшбұрыштар санын табыңдар.

***9.8.** a және b түзулері параллель және $a \neq b$. a түзуінің бойынан 6 нүкте, b түзуінің бойынан 9 нүкте белгіленген.

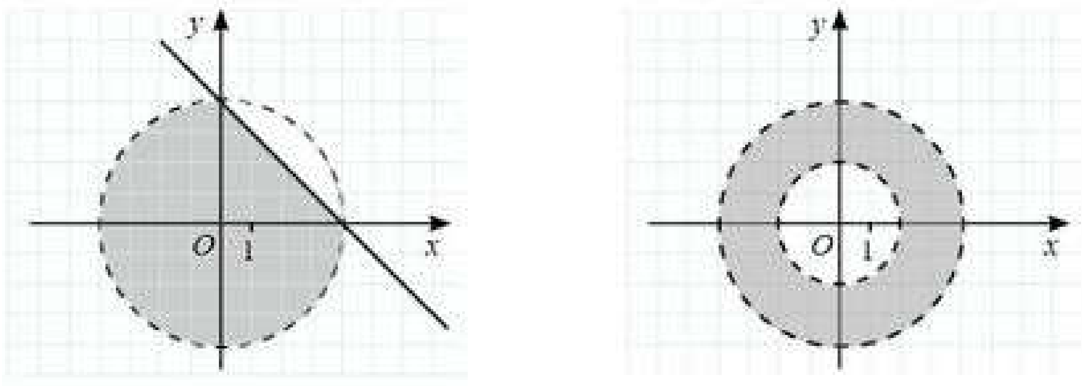
1) Төбелері осы нүктелерде болатын үшбұрыштар санын;
2) төбелері осы нүктелерде болатын дөңес төртбұрыштар санын (төртбұрыштың үш төбесі бір түзудің бойында жатпайды) табыңдар .

ҚАЙТАЛАУ

9.9. Көпмүшені көбейткіштерге жіктеңдер:

1) $x^3 + 3x - 4$; 2) $x^3 + 2x^2 - 3x - 6$;
3) $x^3 + 3x^2 + 3x + 9$; 4) $x^4 - 3x^2 - 4$.

9.10. 24-суретте боялған нүктелер жиынын теңсіздіктер жүйесі арқылы жазыңдар:



1) 2)

24-сурет

9.11. Теңдеуді шешіңдер:

1) $x^4 - 7x^2 - 18 = 0$; 2) $x^4 + 4x^2 - 45 = 0$;

3) $x^2 - 4x - 3\sqrt{(x-2)^2} = 14$; 4) $x - 5 + 2\sqrt{x-5} = 8$.

Жаңа білімді меңгеруге дайындаламыз

9.12. **1)** Егер жазылуында цифрлар қайталанбайтын болса, онда 0, 1, 3 және 5 цифрларынан барлық үштаңбалы сандарды құрастырыңдар.

2) Жарысқа қатысушы 10 спортшыны 10 орынды үлестірудің қанша тәсілі болатынын табыңдар.

9.13. Әртүрлі 4 жейде мен әртүрлі 6 шалбардан тұратын жейде мен шалбардан қанша жинақталым құрастыруға болады?

Жаңа білімді меңгеруге арналған тірек ұғымдар

Жиын, сандар жиыны, ішкі жиын, жиын элементтері, қайталанбайтын алмастырулар, қайталанбайтын орналастырулар, қайталанбайтын терулер.

§10. КОМБИНАТОРИКА ФОРМУЛАЛАРЫН ҚОЛДАНЫП ЕСЕПТЕР ШЫҒАРУ

Түйінді ұғымдар

Алмастырулар, орналастырулар, терулер

Комбинаторика формулаларын қолданып, қайталанбайтын алмастырулар, қайталанбайтын орналастырулар, қайталанбайтын терулер санын табуды үйренесіңдер.

Қайталанбайтын алмастырулар, орналастырулар, терулерді қолдану арқылы комбинаторикалық есептерді шығару барысында есепте берілген жиындардың элементтеріне қатысты келесі амалдарды ескеру қажет.

Атап айтқанда:

1) n-элементті жиынның барлық элементтерін реттеу;

2) n-элементті жиыннан k-элементті ішкі жиынды ажырату;

3) n-элементті жиыннан k-элементті ішкі жиынды ажырату және реттеу.

Бірінші амалдың нәтижесі n-элементтен тұратын қайталанбайтын орналастырулар болады және олардың саны $P_n = n!$ формуласымен есептеледі.

Екінші амалдың нәтижесі n-элементінен k-элементтен алынған терулер болады және олардың саны $C_n^k = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$ формуласымен табылады.

Үшінші амалдың нәтижесі n-элементінен k-элементтен алынған орналастырулар болады және олардың саны $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ формуласымен есептеледі.

МЫСАЛ

1. Кіреберіске кіру үшін 0, 1, 2, ...,9 он цифрының әртүрлі екеуінен тұратын екітаңбалы санның цифрларын: 1) бір мезетте; 2) тізбектей басу керек. Үйге кіретін адам екітаңбалы санды білмегендіктен, қажетті екітаңбалы санды басу үшін ол қанша нұсқаны қарастыруы керек?

Шешуі. 1) Есепте 10 элементтен тұратын 2 элементті ішкі жиын туралы айтылған және цифрлар бір мезетте басылатын болғандықтан, ол цифрларды таңдау реті маңызды емес. Сондықтан қайталанбайтын терулер саны есептеледі: $C_{10}^2 = \frac{10!}{2!8!} = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45$.

2) Есепте 10 элементтен тұратын 2 элементті ішкі жиын туралы айтылған және цифрлар тізбектей басылатын болғандықтан, ол цифрларды таңдау реті маңызды. Сондықтан қайталанбайтын орналастырулар саны есептеледі: $A_{10}^2 = \frac{10!}{8!} = 9 \cdot 10 = 90$.

Жауабы : 1) 45 нұсқа; 2) 90 нұсқа.

МЫСАЛ

2. Құлыптың 5 түймешегі бар. Құлыпты ашу үшін түймешектерді белгілі бір тізбекте басу керек. Қажетті нұсқаны табу үшін цифрлар жиынтығының әртүрлі қанша нұсқасын қарастыру керек?

Шешуі. Есепте 5 элементтен тұратын жиынның барлық элементтерін реттеу туралы айтылған. Сондықтан 5 элементтен тұратын қайталанбайтын орналастырулар саны табылады:

$$P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

Жауабы : 120 нұсқа.

? **1.** Комбинаторлық есептерде қай уақытта қайталанбайтын орналастырулар, қайталанбайтын алмастырулар, қайталанбайтын терулер есептеледі?

Жаттығулар

А

10.1. Өрнектің мәнін табыңдар:

1) $\frac{P_7}{P_4}$; 2) $\frac{A_6^5}{P_7}$; 3) $1 + \frac{P_8}{P_7} + \frac{P_5}{P_6}$; 4) $\frac{P_9}{P_7} - \frac{P_7}{P_5} - 2$.

10.2. Егер жазылуында цифрлар қайталанбайтын болса, онда 2, 1, 8 және 6 цифрларынан құрастырылған барлық тақ төрттаңбалы сандардың санын табыңдар.

10.3. Теңдеуді шешіңдер:

1) $A_x^1 = 5$; 2) $A_x^1 = 5x$; 3) $A_x^2 = 5x$; 4) $A_x^2 = 4x + 24$.

10.4. Азық-түлік дүкенінде алманың 6 сұрпы және мандариннің 3 сұрпы бар. 1 кг алма және 1 кг мандаринді қанша тәсілмен сатып алуға болады?

10.5. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $C_7^4 + C_7^3 = C_8^4$; 2) $C_8^4 + C_8^3 + C_9^5 = C_{10}^5$;

3) $C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + \ldots + C_5^5 = 32$.

10.6. Есептеңдер:

1) $\frac{P_4}{P_8} \cdot A_8^4$; 2) $\frac{P_5}{P_9} \cdot A_9^5$; 3) $\frac{P_{20}}{A_{20}^{15}} : A_{20}^3$; 4) $\frac{P_{14}}{A_{14}^{10}} : C_8^5 : C_{11}^{11}$.

B

10.7. $y = ax^2 + bx + c$ функциясының графигінде $A_1, A_2, \ldots, A_{11}, A_{12}$ нүктелері тізбектей белгіленген.

1) Ұштары осы нүктелерде болатын кесінділер санын;

2) төбелері осы нүктелерде болатын үшбұрыштар санын табыңдар.

10.8. Абонент телефонның екі цифрын ұмытып қалған. Егер ұмытылған цифрлар әртүрлі екенін ескерсе, онда абонент ең көп дегенде қанша нөмір теруі керек?

10.9. Барлық цифрлары әртүрлі болатын қанша төрттаңбалы сан бар?

C

10.10. 9 қабатты үйдің жедел сатысына 3 адам кірді. Егер алғашқы үш қабатта жедел саты тоқтамайтын болса, онда адамдар үйдің қабаттарына қанша тәсілмен шығады?

10.11. Жаттығуға 12 баскетболшы қатысады және оның біреуі капитан. Әр командада капитан болатындай баскетболшылардан 5 адамнан тұратын қанша команда құрастыруға болады?

10.12. Кафе мәзірінде 3 бірінші тағам, 4 екінші тағам және таңдауға қарай кофе, шай, компот жазылған. Бірінші мен екінші тағамнан және сусыннан тұратын мәзірді таңдаудың қанша тәсілі бар?

10.13. Оқушы емтиханның 25 сұрағының 18-іне дайындалған, 4 сұрағына дайындалмаған, қалған сұрақтардың кейбіреуін біледі, кейбіреуін білмейді. Емтихан билетінде үш сұрақ жазылған.

1) Билеттердің қанша нұсқасы болатынын табыңдар.

2) Оқушы барлық сұрақтарының жауабын білетін билеттер саны қанша?

3) Оқушы жауабын білетін, жауабын білмейтін, білетін және білмейтін сұрақтардан тұраты н билеттер саны қанша?

ҚАЙТАЛАУ

10.14 . 1) Жаңа жиналған жидектің ылғалдылығы 90%-ды, кептірілген жидектің ылғалдылығы 12%-ды құрайды. 40 кг жаңа жиналған жидектерден қанша килограмм кептірілген жидек алынады?

2) Жаңа жиналған алманың ылғалдылығы 96%-ды, кептірілген алманың ылғалдылығы 10%-ды құрайды. 2 кг жаңа жиналған жидектерден қанша килограмм кептірілген жидек алынады?

3) 40 т темір кенінен 6% қоспасы бар 20 т болат алынады. Темір кеніндегі қоспаның пайызын табыңда р.

10.15. 1) $\frac{1}{x^2-2x}-\frac{3}{(x-5)(x-2)}\leqslant\frac{2}{x-5}$ теңсіздігін шешіңдер және $[-1;\ 6]$ кесіндісіне тиісті теңсіздіктің бүтін шешімдерінің қосындысының мәнін табыңдар.

2) $\frac{1}{x^2+2x}-\frac{6}{(x+5)(x+2)}\leqslant\frac{2}{x+5}$ теңсіздігін шешіңдер және $[-4;\ 5]$ кесінд ісіне тиісті теңсіздіктің бүтін шешімдерінің қосындысының мәнін табыңдар.

Жаңа білімді меңгеруге дайындаламыз

10.16. Өрнекті көпмүше түрінде жазыңдар:

1) $(2x-3)^3+27-(2x)^3+40x^2-1$;

2) $(1-2x)^3+8x^3-1$;

3) $(x-2)^3+2(3x-1)^2+10$;

4) $(3-x^2)^2+6x^2-3x-1$.

Жаңа білімді меңгеруге дайындаламыз

10.17. Теңдеуді шешіңдер:

1) $A^2_{x+1} = 20$; 2) $A^2_{x+2} = 26 + 8x$;

3) $C^2_{x+1} = 45$; 4) $C^2_{x+2} = 33 + 1{,}5x$.

Жаңа білімді меңгеруге арналған тірек ұғымдар

Жиын, сандар жиыны, ішкі жиын, жиын элементтері, қайталанбайтын алмастырулар, қайталанбайтын орналастырулар, қайталанбайтын терулер.

§ 11. НЬЮТОН БИНОМЫ ЖӘНЕ ОНЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ

Түйінді ұғымдар

Ньютон биномы, екімүше, дәреже, дәреженің көрсеткіші, жұп сан, тақ сан, натурал сан

?

Ньютон биномы, биномдық коэффициенттер; Ньютон биномының қасиеттерімен танысасыңдар;

Ньютон биномын қолдануды үйренесіңдер.

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР

Сендер қысқаша көбейту формулаларын оқыдыңдар. Атап айтқанда, екімүшенің қосындысының квадраты $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ және екімүшенің қосындысының кубы $(x + a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$.

Екімүшенің қосындысының төртінші дәрежесінің формуласын алу үшін екімүшенің қосындысының кубы формуласы мен көпмүшені көпмүшеге көбейтуді қолданамыз: $(x + a)^4 = (x + a)^3(x + a) = (x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3)(x + a) = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4$.

Осылай жалғастыра отырып, екімүшенің қосындысының n-дәрежесінің формуласын алуға болады:

$$(x + a)^n = x^n + n \cdot a \cdot x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot a^2 \cdot x^{n-2} + \ldots + \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} \cdot a^k x^{n-k} + \ldots + a^n. \quad (1)$$

Енді (1) формуланың оң жақ бөлігіндегі коэффициенттерді $C^k_n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ терулер санымен алмастырсақ, (1) формула мына түрге көшеді:

$$(x + a)^n = C^0_n \cdot a^0 \cdot x^n + C^1_n \cdot a^1 \cdot x^{n-1} + C^2_n \cdot a^2 \cdot x^{n-2} + \ldots + C^n_n \cdot a^n \cdot x^0. \quad (2)$$

Шыққан теңдіктерді келесі түрде жазуға болатынын өздерің қарастырыңдар :

$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2 = C_2^0 x^2 + C_2^1 ax + C_2^2 a^2;$

$(x+a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 = C_3^0 x^3 + C_3^1 ax^2 + C_3^2 a^2x + C_3^3 a^3;$

$(x+a)^4 = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4 =$

$= C_4^0 x^4 + C_4^1 ax^3 + C_4^2 a^2x^2 + C_4^3 a^3x + C_4^4 a^4;$

$(x+a)^5 = x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x + a^5 =$

$= C_5^0 x^5 + C_5^1 ax^4 + C_5^2 a^2x^3 + C_5^3 a^3x^2 + C_5^4 a^4x + C_5^5 a^5;$

....

(2)-формула қысқаша:

$(x+a)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^k \cdot x^{n-k}$, мұндағы $\sum$ қосу белгісі, түрінде жазылады және ***Ньютон биномы*** , ал C_n^k ***биномиалды коэффициенттер*** *деп аталады.*

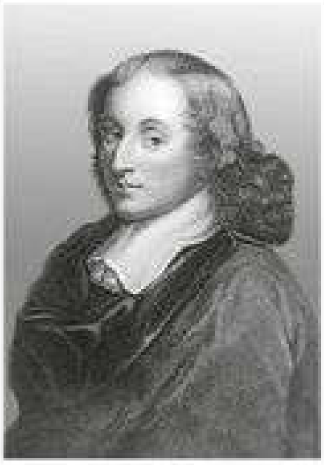
"Бином" сөзі латын тілінен аударғанда "алгебралық екімүше" дегенді білдіреді.

Тарихи мағлұматтар

Француз математигі Блез Паскаль арнайы құрастырылған кестені қолданып, биномдық коэффициенттерді есептеудің қарапайым тәсілін ұсынған. Ол кесте *Паскаль үшбұрышы* деп аталады.

Паскаль үшбұрышы

$n=0$	1
$n=1$	1 1
$n=2$	1 2 1
$n=3$	1 3 3 1
$n=4$	1 4 6 4 1
$n=5$	1 5 10 10 5 1
$n=6$	1 6 15 20 15 6 1
$n=7$	1 7 21 35 35 21 7 1
$n=8$	1 8 28 56 70 56 28 8 1
	... ...



Блез Паскаль (1623—1662)

Үшбұрыштың әр жолындағы сандар алдыңғы жолдардан қалай алынған? $n = 9$ болғанда биномдық коэффициенттерді есептеңдер.

МЫСАЛ

1. $(x+2)^6$ дәрежесін көпмүше түрінде жазайық.

Шешуі. $(x+2)^6 = x^6 + 6\cdot 2\cdot x^5 + 15\cdot 2^2\cdot x^4 + 20\cdot 2^3\cdot x^3 + 15\cdot 2^4 \times$ $\times x^2 + 6\cdot 2^5\cdot x + 2^6 = x^6 + 12x^5 + 60x^4 + 160x^3 + 240x^2 + 192x + 64.$

Жауабы: $x^6 + 12x^5 + 60x^4 + 160x^3 + 240x^2 + 192x + 64$.

Ньютон биномының қасиеттері:

1) Ньютон биномының қосылғыштарының саны биномның дәреже көрсеткішінен бір санға артық;

2) x-тің дәреже көрсеткіші n-нен нөлге дейін кемиді, a-ның дәреже көрсеткіші нөлден n-ге дейін өседі. Әрбір қосылғыштың дәрежелерінің көрсеткіштерінің қосындысы биномның дәреже көрсеткішіне тең;

3) биномда басынан және соңынан бірдей қашықтықта орналасқан қосылғыштардың коэффициенттері өзара тең;

4) биномның кез келген мүшесі мына формула арқылы табылады:

$$T_{k+1} = C_n^k \cdot a^k \cdot x^{n-k}, \qquad (3)$$

мұндағы k-ның мәні 0-ден n-ге дейін өзгереді;

5) егер $x = a = 1$ болса, онда $2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^k + \ldots + C_n^n$, яғни Ньютон биномының коэффициенттерінің қосындысы 2^n-іне тең;

6) егер биномның дәреже көрсеткіші тақ натурал сан болса, онда бином қосылғыштарының саны жұп; егер биномның дәреже көрсеткіші жұп натурал сан болса, онда бином қосылғыштарының саны тақ болады;

7) коэффициенті ең үлкен болатын биномның қосылғышы *ортаңғы мүше* деп аталады. Егер биномның дәреже көрсеткіші тақ сан болса, онда жіктелуде екі ортаңғы мүше, ал биномның дәреже көрсеткіші жұп сан болса, онда жіктелуде бір ортаңғы мүше болады.

МЫСАЛ

2. $(x+a)^5$ өрнегінің дәрежесін көпмүше түрінде жазайық.

Шешуі. $(x+a)^5 = x^5 + 5\cdot a\cdot x^4 + \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}\cdot a^2\cdot x^3 + \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot a^3\cdot x^2 +$ $+ \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot a^4\cdot x + \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot a^5\cdot x^0 = x^5 + 5ax^4 + 10a^2\cdot x^3 +$ $+ 10a^3\cdot x^2 + 5a^4\cdot x + a^5.$

МЫСАЛ

3. $(x+a)^{25}$ биномының төртінші және жиырмасыншы мүшелерін табайық.

Шешуі . Биномның төртінші және жиырмасыншы мүшелерін табу үшін (3) формуланы қолданамыз:

$T_{3+1} = C_{25}^{3} \cdot a^{3} \cdot x^{22} = 2300\, a^{3}x^{22}$ және $T_{19+1} = C_{25}^{19} \cdot a^{19} \cdot x^{6} = 177100\ a^{19}x^{6}$.

?

1. Қандай түрлендірулерде Ньютон биномы қолданылады?
2. "Бином" сөзі, $\sum$ белгісі нені білдіреді?
3. Биномдық коэффициент не болып табылады?
4. $(a + b)^4$ және $(a + b)^5$ биномдарында қанша қосылғыш бар?
5. $(a + b)^4$; $(a - b)^4$; $(a + b)^5$; $(a - b)^5$ биномдарын есептеу формулаларын жазыңдар.
6. $(a - b)^4$ және $(a + b)^5$ биномдарының ортаңғы мүшелерін табыңдар.

Жаттығулар

A

11.1. Дәрежені көпмүше түрінде жазыңдар:

1) $(x + a)^5$; 2) $(3x + 2a)^6$; 3) $(3x - a)^5$.

11.2. Биномның жіктелуіндегі x^n-нің коэффициентін табыңдар:

1) $(x + 2)^{10}$, $n = 3$; 2) $(1 - 2x)^7$, $n = 4$; 3) $\left(\sqrt{x} - \frac{2}{x}\right)^8$, $n = -4$.

11.3. $(x + y)^{11}$ Ньютон биномының биномиалды коэффициенттерінің қосындысын табыңдар.

B

11.4. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$; 2) $\sum\limits_{k=1}^{n} kC_n^k = n \cdot 2^{n-1}$; 3) $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} kC_n^k = 0$.

11.5. $\left(3 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ биномының жіктелуіндегі төртінші қосылғыштың үшін шісіне қатынасы $3\sqrt{2}$-ге тең болса, онда n-ді табыңдар.

11.6. $P(x)$ көпмүшесіндегі x^3 дәрежесінің коэффициентін табыңдар:

1) $P(x) = 4x^3 + (1+3x)^4$; 2) $P(x) = (3 - 2x)^5 + 2x^3 + 5$;

3) $P(x) = (x + 2)^5 - (2x + 1)^4$; 4) $P(x) = (x + 2)^5 + (1 - 2x)^4 - 2x^3$.

11.7. Егер жіктелудегі биномдық коэффициенттерінің қосындысының мәні:

1) 1024; 2) 512 болса, онда $(x + y)^n$ биномының жіктеуіндегі ең үлкен коэффициентті табыңдар.

C

11.8. x-тің дәрежесі бойынша жіктеуіндегі:

1) x^3 дәрежесі болатын; 2) x^4 дәрежесі болатын;

3) x^{-2} дәрежесі болатын; 4) x дәрежесі болмайтын бірмүшені табыңдар.

11.9. $\left(2na + \frac{1}{2na^2}\right)^{3n}$ жіктелуінің биномиалды коэффициенттерінің қосындысы 64-ке тең. Құрамында a болмайтын қосылғышты табыңдар.

11.10. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер :

1) $C_n^1 + 2 \cdot C_n^2 + 3 \cdot C_n^3 + ... + n \cdot C_n^n = n \cdot 2^{n-1}$;

2) $C_n^0 + 2 \cdot C_n^1 + 3 \cdot C_n^2 + ... + (n + 1) \cdot C_n^n = (n + 2) \cdot 2^{n-1}$.

11.11 . Кез келген натурал $n > 1$ және кез келген x оң саны үшін $(1 + x)^n > 1 + nx$ теңсіздігінің ақиқат болатынын дәлелдеңдер.

ҚАЙТАЛАУ

11.12. 1) Екі жұмысшы бірігіп 3 сағ жұмыс атқарғаннан кейін екінші жұмысшы тағы 4 сағ жұмыс жасады. Нәтижесінде тапсырма 12,5%-ға артық орындалды. Егер тапсырманы орындау үшін екінші жұмысшыға біріншіге қарағанда 4 сағ кем уақыт керек болса, онда әр жұмысшы жеке тапсырманы қанша уақытта орындайды?

2) Шебер оқушысына қарағанда тапсырманы 15 сағ жылдам орындайды. Егер оқушы 18 сағ жұмыс атқарғаннан кейін тапсырманы орындауды шебер 6 сағ жалғастырса, онда тапсырманың 0,6 бөлігі орындалады. Оқушыға тапсырманы жеке орындауы үшін қанша уақыт қажет?

11.13. Теңдеумен шығарылатын мәтінді есепті құрастырыңдар:

1) $\frac{20}{x} + \frac{20}{x+2} = \frac{20}{8}$; 2) $\frac{8}{x} + \frac{8}{x+12} = 1$.

11.14. 1) $\frac{2}{3-\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}+3} + \sqrt{x} - 2{,}2$ өрнегін ықшамдаңдар және $x = 0{,}04$ болғандағы мәнін табыңдар.

2) $\frac{3}{\sqrt{y}+1} - \frac{3}{\sqrt{y}-1} + \sqrt{y} + 1{,}8$ өрнегін ықшамдаңдар және $y = 1{,}44$ болғандағы мәнін табыңдар.

Жаңа білімді меңгеруге дайындаламыз

11.15. $f(x)$ функциясы үшін $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ мәндерін есептеңдер:

1) $f(x) = x^2 + 2x$;
2) $f(x) = x^2 + 2x - 2$;
3) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 7x$;
4) $f(x) = x^2 + 2x + \sqrt{x}$.

11.16. Сандар қатарының жазылу заңдылығын анықтаңдар:

1) 2; 4; 6; 8; 10; ...;
2) 5; 10; 15; 20; 25; ...;
3) 1; 4; 9; 16; 26; ...;
4) 1; –1; 1; –1; 1; ....

Жаңа білімді меңгеруге арналған тірек ұғымдар

Тізбек, функция, тізбектің мүшелері, бірсарынды тізбек, жоғарыдан шектелген тізбек, төменнен шектелген тізбек, шектелген тізбек, кемімейтін тізбек, өспейтін тізбек, шексіз санды тізбек, шектелген санды тізбек, рекурренттік тәсіл, аналитикалық тәсіл, графиктік тәсіл, баяндау тәсілі.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

1. Цифрлары қайталанбайтын 0, 2, 4, 7, 8 цифрларынан құрастырылған тақ үштаңбалы сандар саны:

A) 16; B) 10; C) 9; D) 8.

2. Сыныптағы 25 оқушының 13-і қыз бала болса, онда ер балалардан екі кезекшіні қанша тәсілмен таңдауға болады?

A) 80; B) 66; C) 90; D) 120.

3. Жарыс алдында он бір баскетболшыны сапқа тұрғызу керек. Сапқа бірінші капитан тұрады, қалғандары кездейсоқ тұрғызылады. Команданы тұрғызудың қанша тәсілі бар?

A) 9!; B) 8!; C) 10!; D) 11!.

4. $A_x^3 = x^3 - 4x^2 + 8x + 16$ теңдеуінің түбірі:

A) 20; B) 12; C) 10; D) 8.

5. Жазықтықта нүкте белгіленген және нүктеден 5 сәуле жүргізілген. Пайда болған әртүрлі бұрыштар саны:

A) C_5^2; B) C_5^3; C) 3!; D) 5!.

6. $\dfrac{n^3 - 4n}{(n+2)!} - \dfrac{2-n}{(n+1)!}$ өрнегін ықшамдаңдар:

A) n; B) $2n$; C) $\dfrac{n-2}{n!}$; D) $\dfrac{n}{(n-1)!}$.

7. $C_x^{x-2} = x^2 - x - 10$ теңдеуінің түбірі:

A) 5; B) 6; C) 7; D) 4.

8. $(x - 1)^{20}$ биномының жіктелуіндегі үшінші мүшенің коэффициенті:

A) 20; B) 120; C) 190; D) 210.

9. Гүлшоғын бес қызыл және төрт ақ гүлден жасау керек. Егер 8 қызыл және 8 ақ гүл болса, онда гүлшоғын қанша тәсілмен жасауға болады?

A) 3920; B) 4920; C) 3650; D) 4200.

10. $(2x + 1)^6$ биномының жіктелуіндегі x^2-нің коэффициенті:

A) 32; B) 40; C) 50; D) 60.

III тарау. ТІЗБЕКТЕР

§ 12. САНДАР ТІЗБЕГІ, ОНЫҢ ТҮРЛЕРІ, БЕРІЛУ ТӘСІЛДЕРІ ЖӘНЕ ҚАСИЕТТЕРІ

Түйінді ұғымдар

Сандар тізбегі, берілу тәсілдері

Сандар тізбегі ұғымымен танысасыңдар, тізбектің n-ші мүшесін (мысалы, $\frac{1}{2\cdot3}$; $\frac{1}{3\cdot4}$; $\frac{1}{4\cdot5}$; $\frac{1}{5\cdot6}$) табуды үйренесіңдер.

Нақты сандардан тұратын төмендегі ретпен жазылған сандар тізбегін алайық:

1) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ... — натурал сандардан тұратын сандар тізбегі;

2) 1, 3, 5, 7, 9, ..., 99 — 100-ге дейінгі тақ натурал сандардан тұратын сандар тізбегі;

3) –10, –12, –14, ..., –98 — екітаңбалы теріс жұп сандардан тұратын сандар тізбегі;

4) $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{17}$, $\sqrt{19}$ — 20-дан кіші жай сандардың арифметикалық квадрат түбірінен тұратын сандар тізбегі.

Берілген сандар тізбегін жеке-жеке қарастырайық.

1) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ... тізбегінде әрбір натурал санға сәйкес келетін тізбектің ретін былай көрсетуге болады:

$1 \to 1$; $2 \to 2$; $3 \to 3$; $4 \to 4$; $5 \to 5$; $6 \to 6$; $7 \to 7$; $8 \to 8$; $9 \to 9$; ...

2) 1, 3, 5, 7, 9, ..., 99 сандар тізбегінің жазылуында әрбір 1-ден 50-ге дейінгі натурал санмен берілген тізбектің ретіне қандай да бір тақ натурал санның сәйкес келуін былай көрсетуге болады:

$1 \to 1$; $2 \to 3$; $3 \to 5$; $4 \to 7$; $5 \to 9$; ...; $50 \to 99$;

3) –10, –12, –14, ..., –98 сандар тізбегінің жазылу ретіндегі әрбір 1-ден 45-ке дейінгі натурал санға қандай да бір теріс санның сәйкес келуін былай көрсетуге болады:

$1 \to -10$; $2 \to -12$; $3 \to -14$; ... $45 \to -98$;

4) $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{17}$, $\sqrt{19}$ тізбегіндегі әрбір 1-ден 8-ге дейінгі натурал санға қандай да бір квадрат түбірдің сәйкес келуін былай көрсетуге болады:

$1 \to \sqrt{2}$; $2 \to \sqrt{3}$; $3 \to \sqrt{5}$; $4 \to \sqrt{7}$; $5 \to \sqrt{11}$; $6 \to \sqrt{13}$; $7 \to \sqrt{17}$; $8 \to \sqrt{19}$.

Сондықтан сандар тізбегі натурал аргументті функция болып табылады.

Егер сандар тізбегі (функция) алғашқы n натурал сандар жиынында берілсе, онда тізбек ***шектелген сандар тізбегі*** *; егер барлық натурал сандар жиынында берілсе, онда тізбек* ***шексіз сандар тізбегі*** *деп аталады.*

МЫСАЛ

1. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, … — шексіз сандар тізбегі, ал 1, 3, 5, 7, 9, …, 99 — шекті сандар тізбегі.

Тізбекті құратын сандарды ***тізбектің мүшелері*** *деп атайды .*

Тізбектің мүшелерін, әдетте, оның реттік нөмірлерін көрсететін индекстері бар әріптермен белгілейді: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ сандар тізбегінде:

a_1 — тізбектің бірінші мүшесі;

a_2 — тізбектің екінші мүшесі;

a_3 — тізбектің үшінші мүшесі;

………………………………………………………

a_n — n-ші мүшесі;

………………………………………………………

Мысалы, $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{11}, \sqrt{13}, \sqrt{17}, \sqrt{19}$ тізбегінде $a_1 = \sqrt{2}$, $a_4 = \sqrt{7}$, $a_7 = \sqrt{17}$, $a_8 = \sqrt{19}$.

Тізбекті қысқаша (a_n) түрінде белгілейді.

Егер (a_n) тізбегінде әрбір a_n мүшесі алдыңғы a_{n-1} мүшесінен үлкен болса, онда тізбек ***өспелі*** *; әрбір a_n мүшесі алдыңғы a_{n-1} мүшесінен кіші болса, онда тізбек* ***кемімелі*** *; әрбір a_n мүшесі алдыңғы a_{n-1} мүшесіне тең болса, онда* ***тұрақты (стационар) тізбек*** *деп аталады.*

ТҮСІНДІРІҢДЕР

Неліктен 1, 3, 5, 7, 9, …, 99 сандар тізбегі өспелі; –10, –12, –14, …, –98 — кемімелі, $\frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}$ — тұрақты тізбек болады?

