Ә. Н. ШЫНЫБЕКОВ, Д. Ә. ШЫНЫБЕКОВ,
Р. Н. ЖҰМАБАЕВ

ГЕОМЕТРИЯ

Жалпы білім беретін мектептің
9-сыныбына арналған оқулық

Қазақстан Республикасының
Білім және ғылым министрлігі ұсынған

9

Алматы «Атамұра» 2019

1–4338

ӘОЖ 373.167.1
КБЖ 22.151 я 72
Ш 98

Оқулық Қазақстан Республикасының Білім және ғылым министрлігі бекіткен негізгі Орта білім беру деңгейінің 7—9-сыныптарына арналған «Геометрия» пәнінің жаңартылған мазмұндағы Типтік оқу бағдарламасына сәйкес дайындалды.

Жалпы редакциясын басқарған физика-математика ғылымдарының докторы, профессор, ҚР ҰҒА академигі М. Өтелбаев.

Пайдаланылған шартты белгілер:

— жаңа материалды бекіту сұрақтары
— практикалық және шығармашылық жұмыстар
— тарихқа шолу
— шығармашылық немесе күрделілігі жоғары тапсырмалар мен материалдар
— дәлелдеудің (есептің шешуінің) басы
— дәлелдеудің (есептің шешуінің) соңы

Есептер:
A — бастапқы деңгей
B — орта деңгей
C — жоғары деңгей

Шыныбеков А.Н. т.б.
Ш 98 **Геометрия.** Жалпы білім беретін мектептің 9-сыныбына арналған оқулық / Ә. Н. Шыныбеков, Д. Ә. Шыныбеков, Р. Н. Жұмабаев. — Алматы: Атамұра, 2019. — 176 бет.

ISBN 978-601-331-574-4

ISBN 978-601-331-574-4

АЛҒЫ СӨЗ

Бұл оқулық жалпы білім беретін мектептің 9-сыныбына арналып жазылған.

Оқулықта өтілген тақырыпты бекіту мақсатында ұсынылған сұрақтар, тапсырмалар мен есептер берілген. Есептер қиындық деңгейіне қарай үш топқа бөлінген: ***A***, ***B*** және ***C***. ***A*** тобындағы есептерді барлық оқушылардың орындауы міндетті. Осы деңгейдегі тапсырмаларды орындап болған соң, келесі ***B*** деңгейіне көшуге болады. *C* тобына деңгейі жоғары есептер жинақталған.

C тобының есептері математиканы терең меңгергісі келетін оқушыларға ұсынылған. Оларды сыныптан тыс уақытта да өздерің оқып-үйренулеріңе болады. Өйткені математика пәнінің олимпиадалары мен түрлі конкурстарға қатысып, нәтижелі орындарды иемдену үшін қажет материалдар ***C*** тобында ұсынылған.

Оқулықта тарихи мағлұматтар мен өздігінен орындауға арналған, практикалық және шығармашылық тапсырмалар бар. Осы тапсырмаларды орындай отырып сендер тақырыпты тереңірек меңгересіңдер, ойлау қабілеттеріңді дамытасыңдар.

Математика, оның ішінде геометрия пәні қажырлы еңбекті, табандылықты қажет етеді. Бірақ бұл геометрияны оқып-үйрену қиын дегенді білдірмейді. Геометрия — қызықты, күнделікті өмірде қолданылатын ғылымдардың бірі. Әр тапсырманы зейін қойып орындасаңдар, геометрияның қарапайымдылығына көз жеткізесіңдер.

Оқуда табыс тілейміз!

Авторлар

7, 8-СЫНЫП МАТЕРИАЛДАРЫН ҚАЙТАЛАУ

Бөлім материалдарын оқып-үйрену барысында сендер:

- 7, 8-сыныптарда өтілген материалдарды қайталап, еске түсіресіңдер;
- 9-сыныпта өтілетін жаңа тақырыптарды нәтижелі меңгеруге дайындық жасайсыңдар.

Геометрияда, жалпы математикада, бұрынғы өтілген тақырыптар келесі, жаңа тақырыптарды баяндау барысында кеңінен қолданылатынын жақсы білесіңдер. Сондықтан геометриядан 9-сыныпта өтілетін материалдарды жете меңгеру үшін 7, 8-сыныптарда өтілген тақырыптарды еске түсіріп, пысықтап алыңдар. Әсіресе мынадай маңызды сұрақтарға көңіл бөлгендерің орынды.

1. Қандай бұрыштарды а) сыбайлас бұрыштар; ә) вертикаль бұрыштар деп атайды? Суретін салып көрсетіңдер.
2. Екі түзуді үшінші түзумен қиғанда пайда болатын бұрыштардың суретін салып көрсетіңдер.
3. Қандай түзулерді а) параллель түзулер; ә) перпендикуляр түзулер деп атайды?
4. Түзулердің параллельдігінің неше белгісі бар? Оларды тұжырымдап беріңдер.
5. Қандай фигураны үшбұрыш деп атайды? Оның қандай түрлерін білесіңдер? Үшбұрыштың қандай элементтері бар? Атап көрсетіңдер.
6. Үшбұрыштар теңдігінің неше белгісі бар? Оларды тұжырымдаңдар.
7. Дөңес көпбұрыш деген не? n бұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы мен сыртқы бұрыштарының қосындысы неге тең?
8. Қандай төртбұрышты параллелограмм деп атайды? Параллелограмның белгілерін тұжырымдап, суреттен көрсетіңдер.
9. Тіктөртбұрыш, ромб, квадрат деген не және олардың қандай қасиеттерін білесіңдер?
10. Үшбұрыштың орта сызығы деген не? Оның қандай қасиеттерін білесіңдер?
11. Трапеция деген не және оның қандай түрлерін, қасиеттерін білесіңдер?

12. Шеңберге сырттай және іштей сызылған төртбұрыштардың қандай қасиеттері бар?

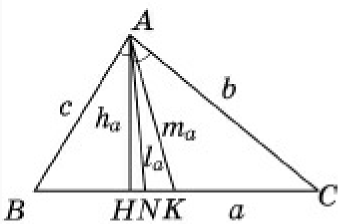
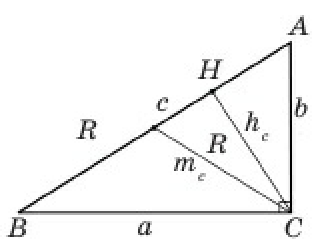
13. Пифагор теоремасын жазып, оған сәйкес келетін үшбұрышты салып көрсетіңдер.

14. Тік бұрышты үшбұрыштағы сүйір бұрыштың тригонометриялық функциялары мен үшбұрыш қабырғаларының арасындағы байланысты жазып көрсетіңдер.

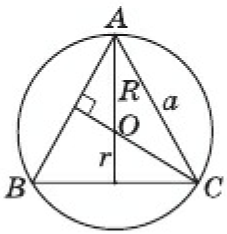
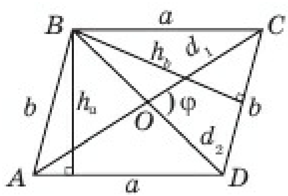
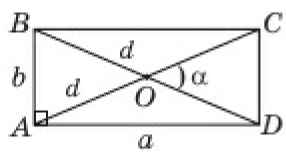
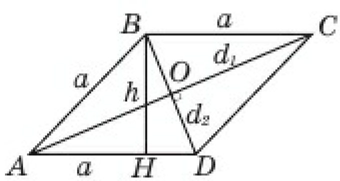
15. 30°, 45°, 60° бұрыштардағы тригонометриялық функциялардың мәндерін айтып беріңдер.

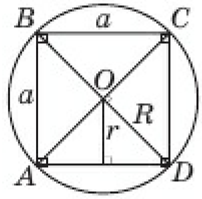
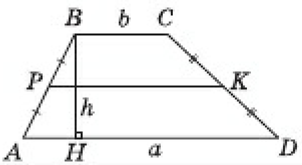
16. Тіктөртбұрыш, үшбұрыш, параллелограмм, трапецияның аудандары қандай формулалармен анықталады? Формулада қолданылатын элементтердің суретін салып көрсетіңдер.

ПЛАНИМЕТРИЯНЫҢ НЕГІЗГІ ФОРМУЛАЛАРЫ

<table>
<tr><th>№</th><th>Фигура</th><th>Негізгі формулалар</th></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>1.</td><td>Кез келген үшбұрыш

m_a — медиана
l_a — биссектриса
h_a — биіктік</td><td>$P = a + b + c$; $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$;
$m_a = \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}}$;
$R = \frac{abc}{4S}$; $r = \frac{S}{p}$;
$S = \frac{1}{2}a \cdot h_a$; $S = \frac{1}{2}b \cdot c \cdot \sin A$;
$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$;
$S = rp$; $S = \frac{abc}{4R}$.</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Тік бұрышты үшбұрыш
</td><td>$c^2 = a^2 + b^2$; $\angle C = 90^\circ$; $m_c = R = \frac{c}{2}$;
$h_c = \sqrt{AH \cdot BH}$; $a^2 = c \cdot BH$;
$b^2 = c \cdot AH$;
$a = c \cdot \sin A = c \cdot \cos B$;
$c = \frac{a}{\sin A} = \frac{a}{\cos B}$;
$a = b \cdot \mathrm{tg} A = b \cdot \mathrm{ctg} B$; $S = \frac{1}{2}a \cdot b$.</td></tr>
</table>

жалғасы

1	2	3
3.	**Дұрыс үшбұрыш**  	$\angle A = \angle B = \angle C = 60°$; $AB = AC = BC = a$; $R = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a$; $r = \dfrac{\sqrt{3}}{6}a$; $R = 2r$; $S = \dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$.
4.	**Параллелограмм**  	$AO = OC$; $BO = OD$; $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = 180°$ $AC^2 + BD^2 = 2(a^2 + b^2)$; $S = a \cdot h_a$; $S = b \cdot h_b$; $S = a \cdot b \cdot \sin A$, $S = \dfrac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\varphi$ (d_1, d_2 – диагональдар, φ – олардың арасындағы бұрыш).
5.	**Тіктөртбұрыш**  	$AC = BD$; $AO = OC$, $BO = OD$; $S = a \cdot b$; $S = \dfrac{d^2 \cdot \sin\alpha}{2}$; $R = \dfrac{AC}{2}$; $AC = BD = \sqrt{a^2 + b^2}$; $R = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$.
6.	**Ромб**  	$AC \perp BD$; $AO = OC$; $BO = OD$; $AB = BC = CD = AD = a$; $S = a \cdot h$; $S = \dfrac{1}{2} d_1 \cdot d_2$; $r = \dfrac{h}{2}$.

<table>
<tr><th>1</th><th>2</th><th>3</th></tr>
<tr><td>7.</td><td>Квадрат (шаршы)
</td><td>$AC \perp BD$; $AC = BD$;
$AO = OC = BO = OD = R$;
$AC = \sqrt{2}a$; $R = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a$; $r = \dfrac{a}{2}$;
$S = a^2$; $S = \dfrac{AC^2}{2}$.</td></tr>
<tr><td>8.</td><td>Трапеция
</td><td>$\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = 180^\circ$
$PK = \dfrac{a+b}{2}$; $S = \dfrac{h}{2}(a+b) =$
$= PK \cdot h$
$AD \parallel BC \parallel PK$, PK — орта сызық.</td></tr>
</table>

ҚАЙТАЛАУ ЕСЕПТЕРІ

А

0.1. AB және CD кесінділері әрқайсысының ортасы болатын O нүктесінде қиылысады. $\Delta AOC = \Delta BOD$ теңдігі орындала ма? Бұл есеп шартындағы өзге де тең үшбұрыштар жұбын көрсетіңдер.

0.2. $ABCD$ параллелограмының периметрі 12 см, ABD үшбұрышының периметрі 8 см. BD диагоналының ұзындығы қандай?

0.3. Барлық бұрыштары өзара тең 1) төртбұрыш; 2) үшбұрыш жөнінде не айтуға болады? Суретін салыңдар.

0.4. Бір диагоналы қабырғасына тең ромбының бұрыштарын табыңдар.

0.5. 1) Параллелограмм; 2) тіктөртбұрыш; 3) ромб; 4) квадрат қабырғаларының орталарын тізбектеп қосқанда қандай фигура шығады? Жауаптарыңды негіздеңдер.

0.6. Үшбұрыштың қабырғалары 10 см, 12 см және 15 см. Оның орта сызықтарының ұзындықтарын табыңдар.

0.7. Трапецияның бір табанындағы бұрыштары 60° және 80°. Оның өзге екі бұрышын табыңдар.

0.8. Төртбұрыштың қарама-қарсы бұрыштары 120° және 60°. Төртбұрышқа сырттай шеңбер сызуға болатынын көрсетіңдер.

0.9. Егер тік бұрышты үшбұрыштың катеттері a және b, гипотенузасы c, ал a катетіне қарсы жатқан бұрышы α болса, берілген элементтері бойынша оның белгісіз элементтерін табыңдар: 1) $a = 4$ см, $b = 3$ см; 2) $a = 12$ см, $c = 13$ см; 3) $\alpha = 30^\circ$, $c = 40$ см; 4) $\alpha = 45^\circ$, $b = 4$ см; 5) $\alpha = 60^\circ$, $b = 5$ см; 6) $c = 10$ дм, $b = 6$ дм.

0.10. Қабырғалары a-ға және b-ға тең тіктөртбұрыштың ауданын табыңдар: 1) $a = 3$ см, $b = 4$ см; 2) $a = \sqrt{2}$ м, $b = \sqrt{8}$ м; 3) $a = \frac{3}{2}$ дм, $b = \frac{2}{3}$ дм.

0.11. Екі қабырғасы мен арасындағы бұрышы бойынша а) параллелограмның; ә) үшбұрыштың ауданын табыңдар: 1) $a = 2$ см, $b = 3$ см, $\alpha = 30^\circ$; 2) $a = 4$ м, $b = \sqrt{3}$ м, $\alpha = 60^\circ$; 3) $a = 1{,}7$см, $b = 2{,}2$ см, $\alpha = 45^\circ$; 4) $a = \frac{4}{3}$ м, $b = \frac{3}{4}$ м, $\alpha = 30^\circ$.

0.12. a табаны мен оған түсірілген h_a биіктігі бойынша а) параллелограмның; ә) үшбұрыштың ауданын табыңдар: 1) $a = 4$ см, $h_a = 5$ см; 2) $a = 1{,}2$ м, $h_a = 0{,}5$ м; 3) $a = 1\frac{1}{3}$ см, $h_a = 2\frac{1}{7}$ см.

0.13. Қабырғасы мен бір диагоналы 4 см болатын ромбының ауданын табыңдар.

0.14. a және b табандары мен h биіктігі бойынша трапецияның ауданын табыңдар: 1) $a = 4$ см, $b = 2$ см, $h = 2$ см; 2) $a = 7$ см, $b = 3$ см, $h = 5$ см; 3) $a = 0{,}2$ м, $b = 3{,}5$ м, $h = 1{,}4$ м; 4) $a = 1\frac{1}{2}$ см, $b = \frac{1}{2}$ см, $h = 3$ см.

B

0.15. ABC үшбұрышының B төбесіндегі сыртқы бұрышының биссектрисасы мен C бұрышының биссектрисалары $\frac{1}{2}(\angle A)$-ға тең бұрышпен қиылысатынын дәлелдеңдер.

0.16. Параллелограмның екі қабырғасының қатынасы 3:4 қатынасына тең, периметрі 28 см. Параллелограмның қабырғаларын табыңдар.

0.17. Тік бұрышты үшбұрыштың гипотенузасына түсірілген медианасы гипотенузаның жартысына тең болатынын дәлелдеңдер.

0.18. Ромбының периметрі 16 см, биіктігі 2 см. Ромбының бұрыштарын табыңдар.

0.19. Диагоналы бойынша квадрат салыңдар.

0.20. Әрбір үшбұрышты параллелограмм құрастыруға болатындай етіп екі бөлікке бөлуге болатынын дәлелдеңдер.

0.21. Табандары 17 см және 27 см, сүйір бұрышы 60° болатын тең бүйірлі трапецияның периметрін табыңдар.

0.22. ABC үшбұрышы мен сәйкесінше AB және AC қабырғаларының орталары болатын D және E нүктелері берілген. Тек сызғышты пайдаланып, BC қабырғасының ортасын табыңдар.

0.23. Егер параллелограмға іштей шеңбер сызу мүмкін болса, оның ромб болатынын дәлелдеңдер.

0.24. 0.1-суретте Алматы қаласындағы терең орналасқан метро бекеттерінің бірі–«Жібек жолы» бекеті бейнеленген (30 м тереңдікте). Бекет үш залдан тұрады: ортаңғы және оның екі

0.1-сурет

бүйіріндегі залдар. Олар ені 19,8 м және ұзындығы 104 м болатын ортақ платформа құрайды. Бекетке 4 жолақты эскалатор көмегімен түсіп-шығуға болады. Көтерілу биіктігі 28,5 м, ұзындығы 57 м. Эскалатор таспасының қандай бұрышпен көтерілетінін анықтаңдар.

0.25. Ромбының диагональдары 10 см және $10 \cdot \sqrt{3}$ см. Ромбының бұрыштарын табыңдар.

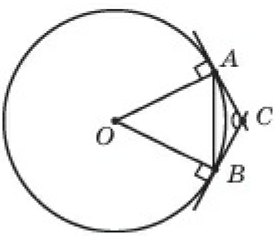
0.26. Периметрлері бірдей тіктөртбұрыштардың ішінде квадраттың ауданы ең үлкен болатынын дәлелдеңдер.

0.27. Ауданы 7 $см^2$, көршілес қабырғалары 4 см және 7 см болатын параллелограмның биіктігі мен сүйір бұрышын табыңдар.

0.28. Үшбұрыштың a-ға тең қабырғасына іргелес орналасқан бұрыштары α-ға және β-ға тең. Үшбұрыштың ауданын табыңдар.

0.29. Ауданы 594 $м^2$ болатын трапецияның биіктігі 22 м, табандарының айырымы 6м. Трапецияның табандарын табыңдар.

C



0.2-сурет

0.30. Ұзындығы радиусқа тең хорданың ұштарынан шеңберге екі жанама жүргізілген. Осы жанамалардың арасындағы бұрышты табыңдар (0.2-сурет).

0.31. n-нің қандай мәнінде дөңес n бұрыштың диагональдарының саны n-ге тең болады?

0.32. Параллелограмның қарама-қарсы екі бұрышының биссектрисалары параллель болатынын дәлелдеңдер.

0.33. Диагональдары бұрыштарының биссектрисасы болатын төртбұрыштың ромб болатынын дәлелдеңдер.

0.34. Екі қабырғасы мен үшінші қабырғасына жүргізілген медианасы бойынша үшбұрыш салыңдар.

0.35. Тең бүйірлі трапецияның кіші табаны оның бүйір қабырғасына тең, ал үлкен табанынан екі есе кіші. Оның бұрыштарын табыңдар.

0.36. Тік бұрышты үшбұрышқа сырттай және іштей сызылған шеңберлер диаметрлерінің қосындысы оның катеттерінің қосындысына тең болатынын дәлелдеңдер.

0.37. Дөңес төртбұрыштың сыртқы бұрыштарының биссектрисалары арқылы құрастырылған төртбұрышқа сырттай шеңбер сызуға болатынын дәлелдеңдер.

0.38. Диагональдары перпендикуляр төртбұрыштың қарама-қарсы қабырғаларының квадраттарының қосындысы өзара тең болатынын дәлелдеңдер.

0.39. Квадратты екі тең шамалы бөліктерге бөлетіндей етіп қалай осы квадраттан екінші квадратты қиып алуға болады?

0.40. Табаны a, бүйір қабырғасына түсірілген биіктігі h болатын тең бүйірлі үшбұрыштың ауданын табыңдар.

СЕРГІТУ СӘТІ

Абай Құнанбаевтың «Ғылым таппай мақтанба» өлеңінің векторлық тілдегі түсініктемесі.

Бес асыл іс:

$\vec{a}$ — талап; $\vec{b}$ — еңбек;

$\vec{c}$ — терең ой; $\vec{d}$ — қанағат;

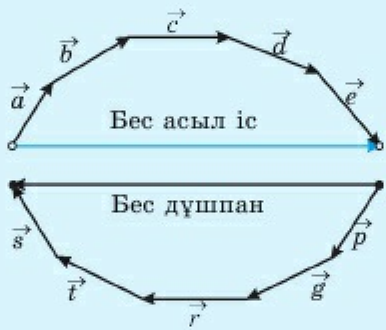
$\vec{e}$ — рақым.

Бес дұшпан:

$\vec{p}$ — өсек; $\vec{g}$ — өтірік;

$\vec{r}$ — мақтаншақ; $\vec{t}$ — еріншек;

$\vec{s}$ — бекер мал шашпақ.



1-бөлім. ЖАЗЫҚТЫҚТАҒЫ ВЕКТОРЛАР

1.1. **Вектор ұғымы. Векторлардың теңдігі**
1.2. **Векторларды қосу және азайту**
1.3. **Векторларды санға көбейту**
1.4. **Векторлардың арасындағы бұрыш. Векторлардың скалярлық көбейтіндісі**
1.5. **Вектордың координаталары**
1.6. **Скалярлық көбейтіндінің векторлардың координаталары арқылы өрнектелуі**
1.7. **Векторлық тәсілдің кейбір қолданулары**

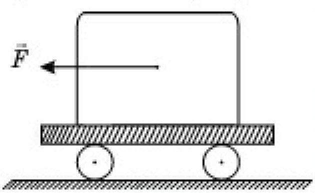
1.1. Вектор ұғымы. Векторлардың теңдігі

Тақырыпты оқып-үйрену барысында сендер:

- вектордың, коллинеар вектордың, нөлдік вектордың, бірлік вектордың және вектор ұзындығының анықтамасын білесіңдер;
- кез келген вектор параллель көшіру түрлендіруін анықтайтынын ұғынасыңдар.

1.1.1. Вектор ұғымы

Біздерге әртүрлі шамалар белгілі. Мысалы, ұзындық, аудан, көлем, масса және т.с.с. шамалар (белгілі өлшем бірліктерінде) өздерінің сан мәндерімен анықталады. Мұндай шамаларды ***скалярлық шамалар*** немесе жай ғана ***скаляр*** деп атаймыз. Ал көптеген физикалық шамалар, мысалы, күш, материялық дене қозғалысының орын ауыстыруы, жылдамдығы және т.с.с. шамалар тек өзінің сан мәндерімен ғана емес, кеңістіктегі бағыттарымен де сипатталады. Мұндай шамаларды ***векторлық шамалар*** немесе жай ғана ***вектор*** деп атайды. Мысалы, қандай да бір денеге белгілі бір күшпен әрекет етсек, физика курсында бұл күшті бағытталған кесіндімен (нұсқама) бейнелейді (1.1-сурет). Кесіндінің ұзындығы күштің сан мәніне сәйкес келсе, нұсқама күш әрекетінің бағытын білдіреді.



1.1-сурет

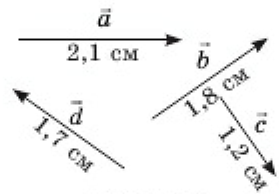
Вектордың геометриялық мағынасымен танысайық. Физикамен салыстырғанда геометрияда векторлардың нақты табиғаты қарастырылмайды (векторлардың белгілі бір күшті, жылдамдықты және т.с.с. физикалық немесе өзге шамаларды бейнелейтіндігі ескерілмейді). Геометрияда қарастырылатын векторлар **бағытталған кесінді** ретінде қабылданады.

1.2-сурет

Кесіндінің екі ұшы болатынын білеміз. Осы ұштардың бірін бастапқы нүктесі немесе ***басы***, екіншісін ***ұшы*** деп алсақ, бұл кесінді бағытталған кесіндіге айналады. 1.2-суретте бағытталған кесіндінің ұшы нұсқамамен бейнеленген. Әрине, кез келген кесіндіден (басы мен ұшын таңдап алуымызға байланысты) екі түрлі бағытталған кесінді алуға болады. Енді вектор ұғымын анықтайық.

1-анықтама. *Кез келген бағытталған кесіндіні* ***вектор*** *деп атайды.*

AB кесіндісіндегі A — бас нүктесі, B — ұшы деп қабылдағанда шығатын векторды $\overrightarrow{AB}$ арқылы белгілейді. Мысалы, 1.2-суретте $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{BA}$ векторлары бейнеленген. Сонымен, егер $\overrightarrow{AB}$ векторы берілсе, A нүктесі оның басы, B — ұшы болады. $\overrightarrow{BA}$ векторында керісінше, B — басы, A — ұшы. Векторларды көбінесе нұсқамасы бар кіші латын әріптерімен де белгілейді: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ және т.б. (1.3-сурет).



1.3-сурет

Жалпы геометрияда басы мен ұшы беттесетін векторды да қарастырады. Мұндай векторды ***нөлдік вектор*** деп атайды. Осы айтылғаннан жазықтықтағы кез келген нүктені нөлдік вектор ретінде қарастыруымызға болатыны шығады. Нөлдік векторды $\vec{0}$ арқылы белгілейді.

1.1.2. Векторлардың теңдігі

AB кесіндісінің ұзындығын $\overrightarrow{AB}$ векторының ***модулі*** деп атап, $|\overrightarrow{AB}|$ арқылы белгілейді. Осы сияқты, $\vec{a}$ векторының модулін (ұзындығын) $|\vec{a}|$ арқылы белгілейміз. Ұзындығы (модулі) бірге тең векторды *бірлік вектор* деп атайды. Мысалы, 1.2 және 1.3-суреттерде бейнеленген векторлардың модульдері мынадай: $|\overrightarrow{AB}| = 3,9$; $|\overrightarrow{BA}| = 3,9$; $|\vec{a}| = 2,1$; $|\vec{b}| = 1,8$; $|\vec{c}| = 1,2$; $|\vec{d}| = 1,7$.

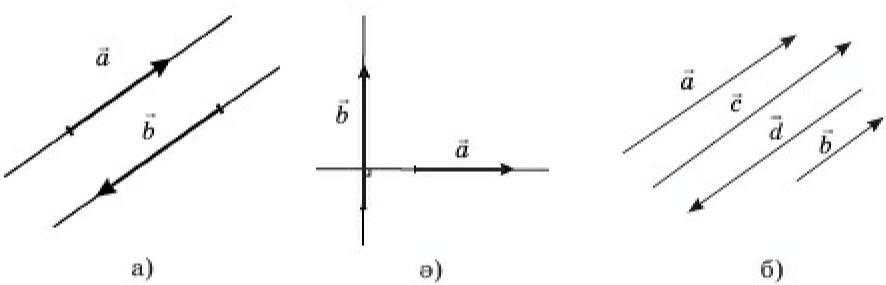
Егер AB кесіндісі a түзуінде жатса, онда $\overrightarrow{AB}$ векторы да a түзуінде жатады.

Екі вектор бір түзудің бойында немесе параллель түзулердің бойында жатса, оларды ***коллинеар*** векторлар деп атайды. $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының коллинеарлығын $\vec{a} \parallel \vec{b}$ арқылы белгілейді (1.4, *а*-сурет).

$\vec{a}$ және $\vec{b}$ өзара перпендикуляр түзулердің бойында жатса, бұл векторларды ***өзара перпендикуляр (ортогональ)*** деп атап, былай белгілейді: $\vec{a} \perp \vec{b}$ (1.4, *ә*-сурет).

Осы сияқты, $\vec{a}$ векторы c түзуіне параллель (перпендикуляр) түзудің бойында жатса, онда $\vec{a}$ векторы мен c түзуін параллель (перпендикуляр) деп атап, $\vec{a} \parallel c$ ($\vec{a} \perp c$) арқылы белгілейміз.

Егер коллинеар векторлардың бағыттары бірдей болса, оларды ***бағыттас*** векторлар деп атайды. $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының бағыттастығын $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ арқылы белгілейді. $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары коллинеар және әртүрлі бағытталса, бұл векторларды ***қарама-қарсы бағытталған*** деп атап, былай белгілейді: $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.



1.4-сурет

Жалпы нөлдік векторды кез келген векторға коллинеар деп есептейміз. Бұлай деп есептеуіміздің мағынасы келесі бапта белгілі болады.

Бағыттас векторлардың төмендегідей қасиеттері бар:

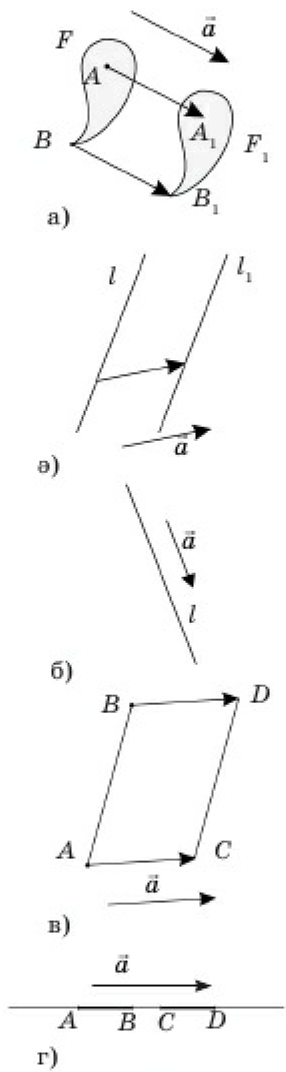
1°. *Егер* $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$ *және* $\vec{b}\uparrow\uparrow\vec{c}$ *болса, онда* $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{c}$.

2°. *Егер* $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{d}$ *және* $\vec{b}\uparrow\downarrow\vec{d}$ *болса, онда* $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$.

1. $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$ және $\vec{b}\uparrow\uparrow\vec{c}$ болғандықтан, $\vec{a}$ және $\vec{c}$ векторларының коллинеарлығы шығады (егер екі түзу үшінші түзуге параллель болса, онда бұл түзулер өзара параллель болады). Ал $\vec{a}$ және $\vec{c}$-ның бағыттары $\vec{b}$ векторының бағытымен бірдей болғандықтан, $\vec{a}$ және $\vec{c}$ векторларының бағыттары да бірдей. 2-қасиетте осылай дәлелденеді (1.4, б-сурет).

2-анықтама. *Егер векторлар бағыттас және олардың ұзындықтары (модульдері) тең болса, бұл векторларды* ***тең векторлар*** *деп атайды.*

Басқаша айтқанда, $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$ және $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ болса, $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары ***тең*** деп аталып, былай жазады: $\vec{a}=\vec{b}$. Айталық, F және F_1 фигуралары берілсін. Егер кез келген $A\in F$ нүктесі мен $\vec{a}$ ($|\vec{a}|\neq 0$) векторы үшін $A_1\in F_1$ нүктесі табылып, $\overrightarrow{AA_1}=\vec{a}$ теңдігі орындалса, F_1 фигурасын F-ті a векторына ***параллель көшіру арқылы*** алынды дейді (1.5, *а*-сурет). F фигурасының $\vec{a}$ векторы көмегімен F_1 фигурасына көшуін $\vec{a}$ векторына ***параллель көшіру түрлендіруі*** деп атайды. $\vec{a}$ векторына параллель көшіру кезінде: 1) l түзуі $l \nparallel \vec{a}$ болғанда өзіне параллель түзуге



1.5-сурет

көшеді (1.5, *ә*-сурет), ал $l \parallel \vec{a}$ болғанда өзіне-өзі көшеді (1.5, *б*-сурет); 2) әрбір кесінді өзіне тең және параллель кесіндіге (1.5, *в*-сурет) (немесе өзімен бір түзу бойында жататын кесіндіге (1.5, *г*-сурет)) көшеді.

Жалпы параллель көшіру түрлендіруінің осыған балама анықтамасы мен қасиеттерін 2-бөлімде толығырақ қарастырамыз.

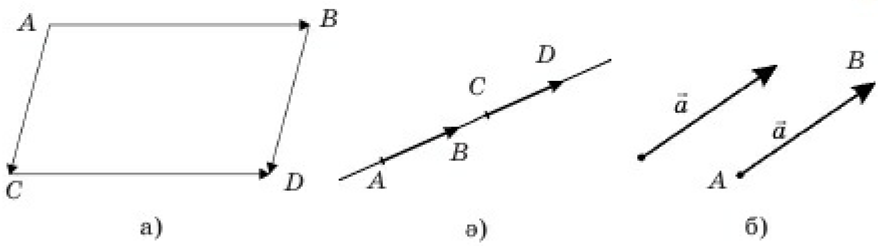
1.1.3. Векторлар теңдігінің қасиеттері

Теорема. *Өзара тең векторларды қандай да бір параллель көшіру арқылы үйлестіруге (беттестіруге) болады және керісінше, параллель көшіру арқылы үйлесетін векторлар өзара тең болады.*

Айталық, $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{CD}$ векторлары тең болсын (1.6, *а*-сурет). Онда анықтама бойынша $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ және $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$. $ABDC$ төртбұрышының AB және CD қабырғалары параллель және ұзындықтары тең болғандықтан, бұл төртбұрыш — параллелограмм. Олай болса, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$, яғни $\overrightarrow{AB}$ векторын $\overrightarrow{CD}$ векторына параллель көшіру арқылы үйлестіруге болады. Бұл параллель көшіру A-ны C-ға, B-ны D нүктесіне көшіреді.

Керісінше, $\overrightarrow{AB}$ векторын параллель көшіру арқылы $\overrightarrow{CD}$ векторына үйлестіру мүмкін болсын. Мұнда A нүктесі C-ға, B нүктесі D-ға көшсін. Параллель көшірудің қасиеттері бойынша $AC = BD$ және $AC \parallel BD$, демек, $ABDC$ — параллелограмм. Олай болса, $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ және $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$. Параллель көшіру кезінде $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{CD}$ векторларының басы басына, ұшы ұшына көшетін болғандықтан, $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$. Демек, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Осы теоремадан параллель көшірулер арқылы үйлесетін векторларды тең деп атауымызға болатынын көреміз.



1.6-сурет

ӨЗДЕРІҢ ДӘЛЕЛДЕҢДЕР

Егер $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{CD}$ векторлары бір түзудің бойында орналасса (1.6, ә-сурет), теореманы дәлелдеу оңай. Бұл жағдайды өздерің қарастырып көріңдер.

1-салдар. *Егер* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ *болса, онда* $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ (1.6, *а*, *ә*-суреттер).

Егер A нүктесі вектордың басы болса, $\vec{a}$ *векторын* A *нүктесінен бастап салынған* деп есептейміз (1.6, *б*-сурет).

2-салдар. *Кез келген* A *нүктесінен бастап берілген* $\vec{a}$ *векторына тең бір ғана вектор салуға болады.*

Шынында да, $\vec{a}$ векторының бас нүктесін A нүктесіне көшіретін тек бір ғана параллель көшіру табылады. Онда бұл параллель көшіру арқылы алынатын $\vec{a}$ векторының бейнесі де жалғыз және бұл бейненің $\vec{a}$ векторына тең болатыны теоремадан шығады.

Осы айтылғандардан, *әрбір вектор белгілі бір параллель көшіруді анықтайтындығын және керісінше, кез келген параллель көшіру белгілі бір ғана вектор арқылы анықталатынын көреміз.*

1. Векторлық шама мен скалярлық шаманың қандай айырмашылығы бар?
2. Вектор деген не? Оны қалай белгілейді?
3. Қандай векторларды коллинеар деп атайды? Бағыттас және қарама-қарсы бағытталған векторларға мысалдар келтіріңдер.
4. Қандай векторларды өзара тең деп атайды?

5. Тең векторлар мен параллель көшірудің арасында қандай байланыс бар? Параллель көшіру дегенді қалай түсінесіңдер?
6. Вектордың ұзындығы (модулі) деген не?
7. Нөлдік вектор жөнінде не білесіңдер?

ПРАКТИКАЛЫҚ ЖҰМЫС

1. а) Ұзындықтары бірдей, бірақ коллинеар емес;
ә) ұзындықтары бірдей және бағыттас;
б) ұзындықтары бірдей және қарама-қарсы бағытталған екі вектор салыңдар.
а), ә), б) жағдайларының қайсысында салынған векторлар өзара тең болады? Жауаптарыңды негіздеңдер.
2. Кез келген $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларын ($\vec{a} \nparallel \vec{b}$) салыңдар. O нүктесін белгілеп алып, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{b}$ теңдіктері орындалатындай етіп, $OABC$ параллелограмын салыңдар.
3. Дәптер сызықтарының бойында жатпайтындай және $|\vec{a}| = 3$ см болатындай $\vec{a}$ векторын салыңдар. A нүктесін белгілеп алып, $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ теңдігі орындалатындай етіп, $ABCD$ квадратын салыңдар. Мұндай квадраттардың нешеуін салуға болады?

ЕСЕПТЕР

А

1.1. O нүктесі — $ABCD$ параллелограмы диагональдарының қиылысу нүктесі. Бастары мен ұштары параллелограмның төбелері мен O нүктесінде орналасқан векторлардың қайсылары 1) BD түзуінде жатады; 2) AD түзуіне параллель; 3) $\overrightarrow{AB}$ векторына коллинеар; 4) $\overrightarrow{CB}$ векторына тең; 5) $\overrightarrow{OC}$ векторына тең болады?

1.2. A, B, C нүктелерінің B нүктесі қалған екеуінің арасында жататыны белгілі болса, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA}$ және $\overrightarrow{BC}$ векторларының ішінен бағыттастарын және қарама-қарсы бағытталғандарын анықтаңдар.

1.3. $ABCD$ тіктөртбұрышының қабырғалары арқылы анықталатын векторлардың ішінен 1) коллинеар; 2) перпендикуляр; 3) тең векторларды атап көрсетіңдер.

1.4. 1) $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$; 2) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$; 3) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$; 4) $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$ шарттары орындалса, A, B, C нүктелері жөнінде не айтуға болады?

1.5. ABC үшбұрышының AD медианасы жүргізілген. $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC}$ теңдігі орындалатынын көрсетіңдер.

1.6. $ABCD$ тіктөртбұрышының диагональдары O нүктесінде қиылысады. $AB = 6$ см, $AD = 8$ см болса, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{DO}$ векторларының ұзындығы қандай?

1.7. ABC тең бүйірлі үшбұрышының A төбесінен табанына AD биіктігі түсірілген. 1) Модульдері тең; 2) өзара тең; 3) өзара перпендикуляр векторлар жұбын атап көрсетіңдер.

В

1.8. $ABCD$ тіктөртбұрышында $AB = 3$ см, $BC = 4$ см және N нүктесі — AB қабырғасының ортасы. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{NA}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AC}$ векторларының модульдерін анықтаңдар.

1.9. $ABCD$ трапециясында $\angle A = 90^\circ$, $\angle D = 45^\circ$, $AD = 12$ см, $AB = 5$ см. $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CD}$ және $\overrightarrow{AC}$ векторларының ұзындықтарын табыңдар.

1.10. A және B нүктелерін белгілеп алып, $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{XB}$ теңдігін қанағаттандыратын X нүктесін табыңдар.

1.11. 1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ және $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$; 2) $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$ болса, $ABCD$ төртбұрышының түрін анықтаңдар.

1.12. $\vec{a}$ векторына тең векторды C нүктесінен бастап қалай салуға болады ($\vec{a}$ векторы мен C нүктесі бір түзудің бойында жатпайтын және жататын жағдайды қарастырыңдар)?

1.13. Егер бір түзу бойында жатпайтын A, B, C, D нүктелері үшін $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ теңдігі орындалса, AC және BD

кесінділері қиылысып, қиылысу нүктесінде қақ бөлінетінін дәлелдеңдер.

C

1.14. $ABCD$ төртбұрышының диагональдары O нүктесінде қиылыссын. Егер $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ және 1) $\overrightarrow{AO} \perp \overrightarrow{BO}$; 2) $\overrightarrow{AO} \perp \overrightarrow{BO}$ және $|\overrightarrow{AO}| = |\overrightarrow{BO}|$ болса, онда $ABCD$ төртбұрышы жөнінде не айтуға болады?

1.15. 1.13-есепке кері тұжырымды, яғни AC және BD кесінділері қиылысу нүктесінде қақ бөлінсе, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ теңдігінің орындалатынын дәлелдеңдер.

1.16. Бір қаладан бір уақытта жылдамдықтары сәйкесінше 600 км/сағ және 800 км/сағ болатын екі ұшақтың бірі батысқа, екіншісі солтүстікке қарай ұшып шықты. 1 сағаттан соң осы екі ұшақтың арақашықтықтары қандай болады?

1.17. Егер алдыңғы есеп шартында ұшақтар 2 сағаттан соң бұрылып, бір-біріне қарама-қарсы ұшқан болса (әртүрлі биіктіктерде), ұшақтар ұшып шыққаннан кейін қанша уақыттан соң кездескен болар еді?

1.2. Векторларды қосу және азайту

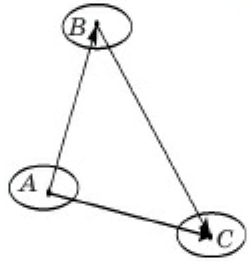
Тақырыпты оқып-үйрену барысында сендер:

- векторларды қосу және азайту амалдарын, олардың қасиеттерін біліп, қолданасыңдар;
- векторды екі қиылысушы түзулер бойындағы құраушы векторларға жіктеуді үйренесіңдер.

1.2.1. Векторларды қосу

Айталық, қандай да бір денені A нүктесінен B нүктесіне, сонан соң B нүктесінен C нүктесіне жылжытайық. Мұнда дененің орын ауыстыруын (қозғалысын) параллель көшірулер деп есептейміз. Осы екі параллель көшіру $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{BC}$ векторларымен анықталып, A нүктесіндегі денені C нүктесіне көшіретінін байқаймыз. Онда бұл қозғалыстың нәтижесін $\overrightarrow{AC}$ векторымен көрсетуге болады (1.7-сурет). $\overrightarrow{AC}$

векторымен анықталатын параллель көшіру $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{BC}$ векторларымен анықталатын параллель көшірулерді бірінен соң бірін қолданып анықталғандықтан, $\overrightarrow{AC}$ векторын $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{BC}$ векторларының қосындысы ретінде қарастыруға болады:

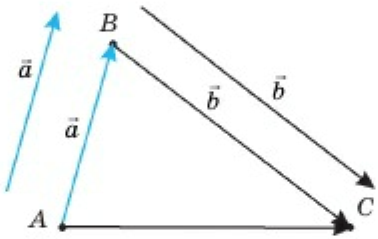


1.7-сурет

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.$$

Осы сияқты, кез келген екі вектордың қосындысы анықталады.

$\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары берілсін. Жазықтықтан A нүктесін белгілеп, осы нүктеден $\vec{a}$-на тең $\overrightarrow{AB}$ векторын, ал B нүктесінен $\vec{b}$-на тең $\overrightarrow{BC}$ векторын саламыз.



1.8-сурет

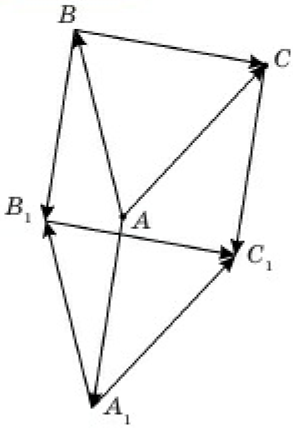
Нәтижесінде $\overrightarrow{AC}$ векторы алынады. Оны $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының қосындысы деп атап, былай жазады: $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ (1.8-сурет).

Векторларды қосудың бұл ережесін *үшбұрыш ережесі* деп атайды.

Енді векторларды қосу амалы анықтамада көрсетілген A нүктесін таңдап алуымызға тәуелсіз екенін көрсетейік.

Басқаша айтқанда, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$ және $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B_1C_1}$ теңдіктерінен $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1}$ теңдігі шығатынын көрсету қажет.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$ теңдігінен 1.1-бабындағы 1-салдар бойынша $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1}$ теңдігі орындалады. Осы сияқты, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B_1C_1}$ теңдігінен $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{CC_1}$ теңдігін аламыз. Осыдан $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{CC_1}$. 1-салдар бойынша $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1}$ теңдігі орындалуы керек (1.9-сурет).



1.9-сурет

Векторларды қосудың үшбұрыш ережесі бойынша әрбір $\vec{a}$ векторы үшін $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ теңдігі орындалатынын көреміз.

Сонымен қатар кез келген A, B, C нүктелері үшін $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ теңдігі орындалатыны да үшбұрыш ережесінен шығады. Мұнда A, B, C нүктелері бір-бірімен беттесуі де мүмкін.

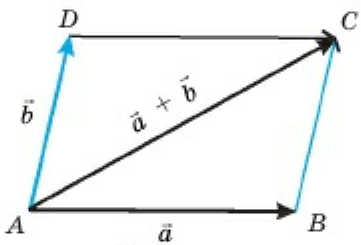
1.2.2. Векторларды қосу амалының қасиеттері

1-теорема. *Кез келген $\vec{a}$, $\vec{b}$ және $\vec{c}$ векторлары үшін мына заңдар орындалады:*

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (ауыстырымдылық заңы);

2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (терімділік заңы).

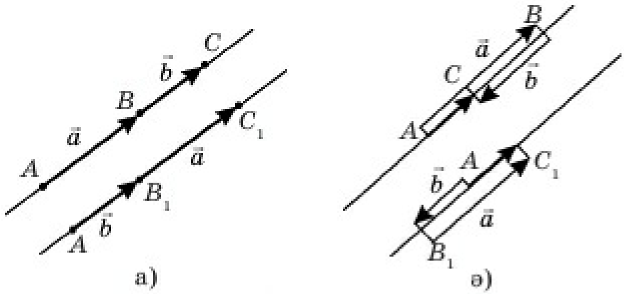
1) $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары коллинеар емес дейік. Жазықтықтан A нүктесін белгілеп, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ және $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ векторларын салайық. 1.10-суретте көрсетілгендей $ABCD$ параллелограмын аламыз. Үшбұрыш ережесі бойынша $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}$. Осы сияқты, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \vec{b} + \vec{a}$. Осыдан $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ теңдігі шығады.



1.10-сурет

Егер $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары коллинеар болса, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ және $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ векторлары бір түзудің бойында жатады (1.11-сурет). Онда $\overrightarrow{AB_1} = \vec{b}$ және $\overrightarrow{B_1C_1} = \vec{a}$ векторлары да осы түзудің бойында жатады. C және C_1 нүктелерінің беттесетіндігін дәлелдеу керек.

$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ болса, C және C_1 нүктелерінің беттесетіні кесінділерді қосу ережесінен шығады (1.11, *а*-сурет). Ал $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$



1.11-сурет

болса, онда C мен C_1 нүктелерінің беттесуі кесінділерді азайту ережесінен шығады (11, ә-сурет).

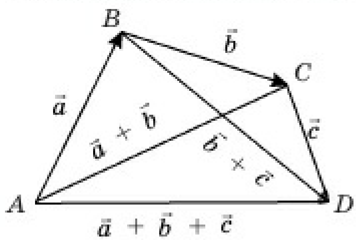
2) A нүктесін белгілеп, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ және $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$ векторларын саламыз (1.12-сурет). Онда

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}.$$

Екінші жағынан,

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}.$$

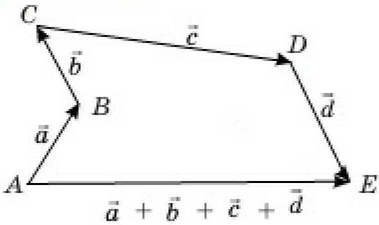
Осыдан $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ теңдігін аламыз. Теорема толық дәлелденді.



1.12-сурет

1-қасиеттің дәлелдеуінде $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының коллинеар емес жағдайында $\vec{a} + \vec{b}$ қосындысы параллелограмның диагоналы арқылы анықталатынын көрдік. $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының қосындысын анықтау үшін қандай да бір A нүктесінен $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ және $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ векторларын салып, оны $ABCD$ параллелограмына дейін толықтырғанда $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ болады. Векторларды қосудың бұл ережесін ***параллелограмм ережесі*** деп атайды. Параллелограмм ережесін көбінесе физикада, мысалы, екі күшті қосу кезінде пайдаланады.

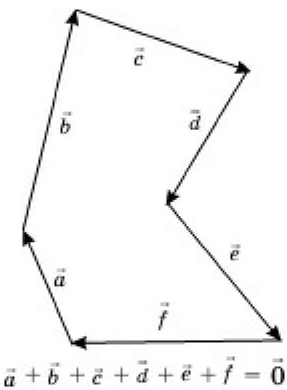
Векторларды қосудың ауыстырымдылық, терімділік заңдылықтарынан бірнеше векторлардың қосындысындағы қосылғыштардың орындарын қалауымызша ауыстырып, топтауымызға болатыны шығады. Бұл бірнеше векторларды



1.13-сурет

(екіден көп) қосуды жеңілдетеді. Айталық, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ векторларын қосайық (1.13-сурет). Қандай да бір A нүктесінен бастап $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$ және $\overrightarrow{DE} = \vec{d}$ векторларын саламыз. $ABCDE$ сынық сызығының басы мен соңғы нүктелерін қосатын $\overrightarrow{AE}$ векторы берілген $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ және d векторларының қосындысы болып табылады: $\overrightarrow{AE} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$.

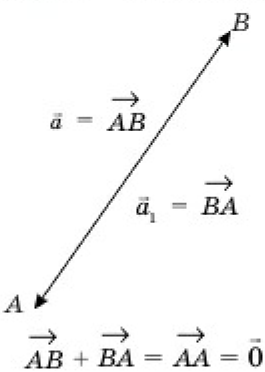
Жазықтықтағы кез келген A_1, A_2, ..., A_n нүктелері үшін $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \dots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{A_1A_n}$ теңдігі орындалады. Векторларды қосудың бұл ережесін *тізбектеп қосу* немесе *көпбұрыштар ережесі* деп атайды. Егер векторларды тізбектеп қосқанда тұйық сынық сызық шықса (алғашқы вектордың басы мен соңғы вектордың ұшы беттессе), бұл векторлардың қосындысы нөлдік векторды береді (1.14-сурет).



1.14-сурет

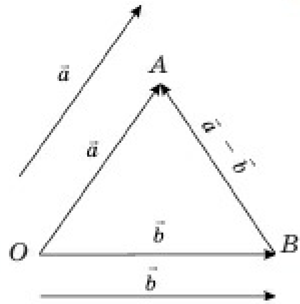
Нөлдік емес әрбір $\vec{a}$ векторы үшін $|\vec{a}| = |\vec{a}_1|$ және $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}_1$ шарттарын қанағаттандыратын $\vec{a}_1$ векторын $\vec{a}$ векторына ***қарама-қарсы вектор*** деп атайды. $\vec{a}$-ға қарама-қарсы векторды $-\vec{a}$ арқылы белгілейді: $\vec{a}_1 = -\vec{a}$. *Нөлдік вектор өзіне-өзі қарама-қарсы болады* деп есептелінеді. 1.15-суретте $\vec{a}_1 = \overrightarrow{BA}$ векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ векторына қарама-қарсы. Осыдан, қарама-қарсы векторлардың қосындысы нөлдік вектор болатынын көреміз:

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}.$$



1.15-сурет

1.2.3. Векторлардың айырымы



1.16-сурет

Анықтама. $\vec{a}$ *және* $\vec{b}$ *векторларының* ***айырымы*** *деп* $\vec{b}$ *векторымен қосындысы* $\vec{a}$ *векторына тең болатын векторды айтады.* $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының айырымын $\vec{a} - \vec{b}$ арқылы белгілейді.

$\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының айырымын былай салады: қандай да бір O нүктесінен бастап $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ векторларын саламыз. Онда $\overrightarrow{BA}$ векторы $\vec{a} - \vec{b}$ айырымына тең (1.16-сурет). Себебі, $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA}$ немесе $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO}$ теңдігі орындалады.

$\overrightarrow{BO} = -\overrightarrow{OB}$ қарама-қарсы векторлар. Сондықтан

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \vec{a} - \vec{b}$$

деп жазуға болады. Суретте $\vec{a} - \vec{b}$ айырымының нұсқамасын $\vec{a}$ векторының ұшына қаратып салады.

Егер екі вектордың қосындысы нөлдік вектор болса, бұл векторлар бір-біріне қарама-қарсы.

Шынында да, егер $\vec{a} + \vec{a}_1 = \vec{0}$ болса, $|\vec{a}| = |\vec{a}_1|$ және $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}_1$, $\vec{a}$ мен $\vec{a}_1$ — қарама-қарсы векторлар.

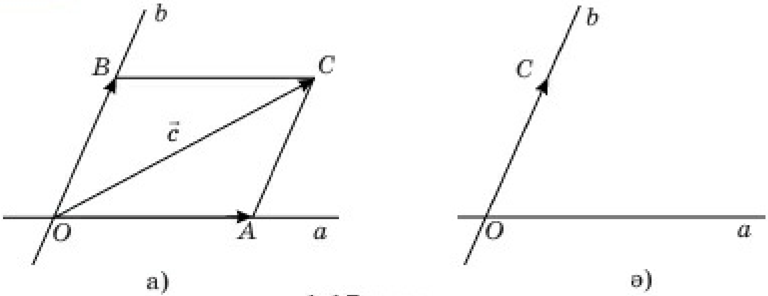
Енді векторлардың айырымын қосындыға келтіруге болатынын көрсетейік. Басқаша айтқанда, кез келген $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары үшін $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ теңдігі орындалады.

Шынында да, 1.16-суретте көрсетілгендей $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \vec{a} - \vec{b}$ болсын. Үшбұрыштар ережесі бойынша $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA}$. Сонымен қатар $\overrightarrow{BO} = -\overrightarrow{OB} = -\vec{b}$. Сондықтан

$$\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA} + (-\overrightarrow{OB}) = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

Дәлелдеу керегі де осы.

Осыдан векторларды теңдіктің екінші жағына таңбасын өзгертіп шығаруға болатынын көреміз: $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$ теңдігінен $\vec{c} = \vec{a} + (-\vec{b})$ теңдігі шығады.



