В.А. Смирнов, Е.А. Тұяқов

ГЕОМЕТРИЯ

9

Жалпы білім беретін мектептің
9-сыныбына арналған оқулық

*Қазақстан Республикасының
Білім және ғылым министрлігі бекіткен*

Алматы "Мектеп" 2019

ӘОЖ 373.167.1
КБЖ 22.15я72
С53

Шартты белгілер:

— анықтамалар, қасиеттер, ережелер

— жаңа білімді меңгеру барысында шешілетін мәселе

— пысықтау сұрақтары

— теориялық материалды өзіндік оқып-үйренуге қажетті тапсырмалар

— теорема немесе қасиеттері дәлелдеуінің аяқталуы

A — барлық оқушыға міндетті жаттығулар

B — орта деңгейлі жаттығулар

C — жоғары деңгейлі жаттығулар

Смирнов В.А., Тұяқов Е.А.
С53 **Геометрия.** Жалпы білім беретін мектептің 9-сыныбына арналған оқулық. — Алматы: Мектеп, 2019. — 184 б., сур.
ISBN 978—601—07—1096—2

С $\frac{4306020502—001}{404(05)—19}$ 10(1)—19

ӘОЖ 373.167.1
КБЖ 22.15я72

ISBN 978—601—07—1096—2

АЛҒЫ СӨЗ

Осы оқулық 9-сыныпта геометрия курсын оқып-білуге арналып отыр. Сендер жазықтықтағы геометриялық фигураларды түрлендіру тәсілдерімен және олардың негізгі қасиеттерімен, векторлық әдіспен танысасыңдар, кесінділердің ұзындықтарын, бұрыштардың шамаларын, фигуралардың аудандарын табуға, дәлелдеуге арналған және т.б. есептерді шешуді үйренесіңдер.

Оқулықтағы барлық материалдар тарауларға және параграфтарға бөлінген. Олар теориялық материалды, өздігінен орындауға арналған тапсырмаларды, пысықтау сұрақтарын, күрделілігі әртүрлі деңгейдегі есептер мен жаттығуларды қамтиды.

Теореманы дәлелдеудің аяқталуы (□) белгісімен белгіленген.

Оқулықтағы тапсырмалар мен жаттығулар күрделілігіне қарай: А — міндетті деңгей, В — орта деңгей, С — жоғары деңгей деп берілген.

(*) жұлдызшамен белгіленген параграфтар оқу бағдарламасына енбейтін ғылыми-танымдық және қолданбалы сипаттағы қосымша материалды қамтиды. Оларды негізгі сабақтарда немесе қосымша сабақтарда (үйірмелерде, таңдау курстарында және т.б.), сонымен бірге оқушылардың жобалық және зерттеу жұмыстарын ұйымдастыруда пайдалануға болады.

Әрбір тараудың соңында оқу материалдарын меңгеру сапасын тексеруге арналған тест тапсырмалары берілген. Оқулықтың соңында есептердің жауаптары ұсынылған.

Геометрияны оқып-білуде сәттілік тілейміз!

8-СЫНЫПТАҒЫ ГЕОМЕТРИЯ КУРСЫН ҚАЙТАЛАУ

1. КӨПБҰРЫШТАР. ТӨРТБҰРЫШТАРДЫ ЗЕРТТЕУ

Бұрыштар

1. Параллелограмның доғал бұрышы 118°-қа тең. Оның сүйір бұрышын табыңдар.
2. Параллелограмның сүйір бұрышы 64°-қа тең. Оның доғал бұрышын табыңдар.
3. Параллелограмның сыртқы бұрышының біреуі 62°-қа тең. Оның үлкен бұрышын табыңдар.
4. Параллелограмның бір қабырғасына іргелес жатқан бұрыштарының айырымы 40°-қа тең. Оның кіші бұрышын табыңдар.
5. Параллелограмның екі бұрышының қосындысы 260°-қа тең. Оның бұрыштарын табыңдар.
6. Параллелограмның бір бұрышы екіншісінен 70°-қа үлкен болса, онда оның кіші бұрышын табыңдар.
7. Параллелограмның бір бұрышы екіншісінен 68°-қа кіші болса, онда оның үлкен бұрышын табыңдар.
8. Параллелограмның екі бұрышы 3 : 7 қатынасындай болса, онда оның кіші бұрышын табыңдар.
9. Параллелограмның диагоналі оның екі қабырғасымен 26° және 34° бұрыштарын жасайды. Параллелограмның кіші бұрышын табыңдар.
10. Параллелограмның биіктігі оның қабырғасымен 28° бұрыш жасайды. Оның үлкен бұрышын табыңдар.
11. Тіктөртбұрыштың диагоналі оның бір қабырғасымен 58° бұрыш жасайды. Оның диагональдарының арасындағы бұрышты табыңдар.
12. Тіктөртбұрыштың диагональдарының арасындағы бұрыш 48°-қа тең. Диагональдің қабырғасымен жасайтын кіші бұрышын табыңдар.
13. Параллелограмның сүйір бұрышы 60°-қа тең. Оның доғал бұрышының төбесінен жүргізілген биіктіктерінің арасындағы бұрышты табыңдар.
14. Параллелограмның доғал бұрышының төбесінен жүргізілген биіктіктерінің арасындағы бұрыш 50°-қа тең. Оның сүйір бұрышын табыңдар.
15. Ромбының бір бұрышы 50°-қа тең. Оның диагональдарының қабырғаларымен жасайтын үлкен бұрышын табыңдар.
16. Ромбының диагоналінің бір қабырғасымен жасайтын бұрышы 61°-қа тең. Осы диагоналінің екінші қабырғасымен жасайтын бұрышын табыңдар .

17. Теңбүйірлі трапецияның қарама-қарсы бұрыштарының айырымы 50°-қа тең болса, онда оның кіші бұрышын табыңдар.
18. Теңбүйірлі трапецияның бір бұрышы екіншісінен екі есе үлкен. Оның үлкен бұрышын табыңдар.
19. Теңбүйірлі трапецияның екі бұрышының қосындысы 220°-қа тең. Оның кіші бұрышын табыңдар.
20. Теңбүйірлі трапецияның қарама-қарсы бұрыштарының шамасы $4:5$ қатынасындай болса, онда оның кіші бұрышын табыңдар.
21. Теңбүйірлі трапецияның қарама-қарсы бұрыштарының шамасы $2:3$ қатынасындай болса, онда оның үлкен бұрышын табыңдар.
22. Тікбұрышты трапецияның екі бұрышының қосындысы 200°-қа тең. Оның кіші бұрышын табыңдар.
23. Тікбұрышты трапецияның екі бұрышының қосындысы 160°-қа тең. Оның үлкен бұрышын табыңдар.
24. Теңбүйірлі трапецияның диагональдарының арасындағы бұрыш 76°-қа тең. Оның табаны мен диагоналі арасындағы бұрышты табыңдар.
25. Дөңес төртбұрыштың үш бұрышы 60°, 80° және 100°-қа тең. Оның төртінші бұрышын табыңдар.
26. Дөңес төртбұрыштың үш бұрышының қосындысы 300°-қа тең. Оның төртінші бұрышын табыңдар.
27. Дөңес төртбұрыштың бұрыштары $1:2:3:4$ қатынасындай. Оның үлкен бұрышын табыңдар.
28. $ABCD$ төртбұрышында $AB = AD$, $BC = CD$, $\angle A = 60°$, $\angle B = 105°$. C бұрышын табыңдар.
29. Дөңес төртбұрыштың бұрыштары $1:2:3:4$ қатынасындай. Оның кіші бұрышын табыңдар.

2. Ұзындық

1. Параллелограмның периметрі 50 см. Егер параллелограмның бір қабырғасы екіншісінен 5 см-ге қысқа болса, онда оның үлкен қабырғасын табыңдар.
2. Параллелограмның периметрі 30 см. Егер параллелограмның бір қабырғасы екіншісінен екі есе ұзын болса, онда оның үлкен қабырғасын табыңдар.
3. Параллелограмның екі қабырғасы $2:3$ қатынасындай және оның периметрі 60 см-ге тең. Параллелограмның кіші қабырғасын табыңдар.
4. Теңбүйірлі үшбұрыштың бүйір қабырғасы 10 см. Осы үшбұрыштың табанында жатқан нүкте арқылы оның бүйір қабырғаларына

параллель екі түзу жүргізілген. Пайда болған параллелограмның периметрін табыңдар.

5. Тіктөртбұрыштың периметрі 28 см-ге, ал оның диагоналімен бөлінген үшбұрыштардың біреуінің периметрі 24 см-ге тең. Тіктөртбұрыштың диагональдарын табыңдар.
6. Трапецияның 4 см-ге тең кіші табанының ұшы арқылы оның бүйір қабырғасына параллель түзу жүргізілген. Бұл түзу трапециядан периметрі 15 см-ге тең үшбұрышты қиып түседі. Трапецияның периметрін табыңдар.
7. Теңбүйірлі трапецияның табандары 12 см және 27 см, ал сүйір бұрышы 60°-қа тең. Оның периметрін табыңдар.
8. Трапецияның периметрі 50 см, ал параллель емес қабырғаларының қосындысы 20 см-ге тең. Трапецияның орта сызығын табыңдар.
9. Теңбүйірлі трапецияның периметрі 80 см-ге, ал орта сызығы бүйір қабырғасына тең. Трапецияның бүйір қабырғасын табыңдар.
10. Төртбұрыштың диагональдары 4 см және 5 см. Төбелері осы төртбұрыштың қабырғаларының орталары болатын төртбұрыштың периметрі н табыңдар.
11. Диагоналі $\sqrt{8}$ см-ге тең болатын квадраттың қабырғасын табыңдар.
12. Квадраттың диагональдарының қиылысу нүктесінен оның бір қабырғасына дейінгі қашықтық 7 см-ге тең. Квадраттың қабырғасын табыңдар.
13. Тіктөртбұрыштың кіші қабырғасы 6 см-ге тең, ал диагональдары 60° бұрыш жасап қиылысады. Тіктөртбұрыштың диагоналін табыңдар.
14. Тіктөртбұрыштың диагоналі бұрышын 1 : 2 қатынасында бөледі, оның кіші қабырғасы 8 см-ге тең. Тіктөртбұрыштың диагоналін табыңдар.
15. Тіктөртбұрыштың диагональдарының қиылысу нүктесінен оның кіші қабырғасына дейінгі қашықтық оның үлкен қабырғасына дейінгі қашықтықтан 2 см-ге ұзын. Тіктөртбұрыштың периметрі 28 см-ге тең. Оның кіші қабырғасын табыңдар.
16. Параллелограмның екі қабырғасы 6 см және 8 см, ал сүйір бұрышы 45°-қа тең. Оның кіші биіктігін табыңдар.
17. Параллелограмның биіктіктері 3 см және 4 см. Олардың арасындағы бұрыш 60°-қа тең. Параллелограмның үлкен табанын табыңдар.
18. Ромбының қабырғасы 1 см-ге, ал доғал бұрышы 120°-қа тең. Оның кіші диагоналін табыңдар.
19. Ромбының диагональдары 10 см және 24 см. Оның қабырғасын табыңдар.

20. Ромбының диагональдары 6 см және 8 см. Оның биіктігін табыңдар.
21. Трапецияның орта сызығы 12 см, ал үлкен табаны 18 см-ге тең. Оның кіші табанын табыңдар.
22. Теңбүйірлі трапецияның табандары 12 см және 8 см, ал бір бұрышы 135°-қа тең. Оның биіктігін табыңдар.
23. Теңбүйірлі трапецияның үлкен табаны 25 см, бүйір қабырғасы 10 см, ал олардың арасындағы бұрыш 60°-қа тең. Оның кіші табанын табыңдар.
24. Трапецияның орта сызығы 7 см, ал бір табаны екіншісінен 4 см-ге артық. Оның үлкен табанын табыңдар.
25. Теңбүйірлі трапецияның доғал бұрышының төбесінен үлкен табанына түсірілген перпендикуляр оны ұзындықтары 10 см және 4 см болатын бөліктерге бөледі. Трапецияның орта сызығын табыңдар.
26. Трапецияның табандары 3 см және 2 см. Оның диагональдарының орталарын қосатын кесіндіні табыңдар.
27. Трапецияның табандарының ұзындықтары 2 : 3 қатынасындай, ал орта сызығы 5-ке тең. Оның кіші табанын табыңдар.
28. Теңбүйірлі трапецияның табандары 10 см және 4 см, ал бүйір қабырғалары 5 см-ге тең. Оның биіктігін табыңдар.
29. Тікбұрышты трапецияның табандары 12 см және 6 см. Табандарына перпендикуляр бүйір қабырғасы 8 см-ге тең. Трапецияның екінші бүйір қабырғасын табыңдар.
30. Трапецияның орта сызығы 12 см. Бір диагоналі оны айырымы 2 см-ге тең кесінділерге бөледі. Трапецияның үлкен табанын табыңдар.

3. Тікбұрышты үшбұрыштың қабырғалары мен бұрыштары арасындағы қатынастар

1. ABC үшбұрышында C бұрышы 90°-қа, A бұрышы 30°-қа тең және $AC = 6$. AB қабырғасын табыңдар.
2. ABC үшбұрышында C бұрышы 90°-қа, A бұрышы 45°-қа тең және $AC=2$. AB қабырғасын табыңдар.
3. ABC үшбұрышында C бұрышы 90°-қа, A бұрышы 60°-қа тең және $AC = 2$. BC қабырғасын табыңдар.
4. ABC үшбұрышында C бұрышы 90°, CH — биіктігі, A бұрышы 30°-қа тең және $AB = 4$. AH кесіндісін табыңдар.
5. ABC үшбұрышында C бұрышы 90°, CH — биіктігі, A бұрышы 45°-қа тең және $AB = 4$. CH кесіндісін табыңдар.

6. ABC үшбұрышында C бұрышы $90°$, CH — биіктігі, A бұрышы $60°$-қа тең және $AB = 1$. CH кесіндісін табыңдар.
7. ABC үшбұрышында $AC = BC$, C бұрышы $120°$-қа тең және $AC = 1$. AB кесіндісін табыңдар.
8. ABC үшбұрышында $AC = BC = 2$ және C бұрышы $150°$-қа тең. AH биіктігін табыңдар.
9. ABC үшбұрышында C бұрышы $90°$-қа тең, $\cos A = 0{,}8$, $AC = 4$. AB қабырғасын табыңдар.
10. ABC үшбұрышында C бұрышы $90°$-қа тең, $BC = 4$, $\sin A = 0{,}8$. AB қабырғасын табыңдар.
11. ABC үшбұрышында C бұрышы $90°$-қа тең, $\operatorname{tg} A = \frac{3}{4}$, $BC = 6$. AC қабырғасын табыңдар.
12. ABC үшбұрышында $AC = BC$, $AB = 18$, $\cos A = 0{,}6$. AC қабырғасын табыңдар.
13. ABC үшбұрышында $AC = BC = 10$, $\sin A = 0{,}8$. AB қабырғасын табыңдар.
14. ABC үшбұрышында B бұрышы — доғал, $AB = BC$, $AC = 10$, $\cos C = 0{,}6$, CH — биіктігі. AH кесіндісін табыңдар.
15. ABC үшбұрышында B бұрышы — доғал, $AB = BC$, $AC = 10$, $\sin C = 0{,}6$. CH биіктігін табыңдар.
16. ABC үшбұрышында B бұрышы — доғал, $AB = BC$, $\operatorname{tg} C = 0{,}75$, CH — биіктігі, $AH = 8$. CH кесіндісін табыңдар.
17. Теңқабырғалы үшбұрыштың қабырғалары 1-ге тең. Оның биіктігін табыңдар.
18. Теңқабырғалы үшбұрыштың биіктігі 3-ке тең. Оның қабырғасын табыңдар.
19. ABC үшбұрышында $AC = BC = 10$, $AB = 12$. CH биіктігін табыңдар.
20. ABC үшбұрышында $AC = BC = 10$, $AB = 12$. AH биіктігін табыңдар.
21. ABC тікбұрышты үшбұрышында $(\angle C = 90°)$ $AC = 3$, $AB = 7$. CD биіктігін табыңдар.
22. ABC тікбұрышты үшбұрышында $(\angle C = 90°)$ $AC = 3$, $BC = 6$, CD — биіктігі. AD кесіндісін табыңдар.
23. ABC тікбұрышты үшбұрышында $(\angle C = 90°)$ $AC = 3$, $BC = 6$, CD — биіктігі. BD кесіндісін табыңдар.
24. ABC тікбұрышты үшбұрышында $(\angle C = 90°)$ $AC = 6$, $BC = 8$. CD медианасын табыңдар.

4. Аудан

1. Қабырғалары 4 м және 9 м болатын тіктөртбұрыштың ауданына ауданы тең квадраттың қабырғасын табыңдар.
2. Диагоналі 4-ке тең квадраттың ауданын табыңдар.
3. Ауданы 25-ке тең квадраттың периметрін табыңдар.
4. Диагональдары 10 және 6-ға тең екі квадрат берілген. Ауданы осы квадраттардың аудандарының айырмасына тең квадраттың диагоналін табыңдар.
5. Тіктөртбұрыштың қабырғасы 5-ке, диагоналі 13-ке тең. Оның ауданын табыңдар.
6. Тіктөртбұрыштың ауданы 24 см-ге тең. Тіктөртбұрыштың үлкен қабырғасы кіші қабырғасынан 2 см-ге ұзын болса, үлкен қабырғасын табыңдар.
7. Тіктөртбұрыштың периметрі 12, бір қабырғасы екіншісінен екі есе үлкен. Оның ауданын табыңдар.
8. Тіктөртбұрыштың диагональдары 8-ге, ал олардың арасындағы бұрыш 45°-қа тең. Ауданын табыңдар.
9. Квадраттың ауданы 10-ға тең. Төбелері осы квадраттың қабырғаларының орталары болатын жаңа квадраттың ауданын табыңдар.
10. Шеңберге сырттай сызылған квадраттың ауданы 16. Осы шеңберге іштей сызылған квадраттың ауданын табыңдар.
11. Параллелограмның қабырғалары 2 және 4, ал бір бұрышы 150°-қа тең. Оның ауданын табыңдар.
12. Ромбының биіктігі 2-ге, сүйір бұрышы 45°-қа тең. Оның ауданын табыңдар.
13. Параллелограмның екі қабырғасы 6 және 8, ал кіші биіктігі 4-ке тең. Оның ауданын табыңдар.
14. Параллелограмның қабырғалары 9 және 15. Кіші қабырғасына түсірілген биіктік 10-ға тең. Оның үлкен қабырғасына түсірілген биіктігін табыңдар.
15. Параллелограмм мен тіктөртбұрыштың қабырғалары тең. Параллелограмның ауданы тіктөртбұрыштың ауданының жартысына тең болса, оның сүйір бұрышын табыңдар.
16. Ромбының ауданы 18-ге, бір диагоналі 12-ге тең. Екінші диагоналін табыңдар.
17. Ромбының ауданы 6-ға, бір диагоналі екіншісінен 3 есе үлкен. Кіші диагоналін табыңдар.
18. Параллелограмның диагональдары 6 және 8, олардың арасындағы бұрыш 30°. Оның ауданын табыңдар.

19. Параллелограмның ауданы 10-ға тең. Төбелері осы параллелограмның қабырғаларының орталары болатын жаңа параллелограмның ауданын табыңдар.
20. Ромбының қабырғасы 3-ке, ал оған іштей сызылған шеңбердің радиусы 1-ге тең. Оның ауданын табыңдар.
21. Тікбұрышты үшбұрыштың катеттері 5 және 8. Оның ауданын табыңдар.
22. Тікбұрышты үшбұрыштың катеті мен гипотенузасы сәйкесінше 6 мен 10-ға тең. Оның ауданын табыңдар.
23. Тікбұрышты үшбұрыштың ауданы 12 см-ге тең. Бір катеті екіншісінен 2 см-ге ұзын. Оның кіші катетін табыңдар.
24. Теңбүйірлі үшбұрыштың табанына қарсы жатқан төбесіндегі бұрыш 30°-қа, бүйір қабырғасы 10-ға тең. Үшбұрыштың ауданын табыңдар.
25. Теңбүйірлі үшбұрыштың табанына қарсы жатқан төбесіндегі бұрыш 150°-қа, ауданы 100-ге тең. Үшбұрыштың бүйір қабырғасын табыңдар.
26. Теңбүйірлі үшбұрыштың бүйір қабырғасы 10-ға, табаны 16-ға тең. Оның ауданын табыңдар.
27. Үшбұрыштың 9 және 6-ға тең қабырғаларына биіктіктер жүргізілген. Бірінші қабырғасына жүргізілген биіктік 4-ке тең. Екінші қабырғасына жүргізілген биіктікті табыңдар.
28. Үшбұрыштың екі биіктігі 6 және 9-ға, олардың арасындағы бұрыш 60°-қа тең. Оның ауданын табыңдар.
29. Үшбұрыштың ауданы 12-ге тең. Төбелері осы үшбұрыштың қабырғаларының орталары болатын жаңа үшбұрыштың ауданын табыңдар.
30. Үшбұрыштың периметрі 12-ге, ал оған іштей сызылған шеңбердің радиусы 1-ге тең. Үшбұрыштың ауданын табыңдар.
31. Трапецияның табандары 1 және 3, биіктігі 1-ге тең. Оның ауданын табыңдар.
32. Трапецияның табаны 13-ке, биіктігі 5-ке, ауданы 50-ге тең. Оның екінші табанын табыңдар.
33. Трапецияның табандары 8 және 14, ауданы 66. Оның биіктігін табыңдар.
34. Трапецияның биіктігі 10-ға, ауданы 150-ге тең. Трапецияның орта сызығын табыңдар.
35. Трапецияның орта сызығы 12-ге, ауданы 96-ға тең. Оның биіктігін табыңдар.
36. Тікбұрышты трапецияның табандары 12 және 4, оның ауданы 64. Трапецияның сүйір бұрышын табыңдар.

37. Теңбүйірлі трапецияның табандары 14 және 26, ал бүйір қабырғалары 10-ға тең. Трапецияның ауданын табыңдар.

38. Трапецияның табандары 18 және 6. Бүйір қабырғасы 7-ге тең және ол бір табанымен $150°$ бұрыш жасайды. Трапецияның ауданын табыңдар.

39. ABC үшбұрышының ауданы 12-ге тең. DE — орта сызығы. $ABDE$ трапециясының ауданын табыңдар.

40. Трапецияның орта сызығы 10-ға, оған іштей сызылған шеңбердің радиусы 4-ке тең. Трапецияның ауданын табыңдар.

5. Жазықтықтағы тікбұрышты координаталар жүйесі

1. Координаталық жазықтықта келесі нүктелерді кескіндеңдер: $A(1; 2)$, $B(3; 1)$, $C(2; 4)$, $D(-2; 3)$, $E(-3; -2)$, $F(2; -3)$.

2. Абсцисса осіне параллель түзудің бойынан екі нүкте алынған. Бір нүктенің ординатасы 5-ке тең. Екінші нүктенің ординатасы неге тең?

3. Абсцисса осіне перпендикуляр түзудің бойынан екі нүкте алынған. Бір нүктенің абсциссасы 4-ке тең. Екінші нүктенің абсциссасы неге тең?

4. $A(3; 2)$ нүктесінен абсцисса осіне перпендикуляр түсірілген. Перпендикулярдың табанының координатасын табыңдар.

5. $A(3; 2)$ нүктесі арқылы абсцисса осіне параллель түзу жүргізілген. Оның ордината осімен қиылысу нүктесінің координатасын табыңдар.

6. AB кесіндісі ортасының координатасын табыңдар, мұндағы: 1) $A(2; -1)$, $B(6; 5)$; 2) $A(-4; 3)$, $B(2; 1)$; 3) $A(7; 5)$, $B(-5; -3)$.

7. Жазықтықтағы координаталар жүйесінде $A(1; 1)$ және $B(-1; 1)$ нүктелерін кескіндеңдер. AB кесіндісін салыңдар. Ол координаталық остермен қиылыса ма? Қиылысатын болса, қиылысу нүктесінің координатасын табыңдар.

8. $O(0; 0)$, $A(6; 0)$, B және $C(2; 6)$ нүктелері параллелограмның тізбектей төбелері болады. B төбесінің координаталарын табыңдар.

9. $O(0; 0)$, $A(6; 2)$, $B(8; 10)$, $C(2; 8)$ нүктелері төртбұрыштың төбелері болады. Оның диагональдарының P қиылысу нүктесінің координаталарын табыңдар.

10. Келесі нүктелердің арақашықтығын табыңдар: 1) $A_1(2; 1)$ және $A_2(1; -1)$; 2) $B_1(4; 3)$ және $B_2(-1; 3)$.

11. $A(3; 2)$ нүктесінен: 1) Ox; 2) Oy осіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

12. $A(1;\ 2)$ немесе $B(1;\ -2)$ нүктелерінің қайсысы координаталар басына жақын орналасқан?

13. Келесі теңдеумен берілген шеңбердің R радиусы мен C центрінің координатасын табыңдар: 1) $(x+5)^2+(y-2)^2=16$; 2) x^2+ $+(y+3)^2=9$.

14. 1) Центрі $O(0;\ 0)$ нүктесі және радиусы 2-ге тең; 2) центрі $C(-2;\ 1)$ нүктесі және радиусы 3-ке тең болатын шеңбердің теңдеуін табыңдар.

15. Координаталары берілген келесі нүктелер $x^2+y^2=25$ шеңберіне қатысты қалай орналасқанын анықтаңдар: 1) (2; 1); 2) (4; 3); 3) (3; –4); 4) (5; 0); 5 (–1; 5).

16. Абсцисса осін жанайтын және центрі $C(2;\ 1)$ нүктесі болатын шеңбердің теңдеуін табыңдар.

17. Координаталар басы арқылы өтетін және центрі $C(4;\ -3)$ нүктесі болатын шеңбердің теңдеуін табыңдар.

18. Келесі теңдеу шеңбердің теңдеуі болатынын дәлелдеңдер: 1) $x^2+4x+y^2=0$; 2) $x^2-2x+y^2+4y+4=0$. Шеңбердің радиусын және центрінің координаталарын табыңдар.

19. $A(2;\ 1)$ нүктесі арқылы өтетін және 1) Ox; 2) Oy осіне параллель түзудің теңдеуін табыңдар.

20. $A(3;\ 2)$ нүктесі арқылы өтетін және 1) Ox; 2) Oy осіне перпендикуляр түзудің теңдеуін табыңдар.

21. Бұрыштық коэффициенті берілген және $A(-1;\ 2)$ нүктесі арқылы өтетін түзудің теңдеуін табыңдар: 1) $k=1$; 2) $k=2$; 3) $k=0{,}5$; 4) $k=-1$; 5) $k=-2$; 6) $k=-0{,}5$.

22. Координаталық жазықтықта квадрат салыңдар, оның қарама-қарсы екі төбесінің координаталары (1; 0) және (4; 1). Квадраттың ауданын табыңдар.

23. Координаталық жазықтықта тіктөртбұрыш салыңдар, оның үш төбесінің координаталары (–3; 0), (–1; –2), (0; 3). Тіктөртбұрыштың ауданын табыңдар.

24. Координаталық жазықтықта $OABC$ параллелограмын салыңдар, оның кейбір төбелерінің координаталары $O(0;\ 0)$, $A(3;\ 1)$, $B(3;\ 3)$. Параллелограмның ауданын табыңдар.

25. Координаталық жазықтықта $ABCD$ ромбысын салыңдар, оның кейбір төбелерінің координаталары $A(0;\ -2)$, $B(1;\ 0)$, $D(-1;\ 0)$. Ромбының ауданын табыңдар.

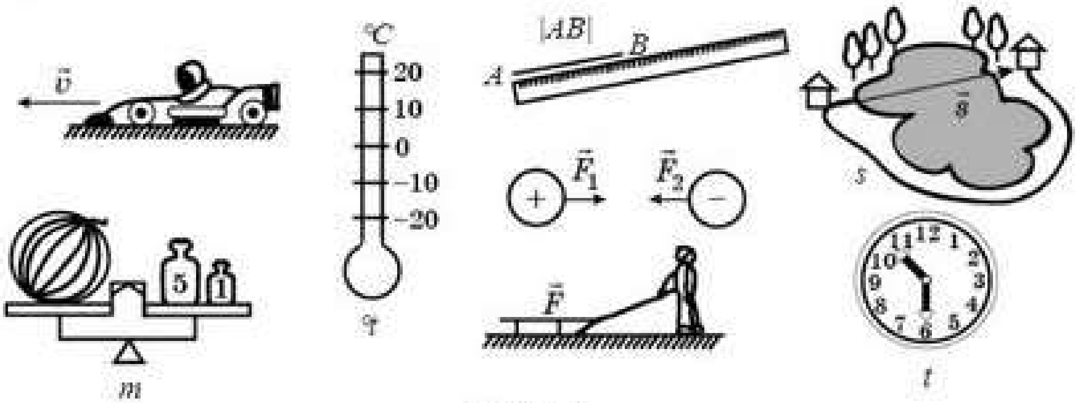
1-тарау

ЖАЗЫҚТЫҚТАҒЫ ВЕКТОРЛАР

1. ВЕКТОР ҰҒЫМЫ

Көптеген физикалық шамалар, мысалы жылдамдық, күш, үдеу және т.б. тек сандық мәнімен ғана емес бағытымен де сипатталады. Мұндай шамалар *векторлық шамалар* деп аталады.

1.1-суретте скаляр және векторлық шамаларға мысалдар келтірілген. Біріншісіне — масса, ұзындық, температура, ал екіншісіне — жылдамдық, күш, орын ауыстыру жатады. Скаляр және векторлық шамалардың айырмашылығы неде? Скаляр және векторлық шамаларға мысалдар келтіріңдер.



1.1-сурет

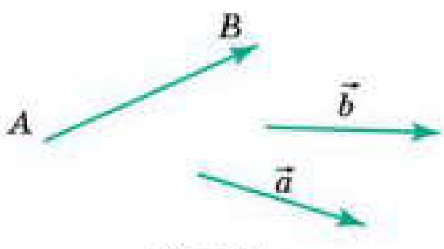
Қандай да бір AB кесіндісін қарастырайық. Бұл кесіндіде A нүктесінен B нүктесіне қарай немесе B нүктесінен A нүктесіне қарай екі бағытты көрсетуге болады.

Егер осы екі бағыттың бірін таңдап алып, кесіндінің бір ұшын оның басы, ал екіншісін оның ұшы деп атасақ, онда берілген кесінді бағытталған кесінді болады.

Бағытталған кесінді ***вектор*** деп аталады.

A нүктесі басы және B нүктесі ұшы болатын вектор $\overrightarrow{AB}$ деп белгіленеді және A нүктесі басынан B нүктесі ұшына бағытталған нұсқама кесіндімен бейнеленеді.

Сонымен қатар вектор латынның кіші әрпімен үстіне нұсқама қойылып белгіленеді. Мысалы, $\vec{a}$, $\vec{b}$ және т.б. (1.2-сурет).

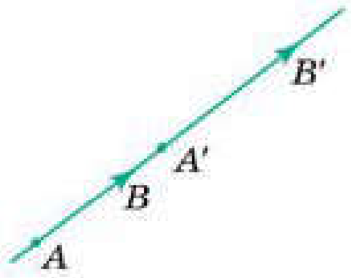


1.2-сурет

Басы мен ұшы беттесетін векторды ***нөлдік вектор*** деп атайды. Олар $\vec{0}$ деп белгіленеді.

Егер нөлдік емес екі вектор бір түзудің бойында немесе параллель түзулердің бойында жатса, онда олар ***коллинеар векторлар*** деп аталады.

Қандай екі вектор коллинеар емес векторлар болатынын өздерің анықтаңдар.

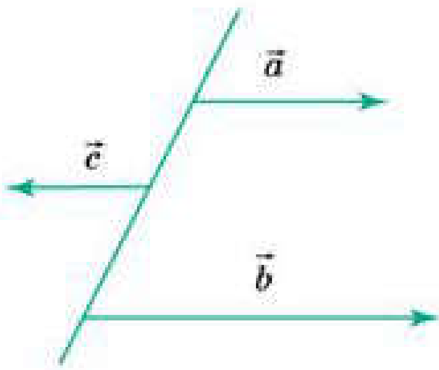


1.3-сурет

Егер бір түзудің бойында жатқан AB және $A'B'$ сәулелерінің біреуі екіншісіне тиісті болса, онда нөлдік емес $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{A'B'}$ векторлары ***бірдей бағытталған (бағыттас) векторлар*** деп аталады (1.3-сурет).

Керісінше жағдайда олар ***қарама-қарсы бағытталған векторлар*** деп аталады.

Егер бір түзудің бойында жатпайтын нөлдік емес екі вектор олардың бас нүктелері арқылы өтетін түзумен шектелген бір жартыжазықтықта (әртүрлі жартыжазықтықтарда) жатқан параллель түзулердің бойында жатса, онда олар ***бірдей (қарама-қарсы) бағытталған векторлар*** деп аталады (1.4-сурет).



1.4-сурет

Бірдей бағытталған $\vec{a}$, $\vec{b}$ карама-карсы бағытталған $\vec{a}$ және $\vec{c}$ векторлары сәйкесінше $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ және $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{c}$ деп белгіленеді.

Егер нөлдік емес екі вектор бірдей бағытталған немесе қарама-қарсы бағытталған болса, онда олар коллинеар векторлар болатыны ақиқат па?

Вектордың ***ұзындығы*** немесе ***модулі*** деп оған сәйкес кесіндінің ұзындығын айтады.

$\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$ векторларының ұзындықтары сәйкесінше $|\overrightarrow{AB}|$, $|\vec{a}|$ деп белгіленеді.

Нөлдік вектордың ұзындығы нөлге тең деп есептеледі.

Ұзындығы 1-ге тең вектор ***бірлік вектор*** деп аталады.

Егер екі вектор бірдей бағытталса және олардың ұзындықтары тең болса, онда бұл векторлар ***тең*** деп аталады.

Барлық нөлдік векторлар өзара тең болып есептеледі.

Жаттығу кезінде бейсболшы допты жоғары лақтырып, түзу бойымен жүгіре отырып, допты қағып алды. Ойыншы мен доптың орын ауыстыруларын салыстырыңдар.

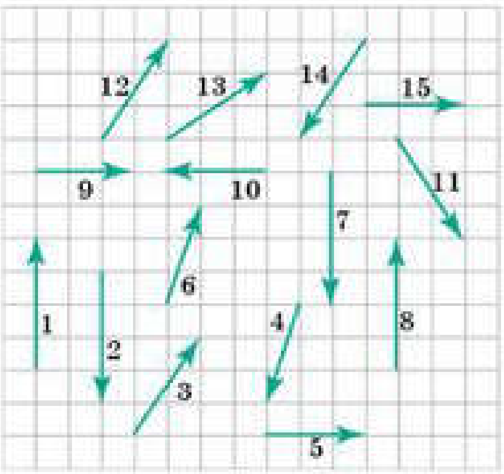
Мысал. Параллелограмның қабырғалары неше әртүрлі векторларды құрайды?

Шешуі. $ABCD$ — параллелограмм болсын. Оның қабырғалары төрт әртүрлі векторларды құрайды: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DA}$.

1. Вектор дегеніміз не?
2. Қандай вектор нөлдік вектор деп аталады?
3. Қандай екі вектор: 1) бірдей бағытталған; ә) қарама-қарсы бағытталған деп аталады?
4. Қандай екі вектор коллинеар деп аталады?
5. Вектордың ұзындығы (модулі) дегеніміз не?
6. Қандай векторлар тең деп аталады?

Жаттығулар

A



1.5-сурет

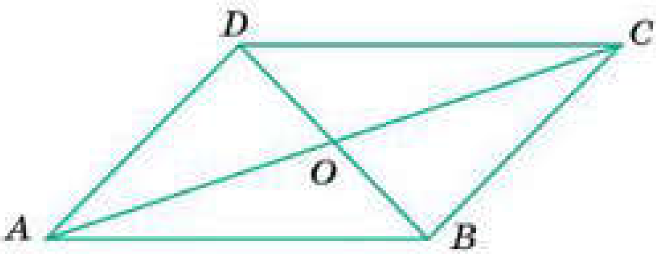
1. 1.5-суретте кескінделген векторлардан: 1) бірдей бағытталған; 2) қарама-қарсы бағытталған; 3) тең векторларды көрсетіңдер.

2. 1.6-суреттегі тіктөртбұрыштың қабырғалары неше әртүрлі векторларды құрайды?

3. $ABCD$ параллелограмының диагональдары O нүктесінде қиылысады (1.7-сурет). Басы мен ұшы A, B, C, D, O нүктелерінде болатын неше әртүрлі векторлар бар?

4. 1.8-суреттегі $ABCDEF$ дұрыс алтыбұрыштың қабырғалары неше әртүрлі векторларды құрайды?

1.6-сурет

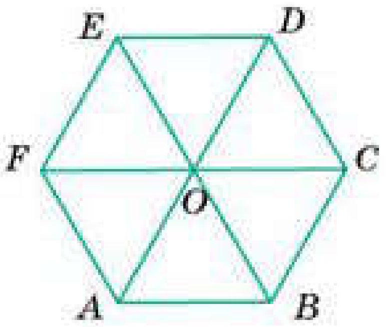


1.7-сурет

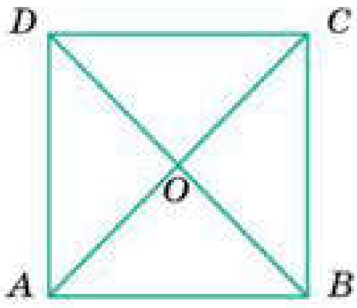
5. 1.8-суреттегі $ABCDEF$ дұрыс алтыбұрыштың диагональдары O нүктесінде қиылысады. Басы мен ұшы алтыбұрыштың төбелерінде болатын: 1) $\overline{AO}$; 2) $\overline{OC}$ векторына тең векторларды жазыңдар.

6. 1.9-суреттегі $ABCD$ бірлік квадратының диагональдары O нүктесінде қиылысады. 1) $\overline{AC}$; 2) $\overline{BO}$; 3) $\overline{DB}$ векторының ұзындығын табыңдар.

7. 1.8-суреттегі $ABCDEF$ дұрыс алтыбұрыштың қабырғалары 1-ге тең және O — диагональдарының қиылысу нүктесі. 1) $\overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{AC}$; 3) $\overrightarrow{AD}$; 4) $\overrightarrow{AE}$ векторын ың ұзындығын табыңдар.



1.8-сурет



1.9-сурет

B

8. $ABCD$ тіктөртбұрышында $AB = 4$ см, $BC = 3$ см. 1) $\overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{BC}$; 3) $\overrightarrow{DC}$; 4) $\overrightarrow{AC}$; 5) $\overrightarrow{DB}$ векторының ұзындығын табыңдар.

9. $ABCD$ ромбының AC мен BD диагональдары O нүктесінде қиылысады және олар сәйкесінше 6 см және 8 см-ге тең. 1) $\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{AO}$; 3) $\overrightarrow{BO}$ векторының ұзындығын табыңдар.

10. ABC үшбұрышының қабырғалары 1-ге тең және O нүктесі — AA_1, BB_1, CC_1 медианаларының қиылысу нүктесі. 1) $\overrightarrow{AA_1}$; 2) $\overrightarrow{AO}$; 3) $\overrightarrow{OA_1}$ векторының ұзындығын табыңдар .

11. $ABCD$ трапециясының AB табаны 12 см-ге тең, A бұрышы тік, $AD = 5$ см, $\angle B = 45°$. 1) $\overrightarrow{BD}$; 2) $\overrightarrow{BC}$; 3) $\overrightarrow{AC}$ векторының ұзындығын табыңдар .

C

12. $ABCD$ төртбұрышының түрін анықтаңдар, мұндағы: 1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$; 2) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ және $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$.

13. Егер $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ болса, онда $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ болатынын дәлелдеңдер.

14. Егер $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{CD}$ векторлар ы тең болса, онда AD және BC кесінділерінің орталары сәйкес келетінін дәлелдеңдер.

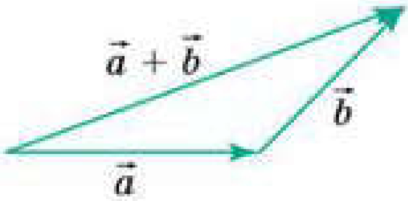
Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

15. 1) Бірдей бағытталған; 2) қарама-қарсы бағытталған векторларды қосу тәсілін ұсыныңдар.

16. 1) Бірдей бағытталған; 2) қарама-қарсы бағытталған векторлардың қосындысының ұзындығын олардың ұзындықтары арқылы өрнектеңдер.

17. Параллелограмның анықтамасы мен қасиеттерін қайталаңдар.

2. ВЕКТОРЛАРДЫҢ ҚОСЫНДЫСЫ



2.1-сурет

Векторлар үшін қосу амалы орындалады. $\vec{a}$ және $\vec{b}$ екі векторын қосу үшін басы $\vec{a}$ векторының ұшымен беттесетіндей $\vec{b}$ векторын салу керек (2.1-сурет).

