Г. Н. Солтан, А. Е. Солтан, А. Ж. Жумадилова

АЛГЕБРА

Жалпы білім беретін мектептің 9-сынып оқушыларына арналған оқулық

+CD

Қазақстан Республикасының Білім және ғылым министрлігі ұсынған

KELESHEK 2030

КӨКШЕТАУ

ӘОЖ 373.167.1
КБЖ 22.1я72
С60

Солтан Г. Н. және т.б.
С60 Алгебра: жалпы білім беретін мектептің 9-сынып оқушыларына арналған оқулық + CD / Г. Н. Солтан, А. Е. Солтан, А. Ж. Жумадилова. – Көкшетау: Келешек-2030, 2019. – 320 б.: ил.

ISBN 978-601-317-423-5

Оқулықтың электрондық нұсқасы: http://keleshek-2030.kz/books/algb_9k.php

ӘОЖ 373.167.1
КБЖ 22.1я72

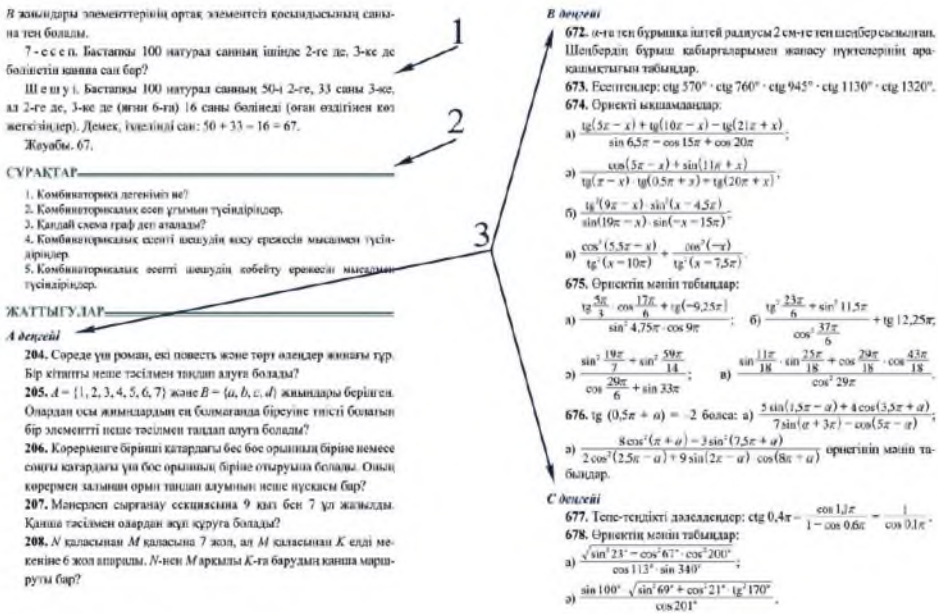
ISBN 978-601-317-423-5

МАЗМҰНЫ

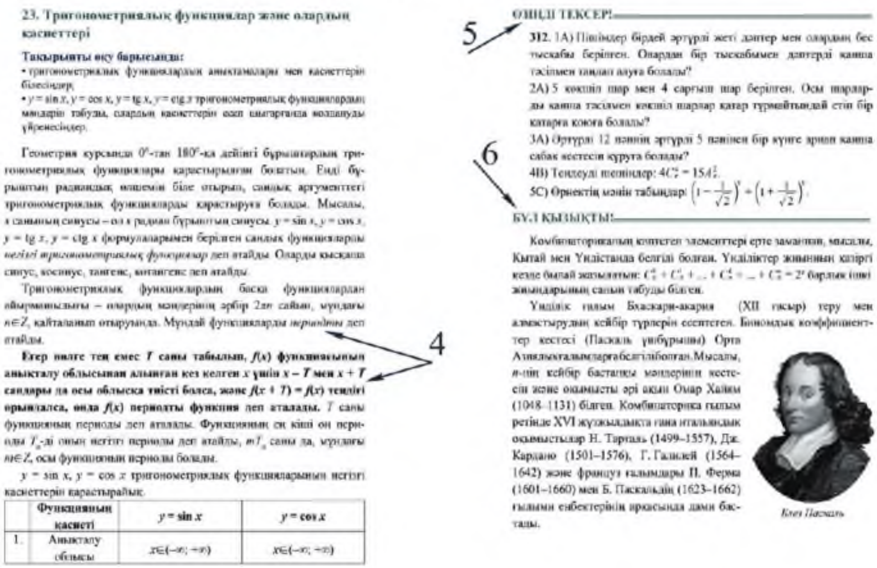
АЛҒЫ СӨЗ

Құрметті оқушылар! Биылғы жылы сендер негізгі орта білім деңгейіндегі алгебра курсын оқуды аяқтайсыңдар. Теңдеулер, теңсіздіктер және олардың жүйелерін шешу әдістері, тригонометрия мен комбинаторика элементтері бойынша білімдеріңді айтарлықтай кеңейтетін боласыңдар. Сонымен қатар, бұл оқулыққа «Тізбектер» мен «Ықтималдықтар теориясының элементтері» атты жаңа бөлімдер, сондай-ақ 7–9-сыныптардағы алгебра курсын қайталауға арналған материалдар енгізілді.

Мұнда теория баяндалып, күрделілігі әртүрлі жаттығулар мен мәтінді есептерді шығару мысалдары (1) келтірілген. Теориялық білімнің игерілгенін тексеруге арналған бақылау сұрақтары (2) және іскерлік дағдыны қалыптастыру үшін күрделілігі бойынша A, B, C үш деңгейге бөлінген әртүрлі жаттығулар (3) берілген. Жаттығулардың арасында зерттеуге арналған тапсырмалар мен қызықты есептер бар.



Анықтамалар, формулалар және алгебралық ережелер арнайы қаріппен (4) ерекшеленген. Әр тармақтың соңында оқу материалын қайталауға және жиынтық бағалауға дайындыққа арналған «Өзіңді тексер!» айдарымен тапсырмалар (5), сонымен қатар тарихи мағлұматтар ұсынылған. Бұл мағлұматтар қосымша әдебиеттерді немесе ғаламторды пайдаланып, алгебраның тарихы туралы білімдеріңді кеңейтуге арналған нұсқаулар бар.



23. Тригонометриялық функциялар және олардың қасиеттері

Тақырыпты оқу барысында:
• тригонометриялық функциялардың анықтамалары мен қасиеттерін білесіңдер;
• $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ тригонометриялық функциялардың мәндерін табуда, олардың қасиеттерін есеп шығарғанда қолдануды үйренесіңдер.

Геометрия курсында 0°-тан 180°-қа дейінгі бұрыштардың тригонометриялық функцияларын қарастырғанбыз. Енді бұрыштың радиандық өлшемін біле отырып, сандық аргументтегі тригонометриялық функцияларды қарастыруға болады. Мысалы, x санының синусы – ол x радиан бұрыштың синусы. $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ формулаларымен берілген сандық функцияларды *негізгі тригонометриялық функциялар* деп атайды. Оларды қысқаша синус, косинус, тангенс, котангенс деп атайды.

Тригонометриялық функциялардың басқа функциялардан айырмашылығы – олардың мәндерінің әрбір $2\pi n$ сайын, мұндағы $n \in Z$, қайталанып отыруында. Мұндай функцияларды *периодты* деп атайды.

Егер нөлге тең емес T саны табылып, $f(x)$ функциясының анықталу облысынан алынған кез келген x үшін $x - T$ мен $x + T$ сандары да осы облысқа тиісті болса, және $f(x + T) = f(x)$ теңдігі орындалса, онда $f(x)$ периодты функция деп аталады. T саны функцияның периоды деп аталады. Функцияның ең кіші оң периоды T_0-ді оның негізгі периоды деп атайды, mT_0 саны да, мұндағы $m \in Z$, осы функцияның периоды болады.

$y = \sin x$, $y = \cos x$ тригонометриялық функцияларының негізгі қасиеттерін қарастырайық.

	Функцияның қасиеті	$y = \sin x$	$y = \cos x$
1.	Анықталу облысы	$x \in (-\infty; +\infty)$	$x \in (-\infty; +\infty)$

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

312. 1А) Пішіндер бірдей әртүрлі жеті дәптер мен олардың бес тысқабы берілген. Олардан бір тысқабымен дәптерді қанша тәсілмен таңдап алуға болады?
2А) 5 көкшіл шар мен 4 сарғыш шар берілген. Осы шарларды қанша тәсілмен көкшіл шарлар қатар тұрмайтындай етіп бір қатарға қоюға болады?
3А) Әртүрлі 12 пәннің әртүрлі 5 пәнінен бір күнге арнап қанша сабақ кестесін құруға болады?
4В) Теңдеуді шешіңдер: $4C_x^4 = 15A_x^2$.
5С) Өрнектің мәнін табыңдар: $\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^5 + \left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^5$.

БҰЛ ҚЫЗЫҚТЫ!

Комбинаториканың көптеген элементтері ерте заманнан, мысалы, Қытай мен Үндістанда белгілі болған. Үнділіктер жиынның қазіргі кезде былай жазылатын: $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^k + \ldots + C_n^n = 2^n$ барлық ішкі жиындарының санын табуды білген.

Үнділік ғалым Бхаскари-акария (XII ғасыр) теру мен алмастырудың кейбір түрлерін есептеген. Биномдық коэффициенттер кестесі (Паскаль үшбұрышы) Орта Азиялық ғалымдарға белгілі болған. Мысалы, n-нің кейбір бастапқы мәндерінің кестесін және оқымысты әрі ақын Омар Хайям (1048–1131) білген. Комбинаторика ғылым ретінде XVI жүзжылдықта ғана италиялық оқымыстылар Н. Тарталья (1499–1557), Дж. Кардано (1501–1576), Г. Галилей (1564–1642) және француз ғалымдары П. Ферма (1601–1660) мен Б. Паскальдің (1623–1662) ғылыми еңбектерінің арқасында дами бастады.

Блез Паскаль

Оқулықта Қазақстанның көрікті жерлері туралы мәліметтер пайдаланылған, олар туралы білімдеріңді сендер ғаламтор арқылы кеңейте аласыңдар, сонымен қатар ҚР Ұлттық экономика министрлігі Статистика комитетінің мәліметтері пайдаланылған.

Оқулықтың соңында жаттығулардың жауаптары мен күрделі есептерді шешуге нұсқаулар берілген.

Қолдарыңдағы оқулық алгебраны оқып-үйренудегі сенімді көмекшілерің болады деп үміттенеміз!

Сәттілік тілейміз!

Авторлар

8-СЫНЫПТАҒЫ АЛГЕБРА КУРСЫН ҚАЙТАЛАУ

Арифметикалық квадрат түбір және оның қасиеттері

$\sqrt{a} = b$, мұндағы $b^2 = a$, $a \geq 0$, $b \geq 0$.

$\sqrt{a^2} = |a|$, мұндағы $a \in R$.

$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, мұндағы $a \geq 0$, $b \geq 0$.

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, мұндағы $a \geq 0$, $b > 0$.

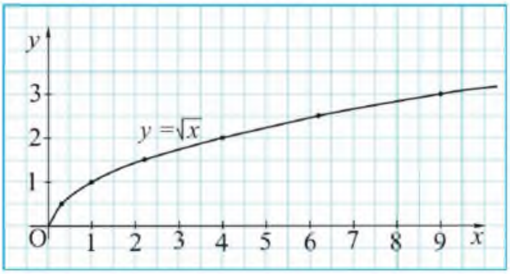
Егер $a > b \geq 0$ болса, онда $\sqrt{a} > \sqrt{b}$.

Егер $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ болса, онда $a > b \geq 0$.

$y = \sqrt{x}$ функциясының графигі мен қасиеттері

$y = \sqrt{x}$ функциясының (1-сурет) қасиеттері:

1) $D(y) = [0; +\infty)$;
2) $E(y) = [0; +\infty)$;
3) өспелі функция;
4) ең кіші мәні 0-ге тең.



1-сурет

Квадрат теңдеу және оның түбірлері

$$ax^2 + bx + c = 0, \ a \neq 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$	$x = \frac{-b}{2a}$	Түбірлері жоқ

Екінші коэффициенті жұп сан болатын квадрат теңдеу түбірлерінің формуласы

$$ax^2 + 2kx + c = 0, \ a \neq 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$$

Виет теоремасы

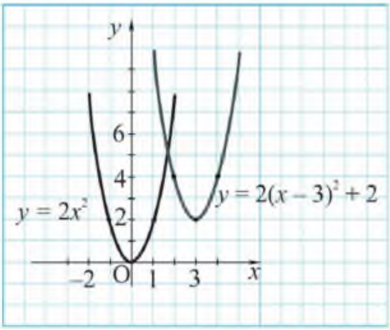
x_1 және x_2 сандары $x^2 + px + q = 0$ теңдеуінің түбірлері болса, онда $x_1 + x_2 = -p$ және $x_1 \cdot x_2 = q$.

Квадрат үшмүшені көбейткіштерге жіктеу

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$, мұндағы x_1, x_2 – оның түбірлері.

Квадраттық функция және оның қасиеттері

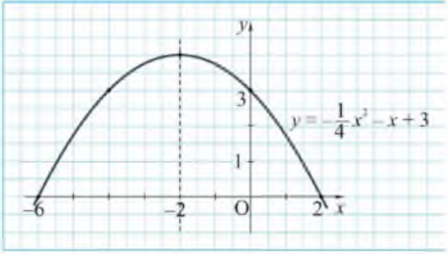
$\boldsymbol{y = a(x - m)^2 + n}$ функциясының графигін $y = ax^2$ функциясының графигінен оны абсцисса осі бойымен m бірлікке және ордината осі бойымен n бірлікке жылжыту арқылы алуға болады (2-сурет). Бұл ретте Ox осі бойымен, егер $m > 0$ болса – оңға, ал егер $m < 0$ болса – солға; Oy осі бойымен $n > 0$ болса – жоғары, $n < 0$ болса, төмен қарай жылжиды. Осындай жылжытулардан кейін парабола **төбесінің** координаталары $\boldsymbol{(m; n)}$, ал оның **симметрия осінің** теңдеуі $\boldsymbol{x = m}$ болады.



2-сурет

$\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$ квадраттық функциясы графигінің төбесі $(x_0; y_0)$ нүктесі болатын парабола болады, мұндағы $\boldsymbol{x_0 = -\frac{b}{2a}}$, $\boldsymbol{y_0 = y(x_0)}$.

$\boldsymbol{x = -\frac{b}{2a}}$ түзуі параболаның **симметрия осі** болады.



3-сурет

Мысалы, 3-суретте $y = -\frac{1}{4}x^2 - x + 3$ функциясының графигі кескінделген. Оның қасиеттері:

1) анықталу облысы: $D(y) = (-\infty; +\infty)$;

2) мәндер жиыны: $E(y) = (-\infty; 4]$;

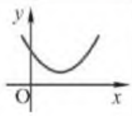
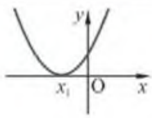
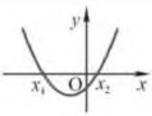
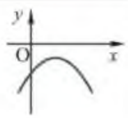
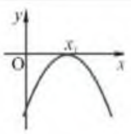
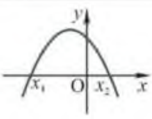
3) функция $x \in (-\infty; -2]$ аралығында өседі және $x \in [-2; +\infty)$ аралығында кемиді;

4) функцияның таңба тұрақтылық аралықтары: $x \in (-6; 2)$ аралығында $y > 0$, $x \in (-\infty; -6) \cup (2; +\infty)$ аралығында $y < 0$;

5) функцияның ең үлкен мәні 4-ке тең.

Квадрат теңсіздік 1) $ax^2 + bx + c > 0$;

2) $ax^2 + bx + c \le 0$

$a > 0$ $D < 0$  1) $x \in (-\infty; +\infty)$ 2) Шешімі жоқ	$a > 0$ $D = 0$  1) $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_1; +\infty)$ 2) $x = \{x_1\}$	$a > 0$ $D > 0$  1) $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ 2) $x \in [x_1; x_2]$
$a < 0$ $D < 0$  1) Шешімі жоқ 2) $x \in (-\infty; +\infty)$	$a < 0$ $D = 0$  1) Шешімі жоқ 2) $x \in (-\infty; +\infty)$	$a < 0$ $D > 0$  1) $x \in (x_1; x_2)$ 2) $x \in (-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$

Статистика элементтері

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ таңдама деректерінің арифметикалық ортасы $\overline{x}$ деп, ал қарастырылып отырған барлық мәндердің қосындысы грек әліпбиінің Σ (сигма) бас әрпімен белгіленеді. Осы белгілеулерде $\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n}$, мұндағы i 1-ден n-ге дейінгі барлық натурал мәндерді қабылдайды. Интервалдық қатар үшін $x_1, x_2, \ldots, x_n$ таңдама деректері ретінде интервалдардың орталары алынады.

Таңдама деректерінің сипаттамасын зерттегенде олардың арифметикалық ортадан ауытқуын, яғни берілген шамалар мен арифметикалық ортаның айырымдарын қарастырады. Көрсетілген айырым оң немесе теріс, немесе 0 мәндерін қабылдайды, сондықтан олардың арифметикалық орта маңында көптеген мәліметтердің шашырауын бағалау үшін осы айырымдардың өзін емес, олардың квадраттарын пайдаланады.

Берілген шамалар мен олардың арифметикалық ортасының барлық айырымдары квадраттарының арифметикалық ортасы ***дисперсия*** *деп аталады* (шашырау дегенді білдіреді) және σ^2 (σ – грек әліпбиінің сигма кіші әрпі) деп белгіленеді: $\sigma^2 = \dfrac{\sum(x_i - \overline{x})^2}{n}$.

Шашырау сипаттамасы мен x_i деректерінің өлшемдері бірдей болуы үшін дисперсиядан квадрат түбір табады. **Дисперсияның квадрат түбірі стандартты ауытқу деп аталады:** $\boldsymbol{\sigma} = \sqrt{\dfrac{\sum(\boldsymbol{x}_i - \overline{\boldsymbol{x}})^2}{\boldsymbol{n}}}$.

7-сыныптағы алгебра курсынан мәліметтер

Бүтін көрсеткішті дәрежелер

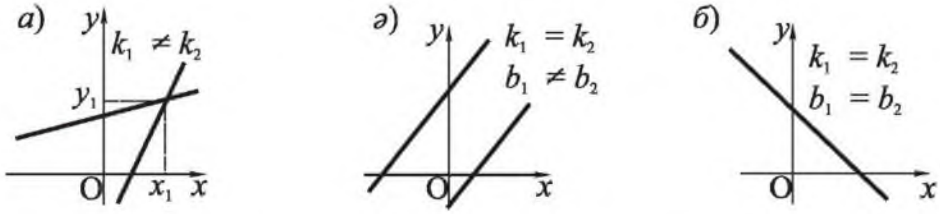
Анықтамалары	Қасиеттері
$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{ көбейткіш}}, n \in N, n > 1;$ $\boldsymbol{a^1 = a}; \boldsymbol{a^0 = 1}, a \neq 0;$ $\boldsymbol{a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}}, n \in N, a \neq 0.$	$\boldsymbol{a^p \cdot a^k = a^{p+k}}$, $\quad \boldsymbol{a^p : a^k = a^{p-k}}$, $\boldsymbol{(a^p)^k = a^{p \cdot k}}$, $\quad \boldsymbol{(ab)^p = a^p \cdot b^p}$, $\boldsymbol{\left(\dfrac{a}{b}\right)^p = \dfrac{a^p}{b^p}}$, мұндағы $a \neq 0, b \neq 0,$ $p \in Z, k \in Z.$

Қысқаша көбейту формулалары

$\boldsymbol{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$ $\boldsymbol{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$ $\boldsymbol{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$ $\boldsymbol{(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$	$\boldsymbol{a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)}$ $\boldsymbol{a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)}$ $\boldsymbol{a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)}$

Екі айнымалысы бар екі сызықтық теңдеулер жүйесін шешу

$$\begin{cases} y = k_1x + b_1, \\ y = k_2x + b_2. \end{cases}$$



$(x_1; y_1)$ – бір шешімі бар *шешімі жоқ* *шексіз көп шешімі бар*

4-сурет

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

1. Дұрыс теңдіктерді көрсетіңдер:

а) $\sqrt{16} = \pm 4$; б) $(\sqrt{4^2})^2 = 16$;
ә) $\sqrt{121} = 11$; в) $\sqrt{17^2 - 2^2} = 15$.

2. Есептеңдер:

а) $\sqrt{36} \cdot \sqrt{49} - \sqrt{1,44}$; б) $(4 - \sqrt{7})(4 + \sqrt{7})$;

ә) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{75}} + \sqrt{3\dfrac{6}{25}} + \sqrt{12,5} \cdot \sqrt{2}$; в) $\sqrt{145^2 - 24^2}$.

3. Сандарды салыстырыңдар:

а) $5\sqrt{3}$ және $6\sqrt{2}$; б) $0,6\sqrt{0,4}$ және $0,8\sqrt{0,2}$;

ә) $-3\sqrt{2}$ және $-2\sqrt{3}$; в) $\dfrac{1}{3}\sqrt{7,2}$ және $\dfrac{3}{4}\sqrt{1,6}$.

4. Өрнекті ықшамдаңдар:

а) $(4 + \sqrt{a})(4 - \sqrt{a})$; б) $(\sqrt{m} + \sqrt{5})^2 - (m + 5)$;
ә) $(\sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{b} - \sqrt{c})$; в) $(n + 10) - (\sqrt{10} - \sqrt{n})^2$.

5. $y = \sqrt{x}$ функциясының графигі: а) $A(-100; 10)$; ә) $B(100; -10)$ нүктесінен өте ме?

6. $y = \sqrt{x}$ функциясының графигін: а) $y = 20$; ә) $y = -2$ түзуі қия ма?

7. $y = \sqrt{x}$ функциясының графигімен: а) $y = 0,9$; ә) $x = 0,64$ түзуінің қиылысу нүктелерінің координаталарын табыңдар.

8. Түбірлері болмайтын теңдеуді көрсетіңдер:
а) $3x^2 = -27$; б) $(x + 2)^2 = 0$; г) $(x - 3)^2 + 4 = 0$;
ә) $x^2 + 9 = 0$; в) $5x - x^2 = 0$; ғ) $x^2 + x + 2 = 0$.

9. Теңдеуді шешіңдер:
а) $2x^2 = 5x$; б) $0{,}49 - x^2 = 0$;
ә) $0{,}3x^2 = 7{,}5x$; в) $\frac{1}{4}x^2 - 25 = 0$.

10. $2 - 3\sqrt{3}$ саны $x^2 - 4x - 23 = 0$ теңдеуінің түбірі бола ма, тексеріңдер.

11. Теңдеудің түбірін табыңдар:
а) $x^2 - 5x - 24 = 0$; б) $0{,}5x^2 + 2x + 2 = 0$;
ә) $x^2 - 13x + 42 = 0$; в) $0{,}1x^2 - 0{,}6x + 0{,}9 = 0$.

12. Виет теоремасын пайдаланып, теңдеу түбірлерінің қосындысы мен көбейтіндісін жазыңдар:
а) $x^2 - 9x - 10 = 0$; б) $5x^2 + 5x - 10 = 0$;
ә) $x^2 + 12x + 7 = 0$; в) $2x^2 - 16x + 30 = 0$.

13. $x^2 + bx + 35$ үшмүшесінің түбірлерінің бірі -7-ге тең. Оның басқа түбірін, b коэффициентін тауып, үшмүшені көбейткіштерге жіктеңдер.

14. x-тің қандай мәндерінде өрнек нөлге тең:
а) $\frac{(x-7)(x+3)}{5x}$; б) $\frac{x^2 - 5x}{x^2 - 25}$;
ә) $\frac{(x+2)(x-1)}{3x}$; в) $\frac{x^2 + 4x}{x^2 - 16}$?

15. а) Көбейтіндісі 240-қа тең болатын тізбектес екі натурал сан бар ма, соны зерттеңдер.
ә) Қосындысы 14-ке, ал квадраттарының қосындысы 106-ға тең болатын екі санды табыңдар.

16. а) Футбол алаңының ауданы 6000 м^2-ге тең. Егер алаңның ұзындығы енінен 40 м-ге артық болса, оның периметрін табыңдар.
ә) Егер тікбұрышты үшбұрыштың ауданы 96 см^2-ге тең, ал бір катеті екіншісінен 4 см-ге артық болса, үшбұрыш қабырғаларының ұзындықтарын табыңдар.

17. а) Ауданы 32 см^2-ге тең болатын тікбұрышты теңбүйірлі үшбұрыш катетінің ұзындығын табыңдар.

ә) Сүйір бұрышы 30°-қа, ал ауданы 50 см^2-ге тең ромб қабырғасының ұзындығын табыңдар.

18. Мына параболалардың қайсысының төбесі абсцисса осіне тиісті:

а) $y = x^2 - 4$; б) $y = (x - 4)^2$;

ә) $y = x^2 - 4x$; в) $y = (x - 4)^2 + 3$?

19. Парабола төбесінің координаталарын табыңдар:

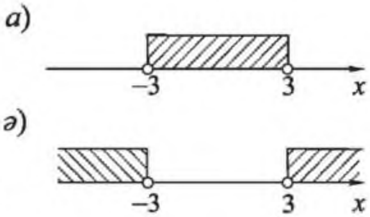
а) $y = x^2 - 4x + 8$; ә) $y = -x^2 + 6x + 7$.

20. Аргументтің қандай мәнінде функциялардың мәндері тең болады:

а) $y = 7x^2 - 5x + 6$ және $y = -4x + 5 + 7x^2$;

ә) $y = x^2 + 6x + 2$ және $y = 2x^2 + 4x + 3$?

21. 5, *а*, *ә*-суреттердің қайсысында $\sqrt{x^2} < 3$ теңсіздігінің шешімдер жиыны бейнеленген?



5-сурет

22. Теңсіздікті шешіңдер:

а) $\sqrt{y^2} \le 8$; ә) $\sqrt{y^2} \ge 4$.

23. x-тің қандай мәндерінде теңсіздік дұрыс болады:

а) $(5x - 2)^2 \le 0$; ә) $(5x - 2)^2 > 0$?

24. Теңсіздікті шешіңдер:

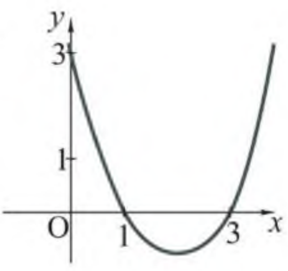
а) $x^2 - 9 \ge 0$; б) $\frac{1}{(x-2)^2} > 0$;

ә) $x^2 - 8 < 0$; в) $\frac{3}{(4-x)^2} \le 0$.

25. 6-суретте $y = x^2 - 4x + 3$ функциясы графигінің сызбасы бейнеленген.

а) $x^2 - 4x + 3 \le 0$; ә) $x^2 - 4x + 3 > 0$

теңсіздігінің шешімін жазыңдар.



6-сурет

26. Теңсіздікті шешіңдер:

а) $x^2 - 3x - 4 < 0$; б) $x^2 + 6x + 9 > 0$;

ә) $x^2 + x - 6 \ge 0$; в) $x^2 - 4x + 4 \le 0$.

27. x-тің қандай мәндерінде: а) $\sqrt{(5-x)(5+x)}$; ә) $\sqrt{(x-3)(3-x)}$ өрнегінің мағынасы бар болады?

B деңгейі

28. а) $\dfrac{\sqrt{x}}{y}=\sqrt{\dfrac{x}{y^2}}$; ә) $\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ теңдігі тепе-теңдік бола ма?

29. Өрнектердің мәндерін салыстырыңдар: $\left(2\sqrt{5}+\sqrt{\dfrac{1}{5}}\right)$ және $\left(2\sqrt{7}-\sqrt{\dfrac{1}{7}}\right)$.

30. $(\sqrt{29}-\sqrt{17})$ және $(\sqrt{34}-\sqrt{21})$ өрнектерінің жуық мәндерін жүздік үлеске дейінгі дәлдікпен есептеп, олардың мәндерін салыстырыңдар.

31. Өрнектің мәнін табыңдар:

а) $\sqrt{(2-\sqrt{8})^2}+\sqrt{(\sqrt{8}-3)^2}$; б) $(\sqrt{9-4\sqrt{2}}+\sqrt{9+4\sqrt{2}})^2$;

ә) $\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}}-\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}}\right)^2$; в) $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}-\dfrac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\dfrac{4}{3-\sqrt{5}}$.

32. Өрнекті ықшамдаңдар: а) $\sqrt{\dfrac{(a^2-1)^2}{4a^2}+1}$; ә) $\sqrt{\left(\dfrac{b^2+1}{2b}\right)^2-1}$.

33. Теңдеуді шешіңдер:

а) $\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{1}{x^2+x}=\dfrac{1}{x}$; в) $x^2-3(\sqrt{x})^2=10$;

ә) $\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-2x}=\dfrac{1}{x}$; г) $x^4-10x^2+9=0$;

б) $x^2-3\sqrt{x^2}=10$; ғ) $(2x-1)^4-(2x-1)^2=12$.

34. а) $a>0$, $b>0$, $c<0$; ә) $a<0$, $b<0$, $c>0$ болғанда, $ax^2+bx+c=0$ квадрат теңдеуі түбірлерінің таңбалары неліктен әртүрлі болатынын зерттеп, түсіндіріңдер.

35. Мына формуламен берілген функцияның мәндер жиынын көрсетіңдер:

а) $y=\dfrac{1}{2}x^2-3$; б) $y=(x-3)^2+5$;

ә) $y=-3x^2+4$; в) $y=-(x-4)^2-2$.

36. Теңдеулер жүйесін шешіңдер:

а) $\begin{cases} 0{,}5x - 0{,}3y = 0{,}6, \\ 0{,}2x - 0{,}5y = 0{,}8; \end{cases}$ ә) $\begin{cases} 0{,}(5)x - 0{,}(3)y = 0{,}(6), \\ 0{,}(2)x - 0{,}(3)y = 0{,}(8). \end{cases}$

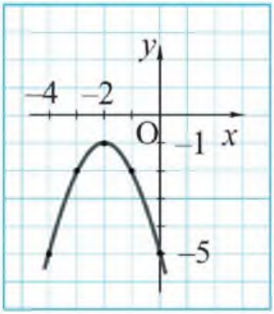
37. Автожарыс жолы ұзындықтары 60 км, 120 км, 170 км, 85 км, 80 км және 55 км болатын 6 кезеңнен тұрады. Осы кезеңдердің орташа ұзындығы мен таңдама деректерінің стандартты ауытқуын табыңдар.

38. Компьютерде терген мәтінді тексеру барысында автор қателерді байқады. Беттердегі қателердің саны кестеде берілген.

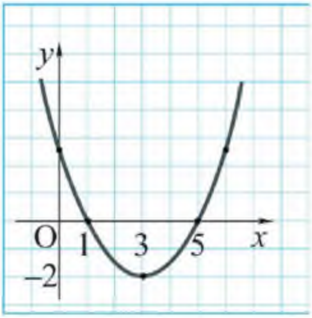
Беттің нөмірі	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Қателер саны	0	1	0	2	1	2	4	3	0	1

Осы таңдама деректерінің стандартты ауытқуы 1-ден артық емес деген тұжырым ақиқат па?

39. Графигі: а) 7-суретте; ә) 8-суретте кескінделген квадраттық функцияны формуламен беріңдер.



7-сурет



8-сурет

40. Егер тікбұрышты үшбұрыштың бір катеті 6 см-ге, ал басқа катетінің гипотенузадағы проекциясы 5 см-ге тең болса, гипотенузаның ұзындығын табыңдар.

41. Тікбұрышты үшбұрышқа іштей сызылған шеңбердің жанасу нүктесі гипотенузаны 4 см және 6 см кесінділерге бөлетін болса, үшбұрыштың катеттерін табыңдар.

42. Екі кран бірігіп, баржаны 2 сағатта тиеп бітірді. Егер осы жұмысты жеке өзі орындау үшін олардың бірі екіншісіне қарағанда 3 сағат артық жұмсайтын болса, әр кран жеке жұмыс істеп, баржаны неше сағатта тиеп бітірер еді?

43. Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер:

а) $\begin{cases} 6x^2 - 5x + 1 \le 0, \\ 4x - 1 > 0; \end{cases}$ ә) $\begin{cases} 10x^2 - 7x + 1 > 0, \\ 1 - 3x \le 0. \end{cases}$

С деңгейі

44. Функция графиктерінің қиылысу нүктелерінің координаталарын табыңдар:

а) $y = \sqrt{x}$ және $y = 2 - x$; ә) $y = \sqrt{x}$ және $y = 6 - x$.

45. Өрнектің мәнін табыңдар:

$$\frac{4}{\sqrt{4} + \sqrt{8}} + \frac{4}{\sqrt{8} + \sqrt{12}} + \frac{4}{\sqrt{12} + \sqrt{16}} + ... + \frac{4}{\sqrt{32} + \sqrt{36}}.$$

46. Өрнекті ықшамдаңдар:

а) $\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$; б) $(1 - 2\sqrt{3})^2 + 4\sqrt{28 + 10\sqrt{3}}$;

ә) $\sqrt{11 - 4\sqrt{7}} + \sqrt{11 + 4\sqrt{7}}$; в) $(3\sqrt{2} + 5)^2 + 30\sqrt{51 - 14\sqrt{2}}$.

47. Егер x_1 мен x_2 сандары $x^2 - 8x + 10 = 0$ теңдеуінің түбірлері болса, теңдеуді шешпестен, $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$ өрнегінің мәнін табыңдар.

48. Теңдеуді шешіңдер:

а) $x^2 - 7|x| = 0$; б) $x^2 + 6x + |x + 2| + 8 = 0$;

ә) $x^2 - \frac{5x^2}{|x|} = 0$; в) $x^2 - |(\sqrt{-x})^2| - 20 = 0$.

49. Теңдеудің барлық түбірлерін табыңдар:

а) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x + \frac{1}{x}\right) = 2$; б) $(x - 3)^2 - 2|x - 3| = 8$;

ә) $2\left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right) + \left(x + \frac{2}{x}\right) = 13$; в) $\frac{x + 5}{x - 5} + \frac{x - 5}{x + 5} = 5\frac{1}{5}$.

50. Велосипедші тауға көтерілетін жолға 5 минут, таудан түсетін жолға 3 минут жұмсады. Ол жолдың әр бөлігіндегі бастапқы жылдамдықтарын сақтай отырып, осы жолмен кейін қайтуға 16 минут жұмсады. Велосипедшінің жүрген жолын схемалық түрде кескіндеп, оның тауға көтерілгенге қарағанда төмен түскенде неше есе тезірек жүретінін анықтаңдар.

51. Теңсіздікті шешіңдер:

а) $\dfrac{x^2-3x-1}{x^2+x+1} \leq 3$; б) $\dfrac{2x^3-x^4+3x^2}{x^2+x+6} > 0$;

ә) $\dfrac{x^2+2x-1}{x^2-x+1} > 2$; в) $\dfrac{2x^2+5x+2}{(3-x)^2\cdot(4-x^2)} \geq 0$.

52. Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер:

а) $\begin{cases} |2x+3| \leq 5, \\ x^2-x-6 > 0; \end{cases}$ ә) $\begin{cases} x^2-16 < 0, \\ x^2+5x > 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+6x+5 \geq 0, \\ \dfrac{x}{x+1} \leq 0. \end{cases}$

ҚЫЗЫҚТЫ ЕСЕПТЕР

1) Үштаңбалы санның ортаңғы цифры екі шеткі цифрларының қосындысына тең. Осы сан мен оның цифрлары кері ретпен жазылған санның қосындысы төрттаңбалы санға тең. Осы төрттаңбалы санды табыңдар.

2) Өрнектің мәнін табыңдар:

а) $\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2}}} - \dfrac{1717}{2424}$; ә) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{390625}}}$.

3) Гүлжан Ерденнің қазіргі жасына келгенде, Асанның толатын жасынан Ерден екі есе үлкен болады. Жасы бойынша ортаншысы кім?

4) Әкесі балаларына алма бөліп берді. Кіші қызына барлық алмалардың және бір алманың жартысын, үлкен қызына қалған алмалардың және бір алманың жартысын, ұлына қалған алмалардың және бір алманың жартысын берді. Әкесі барлығы қанша алма бөліп берді?

5) Саудагер жыл сайын дәулетін үштен бір бөлікке көбейтіп отырды және одан жылына 100 фунтын отбасы қажеттіліктеріне жұмсады. Үш жылдан кейін саудагер дәулетінің екі есе ұлғайғанын байқады. Бастапқыда оның қанша ақшасы болды (Ньютон есебі)?

I. ЕКІ АЙНЫМАЛЫСЫ БАР ТЕҢДЕУЛЕР, ТЕҢСІЗДІКТЕР ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ ЖҮЙЕЛЕРІ

Бөлімді оқу нәтижесінде

• екі айнымалысы бар сызықтық және сызықтық емес теңдеулерді, теңдеулер жүйесін, екі айнымалысы бар теңсіздіктерді және теңсіздіктер жүйесін, шешу ұғымдарын;
• екі айнымалысы бар теңдеулер мен олардың жүйелерін шешу тәсілдерін;
• екі айнымалысы бар теңсіздіктер мен олардың жүйелерінің шешімдерін график түрінде қалай көрсетуді **білу керек**.

• екі айнымалысы бар теңдеулер мен олардың жүйелерінің түрлерін ажырата алу;
• екі айнымалысы бар сызықтық емес теңдеулер жүйелерін шеше алу;
• теңдеулер жүйесін пайдаланып, мәтінді есептерді шығара алу;
• екі айнымалысы бар теңсіздіктер мен олардың жүйелерінің шешімдерін график түрінде **орындай алу керек**.

1. Екі айнымалысы бар сызықтық емес теңдеулер

Тақырыпты оқу барысында:

• екі айнымалысы бар сызықтық және сызықтық емес теңдеулер ұғымдарын білетін боласыңдар және оларды ажыратуды үйренесіңдер;

• екі айнымалысы бар сызықтық емес теңдеулердің шешімі және графигі деп ненің аталатынын білетін боласыңдар;

• екі айнымалысы бар сызықтық емес теңдеулерді шешуді және соларды қолданып, мәтінді есептер шығаруды үйренесіңдер.

Екі айнымалысы бар кейбір теңдеулер 7–8-сыныптардың алгебра курсы мен 8-сыныптың геометрия курсында қарастырылған болатын. Мысалы, екі айнымалысы бар сызықтық теңдеулерге $ax + by + c = 0$ түріндегі теңдеулер жатады, мұндағы x пен y – айнымалылар, a, b, c – қайсыбір нақты сандар. a мен b коэффициенттерінің ең болмағанда біреуі нөлге тең емес екі айнымалысы бар сызықтық теңдеуді *екі айнымалысы бар бірінші дәрежелі теңдеу* деп атайды. Сызықтық теңдеуден басқа кез келген екі айнымалысы бар теңдеу сызықтық емес теңдеу болып табылады. *Екі айнымалысы бар теңдеудің шешімі деп оны дұрыс сандық теңдікке айналдыратын айнымалылар мәндерінің жұбын* атайтынын еске сала кетейік. Шешімдері бірдей немесе шешімдері жоқ екі айнымалысы бар теңдеулерді *мәндес теңдеулер* деп атайды.

x және y айнымалылары болатын $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ky + p = 0$ түріндегі теңдеуді *екінші дәрежелі теңдеу* деп атайды, мұндағы a, b, c, d, k, p – нақты сандар және a, b, c сандарының ең болмағанда біреуі нөлге тең емес. Мұндай теңдеулер екі айнымалысы бар сызықтық емес теңдеулерге жатады. Әртүрлі сызықтық емес теңдеулерге көптеген мысалдар келтіруге болады: $(x - 1)^2 + y^2 = 1$; $xy = 16$; $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$; $x^3 - xy^2 = 0$.

Екі айнымалысы бар сызықтық емес теңдеулер, олардың графиктері мен шешімдер жиыны әртүрлі болады. Шешімдерін N, Z, Q немесе R жиындардың қайсысында табатыны маңызды. Мысалы,

$xy = 5$ теңдеуінің Q мен R жиындарында шексіз көп шешімдері бар болады, ол $\left(x; \frac{5}{x}\right)$ сандар жұбы. N жиынында бұл теңдеудің тек екі шешімі (1; 5) және (5; 1) бар болады, ал Z жиынында төрт шешімі (1; 5), (5; 1), (–1; –5), (–5; –1) бар болады. x және y екі айнымалысы бар теңдеудің шешімі болатын реттелген $(x; y)$ сандар жұбын координаталар жазықтығына абсциссасы x, ал ординатасы y болатын нүктелер арқылы кескіндеуге болады. Сондай нүктелер жиыны x және y екі айнымалысы бар теңдеудің графигі болады. Екі айнымалысы бар сызықтық емес теңдеулерді шешудің мысалдарын қарастырайық.

1 - м ы с а л. $9x^2 - 4y^2 = 0$ теңдеуін шешу керек.

Ш е ш у і. $9x^2 - 4y^2 = (3x - 2y)(3x + 2y)$. Сонда $3x - 2y = 0$ немесе $3x + 2y = 0$ болады. y айнымалысын x арқылы өрнектеп, $y = 1{,}5x$ немесе $y = -1{,}5x$ аламыз. Демек, берілген теңдеудің шешімі барлық $(x; 1{,}5x)$, $(x; -1{,}5x)$ сандар жұбы болады.

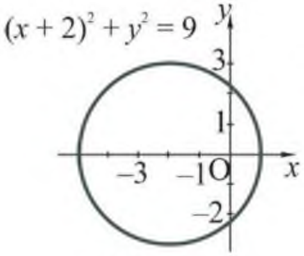
Ж а у а б ы. $(x; 1{,}5x)$, $(x; -1{,}5x)$, мұндағы $x \in R$.

2 - м ы с а л. $x^2 + 6x + y^2 - 10y + 34 = 0$ теңдеуін шешу керек.

Ш е ш у і. Екімүшенің қосындысы квадратының және айырымы квадратының формулаларын пайдаланып, теңдеуді мына түрге келтіреміз: $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 0$. Екі өрнектің квадраттарының қосындысы нөлге тең болуы үшін қосылғыштар нөлге тең болуы керек. Демек, бұл теңдеудің бір ғана шешімі (–3; 5) болады.

Ж а у а б ы. (–3; 5).

3 - м ы с а л. $x^2 + 4x + y^2 = 5$ теңдеуін шешіп, шешімінің барлық жұптарының жиынын график түрінде кескіндеу керек.



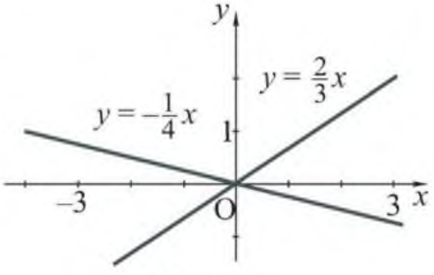
9-сурет

Ш е ш у і. Берілген теңдеуді мына түрде жазайық: $(x + 2)^2 + y^2 = 9$. Бұл теңдеу – центрі (–2; 0) нүктесінде, ал радиусы 3-ке тең болатын шеңбердің теңдеуі (9-сурет). Осы шеңбердің әрбір нүктесінің координаталары бастапқы теңдеудің шешімдері болады.

4 - м ы с а л. $-12y^2 + 5xy + 2x^2 = 0$ теңдеуінің графигін салу керек.

Ш е ш у і. Берілген теңдеуді y айнымалысына қатысты квадрат теңдеу деп қарастырып, оны шешейік: $y_{1,2} = \frac{-5x \pm \sqrt{25x^2 + 96x^2}}{-24} = \frac{-5x \pm 11x}{-24}$; $y_1 = \frac{2}{3}x$; $y_2 = -\frac{1}{4}x$.

Демек, бастапқы теңдеудің шешімі барлық $\left(x; \frac{2}{3}x\right)$ және $\left(x; -\frac{1}{4}x\right)$ сандар жұбы болады, $x \in R$. Координаталар жазықтығында бұл нүктелер жиыны $y = \frac{2}{3}x$ және $y = -\frac{1}{4}x$ түзулерінің бірігуі болып табылады (10-сурет).



10-сурет

5 - м ы с а л. $m + n = mn$ болатындай барлық $(m; n)$ бүтін сандар жұбын табу керек.

Ш е ш у і. $m + n = mn$ теңдеуін бүтін сандар арқылы шешу үшін n-ді m арқылы өрнектеп, мынаны аламыз: $n(1 - m) = -m$, $n = \frac{m}{m-1}$. Соңғы теңдікті былай жазайық: $n = \frac{m-1+1}{m-1}$, $n = 1 + \frac{1}{m-1}$. Бұдан $m = 0$ немесе $m = 2$ болғанда ғана $n \in Z$ болады деген қорытынды жасаймыз.

Ж а у а б ы. (0; 0), (2; 2).

6 - м ы с а л*. $2x^2 - 5y^2 = 7$ теңдеуінің натурал сан болатын шешімдері бар ма, соны зерттеу керек.

Ш е ш у і. Есептің шарты бойынша y тақ сан болуы керек, себебі 7 – тақ сан, ал $2x^2$ – жұп сан. $y = 2n + 1$ деп белгілейік, мұндағы $n \in N$. Сонда берілген теңдеу мына түрге келеді:

$$2x^2 - 5(2n + 1)^2 = 7,$$
$$2x^2 - 20n^2 - 20n - 12 = 0,$$
$$x^2 - 10n^2 - 10n - 6 = 0,$$
$$x^2 - 10n(n + 1) - 6 = 0.$$

Соңғы теңдіктен x-тің жұп сан болу керектігі шығады. $x = 2m$ болсын, мұндағы $m \in N$, сонда $4m^2 - 10n(n + 1) - 6 = 0$, $2m^2 - 5n(n + 1) - 3 = 0$ болады. Бірақ соңғы теңдік орындалмайды, себебі тізбектес екі натурал санның көбейтіндісі болғандықтан, $n(n + 1)$ өрнегінің мәні жұп сан болады. Демек, берілген теңдеудің натурал сан болатын шешімі жоқ.

Ж а у а б ы. Шешімі жоқ.

1 - е с е п. Қабырғасы x-ке тең болатын төрт шаршының ауданы қабырғасы y-ке тең болатын тоғыз шаршының ауданынан 7 м^2-ге артық. Осы шаршылардың қабырғаларының ұзындықтары (метрмен) натурал санмен өрнектеле ме, соны зерттеу керек.

Ш е ш у і. Есептің шарты бойынша $4x^2 - 9y^2 = 7$ теңдеуін құрып, оны N жиынында шешейік. Ол үшін теңдеудің сол жағын көбейткіштерге жіктеп, ал оң жағын натурал сандардың көбейтіндісі түрінде көрсетейік. Сонда $(2x - 3y)(2x + 3y) = 1 \cdot 7$ аламыз. Есептің шарты бойынша $x > y$ екенін ескере отырып, мынаны аламыз:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1, \\ 2x + 3y = 7; \end{cases} \begin{cases} 4x = 8, \\ 2x + 3y = 7; \end{cases} \begin{cases} x = 2, \\ y = 1. \end{cases}$$

Ж а у а б ы. Өрнектеледі, $x = 2$ м, $y = 1$ м.

СҰРАҚТАР

1. а) Екі айнымалысы бар теңдеу дегеніміз не? ә) Екі айнымалысы бар теңдеудің шешімі деп нені атайды?

2. Екі айнымалысы бар теңдеудің графигі деп нені атайды? Графигі: а) түзу; ә) гипербола; б) шеңбер; в) парабола болатын екі айнымалысы бар теңдеуге мысал келтіріңдер.

3. Екі айнымалысы бар теңдеуді шешу дегеніміз не?

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

53. Мына теңдеулердің қайсысы екі айнымалысы бар сызықтық теңдеу болады?

а) $xy = 12$; б) $\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = 4$; г) $\sqrt{2} \cdot x - \sqrt{3} \cdot y = 0$;

ә) $x + y = \sqrt{6}$; в) $(x - 2)(y + 3) = 0$; ғ) $\frac{x^2 - y^2}{x - y} = \frac{4}{9}$?

54. Сандар жұбының: $\left(0; 1\frac{2}{3}\right)$, $(2; 4)$, $(1; 1)$, $(1; 2)$, $\left(\frac{5}{8}; 0\right)$, $(3; 6)$ қайсысы $8x - 3y = 5$ теңдеуінің шешімі болады?

55. $2x - 5y = 16$ теңдеуінің шешімі болатын және: а) бүтін; ә) натурал; б) иррационал сандар жиынына тиісті $(x; y)$ сандарының екі жұбын табыңдар.

56. № 53 жаттығудағы сызықтық емес әрбір теңдеу үшін оның шешімі болатын $(x; y)$ сандар жұбын көрсетіңдер.

57. $x(x - 1) - 2xy = 42$ теңдеуінің шешімі: а) $(x; 4)$; ә) $(x; 5)$ сандар жұбы болатындай x-тің бүтін мәні бар бола ма, соны зерттеңдер.

58. Тікбұрышты үшбұрыштың катеттерінің бірі $\sqrt{2}$ дм-ге тең. Осы үшбұрыштың белгісіз қабырғаларын табуға екі айнымалысы бар теңдеу құрыңдар. Оның гипотенузасы мен екінші катеті сәйкесінше: а) 1,5 дм және 0,5 дм; ә) 3 дм және $\sqrt{7}$ дм бола ала ма, соны зерттеңдер.

59. Өзінің цифрларының қосындысынан 3 есе артық болатын екітаңбалы санды табыңдар. Барлық мүмкін болатын жағдайларды зерттеңдер.

60. Қабырғаларының ұзындықтары бүтін сан метрмен берілген тіктөртбұрыштың ауданы 16 $м^2$-ге тең. Оның ең кіші периметрін табыңдар.

61. Теңдеудің графигін салыңдар:

а) $x^2 + y = 5$; б) $2y + 3x = 1$;

ә) $xy = 15$; в) $x^2 + y^2 = 25$.

62. а) $x^2 + y^2 - (xy)^2 = 1$; ә) $(x - y\sqrt{2})(x + y\sqrt{2}) = 1$; б) $m^n = n^m$ теңдеуінің шешімі болатындай қандай да бір натурал сандар жұбын табыңдар.

63. Мына арақатынасты қанағаттандыратын барлық $(x; y)$ сандар жұбын табыңдар:

а) $4x^2 - 81y^2 = 0$; б) $xy + 20 = 5x + 4y$;

ә) $x^2 + 2xy + y^2 = 0$; в) $x\sqrt{y} - 3 = x - 3\sqrt{y}$.

64. Екітаңбалы санды оның цифрларының қосындысына бөлгенде бөліндісі 3-ке, ал қалдығы 7-ге тең болатын екітаңбалы сан бар бола ма, соны зерттеңдер.

65. а) $3mn - 7 = 3n - 2m$; ә) $2mn - 4 = m + 2n$ теңдеуінің барлық мүмкін болатын жағдайларын қарастырып, натурал сан болатын шешімдерін табыңдар.

66. Цифрларының көбейтіндісі: а) олардың қосындысына тең; ә) қосындысынан 4 есе артық болатын екітаңбалы натурал сандар бола ма?

67. Қандай екі натурал санның квадраттарының айырымы 133-ке тең (Ерекше қабілетті француз есептеушісі Анри Монденің 1840 жылы мектеп жасында ауызша шығарған есебі)?

В деңгейі

68. $x^2 - y^2 = 72$ теңдеуінің шешімдерінің бірі – $(m; n)$ сандар жұбы, мұндағы m толығымен Қазақстан аумағында орналасқан, әрқайсысының ауданы 700 км^2-ден артық болатын ең үлкен көлдердің санына, ал n ұзындығы 800 км-ден кем емес, Қазақстан аумағынан ағып өтетін ең ұзын өзендердің санына тең. Егер $12 < m + n < 20$ екені белгілі болса, сол сандарды табыңдар.

Қазақстанның су жүйесі

69. $(x; y)$ координаталары мына арақатынасты қанағаттандыратын нүктелер жиынын координаталар жазықтығында бейнелеңдер:

а) $|y - x| = 2$; б) $|x| + |y| = 2$; г) $|y| = x^2 - 4x + 3$;
ә) $|y| - |x| = 2$; в) $|y| = 4 - x^2$; ғ) $y^2 = 2x$.

70. Массасы m тонна жүкті x мәшинеден тұратын көліктер легі тасыды. Олардың әрқайсысы y рейс, содан кейін 7-уі тағы 12 рейс жасады. Егер осы мәшинелердің әрқайсысы $(y + 6)$ рейстен жасағанда, жүктің жартысын тасуға 7-ге кем мәшине керек болар еді. Көліктер легінде неше мәшине болған?

71. Координаталар жазықтығына (x; y) координаталары төмендегі теңдеудің шешімі болатын барлық нүктелер жиынын салыңдар:

а) $(x^2-16)^2+(y^2-25)^2=0$; б) $x^3-y^3+x^2y-xy^2=0$;

ә) $x^2-2x+y^2-8=0$; в) $2x^3-2x^2y+y^2-xy=0$.

72. Егер $x\in R$ және $y\in R$ болса, x пен y-тің қандай мәндерінде теңдіктің ақиқат болатынын зерттеңдер:

а) $x^2+6x+y^2-10y+34=0$; б) $y^2-6y+9+x-4\sqrt{x}+4=0$;

ә) $x^2+5y^2+4xy+2y+1=0$; в) $x^2+2\sqrt{2}x+y-2\sqrt{y}+3=0$.

73. Теңдеудің натурал сан болатын шешімдерін табыңдар:

а) $3n-2=2mn-3m$; ә) $2mn-4=m+3n$.

74. Егер тіктөртбұрыштың ауданы (м^2) оның периметрі тең болатын бүтін санмен өрнектелетін болса, оның қабырғаларының ұзындықтары (м) қандай болуы мүмкін екенін зерттеңдер.

С деңгейі

75. $x^2-3xy+2y^2+6=0$ теңдеуінің шешімі болатын (x; y)-тің натурал сан болатын екі жұбын табыңдар.

76. Моторлы қайық ағысқа қарсы жүзіп келе жатып, салмен кездесті. Содан кейін қайық ағысқа қарсы тағы 3 минут жүзді де, кері бұрылып, салды бірінші кездескен жерден 102 м қашықтықта қуып жетті.

а) Өзен ағысының жылдамдығы қандай?

ә) Қайықтың меншікті жылдамдығы қандай болуы мүмкін екендігін зерттеңдер.

77. а) 2018 санын екі натурал санның квадраттарының айырымы түрінде көрсетуге бола ма?

ә) Бір тонна астықты сақтауға арналған сыйымдылығы 60 кг және 50 кг екі түрлі қап бар. Осы қаптардың барлығын толтыру үшін олардың әр түрінен ең аз дегенде неше қап керек?

78. Координаталар жазықтығына (x; y) координаталары төмендегі теңдеудің шешімдері болатын барлық нүктелер жиынын салыңдар.

а) $(x-y)^2=2x+2y-x^2-y^2-2$; б) $2x^2+5xy-12y^2=0$;

ә) $\dfrac{x^2-y^2}{x-y}=\dfrac{x^2+y^2}{x+y}$; в) $x^2+y^2=6|y|+16$.

2. Екі айнымалысы бар сызықтық емес теңдеулер жүйелері

Тақырыпты оқу барысында:

• екі айнымалысы бар сызықтық емес теңдеулер жүйесі ұғымын білетін боласыңдар;
• екі айнымалысы бар сызықтық емес теңдеулер жүйесінің шешімі деп нені атайтынын білесіңдер;
• екі айнымалысы бар сызықтық емес теңдеулер жүйелерін алмастыру, алгебралық қосу, графиктік тәсілдермен шешуді үйренесіңдер.

Екі айнымалысы бар теңдеулер жүйесі ұғымы 7–8-сыныптардағы алгебра курсынан белгілі. Онда екі айнымалысы бар екі сызықтық теңдеулер жүйесі қарастырылған болатын, яғни $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ теңдеулер жүйесі, мұндағы x, y – айнымалылар, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 – қайсыбір нақты сандар. Сондай-ақ мұндай жүйелерді шешу тәсілдерін де білесіңдер: алмастыру тәсілі, алгебралық қосу тәсілі, графиктік тәсіл. Бұл тәсілдер екі айнымалысы *бар сызықтық емес теңдеулер жүйелерін*, яғни кемінде біреуі сызықтық емес теңдеулер жүйелерін шешудің де негізгі тәсілдері болады.

Екі айнымалысы бар теңдеулер *жүйесінің шешімі* деп әрбір теңдеуді ақиқат сандық теңдікке айналдыратын айнымалылардың реттелген мәндерінің жұбын айтады. *Теңдеулер жүйесін шешу* оның барлық шешімдерін табу немесе шешімі жоқ екенін анықтау дегенді білдіреді. Егер екі теңдеулер жүйесінің барлық шешімдері бірдей немесе шешімдері жоқ болса, онда олар *мәндес теңдеулер жүйелері* деп аталады.

Екі айнымалысы бар сызықтық емес теңдеулер жүйелерін шешудің мысалдарын қарастырайық.

1 - м ы с а л. $\begin{cases} x - y = 5, \\ x^2 - 2x + y - 7 = 0 \end{cases}$ теңдеулер жүйесін шешу керек.

Ш е ш у і. Жүйенің бірінші теңдеуінен y-ті x арқылы өрнектейміз де, екінші теңдеуіне қойып, мынаны аламыз: $\begin{cases} y = x - 5, \\ x^2 - 2x + x - 5 - 7 = 0. \end{cases}$

Екінші теңдеуді шешейік: $x^2 - x - 12 = 0$. Виет теоремасына кері теорема бойынша: $x_1 = -3$, $x_2 = 4$. Сонда $y_1 = -3 - 5 = -8$, $y_2 = 4 - 5 = -1$ болады.

Ж а у а б ы. $(-3; -8)$, $(4; -1)$.

Бір теңдеуі сызықтық, ал екіншісі сызықтық емес теңдеулер жүйесінің кез келгенін алмастыру тәсілімен шешуге болатынын айта кетелік.

2 - м ы с а л. $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 19, \\ x^2 - xy + y^2 = 7 \end{cases}$ теңдеулер жүйесін шешу керек.

Ш е ш у і. Жүйе теңдеулерінің сол және оң жақтарын мүшелеп азайтып және қосып, бастапқы жүйеге мәндес $\begin{cases} 2xy = 12, \\ 2x^2 + 2y^2 = 26 \end{cases}$ теңдеулер жүйесін аламыз. Бұдан $\begin{cases} xy = 6, \\ x^2 + y^2 = 13, \end{cases}$ $\begin{cases} y = \dfrac{6}{x}, \\ x^2 + \dfrac{36}{x^2} = 13. \end{cases}$ Жүйенің екінші теңдеуін шешейік: $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$. Теңдеуді x^2-қа қатысты квадрат теңдеу деп қарастырып, Виет теоремасына кері теорема бойынша $x^2 = 4$ немесе $x^2 = 9$ аламыз. Бұдан $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, $x_3 = -3$, $x_4 = 3$ шығады. Сонда $y_1 = -3$, $y_2 = 3$, $y_3 = -2$, $y_4 = 2$ болады.

Ж а у а б ы. $(-2; -3)$, $(2; 3)$, $(-3; -2)$, $(3; 2)$.

Бастапқы жүйенің бір айнымалысын екінші айнымалысымен алмастырғанда жүйенің өзгермейтінін аңғаруға болады, себебі оның теңдеулерінің сол жақтары – симметриялы көпмүшелер. Мұндай теңдеулер жүйелерін қарастырғанда, егер жүйенің шешімдерінің біреуі $(a; b)$ сандар жұбы болса, онда $(b; a)$ жұбы да оның шешімі болатынын ескерген жөн. Жалпы, екі айнымалысы бар симметриялы теңдеулер жүйелерін, $xy = p$, $x + y = t$ алмастыруын пайдаланып шешуге болады.

3 - м ы с а л. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x^3 + y^3 = 8 \end{cases}$ теңдеулер жүйесін шешу керек.

Ш е ш у і. Бұл жүйені былай түрлендірейік:

$$\begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = 4, \\ (x+y)(x^2+y^2-xy) = 8; \end{cases} \begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = 4, \\ (x+y)((x+y)^2 - 3xy) = 8. \end{cases} \quad x+y=t, xy=p$$

деп белгілеп, мынаны аламыз: $\begin{cases} t^2 - 2p = 4, \\ t(t^2 - 3p) = 8; \end{cases} \begin{cases} p = \dfrac{t^2-4}{2}, \\ t^3 - 3t \cdot \dfrac{t^2-4}{2} = 8. \end{cases}$

Жүйенің екінші теңдеуін шешейік: $2t^3 - 3t^3 + 12t - 16 = 0,$

$$t^3 - 12t + 16 = 0,$$

$$t^3 - 4t - 8t + 16 = 0,$$

$$t(t^2 - 4) - 8(t-2) = 0,$$

$$(t-2)(t^2 + 2t - 8) = 0,$$

$$t - 2 = 0 \text{ немесе } t^2 + 2t - 8 = 0,$$

$$t = 2 \text{ немесе } t_1 = -4,\ t_2 = 2. \text{ Сонда } p_1 = \frac{16-4}{2} = 6,\ p_2 = 0.$$

Сонымен, бастапқы жүйе келесі екі теңдеулер жүйесінің жиынтығына келтіріледі: $\begin{cases} x + y = -4, \\ xy = 6 \end{cases}$ немесе $\begin{cases} x + y = 2, \\ xy = 0; \end{cases}$

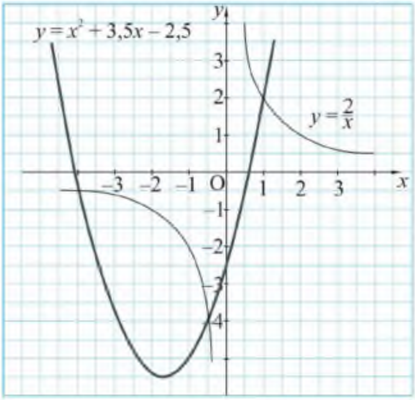
$$\begin{cases} y = -x - 4, \\ x(-x-4) = 6 \end{cases} \text{ немесе } \begin{cases} y = -x + 2, \\ x(-x+2) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -x - 4, \\ x^2 + 4x + 6 = 0 \end{cases} \text{ немесе } \begin{cases} y = -x + 2, \\ x(-x+2) = 0. \end{cases}$$

$x^2 + 4x + 6 = 0$ квадрат теңдеуінің түбірлері жоқ, себебі дискриминанты теріс сан, демек, бірінші жүйенің шешімі жоқ. Екінші жүйенің шешімдері (0; 2) және (2; 0) сандар жұбы болады.

Ж а у а б ы. (0; 2) және (2; 0).

4 - м ы с а л. $\begin{cases} xy = 2, \\ 2x^2 + 7x - 2y - 5 = 0 \end{cases}$ теңдеулер жүйесін графиктік тәсілмен шешу керек.



11-сурет

Ш е ш у і. $\begin{cases} y = \dfrac{2}{x}, \\ y = x^2 + 3,5x - 2,5 \end{cases}$ жүйесін аламыз. Бірінші теңдеудің графигі – гипербола, ал екіншінікі – парабола. Осы графиктерді салып, олардың қиылысу нүктелерінің координаталарын табамыз (11-сурет).

Графиктердің қиылысу нүктелерінің координаталары: (–4; –0,5), (–0,5; –4), (1; 2).

Ж а у а б ы. (–4; –0,5), (–0,5; –4), (1; 2).

5 - м ы с а л . $\begin{cases} x^2 - 4xy + 3y^2 = 0, \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$ теңдеулер жүйесін шешу керек.

Ш е ш у і. $x = y = 0$ берілген жүйенің шешімі болмайтындықтан, оның бірінші теңдеуінің екі жағын y^2-қа бөліп, $\frac{x}{y}$-ке қатысты квадрат теңдеу аламыз: $\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 4 \cdot \frac{x}{y} + 3 = 0$. $\frac{x}{y} = t$ деп белгілеп, $t^2 - 4t + 3 = 0$ теңдеуін шешеміз. Виет теоремасына кері теорема бойынша, $t_1 = 3$, $t_2 = 1$ болады. Сонымен, бастапқы теңдеулер жүйесі келесі екі теңдеулер жүйесі жиынтығымен мәндес болады:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = 3, \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases} \text{ немесе } \begin{cases} \dfrac{x}{y} = 1, \\ x^2 + y^2 = 10. \end{cases}$$

Бұдан:

$$\begin{cases} x = 3y, \\ 9y^2 + y^2 = 10 \end{cases} \text{ немесе } \begin{cases} x = y, \\ 2y^2 = 10; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y, \\ y^2 = 1 \end{cases} \text{ немесе } \begin{cases} x = y, \\ y^2 = 5. \end{cases}$$

Сонымен, бұл теңдеулер жүйесі жиынтығының шешімі (3; 1), (–3; –1), ($\sqrt{5}$; $\sqrt{5}$), ($-\sqrt{5}$; $-\sqrt{5}$) сандар жұбы болады.

Ж а у а б ы. ($-\sqrt{5}$; $-\sqrt{5}$), (–3; –1), (3; 1), ($\sqrt{5}$; $\sqrt{5}$).

СҰРАҚТАР

1. Екі айнымалысы бар теңдеулер жүйелерінің қайсысы сызықтық емес жүйе болады?

2. Біреуі сызықтық, ал басқасы екінші дәрежелі теңдеу болатын екі айнымалысы бар теңдеулер жүйесін қалай шешуге болады?

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

79. а) (2; 2); ә) (3; 1) сандар жұбы $\begin{cases} x+y=4, \\ x^2-y^2=8 \end{cases}$ теңдеулер жүйесінің шешімі бола ма?

80. Теңдеулер жүйесін алмастыру тәсілімен шешіңдер:

а) $\begin{cases} x+y=2, \\ x^2-y^2=100; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y-3x=0, \\ x^2+y^2=40; \end{cases}$

ә) $\begin{cases} x+y=-5, \\ x^2-y^2=5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x+y=0, \\ xy=2. \end{cases}$

81. Теңдеулер жүйесін қосу тәсілін пайдаланып шешіңдер:

а) $\begin{cases} x^2-y^2=8, \\ x^2+y^2=10; \end{cases}$ ә) $\begin{cases} x^2+y^2=29, \\ x^2-y^2=21. \end{cases}$

82. а) Екі санның қосындысы 38-ге тең, ал үлкен санның $\frac{3}{4}$-і кішісінің $\frac{5}{6}$-ін құрайды. Осы сандарды табыңдар.

ә) Айырымы 7-ге, ал көбейтіндісі 8-ге тең болатын екі сан бар бола ма, соны зерттеңдер.

83. Теңдеулер жүйесін графиктік тәсілмен шешіңдер:

а) $\begin{cases} x+y=3, \\ x^2+y^2=9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y=(x-1)^2+2, \\ xy=2; \end{cases}$

ә) $\begin{cases} y-x=1, \\ y=-(x-1)^2+4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ xy=12. \end{cases}$

84. Кеменің өзен ағысымен жүзгендегі жылдамдығы 38,5 км/сағ, ал ағысқа қарсы – 32,5 км/сағ. Өзен ағысының жылдамдығы мен кеменің меншікті жылдамдығын табыңдар.

85. а) Тікбұрышты үшбұрыштың ауданы 60 см^2-ге, ал катеттері ұзындықтарының айырымы 7 см-ге тең. Үшбұрыштың периметрін табыңдар.

ә) Гипотенузасы 13 см-ге, ал ауданы 30 см^2-ге тең болатын тікбұрышты үшбұрыштың периметрін табыңдар.

86. Теңдеулер жүйелері мәндес пе:

а) $\begin{cases} 3x-2y=0, \\ 4x^2+3y=9 \end{cases}$ және $\begin{cases} 3xy=2y^2, \\ 4x^2+3y=9; \end{cases}$

ә) $\begin{cases} x^2+y^2=10, \\ xy=3 \end{cases}$ және $\begin{cases} (x+y)^2=16, \\ xy=3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2+y^2=5, \\ xy=2 \end{cases}$ және $\begin{cases} (x-y)^2=1, \\ xy=2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 5xy=4x-1, \\ 2x-y=3 \end{cases}$ және $\begin{cases} 5xy=4x-1, \\ (y-2x)^2=9? \end{cases}$

87. Алмастыру тәсілін пайдаланып, теңдеулер жүйесінің шешімі болатын барлық $(m; n)$ сандар жұбын табыңдар:

а) $\begin{cases} m+n=-50, \\ mn=96; \end{cases}$ б) $\begin{cases} m^2+mn+n^2=13, \\ m+n=4; \end{cases}$

ә) $\begin{cases} m^2-n^2=5, \\ mn=6; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3m-n=0, \\ m^2+n^2+2n=9. \end{cases}$

88. Егер $\begin{cases} x+y=8, \\ x^2+y^2=34 \end{cases}$ шарты орындалса, онда $x^5+y^5=3368$ болатынын дәлелдеңдер.

89. Егер $(x; y)$ сандар жұбы $\begin{cases} 3x-y+8=0, \\ x^2-y=100 \end{cases}$ теңдеулер жүйесінің шешімі болса, Қазақстанның орман қоры қанша (x) миллион гектарды құрайтынын және әлем елдері арасында алып жатқан ауданы бойынша нешінші (y) орын алатынын табыңдар.

90. Қатынасы 3-ке, ал квадраттары қосындысының сол сандардың қосындысына қатынасы 5-ке тең болатын екі натурал санды табыңдар (Диофанттың ежелгі грек есебі).

B деңгейі

91. Теңдеулер жүйесін қосу тәсілімен шешіңдер:

а) $\begin{cases} \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{11}{6}, \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{4}{y} = -\dfrac{5}{6}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + xy = -10, \\ \dfrac{5x}{y} - 2xy = 13; \end{cases}$

ә) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 82, \\ xy = -9; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x^2 + 2xy - y^2 = 4, \\ x^2 - 2xy - 3y^2 = -4. \end{cases}$

92. Теңдеулер жүйесін жаңа айнымалылар енгізу арқылы шешіңдер:

а) $\begin{cases} xy - \dfrac{x}{y} = 6, \\ 3xy + \dfrac{2x}{y} = 28; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x+y)^2 - 6(x+y) + 5 = 0, \\ (x-y)^2 - 2(x-y) - 3 = 0. \end{cases}$

ә) $\begin{cases} \dfrac{3}{x} - \dfrac{2}{y} = 13, \\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{7}{y} = -8; \end{cases}$

93. Теңдеулер жүйесін графиктік тәсілмен шешіңдер:

а) $\begin{cases} y - x^2 = 2, \\ xy = -3; \end{cases}$ ә) $\begin{cases} x^2 + 2x + y = -1, \\ x + y + 5 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy = 2, \\ y = -0{,}4x^2 + 2{,}4. \end{cases}$

94. Теңдеулер жүйесінің шешімі болатын барлық $(x; y)$ сандар жұбын табыңдар:

а) $\begin{cases} x + y = 2a, \\ xy = -3a^2, \end{cases}$ мұндағы $a \in R$; б) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0, \\ x^2 - xy + y^2 = 3; \end{cases}$

ә) $\begin{cases} x + y = a, \\ y^2 + 2x = a^2, \end{cases}$ мұндағы $a \in R$; в) $\begin{cases} y^2 = (2x+1)^2, \\ 4x^2 + y^2 - 3xy = 1. \end{cases}$

95. Қосындысы, көбейтіндісі және квадраттарының айырымы өзара тең болатын әртүрлі екі сан бар бола ма?

96. Зерттеу жүргізіп, теңдеулер жүйесінің шешімі болатын бүтін сандардың барлық $(m;\ n)$ жұптарын табыңдар:

а) $\begin{cases} m^2 + mn + n^2 = 13, \\ m^2 - mn + n^2 = 7; \end{cases}$ ә) $\begin{cases} m^2 + n = 3, \\ m + n^2 = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} m + n^2 = 37, \\ m^2 + n = 7. \end{cases}$

97. Ағасында x алмұрт, ал қарындасында y^2 алма бар. Оларда барлығы 11 жеміс болды. Егер ағасында y алмұрт, ал қарындасында x^2 алма болса, онда екеуінде барлығы 7 жеміс болар еді. Ағасында қанша алмұрт, қарындасында қанша алма болды?

С деңгейі

98. Симметриялы теңдеулер жүйесін шешіңдер:

а) $\begin{cases} x + xy + y = 5, \\ x^2 + xy + y^2 = 7; \end{cases}$ ә) $\begin{cases} x + xy + y = 4, \\ x^2 + xy + y^2 = 8. \end{cases}$

99. Теңдеулер жүйесін шешіңдер:

а) $\begin{cases} (x + 5y)(x - y) = 7, \\ (x + 5y)(x + y) = 21; \end{cases}$ ә) $\begin{cases} xy(x + y) = 48, \\ xy(x - y) = 16. \end{cases}$

100. Теңдеулерінің біреуі біртекті теңдеу болатын, яғни оның сол жағы – барлық мүшесінің дәрежелері бірдей көпмүше, ал оң жағы 0-ге тең болатын $\begin{cases} x^2 - xy - 6y^2 = 0, \\ x^2 - 5xy + 2y^2 = -4 \end{cases}$ теңдеулер жүйесін қалай шешуге болады?

101. Теңдеулер жүйесін шешіңдер:

а) $\begin{cases} x^2 - 5xy + 4y^2 = 0, \\ x^2 - 7y^2 = 4; \end{cases}$ ә) $\begin{cases} x^2 + 2y^2 + 3xy = 0, \\ x^2 - 5y^2 = -4. \end{cases}$

102. Теңдеулер жүйесін графиктік тәсілмен шешіңдер:

а) $\begin{cases} \dfrac{x^3 + 8 - xy - 2y + 4x^2 + 8x}{x + 2} = 4, \\ y - x = 2; \end{cases}$ ә) $\begin{cases} y = \left|\dfrac{6}{x}\right|, \\ y = |x^2 - 1|. \end{cases}$

3. Мәтінді есептерді екі айнымалысы бар сызықтық емес теңдеулер жүйесі арқылы шығару

Тақырыпты оқу барысында:

• есептің шарты бойынша оның математикалық моделін – екі айнымалысы бар сызықтық емес теңдеулер жүйесін құруды;

• есептің шарты бойынша екі айнымалысы бар сызықтық емес теңдеулер жүйесінің шешімін тауып, оның есептің шартына сәйкестігін анықтауды үйренесіңдер.

Теңдеулер жүйесін пайдаланып, мәтінді есептерді шығару былай орындалатынын еске салайық:

1) Есепте қандай нысандар немесе шамалар туралы сөз болғанын, олардың қайсылары белгілі, қайсылары белгісіз екенін анықтап, белгісіздердің екеуін x және y деп белгілейміз.

2) Есептің шартын және белгілілер мен белгісіздердің арасындағы байланысты пайдалана отырып, есептің алгебралық моделін – екі айнымалысы бар екі теңдеудің жүйесін құрамыз.

3) Шыққан теңдеулер жүйесін шешеміз.

4) Есептің шартына сәйкес келетін шешімін тауып, жауабын жазамыз.

1 - е с е п. Екі бригадаға астық қамбасына 60 тоннадан бидай қабылдау тапсырылған еді. Бірінші бригада екіншіге қарағанда сағатына 3 тонна бидай артық қабылдап, тапсырманы 1 сағатқа ерте орындады. Бірінші бригада сағатына неше тонна бидай қабылдады және тапсырманы неше сағатта орындады?

Ш е ш у і. Бірінші бригада сағатына x тонна бидай қабылдап, тапсырманы t сағатта орындаған болсын. Сонда екінші бригада сағатына $(x-3)$ тонна бидай қабылдап, $(t+1)$ сағат жұмыс істеген. Есептің шарты бойынша теңдеулер жүйесін құрамыз: $\begin{cases} xt = 60, \\ (x-3)(t+1) = 60. \end{cases}$ Осы теңдеулер жүйесін шешейік: $\begin{cases} t = \dfrac{60}{x}, \\ (x-3)\left(\dfrac{60}{x}+1\right) = 60; \end{cases}$ $60 + x - \dfrac{180}{x} - 3 =$

$= 60$; $x^2 - 3x - 180 = 0$; $x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 180}}{2} = \dfrac{3 \pm 27}{2}$; $x_1 = 15, x_2 = -12$ (x_2 есептің шартын қанағаттандырмайды). Сонда $t = \dfrac{60}{15} = 4$ (сағат).

Ж а у а б ы. 15 т; 4 сағ.

2 - е с е п. Екітаңбалы санды оның цифрларының көбейтіндісіне бөлгенде бөлінді 1-ге, ал қалдығы 16-ға тең болады. Егер оның цифрлары айырымының квадратына цифрларының көбейтіндісін қосса, тағы сондай сан шығады. Ол қандай сан?

Ш е ш у і. *I тәсіл.* Белгісіз екітаңбалы сан $\overline{ab} = 10a + b$ болсын, мұндағы a – ондықтар цифры, b – бірліктер цифры. Есептің бірінші шартынан мынаны аламыз: $10a + b = ab + 16$, ал екіншісінен – $10a + b = (a - b)^2 + ab$. Теңдеулер жүйесін шешейік: $\begin{cases} 10a + b = ab + 16, \\ 10a + b = (a - b)^2 + ab; \end{cases}$

бұдан $(a - b)^2 + ab = ab + 16$, $(a - b)^2 = 16$, $a - b = -4$ немесе $a - b = 4$. Сонда $a = b - 4$ немесе $a = b + 4$. Демек,

$10(b - 4) + b = (b - 4)b + 16$ немесе $10(b + 4) + b = (b + 4)b + 16$;

$b^2 - 15b + 56 = 0$ немесе $b^2 - 7b - 24 = 0$;

$b_{1,2} = \dfrac{15 \pm \sqrt{225 - 224}}{2} = \dfrac{15 \pm 1}{2}$ немесе $b_{3,4} = \dfrac{7 \pm \sqrt{49 + 96}}{2} = \dfrac{7 \pm \sqrt{145}}{2}$ – есептің шартын қанағаттандырмайды, себебі $b \in N$. $b_1 = 7$, $b_2 = 8$ болады, сонда $a_1 = 3$, $a_2 = 4$.

Ж а у а б ы. 37 немесе 48.

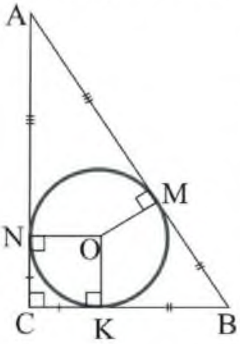
II тәсіл. $\overline{ab}$ ізделінді сан болсын. Есептің шарты бойынша

$$\begin{cases} 10a + b = ab + 16, \\ 10a + b = (a - b)^2 + ab. \end{cases}$$

Бірінші теңдеуді натурал сандар арқылы шешіп, олардың қайсысы екінші теңдеудің де шешімі болатынын тексереміз: $10a - ab = 16 - b$, $a(10 - b) = 16 - b$, $a = \dfrac{16 - b}{10 - b} = \dfrac{10 - b + 6}{10 - b} = 1 + \dfrac{6}{10 - b}$, мұндағы $a \in N$ және $b \in N$. Бұл шартты тек: $b_1 = 4, a_1 = 2$; $b_2 = 7, a_2 = 3$; $b_3 = 8, a_3 = 4$; $b_4 = 9, a_4 = 7$ сандар жұбы қанағаттандырады, сәйкесінше, екітаңбалы сандар: 24; 37; 48; 79 болады. Олардың ішінен $10a + b = (a - b)^2 + ab$

шартын тек 37 мен 48 қанағаттандырады, себебі $37 = (3 - 7)^2 + 21$, $48 = (4 - 8)^2 + 32$, ал $24 \neq (2 - 4)^2 + 8$, $79 \neq (7 - 9)^2 + 63$.

Ж а у а б ы. 37 немесе 48.



12-сурет

3 - е с е п. Егер тікбұрышты үшбұрыштың бір катеті a-ға, ал оған іштей сызылған шеңбердің радиусы r-ге тең болса, оның екінші катетін табу керек. a мен r-дің арасындағы қатынас қандай болғанда есептің шешімі болатынын зерттеу керек.

Ш е ш у і. Ізделінді катет $AC = b$, $AB = c$, $BC = a$, $OM = OK = ON = r$ болсын (12-сурет). $AM = AN$, $BM = BK$, $CN = CK = r$ болғандықтан, $c = (a - r) + (b - r)$, $c - b = a - 2r$ болады. Сонда:

$$\begin{cases} c - b = a - 2r, \\ c^2 - b^2 = a^2; \end{cases} \quad \begin{cases} c - b = a - 2r, \\ (c - b)(c + b) = a^2; \end{cases} \quad \begin{cases} c - b = a - 2r, \\ c + b = \dfrac{a^2}{a - 2r}. \end{cases}$$

Бұдан $2b = \dfrac{a^2}{a - 2r} - (a - 2r)$, яғни $b = \dfrac{a^2 - (a - 2r)^2}{2(a - 2r)} = \dfrac{4ar - 4r^2}{2(a - 2r)} = \dfrac{2r(a - r)}{a - 2r}$, мұндағы $a > 2r$.

Ж а у а б ы. $\dfrac{2r(a - r)}{a - 2r}$, мұндағы $a > 2r$.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

103. Қайсыбір жай бөлшектің алымына 2-ні, ал бөліміне 3-ті қосқанда бөлшектің өзгермейтіні белгілі. Ал егер бөлшектің бөліміне 6-ны, алымына 1-ді қосса, онда бөлшек $\frac{1}{3}$-ге кемиді. Осы бөлшекті табыңдар.

104. а) Тіктөртбұрыштың диагоналі 17 см-ге, ал оның периметрі 46 см-ге тең. Осы тіктөртбұрыштың қабырғаларын табыңдар.

ә) Диагональдары өзара перпендикуляр төртбұрыштың ауданы 36 см^2-ге тең. Егер диагональдарының қатынасы $\frac{4}{9}$ болса, олардың ұзындықтарын табыңдар.

105. а) 300 км қашықтықты жолаушылар пойызы жүк пойызынан 1 сағатқа тезірек өтеді. 1,5 сағатта жолаушылар пойызы жүк пойызынан 22,5 км артық жүреді. Әр пойыздың жылдамдығын табыңдар.

ә) А және В қалаларынан бір мезгілде бір-біріне қарама-қарсы бағытта жолаушылар пойызы мен жүк пойызы шықты. Тұрақты жылдамдықпен тоқтаусыз жүріп отырып, жолаушылар пойызы В қаласына 4 сағатта, ал жүк пойызы А қаласына 6 сағатта жетті. Егер пойыздар кездескеннен кейін 2 сағаттан соң олардың арақашықтығы 320 км болса, пойыздардың жылдамдығын табыңдар.

106. Ағыспен 15 км, ағысқа қарсы 18 км қашықтықты катер 1 сағат 45 минутта жүзіп өтті. Егер катер 15 минутта ағыспен 5 км жүзіп өтетін болса, оның меншікті жылдамдығын және өзен ағысының жылдамдығын табыңдар.

107. Әкесі мен баласы белгілі бір жұмысты 1,2 сағатта орындайды. Егер баласы осы жұмыстың жартысын орындаса, ал әкесі оны бітірсе, онда 2,5 сағ қажет болар еді. Осы жұмысты әрқайсысы жеке орындаса, неше сағатта бітірер еді?

108. а) Цифрларының айырымы 2-ге, ал олардың квадраттарының қосындысы 52-ге тең болатын екітаңбалы сан бола ма, соны зерттеңдер.

ә) Егер екітаңбалы санға оның цифрларының екі еселенген қосындысын қосса, 96 шығады. Егер сол санды цифрларының қосындысына көбейтсе, онда 952 шығады. Екітаңбалы санды табыңдар.

109. Жай бөлшектің бөлімі мен алымының квадраттарының айырымы 55-ке тең. Оның алымын 2 есе, бөлімін 1,5 есе арттырғанда бөлшек $\frac{1}{8}$-ге артады. Осы бөлшекті табыңдар.

110. а) Екі шаршының аудандарының қосындысы 25 дм^2-ге, ал қабырғаларының көбейтіндісі 12 дм^2-ге тең болса, сол қабырғаларды;

ә) егер тікбұрышты үшбұрыштың 13 см-ге тең гипотенузасы оның әрбір катетін 3 см-ге ұзартқанда 4 см-ге ұзаратын болса, үшбұрыштың ауданын табыңдар.

В деңгейі

111. а) Ауданы 80 $см^2$-ге, ал диагональдарының қатынасы 0,8-ге тең болатын ромбтың қабырғасын; ә) периметрі 2 дм-ге, ал диагональдарының қатынасы 3 : 4 болатын ромбтың ауданын табыңдар.

112. Гипотенузасы 13 см-ге, ал іштей сызылған шеңберінің радиусы 2 см-ге тең болатын тікбұрышты үшбұрыштың катеттерін табыңдар.

113. Екі кубтың қырлары ұзындықтарының айырымы 3 дм-ге, ал олардың көлемдерінің айырымы 117 $дм^3$-ге тең. Осы кубтардың қабырғаларының ұзындықтарын табыңдар.

114. Арақашықтығы 40 км болатын A және B пункттерінен бір мезгілде бір-біріне қарама-қарсы бағытта екі көлік шығып, тұрақты жылдамдықпен жүріп отырды. 12 минуттан соң олардың арақашықтығы 12 км болды. Егер олардың біреуі B пунктіне екіншісінің A пунктіне жеткен уақытынан 10 минутқа ерте келген болса, көліктердің жылдамдықтарын табыңдар.

115. x г тұз бен y г судан тұратын 20 %-дық тұз ерітіндісі берілген. Егер оған 200 г су қосса, онда оның концентрациясы 10 %-ға азаяды. Бастапқы ерітіндіде қанша тұз және қанша су болған?

116. Егер екітаңбалы санның цифрларының қосындысына олардың көбейтіндісінің квадрат түбірін қосса, 14 шығады. Егер де осы қосындыдан көрсетілген түбірді азайтса, онда 6 шығады. Ол қандай сан? Барлық мүмкін болатын жағдайларды зерттеңдер.

117. Ауданы $18\sqrt{3}$ $см^2$-ге тең болатын тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасына түсірілген биіктік $3\sqrt{3}$ см-ге тең. Егер үшбұрыштың периметрі $6(3+\sqrt{3})$ см болса, оның катеттерін табыңдар.

118. а) Радиусы $4\sqrt{5}$-ке тең және $(-12; -4)$, $(4; -4)$ нүктелерінен өтетін; ә) радиусы $2\sqrt{3}$-ке тең және $(-3; -1)$, $(1; -1)$ нүктелерінен өтетін шеңбер центрінің координаталарын табыңдар.

С деңгейі

119. а) Қабырғаларының қатынасы k-ға, ауданы S-ке тең болатын тіктөртбұрыштың қабырғаларын (Көне Мысыр есебі);
ә) периметрі P-ға, ауданы S-ке тең болатын тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасын (ежелгі Қытай есебі) табыңдар.

120. Сүйреткіш өзен жағалауындағы екі айлақтың арасына (барып қайтуға) 8 сағ 40 мин жұмсайды. Меншікті жылдамдығы одан 2 есе артық катер сондай жолға сүйреткішке қарағанда 4 сағ 40 мин кем жұмсайды. Сүйреткіштің меншікті жылдамдығы өзен ағысының жылдамдығынан неше есе артық?

121. а) Екі дене қайсыбір шеңбер бойымен әртүрлі бағытта қозғала отырып, әрбір 6 секунд сайын кездеседі. Сол шеңбер бойымен сондай жылдамдықпен бір бағытта қозғала отырып, олар әрбір 30 секунд сайын кездеседі. Жылдамдығы үлкен дене осы қашықтықты неше секундта өтеді?
ә) Екі автомобиль айналма жолмен бір бағытта тұрақты жылдамдықпен қозғала отырып, 3 сағат сайын бір-бірінің жанынан өтеді. Сондай жылдамдықпен әртүрлі бағытта жүргенде олар әр 20 минут сайын кездеседі. Осы жолды әр автомобиль қанша уақытта жүріп өтеді?

122. а) Екі маман бірігіп жұмыс істегенде тапсырманы 5 күнде орындайды. Егер олардың біреуі екі есе жылдам, ал екіншісі екі есе баяу жұмыс істейтін болса, онда сол тапсырманы 4 күнде орындаған болар еді. Бірінші маман жалғыз өзі барлық тапсырманы неше күнде орындар еді? ә) Екі маман бірге жұмыс істеп, бір тапсырманы 3,6 сағатта орындап бітірді. Егер олардың біреуі екінші маманның тапсырманы жеке орындауға жұмсайтын уақытының $\frac{1}{3}$-дей уақыт жұмыс істесе, содан соң екінші маман бірінші маманның тапсырманы жеке орындауға жұмсайтын уақытының $\frac{1}{3}$-дей уақыт жұмыс істесе, онда барлық тапсырманың $\frac{13}{18}$ бөлігі орындалған болар еді. Осы тапсырманы әр маман жеке өзі неше сағатта орындап бітірер еді?

4. Екі айнымалысы бар теңсіздіктер

Тақырыпты оқу барысында:
- екі айнымалысы бар теңсіздік ұғымын білетін боласыңдар;
- екі айнымалысы бар теңсіздіктің шешімі деп нені атайтынын білетін боласыңдар;
- екі айнымалысы бар қарапайым теңсіздіктерді шешуді және теңсіздіктер арқылы мәтінді есептерді шығаруды үйренесіңдер.

Бір айнымалысы бар теңсіздіктерді, олардың түрлері мен шешу тәсілдерін сендер 7–8-сыныптарда оқыған болатынсыңдар. Енді екі айнымалысы бар теңсіздіктерді қарастыратын боламыз.

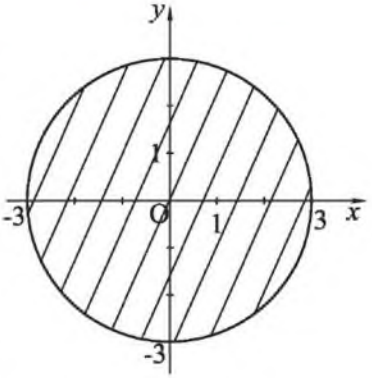
$\boldsymbol{ax + by + c < 0}$, $\boldsymbol{ax + by + c > 0}$, $\boldsymbol{ax + by + c \le 0}$, $\boldsymbol{ax + by + c \ge 0}$ түріндегі теңсіздіктер **екі айнымалысы бар сызықтық теңсіздіктер деп аталады**, мұндағы x және y – айнымалылар, a, b, c – қайсыбір нақты сандар.

Мысалы, $\boldsymbol{ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ky + p < 0}$ түріндегі теңсіздік **екі айнымалысы бар екінші дәрежелі теңсіздік деп аталады**, мұндағы x пен y – айнымалылар, a, b, c, d, k, p – нақты сандар, әрі a, b, c сандарының ең болмағанда біреуі нөлге тең емес.

Екі айнымалысы бар теңсіздіктің шешімі деп оны дұрыс санды теңсіздікке айналдыратын айнымалылардың мәндер жұбын атайды. $(-2; 1)$, $(3; 4)$ жұптары $x^2 + y^2 \le 25$ теңсіздігінің шешімі болады, себебі $(-2)^2 + 1^2 \le 25$ және $3^2 + 4^2 \le 25$ – дұрыс сандық теңсіздіктер. *Екі айнымалысы бар теңсіздікті шешу* – айнымалылар мәндерінің оны дұрыс сандық теңсіздікке айналдыратын реттелген жұптарын табу болады. Екі айнымалысы бар теңсіздіктің кез келген шешімі координаталар жазықтығында қандай да бір нүктені анықтайды. Бұл оның барлық шешімдерін координаталар жазықтығына нүктелер жиыны түрінде кескіндеуге мүмкіндік береді.

1 - м ы с а л. Координаталар жазықтығына координаталары $x^2 + y^2 \le 9$ теңсіздігінің шешімі болатын барлық нүктелерден тұратын фигураны салу керек.

Ш е ш у і. $x^2 + y^2 = 9$ теңдеуі центрі координаталар басында болатын, радиусы 3-ке тең шеңберді береді. Координаталары $x^2 + y^2 \le 9$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық нүктелер жиыны – центрі координаталар басында болатын, радиусы 3-ке тең дөңгелек (13-сурет). Осы дөңгелектің кез келген нүктесінің координаталары берілген теңсіздіктің шешімі болады.

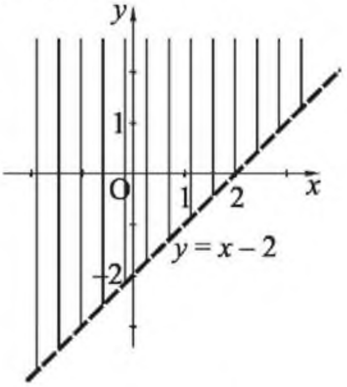


13-сурет

Суреттерде координаталары екі айнымалысы бар теңсіздіктің шешімі болатын нүктелер жиыны көбіне штрих сызықтармен немесе бояу арқылы ерекшелеп көрсетіледі.

2 - м ы с а л. $x - y - 2 < 0$ теңсіздігін шешу керек.

Ш е ш у і. $x - y - 2 = 0$, яғни $y = x - 2$ түзуін $(0; -2)$ және $(2; 0)$ нүктелері арқылы салайық. Осы түзудің әрбір нүктесі үшін $x - y - 2 = 0$ теңдігі орындалады. Демек, ол нүктелердің координаталары берілген теңсіздіктің шешімі болмайды. Сондықтан суретте бұл түзу штрихталған сызықпен бейнеленеді. Берілген теңсіздікті $y > x - 2$ түрінде жазуға болады. Бұл $y = x - 2$ түзуінен жоғары жататын барлық нүктелердің координаталары үшін дұрыс болады. Осы нүктелердің барлығының координаталар жиыны берілген теңсіздіктің шешімі болады (14-сурет).