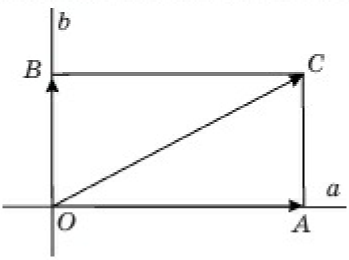
1.17-сурет

1.2.4. Векторларды қиылысушы түзулер бойындағы құраушыларының қосындысына жіктеу

3-анықтама. *Егер $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$ теңдігі орындалса, онда $\vec{b}$ және $\vec{c}$ векторларын $\vec{a}$ векторының* ***құраушылары*** *деп атайды. Мұнда $\vec{a}$ векторын $\vec{b}$ және $\vec{c}$ құраушыларына* ***жіктелген*** *деп айтады.*

2-теорема. *Өзара қиылысатын екі түзу берілсін. Онда кез келген векторды құраушылары осы түзулердің бойында жататындай етіп қосылғыштарға жіктеуге болады.*

Айталық, a және b түзулері O нүктесінде қиылыссын. Берілген $\vec{c}$ векторын O нүктесінен бастап саламыз: $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. a және b түзулері арқылы диагоналы OC болатын $OACB$ параллелограмын саламыз (1.17, a-сурет). Параллелограмм ережесі бойынша $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. Сонда $\overrightarrow{OA}$ және $\overrightarrow{OB}$ векторлары $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ векторының сәйкесінше a және b түзулерінде жататын құраушылары болады. Біз $\overrightarrow{OC}$ векторын a және b түзулерінде жатпайды деп есептедік. Егер $\overrightarrow{OC}$ векторы a немесе b түзулерінің бірінде жатса, бұл вектордың бір құраушысы $\overrightarrow{OC}$ векторының өзіне, екінші құраушысы нөлдік векторға тең (1.17, ә-сурет). Теорема дәлелденді.



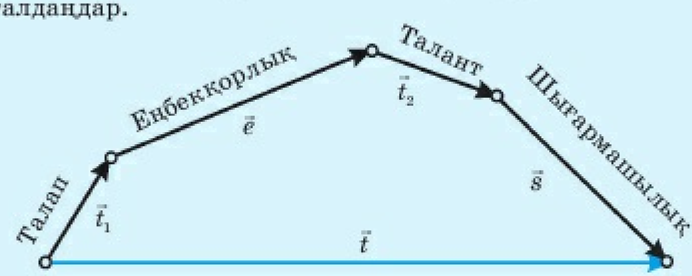
1.18-сурет

Егер $\overrightarrow{OC}$ векторының құраушылары өзара перпендикуляр болса ($\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$), $OACB$ тіктөртбұрыш және оның OA, OB қабырғалары OC диагоналының проекциялары болады (1.18-сурет).

1. Векторларды қосудың үшбұрыш және параллелограмм ережелерін айтып беріңдер.
2. Параллелограмм ережесі векторды өлшеп салатын нүктені таңдап алуымызға тәуелсіз болатынын дәлелдеңдер.
3. Векторларды қосудың қандай қасиеттерін білесіңдер?
4. Векторлардың айырымы қалай анықталады?
5. Қандай векторды қарама-қарсы вектор деп атаймыз?
6. Векторларды өзара қиылысатын түзулер бойынша қалай жіктеуге болады?

ПРАКТИКАЛЫҚ ЖҰМЫС

1. Табыс көзінің $\vec{t} = \vec{t}_1 + \vec{e} + \vec{t}_2 + \vec{s}$ формуласын жұптасып немесе топпен бірге талқылаңдар. Қорытынды жасап, талдаңдар.



2. Өзара қос-қостан коллинеар емес $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$ векторларын алып: а) $\vec{a} + \vec{b}$; ә) $\vec{c} + \vec{d}$; б) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$; в) $\vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e}$; г) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e}$ қосындыларын салып көрсетіңдер.
3. Өзара коллинеар емес $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларын алып, а) $\vec{a} - \vec{b}$; ә) $\vec{b} - \vec{a}$; б) $\vec{c} - \vec{a}$; в) $-\vec{b}$; г) $(\vec{a} - \vec{b}) - \vec{c}$ векторларын салыңдар.
4. Өзара коллинеар $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ($\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \uparrow\downarrow \vec{c}$) векторларын алып, а) $\vec{a} + \vec{b}$; ә) $\vec{b} + \vec{c}$; б) $\vec{a} - \vec{b}$; в) $\vec{a} - \vec{c}$ векторларын салыңдар.
5. Тапсырманы жұппен орындаңдар: А4 парағына екі қиылысушы түзу және қайсыбір $\vec{a}$ векторын сызған соң өзара парақтарыңмен алмасыңдар. Алған парақтарыңдағы векторды көрсетілген қиылысушы түзулер бойындағы құрастырушыларына жіктеңдер. Сонан соң бір-біріңді тексеріңдер.

ЕСЕПТЕР

А

1.18. $ABCD$ төртбұрышы берілген. 1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$; 2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$ теңдіктерін дәлелдеңдер.

1.19. $ABCD$ параллелограмында 1) $\overrightarrow{CA}$; 2) $\overrightarrow{DA}$ векторлары қандай векторлардың қосындысымен анықталады? Қосылғыш векторлардың ұштары параллелограмм төбелерінде жатуы керек.

1.20. Векторлардың қосындысын табыңдар: 1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$; 3) $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NN}$; 4) $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DE}$.

1.21. Векторлардың қосындысын табыңдар: 1) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{KP} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NK}$; 3) $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RO}$.

1.22. $\overrightarrow{BC}$ векторын $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{AC}$ векторлары арқылы өрнектеңдер.

1.23. ABC үшбұрышының BC қабырғасынан D нүктесі алынған. $\overrightarrow{BD}$ векторын $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{AD}$ векторлары арқылы өрнектеңдер.

1.24. $ABCD$ параллелограмы берілген: 1) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$; 2) $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CD}$ айырымын көрсетіңдер.

1.25. Векторлардың айырымын табыңдар: 1) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$; 2) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$; 3) $\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PR}$; 4) $(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) - \overrightarrow{CD}$; 5) $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{NN}$.

1.26. $ABCD$ параллелограмы берілген: 1) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}$; 2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$; 3) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ векторларын салып көрсетіңдер.

1.27. $ABCD$ параллелограмы берілген: 1) $(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) + \overrightarrow{AC}$; 2) $(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AO}) - \overrightarrow{OD}$ векторларын табыңдар. Мұндағы O — параллелограмм диагональдарының қиылысу нүктесі.

B

1.28. ABC үшбұрышында $AB = 6$ см, $BC = 8$ см, $\angle B = 90^\circ$.

Табу керек: 1) $|\overrightarrow{BA}| - |\overrightarrow{BC}|$ және $|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}|$; 2) $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}|$ және $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}|$; 3) $|\overrightarrow{BA}| + |\overrightarrow{BC}|$ және $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}|$; 4) $|\overrightarrow{AB}| - |\overrightarrow{BC}|$ және $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}|$.

1.29. Ұшақ әуелі солтүстік-шығысқа қарай 200 км, сонан соң шығысқа қарай 300 км ұшты. Ұшақтың ұшқан жолын векторлармен бейнелеп, оның алғашқы ұшып шыққан жерінен қаншалықты алыстағанын анықтаңдар.

1.30. Ені a-ға тең өзенді жолаушы қайықпен өзен арнасына перпендикуляр бағытта жүзіп өтпекші болды. Егер өзен ағысының жылдамдығы v_1, қайық жылдамдығы v_2 болса, t уақыт ішінде өзен ағысы қайықты шыққан нүктесінен қандай қашықтыққа ығыстырады? Қайықтың жүрген жолының ұзындығын қалай анықтауға болады?

1.31. Векторларды тізбектеп қосу ережесін қолданып, 1) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{KD})$; 2)$(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}) - (\overrightarrow{NK} + \overrightarrow{KD})$ өрнектерін ықшамдаңдар.

1.32. ABC үшбұрышында $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ және $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ деп алып, 1) $\overrightarrow{BA}$; 2) $\overrightarrow{CB}$; 3) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$ векторларын $\vec{a}$ және $\vec{b}$ арқылы өрнектеңдер.

1.33. H және N нүктелері — ABC үшбұрышының AB және AC қабырғаларының орталары. $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{HN}$, $\overrightarrow{BN}$ векторларын $\vec{a} = \overrightarrow{AH}$ және $\vec{b} = \overrightarrow{AN}$ векторлары арқылы өрнектеңдер.

1.34. $ABCD$ параллелограмының диагональдары O нүктесінде қиылысады. $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{BO} - \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DA}$ векторларын $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ және $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ векторлары арқылы өрнектеңдер.

1.35. И. А. Крылов мысалындағы аққу, шаян және шортанның іс-әрекеттерін векторлар арқылы түсіндіріңдер.

1.36. Қабырғасы a болатын тең қабырғалы ABC үшбұрышы берілген: 1) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}|$; 2) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$; 3) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}|$; 4) $|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}|$; 5) $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$ өрнектерінің мәндерін табыңдар.

137. Кез келген $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары үшін 1) $|\vec{a} + \vec{b}| \leqslant |\vec{a}| + |\vec{b}|$; 2) $|\vec{a} - \vec{b}| \leqslant |\vec{a}| + |\vec{b}|$ теңсіздіктері орындалатынын дәлелдеңдер. Қандай жағдайларда теңдік орындалады?

1.38. $ABCD$ параллелограмы берілген. P және O нүктелері — BC және CD қабырғаларының орталары. 1) $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{DP}$, $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{PO}$ векторларының AB және AD түзулері бойынша алынған құраушыларын салыңдар; 2) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{AC}$ векторларының AP және AO түзулері бойынша алынған құраушыларын салыңдар.

1.39. $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының бастарын ортақ етіп салыңдар. 1) $\vec{b}$ векторы $\vec{a}$-ның құраушысы деп алып, оның екінші $\vec{c}$ құраушысын салыңдар; 2) енді керісінше, $\vec{a}$ векторы $\vec{b}$ векторының құраушысы болсын. $\vec{b}$-ның екінші $\vec{d}$ құраушысын салыңдар. $\vec{c}$ және $\vec{d}$ векторлары өзара қалай орналасады?

1.40. Ұзындығы 10-ға тең векторды модульдері 1) 1-ге тең; 2) 100-ге тең екі құраушыға жіктеуге бола ма?

C

1.41. $ABCD$ параллелограмы берілген. Жазықтықтағы кез келген X нүктесі үшін $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XD}$ теңдігі орындалатынын дәлелдеңдер.

1.42. Кеме v_1 жылдамдықпен компас бойынша шығысқа қарай бет алған. Егер солтүстіктен жылдамдығы v_2 жел соқса, оңтүстік-шығысқа қарай аққан судың жылдамдығы v_3 болса, кеменің қай бағытта жүзетінін анықтаңдар.

1.43. ABC үшбұрышынан тысқары оның қабырғаларынан $AKLB$, $BMNC$, $CPQA$ параллелограмдары салынған. а) LM, NP, QK; ә) LP, MQ, NK кесінділерінен үшбұрыш құрастыруға бола ма? Құрастырылатын үшбұрыштардың қабырғалары сәйкес кесінділерге параллель болуы керек.

1.44. $\vec{a}$ және $\vec{b}$, $\vec{a}$ және $\vec{c}$ векторларының арасындағы бұрышы 120°, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}|$. Онда $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ теңдігі орындалатынын көрсетіңдер.

1.45. $\vec{a}$, $\vec{b}$ және $\vec{c}$ векторлары O нүктесінен $\overrightarrow{OA} = a$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ және $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ болатындай етіп салынған. Мұндағы $\angle AOB = 90^\circ$, $\angle AOC = 135^\circ$, $\angle BOC = 135^\circ$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $|\vec{c}| = \sqrt{2}$. Онда $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ теңдігі орындалатынын дәлелдеңдер.

1.46. $ABCD$ дөңес төртбұрышының қабырғаларының орталары рет-ретімен P, Q, R және K арқылы белгіленген. Осы жазықтықтың кез келген O нүктесі үшін $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OK}$ теңдігі орындалатынын дәлелдеңдер.

1.47. $ABCD$ трапециясында $\angle A = 90^\circ$, $\angle ACB = 45^\circ$ және $\angle ACD = 90^\circ$ болса, $|\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CD}|$-ны табыңдар. Мұндағы $AB = a$.

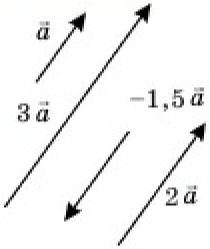
1.3. Векторларды санға көбейту

Тақырыпты оқып-үйрену барысында сендер:

- векторларды санға көбейту амалы және оның қасиеттерімен танысасыңдар, оны қолданасыңдар;
- векторлардың коллинеарлық белгісін қорытып шығарып, оны есептер шығаруда қолдануды үйренесіңдер.

1.3.1. Векторларды санға көбейту және оның қасиеттері

Анықтама. *$\vec{a} \neq \vec{0}$ векторы мен k санының **көбейтіндісі** деп модулі $|k| \cdot |\vec{a}|$ санына тең және $k > 0$ болғанда $\vec{a}$ векторымен бағыттас, $k < 0$ болғанда $\vec{a}$ векторына қарама-қарсы бағытталған векторды атайды. k саны мен $\vec{a}$ векторының көбейтіндісін $k \cdot \vec{a}$ арқылы белгілейді.*



1.19-сурет

Егер $k = 0$ болса, $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$ деп есептейміз. 1.19-суретте $\vec{a}$, $3\vec{a}$, $-1{,}5\vec{a}$, $2\vec{a}$ векторлары бейнеленген.

1-теорема. *Кез келген α, β сандары мен $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторлары үшін:*

1°. $(\alpha \cdot \beta)\vec{a} = \alpha(\beta \cdot \vec{a})$ (терімділік заңы);

2°. $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ (I үлестірімділік заңы);

3°. $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$ (II үлестірімділік заңы) теңдіктері орындалады.

1°. Егер $\alpha\beta > 0$, яғни α және β сандарының таң-балары бірдей болса, $(\alpha \cdot \beta)\vec{a}$ және $\alpha(\beta \cdot \vec{a})$ векторлары $\vec{a}$ векторымен бағыттас болады. α және β сандарының таңбалары әртүрлі болса, $(\alpha \cdot \beta)\vec{a}$ және $\alpha(\beta \cdot \vec{a})$ векторлары $\vec{a}$ векторына қарама-қарсы бағытталады. Сондықтан кез келген α, β сандары үшін $(\alpha \cdot \beta)\vec{a}$ және $\alpha(\beta \cdot \vec{a})$ векторлары өзара бағыттас. Енді осы векторлардың модульдері тең болатынын көрсетейік:

$$|(\alpha \cdot \beta)\vec{a}| = |\alpha\beta| \cdot |\vec{a}| = |\alpha| \cdot |\beta| \cdot |\vec{a}|; \; |\alpha(\beta\vec{a})| = |\alpha||\beta\vec{a}| = |\alpha| \cdot |\beta| \cdot |\vec{a}|.$$

Осыдан $(\alpha \cdot \beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$.

2°. $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ болсын. $(\alpha + \beta)\vec{a}$ және $\alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ векторлары бағыттас және модульдері тең болатынын дәлелдеу керек. Екі түрлі жағдай орындалуы мүмкін: а) α және β сандарының таңбалары бірдей; ә) α және β сандарының таңбалары әртүрлі.

а) α және β сандарының таңбалары бірдей болсын. Онда

$$|(\alpha + \beta)\vec{a}| = |\alpha+\beta| \cdot |\vec{a}|. \qquad (1)$$

$\alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ векторының ұзындығы $\alpha > 0$, $\beta > 0$ болғанда $(\alpha+\beta) \cdot |\vec{a}|$-ға, $\alpha < 0$, $\beta < 0$ болғанда $(-\alpha-\beta) \cdot |\vec{a}|$-ға тең. Демек,

$$|\alpha\vec{a} + \beta\vec{a}| = |\alpha+\beta| \cdot |\vec{a}|. \qquad (2)$$

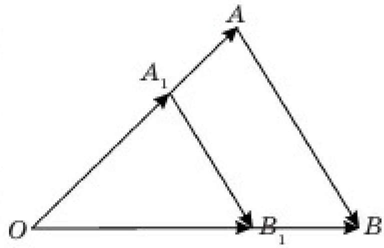
(1) және (2) теңдіктерден $(\alpha + \beta)\vec{a}$ және $\alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ векторларының ұзындықтары бірдей екенін көреміз. Енді бұл векторлардың бағыттас болатынын тексерейік.

Шынында да, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ болғандықтан, $(\alpha + \beta)\vec{a}$ және $\alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ векторлары $\vec{a}$ векторымен бағыттас, $\alpha < 0$, $\beta < 0$

болғанда бұл векторлар $\vec{a}$ векторына қарама-қарсы бағытталған: $(\alpha+\beta)\vec{a}\uparrow\uparrow\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$.

ә) $\alpha\cdot\beta<0$ жағдайы да осы сияқты дәлелденеді (оны өз беттеріңше қарастырыңдар).

3°. 1.20-суретте OA_1B_1 және OAB үшбұрыштарында $\overrightarrow{A_1B_1}\,||\,\overrightarrow{AB}$, $\dfrac{AB}{A_1B_1}=\alpha$ болсын. Онда пропорционал кесінділердің қасиеті бойынша $\dfrac{OA}{OA_1}=\dfrac{OB}{OB_1}=\alpha$ теңдігі орындалады. Егер $\overrightarrow{OA_1}=\vec{a}$, $A_1B_1=\vec{b}$ деп алсақ, $\overrightarrow{OB_1}=\vec{a}+\vec{b}$, $\overrightarrow{OB}=\alpha(\vec{a}+\vec{b})$ теңдігі орындалады. Екінші жағынан, $\overrightarrow{OA}=\alpha\overrightarrow{OA_1}=\alpha\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\alpha\overrightarrow{A_1B_1}=\alpha\vec{b}$, $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=$ $=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$ теңдігін аламыз. Олай болса, $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$. Егер α саны мен $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторларының кейбіреулері нөлге тең болса, бұл қасиеттің дәлелдеуі жеңілденеді.



1.20-сурет

1.3.2. Векторлардың коллинеарлық белгісі

Векторларды санға көбейту амалын қолданып, векторлардың коллинеарлығының маңызды белгісін дәлелдеуге болады.

2-теорема. *$\vec{b}$ векторы нөлдік емес $\vec{a}$ векторына коллинеар болуы үшін α саны табылып, $\vec{b}=\alpha\vec{a}$ теңдігінің орындалуы қажетті және жеткілікті.*

Қажеттілігі. Егер $\vec{a}\,||\,\vec{b}$ болса, $\vec{b}=\alpha\vec{a}$ саны табылып, $\vec{b}=\alpha\vec{a}$ теңдігі орындалатынын көрсету керек. Екі түрлі жағдайды қарастырамыз:

1) $\vec{b}=\vec{0}$ болса, онда $\alpha=0$ деп алып, $\vec{b}=0\cdot\vec{a}=\vec{0}$ теңдігін жазамыз.

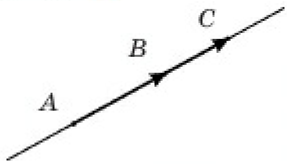
2) $\vec{b}\neq\vec{0}$ болсын. а) $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$ болса, онда $\alpha=\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ деп алып, $\vec{b}=\alpha\vec{a}$ теңдігін жазамыз. Себебі $\vec{b}\uparrow\uparrow\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\cdot\vec{a}$ және

$$|\vec{b}|=\left|\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\right|\cdot|\vec{a}|=\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\cdot|\vec{a}|=|\vec{b}|.$$

3–4338

ә) $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$ болса, онда $\alpha = -\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ деп алып, $\vec{b} = \alpha\vec{a}$ теңдігін жазамыз.

Жеткіліктілігі. Егер $\vec{b} = \alpha\vec{a}$ болса, анықтама бойынша $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары коллинеар болады. Теорема дәлелденді.



1.21-сурет

Салдар. *C нүктесі AB түзуінде жатуы үшін α саны табылып,* $\overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{AB}$ *теңдігінің орындалуы қажетті және жеткілікті* (1.21-сурет).

1. 1) $\vec{a} = \vec{0}$; 2) $k = 0$ десек, $k\cdot\vec{a}$ көбейтіндісі қандай болуы мүмкін?
2. Нөлдік емес векторға нөлге тең емес санды қалай көбейтуге болады?
3. Векторларды санға көбейтудің қандай заңдарын білесіңдер? Оларды дәлелдеп беріңдер.
4. Коллинеар векторлардың белгісін дәлелдеңдер.
5. A, B және C нүктелері бір түзудің бойында жатуы үшін қандай шарт орындалуы қажетті және жеткілікті?

ПРАКТИКАЛЫҚ ЖҰМЫС

3-4 оқушыдан топтасып, мына тапсырманы орындаңдар: А-4 парағына коллинеар емес $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларын сызып, а) жазықтықтың O нүктесінен бастап $3\vec{a}$; $\frac{1}{2}\vec{b}$; $0{,}4\vec{c}$ векторларын өлшеп салыңдар.

ә) $2\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$, $3\vec{b} - 2\vec{c}$ векторларын өзге бір A нүктесінен бастап салыңдар.

ЕСЕПТЕР

А

1.48. $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары мен α және β сандары берілген. Онда $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ векторын $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының сызықты комбинациясы деп атайды. 1) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{0}$ векторлары $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының сызықты комбинациясы бола ма? 2) $\vec{a} \parallel \vec{b}$ болса, бұл векторлардың сызықты комбинациясы $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларымен салыстырғанда қалай орналасады?

1.49. C нүктесі AB түзуінде жатуы үшін қандай шарт орындалуы керек?

1.50. Коллинеар емес $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлары берілген. Онда α және β сандары табылып, $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ теңдігі орындалатынын дәлелдеңдер.

1.51. Егер $\vec{x} = \vec{m} + \vec{n}$, $\vec{y} = \vec{m} - \vec{n}$ болса, 1) $2\vec{x} - 2\vec{y}$; 2) $2\vec{x} + \dfrac{\vec{y}}{2}$; 3) $-\vec{x} - \dfrac{\vec{y}}{3}$ векторларын $\vec{m}$ және $\vec{n}$ арқылы өрнектеңдер.

1.52. $ABCD$ параллелограмында O — диагональдардың қиылысу нүктесі, E — CD қабырғасының ортасы. 1) $\overrightarrow{OA}$; 2) $\overrightarrow{AE}$ векторын $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{AD}$ векторлары арқылы өрнектеңдер.

1.53. $ABCD$ квадратының диагональдары O нүктесінде қиылысады, E және K — сәйкесінше AB және AD қабырғаларының орталары. 1) $\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{AC}$; 3) $\overrightarrow{OD}$; 4) $\overrightarrow{KE}$; 5) $\overrightarrow{ED}$; 6) $\overrightarrow{KC}$ векторын $\overrightarrow{AE}$ және $\overrightarrow{AK}$ векторлары арқылы өрнектеңдер.

B

1.54. N нүктесі $ABCD$ параллелограмының BC қабырғасында жатыр және $BN : NC = 3 : 1$ шарты орындалады. $\overrightarrow{AN}$ және $\overrightarrow{ND}$ векторларын $\vec{a} = \overrightarrow{AD}$ және $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$ векторлары арқылы өрнектеңдер.

1.55. $ABCD$ параллелограмының диагональдары O нүктесінде қиылысады. N нүктесі AD қабырғасын $AN : ND = 1 : 2$ қатынасында бөледі: 1) $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OA}$; 2) $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{ON}$ векторларын $\vec{x} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{y} = \overrightarrow{AB}$ векторлары арқылы өрнектеңдер.

1.56. 1) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$; 2) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| - |\vec{b}|$; 3) $|2\vec{a} - 3\vec{b}| = 2|\vec{a}| + 3|\vec{b}|$ теңдіктері орындалса, онда $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары қалай орналасқан?

1.57. A және B нүктелері берілген. 1) $\overrightarrow{XA} = 3\overrightarrow{XB}$; 2) $\overrightarrow{BX} = -\overrightarrow{AX}$; 3) $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} = \overrightarrow{AB}$ теңдігі орындалатындай етіп, X нүктелерін анықтаңдар.

1.58. O нүктесі — ABC үшбұрышының AD медианасының ортасы. $\overrightarrow{AO}$ векторын $\vec{a} = \overrightarrow{BA}$ және $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ векторлары арқылы өрнектеңдер.

1.59. $ABCD$ параллелограмының BC қабырғасынан $BH : HC = 1 : 4$ шарты орындалатындай етіп H нүктесі алынған. $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{HD}$ векторларын $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ және $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ векторы арқылы өрнектеңдер.

1.60. $PQRT$ ромбысының QR қабырғасынан $QK = 5 \cdot KR$ болатындай етіп, K нүктесі алынған. E нүктесі — PQ қабырғасының ортасы. $\overrightarrow{TK}$, $\overrightarrow{KE}$ векторларын $\overrightarrow{TP} = \vec{m}$ және $\overrightarrow{TR} = \vec{n}$ векторы арқылы өрнектеңдер.

C

1.61. P және O нүктелері — $ABCD$ төртбұрышының AC және BD диагональдарының орталары. $\overrightarrow{PO} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}\right)$ теңдігін дәлелдеңдер.

1.62. Қабырғалары берілген ABC үшбұрышының сәйкес медианаларына параллель әрі тең болатын үшбұрыш салуға болатынын көрсетіңдер.

1.63. Трапеция диагональдарының орталарын қосатын кесінді оның табандарына параллель және табандарының айырымының жартысына тең болатынын дәлелдеңдер.

1.64. Кез келген төртбұрыштың қарама-қарсы қабырғаларының орталарын қосатын кесінділер қиылысу нүктесінде қақ бөлінетінін дәлелдеңдер.

1.65. A, B және C нүктелері $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ болатындай орналасқан. Кез келген O нүктесі үшін $\overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OC}$ теңдігі орындалатынын дәлелдеңдер.

1.4. Векторлардың арасындағы бұрыш. Векторлардың скалярлық көбейтіндісі

Тақырыпты оқып-үйрену барысында сендер:

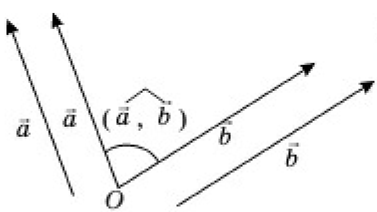
- екі вектор арасындағы бұрыш ұғымы анықтамасын білесіңдер;
- векторлардың скалярлық көбейтіндісін есептеп табасыңдар;
- есептерді векторлық тәсілмен шешіп үйренесіңдер.

1.4.1. Векторлардың арасындағы бұрыш ұғымы

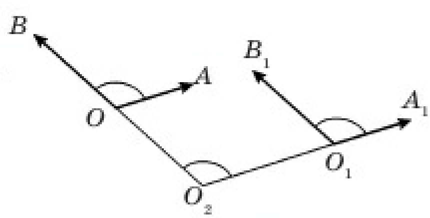
Анықтама. *$\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{AC}$ векторларының арасындағы бұрыш деп BAC* ***бұрышын*** *айтады. Нөлдік емес $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының арасындағы бұрышы деп оларды бір нүктеден бастап салғанда пайда болатын бұрышты айтады.*

$\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының арасындағы бұрышты $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ арқылы белгілейді (1.22-сурет). 1.23-суретте көрсетілгендей, түзулердің параллельдік белгілерін қолданып, векторлардың арасындағы бұрыш оларды өлшеп салатын бастапқы нүктені таңдап алуға тәуелсіз болатынын көреміз.

Егер векторлар бағыттас болса, олардың арасындағы бұрыш 0°-қа, қарама-қарсы бағытталған векторлар арасындағы бұрыш 180°-қа тең.



1.22-сурет



1.23-сурет

1.4.2. Векторлардың скалярлық көбейтіндісі

Анықтама. *Екі вектордың* ***скалярлық көбейтіндісі*** *деп олардың арасындағы бұрыштың косинусын вектордың модульдеріне көбейткенге тең санды айтады.*

$\vec{a}$ *және* $\vec{b}$ *векторларының скалярлық көбейтіндісі* $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ *санына тең.*

$\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының скалярлық көбейтіндісін $\vec{a} \cdot \vec{b}$ арқылы белгілейді. Сонымен, егер $\varphi = (\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ болса, онда

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi. \qquad (1)$$

Тең векторлардың скалярлық көбейтіндісі осы вектордың ***скалярлық квадраты*** деп аталады және оны $\vec{a}^{\,2}$ арқылы белгілейді. (1) формула бойынша

$$\vec{a}^{\,2} = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2,$$

яғни $\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2$ теңдігі орындалады. Егер $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары ортогональ (перпендикуляр) болса, онда $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 90^\circ$ және $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 90^\circ = 0$. Керісінше, нөлдік емес $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары үшін $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ болса, (1) формула бойынша $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi = 0$. Мұнда $|\vec{a}| \neq 0$, $|\vec{b}| \neq 0$ болғандықтан, $\cos\varphi = 0$, $\varphi = 90^\circ$ теңдігі орындалуы қажет. Сонымен, нөлдік емес $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары перпендикуляр болуы үшін $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ теңдігінің орындалуы қажетті және жеткілікті болатынын көрсеттік.

Векторлардың скалярлық көбейтіндісінің қасиеттері:

1°. *Кез келген* $\vec{a}$ *және* $\vec{b}$ *векторлары үшін*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

теңдігі орындалады.

2°. *Кез келген* $\vec{a}$ *және* $\vec{b}$ *векторлары мен* α *нақты саны үшін*

$$(\alpha \vec{a}) \cdot \vec{b} = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

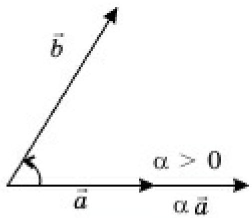
теңдігі орындалады.

3°. *Кез келген* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *және* $\vec{c}$ *векторлары үшін*

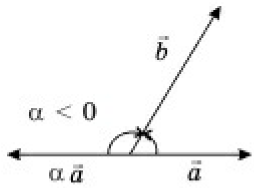
$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

теңдігі орындалады.

1° және 2°-қасиеттердің дәлелдеуі анықтамадан ((1) формула) шығады. Мысалы, 2°-қасиеттің дәлелдеуін келтірейік.



1.24-сурет



1.25-сурет

Егер $\alpha > 0$ болса, онда $\vec{a}\uparrow\uparrow\alpha\vec{a}$ болып, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = (\widehat{(\alpha\vec{a}), \vec{b}})$ теңдігі орындалады (1.24-сурет). Сонда

$$(\alpha\vec{a})\cdot\vec{b} = |\alpha\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\widehat{(\alpha\vec{a}), \vec{b}}) = |\alpha||\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) =$$

$$= \alpha(|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})) = \alpha(\vec{a}\cdot\vec{b}).$$

Егер $\alpha < 0$ болса, онда $\vec{a}\uparrow\downarrow\alpha\vec{a}$ болып, $(\widehat{(\alpha\vec{a}), \vec{b}}) = 180^\circ -$ $-(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ теңдігі орындалады (1.25-сурет). Осыдан

$$(\alpha\vec{a})\cdot\vec{b} = |\alpha\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\widehat{(\alpha\vec{a}), \vec{b}}) = |\alpha||\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(180^\circ-(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})) =$$

$$= -|\alpha||\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \alpha|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \alpha(\vec{a}\cdot\vec{b}).$$

Мұнда $-|\alpha| = \alpha$ болатынын ескердік.

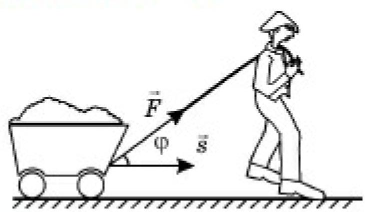
3°-қасиеттің орындалатынын келесі параграфта көрсетеміз.

1.4.3. Векторлардың кейбір қолданулары

Векторлардың скалярлық көбейтіндісін қолдану мысалдары физика курсынан белгілі. Мысалы, механикада дененің $\vec{s}$ орын ауыстыруы үшін $\vec{F}$ күш әрекет етсе, атқарылатын A жұмысы

$$A = |\vec{F}|\cdot|\vec{s}|\cdot\cos\varphi$$

формуласымен анықталады (1.26-сурет).



Физикадағы күш векторының математикалық векторлардан басты айырмашылығы — әрекет ететін нүктесіне тәуелділігінде

1.26-сурет

1-мысал. $|\vec{a}| = |\vec{b}| \neq 0$ жағдайында $\vec{a} + \vec{b}$ және $\vec{a} - \vec{b}$ векторларының перпендикуляр болатынын көрсетейік.

Ол үшін $(\vec{a} + \vec{b})\cdot(\vec{a} - \vec{b}) = 0$ теңдігі орындалатынын көрсетсе, жеткілікті. Шынында да,

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}^{\,2}-\vec{b}^{\,2}=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2=0.$$

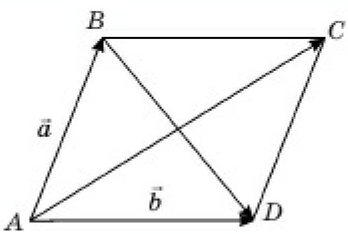
2-мысал. Параллелограмм диагональдары квадраттарының қосындысы оның барлық қабырғалары квадраттарының қосындысына тең болатынын көрсетейік.

$ABCD$ параллелограмында $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ деп алайық (1.27-сурет). Онда $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\vec{a}+\vec{b}$ және $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$ теңдіктері орындалады. Осыдан $AC^2=\overrightarrow{AC}^{\,2}=(\vec{a}+\vec{b})^2=\vec{a}^{\,2}+\vec{b}^{\,2}+2\vec{a}\,\vec{b}=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AD}^{\,2}+2\vec{a}\,\vec{b}=$ $=AB^2+AD^2+2\cdot\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$, $BD^2=\overrightarrow{BD}^{\,2}=(\vec{b}-\vec{a})^2=\vec{a}^{\,2}+$ $+\vec{b}^{\,2}-2\vec{a}\,\vec{b}=\overrightarrow{AB}^{\,2}+\overrightarrow{AD}^{\,2}-2\vec{a}\,\vec{b}=AB^2+AD^2-2\cdot\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ теңдіктерін аламыз. Оларды мүшелеп қоссақ,

$$AC^2+BD^2=AB^2+AD^2+AB^2+AD^2=AB^2+BC^2+CD^2+AD^2.$$

Мұнда $AD=BC$, $AB=CD$ теңдіктерін қолдандық.

Векторларға қолданылатын амалдарды оқып зерттейтін математиканың бөлімін ***векторлық алгебра*** деп атайды. Сонымен, осы тараудағы оқып-үйренген векторларға қолданылатын амалдар векторлық алгебраның негізін қалайды. Вектор алгебра аппараттары, геометрия және физика есептерін шешкенде өте қолайлы. Әр есепті векторлардың көмегімен шешу процесін, негізінен үш кезеңге бөліп, қарастыру керек:



1.27-сурет

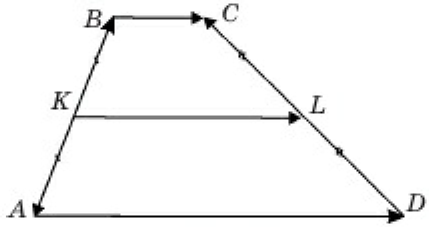
1-кезең. *Векторларды қолайлы түрде енгізе отырып, есептің шартын векторлар көмегімен жазу керек.*

2-кезең. *Векторлық түрде жазылған есептің шартын түрлендіре отырып, берілген есептің шешуін векторлық түрде аламыз.*

3-кезең. *Векторлық түрде алынған жауапты есептің бастапқы берілген мағынасына (геометриялық мағынасына) келтіріп жазу керек.*

3-мысал. Трапецияның орта сызығы оның табандарына параллель және олардың қосындысының жартысына тең болатынын дәлелдеу керек.

$ABCD$ трапециясының табандары AD және BC, ал KL орта сызығы болсын (1.28-сурет). K нүктесі AB қабырғасының ортасы дегенді векторлық түрде $\overrightarrow{KA} = -\overrightarrow{KB}$ теңдігімен, L нүктесі CD-ның ортасы болатынын $\overrightarrow{LD} = -\overrightarrow{LC}$ теңдігімен және $AD \| BC$ болатынын $\overrightarrow{AD} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BC}$ түрінде жазамыз (1-кезең).



1.28-сурет

$\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} = \vec{0}$ және $\overrightarrow{LC} + \overrightarrow{LD} = \vec{0}$. Сонымен қатар $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DL}$ және $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CL}$ теңдіктерін мүшелеп қоссақ,

$$2\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DL} + \overrightarrow{CL} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}.$$

Осыдан

$$\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) \text{ (2-кезең).}$$

Ең соңында (3-кезеңде) $\overrightarrow{AD} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BC}$ болғандықтан, $\overrightarrow{KL} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AD}$ және $\overrightarrow{KL} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BC}$, яғни $KL \| AD$, $KL \| BC$ екенін анықтаймыз. Осыған қоса, $\overrightarrow{AD} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BC}$ болғандықтан,

$$|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AD}| + |\overrightarrow{BC}| = AD + BC \text{ теңдігінен}$$

$$KL = \frac{1}{2}(AD + BC) \text{ аламыз.}$$

ТАРИХҚА ШОЛУ

Векторлық есептеулердің даму тарихы негізінен үш бағытта өрбіді: геометриялық (бағытталған кесінділерді есептеу), алгебралық және физикалық.

Бағытталған кесінділер есептеуінің негізін қалаушы — норвегиялық Каспар Вессель (1745–1818). Ол өзінің саналы ғұмырын Дания ғылым Академиясында геодезист, картограф және жерөлшеуші қызметтерін атқарумен өткізген. Сондықтан өз еңбектерін кесіндіні алгебралық тәсілдермен — шамасы және бағыты бойынша анықтауға арнаған, геодезист-жерөлшеуші еңбегін жеңілдету мақсатында қолайлы «геометриялық есептемелерді» жасауға тырысқан.

Векторлық есептеулердің әрі қарай дамуы ағылшын математигі Уильям Гамильтон (1805–1865) және неміс ғалымы Герман Грассман (1809–1877) есімдерімен тығыз байланысты. Ол өз еңбектерінде бірінші болып «вектор» ұғымын (латынша vector – «тасымалдағыш» деген мағынада қолданылады, вектор нүктені оның бастапқы нүктесінен ұшына қарай тасымалдау ұғымын бейнелейді) және «скаляр» ұғымын (латынның scalaris – *саты* сөзінен туындаған, бұл нақты сандар жиынының реттілік қатынасын, яғни нақты сандарды бір-бірімен салыстыру мүмкіндіктерін көрсетеді) енгізген. Гамильтонмен бір уақытта және оған тәуелсіз Грассман да өз еңбектерінде геометриялық тұрғыдан векторлық есептемелер негізін қалады.

Векторларды оқытып үйретудің үшінші бағыты жаратылыстану ғылымдары сұранысынан туындады. Мәселен, XIX ғасырдың бірінші жартысында векторлық есептеулер дамуының бұл үрдісі француз механик-ғалымы Сен-Венан (1797–1886) еңбектерінде, көрнекті орыс ғалымы И.И. Сомовтың (1815–1876) «Рационалды механикасында», атақты ағылшын ғалымы электрмагниттік өрістер теориясының негізін қалаушылардың бірі Джеймс Кларк Максвелл (1831–1879) еңбектерінде және өзге көрнекті ғалымдардың еңбектерінде өз жалғасын тапты.

Гамильтон тұрақты векторларды оқытып үйрететін векторлық алгебрамен бірге айнымалы векторларды, векторлық функцияларды оқытып үйрететін векторлық анализ негізін де қалады. Векторлық есептеулер XIX ғасырдың соңынан-ақ жүйелі түрде электрмагниттік өріс теориясы мен гидромеханикада, XX ғасырда теориялық механикада, аналитикалық геометрия мен дифференциалдық геометрияда жүйелі түрде қолданыла бастады.

1. Қандай бұрыш $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{AC}$ векторларының арасындағы бұрыш деп аталады?
2. $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының арасындағы бұрышты жалпы жағдайда қалай анықтайды?
3. Екі вектордың скалярлық көбейтіндісі деп нені айтады? Векторлардың скалярлық көбейтіндісі сан бола ма, әлде вектор бола ма?
4. Скалярлық көбейтіндінің қасиеттерін тұжырымдаңдар.
5. Екі вектор перпендикуляр болуы үшін қандай шарттың орындалуы қажетті және жеткілікті?

6. Векторлық алгебра элементтерін қолдану негіздерін атап көрсетіңдер.

ПРАКТИКАЛЫҚ ЖҰМЫС

Бастапқы нүктелері әртүрлі және арасындағы бұрышы а) 30°; ә) 45°; б) 60°; в) 90°; г) 180° болатындай етіп, $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларын салыңдар. Нәтижесін, оларды бір нүктеге параллель көшіру арқылы транспортирді пайдаланып тексеріңдер.

ЕСЕПТЕР

А

1.66. $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының арасындағы бұрыш 1) сүйір; 2) доғал болса, $\vec{a} \cdot \vec{b}$ скаляр көбейтіндісінің таңбасы қандай? Жауаптарыңды негіздеңдер.

1.67. $\vec{a} \cdot \vec{b}$ скаляр көбейтіндісі 1) оң; 2) нөлге тең; 3) теріс болса, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ бұрышы жөнінде не айтуға болады?

1.68. $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$ және $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ бұрышы 1) 30°; 2) 45°; 3) 90°; 4) 150° деп алып, $\vec{a} \cdot \vec{b}$ скаляр көбейтіндісін табыңдар.

1.69. $\vec{a}$ және $\vec{b}$ бірлік векторлары үшін $(\widehat{\vec{a} \cdot \vec{b}}) = \varphi$ болса, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \cos\varphi$ теңдігінің орындалатынын көрсетіңдер.

1.70. Кестені толтырыңдар:

$\lvert\vec{a}\rvert$	5	$\sqrt{3}$	0,5		a
$\lvert\vec{b}\rvert$	4	2		2	b
$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$	0,6		0,8	0, 5	
$\vec{a} \cdot \vec{b}$		3	4	5	$0{,}5a \cdot b$

1.71. Қабырғасы 1-ге тең $ABCD$ квадраты берілген. Есептеңдер:

1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB}$; 2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$; 3) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}$;

4) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; 5) $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{DC}$; 6) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$;

7) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD}$; 8) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB})$.

1.72. Қабырғасы 1-ге тең ABC тең қабырғалы үшбұрышы берілген. Есептеңдер:

1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; 2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$;

3) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC})$; 4) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC}$.

B

1.73. Кестені толтырыңдар:

$\lvert\vec{a}\rvert$	$\sqrt{3}$	8	7	0,01		$\sqrt{2}$	4
$\lvert\vec{b}\rvert$	4	5		9,01	2	6	$\sqrt{3}$
$(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$	30°		45°		120°	135°	
$\vec{a} \cdot \vec{b}$		20	7	0	–3		–6

1.74. Өрнекті түрлендіріңдер:

1) $(2\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - 3\vec{b})$; 2) $\vec{c}(\vec{a} + \vec{c}) - \vec{a}(\vec{a} + \vec{c})$;

3) $(\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} - \vec{c}) - (\vec{a} - \vec{b})(\vec{b} - \vec{c})$.

1.75. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $(\vec{a} + \vec{b})^2 + (\vec{a} - \vec{b})^2 = 2(\vec{a}^{\,2} + \vec{b}^{\,2})$;

2) $(\vec{a} + \vec{b})^2 - (\vec{a} - \vec{b})^2 = 4\vec{a}\,\vec{b}$;

3) $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 = \vec{a}^{\,2} + \vec{b}^{\,2} + \vec{c}^{\,2} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{c} + 2\vec{b} \cdot \vec{c}$.

1.76. Егер $\vec{l}_1$ және $\vec{l}_2$ бірлік векторлары үшін $(\widehat{\vec{l}_1, \vec{l}_2}) = \alpha$ болса, 1) $\vec{l}_1$ және $\vec{l}_1 + \vec{l}_2$; 2) $\vec{l}_1$ және $\vec{l}_1 - \vec{l}_2$; 3) $\vec{l}_2$ және $\vec{l}_1 + \vec{l}_2$; 4) $\vec{l}_2$ және $\vec{l}_1 - \vec{l}_2$; 5) $\vec{l}_1 + \vec{l}_2$ және $\vec{l}_1 - \vec{l}_2$ векторларының арасындағы бұрышты табыңдар.

1.77. Егер $\vec{l_1}$ және $\vec{l_2}$ өзара перпендикуляр бірлік векторлар болса, $\vec{a} = 2\vec{l_1} - \vec{l_2}$, $\vec{b} = \vec{l_1} + 2\vec{l_2}$ деп алып, $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|\vec{a} + \vec{b}|$, $|\vec{a} - \vec{b}|$ сандары мен $\vec{a} + \vec{b}$ және $\vec{a} - \vec{b}$ векторлары арасындағы бұрышты табыңдар.

1.78. $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 60^\circ$ деп алып, $|\vec{a} + \vec{b}|$ саны мен $\left(\widehat{\vec{a}, \vec{a} + \vec{b}}\right)$ бұрышын табыңдар.

1.79. Егер $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ болса, $\vec{a} + \vec{b}$ және $\vec{a} - \vec{b}$ векторларының перпендикуляр болатынын дәлелдеңдер.

1.80. Егер $\vec{a} + \vec{b}$ және $\vec{a} - \vec{b}$ векторлары перпендикуляр болса, онда $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ теңдігінің орындалатынын көрсетіңдер.

1.81. Егер $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ және $\vec{a} \perp \vec{b}$ болса, онда $\vec{a} + 2\vec{b}$ және $2\vec{a} + \vec{b}$ векторларының арасындағы бұрышты табыңдар.

1.82. $\vec{a}$ векторы берілген. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$ теңдігі орындалатындай етіп, $\vec{b}$ бірлік векторын тұрғызыңдар. Мұндай $\vec{b}$ векторы үнемі табыла бере ме?

1.83. A төбесіндегі бұрышы 60°-қа тең $ABCD$ ромбысының қабырғасы a-ға тең. Есептеңдер: 1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$; 2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CO}$; 3) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO}$; 4) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DO}$; 5) $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BO}$. Мұндағы O — ромб диагональдарының қиылысу нүктесі.

1.84. Ромб диагональдары квадраттарының қосындысы оның төрт еселенген қабырғасы квадратына тең болатынын дәлелдеңдер. Есепті екі түрлі тәсілмен шешіңдер (векторлық тәсіл және векторлық емес тәсілді қолданыңдар).

C

1.85. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ теңдігінен $\vec{b} = \vec{c}$ теңдігі орындалатындығы шыға ма? Жауаптарыңды негіздеңдер.

1.86. Егер $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ өзара қос-қостан коллинеар емес векторлар болса, онда $\vec{a}\ \vec{x} = \vec{b}\ \vec{x} = \vec{c}\ \vec{x}$ теңдіктерін қанағаттандыратын $\vec{x}$ векторын табыңдар.

1.87. Кез келген $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары үшін $-|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \leqslant \vec{a} \cdot \vec{b} \leqslant |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ теңсіздігі орындалатынын көрсетіңдер. Қай кезде теңдік таңбалары орындалады?

1.88. α, β, γ сандары үшін $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ теңдігі орындалатыны белгілі. Векторлардың скалярлық көбейтіндісі үшін осы сияқты теңдік орындала ма, яғни кез келген $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлары үшін $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c})$ теңдігі орындала ма? Жауаптарыңды негіздеңдер.

1.89. Жазықтықтың кез келген A, B, C, D нүктелері үшін $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ теңдігі орындалатынын көрсетіңдер.

1.90. ABC үшбұрышының қабырғаларына одан тысқары ABB_1A_2, BCC_1B_2 және ACC_2A_1 параллелограмдары тұрғызылған. Қабырғалары A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 кесінділеріне тең және оларға параллель болатын үшбұрыш салуға болатынын көрсетіңдер.

1.91. Үшбұрыш медианалары квадраттарының қосындысы оның қабырғалары квадраттарының қосындысының $\frac{3}{4}$ бөлігіне тең болатынын көрсетіңдер.

1.92. ABC үшбұрышының CC_1 медианасы жүргізілген. Егер:
1) $2CC_1 > AB$ болса, онда C бұрышы сүйір;
2) $2CC_1 = AB$ болса, онда C бұрышы тік;
3) $2CC_1 < AB$ болса, онда C бұрышы доғал
болатынын көрсетіңдер.

1.93. $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, $\angle C = \gamma$ болатын әрбір ABC үшбұрышы үшін $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ теңдігі орындалатынын көрсетіңдер. Осы теңдікті пайдаланып, Пифагор теоремасын дәлелдеңдер.

1.94. $\vec{p} = \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{q}) - \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{q})$ және $\vec{q}$ векторларының перпендикуляр болатынын дәлелдеңдер.

1.95. $ABCD$ параллелограмының AD қабырғасынан $AK = \lambda \cdot AD$ $(0 < \lambda < 1)$ теңдігі орындалатындай етіп, K нүктесі алынған. BK түзуі AC диагоналын N нүктесінде қиып өтеді. $AN : AC$ қатынасын табыңдар.

1.5. Вектордың координаталары

Тақырыпты оқып-үйрену барысында сендер:

- вектордың координаталарын таба аласыңдар;
- вектордың ұзындығын таба аласыңдар;
- векторларға қолданылатын амалдарды координаталық түрде орындай аласыңдар.

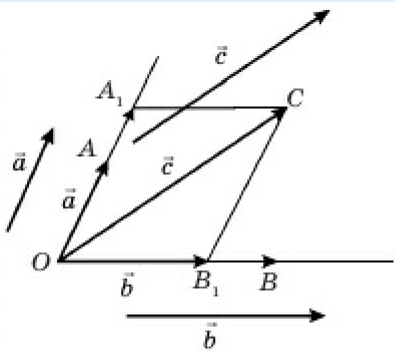
1.5.1. Кез келген векторды коллинеар емес екі вектор арқылы жіктеу

1-теорема. *Егер $\vec{a}$ және $\vec{b}$ коллинеар емес векторлар болса, кез келген $\vec{c}$ векторы үшін x және y сандары табылып,*

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b} \qquad (1)$$

теңдігі орындалады және бұл теңдік жалғыз ғана түрде жазылады.

$\vec{a}$, $\vec{b}$ және $\vec{c}$ векторларын жазықтықтың бір O нүктесінен бастап өлшеп саламыз. Сонда алынған векторлардың ұштарын сәйкесінше A, B және C арқылы белгілейік (1.29-сурет). Векторды қиылысатын түзулер бойындағы құрастырушы векторларға жіктеу туралы 2-теорема бойынша (п. 1.2.4)



1.29-сурет

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} \qquad (2)$$

теңдігі орындалатындай OA және OB түзулерінің бойынан жалғыз $\overrightarrow{OA_1}$ және $\overrightarrow{OB_1}$ векторлары табылады. $\overrightarrow{OA} \parallel \overrightarrow{OA_1}$ және $\overrightarrow{OB} \parallel \overrightarrow{OB_1}$ болғандықтан, 1.3-баптағы 2-теоремаға сәйкес (коллинеарлық шарты) жалғыз x және y сандары табылып, $\overrightarrow{OA_1} = x \cdot \overrightarrow{OA} = x \cdot \vec{a}$ және $\overrightarrow{OB_1} = y \cdot \overrightarrow{OB} = y \cdot \vec{b}$ теңдіктері орындалады. Олай болса, (2) теңдіктен жалғыз

$$\vec{c} = \overrightarrow{OC} = x\vec{a} + y\vec{b}$$

теңдігі орындалатыны шығады.

Теорема толық дәлелденді.

Осы теоремадан кез келген векторды коллинеар емес кез келген екі векторға жіктеуге болатыны шығады. Егер жазықтықта осындай коллинеар емес екі вектор таңдап алынса, бұл векторларды ***базистік векторлар*** деп атайды. Сонымен, коллинеар емес кез келген екі векторды осы жазықтықтың базистік векторлары ретінде алуға болады және кез келген вектор осы базистік векторлар арқылы жіктеледі. Дәлелденген теоремадағы $\vec{a}$ және $\vec{b}$ — базистік векторлар. Ал x және y сандары $\vec{c}$ векторының $\vec{a}$, $\vec{b}$ базисіндегі ***координаталары*** деп аталады.

1.5.2. Вектордың тік бұрышты координаталар жүйесіндегі координаталары

Oxy тік бұрышты координаталар жүйесін алайық. $\vec{i}$ векторы Ox өсімен бағыттас, $\vec{j}$ векторы Oy өсімен бағыттас бірлік векторлар болсын. Бұл векторларды ***координаталық векторлар (орттар)*** деп атайды. $\vec{i}$ және $\vec{j}$ векторлары коллинеар емес болғандықтан, оларды базистік векторлар ретінде қарастыруға болады. Бұл базистік векторларды ***ортонормаланған базистік векторлар*** деп атайды. Онда 1-теорема бойынша кез келген $\vec{a}$ векторы үшін жалғыз x және y сандары табылып,

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} \qquad (3)$$

теңдігі орындалады. Мұнда x пен y сандарын $\vec{a}$ векторының Oxy тік бұрышты координаталар жүйесіндегі ***координаталары*** деп атап, оны былай жазады: $\vec{a} = (x; y)$.

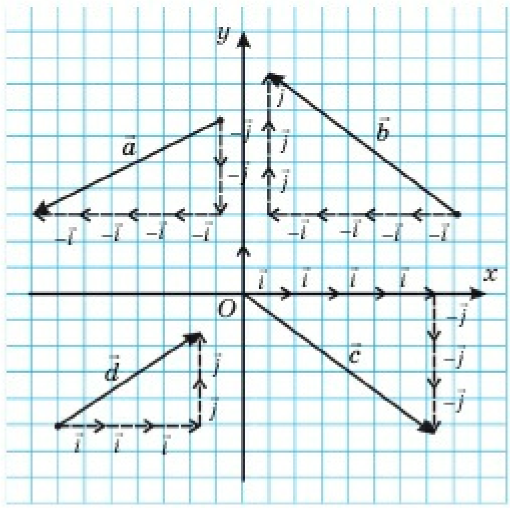
Векторды (3) теңдікпен жазудың мағынасын 1.30-суреттен көруге болады. Мұнда

$$\vec{a} = -4\vec{i} - 2\vec{j} \text{ немесе } \vec{a} = (-4; -2);$$

$$\vec{b} = -4\vec{i} + 3\vec{j} \text{ немесе } \vec{b} = (-4; 3);$$

$$\vec{c} = 4\vec{i} - 3\vec{j} \text{ немесе } \vec{c} = (4; -3);$$

$$\vec{d} = 3\vec{i} + 2\vec{j} \text{ немесе } \vec{d} = (3; 2).$$



1.30-сурет

Енді вектор координаталарының қасиеттерін келтірейік:

1. Тең векторлардың сәйкес координаталары да тең. Егер $\vec{a} = (x; y)$, $\vec{b} = (u; v)$ және $\vec{a} = \vec{b}$ болса, онда $x = u$, $y = v$.