Егер (a_n) тізбегінде әрбір a_n мүшесі алдыңғы a_{n-1} мүшесінен үлкен немесе тең болса, онда тізбек ***кемімейтін*** *; әрбір a_n мүшесі алдыңғы a_{n-1} мүшесінен кіші немесе тең болса, онда тізбек* ***өспейтін тізбек*** *деп аталады.*

ТҮСІНДІРІҢДЕР

Неліктен 1, 3, 3, 7, 9, 10, 10, 10 сандар тізбегі кемімейтін; 10, 10, 9, 9, 8, 7 өспейтін тізбек болады?

Өспелі, кемімелі, өспейтін және кемімейтін тізбектерді ***бірсарынды тізбектер*** *деп атайды.*

Бірсарынды тізбекті анықтаңдар:
1) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ...
2) 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, ...
3) 1, 3, 4, 2, 7, 8, 5, 6, 9, ...
4) 1, 3, 2, 4, 5, 7, 6, 8, 9, ...
5) 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 9, ...
6) 9, 9, 8, 8, 7, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, ...

Егер (a_n) тізбегінің әрбір мүшесінен кіші A саны бар болса, онда (a_n) тізбегі ***төменнен шектелген*** *деп аталады.*

Егер (a_n) тізбегінің әрбір мүшесінен үлкен A саны бар болса, онда (a_n) тізбегі ***жоғарыдан шектелген*** *деп аталады.*

Егер екі шарт та орындалса, онда (a_n) тізбегі ***шектелген*** *деп аталады.*

МЫСАЛ

2. 1) $-1;\ -2;\ -3;\ \dots;\ -n;\ \dots;$

2) $1;\ 2;\ 3;\ \dots;\ n;\ \dots;$

3) $100;\ 200;\ 300;\ \dots;\ 1000;$

4) $-1;\ 2;\ -3;\ \dots;\ (-1)^n n;\ \dots$ тізбектерін шектелгендікке зерттейік.

Шешуі. 1) Әрбір мүшесі нөлден кіші болғандықтан, тізбек жоғарыдан шектелген;

2) әрбір мүшесі нөлден артық болғандықтан, тізбек төменнен шектелген;

3) тізбек жоғарыдан да, төменнен де шектелген. Демек, тізбек шектеулі;

4) тізбек жоғарыдан да, төменнен де шектелмеген.

Сандар тізбегін түрлі тәсілдермен беруге болады.

А. Сандар тізбегінің баяндау тәсілімен берілуі.

Бұл тәсілдің көмегімен тізбектің орналасу заңдылығы сөзбен түсіндіріледі.

Мысалы, натурал сандардың квадраттары қатарының тізбегі. Бұл сөйлем бойынша 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, ... сандар тізбегін жазуға болады.

Ә. Сандар тізбегінің аналитикалық тәсілмен берілуі .

Егер тізбек n-ші мүшесінің (жалпы мүшесінің) формуласымен берілсе, онда сандар тізбегі *аналитикалық тәсілмен берілген* дейді.

Яғни, тізбек n-ші мүшесінің формуласымен беріледі және реттік нөмірі бойынша тізбектің кез келген мүшесі табылады.

МЫСАЛ

3. Тізбекті n-ші мүшенің формуласы арқылы берейік: $a_n = 2^n$.

Осы формула бойынша тізбектің кез келген мүшесін табуға болады:

- бірінші мүшесін табу үшін n-нің орнына 1-ді қоямыз: $a_1 = 2^1 = 2$;
- екінші мүшесін табу үшін n-нің орнына 2-ні қоямыз: $a_2 = 2^2 = 4$.

Тура осылай $a_3 = 2^3 = 8$; $a_4 = 2^4 = 16$; $a_5 = 2^5 = 32$; $a_6 = 2^6 = 64$ және басқа да мүшелерін табамыз. Сонда 2; 4; 8; 16; 32; 64; … тізбегін жазамыз.

Б. Сандар тізбегінің рекурренттік тәсілмен берілуі .

Тізбекті *рекурренттік тәсілмен беру* дегеніміз қандай да бір мүшесінен бастап кез келген мүшесін алдыңғы (бір немесе бірнеше) мүшесі арқылы өрнектеу болып табылады. Бұл жағдайда тізбектің бір немесе бірнеше мүшесі және алдыңғы белгілі мүшелері бойынша басқа мүшелерін табуға болатын формула беріледі.

МЫСАЛ

4. Тізбектің алдыңғы екі мүшесі $a_1 = -15$ пен $a_2 = 5$ және $a_{n+2} = a_n + a_{n-1}$ формуласы берілсін.

Берілгендердің көмегімен –15; 5; –10; –5; –15; –20; –35; … сандар тізбегін жазуға болады.

Расында да, $a_3 = a_1 + a_2$, яғни $-15 + 5 = -10$;

$a_4 = a_2 + a_3$, яғни $5 + (-10) = -5$;

$a_5 = a_3 + a_4$, яғни $-10 + (-5) = -15$;

$a_6 = a_4 + a_5$, яғни $-5 + (-15) = -20$;

$a_7 = a_5 + a_6$, яғни $-15 + (-20) = -35$.

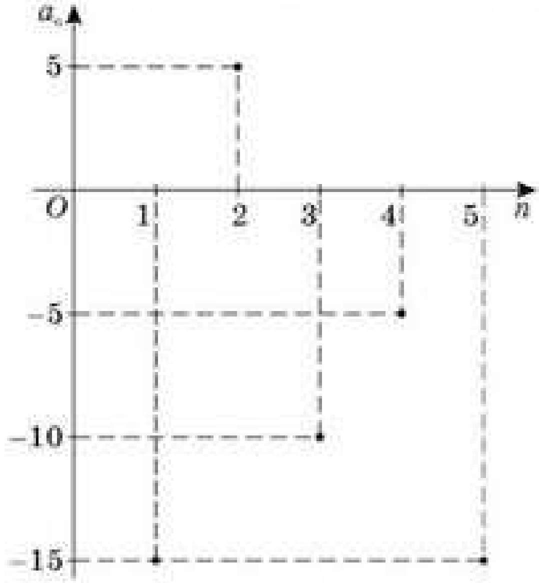
В. Сандар тізбегінің графиктік тәсілмен берілуі .

Сандар тізбегін графиктік тәсілмен де беруге болады.

Сандар тізбегінің графигі абсциссасы натурал сан, ординатасы тізбектің мүшесі болатын оқшауланған нүктелерден тұрады.

ТҮСІНДІРІҢДЕР

25-суретте –15; 5; –10; –5; –15 сандар тізбегінің графигі кескінделген.



25-сурет

1. Неліктен сандар тізбегінің графигі нүктелер жиынынан тұрады?
2. Неліктен 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; ... ; $\frac{1}{n}$ және 1; 1,7; 1,73; 1,7320; 1,73205, ... ($\sqrt{3}$ = 1,732050807...) тізбектері шектелген?

Жаттығулар

A

12.1. 1) 4-ке бөлгенде қалдығы 2; 2) 7-ге бөлгенде қалдығы 1; 3) 5-ке бөлгенде қалдығы 3; 4) 9-ға бөлгенде қалдығы 8 саны болатын натурал сандардан тұратын өспелі сан тізбегінің алғашқы бес мүшесін жазыңдар.

12.2. Егер тізбек: 1) $a_n = \frac{n}{\sqrt{n}+1}$; 2) $a_n = \frac{2n}{\sqrt{3n}-1}$; 3) $a_n = \frac{2n-1}{\sqrt{n}+2}$; 4) $a_n = \frac{3n}{\sqrt{2n-1}+1}$ n-ші мүшесінің формуласы арқылы берілсе, онда (a_n) сандар тізбегінің алғашқы бес мүшесін табыңдар.

12.3. (a_n) — өсу ретімен алынған натурал сандардың квадраттарының тізбегі. Тізбектің a_5-ші, a_9-шы, a_{12}-ші мүшесін жазыңдар.

12.4. Алғашқы мүшелері берілген тізбектің n-ші мүшесінің формуласын жазыңдар:

1) 2; 4; 6; 8; 10; 12; 14;
2) 9; 11; 13; 15; 17; 19;
3) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{10}$;
4) 1; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{7}$; $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{11}$;
5) 1; 2; 4; 8; 16; 32;
6) –1; 2; –4; 8; –16; 32;
7) 1; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{27}$; $\frac{1}{64}$; $\frac{1}{125}$; $\frac{1}{216}$;
8) $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{6}{7}$;
9) $\frac{3}{2}$; $\frac{5}{4}$; $\frac{7}{6}$; $\frac{9}{8}$; $\frac{11}{10}$; $\frac{13}{12}$;
10) 2; 5; 8; 11; 14; 17.

12.5. 1) $a_n = (-1)^n$; 2) $a_n = 2n + 3$; 3) $a_n = 5n - 2$; 4) $a_n = n^2 + 1$; 5) $a_n = n^2 + n$; 6) $a_n = n^2 - 2n$; 7) $a_n = n^2 + 2n + 1$; 8) $a_n = (-1)^n n^2$ формуласымен берілген тізбектің алғашқы бес мүшесін жазыңдар.

12.6. Сандар тізбегі $a_n = (-1)^n n^2 - 3n$ формуласымен берілген. Тізбектің a_6-шы; a_9-шы; a_{14}-ші мүшесін жазыңдар.

12.7. Берілген тізбектердің қайсысы: а) өспелі; ә) кемімелі; б) өспелі де, кемімелі де болмайды:

1) –1; –5; –9; –13; –17;
2) $\frac{2}{3}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{2}{7}$; $\frac{2}{9}$; $\frac{2}{11}$;
3) –1; $-\frac{1}{8}$; $-\frac{1}{27}$; $-\frac{1}{64}$; $-\frac{1}{125}$;
4) –1; $\frac{1}{8}$; $-\frac{1}{27}$; $\frac{1}{64}$; $-\frac{1}{125}$; $\frac{1}{216}$;
5) $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{7}$; 3; $\sqrt{11}$;
6) $\frac{6}{13}$; $\frac{7}{14}$; $\frac{8}{15}$; $\frac{9}{16}$; $\frac{10}{17}$; $\frac{11}{18}$?

B

12.8. n-ші мүше:

1) $a_n = 37 - 2n$ формуласымен берілген тізбектің 17-ге;

2) $a_n = 49 - 3n$ формуласымен берілген тізбектің –7-ге;

3) $a_n = 3n - 2n^2$ формуласымен берілген тізбектің –104-ке;

4) $a_n = \frac{4n + 3}{n + 1}$ формуласымен берілген тізбектің 13-ке тең мүшесі бола ма?

12.9. 1) $a_n = 3n - 7$; 2) $a_n = n^2 - 8$; 3) $a_n = 3\sqrt{n} + 4$; 4) $a_n = 1 + \frac{1}{n}$; 5) $a_n = 1 - \frac{1}{n + 1}$; 6) $a_n = 1 + \frac{2}{2n + 1}$ түрінде берілген n-ші мүшенің формулаларының қайсысы: а) өспелі; ә) кемімелі сандар тізбегін береді?

12.10. 1) $a_n = (-1)^n \cdot 2$; 2) $a_n = (-1)^n \cdot 2 + 2$;

3) $a_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$; 4) $a_n = n^2 + (-1)^n n$;
5) $a_n = 2^n + 1$; 6) $a_n = (-1)^n n^2 - 3n$;
7) $a_n = n^2 + 2n + (-2)^{n+1}$; 8) $a_n = (-1)^n n^2 + (-1)^{n+1}$;
9) $a_n = \frac{n+(-1)^n}{2n}$ формуласымен берілген сандар тізбегінің алғашқы бес мүшесін жазыңдар.

12.11. 1) $a_n = -3^n$; 2) $a_n = 5^{n+1}$; 3) $a_n = \frac{3n+1}{n+2}$; 4) $a_n = \frac{5n+3}{n+1}$ формуласымен берілген (a_n) тізбегін бірсарындылыққа зерттеңдер.

12.12. 1) $a_1 = 3$, $a_{n+1} = a_n + 4$; 2) $a_1 = 4$, $a_{n+1} = 3a_n - 1$;
3) $a_1 = 5$, $a_{n+1} = 2a_n - 4$; 4) $a_1 = 88$, $a_{n+1} = 0{,}5 \cdot a_n$ рекурренттік тәсілмен берілген сандар тізбегінің алғашқы алты мүшесін жазыңдар.

12.13. $a_n = \frac{2n+(-1)^n}{2n+1}$ тізбегінің бірсарынды болмайтынын дәлелдеңдер.

12.14. 1) $c_1 = 1$, $c_2 = 3$, $c_{n+2} = 2c_{n+1} - c_n$;
2) $c_1 = 2$, $c_2 = 3$, $c_{n+2} = 3c_{n+1} - 2c_n$;
3) $c_1 = -2$, $c_2 = 1$, $c_{n+2} = 2c_{n+1} - c_n$;
4) $c_1 = 4$, $c_2 = 7$, $c_{n+2} = c_{n+1} - 2c_n$ рекурренттік тәсілмен берілген сандар тізбегінің алғашқы алты мүшесін жазыңдар.

12.15. 1) $a_n = 302 - 53n$; 2) $a_n = -5n^2 + 3n - 2$;
3) $a_n = -9n^2 + 10n + 25$; 4) $a_n = \frac{n-5}{n-2}$;
5) $a_n = \frac{2n+5}{n+1}$; 6) $a_n = \frac{4n+15}{n-3}$
формуласымен берілген сандар тізбегінің кемімелі болатынын дәлелдеңдер.

12.16. 1) $a_n = 30n - 2$; 2) $a_n = n^2 + 2n - 2$; 3) $a_n = 9n^2 + 4n - 5$;
4) $a_n = \frac{n+1}{n+2}$; 5) $a_n = \frac{2n-1}{n+1}$; 6) $a_n = \frac{4n+3}{n+3}$
формуласымен берілген сандар тізбегінің өспелі болатынын дәлелдеңдер.

12.17. 1) $a_n = n^2 - 12n$; 2) $a_n = n^2 - 13n + 2$; 3) $a_n = 2n^2 + 5n - 3$ тізбегінің ең кіші мүшесін табыңдар.

C

12.18. 1) $c_n = -\frac{1}{2} \cdot 3^n$; 2) $c_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \cdot 5$; 3) $c_n = -n^2 + 7$;
4) $c_n = n^2 + 7n$ формуласымен берілген сандар тізбегінің, мүмкін болса, ең кіші және ең үлкен мәндерін табыңдар.

12.19. Тізбектің алғашқы мүшелері белгілі болса, онда жалпы (n-ші) мүшесінің формуласын табыңдар:
1) 0; 7; 26; 63; 124; 215; 2) 8; 26; 80; 242; 729;
3) 1; 7; 31; 127; 511; 4) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$; $\frac{1}{\sqrt{3}+1}$; $\frac{1}{\sqrt{4}-1}$; $\frac{1}{\sqrt{5}+1}$.

12.20. n-ші мүшенің формуласымен берілген сандар тізбегін шектеулілікке зерттеңдер:
1) $c_n = \frac{n+3}{n+1}$; 2) $c_n = \frac{(-1)^n}{n+2}$; 3) $c_n = \frac{2n-1}{2n+3}$; 4) $c_n = \frac{(-1)^n n}{n+1}$.

12.21. Егер сандар тізбегінің бірінші мүшесі 17, ал әрбір келесі мүшесі алдыңғы мүшесінің цифрларының қосындысының мәніне арттырылған болса, онда сандар тізбегінің алғашқы бес мүшесін жазыңдар.

***12.22.** 1) Бірінші мүшесі 1-ге, үшінші мүшесі 5-ке; 2) бірінші мүшесі 3-ке, үшінші мүшесі 11-ге, ал әрбір келесі мүшесі оған көршілес мүшелердің арифметикалық ортасына тең болатын сандар тізбегін рекурренттік және аналитикалық тәсілмен беріңдер.

***12.23.** 1) 7; 14; 28; 56; 112; 2) 3; –3; 3; –3; 3; –3;
3) 23; 28; 38; 49; 62; 70; 4) $\frac{1}{1\cdot 2}$; $\frac{1}{2\cdot 3}$; $\frac{1}{3\cdot 4}$; $\frac{1}{4\cdot 5}$; $\frac{1}{5\cdot 6}$
сандар тізбегін рекурренттік және аналитикалық тәсілмен беріңдер.

ҒАЛЫМ-МАТЕМАТИК ТУРАЛЫ ХАБАРЛАМА ДАЙЫНДАҢДАР

12.24. Ëåîí àðäî Ïèçàíñêèé (Ôèáîíà÷÷è) — иòàëèÿндық ìàòåìàòèк, 1202 æ. "Àáàê (åñåïòåó òàқòàñû) êiòàáû" àòòû åңáåãií æàçûï, àëғàø ðåò Åóðîïàíû Øûғûñ ìàòåìàòèêàñûìåí, ïîäûқ æүéåñiìåí òàíûñòûðғàí. Àүë åңáåê Åóðîïàäà ғàñûðлардағû àëғàøқû ìàòåìàòèêàëûқ үéðåòiëiãåíäåы áîëäû.

Леонардо Пизанский (1180—1240)

ҚАЙТАЛАУ

12.25. Теңдеуді шешіңдер:

1) $x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0$; 2) $3x^3 - 2x^2 - 27x + 18 = 0$;

3) $x^4 - 3x^2 - 18 = 0$; 4) $x^4 - 6x^2 - 27 = 0$.

12.26. Теңдеулер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 45, \\ y - 2x = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 11, \\ x + 2y = 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 3xy = -1, \\ x + 2y = 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 - y + xy = -5, \\ x + 2y = 4. \end{cases}$

12.27. Теңдеулер жүйесінің графигін салыңдар және жүйенің шешімдер санын табыңдар:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ y - x^2 = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 36, \\ y + 2x^2 = 6; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ y - |x| = 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ y - |x-2| = 0. \end{cases}$

12.28. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $a^3c^{-4} \cdot 3a^{-2}c^5$; 2) $12a^5c^4 : (3a^6c^5)$;

3) $6a^7c^8 : (8a^3c^{-4})$; 4) $12a^5c^{-4} : (3a^6c^2) \cdot \frac{3}{8}ac^4$.

12.29. Аралығы 18 км болатын A пунктінен B пунктіне бір мезгілде екі турист жолға шықты. Бірінші турист B пунктіне екіншісінен 54 мин ерте келді. Егер бірінші туристің жылдамдығы екіншісінен 1 км/сағ-қа артық болса, әр туристің жылдамдығы қандай?

Жаңа білімді меңгеруге дайындаламыз

12.30. Егер бірінші мүшесі: 1) –13; 2) 11 болса, онда әрбір келесі мүшесі алдыңғы мүшесінен 5-ке артық болатын тізбектің алғашқы бес мүшесін жазыңдар.

12.31 . (a_n) санды тізбегі:

1) $a_n = 5n - 2$; 2) $a_n = 302 - 53n$; 3) $a_n = 7n - 5$;

4) $a_n = 45 - 11n$ формуласымен берілген. $a_7 - a_6$ айырымының мәнін табыңдар.

Жаңа білімді меңгеруге арналған тірек ұғымдар

Тізбек, тізбектің мүшесі, жиын, жиынның элементі, тізбектің келесі мүшесі, тізбектің n-ші мүшесі.

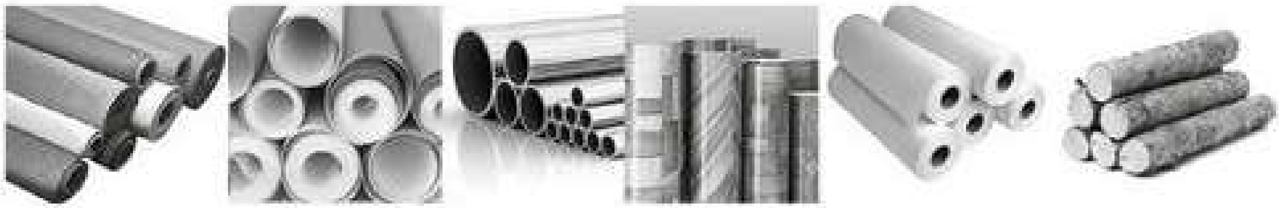
§ 13. АРИФМЕТИКАЛЫҚ ПРОГРЕССИЯ. АРИФМЕТИКАЛЫҚ ПРОГРЕССИЯНЫҢ *n*-ШІ МҮШЕСІНІҢ ФОРМУЛАСЫ

Түйінді ұғымдар

Арифметикалық прогрессия, n-ші мүшесінің формуласы

Арифметикалық прогрессия ұғымымен және қасиетімен, n-ші мүшесінің формуласымен танысасыңдар; санды тізбектердің арасынан арифметикалық прогрессияны ажыратуды, арифметикалық прогрессияның n-ші мүшесінің формуласын табуды, арифметикалық прогрессияға берілген есептерді шығаруды үйренесіңдер.

Адам күнделікті өмірде ағаштарды, құбырларды, тұсқағаздарды, маталарды және т.б. жинағанда жоғары қатарларға оларды төменгі қатарларға қарағанда 1-ге кем етіп орналастырады (26-сурет).



26-сурет

26-суреттегі әрбір қатардағы заттардың саны одан жоғары орналасқан қатардағы заттар санынан біреуі артық. Егер әрбір қатардағы заттар санын жазатын болсақ, онда екіншісінен бастап әрбір мүшесі алдыңғы мүшесіне бірдей санды қосқанға тең болатын сандар тізбегін аламыз. Мұндай тізбектер математикада *арифметикалық прогрессия* деген ерекше атаумен аталады.

Екінші мүшесінен бастап, әрбір мүшесі алдыңғы мүшесіне қандай да бір тұрақты d санын қосқанда шығатын сандар тізбегін ***арифметикалық прогрессия*** *деп атайды. d саны* ***арифметикалық прогрессияның айырымы*** *деп аталады.*

ТҮСІНДІРІҢДЕР

1) -8; -2; 4; 10; 16; 22; ... . 2) 5; 4; 3; 2; 1; 0 сандар тізбегі неліктен арифметикалық прогрессия болатынын түсіндіріңдер.

Арифметикалық прогрессия шекті және шексіз болып бөлінеді.

Егер (a_n) сандар тізбегі арифметикалық прогрессия болса, оны a_1, a_2, a_3, ... деп белгілейді.

Арифметикалық прогрессияның анықтамасы бойынша $a_{n+1} = a_n + d$, мұндағы d — (a_n) сандар тізбегі үшін қандай да бір тұрақты сан.

МЫСАЛ

1. $a_1 = -20$, $d = 5$ болатын шексіз арифметикалық прогрессия құрайық. Ол үшін $a_{n+1} = a_n + d$ формуласын қолданып, n әрпінің орнына 1; 2; 3; 4; 5 және т. с. с. сандарын ретімен, ал d әрпінің орнына 5 санын қоямыз:

$a_{1+1} = a_1 + 5$ немесе $a_2 = -20 + 5$, яғни $a_2 = -15$;
$a_{2+1} = a_2 + 5$ немесе $a_3 = -15 + 5$, яғни $a_3 = -10$;
$a_{3+1} = a_3 + 5$ немесе $a_4 = -10 + 5$, яғни $a_4 = -5$;
$a_{4+1} = a_4 + 5$ немесе $a_5 = -5 + 5$, яғни $a_5 = 0$;
....

Бұдан -20; -15; -10; -5; 0... арифметикалық прогрессиясын аламыз.

1) Берілген арифметикалық прогрессия бойынша оның айырымын қалай табуға болатынын түсіндіріңдер.
2) Арифметикалық прогрессияның айырымын табу формуласын жазыңдар.
3) Ол формуланы қолданып, сандар тізбегінің арифметикалық прогрессия болатынын анықтау мүмкін бе?

Арифметикалық прогрессияның қасиеті

Теорема. ***Сандар тізбегінің бірінші және соңғы мүшесінен (тізбек шекті болғанда) басқа әрбір мүшесі көршілес мүшелерінің арифметикалық ортасына тең болғанда ғана тізбек арифметикалық прогрессия болады .***

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Дәлелдеуі . a_1, a_2, a_3, ... арифметикалық прогрессиясын қарастырайық.

$a_{n+1} = a_n + d$ формуласын қолданып, $a_{n-1} = a_n - d$ аламыз. Осы екі теңдікті мүшелеп қосқанда $a_{n-1} + a_{n+1} = 2a_n$ шығады. Бұдан $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$. Керісінше, егер

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \qquad (1)$$

болса, онда (a_n) сандар тізбегі арифме тикалық прогрессия болады.

Расында да, (1) формуладан $a_{n-1} + a_{n+1} = 2a_n$ немесе $a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1}$ аламыз. Бұл теңдік тізбектің әрбір мүшесі мен кейінгі мүшесінің айырымы тізбек үшін тұрақты сан болатынын көрсетеді. Тұрақтыны d әрпімен белгілейміз: $a_{n+1} - a_n = d$. Сондықтан (a_n) сандар тізбегі арифметикалық прогрессия болып табылады.

$a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ теңдігімен берілген арифметикалық прогрессияның мүшелерінің қасиеті арифметикалық прогрессияның белгісі болып табылады.

Арифметикалық прогрессияның n-ші мүшесінің формуласы

Арифметикалық прогрессияның анықтамасын қолданып, бірнеше мүшесін жазайық:

$a_2 = a_1 + d,$

$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d,$

$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d,$

$a_5 = a_4 + d = (a_1 + 3d) + d = a_1 + 4d,$

....

Алынған нәтижелерді салыстыра отырып, арифметикалық прогрессияның әрбір мүшесі оның бірінші мүшесі мен ізделінді мүшенің реттік нөмірінен бірге кем болатын коэффициентке көбейтілген айырымының қосындысына тең болатынын аңғаруға болады.

Демек, $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$.

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$ формуласы арифметикалық прогрессияның *n-ші мүшесінің формуласы* деп аталады.

МЫСАЛ

2. 216; 200; 184; 168; 152; ... арифметикалық прогрессияның 27-ші мүшесін табайық.

Шешуі. Бұл прогрессияда $a_1 = 216$ және $d = 200 - 216 = -16$.

Арифметикалық прогрессияның n-ші мүшесінің формуласын $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$ қолданамыз. Сонда $a_{27} = 216 + (27 - 1) \cdot (-16) = 216 - 416 = -200$.

Жауабы: –200.

МЫСАЛ

3. 887 санының 7; 15; 23; 31; 39; ... арифметикалық прогрессиясының нешінші мүшесі болатынын табайық.

Шешуі . Есептің шарты бойынша $a_1 = 7$, $a_2 = 15$. Онда $d = a_2 - a_1 = 15 - 7 = 8$. Енді арифметикалық прогрессияның n-ші мүшесінің $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$ формуласындағы a_1-дің орнына 7 санын, d-ның орнына 8-ді, a_n-нің орнына 887 санын қоямыз: $887 = 7 + (n - 1) \cdot 8$. Алынған теңдеуді шешеміз:

$887 = 7 + (n - 1) \cdot 8,$

$n - 1 = 110,$

$n = 111.$

Жауабы : 111.

МЫСАЛ

4. –505,8 саны 236,7; 154,2; …, арифметикалық прогрессиясының мүшесі болатынын анықтайық, егер мүшесі болса, онда ол мүшенің реттік нөмірін табайық.

Шешуі . Бұл прогрессияда $a_1 = 236{,}7$ және $a_2 = 154{,}2$. Енді арифметикалық прогрессияның айырымын табамыз. Сонда $d = a_2 - a_1 = 154{,}2 - 236{,}7 = -82{,}5$.

Арифметикалық прогрессияның n-ші мүшесінің формуласын $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$ колданамыз. Сонда $a_n = 236{,}7 + (n - 1) \cdot (-82{,}5)$, $a_n = -505{,}8$. Енді n-ді табу қажет.

–505,8 саны арифметикалық прогрессияың мүшесі болу үшін $236{,}7 + (n - 1)(-82{,}5)$ өрнегі –505,8-ге тең болатындай n натурал саны бар болуы керек.

Ол үшін $236{,}7 + (n - 1) \cdot (-82{,}5) = -505{,}8$ теңдеуін шешеміз:

$236{,}7 + 82{,}5 - 82{,}5n = -505{,}8;$

$319{,}2 - 82{,}5n = -505{,}8;$

$-82{,}5n = -825;$

$n = 10.$

Яғни –505,8 саны 236,7; 154,2; …арифметикалық прогрессияның 10-шы мүшесі болады.

Жауабы: $n = 10$.

МЫСАЛ

5. 75; 64; 53; 42; 31; 20; ... арифметикалық прогрессиясының n-ші мүшесінің формуласын табайық.

Шешуі . Алдымен, прогрессияның айырмасын табамыз. $d = a_2 - a_1 = 64 - 75 = -11$. Енді арифметикалық прогрессияның n-ші мүшесінің $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$ формуласындағы a_1-дің орнына 75 санын, d-ның орнына –11 санын қоямыз. Сонда $a_n = 75 + (n - 1) \cdot (-11)$ теңдігі шығады. Бұдан $a_n = 75 - 11n + 11$ немесе $a_n = 86 - 11n$. Соңғы теңдік 75; 64; 53; 42; 31; 20; ... арифметикалық прогрессиясының n-ші мүшесінің формуласын береді.

Жауабы: $a_n = 86 - 11n$.

МЫСАЛ

6. Арифметикалық прогрессияның алтыншы мүшесі 31-ге, оныншы мүшесі 55-ке, соңғы мүшесі 73-ке тең болса, прогрессия мүшелерінің санын табайық.

Шешуі. Шарт бойынша $a_6 = 31$, $a_{10} = 55$, $a_n = 73$. Онда $\begin{cases} a_6 = a_1 + 5d, \\ a_{10} = a_1 + 9d, \end{cases}$ бұдан $a_{10} - a_6 = 4d$, $55 - 31 = 4d$ немесе $d = 6$. Олай болса $a_1 = 1$.

Арифметикалық прогрессияның n-ші мүшесінің $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$ формуласын қолданамыз. Сонда $73 = 1 + (n - 1) \cdot 6$, бұдан $n = 13$.

Жауабы: 13 мүшесі бар.

Арифметикалық прогрессияның графигі

Арифметикалық прогрессия сандар тізбегінің дербес түрі болғандықтан, сандар тізбегінің графигі тәрізді арифметикалық прогрессияның графигі абсциссалары натурал сандар болатын нүктелер болады. Осы нүктелердің қалай орналасқанын табайық. Ол үшін арифметикалық прогрессияның n-ші мүшесінің $a_n = a_1 + d(n - 1)$ формуласын қарастырамыз. Мұнда тәуелсіз айнымалы n болады. Сондықтан оны x арқылы белгілейік. Тәуелді айнымалы a_n болады, оны y арқылы белгілейік. a_1 мен d берілген тізбек үшін тұрақты сан екенін ескереміз.

$a_n = a_1 + d(n - 1)$ формуласын түрлендіріп, $a_n = dn + (a_1 - d)$ аламыз. Тағы $d = k$, $a_1 - d = b$ болатын белгілеулер енгіземіз. Сонда арифметикалық прогрессияның n-ші мүшесінің формуласы $y = kx + b$ түріне келеді. Бұл формуланың сызықтық функцияны беретіні белгілі. Демек, координаталық жазықтықта арифметикалық прогрессияны кескіндейтін нүктелер бір түзудің бойында жатады және абсциссалары натурал сандар болады.

Яғни, арифметикалық прогрессия натурал сандар жиынында сызықтық функция болып табылады.

МЫСАЛ

7. $a_1 = -7$ және $d = 4$ болатын арифметикалық прогрессияның графигін салайық.

Шешуі. Графикті салу үшін абсциссалары мүшелерінің нөміріне, ординаталары прогрессияның сәйкес мүшелеріне тең -7; -3; 1; 5; 9; ... арифметикалық прогрессияның графигін салайық.

