АЛГЕБРА

2-бөлім

Жалпы білім беретін мектептің 9-сыныбына арналған оқулық

Қазақстан Республикасының Білім және ғылым министрлігі бекіткен

9

Алматы "Мектеп" 2019

ӘОЖ 373.167.1
КБЖ 22.14я72
А39

Авторлары:

А.Е. Әбілқасымова, Т.П. Кучер, В.Е. Корчевский, З.Ә. Жұмағұлова

Шартты белгілер:

— анықтамалар, қасиеттер, ережелер

— жаңа білімді меңгеру барысында шешілетін мәселе

— пысықтау сұрақтары

— теориялық материалды өзіндік игеруге арналған тапсырмалар

— теорема немесе қасиеттің дәлелдеуінің аяқталуы

— қосымша материалдар

A — барлығы үшін міндетті жаттығулар

B — орта деңгейлі жаттығулар

C — жоғары деңгейлі жаттығулар

— ерітінділер мен қоспаларға берілген жаттығулар

— практикаға бағытталған жаттығулар

— электронды ресурстарды қолдануға арналған жаттығулар

А39 **Алгебра:** Жалпы білім беретін мектептің 9-сыныбына арналған оқулық. 2-бөлім / А.Е. Әбілқасымова, Т.П. Кучер, В.Е. Корчевский, З.Ә. Жұмағұлова. — Алматы: Мектеп, 2019. — 152 б., сур.

ISBN 978—601—07—1094—8

А $\frac{4306020503—003}{404(05)—19}$ 11(1)—19

ӘОЖ 373.167.1
КБЖ 22.14я72

ISBN 978—601—07—1094—8

§ 19. БҰРЫШ ПЕН ДОҒАНЫҢ ГРАДУСТЫҚ ЖӘНЕ РАДИАНДЫҚ ӨЛШЕМДЕРІ

Түйінді ұғымдар

Радиан, градус, бірлік шеңбер

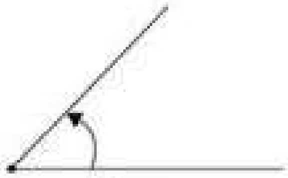
Бұрыштың радиандық өлшемі ұғымымен танысасыңдар; градусты радианға және радианды градусқа айналдыруды, 0; $\frac{\pi}{2}$; π; $\frac{3\pi}{2}$; 2π сандарын бірлік шеңберде белгілеуді үйренесіңдер.

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР

Бір нүктеден шығатын екі сәуледен құралған геометриялық фигура бұрыш деп аталады (35-сурет).

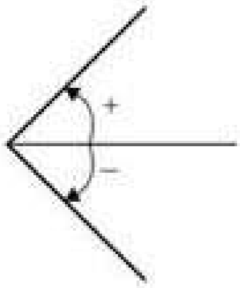
35-сурет

Сонымен қатар сәулені басынан бұрған кезде шығатын фигураны да бұрыш деп қарастыруға болады (36-сурет). Сәулені бұрғанда оның алғашқы және соңғы орналасу жағдайына қатысты пайда болатын геометриялық фигура да бұрышты береді.



36-сурет

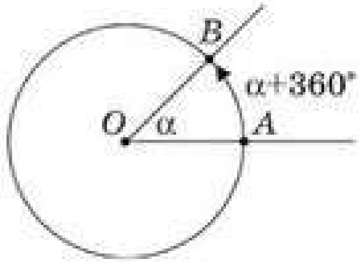
Сәулені бұру қарама-қарсы екі бағытта жүргізіледі. Әдетте, сағат тілі бағытына қарсы бұру оң бағыт, ал сағат тілімен бір бағытта бұру теріс бағыт деп саналады (37-сурет).



37-сурет

Егер α бұрышы сәулені сағат тілі бағытына қарсы бұру арқылы алынса, онда бұрыш *оң*, ал сағат тілі бағытымен бұру арқылы алынса, онда бұрыш *теріс* деп аталады (37-сурет).

O нүктесі арқылы *OA* сәулесін α бұрышына бұруды орындайық. Бұру нәтижесінде *OM* сәулесін аламыз (38-сурет).



38-сурет

OA сәулесін α бұрышына, сонымен қатар теріс және оң бағыттарда кез келген бүтін санға тең бұру орындалса, онда сол *OM* сәулесіне қайта ораламыз (38-сурет).

Демек, $\angle AOM = \alpha$ бұрышына шексіз көп оң және теріс бұрыштар сәйкес келеді. Ол бұрыштарды $\beta = \alpha + 360°k$ формуласымен (мұндағы k — кез келген бүтін сан, яғни $k = 0, \pm1, \pm2, 3, \ldots$) беруге болады.

МЫСАЛ

1. Егер сәулені O нүктесі арқылы $20°$-қа тең бұрышқа оң бағытта бұрса, онда сәуленің орналасуына $20°$, $380°$, $740°$, ... оң бұрыштар, немесе $-340°$, $-700°$, ... теріс бұрыштар сәйкес келеді.

Барлық шыққан бұрыштарды ($k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ болғанда, оң бұрыштар және $k = -1, -2, -3, \ldots$ болғанда, теріс бұрыштар үшін) $\beta = 20° + 360°k$ формуласымен өрнектеуге болады.

Егер сәулені O нүктесінен $40°$-қа тең бұрышқа оң бағытта бұрса, онда сәуленің орналасуына $-40°$, $-400°$, $-760°$, ... теріс бұрыштар немесе $320°$, $680°$, ... оң бұрыштар сәйкес келеді.

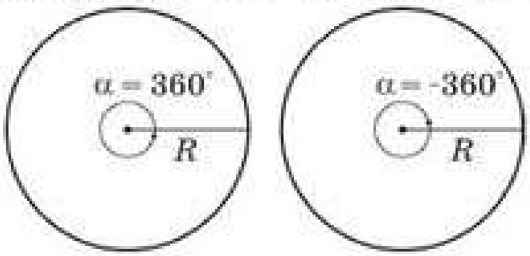
Барлық шыққан бұрыштарды ($k = 1, 2, 3, \ldots$ болғанда оң бұрыштар және $k = 0, -1, -2, -3, \ldots$ болғанда теріс бұрыштар үшін) $\beta = -40° + 360°k$ формуласымен өрнектеуге болады.

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР

Геометрия курсынан бұрыш өлшемі тәрізді шеңбер доғасының ұзындығы да градуспен өлшенетінін білесіңдер.

O нүктесінен сағат тілі бағытына қарсы бұрғанда шыққан бұрыштың градустық өлшемі толық бұрыштың $\frac{1}{360}$ бөлігіне, яғни бір градусқа тең. Жазылуы: $1°$.

O нүктесінен сағат тілі бағытына қарсы толық бір айналым жасағанда $360°$-қа тең, ал O нүктесінен сағат тілі бағытымен бір толық айналым жасағанда $-360°$-қа тең бұрышты аламыз (39-сурет).



39-сурет

$1'$ (минут) $1°$-тың $\frac{1}{60}$-іне, $1''$ (секунд) $1'$-тың $\frac{1}{60}$-іне тең болатынын еске түсірейік.

Математикада, сонымен қатар, физикада, астрономияда және тағы да басқа ғылымдарда бұрыштарды өлшеу үшін *радиан* қолданылады. Көп жағдайда шеңбер доғасының ұзындығы ретінде сол шеңбердің радиусының ұзындығына тең доғаның ұзындығын алады (40-сурет).

МЫСАЛ

2. Егер "AB доғасының өлшемі 2,3-ке тең" делінсе, онда шеңбердің бұл доғасының ұзындығы берілген шеңбердің радиусына тең болатын доғаның 2,3 бөлігінен тұратынын білдіреді (41-сурет).

Егер доға ұзындығының бірлігі ретінде R радиусының ұзындық бірлігі алынса, онда шеңберде 2π доға болады, себебі шеңбердің ұзындығы $C = 2\pi R$ (мұндағы R — шеңбер радиусының ұзындығы) формуласымен есептелінеді.

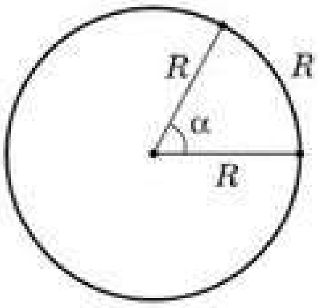
Шеңбердің ұзындығын немесе доғаның ұзындығын осылайша өлшеу *радианмен өлшеу* деп аталады.

Сонымен, l доға ұзындығының радиандық өлшемі немесе α бұрышының шамасы ретінде α бұрышын құрайтын шеңбер доғасының l ұзындығының R радиус ұзындығына қатынасы алынады (42-сурет). Онда шеңбер доғасының l ұзындығына сәйкес α бұрышының радиандық өлшемін былай жазуға болады:

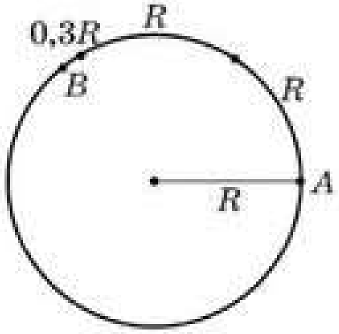
$$\alpha = \frac{l}{R},$$

мұндағы l — шеңбер доғасының ұзындығы, R —шеңбер радиусының ұзындығы, α — шеңбер доғасына сәйкес бұрыштың шамасы.

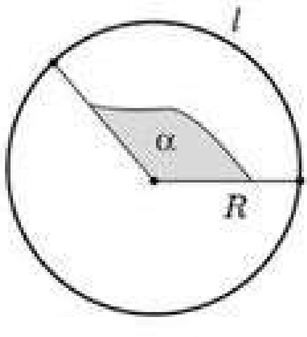
Егер $l = R$ болса, онда бұрыштың радиандық өлшемі 1-ге тең болады. Ондай бұрыш 1 *радиандық бұрыш* деп аталады (43-сурет).



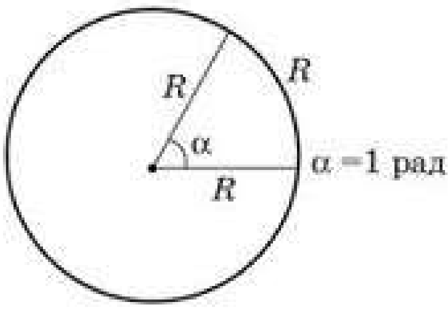
40-сурет



41-сурет



42-сурет



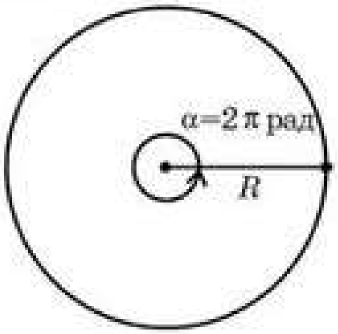
43-сурет

Ұзындығы шеңбер радиусының ұзындығына тең доғаға сәйкес келетін центрлік бұрыш **1 радиандық бұрыш** *деп аталады.*

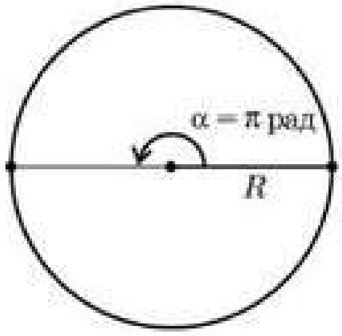
1 радианды қысқаша 1 рад деп жазады.

Ðàäèàí (“radius” ëàòûí òiëiíäå àóäàðғàíäà ñəóëå, ðàäèóñ äåãåí ìағûíà áåðåäi) — ìàòåìàòèêàäà æàçûңқû áұðûøòàðäû өëøåéòií ìåãçåí өëøåì áiðëiê.

Шеңберде әрқайсының ұзындығы радиус ұзындығына тең 2π доға болғандықтан, толық бұрыш пен шеңбердің ұзындығы 2π рад-ға тең (44-сурет). Жарты шеңбер мен жазыңқы бұрыштың радиандық өлшемі π-ге тең (45-сурет).



44-сурет



45-сурет

Жарты шеңбердің градустық өлшемі 180°-қа, ал радиандық өлшемі π рад-ға тең болғандықтан,

1) доғаның градустық өлшемі және бір радианға тең бұрыштың шамасы $\frac{180}{\pi}$ болады, яғни 1 рад $= \frac{180}{\pi} \approx 57°17'45''$;

2) доғаның градустық өлшемі және бір градусқа тең бұрыштың шамасы $\frac{\pi}{180}$, яғни $1° = \frac{\pi}{180}$ рад $\approx 0{,}017$ рад.

Градустық өлшеммен берілген кез келген бұрышты радианға, ал радиандық өлшеммен берілген бұрышты градустық өлшемге аударуға болады.

$\alpha°$ — қандай да бір бұрыштың градустық өлшемі, a — сол бұрыштың радиандық өлшемі болсын, онда мына пропорция ақиқат:

$$\alpha° : 180 = a : \pi.$$

Бұл пропорциядан a рад мен $\alpha°$ былай өрнектеледі:

$$a \text{ рад} = \frac{\pi\alpha°}{180°}, \qquad (1)$$

$$\alpha° = \frac{a \cdot 180°}{\pi}. \qquad (2)$$

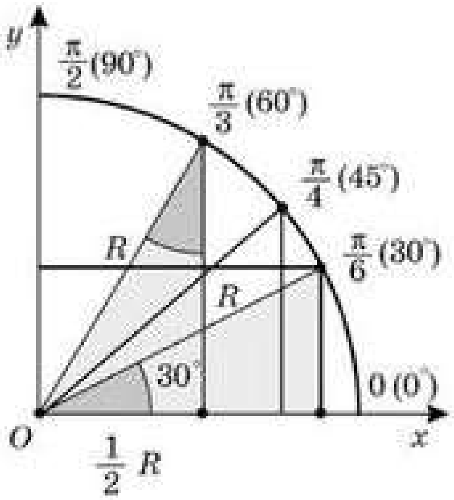
(1) формуланың көмегімен 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 135°, 150°, 180°, 270°, 360° бұрыштарын радианға айналдырыңдар.

Жиі кездесетін бұрыштардың радиандық және градустық өлшемдері төменгі кестеде келтірілген (5-кесте).

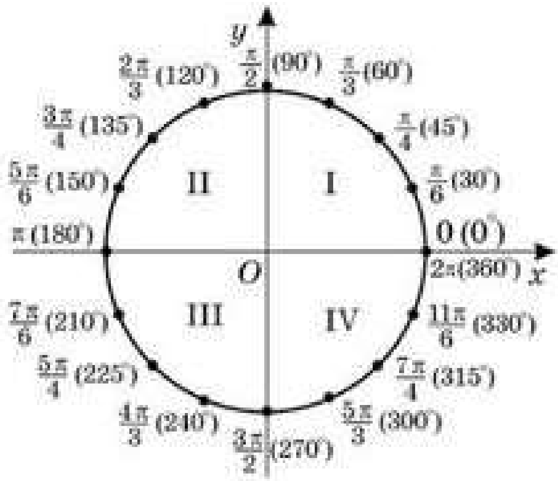
5-кесте

α	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
a рад	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

Транспортирдің көмегінсіз тікбұрышты үшбұрыштың бұрыштары мен қабырғалары арасындағы қасиеттерді қолданып, шеңберде 0°, 30°, 45°, 60°, 90° бұрыштарына сәйкес нүктелерді қалай салуға болады (46-сурет)?



46-сурет



47-сурет

47-суретте өте жиі кездесетін бұрыштар (градуспен және радианмен берілген) шеңбер бойында нүктелермен белгіленген.

МЫСАЛ

3. 30° бұрыштың радианмен алынған жуық мәнін табайық.

Шешуі. $30° = \frac{\pi}{6}$ (рад) болғандықтан, $30° \approx \frac{\mathbf{3{,}14}}{\mathbf{6}}$ (рад) $\approx 0{,}52$ (рад), $30° \approx \frac{\mathbf{3{,}1416}}{\mathbf{6}}$ (рад) $\approx 0{,}5236$ (рад) және т.с.с.

Жауабы : $\approx 0{,}52$ рад, $\approx 0{,}5236$ рад және т.с.с.

МЫСАЛ

4. $a = 0{,}3$ рад бұрыштың градуспен алынған жуық мәнін табайық.

Шешуі. $\alpha° = \frac{a \cdot 180°}{\pi}$ формуласын қолданамыз:

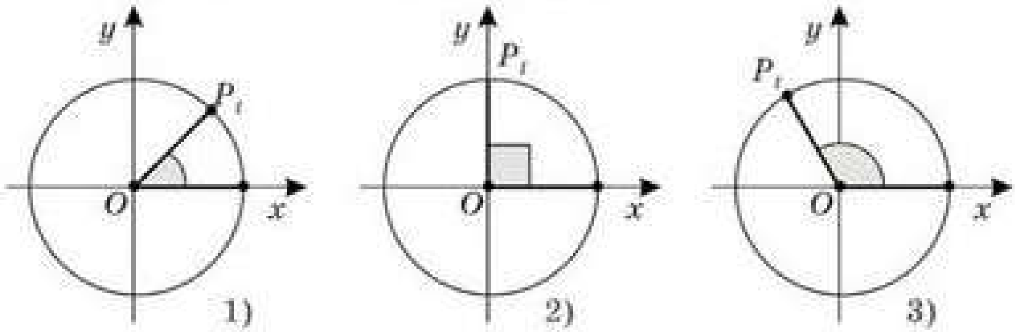
$$\alpha° = \frac{180° \cdot 0{,}3}{\pi} \approx \frac{54°}{3{,}14} \approx 17°.$$

Жауабы : $\approx 17°$.

Кез келген бұрышты градустық өлшемнен радианға немесе радиандық өлшемнен градусқа жылдам ауыстыру үшін математикалық анықтамалықтарда арнайы кестелер берілген.

МЫСАЛ

5. Санды шеңбердің P_t нүктесіне сәйкес барлық сандарды (бұрыштардың шамаларын) табайық (48-сурет).



48-сурет

Жауабы : 1) $t = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, мұндағы k — кез келген бүтін сан;

2) $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, мұндағы k — кез келген бүтін сан;

3) $t = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, мұндағы k — кез келген бүтін сан.

Жоғарыдағы мысалдың жауаптарының дұрыстығын тексеріңдер.

?

1. Қандай бұрыштар оң, қандай бұрыштар теріс бұрыштар деп аталады?
2. Бұрыштар қандай бірліктермен өлшенеді?
3. Бұрыштың радиандық өлшемін градустық өлшемге және градустық өлшемін радиандық өлшемге қалай айналдыруға болады?

Жаттығулар

А

19.1. Егер бұрыштың градустық өлшемі:

1) $30°$; 2) $45°$; 3) $60°$; 4) $90°$; 5) $150°$; 6) $180°$-қа тең болса, онда бұрышты радиан арқылы жазыңдар.

19.2. Егер бұрыштың радиандық өлшемі:

1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{3\pi}{4}$; 3) $\frac{\pi}{3}$; 4) $\frac{2\pi}{3}$; 5) $\frac{5\pi}{6}$; 6) $\frac{\pi}{2}$-ге тең болса, онда бұрышты градус арқылы жазыңдар.

19.3. 1) Теңбүйірлі тікбұрышты үшбұрыштың бұрыштарын;

2) теңқабырғалы үшбұрыштың бұрыштарын;

3) тіктөртбұрыштың бұрыштарын π радиан арқылы жазыңдар.

19.4. 1) 1 рад; 2) 0,4 рад; 3) 2,3 рад; 4) –4,2 рад; 5) –3,5 рад; 6) –10 рад бұрыштарды градуспен өрнектеңдер.

19.5. Градуспен берілген бұрышты радиан арқылы өрнектеңдер:

1) $24°$; 2) $240°$; 3) $154°$; 4) $1025°$; 5) $2040°$; 6) $2405°$.

19.6. Егер: 1) $\alpha = \frac{5\pi}{3}$; 2) $\alpha = \frac{9\pi}{4}$; 3) $\alpha = \frac{16\pi}{5}$; 4) $\alpha = \frac{17\pi}{6}$ болса, онда α бұрышы қай ширекте жатады?

B

19.7. 1) Ромбының бір бұрышының радиандық өлшемі $0{,}2\pi$-ге тең. Ромбының қалған бұрыштарының радиандық өлшемдерін табыңдар.

2) Ромбының бір бұрышының радиандық өлшемі $0{,}7\pi$-ге тең. Ромбының қалған бұрыштарының радиандық өлшемдерін табыңдар.

19.8. 1) Теңбүйірлі трапецияның бір бұрышының радиандық өлшемі $\frac{\pi}{6}$-ға тең. Трапецияның қалған бұрыштарының радиандық өлшемдерін табыңдар.

2) Теңбүйірлі трапецияның бір бұрышының радиандық өлшемі $\frac{2\pi}{3}$-ке тең. Трапецияның қалған бұрыштарының радиандық өлшемдерін табыңдар.

19.9. 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{\pi}{6}$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{3\pi}{4}$; 5) $\frac{4\pi}{9}$; 6) $\frac{7\pi}{11}$ болатын бұрышқа сыбайлас бұрыштың радиандық өлшемін табыңдар.

19.10. α бұрышын $\alpha = \alpha_0 + 2\pi n$ (мұндағы n — бүтін сан және $0 \le \alpha_0 < 2\pi$) түрінде жазыңдар:

1) $\alpha = 2{,}5\pi$; 2) $\alpha = 14{,}3\pi$; 3) $\alpha = -2{,}2\pi$;

4) $\alpha = -19{,}7\pi$; 5) $\alpha = -\frac{13}{4}\pi$; 6) $\alpha = -\frac{23}{6}\pi$.

19.11. Егер: 1) $\alpha = 3{,}7\pi$; 2) $\alpha = 4{,}2\pi$; 3) $\alpha = -3{,}2\pi$;

4) $\alpha = -9{,}8\pi$; 5) $\alpha = -\frac{14}{5}\pi$; 6) $\alpha = -\frac{25}{7}\pi$ болса, онда α бұрышы қай ширекте орналасқан?

19.12. Санды шеңбердің бойына: 1) $30°$; 2) $150°$; 3) $-150°$; 4) $-270°$; 5) $420°$; 6) $-300°$-қа тең α бұрышына сәйкес нүктені салыңдар.

Алгебра

19.13. 1) Теңбүйірлі үшбұрыштың табанындағы сыртқы бұрышы 130 °-қа тең болса, онда үшбұрыштың ішкі бұрыштарын радиан арқылы өрнектеңдер.
2) Теңбүйірлі үшбұрыштың төбесіндегі сыртқы бұрышы 140 °-қа тең болса, онда үшбұрыштың ішкі бұрыштарын радиан арқылы өрнектеңдер.

19.14. 1) Теңбүйірлі трапецияның үлкен табанындағы сыртқы бұрышы 120°-қа тең болса, онда трапецияның ішкі бұрыштарын радиан арқылы өрнектеңдер.
2) Теңбүйірлі трапецияның үлкен табанындағы сыртқы бұрышы 110°-қа тең болса, онда трапецияның ішкі бұрыштарын радиан арқылы өрнектеңдер.

C

19.15. Мына тұжырымдар ақиқат па:
1) егер $0° < \alpha < 90°$ болса, онда α — бірінші ширектің бұрышы;
2) егер α-бірінші ширектің бұрышы болса, онда $0° < \alpha < 90°$;
3) егер $90° < \alpha < 180°$ болса, онда α — екінші ширектің бұрышы;
4) егер α-екінші ширектің бұрышы болса, онда $90° < \alpha < 180°$?

19.16. Дөңгелектің бұрыштық жылдамдығы 23 рад/с. Дөңгелектің минутына қанша толық айналым жасайтынын табыңдар.

19.17. 1) 3 сағ; 2) 6 сағ; 3) 9 сағ; 4) тәулік бойына сағаттың минуттық тілі қандай бұрышты (градустық және радиандық өлшемде) көрсетеді?

19.18. 1) $P_{\frac{\pi}{6}}$; 2) $P_{\frac{5\pi}{6}}$; 3) $P_{\frac{7\pi}{6}}$; 4) $P_{\frac{4\pi}{3}}$; 5) $P_{\frac{5\pi}{3}}$; 6) $P_{\frac{5\pi}{4}}$ нүктесін санды (бірлік) шеңберге салыңдар.

ҚАЙТАЛАУ

19.19. Жүйенің шешімін координаталық жазықтықта кескіндеңдер:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 9, \\ y \geqslant x^2 - 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 16, \\ y \leqslant x^2 - 4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 25, \\ y \geqslant x^2 + 2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + y^2 \geqslant 4, \\ y \leqslant x^2 + 9. \end{cases}$

19.20. Функцияның анықталу облысын табыңдар:
1) $y = \sqrt{x^2 - 3x - 6}$; 2) $y = \sqrt{2x^2 - 5x - 3}$;

3) $y = \sqrt{-x^2 - 6x + 8}$; 4) $y = \sqrt{-2x^2 + x + 6}$.

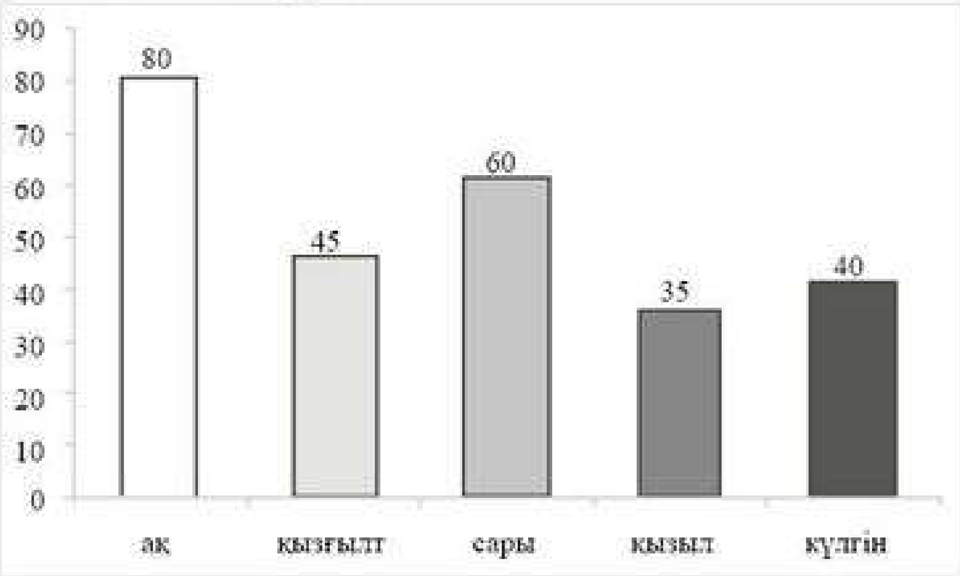
19.21. Функцияның графигін салыңдар:

1) $y = (x - 3)^2 - 2$; 2) $y = (x + 1)^2 - 3$;

3) $y = 3 - (x - 2)^2$; 4) $y = 4 - (x + 2)^2$.

19.22. $y = \dfrac{2x^2 - 1}{3x + 1}$ функциясының мәні 2; 3; 4,5 болатындай x-тің мәндерін табыңдар.

19.23. Диаграммада гүлзардағы гүлдердің түрлеріне қарай саны көрсетілген (49-сурет).



49-сурет

Егер A сары және қызғылт, B ақ және сары гүлдердің санын берсе, онда ақиқат тұжырымдарды көрсетіңдер:

A) $A = B$; B) $A > 2B$; C) $A + 15 < B$;

D) $A > B$; E) $A + 10 = B$.

Жаңа білімді меңгеруге дайындаламыз

19.24. Өрнектің мәнін табыңдар:

1) $2\sin 60° - 3\text{tg}45°$; 2) $2\cos 60° - 3\text{ctg}45°$;

3) $2\sin 45° - 3\text{ctg}60°$; 4) $4\sin 30° - 3\text{tg}30°$.

Жаңа білімді меңгеруге дайындаламыз

19.25. Координаталық жазықтықта $A(2;\ 6)$ нүктесін белгілеңдер. Осы нүктені $O(0;\ 0)$ нүктесімен қосыңдар. 1) Ox; 2) Oy осінің оң бағыты және OA сәулесі арқылы құрылған бұрыштың тангенсінің мәнін табыңдар.

Жаңа білімді меңгеруге арналған тірек ұғымдар

Бұрыш, бұрыштың түрлері, бұрыштың градустық және радиандық өлшемдері, тікбұрышты үшбұрыштың сүйір бұрышының синусы, косинусы, тангенсі және котангенсі және олардың белгілеулері, координаталық жазықтықтағы нүктенің абсциссасы мен ординатасы, дөңгелек, дөңгелектің радиусы, координаталық жазықтықтың ширектері .

§ 20. КЕЗ КЕЛГЕН БҰРЫШТЫҢ СИНУСЫ, КОСИНУСЫ, ТАНГЕНСІ, КОТАНГЕНСІ. БҰРЫШТЫҢ СИНУСЫНЫҢ, КОСИНУСЫНЫҢ, ТАНГЕНСІНІҢ, КОТАНГЕНСІНІҢ МӘНДЕРІ

Түйінді ұғымдар

Кез келген бұрыштың синусы, косинусы, тангенсі және котангенсі, функция, бірлік шеңбер

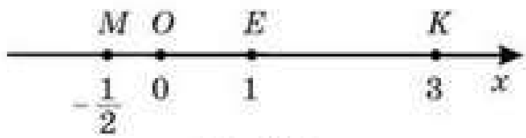
Тригонометриялық функциялардың анықтамаларымен танысасыңдар;

бірлік шеңбердің нүктелерінің координаталарының тригонометриялық функциялармен байланысын білесіңдер.

Сендер осы уақытқа дейін $y = ax + b$; $y = ax^2 + bx + c$; $y = x^n$ және т.б. алгебралық функцияларды оқыдыңдар. Ол функциялар алгебралық операциялар, яғни қосу, азайту, көбейту, бөлу, дәрежеге шығару, квадрат түбір шығару арқылы жазылды. Бірақ практикада көптеген процестерді функциялардың басқа түрлері, мысалы, *тригонометриялық функциялар* арқылы сипаттайды.

Тригонометриялық функцияларды енгізу үшін сан түзуімен қатар *санды шеңбер* қажет болады.

Сан түзуі ұғымын еске түсіріңдер. M, O, E, K нүктелерінің координаталарын атаңдар (50-сурет).



50-сурет

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР

Санды түзу: 1) 0 бастапқы нүктесі; 2) бірлік кесіндісі; 3) оң бағыты бар түзуді беретіні сендерге белгілі. Кез келген нақты санды осы түзудің бойында белгілеуге болады және санды түзудің әрбір нүктесіне қандай да бір нақты нүкте сәйкес келеді.

Сонымен қатар нүктенің 0 бастапқы нүктесіне қатысты орналасуына қарай санды түзуі бойындағы кез келген нүктенің координатасы оң немесе теріс болатыны белгілі.

> *Санды шеңбер* деп бастапқы нүкте, бірлік доға, оң бағыты бар шеңберді айтады.

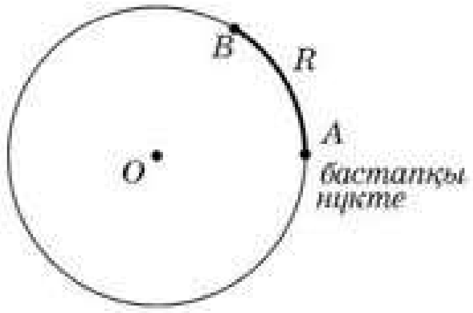
Санды шеңберді салу үшін:

1) шеңбер салынады;

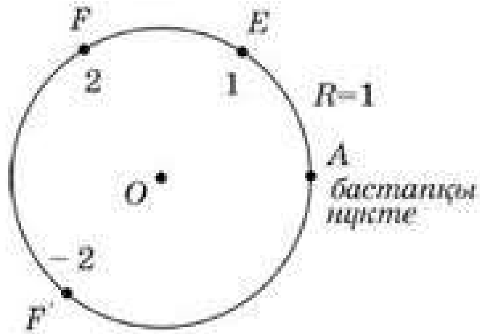
2) бастапқы нүкте белгіленеді;

3) бірлік ретінде шеңбердің радиусына тең доғаның ұзындығы алынады;

4) сағат тіліне қарсы бағыттағы қозғалыс оң бағыт, сағат тілімен бір бағыттағы қозғалыс теріс бағыт ретінде алынады (51-сурет).



51-сурет



52-сурет

Сәйкестік бойынша кез келген z нақты санына $AB = z$ рад доғаның соңы болатын шеңбердің бір ғана B нүктесі сәйкес келеді. Бұл санды *B нүктесінің дөңгелек координатасы* деп атап, $B(z)$ — деп белгілейді.

Демек, кез келген нақты санға шеңбердің белгілі бір нүктесі сәйкес келеді. Осылайша, 0 санына A нүктесінің бастапқы нүктесі, 1 санына $AE = 1$ рад болатын доғаның соңы E нүктесі, 2 санына $AF = 2$ рад болатын доғаның соңы F нүктесі, 6,5 санына ұзындығы 6,5 рад болатын доғаның соңғы нүктесі сәйкес келеді (A нүктесі доғаның бастапқы нүктесі болған жағдайда). Сондықтан кез келген теріс сан үшін теріс доғаның соңы болатын нүкте сәйкес келеді.

Мысалы, $z = -2$ санына $AF' = -2$ рад болатын доғаның соңы F' нүктесі сәйкес келеді (52-сурет).

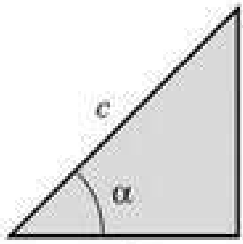
1. Сан түзуі мен санды шеңбердің ұқсастығы мен айырмашылығы қандай?
2. Кез келген нақты санға сан түзуінің (санды шеңбердің) бір ғана нүктесі сәйкес келе ме?
3. Сан түзуінің (санды шеңбердің) кез келген нүктесіне бір ғана нақты сан сәйкес келе ме?

Санды шеңбердің кез келген B нүктесіне шексіз нақты сандар жиыны сәйкес келеді.

Геометрия курсында α сүйір бұрышының синусы, косинусы және тангенсі қарастырылды.

Тікбұрышты үшбұрыштың α сүйір бұрышының $\sin\alpha$-сын, $\cos\alpha$-сын, $\mathrm{tg}\,\alpha$-сын, $\mathrm{ctg}\,\alpha$-сын еске түсіріңдер (53-сурет).

$$\sin\alpha = \frac{a}{c},\ \cos\alpha = \frac{b}{c},\ \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b},\ \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{b}{a}.$$



53-сурет

Áåëãiëi àðàá ғàëûìû Íəñið əä-Äiíiн åңáåêòåði òðèãîíîìåòðèÿíың æåêå ғûëûì áiëiï қàëûïòà-ñóûíà çîð ûқïàë åòòi. Íəñið əä-Äií æàçûқ æəíå ñòåðåëûқ үøáұðûøòàðäû øåøóäiң áàðëûқ æàғääé-ëàðûí қàðàñòûðғàí.

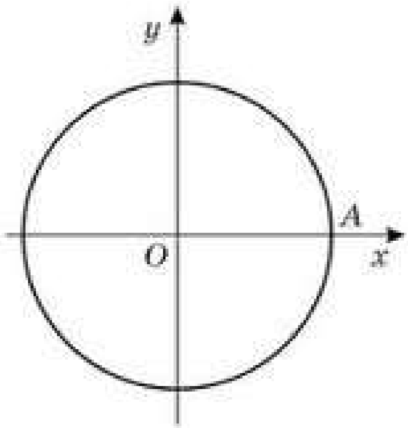
"Òðèãîíîìåòðèÿ" ñөçi ãðåêòiң "*òðèãîíîí*" — *үøáұðûø* æəíå "*ìåòðåî*" — *өëøåó* äåãåí ñөçäåðiíåí құðàñòûðûëғàí.


Íəñið əä-Äií
(1201—1274)

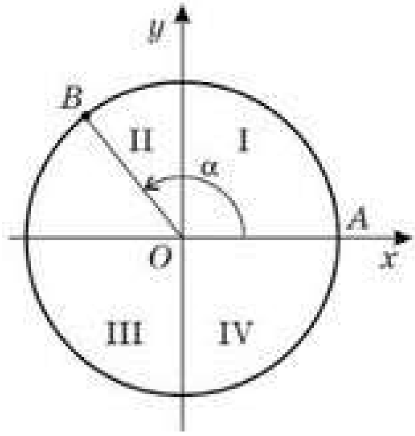
α бұрышының кез келген шамасы үшін анықтама енгіземіз. Ол үшін алдымен координаталар жүйесінде салынған санды шеңберді қарастырамыз.

Координаталар жүйесіне центрі координаталар басында болатын шеңбер саламыз (54-сурет).

OA радиусын бастапқы радиус деп атайық. *OB* радиусы *OA* бастапқы радиусын қандай да бір α бұрышына бұрғанда алынған радиус (55-сурет). Басқаша айтқанда, бастапқы *OA* радиусы мен жылжымалы *OB* радиусы α бұрышын құрайды.



54-сурет

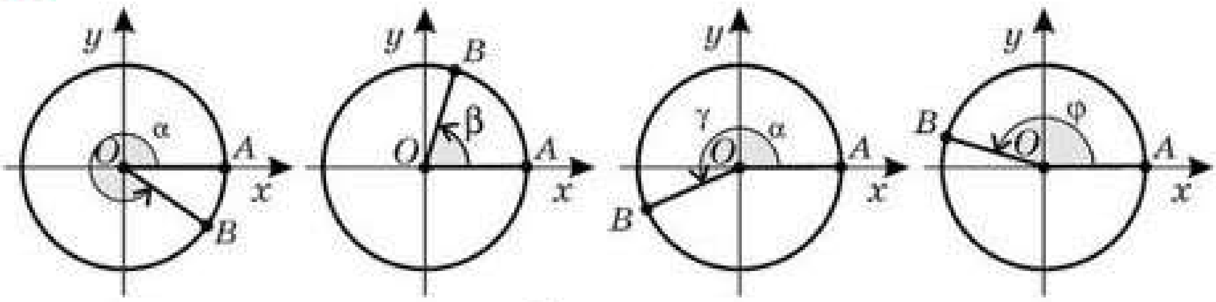


55-сурет

Жылжымалы OB радиусын бұрғанда оның ұшы төрт ширектің бірінде немесе координаталар осінің бірінде болуы мүмкін. Бастапқы радиуспен α бұрыш жасайтын жылжымалы радиустың ұшы қай ширекте аяқталса, α бұрышы *сол ширектің бұрышы* деп аталады.

Мысалы, егер жылжымалы OB радиусының ұшы B нүктесі II ширекте жатса, онда α бұрышы II ширекке тиісті болады (55-сурет).

α, β, γ, ϕ бұрышы қай ширекке тиісті (56-сурет)?

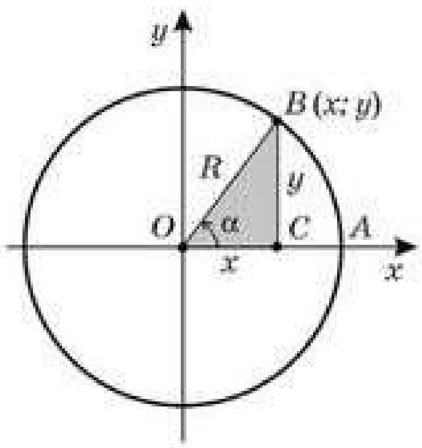


56-сурет

$\frac{\pi}{2}$-ге еселік болатын бұрыштар ешбір ширекте аяқталмайды деп саналады.

Бастапқы OA радиусын O нүктесінен α бұрышқа бұрғанда ол OB радиусына көшсін делік (57-сурет).

OBC тікбұрышты үшбұрышының сүйір бұрышының синусы, косинусы, тангенсі және котангенсінің анықтамаларын қолданып, кез келген бұрыштың синусы, косинусы, тангенсі және котангенсінің анықтамасын берейік (57-сурет).

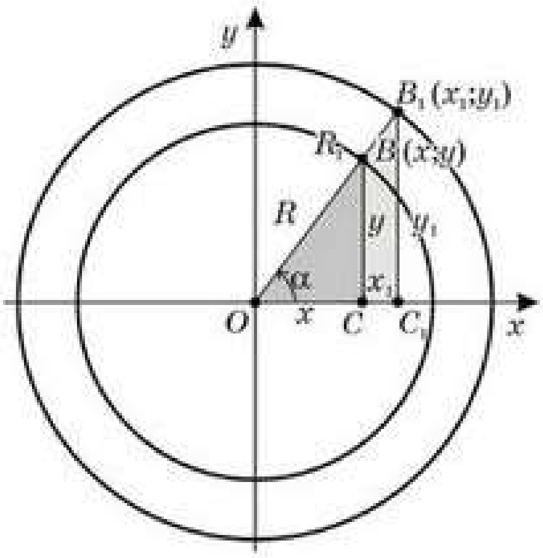


57-сурет

Шеңберге тиісті B нүктесінің ординатасының шеңбер радиусына қатынасы α бұрышының ***синусы*** *деп аталады.*
Шеңберге тиісті B нүктесінің абсциссасының шеңбер радиусына қатынасы α бұрышының ***косинусы*** *деп аталады .*
Шеңберге тиісті B нүктесінің ординатасының нүктенің абсциссасына қатынасы α бұрышының ***тангенсі*** *деп аталады.*
Шеңберге тиісті B нүктесінің абсциссасының нүктенің ординатасына қатынасы α бұрышының ***котангенсі*** *деп аталады.*

Егер B нүктесінің координаталарын x және y, ал шеңбер радиусының ұзындығын R арқылы белгілесек, онда мына теңдіктерді аламыз:

$$\sin\alpha = \frac{y}{R};\quad \cos\alpha = \frac{x}{R};\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x};\quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}.$$



58-сурет

Берілген α бұрышы үшін $\frac{y}{R}, \frac{x}{R}, \frac{x}{y}, \frac{y}{x}$ қатынастары тұрақты, сондықтан олардың шамалары радиустың ұзындығына тәуелді емес.

Расында да, B_1 нүктесі жылжымалы OB радиусында немесе оның жалғасында жататын кез келген нүкте болсын (58-сурет).

Онда OBC және $O_1B_1C_1$ үшбұрыштарының ұқсастығынан $\frac{y}{R} = \frac{y_1}{R_1}$; $\frac{x}{R} = \frac{x_1}{R_1}$; $\frac{y}{x} = \frac{y_1}{x_1}$; $\frac{x}{y} = \frac{x_1}{y_1}$ (мұндағы $R_1 = OB_1$, ал x_1 және y_1 — B_1 нүктесінің координаталары) аламыз.

$\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ шамалары радиустың ұзындығына тәуелді болмағандықтан, радиусының ұзындығы 1-ге тең шеңбер қарастырылады. Мұндай шеңберді *бірлік шеңбер* деп атайды.

Сонымен, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$-ның мәндері тек қана α бұрышының шамасына тәуелді. Кез келген α бұрышына синус, косинус, тангенс ($\frac{\pi}{2} + \pi k$, мұндағы $k \in Z$ бұрыштарынан басқа) және котангенстің (πk, мұндағы $k \in Z$ бұрыштарынан басқа) бір ғана мәні сәйкес келеді.

Синус, косинус, тангенс және котангенстің α бұрышының шамасына тәуелділігі ***тригонометриялық функциялар*** *деп аталады.*

Тригонометриялық функциялардың белгіленуі: $y = \sin\alpha$, $y = \cos\alpha$, $y = \operatorname{tg}\alpha$, $y = \operatorname{ctg}\alpha$.

Тригонометриялық функцияларды санға тәуелді функциялар ретінде қарастыруға болады. Өйткені бұрыштың градустық өлшемімен қатар радиандық өлшемі де бар. Сондықтан α радианға тәуелді тригонометриялық функцияларды α санына тәуелді функция ретінде қарастыруға болады.

МЫСАЛ

1. Қабырғасы шеңбердің $B(3; -2)$ нүктесі арқылы өтетін α бұрышының тригонометриялық функцияларын табайық (59-сурет).

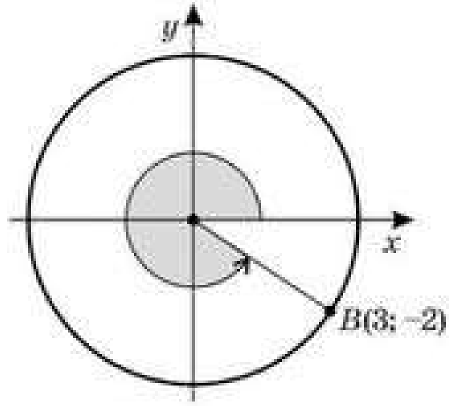
Шешуі. $x = 3$; $y = -2$ болғандықтан, $R = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$. Олай болса

$$\sin\alpha = \frac{y}{R} = -\frac{2\sqrt{13}}{13};$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{R} = \frac{3\sqrt{13}}{13};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} = -\frac{2}{3};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y} = -\frac{3}{2} = -1{,}5.$$

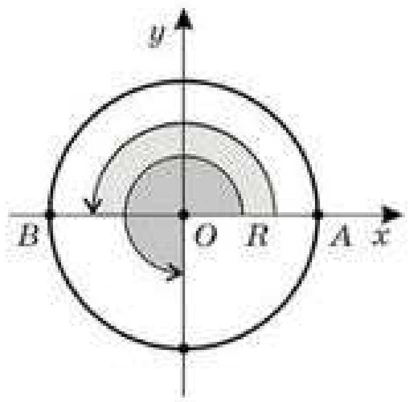


59-сурет

Жауабы: $\sin\alpha = -\frac{2\sqrt{13}}{13}$; $\cos\alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$; $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{2}{3}$; $\operatorname{ctg}\alpha = -1{,}5$.

МЫСАЛ

2. 1) 0°; 2) 180°; 3) 270° болатын бұрыштардың тригонометриялық функцияларының мәндерін табайық (60-сурет).



60-сурет

Шешуі. 1) Егер $\alpha = 0°$ болса, онда $\sin 0° = 0$, $\cos 0° = 1$, $\operatorname{tg} 0° = \frac{0}{R} = 0$, $\operatorname{ctg} 0° = \frac{R}{0}$ — анықталмаған.