Керісінше, сәйкес координаталары тең векторлар өзара тең, яғни $\vec{a} = (x; y)$, $\vec{b} = (u; v)$ және $x = u$, $y = v$ болса, $\vec{a} = \vec{b}$.

Шынында да, $x\vec{i} + y\vec{j} = \vec{a} = \vec{b} = u\vec{i} + v\vec{j}$. Осыдан $(x-u)\vec{i} + (y - v)\vec{j} = 0$ немесе $(x - u)\vec{i} = -(y - v)\vec{j}$ теңдігін аламыз. Мұнда $\vec{i}$ және $\vec{j}$ векторлары коллинеар емес. Сол себепті соңғы теңдік тек $x - u = 0$, $y - v = 0$ болғанда ғана орындалады, яғни $x = u$, $y = v$ теңдіктері орындалатынын көрсетеді.

Керісінше, егер $x = u$, $y = v$ болса, (3) теңдік бойынша $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} = u\vec{i} + v\vec{j} = \vec{b}$ теңдігін аламыз.

2. Векторларды қосқанда олардың сәйкес координаталары қосылады: $\vec{a} = (x; y)$, $\vec{b} = (u; v)$ болса, $\vec{a} + \vec{b} = (x + u; y + v)$.

Шынында да, (3) теңдік бойынша

$$\vec{a} + \vec{b} = (x\vec{i} + y\vec{j}) + (u\vec{i} + v\vec{j}) = (x + u)\vec{i} + (y + v)\vec{j}.$$

Дәлелдеу керегі де осы.

4–4338

3. Векторларды санға көбейткенде оның координаталары да санға көбейтіледі: $\vec{a} = (x;\ y)$ үшін $\lambda \cdot \vec{a} = (\lambda \cdot x;\ \lambda \cdot y)$.

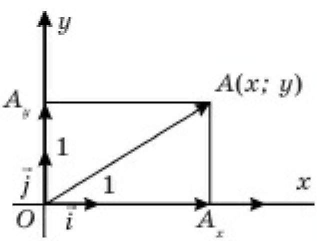
$\lambda \cdot \vec{a} = \lambda(x\vec{i} + y\vec{j}) = \lambda(x\vec{i}) + \lambda(y\vec{j}) = (\lambda x)\vec{i} + (\lambda y)\vec{j}$.

Салдар. *Екі вектор айырымының әр координатасы осы векторлардың сәйкес координаталарының айырымына тең: $\vec{a} = (x;\ y)$, $\vec{b} = (u;\ v)$ болса, онда $\vec{a} - \vec{b} = (x - u;\ y - v)$.*

Дәлелдеуі 2-және 3-қасиеттерден шығады.

1.5.3. Ұштарының координаталарымен берілген вектордың координаталары. Радиус-вектор

Егер Oxy жазықтығында $A(x;\ y)$ нүктесі берілсе, $\overrightarrow{OA}$ векторын A нүктесінің ***радиус-векторы*** деп атайды. *$\overrightarrow{OA}$ радиус-векторы үшін $\overrightarrow{OA} = (x;\ y)$, яғни нүктенің радиус-векторының координаталары осы нүктенің сәйкес координаталарына тең.*



1.31-сурет

A нүктесінің Ox өсіндегі проекциясын A_x, Oy өсіндегі проекциясын A_y арқылы белгілейік. Онда $A_x(x;\ 0)$, $A_y(0;\ y)$ (1.31-сурет). $\overrightarrow{OA_x} \parallel \vec{i}$ және $\overrightarrow{OA_y} \parallel \vec{j}$ болғандықтан, берілген бірлік масштаб арқылы кесінділі сан өсі бойына өлшеп салу тәсілі бойынша $\overrightarrow{OA_x} = x\vec{i}$ және $\overrightarrow{OA_y} = y\vec{j}$ теңдіктері немесе $\overrightarrow{OA_x} = x\vec{i} + 0 \cdot \vec{j}$ және $\overrightarrow{OA_y} = 0 \cdot \vec{i} + y\vec{j}$ теңдіктері орындалады. Онда $\overrightarrow{OA_x} = (x;\ 0)$ және $\overrightarrow{OA_y} = (0;\ y)$ және 2-қасиетке сәйкес

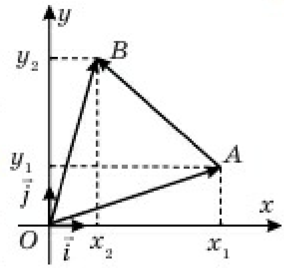
$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_x} + \overrightarrow{OA_y} = (x + 0;\ 0 + y) = (x;\ y).$$

Айталық, $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ векторы берілсін және $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$ болсын. Онда

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1) \cdot \vec{i} + (y_2 - y_1) \cdot \vec{j} \qquad (4)$$

теңдігі орындалады. Демек, $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB} = (x_2;\ y_2)$, $\overrightarrow{OA} = (x_1;\ y_1)$ болғандықтан, салдар бойынша $\overrightarrow{AB} = (x_2-x_1;\ y_2-y_1)$ (1.32-сурет).



1.32-сурет

Екі нүктенің арақашықтығының формуласы бойынша $\overrightarrow{AB}$ векторының модулі

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (5)$$

формуласымен есептеледі. Жалпы егер $\vec{a} = (x;\ y)$ векторы берілсе,

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (6)$$

формуласының орындалатынын көрсету қиын емес.

$\vec{a}$ векторының ұштары $A(x_1;\ y_1)$ және $B(x_2;\ y_2)$ болса, (4) формула бойынша $\vec{a} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$ және (5) формула бойынша $|\vec{a}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ теңдігін аламыз. Вектор координаталарының жалғыздығынан $x = x_2 - x_1$, $y = y_2 - y_1$ теңдіктері орындалып, (6) формуланың ақиқаттығын көрсетеді.

1-мысал. $A(2;\ -3)$ және $B(3;\ 4)$ нүктелері берілген. $\overrightarrow{AB}$ векторының координаталары мен модулін табу керек.

(4) формула бойынша $\overrightarrow{AB} = (3 - 2;\ 4 - (-3)) = (1;\ 7)$.

Ал (6) формула бойынша $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + 7^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

2-мысал. $\vec{a} = (5;\ -4)$ векторын $\vec{p} = (1;\ 1)$ және $\vec{q} = (1;\ -2)$ векторлары арқылы жіктеу керек.

$\vec{p}$ және $\vec{q}$ векторлары коллинеар емес (оған векторларды координаталар бас нүктесінен өлшеп салып, көз жеткізуге болады). Сондықтан бұл векторлар жазықтықта базистік векторлар болады. 1-теорема бойынша $\vec{a}$ векторын осы $\vec{p}$ және $\vec{q}$ векторлары арқылы жіктейміз. Сонда x және y сандары табылып, $\vec{a} = x\vec{p} + y\vec{q}$ теңдігі орындалады. Біздің мақсатымыз x пен y-тің мәндерін анықтау. Сонымен,

$$x \cdot (1;\ 1) + y \cdot (1;\ -2) = (5;\ -4)$$

теңдігінен x пен y мәндерін анықтау керек. Вектор координаталарының 3- және 2- қасиеттері бойынша

$(x \cdot 1;\ x \cdot 1) + (y \cdot 1;\ y \cdot (-2)) = (5;\ -4) \Rightarrow (x + y;\ x - 2y) = (5;\ -4)$

теңдігін аламыз. Векторлардың теңдігіне сәйкес

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ x - 2y = -4\,. \end{cases}$$

Оның жалғыз шешімі бар: $x = 2;\ y = 3$. Демек, $\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q}$ теңдігі орындалады. Бізге қажеті де осы.

1. Кез келген векторды коллинеар емес екі вектор арқылы жіктеу жөніндегі теореманы тұжырымдап, дәлелдеңдер.
2. Жазықтықтағы базистік векторлар деп нені айтады?
3. Координаталық векторлар деп нені айтады және оларды қалай белгілейді?
4. Тік бұрышты координаталар жүйесінде вектордың координаталары деп нені айтады? Оны қалай жазады?
5. Вектор координаталарының қандай қасиеттерін білесіңдер? Оларды дәлелдеңдер.
6. Нүктенің радиус-векторы деп қандай векторды айтады?
7. Ұштарының координаталары бойынша вектордың координаталарын қалай анықтайды?
8. Вектордың модулін қандай формуламен анықтайды?

ПРАКТИКАЛЫҚ ЖҰМЫС

Oxy жазықтығында координаталары бүтін сандармен өрнектелетін A және B нүктелерін белгілеп алыңдар. Өлшеу құралын пайдаланып, AB кесіндісінің ұзындығын өлшеңдер. Өлшеу нәтижесін (5) формула көмегімен тексеріңдер.

ЕСЕПТЕР

А

1.96. $\overrightarrow{OA}$ радиус-векторының координаталарын анықтаңдар: 1) $A(1;\ -2)$; 2) $A(0;\ 3)$; 3) $A(-2;\ 0)$; 4) $A(\sqrt{2};\ 0{,}7)$.

1.97. Тік бұрышты Oxy координаталар жүйесінде $\vec{a} = (3;\ 0)$, $\vec{b} = (2;\ -1)$, $\vec{c} = (0;\ -3)$, $\vec{d} = (1;\ 1)$, $\vec{e} = (2;\ \sqrt{2})$ векторларын O нүктесінен бастап салыңдар.

1.98. $\overrightarrow{AB}$ векторының координаталарын анықтаңдар: 1) $A(0; 1)$, $B(1; 0)$; 2) $A(-2; 1)$, $B(-4; 2)$; 3) $A(p; q)$, $B(-p; -q)$.

1.99. $\vec{a} + \vec{b}$ қосындысы мен $\vec{a} - \vec{b}$ айырымының координаталарын табыңдар: 1) $\vec{a} = (0; 1)$, $\vec{b} = (1; 0)$; 2) $\vec{a} = (-2; 1)$, $\vec{b} = (4; -3)$; 3) $\vec{a} = (\sqrt{2}; \frac{1}{3})$, $\vec{b} = (-\sqrt{2}; \frac{1}{6})$; 4) $\vec{a} = (\frac{2}{7}; -0{,}6)$, $\vec{b} = (4; \frac{1}{3})$.

1.100. $\vec{a} = (4; -2)$ векторы мен λ саны берілсін. $\lambda\vec{a}$ векторының координаталарын табыңдар: 1) $\lambda = 2$; 2) $\lambda = -3$; 3) $\lambda = \frac{1}{2}$; 4) $\lambda = \sqrt{3}$.

1.101. $A(1; 2)$, $B(-3; 0)$, $C(4; -2)$ нүктелері берілген. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$ векторларының координаталары мен модульдерін анықтаңдар.

1.102. $A(1; 2)$, $B(-3; 0)$, $C(4; -2)$ нүктелері берілген. 1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$; 2) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ теңдіктері орындалатындай етіп, D нүктесінің координаталарын анықтаңдар.

1.103. $A(0; 1)$, $B(1; 0)$, $C(1; 2)$, $D(2; 1)$ нүктелері берілген. $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{CD}$ векторлары тең бола ма?

1.104. $\vec{a} = (5; m)$, $\vec{b} = (n; 24)$, $|\vec{a}| = 13$ және $|\vec{b}| = 25$ болса, m және n сандарын анықтаңдар.

1.105. $\vec{a} = (-2; 1)$ векторы берілген. $\vec{a}$ векторымен бағыттас және модулі $|\vec{a}|$ санынан 1) 2 есе үлкен; 2) 2 есе кіші вектордың координаталарын жазыңдар.

B

1.106. $A(1; 1)$, $B(3; -1)$, $C(7; 3)$ нүктелері берілген. 1) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}$; 3) $3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$; 4) $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} - 3\overrightarrow{AC}$ векторларының координаталарын және модульдерін табыңдар.

1.107. $\vec{a}$ бірлік векторы Ox өсінің оң бағытымен α бұрышын жасаса, бұл вектордың координаталары $\vec{a} = (\cos\alpha; \sin\alpha)$ болатынын дәлелдеңдер.

1.108. Ox өсінің оң бағытымен 0°; 30°; 45°; 60°; 120°; 135°; 150°; 180° бұрыш жасайтын бірлік вектордың координаталарын табыңдар.

1.109. $A(1; -3)$, $B(8; 0)$, $C(4; 8)$, $D(-3; 5)$ нүктелері берілген. $ABCD$ төртбұрышы параллелограмм болатынын көрсетіңдер.

1.110. $A(-1; 3)$, $B(2; -4)$, $C(-3; -1)$ және $D(5; 2)$ нүктелері берілген. 1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}$; 3) $2\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{BD}$; 4) $\frac{1}{3}\overrightarrow{CD} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BA}$ векторларының координаталарын анықтаңдар.

1.111. $A(0; 0)$, $B(1; 1)$, $C(0; 2)$ және $D(-1; 1)$ нүктелері берілген. $ABCD$ төртбұрышы квадрат болатынын көрсетіңдер.

1.112. $A(1; 1)$, $B(2; 3)$, $C(0; 4)$, $D(-1; 2)$ нүктелері берілген. $ABCD$ төртбұрышының тіктөртбұрыш болатынын көрсетіңдер.

1.113. 1) $\vec{a} = (6; 8)$ векторымен бағыттас; 2) $\vec{b} = (-2; 5)$ векторымен қарама-қарсы бағытталған бірлік векторлардың координаталарын табыңдар.

1.114. Параллелограмның тізбектес үш төбесі берілген: $A(-1; 3)$, $B(2; -5)$, $C(0; 4)$. Оның D төбесінің координаталарын табыңдар.

1.115. m-нің қандай мәндерінде төбелері $A(1; 3)$, $B(2; -1)$, $C(4; m)$ нүктелерінде орналасқан үшбұрыш тең бүйірлі болады?

1.116. AA_1 — ABC үшбұрышының медианасы. $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{AC}$ векторларын базистік векторлар ретінде алып, $\overrightarrow{AA_1}$ векторын осы базистік векторлар бойынша жіктеңдер.

1.117. $\vec{p} = (3; -2)$ және $\vec{q} = (-1; 0)$ векторлары берілген. 1) $5\vec{p} - 2\vec{q}$; 2) $4\vec{p} + \vec{q}$ векторының координаталары мен модулін табыңдар.

C

1.118. $\vec{a} = (x; y)$, $\vec{b} = (u; v)$ векторлары үшін $x : y = u : v$ теңдігі орындалса, $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының коллинеар болатынын дәлелдеңдер.

1.119. Егер $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары коллинеар болмаса, 1) $\vec{a} + \vec{b}$ және $\vec{a} - \vec{b}$; 2) $2\vec{a} + \vec{b}$ және $\vec{a} + \vec{b}$ векторларының да коллинеар емес екенін дәлелдеңдер.

1.120. $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары коллинеар емес: 1) $3\vec{a} - x\vec{b} = y\vec{a} + \vec{b}$; 2) $4\vec{a} + 5\vec{b} - x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0}$; 3) $x\vec{a} + 3\vec{b} - y\vec{b} = \vec{0}$ теңдіктерінен x пен y сандарын анықтаңдар.

1.121. $A(-1;\ 1)$, $B(2;\ 3)$, $C(1;\ -2)$ нүктелері бойынша ABC үшбұрышының түрін анықтауға бола ма?

1.122. Oxy жазықтығында $\overrightarrow{OA_1} = (1;\ 2)$ және $\overrightarrow{A_1A_2} = (-2;\ 3)$ векторлары берілген. A_2 нүктесінің координаталарын табыңдар.

1.123. 1) $\vec{a} = (5;\ 3)$; 2) $\vec{b} = (-2;\ 3)$; 3) $\vec{c} = (0;\ 2)$; 4) $\vec{d} = (0;\ 0)$ векторларын $\vec{p} = (-1;\ 1)$ және $\vec{q} = (1;\ 1)$ векторлары бойынша жіктеңдер.

1.124. Координаталары бүтін сандар болатын және $A(\sqrt{2}-1;\ \frac{1}{3})$ нүктесінен бірдей қашықтықта орналасатын екі нүкте табылмайтынын көрсетіңдер.

1.125. $\vec{a}$ векторы мен A нүктесінің координаталары берілген. $\vec{a}$ векторын A нүктесінен бастап салғанда шығатын вектордың ұштарының координаталарын табыңдар: 1) $\vec{a} = (3;\ 4)$, $A(-2;\ 3)$; 2) $\vec{a} = (3;\ 0)$, $A(0;\ 0)$; 3) $\vec{a} = (-5;\ 4)$, $A(1;\ 0)$; 4) $\vec{a} = (3;\ -1)$, $A(-1;\ -2)$.

1.126. Координаталық тәсілді қолданып, үшбұрыштың орта сызығының қасиеттерін дәлелдеңдер.

1.6. Скалярлық көбейтіндінің векторлардың координаталары арқылы өрнектелуі

Тақырыпты оқып-үйрену барысында сендер:
- векторлық тәсілді түзу теңдеулерін қорытып шығарғанда қолданасыңдар;
- векторлардың арасындағы бұрышты есептейсіңдер;
- векторларды есептер шығарғанда қолданасыңдар.

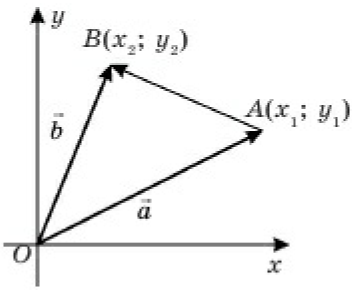
1.6.1. Векторлардың скалярлық көбейтіндісінің координаталық түрі

$\vec{a} = (x_1;\ y_1)$ және $\vec{b} = (x_2;\ y_2)$ векторларының скалярлық көбейтіндісі

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 \qquad (1)$$

формуласымен анықталатынын көрсетейік.

Шынында да, $\vec{a} = (x_1; y_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2)$ векторларын координаталар бас нүктесінен өлшеп салсақ, бұл векторлар сәйкесінше $\overrightarrow{OA}$ және $\overrightarrow{OB}$ радиус-векторларын анықтайды (1.33-сурет).



1.33-сурет

Онда $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. Осыдан $\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})^2 = (\vec{b} - \vec{a})^2 = \vec{b}^2 + \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{a}^2 + \vec{b}^2 - \overrightarrow{AB}^2)$. Мұнда $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1) \Rightarrow \overrightarrow{AB}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$, $\vec{a}^2 = x_1^2 + y_1^2$, $\vec{b}^2 = x_2^2 + y_2^2$ болатынын ескеріп, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 - y_1^2 + 2y_1y_2 - y_2^2) = x_1x_2 + y_1y_2$ теңдігін аламыз. Дәлелдеу керегі де осы.

1.6.2. Векторлардың перпендикулярлығы және коллинеарлығының координаталық түрі. Векторлар арасындағы бұрышты анықтау

$\vec{a} = (x_1; y_1)$ және $\vec{b} = (x_2; y_2)$ векторлары өзара перпендикуляр болса, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 90^\circ$. Сондықтан олардың скалярлық көбейтіндісі нөлге тең:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 90^\circ = 0.$$

(1) формула бойынша

$$\boxed{x_1x_2 + y_1y_2 = 0.} \qquad (2)$$

Бұл нөлдік емес векторлардың перпендикулярлық шарты.

Айталық, $\vec{a} = (x_1; y_1)$ және $\vec{b} = (x_2; y_2)$ векторлары коллинеар болсын. Онда 1.3-тағы 2-теорема бойынша k саны табылып, $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$, яғни $(x_1; y_1) = (kx_2; ky_2)$ теңдігі орындалады. Осыдан $x_1 = kx_2$, $y_1 = ky_2$ теңдіктерін аламыз. $x_2 \neq 0$, $y_2 \neq 0$ болса, соңғы теңдіктерден $\frac{x_1}{x_2} = k$, $\frac{y_1}{y_2} = k$, демек,

$$\boxed{\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}.} \qquad (3)$$

Сонымен, коллинеар векторлардың сәйкес координаталары өзара пропорционал.

(1) формула бойынша $\vec{a} = (x_1; y_1)$ және $\vec{b} = (x_2; y_2)$ векторларының арасындағы бұрыштың косинусын табайық.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ формуласынан

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

Осыдан (1) формула мен $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$, $|\vec{b}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$ теңдіктерінен

$$\boxed{\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}.} \qquad (4)$$

Мысал. A $(-1; 2)$ және B $(5; 3)$ нүктелері берілген. AOB бұрышының сүйір не доғал болатынын анықтау керек. Мұнда O — координаталар бас нүктесі.

Берілгені бойынша $\overrightarrow{OA} = (-1; 2)$, $\overrightarrow{OB} = (5; 3)$ болғандықтан, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -1 \cdot 5 + 2 \cdot 3 = 1$. (4) формула бойынша $\cos(\angle AOB)$ таңбасы мен $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ скаляр көбейтіндісінің таңбасы бірдей, яғни $\cos(\angle AOB) > 0$. Сондықтан $\angle AOB$ – сүйір.

1. Векторлардың скалярлық көбейтіндісін оның координаталары арқылы қалай анықтауға болады? Сәйкес формуланы жазып, дәлелдеңдер.
2. Векторлардың перпендикулярлық шартын жазып, дәлелдеңдер.
3. Векторлардың коллинеарлық шартын жазып, дәлелдеңдер.
4. Векторлардың арасындағы бұрыштың косинусын қандай формуламен анықтайды? Оны дәлелдеңдер.

ЕСЕПТЕР

А

1.127. Нөлдік емес $\vec{a} = (m; n)$ және $\vec{b} = (-n; m)$ векторларының перпендикуляр болатынын дәлелдеңдер.

1.128. $\vec{a} = (3; 4)$ және $\vec{b} = (m; 2)$ векторлары m-нің қандай мәнінде перпендикуляр болады?

1.129. 1) $\vec{a} = (1; 1)$ және $\vec{b} = (2; 3)$; 2) $\vec{c} = (0; 4)$ және $\vec{d} = (-1; 2)$; 3) $\vec{m} = (0; \sqrt{3})$ және $\vec{n} = (2; \sqrt{3})$ векторларының скалярлық көбейтіндісін анықтаңдар.

1.130. 1) $\vec{a} = (2; 3)$ және $\vec{b} = (3; -2)$; 2) $\vec{a} = (-5; 1)$ және $\vec{b} = (-1; 5)$ векторлары перпендикуляр бола ма?

1.131. $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының скалярлық көбейтіндісін анықтаңдар: 1) $\vec{a} = (a; 0)$, $\vec{b} = (b; 0)$; 2) $\vec{a} = (a; 0)$, $\vec{b} = (0; b)$; 3) $\vec{a} = (a; b)$, $\vec{b} = (a; b)$; 4) $\vec{a} = (a; b)$, $\vec{b} = (-a; -b)$.

1.132. $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары коллинеар бола ма: 1) $\vec{a} = (-2; 1)$, $\vec{b} = (4; -2)$; 2) $\vec{a} = (1; -3)$, $\vec{b} = (1; 3)$; 3) $\vec{a} = (3; -2)$, $\vec{b} = (-3; 2)$; 4) $\vec{a} = (1; 0)$, $\vec{b} = (3; 0)$; 5) $\vec{a} = (0; -1)$, $\vec{b} = (1; 0)$; 6) $\vec{a} = (0; 0)$, $\vec{b} = (-2; 3)$?

1.133. Екі вектор коллинеар болса, олардың сәйкес координаталары пропорционал болатынын дәлелдеңдер. Егер $\vec{a} = (x; y)$, $\vec{b} = (u; v)$ және $\vec{a} \parallel \vec{b}$ болса, $\dfrac{x}{y} = \dfrac{u}{v}$ теңдігінің орындалатынын көрсетіңдер.

1.134. Егер $\vec{a} \parallel \vec{b}$ болса, 1) $\vec{a} + 3\vec{b}$ және $\vec{a}$; 2) $\vec{b} - 2\vec{a}$ және $\vec{a}$ векторларының коллинеар болатынын дәлелдеңдер.

1.135. $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары арасындағы бұрышты табыңдар: 1) $\vec{a} = (1; 0)$, $\vec{b} = (2; 2)$; 2) $\vec{a} = (1; 1)$, $\vec{b} = (-1; \sqrt{3})$; 3) $\vec{a} = (-\sqrt{3}; 3)$, $\vec{b} = (0; 1)$; 4) $\vec{a} = (2; 0)$, $\vec{b} = (1; -\sqrt{3})$.

1.136. Векторлардың қай жұбы өзара перпендикуляр: 1) $\vec{a} = (2;5)$, $\vec{b} = (-10; 4)$; 2) $\vec{c} = (1; 2)$, $\vec{d} = (1; -3)$; 3) $\vec{p} = (3; 1)$, $\vec{q} = (2; -6)$?

1.137. $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ және $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ бұрышы 1) 60°-қа; 2) 135°-қа; 3) 90°-қа; 4) 0°-қа; 5) 180°-қа тең болса, $\vec{a} \cdot \vec{b}$ көбейтіндісін табыңдар.

B

1.138. 1) $\vec{m} \uparrow\downarrow \vec{n}$, $|\vec{m}| = 0{,}5$ см, $|\vec{n}| = 2$ см; 2) $\vec{m} \uparrow\uparrow \vec{n}$, $|\vec{m}| = 12$ см, $|\vec{n}| = 24$ см болса, $\vec{n} = k\vec{m}$ теңдігін қанағаттандыратын k санын анықтаңдар.

1.139. O нүктесі $ABCD$ параллелограмының диагональдарының қиылысу нүктесі, ал N — AO кесіндісінің ортасы:

1) $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AO}$; 2) $\overrightarrow{BO} = k\overrightarrow{BD}$; 3) $\overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{CA}$; 4) $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{DC}$; 5) $\overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{DA}$; 6) $\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{CA}$; 7) $\overrightarrow{NC} = k\overrightarrow{AN}$; 8) $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AN}$; 9) $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{BC}$; 10) $\overrightarrow{AO} = k\overrightarrow{BD}$ теңдіктері орындалатындай k саны табыла ма? Табылса, оны анықтаңдар.

1.140. $|\vec{a}| = 1$ және $\vec{a}$ векторының Ox және Oy өстерімен жасайтын бұрыштары сәйкесінше α мен β-ға тең болса, $\vec{a} = (\cos\alpha; \cos\beta)$ болатынын және $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$ теңдігінің орындалатынын дәлелдеңдер.

1.141. $\vec{a} = (1; 2)$ және $\vec{b} = (-2; 3)$ векторлары берілген. 1) $2\vec{a}\cdot\vec{b}$; 2) $\vec{a}\cdot(-3\vec{b})$; 3) $(-\frac{1}{2}\vec{a})\cdot(-\frac{1}{3}\vec{b})$; 4) $\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{b})$; 5) $(\vec{a}+\vec{b})^2$; 6) $(\vec{a}-\vec{b})^2$; 7) $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})$ өрнектерінің мәнін табыңдар.

1.142. $\vec{a} = (a; b)$ векторына перпендикуляр бірлік векторлардың координаталарын анықтаңдар.

1.143. $A(-1; 2)$, $B(-2; -3)$, $C(1; 4)$, $D(4; 2)$ нүктелері берілген. 1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$; 2) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}$; 3) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD})$; 4) $(2\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BC})(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD})$ өрнектерінің мәндерін табыңдар.

1.144. Егер K және N нүктелері $ABCD$ квадратының CD және BC қабырғаларының орталары болса, 1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}$; 2) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}$; 3) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DC}$; 4) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$; 5) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DC}$; 6) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}$; 7) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$; 8) $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AN}$; 9) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB})$ скалярлық көбейтінділерінің мәндерін табыңдар. Мұнда квадраттың қабырғасы a-ға тең.

1.145. Егер K және N нүктелері қабырғасы 2-ге тең ABC тең қабырғалы үшбұрышының BC және AC қабырғаларының орталары болса, 1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$; 2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$; 3) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}$; 4) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$; 5) $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{BC}$; 6) $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{BN}$; 7) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})\overrightarrow{KN}$ өрнектерінің мәнін табыңдар.

1.146. $\vec{m} = (1; 0)$ және $\vec{n} = (0; 1)$ векторлары берілген. $2\vec{m}+\vec{n}$ және $\vec{m}-2\vec{n}$ векторлары перпендикуляр бола ма?

1.147. $ABCD$ параллелограмында $\overrightarrow{AB} = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{a} + 3\vec{b}$, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 60^\circ$. AC және BD кесінділерінің ұзындықтарын анықтаңдар.

1.148. $A(1;\ 1)$, $B(4;\ 1)$, $C(4;\ 5)$ нүктелері берілген. ABC үшбұрышының бұрыштарының косинустарын табыңдар.

1.149. Төбелері $A(0;\ \sqrt{3})$, $B(2;\ \sqrt{3})$, $C\left(\frac{3}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ нүктелерінде болатын үшбұрыштың бұрыштарын табыңдар.

1.150. $A(1;\ 1)$, $B(2;\ 3)$, $C(0;\ 4)$, $D(-1;\ 2)$ нүктелері берілген. $ABCD$-ның тіктөртбұрыш болатынын дәлелдеңдер.

1.151. $A(0;\ 0)$, $B(4;\ 4)$, $C(0;\ 8)$, $D(-4;\ 4)$ нүктелері берілген. $ABCD$-ның квадрат болатынын көрсетіңдер.

C

1.152. $\vec{a} = (1;\ 0)$ және $\vec{b} = (1;\ 1)$ векторлары берілген. $\vec{a} + \alpha\vec{b}$ және $\vec{a}$ векторлары перпендикуляр болуы үшін α саны қандай болуы керек?

1.153. $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ және $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 60^\circ$ болса, $\vec{a}$ және $\vec{a} + \vec{b}$ векторларының арасындағы бұрышты анықтаңдар.

1.154. ABC үшбұрышында $\angle B = 90^\circ$ болуы үшін $AC^2 = AB^2 + BC^2$ теңдігі орындалуы қажетті және жеткілікті болатынын дәлелдеңдер (скалярлық көбейтіндіні қолданыңдар).

1.155. Қабырғалары a, b және c-ға тең үшбұрыштың биссектрисаларының ұзындықтарын табыңдар.

1.156. Трапеция диагональдарының квадраттарының қосындысы оның параллель емес қабырғалары квадраттарының қосындысына табандарының екі еселенген көбейтіндісін қосқанға тең болатынын дәлелдеңдер.

1.157. Екі медианасы тең үшбұрыштың тең бүйірлі болатынын дәлелдеңдер.

1.158. Егер $\vec{i} = (1;\ 0)$, $|\vec{a}| = 3$, $(\widehat{\vec{i}, \vec{a}}) = 30^\circ$ болса, онда $\vec{a}$ векторының координаталарын табыңдар.

1.159. Егер $A(-2;\ 1)$ және $B(3;\ 3)$ болса, онда $ABCD$ квадратының басқа екі төбесінің координаталарын табыңдар.

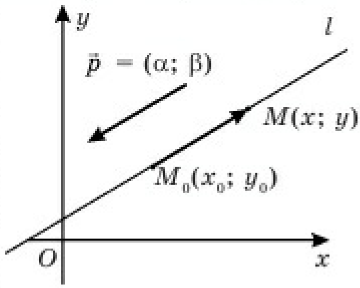
1.160. $A(1;\ 1)$, $B(2;\ 3)$, $C(5;\ 0)$, $D(7;\ -5)$ нүктелері берілген. $ABCD$ төртбұрышының трапеция болатынын көрсетіңдер.

1.7. Векторлық тәсілдің кейбір қолданулары

Тақырыпты оқып-үйрену барысында сендер:
- векторлық тәсілді түзу теңдеулерін қорытып шығарғанда қолданасыңдар;
- векторларды есептер шығарғанда қолданасыңдар.

1.7.1. Түзудің теңдеулері. Түзудің бағыттаушы және нормаль векторлары

Түзу теңдеуін әртүрлі тәсілдермен анықтайды. Мысалы, 8-сыныпта біздер түзуді кесіндінің орта перпендикуляры ретінде анықтадық. Енді түзу теңдеуін вектор арқылы анықтап көрейік. Айталық, бізге $M_0(x_0;\ y_0)$ нүктесі мен $\vec{p} = (\alpha;\ \beta)$ векторы берілсін. M_0 нүктесі арқылы $\vec{p}$ векторына параллель жалғыз l түзуі өтеді. Мұнда M_0 нүктесін түзудің *бастапқы нүктесі* $\vec{p}$ векторын түзудің *бағыттаушы векторы* деп атайды. Сонымен, l түзуі M_0 бастапқы нүктесі мен $\vec{p}$ бағыттаушы векторы арқылы анықталады (1.34-сурет). Егер $M(x;\ y)$ нүктесі l түзуінің кез келген нүктесі болса, $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{p}$. $\vec{p} = (\alpha;\ \beta)$ векторы координаталар өстеріне параллель емес деп есептейміз ($\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0$).



1.34-сурет

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0;\ y - y_0)$$

болатынын ескерсек, векторлардың коллинеарлық шарты бойынша

$$\boxed{\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta}.} \qquad (1)$$

Бұл түзудің бастапқы $M_0(x_0;\ y_0)$ нүктесі және бағыттаушы $\vec{p}\,(\alpha;\ \beta)$ векторы арқылы жазылған теңдеуі.

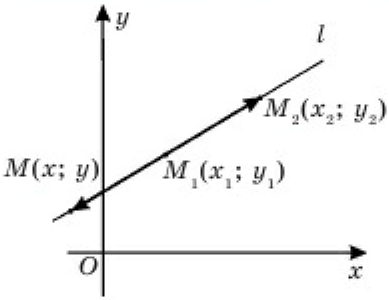
1-мысал. $M_1(x_1;\ y_1)$ және $M_2(x_2;\ y_2)$ нүктелері арқылы өтетін түзудің теңдеуін жазу керек.

M_1M_2 түзуі координаталар өстеріне параллель емес деп есептейміз ($x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$). Мұнда M_1 нүктесін түзудің бастапқы нүктесі деп, $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$ векторын оның бағыттаушы векторы ретінде алсақ, (1) формула бойынша M_1M_2 түзуінің теңдеуі

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}} \qquad (2)$$

түрінде жазылады (1.35-сурет).

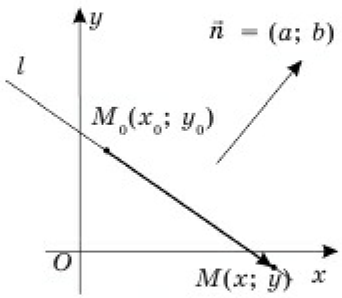
Айталық, l түзуі мен $\vec{n} = (a; b)$ векторы берілсін. Егер $l \perp \vec{n}$ шарты орындалса, $\vec{n}$ векторы l түзуінің *нормаль векторы* деп аталады. l түзуі $M_0(x_0; y_0)$ нүктесі арқылы өтсе (бастапқы нүктесі болса), кез келген $M(x; y) \in l$ нүктесі үшін $\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$ шарты, яғни $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$ теңдігі орындалады. Онда



1.35-сурет

$$\boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.} \qquad (3)$$

Бұл бастапқы $M_0(x_0; y_0)$ нүктесі мен $\vec{n} = (a; b)$ нормаль векторы арқылы анықталатын түзудің теңдеуі (1.36-сурет).



1.36-сурет

Сонымен, біз түзудің бағыттаушы векторы мен нормаль векторы арқылы анықталатын теңдеулерін жаздық ((1) және (3)). Бұл теңдеулердің екеуін де 8-сыныпта қарастырылған түзудің жалпы теңдеуі түріне келтіруге болады:

$$\boxed{ax + by + c = 0.} \qquad (4)$$

Шынында да, мысалы, (1) теңдеуді $\beta(x - x_0) - \alpha(y - y_0) = 0 \Rightarrow \beta x - \alpha y + (\alpha y_0 - \beta x_0) = 0$ түрінде жазып, $a = \beta$, $b = -\alpha$, $c = \alpha y_0 - \beta x_0$ белгілеулерін енгізсек, (4) теңдеуді аламыз.

Енді керісінше, l түзуі (4) түрдегі жалпы теңдеуімен берілсе, $\vec{p} = (-b; a)$ векторы оның бағыттаушы векторы, ал $\vec{n} = (a; b)$ векторы оның нормаль векторы болатынын көрсету қиын емес.

(4) теңдеуде $b \neq 0$ болса, бұл теңдеуді b санына бөліп, $y = -\dfrac{a}{b}x - \dfrac{c}{b}$ түрінде жазуға болады. $k = -\dfrac{a}{b}$, $r = -\dfrac{c}{b}$ белгілеулерін енгізіп, түзудің бұрыштық коэффициентімен жазылған теңдеуін аламыз:

$$\boxed{y = kx + r.} \qquad (5)$$

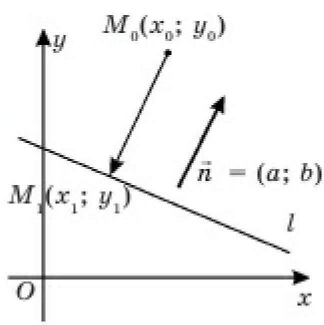
1.7.2. Координаталар тәсілінің кейбір қолданулары

l_1 және l_2 түзулерінің арасындағы бұрышы ретінде олардың сәйкесінше $\vec{n}_1$ және $\vec{n}_2$ нормаль векторларының арасындағы бұрышты алуға болады.

Айталық, берілген түзулер сәйкесінше $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ және $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ теңдеулерімен анықталсын. Онда олардың нормаль векторлары $\vec{n}_1 = (a_1; b_1)$, $\vec{n}_2 = (a_2; b_2)$ түрінде анықталады. Егер $\varphi = (\widehat{l_1; l_2}) = (\widehat{\vec{n}_1; \vec{n}_2})$ деп белгілесек, 1.6-баптағы (4) формула бойынша

$$\cos\varphi = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}. \qquad (6)$$

Енді $M_0(x_0 ; y_0)$ нүктесінен осы нүкте арқылы өтпейтін l түзуіне дейінгі қашықтықты анықтайық. Айталық, l түзуі $ax + by + c = 0$ теңдеуімен берілсін. $M_1(x_1; y_1)$ нүктесі M_0 нүктесінен l түзуіне түсірілген перпендикулярдың табаны болса, M_0 нүктесінен l түзуіне дейінгі d қашықтығы $d = |\overrightarrow{M_0M_1}|$ теңдігімен анықталады (1.37-сурет). Сондықтан M_1 нүктесінің белгісіз x_1 және y_1 координаталарын анықтауымыз қажет.



1.37-сурет

$\vec{n}_1 = (a; b) \parallel \overrightarrow{M_0M_1}$ болғандықтан, t саны табылып, $\overrightarrow{M_0M_1} = t\,\vec{n}_1$, яғни $x_1 - x_0 = at$, $y_1 - y_0 = bt$ теңдіктері орындалады. Осыдан $x_1 = x_0 + at$, $y_1 = y_0 + bt$. Екінші жағынан, M_1 нүктесі l түзуінің бойында жатады:

$$ax_1 + by_1 + c = 0 \Rightarrow a(x_0 + at) + b(y_0 + bt) + c = 0 \Rightarrow ax_0 + by_0 + c + (a^2 + b^2)t = 0 \Rightarrow$$

$t = -\dfrac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}$. Сондықтан

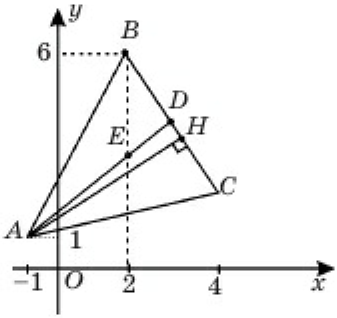
$$x_1 = x_0 - a \cdot \frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2};\ y_1 = y_0 - b \cdot \frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}.$$

Онда $d = |\overrightarrow{M_0M_1}| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} =$

$$= \sqrt{a^2 \cdot \frac{(ax_0 + by_0 + c)^2}{(a^2 + b^2)^2} + b^2 \cdot \frac{(ax_0 + by_0 + c)^2}{(a^2 + b^2)^2}} = \sqrt{\frac{(ax_0 + by_0 + c)^2}{a^2 + b^2}} =$$

$= \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Сонымен,

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \qquad (7)$$



1.38-сурет

2-мысал. $A(-1; 1)$, $B(2; 6)$, $C(4; 2)$ нүктелері берілген. 1) ABC үшбұрышының қабырғалары арқылы өтетін түзулердің теңдеуін жазыңдар; 2) BAC бұрышын табыңдар; 3) AH биіктігін табыңдар; 4) медианаларының E қиылысу нүктесінің координатасын табыңдар.

1) Бізге қажет түзулер теңдеулерін (2) формула арқылы анықтаймыз (1.38-сурет):

(AB) түзуі: $\frac{x+1}{2+1} = \frac{y-1}{6-1} \Rightarrow \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{5} \Rightarrow 5x - 3y + 8 = 0;$

(AC) түзуі: $\frac{x+1}{4+1} = \frac{y-1}{2-1} \Rightarrow \frac{x+1}{5} = \frac{y-1}{1} \Rightarrow x - 5y + 6 = 0;$

(BC) түзуі: $\frac{x-2}{4-2} = \frac{y-6}{2-6} \Rightarrow \frac{x-2}{2} = \frac{y-6}{-4} \Rightarrow 2x + y - 10 = 0.$

2) $\angle BAC = (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$, $\overrightarrow{AB} = (3; 5)$, $\overrightarrow{AC} = (5; 1)$ болғандықтан, $\cos(\angle BAC) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{3 \cdot 5 + 5 \cdot 1}{\sqrt{9+25} \cdot \sqrt{25+1}} = \frac{20}{\sqrt{34} \cdot \sqrt{26}} =$

$= \frac{10}{\sqrt{221}} = \frac{10 \cdot \sqrt{221}}{221}$. Осыдан қажет болса, кесте бойынша BAC бұрышының жуық мәнін анықтауға болады.

3) AH биіктігі A нүктесінен BC түзуіне дейінгі қашықтыққа тең. Сондықтан (7) формула бойынша

$$AH = \frac{|2 \cdot (-1) + 1 - 10|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{11}{\sqrt{5}} = \frac{11 \cdot \sqrt{5}}{5} \text{ (бірлік)}.$$

4) Үшбұрыштың AD медианасы оның медианаларының E қиылысу нүктесінде $2:1$ қатынасында бөлінетінін қолданамыз. E нүктесі AD кесіндісін $\lambda = 2$ қатынасында бөледі. Алдымен BC кесіндісінің ортасы D нүктесінің координаталарын анықтайық:

$$x_D = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{2+4}{2} = 3;$$

$$y_D = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{6+2}{2} = 4. \text{ Сонымен, } D(3;\ 4).$$

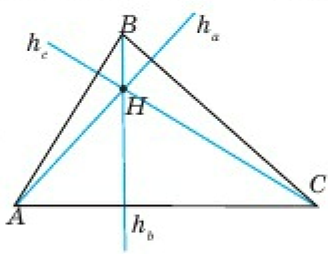
Кесіндіні берілген қатынаста бөлу формуласынан

$$x_E = \frac{x_A + \lambda x_D}{1+\lambda} = \frac{-1+2\cdot 3}{1+2} = \frac{5}{3};$$

$$y_E = \frac{y_A + \lambda y_D}{1+\lambda} = \frac{1+2\cdot 4}{1+2} = 3. \text{ Сонымен, } E\left(\frac{5}{3};\ 3\right).$$

3-мысал. Үшбұрыштың биіктіктері бір нүктеде қиылысатынын дәлелдеу керек.

h_a, h_b, h_c түзулері A, B, C төбелерінен жүргізілген биіктіктер жататын түзулер болсын. h_a және h_b түзулерінің қиылысу нүктесін H арқылы белгілейік. $h_a \perp BC$, $h_b \perp AC$. Сондықтан $HA \perp BC$ және $HB \perp AC$ болуы керек немесе $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ және $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ (1.39-сурет). $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HB}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HA}$ екенін ескерсек, $\overrightarrow{HA}(\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HB}) = 0$ және $\overrightarrow{HB}(\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HA}) = 0$ немесе $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB}$ және $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HA}$ теңдіктерінен $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HB} \times \overrightarrow{HC}$ теңдігін аламыз. Осыдан $(\overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HA})\overrightarrow{HC} = 0$ немесе $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC} = 0$ теңдігі шығады. Олай болса, HC түзуі AB түзуіне перпендикуляр, яғни h_a, h_b, h_c түзулері H нүктесінде қиылысады. Үшбұрыштың биіктіктері бір нүктеде қиылысатыны дәлелденді.



1.39-сурет

1. Қандай векторды түзудің бағыттаушы векторы деп атайды?
2. Түзудің бастапқы нүктесі деп нені түсінесіңдер? Бастапқы нүкте мен бағыттаушы вектор арқылы жазылатын түзудің теңдеуін

жазыңдар. Бағыттаушы вектордың координаталар өстеріне параллель болмауы қажеттілігін қалай түсіндіресіңдер?

3. Екі нүкте арқылы өтетін түзу теңдеуін жазыңдар.
4. Түзудің нормаль векторы деген не? Нормаль вектор мен бастапқы нүкте арқылы жазылатын түзу теңдеуін жазыңдар.
5. Түзудің жалпы теңдеуі бойынша оның бағыттаушы, нормаль векторлары мен бұрыштық коэффициентін жазып көрсетіңдер.
6. Екі түзудің арасындағы бұрыш қандай формуламен анықталады?
7. Нүктеден түзуге дейінгі қашықтықты қалай анықтайды?

ЕСЕПТЕР

А

1.161. $\vec{p}$ бағыттаушы векторы мен $M_0(x_0;\ y_0)$ бастапқы нүктесі бойынша берілген түзудің теңдеуін жазыңдар:

1) $\vec{p} = (2;\ -1)$, $M_0(-3;\ 2)$; 2) $\vec{p} = (-3;\ 4)$, $M_0(3;\ 5)$; 3) $\vec{p} = (0{,}5;\ 2{,}5)$, $M_0(5;\ 1)$; 4) $\vec{p} = (\frac{1}{3};\ 1\frac{1}{2})$, $M_0(0;\ 1)$.

1.162. Берілген екі нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуін жазыңдар: 1) $A(1;\ 0)$, $B(0;\ 1)$; 2) $M_1(-3;\ 4)$, $M_2(5;\ 2)$; 3) $C(0;\ -3)$, $D(4;\ 1)$; 4) $H(\frac{1}{2};\ \frac{1}{3})$, $K(-2{,}5;\ 1\frac{1}{3})$.

1.163. $M_0(x_0;\ y_0)$ бастапқы нүктесі мен $\vec{n}$ нормаль векторы бойынша берілген түзу теңдеуін жазыңдар: 1) $M_0(2;\ -1)$, $\vec{n} = (-3;\ 2)$; 2) $M_0(-3;\ 4)$, $\vec{n} = (3;\ 5)$; 3) $M_0(2;\ -3)$, $\vec{n} = (0{,}5;\ 2{,}5)$; 4) $M_0(\frac{2}{3};\ -1{,}5)$, $\vec{n} = (0;\ 1)$.

1.164. Берілген түзудің бағыттаушы векторын, нормаль векторын және бұрыштық коэффициентін анықтаңдар:

1) $x + y + 4 = 0$; 2) $2x - y - 3 = 0$; 3) $3x + 4y - 1 = 0$;
4) $2y - x + 3 = 0$; 5) $5x + 6y = 0$; 6) $x - y = 0$.

1.165. Түзулердің арасындағы бұрышты анықтаңдар:

1) $5x - y + 7 = 0$ және $3x + 2y = 0$;
2) $3x - 2y + 7 = 0$ және $2x + 3y - 3 = 0$;
3) $x - 2y - 4 = 0$ және $2x - 4y + 3 = 0$;
4) $3x + 2y - 1 = 0$ және $2x - 4y + 3 = 0$.

1.166. Берілген нүктеден берілген түзуге дейінгі қашықтықты табыңдар:

1) $A(2; -1)$, $3x + 4y - 1 = 0$; 2) $B(-2; 3)$, $x + 3y + 2 = 0$;
3) $C(5; -3)$, $2x - y - 1 = 0$; 4) $D(0; -1)$, $4x - y + 2 = 0$.

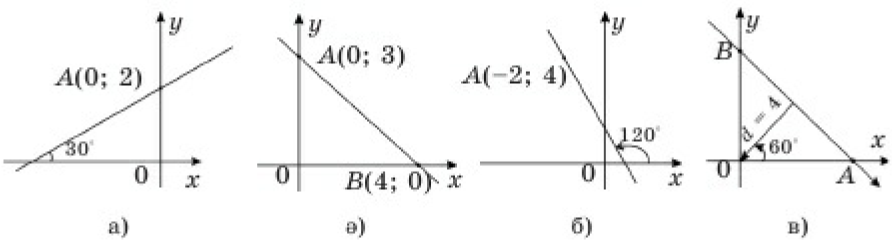
1.167. ABC үшбұрышының қабырғалары арқылы өтетін түзулер $4x - 3y - 65 = 0$, $7x - 24y + 55 = 0$, $3x + 4y - 5 = 0$ теңдеулерімен берілген. Оның төбелерінің координаталарын табыңдар.

1.168. ABC үшбұрышы төбелерінің координаталары берілген: $A(2; 1)$, $B(-1; 4)$ және $C(3; -2)$. 1) AB, AC, BC түзулері теңдеулерін; 2) AH_1, BH_2, CH_3 биіктіктері арқылы өтетін түзулер теңдеулерін; 3) бұрыштарын; 4) биіктіктерінің ұзындықтарын табыңдар.

1.169. k бұрыштық коэффициенті мен $M_0(x_0; y_0)$ бастапқы нүктесі бойынша берілген түзу теңдеуін жазыңдар: 1) $k = 1$, $M_0(0; 1)$; 2) $k = -2$, $M_0(1; -2)$; 3) $k = \frac{1}{2}$, $M_0(1; 0)$; 4) $k = -\frac{1}{3}$, $M_0(\frac{1}{2}; \frac{1}{3})$.

B

1.170. 1.40, *а*, *ә*, *б*, *в*-суреттерде бейнеленген түзулер теңдеуін жазыңдар. Бұл түзулердің 1) бағыттаушы векторын; 2) нормаль векторын; 3) бұрыштық коэффициентін табыңдар.



1.40-сурет

1.171. Түзудің $\vec{p} = (\alpha; \beta)$ бағыттаушы векторы 1) Ox өсіне; 2) Oy өсіне параллель болса және ол $M_0(x_0; y_0)$ нүктесі арқылы өтсе, бұл түзудің бағыттаушы векторы мен теңдеуі қалай жазылады?

1.172. $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ және $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ теңдеулерімен берілген түзулердің 1) параллель болуы; 2) перпендикуляр болуы; 3) беттесуі үшін қандай шарт орындалуы қажет?

1.173. 1) $-2x - 3y = 4$; 2) $y = -5$; 3) $x = 3$; 4) $(x_1; y_1)$ және $(x_2; y_2)$ нүктелері арқылы өтетін түзудің бұрыштық коэффициентін табыңдар.

1.174. $M_0(-2;\ 1)$ нүктесі арқылы өтетін және $\overrightarrow{AB}$ векторына 1) параллель; 2) перпендикуляр түзудің теңдеуін жазыңдар. Мұнда $A(0;\ 1)$, $B(4;\ -3)$.

1.175. Түзулер жұбының қайсысы параллель, қайсысы перпендикуляр болады:

1) $3x - y + 5 = 0$ және $x + 3y - 1 = 0$;
2) $3x + 4y + 1 = 0$ және $4x - 3y + 8 = 0$;
3) $6x - 2y + 1 = 0$ және $3x - y + 7 = 0$;
4) $9x - 12y + 1 = 0$ және $8x + 6y - 13 = 0$;
5) $6x - 15y + 3 = 0$ және $10x + 4y - 2 = 0$;
6) $3x - 4y + 7 = 0$ және $6x - 8y + 1 = 0$?

1.176. b-нің қандай мәнінде $2x - y + 3 = 0$, $x + y + 3 = 0$ және $bx + y - 13 = 0$ түзулері бір нүктеде қиылысады?

1.177. $M_0(4;\ -1)$ нүктесінен $12x - 5y - 27 = 0$ түзуіне түсірілген перпендикулярдың ұзындығын табыңдар.

1.78. Үшбұрыштың қабырғалары арқылы өтетін түзулер берілген. Осы үшбұрыштың тең бүйірлі болатынын көрсетіңдер:

1) $x - 2y + 6 = 0$; $x + y = 0$; $2x - y - 6 = 0$;
2) $x + y + 9 = 0$; $4x - 7y + 25 = 0$; $7x - 4y - 14 = 0$.

1.179. Төмендегі өрнектердің мағынасы қандай:

1) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$; 2) $\overrightarrow{PO} = k\overrightarrow{AK}$; 3) $\overrightarrow{AK} = \lambda\overrightarrow{AC}$; 4) $\overrightarrow{AK} = 0{,}5\overrightarrow{AC}$; 5) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$; 6) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AC}$; 7) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{BD} = 0$; 8) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}| = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BD}|$?

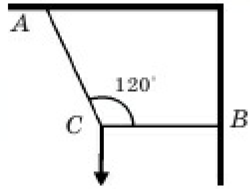
1.180. 1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BD}|$; 2) $\overrightarrow{AB}^2 = 0$; 3) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{PO} = 0$; 4) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BD}|$; 5) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD}$, $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OD}|$ өрнектерінің геометриялық мағынасын анықтаңдар.

1.181. Егер $\overrightarrow{AB} = 2\vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{a} - 3\vec{b}$, $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$ және $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 60^\circ$ болса, $ABCD$ параллелограмының диагональдарының ұзындықтарын табыңдар.

1.182. Параллелограмның диагональдары қиылысу нүктесінде қақ бөлінетінін дәлелдеңдер.

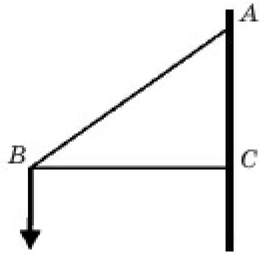
1.183. Ромбының диагональдары өзара перпендикуляр болатынын дәлелдеңдер.

1.184. 1.41-суретте көрсетілгендей AC және BC тростарына C нүктесінен 30 кг жүк ілінген. $\angle ACB = 120^\circ$. Тростарға түсетін күшті табыңдар.