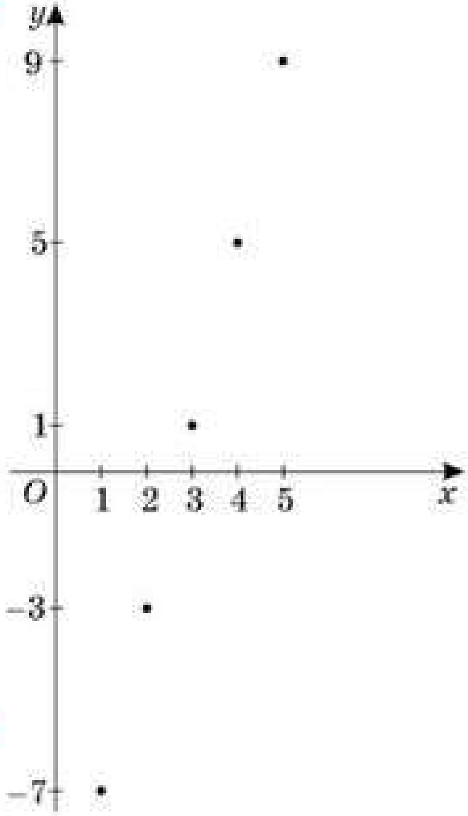
Салынған нүктелердің барлығы бір түзудің бойында жататынын графиктен көруге болады (27-сурет).

“Ïðîãðåññèÿ” (ëàò. Progressio) ñөçi “àëғà кiçғàëó” (“ïðîãðåññ” ñөçi ñèÿқòû) äåãåí ìàғûíàíû áåðåäi.

Àëғàøқûäà ïðîãðåññèÿ äåï êåç êåëãåí ñàíäàð òiçáåãiíi àéòàòûí, ìûñàëû, íàòóðàë ñàíäàð òiçáåãi, ìûðàäûң êâàäðàòòàðû íåí êóáòàðûíûң òiçáåãi. Îðòà ғàñûðлардың îðòàñûíäà áұë òåðìèí æàëïû қîëäàíóғà øûқòû.

Áiçãå æåòêåí ïðîãðåññèÿ òóðàëû äåðåêòåð Åæåëãi Ãðåê құæàòòàðûíäà êåçäåñåäi. À.ç.á. V ғàñûðäûң өçiíäå ãðåêòåð 1, 2, 3, ... n æәíå 2, 4, 6, ..., $2n$ ïðîãðåññèÿëàðûíàí òàíûñ áîëғàí.

Ïðîãðåññèÿíû àíûқòàéòûí êåéiíãi ôîðìó-ëàëàð қûòàé æәíå үíäi ғàëûìäàðûíà äà áåëãiëi áîëғàí.



27-сурет

1. Арифметикалық прогрессияны сандар тізбегінің берілуінің қандай түріне жатқызуға болады?
2. Шекті және шексіз арифметикалық прогрессияға мысал келтіріңдер.
3. $d = a_{n+1} - a_n$ формуласының арифметикалық прогрессия үшін мәні неде?
4. Сандар тізбегінің арифметикалық прогрессия болатынын қандай белгілері бойынша анықтайды?

Жаттығулар

А

13.1. Тізбектердің қайсысы шекті арифметикалық прогрессия болады:

1) 2; 7; 12; 17; 22; 27; 2) –200; –100; –50; –25; –12,5;
3) 4; 20; 100; 500; 2500; 4) –11; –1; 9; 19; 29;
5) 1,35; 1,6; 1,85; 2,1; 2,35; 6) –1,3; 0,13; –0,013; 0,0013;
7) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{6}$; 0; $-\frac{1}{6}$; 8) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{18}$; $\frac{1}{54}$; $\frac{1}{162}$?

13.2. Егер:

1) $a_1 = 7$, $d = 3$; 2) $a_1 = 1{,}3$, $d = -0{,}2$;
3) $a_1 = -2{,}5$, $d = 0{,}7$; 4) $a_1 = \frac{2}{7}$, $d = \frac{1}{3}$ болса, онда

(a_n) арифметикалық прогрессиясының алғашқы алты мүшесін жазыңдар.

13.3. (a_n) тізбегі — арифметикалық прогрессия. Егер:
1) $a_1 = -3$, $d = 2$ болса, онда a_7-ні;
2) $a_1 = 2,3$, $d = -1,2$ болса, онда a_5-ті;
3) $a_1 = -2,1$, $d = -2,3$ болса, онда a_{11}-ді;
4) $a_1 = 0,6$, $d = 1,02$ болса, онда a_9-ды табыңдар.

13.4. 1) 0,5; –1; –2,5 ...; 2) 13; 7; 1; ...; 3) –3,3; –1,2; 0,9; ...; 4) 2; 14; 26; ... арифметикалық прогрессиясының a_{19}-шы және n-ші мүшесін табыңдар.

13.5. 1) Материялық нүкте қозғалыстың алғашқы секундында 6 см, ал кейінгі әрбір секундта алғашқы секундқа қарағанда 2 см-ге артық жол жүрді. Материялық нүкте қозғалыстың жетінші секундында қанша сантиметр жол жүрген?

2) Стансыдан шыққан пойыз қозғалыс жылдамдығын бірқалыпты 40 м/мин-қа арттырды. 20 мин-тан кейін пойыздың жылдамдығы қандай болған?

13.6. (a_n) тізбегі — арифметикалық прогрессия. Егер:
1) $a_7 = -8$, $d = 3$; 2) $a_{10} = 7,3$, $d = -0,2$;
3) $a_{13} = -23,4$, $d = 2,5$; 4) $a_{27} = 10,6$, $d = -1,12$ болса, онда a_1-ді табыңдар.

13.7. 1) $a_1 = 3$ және $a_7 = -8$; 2) $a_3 = -2,3$ және $a_7 = -8$;
3) $a_2 = -1,7$ және $a_8 = 7,6$; 4) $a_5 = -21,5$ және $a_7 = 6,5$ болатын (a_n) арифметикалық прогрессиясының айырымын табыңдар.

13.8. 1) $a_n = 2 - 0,3n$; 2) $a_n = 4 + 2n$; 3) $a_n = \frac{n-5}{8}$;
4) $a_n = \frac{4-n}{5}$; 5) $a_n = n \cdot (n+4)$; 6) $a_n = n \cdot (n^2 + 5)$
тізбегі арифметикалық прогрессия бола ма?

B

13.9. 1) Арифметикалық прогрессияның екінші мүшесі 3,6-ға, бесінші мүшесі 9,6-ға тең. [15; 25] сан аралығына тиісті прогрессия мүшелерінің нөмірлерін анықтаңдар.

2) Арифметикалық прогрессияның үшінші мүшесі 2,4-ке, алтыншы мүшесі –3,9-ға тең. [10; 20] сан аралығына тиісті прогрессия мүшелерінің нөмірлерін анықтаңдар.

13.10. 1) Арифметикалық прогрессияның екінші мүшесі 3-ке, жетінші мүшесі 23-ке тең. Арифметикалық прогрессияның екі мың он бірінші мүшесін табыңдар.

2) Арифметикалық прогрессияның үшінші мүшесі 4-ке, тоғызыншы мүшесі 22-ге тең. Арифметикалық прогрессияның екі мың жиырма бірінші мүшесін табыңдар.

13.11. 1) 95 саны 15; 19; 23; ... арифметикалық прогрессиясының мүшесі бола ма? Егер мүшесі болса, онда осы мүшенің нөмірін көрсетіңдер.

2) 2011 саны 33; 42; 51; ... арифметикалық прогрессиясының мүшесі бола ма? Егер мүшесі болса, онда осы мүшенің нөмірін көрсетіңдер.

3) 2035 саны –13; 19; 51; ... арифметикалық прогрессиясының мүшесі бола ма? Егер мүшесі болса, онда осы мүшенің нөмірін көрсетіңдер.

13.12. Арифметикалық прогрессияның бірінші мүшесі мен айырымын табыңдар:

1) $c_{10} = 8$ және $c_{21} = 63$; 2) $c_{12} = 16$ және $c_{21} = 88$;

3) $c_9 = -1{,}8$ және $c_{19} = 23{,}2$; 4) $c_{17} = 3{,}4$ және $c_{29} = -18{,}2$.

13.13. 1) –24,5; –23; ...; 2) –13, 3; –10,1; ...; 3) –22,4; –19,6; ... арифметикалық прогрессиясының теріс мүшелерінің санын табыңдар.

13.14. (a_n) арифметикалық прогрессиясының $a_7 = -1{,}6$ және $a_{13} = 4{,}8$ екі мүшесі белгілі. Осы прогрессияның:
1) бірінші мүшесі мен айырымын;
2) теріс мүшелерінің санын;
3) алғашқы оң мүшесін табыңдар.

13.15. (a_n) арифметикалық прогрессиясының $a_5 = -2{,}4$ және $a_{11} = 6{,}8$ екі мүшесі белгілі. Осы прогрессияның:
1) бірінші мүшесі мен айырымын;
2) теріс мүшелерінің санын;
3) алғашқы оң мүшесін табыңдар.

13.16. (a_n) арифметикалық прогрессиясының $a_6 = 3{,}6$ және $a_{12} = -7{,}8$ екі мүшесі белгілі. Осы прогрессияның:

1) бірінші мүшесі мен айырымын;
2) оң мүшелерінің санын;
3) алғашқы теріс мүшесін табыңдар.

13.17. (a_n) арифметикалық прогрессиясының $a_9 = -2{,}2$ және $a_{14} = -10{,}8$ екі мүшесі белгілі. Осы прогрессияның:

1) бірінші мүшесі мен айырымын;
2) оң мүшелерінің санын;
3) алғашқы теріс мүшесін табыңдар.

13.18. 1) $a = 4$; $c = 16$; 2) $a = -2$; $c = 21$; 3) $a = 1{,}2$; $c = 4{,}8$ сандарымен бірге арифметикалық прогрессия құрайтындай a және c сандарының арасына үш сан орналастырыңдар.

13.19. x-тің қандай мәндерінде: 1) $1, x, 8 - x$; 2) $3, x - 1, 13 - 4x$ сандары арифметикалық прогрессия құрайды?

13.20. (a_n) арифметикалық прогрессиясы берілген. $a_8 = \frac{5}{12}$ екені белгілі.

1) $a_7 + a_9$; 2) $a_6 + a_{10}$; 3) $a_5 + a_{11}$; 4) $a_3 + a_{13}$ қосындысының мәнін табыңдар.

13.21. Егер: 1) $a_1 + a_5 = 24$ және $a_1 \cdot a_3 = 60$; 2) $a_2 + a_4 = 16$ және $a_1 \cdot a_5 = 28$ болса, онда арифметикалық прогрессияның бірінші мүшесі мен айырымын табыңдар.

C

13.22. $a_1 = -5$ және $d = 7$ болатын (a_n) арифметикалық прогрессиясы берілген. 1) 247; 2) 346; 3) 2067 саны осы прогрессияның мүшесі бола ма? Егер мүшесі болса, онда осы мүшенің нөмірін табыңдар.

13.23. 1) 3; 8; ...; 2) –12; –4; ...;

3) 156; 135; ...; 4) 251; 229; ... арифметикалық прогрессиясының екітаңбалы сандар болатын мүшелерінің нөмірлерін табыңдар.

***13.24.** 2,35; 3,1; ... арифметикалық прогрессиясының 20 санынан артпайтын бүтін сандар болатын мүшелері бар ма? Егер бар болса, онда сол мүшелерді табыңдар.

***13.25** . 7; 11; ... және 8; 11; ... шекті арифметикалық прогрессиялары 100 мүшеден тұрады. Бірдей мүшелер санын анықтаңдар.

***13.26.** 4; 12; …және 5; 12; …шекті арифметикалық прогрессиялары 200 мүшеден тұрады. Бірдей мүшелердің санын анықтаңдар.

13.27. (c_n) арифметикалық прогрессиясы $\frac{c_5}{c_3} = \frac{7}{4}$ формуласымен берілген. $c_7 = 4c_2$ болатынын дәлелдеңдер.

13.28. Оң мүшелі өспелі арифметикалық прогрессияның алғашқы үш мүшесінің қосындысының мәні 9-ға, ал олардың квадраттарының қосындысының мәні 99-ға тең. Прогрессияның бесінші мүшесін табыңдар.

13.29. a айнымалысының қандай мәндерінде $a^2 - 3$, $2a^2 + 1$ және $a^4 + 1$ ретімен алынған өрнектер осы ретпен алынған арифметикалық прогрессияның мүшелері болады?

ҚАЙТАЛАУ

13.30. Теңсіздікті интервалдар әдісімен шешіңдер:

1) $\frac{(x-2)^2(x+3)}{x-3} > 0$; 2) $\frac{(x+2)^2(x+5)}{x-2} < 0$;

3) $\frac{(x-1)^3(x+2)}{(x-3)^2}$ | 0; 4) $\frac{(x-4)^3(x+6)}{(x-1)^2}$ m 0.

13.31. Функцияның графигін салып, оның өсу аралықтарын табыңдар:

1) $y = 2x^2 - 3x + 1$;

2) $y = -2x^2 + 5x + 3$;

3) $y = -0,5x^2 - 3x + 4$.

13.32. Функцияның анықталу облысын табыңдар:

1) $y = \sqrt{x^2 - 3x - 4} + \sqrt{4 - x}$;

2) $y = \sqrt{x^2 + 3x - 4} + \sqrt{9 - x^2}$.

13.33. Теңдеуді шешіңдер:

1) $(x + 3)^4 - x^2 - 6x - 11 = 0$;

2) $(x - 6)^4 - 2x^2 + 24x - 80 = 0$.

13.34. Теңдеулер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases} x^3 + x^3y^3 = 17 - y^3, \\ x + xy = 5 - y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + 3xy = 3 - 2y^2, \\ 5x^2 - 2xy = 5 + y^2. \end{cases}$

Жаңа білімді меңгеруге дайындаламыз

13.35. Тізбек арифметикалық прогрессия бола ма? Тізбектің алғашқы төрт мүшесінің қосындысын табыңдар:

1) 2; 7; 12; 17; 22; 27;
2) –200; –100; –50; –25; –12,5;
3) 4; 20; 100; 500; 2500;
4) –11; –1; 9; 19; 29.

13.36. Арифметикалық прогрессия $a_n = 2n - 5$ формуласымен берілген. Прогрессияның алғашқы бес мүшесінің қосындысын табыңдар.

Жаңа білімді меңгеруге арналған тірек ұғымдар

Тізбек, тізбектің мүшесі, арифметикалық прогрессия, арифметикалық прогрессияның n-ші мүшесі, арифметикалық прогрессияның айырымы.

§ 14. АРИФМЕТИКАЛЫҚ ПРОГРЕССИЯНЫҢ АЛҒАШҚЫ *n* МҮШЕСІНІҢ ҚОСЫНДЫСЫНЫҢ МӘНІН ЕСЕПТЕУ ФОРМУЛАСЫ

Түйінді ұғымдар

Арифметикалық прогрессия, арифметикалық прогрессия мүшелерінің қосындысы

? Арифметикалық прогрессияның алғашқы *n* мүшелерінің қосындысының формуласымен танысасыңдар; арифметикалық прогрессияның алғашқы *n* мүшелерінің қосындысының формуласын қолдануды және арифметикалық прогрессияға берілген есептерді шығаруды үйренесіңдер.

Алғашқы елу натурал санның қосындысының мәнін табу керек болсын. Қосындыны табу үшін сандарды тізбектеп қосуға болады, бірақ оған көп уақыт жұмсалады.

Қосындының мәнін табудың тиімді тәсілін іздеп көрейік. 1-ден 50-ге дейінгі натурал сандарды алдымен өсу ретімен, одан кейін кему ретімен орналастырайық:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 48 + 49 + 50,$$
$$50 + 49 + 48 + \ldots + 3 + 2 + 1.$$

Бірінің астында бірі орналасқан сандардың қосындысының мәні бірдей болатынын көреміз: $1 + 50 = 2 + 49 = 3 + 48 = \ldots = 48 + 3 = 49 + 2 = 50 + 1 = 51$. Басқаша айтқанда, 1; 2; 3; ...; 48; 49; 50 шекті арифметикалық прогрессиясының ұштарынан бірдей қашықтықта орналасқан екі мүшесінің қосындысының мәні оның шеткі мүшелерінің қосындысының мәніне тең болатынын байқаймыз. Демек, мұндай әрбір жұптың қосындысының мәні 51-ге, ал жұптар саны 25-ке тең.

Сондықтан $1 + 2 + 3 + ... + 48 + 49 + 50 = \frac{51 \cdot 50}{2} = 51 \cdot 25 = 1275.$

Енді арифметикалық прогрессияның алғашқы n мүшесінің қосындысының мәнін табу формуласын осындай жолмен қорытып шығарайық. Оны S_n деп белгілейік:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n. \qquad (1)$$

(1) теңдіктің оң жағындағы қосылғыштарды кері ретпен жазсақ, онда S_n қосындысы өзгермейді. Сонда

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1. \qquad (2)$$

(1) және (2) теңдіктерді мүшелеп қосып, мынаны аламыз:

$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$.

Әрбір жақшада ұштарынан бірдей қашықтықта орналасқан арифметикалық прогрессияның екі мүшесінің қосындысы жазылған.

Барлық жақшаларда берілген қосындылардың мәні өзара тең және ол мәннің шеткі мүшелердің $a_1 + a_n$ қосындысының мәніне тең екенін өздерің қарастырыңдар.

Мұндай жақшалар саны n, яғни ол прогрессияның мүшелер санына тең.

Сондықтан $2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n$. Сонда $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ — арифметикалық прогрессияның алғашқы n мүшесінің қосындысының мәнін есептеу формуласы.

Жоғарыда келтірілген тұжырымдама төмендегі теореманың дәлелдемесін береді.

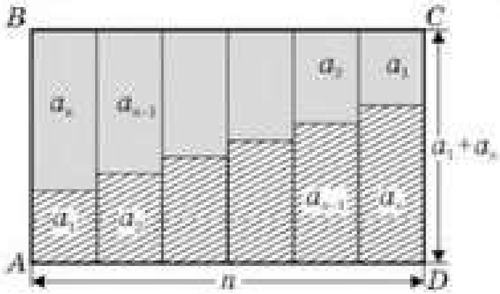
Теорема. *Арифметикалық прогрессияның алғашқы n мүшесінің қосындысы прогрессияның шеткі мүшелерінің қосындысының жартысы мен мүшелер санының көбейтіндісіне тең.*

Егер арифметикалық прогрессияның n-ші мүшесінің формуласын қолданса, онда арифметикалық прогрессияның алғашқы n мүшесінің формуласы:

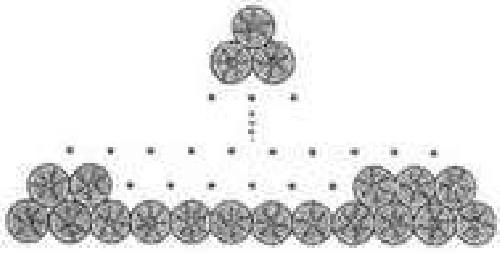
$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$$

түрінде болатынын дәлелдеңдер.

Арифметикалық прогрессияның алғашқы n мүшесінің қосындысының формуласын 28-суретті қолданып, геометриялық әдіспен табуға болатынын дәлелдеңдер.



28-сурет



29-сурет

1. Арифметикалық прогрессияның n-ші мүшесінің формуласының практикада қолданылуын мына мысал арқылы қарастырайық.

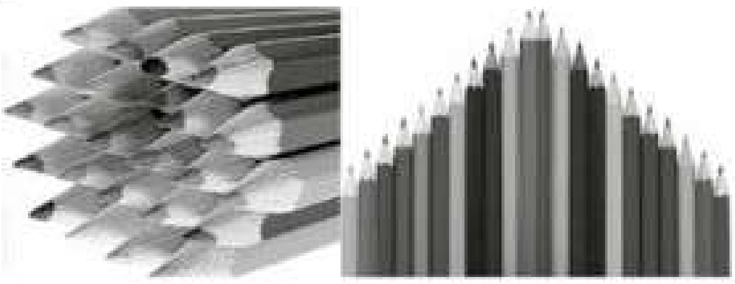
МЫСАЛ

1. Кесілген ағаштарды құрғақ күйінде сақтау үшін оларды жоғарғы қатардағы ағаштар саны төменгі қатардағы ағаштар санынан бір ағаш санына кем етіп орналастырылады (29-сурет). Барлық ағаштар санын қалай тез табуға болады?

Шешуі. Жоғарғы қатарда төмендегіге қарағанда бір ағаш кем орналасқандықтан, ал төмендегі қатарда 12 ағаш (санап алуға болады) болғандықтан, әр қатардағы ағаштар саны: 12; 11; 10; 9; 8; 7; 6; 5; 4; 3; 2; 1 болатын шекті арифметикалық прогрессияны құрайды. Бұл прогрессия үшін $a_1 = 12$, $a_n = 1$, $n = 12$. Арифметикалық прогрессияның n мүшесінің қосындысының формуласын, яғни $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ формуласын қолданып, $S_{12} = 78$ аламыз.

Жауабы: 78 ағаш.

30-суретті қолданып, арифметикалық прогрессияға есеп құрастырыңдар.



30-сурет

МЫСАЛ

2. 1; 3,5; ...арифметикалық прогрессиясының алғашқы 20 мүшесінің қосындысының мәнін табайық.

Шешуі. Прогрессияның бірінші мүшесі 1-ге, айырымы 2,5-ке тең. Алдымен прогрессияның n-ші мүшесінің формуласын қолданып, 20-шы мүшесін табамыз. Сонда $a_{20} = 1 + 2{,}5 \cdot (20 - 1) = 1 + 2{,}5 \cdot 19 = 48{,}5$. Енді арифметикалық прогрессияның алғашқы n мүшесінің қосындысын табу формуласы бойынша алғашқы 20 мүшесінің қосындысын есептейміз:

$$S_{20} = \frac{(1 + 48{,}5) \cdot 20}{2} = 49{,}5 \cdot 10 = 495.$$

Жауабы: 495.

МЫСАЛ

3. Арифметикалық прогрессияның k мүшесінен бастап тізбектей алынған n мүшесінің қосындысын:

$$S_n = \frac{a_k + a_{k+n-1}}{2} \cdot n$$

формуласымен есептеуге болатынын дәлелдейік.

Дәлелдеуі. $a_1 + a_2 + \ldots + a_k + \ldots$ арифметикалық прогрессиясын қарастырайық. k мүшесінен бастап тізбектей алынған n мүшесінің қосындысын, яғни бірінші мүшесі a_k болатын шекті тізбектің қосындысын табу керек. Осы прогрессияның соңғы мүшесінің реттік нөмірін анықтаймыз. Бірінші мүшенің нөмірі k, екіншінікі $k + 1$, үшінші мүшенің нөмірі $k + 2$, төртіншінікі $k + 3$, ... ал n-ші мүшенің нөмірі $k + n - 1$. Демек, $a_k + a_{k-1} + \ldots + a_{k-n-1}$ шекті арифметикалық прогрессияның мүшелерінің қосындысын табу керек. Сондықтан

$$S_n = \frac{a_k + a_{k+n-1}}{2} \cdot n.$$

?

1. Арифметикалық прогрессияның $k(k+1)$ мүшелерінің қосындысының мәнін есептеу формуласын жазыңдар.
2. 3-мысалдағы формуланы қолданбай, арифметикалық прогрессияның k-шы мүшесінен бастап тізбектей алынған n мүшесінің қосындысының мәнін қалай табуға болады?

Жаттығулар

А

14.1. Арифметикалық прогрессияның алғашқы 99 мүшесінің қосындысын табыңдар:

1) 32, 35; ...; 2) 106; 103; ... ;

3) –33; –29; ... ; 4) –23,5; –23; ... .

14.2. Егер:

1) $a_1 = 5$, $d = 3$ және $n = 14$;

2) $a_1 = 12$, $d = 7$ және $n = 24$;

3) $a_1 = -55$, $d = 8$ және $n = 32$;

4) $a_1 = -7{,}3$, $d = 8$ және $n = 19$;

5) $a_1 = -16{,}8$, $d = -1{,}2$ және $n = 26$;

6) $a_1 = 12{,}56$, $d = -6{,}4$ және $n = 104$ болса, онда a_n мен S_n-ді табыңдар .

14.3. Егер:

1) $a_1 = 3$, $d = 3$ және $a_n = 27$;

2) $a_1 = 14$, $d = 6$ және $a_n = 84$;

3) $a_1 = -5{,}4$, $d = 1{,}8$ және $a_n = 30{,}6$;

4) $a_1 = -7{,}3$, $d = -2{,}6$ және $a_n = -30{,}7$ болса, онда n мен S_n-ді табыңдар.

14.4. Егер:

1) $a_1 = 25$, $d = -2$, $S_n = 168$;

2) $a_1 = 5$, $d = 2$, $S_n = 192$;

3) $a_1 = -12{,}5$, $d = 3$, $S_n = 195{,}5$;

4) $a_1 = -2{,}4$, $d = -0{,}8$, $S_n = -70{,}4$ болса, онда n-ді табыңдар.

14.5. 1) $a_1 = 18$, $n = 27$, $S_n = 2241$; 2) $a_1 = -8$, $n = 17$, $S_n = -408$; 3) $a_1 = -5$, $n = 23$, $S_n = 1909$; 4) $a_1 = 81$, $n = 34$, $S_n = 510$ (a_n) арифметикалық прогрессиясының айырымын табыңдар.

14.6. 1) 1,3; 2,1; ...; 2) $3\frac{1}{3}$; $3\frac{7}{12}$; ...;

3) –2,87; –2,77; ... ; 4) –3,43; –3,49; ...

арифметикалық прогрессиясының 20-шы мүшесін және алғашкы 20 мүшесінің қосындысының мәнін табыңдар.

14.7. Егер:

1) $a_{11} = 6$, $a_{16} = 8{,}5$; 2) $a_8 = 4$, $a_{13} = 7{,}5$;

3) $a_3 = 3$, $a_8 = 10{,}5$; 4) $a_2 = 2$, $a_9 = 6{,}9$

болса, онда (a_n) арифметикалық прогрессиясының айырымын табыңдар.

14.8. (x_n) арифметикалық прогрессиясы:

1) $x_n = 3n + 2$ формуласымен берілген. Прогрессияның алғашқы жиырма мүшесінің қосындысының мәнін табыңдар;

2) $x_n = 2n - 9$ формуласымен берілген. Прогрессияның алғашқы отыз мүшесінің қосындысының мәнін табыңдар;

3) $x_n = -4n + 12$ формуласымен берілген. Прогрессияның алғашқы он екі мүшесінің қосындысының мәнін табыңдар;

4) $x_n = -2{,}3n - 7{,}2$ формуласымен берілген. Прогрессияның алғашқы жиырма тоғыз мүшесінің қосындысының мәнін табыңдар.

14.9. 1) Қосылғыштары 2-ден $2n$-ге дейінгі $2n$-ді қоса алғандағы барлық жұп натурал сандар болатын $2 + 4 + 6 + ... + 2n$;

2) қосылғыштары 1-ден $(2n - 1)$-ге дейінгі $(2n - 1)$-ді қоса алғандағы барлық тақ натурал сандар болатын $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1)$;

3) қосылғыштары 3-тен $3n$-ге дейінгі $3n$-ді қоса алғандағы 3-ке еселік барлық натурал сандар болатын $3 + 6 + 9 + ... + 3n$;

4) қосылғыштары 5-тен $5n$-ге дейінгі $5n$-ді қоса алғандағы 5-ке еселік барлық натурал сандар болатын $5 + 10 + 15 + ... + 5n$ қосындысының мәнін табыңдар.

B

14.10. 1) Арифметикалық прогрессияның екінші мүшесі оның тоғызыншы мүшесінен 3 есе артық. Прогрессияның алғашқы жиырма төрт мүшесінің қосындысының мәнін табыңдар.

2) Арифметикалық прогрессияның үшінші мүшесі оның он екінші мүшесінен 4 есе артық. Прогрессияның алғашқы жиырма тоғыз мүшесінің қосындысының мәнін табыңдар.

14.11. Егер:

1) $a_n = 5n - 100$ болса, онда арифметикалық прогрессияның барлық теріс мүшелерінің;

2) $a_n = 7n - 130$ болса, онда арифметикалық прогрессияның барлық теріс мүшелерінің;

3) $a_n = 51 - 3n$ болса, онда арифметикалық прогрессияның барлық оң мүшелерінің;

4) $a_n = 58 - 4n$ болса, онда арифметикалық прогрессияның барлық оң мүшелерінің қосындысының мәнін табыңдар.

14.12. Егер:

1) $d = 3$, $a_n = 59$, $S_n = 603$; 2) $d = -5$, $a_n = -8$, $S_n = 30$;
3) $d = 2$, $a_n = 49$, $S_n = 702$; 4) $d = -7$, $a_n = -18$, $S_n = -20$
болса, онда a_1 және n-ді табыңдар.

14.13. 1) $a_2 + a_5 = 41$ және $a_1 + a_3 = 144$;
2) $a_2 + 2a_4 = 27$ және $a_{17} = 50$;
3) $a_2 a_5 = 112$ және $\frac{a_1}{a_5} = 2$; 4) $a_3 a_4 = 28$ және $\frac{a_1}{a_5} = 13$
болса, онда мүшелері оң сандар болатын (a_n) арифметикалық прогрессиясының n-ші мүшесінің және алғашқы n мүшесінің формуласын жазыңдар.

14.14. 1) Егер $a_3 + a_{11} = 20$ болса, онда арифметикалық прогрессияның жетінші мүшесін табыңдар. 2) Егер $a_7 + a_{13} = 24$ болса, онда арифметикалық прогрессияның оныншы мүшесін табыңдар.

14.15. 1) Барлық екітаңбалы жұп сандардың қосындысының мәнін табыңдар. 2) Барлық екітаңбалы тақ сандардың қосындысының мәнін табыңдар.

14.16. 1) 3-ке; 2) 7-ге еселік болатын екітаңбалы сандардың қосындыларының мәнін табыңдар.

14.17. 1) 5-ке бөлгенде қалдығы 1; 2) 9-ға бөлгенде қалдығы 4 болатын барлық екітаңбалы сандардың қосындыларының мәнін табыңдар.

14.18. 1) 8-ге; 2) 13-ке еселік болатын үштаңбалы сандардың қосындыларының мәнін табыңдар.

14.19. 1) 5-ке бөлгенде қалдығы 3; 2) 25-ке бөлгенде қалдығы 11 болатын барлық үштаңбалы сандардың қосындыларының мәнін табыңдар.

14.20. Егер арифметикалық прогрессияда $a_1 = 137$ және $a_2 = 121$ болса, онда алғашқы n мүшелерінің қосындылары мәндерінің ең үлкенін табыңдар.

C

14.21. (a_n) арифметикалық прогрессиясындағы:
1) $a_7^2 + 2a_7 a_5 + a_5^2 - (a_8 + a_4)^2$; 2) $4a_9^2 - 4a_1 a_9 + a_1^2 - a_{17}^2$ қосындысының мәнін табыңдар.

14.22. 1) Арифметикалық прогрессияның бірінші, төртінші және он үшінші мүшелерінің қосындысының мәні 23-ке тең. a_6 және S_{11}-ді табыңдар.

2) Арифметикалық прогрессияның бірінші, алтыншы, және он төртінші мүшелерінің қосындысының мәні 63-ке тең. a_7 және S_{19}-ды табыңдар.

14.23. Егер теңдеудің сол жағындағы қосылғыштар арифметикалық прогрессия құрайтын болса, онда:
1) $2 + 8 + 14 + \ldots + x = 184$; 2) $5 + 8 + 11 + \ldots + x = 185$ теңдеуін шешіңдер.