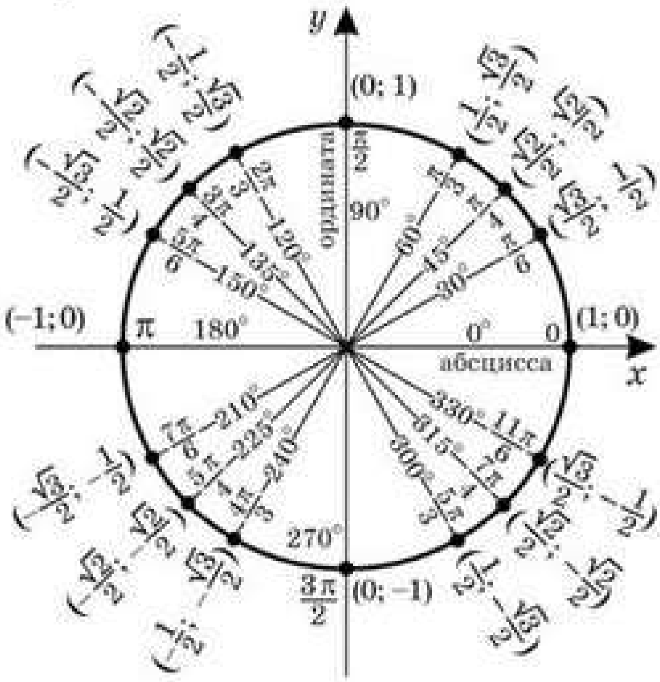
2) Егер $\alpha = 180°$, $x = -R$, $y = 0$ болса, онда $|OA| = |OB| = R$ және $\sin 180° = \frac{0}{R} = 0$, $\cos 180° = \frac{-R}{R} = -1$; $\operatorname{tg} 180° = \frac{y}{x} = \frac{0}{R} = 0$, $\operatorname{ctg} 180° = \frac{x}{y} = \frac{R}{0}$ — анықталмаған.

3) Егер $\alpha = 270°$ болса, онда бұрыштың қабырғасы Oy осінің теріс бағытымен беттеседі, сондықтан $x = 0$ және $y = -R$.

$\sin270^\circ = \dfrac{y}{R} = \dfrac{-R}{R} = -1;\ \cos270^\circ = \dfrac{x}{R} = 0;\ \mathrm{ctg}270^\circ = \dfrac{x}{y} = \dfrac{0}{-R} = 0;$
$\mathrm{tg}270^\circ = \dfrac{y}{x} = \dfrac{-R}{0}$ — анықталмаған.

Жауабы : 1) $\sin0^\circ = 0,\ \cos 0^\circ = 1,\ \mathrm{tg}0^\circ = 0,\ \mathrm{ctg}0^\circ$ — анықталмаған.
2) $\sin180^\circ = 0,\ \cos180^\circ = -1,\ \mathrm{tg}180^\circ = 0;\ \mathrm{ctg}\ 180^\circ$ — анықталмаған;
3) $\sin270^\circ = -1;\ \cos270^\circ = 0,\ \mathrm{ctg}270^\circ = 0,\ \mathrm{tg}270^\circ$ — анықталмаған.

6-кест еде және 61-суретте практикада жиі қолданылатын радианмен (градуспен) берілген бұрыштардың тригонометриялық функцияларының мәндері жа зылған.



61-сурет

6-кесте

α бұрышы	Радианмен (градуспен берілген бұрыштың мәні)									
Функция	0 (0°)	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)	$\frac{2\pi}{3}$ (120°)	$\frac{5\pi}{6}$ (150°)	π (180°)	$\frac{3\pi}{2}$ (270°)	2π (360°)
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	−1	0	1
tg α	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	анықталмаған	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	анықталмаған	0
ctg α	анықталмаған	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{3}$	анықталмаған	0	анықталмаған

МЫСАЛ

3. $2\cos0° + 3\sin90° + 4\mathrm{tg}45°$ өрнегінің мәнін табайық.

Шешуі. 6-кестені қолданамыз:

$$2\cos0° + 3\sin90° + 4\mathrm{tg}45° = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 9.$$

Жауабы: 9.

?

1. Қандай функциялар тригонометриялық функциялар деп аталады?
2. Санды шеңбер дегеніміз не?
3. Кез келген бұрыштың синусы, косинусы, тангенсі, котангенсі дегеніміз не?

Жаттығулар

А

20.1. 45°; –60°; 90°-қа тең бұрышқа сәйкес келетін нүктені бірлік шеңберге салыңдар және өлшеу арқылы осы бұрыштардың синусын және косинусын есептеңдер.

20.2. Егер:

1) $\sin\alpha = \frac{1}{4}$; 2) $\sin\alpha = \frac{2}{3}$; 3) $\cos\alpha = \frac{3}{4}$;

4) $\cos\alpha = \frac{3}{5}$; 5) $\mathrm{tg}\,\alpha = 2$; 6) $\mathrm{tg}\,\alpha = 3$ болса, онда α бұрышын салыңдар.

20.3. Центрі координаталар басы болатын бірлік шеңберді салыңдар. Бастапқы радиусты α бұрышына бұрыңдар, мұндағы α бұрышы:

1) 35°; 2) 75°; 3) 135°; 4) 170°; 5) –80°; 6) –130°.

20.4. 1) $2\sin30° + 2\cos45°$; 2) $3\sin60° - 2\cos60°$;

3) $\sin30° - 3\mathrm{tg}45°$; 4) $\sin45° + 2\mathrm{ctg}60°$ өрнегінің мәнін табыңдар.

20.5. 1) $\mathrm{tg}\frac{\pi}{3} + 2\mathrm{ctg}\frac{\pi}{6}$; 2) $\mathrm{tg}\frac{\pi}{4} - 3\mathrm{ctg}\frac{5\pi}{6}$;

3) $3\cos\frac{\pi}{3} + 2\sin\frac{\pi}{4}$; 4) $-\sin\frac{\pi}{2} + 2\mathrm{ctg}\frac{3\pi}{4}$ өрнегінің мәнін табыңдар.

20.6. 1) $\sin\alpha = 0$; 2) $\sin\alpha = 0{,}5$; 3) $\cos\alpha = -1$;

4) $\cos\alpha = 1$; 5) $\cos\alpha = 0$; 6) $\sin\alpha = -1$ болса, онда α-ның бірнеше мәнін табыңдар.

20.7. 1) $\operatorname{tg}\beta = 0$; 2) $\operatorname{tg}\beta = 1$; 3) $\operatorname{tg}\beta = -1$; 4) $\operatorname{ctg}\beta = 1$; 5) $\operatorname{ctg}\beta = -1$; 6) $\operatorname{ctg}\beta = 0$ болса, онда β-ның бірнеше мәнін табыңдар.

20.8. 1) $2\cos 0° + 3\operatorname{tg}45° - \sin 120°$; 2) $\sin 270° + 3\operatorname{tg}180°$; 3) $\cos 90° - 3\sin 360° + 2\operatorname{tg}180°$ өрнегінің мәнін табыңдар.

20.9. 1) $\operatorname{tg}\beta$; 2) $\operatorname{ctg}\beta$; 3) $\operatorname{ctg}2\beta$; 4) $\operatorname{tg}2\beta$ өрнегінің мәні болмайтындай, β-ның бірнеше мәнін көрсетіңдер.

20.10. 1) $\sin\alpha = 1{,}22$; 2) $\sin\alpha = -3{,}2$; 3) $\cos\alpha = 2{,}25$; 4) $\cos\alpha = -1{,}2$ теңдігі орындалатындай, α бұрышының мәні бола ма?

20.11. 1) $\sin\alpha = 1 - \sqrt{3}$; 2) $\sin\alpha = \sqrt{5} - 1$; 3) $\cos\alpha = \sqrt{3} - 1$; 4) $\cos\alpha = \sqrt{7} - 1$ теңдігі орындалатындай, α бұрышының мәні бола ма?

B

20.12. 1) $\sin\frac{\pi}{6}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{3}\right)$; 2) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\left(\sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{6}\right)$; 3) $\cos\frac{\pi}{4}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\right)$ өрнегінің мәнін табыңдар.

20.13. 1) $-\sin\frac{\pi}{2}\left(2\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{6}\right)$; 2) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}\left(\sin\frac{\pi}{3} - 3\cos\frac{\pi}{3}\right)$; 3) $\cos\frac{\pi}{4}\left(2\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} - 3\sin\frac{\pi}{6}\right)$ өрнегінің мәнін табыңдар.

20.14. 1) Сүйір бұрыштардың синустары; 2) сүйір бұрыштардың косинустары арқылы $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}$ қосындысының мәнін өрнектеңдер.

20.15. 1) Сүйір бұрыштардың синустары; 2) сүйір бұрыштардың косинустары арқылы $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$ алгебралық қосындысының мәнін өрнектеңдер.

20.16. 1) Сүйір бұрыштардың тангенстері; 2) сүйір бұрыштардың котангенстері арқылы $\frac{\sqrt{3}}{3} - 1$ айырымының мәнін табыңдар.

20.17. 1) $\alpha = 0°$; 2) $\alpha = 120°$; 3) $\alpha = 30°$; 4) $\alpha = 135°$ болса, онда $\sin\alpha + \cos\alpha$ өрнегінің мәні неге тең?

20.18. 1) $\dfrac{(-\sin 30^\circ - \cos 30^\circ)^2}{3\cos 45^\circ \sin 45^\circ - 6\operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{ctg} 60^\circ}$; 2) $\dfrac{2\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{3}\cos\pi - 1}{\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{3}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}$;

3) $\dfrac{\sqrt{(\cos 60^\circ - \sin 60^\circ)^2}}{\sin 30^\circ \cdot (1 - \operatorname{tg} 60^\circ)}$; 4) $\dfrac{\sqrt{\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right)^2}}{\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} - \operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}\right)^2}$ өрнегінің мәнін табыңдар.

20.19. 1) $\cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha$; 2) $\sin\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha$; 3) $\sin\alpha + \cos\alpha$ өрнегінің мәні нөлге тең болатындай α-ның бірнеше мәнін табыңдар.

20.20. $\dfrac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}}, \dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{3}}, \dfrac{1}{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}}$ тізбегінің арифметикалық прогрессия болатынын тексеріңдер .

20.21. 1) $\sin\alpha = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $\sin\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ болса, онда α-ның төрт мәнін көрсетіңдер.

20.22. 1) $\cos\alpha = -0{,}5$; 2) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$;

3) $\operatorname{ctg}\alpha = -\sqrt{3}$ болса, онда α-ның төрт мәнін көрсетіңдер.

20.23. 1) $2\operatorname{tg}30^\circ\operatorname{ctg}30^\circ\cos30^\circ\sin30^\circ + \sqrt{3}\operatorname{tg}60^\circ$; 2) $\dfrac{4 \cdot \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{2} + 2\cos\pi} + 2$

өрнегінің мәнін табыңдар.

20.24. 1) $\sqrt{\frac{3}{4} + 2\cos^2 30^\circ} + \sqrt{\frac{5}{4} - 3\operatorname{tg}^2 30^\circ}$; 2) $\sqrt{\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{3} - 2\frac{3}{4} - 2\sin\frac{3\pi}{4}}$ өрнегінің мәнін табыңдар.

20.25. $\sin\alpha = 0{,}5$ екені белгілі.

1) $\alpha = 30^\circ$ дегеніміз дұрыс па? 2) Синусы 0,5-ке тең болатын бірнеше бұрышты көрсетіңдер. 3) Синусы 0,5-ке тең болатын барлық бұрыштың жалпы түрін жазыңдар.

20.26. $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ екені белгілі.

1) $\alpha = 45^\circ$ дегеніміз дұрыс па? 2) Косинусы $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$-ге тең болатын бірнеше бұрышты көрсетіңдер. 3) Косинусы $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$-ге тең болатын барлық бұрыштың жалпы түрін жазыңдар.

20.27. 1) $\sin\alpha + 2\cos\alpha = 3$; 2) $3\sin\alpha - 2\cos\alpha = 5$;
3) $\sin\alpha - 7\cos\alpha = -8$; 4) $\sin\alpha + 2\cos\alpha = 1$ теңдігі орындала ма?

20.28. Егер: 1) $\beta = 30°$; 2) $\beta = 45°$; 3) $\beta = 60°$ болса, онда $A = 2\cos\beta$ және $B = 3\text{tg}\,\beta$ өрнектерінің мәндерін салыстырыңдар.

C

20.29. 1) $\sin\alpha + \cos\alpha = -1{,}3$; 2) $\sin\alpha - \cos\alpha = 1{,}3$ болса, α бұрышы қай ширекте орналасқан?

20.30. 1) $\sqrt{\sin 150°}$; 2) $\sqrt{-\cos 180°}$; 3) $\sqrt{\cos 120°}$; 4) $\sqrt{\text{tg}\,180°}$ өрнегінің мағынасы бар ма?

20.31. Егер: 1) $\beta = 30°$; 2) $\beta = 45°$; 3) $\beta = 60°$ болса, онда $A = -3\sin\beta$ және $B = -2\cos\beta$ өрнектерінің мәндерін салыстырыңдар.

ҒАЛЫМДАР — МАТЕМАТИК ЖӘНЕ АСТРОНОМ ТУРАЛЫ ХАБАРЛАМА ДАЙЫНДАҢДАР

20.32. 1) XVIII ғãñûðäûң îðòàñûíäà швейцариялық математик Ëåîíàðä Ýéëåðäің åңáåêòåðiíäå òðèãîíîìåòðèÿíûң қàçiðãi қàëûïòàñқàí òүði êөðñåòiëãåí. Îë îñû òðèãîíîìåòðèÿëûқ ôóíêöèÿëàð òóðàëû ғûëûìè ðåòïåí қàðàñòûðып, $\sin x$, $\text{tg}\,x$ æàçóëàðûí åíãiçген, $ÀÂÑ$ үшбұрышының қàáûðғàëàðûí $à$, b, $ñ$ àðқûëû æәíå áұðûøòàðûí $À$, $Â$, $Ñ$ àðқûëû áåëãiëåген. Ñәéêåñ áұðûøòûң ðàäèàíäûқ өëøåìi áîëàòûí $õ$ àðãóìåíòòi òðèãîíîìåòðèÿëûқ ôóíêöèÿëàðäû àðãóìåíòiн îðíûíà әðòүðëi (îң, òåðiñ) ìәíäåð áåðå îòûðûï қàðàñòûðғàí. Л. Ýéëåð êåði òðèãîíîìåòðèÿëûқ ôóíêöèÿëàðäû åíãiçãåí.

Ëåîíàðä Ýéëåð
(1707—1783)

Региомонтан
(1436—1476)

2) XV ғãñûðäûң әéãiëi íåìiñ àñòðîíîìû Ðåãèîìîíòàí æåòiíøi ìәíãi öèôðғà äåéií äәëäiêïåí àëûíғàí æàçûңқû áұðûøòàðäûң ñèíóñûíûң êåñòåñií құðàñòûðғàí.

ҚАЙТАЛАУ

20.33. 1) $3x^2 - 5x - 27 = 0$; 2) $5x^2 - 7x - 1,2 = 0$;

3) $3,5x^2 + 7,6x + 1 = 0$ квадрат теңдеуі түбірлерінің қосындысы мен көбейтіндісінің мәндерін табыңдар.

20.34. 1) $\dfrac{x^2+4x-5}{(x-3)^2} < 0$; 2) $\dfrac{x^2-4x-5}{(x+2)^4} < 0$;

3) $\dfrac{7}{x^2-5x+6} + 1 < \dfrac{9}{3-x}$ теңсіздігін шешіңдер және теңсіздіктің ең үлкен бүтін шешімін көрсетіңдер.

20.35. 1) $y = x^2 + 6|x| - 2$; 2) $y = -2x^2 + 4|x| + 1$; 3) $y = \dfrac{2}{1+x^2}$;

4) $y = \dfrac{x^2-1}{x}$ функциясының жұп немесе тақ екенін анықтаңдар және функцияның графигін салыңдар.

20.36. 1) $1 < \dfrac{x+2}{5-x} < 6$; 2) $-1 < \dfrac{x-8}{x+1} < 3$ қостеңсіздігін қанағаттандыратын x айнымалысының барлық бүтін оң мәндерін табыңдар.

20.37. Теңсіздіктер жүйесінің шешімдер жиынын координаталық жазықтықта кескіндеңдер:

1) $\begin{cases} 2 \leqslant x \leqslant 6, \\ -1 \leqslant y \leqslant 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 3, \\ -1 \leqslant y \leqslant 4; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 4, \\ y \leqslant 3 - x; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} -2 \leqslant x \leqslant 2, \\ y \leqslant x^2 - 1. \end{cases}$

20.38. Фермер баласымен бірге жұмысты 6 сағ-та орындады. Егер баласы жұмысты орындауға әкесіне қарағанда 5 сағ артық уақыт жіберсе, онда олардың әрқайсысы осы жұмысты қанша уақытта орындайды?

Жаңа білімді меңгеруге дайындаламыз

20.39. Функцияның мәндер жиынын табыңдар:

1) $y = x^2 - 4x + 1$; 2) $y = -x^2 + 2x + 3$;

3) $y = \sqrt{x+1} - 1$; 4) $y = 2 - \sqrt{1-x}$.

20.40. Берілген функциялардың графиктерін координаталық жазықтықта салыңдар және қиылысу нүктелерінің координаталарын (шамамен) табыңдар:

1) $y = x^2 - 2x$ және $y = x - 2$;

2) $y = -x^2 - 4x$ және $y = x^2 - 2$.

Жаңа білімді меңгеруге арналған тірек ұғымдар

Санды шеңбер, координаталық ширек, санды аргументтің тригонометриялық функциясы, бұрыштың жалпы түрі, тригонометриялық функциялардың анықталу облысы мен мәндер жиыны, әр тригонометриялық функцияның анықталу облысына кіретін бұрыш мәнінің жазылуының жалпы түрі, жиі кездесетін бұрыштардың тригонометриялық функцияларының мәндері.

§ 21. ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ

Түйінді ұғымдар

Анықталу облысы мен мәндер жиыны, жұптығы (тақтығы), периодтылығы, бірсарындылығы және таңбатұрақтылық аралықтары

?

Бірлік шеңбердің көмегімен тригонометриялық функциялардың анықталу облысы мен мәндер жиынын табуды;

тригонометриялық функциялардың жұптығын (тақтығын), периодтылығын, бірсарындылығын және таңбатұрақтылық аралықтарын түсіндіруді үйренесіңдер.

Тригонометриялық функциялардың анықталу облысы мен мәндер жиыны

$\sin\alpha$ бірлік шеңбер нүктесінің ординатасы, ал $\cos\alpha$ бірлік шеңбер нүктесінің абсциссасы болғандықтан, α аргументінің кез келген мәндерінде $y = \sin\alpha$, $y = \cos\alpha$ функцияларының нақты мәндері болады. Сондықтан бұл тригонометриялық функциялардың анықталу облысы $(-\infty; +\infty)$ аралығы болады.

$y = \sin\alpha$, $y = \cos\alpha$ функцияларының анықталу облысы $(-\infty; +\infty)$ аралығы болады.

α қандай мән қабылдаса да $\sin\alpha$ және $\cos\alpha$-ның мәндері 1-ден аспайды және –1-ден кіші болмайды. Сондықтан жылжымалы OB радиусының ұшы болатын B нүктесінің абсциссасы да, ординатасы да модулі бойынша радиустың ұзындығынан, яғни 1-ден артық болмайды.

Сонымен, $\sin\alpha$ және $\cos\alpha$-ның мәндері $[-1; 1]$ санды кесіндісіне тиісті.

$y = \sin\alpha$ және $y = \cos\alpha$ функцияларының мәндер жиыны $[-1; 1]$ кесіндісі болады.

$\operatorname{tg}\alpha$ және $\operatorname{ctg}\alpha$-ның мәндері B нүктесінің координаталарының қатынасымен өрнектелетіні жоғарыда айтылған.

Бұл қатынастарда, егер B нүктесінің абсциссасы нөлге тең болса, онда tg α-ның мәні болмайды, ал егер B нүктесінің ординатасы нөлге тең болса, онда ctg α-ның мәні болмайды (өйткені бөлшектің бөлімі нөлге тең болмауы керек).

Демек, α-ның $\pm\frac{\pi}{2}$; $\pm\frac{3\pi}{2}$ және т.с.с. мәндері tg α-ның анықталу облысына кірмейді; ал α-ның 0, $\pm\pi$; $\pm 2\pi$ және т.с.с. мәндері ctg α-ның анықталу облысына кірмейді.

Осы бұрыштарды біріктіріп төмендегі тұжырымды аламыз.

> $\frac{\pi}{2}+\pi k$ (мұндағы k — кез келген бүтін сан) мәндерінен басқа α-ның барлық мәндері y = tg α функциясының анықталу облысы болады;
> πk (мұндағы k — кез келген бүтін сан) мәндерінен басқа α-ның барлық мәндері y = ctg α функциясының анықталу облысы болады.

1) n-нің мәні 0,1; 0,01; 0,00001; 0,000000001-ге тең болғанда, $\frac{1}{n}$ бөлшегінің мәнін есептеңдер. Бөлімі 0-ге дейін кемігенде алымы 1 саны және бөлімі оң сан болатын бөлшектің мәні қалай өзгереді?
2) n-нің мәні –0,1; –0,01; –0,00001; –0,000000001-ге тең болғанда, $\frac{1}{n}$ бөлшегінің мәнін есептеңдер. Бөлімі 0-ге дейін артқанда алымы 1 саны және бөлімі теріс сан болатын бөлшектің мәні қалай өзгереді?

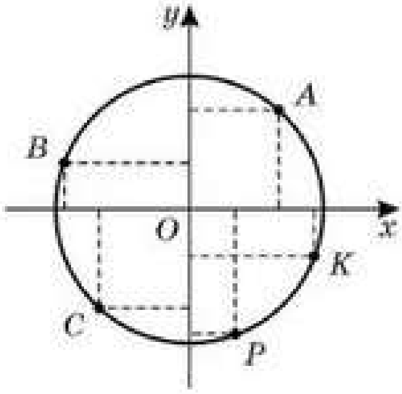
$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ және $|\sin\alpha|\le 1$, $|\cos\alpha|\le 1$ болғандықтан, бөлшектің бөлімінің мәні нөлге дейін кеміген кезде оның бөлімі оң сан болса, бөлшектің мәні шексіздікке, яғни $+\infty$-ке дейін өзгереді, ал бөлімі теріс сан болса, бөлшектің мәні шексіздікке, яғни $-\infty$-ке дейін өзгереді.

> y = tg α, y = ctg α функцияларының мәндер жиыны $(-\infty; +\infty)$ аралығы болады.

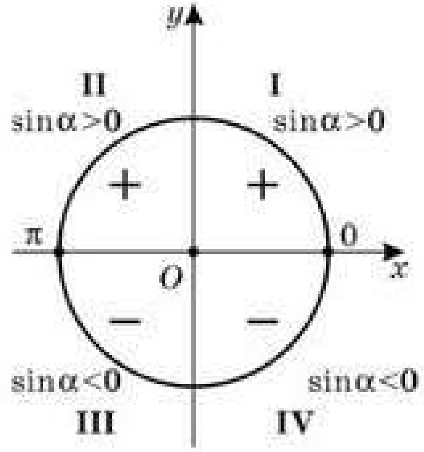
Тригонометриялық функциялардың таңбатұрақтылық аралықтары

sin α, cos α, tg α, ctg α анықтамасынан әрбір y = sin α, y = cos α, y = tg α, y = ctg α тригонометриялық функцияларының таңбалары ("+" және "–") жылжымалы радиустың ұшының координаталарының таңбаларына, яғни жылжымалы радиустың ұшы қай координаталық ширекте жатқанына байланысты болады.

Бірлік шеңбердің A, B, C, P, K нүктелерінің абсциссалары мен ординаталарын табыңдар (62-сурет).



62-сурет

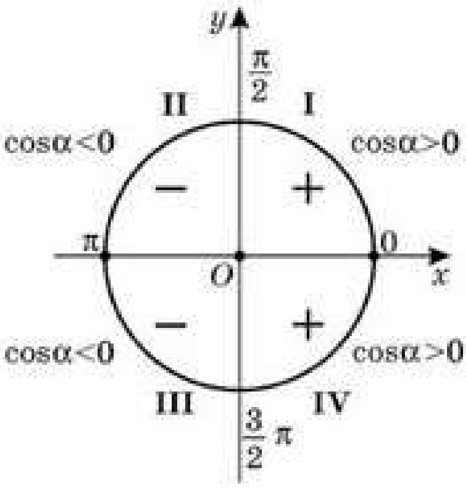


63-сурет

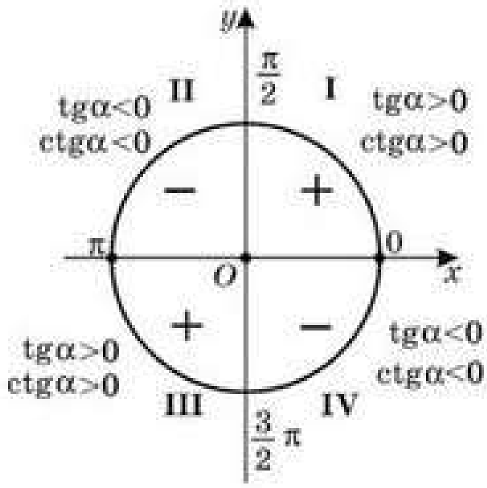
B жоғарғы жарты шеңберге тиісті болса, онда y ординатасының таңбасы оң, ал *B* нүктесі төменгі жарты шеңберге тиісті болса, онда y ординатасының таңбасы теріс болады. Бұрыштың синусының таңбасы, анықтама бойынша y ординатасының таңбасына байланысты болғандықтан, I мен II ширектерде $\sin\alpha > 0$, III пен IV ширектерде $\sin\alpha < 0$ (63-сурет).

Бұрыштың косинусының таңбасы, анықтама бойынша x абсциссасының таңбасына байланысты. *B* оң жақтағы жарты шеңберге тиісті болса, онда x абсциссасының таңбасы оң, ал *B* нүктесі сол жақтағы жарты шеңберге тиісті болса, онда x абсциссасының таңбасы теріс болады. Сондықтан I және IV ширектерде $\cos\alpha > 0$, II және III ширектерде $\cos\alpha < 0$ (64-сурет).

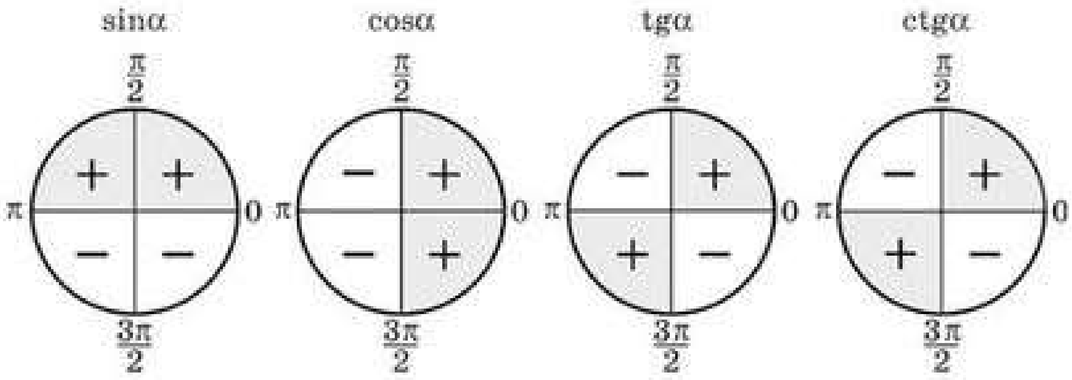
$\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{y}{x}$, $\mathrm{ctg}\,\alpha = \dfrac{x}{y}$ болғандықтан, бұл функциялардың таңбалары *B* нүктесінің координаталарының таңбасы бірдей болат ын координаталық ш иректерде оң, ал *B* нүктесінің координаталарының таңбасы әртүрлі болатын координата лық ширектерде теріс болады.



64-сурет



65-сурет



66-сурет

Сондықтан I және III ширектерде $\operatorname{tg}\alpha > 0$, $\operatorname{ctg}\alpha > 0$, II және IV ширектерде $\operatorname{tg}\alpha < 0$, $\operatorname{ctg}\alpha < 0$ (65-сурет).

66-суретте α бұрышының синусы, косинусы, тангенсі және котангенсінің таңбалары көрсетілген.

7-кестеде α бұрышының синусы, косинусы, тангенсі және котангенсінің таңбалары көрсетілген.

7-кесте

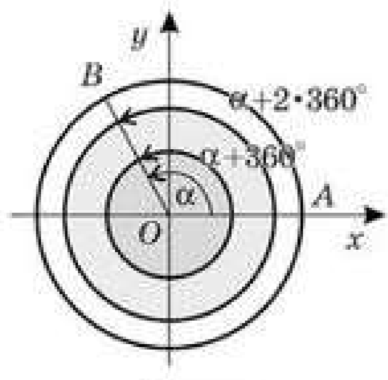
Ширек	I	II	III	IV
Функция	$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$	$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$
$\sin\alpha$	+	+	−	−
$\cos\alpha$	+	−	−	+
$\operatorname{tg}\alpha$	+	−	+	−
$\operatorname{ctg}\alpha$	+	−	+	−

Тригонометриялық функциялардың периодтылығы

Жоғарыда жылжымалы радиустың толық бір айналым жасауы қарастырылды. Егер жылжымалы радиусты бұруды әрі қарай жалғастырса, онда ол 0-ден 2π-ге дейінгі орынның біреуіне келетіні белгілі. Жылжымалы радиустың толық айналымының санын арттырғанмен бұл мәндер өзгеріссіз қалып отырады.

α-ға 2π-ді қанша рет қосса да α бұрышының синусы, косинусы, тангенсі және котангенсінің мәндері өзгеріссіз қалады.

67-суретте OA радиусын α бұрышына, $\alpha + 360°$ бұрышына, $\alpha + 2 \cdot 360°$ бұрышына және т.с.с. бұрғанда, OB радиусының қайтадан шығатыны көрсетілген. Сондықтан α, $\alpha + 360°$, $\alpha + 2 \cdot 360°$ және т.с.с. бұрыштар үшін синус, косинус, тангенс және котангенстің мәндері бірдей болады.



67-сурет

МЫСАЛ

1. $\sin 45° = \sin(45° + 360°) = \sin(45° - 360°) = \sin(45° + 2 \cdot 360°) =$
$= \sin(45° - 2 \cdot 360°) = \sin(45° + 3 \cdot 360°) = \ldots = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

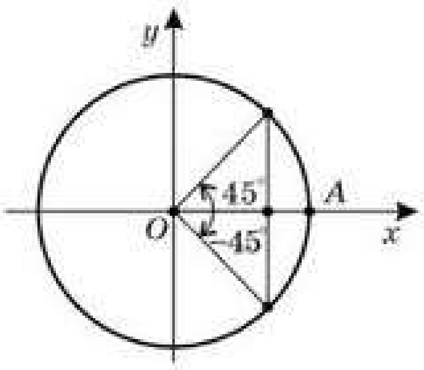
Бұл қасиет кез келген бұрыштың синусы, косинусы, тангенсі және котангенсінің мәнін табуды 360°-тан кіші теріс емес бұрыштың мәнін табуға әкеледі.

МЫСАЛ

2. 1) $\sin 1470°$; 2) $\cos(-1845°)$ өрнегінің мәнін табайық.

Шешуі. 1470° бұрышта қанша толық бұрыш бар екенін анықтайық. Ол үшін 1470° : 360° амалын орындаймыз. Сонда бөліндіде 4 және қалдықта 30° шығады. Демек, $1470° = 360° \cdot 4 + 30°$.

Ендеше $\sin 1470° = \sin(360° \cdot 4 + 30°) = \sin 30° = \frac{1}{2}$.



68-сурет

2) −1845° бұрышта қанша толық бұрыш бар екенін анықтайық. Ол үшін 1845° : 360° амалын орындаймыз. Сонда бөліндіде 5 және қалдықта 45° шығады.

Демек, $-1845° = -360° \cdot 5 - 45°$.

$\cos(-1845°) = \cos(-360° \cdot 5 - 45°) = \cos(-45°) =$
$= \frac{\sqrt{2}}{2}$, себебі $\cos(-45°) = \cos 45°$ (68-сурет).

Жауабы : 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Жоғарыда көрсетілген қасиеттері бар функцияларды *периодты функциялар* деп атайды.

Егер $y = f(x)$ анықталу облысынан алынған кез келген x үшін $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$ теңдігі орындалатындай нөлге тең емес T саны бар болса, онда $y = f(x)$ функциясы периодты функция, ал ең кіші T саны функцияның ***периоды*** *деп аталады.*

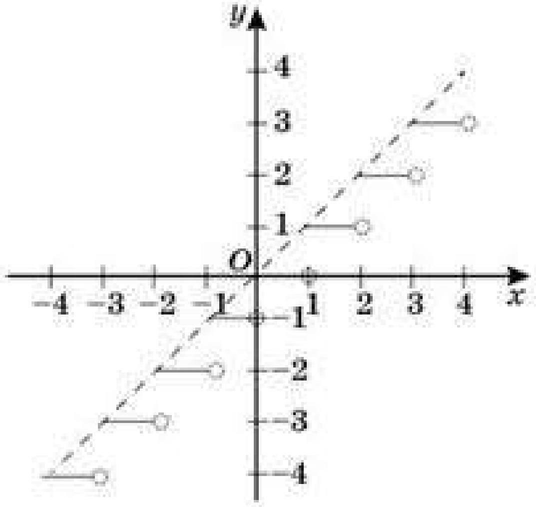
Демек, $y = \sin x$; $y = \cos x$; $y = \operatorname{tg} x$; $y = \operatorname{ctg} x$ функциялары периодты функциялар.

Тригонометриялық функциялардан басқа да периодты функциялар болады. $y = [x]$ функциясы, мұндағы $[x]$ — x санының бүтін бөлігі (x-тен артпайтын ең үлкен бүтін сан), $y = \{x\}$ функциясын, мұндағы $\{x\}$ — x санының бөлшек бөлігі, анықтауға мүмкіндік береді. Анықтама бойынша $\{x\} = x - [x]$ (мысалы, $\{3,7\} =$

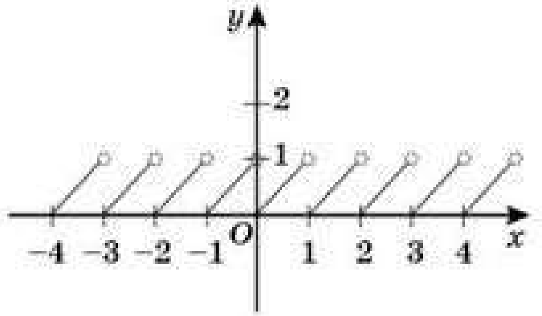
$= 0{,}7$; $\{-6\} = 0$; $\{-4{,}2\} = -4{,}2 - (-5) = 0{,}8$). Санның бөлшек бөлігі — периоды $T = 1$ болатын функция.

Санның бүтін бөлігі x-тен Антье деп аталады және $E(x) = [x]$ деп белгіленеді. $E(x) = [x]$ графигі 69-суретте берілген.

Санның бөлшек бөлігінің $y = \{x\} = x - [x]$ графигі 70-суретте көрсетілген.



69-сурет

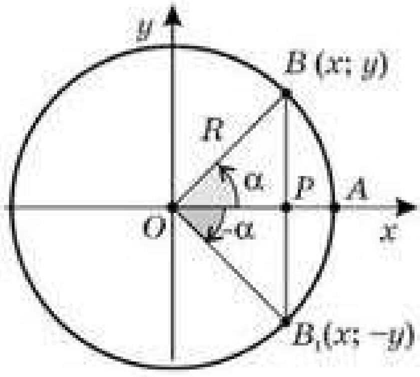


70-сурет

Тригонометриялық функциялардың жұптылығы

Тікбұрышты координаталар жүйесінде центрі координаталар басында және радиусы OA кесіндісі болатын шеңберді қарастырайық.

OA радиусын α бұрышына бұрғанда OB радиусына, ал OA радиусын $-\alpha$ бұрышына бұрғанда OB_1 радиусына көшсін (71-сурет). Егер B және B_1 нүктелерін косса, онда OBB_1 теңбүйірлі үшбұрышы шығады. OP осы BOB_1 үшбұрышының биссектрисасы. Сондықтан B және B_1 нүктелері Ox осіне қарағанда симметриялы болады.



71-сурет

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР

Ox осіне қарағанда симметриялы нүктелердің абсциссалары бірдей, ал ординаталары қарама-карсы болатыны белгілі. Сондыктан B нүктесінің координаталарын x және y арқылы белгілесек, онда B_1 нүктесінің координаталары x және $-y$ болады.

Сонда $\sin(-\alpha) = \dfrac{-y}{R} = -\sin\alpha$; $\quad \operatorname{tg}(-\alpha) = \dfrac{-y}{x} = -\operatorname{tg}\alpha$;

$$\cos(-\alpha) = \frac{x}{R} = \cos\alpha; \quad \operatorname{ctg}(-\alpha) = \frac{x}{-y} = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

Яғни, мына теңдіктерді аламыз:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha; \qquad \cos(-\alpha) = \cos\alpha;$$
$$\mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha; \qquad \mathrm{ctg}(-\alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha.$$

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР

Функцияның анықталу облысынан алынған кез келген x үшін $f(-x) = f(x)$ теңдігі орындалса, онда функцияның жұп, ал егер $f(-x) = -f(x)$ теңдігі орындалса, онда функцияның тақ болатыны белгілі. Сондықтан жоғарыда алынған теңдіктерден $y = \sin x$; $y = \mathrm{tg}\,x$; $y = \mathrm{ctg}\,x$ функциялары *тақ* функциялар, ал $y = \cos x$ функциясы *жұп* функция болады деген қорытынды жасауға болады.

МЫСАЛ

3. Тригонометриялық функциялардың жұптылығын қолданып, $\sin(-60°)$; $\cos(-60°)$; $\mathrm{tg}(-45°)$; $\mathrm{ctg}(-30°)$ өрнектерінің мәндерін табайық.

Шешуі. $\sin(-60°) = -\sin 60° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos(-60°) = \cos 60° = \dfrac{1}{2}$; $\mathrm{tg}(-45°) = -\mathrm{tg}45° = -1$; $\mathrm{ctg}(-30°) = -\mathrm{ctg}30° = -\sqrt{3}$.

Жауабы: $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\dfrac{1}{2}$; -1; $-\sqrt{3}$.

?

1. $\sin\alpha = 2$; $\cos\alpha = -0{,}0001$; $\mathrm{tg}\,x = 1\,000\,000$ теңдігі тура болатындай бұрыш болуы мүмкін бе?
2. Қай ширекте синус, косинус, тангенс және котангенстің таңбалары бірдей?
3. Қарама-қарсы бұрыштардың синусы, косинусы, тангенсі және котангенсі арасында қандай байланыс бар?
4. Теріс бұрыштың синусы оң болуы мүмкін бе? Мысал келтіріңдер.

Жаттығулар

A

21.1. Егер:
1) $\alpha = 67°$; 2) $\alpha = 127°$; 3) $\alpha = 267°$; 4) $\alpha = 319°$ болса, онда $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$ өрнектері мәндерінің таңбалары қандай?

21.2. 1) $\sin 79°$; 2) $\sin 187°$;
3) $\cos 145°$; 4) $\cos 235°$;
5) $\mathrm{tg}123°$; 6) $\mathrm{tg}247°$;
7) $\sin 88° \cos 124°$; 8) $\sin 128° \cos 224°$;

9) $\sin 280°\ \cos 254°$; 10) $\sin 258°\ \cos 184°$ өрнегі мәнінің таңбасын анықтаңдар.

21.3. Егер:
1) $\sin\alpha > 0$ және $\cos\alpha < 0$; 2) $\sin\alpha < 0$ және $\cos\alpha < 0$;
3) $\sin\alpha < 0$ және $\cos\alpha > 0$; 4) $\sin\alpha > 0$ және $\cos\alpha > 0$;
5) $\sin\alpha < 0$ және $\operatorname{tg}\alpha > 0$; 6) $\operatorname{tg}\alpha > 0$ және $\cos\alpha < 0$ болса,
онда α бұрышы қай ширекте орналасқан?

21.4. 1) $\sin\frac{3\pi}{5}$; 2) $\sin\frac{7\pi}{4}$; 3) $\cos\frac{13\pi}{3}$; 4) $\cos\frac{31\pi}{7}$;
5) $\operatorname{tg}\frac{15\pi}{4}$; 6) $\operatorname{ctg}\frac{36\pi}{11}$; 7) $\sin\ 2{,}7\pi$; 8) $\sin\ (-1{,}4\ \pi)$;
9) $\cos(-3{,}5\ \pi)$; 10) $\cos(-5{,}6\ \pi)$; 11) $\operatorname{tg}(-4{,}2\ \pi)$; 12) $\operatorname{ctg}(-5{,}2\ \pi)$.
өрнегі мәнінің таңбасын анықтаңдар.

21.5. 1) $\sin 0{,}6$ және $\sin 4{,}8$; 2) $\sin 1{,}6$ және $\sin 5{,}4$;
3) $\cos 1{,}96$ және $\cos 5{,}8$; 4) $\cos 1{,}2$ және $\sin 3{,}8$ өрнектерінің мәндерін салыстырыңдар.

21.6. 1) $\sin\frac{\pi}{3}$; $\sin\frac{5\pi}{6}$; $\sin\frac{4\pi}{3}$; 2) $\cos\frac{\pi}{4}$; $\cos\frac{5\pi}{6}$; $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$;
3) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$; $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{6}$; $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}$ өрнектерінің мәндерін өсу ретімен жазыңдар.

21.7. R жиынында $f(x)$ функциясы берілген. $x = 2$ болғанда, $f(2 + a) = f(2)$ және $x = 5$ болғанда, $f(5 + a) = f(5)$. $f(x)$ функциясы периодты және оның периоды $T = a$ деп айтуға бола ма?

21.8. 1) $\sin 30° - 2\cos(-60°)$; 2) $2\operatorname{tg}225° - \cos 45°$;
3) $3\cos 270° - \operatorname{ctg}250°$; 4) $4\sin 60° - \operatorname{ctg}(-60°)$ айырымының таңбасын анықтаңдар.

B

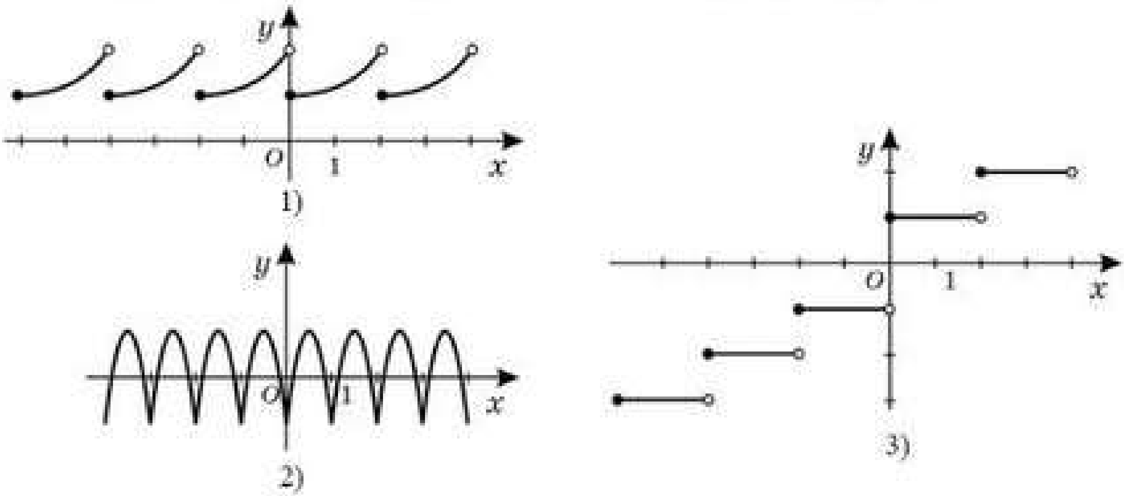
21.9. 1) $\sin 45°\ \cos 120°\ \operatorname{tg}135°$; 2) $\sin 60°\ \cos 180°\ \operatorname{ctg}135°$;
3) $\sin 215°\ \cos 150°\ \operatorname{tg}225°$; 4) $\operatorname{tg}145°\ \cos 220°\ \operatorname{tg}335°$ санды өрнегі мәнінің таңбасын анықтаңдар.

21.10. Егер:
1) $270° < \alpha < 360°$ болса, онда $\cos^2\alpha < \cos\alpha$;
2) $180° < \alpha < 270°$ болса, онда $\cos^2\alpha > \cos\alpha$;
3) $90° < \alpha < 180°$ болса, онда $\sin^2\alpha < \sin\alpha$;
4) $270° < \alpha < 360°$ болса, онда $\sin^2\alpha > \sin\alpha$ теңсіздігін дәлелдеңдер.

21.11. Егер:

1) $|\sin\alpha| = \sin\alpha$; 2) $|\sin\alpha| > \sin\alpha$; 3) $|\cos\alpha| = \cos\alpha$; 4) $|\cos\alpha| > \cos\alpha$; 5) $|\operatorname{tg}\alpha| = \operatorname{tg}\alpha$; 6) $|\operatorname{tg}\alpha| > \operatorname{tg}\alpha$; 7) $|\operatorname{ctg}\alpha| = \operatorname{ctg}\alpha$; 8) $|\operatorname{ctg}\alpha| > \operatorname{ctg}\alpha$ болса, онда α бұрышы қай ширекке тиісті болады?

21.12. $y = f(x)$ функциясының графигі бойынша функцияның периодты болатынын анықтаңдар. Егер $y = f(x)$ функциясы периодты болса, онда оның периодын табыңдар (72-сурет).



72-сурет

21.13. 1) $1 - \sin215°\cos135°\operatorname{tg}229°$; 2) $\sin320°\cos285°\ \operatorname{tg}30° - 2$ өрнегінің таңбасын табыңдар.

21.14. $y = f(x)$ функциясының периоды $T = 3$ екені белгілі.

1) $y = f(x) + 5$; 2) $y = f(x) - 3$; 3) $y = 2f(x)$; 4) $y = -f(x)$

функциясының периодын табыңдар.

21.15. Егер параллелограмның бір бұрышының косинусының мәні:

1) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $-0{,}5$; 4) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ болса, онда параллелограмның бұрыштарын табыңдар.

21.16. Егер параллелограмның бір бұрышының тангенсінің мәні:

1) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; 2) $\sqrt{3}$; 3) -1; 4) $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ болса, онда параллелограм ның бұрыштарын табыңдар.

21.17. Егер теңбүйірлі трапецияның бір бұрышының косинусының мәні:

1) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $-0{,}5$; 4) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ болса, онда трапецияның бұрыштарын табында р.