1.41-сурет

1.185. 60 кг жүк 1.42-суретте көрсетілгендей AB және CB шыбықтарына ілінген. $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle ABC = 30^\circ$. Шыбықтарға қандай күш әрекет етеді?



1.42-сурет

1.186 Қабырғалары a, b, c болатын үшбұрыштың 1) бұрыштарының косинустарын; 2) медианаларының ұзындықтарын; 3) биіктіктерінің ұзындықтарын табыңдар.

1.187. Үшбұрыш медианалары квадраттарының қосындысы оның қабырғалары квадраттарының қосындысының $\frac{3}{4}$ бөлігіне тең болатынын дәлелдеңдер.

1.188. Кез келген дөңес төртбұрыштың қабырғаларының орталары параллелограмм төбелері болатынын дәлелдеңдер.

C

1.189. Жарық сәулесі $x - 2y + 5 = 0$ теңдеуімен берілген түзу бойымен жүріп, $3x - 2y + 7 = 0$ теңдеуімен берілген түзуге жеткенде одан шағылысады. Шағылысқан жарық сәулесі арқылы өтетін түзу теңдеуін жазыңдар.

1.190. a мен b-ның қандай мәндерінде $ax + 8y + b = 0$ және $2x + ay - 1 = 0$ түзулері өзара 1) беттеседі; 2) параллель; 3) перпендикуляр болады?

1.191. q-дің қандай мәндерінде $qx + (2q + 3)y + q + 6 = 0$ және $(2q + 1)x + (q - 1)y + q - 2 = 0$ түзулері ординаталар өсінде жататын нүктеде қиылысады?

1.192. $A(4; 13)$ және $B(0; -7)$ нүктелері арқылы өтетін түзуге $D(-3; 4)$ нүктесінен перпендикуляр түсірілген. Осы перпендикулярдың табаны AB кесіндісін қандай қатынаста бөледі?

1.193. Бір төбесі $A(2; -4)$ нүктесінде және центрі $K(5; 2)$ нүктесінде болатын квадрат қабырғаларының теңдеулерін жазыңдар.

1.194. Координаталар өстерінен ұзындықтары $|a|$-ға және $|b|$-ға тең кесінділер қиып өтетін түзу теңдеуі

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

теңдеуімен анықталатынын көрсетіңдер. Бұл теңдеуді түзудің *кесінділік теңдеуі* деп атайды.

1.195. $A(8; 6)$ нүктесі арқылы өтетін және координаталық бұрыштан ауданы 12-ге тең үшбұрыш қиып өтетін түзу теңдеуін жазыңдар.

1.196. $y = k_1x + b_1$ және $y = k_2x + b_2$ теңдеулерімен берілген түзулер арасындағы φ бұрышы

$$\text{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$$

формуласымен анықталатынын көрсетіңдер.

1.197. $y = k_1x + b_1$ және $y = k_2x + b_2$ түзулері өзара перпендикуляр болуы үшін $k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$ шартының орындалуы қажетті және жеткілікті болатынын көрсетіңдер.

1.198. $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ және $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ $\left(\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}\right)$ түзулерінің арасындағы бұрыш биссектрисасының теңдеуін жазыңдар.

1.199. 1) $x - 3y + 2 = 0$ және $3x + y - 1 = 0$; 2) $\sqrt{3}\,y - x = 12$ және $3x + 4y = 15$ түзулері арасындағы бұрыш биссектрисалары теңдеулерін жазыңдар.

1.200. $y = 0$, $3x - 4y = 0$, $4x + 3y - 50 = 0$ түзулерінен құрастырылған үшбұрыштың 1) медианалары; 2) биіктіктері; 3) биссектрисаларының теңдеулерін жазыңдар.

1.201. ABC үшбұрышының AB қабырғасынан K нүктесі алынған. $KC \cdot AB < KA \cdot BC + KB \cdot AC$ теңсіздігі орындалатынын дәлелдеңдер (векторлық тәсілмен).

1.202. Қабырғалары ABC үшбұрышының сәйкес медианаларына тең және параллель болатын үшбұрыш тұрғызуға болатынын дәлелдеңдер.

1.203. C нүктесі AB кесіндісін $p : q$ қатынасында бөледі. Жазықтықтағы кез келген O нүктесі үшін

$$\overrightarrow{OC} = \frac{q}{p+q}\overrightarrow{OA} + \frac{p}{p+q}\overrightarrow{OB}$$

теңдігі орындалатынын дәлелдеңдер.

1.204. $\overrightarrow{OA}$ және $\overrightarrow{OB}$ векторлары коллинеар емес. X нүктесі $\overrightarrow{OX} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}$ теңдігімен анықталады.

1. а) $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$ болса; ә) $\alpha \geqslant 0$, $\beta \leqslant 0$ болса; б) $\alpha = 1$, $\beta \in (-\infty; +\infty)$, болса; в) $\alpha \geqslant 0$, $\beta = -1$ болса; г) $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $\beta = 2$ болса, барлық X нүктелері жиыны қандай фигураны анықтайды?

2. X нүктелері жиыны а) AOB үшбұрышын; ә) параллелограмды анықтауы үшін α мен β сандары қандай болуы керек?

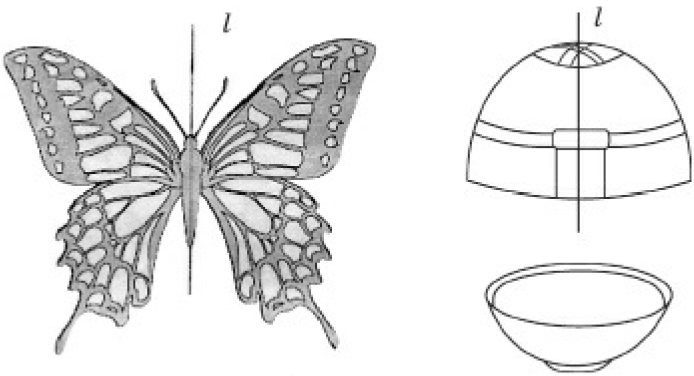
1.205. O_1 және O_2 нүктелері сәйкесінше $A_1B_1C_1$ және $A_2B_2C_2$ үшбұрыштары медианаларының қиылысу нүктелері болсын. $3\overrightarrow{O_1O_2} = \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2}$ теңдігін дәлелдеңдер.

Терминдер атауының сөздігі

Қазақша нұсқасы	Орысша нұсқасы	Ағылшынша нұсқасы
Вектор	Вектор	Vector
Коллинеар векторлар	Коллинеарные векторы	Collinear vectors
Қарама-қарсы векторлар	Противоположные векторы	Opposite vectors
Параллель көшіру	Параллельный перенос	Translation (parallel transfer)
Векторлардың скалярлық көбейтіндісі	Скалярное произведение векторов	Scalar multiplication of vectors
Векторлардың арасындағы бұрыш	Угол между векторами	Angle between vectors
Векторлардың коллинеарлық шарты	Условие коллинеарности векторов	Collinear condition of vectors
Векторлардың перпендикулярлық (ортогональдық) шарты	Условие перпендикулярности (ортогональности) векторов	Perpendicularity condition of vector
Вектордың координатасы	Координаты вектора	Coordinates of vector
Вектордың ұзындығы (модулі)	Длина (модуль) вектора	Length (modulus) of vector

2-бөлім. ЖАЗЫҚТЫҚТАҒЫ ТҮРЛЕНДІРУЛЕР

Бізді қоршаған ортада симметриялы заттар жиі кездеседі (2.1, а-сурет). Симметриялы түрлендіру қозғалыстың бір түрі болып табылады. Оған бөлім материалдарын оқып-үйрену барысында көз жеткізесіңдер.



2.1, а-сурет

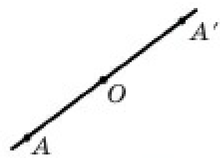
Егер F фигурасының әрбір нүктесін қандай да бір заңдылықпен жазықтықтағы басқа бір нүктелерге көшіру (жылжыту не ауыстыру) арқылы F' фигурасын алсақ, онда F фигурасын F' фигурасына ***түрлендірілді*** *деп есептейміз.*

Осы тәсілмен жазықтықтағы әрбір M нүктесін M' нүктесіне көшірсек, ***жазықтықты түрлендіру*** берілді деп есептейміз. Мұнда жазықтықтың әрбір M нүктесіне тек бір ғана M' нүктесін сәйкес қоямыз. M'-ты M нүктесінің ***бейнесі***, M нүктесін M' нүктесінің ***түпбейнесі*** деп атайды. Осы сияқты, F фигурасын F' фигурасына түрлендірсек, F' фигурасы F-тің бейнесі деп, F фигурасы F'-тің түпбейнесі деп аталады. Енді жазықтықты түрлендірудің түрлерімен танысайық.

2.1. Центрлік және өстік симметриялар

Тақырып материалдарын оқып-үйрену барысында сендер:
- центрлік және өстік симметриялар кезіндегі фигуралардың бейнелерін тұрғыза білесіңдер;
- симметрия түрлендіруі көмегімен есептер шығаруды үйренесіңдер.

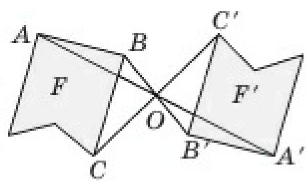
2.1.1. Центрлік симметрия



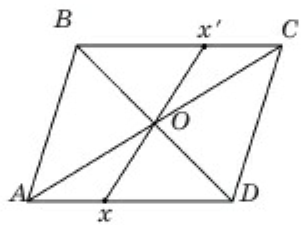
2.1, ә-сурет

Жазықтықта қандай да бір O нүктесін белгілейік. Осы жазықтықта кез келген A нүктесі үшін OA түзуі бойынан $OA = OA'$ теңдігі орындалатындай етіп, A' нүктесін алайық. A және A' нүктелері O нүктесіне ***қатысты симметриялы нүктелер*** деп аталады. O нүктесін ***симметрия центрі*** деп атайды (2.1, ә-сурет).

Жазықтықтағы әрбір нүктені белгілі бір O центріне қатысты симметриялы нүктелерге көшіретін түрлендіруді ***центрлік симметриялы түрлендіру*** *деп атайды.* Егер F фигурасының кез келген нүктесін O центріне қатысты симметриялы нүктелерге көшірсек, онда жалпы жағдайда, өзге F' фигурасы алынады. Бұл F және F' фигураларын O центріне қатысты ***симметриялы фигуралар*** деп атайды (2.2-сурет). F фигурасын O нүктесіне қатысты симметриялы F' фигурасына түрлендіргенде бұл фигура өзіне-өзі көшсе ($F = F'$), F фигурасының симметрия центрі бар деп есептейміз. O нүктесі *F фигурасының симметрия центрі* деп аталады. Мысалы, параллелограмм диагональдарының қиылысу нүктесі оның симметрия центрі болады (2.3.сурет).

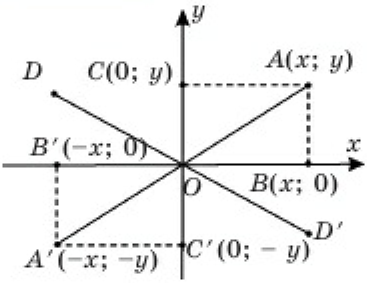


2.2-сурет



2.3-сурет

Координаталар басы мен симметрия центрі беттескен жағдайда $A(x; y)$ нүктесіне симметриялы A' нүктесінің координаталарын анықтайық.

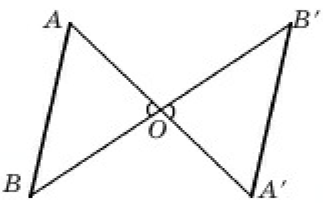


2.4-сурет

Центрлік симметрияның анықтамасы бойынша $OA = OA'$ және вертикаль бұрыштар ретінде $\angle AOB = \angle A'OB'$. Онда гипотенузасы мен сүйір бұрышы бойынша $\Delta AOB = \Delta A'OB'$ (2.4-сурет). Осыдан $OB = OB'$ және $OC = OC'$ болғандықтан, $B'(-x;\ 0)$ және $C'(0;\ -y)$. Сондықтан $A'(-x;\ -y)$. Сонымен, координаталар бас нүктесіне қатысты симметриялы нүктелердің сәйкес координаталарының модульдері тең, таңбалары қарама-қарсы, яғни $A(x;\ y)$ және $A'(x';\ y')$ симметриялы нүктелер болса, $x' = -x$, $y' = -y$.

1-теорема. *Центрлік симметрия сәйкес нүктелердің арақашықтығын өзгертпейді.*

Теорема шартын былай түсіну қажет: егер центрі O нүктесінде болатын симметрия кезінде A және B нүктелері сәйкесінше A' және B' нүктелеріне көшсе, $AB = A'B'$ теңдігі орындалады. Міне, осы тұжырымды дәлелдеуіміз қажет.



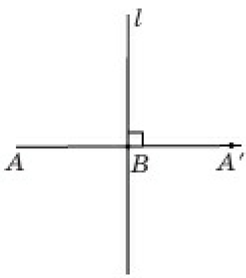
2.5-сурет

Шынында да, $\angle AOB = \angle A'OB'$, $AO = OA'$, $BO = OB'$ теңдіктерінен $\Delta AOB = \Delta A'OB'$ (үшбұрыштар теңдігінің I белгісі). Осыдан $AB = A'B'$ теңдігі шығады (2.5-сурет). Теорема дәлелденді.

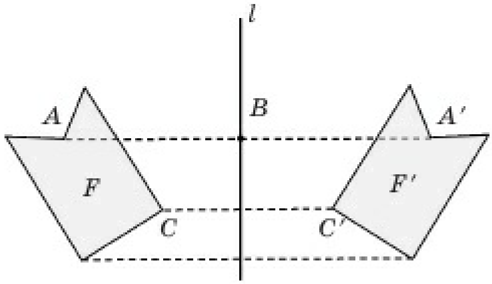
2.1.2. Өстік симметрия

Жазықтықта қандай да бір l түзуін алайық. Осы жазықтықтағы кез келген A нүктесінен l түзуіне AB перпендикулярын түсіріп, AB түзуінің бойынан $AB = BA'$ $(B \in l)$ шартын қанағаттандыратын A' нүктесін белгілейік. A және A' нүктелері l түзуіне (өсіне) қатысты ***симметриялы нүктелер*** деп аталады. Мұнда l түзуін ***симметрия*** өсі деп атайды (2.6-сурет). Басқаша айтқанда, A нүктесі оған l өсіне қатысты симметриялы A' нүктесіне көшеді дейміз.

Жазықтықтағы әрбір нүктені l өсіне қатысты симметриялы нүктеге көшіретін түрлендіруді ***өстік симметрия*** *деп атайды.*



2.6-сурет

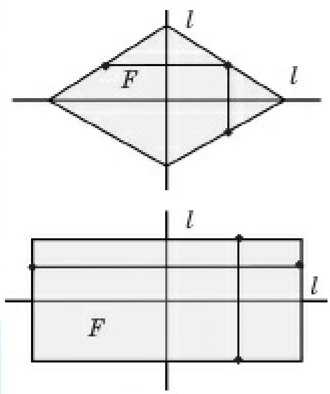


2.7-сурет

Егер F фигурасының әрбір нүктесін l өсіне қатысты симметриялы нүктеге көшірсек, F' фигурасын аламыз. F және F' фигураларын l өсіне қатысты ***симметриялы фигуралар*** деп атайды (2.7-сурет).

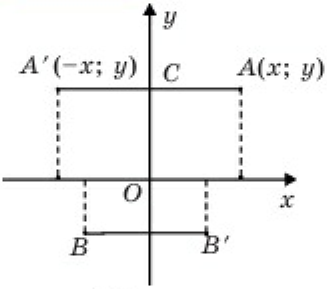
Егер l өсіне қатысты өстік симметрия кезінде F фигурасы өзіне-өзі көшсе, F-ті l өсіне қатысты ***симметриялы фигура*** деп атаймыз. Мұндағы l өсі F фигурасының ***симметрия өсі*** деп аталады. Мысалы, ромбының диагональдары — оның симметрия өстері. Тіктөртбұрыштың да әртүрлі екі симметрия өсі бар. Олар — қарама-қарсы қабырғаларының орталарын қосатын түзулер (2.8-сурет).

Енді координаталық өстердің бірін симметрия өсі деп алып, осы өске қатысты симметриялы нүктелердің координаталарының қалай өзгеретінін көрсетейік. Айталық, Oy — симметрия өсі, ал $A(x; y)$ және $A'(x'; y')$ нүктелері осы өске қатысты симметриялы нүктелер болсын. Анықтама бойынша $AA' \perp Oy$. Демек, $AA' \parallel Ox$, яғни $y' = y$. Екіншіден, $AC = CA'$, $(C = AA' \cap Oy)$ болғандықтан, $x' = -x$. *Сонымен, Oy өсіне қатысты симметриялы нүктелердің екінші координаталары тең, бірінші координаталарының модульдері тең және таңбалары қарама-қарсы.* Осы сияқты, *Ox өсіне қатысты симметриялы нүктелердің бірінші координаталары тең, екінші координаталарының модульдері тең және таңбалары қарама-қарсы* (2.9, 2.10-суреттер).

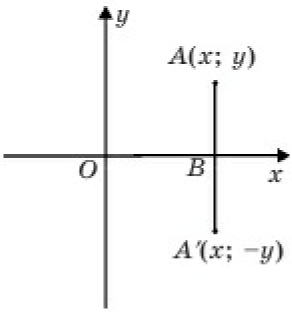


2.8-сурет

2-теорема. *Өстік симметрия сәйкес нүктелердің арақашықтығын өзгертпейді.*



2.9-сурет



2.10-сурет

Айталық, l өсіне қатысты A және B нүктелері сәйкесінше A' және B' нүктелеріне симметриялы болсын. Oxy координаталар жүйесін Oy өсі l симметрия өсімен беттесетіндей етіп таңдап алайық. Жоғарыда көрсетілгендей, егер $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ болса, $A'(-x_1; y_1)$, $B'(-x_2; y_2)$. Енді $AB = A'B'$ теңдігі орындалатынын көрсетейік:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

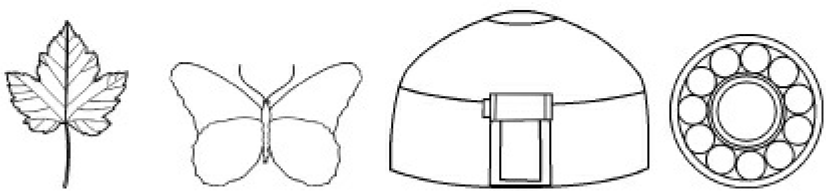
$$A'B' = \sqrt{(-x_2 - (-x_1))^2 + (y_2 - y_1)^2} =$$

$$= \sqrt{(-x_2 + x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

$AB = A'B'$.

Жалпы, бізді қоршаған ортада, күнделікті тұрмыста көптеген заттардың, объектілердің симметрия өсі, не симметрия центрі болатынын байқаймыз. Мысалы, ағаштардың жапырақтарынан, гүлдерден, жәндіктерден және т.с.с. симметрияны кездестіреміз. Симметрияны бейнелеу және сәулет өнерінде, техникада, күнделікті тұрмыста жиі қолданады. Мысалы, үйдегі кілем өрнектерінің, түрлі техникалық тетіктердің симметрия өсі не симметрия центрі бар (2.11-сурет).

1. Жазықтықты түрлендіру деп нені түсінесіңдер?
2. Фигураның бейнесі, түпбейнесі деген не?
3. Қандай түрлендіруді центрлік симметрия деп атайды? Симметрия центрі деген не?



2.11-сурет

4. Фигураның симметрия центрі үнемі бола бере ме? Мысал келтіріңдер.
5. Центрлік симметрияның қандай қасиеттерін білесіңдер? Егер координаталар бас нүктесі симметрия центрі болса, онда центрлік симметрия қалай анықталады?
6. Қандай түрлендіруді өстік симметрия түрлендіруі деп атайды? Симметрия өсі деп қандай түзуді айтады?
7. Кез келген фигураның симметрия өсі бола ма? Мысал келтіріңдер.
8. Өстік симметрияның қандай қасиеттерін білесіңдер? Егер координаталар өстері симметрия өсі ретінде алынса, онда симметриялы нүктелердің координаталары қалай өзгереді?

ПРАКТИКАЛЫҚ ЖҰМЫС

1. а) Параллелограмның; ә) тіктөртбұрыштың; б) ромбының; в) квадраттың; г) шеңбердің; ғ) кесіндінің симметрия центрін анықтаңдар.
2. 1-тапсырмадағы фигуралардың симметрия өстерін анықтаңдар. Оларда неше симметрия өсі бар?
3. Қандай да бір фигура салып, оған алдын ала белгіленген нүктеге қатысты симметриялы фигура салыңдар.
4. 3-тапсырманы түзуге қатысты фигура салу түрінде орындаңдар.

ЕСЕПТЕР

А

2.1. Үшбұрыштың симметрия өсі болуы мүмкін бе? Жауабын түсіндіріңдер.

2.2. Кез келген үшбұрыштың симметрия өсі бола ма? Қандай үшбұрыштың симметрия өсі болады және неше симметрия өсі болады?

2.3. A және B нүктелері берілген. A нүктесіне B-ға қатысты симметриялы A' нүктесін салыңдар.

2.4. 1) Кесіндінің; 2) сәуленің; 3) түзудің; 4) бұрыштың неше симметрия центрі бар?

2.5. A нүктесі және l түзуі берілген. l түзуіне қатысты A нүктесіне симметриялы A' нүктесін салыңдар. $A \notin l$ және $A \in l$ болатындай екі түрлі жағдайды қарастырыңдар.

2.6. A, B және C нүктелері берілген. AB кесіндісінің ортасына қатысты C нүктесіне симметриялы C' нүктесін салыңдар.

2.7. Трапецияның симметрия өсі болуы мүмкін бе? Симметрия центрі ше?

2.8. $(2; -3)$ нүктесіне: 1) координаталар бас нүктесіне қатысты; 2) Ox өсіне қатысты; 3) Oy өсіне қатысты симметриялы нүктелердің координаталарын анықтаңдар.

B

2.9. Өзара параллель екі түзудің неше симметрия центрі бар?

2.10. 2.5-есепті тек циркульді ғана пайдаланып шығарыңдар.

2.11. Қандай да бір өске қатысты симметриялы A және B нүктелері мен үшінші бір C нүктесі берілген. Осы өске қатысты C нүктесіне симметриялы C' нүктесін салыңдар.

2.12. Ромбының диагональдары жататын түзулер оның симметрия өстері болатынын дәлелдеңдер.

2.13. Параллелограмм диагональдарының қиылысу нүктесі оның симметрия центрі болатынын көрсетіңдер.

2.14. Бұрыштың биссектрисасы арқылы өтетін түзу оның симметрия өсі болатынын дәлелдеңдер.

2.15. Симметрия центрі бар төртбұрыш параллелограмм болатынын дәлелдеңдер.

2.16. Төбелері $A(0; 1)$, $B(2; 1)$, $C(-2; 3)$ нүктелерінде орналасқан үшбұрыш берілген. Осы үшбұрышқа 1) координаталар бас нүктесіне; 2) Ox өсіне; 3) Oy өсіне қатысты симметриялы үшбұрыштың төбелерінің координаталарын анықтаңдар.

C

2.17. 2.3-есепті тек циркульді ғана пайдаланып шығарыңдар.

2.18. Егер фигураның өзара перпендикуляр екі симметрия өсі бар болса, онда бұл өстердің қиылысу нүктесі осы фигураның симметрия центрі болатынын дәлелдеңдер.

2.19. Қиылысатын екі түзу және олардың арасында жататын (бойында жатпайтын) нүкте берілген. Ұштары берілген түзулерде жататын және берілген нүкте ортасы болатын кесінді салыңдар.

2.20. Өзара қос-қостан қиылысатын және үшеуі бір нүктеден өтпейтін a, b, c түзулері берілген. b түзуіне перпендикуляр және ортасы b түзуінде жататын, ал ұштары a және c түзулерінде жататын кесіндіні қалай салуға болады? Есептің шешуі үнемі бола бере ме?

2.21. Төбелері $A(2;\ 1)$, $B(5;\ 4)$, $C(11;\ -2)$ және $D(8;\ -5)$ нүктелерінде орналасқан тіктөртбұрыш берілген. Осы тіктөртбұрыштың 1) симметрия центрінің координаталарын анықтаңдар; 2) симметрия өстерінің теңдеулерін жазыңдар.

2.22. Қандай да бір диагоналы симметрия өсі болатын дөңес төртбұрышты *дельтоид* деп атайды. Дельтоидтардың қандай қасиеттері болатынын анықтаңдар.

2.23. A және B нүктелері m түзуінің бір жағында орналасқан. $AK + AB$ қосындысы ең кіші мән қабылдайтындай етіп, m түзуі бойынан K нүктесін белгілеңдер.

2.24. A және B нүктелері m түзуінің екі жағында орналасқан. m түзуі ACB бұрышының бисссектрисасы болатындай етіп, m түзуі бойынан C нүктесін белгілеңдер.

2.25. Центрі белгіленбеген шеңбер мен оның өзара тең емес екі параллель хордалары берілген. Тек сызғышты ғана пайдаланып, осы хордаларды қақ бөліңдер.

2.26. A нүктесінен m түзуіне үш түрлі AB, AC және AD көлбеулері жүргізілген. Осы кесінділер диаметрлері болатындай етіп салынған үш шеңбердің A нүктесінен басқа тағы бір ортақ нүктесі болатынын дәлелдеңдер.

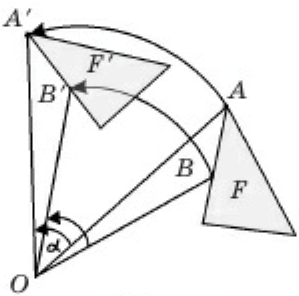
2.2. Бұру және параллель көшіру

Тақырыпты оқып үйрену барысында сендер:

- бұру және параллель көшіру кезінде фигуралардың бейнелерін саласыңдар;
- жазықтықта бұру және параллель көшіру түрлендірулерін қолданып есептер шығарасыңдар.

2.2.1. Бұру

Айталық, жазықтықта O нүктесі мен α бұрышы берілсін. Осы жазықтықтағы әрбір A нүктесі үшін OA сәулесін белгілі бір бағытта (сағат тілімен бағыттас, не сағат тіліне қарсы бағытта) O нүктесінен айналдыра α бұрышына бұрғанда A нүктесі A' нүктесіне ауыссын. Мұнда, әрине, $\angle AOA' = \alpha$ және $OA = OA'$ теңдігі орындалады және жазықтықтағы барлық нүктелер бір бағытта орындарын ауыстырады. Тек O нүктесі ғана өзіне-өзі көшеді, яғни жылжымайды. Жазықтықта осындай түрлендіруді ***бұру түрлендіруі*** (бұру) деп атаймыз. Мұндағы O нүктесі ***бұру центрі***, α ***бұру бұрышы*** деп аталады. Мысалы, 2.12-суретте сағат тіліне қарсы бағытта α бұрышын бұру түрлендіруі кескінделген. Осы бұру түрлендіруі кезінде F фигурасының әрбір нүктесі орындарын ауыстырып, одан F' фигурасы құралса, F' фигурасын F фигурасынан α бұрышына бұру арқылы алынған деп айтамыз. Бұру кезінде сәйкес нүктелердің арақашықтығы өзгермейді.



2.12-сурет

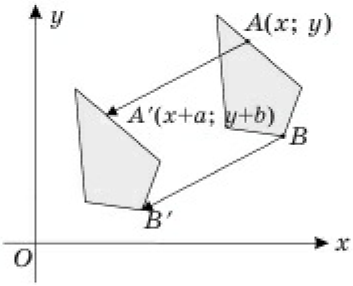
2.2.2. Параллель көшіру

Жазықтықта декарттық координаталар жүйесіндегі $A(x;\ y)$ нүктесіне $A'(x + a;\ y + b)$ нүктесін сәйкес қояйық. Мұнда a және b — тұрақты сандар. Жазықтықтағы мұндай түрлендіруді ***параллель көшіру*** деп атайды. Сонымен, егер параллель көшіру кезінде $A(x;\ y)$ нүктесі $A'(x';\ y')$ нүктесіне көшсе, $x' = x + a$, $y' = y + b$ теңдіктері орындалады (2.13-сурет).

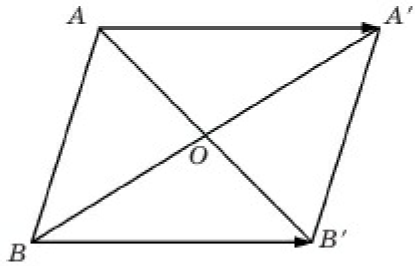
Параллель көшіру кезінде нүктелер параллель (немесе беттесетін) түзулер бойымен бір бағытта бірдей қашықтықтарға жылжиды.

Шынында да, егер параллель көшіру кезінде $A(x_1;\ y_1)$ және $B(x_2;y_2)$ нүктелері сәйкесінше $A'(x_1 + a;\ y_1 + b)$ және $B'(x_2 + a;\ y_2 + b)$ нүктелеріне көшсе, AB' және $A'B$ кесінділері қиылысу нүктелерінде қақ бөлінеді, себебі олардың орталарының координаталары бірдей:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + a}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2 + b}{2}.$$



2.13-сурет



2.14-сурет

Олай болса, $AA'B'B$ төртбұрышының диагональдары қиылысу нүктесінде қақ бөлініп, $AA'B'B$ төртбұрышы параллелограмм болады (2.14-сурет): $AA' \parallel BB'$ және $AA' = BB'$. Сонымен бірге $AB = A'B'$ теңдігі де орындалады. Біз мынадай 1-теореманы дәлелдедік.

1-теорема. *Параллель көшіру түрлендіруі нүктелерді параллель (не беттесетін) түзулер бойымен бір бағытта бірдей қашықтықтарға жылжытады, олардың арақашықтықтарын өзгертпейді.*

Осы теоремадан $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ және т.с.с. сәйкес нүктелерді қосатын векторлардың координаталары бірдей болатынын көреміз: $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \vec{a} = (a;\ b)$. Олай болса, $x' = x + a$, $y' = y + b$ формулаларымен анықталатын түрлендіруді $\vec{a} = (a;\ b)$ векторымен анықталатын параллель көшіру деп қарастыру қажет (п. 1.2-ні қараңдар).

1. Бұру дегеніміз не? Ол қалай анықталады?
2. а) Бұру центрі арқылы өтетін түзу; ә) центрі бұру центрімен беттесетін шеңбер; б) төбесі бұру центрінде орналасқан бұрыш белгілі бір бұрышқа бұрғанда қандай фигураларға бейнеленеді?
3. Қандай фигураларды бұру түрлендіруі арқылы өзіне-өзін бейнелеуге болады? Мысал келтіріп, бұру центрі мен бұру бұрыштарының шамасын атаңдар.
4. Параллель көшіру дегеніміз не? Ол қалай анықталады?
5. Параллель көшіру түрлендіруі кезінде сәйкес нүктелердің арақашықтықтары өзгермейтінін дәлелдеңдер.
6. Параллель көшіру түрлендіруі кезінде өзіне-өзі көшетін, яғни өзгермейтін нүкте табыла ма? Өзгермейтін фигура ше?

6–4338

ПРАКТИКАЛЫҚ ЖҰМЫС

1. AB кесіндісі мен осы кесіндіде жатпайтын бұру центрі O берілген. AB кесіндісін а) 30°-қа; ә) 60°-қа; б) 120°-қа; в) 180°-қа бұрғандағы бейнесін салыңдар.
2. Берілген ABC үшбұрышын A нүктесінің маңында сағат тіліне қарсы бағытта 60°-қа бұрғанда шығатын үшбұрышты салыңдар.
3. A, B, C нүктелері берілген. A нүктесін B нүктесіне көшіретін параллель көшіру кезінде C нүктесі көшетін C' нүктесін салыңдар.

ЕСЕПТЕР

A

2.27. Ұзындығы 4 см болатын AB кесіндісін A нүктесінің маңында 90°-қа бұрғанда AB_1 кесіндісі алынады. BB_1-дің ұзындығын табыңдар.

2.28. O нүктесі мен m түзуі берілген. O нүктесі маңында m түзуін 60°-қа бұрғанда (сағат тіліне қарсы бағытта) шығатын m' түзуін салыңдар. 1) $O \notin m$; 2) $O \in m$ жағдайларын қарастырыңдар.

2.29. Қандай да бір ABC үшбұрышын салып, параллель көшіру арқылы A нүктесі B нүктесіне көшетіндей етіп, $AB'C'$ үшбұрышын салыңдар.

2.30. AB түзуін A нүктесі берілген C нүктесіне көшетіндей етіп, параллель көшіріңдер. 1) $C \notin AB$; 2) $C \in AB$ жағдайларын қарастырыңдар.

2.31. Параллель көшіру мына формулалармен берілген: $x' = x + 1$, $y' = y - 1$. Осы параллель көшіру кезінде $(0; 0)$, $(2; 1)$ және $(-1; 2)$ нүктелері қандай нүктелерге көшеді?

2.32. $x' = x + a$, $y' = y + b$ формуласымен берілген параллель көшіру кезінде 1) $(1; 2)$ нүктесі $(3; 4)$ нүктесіне; 2) $(2; -1)$ нүктесі $(-1; 2)$ нүктесіне; 3) $(-1; -3)$ нүктесі $(0; -2)$ нүктесіне көшеді деп алып, a және b сандарын табыңдар.

B

2.33. Параллель көшіру кезінде $(1; 1)$ нүктесі $(-1; 3)$ нүктесіне көшсе, координаталар бас нүктесі қандай нүктеге көшеді?

2.34. 1) $(1; 2)$ нүктесін $(3; 4)$ нүктесіне және $(0; 1)$ нүктесін $(-1; 0)$ нүктесіне көшіретін; 2) $(2; -1)$ нүктесін $(1; 0)$ нүктесіне және (3; 1) нүктесін (2; 2) нүктесіне көшіретін параллель көшіру табыла ма?

2.35. Берілген шеңберді екі бағытта да оның бойында орналасқан A нүктесі маңында 120°-қа бұрыңдар. Берілген шеңбер мен оның бейнелері өзара қалай орналасады?

2.36. $ABCD$ квадратын A төбесінің маңында B төбесі D нүктесіне көшетіндей етіп бұрғанда, ADC_1D_1 квадраты алынады. CD_1 және CC_1 қашықтығын табыңдар. Мұндағы $AB = a$.

2.37. $\angle ABC = \alpha$ бұрышын B төбесінің маңында A нүктесінен C нүктесіне қарай жылжитын бағытта 60°-қа бұрғанда A_1BC_1 бұрышы шығады. ABC_1 және CBA_1 бұрыштарын табыңдар.

2.38. Параллель b және c түзулері мен олардың бойында жатпайтын A нүктесі берілген. B және C төбелері сәйкесінше b және c түзулерінде жататын тең қабырғалы ABC үшбұрышын салыңдар.

2.39. Табандары мен диагональдары бойынша трапеция салыңдар.

2.40. Шеңберді параллель көшіру кезінде онымен жанасатын шеңбер алынды. Бұл шеңбер қандай қашықтыққа параллель көшірілген?

2.41. Өзара тең және параллель емес екі кесінді берілген. Бұру түрлендіруі арқылы бұл кесінділер бір-біріне көшетіндей етіп, бұру центрін анықтаңдар.

2.42. Қандай шарт орындалғанда 1) екі кесіндіні; 2) екі түзуді; 3) екі сәулені; 4) екі шеңберді параллель көшіру арқылы бір-бірімен үйлестіруге болады?

C

2.43. Параллель түзулердің екі жұбы берілген: $a \| a_1$ және $b \| b_1$. a-ны a_1-ге және b-ны b_1-ге көшіретін параллель көшіру түрлендіруі үнемі орындала ма?

2.44. Тең бүйірлі трапецияның сүйір бұрышы 60°. Оның кіші табаны үлкен табаны мен бүйір қабырғасының айырымына тең болатынын дәлелдеңдер.

2.45. AOB бұрышының ішкі C нүктесі берілген. Ұштары OA және OB сәулелерінде жататындай әрі C нүктесінде қақ бөлінетіндей етіп, DE кесіндісін жүргізіңдер. Есепті 1) бұру; 2) центрлік симметрияны қолданып шешіңдер.

2.46. Дұрыс n-бұрышты центрінің маңында, ең кіші дегенде, қандай бұрышқа бұрғанда өзімен-өзі беттеседі?

2.47. Өзара тең екі квадратты бұру арқылы бір-біріне көшіруге болатындай етіп, бұру центрін анықтаңдар.

2.48. Бұру түрлендіруі мен центрлік симметрия арасында қандай байланыс бар?

2.49. Өзара тең шеңберлер K нүктесінде сырттай жанасады. Олардың центрлерін қосатын түзуге параллель қиюшы бір шеңберді A және B нүктелерінде, екіншісін C және D нүктелерінде қиып өтеді. AKC бұрышы қиюшыны таңдап алуға тәуелсіз болатынын дәлелдеңдер.

2.50. Тең қабырғалы үшбұрыштың центрі арқылы өтетін және бір-бірімен 60° бұрыш жасайтын екі түзу жүргізілген. Бұл түзулердің үшбұрыш қабырғаларымен шектелген кесінділері өзара тең болатынын дәлелдеңдер.

2.3. Қозғалыс және беттестіру

Тақырыпты оқып-үйрену барысында сендер:

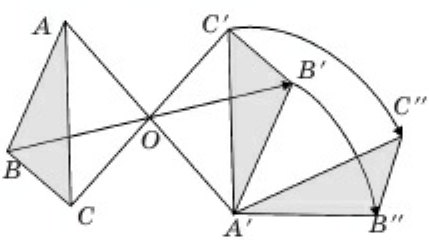
- қозғалыстың түрлерін, композициясын және олардың қасиеттерін білесіңдер;
- жазықтықта түрлендіруді қолданып есептер шығарып үйренесіңдер.

2.3.1. Қозғалыс және оның қасиеттері

Алдыңғы параграфтарда қарастырылған түрлендірулер кезінде нүктелердің арақашықтықтарының өзгермейтіні олардың ортақ қасиеті болып табылады.

Анықтама. *Нүктелердің арақашықтығын өзгертпейтін жазықтықтағы түрлендіруді* ***қозғалыс*** *деп атаймыз.*

Сонымен, алдыңғы параграфтарда қарастырылған төрт түрлендіру қозғалыс болып табылады. 2.15-суретте ABC үшбұрышын алдымен O нүктесіне қатысты симметриялы $A'B'C'$ үшбұрышына түрлендірілгені, сонан соң $A'B'C'$ үшбұрышына A' төбесінен 60°-қа сағат тілімен бағыттас бұру арқылы $A'B''C''$ үшбұрышына көшірілгені кескін-



2.15-сурет

делген. Мұнда бірінен кейін бірі қолданылған түрлендірулердің екеуі де қозғалыстар болғандықтан, ABC, $A'B'C'$ және $A'B'C'$, $A'B''C''$ үшбұрыштарының теңдіктерінен ABC және $A'B''C''$ үшбұрыштарының теңдігі шығады. Олай болса, ABC үшбұрышын $A'B''C''$ үшбұрышына көшіретін түрлендіру де – қозғалыс. Сонымен қатар бірнеше қозғалысты бірінен кейін бірін қолдану нәтижесінде шығатын түрлендіру де қозғалыс болып табылады. Бұл амал *қозғалыстар композициясы* деп аталады. Қарастырылған мысалда центрлік симметрия мен бұрудың композициясы қарастырылған.

1-теорема. *Қозғалыс кезінде кесінді өзіне тең кесіндіге көшеді.*

Қозғалыс кезінде нүктелердің арақашықтығы сақталатындықтан, теореманы дәлелдеу үшін кесіндінің кесіндіге бейнеленетіндігін дәлелдесек, жеткілікті.

Айталық, AB кесіндісінің ұштары қозғалыс кезінде сәйкесінше A_1 және B_1 нүктелеріне бейнеленсін. AB кесіндісінде жататын қандай да бір P нүктесін алып, оның бейнесін P_1 арқылы белгілейік. $P \in AB$ болғандықтан, $AP + BP = AB$ теңдігі орындалады және қозғалыс нүктелердің арақашықтығын өзгертпейтіндіктен, $AB = A_1B_1$, $A_1P_1 = AP$ және $B_1P_1 = BP$ теңдіктері орындалады. Олай болса, $A_1P_1 + B_1P_1 = AP + BP = AB = A_1B_1$. Мұнда $A_1P_1 + B_1P_1 = A_1B_1$ теңдігі орындалатындықтан, P_1 нүктесі A_1B_1 кесіндісінің нүктелеріне бейнеленеді.

Енді, керісінше, A_1B_1 кесіндісінің әрбір нүктесі үшін AB кесіндісінен түпбейне болатын нүкте табылатынын көрсетейік.

Айталық, $P_1 \in A_1B_1$ болсын. Қозғалыс кезінде жазықтықтың қандай да бір P нүктесі P_1 нүктесіне бейнеленуі керек. Онда жоғарыда дәлелдеген сияқты $A_1P_1 + B_1P_1 = A_1B_1$ теңдігінен $AP + BP = AB$ теңдігін аламыз. Бұдан $P \in AB$. Теорема дәлелденді.

1-салдар. *Қозғалыс кезінде түзу түзуге көшеді.*

l түзуі және оның кез келген A, B нүктелері берілсін. Қозғалыс кезінде A және B нүктелері сәйкесінше A_1 және B_1 нүктелеріне бейнеленсін. A_1 және B_1 нүктелері арқылы өтетін түзуді l_1 арқылы белгілейік. Егер $P \in l$ нүктесін алсақ, P-ның бейнесі болатын P_1 нүктесінің l_1 түзуінде жататынын алдыңғы теореманың дәлелдеуін пайдаланып көрсетуге болады. Мұнда үш түрлі жағдайды қарастыру керек: $P \in AB$, $A \in PB$ немесе $B \in AP$.

2-салдар. *Қозғалыс кезінде сәуле сәулеге көшеді.*

Дәлелдеуі 1-салдарға ұқсас.

3-салдар. *Қозғалыс кезінде үшбұрыш өзіне тең үшбұрышқа бейнеленеді.*

Шынында да, дәлелденген теорема бойынша қозғалыс кезінде үшбұрыштың қабырғалары өзіне тең кесінділерге бейнеленеді. Сондықтан үшбұрыш сәйкес қабырғалары тең үшбұрышқа, яғни өзіне тең үшбұрышқа бейнеленеді.

4-салдар. *Қозғалыс кезінде бұрыш өзіне тең бұрышқа бейнеленеді.*

Дәлелдеуі 2 және 3-салдарлардан шығады.

2.3.2. Беттестірулер мен қозғалыстар

Біз осы уақытқа дейін фигуралар теңдігін беттестіру арқылы анықтадық. Басқаша айтқанда, егер Φ және Φ_1 фигураларын бір-бірімен беттестіргенде дәл келсе, Φ және Φ_1 фигураларын өзара тең дедік. Сондай-ақ беттестіру ұғымын геометрияның негізгі ұғымдарының бірі ретінде (нүкте, түзу, арасында жатады және т.с.с.) анықтамасыз қабылдап келдік. Ал Φ фигурасын Φ_1 фигурасына беттестіруді Φ-ті Φ_1-ге ***бейнелеу*** деп те түсінуге болады. Сонымен бірге беттестіру кезінде Φ фигурасының ғана нүктелері емес, жазықтықтың кез келген нүктесі осы жазықтықтың белгілі бір нүктесіне бейнеленеді. Олай болса, беттестіруді жазықтықты өзіне-өзін бейнелеу деп қарастырған жөн. Әрине, беттестіру жазықтықтағы әртүрлі нүктелерді әртүрлі нүктелерге бейнелейді.

2-теорема. *Беттестіру қозғалыс болып табылады.*

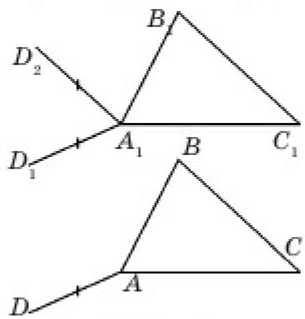
AB кесіндісінің ұштары беттестіру арқылы A_1 және B_1 нүктелеріне бейнеленсін. Онда $AB = A_1B_1$. Олай болса, беттестіру нүктелердің арақашықтықтарын өзгертпейді. Демек, ол қозғалыс.

Енді осыған кері тұжырымды дәлелдейік.

3-теорема. *Кез келген қозғалыс беттестіру болып табылады.*

Айталық, қандай да бір қозғалыс арқылы ABC үшбұрышын $A_1B_1C_1$ үшбұрышына бейнелейік. 3-салдар бойынша бұл үшбұрыштар тең болғандықтан, A, B және C нүктелерін сәйкесінше A_1, B_1 және C_1 нүктелеріне бейнелейтін беттестіру табылады. Енді осы қозғалыс пен беттестірудің өзара «тең» бейнелеулер екенін, демек, қозғалыс та, беттестіру де жазықтықтың әрбір D нүктесін бірдей D_1 нүктесіне көшіретінін дәлелдейік.

Ол үшін кері жоримыз. Айталық, қозғалыс кезінде D нүктесі D_1 нүктесіне, беттестіруде D_2 нүктесіне бейнеленсін және $D_1 \neq D_2$ орындалсын. Қозғалыс та, беттестіру де нүктелердің арақашықтықтарын өзгертпейді. Сондықтан $AD = A_1D_1$, $AD = A_1D_2$ теңдіктерінен $A_1D_1 = A_1D_2$. Осы сияқты, $B_1D_1 = B_1D_2$ және $C_1D_1 = C_1D_2$ теңдіктері де орындалады. A_1, B_1 және C_1 нүктелері D_1 және D_2 нүктелерінен бірдей қашықтықта орналасқан (2.16-сурет). Олай болса, A_1, B_1, C_1 нүктелері D_1D_2 кесіндісінің орта перпендикулярында жатуы керек. Бұлай болуы, яғни $A_1B_1C_1$ үшбұрышының төбелері бір түзудің бойында жатуы мүмкін емес. Алынған қайшылық қарастырылып отырған қозғалыс пен беттестірудің бірдей бейнелеулер екенін көрсетеді.



2.16-сурет

1. Қандай түрлендіруді қозғалыс деп атайды?
2. Қозғалыс кезінде кесінді өзіне тең кесіндіге бейнеленетінін дәлелдеңдер.
3. Қозғалыс кезінде а) түзудің; ә) бұрыштың; б) үшбұрыштың; в) шеңбердің бейнелері қандай фигура болады?
4. Қозғалыс пен беттестіру арасында қандай байланыс бар?

ПРАКТИКАЛЫҚ ЖҰМЫС

Түсті қағаздан өзара тең үш фигура қиып алыңдар.

а) Олардың екеуін 1) центрлік симметрияны; 2) өстік симметрияны; 3) бұру түрлендіруін; 4) параллель көшіруді қолданып, бір-біріне көшетіндей етіп орналастырыңдар.

ә) Олардың үшеуін 2.15-суретте көрсетілгендей, 1) бұру мен центрлік симметрияны; 2) бұру мен өстік симметрияны; 3) бұру мен параллель көшіруді; 4) параллель көшіру мен өстік симметрияны; 5) параллель көшіру мен центрлік симметрияны қолдануға болатындай етіп орналастырыңдар.

ЕСЕПТЕР

A

2.51. Қозғалыс кезінде 1) түзу түзуге; 2) сәуле сәулеге; 3) бұрыш өзіне тең бұрышқа; 4) шеңбер өзіне тең шеңберге бейнеленетінін дәлелдеңдер.

2.52. Қозғалыс кезінде 1) параллелограмм параллелограмға; 2) трапеция трапецияға; 3) ромб ромбыға; 4) тіктөртбұрыш тіктөртбұрышқа; 5) квадрат квадратқа бейнеленетінін дәлелдеңдер.

3 $ABCD$ ромбысы берілсін және қайсыбір, қозғалыс кезінде A, B, C және D нүктелері, сәйкесінше, A_1, B_1, C_1 және D_1 нүктелеріне көшсін. Онда 1-теорема бойынша $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CD = C_1D_1$ және $DA = D_1A_1$. Екінші жағынан $AB = BC = CD = DA$ болғандықтан, $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1D_1 = D_1A_1$ теңдіктері орындалады. Осы сияқты $AC = A_1C_1$ және $BD = B_1D_1$ болады. Осыдан $A_1B_1C_1D_1$-дің ромб болатыны және $ABCD$-ға тең екені шығады.

2.53. 1) Ұзындықтары тең кесінділердің; 2) градустық өлшемдері бірдей бұрыштардың; 3) радиустары бірдей шеңберлердің өзара тең екенін дәлелдеңдер, яғни қозғалыс арқылы үйлесетінін көрсетіңдер.

2.54. Егер ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштары үшін $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$ теңдіктері орындалса, A, B, C нүктелерін A_1, B_1, C_1 нүктелеріне бейнелейтін бір ғана қозғалыс табылатынын дәлелдеңдер.

2.55. $AB = A_1B_1$, $AD = A_1D_1$ және $\angle A = \angle A_1$ шартын қанағаттандыратын $ABCD$ және $A_1B_1C_1D_1$ параллелограмдары берілсін. Осы параллелограмдардың өзара тең болатынын, яғни қозғалыс арқылы үйлесетінін көрсетіңдер.

2.56. Егер екі ромбының диагональдары тең болса, олардың өздерінің де теңдігін дәлелдеңдер.

2.57. Екі шеңбердің қиылысу нүктелері олардың центрлерін қосатын түзуге байланысты симметриялы болатынын дәлелдеңдер.

B

2.58. Егер төртбұрыштың диагональдары оның симметрия өстері болса, бұл төртбұрыштың ромб екенін дәлелдеңдер.

2.59. Симметрия центрі бар алтыбұрыштың міндетті түрде дұрыс алтыбұрыш болуы қажет пе? Жауаптарыңды негіздеңдер.

2.60. Параллель хордалардың орталарын қосатын түзу шеңбердің центрі арқылы өтетінін көрсетіңдер.

2.61. Егер бір трапецияның қабырғалары екінші трапецияның сәйкес қабырғаларына тең болса, онда бұл трапециялар өзара тең болатынын дәлелдеңдер.

2.62. Егер көпбұрыштың симметрия центрі болса, оның қабырғаларының саны жұп екенін дәлелдеңдер.

2.63. Квадраттың центрі арқылы өтетін және өзара перпендикуляр екі түзудің квадрат қабырғаларымен шектелген кесінділері өзара тең болатынын дәлелдеңдер.

C

2.64. Шеңберге іштей ABC үшбұрышы сызылған. Осы шеңберге іштей $AB \perp A_1B_1$, $AC \perp A_1C_1$, $BC \perp B_1C_1$ шарттары орындалатындай етіп, екінші $A_1B_1C_1$ үшбұрышын сызыңдар.

2.65. $l_1 \| l_2$ деп алып, l_1 және l_2 түзулеріне қатысты өстік симметрияларды бірінен соң бірін қолданғанда параллель көшіру түрлендіруі шығатынын дәлелдеңдер.

2.66. Центрлері O_1 және O_2 нүктелерінде болатын екі центрлік симметрияны бірінен соң бірін қолданғанда параллель көшіру түрлендіруі шығатынын дәлелдеңдер.

2.67. Фигураның әртүрлі екі симметрия центрі болады деп алып, оның шексіз көп симметрия центрлері болатынын дәлелдеңдер.

2.68. Түзу мен оның екі жағында орналасқан екі шеңбер берілген. Екі төбесі сәйкесінше берілген екі шеңбердің бойында, үшінші төбесінен жүргізілген биіктік берілген түзуде жататындай тең қабырғалы үшбұрыш салыңдар.

2.69. Төбесі қағаз бетінен тысқары орналасқан AOB бұрышы және осы бұрыштың қабырғаларының бірінде жатқан C нүктесі берілген. OC-ға тең кесінді салыңдар.

2.70. Қиылысатын екі шеңбер берілген. Ұштары сәйкесінше берілген екі шеңберде жататын және ортасы берілген шеңберлердің қиылысу нүктелерінің бірімен дәл келетін кесіндіні салыңдар.

2.71. Үш медианасы бойынша үшбұрыш салыңдар.

2.72. $ABCD$ төртбұрышының B және D төбелеріндегі бұрыштары тең, BD диагоналы AC-ны қақ бөледі. $ABCD$ төртбұрышының параллелограмм болатынын дәлелдеңдер.

2.73. A және B нүктелері мен қиылысатын c және d түзулері берілген. C және D төбелері сәйкесінше c және d түзулерінде жататын $ABCD$ квадратын салыңдар.

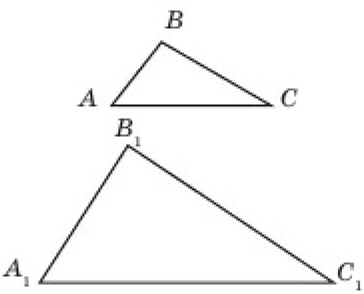
2.4. Ұқсастық түрлендіруі

Тақырып материалдарын оқып-үйрену барысында сендер:

- ұқсас фигуралардың анықтамасы мен қасиеттерін білесіңдер;
- гомотетияның анықтамасы мен қасиеттерін білесіңдер;
- гомотетия кезіндегі фигуралардың бейнелерін тұрғызасыңдар.

2.4.1. Ұқсастық түрлендіруі ұғымы және оның қасиеттері

Біз алдыңғы параграфта жазықтықты түрлендірудің бір ғана түрін өттік. Ол түрлендіру — нүктелердің арақашықтықтарын өзгертпейтін қозғалыс. Алайда жазықтықты түрлендірудің түрлері өте көп.



2.17-сурет

Мысалы, 2.17-суретте ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштары кескінделген. Бұл үшбұрыштардың сәйкес қабырғаларының қатынасы 2-ге тең: $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{B_1C_1}{BC} = 2$. Осыдан $A_1B_1 = 2AB$. Сонда A, B, C нүктелерін сәйкесінше A_1, B_1, C_1 нүктелеріне бейнелейтін түрлендіру нүктелердің арақашықтығын 1 : 2 қатынасында өзгертеді (2 есе ұзартады). Бұл жағдайда ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштарын ***ұқсас*** деп атаймыз. 2 саны ***ұқсастық коэффициенті*** деп аталады. Енді ұқсастық түрлендіруге анықтама берейік.