Басы $\vec{a}$ векторының басымен, ал ұшы $\vec{b}$ векторының ұшымен беттесетін вектор $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ ***векторларының қосындысы*** деп аталады және $\vec{a}+\vec{b}$ деп белгіленеді.

Векторларды қосудың мұндай тәсілі ***үшбұрыш ережесі*** деп аталады.

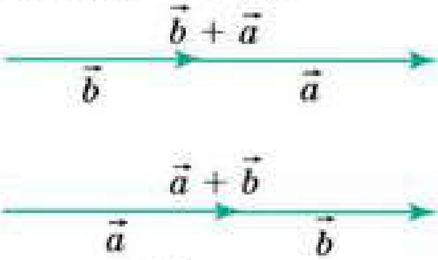
Үш немесе одан да көп векторларды қосқанда оларды бірінің басы екіншісінің ұшымен беттесетіндей етіп тізбектей орналастыру керек. Сонда бірінші вектордың басын соңғы вектордың ұшымен қосатын вектор осы векторлардың қосындысы болады.

Сандарды қосудың қасиеттеріне ұқсас векторларды қосудың келесі қасиеттері орынды.

1-қасиет. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (қосудың орын ауыстырымдылық заңы).

Дәлелдеуі. Егер $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары бірдей бағытталған болса, онда теңдік векторларды қосудың анықтамасынан шығады (2.2-сурет).

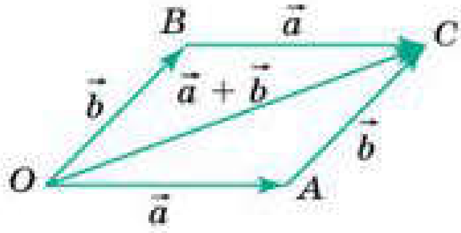
Қарама-қарсы бағытталған векторлар үшін де осыған ұқсас теңдік орынды болады.



2.2-сурет

Берілген векторлар коллинеар емес болған жағдайда, оларды бір O нүктесінен бастап саламыз. Алынған $\overrightarrow{OA}$ және $\overrightarrow{OB}$ векторлары үшін $OACB$ параллелограмын қарастырайық (2.3-сурет).

Мұндағы, $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AC} = \vec{b}$. Осыдан векторларды қосудың анықтамасы бойынша:



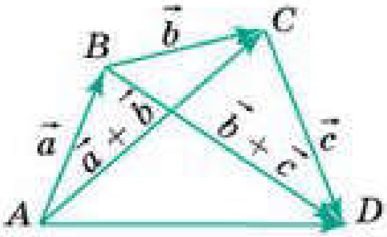
2.3-сурет

$$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} =$$
$$= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \vec{b} + \vec{a}.$$

Векторларды қосудың мұндай тәсілі ***параллелограмм ережесі*** деп аталады.

2-қасиет. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ (қосудың терімділік заңы).

Дәлелдеуі. Қандай да бір A нүктесінен бастап $\vec{a}$ векторын саламыз: $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$. B нүктесінен бастап $\vec{b}$ векторын саламыз: $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, ал $\vec{c}$ векторын C нүктесінен бастап саламыз: $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$ (2.4-сурет).



2.4-сурет

Осыдан векторларды қосудың анықтамасы бойынша:

$$\vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{BD},\ \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}.$$

Басқаша жағынан алғанда,

$$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC},\ (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}.$$

Демек, $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.

Үш векторды қосу үшін алдымен олардың екеуін қосып, алынған қосындыны үшінші вектормен қосамыз. Векторларды қосудың терімділік заңынан $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ үш вектордың қосындысы оларды қосу реттілігіне байланысты болмайтыны шығады. Сондықтан, бұл қосынды жақшасыз белгіленеді, яғни $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

Осыған ұқсас $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ төрт векторды да қосуға болады. Олардың қосындысы $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$ деп белгіленеді.

Векторларды қосудың мұндай тәсілі ***көпбұрыш ережесі*** деп аталады.

1) Үш векторды; 2) төрт векторды салыңдар. Олардың қосындысын табыңдар.

Мысал. $ABCD$ тіктөртбұрыштың қабырғалары 1 және 2-ге тең. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ векторының ұзындығын табыңдар.

Шешуі . $ABCD$ тіктөртбұрышын саламыз және оның AC диагоналін жүргіземіз. AC диагоналінің ұзындығы ізделінді вектордың ұзындығына тең болады.

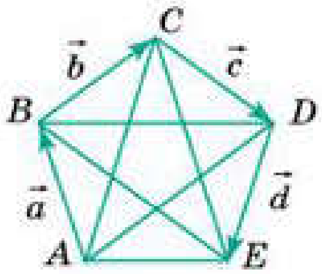
Жауабы: $\sqrt{5}$.

?

1. Векторларды қосу амалы қалай орындалады?
2. Векторларды қосудың орын ауыстырымдылық заңын тұжырымдаңдар.
3. Векторларды қосудың терімділік заңын тұжырымдаңдар.
4. Үш вектор қалай қосылады?

Жаттығулар

A



2.5-сурет

1. ABC үшбұрышынан төмендегі векторларды көрсетіңдер:

1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$;

3) $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$; 4) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB}$.

2. 2.5-суреттен төмендегі векторларды көрсетіңдер:

1) $\vec{a} + \vec{b}$; 2) $\vec{c} + \vec{d}$; 3) $\vec{b} + \vec{c}$;

4) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$; 5) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$.

3. $ABCD$ параллелограмының диагональдары O нүктесінде қиылысады. Мына теңдіктер дұрыс па:

1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$; 2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC}$;

3) $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO}$; 4) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CB}$;

5) $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$?

4. Нөлдік емес екі вектордың қосындысы нөлдік векторға тең бола ма? Егер тең болса, қандай жағдайда?

B

5. Нөлдік емес үш вектордың қосындысы нөлдік векторға тең бола ма? Егер тең болса, мысал келтіріңдер.

6. A, B, C, D — жазықтықтағы кез келген нүктелер. 1) $\overrightarrow{AD}$; 2) $\overrightarrow{BD}$; 3) $\overrightarrow{AC}$ векторларын $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$ векторлары арқылы өрнектеңдер.

7. ABC теңқабырғалы үшбұрышының қабырғасы a-ға тең. Табыңдар: 1) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}|$; 2) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$; 3) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}|$.

8. ABC үшбұрышында $AC = 6$, $BC = 8$, $\angle C = 90°$. Табыңдар: 1) $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}|$; 2) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}|$; 3) $|\overrightarrow{CA}| + |\overrightarrow{CB}|$; 4) $|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}|$.

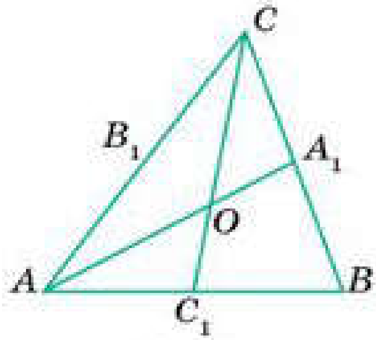
9. $ABCDEF$ дұрыс алтыбұрышының қабырғасы 1-ге тең. Табыңдар: 1) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}|$; 2) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE}|$; 3) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FE}|$; 4) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FE}|$.

10. Өрнекті ықшамдаңдар: 1) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB})$; 2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}$; 3) $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{HE}$; 4) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{CD}$.

C

11. $ABCD$ параллелограмы берілген. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}$ болатынын дәлелдеңдер.

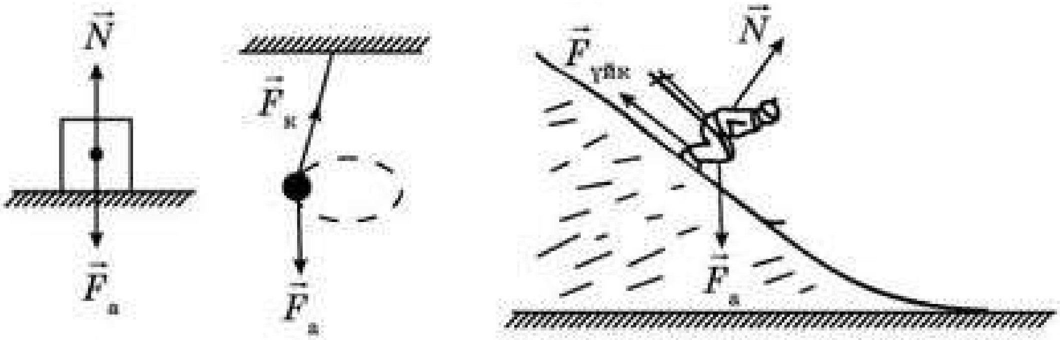
12. O нүктесі — ABC үшбұрышының медианаларының қиылысу нүктесі (2.6-сурет). $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ болатынын дәлелдеңдер.



2.6-сурет

13. $|\vec{a} + \vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|$ екенін дәлелдеңдер. Векторлар қалай орналасқанда теңдік орындалады?

14. Денеге әсер етуші теңәсерлі күшті салыңдар (2.7-сурет).



2.7-сурет

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

15. Векторды санға көбейту амалын анықтаңдар. Санның: 1) нөлден үлкен; 2) нөлге тең; 3) нөлден кіші болуы жағдайын қарастырыңдар.

16. Вектордың санға көбейтіндісінің ұзындығын осы вектордың ұзындығы мен берілген сан арқылы өрнектеңдер.

17. Пропорционал кесінділер туралы теореманы қайталаңдар.

3. ВЕКТОРДЫ САНҒА КӨБЕЙТУ

Векторларды қосу амалынан басқа векторды санға көбейту амалы да орындалады.

$\vec{a}$ ***векторының t санына көбейтіндісі*** деп ұзындығы $|t|\cdot|\vec{a}|$ болатын векторды айтады және оның бағыты $t>0$ болғанда, $\vec{a}$ векторымен бағыттас, ал $t<0$ болғанда, қарама-қарсы бағытталған болады.

Вектордың нөлге көбейтіндісі нөлдік вектор болып табылады.

$\vec{a}$ векторының t санына көбейтіндісі $t\vec{a}$ деп белгіленеді.

Анықтама бойынша $|t\vec{a}|=|t|\cdot|\vec{a}|$.

$\vec{a}$ векторының -1 санына көбейтіндісі $\vec{a}$ векторына ***қарама-қарсы бағытталған вектор*** деп аталады және $-\vec{a}$ деп белгіленеді.

Анықтама бойынша, $-\vec{a}$ векторының бағыты $\vec{a}$ векторына қарама-қарсы бағытталған және $|-\vec{a}|=|\vec{a}|$ болады.

Сандарды көбейтудің қасиеттеріне ұқсас векторды санға көбейтудің келесі қасиеттері орынды болады:

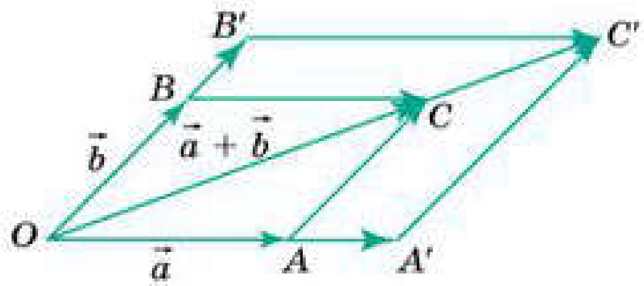
1-қасиет. $(ts)\vec{a}=t(s\vec{a})$ (терімділік заңы).

2-қасиет. $(t+s)\vec{a}=t\vec{a}+s\vec{a}$ (бірінші үлестірімділік заңы).

3-қасиет. $t(\vec{a}+\vec{b})=t\vec{a}+t\vec{b}$ (екінші үлестірімділік заңы).

Бірінші және екінші қасиеттер тікелей анықтамадан шығады. Үшінші қасиетті дәлелдейік. Коллинеар емес $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары берілсін және $t>0$ болсын. $OACB$ параллелограмын қарастырайық, мұндағы $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$. Сонда, $\overrightarrow{OC}=\vec{a}+\vec{b}$ болады. OA сәулесінің бойынан $\overrightarrow{OA'}=t\vec{a}$ векторын, ал OB сәулесінен $\overrightarrow{OB'}=t\vec{b}$ векторын саламыз.

A' нүктесі арқылы OB түзуіне параллель түзу жүргіземіз және оның OC сәулесімен қиылысу нүктесін C' деп белгілейміз (3.1-сурет).



3.1-сурет

Пропорционал кесінділер туралы теорема бойынша $\dfrac{OC'}{OC}=\dfrac{OA'}{OA}=t$.

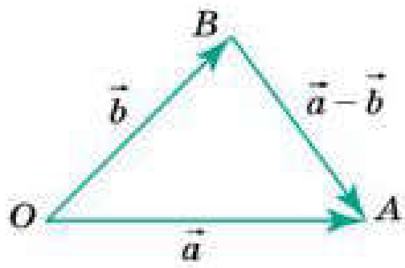
B' нүктесі арқылы OA түзуіне параллель түзу жүргіземіз және оның OC сәулесімен қиылысу нүктесін C'' деп белгілейміз. Пропорционал кесінділер туралы теорема бойынша $\dfrac{OC''}{OC}=\dfrac{OB'}{OB}=t$. $\dfrac{OC'}{OC}$, $\dfrac{OC''}{OC}$

қатынастарының t санына теңдігінен C'' нүктесі C' нүктесімен беттесетіні шығады. Демек, $OA'C'B'$ — параллелограмм және біріншіден $\overrightarrow{OC'} = t\overrightarrow{OC} = t(\vec{a} + \vec{b})$, екіншіден $\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} = t\vec{a} + t\vec{b}$ болады. Осыдан $t(\vec{a} + \vec{b}) = t\vec{a} + t\vec{b}$ теңдігі алынады. ◻

$\vec{a}$ және $\vec{b}$ коллинеар векторлар болған жағдайды өздерің қарастырыңдар.

$\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының айырымы деп $\vec{a}+(-\vec{b})$ векторын айтады және $\vec{a} - \vec{b}$ деп белгіленеді. $\vec{a} - \vec{b}$ айырмасын табу үшін $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары олардың бастары беттесетіндей салынады (3.2-сурет).

Басы $\vec{b}$ векторының ұшымен, ал ұшы $\vec{a}$ вект орының ұшымен беттесетін вектор ізделінді $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының айырымы болады.



3.2-сурет

?

1. $\vec{a}$ векторын t санына көбейту амалы қалай орындалады?
2. $\vec{a}$ векторының t санына көбейтіндісі қалай белгіленеді?
3. Қандай вектор қарама-қарсы бағытталған деп аталады және қалай белгіленеді?
4. Екі вектордың айырымы дегеніміз не және ол қалай белгіленеді?
5. Векторды санға көбейтудің терімділік заңын айтыңдар.
6. Векторды санға көбейтудің бірінші үлестірім заңын айтыңдар.
7. Векторды санға көбейтудің екінші үлестірім заңын айтыңдар.

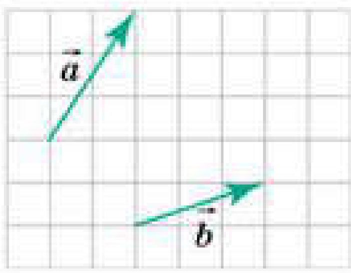
Жаттығулар

A

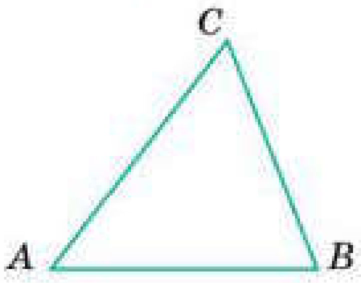
1. ABC үшбұрышында D, E нүктелері — сәйкесінше AC және BC қабырғаларының орталары. $\overline{DE}$ векторын $\overline{AB}$ векторы арқылы өрнектендер.

2. $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары берілген (3.3-сурет). 1) $\vec{a} - \vec{b}$; 2) $\vec{a} + 2\vec{b}$ векторын салыңдар.

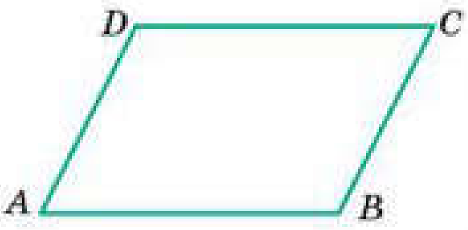
3. 3.4-суреттегі ABC үшбұрышында төмендегі векторларды көрсетіңдер:



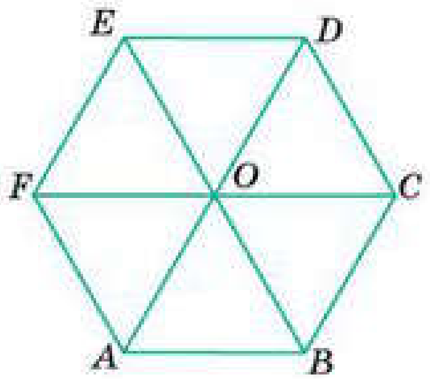
3.3-сурет



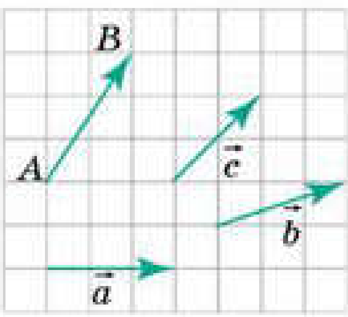
3.4-сурет



3.5-сурет



3.6-сурет



3.7-сурет

1) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$;

3) $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$; 4) $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CA}$.

4. $ABCD$ параллелограмының диагональдары O нүктесінде қиылысады (3.5-сурет). Төмендегі векторларды көрсетіңдер:

1) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$; 2) $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AB}$;

3) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$; 4) $2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{OD}$.

5. ABC теңқабырғалы үшбұрыштың қабырғасы 1-ге тең. Табыңдар:

1) $|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}|$; 2) $|\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$.

6. $ABCD$ ромбының AC және BD диагональдары сәйкесінше 8 және 6-ға тең. Вектордың ұзындығын табыңдар:

1) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$; 2) $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD}$;

3) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$; 4) $2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{OD}$.

B

7. $ABCDEF$ дұрыс алтыбұрыштың диагональдары O нүктесінде қиылысады (3.6-сурет). Басы мен ұшы осы алтыбұрыштың төбелерінде болатын $\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BE}$ векторына тең векторды жазыңдар.

8. Өрнекті ықшамдаңдар: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DA}$.

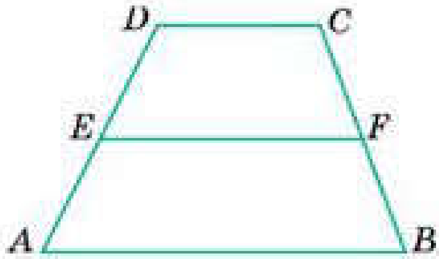
9. ABC үшбұрышында $AC = 8$, $BC = 6$, $\angle C = 90°$. Табыңдар:

1) $|\overrightarrow{AC}| - |\overrightarrow{BC}|$; 2) $|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}|$;

3) $|\overrightarrow{AC}| - \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|$; 4) $|\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}|$.

10. $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ векторларын салыңдар, мұндағы $\vec{a} + \vec{x} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} + \vec{y} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} + \vec{z} = \overrightarrow{AB}$ (3.7-сурет).

11. $ABCD$ трапециясында EF кесіндісі — оның орта сызығы (3.8-сурет). $\overrightarrow{EF}$ векторын $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{DC}$ векторлары арқылы өрнектеңдер.



3.8-сурет

C

12. $ABCD$ параллелограмы берілген. Қалауымызша алынған X нүктесі үшін $\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XC}=\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XD}$ теңдігі орындалатынын дәлелдеңдер.

13. Қандай жағдайда мына теңдіктер орындалады:
1) $\vec{a}-\vec{b}=\vec{b}-\vec{a}$; 2) $\vec{a}-\vec{b}=-\vec{a}-\vec{b}$?

14. $t(\vec{a}-\vec{b})=t\vec{a}-t\vec{b}$ теңдігі орындалатынын дәлелдеңдер.

15. $(\vec{a}-\vec{b})-\vec{c}=\vec{a}-(\vec{b}+\vec{c})$ теңдігі орындалатынын дәлелдеңдер.

16. $||\vec{a}|-|\vec{b}||\leq|\vec{a}-\vec{b}|$ теңсіздігі орындалатынын дәлелдеңдер. Векторлар қалай орналасқанда теңдік орындалады?

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

17. Коллинеар векторлардың анықтамасын қайталаңдар.

18. Нөлдік емес коллинеар $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары үшін $\vec{b}=t\vec{a}$ теңдігі орындалатындай t санын көрсетіңдер. Осы санды векторлардың ұзындығы арқылы өрнектеңдер.

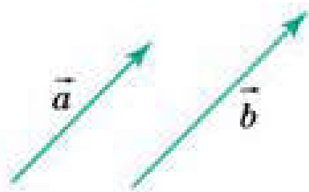
4. ВЕКТОРДЫҢ ЖІКТЕЛУІ

Бір векторды басқа векторлар арқылы өрнектеуді (жіктеуді) қарастырайық. Алдымен коллинеар векторлардан бастаймыз.

Теорема. Егер $\vec{a}$ және $\vec{b}$ нөлдік емес коллинеар векторлар болса, онда $\vec{b}=t\cdot\vec{a}$ теңдігі орындалатындай жалғыз t саны табылады.

Дәлелдеуі. $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары бірдей бағытталған жағдайды қарастырайық және $t=\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ болсын (4.1-сурет). Сонда $\vec{b}$ және $\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\cdot\vec{a}$ векторлары бірдей бағытталған және ұзындықтары бірдей болады. Демек, олар өзара тең болады, яғни $\vec{b}=t\cdot\vec{a}$.

t санының жалғыз болуын дәлелдейік. Расында да, егер $\vec{b}=t\cdot\vec{a}$ теңдігі орын алса, онда $|\vec{b}|=|t\cdot\vec{a}|=t|\vec{a}|$ теңдігі орындалады. Осыдан $t=\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ болады.



4.1-сурет

$\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары қарама-қарсы бағытталған жағдайда $t = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ болсын. Сонда $\vec{b}$ және $-\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$ векторлары бірдей бағытталған және ұзындықтары бірдей болады. Демек, олар өзара тең болады, яғни $\vec{b} = t \cdot \vec{a}$. t санының жалғыздығы да жоғарыдағыдай дәлелденеді.

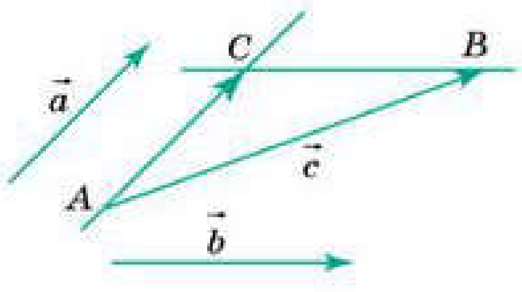
t санының жалғыз болуын өздерің дәлелдеңдер.

Енді коллинеар емес векторларды қарастырайық және векторды екі коллинеар емес векторлар арқылы жіктеу туралы теореманы дәлелдейміз.

Теорема. Егер $\vec{a}$ және $\vec{b}$ нөлдік емес, коллинеар емес векторлар болса, онда кез келген $\vec{c}$ векторы үшін $\vec{c} = t \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}$ теңдігі орындалатындай t және s сандарының бір ғана жұбы бар болады.

Дәлелдеуі. $\vec{c}$ нөлдік векторы үшін $t = s = 0$ болады. Нөлдік емес $\vec{c}$ векторының басы мен ұшын сәйкесінше A және B деп белгілейміз. A және B нүктелері арқылы $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларына параллель түзулерді жүргіземіз. Олардың қиылысу нүктесін C деп белгілейміз (4.2-сурет).

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ теңдігін аламыз. $\vec{a}$ және $\overrightarrow{AC}$ векторлары коллинеар болғандықтан, $\overrightarrow{AC} = t \cdot \vec{a}$ теңдігі орындалатындай жалғыз t саны табылады. Сол сияқты $\vec{b}$ және $\overrightarrow{CB}$ коллинеар болғандықтан, $\overrightarrow{CB} = s \cdot \vec{b}$ теңдігі орындалатындай, жалғыз s саны бар болады. Осы өрнектерді $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ теңдігіне қоя отырып, ізделінді $\vec{c} = t \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}$ теңдігін аламыз.



4.2-сурет

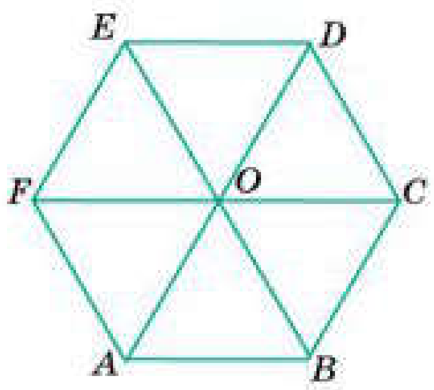
1. Векторды оған коллинеар вектор арқылы өрнектеу туралы теореманы тұжырымдаңдар.
2. Векторды екі коллинеар емес векторлар арқылы жіктеу туралы теореманы тұжырымдаңдар.

Жаттығулар

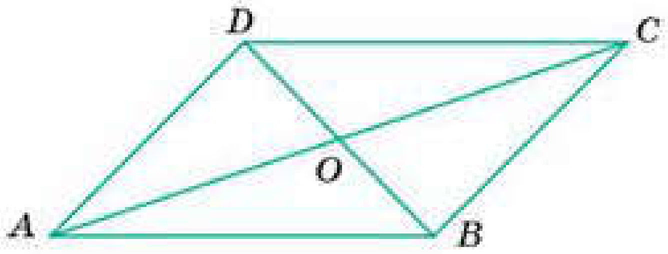
A

1. 4.3-суреттегі $ABCDEF$ дұрыс алтыбұрышында: 1) $\overrightarrow{AD} = t \cdot \overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{CF} = t \cdot \overrightarrow{AB}$; 3) $\overrightarrow{DE} = t \cdot \overrightarrow{CF}$; 4) $\overrightarrow{BE} = t \cdot \overrightarrow{DC}$ теңдігі орындалатындай t санын табыңдар.

2. 4.4-суреттегі $ABCD$ параллелограмында: 1) $\overrightarrow{AC}$; 2) $\overrightarrow{BD}$ векторын $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{AD}$ векторлары арқылы өрнектеңдер.



4.3-сурет



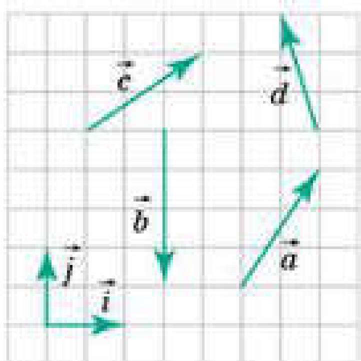
4.4-сурет

3. $ABCD$ параллелограмының диагональдары O нүктесінде қиылысады (4.4-сурет). 1) $\overrightarrow{AO}$; 2) $\overrightarrow{BO}$ векторын $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{AD}$ векторлары арқылы өрнектеңдер.

4. $ABCD$ параллелограмының диагональдары O нүктесінде қиылысады (4.4-сурет). 1) $\overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{AD}$ векторын $\overrightarrow{AO}$ және $\overrightarrow{BO}$ векторлары арқылы өрнектеңдер.

B

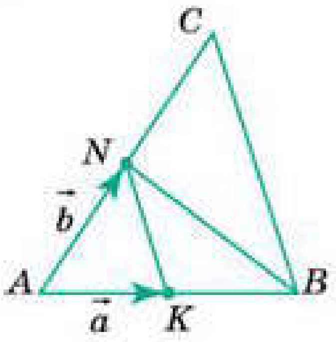
5. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ векторларын $\vec{i}$ және $\vec{j}$ векторлары арқылы өрнектеңдер (4.5-сурет).



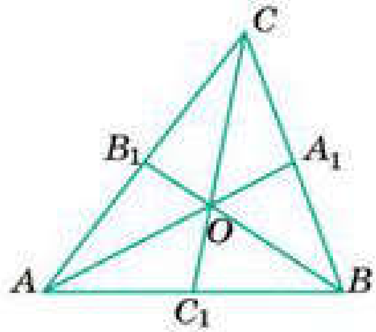
4.5-сурет

6. $ABCDEF$ дұрыс алтыбұрыштың диагональдары O нүктесінде қиылысады (4.3-сурет). 1) $\overrightarrow{AC} = t \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AD}$; 2) $\overrightarrow{AD} = t \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AF}$; 3) $\overrightarrow{AE} = t \cdot \overrightarrow{AD} + s \cdot \overrightarrow{BE}$ теңдігі орындалатындай t және s сандарын табыңдар.

7. K және N нүктелері — ABC үшбұрышының сәйкесінше AB және AC қабырғаларының орталары (4.6-сурет). 1) $\overrightarrow{BK}$; 2) $\overrightarrow{NC}$; 3) $\overrightarrow{KN}$; 4) $\overrightarrow{BN}$; 5) $\overrightarrow{CB}$ векторын $\vec{a} = \overrightarrow{AK}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AN}$ векторлары арқылы өрнектеңдер.



4.6-сурет



4.7-сурет

8. AA_1, BB_1, CC_1 кесінділері — ABC үшбұрышының медианалары (4.7-сурет). 1) $\overrightarrow{AA_1}$; 2) $\overrightarrow{BB_1}$; 3) $\overrightarrow{CC_1}$ векторын $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ және $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$ векторлары арқылы өрнектеңдер.

9. Қайық 4 км/сағ жылдамдықпен өзеннің бір жағалауынан екінші-сіне жүзіп барады. Өзен ағысының жылдамдығы 3 км/сағ. Қайықтың меншікті жылдамдығы қандай?

C

10. C нүктесі — AB кесіндісінің ортасы, O — жазықтықтағы кез келген нүкте болсын. $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$ болатынын дәлелдеңдер.

11. C нүктесі AB кесіндісінде жатыр, $AC : AB = t$, O — жазықтықтағы кез келген нүкте болсын. $\overrightarrow{OC} = (1 - t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ болатынын дәлелдеңдер.

12. Векторларды пайдаланып, үшбұрыштың орта сызығы оның бір қабырғасына параллель және оның жартысына тең болатынын дәлелдеңдер.

13. O нүктесі — ABC үшбұрышының медианаларының қиылысу нүктесі, X — жазықтықтағы кез келген нүкте болсын. $\overrightarrow{XO} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}\right)$ болатынын дәлелдеңдер.

14. Векторларды пайдаланып, трапецияның орта сызығы оның табандарына параллель және олардың қосындысының жартысына тең болатынын дәлелдеңдер.

15. $ABCDEF$ дұрыс алтыбұрышы берілген. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AD}$ болатынын дәлелдеңдер.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

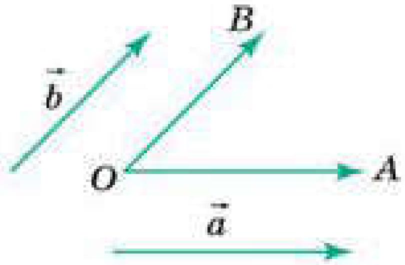
16. Бұрыштың және тригонометриялық функциялардың анықтамаларын қайталаңдар.

17. Векторлардың арасындағы бұрыш ұғымын анықтаңдар.

18. $ABCD$ квадраты берілген. Келесі векторлардың арасындағы бұрышты табыңдар: 1) $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{AD}$; 2) $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{AC}$; 3) $\overrightarrow{AC}$ және $\overrightarrow{BD}$.

5. ВЕКТОРЛАРДЫҢ АРАСЫНДАҒЫ БҰРЫШ. ВЕКТОРЛАРДЫҢ СКАЛЯР КӨБЕЙТІНДІСІ

Векторлардың арасындағы бұрыш ұғымын анықтайық. $\vec{a}$ және $\vec{b}$ нөлдік емес векторлары берілсін. O нүктесін белгілеп, оларды осы нүктеден бастап $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ болатындай саламыз (5.1-сурет).



5.1-сурет

Егер $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары бағыттас емес болса, онда OA және OB сәулелерінің арасындағы бұрыш ***$\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының арасындағы бұрыш*** деп аталады.

Егер $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары бағыттас болса, онда олардың арасындағы бұрыш $0°$, ал $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары қарама-қарсы бағытталса, онда олардың арасындағы бұрыш $180°$-қа тең болады.

Егер екі вектордың арасындағы бұрыш тік болса, онда олар ***перпендикуляр векторлар*** деп аталады.

Нөлдік емес ***екі вектордың скаляр көбейтіндісі*** деп олардың ұзындықтарының сол векторлар арасындағы бұрыштың косинусына көбейтіндісін айтады.

Егер векторлардың ең болмағанда біреуі нөлдік вектор болса, онда мұндай векторлардың скаляр көбейтіндісі нөлге тең болады.

$\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының скаляр көбейтіндісі былай белгіленеді: $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Анықтама бойынша

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi,$$

мұндағы φ – $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының арасындағы бұрыш.

$\vec{a} \cdot \vec{a}$ көбейтіндісі $\vec{a}$ векторының ***скаляр квадраты*** деп аталады және $\vec{a}^2$ деп белгіленеді. Скаляр көбейтіндінің формуласынан $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ теңдігі шығад ы.

Егер нөлдік емес екі вектордың арасындағы бұрыш 90° болса, онда олардың скаляр көбейтіндісі нөлге тең болады, өйткені бұл жағдайда осы векторлардың арасындағы бұрыштың косинусы нөлге тең болады.

Сандарды көбейтудің қасиеттеріне ұқсас векторлардың скаляр көбейтіндісінің келесі қасиеттері орынды болады:

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;

2) $(t\vec{a}) \cdot \vec{b} = t(\vec{a} \cdot \vec{b})$;

3) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.

Қандай жағдайда нөлдік емес екі вектордың скаляр көбейтіндісі ең үлкен мәнді қабылдайтынын анықтаңдар.

Векторлардың скаляр көбейтіндісінің қарапайым физикалық мағынасы бар. Егер денеге тұрақты $\vec{F}$ күші әсер етіп, дене $\vec{a}$ векторына орын ауыстыратын болса, онда дененің атқаратын A жұмысы $\vec{F}$ күші мен орын ауыстыру бағыттарының арасындағы φ бұрышқа байланысты болады. Дененің атқаратын жұмысы әсер етуші күш пен орын ауыстырудың скаляр көбейтіндісіне тең болады:

$$A = \vec{F} \cdot \vec{a} = |\vec{F}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos\varphi.$$

Мысал. $ABCD$ тіктөртбұрышында $AB = \sqrt{3}$, $BC = 1$. $\overline{AC}$ және $\overline{BD}$ векторларының скаляр көбейтіндісін табыңдар.

Шешуі. $AC = BD = 2$, берілген векторлардың арасындағы бұрыш 120°. Осы векторлардың скаляр көбейтіндісі 2-ге тең.

?

1. Екі вектордың арасындағы бұрыш дегеніміз не?
2. Қандай векторлар перпендикуляр деп аталады?
3. Екі вектордың скаляр көбейтіндісі дегеніміз не? Скаляр көбейтінді қалай белгіленеді?
4. Скаляр квадрат дегеніміз не?
5. Қандай жағдайда екі вектордың скаляр көбейтіндісі нөлге тең болады?
6. Скаляр көбейтіндінің физикалық мағынасы қандай?

Жаттығулар

A

1. $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының скаляр көбейтіндісін табыңдар, мұндағы $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, ал олардың арасындағы бұрыш: 1) 45°; 2) 90°; 3) 135°; 4) 180°.

2. Екі вектордың ұзындықтары 1-ге, ал скаляр көбейтіндісі: 1) 0; 2) 0,5; 3) –1-ге тең. Векторлардың арасындағы бұрышты табыңдар.

3. $ABCD$ тіктөртбұрышында $AB = 4$, $AD = 3$. 1) $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{AD}$; 2) $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{AC}$; 3) $\overrightarrow{AD}$ және $\overrightarrow{AC}$ векторларының скаляр көбейтіндісін табыңдар.

4. $ABCD$ бірлік квадратында: 1) $\overrightarrow{AC}$ және $\overrightarrow{BD}$; 2) $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{AC}$ векторларының скаляр көбейтіндісін табыңдар.

5. $ABCD$ ромбының қабырғалары 1-ге, ал A бұрышы 60°-қа тең. 1) $\overrightarrow{AC}$; 2) $\overrightarrow{BD}$ векторының скаляр квадратын табыңдар.

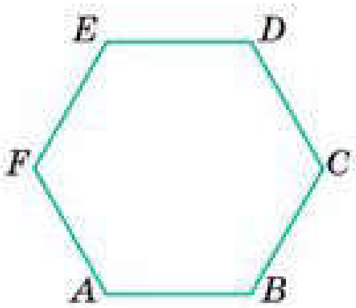
B

6. 5.2-суреттегі $ABCDEF$ дұрыс алтыбұрыштың: 1) $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{CD}$; 3) $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{EF}$; 4) $\overrightarrow{AC}$ және $\overrightarrow{BE}$ векторлары арасындағы бұрышты табыңдар.

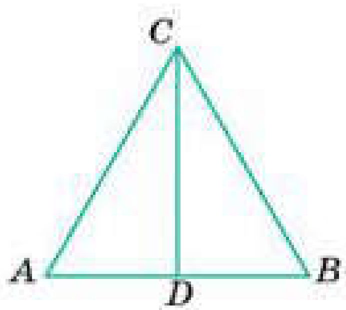
7. $ABCDEF$ дұрыс алтыбұрыштың қабырғасы 1-ге тең. 1) $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{CD}$; 3) $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{EF}$; 4) $\overrightarrow{AC}$ және $\overrightarrow{BE}$ векторларының скаляр көбейтіндісін табыңдар.

8. ABC теңқабырғалы үшбұрыштың қабырғасы 1-ге тең және CD биіктігі жүргізілген (5.3-сурет). 1) $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{AC}$; 2) $\overrightarrow{AC}$ және $\overrightarrow{BC}$; 3) $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{CD}$; 4) $\overrightarrow{BC}$ және $\overrightarrow{CD}$ векторларының скаляр көбейтіндісін табыңдар.

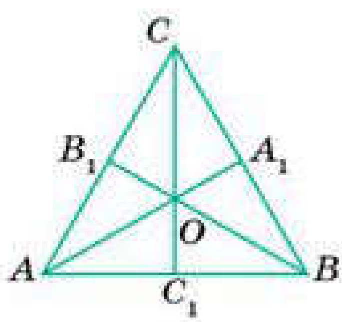
9. ABC теңқабырғалы үшбұрыштың қабырғасы 2-ге тең және AA_1, BB_1, CC_1 медианалары жүргізілген (5.4-сурет). 1) $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{AA_1}$; 2) $\overrightarrow{AA_1}$ және $\overrightarrow{BB_1}$ векторлары ның скаляр көбейтіндісін табыңдар.



5.2-сурет

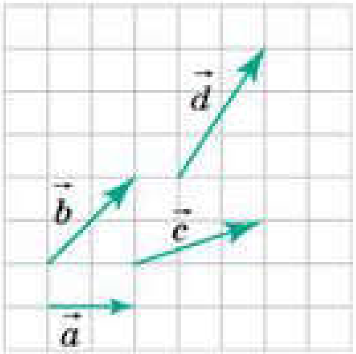


5.3-сурет

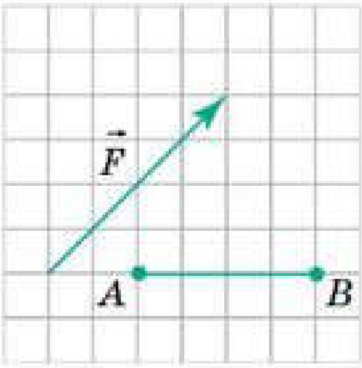


5.4-сурет

C



5.5-сурет



5.6-сурет

10. 5.5-суреттегі: 1) $\vec{a}$ және $\vec{b}$; 2) $\vec{a}$ және $\vec{c}$; 3) $\vec{a}$ және $\vec{d}$ векторларының скаляр көбейтіндісін табыңдар. Торкөздің қабырғасы 1-ге тең.

11. $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының арасындағы бұрыш қандай болғанда олардың скаляр көбейтіндісі: 1) ең үлкен; 2) ең кіші болады?

12. Егер нөлдік емес, коллинеар емес $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының ұзындықтары тең болса, онда $\vec{a} + \vec{b}$ және $\vec{a} - \vec{b}$ векторлары перпендикуляр екенін дәлелдеңдер.

13. Дене $\vec{F}$ күшінің әсерінен түзу сызықты қозғалып, A нүктесінен B нүктесіне орын ауыстырғанда орындалған A жұмысын табыңдар (5.6-сурет). Торкөздің қабырғасы 1-ге тең.