21.18. $0° < \alpha < 90°$ екені белгілі.
1) $\sin\alpha > \sin^4\alpha$; 2) $\cos\alpha > \cos^4\alpha$;
3) $\sin\alpha > \sin\alpha \cdot \cos\alpha$; 4) $\operatorname{tg}\alpha > \sin\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha$ теңсіздігін дәлелдеңдер.

C

21.19. Егер $0° < \alpha < 90°$ болса, онда $\sin\alpha + \cos\alpha > 1$ теңсіздігін дәлелдеңдер.

21.20. Кез келген α бұрышы үшін $|\sin\alpha| + |\cos\alpha| \geq 1$ теңсіздігінің тура болатынын дәлелдеңдер.

21.21. 1) $1 + 3\sin 2x$; 2) $3 - 2\sin 3x$; 3) $4 - 3\cos 2x$; 4) $2 - 0{,}5\cos x$ өрнегінің ең кіші және ең үлкен мәнін табыңдар.

***21.22.** R жиынында $y = f(x)$ функциясы берілген және оның периоды $T = 4$. $x \in [0; 4]$ аралығында функция $y = x^2 - 4x$ формуласымен берілген. $y = f(x)$ функциясының R жиынындағы графигін салыңдар.

21.23. 1) $1 + \sin^2 2x$; 2) $4 - \sin^4 3x$;
3) $4 - 3|\cos 2x|$; 4) $2{,}4 - 0{,}5\cos^2 x$ өрнегінің ең кіші және ең үлкен мәнін табыңдар.

***21.24.** $y = f(x)$ функциясының периодын табыңдар:
1) $y = \sin 2\pi x + \cos 4\pi x$; 2) $y = \sin \pi x + \cos 2\pi x$;
3) $y = \cos 4\pi x + \sin 8\pi x$; 4) $y = \operatorname{tg} 4\pi x + \sin 2\pi x$.

ҚАЙТАЛАУ

21.25. 1) $y = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$; 2) $y = \dfrac{x^2 - 9}{x + 3}$; 3) $y = \dfrac{2x^2}{x}$; 4) $y = \dfrac{2(x-1)^2}{x - 1}$
функцияс ының графигін салып, мәндер жиынын көрсетіңдер.

21.26. 1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ x^2 - y^2 = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 18, \\ xy = 9 \end{cases}$ теңдеулер жүйесін шешің дер.

21.27. 1) $\dfrac{x + a}{x^2 + ax + a^2} \cdot \dfrac{x^3 - a^3}{a^2 - x^2} : \left(1 - \dfrac{1 + a}{a}\right)$;

2) $\left(\dfrac{4b + a}{2b} + \dfrac{6b}{a - 4b}\right) + \left(\dfrac{a^2 - 2ab + b^2}{4b^2 - a^2} + 1\right)$ өрнегін ықшамдаңдар.

21.28. Тікбұрышты үшбұрыштың катеттерінің қосындысының мәні 79 см-ге тең. Егер оның бір катетін 23 см-ге арттырып, екіншісін 11 см-ге кемітсе, онда шыққан үшбұрыш пен берілген үшбұрыштың гипотенузаларының ұзындығы бірдей болады. Үшбұрыштың катеттерінің ұзындықтарын табыңдар.

Жаңа білімді меңгеруге дайындаламыз

21.29. Тепе-теңдіктің ақиқаттығын тексеріңдер:

1) $\sin^2 60° + \cos^2 60° - \text{tg}45° = 0$;

2) $\sin^2 45° + \cos^2 45° - \text{ctg}45° = 0$.

21.30. $\sin\alpha$ және $\cos\alpha$ қандай ширектерде:

1) бірдей таңбаны; 2) әртүрлі таңбаларды қабылдайды?

Жаңа білімді меңгеруге арналған тірек ұғымдар

Тепе-теңдік, бұрыштың тригонометриялық функциясы, тригонометриялық функциялар аргументінің мүмкін болатын мәндері, тригонометриялық функциялардың мәндер жиыны, жұп және тақ тригонометриялық функциялар, Пифагор теоремасы.

§ 22. ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ТЕПЕ-ТЕҢДІКТЕР

Түйінді ұғымдар

Тригонометриялық тепе-теңдіктер, синус, косинус, тангенс және котангенс

Негізгі тригонометриялық тепе-теңдіктерді қорытып шығару мен қолдануды үйренесіңдер.

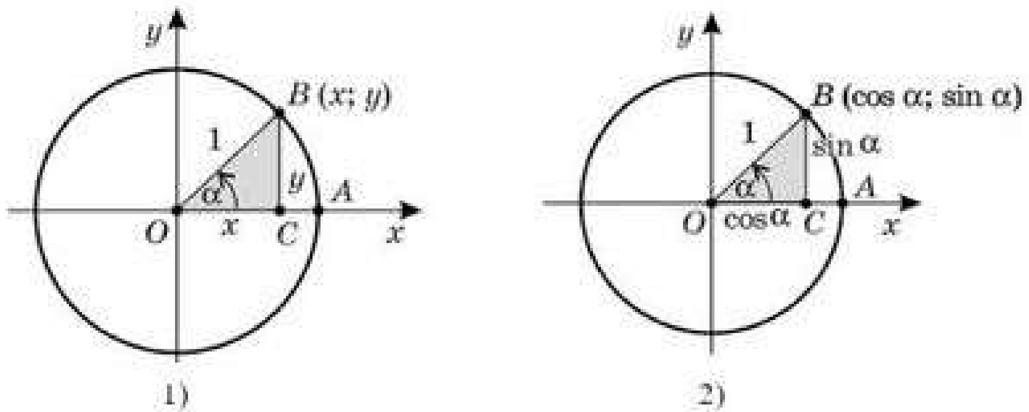
$\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\text{tg}\,\alpha$, $\text{ctg}\,\alpha$-ның мәндері радиустың шамасына тәуелді емес, тек бұрыштың шамасына ғана тәуелді болғандықтан, тригонометриялық функцияларды қарастырғанда радиусы 1-ге тең шеңберді аламыз. Онда, мысалы, синус функциясының мәні OB жылжымалы радиусының ұшы B нүктесінің y ординатасымен, ал косинус функциясының мәні OB жылжымалы радиусының B нүктесінің x абсциссасымен анықталады (73.1-сурет).

OBC тікбұрышты үшбұрышын қарастырайық (73.2-сурет). Пифагор теоремасы бойынша $OB^2 = OC^2 + BC^2$.

$OB = 1$, $OC = x = \cos\alpha$, $BC = y = \sin\alpha$ болғандықтан, $1 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$ немесе

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \qquad (1)$$

Бұл теңдік α-ның кез келген мәнінде тура болады, яғни ол тепе-теңдік.



73-сурет

Анықтама бойынша $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}$ және $y = \sin \alpha$, $x = \cos \alpha$ болғандықтан,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \qquad (2)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}. \qquad (3)$$

(1) — (3) теңдіктерді *негізгі тригонометриялық тепе-теңдіктер* деп атайды.

ЕСТЕ САҚТАҢДАР

Негізгі тригонометриялық тепе-теңдіктер :

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Құрамында тригонометриялық функциялары бар және бұрыштың кез келген мүмкін мәнінде ақиқат, ал функцияны кез келген шамамен алмастырғанда ақиқат болмайтын теңдік ***тригонометриялық тепе-теңдік*** *деп аталады.*

Мысалы, 1) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \sin^2\alpha + 2\sin \alpha \cos \alpha + \cos^2\alpha$ тепе-теңдігі тригонометриялық тепе-теңдік болмайды. Өйткені $\sin \alpha$ және $\cos \alpha$ шамаларын сәйкесінше a және b шамаларымен алмастырса, онда тура теңдік шығады. Онда ол алгебралық тепе-теңдік болады: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

2) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + 2\sin \alpha \cos \alpha$ тепе-теңдігі тригонометриялық тепе-теңдік болады. Өйткені a және b шамаларын сәйкесінше a

және b шамаларымен алмастырса, онда тура емес $(a + b)^2 = 1 + 2ab$ теңдігі шығады.

(2) және (3) тепе-теңдіктерін мүшелеп көбейтіп, $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 1$, яғни

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1 \qquad (4)$$

тригонометриялық тепе-теңдігін аламыз.

Егер (1) тепе-теңдіктің екі жағын $\sin\alpha \neq 0$ деп $\sin^2\alpha$-ға бөлсек, онда $\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}$ теңдігін, немесе

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \qquad (5)$$

тригонометриялық тепе-теңдігін аламыз.

Мына тепе-теңдіктерді дәлелдеңдер:

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \qquad (6)$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}, \qquad (7)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}. \qquad (8)$$

8-кестеде бір аргументке байланысты тригонометриялық функциялардың арасындағы қатынастар берілген.

8-кесте

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$	$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$
$\sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha}$	$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$
$\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha}$	$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$
$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$	$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$

МЫСАЛ

1. Егер $\cos\alpha = \frac{12}{13}$ және $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ болса, онда $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ және $\operatorname{ctg}\alpha$-ның мәндерін табайық.

Шешуі. (1) формуладан $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ немесе $\sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha}$. Есептің шарты бойынша α бірінші ширектің бұрышы, ал бұл ширекте көрсетілген функциялардың таңбалары оң. Ендеше $\sin\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{144}{169}} = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13}$.

(2) формула бойынша $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, ал $\sin\alpha = \frac{5}{13}$ және $\cos\alpha = \frac{12}{13}$ болғандық тан, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = \frac{5}{12}$. (8) формулада н $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{12}{5} =$ $=2,4$ аламыз .

Жауабы : $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$, $\operatorname{ctg}\alpha = 2,4$.

МЫСАЛ

2. Егер $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ және $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ болса, онда $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ және $\operatorname{ctg}\alpha$-нын мәндерін та байық.

Шешуі . Есептің шарты бойынша α бұрышы II ширектің бұрышы, сондықтан $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ және $\operatorname{ctg}\alpha$ теріс мәндерді қабылдайды. Демек, $\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = -\sqrt{3}$.

Жауабы : $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\sqrt{3}$.

МЫСАЛ

3. $\operatorname{ctg}\alpha = -3$ және $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$-ны есептейік.

Шешуі . $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$ формуласынан $\sin^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$ аламыз.

$\sin\alpha$ және $\operatorname{tg}\alpha$-ның мәндері IV ширекте теріс, ал $\cos\alpha$-ның мәні оң болғандықтан, $\sin\alpha = -\sqrt{\frac{1}{1+9}} = -\sqrt{\frac{1}{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$. $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ формуласынан $\cos\alpha = \operatorname{ctg}\alpha \cdot \sin\alpha = -3 \cdot \left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right) = \frac{3\sqrt{10}}{10}$. (7) формула дан $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha} = -\frac{1}{3}$ шығады.

Жауабы : $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{3}$.

1. Қандай тригонометриялық функциялардың көбейтіндісі бірге тең?
2. Синус және косинус функциялары қандай тепе-теңдікпен байланысқан?
3. Қандай бұрыштың синусы мен осы бұрыштың қандай да бір ширекке тиістілігін біле отырып, берілген бұрыштың котангенсін есептеуге бола ма?

Жаттығулар

A

22.1. 1) $\cos\beta = 0,5$ және $0° < \beta < 90°$ болса, онда $\sin\beta$-ны;
2) $\sin\beta = 0,5$ және $0° < \beta < 90°$ болса, онда $\cos\beta$-ны;
3) $\cos\beta = -0,5$ және $90° < \beta < 180°$ болса, онда $\sin\beta$-ны;
4) $\sin\beta = -0,5$ және $180° < \beta < 270°$ болса, онда $\cos\beta$-ны есептеңдер.

22.2. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\dfrac{1 - \sin^2\alpha}{\cos\alpha}$; 2) $\dfrac{\cos^2\alpha - 1}{\sin\alpha}$;
3) $\sin^2\alpha - (1 + \mathrm{tg}^2\alpha) \cdot \cos^2\alpha$;
4) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha \cdot (1 + \mathrm{ctg}^2\alpha) \cdot \sin^2\alpha$.

22.3. Егер:
1) $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ болса, онда $1 - \sin\alpha \cos\alpha \,\mathrm{ctg}\,\alpha$;
2) $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{2}{3}$ болса, онда $\dfrac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{ctg}\alpha}{\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{ctg}\alpha}$;
3) $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{2}{5}$ болса, онда $\dfrac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$;
4) $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{3}{2}$ болса, онда $\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$;
5) $\sin\alpha = \dfrac{2}{3}$ болса, онда $\dfrac{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}{1 - \mathrm{ctg}^2\alpha}$;
6) $\cos\alpha = -\dfrac{1}{3}$ болса, онда $\dfrac{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}{1 - \mathrm{ctg}^2\alpha}$ өрнегінің мәнін табыңдар.

22.4. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{\mathrm{tg}\alpha} - 1$; 2) $\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{\mathrm{ctg}\alpha} - 1$;
3) $\dfrac{1}{1 - \cos\alpha} - \dfrac{1}{1 + \cos\alpha}$; 4) $\dfrac{1 + \mathrm{tg}\alpha}{1 + \mathrm{ctg}\alpha}$;
5) $\dfrac{1 - \mathrm{ctg}\alpha}{1 - \mathrm{tg}\alpha}$; 6) $\dfrac{\mathrm{tg}\alpha - 1}{\mathrm{ctg}\alpha - 1}$;

7) $\dfrac{1}{1+\sin\alpha}-\dfrac{1}{1-\sin\alpha}$; 8) $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha+1}{\operatorname{tg}\alpha+1}$;

9) $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\operatorname{ctg}\alpha$; 10) $\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}-\operatorname{tg}\alpha$;

11) $\dfrac{\sin\beta}{1-\cos\beta}+\dfrac{\sin\beta}{1+\cos\beta}$; 12) $\dfrac{\cos\beta}{1+\sin\beta}+\dfrac{\cos\beta}{1-\sin\beta}$.

22.5. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $\dfrac{\sin x+\cos x}{1+\operatorname{tg}x}=\cos x$; 2) $\dfrac{\operatorname{ctg}x-1}{\sin x-\cos x}=-\sin x$;

3) $\dfrac{1+\operatorname{ctg}x}{\sin x+\cos x}=\sin x$; 4) $\dfrac{\sin x-\cos x}{1-\operatorname{tg}x}=-\cos x$.

22.6. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\cos^2\alpha+\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha-1}{\operatorname{tg}^2\alpha+1}$; 2) $\sin^2\varphi+\dfrac{\operatorname{ctg}^2\varphi-1}{\operatorname{ctg}^2\varphi+1}$;

3) $\dfrac{\operatorname{ctg}^2\gamma-1}{\operatorname{ctg}^2\gamma+1}-\cos^2\gamma$; 4) $\dfrac{\operatorname{tg}^2x-1}{\operatorname{tg}^2x+1}-\sin^2x$.

B

22.7. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$; 2) $\dfrac{2\sin^2\alpha-1}{\sin\alpha+\cos\alpha}$;

3) $\dfrac{\cos^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha}{\sin^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}$; 4) $\operatorname{ctg}\beta+\dfrac{\sin\beta}{1+\cos\beta}$.

22.8. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $\sin^2x-\cos^2x=\sin^4x-\cos^4x$;

2) $(1+\cos\alpha)(1+\operatorname{tg}\alpha)=1+\sin\alpha+\cos\alpha+\operatorname{tg}\alpha$;

3) $(\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x)^2-(\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x)^2=4$;

4) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$;

5) $\sin^3x\,(1+\operatorname{ctg}x)+\cos^3x\,(1+\operatorname{tg}x)=\sin x+\cos x$;

6) $\dfrac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{\operatorname{ctg}\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}=2\operatorname{tg}^2\alpha$.

***22.9.** α-ның барлық мүмкін болатын мәндерінде теңдіктің тура болатынын дәлелдеңдер:

1) $3\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1$;

2) $\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}-\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha-1}=\sin\alpha+\cos\alpha$.

22.10. Өрнектің мәні айнымалыға тәуелді болмайтынын дәлелдеңдер:

1) $\dfrac{2\sin x\cos x - 1}{(\sin x - \cos x)^2}$; 2) $\dfrac{1}{1+\mathrm{ctg}^2 x} + \dfrac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x}$;

3) $\dfrac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\sin^4\alpha - \cos^4\alpha}$; 4) $\dfrac{1}{1-\mathrm{tg}^2 x} + \dfrac{1}{1-\mathrm{ctg}^2 x}$.

22.11. Егер:

1) $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{1}{3}$ болса, онда $\mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{ctg}^2\alpha$; 2) $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$ болса, онда $3\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha$ өрнегінің мәнін табыңдар.

22.12. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\dfrac{1}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} + \sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}$; 2) $\dfrac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}} + \sqrt{1-\sin^2\alpha}$.

22.13. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $\dfrac{\cos^3\beta - \sin^3\beta}{1+\cos\beta\sin\beta} = \cos\beta - \sin\beta$;

2) $\dfrac{\cos\beta}{1+\sin\beta} - \dfrac{\cos\beta}{1-\sin\beta} = -2\mathrm{tg}\,\beta$;

3) $(1+\mathrm{tg}\,\beta)^2 + (1-\mathrm{tg}\,\beta)^2 = \dfrac{2}{\cos^2\beta}$;

4) $\dfrac{1-4\cos^2\beta\sin^2\beta}{(\cos\beta+\sin\beta)^2} + 2\cos\beta\cdot\sin\beta = 1$.

22.14. 1) $1 - \sin\gamma\cos\gamma\,\mathrm{tg}\,\gamma$ өрнегін ықшамдап, $\sin\gamma = 0{,}6$ болғандағы;

2) $\cos^4\beta + \cos^2\beta\sin^2\beta$ өрнегін ықшамдап, $\mathrm{tg}\,\beta = 3$ болғандағы;

3) $\dfrac{\sin\beta}{1+\cos\beta} + \dfrac{\sin\beta}{1+\cos\beta}$ өрнегін ықшамдап, $\sin\beta = 0{,}3$ болғандағы;

4) $\dfrac{\cos\beta}{1-\sin\beta} + \dfrac{\cos\beta}{1+\sin\beta}$ өрнегін ықшамдап, $\cos\beta = 0{,}4$ болғандағы мәнін табыңдар.

22.15. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha} + \mathrm{ctg}\,\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha}$; 2) $\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} + \mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$;

3) $\sin(-\alpha)\,\mathrm{ctg}\,\alpha + \cos(-\alpha) = 0$; 4) $\cos\alpha\,\mathrm{tg}(-\alpha) - \sin(-\alpha) = 0$.

22.16. Егер $\mathrm{tg}\,\alpha = 3$ болса, онда:

1) $\dfrac{4\cos\alpha - 2\sin\alpha}{3\sin\alpha + \cos\alpha}$; 2) $\dfrac{5\cos\alpha + 3\sin\alpha}{3\sin\alpha - 2\cos\alpha}$;

3) $\dfrac{4\cos\alpha - 3\sin\alpha}{3\sin^3\alpha + \cos^3\alpha}$; 4) $\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha - 2\sin^2\alpha}{3\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha}$

өрнегінің мәнін табыңдар.

22.17. Егер $\operatorname{ctg}\alpha = 3$ болса, онда:

1) $\dfrac{4\cos\alpha - \sin\alpha}{2\sin\alpha + \cos\alpha}$; 2) $\dfrac{4\cos\alpha + 6\sin\alpha}{3\sin\alpha - 2\cos\alpha}$;

3) $\dfrac{5\cos\alpha - 9\sin\alpha}{\sin^3\alpha + 5\cos^3\alpha}$; 4) $\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha - 3\sin^2\alpha}{3\sin^2\alpha + 5\cos^2\alpha}$

өрнегінің мәнін табыңдар.

C

***22.18.** Теңдеулер жүйесін құрамында α параметрі болмайтындай теңдеумен алмастырыңдар:

1) $\begin{cases} x = 4\cos\alpha, \\ y = 4\sin\alpha; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 4\cos\alpha, \\ y = 6\sin\alpha; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = \sin\alpha + \cos\alpha, \\ y = \sin\alpha\cos\alpha; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \operatorname{tg}^4\alpha + \operatorname{ctg}^4\alpha = x, \\ \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha = y. \end{cases}$

22.19. 1) $\sin^2\alpha + 3\cos^2\alpha - 3$; 2) $3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 1$;

3) $4\sin^2\alpha + 3\operatorname{ctg}\alpha\,\operatorname{tg}\alpha$; 4) $5\cos^2\alpha - \operatorname{ctg}\alpha\,\operatorname{tg}\alpha$ өрнегінің ең үлкен және ең кіші мәндері болатындай α-ның мәндерін табыңдар.

22.20. α-ның мүмкін болатын мәндерінде:

1) $\dfrac{(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)^2 - (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha)^2}{\dfrac{1}{\cos^2\alpha\sin^2\alpha} - \operatorname{ctg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha}$;

2) $\cos^6\alpha + \sin^6\alpha + 3\cos^2\alpha \cdot \sin^2\alpha$ өрнегінің мәні тұрақты шама болатынын дәлелдеңдер.

22.21. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $(1 + \operatorname{tg}\beta)\cdot\cos^3\beta + (1 + \operatorname{ctg}\beta)\cdot\sin^3\beta + 1$;

2) $2 - \left(\dfrac{\operatorname{ctg}\beta + \sin\beta}{\sin\beta\operatorname{tg}\beta + 1}\right)^2 + \operatorname{ctg}^2\beta$.

22.22. 1) $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$ және $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$;

2) $\sin\alpha = \dfrac{5}{8}$ және $\cos\alpha = \dfrac{3}{8}$;

3) $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$ және $\cos\alpha = \dfrac{3}{4}$;

4) $\operatorname{tg}\alpha = 1{,}4$ және $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{5}{7}$;

5) $\operatorname{tg}\alpha = -2{,}4$ және $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{5}{12}$;

6) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$ және $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ теңдігі ақиқат болатындай α бұрышы бола ма?

22.23. Егер $\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{tg}\beta = 4$ болса, онда $\operatorname{ctg}^2\beta + \frac{1}{\cos\beta\sin\beta} + \operatorname{tg}^2\beta$ өрнегінің мәнін табыңдар.

22.24. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $1 - \sin^2 3\beta - \cos^2 3\beta$;

2) $\frac{\left(\sin^2 4\alpha - \cos^2 4\alpha\right)^2}{1 - 4\sin^2 4\alpha\cos^2 4\alpha}$;

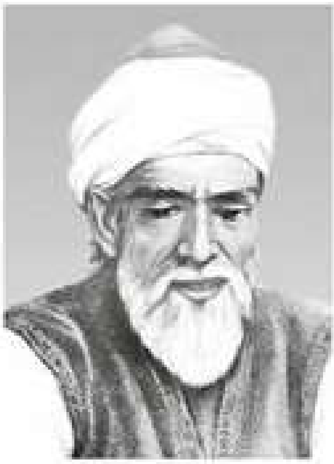
3) $2 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha - \sin^4\alpha - \cos^4\alpha$;

4) $1 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha - \sin^6\alpha - \cos^6\alpha$.

22.25. $\sin\beta + \cos\beta = 0{,}6$ екені белгілі. 1) $\sin\beta - \cos\beta$; 2) $\sin^3\beta + \cos^3\beta$; 3) $\sin^4\beta + \cos^4\beta$; 4) $\sin^6\beta + \cos^6\beta$ өрнегінің мәнін табыңдар.

ҒАЛЫМ-МАТЕМАТИК ТУРАЛЫ ХАБАРЛАМА ДАЙЫНДАҢДАР

22.26. *X* ғàñûðäà Áàғäàä ғàëûìû Әáó-ë-Âåôà ñèíóñ, êîñèíóñ, òàíãåíñ, êîòàíãåíñ, ñå-êàíñ, êîñåêàíñ ұғûìäàðûí және îëàðäûң àðàñûíäàғû íåãiçãi қàòûíàñòàðäû åíãiçäi. Ортағасырлық шығыс математигі Әбу-л-Вефа туралы хабарлама дайындаңдар.



Әбу-л-Вефа (940—998)

ҚАЙТАЛАУ

22.27. 1) Егер $a_{53} = 30$ болса, онда арифметикалық прогрессияның алғашқы 105 мүшесінің қосындысының мәнін табыңдар.

2) Егер $a_{103} = 15$ болса, онда арифметикалық прогрессияның алғашқы 207 мүшесінің қосындысының мәнін табыңдар.

22.28. Теңдеудің графигін салыңдар:

1) $\frac{y - x^2}{x - 2} = 0$;

2) $\frac{y - x^2 + 2}{x - 2} = 0$;

3) $\frac{y - 0{,}5x^2}{|x| - 2} = 0$;

4) $\frac{y + 0{,}5x^2}{|x| - 3} = 0$.

22.29. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\left(\frac{1}{a-x}-\frac{3x^2}{a^3-x^3}-\frac{x}{a^2+ax+x^2}\right)\cdot\left(\frac{a^2}{a+x}+x\right)$;

2) $\frac{2x-3}{3x}-\frac{1}{x+3}\cdot\left(\frac{x}{3}-\frac{3}{x}\right)+\frac{2}{3}$.

22.30. Теңсіздікті шешіңдер:

1) $\frac{(x^2-7x-8)(x-10)^3}{(x+2)^2(3-x)}$ m 0;

2) $\frac{(x^2-6x+8)(x^2-9)}{5(x^3-8)}$ l 0;

3) $\frac{(3x^2+5x)(4x-x^2)}{(x+5)^2}$ m 0;

4) $\frac{(x+3)^4(x-5)^3}{6(x^2+x-2)}$ l 0.

Жаңа білімді меңгеруге дайындаламыз

22.31. Өрнектердің мәндерін өсу ретімен орналастырыңдар:

1) $\sin 30^\circ$, $\cos 60^\circ$, $\sin 150^\circ$, $\cos 120^\circ$;

2) $\mathrm{tg}\,30^\circ$, $\mathrm{ctg}\,60^\circ$, $\mathrm{tg}\,150^\circ$, $\mathrm{ctg}\,120^\circ$.

22.32. Өрнектің мәнін табыңдар:

1) $\sin 90^\circ + 2\cos 150^\circ - \sin 150^\circ + \mathrm{ctg}\,120^\circ$;

2) $2\sin 120^\circ + \cos 90^\circ - \cos 120^\circ + \mathrm{tg}\,150^\circ$.

Жаңа білімді меңгеруге арналған тірек ұғымдар

Санды шеңбер, бастапқы және қозғалмалы радиус, α бұрышына бұру, санды аргументтің тригонометриялық функциялардың анықтамасы, тригонометриялық функциялардың қасиеттері, тригонометриялық функциялардың координаталық ширектердегі таңбалары, периодтылығы, жұптығы мен тақтығы, бір аргументке байланысты тригонометриялық функциялар арасындағы қатынастар.

Алгебра

§ 23. КЕЛТІРУ ФОРМУЛАЛАРЫ

Түйінді ұғымдар

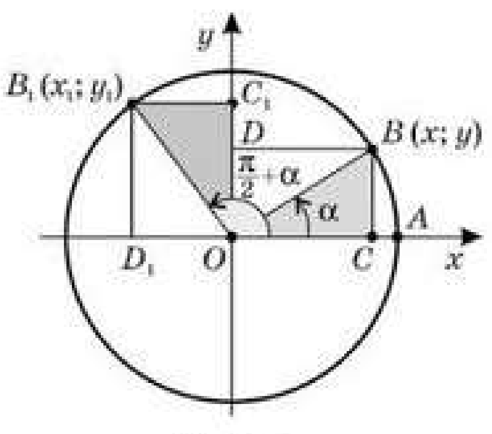
Келтіру формулалары, синус, косинус, тангенс және котангенс

Келтіру формулаларын қорытып шығару мен қолдануды үйренесіңдер.

Тригонометриялық функциялармен байланысты көптеген есептерді шығарғанда кез келген бұрыштың тригонометриялық функцияларын сүйір бұрыштың тригонометриялық функцияс ына келтірудің маңызы зор. Басқаша айтқанда, $\frac{\pi}{2}k \pm \alpha$ (мұндағы k — кез келген бүтін сан, α — сүйір бұрыш) бұрышынын триг онометриялық функциялары берілсе, онда оларды α бұрышынын тригонометриялық функцияларына келтірген ыңғайлы. Ол үшін арнайы *келтіру формулалары* қолданылады.

Алдымен синус пен косинустың келтіру формулаларын қарастырайық. Одан кейін алған формулалар арқылы тангенс пен котангенстің формулаларын қорытып шығарамыз.

II ширектегі синус және косинусты қарастырайық. II ширектің кез келген бұрышын $\frac{\pi}{2} + \alpha$ (мұндағы α — сүйір бұр ыш) түріне келтіруге болады. Шеңбер алып, оның центрі O нүктесінен айналдыра шеңбердің $R = OA$ радиусын, алдымен α бұрышына, одан кейін $\frac{\pi}{2} + \alpha$ бұрышына бұрайық (74-сурет). Осы бұрулар кезінде OA радиусы сәйкесінше OB және OB_1 радиустарына көшеді. B және B_1 нүктелерінен координаталық осьтерге перпендикуляр түсіреміз. Нәтижесінде $OCBD$ және $OC_1B_1D_1$ тіктөртбұрыштарын аламыз. $OC_1B_1D_1$ тіктөртбұрышы $OCBD$ тіктөртбұрышын O нүктесінен айналдыра оң бағытта $\frac{\pi}{2}$ бұрышына бұру арқылы шықты. Расында да, $\angle BOB_1 = \frac{\pi}{2}$ болғандықтан, бұру кезінде B нүктесі B_1 нүктесіне көшеді. Тура осылай C нүктесі C_1 нүктесіне, ал D нүктесі D_1 нүк-тесіне көшеді.



74-сурет

Сондықтан B_1 нүктесінің ординатасы ретінде B нүктесінің абсциссасын, ал B_1 нүктесінің абсциссасы ретінде B нүктесінің ординатасын қарама-қарсы таңбамен алуға болады:

$$y_1 = x \text{ және } x_1 = -y,$$

немесе

$$\frac{y_1}{R} = \frac{x}{R} \text{ және } \frac{x_1}{R} = -\frac{y}{R}.$$

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР

Анықтама бойынша бұрыштың синусы нүкте ординатасының радиуска қатынасына тең екенін білесіңдер, яғни

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{B_1D_1}{R} = \frac{y_1}{R}, \text{ ал } \sin\alpha = \frac{BC}{R} = \frac{y}{R};$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{OD_1}{R} = \frac{x_1}{R}, \text{ ал } \cos\alpha = \frac{OC}{R} = \frac{x}{R}.$$

Осы теңдіктерден мына келтіру формулаларын аламыз:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha; \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha. \qquad (1)$$

МЫСАЛ

$y = \sin x$ функциясының периоды 2π болатынын дәлелдейік.

Дәлелдеуі . $\sin(x + 2\pi n) = \sin x$, мұндағы $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ болғандықтан, синустың аргументіне $2\pi n$ -ді косқаннан функцияның мәні өзгермейді. Кез келген x үшін $\sin(x + P) = \sin x$ теңдігі орындалатындай P саны берілсін. Онда бұл теңдік $x = \frac{\pi}{2}$ үшін де орындалады, яғни, $\sin\left(\frac{\pi}{2} + P\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$. Келтіру формуласы бойынша $\sin\left(\frac{\pi}{2} + P\right) = \cos P$.

Соңғы екі теңдіктен $\cos P = 1$ аламыз, бұл теңдік $P = 2\pi n$ болғанда ғана тура. Себебі, $2\pi n$ сандарының ішіндегі нөлден өзгеше ең кіші сан 2π, демек, бұл сан $y = \sin x$ функциясының периоды болып табылады.

$\sin 2x = \sin(2x + 2\pi n) = \sin[2(x + \pi n)]$. Демек, x аргументіне πn-ді косқаннан функцияның мәні өзгермейді. Сонда πn сандарының ішіндегі нөлден өзгеше ең кіші сан π. Демек, бұл сан $y = \sin 2x$ функциясының периоды болып табылады.

$\frac{\pi}{2} - \alpha$ бұрышы үшін синус пен косинустың келтіру формулаларын қорытып шығару үшін (1) формуладағы α бұрышын $-\alpha$ бұрышымен алмастырамыз:

$\sin\left(\frac{\pi}{2} + (-\alpha)\right) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha$, өйткені косинус функциясы жұп;

$\cos\left(\frac{\pi}{2} + (-\alpha)\right) = -\sin(-\alpha) = -(-\sin\alpha) = \sin\alpha$, өйткені синус функциясы тақ функция.

Сонымен, келтіру формулаларының тағы екі түрі алынды:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha;\ \ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha. \qquad (2)$$

Бұл екі формула α сүйір бұрышы үшін ғана емес, кез келген α бұрышы үшін де тура болады.

$\pi+\alpha$ бұрышы үшін синус пен косинустың келтіру формулаларын қорытып шығарайық.

Ол үшін $\pi+\alpha$ бұрышын $\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ түріне келтіреміз және (1) формуланы екі рет қолда нып,

$\sin(\pi+\alpha)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$ аламыз, дәл осылай

$\cos(\pi+\alpha)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha.$

Яғни

$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha;\ \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha. \qquad (3)$$

$\pi-\alpha$ бұрышын $\pi+(-\alpha)$ түрінде жазып, (3) формуладан $\pi-\alpha$ бұрышының синусы мен косинусын тапсақ, мынадай келтіру формулаларын аламыз:

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha;\ \ \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha. \qquad (4)$$

(4) формуланы өздерің дәлелдеңдер.

$\frac{3\pi}{2}+\alpha$ бұрышы үшін синус пен косинустың келтіру формулаларын қорытып шығарайық. Мұнда да (3)-формуланы қорытып шығарғанда қолданған тәсілді пайдаланамыз. Басқаша айтқанда, $\frac{3\pi}{2}+\alpha$ бұрышын $\frac{\pi}{2}+(\pi+\alpha)$ түріне келтіреміз. Одан кейін (1) және (3) формулаларды біртін деп қолдана мыз. Сонда

$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin[\frac{\pi}{2}+(\pi+\alpha)]=\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha,$

$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\cos[\frac{\pi}{2}+(\pi+\alpha)]=-\sin(\pi+\alpha)=-(-\sin\alpha)=\sin\alpha.$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha;\ \ \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha. \qquad (5)$$

$\frac{3\pi}{2}-\alpha$ бұрышы үшін синус пен косинустың келтіру формулаларын қорытып шығарыңдар:

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha;\ \ \cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha. \qquad (6)$$

$2\pi+\alpha$ және $2\pi-\alpha$ бұрыштары үшін синус пен косинустың келтіру формулаларын берейік. Алдымен $2\pi+\alpha$ бұрышы үшін келтіру формулаларын қарастырамыз.

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР

Егер α бұрышына 2π толық бұрышын қоссақ, одан тригонометриялық функциялардың мәндері өзгермейтінін сендер білесіңдер.

Сондықтан келтіру формулаларын аламыз:

$$\sin(2\pi+\alpha)=\sin\alpha;\quad \cos(2\pi+\alpha)=\cos\alpha. \qquad (7)$$

(7)-формуладағы α бұрышын $-\alpha$ бұрышына ауыстырып, келесі келтіру формулаларын аламыз:

$$\sin(2\pi-\alpha)=-\sin\alpha;\quad \cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha. \qquad (8)$$

1. (8)-формуланы өздерің дәлелдеңдер.
2. $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ формуласын және жоғарыда дәлелденген (1) — (8) формулаларды қолданып, тангенс пен котангенстің келтіру формулаларын (9 —12) дәлелдеңдер:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\operatorname{ctg}\alpha;\quad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\operatorname{tg}\alpha; \qquad (9)$$

$$\operatorname{tg}(\pi\pm\alpha)=\pm\operatorname{tg}\alpha;\quad \operatorname{ctg}(\pi\pm\alpha)=\pm\operatorname{ctg}\alpha; \qquad (10)$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\operatorname{ctg}\alpha;\quad \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\operatorname{tg}\alpha; \qquad (11)$$

$$\operatorname{tg}(2\pi\pm\alpha)=\pm\operatorname{tg}\alpha;\quad \operatorname{ctg}(2\pi\pm\alpha)=\pm\operatorname{ctg}\alpha. \qquad (12)$$

(1) — (12) келтіру формулаларын бір кестеге енгізейік:

9-кесте

$\mp$

x	$\frac{\pi}{2}+\alpha$ $(90°+\alpha)$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$ $(90°-\alpha)$	$\pi+\alpha$ $(180°+\alpha)$	$\pi-\alpha$ $(180°-\alpha)$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$ $(270°+\alpha)$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$ $(270°-\alpha)$	$2\pi+\alpha$ $(360°+\alpha)$	$2\pi-\alpha$ $(360°-\alpha)$
$\sin x$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos x$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
$\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg} x$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$

Жоғарыдағы кестеден қандай заңдылықты байқауға болады?

Кестені қолданып, келесі сұрақтарға жауап беріңдер:

1. Қандай жағдайда (қандай бұрыштар үшін) тригонометриялық функцияның аты өзгермейді?
2. Қай уақытта (қандай бұрыштар үшін) тригонометриялық функцияның аты өзгереді (синус косинуска, косинус синуска, тангенс котангенске, котангенс тангенске)?
3. Келтіру формулаларының оң жақтары үшін тригонометриялық функцияның таңбасы қалай анықталады?

Бұл сұрақтарға дұрыс жауап бере отырып, төмендегідей қорытындыны аламыз:

1) егер келтірілетін тригонометриялық функцияның аргументі (бұрышы):

$\pi \pm \alpha$ ($180° \pm \alpha$), $2\pi \pm \alpha$ ($360° \pm \alpha$) болса, онда функцияның аты өзгермейді;

$\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ ($90° \pm \alpha$), $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ ($270° \pm \alpha$) болса, онда функцияның аты өзгереді, яғни синус косинуска, косинус синуска, тангенс котангенске, котангенс тангенске ауысады;

2) келтіру формуласының оң жағының таңбасы сәйкес ширекте келтірілетін функцияның таңбасымен бірдей жазылады.

МЫСАЛ

1. $\sin\frac{7}{3}\pi$ мәнін есептейік.

Шешуі. $\sin\frac{7}{3}\pi = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Жауабы: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

МЫСАЛ

2. $\cos(-780°)$ мәнін есептейік.

Шешуі. $\cos(-780°) = \cos780° = \cos(2 \cdot 360° + 60°) = \cos60° = \frac{1}{2}$.

Жауабы: $\frac{1}{2}$.

МЫСАЛ

3. $\mathrm{ctg}(-750°)$ мәнін есептейік.

Шешуі. $\mathrm{ctg}(-750°) = -\mathrm{ctg}750° = -\mathrm{ctg}(2 \cdot 360° + 30°) = -\mathrm{ctg}30° = -\sqrt{3}$.

Жауабы: $-\sqrt{3}$.

МЫСАЛ

4. 1) $\cos510°$; 2) $\mathrm{tg}1665°$; 3) $\sin\left(-\frac{17}{3}\pi\right)$ мәндерін есептейік.

Шешуі.

1) $\cos510° = \cos(360° + 150°) = \cos150° = \cos(180° - 30°) = -\cos30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

2) $\mathrm{tg}1665° = \mathrm{tg}(4 \cdot 360° + 225°) = \mathrm{tg}225° = \mathrm{tg}(180° + 45°) = \mathrm{tg}45° = 1$;

3) $\sin\left(-\frac{17}{3}\pi\right) = -\sin(3 \cdot 2\pi - \frac{\pi}{3}) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Жауабы: 1) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) 1; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

МЫСАЛ

5. 1) $\mathrm{ctg}(-5\pi-\alpha)\sin(\alpha-3\pi)$;

2) $\dfrac{\sin(2\pi-\alpha)\mathrm{tg}(\pi+\alpha)\mathrm{ctg}(-\alpha-\pi)}{\cos(\pi-\alpha)\mathrm{tg}(3\pi-\alpha)}$ өрнектерін ықшамдайық.

Шешуі.

1) $\mathrm{ctg}(-5\pi-\alpha)\sin(\alpha-3\pi)=\mathrm{ctg}[-(5\pi+\alpha)]\sin[-(3\pi-\alpha)]=$
$=-\mathrm{ctg}(5\pi+\alpha)[-\sin(3\pi-\alpha)]=-\mathrm{ctg}(\pi+\alpha)[-\sin(\pi-\alpha)]=$
$=-\mathrm{ctg}\,\alpha\,(-\sin\alpha)=\cos\alpha$.

2) $$\frac{\sin(2\pi-\alpha)\mathrm{tg}(\pi+\alpha)\mathrm{ctg}(-\alpha-\pi)}{\cos(\pi-\alpha)\mathrm{tg}(3\pi-\alpha)}=\frac{-\sin\alpha\,\mathrm{tg}\alpha[-\mathrm{ctg}(\pi+\alpha)]}{-\cos\alpha\,\mathrm{tg}(\pi-\alpha)}=$$
$$=\frac{-\sin\alpha\,\mathrm{tg}\alpha(-\mathrm{ctg}\alpha)}{-\cos\alpha(-\mathrm{tg}\alpha)}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=1.$$

Жауабы: 1) $\cos\alpha$; 2) 1.

?

1. $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{tg}\,x$, $\mathrm{ctg}\,x$ өрнектерін түрлендіргенде, x бұрышының қандай түрлері үшін келтіру формулалары қолданылады?
2. Барлық келтіру формулаларын қорытып шығару үшін қандай формулалар негізгі болып саналады?

Жаттығулар

А

23.1. Мына өрнектерді бұрышы α болатын тригонометриялық функцияға келтіріңдер:

1) $\sin(90°-\alpha)$; 2) $\cos(90°-\alpha)$; 3) $\sin(180°-\alpha)$;
4) $\cos(180°-\alpha)$; 5) $\sin(270°+\alpha)$; 6) $\cos(270°-\alpha)$;
7) $\sin(360°-\alpha)$; 8) $\cos(360°+\alpha)$; 9) $\mathrm{ctg}(180°-\alpha)$;
10) $\mathrm{tg}(90°+\alpha)$; 11) $\mathrm{ctg}(270°-\alpha)$; 12) $\mathrm{tg}(360°-\alpha)$.

23.2. Есептеңдер:

1) $\sin 225°$; 2) $\sin 330°$; 3) $\cos 210°$;
4) $\mathrm{tg}\,225°$; 5) $\cos 120°$; 6) $\mathrm{ctg}\,150°$.

23.3. Өрнектің мәнін табыңдар:

1) $\sin(-225°)$; 2) $\sin\dfrac{7\pi}{6}$; 3) $\cos\left(-\dfrac{4\pi}{3}\right)$; 4) $\mathrm{tg}(-240°)$;

5) $\cos\dfrac{25\pi}{3}$; 6) $\mathrm{ctg}\left(-\dfrac{9\pi}{4}\right)$; 7) $\sin\left(-\dfrac{17\pi}{6}\right)$; 8) $\mathrm{tg}\left(-\dfrac{19\pi}{6}\right)$.

Өрнекті ықшамдаңдар **(23.4-23.5)**:

23.4. 1) $1-\sin^2(270°+\alpha)$; 2) $1-\cos^2(270°-\alpha)$;

3) $1 - \sin^2(360° - \alpha)$; 4) $1 - \cos^2(360° + \alpha)$;

5) $1 + \text{ctg}^2(270° - \alpha)$; 6) $1 + \text{tg}^2(360° - \alpha)$.

23.5. 1) $\sin(90° - \alpha) + \cos(180° + \alpha) + \text{ctg}(270° - \alpha) + \text{tg}(360° - \alpha)$;

2) $\cos(90° + \alpha) - \sin(180° + \alpha) + \text{ctg}(270° + \alpha) + \text{tg}(360° + \alpha)$;

3) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) - \sin(\pi + \alpha) + \text{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \text{tg}(2\pi + \alpha)$;

4) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) - \cos(\pi + \alpha) + \text{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) + \text{ctg}(2\pi + \alpha)$.

23.6. Берілген тригонометриялық функцияны бұрышы $\alpha\ (0° \le \alpha \le 45°)$ болатын функцияға келтіріңдер:

1) $\sin 545°$; 2) $\cos 945°$; 3) $\text{tg}\, 1545°$;

4) $\text{ctg}\, 545°$; 5) $\sin\frac{9\pi}{4}$; 6) $\cos\frac{91\pi}{5}$;

7) $\text{tg}\frac{29\pi}{3}$; 8) $\text{ctg}\frac{39\pi}{7}$; 9) $\sin\left(-\frac{49\pi}{4}\right)$;

10) $\cos\left(-\frac{419\pi}{5}\right)$; 11) $\sin(-2489°)$; 12) $\text{tg}(-4789°)$.

23.7. Өрнектің мәнін табыңдар:

1) $\text{ctg}(-45°) \cdot \cos 225° \cdot \sin 150°$; 2) $\text{tg}(-135°) \cdot \cos 300° \cdot \sin 210°$;

3) $\text{ctg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right) \cdot \cos 150° \cdot \sin\frac{5\pi}{3}$; 4) $\text{ctg}(-225°) \cdot \cos\frac{8\pi}{3} \cdot \sin 330°$.

23.8. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $\cos^2(180° - x) + \cos^2(270° + x) = 1$;

2) $\cos^2(720° - x) + \sin^2(540° + x) = 1$;

3) $\text{tg}(2\pi - x)\,\text{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -1$;

4) $\text{ctg}(6\pi - x)\,\text{ctg}\left(\frac{9\pi}{2} - x\right) = -1$.

B

23.9. Өрнек мәнінің таңбасын анықтаңдар:

1) $\sin 135° \cdot \cos 210° \cdot \text{tg}\, 405° \cdot \text{ctg}\, 330° \cdot \cos 560°$;

2) $\sin 425° \cdot \cos 250° \cdot \text{ctg}\, 420° \cdot \text{tg}\, 330° \cdot \sin 750°$;

3) $\sin\frac{7\pi}{3} \cdot \cos\frac{2\pi}{3} \cdot \text{tg}\frac{9\pi}{4} \cdot \text{ctg}\frac{13\pi}{6} \cdot \cos\frac{7\pi}{4}$;

4) $\sin\frac{5\pi}{3} \cdot \cos\frac{7\pi}{6} \cdot \text{tg}\frac{11\pi}{4} \cdot \text{ctg}\frac{8\pi}{3} \cdot \sin\frac{11\pi}{6}$.