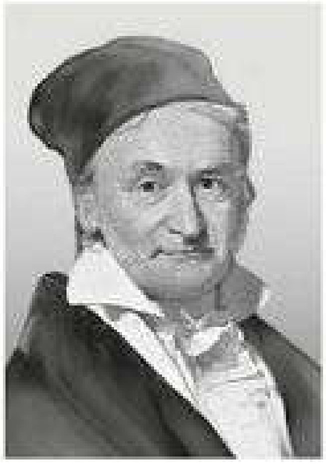
14.24. Тақ сандардан тұратын шекті арифметикалық прогрессияның ортаңғы мүшесі 17-ге, барлық мүшелерінің қосындысының мәні мүшелердің жалпы санынан 112-ге артық. Прогрессия мүшелерінің санын табыңдар.

14.25. Арифметикалық прогрессияда n-ші мүше $a_n = 2{,}5n + 2$ формуласымен берілген. Прогрессияның он бірінші мүшесінен бастап жиырмасыншы мүшесіне дейінгі, жиырмасыншы мүшесін қоса алғандағы қосындысының мәнін табыңдар.

14.26. Еркін түскен дене бірінші секундта 5,9 м, ал әрбір келесі секундтарда алдыңғысынан 9,8 м-ге артық жол жүреді. Қозғалыс басталғаннан кейін: 1) бес секунд ішінде; 2) бесінші секундта; 3) жетінші секундта; 4) жеті секунд ішінде дененің жүрген жолының ұзындығын табыңдар.

ҒАЛЫМ-МАТЕМАТИК ТУРАЛЫ ХАБАРЛАМА ДАЙЫНДАҢДАР

14.27. Íåìiñ ìàòåìàòèêi Êàðë Ôðèäðèõ Ãàóñòûң 9 æàñûíäà іұғàëiì îқóøûëàðғà ìûíà åñåïòi áåðäài: "1-äåí 100-ãå äåéiíãi 100 ñàíûí қîñà àëғàíäàғû áàðëûқ ìàòóðàë ñàíäàðäûң қîñûíäûñûíûң, ÿғíè $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + 100$ қîñûíäûñûíûң ìəíií òàáûңäàð". Áiðàқ óàқûòòàí êåéií Ãàóñòûң "Ìåí øûғàðäûì" äåãåí äàóûñû øûғàäû. Êøïòåãåí îқóøûëàð áiðàç óàқûòòàí êåéií қàòå æàóàï àëàäû. Àë Ãàóñòûң äəïòåðiíäå áið ғàíà æàóàï áîëàäû æəíå îë äұðûñ æàóàï åäi. Îíûң åñåïòåó ñûçáàñû áîëûïòà əð æұïòàғû:



Карл Фридрих Гаусс (1777—1855)

$$\begin{array}{r} 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 100 \\ +\ 100,\ 99,\ 98,\ \ldots,\ 1 \\ \hline 101,\ 101,\ 101,\ \ldots,\ 101 \end{array}$$

ñàíäàðäûң кiñûíäûñûíың іәii 101-ãå òåң. Іұìààé æұïòàð ñàíû 50, ñîíäûқòàí içäåëiíäi кiñûíäû 101 · 50 = 5050-ãå òåң. Іііå, Ãàóññòûң ààëàëûқ øàғû ìåí $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ ôîðìó-ëàñûíûң àðàñûíäà іñûíàé áàéëàíûñ áàð.

ҚАЙТАЛАУ

14.28. Функциялардың графиктерін бір координаталық жазықтыққа салыңдар және олардың қиылысу нүктелерінің координаталарының жуық мәндерін жазыңдар:

1) $y = 2x^2 + 3x - 1$ және $y = -x^2 + 4x - 2$;
2) $y = 3x^2 + 4x + 1$ және $y = -2x^2 + x + 3$.

14.29. Теңдеуді шешіңдер:

1) $\frac{x}{x-3} - \frac{18}{x^2-9} = \frac{5}{x+3}$; 2) $\frac{3x}{x+4} + \frac{17}{x-4} = \frac{70}{x^2-16}$.

14.30. Теңдеуді графиктік тәсілмен шешіңдер:

1) $7x - 6 = x^3$; 2) $x^3 = \sqrt{x}$;
3) $0{,}5x - 2 = \frac{6}{x}$; 4) $3x - 1 = \frac{2}{x}$.

14.31. Теңдеулер жүйесін алмастыру тәсілімен шешіңдер:

1) $\begin{cases} x^2 - xy + 8 = -y, \\ y - 2x = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + 3xy + y^2 = 1, \\ 3y + x = 0. \end{cases}$

14. 32. Тікбұрышты үшбұрыштың ауданы 44 см^2. Егер оның бір катетін 2 см-ге арттырып, екіншісін 1 см-ге кішірейтсек, онда оның ауданы 50 см^2 болады. Берілген үшбұрыштың катеттерінің ұзындығын табыңдар.

Жаңа білімді меңгеруге дайындаламыз

14.33. Шектелген тізбектің жазылу заңдылығын анықтаңдар:

1) 2; 8; 32; 128; 512; 2048; 2) –200; –100; –50; –25; –12,5;
3) 4; 20; 100; 500; 2500;
4) –11; –1,1; –0,11; –0,011; –0,0011?

14.34. Сандар тізбегінің заңдылығын анықтаңдар және (*) белгісінің орнындағы тізбектің мүшесін жазыңдар:

1) 8; 4; 2; 1; (*); 2) 8; –4; 2; –1; (*);
3) $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; $-\frac{1}{16}$; (*); 4) –4; 16; –64; 256; (*).

Жаңа білімді меңгеруге арналған тірек ұғымдар

Тізбек, тізбектің мүшесі, тізбектің n-ші мүшесі, тізбектің келесі мүшесі.

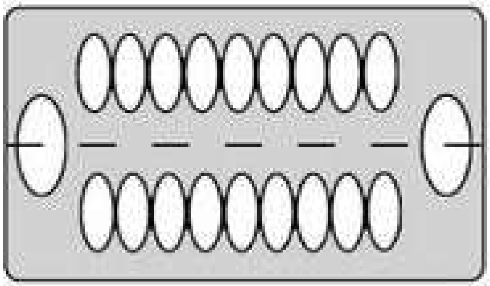
§ 15. ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ ПРОГРЕССИЯ. ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ ПРОГРЕССИЯНЫҢ n-ші МҮШЕСІНІҢ ФОРМУЛАСЫ

Түйінді ұғымдар

Геометриялық прогрессия, n-ші мүшесінің формуласы

Геометриялық прогрессия ұғымымен және қасиетімен, n-ші мүшесінің формуласымен танысасыңдар; санды тізбектердің арасынан геометриялық прогрессияны ажыратуды, геометриялық прогрессияның n-ші мүшесінің формуласын табуды, геометриялық прогрессияға берілген есептерді шығаруды үйренесіңдер.

Шахмат ойынына ұқсас қазақтың ұлттық "тоғызқұмалақ" ойынында жиырма ұяшығы бар тақта алынады. Оның 2 ұяшығы — қазына, олар ойынға қатыспайды, тек тастарды жинау үшін қолданылады. Ал тақтаның бүйір жақтарында көлемі қазына ұяшығының көлемінен кіші, әрқайсысында тоғыз ұяшықтан, барлығы 18 ұяшық орналасқан (31-сурет).



31-сурет

Ойында барлығы 162 тас қолданылады. Демек, ойынға 2, 18, 162 сандары қатысады. Бұл тізбек мүшелерінің арасында қандай заңдылық бар екенін ойлап көріңдер. Тізбектің әр мүшесі алдыңғы мүшесін 9 санына көбейткенде шығатын санға тең болады деп тұжырымдауға бола ма? Расында да, $2 \cdot 9 = 18$ және $18 \cdot 9 = 162$.

Мүшелері осындай қасиетке ие болатын тізбекті *геометриялық прогрессия* деп атайды.

Екіншісінен бастап кез келген мүшесі алдыңғы мүшесін нөлден өзгеше қандай да бір тұрақты санға көбейткенде шығатын сандар тізбегі ***геометриялық прогрессия*** *деп аталады.*

МЫСАЛ

1. $2;\ 2^2;\ 2^3;\ 2^4;\ 2^5;\ 2^6$ тізбегінің екіншісінен бастап алғандағы әрбір мүшесі алдыңғы мүшені 2-ге көбейткенде шығатын санға тең. Бұл тізбек геометриялық прогрессия болып табылады.

Келесі мүшесін алу үшін алдыңғы мүшесіне көбейтілетін сан *геометриялық прогрессияның еселігі* деп аталады және q әрпімен белгіленеді.

МЫСАЛ

2. Бірнеше мысалдар келтірейік:

1) 3, 6, 12, 24, ...; 2) 4, 12, 36, 108, ...;

3) 40, 20, 10, 5, 2,5, ...; 4) $\frac{3}{4}, -\frac{3}{8}, \frac{3}{16}, -\frac{3}{32}, ...$.

Берілген тізбектер еселіктері сәйкесінше 2; 3; $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$ санына тең болатын геометриялық прогрессияларды береді.

Анықтамадан екінші мүшесінен бастап кез келген мүшесінің алдыңғы мүшеге қатынасы q-ға тең екені, яғни $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$ шығады.

Мүшелері өзара бірдей сан болатын тізбекті еселігі $q = 1$ болатын геометриялық прогрессия ретінде қарастыруға болады. Мысалы, 7, 7, 7, ... тізбегі еселігі 1-ге тең геометриялық прогрессия.

Геометриялық прогрессияның белгіленуі: b_1; b_2; b_3; ... ; b_n; ...

Еселігі q болатын b_1; b_2; b_3; ...; b_n; ... геометриялық прогрессиясы берілсін.

Геометриялық прогрессияның екінші мүшесін табу үшін бірінші мүшесін еселікке көбейтеміз және т.с.с. үшінші мүшесін табу үшін екінші мүшесін еселікке көбейтеміз. Бұл тәсіл әр уақытта ыңғайлы бола бермейді, сондықтан реттік нөмірі өте үлкен сан болатын прогрессияның мүшесін табу үшін геометриялық прогрессияның бірінші мүшесі, еселігі және ізделінді мүшенің реттік нөмірі арқылы өрнектелетін формуланы қолданған ыңғайлы.

$(n - 1)$ теңдіктен тұратын жиынды қарастырайық.

$$\left.\begin{aligned} b_2 &= b_1 q \\ b_3 &= b_2 q \\ b_4 &= b_3 q \\ &\cdots\cdots \\ b_{n-1} &= b_{n-2} q \\ b_n &= b_{n-1} q \end{aligned}\right|$$

Теңдіктің оң және сол жақ бөліктерін мүшелеп көбейтеміз:

$$b_2 b_3 \cdot ... \cdot b_{n-1} b_n = b_1 b_2 b_3 \cdot ... \cdot b_{n-1} q^{n-1}.$$

Шыққан теңдіктің екі жағын да $b_2 b_3 \cdot ... \cdot b_{n-1} \neq 0$ өрнегіне бөлеміз.

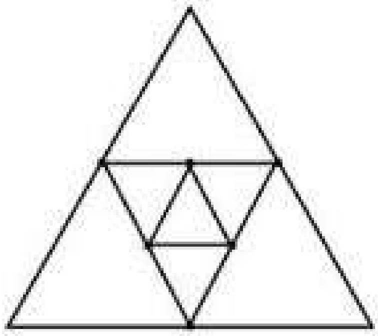
Сонда геометриялық прогрессияның n-ші мүшесінің формуласын, яғни $b_n = b_1 q^{n-1}$ теңдігін аламыз.

Геометриялық прогрессияның кез келген мүшесі оның бірінші мүшесі мен дәреже көрсеткіші алдыңғы мүшенің реттік нөмірі болатын еселікке көбейткенге тең болады.

МЫСАЛ

3. Қабырғалары 4 см-ге тең болатын теңқабырғалы үшбұрышты қарастырайық.

Төбелері берілген үшбұрыштың қабырғаларының ортасы болатын үшбұрыш саламыз (32-сурет). Сонда үшбұрыштың орта сызығының қасиеті бойынша шыққан теңқабырғалы үшбұрыштың әр қабырғасы 2 см-ге тең. Егер салуды жалғастырсақ, онда қабырғаларының ұзындықтары 1 см; $\frac{1}{2}$ см; $\frac{1}{4}$ см; т. с.с. болатын тең қабырғалы үшбұр ыштарды аламыз.



32-сурет

Осы үшбұрыштардың қабырғаларының ұзындықтарын өрнектейтін сандар тізбегін жазайық: 4; 2; 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; ... .

Шыққан тізбек үшін геометриялық прогрессияның n-ші мүшесінің формуласын жазайық. Мұнда $b_1 = 4$, $q = \frac{1}{2}$, сондықтан геометриялық прогрессияның n-ші мүшесінің формуласы $b_n = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ түрінде жазылады.

МЫСАЛ

4. Егер бірінші мүшесі 6-ға, ал еселігі $\frac{1}{3}$-ге тең болса, онда геометрия лық прогрессияны ң алтыншы мүшесін табайық.

Шешуі. Геометриялық прогрессияның n-ші мүшесінің формуласы бойынша: $b_6 = 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{6-1} = 6 \cdot \frac{1}{3^5} = \frac{2}{3^4} = \frac{2}{81}$.

Жауабы: $\frac{2}{81}$.

МЫСАЛ

5. 128 саны $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$; 1; 2; 4; 8, ... геометриялық прогрессиясының нешінш і мүшесі болатынын табайық.

Шешуі. Берілгені бойынша $b_1 = \frac{1}{4}$, $q = 2$ және $b_n = 128$. Геометриялық прогрессияның n-ші мүшесінің формуласы бойынша $128 = \frac{1}{4} \cdot 2^{n-1}$, немесе $512 = 2^{n-1}$. $512 = 2^9$ болғандықтан, $2^9 = 2^{n-1}$ болады. Бұдан $9 = n - 1$, немесе $n = 10$.

Жауаб ы: 10.

МЫСАЛ

6. Егер $b_3 = 18$ және $b_1 = 162$ болса, онда (b_n) геометриялық прогрессиясының сегізінші мүшесін табайық.

Шешуі. Геометриялық прогрессияның n-ші мүшесінің формуласын қолданып, b_3-ті b_1 мен q арқылы өрнектесек, $b_3 = b_1 \cdot q^2$ теңдігін аламыз. Одан q-ды өрнектейік: $q^2 = \frac{b_3}{b_1} = \frac{18}{162} = \frac{1}{9}$. Демек, $q = \frac{1}{3}$, немесе $q = -\frac{1}{3}$. Сондықтан, шартты қанағаттандыратын екі геометриялық прогрессия бар. Біріншісі үшін $b_8 = b_1q^7 = 162 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^7 = \frac{2 \cdot 3^4}{3^7} = \frac{2}{27}$, екіншісі үшін $b_8 = b_1q^7 = 162 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^7 = -\frac{2 \cdot 3^4}{3^7} = -\frac{2}{27}$ болады.

Жауабы : $b_8 = \frac{2}{27}$, немесе $b_8 = -\frac{2}{27}$.

МЫСАЛ

7. Егер төртінші мүшесі $\frac{1}{32}$-ге, алтыншы мүшесі $\frac{1}{512}$-ге тең болса, геометри ялық прог рессияның алғашқы екі мүшесін табайық.

Шешуі. Егер прогрессияның бірінші мүшесін b_1, еселігін q арқылы белгілесек, онда есептің шарты бойынша

$$\begin{cases} b_1 q^3 = \frac{1}{32}, \\ b_1 q^5 = \frac{1}{512} \end{cases}$$ теңдеулер жүйесін аламыз.

Теңдеулер жүйесін шешіп, $b_1 = 2$; $q = \pm\frac{1}{4}$ аламыз. Олай болса, $b_2 = b_1q = 2 \cdot \left(\pm\frac{1}{4}\right) = \pm\frac{1}{2}$.

Жауабы : бірінші мүше 2-ге, екінші мүше $\frac{1}{2}$, немесе $-\frac{1}{2}$-ге тең.

1-теорема. ***Мүшелері оң $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{n-1}, b_n, b_{n+1} \ldots$ геометриялық прогрессиясының екінші мүшесінен бастап кез келген мүшесі көршілес екі мүшенің геометриялық ортасына тең болады*** .

Басқаша айтқанда, $n \geq 2$ болғанда $b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$ орындалады.

Расында да, $n \geq 2$ болғанда геометриялық прогрессияның n-ші мүшесінің формуласынан b_n-ді алдыңғы және келесі мүшелері арқылы өрнектесек, $b_n = b_{n-1} \cdot q$ және $b_n = \frac{b_{n+1}}{q}$ теңдіктерін аламыз.

Теңдіктерді мүшелеп көбейтеміз. Сонда $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$, ал бұдан $b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$.

Мүшелері теріс таңбалы болатын геометриялық прогрессия үшін 1-теорема қолданылмайды. Өйткені теорема мүшелері оң таңбалы болатын геометриялық прогрессия үшін ғана анықталған.

МЫСАЛ

8. Арифметикалық прогрессияны құрайтын үш санның қосындысының мәні 15-ке тең. Егер оларға сәйкесінше 1, 4 және 19 сандарын қоссақ, онда геометриялық прогрессия шығады. Берілген сандарды табыңдар.

Шешуі. Есептің шарты бойынша $a_1 + a_2 + a_3 = 15$. $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$ болғандықтан, $2a_2 = a_1 + a_3$. Екінші жағынан есептің шарты бойынша $a_2 + 2a_2 = 15$, немесе $3a_2 = 15$, немесе $a_2 = 5$. Ендеше $a_1 = 5 - d$, $a_2 = 5$, $a_3 = 5 + d$.

Шарт бойынша, $b_1 = a_1 + 1 = 6 - d$, $b_2 = a_2 + 4 = 9$, $b_3 = a_3 + 19 = 5 + d + 19 = 24 + d$.

$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$ формуласын қолданып, $b_2^2 = b_1 \cdot b_3$ жазамыз. Сан мәндерін орнына қойсақ, $9^2 = (6 - d) \cdot (24 + d)$ аламыз.

Шыққан теңдеуден d-ны табамыз. Теңдеудің $d = 3$ және $d = -21$ болатын екі түбірі бар, ал оған сәйкес $a_1 = 2$, немесе $a_1 = 26$.

Ізделінді сандар: 2; 5; 8 және 26; 5; –16.

Жауабы : 2; 5; 8 және 26; 5; –16.

1-теоремаға кері теорема да ақиқат болады.

2-теорема. ***Егер мүшелері оң таңбалы болатын сандар тізбегінің екіншісінен бастап кез келген мүшесі көршілес мүшелерінің геометриялық ортасына тең болса, онда сандар тізбегі геометриялық прогрессия болып табылады.***

2-теореманы өз беттеріңмен дәлелдеңдер.

$b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$ формуласымен берілген геометриялық прогрессияның мүшелерінің қасиеті геометриялық прогрессияның белгісі болады.

?

1. 1) 0; 0; 0; 0; ...; 2) 1; 1; 1; ... сандар тізбегі геометриялық прогрессия бола ма?
2. Геометриялық прогрессияның еселігі: 1) оң таңбалы бөлшек; 2) теріс сан; 3) иррационал сан; 4) нөлге тең болуы мүмкін бе?
3. Сандар тізбегінің геометриялық прогрессия болатынын қандай тәсілдер арқылы көрсетуге болады?

Жаттығулар

A

15.1. 1) –14; –4; 6; 16; 26;
2) 2; 20; 200; 2000; 20 000;
3) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{18}$; $\frac{1}{54}$; $\frac{1}{108}$;
4) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{6}$; 0; $-\frac{1}{6}$;
5) 2; $-\sqrt{2}$; 1; $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{1}{2}$;
6) $\frac{14}{17}$; $\frac{9}{17}$; $\frac{4}{17}$; $-\frac{1}{17}$; $-\frac{6}{17}$
прогрес сиялары нын қайсысы: а) арифметикалық прогрессия; ә) геометриялық прогрессия болады?

15.2. Егер (b_n) геометриялық прогрессиясында:
1) $b_1 = 18$, $q = \frac{1}{9}$ болса, онда b_7-ні;
2) $b_1 = 64$, $q = \frac{1}{4}$ болса, онда b_5-ті;
3) $b_1 = 4$, $q = -\frac{1}{2}$ болса, онда b_8-ді;
4) $b_1 = -625$, $q = -\frac{1}{5}$ болса, онда b_9-ды табыңдар.

15.3. Егер (b_n) геометриялық прогрессиясында:
1) $b_3 = 18$, $q = \frac{1}{3}$;
2) $b_6 = 64$, $q = \frac{1}{4}$;
3) $b_8 = 16$, $q = -\frac{1}{2}$;
4) $b_7 = -375$, $q = -\frac{1}{5}$
болса, онда b_1-ді табыңдар.

15.4. Егер (b_n) геометриялық прогрессиясында:
1) $b_1 = 18$, $b_2 = 54$;
2) $b_2 = 33$, $b_3 = 44$;
3) $b_2 = -13$, $b_3 = 169$;
4) $b_5 = 0{,}4$, $b_6 = -0{,}08$ болса, онда q-ді табыңдар.

15.5. Егер (b_n) геометриялық прогрессиясында:
1) $b_1 = 3\sqrt{2}$, $q = -\sqrt{2}$ болса, онда b_7-ні;
2) $b_1 = -2\sqrt{3}$, $q = \sqrt{3}$ болса, онда b_5-ті;
3) $b_1 = \sqrt{2}$, $q = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ болса, онда b_6-ны;
4) $b_1 = 1 - \sqrt{2}$, $q = 1 + \sqrt{2}$ болса, онда b_3-ті табыңдар.

15.6. Егер (b_n) геометриялық прогрессиясында:
1) $b_1 = 0{,}6$ және $q = 2$;
2) $b_1 = -1{,}2$ және $q = \frac{1}{3}$;
3) $b_1 = -27$ және $q = -\frac{2}{3}$;
4) $b_1 = 3{,}6$ және $q = \frac{1}{6}$
болса, онда алғашқы бес мүшені жазыңдар.

15.7. Геометриялық прогрессияның екінші мүшесі 6-ға тең. Прогрессияның алғашқы үш мүшесінің көбейтіндісінің мәнін табыңдар.

15.8. Геометриялық прогрессияның үшінші мүшесі $\sqrt{3}$-ке тең. Прогрессияның алғашқы бес мүшесінің көбейтіндісінің мәнін табыңдар.

15.9. Үшінші мүшесі –8-ге, бесінші мүшесі –32-ге тең болатын геометриялық прогрессияның алғашқы бес мүшесін жазыңдар.

15.10. Үшінші мүшесі $3\sqrt{3}$-ке, бесінші мүшесі $9\sqrt{3}$-ке тең болатын геометриялық прогрессияның алғашқы бес мүшесін жазыңдар.

15.11. 1) 192; 48; 12; ... ; 2) $\frac{64}{9}$; $-\frac{32}{3}$; ... ;
3) –0,0001; 0,001; –0,01; ...; 4) 2; $-2\sqrt{2}$; 4; ... геометриялық прогрессиясының алтыншы және n-ші мүшесін жазыңдар.

B

15.12. 1) 2, x_2, x_3, 0,25; 2) 3, x_2, x_3, $-\frac{1}{9}$ болатын төрт мүшеден құралған геометриялық прогр ессия берілг ен. Прогрессияның x_2-ші және x_3-ші мүшелерін табыңдар.

15.13. Тікбұрышты үшбұрыштың қабырғаларының ұзындықтары геометриялық прогрессияны құрайды. Егер гипотенузаның ұзындығы: 1) 2 м; 2) 6 м-ге тең болса, прогрессияның еселігін табыңдар.

15.14. 1) Дөңес төртбұрыштың бұрыштарының шамасы еселігі 2-ге тең шекті геометриялық прогрессияны құрайды. Төртбұрыштың бұрыштарының шамаларын табыңдар.
2) Үшбұрыштың бұрыштары еселігі 3-ке тең шекті геометриялық прогрессияны құрайды. Үшбұрыштың бұрыштарының шамаларын табыңдар.

15.15. 1) Геометриялық прогрессияның екінші мүшесі бірінші мүшесінің 20%-ын құрайды. Прогрессияның бесінші мүшесі үшінші мүшесінің қанша пайызын құрайды?
2) Геометриялық прогрессияның екінші мүшесі бірінші мүшесінің 110%-ын құрайды. Прогрессияның алтыншы мүшесі төртінші мүшесінің қанша пайызын құрайды?
3) Жинақ банкіне салынған ақша жылына 8% өсім береді. Егер банкке 100 000 тг салынса, онда салым 2 жылдан кейін қаншаға тең болады?

4) Бір жылда тауар өнімінің өзіндік құны 5%-ға төмендеген. Тауардың алғашкы бағасы 10 000 тг болса, тауардың екі жылдан кейінгі құнын табыңдар .

15.16. 2, 6, 18, ... шексіз геометриялық прогрессиясы мүшелерінің арасында:
1) 54; 2) 72; 3) 486; 4) 576 саны бар ма?
Егер болса, онда сол мүшенің реттік нөмірін табыңдар.

15.17. 1) 32, 16, 8, ... геометриялық прогрессияның 0,01-ден кіші;
2) $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}$ ... геометриялық прогрессияның 50-ден үлкен мүшелері қандай реттік нөмірден басталады?

15.18. 1) Геометриялық прогрессия құрайтындай етіп, 15 пен 405 сандарының арасына екі сан орналастырыңдар.
2) Геометриялық прогрессия құрайтындай етіп, 36 мен 2,25 сандарының арасына үш сан орналастырыңдар.

15.19. 1) x, $\sqrt{x}$, $x-5$; 2) x, $\sqrt{x-8}$, $\frac{x}{36}$ ретімен алынған өрнектер геометриялық прогрессияны тізбектей алынған үш мүшесін құрайтындай етіп, x-тің мәндерін табыңдар.

15.20. 1) Геометриялық прогрессия 6; x_2; x_3; x_4; $\frac{2}{27}$ болатын бес мүшеден тұрады. x_2; x_3; x_4-ші мүшелерді табыңдар.
2) Геометриялық прогрессия 6; x_2; x_3; x_4; $\frac{3}{8}$ болатын бес мүшеден тұрады. x_2; x_3; x_4-ші мүшелерді табыңдар.

ЖАНҰЯ ӨМІРІНДЕГІ МАТЕМАТИКА

15.21. 1) Салымшы жылдық 10% өсіммен депозитке 100 мың тг салды. Екі жылдан кейін депозитте қанша теңге болады?
2) Салымшы банкке жылы 8% өсіммен депозитке 200 000 тг салды. Үш жылдан кейін депозитте қанша теңге болады?

15.22. 1) Салымшы депозитке 50 000 тг салғысы келді. Бірінші банкте жылдық өсім (жылына бір рет) 12%, ал екінші банктегі салым ай сайын 1%-ға өсетіні белгілі. Банктердің қайсысында өсім көп болады және қаншаға?
2) Салымшы жылдық өсімі 10%-ды құрайтын депозитке 200 000 тг-ні үш жылға салды. Үш жылдан кейін депозиттегі ақша қанша болды?

C

15.23. Төрт сан өспелі геометриялық прогрессия құрайды. Егер шеткі мүшелерінің қосындысының мәні 84, ал ортаңғы мүшелерінің көбейтіндісінің мәні 243 болса, онда берілген сандарды табыңдар.

15.24. (b_n) геометриялық прогрессияда:
1) $b_{k-m} = 13$ және $b_{k-m} = 117$; 2) $b_{k-m} = 1{,}2$ және $b_{k-m} = 19{,}2$ болса, онда b_k-ны табыңдар.

15.25. 1) Геометриялық прогрессия құрайтын үш оң таңбалы сандардың қосындыларының мәні 42, ал оларға кері сандардың қосындысының мәні $\frac{21}{32}$. Осы сандарды табыңдар.

2) Геометриялық прогрессия құрайтын үш оң таңбалы сандардың қосындыларының мәні 21, ал оларға кері сандардың қосындысының мәні $\frac{21}{16}$. Осы сандарды табыңдар.

15.26. Геометриялық прогрессия құрайтын үш оң таңбалы сандардың қосындыларының мәні 13, ал олардың квадраттарының қосындысының мәні 91. Осы сандарды табыңдар.

15.27. Геометриялық прогрессияның төртінші мүшесі екінші мүшесінен 24-ке артық, ал үшінші мен екінші мүшелерінің қосындыларының мәні 6-ға тең. Прогрессияның алғашқы төрт мүшесін табыңдар.

15.28. Арифметикалық прогрессия құрайтын үш оң санның қосындысының мәні 21-ге тең. Егер осы сандарға сәйкесінше 1, 1, 5 сандарын қосса, геометриялық прогрессия шығады. Бастапқы сандарды табыңдар.

15.29. 1) 3 саны мен белгісіз санның арасына арифметикалық прогрессия шығатындай бір сан қойылған. Егер прогрессияның ортаңғы мүшесін 6-ға кемітсе, онда геометриялық прогрессия шығады. Белгісіз санды табыңдар.

2) x, y және z ретімен геометриялық прогрессия құрылған. $x + y$, $y + z$ және $z + x$ ретімен де геометриялық прогрессия құрылған. Осы прогрессияның еселігін табыңдар.

15.30. Егер үшбұрыштың қабырғаларының ұзындықтары геометриялық прогрессияны құрайтын бүтін сандармен өрнектелсе және олардың көбейтіндісінің мәні 1000 см^3 болса, онда үшбұрыштың қабырғаларының ұзындығын табыңдар.

15.31. Нөлден өзгеше үш сан арифметикалық прогрессияны, ал олардың квадраттары геометриялық прогрессияны құрайды. Геометриялық прогрессияның еселігін табыңдар.

15.32. Алдыңғы үш сан геометриялық прогрессияны, соңғы үш сан арифметикалық прогрессияны құрайтын және шеткі мүшелерінің қосындысының мәні 32, ал ортаңғы мүшелерінің қосындысының мәні 24 болатын төрт санды табыңдар.

ҚАЙТАЛАУ

15.33. a параметрінің қандай мәнінде теңдеулер жүйесінің бір ғана шешімі болады:

1) $\begin{cases} 2x + y^2 = 1, \\ x + y = a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x + y = a; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ x + 2y = 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ x + y = 3? \end{cases}$

15.34. 1) $x^2 + y^2 + 2x - 6y \,|\, 4$; 2) $x^2 + y^2 - 10x - 2y \,|\, 0$;

3) $x^2 + y^2 - x + y < 1$; 4) $x^2 + y^2 - 2x - 2y < 2$ теңсіздігі координаталық жазықтықта қандай нүктелер жиынын береді?

15.35. 1) 600-ден кем және 8-ге еселік болатын барлық үштаңбалы сандардың қосындысының мәнін табыңдар.

2) 23-ке бөлгенде қалдығында 10 қалатын 500-ден артық барлық үштаңбалы сандардың қосындысының мәнін табыңдар.

15.36. 1) $\dfrac{x^6 - 1}{x^2 + x + 1} : \dfrac{x^3 + 1}{x - 1} - 2$; 2) $\dfrac{x^9 - 1}{x^6 + x^3 + 1} : \dfrac{x^3 + 1}{x^2 - 1} - \dfrac{3(x + 1)}{x - 1}$

өрнегін ықшамдап, $x = 2{,}5$ болғандағы мәнін есептеңдер.

15.37. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\dfrac{8^3 : 4^4}{14^0 a^{-2}} \cdot a^3$; 2) $\dfrac{5^5 (x^4)^2}{(-5x^2)^3}$;

3) $\dfrac{(2x^4a^3)^2}{4x^7 (a^2)^2}$; 4) $\dfrac{8(b^3x^4)^3}{x^{12} (-2b^3)^2}$.

15.38. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\dfrac{\left(\dfrac{1}{9}\right)^{-3} \cdot \dfrac{1}{9}}{3^5} + \dfrac{2}{3}$; 2) $90 \cdot \dfrac{5^{-2}}{9^2} - 2 \cdot 5^{-1} \cdot 3^{-2}$;

3) $17 - \dfrac{34^3}{17^2 \cdot 2^4} \cdot 2^2$; 4) $210 - \dfrac{51^3}{17^2 \cdot 9^3} \cdot 18^2$.