14. Векторларды пайдаланып, параллелограмм диагональдарының квадраттарының қосындысы оның барлық қабырғаларының квадраттарының қосындысына тең болатынын дәлелдеңдер.

15. Векторларды пайдаланып, ромбының диагональдары перпендикуляр болатынын дәлелдеңдер.

16. Екі саяхатшы A орнынан шығып әртүрлі бағытта жол жүрді. Олардың біреуі оңтүстіктен 4 км, кейін оңтүстік-батысқа қарай 5 км және сондай қашықтықта солтүстік-батысқа қарай жүрді. Екіншісі солтүстік-батысқа 5 км, одан әрі оңтүстік-батысқа қарай 5 км және оңтүстікке 4 км жүрді. Олардың орын ауыстыруларын салыстырыңдар.

17. Кеме жағалауға қатысты 10 км/сағ жылдамдықпен жүзіп барады. Жолаушы кеменің үстін (көлденеңінен) 4 км/сағ жылдамдықпен жүріп өтті. Жолаушының жағалауға қатысты жылдамдығы қандай?

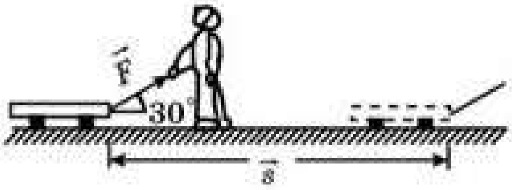
18. Екі жүзуші бір мезгілде өзеннің бір жағалауынан (бір нүктеден) екінші жағына қарай бірдей жылдамдықпен жүзіп барады. Бірінші жүзуші қарама-қарсы жағалауға тікесінен жүзгенмен ағын оны біршама қашықтыққа апарды. Екінші жүзуші ағынға қарсы белгілі бір бұрышпен жүзіп, екінші жағалауға бастапқы орыннан қарсы орынға жетті. Жүзушілердің қайсысы қарсы жағалауға бірінші жетті?

19. Қайық өзенді ағыс бойымен көлденеңінен кесіп өтуі үшін жағалаудан 55° бұрышпен жүзеді. Егер қайықтың меншікті жылдамдығы 12 км/сағ болса, онда өзен ағысының жылдамдығын табыңдар.

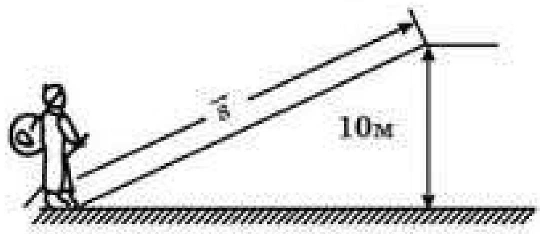
20. Ұшақ 1000 км/сағ шығысқа қарай 37° бұрышпен солтүстік бағытқа ұшып барады. Солтүстік және шығыс бағыттардағы жылдамдық векторының құраушыларын табыңдар. Ұшақ осы бағыттардың әрқайсысында 2,5 сағатта қандай қашықтыққа орын ауыстырады?

21. Бала арбаны 30° бұрыш жасап 20 Н күшпен көкжиекке қарай сүйретіп барады (5.7-сурет). Ол 150 м орын ауыстырғанда қандай жұмыс атқарды?

22. Адам биіктігі 10 м төбеге 10 кг рюкзакты жоғары көтеру кезінде ауырлық күшіне қарсы қандай жұмыс атқарады (5.8-сурет)? Жұмыс таудың көлбеу бұрышына байланысты бола ма?



5.7-сурет



5.8-сурет

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

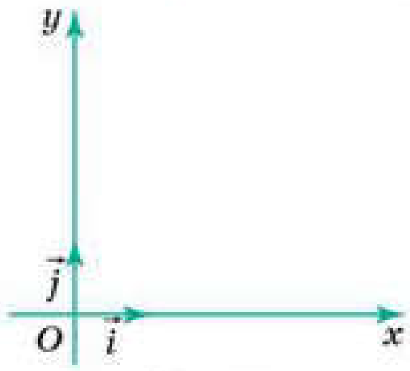
23. Тікбұрышты координаталар жүйесінің анықтамасын және екі нүктенің арақашықтығын табу формуласын қайталаңдар.

24. Координаталық жазықтықта вектордың координаталары ұғымын анықтап көріңдер.

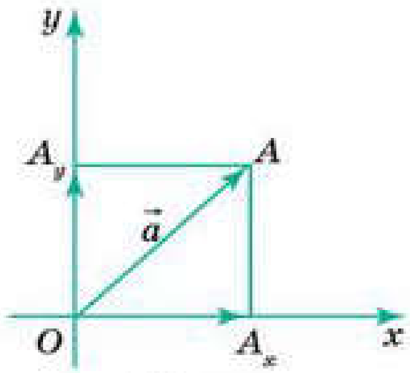
6. ВЕКТОРДЫҢ КООРДИНАТАЛАРЫ

Жазықтықта тікбұрышты координаталар жүйесі берілсін. Вектордың координаталары ұғымын анықтаймыз. Ол үшін вектордың басы координаталар басымен беттесетіндей етіп саламыз. Сонда оның ұшының координаталары ***вектордың координаталары*** деп аталады.

Координаталары (1; 0), (0; 1) болатын векторларды сәйкесінше $\vec{i}$, $\vec{j}$ деп белгілейік. Олардың ұзындықтары 1-ге тең, сондықтан оларды *бірлік векторлар* деп атайды. $\vec{i}$ және $\vec{j}$ векторларының бағыттары сәйкесінше Ox және Oy осьтерінің оң бағыттарымен сәйкес



6.1-сурет



6.2-сурет

келеді. Осы векторларды координаталар басынан бастап саламыз және ***координаталық векторлар*** деп атаймыз (6.1-сурет).

Координаталық жазықтықтағы $A(x;\ y)$ нүктесі үшін $\overline{OA}$ векторы A нүктесінің ***радиус-векторы*** деп аталады. A нүктесінің радиус-векторының координаталары A нүктесінің координаталарымен сәйкес келеді.

Теорема. Егер $\vec{a}$ векторы $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$ түрінде көрсетілсе, онда оның координаталары $(x;\ y)$ болады.

Дәлелдеуі. $\vec{a}$ векторын координаталар басынан бастап саламыз да ұшын A деп белгілейміз. $\overline{OA} = \overline{OA_x} + \overline{OA_y}$ теңдігі орындалады (6.2-сурет).

A нүктесі үшін $\overline{OA_x} = x\vec{i}$, $\overline{OA_y} = y\vec{j}$ теңдіктері орындалғанда ғана оның координаталары $(x;\ y)$ болады. Демек, $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Теорема. Екі вектордың қосындысына тең вектордың координаталары векторлардың сәйкес координаталарының қосындысына тең болады.

Дәлелдеуі. $\vec{a}_1(x_1;\ y_1)$ және $\vec{a}_2(x_2;\ y_2)$ векторлары берілсін. Олардың $\vec{a}_1 + \vec{a}_2$ қосындысының координаталары $(x_1 + x_2;\ y_1 + y_2)$ болатынын дәлелдейміз. Ол үшін $\vec{a}_1$ және $\vec{a}_2$ векторларын координаталық векторлар бойынша жіктейік:

$$\vec{a}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j},\ \vec{a}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}.$$

Сонда $\vec{a}_1 + \vec{a}_2$ қосындысы:

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j}) + (x_2\vec{i} + y_2\vec{j}) = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j},$$

осыдан $(x_1 + x_2;\ y_1 + y_2)$ сандар жұбы $\vec{a}_1 + \vec{a}_2$ векторының координаталары болады.

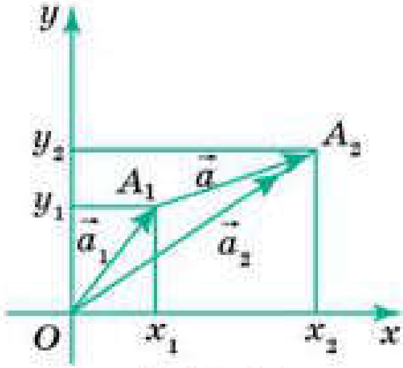
Осыған ұқсас векторды санға көбейткенде, оның әрбір координатасын сол санға көбейту керек, яғни $t\vec{a}$ векторының координаталары $(tx;\ ty)$ болады, мұндағы $(x;\ y)$ — $\vec{a}$ векторының координаталары.

Осыны өздерің дәлелдеңдер.

Осы қасиеттерден екі вектордың айырымының координаталары олардың сәйкес координаталарының айырымдарына тең болатыны шығады, яғни $\vec{a}_1(x_1;\ y_1)$, $\vec{a}_2(x_2;\ y_2)$ векторларының $\vec{a}_1 - \vec{a}_2$ айырымының координаталары $(x_1 - x_2;\ y_1 - y_2)$ болады.

Енді координаталар басынан бастап салынбаған вектордың координаталарын табуды қарастырайық.

$\vec{a}$ векторының басы $A_1(x_1;\ y_1)$ нүктесі, ал ұшы $A_2(x_2;\ y_2)$ нүктесі болсын. Сонда $\vec{a}$ векторын векторлардың айырымы ретінде көрсетуге болады, яғни $\vec{a} = \overline{A_1A_2} = \overline{OA_2} - \overline{OA_1}$. Осыдан оның координаталар ы $(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$ болады (6.3-сурет).



6.3-сурет

Екі нүктенің арақашықтығының форму ласынан $\overline{A_1A_2}$ векторының ұзындығын есептеу формуласы шығады:

$$\left|\overline{A_1A_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Векторлардың скаляр көбейтіндісін олардың координаталары арқылы өрнектейік. $\vec{a}_1(x_1;\ y_1)$, $\vec{a}_2(x_2;\ y_2)$ векторлары берілсін.

Сонда $\vec{a}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$, $\vec{a}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$. Демек, $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j}) \cdot$ $\cdot\ (x_2\vec{i} + y_2\vec{j}) = x_1\vec{i} \cdot x_2\vec{i} + x_1\vec{i} \cdot y_2\vec{j} + y_1\vec{j} \cdot x_2\vec{i} + y_1\vec{j} \cdot y_2\vec{j}$.

$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = 1$, $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$ екенін ескеріп, координа таларымен берілген векторлардың скаляр көбейтіндісінің формуласын аламыз:

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = x_1x_2 + y_1y_2.$$

?

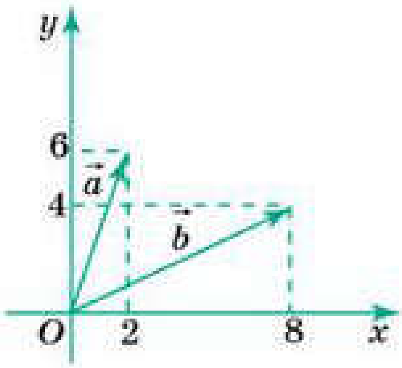
1. Вектордың координаталары дегеніміз не?
2. Қандай векторлар координаталық деп аталады?
3. Вектордың координаталық векторлар арқылы жіктелуі туралы теореманы тұжырымдаңдар.
4. Екі вектордың қосындысының координаталары не болады?
5. Векторды санға көбейткенде, оның координаталары не болады?
6. Басы мен ұшының координаталары белгілі вектордың координаталарын қалай табуға болады?
7. Координаталарымен берілген векторлардың скаляр көбейтіндісі қалай өрнектеледі?

Жаттығулар

A

1. Вектордың координаталарын табыңдар: 1) $-2\vec{i}+6\vec{j}$; 2) $\vec{i}+3\vec{j}$; 3) $-3\vec{j}$; 4) $-5\vec{i}$.
2. A_1, A_2 нүктелерінің координаталары сәйкесінше $(-3;\ 5)$, $(2;\ 3)$ болса, $\overrightarrow{A_1A_2}$ векторы ның координаталарын табыңдар.
3. $\vec{a}$ векторыны ң ұзындығын оның $(x;\ y)$ координаталары арқылы өрнектеңдер.
4. Координаталары $(4;\ -3)$ болатын $\overrightarrow{MN}$ векторы және $M(1;\ -3)$ нүктесі берілген, N нүктесінің координаталарын табыңдар.
5. $\vec{a}_1(-1;\ 2)$ және $\vec{a}_2(2;\ -1)$ векторларының скаляр көбейтіндісін табыңдар.
6. $\vec{a}_1(1;\ 2)$ және $\vec{a}_2(2;\ 1)$ векторларының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

B



6.4-сурет

7. $\overrightarrow{AB}$ векторының координаталары $(a;\ b)$. $\overrightarrow{BA}$ векторының коор динаталарын табыңдар.
8. $A(1;\ 1)$, $B(-1;\ 0)$, $C(0;\ 1)$ нүктелері берілген. $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{CD}$ векторлары тең болса, онда D нүктесінің координаталарын табыңдар.
9. $\vec{a}+\vec{b}$ және $\vec{a}-\vec{b}$ векторларының координаталарын табыңдар, мұндағы $\vec{a}(1;\ 0)$, $\vec{b}(0;\ 3)$.
10. $\vec{a}(-1;\ 2)$ және $\vec{b}(2;\ -4)$ векторлары берілген. Төмендегі вектордың координаталарын табыңдар: 1) $3\vec{a}+2\vec{b}$; 2) $\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{4}\vec{b}$; 3) $-\vec{a}+5\vec{b}$.
11. 6.4-суретте кескінделген $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлар ының скаляр көбейтіндісін табыңдар.

C

12. Координаталары $(a;\ b)$ және $(-b;\ a)$ болатын векторлардың өзара перпендикуляр екенін дәлелдеңдер.

13. t-ның қандай мәнінде $2\vec{a} + t\vec{b}$ векторы $\vec{a} + \vec{b}$ векторына перпендикуляр болады, мұндағы $\vec{a}(2; -1)$, $\vec{b}(4; 3)$?

14. Төбелері $A(-1; \sqrt{3})$, $B(1; -\sqrt{3})$, $C(1; \sqrt{3})$ болатын ABC үшбұрышының A бұрышының шамасын табыңдар.

15. $ABCD$ тіктөртбұрышында $AB = 3$, $BC = 2$. $\overrightarrow{AC}$ және $\overrightarrow{BD}$ векторларының скаляр көбейтіндісін табыңдар.

16. Дене $\vec{F}(-3; 4)$ күшінің әсерімен түзу сызықты қозғалып $B(5; -1)$ нүктесінен $C(2; 1)$ нүктесіне орын ауыстырғанда орындалған A жұмысты есептеңдер.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

17. Координаталық жазықтықтағы түзудің теңдеуін жазыңдар.

18. $2x + y - 3 = 0$ теңдеуімен берілген түзуге перпендикуляр қандай да бір вектордың координаталарын тауып көріңдер.

19. Координаталар басынан өтетін және $\vec{n}(1; 2)$ векторына перпендикуляр түзудің теңдеуін жазып көріңдер.

7*. ТҮЗУДІҢ ТЕҢДЕУІ

8-сынып геометрия курсында координаталық жазықтықта түзудің теңдеуі келесі түрде берілетіні дәлелденген болатын:

$$ax + by + c = 0,$$

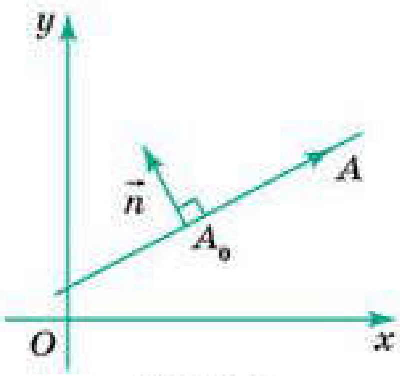
мұндағы a, b, c — қандай да бір сандар және a, b — бір уақытта нөлге тең емес сандар. Енді біз вектор ұғымын пайдаланып, түзудің теңдеуін шығарудың тағы бір тәсілін ұсынамыз.

Координаталық жазықтықта түзуді қарастырайық. Осы түзуге перпендикуляр $\vec{n}$ векторы ***нормаль вектор*** деп аталады (7.1-сурет).

$A_0(x_0; y_0)$ нүктесі осы түзудің бойында жатсын делік. Егер $\overrightarrow{A_0A}(x - x_0; y - y_0)$ векторы $\vec{n}(a; b)$ нормаль векторына перпендикуляр болса, яғни осы векторлардың скаляр көбейтіндісі нөлге тең болса, онда $A(x; y)$ нүктесі де осы түзудің бойында жатады.

Берілген векторлардың скаляр көбейтіндісін координаталары арқылы жазып, келесі теңдеуді аламыз: $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$.

$A(x; y)$ нүктесінің координаталары осы теңдеуді тепе-теңдікке айналдырса, онда ол берілген түзудің бойында жататын болады.



7.1-сурет

$-ax_0 - by_0 = c$ деп белгілеу енгізіп, теңдеуді келесі түрде жазуға болады:

$$ax + by + c = 0.$$

Сонымен келесі теорема орынды болады.

Теорема. Жазықтықтағы түзу келесі теңдеумен беріледі:

$$ax + by + c = 0,$$

мұндағы a, b, c — қандай да бір сандар, сондай-ақ a, b — бір уақытта нөлге тең емес сандар және $\vec{n}$ нормаль векторының координаталарын береді.

Егер $b \neq 0$ болса, онда теңдеудің екі жақ бөлігін b-ға бөліп, түзудің теңдеуін бұрыштық коэффициент арқылы жазамыз: $y = kx + l$.

$y = kx + l$ теңдеуімен берілген түзудің нормаль векторының координаталарын табыңдар.

$A_1(x_1; y_1)$, $A_2(x_2; y_2)$ нүктелері арқылы өтетін түзуді табамыз. Бұл жағдайда нормаль векторы ретінде $\vec{n}(y_2 - y_1; x_1 - x_2)$ векторын алуға болады. Ол $\overrightarrow{A_1A_2}\,(x_2 - x_1\,;\, y_2 - y_1)$ векторына перпендикуляр, өйткені осы векторлардың скаляр көбейтіндісі нөлге тең болады.

Берілген түзудің бойында жатқан A_0 нүктесі ретінде $A_1(x_1; y_1)$ нүктесін аламыз. Нормаль векторы мен A_1 нүктесінің координаталарын түзудің теңдеуіне қойып, төмендегідей теңдеу аламыз:

$$(y_2 - y_1)(x - x_1) + (x_1 - x_2)(y - y_1) = 0,$$

оны ықшамдап келесі түрде жазуға болады:

$$(y_2 - y_1)x + (x_1 - x_2)y + x_2y_1 - y_2x_1 = 0.$$

$x_1 \neq x_2$; $y_1 \neq y_2$ болғанда, алдыңғы теңдеудің екі жақ бөлігін $(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$-ге бөліп, бір қосылғышты теңдіктің оң жақ бөлігіне көшіреміз. Сонда түзудің теңдеуі былай жазылады:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Сонымен келесі теорема орынды болады.

Теорема. $A_1(x_1; y_1)$, $A_2(x_2; y_2)$ нүктелері арқылы өтетін түзу келесі теңдеумен беріледі:

$$(y_2 - y_1)x + (x_1 - x_2)y + x_2y_1 - y_2x_1 = 0.$$

$x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$ болғанда, бұл теңдеуді келесі түрде жазуға болады:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Жазықтықтағы түзулердің теңдеулеріне байланысты өзара орналасуын айқындайық.

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0, \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

теңдеулерімен берілген екі түзудің $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ нормаль векторларының координаталары сәйкесінше $(a_1; b_1)$, $(a_2; b_2)$ болады. Түзулер параллель болады, егер олардың нормаль векторлары коллинеар болса, яғни қандай да бір t саны үшін $\vec{n}_1 = t\vec{n}_2$ теңдігі орындалса, онда $a_2 = ta_1$, $b_2 = tb_1$ теңдіктері орындалады.

Егер екі түзу қиылысатын болса, онда олардың арасындағы φ бұрышын нормаль векторларының скаляр көбейтіндісінің формуласы арқылы табуға болады.

Нормаль векторлары сәйкесінше түзулерге перпендикуляр болғандықтан, түзулердің арасындағы φ бұрышы олардың нормаль векторларының арасындағы бұрышқа немесе оның 180°-қа дейінгі толықтауышына тең.

Бірінші жағдайда ,

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}.$$

Екінші жағдайда,

$$\cos\varphi = -\frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}.$$

Жалпы жағдайда, келесі формула орындалады:

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

Егер $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ нормаль векторлардың скаляр көбейтіндісі нөлге тең болса, түзулер перпендикуляр болады, яғни келесі теңдік орындалады:

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = a_1a_2 + b_1b_2 = 0.$$

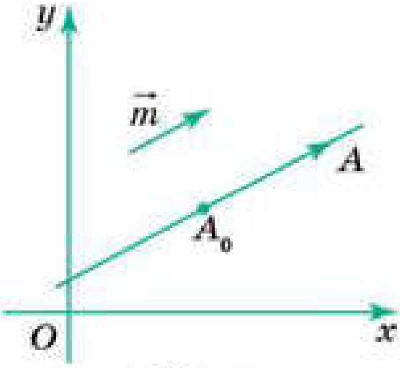
Координаталық жазықтықта түзудің берілуінің тағы бір тәсілі параметрлік теңдеумен берілуі болып табылады:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

мұндағы $x(t)$, $y(t)$ – t-дан алынған қандай да бір функциялар.

Бұл тәсіл түзулерді ғана емес, көптеген қисықтарды да береді. Жазықтықта t параметрі өзгертілген кезде координаталары осы теңдеулерді қанағаттандыратын нүктемен сипатталған қисық ***параметрлік түрде берілген қисық*** деп аталады. Теңдеулердің өздері ***параметрлік теңдеулер*** деп аталады.

Координаталық жазықтықта түзуді қарастырайық. Осы түзуге параллель немесе оның бойында жатқан $\vec{m}(k; l)$, векторы ***бағыттаушы вектор*** деп аталады (7.2-сурет).



7.2-сурет

$A_0(x_0;\ y_0)$ нүктесі түзудің бойында жатсын. Сонда егер $\overline{A_0 A}\,(x - x_0;\ y - y_0)$ векторы $\vec{m}\,(k;\ l)$ бағыттаушы векторына коллинеар болса, яғни қандай да бір t саны үшін

$$\begin{cases} x - x_0 = kt, \\ y - y_0 = lt \end{cases}$$

теңдігі орындалса, онда $A(x;\ y)$ нүктесі осы түзудің бойында жатады.

A_0 нүктесінің координаталарын осы теңдеулердің сәйкесінше оң жақ бөліктеріне көшіреміз де түзудің параметрлік теңдеуін аламыз:

$$\begin{cases} x = x_0 + kt, \\ y = y_0 + lt. \end{cases}$$

Сонымен келесі теорема орынды болады.

Теорема. $A_0(x_0;\ y_0)$ нүктесі арқылы өтетін түзу келесі параметрлік теңдеумен беріледі:

$$\begin{cases} x = x_0 + kt, \\ y = y_0 + lt. \end{cases}$$

мұндағы k, l — қандай да бір уақытта нөлге тең емес сандар және $\vec{m}$ — бағыттаушы вектордың координаталары.

Егер t параметрін уақыт деп, ал осы t параметрінің өзгеруі кезінде $A(x;\ y)$ нүктесінің түзудің бойымен орын ауыстыруын қозғалыс деп есептесек, онда $\vec{m}(k;\ l)$ бағыттауш ы векторы жылдамдық векторы, ал оның $\sqrt{k^2 + l^2}$ ұзындығы жылдамдықтың шамасы болады.

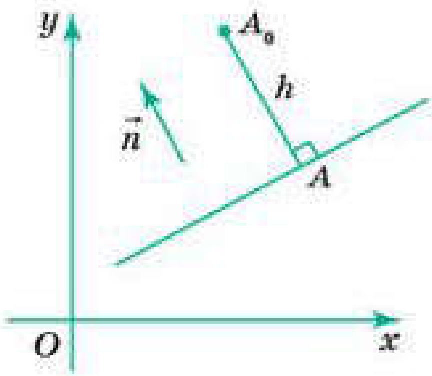
$$\begin{cases} x = x_1 + k_1 t, \\ y = y_1 + l_1 t. \end{cases} \quad \begin{cases} x = x_2 + k_2 t, \\ y = y_2 + l_2 t. \end{cases}$$

Параметрлік теңдеулермен берілген екі түзудің $\vec{m}_1$, $\vec{m}_2$ бағыттаушы векторларының координаталары сәйкесінше $(k_1;\ l_1)$, $(k_2;\ l_2)$ болады. Егер бұл түзулердің бағыттаушы векторлары коллинеар болса, онда олар параллель болады. Демек, қандай да бір s саны үшін $\vec{m}_2 = s \cdot \vec{m}_1$ теңдігі орындалады, яғни $k_2 = sk_1$, $l_2 = sl_1$ теңдіктері орындалады.

Егер екі түзу қиылысатын болса, онда олардың арасындағы φ бұрышын бағыттаушы векторларының скаляр көбейтіндісінің формуласы арқылы табуға болады.

Бұл формуланы өздерің қорытып шығарыңдар.

$A_0(x_0;\ y_0)$ нүктесі және $ax + by + c = 0$ теңдеуімен берілген түзу үшін нүктеден түзуге дейінгі $h = A_0A$ қашықтықты есептеу формуласын шығарайық (7.3-сурет).



7.3-сурет

A_0 нүктесі арқылы өтетін және берілген түзуге перпендикуляр түзудің параметрлік теңдеуін табамыз. $\vec{n}$ нормаль векторы осы түзудің бағыттаушы векторы екенін ескеріп, теңдеуді аламыз:

$$\begin{cases} x = x_0 + at, \\ y = y_0 + bt. \end{cases}$$

Осы түзудің берілген түзумен A қиылысу нүктесінің координаталарын табамыз. Ол үшін параметрлік теңдеудегі x және y өрнектерін берілген түзудің теңдеуіне қоямыз:

$$a(x_0 + at) + b(y_0 + bt) + c = 0.$$

Осыдан

$$t = \frac{-ax_0 - by_0 - c}{a^2 + b^2}.$$

$\overrightarrow{A_0A}$ векторының координаталары $(at;\ bt)$ болады. Оның ұзындығы нүктеден түзуге дейінгі ізделінді h қашықтығына тең болады:

$$\sqrt{a^2t^2 + b^2t^2} = |t|\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Сонымен келесі теорема орынды болады.

Теорема. $A_0(x_0;\ y_0)$ нүктесінен $ax + by + c = 0$ теңдеуімен берілген түзуге дейінгі h қашықтығы келесі формуламен есептеледі:

$$h = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

?

1. Қандай вектор түзудің нормаль векторы деп аталады?
2. Берілген нүкте арқылы өтетін және нормаль векторы белгілі түзудің теңдеуі қалай беріледі?

3. Екі нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуі қандай теңдеумен беріледі?
4. Қандай жағдайда екі теңдеу: 1) параллель түзулерді; 2) бір түзуді; 3) қиылысқан түзулерді анықтайды?
5. Қиылысқан түзулердің арасындағы бұрыш қалай есептеледі?
6. Қандай жағдайда екі түзу перпендикуляр болады?
7. Қандай теңдеулер параметрлік деп аталады?
8. Қандай вектор түзудің бағыттаушы векторы деп аталады?
9. Берілген нүкте арқылы өтетін және бағыттаушы векторы белгілі түзу қандай параметрлік теңдеулермен беріледі?
10. Қандай жағдайда параметрлік теңдеулер: 1) параллель түзулерді; 2) бір түзуді; 3) қиылысқан түзулерді анықтайды?
11. Нүктеден түзуге дейінгі қашықтық қандай формуламен есептеледі?

Жаттығулар

A

1. $A_0(2; 1)$ нүктесі арқылы өтетін және нормаль векторы: 1) $\vec{n}(1; 1)$; 2) $\vec{n}(-1; 2)$ болатын түзудің теңдеуін жазыңдар.

2. $2x - 3y + 1 = 0$ теңдеуімен берілген түзудің нормаль векторының координаталары неге тең? Осы түзуді және нормаль векторын салыңдар.

3. $ax + by + c = 0$ теңдеуімен берілген түзудің координаталар осьтерімен қиылысу нүктелерінің координаталарын табыңдар ($a \neq 0$, $b \neq 0$).

4. $A(0; 1)$, $B(1; 0)$ нүктелері арқылы өтетін түзудің теңдеуін жазыңдар.

5. $M(-1; 3)$, $N(1; 4)$ нүктелері арқылы өтетін түзудің теңдеуін жазыңдар. Осы түзудің нормаль векторының координаталарын табыңдар.

6. $A_0(2; 1)$ нүктесі арқылы өтетін және бағыттаушы векторы: 1) $\vec{m}(1; 1)$; 2) $\vec{m}(-1; 2)$ болатын түзудің параметрлік теңдеуін жазыңдар.

B

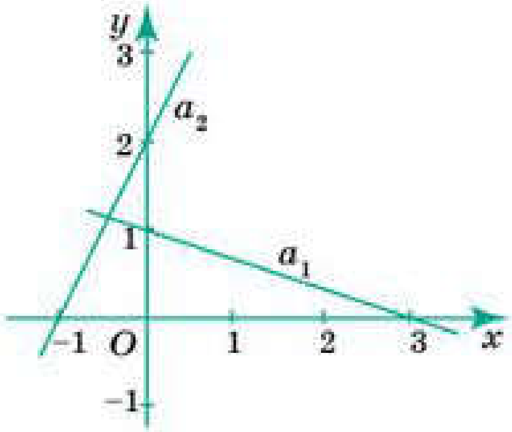
7. 7.4-суретте кескінделген a_1, a_2 түзулерінің теңдеулерін жазыңдар.

8. $O(0; 0)$ нүктесінен $x + y = 1$ түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

9. Келесі теңдеулермен берілген түзулердің арасындағы бұрышты табыңдар: 1) $2x + y - 1 = 0$, $x - 2y + 3 = 0$; 2) $x + y + 1 = 0$, $x - y - 1 = 0$. Осы түзулерді салыңдар.

10. $A_0(2;\ 1)$ нүктесі арқылы өтетін және 1) $x + y + 1 = 0$; 2) $2x - 3y + 4 = 0$ түзуіне перпендикуляр болатын түзудің теңдеуін жазыңдар.

11. $M(-2;\ 1)$ нүктесі арқылы өтетін және 1) $2x + y - 1 = 0$; 2) $x - 2y + 1 = 0$ түзуіне параллель болатын түзудің теңдеуін жазыңдар.



7.4-сурет

12. Келесі түзулердің қайсысы: а) параллель; ә) перпендикуляр болатынын анықтаңдар:

1) $x + y - 2 = 0,\ x + y + 3 = 0$;
2) $x + y - 2 = 0,\ x - y - 3 = 0$;
3) $-7x + y = 0,\ 7x - y + 4 = 0$;
4) $4x - 2y - 8 = 0,\ -x - 2y + 4 = 0$.

13. $A_0(3;\ -2)$ нүктесі арқылы өтетін және $\begin{cases} x = 2t, \\ y = 3t \end{cases}$ түзуіне параллель болатын түзудің параметрлік теңдеуін жазыңдар.

14. Нүктенің түзу бойымен қозғалысы параметрлік теңдеумен сипатталады:

$$\begin{cases} x = 1 + 3t, \\ y = 2 - 4t. \end{cases}$$

Нүктенің жылдамдығын табыңдар.

C

15. $A_0(4;\ 3)$ нүктеден келесі түзуге дейінгі қашықтықты табыңдар: 1) $x + y + 3 = 0$; 2) $3x + 4y - 4 = 0$.

16. $H(2;\ -1)$ нүктесі — координаталар басынан түзуге түсірілген перпендикулярдың табаны. Осы түзудің теңдеуін жазыңдар.

17. Келесі түзулердің қиылысу нүктесінің координаталарын табыңдар:

1) $x - y - 1 = 0,\ x + y + 3 = 0$;
2) $x - 3y + 2 = 0,\ 2x - 5y + 1 = 0$.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

18. Қандай да бір $\vec{a}$ векторын және AB кесіндісін салыңдар. Осы кесіндінің ұштарынан $\vec{a}$ векторын салыңдар. Пайда болған векторлардың ұштарын сәйкесінше A' және B' деп белгілеңдер. $A'B'$ кесіндісі туралы не айтуға болады?

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

1. Үшбұрыштың қабырғалары неше әртүрлі векторларды береді?

A) 1; B) 2; C) 3; D) 6.

2. $ABCDEF$ дұрыс алтыбұрыштың қабырғасы 1-ге тең. $\overrightarrow{BE}$ векторының ұзындығын табыңдар.

A) 1; B) 2; C) $\sqrt{3}$; D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. KLM теңқабырғалы үшбұрыштың қабырғасы a-ға тең болсын. $|\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{KM}|$-ды табыңдар.

A) a; B) $a\sqrt{2}$; C) $a\sqrt{3}$; D) $a\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. ABC $(\angle C = 90°)$ тікбұрышты үшбұры штың қабырғалар ы $AC = 6$ см және $BC = 8$ см. $|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}|$-ны табыңдар.

A) 10 см; B) 14 см; C) 8 см; D) 6 см.

5. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{FN} + \overrightarrow{EH} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CE}$ өрнегін ықшамдаңдар.

A) $\overrightarrow{AE}$; B) $\overrightarrow{AF}$; C) $\overrightarrow{HE}$; D) $\overrightarrow{AH}$.

6. ABC үшбұрыштың D нүктесі — BC қабырғасының ортасы. $\overrightarrow{AD}$ векторын $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$ және $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$ векторлары арқылы өрнектеңдер.

A) $\vec{b} - \vec{c}$; B) $\vec{b} + \vec{c}$; C) $\frac{\vec{b} - \vec{c}}{2}$; D) $\frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}$.

7. $ABCD$ параллелограмында E нүктесі — CD қабырғасының ортасы. $\overrightarrow{AE}$ векторын $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$ және $\vec{d} = \overrightarrow{AD}$ векторлары арқылы өрнектеңдер.

A) $0,5\,\vec{b} - \vec{d}$; B) $\vec{b} + 0,5\,\vec{d}$; C) $0,5\,\vec{b} + \vec{d}$; D) $\vec{b} - 0,5\,\vec{d}$.

8. $\overrightarrow{PQ}$ векторының координаталарын табыңдар, мұндағы $P(1; -3)$ және $Q(3; -1)$.

A) (2; 1); B) (2; 2); C) (2; –2); D) (1; 2).

9. $\overrightarrow{AC}$ векторының координаталары (9; –12). Егер $A(-6; 5)$ болса, C нүктесінің координаталарын табыңдар.

A) (3; –7); B) (–3; –7); C) (–3; 7); D) (3; 7).

10. $\vec{m}(3; -4)$ векторының ұзындығын табыңдар.

A) 3; B) 4; C) 5; D) 10.

11. $ABCDEF$ дұрыс алтыбұрыштың қабырғасы 1-ге тең. $\overrightarrow{BF}$ век торының ұзындығын табыңдар.

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; B) $\sqrt{3}$; C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; D) $\sqrt{2}$.

12. $ABCDEF$ дұры с алтыбұрыштың $\overrightarrow{AC}$ және $\overrightarrow{BD}$ век торларының арасындағы бұрышты табыңдар.

A) 30°; B) 45°; C) 60°; D) 90°.

13. $ABCDEF$ дұрыс алтыбұрыштың қабырғасы 1-ге тең. $\overrightarrow{BC}$ және $\overrightarrow{DE}$ векторларының скаляр көбейтіндісін табыңдар.

A) –1; B) –0,5; C) 0,5; D) 1.

14. $A(0; -5)$, $B(3; 6)$, $C(-8; 10)$ болса, $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{BC}$ векторларының скаляр көбейтіндісін табыңдар.

A) 44; B) 33; C) 22; D) 11.

15. $\vec{a}(1; 3)$ және $\vec{b}(2; 1)$ векторларының арасындағы бұрышты табыңдар.

A) 30°; B) 45°; C) 90°; D) 135°.

16*. $A_0(2; -3)$ нүктесі арқылы өтетін және нормаль векторы $\vec{n}(1; -2)$ болатын түзудің теңдеуін табыңдар.

A) $-x + 2y - 8 = 0$; B) $x - 2y + 8 = 0$;
C) $x - 2y - 8 = 0$; D) $x + 2y + 8 = 0$.

17*. $A_1(2; 0)$, $A_2(0; -3)$ нүктелері арқылы өтетін түзудің теңдеуін табыңдар.

A) $3x + 2y - 6 = 0$; B) $3x - 2y - 6 = 0$;
C) $2x + 3y - 6 = 0$; D) $2x - 3y - 6 = 0$.

18*. $A_1(2; 1)$ нүктесі арқылы өтетін және $x - 2y - 3 = 0$ түзуіне параллель болатын түзудің теңдеуін табыңдар.

A) $x + 2y - 4 = 0$; B) $x - 2y + 4 = 0$;
C) $2x + y - 5 = 0$; D) $x - 2y = 0$.

19*. $A_1(2; 3)$ нүктесі арқылы өтетін және $2x - y - 1 = 0$ түзуіне перпендикуляр болатын түзудің теңдеуін табыңдар.

A) $x + 2y - 8 = 0$; B) $x - 2y + 4 = 0$;
C) $2x + y - 7 = 0$; D) $x - 2y + 4 = 0$.

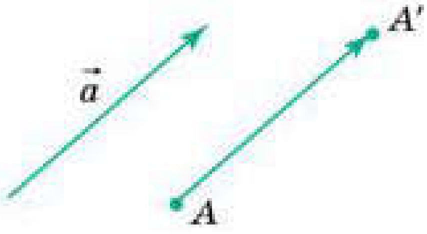
20*. Координаталар басынан $3x + 4y = 12$ түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

A) 1; B) 2; C) 2,4; D) 3,6.

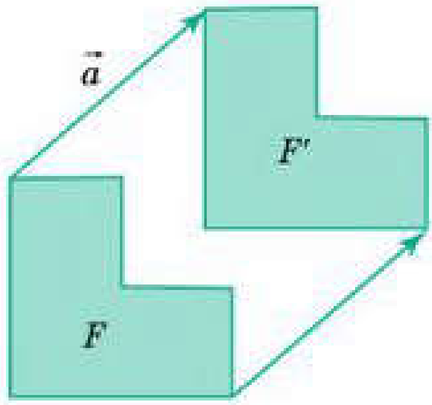
2-тарау

ЖАЗЫҚТЫҚТАҒЫ ТҮРЛЕНДІРУЛЕР

8. ПАРАЛЛЕЛЬ КӨШІРУ



8.1-сурет



8.2-сурет

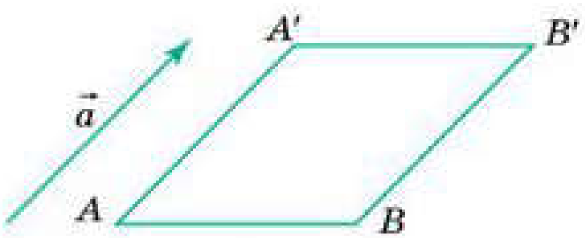
Жазықтықта $\vec{a}$ векторы берілсін. Жазықтықтың әрбір A нүктесіне $\overline{AA'} = \vec{a}$ болатындай A' нүктесін сәйкес қоямыз. $\overline{AA'}$ векторы $\vec{a}$ векторына тең болатындай A нүктесіне A' нүктесі сәйкес қойылатын бейнелеу жазықтықты $\vec{a}$ векторына ***параллель көшіру*** деп аталады (8.1-сурет).

Егер F' фигурасының барлық нүктелері F фигурасының барлық мүмкін нүктелерін $\vec{a}$ векторына параллель көшіру арқылы пайда болса, онда F' фигурасы F фигурасын $\vec{a}$ векторына ***параллель көшіру*** арқылы алынды деп айтады (8.2-сурет).

Параллель көшірудің кейбір қасиеттерін қарастырайық.

1-қасиет. Параллель көшіру нүктелердің арақашықтығын сақтайды.

Дәлелдеуі. A', B' нүктелері сәйкесінше A және B нүктелерін $\vec{a}$ векторына параллель көшіру арқылы алынсын және $\overline{AB}$ векторы $\vec{a}$ векторына коллинеар емес болсын (8.3-сурет).

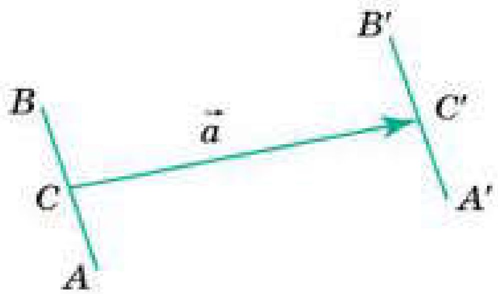


8.3-сурет

Сонда $ABB'A'$ төртбұрышында AA' және BB' қабырғалары тең және параллель болады, демек бұл төртбұрыш — параллелограмм. Онда, $AB = A'B'$. ◻

$\overline{AB}$ векторы $\vec{a}$ векторына коллинеар болған жағдайды өздерің қарастырыңдар.