23.10. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\dfrac{\sin(-\alpha)\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)}{\cos(360^\circ-\alpha)\operatorname{tg}(\pi+\alpha)}$;

2) $\dfrac{\sin(\pi+\alpha)\operatorname{ctg}(2\pi-\alpha)}{\cos(720^\circ-\alpha)\operatorname{tg}(2\pi+\alpha)}$;

3) $\dfrac{\operatorname{tg}(-\alpha)\cos(\pi-\alpha)}{\sin(\pi-\alpha)\operatorname{ctg}(\pi+\alpha)}$.

23.11. Өрнектің мәнін табыңдар:

1) $\sin(-135^\circ)\cdot\cos390^\circ\cdot\operatorname{tg}405^\circ\cdot\operatorname{ctg}(-330^\circ)$;

2) $\sin(-225^\circ)\cdot\cos(-480^\circ)\cdot\operatorname{ctg}(-420^\circ)\cdot\operatorname{tg}300^\circ$.

23.12. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}(180^\circ-x)+\operatorname{ctg}(360^\circ-x)=\operatorname{ctg}(180^\circ-x)$;

2) $\operatorname{ctg}x+\operatorname{tg}(90^\circ+x)+\operatorname{tg}(360^\circ+x)=\operatorname{ctg}(270^\circ-x)$;

3) $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+\beta\right)\cdot\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\beta\right)+\sin(180^\circ-\beta)+\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2}-\beta\right)=\operatorname{tg}\beta$.

23.13. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\sin(2\pi-x)\cdot\cos(90^\circ+x)-\cos(2\pi+x)\cdot\sin(270^\circ-x)-1$;

2) $\sin(4\pi-x)\cdot\cos(270^\circ-x)+\cos(\pi+x)\cdot\sin(270^\circ+x)-1$.

23.14. Өрнектің мәнін табыңдар:

1) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{5\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}}{\sin30^\circ}$;

2) $\dfrac{\operatorname{ctg}135^\circ\sin225^\circ}{\cos\frac{\pi}{3}}$;

3) $\dfrac{\operatorname{tg}315^\circ\sin135^\circ}{\cos^2\frac{\pi}{6}}$;

4) $\dfrac{\operatorname{tg}315^\circ\sin135^\circ}{\cos^2\frac{\pi}{6}}$.

23.15. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\dfrac{\sin(-\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)}-\dfrac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{1+\sin\alpha}$;

2) $\dfrac{\cos(2\pi-\alpha)}{\sin(-\alpha)}+\dfrac{\sin(2\pi-\alpha)}{1+\cos(-\alpha)}$;

3) $\operatorname{tg}^2(270^\circ+\alpha)\cdot\sin^2(180^\circ+\alpha)+\operatorname{tg}315^\circ$;

4) $\operatorname{ctg}^2(360^\circ-\alpha)\cdot\cos^2(270^\circ+\alpha)+\sin270^\circ$.

23.16. Санды өрнектің мәнін есептеңдер:

1) $(\sin315^\circ-\cos315^\circ)^2$;

2) $(\sin225^\circ-\cos225^\circ)^2$;

3) $(\sin135^\circ+\cos135^\circ)^2$;

4) $(\sin315^\circ+\cos315^\circ)^2$.

23.17. Формуланың дұрыстығын дәлелдеңдер:

1) $\sin(45° + \alpha) = \cos(45° - \alpha)$; 2) $\cos(45° + \alpha) = \sin(45° - \alpha)$;

3) $\mathrm{tg}(45° + \alpha) = \mathrm{ctg}(45° - \alpha)$; 4) $\mathrm{ctg}(45° + \alpha) = \mathrm{tg}(45° - \alpha)$;

5) $\sin(60° - \alpha) = \cos(30° + \alpha)$; 6) $\mathrm{ctg}(80° - \alpha) = \mathrm{tg}(10° - \alpha)$.

23.18. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $\dfrac{\mathrm{tg}(\pi - x)}{\cos(\pi + x)} \cdot \dfrac{\sin(270° + x)}{\mathrm{tg}(270° + x)} = \mathrm{tg}^2 x$;

2) $\dfrac{\sin(\pi - x)}{\mathrm{tg}(\pi + x)} \cdot \dfrac{\mathrm{ctg}(270° + x)}{\mathrm{ctg}(270° + x)} \cdot \dfrac{\cos(2\pi - x)}{\sin x} = \sin x$.

23.19. 1) $\mathrm{tg}(\pi - \alpha) - 2\mathrm{tg}(-\alpha)$ өрнегін ықшамдап, $\alpha = -45°$ болғандағы;

2) $\mathrm{ctg}(2\pi - \alpha) - 2\mathrm{tg}(-2\alpha)$ өрнегін ықшамдап, $\alpha = 30°$ болғандағы;

3) $\cos(3\pi - \alpha) - 4\sin(-\alpha)$ өрнегін ықшамдап, $\alpha = -45°$ болғандағы;

4) $\cos(3\pi - \alpha) - 3\sin(-\alpha)$ өрнегін ықшамдап, $\alpha = -30°$ болғандағы мәнін табыңдар.

23.20. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\dfrac{(1 - \cos(2\pi - \alpha))(1 + \cos(2\pi + \alpha))}{\sin(\pi - \alpha)}$;

2) $\dfrac{(1 + \sin(2\pi - \alpha))(1 + \cos(2\pi + \alpha))}{\cos(\pi - \alpha)}$;

3) $\dfrac{\mathrm{tg}(\pi - \alpha)\cos(\pi + \alpha)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)}$;

4) $\dfrac{\mathrm{ctg}(\pi + \alpha)\sin(\pi + \alpha)}{\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right)}$.

23.21. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $\dfrac{\cos^2(\pi + \alpha)}{1 - \sin\alpha} - \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = 1$;

2) $\dfrac{\sin^2(\pi + \alpha)}{1 - \cos\alpha} - \cos(2\pi - \alpha) = 1$;

3) $\dfrac{\cos^2(2\pi - \alpha)}{1 + \sin(-\alpha)} + \cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right) = 1$;

4) $\dfrac{\sin^2(3\pi - \alpha)}{1 - \cos(-\alpha)} + \cos(5\pi - \alpha) = 1$.

C

23.22. Өрнектің мәнін табыңдар:

1) $\sin 135° \cdot \cos 210° \cdot \mathrm{tg} 405° \cdot \mathrm{ctg} 330°$;

2) $\sin 225° \cdot \cos 150° \cdot \mathrm{ctg} 420° \cdot \mathrm{tg} 300°$;

3) $\sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{2\pi}{3} \cdot \mathrm{tg} \frac{7\pi}{4} \cdot \mathrm{ctg} \frac{13\pi}{6}$;

4) $\sin \frac{4\pi}{3} \cdot \cos \frac{5\pi}{6} \cdot \mathrm{tg} \frac{11\pi}{4} \cdot \mathrm{ctg} \frac{19\pi}{3}$.

23.23. Егер A, B, C үшбұрыштың бұрыштары болса, онда:

1) $\sin(A + B) = \sin C$;

2) $\sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2}$;

3) $\cos(A + B) = -\cos C$;

4) $\mathrm{tg} \frac{A+B}{2} = \mathrm{ctg} \frac{C}{2}$ теңдігінің дұрыстығын дәлелдеңдер.

23.24. Өрнектің мәнін табыңдар:

1) $\mathrm{tg} 15° \cdot \mathrm{tg} 210° \cdot \mathrm{tg} 75° \cdot \mathrm{ctg} 330°$;

2) $\mathrm{ctg} 35° \cdot \mathrm{ctg} 55° \cdot \mathrm{tg} 420° \cdot \mathrm{ctg} 300°$;

3) $\sin \frac{4\pi}{3} \cdot \cos \frac{2\pi}{3} \cdot \mathrm{ctg} \frac{7\pi}{4} \cdot \mathrm{tg} \frac{13\pi}{6}$;

4) $\sin \frac{5\pi}{3} \cdot \cos \frac{5\pi}{6} \cdot \mathrm{ctg} \frac{11\pi}{4} \cdot \mathrm{tg} \frac{19\pi}{3}$.

23.25. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\mathrm{tg} 1° \cdot \mathrm{tg} 2° \cdot \ldots \cdot \mathrm{tg} 88° \cdot \mathrm{tg} 89°$;

2) $\mathrm{ctg} 1° \cdot \mathrm{ctg} 2° \cdot \ldots \cdot \mathrm{ctg} 88° \cdot \mathrm{ctg} 89°$;

3) $\mathrm{tg} 1° \cdot \mathrm{tg} 3° \cdot \ldots \cdot \mathrm{tg} 87° \cdot \mathrm{tg} 89°$;

4) $\mathrm{ctg} 2° \cdot \mathrm{ctg} 4° \cdot \ldots \cdot \mathrm{ctg} 86° \cdot \mathrm{ctg} 88°$.

23.26. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $\mathrm{ctg}^3\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}^3\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha + 2 = (\mathrm{tg}(\pi + \alpha) + \mathrm{ctg}(2\pi + \alpha))^2$;

2) $\sin^3\alpha \cdot (1 + \mathrm{tg}\,\alpha) + \cos^3\alpha \cdot (1 + \mathrm{ctg}\,\alpha) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$;

3) $\mathrm{ctg}^2(3\pi + \beta) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \cdot \frac{1}{\cos\beta} = \frac{1}{\sin^2\beta}$.

23.27. Есептеңдер:

1) $\cos 20° + \cos 40° + \cos 60° + \ldots + \cos 160° + \cos 180°$;

2) $\mathrm{tg} 20° + \mathrm{tg} 40° + \mathrm{tg} 60° + \ldots + \mathrm{tg} 160° + \mathrm{tg} 180°$;

3) $\mathrm{ctg} 15° + \mathrm{ctg} 30° + \mathrm{ctg} 45° + \ldots + \mathrm{ctg} 150° + \mathrm{ctg} 165°$.

ҚАЙТАЛАУ

23.28. $90° < \alpha < 180°$ екені белгілі. Егер:

1) $\cos\alpha = -0{,}8$ болса, онда $\sin\alpha$ және $\operatorname{ctg}\alpha$-ны;
2) $\sin\alpha = 0{,}6$ болса, онда $\cos\alpha$ және $\operatorname{ctg}\alpha$-ны;
3) $\operatorname{tg}\alpha = -4$ болса, онда $\sin\alpha$ және $\cos\alpha$-ны;
4) $\operatorname{ctg}\alpha = -6$ болса, онда $\sin\alpha$ және $\cos\alpha$-ны есептеңдер.

23.29. Функцияның графигін салыңдар:

1) $y = 3x^2 - 2|x|$; 2) $y = -x^2 - 2|x|$;
3) $y = x^2 - 2|x - 1|$; 4) $y = x^2 - |x + 2|$.

23.30. Тасжол бойымен аралығы 75 км болатын A және B пункттерінен бір-біріне қарама-қарсы бағытта шыққан автобус пен жеңіл мәшине жарты сағаттан кейін кездесті. Жеңіл мәшине A пунктіне жеткеннен кейін 25 мин өткен соң автобус B пунктіне жетті. Автобус пен жеңіл мәшиненің жылдамдықтарын табыңдар.

23.31. Теңдеулер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases} x^2-3x-18\leqslant 0, \\ |x-3|>1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+x-12\leqslant 0, \\ |x+5|\leqslant 6; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x^2+3x-14<0, \\ |x-1|\geqslant 2. \end{cases}$

Жаңа білімді меңгеруге дайындаламыз

23.32. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\cos(90° + \alpha) - 2\sin(180° + \alpha) + \operatorname{ctg}(270° + \alpha) + \operatorname{tg}(360° + \alpha)$;

2) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) - \sin(2\pi - \alpha) + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \operatorname{ctg}(2\pi + \alpha)$.

23.33. Бірлік шеңберді салыңдар және Ox осінің оң бағытымен 60°, 120°, 210°, 270° бұрышты құрайтын OA векторын кескіндеңдер, мұндағы A нүктесі — шеңбердің бойында жататын нүкте.

Жаңа білімді меңгеруге арналған тірек ұғымдар

Санды шеңбер, бастапқы және жылжымалы радиустар, негізгі тригонометриялық тепе-теңдіктер, келтіру формулалары, вектор, векторлардың скаляр көбейтіндісі.

§ 24. ЕКІ БҰРЫШТЫҢ ҚОСЫНДЫСЫ МЕН АЙЫРЫМЫНЫҢ СИНУСЫ ЖӘНЕ КОСИНУСЫНЫҢ ФОРМУЛАЛАРЫ

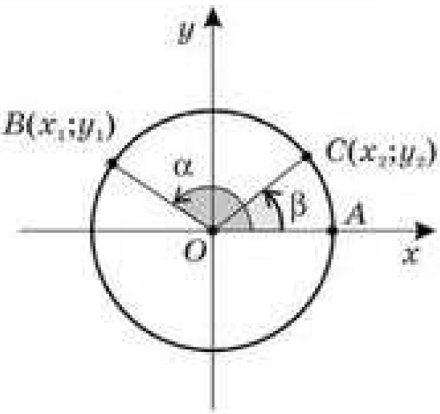
Түйінді ұғымдар

Синус, косинус

Тригонометриялық функциялардың бұрыштарының қосындысы мен айырымының формулаларын қорытып шығару мен қолдануды үйренесіңдер.

Екі бұрыштың қосындысы мен айырымының тригонометриялық функцияларын сол бұрыштардың тригонометриялық функциялары арқылы өрнектейтін формулаларды ***қосу формулалары*** *деп атайды.*

Алдымен тригонометриялық функциялар арқылы екі бұрыштың айырымының косинусының формуласын шығарайық. Ол үшін центрі тікбұрышты координаталар жүйесінің басында орналасқан және радиусы $R = OA$ болатын шеңберді қарастырайық (75-сурет).



75-сурет

OA бастапқы радиусты O нүктесінен айналдыра α және β бұрыштарына бұру нәтижесінде сәйкесінше OB және OC радиустарын аламыз. Егер B нүктесінің координаталары x_1 және y_1, ал C нүктесінің координаталары x_2 және y_2 болса, онда $\overline{OB}$ және $\overline{OC}$ векторларының координаталары сәйкесінше дәл осындай болады, яғни $\overline{OB} = (x_1; y_1)$ және $\overline{OC} = (x_2; y_2)$.

Енді $\overline{OB}$ және $\overline{OC}$ векторларының скаляр көбейтіндісін табамыз:

$$\overline{OB} \cdot \overline{OC} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2. \qquad (1)$$

α және β бұрыштарының синусы және косинусының анықтамасы бойынша $\cos\alpha = \frac{x_1}{R}$, $\sin\alpha = \frac{y_1}{R}$, $\cos\beta = \frac{x_2}{R}$, $\sin\beta = \frac{y_2}{R}$ (75-сурет). Осы теңдіктерден x_1, y_1, x_2, y_2-ні табайық: $x_1 = R\cos\alpha$, $y_1 = R\sin\alpha$, $x_2 = R\cos\beta$, $y_2 = R\sin\beta$. Енді x_1, y_1, x_2, y_2-нің мәндерін (1) теңдікке қоямыз:

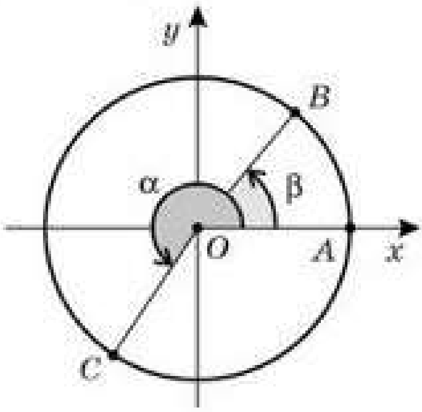
$$\overline{OB} \cdot \overline{OC} = R^2\cos\alpha\cos\beta + R^2\sin\alpha\sin\beta = R^2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta).$$

Яғни

$$\overline{OB} \cdot \overline{OC} = R^2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta). \qquad (2)$$

Екі вектордың скаляр көбейтіндісі туралы теореманы қолданып, (2) формуланың сол жақ бөлігін былай жазамыз:

$$\overline{OB} \cdot \overline{OC} = |\overline{OB}| \cdot |\overline{OC}| \cos\angle BOC. \qquad (3)$$



76-сурет

$\overline{OB}$ және $\overline{OC}$ векторларының арасындағы бұрыш BOC бұрышын, немесе $\alpha - \beta$ бұрышын, немесе $2\pi - (\alpha - \beta)$-ға тең бұрышты береді (76-сурет). BOC бұрышы көрсетілген бұрыштардан толық бұрыштың еселі санына өзгешеленуі мүмкін.

Барлық көрсетілген жағдайларда $\cos\angle BOC = \cos(\alpha - \beta)$.

Соңғы теңдікті және $|\overline{OB}| = R$, $|\overline{OC}| = R$ екенін ескеріп, (3) теңдікті былай жазамыз:

$\overline{OB} \cdot \overline{OC} = R \cdot R \cdot \cos(\alpha - \beta)$, немесе

$$\overline{OB} \cdot \overline{OC} = R^2 \cdot \cos(\alpha - \beta). \qquad (4)$$

(2) және (4) теңдіктердің сол жақтары тең, демек, олардың оң жақтары да тең болады. Яғни $R^2 \cdot \cos(\alpha - \beta) = R^2 (\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha \times$ $\times \sin\beta)$. Осыдан:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta. \qquad (5)$$

(5) формуланы *айырымның косинусы* деп атайды.

Екі бұрыштың айырымының косинусы осы бұрыштардың косинустарының көбейтіндісін сол бұрыштардың синустарының көбейтіндісіне қосқанға тең.

Екі бұрыштың қосындысының косинусының формуласын, яғни қосындының косинусын алу үшін $\alpha + \beta$ қосындысын $\alpha - (-\beta)$ айырымы түріне келтіріп, (5) формуланы қолданамыз. Сонда $\cos(\alpha + \beta) =$ $= \cos[\alpha - (-\beta)] = \cos\alpha \cdot \cos(-\beta) + \sin\alpha \cdot \sin(-\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot$ $\cdot \sin\beta$, өйткені $\cos(-\beta) = \cos\beta$, $\sin(-\beta) = -\sin\beta$.

Сонымен, мына формуланы аламыз:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta. \qquad (6)$$

(6) формуланы *қосындының косинусы* деп атайды.

Екі бұрыштың қосындысының косинусы осы бұрыштардың косинустарының көбейтіндісінен сол бұрыштардың синустарының көбейтіндісін азайтқанға тең.

Екі бұрыштың қосындысы мен айырымының синусының формулаларын қорытып шығарайық. Ол үшін (5) формула мен келтіру формулаларын қолданамыз.

$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right]=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right]=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+$ $+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$, себебі келтіру формулалары бойынша $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$.

Демек,

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta. \qquad (7)$$

(7) формуланы *қосындының синусы* деп атайды.

Екі бұрыштың қосындысының синусы бірінші бұрыштың синусы мен екінші бұрыштың косинусының көбейтіндісіне бірінші бұрыштың косинусы мен екінші бұрыштың синусының көбейтіндісін қосқанға тең.

(7) формуланы қолданып, екі бұрыштың айырымының синусының формуласын қорытып шығарайық.

$\sin(\alpha-\beta)=\sin[\alpha+(-\beta)]=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-$ $-\cos\alpha\sin\beta$, өйткені $\cos(-\beta)=\cos\beta$, $\sin(-\beta)=-\sin\beta$.

Демек,

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta. \qquad (8)$$

(8) формуланы *айырымның синусы* деп атайды.

Екі бұрыштың айырымының синусы бірінші бұрыштың синусы мен екінші бұрыштың косинусының көбейтіндісінен бірінші бұрыштың косинусы мен екінші бұрыштың синусының көбейтіндісін азайтқанға тең.

МЫСАЛ

1. Кестені пайдаланбай және микрокалькулятордың көмегінсіз $\cos 105^\circ$ өрнегінің мәнін табайық.

Шешуі. 105° бұрышын $60^\circ+45^\circ$ қосындысы түрінде жазайық:

$\cos 105^\circ=\cos(60^\circ+45^\circ)=\cos 60^\circ\cos 45^\circ-\sin 60^\circ\sin 45^\circ=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=$ $=\frac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{3})$.

Жауабы: $\frac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{3})$.

МЫСАЛ

2. $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$ өрнегін ықшамдаңдар.

Шешуі . Қосындысы мен айырымының синусының формулаларын қолданамыз:

$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=$
$=2\cos\alpha\sin\beta$.

Жауабы : $2\cos\alpha\sin\beta$.

1. α және β бұрыштарының қосындысы мен айырымының синусы мен косинусының формулалары қандай бұрыштарға қолданылады?
2. Қосу формулаларын атаңдар.

Жаттығулар

A

24.1. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\sin(60°+\alpha)+\sin(\alpha-60°)$; 2) $\cos(60°+\alpha)+\cos(\alpha-60°)$;
3) $\sin(30°+\alpha)-\sin(30°-\alpha)$; 4) $\cos(30°+\alpha)-\cos(30°-\alpha)$;
5) $\cos2\varphi\cos3\varphi+\sin2\varphi\sin3\varphi$; 6) $\sin\gamma\cos2\gamma-\cos\gamma\sin2\gamma$;
7) $\cos\frac{1}{3}\alpha\cos\frac{2}{3}\alpha-\sin\frac{1}{3}\alpha\sin\frac{2}{3}\alpha$; 8) $\sin\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{3}{2}\gamma+\cos\frac{1}{2}\gamma\sin\frac{3}{2}\gamma$.

24.2. Өрнектің мәнін табыңдар:

1) $\sin20°\cos10°+\cos20°\sin10°$; 2) $\cos50°\cos5°+\sin50°\sin5°$;
3) $\sin71°\cos11°-\cos71°\sin11°$; 4) $\cos25°\cos65°-\sin25°\sin65°$.

24.3. Есептеңдер:

1) $\cos\frac{8\pi}{15}\cdot\cos\frac{\pi}{5}+\sin\frac{8\pi}{15}\cdot\sin\frac{\pi}{5}$;

2) $\cos\frac{1}{10}\pi\cdot\cos\frac{2}{5}\pi-\sin\frac{1}{10}\pi\cdot\sin\frac{2}{5}\pi$;

3) $\sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{\pi}{12}+\cos\frac{\pi}{6}\cdot\sin\frac{\pi}{12}$;

4) $\sin\frac{1}{9}\pi\cdot\cos\frac{4}{9}\pi-\cos\frac{1}{9}\pi\cdot\sin\frac{4}{9}\pi$.

24.4. α және β бұрыштары I ширекке тиісті және $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\beta=$ $=\frac{1}{3}$ екені белгілі.

1) $\sin(\alpha+\beta)$; 2) $\sin(\alpha-\beta)$; 3) $\cos(\alpha+\beta)$; 4) $\cos(\alpha-\beta)$ өрнегінің мәнін табыңдар.

24.5. Қосу формулаларын қолданып өрнектің мәнін табыңдар:

1) $\sin105°$; 2) $\cos105°$; 3) $\sin165°$; 4) $\cos165°$.

24.6. Қосу формулаларын қолданып тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$; 2) $\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$;

3) $\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right) = -\sin\alpha$; 4) $\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$.

24.7. Өрнекті α бұрышының тригонометриялық функциясы арқылы өрнектеңдер:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$; 2) $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$; 3) $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$;

4) $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$; 5) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$; 6) $\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$.

24.8. Қосу формуласын қолданып есептеңдер:

1) $\sin15°$; 2) $\sin75°$; 3) $\cos15°$; 4) $\cos75°$;

5) $\mathrm{tg}15°$; 6) $\mathrm{tg}75°$; 7) $\mathrm{ctg}15°$; 8) $\mathrm{ctg}75°$.

24.9. Егер:

1) $\sin\alpha = 0{,}3$ және $0° < \alpha < 90°$ болса, онда $\sin(45° - \alpha)$;

2) $\cos\alpha = 0{,}4$ және $0° < \alpha < 90°$ болса, онда $\sin(60° + \alpha)$;

3) $\sin\alpha = 0{,}2$ және $0° < \alpha < 90°$ болса, онда $\cos(45° - \alpha)$;

4) $\cos\alpha = 0{,}1$ және $0° < \alpha < 90°$ болса, онда $\sin(30° + \alpha)$ өрнегінің мәнін табыңдар.

B

24.10. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $2\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right) - \sqrt{3}\sin\alpha$; 2) $\frac{1}{2}\cos\alpha - \cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$;

3) $\sqrt{2}\sin\alpha - 2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$; 4) $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha$.

24.11. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\sin(\alpha+\beta) - \sin\beta\cos\alpha$; 2) $\sin\alpha\sin\beta + \cos(\alpha+\beta)$;

3) $\cos(\alpha-\beta) - \cos\alpha\cos\beta$; 4) $\cos\alpha\sin\beta + \sin(\alpha-\beta)$.

24.12. Егер:

1) $\cos\alpha = -0{,}5$ және $90° < \alpha < 180°$ болса, онда $\sin(45° - \alpha)$;

2) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ және $90° < \alpha < 180°$ болса, онда $\sin(60° + \alpha)$;

3) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ және $90° < \alpha < 180°$ болса, онда $\cos(60° + \alpha)$;

4) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ және $90° < \alpha < 180°$ болса, онда $\cos(30° - \alpha)$ өрнегінің мәнін табыңдар.

24.13. Өрнектің мәнін табыңдар:

1) $\dfrac{\sin\frac{3\pi}{20}\cdot\cos\frac{21\pi}{10}+\cos\frac{3\pi}{20}\cdot\sin\frac{\pi}{10}}{\cos\frac{7\pi}{24}\cdot\cos\frac{\pi}{8}+\sin\frac{7\pi}{8}\cdot\sin\frac{7\pi}{24}}$;

2) $\dfrac{\sin\frac{15\pi}{7}\cdot\sin\frac{4\pi}{21}+\cos\frac{4\pi}{21}\cdot\cos\frac{6\pi}{7}}{\sin\frac{7\pi}{24}\cdot\cos\frac{\pi}{24}-\cos\frac{7\pi}{24}\cdot\sin\frac{23\pi}{24}}$.

24.14. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\cos\beta + \sin\beta - \sqrt{2}\sin(45° + \beta)$;

2) $\cos\beta + \sqrt{3}\sin\beta - 2\cos(60° - \beta)$;

3) $\cos\beta - \sin\beta - \sqrt{2}\sin(45° - \beta)$;

4) $\sqrt{3}\cos\beta + \sin\beta - 2\cos(30° - \beta)$.

24.15. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $\sin(\alpha + \beta) + \sin(-\alpha)\cos\beta = \cos\alpha\sin\beta$;

2) $\cos(\alpha - \beta) - \sin(-\alpha)\sin(-\beta) = \cos\alpha\cos\beta$;

3) $\sin(\alpha - \beta) + \cos(-\alpha)\sin(-\beta) = \sin\alpha\cos\beta$;

4) $\cos(\alpha + \beta) - \cos(-\alpha)\cos(-\beta) = -\sin\alpha\cos\beta$;

5) $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$;

6) $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$;

7) $\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$;

8) $\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta$.

24.16. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}$;

2) $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}$;

3) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}$;

4) $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}$.

C

24.17. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $\cos\alpha\cos(\beta + \gamma) - \cos\beta\cos(\alpha + \gamma) = \sin\gamma\sin(\alpha - \beta)$;

2) $\sin(\alpha - \beta)\sin\gamma + \sin(\beta - \gamma)\sin\alpha = \sin(\alpha - \gamma)\sin\beta$.

24.18. Егер α, β және γ үшбұрыштың бұрыштары болса, онда мына теңдіктердің дұрыстығын дәлелдеңдер:
1) $\sin\alpha = \sin\beta\sin\gamma + \cos\beta\sin\gamma$; 2) $\cos\alpha = \sin\beta\sin\gamma - \cos\beta\cos\gamma$.

24.19. Үшбұрыштың екі сүйір бұрышының синусының мәндері 0,6 және 0,8. Үшбұрыштың үшінші бұрышының синусының мәнін табыңдар.

24.20. Үшбұрыштың екі бұрышының косинусының мәндері $\frac{2}{3}$ және $\frac{1}{3}$. Үшбұрыштың үшінші бұрышының косинусының мәнін табың дар.

24.21. Өрнектің ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңдар:
1) $\sin\alpha + \cos\alpha$; 2) $\sin\alpha - \cos\alpha$; 3) $\sqrt{3}\cos\gamma - \sin\gamma$;
4) $\sin\beta + \sqrt{3}\cos\beta$; 5) $2\sin\alpha - 3\cos\alpha$; 6) $4\cos\gamma + 5\sin\gamma$.

ҚАЙТАЛАУ

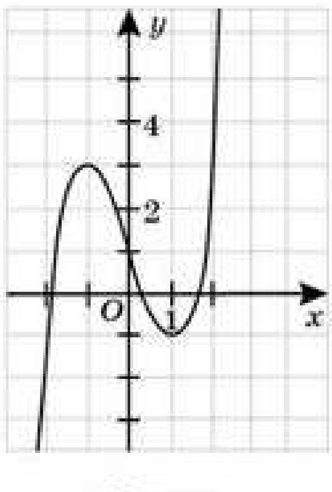
24.22. Теңдеулер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases} x + y - 5xy = 0, \\ x - y - xy = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - x + 1 = y, \\ y^2 - y + 1 = x. \end{cases}$

24.23. 1) 40 т темір кенінен 6% қоспасы бар 20 т шойын алады. Кенде қанша пайыз қоспа барын табыңдар.
2) Жаңа жиналған саңырауқұлақтың 90%-ы, кептірілген саңырауқұлақтың 12%-ы судан тұрады. 20 кг жаңа жиналған саңырауқұлақтан қанша килограмм кептірілген саңырауқұлақ алуға болады?

24.24. 1) $y = \frac{3}{x}$ және $y = x^2 - 3x$; 2) $y = \frac{1}{x}$ және $y = -0{,}5x^3$ функцияларының графиктерін бір координаталық жазықтыққа салыңдар және графиктердің қиылысу нүктелерінің координаталарын жазыңдар.

24.25. PISA 77-суретте $f(x) = ax^3 + bx + c$ функциясының графигі берілген.
Графикті қолданып:
1) функция графигінің симметрия центрі болатын нүктенің координаталарын жазыңдар;
2) $x \in [-2;\ 2]$ болса, онда функцияның мәндер жиынын көрсетіңдер;



77-сурет

3) $2f(-2) - 3f(0) + 2f(1) - 2f(2)$ өрнегінің мәнін табыңдар;
4) $f(x) = ax^3 - bx - c$ функциясы үшін ac өрнегінің таңба сын анықтаңдар.

Жаңа білімді меңгеруге дайындаламыз

24.26. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$; 2) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta\cos\alpha}$.

24.27. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta$; 2) $\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta - 1$.

24.28. Егер $\sin\alpha = \dfrac{2}{5}$ және $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ болса, онда $\operatorname{tg}\alpha$ және $\operatorname{ctg}\alpha$ мәндерін табыңдар.

Жаңа білімді меңгеруге арналған тірек ұғымдар

Негізгі тригонометриялық тепе-теңдіктер, бұрыштардың қосындысының және айырымының синусы мен косинусы.

§ 25. ЕКІ БҰРЫШТЫҢ ҚОСЫНДЫСЫ МЕН АЙЫРЫМЫНЫҢ ТАНГЕНСІ МЕН КОТАНГЕНСІНІҢ ФОРМУЛАЛАРЫ

Түйінді ұғымдар

Тангенс, котангенс

? Бұрыштардың қосындысының және айырымының тангенсі мен котангенсінің формулаларын қорытып шығару мен қолдануды үйренесіңдер.

Тангенс пен котангенстің қосындысының формулаларын қорытып шығару үшін §24-тегі (5) — (8) формулаларды, сонымен қатар, тангенс пен котангенстің синус пен косинус арқылы өрнектелетін формулаларын қолдануға болады.

Мысал ретінде тангенстің қосындысының формуласын қорытып шығарайық:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}.$$

$\cos\alpha \neq 0$ және $\cos\beta \neq 0$ деп ұйғарып, шыққан бөлшектің алымы мен бөлімін $\cos\alpha \cdot \cos\beta$ көбейтіндісіне бөлеміз:

$$\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 - \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Демек,

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \quad (1)$$

(1) формуланы *қосындының тангенсі* деп атайды.

Екі бұрыштың қосындысының тангенсі осы бұрыштардың тангенстерінің қосындысын бір саны мен осы бұрыштардың тангенстерінің көбейтіндісінің айырымына бөлгенге тең.

Айырымның тангенсін, яғни

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \quad (2)$$

формуласының ақиқаттығын өздерің дәлелдеңдер.

(1) және (2) формулаларды біріктіріп, мына формуланы аламыз:

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \quad (3)$$

Қосынды мен айырымның котангенсін, яғни

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta} \text{ және } \operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}. \quad (4)$$

немесе $\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}$ формулаларының ақиқаттығын екі тәсілмен дәлелдеңдер.

МЫСАЛ

Егер $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3}$, α және β сүйір бұрыштар болса, онда α және β бұрыштарының қосындысының мәнін табайық.

Шешуі. $\alpha + \beta$ қосындысының тангенсінің мәнін табу үшін (1) формуланы қолданамыз:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{6}}{1 - \frac{1}{6}} = 1.$$

$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = 1$, бұдан $\alpha + \beta = 45°$ шығады.

Жауабы: 45°.

?

1. α және β бұрыштарының тангенсі мен котангенсінің қосындысы мен айырымының формулалары қандай бұрыштарға қолданылады?
2. Қосынды мен айырымның тангенсінің $\pm$ және $\mp$ таңбалары нені білдіреді? Осындай таңбалары бар формулалар қалай қолданылады?

Жаттығулар

A

25.1. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$ және $\operatorname{tg}\beta = \frac{3}{5}$ екені белгілі.

1) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$; 2) $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$; 3) $\operatorname{ctg}(\alpha + \beta)$; 4) $\operatorname{ctg}(\alpha - \beta)$ өрнегінің мәнін табыңдар.

25.2. Егер $\operatorname{ctg}(\alpha + \beta)$ және $\operatorname{ctg}(\alpha - \beta)$ болса, онда $\operatorname{ctg}\alpha = 2$ және $\operatorname{ctg}\beta = -1{,}6$ өрнектерінің мәндерін табыңдар.

25.3. Тангенс пен котангенстің қосу формулаларын қолданып, өрнектің мәнін табыңдар:

1) $\operatorname{tg}15°$; 2) $\operatorname{ctg}15°$; 3) $\operatorname{tg}75°$;

4) $\operatorname{tg}105°$; 5) $\operatorname{ctg}75°$; 6) $\operatorname{ctg}105°$.

25.4. α бұрышын тригонометриялық функциялар арқылы өрнектеңдер:

1) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$; 2) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$; 3) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$;

4) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$; 5) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)$; 6) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)$.

25.5. Өрнектің мәнін табыңдар:

1) $\dfrac{\operatorname{tg}20° + \operatorname{tg}25°}{1 - \operatorname{tg}20°\operatorname{tg}25°}$; 2) $\dfrac{\operatorname{tg}70° - \operatorname{tg}10°}{1 + \operatorname{tg}70°\operatorname{tg}10°}$;

3) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{7\pi}{24} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}{1 + \operatorname{tg}\frac{7\pi}{24}\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}$; 4) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{20} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{5}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{20}\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}}$.

B

25.6. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$;

2) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) \cdot \operatorname{tg}(\alpha - \beta) \cdot (1 - \operatorname{tg}^2\alpha \cdot \operatorname{tg}^2\beta)$.

25.7. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $\dfrac{\operatorname{tg}(\alpha + \beta) - \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(\alpha + \beta)} = \operatorname{tg}\beta$;

2) $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta$.

25.8. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\dfrac{tg^2 25° - tg^2 15°}{1 - tg^2 25° tg^2 15°}$; 2) $\dfrac{tg^2 1,8 - tg^2 1,2}{1 - tg^2 1,8 tg^2 1,2}$.

25.9. Өрнекті түрлендіріңдер:

1) $tg(45° + \alpha) \cdot tg(45° - \alpha)$; 2) $tg(\alpha + 60°) \cdot tg(\alpha - 60°)$;

3) $\dfrac{1 - tg\alpha}{1 + tg\alpha} - tg(45° - \alpha)$; 4) $tg(45° + \alpha) - \dfrac{1 - tg\alpha}{1 + tg\alpha}$.

25.10. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $\dfrac{tg\alpha + tg\beta}{tg\alpha - tg\beta} - \dfrac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)} + \dfrac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha\sin\beta} = ctg\,\alpha + ctg\,\beta$;

2) $\dfrac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin\alpha\sin\beta} + \dfrac{\sin(\beta - x)}{\sin\beta\sin x} + \dfrac{\sin(x - \alpha)}{\sin x\sin\alpha} = 0$.

C

25.11. Егер α және β бұрыштары I ширектің бұрыштары болса, онда төмендегі теңсіздіктердің дұрыстығын дәлелдеңдер:

1) $\sin(\alpha + \beta) < \sin\alpha + \sin\beta$; 2) $\sin(\alpha + \beta) < \cos\alpha + \cos\beta$;

3) $\cos(\alpha - \beta) < \cos\alpha + \sin\beta$; 4) $tg(\alpha + \beta) > tg\,\alpha + tg\,\beta$.

25.12. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $(tg\,\alpha - 1) \cdot tg\,\beta + (tg\,\alpha + tg\,\beta) \cdot ctg(\alpha + \beta)$;

2) $1 - \dfrac{tg(\alpha + \beta) - tg\alpha - tg\beta}{tg\alpha tg(\alpha + \beta)}$.

25.13. $tg\,\alpha = \dfrac{3}{8}$, $tg\,\beta = \dfrac{5}{11}$ (мұндағы α және β — бірінші ширектің бұрыштары) екені белгілі. $\alpha + \beta = 45°$ болатынын дәлелдеңдер.

25.14. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $\dfrac{tg 4\beta - tg 3\beta}{1 + tg 4\beta tg 3\beta} = tg(\beta - 5\pi)$; 2) $\dfrac{tg^2 2\beta - tg^2\beta}{1 - tg^2 2\beta tg^2\beta} = tg\,\beta \cdot tg 3\beta$.

ҚАЙТАЛАУ

25.15. Өрнектің мәндерінің жиынын табыңдар:

1) $\sin\alpha + 2\cos\alpha$; 2) $3\sin\alpha - \cos\alpha$; 3) $\sqrt{3}\cos\gamma + \sin\gamma$;

4) $\sin\beta - \sqrt{3}\cos\beta$; 5) $5\sin\alpha - 4\cos\alpha$; 6) $\cos\gamma + 3\sin\gamma$.

25.16. Үшбұрыштың сүйір бұрыштарының синустары 0,6 және 0,8-ге тең. Үшбұрыштың үшінші бұрышының косинусын табыңдар.

25.17. Теңсіздікті шешіңдер:

1) $x^2 + 3|x| - 18$ l 0; 2) $x^2 - 2|x - 2| - 9$ m 0.

25.18. Функцияның графигін салыңдар және мәндер жиынын табыңдар:

1) $y = x^2 + 3|x|$; 2) $y = -x^2 + 2|x|$;

3) $y = 2x^2 - 3|x - 1|$; 4) $y = -2x^2 + |x + 1|$.

Жаңа білімді меңгеруге дайындаламыз

25.19. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $\sin(\alpha - \beta) + \sin(-\alpha)\cos(-\beta) = \cos\alpha\sin(-\beta)$;

2) $\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) = 2\cos\alpha\cos(-\beta)$;

3) $\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta) = 2\sin(-\alpha)\cos(-\beta)$;

4) $\sin(\beta - \alpha)\sin(\alpha + \beta) = \sin^2\beta - \sin^2\alpha$.

25.20. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\sin\beta + \cos\beta + \sqrt{2}\sin(45° - \beta)$;

2) $\sqrt{3}\cos\beta + \sin\beta - 2\cos(\beta - 30°)$.

25.21. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $\dfrac{\mathrm{tg}\,5\beta - \mathrm{tg}\,3\beta}{1 + \mathrm{tg}\,5\beta\,\mathrm{tg}\,3\beta} = \mathrm{tg}\,2\beta$; 2) $\dfrac{\mathrm{tg}^2\,3\beta - \mathrm{tg}^2\beta}{1 - \mathrm{tg}^2\,3\beta\,\mathrm{tg}^2\beta} = \mathrm{tg}\,2\beta \cdot \mathrm{tg}\,4\beta$.

Жаңа білімді меңгеруге арналған тірек ұғымдар

Негізгі тригонометриялық тепе-теңдіктер, тригонометриялық функцияларды қосу формулалары.

§ 26. ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ ҚОСБҰРЫШЫНЫҢ ЖӘНЕ ЖАРТЫБҰРЫШЫНЫҢ ФОРМУЛАЛАРЫ

Түйінді ұғымдар

Синус, косинус, тангенс, котангенс

Қосбұрыштың және жартыбұрыштың формулаларын қорытып шығару мен қолдануды үйренесіңдер.

Тригонометриялық өрнектерді ықшамдау, тепе-теңдіктерді дәлелдеу кезінде және басқа да жағдайларда қосбұрыштың тригонометриялық функцияларын сол бұрыштың тригонометриялық функциялары арқылы өрнектеу керек болады. Басқа сөзбен айтқанда, 2α бұрышының синус, косинус, тангенс және котангенсін α бұрышының тригонометриялық функциясы арқылы өрнектеу керек болады.

Қосбұрыштың формулаларын қосу формулалары арқылы қорытып шығаруға болады. Мысалы, қосындының синусының формуласын, яғни $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ формуласын қолданып және осы формуладағы β-ны α-мен алмастырып, $\sin 2\alpha$-ны табуға болады.

Сонда $\sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, немесе қосбұрыштың синусының формуласы н аламы з:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha. \tag{1}$$

Қосбұрыштың синусы осы бұрыштың синусы мен осы бұрыштың косинусының екі еселенген көбейтіндісіне тең.

Төмендегі формулалардың дұрыстығын өздерің дәлелдеңдер:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha. \tag{2}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}. \tag{3}$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha}. \tag{4}$$

(1) — (4) формулалары *қосбұрыштың формулалары* деп аталады.

Қосбұрыштың формулалары:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}.$$

МЫСАЛ

1. $\dfrac{\cos 80^\circ}{\cos 40^\circ + \sin 40^\circ}$ өрнегін ықшамдайық.

Шешуі. 80° бұрышты екі көбейткіштің көбейтіндісі түрінде жазып, (2) формуланы колданамыз: $\cos 80^\circ = \cos(2 \cdot 40^\circ) = \cos^2 40^\circ - \sin^2 40^\circ = (\cos 40^\circ + \sin 40^\circ) \cdot (\cos 40^\circ - \sin 40^\circ)$. Енді $\dfrac{\cos 80^\circ}{\cos 40^\circ + \sin 40^\circ}$ бөлшегіндегі $\cos 80^\circ$ өрнегінің орнына $(\cos 40^\circ + \sin 40^\circ) \cdot (\cos 40^\circ - \sin 40^\circ)$ өрнегін қоямыз:

$$\frac{\cos 80^\circ}{\cos 40^\circ + \sin 40^\circ} = \frac{(\cos 40^\circ + \sin 40^\circ)(\cos 40^\circ - \sin 40^\circ)}{\cos 40^\circ + \sin 40^\circ} = \cos 40^\circ - \sin 40^\circ.$$

Жауабы : $\cos 40^\circ - \sin 40^\circ$.

МЫСАЛ

2. $4\sin\alpha\cos\alpha \cdot (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = \sin 4\alpha$ тепе-теңдігін дәлелдейік.

Дәлелдеуі . Теңдіктің сол жағына синустың қосбұрышының (1) және косинустың қосбұрышының (2) формулаларын қолданамыз. Сонда

$4\sin\alpha\cos\alpha \cdot (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 2 \cdot \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha = \sin 4\alpha$.

МЫСАЛ

3. Егер $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ және $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ болса, онда $\sin 2\alpha$-ны табайық.

Шешуі . Синустың қосбұрышының, яғни $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ формуласын қолданамыз. $\sin 2\alpha$-ның мәнін есептеу үшін $\sin\alpha$ мен $\cos\alpha$-ның мәндерін білу керек. $\sin\alpha$-ның мәні есептің шарты бойынша белгілі, $\cos\alpha$-ның мәні белгісіз. Бұл мәнді табу үшін негізгі тригонометриялық тепе-теңдікті қолданамыз және α бұрышы бірінші ширекке тиісті екенін ескереміз. Сонда

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Енді $\sin 2\alpha$-ның мәнін есептейміз:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{4\sqrt{5}}{9}, \text{ немесе } \sin 2\alpha = \frac{4\sqrt{5}}{9}.$$

Жауабы : $\frac{4\sqrt{5}}{9}$.

Дәрежені төмендету формулаларының дұрыстығын өздерің дәлелдеңдер.

Дәрежені төмендету формулалары:

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha);$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha).$$

Тригонометриялық функциялардың жартыбұрышының формулаларын қорытып шығарайық. Ол үшін косинустың қосбұрышының, яғни $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ формуласын қолданамыз. Бұл теңдік кез келген бұрыш үшін, оның ішінде $\frac{\alpha}{2}$ бұрышы үшін де орындалады. Сондықтан бұл формуладағы α бұрышының орнына $\frac{\alpha}{2}$ бұрышын қоямыз:

$$\cos\alpha = \cos\left(2 \cdot \frac{\alpha}{2}\right) = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2},$$

немесе

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}. \qquad (A)$$

Негізгі тригонометриялық тепе-теңдікті $\frac{\alpha}{2}$ бұрышы үшін жазайық:

$$1 = \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}. \qquad (B)$$

(A) және (B) теңдіктерінің сол және оң жақтарын мүшелеп қоссақ, $1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$ аламыз. Бұдан $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$.

(B) теңдігінен (A) теңдігін мүшелеп азайтайық:

$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$, бұдан $\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$.

Жартыбұрыштың синусы мен косинусының формулалары:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}, \qquad (5)$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}. \qquad (6)$$

Жартыбұрыштың тангенсі мен котангенсінің формулаларының ақиқаттығын өздерің дәлелдеңдер:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}; \quad \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}}.$$

МЫСАЛ

4. $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ және $180° < \alpha < 270°$ екені белгілі. $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ өрнектерінің мәндерін табайық.

Шешуі. $180° < \alpha < 270°$ болғандықтан, $90° < \frac{\alpha}{2} < 135°$, яғни $\frac{\alpha}{2}$ бұрышы II ширекке тиісті. Сондықтан бұл бұрыштың синусы оң, ал косинусы теріс болады: $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)}{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,

$\cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}} = -\sqrt{\frac{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)}{2}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$. Ал $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ өрнегінің мәнін екі тәсілмен табуға болады:

1-тәсіл. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = -\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}{1+\left(-\frac{3}{5}\right)}} = -2.$

2-тәсіл. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} : \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = -2.$

Жауабы : $\frac{2\sqrt{5}}{5}$; $-\frac{\sqrt{5}}{5}$; -2.