Жаңа білімді меңгеруге дайындаламыз

15.39. $b_1 = 16$, $q = -0{,}5$ болса, онда (b_n) геометриялық прогрессиясы үшін 1) b_3; 2) b_6; 3) b_7; 4) b_{10} мүшесін табыңдар.

15.40. $b_1 = 2$, $q = -2$ болса, онда (b_n) геометриялық прогрессиясының алғашқы бес мүшесін жазыңдар және олардың қосындысын табыңдар.

Жаңа білімді меңгеруге арналған тірек ұғымдар

Тізбек, тізбектің мүшесі, геометриялық прогрессия, геометриялық прогрессияның n-ші мүшесі, геометриялық прогрессияның еселігі.

§ 16. ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ ПРОГРЕССИЯНЫҢ АЛҒАШҚЫ *n* МҮШЕСІНІҢ ҚОСЫНДЫСЫНЫҢ МӘНІН ЕСЕПТЕУ ФОРМУЛАСЫ

Түйінді ұғымдар

Геометриялық прогрессия мүшелерінің қосындысы

Геометриялық прогрессияның алғашқы *n* мүшелерінің қосындысының формуласымен танысасыңдар; геометриялық прогрессияның алғашқы *n* мүшелерінің қосындысының формуласын қолдануды және геометриялық прогрессияға берілген есептерді шығаруды үйренесіңдер.

Åêi iûңæûëäûқ òàðèõû áàð øàõìàò îéûíûí îéëàï òàïқàí àäàìäû ìàðàïàòòàó åñåái êөïêå òàíûìàë. Åæåëãi үíäi ïàòøàñû Ñèðàì øàõìàò îéûíûí îéëàï òàïқàí өíåðòàïқûøòû ìàðàïàòòàó ìақñàòûíäà îғàí қàëàғàíûí àëóғà ұñûíàäû. Ñîíäà өíåðòàïқûө øàõìàò òàқòàñûíäàғû 64 øàðøûíûң áiðiiøiñiíå áèäàéäûң áið òүéið äәíii, åêiiøiñiíå 2 äәí, үøiiøiñiíå 4 äәí, òөðòiiøiñiíå 8 äәí æәíå ò.ñ.ñ., ўғiè әðáið øàðøûғà àëäûңғûñûíàí 2 åñå êөï äәí áåðóäi өòiíäi. Òàìçàëà êàëiñåäi. Øàõìàò òàқòàñûíûң øàðøûñûíà êàëiñii áîëûíөà áèäàé äәiii ñàëà áàñòàғàíäà äәiiң æåòêiëiêñiç áîëғàíäûғûíàí, ñûéëûқòû áåðó iүiêii емеñтiгi àíûқòàëäû. Өíåðòàïқûөқà қàíөà òүéið áèäàé äәiii áåðó êåðåê åäi?

64 øàðøûäàғû áèäàé äәiiiң iөëøåði S қîñûíäûñûíûң iәiiiå òåң:

$$S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{62} + 2^{63}.$$

Æàçûëғàí òåңңiçäiêòiң åêi æàғûí äà 2-ãå êөáåéòåiiç äå қîñûí-äûíûң iәiii òàáàìûç:

$$2S = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{63} + 2^{64}.$$

Áíäi îñû òàñûçäàiêòài àëäûңғû òàñäàiêòi àçàéòàìûç. Ñîäà:

$$
\begin{array}{r}
2S = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{63} + 2^{64} \\
- \quad S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{63} \\
\hline
S = 2^{64} - 1
\end{array}
$$

Æåð áåòiiің құðғақ æåðiiå îñûìòà áëääéäû øàòûï æiáåðñåê, îiäà қàëûңäûғû 9 ìì áèëää қàååòû ïàéäà áîëààû. Îñûíääé êөëåìäååi àñòûқòûң ìàññàñû òðèëëèîí òîííàäàí êөï áîëààû äåãi. Áүë äààìçàòòûң îñû óàқûòқà äåéiiãi æèíàғàí àñòûқ ìөëøåðiiãi àñûï òүñåäi.

Еселігі $q \neq 1$ болғанда, геометриялық прогрессияның алғашқы n мүшесінің $S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1} + b_n$ қосындысын табу үшін жоғарыдағы мысалда келтірілген әдісті қолданамыз.

Геометриялық прогрессияның анықтамасын пайдаланып, S_n қосындысын $S_n = b_1 + b_1q + b_1q^2 + \ldots + b_1q^{n-1}$ түрінде жазамыз.

Теңдіктің екі жағын да q-ге көбейтеміз.

Нәтижесінде $qS_n = b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + \ldots + b_1q^n$ теңдігін аламыз.

Содан соң алдыңғы теңдіктен соңғы теңдікті мүшелеп азайтамыз:

$$
\begin{array}{l}
S_n = b_1 + b_1q + b_1q^2 + \ldots + b_1q^{n-1} \\
- \\
qS_n = b_1q + b_1q^2 + \ldots + b_1q^{n-1} + b_1q^n \\
\hline
S_n - qS_n = b_1 - b_1q^n.
\end{array}
$$

Соңғы теңдіктің оң және сол жақтарындағы ортақ көбейткішті жақшаның алдына шығарамыз: $(1 - q)S_n = b_1(1 - q^n)$, немесе

$$S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}, \; q \neq 1.$$

Сонымен, еселігі $q \neq 1$ геометриялық прогрессияның алғашқы n мүшесінің қосындысы бірінші мүшенің бір саны мен n-ші дәрежелі еселік айырымына көбейтіндісінің бір саны мен еселік айырымының қатынасына тең болады.

Егер $q > 1$ болған жағдайда, геометриялық прогрессияның алғашқы n мүшесінің қосындысын есептегенде соңғы теңдіктің оң жағындағы бөлшектің алымы мен бөлімін -1-ге көбейткенде шығатын $\dfrac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$ формуласын қолданған ыңғайлы.

Егер $q = 1$ болса, онда прогрессияның барлық мүшесі бірінші мүшеге тең. Демек, бұл жағдайда $S_n = nb_1$.

Геометриялық прогрессияның алғашқы n мүшесінің қосындысын табу формуласы:

$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$, $q \neq 1$, немесе $S_n = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$, мұндағы $q \neq 1$;

$S_n = nb_1$, мұндағы $q = 1$.

$S_n = \frac{b_1 - b_{n+1}}{1-q}$, $q \neq 1$ теңдігінің дұрыстығын дәлелдеңдер.

МЫСАЛ

1. 1; 2; 4; 8; … болатын (b_n) геометриялық прогрессиясының алғашқы 10 мүшесінің қосындысының мәнін табайық.

Шешуі. Прогрессияның бірінші мүшесі 1-ге, ал еселігі 2-ге тең. Прогрессияның 10-шы мүшесін есептейміз: $b_{10} = 1 \cdot 2^{10-1} = 2^9$. Енді геометриялық прогрессияның алғашқы n мүшесінің қосындысының формуласы бойынша

$$S_{10} = \frac{2^9 \cdot 2 - 1}{2-1} = 2^{10} - 1 = 1024 - 1 = 1023.$$

Жауабы : 1023.

МЫСАЛ

2. 6; 2; $\frac{2}{3}$; … геометриялық прогрессиясының алғашқы бес мүшесінің қосындысының мәнін табайық.

Шешуі . Берілген прогрессияда $b_1 = 6$, $q = \frac{1}{3}$, сондықтан

$$S_n = \frac{b_1\left(1-q^n\right)}{1-q}$$

формуласы арқылы мынадай есептеу жүргіземіз:

$$S_5 = \frac{6\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^5\right]}{1-\frac{1}{3}} = \frac{6 \cdot \left(1-\frac{1}{243}\right)}{\frac{2}{3}} = \frac{6 \cdot 242 \cdot 3}{2 \cdot 243} = \frac{242}{27} = 8\frac{26}{27}.$$

Жауабы : $8\frac{26}{27}$.

МЫСАЛ

3. $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7$ қосындысының мәнін табайық.

Шешуі. Берілген қосынды геометриялық прогрессияның алғашқы сегіз мүшесінің қосындысын береді. Мұндағы $b_1 = 1$, $q = 3$.

$S_n = \dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ формуласы бойынша $S_8 = \dfrac{1\cdot(3^8-1)}{3-1} = \dfrac{6561-1}{2} =$ $= 3280.$

Жауабы : 3280.

МЫСАЛ

4. Геометриялық прогрессияның алғашқы n мүшесінің қосындысы $S_n = -93$. Бұл прогрессияның бірінші мүшесі $b_1 = -3$, ал еселігі $q = 2$. n-ді табайық.

Шешуі . $S_n = \dfrac{b_1(q^n-1)}{q-1}$ формуласын қолданамыз.

Сонда $-93 = \dfrac{-3(2^n-1)}{2-1} = -3(2^n-1)$; $31 = 2^n - 1$; $32 = 2^n$; $2^5 = 2^n$; $n = 5$.

Жауабы: $n = 5$.

? 1) $q < 1$; 2) $q > 1$; 3) $q = 1$ болғанда, геометриялық прогрессияның алғашқы n мүшесінің қосындысының мәнін табу үшін қандай формула қолданылады?

Жаттығулар

A

16.1. Егер (b_n) геометриялық прогрессиясында:

1) $b_1 = 0{,}5$, $b_n = 256$, $q = 2$; 2) $b_1 = 80$, $b_n = 5$, $q = 0{,}5$;

3) $b_1 = 3$, $b_n = 243$, $q = 3$; 4) $b_1 = 1{,}5$, $b_n = 240$, $q = 2$ болса, онда n және S_n-ді табыңдар.

16.2. Егер (b_n) геометриялық прогрессиясында:

1) $b_1 = 90$, $b_n = 3\frac{1}{3}$, $n = 4$; 2) $b_1 = \frac{1}{3}$, $b_n = 81$, $n = 6$;

3) $b_1 = 120$, $b_n = 3{,}75$, $n = 6$; 4) $b_1 = 0{,}02$, $b_n = 312{,}5$, $n = 7$ болса, онда q мен S_n-ді табыңдар.

16.3. Егер (b_n) геометриялық прогрессиясында:

1) $b_1 = 2$, $b_n = 1024$, $S_n = 2046$; 2) $b_1 = 512$, $b_n = 1$, $S_n = 1023$;

3) $b_1 = 0{,}5$, $b_n = 16$, $S_n = 31{,}5$; 4) $b_1 = \frac{2}{9}$, $b_n = 18$, $S_n = 26\frac{8}{9}$ болса, онда q мен n-ді табыңдар.

16.4. Егер (b_n) геометриялық прогрессиясында:

1) $b_1 = 243,\ q = -\frac{2}{3},\ n = 6;$ 2) $b_1 = -\frac{3}{2},\ q = 2,\ n = 7;$

3) $b_1 = 20,\ q = -0{,}1,\ n = 5;$ 4) $b_1 = \frac{3}{5},\ q = -\sqrt{5},\ n = 5$ болса, онда b_n және S_n-ді табыңдар.

16.5. Егер (b_n) геометриялық прогрессиясында:

1) $b_1 = 3,\ q = 2,\ S_n = 93;$ 2) $b_1 = 6,\ q = -2,\ S_n = -510;$

3) $b_1 = \frac{3}{5},\ q = -0{,}5,\ S_n = \frac{3}{8};$ 4) $b_1 = -13,\ q = -0{,}3,\ S_n = -10{,}27$

болса, онда n және b_n-ді табыңдар.

16.6. Егер (b_n) геометриялық прогрессиясында:

1) $q = 0{,}5,\ n = 6,\ b_n = 3;$ 2) $q = 3,\ n = 5,\ b_n = 486;$

3) $q = 0{,}5,\ n = 4,\ b_n = 0{,}375;$ 4) $q = 1{,}5,\ n = 5,\ b_n = \frac{9}{16}$ болса, онда b_1 және S_n-ді табыңдар.

16.7. Егер (b_n) геометриялық прогрессиясында:

1) $q = 2,\ n = 11,\ S_n = 2047;$ 2) $q = \frac{1}{3},\ n = 5,\ S_n = 121;$

3) $q = 0{,}5,\ n = 6,\ S_n = 7\frac{7}{8};$ 4) $q = -2,\ n = 7,\ S_n = 258$

болса, онда b_1 және b_n-ді табыңдар.

16.8. Егер (b_n) геометриялық прогрессиясында:

1) $q = 0{,}5,\ b_n = 3,\ S_n = 93;$ 2) $q = 3,\ b_n = 54,\ S_n = \frac{242}{3};$

3) $q = -2,\ b_n = -4,\ S_n = -\frac{63}{24};$ 4) $q = -\frac{1}{3},\ b_n = -\frac{1}{3},\ S_n = \frac{182}{3}$

болса, онда b_1 мен n-ді табыңдар.

16.9. 1) Геометриялық прогрессияда $b_2 = 1,\ b_3 = 2.$ $\frac{S_{14}}{S_7}$ қатынасын табыңдар.

2) Геометриялық прогрессияда $b_3 = 3,\ b_4 = 1{,}5.$ $\frac{S_9}{S_{18}}$ қатынасын табыңдар.

16.10. 1) Геометриялық прогрессияның екінші мүшесі бірінші мүшесінің 20%-ын құрайды. Прогрессияның жетінші мүшесі бесінші мүшесінің қанша пайызын құрайды?

2) Геометриялық прогрессияның екінші мүшесі бірінші мүшесінің 110%-ын құрайды. Прогрессияның тоғызыншы мүшесі жетінші мүшесінің қанша пайызын құрайды?

БИЗНЕСТЕГІ МАТЕМАТИКА

16.11. 1) Жинақ банкіне салынған ақша жылына 10%-ға өседі. Егер банкке 200 000 тг салынса, онда салым 2 жылдан кейін қаншаға тең болады?
2) Өнімнің өзіндік құнының төмендеуі жылына 5%-ды құрайды. Тауардың бастапқы өзіндік құны 10 000 тг-ге тең. Өзіндік құн 2 жылдан кейін қаншаға тең болады?

16.12. 1) Берілген геометриялық прогрессияның алғашқы сексен бес мүшесінің қосындысының мәні 2225-ке тең. Әрбір мүшесі берілген геометриялық прогрессияның сәйкес мүшесінің 40%-ын құрайтын геометриялық прогрессияның алғашқы сексен бес мүшесінің қосындысының мәнін табыңдар.
2) Геометриялық прогрессияның алғашқы сексен бес мүшесінің қосындысының мәні 8255-ке тең. Әрбір мүшесі бастапқы геометриялық прогрессияның сәйкес мүшесінің 60%-ын құрайтын геометриялық прогрессияның алғашқы сексен бес мүшесінің қосындысыны ң мәнін табыңдар.

16.13. 1) Геометриялық прогрессияның бірінші мүшесі $\sqrt{2}$-ге, ал жетінші мүшесі $\sqrt{128}$-ге тең. Прогрессияның алғашқы алты мүшесінің қосындысының мәнін табыңдар.
2) Өспелі геометриялық прогрессияның бірінші мүшесі $\sqrt{3}$-ке, ал бесінші мүшесі $\sqrt{243}$-ке тең. Прогрессияның алғашқы алты мүшесінің қосындысының мәнін табыңдар.

B

16.14. (b_n) геометриялық прогрессиясында:
1) $S_3 = 219$, $b_1 b_2 b_3 = 13\ 824$ болса, онда b_3-ті табыңдар;
2) $S_3 = 93$, $b_1 b_2 b_3 = 3375$ болса, онда S_4-ті табыңдар.

16.15. (b_n) геометриялық прогрессиясында $S_3 = 6$ және $b_1 + b_3 + b_5 = 10{,}5$. q-ды табыңдар.

16.16. 1) 4; 12; 36; ...; 2916; 2) $\frac{81}{4}$; $\frac{27}{4}$; $\frac{9}{4}$; ...; $\frac{1}{108}$;
3) –1; 2; –4; ...; –256; 4) 3; –6; 12; –24; ...; 192 геометриялық прогрессиясы мүшелерінің қосындысының мәнін табыңдар.

16.17. (b_n) геометриялық прогрессиясында: 1) $q = 2$, $S_5 = 62$;
2) $q = -3$, $S_5 = 244$ болса, онда b_1-ді табыңдар.

БИЗНЕСТЕГІ МАТЕМАТИКА

16.18. Жабдықтың құны 200 000 тг. Егер жабдықтың құны жыл сайын 2%-ға кеміп отырса, онда төрт жылдан кейін жабдықтың бағасы қандай болады?

16.19. 1) (b_n) геометриялық прогрессиясында: 1) $S_2 = 4$ және $S_3 = 13$; 2) $S_3 = 42$ және $S_4 = 170$ болса, онда b_1 мен S_5-ті табыңдар.

16.20. 3; 6; 12; 24; ... геометриялық прогрессия қосындысының мәні: 1) 3066-дан; 2) 6000-нан артық болатындай мүшелерінің санын табыңдар.

16.21. Геометриялық прогрессияның алғашқы үш мүшесінің қосындысының мәні 1,4-ке, ал олардың көбейтіндісінің мәні 0,064-ке тең. S_5-ті табыңдар.

16.22. (b_n) геометриялық прогрессияда бірінші және бесінші мүшелерінің қосындысының мәні 51, ал екінші және алтыншы мүшелерінің қосындысының мәні 102. Қосындысының мәні 3069-ға тең болу үшін прогрессияның қанша мүшесін алу керек?

16.23. Егер геометриялық прогресияның еселігі 3-ке, ал алғашқы төрт мүшесінің қосындысының мәні –40-қа тең болса, онда прогрессияның үшінші мүшесін табыңдар.

C

16.24. 1) Егер геометриялық прогрессияда $S_7 = 14$, $S_{14} = 18$ болса, онда прогрессияның он бесінші мүшесінен жиырма бірінші мүшесіне дейін, жиырма бірінші мүшесін қоса алғандағы қосындысының мәнін табыңдар.

2) Мүшелері жұп сандар болатын геометриялық прогрессияда барлық мүшелерінің қосындысының мәні тақ орындарда тұрған мүшелерінің қосындысының мәнінен 3 есе артық. Прогрессияның еселігін табыңдар.

16.25. Қосындының мәнін табыңдар:

1) $2 + 22 + 222 + ... + 222\ 222\ 222$;

2) $5 + 55 + 555 + ... + 555\ 555\ 555$;

3) $8 + 88 + 888 + ... + 888\ 888\ 888$.

***16.26.** Өспелі геометриялық прогрессияның бірінші мүшесі 1-ге тең, ал алғашқы бес мүшесінің қосындысының мәні осы мүшелерге кері сандардың қосындысының мәнінен 16 есе артық. Прогрессияның алғашқы он мүшесінің қосындысын табыңдар.

***16.27.** 1) Қосындысының мәні 15,6-ға тең үш сан геометриялық прогрессияның алғашқы үш мүшесі және бір мезетте арифметикалық прогрессияның екінші, он төртінші және он бесінші мүшелері болады. Геометриялық прогрессияның алғашқы алты мүшесінің қосындысының мәнін табыңдар.
2) Қосындысының мәні 78-ге тең үш сан өспелі геометриялық прогрессияның алғашқы үш мүшесі және бір мезетте арифметикалық прогрессияның бірінші, үшінші және тоғызыншы мүшелері болады. Сандардың ең үлкенін табыңдар.
3) Алғашқы он мүшесінің қосындысының мәні 300-ге тең, ал бірінші, екінші және бесінші мүшелері геометриялық прогрессияны құрайтын өспелі арифметикалық прогрессияны табыңдар.

***16.28.** PISA Дұрыс үшбұрышта орта сызықтары жүргізіліп, төрт дұрыс үшбұрыш алынды. Шыққан дұрыс үшбұрыштарда орта сызықтарын жүргізілді. Сонда пайда болған дұрыс үшбұрыштарда тағы орта сызықтар жүргізілген болса, онда қанша дұрыс үшбұрыш шығады?

16.29. Бірінші мүшесі $7 - 3\sqrt{5}$ және екінші мүшесінен бастап әрбір мүшесі онымен көршілес мүшелерінің айырымына тең болатын өспелі геометриялық прогрессияның бесінші мүшесін табыңдар.

16.30. Геометриялық прогрессияның төрт мүшесінің қосындысының мәні –40-қа, ал олардың квадраттарының қосындысының мәні 3280-ге тең. Осы прогрессияны табыңдар.

16.31. $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{109} = 0$ теңдеуін шешіңдер.

ҚАЙТАЛАУ

16.32. Теңсіздікті шешіңдер:

1) $(x - 1) \cdot (x - 6) < 50$; 2) $(x - 14) \cdot (x - 2) > 64$.

16.33. x айнымалысының кез келген мәнінде:

1) $2x^2 - 4x + p > 0$; 2) $px^2 + 5x - 4 < 0$ теңсіздігі тура болатындай p параметрінің мәндерін табыңдар.

16.34. 1) 5-ке еселік болатын 200-ден аспайтын барлық натурал сандардың қосындысының мәнін табыңдар.

2) 3-ке еселік болатын 100-ден артық және 200-ден аспайтын барлық натурал сандардың қосындысының мәнін табыңдар.

16.35. Функцияның графигін салыңдар:
1) $y = 2x^2 - 3x$; 2) $y = 2x^2 + 5x$;
3) $y = -x^2 + 4x$; 4) $y = -2x^2 - 6x$.

16.36. 5 пен 25 сандарының арасына арифметикалық прогрессия болатындай етіп жеті сан қойыңдар.

16.37. $a_1, a_2, \dots a_n$ тізбегі геометриялық прогрессияны құрайды.
1) $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$; 2) $(a_1 + 1)^2 + (a_2 + 1)^2 + \dots + (a_n + 1)^2$
қосындысын a_1, n және q арқылы өрнектеңдер.

Жаңа білімді меңгеруге дайындаламыз

16.38. Егер 1) $b_1 = 1$, $q = 2$, $n = 11$; 2) $b_1 = 81$, $q = \frac{1}{3}$, $n = 5$ болса, онда (b_n) геометриялық прогрессиясында S_n-нің мәнін табыңдар.

16.39. Егер 1) $b_1 = 0{,}125$, $b_6 = -4$; 2) $b_1 = 81$, $b_6 = -\frac{1}{9}$ болса, онда (b_n) геометри ялық прогрессиясында q-дің мәнін табыңдар.

Жаңа білімді меңгеруге арналған тірек ұғымдар

Геометриялық прогрессия, геометриялық прогрессияның n-ші мүшесі, геометриялық прогрессияның еселігі, шексіз геометриялық прогрессия, геометриялық прогрессияның алғашқы n мүшесінің қосындысы.

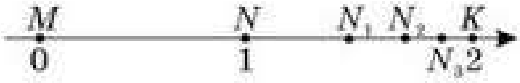
§17. ШЕКСІЗ КЕМІМЕЛІ ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ ПРОГРЕССИЯ МҮШЕЛЕРІНІҢ ҚОСЫНДЫСЫНЫҢ МӘНІН ЕСЕПТЕУ ФОРМУЛАСЫ

Түйінді ұғымдар

Шексіз кемімелі геометриялық прогрессия, периодты ондық бөлшек, жай бөлшек

Шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысының формуласымен танысасыңдар; шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысының формуласын периодты ондық бөлшекті жай бөлшекке айналдыруға берілген есептерді шығаруда қолдануды үйренесіңдер.

Ұзындығы бірлік кесіндінің ұзындығына, яғни 1-ге тең MN кесіндісін сан түзуіне салайық (32-сурет). N нүктесінен оңға қарай бірлік кесіндінің $\frac{1}{2}$-іне тең, яғни $NN_1 = \frac{1}{2}MN$ болатын NN_1 кесіндісін салайық. Енді N_1 кесіндісінен оңға қарай $N_1N_2 = \frac{1}{4}MN$ болатын үшінші кесіндіні саламыз. Осылайша ұзындығы алдыңғы кесіндінің ұзындығының $\frac{1}{2}$-іне тең болатын кесінді салуды жалғастырамыз.



32-сурет

Нәтижесінде MN; NN_1; N_1N_2; N_2N_3; … кесінділерінің тізбегін аламыз және олардың ұзындықтары еселігі $q = \frac{1}{2}$ болатын $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{16}$; … ; $\frac{1}{2^{n-1}}$; … ; шексіз кемімелі геометриялық прогрессияны құрайды .

Мысалы, $3; -1; \frac{1}{3}; -\frac{1}{9}; \frac{1}{27}; \ldots ; 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}; \ldots$ сандар тізбегі бірінші мүшесі үшке, ал еселігі $q = -\frac{1}{3}$-ге тең шексіз кемімелі геометриялық прогрессия болып табылады.

Осы екі прогрессияда еселіктің модулі бірден кіші, яғни $|q| < 1$. Сондықтан n реттік нөмірі артқан сайын осы екі шексіз геометриялық прогрессиялардың әрбір мүшесі модулі бойынша нөлге жақындайды.

Мұндай геометриялық прогрессиялар *шексіз кемімелі геометриялық прогрессиялар* деп аталады.

Еселігі $|q| < 1$ болатын геометриялық прогрессия ***шексіз кемімелі геометриялық прогрессия*** *деп аталады.*

$b_1; b_2; b_3; \ldots; b_n; \ldots$ шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысының формуласын қорытып шығару үшін геометриялық прогрессияның алғашқы n мүшесінің қосындысының, яғни $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ формуласын қолданамыз.

Теңдіктің оң жағындағы өрнекті түрлендіреміз:

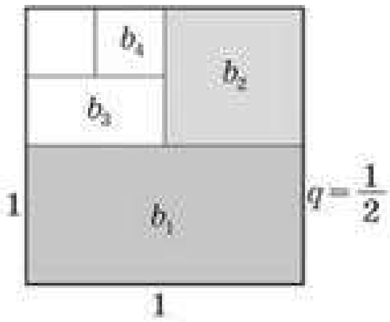
$$S_n = \frac{b_1 - b_1q^n}{1-q} = \frac{b_1}{1-q} - \frac{b_1}{1-q} \cdot q^n.$$

Егер $|q| < 1$ болса, онда n-нің мәні шексіз өскен кезде q^n дәрежесінің мәні шексіз кемиді. Сондықтан $\frac{b_1}{1-q} \cdot q^n$ көбейтіндісінің мәні нөлге ұмтылады. Демек, n шексіз өскен кезде S_n қосындысының мәні $\frac{b_1}{1-q}$ өрнегінің мәніне ұмтылады.

$\frac{b_1}{1-q}$ өрнегін еселігі $|q| < 1$ болатын шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысы ретінде қарастырады. Осы қосындыны S әрпімен белгілеп, $S = \frac{b_1}{1-q}$ формуласын аламыз.

$S = \frac{b_1}{1-q}$ — еселігі $|q| < 1$ болатын шексіз кемімелі геометриялық прогрессия мүшелерінің қосындысының формуласы.

33-суреттегі графиктік көріністі қолданып, $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$ шексіз кемімелі геометриялық прогрессиясының қосындысының мәні 1 натурал саны болатынын өздерің қарастырыңдар.



33-сурет

МЫСАЛ

1. Бірінші мүшесі 3-ке, ал еселігі $\frac{1}{3}$-ге тең шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысының мәнін табайық.

Шешуі. Есептің шарты бойынша $b_1 = 3$ және $q = \frac{1}{3}$, демек,

$$S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{3}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{\frac{2}{3}} = 4{,}5.$$

Жауабы: 4,5.

МЫСАЛ

2. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысының мәнін табайық.

Шешуі. Есептің шарты бойынша $b_1 = 1$ және $q = \frac{1}{2}$ аламыз. $S = \frac{b_1}{1-q}$ формуласын қолданамыз: $S = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$

Жауабы: 2.

МЫСАЛ

3. 3,(03) шексіз периодты ондық бөлшекті жай бөлшек түрінде жазайық.

Шешуі . 0,(03) санын 0,(03) = 0,03 + 0,0003 + 0,000003 + … қосындысы түрінде жазамыз.

Бұл қосынды еселігі 0,01-ге тең болатын шексіз кемімелі геометриялық прогрессияны береді. Ендеше:

$$S = \frac{0,03}{1-0,01} = \frac{0,03}{0,99} = \frac{3}{99} = \frac{1}{33}.$$

Жауаб ы: $\frac{1}{33}$.

МЫСАЛ

4. 0,2(54) шексіз периодты ондық бөлшекті жай бөлшек түрінде жазайық.

Шешуі. 0,2(54) санын 0,2(54) = 0,2 + 0,054 + 0,00054 + … қосындысы түрінде жазамыз.

0,054 + 0,00054 + 0,0000054 + … қосындысы еселігі q = 0,01 болатын шексіз кемімелі геометриялық прогрессия болады.

Шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысының формуласын қолданамыз: $S = \frac{0,054}{1-0,01} = \frac{0,054}{0,99} = \frac{54}{990} = \frac{3}{55}$.

Демек, $0,2(54) = 0,2 + \frac{3}{55} = \frac{14}{55}$.

Жауабы : $\frac{14}{55}$.

МЫСАЛ

5. $|x| < 1$ болғанда, $1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = 3,5$ теңдеуін шығарайық.

Шешуі. Теңдеудің сол жағы шексіз кемімелі геометриялық прогрессияны береді. Сондықтан $1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{1}{1-x}$. Онда $1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = 3,5$ теңдеуі $\frac{1}{1-x} = 3,5$ түріне келеді. Бұдан $x = \frac{5}{7}$.

Жауаб ы: $\frac{5}{7}$.

?

1. Қандай жағдайда шексіз геометриялық прогрессия кемімелі болады?

Жаттығулар

A

17.1. Шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысының мәнін табыңдар:

1) 1; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{9}$; ... ; 2) –25; –5; –1; –0,2; …; 3) 6; 1; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{36}$… .

17.2. Егер:

1) $b_1 = -20,\ q = \frac{1}{7}$; 2) $b_1 = 16,\ q = \frac{1}{4}$ болса, онда шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысының мәнін табыңдар.

17.3. Қосындының мәнін есептеңдер:

1) $1 - \frac{3}{4} + \frac{9}{16} - \ldots$; 2) $8 - 4 + 2 - 1 + 0{,}5 - \ldots$;

3) $100 - 10 + 1 - 0{,}1 + \ldots$.

17.4. 1) 0,(3); 2) 14,(17); 3) 2,(126); 4) 3,(71) шексіз периодты бөлшегін жай бөлшек түрінде жазыңдар.

17.5. 1) $\frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \ldots$; 2) $\sqrt{3};\ 1;\ \frac{1}{\sqrt{3}};\ \ldots$;

3) $\sqrt{2};\ -1;\ \frac{1}{\sqrt{2}};\ \ldots$; 4) $\frac{3}{7};\ -\frac{9}{49};\ \frac{27}{343};\ \ldots$;

5) $3\sqrt{3};\ -\sqrt{3};\ \frac{\sqrt{3}}{3};\ \ldots$; 6) $5;\ -\sqrt{5};\ 1;\ \ldots$ шексіз кемімелі геометриялық прогрессиясының қосындысының мәнін табыңдар.

17.6. 1) 3,2(3); 2) 4,36(13); 3) 21,00(12); 4) 33,04(731) шексіз периодты бөлшегін жай бөлшек түрінде жазыңдар.

17.7. 1) Екінші мүшесі 9, ал бесінші мүшесі $\frac{1}{3}$ болатын шексіз геометриялық прогрессияның қосындысының мәнін табыңдар.
2) Үшінші мүшесі 25, ал алтыншы мүшесі 0,2 болатын шексіз геометриялық прогрессияның қосындысының мәнін табыңдар.

17.8. Мүшелері оң болатын шексіз геометриялық прогрессияның алғашқы үш мүшесінің қосындысының мәні 10,5-ке, ал прогрессияның қосындысы 12-ге тең. Осы прогрессияны табыңдар.