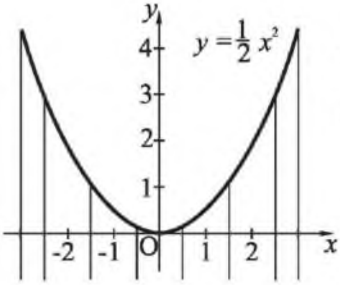
14-сурет

3 - м ы с а л. $x^2 - 2x + 1 \le 4y - y^2 - 4$ теңсіздігін шешу керек.

Ш е ш у і. Бұл теңсіздікті былай түрлендірейік: $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 \le$ ≤ 0. Екі өрнектің квадраттарының қосындысы 0-ден артық немесе 0-ге тең. Демек, берілген теңсіздік тек $x = 1$, $y = 2$ болғанда ғана орындалады.

Ж а у а б ы. $(1; 2)$.

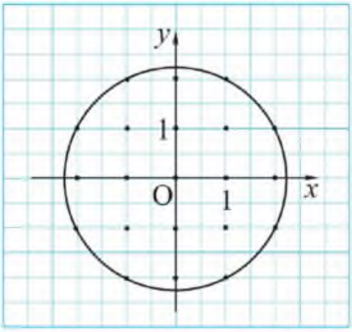
4 - м ы с а л. $\sqrt{y^2 - x^2y + \frac{1}{4}x^4} = \frac{1}{2}x^2 - y$ теңдеуін шешу керек.



15-сурет

Ш е ш у і. Теңдеудің сол жағын түрлендірейік: $\sqrt{y^2 - x^2y + \frac{1}{4}x^4} = \sqrt{\left(y - \frac{1}{2}x^2\right)^2} = |y - \frac{1}{2}x^2|$.

Сонда берілген теңдеу мына түрге келеді: $|y - \frac{1}{2}x^2| = \frac{1}{2}x^2 - y$. Бұл теңдік $y - \frac{1}{2}x^2 \le 0$, $y \le \frac{1}{2}x^2$ теңсіздігін қанағаттандыратын x пен y-тің барлық мәндерінде дұрыс болады (15-сурет). Жазықтықтың штрихталған бөлігінің кез келген нүктесінің координаталары бастапқы теңдеудің шешімі болады.



16-сурет

5 - м ы с а л. $x^2 + y^2 \le 5$ теңсіздігінің шешімі болатын барлық бүтін сандар жұбының санын анықтау керек.

Ш е ш у і. Координаталар жазықтығына бірлік кесіндіні бір тор көзге тең етіп алып, берілген теңсіздіктің шешімдер жиынын бейнелейік, ол радиусы $\sqrt{5}$-ке тең дөңгелек болады (16-сурет). $\sqrt{5}$-ке тең кесінді дөңгелек ішіндегі қабырғалары 1 мен 2-ге тең болатын кез келген тіктөртбұрыштың диагоналінің ұзындығына тең болады. Тордағы түйіндердің санын есептейміз. Ол 21-ге тең.

Ж а у а б ы. 21.

СҰРАҚТАР

1. Екі айнымалысы бар сызықтық және сызықтық емес теңсіздіктерге мысал келтіріңдер.

2. Екі айнымалысы бар теңсіздіктің шешімі деп нені атайды?

3. Екі айнымалысы бар теңсіздікті шешу дегеніміз не?

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

123. $\left(-1; \frac{2}{5}\right), \left(\frac{2}{3}; 1\right)$ сандар жұбының қайсысы $y - 3x < 1$ теңсіздігінің шешімі болады?

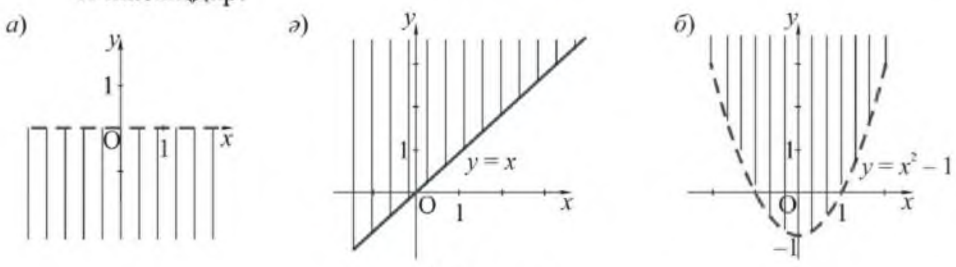
124. $(10^{-5}; 10^{6})$ сандар жұбы мына теңсіздіктердің: а) $y + x^2 \leq 5$; ә) $|y| \geq |x + 1|$ қайсысының шешімі болады?

125. а) $(x + 4)^2 + (y - 7)^2 \leq 225$; ә) $|x + y| > x^2 + y^2$ теңсіздігінің шешімі болатын қандай да бір сандар жұбын көрсетіңдер.

126. а) $y + x > 1$; ә) $y - x^2 < 7$ теңсіздігінің кез келген 15 шешімін қалай табуға болады? Сондай шешімдердің үшеуінің мысалын келтіріңдер.

127. $y < x^2 + 6x + 1$ және $y \leq x^2 + 6x + 1$ теңсіздіктерімен берілген сандар жұбының бір-бірінен айырмашылығы неде екенін зерттеп, анықтаңдар. а) $(1; 8)$; ә) $(-1; -4)$ нүктесі осы жиындардың қайсысына тиісті?

128. 17-суретте көрсетілген шешімдер жиыны бойынша теңсіздікті жазыңдар.



17-сурет

129. Теңсіздіктің шешімдерін координаталар жазықтығына кескіндеңдер:

а) $x \leq 4$; б) $x + y \geq 5$; г) $y \leq -x^2 + 4$;

ә) $y > -3$; в) $y - \frac{1}{2}x^2 > 0$; ғ) $x^2 + y^2 \geq 9$.

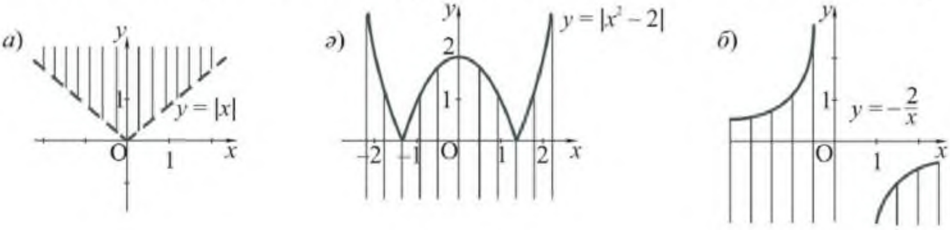
130. Барлығы неше бүтін сандар жұбы $x^2 + y^2 \leq 2$ теңсіздігінің шешімі болатынын анықтаңдар.

131. Координаталары: а) $(x-3)^2+y^2 \le 9$; ә) $x^2+(y+2)^2 \le 4$ теңсіздігінің шешімі болатын нүктелер жиыны қай координаталық ширектерде орналасқанын анықтаңдар.

В деңгейі

132. Ағасы мен қарындасының ақшаларын бірге қосқанда 400 теңгеден аспайды. Олар 30 теңгеден x қарындаш және 40 теңгеден y қарындаш сатып алды. а) Олар ең көп дегенде неше қарындаш сатып ала алатынын; ә) есептің шартын неше $(x; y)$ натурал сандар жұбы қанағаттандыратынын анықтаңдар.

133. Шешімдер жиыны 18-суретте көрсетілген теңсіздікті жазыңдар.



18-сурет

134. а) $x^2+y^2 \le 4$; б) $y < 2x-3$; г) $x^2-y-4 \le 0$;
ә) $(x+4)^2+(y-2)^2 > 16$; в) $y \ge \sqrt{x}+1$; ғ) $|x| < y$ теңсіздігінің шешімдерін координаталар жазықтығына кескіндеңдер.

135. $x^2-2x+y^2-4y > 0$ теңсіздігінің шешімдер жиыны бірінші координаталық ширекте жататыны ақиқат па?

136. Теңсіздікті шешіңдер:
а) $x^2+y^2-2x-4y+5 \le 0$; ә) $x^2+y^2-10x+4y+30 \le 0$.

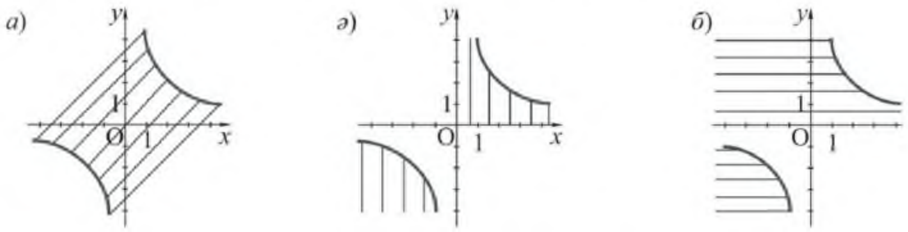
137. а) $\sqrt{y^2+\frac{2}{3}xy+\frac{1}{9}x^2} = y+\frac{1}{3}x$; б) $\sqrt{y^2-2x^2y+x^4} = x^2-y$;
ә) $\sqrt{y^2-\frac{1}{2}xy+\frac{1}{16}x^2} = -y+\frac{1}{4}x$; в) $\sqrt{y^2-x^2y+\frac{1}{4}x^4} = y-\frac{1}{2}x^2$
теңдеуінің шешімдері болатын $(x; y)$ сандар жұбының жиынын кескіндеңдер.

138. Егер: а) $a=\frac{1}{2}$, $b=c=0$, $d=k=-1$, $p=-4$; ә) $a=c=1$, $b=0$, $d=-4$, $k=6$, $p=9$; б) $a=c=d=k=0$, $b=2$, $p=-16$ болса, ax^2+bxy+ $+cy^2+dx+ky+p \le 0$ теңсіздігін шешіңдер.

139. Мектеп кітапханасына 2000 теңге және 1600 теңге тұратын кітаптар сатып алынып, барлығына 100 000 теңгеден аспайтын ақша төленді. Егер: а) қымбатырақ кітаптардың саны көп болса; ә) арзанырақ кітаптардың саны көп болса; б) осы кітаптардың саны бірдей болса; в) әрқайсысына бірдей мөлшерде ақша жұмсалған болса, онда кітаптардың бұл түрлерінен ең көп дегенде қанша кітап сатып алынғанын зерттеп, анықтаңдар.

С деңгейі

140. 19, *а*, *ә*, *б*-суреттердің қайсысында теңсіздіктің барлық шешімдері бейнеленген: 1) $x \le \frac{4}{y}$; 2) $xy \le 4$; 3) $y \le \frac{4}{x}$?



19-сурет

141. Теңсіздіктің шешімдерін координаталар жазықтығына кескіндеңдер:

а) $y \ge \sqrt{|x|}$; б) $|y| < 2x + 4$;

ә) $\frac{4}{|x|} > y$; в) $|x| + |y| \le 5$.

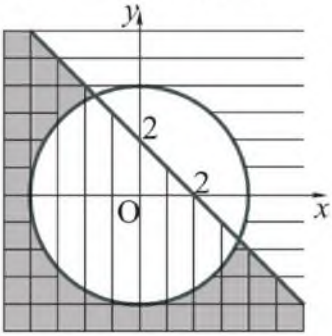
5. Екі айнымалысы бар теңсіздіктер жүйелері

Тақырыпты оқу барысында:

• екі айнымалысы бар теңсіздіктер жүйесі ұғымын білетін боласыңдар;
• екі айнымалысы бар теңсіздіктер жүйесінің шешімі деп нені атайтынын білетін боласыңдар;
• екі айнымалысы бар теңсіздіктер жүйесінің шешімін координаталар жазықтығына кескіндеуді үйренесіңдер;
• екі айнымалысы бар теңсіздіктер жүйесін құруға берілген қарапайым мәтінді есептерді шығаруды үйренесіңдер.

1 - м ы с а л. $x^2 + y^2 \geq 16$ және $x + y \leq 2$ теңсіздіктерінің барлық ортақ шешімдерін табу керек, яғни $\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 16, \\ x + y \leq 2 \end{cases}$ теңсіздіктер жүйесін шешу керек.

Ш е ш у і. Бірінші теңдеудің шешімі – центрі координаталар басында, ал радиусы 4-ке тең дөңгелекте жатпайтын барлық нүктелердің координаталары. Екінші теңсіздіктің шешімі – шегарасы $x + y = 2$ түзуі болатын жарты жазықтықтың осы шегарадан жоғары жатпайтын барлық нүктелері координаталарының жиыны. Көрсетілген облыстардың қиылысуы берілген теңсіздіктер жүйесінің шешімін құрайды (20-сурет).



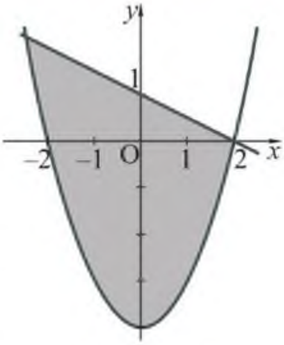
20-сурет

Екі айнымалысы бар теңсіздіктер жүйесінің шешімі деп жүйенің әрбір теңсіздігін ақиқат санды теңсіздікке айналдыратын айнымалылар мәндерінің реттелген жұбын атайды. *Екі айнымалысы бар теңсіздіктер жүйесін шешу* – оның барлық шешімдерін табу немесе шешімдерінің жоқ екенін анықтау.

2 - м ы с а л. $\begin{cases} x^2 - y - 4 \leq 0, \\ x + 2y - 2 \leq 0 \end{cases}$ теңсіздіктер жүйесін шешу керек.

Ш е ш у і. Берілген теңсіздіктер жүйесін оған мәндес жүйемен алмастырайық: $\begin{cases} y \geq x^2 - 4, \\ y \leq -\frac{1}{2}x + 1. \end{cases}$

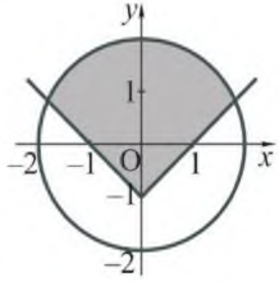
$y = x^2 - 4$ параболасының графигі мен $y = -\frac{1}{2}x + 1$ түзуінің графигін салайық. Координаталар жазықтығына осы жүйе теңсіздіктерінің ортақ шешімдерін бояп көрсетейік (21-сурет).



21-сурет

3 - м ы с а л. $\begin{cases} y \geq |x| - 1, \\ x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases}$ теңсіздіктер жүйесінің шешімдер жиынын координаталар жазықтығына кескіндеу керек.

Ш е ш у і. Жүйенің бірінші теңсіздігі координаталар жазықтығында $y = |x| - 1$ теңдеуі графигінің барлық нүктелері мен одан жоғары жатқан нүктелер жиынын береді. Екіншісі – центрі (0; 0) нүктесінде, радиусы 2-ге тең болатын дөңгелек. Осы жиындардың қиылысуы 22-суретте көрсетілген.

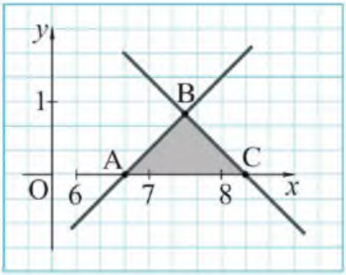


22-сурет

1 - е с е п. 100 м қашықтықты тоғызыншы сынып оқушысы желдің бағытымен 12 с кем емес уақытта, ал желге қарсы 15 с артық емес уақытта жүгіріп өтті. Желдің жылдамдығы қандай болуы мүмкін?

Ш е ш у і. Оқушының жылдамдығы x м/с, ал желдің жылдамдығы y м/с болсын. Сонда, есептің шарты бойынша $\begin{cases} \frac{100}{x+y} \geq 12, \\ \frac{100}{x-y} \leq 15. \end{cases}$ $x > y > 0$ болғандықтан, мынаны аламыз: $\begin{cases} 100 \geq 12(x+y), \\ 100 \leq 15(x-y); \end{cases}$ $\begin{cases} 25 \geq 3x + 3y, \\ 20 \leq 3x - 3y; \end{cases}$ бұдан $\begin{cases} y \leq 8\frac{1}{3} - x, \\ y \leq x - 6\frac{2}{3}. \end{cases}$

Координаталар жазықтығына координаталары осы теңсіздіктер



23-сурет

жүйесінің шешімдері болатын барлық нүктелерден тұратын фигураны салайық (23-сурет). Осы теңсіздіктер жүйесінің шешімі ABC үшбұрышының AC қабырғасынан басқа кез келген нүктесінің $(x;\ y)$ координаталары болады. $B\left(7\frac{1}{2};\frac{5}{6}\right)$ нүктесінің координаталарын ескере отырып алатынымыз $0 < y \leq \frac{5}{6}$.

y-тің мәнін жүйе теңсіздіктерінің сол және оң жақтарын мүшелеп қосу арқылы да табуға болушы еді. (Оны өздігінен орындаңдар.)

Ж а у а б ы. $\frac{5}{6}$ м/с артық емес.

2 - е с е п. Тікбұрышты үшбұрыштың катеттерінің қосындысы 10 дм-ден кем емес, ал гипотенузасы 9 дм-ден артық емес. Осы үшбұрыштың ауданы: а) 4 дм^2-ге; ә) 5 дм^2-ге тең болуы мүмкін бе?

Ш е ш у і. Тікбұрышты үшбұрыштың катеттерінің ұзындықтарын x дм және y дм деп белгілейік. Есептің шарты бойынша $\begin{cases} x + y \geq 10, \\ \sqrt{x^2 + y^2} \leq 9 \end{cases}$ теңсіздіктер жүйесін құрамыз. Жүйенің әрбір теңсіздігін түрлендіреміз: $\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 \geq 100, \\ x^2 + y^2 \leq 81. \end{cases}$ Теңсіздіктердің сол жақтары мен оң жақтарын мүшелеп азайтып, $2xy \geq 19$ аламыз. Үшбұрыштың ауданы $\frac{1}{2}xy$ болғандықтан, $\frac{1}{2}xy \geq \frac{19}{4}$ аламыз. Демек, үшбұрыштың ауданы $4\frac{3}{4}$ дм^2-ден кем емес.

Ж а у а б ы. а) Мүмкін емес; ә) мүмкін.

СҰРАҚТАР

1. Екі айнымалысы бар теңсіздіктер жүйесінің шешімі деп нені атайды?

2. Екі айнымалысы бар теңсіздіктер жүйесін шешу дегеніміз не?

ЖАТТЫҒУЛАР

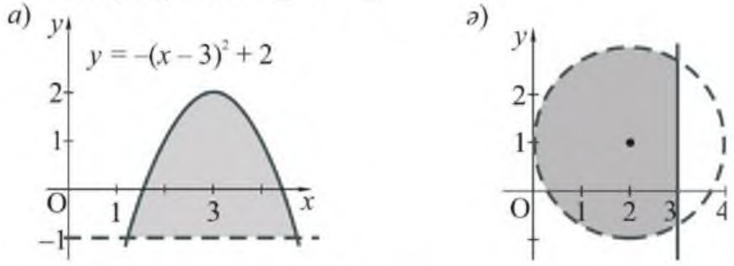
А деңгейі

142. (–4; –4), (–1; –2), (1; –1), (2; –1), (2; 1), (3; 3) сандар жұптарының қайсылары $\begin{cases} x \geq y, \\ x^2 - 2x \leq y \end{cases}$ теңсіздіктер жүйесінің шешімдері болады?

143. $\left(3\frac{1}{3}; 3\right)$ сандар жұбы қай теңсіздіктер жүйесінің шешімі болады:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 20, \\ x + y < 9; \end{cases}$ ә) $\begin{cases} x^2 - y^2 < 2,5, \\ xy > 10? \end{cases}$

144. Зерттеу жүргізіп, шешімдер жиыны 24, *а*, *ә*-суретте кескінделген теңсіздіктер жүйесін құрыңдар.



24-сурет

145. Координаталар жазықтығына әр нүктесінің координаталары теңсіздіктер жүйесінің шешімдері болатын фигураны кескіндеңдер:

а) $\begin{cases} y \geq 0, \\ y \leq 3 - x^2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4, \\ y \geq -1; \end{cases}$

ә) $\begin{cases} y \leq 0, \\ y \geq x^2 - 4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 4, \\ x \geq 1. \end{cases}$

146. Координаталары $\begin{cases} y < x^2 + 1, \\ x^2 + (y-1)^2 < 4 \end{cases}$ теңсіздіктер жүйесінің шешімдері болатын барлық нүктелер жиынын кескіндеңдер. Зерттеу жүргізіп, жүйенің x және y бүтін мәнді шешімдерінің санын көрсетіңдер.

147. Координаталар осьтерімен және: а) $x + y = 6$; ә) $3x - 4y = 12$ түзуімен шектелген үшбұрыштың ауданын табыңдар.

148. Әрбір нүктесінің координаталары: а) $\begin{cases} 1 \le x \le 5, \\ 0 \le y + 2 \le 1; \end{cases}$

ә) $\begin{cases} 0 \le x + 1 \le 4, \\ 0 \le 2y - 2 \le 3 \end{cases}$ теңсіздіктер жүйесінің шешімдері болатын фигураның ауданын табыңдар.

149. Теңсіздіктер жүйесін графиктік тәсілмен шешіңдер:

а) $\begin{cases} y \ge x^2, \\ y < 5 - x^2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y \le \sqrt{x}, \\ y \ge (x - 3)^2 - 3; \end{cases}$

ә) $\begin{cases} y \ge x^2 - 2x - 3, \\ y < x + 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x < y < 0, \\ y < \frac{1}{2}x^3. \end{cases}$

150. Өзара тең емес екі шаршының аудандарының қосындысы 16 $м^2$-ден артық емес. Егер аудандары бүтін сан метрмен өрнектелетін болса, шаршылардың қабырғаларының ұзындықтарын табыңдар.

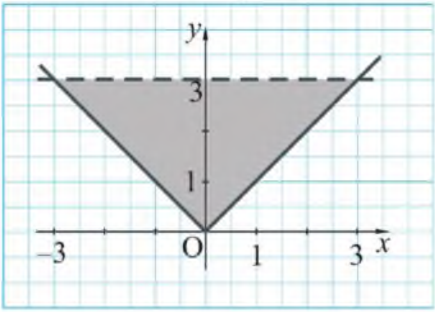
151. Теңбүйірлі үшбұрыштың периметрі 10 м-ден артық емес, әрі оның әрбір қабырғасы бүтін сан метрмен өрнектеледі. Егер үшбұрыштың бүйір қабырғасының ұзындығы x м, ал табаны y м болса, есептің шартын қанағаттандыратын қанша $(x; y)$ сандар жұбы бар болатынын анықтаңдар.

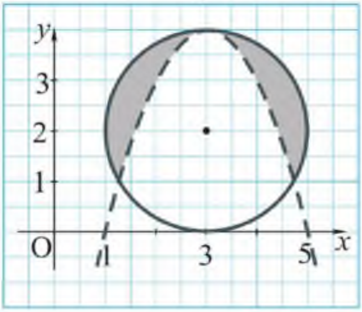
152. 20-дан аспайтын барлық екітаңбалы сандардың ішінен цифрларының көбейтіндісі 10 еселенген арифметикалық түбірінен артық болатын санды табыңдар. Барлық мүмкін болатын жағдайларды зерттеңдер.

153. Мектепке волейбол және баскетбол доптары сатып алынды. Егер волейбол доптарын екі есе көп сатып алғанда, барлық доп саны 48-ден кем болар еді. Ал егер баскетбол доптарын екі есе көп сатып алса, онда барлық доп саны 60-тан кем болар еді. Сатып алынған доптардың ең көп саны қанша болуы мүмкін екенін зерттеңдер.

B деңгейі

154. Зерттеу жүргізіп, шешімдер жиыны 25, *а*, *ә*-суретте кескінделген теңсіздіктер жүйесін құрыңдар.





25-сурет

155. Теңсіздіктер жүйесінің шешімі болатын барлық натурал сан жұптарын табыңдар:

а) $\begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2\le 9,\\ y<(x-1)^2-1;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x^2+y^2-2x+4y\le 4,\\ |x|>4.\end{cases}$

ә) $\begin{cases}y\ge |x|,\\ 2y\le 8-x^2;\end{cases}$

156. Теңсіздікті теңсіздіктер жүйелерін пайдаланып, графиктік тәсілмен шешіңдер:

а) $xy\le 0$; б) $x^2-y^2\ge 0$;

ә) $(x-3)(2y-x)>0$; в) $y^2-y<x-yx$.

157. Қанша $(x;\ y)$ бүтін сандар жұбы $\begin{cases}y\le -\frac{1}{2}x^2+2,\\ y\ge -2\sqrt{x}\end{cases}$ теңсіздіктер жүйесінің шешімдері болатынын анықтаңдар.

158. 100 м қашықтықты моторлы қайық өзен ағысымен 5,4 с-тан, ал ағысқа қарсы 7,2 с-тан артық емес уақытта жүзіп өтті. Қайықтың меншікті жылдамдығы (м/с есебімен) қандай болуы мүмкін екенін анықтаңдар.

159. Ромбтың қабырғасы 10 см-ден, ал оның диагональдарының қосындысы 25 см-ден артық емес. Ромбтың ауданы: а) 55 см^2-ге; ә) 60 см^2-ге тең болуы мүмкін бе, соны зерттеңдер.

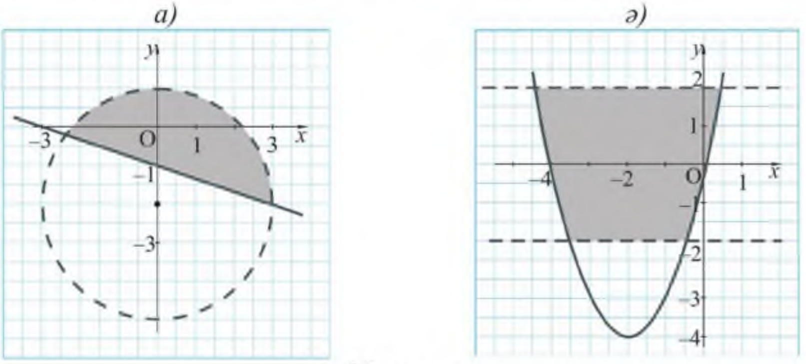
160. Математикадан факультативке баратын тоғызыншы сынып оқушыларының қыздар саны көбірек. Егер ұлдардың саны екі есе көп болса, онда факультативке баратын оқушылар саны 12-ден артық болар еді, ал егер қыздар саны екі есе көп болса, онда барлық оқушы саны 15-тен кем болар еді. Факультативке неше қыз және неше ұл барады?

161. Тау баурайында орналасқан пункттен шыққан альпинистер солтүстікке қарай, ал туристер шығысқа қарай бет алды. Олар тұрақты жылдамдықпен қозғалды әрі туристер тезірек жүрді. Екі сағаттан соң олардың арасы 8 км-ден артық емес болды.

а) Альпинистердің жылдамдығы 3 км/сағ болуы мүмкін бе екенін; ә) альпинистердің бүтін санмен өрнектелетін ең үлкен жылдамдығы (км/сағ) қандай болғанын анықтаңдар.

С деңгейі

162. Шешімдер жиыны 26, *а*, *ә*-суретте бейнеленген теңсіздіктер жүйесін зерттеп, оны жазыңдар.



26-сурет

163. Координаталар жазықтығына әрбір нүктесінің координаталары:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 16, \\ y \ge \dfrac{2}{x}; \end{cases}$ ә) $\begin{cases} x^2 + y \le 6, \\ |x| + y \ge 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x - y \ge 0, \\ x^2 + |y| \ge 4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 \le 16, \\ |y| + 3x \le 3 \end{cases}$ теңсіздіктер жүйесінің шешімдері болатын фигураны кескіндеңдер.

164. Қанша $(x; y)$ натурал сандар жұбы мына теңсіздіктер жүйесінің шешімдері болатынын анықтаңдар:

а) $\begin{cases} y \le x^3, \\ x^2 + y^2 \le 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y \le \frac{1}{2}x^2 + 1, \\ |x| \le 2; \end{cases}$

ә) $\begin{cases} x^2 - 4x \le y - 5, \\ x^2 - 6x \le 3 - y; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y < \sqrt{4x - x^2}, \\ y > 0. \end{cases}$

165. Әрбір нүктесінің координаталары: а) $\begin{cases} y \le 4, \\ y \ge |2x - 4|; \end{cases}$

ә) $\begin{cases} xy \le 0, \\ |y - x| \le 5 \end{cases}$ теңсіздіктер жүйесінің шешімдері болатын фигураның ауданын табыңдар.

ҚЫЗЫҚТЫ ЕСЕПТЕР

1) Достарыңның біріне туған айының реттік санын екі есе ұлғайтып, оған 5-ті қосуды ұсыныңдар. Одан кейін шыққан санды 50 есе ұлғайтсын, нәтижесінен 365-ті алып тастап, өз жасын қоссын. Досыңның жауабынан оның жасын және туған айын қалай табуға болады?

2) A және B екі қазықшаның арасына тартылған ұзындығы 4 м болатын сым мен оның бойымен сырғитын шығыршық берілген. Осы шығыршыққа ешкіні ұзындығы 3 м жіппен байлап қойған. Егер AB кесіндісі Ox осінде жатса, ал оның ортасы координаталар басы болса, тікбұрышты координаталар жүйесінде ешкінің жете алатын өрістің нүктелер жиынын кескіндейтін фигураны салыңдар.

6. «Екі айнымалысы бар теңдеулер, теңсіздіктер және олардың жүйелері» бөлімін қайталауға арналған жаттығулар

А деңгейі

166. Егер: а) екітаңбалы санға оның цифрларының қосындысын қосқанда 60 шығатын болса; ә) екітаңбалы санның ондықтар санына бірліктер санының квадратын қосқанда сол екітаңбалы сан шығатын болса, екітаңбалы санды табыңдар.

167. Үштаңбалы сан 9 цифрына аяқталады. Егер осы цифрды бірінші орынға қойса, онда бастапқы санның 9-ға көбейтіндісі соңғы саннан 71-ге артық болады. Бастапқы санды табыңдар.

168. Теңдеулер жүйесін шешіңдер: $\begin{cases} x + y = 10, \\ x^2 + y^2 = 68. \end{cases}$ (Ежелгі грек математигі Диофанттың «Арифметика» трактатынан есеп.)

169. Теңдеулер жүйесін шешіңдер:

а) $\begin{cases} 3x - 4y = 0, \\ x^2 + y^2 = 25; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4xy = 5, \\ 3x^2 = 5; \end{cases}$

ә) $\begin{cases} x + y = 2, \\ xy = -15; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 = 2, \\ x^2 + xy = 3. \end{cases}$

170. Екітаңбалы санды оның цифрларының қосындысына бөлгенде бөлінді 4-ке, ал қалдық 3-ке тең болады. Егер осы санды оның цифрларының көбейтіндісіне бөлсе, онда бөлінді 3-ке, қалдық 5-ке тең болады. Ол қандай сан?

171. Ауданы 80 см^2-ге, ал диагональдарының қатынасы 0,8-ге тең болатын ромбтың қабырғасын табыңдар.

172. Теңдеулерді қосу тәсілін пайдаланып, жүйені шешіңдер:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17, \\ x^2 - y^2 = -15; \end{cases}$ ә) $\begin{cases} 5x^2 - y^2 + 6x = 11, \\ x^2 + y^2 = 25. \end{cases}$

173. Теңдеулер жүйесін шешіңдер: а) $\begin{cases} xy + y = 9, \\ xy - x = 4; \end{cases}$ ә) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 81, \\ x^2 - y = 9. \end{cases}$

174. ABC үшбұрышының қабырғалары $AC = 9$ см, $BC = 12$ см, ал AM мен BN медианалары өзара перпендикуляр. AB қабырғасын табыңдар.

175. а) $3x^2 + y^2 = 13$; ә) $(xy)^2 - 5xy + 6 = 0$; б) $x^2 - y^2 = 105$ теңдеуінің шешімдері болатын барлық $(x;\ y)$ натурал сандар жұбын табыңдар.

176. а) Тіктөртбұрыштың бір қабырғасы $\sqrt{997}$ см-ге тең. Оның диагоналі мен екінші қабырғасы сантиметрмен өрнектелетін бүтін сан болса, диагоналін табыңдар. ә) Тікбұрышты үшбұрыштың катеттерінің бірі $\sqrt{2031}$ см-ге тең. Оның сантиметрмен өрнектелетін гипотенузасының бүтін сандық мәнін табыңдар.

177. Координаталар жазықтығына координаталары төмендегі шартты қанағаттандыратын нүктелер жиынын кескіндеңдер:

а) $(2x - y)(x - 3) = 0$; б) $(y - 4)(y - x^2) \le 0$;

ә) $\dfrac{x + 2y}{x - 4} = 0$; в) $\dfrac{x - y}{y + 3} \ge 0$.

178. Тіктөртбұрыштың сыбайлас қабырғаларының қосындысы 5 дм-ден кем емес, ал оның диагоналі 4 дм-ден артық емес. Осы тіктөртбұрыштың ауданы: а) 4,5 дм^2; ә) 3 дм^2 бола ала ма, соны зерттеңдер.

179. Координаталар жазықтығына әрбір нүктесінің координаталары теңсіздіктер жүйесінің шешімдері болатын фигураны салыңдар:

а) $\begin{cases} x + y \le 2, \\ x + 2 \ge 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y < \dfrac{4}{x}, \\ y \ge x^2; \end{cases}$

ә) $\begin{cases} y - 3x - 4 \le 0, \\ 2y - 6x + 8 \ge 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} |x| < 2, \\ x^2 + y^2 < 9. \end{cases}$

180. а) Мектеп маңына бірнеше қайың мен қарағай отырғызу жоспарланды. Егер қарағайды екі есе көп, ал қайыңды жоспар бойынша отырғызса, онда барлығы 8 ағаштан кем отырғызылған болар еді. Егер қайыңды екі есе көп, ал қарағайды жоспар бойынша отырғызса, онда қарағай көп отырғызылған болар еді. Қанша қарағай және қанша қайың отырғызу жоспарланған?

ә) 500 рубльге бірнеше пұт (1 пұт – 16 кг) қант сатып алынды. Егер осындай ақшаға 5 пұт қант артық сатып алынатын болса, онда қанттың әр пұты 5 рубльге арзанырақ болар еді. Қанша пұт қант сатып алынған? (Ертедегі орыс есебі.)

В деңгейі

181. а) Кері сандарының қосындысы 0,2-ге тең болатын екі натурал санды табыңдар. ә) Квадраттарының айырымы 101-ге тең болатын екі натурал сан бола ма?

182. 80-нен аспайтын бір кісінің жасы 1989 жылы оның туған жылының цифрларының қосындысына тең болды. Оның туған жылын табыңдар.

183. 5-ті қосқанда және 11-ді азайтқанда натурал сандардың квадраттарын беретін натурал санды табыңдар. (1881 жылы қазба жұмыстары кезінде Үндістанда табылған қайың қабығына ежелгі үнділіктердің жазып кеткен есебі.)

Оба өзені

184. Егер d саны 276-дан артық, бірақ 282-ден кем және екі натурал санның квадраттарының айырымы түрінде көрсетуге болмайтын үштаңбалы құрама сан болса, Қазақстанның Ертіс өзенінің ірі оң жақ саласы болып табылатын Оба өзенінің d км ұзындығы қандай болғаны?

185. $x + y + 2 = 0$ түзуі $x^2 + y^2 = 2$ шеңберін жанайтынын дәлелдеңдер.

186. Екі өткізгішті тізбектеп қосқанда жалпы кедергісі 12 Ом-ға, ал параллель қосқанда $2\frac{2}{3}$ Ом-ға тең болады. Әрбір өткізгіштің кедергісін табыңдар.

187. Лагерьден елді мекенге дейінгі қашықтығы 10 км жол алдымен таудан төмен қарай, содан кейін жоғарылап тауға қарай өтеді. Туристер төмен қарай жоғары көтерілгенге қарағанда 2 км/сағ артық жылдамдықпен жүрді. Егер туристер лагерьден елді мекенге дейінгі жолға 2 сағ 48 мин, ал кері қайтуға –

2 сағ 32 мин жұмсаған болса, олардың төмен және жоғары қарай жүргендегі жылдамдықтарын табыңдар.

188. Жүйе теңдеулерінің оң жақ және сол жақ бөліктерін мүшелеп бөлу тәсілін пайдаланып, теңдеулер жүйесін шешіңдер:

а) $\begin{cases} x^3y - x^2y = 50, \\ xy - y = 2; \end{cases}$ ә) $\begin{cases} 2y^2 - 3xy + y = 4, \\ 2xy - 3x^2 + x = 2. \end{cases}$

189. Жаңа айнымалылар енгізу тәсілін қолданып, теңдеулер жүйесінің рационал сандар жұбынан тұратын барлық шешімдерін табыңдар:

а) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 243, \\ xy(x + y) = 162; \end{cases}$ ә) $\begin{cases} 8(x^3 + y^3) = 65xy, \\ 2(x + y) = 5xy. \end{cases}$

190. Теңдеулер жүйесінің шешімдері болатын барлық бүтін сандардың жұптарын табыңдар:

а) $\begin{cases} xy = 4, \\ x^3 - y^3 = 63; \end{cases}$ ә) $\begin{cases} xy + x = 5, \\ xy + x = \left(\dfrac{x + y + 1}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{x - y - 1}{2}\right)^2. \end{cases}$

191. Дамир мен Динара бірге $\begin{cases} (x + y)(y - 1) = 3, \\ (x^2 + 1)(y^2 + 1) = 10 \end{cases}$ теңдеулер жүйесін шешті, мұндағы x пен y – бүтін сандар. Дамир шешімдер жұптарының барлық x мәндерінің, ал Динара барлық y мәндерінің таңдамасын құрды. Содан кейін олардың әрқайсысы шыққан таңдама деректерінің стандартты ауытқуын тапты. Кімнің стандартты ауытқуының артығырақ болғанын анықтаңдар.

192. Теңдеулер жүйесін графиктік тәсілмен шешіңдер:

а) $\begin{cases} y = |x^2 - 6x + 5|, \\ y - x + 1 = 0; \end{cases}$ ә) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2y = 8, \\ xy + y = 4. \end{cases}$

193. Екі айнымалысы бар теңсіздіктердің шешімдер жиынын бейнелеңдер:

а) $x^2 + y^2 < 6x - 6y - 9$; ә) $|y| < \sqrt{x + 2}$.

194. Ықшам ауданы бесқабатты және тоғызқабатты үйлерден тұрғызылған. Егер тоғызқабатты үйлер екі есе көп болса, онда барлық үйлер саны 12-ден кем болар еді. Егер бесқабатты үйлер екі есе аз болса, онда барлық үйлер саны 4-тен артық болар еді. Барлық үйлер саны: а) 11; ә) 10 болуы мүмкін бе, соны зерттеңдер.

С деңгейі

195. Егер екі өткізгіштің жалпы кедергісі тізбектеп қосқанда параллель қосқаннан $6\frac{1}{4}$ есе артық болса, біреуінің кедергісі екіншісінікінен неше есе артық болғаны?

196. c-ның қандай мәндерінде $x + y + c = 0$ түзуі $x^2 + y^2 = 1$ шеңберімен жанасады?

197. Бірінші теңдеуін кез келген айнымалысына немесе жаңа $t = \frac{x}{y}$ айнымалысына қатысты квадрат теңдеу деп қарастыруға болатын теңдеулер жүйесін шешіңдер:

а) $\begin{cases} 2x^2 + 3xy + y^2 = 0, \\ y^2 - x^2 = 75; \end{cases}$ ә) $\begin{cases} 2x^2 - 3y^2 - 5xy = 0, \\ x^2 + y^2 = 10. \end{cases}$

198. Теңбүйірлі үшбұрыштың табан қабырғасы a-ға, ал оған жүргізілген биіктігі h-қа тең. Үшбұрыштың бүйір қабырғаларын қамтитын түзулерді жанайтын, ал табан қабырғасы оның хордасы болатын шеңбердің радиусын табыңдар.

199. Диагональдары O нүктесінде қиылысатын $ABCD$ төртбұрышының S ауданы 10 дм^2-ге тең. Егер AOB мен COD үшбұрыштарының аудандары, сәйкесінше, 1 дм^2-ге және 4 дм^2-ге тең болса, BOC мен AOD үшбұрыштарының аудандарын табыңдар.

200. Кез келген сандар жұбы мына теңсіздіктің шешімі болатынын дәлелдеңдер:

а) $x^4 - x^2y^2 + y^4 \geq 0;$ ә) $x^6 - x^3y^3 + y^6 \geq 0.$

201. Теңсіздікті графиктік тәсілмен шешіңдер:

а) $(x - 2)^2 - (y - 3)^2 > 0;$ ә) $\frac{x - y}{x + y} \leq 0;$ б) $3 - |x| \geq |1 - y|.$

202. Қанша $(x;\ y)$ натурал сандар жұбы $\begin{cases} \frac{1}{x} \leq y \leq -x + 4{,}5, \\ x > 0 \end{cases}$ теңсіздіктер жүйесінің шешімі болатынын анықтаңдар.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

203. 1А) а) $x^2 + 4x + 4 = 0$; ә) $xy = 19$; б) $x\sqrt{3} - y\sqrt{5} = 8$ теңдеулерінің қайсысы екі айнымалысы бар сызықтық емес теңдеу болады? Оның шешімдерінің біреуін табыңдар.

2А) Теңдеулер жүйесін шешіңдер: $\begin{cases} x + y = 10, \\ 12(x + y) = 5xy. \end{cases}$

3В) Туристердің екі тобы бір мезгілде тұрақты жылдамдықпен жүре отырып, жорыққа аттанды. Бір топ солтүстікке қарай, екіншісі батысқа қарай бет алып, 4 сағаттан соң олардың арақашықтығы 24 км болды. Егер екі топ бір бағытта жүргенде, 4 сағаттан кейін олардың арақашықтығы 4,8 км болар еді. Әр топтың жүру жылдамдығын табыңдар.

4В) Координаталар жазықтығына $y + x^2 < 4x - 1$ теңсіздігінің шешімдер жиынын кескіндеңдер және осы жиыннан барлық $(x; y)$ натурал сандар жұбын таңдап алыңдар.

5С) Әр нүктесінің координаталары $\begin{cases} |x| + |y| \le 4, \\ y \le 1 \end{cases}$ теңсіздіктер жүйесінің шешімдері болатын фигураның ауданын табыңдар.

БҰЛ ҚЫЗЫҚТЫ!

XIX ғасырдың ортасына дейін теңдеулер, теңсіздіктер және олардың жүйелерін шешу теориясын дамыту алгебра пәнінің ғылым ретіндегі негізгі мақсаты болды. Бұл сұрақтардың маңыздылығы – оларды қолдану арқылы көптеген практикалық есептерді шешуге болатындығында еді.

Диофант

Бұл теорияның қызықты бөлімдерінің бірі екі немесе одан да көп айнымалысы бар теңдеулерді бүтін немесе рационал сандар арқылы шешу болып табылады. Оларды анықталмаған теңдеулер немесе III ғасырда өмір сүрген ежелгі грек математигі Диофанттың

Гипатия

есімімен диофант теңдеулері деп атайды. Оның біздің заманымызға дейін сақталған «Арифметика» атты кітабында теңдеу мен теңдеулер жүйесін құрып шығаруға арналған көптеген есептер бар.

Солардың екеуін келтірейік:

1А) екі санның қатынасы 3-ке тең, ал олардың квадраттары қосындысының сол сандардың қосындысына қатынасы 5-ке тең болатын екі санды табыңдар;

2В) екі санның көбейтіндісіне сол сандарды қосқанда қайсыбір санның кубын беретін екі санды табыңдар (осы есептерді өздігінен шығарыңдар).

Анықталмаған теңдеулерді шешумен және Диофанттың еңбектерін дәріптеумен тарихқа алғашқы әйел-математик болып енген ежелгі грек ғалымы Гипатия (370–415) айналысқан болатын.

П. Ферма

Екінші дәрежеден аспайтын теңдеулерді, теңсіздіктерді және олардың жүйелерін шешу тәсілдерін адамдар бірінші мыңжылдықта-ақ меңгерген болатын, ал одан жоғары дәрежелілерін тек екінші мыңжылдықтың екінші жартысында ғана игере алды. Мысалы: $x^n + y^n = z^n$, мұндағы $n \in N$, француз математигі Пьер Ферма (1601–1665) атымен аталатын және Диофанттың «Арифметика» кітабының жиегінде жазып қалдырған бұл әйгілі теңдеудің кез келген n натурал саны үшін бүтін шешімін осы күнге дейін ешкім тапқан жоқ.

Математикада тепе-тең теңсіздіктерді, яғни теңсіздікке кіретін айнымалылардың мүмкін болатын немесе көрсетілген мәндерінде ақиқат болатын теңсіздіктерді дәлелдеудің үлкен мәні бар. Мысалы: $\frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, мұндағы $a > 0$, $b > 0$, теңсіздігі арифметикалық $\left(\frac{a+b}{2}\right)$, геометриялық $(\sqrt{ab})$, гармониялық $\left(\frac{2ab}{a+b}\right)$ және квадраттық $\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)$ орталардың арасындағы қатысты өрнектейтін теңсіздік. (Осы теңсіздіктерді дәлелдеңдер.)

Ғаламторды пайдаланып:

а) Диофанттың өмірбаяны және оның математикалық мұрасы туралы мәліметтерді;

ә) Диофанттың «Арифметика» кітабынан қандай да бір анықталмаған теңдеудің шешімін;

б) Гипатияның өмірбаянынан мәліметтер және оның математика ғылымының дамуына қосқан үлесі туралы;

в) арифметикалық, геометриялық, гармониялық және квадраттық орталар туралы теңсіздіктердің практикада қолданылуы туралы мағлұматтарды табыңдар.

II. КОМБИНАТОРИКА ЭЛЕМЕНТТЕРІ

Бөлімді оқу нәтижесінде

• комбинаториканың негізгі ұғымдары мен ережелерін;
• санның факториалы, қайталанбайтын алмастыру, орналастыру және теру анықтамаларын;
• қайталанбайтын алмастыру, орналастыру және теру сандарын табу формулаларын;
• Ньютон биномының формуласын және оның қасиеттерін **білу керек**.

• қарапайым комбинаторика-логикалық есептерді шеше алу;
• қосу мен көбейтудің ережелерін комбинаторикалық есептерді шешуде қолдана алу;
• қайталанбайтын алмастыру, орналастыру және теру формулаларын қолданып, күрделі емес комбинаторикалық есептерді шеше алу;
• Ньютон биномының формуласын және оның қасиеттерін қарапайым комбинаторикалық есептерді шешуде қолдана **алу керек**.

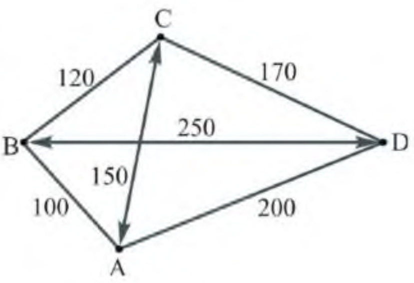
7. Комбинаториканың негізгі ұғымдары мен ережелері

Тақырыпты оқу барысында:
• комбинаторика, комбинаторикалық есеп, граф ұғымдарын білесіңдер;
• қосу ережесі мен көбейту ережелерін және оларды комбинаторикалық есептер шығаруда қолдануды білетін боласыңдар.

Күнделікті өмірде әртүрлі жиындардың объектілерін таңдап алу немесе ретке келтіру мәселесі жиі қойылады. Мысалы, фермерге ауылшаруашылық дәнді дақылдарды бірнеше егістік жерлерге себуге, шеберге бірнеше жұмыс түрлерін жұмысшылар арасында бөліп беруге, мұғалімге сабақ кестесін құруға тура келеді.

Жиындар элементтерін белгілі бір ереже бойынша орналастыру немесе таңдап алу есептерін шешуге арналған математика бөлімі **комбинаторика** деп, ал сондай есептер *комбинаторикалық* есептер деп аталады. «Комбинаторика» сөзі латынның «*combina*» сөзінен шыққан, ол «теру», «біріктіру» дегенді білдіреді. Комбинаторикалық есептерді шығару мысалдарын қарастырайық.

1-есеп. Ұшақ табиғат қорғау аймағының арақашықтығы (км-мен) белгілі A, B, C, D пункттерінің үстерінен ұшып өтті (27-сурет). A пунктінен бастап осы пункттердің барлығының үстерінен ұшып өту маршрутының ең қысқасын анықтау керек.



27-сурет

Шешуі. Маршруттардың барлық мүмкін болатын нұсқаларын қарастырайық.

Маршрут	Маршруттың ұзындығы (км)
$A \to B \to C \to D \to A$	$100 + 120 + 170 + 200 = 590$
$A \to B \to D \to C \to A$	$100 + 250 + 170 + 150 = 670$

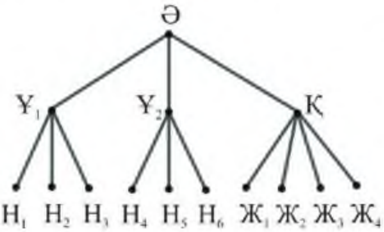
A → C → B → D → A	150 + 120 + 250 + 200 = 720
A → C → D → B → A	150 + 170 + 250 + 100 = 670
A → D → B → C → A	200 + 250 + 120 + 150 = 720
A → D → C → B → A	200 + 170 + 120 + 100 = 590

Барлық маршруттардың ұзындығын салыстырып, жауабын аламыз.

Ж а у а б ы. Маршруттары A → B → C → D → A немесе A → D → → C → B → A.

Комбинаторикалық есептерді шешу үшін қандай да бір объектілерді белгілейтін нүктелерден және осы нүктелерді өзара жалғап, объектілердің арасындағы байланысты білдіретін кесінділерден тұратын схеманы пайдаланған ыңғайлы болады. Ондай схеманы ***граф*** деп, нүктелерді графтың *төбелері* деп, ал оларды қосатын кесінділерді графтың *қабырғалары* деп атайды.

2 - е с е п. Мараттың әжесінің бір қызы мен екі ұлы бар. Әжесінің ұлдарының біреуінің екі ұлы мен бір қызы, ал екіншісінің екі қызы мен бір ұлы бар. Әжесінің қызының үш ұлы мен бір қызы бар. Әжесінің немерелері мен жиендерінің саны нешеу?



28-сурет

Ш е ш у і. Есепті шешу үшін графты пайдаланамыз (28-сурет). Оның төбесін Ә (әже), $Ұ_1$, $Ұ_2$ – ұлдары, Қ – қызы, $Н_1$–$Н_6$ – әженің немерелері, оның ішінде Марат та бар, $Ж_1$–$Ж_4$ – жиендері. Граф төбелерінің санын есептеп, жауабын аламыз.

Ж а у а б ы. 10.

3 - е с е п. 5–9-сыныптардың отыз оқушысы сөзжұмбаққа 40 сұрақ құрастырды, әрі тоғызыншы сынып оқушыларының сұрақтар саны бірдей, ал басқа сынып оқушыларының сұрақтар саны әртүрлі. Неше оқушы тек бір сұрақтан құрастырған?

Ш е ш у і. Әр параллель сыныптардан бір оқушыдан, яғни барлығы 5 оқушы алайық. Есептің шартынан олардың барлығының сұрақтарының саны әртүрлі екені шығады. Сондықтан олардың құрастырған сұрақтарының жалпы саны (1 + 2 + 3 + 4 + 5)-ке тең, яғни, 15-тен кем емес. Демек, қалған 25 оқушының құрастырған сұрақтарының саны 25-тен артық емес. Яғни, олардың әрқайсысы бір-бір сұрақтан құрастырған. Бұдан, ізделінді сан 25 + 1 = 26 болады.

Ж а у а б ы. 26.

4 - е с е п. Ыдыста 5 алма, 4 алмұрт және 8 шабдалы бар. Олардың ішінен бір жемісті неше тәсілмен таңдап алуға болады?

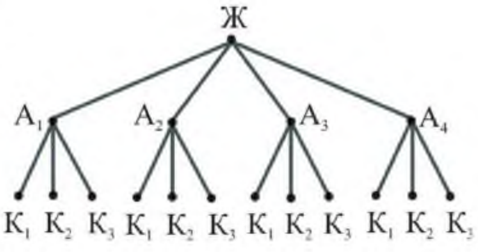
Ш е ш у і. Бір алманы 5 тәсілмен, бір алмұртты 4 тәсілмен, бір шабдалыны 8 тәсілмен таңдап алуға болады. Демек, жемістердің біреуін (5 + 4 + 8) тәсілмен таңдап алуға болады екен.

Ж а у а б ы. 17.

4-есеп сияқты есептерді шығару үшін комбинаторикада **қосу ережесі** деп аталатын ереже қолданылады. *Егер a элементін m тәсілмен, ал b элементін n тәсілмен таңдап алуға болса, және a элементінің кез келген таңдауы b элементін таңдаудан өзгеше болса, онда «a немесе b» таңдауын $(m + n)$ тәсілмен іске асыруға болады.*

Жиындардың бірігуі мен қиылысуы ұғымдарын пайдаланып, бұл ережені былай тұжырымдауға болады: егер шектеулі A және B жиындарының ортақ элементтері болмаса, онда олардың элементтерінің бірігу саны A және B элементтері санының қосындысына тең болады. Бұл ереже әрбір екеуінің ортақ элементтері болмайтын үш және одан да артық жиындардың элементтерін таңдап алу жағдайында қолданылады.

5 - е с е п. 4 ашық хат пен 3 конверттен қанша тәсілмен жұп (ашық хат пен конверт) таңдап алуға болады?



29-сурет

Ш е ш у і. Есепті графты пайдаланып шешейік (29-сурет), онда Ж әрпімен жұп (ашық хат пен конверт), A_1, A_2, A_3, A_4 – ашық хаттар, $К_1$, $К_2$, $К_3$ – конверттер белгіленген. Көріп тұрғандай, ізделінді жұптар саны $4 \cdot 3 = 12$.

Ж а у а б ы. 12 тәсілмен.

5-есеп тәрізді есептерді шығарғанда комбинаторикада **көбейту ережесі** деп аталатын ереже қолданылады. *Егер a элементін әртүрлі m тәсілмен таңдап алуға болса, әрі әрбір осындай таңдаудан соң b элементін әртүрлі n тәсілмен таңдап алуға болса, онда «a және b» таңдауын (m · n) тәсілмен іске асыруға болады.*

Жиын және оның элементтері ұғымын пайдаланып, бұл ережені былай тұжырымдауға болады: егер A жиыны m элементтен, ал B жиыны n элементтен тұратын болса, онда барлық мүмкін болатын $(a; b)$ жұбынан тұратын, мұндағы $a \in A$, $b \in B$, $A \cdot B$ деп белгіленетін жиын $(m \cdot n)$ элементтен тұрады.

Шынымен де, егер $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ болса, онда $(a; b)$, мұндағы $a \in A$, $b \in B$, түріндегі барлық жұптарды мына кестеде көрсетуге болады:

$$\begin{array}{c} (a_1; b_1)\ (a_2; b_1)\ \dots\ (a_n; b_1) \\ (a_1; b_2)\ (a_2; b_2)\ \dots\ (a_n; b_2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (a_1; b_m)\ (a_2; b_m)\ \dots\ (a_n; b_m) \end{array}$$

Мұндай кестеде m жол мен n баған болады. Демек, барлық жұптар саны $m \cdot n$ болады.

Бұл ереже үш және одан да артық жиындардың элементтерін таңдап алу жағдайында қарастырылады.

6 - е с е п. Барлық екітаңбалы сан нешеу?

Ш е ш у і. Екітаңбалы санның ондықтар саны тоғыздың: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 біреуі, ал бірліктер саны онның: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 біреуі болуы мүмкін. Егер ондықтар саны 1-ге тең болса, онда бірлік цифрын 10 тәсілмен таңдап алуға болады, басқа ондықтар цифры үшін де солай болады. Көбейту ережесі бойынша барлығы $9 \cdot 10 = 90$ екітаңбалы сан бар болады.

Ж а у а б ы. 90.

Комбинаторикалық есептерді шығарғанда көбіне ортақ элементтері бар екі жиынның бірігу элементтерінің санын табу керек екендігін атап өтелік. Бұл жағдайда олардың бірігу элементтерінің саны

A мен *B* жиындары элементтерінің ортақ элементсіз қосындысының санына тең болады.

7 - е с е п. Бастапқы 100 натурал санның ішінде 2-ге де, 3-ке де бөлінетін қанша сан бар?

Ш е ш у і. Бастапқы 100 натурал санның 50-і 2-ге, 33 саны 3-ке, ал 2-ге де, 3-ке де (яғни 6-ға) 16 саны бөлінеді (оған өздігінен көз жеткізіңдер). Демек, ізделінді сан: $50 + 33 - 16 = 67$.

Ж а у а б ы. 67.

СҰРАҚТАР

1. Комбинаторика дегеніміз не?
2. Комбинаторикалық есеп ұғымын түсіндіріңдер.
3. Қандай схема граф деп аталады?
4. Комбинаторикалық есепті шешу мысалы негізінде қосу ережесін түсіндіріңдер.
5. Комбинаторикалық есепті шешу мысалы негізінде көбейту ережесін түсіндіріңдер.

ЖАТТЫҒУЛАР

A деңгейі

204. Сөреде үш роман, екі повесть және төрт өлеңдер жинағы тұр. Бір кітапты неше тәсілмен таңдап алуға болады?

205. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ және $B = \{a, b, c, d\}$ жиындары берілген. Олардан осы жиындардың ең болмағанда біреуіне тиісті болатын бір элементті неше тәсілмен таңдап алуға болады?

206. Көрерменге бірінші қатардағы бес бос орынның біріне немесе соңғы қатардағы үш бос орынның біріне отыруына болады. Оның көрермен залынан орын таңдап алуының неше нұсқасы бар?

207. Мәнерлеп сырғанау секциясына 9 қыз бен 7 ұл жазылды. Қанша тәсілмен олардан жұп құруға болады?

208. N қаласынан M қаласына 7 жол, ал M қаласынан K елді мекеніне 6 жол апарады. N-нен M арқылы K-ға барудың қанша маршруты бар?

209. Орыс әліпбиінде 21 дауыссыз және 10 дауысты әріп бар. Бірінші орында дауыссыз, ал екіншіде – дауысты әріп тұратындай етіп қанша тәсілмен екі әріптен тұратын буын құрастыруға болады?

210. 5 оқушыны қанша тәсілмен әртүрлі түске боялған 5 орындыққа отырғызуға болатынын анықтаңдар.

211. Алты бала орындықтарында алты түрлі аңның суреті салынған әткеншекке отырмақшы болды. Кім қай орындыққа отыратыны туралы таластан кейін, олардың әрқайсысы орындықтардың біреуіне отырмақшы болды. Ол үшін балалардың әрқайсысы неше рет әткеншекке отыруы керек? 1, 2, … , 6 орындарға (a, b, c, d, t, f) балалардың отыру кестесін құрыңдар.

212. Дәмхана мәзірінде 5 көже, 8 қою және 7 тәтті тағам бар. Көжеден, қою және тәтті тағамнан тұратын түскі асты неше тәсілмен таңдап алуға болады?

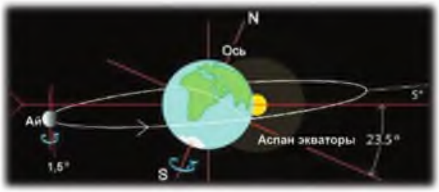
213. Балықшы 5 алабұға, 3 шортан және 4 табан балығын ұстап алды. Әртүрлі екі балықтан сорпа жасау үшін балықтарды неше тәсілмен таңдап алуға болады?

214. Жазылуында: а) 3, 4, 5 цифрларының біреуі бір реттен қолданылатын; ә) тек 1, 2, 6, 7 цифрлары қайталанбай қолданылатын қанша әртүрлі екітаңбалы сан бар болады?

B деңгейі

215. $x + y = 2018$ теңдеуінің: а) натурал сандар болатын; ә) теріс емес бүтін сандар болатын неше шешімі бар?

216. Жердің Күнді айналу жылдамдығы 40 247 км/сағ, ал Айдың Жерді айналу жылдамдығы 8568 км/сағ екені белгілі. Осы жылдамдықтарды өрнектейтін сандарды 2-нің теріс емес бүтін көрсеткішті дәрежелерінің ең аз қосындысы түрінде көрсетіңдер.



Айдың Жерді айналуы

С деңгейі

217. а) Бексұлтанның қара және торы түсті екі жылқысы; қоңыр және сары түсті екі ер-тоқымы; ұзын және қысқа екі өкшетемірі; үлкен және кішірек екі қоржыны бар. Жылқымен саяхат жасау үшін ол неше тәсілмен толық жабдықтала алады? Есепті графты пайдаланып шешіңдер.

ә) 10 000 теңгелік ақшаны 5000, 2000 және 1000 теңгелік ақшамен неше тәсілмен ұсақтауға болады?

ҚЫЗЫҚТЫ ЕСЕПТЕР

1) Құтыда өрмекші мен қоңыз бар, барлығы 50 аяқ. Өрмекшіде 8 аяқ, ал қоңызда 6 аяқ бар екенін ескеріп, құтыдағы өрмекшілер мен қоңыздардың санын анықтаңдар.

2) Матаны 4 бөлікке бөліп, оның бір бөлігін тағы 4 бөлікке бөлді. Алған қиындылардың біреуін тағы 4 бөлікке бөлді және т.с.с. Барлық қиындылардың саны: а) 36; ә) 35 болуы мүмкін бе?

3) Өрнектің мәнін табыңдар:

$2^{11} - 2^{10} - 2^{9} - 2^{8} - 2^{7} - 2^{6} - 2^{5} - 2^{4} - 2^{3} - 2^{2} - 2^{0}$.

4) Туған жылдарыңды 2 санының дәрежелерінің қосындысы түріне келтіріңдер.

5) 10 есіктің 10 кілті бар, бірақ қай кілттің қай есікке келетіні белгісіз. Егер әр есікке тек бір ғана кілт келетін болса, барлық есіктерді ашу үшін қанша рет әрекет етіп көру керек?

8. Қайталанбайтын алмастырулар

Тақырыпты оқу барысында:

• қайталанбайтын алмастырудың, санның факториалының анықтамасын;

• n элементтен алынған алмастырулар санының формуласын;

• комбинаторикалық есептерді шығаруға алмастырулар санының формуласын қолдануды білетін боласыңдар.

1 - е с е п. Арасында бірдей есімдер жоқ 5 оқушының есімдерінің тізімін жасаудың қанша тәсілі бар?

Ш е ш у і. Бірінші орынға бес оқушының кез келген біреуінің есімін, екіншіге қалған төртеуінің бірінің, үшіншіге қалған үшеуінің бірінің, төртіншіге қалған екеуінің бірінің және бесіншіге қалған біреуінің есімін қоюға болады. Көбейту ережесі бойынша бұлай тізім жасау тәсілдерінің барлық саны $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ болады.

Ж а у а б ы. 120 тәсіл.

Бұл есептің шешуі 5 оқушыдан тұратын жиын ішінде белгілі бір тәртіп орнатуға және оларды алмастыру нұсқасының санын табуға байланысты. Элементтерінің орналасу тәртібі орнатылған жиын *реттелген жиын* деп аталады. Реттелген жиындардың мысалы ретінде: кез келген тілдің әліпбиін, сынып оқушыларының тізімін, n натурал сандар тізбегінен тұратын жиынды қарастыруға болады.

*Берілген жиынның барлық элементтерінен тұратын және араларында бірдейі жоқ әртүрлі реттелген жиындар берілген жиын элементтерінің қайталанбайтын **алмастырулары** деп аталады.* n элементтен жасалған алмастырулар санын P_n деп белгілейді (француздың *permutation* сөзінің бірінші әрпімен, «алмастыру» дегенді білдіреді).

n элементтен жасалған алмастырулар санының формуласын қорытып шығарайық.

Бір элементтен тұратын жиынды бір түрде ғана ретке келтіруге болады, бұл элемент бірінші болады, яғни $P_1 = 1$. Екі элементтен тұратын жиынды екі тәсілмен, $P_2 = 2$, үш элементтен тұратын жиынды алты тәсілмен ретке келтіруге болады, $P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Жалпы, $P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. (Бұл көбейтінді үшін арнайы белгілеу $\boldsymbol{n!}$ («эн факториал» деп оқылады) қабылданған.)

Шынымен де, элементтерді біртіндеп таңдап алғанда және оларды белгілі бір ретпен n орынға орналастырғанда, бірінші орынға n элементтің кез келгенін ретпен қоюға болады. Бірінші орынға қойғаннан кейін, екінші орынға қалған $n - 1$ элементті қоюға болады. Бірінші және екінші орындарға қойғаннан кейін үшінші орынға қалған $n - 2$ элементті қоюға болады, тағы сол сияқты. Ең соңында қалған бір орынға соңғы элементті қоямыз. Сонда көбейту ережесі бойынша барлық n орынға элементтерді $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ тәсілмен қоюға болады. Сонымен, $\boldsymbol{P_n = n!}$

Математикада $\mathbf{0! = 1}$ деп есептеу қабылданғанын айта кетелік. Мұндай анықтаманың жөні бар екенін былай түсіндіруге болады. Барлық $n \geq 2$ үшін $n! = (n - 1)! \cdot n$ болады. Егер бұл теңдік $n = 1$ болғанда да орындалсын десек, онда $1 = 0!$ шығады.

2 - е с е п. «Алгоритм» сөзінің барлық әріптерінен жасалған алмастырулар санын табу керек.

Ш е ш у і. Бұл сөзде 8 әріп бар, олардың арасында қайталанатындары жоқ. Ізделінді алмастырулар саны $P_8 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40\,320$.

Ж а у а б ы. 40 320.

3 - е с е п. 5-ке еселік болатындай және әрқайсысында қайталанатын цифрлары болмайтындай етіп 1, 2, 3, 4, 5, 6 сандарынан қанша алтытаңбалы сан құрастыруға болады?

Ш е ш у і. Есептің шартынан ондай сандардың әрқайсысының соңында 5 цифры тұратыны шығады. 1, 2, 3, 4, 6 цифрларын қалған бес орынға кез келген ретпен орналастыруға болады. Демек, ізделінді сан $P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Ж а у а б ы. 120.

4 - е с е п. 0, 1, 2, 3 цифрларынан қайталанатын цифрлары жоқ қанша төрттаңбалы сан құрастыруға болады?

Ш е ш у і. Егер 0-дің орнында басқа цифр болғанда, барлық төрттаңбалы сан $P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ болар еді. 0 цифры бірінші орында тұра алмайтындықтан, берілген цифрлармен жазылған барлық төрттаңбалы сан $P_4 - P_3 = 24 - 6 = 18$ болады.

Ж а у а б ы. 18.

5 - е с е п. Егер жиын элементтерін алмастыру саны 5040-тан кем болса, барлық элементтері әртүрлі болатын жиында ең көп дегенде қанша элемент бар болады?

Ш е ш у і. Есептің шарты бойынша, $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n < 5040$ теңсіздігі орындалатын n-нің ең үлкен мәнін табу керек. $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$ болғандықтан, бұл теңсіздік ақиқат болатын n-нің ең үлкен мәні 6-ға тең болады.

Ж а у а б ы. 6.

СҰРАҚТАР

1. Алмастыру ұғымының анықтамасын беріңдер.
2. Санның факториалы деп нені айтады?
3. n элементтен құралған қайталанбайтын алмастырудың санын қандай формуламен табады?
4. $P_n = n \cdot P_{n-1}$ болатынын дәлелдеңдер.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

218. Үш түсті матаны пайдаланып, үш көлденең жолағы бар қанша үш түсті әртүрлі жалау жасауға болады?

219. Бірінші сынып үшін әртүрлі төрт пәннен бір күнге сабақ кестесін қанша тәсілмен құруға болады?

220. а) «Теңіз»; ә) «жаңбыр» сөзінің барлық әріптерінен жасалған алмастырулар санын табыңдар.

221. 9 оқушыдан тұратын тізімді қанша тәсілмен құруға болады? Ондай тізімді әдетте қалай жасайды?

222. Ұзын орындыққа 11 адамды қанша тәсілмен отырғызуға болады?

223. Пойызда 14 вагон бар. 14 жолсеріктің біреуін әр вагонға қанша тәсілмен бөлуге болады?

224. Есептеңдер: а) $\frac{8!}{6!}$; ә) $\frac{7!}{2!\cdot 4!}$; б) $\frac{9!}{6!\cdot 3!}$; в) $\frac{8!-7!}{6!}$.

225. Жиынның барлық элементтерін алмастыру саны: а) 120-дан; ә) 1000-нан артық болмаса, жиында қанша элемент бар болады?

226. Егер екі команданың ешқайсысы тең ұпай жинамайтын болса, 7 команда турнир кестесінде қанша тәсілмен орналасуы мүмкін?

227. 3, 5, 7, 8, 9 цифрларынан қанша бестаңбалы жұп сан құрастыруға болады?

В деңгейі

228. Теңдеуді шешіңдер: а) $\frac{P_{n-2}}{P_{n-4}} = 90$; ә) $\frac{P_n - P_{n-1}}{P_{n-2}} = 16$.

229. 0, 3, 5, 7, 9 цифрларынан беске еселік болатын қанша бестаңбалы сан құрастыруға болады?

230. $x + y = n$ теңдеуінің қанша натурал сан шешімдері болатынын зерттеңдер, мұндағы $n \in N$.

231. Мектеп концертінде Адинай, Байтас, Вера, Гүлден, Дархан өнер көрсетпекші еді. Егер сахнаға: а) Байтас Адинайдан бұрын шықпайтыны; ә) Гүлден Дарханнан кейін бірден шығатыны белгілі болса, олардың сахнаға шығу тізімін неше тәсілмен құруға болады?

232. Қорапта пішіндері бірдей 7 түрлі түсті және 5 жай қарындаш бар. Қораптан қарамай арасында 2-ден кем емес түрлі түсті және 1-ден кем емес жай қарындаш болуы үшін одан ең аз дегенде неше қарындаш алып шығу керек екенін зерттеңдер.

С деңгейі

233. Қандай да бір үштаңбалы санның квадраты болатын 0, 1 және үш екілік цифрларымен жазылған бестаңбалы сан бола ма, соны зерттеңдер.

234. Кез келген $4n^4 + 1$, мұндағы $n \in N$, түріндегі санның тек $n = 1$ болғанда ғана жай сан болатынын дәлелдеңдер (неміс математигі Х. Гольдбахтың (1690–1764) есебі).

9. Қайталанбайтын орналастырулар

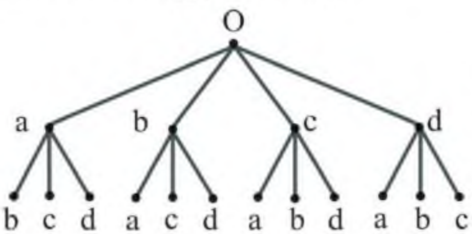
Тақырыпты оқу барысында:

• қайталанбайтын орналастырулардың анықтамасын;

• n элементтен алынған k элементтен құралған қайталанбайтын орналастырулар санының формуласын;

• орналастырулар санының формуласын комбинаторикалық есептерді шығаруға қолдануды білетін боласыңдар.

1 - е с е п. Арасында бірдей элементтері жоқ төрт элементтен тұратын жиыннан әртүрлі екі элементтен тұратын қанша реттелген ішкі жиын құруға болады?



30-сурет

Ш е ш у і. Берілген жиынды $A = \{a, b, c, d\}$ деп белгілейік. Есепті графты пайдаланып шешейік (30-сурет). A жиынынан бірінші элементті төрт тәсілмен таңдап алуға болады. Содан кейін осы төрт элементтің әрқайсысымен үш жұп құруға болады. Демек, сондай жұптардың саны 12-ге тең болады.

Ж а у а б ы. 12.

*Құрамында әртүрлі n элементтер бар жиыннан құралған әртүрлі k элементтерден тұратын реттелген ішкі жиындар n элементті жиыннан k элементтен алынған қайталанбайтын **орналастырулар** деп аталады.* n элементті жиыннан k элементтен алынған орналастырулар саны A_n^k деп белгіленеді (французтың *arrangement* сөзінің бірінші әрпімен, «орналастыру» дегенді білдіреді). Оқылуы: «n элементтен k-дан алынған орналастырулар саны» немесе қысқаша «A n-нен k-дан».

n элементтен k-дан алынған орналастырулар санының формуласын қорытып шығарайық.

Бірінші орынға элементті n тәсілмен таңдап алуға, екіншіге $(n - 1)$ тәсілмен, тағы сол сияқты таңдап алуға болады. k-сыншы элементті

$n-(k-1)$ тәсілмен, яғни $n-k+1$ тәсілмен таңдап алуға болады. Сонда көбейту ережесі бойынша $\boldsymbol{A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}$. Бұл формуланы былай түрлендіруге болады:

$$A_n^k = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\cdot(n-k)\cdot(n-k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Сонымен, $\boldsymbol{A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}}$.

$n=k$ болғанда мынаны аламыз: $A_n^n = \dfrac{n!}{0!} = n!$, яғни $\boldsymbol{A_n^n = P_n}$.

2 - е с е п. Құрамында қайталанатын цифры жоқ әртүрлі төрттаңбалы қанша сан құрастыруға болады?

Ш е ш у і. 10 элементтен 4-уін таңдап алудың әртүрлі тәсілдерінің саны A_{10}^4. Сан 0 цифрынан басталмайтындықтан, ізделінді сан $A_{10}^4 - A_9^3 = 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7 - 9\cdot 8\cdot 7 = 9\cdot 8\cdot 7\cdot(10-1) = 4536$ болады.

Ж а у а б ы. 4536.

3- е с е п . Үш түрлі қызметке үміткерлердің бірнешеуінен барлық мүмкін болатын нұсқалар карастырылды. Олардың саны 120-ға тең болып шықты. Осы қызметтерге қанша үміткер болған?

Ш е ш у і . Есептің шарты бойынша $A_n^3 = 120$, яғни $n\cdot(n-1)(n-2) = 120$. Бұл теңдеудің натурал санмен бір ғана шешімі бар, $n=6$, себебі тек тізбектес үш натурал санның көбейтіндісі $4\cdot 5\cdot 6 = 120$ болады.

Ж а у а б ы. 6.

СҰРАҚТАР

1. n элементті жиыннан k элементтен алынған қайталанбайтын орналастырулар ұғымының анықтамасын беріңдер.

2. n элементтен k-дан алынған орналастырулар санын қандай формуламен табуға болады?

3. $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ формуласын пайдаланып: а) $A_n^0 = 1$; ә) $A_n^1 = n$; б) $A_n^n = P_n$ болатынын дәлелдеңдер.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

235. 4 бос қызмет орнына 9 үміткер қанша тәсілмен қол жеткізе алады?

236. Егер оқылатын пәндер саны 14 және бір күнде бір пәннен екі сабақ жоспарланбаған болса, 5 сабақтан бір күнге сабақ кестесін қанша тәсілмен құруға болады?

237. 100 м қашықтыққа жүгіруге 8 адам қатысты. Оларға бастапқы үш орынды өзара үлестірудің қанша нұсқасы бар?

238. Жүзу үйірмесіне 10 адам қатысады. Олардан 5 адамды жүзудің бес түрінен (әр түріне бір адамнан) жарысқа қатысуға таңдап алудың қанша тәсілі бар?

239. Құрамында қайталанатын цифры жоқ барлығы қанша үштаңбалы сан бар?

240. Дәлелдеңдер: а) $A_{10}^{5} = 6A_{10}^{4}$; ә) $A_{15}^{7} = 15A_{14}^{6}$.

241. Есептеңдер: а) $A_{8}^{3} - A_{7}^{2}$; ә) $P_5 - A_{5}^{2}$; б) $P_7 : A_{7}^{5}$; в) $A_{10}^{5} : A_{9}^{3}$.

242. Әрқайсысында 2 заттан келетін 210 орналастырудан артық болмайтындай әртүрлі заттардың ең көп саны қанша болуы керек?

В деңгейі

243. Теңдеуді шешіңдер: а) $\dfrac{P_{n+2}}{A_n^5 \cdot P_{n-3}} = 21$; ә) $\dfrac{P_{n+5}}{A_{n+3}^{k+3} \cdot P_{n-k}} = 240$.

244. Функцияның анықталу облысы мен мәндер жиынын табыңдар:
а) $f(x) = A_{8-x}^{x-4}$;   ә) $f(x) = A_{25-x^2}^{x-2}$.

245. Бірнеше адамнан комиссия төрағасын, орынбасарын және хатшысын таңдағанда барлық мүмкін болатын нұсқалардың саны 3360 болды. Бұл комиссия неше үміткерден таңдап алынған?

246. Сөз әртүрлі әріптерден тұрады. Егер одан әртүрлі 4 әріптен алынған орналастырулар саны 840-қа тең болса, сөзде неше әріп болғаны?

247. Сыныптағы 25 оқушының 15-і тенниспен, 14-і жеңіл атлетикамен, 7-і осы спорттың екі түрімен де, ал қалғаны жүзумен айналысады. Неше оқушы жүзумен айналысады?

С деңгейі

248. Жазылуында барлық цифрлары әртүрлі болатын 1000-нан кем неше натурал сан бар?

249. Жәшікте пішіндері бірдей 6 жұп қара және 6 жұп қоңыр туфли бар. Жәшіктен қарамай, арасында түстері бірдей ең болмағанда бір жұп туфли болуы үшін одан ең аз дегенде қанша туфли алып шығу керек?

250. Әртүрлі әріптер әртүрлі сандарды белгілейтін сандық ребусты шешіңдер:
а) $(КА)^К = ИКС$; ә) $Н^Н = ИКС$.

ҚЫЗЫҚТЫ ЕСЕПТЕР

1) Плюс және факториал таңбаларын, 1 және 4 сандары мен жақшаларды ғана пайдаланып, 144 санын жазыңдар.

2) Залда 28 қатар бар, әр қатарда 32 орындықтан. Бірінші қатардан бастап, барлық орындықтардың нөмірлері жазылған. 375-орын қай қатарда орналасқан?

3) Қорапта түстері әртүрлі 70 шар бар. 20-сы – қызыл, 20 – көк, 20 – сары, қалғандары – ақ және жасыл түсті. Қораптан қарамай бір түсті 10-нан кем емес шарды алу үшін барлығы қанша шар алып шығу керек?

4) Қандай төрт тізбектес натурал санның көбейтіндісі 3024-ке тең?

10. Қайталанбайтын терулер

Тақырыпты оқу барысында:
• қайталанбайтын терулердің анықтамасын білетін боласыңдар;
• n элементті жиыннан k элементтен алынған қайталанбайтын терулердің санын табу формуласын білетін боласыңдар;
• n элементті жиыннан k элементтен алынған терулердің негізгі қасиеттерін білетін боласыңдар;
• n элементті жиыннан k элементтен алынған терулер санының формуласын және олардың қасиеттерін комбинаторикалық есептер шығаруға қолдануды үйренесіңдер.

1 - е с е п. Арасында бірдей элементтері жоқ төрт элементті жиыннан әртүрлі үш элементтен тұратын қанша ішкі жиын құрастыруға болады?

Ш е ш у і. Берілген жиынды $A = \{a, b, c, d\}$ деп белгілеп, көрсетілген барлық ішкі жиындарды құрастырайық: $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$. Барлығы төртеу.

Ж а у а б ы. 4.

Әртүрлі n элементтен тұратын жиыннан құрастырылған әртүрлі k элементтен тұратын ішкі жиындар, n элементтен алынған k элементтен құралған қайталанбайтын ***терулер*** *деп аталады.* n элементтен алынған k элементтен құралған терулер саны C_n^k деп белгіленеді (француздың *combinasion* сөзінің бірінші әрпімен, «теру» дегенді білдіреді). «n элементтен k-дан терулер саны» немесе «C n-нен k-дан» деп оқылады.

n элементтен k-дан терулер санының формуласын қорытып шығарайық.

k элементтен тұратын барлық мүмкін болатын ішкі жиындар саны C_n^k-ға тең. Сондай ішкі жиындардың әрқайсысының элементтерін алмастыру арқылы саны A_n^k-ға тең болатын барлық реттелген ішкі жиындар құруға болады. Бұл сан C_n^k-дан $k!$ есе үлкен, себебі k элементтен тұратын әрбір жиынды $k!$ тәсілмен ретке келтіруге болады.

Демек, $\boldsymbol{C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k!)\cdot k!}}$. Бұл формуланы $(n-k)!$-ға қысқарту арқылы былай жазуға болады:

$$\boldsymbol{C_n^k = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}}.$$

$C_n^n = 1$ болатынын айта кетелік. Математикада $C_n^0 = 1$ деп есептеу де қабылданған.

C_n^k санының әртүрлі қасиеттері бар. Солардың екеуін қарастырайық.

1) $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Шынымен де, $C_n^{n-k} = \dfrac{n!}{(n-(n-k))!\cdot(n-k)!} = \dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = C_n^k$.

2) $C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k$.

Шынымен де, $C_n^{k+1} + C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k-1)!\cdot(k+1)!} + \dfrac{n!}{(n-k)!\cdot k!} =$

$= \dfrac{n!}{(n-k)!\cdot(k+1)!}\cdot\left(\dfrac{n-k}{1} + \dfrac{k+1}{1}\right) = \dfrac{(n+1)!}{(n+1-(k+1))!\cdot(k+1)!} = C_{n+1}^{k+1}$.

2 - е с е п. Бір қатарға 5 ұл мен 4 қызды қыздар қатар тұрмайтындай етіп, қанша тәсілмен орналастыруға болады?

Ш е ш у і. Есептің шарты орындалуы үшін қыздарды 6 орынға: 4 орын – ұлдардың арасына, 1 орын олардың алдында және 1 орын олардан соң орналастыруға болады. Демек, ізделінді сан $C_6^4 = \dfrac{6!}{4!\cdot 2!} = \dfrac{6\cdot 5}{1\cdot 2} = 15$.

Ж а у а б ы. 15.

3 - е с е п. $C_5^{x-1} = 2C_5^x$ теңдігі ақиқат болатындай x-тің барлық мәндерін табу керек.

Ш е ш у і. Есептің шарты бойынша

$\dfrac{5!}{(5-x+1)!\cdot(x-1)!} = \dfrac{2\cdot 5!}{(5-x)!\cdot x!}$, мұндағы $x\in N$, $1 \le x \le 5$. Бұдан

$\dfrac{1}{(5-x+1)\cdot(5-x)!\cdot(x-1)!} = \dfrac{2}{(5-x)!\cdot x\cdot(x-1)!}$. Теңдеудің сол жағы мен оң жағын нөлге тең емес $(5-x)!\cdot(x-1)!$ өрнегіне көбейтіп, $\dfrac{1}{6-x} = \dfrac{2}{x}$ аламыз, бұдан $x = 4$ шығады.

Ж а у а б ы. Теңдік $x = 4$ болғанда ақиқат болады.

4 - е с е п. Футболдан ел чемпионатында 306 матч ойналды және әрбір команда әрқайсысымен екі ойыннан ойнады. Чемпионатқа неше команда қатысқан?

Ш е ш у і. Командалар санын n деп белгілейік. Есептің шарты бойынша $2 \cdot C_n^2 = 306$. Сонда мынадай теңдеу аламыз: $n \cdot (n-1) = 306$. Бұдан $n = 18$ шығады. (Мұны өздігінен есептеңдер.)

Ж а у а б ы. 18.

СҰРАҚТАР

1. n элементтен k-дан құралған қайталанбайтын терулер ұғымының анықтамасын беріңдер.

2. n элементтен k-дан құралған терулер санын қандай формуламен табуға болады?

3. а) $C_n^k = \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1}$; ә) $C_n^k = \frac{n-k+1}{k} C_n^{k-1}$ болатынын дәлелдеңдер.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

251. 5 қызметкерге бірдей үш сыйақы бөлінді. Қызметкерлерді сыйақымен марапаттаудың қанша тәсілі бар?

252. Эстафеталық 4×100 м жүгіріске қатысушыларды кезеңдерге бөлу тәртібін ескермей, 7 спортшыдан тұратын команданы қанша тәсілмен құруға болады?

253. Сыныпта 20 оқушы бар. Олардың ішінен кезекшілікке екі оқушыны неше тәсілмен таңдап алуға болады?

254. Жазыңқы бұрыштың төбесінен оның ішінде жататын 8 сәуле жүргізілді. Сонда жазыңқы бұрыштан үлкен болмайтын қанша бұрыш пайда болды?

255. Теңдік ақиқат па: а) $C_6^5 = \frac{6}{5} C_5^4$; ә) $\frac{6}{5} C_5^4 = C_5^4 + C_5^5$?

256. Теңдіктің ақиқат екенін дәлелдеңдер: а) $C_{25}^{23} = C_{25}^2$; ә) $C_{32}^{27} = C_{32}^5$; б) $C_7^1 + C_7^3 + C_7^5 = C_7^2 + C_7^4 + C_7^6$; в) $C_{10}^8 = C_9^8 + C_9^7$.

257. Есептеңдер: а) $C_{16}^4 - 5C_{11}^8$; ә) $C_{20}^{17} - 3C_{24}^{22}$; б) $C_4^0 + C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4$; в) $C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5$.

258. Теңдеуді шешіңдер: $C_n^2 + n = 6$.

259. n-нің қандай мәндерінде теңдік ақиқат болады: $C_3^n + 3n = 9$?

260. Шеңбер бойында тізбектей 12 нүкте белгіленген. а) Ұштары осы нүктелерде болатын хордалардың; ә) төбелері осы нүктелерде болатын үшбұрыштардың санын табыңдар.

261. AB кесіндісіне C, D, E, F, K ішкі нүктелерін белгілеңдер. Суретте барлығы неше кесінді пайда болды?

262. «Спортлото» ойынында 45-тен 6 нөмір таңдап алынады. Осы нөмірлерді таңдап алудың қанша нұсқасы бар?

263. Үшбұрыштың бір төбесінен оның қабырғасын қиып өтетін 4 сәуле жүргізілген. Сонда қанша үшбұрыш пайда болды?

264. Ұзындықтары (см-мен): а) 4, 5, 6, 7; ә) 2, 3, 4, 5 болатын кесінділерден қанша әртүрлі қабырғалы үшбұрыш құрастыруға болады?

265. Бастапқы 8 жай саннан алымы мен бөлімі жай сан болатындай қанша әртүрлі дұрыс жай бөлшек құрастыруға болады?

B деңгейі

266. Теңдеуді шешіңдер:

а) $3C_{n+1}^3 = (n+1)C_n^2$; б) $3C_n^3 = 2C_n^5$;

ә) $C_n^3 + C_n^2 = 15(n-1)$; в) $\frac{1}{C_4^k} - \frac{1}{C_5^k} = \frac{1}{C_6^k}$.

267. Функцияның анықталу облысы мен мәндер жиынын табыңдар:

а) $f(x) = C_{x+1}^{4-x}$; ә) $f(x) = C_{3x-5}^{3-x}$.

268. Теңсіздік ақиқат болатындай n-нің барлық мәндерін табыңдар:

а) $C_n^5 < C_n^3$; ә) $C_4^{n-1} > 2C_4^n$.

C деңгейі

269. Натурал n санын біріншісі 1 болатын үш натурал санның қосындысы түрінде қанша тәсілмен көрсетуге болатынын зерттеңдер. n тақ сан, жұп сан болатын жағдайларды қарастырыңдар.

270. Сатып алушы бірнеше заттың ішінен 4 затты сатып алудың барлық мүмкін болатын нұсқаларын қарастыруды шешті. Ол үшін сатушы 105-тен артық болмайтын нұсқаларды қарау керек болатынын айтты. Ең көп дегенде қанша зат болуы мүмкін?

271. Теңдеулер жүйесін шешіңдер: $\begin{cases} C_{n+1}^{k+1} = C_{n+1}^k, \\ 3C_{n+1}^k = 5C_{n+1}^{k-1}. \end{cases}$

11. Ньютон биномы және оның қасиеттері

Тақырыпты оқу барысында:

• Ньютон биномының формуласы мен оның қасиеттерін білетін боласыңдар;

• Ньютон биномының формуласын екімүшені натурал көрсеткішті дәрежеге шығаруға, жуық мәндерді есептеуге және өрнектердің мәндерін салыстыруға қолдануды үйренесіңдер.

Сендерге мына формулалар жақсы таныс:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Мына формулаларды алу да қиын емес: $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ және $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$. (Оларды өздігінен қорытып шығарыңдар.) C_n^k сандарын пайдаланып, бұл формулаларды былай жазуға болады:

$(a+b)^2 = C_2^0a^2 + C_2^1ab + C_2^2b^2,$

$(a+b)^3 = C_3^0a^3 + C_3^1a^2b + C_3^2ab^2 + C_3^3b^3,$

$(a+b)^4 = C_4^0a^4 + C_4^1a^3b + C_4^2a^2b^2 + C_4^3ab^3 + C_4^4b^4,$

$(a+b)^5 = C_5^0a^5 + C_5^1a^4b + C_5^2a^3b^2 + C_5^3a^2b^3 + C_5^4ab^4 + C_5^5b^5.$

Енді $(a+b)^3$ формуласын пайдаланып, $(a+b)^4$ жіктелуіндегі C_n^k сандарын қалай алуға болатынына көңіл аударайық.

$(a+b)^4 = (a+b)^3(a+b) = (C_3^0a^3 + C_3^1a^2b + C_3^2ab^2 + C_3^3b^3)(a+b) =$
$= C_3^0a^4 + C_3^1a^3b + C_3^2a^2b^2 + C_3^3ab^3 + C_3^0a^3b + C_3^1a^2b^2 + C_3^2ab^3 + C_3^3b^4 =$
$= C_3^0a^4 + (C_3^1 + C_3^0)a^3b + (C_3^2 + C_3^1)a^2b^2 + (C_3^3 + C_3^2)ab^3 + C_3^3b^4.$

$C_3^0 = C_4^0$, $C_3^1 + C_3^0 = C_4^1$, $C_3^2 + C_3^1 = C_4^2$, $C_3^3 + C_3^2 = C_4^3$, $C_3^3 = C_4^4$ болатынын ескере отырып, $(a+b)^4 = C_4^0a^4 + C_4^1a^3b + C_4^2a^2b^2 + C_4^3ab^3 + C_4^4b^4$ аламыз.

Жалпы, кез келген n саны үшін

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^n = \boldsymbol{C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b + \ldots + C_n^ka^{n-k}b^k + \ldots + C_n^nb^n}$$

формуласы ақиқат болады.

Бұл формула қысқаша **Ньютон биномы** деп, оны зерттеп кез келген $n \in R$ үшін қолданған атақты ағылшын математигі әрі физигі

И. Ньютонның (1643–1727) құрметіне аталған. $C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^n$ сандары **биномдық коэффициенттер** деп аталады.

Осы тепе-теңдіктің оң жағында $n + 1$ қосылғыш бар, олардың әрқайсысын *бином жіктеуінің мүшелері* деп атайды және $C_n^k a^{n-k} b^k$ түрінде көрсетуге болады. a мен b-ның дәреже көрсеткіштері, сәйкесінше, n-нен 0-ге және 0-ден n-ге дейін өзгереді. Сонда бином жіктеуінің әрбір мүшесіндегі a^{n-k} мен b^k дәрежелері көрсеткіштерінің қосындысы n-ге тең болады.

Егер Ньютон биномы формуласында $a = 1$, $b = -1$ деп алсақ, онда $0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots (-1)^n C_n^n$ болады, бұдан $\boldsymbol{C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots =}$ $\boldsymbol{= C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots}$ шығады. Яғни, $(a + b)^n$ жіктеуіндегі тақ орындарда тұрған биномдық коэффициенттердің қосындысы оның жұп орындарда тұрған биномдық коэффициенттерінің қосындысына тең болады екен.

Егер Ньютон биномы формуласына $a = b = 1$ деп қойсақ, онда

$$\boldsymbol{C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^k + \ldots + C_n^n = 2^n} \text{ шығады.}$$

Бұл формуладан n элементтен тұратын жиынның барлық ішкі жиындарының саны 2^n-ге тең болатыны шығады. Биномдық коэффициенттерді келесі үшбұрышты кесте түрінде орналастыруға болады:

$$\begin{array}{c} C_1^0 \\ C_1^0 \; C_1^1 \\ C_2^0 \; C_2^1 \; C_2^2 \\ C_3^0 \; C_3^1 \; C_3^2 \; C_3^3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_n^0 \; C_n^1 \; \ldots \; C_n^{n-1} \; C_n^n \end{array}$$

Бұл кестені математикада үлкен жаңалықтар ашқан француз математигінің атымен *Паскаль үшбұрышы* деп атайды.