$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ өрнегін $\sin\alpha$ мен $\cos\alpha$ арқылы өрнектейік:

$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$, өйткені $2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1+\cos\alpha$

немесе

$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$, өйткені $2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1-\cos\alpha$.

Сонымен, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

МЫСАЛ

5. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$ өрнегінің мәнін табайық.

Шешуі. $\frac{\pi}{8}$ бұрышы I ширектің бұрышы. Демек, тангенстің жарт бұрышының формуласы бойынша $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}-1.$

Жауабы : $\sqrt{2}-1$.

МЫСАЛ

6. $\frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{4}\sin 2\alpha$ тепе-теңдігін дәлелдейік.

Дәлелдеуі. $\frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos^2\alpha}{\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}} = \frac{\cos^2\alpha\sin\alpha}{2\cos\alpha} =$

$= \frac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{4}\sin 2\alpha.$

1. α және β қосбұрыштарының және жартыбұрыштарының косинусы, синусы мен тангенсінің формулалары қандай бұрыштарға қолданылады?
2. Дәрежені төмендету формулаларын қандай α және β бұрыштарына қолдануға болады?

Жаттығулар

A

26.1. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\dfrac{\sin 2x}{2\cos x}$; 2) $\dfrac{2\sin^2 x}{\sin 2x}$; 3) $\sin^2 x - \cos^2 x$;

4) $\dfrac{\cos 2x}{\sin x - \cos x}$; 5) $\dfrac{\sin 2\alpha - 2\sin\alpha}{\cos\alpha - 1}$; 6) $\dfrac{\cos\alpha - \sin 2\alpha}{1 - 2\sin\alpha}$;

7) $\dfrac{(\sin x - \cos x)^2}{1 - \sin 2x}$; 8) $\dfrac{\cos 2\alpha \operatorname{tg} 2\alpha}{2\sin\alpha}$; 9) $\dfrac{2\cos x\cos 2x}{\operatorname{ctg} 2x}$.

26.2. Өрнектің мәнін табыңдар:

1) $\dfrac{\cos^2\frac{\pi}{8}}{1 - \sin^2\frac{\pi}{8}}$; 2) $\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{12}} + 1$; 3) $2 - \dfrac{2\operatorname{tg}75^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 75^\circ}$;

4) $2\sin 15^\circ\cos 15^\circ$; 5) $4\sin 15^\circ\cos 15^\circ\cos 30^\circ$; 6) $\cos^2 15^\circ\cos^2 75^\circ$.

Өрнекті ықшамдаңдар **(26.3-26.4)**:

26.3. 1) $1 - 2\sin^2\alpha$; 2) $2\cos^2\alpha - 1$; 3) $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha$;

4) $\dfrac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$; 5) $\operatorname{tg}2\alpha(1 - \operatorname{tg}^2\alpha)$.

26.4. 1) $\dfrac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}$; 2) $\dfrac{\cos\beta}{\cos\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\beta}{2}}$; 3) $\dfrac{\cos^2 2\alpha}{\sin 4\alpha}$; 4) $\dfrac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2}{1 - \sin^2 2\alpha}$.

26.5. 1) $\sin\alpha$ және $\cos\alpha$; 2) $\operatorname{tg}\alpha$; 3) $\operatorname{ctg}\alpha$-ны $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$ арқылы өрнектеңдер.

26.6. Егер $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ және $\sin\alpha = \dfrac{2}{5}$ болса, онда $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{ctg} 2\alpha$ және $\operatorname{tg} 2\alpha$-ны табыңдар.

26.7. Егер $\operatorname{tg}\alpha = 2{,}4$ және $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$ болса, онда $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{ctg} 2\alpha$ және $\operatorname{tg} 2\alpha$-ны есептеңдер.

26.8. Егер $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = 0{,}5$ болса, онда $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$-ны табыңдар.

26.9. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha - \cos 2\alpha$;
2) $\sin 2\beta - \operatorname{tg}\beta - \cos 2\beta \operatorname{tg}\beta$;
3) $\operatorname{ctg}\varphi - \sin 2\varphi - \operatorname{ctg}\varphi \cos 2\varphi$;
4) $\dfrac{1}{1 - \operatorname{tg}\alpha} - \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}\alpha}$;
5) $(\sin\alpha - \sin\beta)^2 + (\cos\alpha - \cos\beta)^2$;
6) $1 + \dfrac{1 - \cos 2x + \sin 2x}{1 + \cos 2x + \sin 2x}$;
7) $\cos\alpha(\cos\alpha + \cos\beta) + \sin\alpha(\sin\alpha + \sin\beta)$;
8) $1 + \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - 2\operatorname{ctg}2\alpha$;
9) $\cos^2\alpha - 4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\cos^2\dfrac{\alpha}{2} - \cos 2\alpha$;
10) $\operatorname{ctg}2\alpha - \operatorname{ctg}\alpha$.

26.10. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $4\sin^2 1°\cos^2 1° - \cos^2 2°$;
2) $16\sin^2 3°\cos^2 3°\cos^2 6°$;
3) $(\sin 10° + \sin 80°)(\cos 80° - \cos 10°)$;
4) $(\cos 5° + \cos 95°)(\sin 85° + \sin 175°)$;
5) $\dfrac{\cos 36° + \sin^2 18°}{\cos^2 18°} - 1$;
6) $\dfrac{\cos 56°}{\cos 28° + \sin 28°} + \sin 28°$.

26.11. Егер $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$ және $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ болса, онда $\sin\dfrac{\alpha}{2}$, $\cos\dfrac{\alpha}{2}$, $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$ және $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$-ны табыңдар.

26.12. Егер $\sin\alpha = \dfrac{14}{50}$ және $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ болса, онда $\sin\dfrac{\alpha}{2}$, $\cos\dfrac{\alpha}{2}$ және $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$-ны табыңдар.

26.13. Жартыбұрыштың формуласын қолданып, $\sin 22°30'$; $\cos 22°30'$ және $\operatorname{tg}22°30'$ өрнектерінің мәнін табыңдар.

26.14. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $1 + \sin\alpha = 2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}\right)$;
2) $1 - \sin\alpha = 2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}\right)$.

B

26.15. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $1 - 8\sin 2\beta \cdot \cos 2\beta$;
2) $\operatorname{tg}\beta \cdot (1 + \cos 2\beta) - \sin 2\beta$;
3) $\dfrac{2\sin\beta - \sin 2\beta}{2\sin\beta + \sin 2\beta}$;
4) $\dfrac{\operatorname{ctg}(45° - \beta)}{1 - \operatorname{ctg}^2(45° - \beta)}$.

26.16. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $2 + \dfrac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha} - \dfrac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} = 0$;
2) $\operatorname{tg}\alpha + 2\operatorname{ctg}2\alpha = \operatorname{ctg}\alpha$;

3) $\operatorname{tg}2\alpha + 2\operatorname{ctg}2\alpha = \dfrac{2}{\sin 4\alpha}$; 4) $\dfrac{1 - \cos\alpha + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - \sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$;

5) $\operatorname{ctg}\alpha - \cos 2\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = \sin 2\alpha$;

6) $\operatorname{ctg}2\alpha - \sin 4\alpha = \cos 4\alpha \cdot \operatorname{ctg}2\alpha$;

7) $1 + \cos(3\pi + 3\alpha)\cos 2\alpha - \cos(1{,}5\pi - 3\alpha)\sin 2\alpha = 2\sin^2 2{,}5\alpha$;

8) $\operatorname{tg}^4\alpha \cdot (8\cos^2(\pi - \alpha) - \cos(\pi + 4\alpha) - 1) = 8\sin^4\alpha$;

9) $\dfrac{1 - 2\sin^2\alpha}{2\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right)} = 1$;

10) $2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} \cdot (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha) \cdot \left(1 - \operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{1}{\cos^4\dfrac{\alpha}{2}}$.

26.17. 1) Егер $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{5}{6}$ және $\pi < \alpha < 1{,}5\pi$ болса, онда $\sin 2\alpha$; $\cos 2\alpha$; $\operatorname{tg}2\alpha$ өрнегінің мәнін есептеңдер.

2) Егер $\cos\alpha = -0{,}8$ және $\pi < \alpha < 1{,}5\pi$ болса, онда $\sin 0{,}5\alpha$; $\cos 0{,}5\alpha$; $\operatorname{tg}0{,}5\alpha$ өрнегінің мәнін есептеңдер.

26.18. Егер:

1) $\cos 2\alpha = \dfrac{1}{3}$ және $\pi < \alpha < \dfrac{5\pi}{4}$ болса, онда $\operatorname{tg}\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right)$;

2) $\cos 2\beta = 0{,}8$ және $\dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi$ болса, онда $\operatorname{tg}\beta + \operatorname{ctg}\beta$;

3) $\sin 2\alpha = -\dfrac{1}{3}$ болса, онда $\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{3\pi}{4} - \alpha\right)$;

4) $\sin 2\beta = 0{,}25$ болса, онда $\operatorname{ctg}^2\left(\dfrac{\pi}{4} + \beta\right)$;

5) $\dfrac{\cos\alpha - 2\sin\alpha}{\sin\alpha - 2\cos\alpha} = -0{,}5$ болса, онда $\cos 2\alpha$;

6) $\dfrac{\cos\alpha + 2\sin\alpha}{2\sin\alpha - 3\cos\alpha} = -2$ болса, онда $\sin 2\alpha$ өрнегінің мәнін табыңдар.

26.19. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\sqrt{\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos\alpha}$; 2) $\sqrt{\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\sin\alpha}$; 3) $\sqrt{\dfrac{1 + \cos 4\alpha}{2}}$;

4) $\sqrt{\dfrac{1 - \cos 6\alpha}{8}}$; 5) $\sqrt{2 + \sqrt{2 + 2\cos 4\alpha}}$ мұндағы $0 \mathrm{m} \alpha \mathrm{m} \dfrac{\pi}{2}$.

C

26.20. Төмендегі формулаларды қорытып шығарыңдар:

1) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$; 2) $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$;

3) $\operatorname{tg}3\alpha = \dfrac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}$.

26.21. Егер $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -2$ болса, онда 1) $\sin 3\alpha$; 2) $\cos 3\alpha$ өрнегінің мәнін табыңдар.

26.22. Есептеңдер:

1) $\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ$; 2) $\sin^2 10^\circ \cdot \sin^2 50^\circ \cdot \sin^2 70^\circ$;

3) $\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 80^\circ$; 4) $\cos\frac{\pi}{5} \cdot \cos\frac{2\pi}{5}$;

5) $\sin\frac{\pi}{10} \cdot \sin\frac{3\pi}{10}$.

26.23. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $4\sin^3\alpha \cdot \cos 3\beta + 4\cos^3\beta \cdot \sin 3\beta = 3\sin 4\beta$;

2) $\dfrac{\cos^3\beta - \cos 3\beta}{\sin^3\beta + \sin 3\beta} = \operatorname{tg}\beta$.

ҚАЙТАЛАУ

26.24. Егер: 1) $0 < x < \pi$ болса, онда $\sin 2x < 2\sin x$; 2) $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ болса, онда $\sin 2x < 2\cos x$ теңсіздігін дәлелдеңдер.

26.25. Өрнектің ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңдар:

1) $\cos^2 x + 3\sin^2 x$; 2) $\sin^4 x + \cos^4 x$; 3) $\sin^6 x + \cos^6 x$.

26.26. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) - \sin\beta$; 2) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right) - \cos\beta$.

26.27. 1) $y = \begin{cases} x^2 - 2x, \text{ мұндағы } x \geq 0, \\ 1 - 3x, \text{ мұндағы } x < 0; \end{cases}$

2) $y = \begin{cases} -x^2 - x, \text{ мұндағы } x \leq 0, \\ 2x - 3, \text{ мұндағы } x > 0 \end{cases}$

функциясының графигін салыңдар.

26.28. Қабырғасының ұзындығы 6 м және биіктігі 80 см тіктөртбұрыш пішінді бөлігін қыштақтаймен желімдеу керек. Егер қыштақтайдың өлшемі 25 см · 30 см, әр жәшікте 20 данадан және қажетті қыштақтайшалар санының 5%-ын шығын құрайтын болса, онда қанша жәшік қыштақтай сатып алу керек?

Жаңа білімді меңгеруге дайындаламыз

26.29. Өрнекті көбейтінді түрінде жазыңдар:

1) $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$; 2) $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$;
3) $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$; 4) $\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)$.

Жаңа білімді меңгеруге арналған тірек ұғымдар

Негізгі тригонометриялық тепе-теңдіктер, тригонометриялық функциялардың қосу формулалары, қосбұрыш пен жартыбұрыштың формулалары.

§27. ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ ҚОСЫНДЫСЫ МЕН АЙЫРЫМЫН КӨБЕЙТІНДІГЕ ТҮРЛЕНДІРУ ФОРМУЛАЛАРЫ

Түйінді ұғымдар

Синус, косинус, тангенс, котангенс

Тригонометриялық функциялардың қосындысы мен айырымын көбейтіндіге түрлендіру формулаларын қорытып шығару мен қолдануды үйренесіңдер.

α бұрышын $\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}$ қосындысы және β бұрышын $\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}$ айырым ы түрінде жазайық.

$\sin\alpha + \sin\beta$ қосындысын түрлендірейік:

$$\sin\alpha + \sin\beta = \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right) =$$
$$= \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} -$$
$$- \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Түрлендіру нәтижесінде синустардың қосындысының формуласын аламыз:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (1)$$

Екі бұрыштың синустарының қосындысы осы бұрыштардың қосындысының жартысының синусы мен осы бұрыштардың айырымының жартысының косинусының екі еселенген көбейтіндісіне тең.

$\sin\alpha - \sin\beta$ айырымын түрлендірейік:

$$\sin\alpha - \sin\beta = \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right) =$$

$$= \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} - \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + $$
$$+ \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Түрлендіру нәтижесінде синустардың айырымының формуласын аламыз:

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (2)$$

Екі бұрыштың синустарының айырымы осы бұрыштардың қосындысының жартысының косинусы мен осы бұрыштардың айырымының жартысының синусының екі еселенген көбейтіндісіне тең.

$\cos\alpha + \cos\beta$ қосындысын түрлендірейік:

$$\cos\alpha + \cos\beta = \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) =$$
$$= \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} +$$
$$+ \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Түрлендіру нәтижесінде косинустардың қосындысының формуласын аламыз:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (3)$$

Екі бұрыштың косинустарының қосындысы осы бұрыштардың қосындысының жартысының косинусы мен осы бұрыштардың айырымының жартысының косинусының екі еселенген көбейтіндісіне тең.

$\cos\alpha - \cos\beta$ айырымын түрлендірейік:

$$\cos\alpha - \cos\beta = \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) =$$
$$= \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} -$$
$$-\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Түрлендіру нәтижесінде косинустардың айырымының формуласын аламыз:

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (4)$$

Екі бұрыштың косинустарының айырымы осы бұрыштардың қосындысының жартысының синусы мен осы бұрыштардың айырымының жартысының синусының теріс таңбамен алынған екі еселенген көбейтіндісіне тең.

$\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta$ қосындысын түрлендірейік:

$$\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Түрлендіру нәтижесінде тангенстердің қосындысының формуласын аламыз:

$$\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}. \qquad (5)$$

Екі бұрыштың тангенстерінің қосындысы осы бұрыштардың қосындысының синусын осы бұрыштардың косинустарының көбейтіндісіне бөлгенге тең.

Тангенстердің айырымының $\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$ формуласын өздерің дәлелдеңдер.

Тангенстердің айырымының формуласы:

$$\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}. \qquad (6)$$

Екі бұрыштың тангенстерінің айырымы осы бұрыштардың айырымының синусын осы бұрыштардың косинустарының көбейтіндісіне бөлгенге тең.

МЫСАЛ

1. $\cos 75° + \cos 15°$ қосындысының мәнін табайық.

Шешуі. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ формуласын қолданамыз:

$$\cos 75° + \cos 15° = 2\cos 45°\cos 30° = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Жауабы: $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

МЫСАЛ

2. $\sin\alpha + \sin2\alpha + \sin3\alpha$ қосындысын көбейтіндіге түрлендірейік.

Шешуі . $\sin\alpha + \sin2\alpha + \sin3\alpha = (\sin\alpha + \sin3\alpha) + \sin2\alpha =$

$= 2\sin2\alpha\cos\alpha + \sin2\alpha = 2\sin2\alpha\,(\cos\alpha + \frac{1}{2}) = 2\sin2\alpha\,(\cos\alpha +$

$+ \cos60°) = 4\sin2\alpha\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right).$

Жауабы : $4\sin2\alpha\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right).$

МЫСАЛ

3. $\sin\alpha + \cos\alpha$ қосындысын көбейтіндіге түрлендірейік.

Шешуі . $\sin\alpha + \cos\alpha = \sin\alpha + \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = 2\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos(\frac{\pi}{4} - \alpha) =$

$= \sqrt{2}\cos\,(\frac{\pi}{4} - \alpha).$

Жауабы : $\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4} - \alpha).$

?

1. α және β бұрыштарының тригонометриялық функцияларының қосындысы мен айырымы формулаларын қандай бұрыштар үшін қолдануға болады?
2. Қандай да бір бұрыштың тангенсі мен котангенсінің қосындысын (айырымын) көбейтіндіге түрлендіру үшін қандай формулалар қолданылады?

Жаттығулар

А

27.1. Тригонометриялық өрнекті көбейтінді түрінде жазыңдар:

1) $\sin3x + \sin5x$; 2) $\sin2\beta + \sin6\beta$; 3) $\sin15° + \sin15°$;
4) $\sin130° + \sin10°$; 5) $\cos3x + \cos7x$; 6) $\cos13\alpha - \cos5\alpha$;
7) $\cos13° - \cos27°$; 8) $\cos78° + \cos18°$.

27.2. Өрнекті көбейтіндіге түрлендіріңдер:

1) $\sin\frac{\pi}{5} + \sin\frac{3\pi}{5}$; 2) $\cos\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{6}$;

3) $\sin\frac{3\pi}{10} - \sin\frac{\pi}{10}$; 4) $\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{3\pi}{4}$;

5) $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$; 6) $\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$;

7) $\sin x + \sin y$;
8) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$;
9) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$;
10) $\sin x - \cos y$;
11) $\sin 2x + \cos 4x$;
12) $\cos\beta - \sin 6\beta$.

27.3. Тригонометриялық өрнекті көбейтіндіге түрлендіріңдер:

1) $\sin\alpha + \frac{1}{2}$;
2) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin\alpha$;
3) $\frac{1}{2} - \sin\alpha$;
4) $\sin\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}$;
5) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos\alpha$;
6) $\cos\alpha + \frac{1}{2}$;
7) $\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}$;
8) $\frac{1}{2} - \cos\alpha$;
9) $1 + 2\cos x$;
10) $2\cos x - \sqrt{2}$;
11) $\sqrt{3} - 2\sin 4x$;
12) $\sqrt{3} + 2\cos 2x$.

27.4. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\frac{\sin 37^\circ + \sin 23^\circ}{\sin 37^\circ - \sin 23^\circ}$;
2) $\frac{\cos 20^\circ - \cos 140^\circ}{\cos 20^\circ + \cos 140^\circ}$;
3) $\frac{\sin 55^\circ - \sin 35^\circ}{\cos 55^\circ - \cos 35^\circ}$;
4) $\frac{\cos 25^\circ - \cos 85^\circ}{\sin 25^\circ + \sin 85^\circ}$;
5) $\frac{\cos\alpha - \cos\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}$;
6) $\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta}$;
7) $\frac{\cos\alpha + \cos\beta}{\sin\beta - \sin\alpha}$;
8) $\frac{\cos\alpha - \cos\beta}{\sin\alpha + \sin\beta}$;
9) $\frac{\cos 5x - \cos x}{\sin 5x + \sin x}$;
10) $\frac{\sin 2x - \sin x}{\cos 2x + \cos x}$;
11) $\frac{\sin 2x + \sin 6x}{\cos 2x - \cos 6x}$;
12) $\frac{\cos 2x - \cos 3x}{\sin 2x - \sin 3x}$;
13) $\frac{\sin 4\alpha - \sin 6x}{\cos 3\alpha + \cos 7\alpha}$;
14) $\frac{\sin 7\beta + \sin 11\beta}{\cos 10\beta - \cos 8\beta}$;
15) $\frac{\cos(45^\circ - \alpha) + \cos(45^\circ + \alpha)}{\sin(45^\circ - \alpha) + \sin(45^\circ + \alpha)}$;
16) $\frac{\sin(45^\circ + \alpha) + \sin(45^\circ - \alpha)}{\sin(45^\circ + \alpha) - \sin(45^\circ - \alpha)}$.

27.5. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $(\sin\alpha + \sin\beta)^2 + (\cos\alpha + \cos\beta)^2 = 4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}$;
2) $\sin^2(x+y) - \sin^2(x-y) = \sin 2x \sin 2y$;
3) $\cos^2(\alpha+\beta) - \cos^2(\alpha-\beta) = -\sin 2\alpha \sin 2\beta$;
4) $(\sin x - \sin y)^2 + (\cos x - \cos y)^2 = 4\sin^2\frac{x-y}{2}$.

27.6. Өрнекті түрлендіріңдер:

1) $\operatorname{tg}75^\circ - \operatorname{tg}15^\circ$; 2) $\operatorname{ctg}11^\circ + \operatorname{ctg}34^\circ$;
3) $\operatorname{tg}25^\circ + \operatorname{tg}65^\circ$; 4) $\operatorname{tg}85^\circ + \operatorname{ctg}85^\circ$;
5) $\operatorname{ctg}50^\circ - \operatorname{ctg}20^\circ$; 6) $\operatorname{tg}25^\circ - \operatorname{ctg}85^\circ$;
7) $\operatorname{tg}15^\circ + \operatorname{ctg}75^\circ$; 8) $\operatorname{ctg}15^\circ - \operatorname{tg}75^\circ$.

B

27.7. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $\dfrac{\sin\alpha + \sin3\alpha + \sin5\alpha}{\cos\alpha + \cos3\alpha + \cos5\alpha} = \operatorname{tg}3\alpha$;

2) $\dfrac{\sin4\alpha + \sin5\alpha + \sin6\alpha}{\cos4\alpha + \cos5\alpha + \cos6\alpha} = \operatorname{tg}5\alpha$;

3) $\dfrac{\sin\alpha - 2\cos3\alpha - \sin5\alpha}{\cos\alpha + 2\sin3\alpha - \cos5\alpha} = -\operatorname{ctg}3\alpha$;

4) $\dfrac{\sin6\alpha + \sin7\alpha - \sin8\alpha - \sin9\alpha}{\cos6\alpha + \cos7\alpha + \cos8\alpha + \cos9\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha$.

27.8. Өрнекті көбейтіндіге түрлендіріңдер:

1) $\sin^2\alpha - \sin^2\beta$; 2) $\cos^2\alpha - \cos^2\beta$;
3) $\dfrac{3}{4} - \sin^2 x$; 4) $\cos^2 x - \dfrac{1}{2}$.

27.9. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\dfrac{2\sin^2 49^\circ - 1}{\cos53^\circ - \cos37^\circ}$;

2) $\dfrac{\sin11^\circ - \sin49^\circ}{1 - 2\cos^2 54^\circ30'}$;

3) $\dfrac{3\sin124^\circ - \cos146^\circ - 2\cos34^\circ}{\cos49^\circ\cos15^\circ + \cos41^\circ\cos75^\circ}$;

4) $\dfrac{6\sin25^\circ - 3\cos65^\circ + 7\sin155^\circ}{\cos53^\circ\cos12^\circ - \cos37^\circ\cos78^\circ}$;

5) $\dfrac{4\sin139^\circ - 7\cos131^\circ + 2\sin41^\circ}{\cos68^\circ\cos19^\circ + \cos22^\circ\cos71^\circ}$;

6) $\dfrac{\cos37^\circ - 8\cos143^\circ + 2\sin127^\circ}{\sin42^\circ\sin79^\circ + \sin48^\circ\sin11^\circ}$.

27.10. Өрнекті ықшамдап, мәнін табыңдар:

1) $\dfrac{\sin36^\circ + \sin40^\circ + \sin44^\circ + \sin48^\circ}{2\sin88^\circ\cos4^\circ\sin42^\circ}$;

2) $\dfrac{\cos6^\circ + \cos12^\circ + \cos36^\circ + \cos42^\circ}{\sin87^\circ\cos15^\circ\cos24^\circ}$;

3) $\dfrac{\cos 16^\circ - \cos 24^\circ - \cos 32^\circ + \cos 40^\circ}{\cos 86^\circ \sin 8^\circ \cos 28^\circ}$;

4) $\dfrac{\sin 48^\circ - \sin 60^\circ - \sin 72^\circ + \sin 84^\circ}{4\cos 84^\circ \sin 12^\circ \sin 66^\circ}$.

27.11. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $1 - 2\sin^2\alpha + \cos(4\alpha - 2\pi)$;

2) $\sin\left(\dfrac{\pi}{3} + \alpha\right) + \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - \alpha\right)$.

C

27.12. Өрнекті көбейтінді түрінде жазыңдар:

1) $1 + \sin\beta + \cos\beta$; 2) $1 + \sin\beta - \cos\beta$;

3) $1 - \sin\beta + \cos\beta$; 4) $1 - \sin\beta - \cos\beta$.

27.13. Өрнекті көбейткіштерге жіктеңдер немесе бөлшек түрінде жазыңдар:

1) $3 - 4\sin^2 4\alpha$; 2) $4\cos^2 4\beta - 3$;

3) $\mathrm{tg}^2 5\beta - 3$; 4) $1 - \mathrm{ctg}^2 3\alpha$.

27.14. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $\dfrac{3 - 4\cos 2x + \cos 4x}{3 + 4\cos 2x + \cos 4x} = \mathrm{tg}^4 x$;

2) $\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - 2x\right) + \sin(3\pi - 4x) - \cos\left(\dfrac{5\pi}{2} + 6x\right)}{4\sin(5\pi - 3x)\cos(x - 4\pi)} = \cos 2x$.

27.15. A, B және C шамалары үшбұрыштың ішкі бұрыштары екені белгілі. Төмендегі теңдіктердің дұрыстығын дәлелдеңдер:

1) $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\dfrac{A}{2} \cdot \cos\dfrac{B}{2} \cdot \cos\dfrac{C}{2}$;

2) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$;

3) $\sin 4A + \sin 4B + \sin 4C = -4\sin 2A \cdot \sin 2B \cdot \sin 2C$.

27.16. Есептеңдер:

1) $\mathrm{tg}9^\circ - \mathrm{tg}27^\circ - \mathrm{tg}63^\circ + \mathrm{tg}81^\circ$;

2) $\mathrm{ctg}7{,}5^\circ - \mathrm{tg}7{,}5^\circ + \mathrm{tg}67{,}5^\circ - \mathrm{ctg}67{,}5^\circ$;

3) $4(\cos 24^\circ - \cos 12^\circ + \cos 48^\circ - \cos 84^\circ)$;

4) $\cos^2 3^\circ + \cos^2 117^\circ + \cos^2 123^\circ$.

ҚАЙТАЛАУ

27.17. Егер:

1) $\sin\beta = 0{,}6$ және $90° < \beta < 180°$ болса, онда $\cos\beta$-ны;

2) $\cos\beta = -0{,}2$ және $180° < \beta < 270°$ болса, онда $\sin\beta$-ны;

3) $\cos\beta = -0{,}4$ және $90° < \beta < 180°$ болса, онда $\operatorname{tg}\beta$-ны;

4) $\sin\beta = -0{,}3$ және $270° < \beta < 360°$ болса, онда $\operatorname{ctg}\beta$-ны табыңдар.

27.18. 1) $\operatorname{tg}\beta = 0{,}2$ болса, онда $\dfrac{5}{6 + 7\sin 2\beta}$;

2) $\operatorname{tg}\beta = 0{,}2$ болса, онда $\dfrac{4}{3 + 4\cos 2\beta}$;

3) $\operatorname{tg}\beta = 0{,}1$ болса, онда $\dfrac{1}{2 + 3\sin 2\beta}$;

4) $\operatorname{tg}\beta = 0{,}3$ болса, онда $\dfrac{2}{5 - \cos 2\beta}$ өрнегінің мәнін есептеңдер.

27.19. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\sin(\pi + x)\cdot\sin(4\pi + x) - \cos(6\pi - 2x)$;

2) $\sin(2\pi + 2x) + 4\sin x\cdot\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right)$.

27.20. Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases} x^2 - 6x - 16 \leqslant 0, \\ |4x^2 - 3| > 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - x - 2 \geqslant 0, \\ |2x^2 - 5| < 3. \end{cases}$

Жаңа білімді меңгеруге дайындаламыз

27.21. Тригонометриялық өрнекті түрлендіріңдер:

1) $\cos(\alpha + 2\beta) + \sin\alpha\cdot\sin 2\beta$; 2) $\cos(3\alpha - 2\beta) - \sin 3\alpha\cdot\sin 2\beta$.

27.22. Өрнекті түрлендіріңдер :

1) $\sin(2\alpha + \beta) - \sin 2\alpha\cdot\cos\beta$; 2) $\sin(3\alpha + 2\beta) + \cos 3\alpha\cdot\sin 2\beta$.

Жаңа білімді меңгеруге арналған тірек ұғымдар

Негізгі тригонометриялық тепе-теңдіктер, келтіру формулалары, тригонометриялық функцияларды қосу формулалары, тригонометриялық функциялардың қосындысы мен айырымын көбейтіндіге түрлендіру формулалары, қосбұрыштың және жартыбұрыштың формулалары.

§28. ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ КӨБЕЙТІНДІСІН ҚОСЫНДЫ НЕМЕСЕ АЙЫРЫМҒА ТҮРЛЕНДІРУ ФОРМУЛАЛАРЫ

Түйінді ұғымдар

Синус, косинус, тангенс, котангенс

Тригонометриялық функциялардың көбейтіндісін қосындыға немесе айырымға түрлендіру формулаларын қорытып шығару мен қолдануды үйренесіңдер.

Тригонометриялық функциялардың көбейтіндісін қосындыға түрлендіру үшін қосу формулаларын қолданамыз. Расында да, екі бұрыштың қосындысының синусы және екі бұрыштың айырымының синусының формулаларын қолданып, $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$ қосындысын табамыз. Ол үшін аталған формулаларды мүшелеп қосамыз:

$$+\begin{array}{l}\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta;\\ \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.\end{array}$$

Қосу нәтижесінде $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$ теңдігін аламыз. Осы теңдіктен мына формула шығады:

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]. \qquad (1)$$

Осылайша екі бұрыштың қосындысының синусы және екі бұрыштың айырымының синусының формулаларын қолданып, $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$ айырымын табамыз. Ол үшін аталған формулаларды мүшелеп азайтамыз:

$$-\begin{array}{l}\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta;\\ \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.\end{array}$$

Азайту нәтижесінде

$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta$$

теңдігін аламыз. Осы теңдіктен мына формула шығады:

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]. \qquad (2)$$

Тура осылай, екі бұрыштың қосындысының косинусы және екі бұрыштың айырымының косинусының формулаларын қолданып, $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$ қосындысын табамыз. Ол үшін аталған формулаларды мүшелеп қосамыз:

$$+\begin{array}{l}\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.\end{array}$$

Қосу нәтижесінде

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta$$

теңдігін аламыз. Осы теңдіктен мына формула шығады:

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]. \qquad (3)$$

Тура осылай, екі бұрыштың қосындысының косинусы және екі бұрыштың айырымының косинусының формулаларын қолданып, $\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)$ айырымын табамыз. Ол үшін аталған формулаларды мүшелеп азайтамыз:

$$-\begin{array}{l}\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.\end{array}$$

Азайту нәтижесінде

$$\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\sin\beta$$

теңдігін аламыз. Осы теңдіктен мына формула шығады:

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]. \qquad (4)$$

МЫСАЛ

1. $\cos75°\cos15°$ өрнегінің мәнін есептейік.

Шешуі. (3) формуланы қолданамыз: $\cos75°\cos15°=\frac{1}{2}[\cos(75°+15°)+\cos(75°-15°)]=\frac{1}{2}(\cos90°+\cos60°)=\frac{1}{2}(0+\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$.

Жауабы: $\frac{1}{4}$.

МЫСАЛ

2. $\sin3\alpha\sin7\alpha\cos4\alpha$ көбейтіндісін қосындыға түрлендірейік.

Шешуі. Алғашқы екі көбейткішке (4) формуланы қолданамыз: $\sin3\alpha\sin7\alpha\cos4\alpha=\frac{1}{2}[\cos(3\alpha-7\alpha)-\cos(3\alpha+7\alpha)]\cos4\alpha=\frac{1}{2}(\cos4\alpha-\cos10\alpha)\cos4\alpha=\frac{1}{2}(\cos^2 4\alpha-\cos10\alpha\cos4\alpha)$.

Енді (3) формуланы қолданамыз:

$$\frac{1}{2}(\cos^2 4\alpha-\cos10\alpha\cos4\alpha)=\frac{1}{2}(\cos^2 4\alpha-\frac{1}{2}\cos14\alpha-\frac{1}{2}\cos6\alpha).$$

Жақшаны ашамыз: $\frac{1}{2}\cos^2 4\alpha-\frac{1}{4}\cos14\alpha-\frac{1}{4}\cos6\alpha$.

Жауабы: $\frac{1}{2}\cos^2 4\alpha-\frac{1}{4}\cos14\alpha-\frac{1}{4}\cos6\alpha$.

?

1. Тригонометриялық функциялардың көбейтіндісін қосындыға түрлендіру формулаларын қандай бұрыштар үшін қолдануға болады?
2. $\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$ формуласын неліктен тригонометриялық функциялардың көбейтіндісін айырымға емес қосындыға түрлендіру формулаларына жатқызады?

Жаттығулар

А

28.1. Өрнекті тригонометриялық функциялардың қосындысы түрінде жазыңдар:

1) $\sin 5\alpha \cdot \cos 2\alpha$;
2) $\sin 8\alpha \cdot \cos 12\alpha$;
3) $\cos 5\alpha \cdot \cos 7\alpha$;
4) $\cos 6\alpha \cdot \cos(-15\alpha)$;
5) $\sin 6\alpha \cdot \sin 14\alpha$;
6) $\sin 3\alpha \cdot \sin(-21\alpha)$;
7) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - 5\alpha\right) \cdot \cos 3\alpha$;
8) $\sin(\pi + 5\alpha) \cdot \cos(3\pi - 3\alpha)$;
9) $\cos 7\alpha \cdot \cos(2\pi + 9\alpha)$.

28.2. Өрнекті қосынды немесе айырым түрінде жазыңдар:

1) $2\sin 27° \cos 9°$;
2) $-2\sin 25° \sin 15°$;
3) $2\sin\alpha \cos 3\alpha$;
4) $2\cos 2\alpha \cos\alpha$;
5) $\cos(x + 1)\cos(x - 1)$;
6) $2\sin(a + b)\cos(a - b)$;
7) $\sin(m + n)\sin(m - n)$;
8) $\sin(2x + 3)\sin(x - 3)$;
9) $\sin(1 - x) \cdot \cos(1 - 2x)$.

28.3. Есептеңдер:

1) $2\sin 22°30' \cdot \cos 7°30'$;
2) $2\cos 7°30' \cdot \sin 52°30'$;
3) $\cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{12}$;
4) $\sin\frac{\pi}{4} \cdot \sin\frac{\pi}{12}$.

28.4. 1) $\cos 75° \cdot \sin 345° = -0{,}25$; 2) $\sin 105° \cdot \sin 295° = 0{,}25$ теңдігінің ақиқаттығын дәлелдеңдер.

28.5. 1) $\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}$; $\cos\alpha \cos\beta = -\frac{1}{2}$ болса, онда $\cos(\alpha + \beta)$;

2) $\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}$; $\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}$ болса, онда $\cos(\alpha - \beta)$;

3) $\cos\alpha \cos\beta = -\frac{1}{2}$; $\sin\alpha \sin\beta = -\frac{1}{2}$ болса, онда $\sqrt{2}\cos(\alpha - \beta)$;

4) $\cos\alpha \cos\beta = -\frac{1}{2}$; $\sin\alpha \sin\beta = -\frac{1}{2}$ болса, онда $3\cos(\alpha + \beta)$ өрнегінің мәнін табыңдар.

28.6. 1) $2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$; 2) $2\sin\left(\beta+\frac{2\pi}{3}\right)\sin\left(\beta+\frac{\pi}{3}\right)$

өрнегін ықшамдаңдар.

28.7. 1) $4\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{3}+2\cos\alpha$;

2) $2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}\right)=1-\sqrt{2}\sin\alpha$;

3) $\cos^2(45°-x)-\cos^2(60°+x)-\cos75°\sin(75°-2x)=\sin2x$;

4) $\sin^2(45°+x)-\sin^2(30°-x)-\cos75°\cdot\cos(15°+2x)=\sin2x$

теңдігінің ақиқаттығын дәлелдеңдер.

28.8. 1) $\cos100°\cos110°+\cos20°\cos10°=\cos10°$;

2) $2\cos47°\cos73°-\sin64°=-0{,}5$ теңдігінің ақиқаттығын дәлелдеңдер.

B

28.9. Өрнекті қосынды түрінде жазыңдар:

1) $8\cos\beta\cdot\cos2\beta\cdot\cos4\beta$; 2) $\cos3\beta\cdot\cos5\beta\cdot\cos8\beta$;

3) $4\sin\beta\cdot\sin4\beta\cdot\cos5\beta$; 4) $2\cos\alpha\cdot\sin2\alpha\cdot\cos6\alpha$;

5) $\sin\alpha\cdot\sin3\alpha\cdot\sin6\alpha$; 6) $16\sin\alpha\cdot\cos2\alpha\cdot\sin10\alpha$.

28.10. Егер: 1) $\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ болса, онда $\cos8\alpha+\cos6\alpha+2\sin5\alpha\cdot\sin3\alpha$;

2) $\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}}$ болса, онда $\cos12\alpha-\cos6\alpha-2\cos5\alpha\cdot\cos7\alpha$;

3) $\sin\alpha=a$ болса, онда $\sin2\alpha\cos5\alpha-\sin\alpha\cos6\alpha$;

4) $\cos\alpha=a$ болса, онда $\cos7\alpha\cos4\alpha-\cos8\alpha\cos3\alpha$ өрнегінің мәнін табыңдар.

28.11. 1) $\cos75°\cdot\cos15°=\frac{1}{4}$; 2) $\sin105°\cdot\sin75°=\frac{1}{4}$;

3) $4\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=1-4\sin^2\alpha$;

4) $4\sin\left(\frac{\pi}{6}-\beta\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\beta\right)=3-4\cos^2\beta$ теңдігінің ақиқаттығын тексеріңдер.

28.12. Егер: 1) $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ болса, онда $\cos6x+\cos8x+2\sin3x\cdot\sin5x$;

2) $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ болса, онда $\cos12x-\cos6x-2\cos7x\cdot\cos5x$ өрнегінің мәнін табыңдар.

28.13. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $\sin^2 2x - \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) \cdot \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4}$;

2) $1 + 2\cos 2x - 4\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 0$.

28.14. Тригонометриялық өрнектің мәнін табыңдар:

1) $\sin 15^\circ \cos 7^\circ - \cos 11^\circ \cos 79^\circ - \sin 4^\circ \sin 86^\circ$;

2) $\cos 17^\circ \cos 73^\circ - \sin 13^\circ \cos 21^\circ - \cos 4^\circ \cos 86^\circ$.

28.15. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\sin 5x \cdot \sin 4x + \sin 4x \cdot \sin 3x - \sin 2x \cdot \sin x - 2\sin 3x \cdot$
$\cdot \sin 5x \cdot \cos x$;

2) $1 + \operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg}(60^\circ + x) \cdot \operatorname{tg} x$.

28.16. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $\dfrac{\sin 5\alpha - 2\sin 3\alpha\cos 3\alpha}{1 - \cos 5\alpha - 2\sin^2 3\alpha} = \operatorname{ctg} 5{,}5\alpha$;

2) $\dfrac{2\cos^2 2\beta + \cos 5\beta - 1}{\sin 5\beta + 2\cos 2\beta \sin 2\beta} = \operatorname{ctg} 4{,}5\beta$;

3) $\dfrac{\sin 4\alpha + 2\sin 2\alpha}{2(\cos\alpha + \cos 3\alpha)} = \cos\alpha \cdot \operatorname{tg} 2\alpha$;

4) $\dfrac{2\cos\beta + \cos 3\beta + \cos 5\beta}{\cos 3\beta + \sin\beta \sin 2\beta} = 4\cos 2\beta$.

C

28.17. Көбейтіндіні тригонометриялық функциялардың қосындысына түрлендіріңдер:

1) $4\sin 5^\circ \cdot \cos 15^\circ \cdot \sin 25^\circ$;

2) $4\sin 20^\circ \cdot \cos 20^\circ \cdot \cos 80^\circ$.

28.18. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $4\cos 3\alpha \cdot \cos 5\alpha \cdot \cos 6\alpha = \cos 8\alpha + \cos 4\alpha + 2\cos 5\alpha \cdot \cos 3\alpha$;

2) $8\sin^3\alpha \cdot \cos^2\alpha = \sin\alpha - 0{,}5\sin^3\alpha$.

28.19. Есептеңдер:

1) $\cos 5^\circ \cdot \cos 55^\circ \cdot \cos 65^\circ$;

2) $\cos 12^\circ \cdot \cos 24^\circ \cdot \cos 36^\circ \cdot \cos 48^\circ \cdot \cos 72^\circ \cdot \cos 84^\circ$.

ҚАЙТАЛАУ

28.20. Теңдеулер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{25}{12}, \\ x^2 - y^2 = 7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{5}{6}, \\ x^2 - y^2 = 5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{3x}{y} - \dfrac{y}{x} = -2, \\ x^2 - y^2 = -8; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{4y}{x} = 5, \\ xy = 4. \end{cases}$

28.21. Функцияның анықталу облысын табыңдар:

1) $y = \sqrt{\dfrac{x^3 - 3x^2 - 10x}{x + 4}}$;

2) $y = \sqrt{\dfrac{-x^3 + 4x^2 + 12x}{x - 1}}$;

3) $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 3x - 10}{x + 4}} + \sqrt{2x + 5}$;

4) $y = \sqrt{\dfrac{-x^2 + 2x + 15}{x + 7}} - \dfrac{2}{5 - x}$.

28.22. Өрнектің мәнін табыңдар:

1) $1 + \sin^2 68° - \sin^2 38° - 0{,}5\sin 106°$;

2) $\sin^2 35° + \sin^2 25° + 0{,}5\cos 10° - 3$.

28.23. Функцияның ең үлкен немесе ең кіші мәнін табыңдар. Функция графигінің симметрия осінің теңдеуін жазыңдар:

1) $y = 2x^2 - 4x + 5$; 2) $y = -x^2 - 6x + 3$;

3) $y = \dfrac{3}{4}x^2 - x - 2$; 4) $y = \dfrac{1}{4}x^2 - x + 1$.

28.24. Доп жоғары лақтырылған. Оның лақтырылған уақытынан бастап биіктігі $h(t) = -3t^2 + 12t$, мұндағы h — метрмен алынған биіктік, t — секундпен алынған уақыт, формуласымен анықталады. "Жанды геометрия" бағдарламасын қолданып функцияның графигін салыңдар. Доп 9 м-ден кем емес биіктікте қанша уақыт болады?

Жаңа білімді меңгеруге дайындаламыз

28.25. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $2 - \dfrac{\cos^2\alpha - 4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{1 - 8\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}$; 2) $\dfrac{\sin^4\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - \cos^4\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha - 1}$.

28.26. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $\dfrac{\sin\alpha + \sin4\alpha + \sin7\alpha}{\cos\alpha + \cos4\alpha + \cos7\alpha} = \operatorname{tg}3\alpha$;

2) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)} = \operatorname{tg}\alpha$;

3) $\dfrac{\sin\alpha - 2\cos4\alpha - \sin7\alpha}{\cos\alpha - 2\sin4\alpha - \cos7\alpha} = \operatorname{ctg}3\alpha$;

4) $\dfrac{\sin9\alpha + \sin8\alpha - \sin7\alpha - \sin6\alpha}{\cos6\alpha + \cos7\alpha + \cos8\alpha + \cos9\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$.

Жаңа білімді меңгеруге арналған тірек ұғымдар

Негізгі тригонометриялық тепе-теңдіктер, келтіру формулалары, тригонометриялық функциялардың қосу формулалары, тригонометриялық функциялардың көбейтіндісін қосындыға түрлендіру формулалары, қосбұрыштың және жартыбұрыштың формулалары.

§ 29. ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ӨРНЕКТЕРДІ ТЕПЕ-ТЕҢ ТҮРЛЕНДІРУ

Түйінді ұғымдар

Синус, косинус, тангенс, котангенс

Тригонометриялық тепе-теңдіктермен тепе-тең түрлендірулерді орындауды үйренесіңдер.

Тригонометриялық өрнектерді түрлендірулерді мысалдармен қарастырайық.

МЫСАЛ

1. $\dfrac{1 - \cos2x + \sin2x}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) + \sin x} = 2\sin x$ тепе-теңдігін дәлелдейік.

Соңғы теңдіктің сол жағын түрлендіреміз: $(1 - \sin\alpha)(1 + \sin\alpha) = 1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha$.

Теңдіктің оң жағы да $\cos\alpha \cdot \cos\alpha = \cos^2\alpha$ береді.

Ескерту . Құрамында бөлшек өрнектер бар тепе-теңдіктерді дәлелдеу кезінде айнымалының мүмкін болатын мәндер жиынын міндетті түрде ескеру қажет. Сонда 6-мысалда $\cos\alpha \neq 0$ және $\sin\alpha \neq -1$.

? **1.** Теңдігін дәлелдеу үшін тепе-теңдіктің қайсы жақ бөлігін түрлендіру керек?