Анықтама. *Егер Φ фигурасын Φ_1 фигурасына бейнелегенде, олардың сәйкес нүктелерінің арақашықтықтары бірдей k қатынасына өзгерсе, Φ фигурасын Φ_1 фигурасына* ***ұқсас*** *деп атайды.* Басқаша айтқанда, Φ фигурасының кез келген A және B нүктелері Φ_1 фигурасының сәйкесінше A_1 және B_1 нүктелеріне бейнеленіп,

$$A_1B_1 = k \cdot AB \qquad (1)$$

теңдігі орындалса, Φ және Φ_1 фигураларын ұқсас деп атаймыз. Мұнда k саны — ***ұқсастық коэффициенті***. $k > 0$ болуы керек.

$k = 1$ болғанда нүктелердің арақашықтықтары өзгермейді. Олай болса, қозғалыс — ұқсастық түрлендірудің дербес жағдайы және ұқсастық коэффициенті 1-ге тең.

Φ фигурасының Φ_1 фигурасына ұқсастығы былай жазылады: $\Phi \backsim \Phi_1$. Ұқсастық коэффициенті $\Phi \overset{k}{\backsim} \Phi_1$ түрінде көрсетіледі.

1) Кез келген фигура өзіне-өзі ұқсас $\Phi \overset{1}{\backsim} \Phi$; тең фигуралар өзара ұқсас: $\Phi = \Phi_1 \Rightarrow \Phi \backsim \Phi_1$. Ұқсастық коэффициенті 1-ге тең.

2) Егер $\Phi_1 \overset{k}{\backsim} \Phi_2$ болса, онда $\Phi_2 \overset{\frac{1}{k}}{\backsim} \Phi_1$.

Шынында да, егер $\Phi_1 \overset{k}{\backsim} \Phi_2$ болса, кез келген A_2, $B_2 \in \Phi_2$ нүктелері үшін олардың түпбейнесі болатын, сәйкесінше A_1, $B_1 \in \Phi_1$ нүктелері табылып, $A_1B_1 = k \cdot A_2B_2$ теңдігі орындалады. Осыдан $A_2B_2 = \dfrac{1}{k} A_1B_1$ теңдігі шығады. Олай болса, Φ_2 фигурасы Φ_1 фигурасына $\dfrac{1}{k}$ коэффициенті бойынша ұқсас болады.

3) Егер $\Phi \overset{k_1}{\backsim} \Phi_1$ және $\Phi_1 \overset{k_2}{\backsim} \Phi_2$ болса, онда $\Phi \overset{k_1 \cdot k_2}{\backsim} \Phi_2$.

A және B нүктелері Φ фигурасының кез келген екі нүктесі болса,

$$A_1B_1 = k_1 \cdot AB \qquad (2)$$

шартын қанағаттандыратын A_1, $B_1 \in \Phi_1$ нүктелері табылады. Ал $\Phi_1 \overset{k_2}{\backsim} \Phi_2$ болғандықтан,

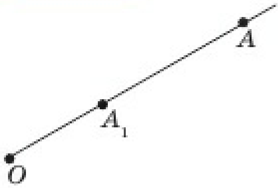
$$A_2B_2 = k_2 \cdot A_1B_1 \qquad (3)$$

теңдігін қанағаттандыратын A_2, $B_2 \in \Phi_2$ нүктелері табылады. (2) және (3)-ден $A_2B_2 = k_1 \cdot k_2 \cdot AB$ теңдігін аламыз. Онда Φ фигурасы Φ_2 фигурасына ұқсас және ұқсастық коэффициенті $k_1 \cdot k_2$-ге тең.

2.4.2. Гомотетия

Жазықтықта O нүктесі белгіленіп, k оң саны берілсін.

Анықтама. *Жазықтықтағы әрбір A нүктесі үшін OA сәулесінің бойында жататын және*



2.18-сурет

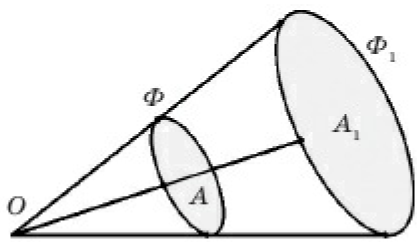
$$\frac{OA_1}{OA} = k \qquad (4)$$

*шартын қанағаттандыратын A_1 нүктесін A нүктесіне **гомотетиялы** нүкте деп атаймыз.* Ал жазықтықтың бұл түрлендіруін ***гомотетия*** деп атайды. Мұндағы O — ***гомотетия центрі*** k — ***гомотетия коэффициенті (ұқсастық коэффициенті)*** деп аталады.

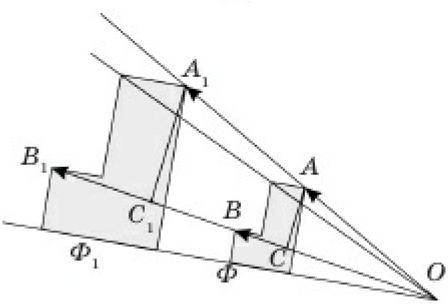
2.18-суретте гомотетиялы нүктелер бейнеленген. $OA_1 = \frac{1}{3}OA$ болғандықтан, $k = \frac{1}{3}$. $Ф$ фигурасының әрбір нүктесі O нүктесіне қарағанда $Ф_1$ фигурасына гомотетиялы болса, $Ф$ және $Ф_1$ фигураларын ***гомотетиялы*** деп атаймыз. 2.19-суреттегі гомотетиялы фигуралар үшін $k = 2$.

Теорема. *Гомотетия ұқсастық түрлендіру болады.*

Айталық, $Ф$ және $Ф_1$ фигуралары O центріне қарағанда гомотетиялы және олардың ұқсастық коэффициенті k болсын. $Ф$ фигурасының A және B нүктелеріне гомотетиялы $Ф_1$ фигурасының A_1 және B_1 нүктелерін алайық (2.20-сурет). $\frac{OA_1}{OA} = \frac{OB_1}{OB} = k$ болғандықтан, $AB \| A_1B_1$ (пропорционал кесінділердің қасиеті бойынша). A және A_1 нүктелерінен OB сәулесіне AC және A_1C_1 перпендикулярларын жүргіземіз. Сәйкес бұрыштар ретінде $\angle OBA = \angle OB_1A_1 = \varphi$. Егер $\angle AOB = \alpha$ деп белгілесек, OAC және OA_1C_1 тік бұрышты үшбұрышынан $AC = OA\sin\alpha$ және $A_1C_1 = OA_1\sin\alpha$ теңдіктерін аламыз. Бұл теңдіктерден



2.19-сурет



2.20-сурет

$$\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{OA_1 \sin\alpha}{OA \sin\alpha} = \frac{OA_1}{OA} = k. \qquad (5)$$

ABC және $A_1B_1C_1$ тік бұрышты үшбұрыштарынан

$$AC = AB\ \sin\varphi \text{ және } A_1C_1 = A_1B_1\sin\varphi.$$

Осыдан (5) қатынасты ескерсек,

$$k = \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{A_1B_1 \sin\varphi}{AB \sin\varphi} = \frac{A_1B_1}{AB}.$$

A және B нүктелері Φ фигурасының кез келген нүктелері болғандықтан, Φ және Φ_1 фигуралары ұқсас.

Гомотетияның мынадай қарапайым қасиеттері бар:

1°. *Гомотетия түзуді өзіне параллель түзуге, гомотетия центрі арқылы өтетін түзуді өзіне-өзін көшіреді.*

2°. *Гомотетия кесіндіні өзіне параллель кесіндіге көшіреді.*

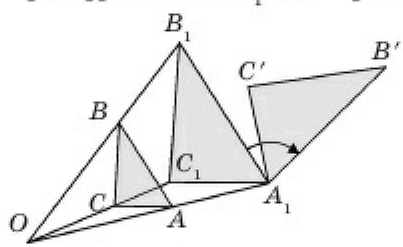
3°. *Гомотетия бұрышты өзіне тең бұрышқа көшіреді.*

4°. *Гомотетия шеңберді шеңберге көшіреді. Жалпы кез келген екі шеңберді өзара гомотетиялы деп қарастыруға болады. Мұнда ұқсастық коэффициенті олардың радиустарының қатынасына тең.*

5°. *Егер A_1 нүктесі OA сәулесінде жатса, центрі O болатын және A-ны A_1 нүктесіне бейнелейтін бір ғана гомотетия табылады.*

6°. *Әр ұқсастық түрлендірді қозғалыс пен гомотетияны бірінен кейін бірін қолданып алуға болады. Мұнда ұқсас түрлендіру мен гомотетияның ұқсастық коэффициенттері бірдей болады.*

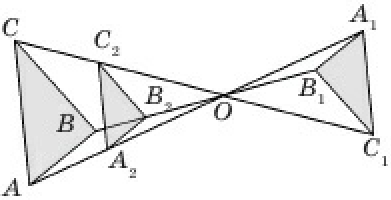
Мысалы, 2.21-суретте ABC үшбұрышын $A_1B'C'$ үшбұрышына ұқсастық түрлендіруі қарастырылған. Бұл ұқсас түрлендіруді алу үшін, алдымен ABC үшбұрышына гомотетиялы $A_1B_1C_1$ үшбұрышын тұрғызып, сонан соң оны A_1 төбесінің маңында сағат тілінің бағытымен α бұрышына бұрамыз.



2.21-сурет

ӨЗДЕРІҢ ДӘЛЕЛДЕҢДЕР

Келтірілген қасиеттердің алғашқы бесеуі оңай дәлелденеді. Оны өздерің орындап көріңдер.



2.22-сурет

6°-қасиеттің дәлелдемесі мектеп бағдарламасына енбейтіндіктен, оны дәлелдеусіз қалдырамыз.

Ескерту. Гомотетияның анықтамасы бойынша A және A_2 нүктелері OA сәулесінде жатады деп айтылған. Енді A_1 нүктесін OA сәулесінің толықтауыш сәулесін алып, $\frac{OA_1}{OA} = k$ шарты орындалсын делік (2.22-сурет). Бұл түрлендіруді ***кері*** немесе ***теріс гомотетия*** деп те атайды. Ал біз бұл түрлендіруді гомотетияға қоспай, жай ұқсастық түрлендіруі ретінде қарастырамыз. Өйткені әуелі ABC үшбұрышын (2.22-сурет) онымен гомотетиялы $A_2B_2C_2$ үшбұрышына көшіріп, сонан соң бұл үшбұрышқа центрлік симметрияны қолданып, $A_1B_1C_1$ үшбұрышын аламыз.

1. Қандай фигураларды ұқсас фигуралар деп атайды?
2. Ұқсастық коэффициенті деп қандай санды айтады?
3. Ұқсастық түрлендіруі деп нені түсінесіңдер?
4. Ұқсастық түрлендіруінің қандай қасиеттерін білесіңдер? Оларды тұжырымдап, дәлелдеңдер.
5. Гомотетия деген не? Қандай нүктелерді өзара гомотетиялы нүктелер деп атайды?
6. Гомотетия центрі, гомотетия коэффициенті деген не?
7. Гомотетияның ұқсас түрлендіру болатынын дәлелдеңдер.
8. Гомотетияның қасиеттерін тұжырымдап, дәлелдеңдер.

ПРАКТИКАЛЫҚ ЖҰМЫС

1. Қандай да бір үшбұрыш алып, берілген гомотетия центріне байланысты оған гомотетиялы үшбұрыш салыңдар. Тапсырманы а) $k = 2$; ә) $k = \frac{1}{2}$ деп алып, орындаңдар.
2. Алдыңғы тапсырмадағы үшбұрыштың орнына квадрат пен шеңберді алып орындаңдар.

ЕСЕПТЕР

А

2.74. Ұқсас фигуралардың тең болуы мүмкін бе? Мысал келтіріңдер.

2.75. Φ_1 және Φ_2 фигуралары үшін $\Phi_1 \overset{k}{\backsim} \Phi_2$ және $\Phi_2 \overset{k}{\backsim} \Phi_1$ болса, k неге тең?

2.76. Коэффициенті 2-ге тең гомотетия арқылы A нүктесі A_1 нүктесіне көшеді. Гомотетия центрін анықтаңдар.

2.77. Берілген 1) шеңберге; 2) кесіндіге; 3) үшбұрышқа; 4) төртбұрышқа гомотетиялы фигуралар салыңдар (гомотетия центрі мен коэффициентін өздерің таңдап алыңдар).

2.78. Егер сәйкес нүктелердің 1) бір жұбы ғана белгілі; 2) бір түзудің бойында жатпайтын нүктелердің екі жұбы белгілі болса, гомотетия центрін табуға бола ма?

2.79. 1) Қиылысатын екі түзу; 2) қиылысатын түзулердің бойында жататын екі сәуле өзара гомотетиялы болуы мүмкін бе?

2.80. Берілген үшбұрыштың бір төбесін гомотетия центрі етіп алып, осы үшбұрышқа коэффициенті 2-ге тең гомотетиялы үшбұрыш салыңдар.

В

2.81. Бір түзудің бойында жатпайтын A, B және C нүктелері берілген. k ұқсастық коэффициенті а) 3-ке; ә) 0,5-ке тең деп алып, берілген фигураға ұқсас фигура салыңдар.

2.82. Радиустары 2-ге және 4-ке тең екі концентрлі шеңберлердің ұқсас болатынын дәлелдеңдер және k ұқсастық коэффициентін анықтаңдар.

2.83. ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштары ұқсас. Егер $\angle A = 30^\circ$, $AB = 1$ м, $BC = 2$ м, $B_1C_1 = 3$ м болса, $\angle A_1$ мен A_1B_1 неге тең?

2.84. Төбелеріндегі бұрыштары тең екі тең бүйірлі үшбұрыштардың ұқсас болатынын дәлелдеңдер.

2.85. Екі тең бүйірлі үшбұрыштардың төбелеріндегі бұрыштары тең. Егер бір үшбұрыштың бүйір қабырғасы мен табаны сәйкесінше 17 см және 10 см, екінші үшбұрыштың табаны 8 см болса, екінші үшбұрыштың бүйір қабырғасын табыңдар.

2.86. Екі тік бұрышты үшбұрыштың сүйір бұрыштары тең деп алып, бұл үшбұрыштардың ұқсастығын дәлелдеңдер.

2.87. Гомотетия толық анықталуы үшін қандай және неше мәлімет берілуі қажет?

2.88. A және B нүктелері A_1 және B_1 нүктелерімен гомотетиялы. Бұл нүктелер өзара қалай орналасады? Гомотетия центрі қалай анықталады?

2.89. Гомотетия кезінде өзіне-өзі бейнеленетін фигураларды атап көрсетіңдер. Мұнда гомотетия центрі қалай орналасатынын көрсетіңдер.

C

2.90. Бұрыш және осы бұрыштың ішінде жатқан A нүктесі берілген. Бұрыштың қабырғаларын жанайтын және A нүктесі арқылы өтетін шеңберді салыңдар.

2.91. Екі төбесі берілген үшбұрыштың бір қабырғасының бойында, қалған екі төбесі басқа екі қабырғасында жататындай етіп, берілген үшбұрышқа іштей квадрат сызыңдар.

2.92. Табаны a және биіктігі h болатын үшбұрышқа іштей сызылған квадраттың екі төбесі үшбұрыштың табанында, ал қалған екі төбесі бүйір қабырғаларында жатады. Квадраттың қабырғасы неге тең?

2.93. ABC үшбұрышының AB және AC қабырғаларынан сәйкесінше D және E нүктелері $DE \parallel BC$ болатындай етіп алынған. ABC және ADE үшбұрыштарына сырттай сызылған шеңберлер жанасатынын дәлелдеңдер.

2.94. Екі шеңбер іштей жанасқан. Олардың жанасу нүктесі арқылы өтетін қиюшы шеңберлерді A және B нүктелерінде қиып өтеді. Осы A және B нүктелерінде сәйкес шеңберлерге жүргізілген жанамалар өзара параллель болатынын дәлелдеңдер.

2.95. Мына тұжырым дұрыс па: егер екі үшбұрыштың әрқайсысы үшінші үшбұрышқа гомотетиялы болса, онда бұл үшбұрыштар өзара гомотетиялы?

2.5. Үшбұрыштардың ұқсастық белгілері

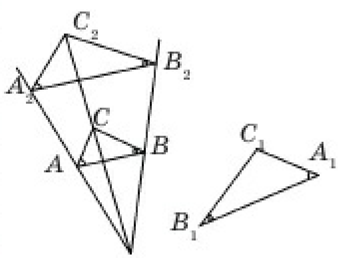
Тақырыпты оқып-үйрену барысында сендер:
- үшбұрыштардың ұқсастық белгілерін білесіңдер және қолданасыңдар;

- тік бұрышты үшбұрыштардың ұқсастық белгілерін білесіңдер және қолданасыңдар.

2.5.1. Үшбұрыштардың ұқсастық белгілері

I белгі. *Егер бір үшбұрыштың екі бұрышы екінші үшбұрыштың сәйкес екі бұрышына тең болса, мұндай үшбұрыштар ұқсас.*

ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштарында $\angle A = \angle A_1$ және $\angle B = \angle B_1$ болсын. ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштарының ұқсас екенін дәлелдейік. Айталық, $\frac{A_1B_1}{AB} = k$ болсын, онда қандай да бір O центріне қатысты ABC үшбұрышына k коэффициентімен гомотетиялы $A_2B_2C_2$ үшбұрышын тұрғызайық (2.23-сурет). $A_2B_2 = k \cdot AB$ және $A_1B_1 = k \cdot AB$ болғандықтан, $A_1B_1 = A_2B_2$. $\angle A_1 = \angle A_2$ және $\angle B_1 = \angle B_2$ теңдіктерінен бір қабырғасы және оған іргелес екі бұрышы бойынша $A_1B_1C_1$ және $A_2B_2C_2$ үшбұрыштарының өзара теңдігі шығады. Сонымен, ABC және $A_2B_2C_2$ үшбұрыштары k коэффициенті бойынша ұқсас және $A_1B_1C_1$ мен $A_2B_2C_2$ үшбұрыштары 1 коэффициенті бойынша ұқсас (тең) болғандықтан, ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштары да $k = 1 \cdot k$ коэффициенті бойынша ұқсас.

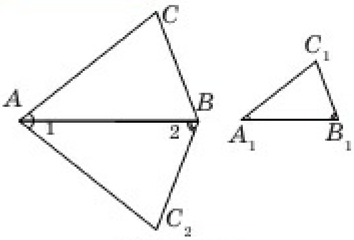


2.23-сурет

II белгі. *Егер бір үшбұрыштың екі қабырғасы екінші үшбұрыштың екі қабырғасына пропорционал және олардың арасындағы бұрыштары тең болса, бұл үшбұрыштар ұқсас болады.*

ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштарында $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC}$ және $\angle A = \angle A_1$ болсын. ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштарының ұқсастығын дәлелдеу үшін $\angle B = \angle B_1$ екенін көрсетсек жеткілікті (I белгі бойынша). Ол үшін $\angle 1 = \angle A_1$, $\angle 2 = \angle B_1$

7–4338



2.24-сурет

болатындай ABC_2 үшбұрышын қарастырайық (2.24-сурет). ABC_2 және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштары I белгі бойынша ұқсас және $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC_2}$ теңдігі орындалады. Теорема шартына сәйкес, $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC}$. Осы теңдіктерден $AC = AC_2$. Осыдан екі қабырғасы мен арасындағы бұрышы бойынша ABC және ABC_2 үшбұрыштары тең: $\angle 2 = \angle B$. Ал $\angle 2 = \angle B_1$ болғандықтан, $\angle B = \angle B_1$. ◀

III белгі. *Егер бір үшбұрыштың үш қабырғасы екінші үшбұрыштың үш қабырғасына пропорционал болса, онда бұл үшбұрыштар ұқсас.*

▶ ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштарының қабырғалары пропорционал болсын

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{B_1C_1}{BC}. \qquad (1)$$

ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштарының ұқсастығын дәлелдеу үшін, II белгі бойынша $\angle A = \angle A_1$ екенін дәлелдесек жеткілікті. Ол үшін $\angle 1 = \angle A_1$, $\angle 2 = \angle B_1$ болатындай ABC_2 үшбұрышын салайық (2.24-сурет). Үшбұрыштар ұқсастығының I белгісі бойынша $A_1B_1C_1$ және ABC_2 үшбұрыштары ұқсас. Сондықтан $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC_2} = \frac{B_1C_1}{BC_2}$ қатынастары орындалады. Бұларды (1) қатынастармен салыстырып, $AC = AC_2$ және $BC = BC_2$ аламыз. Демек, үш қабырғасы бойынша ABC және ABC_2 үшбұрыштары тең: $\angle A = \angle 1$. Ал $\angle 1 = \angle A_1$ болатынын ескерсек, $\angle A = \angle A_1$ теңдігі шығады. ◀

2.5.2. Тік бұрышты үшбұрыштардың ұқсастық белгілері

I белгі. *Егер бір тік бұрышты үшбұрыштың сүйір бұрышы екінші тік бұрышты үшбұрыштың сүйір бұрышына тең болса, бұл тік бұрышты үшбұрыштар ұқсас болады.*

▶ Шынында да, егер тік бұрышты үшбұрыштардың бір сүйір бұрыштары тең болса, бұлардың екінші сүйір бұрыштары да тең. Сондықтан бұл тік бұрышты үшбұрыштар I белгі бойынша ұқсас.

II белгі. *Егер бір тік бұрышты үшбұрыштың екі катеті екінші тік бұрышты үшбұрыштың екі катетіне пропорционал болса, бұл тік бұрышты үшбұрыштар ұқсас.*

Шынында да, катеттер арасындағы бұрыштары тік болғандықтан, бұл бұрыштар өзара тең. Сондықтан II белгі бойынша, бұл тік бұрышты үшбұрыштар ұқсас.

III белгі. *Егер бір тік бұрышты үшбұрыштың гипотенузасы мен катеті екінші тік бұрышты үшбұрыштың гипотенузасы мен сәйкес катетіне пропорционал болса, онда бұл тік бұрышты үшбұрыштар ұқсас болады.*

Шынында да, ABC және $A_1B_1C_1$ тік бұрышты үшбұрыштарында $A_1B_1 = k \cdot AB$, $A_1C_1 = k \cdot AC$ болсын. AB және A_1B_1 сәйкес үшбұрыштардың гипотенузалары болғандықтан,

$$B_1C_1 = \sqrt{A_1B_1^2 - A_1C_1^2} = \sqrt{k^2 \cdot AB^2 - k^2 \cdot AC^2} =$$

$$= k \cdot \sqrt{AB^2 - AC^2} = k \cdot BC.$$

Бұл үшбұрыштардың үшінші қабырғалары да пропорционал. Онда III белгі бойынша бұл тік бұрышты үшбұрыштар ұқсас болады.

1. Үшбұрыштар ұқсастығының I белгісі мен сәйкес тік бұрышты үшбұрыштардың ұқсастық белгілерін тұжырымдап, дәлелдеңдер.
2. Үшбұрыштар ұқсастығының II белгісі мен сәйкес тік бұрышты үшбұрыштардың ұқсастық белгілерін тұжырымдап, дәлелдеңдер.
3. Үшбұрыштар ұқсастығының III белгісі мен сәйкес тік бұрышты үшбұрыштардың ұқсастық белгілерін тұжырымдап, дәлелдеңдер.

ПРАКТИКАЛЫҚ ЖҰМЫС

Көз мөлшерімен ұқсас екі үшбұрыш салып, дұрыстығын өлшеу жұмыстары арқылы 1) I белгі; 2) II белгі; 3) III белгі бойынша тексеріңдер.

ЕСЕПТЕР

A

2.96. Тең қабырғалы екі үшбұрыш өзара ұқсас бола ма?

2.97. Берілген үшбұрыштардың барлығының орта сызықтары жүргізілген. Пайда болатын үшбұрыштардың ішінен ұқсастарын көрсетіңдер.

2.98. Егер екі үшбұрыштың қабырғалары сәйкесінше 1) 1,2 м, 1,6 м, 2,4 м және 3 см, 4 см, 6 см; 2) 0,5 м, 0,6 м, 1 м және 10 см, 12 см, 15 см; 3) 1 м, 1,5 м, 2 м және 10 см, 15 см, 20 см; 4) 4 м, 40 м, 40 м және 4 см, 40 см, 40 см болса, бұл үшбұрыштар ұқсас бола ма?

2.99. Төмендегі сөйлемдердің дұрыс не бұрыс екенін көрсетіңдер: 1) сәйкес қабырғалары параллель болып келген екі үшбұрыш ұқсас болады; 2) сәйкес қабырғалары перпендикуляр болып келген екі үшбұрыш ұқсас болады; 3) төбелеріндегі бұрыштары тең болатын тең бүйірлі екі үшбұрыш ұқсас болады; 4) тең бұрыштары бар тең бүйірлі екі үшбұрыш ұқсас болады; 5) табандарындағы бұрыштары тең болып келген тең бүйірлі екі үшбұрыш ұқсас болады; 6) тең бүйірлі тік бұрышты екі үшбұрыш ұқсас болады; 7) сүйір бұрыштары тең тік бұрышты екі үшбұрыш ұқсас болады; 8) кез келген тік бұрышты екі үшбұрыш ұқсас болады.

2.100. Бір тік бұрышты үшбұрыштың сүйір бұрышы 40°-қа тең, ал екінші тік бұрышты үшбұрыштың сүйір бұрышы 1) 50°-қа; 2) 60°-қа тең болса, бұл үшбұрыштар ұқсас бола ма?

2.101. ABC және DEF үшбұрыштарында 1) $\angle A = 36^\circ$, $\angle B = 34^\circ$, $\angle E = 110^\circ$, $\angle F = 34^\circ$; 2) $AC = 44$ см, $AB = 52$ см, $BC = 76$ см, $DE = 15{,}6$ см, $DF = 22$ см, $EF = 13{,}2$ см болса, бұл үшбұрыштар ұқсас па?

2.102. Берілген AB кесіндісін 1) 2:5; 2) 3:7; 3) 4:3 қатынасында бөліңдер.

B

2.103. Кез келген үшбұрыштың екі қабырғасын үшінші қабырғасына параллель емес түзумен қиып, осы үшбұрышқа ұқсас үшбұрыш алуға болатынын дәлелдеңдер.

2.104. Ұқсас үшбұрыштардың периметрлерінің қатынасы сәйкес қабырғаларының қатынасындай болатынын дәлелдеңдер.

2.105. Қабырғалары 0,8 м, 1,6 м және 2 м болатын үшбұрышқа ұқсас болып келетін үшбұрыштың периметрі 5,5 м. Екінші үшбұрыштың қабырғаларын табыңдар.

2.106. Бір үшбұрыштың периметрі оған ұқсас үшбұрыш периметрінің $\frac{11}{13}$ бөлігіндей, ал бұл үшбұрыштардың сәйкес қабырғаларының айырымы 1 м. Осы сәйкес қабырғаларды анықтаңдар.

2.107. Тік бұрышты үшбұрыштың гипотенузасына түсірілген биіктік оны 9 см және 16 см болатын кесінділерге бөледі. Үшбұрыштың қабырғаларын табыңдар.

2.108. Қабырғалары 3,5 см, 4 см, 5 см болатын үшбұрыш берілген. Бұған ұқсас үшбұрыштың үлкен қабырғасы 6 см. Екінші үшбұрыштың қабырғаларын табыңдар.

2.109. Берілген үшбұрыштың қабырғалары 15 см, 20 см және 30 см. Периметрі 26 см және берілген үшбұрышқа ұқсас үшбұрыштың қабырғаларын табыңдар.

2.110. Ұқсас үшбұрыштардың сәйкес қабырғаларына түсірілген биіктіктерінің қатынасы сол қабырғалардың қатынасына тең болатынын дәлелдеңдер.

2.111. BD кесіндісі — ABC үшбұрышының биссектрисасы. 1) $AC = 30$, $AD = 20$, $BD = 16$ және $\angle BDC = \angle C$; 2) $BC = 9$, $AD = 7{,}5$, $DC = 4{,}5$ деп алып, AB-ны табыңдар.

2.112. AD кесіндісі — ABC үшбұрышының биссектрисасы. Егер $AB = 14$ см, $BC = 20$ см, $AC = 21$ см болса, онда BD мен CD кесінділерін табыңдар.

2.113. Үшбұрыштың ұқсастығын пайдаланып, 1) үйдің (мектептің); 2) теректің (мұнараның немесе бағанның) биіктіктерін табыңдар.

2.114. Тік бұрышты үшбұрышты берілген гипотенузасы және катеттерінің қатынасы бойынша салыңдар.

C

2.115. Үшбұрыштардың ұқсастық белгілерін пайдаланып, кез келген үшбұрыштың медианалары қиылысу нүктесінде 2:1 қатынасында бөлінетінін дәлелдеңдер.

2.116. Үшбұрыштың бұрышының биссектрисасы осы бұрышқа қарсы жатқан қабырғасын басқа екі қабырғасына пропорционал кесінділерге бөлетінін дәлелдеңдер.

2.117. Үшбұрыштардың ұқсастығын пайдаланып, өзеннің енін қалай анықтауға болады?

2.118. Екі түзу қағаз бетінен тысқары орналасқан нүктеде қиылысады. Қағаз бетіндегі осы түзулердің бірінде жататын нүктеден берілген түзулердің қиылысу нүктесіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

2.119. Екі бұрышы және үшінші бұрышының биссектрисасы бойынша үшбұрыш салыңдар.

2.120. Екі бұрышы және үшінші бұрышының төбесінен жүргізілген биіктігі бойынша үшбұрыш салыңдар.

2.121. $AB : AC = 2 : 3$ болса, ABC үшбұрышын A бұрышы мен AH медианасы бойынша салыңдар.

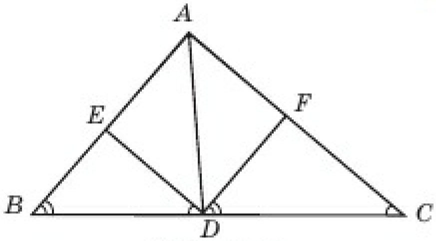
2.122. Егер үшбұрыштың қабырғалары 10 см және 15 см болса, онда үшбұрыштың осы қабырғаларының арасындағы бұрышының биссектрисасы 12 см-ден кем болатынын көрсетіңдер.

2.6. Ұқсастықты қолдану. Үшбұрыш биссектрисаларының қасиеті

Тақырыпты оқып-үйрену барысында сендер:

- үшбұрыш биссектрисаларының қасиеттерін біліп, қолданасыңдар;
- ұқсас фигуралардың аудандары мен ұқсастық коэффициенті арасындағы байланысты білесіңдер;
- үшбұрыштың ұқсастығы белгілерін есептер шығарғанда қолданасыңдар.

1-теорема. *Үшбұрыш бұрышының биссектрисасы осы бұрышқа қарсы жатқан қабырғасын басқа екі қабырғасына пропорционал кесінділерге бөледі.*

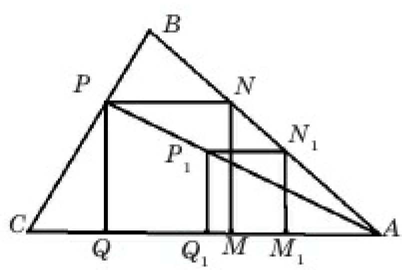


2.25-сурет

(2.116-есепті қараңдар). AD кесіндісі ABC үшбұрышының биссектрисасы болсын. Онда $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$ теңдігі орындалатынын дәлелдеу керек. Ол үшін D нүктесі арқылы үшбұрыштың AB және AC қабырғаларына параллель түзулер жүргізіп, $AEDF$ параллелограмын салайық (2.25-сурет). $AEDF$ ромб болады, өйткені AD диагоналы A және D бұрыштарының биссектрисасы. Екіншіден, сәйкес қабырғалары параллель болғандықтан, ABC, BED және DFC үшбұрыштары өзара ұқсас. Сондықтан $\frac{BC}{AC} = \frac{BD}{DE}$ және $\frac{BC}{AB} = \frac{DC}{DF}$ немесе $BC \times DE = AC \cdot BD$ және $BC \cdot DF = AB \cdot DC$, ал $DE = DF$ болатынын ескерсек, $AC \cdot BD = AB \cdot DC$ Будан $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$. Теорема дәлелденді.

1-мысал. Берілген сүйір бұрышты үшбұрышқа екі төбесі үшбұрыштың табанында, қалған екеуі үшбұрыштың бүйір қабырғаларында жататындай етіп іштей квадрат сызу керек.

1. *Талдау.* Айталық, бізге керек квадрат $MNPQ$ салынды деп есептейік. A нүктесін гомотетия центрі ретінде қарастырып, $MNPQ$ квадратына гомотетиялы $M_1N_1P_1Q_1$ квадратын салу қиын емес. Ол үшін AB қабырғасының кез келген нүктесінен AC қабырғасына M_1N_1 перпендикулярын жүргіземіз. Енді AC қабырғасының бойынан $M_1Q_1 = M_1N_1$ болатындай Q_1 нүктесін M_1 және C нүктелерінің арасында жататындай етіп аламыз. Ең соңында, $M_1N_1P_1Q_1$ квадрат болатындай P_1 нүктесін салу қиын емес (2.26-сурет). Бұл салынған квадраттың екі төбесі ABC үшбұрышының AC қабырғасында, үшінші төбесі AB бүйір қабырғасында жатады. $M_1N_1P_1Q_1$ және $MNPQ$ квадраттары A центріне қатысты гомотетиялы. Сондықтан $MNPQ$ квадра-



2.26-сурет

тын салу үшін көрсетілген тәсіл бойынша $M_1N_1P_1Q_1$ квадратын салып, AP_1 түзуі мен BC қабырғаларының қиылысу нүктесі P-ны тапсақ, жеткілікті. Бұл бізге керекті квадраттың бір төбесі. Енді анықталған жоспар бойынша $MNPQ$ квадратын салу қиын емес.

2. *Салу.* Талдауда көрсетілген тәсіл бойынша $M_1N_1P_1Q_1$ квадратын саламыз: AP_1 түзуі мен BC қабырғаларының қиылысу нүктесін P арқылы белгілеп, $PQ \perp AC$ болатындай $Q \in AC$ нүктесін аламыз. P нүктесі арқылы өтетін және PQ-ға перпендикуляр түзу мен AB кесіндісінің қиылысу нүктесін N деп белгілеп, $MN \perp AC$ болатындай $M \in AC$ нүктесін аламыз. Сонда $MNPQ$ бізге керек квадрат болады.

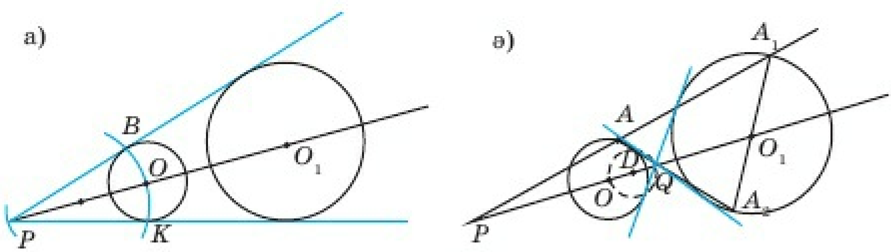
3. *Дәлелдеу.* Салу бойынша $MNPQ$ — тіктөртбұрыш. Өйткені оның үш бұрышы тік. Ал P_1 және P нүктелері A центріне қатысты гомотетиялы. $P_1Q_1 = N_1P_1$ болғандықтан, $PQ = PN$, яғни $MNPQ$ — квадрат.

4. *Зерттеу.* Есептің тек бір ғана шешімі бар.

2-мысал. Берілген екі шеңберге ортақ жанама салу керек.

Біз мұнда толық талдау мен зерттеудің нұсқасын келтіреміз. Есептің шешуін толық жазып орындауды оқушылардың өздеріне тапсырамыз. Айталық, радиустары әртүрлі (2.27-сурет) екі шеңбер берілсін. Бұл шеңберлер гомотетиялы және гомотетия центрі O_1O түзуінде жатады. Егер бірінші шеңберден OA радиусын алсақ, онымен гомотетиялы O_1A_1 радиусы $OA \| O_1A_1$ шартын қанағаттандырады. Егер AA_1 түзуін жүргізсек, ол OO_1 түзуімен P гомотетия центрінде қиылысады. Екіншіден, PB және PK шеңберге ортақ жанамалар болса, PBO және PKO — тік бұрышты үшбұрыштар және олар өзара тең.

P, B, O, K нүктелері бір шеңбердің бойында жатады және бұл шеңбердің центрі PO гипотенузасының ортасында орналасқан C нүктесі болып табылады. Сонымен, центрі

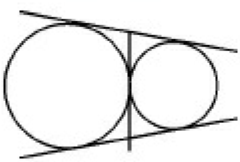


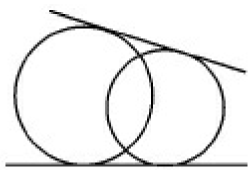
2.27-сурет

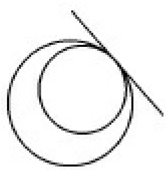
C нүктесінде жататын, радиусы CP-ға тең шеңбер сызсақ, бұл шеңбер берілген центрі O болатын шеңберді B және K нүктелерінде қиып өтеді. Демек, PB және PK түзулері — шеңбердің ортақ жанамалары.

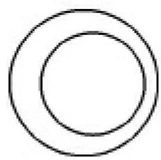
Осы сияқты, O_1A_1 радиусын диаметрге толықтыратын A_2 нүктесін алсақ, A және A_2 нүктелері кері гомотетиялы болады. Оның центрі AA_2 кесіндісі мен OO_1 түзуінің қиылысу нүктесі Q. Онда центрі OQ-дың ортасы D нүктесінде болатындай, радиусы DO-ға тең шеңбер жүргізсек, ол бірінші шеңберді екі нүктеде қияды. Бұл шыққан қиылысу нүктелерін Q нүктесімен қоссақ, онда берілген шеңберлердің ортақ жанамаларын аламыз.

2.27-суретте көрсетілгендей орналасқан шеңберлердің 4 ортақ жанамасы бар. Егер шеңберлер сырттай жанасса, онда олардың 3 ортақ жанамасы бар (2.28-сурет). Қиылысатын шеңберлердің екі ортақ жанамасы бар (2.29-сурет). Іштей жанасатын шеңберлердің тек бір ғана ортақ жанамасы бар (2.30-сурет). Қиылыспай бір-бірінің ішінде орналасатын шеңберлердің ортақ жанамасы болмайды (2.31-сурет).


2.28-сурет


2.29-сурет


2.30-сурет


2.31-сурет

1. Үшбұрыш биссектрисасы қасиетін тұжырымдап дәлелдеңдер.
2. Салу есептері неше кезеңнен тұрады? Бұл кезеңдердің мақсатын, маңызын ашып көрсетіңдер.

ПРАКТИКАЛЫҚ ЖҰМЫС

Топтарға бірігіп, үшбұрыш пен тіктөртбұрыштарды мысалға алып, ұқсастық коэффициенттері k-ға тең ұқсас фигуралар аудандарының қатынасы k^2-қа тең болатынын көрсетіңдер: $F_1 \overset{k}{\sim} F_2 \Rightarrow \dfrac{S(F_1)}{S(F_2)} = k^2$.

ЕСЕПТЕР

A

2.123. BD кесіндісі — ABC үшбұрышының биссектрисасы. 1) $AB = 10$ м, $BC = 15$ м, $AC = 20$ м деп алып, AD мен DC кесінділерін; 2) $AD : DC = 8 : 5$ және $AB = 16$ м деп алып, BC қабырғасын; 3) $AB : BC = 2 : 7$ және $DC - AD = 1$ м деп алып, AC қабырғасын табыңдар.

2.124. ABC үшбұрышына іштей сызылған $ADEF$ ромбысының D, E, F төбелері үшбұрыштың сәйкесінше AB, BC, AC қабырғаларында жатыр. $AB = 14$ см, $BC = 12$ см, $AC = 10$ см деп алып, BE мен EC кесінділерін табыңдар.

2.125. Үшбұрыштың қабырғалары 51 см, 85 см және 104 см. Үшбұрыштың қысқа екі қабырғасын жанай сызылған шеңбердің центрі оның ұзын қабырғасында жатыр. Осы центр үшбұрыштың ұзын қабырғасын қандай бөліктерге бөледі?

2.126. $AB = 15$ м, $AC = 21$ м және $BC = 24$ м кесінділер — шеңбердің хордалары. D нүктесі — CB доғасын қақ бөледі. AD түзуі BC хордасын қандай бөліктерге бөледі?

2.127. Радиустары әртүрлі шеңберлерге ортақ жанамалар жүргізіңдер: 1) шеңберлер қиылыспайды; 2) шеңберлер сырттай жанасады; 3) шеңберлер екі нүктеде қиылысады.

B

2.128. ABC үшбұрышының CC_1 биссектрисасы оның AB қабырғасын $AC_1 = m$, $BC_1 = n$ кесінділеріне бөледі. $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ деп алып, $m = \dfrac{bc}{a+b}$, $n = \dfrac{ac}{a+b}$ теңдіктерін дәлелдеңдер.

2.129. Үшбұрыштың екі қабырғасының қосындысы 14-ке тең, оның биссектрисасы үшінші қабырғасын 3-ке және 4-ке тең кесінділерге бөледі. Үшбұрыштың қабырғаларын табыңдар.

2.130. Тең бүйірлі үшбұрыштың биіктігі 20 см, табанының бүйір қабырғасына қатынасы $4 : 3$ қатынасына тең. Іштей сызылған шеңбердің радиусын табыңдар.

2.131. Тең бүйірлі үшбұрышқа іштей сызылған шеңбердің центрі үшбұрыштың биіктігін $12 : 5$ қатынасында бөледі, бүйір қабырғасы 60 см. Табанын табыңдар.

2.132. E және F нүктелері — $ABCD$ тіктөртбұрышының AD және BC қабырғаларының орталары. Егер ABC және AEF үшбұрыштары ұқсас болса, $AB:AD$ қатынасын табыңдар.

C

2.133. ABC үшбұрышының қабырғалары a, b және c. Үшбұрышқа іштей сызылған шеңбердің центрі AA_1 биссектрисасын қандай қатынаста бөледі?

2.134. BB_1 кесіндісін ABC үшбұрышының биссектрисасы деп алып, $b : 2p = B_1O : B_1B$ теңдігі орындалатынын дәлелдеңдер. Мұндағы O — іштей сызылған шеңбердің центрі, $AC = b$, p — жарты периметр.

2.135. Диагональдарының қатынасы мен берілген қабырғасы бойынша ромб салыңдар.

2.136. Төбелері берілген ромбының қабырғаларында жататындай квадрат салыңдар.

2.137. Диагональдарының қатынасы, диагональдарының арасындағы бұрышы және бір қабырғасының ұзындығы бойынша параллелограмм салыңдар.

Терминдер атауының сөздігі

Қазақша нұсқасы	Орысша нұсқасы	Ағылшынша нұсқасы
Центрлік симметрия. Симметрия центрі	Центральная симметрия. Центр симметрии	Central symmetry. Centre of symmetry
Өстік симметрия. Симметрия өсі	Осевая симметрия. Ось симметрии	Axis symmetry. Axis of symmetry
Параллель көшіру	Параллельный перенос	Translation (parallel transfer)
Бұру	Поворот	Conversion of rotation
Қозғалыс	Движение	Motion
Қозғалыстар композициясы	Композиция движений	Composition of motion
Гомотетия	Гомотетия	Homothety
Гомотетия центрі	Центр гомотетии	Centre of homothety
Ұқсас түрлендіру	Преобразование подобия	Conversion of similarity
Үшбұрыштардың ұқсастық белгілері	Признаки подобия треугольников	Features of triangles'similarity

3-бөлім. ҮШБҰРЫШТАРДЫ ШЕШУ

3.1. Косинустар және синустар теоремасы

Тақырыпты оқып-үйрену барысында сендер:

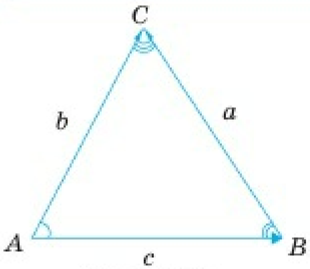
- косинустар теоремасымен танысып, оны қолдануды үйренесіңдер;
- синустар теоремасымен танысып, оны қолдануды үйренесіңдер;
- үшбұрышқа сырттай (іштей) сызылған шеңбердің радиусын (диаметрін) анықтай білесіңдер.

3.1.1. Косинустар теоремасы

1-теорема (косинустар теоремасы). *Егер a, b, c сандары ABC үшбұрышының сәйкесінше A, B, C бұрыштарына қарсы жатқан қабырғаларының ұзындықтары болса, онда*

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos \angle A, \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2a \cdot c \cdot \cos \angle B, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos \angle C \end{aligned} \qquad (1)$$

формулалары орындалады, яғни үшбұрыштың әрбір қабырғасының квадраты өзге екі қабырғасы квадраттарының қосындысы мен осы қабырғалар және олардың арасындағы бұрыштың косинусының екі еселенген көбейтіндісінің айырымына тең.



3.1-сурет

(1) формулалардың біреуін дәлелдесек жеткілікті. Қалғаны да осылай дәлелденеді.

ABC үшбұрышында $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ болсын. Онда $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ болғандықтан (3.1-сурет),

$a^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = b^2 +$
$+ c^2 - 2|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos \angle A = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle A.$

ОРЫНДАП КӨРІҢДЕР!

Осы дәлелдемеге сүйеніп, (1) формулалардың қалған екеуін дәлелдеп көріңдер.

1-мысал. ABC үшбұрышының a, b, c қабырғалары бойынша CD биіктігін табу керек.

Пифагор теоремасына сәйкес $CD = \sqrt{AC^2 - AD^2}$.

Айталық, A бұрышы сүйір бұрыш болсын (3.2, а-сурет). ADC тік бұрышты үшбұрышынан ($\angle ADC=90^\circ$)

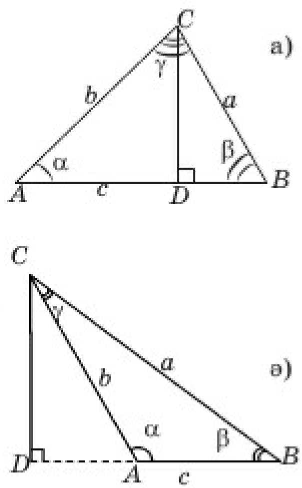
$$AD = AC \cdot \cos \angle A = b \cdot \cos \angle A.$$

(1) формулалардың алғашқысынан

$$b \cdot \cos \angle A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}.$$

Бұдан

$$AD = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}.$$



3.2-сурет

Егер A бұрышы доғал болса (3.2, ә-сурет), ADC тік бұрышты үшбұрышынан

$$AD = AC \cdot \cos(\angle CAD) = AC \cdot \cos(180^\circ - \angle A) = -b \cdot \cos \angle A.$$

Осыдан, алдында көрсетілгендей, (1) формулалардың алғашқысынан

$$AD = -\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$$

теңдігін аламыз. Сонымен, A бұрышының сүйір немесе доғал болуына байланысты

$$AD = \pm \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$$

теңдігі орындалатынын көрсеттік. Мұнда, егер A сүйір бұрыш болса, «+» таңбасы, A доғал болса, «–» таңбасы алынады. Олай болса,

$$CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{b^2 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right)^2}. \qquad (2)$$

2-теорема. *Егер үшбұрыштың бір қабырғасының квадраты қалған екі қабырғасының квадраттарының қосындысынан а) кем; ә) тең; б) артық болса, үшбұрыштың осы қабырғасына қарсы жатқан бұрышы, сәйкесінше а) сүйір; ә) тік; б) доғал болады.*

Айталық, ABC үшбұрышында $\angle A = \alpha$, $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ болсын. Онда косинустар теоремасы бойынша

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha. \qquad (1)$$

а) Айталық, $a^2 < b^2 + c^2$ болсын. (1) теңдіктен

$$2bc \cos\alpha > 0 \text{ немесе } \cos\alpha > 0.$$

Осыдан α бұрышының сүйір екені шығады.

ә) $a^2 = b^2 + c^2$ болса, (1) теңдіктен $2bc \cdot \cos\alpha = 0$ немесе $\cos\alpha = 0$. $\alpha = 90^\circ$ — тік бұрыш.

б) $a^2 > b^2 + c^2$ болса, (1) теңдіктен $2bc \cdot \cos\alpha < 0$ немесе $\cos\alpha < 0$; $\alpha > 90^\circ$ болса, бұрыш доғал.

3.1.2. Синустар теоремасы

3-теорема (синустар теоремасы). *Үшбұрыштың қабырғалары қарсы жатқан бұрыштарының синустарына пропорционал. Егер ABC үшбұрышының қабырғалары a, b, c, қарсы жатқан бұрыштары α, β, γ болса,*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \qquad (3)$$

теңдігі орындалады.

ABC үшбұрышының C төбесінен CD биіктігін түсірейік. $\alpha > \beta$ болсын. Егер α сүйір болса, $CD = b\sin\alpha$ (3.3-сурет). α доғал болса, $CD = b\sin(180^\circ - \alpha) = b\sin\alpha$ теңдігін аламыз (3.4-сурет). Осы сияқты, β сүйір болғандықтан (үшбұрышта екі доғал бұрыш болмайды), $CD = a\sin\beta$.

$$b\sin\alpha = a\sin\beta$$

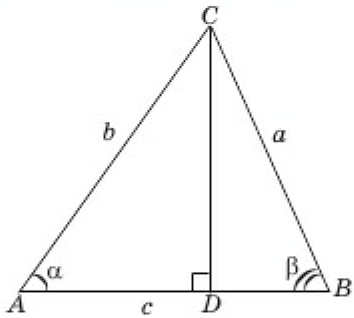
немесе

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}. \qquad (4)$$

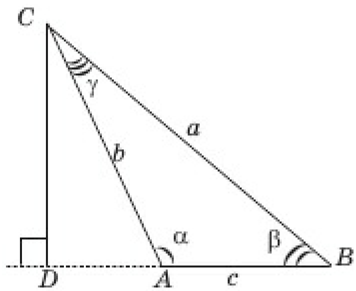
Тура осы сияқты, үшбұрыштың B төбесінен түсірілген биіктігін қарастырсақ,

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}. \qquad (5)$$

(4), (5) теңдіктерден (3) теңдік шығады.



3.3-сурет



3.4-сурет

2-мысал. ABC үшбұрышына сырттай сызылған шеңбердің радиусы R болса,

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R \qquad (6)$$

теңдігі орындалатынын дәлелдеу керек.

Егер ABC үшбұрышында $\angle BAC = \alpha$, $AC = b$, $AB = c$ болса, онда $S_\Delta = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin\alpha$. Айталық R —үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің радиусы және $BC = a$ болсын, онда 5- беттегі формула бойынша $R = \frac{abc}{4S_\Delta}$, яғни $2R = \frac{abc}{2S_\Delta}$. Осыдан $2R = \frac{abc}{bc\sin\alpha} = \frac{a}{\sin\alpha}$. Сондықтан, синустар теоремасы бойынша $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$ теңдігі орындалады.

ABC үшбұрышында $\angle C = \gamma$, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Косинустар теоремасынан

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Егер $\gamma = 90^\circ$ болса, $\cos\gamma = \cos 90^\circ = 0$. Ендеше $c^2 = a^2 + b^2$. Біз мұнда Пифагор теоремасының тағы бір дәлелдемесін келтірдік. Сонымен, дәлелдегеніміз бойынша Пифагор теоремасы — косинустар теоремасының дербес жағдайы. Сондықтан кейде косинустар теоремасын Пифагор теоремасының жалпы түрі деп атайды.

1. Косинустар теоремасын дәлелдеп беріңдер. Оны неге Пифагор теоремасының жалпы түрі деп атайды?
2. Үш қабырғасы бойынша үшбұрыштың биіктігін қалай анықтауға болады?
3. Синустар теоремасын дәлелдеп беріңдер.
4. Егер үшбұрыштың бір қабырғасы мен оған қарсы жатқан бұрыштың шамасы белгілі болса, осы үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің диаметрін қалай анықтауға болады?

ТАРИХҚА ШОЛУ

Евклидтің 15 томнан тұратын «Бастамалар» атты еңбегі б.з.д. 300 жылдар шамасында жарық көрген. «Бастамалар» екі мың жылдай геометриядан негізгі оқу құралы ретінде қолданылып, математиканың дамуына орасан зор үлес қосқан еңбек.

ЕСЕПТЕР

А

3.1. Үшбұрыштың қабырғалары 3 м, 4 м және 5 м. Үшбұрыш бұрыштарының косинустарын табыңдар.

3.2. ABC үшбұрышында $\angle A = 30^\circ$, $AC = 2$ см, $BC = \sqrt{2}$ см болса, B бұрышын табыңдар.

3.3. Үшбұрыштың a, b қабырғалары мен олардың арасындағы γ бұрышы берілген. Үшбұрыштың үшінші c қабырғасын табыңдар: 1) $a = 3$ м, $b = 5$ м, $\gamma = 30^\circ$; 2) $a = 2\sqrt{2}$ м, $b = 3$ м, $\gamma = 45^\circ$; 3) $a = 8$ см, $b = 3\sqrt{3}$ см, $\gamma = 120^\circ$; 4) $a = 4$ см, $b = 7$ см, $\gamma = 60^\circ$.

3.4. Үшбұрыш қабырғалары 5 см, 7 см, оның үшінші қабырғасына қарсы жатқан бұрышы 45°. Үшбұрыштың үшінші қабырғасын табыңдар.

3.5. Үшбұрыштың ұзындығы $5\sqrt{3}$ м болатын қабырғасына іргелес бұрыштары 45° және 75°. Осы үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің радиусын табыңдар.

3.6. Үшбұрыштың ауданы 44 см^2. Ұзындықтары 8 см, 11 см болатын қабырғалары арасындағы бұрышты табыңдар.

3.7. Параллелограмм қабырғалары 4 см және $2\sqrt{3}$ см. Егер оның ауданы 12 см^2 болса, сүйір бұрышы неге тең?

3.8. Үшбұрыштың a және b қабырғалары мен a қабырғасына қарсы жатқан α бұрышы берілген. b қабырғасына қарсы жатқан β бұрышының синусын табыңдар: 1) $a = 3$ м, $b = 5$ м, $\alpha = 30^\circ$; 2) $a = 8$ м, $b = 7$ м, $\alpha = 60^\circ$; 3) $a = 2\sqrt{2}$ см, $b = 3$ см, $\alpha = 45^\circ$; 4) $a = 6$ см, $b = 2\sqrt{3}$ см, $\alpha = 120^\circ$.