2-қасиет. Параллель көшіру кесіндіні кесіндіге, сәулені сәулеге, түзуді түзуге көшіреді.



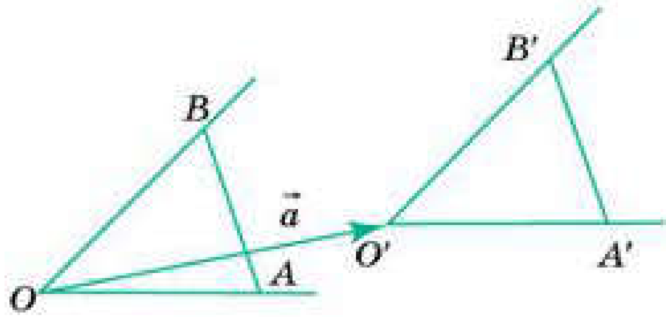
8.4-сурет

Дәлелдеуі. Бірінші жағдайды қарастырайық. Берілген AB кесіндісінің A, B нүктелерін $\vec{a}$ векторына параллель көшіргенде алынған сәйкесінше нүктелерді A', B' деп белгілейік. C нүктесі AB кесіндісінде жатсын. Сонда $AC + CB = AB$. Параллель көшіру нүктелердің арақашықтығын сақтайтындықтан, $\vec{a}$ векторына параллель көшіргенде алынған C' нүктесі үшін $A'C' + C'B' = A'B'$ теңдігі орындалады (8.4-сурет). Осыдан C' нүктесі $A'B'$ кесіндісінде жатады. Демек, $\vec{a}$ векторына параллель көшіру AB кесіндісін $A'B'$ кесіндісіне көшіреді.

Параллель көшіру арқылы сәуленің сәулеге, түзудің түзуге көшуін өздерің қарастырыңдар.

3-қасиет. Параллель көшіру бұрыштардың шамасын сақтайды.

Дәлелдеуі. AOB бұрышының O, A, B нүктелерін $\vec{a}$ векторына параллель көшіргенде алынған нүктелерді O', A', B' деп белгілейік (8.5-сурет).



8.5-сурет

Параллель көшіру нүктелердің арақашықтығын сақтайтындықтан, келесі кесінділердің теңдігі орынды болады: $A'O' = AO$, $B'O' = BO$, $A'B' = AB$. $A'O'B'$ үшбұрышы AOB үшбұрышына тең болады (үш қабырғасы бойынша). Осыдан $A'O'B'$ бұрышы AOB бұрышына тең болады.

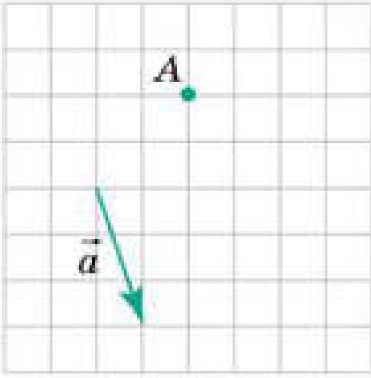
?

1. Параллель көшіру дегеніміз не?
2. Параллель көшіру нүктелердің арақашықтығын сақтайды ма?
3. Параллель көшіру кезінде кесінді, сәуле, түзу қалай орын ауыстырады?
4. Параллель көшіру бұрыштардың шамасын сақтайды ма?

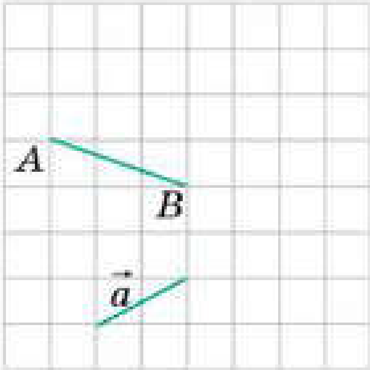
Жаттығулар

A

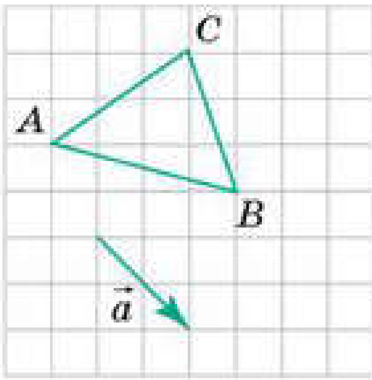
1. 8.6-суреттегі A нүктесін $\vec{a}$ векторына параллель көшіргенде алынған A' нүктесін салыңдар.



8.6-сурет



8.7-сурет



8.8-сурет

2. 8.7-суреттегі AB кесіндісін $\vec{a}$ векторына параллель көшіргенде алынған $A'B'$ кесіндісін салыңдар.

3. Қандай жағдайда бір кесіндіні екінші кесіндіге көшіретін параллель көшіру бар болады?

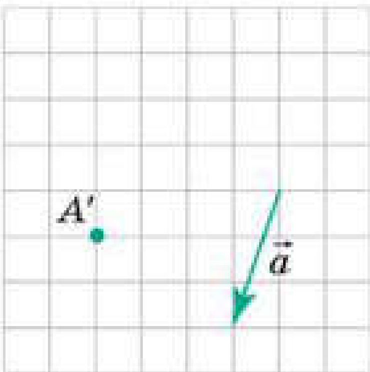
4. 8.8-суреттегі ABC үшбұрышын $\vec{a}$ векторына параллель көшіргенде алынған үшбұрышты салыңдар (8.8-сурет).

5. 1) Үшбұрыштың бір қабырғасын оның екінші қабырғасына көшіретін; 2) квадраттың бір қабырғасын оның екінші қабырғасына көшіретін параллель көшіру бар бола ма?

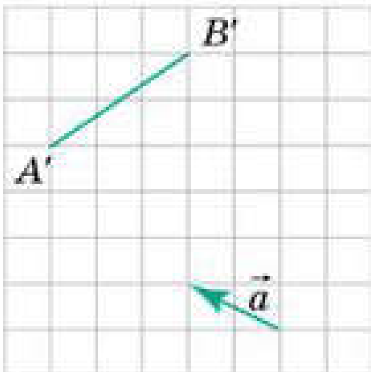
6. Қандай төртбұрыш үшін оның бір қабырғасын екінші қабырғасына көшіретін параллель көшіру бар болады?

B

7. 8.9-суретте $\vec{a}$ векторына параллель көшіргенде A' нүктесі алынған. Бастапқы A нүктесін салыңдар.



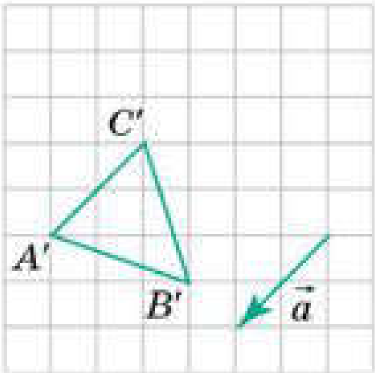
8.9-сурет



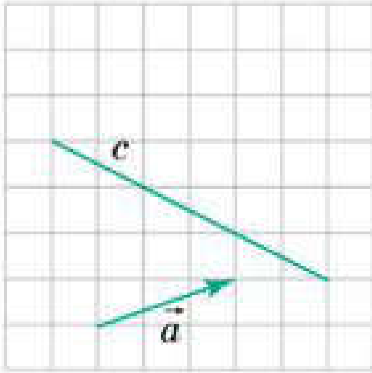
8.10-сурет

8. 8.10-суретте $\vec{a}$ векторына параллель көшіргенде $A'B'$ кесіндісі алынған. Бастапқы AB кесіндісін салыңдар.

9. 8.11-суретте $\vec{a}$ векторына параллель көшіргенде $A'B'C'$ үшбұрышы алынған. Бастапқы ABC үшбұрышын салыңдар.



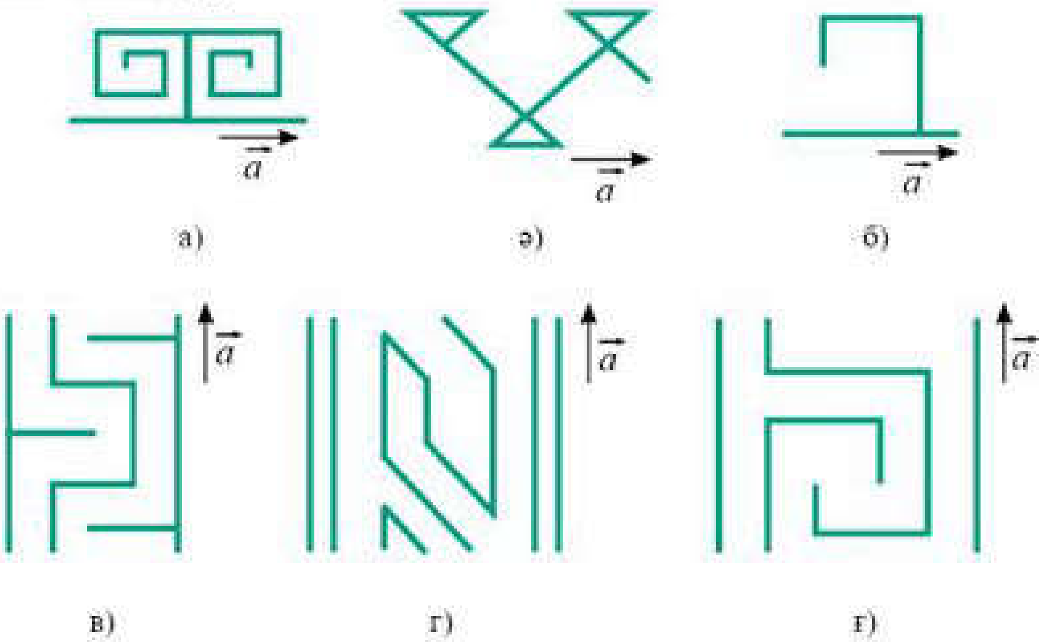
8.11-сурет



8.12-сурет

10. 8.12-суреттегі c түзуін $\vec{a}$ векторына параллель көшіргенде алынған c' түзуін салыңдар.

11. Қазақтың ою-өрнегі — ұлттық мәдениеттің жарқын элементі. Бұл қазақ халқы тарихының бір бөлігі, оның әдет-ғұрыптары мен дәстүрлеріне құрметті білдіреді. 8.13-суретте қазақтың геометриялық ою-өрнегінің бір бөлігі көрсетілген. Осы ою-өрнекті $\vec{a}$ векторына параллель көшіргенде алынған келесі ою-өрнекті салыңдар.



8.13-сурет

12. Параллель көшіру үшбұрышты оған тең үшбұрышқа көшіретінін дәлелдеңдер.

13. Параллель көшіру: 1) параллелограмды параллелограмға; 2) тіктөртбұрышты тіктөртбұрышқа; 3) ромбыны ромбыға; 4) квадратты квадратқа көшіретінін дәлелдеңдер.

14. Параллель көшіру шеңберді радиусы дәл сондай шеңберге көшіретінін дәлелдеңдер.

15. A нүктесінің координаталары $(3; -2)$. A нүктесін $\vec{a}(-2; 1)$ векторына параллель көшіргенде алынған A' нүктесінің координаталарын табыңдар.

16. $A(3; 4)$ нүктесін $A'(-2; 1)$ нүктесіне параллель көшіретін $\vec{a}$ векторының координаталарын табыңдар.

C

17. $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ шеңберін $\vec{a}(k; l)$ векторына параллель көшіргенде алынған шеңбердің теңдеуін жазыңдар.

18. $x^2 + 2x + y^2 - 3 = 0$ теңдеуімен берілген шеңберді: 1) $\vec{a}(-1; 0)$; 2) $\vec{a}(1; -2)$ векторына параллель көшіргенде алынған шеңбердің теңдеуін жазыңдар.

19. $ax + by + c = 0$ түзуін $\vec{m}(k; l)$ векторына параллель көшіргенде алынған түзудің теңдеуін жазыңдар.

20. $x + y - 1 = 0$ түзуін: 1) $\vec{a}(2; -3)$; 2) $\vec{a}(2; -2)$ векторына параллель көшіргенде алынған түзудің теңдеуін жазыңдар.

21. Параллель көшіру кезінде түзу оған параллель түзуге немесе өз-өзіне көшетінін дәлелдеңдер.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

22. Түзулердің перпендикулярлығы мен орта перпендикуляр ұғымын қайталаңдар.

23. Қандай да бір c түзуін және AB кесіндісін салыңдар. c түзуі AA' және BB' кесінділерінің орта перпендикуляры болатындай A' және B' нүктелерін салыңдар. $A'B'$ кесіндісі туралы не айтуға болады?

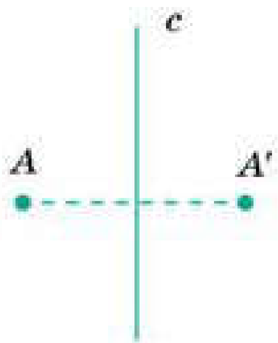
9. ОСЬТІК СИММЕТРИЯ

"Симметрия" сөзі ежелгі грек тілінен аударғанда өлшемділікті, белгілі бір реттілікпен орналасқан деген ұғымды білдіреді.

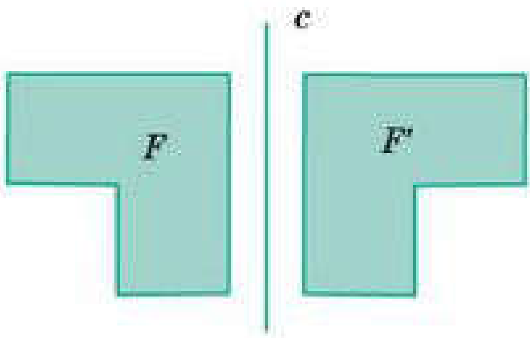
Симметрияның көріністерін табиғаттан, архитектурадан, көркемсуреттерден, кескіндемеден және т.б. көруге болады.

Мұнда біз симметрия ұғымын математикалық тұрғыда қарастырып, осьтік симметриядан бастаймыз.

Егер c түзуі AA' кесіндісіне перпендикуляр және оның ортасы арқылы өтсе, онда A және A' нүктелері c түзуіне қарағанда ***симметриялы*** деп аталады (9.1-сурет). c түзуінің әрбір нүктесі өзіне-өзі симметриялы болады.



9.1-сурет



9.2-сурет

Жазықтықтың әрбір A нүктесін берілген c түзуіне қарағанда A' нүктесіне бейнелеу ***осьтік симметрия*** деп аталады. c түзуі ***симметрия осі*** деп аталады.

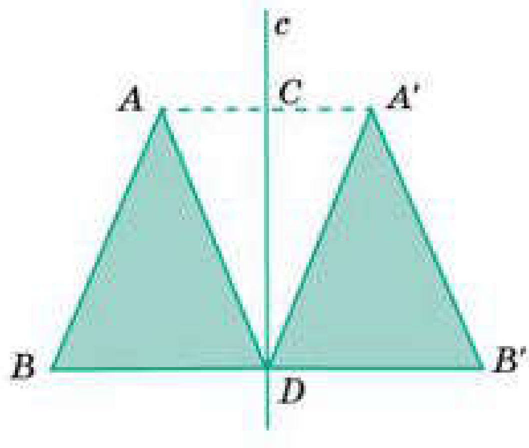
Егер F фигурасының әрбір нүктесіне екінші F' фигурасының симметриялы нүктелері сәйкес келсе, онда F және F' фигуралары c түзуіне қарағанда ***симметриялы фигуралар*** деп аталады (9.2-сурет).

Осьтік симметрияның кейбір қасиеттерін қарастырайық.

1-қасиет. Осьтік симметрия сәйкес нүктелердің арақашықтығын сақтайды.

Дәлелдеуі. A', B' нүктелері c түзуіне қарағанда сәйкесінше A, B нүктелеріне осьтік симметриялы болсын. A, B нүктелері c түзуінің бір жағында жатсын деп ұйғарайық (9.3-сурет).

AA', BB' түзулерінің c түзуімен қиылысу нүктелерін сәйкесінше C, D деп белгілейік. ACD және $A'CD$ тікбұрышты үшбұрыштары тең болады (екі катеті бойынша). Осыдан, $\angle ADC = \angle A'DC$ және $AD = A'D$. ADB және $A'DB'$ үшбұрыштары тең (үшбұрыштар теңдігінің бірінші белгісі бойынша). Демек, $AB = A'B'$.



9.3-сурет

A, B нүктелерінің c түзуінің әр жағында жатқан жағдайын өздерің қарастырыңдар.

2-қасиет. Осьтік симметрия кесіндіні кесіндіге, сәулені сәулеге, түзуді түзуге бейнелейді.

3-қасиет. Осьтік симметрия бұрыштардың шамасын сақтайды.

Бұл қасиеттердің дәлелдеулері параллель көшірудің сәйкесінше қасиеттерінің дәлелдеулеріне ұқсас болып табылады.

Қасиеттерді өздерің дәлелдеңдер.

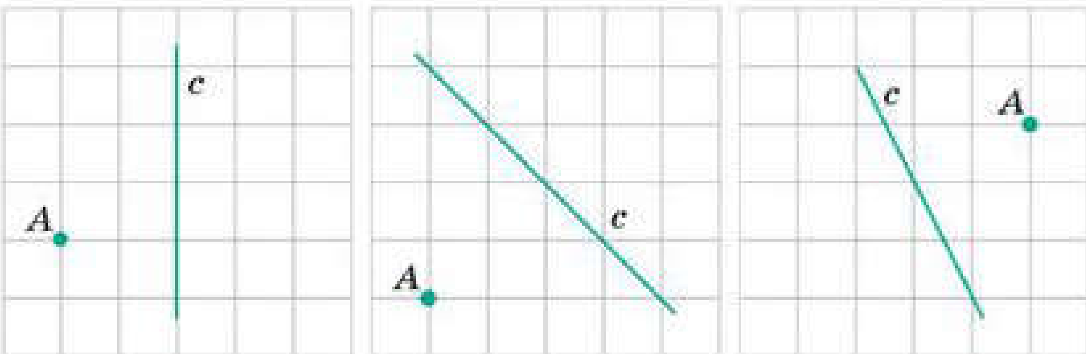
?

1. Қандай нүктелер түзуге қарағанда симметриялы деп аталады?
2. Осьтік симметрия, симметрия осі дегеніміз не?
3. Қандай екі фигура түзуге қарағанда симметриялы деп аталады?
4. Осьтік симметрия нүктелердің арақашықтығын сақтайды ма?
5. Осьтік симметрия кезінде кесінді, сәуле, түзу қалай орын ауыстырады?
6. Осьтік симметрия бұрыштардың шамасын сақтайды ма?

Жаттығулар

А

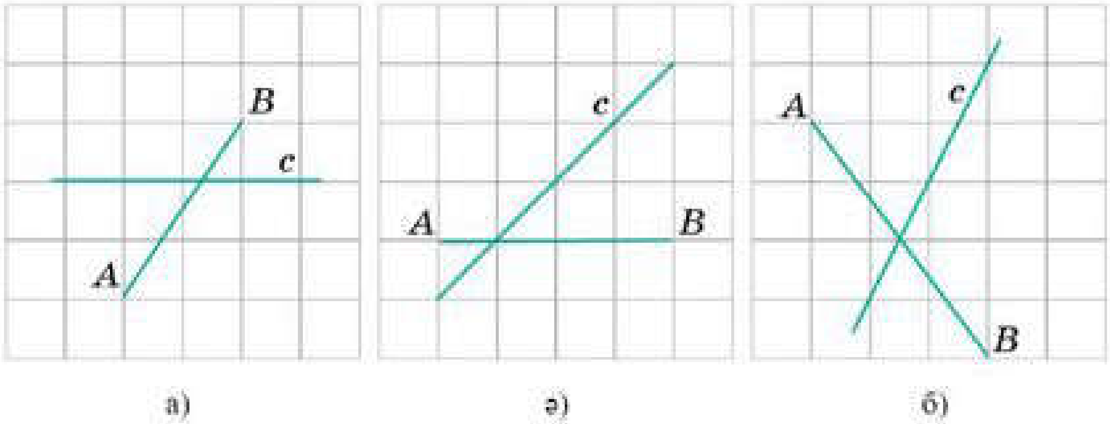
1. Қандай нүктелер осьтік симметрия кезінде өзіне-өзі бейнеленеді?
2. Қандай түзулер осьтік симметрия кезінде өзіне-өзі бейнеленеді?
3. Осьтік симметрия кезінде A нүктесі A' нүктесіне бейнеленеді. Симметрия осі болатын түзуді кескіндеңдер.
4. 1) Осьтік симметриясы бар; 2) осьтік симметриясы жоқ фигураларға мысалдар келтіріңдер.
5. 9.4-суреттегі c түзуіне қатысты A нүктесіне симметриялы нүктені салыңдар.



а) ә) б)

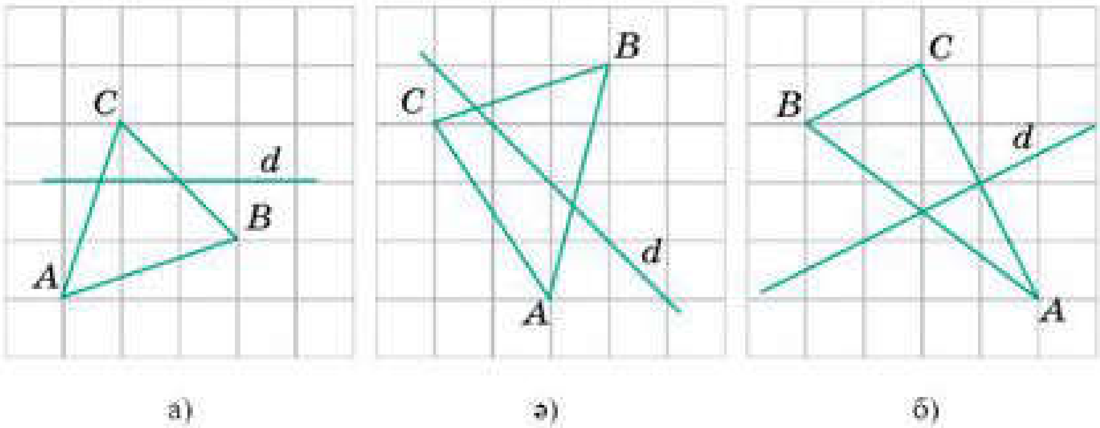
9.4-сурет

6. 9.5-суреттегі c түзуіне қатысты AB кесіндісіне симметриялы кесіндіні салыңдар.



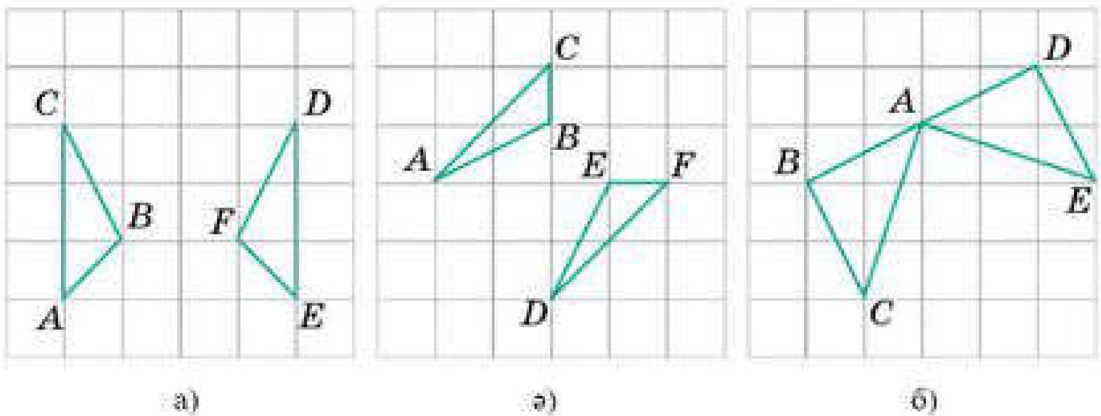
9.5-сурет

7. 9.6-суреттегі d түзуіне қатысты ABC үшбұрышына симметриялы үшбұрышты салыңдар.



9.6-сурет

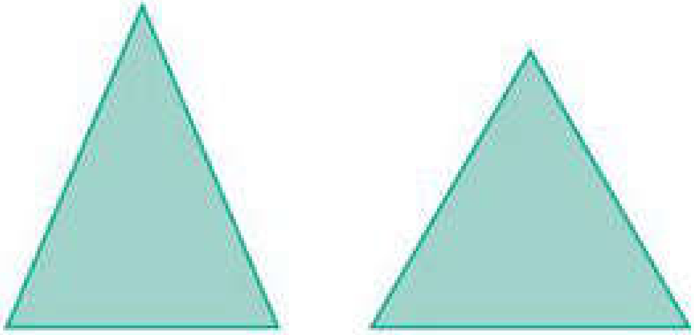
8. 9.7-суретте кескінделген үшбұрыштардың симметрия осін салыңдар.



9.7-сурет

В

9. 9.8-суреттегі: а) теңбүйірлі үшбұрыштың; ә) дұрыс үшбұрыштың неше симметрия осьтері болады?



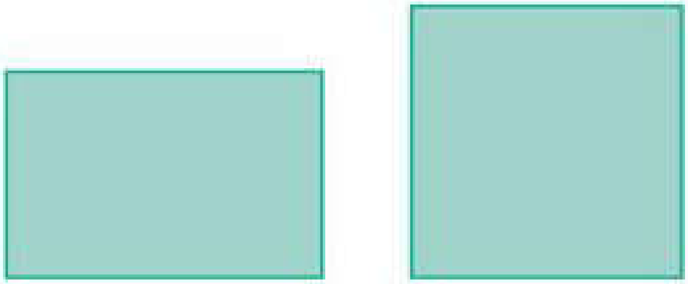
а) ә)

9.8-сурет

10. 1) Шеңбердің; 2) дөңгелектің неше симметрия осі болады?

11. Түзудің неше симметрия осі болады?

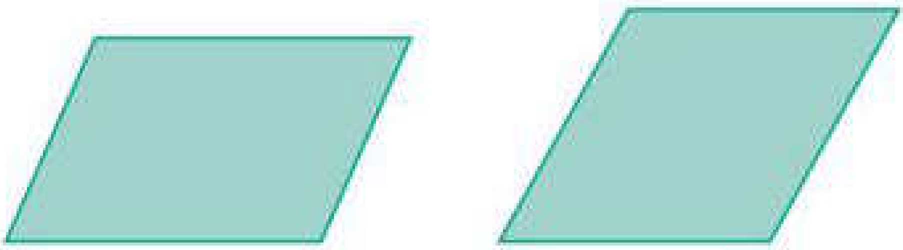
12. 9.9-суреттегі а) тіктөртбұрыштың; ә) квадраттың неше симметрия осі болады?



а) ә)

9.9-сурет

13. 9.10-суреттегі: а) параллелограмның; ә) ромбының неше симметрия осі болады?

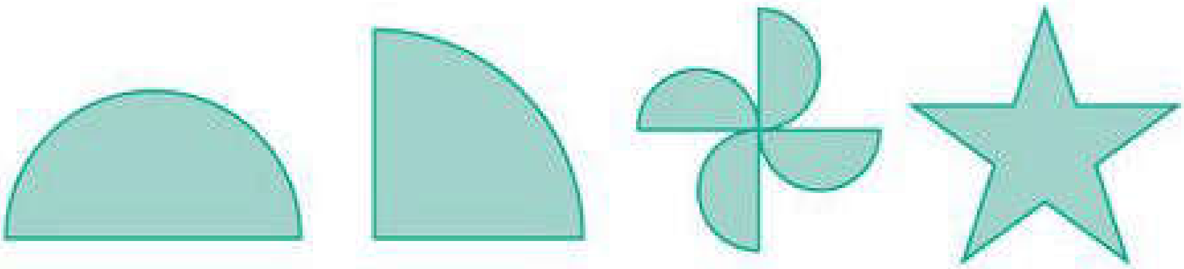


а) ә)

9.10-сурет

14. 1) Дұрыс бесбұрыштың; 2) дұрыс алтыбұрыштың; 3) дұрыс n-бұрыштың неше симметрия осі болады?

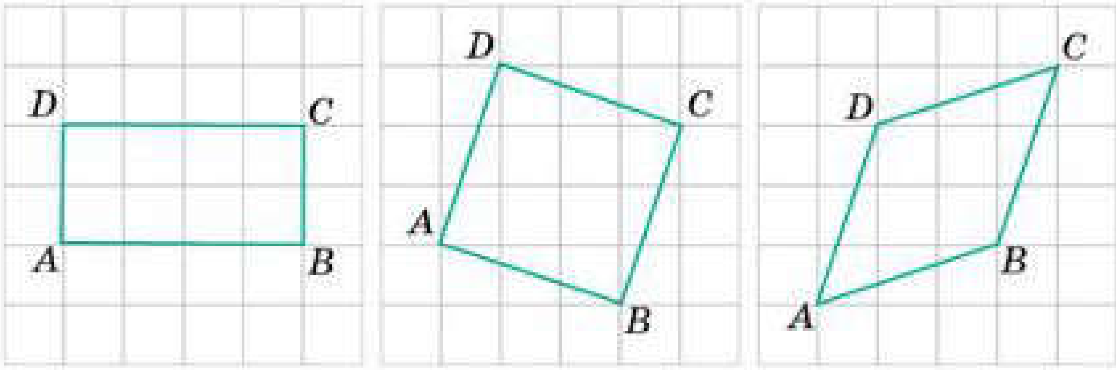
15. 9.11-суретте кескінделген қандай фигураның симметрия осі болады?



а) ә) б) в)

9.11-сурет

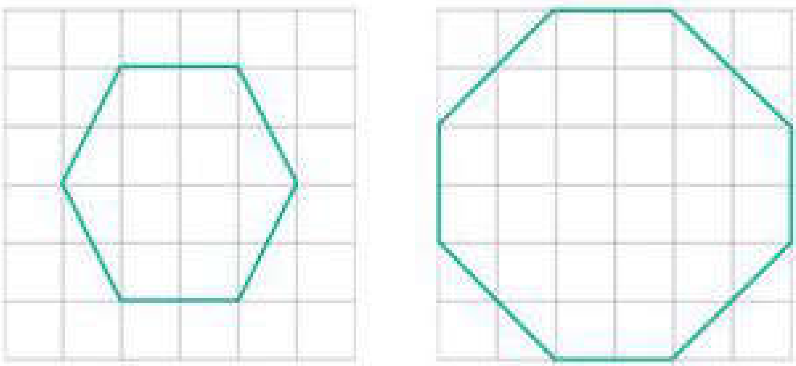
16. 9.12-суреттегі төртбұрыштардың симметрия осьтерін салыңдар.



а) ә) б)

9.12-сурет

17. 9.13-суретте кескінделген көпбұрыштардың симметрия осьтерін салыңдар.



а) ә)

9.13-сурет

18. Координаталық жазықтықта: 1) абсцисса осіне; 2) ордината осіне қатысты $A(3; -4)$ нүктесіне симметриялы нүктенің координаталарын табыңдар.

19. Қазақтың ою-өрнегі — қазақ халқының бейнелеу өнеріндегі ең көне түрлерінің бірі. Олар адамды тіл-көзден сақтайды, қызметінде сәттілік әкеледі. 9.14-суретте қазақтың кейбір ою-өрнектері кескінделген. Осы ою-өрнектердің симметрия осьтерін табыңдар және оларды салыңдар.

а) ә) б) в)

9.14-сурет

C

20. Координаталық жазықтықта $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ теңдеуімен берілген шеңберге: 1) абсцисса осіне; 2) ордината осіне қарағанда симметриялы болатын шеңбердің теңдеуін жазыңдар.

21. Координаталық жазықтықта $x^2 + 2x + y^2 - 4y - 4 = 0$ теңдеуімен берілген шеңберге: 1) абсцисса осіне; 2) ордината осіне қарағанда симметриялы болатын шеңбердің теңдеуін жазыңдар.

22. Координаталық жазықтықта $ax + by + c = 0$ теңдеуімен берілген түзуге: 1) абсцисса осіне; 2) ордината осіне қарағанда симметриялы түзудің теңдеуін жазыңдар.

23. Координаталық жазықтықта $x - 2y + 3 = 0$ теңдеуімен берілген түзуге: 1) абсцисса осіне; 2) ордината осіне қарағанда симметриялы түзудің теңдеуін жазыңдар.

24. Параллель түзулерге қарағанда екі осьтік симметрияның біртіндеп орындалуы параллель көшіруді беретінін дәлелдеңдер.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

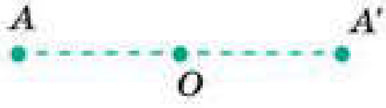
25. Қандай да бір O нүктесін және AB кесіндісін салыңдар. O нүктесі AA' және BB' кесінділерінің орталары болатындай A' және B' нүктелерін салыңдар. $A'B'$ кесіндісі туралы не айтуға болады?

10. ЦЕНТРЛІК СИММЕТРИЯ

Симметрияның тағы бір түрін қарастырамыз.

Егер O нүктесі AA' кесіндісінің ортасы болса, онда A және A' нүктелері O нүктесіне қарағанда ***симметриялы*** деп аталады. O нүктесі өзіне-өзі симметриялы болып табылады (10.1-сурет).

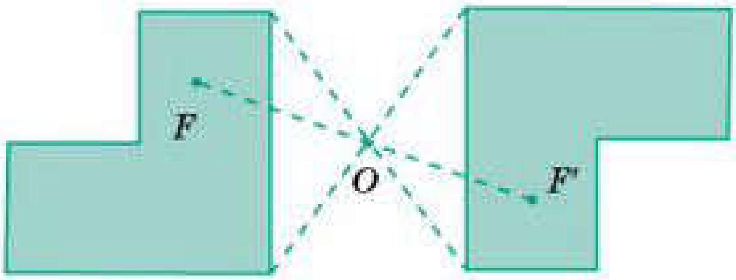
Жазықтықтың әрбір A нүктесін берілген O нүктесіне қарағанда симметриялы A' нүктесіне бейнелеу ***центрлік симметрия*** деп аталады. O нүктесі ***симметрия центрі*** деп аталады.



10.1-сурет

Егер F фигурасының әрбір нүктесіне екінші F' фигурасының O нүктесіне қарағанда симметриялы нүктесі сәйкес болса, онда F және F' фигуралары O нүктесіне қарағанда ***центрлік симметриялы*** деп аталады (10.2-сурет).

Егер O нүктесіне қарағанда симметрия F фигурасын өзіне-өзін бейнелесе, онда F фигурасы ***центрлік симметриялы*** деп, ал ***О нүктесі симметрия центрі*** деп аталады (10.3-сурет). Фигураның центрлік симметриясы бар деп те айтады. Мысалы, кесінді — центрлік симметриялы фигура, оның симметрия центрі — дәл ортасы; шеңбер өзінің центріне қарағанда центрлі-симметриялы фигура.



10.2-сурет

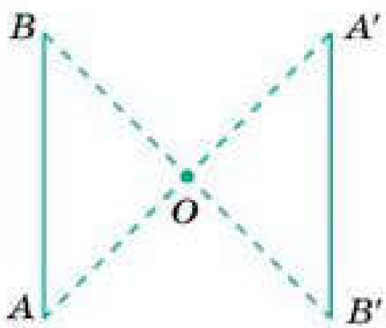
10.3-сурет

Центрлік симметрияның кейбір қасиеттерін қарастырайық.

1-қасиет. Центрлік симметрия нүктелердің арақашықтығын сақтайды.

Дәлелдеуі. A', B' нүктелері O нүктесіне қатысты сәйкесінше A, B нүктелеріне центрлік симметриялы болсын (10.4-сурет).

Сонда, OAB және $OA'B'$ үшбұрыштары тең болады (үшбұрыштар теңдігінің бірінші белгісі бойынша). Осыдан, $AB = A'B'$.



10.4-сурет

2-қасиет. Центрлік симметрия кесіндіні кесіндіге, сәулені сәулеге, түзуді түзуге бейнелейді.

3-қасиет. Центрлік симметрия бұрыштардың шамасын сақтайды.

Бұл қасиеттердің дәлелдеулері параллель көшірудің сәйкесінше қасиеттерінің дәлелдеулеріне ұқсас болып табылады.

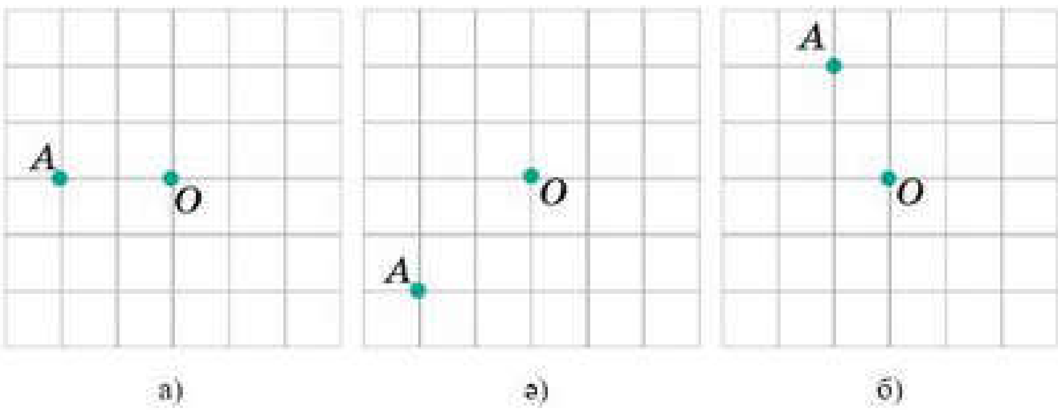
2 және 3-қасиетті өздерің дәлелдеңдер.

1. Қандай нүктелер нүктеге қарағанда симметриялы деп аталады?
2. Центрлік симметрия дегеніміз не?
3. Қандай фигура центрлік симметриялы деп аталады?
4. Центрлік симметрия нүктелердің арақашықтығын сақтайды ма?
5. Центрлік симметрия кезінде кесінді, сәуле, түзу қайда бейнеленеді?
6. Центрлік симметрия бұрыштардың шамасын сақтайды ма?

Жаттығулар

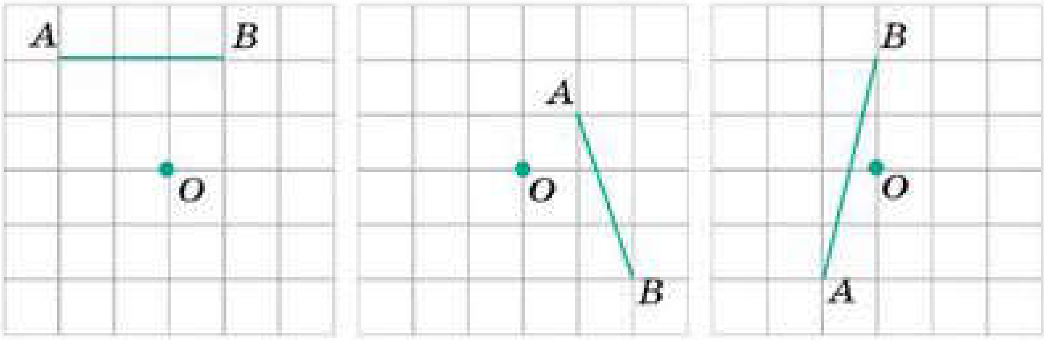
A

1. Қандай нүкте центрлік симметрия кезінде өзіне-өзі бейнеленеді?
2. Қандай түзу центрлік симметрия кезінде өзіне-өзі бейнеленеді?
3. Кесіндінің симметрия центрі не болады?
4. Центрлік симметрия кезінде A нүктесі A' нүктесіне бейнеленсін. Симметрия центрі қайда орналасады?
5. Сәуленің симметрия центрі бола ма?
6. 10.5-суреттегі O центріне қарағанда A нүктесіне симметриялы нүктені салыңдар.



10.5-сурет

7. 10.6-суреттегі O центріне қарағанда AB кесіндісіне симметриялы кесіндіні салыңдар.