Терулердің қасиеттерін ескере отырып, биномдық коэффициенттердің келесі арақатынастармен байланысатынын айта кетелік: 1) $C_n^k = C_n^{n-k}$, 2) $C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k$. Бұл арақатынастардан шығатыны: 1) жіктеудің басы мен соңынан бірдей қашықтықтағы биномдық коэффициенттер тең; 2) Паскаль үшбұрышында кестенің қандай да бір жолындағы биномдық коэффициент оның алдындағы жолда одан оңға және солға қарай орналасқан екі биномдық коэффициенттердің қосындысына тең болады. Осы қатыстар n-нің берілген мәндері үшін үшбұрышты оңай құруға мүмкіндік береді. Мысалы, барлық $n \leq 9$ мәндері үшін Паскаль үшбұрышы мынадай болады:

n	$(a+b)^n$ жіктеуінің биномдық коэффициенттері
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1
7	1 7 21 35 35 21 7 1
8	1 8 28 56 70 56 28 8 1
9	1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

Паскаль үшбұрышын пайдаланып, биномдық коэффициенттерді есептеуге және Ньютон биномын пайдаланып, әртүрлі есептерді шығаруға болады. Мысалы,

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6.$$

$b = 1$ болғанда, Ньютон биномының формуласы мына түрге келеді:

$$(1+a)^n = 1 + C_n^1 a + C_n^2 a^2 + \ldots + C_n^n a^n.$$

Егер a-ның мәні өте аз болса, онда үшіншіден бастап барлық қосылғыштар да өте аз болады. Оларды алып тастап, жуықтап есептеу формуласын аламыз: $(1+a)^n \approx 1 + na$. Осы формула бойынша, мысалы,

$$1{,}04^4 = (1+0{,}04)^4 \approx 1 + 4 \cdot 0{,}04 = 1{,}16;$$
$$0{,}98^5 = (1-0{,}02)^5 \approx 1 - 5 \cdot 0{,}02 = 0{,}9.$$

1 - м ы с а л. n-нің қандай мәнінде $(1+x)^n$ биномы жіктеуіндегі бесінші коэффициент оның тоғызыншы коэффициентіне тең болады?

Ш е ш у і. Есептің шарты бойынша $C_n^4 = C_n^8$ теңдігі орындалуы керек. Терудің қасиеті бойынша $C_n^8 = C_n^{n-8}$, демек, $C_n^4 = C_n^{n-8}$, $n - 8 = 4$, $n = 12$.

Ж а у а б ы. $n = 12$ болғанда.

2 - мысал. $(a + b)^n$ жіктеуіндегі екі көршілес биномдық коэффициенттердің қатынасы $\frac{7}{15}$-ге тең болатындай n-нің ең кіші мәнін табу керек.

Шешуі. Есептің шарты бойынша $C_n^k : C_n^{k+1} = \frac{7}{15}$, яғни $\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!} : \frac{n!}{(n-(k+1))!\cdot(k+1)!} = \frac{7}{15}$. Бұдан мынаны аламыз: $\frac{k+1}{n-k} = \frac{7}{15}$, $7n - 7k = 15k + 15$, $n = \frac{22k+15}{7} = \frac{21k+14+k+1}{7} = 3k+2+$ $+\frac{k+1}{7}$.

n-нің ең кіші мәні $k = 6$ болғанда, 21-ге тең болады.

Жауабы. 21.

3 - есеп. Қайсысы үлкен: 11^{10} немесе 10^{11}?

Шешуі. $\frac{11^{10}}{10^{11}}$ бөлшегін 1-мен салыстырайық.

$$\frac{11^{10}}{10^{11}} = \frac{(10+1)^{10}}{10\cdot 10^{10}} = \frac{1}{10}\cdot\left(\frac{10+1}{10}\right)^{10} = \frac{1}{10}\cdot\left(1+\frac{1}{10}\right)^{10} = \frac{1}{10}\cdot\left(\left(1+\frac{1}{10}\right)^5\right)^2 =$$
$$= \frac{1}{10}\cdot\left(1+5\cdot\frac{1}{10}+10\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^2+10\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^3+5\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^4+\left(\frac{1}{10}\right)^5\right)^2 = \frac{1}{10}\times$$
$$\times\left(1+\frac{5}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{5}{10000}+\frac{1}{100000}\right)^2 < \frac{1}{10}\left(1+\frac{5}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{10}\right)^2 < 1, \text{ себебі } \left(1+\frac{5}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}\right)^2 = 1{,}9^2 = 3{,}61.$$

Демек, $11^{10} < 10^{11}$.

Жауабы. $10^{11} > 11^{10}$.

Есеп. n шамы бар үй-жайды қанша тәсілмен жарықтандыруға болады?

Шешуі. Барлық мүмкін нұсқаларды қарастырайық. Ешбір шам жанбауы мүмкін, ондай тәсілдер $C_n^0 = 1$. Бір ғана шам жануы мүмкін, ондай тәсілдер C_n^1, тағы сол сияқты. Сондай-ақ, барлық шам жануы мүмкін, ондай тәсілдер C_n^n. Сонымен, жарықтандырудың барлық тәсілдері $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^k + ... + C_n^n = 2^n$.

Жауабы. 2^n.

СҰРАҚТАР

1. Ньютон биномы дегеніміз не?
2. Биномдық коэффициенттердің қандай қасиеттерін білесіңдер?

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

272. Бином жіктеулерін жазыңдар: а) $(a+1)^6$; ә) $(1-b)^7$.

273. Жіктеудің ең үлкен биномдық коэффициентін табыңдар:
а) $(m+n)^8$; ә) $(x+y)^7$.

274. Көпмүшені дәреже түрінде жазыңдар:
а) $x^6+6x^5 2+15x^4 2^2+20x^3 2^3+15x^2 2^4+6x 2^5+2^6$;
ә) $3^5-5\cdot 3^4 y+10\cdot 3^3 y^2-10\cdot 3^2 y^3+5\cdot 3y^4-y^5$.

275. Бином жіктеуінде қанша қосылғыш бар:
а) $(a-b)^{10}$; ә) $(x+y)^k$?

276. $(a-b)^{36}$ жіктелуінің 25-мүшесіндегі айнымалылардың дәреже көрсеткіштерінің қосындысы қандай?

277. $(x+y)^{12}$ жіктелуінің төртінші биномдық коэффициенті p-ға тең. Осы биномның жіктелуінде дәл осындай коэффициенті бар тағы бір мүшесінің нөмірін көрсетіңдер.

278. Жіктеудің биномдық коэффициенттерінің қосындысын табыңдар:
а) $(c+1)^{10}$; ә) $(x+y)^{11}$.

279. Егер: а) $n=50$; ә) $n=101$ болса, $(x+y)^n$ биномы жіктелуінің ең үлкен биномдық коэффициенті бар мүшесінің нөмірін көрсетіңдер.

280. Бином жіктелуінің айнымалысыз мүшесінің нөмірін көрсетіңдер:
а) $(x+x^{-1})^6$; ә) $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^4$.

281. Теңдік ақиқат па:
а) $(\sqrt{2}+1)^4=17+12\sqrt{2}$; ә) $(\sqrt{2}-1)^4=17-12\sqrt{2}$?

282. Өрнектің жуық мәнін 0,01-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар:
а) $1{,}01^5$; б) $1{,}03^8$;
ә) $0{,}99^4$; в) $0{,}95^7$.

283. 6 шамы бар бөлмені жарықтандырудың неше тәсілі бар?

В деңгейі

284. $\left(1+\frac{1}{5}\right)^5$ өрнегінің мәнін: а) 2; ә) 3 санымен салыстырыңдар.

285. Есептеңдер: а) $(\sqrt{5}+\sqrt{2})^5$; ә) $(\sqrt{3}-1)^6$.

286. а) $(a-b)^7$ бином жіктелуінің бесінші мүшесін; ә) $(a^2+1)^{12}$ бином жіктелуінің төртінші мүшесін; б) $(a+b)^{2020}$ бином жіктелуінің үшінші мүшесін жазыңдар.

287. $(1+x)^n$ бином жіктелуінің: а) үшінші биномдық коэффициенті 28-ге; ә) үшінші биномдық коэффициентінің екіншісіне қатынасы 5,5-ке тең болса, оның бесінші биномдық коэффициентін табыңдар.

288. $2^n > n$ теңсіздігі кез келген $n \in N$ үшін ақиқат па? $(1+1)^n$ бином жіктелуін пайдаланып, жауабын түсіндіріңдер.

С деңгейі

289. $(a+b)^n$ жіктелуіндегі қайсыбір биномдық коэффициент: а) бастапқы бес натурал санның қосындысына; ә) бастапқы бес натурал санның көбейтіндісіне тең бола ма, соны зерттеңдер.

290. $(a+b)^n$ жіктелуіндегі үшінші биномдық коэффициент екінші мен төртінші биномдық коэффициенттердің арифметикалық ортасына тең болатындай n-нің мәні бар бола ма, соны зерттеңдер.

291. Қайсысы үлкен: 9^7+10^7 немесе 11^7?

292. Кез келген $n \in N$ мәнінде $2^n > \frac{n^2}{2}$ теңсіздігінің ақиқат болатынына көз жеткізіңдер.

12. «Комбинаторика элементтері» бөлімін қайталауға арналған жаттығулар

А деңгейі

293. Виктор, Тарас, Лейла, Дариға, Саят шахмат сайысына қатысады. Онда қатысушылар бір-бірімен тек бір партия ойнайды. Виктордың 4 партия ойнағаны, Тарас пен Лейла – екі партиядан, ал Дариға мен Саят бір партиядан ойнағаны белгілі болса, Лейла кіммен ойнаған? Есепті графты пайдаланып шешіңдер.

294. 2018 санының цифрларын алмастыру нәтижесінде қанша сан пайда болады?

295. Теңдік ақиқат па:

а) $P_3 + P_2 = P_5$; б) $\frac{P_8 - P_7}{P_6} = 49$;

ә) $\frac{P_8 - P_7}{P_6} = \frac{P_1}{P_6}$; в) $\frac{P_k - P_{k-1}}{P_{k-2}} = (k-1)^2$?

296. 1, 2, 3 цифрларынан құрастыруға болатын және цифрлары қайталанбайтын барлық үштаңбалы сандардың қосындысын табыңдар.

297. Келесі есептерді шығарғанда қайсысына теруді, ал қайсысына орналастыруды қолданады және неге? Топта 12 оқушы бар. Олардан екі кезекшіні: а) міндеттері бірдей; ә) біреуі аға кезекші болатындай неше тәсілмен таңдап алуға болады?

298. Бөлшекті қысқартыңдар: а) $\frac{A_5^2}{3!}$; ә) $\frac{A_6^3}{4!}$; б) $\frac{A_{n+1}^3}{A_n^2}$; в) $\frac{A_{n+3}^3}{A_{n+1}^2}$.

299. Баскетбол ойнауға бастапқы команда құрамын (5 адам) 9 адамнан неше тәсілмен таңдап алуға болады?

300. Жиынтық бағалау үшін әртүрлі 10 есептен 5 тапсырмадан таңдап алынады. Тапсырмалардан қанша әртүрлі нұсқалар құруға болады?

301. Шеңберге 5 нүкте белгіленген. Төбелері осы нүктелерде болатын қанша дөңес көпбұрыш бар болады?

302. Дөңес жетібұрыштың қанша диагоналі бар?

В деңгейі

303. 0, 3, 4, 5 цифрларынан құрамында бірдей цифрлары болмайтын барлық тақ сандар құрастырылған. Қанша тақ сан шықты?

304. Қазақстанның Ақсу-Жабағылы көне қорығының Қасқабұлақ шатқалындағы тастарда көптеген көне суреттер сақталған.

Қасқабұлақ шатқалы. Тастағы суреттер

а) 21 қызметкерге I, II және III сыйақыны үлестірудің барлық мүмкін болатын тәсілдерінің төрттен бір бөлігін табыңдар, сонда тастағы суреттердің саны қанша екенін білетін боласыңдар.

ә) Шыққан нәтижеден сегіз кітаптан 4 кітапты таңдап алудың барлық мүмкін болатын тәсілдер санын азайтыңдар, сонда осы қорықтың құрылған жылының алдындағы жылды табасыңдар.

305. Жазылуында: а) 0, 2, 9; ә) 1, 2, 9 цифрларының бірде-біреуі болмайтын қанша әртүрлі екітаңбалы сан бар болады?

306. Теңдеуді шешіңдер:
а) $A_n^5 = 18A_{n-2}^4$; ә) $A_{2n}^3 = 12A_n^3$; б) $14C_{n+1}^{n-1} = A_{n+1}^3$.

307. Өрнектің мәнін табыңдар: $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^5 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^5$.

С деңгейі

308. а) p^n, мұндағы p – жай сан; ә) 1 000 000 санының бөлгіштерінің санын табыңдар.

309. Егер үштаңбалы $\overline{abc}$ саны 37-ге бөлінсе, онда $\overline{bca}$ саны да 37-ге бөлінетінін дәлелдеңдер.

310. $A_n^3 \le 1320$ теңсіздігі ақиқат болатын n-нің ең үлкен мәнін табыңдар.

311. а) Дөңес көпбұрыштар: төртбұрыш, бесбұрыш және n-бұрыш салынған, мұндағы $n > 5$. Осы көпбұрыштардың диагональдарының қосындысына тең сан 100-ден артық емес болып шықты.

n-бұрыштың қабырғаларының ең аз және ең көп саны қандай болуы мүмкін?

ә) Тиіндер тең етіп жаңғақтар жинады және жаңғақтар саны тиіндер санынан артық болды. Оларды ағаш қуысына тасығанда әрбір тиін басқа әрбір тиінге түсіп қалған бір-бір жаңғақтан беріп отырды. Егер барлық тиіндер сақтау орнына 33 жаңғақ әкелген болса, әрқайсысы қанша жаңғақтан жинаған?

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

312. 1A) Пішімдері бірдей әртүрлі жеті дәптер мен олардың бес тысқабы берілген. Олардан бір тысқабымен дәптерді қанша тәсілмен таңдап алуға болады?

2A) 5 көкшіл шар мен 4 сарғыш шар берілген. Осы шарларды қанша тәсілмен көкшіл шарлар қатар тұрмайтындай етіп бір қатарға қоюға болады?

3A) Әртүрлі 12 пәннің әртүрлі 5 пәнінен бір күнге арнап қанша сабақ кестесін құруға болады?

4B) Теңдеуді шешіңдер: $4C_n^4 = 15A_n^2$.

5C) Өрнектің мәнін табыңдар: $\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^6+\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^6$.

БҰЛ ҚЫЗЫҚТЫ!

Блез Паскаль

Комбинаториканың көптеген элементтері ерте заманнан, мысалы, Қытай мен Үндістанда белгілі болған. Үнділіктер жиынның қазіргі кезде былай жазылатын: $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^k + ... + C_n^n = 2^n$ барлық ішкі жиындарының санын табуды білген.

Үнділік ғалым Бхаскари-акария (XII ғ.) теру мен алмастырудың кейбір түрлерін есептеген. Биномдық коэффициенттер кестесі (Паскаль үшбұрышы) Орта Азиялық ғалымдарға белгілі болған. Мысалы, оқымысты, ақын Омар Хайям (1048–1131) n-нің кейбір бастапқы мәндерінің кестесін білген. Комбинаторика ғылым ретінде XVI ғасырда ғана итальяндық оқымыстылар Н. Тарталь (1499–1557), Дж. Кардано (1501–1576), Г. Галилей (1564–1642) және француз ғалымдары П. Ферма (1601–1665) мен Б. Паскальдің (1623–1662) ғылыми еңбектерінің арқасында дами бастады.

Леонард Эйлер

«Комбинаторика» термині 1666 жылы неміс математигі Г. Лейбниц (1646–1716) «Комбинаторика өнері туралы ой-толғау» атты ғылыми еңбегін жариялағаннан кейін ғана қолданыла бастады. Онда алғаш рет терулер мен алмастырулар теориясы баяндалған болатын. Комбинаториканы дамытуда швейцар математигі Л. Эйлер (1707–1783) үлкен жетістіктерге жетті.

Ғаламтордан:

1) Б. Паскальдің өмірбаяны және оның комбинаторика саласындағы жетістіктері туралы мәліметтерді;

2) Л. Эйлердің өмірбаяны, оның Кенигсберг көпірі туралы атақты есебі мен оның шешуі туралы мәліметтерді;

3) $(a+b)^n$ биномы жіктелуінің формуласын алғаш ашқан ғалымдар туралы мәліметтерді табыңдар.

III. ТІЗБЕКТЕР

Бөлімді оқу нәтижесінде

- сандық тізбектің, арифметикалық және геометриялық прогрессиялардың анықтамаларын;
- сандық тізбектің берілу тәсілдерін;
- шексіз кемімелі геометриялық прогрессия ұғымын;
- арифметикалық және геометриялық прогрессиялардың n-ші мүшесін, арифметикалық және геометриялық прогрессиялардың алғашқы n мүшесінің қосындысын, шексіз кемімелі геометриялық прогрессия мүшелерінің қосындысын есептеу формулаларын;
- математикалық индукция әдісінің мәнін **білу керек**.

- тізбектердің, оның ішінде арифметикалық және геометриялық прогрессиялардың n-ші мүшелерін таба алу;
- арифметикалық және геометриялық прогрессиялардың n-ші мүшелерін, арифметикалық және геометриялық прогрессиялардың n мүшелері қосындысының, шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның мүшелері қосындысының формулаларын, соның ішінде мәтінді есептер шығаруда қолдана алу;
- математикалық индукция әдісін есептер шығаруда қолдана **алу керек**.

13. Сандық тізбек, оның берілу тәсілдері және қасиеттері

Тақырыпты оқу барысында:

• ақырлы және шексіз сандық тізбектердің анықтамасын, өспелі және кемімелі тізбектер түсінігін, тізбектердің берілу тәсілдерін білесіңдер;
• тізбектің n-ші мүшесін табуды, әртүрлі тәсілдермен берілген сандық тізбектердің қасиеттерін нақтылауды үйренесіңдер.

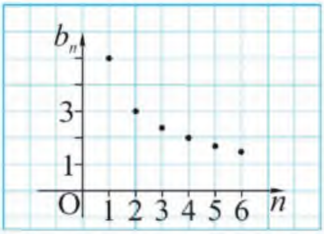
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 сандар қатарын қарастырайық. Осы сандардың әрқайсысына оның квадратын сәйкестендіріп, алғашқы жеті натурал сан квадраттарының ақырлы тізбегін 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 аламыз. Енді әрбір натурал санға оған кері санды сәйкестендіріп, шексіз сандық тізбекті: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ аламыз. Егер әрбір натурал санға қандай да бір нақты сан сәйкес келетіндей ереже бар болса, онда $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ сандық тізбек берілген дейді. Әрбір a_n санын *тізбектің мүшесі* деп, ал n-ді оның нөмірі деп атайды. Тізбектің мүшелері латын әліпбиінің кез келген кіші әрпімен белгіленуі мүмкін, мысалы, $b_1, b_2, \ldots, b_n$, немесе $c_1, c_2, \ldots, c_n$ т.с.с. Мүшелері a_n болатын тізбекті (a_n) деп белгілейді.

Сандық тізбек *деп анықталу облысы алғашқы n натурал сандар жиыны немесе барлық натурал сандар жиыны болатын функция аталады.* Алғашқы n натурал сандар жиынында берілген сандар тізбегі *ақырлы*, ал барлық натурал сандар жиынында берілген сандар тізбегі *шексіз* тізбек деп аталады.

Сандық тізбек функция сияқты формуламен, кестемен, графикпен және баяндалып та берілуі мүмкін. Сандық тізбек көбіне оның n-ші мүшесінің формуласын көрсету арқылы беріледі. Мысалы, натурал тақ сандар квадраттарының тізбегі $a_n = (2n - 1)^2$ формуласымен беріледі, мұндағы $n \in N$. Бұл формуламен осы тізбектің кез келген мүшесін табуға болады, мысалы, $a_1 = 1, a_2 = 9, \ldots, a_5 = 81, \ldots$.

1 - м ы с а л. (b_n) сандық тізбегі кесте арқылы берілген. Осы тізбектің графигін салып, оның n-ші мүшесінің формуласын жазу керек.

n	1	2	3	4	5	6
b_n	$\frac{5}{1}$	$\frac{6}{2}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{8}{4}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{10}{6}$



31-сурет

Ш е ш у і. Берілген тізбек ақырлы, оның графигі координаталары (n; b_n) болатын алты нүктеден тұрады (31-сурет). b_n-нің мәніне тең болатын әрбір бөлшектің бөлімі n-нің нөміріне тең, ал алымы n-нен 4-ке артық болғандықтан, бұл тізбектің n-ші мүшесінің формуласын былай жазуға болады: $b_n = \frac{n+4}{n}$.

Кейбір жағдайда тізбектің ($n + 1$)-ші мүшесін оның алдыңғы (бір немесе бірнеше) берілген мүшелері арқылы табуға болатын формуламен береді. Тізбектің бұлай берілуі *рекурренттік* тәсіл деп аталады.

2 - м ы с а л. $a_1 = 2$ болатын, $a_{n+1} = 3a_n$ рекурренттік формуласымен берілген тізбектің төртінші мүшесін табу керек.

Ш е ш у і. Бұл тізбектің төртінші мүшесін табу үшін оның алдыңғы мүшелерін табамыз: $a_2 = 3a_1 = 6$, $a_3 = 3a_2 = 18$. Сонда $a_4 = 3a_3 = 3 \cdot 18 = 54$.

Ж а у а б ы. 54.

3 - м ы с а л. –5 пен 5 сандары алмасып отыратын (a_n): –5; 5; –5; 5; … тізбегі берілген. Оның n-ші мүшесінің формуласын жазу керек.

Ш е ш у і. $a_1 = (-1)^1 \cdot 5$, $a_2 = (-1)^2 \cdot 5$, $a_3 = (-1)^3 \cdot 5$, $a_4 = (-1)^4 \cdot 5$ болады. Барлық тақ нөмірлі орындарда –5 саны, ал жұп нөмірлі орындарда 5 саны тұрғандықтан, $a_n = (-1)^n \cdot 5$ болады.

Ж а у а б ы. $a_n = (-1)^n \cdot 5$.

4 - м ы с а л. $a_n = n^2 - 21$ тізбегінің қай нөмірінен бастап мүшелерінің мәні 100-ден артық болады?

Ш е ш у і. $n^2 - 21 > 100$ шартын қанағаттандыратын n-нің ($n \in N$) барлық мәндерін табайық.

$n^2 > 121$, $n > 11$ аламыз. Демек, 12-ші нөмірден бастап берілген тізбектің барлық мүшелерінің мәні 100-ден артық болады.

Жауабы. $n = 12$.

Тізбек оның мүшелерінің сипаттамалық қасиетін көрсету арқылы да беріледі. Мысалы, жай сандар тізбегі: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, … .

Екінші мүшесінен бастап әрбір мүшесі алдыңғы мүшесінен артық болатын тізбек *өспелі* тізбек деп аталады. Екінші мүшесінен бастап әрбір мүшесі алдыңғы мүшесінен кем болатын тізбек *кемімелі* тізбек деп аталады. Барлық мүшесі тең болатын тізбек *тұрақты* тізбек деп аталатынын ескертейік.

5-есеп. $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ формуласымен берілген тізбектің өспелі болатынын дәлелдеу керек.

Дәлелдеуі. $a_{n+1} > a_n$ болатынын дәлелдейік, ол үшін $a_{n+1} - a_n$ айырымын бағалайық. $a_{n+1} - a_n = \dfrac{n+1}{n+2} - \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+2)(n+1)} =$
$= \dfrac{1}{(n+2)(n+1)}$ болады. Кез келген $n \in N$ үшін соңғы өрнек нөлден артық. Демек, $a_{n+1} > a_n$, яғни, көрсетілген тізбек өспелі.

СҰРАҚТАР

1. Сандық тізбектің анықтамасын беріңдер.

2. Қандай сандық тізбек ақырлы, ал қайсысы шексіз деп аталады?

3. Сандық тізбектің берілуінің қандай тәсілдерін білесіңдер? Мысал келтіріңдер.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

313. Тізбектің бірінші және алтыншы мүшелерін атаңдар:

а) (a_n): 2; –1; 5; –2; 9; –3; 15; –4;

ә) (b_n): 3; 0; –3; –6; –9; –12; –15.

314. Тізбек n-ші мүшесінің $a_n = 3n - 1$ формуласымен берілген. a_1, a_{10}, a_{2020} табыңдар.

315. Тізбектің алғашқы бес мүшесін жазыңдар:

а) $a_n = 2 - 3n$; б) $b_n = \dfrac{1}{n+1}$;

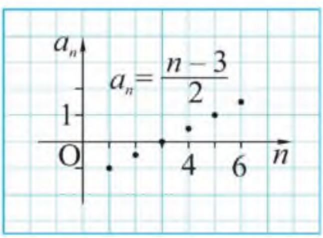
ә) $a_n = 50 - 7n$; в) $b_n = n^3$.

316. Ақырлы сандық тізбек болатын функцияның анықталу облысы мен мәндер жиынын табыңдар:

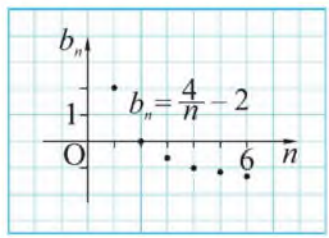
а) 3; 9; 27; 81; б) 2; 4; 8; 2; 4; 8; 2; 4; 8.

ә) $\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}$;

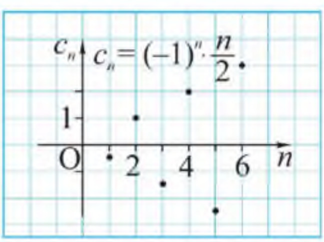
317. 32–35-суреттердің қайсысында: а) өспелі тізбектің; ә) кемімелі тізбектің графигі бейнеленгенін анықтаңдар.



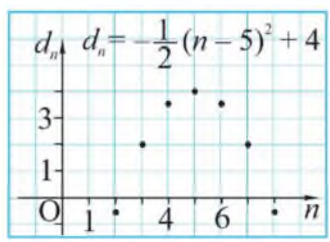
32-сурет



33-сурет



34-сурет



35-сурет

318. Келесі тізбектердің қайсысы: а) өспелі; ә) кемімелі болатынын зерттеңдер:

(a_n): $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}$. (d_n): $\frac{3}{10}; \frac{9}{100}; \frac{27}{1000}; \frac{81}{10000}$.

(b_n): –4; –16; –64; –256. (e_n): 5; 2; 5; 5; 2; 5; 5; 5; 2.

(c_n): –5; 25; –125; 625. (f_n): 0,1; 0,11; 0,111; 0,1111.

319. 318-есептегі (a_n), (b_n), (c_n), (d_n) тізбектерінің n-ші мүшесінің формуласын жазыңдар.

320. а) Жазылуында тек 2; 3; 5 сандары қайталанбай қолданылатын өспелі екітаңбалы сандар тізбегін; ә) жазылуында тек 0; 1; 4; 7 сандары қайталанбай қолданылатын кемімелі үштаңбалы сандар тізбегін жазыңдар. Осы тізбектердің әрқайсысында неше мүше бар?

321. а) $a_n = |2 - 5n|$; ә) $b_n = \frac{30}{n+1}$; б) $c_n = 2^{n-1}$; в) $d_n = (-3)^n$ формуласымен берілген тізбектің алғашқы бес мүшесін жазыңдар. Осы тізбектердің қандай (ақырлы немесе шектеусіз) болатынын көрсетіңдер.

322. Егер: а) $a_1 = -5$, $a_2 = 1$ және $a_{n+1} = a_{n-1} + a_n$; ә) $a_1 = 2$, $a_2 = 4$ және $a_{n+2} = a_n - a_{n+1}$ болса, (a_n) тізбегінің алғашқы алты мүшесін табыңдар.

323. $a_n = 2n - 5$ тізбегінің: а) 8; ә) 12; б) k; в) $k + 2$ нөмірлі мүшесін табыңдар.

324. $d_n = 42 - 5n$ тізбегінің: а) 17-ге; ә) 2-ге; б) –8-ге; в) –53-ке тең болатын мүшесінің нөмірін табыңдар.

325. (y_n) тізбегі n-ші мүшесінің $y_n = 4n - n^2$ формуласымен берілген. Егер: а) $y_n = -96$; ә) $y_n = 4$; б) $y_n = 0$; в) $y_n = 3$ болса, n-ді табыңдар.

326. а) 24; ә) 49; б) –100; в) 625 саны $b_n = n^2 - 6n + 9$ формуласымен берілген тізбектің мүшесі бола ма? Егер болса, оның нөмірін көрсетіңдер.

327. Егер: а) $a_1 = 7$, $a_{n+1} = a_n + 8$; ә) $b_1 = \frac{1}{2}$, $b_{n+1} = 3b_n$; б) $c_1 = -2$, $c_2 = 1$ және $c_{n+1} = c_{n-1} + c_n$; в) $d_1 = 1$, $d_2 = 2$ және $d_{n+2} = d_n \cdot d_{n+1}$ болса, тізбектің алғашқы алты мүшесін жазыңдар.

328. а) Бірінші мүшесі 3-ке тең, ал әрбір келесі мүшесі алдыңғысынан 5-ке артық болатын (x_n) тізбегінің; ә) бірінші мүшесі 50-ге тең, ал әрбір келесі мүшесі алдыңғысынан 9-ға кем болатын (y_n) тізбегінің n-ші мүшесінің формуласын жазыңдар.

329. n-нің қандай мәндерінде 328-есепте берілген тізбектің мүшелері: а) $x_n > 100$; ә) $y_n < 0$ болатынын табыңдар.

330. n-ші мүшесінің формуласымен берілген (a_n) тізбегінің мүшелері қай нөмірден бастап: а) $a_n = n^2 - 7n$ оң; ә) $a_n = -n^2 + 4n + 5$ теріс болады?

331. n-ші мүшесінің формуласымен берілген: а) $a_n = \frac{n-1}{n}$ тізбегінің өспелі; ә) $b_n = \frac{n+1}{n}$ тізбегінің кемімелі болатынын дәлелдеңдер.

В деңгейі

332. Егер: а) $c_1 = 15$, $c_{n+1} = c_n + 2$; ә) $c_1 = 1$, $c_{n+1} = c_n \cdot 2$ болса, осы (c_n) тізбегінің алғашқы алты мүшесін жазып, оны n-ші мүшесінің формуласымен беріңдер.

333. $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ рекурренттік формуласымен және $a_1 = a_2 = 1$ шартымен берілген сандар тізбегі *Фибоначчи тізбегі* деп аталады (итальяндық математик Леонардо Пизанский (1180–1250), Фибоначчи фамилиясымен белгілі болған).

а) Фибоначчи тізбегінің алғашқы жеті мүшесін жазыңдар.

ә) Фибоначчи тізбегінің мүшелері үшін $a_{n+2}^2 - a_{n+1}^2 = a_n \cdot a_{n+3}$ теңдігінің ақиқат болатынын дәлелдеңдер.

334. а) 3-ке еселік болатын сандардың (a_n); ә) 3-ке еселік болатын жұп сандардың (b_n); б) 3-ке еселік болатын тақ сандардың (c_n) тізбегінің n-ші мүшесінің формуласын құрып, оның алғашқы бес мүшесін жазыңдар.

335. $\frac{5}{13}$ жай бөлшегін ондық бөлшек түрінде жазғанда, ондық үлестерін өрнектейтін тізбектес сандар (b_n) тізбегінің мүшелері болады.

а) Осы тізбектің мүшелерінің арасында бірдей сандар бар ма?

ә) b_1; b_8; b_{15}; b_{22} мүшелерін табыңдар.

б) Осы тізбек өспелі, не кемімелі бола ма?

336. n-ші мүшесі берілген:

а) $a_n = \frac{n}{n+2}$ тізбегінің өспелі; ә) $b_n = \frac{n+1}{2n-1}$ тізбегінің кемімелі болатынын дәлелдеңдер.

C деңгейі

337. (a_n) тізбегі $a_1 = 1$ шартымен және $a_{n+1} = a_n \cdot n$ рекурренттік формуласымен берілген. а) Осы тізбектің алғашқы бес мүшесін табыңдар; ә) санның факториалы ұғымын пайдаланып, тізбектің n-ші мүшесінің формуласын жазыңдар.

338. Цифрларының қосындысы 9-ға тең болатын үштаңбалы сандардың өспелі тізбегінің алғашқы жеті мүшесін жазыңдар. Бұл тізбекте неше мүше бар?

339. 5-ке бөлгенде қалдығы 3-ке тең болатын жұп сандардың (a_n) тізбегінің алғашқы бес мүшесін жазып, n-ші мүшесінің формуласын құрыңдар.

340. (x_n) тізбегі n-ші мүшесінің $x_n = \frac{4n+1}{5n}$ формуласымен берілген.

а) Тізбектің жүзінші мүшесінің $\frac{4}{5}$-тен қаншаға үлкен екенін;

ә) n-нің қандай мәндерінде $x_n - \frac{4}{5} < 10^{-3}$ теңсіздігінің ақиқат болатынын табыңдар.

341. n-ші мүшесі $c_n = \frac{2^n}{n!}$ тізбегінің $n \geq 2$ болғанда кемімелі болатынын дәлелдеңдер.

ҚЫЗЫҚТЫ ЕСЕПТЕР

1) 1; 2; 3; 7; 46 сандық тізбегінде екі мүшесінен басқаларының қасиеттері бар. Осы мүшелерді және олардың қасиетін атаңдар.

2) $a^2 + \frac{1}{a^2}$; $a^3 + \frac{1}{a^3}$; $a^4 + \frac{1}{a^4}$ өрнектерінің мәндері болатын сандар тізбегін жазыңдар, мұндағы $a + \frac{1}{a} = 5$.

3) Цирк қойылымында қолданылатын велосипедтің артқы дөңгелегінің ұзындығы алдыңғы дөңгелегінің ұзындығынан 2 есе үлкен. Егер артқы дөңгелегінің ұзындығын 1 м-ге кішірейтсе, ал алдыңғынікін 1 м-ге арттырса, 60 м жолды өткенде артқы дөңгелек алдыңғы дөңгелекке қарағанда 30 айналым артық жасайды. Әр дөңгелектің ұзындығын табыңдар.

14. Математикалық индукция әдісі

Тақырыпты оқу барысында:

• математикалық индукцияның аксиомасын; математикалық индукция әдісінің мәнін білетін боласыңдар;

• математикалық индукция әдісін тепе-теңдіктер мен теңсіздіктерді дәлелдеуге, формулаларды қорытып шығаруға және есептер шығаруда қолдануды үйренесіңдер.

Сендер кез келген бастапқы n тақ сандары үшін $1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ теңдігінің орындалатынын байқаған боларсыңдар. Мысалы: $1 = 1^2$; $1 + 3 = 2^2$; $1 + 3 + 5 = 3^2$; $1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$.

Көрсетілген теңдік кез келген $n \in N$ үшін ақиқат болатын шығар. Мұны натурал сандарды біртіндеп жаза отырып дәлелдеу мүмкін емес. Қанша санды тексергенімізбен, одан кейін де сандар бар болады, себебі N жиыны шексіз.

Кез келген $n \in N$ үшін ақиқат болатын тұжырымды дәлелдеу үшін математикада келесі аксиома пайдаланылады.

Егер тұжырым $n = 1$ үшін ақиқат болса, $n = k$ үшін тұжырым ақиқат болады деген болжамнан, оның $n = k + 1$ үшін де ақиқат болатыны шықса, онда бұл тұжырым кез келген $n \in N$ үшін де ақиқат болады. Тұжырымды осы аксиома негізінде дәлелдеу тәсілі **математикалық индукция әдісі** деп аталады.

Математикалық индукция әдісімен дәлелдеу былай орындалады:

1) $n = 1$ *үшін тұжырымның ақиқат болатынын анықтайды.*

2) $n = k$ *үшін осы тұжырым ақиқат болады деп болжам жасайды.*

3) $n = k$ *үшін тұжырымның ақиқат екенін ескере отырып, оның* $n = k + 1$ *үшін де ақиқат болатынын дәлелдейді.*

4) *Тұжырым кез келген* $n \in N$ *үшін ақиқат деген қорытынды жасалады.*

$1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ теңдігінің кез келген $n \in N$ үшін ақиқат болатынын дәлелдейік.

Д ә л е л д е у і.

1) $n = 1$ болғанда, теңдік ақиқат, себебі $1 = 1^2$.

2) $n = k$ болғанда, $1 + 3 + \ldots + (2k - 1) = k^2$ теңдігі ақиқат болады деп болжаймыз.

3) $n = k + 1$ болғанда, $1 + 3 + \ldots + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) = (k + 1)^2$ теңдігінің ақиқат болатынын дәлелдейміз.

Шынымен де, $1 + 3 + \ldots + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) = k^2 + 2(k + 1) - 1 =$ $= (k + 1)^2$.

Демек, бастапқы теңдік кез келген $n \in N$ үшін ақиқат болады.

1 - м ы с а л. Кез келген $n \in N$, $q \neq 1$ болғанда,

$$\mathbf{1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}}$$

теңдігінің ақиқат болатынын дәлелдеу керек.

Д ә л е л д е у і.

1) $n = 1$ болғанда, теңдік ақиқат.

2) $n = k$ болғанда, $1 + q + q^2 + \ldots + q^{k-1} = \frac{1 - q^k}{1 - q}$ теңдігі ақиқат болады деп болжайық.

3) $n = k + 1$ болғанда, $1 + q + q^2 + \ldots + q^{k-1} + q^k = \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q}$ теңдігінің ақиқат болатынын дәлелдейік.

Шынымен де, болжамды ескере отырып, мынаны аламыз:

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{k-1} + q^k = \frac{1 - q^k}{1 - q} + q^k = \frac{1 - q^k + q^k - q^{k+1}}{1 - q} = \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q}.$$

Демек, бастапқы теңдік кез келген $n \in N$, $q \neq 1$ үшін ақиқат болады.

2 - м ы с а л. Кез келген $n \in N$ үшін $4^n + 2$ өрнегінің мәні 3-ке бөлінетінін дәлелдеу керек.

Д ә л е л д е у і.

1) $n = 1$ болғанда, ұйғарым ақиқат, себебі $4^1 + 2$ өрнегі 3-ке бөлінеді.

2) $n = k$ болғанда, $4^k + 2$ өрнегі 3-ке бөлінеді деп болжам жасайық.

3) $n = k + 1$ болғанда, $4^{k+1} + 2$ өрнегінің 3-ке бөлінетінін дәлелдейік.

Шынымен де, $4^{k+1} + 2 = 4 \cdot 4^k + 2 = (1 + 3)4^k + 2 = (4^k + 2) + 3 \cdot 4^k$. Бұл өрнек 3-ке бөлінеді, себебі оның әрбір қосылғышы 3-ке бөлінеді.

Демек, кез келген $n \in N$ болғанда, $4^n + 2$ өрнегі 3-ке бөлінеді.

3 - м ы с а л. $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + ... + n \cdot n! = (n + 1)! - 1$ теңдігін дәлелдеу керек, мұндағы $n \in N$.

Д ә л е л д е у і.

1) $n = 1$ болғанда, теңдік ақиқат болады, себебі $1 \cdot 1! = 2! - 1$.

2) $n = k$ болғанда, $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + ... + k \cdot k! = (k + 1)! - 1$ теңдігі ақиқат болады деп болжайық.

3) $n = k + 1$ болғанда, $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + ... + k \cdot k! + (k + 1) \cdot (k + 1)! = (k + 2)! - 1$ теңдігінің ақиқат болатынын дәлелдейік.

Болжамды ескере отырып, мынаны аламыз:

$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + ... + k \cdot k! + (k + 1) \cdot (k + 1)! = (k + 1)! - 1 + (k + 1) \times (k + 1)! = (k + 1)!(1 + (k + 1)) - 1 = (k + 2)! - 1$.

Демек, бастапқы теңдік кез келген $n \in N$ үшін ақиқат болады.

Кейбір жағдайда тұжырым барлық $n \in N$ үшін ақиқат бола бермейді, $n = m$ бастап қана ақиқат болуы мүмкін. Бұл жағдайда математикалық индукция әдісін былай қолданады:

1) Тұжырымның $n = m$ үшін ақиқат болатыны анықталады.

2) Тұжырым $n = k$ үшін, мұндағы $k \geq m$, ақиқат болады деген болжам жасалады.

3) Тұжырым $n = k$ үшін ақиқат болады деген болжамды ескере отырып, оның $n = k + 1$ болғанда да ақиқат болатыны дәлелденеді.

4) Тұжырым кез келген $n \in N$ үшін, мұндағы $n \geq m$, ақиқат болады деген қорытынды жасалады.

4 - м ы с а л. n-нің қандай мәндерінде, $2^n > n^2$ теңсіздігінің, мұндағы $n \in N$, ақиқат болатынын зерттеу керек.

Ш е ш у і. $n = 1$ болғанда, теңсіздік ақиқат.

$n = 2; 3; 4$ болғанда, теңсіздік ақиқат емес, себебі $2^2 = 2^2$; $2^3 < 3^2$; $2^4 = 4^2$.

$n = 5$ болғанда, теңсіздік ақиқат, себебі $2^5 > 5^2$. $2^n > n^2$ теңсіздігі $n \geq 5$ натурал сандары үшін ақиқат болатын сияқты. Осы болжамды тексеру үшін математикалық индукция әдісін қолданайық.

1) $n = 5$ болғанда, теңсіздік ақиқат.

2) $n = k$ болғанда, мұндағы $k \geq 5$, $2^k > k^2$ теңсіздігі ақиқат болады деп болжайық.

3) $n = k + 1$ болғанда, $2^{k+1} > (k + 1)^2$ теңсіздігі ақиқат болатынын дәлелдейік.

Ол үшін $2^k > k^2$ теңсіздігінің оң жағы мен сол жағын 2-ге көбейтіп, $2^{k+1} > 2k^2$ теңсіздігін аламыз. $k \geq 5$ болғанда, $2k^2 - (k + 1)^2 = k^2 - 2k - 1 = (k - 1)^2 - 2 > 0$ болғандықтан, $2k^2 > (k + 1)^2$ шығады. Сонымен, $k \geq 5$ болғанда, $2^{k+1} > 2k^2 > (k + 1)^2$ теңсіздіктері ақиқат болады. Сонда, $2^{k+1} > (k + 1)^2$. Демек, $2^n > n^2$ теңсіздігі $n \geq 5$ болғанда ақиқат болады екен.

Ж а у а б ы. $2^n > n^2$ теңсіздігі $n = 1$ және $n \geq 5$, $n \in N$ болғанда ақиқат болады.

СҰРАҚТАР

1. Математикалық индукция аксиомасын тұжырымдаңдар.
2. Математикалық индукция әдісімен дәлелдеу қалай орындалады?

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

342. Оқушы пайымдауындағы қатені табыңдар: «Кез келген $n \in N$ болғанда, $2n + 2019$ жұп сан болатынын дәлелдейік. $n = k$ болғанда, $2k + 2019$ жұп сан болады деп болжайық. Сонда $n = k + 1$ болғанда, $2(k + 1) + 2019 = (2k + 2019) + 2$ екі жұп санның қосындысы болғандықтан жұп сан болады. Тұжырым дәлелденді».

343. Рекурренттік түрде берілген (a_n) және (b_n) тізбектерінің n-ші мүшесінің: а) $a_1 = 5$, $a_{n+1} = 3a_n - 4$ болса, $a_n = 3^n + 2$; ә) $b_1 = 5$, $b_{n+1} = 2b_n + 5$ болса, $b_n = 5(2^n - 1)$ формуласын дәлелдеңдер.

344. (c_n) тізбегінің бастапқы n мүшесінің қосындысы болатын S_n-ді: а) (c_n) жұп натурал сандар тізбегі болса, $S_n = n(n + 1)$; ә) (c_n) натурал сандар тізбегі болса, $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ формуласымен табуға болатынын дәлелдеңдер.

345. n-мүшесінің формуласымен берілген тізбектің бастапқы n мүшесінің қосындысы болатын: а) $a_n = 5n - 2$ болса, $S_n = \frac{n(5n+1)}{2}$; ә) $b_n = 22 - 4n$ болса, $S_n = 2n(10 - n)$; б) $a_n = 2^{n-1}$ болса, $S_n = 2^n - 1$; в) $b_n = 16 \cdot 2^{-n+1}$ болса, $S_n = 32(1 - 2^{-n})$ формуласын дәлелдеңдер.

346. Барлық $n \in N$ үшін келесі теңдіктің ақиқат болатынын дәлелдеңдер:

а) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

ә) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 8 + ... + n(3n-1) = n^2(n+1)$;

б) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$;

в) $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + ... + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$.

347. Мүшелері көрсету арқылы берілген (a_n) тізбегінің алғашқы n мүшесінің қосындысы болатын: а) (a_n): $1^3; 2^3; ..., n^3$ болса, $S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$; ә) (a_n): $2^3; 4^3; ..., (2n)^3$ болса, $S_n = 2n^2(n+1)^2$ формуласын дәлелдеңдер.

348. Оқушы «Кез келген $n \in N$ үшін $\frac{n}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3}$ өрнегінің мәні натурал сан болатынын дәлелдеу керек» деген тапсырма алды. Оқушының шешуі мынандай болды: «$n = 1$ болғанда, өрнектің мәні натурал 1 санына тең. Осы өрнектің мәні кез келген $n = k$ болғанда натурал сан болады деп болжаймыз, яғни $\frac{k}{6} + \frac{k^2}{2} + \frac{k^3}{3}$ натурал сан болсын. k кез келген натурал сан болғандықтан, оның орнына келесі натурал санды қоюға болады. Демек, $n = k + 1$ болғанда да өрнектің мәні натурал сан болады». Оқушының пайымдауындағы қатені тауып, есепті дұрыс шығарыңдар.

349. Кез келген натурал n үшін: а) $13^n + 5$ өрнегінің 3-ке; ә) $7^n + 5$ өрнегінің 6-ға; б) $n^3 + 5n$ өрнегінің 6-ға; в) $2n^3 - 3n^2 + n$ өрнегінің 6-ға бөлінетінін дәлелдеңдер.

350. Барлық $n \in N$ үшін $a > b > 0$ болса, $a^n > b^n$ болатынын дәлелдеңдер.

351. а) $n \geq 4$ болғанда, $n! > 2^n$; ә) $n \geq 5$ болғанда, $2^n > 5n$; б) $n \geq 3$ болғанда, $3^n > 2n^2$ теңсіздігінің ақиқат болатынын дәлелдеңдер.

В деңгейі

352. Мүшелері көрсетілген (b_n) тізбегінің бастапқы n мүшесі қосындысының:

а) (b_n): 1^2; 2^2; 3^2; ... ; n^2 болса, $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

ә) (b_n): 1^2; 3^2; ... ; $(2n-1)^2$ болса, $S_n = \dfrac{n(4n^2-1)}{3}$;

б) (b_n): 2^2; 4^2; ... ; $(2n)^2$ болса, $S_n = \dfrac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$ формуласын дәлелдеңдер.

353. Кез келген натурал n саны үшін $n^5 - n$ өрнегінің 5-ке бөлінетінін дәлелдеңдер.

354. Тізбектес үш натурал сан кубтарының қосындысы 9-ға бөлінетінін дәлелдеңдер.

355. Кез келген $n \geq 2$ натурал саны үшін $(1 + a)^n > 1 + na$ теңсіздігінің, мұндағы $a > -1$ және $a \neq 0$, ақиқат болатынын дәлелдеңдер. (Швейцар математигі Я. Бернулли (1654–1705) теңсіздігі.)

356. $n \in N$-нің қандай мәндерінде: а) $2^{n-1} \geq n$; ә) $2^{n-1} < n!$; б) $2^n > 4n^2 + 1$ теңсіздігінің ақиқат болатынын зерттеңдер.

С деңгейі

357. Кез келген $n \in N$ үшін $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{15} + \dfrac{1}{35} + ... + \dfrac{1}{4n^2-1} = \dfrac{n}{2n+1}$ теңдігінің ақиқат болатынын дәлелдеңдер.

358. Кез келген натурал n саны үшін $n^7 - n$ өрнегінің 7-ге бөлінетінін дәлелдеңдер.

359. Кез келген $n \in N$ саны үшін $n^9 - n$ өрнегінің мәні 9-ға бөлінеді деген дұрыс па?

360. Оқушыға «$n \in N$-нің ешқандай мәнінде $n^2 + 3n + 5$ өрнегінің мәні 121-ге бөлінбейтінін дәлелдеу керек» деген тапсырма берілді. Оқушының дәлелдеуі былай болды: «$n = 1$ болғанда, ұйғарым дұрыс, себебі 9 саны 121-ге бөлінбейді. $n = k$ болғанда, $k^2 + 3k + 5$ өрнегінің мәні 121-ге бөлінбейді деп болжайық. Сонда $n = k + 1$ болғанда, мынаны аламыз: $(k + 1)^2 + 3(k + 1) + 5 = (k^2 + 3k + 5) + 2(k + 2)$. Бұл өрнек 121-ге бөлінбейді, себебі бірінші қосылғыш болжам бойынша 121-ге бөлінбейді, екінші де 121-ге бөлінбейді, себебі ол жұп сан.» Оқушының пайымдауындағы қатені тауып, есептің дұрыс шешуін көрсетіңдер.

361. $n \in N$-нің қандай мәндерінде: а) $2^n > n^2 + 4n + 5$; ә) $3^n > 2^n + 7n$ теңсіздігі ақиқат болатынын зерттеңдер.

ҚЫЗЫҚТЫ ЕСЕПТЕР

Мақсат Бернуллидің теңсіздігін қорытындылап (№ 355 есепті қараңдар), математикалық индукция әдісін пайдаланып, $a \in R$, $n \in N$ болғанда, $(1 + a)^n \geq 1 + na$ болатынын дәлелдемек болды. Оның пайымдауынша:

1. $n = 1$ болғанда, теңсіздік ақиқат.

2. $n = k$ болғанда, мұндағы $k > 1$, $(1 + a)^k \geq 1 + ka$ теңсіздігі ақиқат делік.

3. $n = k + 1$ болғанда, $(1 + a)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)a$ теңсіздігі ақиқат болатынын дәлелдейік.

$(1 + a)^{k+1} = (1 + a)^k \cdot (1 + a)$ аламыз. Болжамды ескере отырып, $(1 + a)^k \cdot (1 + a) \geq (1 + ka)(1 + a)$ аламыз. $(1 + ka)(1 + a) = 1 + ka + a + ka^2 \geq 1 + (k + 1)a$ болғандықтан, $(1 + a)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)a$ болады. Демек, $(1 + a)^n \geq 1 + na$ теңсіздігі $a \in R$, $n \in N$ болғанда ақиқат.

$(1 + a)^n \geq 1 + na$, мұндағы $a \in R$, $n \in N$, теңсіздігі ақиқат па? Егер ақиқат болмаса, Мақсат қай жерде қателесті?

15. Арифметикалық прогрессия және оның қасиеттері

Тақырыпты оқу барысында:

• арифметикалық прогрессияның анықтамасын, n-ші мүшесінің формуласы мен сипаттамалық қасиетін білетін боласыңдар;
• сандар тізбегінің арасынан арифметикалық прогрессияны ажыратуды үйренетін боласыңдар;
• арифметикалық прогрессияның қасиетін есептер шығаруда қолдануды білетін боласыңдар.

1 - е с е п. Демалушы дүйсенбіде күнге 10 минут қыздырынуға, ал аптаның әрбір келесі күндері 5 минутқа артық қыздырынуға бел буды. Аптаның әр күні ол күнге неше минут қыздырынатын болады?

Есептің сұрағына жауап беру үшін қыздырыну минуты ұзақтығының тізбегін құрайық: 10; 15; 20; 25; 30; 35; 40. Бұл тізбектің әрбір мүшесі екіншісінен бастап алдыңғы мүшесіне 5 санын қосу арқылы алынған.

2 - е с е п. Метеоролог наурыз айының бір аптасының әр күніндегі ауа температурасының өзгерісін бақылап, бірінші күні оның 5 °С-қа тең болғанын, ал әрбір келесі күндері алдыңғы күнмен салыстырғанда 1 °С-қа төмендеп отырғанын байқады. Осы күндері ауа температурасы қандай болған?

Аптаның әр күніндегі ауа температурасы мәндерінің тізбегін жазайық: 5 °С; 4 °С; 3 °С; 2 °С; 1 °С; 0 °С; –1 °С. Бұл тізбектің әрбір мүшесі екіншісінен бастап алдыңғы мүшесіне –1 санын қосу арқылы алынған.

Осы есептерде қарастырылған тізбектер арифметикалық прогрессиялар деп аталады. «Прогрессия» сөзі латынның «progressio» сөзінен шыққан, ол «алға қозғалу» дегенді білдіреді.

Екінші мүшесінен бастап әрбір мүшесі алдыңғы мүшесіне тұрақты бір санды қосқанда шығатын сандар тізбегі арифметикалық прогрессия деп аталады. Арифметикалық прогрессияның $(n + 1)$-ші мүшесі мен n-ші мүшесінің айырымы

арифметикалық прогрессияның айырымы деп аталады және $\boldsymbol{d}$ әрпімен белгіленеді. (a_n) арифметикалық прогрессияның мүшелері үшін $\boldsymbol{a_{n+1} = a_n + d}$ шарты орындалады, мұндағы d – оның айырымы.

Егер $d > 0$ болса, арифметикалық прогрессия өспелі, $d < 0$ болса, кемімелі болады. Егер $d = 0$ болса, онда арифметикалық прогрессия *тұрақты* деп аталады. Мысалы, натурал жұп сандар тізбегі айырымы $d = 2$ болатын өспелі арифметикалық прогрессияны, ал натурал жұп сандарға қарама-қарсы сандар тізбегі айырымы $d = -2$ болатын кемімелі арифметикалық прогрессияны құрайды.

Айырымы d, бірінші мүшесі a_1 болатын (a_n) арифметикалық прогрессияның n-ші мүшесін мына формуламен табуға болады:

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + d(n-1)}.$$

Осы формуланы математикалық индукция әдісімен дәлелдейік.

1) $n = 1$ болғанда, формула ақиқат.

2) $n = k$ болғанда, $a_k = a_1 + d(k-1)$ формуласы ақиқат деп ұйғарайық.

3) $n = k + 1$ болғанда да $a_{k+1} = a_1 + dk$ формуласының ақиқат болатынын дәлелдейік.

Шынымен де, арифметикалық прогрессияның анықтамасы бойынша $a_{k+1} = a_k + d$. Осы теңдіктегі a_k-ның орнына $a_1 + d(k-1)$ өрнегін қойып, мынаны аламыз: $a_{k+1} = a_1 + d(k-1) + d = a_1 + dk$. Демек, кез келген $n \in N$ үшін $a_n = a_1 + d(n-1)$ болады.

Арифметикалық прогрессияның қасиеттерін қарастырайық.

1. Арифметикалық прогрессияның екінші мүшесінен бастап әрбір мүшесі оның алдындағы мүшесі мен одан кейінгі мүшесінің арифметикалық ортасына тең, яғни

$$\boldsymbol{a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}}, \text{ мұндағы } n \geq 2.$$

Бұл формуланы $a_n - a_{n-1} = d$, $a_{n+1} - a_n = d$ теңдіктерін пайдалану арқылы алуға болады (оны өздігінен орындаңдар). «Арифметикалық прогрессия» деп осы қасиетіне орай аталғанын айта кетелік.

2. n мүшеден тұратын арифметикалық прогрессияның кез келген мүшесін оның k-шы мүшесі арқылы мына формуламен өрнектеуге болады:

$$\boldsymbol{a_n = a_k + d(n - k)}, \text{ мұндағы } 1 \le k \le n - 1.$$

3. Арифметикалық прогрессияның әрбір мүшесі оның $(n - k)$ мен $(n + k)$-сыншы мүшелерінің арифметикалық ортасына тең, яғни

$$\boldsymbol{a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}}, \text{ мұндағы } 1 \le k \le n - 1.$$

(2 және 3-қасиеттерді өздігінен дәлелдеңдер.)

4. n мүшеден тұратын арифметикалық прогрессияның бірінші мен соңғы мүшелерінің қосындысы оның осы мүшелерден бірдей қашықтықтағы екі мүшесінің қосындысына тең болады, яғни

$$\boldsymbol{a_1 + a_n = a_k + a_{n-k+1}}.$$

Шынымен де, $a_k = a_1 + d(k - 1)$, $a_{n-k+1} = a_1 + d(n - k)$. Олардың қосындысы $a_k + a_{n-k+1} = 2a_1 + d(k - 1 + n - k) = 2a_1 + d(n - 1) = a_1 + a_n$ тең болады.

Мына тұжырымның да ақиқат болатынын айта кетелік: **егер тізбектің бірінші мүшесінен басқа әрбір мүшесі оның алдыңғы мүшесі мен одан кейінгі мүшелерінің арифметикалық ортасына тең болса, онда ол тізбек арифметикалық прогрессия болады.**

Шынымен де, егер $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ тізбегі үшін $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, мұндағы $n \ge 2$, орындалатын болса, $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$ болады. Бұл теңдікті былай түрлендіруге болады: $a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$. Тізбектің әрбір мүшесі мен оның алдыңғы мүшесінің айырымы бірдей екені шықты. Демек, бұл тізбек арифметикалық прогрессия болады.

Бұл тұжырымды 1-қасиетпен бірге *арифметикалық прогрессияның сипаттамалық қасиеті* деп атайды. Бұл қасиет қандай да бір тізбектің арифметикалық прогрессия болатынын не болмайтынын анықтауға мүмкіндік береді.

Егер айырымы d болатын (a_n) арифметикалық прогрессиясының n-ші мүшесінің формуласын $a_n = nd + (a_1 - d)$ түріне келтірсек, онда (a_n) $x = n$ болғанда, мұндағы $n \in N$, $y = dx + (a_1 - d)$ сызықтық функциясының мәндеріне тең болады. Демек, $(1; a_1)$, $(2; a_2)$, … , $(n; a_n)$ нүктелер жиыны арифметикалық прогрессияның графигі болады.

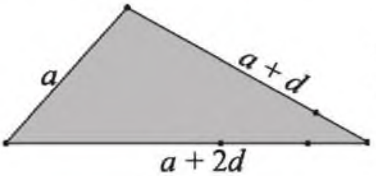
Кері тұжырым да ақиқат болады. Кез келген $y = kx + b$, мұндағы $x \in N$, сызықтық функциясының мәндері бірінші мүшесі $(k + b)$-ға, ал айырымы k-ға тең болатын арифметикалық прогрессияны құрайды.

3 - е с е п. 7-ге бөлінетін қанша үштаңбалы сан бар?

Ш е ш у і. Ондай сандардың ең кішісі 105-ке, ең үлкені 994-ке тең. $a_1 = 105$, $d = 7$ болатын (a_n) арифметикалық прогрессиясы 7-ге бөлінетін барлық натурал сандардан тұрады, әрі $a_n = 994$ болады. $a_n = a_1 + d(n - 1)$ болатынын ескере отырып, $994 = 105 + 7(n - 1)$ теңдеуін аламыз. Бұдан $n = 128$ шығады.

Ж а у а б ы. 128.

4 - е с е п. Әртүрлі қабырғалы үшбұрыштың периметрі 18 см. Қабырғаларының ұзындықтары бүтін санмен өрнектеліп, арифметикалық прогрессия мүшелерін құрайды. Қабырғаларын табу керек.



36-сурет

Ш е ш у і. Үшбұрыш қабырғаларын a, $a + d$, $a + 2d$ деп белгілейік, мұндағы $d > 0$ (36-сурет). Есептің шарты бойынша, $a + a + d + a + 2d = 18$, бұдан $a + d = 6$. Егер $a + 2d < a + a + d$ шарты орындалса ғана олардан үшбұрыш құруға болады. Бұдан $a > d$ шығады. $a + d = 6$ теңдеуінің $a > d$ шартын қанағаттандыратын натурал сандар жұбы тек $d = 1$, $a = 5$ немесе $d = 2$, $a = 4$ болады. Сәйкесінше, үшбұрыштың қабырғалары 5 см, 6 см, 7 см немесе 4 см, 6 см, 8 см болуы мүмкін.

Ж а у а б ы. 5 см, 6 см, 7 см немесе 4 см, 6 см, 8 см.

5 - е с е п. (a_n) арифметикалық прогрессиясының $a_1 + a_2 + a_3 = -60$, $d = 4$. Осы прогрессияның теріс таңбалы мүшелерінің санын табу керек.

Ш е ш у і. Арифметикалық прогрессияның қасиеті бойынша $a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$ немесе $a_1 + a_3 = 2a_2$. Бұдан $3a_2 = -60$, $a_2 = -20$; $a_1 = a_2 - d =$

$= -24$; $a_n = -24 + 4(n - 1)$ шығады. Есептің шарты бойынша n-нің қандай мәндерінде $a_n < 0$ болатынын табу керек. $-24 + 4(n - 1) < 0$ теңсіздігін шешіп, $n < 7$ аламыз. Демек, бұл прогрессияда алты теріс таңбалы мүше бар: a_1; a_2; … ; a_6.

Ж а у а б ы. Алты.

СҰРАҚТАР

1. Арифметикалық прогрессияның анықтамасын беріңдер.

2. Арифметикалық прогрессияның n-ші мүшесінің формуласын қорытып шығарыңдар.

3. Арифметикалық прогрессияның сипаттамалық қасиетін тұжырымдаңдар.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

362. а) $a_1 = 15$, $d = -4$; ә) $a_1 = -32$, $d = 8$ болатын (a_n) арифметикалық прогрессиясының алғашқы алты мүшесін жазыңдар.

363. Алғашқы екі мүшесі берілген арифметикалық прогрессияның келесі мүшесін табыңдар:

а) 3; 8; …; б) 17; 8; …; г) $-\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{3}$; … ;

ә) –2; –5; …; в) $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$; …; ғ) $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{100}$; … .

364. Келесі тізбектердің қайсысы арифметикалық прогрессия мүшелері болатынын көрсетіңдер:

а) 12; –14; 16; –18; б) 98; 95; 92; 89; г) –15; –11; –7; –3;

ә) 4; 4; 4; 4; 4; 4; в) 7; 14; 28; 56; ғ) $\frac{1}{5}$; $\frac{7}{10}$; $\frac{6}{5}$; $\frac{17}{10}$.

365. (a_n) арифметикалық прогрессиясының d айырымын оның: а) a_{21} және a_{22}; ә) a_8 және a_{10}; б) a_{15} және a_{18}; в) a_{30} және a_{34} мүшелері арқылы өрнектеңдер.

366. (a_n) арифметикалық прогрессиясының: а) $a_1 = 5$, $d = 1{,}2$ болса, a_{11}-ді; ә) $a_1 = -12$, $d = 1{,}4$ болса, a_{15}-ті табыңдар.

367. $x_1 = 4$, $x_2 = 0{,}5$ болатын (x_n) арифметикалық прогрессиясының: а) x_5; ә) x_{11}; б) x_k мүшесін табыңдар.

368. (x_n) арифметикалық прогрессиясының n-ші мүшесінің формуласын жазыңдар:

а) 1; 6; 11; 16; ...; б) –4; –6; –8; –10; ...;

ә) 25; 21; 17; 13; ...; в) 1; –4; –9; –14; ... .

369. а) 93; ә) 153 саны –15; –8; ... арифметикалық прогрессиясының мүшесі бола ма?

370. а) $a_n = 15{,}2$, $a_1 = 4{,}2$, $d = 1{,}1$; ә) $a_n = 32$, $a_1 = 14{,}5$, $d = 0{,}7$ болатын (a_n) арифметикалық прогрессиясының a_n мүшесінің реттік нөмірін табыңдар.

371. а) $a_9 = -24$, $d = -3$ болатын арифметикалық прогрессияның a_{19} мүшесін табыңдар.

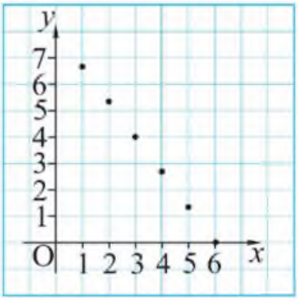
ә) Екінші мүшесі 6-ға, төртінші мүшесі –16-ға тең болатын арифметикалық прогрессияның бесінші мүшесін табыңдар.

372. (a_n) арифметикалық прогрессиясы $a_n = 6 - 1{,}5n$ формуласымен берілген. Осы прогрессияның: а) 4; ә) 12; б) $k - 2$; в) $k + 4$ нөмірлі мүшесін табыңдар.

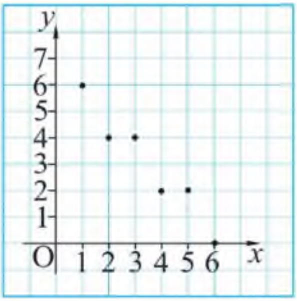
373. а) 12; 16; ...; ә) –21; –16; ...; б) $\frac{5}{8}$; 1; ...; в) $-\frac{1}{4}$; –1; ... арифметикалық прогрессиясының он алтыншы, қырық бірінші, n-ші мүшесін табыңдар.

374. Графигі 37, *а*, *ә*-суретте бейнеленген тізбек арифметикалық прогрессия бола ма? Егер болса, онда оның n-ші мүшесінің формуласын жазыңдар.

а)



ә)



37-сурет

375. а) $a_n = -3n + 1$; ә) $a_n = 4n - 0{,}5$; б) $a_n = \frac{1}{2}n + \frac{3}{2}$; в) $a_n = -\frac{3}{4}n - 5$ формуласымен берілген (a_n) арифметикалық прогрессиясының бірінші мүшесі мен айырымын атаңдар. Осы тізбектердің қайсысы: 1) өспелі; 2) кемімелі болатынын анықтаңдар.

376. 3-ке де, 4-ке де бөлінетін қанша екітаңбалы сан бар?

377. а) 55; 47; 39; … арифметикалық прогрессиясының қанша оң таңбалы мүшелері бар?

ә) –43; –36; –29; … арифметикалық прогрессиясының қанша теріс таңбалы мүшелері бар?

378. Егер арифметикалық прогрессия құрайтын тізбектес төрт бүтін санның ең үлкені қалған үш санның квадраттарының қосындысына тең болса, сол сандарды табыңдар.

379. Арифметикалық прогрессияның жетінші мүшесі төртінші мүшесінің 70 %-ын құрайды, ал жетінші мен төртінші мүшелерінің қосындысы 102-ге тең. Осы прогрессияның айырымын табыңдар.

380. Егер (a_n) тізбегі арифметикалық прогрессия болса, онда: а) $a_1 + a_{14} = a_6 + a_9$; ә) $a_{11} + a_{23} = a_5 + a_{29}$ болатынын дәлелдеңдер.

381. $a_1 = -2{,}4$ және $d = 0{,}4$ болатын (a_n) арифметикалық прогрессиясы он екі мүшеден тұрады. Оның:

а) бірінші мен соңғы мүшелерінің;

ә) екінші мен соңғысының алдындағы мүшелерінің;

б) басынан төртінші мен соңынан төртінші мүшелерінің;

в) ортаңғы екі мүшелерінің қосындысын табыңдар;

г) осы прогрессияның барлық 12 мүшесінің қосындысын қалай табуға болатыны туралы қорытынды жасаңдар.

B деңгейі

382. $a_1 + a_4 = 16$, $a_2 \cdot a_3 = 60$ болатын (a_n) арифметикалық прогрессиясының бірінші мүшесін табыңдар.

383. а) Егер арифметикалық прогрессияның төртінші мүшесі 21-ге тең болса, онда прогрессияның жеті мүшесінің қосындысын табыңдар.

ә) Бесінші мүшесі –2-ге тең болатын арифметикалық прогрессияның алғашқы тоғыз мүшесінің қосындысын табыңдар.

384. а) $a_2 + a_4 + a_6 = 18$ және $a_2 \cdot a_4 \cdot a_6 = 120$; ә) $a_1 + a_2 + a_3 = -12$ және $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 98$ болатын (a_n) арифметикалық прогрессиясының бірінші мүшесі мен айырымын табыңдар.

385. Үшбұрыштың периметрі 15 см-ге тең. Оның қабырғалары арифметикалық прогрессия мүшелері болатын бүтін сан сантиметрмен өрнектеледі. Үшбұрыштың қабырғаларын табыңдар.

386. а) $a_n = 7 - 3n$; ә) $b_n = 4n - 5$ формуласымен берілген тізбектің арифметикалық прогрессия болатынын дәлелдеңдер. Олардың қайсысы: 1) өспелі; 2) кемімелі тізбек болады?

387. Егер $a_1 \in Z$, $a_2 = 2$ және $a_3^2 + a_4^2 < 4$ болса, (a_n) арифметикалық прогрессиясының бірінші мүшесі қандай болғаны?

388. x_1 мен x_2 (1)-теңдеудің түбірлері, ал x_3 пен x_4 (2)-теңдеудің түбірлері болса және x_1; x_2; x_3; x_4 сандары орналасу ретімен арифметикалық прогрессия мүшелерін құрайтыны белгілі болса, n және m сандарын табыңдар:

а) $x^2 - 7x + n = 0$ (1), $x^2 - 11x + m = 0$ (2);

ә) $x^2 - 4x + n = 0$ (1), $x^2 + 14x + m = 0$ (2).

С деңгейі

389. Цифрлары арифметикалық прогрессия мүшелері болатын және 45-ке бөлінетін үштаңбалы санды табыңдар.

390. а) Қабырғаларының ұзындықтары арифметикалық прогрессия мүшелерін құрайтын тікбұрышты үшбұрыштың қабырғаларын табыңдар.

ә) Катер станциядан шыға бере жылдамдығын біртіндеп арттырып, 20 минут ішінде 60 км/сағатқа жеткізді. Катердің үдеуін (м/мин^2 есебімен) табыңдар.

391. а) Арифметикалық прогрессияның бесінші мүшесі 12-ге тең. Прогрессияның айырымы d-ның қандай мәнінде оның үшінші мен сегізінші мүшелерінің көбейтіндісі ең үлкен болады?

ә) (a_n) арифметикалық прогрессиясының жетінші мүшесі 10-ға тең. Оның айырымы d-ның қандай мәнінде $a_9(a_4 + a_{12})$ өрнегі ең кіші мәнді қабылдайды?

16. Арифметикалық прогрессияның алғашқы *n* мүшесінің қосындысы

Тақырыпты оқу барысында:

• арифметикалық прогрессияның алғашқы n мүшесі қосындысының формулаларын;

• формулалары бойынша арифметикалық прогрессияның алғашқы n мүшесінің қосындысын табу және оларды есептер шығаруда қолдануды білетін боласыңдар.

(a_n) арифметикалық прогрессиясының $a_1 + a_n = a_k + a_{n-k+1}$ формуласын пайдаланып, оның алғашқы n мүшесінің қосындысы S_n-нің формуласын қорытып шығарайық.

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n,$$

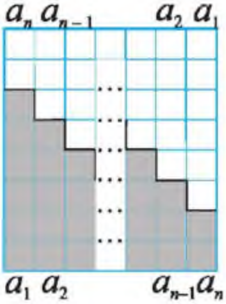
екіншіден, $S_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1.$

Сонда $2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1) =$
$= n(a_1 + a_n)$, бұдан

$$\boldsymbol{S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.}$$

Яғни, арифметикалық прогрессияның алғашқы n мүшесінің қосындысы a_1 мен a_n-нің арифметикалық ортасы мен n-нің көбейтіндісіне тең.

Осы формуланы геометриялық түрде былай көрсетуге болады. S_n қосындысы әрқайсысының табаны 1-ге, ал биіктігі тізбектің сәйкес мүшесіне тең болатын баспалдақты фигураның ауданына тең болады (38-сурет).



38-сурет

Егер осы фигураға суретте көрсетілгендей оған тең фигураны біріктірсек, онда тіктөртбұрыш аламыз. Оның табаны n-ге, биіктігі $(a_1 + a_n)$-ге тең, ал ауданы $(a_1 + a_n)n$ болады. Сонда $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ шығады. Егер осы формуладағы a_n-нің орнына $a_1 + d(n - 1)$ қойсақ, онда арифметикалық прогрессияның алғашқы n мүшесі қосындысының тағы бір формуласын аламыз:

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n.$$

1 - е с е п. 6-ға еселік болатын 250-ден аспайтын барлық натурал сандардың қосындысын табу керек.

Ш е ш у і. 6-ға еселік сандар $a_1 = 6$ және $a_n = 6n$ болатын (a_n) арифметикалық прогрессиясын құрайды. Прогрессияның $a_n \leq 250$ шартын қанағаттандыратын мүшелерінің санын табайық. $6n \leq 250$ теңсіздігін шешіп, $n \leq 41\frac{2}{3}$ аламыз. Демек, прогрессия мүшелерінің саны 41-ге тең. Сонымен, $a_{41} = 6 \cdot 41 = 246$, $S_{41} = \frac{(6+246)\cdot 41}{2} = 5166$.

Ж а у а б ы. 5166.

2 - е с е п. (a_n) арифметикалық прогрессиясында $a_2 = 3$ және $a_5 + a_7 = 2$. S_7-ні табу керек.

Ш е ш у і. $S_7 = \frac{a_1 + a_7}{2} \cdot 7$. $a_1 + a_7 = a_2 + a_6$ және $a_6 = \frac{a_5 + a_7}{2} = 1$ болғандықтан, $S_7 = \frac{a_2 + a_6}{2} \cdot 7 = \frac{3+1}{2} \cdot 7 = 14$ болады.

Ж а у а б ы. 14.

3 - е с е п. Мүшелерінің қосындысы 384-ке тең, айырымы 2-ге, бірінші мүшесі –19-ға тең болатын арифметикалық прогрессияның n-ші мүшесі неге тең?

Ш е ш у і. $a_n = a_1 + d(n-1)$ формуласы бойынша $a_n = -19 + 2(n-1)$. Әрі қарай $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$ формуласын пайдаланып, n-ді табамыз. $384 = \frac{(-38 + 2(n-1))n}{2}$, $n^2 - 20n - 384 = 0$, $n = 10 \pm \sqrt{100+384} = 10 \pm 22$. $n \in N$ болғандықтан, $n = 32$ болады. Демек, $a_{32} = -19 + 2(32 - 1) = 43$.

Ж а у а б ы. 43.

СҰРАҚТАР

1. Арифметикалық прогрессияның алғашқы n мүшесі қосындысының: а) $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$; ә) $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$ формулаларын қорытып шығарыңдар.

2. Барлық екітаңбалы сандардың қосындысын есептеуге осы формулалардың қайсысын пайдаланған ыңғайлы?

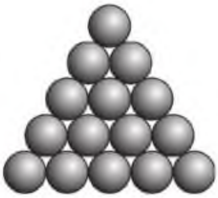
ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

392. а) $a_1 = 5$, $a_{10} = 15$; ә) $a_1 = 0,5$, $a_4 = 9,5$; б) $a_5 + a_6 = -15,2$; в) $a_4 = 10$, $a_7 = 19$ болатын (a_n) арифметикалық прогрессиясының алғашқы он мүшесінің қосындысын табыңдар.

393. а) $S_7 = 105$, $a_7 = -6$; ә) $S_{15} = 121,5$, $a_{15} = 11,6$ болатын (a_n) арифметикалық прогрессиясының бірінші мүшесі мен айырымын табыңдар.

394. Шарлар үшбұрыш түрінде орналастырылған, бірінші қатарда 1 шар, екіншіде – 2, үшіншіде – 3 т.с.с. (39-сурет). а) Егер шарлар саны 55 болса, олар неше қатарға орналастырылған? ә) 15 қатардан тұратын үшбұрыш құру үшін қанша шар қажет болады?



39-сурет

395. а) $d = -5$, $S_{23} = 161$ болатын арифметикалық прогрессияның бірінші және 23-ші мүшесін; ә) $d = 0,5$, $S_{16} = -48$ болатын (a_n) арифметикалық прогрессиясының бірінші және 16-шы мүшесін табыңдар.

396. (a_n) арифметикалық прогрессиясы берілген. Кестені толтырыңдар:

	a_1	d	n	a_n	S_n
а)	7			3	20
ә)	8		7		14
б)		2	12		72
в)		3		20	77

397. 15-тен 56-ға дейінгі барлық тақ сандардың қосындысын табыңдар.

398. Арифметикалық прогрессияның алғашқы бес мүшесінің қосындысы 15-ке, ал алғашқы жиырма мүшесінің қосындысы 360-қа тең. Осы прогрессияның алғашқы жиырма бес мүшесінің қосындысын табыңдар.

399. Айырымы $d \neq 0$ болатын (a_n) арифметикалық прогрессиясының жетіншіден он үшінші дейінгі, он үшінші мүшесін қоса алғанда, мүшелерінің қосындысы 52,5-ке тең. Осы прогрессияның 7,5-ке тең мүшесінің реттік нөмірін табыңдар.

400. а) 25-тен артық, бірақ 125-тен кем болатын барлық жұп сандардың; ә) 3-ке де, 5-ке де бөлінбейтін барлық екітаңбалы сандардың қосындысын табыңдар.

Шырғанақ тоғайы

401. Қазақстанның «Қаратал құмдары» ботаникалық қаумалы шағылдар арасында өсетін шырғанақ тоғайларымен белгілі. Оның ауданы (гектармен) келесі есептің жауабындағы саннан 1000 есе артық: «Асхат көкжиекпен 30° бұрыш жасайтын шағылмен төмен түсіп келеді. Ол 4 адым жасап, оның табанына жетті. Оның бірінші адымы 0,5 м, ал әрбір келесі адымы алдыңғысынан 10 см-ге артық болды. Асхат қандай биіктіктен төмен түсті?»

402. Егер сағат тек бүтін санды уақыт көрсетілгенде ғана соғатын болса, тәулігіне ол неше рет соғады?

403. Табандары 3 см және 5 см болатын трапецияның бүйір қабырғасы 4 тең бөлікке бөлініп, бөліну нүктелерінен табандарына параллель түзулер жүргізілген. Трапецияның бүйір қабырғаларының арасындағы барлық параллель кесінділердің ұзындықтарының қосындысын табыңдар.

404. Алғашқы n натурал: а) тақ сандардың; ә) жұп сандардың қосындысының формуласын жазыңдар.

405. Арлан Данамен өзінің ашқан жаңалығымен бөлісті. Ол арифметикалық прогрессиялардың ішінде тек алғашқы n тақ натурал сандар тізбегінің барлық n мүшесінің арифметикалық ортасы n-ге тең болатынын анықтапты. Шынымен де солай ма?

406. Алғашқы n натурал сандардың қосындысы: а) 555; ә) 666 болуы мүмкін бе?

407. 50; 43; … арифметикалық прогрессиясының барлық оң таңбалы мүшелерінің қосындысын табыңдар.

408. а) $a_3 + a_7 + a_{14} + a_{18} = 10$; ә) $a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = -16$ болатын (a_n) арифметикалық прогрессиясының алғашқы жиырма мүшесінің қосындысын табыңдар.

В деңгейі

409. Қосылғыштары арифметикалық прогрессияның мүшелері болатын: а) $1 + 7 + 13 + \ldots + x = 280$; ә) $(x + 1) + (x + 4) + \ldots + (x + 28) = 155$ теңдеуін шешіңдер.

410. Айырымы 0,5-ке, қосындысы 175-ке, ал бірінші мүшесі $2x^2 + 13x - 34 < 0$ теңсіздігінің ең үлкен бүтін шешіміне тең болатын арифметикалық прогрессия мүшелерінің санын анықтаңдар.

411. Радиустары бірдей неше шарды (39-суреттегідей) теңқабырғалы үшбұрыш түрінде және үлкен қабырғасына үшбұрыштың қабырғасындағыдай, ал кіші қабырғасына одан 3 шар кем сыятын тіктөртбұрыш түрінде орналастыруға болады?

412. Қосындыны табыңдар: $25^2 - 24^2 + 23^2 - 22^2 + \ldots - 2^2 + 1^2$.

С деңгейі

413. $S_n = n^2 - 1$, мұндағы $n \in N$, болатын тізбек арифметикалық прогрессия бола ма, соны зерттеңдер.

414. Арифметикалық прогрессияның алғашқы n мүшесінің қосындысы квадраттық функция, не сызықтық функция түрінде берілуі мүмкін екенін дәлелдеңдер.

415. Алғашқы n мүшесінің қосындысы: а) $S_n = 5n^2 - 8n$; ә) $S_n = n - \frac{n^2}{16}$ формуласымен есептелетін арифметикалық прогрессияның бірінші мүшесі мен айырымын табыңдар.

416. $\frac{x-1}{x}; \frac{x-2}{x}; \frac{x-3}{x}; \ldots; \frac{1}{x}$ ақырлы арифметикалық прогрессиясы берілген. Оның: а) барлық мүшелерінің қосындысын; ә) реттік нөмірлері $y = \sqrt{-n^2 + 27n - 170}$, мұндағы $n \in N$, функциясының анықталу облысына тиісті болатын мүшелерінің қосындысын табыңдар.

17. Геометриялық прогрессия және оның қасиеттері

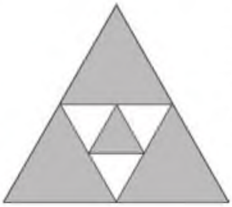
Тақырыпты оқу барысында:

• геометриялық прогрессияның анықтамасын, n-ші мүшесінің формуласын және сипаттамалық қасиетін білетін боласыңдар;

• сандар тізбегінің ішінен геометриялық прогрессияны ажыратуды үйренетін боласыңдар;

• геометриялық прогрессияның қасиеттерін есептер шығаруда қолдануды үйренетін боласыңдар.

1 - е с е п. Периметрі 12 см болатын теңқабырғалы үшбұрыш берілген. Оның ішіне төбелері берілген үшбұрыш қабырғаларының орталары болатын үшбұрыш салынған. Әрі қарай төбелері екінші үшбұрыш қабырғаларының орталары болатын тағы бір үшбұрыш салынған (40-сурет). Салынған үшбұрыштардың периметрлерінің тізбегін жазу керек. Тізбектің қандай ерекшелігі бар?



40-сурет

Үшбұрыштың орта сызығының қасиетін пайдаланып, екінші үшбұрыштың периметрі 6 см, үшіншінікі 3 см болатынын табамыз. Осы үшбұрыштар периметрлерінің тізбегі 12; 6; 3. Тізбектің екінші мүшесінен бастап алдыңғы мүшесін $\frac{1}{2}$-ге көбейткенге тең. Осындай тізбектер геометриялық прогрессия деп аталады.

Екінші мүшесінен бастап әрбір мүшесі алдыңғы мүшесін тұрақты бір санға көбейткенде шығатын нөлден өзге сандар тізбегі геометриялық прогрессия деп аталады. $(n + 1)$-ші мүшесін n-ші мүшесіне бөлгенде шығатын бөлінді **геометриялық прогрессияның еселігі** деп аталады және q әрпімен белгіленеді. (b_n) геометриялық прогрессиясының мүшелері үшін

$$b_{n+1} = b_n q$$

шарты орындалады, мұндағы q – еселік.

Егер $q = 1$ болса, геометриялық прогрессия *тұрақты* деп аталады. Геометриялық прогрессия өспелі немесе кемімелі болуы мүмкін.

Мысалы, 2; 4; 8; 16; 32; 64 сандар тізбегі еселігі $q = 2$ болатын өспелі геометриялық прогрессия мүшелерін құрайды. Көрсетілген сандарға кері сандар тізбегі $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \frac{1}{32}; \frac{1}{64}$ еселігі $q = \frac{1}{2}$ болатын кемімелі геометриялық прогрессия мүшелері болады.

(b_n) геометриялық прогрессиясының еселігі $q \neq 1$ және бірінші мүшесі b_1 белгілі болса, онда оның n-ші мүшесін мына формуламен табуға болады:

$$\boldsymbol{b_n = b_1 q^{n-1}}.$$

Осы формуланы математикалық индукция тәсілімен дәлелдейік.

1) $n = 1$ болғанда, формула ақиқат.

2) $n = k$ болғанда, $b_k = b_1 q^{k-1}$ формуласы ақиқат болады деп болжайық.

3) $n = k + 1$ болғанда, $b_{k+1} = b_1 q^k$ формуласының ақиқат болатынын дәлелдейік.

Шынымен де, геометриялық прогрессияның анықтамасы бойынша $b_{k+1} = b_k q$. Осы теңдіктегі b_k-ның орнына $b_1 q^{k-1}$ өрнегін қойып, мынаны аламыз: $b_{k+1} = b_1 q^{k-1} q = b_1 q^k$. Демек, $b_n = b_1 q^{n-1}$, мұндағы $n \in N$ және $q \neq 1$.

Геометриялық прогрессияның қасиеттерін қарастырайық.

1. Геометриялық прогрессияның екінші мүшесінен бастап әрбір мүшесінің квадраты онымен көршілес екі мүшесінің көбейтіндісіне тең, яғни

$$b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1}, \text{ мұндағы } n \geq 2.$$

Шынымен де, геометриялық прогрессияның анықтамасы бойынша $b_n = b_{n-1} q$, ал $b_{n+1} = b_n q$. Осы теңдіктерден шығатыны: $\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$, бұдан $b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1}$, мұндағы $n \geq 2$.

2. n мүшесі бар геометриялық прогрессияның бірінші мен соңғы мүшелерінің көбейтіндісі осы мүшелерден бірдей қашықтықтағы екі мүшесінің көбейтіндісіне тең, яғни $\boldsymbol{b_1 b_n = b_k b_{n-k+1}}$.

(Осы қасиетін өздігінен дәлелдеңдер.)

Мына тұжырым да ақиқат. **Егер нөлден өзге сандар тізбегінің екінші мүшесінен бастап әрбір мүшесінің квадраты оған көршілес екі мүшесінің көбейтіндісіне тең болса, онда ол тізбек**

геометриялық прогрессия болады. Осы тұжырымды 1-қасиетпен бірге *геометриялық прогрессияның сипаттамалық қасиеті* деп атайды. Бұл қасиет қайсыбір тізбектің геометриялық прогрессия болатынын не болмайтынын анықтауға мүмкіндік береді. Көрсетілген сипаттамалық қасиеттен шығатыны: оң таңбалы a, b, c сандары геометриялық прогрессияның тізбектес мүшелері болуы үшін b саны a мен c сандарының геометриялық ортасы, яғни $b = \sqrt{ac}$ болуы керек. «Геометриялық прогрессия» деп осы қасиетіне орай аталғанын айта кетелік.

2 - е с е п. Кіші катеті b-ға тең болатын тікбұрышты үшбұрыштың қабырғалары геометриялық прогрессияның тізбектес мүшелері бола ма, соны зерттеу керек. Егер болса, сол прогрессияны жазу керек.

Ш е ш у і. Тікбұрышты үшбұрыштың қабырғалары еселігі $q > 1$ болатын b, bq, bq^2 геометриялық прогрессия мүшелерін құрайды деп ұйғарайық. Пифагор теоремасы бойынша $b^2q^4 = b^2 + b^2q^2$, бұдан $q^4 - q^2 - 1 = 0$. Осы биквадрат теңдеуді шешейік: $q^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $q > 1$ екенін ескере отырып, $q = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ аламыз. Демек, тікбұрышты үшбұрыштың қабырғалары b, $b\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$, $b\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ геометриялық прогрессия мүшелері болады.

Ж а у а б ы. Болады; $b, b\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}, b\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

3 - е с е п. Бірінші банк әр жылдың соңында 6 %, ал екінші банк – әр айдың соңында 0,5 % өсім қосады. Егер пайыздық өсім өзгермейтін болса, қай банкке 4 жылға ақша салу тиімдірек?

Ш е ш у і. Егер салымшы бірінші банкке a теңге салса, онда бірінші жылдың соңында банктегі ақшасы $1{,}06a$ теңге болады. Осы ақша екінші жылдың соңында 6 %-ға өсіп, $1{,}06^2a$ теңге болады. Осылай пайымдай отырып, 4 жылдан соң банктегі ақша $1{,}06^4a$ теңге болатынын анықтаймыз. Егер салымшы екінші банкке a теңге салса, онда бірінші жылдың соңында банктегі ақшасы $1{,}005^{12}a$ теңге, ал 4 жылдан соң $1{,}005^{48}a$ теңге болады.

$1{,}06^4$ мен $1{,}005^{48}$ сандарын салыстырайық. Ол үшін $1{,}005^{12}$ мен 1,06 сандарын салыстыру жеткілікті. Ньютон биномы формуласын пайдаланып, $1{,}005^{12} = (1 + 0{,}005)^{12}$, $(1 + 0{,}005)^{12} > 1 + 12 \cdot 0{,}005$, $1 + 12 \cdot 0{,}005 = 1{,}06$ аламыз. Демек, $1{,}005^{12} > 1{,}06$, $1{,}005^{48}a > 1{,}06^4 a$.

Ж а у а б ы. Ақшаны екінші банкке салған тиімдірек.

СҰРАҚТАР

1. Геометриялық прогрессияның анықтамасын беріңдер.

2. Геометриялық прогрессияның n-ші мүшесінің формуласын қорытып шығарыңдар.

3. Геометриялық прогрессияның сипаттамалық қасиетін тұжырымдаңдар.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

417. а) $b_1 = 1$, $q = 2$; ә) $b_1 = \frac{1}{3}$, $q = 3$; б) $b_1 = -25$, $q = \frac{1}{5}$; в) $b_1 = \frac{1}{2}$, $q = -\sqrt{2}$ болатын (b_n) геометриялық прогрессиясының алғашқы бес мүшесін жазыңдар.

418. (b_n) геометриялық прогрессиясының алғашқы екі мүшесін біле отырып, оның келесі екі мүшесін табыңдар:

а) 2; 6; …; б) 1,4; –7; …; г) $2\sqrt{2}$; 4; …;

ә) 10; 5; …; в) –36; –12; …; ғ) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; –1; … .

419. а) 0,5; 5; 50; 500; ә) 5; 5,5; 5,55; 5,555; б) 4; 0,4; 0,04; 0,004; в) $-\frac{1}{8}$; $\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{2}$; 1; –2 тізбегі геометриялық прогрессия мүшелері бола ма?

420. а) $a_1 = 7, a_{n+1} = \frac{a_n}{8}$; ә) $b_1 = 7, b_{n+1} = b_n - 8$; б) $c_1 = -27, c_{n+1} = \frac{2}{9} + c_n$; в) $d_1 = -27$, $d_{n+1} = \frac{2}{9}d_n$ тізбегі арифметикалық немесе геометриялық прогрессия болатынын анықтаңдар.

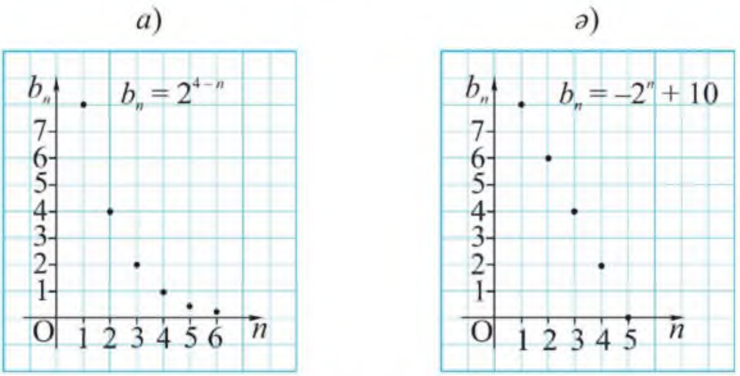
421. (b_n) геометриялық прогрессиясының n-ші мүшесінің формуласын жазып, егер: а) $b_1 = 54$, $q = \frac{1}{3}$; ә) $b_1 = 16\sqrt{2}$, $q = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $b_1 = 6{,}25$, $q = \frac{1}{5}$; в) $b_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $q = -\sqrt{3}$ болса, b_5 мүшесін табыңдар.

422. а) $b_2 + b_4 + b_6 = 5(b_1 + b_3 + b_5)$; ә) $b_2 + b_4 + b_6 = -\sqrt{2}(b_1 + b_3 + b_5)$ теңдігі орындалатын (b_n) геометриялық прогрессиясының еселігін табыңдар.

423. (b_n) геометриялық прогрессиясының: а) $b_1 = 5$, $q = -\frac{1}{2}$ болса, b_5-ті; ә) $b_6 = \frac{1}{32}$, $q = \frac{1}{2}$ болса, b_1-ді; б) $b_3 = 7$, $b_6 = 56$ болса, q-ді; в) $b_2 = 2$, $b_5 = \frac{1}{4}$ болса, b_9-ды табыңдар.

424. а) $b_1 + b_2 = 14$, $\frac{b_4}{b_3} = 4$; ә) $b_1 b_2 = 144$, $\frac{b_4}{b_3} = 3$; б) $b_1 + b_2 + b_3 = 7$, $\frac{b_4}{b_2} = 2$; в) $b_1 b_2 b_3 = 729$, $\frac{b_5}{b_3} = 9$ болатын өспелі геометриялық прогрессияның бірінші мүшесін табыңдар.

425. Графигі 41, *а*, *ә*-суретте бейнеленген тізбектердің қайсысы геометриялық прогрессия мүшелері болады?



41-сурет

426. n-ші мүшесінің формуласымен берілген: а) $x_n = 2 \cdot 4^n$; ә) $y_n = 81 \cdot 3^{1-n}$, $n \in N$, тізбегі геометриялық прогрессия бола ма, соны зерттеңдер. Егер болса, оның бірінші мүшесі мен еселігін көрсетіңдер.

427. Үш сан a, b, c геометриялық прогрессия мүшелерін құрайды. Егер a, $(b - 8)$, c сандары да геометриялық прогрессия мүшелерін құрайтын болса, b-ны табыңдар.

428. а) Геометриялық прогрессияның үшінші мүшесі –3-ке тең. Осы прогрессияның алғашқы бес мүшесінің көбейтіндісін табыңдар.
ә) $b_1 = 0{,}1$, $b_{20} = 20$ болатын (b_n) геометриялық прогрессиясының алғашқы жиырма мүшесінің көбейтіндісін табыңдар.

429. Арифметикалық прогрессия мүшелерін құрайтын үш санның қосындысы 60-қа тең. Егер бірінші саннан 10-ды, екіншіден 8-ді азайтып, ал үшінші санды өзгеріссіз қалдырса, сонда шыққан сандар геометриялық прогрессия мүшелерін құрайды. Сол сандарды табыңдар.

430. Үшбұрыш қабырғаларының ұзындықтары көбейтіндісі 216-ға тең болатын натурал сандармен өрнектелетін геометриялық прогрессия мүшелерін құрай ма, соны зерттеңдер.