3.9. ΔABC үшбұрышының CD биіктігі мен ауданын табыңдар: 1) $AB = 2$ см, $AC = 7$ см, $BC = 6$ см; 2) $AB = 4$ см, $AC = 6$ см, $BC = 5$ см; 3) $AB = 0{,}3$ м, $AC = 0{,}4$ м, $BC = 0{,}6$ м; 4) $AB = 13$ дм, $AC = 12$ дм, $BC = 5$ дм.

3.10. Үшбұрыштың a қабырғасы мен оған қарсы жатқан α бұрышы бойынша сырттай сызылған шеңбер радиусын табыңдар: 1) $a = 5$ м, $\alpha = 30^\circ$; 2) $a = 3\sqrt{2}$ см, $\alpha = 45^\circ$; 3) $a = 0{,}6$ дм, $\alpha = 150^\circ$; 4) $a = 21$ см, $\alpha = 60^\circ$.

B

3.11. ABC үшбұрышының белгісіз элементтерін табыңдар: 1) $a = 3$, $c = 2$, $\angle B = 60^\circ$; 2) $b = 3$, $c = 4$, $\angle A = 135^\circ$; 3) $a = 2{,}4$, $b = 1{,}3$, $\angle C = 30^\circ$; 4) $a = 0{,}15$, $b = 0{,}62$, $\angle B = 150^\circ$; 5) $a = 4$, $b = 5$, $c = 6$; 6) $a = 12$, $b = 5$, $c = 13$; 7) $a = 24{,}6$, $\angle B = 45^\circ$, $\angle C = 70^\circ$; 8) $a = 16$, $b = 10$, $\angle A = 80^\circ$; 9) $c = 14$, $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 40^\circ$; 10) $b = 4{,}5$, $\angle A = 30^\circ$, $\angle C = 75^\circ$.

3.12. ABC үшбұрышының ауданы S, $AC = b$, $BC = a$ болса, $\angle C$-ны табыңдар. 1) $a = 7$, $b = 8$, $S = 14$; 2) $a = 12$, $b = 5\sqrt{3}$, $S = 45$ деп алыңдар.

3.13. Диагональдары d_1 және d_2, кіші қабырғасы a-ға тең параллелограмның диагональдары арасындағы бұрышты табыңдар: 1) $d_1 = 10$ см, $d_2 = 12$ см, $a = \sqrt{31}$ см; 2) $d_1 = 4$ м, $d_2 = 2\sqrt{3}$ м, $a = 1$ м деп алыңдар.

3.14. Сүйірбұрышты үшбұрыштың екі қабырғасы 6 см және 8 см, олардың арасындағы бұрыштың синусы 0,6-ға тең. Үшбұрыштың қалған бұрыштарының синустары мен үшінші қабырғасын табыңдар.

3.15. ABC үшбұрышында $\angle A = 45^\circ$, $\angle C = 30^\circ$ және AD биіктігі 3 м болса, оның қабырғаларын табыңдар.

3.16. Тең бүйірлі трапецияның кіші табаны бүйір қабырғасына тең, үлкен табаны 10 см, табанындағы бұрышы 70°. Трапецияның периметрін табыңдар.

8–4338

3.17. Ұзындығы 10 см-ге тең кесіндіге керілген циркуль ашаларының арасындағы бұрыш 30°-қа тең. Егер осы циркульдің ашалары 20 см-ге тең кесіндімен керілсе, циркуль ашаларының арасындағы бұрыш қандай болады?

3.18. Қабырғалары 1) 5, 4 және 4; 2) 17, 8 және 15; 3) 9, 5 және 6 болатын үшбұрыштың бұрыштарына қатысты түрін анықтаңдар.

3.19. Үшбұрыш қабырғалары a, b, c-ға тең.

1) $a^2 + b^2 > c^2$ болса, онда c қабырғасына қарсы сүйір бұрыш;

2) $a^2 + b^2 = c^2$ болса, онда c қабырғасына қарсы тік бұрыш;

3) $a^2 + b^2 < c^2$ болса, онда c қабырғасына қарсы доғал бұрыш жататынын дәлелдеңдер.

3.20. Қабырғалары 5 м, 6 м және 7 м болатын үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің радиусын табыңдар.

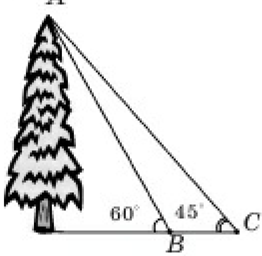
3.21. Параллелограмның диагональдары мен олардың арасындағы бұрышы белгілі болса, оның қабырғаларын қалай табады?

C

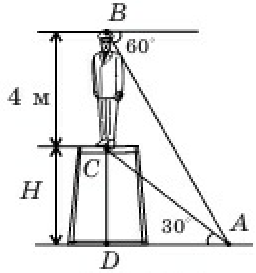
3.22. Үшбұрыштың доғал бұрышына қарсы ең үлкен қабырғасы қарсы жататынын дәлелдеңдер.

3.23. Егер $BC = a$ болса, 3.5-суретте көрсетілген мәліметтер бойынша теректің биіктігін қалай табуға болады?

3.24. 3.6-суретте көрсетілген мәліметтер бойынша H-ты анықтаңдар.



3.5-сурет



3.6-сурет

3.25. a қабырғасына іргелес жатқан бұрыштары α мен β-ға тең үшбұрыштың биссектрисаларын табыңдар.

3.26. $A_1A_2 = d_1$, $A_2A_3 = d_2$ және A_1, A_2, A_3 нүктелері бір түзудің бойында жатыр. Егер K нүктесінен A_1A_2 және A_2A_3 кесінділері φ бұрышымен көрінсе, A_1K, A_2K, A_3K-ның ұзындықтарын табыңдар.

3.27. Қабырғалары a, b, c-ға тең үшбұрыштың c қабырғасына түсірілген биіктігін (2) формуланы пайдаланып,

$$h_c = \frac{2S}{c}$$

формуласы бойынша табуға болатынын дәлелдеңдер. Бұл формуланы жеңілірек тәсілмен алуға бола ма?

3.28. Қабырғалары a, b, c-ға тең үшбұрышқа іштей сызылған шеңбердің радиусы

$$r = \frac{S}{p}$$

формуласымен анықталатынын көрсетіңдер. Мұндағы

$$p = \frac{a+b+c}{2}.$$

3.29. CD — ABC үшбұрышының медианасы. Егер $AC > BC$ болса, $\angle ACD < \angle BCD$ екенін дәлелдеңдер.

3.30. Өзеннің екі жағында орналасқан A және B пункттерінің арақашықтығын синустар теоремасын қолданып қалай табуға болады?

3.31*. ABC сүйір бұрышты үшбұрышының биіктіктері O нүктесінде қиылысады. ABC, AOB, AOC, BOC үшбұрыштарына сырттай сызылған шеңберлердің радиустары өзара тең болатынын дәлелдеңдер.

3.2. Үшбұрыштарды шешу

Тақырыпты оқып-үйрену барысында сендер:
- үшбұрыштарды шешу ұғымын білесіңдер;
- іштей сызылған үшбұрыштың ауданын оның қабырғалары мен сырттай сызылған шеңбердің радиусы арқылы өрнектейтін формуланы қорытып шығарасыңдар;
- сырттай сызылған көпбұрыштың ауданын оның жарты периметрі мен іштей сызылған шеңбердің радиусы арқылы өрнектейтін формуланы қорытып шығарасыңдар.

***Үшбұрыштарды шешу** деп оның берілген элементтері бойынша барлық белгісіз қабырғалары мен бұрыштарын табуды айтады.* Енді осыған бірнеше мысал қарастырайық. Бұдан былай үшбұрыштың a, b, c қабырғаларына қарсы жатқан бұрыштарын $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ арқылы белгілейміз.

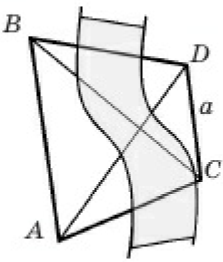
1-мысал. Берілгені c, $\angle A$ және $\angle B$. Үшбұрыштың қалған екі қабырғасы мен үшінші бұрышын табыңдар.

$\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B$. Онда синустар теоремасы бойынша $\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{c}{\sin\angle C}$ және $\frac{b}{\sin\angle B} = \frac{c}{\sin\angle C}$. Осыдан $a = \frac{c\cdot\sin\angle A}{\sin\angle C}$, $b = \frac{c\cdot\sin\angle B}{\sin\angle C}$.

2-мысал. Үшбұрыштың a, b, c қабырғалары берілген. Оның бұрыштарын табу керек.

Косинустар теоремасы бойынша $\cos\angle A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos\angle B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$, $\cos\angle C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$. Осыдан A, B, C бұрыштарының жуық шамаларын төрт таңбалы кесте бойынша анықтаймыз.

3-мысал. Барып өлшеу жұмыстарын жүргізуге болмайтын жерде орналасқан екі нүктенің арақашықтығын табу керек.



3.7-сурет

3.7-суретте көрсетілгендей, өзеннің келесі бетіне шықпай-ақ, $CD = a$ қашықтығын, сонымен қатар $\angle ACD = \alpha$, $\angle ADC = \beta$, $\angle BCD = \gamma$ және $\angle BDC = \varphi$ бұрыштарын өлшеп табуға болады.

$\angle CAD = 180^\circ - \alpha - \beta$, $\angle CBD = 180^\circ - \gamma - \varphi$ және синустар теоремасынан

$$\frac{AC}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin(180^\circ - \alpha - \beta)} = \frac{a}{\sin(\alpha+\beta)}$$

немесе $AC = \frac{a\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. Осы сияқты, BCD үшбұрышынан

$$\frac{BC}{\sin\varphi} = \frac{a}{\sin(180^\circ - \gamma - \varphi)} = \frac{a}{\sin(\gamma+\varphi)}.$$

Осыдан $BC = \frac{a\cdot\sin\varphi}{\sin(\gamma+\varphi)}$.

Енді ABC үшбұрышынан $\angle ACB = \alpha - \gamma$ екенін ескеріп, косинустар теоремасына сәйкес

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC\cdot BC\cdot\cos(\alpha-\gamma)$ теңдігін жазып, A және B нүктелерінің арақашықтығын анықтаймыз:

$$AB = \sqrt{\frac{a^2\sin^2\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)} + \frac{a^2\sin^2\varphi}{\sin^2(\gamma+\varphi)} - 2\cdot\frac{a^2\sin\beta\sin\varphi\cos(\alpha-\gamma)}{\sin(\alpha+\beta)\sin(\gamma+\varphi)}}.$$

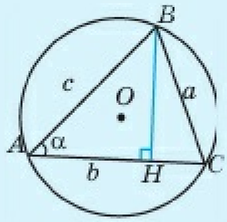
ТОПТЫҚ ЖҰМЫС

Екі топқа бөлініп берілген тапсырманы орындаңдар. Нәтижесін сыныппен бірге талқыландар.

1-топ тапсырмасы. Қабырғалары a, b, c, ал сырттай сызылған шеңбердің радиусы R болатын үшбұрыштың ауданы

$$S = \frac{abc}{4R}$$

формуласымен есептелінетінін көрсетіңдер (3.8-сурет).

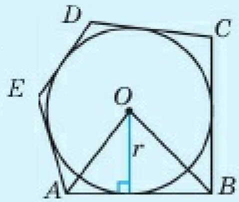


3.8-сурет

2-топ тапсырмасы. Шеңберге сырттай сызылған көпбұрыштың ауданы

$$S = rp$$

формуласымен анықталатынын көрсетіңдер (3.9-сурет).



3.9-сурет

Мұндағы p — көпбұрыштың жарты периметрі.

Нұсқау: 1. BH биіктігін екі бұрышы мен c қабырғасы арқылы өрнектеп, $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$ теңдігін қолданыңдар.

2. Көпбұрышқа іштей сызылған шеңбердің центрін көпбұрыш төбелерімен қосып, көпбұрышты бірнеше үшбұрыштарға бөліп қарастырыңдар.

1. Үшбұрыштарды шешу деп нені түсінесіңдер?
2. Үшбұрыштарды шешуде қандай теоремаларды жиі қолданады?

ПРАКТИКАЛЫҚ ЖҰМЫС

3.5-суретте көрсетілген тәсілді қолданып, а) мектептің; ә) бағанның биіктігін анықтаңдар.

ЕСЕПТЕР

A

3.32. ABC үшбұрышында $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ деп белгілеп, төмендегі мәліметтер бойынша үшбұрыштың белгісіз элементтерін анықтаңдар:[1)]

1) $a = 5$, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 40^\circ$; 2) $b = 4{,}56$, $\alpha = 30^\circ$, $\gamma = 75^\circ$;
3) $c = 14$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 70^\circ$; 4) $a = 12$, $b = 8$, $\gamma = 60^\circ$;

[1)] Мұнда және келесі есептерде арнайы атап көрсетілмесе, бұрыштарды анықтау деп оның синусын немесе косинусын табуды түсіну қажет.

5) $b = 9$, $c = 17$, $\alpha = 80^\circ$; 6) $a = 7$, $c = 10$, $\beta = 120^\circ$;
7) $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$; 8) $a = 4$, $b = 10$, $c = 7$.

3.33. Қабырғалары 5 м, 4 м және 3 м болатын үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің диаметрін табыңдар.

3.34. Қабырғалары a-ға және b-ға тең параллелограмның сүйір бұрышы α-ға тең. Оның диагональдарын табыңдар. 1) $a = 3$ м, $b = 2$ м, $\alpha = 30^\circ$; 2) $a = 0{,}8$ м, $b = 0{,}5$ м, $\alpha = 45^\circ$; 3) $a = \frac{3}{4}$ м, $b = \frac{5}{4}$ м, $\alpha = 60^\circ$ деп алыңдар.

3.35. Параллелограмның диагональдары c мен d-ға тең және олардың арасындағы бұрышы α. Параллелограмның қабырғаларын табыңдар. 1) $c = 5$ м, $d = 6$ м, $\alpha = 60^\circ$; 2) $c = 22$ см, $d = 14$ см, $\alpha = 30^\circ$; 3) $c = 0{,}5$ м, $d = 1{,}5$ м, $\alpha = 120^\circ$; 4) $c = \frac{4}{3}$ м, $d = \frac{3}{4}$ м, $\alpha = 45^\circ$ деп алыңдар.

3.36. ABC үшбұрышының $AB = 12$ см қабырғасына іргелес бұрыштары $\angle A = 75^\circ$, $\angle B = 60^\circ$ болса, AC қабырғасы мен үшбұрыштың ауданын табыңдар.

3.37. Егер $S_{ABC} = 120$ см², $\angle A = 30^\circ$, $AB = 75$ см болса, AC мен BC-ны табыңдар.

3.38. Үшбұрыштың бір қабырғасы мен екі бұрышы берілген. Оның үшінші бұрышын, өзге екі қабырғасын және ауданын табыңдар: 1) $BC = 8$ см, $\angle B = 30^\circ$, $\angle C = 45^\circ$; 2) $AB = 5$ см, $\angle A = 75^\circ$, $\angle C = 45^\circ$; 3) $AC = 12$ см, $\angle B = 40^\circ$, $\angle C = 120^\circ$; 4) $BC = 20$ см, $\angle B = 30^\circ$, $\angle C = 120^\circ$.

3.39. Үшбұрыштың үш қабырғасы берілген. Оның бұрыштары мен ауданын табыңдар: 1) $a = 2$ см, $b = 4$ см, $c = 5$ см; 2) $a = 3$ м, $b = 4$ м, $c = 5$ м; 3) $a = 7$ дм, $b = 3$ дм, $c = 8$ дм; 4) $a = 15$ см, $b = 24$ см, $c = 18$ см.

3.40. Екі қабырғасы мен біреуіне қарсы жатқан бұрышы бойынша үшбұрышты шешіңдер: 1) $a = 4$ см, $b = 5$ см, $\alpha = 60^\circ$; 2) $b = 7$ см, $c = 3\sqrt{2}$ см, $\gamma = 45^\circ$; 3) $a = 4\sqrt{3}$ м, $c = 4$ м, $\alpha = 120^\circ$; 4) $a = 8$ дм, $b = 5$ дм, $\beta = 30^\circ$.

3.41. Параллелограмның қабырғасы 4 см және 6 см, сүйір бұрышы 45°. Оның кіші диагоналын табыңдар.

B

3.42. Үшбұрыштың қабырғалары 4 см, 5 см және 6 см. Үшбұрыштың үлкен қабырғасына түсірілген басқа екі қабырғасының проекцияларын анықтаңдар.

3.43. Үшбұрыштың екі қабырғасы мен арасындағы бұрышы берілген. Үшбұрыштың үшінші қабырғасы мен бұрыштарын және ауданын табыңдар: 1) $a = 3$ см, $b = 8$ см, $\gamma = 30^{\circ}$; 2) $a = 6$ см, $c = 4$ см, $\beta = 60^{\circ}$; 3) $b = \dfrac{4}{3}$ м, $c = \dfrac{3}{4}$ м, $\alpha = 45^{\circ}$; 4) $a = 0{,}6$ м, $b = 0{,}8$ м, $\gamma = 120^{\circ}$.

3.44. Қабырғалары 5 см, 6 см және 7 см болатын үшбұрыштың биіктіктерін табыңдар.

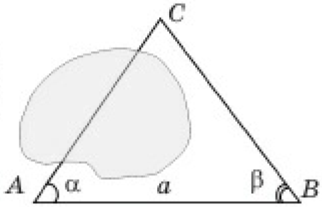
3.45. Шамасы жағынан тең екі күш бір-бірімен 72° бұрыш жасай отырып, бір нүктеге әрекет етеді. Егер теңәрекетті күштің шамасы 120 Н болса, осы күштерді табыңдар.

3.46. Шамалары 100 Н және 200 Н күштер бір-бірімен 50° бұрыш жасай отырып, бір нүктеге әрекет етеді. Тең әрекетті күштің шамасын және оның берілген күштермен жасайтын бұрыштарын табыңдар.

3.47. Үшбұрыштың екі қабырғасы $\sqrt{13}$ және $\sqrt{10}$, үшінші қабырғасы өзіне түсірілген биіктікке тең. Үшбұрыштың үшінші қабырғасын табыңдар.

3.48. Ромбының диагоналы 20 см және оның қабырғасымен 20° бұрыш жасайды. Ромбының екінші дигоналы мен қабырғасын табыңдар.

3.49. Егер $AB = a$, $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$ болса (3.10-сурет), A және C нүктелерінің арақашықтығын қалай табуға болады?



3.10-сурет

3.50. Қабырғасы a-ға, сүйір бұрышы α-ға тең ромбыға іштей сызылған шеңбер радиусын табыңдар.

3.51. Трапецияның табандары 14 м және 19 м, бүйір қабырғалары 6 м және 8 м. Трапецияның бұрыштарын табыңдар.

3.52. Параллелограмның диагоналы 18 см және оның қабырғаларымен 20° және 40° бұрыш жасайды. Параллелограмның қабырғаларын табыңдар.

C

3.53. Үшбұрыштың ұзындығы 5 м және 6 м болатын қабырғаларының арасындағы бұрыштың косинусы 0,6. Үшбұрыштың медианаларын табыңдар.

3.54. ABC үшбұрышының AD биссектрисасы жүргізілген. $AB:AC=BD:CD$ теңдігі орындалатынын дәлелдеңдер.

3.55. Қабырғалары a, b, c-ға тең үшбұрыштың биссектрисаларын анықтаңдар.

3.56. Сүйір бұрышты үшбұрыштың a-ға және b-ға тең қабырғаларына түсірілген медианалары өзара перпендикуляр болса, үшбұрыштың үшінші қабырғасын табыңдар.

3.57. Тік бұрышты үшбұрыштың $2p$ периметрі мен гипотенузасына түсірілген h_c биіктігі бойынша оның қабырғаларын табыңдар.

3.58. ABC үшбұрышында A бұрышы B бұрышынан 2 есе үлкен және $AB = c$, $AC = b$. BC қабырғасын табыңдар.

3.59. ABC үшбұрышында $\angle A = 120^\circ$, $AC = 20$ см, $AD = 12{,}5$ см — биссектриса. Үшбұрыштың өзге екі қабырғасын табыңдар.

3.60. Тең бүйірлі трапецияның табандары 12 см және 16 см, оған сырттай сызылған шеңбердің центрі үлкен табанында жатыр. Трапецияның бүйір қабырғасы мен диагоналын табыңдар.

3.61. ABC үшбұрышының AH биіктігі, AD биссектрисасы және AE медианасы жүргізілген. $AH \leqslant AD \leqslant AE$ теңсіздігінің орындалатынын дәлелдеңдер.

3.62. ABC үшбұрышының A және B бұрыштарының айырымы φ-ге, C төбесінен түсірілген биіктігі $BC-AC$ айырымына тең. Үшбұрыштың бұрыштарын табыңдар.

3.3. Тригонометрияның кейбір қолданылулары

Тақырыпты оқып-үйрену барысында сендер:

- геометриялық есеп шарттарына талдау жасауды үйренесіңдер;
- синустар және косинустар теоремаларын үшбұрыштарды және қолданбалы есептерді шешкенде қолданасыңдар;
- дұрыс көпбұрыштарды салуды меңгересіңдер.

3.3.1. Тригонометрияны үшбұрыштарды шешуде қолдану

Алдыңғы бапта негізінен косинустар және синустар теоремаларын қолданып, үшбұрыштарды шешуде тригонометрия элементтерінің маңызды орын алатынын көрдік. Енді планиметрияда тригонометрия элементтерін өзге де күрделі есептерді шешуде қолдануға болатынын мысалдар келтіріп қарастырамыз. Бұл тақырып математиканы тереңдетіп оқытатын сыныптар мен білімдерін өз бетінше жетілдіргісі келетін қабілетті оқушыларға арналғандықтан, мұнда негізінен жоғары деңгейлі есептер жинақталған. Мұндай есептерді шығарудың кейбір өзіндік ерекшеліктері бар және әрбір есеп дайын формула көмегімен бірден, қандай да бір алгоритм көмегімен шешіле коймайды. Сондықтан геометриялық есептерді (жалпы күрделі есептерді) шешудің жолы мен тәсілдерін анықтауды есептің шартына талдау жасаудан бастаған дұрыс. Талдау кезінде есеп шартында берілген объектілер жөніндегі деректер мен мәліметтерді анықтауды, табуды, дәлелдеуді қажет тұтатын объектінің қасиеттері арасындағы байланыс механизмін анықтап, қажет болса, есепті шешуге керекті сызбаны сызу керек. Сонан соң қажетті сызбаны салып, осы сызба бойынша есеп шартын қысқаша жазу керек. Келесі кезеңде талдау кезінде жоспарланған іс-әрекеттерді жүйелі түрде орындап, есептің жауабы жазылады. Әрине, бұл есепті шешудің жалпы жобасы ғана. Енді оны мысал арқылы қарастырайық.

1-мысал. Табанындағы бұрышы α болатын тең бүйірлі үшбұрыштың биіктігі оған іштей сызылған шеңбер радиусынан a-ға артық. Үшбұрыштың табаны мен оған сырттай сызылған шеңбердің радиусын табу керек.

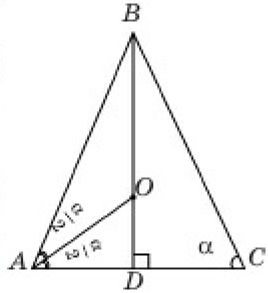
Алдымен есептің шартына талдау жасайық. Әдетте бұл талдау жұмыстары ауызша орындалады.

Сонымен, есеп шарты бойынша тең бүйірлі үшбұрыштың табанындағы α бұрышы және табанына түсірілген биіктігі мен осы үшбұрышқа іштей сызылған шеңбер радиусының айырымы a арқылы берілген. Осы мәліметтерден бізге қолайлы мынадай деректер алуға болады:

1) табанындағы α бұрышы бойынша үшбұрыштың барлық бұрыштарын анықтай аламыз;

2) тең бүйірлі үшбұрышқа іштей сызылған шеңбердің центрі оның табанына түсірілген биіктіктің бойында жататыны және шеңбер үшбұрыштың табан қабырғасын осы биіктік түсірілген нүктеде жанайтыны белгілі.

Осы деректер бойынша үшбұрыштың сызбасын сызып, талдауды салынған сызба бойынша жалғастыру керек (3.11-сурет). Салынған сызба бойынша BD — биіктік, O — іштей сызылған шеңбердің центрі (үшбұрыштың биссектрисаларының қиылысу нүктесі) болса, OD іштей сызылған шеңбердің радиусы болады. Сонда $BD - OD = BO = a$.



3.11-сурет

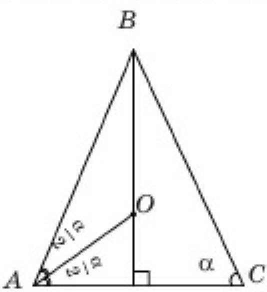
Енді есепті шешу жоспарын құрайық: AC табанын табу үшін $AD = DC$ болатынын ескеріп, AD-ны анықтаса жеткілікті. AD-ны α және $a = BO$ арқылы бірден анықтай қоятын формула жоқ. Сондықтан BD-ның немесе AB-ның ұзындығын білсек, ABD тік бұрышты үшбұрышынан AD-ны анықтаған болар едік. Ал BD мен AB-ның ұзындықтары берілмеген. Ендігі жерде BD-ны немесе AB-ны берілген деректер бойынша анықтау мүмкіндіктерін іздестіру керек:

1) BD-ны BO мен α арқылы байланыстыратын механизм оңайлықпен (егер мұндай механизм бар болса) табыла қоймайды және ол байланысты іздестіру есепті қиындатып жіберуі мүмкін. Онда есепті шешудің екінші жолын қарастыру керек;

2) AB мен BO кесінділері AOB үшбұрышы арқылы бір-бірімен байланыста болатынын көреміз және бұл үшбұрыштың барлық бұрыштарын α арқылы өрнектеуге болады, яғни AOB үшбұрышы есеп шартында берілген шамалармен толық анықталады.

Сонымен, AOB үшбұрышына синустар теоремасын қолданып AB-ны, сонан соң AD-ны (AC-ны) анықтай аламыз. Ал $2R = \dfrac{AB}{\sin\alpha}$ формуласынан ABC үшбұрышына сырттай сызылған шеңбердің радиусын табамыз.

Міне, шамамен осы үлгіде әрбір есептің шартына ауызша талдау жасай білу қажет. Күрделі есептерді шеше білу қабілеті оның шартына талдау жасай білу және қажетті сызбаны дұрыс орындай білу қабілетіне тікелей тәуелді.



3.12-сурет

Талдаудан соң есептің сызбасын орындап, сызба бойынша есептің берілгенін қысқаша жазу қажет.

Берілгені: ΔABC, $AB = BC$, $\angle A = \angle C = \alpha$, $BD \perp AC$, $\angle OAD = \dfrac{\alpha}{2}$, $OB = a$.

Табу керек: AC- ны және сырттай сызылған шеңбердің R радиусын.

Шешуі. 3.12-сурет бойынша

$$\angle BAO = \angle OAD = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \angle AOD = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle AOB = 180^\circ - (90^\circ - \frac{\alpha}{2}) = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}.$$

ΔAOB: синустар теоремасы бойынша

$$\frac{AB}{\sin(\angle AOB)} = \frac{BO}{\sin\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \frac{AB}{\sin\left(90^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{a}{\sin\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow AB = \frac{a \cdot \cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} =$$
$$= a \cdot \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

ABD тік бұрышты үшбұрышынан:

$$AD = AB \cdot \cos\alpha = a \cdot \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\alpha \Rightarrow AC = 2 \cdot AD = 2a \cdot \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\alpha,$$

$$2R = \frac{AB}{\sin\alpha} = \frac{a \cdot \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}}{2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow R = \frac{a}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Жауабы. $AC = 2a \cdot \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\alpha$, $R = \dfrac{a}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

1. Есептің шартына талдау жасау дегенді қалай түсінесіңдер?
2. Есепті шешу жоспары қалай құрылады?

ПРАКТИКАЛЫҚ ЖҰМЫС

Сыныпта бірлесіп шешілген есептің кейбіріне жазбаша талдау жасаңдар (3.63-3.64-есептерді қарастырыңдар).

ЕСЕПТЕР

А

3.63. Параллелограмның биіктіктері h_1 және h_2, периметрі $2p$ болса, параллелограмның сүйір бұрышын табыңдар.

3.64. Параллелограмның сүйір бұрышы α, диагональдарының қиылысу нүктесінен тең емес қабырғаларына дейінгі қашықтықтары m және n. Параллелограмның диагональдары мен ауданын табыңдар.

3.65. Ромбының сүйір бұрышы α, биіктігі h. Ромбының ауданын табыңдар.

3.66. Диагональдарының арасындағы бұрышы 45° және диагоналы $10\sqrt{2}$ см болатын тіктөртбұрыштың ауданын табыңдар.

3.67. ABC үшбұрышында $\angle A = 60^\circ$, оның биіктіктері $BD = 4$ см, $CE = 6$ см. Үшбұрыштың ауданын табыңдар.

3.68. ABC үшбұрышында $\angle A = 45^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, оның биіктігі $CD = 5$ м. Үшбұрыштың қабырғаларын табыңдар.

3.69. Тең бүйірлі трапецияның кіші табаны оның a-ға тең бүйір қабырғасымен бірдей, сүйір бұрышы α-ға тең. Трапецияның үлкен табаны мен ауданын табыңдар.

3.70. Тең бүйірлі үшбұрыштың табаны 10 см, табанындағы бұрышы 30°. Үшбұрышқа іштей және сырттай сызылған шеңберлердің радиустарын табыңдар.

B

3.71. Тең бүйірлі үшбұрыштың табанындағы бұрышы α-ға тең. Оған іштей және сырттай сызылған шеңберлердің радиустарының қатынастарын табыңдар.

3.72. Егер үшбұрыштың екі қабырғасы m-ге және n-ге тең, ауданы $0{,}3mn$-ге тең болса, үшбұрыштың үшінші қабырғасын табыңдар.

3.73. Шеңберге сырттай сызылған трапецияның табанындағы сүйір бұрыштары α-ға және β-ға тең. Егер трапецияның ауданы S-ке тең болса, онда шеңбердің радиусын табыңдар.

3.74. Тең бүйірлі трапецияның биіктігі h, диагональдарының арасындағы бүйір қабырғасына қарсы жатқан бұрышы α-ға тең. Трапецияның орта сызығын табыңдар.

3.75. Тіктөртбұрыштың диагоналы d-ға тең және ол тіктөртбұрыштың бұрышын $p : q$ қатынасында бөледі. Тіктөртбұрыштың периметрін табыңдар.

3.76. Тең бүйірлі үшбұрыштың бүйір қабырғасына түсірілген биіктігі оны $m:n$ қатынасында бөледі. Үшбұрыштың бұрыштарын табыңдар.

3.77. Тең бүйірлі үшбұрыштың a табаны мен табанындағы α бұрышы берілген. Оның бүйір қабырғасына түсірілген медианасын табыңдар.

3.78. Үшбұрыштың a-ға және b-ға тең қабырғалары мен олардың арасындағы α бұрышы берілген. Үшбұрыштың үшінші қабырғасына түсірілген биіктігін табыңдар.

3.79. Ауданы S-ке тең ромбыға іштей сызылған шеңбердің радиусы r-ге тең. Ромбының сүйір бұрышын табыңдар.

3.80. Тең бүйірлі үшбұрыштың төбесіндегі бұрышы α-ға, оған іштей сызылған шеңбердің радиусы r-ге тең. Үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің радиусын табыңдар.

C

3.81. ABC үшбұрышында $\angle A = \alpha$, $AB = c$, $AC = b$ $(b > c)$. A бұрышының сыртқы бұрышы биссектрисасының BC түзуімен шектелетін кесіндісін табыңдар.

3.82. Төбесі O нүктесінде орналасқан бұрыштың ішкі A нүктесінен оның қабырғаларына AB және AC перпендикулярлары түсірілген. Егер $\angle BOC = \alpha$, $OB = m$, $OC = n$ болса, AB мен AC-ны табыңдар.

3.83 Үшбұрыштың екі қабырғасының ұзындықтары a және b. Осы қабырғаларының арасындағы бұрыштың биссектрисасы l. Үшбұрыштың ауданын табыңдар.

3.84. Үшбұрыштың бұрыштары белгілі деп алып, оның бір төбесінен жүргізілген медианасы мен биіктігі арасындағы бұрышты табыңдар.

3.85. Сүйір бұрышты ABC үшбұрышының A және B төбелерінен түсірілген биіктіктері m және n, осы биіктіктерінің арасындағы сүйір бұрышы α. Үшбұрыштың AB қабырғасын табыңдар.

3.86. Үшбұрыштың екі қабырғасының ұзындықтары a және b. Осы қабырғалардың арасындағы бұрыштың биссектрисасы l. Үшбұрыштың осы бұрышын табыңдар.

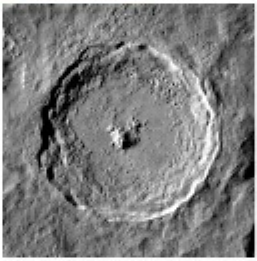
3.87. Тең қабырғалы үшбұрыш төбесінен шығатын сәуле осы бұрышқа қарсы жатқан қабырғаны $p : q$ қатынасында бөледі. Осы сәуле мен үшбұрыш табаны арасындағы сүйір бұрышты табыңдар.

3.88. ABC үшбұрышының ішкі O нүктесі $\angle ABO = \angle BCO = \angle CAO = \varphi$ теңдігін қанағаттандырады. $\operatorname{tg}\varphi$-ді үшбұрыш ауданы мен оның қабырғалары арқылы өрнектеңдер.

3.89. ABC үшбұрышына іштей сызылған шеңбердің центрі O нүктесі $OA^2 = OB \cdot OC$ теңдігін қанағаттандырса, үшбұрыштың A, B, C төбелеріндегі α, β, γ бұрыштары $\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2} = 2\sin^2\dfrac{\alpha}{2} + \sin\dfrac{\alpha}{2}$ теңдігін қанағаттандыратынын дәлелдеңдер.

Терминдер атауының сөздігі

Қазақша нұсқасы	Орысша нұсқасы	Ағылшынша нұсқасы
Үшбұрыштарды шешу	Решение треугольников	Solution triangles
Косинустар теоремасы	Теорема косинусов	The cosine theorem
Синустар теоремасы	Теорема синусов	The sine theorem
Дұрыс көпбұрыш	Правильные многоугольники	Proper polygon



Тихо — Ай бетіндегі соқтығыстан пайда болған кратер, XVI ғасырда өмір сүрген даниялық астроном және алхимик Тихо Браһенің құрметіне аталған. Мұндай кратерлер табиғи жолмен пайда болған шеңбердің көптеген мысалдарының бірі болып табылады.

4-бөлім. ШЕҢБЕР. КӨПБҰРЫШТАР

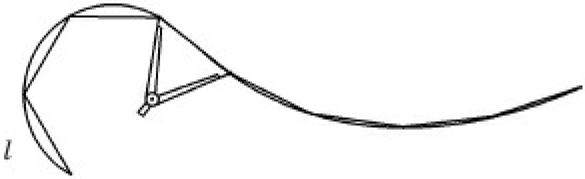
4.1. Шеңбердің ұзындығы
4.2. Дөңгелек пен оның бөліктерінің ауданы
4.3. Іштей және сырттай сызылған төртбұрыштар
4.4. Дөңгелектегі пропорционал кесінділер
4.5. Көпбұрыштар

4.1. Шеңбердің ұзындығы

Тақырыпты оқып-үйрену барысында сендер:
- қисық доғасы ұзындығы ұғымын білесіңдер;
- шеңбер мен оның доғасы ұзындығы формуласын қорытып шығарасыңдар және оны қолданасыңдар.

4.1.1. Қисық сызықтың ұзындығы түсінігі

Онша қашық емес ирек жолдың ұзындығын қадаммен өлшеуге болады. Екі бекет арасындағы теміржол ұзындығын телеграф бағаналары аралықтарының санымен өлшеуге болады. Ал сызбадағы немесе карта бетіндегі қисық сызықтың ұзындығын ашасы өзгермейтін циркуль қадамдарымен өлшеуге болады. Осы қарастырылған мысалдардың барлығында да біз қисықтың ұзындығын оған іштей сызылған сынық сызықтың ұзындығымен алмастырдық. Олай болса, іс жүзінде біздер қисық ұзындығының дәл мәні емес, оның белгілі бір дәрежедегі жуық мәнін анықтадық. Бұл жуықтау дәрежелері қисыққа іштей сызылған сынық сызықтың буындары ұзындығына тәуелді. Буын ұзындықтары неғұрлым қысқа болған сайын сынық сызық ұзындығы қисық ұзындығына соғұрлым



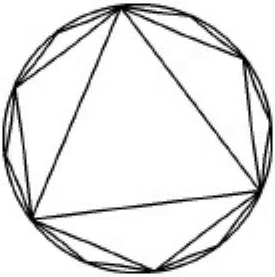
4.1-сурет

дәлірек жуықтай түседі (4.1-сурет). Осы мысалдарға сүйеніп, қисықтың ұзындығына мынадай анықтама беруге болады: l қисығына іштей сызылған сынық сызықтар буынының саны n және оның ұзындығы P_n болсын. Сонымен қатар жеңілдік үшін қисыққа іштей сызылған сынық сызықтың барлық буындарының ұзындықтары бірдей деп есептейміз. Онда l қисығының ұзындығы деп $n \to \infty$ болғандағы осы қисыққа іштей сызылған сынық сызық ұзындықтары P_n-нің «шегін» айтамыз.

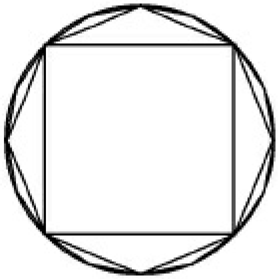
4.1.2. Шеңбердің ұзындығы

Шеңбер ұзындығы да §4.1-ты көрсетілген тәсіл бойынша анықталады: *шеңбер ұзындығы деп оған іштей сызылған дұрыс көпбұрыштардың қабырғаларының саны шексіз көп болғанда периметрлерінің ұмтылатын шегін айтамыз.*

Жалпы шеңберге іштей сызылған дұрыс көпбұрыштар қабырғаларының санын көбейтуді орындауға болады. Әдетте ыңғайлы болу үшін, екі еселеу тәсілін қолданады. Мысалы, 4.2-суретте шеңберге іштей сызылған дұрыс үшбұрыш, алтыбұрыш, онекібұрыш бейнеленген. Осы сияқты шеңберге іштей дұрыс 4, 8, 16 т.с.с. бұрышты көпбұрыштар сызуға болады (4.3-сурет). Алдымен мынадай теореманы дәлелдейік.



4.2-сурет



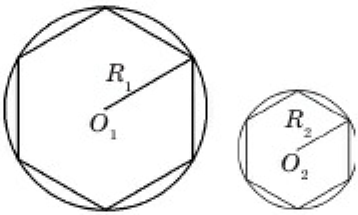
4.3-сурет

Теорема. *Кез келген екі шеңбер ұзындықтарының қатынасы олардың сәйкес радиустарының қатынасына тең.*

Айталық, $\omega_1(O_1; R_1)$ және $\omega_2(O_2; R_2)$ шеңберлері берілсін. Бұл шеңберлердің ұзындықтарын сәйкесінше C_1 және C_2 арқылы белгілейік. Онда

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{R_1}{R_2} \qquad (1)$$

теңдігі орындалатынын көрсетейік.



4.4-сурет

Шынында да, берілген шеңберлерге іштей дұрыс n бұрыштар сызайық және олардың периметрлерін сәйкесінше P_1 және P_2 арқылы белгілейік (4.4-сурет). Онда дұрыс n бұрыштардың ұқсастығынан

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{R_1}{R_2}.$$

Егер көпбұрыш қабырғаларының саны n өте көп болса, анықтама бойынша P_1, P_2 периметрлерінің сәйкесінше C_1, C_2 шеңбер ұзындықтарынан айырмашылығы шамалы, n өскен сайын бұл айырмашылық мейлінше аз болады. $\frac{P_1}{P_2}$ қатынасының шегі $\frac{C_1}{C_2}$ қатынасына ұмтылады. Сондықтан

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

теңдігі орындалады.

Салдар. *Шеңбер ұзындығының оның диаметріне қатынасы шеңберге тәуелсіз, барлық шеңберлерге бірдей ортақ сан.*

Шынында да, дәлелденген теорема бойынша кез келген $\omega_1(O_1; R_1)$ және $\omega_2(O_2; R_2)$ шеңберлері үшін

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

теңдігі орындалады. Мұнда C_1 және C_2 — сәйкесінше ω_1 және ω_2 шеңберлерінің ұзындықтары. Осыдан $\frac{C_1}{R_1} = \frac{C_2}{R_2}$ немесе $\frac{C_1}{2R_1} = \frac{C_2}{2R_2}$ теңдігі шығады. Дәлелдеу керегі де осы.

Сонымен, кез келген шеңбер үшін оның ұзындығы C мен диаметрі $2R$-дің қатынасы тұрақты шеңберге тәуелсіз сан болатынын көреміз. Бұл санды π (гректің «пи» әрпі) арқылы белгілейді:

$$\frac{C}{2R} = \pi.$$

Осыдан

$$C = 2\pi R \tag{2}$$

шеңбер ұзындығының формуласы шығады.

Жалпы $\pi = 3{,}14159...$ — иррационал сан. Ғылым салаларында көбінесе оның 0,01-ге дейінгі дәлдікпен алынған жуық мәнін қолданады: $\pi \approx 3{,}14$.

ТҮСІНДІРІҢДЕР

Шеңбер доғасының ұзындығы оған сәйкес центрлік бұрыштың шамасына пропорционал болатынын түсіндіріңдер.

1°-қа тең центрлік бұрышқа сәйкес келетін шеңбер доғасының ұзындығы шеңбер ұзындығының $\frac{1}{360}$ бөлігіне тең. Бұл доғаның ұзындығы $\frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}$. Олай болса, α°-қа тең центрлік бұрышқа сәйкес келетін доғаның ұзындығы

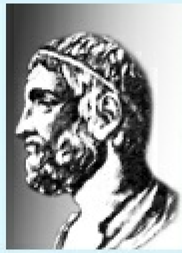
$$l = \pi R \frac{\alpha}{180}. \tag{3}$$

Енді центрлік бұрыш шамасы радиан арқылы берілген жағдайды қарастырайық. Шамасы 1 радианға тең центрлік бұрышқа тірелген доғаның ұзындығы шеңбер ұзындығының $\frac{1}{2\pi}$ бөлігіне тең, яғни $\frac{2\pi R}{2\pi} = R$ болатынын жақсы білеміз. Шамасы α радианға тең центрлік бұрышқа сәйкес шеңбер доғасының ұзындығы

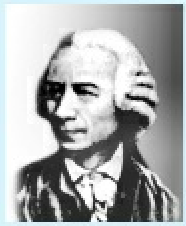
$$l = R \cdot \alpha. \tag{4}$$

9–4338

ТАРИХҚА ШОЛУ


Архимед (б.з.д. III ғ.)

π саны — иррационал сан. Практикалық жұмыстарда оның 0,01-ге дейінгі дәлдікпен алынған жуық мәнін жиі қолданады: $\pi \approx 3,14$. π санын осындай дәлдікпен алғаш рет гректің ұлы ғалымы Архимед тапқан. π санының жуық мәнін іштей сызылған дұрыс көпбұрыштардың периметрлерін қолданып $\pi = \dfrac{P_n}{2 \cdot R}$ формуласымен анықтауға болады. Осы тәсілмен Самарқандағы Ұлықбек обсерваториясында шығыс математигі аль-Каши (XV ғ.) 800335168 қабырғасы бар дұрыс көпбұрышты қарастыра отырып, π санының 16-таңбасына дейін дәл тапқан. Шеңбер ұзындығының диаметріне қатынасын π әрпімен белгілеуді алғаш рет Леонард Эйлер енгізген. π грек тіліндегі «шеңбер» сөзінің бірінші әрпі. Сонымен қатар Эйлер жоғары математика тәсілдерін қолданып, π санының 153-таңбасына дейін дәл тапқан. Осы күндері есептеуіш құралдардың көмегімен π санының бірнеше мыңдаған таңбаларына дейін дәл табуға болады. Практикалық жұмыстар үшін мұндай дәлдіктердің онша қажеті де жоқ.


Л. Эйлер (1707—1783)

1. Қисық сызықтың ұзындығын қалай жуықтап есептеуге болады? Қисық сызықтың ұзындығы деген не?
2. Шеңбер ұзындығына анықтама беріңдер. Оны қалай түсінетіндеріңді айтыңдар.
3. Шеңбер ұзындығы жөніндегі теореманы дәлелдеңдер.
4. Шеңбер ұзындығы қандай формуламен анықталады?
5. Шеңбер доғасының ұзындығын анықтайтын формулаларды жазыңдар.
6. π саны жөнінде не білесіңдер?
7. а) Шеңбер ұзындығы мен радиусының арасындағы байланысты (тәуелділікті) қалай атауға болады?

   ә) Шеңбер радиусын екі есе арттырса, шеңбер ұзындығы қалай өзгереді?

   б) Шеңбер ұзындығын l шамасына ұзартса, шеңбер радиусы қалай өзгереді?

   в) Шеңбер радиусын r шамасына ұзартса, шеңбер ұзындығы қалай өзгереді?

ПРАКТИКАЛЫҚ ЖҰМЫС

Қандай да бір цилиндр пішінді (көлденең қимасы дөңгелек болатын) дене алыңдар.

1) Оның сыртынан жіп орап, осы жіптің толық бір орамының ұзындығын өлшеңдер.

Осы ұзындықты пайдаланып, алынған дененің көлденең қимасының радиусын анықтаңдар.

2) Алынған дененің көлденең қимасының диаметрін өлшеп алып, (2) формуланы пайдаланып, осы қиманы қоршаған шеңбердің ұзындығын табыңдар.

3) 1 және 2-тапсырмалар нәтижелерінде алынған шеңбер ұзындығының мәндерін салыстырыңдар. $\frac{C}{2R}$ және π сандарын салыстырыңдар.

ЕСЕПТЕР

А

4.1. Егер радиусы R-ге тең, шеңбер ұзындығы C болса, төмендегі кестені толтырыңдар:

C			4π		27		6,25
R	2	5		$\frac{2}{7\pi}$		$\sqrt{3}$	

4.2. Радиусы 1) 2 м; 2) 1,5 м болатын ағаштың диаметрін табыңдар.

4.3. Тең қабырғалы үшбұрышқа 1) сырттай; 2) іштей сызылған шеңбердің ұзындығын табыңдар. Үшбұрыш қабырғасы 3 см.

4.4. Қабырғасы 4 см болатын квадратқа 1) сырттай; 2) іштей сызылған шеңбердің ұзындығын табыңдар.

4.5. Сағаттың ұзындығы 5 см болатын минуттық тілінің ұшы 1) 5 минутта; 2) 20 минутта; 3) 1 сағатта сызып өтетін доғаның ұзындығы қандай?

4.6. Сәйкес центрлік бұрышы 1) 30°; 2) 40°; 3) $\frac{\pi}{5}$; 4) $\frac{2\pi}{3}$ болатын, радиусы 15-ке тең шеңбер доғасының ұзындығын табыңдар.

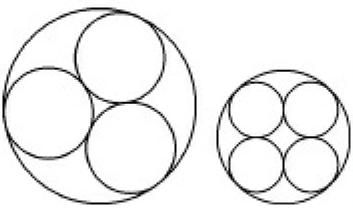
4.7. Шеңбер ұзындығының 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $\frac{1}{5}$; 4) $\frac{1}{6}$; 5) $\frac{2}{3}$; 6) $\frac{3}{4}$ бөлігіне тең доғаға сәйкес центрлік бұрышты анықтаңдар.

B

4.8. Арба 942 м жүргенде оның доңғалағы 300 рет айналғаны белгілі. Доңғалақтың диаметрі қандай?

4.9. Экватордың ұзындығы шамамен 40 000 000 м. Жерді шар пішінді деп есептеп, оның радиусын метр есебімен табыңдар.

4.10. Қабырға сағаты маятнигінің тербелу бұрышы 38°, маятниктің ұшы сызатын доғаның ұзындығы 24 см. Маятниктің ұзындығы қандай?



4.5-сурет

4.11. Егер Жер шарының радиусын 1 см өсірсе, онда экватор қаншалықты ұзарады?

4.12. 4.5-суретте көрсетілген кішкене шеңберлердің радиусы r-ді (олар өзара тең) үлкен шеңбердің радиусы R арқылы өрнектеңдер.

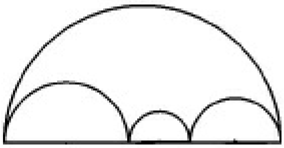
4.13. Теміржол бұрылысының радиусы 5 км, бұрылыс доғасының ұзындығы 400 м. Теміржол бастапқы бағытынан неше градусқа ауытқыған?

4.14. Концентрлі екі шеңбермен шектелетін фигураны сақина деп, радиустардың айырымын сақинаның ені деп атайды.

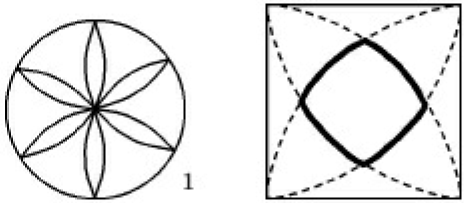
1) Сақинаның енін шеңберлердің ұзындықтары бойынша өрнектеңдер.

2) Сақинаның үлкен және кіші радиустары 26 см және 10 см болса, осы сақинаға сыйғызуға болатын (яғни толық осы сақинада жататын) ең ұзын кесіндінің ұзындығын табыңдар.

4.15. 1) Катеті a-ға тең және оған қарсы жатқан бұрышы φ болатын тік бұрышты үшбұрышқа; 2) гипотенузасы c-ға тең тең бүйірлі тік бұрышты үшбұрышқа; 3) диагональдары a-ға және b-ға тең ромбыға іштей сызылған шеңбердің ұзындығын табыңдар.



4.6-сурет



1 2

4.7-сурет

C

4.16. Сағат 15.00-ді көрсетіп тұрған сағаттың минуттық тілінің ұшы оның сағаттық тілімен беттескенше жүріп өтетін доғаның ұзындығын қалай табуға болады?

4.17. 4.6-суретте көрсетілген үлкен жарты шеңбер ұзындығы мен кішкене үш жарты шеңберлер ұзындықтарының қосындысын салыстырыңдар.

4.18. 4.7-суреттегі қалыңырақ сызықпен сызылған қисықтардың ұзындығын табыңдар.

4.19. A, B және C нүктелері радиусы R-ге тең шеңбер бойында жатыр және ABC доғасының ұзындығы $0{,}5\pi R$-ге тең. D нүктесі шеңбердің бойында жатуы үшін осы нүктеден AC кесіндісі қандай бұрышпен көрінуі қажет?

4.20. Жер шарын айнала шеңбер бойымен ұшатын жерсерік бір айналым жасағанда 42076 км жол жүреді. Егер Жердің радиусы 6370 км болса, жерсерік Жер бетінен қандай қашықтықта ұшады?

4.21. Берілген қабырғасы бойынша дұрыс сегізбұрышты қалай салуға болады?

4.2. Дөңгелек пен оның бөліктерінің ауданы

Тақырыпты оқып-үйрену барысында сендер:

- дөңгелек, сектор және сегмент ауданының формулаларын қорытып шығарасыңдар және оларды қолдануды үйренесіңдер.

4.2.1. Дөңгелектің ауданы

Дөңгелек деп жазықтықтың шеңбермен шектелген бөлігін айтамыз. Егер бұл шеңбердің центрі O нүктесінде жатып, радиусы R-ге тең болса, дөңгелектің әр нүктесінен O центріне дейінгі қашықтықтың радиусы R-ден артық болмайды.

Енді дөңгелектің ауданын есептейтін формуланы қорытып шығарудан бұрын оның ауданын есептеу тәсіліне тоқталайық. Шеңбер ұзындығын анықтағанымызға ұқсас (§2) дөңгелек ауданын осы дөңгелекті қоршаған шеңберге іштей сызылған дұрыс көпбұрыштардың аудандары арқылы анықтауға болатынын көрсетейік.

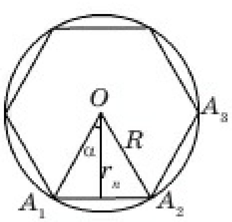
Шынында да, $S_3, S_4, \ldots, S_n, \ldots$ арқылы дөңгелекті шектейтін шеңберге іштей сызылған дұрыс көпбұрыштар аудандарының тізбегін және S арқылы осы дөңгелектің ауданын белгілейік. Бұл сан тізбегі бірсарынды (монотонды) өспелі тізбек болатынын тексеру қиын емес және ол жоғарыдан шенелген. Өйткені бұл тізбектің әрбір мүшесі дөңгелекке сырттай сызылған кез келген көпбұрыштың (атап айтсақ, квадраттың) ауданынан кіші болады. Онда бірсарынды тізбектер жөніндегі теорема бойынша $S_3, S_4, \ldots, S_n, \ldots$ тізбегінің шегі бар және бұл шекті дөңгелектің ауданы деп атаймыз:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

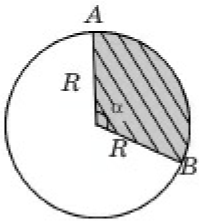
Енді дөңгелек ауданын есептейтін формуланы қорытып шығаруға болады.