а)   ә)   б)

10.6-сурет

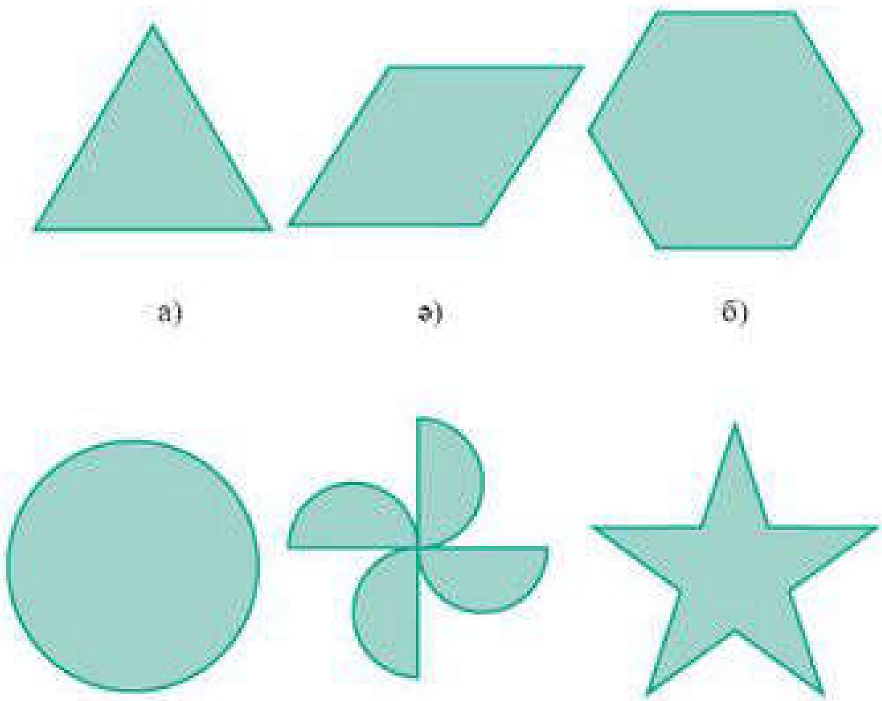
В

8. 1) Түзудің; 2) қиылысқан түзулер жұбының; 3) параллель түзулер жұбының неше симметрия центрі болады?

9. 1) Дұрыс үшбұрыштың; 2) квадраттың; 3) дұрыс бесбұрыштың; 4) дұрыс алтыбұрыштың симметрия центрі бола ма?

10. 1) Параллелограмның; 2) ромбының; 3) теңбүйірлі трапецияның симметрия центрі бола ма?

11. 10.7-суретте кескінделген қандай фигураның симметрия центрі болады?

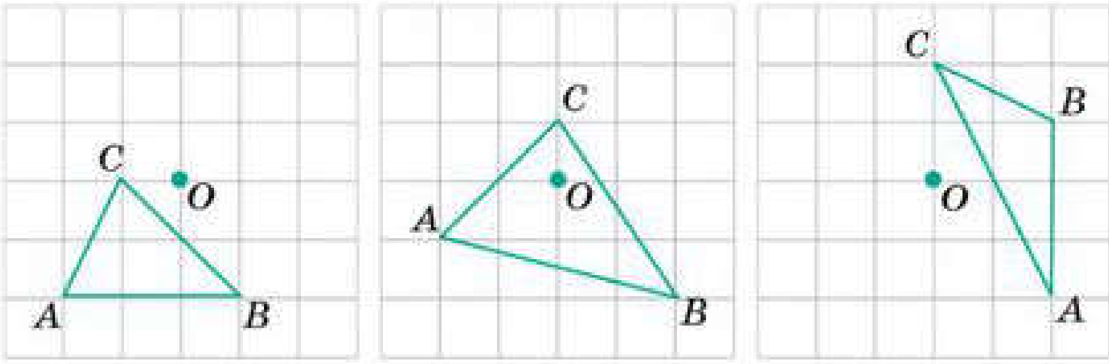


а)   ә)   б)

в)   г)   ғ)

10.7-сурет

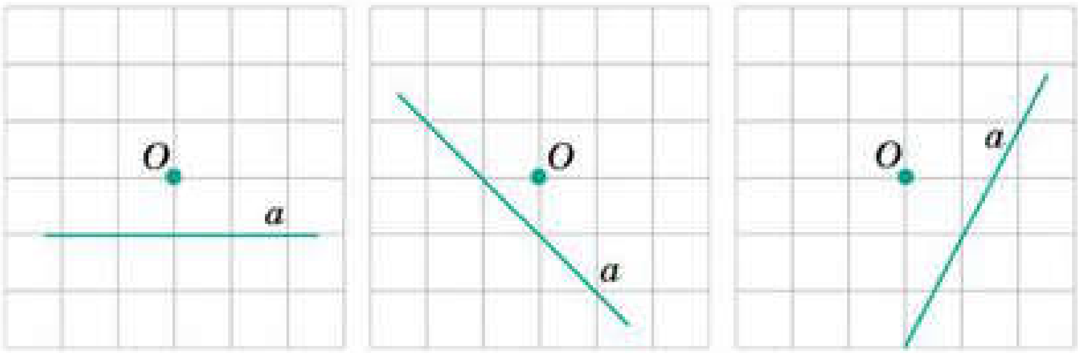
12. 10.8-суреттегі O нүктесіне қарағанда ABC үшбұрышына симметриялы үшбұрышты салыңдар.



а) ә) б)

10.8-сурет

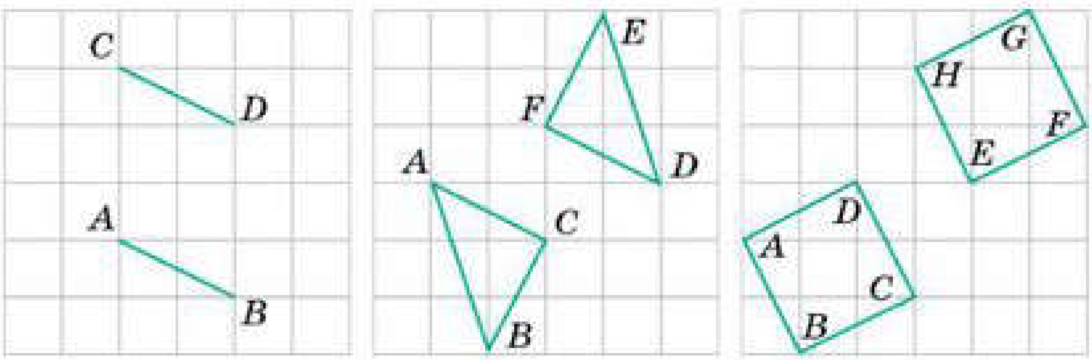
13. 10.9-суреттегі O нүктесіне қарағанда a түзуіне симметриялы түзуді салыңдар.



а) ә) б)

10.9-сурет

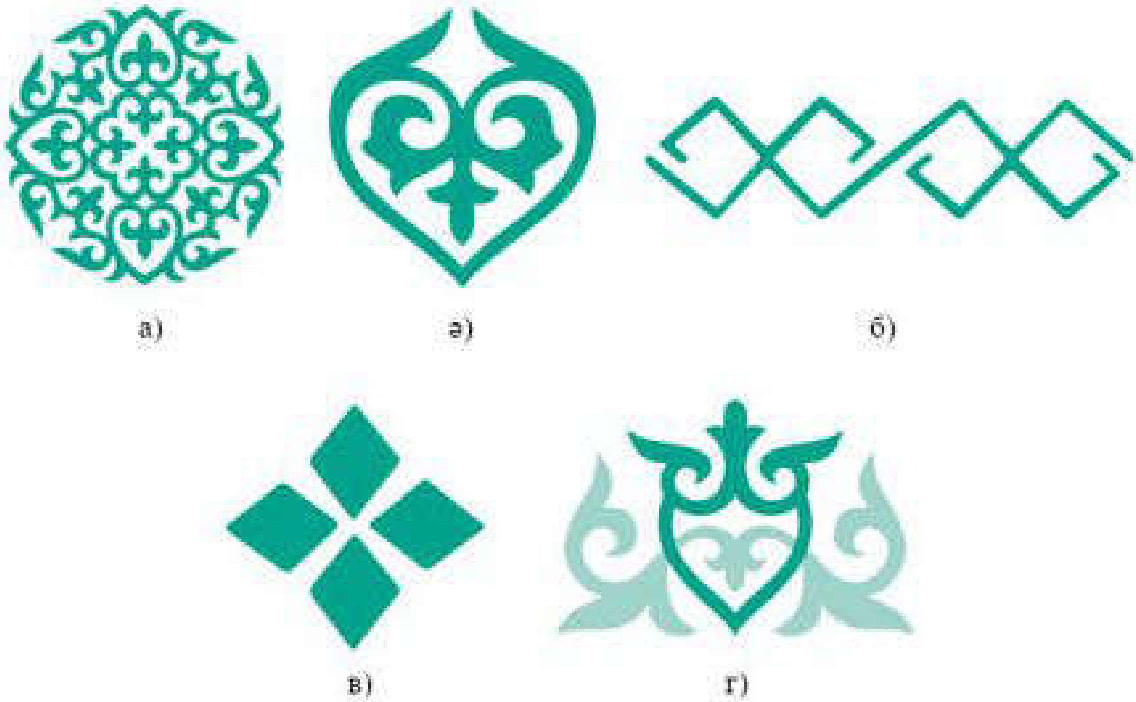
14. 10.10-суретте кескінделген екі симметриялы: а) кесінділердің; ә) үшбұрыштардың; б) квадраттардың симметрия центрін көрсетіңдер.



а) ә) б)

10.10-сурет

15. Қазақтың ою-өрнектерінің әрқайсысы ерекше. Латын тілінде "ою-өрнек" безендіру, әшекейлеу дегенді білдіреді. Ғалымдар әрбір ұлттық ою-өрнекте белгілі бір мәліметтер сақталғанын айтады. 10.11-суретте қазақтың кейбір ою-өрнектері кескінделген. Осы ою-өрнектердің қайсысының симметрия центрі болады? Егер бар болса, оларды көрсетіңдер.



10.11-сурет

16. Координаталық жазықтықта $A(3; -4)$ нүктесіне координаталар басына қарағанда симметриялы нүктенің координаталарын табыңдар.

17. Параллелограмның диагональдарының қиылысу нүктесі оның симметрия центрі болатынын дәлелдеңдер.

18. Центрлік симметрия шеңберді шеңберге бейнелейтінін дәлелдеңдер.

C

19. Егер төртбұрыштың симметрия центрі бар болса, онда бұл төртбұрыш параллелограмм болатынын дәлелдеңдер.

20. Координаталар басына қарағанда $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ теңдеуімен берілген шеңберге симметриялы шеңбердің теңдеуін жазыңдар.

21. Координаталық жазықтықта координаталар басына қарағанда $x^2 + 2x + y^2 - 4y - 3 = 0$ теңдеуімен берілген шеңберге симметриялы шеңбердің теңдеуін жазыңдар.

22. Координаталар басына қарағанда $ax + by + c = 0$ теңдеуімен берілген түзуге центрлік симметриялы түзудің теңдеуін жазыңдар.

23. Координаталық жазықтықта координаталар басына қарағанда $x - 2y + 3 = 0$ теңдеуімен берілген түзуге симметриялы түзудің теңдеуін жазыңдар.

24. Егер фигураның екі перпендикуляр симметрия осьтері бар болса, онда олардың қиылысу нүктесі осы фигураның симметрия центрі болатынын дәлелдеңдер.

25. Қабырғаларының саны тақ болатын көпбұрыштың симметрия центрі болмайтынын дәлелдеңдер.

26. Ешқандай фигураның екі симметрия центрі болмайтынын дәлелдеңдер.

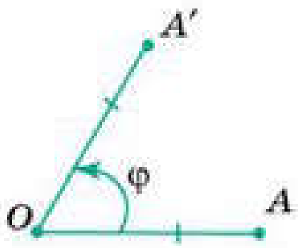
Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

27. Қандай да бір O нүктесін және AB кесіндісін салыңдар. $OA = OA'$, $OB = OB'$ және AOA', BOB' бұрыштары ϕ бұрышына тең болатындай A' және B' нүктелерін салыңдар. $A'B'$ кесіндісі туралы не айтуға болады?

11. БҰРУ. n-ші РЕТТІ СИММЕТРИЯ

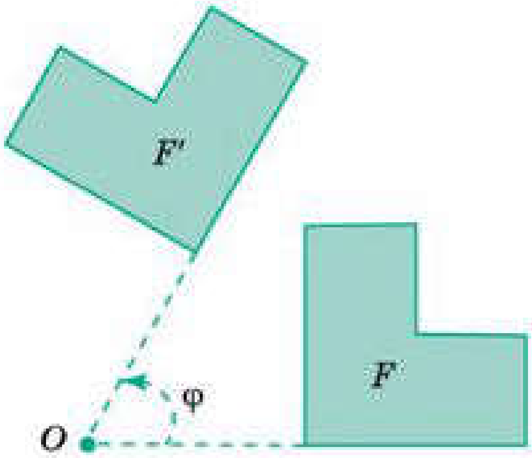
Симметрияның тағы бір түрі n-ші ретті симметрия болып табылады. Оны анықтау үшін алдымен бұру ұғымын қарастырайық. Егер $OA' = OA$ және $\angle AOA' = \phi$ болса, онда жазықтықтағы A' нүктесі A нүктесін O нүктесінен ϕ бұрышқа айналдыра ***бұру*** кезінде пайда болады дейді (11.1-сурет). O нүктесі — ***бұру центрі*** деп, ал ϕ — ***бұру бұрышы*** деп аталады.

Берілген O нүктесі орнында қалып, ал қалған барлық нүктелер O нүктесінен айнала бірдей бағытта (сағат тіліне қарсы бағытпен немесе сағат тілі бағытымен) белгілі ϕ бұрышқа бұрылатын бейнелеу O нүктесінен айналдыра ϕ бұрышқа ***бұру*** деп аталады.

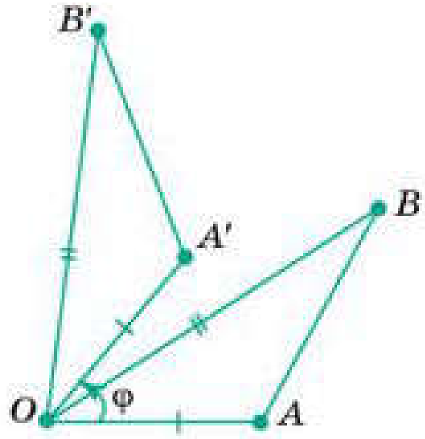


11.1-сурет

Егер F' фигурасының барлық нүктелері F фигурасының барлық мүмкін нүктелерін O нүктесінен айналдыра ϕ бұрышқа бұрғанда пайда болса, онда F' фигурасы F фигурасын O нүктесінен айналдыра ϕ бұрышқа бұру арқылы алынды деп айтады (11.2-сурет).



11.2-сурет



11.3-сурет

1-қасиет. Бұру нүктелердің арақашықтығын сақтайды.

Дәлелдеуі. A', B' нүктелері сәйкесінше A, B нүктелерін O нүктесінен айналдыра φ бұрышқа бұрғанда алынсын (11.3-сурет). Сонда $\angle AOB = \angle AOA' - \angle BOA'$, $\angle A'OB' = \angle BOB' - \angle BOA'$. $\angle AOA' = \angle BOB' = \varphi$ екенін ескеріп, AOB және $A'OB'$ бұрыштарының теңдігін аламыз. AOB және $A'OB'$ үшбұрыштары тең болады (екі қабырғасы және олардың арасындағы бұрышы бойынша, яғни $OA = OA'$, $OB = OB'$, $\angle AOB = \angle A'OB'$). Демек, $AB = A'B'$.

2-қасиет. Бұру кесіндіні кесіндіге, сәулені сәулеге, түзуді түзуге көшіреді.

3-қасиет. Бұру бұрыштардың шамасын сақтайды.

Бұл қасиеттердің дәлелдеулері параллель көшірудің сәйкесінше қасиеттерінің дәлелдеулеріне ұқсас болып табылады.

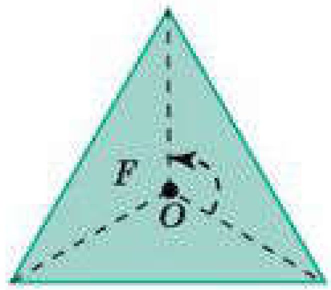
2 және 3-қасиетті өздерің дәлелдеңдер.

* Егер F фигурасын O нүктесінен $\frac{360°}{n}$-бұрышқа айнал дыра бұру кезінде ол өзіме н-өзі беттесетін болса, онда O нүктесі F фигурасының ***n-ші ретті симметрия центрі*** деп аталады (11.4-сурет).

Екінші ретті симметрия центрі жай симметрия центрі болады.

Мысал. Дұрыс үшбұрыштың үшінші ретті симметрия центрі бар болатынын дәлелдеңдер.

Шешуі. Дұрыс үшбұрышты оған сырттай сызылған шеңбердің центрінен айналдыра 120°-ка бұру кезінде ол өзімен-өзі беттеседі. Демек, дұрыс үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің центрі осы үшбұрыштың үшінші ретті симметрия центрі болып табылады.



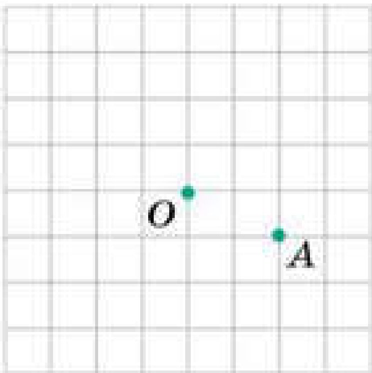
11.4-сурет

1. Нүктеден айналдыра бұру дегеніміз не?
2. Бұру нүктелердің арақашықтығын сақтайды ма?
3. Бұру кезінде кесінді, сәуле, түзу қайда көшеді?
4. Бұру бұрыштардың шамасын сақтайды ма?
5. Фигураның n-ші ретті симметрия центрі дегеніміз не?

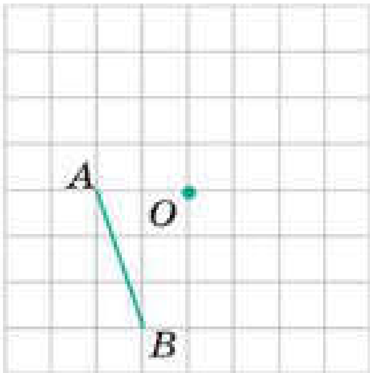
Жаттығулар

A

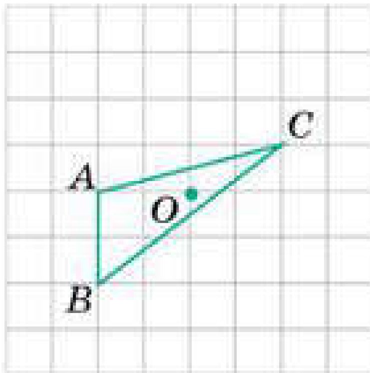
1. 11.5-суреттегі A нүктесін O нүктесінен сағат тіліне қарсы бағытта: 1) 90°; 2) 270°-қа айналдыра бұрғанда алынған A' нүктесін салыңдар.



11.5-сурет



11.6-сурет



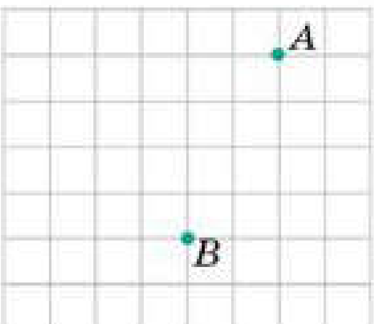
11.7-сурет

2. 11.6-суреттегі AB кесіндісін O нүктесінен сағат тілі бағытында 90°-қа айналдыра бұрғанда алынған $A'B'$ кесіндісін салыңдар.

3. 11.7-суреттегі ABC үшбұрышын O нүктесінен сағат тіліне қарсы бағытта 270°-қа айналдыра бұрғанда алынған $A'B'C'$ үшбұрышын салыңдар.

4. Квадрат өзімен-өзі беттесуі үшін оны оған сырттай сызылған шеңбердің центрінен айналдыра қандай ең кіші бұрышқа бұру керек?

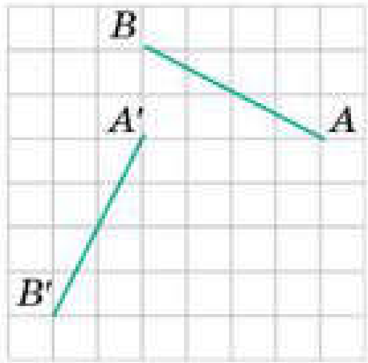
B



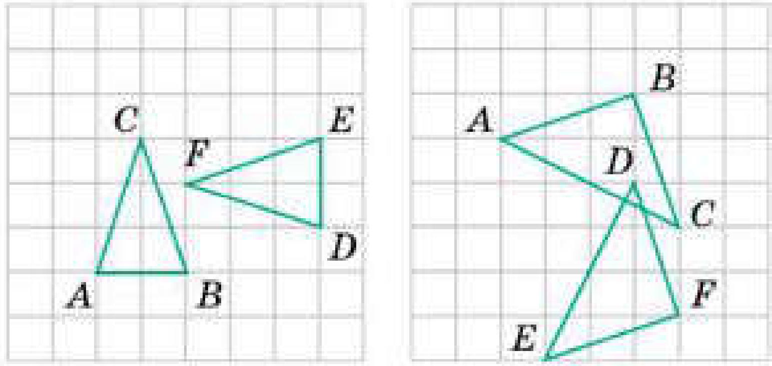
11.8-сурет

5. 11.8-суреттегі B нүктесі A нүктесін сағат тілі бағытымен 90°-қа айналдыра бұрғанда алынған нүкте. Бұру центрін табыңдар.

6. 11.9-суреттегі $A'B'$ кесіндісі AB кесіндісін сағат тіліне қарсы бағытта 90°-қа айналдыра бұрғанда алынған нүкте. Бұру центрін табыңдар.



11.9-сурет



а) ə)

11.10-сурет

7. 11.10-суреттегі *DEF* үшбұрышы *ABC* үшбұрышын бұру кезінде алынды. Бұру центрін табыңдар.

8. $A(1; 0)$ нүктесі координаталар басынан сағат тіліне қарсы бағытта: 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°; 4) 90°; 5) 120°; 6) 135°; 7) 150°; 8) 180°-қа айналдыра бұрылды. Пайда болған нүктенің координаталарын табыңдар.

9. $A(1; 0)$ нүктесі координаталар басынан сағат тілі бағытымен: 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°; 4) 90°; 5) 120°; 6) 135°; 7) 150°; 8) 180°-қа айналдыра бұрылды. Пайда болған нүктенің координаталарын табыңдар.

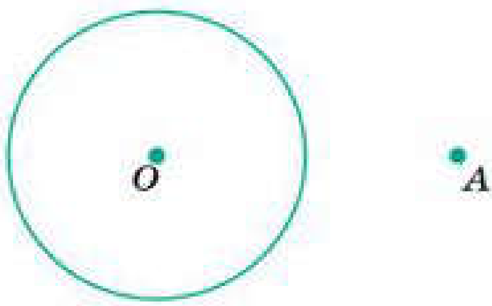
C

10. Дұрыс үшбұрыш оған сырттай сызылған шеңбердің центрінен айналдыра 60°-қа бұрылды. Пайда болған және бастапқы үшбұрыштардың қиылысуы қандай көпбұрыш болады? Бастапқы үшбұрыштың қабырғасы 1-ге тең болса, көпбұрыштың қабырғасын табыңдар.

11. Квадрат оның диагональдарының қиылысу нүктесінен айналдыра 45°-қа бұрылды. Пайда болған және бастапқы квадраттардың қиылысуы қандай көпбұрыш болады? Бастапқы квадраттың қабырғасы 1-ге тең болса, көпбұрыштың қабырғасын табыңдар.

12. Егер n-бұрыштың n-ші ретті симметрия центрі бар болса, онда ол дұрыс n-бұрыш болатынын дәлелдеңдер.

13. 11.11-суреттегі A нүктесі радиусы 1 см-ге тең шеңбердің центрінен 2 см қашықтықта орналасқан. Шеңберді A нүктесінен айналдыра



11.11-сурет

қандай ең кіші бұрышпен бұрғанда бастапқы шеңбермен жанасатын болады?

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

14. Параллель көшіру, осьтік симметрия, центрлік симметрия және бұрудың қандай ортақ қасиеттері бар?

12. ҚОЗҒАЛЫС. ФИГУРАЛАРДЫҢ ТЕҢДІГІ

Параллель көшіру, осьтік және центрлік симметриялар және бұру жазықтықтағы нүктелер арасындағы өзара бірмәнді сәйкестіктер, яғни келесі шарттарды қанағаттандыратын сәйкестіктер болып табылады:

1) жазықтықтың әрбір нүктесіне жазықтық нүктесі сәйкес қойылады;

2) әртүрлі нүктелерге әртүрлі нүктелер сәйкес қойылады;

3) әрбір нүктенің оған сәйкес келетін нүктесі бар болады.

Жазықтықтағы нүктелер арасындағы өзара бірмәнді сәйкестіктер ***жазықтықты түрлендіру*** деп аталады.

Жоғарыда айтылғандардан параллель көшіру, осьтік және центрлік симметриялар және бұру жазықтықты түрлендірулер болып табылады.

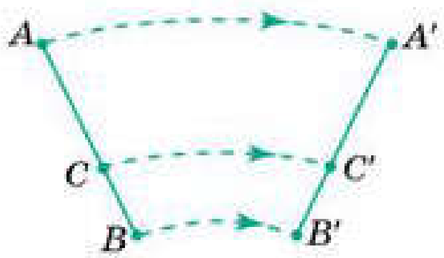
Нүктелердің арақашықтығын сақтайтын жазықтықты түрлендіру ***қозғалыс*** деп аталады.

Мысалы, егер қозғалыс A, B нүктелерін сәйкесінше A', B' нүктелеріне көшірсе, онда $AB = A'B'$ теңдігі орындалады.

Параллель көшіру, осьтік және центрлік симметриялар және бұру нүктелердің арақашықтығын сақтайтындықтан олар қозғалыс болады.

Қозғалыстың жалпы қасиеттерін қарастырайық.

1-қасиет. Қозғалыс түзуді түзуге, сәулені сәулеге, кесіндіні кесіндіге (бейнелейді) көшіреді.



12.1-сурет

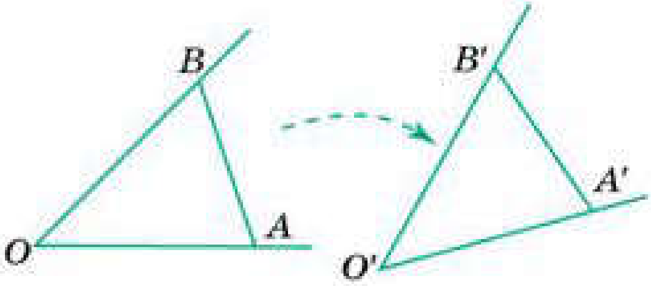
Дәлелдеуі. Кесінділер жағдайын қарастырайық. C нүктесі AB кесіндісінде жатсын және қозғалыс A, B, C нүктелерін сәйкесінше A', B', C' нүктелеріне бейнелесін (12.1-сурет). C нүктесі AB кесіндісінде жатқандықтан $AC + CB = AB$ теңдігі орындалады. Қозғалыс нүктелердің арақашықтығын сақтайтындықтан C' нүктесі үшін $A'C' + C'B' = A'B'$ теңдігі орындалады. Осыдан, C' нүктесі $A'B'$ кесіндісіне тиісті болады. Демек, қозғалыс AB кесіндісін $A'B'$ кесіндісіне бейнелейді.

Осыған ұқсас AB сәулесі $A'B'$ сәулесіне және барлық AB түзуі $A'B'$ түзуіне көшетіні дәлелденеді.

Оны өздерің дәлелдеңдер.

2-қасиет. Қозғалыс кезінде бұрыштардың шамалары сақталады.

Дәлелдеуі. AOB бұрышы берілсін. Қозғалыс кезінде A, O, B нүктелері сәйкесінше A', O', B' нүктелеріне көшірілсін деп ұйғарайық (12.2-сурет).



12.2-сурет

Қозғалыс нүктелердің арақашықтығын сақтайтындықтан, мына теңдіктер орынды болады: $A'O' = AO$, $B'O' = BO$, $A'B' = AB$. $A'O'B'$ үшбұрышы AOB үшбұрышына тең болады (үш қабырғасы бойынша), осыдан $A'O'B'$ бұрышы AOB бұрышына тең болады.

Жазықтықты түрлендірудің композициясы ұғымын анықтайық.

Жазықтықты түрлендірудің біреуі A нүктесін A' нүктесіне, екінші түрлендіру A' нүктесін A'' нүктесіне бейнелесін. Сонда A нүктесін A'' нүктесіне бейнелейтін жазықтық түрлендіру ***түрлендірулердің композициясы*** деп аталады. Ол берілген екі түрлендірудің біртіндеп орындалуынан пайда болады.

3-қасиет. Қозғалыстардың композициясы қозғалыс болады.

Дәлелдеуі. Бір қозғалыс A, B нүктелерін сәйкесінше A', B' нүктелеріне, екінші қозғалыс A', B' нүктелерін сәйкесінше A'', B'' нүктелеріне бейнелесін. Сонда $AB = A'B' = A''B''$ болады. Сонымен, қозғалыстардың композициясы нүктелердің арақашықтығын сақтайды, демек ол да қозғалыс болады.

Жетінші сынып геометрия курсында кесінділердің, бұрыштардың және үшбұрыштардың теңдігі ұғымы анықталып, үшбұрыштар теңдігінің белгілері дәлелденген болатын. Енді біз фигуралардың теңдігі ұғымын жалпы түрде анықтаймыз.

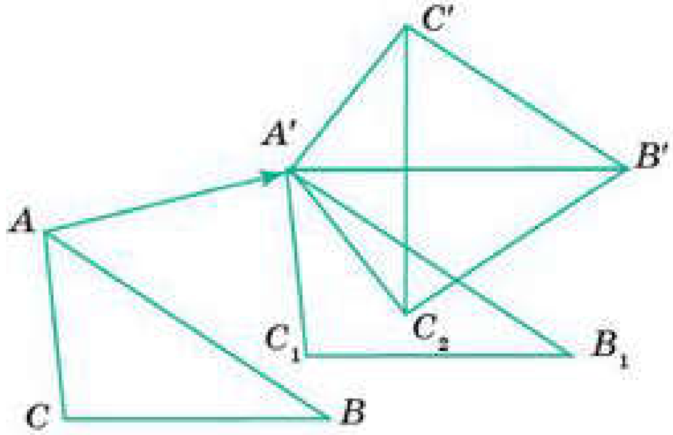
Егер екі фигураның біреуі қозғалыспен екіншісіне көшірілсе, онда олар ***тең*** деп аталады.

Фигуралардың теңдігі теңдік белгісімен белгіленеді. $F = F'$ жазылуы F фигурасының F' фигурасына тең екенін білдіреді.

Келесі теорема фигуралардың теңдігі ұғымы мен үшбұрыштардың теңдігі ұғымының арасындағы байланысты орнатады.

Теорема. Егер бір үшбұрыш қозғалыспен екінші үшбұрышқа көшірілсе, онда осы екі үшбұрыш тең болады.

Дәлелдеуі. ABC үшбұрышы қозғалыспен $A'B'C'$ үшбұрышына көшірілсін. Қозғалыс кезінде қашықтықтар мен бұрыштар сақталғандықтан, $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$, $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$ болады. Демек, ABC және $A'B'C'$ үшбұрыштары тең болады. Керісінше, ABC және $A'B'C'$ үшбұрыштарының сәйкесінше қабырғалары мен бұрыштары тең болсын. ABC үшбұрышы қозғалыспен $A'B'C'$ үшбұрышына көшетінін дәлелдейік (12.3-сурет).



12.3-сурет

Расында да, егер A және A' нүктелері сәйкес келмесе, ABC үшбұрышын $\overline{AA'}$ векторына параллель көшіріп, $A'B_1C_1$ үшбұрышын аламыз. Егер B_1 және B' нүктелері сәйкес келмесе $A'B_1C_1$ үшбұрышын $B_1A'B'$ бұрышына бұрамыз. $A'B_1$ және $A'B'$ қабырғаларының теңдігінен B_1 төбесі B' төбесімен беттесетіні шығады. $A'B'C_2$ үшбұрышын аламыз. Егер C_2 және C' нүктелері $A'B'$ түзуінің бір жағында жатса, сәйкесінше қабырғалары мен бұрыштарының теңдігінен олардың беттесетіні шығады. Егер де олар $A'B'$ түзуінің әр жағында жатса, $A'B'C_2$ үшбұрышының $A'B'$ түзуіне қатысты осьтік симметриясын табамыз. Сонда $A'B'C_2$ үшбұрышы $A'B'C'$ үшбұрышына көшеді. Сонымен, $A'B'C'$ үшбұрышы ABC үшбұрышының қозғалысы нәтижесінде пайда болады. ◻

Мысал. Егер екі тіктөртбұрыштың сәйкесінше қабырғалары тең болса, онда олар өзара тең болатынын дәлелдеңдер.

Дәлелдеуі. $ABCD$ және $A'B'C'D'$ тіктөртбұрыштарында $AB = A'B'$, $AD = A'D'$ болсын (12.4-сурет). ABD және $A'B'D'$ тікбұрышты үшбұрыштары екі катеті бойынша тең болады. Осыдан ABD үшбұрышын $A'B'D'$ үшбұрышына көшіретін қозғалыс бар болады. Қозғалыс бұрыштарды сақтайтындықтан, $ABCD$ тіктөртбұрышының B және D бұрыштары $A'B'C'D'$ тіктөртбұрышының сәйкесінше B' және D' бұрыштарына көшеді. $ABCD$ тіктөртбұрышының BC және DC қабырғалары $A'B'C'D'$ тіктөртбұрышының сәйкесінше $B'C'$ және $D'C'$ қабырғаларына көшеді. Демек, $ABCD$ тіктөртбұрышы $A'B'C'D'$ тіктөртбұрышына көшеді. Ендеше, бұл тіктөртбұрыштар тең болады. ◻

Берілген фигураны өз-өзіне көшіретін қозғалыстың бар болуы фигураның симметриялық дәрежесін сипаттайды. Мұндай қозғалыс көп болған сайын, фигура симметриялы болады.

Мысал ретінде, ABC дұрыс үшбұрышын қарастырайық және осы үшбұрышты өз-өзіне көшіретін неше қозғалыс бар болатынын айқындайық (12.5-сурет).

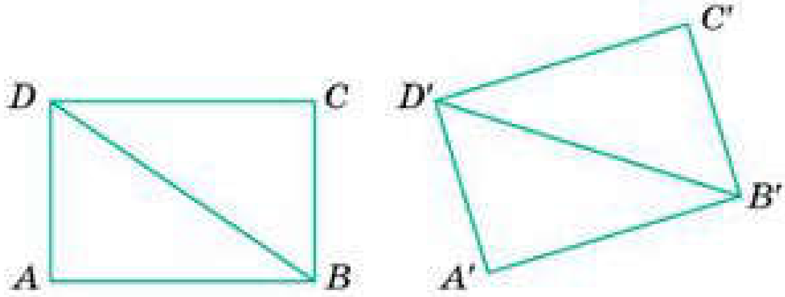
Келесі жағдайлар болуы мүмкін.

1. ABC үшбұрышының барлық төбелері орнында қалады. Қозғалыс тепе-тең түрлендіру болады.

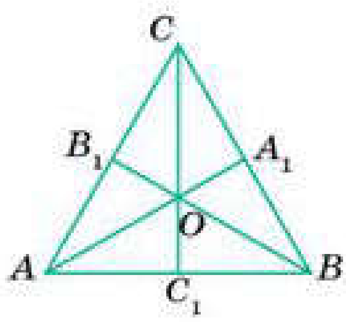
2. A төбесі орнында қалады, B төбесі C төбесіне көшеді, ал C төбесі B төбесіне көшеді. Қозғалыс ABC үшбұрышының AA_1 медианасы жатқан түзуге қатысты симметриялы болады.

3. A төбесі B төбесіне көшеді, B төбесі A төбесіне көшеді, C төбесі орнында қалады. Қозғалыс ABC үшбұрышының CC_1 медианасы жатқан түзуге қатысты симметриялы болады.

4. A төбесі B төбесіне көшеді, B төбесі C төбесіне көшеді, C төбесі A төбесіне көшеді. Қозғалыс ABC үшбұрышы медианаларының қиылысу O нүктесінен айналдыра сағат тіліне қарсы бағытта 120°-қа бұру болады.



12.4-сурет



12.5-сурет

5. A төбесі C төбесіне көшеді, C төбесі A төбесіне көшеді, B төбесі орнында қалады. Қозғалыс ABC үшбұрышының BB_1 медианасы жатқан түзуге қатысты симметриялы болады.

6. A төбесі C төбесіне көшеді, C төбесі B төбесіне көшеді, B төбесі A төбесіне көшеді. Қозғалыс ABC үшбұрышы медианаларының қиылысу O нүктесінен айналдыра сағат тілі бағытымен 120°-қа бұру болады.

Сонымен дұрыс үшбұрышты өз-өзіне көшіретін әртүрлі алты қозғалыс болады.

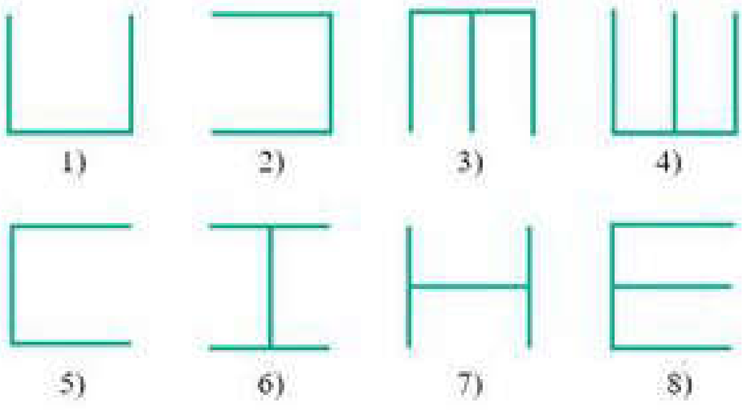
?

1. Жазықтықтың нүктелері арасындағы қандай сәйкестік өзара бірмәнді деп аталады?
2. Жазықтықты түрлендіру дегеніміз не?
3. Қандай жазықтықты түрлендіру қозғалыс деп аталады?
4. Қозғалысқа мысалдар келтіріңдер.
5. Жазықтықты түрлендірулердің композициясы дегеніміз не?
6. Қандай фигуралар тең деп аталады?
7. Қандай жағдайда екі үшбұрыш тең болады?
8. Дұрыс үшбұрышты өз-өзіне көшіретін неше қозғалыс бар болады?

Жаттығулар

A

1. 12.6-суретте кескінделген қандай фигуралар тең болады?



12.6-сурет

2. Егер екі төртбұрыштың барлық қабырғалары сәйкесінше тең болса, онда олар өзара тең бола ма?

3. Қозғалыс әртүрлі түзулерді бір түзуге көшіре ме?

4. Қозғалыс екі параллель түзулерді қиылысқан түзулерге бейнелей ме?

B

5. Қозғалыс шеңберді радиусы дәл сондай шеңберге көшіретінін дәлелдеңдер.

6. Қозғалыс AB кесіндісін $A'B'$ кесіндісіне көшірсін. AB кесіндісінің C ортасы $A'B'$ кесіндісінің C' ортасына көшетінін дәлелдеңдер.

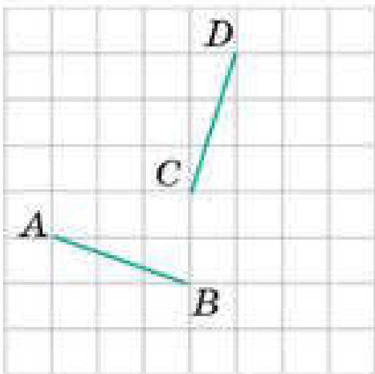
7. Қозғалыс AOB бұрышын $A'O'B'$ бұрышына көшірсін. AOB бұрышының OC биссектрисасы $A'O'B'$ бұрышының $O'C'$ биссектрисасына көшетінін дәлелдеңдер.

8. Қозғалыс ABC үшбұрышын $A'B'C'$ үшбұрышына көшірсін. ABC үшбұрышының биіктіктері, медианалары және биссектрисалары $A'B'C'$ үшбұрышының сәйкесінше биіктіктері, медианалары және биссектрисаларына көшетінін дәлелдеңдер.

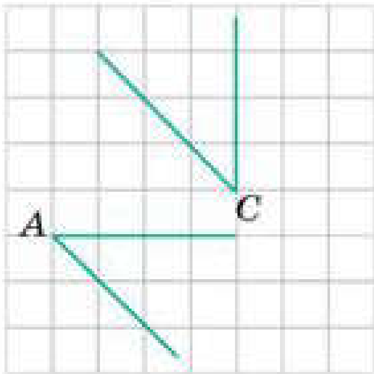
9. Егер екі шеңбердің радиустары тең болса, онда олар өзара тең екенін дәлелдеңдер.

C

10. 12.7-суреттегі екі тең кесінділердің біреуін екіншісіне көшіретін қозғалысты көрсетіңдер.



12.7-сурет



12.8-сурет

11. 12.8-суреттегі екі тең бұрыштардың біреуін екіншісіне көшіретін қозғалысты көрсетіңдер.

12. Егер екі төртбұрыштың сәйкесінше қабырғалары мен бұрыштары тең болса, онда төртбұрыштар тең болатынын дәлелдеңдер.