431. а) $b_1 + b_3 = 60$, $b_2 = 18$; ә) $b_2 = 10$, $b_3 + b_4 = 60$; б) $b_1 + b_4 = 27$, $b_2 + b_3 = 18$; в) $b_1 + b_2 + b_3 = 7$, $b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 = 8$ болатын (b_n) геометриялық прогрессиясының еселігі мен бірінші мүшесін табыңдар.

432. а) Ашытқы жасушаларының өсуі әрбір жасушаның екіге бөлінуі арқылы жүреді. 1000-нан олардың он есе бөлінуінен соң қанша жасуша пайда болады?
ә) Жылдық өсімі p % болатын банктегі a теңге салым n жылдан соң қанша теңгеге айналады?

В деңгейі

433. Егер өзара тең емес a, b, c, d сандар тізбегі геометриялық прогрессия мүшелерін құраса, онда $(a - d)^2 = (a - c)^2 + (b - c)^2 + (b - d)^2$ болатынын дәлелдеңдер.

434. Үшінші мүшесінен бастап әрбір мүшесі алдыңғы екі мүшесінің қосындысына тең болатын геометриялық прогрессия бар бола ма? Бар болса, оның еселігін табыңдар.

435. x_1 мен x_2 сандары $x^2 + bx + 4 = 0$ теңдеуінің, ал x_3 пен x_4 – $x^2 + cx + 64 = 0$ теңдеуінің түбірлері. Егер x_1, x_2, x_3, x_4 тізбегі геометриялық прогрессия мүшелері болса, b мен c-ны табыңдар.

436. Орман шаруашылығы тәжірибелік учаскесіндегі ағаш көлемі 10 000 м³. Оның жылдық өсімі 10 %-ды құрайтыны белгілі. Осы учаскедегі ағаш көлемі 6 жылдан соң қандай болады?

437. $b_1 < 0$ және $b_1 + b_2 + b_3$ қосындысы ең үлкен мәнді қабылдайтын (b_n) геометриялық прогрессиясының еселігін табыңдар.

С деңгейі

438. Әртүрлі a, b, c оң сандары геометриялық прогрессияның тізбектес мүшелері болса, онда: а) $\frac{a+c}{2} > \frac{a+b+c}{3}$; ә) $a^3 + c^3 > 2b^3$ теңсіздігінің ақиқат болатынын дәлелдеңдер.

439. Әртүрлі үш сан бір уақытта арифметикалық та, геометриялық та прогрессиялардың мүшелері болуы мүмкін бе, соны зерттеңдер.

440. Егер a, b, $(c - 8)$ сандары арифметикалық прогрессияның, ал a, $(b - 2)$, $(c - 10)$ сандары геометриялық прогрессияның мүшелерін құрайтын болса, геометриялық прогрессия мүшелерін құрайтын a, b, c сандарын табыңдар.

441. Өспелі геометриялық прогрессияның бастапқы үш мүшесінің қосындысы 21-ге, ал оларға кері сандардың қосындысы $\frac{7}{12}$-ге тең. Прогрессияның осы үш мүшесін табыңдар.

18. Геометриялық прогрессияның алғашқы *n* мүшесінің қосындысы

Тақырыпты оқу барысында:

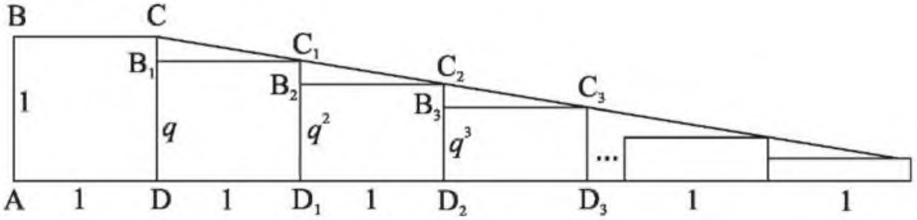
• геометриялық прогрессияның алғашқы *n* мүшесі қосындысының формулаларын білетін боласыңдар;

• геометриялық прогрессияның алғашқы *n* мүшесінің қосындысын формулалар арқылы табуды және оларды есептер шығаруда қолдануды үйренесіңдер.

$q \neq 1$ болғанда $b_n = b_1q^{n-1}$ формуласын пайдаланып, (b_n) геометриялық прогрессиясының алғашқы *n* мүшесі қосындысының формуласын қорытып шығарайық. $S_n = b_1 + b_2 + ... + b_{n-1} + b_n$, мына айырымды есептейік $S_n - S_nq = b_1 + b_1q + ... + b_1q^{n-1} - b_1q - ... - b_1q^{n-1} - b_1q^n = b_1 - b_1q^n$. Сонда $S_n(1 - q) = b_1(1 - q^n)$, бұдан $\boldsymbol{S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}}$ болады. Егер $q = 1$ болса, онда $S_n = b_1 \cdot n$ болады.

(b_n) геометриялық прогрессиясының алғашқы *n* мүшесі қосындысының $\boldsymbol{S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}}$ формуласын $0 < q < 1$ үшін геометриялық тәсілмен қорытуды қарастырайық.

Қабырғасы 1-ге тең болатын *ABCD* шаршысын саламыз. Оның *CD* қабырғасына B_1 нүктесін белгілейміз, $B_1D = q$ болсын. *AD* сәулесіне $DD_1 = 1$ болатын $DB_1C_1D_1$ тіктөртбұрышын саламыз. C_1D_1 кесіндісіне $\frac{CD}{B_1D} = \frac{C_1D_1}{B_2D_1}$ болатындай етіп B_2 нүктесін белгілейміз. Сонда $\frac{1}{q} = \frac{q}{B_2D_1}$, $B_2D_1 = q^2$ болады. Содан кейін *AD* сәулесіне $D_1D_2 = 1$ болатындай етіп $D_1B_2C_2D_2$ тіктөртбұрышын саламыз. Егер осы тәсілмен $n - 1$ тіктөртбұрыш салсақ (42-сурет), онда олардың ауданы шаршының ауданымен бірге $1; q; q^2; q^3; \dots ; q^{n-1}$ геометриялық прогрессиясын құрайтын болады. Оның қосындысы: $1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$ (14-тармақтың 1-мысалы). Егер осы теңдіктің сол жағы мен оң жағын b_1-ге көбейтсек, онда (b_n) геометриялық прогрессиясының $0 < q < 1$ болғандағы алғашқы n мүшесі қосындысының $S_n = \dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ формуласын аламыз.



42-сурет

$b_1q^n = b_1q^{n-1}q = b_nq$ болатынын ескере отырып, (b_n) геометриялық прогрессиясының алғашқы n мүшесі қосындысының формуласын былай жазуға болады: $\boldsymbol{S_n = \dfrac{b_nq - b_1}{q-1}}$.

1 - е с е п. (b_n) геометриялық прогрессиясының алғашқы төрт мүшесінің қосындысы 20-ға, ал келесі төрт мүшесінің қосындысы 320-ға тең. Осы прогрессияның еселігі мен бірінші мүшесін табу керек.

Ш е ш у і. $S_4 = \dfrac{b_1(1-q^4)}{1-q} = 20$. Келесі төрт мүшесі бірінші мүшесі b_1q^4 болатын геометриялық прогрессияны құрайды. Олардың қосындысы $\dfrac{b_1q^4(1-q^4)}{1-q} = 320$. Осы теңдіктерден шығатыны: $\dfrac{b_1q^4(1-q^4)}{1-q}$: : $\dfrac{b_1(1-q^4)}{1-q} = 320 : 20$, $q^4 = 16$. Бұдан $q = 2$ немесе $q = -2$.

Егер $q = 2$ болса, онда $\dfrac{b_1(1-2^4)}{1-2} = 20$ теңдігінен $b_1 = \dfrac{4}{3}$ аламыз.

Егер $q = -2$ болса, онда $\dfrac{b_1(1-(-2)^4)}{1-(-2)} = 20$ теңдігінен $b_1 = -4$ шығады.

Ж а у а б ы. $b_1 = \dfrac{4}{3}$, $q = 2$ немесе $b_1 = -4$, $q = -2$.

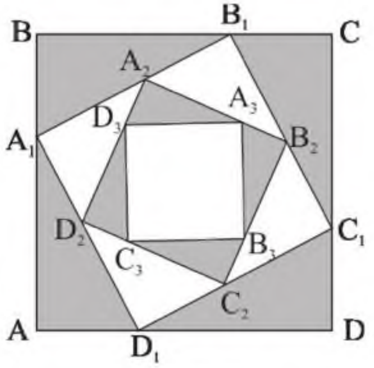
2 - е с е п. Қосындысы 189-ға, еселігі 2-ге, ал n-ші мүшесі 96-ға тең болатын геометриялық прогрессияның неше мүшесі бар?

Ш е ш у і. $S_n = \dfrac{b_n q - b_1}{q-1}$ формуласы бойынша $189 = \dfrac{96 \cdot 2 - b_1}{2-1}$ аламыз, бұдан $b_1 = 3$ шығады.

Сонда $96 = 3 \cdot 2^{n-1}$, $32 = 2^{n-1}$, $2^5 = 2^{n-1}$, $n - 1 = 5$, $n = 6$ болады.

Ж а у а б ы. 6.

3 - е с е п. Қабырғасы 9 дм-ге тең болатын $ABCD$ шаршысы берілген. Оның ішіне A_1 төбесі AB кесіндісін $AA_1 : A_1B = 2 : 1$ қатынасында бөлетін екінші $A_1B_1C_1D_1$ шаршысы салынған. Дәл осылай, екінші шаршының ішіне үшінші, үшіншіге төртінші шаршы салынған (43-сурет). Сонда шыққан барлық шаршылардың аудандарының қосындысын табу керек.



43-сурет

Ш е ш у і. Есептің шартынан үшінші және төртінші шаршылардың төбелері сәйкес қабырғаларды 2 : 1 қатынасында бөлетіні шығады.

Пифагор теоремасын пайдаланып, салынған шаршылардың қабырғаларын табайық:

$$A_1B_1 = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}, \qquad A_2B_2 = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 + \sqrt{5}^2} = 5,$$

$$A_3B_3 = \sqrt{\left(\frac{10}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2} = \frac{5\sqrt{5}}{3}, \quad A_4B_4 = \sqrt{\left(\frac{10\sqrt{5}}{9}\right)^2 + \left(\frac{5\sqrt{5}}{9}\right)^2} = \frac{25}{9}.$$

Сонда барлық шаршылардың аудандары (b_n) тізбегін құрайды: $81, 45, 25, \frac{125}{9}, \frac{625}{81}$. Бұл тізбек еселігі $q = \frac{5}{9}$ болатын геометриялық прогрессия болады. (Оны өздігінен тексеріңдер.) $S_4 = \dfrac{81\left(1 - \left(\frac{5}{9}\right)^4\right)}{1 - \frac{5}{9}} =$

$$= \frac{81\left(1 - \left(\frac{5}{9}\right)^2\right)\left(1 + \left(\frac{5}{9}\right)^2\right)}{1 - \frac{5}{9}} = 81\left(1 + \frac{5}{9}\right)\left(1 + \frac{25}{81}\right) = \frac{14 \cdot 106}{9} = \frac{1484}{9} =$$

$= 164\frac{8}{9}$ (дм^2).

Ж а у а б ы. $164\frac{8}{9}$ дм^2.

СҰРАҚТАР

Геометриялық прогрессияның алғашқы n мүшесі қосындысының:

а) $S_n = \dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}$; ә) $S_n = \dfrac{b_n q - b_1}{q-1}$ формулаларын қорытып шығарыңдар.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

442. а) $4 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + 4^5$; ә) $1 - 2 + 2^2 - 2^3 + 2^4 - 2^5 + 2^6$ қосындысын табыңдар.

443. Өрнекті бөлшек түрінде жазыңдар, мұндағы $x \neq 1$:
а) $1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10}$; ә) $x - x^3 + x^5 - x^7 + x^9 - x^{11}$.

444. (b_n) геометриялық прогрессиясының:

а) $b_1 = 8$, $q = \dfrac{1}{2}$ болса, S_5-ті;

ә) $b_1 = 5$, $q = 2$ болса, S_7-ні;
б) $b_1 + b_5 = 51$, $b_2 + b_6 = 102$ болса, S_{10}-ды;
в) $b_2 - b_1 = 18$, $b_4 - b_3 = 162$ болса, S_5-ті табыңдар.

445. (b_n) геометриялық прогрессиясы берілген. Кестені толтырыңдар:

	b_1	q	n	b_n	S_n
а)	3		6	96	
ә)	0,2		11	204,8	
б)		0,5		2	254
в)		2	8		765
г)		3		567	847
ғ)	2			2^{-3}	$3\frac{7}{8}$

446. Периметрі 24 см-ге тең болатын теңқабырғалы үшбұрыш берілген. Оның орта сызықтарынан екінші үшбұрыш тұрғызылған, екінші үшбұрыштың орта сызықтарынан үшінші, үшіншінің орта сызықтарынан төртінші үшбұрыш тұрғызылған. Осы төрт үшбұрыш периметрлерінің қосындысын табыңдар.

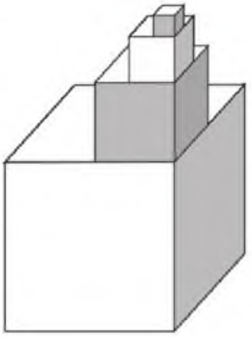
447. Қабырғасы 4 см шаршы берілген. Оның қабырғаларының орталары екінші шаршының төбелері, екіншінің қабырғаларының орталары үшіншінің төбелері болады. Осы жолмен салынған бастапқы төрт шаршы ауданының қосындысын табыңдар.

448. а) $b_1 = 0{,}4$, $q = \sqrt{2}$; ә) $b_2 = 2\sqrt{5}$, $b_3 = 10$; б) $b_1 = 0{,}(3)$, $q = \sqrt{3}$; в) $b_1 = 7^{-1}$, $q = \sqrt{7}$ болса, (b_n) геометриялық прогрессиясының алғашқы алты мүшесінің қосындысын табыңдар.

449. $c_n = \dfrac{6^{n-1}}{18}$ формуласымен берілген тізбектің геометриялық прогрессия болатынын дәлелдеңдер. c_1 мен S_4-ті табыңдар.

450. Геометриялық прогрессияның алғашқы төрт мүшесінің қосындысы –45-ке, ал алтыншы мүшесінің үшіншісіне қатынасы 8-ге тең. Осы прогрессияның –384-ке тең мүшесінің реттік нөмірін табыңдар.

451. Қыры 1 м кубтың үстіне қыры $\frac{1}{2}$ м екінші кубты, екіншіге – қыры $\frac{1}{4}$ м үшінші кубты, үшіншіге – қыры $\frac{1}{8}$ м төртінші кубты қойды (44-сурет). Содан кейін шыққан денені кубтарды қозғамастан бояп шықты. Боялған ауданды табыңдар.



44-сурет

452. 1 мен 256 сандарының арасына солармен бірге геометриялық прогрессия мүшелерін құрайтын үш сан жазып, олардың қосындысын табыңдар.

453. $S_3 = 80$, $S_6 = 90$ болатын геометриялық прогрессияның алғашқы тоғыз мүшесінің қосындысын табыңдар.

454. Үш сан геометриялық прогрессия мүшелерін құрайды. Олардың қосындысы $2\frac{3}{8}$-ке, ал оларға кері сандардың қосындысы $4\frac{2}{9}$-ге тең. Сол сандардың көбейтіндісін табыңдар.

455. Сатушы жылқысын 150 000 теңгеге сатпақ болды. Бірақ сатып алушы бағаны қымбатсынып, жылқыны сатып алғысы келмеді. Сонда сатушы басқа шарт ұсынды: «Онда тек тағаның шегелерін ғана сатып алсаң, жылқыны тегін аласың. Әр тағада 6 шеге бар. Бірінші шегеге теңгенің $\frac{1}{4}$-ін, екіншіге – теңгенің $\frac{1}{2}$-ін, үшіншіге – 1 теңге, т.с.с. берсең жеткілікті». Сатып алушы ол бағаны аз көріп, сатушының шартына келісті. Сатып алушы қанша теңге артық төлейтін болды? (Есеп XVIII ғасырда Ресейде математикадан негізгі мектеп оқулығы болған Л. Ф. Магницкийдің «Арифметика» кітабынан алынған, өлшем бірліктері мен сандары өзгертілді.)

В деңгейі

456. Егер (b_n) тізбегінің алғашқы n мүшесінің қосындысын $S_n = 2^n - 1$ формуласымен табуға болса, онда (b_n) геометриялық прогрессия болатынын дәлелдеңдер.

457. Геометриялық прогрессияның алғашқы n мүшесінің квадраттары қосындысының формуласын қорытып шығарыңдар.

458. Қабырғасы 8 дм-ге тең теңқабырғалы үшбұрыш берілген. Оның биіктіктерінен екінші үшбұрыш, екіншінің биіктіктерінен – үшінші т.с.с. үшбұрыш салынған. Осы үшбұрыштардың аудандары геометриялық прогрессия құрайтынын дәлелдеп, оның бес мүшесінің қосындысын табыңдар.

459. Аңыз бойынша үнді патшасы шахмат ойынын ойлап тапқан өнертапқышқа өзіне-өзі марапат тағайындауды ұсыныпты. Ол патшадан бидай дәндерін беруді: бірінші торкөзге 1 дән, екіншіге – екі дән, тағы сол сияқты соңғы 64-ші торкөзге дейін әрбір келесіге алдыңғыдан 2 есе артық дән сұраған екен.

а) Ол қанша бидай дәнін сұраған? Ол санды қалай оқуға болады?

ә) Егер бір дәннің салмағы ≈ 0,065 грамм болса, өнертапқыштың сұраған бидай дәндерінің салмағы шамамен неше тонна болатынын есептеңдер.

460. Теңдеуді шешіңдер:

а) $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x = 0$; ә) $x^4 + x^3 + x = 1$.

С деңгейі

461. (b_n) геометриялық прогрессиясы үшін $S_n - S_k = \dfrac{b_{k+1}(q^{n-k} - 1)}{q - 1}$ формуласының ақиқат болатынын дәлелдеңдер.

462. $3^{2019} \cdot \left(1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + ... + \left(\frac{2}{3}\right)^{2019}\right)$ өрнегінің мәні бүтін сан бола ма?

463. Геометриялық прогрессияның алғашқы n мүшесі қосындысының формуласын пайдаланып, $\sqrt{1\ 111\ 111\ 111 - 22\ 222}$ өрнегінің мәнін табыңдар.

19. Шексіз кемімелі геометриялық прогрессия

Тақырыпты оқу барысында:

• шексіз кемімелі геометриялық прогрессия мен оның қосындысы ұғымын;

• шексіз кемімелі геометриялық прогрессия қосындысының формуласын;

• шексіз кемімелі геометриялық прогрессия қосындысының формуласын периодты ондық бөлшекті жай бөлшекке түрлендіруге және есептер шығаруда қолдануды білетін боласыңдар.

Шексіз прогрессиялардың мысалдарын қарастырайық:

$1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \ldots$, прогрессияның еселігі $\frac{1}{2}$-ге тең;

$1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{8}; \ldots$, прогрессияның еселігі $-\frac{1}{2}$-ге тең.

Осы прогрессиялардың әрқайсысының еселіктерінің модульдері 1-ден кем. Еселігінің модулі 1-ден кем болатын шексіз геометриялық прогрессияны *шексіз кемімелі геометриялық прогрессия* деп атайды.

$\frac{1}{3}$ саны шексіз периодты 0,333... ондық бөлшекке айналатыны белгілі. Егер осы бөлшекті разрядты қосылғыштардың қосындысы түрінде көрсететін болсақ, онда саны шексіз қосылғыштардың қосындысын $0{,}3 + 0{,}03 + 0{,}003 + 0{,}0003 + \ldots$ аламыз.

Бұл қосындының қосылғыштары еселігі $q = 0{,}1$ болатын шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның мүшелері болады. Геометриялық прогрессияның алғашқы n мүшесі қосындысының $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ формуласы бойынша $S_n = \frac{0{,}3(1-(0{,}1)^n)}{1-0{,}1} = \frac{1-(0{,}1)^n}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3\cdot 10^n}$ аламыз. n шексіздікке ұмтылғанда ($n \to \infty$ жазылады), $\frac{1}{3\cdot 10^n}$ бөлшегінің мәні нөлге ұмтылады. Сондықтан $S_n \to \frac{1}{3}$, оны былай жазады: $0{,}3 + 0{,}03 + 0{,}003 + 0{,}0003 + \ldots = \frac{1}{3}$. $\frac{1}{3}$ санын көрсетілген прогрессияның қосындысы деп атайды.

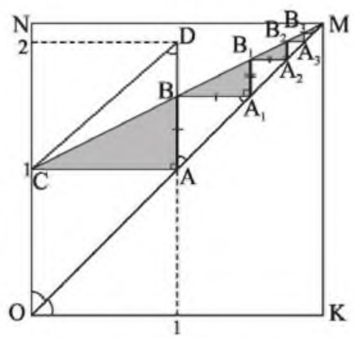
Шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысы деп n шексіздікке ұмтылғанда оның алғашқы n мүшесі қосындысының ұмтылатын санын айтады.

Шексіз кемімелі геометриялық прогрессия b_1; b_1q; ...; b_1q^{n-1}; ... қосындысының формуласын қорытып шығару үшін $S_n = \dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ формуласын пайдаланамыз.

$S_n = \dfrac{b_1}{1-q} - \dfrac{b_1q^n}{1-q}$ және $|q| < 1$ болғандықтан, $n \to \infty$ ұмтылғанда $q^n \to 0$ және $\dfrac{b_1q^n}{1-q} \to 0$ ұмтылады. Демек, $n \to \infty$ ұмтылғанда $S_n = \dfrac{b_1}{1-q}$ болады. $\dfrac{b_1}{1-q}$ өрнегінің мәнін шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысы деп қабылдайды. Бұл қосындының формуласын былай жазады: $\boldsymbol{S = \dfrac{b_1}{1-q}}$.

Осы формуланың $0 < q < 1$ болғанда, геометриялық тәсілмен қорытылуын қарастырайық.

OKMN шаршысын алып, оның қабырғаларына бірлік кесінділер салып, 45-суретте көрсетілгендей *OC*, *AB*, A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, ... кесінділер тізбегін белгілейміз. Бұл кесінділер $q = AB$ және $b_1 = 1$ болатын геометриялық прогрессияның 1; q; q^2; q^3; ... мүшелерін бейнелейді.



45-сурет

Шынымен де, бояп көрсетілген тікбұрышты үшбұрыштардың ұқсастығынан және пропорциялардың қасиеттерінен мынаны аламыз: $\dfrac{A_1B_1}{q} = \dfrac{q}{1}$, бұдан $A_1B_1 = q^2$.

$\dfrac{A_2B_2}{A_1B_1} = \dfrac{A_2B_1}{A_1B}$, сонда $\dfrac{A_2B_2}{q^2} = \dfrac{q^2}{q}$, $A_2B_2 = q^3$ тағы сол сияқты.

Бұл прогрессияның мүшелерінің қосындысы *OKMN* шаршысының *KM* қабырғасына тең. Сәйкес үшбұрыштардың ұқсастығы мен пропорцияның қасиетін пайдаланып, *KM*-ді табамыз. *CBD* және

MCO, ACD және KOM үшбұрыштарының ұқсастығынан шығатыны, $\frac{BD}{OC} = \frac{CD}{OM} = \frac{AD}{KM}$. Бұдан $KM = \frac{OC \cdot AD}{BD} = \frac{1 \cdot 1}{1-q} = \frac{1}{1-q}$, яғни $1 + q + q^2 + q^3 + \ldots = \frac{1}{1-q}$.

Егер $b_1 \neq 1$ болса, онда соңғы теңдіктің сол және оң жақтарын b_1-ге көбейтіп, $S = \frac{b_1}{1-q}$ формуласын аламыз, мұндағы $0 < q < 1$.

1 - е с е п. Қосындысы 1,6-ға, ал екінші мүшесі –0,5-ке тең болатын шексіз кемімелі (b_n) геометриялық прогрессиясының үшінші мүшесін табу керек.

Ш е ш у і. Есептің шарты бойынша теңдеулер жүйесін құрамыз $\begin{cases} \frac{b_1}{1-q} = \frac{8}{5}, \\ b_1 q = -\frac{1}{2}. \end{cases}$ Бұдан $b_1 q : \frac{b_1}{1-q} = -\frac{1}{2} : \frac{8}{5}$; $q(1-q) = -\frac{5}{16}$; $q^2 - q - \frac{5}{16} = 0$; $q = \frac{1 \pm \sqrt{1 + \frac{5}{4}}}{2} = \frac{1 \pm \frac{3}{2}}{2}$ аламыз; $q_1 = -\frac{1}{4}$, ал $q_2 = \frac{5}{4}$ саны $|q| < 1$ шартын қанағаттандырмайды. Сонда $b_3 = b_2 q = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}$ болады.

Ж а у а б ы. $\frac{1}{8}$.

М ы с а л. 5,2(7) шексіз периодты ондық бөлшегін жай бөлшек түрінде жазу керек.

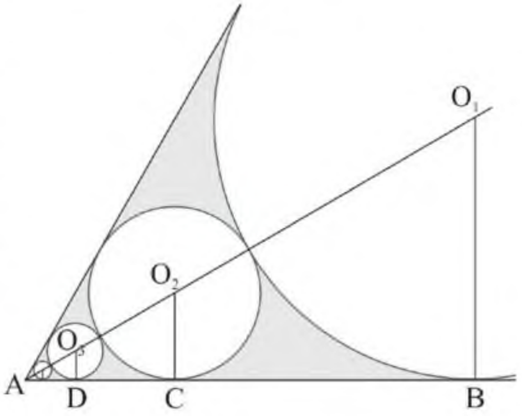
Ш е ш у і. Берілген санды разрядтық қосылғыштардың қосындысы түрінде көрсетейік: 5,2(7) = 5 + 0,2 + 0,07 + 0,007 + … .

Осы қосындының үшінші мүшесінен бастап барлық қосылғыштары $b_1 = 0{,}07$, $q = 0{,}1$ болатын шексіз кемімелі (b_n) геометриялық прогрессиясын құрайды. Бұл прогрессияның қосындысы: $S = \frac{0{,}07}{1 - 0{,}1} = \frac{7}{90}$. Сонда $5{,}2(7) = 5 + \frac{2}{10} + \frac{7}{90} = 5 + \frac{25}{90} = \frac{95}{18}$ болады.

Ж а у а б ы. $5{,}2(7) = \frac{95}{18}$.

2 - е с е п. 60°-қа тең A бұрышына іштей шеңбер сызылған. Оның O_1 центрінен бұрыштың төбесіне дейінгі қашықтық d-ға тең. Со-

дан кейін осы бұрышқа іштей бір-бірімен және бұрыштың қабырғаларымен жанасатын шексіз көп шеңберлер сызылған (46-сурет). Сол шеңберлердің радиустарының қосындысын табу керек.



46-сурет

Ш е ш у і. $O_2C = x$ болсын. Бұрышқа іштей сызылған шеңберлердің центрлері осы бұрыштың биссектрисасында жататынын және тікбұрышты үшбұрыштың 30° бұрышқа қарсы жатқан катетінің қасиетін ескере отырып, мынаны аламыз: $O_1B = \frac{d}{2}$, $AO_2 = 2x$, $AO_1 = 2x + x + \frac{d}{2} = 3x + \frac{d}{2}$.

Есептің шарты бойынша $AO_1 = d$, сонда $3x + \frac{d}{2} = d$, $x = \frac{d}{6}$, яғни $O_2C = \frac{d}{6}$, сондықтан $\frac{O_2C}{O_1B} = \frac{1}{3}$.

$O_3D = y$ болсын, сонда $AO_3 = 2y$, $AO_2 = 2y + y + \frac{d}{6} = 3y + \frac{d}{6}$. $AO_2 = \frac{d}{3}$ болатынын ескере отырып, $3y + \frac{d}{6} = \frac{d}{3}$, $y = \frac{d}{18}$ аламыз, яғни $O_3D = \frac{d}{18}$, сонда $\frac{O_3D}{O_2C} = \frac{1}{3}$ болады.

Дәл осылай пайымдай отырып, барлық шеңберлердің радиустары бірінші мүшесі $\frac{d}{2}$-ге, еселігі $\frac{1}{3}$-ге тең болатын шексіз кемімелі прогрессия құрайтынын табамыз. Оның қосындысы: $S = \frac{d}{2} : \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{4}d$ болады.

Ж а у а б ы. $\frac{3}{4}d$.

СҰРАҚТАР

1. Шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның анықтамасын беріңдер.
2. Шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысы дегеніміз не?
3. Шексіз кемімелі геометриялық прогрессия қосындысының формуласын жазып, оны түсіндіріңдер.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

464. а) $b_1 = 1$, $q = \frac{1}{3}$; ә) $b_1 = 1$, $q = -\frac{1}{2}$; б) $b_1 = 2$, $q = \frac{1}{4}$; в) $b_1 = -3$, $q = \frac{1}{2}$ болатын (b_n) шексіз кемімелі геометриялық прогрессиясының алғашқы төрт мүшесін жазыңдар және прогрессияның қосындысын табыңдар.

465. Шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысын табыңдар:

а) $8 - 4 + 2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \ldots$; б) $3 + \sqrt{3} + 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots$;

ә) $7 - \frac{21}{4} + \frac{63}{16} - \frac{189}{64} + \ldots$; в) $-2 + \sqrt{2} - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} + \ldots$.

466. Алымы мен бөлімі шексіз кемімелі геометриялық прогрессия болатын $\frac{1 + a + a^2 + \ldots}{a + a^3 + a^5 + \ldots}$ бөлшегін ықшамдаңдар.

467. Шексіз прогрессияның қосындысын табыңдар:

а) $1 + \cos 60° + \cos^2 60° + \ldots$; б) $1 - \sin 45° + \sin^2 45° - \ldots$;

ә) $1 + \operatorname{tg} 30° + \operatorname{tg}^2 30° + \ldots$; в) $-1 - \cos 30° - \cos^2 30° - \ldots$.

468. а) 0,4(4); ә) 0,3(4); б) 0,23(3); в) 1,17(2); г) 0,423(7); ғ) –21,1(5) шексіз периодты ондық бөлшекті жай бөлшек түрінде көрсетіңдер.

469. $|x| < 1$ болатын өрнекті бөлшек түрінде жазыңдар:

а) $3 + 3x^2 + 3x^4 + \ldots + 3x^{2n} + \ldots$; ә) $1 + 2x + 2x^2 + \ldots + 2x^n + \ldots$.

470. а) $S = 0,2$ және $q = \frac{4}{9}$; ә) $S = 0,5$ және $c_1 + c_2 = 0,48$; б) $S = 6,4$ және $c_1 + c_2 + c_3 = 6,3$ болатын (c_n) шексіз кемімелі геометриялық прогрессиясының бірінші мүшесін табыңдар.

471. а) $b_1 = 3$, $S = 3,5$; ә) $S_6 = \frac{7}{8}S$; б) $b_2 = -\frac{1}{2}$, $S = 1,6$; в) $19S = 27S_3$ болатын (b_n) шексіз кемімелі геометриялық прогрессиясының еселігін табыңдар.

472. a-ның қандай мәндерінде шексіз кемімелі $2a$; $a\sqrt{2}$; a; ... геометриялық прогрессиясының қосындысы: а) 8-ге; ә) $(2 + \sqrt{2})$-ге тең болады?

473. (b_n) шексіз кемімелі геометриялық прогрессиясының қосындысы 8,75-ке тең. Егер оның тақ орында тұрған мүшелерін алсақ, онда қосындысы $7\frac{7}{24}$-ге тең болатын шексіз кемімелі геометриялық прогрессия шығады. b_3-ті табыңдар.

474. Тақ нөмірлі мүшелерінің қосындысы 3-ке, ал жұп нөмірлі мүшелерінің қосындысы 1-ге тең болатын (b_n) шексіз кемімелі геометриялық прогрессиясының бірінші мүшесі мен еселігін табыңдар.

475. Қабырғасы 8 см-ге тең теңқабырғалы үшбұрыш берілген. Оның бүйір қабырғаларының орталарынан өтетін түзумен одан екінші үшбұрыш қиылған, екінші үшбұрыштан осы жолмен үшінші үшбұрыш қиылған, дәл осылай шексіздікке дейін жалғастырылған. Осындай үшбұрыштардың барлығының аудандары қосындысын табыңдар.

476. Бірінші мүшесі 1-ге тең шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысы Q-ге тең. Осы прогрессия мүшелері квадраттарының қосындысын табыңдар.

477. Бірінші мүшесі басқа мүшелерінің қосындысынан 10 есе артық болатын шексіз кемімелі геометриялық прогрессия бар бола ма, соны зерттеңдер. Бар болса, сондай тізбектің мысалын келтіріңдер.

B деңгейі

478. а) $\sqrt{2}$, $2-\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}-4$, …; ә) $\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}-3$, $7\sqrt{3}-12$, … шексіз кемімелі геометриялық прогрессиясының қосындысын табыңдар.

479. Жай бөлшек түрінде жазыңдар: а) $\frac{0,2(5)}{0,12(7)}$; ә) $\frac{0,2(27)}{0,(63)}$.

480. Сол жағында шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысы жазылған теңдеудің түбірлерін табыңдар:

а) $x+x^3+x^5+\ldots=\frac{2}{3}$; ә) $x+x^2+\ldots=3,5-\frac{1}{x}$.

481. а) $b_3-b_1=36$, $b_4-b_3=18$; ә) $b_1-b_4=7$, $b_2-b_3=2$ болатын шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысын табыңдар.

C деңгейі

482. а) 5; ә) 3,5 санын қандай да бір шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысы түрінде көрсетіңдер.

483. Шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысы 4-ке, ал оның мүшелері кубтарының қосындысы 192-ге тең. Осы прогрессияның еселігін табыңдар.

484. 8; 5; ... шексіз кемімелі геометриялық прогрессиясының алғашқы n мүшесінің ең аз дегенде нешеуін алып тастағанда, оның қалған мүшелерінің қосындысы 10-нан кем болады?

485. Қосындысы 8-ге тең болатын шексіз кемімелі (c_n) геометриялық прогрессиясы берілген. $c_n=\frac{1}{4}$ және $\frac{c_1+c_2+\ldots+c_{n-1}}{c_{n+1}+c_{n+2}+\ldots}=$ $=30$. Прогрессияның $\frac{1}{4}$-ге тең мүшесінің нөмірін табыңдар.

20. «Тізбектер» бөлімін қайталауға арналған жаттығулар

А деңгейі

486. $c_n = \dfrac{10^n - 1}{9}$ формуласымен берілген тізбектің алғашқы бес мүшесін жазып, олардың қосындысын табыңдар. Осы тізбек геометриялық прогрессия бола ма?

487. (a_n) тізбегі рекуррентті түрде берілген: $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 2a_n - 1$. $a_n = 2^n + 1$ болатынын дәлелдеңдер.

488. Кез келген $n \in N$ үшін $\dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + ... + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n}{2n+1}$ теңдігінің ақиқат болатынын дәлелдеңдер.

489. Кез келген өзара тең емес a және b сандары үшін: а) $(a + b)^2$; $a^2 + b^2$; $(a - b)^2$ тізбегінің арифметикалық прогрессия; ә) $(a + b)^2$; $a^2 - b^2$; $(a - b)^2$ тізбегінің геометриялық прогрессия мүшелері болатынын дәлелдеңдер.

490. Қайсыбір үшбұрыштың бұрыштарының шамасы арифметикалық прогрессия мүшелерін құрайды. Олардың бірі 60°-қа тең болатынын дәлелдеңдер.

491. Үшбұрыш қабырғаларының ұзындықтары айырымы 2 см-ге тең арифметикалық прогрессияның тізбектес мүшелері болады. Егер үшбұрыштың ауданы 8 см^2, ал ең үлкен және ең кіші қабырғаларының арасындағы бұрыш 30°-қа тең болса, оның периметрін табыңдар.

492. Арифметикалық прогрессияның алты мүшесі бар. Жұп нөмірлі мүшелерінің қосындысы 15-ке, ал тақ нөмірлі мүшелерінің қосындысы 27-ге тең. Осы прогрессияның бесінші мүшесін табыңдар.

493. Арифметикалық прогрессияның $a_3 + a_{10} + a_{18} + a_{25} = 10$. S_{27}-ні табыңдар.

494. Арифметикалық прогрессияның он екінші мүшесі –7-ге тең. Оның алғашқы жиырма үш мүшесінің қосындысын табыңдар.

495. а) $a_1 = 9$, $a_n = 23$, $S_n = 352$; ә) $a_1 = 7$, $a_n = -27$, $S_n = -180$ болатын арифметикалық прогрессияның айырымы мен мүшелерінің санын табыңдар.

496. а) Егер велосипедші бірінші сағатта 20 км, ал әрбір келесі сағатта 2 км кем жүріп отырған болса, ол 90 км-ді неше сағатта жүріп өтеді?

ә) Цирк секторларының бірінде көрермендер үшін орындықтар әрбір келесі қатарда алдыңғыдан бір орынға артық болатындай етіп орнатылған. Егер сектордың бірінші қатарында 8 орын, ал қатар саны 22 болса, ол секторда қанша орын бар?

Үстірт қыраты

497. Қазақстанның Үстірт мемлекеттік қорығының ауданы 223 342 га. Бастапқы натурал тақ сандардың нешеуін қосқанда қосынды осы қорықтың ауданын гектармен өрнектейтін саннан аспайтын болады?

498. Жас шамалары айырымы 1-ге тең арифметикалық прогрессия мүшелерін құрайтын үш дос әрқайсысының туған күніне неше жасқа толса, сонша марка сыйлайтын болып келісті. 4 жылдан соң достардың маркаларының жалпы саны 114-ке жетті. Келісім жасаған кезде балалар неше жаста болған?

499. а) 4-ке бөлгенде қалдығы 3-ке тең болатын екітаңбалы сандардың; ә) 5-ке бөлінетін үштаңбалы сандардың қосындысын табыңдар.

500. $2n - 1$, $2n + 1$, $2n + 3$, $2n + 5$ натурал сандар тізбегінің соңғы үш саны геометриялық прогрессия мүшелерін құрауы мүмкін бе, соны зерттеңдер.

501. а) $b_3 = 36$, $b_4 = 24$; ә) $b_3 = 36$, $b_5 = 144$; б) $b_3 = 36$, $b_6 = -972$; в) $b_3 = 36$, $b_7 = 2\frac{1}{4}$ болатын (b_n) геометриялық прогрессиясының бастапқы екі мүшесін табыңдар.

502. Үш сан геометриялық прогрессия мүшелерін құрайды. Егер екінші санды 8-ге арттырса, қайта геометриялық прогрессия мүшелері шығады. Екінші санды табыңдар.

ә) Астана (2019 ж. бастап Нұр-Сұлтан) қаласының халқының саны 1998 жылы 300 000 адам, ал 2017 жылы 1 миллион 32 мың 450 адамға жетті. Осы мәндерді арифметикалық прогрессияның бірінші мен жиырмасыншы мүшелері ретінде қарастырып, оның айырымын табыңдар. Осы айырымды астана халқының көрсетілген 20 жыл көлеміндегі жылдық өсімі деу ақиқат па?

Нұр-Сұлтан қаласы

503. (b_n) геометриялық прогрессиясының: а) $b_1 = 7$, $b_5 = 56$ болса, $b_2 \cdot b_4$-ті; ә) $b_8 = 4$ болса, $b_6 \cdot b_7 \cdot b_8 \cdot b_9 \cdot b_{10}$-ды табыңдар.

504. Дәрия, Рашит және Айым 25 теңгеден дәптерлер және қаламдар сатып алды. Дәрия 10 дәптер мен 3 қалам, Рашит 20 дәптер мен 2 қалам, Айым 30 дәптер мен 3 қалам сатып алды. Дәрия, Рашит және Айымның төлеген ақшаларының сомасы геометриялық прогрессия мүшелерін құрайтын болып шықты. Қалам неше теңге тұрады?

505. Егер S шексіз кемімелі b_1, b_2, b_3, ... геометриялық прогрессиясының қосындысы болса, онда $\frac{S}{S - b_1} = \frac{b_1}{b_2}$ болатынын дәлелдеңдер. (Француз математигі П. Ферманың (1601–1665) есебі.)

506. а) $9S = S_3$; ә) $S_5 = 31$, $S = 32$; б) $7S = 16S_4$ болатын (b_n) шексіз кемімелі геометриялық прогрессиясының еселігін табыңдар.

В деңгейі

507. (b_n) тізбегінің n-ші мүшесі $b_n = n(2n + 1)$ формуласымен берілген. Оның алғашқы n мүшесінің қосындысын $S_n = \dfrac{n(n+1)(4n+5)}{6}$ формуласымен табуға болатынын дәлелдеңдер.

508. Кез келген $n \in N$ үшін $6^{2n-1} + 1$ өрнегінің мәні 7-ге бөлінетінін дәлелдеңдер.

509. а) $x^2 - 4$; $x^2 + 3$; $2x^2 + 5$; ә) $x - \sqrt{2}$; $x\sqrt{2} + 2$; $3x - \sqrt{2}$ тізбегі x-тің қандай мәндерінде арифметикалық прогрессия мүшелері болатынын зерттеңдер.

510. Егер $10 < x_n < 20$ болса, бөлімі 3-ке тең болатын барлық қысқармайтын x_n бөлшектерінің қосындысын табыңдар.

511. Әрқайсысы сағатына m метр мата тоқитын автоматты 16 станок бар. Бірінші станок сағат 8-де, ал әрбір келесісі 5 минуттан кейін қосылады. Осы станоктар сағат 8-ден 10-ға дейінгі аралықта неше метр мата шығарады?

512. Арифметикалық прогрессияның алғашқы бес мүшесінің қосындысы 5-ке тең. Егер оның бесінші мүшесі шексіз кемімелі геометриялық $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, ... прогрессиясының қосындысына тең болса, арифметикалық прогрессияның айырымын табыңдар.

513. Арифметикалық прогрессияның тоғыз мүшесі берілген, бірінші мүшесі 1-ге, ал мүшелерінің қосындысы 369-ға тең. Геометриялық прогрессияның да тоғыз мүшесі бар, осы прогрессиялардың бірінші мен тоғызыншы мүшелері бірдей. Геометриялық прогрессияның еселігін табыңдар.

С деңгейі

514. Кез келген $n \in N$ үшін $n^5 - n$ өрнегінің мәні 10-ға бөлінетінін дәлелдеңдер.

515. Кез келген натурал $n > 2$ сандары үшін $4^n > 3^n + 2^n$ теңсіздігінің ақиқат болатынын дәлелдеңдер.

516. Егер тікбұрышты үшбұрыштың қабырғалары арифметикалық прогрессия мүшелерін құрайтын болса, онда прогрессияның айырымы осы үшбұрышқа іштей сызылған шеңбердің радиусына тең болатынын дәлелдеңдер.

517. Бірінші мүшесі 1-ге тең шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысы Q-ге тең. Осы прогрессияның мүшелері кубтарының қосындысын табыңдар.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

518. 1A) (a_n) тізбегі былай басталады: 5; 15; ... . Егер осы тізбек а) арифметикалық прогрессия; ә) геометриялық прогрессия болса, оның алғашқы бес мүшесін жазыңдар.

2A) Тізбек n-ші мүшесінің $a_n = 7n + 3$ формуласымен берілген. 2019 саны осы тізбекке тиісті ме, соны анықтаңдар.

3B) Арақашықтығы 117 м-ге тең екі пункттен бір мезгілде екі қоңыз бір-біріне қарама-қарсы бағытта қозғала бастады. Олардың бірі бірінші минутта 1 м, ал келесі әрбір минутта алдыңғыдан 0,5 м артық жүріп отырды. Екінші қоңыз әр минутта 6 м жүріп отырды. Олар неше минуттан соң кездеседі?

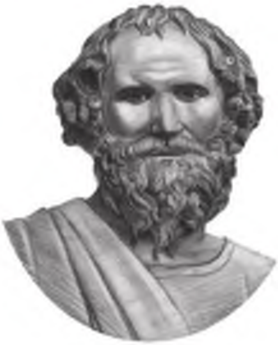
4B) Алғашқы үш мүшесінің қосындысы 7-ге, ал олардың көбейтіндісі 8-ге тең болатын шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысын табыңдар.

5C) Кез келген $n \in N$ үшін $7^{2n} - 1$ өрнегінің мәні 24-ке бөлінетінін дәлелдеңдер.

БҰЛ ҚЫЗЫҚТЫ!

Тізбектерді зерттеу мен математикалық индукция әдісінің математикада және оның қолдануында үлкен мәні бар.

Арифметикалық және геометриялық прогрессия туралы алғашқы түсінік ежелгі халықтарда болған. Вавилондықтардың сына жазулы тақтайшалары мен египеттік папирустарда осы прогрессиялардың есептері мен оларды шешу ережелері көрсетілген. Біздің дәуірімізге дейінгі III ғасырда ежелгі грек оқымыстылары арифметикалық прогрессияның алғашқы n мүшесінің қосындысын (Диофант) және геометриялық прогрессияның бірнеше мүшесінің



Архимед

Фибоначчи

қосындысын (Евклид) табу ережелерін тұжырымдаған болатын. Архимед шексіз кемімелі геометриялық $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$ прогрессиясының қосындысын қалай табуға болатынын көрсеткен. Тізбектер теориясының дамуына үнді математиктерінің де қосқан үлесі зор.

Еуропада XIII ғасырда итальяндық математик Фибоначчи (1170–1250) «Абака туралы кітап» шығармасын жариялағаннан кейін тізбектер кеңінен қолданыла бастады.

Онда ол гректерге, үнділіктерге, арабтарға белгілі болған арифметика мен алгебра туралы материалдарды ретке келтіріп, баяндаған болатын. Бұл Еуропада математиканың тез дамуына үлкен әсерін тигізді.

Математикалық индукция әдісіне әкелетін пайымдауларды ертедегі оқымыстылар да қолданған. Бұл әдістің ашылуына француз математиктері Р. Декарт (1596–1650) пен Б. Паскаль (1623–1662) көп үлес қосты.

Ғаламтордан:

а) Фибоначчи сандары туралы мәліметтерді, «қояндар туралы есептер» мен оның шешуін;

ә) арифметикалық немесе геометриялық прогрессия арқылы шығарылатын Ежелгі Мысыр және Ежелгі Вавилон есептерін табыңдар.

IV. ТРИГОНОМЕТРИЯ

Бөлімді оқу нәтижесінде

• бұрыш пен доғаның градустық және радиандық өлшемдері ұғымдарын;

• кез келген бұрыштың синусының, косинусының, тангенсінің және котангенсінің анықтамаларын;

• тригонометриялық функциялардың анықтамалары мен олардың қасиеттерін;

• бұрыштардың тригонометриялық функцияларының арасындағы қатыстарды өрнектейтін формулаларды **білу керек**.

• градустық және радиандық өлшемдермен өрнектелген бұрыштардың тригонометриялық функцияларының мәндерін таба алу;

• тригонометриялық функциялардың қасиеттерін өрнектерді тепе-тең түрлендіруге және есептер шығаруда қолдана **алу керек**.

21. Бұрыш пен доғаның градустық және радиандық өлшемдері

Тақырыпты оқу барысында:

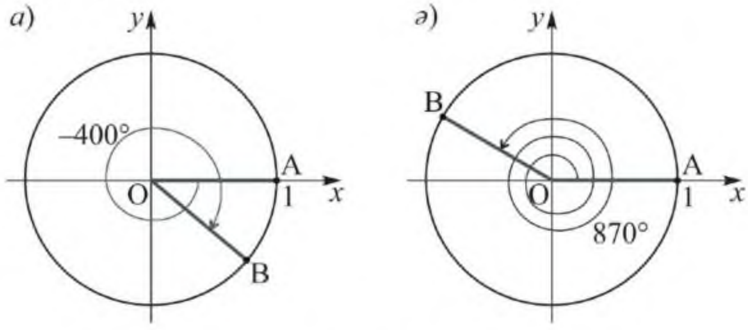
• кез келген бұрыштың градустық және радиандық өлшемдері мен бірлік шеңбер ұғымдарын; бұрыштың градустық өлшемін радиандық өлшемге және кері айналдыру тәсілдерін білетін боласыңдар;
• бірлік шеңберге градустық және радиандық өлшемдермен өрнектелген бұру бұрыштарын белгілеуді үйренесіңдер;
• нақты сандармен және радиандық өлшемдермен өрнектелген бұру бұрыштарының арасында сәйкестік орнатуды үйренесіңдер.

8-сыныптың геометрия курсында $0°$-тан $180°$-қа дейінгі бұрыштардың синусы, косинусы, тангенсі және котангенсі ұғымдары қарастырылған болатын. Тригонометрияда кез келген бұрыштың тригонометриялық функциялары зерттеледі. Осы функциялардың қасиеттерін оқымас бұрын тригонометриядағы кез келген бұрыш ұғымын қарастырайық. $0°$-тан $180°$-қа дейінгі бұрыштардың тригонометриялық функцияларын енгізгенде бірлік радиусты жарты шеңберді қарастырған болатынбыз. Енді *координаталық* немесе *бірлік шеңбер* деп аталатын радиусы бірге тең шеңберді пайдаланатын боламыз. Оған санақ басын – $A(1; 0)$ нүктесін белгілейміз. Шеңбер бойымен сағат тілі бағытына қарсы бұруды оң бағыт, ал сағат тілі бағытымен бұруды теріс бағыт деп санайтын боламыз.

47-сурет

α бұрышына бұрғанда бастапқы OA радиусы OB радиусына көшетін болсын. Сонда AOB бұрышының шамасын *бұру бұрышы* деп атайды (47-сурет). Әрбір α бұру бұрышын $\alpha = 360° \cdot n + \varphi$ түрінде қарастыруға болады, мұндағы $n \in Z$ және $0° \leq \varphi < 360°$. Егер бұру бұрышы сағат тілі бағытына қарсы қозғалу барысында алынған болса, онда ол оң бұрыш деп, ал сағат тілі бағытымен алынса, теріс бұрыш деп есептеледі. OB радиусының қай координаталық ширекте болуына байланысты бұру бұрышын сол ширектің бұрышы деп атайды. $0°$, $\pm 90°$, $\pm 180°$, $\pm 270°$, $\pm 360°$ бұрыштары ешқандай ширекке жатпайды.

Шеңбердің B нүктесін $\beta = \alpha + 360° \cdot n$, мұндағы $0° \le \alpha < 360°$, $n \in Z$, бұрышына бұру арқылы да алуға болады. α бұрышына бүтін сан айналым бұрышты қосқанда α жатқан ширектің бұрышы шығады. Мысалы, $-400°$ бұрыш төртінші ширектің бұрышы, себебі $-400° = -40° + (-360°)$, $870°$ бұрыш екінші ширектікі, себебі $870° = 150° + 360° \cdot 2$ (48-сурет).

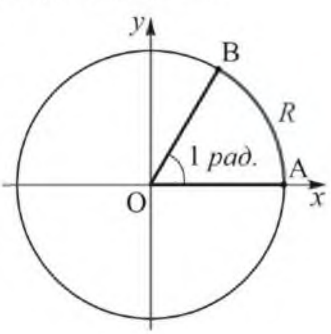


48-сурет

Сонымен, бұру бұрышы – геометриялық фигура емес, ол оң да, теріс те мәндерді қабылдайтын бұрыштық өлшем.

$\alpha \in [0°; 360°]$ бұрышының да, AB доғасының да градустық өлшемі AOB центрлік бұрышының шамасымен өлшенеді. Доғалар мен бұрыштардың тағы бір бірлік өлшемін – радианды енгізейік.

Ұзындығы шеңбердің радиусына тең доғаға тірелетін центрлік бұрышты 1 радиан бұрыш деп атайды (49-сурет). Радианмен өрнектелген бұрыштың шамасы оның *радиандық өлшемі* деп аталады. Доғаның радиандық өлшемі де осылай анықталады. «Радиан» сөзі латынның «*radius*» – «сәуле» деген сөзінен шыққан, «ан» жұрнағы «шығуы» дегенді білдіреді.



49-сурет

Сонымен, радиан сөзінің түпкі мағынасы сәуледен құралған болып шығады. Ондай бұрыш шеңбердің радиусын оның центрінен айналдыра бұрғанда шығады.

360° толық бұрышта қанша радиан бар екенін білу үшін шеңбердің ұзындығы $2\pi R$-ді оның радиусы R-ге бөлеміз. Сонда $\frac{2\pi R}{R} = 2\pi$ (радиан) (қысқаша рад.) шығады. Бұл – тұрақты сан. Жазыңқы бұрыш жарты шеңберге тіреледі, демек, оның радиандық өлшемі π-ге тең. 1° бұрыштың радиандық өлшемі $1° = \frac{\pi}{180} \approx \frac{3,1416}{180} = 0,01745$ (рад.), сонда $n°$ бұрыштың радиандық өлшемі $\frac{\pi \cdot n}{180}$ болады.

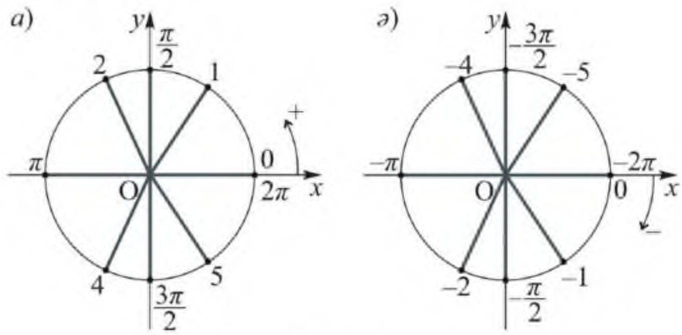
$$\textbf{1 рад.} = \frac{\mathbf{180}}{\boldsymbol{\pi}} \approx 57°.$$

Мысалы, 30°, 45°, 60°, 90°, 120° бұрыштардың радиандық өлшемдері, сәйкесінше, $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}$ болады. Бұрыштың π арқылы өрнектелген радиандық өлшемін жазғанда «рад.» белгілеуі жазылмайды. Мысалы, $72° = 0,4\pi$ деп жазады.

Кез келген бұру бұрышы β-ны радиан арқылы былай өрнектеуге болады:

$$\beta = \alpha + 2\pi n, \text{ мұндағы } 0 \le \alpha < 2\pi,\ n \in Z.$$

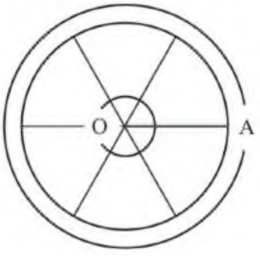
Радианмен өлшенген бұру бұрышы кез келген нақты санмен өрнектелуі мүмкін. Координаталық шеңберде 0 санына A бастапқы нүктесі, 1 санына – 1 радиан доғаның ұшын белгілейтін нүкте (50, *а*-сурет), –1 санына –1 радиан бұру бұрышы сәйкес келеді (50, *ә*-сурет) тағы сол сияқты.



50-сурет

Кез келген t нақты санына t радиан бұру бұрышын көрсететін нүкте сәйкес келеді. Сонымен, радианмен өрнектелген әрбір бұру бұрышына координаталық шеңбердің тек бір нүктесі сәйкес келеді.

Бірақ, бірлік шеңбердің әрбір нүктесіне $\beta = \alpha + 2\pi n$, мұндағы $0 \leq \alpha < 2\pi$, $n \in Z$ формуласымен өрнектелетін шексіз көп бұру бұрышы сәйкес келеді.



51-сурет

1-есеп. Дөңгелек минутына 42 айналым жасайды. Оның OA сым шабағы (51-сурет) 6 секундта қандай бұрыш жасайды?

Шешуі. 1 секундта дөңгелек $\frac{42}{60} = \frac{7}{10}$ айналым, ал 6 секундта $\frac{21}{5}$ айналым жасайды. Сонда, егер дөңгелек сағат тілі бағытына қарсы айналса, OA сым шабағы $\beta = \frac{360° \cdot 21}{5} = 1512°$ бұрыш, ал егер сағат тілі бағытымен айналса, $-1512°$ бұрыш сызады.

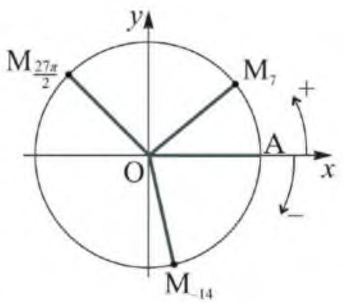
Жауабы. $1512°$ немесе $-1512°$.

1-мысал. а) 3,5 радианды градуспен; ә) $210°$-ты радианмен өрнектеу керек.

Шешуі. π радиан $180°$-қа тең болғандықтан, пропорция құрып шешеміз:

а) $\frac{\pi}{3,5} = \frac{180°}{x}, x = \frac{3,5 \cdot 180°}{\pi} \approx \frac{630°}{3,14} = 201°$; ә) $\frac{\pi}{y} = \frac{180°}{210°}, y = \frac{\pi \cdot 210°}{180°} = \frac{7\pi}{6}$.

Жауабы. а) $\approx 201°$; ә) $\frac{7\pi}{6}$.



52-сурет

Бұрыштардың радиандық өлшемі көбіне π арқылы өрнектеледі, ал одан градустық өлшемге көшкенде π-ді оның жуық мәні 3,14-пен алмастырады.

2-мысал. Егер: а) $\beta = 7$; ә) $\beta = -14$; б) $\beta = \frac{27\pi}{4}$ болса, бірлік шеңберге M_β нүктесін белгілеу керек.

Ш е ш у і. Бұру бұрышы радианмен берілгендіктен, оны градуспен өрнектейміз:

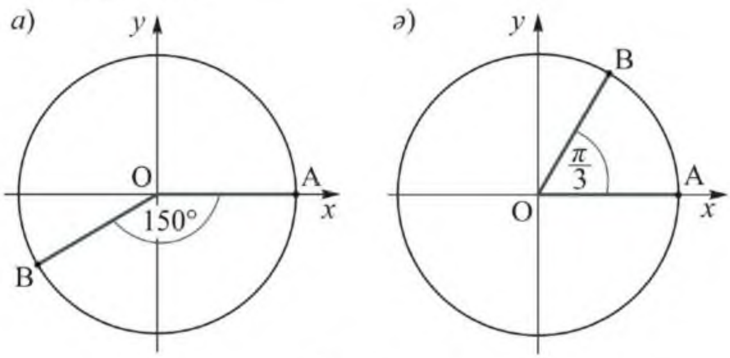
а) $7 \approx 57° \cdot 7 = 399° = 360° + 39°$;

ә) $-14 \approx 57° \cdot (-14) = -798° = -720° + (-78°)$;

б) $\frac{27\pi}{4} = 6\pi + \frac{3\pi}{4}$.

M_7 нүктесін алу үшін бастапқы OA радиусын сағат тілі бағытына қарсы 360° және 39°-қа бұрамыз. M_{-14} нүктесін сағат тілі бағытымен 720° және 78°-қа бұру арқылы аламыз. $M_{\frac{27\pi}{4}}$ нүктесін алу үшін оң бағытпен үш толық айналым жасап, тағы $\frac{3\pi}{4} = 135°$-қа бұрамыз (52-сурет).

2 - е с е п. Бастапқы OA радиусын β бұрышына бұрғанда OB радиусына келеді. 53, *а* және *ә*-суреттерде берілгендерді пайдаланып, β бұрышын табу керек.



53-сурет

Ш е ш у і. *а*-суретте $\beta = \angle AOB + 360° \cdot n$, мұндағы $n \in Z$. Егер оң бағытқа қарай бұрылған болса, онда $\angle AOB = 210°$, ал егер теріс бағытпен бұрылса, онда $\angle AOB = -150°$. Бұдан $\beta = 210° + 360° \cdot n$ немесе $\beta = -150° + 360° \cdot n$ болады, мұндағы $n \in Z$.

ә-суретте $\beta = \angle AOB + 2\pi n$, мұндағы $n \in Z$. Сол сияқты $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$ немесе $\angle AOB = -\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{5\pi}{3}$ болады. Бұдан $\beta = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$ немесе $\beta = -\frac{5\pi}{3} + 2\pi n$ шығады, мұндағы $n \in Z$.

Ж а у а б ы. а) $\beta = 210° + 360° \cdot n$ немесе $\beta = -150° + 360° \cdot n$, мұндағы $n \in Z$; ә) $\beta = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$ немесе $\beta = -\frac{5\pi}{3} + 2\pi n$, мұндағы $n \in Z$.

СҰРАҚТАР

1. Бұру бұрышы дегеніміз не?
2. 1 радиан бұрыш дегеніміз не?
3. 180° бұрыш неше радианға тең?
4. 1 радианның жуық мәні неше градусқа тең?

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

519. а) Доңғалақтың сым шабағы сағат тілі бағытымен $2\frac{1}{4}$ айналым жасады. Доңғалақтың сым шабағы қандай бұрыш сызды?
ә) Сомынды бұрап алғанда кілтті сағат тілі бағытына қарсы $3\frac{1}{3}$ айналымға бұрады. Бұру бұрышын градуспен өрнектеңдер.

520. а) Аспан денелерінің орнын анықтау үшін астрономияда бұрышты өлшеу бірлігі – шеңбердің $\frac{1}{24}$ бөлігіне тең болатын сағат қолданылады. 1 сағат бұрышты градуспен және радианмен өрнектеңдер.
ә) Кейбір теңіз тұсбағдарларында шеңбер румбтарға бөлінген. Румб – шеңбердің $\frac{1}{32}$ бөлігі. 1 румб радианмен және градуспен нешеге тең?

Тұсбағдар

521. а) $\frac{2\pi}{3}$; ә) $\frac{3\pi}{5}$; б) $\frac{\pi}{6}$; в) $\frac{5\pi}{9}$ бұрышына сыбайлас бұрыштың радиандық және градустық өлшемін табыңдар.

522. ΔABC-да $\angle C = \frac{\pi}{2}$. Егер A бұрышы: а) $\frac{\pi}{3}$; ә) $\frac{\pi}{4}$; б) $\frac{\pi}{5}$; в) $\frac{\pi}{6}$; г) $\frac{2\pi}{9}$; ғ) $\frac{\pi}{12}$ бұрышына тең болса, B бұрышының радиандық және градустық өлшемін табыңдар.

523. а) Сүйір бұрыштарының қатынасы 3 : 2 болатын тікбұрышты үшбұрыштың; ә) екі бұрышының қатынасы 1 : 2 болатын теңбүйірлі үшбұрыштың; б) екі бұрышының қатынасы 5 : 4 болатын теңбүйірлі трапеция бұрыштарының градустық және радиандық өлшемін табыңдар.

524. Градуспен берілген бұру бұрышының радиандық өлшемін табыңдар:
а) 18°, 27°, 30°, 45°, 60°; б) 210°, 225°, 270°, 300°;
ә) 90°, 120°, 135°, 150°; в) 1100°, 1440°, 3330°, 7380°.

525. Радианмен берілген бұру бұрышының градустық өлшемін табыңдар:

а) $\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}$; б) $-\pi, \frac{\pi}{18}, -\frac{5}{6}\pi, \frac{\pi}{36}$;

ә) $-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{12}, \frac{4\pi}{9}, -3\pi$; в) 2; –3; 2,5; –15.

526. Егер: а) $\beta = -94°$; ә) $\beta = 110°$; б) $\beta = 680°$; в) $\beta = -1040°$; г) $\beta = 2900°$; ғ) $\beta = -3750°$ болса, β бұрышы қай ширекке тиісті?

527. Егер: а) $180° < \beta < 270°$ болса, онда β III ширектің бұрышы; ә) β III ширектің бұрышы болса, онда $180° < \beta < 270°$ болатыны ақиқат па?

528. Бірлік шеңберге: а) 315°; ә) 930°; б) –1740°; в) –2025°-қа тең болатын β бұру бұрышына сәйкес келетін B_β нүктесін белгілеңдер.

529. а) $-\frac{\pi}{4}$; ә) $\frac{2\pi}{3}$; б) $\frac{7\pi}{6}$; в) $-\frac{5\pi}{3}$; г) $\frac{13\pi}{4}$; ғ) $-\frac{19\pi}{6}$ қай ширектің бұрышы болатынын анықтаңдар.

530. Егер β бұрышының радиандық өлшемі: а) $\frac{\pi}{4}$; ә) $\frac{5\pi}{6}$; б) $-\frac{3\pi}{4}$; в) $-\frac{\pi}{3}$ болса, онда B_β нүктесін бірлік шеңберге белгілеп, оның x_β мен y_β координаталарын нөлмен салыстырыңдар.

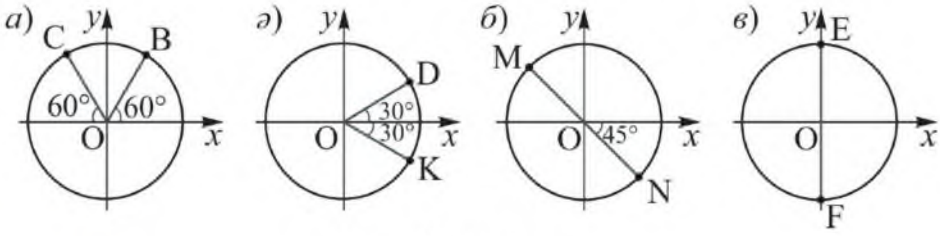
531. Кестені толтырып, онда көрсетілген бұрыштарға сәйкес келетін нүктелерді координаталық шеңберге (радиусы 3 см) белгілеңдер:

0°		45°	60°	90°			150°	180°
0	$\frac{\pi}{6}$				$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$		

532. 531-есепте көрсетілген бұрыштардан 180°-қа артық болатын бұрыштардың градустық және радиандық өлшемдері сәйкес келетін кестені құрып, сол нүктелерді координаталық шеңберге белгілеңдер.

533. Егер үшбұрыштың бұрыштары: а) айырымы $20°$ болатын арифметикалық прогрессия; ә) еселігі 1,5 болатын геометриялық прогрессия мүшелерін құрайтын болса, үшбұрыштың үлкен бұрышын радиандық өлшеммен өрнектеңдер.

534. 54-суретте кескінделген координаталық шеңбердің нүктелеріне сәйкес келетін барлық бұрыштарды радианмен көрсетіңдер.



54-сурет

В деңгейі

535. Шеңберге A, B, C, D нүктелерін AB, BC және CD доғаларының радиандық өлшемдері, сәйкесінше, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$ және $\frac{3\pi}{4}$ болатындай етіп белгілеңдер. DA доғасының шамасын көрсетіңдер. Көрсетілген нүктелердің орналасуының барлық мүмкін жағдайларын қарастырыңдар.

536. Дөңгелек секундына $\frac{\pi}{3}$ радиан бұрыштық жылдамдықпен айналады. Ол неше секундта толық айналым жасайды?

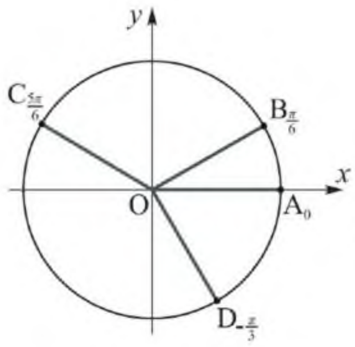
537. Радиандық өлшемі: а) 9; ә) 10; б) –8; в) –11 болатын бұру бұрышына сәйкес келетін B_β нүктесін бірлік шеңберге белгілеңдер.

538. Бастапқы OA радиусын β бұрышына бұрғанда OB радиусына көшеді. Егер: а) β – I ширектің бұрышы және $\angle AOB = \frac{\pi}{6}$; ә) β – II ширектің бұрышы және $\angle AOB = \frac{2\pi}{3}$; б) β – III ширектің бұрышы және $\angle AOB = \frac{3\pi}{4}$; в) β – IV ширектің бұрышы және $\angle AOB = \frac{\pi}{4}$ болса, β бұрышын табыңдар.

С деңгейі

539. $\beta = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, мұндағы $n \in Z$ болса, β бұрышы: а) $-\frac{5\pi}{3}$; ә) $\frac{13\pi}{3}$; б) $-\frac{23\pi}{3}$; в) $\frac{4\pi}{3}$-ке тең болатындай n-нің мәнін (егер бар болса) табыңдар.

540. Радиусы 0,6 м болатын дискі минутына 240 айналым жасайды. а) Оның бұрыштық жылдамдығы ω-ны радиан секундпен; ә) дискі шеңберіндегі нүктенің сызықтық жылдамдығын метр секундпен табыңдар. б) Шеңбер центрінен r қашықтықтағы нүктенің сызықтық жылдамдығы ωr-ге тең болатынын дәлелдеңдер.



55-сурет

541. Координаталық шеңберге 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$ және $-\frac{\pi}{3}$ бұру бұрыштарына тең болатындай, сәйкесінше, A, B, C, D нүктелері белгіленген (55-сурет). а) AB; ә) DA; б) BC; в) CD доғаларының кішісінің нүктелеріне сәйкес келетін β бұрыштарын қанағаттандыратын қос теңсіздік жазыңдар.

ҚЫЗЫҚТЫ ЕСЕПТЕР

1) Механикалық сағат тура 3-ті көрсетіп тұр. Бір тәулік пен жарты сағаттан кейін сағат тілдері қандай бұрыш жасайды?

2) $y(x) = \begin{cases} x > 0 \text{ болғанда, } 1, \\ x = 0 \text{ болғанда, } 0, \\ x < 0 \text{ болғанда, } -1 \end{cases}$ функциясының математикадағы арнайы белгілеуі: $y(x) = \text{sign } x$ («сигнум икс» деп оқылады, латынша *signum* – таңба, белгі). x-тің қандай мәндерінде $\sin x = \text{sign } x$ теңдігі ақиқат болады?

22. Кез келген бұрыштың синусы, косинусы, тангенсі және котангенсі

Тақырыпты оқу барысында:

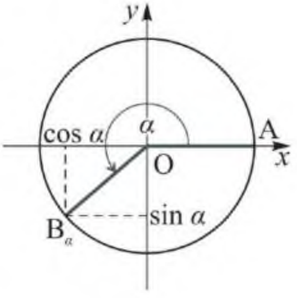
• кез келген бұрыштың синусы, косинусы, тангенсі және котангенсінің анықтамаларын білетін боласыңдар;

• бірлік шеңбердің координаталары мен кез келген бұрыштың синусы, косинусы, тангенсі және котангенсінің арасындағы өзара байланысын; кез келген бұрыштың синусы, косинусы, тангенсі және котангенсінің координаталық ширектердегі таңбаларын білетін боласыңдар;

• кез келген бұрыштың синусы, косинусы, тангенсі және котангенсінің мәндерін табуды үйренесіңдер.

Геометрия курсында 0°-тан 180°-қа дейінгі синус, косинус, тангенс және котангенс ұғымдары анықталған болатын. Тригонометрияда бұл ұғымдар градуспен не радианмен өрнектелген кез келген бұрыш үшін қарастырылады.

Бірлік шеңбердің B_α нүктесінің ординатасы α бұрышының синусы деп аталады. Белгілеуі: $\sin\alpha$. Анықтама бойынша $\boldsymbol{\sin\alpha = y}$ (56-сурет).



56-сурет

Бірлік шеңбердің B_α нүктесінің абсциссасы α бұрышының косинусы деп аталады. Белгілеуі: $\cos\alpha$. Анықтама бойынша $\boldsymbol{\cos\alpha = x}$ (56-сурет).

$\alpha = \pi k$, мұндағы $k \in Z$, бұрыштарында $\sin\alpha = 0$;

$\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k$, мұндағы $k \in Z$, бұрыштарында $\cos\alpha = 0$, себебі бірлік шеңбердің ординаталары нөлге тең нүктелер $B_0(1; 0)$ және $B_\pi\ (-1; 0)$, ал абсциссалары нөлге тең нүктелер $B_{\frac{\pi}{2}}(0; 1)$ және $B_{\frac{3\pi}{2}}\ (0; -1)$.

Синус α-ның косинус α-ға қатынасына тең сан α бұрышының тангенсі деп аталады.

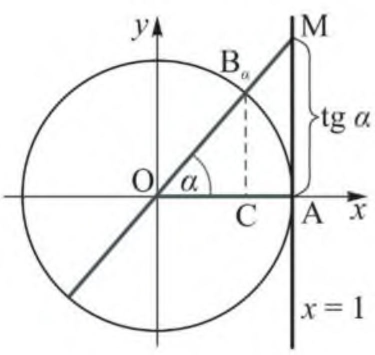
Белгілеуі: tg α. Анықтама бойынша **tg** $\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, мұндағы $\alpha \neq$ $\neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$.

Косинус α-ның синус α-ға қатынасына тең сан α бұрышының котангенсі деп аталады. Белгілеуі: ctg α. Анықтама бойынша **ctg** $\boldsymbol{\alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, мұндағы $\boldsymbol{\alpha \neq \pi k}$, $k \in Z$. $\sin\alpha = y$, ал $\cos\alpha = x$ болғандықтан, мұндағы x, y – бірлік шеңбердің B_α нүктесінің координаталары,

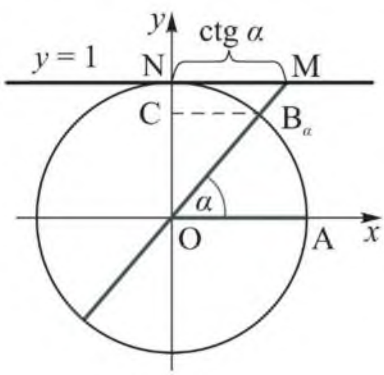
$$\mathbf{tg}\,\boldsymbol{\alpha} = \frac{y}{x},\ \mathbf{ctg}\,\boldsymbol{\alpha} = \frac{x}{y}.$$

Бұрыштың тангенсі мен котангенсі туралы көрнекі түрде түсінік берейік. Бұрыштың тангенсінің мәнін $A(1;\ 0)$ нүктесінен өтіп, ордината осіне параллель болатын түзуге белгілеуге болады (57-сурет).

Шынымен де, OAM және OCB_α үшбұрыштарының ұқсастығынан $\dfrac{AM}{AO} = \dfrac{CB_\alpha}{CO}$ болады, яғни $\dfrac{AM}{1} = \dfrac{y}{x}$. Бұдан $AM = \operatorname{tg}\alpha$ болады. Демек, бұрыштың тангенсі OM түзуінің $x = 1$ түзуімен қиылысу нүктесінің ординатасына тең. Бұл түзуді *тангенстер сызығы* деп атайды.



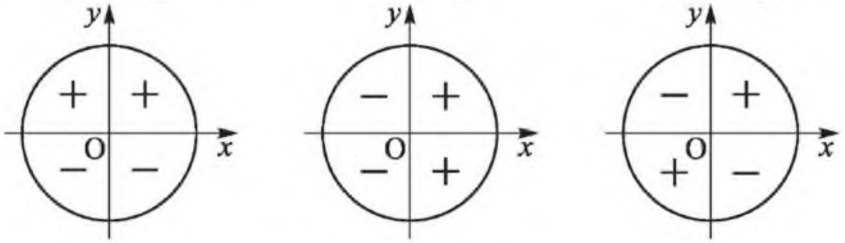
57-сурет



58-сурет

Дәл осылай, бұрыштың котангенсі OM түзуінің *котангенстер сызығы* деп аталатын $y = 1$ түзуімен қиылысу нүктесінің абсциссасына тең болатынын көрсетуге болады. Оны 58-суретті пайдаланып, өздігінен орындаңдар.

Координаталық ширектерде бұрыштың синусы, косинусы, тангенсі және котангенсі оң немесе теріс мәндерді қабылдайды. Бұл 59-суретте көрсетілген. Кез келген бұрыштың синусы, косинусы, тангенсі және котангенсінің анықтамаларын пайдаланып, неліктен олардың таңбаларының сондай болатынын түсіндіріңдер.



59-сурет

$\beta = \alpha + 360° \cdot n$, мұндағы $0° \le \alpha < 360°$, $n \in Z$, түріндегі барлық бұрыштарға бір ғана нүкте сәйкес келетін болғандықтан,

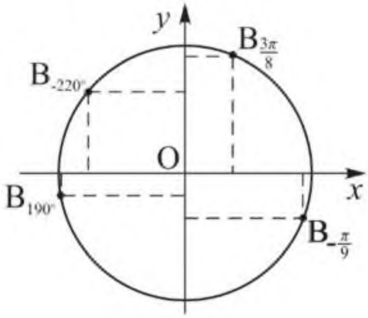
$$\sin(\alpha + 360° \cdot n) = \sin\alpha,\ \cos(\alpha + 360° \cdot n) = \cos\alpha,$$

$$\mathrm{tg}(\alpha + 360° \cdot n) = \mathrm{tg}\,\alpha,\ \mathrm{ctg}(\alpha + 360° \cdot n) = \mathrm{ctg}\,\alpha \text{ болады.}$$

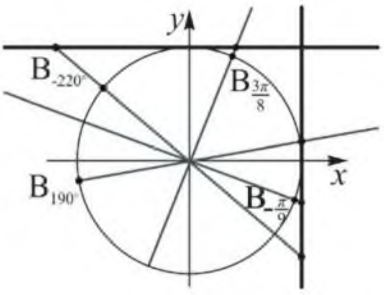
1 - м ы с а л. Бұру бұрыштары берілген: $-3460°$, $1270°$, $-\frac{19\pi}{9}$, $\frac{115\pi}{8}$. Осы бұрыштардың: а) синусының; ә) косинусының; б) тангенсінің; в) котангенсінің мәндерін өсу ретімен орналастыру керек.

Ш е ш у і. Координаталық шеңберге осы бұрыштарға сәйкес келетін нүктелерді белгілеп, олардың: а) ординаталарын; ә) абсциссаларын салыстырамыз (60-сурет). Ол үшін берілген бұрыштарды $360° \cdot n + \alpha$ немесе $2\pi \cdot n + \alpha$, мұндағы $n \in Z$, түріне келтіреміз: $-3460° = -360° \cdot 9 + (-220°)$, $1270° = 360° \cdot 3 + 190°$, $-\frac{19\pi}{9} = -2\pi + \left(-\frac{\pi}{9}\right)$, $\frac{115\pi}{8} = \frac{112\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} = 2\pi \cdot 7 + \frac{3\pi}{8}$.

Берілген бұрыштардың тангенсі мен котангенсінің мәндерін салыстыру үшін оларды тангенс пен котангенс сызықтарына белгілейміз (61-сурет).



60-сурет



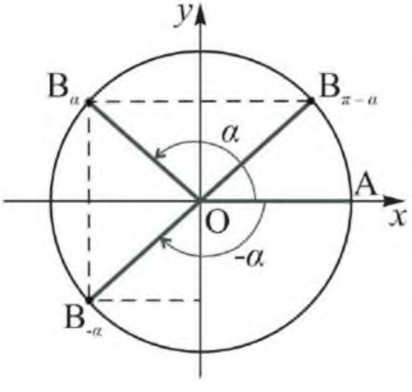
61-сурет

Ж а у а б ы. а) $\sin\left(-\frac{19\pi}{9}\right) < \sin 1270° < \sin(-3460°) < \sin\frac{115\pi}{8}$;

ә) $\cos 1270° < \cos(-3460°) < \cos\frac{115\pi}{8} < \cos\left(-\frac{19\pi}{9}\right)$;

б) $\mathrm{tg}(-3460°) < \mathrm{tg}\left(-\frac{19\pi}{9}\right) < \mathrm{tg}\, 1270° < \mathrm{tg}\frac{115\pi}{8}$;

в) $\mathrm{ctg}\left(-\frac{19\pi}{9}\right) < \mathrm{ctg}(-3460°) < \mathrm{ctg}\left(\frac{115\pi}{8}\right) < \mathrm{ctg}\, 1270°$.

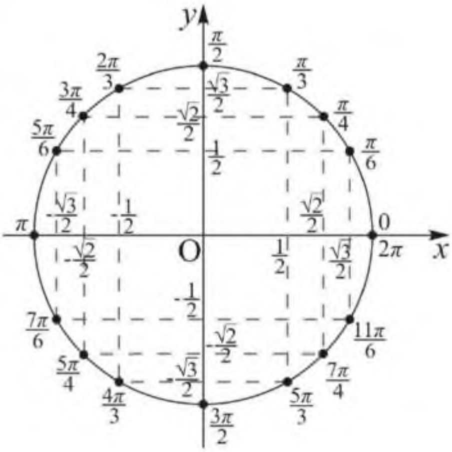


62-сурет

2 - м ы с а л. а) $\mathbf{\sin(-\alpha) = -\sin \alpha}$; ә) $\mathbf{\cos(-\alpha) = \cos \alpha}$; б) $\mathbf{\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha}$; в) $\mathbf{\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha}$ болатынын дәлелдеу керек.

Д ә л е л д е у і. α-ның кез келген мәнінде бірлік шеңбердің B_{α} мен $B_{-\alpha}$ нүктелері Ox осіне қарағанда симметриялы, демек, олардың ординаталары қарама-қарсы, ал абсциссалары тең сандар (62-сурет). Ендеше, $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$, $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ болады.

$B_{-\alpha}$ мен $B_{\pi-\alpha}$ нүктелері координаталар басына қарағанда симметриялы, демек, олардың координаталары – қарама-қарсы сандар. $\sin(\pi - \alpha) = -\sin(-\alpha) = \sin \alpha$, $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(-\alpha) = -\cos \alpha$ болады.



63-сурет

0°, 30°, 45°, 60°, 90°-қа тең α бұрышының синусы, косинусы, тангенсі және котангенсінің белгілі мәндері мен дәлелденген тепе-теңдіктерді пайдаланып, $-\alpha$, $\pi-\alpha$ және $\beta=\alpha+2\pi n$, мұндағы $0 \le \alpha < 2\pi$, $n \in Z$, бұрыштарының тригонометриялық функцияларының мәндерін табуға болады. Мысалы, $\sin\frac{7\pi}{6} = \sin\left(\pi-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$, $\cos\frac{7\pi}{4} = \cos\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (63-сурет).

3 - м ы с а л. а) $6\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) - 2\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; ә) $4\cos\frac{4\pi}{3} + 8\sin\frac{3\pi}{2}$; б) $\mathrm{tg}\left(-\frac{7\pi}{4}\right) + \mathrm{tg}\frac{5\pi}{4} + \mathrm{ctg}\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$ өрнегінің мәнін есептеу керек.

Ш е ш у і. а) $6\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) - 2\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -6\sin\frac{\pi}{3} - 2\cos\frac{\pi}{6} = -6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\frac{\sqrt{3}}{2} = -4\sqrt{3}$;

ә) $4\cos\frac{4\pi}{3} + 8\sin\frac{3\pi}{2} = 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 8\cdot(-1) = -10$;

б) $\mathrm{tg}\left(-\frac{7\pi}{4}\right) + \mathrm{tg}\frac{5\pi}{4} + \mathrm{ctg}\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = -\mathrm{tg}\frac{7\pi}{4} + \mathrm{tg}\frac{5\pi}{4} - \mathrm{ctg}\frac{3\pi}{2} = -(-1) + 1 - 0 = 2.$

4 - м ы с а л. $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha} = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha+1}{\mathrm{tg}\,\alpha-1}$ тепе-теңдігін дәлелдеу керек.

Д ә л е л д е у і. Бұл теңдіктің оң жақ бөлігі оның сол жақ бөлігіне тең болатынын дәлелдейік: $\frac{\mathrm{tg}\,\alpha+1}{\mathrm{tg}\,\alpha-1} = \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+1\right) : \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-1\right) = \frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha} : \frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$. Тепе-теңдік дәлелденді.

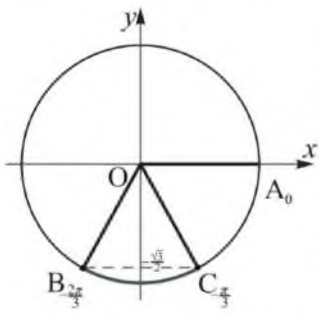
5 - м ы с а л. $\dfrac{3\cos\alpha + 2\sin\alpha}{3{,}5\cos\alpha - 3\sin\alpha}$ өрнегінің: а) $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}5$; ә) $\alpha = \dfrac{3\pi}{4}$ болғандағы мәнін табу керек.

Ш е ш у і. Бөлшектің алымы мен бөлімін $\cos\alpha \neq 0$-ге бөліп, $\dfrac{3 + 2\cdot\operatorname{tg}\alpha}{3{,}5 - 3\cdot\operatorname{tg}\alpha}$ аламыз. а) $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}5$ болғанда, өрнектің мәні $\dfrac{3+2\cdot 0{,}5}{3{,}5-3\cdot 0{,}5} = 2$ болады.

ә) $\alpha = \dfrac{3\pi}{4}$ болғанда, өрнектің мәні $\dfrac{3+2\cdot(-1)}{3{,}5-3\cdot(-1)} = \dfrac{1}{6{,}5} = \dfrac{2}{13}$ болады.

Ж а у а б ы. а) 2; ә) $\dfrac{2}{13}$.

6 - м ы с а л. Координаталық шеңберге B_α нүктелер жиынын белгілеп, $\sin\alpha \le -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ шартын қанағаттандыратын α-ның барлық мәндерін жазу керек.



64-сурет

Ш е ш у і. BC доғасының барлық нүктелері берілген шартты қанағаттандырады (64-сурет). Бұл жағдайда α бұрышы $-\dfrac{2\pi}{3}$-тен $-\dfrac{\pi}{3}$-ке дейін өзгереді. Бұл нүктелердің әрбір $2\pi n$ сайын қайталанатынын ескере отырып, берілген шартты қанағаттандыратын α-ның барлық мәндерін былай жазуға болады: $\alpha \in \left[-\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n; -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n\right]$, мұндағы $n \in Z$.

Мысалы, $n = 1$ болғанда, $\left[\dfrac{4\pi}{3}; \dfrac{5\pi}{3}\right]$ аралығын, $n = 2$ болғанда, $\left[\dfrac{10\pi}{3}; \dfrac{11\pi}{3}\right]$ аралығын, $n = -1$ болғанда, $\left[-\dfrac{8\pi}{3}; -\dfrac{7\pi}{3}\right]$ аралығын аламыз. Мұндай аралықтар шексіз көп. Модулі ең кіші сандармен жазылған барлық $\left[-\dfrac{2\pi}{3}; -\dfrac{\pi}{3}\right]$ аралықтарды былай біріктіріп жазуға болады: $\left[-\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n; -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n\right]$.

СҰРАҚТАР

1. Кез келген бұрыштың синусы, косинусы, тангенсі және котангенсінің анықтамасын беріңдер.
2. Координаталық ширектерде бұрыштың синусы, косинусы, тангенсі және котангенсі қандай мәндерді (оң немесе теріс) қабылдайды?
3. Қандай бұрыштарда синустың, косинустың, тангенстің және котангенстің мәндері нөлге тең болады?

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

542. Қайсыбір бұрыштың синусы не косинусы: а) –0,6; ә) 1; б) 2; в) π; г) –1,25; ғ) 0,2 санына тең болуы мүмкін бе?

543. α-ның қандай да бір мәнінде мына теңдік дұрыс бола ма:

а) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$; ә) $\cos\alpha = \frac{\pi}{3}$; б) $\sin\alpha = 1 - \sqrt{2}$; в) $\cos\alpha = \sqrt{3} - 2$?

544. Тангенс пен котангенстің қайсыбір бұрыштағы мәні: а) 10-нан артық; ә) –5-тен кіші болуы мүмкін бе?

545. Бірлік кесіндіні 2,5 см етіп алып, координаталық шеңбер салыңдар. Оған α бұру бұрыштарына сәйкес келетін B_α нүктелерін белгілеңдер. Егер α: а) 50°; ә) 155°; б) –35°; в) –170° болса, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$ және $\mathrm{ctg}\,\alpha$-ның жуық мәндерін табыңдар.

546. Теріс бұрыштың синусы оң сан болуы мүмкін бе? Егер мүмкін болса, оған мысал келтіріңдер.

547. Егер: а) $\sin\alpha = -\frac{1}{4}$; ә) $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$; б) $\mathrm{tg}\,\alpha = -1{,}5$; в) $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{3}{2}$ болса, координаталық шеңберге α бұрышына сәйкес келетін нүктелерді салыңдар.

548. Өрнектің мәнін табыңдар:

а) $2\cos 60° - \sqrt{3}\sin 60° \cdot \mathrm{tg}\,45°$;

ә) $6\sin 60° - 2\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\,60° \cdot \cos 30°$;

б) $4\sin 45° \cdot \mathrm{tg}\,30° \cdot \mathrm{ctg}\,30° - \cos 45°$;

в) $\mathrm{tg}\,60° \cdot \mathrm{ctg}\,30° - \cos 180° + \sin 90°$.

549. 63-суретті пайдаланып, егер α бұрышы: а) –30°; ә) –45°; б) –60°; в) 210°; г) 225°; ғ) 240°-қа тең болса, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$ және $\mathrm{ctg}\,\alpha$-ның мәндерін табыңдар.

550. Кестені толтырыңдар:

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin\alpha$										
$\cos\alpha$										
$\operatorname{tg}\alpha$										
$\operatorname{ctg}\alpha$										

551. Есептеңдер:

а) $\cos\frac{\pi}{6}+\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)-2\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)+2\cos\pi$;

ә) $2\sin\frac{\pi}{6}+\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)+2\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$;

б) $2\sin\frac{\pi}{4}-3\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)-4\sin 2\pi-2\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$;

в) $4\cos\frac{\pi}{3}-\cos 2\pi+3\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)-2\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

552. Егер α бұрышы: а) $-\frac{\pi}{2}$-ден $\frac{\pi}{2}$-ге дейін; ә) $\frac{\pi}{2}$-ден $\frac{3\pi}{2}$-ге дейін өзгерсе, онда $\sin\alpha$-ның мәні қалай өзгереді?

553. Егер α бұрышы: а) 0-ден π-ге дейін; ә) $-\pi$-ден 0-ге дейін өзгерсе, онда $\cos\alpha$-ның мәні қалай өзгереді?

554. Егер α бұрышы: а) $25°$, $-260°$, $325°$, $-1120°$; ә) $-\frac{5\pi}{12}$, $\frac{19\pi}{18}$, $-\frac{11\pi}{9}$, $\frac{81\pi}{20}$; б) $-83°$, $198°$, $-295°$, $1540°$; в) $\frac{\pi}{15}$, $-\frac{17\pi}{14}$, $\frac{40\pi}{21}$, $-\frac{37\pi}{30}$-ға тең болса, $\sin\alpha$ мен $\cos\alpha$ мәндерінің таңбалары қандай болады?

555. Егер: а) $\sin\alpha>0$ және $\cos\alpha<0$; ә) $\sin\alpha<0$ және $\cos\alpha>0$; б) $\sin\alpha\cdot\cos\alpha>0$; в) $\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\alpha<0$; г) $\sin\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha>0$; ғ) $\sin\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha<$ <0 болса, α бұрышы қай ширекке тиісті болады?

556. Өрнектің мәнін нөлмен салыстырыңдар:

а) $\sin 121°\cdot\sin 153°$; б) $\cos 310°\cdot\sin 115°$; г) $\cos 300°\cdot\operatorname{ctg} 130°$;
ә) $\cos 260°\cdot\cos 315°$; в) $\operatorname{tg} 115°\cdot\sin 172°$; ғ) $\operatorname{tg} 78°\cdot\operatorname{ctg} 190°$.

557. Көбейтіндінің таңбасын анықтаңдар:

а) $\mathrm{tg}\,2 \cdot \mathrm{tg}\,3$; б) $\sin 3 \cdot \mathrm{ctg}\,4$;

ә) $\sin 4 \cdot \cos 5$; в) $\cos 2 \cdot \sin 3 \cdot \mathrm{tg}\,4$.

558. Егер $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ болса, өрнектің таңбасын анықтаңдар:

а) $\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$; б) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$;

ә) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$; в) $\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$.

559. Есептеулерді орындамай-ақ, айырымының таңбасын анықтаңдар:

а) $\sin\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3}$; б) $\mathrm{tg}\frac{\pi}{3} - \mathrm{tg}\frac{\pi}{6}$;

ә) $\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}$; в) $\mathrm{ctg}\frac{\pi}{3} - \mathrm{ctg}\frac{\pi}{6}$.

560. Бұрыштардың тангенсі мен котангенсін салыстырыңдар:

а) $15°, 375°, 735°$; б) $100°, 120°, 140°$.

ә) $20°, 400°, 780°$;

561. Кему ретімен орналастырыңдар:

а) $\sin 3\pi, \cos 5\pi, \cos 6\pi$; б) $\sin\frac{\pi}{2}, \mathrm{ctg}\frac{3\pi}{2}, \cos \pi$;

ә) $\cos\frac{15\pi}{2}, \cos 17\pi, \sin\frac{33\pi}{2}$; в) $\mathrm{tg}\,21\pi, \sin\frac{43\pi}{2}, \cos 100\pi$.

562. $-\frac{2\pi}{9}, \frac{\pi}{9}, -\frac{5\pi}{3}, \frac{11\pi}{9}$ бұрыштарының: а) синусы; ә) косинусы; б) тангенсі; в) котангенсінің мәндерін өсу ретімен орналастырыңдар.

563. а) $\sin 1°$ пен $\sin 1$-ді; ә) $\cos 1°$ пен $\cos 1$-ді; б) $\mathrm{tg}\,1°$ пен $\mathrm{tg}\,1$-ді; в) $\mathrm{ctg}\,1°$ пен $\mathrm{ctg}\,1$-ді салыстырыңдар.