Жаттығулар

A

29.1. Тригонометриялық өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$;

2) $8\mathrm{tg}945^\circ + \mathrm{tg}(810^\circ + \alpha) - \mathrm{ctg}(450^\circ - \alpha)$;

3) $\sin(2\alpha - \pi) + 2\cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) \cdot \sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$;

4) $\sin(\alpha + \pi) + \mathrm{tg}(\alpha - \pi)$;

5) $\sin(23\pi + 2018) + \cos\left(\frac{31\pi}{2} + 2018\right)$;

6) $\sin\left(\frac{35\pi}{2} - \alpha\right) + \cos(68\pi - \alpha)$;

7) $\mathrm{tg}(9\pi - \alpha) + \mathrm{ctg}\left(\frac{57\pi}{2} + \alpha\right)$;

8) $\dfrac{\mathrm{tg}\left(\frac{11\pi}{2} + \alpha\right)\cos\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right)\cos(\alpha - 4\pi)}{\mathrm{ctg}(5\pi - \alpha)\sin\left(\frac{11\pi}{2} + \alpha\right)}$;

9) $\sin(7\pi - \alpha) \cdot \cos\left(\frac{15\pi}{2} + \beta\right) - \sin\left(\frac{19\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cos(6\pi - \beta)$;

10) $\dfrac{\sin(4\pi - \alpha)\mathrm{tg}\left(\frac{25\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos\left(\frac{9\pi}{2} + \alpha\right)\mathrm{ctg}(17\pi - \alpha)}$;

11) $\mathrm{tg}^2(540^\circ - \alpha)\left(\dfrac{1}{\cos^2(630^\circ + \alpha)} - 1\right)$;

12) $\mathrm{tg}(13\pi - \alpha) \cdot \mathrm{tg}\left(\frac{13\pi}{2} + \alpha\right) - \sin(\alpha - 22\pi)$.

Өрнекті ықшамдап, мәнін табыңдар (29.2-29.3):

29.2. 1) $\sin 7°\cos 23° + \sin 23°\cos 7° + 1$;

2) $\dfrac{4\sin 25°\sin 65°}{\cos 40°}$;

3) $\dfrac{\operatorname{tg} 22° + \operatorname{tg} 23°}{1 - \operatorname{tg} 22°\operatorname{tg} 23°}$;

4) $\sin 64°\cos 26° + \cos 64°\sin 26° - \sin 30°$;

5) $\dfrac{\cos 14° + \sin 14° + \cos 42° + \sin 42°}{\sqrt{2}\cos 14°\sin 73°}$;

6) $\dfrac{\sin 36°\sin 40° + \cos 62° + \cos 42°}{4\cos 6°\cos 4°\sin 38°}$;

7) $\dfrac{\sin 8° - \sin 10° - \sin 12° + \sin 14°}{4\sin 11°\cos 1°\sin^2 1°}$;

8) $\dfrac{\cos 5° + \cos 85° + \sin 75° + \sin 15°}{4\sqrt{2}\cos 5°\sin 55°}$.

29.3. 1) $\dfrac{3\cos 215° - 4\cos 35° - 2\sin 125°}{\cos 17°\cos 18° - \cos 73°\cos 72°}$;

2) $\dfrac{5\sin 211° + 8\cos 59° - 5\sin 31°}{\sin 54°\sin 67° - \sin 36°\sin 23°}$;

3) $\dfrac{7\cos 29° - 2\cos 151° + 4\sin 61°}{\cos 67°\cos 38° + \cos 23°\cos 52°}$;

4) $\dfrac{2\sin 54° + 3\cos 36° - 2\cos 144°}{\sin 70°\sin 74° - \sin 20°\sin 16°}$.

29.4. Теңдіктің ақиқаттығын тексеріңдер:

1) $\sin 93° - \sin 63° = \sin 33°$;

2) $\cos 14° - \sin 16° = \cos 46°$.

29.5. Есептеңдер:

1) $\dfrac{4(\cos 20° - \sin 20°)}{\sqrt{2}\sin 25°}$; 2) $\dfrac{\sqrt{2}(\cos 25° - \sin 25°)}{\sin 20°}$;

3) $\dfrac{1 - 2\cos^2 13°}{\cos 26°}$; 4) $\dfrac{1 - 2\sin^2 46°}{8\cos 92°}$.

29.6. Егер:

1) $\mathrm{tg}\,\beta = 2$ болса, онда $\dfrac{\sin\beta\cos\beta + 2}{5\cos^2\beta + 1}$;

2) $\mathrm{tg}\,\beta = -2$ болса, онда $\dfrac{\sin\beta\cos\beta - 3}{6\cos^2\beta - \sin^2\beta}$;

3) $\mathrm{tg}\,\beta = -4$ болса, онда $\dfrac{2\sin\beta\cos\beta + 3}{4\cos^2\beta + \sin^2\beta}$;

4) $\mathrm{tg}\,\beta = 3$ болса, онда $\dfrac{\cos^2\beta + 2}{\cos^2\beta + 3\sin\beta\cos\beta}$ өрнегінің мәнін есептеңдер.

B

29.7. Егер:

1) $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$ болса, онда $\dfrac{\cos 11\alpha + 3\cos 9\alpha + 3\cos 7\alpha + \cos 5\alpha}{\cos 8\alpha}$;

2) $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ болса, онда $\cos 2\alpha - \cos 6\alpha$;

3) $\sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ болса, онда $\sin 5\alpha - \sin 3\alpha$;

4) $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ болса, онда $\cos 3\alpha - \cos 5\alpha$ тригонометриялық өрнегінің мәнін табыңдар.

29.8. Есептеңдер:

1) $\mathrm{tg}1^\circ \cdot \mathrm{tg}5^\circ \cdot \mathrm{tg}9^\circ \cdot \ldots \cdot \mathrm{tg}85^\circ \cdot \mathrm{tg}89^\circ$;

2) $\mathrm{ctg}2^\circ \cdot \mathrm{ctg}8^\circ \cdot \mathrm{ctg}14^\circ \cdot \ldots \cdot \mathrm{ctg}82^\circ \cdot \mathrm{ctg}88^\circ$.

29.9. 1) $\sin x = 0{,}21$ болса, онда $\sin\dfrac{x}{2} + \cos\dfrac{x}{2}$;

2) $\sin\dfrac{x}{2} + \cos\dfrac{x}{2} = \sqrt{0{,}4}$ болса, онда $\mathrm{tg}\,x$;

3) $\sin\dfrac{x}{2} - \cos\dfrac{x}{2} = \sqrt{0{,}5}$ болса, онда $\cos x$;

4) $\sin x = -0{,}44$ болса, онда $\sin\dfrac{x}{2} - \cos\dfrac{x}{2}$;

5) $\sin\dfrac{x}{2} + \cos\dfrac{x}{2} = 0{,}6$ болса, онда $\sin x$;

6) $\cos x = 0{,}8$ болса, онда $\sqrt{10}\left(\sin\dfrac{x}{2} + \cos\dfrac{x}{2}\right)$ өрнегінің мәнін табыңдар.

29.10. Есептеңдер:

1) $\cos\dfrac{2\pi}{7} + \cos\dfrac{4\pi}{7} + \cos\dfrac{6\pi}{7}$;

2) $\cos\dfrac{2\pi}{7}\cos\dfrac{4\pi}{7} + \cos\dfrac{2\pi}{7}\cos\dfrac{6\pi}{7} + \cos\dfrac{4\pi}{7}\cos\dfrac{6\pi}{7}$.

29.11. 1) $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{4}$; $\alpha+\beta=\frac{9\pi}{2}$ болса, онда $\sin(\alpha-\beta)$;

2) $\sin\alpha\cos\beta=-\frac{1}{4}$; $\alpha-\beta=-\frac{\pi}{2}$ болса, онда $\sin(\alpha+\beta)$;

3) $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}$; $\alpha+\beta=\frac{\pi}{3}$ болса, онда $5\cos(\alpha-\beta)$;

4) $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{4}$; $\alpha+\beta=-\frac{\pi}{6}$ болса, онда $4\sin(\alpha-\beta)$ өрнегінің мәнін табыңдар.

29.12. 1) $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$ болса, онда $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$;

2) $\sin\alpha+\cos\alpha=0{,}8$ болса, онда $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha$;

3) $\sin\alpha-\cos\alpha=1{,}2$ болса, онда $\sin^3\alpha-\cos^3\alpha$;

4) $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ болса, онда $\frac{1}{\sin^4\alpha}+\frac{1}{\cos^4\alpha}$;

5) $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$ болса, онда $\sqrt{2}\ \frac{1}{\sin^3\alpha}+\frac{1}{\cos^3\alpha}$;

6) $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ болса, онда $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha$ өрнегінің мәнін есептеңдер.

29.13. 1) $2\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha+5\cos\alpha=10$ болса, онда $\operatorname{tg}\alpha$;

2) $3\operatorname{ctg}\alpha+4\sin\alpha-\cos\alpha=12$ болса, онда $\operatorname{ctg}\alpha$;

3) $2\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha+10\cos\alpha=20$ болса, онда $\operatorname{ctg}\alpha$;

4) $3\operatorname{ctg}\alpha-0{,}1\sin\alpha-\cos\alpha=-0{,}3$ болса, онда $\operatorname{tg}\alpha$ тригонометриялық функциясының мәнін табыңдар.

29.14. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$;

2) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$;

3) $\cos^2\left(\alpha-\frac{5\pi}{8}\right)-\sin^2\left(\alpha-\frac{3\pi}{8}\right)$;

4) $\sin^2\left(\beta-\frac{5\pi}{12}\right)-\cos^2\left(\beta+\frac{7\pi}{12}\right)$.

29.15. $\operatorname{tg}30^\circ+\operatorname{tg}40^\circ+\operatorname{tg}50^\circ+\operatorname{tg}60^\circ=\frac{8\cos20^\circ}{\sqrt{3}}$ теңдігінің ақиқаттығын дәлелдеңдер.

C

29.16. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $\sin\alpha + \sin2\alpha + \sin3\alpha + \ldots + \sin n\alpha = \dfrac{\sin\dfrac{n\alpha}{2}\sin\dfrac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}$;

2) $\cos\alpha + \cos2\alpha + \cos3\alpha + \ldots + \cos n\alpha = \dfrac{\sin\dfrac{n\alpha}{2}\cos\dfrac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}$.

29.17. Егер $4\sin^2\alpha - 9\cos\alpha - 6 = 0$ болса, онда $\dfrac{\sin4\alpha}{\sin\alpha}$ өрнегінің мәнін табыңдар.

29.18. $\dfrac{4\cos^2 2\alpha - 4\cos^2\alpha + 3\sin^2\alpha}{4\cos^2\left(\dfrac{5\pi}{2} - \alpha\right) - \sin^2(2\alpha - 2\pi)}$ бөлшегін қысқартыңдар.

29.19. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $0{,}125\cos4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha$;

2) $\sin^2\beta\operatorname{tg}\beta - \cos^2\beta\operatorname{ctg}\beta + 2\operatorname{ctg}2\beta$;

3) $\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha} - \dfrac{2\cos2\alpha}{1 + \sin(2\alpha + 1{,}5\pi)}$;

4) $\dfrac{1}{1 - \operatorname{tg}\beta} - \dfrac{\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \beta\right)\sin\beta}{\cos2\beta}$.

29.20. $\sin x + \sin3x + \sin5x + \sin7x = 4\cos x\cos2x\sin4x$ тепе-теңдігін дәлелдеңдер.

29.21. Өрнектің мәндер жиынын табыңдар:

1) $\operatorname{tg}x\cos x + \operatorname{ctg}x\sin x$;   2) $\operatorname{tg}x\cos x - \operatorname{ctg}x\sin x$.

29.22. 1) $0 \le \beta \le 90^\circ$ болғанда, $\sqrt{2 + \sqrt{2 + 2\cos4\beta}}$;

2) $360^\circ \le \beta \le 720^\circ$ болғанда, $\sqrt{2 + \sqrt{2 + 2\cos\beta}}$ өрнегін ықшамдаңдар.

29.23. Егер $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ болса, онда $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma$ тепе-теңдігін дәлелдеңдер.

29.24. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $\dfrac{\sin4x}{1 + \cos4}\cdot\dfrac{\cos2x}{1 + \cos2x} = \operatorname{tg}x$;

2) $\dfrac{\cos^3 x - \cos 3x}{\sin^3 x + \sin 3x} = \operatorname{tg} x$;

3) $\sin 4x + \cos 4x \operatorname{ctg} 2x = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{2 \operatorname{tg} x}$;

4) $4 \sin x \sin\left(\dfrac{\pi}{3} + x\right) \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) = \sin 3x$.

29.25. 1) $\operatorname{tg}\beta = 2$ болса, онда $\dfrac{1 + \cos 2\beta}{3 + 2\sin 2\beta}$ өрнегінің;

2) $\operatorname{tg}\beta = -3$ болса, онда $\dfrac{3\sin 4\beta}{1 + 4\cos 2\beta}$ өрнегінің мәнін табыңдар.

29.26. $\dfrac{2\cos^2\alpha + \cos 4\alpha - 1}{\cos^4 \dfrac{\alpha}{2} - \sin^4 \dfrac{\alpha}{2}}$ өрнегінің ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңдар.

29.27. Қосындының мәнін табыңдар:

1) $\sin \dfrac{\pi}{6} + \sin^2 \dfrac{\pi}{6} + \sin^3 \dfrac{\pi}{6} + \ldots + \sin^n \dfrac{\pi}{6} + \ldots$;

2) $\operatorname{ctg} \dfrac{\pi}{3} + \operatorname{ctg}^2 \dfrac{\pi}{3} + \operatorname{ctg}^3 \dfrac{\pi}{3} + \ldots + \operatorname{ctg}^n \dfrac{\pi}{3} + \ldots$.

29.28. $\cos^2\alpha + \cos^2(\alpha + \beta) - 2\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos(\alpha + \beta)$ өрнегінің мәні α-ға тәуелді болмайтынын дәлелдеңдер.

ҚАЙТАЛАУ

29.29. Өрнектің мәнін табыңдар:

1) $1 + \dfrac{P_{10}}{P_9} - \dfrac{P_7}{P_6}$; 2) $\dfrac{P_7}{P_9} \cdot A_9^3 + 2$;

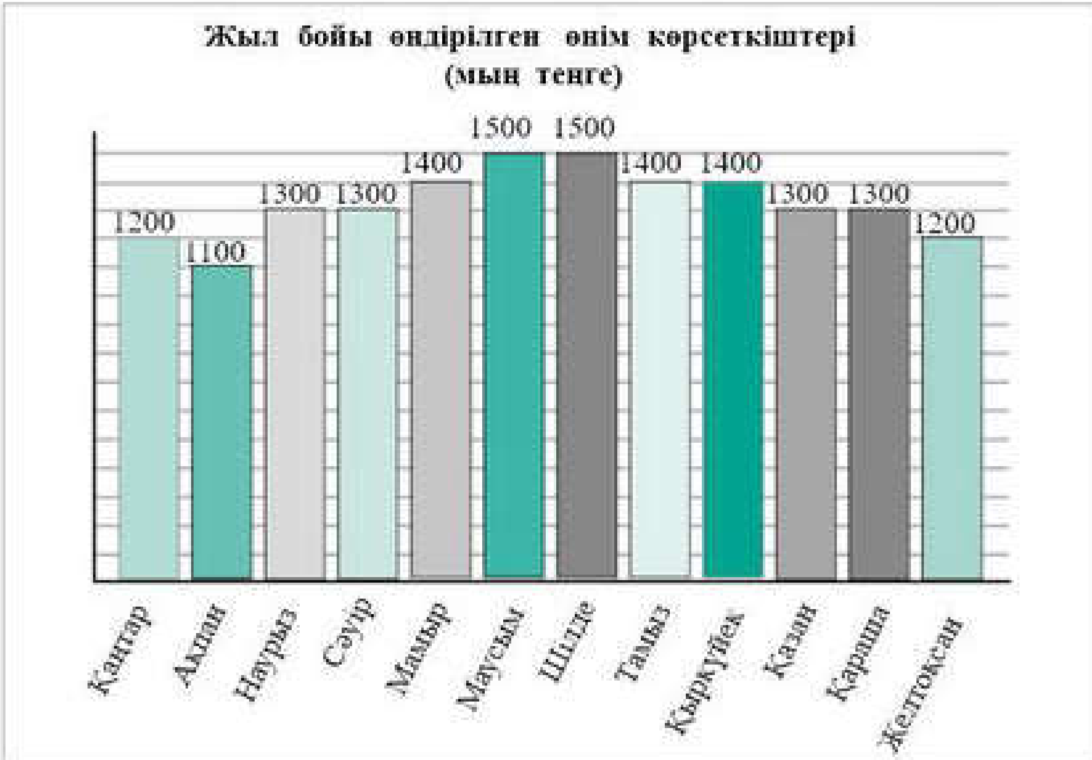
3) $\dfrac{4P_7}{P_{10}} \cdot A_{10}^2 + 0{,}5$; 4) $\dfrac{A_6^4}{P_3} : C_8^5$.

29.30. Цифрлар қайталанбайтын етіп, 1, 3, 5, 0 цифрларынан құрастырылатын жұп төрттаңбалы сандардың санын табыңдар.

29.31. Теңдеуді шешіңдер:

1) $A_x^2 = 7x$; 2) $A_x^2 = 5x + 24$.

29.32. Диаграммада фирманың 2018 жылдың әр айында өндірген өнімдерінің мың теңгемен алынған мөлшері көрсетілген (78-сурет).



78-сурет

2018 жылдың III тоқсанында өндірілген өнім I тоқсанмен салыстырғанда қанша пайызға артқан?

Жаңа білімді меңгеруге дайындаламыз

29.33. Дүкенде алмұрттың 5 сұрыпы мен мандариннің 4 сұрыпы бар. 1 кг алмұрт пен 1 кг мандарин сатып алудың қанша тәсілі бар?

29.34. Екі жәшікте 120 алма бар. Бірінші жәшіктен екінші жәшікке үш алма салынды. Нәтижесінде екінші жәшіктегі алма саны екі есе артық болды. Бастапқыда бірінші жәшікте қанша алма болған?

Жаңа білімді меңгеруге арналған тірек ұғымдар

Жиын, ішкі жиын, орналастырулар, алмастырулар, терулер.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

1. Шеңбердегі нүктелердің ординатасының абсциссаға қатынасын…

A) … бұрыштың синусы; B) … бұрыштың котангенсі;
C) … бұрыштың тангенсі; D) … бұрыштың косинусы

деп атайды.

2. 75° бұрыш қай ширекте жатыр?

A) I ширек; B) II ширек; C) III ширек; D) IV ширек.

3. cos30°-тың мәнін табыңдар.

A) $\frac{1}{2}$; B) 1; C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; D) $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

4. Радиусты қандай бұрышқа бұрғанда 80°-қа бұрған кездегі орнымен дәл келеді?

A) 180°; B) 440°; C) 380°; D) 120°.

5. 4cos90° – 8sin60° өрнегінің мәнін табыңдар.

A) $-4\sqrt{3}$; B) $4-4\sqrt{3}$; C) 0; D) –4.

6. Сандардың қайсысы нөлден кіші?

A) sin140°; B) cos140°; C) sin50°; D) cos50°.

7. cos(–30°) өрнегінің мәнін табыңдар.

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; B) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; C) $-\frac{1}{2}$; D) $\frac{1}{2}$.

8. Егер sin α < 0, cos α > 0 болса, онда α бұрышы қай ширектің бұрышы болып табылады?

A) I ширек; B) II ширек; C) III ширек; D) IV ширек.

9. sin390°-тың мәнін табыңдар.

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; B) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; C) $-\frac{1}{2}$; D) $\frac{1}{2}$.

10. Қай өрнектің мағынасы жоқ?

A) cos0°; B) tg0°; C) ctg0°; D) ctg90°.

11. $\frac{3\pi}{4}$ бұрышын градуспен өрнектеңдер.

A) 30°; B) 135°; C) $\frac{3}{4}$; D) 45°.

12. 200° өрнегін радианмен көрсетіңдер.

A) $\frac{7\pi}{9}$; B) $\frac{10\pi}{9}$; C) 200 π; D) 2π.

13. $\frac{10\pi}{9}$ бұрышы қай ширекте орналасқан?

A) I ширекте; B) II ширекте;
C) III ширекте; D) IV ширекте.

14. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ өрнегін ықшамдаңдар.

A) sin α; B) cos α; C) –sin α; D) –cos α.

15. $tg(180° - \alpha)$ өрнегін α бұрышының тригонометриялық функциясымен ауыстырыңдар.

A) $tg\,\alpha$; B) $ctg\,\alpha$; C) $-tg\,\alpha$; D) $-ctg\,\alpha$.

16. $\cos\frac{7\pi}{6}$-нің мәнін есептеңдер.

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; B) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; C) $-\frac{1}{2}$; D) $\frac{1}{2}$.

17. $\cos150°$-тың мәнін есептеңдер.

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; B) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; C) $-\frac{1}{2}$; D) $\frac{1}{2}$.

18. $\cos^2(360° - x) + \cos^2(270° + x)$ өрнегін ықшамдаңдар.

A) $\frac{1}{2}$; B) -1; C) 1; D) 0.

19. Егер $\cos\alpha = \frac{4}{5}\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ болса, онда $tg2\alpha$-ны табыңдар.

A) $-\frac{24}{7}$; B) $\frac{24}{7}$; C) $-\frac{24}{25}$; D) $\frac{24}{25}$; E) $\frac{25}{7}$.

20. Егер $\sin\alpha = -\frac{3}{5}\ \left(\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}\right)$ болса, онда $ctg2\alpha$-ны табыңдар.

A) $\frac{7}{24}$; B) $\frac{24}{7}$; C) $\frac{25}{24}$; D) $\frac{24}{25}$; E) $\frac{25}{7}$.

21. Егер $\sin\alpha = \frac{5}{13}\ \left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$ болса, онда $tg\,\alpha$-ны есептеңдер.

A) $-\frac{5}{12}$; B) $\frac{5}{12}$; C) $\frac{12}{13}$; D) $-\frac{12}{13}$; E) 5.

22. Егер $\cos2\alpha = \frac{1}{4}$ болса, онда $\sin^2 2\alpha$-ны есептеңдер.

A) 0,75; B) 0,9375; C) 0,125; D) 0,5; E) –0,725.

23. Егер $\cos\alpha = \frac{1}{5}$ болса, онда $\frac{2\sin\alpha + \sin2\alpha}{2\sin\alpha - \sin2\alpha}$-ны есептеңдер.

A) 0,25; B) 0,5; C) 0,75; D) 1,25; E) 1,5.

24. Егер $tg\,\alpha = \frac{3}{5}$ болса, онда $\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}$-ны есептеңдер.

A) –2; B) 2; C) –4; D) 4; E) $\frac{4}{5}$.

25. $\frac{\sin2\alpha - \sin3\alpha + \sin4\alpha}{\cos2\alpha - \cos3\alpha + \cos4\alpha}$ өрнегін ықшамдаңдар.

A) $tg\,\alpha$; B) $ctg\,\alpha$; C) $tg2\alpha$; D) $tg3\alpha$; E) 1.

§ 30. ОҚИҒА ЖӘНЕ ОНЫҢ ТҮРЛЕРІ

Түйінді ұғымдар

Оқиға, кездейсоқ оқиға, ақиқат оқиға, мүмкін емес оқиға, элементар оқиға, қолайлы нәтижелер, теңмүмкіндікті оқиға, қарама-қарсы оқиға

Оқиға, кездейсоқ оқиға, ақиқат оқиға, мүмкін емес оқиға, элементар оқиға, қолайлы нәтижелер, теңмүмкіндікті және қарама-қарсы оқиғалар ұғымдарымен танысасыңдар;

элементар және элементар емес оқиғаларды ажыратуды үйренесіңдер.

Оқиға деп мағынасы бар, орындалатын немесе орындалмайтын құбылысты айтады.

МЫСАЛ

1. 1) Таңертең жаңбыр жауады; 2) тоғызыншы сынып оқушылары алгебра пәнін оқиды; 3) шыршада алма өседі; 4) телефон соққан кезде абонемент бос болмады; 5) телефон станциясына тәулік бойы түскен қоңырау саны 1000-нан асады.

Түрлі тәжірибелер, бақылаулар және өлшемдер нәтижелері оқиғалар болып табылады.

МЫСАЛ

2. 1) Тиынды лақтырғанда "елтаңба" жағымен түсуі;
2) тиынды лақтырғанда "сан" жағымен түсуі.

Сынақ немесе *тәжірибе* дегеніміз қарастырылатын оқиғаның орындалатынын немесе орындалмайтынын білдіретін шарттар жиыны.

Шарттар жиыны көп рет қайталанған кезде *тәжірибелер жиынтығы* деп аталады.

Оқиғаны белгілеу үшін A, B, C және т.б. әріптері қолданылады.

Оқиғалар *ақиқат оқиға*, *кездейсоқ оқиға* және *мүмкін емес оқиға* деп бөлінеді.

Оқиға

Ақиқат оқиға	Кездейсоқ оқиға	Мүмкін емес оқиға
Тәжірибе барысында міндетті түрде орындалатын оқиға *ақиқат оқиға* деп аталады	Тәжірибе барысында орындалатын немесе орындалмайтын оқиға *кездейсоқ оқиға* деп аталады	Тәжірибе барысында, яғни берілген жағдайда орындалмайтын оқиға *мүмкін емес оқиға* деп аталады

МЫСАЛ

3. Кезде йсоқ оқиғалардың, мысалы:

1) тиынды лақтыру барысында оның бір жағдайларда "елтаңба" жағымен түсуі, кейбір жағдайларда "елтаңба" жағымен түспеуі;

2) орындалуы ауа-райымен байланысты "таңертең жаңбыр жауады" оқиғасы бір жағдайларда орындалады, кейбір жағдайларда орындалмайды.

Ақиқат оқиғалардың, мысалы:

1) "тоғызыншы сынып оқушылары алгебра пәнін оқиды";

2) "күзден кейін қыс түседі".

Мүмкін емес оқиғаның мысалы:

1) "5 тг жазуы бар тиынды лақтырғанда тиын 2 тг жазуы бар жағымен түседі";

2) "маусым айынан кейін қаңтар айы келеді".

Тәжірибе нәтижесінде түрлі кездейсоқ оқиғалар болуы мүмкін. "Ойын сүйегін лақтырған кезде 4 саны түсті" кездейсоқ оқиғасы элементар оқиға болады, себебі оны бірнеше оқиғаға бөлуге болмайды. "Ойын сүйегін лақтырған кезде ұпайы тақ саны болды" оқиғасы элементар оқиға болмайды, сондықтан оны бірнеше оқиғаға бөлуге болады. Яғни, "Ойын сүйегін лақтырған кезде бір ұпай түсті", "Ойын сүйегін лақтырған кезде үш ұпай түсті", "Ойын сүйегін лақтырған кезде бес ұпай түсті" оқиғаларына бөлуге болады.

Бірнеше жай оқиғаларға бөлуге болмайтын оқиға *элементар оқиға* деп аталады.

Күтілетін оқиғаны беретін тәжірибе нәтижесі *қолайлы нәтиже* деп аталады.

МЫСАЛ

4. Сыныпта 25 оқушы бар. Олардың 17-сі ер бала. A оқиғасы: "Кездейсоқ таңдап алынған оқушы — ер бала" болсын. Онда A оқиғасының қолайлы нәтижесі 17-ге тең.

Егер қандай да бір жиыннан оның бір элементі таңдалатын және басқа элементтерімен салыстырғанда бірдей қарастырылатын болса, онда жиынның әрбір элементіне бірдей мүмкіндік туады (тең мүмкіндік принципі). Мұндай оқиғалар *теңмүмкіндікті оқиғалар* деп аталады.

Мүмкіндіктері бірдей болатын тәжірибенің нәтижелері *теңмүмкіндікті нәтижелер* деп аталады.

МЫСАЛ

5. Теңмүмкіндікті нәтижелер:
A: "Ойын сүйегін лақтырғанда 1 цифры түсті";
B: "Ойын сүйегін лақтырғанда 2 цифры түсті";
C: "Ойын сүйегін лақтырғанда 3 цифры түсті";
D: "Ойын сүйегін лақтырғанда 4 цифры түсті";
E: "Ойын сүйегін лақтырғанда 5 цифры түсті";
F: "Ойын сүйегін лақтырғанда 6 цифры түсті".

A оқиғасы орындалмағанда ғана орындалатын $\overline{A}$ оқиғасы A *оқиғасына қарама-қарсы оқиға* деп аталады.

МЫСАЛ

6. Өзара қарама-қарсы оқиғалар:

"Ату барысында нысанаға тигізу" және "Ату барысында нысанаға тигізе алмау".

"Жүйенің барлық элементтерінің жұмыс атқаруы" және "Жүйе элементтерінің ең болмағанда біреуінің жұмыс жасамауы".

"Тиынның "елтаңба" жағымен түсуі" және "Тиынның "сан" жағымен түсуі".

Тәжірибе барысында жасыл, сары және көк шарлары бар жәшіктен "Көк шардың алынуы" оқиғасы "Сары немесе жасыл шардың ең болмағанда біреуінің алынуы" оқиғасына қарама-қарсы болады.

Ақиқат оқиғаның белгіленуі: U.
Мүмкін емес оқиғаның белгіленуі: V.
$$\overline{U} = V, \ \overline{V} = U.$$

?

1. Кездейсоқ оқиғалардың мысалын келтіріңдер.
2. "Тиынның "елтаңба" жағымен түсуі" және "Тиынның "сан" жағымен түсуі" оқиғалары теңмүмкіндікті оқиғалар бола ма?
3. "Ойын сүйегін лақтырған кезде ұпайы жұп саны болды" оқиғасы элементар оқиға бола ма?
4. "Ойын сүйегін лақтырған кезде ұпайы жұп саны болды" оқиғасына қарама-қарсы оқиғаны атаңдар.

Жаттығулар

A

30.1. "9-сынып оқушылары арасынан кездейсоқ таңдап алынған оқушы: 1) ер бала"; 2) жасы 14-ке тең"; 3) жасы 14 айға тең"; 4) 5 жастан үлкен" оқиғасы қандай оқиға (мүмкін емес, ақиқат немесе кездейсоқ) болады?

30.2. "Бүгін қалада барометр қалыпты атмосфералық қысымды көрсетіп тұр және
1) шәйнектегі су $t = 70°$ C температурасында қайнады ";
2) температура $-9°$ С-қа төмендегенде шалшықтағы су қатты" оқиғасы қандай оқиға (мүмкін емес, ақиқат немесе кездейсоқ) болады?

30.3 . "Үшбұрыштың қабырларының ұзындықтары өлшенді. Сонда әр қабырғасының ұзындығы қалған екі қабырғаның ұзындықтарының қосындысының мәнінен кем болып шықты" оқиғасы қандай оқиға (мүмкін емес, ақиқат немесе кездейсоқ) болады?

30.4. Екі ойын сүйегі лақтырылғанда:

1) "біріншісінде 2 цифры, екіншісінде 5 цифры түсті";
2) "екі ойын сүйегінде түскен ұпайлар санының қосындысы 1-ге тең";
3) "екі ойын сүйегінде түскен ұпайлар санының қосындысы 13-ке тең";
4) "екі ойын сүйегінде түскен ұпайлар санының қосындысы 14-тен кем" оқиғасы (мүмкін емес, ақиқат немесе кездейсоқ) қандай оқиға болады?

30.5. Қазақ тілі оқулығының кездейсоқ бір беті ашылады және сол жақ бетінде екінші сөз алынады. Алынған сөз:
1) "Ә" немесе "Ң"; 2) "Ъ" әрпімен басталады оқиғасы қандай оқиға (мүмкін емес, ақиқат немесе кездейсоқ) болады?

30.6. Өзара қарама-қарсы оқиғаларға мысалдар келтіріңдер.

B

30.7. Берілген оқиға элементар оқиға бола ма? Егер болмаса, онда оны жай оқиғаларға жіктеңдер:
1) A оқиғасы — кездейсоқ құрастырылған квадрат теңдеудің нақты түбірлері бар;
2) B оқиғасы — квадрат теңдеудің дискриминанты теріс сан.

30.8. A оқиғасы — кездейсоқ алынған $y = f(x)$ функциясы R жиынында бірсарынды өседі; B оқиғасы — $f(56) < f(57)$. Берілген A және B оқиғалары теңмүмкіндікті оқиғалар бола ма?

30.9. 1) Бір тиынды лақтыру;
2) ойын сүйегін лақтыру;
3) екі тиынды лақтыру нәтижесінде орындалатын барлық мүмкін болатын оқиғаларды атаңдар.

30.10. Берілген оқиғаға қарама-қарсы оқиғаны атаңдар:
1) менің парталасымның есімі Әлібек те емес, Азамат та емес;
2) сайлауға бару 82%-дан 93%-ға дейін артты;
3) бақылау жұмысында бес тапсырманың кем дегенде екеуі орындалмады.

30.11. Берілген оқиғаға қарама-қарсы оқиғаны атаңдар:
1) тиын лақтыру барысында сан жағымен түсті;
2) ойын сүйегін лақтырғанда 4 цифры түсті;
3) 3 ақ және 6 қызыл шар жатқан жәшіктен кездейсоқ алынған шардың түсі қызыл болды;
4) ойын сүйегін лақтырғанда 4 ұпайынан кем ұпай түсті;
5) кездейсоқ аталған сан 7 санынан кем;
6) 5 рет ату барысында ең болмағанда біреуі нысанаға тиді.

C

30.12. Ойын сүйегін лақтыру барысында тақ ұпай саны түсті. Осы оқиға элементар оқиға бола ма? Осы оқиғаны жай оқиғаларға жіктеңдер.

30.13. A оқиғасы — ойын сүйегін лақтырғанда 2 цифры түсті, B оқиғасы — ойын сүйегін лақтырғанда 4 цифры түсті, C оқиғасы — ойын сүйегін лақтырғанда 6 цифры түсті, D оқиғасы — тиынды лақтырғанда сан жағымен түсті, E оқиғасы — тиынды лақтырғанда "елтаңба" жағымен түсті. Осы оқиғалар арасынан теңмүмкіндікті оқиғаларды атаңдар.

ҚАЙТАЛАУ

30.14. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)$; 2) $\left(\frac{1}{a-\sqrt{x}} + \frac{1}{a+\sqrt{x}}\right) : \frac{a}{a^2 - x}$.

30.15. Теңсіздікті шешіңдер:

1) $\dfrac{x}{x+1} \leqslant \dfrac{2}{x-1}$; 2) $\dfrac{2x}{x+2} - 1 \geqslant \dfrac{2}{x-2}$.

30.16. 1) Егер екі санның бірі 30%-ға, екіншісі 20%-ға арттырылса, онда осы екі санның көбейтіндісінің мәні қанша пайызға артады?

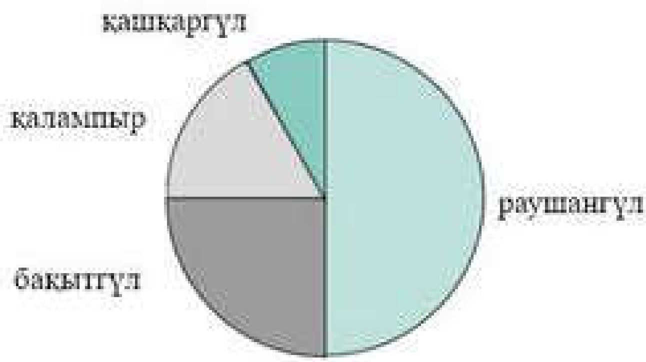
2) Егер екі санның бірі 25%-ға, екіншісі 40%-ға кемітілсе, онда осы екі санның көбейтіндісінің мәні қанша пайызға кемиді?

3) Егер бөлшектің алымы 40%-ға, бөлімі 20%-ға кемітілсе, онда бөлшек қанша пайызға кемиді?

4) Егер екі санның бірі 50%-ға кемітіліп, екіншісі 20%-ға арттырылса, онда осы екі санның көбейтіндісінің мәні қанша пайызға кемиді?

30.17. $y = x^2 - ax + 4$ функциясының графигі $M(-1;\ 3)$ нүктесі арқылы өтеді. Функцияның графигін салыңдар және ең кіші мәнін табыңдар.

30.18. PISA Диаграммада дүкендегі гүлдердің саны көрсетілген (79-сурет). Егер дүкенде 900 тал гүл және қалампыр гүлдерінің саны қашқаргүлдің санынан бүтін санға есе артық болса, онда дүкенде қалампыр гүлінің саны қанша?



79-сурет

Жаңа білімді меңгеруге дайындаламыз

30.19. Ойын сүйегін лақтырғанда: 1) жұп; 2) тақ; 3) 3-тен артық сан түссе, онда осы оқиғаға қандай элементар оқиғалар сәйкес болады?

Жаңа білімді меңгеруге дайындаламыз

30.20. Егер бөлшектің алымына (2; 6) интервалына тиісті натурал сандар, бөліміне (5; 8) интервалына тиісті натурал сандар алынатын болса, онда бірнеше дұрыс жай бөлшек құрастырыңдар.

Жаңа білімді меңгеруге арналған тірек ұғымдар

Оқиға, элементар оқиға, теңмүмкіндікті нәтижелер, қолайлы нәтижелер, алмастырулар, орналастырулар, терулер.

§31. ЫҚТИМАЛДЫҚТЫҢ КЛАССИКАЛЫҚ АНЫҚТАМАСЫ. СТАТИСТИКАЛЫҚ ЫҚТИМАЛДЫҚ

Түйінді ұғымдар

Ықтималдық

Сендер ықтималдықтың классикалық анықтамасымен және статистикалық анықтамасымен танысасыңдар; есептерді шығару барысында ықтималдықтың классикалық анықтамасын және статистикалық анықтамасын қолдануды үйренесіңдер.

Жаппай құбылыстарда оқиғаны анықтай білуді математиканың ықтималдықтар теориясы бөлімі қарастырады. Ол түрлі процестер мен құбылыстарды талдау барысында қолданылады, біртекті жаппай құбылыстарға жүгінетін сандық заңдылықтарды зерделейді.

Практикалық қызметте оқиғаларды олардың орындалу мүмкіндігіне қарай салыстыра білу керек. Мысалы, өзенде шортан мен мөңке балықтары жүзіп жүр. "Шортан қармаққа ілінді" оқиғасы мен "Мөңке балық қармаққа ілінді" оқиғасының орындалу мүмкіндігі әртүрлі. Сондықтан оқиғаларды салыстыру үшін олардың сандық шамасын анықтау керек.

Оқиғаның орындалу мүмкіндігінің сандық шамасы ықтималдық болып табылады. Ықтималдықтың классикалық және статистикалық анықтамалары кең таралған.

Ықтималдықтың классикалық анықтамасы тек қана теңмүмкіндікті оқиғалар үшін қолданылады.

A оқиғасының ықтималдығы деп теңмүмкіндік жағдайында m қолайлы нәтижелер санының n жалпы нәтижелер санына қатынасын айтады.

Ықтималдық P әрпімен белгіленеді.

("probabilite" француз сөзінен алынған "мүмкіндік, ықтималдық" деген мағынаны береді).

A оқиғасының ықтималдығы $P(A)$ деп белгіленеді .

A оқиғасының ықтималдығы:

$P(A) = \frac{m}{n}$, мұндағы m — қолайлы нәтижелер саны, n — жалпы нәтижелер саны, формуласымен есептеледі.

МЫСАЛ

1. A оқиғасы — "тиынның сан жағымен түсуі" және B оқиғасы — "тиынның "елтаңба" жағымен түсуі". Осы оқиғалардың ықтималдығының жазылуы: $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,5$, немесе $P(A) = 50\%$, $P(B) = 50\%$.

ТҮСІНДІРІҢДЕР

Неліктен A оқиғасының ықтималдығы нөл мен бірдің арасында орналасқан: 0 m $P(A)$ m 1?

МЫСАЛ

2. X оқиғасы — "Ойын сүйегін лақтырғанда жай сандардың түсуінің саны". X оқиғасының ықтималдығын табайық.

Шешуі: X оқиғасының ықтималдығын табу үшін $P(X) = \frac{m}{n}$ (мұндағы m — қолайлы нәтижелер саны, n — жалпы нәтижелер саны) формуласын қолданамыз.

Барлық ұпайлар 1; 2; 3; 4; 5; 6. Демек, $n = 6$.

1; 2; 3; 4; 5; 6 сандарының арасынан жай сандар 2; 3; 5, онда $m = 3$. Сондықтан $P(X) = \frac{3}{6} = 0,5$.

Жауабы: 0,5.

Ықтималдықтар қасиеттері

1-қасиет. Егер тәжірибенің барлық нәтижесі берілген оқиғаның пайда болуына қолайлы болса, онда бұл оқиға міндетті түрде орындалады. Мұндай оқиға *ақиқат оқиға* деп аталады және оның ықтималдығы 1-ге тең.

2-қасиет. Егер тәжірибенің ешқандай нәтижесі берілген оқиғаның пайда болуына қолайлы болмаса, онда бұл оқиға тәжірибе нәтижесінде орындалмайды. Мұндай оқиға *мүмкін емес оқиға* деп аталады және оның ықтималдығы 0-ге тең.

3-қасиет. Толық топты құрайтын оқиғаның ықтималдығы 1-ге тең.

4-қасиет. Берілген оқиғаға қарама-қарсы оқиғаның орындалу ықтималдығы берілген оқиғаның ықтималдығына ұқсас есептеледі. Қарама-қарсы оқиғаның ықтималдығы 1 мен берілген оқиға ықтималдығының айырмасына тең.

A оқиғасының статистикалық ықтималдығы деп жүргізілген n тәжірибе барысында оқиғаның орындалуының салыстырмалы жиілігін айтады.

A оқиғасының салыстырмалы ықтималдығы — $P(A) = w(A) = \frac{m}{n}$ формуласымен есептеледі. Мұндағы $w(A)$ — A оқиғасының салыстырмалы жиілігі; m — A оқиғасы орындалған тәжірибелер саны, n — тәжірибелердің жалпы саны.

МЫСАЛ

3. Туылған 500 баланың 240 қыз бала. Қыз балалардың тууының жиілігін табайық.

Шешуі. $w(A) = \frac{240}{500} = 0{,}48.$

Жауабы : 0,48.

1. Оқиғаның жиілігі: 1) теріс сан; 2) 2 санынан артық болуы мүмкін бе?
2. Оқиғаның: 1) ақиқат; 2) мүмкін емес; 3) екі оқиғаның теңмүмкіндікті болуының ықтималдығы қандай?

Жаттығулар

А

31.1. Ойын сүйегін лақтырған кезде 1-ден 6-ға дейінгі сандар түседі. Төмендегі оқиғалардың ықтималдықтарын табыңдар:
1) 2 санының түсуі; 2) 1 немесе 2 санының түсуі;
3) 4 немесе 6 санының түсуі; 4) жұп санның түсуі.

31.2. а) Қорапшада 2 ақ және 5 қызыл шар бар. Қорапшадан кездейсоқ алынған бір шардың: 1) ақ; 2) қызыл; 3) жасыл болуының ықтималдығын табыңдар.

ә) Қорапшада 4 қызыл және 7 көк шар бар. Қорапшадан кездейсоқ алынған бір шардың: 1) қызыл; 2) ақ емес; 3) көк болуының ықтималдығын табыңдар.

31.3. Тәжірибе: ойын сүйегі лақтырылды. A, B, және C оқиғаларын қарастырайық. A = {ойын сүйегінің жоғарғы жағындағы сан 12-ге бөлінеді}, B = {ойын сүйегінің жоғарғы жағындағы сан 2-ге тең}, C = {ойын сүйегінің жоғарғы жағындағы сан 2-ге бөлінеді}. Төмендегі теңдіктердің қайсысы дұрыс? Жауаптарыңды түсіндіріңдер:

1) $P(A) = 1$; 2) $P(A) = 0$;

3) $P(C) = 0{,}5$; 4) $P(\overline{B}) = \frac{5}{6}$;

5) $P(B) = \frac{1}{6}$.

31.4 . 1) Сыныпта 25 оқушы бар. Олардың ішінде 5 оқушы "өте жақсы", 12 оқушы "жақсы", 6 оқушы "қанағаттанарлық" деген бағаға оқиды, ал 2 оқушының үлгерімі "төмен". Сыныптан кездейсоқ таңдап алынған оқушының үлгерімі "өте жақсы" немесе "жақсы" болуының ықтималдығын табыңдар.

2) 25 емтихан билетінің ішінде 5 "жеңіл" билет бар. Екі оқушы кезекпен бір билеттен алады. Бірінші оқушының "жеңіл" билетті алуының ықтималдығын табыңдар.

31.5. Ойын сүйегі лақтырылды.

1) 3 немесе 5 санының түсуінің; 2) 6 немесе 5 санының түсуінің; 3) 7 санының түсуінің ықтималдықтарын табыңдар.

B

31.6. Екі ойын сүйегі лақтырылды. Түскен сандардың көбейтіндісінің мәні 5 санына тең болуының ықтималдығын табыңдар.

31.7. 1) Бір тиын екі рет лақтырылды. Ең болмаса бір рет "елтаңба" түсуінің ықтималдығын табыңдар.

2) Үш тиын лақтырылды. Екі рет "елтаңба" түсуінің ықтималдығын табыңдар.

31.8. Емтиханға 1-ден 25-ке дейін нөмірленген билеттер дайындалған. Бір оқушының кездейсоқ алған билетінің нөмірі: 1) біртаңбалы сан; 2) екітаңбалы сан болуының ықтималдығын табыңдар.

31.9. Кездейсоқ екітаңбалы сан таңдап алынды. Төмендегі оқиғалардың ықтималдықтарын табыңдар:

1) Алынған сан 0-мен аяқталады; 2) алынған сан бірдей цифрлардан құралған; 3) алынған сан 27-ден артық, 46-дан кем; 4) алынған сан бүтін санның квадраты болады.

31.10. Төменде берілген оқиғалардың орындалу жиіліктерін табыңдар:
1) сатып алынған 5 лотереялық билеттің біреуі ұтыс билеті болып табылады;
2) сатып алынған 100 лотереялық билеттің төртеуі ұтыс билеті болып табылады;
3) атылған 20 оқтың алтауы нысанаға тиді;
4) 30 күннің ішінде 12 күн ашық болды.

C

31.11. Нысанаға 160 рет оқ атылды. Оқтың нысанаға тимеуінің статистикалық ықтималдығы 0,3. Нысанаға тигізу санын табыңдар.

31.12. $\sqrt{n-10}$ өрнегі берілген. n айнымалысының мәні 1-ден 99-ға дейінгі натурал сандар арасынан кездейсоқ таңдалады. Өрнектің мәні:
1) анықталмауының; 2) 10-нан кіші болуының; 3) [1; 6] кесіндісіне тиісті болуының ықтималдығын табыңдар.