17.9. Мүшелері оң болатын шексіз геометриялық прогрессияның алғашқы бес мүшесінің қосындысының мәні $\frac{93}{16}$-ке, ал прогрессияның қосы ндысы 6-ға тең. Осы прогрессияны табыңдар.

17.10. Егер:

1) $q = -\frac{5}{8},\ S = 80$; 2) $q = \frac{3}{7},\ S = 42$ болса, онда шексіз геометриялық прогрессияның бірінші мүшесін табыңдар.

17.11. Егер:

1) $b_1 = 15,\ S = 18$; 2) $b_1 = 18,\ S = 15$ болса, онда шексіз геометриялық прогрессияның еселігін табыңдар.

B

17.12. Шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның бірінші, үшінші және бесінші мүшелерінің көбейтіндісінің мәні 8-ге, ал екінші және төртінші мүшелерінің қосындысының мәні –5-ке тең. Осы прогрессияның қосындысының мәнін табыңдар.

17.13. $\sqrt{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} + \dfrac{2\sqrt{3}-3}{2+\sqrt{3}} + \ldots$ қосындысының мәнін табыңдар.

17.14. 1) Шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның әрбір мүшесі келесі мүшелерінің қосындысының мәнінен 2,5 есе артық екені белгілі. Осы прогрессияның еселігін табыңдар.
2) Шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның әрбір мүшесі келесі мүшелерінің қосындысының мәнінен 4 есе артық екені белгілі. Осы прогрессияның еселігін табыңдар.

17.15. Шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысының мәні оның бірінші мүшесінен 16-ға артық, ал алғашқы екі мүшесінің қосындысының мәні 24-ке тең. Прогрессияның сегізінші мүшесін табыңдар.

17.16. Қабырғасының ұзындығы 8 см болатын шаршыға төбелері берілген шаршының қабырғаларының ортасында жататын екінші шаршы салынған. Тура осылай екінші шаршыға үшінші шаршы салынған және т.с.с. Осы шаршылардың периметрлерінің қосындысының мәнін және аудандарының қосындысының мәнін табыңдар.

17.17. Қабырғасының ұзындығы 8 см болатын теңқабырғалы үшбұрышқа төбелері берілген үшбұрыштың қабырғаларының ортасында жататын екінші теңқабырғалы үшбұрыш салынған. Тура осылай екінші үшбұрышқа үшінші теңқабырғалы үшбұрыш салынған және т.с.с. Осы үшбұрыштардың периметрлерінің қосындысының мәнін және аудандарының қосындысының мәнін табыңдар.

17.18. Қабырғасының ұзындығы 16 см болатын теңқабырғалы үшбұрыш берілген. Оның биіктіктерінен екінші үшбұрыш салынған. Екінші үшбұрыштың биіктіктерінен үшінші үшбұрыш салынған және т.с.с. Осы үшбұрыштардың периметрлері шексіз геометриялық прогрессияны құрайтынын дәлелдеңдер және периметрлерінің қосындысының мәнін табыңдар.

17.19. $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{8} - \frac{1}{27} + \ldots$ қосындысының мәнін табыңдар.

17.20. Шексіз геометриялық прогрессияның бірінші мүшесі екінші мүшесінен 8-ге артық, ал прогрессияның мүшелерінің қосындысының мәні 18-ге тең. Прогрессияның төртінші мүшесін табыңдар.

17.21. Қабырғасының ұзындығы 16 см болатын теңқабырғалы үшбұрышқа дөңгелек іштей салынған. Осы дөңгелекке үшбұрыш іштей салынған, ал үшбұрышқа дөңгелек іштей салынған және т.с.с. Іштей салынған дөңгелектердің аудандарының қосындысының мәнін табыңдар.

C

17.22. (c_n) шексіз геометриялық прогрессиясының бірінші мүшесі c, ал еселігі q. Прогрессияның қосындысының мәнін табыңдар:

1) $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + \ldots$; 2) $(c_1 + c_2)^2 + (c_3 + c_4)^2 + (c_5 + c_6)^2 + \ldots$;

3) $c_1^3 + c_2^3 + c_3^3 + \ldots$; 4) $(c_1 - c_2)^2 + (c_3 - c_4)^2 + (c_5 - c_6)^2 + \ldots$.

17.23. $1 + \frac{x+1}{x-1} + \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 + \ldots = \frac{x^2}{2}$ теңдеуінің түбірін табыңдар.

17.24. Бірінші мүшесі 1-ге тең, әрбір келесі мүшесі одан кейін орналасқан мүшелерінің қосындысының мәнінен үш есе артық шексіз кемімелі геометриялық прогрессияны табыңдар.

17.25. $\frac{1}{3} + \frac{3}{4} + \frac{1}{9} + \frac{9}{16} + \frac{1}{27} + \frac{27}{64} + \ldots$ қосындысының мәнін табыңдар .

17.26. $x^{-2} + x^{-4} + \ldots + x^{-2(n-1)} + \ldots = \frac{1}{8}$ теңдеуін шешіңдер.

17.27. Екінші мүшесі 6-ға, ал мүшелерінің қосындысының мәні мүшелерінің квадраттарының қосындысының мәнінің $\frac{1}{8}$-іне тең болатын (b_n) шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның бірінші мүшесі мен еселігін табыңдар.

17.28. Сандар тізбегі мүшелерінің қосындысының мәні 8-ге тең болатын шексіз кемімелі геометриялық прогрессияны құрайды. Егер мүшелерінің кубтарының қосындысының мәні $\frac{512}{37}$-ге тең болса, онда осы прогрессияның бірінші мүшесі мен еселігін табыңдар.

ҚАЙТАЛАУ

17.29. Теңдеудің түбірлерін табыңдар:

1) $\dfrac{x-6}{x-1}=\dfrac{13}{6}-\dfrac{x-1}{x-6}$; 2) $\dfrac{x-4}{x+2}=\dfrac{17}{4}-\dfrac{x+2}{x-4}$.

17.30. Функцияның графигін салыңдар:

1) $y = x^2 + 2|x|$; 2) $y = x^2 + 2|x|$;
3) $y = -x^2 + 4|x|$; 4) $y = -x^2 - |x|$.

17.31. Өрнекті көбейткіштерге жіктеңдер:

1) $x^4 - 2x^3 + x - 2$; 2) $x^4 - 5x^3 - x + 5$;
3) $x^4 - 2x^3 - x^2 + 2$; 4) $x^4 + 4x^3 - x^2 - 4$.

17.32. Дөңес төртбұрыштың бұрыштары арифметикалық прогрессияны құрайды. Төртбұрыштың ең кіші және ең үлкен бұрыштарының қосындысының мәнін табыңдар.

17.33. 50 мен 150 сандарының арасында орналасқан 5-ке еселік болатын барлық натурал сандардың қосындысының мәнін табыңдар.

17.34. Тізбектің мүшелері $a_n = (2n + 1) \cdot 3^n$ формуласымен берілсін. Осы прогрессияның алғашқы n мүшесінің қосындысының мәні $S_n = n \cdot 3^{n+1}$ формуласымен есептелетінін дәлелдеңдер.

17.35. a, b және c-ның қандай мәндерінде $y = ax^2 + bx + c$ функциясының графигі M (1; –3) мен N (6; –48) нүктелері арқылы өтеді және абсцисса осімен бір ғана ортақ нүктесі болады?

Жаңа білімді меңгеруге дайындаламыз

17.36. $n = 3$ болғанда $4^n + 12n - 1$ өрнегі 3-ке бөлінетінін дәлелдеңдер.

17.37. $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\dfrac{1}{9\cdot 11}$ қосындысының мәнін табыңдар.

Жаңа білімді меңгеруге арналған тірек ұғымдар

Тізбек, тізбектің мүшесі, заңдылық, тізбек мүшелерінің қосындысы.

§ 18. МАТЕМАТИКАЛЫҚ ИНДУКЦИЯ ӘДІСІ

Түйінді ұғымдар

Математикалық индукция

Математикалық индукция әдісімен танысасыңдар; математикалық индукция әдісін қолдануды үйренесіңдер.

Математикалық индукция — дәлелдеу әдістерінің бірі. Оны қандай да бір тұжырымның барлық натурал сандар үшін ақиқат болатынын дәлелдеу үшін қолданады.

Мысалы, 1) $1 + 2 + 2^2 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1$ теңдігі кез келген натурал n үшін ақиқат екенін дәлелдеу;

2) $4^n + 15n - 1$ өрнегінің мәні кез келген натурал n үшін 9-ға бөлінетінін дәлелдеу;

3) кез келген натурал $n > 1$ болғанда, $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$ теңсіздігінің тура екенін дәлелдеу.

Осы тұжырымдардың барлығында натурал мәндер қабылдайтын n шамасы берілген.

Теорема. ***Егер құрамында натурал айнымалысы бар A(n) тұжырымы n = 1 үшін ақиқат және оның n = k болғандағы ақиқаттығынан n = k + 1 үшін де ақиқаттығы шықса, онда бұл тұжырым барлық натурал сандар үшін ақиқат болады.***

Тұжырымды дәлелдеу үшін, алдымен, оның $n = 1$ үшін ақиқаттығы тексеріледі. Одан кейін кез келген натурал k үшін $n = k$ теңдігінің ақиқаттығынан $n = k + 1$ теңдігінің ақиқаттығы шығатыны дәлелденеді. Онда барлық n үшін тұжырым дәлелденді деп саналады.

Расында да, тұжырым $n = 1$ үшін ақиқат. Онда ол келесі $n = 1 + 1 = 2$ саны үшін де ақиқат. $n = 2$ үшін тұжырымның ақиқаттығынан $n = 2 + 1 = 3$ болғандағы ақиқаттығы шығады. Одан $n = 4$ үшін ақиқаттығы шығады және т.с.с. Осылайша кез келген n натурал санына келеміз. Демек, тұжырым кез келген n натурал саны үшін ақиқат болады.

МЫСАЛ

1. Кез келген n натурал саны үшін $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ теңдігінің дұрыстығын дәлелдейік.

Дәлелдеуі. Алдымен берілген теңдікті (1) деп белгілейік.

1) $n = 1$ үшін (1) теңдіктің дұрыстығын тексерейік. Ол үшін (1) теңдіктің сол жағының мәнін табамыз. Ол мән 1-ге тең және (1)

теңдіктің оң жағында $\frac{n \cdot (n+1)}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$ шығады. Демек, $n = 1$ үшін (1) теңдік дұрыс.

2) $n = k$ үшін (1) теңдік дұрыс деп аламыз, яғни

$$1 + 2 + 3 + ... + k = \frac{k \cdot (k+1)}{2}.$$

3) $n = k + 1$ теңдіктің дұрыстығын дәлелдейміз, яғни $1 + 2 + 3 + ... + k + (k+1) = \frac{(k+1) \cdot (k+2)}{2}$ теңдігінің орындалатынын көрсетеміз.

Расында да, $1 + 2 + 3 + ... + k + (k+1) = \frac{k \cdot (k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k \cdot (k+1) + 2 \cdot (k+1)}{2} = \frac{(k+1) \cdot (k+2)}{2}$. Демек, $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ кез келген n натурал саны үшін дұрыс. ■

МЫСАЛ

2. Кез келген n натурал саны үшін $6^{2n} - 1$ өрнегінің мәні 35-ке бөлінетінін дәлелдейік.

Дәлелдеуі. 1) $n = 1$ үшін $6^{2n} - 1$ өрнегінің мәні 35-ке бөлінетінін тексерейік. Расында да, бұл жағдайда өрнектің мәні 35-ке тең, 35 саны 35-ке бөлінеді.

2) $n = k$ үшін $6^{2n} - 1$ өрнегінің мәні 35-ке бөлінеді деп аламыз, яғни $(6^{2k} - 1) \vdots 35$.

3) Енді $n = k + 1$ үшін $6^{2n} - 1$ өрнегінің мәні 35-ке бөлінетінін яғни $(6^{2(k+1)} - 1) \vdots 35$ тура екенін дәлелдейік.

Расында да, $6^{2(k+1)} - 1 = 6^{2k+2} - 1 = 36 \cdot 6^{2k} - 1 = (6^{2k} - 1) + 35 \cdot 6^{2k}$. Шыққан қосынды 35-ке бөлінеді, өйткені қосындының әрбір қосылғышы 35-ке бөлінеді. Демек, кез келген n натурал саны үшін $6^{2n} - 1$ өрнегінің мәні 35-ке бөлінеді. ■

МЫСАЛ

3. Кез келген n натурал саны үшін $2^n > n$ теңсіздігінің тура болатынын дәлелдейік.

Дәлелдеуі.

1) $n = 1$ үшін $2^1 > 1$ теңсіздігінің тура болатынын тексерейік. Теңсіздік тура, өйткені $2 > 1$.

2) $n = k$ натурал саны үшін $2^n > n$ теңсіздігі, яғни $2^k > k$ теңсіздігі тура деп аламыз.

3) Теңсіздіктің келесі натурал $k + 1$ саны үшін тура болатынын, $2^{k+1} > k + 1$ теңсіздігінің орындалатынын дәлелдейік.

Расында да, $2^k > k$ (тұжырым бойынша) болғандықтан, дұрыс теңсіздіктің екі жағын 2 санына көбейтіп,

$$2 \cdot 2^k > 2k \text{ немесе } 2^{k+1} > k + k \qquad (*)$$

дұрыс теңсіздігін аламыз. k — натурал сан болғандықтан, $k \geq 1$. Егер $k = 1$ болса, онда (*) теңсіздігі $2^{1+1} > 1 + 1$ түріне келеді.

Егер $k > 1$ болса, онда теңсіздіктің екі жағына k санын қосып, $k + k > k + 1$ тура теңсіздігін аламыз. Осы теңсіздік пен (*) теңсіздігін қолданып, $2^{k+1} > k + 1$ теңсіздігіне келеміз.

Демек, кез келген n натурал саны үшін $2^n > n$ теңсіздігі тура болады.

МЫСАЛ

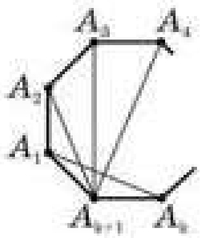
4. Дөңес n-бұрыштың диагональдар санын $\frac{n(n-3)}{2}$ формуласымен есептеуге болатынын дәлелдейік.

Дәлелдеуі. Дөңес көпбұрыштың қабырғалары санының ең кішісі 3-ке тең. Сондықтан формуланы $n \geq 3$ үшін дәлелдейміз.

1) Тұжырымның $n = 3$ үшін ақиқат екенін, яғни үшбұрыш диагональдарының саны $\frac{n(n-3)}{2}$ формуласымен есептелетінін көрсетейік. Расында да, $n = 3$ болғанда, $\frac{n(n-3)}{2} = \frac{3(3-3)}{2} = 0$. Бұл ақиқат, себебі үшбұрыштың диагональдары болмайды.

2) Тұжырым $n = k$ үшін ақиқат болсын, яғни дөңес k-бұрыштың диагональдарының саны $\frac{k(k-3)}{2}$ формуласымен есептелінсін.

3) Тұжырымның $n = k + 1$ үшін ақиқат екенін, яғни дөңес $(k + 1)$ бұрыш диагональдарының саны $\frac{(k+1)(k-2)}{2}$ формуласымен есептелетінін дәлелдейік.



34-сурет

$A_1A_2A_3A_4 \ldots A_kA_{k+1}$ — дөңес $(k + 1)$ — бұрыш болсын (34-сурет). Онда A_1A_k диагоналін жүргізейік (бұл диагональ k-бұрышта болған жоқ).

Бұрыш диагональдарының санын есептеу үшін $A_1A_2A_3A_4 \ldots A_k$ дөңес k-бұрышы диагональдарының санын есептеп, оған $k - 2$ санын, яғни $(k + 1)$-бұрыштың A_{k+1} төбесінен шығатын диагональдар санын және A_1A_k қосу керек.

Сонда $\frac{k(k-3)}{2} + (k-2) + 1 = \frac{k(k-3)}{2} + k - 1 = \frac{k^2 - 3k + 2k - 2}{2} = \frac{k^2 - k - 2}{2} = \frac{(k+1)(k-2)}{2}$. Демек, тұжырым кез келген дөңес n-бұрыш үшін ақиқат.

Алгебра

1. Математикалық индукция әдісі қандай тұжырымдарды дәлелдеу үшін қолданылады?

Жаттығулар

A

18.1. 1) $a_n = a_1 + d(n-1)$; 2) $b_n = b_1 + q^{n-1}$ формуласын математикалық индукция әдісімен дәлелдеңдер.

18.2. Барлық натурал сандар үшін берілген теңдіктің орындалатынын дәлелдеңдер:

1) $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

2) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

18.3. Барлық натурал сандар үшін теңдіктің ақиқат болатынын математикалық индукция әдісімен дәлелдеңдер:

1) $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n+1)$;

2) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$;

3) $1 - 2 + 3 - 4 + \ldots + (-1)^{n-1} n = (-1)^{n-1}\left[\dfrac{n+1}{2}\right]$;

4) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n \cdot (n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

18.4. n-нің кез келген натурал мәнінде $n^3 - n$ өрнегінің мәні 3-ке бөлінетінін дәлелдеңдер.

18.5. 1) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$;

2) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - \ldots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1}\dfrac{n(n+1)}{2}$ теңдігінің барлық натурал сандар үшін тура болатын ын математикалық индукция әдісімен дәлелдеңдер.

18.6. 1) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 8 + \ldots + n(3n-1)$;

2) $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \ldots + n(3n+1)$ қосындысының мәнін есептейтін формуланы жазыңдар. Осы формуланың барлық натурал сандар үшін тура болатынын математикалық индукция әдісімен дәлелдеңдер.

18.7. Барлық натурал сандар үшін:

1) $7^n - 6 \cdot 2^n$ өрнегінің мәні 5-ке; 2) $7^n + 3 \cdot 3^n$ өрнегінің мәні 4-ке; 3) $15^n + 6$ өрнегінің мәні 7-ге; 4) $9^n + 3$ өрнегінің мәні 4-ке бөлінетінін математикалық индукция әдісімен дәлелдеңдер.

B

18.8. Қосындының мәнін табыңдар:

1) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;

2) $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$.

18.9. 1) $1\cdot 3+2\cdot 5+3\cdot 7+\ldots+n(2n+1)=\frac{n(n+1)(4n+5)}{6}$;

2) $2\cdot 2+3\cdot 5+4\cdot 8+\ldots+(n+1)(3n-1)=\frac{n(2n^2+5n+1)}{2}$

теңдігінің $n\in N$ болғанда орындалатынын дәлел деңдер.

18.10. $n\in N$ болатын жұп мәндер үшін:

1) 7^n-5^n өрнегінің мәні 24-ке; 2) 5^n-3^n өрнегінің мәні 16-ға бөлінетінін математикалық индукция әдісімен дәлелдеңдер.

18.11. n-нің кез келген натурал мәнінде:

1) $21^n+16\cdot 4^n$ өрнегінің мәні 17-ге;

2) $15^n+7\cdot 7^n$ өрнегінің мәні 8-ге;

3) $13^n+9\cdot 3^n$ өрнегінің мәні 10-ға;

4) $5^n+7\cdot 9^n$ өрнегінің мәні 4-ке еселік болатынын дәлелдеңдер.

18.12. n-нің кез келген тақ натурал мәнінде:

1) 5^n+2^n өрнегінің мәні 7-ге;

2) 5^n+11^n+2 өрнегінің мәні 6-ға еселік болатынын дәлелдеңдер.

18.13. 1) $a_n=n^3+35n$ формуласымен берілген (a_n) сандар тізбегінің кез келген мүшесі 6-ға;

2) $a_n=n^3+17n$ формуласымен берілген (a_n) сандар тізбегінің кез келген мүшесі 6-ға;

3) $a_n=4^n+15n-1$ формуласымен берілген (a_n) сандар тізбегінің кез келген мүшесі 9-ға;

4) $a_n=7^n+3n-1$ формуласымен берілген (a_n) сандар тізбегінің кез келг ен мүшесі 9-ға бөлінетінін дәлелдеңдер.

C

18.14. 1) $n\in N$ болғанда, $4^n>7n-5$; 2) $n\in N$ және $n\geq 5$ болғанда, $2^n>5n+1$ теңсіздігінің орындалатынын дәлелдеңдер.

18.15. n-нің кез келген натурал мәнінде:

1) $5^n+2\cdot 3^n+5$ өрнегінің мәні 8-ге;

2) 5^n-3^n+2n өрнегінің мәні 4-ке еселік болатынын дәлелдеңдер.

18.16. 1) $n \in N$ болғанда, $3^n - 2^n \mid n$; 2) $n \in N$ және $n \mid 5$ болғанда, $3^{n-1} > 2n^2 - n$ теңсіздігінің орындалатынын дәлелдеңдер.

18.17. Бір жазықтықта жататын және бір ортақ нүкте арқылы өтетін әртүрлі n түзудің жазықтықты $2n$ бөлікке бөлетінін дәлелдеңдер.

18.18. 1) (a_n) тізбегі рекурренттік тәсілмен берілген: $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 7a_n + 3$. $a_n = \frac{7^n - 1}{2}$ болатынын дәлелдеңдер.
2) (a_n) тізбегі рекурренттік тәсілмен берілген: $a_1 = 4$, $a_{n+1} = 3a_n - 2$. $n \mid 2$ болғанда, $a_n = n^3 + 1$ болатынын дәлелдеңдер.

18.19. 1) $2^n > n^3$; 2) $2^{n-2} > 2n + 5$; 3) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$ теңсіздігі барлық натурал сандар үшін ақиқат екенін математикалық индукция әдісімен дәлелдеңдер.

18.20. $\frac{n \cdot (2n^2 + 3n + 1)}{6}$ өрнегінің мәні n-нің кез келген натурал мәнінде натурал сан болатынын дәлелдеңдер.

***18.21.** Қосындының мәнін табыңдар:

1) $\frac{1}{4 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 18} + \frac{1}{18 \cdot 25} + ...$;

2) $\frac{1}{3 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 19} + \frac{1}{19 \cdot 27} + ...$;

3) $\frac{1}{5 \cdot 16} + \frac{1}{16 \cdot 27} + \frac{1}{27 \cdot 38} + ...$;

4) $\frac{1}{9 \cdot 13} + \frac{1}{13 \cdot 17} + \frac{1}{17 \cdot 21} + ...$.

ҒАЛЫМ-МАТЕМАТИК ТУРАЛЫ ХАБАРЛАМА ДАЙЫНДАҢДАР

18.22. Француз математигі Áëåç Ïàñêàëü màòåìà-òèêàëûқ èíäóêöèÿ әäiñií өç àëäûíà æåêå әäiñ ðåòiíäå қàðàñòûðғàí. Àiðàқ iñû әäiñòiң қîëäàíûëóû Âåéëëà àңáåëòåðòiíäå êåçäåñåäi (á.ç.ä. 300 æûë).
Әäiñòiң қàçiðãi àòàóûí 1838 æûëû àíã-ëèéí ìàòåìàòèêi Äå Ìîðãàí áåðãåí.

Де Морган
(1806—1871)

ҚАЙТАЛАУ

18.23. Кәсіпкер банкке жылдық өсімнің келісімді пайызымен ақша салды. Екі жылдан кейін салым 60 000 тг-ге, ал үш жылдан кейін тағы 49 000 тг-ге өскен. Кәсіпкер бастапқыда банкке қанша ақша салған?

18.24. Егер екітаңбалы санды осы санды құрайтын цифрлардың көбейтіндісінің мәніне бөлсе, онда бөліндіде 9, қалдықта 3 шығады. Егер санды құрайтын цифрлардың квадратының қосындысының мәніне цифрлардың көбейтіндісінің мәнін қосса, онда берілген сан шығады. Осы санды табыңдар.

18.25. $2 + 4 + 6 + \ldots + x = 930$ теңдеуін шешіңдер.

18.26. Геометриялық прогрессия құрайтын тізбектей алынған үш санның қосындысының мәні 114-ке тең. Бұл сандарды арифметикалық прогрессияның бірінші, төртінші және жиырма бесінші мүшесі ретінде қарастыруға болады. Осы сандарды табыңдар.

18.27. Теңдеуді шешіңдер:

1) $(x^2 + x + 1)^2 - 3x^2 - 3x - 1 = 0$;

2) $(2x^2 + 3x - 1)^2 - 10x^2 - 15x + 9 = 0$.

18.28. 1) $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 4x + 3}{5 - 2x}} + \dfrac{2}{x + 1}$; 2) $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 5x + 6}{7 - 3x}} + \dfrac{1}{x}$ функциясының анық талу облысын табыңдар.

Жаңа білімді меңгеруге дайындаламыз

18.29. Радиусы 2 см, центрі координаталар басы болатын шеңберді координаталық жазықтықта салыңдар. Шеңберге шамасы 30°, 45°, 90°, 150° болатын центрлік бұрыштарды кескіндеңдер.

18.30. Радиусы 4 см, центрі координаталар басы болатын шеңберді координаталық жазықтықта салыңдар. Бастапқы нүктесі Ox осінің оң бағытымен сәйкес келетін және шамасы 30°, 45°, 90°, 150° болатын доғаны кескіндеңдер.

Жаңа білімді меңгеруге арналған тірек ұғымдар

Бұрыш, бұрыштың шамасы және өлшемі, бұрыштың түрлері, шеңбердің радиусы, жартышеңбер, π *саны, жазықтықта бұру.*

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

1. $\{a_n\}$ — арифметикалық прогрессия. Егер $a_1 = 10$, $d = -0{,}1$ болса, онда a_4-ті табыңдар.

A) 9,7; B) 97; C) –97; D) 10,3; E) –10,3.

2. $\{b_n\}$ — геометриялық прогрессия. Егер $b_1 = 4$ және $q = \frac{1}{2}$ болса, онда b_6-ны есептеңдер.

A) –0,125; B) 0,125; C) 1,25; D) 12,5; E) –1,25.

3. 12; 6; … шексіз геометриялық прогрессиясының қосындысын табыңдар.

A) 6; B) –12; C) 24; D) –24; E) 12.

4. Егер $x_n = 2n + 1$ болса, онда $\{x_n\}$ тізбегінің алғашқы жүз мүшесінің қосындысын табыңдар.

A) 20 400; B) 1200; C) 102; D) 1020; E) 10 200.

5. $\{b_n\}$ — геометриялық прогрессия. Егер $b_1 = 625$, $q = \frac{1}{5}$ болса, онда S_5-ті табыңдар.

A) –781; B) 781; C) 871; D) –871; E) –10.

6. 10; 8; … — арифметикалық прогрессия. S_{10}-ды есептеңдер.

A) 190; B) –190; C) 10; D) 1; E) –10.

7. –3; –6; … — арифметикалық прогрессия. a_{25}-ті табыңдар.

A) 69; B) –69; C) 75; D) –72; E) –75.

8. $\{b_n\}$ — геометриялық прогрессия. Егер $b_1 = 1$, $q = 3$ болса, онда S_4-ті табыңдар.

A) 81; B) 40; C) 80; D) –80; E) –40.

9. $\{b_n\}$ — геометриялық прогрессия. Егер $b_1 = 32$, $q = \frac{1}{2}$ болса, онда b_8-ді табыңдар.

A) $\frac{1}{2}$; B) $-\frac{1}{4}$; C) $\frac{1}{4}$; D) $-\frac{1}{2}$; E) 64.

10. $\{a_n\}$ — арифметикалық прогрессия және $a_1 = -10$, $d = 2$. S_5-ті табыңдар.

A) –28; B) –70; C) 70; D) –30; E) 39.

11. 3; 7; … — арифметикалық прогрессия. a_{10}-ды есептеңдер.

A) –36; B) 36; C) –33; D) 33; E) 39.

12. Арифметикалық прогрессияның алғашқы алты мүшесінің қосындысы 9-ға, ал төртінші және екінші мүшелерінің айырымы 0,4-ке тең. Прогрессияның бірінші мүшесін табыңдар.

A) 0; B) –1; C) 1; D) –2; E) 2.

13. Арифметикалық прогрессияны құрайтын үш санның қосындысы 111-ге тең және екінші сан бірінші саннан бес есе артық. Осы сандарды табыңдар.

A) 10; 50; 61; B) 8,5; 42,5; 60; C) 9,4; 47; 54,6;
D) 8; 40; 63; E) 7,4; 37; 66,6.

14. Егер $a_{21} = 15$, $a_1 = 5$ болса, онда арифметикалық прогрессияның айырымын табыңдар.

A) 1,5; B) –1; C) 0,5; D) 1; E) –0,5.

15. 2-ден 102-ге дейінгі, 102-ні қоса алғандағы барлық натурал сандардың қосындысын табыңдар.

A) 2626; B) 5256; C) 4040; D) 5252; E) 10504.

16. $\frac{1}{5} + \frac{8}{15} + \frac{13}{15} + \ldots + \frac{33}{15}$ қосындысын есептеңдер.

A) 15,4; B) 120; C) 60,8; D) 63,8; E) 8,4.

17. Егер $b_1 = 2$ және $q = 0{,}875$ болса, онда шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысын табыңдар.

A) 18; B) 16; C) 32; D) 64; E) 100.

18. 9; –3; 1; ... шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысын табыңдар.

A) 6,75; B) $-6\frac{4}{9}$; C) –27; D) 81; E) $\frac{1}{3}$.

19. Егер $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; ...геометриялық прогрессия болса, онда $\frac{b_6}{b_4}$ қатынасының мәнін табыңдар .

A) $\frac{3}{5}$; B) $\frac{7}{9}$; C) $\frac{5}{9}$; D) $\frac{4}{9}$; E) $\frac{2}{3}$.

20. 8; 4; ... шексіз геометриялық прогрессияның қосындысын табыңдар.

A) 8; B) 12; C) 15; D) $\frac{255}{16}$; E) 16.