13. Параллелограмдардың теңдігінің белгісін айтыңдар. Осы белгіні дәлелдеңдер.

14. Егер екі дұрыс n-бұрыштардың қабырғалары тең болса, онда бұл n-бұрыштар тең болатынын дәлелдеңдер.

15. Дұрыс n-бұрышты өзіне-өзін бейнелейтін әртүрлі неше қозғалыс болады?

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

16. Қандай да бір O, A және B нүктелерін белгілеңдер. 1) $OA' = 2OA$, $OB' = 2OB$; 2) $OA' = 3OA$, $OB' = 3OB$; 3) $OA' = 0{,}5\,OA$, $OB' = 0{,}5\,OB$ болатындай A', B' нүктелерін кескіндеңдер. $A'B'$ және AB кесінділері қандай қатынаста болады?

17. Аудан ұғымын және оның қасиеттерін қайталаңдар.

13. ФИГУРАЛАРДЫҢ ҰҚСАСТЫҒЫ. ГОМОТЕТИЯ

Тең фигураларды пішіндері мен өлшемдері бірдей фигуралар ретінде алуға болады. Сонымен қатар өлшемдері әртүрлі болатын, бірақ пішіндері бірдей фигуралар кездеседі. Мысалы, барлық шеңберлердің, квадраттардың, теңқабырғалы үшбұрыштардың пішіндері бірдей және т.б. Геометрияда мұндай фигураларды *ұқсас* деп атайды. Олар бір-біріне ұқсастық түрлендірумен көшеді.

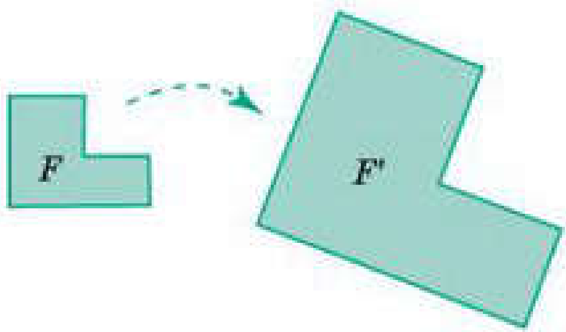
Нүктелерінің арақашықтығы бірдей оң санға көбейтілетін жазықтықты түрлендіру ***ұқсастық*** деп аталады. Көбейткіш сан ***ұқсастық коэффициенті*** деп аталады.

Сонымен ұқсастық түрлендіру кезінде A, B нүктелері сәйкесінше A', B' нүктелеріне көшсе, $A'B' = k \cdot AB$ немесе $A'B' : AB = k$ болады, мұндағы k — барлық A, B нүктелері үшін бірдей сан.

Коэффициенті $k = 1$ болатын ұқсастық қозғалыс болады және ұқсастық пен қозғалыстың композициясы ұқсастық болады.

Егер F және F' фигураларының біреуін екіншісіне ұқсастық түрлендіру арқылы бейнелеуге болса, онда осы екі фигура ***ұқсас*** деп аталады (13.1-сурет). Ұқсас фигуралар "$\backsim$" таңбасымен белгіленеді. Егер F және F' фигуралары ұқсас болса, $F \backsim F'$ деп жазамыз.

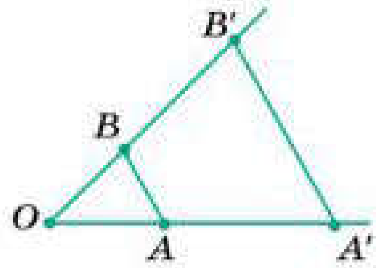
Ұқсастық түрлендіру көліктер бөлшектерінің, ғимараттардың, жергілікті жерлер жоспарларының сызбаларын және т.б. орындағанда қолданылады. Мұнда ұқсастық коэффициент масштаб болады. Мысалы, жергілікті жер телімі 1 : 1000 масштабпен кескінделген болса, онда жоспардағы бір сантиметрге жердің 10 метрі сәйкес келеді.



13.1-сурет

Ұқсастыққа мысал келтірейік. O нүктесін белгілеп, k оң санын алайық. Жазықтықтың O нүктесінен басқа әрбір A нүктесіне OA сәулесінің бойынан $OA' = k \cdot OA$ болатындай A' нүктесін сәйкес қоямыз (13.2-сурет).

Пайда болған жазықтықты түрлендіру центрі O нүктесі және коэффициенті k болатын ***гомотетия*** деп аталады.



13.2-сурет

Теорема. Гомотетия дәл сондай k коэффициентті ұқсастық түрлендіру болады .

Дәлелдеуі. Центрі O нүктесі және коэффициенті k болатын гомотетия кезінде A, B нүктелері сәйкесінше A', B' нүктелеріне бейнеленсін (13.2-сурет). $A'B' = k \cdot AB$ болатынын дәлелдейік. $\overline{OA'} = k\overline{OA}$, $\overline{OB'} = k\overline{OB}$ екенін аламыз. Осыдан $\overline{A'B'} = \overline{OB'} - \overline{OA'} = k\overline{OB} - k\overline{OA} = k(\overline{OB} - \overline{OA}) = k\overline{AB}$ болады. Демек, $A'B' = k \cdot AB$. ☐

Ұқсастықтың кейбір қасиеттерін қарастырайық.

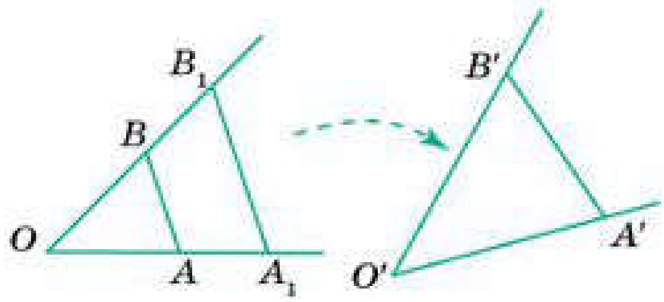
1-қасиет. Ұқсастық түрлендіру кесіндіні кесіндіге, сәулені сәулеге және түзуді түзуге көшіреді.

Дәлелдеуі. B нүктесі AC кесіндісіне тиісті болсын. Сонда $AB + BC = AC$ болады. Ұқсастық осы нүктелерді сәйкесінше A', B', C' нүктелеріне көшіреді. Ұқсастық түрлендіру кезінде нүктелердің арақашықтығы бірдей оң санға көбейтілетіндіктен A', B', C' нүктелері үшін $A'B' + B'C' = A'C'$ теңдігі орынды болады. Демек, B' нүктесі $A'C'$ кесіндісіне тиісті болады. ☐

Ұқсастық түрлендіру сәулені сәулеге және түзуді түзуге көшіретін жағдайын өздерің қарастырыңдар.

2-қасиет. Ұқсастық түрлендіру бұрыштың шамасын сақтайды.

Дәлелдеуі. AOB бұрышын қарастырайық. Коэффициенті k болатын ұқсастық O, A, B нүктелерін сәйкесінше O', A', B' нүктелеріне көшірсін. AOB және $A'O'B'$ бұрыштары тең екенін дәлелдейік (13.3-сурет).



13.3-сурет

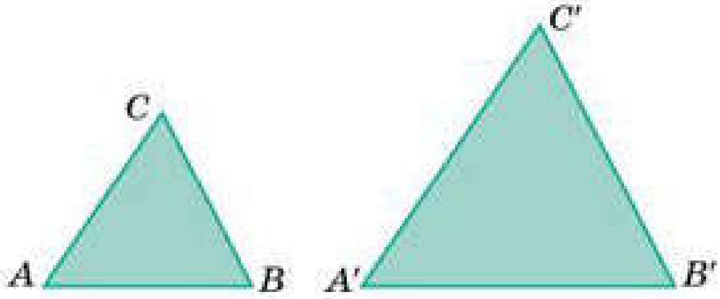
Центрі O нүктесі және k коэффициентті гомотетия кезінде A, B нүктелері бейнеленген нүктелерді A_1, B_1 деп белгілейік. Сонда

$OA_1 = k \cdot OA = O'A'$, $OB_1 = k \cdot OB = O'B'$, $A_1B_1 = k \cdot AB = A'B'$ болады. OA_1B_1 және $O'A'B'$ үшбұрыштары үш қабырғалары бойынша тең. Демек, $\angle A_1OB_1 = \angle A'O'B'$, немесе $\angle AOB = \angle A'O'B'$ болады.

Ұқсас фигуралардың аудандары өзара қалай байланысқанын айқындайық. Үшбұрыштардан бастаймыз.

Теорема. Егер k коэффициенті бойынша $A'B'C'$ үшбұрышы ABC үшбұрышына ұқсас болса, онда $A'B'C'$ үшбұрышының S' ауданы ABC үшбұрышының S ауданы арқылы $S' = k^2S$ формуласымен өрнектеледі.

Дәлелдеуі. $A'B'C'$ үшбұрышының қабырғалары үшін $A'B' = k \cdot AB$, $A'C' = k \cdot AC$ теңдігі орынды. A' бұрышы A бұрышына тең болады. Үшбұрыш ауданының $S' = \frac{1}{2}A'B' \cdot A'C' \cdot \sin A'$ формуласын пайдаланамыз. Сонда, $S' = \frac{1}{2}k\ AB \cdot k \cdot AC \cdot \sin A = k^2S$ болады (13.4-сурет).



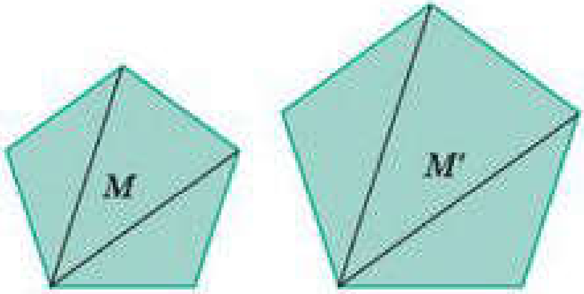
13.4-сурет

Енді дөңес көпбұрыштарды қарастырайық.

Теорема. Егер k коэффициенті бойынша M' дөңес көпбұрышы M дөңес көпбұрышына ұқсас болса, онда M' көпбұрышының S' ауданы M көпбұрышының S ауданы арқылы $S' = k^2S$ формуласымен өрнектеледі.

Дәлелдеуі. M көпбұрышын диагональдарын жүргізу арқылы үшбұрыштарға бөлеміз (13.5-сурет). M көпбұрышын M' көпбұрышына көшіретін ұқсастық түрлендіру осы үшбұрыштарды M' көпбұрышын бөлетін үшбұрыштарға көшіреді. M' көпбұрышындағы әрбір үшбұрыштың ауданы M көпбұрышындағы сәйкесінше үшбұрыштың ауданын k^2-қа көбейткенге тең болады. M және M' көпбұрыштарының ауданы оларды құрайтын үшбұрыштардың аудандарының қосындысына тең болғандықтан, M' көпбұрышының S' ауданы M көпбұрышының S ауданын k^2-қа көбейткенге тең болады, яғни $S' = k^2S$.

Осыған ұқсас теңдікті кез келген ұқсас фигуралардың аудандары үшін де алуға болады. Егер k коэффициенті бойынша Φ' фигурасы Φ фигурасына ұқсас болса, онда Φ' фигурасының S' ауданы Φ фигурасының S ауданы арқылы $S'=k^2S$ формуласымен өрнектеледі. Оны дәлелдеусіз қабылдаймыз.



13.5-сурет

Осыған ұқсас фигуралардың аудандарының қатынасы ұқсастық коэффициентінің квадратына тең болатынын аламыз:

$$\frac{S'}{S} = k^2.$$

?

1. Қандай түрлендіру ұқсастық деп аталады?
2. Ұқсастық коэффициенті дегеніміз не?
3. Қандай түрлендіру гомотетия деп аталады?
4. Гомотетия центрі және коэффициенті дегеніміз не?
5. Ұқсастықтың қасиеттерін тұжырымдаңдар.
6. Ұқсас фигуралардың аудандары өзара қалай байланысқан?

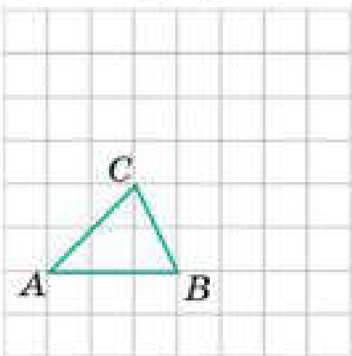
Жаттығулар

А

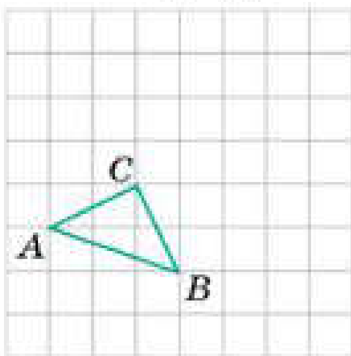
1. Үшбұрыштың қабырғалары 3 см, 4 см және 5 см. Осы үшбұрышқа ұқсас үшбұрыштың қабырғаларын табыңдар, мұндағы ұқсастық коэффициент: 1) 2; 2) 3; 3) 0,5.

2. Үшбұрыштың қабырғалары 4 см, 6 см және 8 см. Осы үшбұрышқа ұқсас үшбұрыштың үлкен қабырғасы 4 см-ге тең болса, қалған қабырғаларын табыңдар.

3. 13.6-суреттегі центрі A нүктесі және коэффициенті 2 болатын гомотетия кезінде ABC үшбұрышынан алынған үшбұрышты салыңдар .



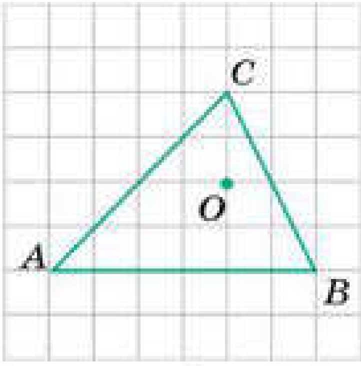
а)



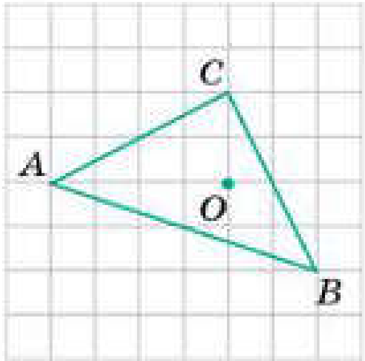
ә)

13.6-сурет

4. 13.7-суреттегі центрі O нүктесі және коэффициенті 0,5 болатын гомотетия кезінде ABC үшбұрышынан алынған үшбұрышты салыңдар.



а)



ә)

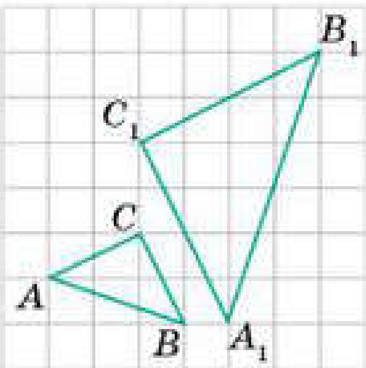
13.7-сурет

5. Квадраттың ауданы: 1) 25; 2) 16; 3) 4; 4) 2 есе артуы үшін, оның қабырғасын неше есе арттыру керек?

6. 13.1-суреттегі F' фигурасы $k = 3$ коэффициенті бойынша F фигурасына ұқсас. Олардың S' және S аудандары қалай байланысқан?

B

7. k коэффициенті бойынша F' фигурасы F фигурасына ұқсас. F фигурасы F' фигурасына қандай коэффициентпен ұқсас болады?



13.8-сурет

8. Ұқсастық коэффициентінің кез келген мәнінде өз-өзіне ұқсас болатын фигураларға мысалдар келтіріңдер.

9. Екі ұқсастық түрлендірулердің композициясы ұқсастық болатынын дәлелдеңдер.

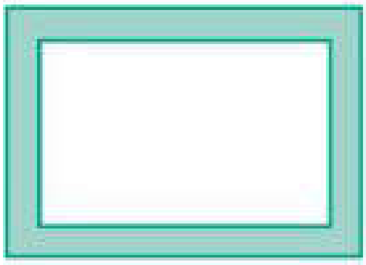
10. 13.8-суреттегі ABC үшбұрышын $A_1B_1C_1$ үшбұрышына көшіретін ұқсас тық түрлендіруді көрсетіңдер. Олардың S және S_1 аудандарын салыстырыңдар.

C

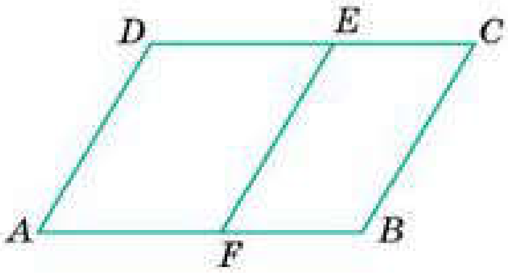
11. Кез келген екі квадрат ұқсас болатынын дәлелдеңдер.

12. Кез келген екі шеңбер ұқсас екенін және ұқсастық коэффициенті олардың радиустарының қатынасына тең болатынын дәлелдеңдер.

13. Суреттің жиегін құрайтын тіктөртбұрыштар ұқсас бола ма? (13.9-сурет)?



13.9-сурет



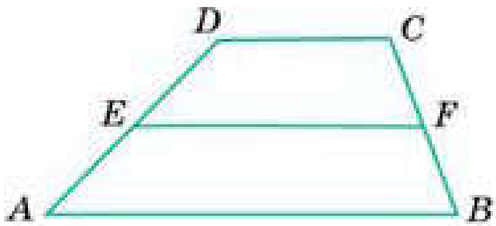
13.10-сурет

14. 13.10-суретте $ABCD$ параллелограмы кескінделген және $AB = a$, $BC = b$. Оған ұқсас екінші $FBCE$ параллелограмы қиып алынған. BF кесіндісі қандай болуы керек?

15. Трапеция орта сызығымен екі трапецияға бөлінген (13.11-сурет). Олар ұқсас бола ма?

16. $ABCD$ трапециясының AB және CD табандары сәйкесінше a және b-ға тең. Осы трапецияны екі ұқсас трапецияларға бөлетін және табандарына параллель EF кесіндісі қандай болуы керек (13.11-сурет)?

17. $ABCD$ трапециясының AB және CD табандары сәйкесінше 12 және 3-ке тең. EF кесіндісі табандарына параллель және осы трапецияны екі ұқсас трапецияларға бөледі (13.11-сурет). EF кесіндісін және $AE : ED$ қатынасын табыңдар.



13.11-сурет

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

18. Үшбұрыштар теңдігінің белгілерін қайталаңдар.

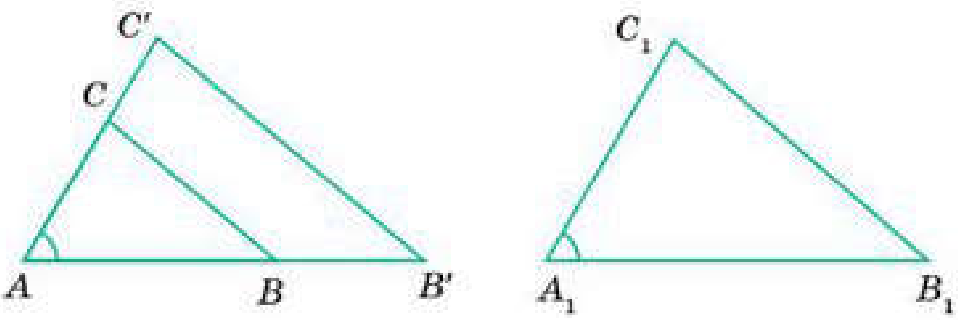
19. Үшбұрыштар ұқсастығының белгілерін ойлап табыңдар.

14. ҮШБҰРЫШТАРДЫҢ ҰҚСАСТЫҒЫНЫҢ БЕЛГІЛЕРІ

Үшбұрыштардың теңдігіне ұқсас үшбұрыштардың ұқсастығының белгілерін тұжырымдап, оларды дәлелдейік.

Теорема (Үшбұрыштардың ұқсастығының бірінші белгісі). Егер бір үшбұрыштың екі қабырғасы екінші үшбұрыштың екі қабырғасына пропорционал болып және осы қабырғалардың арасындағы бұрыштары тең болса, онда бұл үшбұрыштар ұқсас болады.

Дәлелдеуі. ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштары үшін $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC} = k$, $\angle A = \angle A_1$ теңдігі орындалсын (14.1-сурет).



14.1-сурет

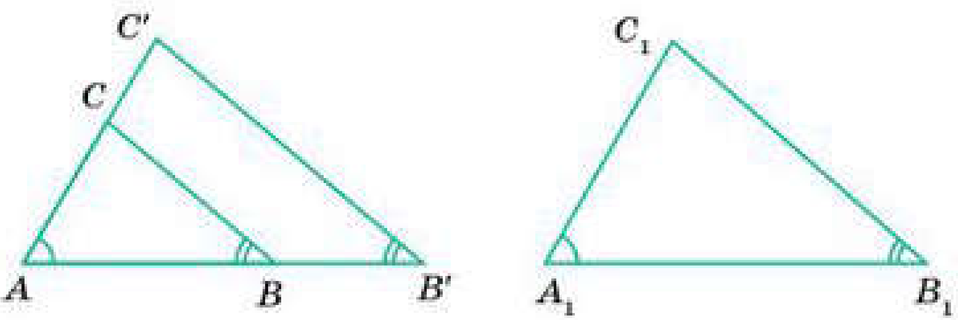
Центрі A нүктесі және коэффициенті k болатын гомотетия кезіндегі ABC үшбұрышынан алынған $AB'C'$ үшбұрышын қарастырайық. $AB'C'$ және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштары екі қабырғасы және олардың арасындағы бұрышы бойынша тең болады ($AB' = A_1B_1$, $AC' = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$). Осыдан $AB'C'$ үшбұрышы қозғалыспен $A_1B_1C_1$ үшбұрышына көшеді. Көрсетілген гомотетия мен қозғалыстың композициясы ABC үшбұрышын $A_1B_1C_1$ үшбұрышына көшіреді. Демек, бұл үшбұрыштар ұқсас болады.

Осы белгіні тікбұрышты үшбұрыштарға қолданып, тікбұрышты үшбұрыштардың ұқсастығының келесі белгісін аламыз.

Салдар. Егер бір тікбұрышты үшбұрыштың катеттері екінші тікбұрышты үшбұрыштың катеттеріне пропорционал болса, онда бұл тікбұрышты үшбұрыштар ұқсас болады.

Теорема (Үшбұрыштардың ұқсастығының екінші белгісі). Егер бір үшбұрыштың екі бұрышы екінші үшбұрыштың сәйкесінше екі бұрышына тең болса, онда бұл үшбұрыштар ұқсас болады.

Дәлелдеуі. ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштарында $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ болсын (14.2-сурет).



14.2-сурет

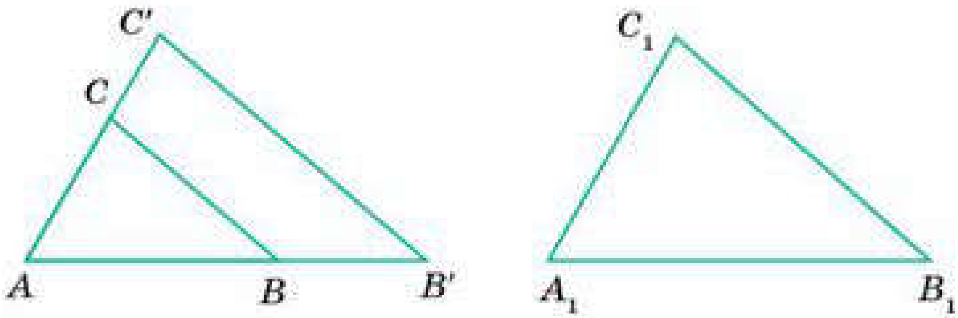
Бұл жағдайда, $\angle C = \angle C_1$ екенін де байқаймыз. $\frac{A_1B_1}{AB} = k$ деп белгілейік. Центрі A нүктесі және коэффициенті k болатын гомотетия кезінде ABC үшбұрышынан алынған $AB'C'$ үшбұрышын қарастырайық. $AB'C'$ және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштары бір қабырғасы және оған іргелес жатқан екі бұрышы бойынша тең болады ($AB' = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B' = \angle B_1$). Осыдан $AB'C'$ үшбұрышы қозғалыспен $A_1B_1C_1$ үшбұрышына көшеді. Көрсетілген гомотетия мен қозғалыстың композициясы ABC үшбұрышын $A_1B_1C_1$ үшбұрышына көшіреді. Демек, бұл үшбұрыштар ұқсас болады.

Осы белгіні тікбұрышты үшбұрыштарға қолданып, тікбұрышты үшбұрыштардың ұқсастығының келесі белгісін аламыз.

Салдар. Егер бір тікбұрышты үшбұрыштың сүйір бұрышы екінші тікбұрышты үшбұрыштың сүйір бұрышына тең болса, онда бұл тікбұрышты үшбұрыштар ұқсас болады.

Теорема (Үшбұрыштардың ұқсастығының үшінші белгісі). Егер бір үшбұрыштың үш қабырғасы екінші үшбұрыштың үш қабырғасына пропорционал болса, онда бұл үшбұрыштар ұқсас болады.

Дәлелдеуі. ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштары үшін $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{B_1C_1}{BC} = k$ теңдігі орын алсын (14.3-сурет).



14.3-сурет

Центрі A нүктесі және коэффициенті k болатын гомотетия кезіндегі ABC үшбұрышынан алынған $AB'C'$ үшбұрышын қарастырайық. $AB'C'$ және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштары үш қабырғасы бойынша тең болады ($AB' = A_1B_1$, $AC' = A_1C_1$, $B'C' = B_1C_1$). Осыдан $AB'C'$ үшбұрышы қозғалыспен $A_1B_1C_1$ үшбұрышына көшеді. Көрсетілген гомотетия мен қозғалыстың композициясы ABC үшбұрышын $A_1B_1C_1$ үшбұрышына көшіреді. Демек, бұл үшбұрышта р ұқсас болады.

Үшбұрыштардың ұқсастығының үшінші белгісінің салдары болатын тікбұрышты үшбұрыштардың ұқсастығының белгісін өздерің тұжырымдаңдар.

Мысал. Бір дұрыс үшбұрыш шеңберге іштей сызылған, ал екінші дұрыс үшбұрыш осы шеңберге сырттай сызылған. Осы үшбұрыштардың ұқсастық коэффициентін табыңдар.

Шешуі. Дұрыс үшбұрыштардың бұрыштары 60°-қа тең болғандықтан, бұл үшбұрыштар ұқсас болады. Егер берілген шеңбердің радиусы R-ге тең болса, онда іштей сызылған үшбұрыштың қабырғасы $\frac{\sqrt{3}}{6}R$-ге, ал сырттай сызылған үшбұрыштың қабырғасы $\frac{\sqrt{3}}{3}R$-ге тең. Осыдан ұқсастық коэффициенті 2-ге тең болады.

?

1. Қандай үшбұрыштар ұқсас деп аталады?
2. Үшбұрыштардың ұқсастығының бірінші белгісін тұжырымдаңдар.
3. Үшбұрыштардың ұқсастығының екінші белгісін тұжырымдаңдар.
4. Үшбұрыштардың ұқсастығының үшінші белгісін тұжырымдаңдар.
5. Тікбұрышты үшбұрыштардың ұқсастығының белгілерін тұжырымдаңдар.

Жаттығулар

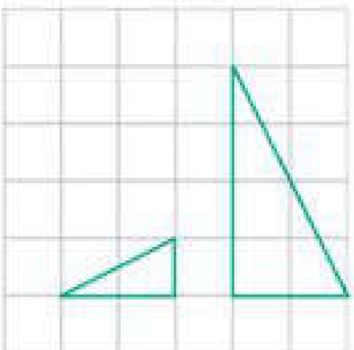
A

1. Кез келген екі: 1) теңқабырғалы үшбұрыштар; 2) теңбүйірлі үшбұрыштар; 3) теңбүйірлі тікбұрышты үшбұрыштар ұқсас бола ма?

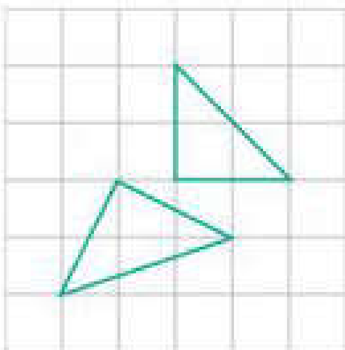
2. Үшбұрыштардың қабырғалары 5 см, 8 см және 10 см. Осы үшбұрышқа ұқсас үшбұрыштың қабырғаларын табыңдар, мұндағы ұқсастық коэффициенті: 1) 0,5; 2) 2-ге тең.

3. Егер бір тікбұрышты үшбұрыштың бұрышы 40°, ал екінші тікбұрышты үшбұрыштың бұрышы 50° болса, онда бұл үшбұрыштар ұқсас бола ма?

4. 14.4-суретте кескінделген үшбұрыштар ұқсас бола ма?



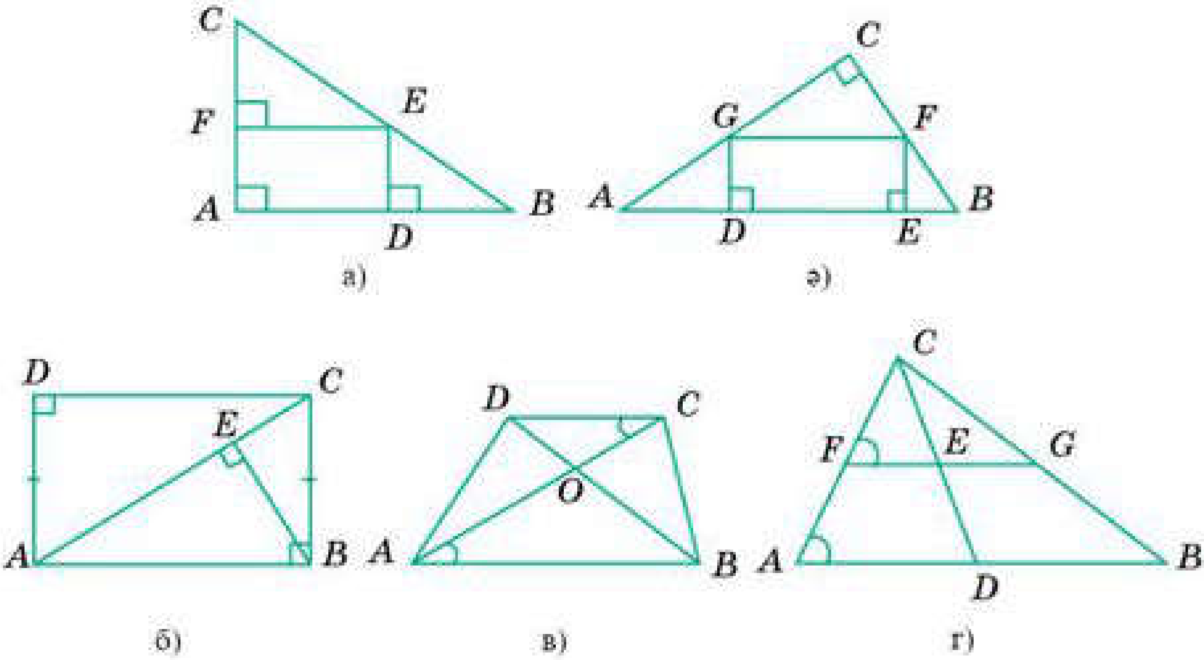
а)



ә)

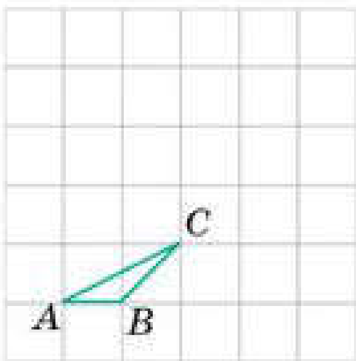
14.4-сурет

5. 14.5 -суреттегі барлық ұқсас үшбұрыштарды көрсетіңдер.

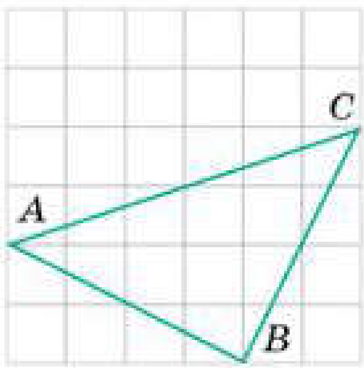


14.5-сурет

6. 14.6, 14.7-суреттердегі ұқсастық коэффициенті $k = 2$ болатын ABC үшбұрышына ұқсас үшбұрыштарды салыңдар .

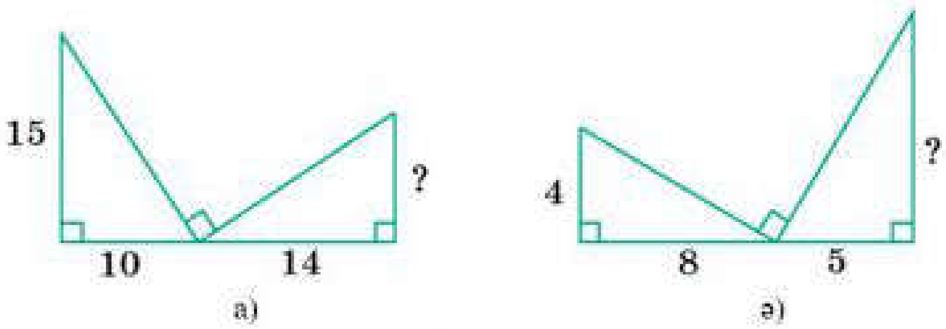


14.6-сурет



14.7-сурет

7. 14.8-суреттегі белгісіз катетті табыңдар.



14.8-сурет

8. ABC және $A_1B_1C_1$ ұқсас үшбұрыштарында $AB = 8$ см, $BC = 10$ см, $A_1B_1 = 5{,}6$ см, $A_1C_1 = 10{,}5$ см. AC және B_1C_1-ді табыңдар.

9. ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштарында $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $AB = 5$ м, $BC = 7$ м, $A_1B_1 = 10$ м, $A_1C_1 = 8$ м. Үшбұрыштардың қалған қабырғаларын табыңдар.

10. Бір үшбұрыштың қабырғалары 4 дм, 3,6 дм және 1,5 дм. Осы үшбұрышқа ұқсас екінші үшбұрыштың қабырғаларын табыңдар, мұндағы ұқсастық коэффициенті 1,6-ға тең.

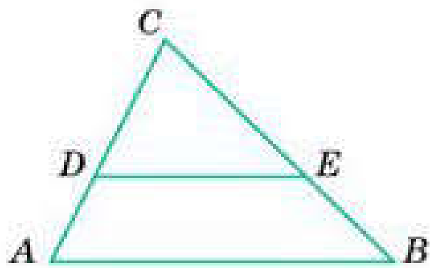
11. Бір үшбұрыштың қабырғалары 8 см, 6 см және 5 см. Осы үшбұрышқа ұқсас екінші үшбұрыштың кіші қабырғасы 2,5 см-ге тең. Екінші үшбұрыштың қалған қабырғаларын табыңдар.

12. ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштарында $\angle A = \angle A_1$, $AB = 4$, $AC = 6$, $BC = 5$, $A_1B_1 = 6$, $A_1C_1 = 9$. $A_1B_1C_1$ үшбұрышының B_1C_1 қабырғасын табыңдар.

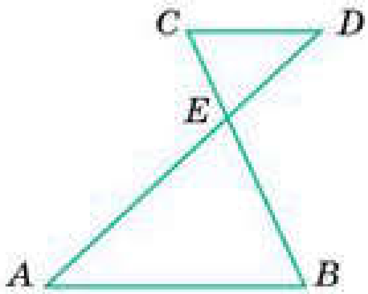
13. Екі үшбұрыштың қабырғаларының ұзындықтары: 1) 4, 5, 6 және 8, 10, 12; 2) 3, 4, 6 және 9, 15, 18; 3) 1, 2, 2 және 1, 1, 0,5 болса, онда олар ұқсас бола ма?

14. 14.9-суретте $CE = 8$, $CD = 6$, $BC = 12$, BAC бұрышы EDC бұрышына тең. AC-ны табыңдар.

15. 14.9-суретте $DE = 10$, $CE = 8$, $BC = 12$, BAC бұрышы EDC бұрышына тең. AB-ны табыңдар.



14.9-сурет



14.10-сурет

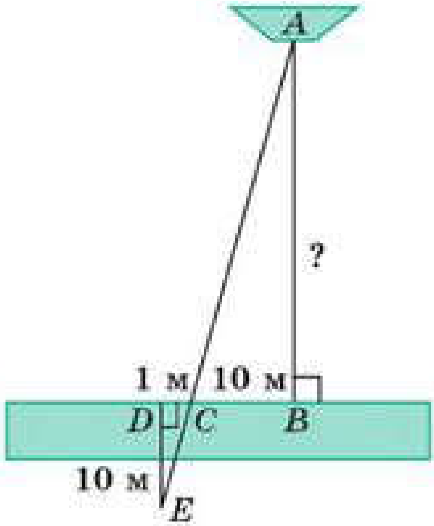
16. 14.10-суретте $CE = 4$, $DE = 6$, $AE = 12$, AB кесіндісі CD-ға параллель. BE-ны табыңдар.

17. 14.10-суретте $DE = 6$, $AB = 10$, $AE = 12$, AB кесіндісі CD-ға параллель. CD-ны табыңдар.

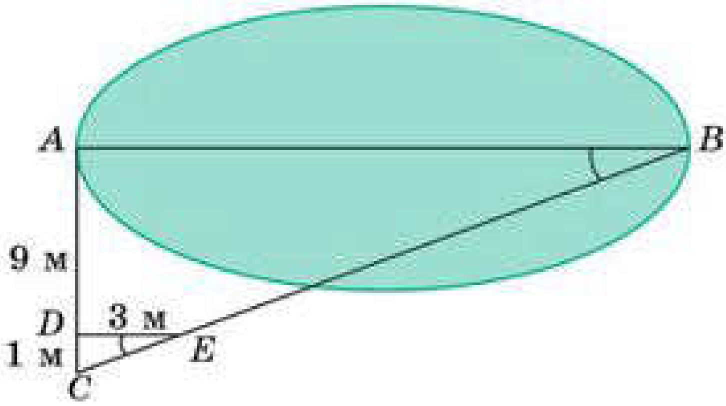
18. 14.11-суреттегі берілгендерді пайдаланып, A қайығынан жағалауға дейінгі AB қашықтығын табыңдар.

19. 14.12-суреттегі берілгендерді пайдаланып, AB-ны табыңдар.

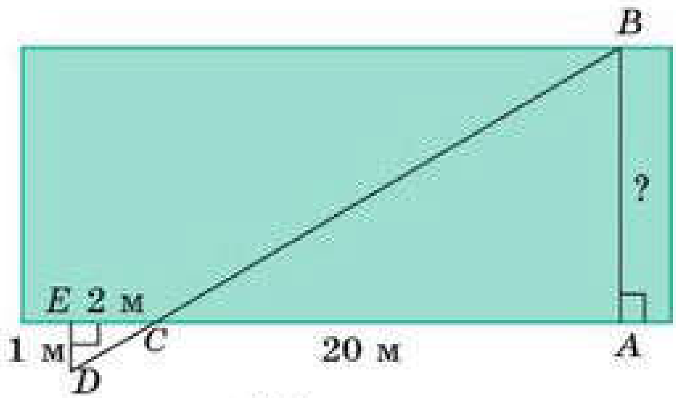
20. 14.13-суреттегі берілгендерді пайдаланып, өзеннің AB енін табыңдар.



14.11-сурет



14.12-сурет



14.13-сурет

B

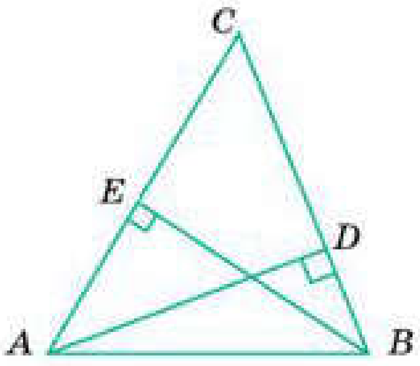
21. Үшбұрыштың қабырғаларының қатынасы 5 : 3 : 7 қатынасындай. Оған ұқсас екінші үшбұрыштың: а) периметрі 45 см-ге тең; ә) кіші қабырғасы 5 см-ге тең; б) үлкен қабырғасы 7 см-ге тең. Екінші үшбұрыштың қабырғаларын табыңдар.

22. Үшбұрыштың қабырғалары 12 м, 16 м және 18 м. Оған ұқсас үшбұрыштың кіші қабырғасы берілген үшбұрыштың үлкен қабырғасына тең болса, оның қабырғаларын табыңдар.