Теорема. *Радиусы R-ге тең дөңгелектің ауданы $S = \pi R^2$ формуласымен анықталады.*

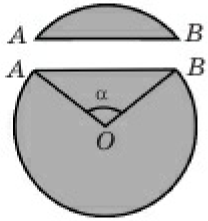
Айталық, $A_1A_2\ldots A_n$ дұрыс көпбұрышы радиусы R-ге тең дөңгелекті шектейтін шеңберге іштей сызылған дейік (4.8-сурет). Осы көпбұрыштың әрбір төбесін шеңбер центрімен қоссақ, көпбұрыш өзара тең тең бүйірлі n үшбұрышқа бөлінеді. Үшбұрыштардың O төбесінен түсірілген биіктіктерін (***апофема*** деп атайды) r_n арқылы белгілейік. OA_1A_2 үшбұрышының ауданы $S_\Delta = \dfrac{1}{2} r_n \cdot A_1A_2$ формуласымен анықталатындықтан, n бұрыштың ауданы



4.8-сурет



4.9-сурет



4.10-сурет

$$S_n = \frac{1}{2} r_n \cdot A_1A_2 \cdot n.$$

$A_1A_2 \cdot n$ көпбұрышының периметрі r_n болғандықтан,

$$S_n = \frac{1}{2} r_n \cdot P_n.$$

Мұнда $r_n = R \cdot \cos\alpha = R \cdot \cos\dfrac{180^\circ}{n}$ және $n \to \infty$ болғанда $r_n \to R$, $P_n \to C = 2\pi R$-ге ұмтылады. Олай болса,

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot R \cdot 2\pi R = \pi R^2.$$

4.2.2. Сектор мен сегмент ауданы

Дөңгелек секторы *деп доға және дөңгелектің осы доғаға тірелген радиустармен шектелген бөлігін айтамыз* (4.9-сурет).

Центрлік бұрышы 1°-қа тең сектор ауданы дөңгелек ауданының $\dfrac{1}{360}$ бөлігіне тең: $\dfrac{\pi R^2}{360}$. Осыны ескерсек, центрлік бұрышы α болатын сектордың ауданы $S_{сек.} = \dfrac{\pi R^2 \cdot \alpha}{360}$ формуласымен есептелінеді. Егер α радиан есебімен берілсе, онда сектор ауданы $S_{сек.} = \dfrac{\alpha}{2} \cdot R^2$ формуласымен есептелінетінін дәлелдеу қиын емес.

Кез келген хорда дөңгелекті екі бөлікке бөледі. Осы бөліктердің әрқайсысын ***дөңгелектің сегменті*** деп атайды. 4.10-суретте көрсетілгендей, α бұрышының шамасына байланысты сегмент ауданы сәйкес сектор ауданынан AOB үшбұрышының ауданын азайту ($\alpha < 180^\circ$) немесе қосу ($\alpha > 180^\circ$) арқылы анықталады. $S_{сег} = S_{сек} \pm S_{\Delta}$.

Мұнда $S_{\Delta} = S_{AOB}$. Егер $\alpha < 180^{\circ}$ болса, бұл формуланы «–» таңбасымен, $\alpha > 180^{\circ}$ болса, «+» таңбасымен алу қажет.

ТАРИХҚА ШОЛУ

Ежелгі Грек дәуірінен бастап π саны анықталғанға дейін көптеген ғұлама математиктер циркуль мен сызғышты пайдаланып, ауданы берілген дөңгелек ауданына тең болатын квадрат салуға тырысқан. Бұл есеп ***дөңгелектің квадратурасы*** деп аталды. Тек XIX ғасырдың соңында ғана бұл есептің шешімі табылмайтындығы дәлелденді.

1 Дөңгелек дегеніміз не?
2. Дөңгелектің ауданы қалай анықталады?
3. Дұрыс көпбұрыштың ауданын жазыңдар.
4. Дөңгелек ауданының формуласын жазыңдар.
5. Сектор ауданы қалай анықталады?
6. Сегмент ауданын қалай табуға болады?

ПРАКТИКАЛЫҚ ЖҰМЫС

Дәптер бетіне цилиндр пішіндес ыдыс (кесе) көмегімен шеңбер салыңдар. Осы шеңбермен шектелген дөңгелектің ауданын табыңдар.

ЕСЕПТЕР

A

4.22. Радиусы R шеңбермен шектелген дөңгелектің ауданы S-ті өрнектейтін формула көмегімен төмендегі кестені толтырыңдар.

R			$\frac{3}{\sqrt{\pi}}$	2	5		
S	4π	25π				9	11

4.23. Егер шеңбердің радиусын 1) 2 есе кемітсе; 2) 3 есе арттырса, онда сәйкес дөңгелектің ауданы қалай өзгереді?

4.24. Қабырғасы a-ға тең дұрыс 1) үшбұрышқа; 2) квадратқа; 3) алтыбұрышқа сырттай және іштей сызылған дөңгелектердің аудандарын есептеңдер.

4.25. Егер екі дөңгелек аудандарының қатынасы 2:3 қатынасындай болса, олардың диаметрлерінің қатынасы неге тең?

4.26. Центрлік бұрышы 45°-қа тең сектордың ауданы 1 $м^2$. Осы секторға сәйкес дөңгелектің радиусы қандай?

4.27. Центрлік бұрыштары 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°; 4) 90°; 5) 180°; 6) 300° болатын секторлардың ауданы дөңгелек ауданының қандай бөлігіне тең?

B

4.28. 4.24-есептегі фигураларға іштей және сырттай сызылған шеңберлермен шектелген сақинаның ауданын есептеңдер.

4.29. Радиусы R-ге тең шеңбердің центрінен h қашықтығында жүргізілген хорда дөңгелекті екі бөлікке бөледі. Осы бөліктердің ауданын табыңдар (бұл бөліктерді де сегменттер деп атайды) ($h < R$).

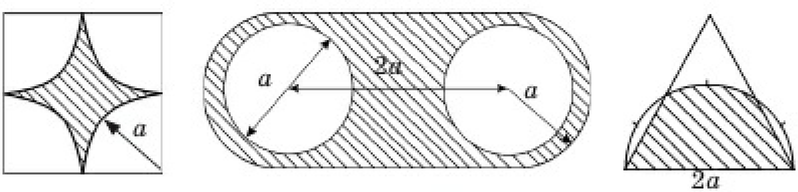
4.30. 4.29-есептегі хорда α градустық центрлік бұрышқа керілген және шеңбердің радиусы R-ге тең деп алып, есепті қайта шығарыңдар.

4.31. Дөңгелекке қабырғалары 16 см және 12 см болатын тіктөртбұрыш іштей сызылған. Дөңгелектің ауданын табыңдар.

4.32. Газ құбырының ішкі диаметрі 1376 мм, сыртқы диаметрі 1420 мм. Құбырдың көлденең қимасының ауданын табыңдар. Алыс қашықтықтарға газ тасымалдау үшін үлкен диаметрлі құбырларды қолданудың қандай тиімділігі бар?

C

4.33. 4.11-суретте бейнеленген фигуралардың ауданын анықтаңдар.



4.11-сурет

4.34. 60°-тық сектордың ауданы мен оған іштей сызылған дөңгелектің аудандарының қатынасын анықтаңдар.

4.35. Қабырғасы a-ға тең дұрыс n бұрышқа іштей және сырттай шеңберлер сызылған. Осы шеңберлермен шектелген сақинаның ауданы n-ге тәуелсіз болатынын көрсетіңдер.

4.36. Концентрлі екі шеңбердің кішісін жанайтын үлкен шеңбердің хордасы оның диаметрі болатындай етіп дөңгелек салынған. Осы дөңгелектің ауданы берілген концентрлі шеңберлермен шектелген сақинаның ауданына тең болатынын дәлелдеңдер.

4.37. Берілген шеңберге сырттай дұрыс 1) үшбұрыш; 2) төртбұрыш; 3) алтыбұрыш; 4) сегізбұрыш сызыңдар.

4.38. Бассейнге радиустары R және r-ге тең екі құбырмен су құйылатын. Бұл құбырларды су өткізу өнімділігі олармен тең шамалы бір құбырмен алмастырды. Жаңа құбырдың диаметрі қандай?

4.39. Екі дөңгелектің ортақ хордалары сәйкесінше олардың 60° және 120° доғаларын кереді. Осы дөңгелектер аудандарының қатынасын табыңдар.

4.3. Іштей және сырттай сызылған төртбұрыштар

Тақырыпты оқып-үйрену барысында сендер:

- іштей сызылған бұрыш анықтамасын және оның қасиеттерін білесіңдер;
- шеңберге іштей және сырттай сызылған төртбұрыштардың қасиеттері мен белгілерін біліп, оларды қолданасыңдар.

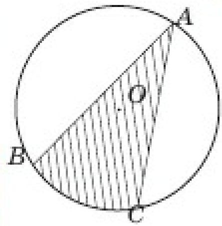
4.3.1. Шеңберге іштей сызылған бұрыштар

Анықтама. 1) *Егер көпбұрыштың барлық төбелері бір шеңбердің бойында жатса, бұл көпбұрышты* ***іштей сызылған көпбұрыш*** *деп атайды.*

2) *Егер шеңбер көпбұрыштың барлық қабырғаларын жанаса, көпбұрышты* ***сырттай сызылған көпбұрыш*** *деп атайды.*

3) *Шеңбердің бір нүктесінен шығатын екі хорданың арасындағы бұрышты шеңберге* ***іштей сызылған бұрыш*** *деп атайды* (4.12-сурет). Суреттегі хордалардың ортақ A нүктесін бұрыштың ***төбесі***, BC доғасын осы ***бұрышқа тірелген***

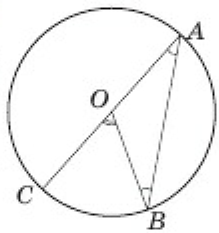
доға деп атайды. Алдымен іштей сызылған бұрыштың бір қасиетін қарастырайық (оның өзге қасиеттерін арнаулы тарауда қарастырамыз).



4.12-сурет

1-теорема. ***Іштей сызылған бұрыштың шамасы өзі тірелген доғаның градусты өлшемінің жартысына тең.***

Іштей сызылған бұрыш шеңбер центріне байланысты үш түрлі жағдайда орналасуы мүмкін: 1) шеңбер центрі іштей сызылған бұрыштың қабырғасында жатсын (4.13-сурет). $OA = OB$ болғандықтан, AOB — тең бүйірлі үшбұрыш. Осыдан $\angle OAB = \angle OBA$ және



4.13-сурет

$\angle AOB = 180^\circ-(\angle OAB + \angle OBA) = 180^\circ - 2 \cdot \angle OAB.$

Сондықтан $\angle COB = 2 \cdot \angle OAB$. Ал $\angle COB = \smile CB$ болғандықтан, $\angle OAB = \frac{1}{2} \smile CB$, $\angle CAB = \frac{1}{2} \smile OB$.

2) Шеңбердің центрі іштей сызылған бұрыштың ішінде орналасқан (4.14-сурет). Дәлелдегеніміз бойынша

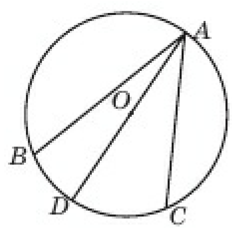
$$\angle BAD = \frac{1}{2} \smile BD \text{ және } \angle DAC = \frac{1}{2} \smile DC.$$

$$\angle BAC = \angle BAD + \angle DAC = \frac{1}{2} (\smile BD + \smile DC) = \frac{1}{2} \smile BC.$$

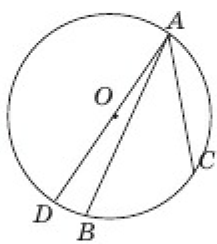
3) Шеңбердің центрі іштей сызылған бұрыштан тысқары жатсын (4.15-сурет). $\angle DAC = \frac{1}{2} \smile DC$ және $\angle DAB = \frac{1}{2} \smile DB$ болғандықтан,

$$\angle BAC = \angle DAC - \angle DAB = \frac{1}{2} \smile DC - \frac{1}{2} \smile DB = \frac{1}{2} \smile BC.$$

Салдар. *Диаметрге тірелген іштей сызылған бұрыш 90°-қа тең.*

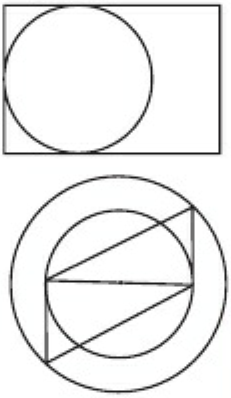


4.14-сурет



4.15-сурет

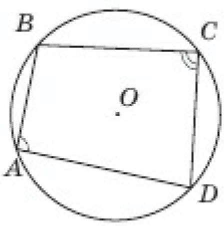
4.3.2. Шеңберге іштей және сырттай салынған төртбұрыштар



4.16-сурет

Үшбұрыштарғыға ұқсас, кез келген төртбұрышқа іштей не сырттай шеңбер сыза беруге болмайды. Мысалы, квадрат болмайтын тіктөртбұрышқа іштей, тіктөртбұрыш болмайтын параллелограмға сырттай шеңбер сызуға болмайды (4.16-сурет). Дегенмен іштей және сырттай сызылған төртбұрыштар табылады. Солардың кейбір қасиеттерін қарастырайық.

2-теорема. *Іштей сызылған төртбұрыштың қарама-қарсы бұрыштарының қосындысы 180°-қа тең.*



4.17-сурет

Айталық, $ABCD$ төртбұрышы іштей сызылған болсын (4.17-сурет). Онда іштей сызылған бұрыштардың қасиеті бойынша

$\angle A = \frac{1}{2} \cup BCD$, $\angle C = \frac{1}{2} \cup BAD$. Олай болса,

$$\angle A + \angle C = \frac{1}{2} \cup BCD + \frac{1}{2} \cup BAD = \frac{1}{2}(\cup BCD + \cup BAD).$$

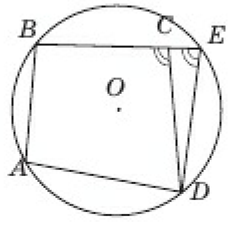
Алайда $\cup BCD$ және $\cup BAD$ доғаларының бірігуі толық шеңбер болады. Сондықтан

$$\angle A + \angle C = \frac{1}{2} 360^\circ = 180^\circ.$$

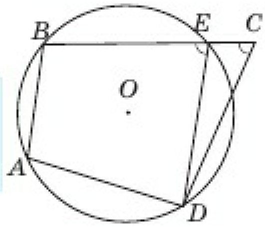
3-теорема. ***Егер төртбұрыштың қарама-қарсы бұрыштарының қосындысы 180°-қа тең болса, бұл төртбұрышқа сырттай шеңбер сызуға болады.***

$ABCD$ төртбұрышы үшін $\angle A + \angle C = 180^\circ$ болсын дейік. ABD үшбұрышына сырттай шеңбер сызамыз. Енді C төбесі осы шеңбердің бойында жататынын дәлелдейік. Егер бұлай болмаса, C нүктесі шеңбердің ішінде не шеңбердің сыртында орналасуы керек. Айталық, C нүктесі шеңбердің ішінде орналасын және BC түзуімен шеңбер E нүктесінде қиылыссын (4.18-сурет). Онда $\angle A + \angle C = 180^\circ$ және

$\angle A + \angle E = 180^{\circ}$ теңдігінен $\angle C = \angle E$ теңдігін аламыз. Бірақ бұл теңдіктің орындалуы мүмкін емес. Алынған қайшылық C нүктесі шеңбердің ішінде орналаса алмайтынын көрсетеді. Дәл осылай C нүктесінің шеңбердің сыртында жатпайтынына (4.19-сурет) көз жеткіземіз. Сондықтан C нүктесі шеңбердің бойында жатады, яғни $ABCD$ төртбұрышына сырттай шеңбер сызуға болады.



4.18-сурет



4.19-сурет

4-теорема. *Сырттай сызылған төртбұрыштың қарама-қарсы қабырғаларының қосындысы өзара тең.*

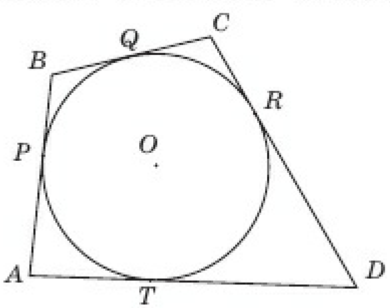
$ABCD$ төртбұрышы шеңберге сырттай сызылсын (4.20-сурет) және P, Q, R, T нүктелері оның сәйкес қабырғалары мен шеңбердің жанасу нүктелері болсын. Бір нүктеден жүргізілген жанаманың қасиеті бойынша, $AP = AT$, $BP = BQ$, $CR = CQ$, $DR = DT$. Осы теңдіктерді мүшелеп қоссақ,

$$(AP + BP) + (CR + DR) = (AT + DT) + (BQ + CQ)$$

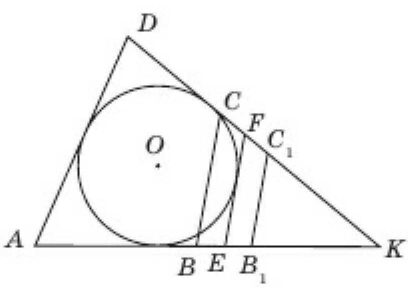
немесе $AB + CD = AD + BC$ теңдігін аламыз.

5-теорема. *Егер дөңес төртбұрыштың қарама-қарсы қабырғаларының қосындысы тең болса, бұл төртбұрышқа іштей шеңбер сызуға болады.*

$ABCD$ төртбұрышы үшін $AB + CD = AD + BC$ теңдігі орындалсын. AB және CD қабырғаларының созындысының қиылысу нүктесін K арқылы белгілейміз (4.21-сурет). (Бұл



4.20-сурет



4.21-сурет

екі қабырға қиылыспаса, AD және BC қабырғаларының созындыларының қиылысу нүктесін K деп белгілейміз. Ал бұлар да қиылыспаса, $ABCD$ ромб болып, оған іштей шеңбер сызылар еді). 3-теоремадағы көрсетілген тәсілді қолданып, ADK үшбұрышына іштей сызылған шеңбер $ABCD$ төртбұрышының BC қабырғасын да жанайтынын көрсетуді өздеріңе тапсырамыз.

1. Іштей және сырттай сызылған көпбұрыш дегеніміз не?
2. Іштей сызылған бұрыш деп нені айтады?
3. Іштей сызылған бұрыш пен оған керілген доға (сәйкес центрлік бұрыш) арасында қандай байланыс бар? Сәйкес қасиетті тұжырымдап дәлелдеңдер.
4. Іштей сызылған төртбұрыш бұрыштарының қосындысы жөніндегі теоремаларды тұжырымдап дәлелдеңдер.
5. Сырттай сызылған төртбұрыштар жөніндегі теоремаларды тұжырымдап дәлелдеңдер.
6. Параллелограмның қандай түрлеріне 1) сырттай; 2) іштей шеңбер сызуға болады?
7. Шеңберге 1) іштей; 2) сырттай сызылған трапецияның түрі қандай?

ПРАКТИКАЛЫҚ ЖҰМЫС

1. 1) Тең қабырғалы үшбұрышқа; 2) квадратқа іштей және сырттай шеңбер сызыңдар.
2. Берілген шеңберге іштей және сырттай трапеция сызыңдар.

ЕСЕПТЕР

А

4.40. 1) Берілген шеңберге іштей сызылған; 2) берілген шеңберге сырттай сызылған; 3) сырттай сызылған шеңбердің радиусы бойынша; 4) іштей сызылған шеңбердің радиусы бойынша квадрат салыңдар.

4.41. Бұрыштары рет-ретімен 1) 90°, 90°, 60°, 120°; 2) 70°, 130°, 110°, 50°; 3) 45°, 75°, 135°, 105°-қа тең болатын төртбұрышқа сырттай шеңбер сызуға бола ма?

4.42. Бұрыштардың қатынасы 1) 2, 3, 4, 3; 2) 7, 2, 4, 5 сандарының қатынасындай болатын төртбұрышқа сырттай шеңбер сызуға бола ма?

4.43. 1) Шеңберге іштей сызылған әрбір трапеция тең бүйірлі; 2) шеңберге іштей сызылған әрбір параллелограмның тіктөртбұрыш; 3) шеңберге іштей сызылған әрбір ромбының квадрат болатынын дәлелдеңдер.

4.44. Төртбұрыштың тізбектей алынған қабырғаларының қатынасы 1) 2, 2, 3, 3; 2) 2, 5, 3, 4; 3) 3, 5, 3, 1 сандарының қатынасындай болса, осы төртбұрышқа іштей шеңбер сызуға бола ма?

4.45. Шеңберге сырттай сызылған төртбұрыштың екі қарама-қарсы қабырғаларының қосындысы 15 см. Төртбұрыштың периметрін тап.

B

4.46. Сырттай сызылған шеңбердің радиусы мен диагоналының арасындағы бұрышы бойынша тіктөртбұрыш салыңдар.

4.47. Іштей сызылған шеңбердің радиусы мен қабырғасы бойынша ромб салыңдар.

4.48. Параллелограмға іштей шеңбер сызу мүмкін болса, оның ромб болатынын дәлелдеңдер.

4.49. Ромбыға сырттай шеңбер сызу мүмкін болса, оның квадрат болатынын дәлелдеңдер.

4.50. Тіктөртбұрыштың диагоналы мен бір қабырғасының арасындағы бұрышы 30°. Оған сырттай сызылған шеңбердің радиусы R. Тіктөртбұрыштың кіші қабырғасын табыңдар.

4.51. Кез келген тіктөртбұрышқа сырттай шеңбер сызуға болатынын дәлелдеңдер.

4.52. Шеңберге сырттай сызылған тең бүйірлі трапецияның бүйір қабырғасы 14 см. Трапецияның периметрін табыңдар.

4.53. AOB бұрышының қабырғаларына A және B нүктелерінде жүргізілген перпендикулярлар C нүктесінде қиылысады. $ACBO$ төртбұрышына сырттай шеңбер сызуға болатынын дәлелдеңдер.

4.54. Параллелограмға сырттай және іштей шеңбер сызуға болса, оның квадрат болатынын дәлелдеңдер.

C

4.55. Әрбір дөңес төртбұрыштың биссектрисаларының қиылысуынан пайда болатын төртбұрышқа сырттай шеңбер сызуға болатынын дәлелдеңдер.

4.56. Әрбір дөңес төртбұрыштың сыртқы бұрыштарының биссектрисалары арқылы құрастырылған төртбұрышқа сырттай шеңбер сызуға болатынын дәлелдеңдер.

4.57. Дөңес төртбұрыштың барлық қабырғаларынан өзара тең хордалар қиып өтетін шеңбер жүргізілген. Осы төртбұрыштың қарама-қарсы қабырғаларының қосындысы тең болатынын көрсетіңдер.

4.58. Табандары 24 см және 16 см болатын тең бүйірлі трапецияға іштей сызылған шеңбердің радиусы 8 см болуы мүмкін бе?

4.59. Сырттай сызылған тең бүйірлі трапецияның қарама-қарсы қабырғаларының жанасу нүктелерін қосатын түзулер оның диагональдарының қиылысу нүктесі арқылы өтетінін дәлелдеңдер.

4.60. 4.59-есептің қорытындысы кез келген сырттай сызылған төртбұрыш үшін орындалатынын көрсетіңдер.

4.4. Дөңгелектегі пропорционал кесінділер

Тақырыпты оқып-үйрену барысында сендер:

- дөңгелектегі пропорционал кесінділер туралы теоремаларды біліп, оларды қолданасыңдар;
- тік бұрышты үшбұрыштардағы метрикалық қатынастарды қорытып шығарып, оларды қолданасыңдар.

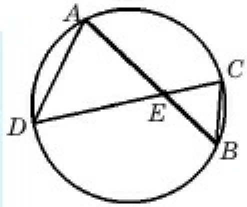
4.4.1. Дөңгелектегі пропорционал кесінділер

1-теорема. *Егер шеңбердің AB және CD хордалары E нүктесінде қиылысса, онда*

$$AE \cdot BE = CE \cdot DE$$

теңдігі орындалады.

AED және CEB үшбұрыштары ұқсас болатынын тексеру қиын емес (4.22-сурет). Онда $\frac{DE}{BE} = \frac{AE}{CE}$ немесе $AE \cdot BE = CE \cdot DE$ теңдігі орындалады.



4.22-сурет

2-теорема. *Шеңберден тысқары орналасқан P нүктесінен осы шеңберді A, B және C, D нүктелерінде қиып өтетін екі қиюшы жүргізілген. Онда*

$$AP \cdot BP = CP \cdot DP$$

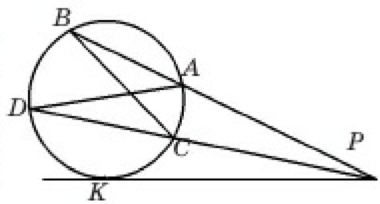
теңдігі орындалады (4.23-сурет).

DAP және BCP үшбұрыштарының ұқсастығынан $\frac{AP}{CP} = \frac{DP}{BP}$ немесе $AP \cdot BP = CP \cdot DP$ теңдігі шығады.

Салдар. *Шеңберден тысқары орналасқан P нүктесінен осы шеңберді K нүктесінде жанайтындай жанама және A, B нүктелерінде қиятын қиюшы жүргізілген. Онда*

$$KP^2 = BP \cdot AP$$

теңдігі орындалады (4.23-сурет).



4.23-сурет

PAK және PKB үшбұрыштары ұқсас болғандықтан, $\angle PBK = \angle PKA = \frac{1}{2}(\cup AK)$, $KP^2 = BP \cdot AP$ теңдігін аламыз.

4.4.2. Тік бұрышты үшбұрыштағы метрикалық қатынастар

Арақашықтықтардың (кесінділердің ұзындықтарының) бір-бірімен байланыстарын өрнектейтін формулаларды ***метрикалық қатынастар*** деп атайды. Тік бұрышты үшбұрыштарда бізге белгілі Пифагор теоремасы негізгі метрикалық қатынас болып табылады: катеттері a-ға және b-ға, гипотенузасы c-ға тең үшбұрыш үшін $c^2 = a^2 + b^2$ теңдігі орындалады. Тік бұрышты үшбұрыштар үшін басқа да метрикалық қатынастар орындалады. Енді осыларға қысқаша тоқталайық.

3-теорема. *Тік бұрышты үшбұрыштың әрбір катеті гипотенуза мен өзінің гипотенузаға түсірілген проекциясының геометриялық ортасына тең, яғни*

10–4338

$$AC^2 = AB \cdot AD$$

теңдігі орындалады.

ABC тік бұрышты үшбұрышының тік бұрышы C төбесінен түсірілген биіктігі CD болсын (4.24-сурет). $AC^2 = AB \cdot AD$ теңдігі орындалатынын дәлелдеу керек. Шынында да, ACD және ABC тік бұрышты үшбұрыштарының бір сүйір бұрышы ортақ болғандықтан, олар ұқсас. Осыдан

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD} \text{ немесе } AC^2 = AB \cdot AD.$$

Салдар. *Шеңбер хордасы осы шеңбердің диаметрі мен өзінің бір ұшы арқылы өтетін диаметрге түсірілген проекциясының геометриялық ортасына тең* (4.25-сурет):

$$AC^2 = AB \cdot AD \text{ немесе } BC^2 = AB \cdot BD.$$

4-теорема. *Тік бұрышты үшбұрыштың катеттерінің көбейтіндісі оның гипотенузасы мен гипотенузаға түсірілген биіктіктің көбейтіндісіне тең.*

ABC тік бұрышты үшбұрышының тік бұрышы C төбесінен түсірілген биіктігі CD болсын (4.24-сурет).

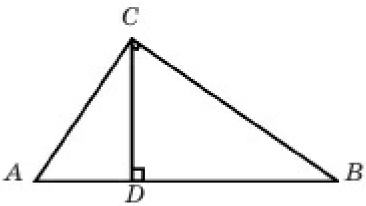
$AC \cdot BC = AB \cdot CD$ теңдігін дәлелдейік.

Шынында да, ABC үшбұрышының S ауданын

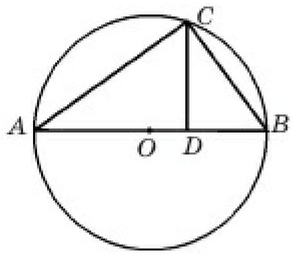
$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BC \text{ немесе } S = \frac{1}{2} AB \cdot CD$$

формулаларымен есептеуге болады. Осыдан

$$\frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} AB \cdot CD \text{ немесе } AC \cdot BC = AB \cdot CD.$$



4.24-сурет



4.25-сурет

5-теорема. *Тік бұрышты үшбұрыштың тік бұрышынан түсірілген биіктік оның гипотенузаны бөлетін кесінділерінің геометриялық ортасына тең.*

$CD^2 = AD \cdot BD$ теңдігі орындалатынын дәлелдеу керек (4.24-сурет).

ACD және BCD үшбұрыштарының ұқсастығынан $\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD}$ немесе $CD^2 = AD \cdot BD$ теңдігі шығады.

1. Өзара қиылысатын екі хорданың қандай байланысы бар?
2. Шеңберге бір нүктеден жүргізілген екі қиюшының арасында қандай байланыс бар?
3. Шеңберге бір нүктеден жүргізілген жанама мен қиюшының арасында қандай байланыс бар?
4. Тік бұрышты үшбұрыштағы метрикалық қатынастарды атап, оларды дәлелдеңдер.
5. Үшбұрыш бұрышының сүйір, тік не доғал болатындығын қалай анықтайды?

ПРАКТИКАЛЫҚ ЖҰМЫС

1. Кез келген шеңбер салып, оның қиылысатын екі хордасын жүргізіңдер. Өлшеу жұмыстарын жүргізіп, 1-теореманың орындалуын тексеріңдер.
2. Кез келген шеңбер салып, одан тысқары орналасқан нүктеден осы шеңберге екі қиюшы жүргізіңдер. Өлшеу жұмыстарын жүргізіп, 2-теореманың орындалуын тексеріңдер.

ЕСЕПТЕР

А

4.61. Шеңбер диаметріне перпендикуляр хорда осы диаметрді 24 см және 6 см бөліктерге бөледі. Осы хорданың ұзындығын табыңдар.

4.62. Шеңберден тысқары орналасқан нүктеден осы шеңберге жанама және шеңбермен қақ бөлінетін қиюшы жүргізілген. Қиюшының шеңбермен шектелген бөлігі 4 см болса, жанаманың ұзындығы қандай?

4.63. Шеңбердің радиусы 7 см. Центрден 9 см қашықтықтағы нүктеден жүргізілген қиюшы шеңбермен қақ бөлінеді. Қиюшының ұзындығын табыңдар.

4.64. Өзара қиылысатын хордалардың біреуі қиылысу нүктесінде қақ бөлініп, екіншісі 4 см және 16 см болатын кесінділерге бөлінген. Бірінші хорданың ұзындығы қандай?

4.65. Диаметрі 10 см шеңберге тең бүйірлі үшбұрыш іштей сызылған. Үшбұрыштың табанына түсірілген биіктігі 2 см. Үшбұрыштың табанын табыңдар.

4.66. Табаны 12 см, биіктігі 3 см болатын тең бүйірлі үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің диаметрін табыңдар.

4.67. ABC үшбұрышында медианаларының қиылысу нүктесі арқылы AB қабырғасына параллель жүргізілген түзу оның AC және BC қабырғаларын сәйкесінше A_1 және B_1 нүктелерінде қияды. 1) $A_1B_1 : AB$; 2) $S_{A_1B_1C} : S_{ABB_1A_1}$ қатынастарын табыңдар.

4.68. E нүктесінен шеңберге AE жанамасы мен BE қиюшысы жүргізілген. Бұл қиюшы шеңберді B және C нүктелерінде қиып өтеді. Егер $BC = 5$ см, $BE = 4$ см және B нүктесі C мен E нүктелерінің арасында жатса, AE-ның ұзындығы неге тең?

4.69. Шеңбер хордасы мен осы хорданың бір ұшынан жүргізілген жанама арасындағы бұрыш сол хордаға тірелген центрлік бұрыштың жартысына тең болатынын дәлелдеңдер.

4.70. Екі хорда дөңгелек ішінде қиылысады. Бір хорда 24 см және 14 см кесінділерге бөлінеді. Екінші хорданың бір бөлігі 28 см болса, онда оның екінші бөлігі неге тең?

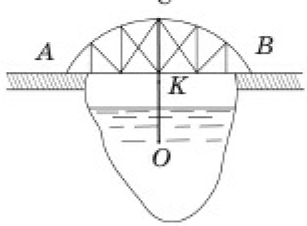
B

4.71. AB және CD кесінділері F нүктесінде қиылысады. Егер $AF = 7$ см, $BF = 21$ см, $CF = 3$ см және $DF = 16$ см болса, A, B, C және D нүктелері шеңбердің бойында жата ма?

4.72. Жер радиусы 6370 км. Жер бетінен 4 км биіктіктегі ұшақтан қандай қашықтықты көруге болады?

4.73. Шеңберден тысқары жатқан нүктеден осы шеңберге жанама және шеңбермен қақ бөлінетін қиюшы жүргізілген. Егер жанаманың жанасу нүктесіне дейінгі ұзындығы 4 см болса, қиюшының шеңбермен шектелген бөлігі қандай?

4.74. Көпір шеңбер доғасы пішіндес болып келген (4.26-сурет). 1) $CK = h = 3$ м, $CO = R = 8,5$ м болса, AB-ның ұзындығын; 2) $AB = 6$ м, $h = 1,2$ м болса, көпір доғасының радиусын табыңдар.



4.26-сурет

4.75. Нүктеден шеңберге жүргізілген жанаманың ұзындығы 20 см, сол нүктеден шеңберге жүргізілген ең үлкен қиюшының ұзындығы 50 см. Шеңбердің радиусын табыңдар.

4.76. Қиылысатын екі шеңбердің ортақ хордасының созындысында жатқан нүктеден бұл шеңберлерге жүргізілген жанамалардың жанасу нүктесіне дейінгі ұзындықтары тең болатынын дәлелдеңдер.

4.77. Қиюшы өзінің сыртқы кесіндісінен $2\frac{1}{4}$ есе ұзын. Сол нүктеден жүргізілген жанамадан ол неше есе ұзын болады?

4.78. Бір нүктеден шеңберге жанама және қиюшы жүргізілген. Жанаманың жанасу нүктесіне дейінгі кесіндісі қиюшының сыртқы кесіндісінен 5 см ұзын, ал ішкі кесіндісінен дәл сондай қысқа. Жанаманың жанасу нүктесіне дейінгі кесіндісін табыңдар.

4.79. Ұзындығы a-ға тең хорданың ортасы арқылы ұзындығы b-ға тең хорда жүргізілген. Ұзындығы b-ға тең хорда қандай кесінділерге бөлінеді?

4.80. Шеңбер бұрыштың бір қабырғасын оның төбесінен a және b қашықтықтарында қиып өтеді, ал екінші қабырғасын жанайды. Бұрыштың төбесінен жанасу нүктесіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

4.81. Радиусы R-ге тең шеңбердің ішіндегі нүктеден оның центріне дейінгі қашықтық d-ға тең. Осы нүкте арқылы өтетін хорда мен диаметр өзара перпендикуляр деп алып, осы хорданың ұзындығын табыңдар.

4.82. Тік бұрышты үшбұрыштың катеттерінің қатынасы 3:4 қатынасындай, гипотенузасы 50 см. Тік бұрыштың төбесінен жүргізілген биіктік гипотенузаны қандай кесінділерге бөледі?

4.83. Тік бұрышты үшбұрыштың тік бұрышының төбесінен жүргізілген биіктік гипотенузаны кішісі 11 см болатын екі кесіндіге бөледі. Үшбұрыш катеттерінің қатынасы 6:5-ке тең. Осы үшбұрыштың гипотенузасын табыңдар.

4.84. Үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің центрі үшбұрыштың ішінде, сыртында немесе бір қабырғасында жатуы үшін қандай шарттар орындалуы керек?

4.85. ABC үшбұрышының AD және BK биссектрисалары O нүктесінде қиылысады. Егер $AB = 5$ см, $BC = 3$ см, $AC = 7$ см десек, $OK : OB$ қатынасы неге тең?

C

4.86. Берілген екі түзуді жанайтын және берілген нүкте арқылы өтетін шеңберді салыңдар.

4.87. Егер үшбұрыштың биссектрисасы оның периметрін тең екі бөлікке бөлсе, бұл үшбұрыштың тең бүйірлі болатынын дәлелдеңдер.

4.88. ABC үшбұрышында іштей сызылған $ADEF$ ромбысының D, E, F төбелері үшбұрыштың сәйкесінше AB, BC, AC қабырғаларында жатыр. $AB = 14$ см, $BC = 12$ см және $AC = 10$ см болса, BE және EC кесінділерін табыңдар.

4.89. Екі медианасы тең үшбұрыш тең бүйірлі үшбұрыш болатынын дәлелдеңдер.

4.90. Бір нүктеден шеңберге қиюшы және жанама жүргізілген. Бұлардың қосындысы 30 см. Қиюшының сыртқы кесіндісі жанамадан 2 см қысқа. Жанама мен қиюшыны табыңдар.

4.91. Центрі O нүктесінде және радиусы 16 см болатын жарты шеңберге диаметрі 12 см шеңбер іштей сызылған. Кіші шеңбердің диаметрмен жанасу нүктесінен O нүктесіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

4.92. Шеңбер қиюшысының сыртқы кесіндісі оның ішкі кесіндісінен $\frac{5}{4}$ есе ұзын. Осы шеңберге жүргізілген жанамадан қиюшы неше есе ұзын?

4.93. Үшбұрышқа іштей сызылған шеңбердің центрі үшбұрыштың орта сызықтарынан тұратын үшбұрыштың ішінде жататынын дәлелдеңдер.

4.94. AB кесіндісі C және D нүктелерінен әртүрлі бұрыштармен көрінеді. Қандай жағдайда A, B, C және D нүктелері бір шеңбер бойында жатады?

4.95. Трапеция табандарының орталарын қосатын түзу бүйір қабырғалары созындыларының қиылысу нүктесі арқылы өтетінін дәлелдеңдер.

4.96. Жарты шеңберге іштей бір қабырғасы осы жарты шеңбер диаметрінде жататындай етіп, квадрат салыңдар.

4.97. Егер дөңес төртбұрыштың қарама-қарсы қабырғаларының ортасын қосатын түзу оның өзге екі қабырғасының созындыларының қиылысу нүктесі арқылы өтсе, бұл төртбұрыштың трапеция болатынын дәлелдеңдер.

4.98. ABC үшбұрышының AB қабырғасы диаметрі болатындай шеңбер жүргізілген: 1) C нүктесі шеңбердің сыртында жатса, $\angle C$ бұрышы сүйір; 2) C нүктесі шеңбердің бойында жатса, $\angle C$ тік; 3) C нүктесі шеңбердің ішінде жатса, $\angle C$ доғал болатынын дәлелдеңдер.

4.5. Көпбұрыштар

Тақырыпты оқып-үйрену барысында сендер:

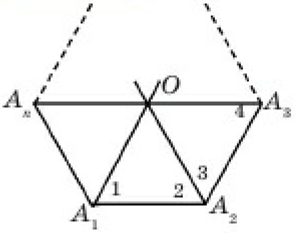
- дұрыс көпбұрыш анықтамасы мен қасиеттерін білесіңдер;
- дұрыс көпбұрышқа іштей және сырттай сызылған шеңберлердің радиустары арасындағы байланысты біліп, оны қолданасыңдар;
- дұрыс көпбұрыштың қабырғасын, ауданын және оған іштей және сырттай сызылған шеңберлер радиустарын байланыстыратын формулаларды біліп, оларды қолданасыңдар;
- дұрыс көпбұрыштардың симметриялық қасиеттерін білесіңдер.

4.5.1. Дұрыс көпбұрыштар

Егер дөңес көпбұрыштың барлық қабырғасы және барлық бұрыштары тең болса, оны ***дұрыс көпбұрыш*** деп атайды. Мысалы, дұрыс үшбұрыш — тең қабырғалы үшбұрыш, дұрыс төртбұрыш — квадрат.

Кез келген дұрыс үшбұрышқа және квадратқа іштей және сырттай шеңберлер сызуға болатынын және бұл шеңберлердің центрлері беттесетінін жақсы білеміз. Енді осы қасиеттер кез келген дұрыс көпбұрыш үшін орындалатынын көрсетейік. Дұрыс көпбұрыштың барлық төбелерінен бірдей қашықтықта орналасқан нүктені осы көпбұрыштың ***центрі*** деп атаймыз.

1-теорема. *Кез келген дұрыс көпбұрышқа іштей және сырттай шеңберлер сызуға болады және бұл шеңберлердің центрлері көпбұрыштың центрімен беттеседі.*



4.27-сурет

Теореманы дәлелдеу үшін кез келген дұрыс көпбұрыштың центрі бар болатынын және бұл центрдің көпбұрыш қабырғаларынан бірдей қашықтықта орналасатынын көрсетсек, болғаны.

Айталық, бізге $A_1A_2...A_n$ дұрыс n бұрышы берілсін. Оның A_1 және A_2 бұрыштары арқылы жүргізілген биссектрисаларының қиылысу нүктесін O арқылы белгілейік. Көпбұрыштың қалған төбелерін O нүктесімен қосайық (4.27-сурет).

Алдымен O нүктесі көпбұрыштың барлық төбелерінен бірдей қашықтықта орналасатынын дәлелдейік:

$$OA_1 = OA_2 = OA_3 = ... = OA_n.$$

Тең бұрыштардың жартысы ретінде $\angle 1 = \angle 2$. Онда ΔA_1OA_2 тең бүйірлі. Сондықтан $OA_1 = OA_2$. OA_2 екеуіне ортақ, $A_1A_2 = A_2A_3$ және $\angle 2 = \angle 3$ болғандықтан, үшбұрыштар теңдігінің бірінші белгісі бойынша $\Delta A_1OA_2 = \Delta A_2OA_3$. Осыдан $OA_2 = OA_3$ және $\angle 3 = \angle 4$ теңдіктері шығады.

$\angle 4 = \angle 3 = \dfrac{1}{2}\angle A_2 = \dfrac{1}{2}\angle A_3$ теңдігінен $\angle 4 = \angle 5$. Олай болса, OA_3 кесіндісі A_3 бұрышының биссектрисасы болып табылады.

Осы процесті жалғастырсақ, $OA_1 = OA_2 = OA_3 = ... = OA_n$. O нүктесі көпбұрыштың центрі және сонымен бірге сырттай сызылған шеңбердің центрі болып табылады.

Енді O нүктесі көпбұрыш қабырғаларынан бірдей қашықтықта орналасатынын көрсетейік. Жоғарыда дәлелдегеніміз бойынша

$$\Delta OA_1A_2 = \Delta OA_2A_3 = ... = \Delta OA_{n-1}A_n = OA_nA_1.$$

Бұл үшбұрыштарға ортақ O төбесінен түсірілген биіктіктері де тең. Ендеше, O нүктесі көпбұрыш қабырғаларынан бірдей қашықтықта орналасқан. Олай болса, дұрыс көпбұрышқа іштей шеңбер сызуға болады.

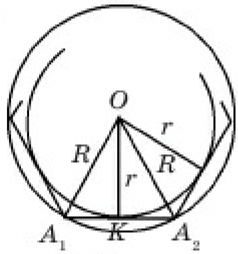
2-теорема. *Дұрыс n бұрыштың қабырғасы a_n, оған сырттай сызылған шеңбердің радиусы R, іштей сызылған шеңбердің радиусы r болса,*

$$a_n = 2R\sin\frac{180°}{n}, \quad a_n = 2r\mathrm{tg}\frac{180°}{n}. \qquad (1)$$

$A_1A_2 = a_n$ — дұрыс n бұрыштың қабырғасы, O центрі болсын (4.28-сурет).

$$OA_1 = OA_2 = R,\ OK = r,\ A_1K = KA_2 = \frac{a_n}{2}$$

және $\angle A_1OK = \frac{1}{2}\angle A_1OA_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{360°}{n} = \frac{180°}{n}$.



4.28-сурет

A_1OK тік бұрышты үшбұрышынан $A_1K = R \times \sin\frac{180°}{n}$, $A_1K = r\cdot\mathrm{tg}\frac{180°}{n}$.

Салдар: *Егер R және r сәйкесінше дұрыс n бұрышқа сырттай және іштей сызылған шеңберлердің радиустары болса,*

$$r = R\cdot\cos\frac{180°}{n} \qquad (2)$$

теңдігі орындалады.

ӨЗДЕРІҢ ДӘЛЕЛДЕҢДЕР!

Осы салдарды өз беттерінше дәлелдеп көріңдер.

ТОПТЫҚ ЖҰМЫС

Топтарға бірігіп кез келген n бұрыш үшін мына формулалардың орындалатынын көрсетіңдер:

$$S_n = \frac{1}{2}na_n\cdot r, \qquad (3)$$

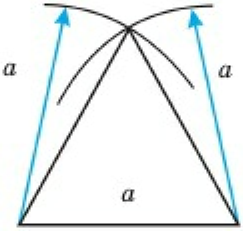
$$S_n = \frac{1}{4}n\cdot a_n\sqrt{4R^2 - a_n^2}, \qquad (4)$$

$$a_n^2 = 4(R^2 - r^2). \qquad (5)$$

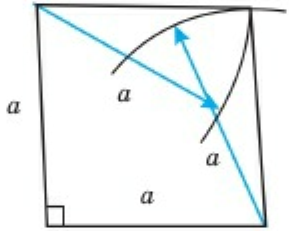
Мұндағы S_n — дұрыс n бұрыштың ауданы; a_n — қабырғасы; R — көпбұрышқа сырттай сызылған шеңбер радиусы; r — көпбұрышқа іштей сызылған шеңбердің радиусы (4.28-сурет).

4.5.2. Дұрыс көпбұрыштарды салу

Төменгі сыныптарда біз тең қабырғалы үшбұрыш (4.29-сурет) және шаршы (4.30-сурет) салуды үйренгенбіз.



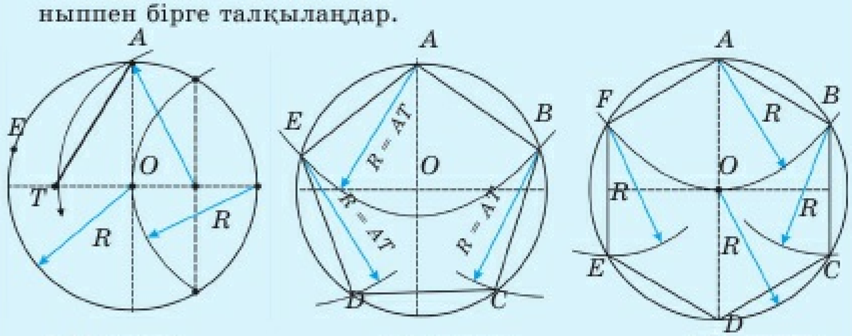
4.29-сурет



4.30-сурет

ОЙТҮРТКІ

Жұптасып 4.31–4.33-суреттер бойынша дұрыс бесбұрышты, дұрыс алтыбұрышты салу алгоритмін тұжырымдап, оны сыныппен бірге талқыландар.



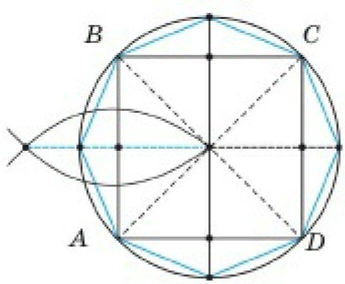
4.31-сурет 4.32-сурет 4.33-сурет

Егер бізге дұрыс n бұрыш берілсе, онда дұрыс $2n$ бұрышты салуға болады. Оны шаршы көмегімен дұрыс сегізбұрышты салу мысалы арқылы қарастырамыз.

1) Алдымен шаршыға сырттай сызылған шеңбер центрін анықтаймыз (4.34-сурет) және осы шеңберді жүргіземіз.

2) Кесіндіні қақ бөлу тәсілімен шаршының әр қабырғасының ортасын табамыз.

3) Шеңбер центрін табылған нүктелермен қосатын сәулелер жүргіземіз және осы сәулелер мен шеңбердің қиылысу нүктелерін табамыз.



4.34-сурет

4) Осылай алынған нүктелер мен шаршы төбелері бізге қажет сегізбұрыштың төбелері болады.

Жалпы циркуль және сызғыш көмегімен салынбайтын есептер бар. Мысалы, дұрыс жеті, тоғыз, онбір және онүшбұрыштар мен онтөртбұрыштар циркуль және сызғыш көмегімен салынбайды, бірақ дұрыс онжетібұрышты циркуль және сызғыш көмегімен салу проблемасының толық шешімін 1796 ж. К. Гауса тапқан (http://www.resolventa.ru/spr/planimetry/regular.htm).

4.5.3. Дұрыс көпбұрыштардың ұқсастығы

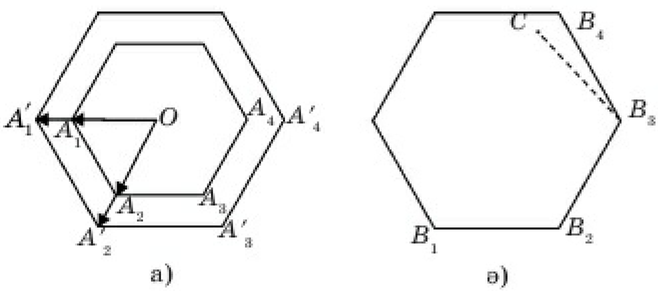
3-теорема. *Кез келген екі дұрыс n бұрыш өзара ұқсас болады.*

Айталық, бізге екі дұрыс n бұрыш берілсін:

$P_1 : A_1A_2 \dots A_n$ және $P_2 : B_1B_2 \dots B_n$. Онда коэффициенті $k = \dfrac{B_1B_2}{A_1A_2}$-ге тең гомотетияны қолданып, P_1 көпбұрышын P'_1: $A'_1A'_2 \dots A'_n$ көпбұрышына түрлендірейік. Енді P'_1 және P_2 көпбұрыштарының тең болатынын, яғни қандай да бір қозғалыс арқылы P'_1 және P_2 көпбұрыштарын беттестіруге мүмкін болатынын көрсетсек, жеткілікті. Өйткені гомотетия мен қозғалысты қатар қолданғанда ұқсас түрлендіру шығады. Демек, P_1 және P_2 көпбұрыштары ұқсас (4.35, *а*-сурет).

$\angle A_1A_2A_3 = \angle A'_1A'_2A'_3$ және $\angle A_1A_2A_3 = \angle B_1B_2B_3$ болғандықтан, $\angle A'_1A'_2A'_3 = \angle B_1B_2B_3$. Сонымен қатар

$$A'_1A'_2 = |k|A_1A_2 = \frac{B_1B_2}{A_1A_2} \cdot A_1A_2 = B_1B_2 \text{ және}$$



4.35-сурет

$$A'_1A'_2 = A'_2A'_3,\ B_1B_2 = B_2B_3$$

теңдіктерінен $A'_2A'_3 = B_2B_3$ теңдігін аламыз.

Үшбұрыштар теңдігінің бірінші белгісі бойынша

$$\Delta A'_1A'_2A'_3 = \Delta B_1B_2B_3.$$

Сонымен, қарастырылып отырған қозғалыс кезінде A'_1 нүктесі B_1-ге, A'_2 нүктесі B_2-ге, A'_3 нүктесі B_3-ке көшеді. Енді A'_4 нүктесі B_4-ке көшетінін көрсетейік.

A'_4 нүктесі C нүктесіне көшсін делік (4.35, *ә*-сурет). Жоғарыда көрсетілген сияқты,

$$\angle A'_2A'_3A'_4 = \angle B_2B_3B_4,\ A'_3A'_4 = B_3B_4.$$

Қозғалыс кезінде нүктелердің арақашықтықтары мен бұрыштардың шамалары өзгермейді. Сондықтан

$$\angle A'_2A'_3A'_4 = \angle B_2B_3C \text{ және } A'_3A'_4 = B_3C.$$

Олай болса, B_4 және C нүктелері беттеседі. Осы сияқты, қозғалыс арқылы P'_1 және P_2 көпбұрыштарының басқа төбелері де бір-біріне көшетінін көреміз. Демек, P'_1 және P_2 көпбұрыштары өзара тең.

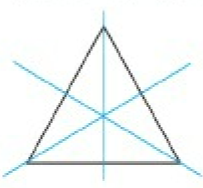
Ұқсас фигуралардың ұқсастық коэффициенті олардың сәйкес сызықтық өлшемдерінің қатынасына тең. Дұрыс n бұрыштарда ондай сызықтық өлшемдер қатарына олардың қабырғаларының ұзындықтары және сырттай сызылған шеңберлердің радиустары жатады. Осыдан мынадай салдар шығады.

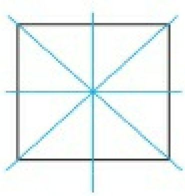
Салдар. *P_1 және P_2 түріндегі n бұрыштардың периметрлері сәйкесінше p және p', іштей және сырттай сызылған шеңберлерінің радиустары r, R және r', R' болса,*

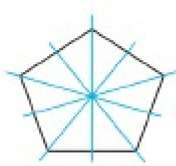
$$\frac{p'}{p} = \frac{r'}{r} = \frac{R'}{R}$$

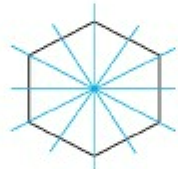
теңдіктері орындалады.

Сонымен қатар дұрыс n бұрыштардың симметриялық қасиеттері де бар (4.36—4.39-сурет).


4.36-сурет


4.37-сурет


4.38-сурет


4.39-сурет

ТОПТЫҚ ЖҰМЫС

Төмендегі сұрақтарды топпен бірге талдап, жауап беріңдер:
- дұрыс n бұрыштың неше симметрия өсі бар?
- дұрыс n бұрыштың симметрия центрі болуы мүмкін бе?

Болса, қандай көпбұрыштардың симметрия центрі бар? Жауаптарыңды негіздеңдер.

1. Сынық сызық деген не? Оның ұзындығын қалай анықтайды?
2. Көпбұрыш деген не? Оның қандай элементтерін білесіңдер? Дөңес көпбұрыш деген не?
3. Сырттай және іштей сызылған шеңберлер деген не?
4. Дұрыс көпбұрыш деген не? Оның центрі қалай анықталады?
5. Дұрыс көпбұрыштың қабырғасы мен оған іштей және сырттай сызылған шеңберлердің радиустарының арасында қандай байланыстар бар?
6. Кез келген екі дұрыс n бұрыштың өзара ұқсас болатынын дәлелдеңдер.
7. 4.34-суретте шаршыға сырттай сызылған шеңбер центрін диагональдарының қиылысу нүктесі арқылы анықтадық. Жалпы жағдайда шеңбер центрі қалай анықталады? Жауаптарыңды негіздеңдер.
8. 4.29- және 4.30-суреттер бойынша тең қабырғалы үшбұрыш пен шаршыны салу алгоритмін жазып көрсетіңдер.