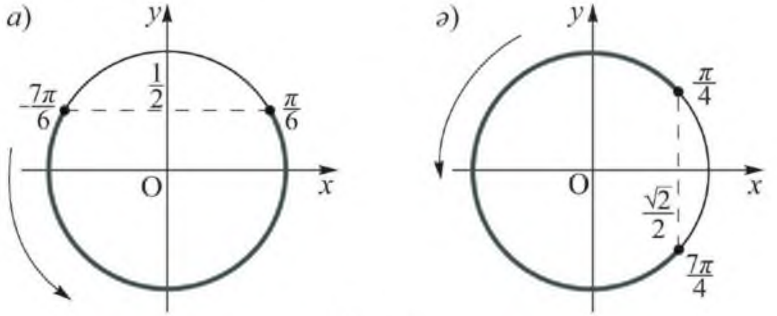
564. $\sin \alpha$-ның мәні: а) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; ә) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) 1; в) 0-ге тең болатын α бұрышының радиандық өлшемінің үш мәнін көрсетіңдер.

565. $\cos \alpha$-ның мәні: а) $\frac{1}{2}$; ә) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) -1; в) $\frac{\sqrt{3}}{2}$-ге тең болатын α бұрышының градустық өлшемінің үш мәнін көрсетіңдер.

566. tg α-ның мәні: а) 1; ә) –1; б) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; в) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$-ке тең болатын α бұрышының градустық өлшемінің үш мәнін көрсетіңдер.

567. ctg α-ның мәні: а) 0; ә) $\sqrt{3}$; б) $-\sqrt{3}$; в) –1-ге тең болатын α бұрышының радиандық өлшемінің үш мәнін көрсетіңдер.

568. 65-суретте бірлік шеңберде барлық нүктелері: а) $\sin\alpha \le \frac{1}{2}$; ә) $\cos\alpha \le \frac{\sqrt{2}}{2}$ шартын қанағаттандыратын доға көрсетілген. Көрсетілген шарт орындалатындай α-ның барлық мәндерін жазыңдар.



65-сурет

569. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

а) $\mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$; б) $\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = 1$.

ә) $\mathrm{ctg}(-\alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha$;

570. а) $\mathrm{tg}(-\alpha) \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = -1$; ә) $\mathrm{tg}(-\alpha) - \mathrm{tg}\,\alpha = 0$; б) $\mathrm{ctg}(-\alpha) + \mathrm{ctg}\,\alpha = 0$; в) $\mathrm{tg}(-\alpha) \cdot \mathrm{ctg}(-\alpha) = 1$ болатыны ақиқат па?

571. Өрнекті ықшамдаңдар:

а) $\sin\alpha + \sin(-\alpha) + \cos(\pi - \alpha)$; б) $\sin\alpha \cdot \mathrm{ctg}(\pi - \alpha) + \cos(-\alpha)$;

ә) $\cos\alpha - \cos(-\alpha) - \sin(\pi - \alpha)$; в) $\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \cos(\pi - \alpha) + \sin(-\alpha)$.

572. Өрнекті ықшамдаңдар:

а) $\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}$; ә) $\frac{1-\sin^2\alpha}{1+\sin\alpha} - \frac{1-\cos^2\alpha}{1-\cos\alpha}$.

573. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

а) $\sin\alpha \cdot \cos\alpha\left(\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{1}{\cos\alpha}\right) = \sin^2\alpha - \sin\alpha$;

ә) $(\mathrm{tg}(\pi - \alpha) + \mathrm{ctg}(-\alpha))^2 - \mathrm{tg}^2(-\alpha) - \mathrm{ctg}^2(\pi - \alpha) = 2$.

574. Өрнектің мәнін табыңдар:

а) $\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}$;

ә) $2\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{tg}\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) - 2\sin 2\pi$;

б) $4\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2\cos\left(6\pi - \frac{\pi}{3}\right) - 2\cos\frac{3\pi}{2}$;

в) $\sin\frac{\pi}{6} - \cos(-6\pi) - 0{,}5\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

575. Есептеңдер:

а) $\cos\pi + \operatorname{tg}^2\left(3\pi - \frac{\pi}{4}\right) + 2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$;

ә) $1{,}5\operatorname{tg}^2\left(-\frac{\pi}{6}\right) - 0{,}5\operatorname{ctg}\left(4\pi + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right)$;

б) $3\operatorname{ctg}\left(5\pi - \frac{\pi}{3}\right) - 4\sin^2\left(-\frac{\pi}{6}\right) - 2\cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$;

в) $0{,}5\operatorname{tg}^2\left(-\frac{\pi}{3}\right) - 3\operatorname{tg} 7\pi + 2\sin^2\left(3\pi - \frac{\pi}{3}\right)$.

576. Егер: а) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{3}$; ә) $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ болса, $\frac{3\cos\alpha + \sin\alpha}{2\cos\alpha - \sin\alpha}$ өрнегінің мәнін табыңдар.

577. Егер тікбұрышты үшбұрыштың бұрыштары арифметикалық прогрессия құрайтын болса, сол бұрыштардың синустарының қосындысын табыңдар.

В деңгейі

578. Егер: а) $|\cos\alpha| = \cos\alpha$; ә) $|\sin\alpha| = -\sin\alpha$; б) $\sin\alpha = \cos\alpha$; в) $|\operatorname{tg}\alpha| + \operatorname{tg}\alpha = 0$ болса, α бұрышы қай ширекке тиісті екенін зерттеңдер.

579. а) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\right)$; ә) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2\right)$; б) $\operatorname{tg}(\pi + 1)$; в) $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - 2\right)$;

г) $\sin 1 \cdot \cos 2$; ғ) $\operatorname{tg} 3 \cdot \operatorname{ctg} 4$ өрнегінің мәні оң ба, теріс пе?

580. а) $\cos 2 - \sin 1$; ә) $\operatorname{tg} 4 - \operatorname{ctg} 5$; б) $\cos\frac{5\pi}{7} - \sin\frac{7\pi}{12}$; в) $\sin\frac{3\pi}{5} - \operatorname{tg}\frac{16\pi}{9}$ айырымының таңбасын анықтаңдар.

581. Өрнектің ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңдар:

а) $2\cos\alpha$; б) $3+\cos\alpha$; г) $\sin^2\alpha+1$;

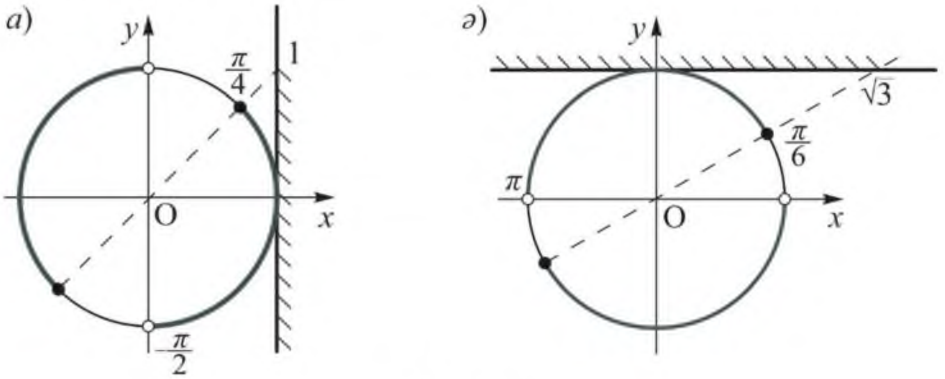
ә) $\sin\alpha-1$; в) $4-2\sin\alpha$; ғ) $-5\cos\alpha+2$.

582. а) $-\frac{\pi}{2}\le\beta\le0$; ә) $0\le\beta\le\frac{\pi}{2}$; б) $\frac{3\pi}{2}\le\beta\le\frac{5\pi}{2}$ болса, $\cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ теңдігін β-ның қандай мәндері қанағаттандырады?

583. а) $\pi\le\beta\le\frac{3\pi}{2}$; ә) $\frac{3\pi}{2}\le\beta\le2\pi$; б) $-\pi\le\beta\le0$ болса, $\sin\beta=-\frac{1}{2}$ теңдігін β-ның қандай мәндері қанағаттандырады?

584. Координаталық шеңберге B_α нүктелер жиынын белгілеп: а) $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; ә) $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$; б) $\sin\alpha\le-\frac{1}{2}$; в) $\cos\alpha>\frac{\sqrt{2}}{2}$ шартын қанағаттандыратын α-ның барлық мәндерін жазыңдар.

585. 66-суреттегі бірлік шеңберде барлық нүктелері: а) $\operatorname{tg}\alpha\le1$; ә) $\operatorname{ctg}\alpha\le\sqrt{3}$ шартын қанағаттандыратын доғалар белгіленген. Көрсетілген шарт орындалатындай α-ның барлық мәндерін жазыңдар.



66-сурет

586. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер: $\frac{1+\operatorname{ctg}\alpha}{1-\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+1}{\operatorname{tg}\alpha-1}$.

587. Өрнекті ықшамдаңдар:

а) $1+\cos\alpha-\frac{\operatorname{tg}\alpha+\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}$; ә) $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)^2-(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha)^2$.

588. Кез келген $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ үшін $\cos\alpha + \frac{1}{\cos\alpha} \geq 2$ теңсіздігінің ақиқат болатынын дәлелдеңдер.

589. Шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысын табыңдар:

а) $1 + \cos\frac{\pi}{3} + \cos^2\frac{\pi}{3} + \cos^3\frac{\pi}{3} + \ldots$; б) $1 + \mathrm{tg}\frac{\pi}{6} + \mathrm{tg}^2\frac{\pi}{6} + \mathrm{tg}^3\frac{\pi}{6} + \ldots$;

ә) $1 - \sin\frac{\pi}{4} + \sin^2\frac{\pi}{4} - \sin^3\frac{\pi}{4} + \ldots$; в) $1 - \mathrm{ctg}\frac{\pi}{3} + \mathrm{ctg}^2\frac{\pi}{3} - \mathrm{ctg}^3\frac{\pi}{3} + \ldots$.

С деңгейі

590. Барлық $\pi n < \alpha < \frac{\pi}{2} + \pi n$ үшін, мұндағы $n \in Z$, $\sqrt{\mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{ctg}^2\alpha + 2} = \mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\alpha$ теңдігінің ақиқат болатынын дәлелдеңдер.

591. Өрнектің ең үлкен және ең кіші мәндері бар болса, оларды табыңдар:

а) $\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\alpha$; б) $\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha - \sin^2(-\alpha)$;

ә) $\mathrm{ctg}(-\alpha) \cdot \sin\alpha \cdot \cos(-\alpha)$; в) $\cos^2\alpha - \mathrm{tg}(-\alpha) \cdot \mathrm{ctg}(-\alpha)$.

592. α-ның қандай мәндерінде: а) $\frac{1}{\sin(-\alpha)}$; ә) $\frac{5}{\cos(-\alpha)}$; б) $\mathrm{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$; в) $\mathrm{ctg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$ өрнегінің мағынасы болмайды?

593. Кез келген нақты x саны үшін: а) $\sin^2 x - 5\sin x + 4 \geq 0$; ә) $\cos^4 x - 6\cos^2 x + 5 \geq 0$ теңсіздігінің ақиқат болатынын дәлелдеңдер.

ҚЫЗЫҚТЫ ЕСЕПТЕР

Өрнекті ықшамдаңдар:

$$\left(\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} - \sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}\right)\left(\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} - \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}\right),$$

мұндағы α – сүйір бұрыш.

23. Тригонометриялық функциялар және олардың қасиеттері

Тақырыпты оқу барысында:
- тригонометриялық функциялардың анықтамалары мен қасиеттерін;
- $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg}\, x$, $y = \mathrm{ctg}\, x$ тригонометриялық функцияларының мәндерін табуды, олардың қасиеттерін есеп шығаруда қолдануды білетін боласыңдар.

Геометрия курсында 0°-тан 180°-қа дейінгі бұрыштардың тригонометриялық функциялары қарастырылған болатын. Енді бұрыштың радиандық өлшемін біле отырып, сандық аргументтегі тригонометриялық функцияларды қарастыруға болады. Мысалы, x санының синусы – ол x радиан бұрыштың синусы. $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg}\, x$, $y = \mathrm{ctg}\, x$ формулаларымен берілген сандық функцияларды *негізгі тригонометриялық функциялар* деп атайды. Оларды қысқаша синус, косинус, тангенс, котангенс деп атайды.

Тригонометриялық функциялардың басқа функциялардан айырмашылығы – олардың мәндерінің әрбір $2\pi n$ сайын, мұндағы $n \in Z$, қайталанып отыруында. Мұндай функцияларды *периодты* деп атайды.

Егер $T \neq 0$ саны табылып, $f(x)$ функциясының анықталу облысынан алынған кез келген x үшін $x - T$ мен $x + T$ сандары да осы облысқа тиісті болса, және $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$ теңдігі орындалса, онда $f(x)$ периодты функция деп аталады. T саны функцияның периоды деп аталады. Функцияның ең кіші оң периоды T_0-ді оның негізгі периоды деп атайды, mT_0 саны да, мұндағы $m \in Z$, осы функцияның периоды болады.

$y = \sin x$ пен $y = \cos x$ тригонометриялық функцияларының қасиеттері алдыңғы тармақта мысалдар шығарғанда қарастырылған болатын. $y = \sin x$, $y = \cos x$ функцияларының қасиеттері кестеде келтірілген.

	Функцияның қасиеті	$y = \sin x$	$y = \cos x$
1.	Анықталу облысы	$x\in(-\infty; +\infty)$	$x\in(-\infty; +\infty)$
2.	Мәндер жиыны	$y\in[-1; 1]$	$y\in[-1; 1]$
3.	Жұптығы, тақтығы	$\sin(-x) = -\sin x$ тақ	$\cos(-x) = \cos x$ жұп
4.	Периодтылығы	$\sin(x + 2\pi n) = \sin x$ $n\in Z.\ T_o = 2\pi$	$\cos(x + 2\pi n) = \cos x$ $n\in Z.\ T_o = 2\pi$
5.	Функцияның нөлдері	$\sin x = 0$ $x = \pi n,\ n\in Z$	$\cos x = 0$ $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n\in Z$
6.	Таңба тұрақты-лық аралығы	$\sin x > 0$ $x\in(0; \pi)$	$\cos x > 0$ $x\in\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$
		$\sin x < 0$ $x\in(-\pi; 0)$	$\cos x < 0$ $x\in\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$
7.	Өсу аралығы	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$	$[-\pi; 0]$
	Кему аралығы	$\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$	$[0; \pi]$

Осы қасиеттердің барлығын бірлік шеңберде қарастырыңдар.

1 - м ы с а л. $y = \sin x$ функциясының ең кіші оң периоды 2π-ге тең болатынын дәлелдеу керек.

Д ә л е л д е у і. $y = \sin x$ функциясының кез келген оң периоды T болсын. Сонда кез келген $x\in R$ үшін $\sin(x + T) = \sin x$ болады.

Егер $x = \frac{\pi}{2}$ болса, онда $\sin\left(\frac{\pi}{2} + T\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$ болады. Себебі, тек $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ болғанда, мұндағы $n\in Z$, $\sin x = 1$ болады, сондықтан $T = 2\pi n$. $2\pi n$-нің ең кіші оң мәні 2π-ге тең.

2 - м ы с а л. $T = -3\pi$ саны $y = \cos 2x$ функциясының периоды болатынын дәлелдеу керек.

Д ә л е л д е у і.

1) Берілген функцияның анықталу облысы кез келген нақты сан болғандықтан, $x - 3\pi$ және $x + 3\pi$ сандары оған тиісті болады.

2) Косинус функциясының периоды $2\pi n$ екенін ескере отырып, мынаны аламыз: $\cos(2(x - 3\pi)) = \cos(2x - 2\pi \cdot 3) = \cos 2x$.

Демек, $T = -3\pi$ саны $y = \cos 2x$ функциясының периоды болады.

3 - м ы с а л. $y = \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ функциясының өсу және кему аралықтарын көрсету керек.

Ш е ш у і. Синус функциясы $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ аралығында өсетіндіктен, $-\frac{\pi}{2} \le \frac{1}{2}x \le \frac{\pi}{2}$ болады. Қос теңсіздіктің барлық бөлігін 2-ге көбейтіп, $-\pi \le x \le \pi$ аламыз. Демек, $y = \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ функциясы $[-\pi; \pi]$ аралығында өседі.

$y = \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ функциясының кему аралығын да осылай табамыз: $\frac{\pi}{2} \le \frac{1}{2}x \le \frac{3\pi}{2}$, $\pi \le x \le 3\pi$. Демек, $y = \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ функциясы $[\pi; 3\pi]$ аралығында кемиді.

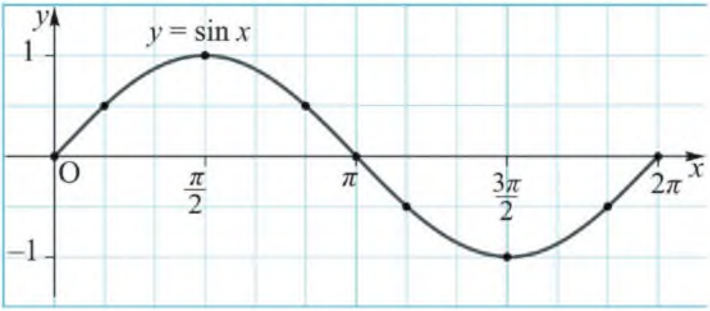
Ж а у а б ы. $y = \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ функциясы $x \in [-\pi; \pi]$ аралығында өседі; $x \in [\pi; 3\pi]$ аралығында кемиді.

4 - м ы с а л. $y = \sin x$ функциясының $[0; 2\pi]$ аралығындағы графигін салу керек.

Ш е ш у і. $y = \sin x$ функциясы мәндерінің кестесін толтырайық.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0

Осы нүктелерді координаталар жазықтығына белгілеп, оларды жатық сызықпен қосамыз (67-сурет).



67-сурет

Біз $y = \sin x$ функциясының $[0;\ 2\pi]$ аралығындағы графигін салдық. Осы сызықты келесі ұзындығы 2π аралыққа оңға және солға қарай қайталай сызып, $y = \sin x$ функциясының *синусоида* деп аталатын графигін аламыз.

$y = \cos x$ функциясының графигін де осылай салуға болады (оны өздігінен орындаңдар).

$y = \mathrm{tg}\, x$ пен $y = \mathrm{ctg}\, x$ функцияларының негізгі қасиеттерін қарастырайық.

	Функцияның қасиеті	$y = \mathrm{tg}\, x$	$y = \mathrm{ctg}\, x$
1.	Анықталу облысы	$x \in R,\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, мұндағы $n \in Z$	$x \in R,\ x \neq \pi n$, мұндағы $n \in Z$
2.	Мәндер жиыны	$y \in (-\infty;\ +\infty)$	$y \in (-\infty;\ +\infty)$
3.	Жұптығы, тақтығы	$\mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg}\, x$ тақ	$\mathrm{ctg}(-x) = -\mathrm{ctg}\, x$ тақ
4.	Периодтылығы	$\mathrm{tg}(x + \pi n) = \mathrm{tg}\, x$ $n \in Z.\ T_0 = \pi$	$\mathrm{ctg}(x + \pi n) = \mathrm{ctg}\, x$ $n \in Z.\ T_0 = \pi$
5.	Функцияның нөлдері	$\mathrm{tg}\, x = 0$, $x = \pi n,\ n \in Z$	$\mathrm{ctg}\, x = 0$ $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$

6.	Таңба тұрақтылық аралығы	tg $x > 0$ $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$	ctg $x > 0$ $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$
		tg $x < 0$ $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$	ctg $x < 0$ $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$
7.	Өсу аралығы	$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$	—
	Кему аралығы	—	$(0; \pi)$

y = tg x пен y = ctg x функцияларының қасиеттері алдыңғы тармақтарда есеп шығарғанда қолданылған болатын. Осы қасиеттердің барлығын бірлік шеңберде қарастырыңдар.

5 - м ы с а л. y = tg x функциясының ең кіші оң периоды π-ге тең болатынын дәлелдеу керек.

Д ә л е л д е у і. y = tg x функциясының кез келген оң периоды T болсын. Сонда кез келген $x \in R$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in R$, tg $(x + T)$ = tg x болады. Егер $x = 0$ болса, tg $(0 + T)$ = tg $0 = 0$ болады. $(0; \pi)$ аралығында y = tg x функциясының нөлдері жоқ болғандықтан, $T \geq \pi$ болады. Егер $T = \pi$ болса, онда tg $(x + \pi)$ = tg x болады. Демек, y = tg x функциясының ең кіші оң периоды π-ге тең.

6 - м ы с а л. $y = \operatorname{ctg} \frac{x}{5}$ функциясының ең кіші оң периодын табу керек.

Ш е ш у і. Берілген функцияның анықталу облысы: $\frac{x}{5} \neq \pi n$, $x \neq$ $\neq 5\pi n$, мұндағы $n \in Z$. T_0 берілген функцияның ең кіші оң периоды болсын, сонда $\operatorname{ctg}\frac{x}{5} = \operatorname{ctg}\frac{x + T_o}{5}$ теңдігі дұрыс болады, яғни $\operatorname{ctg}\frac{x}{5} =$ $= \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{5} + \frac{T_o}{5}\right)$. Котангенстің ең кіші оң периоды π болғандықтан, $\frac{T_o}{5} = \pi$, $T_o = 5\pi$ аламыз. Егер $x \neq 5\pi n$ болса, мұндағы $n \in Z$, онда $x + T_0 \neq 5\pi(n + 1)$ және $x - T_0 \neq 5\pi(n - 1)$ болады. Бұл $x + T_0$ және $x - T_0$ сандары $y = \operatorname{ctg} \frac{x}{5}$ функциясының анықталу облысына тиісті болатынын көрсетеді.

Ж а у а б ы. 5π.

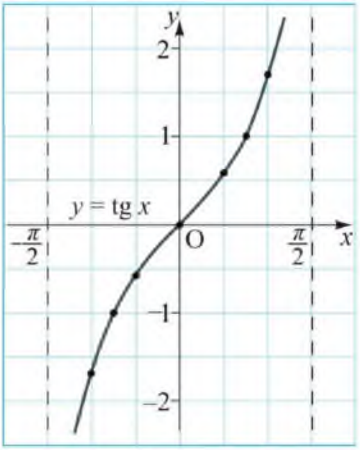
7 - м ы с а л. $y = \operatorname{tg} x$ функциясының $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ аралығындағы графигін салу керек.

Ш е ш у і. $y = \operatorname{tg} x$ функциясының жуық мәндерінің кестесін толтырайық.

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{tg} x$	–	–1,7	–1	–0,6	0	0,6	1	1,7	–

Осы нүктелерді координаталық жазықтыққа белгілеп, оларды жатық сызықпен қосамыз (68-сурет).

$y = \operatorname{tg} x$ функциясы $-\frac{\pi}{2}$ мен $\frac{\pi}{2}$ нүктелерінде анықталмайтын болғандықтан, оның графигі $x = -\frac{\pi}{2}$ мен $x = \frac{\pi}{2}$ түзулерін қимайды. $y = \operatorname{tg} x$ функциясының $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ аралығындағы графигін салдық. Осы сызықты келесі ұзындығы π аралыққа оңға және солға қарай қайталай салып, $y = \operatorname{tg} x$ функциясының *тангенсоида* деп аталатын графигін аламыз. Салынған сызық *тангенсоиданың тармағы* деп аталады. Тангенсоида шексіз көп бірдей тармақтардан тұрады..



68-сурет

СҰРАҚТАР

1. а) $y = \sin x$; ә) $y = \cos x$; б) $y = \operatorname{tg} x$; в) $y = \operatorname{ctg} x$ функциясының негізгі қасиеттерін атап шығыңдар.

2. а) $y = \cos x$ функциясының ең кіші оң периоды 2π-ге; ә) $y = \operatorname{ctg} x$ функциясынікі π-ге тең болатынын дәлелдеңдер.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

594. $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π, 3π, 4π, 5π, 6π, 15π, 20π, 142π сандарының қайсылары: а) $y = \sin x$; ә) $y = \cos x$ функциясының периодтары болады?

595. а) $y = \sin 2x$; ә) $y = \cos \frac{1}{2}x$; б) $y = \cos x^2$; в) $y = \sin \frac{1}{x}$ функциясының анықталу облысын табыңдар.

596. 0,9; –1; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{3}{\pi}$ сандарының қайсылары $y = \sin x$, $y = \cos x$ функцияларының мәндері болуы мүмкін?

597. а) $y = \sin \frac{1}{2}x$; ә) $y = -\cos x$; б) $y = 2\sin x$; в) $y = \cos x + 2$ функциясының мәндер облысын табыңдар.

598. а) $y = \sin 3x$; ә) $y = \cos x + 1$; б) $y = \sin^2 x$; в) $y = -2\cos x$ функциясының жұп немесе тақ болатынын анықтаңдар.

599. Тригонометриялық функциялардың периодтылығын пайдаланып: а) $\sin\frac{41\pi}{7}$; ә) $\cos\frac{23\pi}{8}$; б) $\sin\left(-\frac{27\pi}{8}\right)$; в) $\cos\left(-\frac{37\pi}{4}\right)$ функциясының мәнін аргументі ең кіші оң санмен өрнектелетіндей етіп жазыңдар.

600. Есептеңдер:

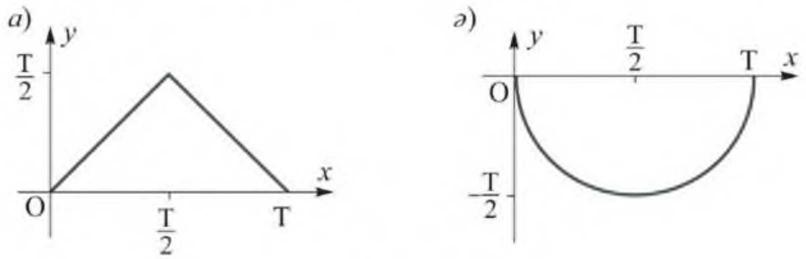
а) $\cos 15\pi$; б) $\cos\left(-\frac{33\pi}{4}\right)$;

ә) $\sin\frac{25\pi}{2}$; в) $\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right)$.

601. 5π саны: а) $y = \cos 2x$; ә) $y = \sin \frac{2}{5}x$ функциясының периоды бола ма?

602. а) $y = \cos \frac{x}{2}$; ә) $y = \sin 2x$; б) $y = \cos 4x$; в) $y = \sin 3x$ функциясының ең кіші оң периодын табыңдар.

603. 69-суреттің әрқайсысында периоды T болатын қайсыбір функция графигінің бөлігі кескінделген. Осы функцияның $[-T; 2T]$ аралығындағы графигін салыңдар.



69-сурет

604. x-тің қандай мәндерінде теңдік ақиқат болады:

а) $\sin x = 1$; б) $\sin x = -1$; г) $\cos x = 1$; д) $\cos x = -1$;

ә) $\sin x = 0$; в) $\sin x = \frac{\pi}{2}$; ғ) $\cos x = 0$; е) $\cos x = -\pi$?

605. Функцияның нөлдерін табыңдар:

а) $y = \sin 3x$; б) $y = \sin\left(-\frac{1}{2}x\right)$; г) $y = \sin(x - 2)$;

ә) $y = \cos 2x$; в) $y = \cos\left(\frac{1}{3}x\right)$; ғ) $y = \cos(4 - x)$.

606. Функцияның өсу және кему аралықтарын көрсетіңдер:

а) $y = \sin 2x$; б) $y = \sin \pi x$;

ә) $y = \cos 3x$; в) $y = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

607. Функцияның анықталу облысын, мәндер жиынын және нөлдерін көрсетіңдер:

а) $y = 3\sin x$; б) $y = -\frac{1}{2}\sin 3x$; г) $y = |\sin x|$;

ә) $y = \cos\frac{1}{2}x$; в) $y = -\frac{1}{3}\cos x$; ғ) $y = |\cos x|$.

608. x-тің қандай мәндерінде: а) $\frac{1}{\sin x + 1}$; ә) $\frac{1}{\cos x - 1}$; б) $\sqrt{\sin x}$; в) $\sqrt{1 + \cos x}$ өрнегінің мағынасы болатынын зерттеңдер.

609. Тіктөртбұрыштың диагоналі 1 дм-ге, ал диагональдарының арасындағы бұрыш β-ға тең. β-ның қандай мәнінде осы тіктөртбұрыштың ауданы ең үлкен болатынын зерттеңдер.

610. Функцияның анықталу облысын табыңдар:

а) $y = \operatorname{tg} x - 2$; б) $y = \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}x\right)$;

ә) $y = \operatorname{tg} 2x$; в) $y = \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

611. Функцияның мәндер жиынын табыңдар:

а) $y = |\operatorname{tg} x|$; б) $y = \sqrt{\operatorname{tg} x}$;

ә) $y = \operatorname{ctg}^2 x$; в) $y = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}$.

612. Функция тақ па, жұп па, соны анықтаңдар:

а) $y = x \cdot \operatorname{tg} x$; б) $y = \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x$;

ә) $y = 2\sin x - \operatorname{ctg} x$; в) $y = \operatorname{ctg} x \cdot \cos x$.

613. Тригонометриялық функциялардың периодтылығын пайдаланып: а) $\operatorname{tg}\frac{39\pi}{9}$; ә) $\operatorname{ctg}\frac{58\pi}{5}$; б) $\operatorname{tg}\left(-\frac{11\pi}{3}\right)$; в) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{73\pi}{4}\right)$ функциясының мәнін аргументі ең кіші оң санмен өрнектелетіндей етіп жазыңдар.

614. $y = \operatorname{tg} x$ пен $y = \operatorname{ctg} x$ функцияларының периодтылығы мен тақтығын пайдаланып, олардың x: а) $-\frac{5\pi}{4}$; ә) $\frac{23\pi}{6}$; б) $-\frac{22\pi}{3}$; в) $-\frac{23\pi}{4}$ болғандағы мәндерін есептеңдер.

615. Егер $\operatorname{tg}\beta = a$, мұндағы $a \neq 0$, болса: а) $1 - \operatorname{tg}(2\pi - \beta)$; ә) $\operatorname{ctg}(-\beta) + a$; б) $a - \operatorname{tg}(-\beta - 3\pi)$; в) $\frac{1}{a} - \operatorname{ctg}(\beta - 2\pi)$ өрнегінің мәнін табыңдар.

616. а) $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; ә) $y = \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$; б) $y = \operatorname{tg}\left(4x - \frac{\pi}{2}\right)$; в) $y = \operatorname{ctg}(\pi - 2x)$ функциясының нөлдерін табыңдар.

617. x-тің қандай мәндерінде: а) $\frac{\pi}{\operatorname{tg}(\pi - x)}$; ә) $\frac{2\pi}{\operatorname{ctg}(-x - 2\pi)}$; б) $\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$; в) $\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}\right)$ өрнегінің мағынасы болмайды?

618. b-ның қандай мәндерінде: а) $\sin x = \frac{b}{2}$; ә) $\cos x = \frac{\pi}{b}$; б) $\operatorname{tg} x = \frac{5}{\sqrt{b}}$; в) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{b^2 - 25}$ теңдігі орындалады?

В деңгейі

619. Үшбұрыштың екі қабырғасының арасындағы бұрыш 0-ден π-ге дейін өскенде үшбұрыштың ауданы қалай өзгеретінін зерттеңдер. Үшбұрыш ауданының: а) ең үлкен; ә) ең кіші мәні бола ма?

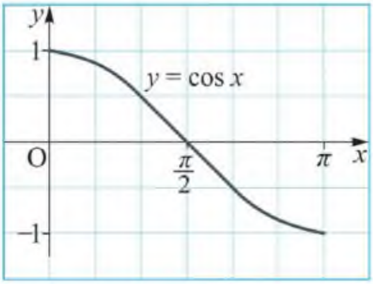
620. $[0; \pi]$ дейінгі аралықтың қандай мәндерінде: а) $\sqrt{1-\cos x} - \sqrt{1+\cos x} > 0$; ә) $\sqrt{1-\sin x} - \sqrt{1+\sin x} < 0$ болатынын зерттеп, анықтаңдар.

621. а) $\sin x = \dfrac{4a-3}{2-a}$; ә) $\cos x = \dfrac{3a+2}{3-a}$; б) $\sin x = \dfrac{a^2-3a+2}{a^2-1}$; в) $\cos x = \dfrac{a^2-4}{a^2+a-2}$ теңдігі орындалуы үшін a қандай сан болуы керек?

622. $-\dfrac{3\pi}{2}$ саны: а) $y = \operatorname{tg} 2x$; ә) $y = \operatorname{ctg} 4x$ функциясының периоды болатынын дәлелдеңдер.

623. а) $y = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$; ә) $y = \operatorname{ctg} 2x$; б) $y = \operatorname{tg} 4x$; в) $y = \operatorname{ctg}\dfrac{x}{3}$ функциясының ең кіші оң периодын табыңдар.

624. 70-суретте $y = \cos x$ функциясы графигінің бөлігі кескінделген. Бұл функцияның жұп екенін ескере отырып, оның $[-\pi; \pi]$ аралығындағы графигін салыңдар.



70-сурет

625. а) $y = \dfrac{\cos x + 1}{\sin x - 1}$; ә) $y = \dfrac{3\sin x}{\sqrt{2}\cos x - 1}$ функциясының анықталу облысын табыңдар.

626. $y = \sin x$ немесе $y = \cos x$ функциясының қасиеттерін пайдаланып: а) $\sin\dfrac{2x}{3} \geq 0$; ә) $\cos\dfrac{x}{6} < 0$; б) $\sin 3x < 0$; в) $\cos 2x \geq 0$ шартын қанағаттандыратын x-тің мәндерін табыңдар.

C деңгейі

627. x-тің қандай мәндерінде: а) $\sqrt{\sin x}$; ә) $\sqrt{1+\cos x}$; б) $\sqrt{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x}$ өрнегінің мағынасы болатынын анықтаңдар.

628. $y = \sin x$ пен $y = \cos x$ функцияларының қасиеттерін пайдаланып:

а) $\sin 136° \cdot \sin 137° \cdot \sin 138° > \frac{1}{3}$; ә) $\cos 55° \cdot \cos 57° \cdot \cos 59° > \frac{1}{9}$ болатынын дәлелдеңдер.

629. а) $\frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{\cos x + \operatorname{ctg} x}$; ә) $\frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{\cos x - \operatorname{ctg} x}$ өрнегі теріс мәндерді қабылдамайтынын дәлелдеңдер.

630. а) $\sin\alpha + 3\cos\alpha = 5$; ә) $4\cos\alpha - 3\sin\alpha = 7$ болуы мүмкін бе, соны анықтаңдар.

631. а) $x \in [0; \pi]$, $n \in N$ болғанда, $\sin^n x \le \sin x$; ә) $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $n \in N$ болғанда, $\cos^n x \le \cos x$ болатынын дәлелдеңдер.

24. Негізгі тригонометриялық тепе-теңдіктер

Тақырыпты оқу барысында:

• негізгі тригонометриялық тепе-теңдіктерді білетін боласыңдар;
• негізгі тригонометриялық тепе-теңдіктерді дәлелдеуді үйренесіңдер;
• оларды бір тригонометриялық функцияның берілген мәні бойынша басқа функциялардың мәндерін табуға; тригонометриялық өрнектерді тепе-тең түрлендіруге және есептер шығаруда қолдануды білетін боласыңдар.

Негізгі тригонометриялық тепе-теңдіктерді:

1) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; **2)** $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; **3)** $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$;

4) $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$; **5)** $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$; **6)** $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

8-сыныптың геометрия курсынан білесіңдер. Олар $0°$-тан $180°$-қа дейінгі бұрыштар үшін ғана емес, осы тепе-теңдікке кіретін өрнектердің мағынасы болатын градустық немесе радиандық өлшеммен өрнектелген кез келген бұрыш үшін де орындалады.

Бастапқы үшеуі тәуелсіз тепе-теңдік, себебі олардың ешқайсысын басқасын пайдаланып алуға келмейді. Екінші мен үшінші тепе-теңдік тангенс пен котангенс ұғымдарының анықтамасынан шығады. Бірінші тепе-теңдік синус пен косинустың анықтамалары мен координаталық шеңбердің $x^2 + y^2 = 1$ теңдеуін пайдаланып оңай дәлелденеді. $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$ болғандықтан, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ болады.

Төртінші тепе-теңдік екінші мен үшіншінің оң және сол жақтарын көбейту арқылы алынады. Бесінші мен алтыншы тепе-теңдік біріншінің сол бөлігі мен оң бөлігін, сәйкесінше, $\cos^2\alpha$ және $\sin^2\alpha$-ға бөлгенде шығады.

Осы формулалар арқылы тригонометриялық функциялардың біреуінің берілген мәні бойынша басқаларының мәндерін табуға болады.

1 - м ы с а л. Егер $\cos\alpha = 0{,}8$ және $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ болса, $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ және $\operatorname{ctg}\alpha$-ны табу керек.

Ш е ш у і. Кез келген $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ үшін синустың мәні теріс. Сонда $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ тепе-теңдігінен $\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-0{,}64} = -0{,}6$ болады.

Синус пен косинусты біле отырып, тангенсті табамыз: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-0{,}6}{0{,}8} = -\frac{3}{4}$. Сонда $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = -\frac{4}{3}$ болады.

Ж а у а б ы. $\sin\alpha = -0{,}6$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{4}{3}$.

2 - м ы с а л. Егер $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{15}{8}$ және $-\pi < \alpha < -\frac{\pi}{2}$ болса, $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ және $\cos\alpha$-ны табу керек.

Ш е ш у і. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha} = \frac{8}{15}$. α III ширектің бұрышы болғандықтан, $\sin\alpha$ мен $\cos\alpha$ теріс болады. $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$ формуласынан мынаны аламыз: $\sin\alpha = -\sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}} = -\sqrt{\frac{64}{289}} = -\frac{8}{17}$. Сонда $\cos\alpha = \operatorname{ctg}\alpha \cdot \sin\alpha = -\frac{15\cdot 8}{8\cdot 17} = -\frac{15}{17}$.

Ж а у а б ы. $\sin\alpha = -\frac{8}{17}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{8}{15}$, $\cos\alpha = -\frac{15}{17}$.

3 - м ы с а л. $1 - (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$ өрнегінің ең үлкен және ең кіші мәнін табу керек.

Ш е ш у і. $1 - (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 1 - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = \sin^2\alpha + \sin^2\alpha = 2\sin^2\alpha$. $0 \le \sin^2\alpha \le 1$ болғандықтан, $0 \le 2\sin^2\alpha \le 2$ болады. Демек, өрнектің ең үлкен мәні 2, ең кіші мәні 0.

Ж а у а б ы. Ең үлкен мәні 2, ең кіші мәні 0.

СҰРАҚТАР

Негізгі тригонометриялық тепе-теңдіктерді жазып, оларды дәлелдеңдер.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

632. Қайсыбір α бұрышы үшін: а) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ және $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$; ә) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ және $\cos\alpha = \frac{1}{5}$; б) $\operatorname{tg}\alpha = -0{,}125$ және $\operatorname{ctg}\alpha = -8$; в) $\operatorname{tg}\alpha = 2-\sqrt{3}$ және $\operatorname{ctg}\alpha = 2+\sqrt{3}$ шарттары орындалуы мүмкін бе?

633. Өрнекті ықшамдаңдар:

а) $0,5 + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$;
ә) $2 - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$;
б) $2\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 1$;
в) $(1 - \sin\alpha)(1 + \sin\alpha)$;
г) $\mathrm{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha - \mathrm{tg}^2\alpha \cdot \sin^2\alpha$;
ғ) $\sin^4\alpha + \cos^2\alpha - \cos^4\alpha$.

634. Егер: а) $\sin\alpha = 0,6$, $0° < \alpha < 90°$; ә) $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$, $90° < \alpha < 180°$; б) $\mathrm{tg}\,\alpha = 2$, $180° < \alpha < 270°$; в) $\mathrm{ctg}\,\alpha = -3$, $270° < \alpha < 360°$ болса, қалған тригонометриялық функциялардың мәндерін табыңдар.

635. Өрнекті ықшамдаңдар:

а) $\frac{\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha}$; б) $\frac{1-2\sin^2\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}$; г) $\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha} - \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$;

ә) $\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha+1}$; в) $\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{1-2\cos^2\alpha}$; ғ) $\frac{\sin^2\alpha-\mathrm{tg}^2\alpha}{\cos^2\alpha-\mathrm{ctg}^2\alpha}$.

636. Өрнекті ықшамдап, оның берілген бұрыштағы мәнін табыңдар:

а) $\frac{1-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$, $\alpha = \frac{\pi}{6}$; ә) $\mathrm{tg}\,\alpha + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha-1}$, $\alpha = -\frac{3\pi}{4}$;

б) $\mathrm{ctg}^2\alpha \cdot (\cos^2\alpha - 1) + 2\cos^2\alpha$, $\alpha = \frac{7\pi}{3}$.

637. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

а) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$;
ә) $(\cos\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\alpha)^2 + (\sin\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha)^2 = 1$;
б) $\sin^4\alpha + \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$;
в) $\mathrm{ctg}^2\alpha - \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} - \frac{1}{\cos^2\alpha}$.

638. а) $\sin\alpha = -\frac{2}{3}$ және $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; ә) $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ және $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$; б) $\mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{24}{7}$ және $\pi < \alpha < 2\pi$; в) $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$ және $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ болса, қалған тригонометриялық функциялардың мәндерін табыңдар.

639. Егер: а) $\mathrm{tg}\,\alpha = 3$ және $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ болса, $\cos\alpha$-ны; ә) $\mathrm{ctg}\,\alpha = -\frac{1}{5}$ және $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ болса, $\sin\alpha$-ны 0,01 үлеске дейінгі дәлдікпен табыңдар.

Ертіс өзенінің бассейні

640. Азияның ең ірі өзендерінің бірі – ұзындығы 4 250 км-ге тең Ертіс өзені Қазақстан аумағынан ағып өтеді. Егер Қазақстан аумағындағы өзен ұзындығының оның барлық ұзындығына қатынасы котангенсі 2,5-ке тең бұрыштың тангенсіне тең болса, өзеннің Қазақстан аумағындағы ұзындығын табыңдар.

641. Өрнектің ең кіші және ең үлкен мәндерін табыңдар:

а) $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha - \sin^2 x$;   б) $\dfrac{4}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} - \cos\alpha \cdot \sin\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha$;

ә) $\cos^2 x - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha$;   в) $\dfrac{2}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha} - \cos\alpha \cdot \sin\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha$.

642. Өрнекті ықшамдаңдар:

а) $\sqrt{1-\cos^2\alpha} - \sqrt{1-\sin^2\alpha}$, мұндағы $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

ә) $\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha} - \sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$, мұндағы $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

643. а) $\sin^2 x + \cos^2 x - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x + \sin 2x = 0$; ә) $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x - \sin^2 x - \cos^2 x + \cos\dfrac{1}{2}x = 0$; б) $\dfrac{1}{\cos^2 x} - \operatorname{tg}^2 x - \cos 2x = 2$; в) $\dfrac{1}{\sin^2 x} - \operatorname{ctg}^2 x + \sin\dfrac{1}{4}x = 2$ теңдігін қанағаттандыратын x-тің мәндерін табыңдар.

644. а) $y = \sin^2 x + \cos^2 x$; ә) $y = -(\sin x + \cos x)^2 - (\sin x - \cos x)^2$ функциясының графигін салыңдар.

645. α-ның барлық мүмкін мәндерінде өрнек тек бір мәнді қабылдайтынын дәлелдеңдер:

а) $-2(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + 4\operatorname{tg}\alpha \cdot \cos^2\alpha$;

ә) $\dfrac{1}{2}(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha) + \operatorname{ctg}^2\alpha \cdot \sin^4\alpha$;

б) $5+\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}-\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$;

в) $\dfrac{\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{1-\operatorname{ctg}^2\alpha}\cdot 4\operatorname{ctg}^2\alpha+4\sin^2\alpha$.

В деңгейі

646. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

а) $\sqrt{\dfrac{1}{1+\cos\alpha}+\dfrac{1}{1-\cos\alpha}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sin\alpha}$, мұндағы $0<\alpha<\pi$;

ә) $\sqrt{\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}=2\operatorname{tg}\alpha$, мұндағы $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$.

647. Өрнекті ықшамдаңдар:

а) $\dfrac{\sin^3\alpha+\cos^3\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}+\sin\alpha\cdot\cos\alpha$; ә) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha+3\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$.

648. Егер: а) $\sin\alpha=\dfrac{c}{\sqrt{1+c^2}}$, мұндағы $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$; ә) $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{1}{m}$, мұндағы $\pi<\beta<\dfrac{3\pi}{2}$; б) $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$, мұндағы $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$; в) $\operatorname{ctg}\beta=-\dfrac{1}{n}$, мұндағы $\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$ болса, қалған тригонометриялық функциялардың мәндерін табыңдар.

649. Егер: 1) а) $\sin\alpha+\cos\alpha=1{,}4$; ә) $\sin\alpha-\cos\alpha=0{,}8$ болса, $\sin\alpha\times\times\cos\alpha$ өрнегінің; 2) $\sin\alpha\cdot\cos\alpha=0{,}4$ болса, $\left|\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}\right|$ өрнегінің мәнін табыңдар.

650. Өрнектің ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңдар:

а) $1+3\cos^2x+4\sin^2x$;

ә) $2-5\cos^2x-4\sin^2x$;

б) $7\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{ctg}x-(\sin^2x-\cos^2x)$;

в) $\cos^4x+\sin^2x\cdot\cos^2x-\sin^2x$.

651. Бұрыштары арифметикалық прогрессия мүшелерін құрайтын өрнектің мәнін табыңдар:

а) $\operatorname{tg}3°\cdot\operatorname{tg}6°\cdot\operatorname{tg}9°\cdot\ldots\cdot\operatorname{tg}87°$;

ә) $\operatorname{ctg}84°\cdot\operatorname{ctg}80°\cdot\operatorname{ctg}76°\cdot\ldots\cdot\operatorname{ctg}6°$.

C деңгейі

652. Өрнекті ықшамдаңдар:

а) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha - \sin^6\alpha - \cos^6\alpha$; ә) $\dfrac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1}{\operatorname{ctg}\alpha - \sin\alpha \cdot \cos\alpha}$.

653. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

а) $2(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) + 1 = 3(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha)$;

ә) $\dfrac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{1 + 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha} = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - 1}{\operatorname{tg}\alpha + 1}$.

654. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{10}$ екені белгілі. Егер $\operatorname{tg}\alpha < \operatorname{ctg}\alpha$ болса, а) $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$; ә) $\operatorname{tg}^3\alpha + \operatorname{ctg}^3\alpha$; б) $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha$ өрнегінің мәнін табыңдар.

655. Егер $\sin\alpha + \cos\alpha = 0{,}5$ болса, $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$ өрнегінің мәнін табыңдар.

656. x айнымалысының қандай мәндерінде: а) $\sin^2 x - 2\cos^2 x$; ә) $5\cos^2 x + 6\sin^2 x$ өрнегі ең кіші және ең үлкен мәндерді қабылдайтынын анықтаңдар.

657. $n \in N$-нің қандай мәндерінде $\sin^{2n}\alpha + \cos^{2n}\alpha < 1$, мұндағы α – сүйір бұрыш, теңсіздігі ақиқат болатынын зерттеңдер.

25. Келтіру формулалары

Тақырыпты оқу барысында:

• келтіру формулаларын және оларды есте сақтау ережелерін білесіңдер;

• оларды кез келген бұрыштың тригонометриялық функцияларының мәндерін сол функциялардың сүйір бұрыштарының мәндері арқылы табуға; тригонометриялық өрнектерді тепе-тең түрлендіруге, есептер шығаруда қолдануды үйренесіңдер.

$\frac{\pi}{2}-\alpha$ мен $\pi-\alpha$ бұрыштарының, мұндағы α – сүйір бұрыш, келтіру формулалары сендерге геометрия курсынан белгілі. Мысалы,

$$\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha, \qquad \cos(90°-\alpha)=\sin\alpha,$$
$$\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha, \qquad \cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha.$$

Осы формулалар бойынша, мысалы, $\cos 60° = \cos(90° - 30°) = \sin 30° = \frac{1}{2}$, $\sin 150° = \sin(180° - 30°) = \sin 30° = \frac{1}{2}$ болатынын тапқансыңдар.

Енді $\frac{\pi}{2}-\alpha$, $\frac{\pi}{2}+\alpha$, $\frac{3\pi}{2}-\alpha$, $\frac{3\pi}{2}+\alpha$, $\pi-\alpha$, $\pi+\alpha$, $2\pi-\alpha$ бұрыштарының келтіру формулаларын қарастырамыз. Келтіру формулалары кез келген бұрыштың тригонометриялық функцияларының мәнін олардың сүйір бұрышының мәні арқылы есептеуге мүмкіндік береді. Көрсетілген бұрыштар мен сүйір бұрыштардың тригонометриялық функцияларының арасындағы қатыстарды кестеде көрсетейік.

Функция	Аргумент						
	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$
sin	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
cos	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
tg	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$
ctg	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$

Осы кесте бойынша 28 келтіру формуласын жазуға болады, мысалы,

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha,\ \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha,$$
$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{ctg}\alpha,\ \operatorname{ctg}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

Осы формулалардың кез келгенін жазу үшін мына **ережені** пайдаланады:

1) *α-ны сүйір бұрыш деп есептеп, теңдіктің сол жағындағы өрнектің таңбасы қандай болса, оң жағындағы өрнектің алдына сондай таңба қояды;*

2) *$\pi \pm \alpha$ мен $2\pi - \alpha$ бұрыштары функцияларының аттары өзгермейді, ал $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ мен $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ бұрыштары функцияларының аттары өзгереді:* sin cos-*қа,* cos sin-*қа,* tg ctg-*ке,* ctg tg-*ке ауысады.*

1-ші мен 3-бағандардағы формулалар бұның алдында қорытылған болатын. 7-бағандағы формулаларды тригонометриялық функциялардың периодтылығын және жұптығын немесе тақтығын пайдаланып алуға болады. Мысалы,

$$\sin(2\pi - \alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha.$$

2-ші мен 4-бағандағы формулаларды 1-ші мен 3-бағандағы α бұрышын $-\alpha$-ға ауыстырып және тригонометриялық функциялардың жұптығын немесе тақтығын пайдаланып алуға болады. Мысалы,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - (-\alpha)\right) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha,$$
$$\cos(\pi + \alpha) = \cos(\pi - (-\alpha)) = -\cos(-\alpha) = -\cos\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg}(\pi - (-\alpha)) = -\operatorname{tg}(-\alpha) = \operatorname{tg}\alpha.$$

6-бағандағы формуланы 7-ші мен 1-бағандағы формулаларды пайдаланып алуға болады. Мысалы,

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(2\pi - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha.$$

5-бағандағы формуланы 6-бағандағы формуладан α-ны $-\alpha$-ға ауыстырып және тригонометриялық функциялардың жұптығын немесе тақтығын пайдаланып алуға болады. Мысалы,

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + (-\alpha)\right) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha,$$
$$\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + (-\alpha)\right) = -\operatorname{tg}(-\alpha) = \operatorname{tg}\alpha.$$

1 - м ы с а л. $\sin(-783°)$-ты сүйір бұрыштың тригонометриялық функциясы арқылы өрнектеу керек.

Ш е ш у і.

$\sin(-783°) = \sin(-360° \cdot 3 + 297°) = \sin 297° = \sin(270° + 27°) =$ $= -\cos 27°$.

Ж а у а б ы. $\sin(-783°) = -\cos 27°$.

СҰРАҚТАР

1. $\frac{\pi}{2} - \alpha$ және $\pi - \alpha$ бұрыштары үшін келтіру формулаларын жазып, олардың кез келген екеуін дәлелдеңдер.
2. Келтіру формуласының кез келгенін қандай ереже бойынша жазуға болады? Мысал келтіріңдер.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

658. а) $\sin(90° + \alpha) = -\cos \alpha$; ә) $\sin(180° + \alpha) = -\sin \alpha$; б) $\cos(270° - \alpha) = -\cos \alpha$; в) $\cos(90° + \alpha) = -\sin \alpha$; г) $\mathrm{tg}(90° + \alpha) = \mathrm{ctg}\, \alpha$; ғ) $\mathrm{ctg}(180° + \alpha) = \mathrm{ctg}\, \alpha$ теңдігі тепе-теңдік бола ма?

659. Өрнекті ықшамдаңдар:

а) $\dfrac{\cos(-\alpha)\cdot\cos(180°+\alpha)}{\sin(-\alpha)\cdot\sin(90°+\alpha)}$; б) $\dfrac{\mathrm{tg}(180°-\alpha)\cdot\sin(270°+\alpha)}{\cos(180°-\alpha)\cdot\mathrm{tg}(270°-\alpha)}$;

ә) $\dfrac{\sin(-\alpha)\cdot\mathrm{ctg}(-\alpha)}{\cos(360°-\alpha)\cdot\mathrm{tg}(180°+\alpha)}$; в) $\dfrac{\cos(270°+\alpha)\cdot\mathrm{ctg}(270°-\alpha)}{\sin(180°-\alpha)\cdot\mathrm{tg}(270°+\alpha)}$.

660. Келесі тригонометриялық функцияларды 45°-тан кем оң бұрыштың тригонометриялық функциялары арқылы өрнектеңдер:
а) $\sin 70°$, $\cos 50°$, $\mathrm{tg}\, 68°$, $\mathrm{ctg}\, 73°$;
ә) $\sin 175°$, $\cos 130°$, $\mathrm{tg}\, 165°$, $\mathrm{ctg}\, 170°$;
б) $\sin 220°$, $\cos 240°$, $\mathrm{tg}\, 190°$, $\mathrm{ctg}\, 250°$;
в) $\sin 320°$, $\cos 290°$, $\mathrm{tg}\, 340°$, $\mathrm{ctg}\, 325°$;
г) $\sin 560°$, $\cos 840°$, $\mathrm{tg}\, 760°$, $\mathrm{ctg}\, 990°$;
ғ) $\sin(-310°)$, $\cos(-500°)$, $\mathrm{tg}(-400°)$, $\mathrm{ctg}(-830°)$.

661. Келтіру формулаларын пайдаланып, тригонометриялық функциялардың мәндерін есептеңдер:

а) $\sin 150°$, $\cos 120°$, $\operatorname{tg} 135°$, $\operatorname{ctg} 150°$;

ә) $\sin 225°$, $\cos 210°$, $\operatorname{tg} 210°$, $\operatorname{ctg} 240°$;

б) $\sin 315°$, $\cos 300°$, $\operatorname{tg} 315°$, $\operatorname{ctg} 300°$;

в) $\sin(-135°)$, $\cos(-240°)$, $\operatorname{tg}(-300°)$, $\operatorname{ctg}(-225°)$.

662. Өрнектің мәнін табыңдар:

а) $\sin^2 120° + \cos^2 150° + \operatorname{tg}^2 225° - \operatorname{ctg}^2 210°$;

ә) $\sin^2(-330°) - \cos^2(-120°) - \operatorname{tg}^2(-240°) - \operatorname{ctg}^2(-330°)$;

б) $6\sin(-240°) \cdot \cos 315° - 4\cos 135° \cdot \operatorname{tg}(-225°) \cdot \operatorname{tg} 120°$;

в) $\dfrac{\sin(-120°)}{\sin 300°} - \dfrac{\operatorname{ctg} 120° \cdot \cos 330°}{\cos 360°} + \sin(-210°) \cdot \operatorname{tg} 150°$.

663. α бұрышының тригонометриялық функциясымен алмастырыңдар:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$; б) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$; г) $\cos(\pi + \alpha)$;

ә) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$; в) $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$; ғ) $\sin(2\pi - \alpha)$.

664. Өрнекті түрлендіріңдер:

а) $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$; б) $\sin(\alpha - \pi)$; г) $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$;

ә) $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$; в) $\cos(\alpha - \pi)$; ғ) $\operatorname{ctg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$.

665. Келесі тригонометриялық функцияларды бұрыштары $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ аралығында орналасқан функцияларға келтіріңдер:

а) $\sin 0{,}8\pi$; $\cos 2{,}4\pi$; $\operatorname{tg} 3{,}7\pi$; $\operatorname{ctg} 5{,}4\pi$;

ә) $\sin(-1{,}2\pi)$; $\cos 3{,}6\pi$; $\operatorname{tg} 1{,}9\pi$; $\operatorname{ctg}(-1{,}7\pi)$.

666. $(0;\ 2\pi)$ аралығынан: а) синустары $\frac{1}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, -1, 0-ге; ә) косинустары 1, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, 0, $\frac{\sqrt{2}}{2}$-ге; б) тангенстері -1, $\sqrt{3}$, $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, 0-ге тең болатын бұрыштарды көрсетіңдер.

667. Егер: а) $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ және $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ болса, $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$-ны;

ә) $\sin\alpha = -\frac{7}{9}$ және $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$ болса, $\cos(\pi + \alpha)$-ны; б) $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ және $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ болса, $\mathrm{tg}(2\pi - \alpha)$-ны есептеңдер.

668. а) Параллелограмның сүйір бұрышының синусы $\frac{\sqrt{3}}{3}$-ке тең. Оның доғал бұрышының косинусын табыңдар.

ә) Кез келген үшбұрыштың кез келген бұрышының синусы басқа екі бұрыштың қосындысының синусына тең болатынын дәлелдеңдер.

б) Үшбұрыштың екі бұрышы қосындысының тангенсі 3-ке тең. Оның үшінші бұрышының синусын табыңдар.

669. Өрнекті ықшамдаңдар:

а) $\dfrac{\sin(\alpha - \pi)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\cdot\cos(2\pi - \alpha)}$; б) $\dfrac{\cos(\pi - \alpha)\cdot\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin(\pi + \alpha)\cdot\cos(2\pi - \alpha)}$;

ә) $\dfrac{2 - 2\sin^2(\pi + \alpha)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \cos(\pi - \alpha)}$; в) $\dfrac{\cos^2(2\pi - \alpha) + \sin^2\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}{\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\cdot\mathrm{ctg}^2\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}$.

670. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

а) $\dfrac{\cos^2(2\pi - \alpha) - \sin^2(\pi + \alpha)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)} = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$;

ә) $\dfrac{\sin^2(\pi - \alpha) - \cos^2(2\pi + \alpha)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$;

б) $\dfrac{\sin(2\pi - \alpha)\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\cdot\mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos(2\pi + \alpha)\cdot\mathrm{tg}(\pi + \alpha)} = 1$;

в) $\dfrac{\mathrm{ctg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) - \mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)\cdot\sin(\pi + \alpha)}{\mathrm{tg}(\pi + \alpha)\cdot\cos(\alpha - 2\pi) + \mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)\cdot\sin(\alpha - 2\pi)} = -1$.

В деңгейі

671. Үшбұрыштың α, β, γ бұрыштары үшін: а) $\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \cos\frac{\gamma}{2}$; ә) $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$ қатыстарының ақиқат болатынын дәлелдеңдер.

672. α-ға тең бұрышқа іштей радиусы 2 см-ге тең шеңбер сызылған. Шеңбердің бұрыштың қабырғаларымен жанасу нүктелерінің арақашықтығын табыңдар.

673. Есептеңдер: $\operatorname{ctg} 570° \cdot \operatorname{ctg} 760° \cdot \operatorname{ctg} 945° \cdot \operatorname{ctg} 1130° \cdot \operatorname{ctg} 1320°$.

674. Өрнекті ықшамдаңдар:

а) $\dfrac{\operatorname{tg}(5\pi - x) + \operatorname{tg}(10\pi - x) - \operatorname{tg}(21\pi + x)}{\sin 6{,}5\pi - \cos 15\pi + \cos 20\pi}$;

ә) $\dfrac{\cos(5\pi - x) + \sin(11\pi + x)}{\operatorname{tg}(\pi - x)\cdot\operatorname{tg}(0{,}5\pi + x) + \operatorname{tg}(20\pi + x)}$;

б) $\dfrac{\operatorname{tg}^2(9\pi - x)\cdot\sin^2(x - 4{,}5\pi)}{\sin(19\pi - x)\cdot\sin(-x - 15\pi)}$;

в) $\dfrac{\cos^2(5{,}5\pi - x)}{\operatorname{tg}^2(x - 10\pi)} + \dfrac{\cos^2(-x)}{\operatorname{tg}^2(x - 7{,}5\pi)}$.

675. Өрнектің мәнін табыңдар:

а) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{5\pi}{3}\cdot\cos\frac{17\pi}{6} + \operatorname{tg}(-9{,}25\pi)}{\sin^2 4{,}75\pi\cdot\cos 9\pi}$; б) $\dfrac{\operatorname{tg}^2\frac{23\pi}{6} + \sin^2 11{,}5\pi}{\cos^2\frac{37\pi}{6}} + \operatorname{tg} 12{,}25\pi$;

ә) $\dfrac{\sin^2\frac{19\pi}{7} + \sin^2\frac{59\pi}{14}}{\cos\frac{29\pi}{6} + \sin 33\pi}$; в) $\dfrac{\sin\frac{11\pi}{18}\cdot\sin\frac{25\pi}{18} - \cos\frac{29\pi}{18}\cdot\cos\frac{43\pi}{18}}{\cos 29\pi}$.

676. $\operatorname{tg}(0{,}5\pi + \alpha) = -2$ болса: а) $\dfrac{5\sin(1{,}5\pi - \alpha) + 4\cos(3{,}5\pi + \alpha)}{7\sin(\alpha + 3\pi) - \cos(5\pi - \alpha)}$;

ә) $\dfrac{8\cos^2(\pi + \alpha) - 3\sin^2(7{,}5\pi + \alpha)}{2\cos^2(2{,}5\pi - \alpha) + 9\sin(2\pi - \alpha)\cdot\cos(8\pi + \alpha)}$ өрнегінің мәнін табыңдар.

C деңгейі

677. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер: $\operatorname{ctg} 0{,}4\pi - \dfrac{\cos 1{,}1\pi}{1 - \cos 0{,}6\pi} = \dfrac{1}{\cos 0{,}1\pi}$.

678. Өрнектің мәнін табыңдар:

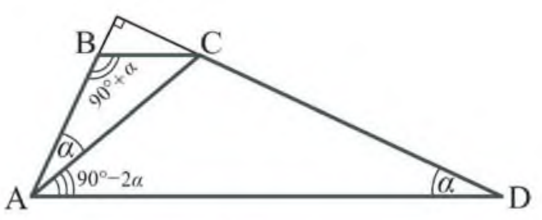
а) $\dfrac{\sqrt{\sin^2 23^\circ - \cos^2 67^\circ \cdot \cos^2 200^\circ}}{\cos 113^\circ \cdot \sin 340^\circ}$;

ә) $\dfrac{\sin 100^\circ \cdot \sqrt{\sin^2 69^\circ + \cos^2 21^\circ \cdot \operatorname{tg}^2 170^\circ}}{\cos 201^\circ}$.

679. Қосындыны есептеңдер:

$$1 + \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + \sin^2\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) + \sin^3\left(3\pi - \frac{\pi}{6}\right) + \sin^4\left(4\pi - \frac{\pi}{6}\right) + \sin^5\left(5\pi - \frac{\pi}{6}\right).$$

680. «*ABCD* трапециясының *AB* және *DC* қабырғалары перпендикуляр. Егер $AB = 1$ дм, $\angle BAC = \angle CDA = \alpha$ болса, трапецияның ауданын табыңдар» есебінің шешуін Дана былай бастады: трапецияның ауданы *ABC* мен *ACD* үшбұрыштары аудандарының қосындысына тең (71-сурет): $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2}AC \times AD \cdot \sin \angle CAD$. Синустар теоремасын пайдаланып, *ABC* мен *ADC* үшбұрыштарынан *AC* мен *AD*-ны табамыз. Дананың шешуін жалғастырыңдар.



71-сурет

681. а) x-тің барлық мүмкін мәндерінде $\sin^2(0{,}5\pi + x) - \operatorname{tg}^2(0{,}5\pi + x) \leq 0$ теңсіздігінің; ә) $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ болғанда, $\operatorname{tg}(1{,}5\pi - x) + \operatorname{ctg}(1{,}5\pi - x) > \sqrt{\pi}$ теңсіздігінің ақиқат болатынын дәлелдеңдер.

26. Екі бұрыштың қосындысы мен айырымының синусы, косинусы, тангенсі және котангенсінің формулалары

Тақырыпты оқу барысында:

• екі бұрыштың қосындысы мен айырымының косинусы, синусы, тангенсі және котангенсінің формулаларын білетін боласыңдар және оларды қорытып шығаруды үйренесіңдер;

• екі бұрыштың қосындысы мен айырымының тригонометриялық функцияларының мәндерін сол бұрыштардың тригонометриялық функцияларының мәндері арқылы табуға; оларды өрнектерді тепе-тең түрлендіруге және есептер шығаруда қолдануды үйренесіңдер.

Екі бұрыштың қосындысы мен айырымының тригонометриялық функциялары үшін келесі формулалар ақиқат:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta \quad (1)$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta \quad (2)$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta \quad (3)$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta \quad (4)$$

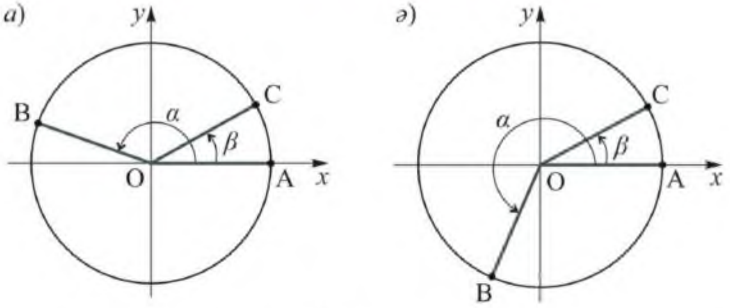
$$(5)\ \operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}; \qquad \operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta} \quad (6)$$

$$(7)\ \operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}; \qquad \operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta} \quad (8)$$

Осы формулаларды дәлелдейік.

1) Координаталық шеңбердегі $B(\cos\alpha; \sin\alpha)$ және $C(\cos\beta; \sin\beta)$ нүктелері α және β бұрыштарына сәйкес келетін болсын (72-сурет). Сонда $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$ болады.

Басқаша, $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=|\overrightarrow{OB}|\cdot|\overrightarrow{OC}|\cdot\cos\angle BOC=1\cdot1\cdot\cos\angle BOC$. $\overrightarrow{OB}$ мен $\overrightarrow{OC}$ векторларының арасындағы бұрыш $\alpha-\beta$ (72, *а*-сурет) немесе $2\pi-(\alpha-\beta)$ (72, *ә*-сурет) болуы мүмкін. Осы жағдайлардың әрқайсысында $\cos\angle BOC=\cos(\alpha-\beta)$. Демек, $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\times$ $\times\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$.



72-сурет

2) $\alpha + \beta$ бұрышын $\alpha - (-\beta)$ түрінде жазайық. Сонда $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos\alpha \cdot \cos(-\beta) + \sin\alpha \cdot \sin(-\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \times \sin\beta$.

3) Келтіру формуласы мен бірінші тепе-теңдікті пайдаланып, $\sin(\alpha+\beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \sin\beta = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$ аламыз.

4) $\alpha + \beta$ бұрышын $\alpha - (-\beta)$ түрінде жазайық, (3) формуланы пайдаланамыз. Мұны өздігінен орындаңдар.

5) $\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \dfrac{\sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta}$. Бөлшектің алымы мен бөлімін $\cos\alpha \cdot \cos\beta$ көбейтіндісіне бөліп, $\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = \dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\beta}$ аламыз.

(6–8-формулаларды өздігінен дәлелдеңдер.)

Е с е п. Үшбұрыштың α және β бұрыштарының синустары, сәйкесінше, $\frac{7}{25}$ және $\frac{4}{5}$-ке тең. Осы үшбұрыштың үшінші γ бұрышының синусын табу керек.

Ш е ш у і. Үшбұрыштың бұрыштарының қосындысы 180° болғандықтан, $\sin\gamma = \sin(180° - (\alpha + \beta)) = \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$ болады.

Негізгі тригонометриялық тепе-теңдіктерді пайдаланып, $\cos\alpha$ мен $\cos\beta$-ны табамыз:

$\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{7}{25}\right)^2} = \pm\frac{24}{25}$; $\cos\beta = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \pm\frac{3}{5}$ аламыз.

Егер α мен β сүйір бұрыштар болса, онда $\cos\alpha = \frac{24}{25}$, $\cos\beta = \frac{3}{5}$, $\sin(\alpha+\beta) = \frac{7}{25}\cdot\frac{3}{5} + \frac{24}{25}\cdot\frac{4}{5} = \frac{117}{125}$ болады.

Егер α сүйір, ал β доғал бұрыш болса, онда $\cos\beta = -\frac{3}{5}$, $\sin(\alpha+\beta) = \frac{7}{25}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{24}{25}\cdot\frac{4}{5} = \frac{3}{5}$ болады.

Егер α доғал, ал β сүйір бұрыш болса, онда $\cos\alpha = -\frac{24}{25}$, $\sin(\alpha+\beta) = \frac{7}{25}\cdot\frac{3}{5} + \left(-\frac{24}{25}\right)\cdot\frac{4}{5} = -\frac{75}{125}$ болады.

Үшбұрыштың кез келген бұрышының синусы нөлден артық болатындықтан, соңғы жағдай мүмкін емес.

Ж а у а б ы. $\frac{117}{125}$ немесе $\frac{3}{5}$.

М ы с а л. Кестені пайдаланбай $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$ мәнін табу керек.

Ш е ш у і. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}} = \dfrac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \dfrac{(\sqrt{3}-1)^2}{2} = 2 - \sqrt{3}$.

Ж а у а б ы. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$.

СҰРАҚТАР

Екі бұрыштың қосындысы мен айырымының тригонометриялық функцияларының формулаларын жазыңдар.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

682. Екі бұрыштың қосындысы мен айырымы формулаларының көмегімен өрнекті түрлендіріңдер:

а) $\sin(30° + \alpha)$; б) $\cos(\alpha + 45°)$; г) $\operatorname{tg}(45° + \alpha)$;

ә) $\sin(60° - \alpha)$; в) $\cos(\alpha - 60°)$; ғ) $\operatorname{tg}(60° - \alpha)$.

683. Өрнекті екі бұрыштың қосындысының немесе айырымының тригонометриялық функциясына түрлендіріп, оның мәнін табыңдар (ауызша):

а) $\cos 105° \cdot \cos 15° + \sin 105° \cdot \sin 15°$;

ә) $\cos 38° \cdot \cos 22° - \sin 38° \cdot \sin 22°$;

б) $\sin 61° \cdot \cos 29° + \cos 61° \cdot \sin 29°$;
в) $\sin 64° \cdot \cos 34° - \cos 64° \cdot \sin 34°$;
г) $\cos 58° \cdot \cos 28° + \sin 58° \cdot \sin 28°$;
ғ) $\sin 83° \cdot \cos 23° - \cos 83° \cdot \sin 23°$.

684. Өрнектің мәнін табыңдар (ауызша):

а) $\dfrac{\mathrm{tg}\,35° + \mathrm{tg}\,10°}{1 - \mathrm{tg}\,35° \cdot \mathrm{tg}\,10°}$; б) $\dfrac{\mathrm{tg}\,14° + \mathrm{tg}\,46°}{1 - \mathrm{tg}\,14° \cdot \mathrm{tg}\,46°}$; г) $\dfrac{\mathrm{tg}\,17° + \mathrm{tg}\,43°}{\mathrm{tg}\,17° \cdot \mathrm{tg}\,43° - 1}$;

ә) $\dfrac{\mathrm{tg}\,65° - \mathrm{tg}\,35°}{1 + \mathrm{tg}\,65° \cdot \mathrm{tg}\,35°}$; в) $\dfrac{\mathrm{tg}\,25° - \mathrm{tg}\,70°}{1 + \mathrm{tg}\,25° \cdot \mathrm{tg}\,70°}$; ғ) $\dfrac{1 + \mathrm{tg}\,75° \cdot \mathrm{tg}\,45°}{\mathrm{tg}\,75° - \mathrm{tg}\,45°}$.

685. Өрнекті бұрыштардың қосындысының немесе айырымының тригонометриялық функциясымен алмастырып, оның мәнін табыңдар:

а) $\cos\left(\dfrac{2\pi}{3} - \alpha\right) \cdot \cos\left(\dfrac{\pi}{3} + \alpha\right) - \sin\left(\dfrac{2\pi}{3} - \alpha\right) \cdot \sin\left(\dfrac{\pi}{3} + \alpha\right)$;

ә) $\sin\left(\dfrac{7\pi}{6} + \alpha\right) \cdot \cos\left(\dfrac{\pi}{6} - \alpha\right) + \cos\left(\dfrac{7\pi}{6} + \alpha\right) \cdot \sin\left(\dfrac{\pi}{6} - \alpha\right)$;

б) $\dfrac{\cos\dfrac{2\pi}{5} \cdot \cos\dfrac{\pi}{15} + \sin\dfrac{2\pi}{5} \cdot \sin\dfrac{\pi}{15}}{\sin\dfrac{7\pi}{30} \cdot \cos\dfrac{4\pi}{15} + \cos\dfrac{7\pi}{30} \cdot \sin\dfrac{4\pi}{15}}$; в) $\dfrac{\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{8} + \alpha\right) + \mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{8} - \alpha\right)}{1 - \mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{8} + \alpha\right)\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{8} - \alpha\right)}$.

686. Берілгені: $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$ және $\alpha \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$. $\sin\left(\alpha - \dfrac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\alpha + \dfrac{2\pi}{3}\right)$ табыңдар.

687. Берілгені: $\mathrm{tg}\,\alpha = -\dfrac{2}{3}$ және $\mathrm{tg}\,\beta = \dfrac{1}{2}$. а) $\mathrm{tg}(\alpha + \beta)$; ә) $\mathrm{tg}(\beta - \alpha)$ табыңдар.

688. Берілгені: $\mathrm{tg}\,\alpha = 3$ және $\mathrm{tg}\,\beta = \dfrac{1}{6}$. а) $\mathrm{ctg}(\alpha + \beta)$; ә) $\mathrm{ctg}(\alpha - \beta)$ табыңдар.

689. Берілгені: $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\beta = \dfrac{1}{3}$, α мен β – IV ширектің бұрыштары. Есептеңдер:

а) $\sin(\alpha - \beta)$; б) $\mathrm{tg}(\alpha + \beta)$.
ә) $\cos(\alpha + \beta)$;

690. Егер $\cos\alpha = -0{,}8$ және $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$ болса, $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{6}+\alpha\right)$-ны есептеңдер. $\dfrac{\pi}{6}+\alpha$ бұрышы қай ширекке тиісті?

691. Өрнекті ықшамдаңдар:

а) $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)$; б) $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)+\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$;

ә) $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)+\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\alpha\right)$; в) $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+\alpha\right)$.

692. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

а) $\dfrac{\sin(30^\circ+\alpha)-\cos(60^\circ+\alpha)}{\sin(30^\circ+\alpha)+\cos(60^\circ+\alpha)}=\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha$;

ә) $\dfrac{2\sin\alpha\cdot\cos\beta-\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-2\sin\alpha\cdot\sin\beta}=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$.

693. Егер α мен β оң сүйір бұрыштар және:

а) $\sin\alpha=\dfrac{8}{17}$, ал $\sin\beta=\dfrac{15}{17}$ болса, онда $\alpha+\beta=90^\circ$;

ә) $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{2}$, ал $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{1}{3}$ болса, онда $\alpha+\beta=45^\circ$;

б) $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{3}{4}$, ал $\operatorname{ctg}\beta=\dfrac{1}{7}$ болса, $\alpha+\beta=135^\circ$ болатынын анықтаңдар.

694. Өрнекті ықшамдаңдар:

а) $\dfrac{\sin(45^\circ+\alpha)-\cos(45^\circ+\alpha)}{\sin(45^\circ+\alpha)+\cos(45^\circ+\alpha)}$; б) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}+\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}$;

ә) $\dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha-2\cos(45^\circ-\alpha)}{2\sin(30^\circ+\alpha)-\sqrt{3}\sin\alpha}$; в) $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)+\sin(\pi-\alpha)\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\beta\right)}{\cos(\alpha-\beta)+\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\beta\right)}$.

695. Бұрыштың синусын, косинусын, тангенсін және котангенсін есептеңдер:

а) 15°; б) 105°; г) $\dfrac{11\pi}{12}$;

ә) -75°; в) $-\dfrac{\pi}{12}$; ғ) $-\dfrac{7\pi}{12}$.

696. α бұрышының функциясы арқылы өрнектеңдер:
а) $\sin 2\alpha$; б) $\operatorname{tg} 2\alpha$.
ә) $\cos 2\alpha$;

697. $\sin 200^\circ \cdot \sin 310^\circ + \cos 340^\circ \cdot \cos 50^\circ$ өрнегінің мәнін табыңдар.

В деңгейі

698. Берілгені: $\cos\alpha = -\frac{8}{17}$, $\cos\beta = \frac{4}{5}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$.

а) $\sin(\alpha+\beta)$; ә) $\cos(\alpha-\beta)$-ны табыңдар. $\alpha+\beta$ мен $\alpha-\beta$ бұрыштары қай ширектерге тиісті?

699. α бұрышының функциясы арқылы өрнектеңдер:
а) $\sin 3\alpha$; б) $\operatorname{tg} 3\alpha$.
ә) $\cos 3\alpha$;

700. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:
а) $(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)\cdot\operatorname{ctg}(\alpha-\beta) - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta = 1$;

ә) $\dfrac{\sin 90^\circ - \operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)\operatorname{tg}(45^\circ+3\alpha)}{\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)+\operatorname{ctg}(45^\circ-3\alpha)} = -\operatorname{tg} 4\alpha$;

б) $1 + \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$;

в) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta} = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$.

701. $\sin\alpha + \cos\alpha = 2$ теңдігі ақиқат болатындай α-ның мәні бар бола ма?

702. а) $\sin 3x\cdot\cos x + \cos 3x\cdot\sin x = 0$; ә) $\cos 5x\cdot\cos 3x + \sin 5x\cdot\sin 3x = 0$ теңдігін қанағаттандыратын x-тің барлық мәндерін табыңдар.

703. Егер α, β, γ үшбұрыштың бұрыштары болса, онда $\operatorname{ctg}\beta + \dfrac{\cos\gamma}{\sin\beta\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$ болатынын дәлелдеңдер.

С деңгейі

704. Егер $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, $\beta\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ болса, онда: а) $\sin(\alpha+\beta) < \sin\alpha + \sin\beta$; ә) $\cos(\alpha-\beta) < \cos\alpha + \sin\beta$ теңсіздігінің ақиқат болатынын дәлелдеңдер.

705. Үшбұрыштың α, β, γ бұрыштары үшін $\cos\frac{\gamma}{2} = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}$ қатысы орындалатын болса, онда ол теңбүйірлі болатынын дәлелдеңдер.

706. $\sin(\alpha+\beta+\gamma)$ мен $\cos(\alpha+\beta+\gamma)$-ны α, β, γ бұрыштарының тригонометриялық функциялары арқылы өрнектеңдер.

707. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{12}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{2}{5}$, $\operatorname{tg}\gamma = \frac{1}{3}$ берілген, мұндағы α, β, γ – оң сүйір бұрыштар. $\alpha+\beta+\gamma = 45°$ болатынын дәлелдеңдер.

708. Егер $(1+\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{tg}\beta) = 2$ және $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ болса, $(\alpha+\beta)$-ны табыңдар.

709. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

а) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) - \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\alpha+\beta)\cdot\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$;

ә) $\operatorname{tg}3\alpha - \operatorname{tg}2\alpha - \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}2\alpha\cdot\operatorname{tg}3\alpha$;

б) $\dfrac{\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) - \operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}(\alpha-\beta) + \operatorname{ctg}\beta} = \dfrac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)}$.

710. $\dfrac{3\operatorname{ctg}^2 15° - 1}{3 - \operatorname{ctg}^2 15°}$ өрнегінің мәнін табыңдар.

ҚЫЗЫҚТЫ ЕСЕПТЕР

1) ΔABC үшін $\sin A - \cos A = \cos B - \sin B$ теңдігі ақиқат болса, онда $\angle C = 90°$ болатынын дәлелдеңдер.

2) $(1+\operatorname{tg}^2 x)^{-1} = \sqrt{2^{-4}+2^{-3}+2^{-2}+2^{-1}+2^0}$ теңдігі ақиқат болатындай x-тің мәні бола ма?

27. Қос және жарты бұрыштың тригонометриялық функцияларының формулалары

Тақырыпты оқу барысында:

• қос және жарты бұрыштың тригонометриялық функцияларының формулаларын білесіңдер және оларды қорытып шығаруды үйренесіңдер;
• сол формулаларды өрнектерді тепе-тең түрлендіруге және есептер шығаруда қолдануды білетін боласыңдар.

Қос бұрыштың тригонометриялық функциялары үшін келесі формулалар ақиқат:

(1) $\mathbf{\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha}$; $\qquad \mathbf{\sin 2\alpha = \dfrac{2\mathrm{tg}\,\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha}}$ (5)

(2) $\mathbf{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$; $\qquad \mathbf{\cos 2\alpha = \dfrac{1-\mathrm{tg}^2\,\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha}}$ (6)

(3) $\mathbf{\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1}$; $\qquad \mathbf{\mathrm{tg}\, 2\alpha = \dfrac{2\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\,\alpha}}$ (7)

(4) $\mathbf{\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha}$; $\qquad \mathbf{\mathrm{ctg}\, 2\alpha = \dfrac{1-\mathrm{tg}^2\,\alpha}{2\mathrm{tg}\,\alpha}}$ (8)

Осы формулаларды дәлелдейік.

1) $\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos \alpha \cdot \sin \alpha = 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha$;

2) $\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \sin \alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$.

2-формула мен негізгі тригонометриялық тепе-теңдікті пайдаланып, 3-ші мен 4-формулаларды өздігінен дәлелдеңдер.

5) $\sin 2\alpha = \dfrac{2\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}$; бөлшектің алымы мен бөлімін $\cos^2\alpha$-ға бөліп, $\sin 2\alpha = \dfrac{2\mathrm{tg}\,\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha}$ аламыз.

2-формуланы пайдаланып, 5-формуланы қорытқандай, 6-формуланы өздігінен дәлелдеңдер.

7) $\mathrm{tg}\, 2\alpha = \mathrm{tg}(\alpha + \alpha) = \dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\alpha} = \dfrac{2\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\,\alpha}$.

Сегізінші формуланы өздігінен дәлелдеңдер.

1 - м ы с а л. $\sin \alpha \cdot \cos^3\alpha - \sin^3\alpha \cdot \cos \alpha$ өрнегін ықшамдау керек.

Ш е ш у і. $\sin\alpha\cdot\cos^3\alpha-\sin^3\alpha\cdot\cos\alpha=\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=$ $=\frac{1}{2}\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha=\frac{1}{4}\sin 4\alpha.$

Ж а у а б ы. $\sin\alpha\cdot\cos^3\alpha-\sin^3\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{1}{4}\sin 4\alpha.$

2 - м ы с а л. Егер $\operatorname{tg}\alpha=3$, мұндағы $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ болса, $\sin 4\alpha$ өрнегінің мәнін табыңдар.

Ш е ш у і. $\sin 4\alpha=2\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha=2\cdot\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=2\cdot\frac{6}{10}\times$ $\times\frac{-8}{10}=-\frac{24}{25}.$

Ж а у а б ы. $-\frac{24}{25}.$

Жарты бұрыштың тригонометриялық функциялары үшін келесі формулалар ақиқат:

(9) $\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$; $\qquad$ $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$ (11)

(10) $\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$; $\qquad$ $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$ (12)

Осы формулаларды дәлелдейік.

9-шы мен 10-формулалар 4-ші мен 3-формулалардан шығады, оны өздігінен дәлелдеңдер.

11) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$. Соңғы формуланы өздігінен дәлелдеңдер. Ол үшін $\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$ бөлшегінің алымы мен бөлімін $2\sin\frac{\alpha}{2}$-ге көбейтіңдер.

3 - м ы с а л. Егер $\sin\alpha=\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$ болса, мұндағы $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ және $m>n>0$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$-ні табу керек.

Ш е ш у і. Негізгі тригонометриялық тепе-теңдікті пайдаланып, мынаны аламыз: $\cos\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{(m^2+n^2)^2-(m^2-n^2)^2}{(m^2+n^2)^2}} =$ $= \frac{2mn}{m^2+n^2}$. Сонда $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$; $1-\cos\alpha = 1-\frac{2mn}{m^2+n^2} = \frac{(m-n)^2}{m^2+n^2}$;

$\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{(m-n)^2}{m^2+n^2} : \frac{m^2-n^2}{m^2+n^2} = \frac{m-n}{m+n}$.

Ж а у а б ы. $\frac{m-n}{m+n}$.

СҰРАҚТАР

а) Қос бұрыштың; ә) жарты бұрыштың тригонометриялық функцияларының формулаларын жазыңдар.

ЖАТТЫҒУЛАР

A деңгейі

711. Әрбір өрнекті қос бұрыштың формуласын қолданып, түрлендіріңдер:

а) $\sin 8\alpha$, $\cos 6\alpha$, $\operatorname{tg} 4\alpha$;
б) $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{3}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}$;
ә) $\sin 5\alpha$, $\cos 3\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$;
в) $\sin\frac{\alpha}{5}$, $\cos\frac{2\alpha}{7}$, $\operatorname{ctg}\frac{3\alpha}{4}$.

712. Өрнектің мәнін табыңдар:

а) $8\sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ$;
ә) $4\sin 22^\circ30' \; \cos 22^\circ30'$;
б) $\sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ$;
в) $\sin^2 15^\circ - \cos^2 15^\circ$;
г) $\sqrt{2}(\cos^2 22{,}5^\circ - \sin^2 22{,}5^\circ)$;
ғ) $2\operatorname{tg} 15^\circ : (1-\operatorname{tg}^2 15^\circ)$.

713. Бөлшекті қысқартыңдар:

а) $\frac{\sin 100^\circ}{\sin 50^\circ}$;
б) $\frac{\cos 80^\circ}{\cos 40^\circ - \sin 40^\circ}$;
ә) $\frac{\sin 150^\circ}{\cos 75^\circ}$;
в) $\frac{\cos 36^\circ + \sin^2 18^\circ}{\cos 18^\circ}$.

714. Өрнекті ықшамдаңдар:

а) $\cos^4 2\alpha - \sin^4 2\alpha$;
ә) $\frac{\cos 8\alpha}{\cos 4\alpha - \sin 4\alpha} - \cos 4\alpha$;
б) $1 - 2\sin^2 2\alpha$;
в) $2\sin 3\alpha \cdot \cos 3\alpha \cdot \cos 6\alpha$;
г) $\frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2}{1+\sin 2\alpha}$;
ғ) $2\cos^2 3\alpha - 1$.

715. Егер: а) $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$ және $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ болса, $\sin 2\alpha$-ны; ә) $\sin\alpha = -0{,}8$ және $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ болса, $\cos 2\alpha$-ны; б) $\cos\alpha = -0{,}6$ және $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ болса, $\operatorname{tg} 2\alpha$-ны; в) $\operatorname{tg}\alpha = 3$ болса, $\cos 2\alpha$-ны; г) $\operatorname{tg}\alpha = 2$ болса, $\sin 4\alpha$-ны; ғ) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ болса, $\cos 4\alpha$-ны есептеңдер.

716. а) Теңбүйірлі үшбұрыштың табанындағы бұрышының синусы $\frac{7}{25}$-ге тең. Оның төбесіндегі бұрышының синусы мен косинусын табыңдар.

ә) $ABCD$ ромбысында $\cos\angle CAD = 0{,}2$. BAD бұрышының косинусын тауып, оның доғал немесе сүйір бұрыш болатынын анықтаңдар.

717. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

а) $\frac{2}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha} = \sin 2\alpha$; б) $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$;

ә) $\frac{\cos 2\alpha - 1}{\sin 2\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha$; в) $\frac{\sin 2\alpha + \sin\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$.

718. Өрнекті ықшамдаңдар:

а) $\frac{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}{\cos\alpha - 1}$; б) $\frac{\operatorname{tg}^2\alpha - 1}{\cos 2\alpha}$;

ә) $\frac{\cos 2\alpha - \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha - 1}$; в) $\frac{4\operatorname{tg}\alpha(1 - \operatorname{tg}^2\alpha)}{(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)^2}$.

719. Егер: а) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ болса, $\sin 2\alpha < 2\sin\alpha$;

ә) $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ болса, $\operatorname{tg} 2\alpha > 2\operatorname{tg}\alpha$ болатынын дәлелдеңдер.

720. Егер: а) $\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = \frac{1}{3}$ болса, $\sin 4\alpha$;

ә) $\sin\frac{\alpha}{4} + \cos\frac{\alpha}{4} = \frac{1}{2}$ болса, $\sin\frac{\alpha}{2}$ өрнегінің мәнін табыңдар.

721. Жарты бұрыштың формуласын қолданып, өрнекті түрлендіріңдер:

а) $\sin^2 6\alpha$; б) $\sin^2\left(4\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$; г) $\operatorname{tg} 3\alpha$;

ә) $\cos^2 4\alpha$; в) $\cos^2\left(6\alpha - \frac{3\pi}{4}\right)$; ғ) $\operatorname{ctg} 8\alpha$.

722. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

а) $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$; б) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$.

ә) $\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$;

723. Жарты бұрыштың формулаларын қолданып, есептеңдер:

а) $\sin\frac{\pi}{12}$; б) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$;

ә) $\cos\frac{\pi}{12}$; в) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$.

724. Егер: а) $\cos\alpha=\frac{3}{4}$ және $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$; ә) $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$ және $\pi<\alpha<$ $<\frac{3\pi}{2}$; б) $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{7}{24}$ және $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ болса, $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ және $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$-ні табыңдар.

725. Егер: а) $\operatorname{tg}2\alpha=-\frac{5}{12}$ болса, $\operatorname{tg}\alpha$-ны; ә) $\sin 2\alpha=0{,}96$ болса, $\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$-ті есептеңдер.

726. Оқушыларға: «$\sqrt{(1-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}$ өрнегінің $\alpha=120°$ болғандағы мәнін табыңдар» деген тапсырма берілген еді. Оны Нұрлан былай орындады: $\sqrt{(1-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}=$ $=\sqrt{(1-\cos 60°)^2+\sin^2 60°}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1$. Бағланның шешімі былай болды: $\sqrt{(1-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}=\sqrt{1-2\cos\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=$ $=\sqrt{2(1-\cos\alpha)}=\sqrt{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}=2\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|=2\sin 60°=\sqrt{3}$. Кімнің шешімі дұрыс?

B деңгейі

727. Егер: а) $\operatorname{ctg}2x=\frac{1}{2}$, $\frac{\pi}{8}<x<\frac{\pi}{4}$ болса, $f(x)=\sin 4x+\cos 4x$; ә) $\operatorname{tg}x=\frac{a}{b}$ болса, $f(x)=a\sin 2x+b\cos 2x$ функциясының мәнін табыңдар.

728. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

а) $\dfrac{1-4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\cos 2\alpha$; б) $\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha=\dfrac{\sin 8\alpha}{8\sin\alpha}$;

ә) $\dfrac{1+\cos\alpha-\sin\alpha}{1-\cos\alpha-\sin\alpha}=-\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$; в) $\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}-\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}=2\operatorname{ctg}\alpha$,

мұндағы $\pi<\alpha<2\pi$.

729. Өрнекті ықшамдаңдар:

а) $16\cos 4\alpha\cos 2\alpha\cos\alpha\sin\alpha$;

ә) $(\cos^3\alpha+\sin^3\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)$;

б) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-\dfrac{1}{4}\cos 4\alpha$;

в) $\cos^4\alpha-6\cos^2\alpha\sin^2\alpha+\sin^4\alpha$.

730. Теңсіздікті дәлелдеңдер:

а) $\sin\alpha\cos\alpha\le\dfrac{1}{2}$, мұндағы $\alpha\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$;

ә) $\sin 4\alpha<2\cos 2\alpha$, мұндағы $2\alpha\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$;

б) $\sin 3\alpha<2\sin 1{,}5\alpha$, мұндағы $\alpha\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

731. a, b – катеттері, c – гипотенузасы және a катеті α бұрышына қарсы жататын тікбұрышты үшбұрышта $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{b+c}{a}$ теңдігі орындалатынын дәлелдеңдер.

732. а) $5-4\sin x\cos x$; ә) $3(\sin 2x+\cos 2x)^2$ өрнегінің ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңдар.

733. Егер $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+2\alpha\right)=m$ және $\dfrac{3\pi}{4}<\alpha<\pi$ болса, $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha$-ны табыңдар.

С деңгейі

734. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

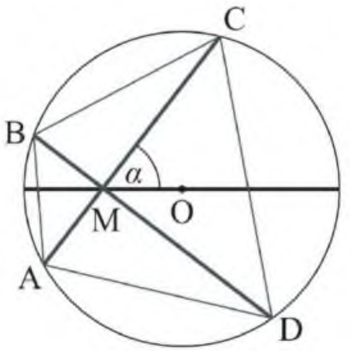
а) $\operatorname{tg}3\alpha=\dfrac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}$; б) $\dfrac{\operatorname{tg}^2 2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2 2\alpha\operatorname{tg}^2\alpha}=\operatorname{tg}3\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha$.

ә) $\dfrac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}=2+\dfrac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}$;

735. Егер $\alpha \in [0;\ 2\pi]$ және: а) $\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4}$; ә) $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{1}{2}$; б) $\sin^2\frac{\alpha}{4} - \cos^2\frac{\alpha}{4} = \frac{1}{2}$; в) $\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha = 1$ шарты орындалатын болса, α бұрышын табыңдар.