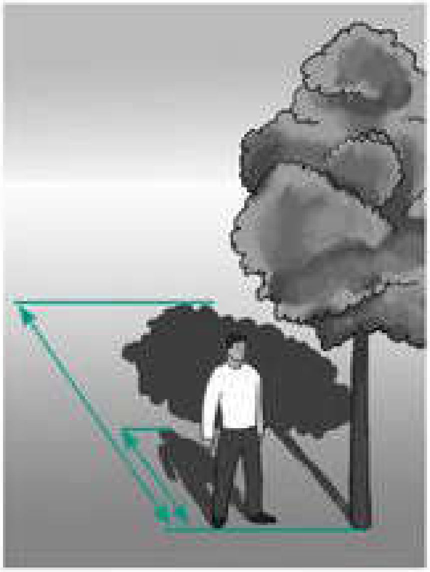
23. Үшбұрыштың қабырғалары 10 см, 15 см және 20 см-ге тең. Оған ұқсас екінші үшбұрыштың қабырғаларының көбейтіндісі 24-ке тең. Екінші үшбұрыштың қабырғаларын табыңдар.

24. Екі теңбүйірлі үшбұрыштың бүйір қабырғаларының арасындағы бұрыштары тең. Бір үшбұрыштың бүйір қабырғасы мен табаны сәйкесінше 17 см және 10 см-ге, ал екінші үшбұрыштың табаны 8 см-ге тең. Екінші үшбұрыштың бүйір қабырғасын табыңдар.

25. Егер екі теңбүйірлі үшбұрыштың табандарына қарсы жатқан төбелеріндегі бұрыштары тең болса, онда олар ұқсас болатынын дәлелдеңдер.



14.14-сурет



14.15-сурет

26. ABC үшбұрышында AD және BE биіктіктері жүргізілген (14.14-сурет). ACD және BCE үшбұрыштары ұқсас болатынын дәлелдеңдер.

27. Ұқсас үшбұрыштардың периметрлері сәйкесінше қабырғаларының қатынасындай болатынын дәлелдеңдер.

28. Екі үшбұрыштың барлық орта сызықтары сәйкесінше пропорционал болса, онда олар ұқсас бола ма?

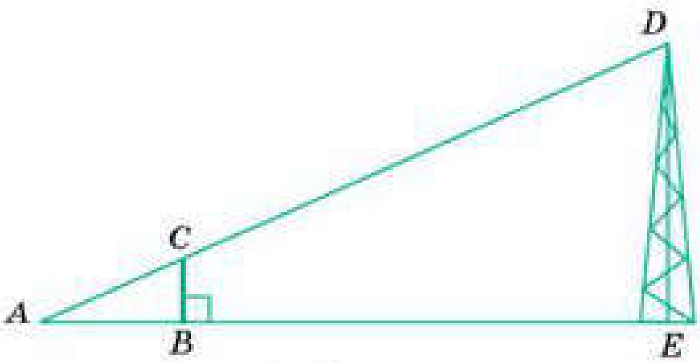
29. A бұрышының бір қабырғасынан $AB = 5$ см және $AC = 16$ см кесінділері алынған. Осы бұрыштың екінші қабырғасынан $AD = 8$ см және $AE = 10$ см кесінділері алынған. ACD және ABE үшбұрыштары ұқсас бола ма?

30. ABC үшбұрышының AC қабырғасынан $\angle ABD = \angle ACB$ болатындай D нүктесі алынған. Егер $AB = 8$ см, $BC = 12$ см, $AC = 18$ см болса, ABD үшбұрышының қабырғаларын табыңдар.

31. ABC үшбұрышында $AB = 25$ см, $BC = 20$ см және $AC = 30$ см. AB қабырғасынан $BK = 4$ см-ге тең кесінді, ал BC қабырға сынан BKL бұрышы ABC үшбұрышының C бұрышына тең болатындай L нүктесі алынған. BKL үшбұрышының периметрін табыңдар.

32. Ұқсас үшбұрыштардың қасиеттерін пайдаланып, қол жетпейтін нысандардың (ағаш, баған, ғимарат, жартас және т.б.) биіктігін қалай анықтауға болады (14.15-сурет)?

33. Бақылаушы A нүктесінде тұрып бір түзудің бойында орналасқан қаданың C ұшы мен діңгектің D жоғарғы нүктесін көреді (14.16-сурет).



14.16-сурет

Егер AE = 60 м, AB = 6 м және BC = 3 м болса, онда діңгектің биіктігін табыңдар.

14.17-сурет

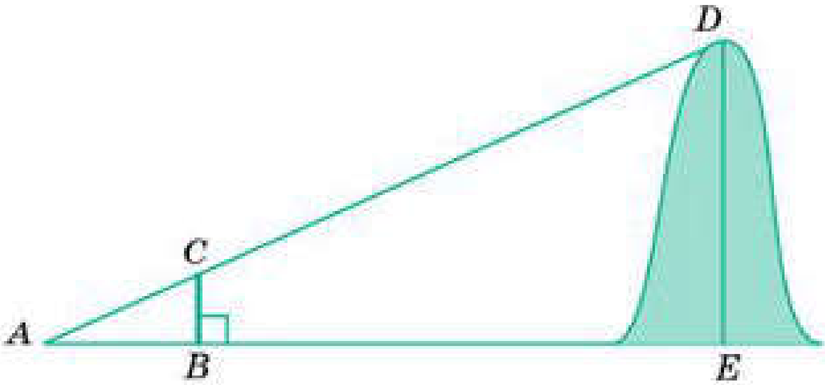
34. Ағаштың көлеңкесінің ұзындығы 8 м-ге, жерге тігінен қадалған қаданың көлеңкесінің ұзындығы 2 м-ге тең. Егер қаданың ұзындығы 1 м-ге тең болса, онда ағаштың биіктігін табыңдар.

35. Бойы 1,8 м болатын адам 5,4 м биіктіктегі көше шамы ілінген бағаннан 12 м қашықтықта тұр. Адам көлеңкесінің ұзындығын метрмен табыңдар.

36. Бойы 1,7 м адам көше шамы ілініп тұрған бағаннан 8 қадам қашықтықта тұр. Адамның көлеңкесі төрт қадамға тең. Көше шамы қандай биіктікте (метрмен өлшегенде) орналасқан?

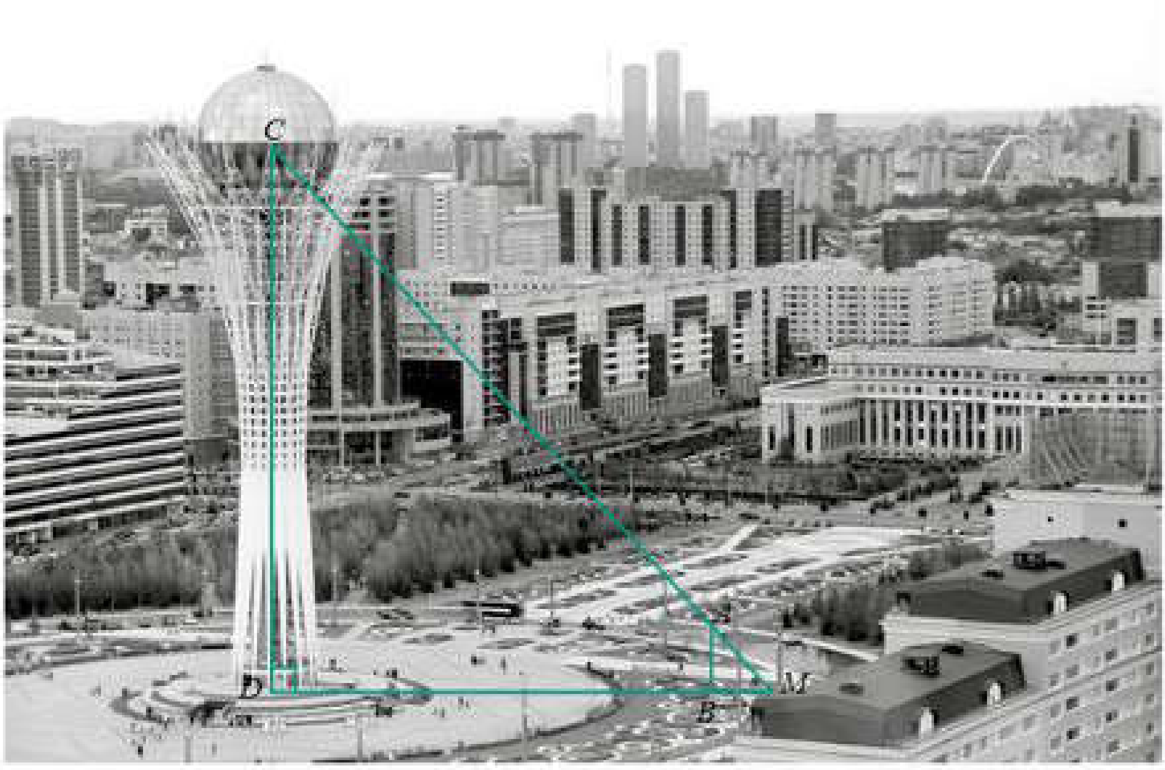
37. Ұзындығы 15 см-ге тең қарындаш шамнан жарты метр қашықтықта тігінен орналасып, қабырғаға ұзындығы 75 см көлеңкесін түсіріп тұр. Шамнан қабырғаға дейінгі қашықтықты табыңдар.

38. Оқжетпес – Бурабай көлі — Әулиекөл (қасиетті көл) жағасында орналасқан биік жартас (14.17-сурет). Бұл тау жайында халық аузында көптеген аңыз-әңгімелер айтылып жүр. Бақылаушы таудың етегінде A нүктесінде тұрып бір түзудің бойында орналасқан қаданың C ұшы мен жартастың D жоғарғы нүктесін көреді (14.18-сурет). Егер AE = 500 м, AB = 6 м және BC = 3 м болса, онда жартастың биіктігін табыңдар.



14.18-сурет

39. 14.19-суреттегі "Бәйтерек" монументі — металдан, шыныдан және бетоннан жасалған, алтын жалатылған шары бар әдемі архитектуралық ғимарат — барлық әлемдік бірлестік үшін Тәуелсіз Қазақстанның символы. Бәйтеректен қандай да бір қашықтықта тұрған адам оның панорамалық залындағы адамдарды көреді. Егер $MD = 145,5$ м, $MB = 3$ м және $AB = 2$ м болса, онда ғимараттың биіктігін табыңдар.



14.19-сурет

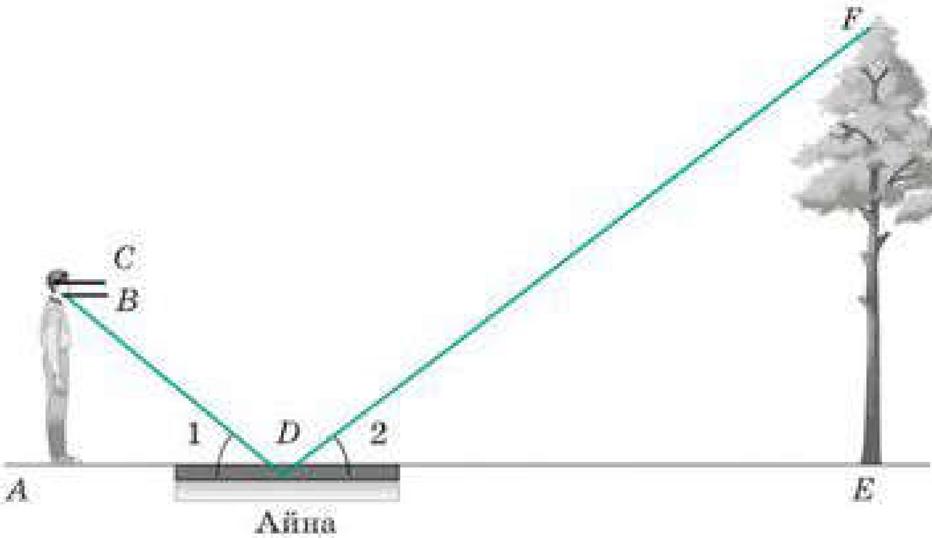
40. 14.20-суретте Қазақстан жеріндегі бірлік пен достастықтың, бейбітшілік пен ынтымақтастықтың белгісі болатын Бейбітшілік пен келісім сарайы — Пирамида кескінделген.

14.20-сурет

Пирамиданың көлеңкесінің ұзындығы 93 м-ге, сол уақытта жерге тігінен қадалған қаданың көлеңкесінің биіктігі 3 м-ге тең (14.21-сурет). Егер қаданың биіктігі 2 м-ге тең болса, онда пирамиданың биіктігін табыңдар.

14.21-сурет

41. 14.22-суреттегі ағаштың биіктігін анықтау үшін айнаны пайдалануға болады. FD сәулесі D нүктесінде айнадан шағылып адамның көзіне (B нүктесі) түседі. Егер $AC = 165$ см, $BC = 12$ см, $AD = 120$ см, $DE = 4,8$ м, $\angle 1 = \angle 2$ болса, онда ағаштың биіктігін анықтаңдар.



14.22-сурет

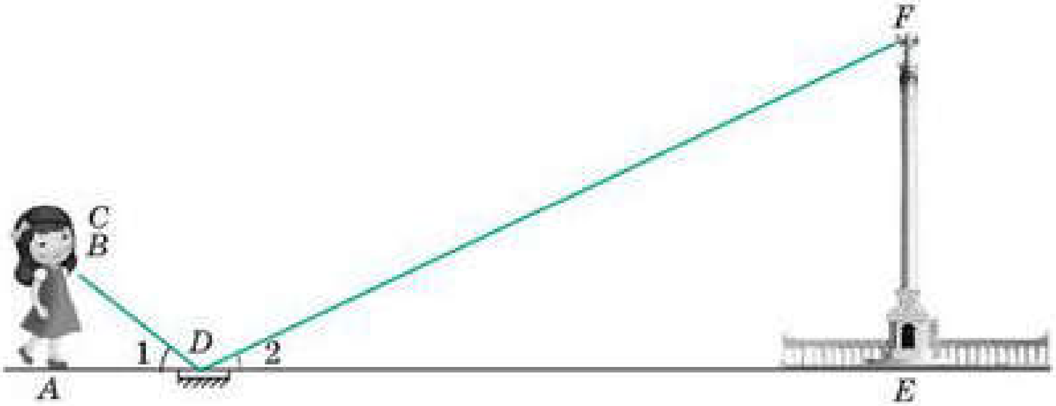
42. "Қазақ елі" монументі — Нұр-Сұлтан қаласында орналасқан мәдени-архитектуралық ескерткіш (14.23, а-сурет). Ақ мәрмәрдан құйылған монументтің биіктігі Қазақстан тәуелсіздігін алған жылды көрсетеді. Ал оның басындағы алтын түстес бояумен әрленген алып құс — Самұрық еліміздің дамуға, гүлденуге ұмтылған ынта-жігерін бейнелейді (14.23, ә-сурет).

а)

ә)

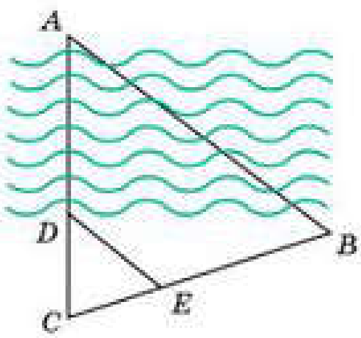
14.23-сурет

Монументтің биіктігін айнаның көмегімен қалай есептеуге болады (14.24-сурет)? Қандай өлшеулер жүргізу керек?



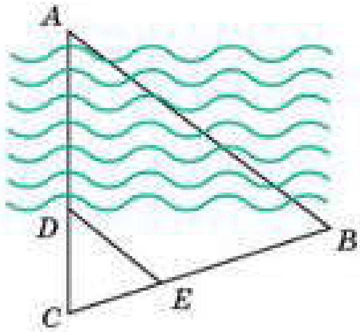
14.24-сурет

43. 14.25-суретте жергілікті жерде екі ABC және DEC ұқсас үшбұрыштарын салып, өзеннің AD енін табу әдісі көрсетілген. Егер $BC = 50$ м, $EC = 16$ м, $DC = 17$ м болса, онда AD қашықтығын табыңдар.



14.25-сурет

44. Ертіс — әлемдегі ең ұзын, Қазақстандағы ең ірі өзендердің бірі және Шығыс Қазақстан мен Павлодар облыстарының негізгі су жолы. Ертістің ұзындығы 4248 км құрайды, бұл Обь өзенінің ұзындығынан асады. 14.26-суретте Павлодар қаласындағы Ертіс өзенінің көрінісі кескінделген. Жергілікті жерде ABC және DEC ұқсас екі үшбұрышты салып, өзен арнасының AD енін табыңдар, мұндағы $BC = 608$ м, $EC = 16$ м, $DC = 17$ м.



14.26-сурет

C

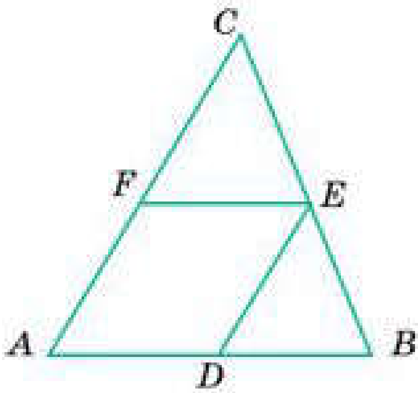
45. Үшбұрышты оның қабырғасына параллель емес түзумен қиып өтіп, онымен ұқсас үшбұрышты алуға бола ма?

46. Тікбұрышты үшбұрыштың тік бұрышынан жүргізілген биіктігі оны бастапқымен ұқсас екі үшбұрышқа бөлетінін дәлелдеңдер.

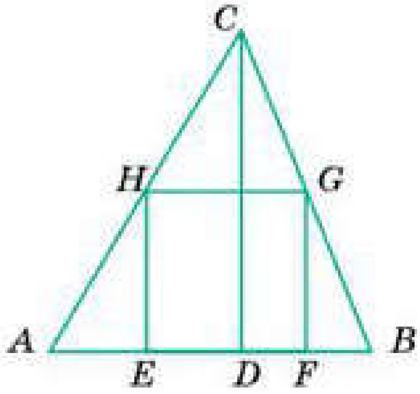
47. ABC үшбұрышына A бұрышы ортақ, E төбесі BC қабырғасының ортасында болатындай $ADEF$ ромбысы іштей сызылған (14.27-сурет). Егер $AB = c$ және $AC = b$ болса, онда ромбының қабырғасын табыңдар.

48. ABC үшбұрышының қабырғасы $AB = c$ және биіктігі $CD = h$. Оған екі төбесі AB қабырғасында, ал қалған екі төбесі үшбұрыштың басқа екі төбесінде жататындай квадрат іштей сызылған (14.28-сурет). Квадраттың қабырғасын табыңдар.

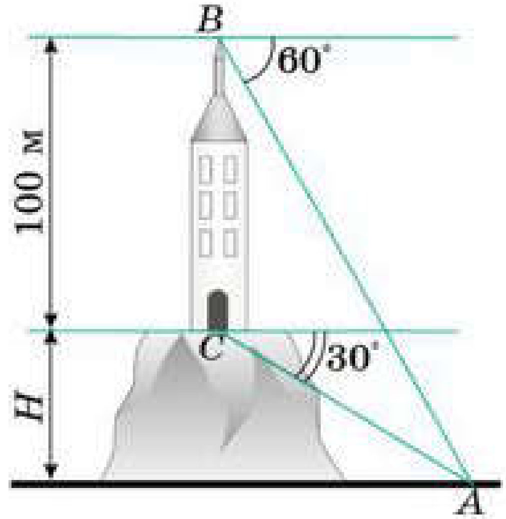
49. Тау үстінде биіктігі 100 м-ге тең мұнара тұр (14.29-сурет). Таудың етегіндегі қандай да бір A нүктесі алдымен мұнараның B ұшынан $60°$ бұрышпен, ал содан соң оның C табанынан $30°$ бұрышпен көрінеді. Таудың H биіктігін табыңдар.



14.27-сурет



14.28-сурет



14.29-сурет

50. Айдың диаметрі шамамен 3400 км және Жерден 408000 км қашықтықта орналасқан. Бақылаушыға диаметрі 1 см-ге тең монета Айдың шамасындай көрінуі үшін, монетаны қандай қашықтықта (см-мен) орналастыру керек?

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

51. Бұрыштардың тригонометриялық функцияларын қайталаңдар.

52. *ABC* үшбұрышының *AC* қабырғасын оның *BC* қабырғасы мен *A* және *B* бұрыштары арқылы өрнектеп көріңдер.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

1. Қандай түзулер $\vec{a}$ векторына параллель көшіруде өз-өзіне көшеді?
A) түзудің нормаль векторы $\vec{a}$ векторына перпендикуляр;
B) түзудің нормаль векторы $\vec{a}$ векторымен бағыттас;
C) түзудің нормаль векторы $\vec{a}$ векторына қарама-қарсы бағытталған;
D) мұндай түзулер жоқ.

2. Қандай түзулер осьтік симметрия кезінде өз-өзіне көшеді?
A) симметрия осіне параллель;
B) симметрия осіне перпендикуляр;
C) симметрия осін сүйір бұрышпен қиятын;
D) мұндай түзулер жоқ.

3. Түзудің неше симметрия осі болады?
A) біреу; B) екеу;
C) шексіз көп; D) біреу де емес.

4. Сәуленің неше симметрия осі болады?
A) біреу; B) екеу;
C) шексіз көп; D) біреу де емес.

5. Түзудің неше симметрия центрі болады?
A) біреу; B) екеу;
C) шексіз көп; D) біреу де емес.

6. Сәуленің неше симметрия центрі болады?
A) біреу; B) екеу;
C) шексіз көп; D) біреу де емес.

7. Түзуді одан тыс жатқан нүктеден айналдыра бұрғанда берілген түзуге параллель түзу алынады. Бұру бұрышы неге тең?
A) 45°; B) 90°;
C) 135°; D) 180°.

8. Квадраттың диагональдарының қиылысу нүктесі қандай ретті симметрия центрі болады?
A) екінші; B) үшінші;
C) төртінші; D) алтыншы.

9. Дұрыс үшбұрышты оған сырттай сызылған шеңбердің центрінен айналдыра қандай ең кіші бұрышқа бұрғанда ол өзімен-өзі беттеседі?

A) 30°; B) 60°;
C) 90°; D) 120°.

10. Дұрыс алтыбұрыштың неше симметрия осі болады?

A) 2; B) 3;
C) 4; D) 6.

11. Қандай қозғалыс кезінде әрбір түзу оған параллель түзуге немесе өз-өзіне көшеді?

A) центрлік симметрия және параллель көшіру кезінде;
B) центрлік симметрия, осьтік симметрия және параллель көшіру кезінде;
C) центрлік симметрия және осьтік симметрия кезінде;
D) осьтік симметрия және параллель көшіру кезінде.

12. Егер тікбұрышты үшбұрыштың тік бұрышынан биіктік жүргізетін болсақ, онда неше ұқсас үшбұрыштардың жұбы пайда болады?

A) 2; B) 3;
C) 4; D) 6.

13. ABC тікбұрышты үшбұрышында $(\angle C = 90°)$ $AH = 3$ см, $BH = 6$ см. CH биіктігін табыңдар.

A) $3\sqrt{2}$ см; B) $2\sqrt{3}$ см;
C) $\sqrt{6}$ см; D) $3\sqrt{3}$ см.

14. Тікбұрышты үшбұрыштың катеттері 3 см және 4 см. Оған ұқсас тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасы 6 см-ге тең. Екінші үшбұрыштың катеттерін табыңдар.

A) 3,2 см және 4,4 см; B) 3,4 см және 4,6 см;
C) 3,6 см және 4,8 см; D) 3,8 см және 4,2 см.

15. Үшбұрыштың қабырғалары 2 см, 3 см, 4 см. Оған ұқсас үшбұрыштың үлкен қабырғасы 36 см-ге тең. Екінші үшбұрыштың периметрін табыңдар.

A) 36 см; B) 81 см;
C) 144 см; D) 234 см.

16. ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштарында $\angle A = \angle A_1$ және $\angle B = \angle B_1$, $AB = 4$ см, $BC = 6$ см, $AC = 3$ см, $B_1C_1 = 3$ см. A_1B_1 және A_1C_1-ді табыңдар.

A) 3 см және 4 см; B) 3 см және 1,5 см;
C) 2 см және 3 см; D) 2 см және 1,5 см.

17. Түзу параллелограмды екі ұқсас параллелограмдарға бөледі. Кіші параллелограмның қабырғалары 4 см және 6 см. Бастапқы параллелограмның периметрін табыңдар.

A) 14 см; B) 20 см;
C) 30 см; D) 46 см.

18. Трапецияның табандары 3 см және 12 см. Түзу осы трапецияны екі ұқсас трапецияларға бөледі. Олардың ортақ табанын табыңдар.

A) 6 см; B) 8 см;
C) 9 см; D) 10 см.

19. Параллелограмның периметрі 96 см. Оның әрбір диагоналі үш тең бөлікке бөлінген. Төбелері бөліну нүктелері болатын төртбұрыштың периметрін табыңдар.

A) 16 см; B) 24 см;
C) 32 см; D) 64 см.

20. Берілген квадрат пен төбелері оның қабырғаларының орталары болатын квадраттың ұқсастық коэффициентін табыңдар.

A) $\frac{1}{2}$; B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$;
C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; D) 2.

3-тарау

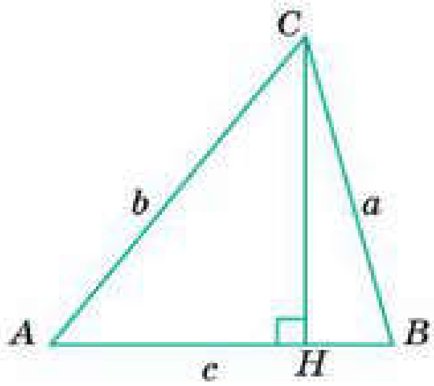
ҮШБҰРЫШТАРДЫ ШЕШУ

15. СИНУСТАР ТЕОРЕМАСЫ

Теорема (Синустар теоремасы). Үшбұрыштың қабырғалары оларға қарсы жатқан бұрыштардың синустарына пропорционал болады.

Дәлелдеуі. ABC үшбұрышы берілсін және $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ болсын. AB қабырғасына CH биіктігін түсірейік (15.1-сурет).

Сонда AHC және BHC үшбұрыштарынан



15.1-сурет

$$CH = b \cdot \sin A = a \cdot \sin B.$$

Осыдан

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}.$$

Осыған ұқсас, келесі теңдік орындалатыны дәлелденеді:

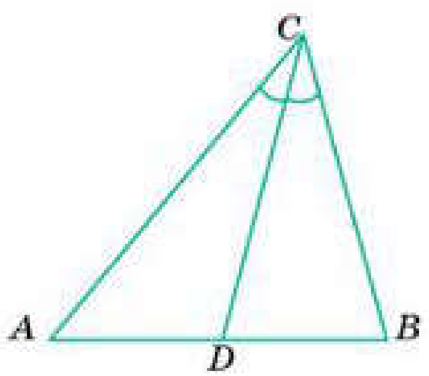
$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Осы теңдікті өздерің дәлелдеңдер.

Бұл екі теңдік үшбұрыштың қабырғалары оларға қарсы жатқан бұрыштардың синустарына пропорционал екенін көрсететін теңдікті береді:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Синустар теоремасын пайдаланып, үшбұрыштың биссектрисасының маңызды бір қасиетін дәлелдейік.



15.2-сурет

Теорема. Үшбұрыштың бұрышының биссектрисасы осы бұрышқа қарсы жатқан қабырғаны оған іргелес жатқан қабырғаларына пропорционал бөліктерге бөледі.

Дәлелдеуі. ABC үшбұрышы берілсін және CD оның биссектрисасы болсын (15.2-сурет).

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC}$$

теңдігі орындалатынын дәлелдейік.

ACD үшбұрышына синустар теоремасын қолданып, келесі теңдікті аламыз:

$$\frac{AD}{\sin\angle ACD} = \frac{AC}{\sin\angle ADC}.$$

BCD үшбұрышына синустар теоремасын қолданып, келесі теңдікті аламыз:

$$\frac{BD}{\sin\angle BCD} = \frac{BC}{\sin\angle BDC}.$$

$\sin\angle ACD = \sin\angle BCD$ және $\sin\angle ADC = \sin\angle BDC$ екенін ескеріп, бұл теңдіктерден ізделінді теңдікті аламыз:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC}.$$

Синустар теоремасы :

1) үшбұрыштың белгілі бұрыштары мен бір қабырғасы бойынша оның қалған екі қабырғасын табуға;

2) үшбұрыштың белгілі екі қабырғасы мен олардың біреуіне қарсы жатқан бұрышы бойынша осы үшбұрыштың қалған бұрыштарын табуға мүмкіндік береді.

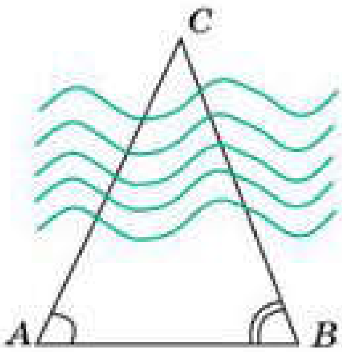
Шынында да, егер ABC үшбұрышының c-ға тең AB қабырғасы және A, B, C бұрыштары белгілі болса, онда AC және BC қабырғалары келесі формуламен өрнектеледі:

$$AC = c\frac{\sin B}{\sin C}, \qquad BC = c\frac{\sin A}{\sin C}.$$

ABC үшбұрышының B бұрышының синусын және A бұрышының синусын оның $BC = a$, $AC = b$ қабырғалары арқылы өрнектеңдер.

Синустар теоремасының көмегімен қол жетпейтін заттарға дейінгі қашықтықты табуға арналған практикалық мазмұнды есептер шешіледі.

Берілген A нүктесінен қол жетпейтін C нүктесіне дейінгі тікелей өлшеу жасауға мүмкін емес AC қашықтығын табу керек болсын. Бұл жағдайда тағы бір B нүктесі алынып, ABC үшбұрышының AB қашықтығы, A және B бұрыштары өлшенеді (15.3-сурет). Кейін жоғарыда келтірілген формуланы пайдаланып, AC қашықтығы табылады.



15.3-сурет

Мысал. Берілген A нүктесінен қол жетпейтін C нүктесіне дейінгі AC қашықтығын табыңдар (15.3-сурет), мұндағы $AB = 100$ м, $\angle A = 60°$, $\angle B = 70°$. Тригонометриялық функциялардың жуық мәндерінің кестесін пайдаланыңдар.

Шешуі. C бұрышы $50°$-қа тең. Синустар теоремасы бойынша

$$AC = AB \cdot \frac{\sin B}{\sin C} = 100 \cdot \frac{0{,}94}{0{,}77} \approx 122 \text{ (м)}.$$

?

1. Синустар теоремасын тұжырымдаңдар.
2. Үшбұрыштың биссектрисасы туралы теореманы тұжырымдаңдар.
3. Үшбұрыштың қабырғасы оның белгілі қабырғасы мен бұрыштары арқылы қалай өрнектеледі?
4. Үшбұрыштың бұрышының синусы оның белгілі екі қабырғасы мен бұрышы арқылы қалай өрнектеледі?
5. Синустар теоремасы қандай практикалық мазмұнды есепті шешуге мүмкіндік береді?

Жаттығулар

A

1. ABC үшбұрышында $AB = 6$, $\angle A = 45°$, $\angle C = 60°$. BC қабырғасын табыңдар.

2. ABC үшбұрышында $BC = 5$, $\angle A = 30°$, $\angle B = 105°$. AB қабырғасын табыңдар.

3. ABC үшбұрышында $BC = 3$, $AC = 3\sqrt{2}$ және $\angle A = 45°$. B бұрышын табыңдар.

4. ABC сүйірбұрышты үшбұрышында $BC = 1$, $AC = \sqrt{2}$ және $\angle A = 30°$. B бұрышын табыңдар.

5. ABC үшбұрышында $AC : BC$ және $AB : BC$ қатынастарын табыңдар, мұндағы: а) $\angle A = 45°$, $\angle B = 30°$; ә) $\angle A = 120°$, $\angle B = 30°$.

B

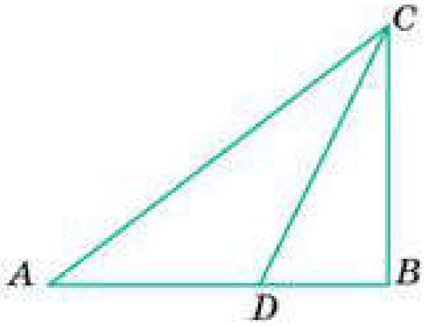
6. ABC үшбұрышында $BC = 2$, $AC = 2\sqrt{2}$ және $\angle A = 30°$. B бұрышын табыңдар.

7. Параллелограмның диагоналі c-ға тең және ол қабырғаларымен φ және ψ бұрыштарын жасайды. Параллелограмның қабырғаларын c, φ және ψ арқылы өрнектеңдер.

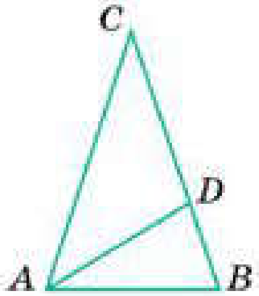
8. ABC үшбұрышында $AB = 8$, $BC = 6$, $AC = 10$. Үшбұрыштың CD биссектрисасы оның AB қабырғасын бөлгендегі кесінділерді табыңдар (15.4-сурет).

9. ABC үшбұрышында $AB = 1$, $AC = BC = 2$. Үшбұрыштың AD биссектрисасы оның BC қабырғасын бөлетін кесінділерді табыңдар (15.5-сурет).

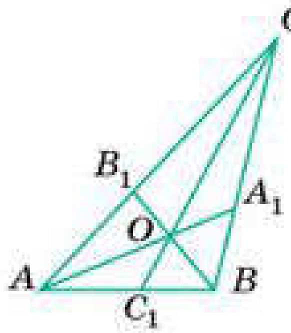
10. ABC үшбұрышында $AB = 2$, $BC = 3$, $AC = 4$. Үшбұрыштың AA_1, BB_1, CC_1 биссектрисалары оның қабырғаларын бөлетін кесінділерді табыңдар (15.6-сурет).



15.4-сурет



15.5-сурет



15.6-сурет

C

11. ABC үшбұрышында CD медианасы жүргізілген.

$$AC : BC = \sin\angle DCB : \sin\angle DCA$$

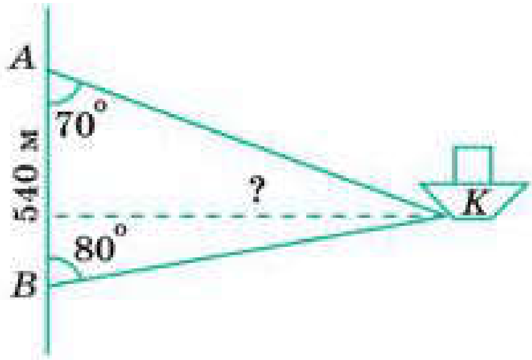
екенін дәлелдеңдер.

12. $ABCD$ трапециясында $(AB \parallel CD)$ $AB = a$, $CD = b$ $(a > b)$, $\angle A = \varphi$, $\angle B = \psi$. Трапецияның AD және BC бүйір қабырғаларын a, b, φ және ψ арқылы өрнектеңдер.

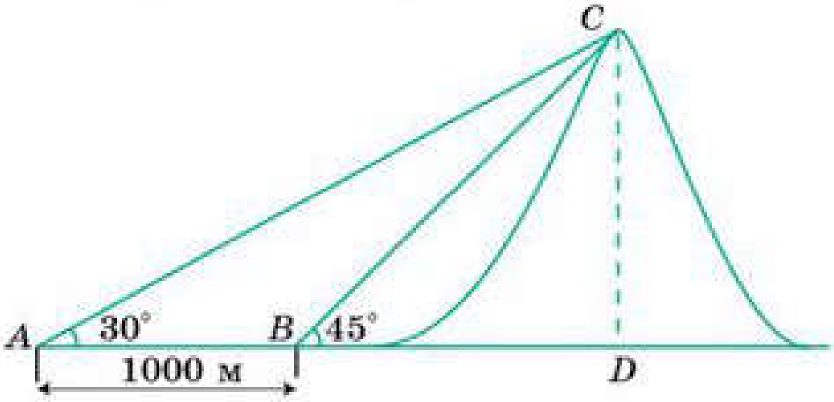
13. ABC үшбұрышында $AB = c$, $\angle A = \varphi$, $\angle B = \psi$. Үшбұрыштың CH биіктігін c, φ және ψ арқылы өрнектеңдер.

14. 15.7- суреттегі берілгендерді пайдаланып, K кемесінен AB жағалауына дейінгі қашықтықты табыңдар. Жауабында метрді бүтін санмен көрсетіңдер.

15. Қандай да бір нүктеден таудың төбесі 30° бұрышпен көрінеді. Тауға 1000 м жақындағанда таудың төбесі 45° бұрышпен көрінді. Таудың биіктігін жуықтап табыңдар (15.8-сурет). Жауабында метрді бүтін санмен көрсетіңдер.

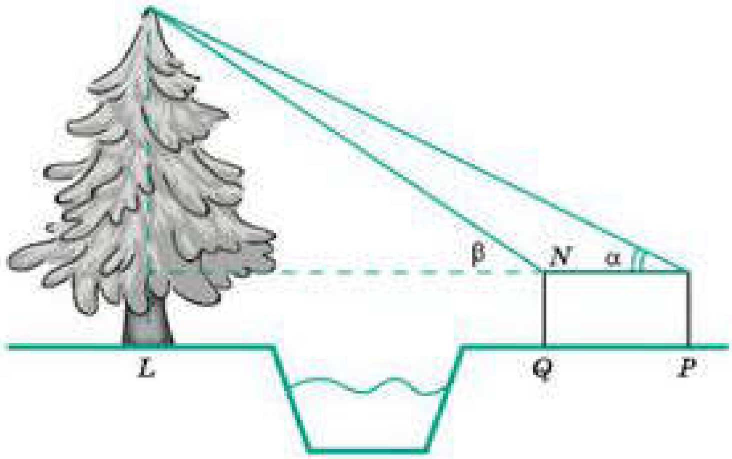


15.7-сурет

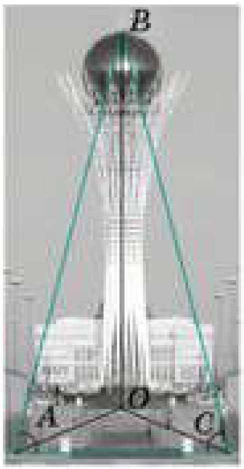


15.8-сурет

16. Теодолиттің (немесе эклиметрдің) және рулетканың көмегімен қажетті өлшеулер жүргізіңдер және қол жетпейтін дененің (мысалы, ағаштың) біиктігін табыңдар (15.9-сурет).



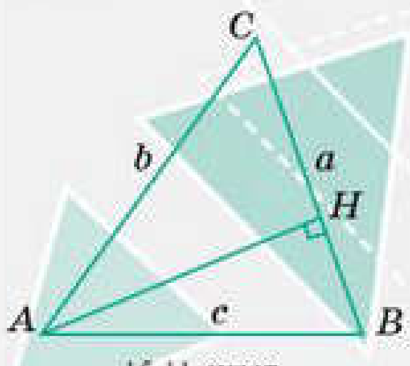
15.9-сурет



15.10-сурет

17. Қазақстан астанасының ең басты және көрнекті ғимараттарының бірі "Бәйтерек" монументінің биіктігі — 97 м (15.10-сурет). BC, AC ұзындықтарын табыңдар, мұндағы $BC = AB$, $AO = OC$, $\angle BOC = \angle BOA = 90°$, $\angle BCO = 30°$, $\angle AOC = 60°$.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар



15.11-сурет

18. Векторлардың скаляр көбейтіндісі ұғымын және оның қасиеттерін қайталаңдар.

19. ABC үшбұрышында $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, AH — биіктігі (15.11-сурет). AH, CH, BH кесінділерін a, b және C бұрышы арқылы өрнектеңдер. Осы өрнектерді пайдаланып, a, b және C бұрышы арқылы c^2-ты табыңдар.

16. КОСИНУСТАР ТЕОРЕМАСЫ

Келесі теорема Пифагор теоремасының жалпы түрі болады.

Теорема (Косинустар теоремасы). Үшбұрыштың қабырғасының квадраты қалған екі қабырғасының квадраттарының қосындысынан осы қабырғалар мен олардың арасындағы бұрыштың косинусының екі еселенген көбейтіндісін азайтқанға тең болады.