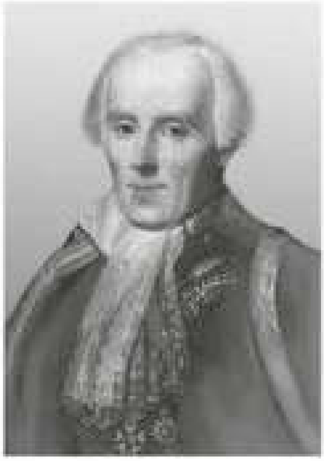
31.13. 1) (–1; 6) интервалынан бүтін сан кездейсоқ таңдалады. Осы сан $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$ теңдеуінің түбірі болуының ықтималдығын табыңдар.
2) (–2; 6) интервалынан бүтін сан кездейсоқ таңдалады. Осы сан $x^3 - x^2 - 6x = 0$ теңдеуінің түбірі болуының ықтималдығын табыңдар.
3) [–1; 10] кесіндісінен бүтін сан кездейсоқ таңдалады. Осы сан $x^2 - 5x - 6 < 0$ теңсіздігінің шешімі болуының ықтималдығын табыңдар.

4) [–1; 10] кесіндісінен бүтін сан кездейсоқ таңдалады. Осы сан $x^2 - 5x - 6$ m 0 теңсіздігінің шешімі болуының ықтималдығын табыңдар.

31.14. Ықтималдықтар теориясы бойынша қысқаша хабарлама дайындаңдар.

ҒАЛЫМ-МАТЕМАТИКТЕР ТУРАЛЫ ХАБАРЛАМА ДАЙЫНДАҢДАР

31.15. Ықтималдықтар теориясын қалыптастырған француз ғалымы Пьер-Симон Лаплас туралы хабарлама дайындаңдар. Ықтималдықтар теориясының негізгі ұғымдарын енгізген француз математигі Блез Паскаль туралы хабарлама дайындаңдар.



Пьер-Симон Лаплас
(1749 —182 7)

Блез Паскаль
(1623—1662)

ҚАЙТАЛАУ

31.16. Өрнектің мәнін табыңдар:

1) $\dfrac{\operatorname{tg} 30^\circ + \cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{2} - 4\operatorname{ctg} 135^\circ}$; 2) $\dfrac{\sqrt{2}\sin 45^\circ + \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}}{5\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4} - 3\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}}$.

31.17. Теңдеудің графигін салыңдар:

1) $\dfrac{y - x^2 + 3x}{x^2 - 4} = 0$; 2) $\dfrac{y - \sqrt{x+2}}{x^2 - 1} = 0$.

31.18. Сандар тізбегінің заңдылығын табыңдар:

1) $-1;\ 2;\ 7;\ 14;\ 23;\ \ldots$; 2) $4;\ 7;\ 12;\ 19;\ 28;\ \ldots$.

31.19. 1) Инфузория жәндігі 2 бөлікке бөліну арқылы көбейеді. 6 рет бөліну барысында инфузория жәндіктерінің саны 320 болды. Алғашқыда жәндіктердің саны қанша болған?

2) Дене 62 м биіктіктен құлады. Бірінші секундта дене 2 м төмен түсті, әр келесі минутта алдыңғысына қарағанда 2 есе артық түсе бастады. Дене қанша секундта жерге түсті?

АСПАЗ МАМАНДЫҒЫНДАҒЫ МАТЕМАТИКА

31.20. 16%-ды 200 г мерекелік сусын алу үшін қанша майлылығы 10% сүт және майлылығы 30% пломбир алу керек?

Жаңа білімді меңгеруге дайындаламыз

31.21. 1) Қабырғасының ұзындығы 6 см теңқабырғалы үшбұрышқа дөңгелек іштей салынған. Дөңгелек ауданының үшбұрыш ауданына қатынасын табыңдар.
2) Қабырғасының ұзындығы 8 см шаршыға дөңгелек іштей салынған. Дөңгелек ауданының шаршы ауданына қатынасын табыңдар.

31.22. Берілген теңсіздіктің шешімі болатын сандардан тұратын интервалдың ұзындығын табыңдар:

1) $x^2 + 2x - 8 < 0$; 2) $x^2 - 3x - 10 < 0$;

3) $x^2 - 6x - 2 < 0$; 4) $x^2 + 12x - 4 < 0$.

Жаңа білімді меңгеруге арналған тірек ұғымдар

Оқиға, элементар оқиға, теңмүмкіндікті нәтижелер, қолайлы нәтижелер, алмастырулар, орналастырулар, терулер.

§ 32. ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ ЫҚТИМАЛДЫҚ

Түйінді ұғымдар

Ықтималдық, геометриялық ықтималдық

Есептерді шығару барысында геометриялық ықтималдықты қолдануды үйренесіңдер.

Классикалық және статистикалық ықтималдықтармен қатар практикада геометриялық ықтималдық қолданылады. Классикалық ықтималдық нәтижелер теңмүмкіндікті болғанда ғана қолданылатынын және нәтижелер саны шектеулі болатынын білесіңдер. Статистикалық ықтималдықты қолдану тәжірибелер жүргізуді қажет етеді. Мүмкін нәтижелер саны шексіз болған жағдайда геометриялық ықтималдық қолданылады.

Геометриялық ықтималдық —нүктенің кесіндіге, жазықтық пен кеңістік фигураларының бөлігіне түсу ықтималдығы.

МЫСАЛ

1. Жазықтықта қандай да бір D фигурасы және D фигурасының бір бөлігі болатын E геометриялық фигурасы берілсін (80-сурет).

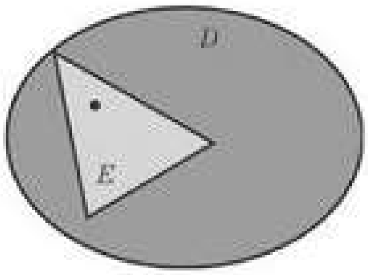
Тәжірибе барысында D фигурасына тиісті кездейсоқ нүкте таңдалсын. Осы нүктенің E фигурасына тиісті болу ықтималдығын табу керек.

Шешуі . Таңдалған нүкте D фигурасының кез келген жерінен алынуы мүмкін. Бірақ алынған нүктенің E фигурасына тиісті болу ықтималдығы осы фигураның ауданына тура пропорционал және оның пішініне тәуелді емес.

A оқиғасының ықтималдығы, яғни алынған нүктенің E фигурасына тиісті болуы:

$$P(A) = \frac{S(E)}{S(D)}$$

(мұндағы $S(E)$ — E фигурасының ауданы, $S(D)$ — D фигурасының ауданы) формуласынан анықталады және E фигурасы толығымен D фигурасында жатуы геометриялық ықтималдықты береді.



80-сурет

Ауданы S_1 болатын фигура ауданы S_2-ге тең фигураның ішкі жиыны болсын. A оқиғасы "лақтырылған дене ауданы S_1 фигураға түседі". Онда A оқиғасының ықтималдығы:

$$P(A) = \frac{S_1}{S_2}.$$

МЫСАЛ

2. Қабырғасының ұзындығы 4 см шаршыға радиусы 2 см дөңгелек іштей сызылған. Шаршыда кездейсоқ белгіленген нүктенің дөңгелекке тиісті болуының ықтималдығын табайық.

Шешуі. Геометриялық ықтималдықтың анықтамасы бойынша ізделінді ықтималдық дөңгелектің ауданының шаршы ауданына қатынасына тең, яғни

$$P(A) = \frac{S_д}{S_ш} = \frac{4\pi}{16} = \frac{\pi}{4} = \frac{3,14}{4} = 0,785.$$

Жауабы : 0,785.

МЫСАЛ

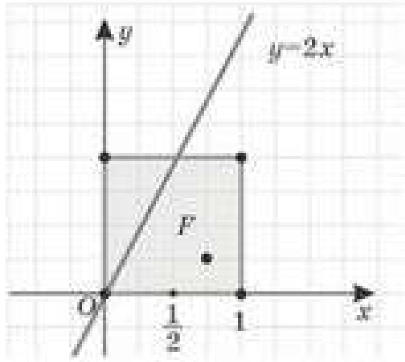
3. Төбелері (0; 0), (0; 1), (1; 1), (1; 0) нүктелері болатын квадраттан кездейсоқ $(x; y)$ нүктесі алынған. Осы нүкте координаталарының $y < 2x$ теңсіздігін қанағаттандыру ықтималдығын табайық.

Шешуі . Берілген шарттарды қолданып, шаршы мен $y = 2x$ түзуін саламыз (81-сурет).

Төбелері (0; 0), (0; 1), (1; 1), (1; 0) нүктелері болатын квадраттан алынған нүктенің $y < 2x$ теңсіздігін қанағаттандыруы үшін оны шаршының $y = 2x$ түзуінен төмен жатқан бөлігінен, яғни F фигурасынан алу керек (81-сурет).

$$P(A) = \frac{S(F)}{S(E)}$$

(мұндағы $S(F)$ — F фигурасының ауданы, $S(E)$ — шаршының ауданы) формуласын қолданамыз:



81-сурет

$$S(E) = 1 \text{ және } S(F) = S(E) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 =$$

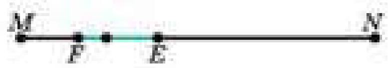
$$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}. \text{ Сонда, } P(A) = \frac{3}{4}.$$

Жауабы : $\frac{3}{4}$.

A оқиғасының геометриялық ықтималдығы, яғни алынған нүктенің FE кесіндісіне тиісті болуы

$$P(A) = \frac{l(FE)}{l(MN)}$$

формуласынан анықталады (мұндағы $l(MN)$ — қанд ай да бір MN кесіндісінің ұзындығы, $l(FE)$ — қандай да бір FE кесіндісінің ұзындығы) және FE кесіндісінің толығымен MN кесіндісіне тиісті болуы геометриялық ықтималдықты береді (82-сурет).



82-сурет

Ұзындығы l болатын кесінді ұзындығы L-ге тең кесіндіге тиісті. A оқиғасы — "кездейсоқ алынған нүкте ұзындығы l кесіндіде белгіленген". Онда А оқиғасының ықтималдығы:

$$P(A) = \frac{l}{L}$$

МЫСАЛ

4. Ұзындығы 15 см AD кесіндісінде X нүктесі белгіленген. X нүктесінің A нүктесінен 7 см-ден артық және D нүктесінен 11 см-ден артық емес қашықтықта орналасуының ықтималдығын табыңдар.

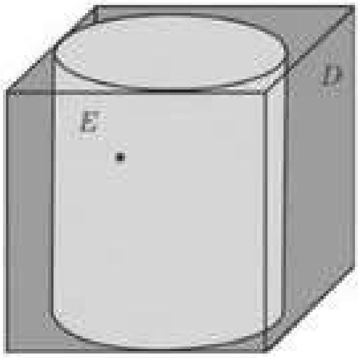
Шешуі: Есептің шартын суретпен көрсетейік (83-сурет). Шарт бойынша $AC = 7$ см, $BD = 11$ см.

83-сурет

Онда X нүктесі BC кесіндісіне тиісті: $7 + 11 - 15 = 3$ (см).

Демек, $P(A) = \frac{BC}{AD} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5} = 0{,}2.$

Жауабы : 0,2.



84-сурет

A оқиғасының геометриялық ықтима лдығы, яғни алынған нүктенің E денесіне тиісті болуы

$$P(A) = \frac{V(E)}{V(D)}$$

(мұндағы $V(E)$ — E денесінің көлемі, $V(D)$ — D денесінің көлемі) формуласынан табылады және E денесінің толығымен D денесіне тиісті болуы геометриялық ықтималдықты береді (84-сурет).

МЫСАЛ

5. Өлшемдері 4 см, 8 см, 16 см тікбұрышты параллелепипедке қабырғасының ұзындығы 4 см тең куб іштей салынған. Тікбұрышты параллелепипедтен кездейсоқ алынған X нүктесі кубтың ішінде болуының ықтималдығын табыңдар.

Шешуі: Кубтың көлемі 64 см^3, тікбұрышты параллелепипедтің көлемі 512 см^3. Демек, $P(A) = \frac{V_k}{V_n} = \frac{64}{512} = \frac{1}{8} = 0{,}125.$

Жауабы: 0,125.

ТҮСІНДІРІҢДЕР

Неліктен геометриялық ықтималдықты табуға берілген жағдай-лардың бәрін бір ғана $P(A) = \frac{m_E(F_1)}{m_E(F)}$, мұндағы $F_1 \subset F$, $m_E(F_1)$ және $m_E(F)$ — геометриялық шамалар (ұзындық, аудан, көлем) формуласымен беруге болатынын түсіндіріңдер.

?

1. Қандай оқиғалар үйлесімді деп аталады?
2. Қандай жағдайда геометриялық ықтималдық: 1) 0; 2) 1 санына тең болады?

Жаттығулар

A

32.1. Үстелге ойын сүйегі лақтырылды. 1) Ойын сүйегінде 4 ұпайдың; 2) ойын сүйегінде жұп санды ұпайдың түсу ықтималдығын табыңдар.

32.2. Ұзындығы 1 см болатын кесінді бойынан кездейсоқ алынған нүктеден кесінді ұштарына дейінгі қашықтық $\frac{1}{4}$-ден аспауының ықтималдығын табыңдар.

32.3. Қабырғасының ұзындығы 2 см болатын квадраттан кездейсоқ A нүктесі алынды. Осы квадратқа қабырғасының ұзындығы 1 см болатын екінші квадрат іштей салынған. Алынған нүктенің екінші квадратқа тиісті болуының ықтималдығын табыңдар.

32.4. Қабырғасының ұзындығы 2 см квадраттан кездейсоқ A нүктесі алынды. Осы квадратқа қабырғасының ұзындығы 1 см болатын екінші квадрат іштей салынған. Алынған нүктенің екінші квадратқа тиісті болмауының ықтималдығын табыңдар.

32.5. Радиусы 2 см дөңгелектен кездейсоқ B нүктесі алынды. Осы дөңгелекке радиусы 1 см болатын дөңгелек іштей салынған. B нүктесінің іштей салынған дөңгелекке тиісті болуының ықтималдығын табыңдар.

32.6. Радиусы 2 см дөңгелектен кездейсоқ B нүктесі алынды. Осы дөңгелекке радиусы 1 см болатын дөңгелек іштей салынған. B нүктесінің іштей салынған дөңгелекке тиісті болмауының ықтималдығын табыңдар.

32.7. Радиусы 3 см шардан кездейсоқ B нүктесі алынды. Осы шарға радиусы 2 см болатын шар іштей салынған. B нүктесінің іштей салынған шарға тиісті болуының ықтималдығын табыңдар.

32.8. Радиусы 3 см шардан кездейсоқ B нүктесі алынды. Осы шарға радиусы 2 см болатын шар іштей салынған. B нүктесінің іштей салынған шарға тиісті болмауының ықтималдығын табында р.

B

32.9. Ұзындығы 12 см AB кесіндісінен кездейсоқ C нүктесі алынды. AC кесіндісіне салынған шаршының ауданы 36 см^2 мен 81 см^2 аралығында болуының ықтималдығын табыңдар.

32.10. 1) [1; 10] кесіндісінен сан кездейсоқ таңдалады. Осы сан $x^2 - 5x + 6 < 0$ теңсіздігінің шешімі болуының ықтималдығын табыңдар.

2) [1; 10] кесіндісінен сан кездейсоқ таңдалады. Осы сан $x^2 - 5x - 6$ m0 теңсіздігінің шешімі болуының ықтималдығын табыңдар.

32.11. 1) Қабырғасының ұзындығы 1 см шаршыда A нүктесі белгіленген. A нүктесінен шаршының қабырғасына дейінгі арақашықтық $\frac{1}{3}$-ден артық болмауының ықтималдығын табыңдар.

2) Қабырғасының ұзындығы 1 см шаршыда A нүктесі белгіленген. A нүктесінен шаршының центріне дейінгі арақашықтық $\frac{1}{3}$-ден артық болмауының ықтималдығын табыңдар.

3) Қабырғасының ұзындығы 1 см шаршыда A нүктесі белгіленген. A нүктесінен шаршының көрсетілген төбесіне дейінгі арақашықтықтың $\frac{1}{4}$-ден артық болмауының ықтималдығын табыңдар.

32.12. Координаталық жазықтыққа радиустары 5 см және 10 см болатын центрі ортақ екі шеңбер салынған. Үлкен дөңгелектен кездейсоқ алынған нүктенің екі шеңбердің қиылысуынан пайда болған сақинаға тиісті болуының ықтималдығын табыңдар.

C

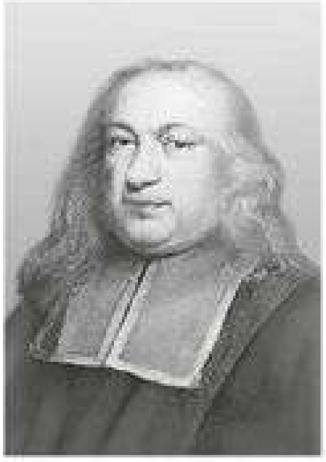
32.13. Кубқа шар іштей салынған. Кубтан кездейсоқ алынған нүктенің шарға тиісті болуының ықтималдығын табыңдар.

***32.14.** Шарға куб іштей салынған. Шардан кездейсоқ алынған нүктенің кубқа тиісті болуының ықтималдығын табыңдар.

***32.15.** Кубқа шар іштей салынған. Кубтан кездейсоқ алынған нүктенің шарға тиісті болмауының ықтималдығын табыңдар.

ҒАЛЫМ-МАТЕМАТИКТЕР ТУРАЛЫ ХАБАРЛАМА ДАЙЫНДАҢДАР

32.16. Ûқòèìàëäûқòàð òåîðèÿñû ғûëûì ðåòiíäå ïðòà ғàñûðëàðäà ïàéäà áîëäû.



Пьер де Ферма
(1601—1655)

Христиан Гюйгенс
(1629—1695)

Якоб Бернулли
(1654—1705)

Ûқòèìàëäûқòàð òåîðèÿñûíà áàéëàíûñòû ғàëûìäàðäûң åң-ááåêòåðі XVII ғàñûðäà æàðûқ êөðäåі. Îëûі ñүéåãåіі ëàқòûð-ғàíäà ïàéäà áîëàòûі çàңäûëûқòàðäû француз математиктері Áëåç Ïàñêàëü ìåí Ïüåð де Ôåðìà àөқàі. Îñû ìәñåëåìåі нидерландық Õðèñòèàі Ãþéãåíñ òå àéìàëûñқàі. Ûқòè-ìàëäûқòàð òåîðèÿñûíà үëêåі үëåñ қîñқàі швейцар математигі ßêîá Áåðíóëëè.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

1. Тәжірибе барысында бір мезетте орындалатын оқиғалар:
A) ақиқат; B) мүмкін емес; C) кездейсоқ;
D) қарама-қарсы; E) теңмүмкіндікті.

2. Жәшікте 9 қызыл, 5 көк, 6 сары шар бар. Жәшіктен кездейсоқ бір шар алынды. Алынған шардың көк болуының ықтималдығын табыңдар.
A) $\frac{2}{5}$; B) 0,25; C) $\frac{5}{16}$; D) $\frac{3}{8}$; E) 0,4.

3. Бірдей парақшаларда 1-ден 32 санына дейін жазылып, жәшікке салынды. Жәшіктен бір парақша алынды. Алынған парақшадағы сан 4-ке еселік болуының ықтималдығын табыңдар.
A) $\frac{8}{25}$; B) 0,5; C) $\frac{7}{32}$; D) 0,25; E) 0,3.

4. Кездейсоқ таңдалып алынған екітаңбалы санның цифрлары әртүрлі болуының ықтималдығын табыңдар.
A) 0,5; B) $\frac{8}{9}$; C) 0,6; D) 0,75; E) 0,85.

5. Жәшікте 10 көк, 6 сары, 6 ақ түсті асық бар. Жәшіктен кездейсоқ бір асық алынды. Алынған шардың қызыл немесе ақ болуының ықтималдығын табыңдар.
A) 0,2; B) 0,3; C) 0,4; D) 0,5; E) 0,35.

6. Дүкенде 40 смартфон бар, оның 20-сы шетелде шығарылған. Күні бойы сатылған 6 смартфонның 3-еуі шетелде шығарылған болуының ықтималдығын табыңдар.
A) $\frac{C_{20}^3}{C_{40}^3}$; B) $\frac{2C_{20}^3}{C_{40}^6}$; C) $\frac{C_{20}^3}{C_{40}^6}$; D) $\frac{C_{20}^2 \cdot C_{20}^3}{C_{40}^6}$; E) $\frac{C_{20}^2 + C_{20}^3}{C_{40}^6}$.

7. 1-ден 20-ға дейінгі натурал сандардан бір сан таңдалған. Таңдалған санның $(x^2 - 10x + 24)(x^2 - 8x + 15) = 0$ теңдеуінің түбірі болуының ықтималдығын табыңдар.
A) 0,25; B) 0,5; C) 0,4; D) 0,2; E) 0,1.

8. Қабырғасының ұзындығы 20 см болатын шаршының ішіне нүкте белгіленді. Нүкте шаршыға іштей сызылған шеңберге тиісті болмауының ықтималдығын табыңдар.
A) 0,25; B) $1 - \frac{\pi}{4}$; C) 0,4; D) $\frac{\pi}{4}$; E) 0,6.

9. 1-ден 10-ға дейінгі (10-ды қоса алғанда) натурал сандардан бір сан таңдалған. Таңдалған санның $(x^2-2x-24)(x^2-2x-15)$ m 0 теңсіздігінің шешімі болуының ықтималдығын табыңдар.

А) 0,25;   В) 0,3;   С) 0,4;   D) 0,1;   Е) 0,2.

10. –9-дан 10-ға дейінгі (10-ды қоса алғанда) бүтін сандардан бір сан таңдалған. Таңдалған санның $(x^2-9)(x^2-8x-9)<0$ теңсіздігінің шешімі болуының ықтималдығын табыңдар.

А) 0,25;   В) 0,3;   С) 0,4;   D) 0,2;   Е) 0,5.

11. 30 емтихан сұрақтарының 5-еуі "жеңіл" және 6-уы "күрделі". Екі оқушы бір сұрақтан алды. Егер бірінші оқушыға "жеңіл" сұрақ түссе, онда екінші оқушыға "күрделі" сұрақ түсуінің ықтималдығын табыңдар.

А) 0,15;   В) $\frac{2}{29}$;   С) 0,14;   D) $\frac{6}{29}$;   Е) 0,3.

12. $\sqrt{n-6}$ өрнегі берілген. n-нің мәні 1-ден 100-ге дейінгі сандар дың арасынан таңдалған. Өрнектің мәні 4-тен кем болуының ықтималдығын табыңдар.

А) 0,12;   В) 0,16;   С) 0,18;   D) 0,2;   Е) 0,3.

9-СЫНЫПТАҒЫ АЛГЕБРА КУРСЫН ҚАЙТАЛАУҒА АРНАЛҒАН ЖАТТЫҒУЛАР

Есептеңдер

1. Өрнектің мәнін табыңдар:

1) $\cos60° - \sin60° + \operatorname{ctg}60° - \operatorname{tg}60°$;

2) $-\sin30° + \cos30° - \operatorname{ctg}30° + \operatorname{tg}30°$;

3) $\cos45° - \operatorname{tg}45° - \sin45° + \operatorname{ctg}45°$;

4) $\sin0° - \cos30° + \operatorname{tg}45° - \operatorname{ctg}60°$;

5) $-\cos0° + \operatorname{tg}30° - \operatorname{ctg}45° + \sin60°$;

6) $\operatorname{tg}0° - \operatorname{ctg}90° - \sin0° - \cos90°$.

2. Өрнектің мәнін табыңдар:

1) $\sin\frac{\pi}{6} - 4\cos\frac{\pi}{6} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} - 5\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}$;

2) $\cos\frac{\pi}{2} + 9\sin\frac{\pi}{2} - \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} - 7\operatorname{tg}0°$;

3) $\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} + 2\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} - 11\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$;

4) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2} - 5\sin\frac{\pi}{3} + 6\cos\frac{\pi}{3} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$.

3. Есептеңдер:

1) $\dfrac{\cos\frac{\pi}{6} - \sqrt{3}\operatorname{tg}60°}{\sin\frac{\pi}{6} + \cos60°}$;

2) $\dfrac{\sqrt{3}\operatorname{ctg}30° + \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}}{2\operatorname{tg}45° - \cos0°}$;

3) $\dfrac{\operatorname{tg}30° + \cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{2} - 4\operatorname{ctg}45°}$;

4) $\dfrac{\sqrt{2}\sin45° + \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}}{5\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - 4\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}}$;

5) $6\cos40° - 8\cos^3 40°$;

6) $\dfrac{4\sin25°\sin65°}{\cos40°}$.

4. Егер:

1) $\sin\alpha = 0,7$ және $0° < \alpha < 90°$ болса, онда $\cos\alpha$, $\sin2\alpha$, $\cos2\alpha$-ны;

2) $\cos\alpha = 0,6$ және $270° < \alpha < 360°$ болса, онда $\sin\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, $\operatorname{tg}2\alpha$-ны;

3) $\operatorname{tg}\alpha = 5$ және $180° < \alpha < 270°$ болса, онда $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $\cos2\alpha$-ны табыңдар.

5. Егер:

1) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ және $0° < \alpha < 90°$ болса, онда $\sin 2\alpha$ $\cos 4\alpha$, $\operatorname{ctg} 4\alpha$-ны;

2) $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ және $180° < \alpha < 270°$ болса, онда $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$, $\sin 4\alpha$-ны есептеңдер .

6. Егер:

1) $\cos\alpha = \frac{7}{9}$ және $0° < \alpha < 90°$ болса, онда $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\sin\alpha$-ны;

2) $\sin\alpha = \frac{4\sqrt{2}}{9}$ және $90° < \alpha < 180°$ болса, онда $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$-ны есептеңдер .

7. Егер $\sin\alpha = \frac{1}{6}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{35}}{6}$, $\sin\beta = \frac{1}{9}$, $\cos\beta = \frac{4\sqrt{5}}{9}$ және α, β бірінші ширекке тиісті болса, онда $\cos(\alpha + \beta)$, $\sin(\alpha - \beta)$, $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$-ны табыңдар.

8. Егер: $\sin\alpha = \frac{6}{7}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{13}}{7}$, $\sin\beta = \frac{7}{8}$, $\cos\beta = \frac{\sqrt{15}}{8}$ және α, β бірінші ширекке тиісті болса, онда $\cos(\alpha - \beta)$, $\sin(\alpha + \beta)$, $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$-ны табыңдар.

9. Егер:

1) $a_1 = 8{,}5$; $a_2 = 10{,}5$; $n = 4$; 2) $a_1 = -19$; $a_2 = -16$; $n = 6$;

3) $a_1 = 23$; $a_2 = 19$; $n = 5$; 4) $a_1 = -1{,}7$; $a_2 = -3{,}7$; $n = 7$ болса, онда арифметикалық прогрессияның d айырымы мен a_n-ші мүшесін табыңдар.

10. Егер:

1) $a_1 = 1{,}6$; $d = 0{,}2$; $n = 10$; 2) $a_3 = 27$; $d = -0{,}5$; $n = 8$;

3) $a_4 = 4{,}6$; $d = 2{,}3$; $n = 7$; 4) $a_2 = 0$; $d = -4{,}1$; $n = 9$ болса, онда арифметикалық прогрессияның d айырымы мен a_n-ші мүшесін табыңдар.

11. Егер:

1) $a_1 = -35$; $a_n = -20$; $d = 5$ және $m = 6$;

2) $a_2 = 30$; $a_n = 20$; $d = -5$ және $m = 5$;

3) $a_4 = 6{,}2$; $a_n = 7{,}4$; $d = -0{,}4$ және $m = 10$;

4) $a_3 = -6{,}6$; $a_n = -7{,}3$; $d = 0{,}7$ және $m = 20$ болса, онда арифметикалық прогрессияда n мен S_m-ді табыңдар.

12. Егер:

1) $d = -20$; $S_4 = 320$;   2) $d = 20$; $S_6 = 60$;
3) $d = 30$; $S_7 = 259$;   4) $d = -40$; $S_9 = 1350$
болса, онда арифметикалық прогрессияның a_1-ші мүшесін табыңдар.

13. Егер:

1) $b_1 = 0{,}7$; $b_2 = 1{,}4$; $n=5$;   2) $b_1 = 0{,}6$; $b_2 = 1{,}8$; $n = 7$;
3) $b_1 = 0{,}2$; $b_2 = 1{,}4$; $n=4$;   4) $b_1 = 0{,}3$; $b_2 = -1{,}2$; $n = 6$ болса, онда геометриялық прогрессияның q еселігі мен b_n-ші мүшесін табыңдар.

14. Егер:

1) $b_2 = -243$; $q = -\frac{1}{3}$; $n = 4$;   2) $b_3 = 81$; $q = -\frac{1}{3}$; $n = 8$;
3) $b_4 = 128$; $q = -\frac{1}{2}$; $n = 10$;   4) $b_5 = 64$; $q = -\frac{1}{2}$; $n = 9$ болса, онда геометриялық прогрессияның b_1 жән е b_n-ші мүшесін табыңдар.

15. Егер:

1) $b_1 = -1000$; $q = 0{,}5$; $n = 6$;   2) $b_1 = 400$; $q = 0{,}2$; $n = 7$;
3) $b_1 = 900$; $q = 0{,}01$; $n = 6$;   4) $b_1 = -500$; $q = -0{,}2$; $n = 8$
болса, онда геометриялық прогрессияда S_n-ді табыңдар.

16. Егер:

1) $b_4 = -\frac{27}{32}$; $q = -\frac{3}{4}$;   2) $b_5 = -16$; $q = \frac{2}{3}$;
3) $b_3 = 90$; $q = \frac{3}{5}$;   4) $b_4 = 12{,}5$; $q = -\frac{5}{6}$ болса, онда геометриялық прогрессияда b_1-ді табында р.

Өрнектерді тепе-тең түрлендірулер

17. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \operatorname{ctg}(2\pi - \alpha) \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \operatorname{tg}(2\pi + \alpha)$;

2) $\cos(2\pi - \alpha) \cdot \left(\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)\right)^2 \cdot \operatorname{tg}(\pi + \alpha) \cdot \left(\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\right)^2$.

18. $2\sin(-\alpha) \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \cos(360° - 2\alpha) \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) - 2\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$

өрнегінің мәні нөлге тең болатынын дәлелдеңдер.

19. $0{,}5\cos 8\alpha - 1{,}5 - \cos^2 4\alpha = 1$ теңдігінің дұрыстығын тексеріңдер.

20. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\dfrac{\operatorname{ctg}^2(270^\circ - 3\alpha)\cos(2\alpha + 90^\circ)\cos(\alpha - 180^\circ)\operatorname{ctg}(-\alpha)}{\sin(\alpha - 90^\circ)\operatorname{tg}(270^\circ + \alpha)\cos(-\alpha)\operatorname{tg}^2(180^\circ + 3\alpha)}$;

2) $\dfrac{\sin(\beta + 63^\circ) + \sin(\beta - 57^\circ)}{2\cos(\beta - 87^\circ)}$.

21. $2\left(0{,}5 - 0{,}5\cos 4\alpha + \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}\right) - (1 - \sin^2 2\alpha)\cdot\dfrac{1}{\operatorname{ctg}^2 2\alpha} - \cos^2 2\alpha$

өрнегінің мәні бірге тең болатынын дәлелеңдер.

22. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\left[\left(1 - \sin^2\dfrac{\alpha}{2}\right)\cdot\left(\dfrac{\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}} + \cos\dfrac{\alpha}{2}\right)\right]:$

$:\left[\left(1 - \cos^2\dfrac{\alpha}{2}\right)\cdot\dfrac{\operatorname{ctg}\left(90^\circ + \dfrac{\alpha}{2}\right)\cdot\operatorname{ctg}\left(180^\circ - \dfrac{\alpha}{2}\right)}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}\right]$;

2) $\dfrac{\sin^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha}{\cos^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha}$;

3) $\dfrac{1}{8}\cos 4\alpha + 0{,}5\cos 2\alpha + \dfrac{3}{8}$;

4) $\dfrac{\sin^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha}{\cos^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha}$.

23. $\dfrac{\cos^2(\pi + 4\alpha) - \cos^2(\alpha + \beta) + \cos^2\left(4\alpha - \dfrac{\pi}{2}\right)}{\sin^2(\pi - (\alpha + \beta)) + \operatorname{tg}^2(\alpha + \beta) - \cos^2\left(\dfrac{3\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right)} = \cos^2(\alpha + \beta)$ теңдігінің дұрыстығын тексеріңдер.

24. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\operatorname{tg} 7\alpha\cdot\operatorname{ctg} 7\alpha + \sin^2\dfrac{\alpha}{3}\cdot\operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{3} + \sin^2\dfrac{\alpha}{3}$;

2) $(0{,}5 + 0{,}5\cos 10\alpha) : (0{,}5 - 0{,}5\cos 10\alpha)\cdot\operatorname{tg}^2 5\alpha$;

3) $\dfrac{\cos^2\alpha - 4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{1 - 8\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}$;

4) $\dfrac{\sin^4\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - \cos^4\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha - 1}$.

25. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - 4\alpha\right)\sin(2\pi - 2\alpha)\cos(-2\alpha)}{\operatorname{ctg}(2\pi - 4\alpha)\left(\cos^2 2\alpha - \cos^2\left(\dfrac{\pi}{2} - 2\alpha\right)\right)} = 0{,}5\operatorname{tg}4\alpha$;

2) $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta + (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = 1$;

3) $(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)\cdot\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta = 1$;

4) $4\sin^6\alpha + 4\cos^6\alpha - 1 = 3\cos^2 2\alpha$.

Теңдеулер және олардың жүйелері

26. Берілген теңдеудің шешімі болатын үш сандар жұбын көрсетіңдер:

1) $3x - 4y = 10$; 2) $5x + 0{,}2y = 1$.

27. (0; 0,4), (0,4; 0), (0; –0,4), (–0,4; 0), (4; 6), (–4; –6), (0; 0) сандар жұптарының арасынан $8x - 5y - 2 = 0$ теңдеуінің шешімін табыңдар.

28. Егер арифметикалық прогрессияның бірінші және төртінші мүшелерінің қосындысының мәні 23-ке, үшінші және алтыншы мүшелерінің қосындысының мәні 31-ге тең болса, прогрессияның бірінші мүшесі мен айырымын табыңдар.

29. Шексіз геометриялық прогрессияның қосындысы 6-ға, алғашқы бес мүшесінің қосындысы $\dfrac{93}{16}$-ке тең болса, прогрессияның төртінші мүшесі мен еселігін табыңдар .

30. Егер:

1) $\begin{cases} b_1 + b_4 = 68{,}4, \\ b_2 + b_3 = -8{,}4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} b_1 - b_3 = 384, \\ b_1 + b_4 = 403{,}2 \end{cases}$ болса, онда геометриялық прогрессияның алғашқы бес мүшесінің қосындысының мәнін табыңдар.

31. Егер:

1) $\begin{cases} 2a_2 - 5a_6 = 23, \\ a_1 - 9a_5 = 86; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4a_3 - 5a_2 = -75, \\ 6a_2 + 5a_7 = 135 \end{cases}$

геометриялық прогрессиясының алғашқы сегіз мүшесінің қосындысының мәнін табыңдар.

Теңдеулер жүйесін графиктік тәсілмен шешіңдер **(32—34)**:

32. 1) $\begin{cases} 5y^2 - x^2 = 1, \\ 7y^2 + 3xy = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x^2 + xy = 5, \\ x^2 + 3xy = 4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y^2 - x^2 = 12, \\ y^2 - 3xy + 2x^2 = 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y^2 - 3xy = 2, \\ y^2 - 4xy + x^2 = 3. \end{cases}$

33. 1) $\begin{cases} (u + v)^2 - 4(u + v) = 45, \\ (u - v)^2 - 2(u - v) = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (u + v)^2 - 5(u + v) = -4, \\ (u - v)^2 - 5(u - v) = 2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} u - uv + v = 1, \\ u^2 + 2u + 2v + v^2 = 11; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} u + uv + v = 5, \\ u^2 + uv + v^2 = 7. \end{cases}$

34. 1) $\begin{cases} y = x^2 + 2x, \\ x^2 + (y + 3)^2 = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y - x^2 - x = 0, \\ (x - 2)^2 + y^2 = 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4, \\ x + y = 3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} (x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 9, \\ x - y = -8. \end{cases}$

Теңсіздіктер және олардың жүйелері

35. Теңсіздікті шешіңдер:

1) $(x - 10)(x + 5)(x - 6)$ l 0; 2) $(x + 2)(x - 7)(x + 11)$ m 0;

3) $\frac{x + 5}{x - 6}$ l 0; 4) $\frac{x - 7}{x + 2}$ m 0;

5) $\frac{x}{x - 7}$ l 2; 6) $\frac{x}{6 + x}$ m -1;

7) $(x - 1)(x - 2)^2(x - 3) < 0$; 8) $(x + 3)^2(x + 2)(x + 1) < 0$.

36. Теңсіздікті квадраттық функцияның графигінің көмегімен және интервалдар әдісімен шешіңдер:

1) $x^2 - 2x - 5$ l 0; 2) $-x^2 - 2x + 15$ m 0.

37. Теңсіздікті шешіңдер:

1) $6x^2 - 13x - 5 > 0$; 2) $4x^2 + 33x - 27 < 0$.

38. Теңсіздікті қанағаттандыратын ең кіші натурал санды табыңдар:

1) $\frac{x+1}{x-5}$ m 0; 2) $\frac{10-x}{x-2}$ l 0.

39. Теңсіздікті қанағаттандыратын ең үлкен натурал санды табыңдар:

1) $(2-x)(x-8)^2$ l 0; 2) $(x-3)^2(x-9) < 0$.

40. Теңсіздікті қанағаттандыратын ең кіші бүтін санды табыңдар:

1) $\frac{x^2-81}{x}$ l 0; 2) $\frac{7x-x^2}{x+7}$ m 0.

41. Теңсіздікті қанағаттандыратын ең үлкен бүтін санды табыңдар:

1) $(x+5)(x-6)^2 < 0$; 2) $(x+6)^2(5-x) > 0$.

42. Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases} x^2 - 4x \geqslant 0, \\ x - 12 > 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 6x - x^2 < 0, \\ -4 - x \leqslant 0. \end{cases}$

43. 1) $\begin{cases} -x^2 + 6x + 16 > 0, \\ x^2 - 12x + 27 < 0 \end{cases}$ теңсіздіктер жүйесін қанағаттандыратын ең кіші және ең үлкен натурал сандарды табыңдар.

2) $\begin{cases} x^2 + 8x + 7 \geqslant 0, \\ x^2 + 15x + 36 < 0 \end{cases}$ теңсіздіктер жүйесін қанағаттандыратын ең кіш і және ең үлкен бүтін сандардың қосындысының мәнін табыңдар.

44. Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases} |x| \geqslant 5, \\ 6 + x > 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} |x| \leqslant 3, \\ -9 + x^2 \leqslant 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} |x-2| \leqslant 3, \\ x^2 - x + 12 < 0. \end{cases}$

45. 1) $\begin{cases} |2x - 3| \leqslant 1, \\ x^2 + x > 0 \end{cases}$ теңсіздіктер жүйесін қанағаттандыратын бүтін сандардың қосынды сының мәнін есептеңдер.

2) $\begin{cases} |2x + 5| \leqslant 3, \\ x^2 - 5x - 24 \leqslant 0 \end{cases}$ теңсіздіктер жүйесін қанағаттандыратын барл ық бүтін сандарды табыңдар.

46. Теңдеуді шешіңдер:

1) $\frac{x^2+4}{x} + \frac{x}{x^2+3x+4} + \frac{11}{2} = 0;$ 2) $\frac{x^3+2x}{(x^2-x+2)^2} = \frac{3}{4}.$

47. Координаталары теңсіздіктер жүйесін қанағаттандыратын нүктелер жиынын координаталық жазықтықта кескіндеңдер:

1) $\begin{cases} y < x^2, \\ x - 5 \geqslant 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 4, \\ x - y < 2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y < -x^2 + 2, \\ x^2 + y^2 + 2y \geqslant 3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y > x^2 - 2x, \\ x^2 + y^2 - 4y \geqslant 1. \end{cases}$

Функция және оның графигі

48. Функцияның графигін салыңдар:

1) $y = 2x^2 - 4x + 3;$ 2) $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2;$

3) $y = -x^2 + 3x - 1;$ 4) $y = -\frac{1}{3}x^2 - x + 1.$

49. Функцияның графигін салыңдар және оның анықталу облысы мен мәндер жиынын көрсетіңдер:

1) $y = 2x^2 + |x|;$ 2) $y = -x^2 + 3|x|;$

3) $y = 2x - x \cdot |x|;$ 4) $y = x \cdot |x| - 3x.$

50. Функцияның графигін салыңдар және бар болса, онда оның ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңдар:

1) $y = 4x^2 - 2x + 3;$ 2) $y = -x^2 - 4x + 2;$

3) $y = 2 - \sqrt{x-1};$ 4) $y = 2 + \sqrt{2-x}.$

51. Теңдеуді графиктік тәсілмен шығарыңдар және түбірлерінің жуық мәндерін жазыңдар:

1) $x^2 - 4x = \frac{1}{x+1};$ 2) $-3x^2 + 2x - 2 = \frac{x+1}{x-2}.$

52. Теңдеудің графигін салыңдар:

1) $\frac{y - x^2 + 2}{x - 1} = 0;$ 2) $\frac{y - x^2 + 2x}{x + 1} = 0;$

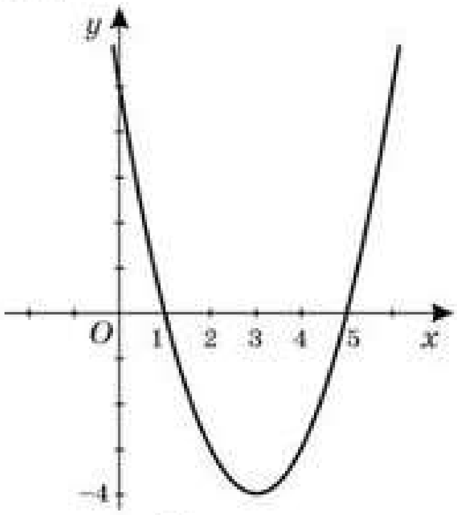
3) $\frac{y^2 - x^2 - 4}{x^2 - 1} = 0;$ 4) $\frac{y^2 - x^2 - 4x}{x^2 - 4} = 0.$

53. 85-суретте квадраттық функцияның графигі берілген. Графиктің көмегімен:

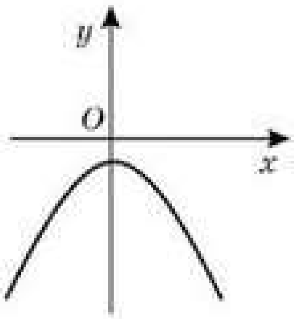
1) функцияның бірсарындылық аралықтарын көрсетіңдер;

2) функцияның таңбатұрақтылық аралықтарын көрсетіңдер;
3) графиктің симметрия осінің теңдеуін жазыңдар;
4) функцияның ең кіші мәнін табыңдар.

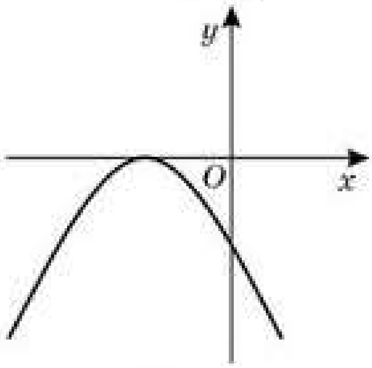
54. 1) 86-суретте $y = ax^2 + bx + c$ функциясының графигі берілген және $D = b^2 - 4ac$. a, b, c сандарының және D-ның таңбасын табыңдар.



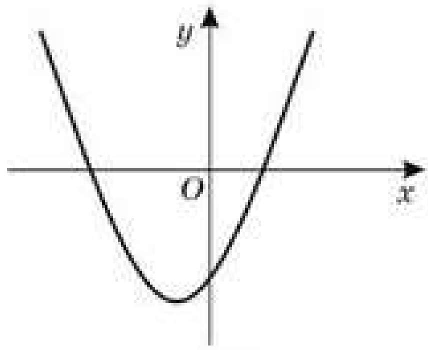
85-сурет



86-сурет



87-сурет



88-сурет

2) 87-суретте $y = ax^2 + bx + c$ квадраттық функциясының графигі берілген және $D = b^2 - 4ac$. a, b, c сандарының және D-ның таңбасын табыңдар.
3) 88-суретте $y = ax^2 + bx + c$ квадраттық функциясының графигі берілген және $D = b^2 - 4ac$. а) $ac > 0$; ә) $Dc > 0$; б) $ab < 0$; в) $bc > 0$; г) $bD > 0$ қатынастары дұрыс па?

Практикаға бағытталған тапсырмалар

55. 10 жабық құлып және оларды ашатын 10 кілт берілген. Әр құлыпқа бір кілттен келеді. Бірінші құлыпты ашу үшін 10 кілт қолданылады. Жақсы жағдайда құлып бірінші кілтпен, ең нашар жағдайда оныншы кілтпен ашылады. Барлық құлыпты ашу үшін ең көп дегенде қанша рет әрекет жасау керек?

56. Бір көшеде 100 үй бар және әр үйге нөмір берілген. Тақ нөмірлі үйлер көшенің сол жағында, жұп нөмірлі үйлер оң жағында орналасқан. 90-шы нөмірлі үй қай жерде орналасқан?

57. Әлия тұратын үйде бір ғана кіреберіс бар. Әр қабатта 10 пәтерден. Әлия 88-ші пәтерде тұрады. Әлия үйдің нешінші қабатында тұратынын табыңдар.

58. Станок алты метрлік 300 тақтайдың әрқайсысын бір сағатта 2 метрден бөледі. Тура осындай сегіз метрлік 400 тақтайды 2 метрден бөлу үшін қанша уақыт керек?

59. Тіктөртбұрыштың периметрі 36 см. Оның қабырғаларының ұзындығы бүтін сандармен өрнектеледі. Есептің шарты бойынша қанша тіктөртбұрыш салуға болады?

60. Жанұяда 9 бала бар және олардың жастарының қосындысы 119-ға тең. Егер олар әр үш жылда туылған болса, онда олардың жастарын табыңдар.

61. Сыныпта 28 оқушы бар. Олардың 12-сі вокалмен, 19-ы бимен, 5-еуі вокал және бимен айналысады. Сыныптың қанша оқушысы осы үйірмелерге қатыспайды?