736. а) $\sin 10° \cdot \cos 20° \cdot \cos 40° = \frac{1}{8}$; ә) $8\cos 20° \cdot \cos 40° \cdot \cos 60° \cdot \cos 80° = \frac{1}{2}$; б) $4\cos^2\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right) + \sqrt{4\sin^4\alpha + \sin^2 2\alpha} = 2$, мұндағы $180° < \alpha < 270°$, теңдігінің ақиқаттығын дәлелдеңдер.

737. Шеңбердің 4 см-ге тең диаметріне оның O центрінен 1 см қашықтықта M нүктесі белгіленген. M нүктесі арқылы өзара перпендикуляр AC мен BD хордалары жүргізілген және $\angle CMO = \alpha$ (73-сурет). $ABCD$ төртбұрышының ауданын табыңдар.



73-сурет

28. Тригонометриялық функциялардың қосындысы мен айырымын көбейтіндіге түрлендіру

Тақырыпты оқу барысында:

• тригонометриялық функциялардың қосындысы мен айырымын көбейтіндіге түрлендіру формулаларын білетін боласыңдар және оларды қорытып шығаруды үйренесіңдер;

• осы формулаларды өрнектерді тепе-тең түрлендіруге және есептер шығаруда қолдануды білетін боласыңдар.

Тригонометриялық функциялардың қосындысы мен айырымын көбейтіндіге түрлендіру үшін қолданылатын формулалар:

(1) $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\qquad$ $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$ (5)

(2) $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ $\qquad$ $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$ (6)

(3) $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\qquad$ $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$ (7)

(4) $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\qquad$ $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = -\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$ (8)

Осы формулаларды дәлелдейік.

1–2. Бұрыштарды $\alpha = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}$; $\beta = \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}$ түріне келтірейік. Сонда $\sin\alpha = \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$, $\sin\beta = \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\times\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ болады.

Осы теңдіктердің сол және оң бөліктерін қосып, мынаны аламыз: $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, ал егер осы бөліктерді азайтсақ, онда $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ шығады.

1–2-формулаларды қорытып шығару жолымен 3–4-формулаларды өздігінен дәлелдеңдер.

5) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}=\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$.

5-формуланы қорытып шығару жолымен 6–8-формулаларды өздігінен дәлелдеңдер.

Мысал. $\dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}=\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)$ тепе-теңдігін дәлелдеу керек.

Дәлелдеуі.

$$\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\operatorname{tg}45^\circ+\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}45^\circ-\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\sin(45^\circ+\alpha)}{\cos 45^\circ\cdot\cos\alpha}:\frac{\sin(45^\circ-\alpha)}{\cos 45^\circ\cdot\cos\alpha}=$$

$=\dfrac{\sin(45^\circ+\alpha)}{\cos(90^\circ-(45^\circ-\alpha))}=\dfrac{\sin(45^\circ+\alpha)}{\cos(45^\circ+\alpha)}=\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)$. Дәлелдеу керегі де осы еді.

Есеп. Егер α, β, γ үшбұрыштың бұрыштары болса, онда $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos\dfrac{\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\gamma}{2}$ болатынын дәлелдеу керек.

Дәлелдеуі. $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=(\sin\alpha+\sin\beta)+\sin(180^\circ-(\alpha+\beta))=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}+\sin(\alpha+\beta)$. Қос бұрыштың синусының формуласын қолданып, былай жазуға болады: $\sin(\alpha+\beta)=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\times\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$. Сонда $2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}+\sin(\alpha+\beta)=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\times\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}+2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}+\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)=$ $=4\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos\dfrac{\beta}{2}=4\sin\left(90^\circ-\dfrac{\gamma}{2}\right)\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos\dfrac{\beta}{2}=4\cos\dfrac{\gamma}{2}\times\cos\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos\dfrac{\beta}{2}$.

Дәлелдеу керегі де осы еді.

СҰРАҚТАР

Тригонометриялық функциялардың қосындысы мен айырымын қандай формулалармен көбейтіндіге түрлендіруге болады?

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

738. Өрнекті көбейтінді немесе бөлінді түрінде көрсетіңдер:

а) $\sin 4\alpha + \sin 10\alpha$; б) $\cos 3\alpha + \cos \alpha$; г) $\mathrm{tg}\, 5\alpha + \mathrm{tg}\, 3\alpha$;
ә) $\sin 5\alpha - \sin 3\alpha$; в) $\cos \alpha - \cos 7\alpha$; ғ) $\mathrm{tg}\, 10\alpha - \mathrm{tg}\, 9\alpha$.

739. Теңдік ақиқат па:

а) $\sin 10° + \sin 50° = \cos 20°$;
ә) $\sin 80° - \sin 20° = \sin 40°$;
б) $\cos\frac{7\pi}{24} + \cos\frac{\pi}{24} = \cos\frac{\pi}{8}$;
в) $\cos\frac{7\pi}{18} - \sin\frac{4\pi}{9} = -\sin\frac{2\pi}{9}$;
г) $\sin 40° + \sin 20° - 2\cos 10° = -\cos 10°$;
ғ) $\mathrm{tg}\, 43° + \mathrm{tg}\, 17° = \frac{\sqrt{3}}{2\sin 47° \cos 17°}$?

740. Өрнекті көбейтіндіге түрлендіріңдер:

а) $\sin 20° + \sin 40°$; б) $\cos 12° + \sin 42°$; г) $\sin 255° - \sin 165°$;
ә) $\sin 55° - \sin(-65°)$; в) $\cos(-50°) - \sin 20°$; ғ) $\cos 315° + \cos 225°$.

741. Есептеңдер:

а) $\sin 15° - \sin 75°$; б) $\sin\frac{\pi}{12} + \cos\frac{\pi}{12}$; г) $\cos\frac{17\pi}{12} - \cos\frac{11\pi}{12}$;
ә) $\cos 75° + \cos 15°$; в) $\cos\frac{19\pi}{12} - \sin\frac{5\pi}{12}$; ғ) $\sin\frac{25\pi}{12} + \sin\frac{19\pi}{12}$.

742. Өрнектің мәнін табыңдар:

а) $\frac{\sin 54° - \sin 36°}{\sin 9°}$; б) $\frac{\sin 16° + \sin 74°}{\cos 16° + \cos 74°}$; г) $\frac{\cos 40° - \cos 80°}{1 - 2\sin^2 35°}$;
ә) $\frac{\cos 25° + \cos 85°}{\cos 55°}$; в) $\frac{\cos 12° - \cos 78°}{\sin 12° - \sin 78°}$; ғ) $\frac{\sin 37° - \sin 53°}{2\cos^2 49° - 1}$.

743. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

а) $\frac{\sin \alpha + \sin 3\alpha}{\cos \alpha + \cos 3\alpha} = \mathrm{tg}\, 2\alpha$; б) $\frac{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)} = \mathrm{tg}\, \alpha$;
ә) $\frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha} = \mathrm{tg}\, 2\alpha$; в) $\frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)} = \mathrm{tg}\, \alpha$.

744. Теңдіктің ақиқат екенін дәлелдеңдер:

а) $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin(\alpha+45°)$; б) $1+\sin 2\alpha=2\sin^2(45°+\alpha)$;

ә) $\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{2}\sin(\alpha-45°)$; в) $1-\sin 4\alpha=2\sin^2(45°-2\alpha)$.

745. Өрнекті ықшамдаңдар:

а) $\sin^2\left(\frac{5\pi}{4}-2\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{5\pi}{4}+2\alpha\right)$; ә) $\cos^2\left(\frac{3\pi}{8}-\frac{\alpha}{2}\right)-\cos^2\left(\frac{11\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}\right)$.

746. Өрнектің ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңдар:

а) $\cos\left(\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)-\cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)$; б) $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$;

ә) $\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$; в) $\sin\left(2\alpha+\frac{9\pi}{16}\right)-\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{16}\right)$.

747. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

а) $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))$;

ә) $\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$;

б) $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$.

748. Өрнекті ықшамдаңдар:

а) $\frac{\sin 10\alpha-2\sin 6\alpha\cos 6\alpha}{1-2\sin^2 6\alpha-\cos 10\alpha}$; б) $\frac{\sin 8\alpha+2\sin 4\alpha}{2(\cos 2\alpha+\cos 6\alpha)\cos 2\alpha}$;

ә) $\frac{\cos 10\alpha+2\cos^2 4\alpha-1}{\sin 10\alpha+2\cos 4\alpha\sin 4\alpha}$; в) $\frac{2\cos 2\alpha+\cos 6\alpha+\cos 10\alpha}{\cos 6\alpha+\cos 2\alpha}$.

749. $\frac{1-2\sin^2 2\alpha+\cos 8\alpha}{\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}$ өрнегінің ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңдар.

В деңгейі


«Асыл тас» кешені, Нұр-Сұлтан қ.

750. а) Тікбұрышты ABC үшбұрышына іштей сызылған шеңбердің радиусы $\sqrt{2}$-ге тең. Осы үшбұрыштың AB гипотенузасы $\dfrac{1}{\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\left(45^\circ-\frac{A}{2}\right)}$-ге тең болатынын дәлелдеңдер.

ә) «Асыл тас» кешені мұнарасының көлбеулік бұрышы 15°-қа жетеді. Сол бұрыштың тангенсі: 1) $2-\sqrt{3}$; 2) $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$ -ге тең деген ақиқат па?

751. Теңбүйірлі трапецияның жоғарғы табаны 4-ке тең және осы табанға тең бүйір қабырғасы трапецияның төменгі табанымен α бұрышын жасайды. Трапецияның төменгі табаны $16\cos\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(30^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$-ге тең болатынын дәлелдеңдер.

752. а) $\frac{1}{2}+\sin 2\alpha$; ә) $\sqrt{3}-2\sin 2\alpha$; б) $1+2\cos 4\alpha$; в) $\sqrt{2}-2\cos\alpha$; г) $3-4\sin^2 2\alpha$; ғ) $1-4\cos^2 2\alpha$ өрнегін тригонометриялық функциялардың көбейтіндісіне түрлендіріңдер.

753. а) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}+\alpha\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{-2}{\cos 2\alpha}$; ә) $\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{4}-\alpha\right)+\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{2}{\cos 2\alpha}$; б) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\operatorname{ctg}\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}=\sin 2\alpha$ теңдігінің ақиқат екенін дәлелдеңдер.

754. а) $\cos 18^\circ+\cos 36^\circ+\cos 54^\circ+\cos 72^\circ$; ә) $\sin 40^\circ+\sin 100^\circ+\sin 220^\circ+\sin 160^\circ$ өрнегін көбейтінді түрінде көрсетіңдер.

755. а) $\cos 2\alpha+\cos 14\alpha+\cos 6\alpha+\cos 10\alpha$; ә) $\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\sin 7\alpha$ өрнегін көбейтінді түрінде көрсетіп, оның $\alpha=15^\circ$ болғандағы мәнін табыңдар.

756. $\dfrac{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha} = \operatorname{tg} 3\alpha$ тепе-теңдігін дәлелдеңдер.

757. a, b катеттері, c гипотенузасы болатын тікбұрышты үшбұрышта $a + b - c = \sqrt{2}$. $c = \dfrac{2}{2\cos(45^\circ - \alpha) - \sqrt{2}}$ болатынын дәлелдеңдер, мұндағы α – үшбұрыштың сүйір бұрышы.

C деңгейі

758. Егер: а) $\sin 2\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ болса, $(\sin 6\alpha + \sin 2\alpha)$ өрнегін; ә) $\sin 2\alpha = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ болса, $(\sin 10\alpha - \sin 6\alpha)$ өрнегін; б) $(\operatorname{tg} 20^\circ + 4\sin 20^\circ)$ өрнегін есептеңдер.

759. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

а) $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha = 4\sin\dfrac{3\alpha}{2} \cdot \cos\alpha \cdot \cos\dfrac{\alpha}{2}$;

ә) $1 + \sin\alpha + \cos\alpha = 2\sqrt{2}\cos\dfrac{\alpha}{2} \cdot \cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}\right)$.

760. Өрнекті көбейтінді түрінде көрсетіңдер:

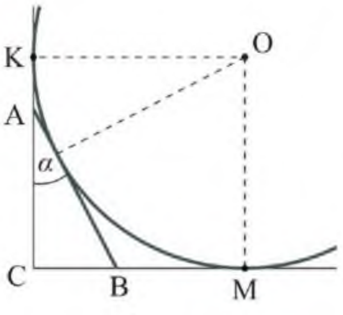
а) $1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha$; б) $\cos 6\alpha + \sin 6\alpha - 1$;

ә) $1 - \sin 4\alpha + \cos 4\alpha$; в) $1 - \sin 8\alpha - \cos 8\alpha$.

761. α, β және γ қандай қатыста болғанда $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \times \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma$ теңдігі ақиқат болатынын зерттеңдер.

762. а) $\cos 2x + \cos x = 0$; ә) $\sin 3x - \sin x = 0$; б) $2\sin x \cdot \cos x + \sin 4x = 0$; в) $2\cos^2 x - 1 - \cos 4x = 0$ теңдігі орындалатындай барлық $x \in [0; \pi]$ мәндерін табыңдар.

763. C тік бұрышына іштей қабырғаларын K және M нүктелерінде жанайтын, радиусы 1 дм-ге тең шеңбер сызылған. Осы шеңберге, 74-суретте көрсетілгендей, AB жанамасы жүргізілген және $\angle CAB = \alpha$. AB-ны табыңдар.



74-сурет

29. Тригонометриялық функциялардың көбейтіндісін қосындыға немесе айырымға түрлендіру

Тақырыпты оқу барысында:

• тригонометриялық функциялардың көбейтіндісін қосындыға немесе айырымға түрлендіру формулаларын білетін боласыңдар және оларды қорытып шығаруды үйренесіңдер;

• осы формулаларды өрнектерді тепе-тең түрлендіруге және есептер шығаруда қолдануды білетін боласыңдар.

Тригонометриялық функциялардың көбейтіндісін қосындыға немесе айырымға түрлендіруге қолданылатын формулалар:

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)) \quad (1)$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)) \quad (2)$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)) \quad (3)$$

Осы формулаларды дәлелдейік.

1–2. $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$,

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$ теңдіктерінің сол және оң бөліктерін азайтып, мынаны аламыз:

$\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\cdot\sin\beta$, бұдан

$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$ шығады.

Енді сол теңдіктердің сол және оң бөліктерін қосып, мынаны аламыз:

$\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)=2\cos\alpha\cdot\cos\beta$, бұдан

$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$ шығады.

Екі бұрыштың қосындысының және айырымының синусы формуласын пайдаланып, үшінші тепе-теңдікті өздігінен дәлелдеңдер.

1 - м ы с а л. $\sin 50°\cdot\cos 20°\cdot\cos 80°$ өрнегінің мәнін табу керек.

Ш е ш у і. $(\sin 50° \cdot \cos 20°) \cdot \cos 80° = \frac{1}{2}(\sin 70° + \sin 30°) \cdot \cos 80° =$
$= \frac{1}{2}\sin 70° \cdot \cos 80° + \frac{1}{4}\cos 80° = \frac{1}{4}(\sin 150° - \sin 10°) + \frac{1}{4}\cos 80° =$
$= \frac{1}{8} - \frac{1}{4}\sin 10° + \frac{1}{4}\sin 10° = \frac{1}{8}$.

Ж а у а б ы. $\frac{1}{8}$.

2 - м ы с а л. $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg}(60° - \alpha) \cdot \operatorname{tg}(60° + \alpha) = \operatorname{tg} 3\alpha$ тепе-теңдігін дәлелдеу керек.

Д ә л е л д е у і. $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg}(60° - \alpha) \cdot \operatorname{tg}(60° + \alpha) =$

$$= \frac{\sin \alpha \cdot \sin(60° - \alpha) \cdot \sin(60° + \alpha)}{\cos \alpha \cdot \cos(60° - \alpha) \cdot \cos(60° + \alpha)} = \frac{\sin \alpha(\cos 2\alpha - \cos 120°)}{\cos \alpha(\cos 2\alpha + \cos 120°)} =$$

$$= \frac{\sin \alpha \cdot \cos 2\alpha + 0,5 \sin \alpha}{\cos \alpha \cdot \cos 2\alpha - 0,5 \cos \alpha} = \frac{0,5(\sin 3\alpha - \sin \alpha) + 0,5 \sin \alpha}{0,5(\cos 3\alpha + \cos \alpha) - 0,5 \cos \alpha} = \frac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha} =$$

$= \operatorname{tg} 3\alpha$. Дәлелдеу керегі де осы еді.

СҰРАҚТАР

Тригонометриялық функциялардың көбейтіндісін қосындыға немесе айырымға қандай формулалармен түрлендіруге болады?

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

764. Өрнекті қосынды немесе айырым түрінде көрсетіңдер:

а) $\cos(-5°) \cdot \cos 35°$; в) $2\sin(\alpha + 2\beta) \cdot \cos(\alpha - 2\beta)$;
ә) $\sin 32° \cdot \sin 28°$; г) $2\cos(3\alpha + \beta) \cdot \sin(3\alpha - \beta)$;
б) $2\cos 17° \cdot \cos(-28°)$; ғ) $2\sin(4\alpha - 3\beta) \cdot \sin(4\alpha + 3\beta)$.

765. Көбейтіндіні қосынды түрінде көрсетіңдер:

а) $\cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)$; в) $2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$;

ә) $\cos\left(\frac{\pi}{8} + 2\alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{8} - 2\alpha\right)$; г) $2\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} + 2\alpha\right)$;

б) $\sin\left(\frac{\pi}{3} - 3\alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} + 3\alpha\right)$; ғ) $2\sin\left(3\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$.

766. Есептеңдер:

а) $\cos 45° \cos 15°$; б) $4\sin 37{,}5° \sin 7{,}5°$;

ә) $\sin 105° \sin 75°$; в) $8\sin 22{,}5° \cos 7{,}5°$.

767. Теңдік ақиқат па:

а) $2\cos 20° \cos 40° = \cos 20°$; б) $2\sin 40° \cos 50° = 1 - \sin 10°$;

ә) $\sin\frac{\pi}{24} \cos \frac{5\pi}{24} - \frac{\sqrt{2}}{4} = -\frac{1}{4}$; в) $2\sin\frac{7\pi}{12} \sin \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2} = 0$?

768. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

а) $\sin 2\alpha - 2\sin(\alpha - 15°) \cdot \cos(\alpha + 15°) = 0{,}5$;

ә) $\cos 6\alpha + 2\sin(3\alpha - 15°) \cdot \sin(3\alpha + 15°) = 0{,}5\sqrt{3}$;

б) $\sin 4° \cdot \sin 86° + 0{,}5\sin 4° = \cos 2° \cdot \sin 6°$;

в) $\cos 18° \cdot \cos 72° - \sin 63° \cdot \cos 27° = -0{,}5$.

769. Бөлшекті қысқартыңдар:

а) $\dfrac{\sin 6\alpha - \sin 2\alpha \cdot \cos 4\alpha}{\sin 6\alpha + \sin 2\alpha}$; ә) $\dfrac{\cos 4\alpha - \cos 8\alpha}{\cos 4\alpha - \cos 2\alpha \cdot \cos 6\alpha}$.

770. Теңдіктің ақиқат екенін дәлелдеңдер:

а) $\operatorname{tg} 20° + \operatorname{tg} 25° + \operatorname{tg} 20° \operatorname{tg} 25° = 1$;

ә) $\operatorname{ctg} 10° - \operatorname{tg} 35° - \operatorname{ctg} 10° \operatorname{tg} 35° = 1$;

б) $\cos 15° \cos 7° - \sin 79° \cos 11° - \sin 86° \cos 4° = -1$;

в) $\sin 17° \sin 73° - \sin 21° \cos 13° + \sin 4° \sin 86° = 0$.

771. Өрнекті ықшамдаңдар:

а) $\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) - \cos^2\alpha - \cos^2\beta$;

ә) $\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) + \sin^2\alpha + \sin^2\beta$.

772. Өрнектің мәні ондағы айнымалының мәніне тәуелді емес екенін дәлелдеңдер:

а) $\sin^2 x + \cos(60° + x) \cdot \cos(60° - x)$; б) $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \cos^2 x$;

ә) $\sin(60° + x) \cdot \sin(60° - x) + \sin^2 x$; в) $\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - \cos^2 x$.

773. Егер: а) $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ болса, $\cos 8\alpha - \cos 6\alpha - 2\cos 5\alpha \cdot \cos 3\alpha$; ә) $\sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ болса, $\sin 2\alpha \cdot \cos 5\alpha - \sin \alpha \cdot \cos 6\alpha$; б) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ болса, $\cos 7\alpha \cdot \cos 4\alpha - \cos 8\alpha \cdot \cos 3\alpha$; в) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{4}$ болса, $\sin 2\alpha \cdot \cos 5\alpha - \sin \alpha \cdot \cos 6\alpha$ өрнегінің мәнін табыңдар.

774. Есептеңдер:

а) $2\sin 46° \cos 16° - \cos 28°$; б) $\cos 10° \cos 50° \cos 70°$;

ә) $2\sin(-25°) \sin 55° - \sin 10°$; в) $\sin 20° \sin 40° \sin 80°$.

775. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

а) $4\sin(\pi + \alpha) \sin\left(\frac{4\pi}{3} + \alpha\right) \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) = \sin 3\alpha$;

ә) $4\sin(45° - \alpha) \sin(15° + \alpha) \cos(15° - \alpha) = \cos(45° - 3\alpha)$.

В деңгейі

776. Өрнекті тригонометриялық функциялардың қосындысы түрінде көрсетіңдер:

а) $4\cos\frac{\alpha}{3} \cos\frac{\alpha}{4} \cos\frac{\alpha}{6}$; б) $\sin^3 2\alpha$;

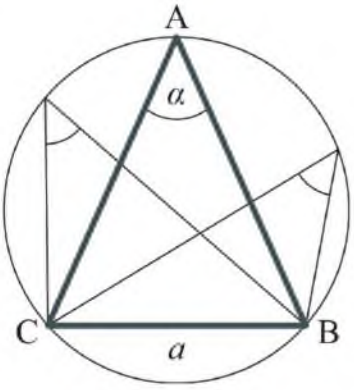
ә) $\cos^3\alpha$; в) $4\sin^2\alpha \cos \alpha$.

777. Егер: а) $\cos 2\alpha \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right) = b$ болса, $\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right) \times \cos\left(\frac{5\pi}{4} + 2\alpha\right)$; ә) $4\sin 3\alpha \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3\alpha\right) + \cos^2 3\alpha = b$ болса, $\cos\left(\frac{3\pi}{4} - 3\alpha\right) \cos\left(\frac{3\pi}{4} + 3\alpha\right)$ өрнегінің мәнін табыңдар.

778. $\cos 5° \cos 55° \cos 65° = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{16}$ болатынын дәлелдеңдер.

779. x-тің, мұндағы $x \in [0;\ 2\pi]$, қандай мәнінде $\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$ өрнегі ең үлкен мәнді қабылдайтынын зерттеңдер.

780. Берілген шеңберге (75-сурет) іштей сызылған, қабырғасы a-ға, оған қарсы жатқан бұрышы α-ға тең болатын барлық үшбұрыштардың ішінен периметрі ең үлкен болатын үшбұрышты табыңдар.



75-сурет

С деңгейі

781. а) $4\sin 3\alpha \cos^2 3\alpha$; ә) $6\sin^2\alpha \cos^3\alpha$; б) $32\sin^3\alpha \cos^3\alpha$ көбейтіндісін бірінші дәрежелі тригонометриялық функциялардың қосындысы түрінде көрсетіңдер.

782. $4\sin^3\alpha \cos 3\alpha + 4\cos^3\alpha \sin 3\alpha = 3\sin 4\alpha$ тепе-теңдігін дәлелдеңдер.

783. $3\sin^2 \alpha + 2\cos^2 \alpha = m$ болса, m-нің мүмкін болатын мәндерін көрсетіп, $\sin\left(\frac{4\pi}{3} + \alpha\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$ көбейтіндісін табыңдар.

784. Егер: а) $x \in [0; 2\pi]$ болса, $2\sin 2x \cdot \sin 3x + \cos 5x = 0$; ә) $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ болса, $2\sin 4x \cdot \sin 2x - \cos 2x = 0$; б) $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ болса, $\cos 5x \times$ $\times \cos 7x = \cos^2 6x$; в) $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ болса, $\sin x \cdot \sin 11x = \sin 3x \times$ $\times \sin 9x$ шартын қанағаттандыратын x-тің барлық мәндерін табыңдар.

ҚЫЗЫҚТЫ ЕСЕПТЕР

1) Өрнекті ықшамдаңдар: $\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{\alpha}{2}\right)}}$, мұндағы α – сүйір бұрыш.

2) $\sin x \cdot \cos x = \sqrt{0,4\sqrt{0,4}}$ теңдігі ақиқат болатындай x-тің мәні бола ма?

3) $\operatorname{tg} 9° - \operatorname{tg} 27° - \operatorname{tg} 63° + \operatorname{tg} 81°$ өрнегінің мәнін кестелерді пайдаланбай есептеңдер.

30. «Тригонометрия» бөлімін қайталауға арналған жаттығулар

А деңгейі

785. 1) 2016 жылы Астана (қазіргі Нұр-Сұлтан) қаласында Есіл өзенінде «Күн» деп аталатын, әртүрлі жарық әсерлерімен жабдықталған ерекше субұрқақ орнатылды. Атап айтқанда, оның шеңберінің бойымен мезгіл-мезгіл жарық доға қозғалады. Оның кез келген жарқырайтын нүктесі бір жарым айналым жасай отырып неше радиандық бұрыш сызады?

2) A және B нүктелері шеңберді екі доғаға бөледі. Егер олардың біреуі: а) $\frac{\pi}{3}$; ә) $\frac{5\pi}{6}$; б) $\frac{3\pi}{8}$; в) $\frac{2\pi}{9}$; г) $\frac{9\pi}{10}$; ғ) $\frac{7\pi}{12}$-ге тең болса, екіншісінің радиандық және градустық өлшемін табыңдар.

Есіл өзеніндегі «Күн» субұрқағы

786. $\frac{\sin x + 6\sqrt{1-\cos^2 x}}{\sin x + 2\sqrt{1-\cos^2 x}}$ өрнегінің: а) $x = 3$ рад.; ә) $x = 4$ рад. болғандағы мәнін табыңдар.

787. а) $(\text{tg } 30° - \sin 60°)(\sin 135° - \text{tg } 135°)$; ә) $(\cos 30° - \text{tg } 60°) \times$ $\times (\text{tg } 150° - \sin 150°)$ өрнегінің мәнін нөлмен салыстырыңдар.

788. Теңдік ақиқат па:

а) $\sin^2 45° - \sin^2 30° = \cos^2 60° - \cos^2 45°$;

ә) $1 + 2\sin 100° \cdot \cos 100° = (\sin 100° + \cos 100°)^2$?

789. а) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; ә) $\cos x = \frac{1}{2}$; б) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\cos x = -1$ теңдігі ақиқат болатындай $x \in [0; 4\pi]$ мәндерін табыңдар.

790. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

а) $\frac{\sin x + \cos(-x)}{1 - \operatorname{tg}(-x)} = \cos x$; ә) $\frac{\cos x - \sin(-x)}{1 - \operatorname{ctg}(-x)} = \sin x$.

791. Қандай сан барлық $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ тригонометриялық функцияларының периоды болады?

792. $\sin \alpha = a$, $\cos \alpha = b$ болса: а) $\sin(\alpha + 2\pi) + \cos(2\pi - \alpha)$; ә) $\cos(\alpha + 4\pi) + \sin(4\pi - \alpha)$; б) $\operatorname{tg}(\pi + \alpha) + \operatorname{tg}(\alpha - \pi)$; в) $\operatorname{ctg}(2\pi - \alpha) + \operatorname{ctg}(-\pi - \alpha)$ қосындысын a мен b арқылы өрнектеңдер.

793. Есептеңдер: а) $\sin\frac{13\pi}{6}$; ә) $\cos\frac{19\pi}{3}$; б) $\operatorname{tg}\frac{17\pi}{4}$; в) $\operatorname{ctg}\frac{25\pi}{6}$.

794. T саны берілген функцияның периоды болатынын дәлелдеңдер:

а) $y = \sin 2x$, $T = -5\pi$; б) $y = \sin 3x$, $T = 4\pi$;

ә) $y = \cos\frac{x}{3}$, $T = -12\pi$; в) $y = \cos 4x$, $T = -\frac{7\pi}{2}$.

795. Келтіру формулаларын пайдаланып, өрнекті ықшамдаңдар:

а) $\sin(\pi - \alpha) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$; б) $\cos(\alpha - \pi) - \sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$;

ә) $\operatorname{tg}(\pi + \alpha) + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$; в) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)\cos(\pi + \alpha)$.

796. Егер $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin\frac{\pi}{2} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ болса, $\sin x$-ті табыңдар.

797. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

а) $\frac{\sin \alpha - \cos \beta}{\sin \beta + \cos \alpha} = \frac{\sin \beta - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \beta}$; ә) $\frac{\sqrt{3} - 2\sin\beta}{2\cos\beta - 1} = \frac{1 + 2\cos\beta}{2\sin\beta + \sqrt{3}}$.

798. Өрнектің мәнін табыңдар:

а) $\sin\frac{17\pi}{60}\cos\frac{\pi}{20} + \cos\frac{17\pi}{60}\sin\frac{\pi}{20}$;

ә) $\cos\frac{\pi}{10}\cos\frac{7\pi}{20} + \sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{7\pi}{20}$;

б) $\sin\frac{139\pi}{90}\cos\frac{17\pi}{45} - \cos\frac{139\pi}{90}\sin\frac{17\pi}{45}$;

в) $\cos\frac{8\pi}{45}\cos\frac{29\pi}{90} - \sin\frac{8\pi}{45}\sin\frac{29\pi}{90}$.

799. Егер $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=-2$ болса, tg α-ны табыңдар.

800. Егер tg α = 3, tg β = 2, α мен β – сүйір бұрыштар болса, $\alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}$ болатынын дәлелдеңдер.

801. Егер: а) ctg $\alpha=\sqrt{3}$, α I ширектің бұрышы болса, sin α мен tg 2α-ны; ә) $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, α III ширектің бұрышы болса, tg α мен cos 2α-ны; б) $\cos\alpha=\frac{1}{2}$, α IV ширектің бұрышы болса, ctg α мен sin 2α-ны; в) tg $\alpha=-2$, α IV ширектің бұрышы болса, cos α мен cos 2α-ны табыңдар.

802. Өрнекті ықшамдаңдар:

а) $2\sin 24^\circ \sin 66^\circ$;
ә) $\sin 15^\circ \sin 75^\circ$;
б) $\sin^2 18^\circ - \sin^2 72^\circ$;
в) $(1-\mathrm{tg}^2 20^\circ) : \mathrm{tg}\, 20^\circ$.

803. Өрнекті ықшамдаңдар:

а) $\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{2}$;
ә) $\cos^4\frac{\alpha}{2}-\sin^4\frac{\alpha}{2}$;
б) $\cos^2\alpha-4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}$;
в) $1-8\sin^2\alpha\cos^2\alpha$;
г) $\left(\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}-\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\right)\sin\alpha$;
ғ) $\left(2\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}\right):\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)$.

804. Сүйір бұрыштары α және β болатын тікбұрышты үшбұрышта $\frac{\cos 2\beta-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\beta$ болатынын дәлелдеңдер.

805. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

а) $2\sin(45^\circ+\alpha)\sin(45^\circ-\alpha)=\cos 2\alpha$;

ә) $\frac{\sin(80^\circ+\alpha)}{4\sin\left(20^\circ+\frac{\alpha}{4}\right)\sin\left(70^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)}=\cos\left(40^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)$;

б) $\frac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}=\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}$;

в) $\frac{\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-1}{\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+1}=\sin 2\alpha$.

806. Егер: а) $\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$ болса, $\frac{\sin\alpha}{2-3\cos\alpha}$; ә) $\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}=\frac{2}{5}$ болса, $\frac{\mathrm{tg}\,\alpha+\sin\alpha}{\mathrm{tg}\,\alpha-\sin\alpha}$; б) $\sin\alpha+\cos\alpha=m$ болса, $\frac{\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$ табыңдар.

807. а) $\sin 75°+\sin 15°>1$; ә) $\cos 15°-\cos 45°<0$ теңсіздігі ақиқат па?

808. $4\sin 40°\cos 10°=1+2\cos 40°$ теңдігі ақиқат па?

809. $\mathrm{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=2\mathrm{tg}\,2\alpha$ тепе-теңдігін дәлелдеңдер.

810. Көбейтінді түрінде көрсетіңдер: а) $\sin x+\cos x$; ә) $\sin x-\cos x$.

811. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

а) $4\sin^2 2\alpha\cos 2\alpha=\cos 2\alpha-\cos 6\alpha$; б) $\frac{\sin^2 3\alpha}{\sin^2\alpha}-\frac{\cos^2 3\alpha}{\cos^2\alpha}=8\cos 2\alpha$;

ә) $8\sin^3\alpha\cos\alpha=2\sin 2\alpha-\sin 4\alpha$; в) $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$.

812. Теңдіктің ақиқат екенін дәлелдеңдер:

а) $\cos^2 5+\cos^2 1-\cos 6\cos 4=1$; ә) $\cos^2 3-\cos^2 2+\sin 5\sin 1=0$.

813. Қайсысы үлкен: $(\sin 165°-\sin 75°)\cos 15°$ немесе $(\cos 15°-\cos 75°)\sin 165°$?

814. Егер $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$ болса, $\cos 7\alpha\cos 4\alpha-\cos 8\alpha\cos 3\alpha$ өрнегінің мәнін табыңдар.

В деңгейі

Қазақстанның мұнайлы аудандарының бірі – Маңғыстау түбегі

815. Қазақстанның барланған мұнайлы аудандары оның 2784,9 мың кв. км-ге тең жалпы ауданының қанша пайызына тең болса, $0,347(2)\pi$ бұрышы да сонша градусқа тең болады. Барланған ауданды (мың кв. км-мен) табыңдар.

816. а) $2\cos 2x = 1$; ә) $\sqrt{2}\sin 2x = 1$; б) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$;
в) $\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$ болатындай x-тің барлық мәндерін табыңдар.

817. $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha + 3(\sin \alpha \cos \alpha)^2 = 1$ теңдігі тепе-теңдік бола ма?

818. Берілгені: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{5}$, $\operatorname{tg} \gamma = \frac{1}{8}$. $\alpha + \beta + \gamma = 45°$ болатыны ақиқат па?

819. Әлихан «$\sin^2\frac{\alpha - \beta}{2} + \sin^2\frac{\alpha + \beta}{2} - 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \beta$ өрнегін ықшамда» деген тапсырма алды. Ол берілген өрнекті былай түрлендірді:

$$\frac{1 - \cos(\alpha - \beta)}{2} + \frac{1 - \cos(\alpha + \beta)}{2} - (\cos \alpha + \cos \beta)\cos \beta =$$

$$= 1 - \frac{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{2} - \cos \alpha \cdot \cos \beta - \cos^2\beta =$$

$$= 1 - \cos \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \cos \beta - \cos^2\beta = \sin^2\beta - 2\cos \alpha \cdot \cos \beta.$$

Әлиханның жауабының дұрыстығын Саида тексерді. Ол берілген және шыққан өрнектердегі α мен β-ның орнына 0-ді қойып, дұрыс болмайтын $0 = -2$ теңдігін алды. Демек, жауабы дұрыс емес.

Әлиханның түрлендірулеріндегі қатені тауып, тапсырманы дұрыс орындаңдар.

820. Дәлелдеңдер: а) $\sin 18° \cos 36° = \frac{1}{4}$; ә) $\cos 20° \cos 40° \cos 80° = \frac{1}{8}$.

821. Егер: а) $\sin 2\alpha \sin 5\alpha \cos\left(\frac{\pi}{2} - 7\alpha\right) - \cos 2\alpha \cos\left(\frac{\pi}{2} + 5\alpha\right) \cos 7\alpha = \frac{1}{6}$ болса, $\cos 20\alpha$-ны; ә) $\sin 7\alpha \sin\left(\frac{\pi}{2} - 4\alpha\right) \cos 3\alpha + \cos 7\alpha \times \cos 4\alpha \cos\left(\frac{\pi}{2} + 3\alpha\right) = \frac{1}{8}$ болса, $\cos 16\alpha$-ны табыңдар.

822. Тікбұрышты үшбұрыштың сүйір бұрыштарының бірі α-ға, ал үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің радиусы R-ге тең. Осы үшбұрышқа іштей сызылған шеңбердің радиусы $\frac{R \sin 2\alpha}{1 + \sin \alpha + \cos \alpha}$ мәніне тең болатынын дәлелдеңдер.

823. Қабырғалары a, b, c болатын ABC үшбұрышы үшін: а) $\dfrac{a+b}{c} = \dfrac{\cos\dfrac{A-B}{2}}{\sin\dfrac{C}{2}}$; ә) $\dfrac{a-b}{c} = \dfrac{\sin\dfrac{A-B}{2}}{\cos\dfrac{C}{2}}$ теңдігінің ақиқат болатынын дәлелдеңдер (неміс математигі К. Моллвейде (1774–1825) формулалары).

С деңгейі

824. а) $\sin x \cos x = \dfrac{2}{3}$; ә) $\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2} = \dfrac{3}{7}$ болатындай x бұрышы бар бола ма?

825. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

а) $\cos^2\left(\dfrac{5\pi}{8} - \dfrac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\dfrac{3\pi}{8} - \dfrac{\alpha}{2}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha$;

ә) $\sin^2\left(\dfrac{7\pi}{12} + 3\alpha\right) - \cos^2\left(\dfrac{5\pi}{12} + 3\alpha\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 6\alpha$;

б) $\operatorname{tg} 20° + \operatorname{tg} 40° + \operatorname{tg} 50° + \operatorname{tg} 70° = \dfrac{4\sqrt{3}}{1 + 2\sin 10°}$.

826. $\dfrac{2\cos^2\alpha + \cos 4\alpha - 1}{\cos^4\dfrac{\alpha}{2} - \sin^4\dfrac{\alpha}{2}}$ өрнегінің ең үлкен және ең кіші мәні бар бола ма, соны зерттеңдер. Егер бар болса, оларды көрсетіңдер.

827. $8\cos^4 2x - 8\cos^2 2x - \cos 2x + 1 = 0$ шарты орындалатындай барлық $x \in [0; \pi]$ мәндерін табыңдар.

828. Өрнекті ықшамдаңдар:

а) $\dfrac{\sin\alpha + \sin\dfrac{\alpha}{2}}{1 + \cos\alpha + \cos\dfrac{\alpha}{2}}$;

ә) $\sqrt{0{,}5 - 0{,}5\sqrt{0{,}5 + 0{,}5\cos\alpha}}$, мұндағы $0 < \alpha < \pi$.

829. Бүйір қабырғаларының созындылары α бұрыш жасап қиылысатын трапецияға іштей шеңбер сызылған. Егер a мен b трапецияның табандары және $a > b$ болса, сол шеңбердің радиусын табыңдар.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

830. 1А) Есептеңдер: а) $\cos\frac{15\pi}{4}$; ә) $\sin\left(-\frac{17\pi}{6}\right)$; б) tg 600°.

2А) Өрнекті ықшамдаңдар:

а) $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 - 1 + 4\sin 2\alpha$; ә) $1 + \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)\operatorname{ctg}(\pi + \alpha)$.

3А) $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ берілген.

а) $\cos 2\alpha$; ә) $\sin(60° + \alpha)$; б) $\operatorname{tg}(45° - \alpha)$-ны табыңдар.

4В) $\frac{2\sin 2\alpha + \sin 4\alpha}{2(\cos\alpha + \cos 3\alpha)} = \operatorname{tg} 2\alpha \cdot \cos\alpha$ тепе-теңдігін дәлелдеңдер.

5С) $\cos 72° \sin 54°$ өрнегінің мәнін табыңдар.

БҰЛ ҚЫЗЫҚТЫ!

Тригонометрия күнделікті өмірде кездесетін астрономия мен геометрия есептерін шығару қажеттілігінен туындаған. Осыған орай ежелгі грек астрономы Гиппарх (б.з.д. II ғ.) алғашқы тригонометриялық кестелерді құрған. Тригонометрияның одан әрі дамуы ежелгі грек ғалымы Птолемейдің (б. д. II ғ.) «Альмагест» деп аталатын еңбегінде орын алды.

Птолемей

әл-Баттани

Ал IX–XV ғғ. тригонометрия үшбұрыштарды шешу теориясы түрінде дамыды. XVII ғасырдың басында жаңа бағыттағы алгебралық тригонометрия дами бастады. Бұл бағытқа Л. Эйлер (1707–1783) және Н. И. Лобачевский (1792–1856) үлкен үлес қосты. Леонард Эйлер алғаш рет синус, косинус және тангенсті сәйкес кесінділердің шеңбер радиусына қатынасы ретінде қарастырып, математикаға тригонометриялық функцияларды енгізді. sin α, cos α, tg α белгілеулері де оған тиесілі.

Ғаламтордан:

а) Птолемей теоремасын тауып, оның екі бұрыштың синустарының қосындысы формуласымен байланысын анықтаңдар;

ә) араб ғалымы әл-Баттани (858–929) қай тригонометриялық функцияны «көлеңке» деп атады және оның неге байланысты екені туралы деректерді табыңдар.

V. ЫҚТИМАЛДЫҚТАР ТЕОРИЯСЫНЫҢ ЭЛЕМЕНТТЕРІ

Бөлімді оқу нәтижесінде

• ықтималдықтар теориясының бастапқы ұғымдарын;

• ықтималдықтың классикалық және статистикалық анықтамасын, геометриялық ықтималдық ұғымын;

• ықтималдықты табу формуласын **білу керек.**

• оқиғалардың түрлерін ажырата алу;

• ықтималдықтың классикалық анықтамасын пайдалана отырып, оқиғаның ықтималдығын таба алу;

• салыстырмалы жиілік пен оқиғаның ықтималдығы арасындағы сәйкестікті анықтай алу;

• ықтималдықтар теориясының бастапқы ұғымдарын есептер шығаруда қолдана **алу керек.**

31. Ықтималдықтар теориясының негізгі ұғымдары. Ықтималдықтың классикалық анықтамасы

Тақырыпты оқу барысында:

• кездейсоқ оқиға, ақиқат оқиға, мүмкін емес оқиға, тең мүмкіндікті және қарама-қарсы оқиғалар, үйлесімсіз оқиғалар, қолайлы нәтижелер ұғымдарын білетін боласыңдар және ажыратуды үйренесіңдер;
• ықтималдықтың классикалық анықтамасын білетін боласыңдар;
• ықтималдықтың классикалық анықтамасын пайдалана отырып, оқиғаның ықтималдығын таба алатын боласыңдар.

7–8-сыныптардағы статистика элементтерін оқығанда сендер болып кеткен әртүрлі оқиғаларды қарастырған болатынсыңдар. Енді біз орындалуы да, орындалмауы да мүмкін *кездейсоқ* оқиғаларды зерттейтін боламыз. Мысалы, нысананы көздеп атқанда оған оқтың тиюі де, тимеуі де мүмкін, тиынды лақтырғанда не елтаңба жағы, не сан жағы түсуі мүмкін.

Міндетті түрде орындалатын оқиға *ақиқат* оқиға деп аталады. Мысалы, Жердегі су құйылған стақанды төңкерсе, су төгіледі.

Орындалмайтын оқиға *мүмкін емес* оқиға деп аталады. Мысалы, нысананы көздеп бір рет атқанда, оған оқтың екі рет тиюі мүмкін емес.

Бір мезгілде орындалмайтын оқиға *үйлесімсіз* оқиға деп аталады. Мысалы, оқушының бір мезгілде мектепте де, үйде де болуы мүмкін емес.

Болу не болмау мүмкіндіктері бірдей және бір-бірінен артықшылығы жоқ оқиғалар *тең мүмкіндікті* оқиғалар деп аталады. Мысалы, емтихан билетінің жұп немесе тақ нөмірлі билетін алу тең мүмкіндікті оқиға. Қос-қостан үйлесімсіз және тең мүмкіндікті оқиғаларды *элементар* оқиғалар деп атайды.

A оқиғасы болмаған жағдайда ғана B оқиғасы орындалатын болса, B оқиғасы A оқиғасына *қарама-қарсы* оқиға деп аталады. Мысалы, жұп немесе тақ ұпайдың түсуі – қарама-қарсы оқиғалар.

Оқиғаны құрайтын шешімдер сол оқиғаның басталуына түрткі болса, *қолайлы жағдай тудыратын* нәтижелер деп аталады. Мысалы, ойын тасын лақтырғанда 2, 4 ұпайлары түсуінің, сәйкесінше, A_1, A_2 нәтижелері – жұп ұпай түсуінің қолайлы нәтижесі болады.

A оқиғасының болуына қолайлы нәтижелер саны m-нің барлық тең мүмкіндікті нәтижелер саны n-ге қатынасы A оқиғасының ықтималдығы деп аталады.

A оқиғасының ықтималдығы француздың *probabilite* сөзінің (аудармасы – ықтималдық) бірінші әрпімен $P(A)$ деп белгіленеді. Анықтама бойынша, $P(A) = \frac{m}{n}$, мұндағы m – A оқиғасының болуына қолайлы нәтижелер саны, n – A оқиғасының болуының барлық тең мүмкіндікті нәтижелер саны, $0 \leq m \leq n$.

1 - е с е п. Сыныпта 12 ұл бар, қалғандары қыздар. 25 дәптердің ішінен кездейсоқ алынған дәптердің қыз баланікі болуының ықтималдығы қандай?

Ш е ш у і. Сыныпта 13 қыз бар, сондықтан қолайлы m нәтижелер саны 13. Барлық n нәтижелер саны 25. Демек, $P(A) = \frac{13}{25}$.

Ж а у а б ы. $\frac{13}{25}$.

2 - е с е п. Барлық екітаңбалы тақ сандар жиынынан кездейсоқ бір сан алынған. Сол алынған санның 9-ға бөлінуінің ықтималдығы қандай?

Ш е ш у і. Екітаңбалы тақ сандар 45, олардың ішінде 9-ға бөлінетіндері 27, 45, 63, 81, 99. Демек, қолайлы нәтижелер саны 5, ал $P(A) = \frac{5}{45} = \frac{1}{9}$.

Ж а у а б ы. $\frac{1}{9}$.

Ықтималдықтың классикалық анықтамасынан шығатыны $0 \leq P(A) \leq 1$, ақиқат оқиғалар ықтималдығы 1-ге тең, ал мүмкін емес оқиғалар ықтималдығы 0-ге тең. Егер A оқиғасының ықтималдығы B оқиғасының ықтималдығынан артық болса, онда A оқиғасы B оқиғасына қарағанда ықтималдау деп айтады.

Ықтималдықтың анықтамасынан екі оқиғаның бірігуінің ықтималдығын есептейтін *қосу ережесі* деп аталатын ереже шығады: егер A мен B оқиғалары үйлесімсіз болса, онда $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Шынымен де, егер тең мүмкіндікті жалпы n санынан a нәтиже A оқиғасына қолайлы болса, ал басқа b нәтиже B оқиғасына қолайлы болса, онда $(a + b)$ нәтижесі A немесе B оқиғасына қолайлы болады. Демек,

$$P(A \text{ немесе } B) = \frac{a+b}{n} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n} = P(A) + P(B).$$

3 - е с е п. Жәшікте 10 ақ, 5 көк және 2 қызыл шар бар. Жәшіктен кездейсоқ алынған шардың көк немесе қызыл болуының ықтималдығы қандай?

Ш е ш у і. Барлық алынатын шарлар нәтижесі 17. Көк немесе қызыл шар алу оқиғасына қолайлы нәтиже 7. Демек, ізделінді ықтималдық $\frac{7}{17}$.

Ж а у а б ы. $\frac{7}{17}$.

Егер екі сынақ нәтижелері тәуелсіз болса, онда екеуінің қатар пайда болуының қайсыбір оқиғасын сипаттайтын ықтималдық әрбір оқиға ықтималдығының көбейтіндісіне тең: $P(A \text{ және } B) = P(A) \times P(B)$. Мысалы, екі атқыш нысанаға бір-біріне тәуелсіз бір реттен атқан болсын және біреуінің мүлт кетпейтін ықтималдығы 0,5-ке, ал екіншісінің нысанаға дәл тигізу ықтималдығы 0,8-ге тең болсын. Сонда нысанаға екеуінің де тигізу ықтималдығы: $0{,}5 \cdot 0{,}8 = 0{,}4$ болады.

4 - е с е п. 15 лотерея билетінің 2-уі ұтатын билет. Кездейсоқ алынған бес билеттің: а) біреуі ұтатын билет; ә) екеуі ұтатын билет болуының ықтималдығы қандай?

Ш е ш у і. а) Нәтижелердің жалпы саны 15 элементтен 5-тен теру санына тең, яғни $C_{15}^{5} = \frac{15!}{5!(15-5)!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 3003$. Қолайлы нәтижелер: бір ұтатын билет (ондай жағдай 2) және 4 ұтпайтын билет (ондай нұсқалар $C_{13}^{4} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 715$). Демек, барлық қолайлы нәтижелер 1430. Сонда ізделінді ықтималдық $\frac{1430}{3003} = \frac{10}{21} \approx 0{,}48$-ге тең.

ә) Қолайлы нәтижелер: екі ұтатын билет (ондай жағдай біреу) және үш ұтпайтын билет (ондай нұсқалар $C_{13}^{3} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{3 \cdot 2} = 286$). Барлық қолайлы жағдайлар 286, ал нәтижелер саны 3003. Сонда ізделінді ықтималдық $\frac{286}{3003} = \frac{2}{21} \approx 0{,}10$-ға тең.

Ж а у а б ы. а) $\approx 0{,}48$; ә) $\approx 0{,}10$.

СҰРАҚТАР

1. Қандай оқиғалар: а) кездейсоқ; ә) ақиқат; б) мүмкін емес; в) үйлесімсіз; г) тең мүмкіндікті; ғ) қарама-қарсы оқиғалар деп аталады? Мысалдар келтіріңдер.

2. Оқиғаның ықтималдығы дегеніміз не?

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

831. Келесі оқиғалардың қайсысы ақиқат:

а) еркімізше таңдап алған екітаңбалы сан 100-ден кем;

ә) нысанаға үш рет атқанда екеуінің дәл тиюі;

б) жаңғақ салынған қапшықтан шие сүйектерін алып шығу;

в) тоғызыншы сынып оқушысының тұрған орнынан 0,5 м ұзындыққа секіруі?

832. Халықаралық матчта: а) хоккейден; ә) футболдан; б) баскетболдан; в) гандболдан теңбе-тең түсу оқиғаларының қайсысы мүмкін емес?

833. Көрсетілген оқиғаға қарама-қарсы оқиғаны атаңдар: а) ақиқат оқиға; ә) шахмат партиясын ұту; б) кездейсоқ таңдап алынған екі адамның туған күндерінің бірдей болуы; в) бір атқаннан тигізу.

834. Телефон нөмірін теру кезінде абонент соңғы цифрын ұмытып қалды. Кездейсоқ алынған цифрдың дұрыс болу ықтималдығы қандай?

835. Жақтарында 1, 2, 3, 4, 5, 6 ұпайлары бар ойын текшесін лақтырғанда түскен ұпай саны: а) 3-ке еселік; ә) жай сан; б) 8-ге тең; в) 7-ден кем болу ықтималдығы қандай?

836. 200 бөлшектен тұратын партияның 5-уі жарамсыз болып шықты. Кездейсоқ алынған бөлшектің стандартқа сай болуының ықтималдығы қандай?

837. 1-ден 30-ға дейінгі сандардың ішінен кездейсоқ таңдап алынған санның: а) 30-дың; ә) 45-тің бөлгіші болуының ықтималдығы қандай?

838. Әлемдегі ең үлкен көлдердің бірі Арал теңізінің соңғы 50 жылда жартысынан артығы тартылды. Келесі 50 жылда оның толығымен тартылып қалуы ықтимал ма?

839. Қан тапсыруға емханаға 120 донор келді, олардың 50-інікі бірінші топтың, 25 %-нікі – екінші, қалғаны үшінші топтың қаны болды. Бірінші қан тапсырған донордың қан тобы үшінші болуының ықтималдығы қандай?

840. Мектеп кітапханасының 180 оқырманы бар. Оның 50-і 1–4-сынып оқушылары, 5–9-сынып оқушылары одан 80 %-ға артық, ал қалғаны жоғары сынып оқушылары. Кездейсоқ алынған кітапхана карточкасының жоғары сынып оқушысынікі болуының ықтималдығын табыңдар.

841. Екі тиын лақтырылды: мыс және күміс. Олардың біреуінің елтаңба жағымен түсуінің ықтималдығы қандай?

842. Боялған текшені 125 тең шағын текшеге бөлді. Кездейсоқ алынған текшенің үш жағының боялған болу ықтималдығы қандай?

843. Домино тастарының толық (28 тас) жинағынан бір тас таңдап алынады. а) Ондағы ұпай сандарының қосындысы 6-ға тең болуының ықтималдығы қандай? ә) Ненің ықтималдығы артық: дубльді таңдау ма әлде дубльден басқасын таңдау ма?

844. Карточкаға 1-ден 20-ға дейінгі натурал сандар жазылған. Кездейсоқ екі карточка таңдап алынған. Сол екі карточкадағы сандар қосындысының 10-ға тең болу ықтималдығы қандай?

845. «Теория» сөзін құрайтын әріптерді араластырып, одан 3-еуін алу керек. Олар сендерге белгілі қандай екі сөзді құрауы мүмкін және әрбір сөзді алу ықтималдығы қандай?

846. Қазақ әліпбиінің әріптері жазылған 42 жетоны бар қапшықтан 6 жетонды алып шықты. а) Алматы; ә) Мәскеу сөзі құралуының ықтималдығы қандай?

847. *AB* кесіндісіне кез келген 5 нүкте белгіленген. Пайда болған барлық кесінділердің ішінен кездейсоқ алынған кесіндінің бір ұшы *A* нүктесі болуының ықтималдығы қандай?

B деңгейі

848. 210 санының кездейсоқ алынған бөлгішінің жай сан болуының ықтималдығы қандай?

849. Лото ойынында не көбірек ықтимал: 49-дан 6 нөмір таңдау ма, әлде 36-дан 5-еу ме?

850. 100 шамның 4-інің ақауы бар. Таңдап алынған 3 шамның ақаусыз болуының ықтималдығы қандай?

851. Ұзындықтары 1 см, 3 см, 5 см, 7 см, 9 см болатын бес кесіндіден кездейсоқ үшеуін таңдап алған. Олардан үшбұрыш құрастырудың ықтималдығы қандай?

C деңгейі

852. Телефон нөмірін теру кезінде абонент соңғы әртүрлі екі цифрды ұмытып қалды. Оның осы цифрларды таңдап алуының ықтималдығы қандай?

853. «Гипотенуза» сөзінің әріптерінен кездейсоқ 6 әріпті таңдап алып, қатарынан қойып шықты. Олардан «гипноз» сөзін құрауының ықтималдығы қандай?

854. Баскетболдан біріншілікте 10 команда қатысты. Оларды жеребе арқылы екі топқа бөлді. 2 команданың мықтырақ екені белгілі. Осы екі команданың: а) бір топта; ә) әртүрлі топта болуының ықтималдығы қандай?

32. Статистикалық ықтималдық

Тақырыпты оқу барысында:
• статистикалық ықтималдық ұғымын білетін боласыңдар;
• үлкен сандар заңы туралы түсініктерің болады;
• кездейсоқ оқиғаның салыстырмалы жиілігін пайдаланып, статистикалық ықтималдықты табуды үйренесіңдер.

Жаппай кездейсоқ оқиғалар үшін олардың ықтималдығын табу қиынға соғады. Мұндай жағдайда көптеген біртектес сынақтар негізінде оқиғаның салыстырмалы жиілігінің қандай екенін, яғни біртектес сынақтардағы осы оқиғаның пайда болу санының барлық сынақтар санына қатынасының неге тең болатынын анықтайды. Бұл жиілікті оқиғаның *статистикалық ықтималдығы* деп атайды. Мысалы, егер 1000 бұйымды тексеру барысында олардың 5-інің ақауы бар екендігі анықталса, онда мыңдаған партияда ақауы бар бұйымның пайда болу ықтималдығы 0,005-ке немесе 0,5 %-ға тең деп есептеледі.

Тиынды лақтырғанда елтаңба жағы түсуінің салыстырмалы жиілігін тәжірибе арқылы да анықтауға болады. Мысалы, жүргізілген сынақтың кестеде көрсетілген нәтижелері бойынша көптеген тиын лақтыру сериясының жиілігі ≈ 0,5-ке тең деген қорытынды жасауға болады.

Тиын лақтыру саны	Елтаңба жағының түсу саны	Елтаңба жағы түсуінің салыстырмалы жиілігі
100	49	0,49
200	101	0,505
250	127	0,508

Біртекті сынақтар неғұрлым көбірек жүргізілсе, оқиғаның болу жиілігі осы оқиғаның ықтималдығына соғұрлым жақындай түседі. Бұл қасиет «үлкен сандар заңы» атымен тарихқа енді. Дәлірек айтқанда, оны математик Я. Бернулли «егер көптеген тәуелсіз n сынақтар сериясында оқиғаның ықтималдығы $P(A)$-ға тең болса, онда A оқиғасының салыстырмалы жиілігі $\frac{m}{n}$ шамамен $P(A)$-ға тең болады, яғни $P(A) \approx \frac{m}{n}$, мұндағы $n \to \infty$» деп тұжырымдаған.

СҰРАҚТАР

Статистикалық ықтималдық ұғымын мысал арқылы түсіндіріңдер.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

855. Спорт мектебі үшін коньки бәтеңкелеріне тапсырыс берілді. Кестеде бәтеңкелердің әртүрлі өлшемдерінің жиілігі келтірілген. Кездейсоқ алынған бәтеңкелер жұбының 39-шы өлшемді болуының ықтималдығы қандай?

Бәтеңкенің өлшемі	36	37	38	39	40	41	42
Саны	50	80	130	150	210	60	20

856. Ателье ерлер баскиімінің әртүрлі өлшемдерінің кестеде көрсетілгендей санын дайындады. Кездейсоқ алынған баскиімнің 56-шы өлшемді болуының ықтималдығы қандай?

Өлшемі	54	55	56	57	58
Жиілігі	50	120	140	100	90

857. Конструктор сымды кескенде әр бөліктің ұзындығын өлшеп, белгілі бір ұзындықтағы (см-мен) бөліктің пайда болу жиілігінің кестесін құрды. Кездейсоқ алынған бөліктің ұзындығы 8 см-ден кем емес, бірақ 9 см-ден кем болуының ықтималдығы қандай?

Бөліктің ұзындығы	[5; 7)	[7; 8)	[8; 9)	[9; 10)	[10; 11)
Жиілігі	300	320	680	650	280

858. Кестеде бір мекеме қызметкерлерінің жалақысы туралы мәлімет келтірілген. Кездейсоқ таңдалған қызметкердің жалақысы 200 мың теңгеден артық, бірақ 250 мың теңгеден артық болмауының ықтималдығы қандай?

Жалақы (мың теңгемен)	[50; 100]	(100; 150]	(150; 200]	(200; 250]	(250; 300]	(300; 350]	(350; 400]
Қызметкер-лер саны	54	145	310	128	79	46	15

859. Бір аудан тұрғындарының жас шамасы туралы мәліметтер аралық кестеде келтірілген. Кездейсоқ таңдап алынған тұрғынның: а) 15 жастан үлкен емес; ә) 81 жастан кіші емес; б) 31-ден 60-қа дейінгі жаста болуының ықтималдығы қандай?

Жасы (жылмен)	1–15	16–30	31–45	46–60	61–75	76–80	81–95
Жиілігі	1154	1478	1295	2576	909	543	45

860. Оқушылардың дайындық курсында математикадан жазбаша жұмыстан алған ұпайлары кестеде көрсетілген. Кездейсоқ таңдап алынған оқушының: а) ең көп ұпай алу; ә) 20-дан 30-ға дейінгі ұпай алу ықтималдығы қандай?

Ұпай саны	5	10	15	20	25	30	35	40
Оқушылар саны	23	38	89	97	114	82	53	24

861. Бір мекемеде жаппай сұранысқа ие бұйымдар партиясының сапасын тексергенде әрқайсысында 500 бұйым бар бес таңдама жасалды. Тексеріс нәтижесі кестеде келтірілген. Барлық шығарылған партияның ақауы бар бұйымының (%-бен) ықтималдығы қандай?

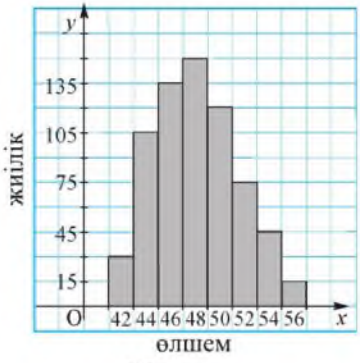
Таңдама нөмірі	1	2	3	4	5
Ақауы бар бұйымдар саны	31	30	29	29	31

B деңгейі

862. Кестеде 7–11-сынып оқушыларының белтемірге тартылу саны туралы жиынтық мәлімет келтірілген. Олардың арасынан кездейсоқ алынған оқушының белтемірге 8-ден кем емес рет тартылу ықтималдығы қандай?

Тартылу саны	5	6	7	8	9	10	11	12
Оқушылар саны	29	43	71	65	52	40	23	11

863. Гистограммада (76-сурет) сауалнамаға қатысқан әйелдердің көйлегінің өлшемдері көрсетілген. Солардың ішінен кездейсоқ алынған әйелдің көйлегінің өлшемі: а) 42; ә) 56; б) 46 немесе 48, немесе 50 болуының ықтималдығы қандай?



76-сурет

C деңгейі

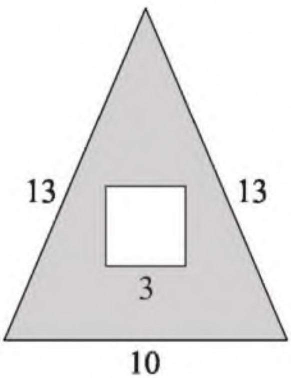
864. Кестеде салымшылардың саны мен олардың жылдық салымы туралы мәліметтер келтірілген. Кездейсоқ таңдап алынған салымшының бірінші немесе екінші банктегі салымы 601-ден 650 мың теңгеге дейін болуының ықтималдығы қандай?

Салым өлшемі (мың теңгемен)	Салымшылар саны	
	№ 1 банк	№ 2 банк
451–500	224	353
501–550	108	116
551–600	95	87
601–650	110	210
651–700	135	146
701–750	78	58

33. Геометриялық ықтималдық

Тақырыпты оқу барысында:
- геометриялық ықтималдық ұғымын білетін боласыңдар;
- геометриялық ықтималдықты есеп шығаруда қолдануды үйренесіңдер.

Оқиғаның ықтималдығын табу үшін біз сынақтың соңғы санын қарастырған болатынбыз. Бірақ ықтималдықты есептеуге берілген көптеген есептерді шығарғанда қайсыбір оқиғаларды сипаттайтын шексіз жиындарды қарастыру қажеттілігі туындайды. Мұндай жағдайда есептің геометриялық моделін салу ыңғайлы болады. Сондай модельді пайдаланып табылған ықтималдық *геометриялық ықтималдық* деп аталады.



77-сурет

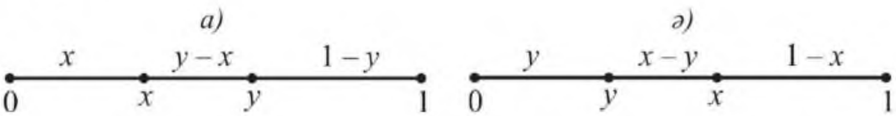
1 - е с е п. Табаны 10 см-ге, бүйір қабырғасы 13 см-ге тең теңбүйірлі үшбұрыш ішіне қабырғасы 3 см-ге тең шаршы салынған. Үшбұрыштың ішінен кездейсоқ алынған нүктенің шаршыға да тиісті болуының ықтималдығы қандай?

Ш е ш у і. Оқиға үшбұрыштың ішінен нүкте таңдап алынады да, сол нүктенің шаршыға тиістілігі қолайлы нәтиже болатынынан тұрады (77-сурет). Сондықтан барлық нәтижелер жиынына үшбұрыштың ауданы, ал қолайлы нәтижелер жиынына шаршының ауданы алынады. Сонда ізделінді ықтималдық шаршының ауданының үшбұрыш ауданына қатынасына тең болады. Шаршының ауданы 9 см^2. Үшбұрыштың ауданы $\frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{13^2 - 5^2} = 60$ (см^2). Демек, ізделінді ықтималдық $\frac{9}{60} = \frac{3}{20} = 0,15$.

Ж а у а б ы. 0,15.

2 - е с е п. Бірлік ұзындықтағы кесінді кез келген жолмен үш кесіндіге бөлінген. Сол кесінділерден үшбұрыш тұрғызудың ықтималдығы қандай?

Шешуі. Кесіндінің ұзындығы қосындысы 1-ге тең болатын кез келген үш оң санмен өрнектеледі. Олардан үшбұрыш тұрғызу үшін сол кесінділердің кез келгенінің ұзындығы басқа екеуінің ұзындықтарының қосындысынан кем болуы керек. Ондай комбинациялар шексіз көп. [0; 1] аралығын және оған тиісті екі сан x пен y-ті қарастырамыз. Координаталар жазықтығындағы $(x; y)$ жұп сандары – ол $0 \le x \le 1$ және $0 \le y \le 1$ болатын нүкте. Осы шарттарды ескере отырып, ол нүктені қабырғасы 1-ге тең шаршының қайсыбір нүктесі деп қарастыруға болады. Осы шаршының есептің шартын қанағаттандыратын барлық нүктелері қандай фигураны құрайтынын зерттейік. Ол үшін екі жағдайды $x \le y$ және $x \ge y$ қарастырайық (78-сурет).



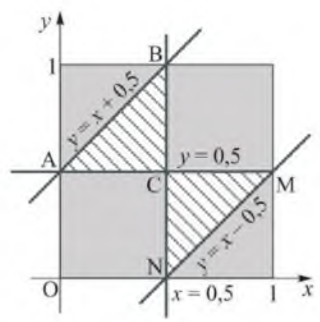
78-сурет

1) $x \le y$ (78, *а*-сурет) болсын. Егер мына шарттар:

$$\begin{cases} x < (y - x) + (1 - y), \\ y - x < x + (1 - y), \\ 1 - y < x + (y - x); \end{cases} \quad \begin{cases} x < 0{,}5, \\ y < x + 0{,}5, \\ y > 0{,}5 \end{cases}$$

орындалса, үшбұрыш бар болады.

Сонымен, қолайлы нәтижелер жиыны – ол ауданы $\frac{1}{8}$-ге тең болатын тікбұрышты теңбүйірлі ABC үшбұрышының барлық нүктелері (79-сурет). Барлық нәтижелер жиынына шаршының 1-ге тең ауданы алынады. Сонымен, бұл жағдай үшін ізделінді ықтималдық $\frac{1}{8} : 1 = \frac{1}{8}$-ге тең.



79-сурет

2) $x \ge y$ болсын (78, *ә*-сурет). Бұл жағдайда, егер:

$\begin{cases} x > 0,5, \\ y < 0,5, \\ y > x - 0,5 \end{cases}$ шарттары орындалса, үшбұрыш бар болады. Мұны өздігінен дәлелдеңдер.

Бұл жағдай үшін де ізделінді ықтималдық CMN үшбұрышы ауданының шаршының ауданына қатынасына тең және сол сияқты $\frac{1}{8}$-ге тең болады (79-сурет). Сонымен, пайда болған кесінділерден үшбұрыш тұрғызудың ықтималдығы: $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4} = 0,25$.

Ж а у а б ы. 0,25.

СҰРАҚТАР

Геометриялық ықтималдық ұғымын мысал арқылы түсіндіріңдер.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

865. Кездейсоқ алынған $\begin{cases} -2 \le x \le 4, \\ -3 \le y \le 2 \end{cases}$ теңсіздіктер жүйесінің шешімі $\begin{cases} 1 \le x \le 3, \\ -2 \le y \le 1 \end{cases}$ теңсіздіктер жүйесінің шешімі болуының ықтималдығы қандай?

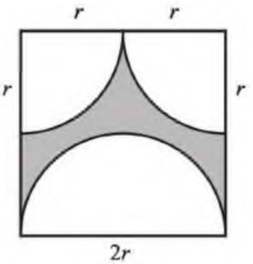
866. Абонент 14.00-ден 15.00-ге дейінгі аралықта телефон қоңырауын күтеді. Осы қоңыраудың алғашқы 10 минут ішінде түсуінің ықтималдығы қандай?

867. Координаталар жазықтығына центрі координаталар басында, радиусы 1,5-ке тең дөңгелек салынған. Дөңгелектің қайсыбір бүтін санды координаталы нүктесінің оның центрі болу ықтималдығы қандай?

868. Жазықтықта радиустарының қатынасы 2-ге тең болатын екі концентрлі шеңбер салынған. Үлкен радиусты дөңгелектен алынған қайсыбір нүктенің осы шеңберлерден құралған сақинаға тиісті болу ықтималдығы қандай?

869. Радиусы 12 см-ге тең дөңгелек нысана бес концентрлік шеңбермен бөлінген. Бірінші шеңбердің радиусы 2 см-ге тең, ал әрбір келесі шеңбердің радиусы алдыңғысынан 2 см-ге артық. Нысанаға тиген оқтың: а) бірінші сақинаға; ә) центрден санағанда соңғының алдындағы сақинаға тию ықтималдығы қандай?

870. Шаршының ішінен алынған қайсыбір нүктенің боялған фигураға тиісті болу ықтималдығы қандай (80-сурет)?



80-сурет

871. Радиусы 5 см дөңгелекке іштей теңқабырғалы үшбұрыш салынған. Дөңгелектің ішінен алынған қайсыбір нүктенің осы үшбұрышқа тиісті болу ықтималдығы қандай?

872. Радиусы R дөңгелекке іштей дұрыс алтыбұрыш салынған. Дөңгелектің ішінен алынған қайсыбір нүктенің алтыбұрышқа да тиісті болу ықтималдығы қандай?

873. Периметрі 24 см-ге тең теңқабырғалы үшбұрыштың ішіне қабырғасы 2 см шаршы салынған. Үшбұрыштың ішіндегі қайсыбір нүктенің шаршыға тиісті болмау ықтималдығы қандай?

В деңгейі

874. Квадраттарының қосындысы 81-ден кем болатындай етіп екі нақты x пен y сандары алынған. x пен y-тің квадраттары қосындысының 49-дан артық болуының ықтималдығы қандай?

875. Дұрыс сегізбұрыштың біреуден кейін алынған төбелері шаршының төбелері болады. Сегізбұрыштың қайсыбір нүктесі шаршыға да тиісті болуының ықтималдығы қандай?

С деңгейі

876. Табаны 8 см-ге, оған іргелес бұрышы 30°-қа тең болатын теңбүйірлі үшбұрышқа іштей дөңгелек сызылған. Үшбұрыштан алынған қайсыбір нүктенің осы дөңгелекке де тиісті болуының ықтималдығы қандай?

877. Дұрыс бесбұрыштың барлық диагональдары жүргізілген, олардың қиылысуынан тағы бір бесбұрыш пайда болған. Бастапқы бесбұрыштан алынған қайсыбір нүктенің пайда болған бесбұрышқа тиісті болуының ықтималдығы қандай?

ҚЫЗЫҚТЫ ЕСЕПТЕР

1) Тирде концентрлік шеңберлермен бөліктерге бөлінген, радиусы 0,5 м болатын дөңгелек нысана берілген. Тирге келуші мүлт кетпей нысанаға дәл тигізуде. Оның нысанада белгіленген радиусы 0,1 м және центрлік бұрышы 1 радиан болатын секторға тигізу ықтималдығын 0,001-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

Жайбасар

2) Антарктидадан микробиология зертханасына мұздатылған күйінде 5 жайбасарды (микроскопиялық жәндік) алып келді. Егер мұзды ерітсе, олардың бірінің қайта тірілу ықтималдығы қандай? (Жауабын табу үшін ғаламтордан жайбасарлар туралы мәліметті пайдаланыңдар.)

34. «Ықтималдықтар теориясының элементтері» бөлімін қайталауға арналған жаттығулар

А деңгейі

878. 15 санының кездейсоқ алынған бөлгішінің жай сан болу ықтималдығы қандай?

879. а) Тест тапсырмасында сұрақ жауабының 5 нұсқасы келтірілген, олардың екеуі – дұрыс жауап. Кездейсоқ таңдалған жауаптың дұрыс болу ықтималдығы қандай?

ә) Алматыдағы «Қазақстан» қонақ үйі 26 қабатты. Туриске осы қонақ үйдің оныншы немесе он бесінші қабатынан нөмір ұсыну ықтималдығы қандай?

Алматыдағы «Қазақстан» қонақ үйі

880. Жинау цехында бірінші өлшемнен – 150 дана, екіншіден – 400 дана, үшіншіден – 250 дана және төртіншіден – 150 дана біліктер партиясы бар. Кездейсоқ алынған біліктің үшінші немесе төртінші өлшемді болу ықтималдығы қандай?

881. Кестеде қала тұрғындарын жас шамасы бойынша орналастыру мәліметі келтірілген. Кездейсоқ таңдап алынған тұрғынның 20 жастан кіші болу ықтималдығы (%-бен) қандай?

Жасы	10-ға дейін	10–19	20–29	30–39	40–49	50–59	60–69	70 және одан үлкен
Саны (мың адам)	12,3	15,4	13,5	16,2	15,7	10,9	9,3	7,7

882. Барлық екітаңбалы жұп сандар жиынынан бір сан кездейсоқ таңдап алынды. Сол санның 8-ге бөлінуінің ықтималдығы қандай?

883. Қолжазбада 202 парақ бар. Одан кездейсоқ алынған парақ нөмірінің: а) 7-ге; ә) 13-ке бөліну ықтималдығы қандай?

884. Қазақ әліпбиінің әріптері жазылған 42 жетоны бар қапшықтан 4 жетон алып, оларды әліпби ретімен орналастырды. Әдия есімінің шығу ықтималдығын табыңдар.

885. Асан, Бексұлтан, Гүлдана, Дәмелі дөңгелек үстелді айнала кез келген ретпен отырды. Бексұлтан мен Дәмелінің қатар отыру ықтималдығы қандай?

В деңгейі

886. Координаталар жазықтығына центрі координаталар басында, радиусы 2-ге тең болатын дөңгелек салынған. Осы дөңгелектен кездейсоқ алынған: а) нүктенің бірінші координаталық ширекке; ә) бүтін координаталы нүктенің бірінші координаталық ширектің биссектрисасына тиісті болуының ықтималдығы қандай?

887. Бекнияз бен Фариза кездейсоқ алынған телефон нөмірінің соңғы цифры 7-ге тең немесе 3-ке еселік болу ықтималдығын есептеді. Бекнияздың жауабы 0,5, ал Фаризанікі 0,4 болды. Кімнің жауабы дұрыс?

888. «Алгоритм» сөзінің әрбір әрпін карточкаға жазып, оларды араластырды. Осы карточкаларды бір қатарға кездейсоқ орналастырғанда қайтадан сол сөздің шығу ықтималдығы қандай?

С деңгейі

889. Ержан дөңес сегізбұрыштың бір төбесін есте сақтады. Зарина осы сегізбұрыштың бір диагоналін жүргізді. Осы диагональдің бір ұшы Ержанның есте сақтаған төбесі болу ықтималдығы қандай?

890. Кітап сөресіне кездейсоқ түрде алгебраның 3 кітабы мен геометрияның 2 кітабы қойылды. Бір пәннен кітаптардың қатар тұруының ықтималдығы қандай?

891. Бір партиядағы 200 бөлшектің 8-інің ақауы бар болып шықты. Кездейсоқ алынған 3 бөлшектің 1-еуінің ақауы бар болу ықтималдығы қандай?

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

892. 1А) Келесі оқиғалардың қайсысы ақиқат оқиға болады?

а) Кез келген үштаңбалы жай сан 998-ден артық емес.

ә) Көгілдір және сары шарлар жиынтығынан түрлі түсті шарды алу.

б) Нысанаға үш рет атып, үш рет тигізу.

в) Парашютпен секіргенде оның ашылуы.

2А) Тиын екі рет лақтырылды. Елтаңба жағының түспеу ықтималдығы қандай?

3А) Табаны 3 дм-ге, бүйір қабырғасы 2,5 дм-ге тең теңбүйірлі үшбұрыштың ішіне ауданы 2 дм^2-ге тең теңқабырғалы үшбұрыш салынған. Теңбүйірлі үшбұрыштың ішінен кездейсоқ алынған нүктенің теңқабырғалы үшбұрышқа да тиісті болу ықтималдығы қандай?

4В) Кестеде 9–11-сынып оқушыларының 100 метрге жүгіруден жетістіктері туралы жиынтық мәліметтер көрсетілген. Олардың ішінен кездейсоқ таңдап алынған оқушының осы қашықтықты 14 секундтан аспайтын уақытта жүгіріп өту ықтималдығы (%-бен) қандай?

Нәтиже (с)	14,1	14,2	14	13,8	13,5	13,1	12,8	12,3
Оқушылар саны	36	45	69	60	51	43	21	9

5С) 10 тапсырма берілген, оның 4-уі өте қиын тапсырма. Оқушыға жеребе арқылы 5 тапсырма таңдап алып орындауға мүмкіндік берілді. Оған тек бір ғана қиын тапсырманың келу ықтималдығы қандай?

ҚЫЗЫҚТЫ ЕСЕПТЕР

1) Карточкада екітаңбалы сан жазылған. Оның цифрларының қосындысы беске тең болу ықтималдығы қандай?

2) 8 есіктің 8 кілті бар. Әр есікке тек бір ғана кілт келеді. Егер қай есікке қай кілттің келетіні белгісіз болса, барлық есіктерді осы кілттермен ашу үшін ең көп дегенде қанша әрекет жасау керек болады?

БҰЛ ҚЫЗЫҚТЫ!

Оқиғаның ықтималдығын табу есептері ертеректе сауда-саттықтың тиімділігін, құмар ойын стратегиясын есептеуде пайда болған. «Азарт» сөзі қатты еліктеу деп түсіндіріледі және француздың *hazard* сөзінен шыққан, жайт, тәуекелге бару дегенді білдіреді.

Ықтималдық теориясы ғылым ретінде XVII ғасырдан бастап қана дами бастады. Оның дамуына үлкен үлес қосқан математиктер: нидерландтық Х. Гюйгенс (1629–1695), ол әлемге әйгілі ықтималдық теориясынан «Құмар ойындағы есептеулер» атты алғашқы кітапты басып шығарған, француз математигі Б. Паскаль (1623–1662), швейцарлық Я. Бернулли (1654–1705), ағылшындық А. Муавр (1667–1754), француз математигі С. Пуассон (1781–1840), орыс математиктері П. Л. Чебышев (1821–1894), А. Н. Колмогоров (1903–1987).

Х. Гюйгенс

А. Н. Колмогоров

Ғаламтордан Б. Паскальдың бір ойыншының сұрауы бойынша жазған ойын тасын лақтырғанда ұпай түсу ықтималдығы туралы есебі мен оның шешуін табыңдар.

7–9-СЫНЫПТАРДАҒЫ АЛГЕБРА КУРСЫН ҚАЙТАЛАУ

Сандық және алгебралық өрнектер және оларды түрлендіру

А деңгейі

893. а) $\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{10}-1\frac{1}{15}\right):0{,}8+0{,}2$; ә) $0{,}1\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)^{-1}-0{,}5^0+\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$ өрнегінің мәніне қарама-қарсы және кері санды жазыңдар.

894. $\left(1\frac{3}{4}:1{,}125-1{,}75:\frac{2}{3}\right)\cdot 1\frac{5}{7}=x-\frac{1}{1{,}2}$ теңдігінен x-ті табыңдар.

895. а) $\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2+2\sqrt{6}}{(\sqrt{26}-1)(\sqrt{26}+1)}$; ә) $\sqrt{125}+(\sqrt{6})^2-\sqrt{(-5)^2}$ өрнегінің мәні рационал немесе иррационал сан болатынын анықтаңдар.

896. Өрнекті ықшамдап, оның мәнін табыңдар:

а) $\left(\frac{1}{a+3}-\frac{6}{9-a^2}\right)\cdot\left(\frac{a-3}{a^2+9}+\frac{6a}{a^3-3a^2+9a-27}\right)$, мұндағы $a=\frac{1}{7}$;

ә) $\frac{3b+2}{3b-2}:\left(\frac{18b}{27b^3-8}+\frac{6b}{9b^2+6b+4}-\frac{1}{3b-2}\right)-\frac{6b+8}{3b-2}$, мұндағы $b=-2\frac{1}{6}$;

б) $\frac{a^2-b^2}{a-b}-\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}$, мұндағы $a=3^{-1}$, $b=7^{-1}$;

в) $\frac{(a+b)^{-1}+(a-b)^{-1}}{(a+b)^{-1}-(a-b)^{-1}}$, мұндағы $a=\sqrt{27}$, $b=\sqrt{48}$.

897. а) 4-тің 2 %-ы 1-дің 0,4 %-нан неше есе артық? ә) Егер m мен n оң сандар және m-нің $\frac{3}{7}$-і n-нің 35 %-на тең болса, сол сандарды салыстырыңдар.

898. а) Алманың бағасы 20 %-ға арзандады. Бұрын 2,8 кг алма сатып алатын ақшаға қазір неше кг алма сатып алуға болады?
ә) Бөлменің еденін сырлауға 2 кг сыр кетті. Осындай сырдың 1,5 киллограмы ұзындығы 1,5 есе қысқа, ал ені сондай бөлмені сырлауға жете ме?

899. Төрттаңбалы 379* саны 6-ға бөлінуі үшін, * белгісінің орнына қоюға болатын барлық цифрларды көрсетіңдер.

900. а) $8^5 + 4^7$ өрнегінің 12-ге; ә) $8^4 - 4^5$ өрнегінің 24-ке; б) $4n^3 - 4n + 6$ өрнегінің 3-ке бөлінетінін дәлелдеңдер, мұндағы $n \in Z$.

901. n-нің кез келген бүтін мәнінде: а) $3^{4n} + 9^{2n} + 81^n = 3^{4n+1}$; ә) $9^{3n} + 9^n \cdot 81^n + 27^{2n} = 3^{6n+1}$ теңдігінің ақиқат болатынын дәлелдеңдер.

902. Есептеңдер:

а) $\dfrac{2 \cdot 4^{-2} + \left(\frac{1}{\sqrt{81}}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{-3}}{\frac{1}{\sqrt{25}} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} + (\sqrt{3})^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}}$; ә) $\dfrac{3 \cdot 9^{-2} + \left(\frac{1}{\sqrt{64}}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{-4}}{\frac{1}{\sqrt{49}} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^{-2} + (\sqrt{5})^0 \cdot \left(\frac{1}{21}\right)^{-1}}$.

903. Өрнекті ықшамдаңдар: а) $\dfrac{(a^{12}\sqrt{a^6})^2}{a^4 \cdot a^3}$; ә) $\left(-\dfrac{2a}{3b^{-3}}\right)^{-2} \cdot \left(\dfrac{a^{-2}}{4b^5}\right)^{-1}$.

904. Бөлшекті қысқартыңдар:

а) $\dfrac{25x^2 - 10xy + y^2}{y^2 - 25x^2}$; б) $\dfrac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 8x + 15}$;

ә) $\dfrac{x - 6\sqrt{xy} + 9y}{\sqrt{x} - 3\sqrt{y}}$; в) $\dfrac{8x^2 - 2x - 1}{16x^2 + 8x + 1}$.

905. Екітаңбалы санның цифрларының қосындысы 9-ға тең. Егер оның цифрларының орнын ауыстырса, онда шыққан сан бастапқы саннан 9-ға кем болады. Бастапқы екітаңбалы санды табыңдар.

906. Екі оң санның көбейтіндісі олардың арифметикалық ортасына, ал сол сандардың айырымы 1-ге тең. Осы сандарды табыңдар.

В деңгейі

907. Есептеңдер: $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} + \dfrac{4}{\sqrt{7} + \sqrt{3}} - \dfrac{3}{\sqrt{7} + 2}$.

908. $\dfrac{3,2(6)}{(5,5 + x) : 21\frac{3}{7}} - 1\dfrac{3}{8} = 5,625$ теңдігінен x-ті табыңдар.

909. Егер: а) $a = 2{,}5$, $b = -4{,}5$ болса, $\dfrac{a^{-2}b^{-1} + a^{-1}b^{-2}}{a^{-2} - b^{-2}}$ өрнегінің;

ә) $x = 0{,}5$ болса, $\dfrac{\sqrt{x}}{1 - x\sqrt{x}} : \dfrac{\sqrt{x} + x}{\sqrt{x} + x + 1}$ өрнегінің;

б) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{3}{2}$ болса, $\dfrac{a^2 + ab + b^2}{2ab - b^2}$ өрнегінің мәнін табыңдар.

910. Амалдарды орындаңдар:

а) $\dfrac{5^4 \cdot 9^2 - 3 \cdot 15^2}{45^2 + 15^3}$;   ә) $\dfrac{5,3^2 - 4,7^2}{5,3^2 + 10,6 \cdot 4,7 + 4,7^2}$.

911. Өрнекті ықшамдаңдар: $x^2 \cdot \sqrt{x^2 - 2 + \dfrac{1}{x^2}}$, мұндағы $x < -1$.

912. а) Бексұлтан акциялар сатып алып, келесі жылы оларды номиналды құнына сатып, пайдасымен бірге 230000 теңге алды. Егер пайда акция құнының 15 %-ын құраса және 1500 теңгеге тең болса, онда ол қанша акция сатып алған?

ә) Дүкен өнімдерді бастапқы тағайындалған бағадан 10 % жеңілдікпен сатып, 18 % табыс тапты. Бастапқыда қанша пайыз алу жоспарланған болатын?

913. Берілген төрт санның бастапқы үшеуінің қатынасы $\dfrac{1}{5} : \dfrac{1}{3} : \dfrac{1}{20}$. Егер олардың төртіншісі екіншінің 15 %-ын, ал екінші сан басқаларының қосындысынан 8-ге артық болса, осы сандарды табыңдар.

С деңгейі

914. Есептеңдер: $\dfrac{7}{1 \cdot 8} + \dfrac{7}{8 \cdot 15} + \dfrac{7}{15 \cdot 22} + ... + \dfrac{7}{57 \cdot 64}$.

915. $x + y = \sqrt{44}$, $x - y = \sqrt{52}$ екені белгілі болса, $x^3 + y^3$ табыңдар.

916. $\sqrt{2 + \sqrt{2}} + \sqrt{2 - \sqrt{2}} < 2\sqrt{2}$ теңсіздігінің ақиқат екенін дәлелдеңдер.

917. Математикалық индукция әдісін қолданып, n кез келген натурал сан болғанда, $4n^3 + 8n + 3$ өрнегінің мәні 3-ке бөлінетінін дәлелдеңдер.

918. 64 000 теңге тұратын тауардың бағасын үш рет бірдей пайызға өсірді. Содан кейін шыққан бағаны үш рет бірдей пайызға түсірді. Егер тауардың соңғы бағасы 27000 теңге тұратын болса, осы пайыз санын табыңдар.

919. Егер екітаңбалы санды оның цифрларының қосындысына бөлсе, онда бөлінді 3-ке, қалдық 4-ке тең болады. Егер де осы санды оның цифрларының көбейтіндісіне бөлсе, онда бөлінді 2-ге, қалдық 5-ке тең болады. Бастапқы санды табыңдар.

Теңдеулер, теңсіздіктер және олардың жүйелері

А деңгейі

920. $x^2 - 100x + 2331 = 0$ теңдеуінің үлкен түбірін тауып, Қазақстанның гидроэнергетикалық қорының қанша миллиард кВт · сағ құрайтынын білетін боласыңдар.

Шардара СЭС-і

921. а) $5x + 2 = 5p$ теңдеуінің түбірі –10-нан кем; ә) $7(x - p) = 3$ теңдеуінің түбірі 5-тен кем емес болатындай p-ның барлық мәндерін табыңдар.

922. Теңдеуді шешіңдер:

а) $\dfrac{5x^2 - x}{x} = 1$; б) $\dfrac{5}{2 + 3x} + \dfrac{3x}{3x - 2} = \dfrac{8}{9x^2 - 4}$.

ә) $\dfrac{x^2 - x}{x - 3} = \dfrac{6}{x - 3}$;

923. x-тің қандай мәндерінде: а) $\sqrt{-6 - 2x}$; ә) $\sqrt{-x^2 + x + 20}$; б) $\dfrac{\sqrt{x + 2}}{x^2 + 6x + 5}$ өрнегінің мәні бар болады?

924. Теңдеудің түбірлерін табыңдар:

а) $y^4 - 2y^2 = 0$; б) $x^3 + x^2 - 2x - 2 = 0$;

ә) $t^3 + 11t^2 + 28t = 0$; в) $k^3 + k^2 - 16k - 16 = 0$.

925. Айырымы 2-ге, көбейтіндісі 195-ке тең болатын екі санды табыңдар.

926. а) Бірінші егістіктің ауданы 47 га, екіншісінікі – 39 га. Осы егістіктерден барлығы 2220 ц қара бидай жиналды. Егер екінші егістіктегі қара бидай өнімділігі біріншідегіден 4 ц/га-ға артық болса, екінші егістіктегі өнімділік қандай болғаны?

ә) Жұмысшылар бригадасы ағаш кесуден күнделікті тапсырманы 5 $м^3$-ге асыра орындап, бір апталық (6 жұмыс күндік) тапсырманы 5 күнде орындады. Бір күндік жоспарлы тапсырманы табыңдар.

927. Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер:

а) $\begin{cases} x^2 + x - 6 < 0, \\ -x^2 + 2x - 3 < 0; \end{cases}$ ә) $\begin{cases} x^2 + x - 6 \geq 0, \\ x^2 - 5x - 24 \leq 0. \end{cases}$

928. Теңдеуді шешіңдер:

а) $x^4 - 4x^2 - 45 = 0$; б) $(x^2 - 9)^2 - 19(x^2 - 9) + 48 = 0$;

ә) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$; в) $(x^2 - 6x)^2 - 2(x - 3)^2 = 81$.

929. Теңсіздікті шешіңдер:

а) $(x^2 + 16)(x^2 - 9) \geq 0$; б) $|x^2 - 16|(x^2 - 4x + 3) \leq 0$;

ә) $\dfrac{(5x - 6)(x + 8)}{x - 2} \leq 0$; в) $(x - 3)^2(x^2 - 7x - 8) \geq 0$.

930. Теңдеулердің графиктерін пайдаланып, теңдеулер жүйесінің шешімі бар ма, бар болса, шешімі нешеу екенін анықтаңдар:

а) $\begin{cases} 2x + y = 1, \\ 2x + y = 5; \end{cases}$ ә) $\begin{cases} y = \dfrac{2}{x}, \\ y = x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ x - 4 = 0. \end{cases}$

931. Теңдеулер жүйесін шешіңдер:

а) $\begin{cases} y = 3x + 1, \\ x^2 - 2xy + y^2 = 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y} = \dfrac{13}{6}, \\ x + y = 5. \end{cases}$

ә) $\begin{cases} (x - y)xy = 30, \\ (x + y)xy = 120; \end{cases}$

932. а) $y \leq 2x + 1$; ә) $y \leq 2x - x^2$; б) $x^2 + y^2 < 9$ теңсіздігінің шешімдер жиынын координаталар жазықтығына кескіндеңдер.

933. а) $\begin{cases} -2 < x < 2, \\ -1 < y < 3; \end{cases}$ ә) $\begin{cases} x^2 + y^2 < 4, \\ y < |x|; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y > (x - 2)^2 + 1, \\ (x - 2)^2 + (y - 1)^2 < 25 \end{cases}$

теңсіздіктер жүйесінің неше бүтін санды шешімі бар?

934. Арақашықтығы 168 км болатын қаладан ауылға бір мезгілде екі мәшине шықты. Жүк мәшинесінің жылдамдығы 16 км/сағ-қа кем екендігі және жолда жеңіл мәшине 1 сағат, жүк мәшинесі 20 минут тоқтап тұрғаны белгілі болды. Олар ауылға бір мезгілде жетті. Әр мәшиненің жылдамдығын табыңдар.

935. Екі комбайн егінді 12 күнде жинап бітіреді. Егер бірінші комбайн егіннің жартысын жинап, ал қалған бөлігін екінші комбайн жинаса, онда олар 25 күн жұмыс істеген болар еді. Олардың әрқайсысы осы жұмысты жеке орындап, неше күнде бітіреді?

В деңгейі

936. $(a^2-1)x = a-1$ теңдеуін x айнымалысына қатысты шешіңдер.

937. а) $\begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y = 3, \\ 4x + 3y = c \end{cases}$ теңдеулер жүйесінің шешімі болмайтындай;

ә) $\begin{cases} 3x - 4y = 1, \\ cx + 2y = 12 \end{cases}$ теңдеулер жүйесінің тек бір ғана шешімі болатындай;

б) $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y = 4, \\ \frac{1}{6}x + \frac{1}{4}y = c \end{cases}$ теңдеулер жүйесінің шексіз көп шешімі болатындай c-ның мәнін табыңдар.

938. c-ның қандай мәндерінде $3x^2 + 2x + c = 0$ теңдеуі түбірлерінің қатынасы 2 : 3 болады?