ПРАКТИКАЛЫҚ ЖҰМЫС

Дұрыс 1) үшбұрыш; 2) төртбұрыш; 3) алтыбұрыш салыңдар. Оларға іштей және сырттай шеңберлер сызың-дар. Көпбұрыш қабырғаларын іштей және сырттай сызыл-ған шеңберлер радиустары арқылы өрнектеңдер.

ЕСЕПТЕР

А

4.99. Жай тұйық сынық сызық буындарының ұзындықтары 1 см, 2 см, 3 см, 4 см және 11 см болуы мүмкін бе?

4.100. Дұрыс көпбұрыштың әрбір бұрышы 1) 135°; 2) 150° болса, оның неше қабырғасы бар?

4.101. Дұрыс көпбұрыштың сыртқы бұрыштарының қосындысы қандай болады?

4.102. Дұрыс көпбұрыштың әрбір сыртқы бұрышы 1) 36°; 2) 24° болса, оның неше төбесі бар?

4.103. Төмендегі тұжырымдардың қайсысы дұрыс:

1) дөңес көпбұрыштың барлық қабырғасы тең болса, ол дұрыс көпбұрыш болады;

2) дөңес көпбұрыштың барлық бұрыштары тең болса, ол дұрыс көпбұрыш болады? Бұл тұжырымдарды дұрыс болатындай етіп толықтырыңдар.

4.104. Кез келген дұрыс төртбұрыштың квадрат болатынын дәлелдеңдер.

4.105. Дұрыс n бұрыштың қабырғасы n-нің қандай мәндерінде:

1) сырттай сызылған шеңбердің радиусынан үлкен;
2) сырттай сызылған шеңбердің радиусына тең;
3) сырттай сызылған шеңбердің радиусынан кіші болады?

4.106. 1) $n = 3$; 2) $n = 4$; 3) $n = 5$; 4) $n = 6$; 5) $n = 10$; 6) $n = 18$ деп алып, дұрыс n бұрыштың бұрышын табыңдар.

B

4.107. Шеңбердің радиусына перпендикуляр және осы радиустың ортасы арқылы өтетін хорда шеңберге іштей сызылған дұрыс үшбұрыштың қабырғасына тең болатынын дәлелдеңдер.

4.108. Дұрыс үшбұрышқа іштей сызылған шеңбердің радиусы оған сырттай сызылған шеңбердің радиусынан екі есе кем болатынын дәлелдеңдер.

4.109. Тақтайда белгілеген центрден және бір-бірінен бірдей қашықтықта орналасатындай бес тесікті бұрғылап тесу қажет. Оны қалай істеуге болады?

4.110. Шеңберге сырттай квадрат және дұрыс алтыбұрыш сызылған. Егер алтыбұрыштың периметрі 48 см болса, квадраттың периметрі қандай?

4.111. Шеңберге іштей сызылған дұрыс үшбұрыштың қабырғасы a-ға тең. Осы шеңберге іштей сызылған квадраттың қабырғасын табыңдар.

4.112. Егер сырттай сызылған шеңбердің радиусы R болса, оған іштей сызылған дұрыс 1) сегізбұрыштың қабырғасы $a_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$; 2) онекібұрыштың қабырғасы $a_{12} = R\sqrt{2-\sqrt{3}}$ формуласымен есептелетінін көрсетіңдер.

4.113. Шеңберге сырттай және іштей сызылған дұрыс n бұрыштардың периметрлерінің қатынастарын анықтаңдар. $n = 3$, 4 және 6-ға тең деп алыңдар.

4.114. Радиусы R шеңберге іштей сызылған дұрыс бесбұрыштың және дұрыс онбұрыштың қабырғаларын табыңдар.

4.115. Периметрі P-ға тең дұрыс n бұрышқа сырттай және іштей сызылған шеңберлердің радиустары сәйкесінше R және r арқылы, оның қабырғасы a_n арқылы белгіленген. 1) $n = 4$, $R = 3\sqrt{2}$ см; 2) $n = 3$, $P = 24$ см; 3) $n = 6$, $r = 9$ см; 4) $n = 3$, $r = 5\sqrt{3}$ см болса, белгісіз элементтерді анықтаңдар.

4.116. Дұрыс n бұрыштың ең кіші диагоналын оның a_n қабырғасы арқылы өрнектеңдер: 1) $a_n = 1$ см, $n = 5$; 2) $a_n = 5$ см, $n = 6$.

4.117. Радиусы R-ге тең шеңберге іштей сызылған квадраттың көршілес екі қабырғасының орталары арқылы хорда жүргізілген. 1) $R = 2$ см; 2) $R = 3$ см болса, осы хорданың ұзындығын табыңдар.

C

4.118. Көлденең қимасының диаметрі 40 см болатын бөренеден көлденең қималары квадрат болатын бірдей 4 балка жасалған. Осы балкалардың көлденең қималары қабырғаларының ең үлкен мәні қандай болуы мүмкін?

4.119. Дұрыс бесбұрыштың 1) кез келген екі диагоналы тең; 2) диагоналы бір қабырғасына параллель болатынын дәлелдеңдер.

4.120. Егер бесбұрыштың екі симметрия өсі бар болса, оның дұрыс бесбұрыш болатынын дәлелдеңдер.

4.121. Радиусы r-ге тең шеңберге $A_1A_2...A_{12}$ дұрыс онекібұрышы сырттай сызылған. $A_1A_2 + A_1A_4 = 2r$ теңдігі орындалатынын көрсетіңдер.

4.122. Радиусы R-ге тең шеңберге $A_1A_2...A_{12}$ дұрыс онекібұрышы іштей сызылған. $A_1A_2A_3$ үшбұрышының ауданын табыңдар.

4.123. Алдыңғы есеп шартын пайдаланып 1) $A_1A_2A_3A_4$ төртбұрышының; 2) $A_1A_2A_3A_4A_5$ бесбұрышының ауданын табыңдар.

4.124. Дұрыс n бұрыш қабырғаларының орталары өзге дұрыс n бұрыштың төбелері болатынын дәлелдеңдер.

ҚАЙТАЛАУҒА АРНАЛҒАН ЕСЕПТЕР

4.125. Бір қабырғасы ортақ $\angle AOB = \alpha$ және $\angle BOC = \beta$ бұрыштары берілген. Осы бұрыштардың биссектрисаларының арасындағы бұрышты анықтаңдар. Бұл бұрыштар сыбайлас болған жағдайды қарастырыңдар.

4.126. $\angle AOB = \alpha$ және $\angle BOC = \beta$, $\angle COD = \gamma$ бұрыштары тізбектес орналасқан. AOB және COD бұрыштарының биссектрисаларының арасындағы бұрышты табыңдар.

4.127. Үшбұрыштың төбесі және оған қарсы орналасқан қабырғамен шектелген кесінді үшбұрыштың ең үлкен қабырғасынан кіші болатынын дәлелдеңдер.

4.128. Үшбұрыштың екі қабырғасымен шектелетін кесінді оның ең үлкен қабырғасынан кіші болатынын дәлелдеңдер.

4.129. Тең бүйірлі үшбұрыштың төбесінен жүргізілген табанына параллель түзу үшбұрыштың осы төбесіндегі сыртқы бұрышының биссектрисасы болатынын дәлелдеңдер.

4.130. Тік бұрышты үшбұрыштың бұрыштары бойынша оның тік бұрышынан түсірілген биіктігі мен медианасының арасындағы бұрышты табыңдар.

4.131. Төбелері кез келген төртбұрыштың қабырғаларының орталарында орналасқан төртбұрыш параллелограмм болатынын дәлелдеңдер.

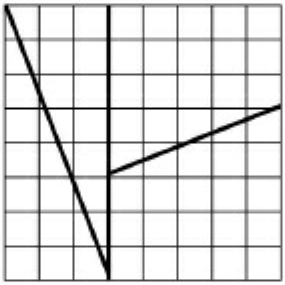
4.132. Трапецияның диагональдарының орталары мен бүйір қабырғаларының орталары бір түзудің бойында жататынын дәлелдеңдер.

4.133. Табандарының ұзындығы бойынша трапеция диагональдары орталарының арақашықтығын табыңдар.

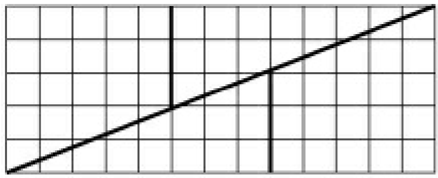
4.134. Шеңберге іштей сызылған үшбұрыштың бұрыштары бойынша осы үшбұрыштың төбелерінен шеңберге жүргізілген жанамалардың арасындағы бұрыштарды табыңдар.

4.135. Қандай шарттар орындалғанда үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің центрі үшбұрыштың ішінде, қабырғасында, сыртында жатады?

4.136. Кез келген екі квадраттың ұқсас болатынын дәлелдеңдер.



4.40-сурет



4.41-сурет

4.137. Тең бүйірлі ABC үшбұрышының BC табаны a-ға тең. D, E нүктелері сәйкесінше AB және BC қабырғаларын $m : n$ қатынасында бөледі. DE-нің ұзындығын табыңдар.

4.138. Параллелограмды тіктөртбұрыш құрастыруға болатындай етіп, екі бөлікке бөліңдер.

4.139. Үшбұрышты тіктөртбұрыш құрастыруға болатындай етіп, үш бөлікке бөліңдер.

4.140. Трапецияның диагональдары оны төрт үшбұрышқа бөледі. Трапецияның бүйір қабырғалары табандары болатын үшбұрыштардың теңшамалы болатынын дәлелдеңдер.

4.141. Радиусы R және r болатын және өзара сырттай жанасқан шеңберлердің ортақ жанамасын табыңдар.

4.142. Ауданы берілген үшбұрышпен бірдей болатын квадрат салыңдар.

4.143. Қабырғалары 8 см болатын квадратты 4.40-суретте көрсетілгендей етіп қиып, одан 4.41-суретте көрсетілгендей тіктөртбұрыш құрастырылған. Осы тіктөртбұрышпен квадраттың аудандары неге тең болмай шықты?

4.144. a, b, c — үшбұрыш қабырғалары, R — оған сырттай сызылған шеңбердің радиусы болса, $S = \dfrac{abc}{4R}$ болатынын дәлелдеңдер.

4.145. Егер h_1, h_2, h_3 — үшбұрыш биіктіктері, r — оған іштей сызылған шеңбердің радиусы болса,

$$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} = \frac{1}{r}$$

болатынын дәлелдеңдер.

11–4338

4.146. a, b, c үшбұрыш қабырғалары бойынша h_a биіктігі мен үшбұрыштың ауданын табыңдар.

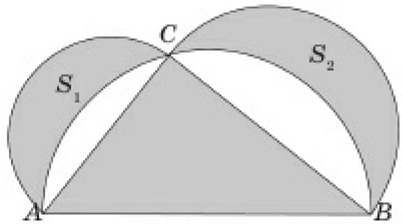
4.147. Төртбұрыштың диагональдары өзара перпендикуляр болуы үшін оның қарама-қарсы қабырғаларының квадраттарының қосындысы тең болуы қажетті және жеткілікті екенін дәлелдеңдер.

4.148. Тік бұрышты үшбұрыштың қабырғалары диаметрлері болатындай етіп, үшбұрышқа сырттай жарты дөңгелектер салынған. Осы жарты дөңгелектердің үлкенінің ауданы қалған екі жарты дөңгелектің аудандарының қосындысына тең болатынын көрсетіңдер.

4.149. 4.42-суретте тік бұрышты үшбұрыштың қабырғаларын диаметрлері етіп салынған жарты шеңберлермен шектелген екі айшық аудандары сәйкесінше S_1 және S_2-ге тең болса,

$$S_{ABC} = S_1 + S_2$$

теңдігі орындалатынын дәлелдеңдер.



4.42-сурет

4.150. Периметрі $2p$, диагональдарының қосындысы m-ге тең ромбының ауданын табыңдар.

4.151. Егер үшбұрыштың екі қабырғасы a-ға және b-ға тең, ауданы $S = \frac{3}{5}ab$ болса, онда оның үшінші қабырғасын табыңдар.

4.152. Үшбұрыштың 4 см-ге тең биіктігі оның табанын 1 : 8 қатынасында бөледі. Үшбұрышты екі теңшамалы бөліктерге бөлетін және осы биіктігіне параллель кесіндінің ұзындығын табыңдар.

4.153. Радиусы R-ге тең шеңберге кіші қабырғасы 1,5 R-ге тең трапеция сырттай сызылған. Осы трапецияның ауданын табыңдар.

4.154. Периметрі $2p$, биіктіктері h_1-ге және h_2-ге тең параллелограмның бұрыштарын табыңдар.

Планиметрияны қайталауға арналған сұрақтар

Біз мұнда планиметрия курсын қайталап, пысықтауға арналған теориялық сұрақтар тізімін келтіреміз. Бұл сұрақтар арасында * таңбасымен белгіленген сұрақтар кездеседі. Мұндай сұрақтар математиканы тереңдетіп оқытатын сынып оқушыларына арналған, сондықтан оларды жалпы білім беретін мектеп оқушыларының білулері міндетті емес.

7-сынып

1. Геометрия деген не? Планиметрия деген не?

2. «*B* нүктесі *A* және *C* нүктелерінің арасында жатады» дегенді қалай түсінесіңдер?

3. Сәуле, толықтауыш сәуле дегеніміз не?

4. Кесінді, кесіндінің ұштары, кесіндінің ішкі нүктелері деген не?

5. Кесінді ұзындығын қандай аспаптармен өлшейді? Қандай өлшем бірліктерін білесіңдер?

6. Қандай фигураны бұрыш деп атайды? Бұрыштың қандай элементтері бар және оны қалай белгілейді?

7. Жазыңқы, тік, сүйір және доғал бұрыш дегеніміз не?

8. Бұрыш шамасын қандай аспаппен және қандай бірліктермен өлшейді?

9. Сыбайлас бұрыштар деген не және сыбайлас бұрыштардың қосындысы неге тең?

10. Вертикаль бұрыштар деген не және олардың қандай қасиеттерін білесіңдер?

11. Қандай түзулерді өзара перпендикуляр деп атаймыз?

12. Айқыш, сәйкес және ішкі тұстас бұрыштар дегеніміз не?

13. Қандай түзулерді параллель деп атаймыз?

14. Түзулердің параллельдік белгілерін атап, дәлелдеңдер.

15. Параллель түзулердің қандай қасиетін (үшінші түзуге параллель екі түзу жайында) білесіңдер?

16. Үшбұрыш дегеніміз не? Үшбұрыштың қандай түрлерін білесіңдер? Олардың қандай элементтері бар?

17. Үшбұрыштың медианасы, биссектрисасы, биіктігі дегеніміз не?

18. Үшбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы туралы теореманы дәлелдеңдер.

19. Үшбұрыштар теңдігі белгілерін атап, дәлелдеп беріңдер.

20. Тік бұрышты үшбұрыш дегеніміз не? Оның қандай қасиеттерін білесіңдер?

21. Тік бұрышты үшбұрыштар теңдігінің белгілерін дәлелдеп беріңдер.

22. Перпендикуляр, көлбеу, проекция деген не және олардың қандай қасиеттерін білесіңдер?

23. Нүктеден түзуге дейінгі қашықтық ретінде қандай кесіндінің ұзындығын аламыз?

24. Үшбұрышты үш қабырғасы бойынша, екі қабырғасы бойынша және олардың арасындағы бұрышы бойынша, бір қабырғасы және оған іргелес екі бұрышы бойынша қалай саламыз?

25. Берілген бұрышқа тең бұрышты қалай саламыз?

26. Бұрыштың биссектрисасын қалай саламыз?

27. Кесіндінің ортасын қалай табады?

28. Берілген нүктеден түзуге түсірілген перпендикулярды қалай салды?

29. Кесіндінің орта перпендикуляры дегеніміз не? Оны қалай салады?

30. Шеңбер дегеніміз не? Оның қандай элементтерін білесіңдер?

8-сынып

1. Қандай фигураны көпбұрыш деп атайды? Дөңес көпбұрыш деген не?

2. Дөңес көпбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы неге тең? Сыртқы бұрыштарының қосындысы неге тең?

3. Қандай фигураны төртбұрыш деп атайды? Ішкі бұрыштарының қосындысы неге тең?

4. Параллелограмм деген не?

5. Параллелограмның қасиеттерін дәлелдеңдер.

6. Параллелограмның белгілерін дәлелдеңдер.

7. Тіктөртбұрыш деген не? Оның қасиеттерін атаңдар.

8. Ромб, квадрат деген не? Олардың қандай қасиеттері бар?

9. Фалес теоремасын дәлелдеңдер.

10. Үшбұрыштың орта сызығы деген не? Оның қасиеттерін дәлелдеңдер.

11. Трапеция, тең бүйірлі трапеция, тік бұрышты трапеция деген не?

12. Трапецияның орта сызығы жөніндегі теореманы дәлелдеңдер.

13. Үшбұрыштың тамаша нүктелері деген не?

14. Үшбұрышқа сырттай және іштей шеңберлер сызуға болатынын дәлелдеңдер.

15. Іштей және сырттай сызылған төртбұрыштардың қандай қасиеттерін білесіңдер?

16. Сүйір бұрыштың косинусы қалай анықталады?

17. Пифагор теоремасын дәлелдеңдер.

18. Сүйір бұрыштың косинусы, синусы және тангенсі деген не?

19. Тік бұрышты үшбұрыштардағы тригонометриялық функциялар арасындағы байланысты анықтаңдар.

20. Кейбір бұрыштар үшін синус, косинус және тангенстің мәндерін кесте бойынша қалай анықтайды?

21. Тік бұрышты үшбұрыштың катеті гипотенуза мен осы катеттің гипотенузадағы проекциясының геометриялық ортасы болатынын дәлелдеңдер.

22. Тік бұрыш төбесінен гипотенузаға түсірілген биіктіктің қандай қасиеттерін білесіңдер? Оны дәлелдеңдер.

23. Стюарт теоремасын дәлелдеңдер.

24. Қандай фигураларды тең шамалы, тең құрамды деп атайды?

25. Тіктөртбұрыштың ауданы қалай анықталады?

26. Параллелограмм, үшбұрыш және трапеция аудандары қандай формулалармен анықталады? Оларды қорытып шығарыңдар.

27. Тік бұрышты декарттық координаталар жүйесі деген не? Нүктенің координатасы деген не?

28. Екі нүктенің арақашықтығы қалай анықталады?

29. Кесіндіні берілген қатынаста бөлу формуласын қорытып жазыңдар. Кесіндінің ортасы қалай анықталады?

30. Түзу мен шеңбердің теңдеулерін жазыңдар.

31. Түзудің, шеңбердің координаталық өстерге байланысты орналасу ерекшеліктері қандай?

32. Эллипс, гипербола және параболаның теңдеулерін жазыңдар.

33. 0°-тан 180°-қа дейінгі бұрыштардың синусы, косинусы және тангенсі қалай анықталады?

34. Келтіру формулаларын жазыңдар.

9-сынып

1. Скалярлық және векторлық шамалар деген не? Коллинеар векторлар деген не? Вектор мен параллель көшіру арасында қандай байланыс бар?

2. Вектордың модулі деген не? Қандай векторларды тең деп атаймыз?

3. Векторлардың қосындысы деген не? Векторларды қосудың үшбұрыш және параллелограмм ережелерін айтып беріңдер.

4. Векторлардың айырымы деген не? Векторды санға көбейту амалын анықтаңдар. Бұл амалдардың қандай қасиеттері бар?

5. Векторлардың арасындағы бұрышы, вектордың өстегі проекциясы деген не? Олардың қандай қасиеттерін білесіңдер?

6. Вектордың базис бойынша жіктелуінің жалғыз болатынын дәлелдеңдер.

7. Вектордың координаталары деген не? Координаталарымен берілген векторларды қосу және санға көбейту амалдары қалай орындалады? Оның модулі қалай анықталады?

8. Векторлардың скалярлық көбейтіндісі деген не? $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ формуласын дәлелдеңдер. Скалярлық көбейтіндіні координаталары бойынша анықтаңдар.

9. Векторлық алгебра элементтерін қолданып үшбұрыштың ауырлық центрінің координаталарын анықтаңдар.

10. Үшбұрыштарды шешу деген не?

11. Косинустар теоремасын дәлелдеңдер.

12. Синустар теоремасын дәлелдеңдер.

13. Үшбұрышты екі қабырғасы мен олардың арасындағы бұрышы бойынша, бір қабырғасы мен екі бұрышы бойынша қалай шешуге болады?

14. Сынық сызықтар деген не? Қандай қасиеттері бар?

15. Дөңес көпбұрыштар деген не? Дұрыс көпбұрыштар деген не?

16. Түзудің бағыттаушы және нормаль векторы деп нені айтады? Түзудің сәйкес теңдеулерін жазыңдар.

17. Жазықтықты түрлендіру деп нені түсінесіңдер?

18. Өстік және центрлік симметрия деген не?

19. Бұру және параллель көшіру деген не?

20. Қозғалыс деген не? Оның беттестірулермен қандай байланысы бар?

21. Ұқсастық түрлендіру деген не? Ұқсастық коэффициенті деген не?

22. Гомотетия деген не? Оның қандай қасиеттері бар? Гомотетия центрі, ұқсастық коэффициенті деген не?

23. Үшбұрыштардың ұқсастық белгілерін дәлелдеңдер.

24. Тік бұрышты үшбұрыштың ұқсастық белгілерін атаңдар.

25. Үшбұрыш биссектрисасының қандай қасиеті бар?

26. Шеңбердегі пропорционал кесінділер деген не? Олардың қандай қасиеті бар?

27. Шеңбер деген не? Шеңбердің негізгі элементтерін атаңдар.

28. Жанаманың қандай қасиеттерін білесіңдер?

29. Шеңбер мен түзудің орналасуының неше жағдайы бар?

30. Шеңбердің хордалары мен оларға керілген доғалардың қандай қасиеттерін білесіңдер?

31. Шеңбердің неше симметрия өсі, симметрия центрі бар?

32. Шеңберге іштей сызылған бұрыш, центрлік бұрыш дегеніміз не? Қандай қасиеттерін білесіңдер?

33. Екі шеңбер өзара қалай орналасады? Шеңберлер центрлерінің арақашықтығын қалай табады?

34. Жанама мен хорданың арасындағы бұрыш неге тең?

35. Шеңбердің екі қиюшысының арасындағы бұрышты қалай анықтайды?

36. Дөңес көпбұрыштардың ішкі бұрыштарының қосындысы, сыртқы бұрыштарының қосындысы неге тең?

37. Дұрыс көпбұрыштың центрі, апофемасы деген не? Дұрыс көпбұрыштың неше симметрия өсі бар?

38. Шеңбер ұзындығының диаметріне қатынасы жөніндегі теореманы дәлелдеңдер. Шеңбер ұзындығы қандай формуламен есептеледі?

39. Ұқсас үшбұрыштардың аудандарының қатынасы неге тең? Ұқсас көпбұрыштардың ше?

40. Дөңгелек дегеніміз не? Оның қандай элементтерін білесіңдер?

41. Дөңгелектің ауданы қалай есептелінеді? Оның формуласын жазыңдар.

42. Сектор, сегмент аудандары қалай анықталады?

43. Дұрыс көпбұрыштың ауданын қалай табады?

44. Дөңгелектегі пропорционал кесінділер дегеніміз не? Олардың қандай қасиеттерін білесіңдер?

45. Тік бұрышты үшбұрыштағы қандай метрикалық қатынастарды білесіңдер?

46. Үшбұрыштың сүйір, доғал, тік бұрышты болатындығын қалай анықтауға болады?

47. Үшбұрыш биссектрисаларының қандай қасиеттерін білесіңдер?

48. Іштей сызылған төртбұрыштардың қабырғалары мен диагональдарының арасында қандай байланыс бар?

ЕСЕПТЕРДІҢ ЖАУАПТАРЫ

8-сынып материалдарын қайталау

0.2. 2 см. **0.4.** 60°, 120°. **06.** 5 см, 6 см, 7,5 см. **07.** 120°, 100°. **0.9.** 1) c = 5 см, $\sin\alpha = \frac{4}{5}$; б) a = 8 дм, $\sin\alpha$ = 0,8. **0.10.** 2) 4 м². **0.11.** 1) а) 3 см²; ә) 1,5 см²; 4) а) 0,5 м²; ә) 0,25 м². **0.12.** 2) а) 0,6 м²; ә) 0,3 м². **0.13.** $8\sqrt{3}$ см². **0.14.** 2) 25 см²; 3) 2,59 м². **0.16.** 6 см, 8 см. **0.17.** Сырттай сызылған шеңбер радиусына тең. **0.18.** 30°, 150°. **0.20.** Барлық орта сызықтарын жүргізу керек. **0.21.** 64 см. **0.22.** BE және CD медианаларының қиылысу нүктесін A төбесімен қосу керек. **0.24.** 30°. **25.** 60°, 120°. **0.27.** h_a = 1 см, h_b = 1,75 см, $\sin\alpha$ = 0,25. **0.28.** $S = \frac{a^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$. **0.29.** a = 30 м, b = 24 м. **0.30.** 120°. **0.31.** n = 5. **0.32.** $ABCD$ параллелограмында A және C бұрыштарының биссектрисалары B бұрышының биссектрисасына перпендикуляр болатынын көрсетіңдер. **0.34.** a, b, $2m$ кесінділері бойынша үшбұрыш салу керек. **0.35.** 60°, 120°. **0.38.** Пифагор теоремасын қолдану керек. 0.40. $\frac{ha^2}{4\sqrt{a^2-h^2}}$.

1-бөлім. **1.4.** 1) A және B нүктелері беттеседі. **1.6.** $|\overrightarrow{BC}|$ = 8 см, $|\overrightarrow{CD}|$ = 6 см, $|\overrightarrow{AC}|$ = 10 см, $|\overrightarrow{AO}| = |\overrightarrow{CO}| = |\overrightarrow{DO}|$ = 5 см. **1.8.** $|\overrightarrow{NC}| = \sqrt{18{,}25}$ см. **1.9.** $|\overrightarrow{BD}|$ = 13 см, $|\overrightarrow{CD}| = 5\sqrt{2}$ см, $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{74}$ см. **1.10.** X нүктесі — AB кесіндісінің ортасы. **1.11.** 1) Ромб; 2) параллелограмм. **1.14.** 1) Ромб; 2) квадрат. **1.15.** Параллелограмның қасиетінен шығады. **1.16.** 1000 км. **1.17.** $3\frac{3}{7}$ сағ. **1.21.** 1) $\overrightarrow{OC}$; 3) $\vec{0}$. **1.25.** 2) $\overrightarrow{BC}$; 4) $\overrightarrow{DB}$. **1.26.** 3) $\vec{0}$. **1.28.** 2) 14 және 10; 4) −2 және 10. **1.29.** $100\sqrt{13+6\sqrt{2}}$ км. **1.30.** $a\cdot\sqrt{1+\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2}$. **1.31.** 2) $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AN}$. **1.32.** 3) $-\vec{b}$. **1.36.** 1) a; 3) $\sqrt{3}\,a$; 5) a. **1.40.** 1) Болады; 2) болады. **1.43.** 1) Болады; 2) болады. **1.47.** a. **1.49.** $\overrightarrow{AC} = k\cdot\overrightarrow{AB}$, k—нақты сан. **1.51.** 1) $4\vec{n}$; 2) $2{,}5\vec{m}+1{,}5\vec{n}$; 3) $-\frac{4}{3}\vec{m}-\frac{2}{3}\vec{n}$. **1.52.** 2) $\overrightarrow{AD}+0{,}5\overrightarrow{AB}$. **1.53.** 1) $2\cdot\overrightarrow{AK}$; 3) $\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{AE}$; 6) $\overrightarrow{AK}+2\cdot\overrightarrow{AE}$. **1.54.** $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{ND} = \frac{1}{4}\vec{a} - \vec{b}$. **1.56.** 2) $\vec{a}\downarrow\uparrow\vec{b}$, $|\vec{a}| \geqslant |\vec{b}|$. **1.57.** 1) $XA : AB=$

$= 1 : 2$; 2) $AX : XB = 1 : 1$; 3) $A = X$. **1.58.** $\frac{1}{4}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$. **1.60.** $\overrightarrow{TK} = \vec{n} + \frac{1}{6}\vec{m}$, $\overrightarrow{KE} = \frac{5}{6}\vec{m} - \frac{1}{2}\vec{n}$. **1.61.** $\overrightarrow{PO} = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$, $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \Rightarrow \overrightarrow{PO} = 0{,}5(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$. **1.62.** 1.61-есепті қарандар. **1.64.** Төртбұрыш қабырғаларының орталары параллелограмм төбелері болады. **1.68.** 1) 6; 2) $2\sqrt{6}$; 3) 0; 4) -6. **1.71.** 1) 0; 3) 1; 5) -1; 8) 0. **1.72.** 2) $-0{,}5$. **1.74.** 2) $|\vec{c}\,|^2 - |\vec{a}\,|^2$; 3) $(\vec{a} - \vec{b}\,)^2$. **1.75.** Жақшаларды ашып, топтау керек. **1.76.** 1) $\varphi = \frac{\alpha}{2}$; 5) $\varphi = 90^\circ$. **1.77.** 90°. **1.78.** $\sqrt{3}$, 30°. **1.81.** $\cos\varphi = \frac{4}{5}$. **1.83.** 1) $\frac{a^2}{2}$; 4) $-\frac{1}{4}a^2$; 5) 0. **1.86.** $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ болсын. Егер A, B, C нүктелері бір түзу бойында жатса, онда $\vec{x}$ $\overrightarrow{AB}$-ға перпендикуляр кез келген вектор. Егер A, B, C нүктелері бір түзудің бойында жатпаса, онда $\vec{x} = \vec{0}$. **1.95.** $AN : AC = \frac{\lambda}{1+\lambda}$. **1.96.** 3) $(-2; 0)$. **1.98.** 2) $(-2; 1)$. **1.99.** 1) $(1; 1)$, $(-1; 1)$; 2) $(2; -2)$, $(-6; 4)$. **1.100.** 3) $(2; -1)$; 4) $(4\sqrt{3}; -2\sqrt{3})$. **1.102.** 1) $D(0; -4)$; 2) $D(8;0)$. **1.103.** Тең. **1.104.** $m = \pm 12$, $n = \pm 7$. **1.105.** 2) $(-1; 0{,}5)$. **1.106.** 4) $(-8; 0)$, 8. **1.110.** 4) $(-\frac{11}{6}; \frac{23}{2})$. **1.113.** 1) $\vec{e} = (0{,}6; 0{,}8)$; 2) $\vec{e} = (\frac{2}{\sqrt{29}}; -\frac{5}{\sqrt{29}})$. **1.114.** $D(-3; 12)$. **1.115.** $3 \pm 2\sqrt{2}$; $\pm\sqrt{13} - 1$; $\frac{13}{8}$. **1.117.** 1) $(17; -10)$, $\sqrt{389}$; 2) $(11; -8)$, $\sqrt{185}$. **1.120.** 1) $x = -1$, $y = 3$; 2) $x = 4$, $y = -5$; 3) $x = 0$, $y = 3$. **1.122.** $A_2(-1; 5)$. **1.123.** 1) $\vec{a} = -\vec{p} + 4\vec{q}$; 3) $\vec{c} = \vec{p} + \vec{q}$. **1.125.** 2) $A(0; 0)$, $B(3; 0)$; 4) $A(-1; -2)$, $B(2; -3)$. **1.128.** $-\frac{8}{3}$. **1.129.** 1) 5; 2) 8; 3) 3. **1.131.** 2) 0; 4) $-a^2 - b^2$. **1.135.** 1) 45°; 3) 30°. **1.137.** 1) 3; 2) $-3\sqrt{2}$; 3) 0; 4) 6; 5) -6. **1.138.** 1) -4; 2) 2. **1.139.** 1) 2; 2) 0,5; 3) $k \in \varnothing$; 4) $k \in \varnothing$; 8) $k = 4$; 10) $k \in \varnothing$. **1.141.** 1) 8; 2) -12; 3) $\frac{2}{3}$; 4) 17; 5) 26; 6) 10; 7) -8. **1.142.** $\vec{e} = (\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}; -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}})$. **1.143.** 4) -7. **1.144.** 2) $-a^2$; 3) 0; 8) a^2. **1.145.** 1) 2; 4) 2; 5) 0; 7) 0. **1.147.** $AC = \sqrt{115}$, $BD = 7$. **1.148.** $\angle B = 90^\circ$, $\cos A = \frac{3}{5}$, $\cos C = \frac{4}{5}$. **1.149.** 30°, 60°, 90°. **1.152.** $\alpha = -1$.

1.153. $\varphi = 30^\circ$. **1.155.** $AD = \dfrac{\sqrt{bc}\sqrt{(b+c)^2 - a^2}}{b+c}$; $BE = \dfrac{\sqrt{ac}\sqrt{(a+c)^2 - b^2}}{a+c}$; $CF = \dfrac{\sqrt{ab}\sqrt{(a+b)^2 - c^2}}{a+b}$. **1.158.** $(\dfrac{3\sqrt{3}}{2}; \pm\dfrac{3}{2})$. **1.161.** 2) $4x + 3y - 27 = 0$. **1.162.** 3) $x - y - 3 = 0$. **1.163.** 4) $y = -1{,}5$. **1.164.** 1) $\vec{n} = (1; 1)$, $\vec{p} = (1; -1)$, $k = -1$; 3) $\vec{n} = (3; 4)$, $\vec{p} = (-4; 3)$, $k = -\dfrac{3}{4}$. **1.165.** 2) 90°; 4) $\cos\varphi = -\dfrac{1}{\sqrt{65}}$. **1.166.** 1) $\dfrac{1}{5}$; 3) $\dfrac{12\sqrt{5}}{5}$. **1.167.** (23; 9), (–1; 2), (11; –7). **1.168.** 2) $2x - 3y - 1 = 0$; $x - 3y + 13 = 0$; $x - y - 5 = 0$. **1.169.** 1) $x - y + 1 = 0$; 3) $x - 2y - 1 = 0$; 4) $2x + 6y - 3 = 0$. **1.170.** 1.40-сурет бойынша: $\vec{p} = (\sqrt{3}; -1)$, $\vec{n} = (1; \sqrt{3})$, $k = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **1.171.** 1) $\vec{p} = (\alpha; 0)$, $y = y_0$. **1.172.** 1) $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$; 2) $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$; 3) $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$. **1.173.** 4) $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. **1.174.** 1) $x + y + 1 = 0$; 2) $x - y + 3 = 0$. **1.175.** 5) Перпендикуляр; 6) параллель. **1.176.** –7. **1.177.** 2. **1.180.** 5) $\angle AOB = \angle COD$. **1.181.** $AC = 2\sqrt{13}$, $BD = 4\sqrt{19}$. **1.184.** $20\sqrt{3}$ кг, $10\sqrt{3}$ кг. **1.185.** 120 кг, $60\sqrt{3}$ кг. **1.186.** 3) $h_a = \dfrac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. **1.187.** Параллелограмм қабырғалары квадраттарының қосындысы оның диагональдары квадраттарының қосындысына тең екенін қолданыңдар. **1.189.** $29x - 2y + 33 = 0$. **1.190.** 1) $a = -4$, $b = 2$ не $a = 4$, $b = -2$; 2) $a = 4$, $b \neq -2$, не $a = -4$, $b \neq 2$, 3) $a = 0$. **1.191.** 0; 6. **1.192.** Тең бөліктерге бөледі. **1.195.** $\dfrac{x}{4} - \dfrac{y}{6} = 1$ немесе $\dfrac{x}{8} - \dfrac{y}{3} = -1$. **1.199.** 1) $4x - 2y + 1 = 0$, $2x + 4y - 3 = 0$. **1.200.** 1) $12x - 41y = 0$, $6x + 7y - 75 = 0$, $24x - 7y - 150 = 0$. **1.204.** 1) $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, $0 \leqslant \alpha + \beta \leqslant 1$; 2) $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$.

2-бөлім. **2.3.** B нүктесі — AA' кесіндісінің ортасы. **2.4.** 1) 1; 2) жоқ; 3) әрбір нүктесі симметрия центрі болады; 4) жоқ. **2.8.** 1) (–2; 3); 2) (2; 3); 3) (–2; –3). **2.9.** Шексіз көп. Симметрия центрлерінің жиыны оларға параллель және қақ ортасы арқылы өтетін түзу. **2.14.** Биссектриса нүктелері бұрыш қабырғаларынан бірдей қашықтықта орналасқан. **2.16.** 3) $A'(0; 1)$, $B'(-2; 1)$, $C'(2; 3)$. **2.19.** Егер $\angle(a, b)$ бұрышы мен A нүктесі берілсе, онда центрі A болатын центрлік симметрияны қарастыру керек. **2.20.** b түзуіне қатысты өстік симметрияны қарастыру керек. **2.21.** 1) (6,5; –0,5); 2) $x + y - 6 = 0$, $x - y - 7 = 0$. **2.23.** m түзуін симметрия өсі деп алыңдар. **2.26.** Іштей сызылған тік бұрышты үшбұрыштың қасиеттерін қолданыңдар. **2.27.** $4\sqrt{2}$ см. **2.31.** (0; 0)→(1; –1), (2; 1)→(3; 0), (–1; 2)→(0; 1). **2.32.** 1) $a = 2$, $b = 2$; 2) $a = -3$; $b = 3$; 3) $a = 1$, $b = +1$. **2.33.** (–2; 2). **2.34.** 1) Табылмайды; 2) табылады: $x' = x - 1$, $y' = y + 1$. **2.36.** $CD_1 = a\sqrt{5}$, $CC_1 = 2a$. **2.37.** $\angle ABC_1 = \alpha + 60^\circ$, $\angle CBA_1 = |60^\circ - \alpha|$. **2.40.** Диаметріне тең қашықтыққа. **2.41.** Сәйкес ұштарын қосатын орта перпендикулярлардың қиылысу нүктесі. **2.42.** 4) Тең шеңберлерді. **2.46.** $\dfrac{360^\circ}{n}$. **2.57.** Дельтоид қасиеттерін қолданыңдар. **2.59.** Міндетті емес. **2.60.** Диаметр симметрия өсі болатынын қолданыңдар. **2.63.** 90°-қа бұру керек (шеңбер центрінен). **2.68.** Берілген түзуге қатысты өстік симметрияны қарастыру керек. **2.69.** C нүктесіне қатысты центрлік симметрияны қарастыру керек. **2.70.** Қиылысу нүктесіне қатысты центрлік симметриядағы бір шеңбердің бейнесін салу керек. **2.73.** $\overrightarrow{AB}$ векторына параллель көшіруді қарастырыңдар. **2.74.** Мүмкін, $k = 1$. **2.80.** Қабырғаларын екі есе созу керек. **2.82.** $k = 0{,}5$. **2.83.** $A_1B_1 = 1{,}5$ м, $\angle A_1 = 30^\circ$. **2.85.** 13,6 см. **2.92.** $\dfrac{ah}{a+h}$. **2.98.** 1) Ұқсас, $k = 0{,}40$; 2) ұқсас емес, себебі 1 м = 100 см; 3) ұқсас, $k = 10$; 4) ұқсас, $k = 100$. **2.99.** 5) Ұқсас; 8) ұқсас емес. **2.100.** 1) Ұқсас; 2) ұқсас емес. **2.105.** $a = 1$ м, $b = 2$ м, $c = 2{,}5$ м. **2.106.** 5,5 м, 6,5 м. **2.107.** 15 см, 20 см, 25 см. **2.108.** 4,2 м, 4,8 м, 6 м. **2.109.** 6 см, 8 см, 12 см. **2.111.** 1) 32; 2) 15. **2.112.** 8 см, 12 см. **2.123.** 1) 8 см, 12 см; 3) $AC = 1{,}8$ м. **2.124.** $BE = 7$ см, $CE = 5$ см. **2.125.** 39 см, 65 см. **2.126.** 10 м, 14 м. **2.129.** 6 және 8. **2.130.** $r = 8$. **2.131.** 50 см. **2.132.** $1 : \sqrt{2}$. **2.133.** $\dfrac{b+c}{a}$.

3-бөлім. **3.1.** $\alpha = 90^\circ$, $\cos\beta = \dfrac{3}{5}$, $\cos\gamma = \dfrac{4}{5}$. **3.2.** $\angle B = 45^\circ$. **3.3.** 1) $\sqrt{34 - 15\sqrt{3}}$; 4) $\sqrt{37}$. **3.4.** $\sqrt{74 - 35\sqrt{2}}$. **3.5.** 5 м. **3.6.** 90°. **3.7.** 60°. **3.8.** 2) $\sin\beta = \dfrac{7\sqrt{3}}{16}$; 3) $\sin\beta = \dfrac{3}{4}$. **3.9.** 1) $CD = \dfrac{3\sqrt{55}}{4}$ см; $S = \dfrac{3\sqrt{55}}{4}$ см²; 4) $CD = 4\dfrac{8}{13}$ дм, $S = 30$ дм². **3.10.** 2) 3 см; 3) 0,6 дм. **3.12.** 1) $\angle C = 30^\circ$; 2) $\angle C = 60^\circ$. **3.13.** 1) 60°; 2) 30°. **3.14.** $\sqrt{23{,}2}$ см; $\sin\beta = \dfrac{9}{\sqrt{145}}$; $\sin\gamma = \dfrac{12}{\sqrt{145}}$. **3.15.** 6 м, $3\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)$ м, $6(\sqrt{3} - 1)$ м.

3.17. $\cos\alpha = \sqrt{3}(2 - \sqrt{3})$. **3.18.** 1) Тең бүйірлі, сүйір бұрышты; 2) тік бұрышты; 3) доғал бұрышты. **3.20.** $\dfrac{35\sqrt{6}}{24}$. **3.21.** $a = \dfrac{1}{2}\sqrt{d_1^2 + d_2^2 - 2d_1d_2\cos\alpha}$, $b = \dfrac{1}{2}\sqrt{d_1^2 + d_2^2 + 2d_1d_2\cos\alpha}$. **3.24.** $H = 2$ м.

3.25. $AD = \dfrac{a\sin\beta}{\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}+\beta\right)}$, $BE = \dfrac{a\sin\alpha}{\sin\left(\alpha+\dfrac{\beta}{2}\right)}$, $CF = \dfrac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}$.

3.26. $A_1K = \dfrac{d_2(d_1+d_2)}{\sqrt{(d_1+d_2)^2 - 4d_1d_2\cos^2\varphi}}$, $A_2K = \dfrac{2d_1d_2\cdot\cos\varphi}{\sqrt{(d_1+d_2)^2 - 4d_1d_2\cos^2\varphi}}$,

$A_3K = \dfrac{d_1(d_1+d_2)}{\sqrt{(d_1+d_2)^2 - 4d_1d_2\cos^2\varphi}}$. **3.33.** 2,5 м. **3.34.** 3) $D_1 = \dfrac{\sqrt{19}}{4}$ см, $D_2 = \dfrac{7}{4}$ см. **3.35.** 3) $a = \dfrac{\sqrt{13}}{4}$ м; $b = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$ м. **3.36.** $AC = 6\sqrt{6}$ см, $S = 18(3 + \sqrt{3})$ см². **3.38.** 4) $\angle A = 30^\circ$, $AC = 20$ см, $AB = 20\sqrt{3}$ см, $S = 100\sqrt{3}$ см². **3.39.** 3) $\alpha = 60^\circ$, $\cos\beta = \dfrac{13}{14}$, $\cos\gamma = -\dfrac{1}{7}$, $S = 6\sqrt{3}$ дм. **3.40.** 4) $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$; $\cos\gamma = \dfrac{4-3\sqrt{3}}{10}$; $c = \sqrt{57+24\sqrt{3}}$ см. **3.41.** $2\sqrt{13-6\sqrt{2}}$ см. **3.42.** $\dfrac{15}{4}$ см, $\dfrac{9}{4}$ см. **3.43.** 2) $b = 2\sqrt{7}$ см; $\sin\gamma = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$; $\sin\alpha = \dfrac{3\sqrt{21}}{14}$. **3.44.** $2{,}4\sqrt{6}$ см, $2\sqrt{6}$ см, $\dfrac{12\sqrt{6}}{7}$ см. **3.45.** $\approx 74{,}2$ кг. **3.46.** $F \approx 275$ H, $\alpha \approx 16^\circ$, $\beta \approx 34^\circ$.

3.47. 3. **3.48.** $\dfrac{10}{\cos 20^\circ}$ см, $20\,\mathrm{tg}\,20^\circ$ см. **3.49.** $AC = \dfrac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

3.50. $\dfrac{a}{2}\sin\alpha$. **3.51.** $\cos A = -\dfrac{1}{20}$, $\cos B = \dfrac{1}{20}$, $\cos C = -\dfrac{53}{80}$, $\cos D = \dfrac{53}{80}$.

3.52. $12\sqrt{3}\sin 40^\circ$, $12\sqrt{3}\sin 20^\circ$. **3.53.** $\dfrac{\sqrt{97}}{3}$ м, 4 м, $\dfrac{\sqrt{97}}{3}$ м. **3.55.** $BD = \dfrac{2\sqrt{acp(p-b)}}{a+c}$, т.с.с. **3.56.** $\dfrac{\sqrt{5(a^2+b^2)}}{5}$. **3.57.** $\dfrac{2p^2}{h+2p}$. **3.58.** $\sqrt{b^2+bc}$.

3.59. $\dfrac{100}{3}$ см, $\dfrac{140}{3}$ см. **3.60.** $AB = 4\sqrt{2}$ см, $BD = AC = 4\sqrt{14}$ см.

3.63. $\sin\alpha = \dfrac{h_1+h_2}{p}$. **3.64.** $\dfrac{2}{\sin\alpha}\sqrt{m^2+n^2 \pm 2mn\cos\alpha}$, $S = \dfrac{4mn}{\sin\alpha}$.

3.65. $\frac{h^2}{\sin\alpha}$. **3.66.** $50\sqrt{2}$ см^2. **3.67.** $8\sqrt{3}$ см^2. **3.68.** $5\sqrt{2}$ м, 10 м, $5(\sqrt{3}+1)$ м. **3.69.** $a+2a\cos\alpha$, $S=a^2\sin\alpha(1+\cos\alpha)$. **3.70.** $5(2-\sqrt{3})$см, $\frac{10\sqrt{3}}{3}$см. **3.71.** $\sin2\alpha\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$. **3.72.** $\sqrt{m^2+n^2-1{,}6mn}$. **3.73.** $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{S\cdot\sin\alpha\sin\beta}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}}$. **3.74.** $h\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$. **3.75.** $2\sqrt{2}\,d\cos\frac{(p-q)45^\circ}{p+q}$. **3.76.** $\cos\beta=\frac{m}{m+n}$, $\cos\alpha=\cos\gamma=\sqrt{\frac{n}{2(m+n)}}$. **3.77.** $\frac{a}{4}\sqrt{9+tg^2\alpha}$. **3.78.** $\frac{ab\sin\alpha}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}}$. **3.79.** $\sin\alpha=\frac{4r^2}{S}$. **3.80.** $\frac{r\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\alpha}$. **3.81.** $\frac{2bc\cos\frac{\alpha}{2}}{b-c}$. **3.82.** $AC=\frac{m-n\cos\alpha}{\sin\alpha}$, $AB=\frac{n-m\cos\alpha}{\sin\alpha}$. **3.83.** $\frac{l(a+b)}{ab}\sqrt{4a^2b^2-l^2(a+b)^2}$. **3.84.** $\mathrm{tg}\varphi=\frac{1}{2}(\mathrm{ctg}\beta-\mathrm{ctg}\gamma)$. **3.85.** $\frac{\sqrt{m^2+n^2-2mn\cos\alpha}}{\sin\alpha}$. **3.86.** $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{(a+b)l}{2ab}$. **3.87.** $\mathrm{ctg}\varphi=\frac{\sqrt{3}(p-q)}{3(p+q)}$. **3.88.** $\mathrm{tg}\varphi=\frac{4S}{a^2+b^2+c^2}$.

4-бөлім. **4.2.** 1) 64 см; 2) 48 см. **4.3.** 1) $\sqrt{3}$ см; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см. **4.4.** 1) $4\sqrt{2}\pi$ см; 2) 4π см. **4.5.** 1) $\frac{5\pi}{6}$ см; 2) 10π см. **4.6.** 1) $\frac{5\pi}{2}$; 2) $\frac{10\pi}{3}$; 3) 3π; 4) 10π. **4.7.** 5) $\frac{4\pi}{3}$; 6) $\frac{3\pi}{2}$. **4.8.** 1 м. **4.9.** 6 369 426,7 м. **4.10.** 36,2 см. **4.11.** 6,28 см. **4.12.** 1) $(2\sqrt{3}-3)R$; 2) $(\sqrt{2}-1)R$. **4.13.** $4^\circ36'$. **4.14.** 2) 48 см. **4.15.** 2) $c\pi(\sqrt{2}-1)$. **4.16.** $\frac{6\pi R}{11}$. **4.17.** Тең. **4.18.** 1) $4\pi R^2$; 2) $\frac{2\pi a}{3}$. **4.20.** 330 км. **4.23.** 1) 4 есе кемиді; 2) 9 есе өседі. **4.24.** 1) $S_c=\frac{\pi a^2}{3}$, $S_i=\frac{\pi a^2}{12}$. **4.25.** $\sqrt{2}:\sqrt{3}$. **4.26.** $2\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ м. **4.27.** 2) $\frac{1}{8}$; 4) $\frac{1}{4}$; 6) $\frac{5}{6}$. **4.28.** 1) $\frac{\pi a^2}{4}$; 2) $\frac{\pi a^2}{4}$; 3) $\frac{\pi a^2}{4}$. **4.29.** $S_1=\frac{\pi R^2\alpha}{360^\circ}-h\sqrt{R^2-h^2}$,

$S_2=\dfrac{\pi R^2(360^\circ-\alpha)}{360^\circ}+h\sqrt{R^2-h^2}$, мұнда $\cos\alpha=\dfrac{2h^2-R^2}{R^2}$. **4.31.** 100π см². **4.32.** 30 756π мм². **4.33.** 1) $(4-\pi)a^2$; 2) $\dfrac{8+\pi}{2}a^2$; 3) $\dfrac{\pi+3\sqrt{3}}{6}a^2$. **4.34.** 3 : 2. **4.38.** $2\sqrt{R^2+r^2}$. **4.39.** 3 : 1. **4.41.** 1) Жоқ: 2) иә: 3) иә. **4.42.** Иә; 2) жоқ. **4.44.** 1) Иә; 2) жоқ 3) иә. **4.45.** 30 см. **4.46.** R радиусы мен α бұрышы бойынша үшбұрыш салу керек. **4.50.** R. **4.52.** 56 см. **4.55.** Бұл төртбұрыштың тіктөртбұрыш болатынын көрсетіңдер. **4.57.** Тең хордалар центрден бірдей қашықтықта орналасады, сондықтан оған іштей шеңбер сызуға болады. **4.58.** Мүмкін емес. **4.59.** Алдымен қиылысатын екі хорданың арасындағы бұрыш олармен керілетін (вертикаль бұрыштарға) екі доғаның жарым қосындысымен өлшенетінін көрсетіңдер. Егер O — диагональдарының қиылысу нүктесі, P, Q — бүйір қабырғаларының орналасу нүктелері болса, онда $\angle POQ=180^\circ$ болатынын көрсетсе, жеткілікті. **4.60.** 4.59-есепті қараңдар. **4.61.** 24 см. **4.62.** $4\sqrt{2}$ см. **4.63.** 8 см. **4.64.** 16 см. **4.65.** 8 см. **4.66.** 15 см. **4.67.** 1) 2:3; 2) 4:9. **4.68.** 6 см. **4.70.** 12 см. **4.72.** 225,8 км. **4.73.** $2\sqrt{2}$ см. **4.74.** 1) ≈ 13 м; 2) 4,35 м. **4.75.** 21 см. **4.77.** 1,5 есе. **4.78.** 10 см. **4.80.** $\sqrt{ab}$. **4.81.** $2\sqrt{R^2-d^2}$. **4.82.** 18 см, 32 см. **4.83.** $\dfrac{671}{25}$ см. **4.85.** 7:8. **4.88.** $BE=7$ см, $EC=5$ см. **4.90.** 12 см, 18 см. **4.91.** 8 см. **4.92.** $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$ есе. **4.95.** Бүйір қабырғалары созындыларының қиылысу нүктесін гомотетия центрі етіп алу керек. **4.99.** Мүмкін емес. **4.100.** 1) 8; 2) 12. **4.101.** 360°. **4.102.** 1) 10; 2) 15. **4.105.** 1) $n<6$; 2) $n=6$; 3) $n>6$. **4.106.** 1) 60°; 3) 108°; 5) 144°. **4.110.** $32\sqrt{3}$ см. **4.111.** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$. **4.113.** 1) 2; 2) $\sqrt{2}$; 3) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **4.114.** $a_5=2R\sin36^\circ$; $a_{10}=2R\sin18^\circ$. **4.115.** 4) $R=10\sqrt{3}$ см, $a_3=30$ см, $P_3=90$ см. **4.116.** 2) $D=5\sqrt{3}$ см. **4.117.** 1) $2\sqrt{3}$ см; 2) $3\sqrt{3}$ см. **4.118.** $10\sqrt{2}$ см. **4.122.** $\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}R^2$. **4.123.** 1) $0,5R^2$; 2) $\dfrac{4-\sqrt{3}}{4}R^2$. **4.124.** Үшбұрыштар теңдігін қолданыңдар.

МАЗМҰНЫ

Оқу басылымы

Шыныбеков Әбдухали Насырұлы
Шыныбеков Данияр Әбдухалиұлы
Жұмабаев Ринат Нұрланұлы

ГЕОМЕТРИЯ

Жалпы білім беретін мектептің 9-сыныбына арналған оқулық

Редакторы *Ж. Баданова*
Көркемдеуші редакторы *А. Искаков*
Корректор *Б. Жанпейісова*
Техникалық редакторы *Ү. Рысалиева*

ИБ № 088

Теруге 11.02.2019 берілді. Басуға 04.05.2019 қол қойылды.
Пішімі 60х90 $^1/_{16}$. Офсеттік қағаз. Шартты баспа табағы 11,0.
Есептік баспа табағы 8,39. Таралымы 20000 дана. Тапсырыс 4338.

«Атамұра» корпорациясы» ЖШС, 050000, Алматы қаласы,
Абылай хан даңғылы, 75.

Қазақстан Республикасы «Атамұра» корпорациясы» ЖШС-нің
Полиграфкомбинаты, 050002, Алматы қаласы, М.Мақатаев көшесі, 41.