ГЛОССАРИЙ

A_n^k	A_n^k — n элементтен алынған k-дан құралған қайталанбайтын орналастырулар саны
Ақиқат оқиға	Тәжірибе барысында міндетті түрде орындалатын оқиға *ақиқат оқиға* деп аталады
Алгоритм	Алгоритм — қандай да бір мақсатқа жету үшін орындалатын қарапайым іс-әрекеттер тізбегі
Арифметикалық прогрессия	Екінші мүшесінен бастап, әрбір мүшесі алдыңғы мүшесіне қандай да бір тұрақты d санын қосқанда шығатын сандар тізбегін арифметикалық прогрессия деп атайды. d саны *арифметикалық прогрессияның айырымы* деп аталады
Арифметикалық прогрессияның белгісі	$a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ формуласымен берілген арифметикалық прогрессия мүшелерінің қасиеті *арифметикалық прогрессияның* белгісі деп аталады
Арифметикалық прогрессияның алғашқы n мүшесінің қосындысының формуласы	$S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$; $S_n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$ — арифметикалық прогрессияның алғашқы n мүшесінің қосындысының формуласы
Арифметикалық прогрессияның n-ші мүшесінің формуласы	$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ формуласы *арифметикалық прогрессияның n-ші мүшесінің формуласы* деп аталады
α бұрышының синусы	Шеңберге тиісті B нүктесінің ординатасының шеңбер радиусына қатынасы *α бұрышының синусы* деп аталады
α бұрышының косинусы	Шеңберге тиісті B нүктесінің абсциссасының шеңбер радиусына қатынасы *α бұрышының косинусы* деп аталады
α бұрышының тангенсі	Шеңберге тиісті B нүктесінің ординатасының нүктенің абсциссасына қатынасы *α бұрышының тангенсі* деп аталады
α бұрышының котангенсі	Шеңберге тиісті B нүктесінің абсциссасының нүктенің ординатасына қатынасы *α бұрышының котангенсі* деп аталады
Бином	*Бином* сөзі француз тілінен аударғанда *алгебралық екімүше* деген сөзді білдіреді
Биномиалды коэффициенттер	Ньютон биномының формуласындағы C_n^k коэффициенттері *биномиалды коэффициенттер* деп аталады
Бірсарынды тізбек	Өспелі, кемімелі, өспейтін және кемімейтін тізбектерді *бірсарынды тізбектер* деп атайды
Геометриялық прогрессия	Екіншісінен бастап кез келген мүшесі алдыңғы мүшесін нөлден өзгеше қандай да бір тұрақты санға көбейткенде шығатын сандар тізбегі *геометриялық прогрессия* деп аталады

Жалғасы

Геометриялық прогрессияның белгісі	$b = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$ формуласымен берілген геометриялық прогрессия мүшелерінің қасиеті *геометриялық прогрессияның белгісі* деп аталады
Геометриялық прогрессияның еселігі	Келесі мүшесін алу үшін алдыңғы мүшесіне көбейтілетін сан *геометриялық прогрессияның еселігі* деп аталады және q әрпімен белгіленеді
Геометриялық прогрессияның алғашқы n мүшесінің қосындысының формуласы	$S_n = \dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}$, $q \neq 1$ — геометриялық прогрессияның алғашқы n мүшесінің қосындысының формуласы
Геометриялық прогрессияның n-ші мүшесінің формуласы	$b_n = b_1 q^{n-1}$ формуласы *геометриялық прогрессияның n-ші мүшесінің формуласы* деп аталады
Геометриялық ықтималдық	*Геометриялық ықтималдық* — нүктенің, кесіндінің, жазықтықтың, кеңістік фигурасына түсу ықтималдығы
Екі айнымалысы бар сызықтық емес теңдеулер жүйесі	Құрамында ең болмағанда бір теңдеуі сызықтық теңдеу болмайтын екі айнымалысы бар теңдеулер жүйесі *екі айнымалысы бар сызықтық емес теңдеулер жүйесі* деп аталады
Екі айнымалысы бар сызықтық емес теңдеулер жүйесінің шешімі	Жүйенің әрбір теңдеуін тура санды теңдікке айналдыратын $(x_0; y_0)$ сандар жұбы *екі айнымалысы бар сызықтық емес теңдеулер жүйесінің шешімі* деп аталады
Екі айнымаласы бар сызықтық емес теңдеудің шешімі	Екі айнымалысы бар $F(x; y) = 0$ сызықтық емес теңдеуін $F(x_0; y_0) = 0$ тура санды теңдігіне айналдыратын $(x_0; y_0)$ сандар жұбы *екі айнымалысы бар сызықтық емес теңдеудің шешімі* деп аталады
Екі айнымалысы бар теңдеу	$f(x; y) = g(x; y)$ түрінде берілген теңдеулер *екі айнымалысы бар* (x пен y) *теңдеулер* деп аталады, мұндағы $f(x; y)$ және $g(x; y)$ — x пен y айнымалылары бар өрнектер
Екі айнымалысы бар теңсіздік	$f(x; y) > g(x; y)$; $f(x; y) < g(x; y)$; $f(x; y) \geq g(x; y)$, $f(x; y) \leq g(x; y)$ түріндегі теңсіздіктер (мұндағы $f(x; y)$ және $g(x; y)$ — екі айнымалысы бар өрнектер) *екі айнымалысы бар теңсіздік* деп аталады
Екі айнымалысы бар теңсіздіктің шешімі	*Екі айнымаласы бар теңсіздіктің шешімі* деп теңсіздікті тура санды теңсіздікке айналдыратын айнымалылардың мәндер жұбын айтады
Жоғарыдан шектелген тізбек	Егер (a_n) тізбегінің әрбір мүшесінен үлкен A саны бар болса, онда (a_n) тізбегі *жоғарыдан шектелген тізбек* деп аталады
Заттың концентрациясы	Массасы m болатын қоспадағы (қорытпадағы, ерітіндідегі) массасы m_1 *заттың концентрациясы* деп $\dfrac{m_1}{m}$ шамасын айтады

Жалғасы

Заттың проценттік құрамы	Массасы m болатын қоспадағы (қорытпадағы, ерітіндідегі) массасы m_1 *заттың проценттік құрамы* деп $\frac{m_1}{m} \cdot 100\%$ шамасын айтады
Қайталанбайтын алмастырулар	$A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ жиынының барлық n элементін қамтитын реттелген жиындар n элементтен тұратын *қайталанбайтын алмастырулар* деп аталады
Қайталанбайтын алмастырулар санын есептеуге арналған формула	$P_n = n!$
Қайталанбайтын орналастырулар	n элементтен тұратын жиынның k элементінен реттелген жиындарды n элементтен алынған k-дан құралған *қайталанбайтын орналастырулар* деп айтады
Қайталанбайтын орналастырулар санын есептеуге арналған формула	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
Қайталанбайтын терулер	n элементтен тұратын жиынның k элементінен реттелген ішкі жиындарды n элементтен алынған k-дан құралған *қайталанбайтын терулер* деп айтады
Қайталанбайтын терулер санын есептеуге арналған формула	$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
Қарама-қарсы оқиға	A оқиғасы орындалмағанда ғана орындалатын $\overline{A}$ оқиғасы A оқиғасына *қарама-қарсы* оқиға деп аталады
Кездейсоқ оқиға	Тәжірибе барысында орындалатын немесе орындалмайтын оқиға *кездейсоқ оқиға* деп аталады
Кемімейтін тізбек	Егер (a_n) тізбегінде әрбір a_n мүшесі алдыңғы a_{n-1} мүшесінен үлкен немесе оған тең болса, онда тізбек *кемімейтін тізбек* деп аталады
Кемімелі тізбек	Егер (a_n) тізбегінде әрбір a_n мүшесі алдыңғы a_{n-1} мүшесінен кіші болса, онда тізбек *кемімелі тізбек* деп аталады
Келтіру формулалары	$\frac{\pi}{2}k \pm \alpha$ (мұндағы k — кез келген бүтін сан, α — сүйір бұры ш) бұрышын ың тригонометриялық функциялары берілсе, онда оларды α бұрышының тригонометриялық функцияларына келтірген ыңғайлы. Ол үшін арнайы келтіру формулалары қолданылады
Комбинаторика	Комбинаторикалық есептерді қарастыратын математиканың бөлігі *комбинаторика* деп аталады
Комбинаторикалық есеп	Шектелген жиынның элементтерінен қандай да бір ережелер бойынша әртүрлі комбинациялар құрастырылатын және олардың саны табылатын есептерді *комбинаторикалық есептер* деп атайды
Қолайлы нәтиже	Тәжірибе нәтижесінде күтілетін оқиға шығатын болса, онда *қолайлы нәтиже* деп аталады

Жалғасы

Қосу формулалары	Екі бұрыштың қосындысы мен айырымының тригонометриялық функцияларын сол бұрыштардың тригонометриялық функциялары арқылы өрнектейтін формулаларды *қосу формулалары* деп атайды
Қосынды ережесі	Егер X және Y жиындарының ортақ элементі болмаса және X жиынында a элемент, Y жиынында b элемент болса, онда X және Y жиындарының бірігуі $(a + b)$ элементтен тұрады
Математикалық индукция	Математикалық индукция — дәлелдеу әдістерінің бірі. Оны қандай да бір тұжырымның барлық натурал сандар үшін ақиқат болатынын дәлелдеу үшін қолданады. Алдымен, тұжырымның $n = 1$ үшін ақиқаттығы тексеріледі. Одан кейін кез келген натурал k үшін $n = k$ теңдігінің ақиқаттығынан $n = k + 1$ теңдігінің ақиқаттығы шығатыны дәлелденеді. Онда барлық n үшін тұжырым дәлелденді деп саналады
Мәндес теңдеулер	Шешімдер жиыны бірдей болатын екі теңдеу *мәндес теңдеулер* деп аталады
Мүмкін емес оқиға	Тәжірибе барысында міндетті түрде орындалмайтын оқиға *мүмкін емес* оқиға деп аталады
Ньютон биномы	$(x + a)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^k \cdot x^{n-k}$, мұндағы $\sum$ қосу белгісі, формуласы *Ньютон биномы* деп аталады
$n!$	$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$
n-ші мүшесінің формуласы	*n-ші мүшенің (жалпы мүшенің) формуласы* деп тізбектің нөмірі белгілі кез келген мүшесін есептеу формуласын айтады
Оқиға	*Оқиға* деп мағынасы бар, орындалатын немесе орындалмайтын құбылыс айтылады. *Оқиға* деп түрлі тәжірибелер, бақылаулар және өлшемдердің нәтижелерін де айтады
Оқиғаның ықтималдығы	*А оқиғасының ықтималдығы* деп теңмүмкіндік жағдайында m қолайлы нәтижелер санының n жалпы нәтижелер санына қатынасын айтады
Өспейтін тізбек	Егер (a_n) тізбегінде әрбір a_n мүшесі алдыңғы a_{n-1} мүшесінен кіші немесе оған тең болса, онда тізбек *өспейтін тізбек* деп аталады
Өспелі тізбек	Егер (a_n) тізбегінде әрбір a_n мүшесі алдыңғы a_{n-1} мүшесінен үлкен болса, онда тізбек *өспелі тізбек* деп аталады
Периодты функция	Егер $y = f(x)$ анықталу облысынан алынған кез келген x үшін $f(x + T) = f(x)$ теңдігі орындалатындай нөлге тең емес T саны бар болса, онда $y = f(x)$ функциясы *периодты функция*, ең кіші T саны *функцияның периоды* деп аталады
P_n	n элементтен тұратын қайталанбайтын алмастырулар саны

Жалғасы

Радиандық бұрыш	Ұзындығы шеңбер радиусының ұзындығына тең доғаға сәйкес келетін центрлік бұрыш *1 радиандық бұрыш* деп аталады
C_n^k	C_n^k — n элементтен алынған k-дан құралған қайталанбайтын терулер саны
Сандар тізбегінің аналитикалық тәсілмен берілуі	Егер тізбек n-ші мүшенің (жалпы мүшесінің) формуласымен берілсе, онда сандар тізбегі *аналитикалық тәсілмен* берілген дейді
Сандар тізбегінің графиктік тәсілмен берілуі	Сандар тізбегінің графигі абсциссасы натурал сан, ординатасы тізбектің мүшесі болатын нүктелер жиынынан тұрады
Санды шеңбер	Бастапқы нүкте, бірлік доға, оң бағыт көрсетілген шеңбер *санды шеңбер* деп аталады
Статистикалық ықтималдық	*A оқиғасының статистикалық ықтималдығы* деп жүргізілген n тәжірибе барысында оқиғаның орындалуының салыстырмалы жиілігін айтады
Теңдеудің графигі	Екі айнымалысы бар *теңдеудің графигі* деп координаталары осы теңдеудің шешімдері болатын координаталық жазықтықтың нүктелер жиынын айтады
Теңдеудің дәрежесі	$F(x; y) = 0$ түрінде берілген екі айнымалысы бар *теңдеудің дәрежесі* деп $F(x; y)$ көпмүшесінің дәрежесін айтады (мұндағы $F(x; y)$ — стандарт түрде берілген көпмүше)
Тізбекті баяндау тәсілімен беру	Бұл тәсілдің көмегімен тізбектің орналасу заңдылығы сөзбен түсіндіріледі
Тізбектің мүшелері	Тізбекті құрайтын сандар *тізбектің мүшелері* деп аталады
Тізбекті рекурренттік тәсілмен беру	*Тізбекті рекуренттік тәсілмен беру* дегеніміз кандай да бір мүшесінен бастап кез келген мүшесін алдыңғы (бір немесе бірнеше) мүшесі арқылы өрнектеу болып табылады. Бұл жағдайда тізбектің бір немесе бірнеше мүшесі және алдыңғы белгілі мүшелері бойынша басқа мүшелерін табуға болатын формула беріледі
Төменнен шектелген тізбек	Егер (a_n) тізбегінің әрбір мүшесінен кіші A саны бар болса, онда (a_n) тізбегі *төменнен шектелген тізбек* деп аталады
Тұрақты тізбек	Егер (a_n) тізбегінің әрбір a_n мүшесі алдыңғы a_{n-1} мүшесіне тең болса, онда *тұрақты* (стационар) *тізбек* деп аталады
Тригонометриялық тепе-теңдіктер	Құрамында тригонометриялық функциялары бар және бұрыштың кез келген мүмкін мәнінде тура, функцияны кез келген шамамен алмастырғанда тура емес болатын теңдік *тригонометриялық тепе-теңдіктер* деп аталады
Тригонометриялық функциялар	Синус, косинус, тангенс және котангенстің α бұрышының шамасына тәуелділігі *тригонометриялық функциялар* деп аталады

Жалғасы

Шексіз кемімелі геометриялық прогрессия	Еселігі $\|q\| < 1$ болатын геометриялық прогрессия *шексіз кемімелі геометриялық прогрессия* деп аталады
Шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысының формуласы	$S = \dfrac{b_1}{1-q}$ — шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысының формуласы, мұндағы $\|q\| < 1$
Шексіз сандар тізбегі	Егер барлық сан натурал сандар жиынында берілсе, онда тізбек *шексіз сандар тізбегі* деп аталады
Шектелген сандар тізбегі	Егер сандар тізбегі (функция) алғашқы n натурал сандар жиынында берілсе, онда тізбек *шектелген сандар тізбегі* деп аталады
Шектелген тізбек	Егер тізбек жоғарыдан да, төменнен де шектелген болса, онда (a_n) тізбегі *шектелген тізбек* деп аталады
Факториал	Эн факториал 1-ден n-ге дейінгі (n-ді қоса алғанда) барлық натурал сандардың көбейтіндісі
Элементар оқиға	Бірнеше жай оқиғаларға бөлуге болатын оқиға *элементар оқиға* деп аталады

ЖАУАПТАРЫ

7-8-сыныптардағы алгебра курсын қайталауға арналған жаттығулар

1. 1) $\frac{104}{(7-x)(x+6)}$; 2) $3a-y$; 3) $\frac{y(a+b)-3a}{a-yb}$; 4) $ax-6y$. **3.** 1) $-0{,}3\,c^{-1}\cdot d^{-3}$; 2) $\frac{8a}{9x}$; 3) $10{,}5\,xa^{2}$; 4) $10{,}5\,b$. **4.** 1) $\frac{1}{2x^3(x-1)}$; 2) $\frac{15bc^2}{ad}$; 3) $16(p-2)\cdot q^2$; 4) $\frac{x^2y^2a^2}{y+3}$. **5.** 1) $\frac{49}{19}$; 2) 0,2; 3) –2,5. 4) $\frac{1}{2}$; 5) $-2\frac{1}{7}$; 6) –6. **6.** 1) $1-\sqrt{x}$; 2) $\sqrt{y}-1$; 3) $1-x$. **8.** 1) $\frac{a^2-2}{a}$; 2) $\frac{x^2-2}{x}$; 3) $\frac{3-x^2}{x}$; 4) $\frac{1}{x+2}$. **9.** 1) 2; 2) $\frac{4y^2-4a^2}{ay}$; 3) 0; 4) $-2a^2b^2$; 5) 0; 6) 2; 7) 1,5; 8) $\frac{14}{3}$; 9) –5. **10.** 1) $\frac{c}{c-a}$; 2) $\frac{4c}{c-2n}$; 3) $\frac{-2c}{3c+a}$; 4) $\frac{6c}{5c-2a}$; 5) $\frac{-2a}{3c+2a}$; 6) $\frac{3b}{3b+a}$. **11**. 1) 1; 2) 0; 3) –22; 4) 1. **12.** 1) 0; 3; $\sqrt{26}$; 2) 1; 4; 6; 9; 3) 1,5; 9; 3; 4) 2; $\sqrt{10}$. **13.** 1) 5; 2) 52; 3) 5,6; 4) 26; 5) –5,56; 6) 9; 7) 17; 8) $\frac{1}{16}$; 9) $1\frac{4}{9}$; 10) 9. **15.** 1) Мағынасы болмайды; 2) –64; 3) 102,4; 4) 2997,7. **16.** 1) y | 0; 2) y | 0; 3) a | 0; 4) x — кез келген нақты сан; 5) c m0; 6) b m0. **17.** 1) $\sqrt{31}; 4\sqrt{2}$; 2) $6\sqrt{0{,}6}; \sqrt{39}; 4\sqrt{3}$; 3) $\sqrt{15}; 3\sqrt{2}; 3\sqrt{\frac{7}{2}}$; 4) $8\sqrt{0{,}5}; 3\sqrt{10}; \sqrt{93}$. **18.** 1) $\frac{110}{81}$; 2) $-\frac{\sqrt{33}}{2}$; 3) –10; 4) 3,76.

21. 1) 21; 2) –2; 3) –2. **22.** 1) a^4b; 2) $\frac{4a^8}{3b^7}$; 3) b^5x^4; 4) $5x^4a^6$; 5) $\frac{2x^3}{y}$; 6) $-0{,}5\,p^3y^5$. **23.** 1) $5|x|$; 2) $|a|x^4$; 3) $2|y|\sqrt{5}$; 4) $0{,}5\sqrt{3x^3}$; 5) $3a|x|\sqrt{2y}$; 6) $6{,}5|a|$; 7) $0{,}3\,a^3\sqrt{a}$; 8) $-m^4 0{,}9\sqrt{y}$; 9) $-0{,}3\,a\sqrt{c}$; 10) $-\frac{1}{x^2}\sqrt{-x}$; 11) $105x^2$; 12) $1{,}4\,ab\sqrt{ab}$; 13) $5y^2x\sqrt{2x}$; 14) $a^3|x|\sqrt{-3x}$. **24.** 1) $\sqrt{10x^2}$; 2) $\sqrt{7c}$; 3) $-\sqrt{11a^2}$; 4) $\sqrt{2a^3b}$; 5) $\sqrt{6c^3}$; 6) $\sqrt{11c^8}$; 7) $\sqrt{9x^9}$; 8) $\sqrt{18a^3b^3}$; 9) $\sqrt{-3x}$; 10) $-\sqrt{12a^4}$; 11) $\sqrt{-\frac{9x^3}{2}}$; 12) $\sqrt{0{,}5ab^3}$. **25.** 1) $\frac{6}{3\sqrt{3}-3}$; 2) $\frac{1}{8+4\sqrt{3}}$; 3) $-\frac{25}{9+\sqrt{6}}$; 4) $\frac{x-7}{7(\sqrt{x}-\sqrt{7})}$; 5) $\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; 6) $\frac{y-b^2}{b(\sqrt{y}-b)}$. **26.** 1) $\frac{2\sqrt{2}+y\sqrt{y}}{2-y}$; 2) $\frac{c\sqrt{c}-27}{c-9}$; 3) $\frac{a^3b\sqrt{b}-27}{a^2b-9}$; 4) $\frac{2+\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; 5) $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{6}-4}{4}$; 6) $7+3\sqrt{6}-5\sqrt{2}-4\sqrt{3}$. **27.** 1) –5; 1; 2) –1; 15; 3) –2; 6; 4) –1; 2,5. **28.** 1) $(x+4)(x-2)$; 2) $(3x-8)(x-1)$; 3) $(3-2x)(x-1)$; 4) $(x-1)(5-3x)$. **29.** 1) $2(1-x)(x-4)$; 2) $(x-1)(x-10)$; 3) $(1-x)(2x-5)$; 4) $(x-1)(3x+7)$; 5) $0{,}5\,(x+4)(x-1)$; 6) $0{,}5(x-1)(x-11)$; 7) $(1-x)(3x+1)$; 8) $0{,}3(x-1)(x+11)$; **30.** 1) $(x+8)(x-1)$; 2) $(x+1)(x-11)$; 3) $-2{,}5\,(x-2{,}06)\cdot(x-1)$; 4) $\frac{1}{3}(x-1)(11x+24)$. **31.** 1) $(x+1)$; 2) $x-8$; 3) $2x+9$; 4) $3x-10$; 5) $\frac{2x-9}{x}$; 6) $\frac{3(x-2)}{x}$; 7) $\frac{5x+12}{x+1}$; 8) $\frac{2x-3}{x+2}$. **32.** 1) $x^2-9x+14=0$; 2) $x^2-2x-15=0$; 3) $x^2-3x-4=0$;

4) $x^2 + 2{,}4x + 0{,}63 = 0$; 5) $x^2 - 5{,}5x + 1{,}06 = 0$; 6) $x^2 - 25 = 0$; 7) $x^2 - 1{,}1x + 0{,}3 = 0$; 8) $x^2 - 6{,}4x + 9{,}88 = 0$; 9) $x^2 - 7 = 0$; 10) $x^2 - 10x + 22 = 0$; 11) $x^2 + 6x + 4 = 0$; 12) $x^2 - \left(\sqrt{2} + \sqrt{11}\right)x + \sqrt{22} = 0$. **33.** 1) 6; 4; 2) 3; 8; 3) 9; 3; 4) –8; –3; 5) –21; 6) –16; 2; 7) 3; $\sqrt{2}$; 8) $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; 9) $\sqrt{2} \pm 1$; 10) $3\sqrt{5}$; 12; 11) $2\sqrt{5}$; 12) $\sqrt{2}$; $-\sqrt{6}$. **34.** 1) $x_1 + x_2 = 4$; $x_1x_2 = -6$; 2) $x_1 + x_2 = -12$; $x_1x_2 = -2{,}5$; 3) $x_1 + x_2 = 7$; $x_1x_2 = 2{,}5$; 4) $x_1 + x_2 = \frac{5}{3}$; $x_1x_2 = \frac{2}{3}$. **35.** 1) 34; 2) –36; 3) 172; 4) 1216. **36.** 1) $\left\{\frac{5 \pm \sqrt{97}}{2}\right\}$; 2) {–2; 7}; 3) {–2; –8}; 4) {–4; 1}; 5) {4; 3}; 6) {1; 6}; 7) {2; 9}; 8) {–1; 4}; 9) $\left\{\frac{4 \pm \sqrt{43}}{3}\right\}$. **37.** 1) $\varnothing$; 2) $1 \pm \sqrt{35}$; 3) 6; 4) –4; 5) 2; 10; 6) $\varnothing$; 7) 13; 8) 1; 7. **38.** 1) $x^2 - 36 = 0$; 2) $x^2 - 2{,}25 = 0$; 3) $x^2 - 13 = 0$; 4) $x^2 + 7 = 0$. **39.** 1) $(x - 3)^2 - 16 = 0$; 2) $\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 - 4 = 0$; 3) $(x + 5)^2 - 7 = 0$; 4) $(x - 0{,}5)^2 + 2 = 0$. **40.** 1) {±3; ±5}; 2) $\varnothing$; 3) $\{4; -3 \pm \sqrt{17}\}$; 4) $\{-3; -5; 1 \pm \sqrt{14}\}$; 5) {±1; ±4} 6) $\varnothing$; 7) $\left\{3; 6; \frac{-9 - \sqrt{153}}{2}\right\}$; 8) {–9; –6; 18}; 9) $\varnothing$; 10) $\varnothing$. **41.** 1) 0; 2) $\frac{-19 + \sqrt{41}}{2}$; 3) $\sqrt{3} - \sqrt{11}$; 4) –1. **42.** 1) 4; 2) ±5; 3) –2; 4) 1. **43.** 1) 6; 2) –4; 3) ±2; 4) 5. **44.** 1) $(-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$; 2) $(-\infty; 3] \cup [4; +\infty)$; 3) $\varnothing$; 4) $(-\infty; 2{,}6]$. **45.** 1) $\{1 \pm \sqrt{6}\}$; 2) $\{-2 \pm \sqrt{7}\}$; 3) $\{2; 2 \pm \sqrt{6}\}$; 4) $\{-2; -1\}$; 5) {±1}; 6) $\{\pm 2\sqrt{2}\}$; 7) {–3; 1}; 8) {0; 4}; 9) {–1; 3}; 10) {1; 2}; 11) {1; 2}; 12) $\left\{-4; 1; \frac{5 \pm \sqrt{41}}{2}\right\}$. **46.** 1) {6}; 2) {3}; 3) {±5}; 4) {±8}; 5) {–5; 4}; 6) {–7; 4}; 7) {–9; 4,5} 8) {3; 12}. **47.** 1) (1,5; 0) және (0; –1,5); 2) $\left(-\frac{1}{4}; 0\right)$ және (0; 0,5); 3) (0; 0); 4) (1; 0); (–1; 0) және (0; 1); 5) $(\sqrt{2}; 0)$; $(-\sqrt{2}; 0)$ және (0; –2); 6) $\varnothing$; (0; 1,5); 7) (2; 0); (–2; 0) және (0; 4); 10) (0; 0); (–2; 0). **51.** 1) $y = (x - 2)^2 + 3$; 2) $y = 2(x - 3)^2 - 2$; 3) $y = (x + 1)^2 + 2$; 4) $y = 2(x - 3)^2 - 2$. **54.** 1) 5; 2) –2; 3) 0; 4) –2. **55.** 3) 10; 4) 5. **56.** 1) $(-\infty; -2] \cup [5; +\infty)$; 4) $(-\infty; -1] \cup [0{,}2; 8) \cup (8; +\infty)$; 5) $(-\infty; -1) \cup [5; +\infty)$; 7) $\left[-2; \frac{3 - 3\sqrt{3}}{2}\right] \cup \left[\frac{3 + 3\sqrt{3}}{2}; +\infty\right)$; 8) $(-\infty; -1 - \sqrt{6}] \cup [-1 + \sqrt{6}; +\infty)$. **57.** 1) (1; 9,3). **58.** 1) 40 км/сағ; 2) 70 км/сағ; 3) 72 км/сағ. **59.** 1) 42 сағ және 56 сағ және 56 сағ және 42 сағ; 2) 20 күн және 30 күн және 30 күн және 20 күн. **60.** 1) 13 км/сағ; 2) 2 км/сағ. **61.** 1) 160 м және 90 м; 2) 60 м; 3) 1600 $м^2$; 4) 1200 $м^2$. **63.** 1) 96 және 69; 2) 84 және 48. **64.** 1 000 000 тг. **66.** 1) 4,07; 2) ≈0,596. **67.** 1) $a = 6$; 2) $a = -5$. **68.** Функция $(-\infty; -5]$; [2; 4) және [4; 7) аралықтарда кемиді; Функция [–5; 2] және $(7; +\infty)$ аралықтарында өседі. **69.** ≈12,9%.

I тарау. ЕКІ АЙНЫМАЛЫСЫ БАР ТЕҢДЕУЛЕР, ТЕҢСІЗДІКТЕР ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ ЖҮЙЕЛЕРІ

1.3. 1) 2; 2) $\varnothing$; 3) $\varnothing$; 4) 2; 5) $-1 \pm \sqrt{3}$; 6) –2; 4. **1.4.** 1) Екінші; 2) екінші; 3) екінші; 4) үшінші; 5) төртінші; 6) төртінші. **1.6.** 1) {(0; ±2); (±2; 0)}; 2) {(1; 2); (–1; –2); (1; –2); (–1; 2)}; 3) {(–4; 0), (4; 0), (–2; 2), (2; –2), (–2; –2), (2; 2)}. **1.7.** 1) Парабола; 2) парабола; 3) гипербола; 4) гипербола. **1.8.** $a = -3$; $b = 6$. **1.11.** 1) 25% шетел операторларына; 2) 625 тг; 3) 700 тг. **1.12.** 1) $(-\infty; -1) \cup (2{,}5; +\infty)$;

3) $(-\infty; -4) \cup [2; 3] \cup (4; +\infty)$. **1.13.** 1) Иә; 2) иә; 3) жоқ; 4) иә. **1.14.** 1) 3; 2) 7; 3) $6\sqrt{2}$; 4) 4. **2.3.** 1) $\varnothing$; 2) 2; 3) $\varnothing$. **2.6.** $M(3; -1)$. **2.7.** 1) а) $p > \frac{3}{4}$; ә) $p = \frac{3}{4}$; б) $p < \frac{3}{4}$; 2) а) $p \in (-2; +\infty)$; ә) $p = -2$; б) $p \in (-\infty; -2)$. **2.8.** 1) $p = -3$; 2) $p = 3$; 3) $p \in (-\infty; -3\sqrt{2}) \cup \cup (3; +\infty)$. **2.9.** 1) $\{\pm\sqrt{4 \pm 2\sqrt{3}}\}$; 4) $\{\pm 1\}$. **2.11.** 1) 90 км/сағ және 80 км/сағ; 3) 50 км/сағ. **2.12.** 1) $(-2; 3 - \sqrt{17}] \cup [3 + \sqrt{17}; +\infty)$. **2.13.** 1) Иә; 2) иә; 3) жоқ; 4) жоқ. **2.14.** 1) $(-2; 2)$ және $(2; -2)$; 2) $(-2; -4)$ және $(2; 4)$; 3) $(-1; -1)$ және $(1; 1)$. **3.2.** 1) $\{(4; -2); (1; -5)\}$; 2) $\{(4; 5); (13; -4)\}$; 3) $\{(6; 5); (-4; -5)\}$; 7) $\{(-1; 7); (-7; 1)\}$; 8) $\{(2; 3); (3; 2)\}$. **3.3.** 1) $\{(1; -2)\}$; 5) $\{(-1; 4); (4; -1)\}$; 6) $\{(-8; -6); (8; 6)\}$. **3.8.** 4) $\{(-1; -5); (5; 1)\}$; **3.9.** 4) $\{(0; -3); (6; 13)\}$. **3.10.** 1) $\{(1; 1)\}$. **3.11.** 4) $\{(1; 3)\}$. **3.12.** 1) $\{(5; 3); (3; 1)\}$; 2) $\{(1; 0); (3; 2)\}$; 3) $\{(-1; -3); (1; 3)\}$; 4) $\{(-1; 2); (1; 2)\}$. **3.13.** 1) $\{(-3; -2); (3; 2)\}$; 2) $\{(-2; -1); (2; 1); \left(-\sqrt{6}; -\sqrt{\frac{2}{3}}\right); \left(\sqrt{6}; \sqrt{\frac{2}{3}}\right)\}$; 3) $\{(-2; -1); (2; 1); (-2; 1); (2; -1)\}$; 4) $\{(-2; -3); (2; 3); (0; -\sqrt{13}); (0; \sqrt{13})\}$. **3.14.** 1) $\{(-2; -1); (-2; 1); (2; -1); (2; 1)\}$; 2) $\{(-3; -1); (-3; 1); (3; -1); (3; 1)\}$; 3) $\{(\pm 2; \pm 1)\}$; 4) $\{(2; 1)\}$. **3.15.** 1) $\{(-4; -2); (4; 2); (-\sqrt{10}; -\sqrt{10}); (\sqrt{10}; \sqrt{10})\}$; 2) $\{(-2; -1); (2; 1)\}$; 3) $\{(2; 4); (-2; -4)\}$; 4) $\{(-1; -3); (1; 3)\}$. **3.16.** 1) $\{(-3; -5); (3; 5); (-36; 11{,}5); (36; -11{,}5)\}$; 4) $\{(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}); (\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2})\}$; 5) $\{(-2; -1); (2; 1)\}$; 7) $\{(-0{,}5; -0{,}6); (1; 3)\}$; 8) $\{(2; -4); (-4; 2)\}$; 9) $\{(\pm 3; \pm 2); \left(\pm\frac{25}{\sqrt{113}}; \mp\frac{16}{\sqrt{113}}\right)\}$. **3.17.** 1) Жоқ; 2) иә. **3.18.** 1) $\{(a; 2a); (2a; a)\}$; 4) $\{(a; 2a); (2a; a); (-a; -2a); (-2a; -a)\}$. **3.19.** 1) $(2; 1)$; 2) $(-1; -2)$; $(-1; 2)$; $(1; -2)$; $(1; 2)$; 3) $(-1; -3)$; $(-1; 3)$; $(1; -3)$; $(1; 3)$; 4) $(2; 1)$; $(2; -1)$; $(-2; \pm\sqrt{5})$. **3.20.** 1) $\{(2; -1); (-1; 2)\}$; 2) $\{(4; -1); (1; -4)\}$; 3) $\{(5; 1); (-1; -5)\}$; 4) $\{(-2; -1); (2; 1)\}$. **3.21.** 1) $\{(0; 1); (-3; 1)\}$; 2) $\{(1; 1)\}$. *нұсқау* : жүйе теңдеулерінің айырымын қарастыру керек; 3) $\{(1; 1)\}$. *нұсқау* : жүйе теңдеулерінің қосындысын қарастыру керек; 4) $\{(2; 1)\}$. **3.22.** 1) $\{(0; 0); (2; 2); (0{,}5; -0{,}1)\}$; 2) $\{(0; 0)\}$; 3) $\varnothing$. **3.23.** 1) $\{(5; 1); (5; -1); (-5; 1); (-5; -1)\}$; 2) $\{(\pm 0{,}5; \pm 0{,}5)$; 3) $\{(\pm 1; \pm 2); (\pm 2; \pm 1)\}$. **3.24.** 3) $\{\left(\frac{4}{3}; \frac{2}{3}\right); \left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)\}$; 4) $\{(4; 8); (8; 4)\}$. **3.25.** 1) $(4; 9)$; $(9; 4)$; 2) $(4; 1)$; 3) $(2; 8)$; $(8; 2)$. **3.26.** 1) $\{(2; 1); (-2; -1)\}$; 3) $\{(0{,}5; 4)\}$; 4) $\{(2; 1)\}$; 5) $\{(2; 1); (-2; -1)\}$; 7) $\{(2; 2); (-6; -2)\}$; 8) $\{$(0, кез келген сан); (кез келген сан; 1)$\}$. **3.27.** 1) $\{(-2; 1); (2; -1); (0{,}5; -0{,}5); (-0{,}5; 0{,}5)\}$; 5) $\{(0; 0); (1; 1); (1{,}6; -3{,}2)\}$. **3.28.** 1) $\{(4; 1); (1; 4)\}$; 2) $\{(2; 1); (2; -1); (1; \sqrt{2}); (1; -\sqrt{2})\}$; 3) $\{(2; -1); (-1; 2)\}$; 4) $\{(2; 3); (3; 2)\}$. **3.29.** 1) $\{(2; 4); (4; 2)\}$; 2) $\{(-3; -2); (3; 2)\}$; 3) $\{(3; 2); (-3; -2); (-2; 3); (2; -3)\}$; 4) $\{(2; 1); (-1{,}5; -2{,}5)\}$; 5) $\{(5; 1); (-5; -1)\}$; 6) $\{(1; 1); (-1; -1)\}$. **3.30.** 1) $\{(-3; 4); (3; -4); (1; 0); (0; 1)\}$; 2) $\{(-1; 6); (1; -6); (6; -1); (-6; 1)\}$; 3) $\{(5; 4); (4; 5); (-4; -5); (-5; -4)\}$; 4) $\{(9; -13); (-9; 13); (1; 3); (-1; -3)\}$. **3.31.** 3) $\{(a; a)$, мұндағы $a \in R$; $\left(\frac{3}{\sqrt{19}}; \frac{2}{\sqrt{19}}\right)$; $\left(-\frac{3}{\sqrt{19}}; -\frac{2}{\sqrt{19}}\right)\}$; 4) $\{(1; -1); (-1; 1); \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right); \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\}$. **3.32.** 1) $\{(0; 1); (3; 1); (1{,}5; 2{,}5); (1{,}5; -0{,}5)\}$; 3) $\{(1; 2); (2; 1)\}$; 4) $\{(1; 2); (2; 1); (1; -4); (-4; 1)\}$. **3.33.** 1) $\{(2; 2); (-2 + 2\sqrt{2}; -2 - 2\sqrt{2}); (-2 - 2\sqrt{2}; -2 + 2\sqrt{2})\}$; 2) $\{(2; 1); (-2; -1)\}$. **3.34.** 1) $\{(2; 1); (-2; -1); \left(\sqrt{\frac{7}{3}}; \sqrt{21}\right)$;