939. $x^2 + px + q = 0$ квадрат теңдеуінің түбірлері болатын p мен q коэффициенттерін табыңдар. Сол теңдеулерді жазыңдар.

940. а) $(2x^2 + 2x - 5)(x - 5) = (3x^2 - 4x + 2)(x - 5)$; ә) $x(x-2)(x-4) \times$ $\times (x-6) = 33$; б) $4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 12\left(x + \frac{1}{x}\right) = 47$ теңдеуі түбірлерінің көбейтіндісін табыңдар.

941. Теңсіздікті шешіңдер:

а) $x^2 + \sqrt{x^2} < 0{,}75$; ә) $\frac{(x-1)^3(x+2)^4(x-5)}{(2x+1)(x-4)^2} \geq 0$.

942. Теңбүйірлі үшбұрыштың табаны 18 см-ге тең, ал периметрі 40 см-ден артық емес. Осы үшбұрыштың бүйір қабырғасының ұзындығы қандай болуы мүмкін?

943. Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер:

а) $\begin{cases} |x+1| \geq 3, \\ |3-x| < 4; \end{cases}$ ә) $\begin{cases} \dfrac{8-7x+2x^2}{2+x^2} > 1, \\ x^3 - x^2 - 6x \leq 0. \end{cases}$

944. Теңдеулер жүйесін шешіңдер:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 100, \\ x^2 - 49y^2 = 0; \end{cases}$ ә) $\begin{cases} x^2 - 5y^2 = -1, \\ 3x + 7y^2 = 1. \end{cases}$

945. Теңсіздіктер жүйесінің шешімдер жиынын координаталар жазықтығында кескіндеңдер:

а) $\begin{cases} x^2 - y^2 \geq 0, \\ |x| \leq 2; \end{cases}$ ә) $\begin{cases} y > \dfrac{4}{x}, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$

C деңгейі

946. a-ның қандай мәндерінде $(a^2 - 3a + 2)x = |a| - 1$ теңдеуінің шешімі кез келген сан болатынын табыңдар.

947. Түбірлерінің біреуі: а) $4 + \sqrt{3}$; ә) $3 - \sqrt{5}$ болатын бүтін коэффициентті келтірілген квадрат теңдеу құрыңдар.

948. Түбірлері квадраттарының қосындысы 10-ға тең болатын $x^2 + 4x + c = 0$ теңдеуін шешіңдер.

949. Теңдеуді шешіңдер:

а) $\dfrac{1}{x^2 - 2x + 2} + \dfrac{2}{x^2 - 2x + 3} = \dfrac{6}{x^2 - 2x + 4}$;

ә) $20\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^2 - 5\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^2 + 48\dfrac{x^2-4}{x^2-1} = 0$.

950. Теңсіздікті шешіңдер:

а) $\dfrac{9}{x^2 - 2x} \geq x^2 - 2x$; ә) $\left|\dfrac{x-5}{3x^2 - 5x - 2}\right| \geq 1$.

951. Ағысының жылдамдығы 5 км/сағ болатын өзенде оның ағысы бағытымен A, B, C айлақтары орналасқан, B – AC-ның ортасы. B айлағынан бір мезгілде C айлағына қарай сал, A айлағына қарай катер жүзіп шықты. Катердің меншікті жылдамдығы

v км/сағ. Катер A айлағына жетісімен кері бұрылып, C айлағына қарай жүзді. Катер C айлағына салдан кешірек жететіндей v-ның мәнін табыңдар.

952. a-ның қандай мәндерінде келесі теңдеулер жүйесінің:

а) $\begin{cases} y + x^2 = a, \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$ 3 шешімі бар; ә) $\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ |x| + |y| = 2 \end{cases}$ 4 шешімі бар?

953. Теңдеулер жүйесін шешіңдер:

а) $\begin{cases} x + y = 12, \\ \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x} = 18; \end{cases}$ ә) $\begin{cases} x + y + xy = 5, \\ x^2 + y^2 + xy = 7. \end{cases}$

954. Барлық нүктелерінің координаталары $\begin{cases} |x| + |y| \le 4, \\ |y| \le 2 \end{cases}$ теңсіздіктер жүйесінің шешімі болатын фигураның ауданын табыңдар.

Тізбектер

А деңгейі

955. n-ші мүшесінің формуласымен берілген (a_n) тізбегінің алғашқы төрт мүшесін жазыңдар:

а) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{5n - 2}$; б) $a_n = (-1)^n n^2$;

ә) $a_n = 2^n + (-2)^n$; в) $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}(n+1)}{n!}$.

956. а) 5-ке бөлінетін натурал жұп сандар; ә) 3-ке бөлінетін натурал тақ сандар; б) 3 пен 4-ке еселік натурал сандар; в) 9-ға бөлгенде қалдығы 8-ге тең болатын натурал сандар тізбегінің төрт мүшесін жазыңдар.

957. 956-есепті шешкенде шыққан тізбектердің әрқайсысының n-ші мүшесінің формуласын құрыңдар. Осы тізбектер арифметикалық прогрессия бола ма?

958. (c_n) тізбегі $c_n = 3^n$ формуласымен берілген. $c_{n+1} + c_{n+2} = 12c_n$ теңдігі ақиқат па, анықтаңдар.

959. (y_n) тізбегі $y_n = n^2 + 8n + 42$ формуласымен берілген. а) 51; ә) 98 саны осы тізбектің мүшесі бола ма?

960. $y_n = -n^2 - 2n + 3$ формуласымен берілген (y_n) тізбегінің қанша оң таңбалы мүшесі бар?

961. Егер $3a_3 + 4a_{10} = 140$ болса, (a_n) арифметикалық прогрессиясының жетінші мүшесін табыңдар.

962. x айнымалысының қандай мәнінде $x + 8$, $x + 2$, $3x - 2$ сандары: а) арифметикалық прогрессияның; ә) геометриялық прогрессияның тізбектес мүшелері болады?

963. Әртүрлі a, b, c үш саны көрсетілген ретпен геометриялық прогрессия мүшелерін құрайды. $a - b$, $b - c$, $a - c$ сандары көрсетілген ретпен арифметикалық прогрессия мүшелерін құрайды. Геометриялық прогрессияның еселігін табыңдар.

964. Маман бірнеше күнде 50 000 теңге тапты. Бірінші күні – 9000 теңге, ал әрбір келесі күні 50 теңге артық тауып отырды. Ол осы соманы неше күнде тапқан?

965. Есептеңдер: $100 + 96 + 92 + \ldots + 8 + 4 - 98 - 94 - 90 - \ldots - 6 - 2$.

966. Көпестің күміс тиындар салынған 14 әмияны бар, тиындардың салмағы айырымы 4-ке тең арифметикалық прогрессиямен өседі. Соңғы әмиянның салмағы 59 лот. Барлық тиынның салмағы қандай? (Есеп Л. Ф. Магницкийдің «Арифметика» кітабынан алынған; лот – ежелгі орыс өлшемі, 1 лот 12,8 грамға тең.)

967. 2,5 пен 20-ның арасына осы сандармен бірге геометриялық прогрессия құрайтындай етіп екі сан қойыңдар.

968. 7 кісінің 7 мысығы бар. Әрбір мысық 7 тышқан жейді; әрбір тышқан 7 арпа масағын жейді; әрбір масақтан 7 өлшем астық шығады. Осы мысықтар қанша өлшем астықты құтқарады (б.з.д. 2000 жыл шамасында Райнд папирусында жазылған ежелгі есеп)?

969. Егер $x_3 = 9$, $x_6 = 243$ болса, (x_n) геометриялық прогрессиясының алғашқы бес мүшесінің қосындысын табыңдар.

970. Геометриялық прогрессияның 6 мүшесі бар. Егер прогрессияның бастапқы үш мүшесінің қосындысы 28-ге, ал соңғы үш мүшесінің қосындысы 3,5-ке тең болса, оның бірінші мүшесін табыңдар.

971. Геометриялық прогрессияның бірінші мүшесі оң таңбалы. Еселігінің қандай мәнінде прогрессияның алғашқы үш мүшесінің қосындысы ең кіші болады?

972. Өспелі арифметикалық прогрессия мүшелерін құрайтын үш санның қосындысы 24-ке тең. Егер үшінші санды 4-ке арттырса, онда шыққан үш сан геометриялық прогрессия мүшелерін құрайды. Бастапқы үш санды табыңдар.

973. Шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның алғашқы үш мүшесінің қосындысы 19-ға тең. Егер осы прогрессияның қосындысы 27-ге тең болса, оның бесінші мүшесін табыңдар.

B деңгейі

974. (a_n) тізбегі n-ші мүшесінің формуласымен берілген. Тізбектің: а) $a_n = -n^2 + 10n - 21$ болса, ең үлкен мүшесін; ә) $a_n = n^2 - 16n + 44$ болса, ең кіші мүшесін табыңдар.

975. Егер $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{a+c}$, $\frac{1}{a+b}$ сандары арифметикалық прогрессия мүшелерін құраса, онда a^2, b^2, c^2 сандары да арифметикалық прогрессия мүшелерін құрайтынын дәлелдеңдер.

976. Периметрі 36 см-ге тең үшбұрыштың қабырғаларының ұзындықтары арифметикалық прогрессия мүшелерін құрайды. Оның ең болмағанда бір қабырғасының ұзындығын табуға бола ма? Үшбұрыш қабырғаларының ұзындықтары сантиметрмен өрнектелетін қандай бүтін мәндерді қабылдай алады?

977. Сол жағында арифметикалық прогрессия мүшелерінің қосындысы жазылған $1 + 4 + 7 + \ldots + x = 117$ теңдеуін шешіңдер.

978. Алтыншы мүшесі 8-ге тең болатын арифметикалық прогрессия айырымының қандай мәнінде үшінші және оныншы мүшелерінің көбейтіндісі ең үлкен болады?

C деңгейі

979. (a_n) тізбегі рекуррентті түрде берілген, $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 5a_n + 2$. $a_n = \frac{1}{2}(5^n - 1)$ болатынын дәлелдеңдер.

980. Цифрлары арифметикалық прогрессия құрайтын және 45-ке бөлінетін үштаңбалы санды табыңдар.

981. Арифметикалық прогрессияның бастапқы n мүшесінің қосындысы $S_n = 5n - n^2$ формуласымен есептеледі. Осы прогрессияның сегізінші мүшесін табыңдар.

982. x_1 мен x_2 сандары $-x^2-7x+a=0$ теңдеуінің түбірлері, x_3 пен x_4 сандары $-x^2+5x+b=0$ теңдеуінің түбірлері және x_1, x_2, x_3, x_4 сандары тұрған ретімен арифметикалық прогрессия мүшелерін құрайды. a мен b-ны табыңдар.

983. Үш сан геометриялық прогрессия құрайды. Егер үшінші саннан 4-ті азайтса, онда сандар арифметикалық прогрессия мүшелерін құрайтын болады. Егер сол арифметикалық прогрессияның екінші мен үшінші мүшелерінен 1-ді азайтса, онда тағы геометриялық прогрессия пайда болады. Бастапқы сандарды табыңдар.

Тригонометрия

А деңгейі

984. Шкив $\frac{\pi}{9}$ рад/с бұрыштық жылдамдықпен айналады. Ол қанша уақытта толық айналым жасайды?

985. Радиусы 12 см шеңбердің ұзындығы 2,4 дм-ге тең доғасының радиандық өлшемін табыңдар.

986. Сағаттың минуттық тілінің ұзындығы 0,6 м. Оның ұшының: а) 15 минутта; ә) 50 минутта сызатын доғасының ұзындығы қандай?

987. Дұрыс: а) бесбұрыштың; ә) онбұрыштың бұрышының радиандық өлшемін табыңдар.

988. Бір бұрыштың тангенсі мен котангенсі, сәйкесінше: а) $2+\sqrt{3}$ және $2-\sqrt{3}$; ә) $1+\sqrt{2}$ және $1-\sqrt{2}$ мәндеріне тең болуы мүмкін бе?

989. Өрнектің мәнін табыңдар: $\sin 225° \cdot \cos 120° \cdot \operatorname{tg} 330° \cdot \operatorname{ctg} 240°$.

990. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

а) $\dfrac{\sin^3\alpha-\cos^3\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}-\sin\alpha\cdot\cos\alpha=1-\sin 2\alpha$;

ә) $(\sin^2\alpha+1)^2-(\sin^2\alpha-1)^2=4-4\cos^2\alpha$;

б) $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=2\operatorname{ctg}\alpha$;

в) $\dfrac{\sin(\pi-\alpha)+\sin\dfrac{\alpha}{2}}{1-\cos(\pi-\alpha)+\cos\dfrac{\alpha}{2}}=\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

991. $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$-ның мәні: а) $\frac{2}{3}$-ге; ә) $\frac{3}{7}$-ке тең болатындай α бұрышы бар бола ма?

992. $\left(\frac{2}{\sin\alpha + \cos\alpha}\right)^2$ өрнегінің ең кіші мәнін табыңдар, мұндағы $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

993. Егер: а) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin\beta = \frac{5}{13}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ болса, $\sin(\alpha + \beta)$; ә) $\cos\alpha = -\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\cos\beta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $0 < \alpha < \pi$, $0 < \beta < \pi$ болса, $\cos(\alpha + \beta)$ өрнегінің мәнін табыңдар.

994. Тригонометриялық функциялар мәндерінің кестесін қолданбай: а) $\sin 165°$; ә) $\cos^2 12° - \sin 42° \sin 18°$ өрнегінің мәнін есептеңдер.

995. Егер: а) $\operatorname{ctg} 2x = a$ болса, $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$ өрнегінің; ә) $\sin 2x = b$ болса, $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$ өрнегінің мәнін табыңдар.

996. Теңдік ақиқат па:

а) $\cos 160° - \cos 140° = -\sin 10°$; б) $\sin\frac{2\pi}{5} - \sin\frac{3\pi}{5} = 0$;

ә) $\cos 160° + \cos 80° = -\cos 40°$; в) $\sin 130° + \sin 110° = \cos 10°$?

997. Өрнекті ықшамдаңдар:

а) $\frac{\cos 6x - \sin 6x \cdot \operatorname{ctg} 3x}{\cos 6x + \sin 6x \cdot \operatorname{tg} 3x}$; ә) $\frac{\cos 10x \cdot \operatorname{tg} 5x - \sin 10x}{\cos 10x \cdot \operatorname{ctg} 5x + \sin 10x}$.

998. $\sin^2 5 + \sin^2 2 + \cos 7 \cos 3 = 1$ болатынын дәлелдеңдер.

999. Егер: а) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \sqrt{2}$ болса, $\operatorname{tg} x$; ә) $\operatorname{tg} x = -2\sqrt{2}$ болса, $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ қандай мәндерді қабылдай алады?

В деңгейі

1000. а) $\sin^2 x - 4\cos x + 4 \le 0$; ә) $\cos^2 x + 5\sin x - 5 \ge 0$ теңсіздігі дұрыс болатындай x-тің барлық мәндерін табыңдар.

1001. Өрнектің мәнін табыңдар: а) $\sin\frac{13\pi}{12}$; ә) $\cos\frac{23\pi}{12}$.

1002. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = a$ болса, $\sin^2 2x$-ті табыңдар.

1003. Тікбұрышты үшбұрышқа іштей шеңбер сызылған және жанасу нүктесі катеттердің бірін 6 см және 8 см кесінділерге бөледі. Осы үшбұрыштың сүйір бұрыштарының тангенсін табыңдар.

1004. $\cos^3 x = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x$ болатынын дәлелдеңдер.

С деңгейі

1005. Ромбтың үлкен диагоналі мен қабырғасының арасындағы бұрыштың тангенсі $(2 - \sqrt{3})$-ке тең. Ромбтың бұрыштарын табыңдар.

1006. Тригонометриялық функциялар мәндерінің кестесін пайдаланбастан: а) $\sin^4 \frac{\pi}{8} + \cos^4 \frac{\pi}{8}$; ә) $\sin^6 \frac{3\pi}{8} + \cos^6 \frac{3\pi}{8}$ мәндерін табыңдар.

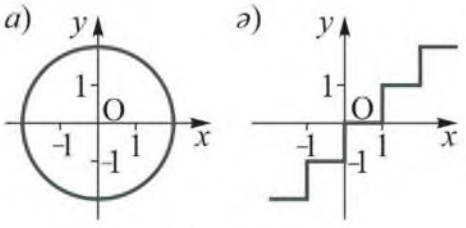
1007. Егер: а) $0 < x < \frac{\pi}{4}$ болса, $\operatorname{tg} 2x > 2\operatorname{tg} x$; ә) $0 < x < \pi$ болса, $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} \geq 1 + \operatorname{ctg} x$ болатынын дәлелдеңдер.

Функциялар

А деңгейі

1008. а) Шеңбердің C ұзындығы оның R радиусының ұзындығына тәуелді функция; ә) дөңгелектің S ауданы – оның радиусы ұзындығының функциясы; б) қабырғасы 1-ге тең дұрыс көпбұрыштың ауданы оның қабырғасының n санына тәуелді функция болатынын өрнектейтін формуланы жазыңдар.

1009. 81-суретте кескінделген сызық функцияның графигі бола ма? Жауабын түсіндіріңдер.



81-сурет

1010. $x + y = 0$, $y + 4 = 0$, $x + 4 = 0$, $y - x = 4$ теңдеулерінің қайсысының графигі Oy осіне параллель түзу болады? Осы тәуелділік функция бола ма?

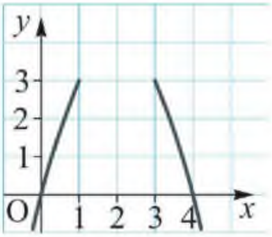
1011. $y = -7x + 2$, $y = 5x - 3$, $y = 5$ функцияларының қайсысының графигі Ox осінің оң бағытымен сүйір бұрыш жасайды?

1012. $y = 8x - 2$ сызықтық функциясы үшін графигі: а) осы функцияның графигіне параллель болатын; ә) осы функцияның графигімен қиылысатын қандай да бір функцияны жазыңдар.

1013. Графигі Ox осінің оң бағытымен $135°$ бұрыш жасайтын және $(4; -2)$ нүктесінен өтетін түзудің теңдеуін жазыңдар.

1014. Сызықтық функцияның графигі $A(-2; 3)$ және $B(4; -3)$ нүктелерінен өтеді. $C(4b; 4 - b)$ нүктесі осы графикке тиісті болатындай b-ның барлық мәндерін табыңдар.

1015. $y = 4x + 5$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = -\dfrac{4}{x}$, $y = -8x + 2$, $y = -\sqrt{x}$ функцияларының арасынан: а) өспелі функцияларды; ә) анықталу облысының барлық нүктелерінде кемімелі болатын функцияларды көрсетіңдер.



82-сурет

1016. а) $y = x^2 - 3$; ә) $y = x^2 - 3x$; б) $y = (x - 3)^2$; в) $y = (x - 3)^2 + 1$ параболаларының қайсысының төбесі абсцисса осіне тиісті?

1017. а) $y = x^2 - 4x + 8$; ә) $y = -x^2 + 6x + 7$ параболасы төбесінің координаталары мен функцияның мәндер жиынын табыңдар.

1018. 82-суретте бір бөлігі бейнеленген парабола төбесінің координаталарын табыңдар.

1019. Функцияның анықталу облысын табыңдар:

а) $y = \sqrt{1 - x}$; б) $y = \sqrt{\dfrac{3 - x}{x^2}}$;

ә) $y = \dfrac{7}{x^2 - 16}$; в) $y = \dfrac{\sqrt{25 - x^2}}{x^2 - x - 12}$.

1020. а) $y = 2x - 1$; ә) $y = -\dfrac{8}{x}$; б) $y = \sqrt{x + 4}$; в) $y = x^2 - 2x + 3$ формуласымен берілген функцияның анықталу облысы мен мәндер жиынын тауып, графигін салыңдар.

Графикті пайдаланып, функцияның өсу аралығын көрсетіңдер.

1021. *ABCDF* сынық сызығы $y = f(x)$ функциясының графигі (83-сурет). Функцияның:

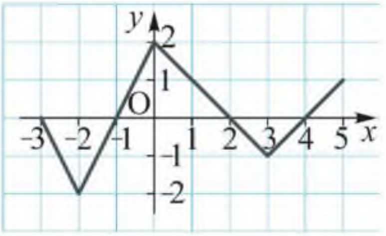
а) анықталу облысын;

ә) мәндер жиынын;

б) нөлдерін;

в) кему аралықтарын;

г) $y < 0$ болатын x-тің мәндерін табыңдар.



83-сурет

1022. Теңдеулер жүйесін графиктік тәсілмен шешіңдер:

а) $\begin{cases} y + x = 6, \\ y = |x^2 - 8x + 12|; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y + |x| = 2, \\ y = x^2 + 6x + 8. \end{cases}$

ә) $\begin{cases} xy = 4, \\ y = \sqrt{x+2}; \end{cases}$

B деңгейі

1023. а) c айнымалысы – тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасы, оның сүйір бұрыштарының бірі 15°-қа тең. Осы үшбұрыштың ауданын c аргументінің функциясы түрінде өрнектеңдер.

ә) Қырнаушыға жоспар бойынша бір ауысымда 60 бөлшек дайындау керек болған. Ол жоспарды x %-ға артық орындады. Қырнаушы дайындаған y бөлшектің x-қа тәуелділігін өрнектейтін формула құрастырыңдар. Сол формула бойынша: 1) егер $x = 10$ болса, y-тің мәнін; 2) егер $y = 72$ болса, x-тің мәнін табыңдар.

1024. k-ның қандай мәнінде $y = kx + 9$ және $y = 2x - 5$ функцияларының графиктері абсцисса осінде жататын нүктеде қиылысады?

1025. а) Ең кіші мәні 1-ге тең болатын $y = x^2 - 6x + c$ функциясының; ә) ең үлкен мәні 2-ге тең болатын $y = -x^2 + 4x + c$ функциясының графигін салыңдар.

1026. а) $y = x^2 - |x| + 2$; ә) $y = \dfrac{(2x-1)^3 - (2x+1)^3}{x}$ функциясы тақ па әлде жұп па, соны зерттеңдер.

1027. а) $y = x^2 - \frac{x}{|x|}$; ә) $y = x - \sqrt{(x+3)^2}$; б) $y = |x - |x - 4||$ формуласымен берілген функцияның графигін салыңдар.

1028. Есепті функциялардың графиктерін пайдаланып шешіңдер. Екінші сан бірінші санның квадратынан артық. Бірінші сан мен 3-тің айырымының және екінші сан мен 4-тің айырымының квадраттарының қосындысы 4-тен кем болатын екі бүтін оң санды табыңдар.

С деңгейі

1029. Айнымалы r – тікбұрышты трапецияға іштей сызылған шеңбердің радиусы, трапецияның сүйір бұрышы 30°-қа тең. Осы трапецияның ауданын r аргументінің функциясы түрінде өрнектеңдер.

1030. m-нің қандай мәнінде координаталар басы: а) $y = x^2 - 6x + m$; ә) $y = x^2 + 2mx + 13$ параболасының басынан 5 бірлік қашықтықта болатынын зерттеңдер.

1031. а) $y = \frac{x^4 - 3x^2 - 4}{x^2 - 4}$;

ә) $y = \begin{cases} \text{егер } x < -2 \text{ немесе } x > 2 \text{ болса, } y = -1; \\ \text{егер } -2 \le x \le 2 \text{ болса, } y = -x^2 + 3 \end{cases}$ формуласымен берілген функцияның графигін салыңдар.

1032. Оң сандар жиынында: а) $y = x^3 + x$ өспелі; ә) $y = \frac{1}{x} - x$ кемімелі функция болатынын дәлелдеңдер.

Статистика, комбинаторика және ықтималдық теориясы элементтері

А деңгейі

1033. Орындыққа 4 оқушыны неше тәсілмен отырғызуға болады?

1034. 1, 2, 3, 4, 5 цифрларынан қанша бестаңбалы сан құрастыруға болады?

1035. Үшеуінің ешқайсысы бір түзуде жатпайтын берілген 5 нүкте арқылы неше түзу жүргізуге болады?

1036. Әртүрлі түсті жеті матадан қанша үш түсті көйлек тігуге болады?

1037. Баскетбол ойнау үшін 10 оқушыдан екі команданы неше тәсілмен құруға болады?

1038. Тапсырма орындауға 20 сарбаздан 4-еуін неше тәсілмен таңдап алуға болады?

1039. 4 кезеңнен тұратын 500 м, 400 м, 200 м және 100 м эстафетаға қатысу үшін 7 жүйріктен неше тәсілмен команда құруға болады?

1040. КХЛ (Континенталдық хоккей лигасы) чемпионатына 12 команда қатысады, оның 8-і келесі жарыс кезеңіне өтеді. Олардың арасында бастапқы сегіз орынды бөлудің қанша нұсқасы бар?

1041. Орыс ақыны А. С. Пушкиннің сөздігінде 22000 әртүрлі сөз бар, оның 6000-ын ол өзінің шығармаларында 1-ден артық рет қолданған. Осы сөздіктен кездейсоқ алынған сөзді оның тек бір рет қолдануының ықтималдығы қандай?

1042. Күнтізбенің кездейсоқ ашылған парағы кібісе емес жылдың 30-күніне сәйкес келуінің ықтималдығы қандай?

1043. «Функция» сөзінің әріптері жазылған карточканы араластырды. Соларды бір-бірлеп алып, қатарлап қойғанда қайтадан «функция» сөзінің шығу ықтималдығы қандай?

1044. Сауалнама жүргізілген 200 оқушының 106-сы спортпен, 84-і музыкамен және 30-ы спортпен де, музыкамен де айналысатыны, ал қалғандарының математикаға қызығушылығы бар екені анықталды. Кездейсоқ алынған оқушының математикаға қызығушылығы бар екендігінің ықтималдығы қандай?

B деңгейі

1045. Биылғы оқу жылында алгебрадан БЖБ-дан алған барлық бағаларыңды еске түсіріп, сол мәліметтердің дисперсиясын табыңдар.

1046. Барлық элементтері әртүрлі жиынның элементтерін алмастыру саны 10 000-нан артық болмаса, жиында ең көп дегенде неше элемент бар?

1047. Теңбүйірлі $ABCD$ трапециясының BC жоғарғы табаны мен BH биіктігі 1 дм-ге, A бұрышы 15°-қа тең. Осы трапецияның кездейсоқ алынған нүктесінің ABH үшбұрышына тиісті болуының ықтималдығы $\frac{3+\sqrt{3}}{12}$-ге тең болатынын дәлелдеңдер.

С деңгейі

1048. $\{-(\sqrt{7}+5);\ \sqrt{7}-5;\ -1;\ 3\}$ жиынынан кездейсоқ алынған санның $x^4+8x^3-5x^2-66x-54$ көпмүшесінің түбірі болуының ықтималдығы қандай?

1049. Сыныпта 12 ұл және 8 қыз бар. Кезекші болуға олардан кездейсоқ төртеуі таңдап алынады. Олардың екі ұл, екі қыз болуының ықтималдығы қандай? Жауабын 0,1-ге дейінгі дәлдікпен жазыңдар.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

1050. 1А) Есептеңдер: а) $\frac{5\cdot(3\cdot7^9-19\cdot7^8)}{7^{10}+3\cdot7^9}$; ә) $\frac{(\sqrt{7}+\sqrt{2})^2-2\sqrt{14}}{(\sqrt{10}-1)(\sqrt{10}+1)}$.

2А) Теңдеулер жүйесін шешіңдер: $\begin{cases} x^2-y^2=7, \\ x^2+y^2=25. \end{cases}$

3А) 8-ге еселік болатын және 142-ден аспайтын барлық натурал сандардың қосындысын табыңдар.

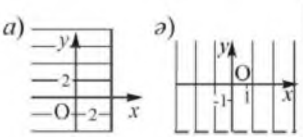
4В) $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha$ өрнегінің ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңдар.

5С) Барлық нүктесінің координаталары $\begin{cases} y\geq -|x+1|-1; \\ x^2+2x+2y+y^2\leq 7 \end{cases}$ теңсіздіктер жүйесінің шешімі болатын фигураның ауданын табыңдар.

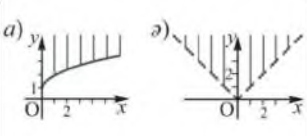
ЖАУАПТАР МЕН НҰСҚАУЛАР

1. ә), б). **2.** а) 40,8; ә) 7; б) 9; в) 143. **3.** ә) $-3\sqrt{2} < -2\sqrt{3}$; б) $0,6\sqrt{0,4} > 0,8\sqrt{0,2}$. **4.** б) $2\sqrt{5m}$; в) $2\sqrt{10n}$. **5.** а), ә) – өтпейді. **6.** а) Қияды; ә) жоқ. **7.** а) (0,81; 0,9); ә) (0,64; 0,8). **8.** а), ә), г), ғ). **9.** а) 0; 2,5; ә) 0; 25; б) ±0,7; в) ±10. **10.** Болады. **11.** а) 8; –3; ә) 6; 7; б) –2; в) 3. **12.** ә) $x_1 + x_2 = -12$, $x_1 \cdot x_2 = 7$; б) $x_1 + x_2 = -1$, $x_1 \cdot x_2 = -2$. **13.** –5, $b = 12$, $x^2 + 12x + 35 = (x + 7)(x + 5)$. **14.** ә) –2 және 1; б) 0. **15.** а) 15 және 16; ә) 5 және 9. **16.** а) 320 м; ә) 12 см, 16 см, 20 см. **17.** а) 8 см; ә) 10 см. **18.** б). **19.** а) (2; 4); ә) (3; 16). **20.** а) 1; ә) 1. **21.** а). **22.** а) [–8; 8]; ә) $(-\infty; -4]\cup[4; +\infty)$. **23.** а) $\frac{2}{5}$; ә) $\left(-\infty; \frac{2}{5}\right)\cup\left(\frac{2}{5}; +\infty\right)$. **24.** а) $(-\infty; -3]\cup[3; +\infty)$; ә) $(-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$; б) $(-\infty; 2)\cup(2; +\infty)$; в) шешімі жоқ. **25.** а) [1; 3]; ә) $(-\infty; 1)\cup(3; +\infty)$. **26.** а) (–1; 4); ә) $(-\infty; -3]\cup[2; +\infty)$; б) $(-\infty; -3)\cup(-3; +\infty)$; в) {2}. **27.** а) [–5; 5]; ә) 3. **28.** а), ә) – болмайды. **29.** $\left(2\sqrt{5} + \sqrt{\frac{1}{5}}\right) > \left(2\sqrt{7} - \sqrt{\frac{1}{7}}\right)$. **30.** $(\sqrt{29} - \sqrt{17}) > (\sqrt{34} - \sqrt{21})$. **31.** а) 1; ә) $\frac{4}{5}$; б) 32; в) 5. **32.** а) $\frac{a^2 + 1}{2|a|}$; ә) $\left|\frac{b^2 - 1}{2b}\right|$. **33.** а) 2; ә) –1; б) ±5; в) 5; г) ±1; ±3; ғ) –0,5; 1,5. **34.** Виет теоремасын қолданыңдар. **35.** а) $[-3; +\infty)$; ә) $(-\infty; 4]$; б) $[5; +\infty)$; в) $(-\infty; -2]$. **36.** а) $\left(\frac{6}{19}; -1\frac{9}{19}\right)$; ә) $\left(-\frac{2}{3}; -3\frac{1}{9}\right)$. **37.** 95 км; ≈ 40 км. **38.** Ақиқат емес. **39.** а) $y = -x^2 - 4x - 5$; ә) $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2\frac{1}{2}$. **40.** 9 см. «Тікбұрышты үшбұрыштың катеті гипотенуза мен оның гипотенузадағы проекциясының орта пропорционалы болады» қасиетін пайдаланып, теңдеу құрыңдар. **41.** 6 см, 8 см. Үшбұрышқа іштей сызылған шеңбердің радиусын x см деп белгілеп, шеңберге бір нүктеден жүргізілген жанамаларының қасиеті мен Пифагор теоремасын пайдаланып, теңдеу құрыңдар. **42.** 3 сағ және 6 сағ. **43.** а) $\left[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right]$; ә) $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. **44.** а) (1; 1); ә) (4; 2). **45.** 4. Әрбір бөлшектің бөлімін иррационалдықтан арылтыңдар. **46.** а) 2; ә) $2\sqrt{7}$; б) 33; в) 253. Түбір астындағы өрнекті екі санның қосындысының немесе айырымының квадраты түріне келтіріңдер. **47.** 4,4. Көрсетілген өрнекті бөлшек түрінде жазып, Виет теоремасын қолданыңдар ($x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$ болатынын ескеріңдер). **48.** а) 0; ±7; ә) ±5; б) –3; –2; в) –5. **49.** а) 1; ә) 1; 2; $\frac{-7 \pm \sqrt{17}}{4}$; б) –1; 7; в) ±7,5. **50.** 5 есе. Тауға көтерілетін жолдың ұзындығын x м деп, ал таудан түсетін жолды y м деп белгілеп, $\frac{y}{x}$ қатынасын табыңдар. Ол үшін велосипедшінің осы аралықтардағы жылдамдықтарын x пен y арқылы өрнектеп, қайтар жолға 16 минут жұмсағанын ескере отырып, теңдеу құрыңдар. **51.** а) $(-\infty; -2] \cup [-1; +\infty)$; ә) (1; 3); б) $(-1; 0) \cup (0; 3)$; в) $\left[-\frac{1}{2}; 2\right)$. **52.** а) [–4; –2); ә) (0; 4); б) (–1; 0]. **53.** ә), г). **54.** (1; 1), $\left(\frac{5}{8}; 0\right)$. **55.** Мысалы, а) (3; –2); ә) (18; 4); б) $(5\sqrt{5}; 2\sqrt{5} - 3{,}2)$. **56.** Мысалы, а) (2; 6); б) (–2; –2); в) (2; –3); ғ) $\left(\frac{1}{9}; \frac{1}{3}\right)$. **57.** а) x-тің ондай мәндері жоқ; ә) –3 немесе 14. **58.** $y^2 - x^2 = 2$, мұндағы y дм – гипотенузаның ұзындығы, x дм – катеттің ұзындығы; а) және ә) – бола алады. **59.** 27. Екітаңбалы санды $10a + b$ түрінде жазып, мұндағы a мен b – оның цифрлары, екі айнымалысы бар теңдеу құрыңдар. **60.** 16 м. **61.** Берілген теңдеулердің графиктері: а) парабола $y = -x^2 + 5$; ә) гипербола $y = \frac{15}{x}$; б) түзу $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$; в) центрі (0; 0) нүктесінде, радиусы 5 бірлікке тең шеңбер. **62.** Мысалы, а) (1; 1); ә) (3; 2); б) (3; 3). **63.** а) $\left(x; \pm\frac{2}{9}x\right)$; ә) $(x; -x)$; б) $(4; y)$, $y \in R$ немесе $(x; 5)$, $x \in R$; в) $(-3; y)$, $y \geq 0$ немесе $(x; 1)$, $x \in R$. **64.** Бар болады, 37 саны. Есептің шарты бойынша екі айнымалысы бар теңдеу құрыңдар: $10a + b = 3(a + b) + 7$, мұндағы a және b – екітаңбалы санның цифрлары. Әрі қарай b айнымалысын a арқылы өрнектеңдер. **65.** а) $n = 1$, $m = 2$; ә) $n = 3$, $m = 2$ немесе $n = 1$, $m = 6$. m-ді n арқылы өрнектеп, шыққан бөлшекті бүтін сан мен бөлшектің қосындысы түріне келтіріңдер: а) $m = \frac{3n + 2 + 5}{3n + 2} = 1 + \frac{5}{3n + 2}$; ә) $m = \frac{2n - 1 + 5}{2n - 1} = 1 + \frac{5}{2n - 1}$. **66.** Бар болады: а) 22; ә) 88. Есептің шарты бойынша екі айнымалысы бар теңдеу құрыңдар, бір айнымалыны екіншісі арқылы өрнектеңдер, шыққан бөлшекті бүтін сан мен бөлшектің қосындысы түріне келтіріңдер. **67.** 13 және 6 немесе 67 және 66. Екі x, y айнымалысы бар теңдеу құрыңдар және 133 санын 7 мен 19 жай көбейткіштеріне жіктеп, $x - y$ және $x + y$ өрнектерінің мүмкін болатын мәндерін қарастырыңдар. **68.** 11 көл, 7 өзен. **69.** Координаталары берілген қатыстарды қанағаттандыратын нүктелер жиыны: а) $y = x + 2$ мен $y = x - 2$ түзулерінің бірігуі; ә) $y = x + 2$, $y = -x + 2$, $y = x - 2$, $y = -x - 2$ түзулерінде жататын, басы (0; 2) және (0; –2) нүктелерінде болатын 4 сәуленің бірігуі; б) төбелері (–2; 0), (0; 2), (2; 0), (0; –2) нүктелерінде болатын шаршыны құрайтын 4 кесіндінің бірігуі; в) (0; –2) мен (0; 2) нүктелерін қоса алғанда Ox осіне қатысты тек жоғарғы жарты жазықтықта жататын $y = -x^2 + 4$ параболасы мен Ox осіне қатысты тек төменгі жарты жазықтықта жататын $y = x^2 - 4$ парабола бөліктерінің бірігуі; г) (1; 0) және (3; 0) нүктелерін қоса алғанда Ox осіне қатысты жоғарғы жарты жазықтықта жататын $y = x^2 + 4x + 3$ параболасы мен Ox осіне қатысты төменгі жарты жазықтықта жататын $y = -x^2 + 4x - 3$ парабола бөліктерінің бірігуі; ғ) $y = \sqrt{2x}$ және $y = -\sqrt{2x}$ функциялары графиктерінің бірігуі. **70.** 14 мәшине. m-ді x пен y арқылы екі тәсілмен өрнектеп, екі айнымалысы бар теңдеу құрыңдар. **71.** Берілген теңдеулердің шешімі болатын нүктелер жиынының координаталары: а) 4 нүктеден (–4; –5), (–4; 5), (4; 5), (4; –5); ә) центрі (1; 0) нүктесінде, радиусы 3-ке тең болатын шеңбердің барлық нүктелерінен; б) $y = x$ және $y = -x$ түзулердің бірігуінен; в) $y = x$ түзуі мен $y = 2x^2$ параболасының бірігуінен тұрады. **72.** а) (–3; 5); ә) (2; –1); б) (4; 3); в) $(-\sqrt{2}; 1)$. **73.** а) $n = 2$, $m = 4$ немесе $n = 4$, $m = 2$; ә) $n = 1$, $m = 7$ немесе $n = 6$, $m = 2$. m айнымалысын n арқылы өрнектеп, шыққан бөлшекті бүтін сан мен бөлшектің қосындысы түрінде көрсетіңдер: а) $m = \dfrac{2n - 3 + n + 1}{2n - 3} = 1 + \dfrac{n + 1}{2n - 3}$. **74.** 3 м және 6 м немесе 4 м және 4 м. **75.** Мысалы, (7; 5) немесе (8; 5). x айнымалысына қатысты квадрат теңдеу ретінде шешіңдер. **76.** а) 17 м/мин; ә) 17 м/мин-тан артық. Салдың қозғалу жылдамдығын және моторлы қайықтың меншікті жылдамдығын айнымалылармен белгілеп, екі айнымалысы бар теңдеу құрыңдар. **77.** а) Болмайды. Жұптығы бірдей және әртүрлі сандар үшін талдау жүргізіңдер; ә) 17. **78.** Координаталары берілген теңдеулердің шешімдері болатын нүктелер жиыны: а) бір нүктеден (1; 1); ә) $y = 0$ және $x = 0$ екі түзудің (0; 0) нүктесінсіз бірігуінен; б) $y = -\frac{1}{4}x$ және $y = \frac{2}{3}x$ түзулерінің бірігуінен; в) Ox осіне қатысты жоғарғы жарты жазықтықта орналасқан $x^2 + (y - 3)^2 = 5^2$ шеңбер мен Ox осіне қатысты төменгі жарты жазықтықта орналасқан $x^2 + (y + 3)^2 = 5^2$ шеңбердің (–4; 0) және (4; 0) нүктелерді қоса алғандағы бірігуінен тұрады. **79.** а) Болмайды; ә) болады. **80.** а) (26; –24); ә) (–3; –2); б) (–2; –6), (2; 6); в) шешімі жоқ. **81.** а) (–3; –1), (–3; 1), (3; –1), (3; 1); ә) (–5; –2), (–5; 2), (5; –2), (5; 2). **82.** а) 20 және 18; ә) бар болады, 8 және 1 немесе –1 және –8. **83.** а) (0; 3), (3; 0); ә) (–1; 0), (2; 3); б) (1; 2); в) (–4; –3), (–3; –4), (3; 4), (4; 3). **84.** 3 км/сағ және 35,5 км/сағ. **85.** а) 40 см; ә) 30 см. **86.** а) Жоқ; ә) иә; б) иә; в) жоқ. **87.** а) (–48; –2), (–2; –48); ә) (–3; 2), (3; 2); б) (1; 3), (3; 1); в) (–1; 4), (1; 2). **88.** Жүйенің шешімдері (3; 5), (5; 3) сандар жұбы болатындықтан, ал $3^5 = 243$, $5^5 = 3125$. **89.** 12 млн. га, 44-орын. **90.** 6 және 2. **91.** а) (2; 3); ә) (–9; 1), (–1; 9), (1; –9), (9; –1); б) (–3; 3), (3; –3); в) (–1; –1), (1; 1). **92.** а) (–4; –2), (4; 2); ә) $\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{2}\right)$; б) (0; 1), (2; –1), (2; 3), (4; 1). **93.** а) (–1; 3); ә) (≈ –2,5; ≈ –2,5), (≈ 1,5; ≈ –6,5); б) (≈ –2,7; ≈ –0,7), (1; 2), (≈ 1,6; ≈ 1,3). **94.** а) $(-a; 3a)$, $(3a; -a)$; ә) $(0; a)$, $(2a - 2; 2 - a)$; б) $(-\sqrt{3}; -\sqrt{3})$, (–1; 1), (1; –1), $(\sqrt{3}; \sqrt{3})$; в) $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$, (0; –1), (0; 1). **95.** Бар болады, $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ және $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ немесе $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ және $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. **96.** $(m; n)$: а) (–3; –1), (–1; –3), (1; 3), (3; 1); ә) (–1; 2), (2; –1); б) (1; 6). **97.** 2 алмұрт, 9 алма. **98.** а) (2; 1), (1; 2); ә) $\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}; \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}; \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)$. **99.** а) (–2; –1), (2; 1); ә) (4; 2). **100.** Бірінші теңдеудің барлық мүшесін y^2-қа бөліп, содан кейін $\frac{x}{y}$-ке қатысты квадрат теңдеу шешіп, әрі қарай орнына қою тәсілін қолдануға болады. **101.** а) $\left(-\frac{8}{3}; -\frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{8}{3}; \frac{2}{3}\right)$;

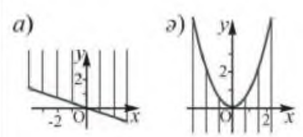
ә) (–1; 1), (1; –1), (–4; 2), (4; –2). **102.** а) (1; 3); ә) (–2; 3), (2; 3). **103.** $\frac{2}{3}$. **104.** а) 8 см, 15 см; ә) $4\sqrt{2}$ см, $9\sqrt{2}$ см. **105.** а) 75 км/сағ және 60 км/сағ; ә) 96 км/сағ және 64 км/сағ. **106.** 19 км/сағ және 1 км/сағ. **107.** 2 сағ және 3 сағ. **108.** а) Бар болады, 64 немесе 46; ә) 68. **109.** $\frac{3}{8}$. **110.** а) 4 дм және 3 дм; ә) 30 см^2. **111.** $\sqrt{82}$ см; ә) 0,24 дм^2. **112.** 5 см, 12 см. **113.** 5 дм және 2 дм. **114.** 80 км/сағ және 60 км/сағ. **115.** 40 г және 160 г. **116.** 28 немесе 82. **117.** 6 см және $6\sqrt{3}$ см. **118.** а) (–4; –8) немесе (–4; 0); ә) $(-1; -2\sqrt{2}-1)$ немесе $(-1; 2\sqrt{2}-1)$. **119.** а) $\sqrt{kS}$, $\sqrt{\frac{S}{k}}$; ә) $\frac{P^2-4S}{2P}$. **120.** $\sqrt{10}$ есе. **121.** а) 10 секундта; ә) 36 минутта және 45 минутта. **122.** а) 10 күнде; ә) 6 сағ және 9 сағ. **123.** $\left(\frac{2}{3};1\right)$. **124.** ә). **125.** Мысалы, а) (0; 1); ә) $\left(-\frac{1}{2};0\right)$. Басқа мысалдар келтіріңдер. **126.** а) $y = -x + 1$; ә) $y = x^2 + 7$ теңдеуінің графигін салып: а) салынған түзуге қатысты жоғарғы жарты жазықтықта жататын; ә) салынған параболадан төмен жататын нүктелерді таңдап аламыз. Мысалы, (–4; 7), (0; 3), (4; –1). **127.** (1; 8) және (–1; –4) нүктелері $y \le x^2 + 6x + 1$ теңсіздігімен берілген сандар жұбы жиынына тиісті. **128.** а) $y < 0$; ә) $y \ge x$; б) $y > x^2 - 1$. **129.** а) 1, *а*-сурет; ә) 1, *ә*-сурет. **130.** 9. **131.** а) I және IV; ә) III және IV. **132.** а) 13; ә) 57. **133.** а) $y > |x|$; ә) $y \le |x^2 - 2|$; б) $y \le -\frac{2}{x}$. **134.** в) 2, *а*-сурет; ғ) 2, *ә*-сурет. **135.** Ақиқат емес. **136.** а) (1; 2); ә) шешімі жоқ. **137.** а) 3, *а*-сурет; б) 3, *ә*-сурет.



1-сурет

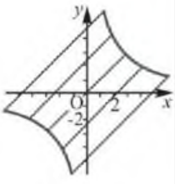


2-сурет

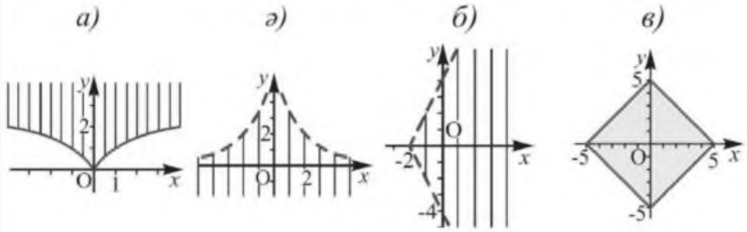


3-сурет

138. б) 4-сурет. **139.** а) 50; ә) 62; б) 54; в) 45. **140.** 1) б; 2) а; 3) ә. **141.** а) 5, *а*-сурет; ә) 5, *ә*-сурет; б) 5, *б*-сурет; в) 5, *в*-сурет. **142.** (1; –1), (2; 1), (3; 3).



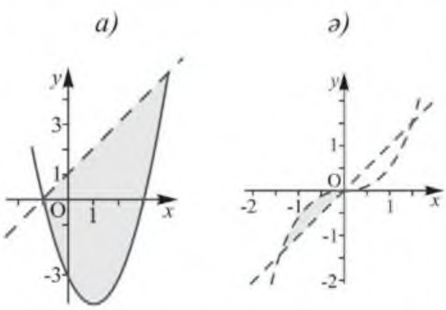
4-сурет



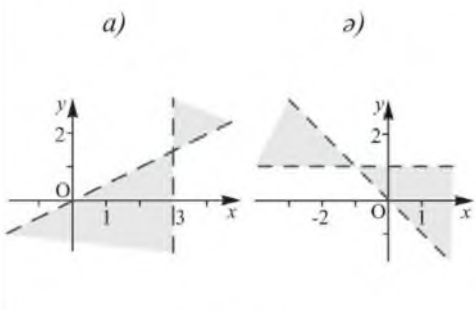
5-сурет

143. а). **144.** а) $\begin{cases} y \le -(x-3)^2 + 2, \\ y > -1; \end{cases}$ ә) $\begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 < 4, \\ x \le 3. \end{cases}$

145. Фигура: а) $y = -x^2 + 3$ параболасымен және Ox осімен; ә) $y = x^2 - 4$ параболасымен және Ox осімен шектелген. Фигура: б) $y = -1$ түзуінен төмен жатпайтын $x^2 + y^2 = 4$ дөңгелегінің; в) абсциссалары 1-ден кем болмайтын $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$ дөңгелегінің барлық нүктелерінен тұрады. **146.** $x^2 + (y - 1)^2 = 4$ дөңгелегінің ішінде орналасқан және $y = x^2 + 1$ параболасынан төмен жататын нүктелер жиыны. Олардың 5 шешімінің x пен y-нің мәндері бүтін сандар.

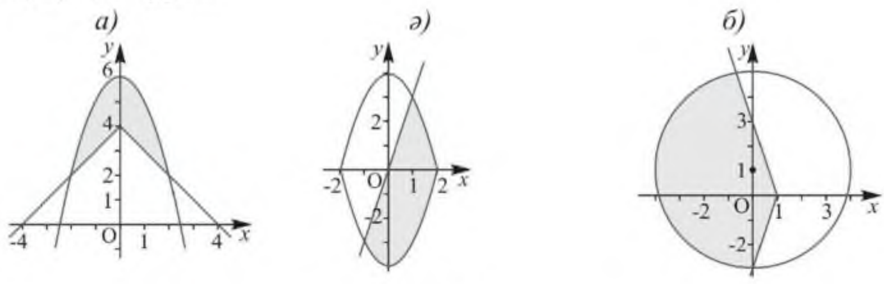


6-сурет



7-сурет

147. а) 18; ә) 6. **148.** а) 4; ә) 6. **149.** ә) 6, *а*-сурет; в) 6, *ә*-сурет. **150.** 3 м және 1 м, немесе 3 м және 2 м, немесе 2 м және 1 м. **151.** 10. Есептің шарты мен үшбұрыш теңсіздігін ескере отырып, теңсіздіктер жүйесін құрып, оны графиктік тәсілмен шешіңдер. **152.** 10, немесе 11, немесе 20. **153.** 35. x және y айнымалыларымен теңсіздіктер жүйесін құрыңдар, осы жүйенің теңсіздіктерін қосып, $x + y$ мәнін табыңдар. **154.** а) $\begin{cases} y \ge |x|, \\ y < 3; \end{cases}$ ә) $\begin{cases} (x-3)^2 + (y-2)^2 \le 4, \\ y > -(x-3)^2 + 5. \end{cases}$ **155.** а) (3; 1), (3; 2), (4; 1); ә) (1; 1), (1; 2), (1; 3), (2; 2); б) ондай сандар жұбы жоқ. **156.** ә) 7, *а*-сурет; в) 7, *ә*-сурет. **157.** 11 жұп. **158.** $16\frac{11}{54}$ м/с-тан кем емес. Теңсіздіктер жүйесін құрыңдар, екінші теңсіздікті $\frac{3}{4}$-ке көбейтіп, жүйенің теңсіздіктерін қосыңдар. **159.** а) Мүмкін; ә) жоқ. Шешуі 5-тармақтың 2-есебі сияқты. **160.** 5 қыз және 4 ұл. Теңсіздіктер жүйесін құрып, оны графиктік тәсілмен шешіңдер. **161.** а) Жоқ; ә) 2 км/сағ. **162.** а) $\begin{cases} x^2 + (y+2)^2 < 9, \\ y > -\frac{1}{3}x - 1; \end{cases}$ ә) $\begin{cases} y \geq (x+2)^2 - 4, \\ |y| < 2. \end{cases}$ **163.** ә) 8, *а*-сурет; б) 8, *ә*-сурет; в) 8, *б*-сурет.



8-сурет

164. а) 3; ә) 36; б) 6; в) 3. **165.** а) 8; ә) 25. **166.** а) 48; ә) 89. **167.** 109. **168.** (2; 8), (8; 2). **169.** а) (–4; –3), (4; 3); ә) (–3; 5), (5; –3); б) $\left(\frac{\sqrt{15}}{3}; \frac{\sqrt{15}}{4}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{15}}{3}; -\frac{\sqrt{15}}{4}\right)$; в) $\left(-\sqrt{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. **170.** 23. **171.** $\sqrt{82}$ см. **172.** а) (–1; –4), (–1; 4), (1; –4), (1; 4); ә) (–3; –4), (–3; 4), $(2; -\sqrt{21})$, $(2; \sqrt{21})$. **173.** а) (2; 3); ә) (0; –9), $(-\sqrt{17}; 8)$, $(\sqrt{17}; 8)$. **174.** $3\sqrt{5}$ см. Медианалар O нүктесінде қиылысатын болсын. Медианалардың қасиеті мен Пифагор теоремасын пайдаланып, теңдеулер жүйесін құрыңдар. Жүйенің теңдеулерін қосып, $BO^2 + AO^2$ қосындысын табыңдар. **175.** а) (2; 1); ә) (1; 2), (1; 3), (2; 1), (3; 1), (xy)-ке қатысты квадрат теңдеуді шешіңдер; б) (11; 4), (13; 8), (19; 16), (53; 52), теңдеудің оң жақ және сол жақ бөліктерін көбейткіштерге жіктеп, $x - y$ және $x + y$ мәндерінің әртүрлі нұсқаларын қарастырыңдар. **176.** а) 499 см; ә) 340 см немесе 1016 см. 997 мен 677-нің жай сандар екенін ескеріңдер. **177.** Ізделінді нүктелер жиыны: а) $y = 2x$ және $x = 3$ түзулерінің бірігуі; ә) (4; –2) нүктесінсіз $y = -\frac{1}{2}x$ түзуі. **178.** а) Болады; ә) жоқ. Теңсіздіктер жүйесін құрыңдар, бірінші теңсіздіктің бөліктерін квадраттап, одан екінші теңсіздіктің бөліктерін азайтыңдар. **180.** а) 3 қарағай және 1 қайың. Теңсіздіктер жүйесін құрып, оны графиктік тәсілмен шешіңдер; ә) 20 пұт. **181.** а) 6 және 30 немесе 10 және 10. x пен y ізделінді сандар болсын, сонда $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$, $y = \frac{5x}{x-5} = \frac{5(x-5)+25}{x-5} = 5 + \frac{25}{x-5}$; ә) Бар болады, 51 және 50. 101 жай сан екенін ескеріңдер. **182.** 1971 жыл. **183.** 20. **184.** 278. 277 мен 281 жай сандар екенін ескере отырып, көрсетілген аралықтан қалған 3 санды зерттеңдер. **185.** Берілген екі теңдеуден құрылған жүйенің тек бір ғана шешімі бар екенін дәлелдеңдер. **186.** 4 және 8 Ом. Тізбектеп қосқанда (R) жалпы кедергі (R_1, R_2) кедергілерінің қосындысына, ал параллель қосқанда $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ тең болатынын ескере отырып, теңдеулер жүйесін құрыңдар. **187.** 5 км/сағ және 3 км/сағ. **188.** а) $\left(-5; -\frac{1}{3}\right)$, $\left(5; \frac{1}{2}\right)$; ә) (–2; –4), (1; 2). **189.** а) (3; 6), (6; 3); ә) (0; 0), (0,5; 2), (2; 0,5). **190.** а) (–1; –4), (4; 1); ә) (–5; –2), (–1; –6), (1; 4), (5; 0). Көбейткіштердің әртүрлі мәндерін қарастырыңдар: а) x және y; ә) x және $y + 1$. **191.** Динарада. Берілген жүйенің шешімі (1; 2), (1; –2), (–3; 0) сандар жұбы болады және x мәндері таңдамасының стандартты мәні $\frac{4\sqrt{2}}{3}$-ке тең, ал y мәндері таңдамасының стандартты ауытқуы $\frac{4\sqrt{3}}{3}$-ке тең болады. **192.** а) (1; 0), (4; 3), (6; 5); ә) (0; 4), (3; 1). **193.** Ізделінді жиын: а) центрі (3; –3) нүктесінде, $R = 3$ болатын дөңгелектің ішкі нүктелерін; ә) $y = \sqrt{x+2}$ және $y = -\sqrt{x+2}$ функциялардың графиктерімен шектелген жазықтықтағы нүктелер жиыны. **194.** а) Мүмкін емес; ә) мүмкін. Теңсіздіктер жүйесін құрып, оны графиктік тәсілмен шешіңдер. **195.** 4 есе. $x + y = \frac{25}{4} \cdot \frac{xy}{x+y}$ екі айнымалысы бар теңдеу құрыңдар, оны екі айнымалысы бар екінші дәрежелі теңдеуге келтіріңдер, оның барлық мүшесін y^2-қа бөліп, $\left(\frac{x}{y}\right)$-ке қатысты квадрат теңдеуді шешіңдер. **196.** $c = \pm\sqrt{2}$ болғанда. **197.** а) (–5; 10), (5; –10); ә) $(-\sqrt{2}; -2\sqrt{2})$, (–1; –3), (1; 3), $(\sqrt{2}; -2\sqrt{2})$. **198.** $\frac{a\sqrt{4h^2 + a^2}}{4h}$. ΔABC берілген болсын, оның $AB = BC$, $AC = a$, биіктігі $BH = h$, O – BA мен BC түзулерін A мен C нүктелерінде жанайтын шеңбердің центрі болсын. Тікбұрышты BOC үшбұрышының орта пропорционал кесінділерін пайдаланып, теңдеулер жүйесін құрыңдар, яғни $OC^2 = BO \cdot OH$ және $CH^2 = BH \cdot HO$. **199.** 1 дм^2 және 4 дм^2. Ізделінді аудандар x дм^2 және y дм^2 болсын. Үшбұрыш ауданының $S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin\alpha$ формуласын пайдаланып және $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$ болатынын ескере отырып, $xy = 4$ болатынын анықтаңдар. **200.** Берілген теңсіздіктердің сол жақ бөлігінен екімүшенің квадратын бөліп шығарыңдар. **201.** Теңсіздіктер жүйелерін: б) $\begin{cases} y \le 1, \\ y \ge |x| - 2 \end{cases}$ немесе $\begin{cases} y \ge 1, \\ y \le 4 - |x| \end{cases}$ пайдаланыңдар. **202.** 6 жұп. **203.** 1А) ә), мысалы, (1; 19); 2А) (4; 6), (6; 4); 3В) 3,6 км/сағ және 4,8 км/сағ; 4В) (1; 1), (2; 1), (2; 2), (3; 1); 5С) 23 кв. бірл. **204.** 9. **205.** 11. **206.** 8. **207.** 63. **208.** 42. **209.** 210. **210.** 120. **211.** 6. **212.** 280. **213.** 47. **214.** а) 45; ә) 12. **215.** а) 2017; ә) 2019. **216.** $40247 = 2^{15} + 2^{12} + 2^{11} + 2^{10} + 2^8 + 2^5 + 2^4 + 2^2 + 2^1 + 2^0$; $8568 = 2^{13} + 2^8 + 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3$. n-нің 1-ден 16-ға дейінгі мәндері үшін 2^n мәнінің кестесін құрыңдар. **217.** а) 16; ә) 10 тәсілмен. **218.** 6. **219.** 24. **220.** а) 120; ә) 720. **221.** 362 880. **222.** 39 916 800. **223.** 87 178 291 200. **224.** а) 56; ә) 105; б) 84; в) 49. **225.** а) 5-тен артық емес; ә) 6-дан артық емес. **226.** 5040. **227.** 24. **228.** а) 12; ә) 5. **229.** 42. **230.** $n - 1$. **231.** а) 60; ә) 24. **232.** 8. **233.** Бар болады, $149^2 = 22201$. Санның квадраты 2-ге аяқталмайтынын ескере отырып, бестаңбалы санның мүмкін болатын нұсқаларын қарастырып, олар есептің шартын қанағаттандыра ма, тексеріңдер. **234.** Өрнектен екімүшенің квадратын бөліп шығарып, көбейткіштерге жіктеңдер. Әрі қарай жай санның анықтамасын пайдаланыңдар. **235.** 3024. **236.** 240 240. **237.** 336. **238.** 30 240. **239.** 648. **241.** а) 294; ә) 100; б) 2; в) 60. **242.** 15. **243.** а) 5; ә) 11. **244.** а) $D = \{4; 5; 6\}$, $E = \{1; 2; 3\}$; ә) $D = \{2; 3; 4\}$, $E = \{1; 16; 72\}$. **245.** 16. **246.** 7 әріп. **247.** 3. **248.** 738. **249.** 13.

250. а) $23^2 = 529$; ә) $4^4 = 256$. **251.** 10. **252.** 35. **253.** 190. **254.** 45. **255.** а), ә) – ақиқат. **257.** а) 995; ә) 312; б) 16; в) 32. **258.** 3. **259.** $n = 2$ болғанда. n-нің мүмкін болатын қай мәнінде теңдіктің ақиқат болатынын анықтаңдар. **260.** а) 66; ә) 220. **261.** 21. **262.** 8 145 060. **263.** 15. **264.** а) 4; ә) 3. **265.** 28. **266.** а) $n \geq 2$, $n \in N$; ә) 9; б) 9; в) 2; k-ның мүмкін болатын мәндерін анықтап, k-ның қай мәнінде теңдіктің ақиқат болатынын анықтаңдар. **267.** а) $D = \{2; 3; 4\}$, $E = \{1; 3; 4\}$; ә) $D = \{2; 3\}$, $E = \{1\}$. **268.** а) $n \in \{5; 6; 7\}$; ә) 4; n-нің мүмкін болатын қай мәндерінде теңсіздіктің ақиқат болатынын анықтаңдар. **269.** $\frac{n-1}{2}$ – тақ n үшін және $\frac{n-2}{2}$ – жұп n үшін. **270.** 8. **271.** $n = 6$, $k = 3$. $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$ формуласын және факториал ұғымын пайдаланып, теңдеулердің оң жағы мен сол жақ бөліктерін бірдей көбейткіштерге бөліп, оларды ықшамдаңдар. **272.** ә) $1 - 7b + 21b^2 - 35b^3 + 36b^4 - 21b^5 + 7b^6 - b^7$. **273.** а) 70; ә) 35. **274.** а) $(x + 2)^6$; ә) $(3 - y)^5$. **275.** а) 11; ә) $k + 1$. **276.** 36. **277.** 10-шы. **278.** а) $2^{10} = 1024$; ә) 2048. **279.** а) 26-шы; ә) 51-ші немесе 52-ші. **280.** а) 4-ші; ә) 3-ші. **281.** а), ә) – ақиқат. **282.** а) $\approx 1{,}05$; ә) $\approx 0{,}96$; б) $\approx 1{,}27$; в) $\approx 0{,}70$. **283.** 64. **284.** $2 < \left(1+\frac{1}{5}\right)^5 < 3$. **285.** а) $145\sqrt{5} + 229\sqrt{2}$; ә) $208 - 120\sqrt{3}$. **286.** а) $35a^3b^4$; ә) $220a^{18}$; б) $C_{2020}^{2}a^{2018}b^2$. **287.** а) 70; ә) 12. **288.** Ақиқат. **289.** Болады, а) $n = 6$ болғанда; ә) $n = 10$ болғанда. **290.** Бар болады, $n = 7$. **291.** $9^7 + 10^7 < 11^7$. $((10 - 1)^7 + 10^7) - (10 + 1)^7$ айырымының таңбасын анықтау үшін $(a + b)^7$ биномы жіктелуін пайдаланыңдар. **292.** $(1 + 1)^n$ жіктелуінің бастапқы үш мүшесінің қосындысын $\frac{n^2}{2}$ өрнегімен салыстырыңдар. **293.** Виктормен және Тараспен. **294.** 18. **295.** а), ә) – ақиқат емес; б), в) – ақиқат. **296.** 1332. **297.** Есептің шешуінде: а) теру, ә) орналастыру қолданылады. а) 66; ә) 132. **298.** а) $\frac{10}{3}$; ә) 5; б) $n + 1$; в) $\frac{(n+3)(n+2)}{n}$. **299.** 126. **300.** 252. **301.** 16. **302.** 14. **303.** 22. **304.** а) ≈ 1995; ә) 1926 ж. **305.** а) 49; ә) 42. **306.** а) 9 немесе 10; ә) 5; б) 8. **307.** $5\sqrt{5}$. **308.** а) $n + 1$; ә) 49. **309.** $\overline{bca}$ санын $(100a + 10b + c) \cdot 10 - 999a$ түріне келтіріңдер. **310.** 12. **311.** а) 6 және 15; ә) 13. **312.** 1А) 35; 2А) бір; 3А) 95 040; 4В) 12;

5С) $24\frac{3}{4}$. **314.** $a_{2020} = 6059$. **315.** а) -1; -4; -7; -10; -13; в) 1; 8; 27; 64; 125. **316.** а) $D = \{1; 2; 3; 4\}$, $E = \{3; 9; 27; 81\}$; ә) $D = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, $E = \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$. **317.** а) 32-суретте; ә) 33-суретте. **318.** а) (a_n) және (f_n); ә) (b_n) және (d_n). **319.** $a_n = \frac{n}{n+1}$; $b_n = -4^n$; $c_n = (-5)^n$; $d_n = \left(\frac{3}{10}\right)^n$. **320.** а) 6 мүше; ә) 18 мүше. **321.** в) -3; 9; -27; 81; -243. Берілген барлық тізбектер шектеусіз. **322.** ә) 2; 4; -2; 6; -8; 14. **323.** ә) $a_{12} = 19$; в) $a_{k+2} = 2k - 1$. **324.** а) $n = 5$; в) $n = 19$. **325.** а) 12; ә) 2; б) 4; в) 1 және 3. **326.** а) және б) – болмайды; ә) болады, $n = 10$; в) $n = 28$. **327.** б) -2; 1; -1; 0; -1; -1; в) 1; 2; 2; 4; 8; 32. **328.** а) $x_n = 3 + 5(n - 1)$; ә) $y_n = 50 -$ $- 9(n - 1)$. **329.** а) $n \geq 21$ болғанда, $n \in N$; ә) $n \geq 7$ болғанда, $n \in N$. **330.** а) 8-нөмірден бастап; ә) 6-нөмірден бастап. **331.** а) $a_{n+1} - a_n > 0$; ә) $b_{n+1} - b_n < 0$ болатынын анықтаңдар. **332.** а) $c_n = 2n + 13$; ә) $c_n = 2^{n-1}$. **333.** ә) Берілген теңдікті дәлелдеу үшін a_{n+2} мен a_{n+3}-ті a_n мен a_{n+1} арқылы өрнектеңдер. **334.** а) $a_n = 3n$; ә) $b_n = 6n$; б) $c_n = 6n - 3$. **335.** а) Бар; ә) $b_1 = \frac{3}{10}$; $b_8 = \frac{8}{10^8}$; $b_{15} = \frac{4}{10^{15}}$; $b_{22} = \frac{6}{10^{22}}$; б) кемімелі тізбек болады. **338.** Барлығы 45 мүше. **339.** $a_n = 10n - 2$. **340.** а) $\frac{1}{500}$-ге; ә) $n \geq 201$ болғанда, $n \in N$. **342.** $n = 1$ болғанда тұжырымның дұрыс болатындығы анықталмаған. **343.** Формуланың дұрыстығын дәлелдегенде және $n = k + 1$ болғанда берілген рекуррентті формула мен оның $n = k$ болғанда дұрыс болады деген болжамды пайдаланыңдар. **344.** $S_{n+1} = S_k + c_{k+1}$ болатынын ескеріңдер. **348.** Тұжырымның $n = k + 1$ болғанда ақиқат болатынын дәлелдеу керек, ол үшін берілген өрнектегі n-нің орнына $(k + 1)$-ді қойып, жақшаларды ашып, қосылғыштарды екі топқа жинақтау керек. Біріншісі $\left(\frac{k}{6} + \frac{k^2}{2} + \frac{k^3}{3}\right)$ болжау бойынша натурал сан, екіншісі $\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + k^2 + k\right)$ натурал сан болады. **349.** а), ә) – 14-тармақтың 1-мысалы сияқты; б) $n = k + 1$ болғанда тұжырымның ақиқат болатынын дәлелдеу үшін жақшаларды ашып, қосылғыштарды былай топтаңдар: $(k^3 + 5k) + 3k(k + 1) + 6$, сонда бірінші топ болжауымыз бойынша 6-ға бөлінеді, екіншісі – 3 пен екі тізбектес натурал сандардың көбейтіндісіне тең, демек, 6-ға бөлінеді … . **350.** $n = k + 1$ болғанда тұжырымның дұрыстығын дәлелдеу үшін $a > b$ мен $a^k > b^k$ теңсіздіктерінің сол жақтары мен оң жақтарын көбейту керек. **351.** Тұжырымның $n = k + 1$ болғанда ақиқат болатынын дәлелдеу үшін: а) $k! > 2^k$ теңсіздігінің сол және оң жақтарын $(k + 1)$-ге көбейту керек, сонда $(k + 1)! > (k + 1)2^k > 2 \cdot 2^k$ болады, демек, $(k + 1)! > 2^{k+1}$; ә) $2^k > 5k$ теңсіздігін 2-ге, сонда $2^{k+1} > 10k >$ $> 5(k + 1)$ болады; б) $3^k > 2k^2$ теңсіздігін 3-ке, сонда $3^{k+1} > 6k^2 > 2(k + 1)^2$ шығады, $6k^2 > 2(k + 1)^2$ теңсіздігін дәлелдеу үшін $6k^2 - 2(k + 1)^2$ айырымының таңбасын анықтаңдар. **353.** Тұжырымның $n = k + 1$ болғанда ақиқат болатынын дәлелдегенде $(k + 1)^5 - (k + 1)$ өрнегін көпмүше түріне келтіріңдер. **354.** $((n - 1)^3 + n^3 + (n + 1)^3) \vdots 9$ дәлелдеу керек болсын. Тұжырымның $n = k + 1$ болғанда ақиқат екенін дәлелдеу үшін $(k + 2)^3$ қосылғышын $((k - 1) + 3)^3$ түріне келтіріп, оны куб дәрежесіне шығарыңдар. **355.** Теңсіздіктің $n = k + 1$ болғанда ақиқат екенін дәлелдеу үшін $(1 + a)^k > 1 + ka$ теңсіздігінің екі жағын $(1 + a)$-ға көбейтіп, $(1 + ka)(1 + a) > 1 + (k + 1)a$ болатынын дәлелдеңдер. **356.** а) Теңсіздік кез келген $n \in N$ үшін ақиқат; ә) $n \geq 3$, $n \in N$ болғанда; б) $n \geq 9$, $n \in N$ болғанда. **358.** Тұжырымның $n = k + 1$ болғанда ақиқат екенін дәлелдеу үшін $(k + 1)^7 - (k + 1)$ өрнегін көпмүше түріне келтіріңдер. **359.** Дұрыс емес, мысал келтірсе болғаны. **360.** Қосындының бөлінгіштігі туралы ондай қасиет жоқ. «Кері жору» арқылы дәлелдеу тәсілін қолдану керек. n-нің қайсыбір мәнінде $n^2 + 3n + 5$ өрнегі 121-ге бөлінеді деп ұйғарайық, сонда $n^2 + 3n + 5 = 121k$ болады. k-ның қандай натурал мәнінде $n^2 + 3n + 5 - 121k = 0$ теңдеуінің натурал түбірі бар болатынын табайық. $n_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{4 \cdot 121k - 11}}{2}$ аламыз. Түбір астындағы өрнек $11(44k - 1)$ бүтін санның квадраты болуы тиіс, яғни $44k - 1$ саны 11-ге бөлінуі керек. Бірақ $k \in N$-нің ешқандай мәнінде $44k - 1$ өрнегі 11-ге бөлінбейді, демек, ұйғаруымыз дұрыс емес, бұдан $n^2 + 3n + 5$ өрнегінің $n \in N$-нің ешқандай мәнінде 121-ге бөлінбейтіні шығады. **361.** а) $n \geq 7$, $n \in N$ болғанда; ә) $n \geq 4$, $n \in N$ болғанда. **364.** ә), б), г), ғ). **365.** б) $d = \dfrac{a_{18} - a_{15}}{3}$. **366.** а) 17; ә) 7,6.

367. а) –10; ә) –31; б) 7,5 – 3,5k. **368.** а) $x_n = 5n - 4$; ә) $x_n = 29 - 4n$; б) $x_n = -2n - 2$; в) $x_n = 6 - 5n$. **369.** а) Болмайды; ә) болады. **370.** а) 11; ә) 26. **371.** а) –54; ә) –27. **372.** а) 0; ә) –12; б) 9 – 1,5k; в) –1,5k. **373.** б) $a_{16} = 6\frac{5}{8}$, $a_{41} = 16$, $a_n = \frac{3}{8}n + \frac{5}{8}$. **374.** а) Болады, $a_n = -\frac{4}{3}n + 8$; ә) жоқ. **376.** 8. **377.** а) және ә) – жеті. **378.** –1; 0; 1; 2. **379.** –6. **382.** 2 немесе 14. **383.** а) 147; ә) –18. **384.** а) $a_1 = 0$, $d = 2$ немесе $a_1 = 12$, $d = -2$; ә) $a_1 = -9$, $d = 5$ немесе $a_1 = 1$, $d = -5$. **385.** 4 см, 5 см, 6 см немесе 3 см, 5 см, 7 см. **387.** $a_1 = 3$. **388.** а) $n = 12$, $m = 30$; ә) $n = -1\frac{1}{16}$, $m = 43\frac{15}{16}$. **389.** 135 немесе 630. **390.** а) 3d, 4d, 5d, мұндағы $d \in R$ және $d > 0$; ә) 50 м/мин^2. **391.** а) $d = 1$ болғанда; ә) $d = -7{,}5$ болғанда. **392.** а) 100; ә) 140; б) –76, $a_1 + a_{10} = a_5 + a_6$ болатынын ескеріңдер; в) 145. **393.** а) $a_1 = 36$, $d = -7$. **394.** а) 10; ә) 120. **395.** ә) $a_1 = -6{,}75$, $a_{16} = 0{,}75$. **396.** а) $n = 4$, $d = -1\frac{1}{3}$; в) $n = 7$, $a_1 = 2$. **397.** 735. **398.** 575. **399.** $n = 10$, $\frac{a_7 + a_{13}}{2} = a_{10}$ болатынын ескеріңдер. **400.** а) 3750; ә) 2295. **401.** 1300 га. **402.** 156. **403.** 20 см. **404.** а) $S_n = n^2$; ә) $S_n = n(n + 1)$. **405.** Солай. **406.** а) Болмайды; ә) болады, $n = 36$ болғанда. **407.** 204. **408.** а) 50; ә) –80. **409.** а) 55; ә) 1. **410.** 25. **411.** 28. Үшбұрыш немесе тіктөртбұрыш түрінде орналастырылған шарлар саны тең екенін ескере отырып, теңдеу құрыңдар. **412.** 325. Квадраттардың айырымы формуласын пайдаланыңдар. **413.** $a_1 = 1 - \frac{1}{n}$ және $d = 2$ болғанда болады. Қандай жағдайда $n^2 - 1 = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}n$ болатынын анықтаңдар. **414.** Арифметикалық прогрессияның алғашқы n мүшесінің формуласын $S_n = \frac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n$ түріне келтіріңдер. **415.** а) $a_1 = -3$, $d = 10$; ә) $a_1 = \frac{15}{16}$, $d = -\frac{1}{8}$. **416.** а) $\frac{x-1}{2}$, $n = x - 1$ болатынын анықтаңдар; ә) $\frac{8x - 108}{x}$, $n \in [10; 17]$. **419.** а), б), в) – болады. **420.** а) және в) – геометриялық прогрессия; ә) және б) – арифметикалық прогрессия. **421.** ә) $b_n = 16\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$, $b_5 = 4\sqrt{2}$. **422.** а) 5; ә) $-\sqrt{2}$. **423.** а) $\frac{5}{16}$; ә) 1; б) 2;

в) $\frac{1}{64}$. **424.** а) 2,8; ә) $4\sqrt{3}$; б) $3-\sqrt{2}$; в) 3. **425.** 41, *а*-сурет. **426.** Болады, а) $b_1=8, q=4$; ә) $b_1=81, q=\frac{1}{3}$. **427.** 4. **428.** а) –243; ә) 1024. Геометриялық прогрессия мүшелерінің қасиетін пайдаланыңдар. **429.** 16; 20; 24 немесе 34; 20; 6. Арифметикалық прогрессия мүшелерінің қасиетін пайдаланыңдар, екінші санды тауып, үшінші санды бірінші сан мен табылған екінші сан арқылы өрнектеңдер. Әрі қарай геометриялық прогрессияның қасиеті бойынша теңдеу құрып, бірінші санды табыңдар. **430.** Құрайды, мысалы, 6, 6, 6 немесе 4, 6, 9. **431.** а) $b_1=6$, $q=3$ немесе $b_1=54$, $q=\frac{1}{3}$; ә) $b_1=5$, $q=2$ немесе $b_1=-\frac{10}{3}$, $q=-3$; б) $b_1=3$, $q=2$ немесе $b_1=24$, $q=\frac{1}{2}$; в) $b_1=1$, $q=2$ немесе $b_1=4$, $q=\frac{1}{2}$. **432.** а) 1 024 000; ә) $a\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$. **434.** Бар болады, $q=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. **435.** $b=3\sqrt{2}$, $c=12\sqrt{2}$ немесе $b=-3\sqrt{2}$, $c=-12\sqrt{2}$. **436.** 17 715,61 м^3. **437.** $-\frac{1}{2}$. **439.** Мүмкін емес. **440.** 2, 6, 18 немесе $\frac{2}{9}, \frac{14}{9}, \frac{98}{9}$. **441.** 3; 6; 12. **442.** а) 1364; ә) 41. **443.** а) $\frac{x^{12}-1}{x^2-1}$; ә) $\frac{x-x^{13}}{x^2+1}$. **444.** а) 15,5; ә) 635; б) 3478,2; теңдікте көрсетілген прогрессия мүшелерін b_1 мен q арқылы өрнектеп, теңдеулер жүйесін құрыңдар және олардың сол жақтары мен оң жақтарын бөліңдер; в) –247,5 немесе 1089. **445.** ә) $q=2$, $S_{11}=409{,}4$ немесе $q=-2$, $S_{11}=68\frac{1}{3}$. **446.** 45 см. **447.** 30 см^2. **448.** а) $2{,}8(\sqrt{2}+1)$; ә) $62(\sqrt{5}+1)$; б) $\frac{13}{3}(\sqrt{3}+1)$; в) $\frac{57}{7}(\sqrt{7}+1)$. **449.** $c_1=\frac{1}{18}$, $S_4=14\frac{7}{18}$. **450.** 8. **451.** $6\frac{5}{16}$ м^2. **452.** 1, 4, 16, 64, 256; $S_5=341$. **453.** $91\frac{1}{4}$. **454.** $\frac{27}{64}$ немесе $-\frac{27}{64}$. **455.** 4044304 теңге. **457.** $S_n=\frac{a_1^2(q^{2n}-1)}{q^2-1}$. **458.** $\frac{781\sqrt{3}}{16}$ дм^2. **459.** а) 18 446 744 073 709 551 615; 18 квинтиллион 446 квадриллион 744 триллион 73 миллиард 709 миллион 551 мың 615; ә) ≈ 1,2 триллион тонна. **460.** а) –1; 0; ә) $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$; теңдеудің сол жағы мен оң жағына x^2-ты қосып, төрт қосылғыштың қосындысын бөлшек түрінде жазыңдар, оны қысқартып, барлық қосылғыштарды теңдеудің бір жағына шығарып, көбейткіштерге жіктеңдер. **463.** 33 333. Сандарды разрядтық қосылғыштардың қосындысы түріне келтіріп, геометриялық прогрессияның алғашқы n мүшесі қосындысының формуласын пайдаланып, оларды бөлшектермен алмастырыңдар. Әрі қарай түбір астындағы өрнекті квадрат түріне келтіріңдер. **464.** ә) $1 - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 + ... = \frac{2}{3}$. **465.** а) $5\frac{1}{3}$; ә) 4; б) $\frac{9 + 3\sqrt{3}}{2}$; в) $2\sqrt{2} - 4$. **466.** $\frac{1 + a}{a}$. **467.** а) 2; ә) $\frac{3 + \sqrt{3}}{2}$; б) $2 - \sqrt{2}$; в) $-4 - 2\sqrt{3}$. **468.** а) $\frac{4}{9}$; ә) $\frac{31}{90}$; б) $\frac{7}{30}$; в) $1\frac{31}{180}$; г) $\frac{1907}{4500}$; ғ) $-21\frac{7}{45}$. **469.** а) $\frac{3}{1 - x^2}$; ә) $\frac{1 + x}{1 - x}$. **470.** а) $\frac{1}{9}$; ә) $\frac{3}{5}$ немесе $\frac{2}{5}$; б) 4,8; $(1 - q)(1 + q + q^2) = 1 - q^3$ екенін ескеріңдер. **471.** а) $\frac{1}{7}$; ә) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, $q^6 = \frac{1}{8}$ теңдеуін шешкенде, оны $(q^2)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3$ түріне келтіріңдер; б) $-\frac{1}{4}$; в) $\frac{2}{3}$. **472.** а) $4 - 2\sqrt{2}$; ә) $\frac{1}{2}$. **473.** 0,28. **474.** $b_1 = 2\frac{2}{3}$, $q = \frac{1}{3}$. **475.** $\frac{64\sqrt{3}}{3}$. **476.** $\frac{Q^2}{2Q - 1}$. **477.** Бар болады, мысалы, 11, 1, $\frac{1}{11}$, … . **478.** а) $\sqrt{2} + 1$; ә) $\frac{3 + \sqrt{3}}{2}$. **479.** а) 2; ә) $\frac{5}{14}$. **480.** а) $\frac{1}{2}$; ә) $\frac{1}{3}$ немесе $\frac{2}{3}$. **481.** а) –32; ә) 16. **482.** Мысалы, а) $4 + 0{,}8 + \ldots$; ә) $\frac{7}{5} + \frac{21}{25} + \ldots$. **483.** $-\frac{1}{2}$. **484.** Бастапқы екі мүшесін алып тастау керек. **485.** 5. **486.** 12 345. **487, 488** – математикалық индукция әдісін пайдаланыңдар. **491.** 18 см. **492.** 1. **493.** 67,5. **494.** –161. **495.** а) $d = \frac{2}{3}$, $n = 22$; ә) $d = -2$, $n = 18$. **496.** а) 6 сағатта; ә) 407. **497.** 472. **498.** 7, 8, 9 жас. **499.** а) 1254; ә) 98550. **500.** Мүмкін емес. Геометриялық прогрессияның сипаттамалық қасиетін пайдаланыңдар. **501.** а) 81, 54; ә) 9, 18 немесе 9, –18; б) 4, –12; в) 144, 72 немесе 144, –72. **502.** а) –4; ә) 38 550; ақиқат емес. **503.** а) 392; ә) 1024. **504.** 50 теңге. **506.** а) –2; ә) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{\pm\sqrt{3}}{2}$. **507, 508** – математикалық индукция әдісін қолданыңдар. $6^{2(k + 1) - 1} + 1$

өрнегінің 7-ге бөлінетінін дәлелдегенде оны мына түрге келтіріңдер: $36 \cdot 6^{2k-1} + 1 = (35+1)6^{2k-1} + 1 = \dots$. **509.** а) $\pm\sqrt{5}$; ә) $3 + 2\sqrt{2}$. **510.** 300. **511.** $22m$ метр. **512.** $\frac{1}{4}$. **513.** $\pm\sqrt{3}$. **515.** $4 \cdot 4^k > 4 \cdot 3^k + 4 \cdot 2^k > 3 \cdot 3^k + 2 \cdot 2^k$ болатынын ескеріңдер. **516.** Пифагор теоремасын қолданыңдар, арифметикалық прогрессияның айырымын үшбұрыштың кіші қабырғасы арқылы өрнектеп, оны $r = \frac{a+b-c}{2}$ радиусымен салыстырыңдар. **517.** $\frac{Q^3}{3Q^2 - 3Q + 1}$. **519.** а) 810°; ә) 1200°. **520.** а) 1 сағ $= 15° = \frac{\pi}{12}$; ә) 1 румб $= \frac{\pi}{16} = 11{,}25°$. **521.** а) $\frac{\pi}{3} = 60°$; ә) $\frac{2\pi}{5} = 72°$. **522.** а) $\frac{\pi}{6} = 30°$; ә) $\frac{\pi}{4} = 45°$. **523.** а) $90° = \frac{\pi}{2}$, $54° = \frac{3\pi}{10}$, $36° = \frac{\pi}{5}$; ә) $36° = \frac{\pi}{5}$ және тең екі бұрыш: $72° = \frac{2\pi}{5}$ немесе $90° = \frac{\pi}{2}$ және тең екі бұрыш: $45° = \frac{\pi}{4}$; б) $80° = \frac{4\pi}{9}$, $100° = \frac{5\pi}{9}$. **524.** б) $210° = \frac{7\pi}{6}$, $225° = \frac{5\pi}{4}$, $270° = \frac{3\pi}{2}$, $300° = \frac{5\pi}{3}$; в) $1100° = \frac{55\pi}{9}$, $1440° = 8\pi$, $3330° = \frac{37\pi}{2}$, $7380° = 41\pi$. **525.** в) $2 \approx 114°$, $-3 \approx -171°$. **526.** б) IV; в) I. **527.** а) Ақиқат; ә) жоқ. **528.** б) $-1740° = -360° \cdot 4 + (-300°)$ – I ширектің бұрышы. **529.** г) $\frac{13\pi}{4} = 2\pi + \frac{5\pi}{4}$ – III ширектің бұрышы; ғ) $-\frac{19\pi}{6} = -2\pi + \left(-\frac{7\pi}{6}\right)$ – II ширектің бұрышы. **533.** а) $\frac{4\pi}{9}$; ә) $\frac{9\pi}{19}$. **534.** а) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n$ және $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n\in Z$; б) $-\frac{\pi}{4} + \pi n, n\in Z$. **535.** $\frac{\pi}{2}$ немесе π, немесе 0. **536.** 6 секундта. **538.** а) $\beta = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n\in Z$ немесе $\beta = -\frac{11\pi}{6} + 2\pi n$, $n\in Z$. **539.** б) –4; в) болмайды. **540.** а) 8π рад/сек; ә) $4{,}8\pi$ м/сек. **541.** в) $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \le \beta \le \frac{5\pi}{3} + 2\pi n$, $n\in Z$. **542.** а), ә), ғ) – мүмкін; б), в), г) – жоқ. **545.** в) $\sin(-170°) \approx -0{,}2$, $\cos(-170°) \approx -0{,}9$, $\text{tg}(-170°) \approx 0{,}2$, $\text{ctg}(-170°) \approx 4{,}5$. **546.** Мүмкін, мысалы, $\sin(-210°) = \frac{1}{2}$. **548.** а) $-\frac{1}{2}$; ә) $2\sqrt{3}$; б) $1{,}5\sqrt{2}$; в) 5. **551.** а) 0; ә) 0; б) $\sqrt{3}$; в) 1. **555.** б) I немесе III; в) III немесе IV. **556.** б) $\cos 310° \cdot \sin 115° > 0$. **557.** 50-суретті пайдаланыңдар. **558.** α сүйір бұрыш екенін ескере отырып, берілген бұрыш қай ширекке тиісті екенін анықтаңдар. а) ctg $\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) < 0$, себебі $\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ – II ширектің бұрышы. **559.** а) $\sin\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3} < 0$, себебі $\sin\frac{\pi}{4} < \sin\frac{\pi}{3}$. **560.** Координаталық шеңберді және тангенс пен котангенс сызықтарын пайдаланыңдар. а) Бірлік шеңбердің 15°, 375°, 735° бұрыштарына сәйкес келетін нүктелері беттесетін болғандықтан, сол бұрыштардың тангенстері және котангенстері тең болады; ә) $\operatorname{tg} 20° < \operatorname{tg} 400° < \operatorname{tg} 780°$, $\operatorname{ctg} 780° < \operatorname{ctg} 400° < \operatorname{ctg} 20°$; б) $\operatorname{tg} 100° < \operatorname{tg} 120° < \operatorname{tg} 140°$, $\operatorname{ctg} 140° < \operatorname{ctg} 120° < \operatorname{tg} 100°$. **561.** Координаталық шеңберді пайдаланып, а) $\sin 3\pi = 0$, $\cos 5\pi = -1$, $\cos 6\pi = 1$ болатынын анықтаңдар. **562.** Бірлік шеңберге берілген бұрыштарға сәйкес келетін нүктелерді белгілеңдер. ә) $\cos\frac{11\pi}{9} < \cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) <$ $< \cos\left(-\frac{2\pi}{9}\right) < \cos\frac{\pi}{9}$; б) $\operatorname{tg}\left(-\frac{2\pi}{9}\right) < \operatorname{tg}\frac{\pi}{9} < \operatorname{tg}\frac{11\pi}{9} < \operatorname{tg}\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$. **564.** Мысалы, б) $\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{3}, \frac{5\pi}{2}$. **565.** Мысалы, б) 180°, –180°, 540°. **566.** Мысалы, б) 30°, –150°, 210°. **567.** Мысалы, б) $-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$. **569.** Тангенс пен котангенстің анықтамасы мен $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ және $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ тепе-теңдігін пайдаланыңдар. **570.** а), б), в) – ақиқат; ә) – жоқ. **571.** а) $-\cos\alpha$; б) 0. **572.** а) $2\operatorname{tg}\alpha$; ә) $-(\sin\alpha + \cos\alpha)$. **574.** а) $\sqrt{3}$; ә) $\sqrt{2}-1$; б) $1-2\sqrt{2}$; в) 0. **575.** а) –1; ә) 1; б) –1; в) 3. **576.** а) –6; ә) $9-5\sqrt{3}$. **577.** $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$. **578.** а) I немесе IV. **579.** ә) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+2\right) > 0$, себебі $\left(\frac{3\pi}{2}+2\right)$ – I ширектің бұрышы. **581.** в) $2 \le 4 - 2\sin\alpha \le 6$; г) $1 \le$ $\le \sin^2\alpha + 1 \le 2$. **582.** б) $\frac{7\pi}{4}$ немесе $\frac{9\pi}{4}$. **583.** б) $-\frac{5\pi}{6}$ немесе $-\frac{\pi}{6}$. **584.** б) $\alpha \in \left[-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; -\frac{\pi}{6} + 2\pi n\right]$, мұндағы $n \in Z$; в) $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right)$, мұндағы $n \in Z$. **585.** а) $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right]$, мұндағы $n \in Z$. **586.** Тепе-теңдіктің сол жағындағы бөлшектің алымы мен бөлімін $\sin\alpha$-ға, ал оң жағындағыны $\cos\alpha$-ға көбейтуге болады. **587.** а) 0; ә) 4. **588.** Теңсіздіктің сол және оң жақ бөліктерінің айырымы нөлден үлкен немесе тең екенін дәлелдеңдер. **589.** ә) $2-\sqrt{2}$; б) $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$. **591.** а), б) 0 және 1;

ә), в) –1 және 0. **592.** б) $\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$; в) $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$. **593.** а) $\sin x = t$ деп белгілеп, теңсіздіктің сол жағындағы үшмүшенің түбірін тауып, оны көбейткіштерге жіктеңдер. **595.** б) R; в) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. **597.** б) $[-2; 2]$; в) $[1; 3]$. **599.** а) $-\sin\frac{\pi}{7}$; ә) $-\cos\frac{\pi}{8}$; б) $\sin\frac{3\pi}{8}$; в) $-\cos\frac{\pi}{4}$. **600.** а) –1; ә) 1; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\frac{1}{2}$. **601.** а) және ә) – болады. **602.** а) 4π; ә) π; б) $\frac{\pi}{2}$; в) $\frac{2\pi}{3}$. **604.** а) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, мұндағы $n \in Z$; в) x-тің ондай мәндері жоқ. **605.** а) $\frac{\pi}{3}n$, $n \in Z$; в) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n$, $n \in Z$; ғ) $4 - \frac{\pi}{2} - \pi n$, $n \in Z$. **606.** б) $\nearrow\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$; $\searrow\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$. **607.** б) $D = R$, $E = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$, $x = \frac{\pi}{3}n$, $n \in Z$ болғанда, $y = 0$ болады. **608.** б) $x \in [2\pi n; \pi + 2\pi n]$, $n \in Z$; в) $x = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$. **609.** $\beta = 90°$ болғанда. **610.** ә) $x \in R$, $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n$ сандарынан басқа, $n \in Z$. **611.** в) $y \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. **612.** а), б) – жұп; ә), в) – тақ. **613.** б) $\text{tg}\,\frac{\pi}{3}$; в) $-\text{ctg}\,\frac{\pi}{4}$. **614.** ә) $\text{tg}\,\frac{23\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\text{ctg}\,\frac{23\pi}{6} = -\sqrt{3}$. **615.** а) $1 + a$; ә) $\frac{a^2 - 1}{a}$. **616.** б) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in Z$; в) $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. **617.** б) $x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$ болғанда. **618.** ә) $|b| > \pi$. **619.** а) $S_{\text{ең үлк.}} = \frac{1}{2}ab$, мұндағы a және b – үшбұрыштың қабырғалары; ә) болмайды. **620.** а) $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$; ә) $(0; \pi]$. **621.** а) $\left[\frac{1}{3}; 1\right]$; ә) $[-2{,}5; 0{,}5]$; б) $[0{,}5; 1) \cup (1; +\infty)$; в) $[1{,}5; +\infty)$. **623.** б) $\frac{\pi}{4}$; в) 3π. **624.** Жұп функцияның графигі Oy осіне қарағанда симметриялы. **625.** а) $x \in R$, $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ сандарынан басқа, $n \in Z$; ә) $x \in R$, $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n$ сандарынан басқа, $n \in Z$. **626.** а) $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$; ә) $(3\pi; 9\pi)$. **627.** ә) $x \in R$; б) $x \neq \frac{\pi}{2}n$, $n \in Z$. **628.** Әр көбейткішті кіші санмен алмастырып, теңсіздіктің: «егер $a > b > c$ болса, онда $a > c$ болады» қасиетін пайдаланыңдар. **630.** а), ә) – мүмкін емес. **632.** $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ немесе $\text{tg}\,\alpha \cdot \text{ctg}\,\alpha = 1$ теңдігі орындала ма, тексеріңдер. **633.** в) $\cos^2\alpha$; г) 0; ғ) $\sin^2\alpha$. **634.** б) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\sin\alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$,