62. Арман мен Нұржан көлге жағалай отырғызылған талдарды санады. Олар әртүрлі талдан бастап бір бағытта жылжыды. Арманның санауында жиырмысыншы болған тал Нұржанда төртінші, Нұржанда қырық алтыншы болған тал Арманда оныншы болды. Көлдің жағалауына қанша тал отырғызылған?

63. 1, 2, 6, 24, 120, ... тізбектегі заңдылықты табыңдар.

ҚҰРЫЛЫСТАҒЫ МАТЕМАТИКА

64. 1) 56 т жүкті 300 км қашықтыққа тасымалдау үшін бір кәсіпорынның мәшинелері қолданылады және мәшинелердің жүк көтергіштіктері әртүрлі. Мәліметтер кестеде келтірілген.

10-кесте

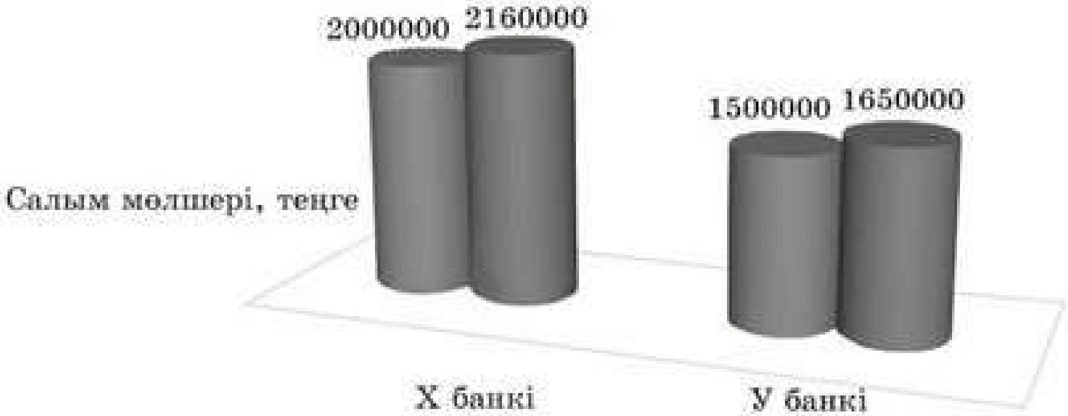
Кәсіпорын	Мәшинелердің жүк көтергіштігі	Бір мәшиненің 100 км қашықтыққа тасу құны (тг)
I	3 т	6 000
II	5 т	8 000
III	6 т	10 000

Қай кәсіпорынның мәшинелерін алған тиімді?

2) Ғимаратты бір қабатқа көтергенде оның биіктігі 3,5 метрге артады. Шағын ауданда 5 қабатты, 4 қабатты үйлер, 2 қабатты балалар бақшасы және 3 қабатты мектеп салынған. Шағын аудандағы барлық ғимараттардың биіктіктерінің қосындысының мәнін табыңдар.

БИЗНЕСТЕГІ МАТЕМАТИКА

65. Диаграммада *Х* және *У* банктеріндегі алғашқы салым мен жылдық өсімге сәйкес салым көрсетілген (89-сурет).



89-сурет

1) *Х* және *У* банктеріндегі салымның жылдық пайызының өсімін табыңдар;

2) *Х* және *У* банктердегі салымның жылдық пайызы өсімінің айырмашылығын табыңдар.

ЖҮРГІЗУШІ МАМАНДЫҒЫНДАҒЫ МАТЕМАТИКА

66. Кәсіпорында 54 жүргізуші бар. Егер барлық 60 мәшиненің 25%-ы күнделікті жөндеу жұмыстары үшін кәсіпорында қалатын болса, онда әр жүргізушіде бір айда (30 күн) қанша күн демалыс болатынын табыңдар.

Ықтималдықтар теориясының элементтері

67. а) Жәшікте 4 ақ және 8 қызыл шар бар. Кездейсоқ алынған шардың: 1) ақ; 2) қызыл болуының ықтималдығын табыңдар.
ә) Жәшікте 6 қызыл, 4 ақ және 10 көк шар бар. Кездейсоқ алынған шардың: 1) қызыл; 2) ақ емес; 3) көк болуының ықтималдығын табыңдар.

68. Ойын сүйегі лақтырылған. 1) 2 немесе 3 цифрының; 2) 4 немесе 5 цифрының; 3) тақ ұпайдың түсуінің ықтималдығын табыңдар.

69. Емтиханға 30 билет дайындалған. Оқушының алған билеті: 1) біртаңбалы сан; 2) тақ сан болуының ықтималдығын табыңдар.

70. 1) Қабырғасының ұзындығы 4 см шаршыға қабырғасының ұзындығы 2 см екінші шаршы іштей сызылған. Кездейсоқ белгіленген нүкте екінші шаршыға тиісті болмауының ықтималдығын табыңдар.

2) Қабырғасының ұзындығы 4 см шаршыға радиусы 2 см дөңгелек іштей сызылған. Кездейсоқ белгіленген нүкте дөңгелекке тиісті болуының ықтималдығын табыңдар.

3) $[-2;\ 8]$ кесіндісінен сан кездейсоқ таңдалады. Осы сан $x^2 - 2x + 8 < 80$ теңсіздігінің шешімі болуының ықтималдығын табыңдар .

4) $[-3;\ 7]$ кесіндісінен сан кездейсоқ таңдалады. Осы сан $x^2 - 2x + 9$ m 0 теңсіздігінің шешімі болуының ықтималдығын табыңдар.

Олимпиадалық тапсырмалар

71. $(3x - 1)(\sqrt{x} + 3x - 1) = 2x$ теңдеуін шешіңдер.

72. $x^3 - 2x - 4\sqrt{6} = 0$ теңдеуін шешіңдер.

73. a теңдеуінің түбірлері геометриялық прогрессияны құрайды. $x^3 - 12x^2 + ax - 28 = 0$ теңдеуінің түбірлері арифметикалық прогрессияны құрайды. Осы түбірлерді табыңдар.

74. a параметрінің қандай мәндерінде $x^3 + ax^2 + 48x - 27 = 0$ теңдеуінің түбірлері геометриялық прогрессияны құрайды?

75. a және b параметрлерінің қандай мәндерінде $x^3 + 7x^2 + ax + b$ көпмүшесі $x^2 + x + 2019$ көпмүшесіне бөлінеді?

76. $(x^2 - 5x - 8)^3 = x^2(x^2 + x - 8)$ теңдеуінің түбірлерін табыңдар.

77. $x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 > 0$ теңсіздігі x-тің кез келген нақты мәнінде ақиқат болатынын дәлелдеңдер.

78. $x^8 + x^6 - 4x^4 + x^2 + 1$ | 0 теңсіздігі x-тің кез келген мәнінде ақиқат болатынын дәлелдеңдер.

79. Егер $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$ және $ac > 0$ болса, онда $\frac{a+b}{2a-b}+\frac{c+b}{2c-b} \geq 4$ теңсіздігін дәлелдеңдер.

80. Егер $a, b, c \in R_+$ және $abc = 1$ болса, онда $ab + bc + ca + a + b + c - 6 \geq 0$ теңсіздігін дәлелдеңдер.

81. $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n-1) < n^n$ теңсіздігін дәлелдеңдер.

82. $2^n \geq 2n+1$, мұндағы $n \in N$ және $n \geq 3$, теңсіздігін математикалық индукция әдісімен дәлелдеңдер.

83. Егер $n \geq 2$ болса, онда $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2^n-1} < n$ теңсіздігін дәлелдеңдер.

84. 5°; 10°; 15°; ... арифметикалық прогрессия. Осы бұрыштардың косинустарының қосындысының мәні нөлге тең болатындай прогрессияның бірінші мүшесінен бастап алынатын мүшелердің ең кіші санын табыңдар.

85. $\sin\alpha + \sin(\alpha+\varphi) + \sin(\alpha+2\varphi) + \ldots + \sin(\alpha+n)$ өрнегін ықшамдаңдар.

Комбинаторика элементтері

86. 1) Бір цифр екі рет қайталанбайтындай 2, 4, 7, 8 цифрларынан тұратын төрттаңбалы сандардың санын табыңдар.

2) Тіктөртбұрыш, ромб және шаршыны көк, қызыл, жасыл әртүрлі түстермен бояудың қанша тәсілі бар?

87. 52 оқушы математикадан, 33 оқушы информатикадан, 11 оқушы екі пәннен де олимпиадаға қатысты. Олимпиадаға барлығы қанша оқушы қатысқан?

88. 70 желім қағаздың 47-сіне түймедақ, 30-ына нәркес, 10-ына жұпаргүл мен түймедақ, 6-уына жұпаргүл мен нәркес, 5-еуіне жұпаргүл мен түймедақ, 4-еуіне нәркес, жұпаргүл, түймедақ салынған. Нәркес салынған желім қағаздың санын табыңдар.

89. Теңдеуді шешіңдер:

1) $A_x^3 = 8x - 3x^2$;

2) $A_x^3 = 2x^3 - 3x^2 - 14x$;

3) $C_x^2 = x + 5$.

90. Асхана мәзірінде 4 салат, 3 бірінші, 5 екінші және 3 үшінші тамақ бар. Төрт тамақтан (салаттан, біріншіден, екіншіден, үшіншіден) тұратын түскі асты қанша тәсілмен таңдауға болады?

91. 1) Абонент телефон нөмірінің соңғы екі цифрын ұмытып қалған. Егер ол соңғы екі цифрдың әртүрлі және тақ сандар екенін білетін болса, онда телефон нөмірін анықтау тәсілінің ең үлкен саны қанша?

2) Оқушы емтиханға берілген 30 сұрақтың 22-сін оқыған, 4-еуін оқымаған, ал қалғанына орташа дайындалған. Емтихан билетінде үш сұрақ бар. Оқушы сұрақтарына жауап бере алатын билеттер саны қанша?

92. $\left(2x+\frac{1}{x}\right)^4$ биномының жіктелуіндегі x-тің дәрежесі бойынша құрамында: 1) x^2 болатын; 2) x болмайтын бірмүшені табыңдар.

ГЛОССАРИЙ

A_n^k	A_n^k — n элементтен алынған k-дан құралған қайталанбайтын орналастырулар саны
Ақиқат оқиға	Тәжірибе барысында міндетті түрде орындалатын оқиға *ақиқат оқиға* деп аталады
Алгоритм	Алгоритм — қандай да бір мақсатқа жету үшін орындалатын қарапайым іс-әрекеттер тізбегі
Арифметикалық прогрессия	Екінші мүшесінен бастап, әрбір мүшесі алдыңғы мүшесіне қандай да бір тұрақты d санын қосқанда шығатын сандар тізбегін арифметикалық прогрессия деп атайды. d саны *арифметикалық прогрессияның айырымы* деп аталады
Арифметикалық прогрессияның белгісі	$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ формуласымен берілген арифметикалық прогрессия мүшелерінің қасиеті *арифметикалық прогрессияның* белгісі деп аталады
Арифметикалық прогрессияның алғашқы n мүшесінің қосындысының формуласы	$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$; $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$ — арифметикалық прогрессияның алғашқы n мүшесінің қосындысының формуласы
Арифметикалық прогрессияның n-ші мүшесінің формуласы	$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ формуласы *арифметикалық прогрессияның n-ші мүшесінің формуласы* деп аталады
α бұрышының синусы	Шеңберге тиісті B нүктесінің ординатасының шеңбер радиусына қатынасы α *бұрышының синусы* деп аталады
α бұрышының косинусы	Шеңберге тиісті B нүктесінің абсциссасының шеңбер радиусына қатынасы α *бұрышының косинусы* деп аталады
α бұрышының тангенсі	Шеңберге тиісті B нүктесінің ординатасының нүктенің абсциссасына қатынасы α *бұрышының тангенсі* деп аталады
α бұрышының котангенсі	Шеңберге тиісті B нүктесінің абсциссасының нүктенің ординатасына қатынасы α *бұрышының котангенсі* деп аталады
Бином	*Бином* сөзі француз тілінен аударғанда "алгебралық екімүше" деген сөзді білдіреді
Биномиалды коэффициенттер	Ньютон биномының формуласындағы C_n^k коэффициенттері *биномиалды коэффициенттер* деп аталады

Жалғасы

Бірсарынды тізбек	Өспелі, кемімелі, өспейтін және кемімейтін тізбектерді *бірсарынды тізбектер* деп атайды
Геометриялық прогрессия	Екіншісінен бастап кез келген мүшесі алдыңғы мүшесін нөлден өзгеше қандай да бір тұрақты санға көбейткенде шығатын сандар тізбегі *геометриялық прогрессия* деп аталады
Геометриялық прогрессияның белгісі	$b = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$ формуласымен берілген геометриялық прогрессия мүшелерінің қасиеті *геометриялық прогрессияның белгісі* деп аталады
Геометриялық прогрессияның еселігі	Келесі мүшесін алу үшін алдыңғы мүшесіне көбейтілетін сан *геометриялық прогрессияның еселігі* деп аталады және q әрпімен белгіленеді
Геометриялық прогрессияның алғашқы n мүшесінің қосындысының формуласы	$S_n = \dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}$, $q \neq 1$ — геометриялық прогрессияның алғашқы n мүшесінің қосындысының формуласы
Геометриялық прогрессияның n-ші мүшесінің формуласы	$b_n = b_1q^{n-1}$ формуласы *геометриялық прогрессияның n-ші мүшесінің формуласы* деп аталады
Геометриялық ықтималдық	*Геометриялық ықтималдық* — нүктенің, кесіндінің, жазықтықтың, кеністік фигурасына түсу ықтималдығы
Екі айнымалысы бар сызықтық емес теңдеулер жүйесі	Құрамында ең болмағанда бір теңдеуі сызықтық теңдеу болмайтын екі айнымалысы бар теңдеулер жүйесі *екі айнымалысы бар сызықтық емес теңдеулер жүйесі* деп аталады
Екі айнымалысы бар сызықтық емес теңдеулер жүйесінің шешімі	Жүйенің әрбір теңдеуін тура санды теңдікке айналдыратын $(x_0; y_0)$ сандар жұбы *екі айнымалысы бар сызықтық емес теңдеулер жүйесінің шешімі* деп аталады
Екі айнымаласы бар сызықтық емес теңдеудің шешімі	Екі айнымалысы бар $F(x; y) = 0$ сызықтық емес теңдеуін $F(x_0; y_0) = 0$ тура санды теңдігіне айналдыратын $(x_0; y_0)$ сандар жұбы *екі айнымалысы бар сызықтық емес теңдеудің шешімі* деп аталады
Екі айнымалысы бар теңдеу	$f(x; y) = q(x; y)$ түрінде берілген теңдеулер *екі айнымалысы бар (x пен y) теңдеулер* деп аталады, мұндағы $f(x; y)$ және $q(x; y)$ — x пен y айнымалылары бар өрнектер
Екі айнымалысы бар теңсіздік	$f(x; y) > g(x; y)$; $f(x; y) < g(x; y)$; $f(x; y) \geq g(x; y)$, $f(x; y) \leq g(x; y)$ түріндегі теңсіздіктер (мұндағы $f(x; y)$ және $g(x; y)$ — екі айнымалысы бар өрнектер) *екі айнымалысы бар теңсіздік* деп аталады

Жалғасы

Екі айнымалысы бар теңсіздіктің шешімі	*Екі айнымаласы бар теңсіздіктің шешімі* деп теңсіздікті тура санды теңсіздікке айналдыратын айнымалылардың мәндер жұбын айтады
Жоғарыдан шектелген тізбек	Егер (a_n) тізбегінің әрбір мүшесінен үлкен A саны бар болса, онда (a_n) тізбегі *жоғарыдан шектелген тізбек* деп аталады
Заттың концентрациясы	Массасы m болатын қоспадағы (қорытпадағы, ерітіндідегі) массасы m_1 *заттың концентрациясы* деп $\frac{m_1}{m}$ шамасын айтады
Заттың проценттік құрамы	Массасы m болатын қоспадағы (қорытпадағы, ерітіндідегі) массасы m_1 *заттың проценттік құрамы* деп $\frac{m_1}{m} \cdot 100\%$ шамасын айтады
Қайталанбайтын алмастырулар	$A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ жиынының барлық n элементін қамтитын реттелген жиындар n элементтен тұратын *қайталанбайтын алмастырулар* деп аталады
Қайталанбайтын алмастырулар санын есептеуге арналған формула	$P_n = n!$
Қайталанбайтын орналастырулар	n элементтен тұратын жиынның k элементінен реттелген жиындарды n элементтен алынған k-дан құралған *қайталанбайтын орналастырулар* деп айтады
Қайталанбайтын орналастырулар санын есептеуге арналған формула	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
Қайталанбайтын терулер	n элементтен тұратын жиынның k элементінен реттелген ішкі жиындарды n элементтен алынған k-дан құралған *қайталанбайтын терулер* деп айтады
Қайталанбайтын терулер санын есептеуге арналған формула	$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
Қарама-қарсы оқиға	A оқиғасы орындалмағанда ғана орындалатын $\overline{A}$ оқиғасы A оқиғасына *қарама-қарсы* оқиға деп аталады
Кездейсоқ оқиға	Тәжірибе барысында орындалатын немесе орындалмайтын оқиға *кездейсоқ оқиға* деп аталады
Кемімейтін тізбек	Егер (a_n) тізбегінде әрбір a_n мүшесі алдыңғы a_{n-1} мүшесінен үлкен немесе оған тең болса, онда тізбек *кемімейтін тізбек* деп аталады

Жалғасы

Кемімелі тізбек	Егер (a_n) тізбегінде әрбір a_n мүшесі алдыңғы a_{n-1} мүшесінен кіші болса, онда тізбек *кемімелі тізбек* деп аталады
Келтіру формулалары	$\frac{\pi}{2}k \pm \alpha$ (мұндағы k — кез келген бүтін сан, α — сүйір бұрыш) бұрышын ың тригонометриялық функциялары берілсе, онда оларды α бұрышының тригонометриялық функцияларына келтірген ыңғайлы. Ол үшін арнайы келтіру формулалары қолданылады
Комбинаторика	Комбинаторикалық есептерді қарастыратын математиканың бөлігі *комбинаторика* деп аталады
Комбинаторикалық есеп	Шектелген жиынның элементтерінен қандай да бір ережелер бойынша әртүрлі комбинациялар құрастырылатын және олардың саны табылатын есептерді *комбинаторикалық есептер* деп атайды
Қолайлы нәтиже	Тәжірибе нәтижесінде күтілетін оқиға шығатын болса, онда *қолайлы нәтиже* деп аталады
Қосу формулалары	Екі бұрыштың қосындысы мен айырымының тригонометриялық функцияларын сол бұрыштардың тригонометриялық функциялары арқылы өрнектейтін формулаларды *қосу формулалары* деп атайды
Қосынды ережесі	Егер X және Y жиындарының ортақ элементі болмаса және X жиынында a элемент, Y жиынында b элемент болса, онда X және Y жиындарының бірігуі $(a + b)$ элементтен тұрады
Математикалық индукция	*Математикалық индукция* — дәлелдеу әдістерінің бірі. Оны қандай да бір тұжырымның барлық натурал сандар үшін ақиқат болатынын дәлелдеу үшін қолданады. Алдымен, тұжырымның $n = 1$ үшін ақиқаттығы тексеріледі. Одан кейін кез келген натурал k үшін $n = k$ теңдігінің ақиқаттығынан $n = k + 1$ теңдігінің ақиқаттығы шығатыны дәлелденеді. Онда барлық n үшін тұжырым дәлелденді деп саналады
Мәндес теңдеулер	Шешімдер жиыны бірдей болатын екі теңдеу *мәндес теңдеулер* деп аталады
Мүмкін емес оқиға	Тәжірибе барысында міндетті түрде орындалмайтын оқиға *мүмкін емес* оқиға деп аталады
Ньютон биномы	$(x + a)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^k \cdot x^{n-k}$, мұндағы $\sum$ қосу белгісі, формуласы *Ньютон биномы* деп аталады

Жалғасы

$n!$	$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$
n-ші мүшенің формуласы	*n-ші мүшенің* (жалпы мүшенің) *формуласы* деп тізбектің нөмірі белгілі кез келген мүшесін есептеу формуласын айтады
Оқиға	*Оқиға* деп мағынасы бар, орындалатын немесе орындалмайтын құбылыс айтылады. *Оқиға* деп түрлі тәжірибелер, бақылаулар және өлшемдердің нәтижелерін де айтады
Оқиғаның ықтималдығы	*A оқиғасының ықтималдығы* деп теңмүмкіндік жағдайында m қолайлы нәтижелер санының n жалпы нәтижелер санына қатынасын айтады
Өспейтін тізбек	Егер (a_n) тізбегінде әрбір a_n мүшесі алдыңғы a_{n-1} мүшесінен кіші немесе оған тең болса, онда тізбек *өспейтін тізбек* деп аталады
Өспелі тізбек	Егер (a_n) тізбегінде әрбір a_n мүшесі алдыңғы a_{n-1} мүшесінен үлкен болса, онда тізбек *өспелі тізбек* деп аталады
Периодты функция	Егер $y = f(x)$ анықталу облысынан алынған кез келген x үшін $f(x + T) = f(x)$ теңдігі орындалатындай нөлге тең емес T саны бар болса, онда $y = f(x)$ функциясы *периодты функция* , ең кіші T саны *функцияның периоды* деп аталады
P_n	n элементтен тұратын қайталанбайтын алмастырулар саны
Радиандық бұрыш	Ұзындығы шеңбер радиусының ұзындығына тең доғаға сәйкес келетін центрлік бұрыш 1 *радиандық бұрыш* деп аталады
C_n^k	C_n^k — n элементтен алынған k-дан құралған қайталанбайтын терулер саны
Сандар тізбегінің аналитикалық тәсілмен берілуі	Егер тізбек n-ші мүшенің (жалпы мүшесінің) формуласымен берілсе, онда *сандар тізбегі аналитикалық тәсілмен берілген* дейді
Сандар тізбегінің графиктік тәсілмен берілуі	Сандар тізбегінің графигі абсциссасы натурал сан, ординатасы тізбектің мүшесі болатын нүктелер жиынынан тұрады
Санды шеңбер	Бастапқы нүкте, бірлік доға, оң бағыт көрсетілген шеңбер *санды шеңбер* деп аталады
Статистикалық ықтималдық	*A оқиғасының статистикалық ықтималдығы* деп жүргізілген n тәжірибе барысында оқиғаның орындалуының салыстырмалы жиілігін айтады

Жалғасы

Теңдеудің графигі	Екі айнымалысы бар *теңдеудің графигі* деп координаталары осы теңдеудің шешімдері болатын координаталық жазықтықтың нүктелер жиынын айтады
Теңдеудің дәрежесі	$F(x; y) = 0$ түрінде берілген екі айнымалысы бар *теңдеудің дәрежесі* деп $F(x; y)$ көпмүшесінің дәрежесін айтады (мұндағы $F(x; y)$ — стандарт түрде берілген көпмүше)
Тізбекті баяндау тәсілімен беру	Бұл тәсілдің көмегімен тізбектің орналасу заңдылығы сөзбен түсіндіріледі
Тізбектің мүшелері	Тізбекті құрайтын сандар *тізбектің мүшелері* деп аталады
Тізбекті рекурренттік тәсілмен беру	*Тізбекті рекурренттік тәсілмен беру* дегеніміз қандай да бір мүшесінен бастап кез келген мүшесін алдыңғы (бір немесе бірнеше) мүшесі арқылы өрнектеу болып табылады. Бұл жағдайда тізбектің бір немесе бірнеше мүшесі және алдыңғы белгілі мүшелері бойынша басқа мүшелерін табуға болатын формула беріледі
Төменнен шектелген тізбек	Егер (a_n) тізбегінің әрбір мүшесінен кіші A саны бар болса, онда (a_n) тізбегі *төменнен шектелген тізбек* деп аталады
Тұрақты тізбек	Егер (a_n) тізбегінің әрбір a_n мүшесі алдыңғы a_{n-1} мүшесіне тең болса, онда *тұрақты* (стационар) *тізбек* деп аталады
Тригонометриялық тепе-теңдіктер	Құрамында тригонометриялық функциялары бар және бұрыштың кез келген мүмкін мәнінде тура, функцияны кез келген шамамен алмастырғанда тура емес болатын теңдік *тригонометриялық тепе-теңдіктер* деп аталады
Тригонометриялық функциялар	Синус, косинус, тангенс және котангенстің α бұрышының шамасына тәуелділігі *тригонометриялық функциялар* деп аталады
Шексіз кемімелі геометриялық прогрессия	Еселігі $\|q\| < 1$ болатын геометриялық прогрессия *шексіз кемімелі геометриялық прогрессия* деп аталады
Шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысының формуласы	$S = \dfrac{b_1}{1 - q}$ — шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысының формуласы, мұндағы $\|q\| < 1$
Шексіз сандар тізбегі	Егер барлық натурал сандар жиынында берілсе, онда тізбек *шексіз сандар тізбегі* деп аталады

Жалғасы

Шектелген сандар тізбегі	Егер сандар тізбегі (функция) алғашқы n натурал сандар жиынында берілсе, онда тізбек *шектелген сандар тізбегі* деп аталады
Шектелген тізбек	Егер тізбек жоғарыдан да, төменнен де шектелген болса, онда (a_n) тізбегі *шектелген тізбек* деп аталады
Факториал	Эн факториал 1-ден n-ге дейінгі (n-ді қоса алғанда) барлық натурал сандардың көбейтіндісі
Элементар оқиға	Бірнеше жай оқиғаларға бөлуге болатын оқиға *элементар оқиға* деп аталады

ЖАУАПТАРЫ

IV тарау. ТРИГОНОМЕТРИЯ

19.6. 1) IV ширек; 2) I ширек; 3) III ширек; 4) II ширек. **19.7.** 1) $0{,}2\pi$; $0{,}8\pi$; $0{,}2\pi$; $0{,}8\pi$; 2) $0{,}7\pi$; $0{,}3\pi$; $0{,}7\pi$; $0{,}3\pi$. **19.8.** 1) $\frac{\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{\pi}{6}$; 2) $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$. **19.10**. 1) $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot 1$; 2) $\alpha = 0{,}3\pi + 2\pi \cdot 7$; 4) $\alpha = 0{,}3\pi + 2\pi \cdot (-10)$. **19.11.** 1) IV ширек; 2) I ширек; 3) II ширек; 4) I ширек. **19.14.** 1) $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{\pi}{3}$; 2) $\frac{7\pi}{18}$; $\frac{11\pi}{18}$; $\frac{11\pi}{18}$; $\frac{7\pi}{18}$. **19.15.** 1) Иә; 2) жоқ, әр уақытта емес; 3) иә; 4) әр уақытта емес. **19.16.** 219 айналым. **19.17.** 1) $1080°$ немесе 6π рад; 4) $8640°$ немесе 48π рад.

19.20. 1) $(-\infty; \frac{3-\sqrt{33}}{2}] \cup [\frac{3+\sqrt{33}}{2}; +\infty)$; 4) $[-1{,}5; \ 2]$. **19.24.** 1) $\sqrt{3} - 3$; 2) -2; 3) $\sqrt{2} - \sqrt{3}$; 4) $2 - \sqrt{3}$. **19.25.** 1) 3; 2) $\frac{1}{3}$. **20.4.** 1) $1 + \sqrt{2}$; 2) $\frac{3\sqrt{3}-2}{2}$; 3) $-2{,}5$; 4) $\frac{3\sqrt{2}+4\sqrt{3}}{6}$. **20.5.** 1) $3\sqrt{3}$; 3) $1{,}5 + \sqrt{2}$; 4) -3. **20.6.** 1) $\alpha_1 = 180°$; $\alpha_2 = 360°$; $\alpha_3 = 720°$; 2) $\alpha_1 = 30°$; $\alpha_2 = 150°$; $\alpha_3 = 390°$; 5) $\alpha_1 = 90°$; $\alpha_2 = -90°$; $\alpha_3 = 450°$. **20.8.** 1) $5 - \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) -1; 3) 0. **20.9.** 1) $\beta = \frac{\pi}{2}$; $\beta = \frac{3\pi}{2}$; $\beta = \pi$; 2) $\beta = \frac{\pi}{2}$; $\beta = \pi$; $\beta = \frac{3\pi}{2}$. **20.10.** 1) Жоқ; 2) жоқ; 3) жоқ; 4) жоқ. **20.11.** 1) Иә; 2) жоқ; 3) иә; 4) жоқ. **20.12.** 1) 0,75; 3) $\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$. **20.14.** 1) $\sin 60° + \sin 30°$; 2) $\cos 30° + \cos 60°$. **20.15.** 1) $\sin 60° - \sin 45°$; 2) $\cos 30° - \cos 45°$. **20.16.** 1) $\mathrm{tg}\,30° - \mathrm{tg}\,45°$; 2) $\mathrm{ctg}\,60° - \mathrm{ctg}\,45°$. **20.17.** 2) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$; 4) $-\sqrt{2}$. **20.18.** 1) $-(2 + \sqrt{3})$; 2) -14; 3) -1; 4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **20.19.** 1) π; 3π; 4π; 2) $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$; 3) $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{11\pi}{4}$. **20.20.** Болады. **20.23.** 1) $3 + \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $2 - \sqrt{3}$. **20.24.** 1) 2; 2) $\frac{1-2\sqrt{2}}{2}$. **20.25.** 1) Әр уақытта емес; 2) $\alpha = 150°$; $\alpha = 390°$; 3) $\alpha = (-1)^n \cdot 30° + 180° \cdot n$, $n \in Z$. **20.26.** 1) Әр уақытта емес; 2) $\alpha = -45°$; $\alpha = 315°$; 3) $\alpha = \pm 45° + 360° \cdot n$, $n \in Z$. **20.27.** 1) Жоқ; 2) жоқ; 3) жоқ; 4) иә. **20.29.** 1) III ширек; 2) II ширек. **20.30.** 1) Иә; 2) иә; 3) жоқ; 4) иә. **20.33.** 1) $x_1 + x_2 = \frac{5}{3}$; $x_1 \cdot x_2 = -9$; 2) $x_1 + x_2 = 1{,}4$; $x_1 \cdot x_2 = -\frac{6}{25}$. **20.34.** 1) 0; 2) 4; 3) 0. **20.36.** 1) 2; 3; 2) 4; 5; 6;... . **20.38.** 10 сағ, 15 сағ. **20.39.** 1) $[-3; +\infty)$; 2) $(-\infty; 4]$; 3) $[-1; +\infty)$; 4) $(-\infty; 2]$. **21.3.** 1) II ширек; 2) III ширек; 3) IV ширек; 5) III ширек; 6) III ширек. **21.4.** 1) +; 2) –; 6) +; 8) +; 9) 0; 10) +; 12) –. **21.7.** Болмайды. **21.8.** 1) –; 2) +; 3) –; 4) +. **21.9.** 1) +; 2) +; 3) +; 4) –. **21.11.** 1) I және II ширектер; 2) III және IV ширектер; 4) II және III ширектер; 6) II және IV ширектер; 8) II және IV ширектер. **21.12.** 1) Иә, 2; 2) иә, 1; 3) Жоқ. **21.13.** 1) +; 2) –. **21.14.** 1) – 4) $T = 3$. **21.15.** 1) $30°$; $150°$; $30°$; $150°$; 3) $60°$; $120°$; $60°$; $120°$. **21.16.** 3) $45°$; $135°$; $45°$; $135°$; 4) $30°$; $150°$; $30°$; $150°$. **21.17.** 3) $60°$; $120°$; $120°$; $60°$;

4) 30°; 150°; 150°; 30°. **21.21.** 1) 4; –2; 2) 5; 1; 3) 7; 1. **21.23.** 1) 2 және 1; 2) 4 және 3; 3) 4 және 1; 4) 2,4 және 1,9. **21.24.** 1) 1; 2) 2; 3) 0,5; 4) 1. **21.26.** 1) (±2; ±1); 2) (3; 3); (–3; –3). **21.27.** 1) a; 2) $\frac{5b-2a}{8b-2a}$. **21.28.** 16 см және 63 см. **21.31.** 1) I және III ширектер; 2) II және IV ширектер. **22.1.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **22.2.** 1) $\cos\alpha$; 2) $-\sin\alpha$; 3) $-\cos^2\alpha$; 4) 1. **22.3.** 1) $\frac{1}{3}$; 4) 1,2; 6) –8. **22.4.** 9) $\frac{1}{\sin\alpha}$; 10) $\frac{1}{\cos\alpha}$; 11) $\frac{2}{\sin\beta}$; 12) $\frac{2}{\cos\beta}$. **22.6.** 1) $\sin^2\alpha$; 2) $\cos^2\varphi$; 4) $-\cos^2 x$. **22.7.** 1) $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$; 2) $\sin\alpha-\cos\alpha$; 4) $\frac{1}{\sin\beta}$. **22.11.** 1) $9\frac{1}{9}$; 2) $2\frac{1}{9}$. **22.12.** 1) $\frac{2}{|\sin\alpha|}$; 2) $2|\cos\alpha|$. **22.14.** 1) 0,64; 2) 0,1; 3) $6\frac{2}{3}$; 4) 5. **22.16.** 3) $-\frac{25}{41}$; 4) $-\frac{15}{29}$. **22.17.** 1) $\frac{11}{5}$; 2) –6; 3) $\frac{15}{34}$; 4) 0. **22.18.** 1) $x^2+y^2=16$; 2) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}=1$; 3) $x^2-2y=1$; 4) $x-y^2=-2$, мұндағы $x>0$, $y>0$. **22.19.** 1) $\alpha=90°+180°n-(-2)$, $n\in Z$; 2) $\alpha=180°n$ болғанда ең үлкен мәні – 0; 3) өрнектің мәндер жиыны (3; 7), ең үлкен және ең кіші мәндерін көрсету мүмкін емес; 4) өрнектің мәндер жиыны (–1; 4), ең үлкен және ең кіші мәндерін көрсету мүмкін емес. **22.21.** 1) $\sin\beta+\cos\beta+1$; 2) 2. **22.22.** 1) Иә; 2) жоқ; 3) жоқ; 4) иә; 5) жоқ; 6) жоқ. **22.23.** 18. *Нұсқау*: $\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha$. **22.24.** 1) 0; 2) 1; 3) 1; 4) $0{,}25\sin^{-2}2\alpha$. **22.25.** $\pm\sqrt{1{,}64}$; 2) 1,176; 3) 0,7952. **22.27.** 1) 3150; 2) 3105. **22.29.** 1) 1; 2) 1. **22.30.** 1) $[-1;\ 3)\cup[8;\ +\infty)$; 4) $\{-3\}\cup(-2;\ 1)\cup[5;\ +\infty)$. **22.32.** 1) $\frac{1}{2}-\frac{4\sqrt{3}}{3}$; 2) $\frac{1}{2}+\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **23.4.** 1) $\cos^2\alpha$; 2) $\sin^2\alpha$; 3) $\cos^2\alpha$; 4) $\sin^2\alpha$; 5) $\frac{1}{\cos^2\alpha}$; 6) $\frac{1}{\cos^2\alpha}$. **23.5.** 3) $2\sin\alpha$; 4) 0. **23.6.** 1) $-\sin5°$; 2) $-\cos45°$; 3) $-\operatorname{ctg}15°$; 5) $\sin45°$; 7) $-\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$; 9) $-\sin\frac{\pi}{4}$; 10) $\cos\frac{\pi}{5}$; 11) $\sin31°$; 12) $\operatorname{ctg}19°$. **23.7.** 1) $\frac{\sqrt{2}}{4}$; 2) $-\frac{1}{4}$; 3) $\frac{3}{4}$; 4) $-\frac{1}{4}$. **23.9.** 1) –; 2) +; 3) –; 4) –. **23.10.** 1) $\operatorname{ctg}\alpha$; 2) $\operatorname{ctg}\alpha$; 3) $\operatorname{tg}\alpha$. **23.11.** 1) $-\frac{3\sqrt{2}}{4}$; 2) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$. **23.13.** 1) 0; 2) 0. **23.14.** 1) $-\sqrt{3}$; 2) $-\sqrt{3}$; 3) $\sqrt{2}$; 4) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **23.15.** 1) $\frac{1}{\cos\alpha}$; 2) $-\frac{1}{\sin\alpha}$; 3) $-\sin^2\alpha$; 4) $-\sin^2\alpha$. **23.16.** 1) 2; 2) 0; 3) 0; 4) 0. **23.19.** 1) –1; 2) $\sqrt{3}$; 3) $-\frac{5\sqrt{2}}{2}$; 4) $-\frac{3+\sqrt{3}}{2}$. **23.20.** 1) $\sin\alpha$; 2) $-\cos\alpha$; 3) $\operatorname{tg}\alpha$; 4) 1. **23.22.** 1) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$; 2) $-\frac{\sqrt{6}}{4}$; 3) 0,75; 4) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$. **23.25.** 1) 1; 2) 1; 3) 1; 4) 1. **23.27.** 1) –1; 2) 0; 3) 0. **23.28.** 1) $\sin\alpha=0{,}6$; $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{4}{3}$. **23.30.** 60 км/сағ және 90 км/сағ. **23.31.** 1) $[-3;\ 2)\cup(4;\ 6]$; 2) $[-4;\ 1]$. **23.32.** 1) $\sin\alpha$; 2) $2\sin\alpha+1$. **24.1.** 1) $\sin\alpha$; 5) $\cos\varphi$; 6) $-\sin\gamma$; 7) $\cos\alpha$; 8) $\sin2\gamma$. **24.2.** 1) 0,5; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) 0. **24.3.** 1) 0,5; 2) 0; 3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **24.4.** 1) $\frac{3+8\sqrt{2}}{15}$; 2) $\frac{3-8\sqrt{2}}{15}$; 3) $\frac{4-6\sqrt{2}}{15}$; 4) $\frac{4+6\sqrt{2}}{15}$. **24.5.** 1) $-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$; 2) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$; 3) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$;

4) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$. **24.8.** 6) $2+\sqrt{3}$; 7) $2+\sqrt{3}$. **24.9.** 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(\sqrt{0,91}-0,3)$; 4) $\frac{\sqrt{3}-10\sqrt{91}}{20}$.

24.10. 1) $\cos\alpha$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin\alpha$; 3) $\sqrt{2}\cos\alpha$; 4) $0,5\sin\alpha$. **24.11.** 1) $\sin\alpha\cdot\cos\beta$; 2) $\cos\alpha\times$ $\times\cos\beta$; 3) $\sin\alpha\cdot\sin\beta$; 4) $\sin\alpha\cdot\cos\beta$. **24.13.** 1) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; 2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **24.14.** 1) 0; 2) 0; 3) 0; 4) 0.

24.16. 1) $\text{ctg}\,\alpha\cdot\text{tg}\,\beta$; 2) $-\text{ctg}\,\alpha\cdot\text{ctg}\,\beta$; 4) $-\text{tg}\,\alpha$. **24.19.** 1. **24.20.** $\frac{2\sqrt{10}-2}{9}$. **24.21.** 1) $\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}$; 3) 2; -2; 5) $\sqrt{13}$; $-\sqrt{13}$; 6) $\sqrt{41}$; $-\sqrt{41}$. **24.22.** 1) $\{(0;\ 0);$ $\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{3}\right)\}$; 2) $\{(1;\ 1)\}$. **24.23.** 1) 53%; 2) $2\frac{3}{11}$ кг. **24.25.** 1) $(0;\ 1)$; 2) $f(x)\in[-1;\ 3]$; 4) $ac>0$. **24.27.** 1) $\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$; 2) $\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$. **24.28.** $\text{tg}\,\alpha=-\frac{2}{\sqrt{21}}$, $\text{ctg}\,\alpha=-\frac{\sqrt{21}}{2}$.

25.1. 1) $1\frac{1}{6}$; 2) $-\frac{2}{9}$; 3) $\frac{6}{7}$; 4) $-4,5$. **25.2.** $-10,5$; $\frac{11}{18}$. **25.3.** 1) $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$; 6) $\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$.

25.5. 1) 1; 2) $\sqrt{3}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 4) 1. **25.6.** 1) $\text{tg}\,\alpha+\text{tg}\,\beta$; 2) $\text{tg}^2\alpha-\text{tg}^2\beta$. **25.8.** 1) $\text{tg}40^\circ\cdot\text{tg}10^\circ$; 2) $\text{tg}3^\circ\cdot\text{tg}0,6^\circ$. **25.9.** 1) 1; 2) $\frac{\text{tg}^2\alpha-3}{1-3\text{tg}^2\alpha}$; 3) 0; 4) $\frac{4\text{tg}\,\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha}$. **25.12.** 1) $1-\text{tg}\,\beta$; 2) $1-\text{tg}\,\beta$.

25.15. 1) $[-\sqrt{5};\sqrt{5}]$; 2) $[-\sqrt{10};\sqrt{10}]$; 3) $[-2;\ 2]$; 4) $[-2;\ 2]$; 5) $[-\sqrt{41};\sqrt{41}]$; 6) $[-3\sqrt{5};3\sqrt{5}]$. **25.16.** 0. **25.17.** 1) $(-\infty;\ -3]\cup[3;\ +\infty)$; 2) $[-1-\sqrt{14};1+\sqrt{6}]$. **25.20**. 1) $2\sin\beta$; 2) $2\sin\beta$. **26.1.** 2) $\text{tg}\,x$; 3) $-\cos2x$; 4) $-(\sin x+\cos x)$; 5) $2\sin\alpha$; 6) $\cos\alpha$; 7) 1; 9) $4\sin x\cdot\cos^2x$. **26.2.** 1) 1; 2) $\frac{\sqrt{3}}{3}+1$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{3}+2$; 4) 0,5; 5) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 6) $\frac{1}{16}$.

26.3. 1) $\cos2\alpha$; 2) $\cos2\alpha$; 3) $2\text{ctg}2\alpha$; 4) $\cos2\alpha$; 5) $2\text{tg}\,\alpha$. **26.4.** 1) $\text{tg}\frac{\alpha}{2}$; 2) $\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\beta}{2}$; 3) $0,5\,\text{ctg}2\alpha$; 4) $\frac{1}{1-\sin2\alpha}$. **26.9.** 1) 0; 2) 0; 3) 0; 4) $\text{tg}2\alpha$; 5) $4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}$; 7) $2\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}$; 8) 1; 9) 0; 10) $-\frac{1}{\sin2\alpha}$. **26.10.** 1) $-\cos4^\circ$; 2) $\sin^212^\circ$; 3) $-\cos20^\circ$; 5) 0; 6) $\cos28^\circ$. **26.15.** 1) $\cos4\beta$; 2) 0; 3) $\text{tg}^2\frac{\beta}{2}$; 4) $-0,5\text{ctg}2\beta$. **26.17.** 1) $\frac{60}{61}$; $\frac{11}{61}$; $\frac{60}{11}$; 2) $\sqrt{0,9}$; $-\sqrt{0,1}$; -3. **26.18.** 2) $-3\frac{1}{3}$; 5) 1; 6) $\frac{60}{61}$. **26.19.** 1) $|\sin\frac{\alpha}{2}|$; 2) $|\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2})|$; 3) $|\cos2\alpha|$; 4) $0,5|\sin3\alpha|$; 5) $\begin{cases}2\cos\alpha, & 0\le\alpha\le\frac{\pi}{4},\\ 2\sin\alpha, & \frac{\pi}{4}<\alpha\le\frac{\pi}{2}.\end{cases}$ **26.22.** 1) $\frac{1}{8}$; 2) $\frac{1}{64}$; 3) $\frac{1}{16}$; 4) $\frac{1}{4}$; 5) $\frac{1}{4}$. **26.25.** 1) 2; 1; 2) 1; 0,5; 3) 1; 0,25. **26.26.** 1) $\cos\beta$; 2) $\sin\beta$. **26.28.** 4 корап. **27.1.** 1) $2\sin4x\cdot\cos x$; 2) $2\sin4\beta\cdot\cos2\beta$; 3) $2\cos10\cdot\sin5$; 4) $\sqrt{3}\cdot\cos70^\circ$; 6) $-2\sin9\alpha\cdot\sin4\alpha$. **27.2.** 2) $\sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{12}$; 3) $2\cos\frac{\pi}{5}\cdot\sin\frac{\pi}{10}$; $6\sin x$; 9) $\sqrt{3}\cos\alpha$; 12) $2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{5\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{7\beta}{2}\right)$. **27.3.** 9) $4\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}\right)$; 11) $4\cos\left(\frac{\pi}{6}+2x\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)$; 12) $4\cos\left(\frac{\pi}{12}+x\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}-x\right)$. **27.4.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{3}\text{ctg}7^\circ$; 2) $\sqrt{3}\,\text{tg}80^\circ$; 3) $\text{tg}10^\circ$; 9) $-\text{tg}2x$; 11) $\text{ctg}2x$; 12) $-\text{tg}\frac{5x}{2}$; 14) $-\frac{\cos2\beta}{\sin\beta}$; 15) 1; 16) $\text{ctg}\,\alpha$. **27.6.** 1) $2\sqrt{3}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2\sin11^\circ\cdot\sin34^\circ}$; 4) $\frac{2}{\sin10^\circ}$;

МАЗМҰНЫ

IV тарау. ТРИГОНОМЕТРИЯ

V тарау. ЫҚТИМАЛДЫҚТАР ТЕОРИЯСЫНЫҢ ЭЛЕМЕНТТЕРІ

Учебное издание

Абылкасымова Алма Есимбековна
Кучер Татьяна Павловна
Корчевский Владимир Евгеньевич
Жумагулова Зауре Абдыкеновна

АЛГЕБРА

Часть 2

Учебник для 9 классов общеобразовательных школ
(*на казахском языке*)

Редакторы *Ж. Өміржанова*
Көркемдеуші редакторы *Ә. Сланова*
Техникалық редакторы *И. Тарашунец*
Корректоры *С. Дәуірхан*
Компьютерде беттеген *Г. Әлімшеева*

Баспаға Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігінің №0000001 мемлекеттік лицензиясы 2003 жылы 7 шілдеде берілген

ИБ № 5827

Басуға 21.05.19 қол қойылды. Пішімі 70x100 1/16. Офсеттік қағаз. Қаріп түрі "SchoolBook Kza". Офсеттік басылыс. Шартты баспа табағы 12,26 + 0,32 қосарбет. Шартты бояулы беттаңбасы 25,81. Есептік баспа табағы 6,90 + 0,54 қосарбет. Таралымы 100000 дана. Тапсырыс №

"Мектеп" баспасы, 050009, Алматы қаласы, Абай даңғылы, 143-үй
Факс: 8(727) 394-37-58, 394-42-30.
Тел.: 8(727) 394-41-76, 394-42-34.
E-mail: mektep@mail.ru
Web-site: www.mektep.kz