$\left(-\sqrt{\frac{7}{3}}; -\sqrt{21}\right)\}$; 2) $\{(-1; -1); (-1; 2); (2; -1)\}$. **3.35.** 1) $\{(2; 1); (-2; -1)\}$; 3) $\{(8; -2); (-8; 2); \left(2\sqrt{6}; 2\sqrt{6}\right); \left(-2\sqrt{6}; -2\sqrt{6}\right)\}$; 4) $\{(1; -1)\}$. **3.36.** 1) $\{(1; 2; -3); (3; 0; -1)\}$; 2) $\{(2; 1; -1)\}$; 4) $\{(3; 2; 1); (-3; -2; -1)\}$. **3.37.** 1) $\{(2; 2; 2); (-2; -2; -2)\}$; 2) $\{(1; 1; 1)\}$; 3) $\{(6; 6; 6)\}$. **3.38.** 1) $\{-2; 2\}$; 2) $\{0\}$; 3) $\{1\}$; 4) $\left\{-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right\}$. **3.39.** 1) $(-\infty; 0{,}5)$; 2) $\left(3\frac{1}{13}; +\infty\right)$; 3) $(-\infty; -1) \cup \left(2\frac{7}{15}; +\infty\right)$; 4) $(-\infty; -1{,}6) \cup (-0{,}6; 1{,}2)$. **3.40.** 1) $[-12; 10]$; 2) $(-\infty; -3] \cup [7{,}5; +\infty)$; 3) $(-\infty; -6] \cup (0; 6]$; 4) $(-\infty; -0{,}5] \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$. **3.41.** 1) 5 см-ден артық, бірақ 9 см-ден кем; 2) 5 м-ден артық; 3) 30 м және 18 м. **3.43.** 1) 20 км/сағ; 2) 15 км/сағ; 4) 2 км/сағ. **3.44.** 1) 12 қорап; 2) 9 л. **3.45.** 1) 60 км/сағ; 2) 10 км/сағ. **4.1.** 1) 8 см және 6 см; 2) 9 және 11; 3) 6 және 2; 4) 24 және 48; 5) 36. **4.2.** 1) 14 және 56; 2) 72 және 50. **4.3.** 1) 22 км/сағ және 2 км/сағ; 2) 3 км/сағ және 17 км/сағ. **4.4.** 1) 45 км/сағ; 2) 4 км/сағ және 5 км/сағ. **4.5.** 1) 6 сағ және 10 сағ. 2) 84 сағ және 60 сағ. **4.6.** 1) 36 км/сағ және 24 км/сағ; 2) 60 км/сағ және 80 км/сағ. **4.7.** 1) 96 км/сағ және 64 км/сағ; 2) 40 км/сағ және 50 км/сағ. **4.8.** 1) 48 және 60; 2) 30 км/сағ және 60 км/сағ. **4.9.** 1) 88 км/сағ; 2)75 км/сағ. **4.10.** 1) 187,5 т; 2) 1,5 кг. **4.11.** 1) 15 мин; 2) 10 сағ және 15 сағ. **4.12.** 1) 120 км/сағ; 2) 12 сағ. **4.13.** 1) 3 км/сағ және 15 км/сағ; 2) 2 км/сағ және 14 км/сағ. **4.14.** 1) 1 кг және 7 кг; 2) 5% және 10%. **4.15.** 1) 40 л; 2) 10 л. **4.16.** 1) 1,64 кг және 1,86 кг; 2) 3 : 4. **4.17.** 1) 80%. **4.18.** 300 000 тг, 14%. **4.19.** 12 сағ және 10 сағ. **4.20.** 14 км/сағ, 12 км/сағ. **4.21.** 2,1 кг. **4.22.** 1) 25 адам, 24 адам; 2) 750 $м^3$. **4.23.** 16 күн, 24 күн, 48 күн. **4.24**. 3 : 4 : 15. **4.25.** 1) $(-\infty; -7) \cup (-2; 7)$. **4.26.** 1) $\left(\frac{7}{9}; +\infty\right)$; 2) $(4{,}4; 10{,}4)$. **5.6.** Иә. **5.7.** 1) $(x-1)^2+(y-2)^2$ m 25; 3) $x^2+(y-2{,}5)^2>3$; 4) $(x-3{,}5)^2+y^2>1$. **5.8.** 2) Центрі $O(3; 2)$ нүктесінде жататын және радиусының ұзындығы $\sqrt{13}$ болатын шеңбер және осы шеңберден тыс жатқан нүктелер жиыны; 4) центрі $(1; 0{,}5)$ нүктесінде жатын және радиусының ұзындығы $\frac{\sqrt{5}}{2}$ болатын дөңгелек. **5.9.** 1) $y>x$; 2) $y>-\frac{5}{3}x+\frac{1}{3}$; 4) $y>-1$. **5.10.** 1) $y>-6x^2+4x-1$; 2) $y>2x^2-3x+5$. **5.12.** 1)$(-3; -2)$; 2)$(-1; 6)$. **5.14.** 36 немесе 63. **5.15.** 21 ц және 25 ц, 7 га, 6 га. **6.2.** 1) Жоқ; 2) иә; 3) жоқ; 4) иә. **6.4.** 1) $\begin{cases} y>0, \\ x>0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y>0, \\ x<0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y<0, \\ x<0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y<0, \\ x>0. \end{cases}$

6.8. 1) Иә; 2) жоқ; 3) иә; 4) жоқ. **6.14.** 1) $\begin{cases} x^2-4x+y^2-10y+25\leqslant 0, \\ x^2-4x+y^2-10y+27\geqslant 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2+4x+y^2+2y\leqslant 1, \\ x^2+4x+y^2+2y\geqslant -2. \end{cases}$ **6.16.** 1) $\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 16, \\ x^2+y^2\geqslant 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 16, \\ x+y\geqslant 4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 16, \\ y\geqslant x^2. \end{cases}$ **6.21.** 1) $\{-2; 2\}$; 2) $\{\pm\sqrt{2}; 5\}$; 3) $\{0; \pm\sqrt{2}; 4\}$. **6.22.** 26 және 24 немесе 10 және 0. **6.24.** 1) 20; 2) $\frac{1}{12}$; 3) 41,7 %. **6.25.** 1) 30; 2) 18; 3) 17. **6.26**. 6.

Алгебра

II тарау. КОМБИНАТОРИКА ЭЛЕМЕНТТЕРІ

7.1. 7. **7.2.** 120. **7.3.** 6 сан. **7.4.** 20. **7.5.** 25 оқушы. **7.6.** 13 гүлшоғы. **7.7.** 3 оқушы. **7.8.** 60. **7.9.** 3 жұп сан. **7.10.** 20. **7.11.** 3. **7.12.** 21. **7.13.** 30. **7.14.** 1) 10; 2) 5. **7.16.** 46 км/сағ. **7.17.** 1) $\{(2;\ \sqrt{3}),(-2;\ \sqrt{3}),\ (-2;\ \sqrt{3}),\ (-2;\ -\sqrt{3}\}$; 2) $\{(\pm\frac{1}{\sqrt{2}};\ 0)\}$. **7.19.** 1) 3; 2) 4. **7.20.** 5790; 5970; 7590; 7950; 9570; 9750. **8.2.** 1) 24; 2) 720; 3) 42; 4) $\frac{1}{56}$; 5) $8\frac{1}{6}$; 6) 30. **8.3.** 1) 3; 2) 4; 3) 4. **8.4.** 1) 24; 2) 6; 3) 7!. **8.5.** 1) 840; 2) 120. **8.6.** 1) $\{2\}$; 2) $\varnothing$; 3) $\{3\}$; 4) $\{6\}$. **8.7.** 1) 380; 2) 9. **8.8.** 1) 30. **8.9.** 1) $\{5\}$; 2) $\{4\}$; 3) $x > 2,\ x \in N$. **8.10.** 1) 4; 2) 9; 3) 4. **8.12.** 1) 85; 2) 32. **8.13.** 1) 3; 2) 10; 3) 8; 4) 13. **8.14.** 220 кг. **8.15**. 1) 16; 2) 24. **8.16.** 1, 4, 6, 4, 1, барлығы 16. **9.1.** 1) 5; 2) 10; 3) 15; 4) 55. **9.2.** 1) 30; 2) 4200; 3) 3990. **9.4.** 1) 8; 2) 6; 3) 9. **9.5.** 252. **9.6.** 1) 7; 2) 1; 3) $\varnothing$. **9.7.** 1) 153; 2) 816. **9.8.** 1) $9C_6^2 + 6C_9^2$; 2) $C_6^2 \cdot C_9^2$. **9.9.** 1) $(x-1)(x^2+x+4)$; 2) $(x+2)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$; 3) $(x+3)(x^2+3)$; 4) $(x+2)\times$ $\times(x-2)(x^2+1)$. **9.10.** 1) $\begin{cases} y^2 + x^2 < 16; \\ y \leqslant 4 - x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y^2 + x^2 < 16; \\ x^2 + y^2 > 4. \end{cases}$ **9.11.** 1) $\{\pm 3\}$; 2) $\{\pm\sqrt{5}\}$; 3) $\{-4;\ 8\}$; 4) $\{9\}$. **9.12.** 1) 6; 2) 10!. **9.13.** 24. **10.1.** 1) 210; 2) $\frac{1}{7}$; 3) $9\frac{1}{6}$; 4) 28. **10.2.** 6. **10.3.** 1) $\{5\}$; 2) $\varnothing$; 3) $\{6\}$; 4) $\{8\}$. **10.4.** 18 тәсіл. **10.6.** 1) 1; 2) 5; 3) $\frac{1}{57}$; 4) 4. **10.7.** 1) C_{12}^2; 2) C_{12}^3. **10.8.** A_{10}^2. **10.9.** 4536. **10.10.** $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$. **10.11.** C_{11}^4. **10.12.** 36. **10.13**. 1) C_{25}^3; 2) C_{18}^3; 3) $18 \cdot 4 \cdot 3 = 216$. **10.14.** 1) $4\frac{6}{11}$ кг; 2) 45 кг; 3) 53%. **10.15.** 1) 7; 2) 9. **10.16.** 1) $4x^2 + 54x - 1$; 2) $12x^4 - 6x$; 3) $x^3 + 12x^2 + 4$; 4) $x^4 - 3x + 8$. **10.17.** 1) $\{4\}$; 2) $\{8\}$; 3) $\{9\}$; 4) $\{8\}$. **11.3.** 2^{11}. **11.5.** 5. **11.6.** 1) 112; 2) –718; 3) 8; 4) 6. **11.7.** 1) $C_{10}^5 = 252$; 2) $C_9^4 = 126$. **11.8.** 1) $10x^3$; 2) $120x^4$; 3) $210x^{-2}$; 4) 252. **11.9.** $C_6^2 \cdot 36$. **11.12.** 1) 12 сағ және 8 сағ; 2) 45 сағ. **11.14.** 1) $-\frac{7}{11}$; 2) –27. **11.16.** 1) $2n$; 2) $5n$; 3) n^2; 4) $(-1)^{n+1}$.

III тарау. ТІЗБЕКТЕР

12.1. 1) 2; 6; 10; 14; 18; 2) 1; 8; 15; 22; 29; 4) 8; 17; 26; 35; 44. **12.2.** 1) $\frac{1}{2}$; $2(\sqrt{2}-1)$; $1{,}5(\sqrt{3}-1)$; $\frac{4}{3}$; $\frac{5(\sqrt{5}-1)}{4}$; 2) $\sqrt{3}+1$; $\frac{4(\sqrt{6}+1)}{5}$; 3; $\frac{8(\sqrt{12}+1)}{11}$; $\frac{5(\sqrt{15}+1)}{7}$; 4) $\frac{3}{2}$; $3(\sqrt{3}-1)$; $\frac{9(\sqrt{5}-1)}{4}$; $2(\sqrt{7}-1)$; $\frac{15}{4}$. **12.3.** $a_5 = 25$, $a_9 = 81$, $a_{12} = 144$. **12.4.** 1) $a_n = 2n$; 2) $a_n = 2n + 7$; 5) $a_n = 2^{n-1}$; 6) $a_n = (-1)^n \cdot 2^{n-1}$; 8) $a_n = \frac{n}{n+1}$; 9) $a_n = \frac{2n+1}{2n}$; 10) $a_n = 3n - 1$. **12.6.** $a_6 = 18$; $a_9 = -108$; $a_{14} = 154$. **12.7.** 3), 5) — өспелі ; 1), 2) — кемімелі , 6). **12.8.** 1) Иә, $a_{10} = 17$; 3) иә, $a_8 = -104$; 4) иә, $a_9 = 13$. **12.9.** 1, 3, 5 — өспелі ; 4, 6 — кемімелі. **12.11.** 1) Кемімелі; 2) өспелі; 3) өспелі; 4) өспелі. **12.14.** 1) 1; 3; 5; 7; 9; 11; 2) 2; 3; 5; 9; 17; 33. **12.17.** 1) –36; 2) –40; 3) 4. **12.18.** 1) Ең үлкен мүше $c_1 = -1{,}5$; 2) тізбектің ең үлкен және ең кіші мәнін көрсету мүмкін; 3) ең кіші мүше $c_1 = 6$;

4) ең кіші мүше $c_1 = 8$; тізбектің ең үлкен мәнін көрсету мүмкін емес. **12.19.** 1) $a_n = n^3 - 1$; 2) $a_n = 3^{n+1} - 1$; 3) $a_n = 2^{2n-1} - 1$; 4) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + (-1)^n}$. **12.21.** 17; 25; 32; 37; 47. **12.22.** 1) $a_n = 2(n-1) + 1$; 2) $a_n = 4n - 1$. **12.23.** 1) $a_1 = 7$, $a_{n+1} = 2a_n$; 2) $a_n = (-1)^{n+1} \cdot 3$; 4) $a_n = \frac{1}{n \cdot (n+1)}$. **12.25.** 1) $\{2; \pm 3\}$;4) $\{\pm 3\}$. **12.26.** 1) $\{(3; 6); (-3; -6)\}$. **12.27.** 1) 2; 2) 3; 3) 2; 4) 1. **12.28.** 1) $3ac$; 2) $\frac{4}{ac}$; 4) $\frac{3}{2c^2}$. **12.29.** 5 км/сағ және 4 км/сағ. **12.30.** 1) –13; –8; –3; 2; 7; 2) 11; 16; 21; 26; 31. **12.31.** 1) 5; 2) –53; 3) 7; 4) –11. **13.1.** Арифметикалық прогрессия – 1, 4, 5, 7. **13.3.** 1) $a_2 = 9$; 2) $a_5 = -2{,}5$; 4) $a_9 = 8{,}76$. **13.5.** 1) 18 см; 2) 800 м/мин. **13.9.** 1) 8-ден 12-ге дейін; 2) 19-дан 38-ге дейін. **13.10.** 1) 8039; 2) 6058. **13.11.** 1) Болады, $n = 21$; 2) болмайды; 3) болады, $n = 65$. **13.12.** 1) $c_1 = -37$; $d = 5$; 2) $c_1 = -72$; $d = 8$; 3) $c_1 = -21{,}8$; $d = 2{,}5$; 4) $c_1 = 32{,}2$; $d = -1{,}8$. **13.13.** 1) 17; 2) 5; 3) 8. **13.18.** 1) 7; 10; 13; 2) 3,75; 9,5; 15,25. **13.19.** 1) 3; 2) 3. **13.22.** 1) Иә, $n = 37$; 2) жоқ; 3) иә, $n = 297$. **13.23.** 1) 3—20; 2) 4—14; 3) 4—7; 4) 8—11. **13.24.** Жоқ. **13.25.** 25 мүше. **13.26.** 25 мүше. **13.28.** 21. **13.29.** –2; 2. **13.30.** 1) $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$; 3) $(-\infty; -2] \cup [1; 3) \cup (3; +\infty)$. **13.32.** 1) $(-\infty; -1) \cup \cup \{4\}$. **13.33.** 1) $\{-3 \pm \sqrt{2}\}$;2) $\{4; 8\}$. **13.34.** 1) $\{(1; 2), (2; 1)\}$; 2) $\{(1; -2), (-1; 2), \left(\frac{13}{\sqrt{138}}; \frac{5}{\sqrt{138}}\right), \left(\frac{-13}{\sqrt{138}}; \frac{-5}{\sqrt{138}}\right)\}$. **13.35.** 1) Иә, 38; 2) жоқ, –375; 3) жоқ, 624; 4) иә, 16. **13.36.** 0. **14.1.** 1) 12 870; 2) –4 059; 3) 16 137; 4) 99. **14.2.** 1) 44 және 343; 2) 173 және 2220; 3) 193 және 2208; 4) 136,7 және 1229,3. **14.3.** 1) $n = 9$ және $S_9 = 135$; 2) $n = 11$ және $S_{11} = 484$; 3) $n = 21$ және $S_{21} = 264{,}6$; 4) $n = 10$ және $S_{10} = -190$. **14.4.** 1) 12 немесе 14; 2) 12; 3) 17; 4) 11. **14.5.** 1) 5; 2) –2; 4) –4. **14.7.** 1) 0,5; 4) 0,7. **14.8.** 1) 670; 3) –168; 4) –1209,3. **14.9.** 1) $n(n+1)$; 3) $\frac{3n(n+1)}{2}$; 4) $\frac{5n(n+1)}{2}$. **14.10.** 1) 0; 2) 0. **14.11.** 1) –950; 2) –1143; 4) 392. **14.12.** 1) $a_1 = 8$, $n = 18$; 3) $a_1 = 5$, $n = 26$; 4) $a_1 = 10$, $n = 5$. **14.13.** 1) $a_n = 5n + 3$, $S_n = \frac{n}{2} \cdot (5n + 11)$; 3) $a_n = 18 - 2n$, $S_n = n \cdot (17 - n)$. **14.1 4.** 1) 10; 2) 12. **14.15.** 1) 2430; 2) 2475. **14.16.** 1) 1665 ; 2) 728. **14.17.** 1) 963; 2) 535. **14.18.** 1) 61 376; 2) 37 674. **14.19.** 1) 99 090; 2) 19 746. **14.20.** 657. **14.22.** 1) $\frac{23}{3}$, $\frac{253}{3}$; 2) 21, 399. **14.23.** 1) 44; 2) 32. **14.24.** 7. **14.25.** 407,5. **14.26.** 1) 45,1 м; 2) 127,5 м; 3) 64,7 м; 4) 247,1 м. **14.29.** 1) $\{-1\}$; 2) $\{\frac{1}{3}; -2\}$. **14.31.** 1) $\{(-2; -4), (4; 8)\}$; 2) $\{(-3; 1), (3; -1)\}$. **14.32.** 11 см және 8 см. **14.34.** 1) 0,5; 2) 0,5; 3) $\frac{1}{32}$; 4) –1024. **15.5.** 4) $-1 - \sqrt{2}$. **15.7.** 216. **15.8.** $9\sqrt{3}$. **15.9.** –2; –4; –8; 16; –32. **15.10.** $\sqrt{3}$; 3; $3\sqrt{3}$; 9; $9\sqrt{3}$ немесе $\sqrt{3}$; –3; $3\sqrt{3}$; –9; $9\sqrt{3}$. **15.12.** 1) $(-3; -2)$; 2) $(-1; 6)$. **15.13.** 1) $\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$; 2) $\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$. **15.14.** 1) 24°, 48°, 96°, 192°; 2) $\frac{180°}{13}$; $\frac{540°}{13}$; $\frac{1620°}{13}$. **15.15.** 1) 4%; 3) 116 640 тг. **15.16.** 1) $n = 4$; 2) жоқ; 3) $n = 6$; 4) жоқ. **15.1 7.** 1) $n = 13$; 2) $n = 9$. **15.18.** 1) 45 және 135; 2) 18, 9 және 4,5. **15.19.** 1) 6; 2) 24 немесе 12. **15.20.** 1) $x_2 = 2$; $x_3 = \frac{2}{3}$; $x_4 = \frac{2}{9}$; 2) $x_2 = 3$; $x_3 = 1{,}5$; $x_4 = 0{,}75$. **15.21.** 1) 121 мың тг; 2) 251 942,4 тг. **15.22.** 1) Екінші банкте 341 тг-ге артық; 2) 266 200 тг. **15.23.** 3, 9, 27, 81. **15.24.** 1) ±39; 2) ±4,8. **15.25.** 1) 2, 8, 32 немесе 32, 8, 2; 2) 1, 4,

16 немесе 16, 4, 1. **15.26.** 1, 3, 9 немесе 9, 3, 1. **15.27.** 0,2; 1; 5; 25. **15.28.** 3; 7; 1. **15.29.** 1) 27; 2) –2. **15.30.** 10, 10, 10. **15.31.** 1; $3 \pm 2\sqrt{2}$. **15.32.** 32; 16; 8; 0 немесе 2; 6; 18; 30. **15.33.** 1) 1; 2) $\pm 2\sqrt{2}$; 3) 3,2. **15.35.** 1) 21 576; 2) 16 665. **15.36.** 1) 0,25; 2) –1,75. **15.38.** 1) 1; 2) 0; 3) –17; 4) 6. **15.39.** 1) $b_3 = 4$; 2) $b_6 = -0{,}5$; 3) $b_7 = 0{,}25$; 4) $b_{10} = \frac{1}{32}$. **15.40.** 22. **16.1.** 1) $n = 10$, $S_{10} = 1023$; 2) $n = 5$, $S_5 = 155$; 3) $n = 5$, $S_5 = 363$. **16.3.** 3) $q = 2$, $n = 6$; 4) $q = 3$, $n = 5$. **16.5.** 3) $n = 4$, $b_n = -\frac{3}{40}$; 4) $n = 3$, $b_n = -1{,}17$. **16.6.** 3) $b_1 = 3$, $S_n = \frac{45}{8}$; 4) $b_1 = \frac{1}{9}$, $S_n = \frac{65}{72}$. **16.7.** 1) $b_1 = 1$, $b_n = 1024$; 2) $b_1 = 81$, $b_n = 1$. **16.8.** 1) $b_1 = 48$, $n = 5$; 3) $b_1 = 0{,}125$, $n = 6$; 4) $b_1 = 81$, $n = 6$. **16.9.** 1) 129 : 1; 2) 512 : 513. **16.10.** 1) 4%; 2) 121%. **16.11.** 1) 242 000 тг; 2) 18 818 тг. **16.12.** 1) 890; 2) 4953. **16.13.** 1) $7 \cdot (2 + \sqrt{2})$; 2) $13 \cdot (3 + \sqrt{3})$. **16.14.** 1) 192; 2) 468. **16.17.** 1) 2; 2) 4. **16.18.** 188 238 тг. **16.19.** 1) $b_1 = 1$ және $S_5 = 121$; 2) $b_1 = 2$ және $S_5 = 682$. **16.20.** 1) $n \mid 10$; 2) $n \mid 11$. **16.21.** 6,2. **16.22.** 10. **16.23.** –9. **16.24.** 1) $1\frac{1}{7}$; 2) 2. **16.25.** 1) 246 913 578; 2) 617 2 83 945; 3) 987 654 312. **16.26.** 1023. **16.27.** 1) 436,8. 2) 54; 3) 3; 9; 15; … . **16.28.** 85. **16.29.** 2. **16.30.** – 54; 18; –6; 2 немесе 2, –6; 18; –54. **16.31.** –1. **16.32.** 1) (–4; 11); 2) $(-\infty; -2) \cup (18; +\infty)$. **16.33.** 1) $(2; +\infty)$; 2) $(-\infty; -1\frac{9}{16})$. **16.34.** 1) 16 900; 2) 10 100. **16.36.** 7,5; 10; 12,5; 15; 17,5; 20; 22,5. **16.37.** 1) $\frac{a_1^2(1 - q^{2n})}{1 - q^2}$; 2) $\frac{a_1^2(1 - q^{2n})}{1 - q^2} + \frac{2a_1(1 - q^n)}{1 - q} + n$. **16.38.** 1) $S_{11} = 2047$; 2) $S_5 = 121$. **16. 39.** 1) $q = -2$; 2) $q = -\frac{1}{3}$. **17.1.** 1) 1,5; 2) $-\frac{125}{4}$; 3) 7,2. **17.2.** 1) $-\frac{70}{3}$; 2) $\frac{64}{3}$. **17.3.** 1) $\frac{4}{7}$; 2) $\frac{16}{3}$; 3) $\frac{1000}{11}$. **17.5.** 1) 1,5; 2) $1{,}5 \cdot (\sqrt{3} + 1)$; 3) $2\sqrt{2} - 2$; 4) 0,3; 5) $\frac{9\sqrt{3}}{4}$; 6) $\frac{5(\sqrt{5} - 1)}{4}$. **17.7.** 1) 40,5; 2) 781,25. **17.8.** 6; 3; 1,5; … **17.12.** $\frac{16}{3}$. **17.13.** $\frac{3 + \sqrt{3}}{2}$. **17.14.** 1) $\frac{2}{7}$; 2) 0,2. **17.15.** 0,125. **17.16.** $32(2 + \sqrt{2})$ см; 128 см². **17.17.** 48 см; $\frac{64\sqrt{3}}{3}$ см². **17.19.** 0,5. **17.20.** $\frac{4}{9}$. **17.21.** $\frac{256\pi}{9}$ см². **17.22.** 1) $\frac{c^2}{1 - q^2}$; 2) $\frac{c^2(1 + q)^2}{1 - q^4}$; 4) $\frac{c^2(1 + q)^2}{1 - q^4}$. **17.23.** $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$. **17.24.** 1; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{16}$; … . **17.25.** 3,5. **17.26.** ±3. **17.27.** $b_1 = 12$, $q = 0{,}5$. **17.28.** $b_1 = 2$, $q = 0{,}75$. **17.29.** 1) –9; 16; 2) –4; 6. **17.32.** 180°. **17.33.** 2100. **17.35.** $a = -3$, $b = 12$, $c = -12$ немесе $a = -1{,}08$, $b = -1{,}44$, $c = -0{,}48$.

17.37. $\frac{5}{11}$. **18.6.** 1) $n^2 \cdot (n + 1)$; 2) $n \cdot (n + 1)^2$. **18.8.** 1) $\frac{n}{2n + 1}$; 2) $\frac{n}{3n + 1}$. **18.21.** 1) $\frac{1}{28}$; 2) $\frac{1}{24}$; 3) $\frac{1}{55}$; 4) $\frac{1}{36}$. **18.23.** 62 50 0 тг. **18.24.** 63. **18.25.** 60. **18.26.** 2; 14; 98. **18.27.** 1) $\left\{-1; 0; \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$; 2) {–2,5; –2; 0,5; 1}. **18.28.** 1) $(-\infty; -1) \cup (-1; 1] \cup (2{,}5; 3]$; 2) $(-\infty; 0) \cup (0; 2] \cup (2\frac{1}{3}; 3]$.

МАЗМҰНЫ

Учебное издание

Абылкасымова Алма Есимбековна
Кучер Татьяна Павловна
Корчевский Владимир Евгеньевич
Жумагулова Зауре Абдыкеновна

АЛГЕБРА

Часть 1

Учебник для 9 классов общеобразовательных школ
(*на казахском языке*)

Редакторы *Ж. Өміржанова*
Көркемдеуші редакторы *Ә. Сланова*
Техникалық редакторы *И. Тарапунец*
Корректоры *С. Дәуірхан*
Компьютерде беттеген *Г. Әлімшеева*

Баспаға Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігінің №0000001 мемлекеттік лицензиясы 2003 жылы 7 шілдеде берілген

ИБ № 5826

Басуға 21.05.19 қол қойылды. Пішімі 70х100 $^{1}/_{16}$. Офсеттік қағаз. Қаріп түрі «SchoolBook Kza». Офсеттік басылыс. Шартты баспа табағы 14,19 + 0,32 қосарбет. Шартты бояулы беттанбасы 29,68. Есептік баспа табағы 8,18 + 0,54 қосарбет. Таралымы 100000 дана. Тапсырыс №

"Мектеп" баспасы, 050009, Алматы қаласы, Абай даңғылы, 143-үй
Факс: 8(727) 394-37-58, 394-42-30.
Тел.: 8(727) 394-41-76, 394-42-34.
E-mail: mektep@mail.ru
Web-site: www.mektep.kz