$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{2}$. **635.** ә) $1 - \sin\alpha$; в) $\frac{1}{\sin\alpha + \cos\alpha}$; ғ) $\operatorname{tg}^6\alpha$. **636.** а) $\sqrt{3} - 2$; ә) $\sqrt{2}$; б) $\frac{1}{4}$. **639.** а) $\approx -0{,}32$; ә) $\approx 0{,}98$. **640.** 1700 км. **641.** а) 0 және 1; ә) –1 және 0; б) 0 және 5; в) –1 және 2. **642.** а) $\sin\alpha + \cos\alpha$; ә) $\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1}{\sin\alpha}$. **643.** а) $\frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; ә) $\pi + 2\pi n$, $n \in Z$; б) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$; в) $2\pi + 8\pi n$, $n \in Z$. **646.** ә) Түбір астында тұрған бөлшектің алымы мен бөлімін $1 + \sin\alpha$ мен $1 - \sin\alpha$-ға көбейтіңдер. **647.** а) 1; ә) 1. **649.** 1) а) 0,48; ә) 0,18; 2) 3. **650.** а) 4 және 5; ә) –3 және –2; б) 6 және 8; в) –1 және 1. **651.** а) 1; ә) 1. $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}(90° - \alpha)$ болатынын ескеріңдер. **652.** а) $\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$; ә) $2\operatorname{tg}^2\alpha$. **654.** а) 8; ә) $7\sqrt{10}$; б) $-\sqrt{6}$. **655.** $\frac{23}{32}$. $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha = \ldots$. **656.** а) $x = \pi n$, $n \in Z$ болғанда –2; $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$ болғанда 1. **659.** а) $\operatorname{ctg}\alpha$; б) $-\operatorname{tg}^2\alpha$. **660.** г) $-\sin 20°$, $-\sin 30°$, $\operatorname{tg} 40°$, $\operatorname{tg} 0°$; ғ) $\cos 40°$, $-\cos 40°$, $-\operatorname{tg} 40°$, $\operatorname{tg} 20°$. **661.** в) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $\sqrt{3}$, –1. **662.** а) –0,5; ә) –6; б) $\frac{7\sqrt{6}}{2}$; в) $\frac{9-\sqrt{3}}{6}$. **666.** б) $\frac{3\pi}{4}$ және $\frac{7\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ және $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{6}$ және $\frac{11\pi}{6}$, π. **667.** а) $\frac{5}{13}$; ә) $\frac{4\sqrt{2}}{9}$; б) $\frac{3}{4}$. **668.** а) $-\frac{\sqrt{6}}{3}$; б) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$. **669.** а) $\operatorname{tg}^2\alpha$; ә) $\cos\alpha$; б) $-\operatorname{ctg}\alpha$; в) $2\cos^2\alpha$. **672.** $\sqrt{8 + 8\cos\alpha}$. **673.** 1. **674.** а) $-\operatorname{tg} x$; ә) $-\cos x$; б) 1; в) 1. **675.** а) –1; ә) $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\frac{2\pi}{7} = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{14}$ болатынын ескеріңдер; б) $1\frac{4}{9}$; в) 1. **676.** а) 1,2; ә) –1,25. **678.** а) 1; ә) –1. **679.** $1\frac{31}{32}$. **680.** $\frac{\cos\alpha}{2\sin\alpha\cos 2\alpha}$. **681.** ә) Теңсіздіктің қасиетін пайдаланыңдар: $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2$, $2 > \sqrt{\pi}$. **684.** в) –1; г) $-\sqrt{3}$; ғ) $\sqrt{3}$. **685.** а) –1; ә) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{1}{2}$; в) 1. **686.** $\frac{2\sqrt{6}}{3}$. **687.** а) $-\frac{1}{8}$; ә) $\frac{7}{4}$. **688.** а) $\frac{3}{19}$; ә) $\frac{9}{17}$. **689.** а) $\frac{4-\sqrt{2}}{6}$; ә) $\frac{\sqrt{2}-4}{6}$; б) $\frac{9+4\sqrt{2}}{7}$. **690.** $\frac{25\sqrt{3}+48}{39}$; $\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)$ – III ширектің бұрышы. **691.** а) 0; ә) $\cos\alpha +$

$+\sqrt{3}\cdot\sin\alpha$; б) $\sqrt{2}\cos\alpha$; в) $\sin\alpha$. **693.** а) $\cos(\alpha+\beta)$ немесе $\sin(\alpha+\beta)$-ны табыңдар. **694.** а) $\operatorname{tg}\alpha$; ә) $-\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha$; б) 2; в) 1. **695.** а) $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; $\operatorname{tg} 15^\circ = 2-\sqrt{3}$; $\operatorname{ctg} 15^\circ = 2+\sqrt{3}$. **697.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **698.** а) $-\frac{36}{85}$; ә) $\frac{13}{85}$. $\alpha-\beta$ бұрышы қай ширекке тиісті екенін білу үшін $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ және $-2\pi<-\beta<-\frac{3\pi}{2}$ теңсіздіктерінің сол және оң бөліктерін қосыңдар. **699.** а) $3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$; ә) $4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$; б) $\frac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}$. **700.** ә) Келтіру формулаларын қолданып, $\operatorname{ctg}(45^\circ-3\alpha)=\operatorname{tg}(45^\circ+3\alpha)$ болатынын анықтаңдар. **701.** Теңдіктің сол және оң бөліктерін $\frac{\sqrt{2}}{2}$-ге көбейтіп, бірінші осындай көбейткішті $\sin 45^\circ$-қа, ал екіншіні $\cos 45^\circ$-қа алмастырыңдар. Әрі қарай екі бұрыштың қосындысының синусы формуласын қолданыңдар және синус функциясының қасиетін пайдаланып, қорытынды жасаңдар. **702.** а) $\frac{\pi n}{4}, n\in Z$; ә) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z$. **705.** Берілген теңдік пен $\cos\frac{\gamma}{2}=\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)$-ны пайдаланып, $\sin\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)=0$ болатынын анықтаңдар. **708.** $\frac{5\pi}{4}$. **710.** $\operatorname{ctg} 15^\circ = 2+\sqrt{3}$. **711.** б) $2\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}$; $\cos^2\frac{\alpha}{6}-\sin^2\frac{\alpha}{6}$; $\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{8}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{8}}$. **712.** а) 2; ә) $\sqrt{2}$; б) $\frac{1}{4}$; в) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) 1; ғ) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

713. а) $2\cos 50^\circ$; ә) $2\sin 75^\circ$; б) $\cos 40^\circ+\sin 40^\circ$; в) $\cos 18^\circ$. **714.** а) $\cos 4\alpha$; ә) $\sin 4\alpha$; б) $\cos 4\alpha$; в) $\frac{1}{2}\sin 12\alpha$; г) 1; ғ) $\cos 6\alpha$. **715.** а) $-\frac{120}{169}$; ә) $-0,28$; б) $-3\frac{3}{7}$; в) $-0,8$; г) $-\frac{24}{25}$; ғ) $\frac{17}{81}$. **716.** а) 0,5376; $-0,8432$; ә) $-0,92$. **718.** а) $-2\sin\alpha$; ә) 1; б) $-1-\operatorname{tg}^2\alpha$; в) $\sin 4\alpha$. **720.** а) $-\frac{8}{9}$; ә) $-\frac{1}{2}$; берілген теңдікті квадраттаңдар. **723.** а) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$; ә) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$; б) $2-\sqrt{3}$; в) $\sqrt{2}-1$. **724.** а) $\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{14}}{4}, -\frac{\sqrt{7}}{7}, -\sqrt{7}$; ә) $\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{1}{2}, -2$;

б) $\frac{7\sqrt{2}}{10}$, $\frac{\sqrt{2}}{10}$, 7, $\frac{1}{7}$. **725.** а) $-\frac{1}{5}$ немесе 5; ә) –7 немесе 7. Қос бұрыштың: а) тангенсінің, ә) синусының формуласын пайдаланып теңдеу құрып, tg α-ны табыңдар. **727.** а) $\frac{1}{5}$; ә) b. **729.** а) $2\sin 8\alpha$; ә) $\cos 2\alpha - \frac{1}{4}\sin 4\alpha$; б) $\frac{3}{4}$; в) $\cos 4\alpha$. **732.** а) 3 және 7; ә) 0 және 6. **733.** $\frac{2\sqrt{1-m^2}}{m^2-1}$. Берілген өрнекті A-мен белгілеңдер және $\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$ формуласын пайдаланып, A^2-ты, содан кейін A-ны табыңдар. **735.** а) $\frac{\pi}{6}$ және $\frac{5\pi}{6}$; ә) $\frac{\pi}{4}$ және $\frac{5\pi}{4}$; б) $\frac{4\pi}{3}$; в) 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π. **736.** Теңдіктің сол жағын: а) 2cos 10°-қа; ә) sin 20°-қа көбейтіңдер және бөліңдер. **737.** $\sqrt{48-\sin^2 2\alpha}$. $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD$ формуласын пайдаланыңдар. AC мен BD-ны табу үшін O центрінен AC мен BD хордаларына, сәйкесінше, OK мен OL перпендикулярларын жүргізіңдер. Сонда $AC = 2KC$, $BD = 2LD$ болады. KO мен KM-ді ΔMKO-дан тауып, KC мен LD-ны, сәйкесінше, ΔOKC мен ΔOLD-дан табыңдар. **739.** а), ә), в), г), ғ) – ақиқат; б) – жоқ. **740.** а) cos 10°; ә) $\sqrt{3}\cos 5°$; б) $\sqrt{3}\cos 18°$; в) $\sqrt{3}\sin 10°$; г) $-0{,}5\sqrt{6}$; ғ) 0. **741.** а), в), ғ) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; ә), б) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; г) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **742.** а), ғ) $\sqrt{2}$; ә), г) $\sqrt{3}$; б) 1; в) –1. **745.** а) $-\sin 4\alpha$; ә) $\sin \alpha$. **746.** а), ә) $-\sqrt{3}$ және $\sqrt{3}$; б), в) $-\sqrt{2}$ және $\sqrt{2}$. **748.** а) ctg 11α; ә) ctg 9α; б) tg 4α; в) 2cos 4α. **749.** –2 және 2. **750.** а) Шеңбер гипотенузамен H нүктесінде жанасатын болсын, сонда $AB = AH + HB = r \operatorname{ctg} \frac{A}{2} + r \operatorname{ctg} \frac{B}{2} = \ldots$; ә) 1), 2) ақиқат. **751.** BC мен AD табандары болатын $ABCD$ трапециясы берілген және $BC = AB = CD = 4$ болсын. BK мен CN биіктіктерін жүргізіңдер, сонда $AD = 2AK + KN = 2 \cdot 4\cos \alpha + 4 = 8\left(\cos \alpha + \frac{1}{2}\right) =$ $= \ldots$. **752.** а) $\frac{1}{2}$-ді sin 30°-пен алмастырыңдар; ә) 2-ні жақшаның сыртына шығарып, $\frac{\sqrt{3}}{2}$-ні sin 60°-пен алмастырыңдар; ғ) 4-ті жақшаның

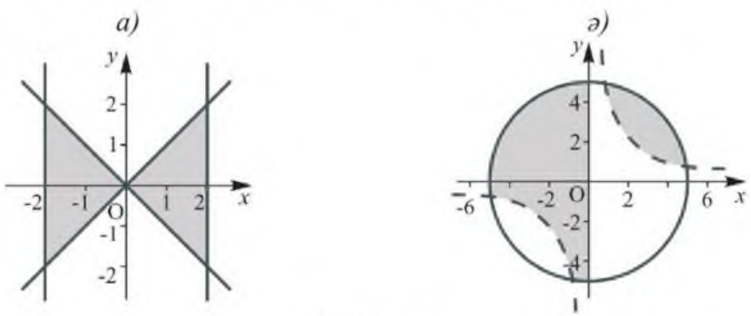
сыртына шығарып, жақша ішіндегі өрнекті квадраттардың айырымы формуласы бойынша жіктеп, $\frac{1}{2}$-ді cos 60°-пен алмастырыңдар. **754.** а) $2\sqrt{2}\cos 18° \cos 9°$; ә) $\sqrt{3}\sin 50°$. **755.** а) $4\cos 8\alpha \cos 4\alpha \cos 2\alpha$; $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; ә) $4\sin 4\alpha \cos 2\alpha \cos \alpha$; $\frac{3}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$. **758.** а) $\frac{8\sqrt{3}}{9}$; ә) $-\frac{28\sqrt{5}}{125}$; б) $\sqrt{3}$. **760.** а) $2\sqrt{2}\sin \alpha \cos(45° - \alpha)$. $1 \pm \cos 2\varphi$ түріндегі өрнекті түрлендіру үшін қос бұрыштың косинусының формуласын пайдаланыңдар. **761.** $\alpha + \beta + \gamma = \pi n, n \in Z$. **762.** а) $\frac{\pi}{3}, \pi$; ә) $0, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \pi$; б) $0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi$; в) $0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi$. **763.** $\frac{\sqrt{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)}$.
AB шеңберді D нүктесінде жанайтын болсын, сонда $AB = AD + DB$ болады. KAD мен ABM бұрыштарын анықтаған соң, AD мен DB кесінділерін ΔOAD мен ΔOBD-дан табыңдар: $AB = \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} + \mathrm{ctg}\left(45° + \frac{\alpha}{2}\right) =$ $= \ldots$. **764.** а) $\frac{1}{2}\cos 40° + \frac{\sqrt{3}}{4}$; г) $\sin 6\beta - \sin 2\beta$. **765.** б) $-\frac{1}{2}\sin 6\alpha + \frac{\sqrt{3}}{4}$; г) $-\frac{1}{2} - \cos 4\alpha$; ғ) $\sin \alpha - \cos 5\alpha$. **766.** а) $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$; ә) $\frac{\sqrt{3}+2}{4}$; б) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$; в) $\sqrt{6} - \sqrt{2} + 2$. **767.** а), в) – жоқ; ә), б) – ақиқат. **769.** а) $\frac{1}{2}$; ә) 2. **771.** а) –1; ә) 1. **772.** а) $\frac{1}{4}$; ә) $\frac{3}{4}$; б) $\frac{1}{4}$; в) $-\frac{1}{4}$. **773.** а) $-\frac{14}{27}$; ә) $\frac{7\sqrt{3}}{27}$; б) $-\frac{8\sqrt{3}}{27}$; в) $-\frac{23\sqrt{5}}{128}$. Берілген өрнектер: а) $-2\cos 4\alpha \cos 2\alpha$; ә) $\sin \alpha \times$ $\times \cos 4\alpha$; б) $\sin \alpha \sin 4\alpha$; в) $\cos 4\alpha \sin \alpha$ түріне келетінін анықтаңдар. **774.** а) $\frac{1}{2}$; ә) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{8}$; в) $\frac{\sqrt{3}}{8}$. **776.** ә) $\frac{3}{4}\cos \alpha + \frac{1}{4}\cos 3\alpha$. **777.** а) $b + \frac{1}{2}$; ә) $\frac{5-2b}{6}$. **779.** $\frac{11\pi}{12}$. **780.** Синустар теоремасын пайдаланып, үшбұрыштың басқа екі қабырғасының қосындысын өрнектеңдер: $\frac{a\sin\beta}{\sin\alpha} + \frac{a\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}$. β-ның қандай мәнінде осы өрнек ең үлкен мәнді қабылдайтынын анықтаңдар. Үшбұрыштың үшінші бұрышын

табыңдар: $\angle B = \angle C = 90° - \frac{\alpha}{2}$. **781.** а) $\sin 3\alpha + \sin 9\alpha$; ә) $\frac{3}{4}\cos\alpha - \frac{3}{8} \times$ $\times \cos 3\alpha - \frac{3}{8}\cos 5\alpha$; б) $3\sin 2\alpha - \sin 6\alpha$. **783.** $m - 2{,}75$, $m \in [2; 3]$. **784.** а) $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$; ә) $\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{12}$; б) π; в) $0, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}$. **785.** 1) 3π; 2) б) $292{,}5°$, $\frac{13\pi}{8}$; ғ) $255°$, $\frac{17\pi}{12}$. **786.** а) $\frac{7}{3}$; ә) 5. **788.** а) Ақиқат емес; ә) ақиқат. **789.** а) $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}$; ә) $\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{10\pi}{3}, \frac{11\pi}{3}$. **792.** а) $a + b$; ә) $b - a$; б) $\frac{2a}{b}$; в) $-\frac{2b}{a}$. **793.** а) $\frac{1}{2}$; ә) $\frac{1}{2}$; б) 1; в) $\sqrt{3}$. **795.** а) $2\sin\alpha$; ә) 0; б) $-2\cos\alpha$; в) $\cos^2\alpha$. **796.** $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. **797.** Пропорцияның қасиетін пайдаланыңдар. **798.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; ә) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) 0. **799.** –3. **800.** $\mathrm{tg}(\alpha + \beta)$-ны табыңдар. **801.** в) $\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\frac{3}{5}$. **802.** а) $\sin 48°$; ә) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; б) $-\cos 36°$; в) $2\mathrm{ctg}\, 40°$. **803.** а) $\frac{1}{4}$ $\sin\alpha$; ә) $\cos\alpha$; б) $\cos 2\alpha$; в) $\cos 2\alpha$; г) $2\cos\alpha$; ғ) $-\mathrm{tg}\,\alpha$. **805.** ә) $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$ формуласын пайдаланып, $\sin\left(70° - \frac{\alpha}{4}\right)$-ны алмастырыңдар. **806.** а) 4; ә) 6,25; б) $-\sqrt{6}\,m$. **807.** ә) Ақиқат емес. **810.** а) $\sqrt{2}\cos(x - 45°)$. **811.** б) Теңдіктің сол жағын бөлшек түріне келтіріп, оның алымын квадраттардың айырымы формуласы бойынша көбейткіштерге жіктеңдер, сонда $\frac{\sin 4\alpha \sin 2\alpha}{\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha}$ … шығады. **813.** Екінші өрнектің мәні үлкен. **814.** $-\frac{16\sqrt{3}}{27}$. **815.** ≈ 1741 мың км^2. **816.** а) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$; ә) $\frac{\pi}{8} + \pi n$ және $\frac{3\pi}{8} + \pi n$, $n \in Z$; б) $\frac{\pi}{12} +$ $+ \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; в) $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. **821.** а) $\frac{7}{9}$; ә) $\frac{7}{8}$. **822.** $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$ формуласын пайдаланыңдар. **826.** Бар болады, –2 және 2. **827.** $x = \frac{\pi n}{5}$ және $\frac{\pi n}{3}$ формулаларымен барлығы сегіз мән табуға болады.

828. а) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; ә) $\sin\frac{\alpha}{4}$. **829.** $\frac{ab}{a-b}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. $AD = a$, $BC = b$ болатын $ABCD$ трапециясы берілген болсын. $AB = x$, $CD = y$ болсын, сонда шеңберге сырттай сызылған трапецияның қасиеті бойынша $a + b = x + y$. $CE \parallel AB$ кесіндісін салыңдар, сонда $\angle ECD = \alpha$, $ED = a - b$ болады. ECD үшбұрышының ауданын екі тәсілмен өрнектеп, теңдеу құрыңдар: $xy\sin\alpha = (a-b)2r$, мұндағы r – шеңбердің ізделінді радиусы. xy-ті табу үшін $a + b = x + y$ шартын және косинустар теоремасын, яғни $(a-b)^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha$ пайдаланыңдар. Бұл теңдікті былай жазып алыңдар: $(a-b)^2 = (x+y)^2 - 2xy(1+\cos\alpha)$. **830.** 1A) а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; ә) $-\frac{1}{2}$; б) $\sqrt{3}$. 2A) а) $3\sin 2\alpha$; ә) $\frac{1}{\sin^2\alpha}$. 3A) а) $\frac{7}{25}$; ә) $-\frac{4\sqrt{3}+3}{10}$; б) $\frac{1}{7}$. 5C) $\frac{1}{4}$. **831.** а), в). **832.** а), б). **833.** а) Мүмкін емес. **834.** 0,1. **835.** а) $\frac{1}{3}$; ә) 0,5; б) 0; в) 1. **836.** $\frac{39}{40}$. **837.** а) $\frac{4}{15}$; ә) $\frac{1}{6}$. **838.** Жоқ. **839.** $\frac{1}{3}$. **840.** $\frac{2}{9}$. **841.** 0,75. **842.** 0,064. **843.** а) $\frac{1}{7}$; ә) дубльден басқасын таңдау ықтималдығы артық. **844.** $\frac{4}{C_{20}^2} = \frac{2}{95} \approx 0{,}02$. **845.** Мысалы, тер, тор; $\frac{1}{C_6^3} = \frac{1}{20}$. **846.** а) 0; ә) $\frac{1}{5245786}$. **847.** $\frac{6}{C_7^2} = \frac{2}{7}$. **848.** 0,25. Барлық нәтиже: $1 + C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 2^4 = 16$, қолайлысы – 4. **849.** 36-дан 5 нөмірді таңдау ықтималдығы көбірек. **850.** $\frac{C_{96}^3}{C_{100}^3} \approx 0{,}88$. **851.** $\frac{3}{C_5^3} = 0{,}3$. **852.** $\frac{1}{A_{10}^2} = \frac{1}{90}$. **853.** $\frac{1}{A_{10}^6} = \frac{1}{5040}$. **854.** а) $\frac{C_8^3}{C_{10}^5} = \frac{2}{9}$; ә) $\frac{2C_8^4}{C_{10}^5} = \frac{5}{9}$. **855.** $\frac{3}{14}$. **856.** 0,28. **857.** $\approx 0{,}30$. **858.** $\approx 0{,}16$. **859.** а) $\approx 0{,}14$; ә) $\approx 0{,}006$; б) $\approx 0{,}48$. **860.** а) $\frac{3}{65}$; ә) $\approx 0{,}56$. **861.** 6 %. **862.** $\approx 0{,}57$. **863.** а) 4 %; ә) 2 %; б) 60 %. **864.** $\approx 0{,}19$. **865.** 0,2. **866.** $\frac{1}{6}$. **867.** $\frac{1}{9}$. **868.** 0,75. **869.** а) $\frac{1}{12}$; ә) 0,25. **870.** $\approx 0{,}22$. **871.** $\approx 0{,}41$. **872.** $\approx 0{,}83$. **873.** $\approx 0{,}86$. **874.** $\approx 0{,}40$. **875.** $\approx 0{,}71$. **876.** $\approx 0{,}39$.

877. $\approx 0{,}15$. Берілген бесбұрыш пен шыққан бесбұрыш ұқсас болғандықтан, олардың аудандарының қатынасы қабырғалары квадраттарының қатынасына тең. Косинустар теоремасын пайдаланып, қатынастың $\frac{1-\cos 36^\circ}{1+\cos 72^\circ} \approx 0{,}15$ болатынына көз жеткізіңдер. **878.** 0,5. **879.** а) 0,4; ә) $\frac{1}{13}$. **880.** $\frac{8}{19}$. **881.** ≈ 27 %. **882.** $\frac{11}{45}$. **883.** а) $\approx 0{,}14$; ә) $\approx 0{,}07$. **884.** $\frac{1}{C_{42}^4} \approx 0{,}000009$. **885.** $\frac{2}{3}$. **886.** а) 0,25; ә) $\frac{2}{13}$. **887.** Фаризаның. **888.** $\frac{1}{8!} \approx 0{,}00002$. **889.** 0,25. **890.** 0,2. Барлық нәтиже $5! = 120$, қолайлысы $3! \cdot 2! \cdot 2 = 24$. **891.** $\frac{8C_{192}^2}{C_{200}^3} \approx 0{,}11$. **892.** 1А) а және ә. 2А) 0,25. 3А) $\frac{2}{3}$. 4В) ≈ 76 %. 5С) $\frac{4C_6^4}{C_{10}^5} = \frac{5}{21}$. **893.** а) 0,8 және $-1{,}25$; ә) $-0{,}75$ және $1\frac{1}{3}$. **894.** 0,5. **895.** а) Рационал сан; ә) иррационал сан. **896.** а) $\frac{1}{(a-3)^2}$, 0,1225; ә) $3b+2$, $-4{,}5$; б) $\frac{ab}{a+b}$, 0,1; в) $-\frac{a}{b}$, $-0{,}75$. **897.** а) 20 рет; ә) $m < n$. **898.** а) 3,5 кг; ә) жетеді. **899.** 2 немесе 8. **900.** а), ә) әрбір қосылғышты 2-нің дәрежесі түріне келтіріп, ортақ көбейткішті жақша сыртына шығарыңдар; б) тізбектес үш санның $(n-1) \cdot n(n+1)$ көбейтіндісінің 3-ке бөлетінін ескеріңдер. **902.** а) $\frac{1}{8}$; ә) $\frac{1}{27}$. **903.** а) a^{23}; ә) $\frac{9}{b}$. **904.** а) $\frac{y-5x}{y+5x}$; ә) $\sqrt{x} - 3\sqrt{y}$; б) $\frac{x-4}{x-5}$; в) $\frac{2x-1}{4x+1}$. **905.** 45. **906.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ және $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$. **907.** 3. **908.** 4,5. **909.** а) $-\frac{1}{7}$; ә) 2; б) $2\frac{3}{8}$. **910.** а) 9,25; ә) 0,06. **911.** $-x(x^2-1)$. **912.** а) 20; ә) 20 %. **913.** 48, 80, 12, 12. **914.** $\frac{63}{64}$. Әрбір қосылғышты екі бөлшектің айырымы түрінде жазыңдар, мысалы, $\frac{7}{8 \cdot 15} = \frac{1}{8} - \frac{1}{15}$. **915.** $100\sqrt{11}$. Кубтардың қосындысын x пен y-тің қосындысы мен көбейтіндісі арқылы өрнектеңдер. **916.** Теңсіздіктің сол және оң бөліктерін квадраттаңдар. **918.** 50 %. **919.** 25. **920.** 63. **921.** а) $(-\infty; -9{,}6)$; ә) $\left[4\frac{4}{7}; +\infty\right)$. **922.** а) 0,4; ә) -2; б) -3. **923.** а) $(-\infty; -3]$;

ә) $[-4; 5]$; б) $[-2; -1)\cup(-1; +\infty)$. **924.** а) $0; \pm\sqrt{2}$; ә) $-7; -4; 0$; б) $-1; \pm\sqrt{2}$; в) $-1; \pm4$. **925.** $-15; -13$ немесе $13; 15$. **926.** а) 28 ц/га; ә) 25 $м^3$. **927.** а) $(-3; 2)$; ә) $[2; 8]\cup\{-3\}$. **928.** а) ±3; ә) $-1; 2$; б) $\pm5; \pm2\sqrt{3}$; в) $3; 3 \pm$ $\pm 2\sqrt{5}$. **929.** а) $(-\infty; -3]\cup[3; +\infty)$; ә) $(-\infty; -8]\cup[1{,}2; 2)$; б) $[1; 3]\cup\{-2\}$; в) $(-\infty; -1]\cup\{2\}\cup[8; +\infty)$. **930.** а) Шешімі жоқ; ә) екі шешімі бар; б) бір шешімі бар. **931.** а) $(-2; -5)$; $(1; 4)$; ә) $(5; 3)$, теңдеулер жүйесінің бір теңдеуін жүйенің оң және сол жақтарын бөлу арқылы алынған теңдеумен алмастырыңдар; б) $(2; 3)$; $(3; 2)$. **933.** а) 9; ә) 5; б) 11. **934.** 72 км/сағ, 56 км/сағ. **935.** 30 күн және 20 күн. **936.** $a \neq \pm1$ болғанда, $\frac{1}{a+1}$; $a = 1$ болғанда, $x\in R$; $a = -1$ болғанда түбірлері жоқ. **937.** а) $c\in(-\infty; 18)\cup(18; +\infty)$ болғанда; ә) $c\in(-\infty; -1{,}5)\cup(-1{,}5; +\infty)$; б) $c = \frac{4}{3}$ болғанда. **938.** 0,32. **939.** $x^2 = 0$ немесе $x^2 + x - 2 = 0$. **940.** а) 35; ә) -33; б) 1. **941.** а) $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$; ә) $\{-2\}\cup\left(-\frac{1}{2}; 1\right]\cup[5; +\infty)$. **942.** 9 см-ден артық, бірақ 11 см-ден кем. **943.** а) $[2; 7)$; ә) $(-\infty; -2]\cup[0; 1)\cup\{3\}$. **944.** а) $(-7\sqrt{2}; -\sqrt{2})$; $(-7\sqrt{2}; \sqrt{2})$; $(7\sqrt{2}; -\sqrt{2})$; $(7\sqrt{2}; \sqrt{2})$; ә) $(-2; -1)$; $(-2; 1)$; $\left(-\frac{1}{7}; -\frac{\sqrt{10}}{7}\right)$; $\left(-\frac{1}{7}; \frac{\sqrt{10}}{7}\right)$. **945.** а) 9, *а*-сурет; ә) 9, *ә*-сурет. **946.** $a = 1$ болғанда. **947.** а) $x^2 - 8x + 13 = 0$. **948.** $-1; -3$.



9-сурет

949. а) 1; ә) 3, $\frac{2}{3}$; теңдеудің барлық мүшелерін $\frac{x^2-4}{x^2-1}$-ге бөліңдер, әрі қарай $\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2} = t$ деп белгілеп, айнымалыны алмастырыңдар.

950. а) [1; 0) $\cup$(2; 3]; ә) $\left[-1;-\frac{1}{3}\right)\cup\left(-\frac{1}{3};2\right)\cup\left(2;2\frac{1}{3}\right]$. **951.** $5 < v < 15$. **952.** а) $a = 3$ болғанда; ә) $a = 2$. Теңдеулер жүйесін геометриялық талдауды пайдаланып шешіңдер. **953.** а) (4; 8), (8; 4); ә) (–3; –1), (–1; –3), айнымалыны алмастыруды пайдаланыңдар, мысалы, $x + y = a$, $xy = b$. **954.** 24 кв. бірлік. **955.** а) $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{8}$, $-\frac{1}{13}$, $\frac{1}{18}$; в) 2, $-\frac{3}{2}$, $\frac{2}{3}$, $-\frac{5}{24}$. **957.** а) $a_n = 10n$; ә) $a_n = 6n - 3$; б) $a_n = 12n$; в) $a_n = 9n + 8$. Бұл тізбектер арифметикалық прогрессия болады. **958.** Ақиқат. **959.** а) Болады; ә) жоқ. **960.** 6 мүше. **961.** 20. **962.** а) $x = -1$ болғанда; ә) –10 немесе 1. **963.** 2. **964.** 5 күнде. **965.** 50. **966.** 462 лот. **967.** 5 және 10. **968.** 2401 өлшем астық. **969.** 121. **970.** 16. **971.** –0,5. **972.** 4; 8; 12. **973.** $\frac{16}{9}$. **974.** а) 4; ә) –20. **976.** Болады, бір қабырғасы 12 см. Басқа қабырғалары (см-мен): 12 және 12, 11 және 13, 10 және 14, 9 және 15, 8 және 16, 7 және 17 болуы мүмкін. **977.** 25. **978.** $\frac{1}{3}$. **979.** Математикалық индукция әдісін қолданыңдар. **980.** 135 немесе 630, немесе 765. **981.** –10. **982.** $a = 10$, $b = 4$. **983.** 1; 3; 9 немесе $\frac{1}{9}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{49}{9}$. **984.** 18 с. **985.** 0,2 рад. **986.** а) ≈ 0,94 м; ә) ≈ 3,14 м. **987.** а) $\frac{3\pi}{5}$; ә) $\frac{4\pi}{5}$. **988.** а) Мүмкін; ә) жоқ. $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$ теңдігі орындала ма, соны тексеріңдер. **989.** $\frac{\sqrt{2}}{12}$. **991.** а) Болмайды; ә) болады. Қос бұрыштың синусы формуласын қолданыңдар және синустың қалай өзгеретінін ескеріңдер. **992.** 2. **993.** а) $-\frac{56}{65}$; ә) $-\frac{5\sqrt{3}}{9}$. **994.** а) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; ә) $\frac{3}{4}$. **995.** а) $-2a$; ә) $\frac{2}{b}$. **996.** а), ә), б) – ақиқат; в) жоқ. **997.** а) –1; ә) $-\operatorname{tg}^2 5\alpha$. **999.** а) $-2\sqrt{2}$; ә) $\sqrt{2}$ немесе $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, қос бұрыштың тангенсі формуласын пайдаланып, теңдеу құрыңдар және $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$-ні табыңдар. **1000.** Негізгі тригонометриялық тепе-теңдікті пайдаланып, бір тригонометриялық функцияға байланысты квадрат теңсіздік жазыңдар. Әрі қарай айнымалыны алмастыруды қолданыңдар. а) $x = 2\pi n$, $n \in Z$; ә) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$,

$n \in Z$. **1001.** а) $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$; ә) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$. **1002.** $\dfrac{4}{a^2}$. **1003.** $\dfrac{7}{24}$ және $\dfrac{24}{7}$. **1004.** $\cos^3 x$-ті $\cos x \cos^2 x$ түрінде жазыңдар және $\cos^2 x$-ті $\dfrac{1}{2}(\cos 2x + 1)$-мен алмастырыңдар … . **1005.** 30° және 150°. **1006.** а) $\dfrac{3}{4}$; ә) $\dfrac{5}{8}$. **1007.** Бірлік шеңберді пайдаланып, $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{4}\right)$ болғанда, $0 < \mathrm{tg}\, x < 1$ болатынын көрсетіңдер және $\mathrm{tg}\, 2x - 2\mathrm{tg}\, x > 0$ болатынын дәлелдеңдер. **1008.** б) $S = \dfrac{n}{4}\mathrm{ctg}\dfrac{180°}{n}$. **1009.** а), ә) – функцияның графигі болмайды. **1010.** $x + 4 = 0$. **1011.** $y = 5x - 3$. **1012.** Мысалы, а) $y = 8x + 3$; ә) $y = 3x - 2$. **1013.** $y = -x + 2$. **1014.** $b = -1$. **1015.** а) $y = 4x + 5$, $y = x^3$; ә) $y = -8x + 2$, $y = -\sqrt{x}$. $y = -\dfrac{4}{x}$ функциясы $(-\infty; 0)$ және $(0; +\infty)$ аралықтарында өседі, бірақ анықталу облысының барлық нүктесінде өспелі болмайды. Оған осы функцияның, мысалы, –1 мен 4 нүктелеріндегі мәндерін салыстыру арқылы көз жеткізіңдер. **1016.** б). **1017.** а) (2; 4), $D = [4; +\infty)$; ә) (3; 16), $D = (-\infty; 16]$. **1018.** (2; 4). **1019.** а) $(-\infty; 1]$; ә) $(-\infty; -4)\cup(-4; 4)\cup(4; +\infty)$; б) $(-\infty; 0)\cup(0; 3]$; в) $[-5; -3)\cup(-3; 4)\cup(4; 5]$. **1020.** ә) $x \in (-\infty; 0)$ және $x \in (0; +\infty)$ болғанда өседі; б) $x \in [-4; +\infty)$ болғанда өседі; в) $x \in [1; +\infty)$ болғанда өседі. **1021.** а) $[-3; 5]$; ә) $[-2; 2]$; б) –3, –1, 2, 4; в) $[-3; -2]$ және $[0; 3]$; г) $(-3; -1)\cup(2; 4)$. **1022.** (1; 5), (3; 3), (6; 0). **1023.** а) $S = \dfrac{c^2}{8}$; ә) 1) 66 бөлшек; 2) 20 %. **1024.** $k = -3{,}6$ болғанда. **1025.** а) $c = 10$; ә) $c = -2$ болатынын анықтаңдар. **1026.** а) Жұп; ә) тақ. **1027.** а) $y = \begin{cases} x^2 - 1, \text{ мұндағы } x > 0, \\ x^2 + 1, \text{ мұндағы } x < 0; \end{cases}$

ә) $y = \begin{cases} -3, \text{ мұндағы } x \geq 3, \\ 2x + 3, \text{ мұндағы } x < 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -2x + 4, \text{ мұндағы } x < 2, \\ 2x - 4, \text{ мұндағы } 2 \leq x < 4, \\ 4, \text{ мұндағы } x \geq 4 \end{cases}$ графиктерін салыңдар. **1028.** (2; 5). **1029.** $S = 6r^2$. **1030.** а) 5 немесе 13; ә) ±4; ±3. **1031.** а) Графигі – $y = x^2 + 1$ параболасы, онда (–2; 5) және (2; 5) екі нүктесі жоқ. **1032.** а) $a < b$ болсын, сонда $y(a) < y(b)$, яғни

$y(a) - y(b) < 0$ болатынын дәлелдеңдер. $(a - b)(a^2 + ab + b^2 + 1) = (a - b)\left(\left(a + \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 + 1\right)$ алыңдар. **1033.** 24. **1034.** 120. **1035.** 10. **1036.** 35. **1037.** 252. **1038.** 4845. **1039.** 840. **1040.** 11880. **1041.** $\frac{8}{11}$. **1042.** $\frac{11}{365}$. **1043.** $\frac{1}{5040}$. **1044.** 0,2. **1046.** 7. **1048.** 1. Осы жиынның барлық сандары көпмүшенің түбірлері болатынын анықтаңдар. **1049.** $\approx 0,4$. **1050.** 1A) а) $\frac{1}{7}$; ә) 1. 2A) $(-4; -3)$, $(-4; 3)$, $(4; -3)$, $(4; 3)$. 3A) 1224. 4B) $-1 \leq \sin(60° - \alpha) \leq 1$. 5C) $\frac{27\pi}{4}$ кв. бірлік.

ПӘНДІК КӨРСЕТКІШ

ҚОСЫМША 1

Жаттықтырғыш есептер

I. Екі айнымалысы бар теңдеулер, теңсіздіктер және олардың жүйелері

Екі айнымалысы бар сызықтық емес теңдеулер

1. $A(2; 3)$, $B(-1; 1)$, $C(0; 0)$, $D(2; 4)$, $E(0,1; 0,01)$ нүктелерінің қайсысы $x^2 - y = 0$ теңдеуінің графигіне тиісті?

2. Мына теңдеулер графиктерінің қайсысы координаталар басынан өтеді:

а) $xy - 4 = 0$; ә) $2x + y = 0$; б) $x^3 - 2y = 0$; в) $x^2 - y^2 = 0$?

3. Неліктен теңдеудің шешімдері болмайтынын түсіндіріңдер:

а) $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = -1$; ә) $(x - 10)^2 + (y + 0,1)^2 = -0,5$.

4. $(x + 14)^2 + (y - 15)^2 = 0$ теңдеуінің неліктен бір ғана шешімі болатынын түсіндіріп, оны табыңдар.

5. $(-5; 6)$ сандар жұбы теңдеудің шешімі бола ма, соны тексеріңдер:

а) $x^2 - y = 19$; ә) $-2x^2 + 7y = -8$.

6. а) $(x - 3)(y + 2) = 0$; б) $x^2 + y^2 = 64$;
ә) $x^2 - y^2 = 64$; в) $x^3 - y = 2$ теңдеуінің шешімі болатын қандай да бір сандар жұбын табыңдар.

7. y айнымалысын x арқылы өрнектеп, теңдеудің қандай да бір екі шешімін табыңдар:

а) $xy = 16$; ә) $10xy - y = 1$.

8. а) $xy = 4$; ә) $xy = -4$ теңдеуінің шешімдері болатын барлық натурал сандар жұбын табыңдар.

9. а) $(2x - y)^2 = 0$; ә) $(x + 3y)^2 = 0$ теңдеуінің шешімдері болатын үш натурал сандар жұбын табыңдар.

10. Теңдеуді шешіңдер:

а) $9x^2 - 16y^2 = 0$; б) $81x^2 + 49y^2 = 0$;

ә) $100x^2 - 36y^2 = 0$; в) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{25}y^2 = 0$.

11. а) $(x^2 - 1)^2 + (y - 1)^2 = 0$; ә) $(x + 1)^2 + (y^2 - 4)^2 = 0$ теңдеуінің неше шешімі бар?

12. а) $4xy = 12$; ә) $-2xy = 16$ теңдеуінің графигін салыңдар.

13. Кестені толтырыңдар:

Теңдеу	Графигі
$x - y = 8$	$y = x - 8$ түзуі
$2x + 5 = 3y$	
$x^2 + y^2 = 16$	
$y - x^2 + 4 = 0$	
$xy = 10$	
$2x^2 - y = 3$	

14. Кестені толтырыңдар:

Шеңбердің теңдеуі	Центрінің координаталары	Радиусы
$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$		
$(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 8$		
	$(-3; 3)$	5
	$(0; 0)$	$\sqrt{3}$

15. Теңдеудің графигін салуды орындамай, оның координаталар осьтерімен қиылысу нүктелерінің координаталарын табыңдар:

а) $x^2 + y^2 = 9$; ә) $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$.

Екі айнымалысы бар сызықтық емес теңдеулер жүйелері

16. Теңдеулер жүйесін графиктік тәсілмен шешіңдер:

а) $\begin{cases} y = x^3, \\ y = x + 6; \end{cases}$ ә) $\begin{cases} y = \sqrt{x}, \\ y = 3. \end{cases}$

17. Теңдеулер жүйесінің шешімі болатындай сандар жұбының неліктен болмайтынын түсіндіріңдер:

а) $\begin{cases} x + y = 7, \\ x^2 + y^2 = -4; \end{cases}$ ә) $\begin{cases} x - y = 1, \\ x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$

18. $(3; -1)$ сандар жұбы теңдеулер жүйесінің шешімі бола ма:

а) $\begin{cases} y - x = 6, \\ x^2 + y^2 = 10; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy = -4, \\ x^2 + y^2 = 10; \end{cases}$

ә) $\begin{cases} x^2 + y = 8, \\ 3x - y = 10; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2xy = -6, \\ 2x^2 - y^2 = 16? \end{cases}$

19. Теңдеулер жүйесін шешіңдер:

а) $\begin{cases} x + y = 9, \\ (x-1)(y+1) = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = 10, \\ x - 5xy = 160; \end{cases}$

ә) $\begin{cases} x - y = 8, \\ (x+2)(y-4) = 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y = 7, \\ xy + y = 42. \end{cases}$

Мәтінді есептерді екі айнымалысы бар сызықтық емес теңдеулер жүйесі арқылы шешу

Есептің шарты бойынша теңдеулер жүйесін құрыңдар (№ 20–23).

20. Тіктөртбұрыштың бір қабырғасы екінші қабырғасынан 7 см-ге ұзын. Егер тіктөртбұрыштың диагоналі 13 см-ге тең болса, оның қабырғаларын табыңдар.

21. Жай бөлшектің алымы мен бөлімінен бірді азайтса, онда бөлшек $\frac{5}{56}$-ке азаяды. Егер алымы мен бөліміне бірді қосса, онда бөлшек $\frac{5}{72}$-ке артады. Осы бөлшекті табыңдар.

22. Арасы 4 км болатын A және B пункттерінен бір мезетте бір-біріне қарама-қарсы екі жаяу шықты. 30 минуттан кейін олардың кездесуіне 500 м жүру қалды. Егер B пунктінен жаяу 10 минутқа кеш шықса, онда екеуі жолдың жартысында кездесер еді. Әр жаяудың жылдамдығын табыңдар.

23. Екі экскаватор жұмысты бір мезгілде бастап, қандай да бір жұмыс көлемін 3 сағ 45 минутта орындап шығады. Бір экскаватор жеке өзі осы жұмысты екінші экскаваторға қарағанда 4 сағатқа тезірек орындай алады. Осы жұмыс көлемін әр экскаватор жеке істеп, қанша сағатта орындай алады?

24. Екі оң санның қосындысы 11-ге, ал көбейтіндісі 30-ға тең, осы екі санды табыңдар.

25. Тіктөртбұрыш пішіндес гүлзардың периметрі 12 м, ал ауданы 5 $м^2$. Гүлзардың өлшемдерін табыңдар.

26. Цифрларының қосындысы 8-ге, ал көбейтіндісі 15-ке тең болатын екітаңбалы санды табыңдар. Барлық мүмкін болатын жағдайларды қарастырыңдар.

27. Екі санның бірі екіншісінің квадратына тең, ал олардың қосындысы 0-ге тең. Осы сандарды табыңдар.

Екі айнымалысы бар теңсіздіктер

28. Теңсіздіктің шешімдері неліктен болмайтынын түсіндіріңдер:
а) $x^2 + y^2 < -1$; ә) $|x| + |y| < 0$.

29. (0; 0), (2; –1), (1; 2), (2020; 0) сандар жұбының қайсысы $xy > -2$ теңсіздігінің шешімдері болады?

30. Теңсіздіктің шешімдері болатын екі сандар жұбын анықтаңдар:

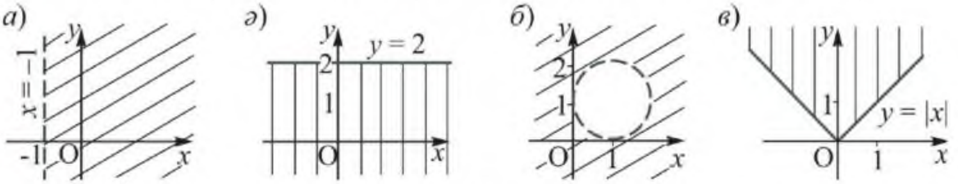
а) $\frac{1}{x} - y > 0$; б) $x^2 + y^2 \leq 15$;

ә) $x^2 - y^2 > 4$; в) $-2x^2 + y \geq 0$.

31. (–2; 5) сандар жұбы қай теңсіздіктің шешімі болады:
а) $x^2 + y^2 \geq 0{,}81$;
ә) $x^2 - (y - 3)^2 \leq 0$?

32. Теңсіздіктің шешімдері болатын қанша бүтін сандар жұбы бар:
а) $x^2 + y^2 \leq 0$; б) $x^2 + y^2 \leq 2$;
ә) $x^2 + y^2 < 1$; в) $|x| + |y| \leq 0$?

33. Шешімдер жиыны 1-суретте көрсетілген теңсіздікті жазыңдар.



1-сурет

34. Теңсіздіктің барлық шешімдер жиынын координаталар жазықтығына кескіндеңдер:
а) $y \geq x^2$; б) $y > x - 2$;

ә) $x^2 + y^2 \leq 2\frac{1}{4}$; в) $y < -|x|$.

35. Бүтін сандардың қанша жұбы $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 \leq 4$ теңсіздігінің шешімдері болады? Оларды координаталар жазықтықтығына нүктелермен көрсетіңдер.

Екі айнымалысы бар теңсіздіктер жүйелері

36. (1; 1), (4; 5), (16; –17), (2020; 2019) сандар жұбының қайсысы $\begin{cases} xy > 3, \\ x - y < 5 \end{cases}$ теңсіздіктер жүйесінің шешімдері болады?

37. Теңсіздіктер жүйесінің шешімдері болатын екі сандар жұбын анықтаңдар:

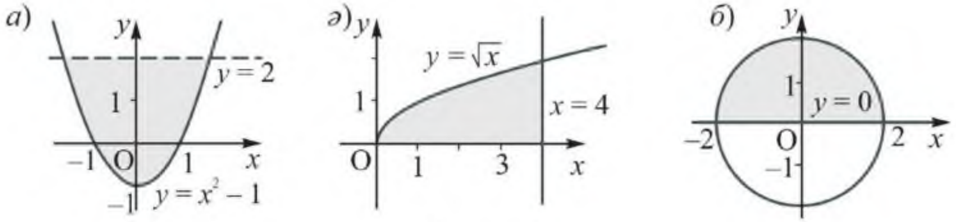
а) $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 9, \\ y \ge 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 1 < x < 5, \\ y \ge x^2; \end{cases}$

ә) $\begin{cases} x^2 - y^2 \ge 4, \\ x < 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} -10 \le y \le -4, \\ x^2 \le y^2. \end{cases}$

38. Теңсіздіктер жүйесінің неліктен шешімдері болмайтынын түсіндіріңдер:

а) $\begin{cases} 3x + 4y \ge 0, \\ x^2 + y^2 < 0; \end{cases}$ ә) $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 0, \\ y > x. \end{cases}$

39. Шешімдер жиыны 2-суретте бейнеленген теңсіздіктер жүйесін құрыңдар.



2-сурет

40. Координаталар жазықтықтығына $(x; y)$ координаталары теңсіздіктер жүйесінің шешімдері болатын нүктелер жиынын кескіндеңдер:

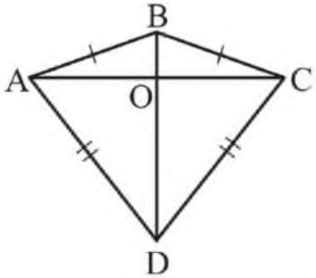
а) $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 4, \\ x > 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y > 0, \\ xy \le 0; \end{cases}$

ә) $\begin{cases} x^2 + y^2 \ge 1, \\ y \ge 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x - y < 0, \\ xy \ge 0. \end{cases}$

41. Қанша бүтін сандар жұбы: а) $\begin{cases} |x| < 1, \\ x^2 + y^2 \le 4; \end{cases}$ ә) $\begin{cases} |y| < 2, \\ x^2 + y^2 < 4 \end{cases}$ теңсіздіктер жүйесінің шешімдері болады? (Оларды координаталар жазықтықтығына нүктелермен көрсетіңдер.)

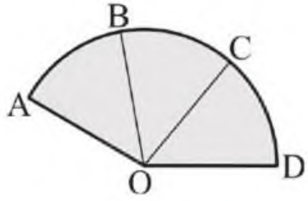
II. Комбинаторика элементтері

Комбинаториканың негізгі ұғымдары мен ережелері



3-сурет

42. Дельтоидтың (3-суретте көрсетілген төртбұрыштың атауы) диагональдары жүргізілген. Суретте барлығы қанша: а) үшбұрыш; ә) тең үшбұрыштар жұбы пайда болды?



4-сурет

43. *AOD* бұрышының төбесінен оны үш тең бұрышқа бөлетін екі сәуле *OB* және *OC* жүргізілген (4-сурет). Суретте барлығы қанша: а) бұрыш; ә) тең бұрыштар жұбы пайда болды?

А	Й	Ф
Й	Ф	О
Ф	О	Н

44. Кестедегі әріптермен тізбектей жүріп отырып, «АЙФОН» сөзін неше тәсілмен оқуға болады?

45. А кентінен В кентіне апаратын үш жол, ал В-дан С кентіне екі жол бар. А кентінен В арқылы С кентіне барып, кері қайтудың қанша жолы бар?

46. Дәмхана мәзірінде 2 көже, 3 қою және 4 тәтті тағам, ал асхана мәзірінде 2 көже, 5 қою және 2 тәтті тағам бар. Көже, қою және тәтті тағамнан тұратын түскі асты таңдау тәсілдері дәмханада көп пе, әлде асханада ма?

47. а) АННА есімінің; ә) ГРАФ сөзінің барлық әріптерінен қанша анаграмма (қатар жазылған әріптер) құруға болады?

48. Графтарды пайдаланып, отбасыларыңның шежіресін құрастырыңдар.

Қайталанбайтын алмастырулар

49. «СХЕМА» сөзінің әріптерінен қанша анаграмма құруға болады?

50. а) $\{1; 2\}$; ә) $\{3; 4; 5\}$; б) $\{C; O; M\}$ жиынының элементтерінен барлық мүмкін алмастыруларды құрыңдар.

51. Өрнектің мәнін табыңдар: а) P_3; ә) P_4; б) $\dfrac{P_4}{P_2}$.

52. Есептеңдер: а) $3! + 4!$; ә) $\dfrac{5!}{3!}$; б) $4! - 2!$; в) $6^2 - (3!)^2$.

53. Төрт спортшыға 4 жүгіру жолына кез келген ретпен тұруға болады. Мұны олар неше тәсілмен орындай алады?

Қайталанбайтын орналастырулар

54. 3, 5, 8 цифрларынан сандағы цифр қайталанбайтындай неше екітаңбалы сан құруға болады?

55. Өрнектің мәнін табыңдар: а) A_5^3; ә) A_7^4; б) $A_4^2 \cdot P_3$.

56. Төрт үміткердің ішінен екі түрлі қызметке екі адамды неше тәсілмен таңдап алуға болады?

57. Жүзуден жарысқа 6 адам қатысады. Олардың арасында бастапқы үш орынды бөліп берудің неше нұсқасы бар?

Қайталанбайтын терулер

58. Кітапханада Лейла өзіне ұнаған төрт кітаптың ішінен тек екеуін таңдап ала алады. Мұны ол қанша тәсілмен орындай алады?

59. Әртүрлі бес заттан тек үшеуі ғана сиятын сәлемдеме жинау қажет. Мұны орындаудың қанша нұсқасы бар?

60. Өрнектің мәнін табыңдар: а) C_3^2; ә) C_4^3; б) $C_5^0 + C_5^1 + C_5^5$.

61. 6 адамнан қанша тәсілмен жұп құруға болады?

62. n достар кездесіп, бір-бірімен қол алысып, амандасты. Егер n: а) 5-ке; ә) 7-ге тең болса, неше қол алысу болды?

III. Тізбектер

Сандық тізбек, оның берілу тәсілдері және қасиеттері

63. $a_1, a_2, a_3, \ldots$ тізбегінің қай мүшесі:
а) a_{72}; a_{101}; a_n; a_{n+1} мүшесінен кейін келеді;
ә) a_{72}; a_{100}; a_n; a_{n-2} мүшесінен бұрын келеді;
б) a_{n+1}; a_{n+5} мүшелерінің арасында орналасқан?

64. Тізбек n-мүшесінің $a_n = 5n - 4$ формуласымен берілген. a_1; a_3; a_{n+1} табыңдар.

65. $a_n = n^2 - n$ формуласымен берілген тізбектің алғашқы бес мүшесін жазыңдар. Оның оныншы мүшесі неге тең?

66. Тізбек $a_1 = 5$, $a_{n+1} = 2a_n + 1$ рекуррентті формуламен берілген. а) Осы тізбектің төртінші мүшесін табыңдар. ә) Осы формула бойынша бірден a_{100}-ді табуға бола ма?

67. Тізбек $a_n = 3n$ формуласымен берілген. а) 27; ә) 35; б) 123; в) 200 саны осы тізбектің мүшесі бола ма, соны анықтаңдар. Егер болса, оның нөмірін көрсетіңдер.

68. $a_n = 3n - 15$ формуласымен берілген тізбектің неше теріс мүшесі бар?

69. $a_n = 42 - 5n$ формуласымен берілген тізбектің неше оң мүшесі бар?

70. а) Жұп сандар; ә) тақ сандар; б) 5-ке еселік сандар; в) натурал сандардың квадраттары тізбегінің n-ші мүшесінің формуласын жазыңдар.

71. Егер: а) $a_1 = 100$, ал оның әрбір келесі мүшесі алдыңғысынан 5-ке кем; ә) $a_1 = -1$, ал оның әрбір келесі мүшесі алдыңғысынан 5 есе артық болса, (a_n) сандар тізбегінің рекуррентті формуласын жазыңдар.

72. Кез келген тізбектес бес натурал саннан қатар құрыңдар. Осы сандардың қосындысы неліктен 5-ке бөлінетінін түсіндіріңдер.

Математикалық индукция әдісі

Тұжырымдарды математикалық индукция әдісі арқылы дәлелдеудегі бос орындарды толтырыңдар (№ 73–74).

73. (a_n) сандар тізбегі n-ші мүшесінің формуласымен берілген. Осы тізбектің алғашқы n мүшесінің қосындысы S_n-ді төмендегі формуламен табуға болатынын дәлелдеңдер:

а)	$a_n = 4n$	$S_n = 2n(n + 1)$
ә)	$a_n = 2n - 1$	$S_n = n^2$
б)	$a_n = 6n$	$S_n = 3n(n + 1)$

а) Д ә л е л д е у і.

1) $n = 2$ болғанда, $a_1 + a_2 =$ ________ ; $S_2 = 2 \cdot 2(2 + 1) = 12$ аламыз. $n = 2$ болғанда, $S_n = 2n(n + 1)$ формуласы дұрыс.

2) Бұл формула $n = k$ болғанда дұрыс делік, яғни $S_k =$ __________

3) $n = k + 1$ болғанда да қосындының формуласы дұрыс екенін дәлелдейік, яғни $S_{k+1} = 2(k + 1)(k + 2)$. Шынымен де, болжамды ескере отырып, $S_{k+1} = S_k + a_{k+1} = 2k(k + 1) + 4(k + 1) =$ _______________ аламыз.

Демек, $a_n = 4n$ тізбегінің алғашқы n мүшесі қосындысының $S_n = 2n(n + 1)$ формуласы кез келген $n \in N$ болғанда ақиқат.

ә) Д ә л е л д е у і.

1) $n = 3$ болғанда, $a_1 + a_2 + a_3 =$ ________ ; $S_3 =$ ________ аламыз. $n = 3$ болғанда, $S_n = n^2$ формуласы ақиқат.

2) Бұл формула $n = k$ болғанда ақиқат болады делік, яғни $S_k =$ __________ .

3) $n = k + 1$ болғанда да қосындының формуласы, яғни $S_{k+1} = (k + 1)^2$ ақиқат болатынын дәлелдейік. Шынымен де, болжамды ескере отырып, $S_{k+1} = S_k + a_{k+1} =$ ____ аламыз.

Демек, $a_n = 2n - 1$ тізбегінің алғашқы n мүшесі қосындысының $S_n = n^2$ формуласы кез келген $n \in N$ болғанда ақиқат болады.

б) Д ә л е л д е у і.

1) $n = 2$ болғанда, $a_1 + a_2 =$ ________ ; $S_2 =$ ________ аламыз. $n = 2$ болғанда, $S_n = 3n(n + 1)$ формуласы ақиқат.

2) Бұл формула $n = k$ болғанда ақиқат делік, яғни $S_k =$ ________ .

3) $n = k + 1$ болғанда да қосындының формуласы ақиқат болатынын дәлелдейік, яғни $S_{k+1} = 3(k + 1)(k + 2)$. Шынымен де, болжамды ескере отырып, $S_{k+1} = S_k + a_{k+1} =$ ______________________ аламыз. Демек, $a_n = 6n$ тізбегінің алғашқы n мүшесі қосындысының $S_n = 3n(n + 1)$ формуласы кез келген $n \in N$ болғанда ақиқат.

74. Кез келген натурал n үшін:

а) $9^n + 3$ өрнегінің 4-ке бөлінетінін;

ә) $13^n + 5$ өрнегінің 6-ға бөлінетінін;

б) $7^{2n} - 1$ өрнегінің 24-ке бөлінетінін дәлелдеңдер.

а) Д ә л е л д е у і.

1) $n = 1$ болғанда, ______________________ 4-ке бөлінеді.

2) $n = k$ болғанда, $9^k + 3$ өрнегі 4-ке бөлінеді делік.

3) $n = k + 1$ болғанда да ______________ өрнегінің 4-ке бөлінетінін дәлелдейік.

Шынымен де, $9^{k+1} + 3 = 9 \cdot 9^k + 3 = (8 + 1)9^k + 3 = 8 \cdot 9^k + (9^k + 3)$. Әрбір қосылғыш 4-ке бөлінетіндіктен (неліктен екенін түсіндіріңдер), қосынды да 4-ке бөлінеді. Демек, кез келген $n \in N$ болғанда, $9^n + 3$ өрнегі 4-ке бөлінеді.

ә) Дәлелдеуі.

1) $n = 1$ болғанда, ________________________ 6-ға бөлінеді.

2) $n = k$ болғанда, ______________ өрнегі 6-ға бөлінеді делік.

3) $n = k + 1$ болғанда да, ______________ өрнегінің 6-ға бөлінетінін дәлелдейік.

Шынымен де, $13^{k+1} + 5 =$ ____

____

____.

Әрбір қосылғыш 6-ға бөлінетіндіктен (неліктен екенін түсіндіріңдер), қосынды да 6-ға бөлінеді. Демек, кез келген $n \in N$ болғанда, $13^n + 5$ өрнегі 6-ға бөлінеді.

б) Дәлелдеуі.

1) $n = 1$ болғанда, ________________________ 24-ке бөлінеді.

2) $n = k$ болғанда ______________ өрнегі 24-ке бөлінеді делік.

3) $n = k + 1$ болғанда да, ______________ өрнегінің 24-ке бөлінетінін дәлелдейік.

Шынымен де, $7^{2(k+1)} - 1 =$ ____

____

____.

Әрбір қосылғыш ____

____.

Демек, кез келген $n \in N$ болғанда, $7^{2n} - 1$ өрнегі 24-ке бөлінеді.

Арифметикалық прогрессия және оның қасиеттері

75. Арифметикалық прогрессия болатын тізбекті көрсетіңдер:

а) 3; 6; 12; 24; …; в) 3; –9; 27; –81; … ;

ә) 3; 6; 9; 12; … ; г) 3; 3; 3; 3; … ;

б) 3; 0; –3; –6; … ; ғ) 3; 9; 15; 21; … .

76. Арифметикалық прогрессияның келесі үш мүшесін атаңдар:

а) 5; 7; … ; ә) 12; 8; … ; б) –4; 1; … ; в) –9; –9; … .

77. Арифметикалық прогрессияның n-ші мүшесінің формуласын көрсетіңдер:

а) $a_{n+1} = a_n + d$; ә) $a_{n+1} = a_n - d$; б) $a_n = a_1 + nd$; в) $a_n = a_1 + n(d - 1)$.

78. № 76 тапсырмада көрсетілген арифметикалық прогрессияның n-ші мүшесінің формуласын жазыңдар.

79. Егер: а) $a_2 = 4$, $a_3 = 10$; ә) $a_3 = 5$, $a_5 = 9$; б) $a_7 = 20$, $a_{10} = 35$; в) $a_{10} = 32$, $a_{14} = 16$ болса, (a_n) арифметикалық прогрессиясының айырымын табыңдар.

80. (a_n) арифметикалық прогрессиясы берілген. Кестені толтырыңдар:

	a_1	d	n	a_n
а)	5	2	8	
ә)	20	–4	12	
б)	–3	5	7	
в)		–3	11	–24

81. 100 саны төмендегі арифметикалық прогрессияның мүшесі бола ма, соны анықтаңдар, егер болса, оның нөмірін көрсетіңдер:

а) 4; 14; 24; … ;

ә) 4; 16; 28; … .

Арифметикалық прогрессияның алғашқы *n* мүшесінің қосындысы

82. Арифметикалық прогрессияның алғашқы n мүшесі қосындысының формуласын көрсетіңдер:

а) $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2}$;

б) $S_n = \dfrac{a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$;

ә) $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$;

в) $S_n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$.

83. Арифметикалық прогрессияның алғашқы n мүшесінің қосындысын жазыңдар:

а) 2; 6; 10; … ; б) 4; 12; 20; … ;

ә) 2; –4; –10; … ; в) –4; –20; –36; … .

84. Арифметикалық прогрессияның алғашқы 6 мүшесінің қосындысын табыңдар:

а) 2; 4; … ; б) 1; –2; … ;

ә) 5; 5; … ; в) –4; 1; … .

85. а) 10-нан 50-ге дейінгі жұп сандардың; ә) 1-ден 100-ге дейінгі сандардың; б) 5-ке еселік екітаңбалы сандардың қосындысын табыңдар.

86. Бірінші жүздіктің жұп сандарының қосындысы үлкен бе, әлде тақ сандарынікі үлкен бе және қаншаға үлкен?

87. (a_n) арифметикалық прогрессиясы берілген. Кестені толтырыңдар:

	a_1	d	n	a_n	S_n
а)	3			11	25
ә)	4		5		30
б)		3	7		70
в)		–1		–10	–22

88. Прогрессияның барлық теріс таңбалы мүшелерінің қосындысын табыңдар: –15; –11; … .

Геометриялық прогрессия және оның қасиеттері

89. Тізбек геометриялық прогрессия бола ма: а) 9; 90; 900; 9000; ә) 9; 99; 999; 9999?

90. Геометриялық прогрессия болатын тізбекті көрсетіңдер:

а) 2; 4; 9; 16; … ; б) 2; –4; 8; –16; … ;

ә) 2; 4; 8; 16; … ; в) 4; 4; 4; 4; … .

91. Геометриялық прогрессияның келесі үш мүшесін табыңдар:

а) 3; 6; … ; ә) –3; 6; … ; б) 3; 1; … ; в) 1; –1; … .

92. (b_n) геометриялық прогрессиясының n-ші мүшесінің формуласын көрсетіңдер:

а) $b_n = b_1 \cdot q^n$; б) $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$;

ә) $b_{n+1} = b_n \cdot q$; в) $b_{n+1} = \frac{b_n}{q}$.

93. № 91 тапсырмада келтірілген әрбір геометриялық прогрессияның n-ші мүшесінің формуласын жазыңдар.

94. Егер: а) $b_1 = 2$, $b_2 = 8$; ә) $b_2 = 4$, $b_4 = 16$; б) $b_3 = 5$, $b_6 = 5$; в) $b_4 = -2$, $b_6 = -18$ болса, (b_n) геометриялық прогрессиясының еселігін табыңдар.

95. 16 саны: а) $\frac{1}{2}$; 2; … ; ә) $\frac{1}{8}$; 1; … ; б) –2; 4; … ; в) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; … геометриялық прогрессияның мүшесі бола ма?

96. (b_n) геометриялық прогрессиясының алтыншы мүшесін табыңдар:

а) $b_1 = 1, q = 2$; б) $b_1 = \frac{1}{9}, q = 3$;

ә) $b_1 = \frac{1}{4}, q = -2$; в) $b_1 = 10, b_2 = -10$.

97. (b_n) геометриялық прогрессиясы берілген. Кестені толтырыңдар:

	b_1	q	n	b_n
а)	1	2	4	
ә)	$\frac{1}{3}$	–3	4	
б)	4	–1	8	
в)		–2	5	8

Геометриялық прогрессияның алғашқы *n* мүшесінің қосындысы

98. Геометриялық прогрессияның алғашқы n мүшесі қосындысының формуласын көрсетіңдер:

а) $S_n = \dfrac{b_n \cdot q - b_1}{q-1}$; б) $S_n = \dfrac{b_n(1-q^n)}{1-q}$;

ә) $S_n = \dfrac{b_1 \cdot q - b_n}{q-1}$; в) $S_n = \dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}$.

99. Геометриялық прогрессияның алғашқы n мүшесінің қосындысын жазыңдар:

а) 2; 6; 18; … ; б) 3; 12; 48; … ;

ә) 2; 4; 8; … ; в) 4; 20; 100; … .

100. (b_n) геометриялық прогрессиясының алғашқы бес мүшесінің қосындысын табыңдар:

а) $b_1 = -1$, $q = 2$; б) $b_1 = \dfrac{1}{11}$, $q = 3$;

ә) $b_1 = 2$, $q = \dfrac{1}{2}$; в) $b_1 = 81$, $q = 1$.

101. Шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысын көрсететін формуланы таңдаңдар:

а) $S = \dfrac{b_1 + b_n}{2} \cdot n$; б) $S = \dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}$, мұндағы $q \neq 1$;

ә) $S = \dfrac{b_1}{1-q}$, мұндағы $q \neq 1$; в) $S = \dfrac{b_1}{1-q}$, мұндағы $|q| < 1$.

102. Санды жай бөлшек түрінде көрсетіңдер:

а) 0,(3); б) 0,(23);

ә) 0,(7); в) 0,(37).

Бұрыш пен доғаның градустық және радиандық өлшемдері

103. O нүктесінен айналдыра β бұрышына бұрғанда, бастапқы OA радиусы OB радиусына көшеді. Егер $\angle AOB$: а) 45°; ә) 120°; б) 180°; в) 0° болса, β бұру бұрышы қандай болуы мүмкін?

104. O нүктесінен айналдыра $\beta = \alpha + 360° \cdot k$ бұрышына бұрғанда, мұндағы $k \in Z$, бастапқы OA радиусы OB радиусына көшеді. Егер B нүктесі: а) I ширекке; ә) II ширекке; б) III ширекке; в) IV ширекке тиісті болса, α бұрышы қандай болуы мүмкін?

105. а) 200°; ә) 330°; б) –250°; в) –380°; г) 400°; ғ) 480°; д) –560°; е) –700°-қа тең бұру бұрышы қай ширекке тиісті?

106. Бұрышты радианмен өрнектеңдер:

$n°$	20°	45°	90°	135°	210°	270°	300°	360°
α рад.								

107. Бұрышты градуспен өрнектеңдер:

α рад.	π	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{3\pi}{4}$
$n°$								

108. $A(1; 0)$ нүктесін координаталар басын айналдыра:

а) $\frac{\pi}{6}$; б) $\frac{\pi}{2}$; г) $-\pi$; д) $-\frac{\pi}{4}$; ж) $-\frac{3\pi}{2}$; и) 2π;

ә) 45°; в) –30°; ғ) 180°; е) –360°; з) 270°; к) 150° бұрышқа бұрғанда шығатын B нүктесінің орнын көрсетіңдер.

109. Бірлік шеңберде 1 радиан доғаның ұзындығы 1-ге тең. Бастапқы OA сәулесін координаталар басын айналдыра бұрғанда A нүктесі шеңбер бойымен біраз қашықтықты өтеді. Ол қашықтық радианмен өрнектелген бұру бұрышына сәйкес келеді. Егер бұру бұрышы: а) 420°; ә) 540°; б) 750°; в) 810°-қа тең болса, осы қашықтықты табыңдар.

110. Бірлік шеңберде: а) $\frac{\pi}{2}$; ә) $\frac{3\pi}{2}$; б) $-\pi$; в) -2π; г) $\frac{3\pi}{4}$; ғ) $-\frac{2\pi}{3}$ бұрышына сәйкес келетін B нүктесін көрсетіңдер.

111. Бірлік шеңберде: а) $\frac{\pi}{8}$ және $-\frac{\pi}{8}$; ә) $\frac{3\pi}{4}$ және $-\frac{3\pi}{4}$; б) 2π және 4π; в) π және 3π бұрыштарына сәйкес келетін нүктелерді көрсетіңдер.

112. Бірлік шеңберде: а) $12\frac{1}{5}\pi$ және $\frac{31}{5}\pi$; ә) $12\frac{1}{3}\pi$ және $\frac{7}{3}\pi$ бұрыштарына сәйкес келетін нүктелер беттесе ме?

113. Берілген бұрыштарға сәйкес келетін бірлік шеңбердегі нүктелерді көрсетіңдер:

а) $\frac{\pi}{6}+2\pi k$, мұндағы $k\in Z$;   б) πk, мұндағы $k\in Z$;

ә) $-\frac{\pi}{4}+2\pi k$, мұндағы $k\in Z$;   в) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, мұндағы $k\in Z$.

114. Берілген бұрыштарға сәйкес келетін нүктелер бірлік шеңберде қалай орналасқан (α – бұру бұрышының радиандық өлшемі):

а) α және $-\alpha$;   б) α және $\alpha+\pi$;

ә) α және $\alpha+2\pi k$, мұндағы $k\in Z$;   в) $\alpha+\pi$ және $\alpha-\pi$?

115. Егер $\angle AOB$: а) 30°; ә) 90°; б) 300°; в) 0°-қа тең болса, бірлік шеңберде B нүктесі сәйкес келетін бұрыштар жиынын жазыңдар.

Кез келген бұрыштың синусы, косинусы, тангенсі және котангенсі

116. Егер бірлік шеңбердегі α бұрышына сәйкес келетін B_α нүктесінің координаталары: а) $(x; y)$; ә) $\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$; б) $\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; в) $\left(-\frac{12}{13}; \frac{5}{13}\right)$; г) $\left(-\frac{1}{3}; \frac{\sqrt{8}}{3}\right)$; ғ) (0; –1) болса, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ мәндерін көрсетіңдер.

117. Егер α бұрышы: а) 180°; ә) 90°; б) 270°; в) 360°-қа тең болса, $\sin\alpha$ және $\operatorname{tg}\alpha$ мәндерін табыңдар.

118. Егер α бұрышы: а) 15°; ә) 75°; б) 170°; в) 180°; г) 250°; ғ) 300°-қа тең болса, бірлік шеңберде B_α нүктесін белгілеп, $\sin\alpha$ мен $\cos\alpha$ мәндерін салыстырыңдар.

119. Барлық тригонометриялық функциялардың α ($0° < \alpha < 360°$) бұрышындағы мәндері: а) 780°; ә) 990°; б) –560°; в) –690°-қа тең бұрыштағы мәндерімен бірдей болатындай α бұрышын табыңдар.

120. Функция мәндерінің таңбасын (+ немесе –) көрсетіп, кестені толтырыңдар.

	64°	125°	220°	305°
$\sin\alpha$	+			
$\cos\alpha$				
$\mathrm{tg}\,\alpha$				
$\mathrm{ctg}\,\alpha$				

121. Теңдеу дұрыс болатындай көп нүктенің орнына қарама-қарсы бұрыштың аттас функциясын жазыңдар:

а) $\sin(-\alpha) = \ldots$; б) $\mathrm{tg}(-\alpha) = \ldots$;

ә) $\cos(-\alpha) = \ldots$; в) $\mathrm{ctg}(-\alpha) = \ldots$.

122. Егер α – I ширектің бұрышы және: а) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; ә) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\mathrm{tg}\,\alpha = 1$; в) $\mathrm{ctg}\,\alpha = \sqrt{3}$ болса, α бұрышының мәнін табыңдар.

123. Өрнектің мәнін табыңдар:

а) $\sin(-30°)$, $\cos(-30°)$, $\mathrm{tg}(-30°)$, $\mathrm{ctg}(-30°)$;

ә) $\sin(-45°)$, $\cos(-45°)$, $\mathrm{tg}(-45°)$, $\mathrm{ctg}(-45°)$;

б) $\sin(-60°)$, $\cos(-60°)$, $\mathrm{tg}(-60°)$, $\mathrm{ctg}(-60°)$.

124. Есептеңдер:

а) $\sin 135°$, $\cos 135°$, $\mathrm{tg}\,135°$, $\mathrm{ctg}\,135°$;

ә) $\sin(-120°)$, $\cos(-120°)$, $\mathrm{tg}(-120°)$, $\mathrm{ctg}(-120°)$;

б) $\sin(-150°)$, $\cos(-150°)$, $\mathrm{tg}(-150°)$, $\mathrm{ctg}(-150°)$.

Тригонометриялық функциялар және олардың қасиеттері

125. Кестені толтырыңдар:

Функция	Анықталу облысы	Мәндер жиыны
$y = \sin x$		
$y = \mathrm{tg}\,x$		

126. Егер бар болса, функцияның ең үлкен және ең кіші мәндерін көрсетіңдер:

а) $y = \cos x$; ә) $y = \mathrm{ctg}\,x$.

127. Синусы: а) $-0{,}8$; ә) $\frac{\sqrt{7}}{3}$; б) $\frac{\pi}{2}$; в) $\sqrt{3}$ тең болатын бұрыш бар бола ма?

128. Косинусы келесі мәндерге тең болатын бұрышты салуға бола ма? Егер болса, бірлік шеңберді пайдалана отырып, бұрышты салыңдар.

а) $-\frac{1}{3}$; ә) $\frac{5}{2}$; б) $\frac{3}{4}$; в) $-\frac{3}{2}$.

129. Ординатасы: а) $\frac{1}{2}$; ә) $-\frac{1}{2}$; б) 0; в) –1-ге тең болатын бірлік шеңбердегі нүктелерді көрсетіңдер.

130. Абсциссасы: а) 0; ә) –1; б) $\frac{1}{2}$; в) $-\frac{1}{2}$-ге тең болатын бірлік шеңбердегі нүктелерді көрсетіңдер.

131. Кестені толтырыңдар:

Функция	Ширектердегі функцияның таңбалары			
	I	II	III	IV
$y = \sin x$				
$y = \cos x$				
$y = \operatorname{tg} x$				
$y = \operatorname{ctg} x$				

132. Мәндердің таңбаларын анықтаңдар:

а) $\sin\frac{5\pi}{6}$; б) $\sin 2$; г) $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}$; д) $\operatorname{tg} 4$;

ә) $\cos\frac{2\pi}{3}$; в) $\cos(-3)$; ғ) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; е) $\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{3}$.

133. Теңдіктің неліктен ақиқат болатынын түсіндіріңдер:

а) $\sin\frac{\pi}{6} = \sin\frac{25\pi}{6}$; б) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{7} = \operatorname{tg}\frac{22\pi}{7}$;

ә) $\cos\frac{2\pi}{5} = \cos\frac{32\pi}{5}$; в) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = \operatorname{ctg}\frac{13\pi}{4}$.

134. Есептеңдер:

а) $\sin 330°$; б) $\operatorname{tg} 315°$; г) $\cos 4\pi$; д) $\operatorname{tg}\frac{8\pi}{3}$;

ә) $\cos 1110°$; в) $\operatorname{ctg} 495°$; ғ) $\sin\frac{7\pi}{2}$; е) $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{2}$.

135. Бірлік шеңберде: а) ординатасы $\frac{\sqrt{2}}{2}$; ә) абсциссасы $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ болатын нүктелер сәйкес келетін барлық бұру бұрыштарын жазыңдар.

Негізгі тригонометриялық тепе-теңдіктер

136. Негізгі тригонометриялық тепе-теңдіктерді жазыңдар:

а) $\sin^2 x + \cos^2 x = ...$; в) $\text{tg}\, x \cdot \text{ctg}\, x = ...$;

ә) $\text{tg}\, x = ...$; г) $1 + \text{tg}^2 x = ...$;

б) $\dfrac{\cos x}{\sin x} = ...$; ғ) $\dfrac{1}{\sin^2 x} = ...$.

137. Өрнекті ықшамдаңдар:

а) $1 - \sin^2 x$; б) $1 - \cos^2 x$; г) $2 - \sin^2 x - \cos^2 x$;

ә) $\dfrac{1}{\text{tg}\, x} \cdot \dfrac{1}{\text{ctg}\, x}$; в) $\dfrac{\cos x}{1 + \sin x} + \text{tg}\, x$; ғ) $\dfrac{\sin x}{1 - \cos x} + \dfrac{\sin x}{1 + \cos x}$.

138. а) Егер $\text{tg}\, x = \dfrac{1}{3}$ болса, $\cos^2 x$-ті; ә) егер $\text{ctg}\, x = 2$ болса, $\sin^2 x$-ті есептеңдер.

139. Егер:

а) $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ және $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$; б) $\sin x = -\dfrac{1}{2}$ және $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$;

ә) $\text{tg}\, x = -1$ және $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$; в) $\text{ctg}\, x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ және $\dfrac{3\pi}{2} < x < 2\pi$

болса, қалған тригонометриялық функциялардың мәндерін табыңдар.

140. Егер:

а) $\cos x = \dfrac{3}{5}$ және $\dfrac{3\pi}{2} < x < 2\pi$; б) $\sin x = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ және $\dfrac{3\pi}{2} < x < 2\pi$;

ә) $\text{tg}\, x = 2$ және $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$; в) $\text{ctg}\, x = -\dfrac{3}{4}$ және $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$ болса,

қалған тригонометриялық функциялардың мәндерін табыңдар.

141. Теңдік дұрыс па:

а) $\sin^2 15° + \cos^2 15° = \sin^2 40 + \cos^2 40$;

ә) $\sin^2 18° - \cos^2 47° = \sin^2 47 - \cos^2 18$?

142. Берілгені: $\sin x = 1$. $\text{tg}\, x \cdot \text{ctg}\, x = 1$ болатыны ақиқат па?

143. Есептеңдер: а) $\text{tg}\, 38° \cdot \text{tg}\, 52°$; ә) $1 - \text{tg}\, 40° \cdot \text{tg}\, 50°$.

Тригонометриялық өрнектерді тепе-тең түрлендіру

144. Теңдеудің оң жағын толтырып, келтіру формулаларын жазыңдар:

а) $\sin(\pi - x) = ...$; г) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = ...$;

ә) $\cos(\pi + x) = ...$; ғ) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = ...$;

б) $\operatorname{tg}(2\pi - x) = \dots$; д) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \dots$;

в) $\operatorname{ctg}(2\pi + x) = \dots$; е) $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \dots$.

145. Өрнекті ықшамдаңдар:

а) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin(\pi + x) + \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \operatorname{ctg}(2\pi - x)$;

ә) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \cos(\pi - x) + \operatorname{tg}(\pi - x) + \operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{2} - x\right)$;

б) $\dfrac{\sin(\pi - x)\cdot\cos(-x)}{\cos(\pi - x)}$; в) $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\cdot\operatorname{tg}(-x)}{\cos(\pi + x)}$.

146. Келтіру формулаларын пайдаланып, өрнекті ықшамдаңдар:

а) $\sin 250°$; б) $\operatorname{tg} 200°$;
ә) $\cos 110°$; в) $\operatorname{ctg} 340°$.

147. Өрнектің мәнін табыңдар:

а) $4 - \sin 330°$; б) $\operatorname{tg} 570°$;
ә) $\cos 4110°$; в) $\operatorname{ctg} 4560°$.

148. Теңдік ақиқат па:

а) $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{3} - \pi\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right)} = 3$; ә) $\dfrac{\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)} = -1$?

149. Екі бұрыштың қосындысының немесе айырымының тригонометриялық функциясының формуласы шығатындай теңдіктің екінші бөлігін жазыңдар:

а) $\sin(x - y) = \dots$;
ә) $\cos(x - y) = \dots$;
б) $\operatorname{tg}(x - y) = \dots$.

150. Өрнекті ықшамдаңдар:

а) $1 - \sin 69°\cdot\cos 39° + \cos 69°\cdot\sin 39°$;
ә) $2 - \cos 47°\cdot\cos 17° - \sin 47°\cdot\sin 17°$;
б) $\dfrac{\operatorname{tg} 16° + \operatorname{tg} 44°}{1 - \operatorname{tg} 16°\cdot\operatorname{tg} 44°}$;
в) $\dfrac{\operatorname{tg} 85° - \operatorname{tg} 25°}{1 + \operatorname{tg} 85°\cdot\operatorname{tg} 25°}$.

151. Есептеңдер:

а) $1 + \sin 10° \cdot \cos 20° + \cos 10° \cdot \sin 20°$;

ә) $1 + \cos 36° \cdot \cos 24° - \sin 36° \cdot \sin 14°$;

б) $\dfrac{\operatorname{ctg} 22° \cdot \operatorname{ctg} 23° - 1}{\operatorname{ctg} 22° + \operatorname{ctg} 23°}$;

в) $\dfrac{\operatorname{ctg} 67° \cdot \operatorname{ctg} 37° + 1}{\operatorname{ctg} 67° - \operatorname{ctg} 37°}$.

152. Берілгені: $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$, $\cos\beta = \dfrac{4}{5}$, мұндағы α мен β – сүйір бұрыштар.

Табу керек: а) $\cos(\alpha + \beta)$; ә) $\sin(\alpha - \beta)$.

153. Қос бұрыштың тригонометриялық функциясының формуласы шығатындай теңдіктің екінші бөлігін жазыңдар:

а) $\sin 2x = \ldots$;

ә) $\cos 2x = \ldots$;

б) $\operatorname{tg} 2x = \ldots$.

154. Теңдік дұрыс па:

а) $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \dfrac{1}{2}\sin 2\alpha$;

б) $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$;

ә) $\cos^2\alpha = \cos 2\alpha + \sin^2\alpha$;

в) $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$?

155. Өрнекті ықшамдаңдар:

а) $\dfrac{\sin 2x}{\sin x}$;

б) $\dfrac{\cos 2x}{\cos x + \sin x}$;

ә) $\dfrac{2\cos^2 x}{\sin 2x}$;

в) $\dfrac{1 - \sin 2x}{\cos x - \sin x}$.

156. Егер $\operatorname{tg} x = 0{,}7$ болса, $\operatorname{tg} 2x$ өрнегінің мәнін табыңдар.

157. Есептеңдер:

а) $\cos^2 75° - \sin^2 75°$;

б) $4\sin 75° \cdot \cos 75°$;

ә) $\sin\dfrac{\pi}{8} \cdot \cos\dfrac{\pi}{8}$;

в) $\dfrac{2\operatorname{tg} 30°}{1 - \operatorname{tg}^2 30°} + \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 15°}{2\operatorname{tg} 15°}$.

158. Өрнекті ықшамдаңдар:

а) $2\sin 50° \cdot \sin 40°$;

б) $2\cos^2 25° - 2\cos^2 65°$;

ә) $\dfrac{4\operatorname{tg} 40°}{1 - \operatorname{ctg}^2 50°}$;

в) $\dfrac{\operatorname{tg} 25°}{1 - \operatorname{ctg}^2 65°}$.

159. Берілгені: $\operatorname{tg} x = 3$. а) $\operatorname{ctg} 2x$; ә) $\cos 2x$ табыңдар.

160. Тригонометриялық функциялардың қосындысының немесе айырымының формуласы шығатындай теңдіктің екінші жағын толтырыңдар:

а) $\sin\alpha + \sin\beta = \dots$; б) $\sin\alpha - \sin\beta = \dots$;

ә) $\cos\alpha + \cos\beta = \dots$; в) $\cos\alpha - \cos\beta = \dots$.

161. Өрнекті көбейтінді түрінде көрсетіңдер:

а) $\cos 2x + \cos 4x$; б) $\cos 20° - \cos 12°$;

ә) $\sin x + \sin 5x$; в) $\sin\frac{\pi}{18} - \sin\frac{\pi}{9}$.

162. Бөлшекті қысқартыңдар:

а) $\frac{\cos 3x + \cos 5x}{\sin 2x}$; ә) $\frac{\sin x + \sin 3x}{\sin 4x}$.

163. Есептеңдер:

а) $\sin 75° - \sin 15° - \sin 45°$;

ә) $\cos 15° - \cos 75° - \cos 45°$;

б) $\operatorname{tg} 75° - \operatorname{tg} 15° + \operatorname{tg} 135°$.

164. Өрнектің мәнін табыңдар:

а) $\frac{\sin 37° - \sin 53°}{1 - 2\cos^2 4°}$; ә) $\frac{\cos 50° - \cos 70°}{2\sin^2 40° - 1}$.

V. Ықтималдықтар теориясының элементтері

Ықтималдықтар теориясының бастапқы ұғымдары. Ықтималдық ұғымының классикалық анықтамасы

165. Кітап 1000 беттен тұрады. Кездейсоқ ашылған кітап беті нөмірінің екі нөлмен аяқталуының ықтималдығы қандай?

166. Бастапқы 20 натурал саннан кездейсоқ таңдап алынған сан: а) 10-ның; ә) берілген сандардың әрқайсысының бөлгіші болуының ықтималдығы қандай?

167. Екітаңбалы саннан кездейсоқ алынған арифметикалық квадрат түбірдің натурал сан болуының ықтималдығы қандай?

168. 0, 1, 2 цифрларынан екінші ондықтың барлық мүмкін болатын екітаңбалы сандары құрылды. Олардың ішінен кездейсоқ таңдап алынған санның 5-ке бөліну ықтималдығы қандай?

Статистикалық ықтималдық

169. Қазақстан өңірлерінің біріндегі 9-сыныпта оқитын 2000 оқушы 5 тапсырмадан тұратын тексеру жұмысын орындады. 400 оқушы барлық тапсырмаларды дұрыс орындаған болып шықты. Кездейсоқ таңдап алынған тоғызыншы сынып оқушысының барлық тапсырмаларды орындау ықтималдығы қандай?

170. 500 кездейсоқ таңдап алынған өнімдердің сапасын тексерген кезде 5-уінің ақауы бар болып шықты. 1500 бөлшектен тұратын партияда қанша бөлшектің ақауы бар болуы мүмкін?

171. Кездейсоқ таңдап алынған 200 шамды тексерген кезде екеуінің ақауы бар болып шықты. 1000 шамнан тұратын партияда қанша шамның ақауы бар болуы мүмкін?

172. 1000 теледидардан тұратын партиядағы 50 теледидарды тексергенде, біреуі ақауымен болып шықты. Барлық партияда қанша теледидар ақауымен болуы мүмкін?

Геометриялық ықтималдық

173. A және B нүктелері ұштары болатын керменің C нүктесінде құс отыр. Басқа құстың AC және BC кесінділерінің орталарында отыру ықтималдығы қандай?

174. Бірінші үшбұрыштың ішінде оған ұқсас, периметрі одан екі есе кіші үшбұрыш орналасқан. Бірінші үшбұрышқа кездейсоқ белгіленген нүктенің екінші үшбұрышқа да тиісті болуының ықтималдығы қандай?

175. Гүлзардың пішіні қабырғасы 3 м болатын дұрыс үшбұрыш тәріздес. Онда диаметрі 1 м-ге тең гүл отырғызатын дөңгелек жасалды. Үшбұрышта кездейсоқ белгіленген нүктенің дөңгелекке де тиісті болу ықтималдығы қандай?

176. Радиустары 1 м және 2 м болатын екі концентрлік шеңбер берілген. Радиусы үлкен дөңгелектің ішінен кездейсоқ алынған нүктенің осы шеңберлермен жасалған сақинада болуының ықтималдығы қандай?

ҚОСЫМША 2

0°-тан 90°-қа дейінгі бұрыштардың тригонометриялық функциялары мәндерінің кестесі

α	$\sin \alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\cos \alpha$	β
0	0	0	–	1	90
1	0,017	0,017	57,3	1,000	89
2	0,035	0,035	28,6	0,999	88
3	0,052	0,052	19,1	0,999	87
4	0,070	0,070	14,3	0,998	86
5	0,087	0,087	11,4	0,996	85
6	0,105	0,105	9,51	0,995	84
7	0,122	0,123	8,14	0,993	83
8	0,139	0,141	7,12	0,990	82
9	0,156	0,158	6,31	0,988	81
10	0,174	0,176	5,67	0,985	80
11	0,191	0,194	5,15	0,982	79
12	0,208	0,213	4,71	0,978	78
13	0,225	0,231	4,33	0,974	77
14	0,242	0,249	4,01	0,970	76
15	0,259	0,268	3,73	0,966	75
16	0,276	0,287	3,49	0,961	74
17	0,292	0,306	3,27	0,956	73
18	0,309	0,325	3,08	0,951	72
19	0,326	0,344	2,90	0,946	71
20	0,342	0,364	2,75	0,940	70
21	0,358	0,384	2,61	0,934	69
22	0,375	0,404	2,48	0,927	68
23	0,391	0,424	2,36	0,921	67
24	0,407	0,445	2,25	0,914	66
25	0,423	0,466	2,15	0,906	65
26	0,438	0,488	2,05	0,899	64
27	0,454	0,510	1,96	0,891	63
28	0,469	0,532	1,88	0,883	62
29	0,485	0,554	1,80	0,875	61
α	$\cos \beta$	$\mathrm{ctg}\,\beta$	$\mathrm{tg}\,\beta$	$\sin \beta$	β

α	$\sin\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\cos\alpha$	β
30	0,5	0,577	1,73	0,866	60
31	0,515	0,601	1,66	0,857	59
32	0,530	0,625	1,60	0,848	58
33	0,545	0,649	1,54	0,839	57
34	0,559	0,675	1,48	0,829	56
35	0,574	0,700	1,43	0,819	55
36	0,588	0,727	1,38	0,809	54
37	0,602	0,754	1,33	0,799	53
38	0,616	0,781	1,28	0,788	52
39	0,629	0,810	1,24	0,777	51
40	0,643	0,839	1,19	0,766	50
41	0,656	0,869	1,15	0,755	49
42	0,669	0,900	1,11	0,743	48
43	0,682	0,933	1,07	0,731	47
44	0,695	0,966	1,04	0,719	46
45	0,707	1	1	0,707	45
α	$\cos\beta$	$\operatorname{ctg}\beta$	$\operatorname{tg}\beta$	$\sin\beta$	β

ҚОСЫМША ӘДЕБИЕТ

1. Глейзер Г. И. История математики в школе: 6–8 классы. – М.: Просвещение, 1982.

2. Закарин А. Абель. Галуа. Лобачевский. Эйнштейн: Математика ғалымдарының өмірі мен ғылыми еңбектері. – Алматы: Қазақстан, 1968.

3. Қаниев С. Математикадан конкурстық есептер. – Алматы: Мектеп, 1975.

4. Мордкович А. Г., Семенов П. В. Алгебра. 9 класс. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений. – М.: Мнемозина, 2010.

5. Перельман Я. И. Живая математика. Математические рассказы и головоломки. – М.: ООО «Астрель», 2007.

6. Сергеев И. Н., Олехник С. Н., Гашков С. Б. Примени математику. – М.: Наука, 1990.

7. Энциклопедический словарь юного математика. / Сост. А. П. Савин. – М.: Педагогика, 1985.

Қосалқы беттердегі иллюстрацияларда пайдаланылған фотосуреттер тізімі

1. Торыс қонысы. Домалақ тастар алаңы, Маңғыстау т. – 18 б.
2. Бейбітшілік және Келісім сарайы, Нұр-Сұлтан қ. – 62 б.
3. «Гранд Алатау» тұрғын үй кешені, Нұр-Сұлтан қ. – 92 б.
4. «Асыл тас» әкімшілік кешені, Нұр-Сұлтан қ. – 147 б.
5. «Қазақстан» қонақ үйі, Алматы қ. – 227 б.