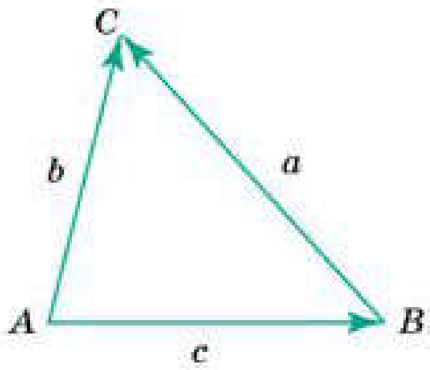
Дәлелдеуі. ABC кез келген үшбұрыш болсын. $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ деп белгілейміз және

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

теңдігінің орындалатынын дәлелдейік.

C бұрышы 90°-қа тең болғанда, C бұрышының косинусы нөлге тең болады. Осыдан Пифагор теоремасын аламыз: $c^2 = a^2 + b^2$.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$ векторлық теңдігін қолданамыз (16.1-сурет). Осы теңдіктің екі жағын квадраттаймыз:



16.1-сурет

$$\overrightarrow{AB}^2 = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}\right)^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{BC}^2 - 2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}.$$

$$\overrightarrow{AB}^2 = c^2,\ \overrightarrow{AC}^2 = b^2,\ \overrightarrow{BC}^2 = a^2,\ \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC} = b\cdot a\cdot\cos C$$

болғандықтан, теңдікті $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ түрінде жазуға болады.

Мысал. ABC үшбұрышында $BC = 3$, $AC = 4$, $AB = 5$. A, B, C бұрыштарының косинустарын табыңдар.

Шешуі. Косинустар теоремасы бойынша:

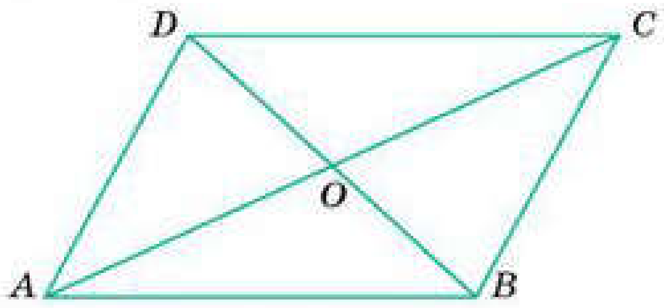
$$5^2 = 3^2 + 4^2 - 2\cdot 3\cdot 4\cdot\cos C;$$
$$4^2 = 3^2 + 5^2 - 2\cdot 3\cdot 5\cdot\cos B;$$
$$3^2 = 4^2 + 5^2 - 2\cdot 4\cdot 5\cdot\cos A.$$

Бірінші теңдіктен $\cos C = 90°$. Осыдан $\angle C = 90°$. Екінші теңдіктен $\cos B = 0{,}6$. Үшінші теңдіктен $\cos A = 0{,}8$.

Косинустар теоремасын пайдаланып, егер ABC үшбұрышының a, b, c қабырғалары үшін $c^2 > a^2 + b^2$ теңсіздігі орындалса, онда ол доғал бұрышты үшбұрыш екенін дәлелдеңдер.

Косинустар теоремасын пайдаланып, параллелограмның диагональдарының маңызды бір қасиетін дәлелдейміз.

Теорема . Параллелограмның диагональдарының квадраттарының қосындысы оның барлық қабырғаларының квадраттарының қосындысына тең болады.



16.2-сурет

Дәлелдеуі. $ABCD$ параллелограмында ABC және ABD үшбұрыштарын қарастырамыз (16.2-сурет). Оларға косинустар теоремасын қолданып, келесі теңдікті аламыз:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos B,$$
$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos A.$$

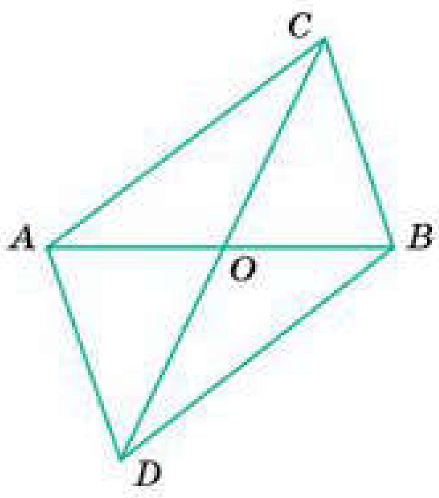
Бұл теңдіктерді қосып және $AB = CD$ мен $\cos B = -\cos A$ екенін ескеріп, ізделінді теңдікті аламыз:

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2.$$

Осы теореманы берілген қабырғалары бойынша үшбұрыштың медианасын табуда қолданамыз.

Теорема. ABC үшбұрышында $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ болсын. Үшбұрыштың C төбесінен жүргізілген m_c медианасы үшін келесі формула орынды болады:

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}.$$



16.3-сурет

Дәлелдеуі. ABC үшбұрышын $ACBD$ параллелограмына дейін толықтыра аламыз (16.3-сурет). Оның CD диагоналі ABC үшбұрышының екі еселенген CO медианасына тең болады. Дәлелденген теорема бойынша орынды болатын

$$c^2 + (2m_c)^2 = 2a^2 + 2b^2,$$

теңдіктен ізделінді теңдік шығады.

Мысал. Қабырғалары 6, 8, 10 болатын үшбұрыштың медианаларын табыңдар.

Шешуі. ABC үшбұрышында $AB = 10$, $AC = 8$, $BC = 6$ болсын. Сонда үшбұрыштың A, B, C төбелерінен жүргізілген m_a, m_b, m_c медианалары үшін келесі формула орынды болады:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2\cdot 8^2 + 2\cdot 10^2 - 6^2} = \sqrt{73},$$

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2\cdot 6^2 + 2\cdot 10^2 - 8^2} = \sqrt{52},$$

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2\cdot 6^2 + 2\cdot 8^2 - 10^2} = 5.$$

Косинустар теоремасын үшбұрыштың ауданын оның қабырғалары арқылы өрнектейтін тағы бір формуланы қорытып шығаруда қолданамыз. Ол формуланы алғаш рет ежелгі грек математигі Герон Александрийский ойлап тапқан және ***Герон формуласы*** деп аталады.

Теорема. Қабырғалары $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ болатын ABC үшбұрышының S ауданы келесі формуламен есептеледі:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

мұндағы $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ — ABC үшбұрышының жарты периметрі.

Дәлелдеуі. Үшбұрыштың ауданын табуға арналған

$$S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin C.$$

формуласын пайдаланамыз.

$\sin C$-ны үшбұрыштың қабырғалары арқылы өрнектейміз:

$$\sin^2 C = 1 - \cos^2 C = (1 + \cos C)(1 - \cos C).$$

Косинустар теоремасы бойынша: $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.

Бұл өрнекті $\sin^2 C$-ға арналған формулаға қойып, аламыз:

$$\sin^2 C = \frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \cdot \frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2ab} =$$

$$= \frac{(a + b + c)(a + b - c)(c + a - b)(c - a + b)}{4a^2b^2} = \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2b^2}.$$

Осыдан $\sin C = \dfrac{2}{ab}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Бұл өрнекті үшбұрыштың ауданын табуға арналған формулаға қойып, нәтижесінде аламыз:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \quad \square$$

1. Косинустар теоремасын тұжырымдаңдар.
2. Неліктен косинустар теоремасы Пифагор теоремасының жалпылamасы болады?
3. Параллелограмның диагональдарының квадраттарының қосындысы туралы теореманы тұжырымдаңдар.
4. Үшбұрыштың медианасы туралы теореманы тұжырымдаңдар.
5. Үшбұрыштың ауданы оның қабырғалары арқылы қалай өрнектеледі?

Жаттығулар

А

1. Үшбұрыштың бұрышының қандай мәнінде оған қарсы жатқан қабырғасының квадраты: а) қалған екі қабырғасының квадраттарының қосындысынан кіші; ә) қалған екі қабырғасының квадраттарының қосындысына тең; б) қалған екі қабырғасының квадраттарының қосындысынан үлкен болады?

2. Үшбұрыштың қабырғалары: а) 7, 8, 12; ә) 30, 40, 50; б) 13, 14, 15. Үшбұрыштың бұрыштарын есептемей-ақ оның түрін (бұрышқа қатысты) анықтаңдар.

3. ABC үшбұрышында $AB = 12$, $AC = 8$, $\angle A = 60°$. Оның үшінші қабырғасын табыңдар.

4. Үшбұрыштың 30°-қа тең бұрышына іргелес жатқан қабырғалары 2 және $\sqrt{3}$-ке тең болса, оған қарсы жатқан қабырғасын табыңдар.

5. Үшбұрыштың 45°-қа тең бұрышына іргелес жатқан қабырғалары 2 және $\sqrt{2}$-ге тең болса, оған қарсы жатқан қабырғасын табыңдар.

6. ABC үшбұрышында $AC = BC = 1$, C бұрышы 120°-қа тең. AB-ны табыңдар.

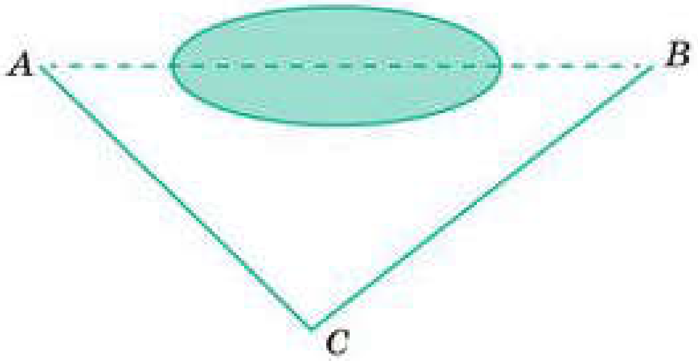
7. ABC үшбұрышында $AC = BC = 1$, C бұрышы 135°-қа тең. AB-ны табыңдар.

8. ABC үшбұрышында $AC = BC = 1$, C бұрышы 150°-қа тең. AB-ны табыңдар.

9. ABC үшбұры шында $AC = BC = 1$, $AB = \sqrt{3}$. Үшбұрыштың бұрыштарын табыңдар.

10. Үшбұрыштың үш қабырғасы берілген: $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$. A, B, C бұрыштарының косинусын табыңдар.

11. 16.4-суретті пайдаланып, бөгеттермен бөлінген A және B нүктелерінің арақашықтығын табу тәсілін көрсетіңдер.



16.4-сурет

B

12. Параллелограмның қабырғалары 3 см және 4 см-ге, бір бұрышы 60°-қа тең. Параллелограмның диагональдарын табыңдар.

13. Параллелограмның диагональдары 6 см және 8 см-ге тең. Олардың арасындағы бұрыш 60°. Параллелограмның қабырғаларын табыңдар.

14. Параллелограмның қабырғалары 2 см және 3 см-ге, бір диагоналі 4 см-ге тең. Оның екінші диагоналін табыңдар.

15. Үшбұрыштың қабырғалары 2 см, 3 см және 4 см-ге тең. Оның үлкен қабырғасына жүргізілген медианасын табыңдар.

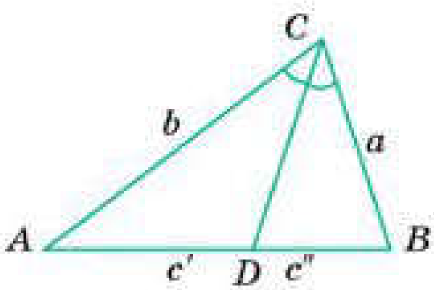
16. Теңбүйірлі үшбұрыштың бүйір қабырғасы 4 см-ге тең. Егер үшбұрыштың бүйір қабырғасына жүргізілген медианасы 3 см-ге тең болса, онда оның табанын табыңдар.

C

17. ABC үшбұрышында $AC = b$, $BC = a$. Үшбұрыштың C төбесінен жүргізілген l_c биссектрисасы келесі формуламен есептелетінін дәлелдеңдер:

$$l_c = \sqrt{ab - c'c''},$$

мұндағы c', c'' — биссектриса AB қабырғасын бөлгендегі кесінділер (16.5-сурет).



16.5-сурет

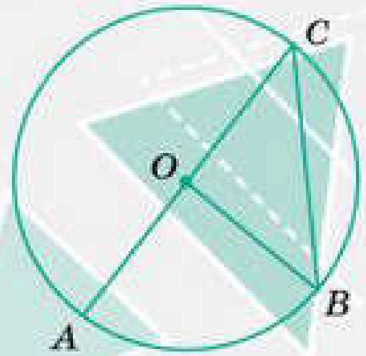
18. ABC үшбұрышында $AB = 10$, $AC = 8$, $BC = 6$. BD биссектрисасын табыңдар.

19. ABC үшбұрышында $AB = 5$, $AC = BC = 20$. AD биссектрисасын табыңдар.

20. ABC үшбұрышында $AC = 12$, $BC = 15$, $AB = 18$. CD биссектрисасын табыңдар.

21. Үшбұрыштың қабырғалары 5, 6, 7-ге тең. Оның ауданын табыңдар.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

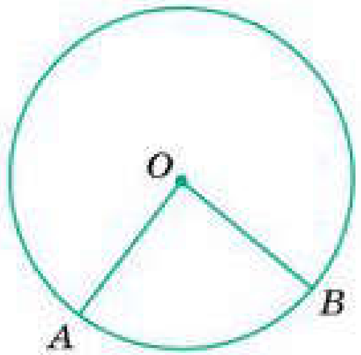


16.6-сурет

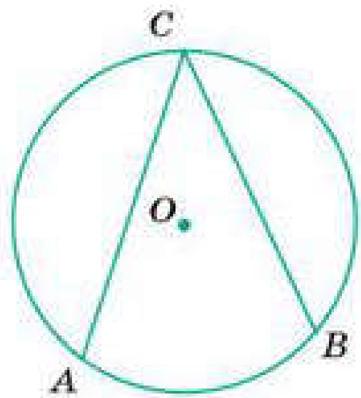
22. Шеңбер ұғымын қайталаңдар.

23. 16.6-суретте центрі O нүктесінде болатын шеңбер кескінделген. ACB бұрышын AOB бұрышы арқылы өрнектеңдер.

17. ШЕҢБЕРГЕ ІШТЕЙ СЫЗЫЛҒАН БҰРЫШТАР



17.1-сурет



17.2-сурет

Берілген шеңберге қатысты бұрыштардың әртүрлі орналасуын қарастырайық.

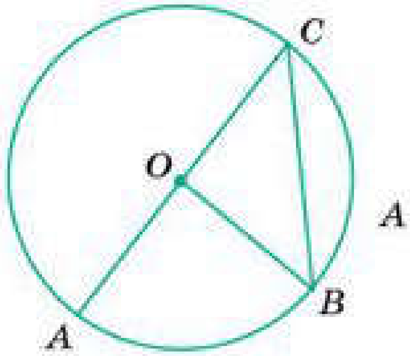
Төбесі шеңбердің центрінде болатын бұрыш ***центрлік бұрыш*** деп аталады (17.1-сурет).

Төбесі шеңбердің бойында жататын, ал қабырғалары шеңберді қиып өтетін бұрыш шеңберге ***іштей сызылған бұрыш*** деп аталады.

17.2-суретте шеңберге іштей сызылған ACB бұрышы кескінделген. Оның C төбесі шеңбердің бойында жатыр, ал бұрыштың қабырғалары шеңберді A және B нүктелерінде қиып өтеді.

Әдетте, бұл сөйлемді басқаша *C бұрышы AB хордасына тіреледі* деп те айтады. A және B нүктелері шеңберді екі доғаға бөледі. Іштей сызылған бұрыштың ішінде жататын AB доғасын іштей сызылған бұрышқа сәйкес доға деп немесе ***іштей сызылған бұрышты керетін доға*** деп атайды.

Шеңбердің доғасы оған сәйкес центрлік бұрышпен өлшенетіні белгілі. Сондықтан іштей сызылған бұрышты өзі керетін доғамен немесе доғаға сәйкес центрлік бұрышпен өлшеуге болады.

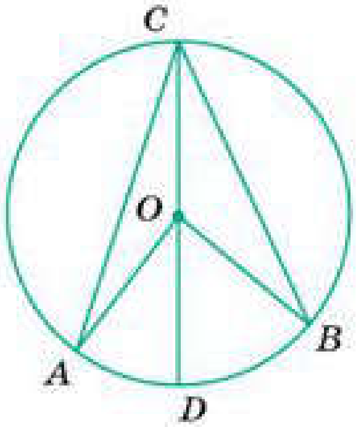


17.3-сурет

Теорема. Шеңберге іштей сызылған бұрыш өзі керетін доғаның центрлік бұрышының жартысына тең болады.

Дәлелдеуі. ACB бұрышы центрі O нүктесі болатын шеңберге іштей сызылған бұрыш болсын. Бұрыштың бір қабырғасы, мысалы AC қабырғасы шеңбердің O центрі арқылы өтетін жағдайды қарастырамыз (17.3-сурет).

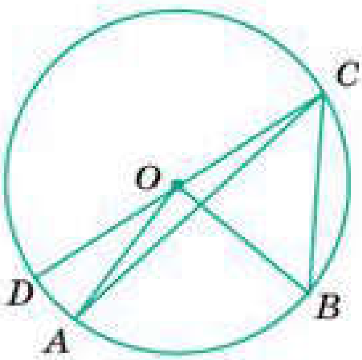
BOC — теңбүйірлі үшбұрыш ($OB = OC$), осыдан $\angle B = \angle C$. AOB бұрышы — BOC үшбұрышының сыртқы бұрышы, сондықтан ол B және C бұрыштарының қосындысына тең болады. Демек, $\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB$.



17.4-сурет

Егер шеңбердің O центрі ACB бұрышының ішінде жатса (17.4-сурет), CD диаметрін жүргізіп, ACD және BCD бұрыштарын қарастырамыз.

Дәлелдеуіміз бойынша $\angle ACD = \frac{1}{2}\angle AOD$, $\angle BCD = \frac{1}{2}\angle BOD$. Осы теңдіктерді қосып, $\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB$ теңдігін аламыз.

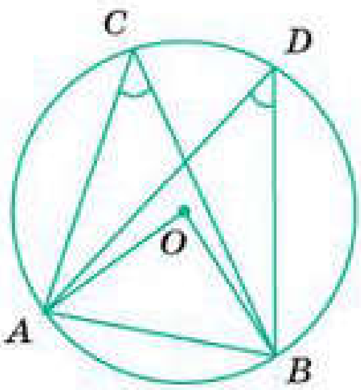


17.5-сурет

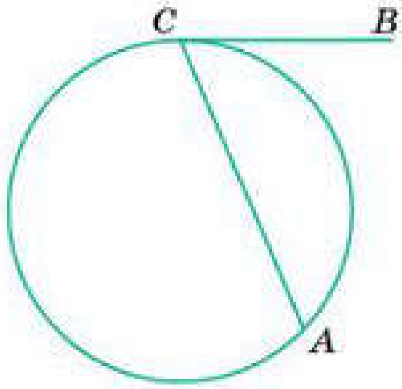
Шеңбердің O центрі ACB бұрышының сыртында жатқан жағдайды өздерің қарастырыңдар. 17.5-суретті пайдаланыңдар.

Салдар. Бір доғаға тірелетін және төбелері доғаны керіп тұрған хорданың бір жағында жататын іштей сызылған бұрыштар өзара тең болады.

Дәлелдеуі. Расында да, егер ACB және ADB іштей сызылған бұрыштары тек бір ғана $\overset{\smile}{AB}$ доғасына тірелетін болса (17.6-сурет), онда олардың бір ғана AOB центрлік бұрышы болады. Дәлелденген теорема бойынша берілген іштей сызылған бұрыштар AOB



17.6-сурет



17.7-сурет

центрлік бұрышының жартысына тең, демек, олар өзара тең болады.

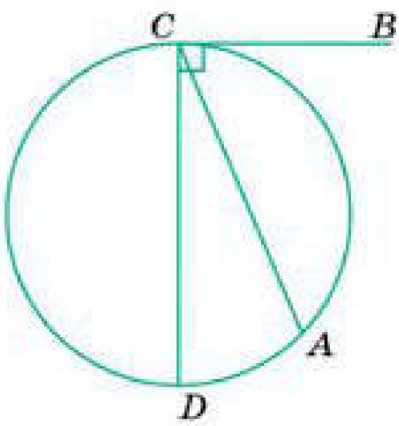
Іштей сызылған бұрыш туралы теореманы келесі түрде тұжырымдауға болады.

Теорема. Шеңберге іштей сызылған бұрыш өзі керетін доғаның жартысымен өлшенеді.

Енді бұрыштың төбесі шеңбердің бойында жататын және бір қабырғасы шеңберді қиып өтетін, ал екінші қабырғасы шеңбермен жанасатын жағдайды қарастырайық (17.7-сурет).

Теорема. Төбесі шеңбердің бойында жататын және бір қабырғасы шеңберді қиып өтетін, ал екінші қабырғасы шеңбермен жанасатын бұрыш оның ішінде шектелген доғаның жартысымен өлшенеді.

Дәлелдеуі. ACB бұрышының C төбесі шеңбердің бойында жатсын, AC қабырғасы шеңберді қиып өтсін, ал BC қабырғасы шеңберді C нүктесінде жанап өтсін. ACB бұрышы сүйір болған жағдайды қарастырайық (17.8-сурет). CD диаметрін жүргіземіз. BCD бұрышы тік болады, демек, ол осы бұрыштың ішінде шектелген шеңбердің доғасының жартысымен өлшенеді. ACD бұрышы іштей сызылған бұрыш, демек, ол осы бұрыштың ішінде шектелген шеңбердің $\overset{\frown}{AD}$ доғасының жартысымен өлшенеді. ACB бұрышы BCD және ACD бұрыштарының айырымына тең болады. Осыдан, ол осы бұрыштардың ішінде шектелген доғалардың жартысымен өлшенеді, яғни $\overset{\frown}{AC}$ доғасының жартысымен өлшенеді.



17.8-сурет

ACB бұрышы доғал болған жағдайды өздерің қарастырыңдар.

?

1. Қандай бұрыш центрлік бұрыш деп аталады?
2. Қандай бұрыш іштей сызылған деп аталады?
3. Шеңбердің доғасы дегеніміз не?
4. Тек бір ғана доғаға тірелген іштей сызылған және центрлік бұрыштар өзара қалай байланысқан?
5. Төбесі шеңбердің бойында жататын және бір қабырғасы шеңберді қиып өтетін, ал екінші қабырғасы шеңбермен жанасатын бұрыш қалай өлшенеді?

Жаттығулар

A

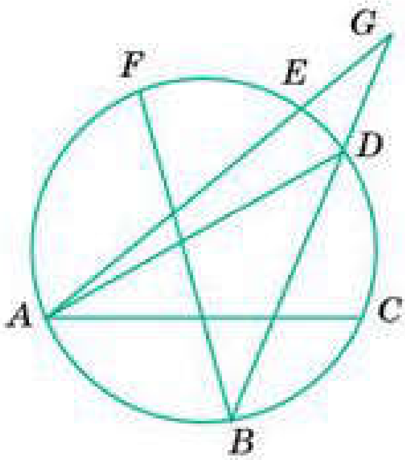
1. 17.9-суреттегі қандай бұрыштар іштей сызылған болады?

2. Шеңбердің диаметріне тірелетін іштей сызылған бұрыш неге тең болады?

3. Шеңбердің бір доғасына тірелген центрлік бұрыш іштей сызылған бұрыштан 35°-қа үлкен. Осы бұрыштарды табыңдар.

4. Шеңбердің бір доғасына тірелген іштей сызылған бұрыш центрлік бұрыштан 20°-қа кіші. Осы бұрыштарды табыңдар.

5. Шеңбердің: 1) $\frac{1}{3}$-іне; 2) $\frac{1}{4}$-іне; 3) $\frac{1}{5}$-іне; 4) $\frac{1}{6}$-іне тең доғаға тірелетін іштей сызылған бұрышты табыңдар.

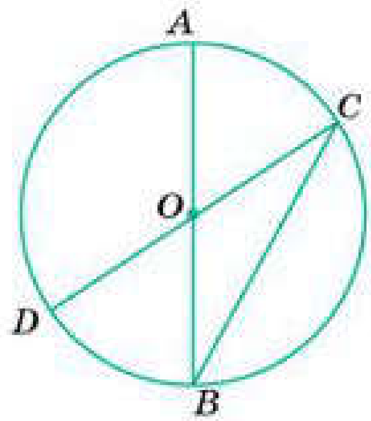


17.9-сурет

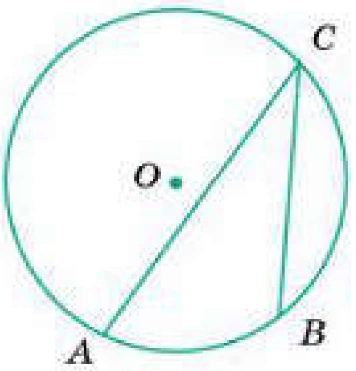
6. Шеңбердің: 1) 10%-ын; 2) 20%-ын; 3) 40%-ын; 4) 50%-ын құрайтын доғаға тірелетін іштей сызылған бұрышты табыңдар.

7. Центрі O нүктесі болатын шеңберде AB және CD – диаметрлер. Іштей сызылған ABC бұрышы 30°-қа тең. AOD центрлік бұрышын табыңдар (17.10-сурет).

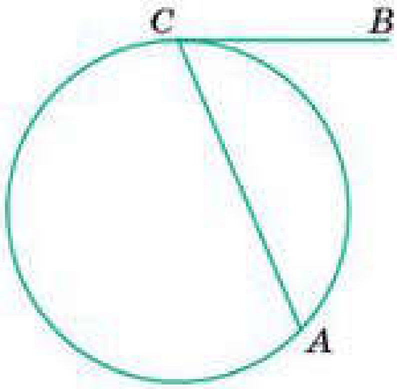
8. Центрі O нүктесі болатын шеңберде AB және CD — диаметрлер. AOD центрлік бұрышы 110°-қа тең. Іштей сызылған ABC бұрышын табыңдар (17.10-сурет).



17.10-сурет



17.11-сурет



17.12-сурет

9. Шеңбердің AC және BC доғалары сәйкесінше $200°$ және $90°$-қа тең (17.11-сурет). Іштей сызылған ACB бұрышын табыңдар.

10. Хорда шеңберді екі доғаға бөледі. Бұл доғалардың шамаларының қатынастары $4 : 5$ болса, осы хорда шеңбердің бойындағы нүктелерден қандай бұрышпен көрінеді?

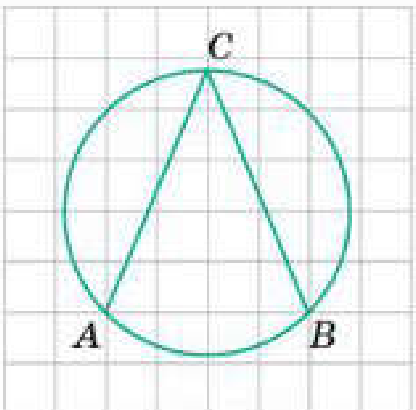
11. AC хордасы шеңбердің доғасын $140°$-қа кереді. Осы хорда мен шеңберге C нүктесінде жүргізілген жанаманың арасындағы ACB бұрышын табыңдар (17.12-сурет).

12. AC хордасы мен шеңберге жүргізілген BC жанамасының арасындағы бұрыш $80°$-қа тең. AC хордасымен керілген доғаның градустық шамасын табыңдар (17.12-сурет).

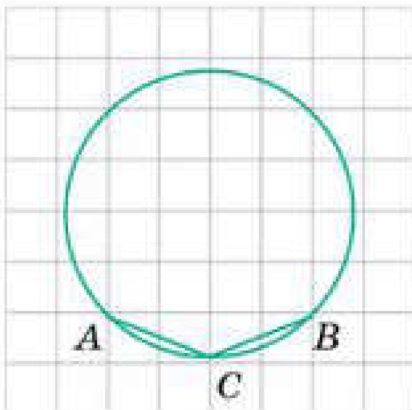
B

13. 17.13-суреттегі ACB бұрышының шамасын табыңдар.

14. 17.14-суреттегі ACB бұрышының шамасын табыңдар.



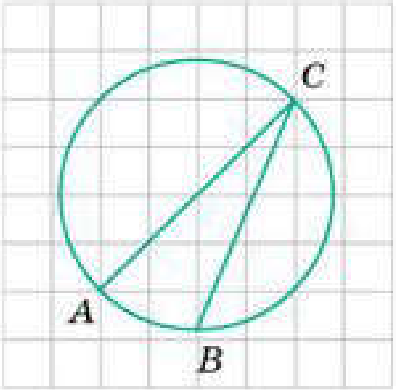
17.13-сурет



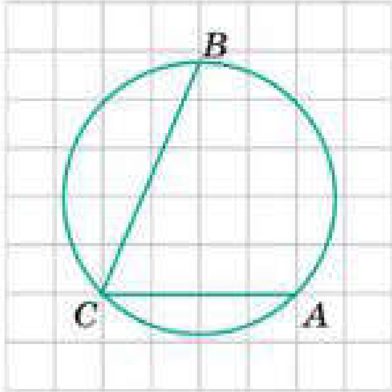
17.14-сурет

15. 17.15-суреттегі ACB бұрышының шамасын табыңдар.

16. 17.16-суреттегі ACB бұрышының шамасын табыңдар.



17.15-сурет

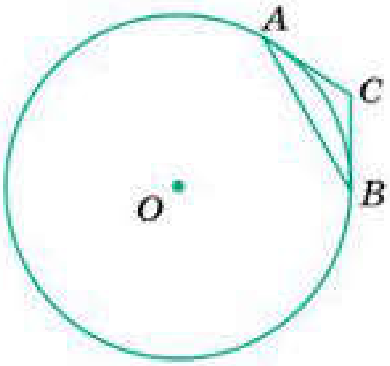


17.16-сурет

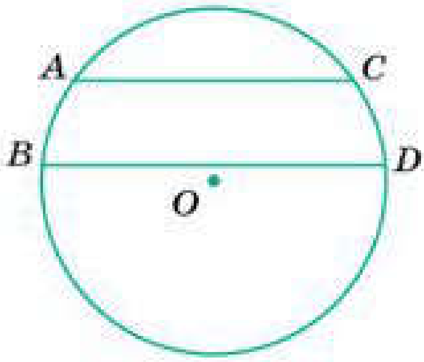
17. Шеңбердің радиусына тең хордаға тірелетін іштей сызылған сүйір бұрышты табыңдар.

18. Шеңбердің радиусына тең хордаға тірелетін іштей сызылған доғал бұрышты табыңдар.

19. Доғаның ұштары арқылы $60°$ болатын жанамалар жүргізілген. Олардың арасындағы бұрышты табыңдар (17.17-сурет).



17.17-сурет



17.18-сурет

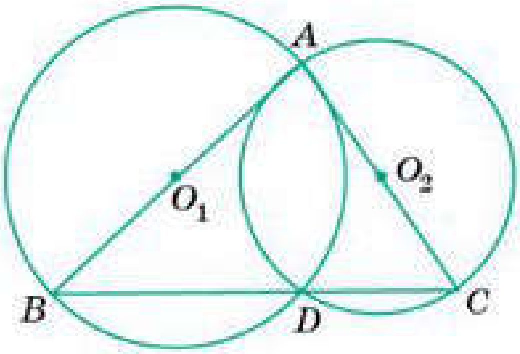
20. Шеңбердің центрін бұрыштық арқылы табу тәсілін көрсетіңдер.

C

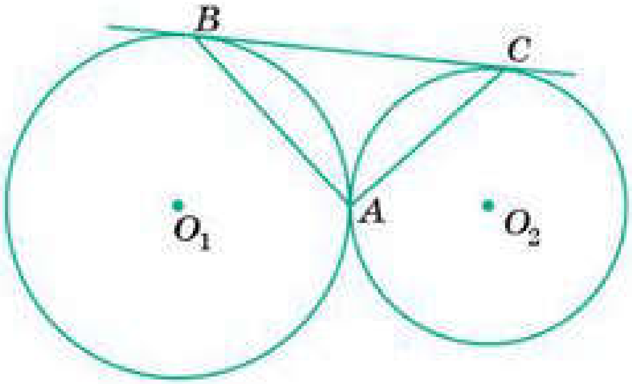
21. Егер шеңбердің AC және BD хордалары параллель болса, онда осы хордалардың арасында шектелген $\smile{AB}$ және $\smile{CD}$ доғалары тең болатынын дәлелдеңдер (17.18-сурет).

22. Екі шеңбердің A қиылысу нүктесінен AB және AC диаметрлері жүргізілген. B, C нүктелері және шеңберлердің екінші қиылысу нүктесі D бір түзудің бойында жататынын дәлелдеңдер (17.19-сурет).

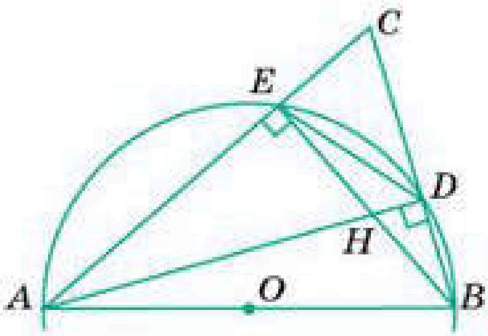
23. A нүктесінде сырттай жанасатын екі шеңберге ортақ BC жанамасы жүргізілген (B және C — жанасу нүктелері). BAC бұрышы тік болатынын дәлелдеңдер (17.20-сурет).



17.19-сурет



17.20-сурет

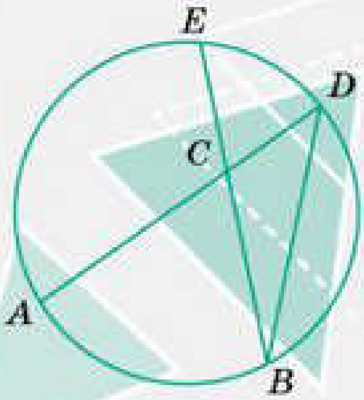


17.21-сурет

24. ABC сүйір бұрышты үшбұрыштың AD және BE биіктіктері жүргізілген және олар H нүктесінде қиылысады (17.21-сурет). ABH және EDH үшбұрыштары ұқсас болатынын дәлелдеңдер.

25. ABC сүйір бұрышты үшбұрыштың AD және BE биіктіктері жүргізілген және олар H нүктесінде қиылысады (17.21-сурет). ABC және DEC үшбұрыштары ұқсас болатынын дәлелдеңдер.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар



17.22-сурет

26. 17.22- суретте шеңбер және C нүктесінде қиылысатын AD мен BE хордалары кескінделген. ACB бұрышын ADB және DBE бұрыштары арқылы өрнектеп көріңдер.

18. ШЕҢБЕРМЕН БАЙЛАНЫСҚАН БҰРЫШТАР

Төбесі шеңбердің ішінде жатқан бұрыш пен шеңбердің орналасуы жағдайын қарастырайық.

Теорема. Төбесі шеңбердің ішінде жатқан бұрыш өзі тірелетін доға мен оған вертикаль бұрышты керетін доғаның қосындысының жартысына тең болады.

Дәлелдеуі. C төбесі шеңбердің ішінде жатқан және қабырғалары шеңберді A және B нүктелерінде қиып өтетін ACB бұрышын қарастырайық. Осы бұрышқа вертикаль бұрыштың қабырғаларының шеңбермен қиылысу нүктелері D, E болсын (18.1-сурет).

BD хордасын жүргіземіз. ACB бұрышы BCD үшбұрышының сыртқы бұрышы болады. Демек, $\angle ACB = \angle CBD + \angle CDB$. Осы теңдіктің оң жақ бөлігіндегі бұрыштар сәйкес доғалардың жартысымен өлшенеді. Ендеше, $\angle ACB = \frac{1}{2}(\smile AB + \smile DE)$. ◻

Салдар. Төбесі шеңбердің ішінде жатқан бұрыш сол бір доғаға тірелетін центрлік бұрыштың жартысынан үлкен болады.

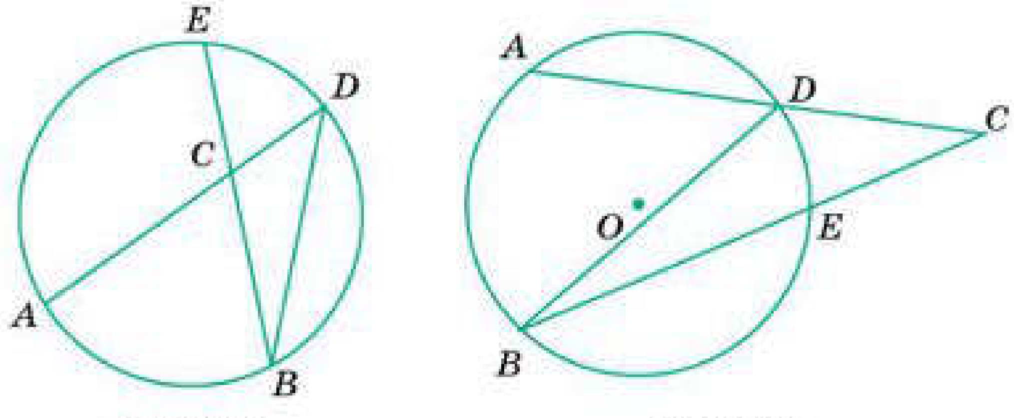
Осыны өздерің дәлелдеңдер.

Төбесі шеңбердің сыртында жатқан бұрыш пен шеңбердің орналасуы жағдайын қарастырайық.

Теорема. Төбесі шеңбердің сыртында жататын және қабырғалары шеңберді қиып өтетін бұрыш оның қабырғаларымен шектелген екі доғаның айырымының жартысына тең болады.

Дәлелдеуі. C төбесі шеңберден тыс жатқан және қабырғалары шеңберді сәйкесінше A, D және B, E нүктелерінде қиып өтетін ACB бұрышын қарастырайық (18.2-сурет).

BD хордасын жүргіземіз. ADB бұрышы BCD үшбұрышының сыртқы бұрышы болады. Осыдан $\angle ACB = \angle ADB - \angle CBD$. Осы



18.1-сурет 18.2-сурет

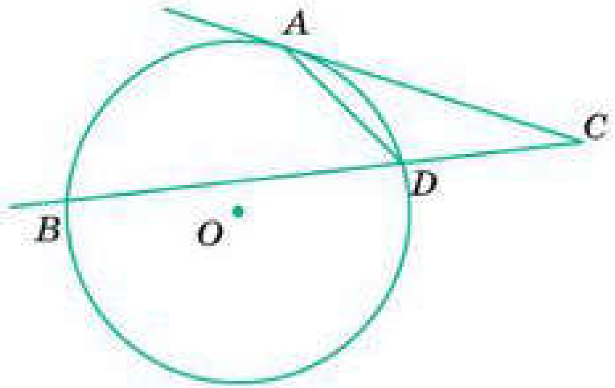
теңдіктің оң жақ бөлігіндегі бұрыштар сәйкесінше доғаларының жартысымен өлшенеді. Демек, $\angle ACB = \frac{1}{2}(\smile{AB} - \smile{DE})$.

Салдар. Төбесі шеңберден тыс жатқан және қабырғалары шеңберді қиып өтетін бұрыш оның ішінде шектелген үлкен доғаға тірелетін центрлік бұрыштың жартысынан кіші болады.

Осыны өздерің дәлелдеңдер.

Теорема. Төбесі шеңберден тыс жатқан және бір қабырғасы шеңберді қиып өтетін, ал екінші қабырғасы шеңберді жанайтын бұрыш оның қабырғаларымен шектелген екі доғаның айырымының жартысына тең болады.

Дәлелдеуі. C төбесі шеңберден тыс жатқан және AC қабырғасы шеңберді A нүктесінде жанайтын, ал BC қабырғасы шеңберді сәйкесінше B және D нүктелерінде қиып өтетін ACB бұрышын қарастырайық (18.3-сурет).



18.3-сурет

AD хордасын жүргіземіз. ADB бұрышы ACD үшбұрышының сыртқы бұрышы болады. Осыдан $\angle ACB = \angle ADB - \angle CAD$. Осы теңдіктің оң жақ бөлігіндегі бұрыштар сәйкес доғаларының жартысымен өлшенеді. Демек, $\angle ACB = \frac{1}{2}(\smile{AB} - \smile{AD})$.

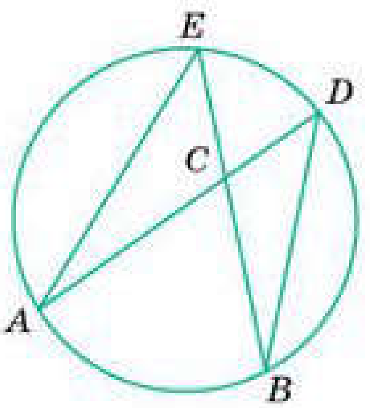
?

1. Төбесі шеңбердің ішінде жатқан бұрыш қалай өлшенеді?
2. Төбесі шеңберден тыс жатқан және қабырғалары шеңберді қиып өтетін бұрыш қалай өлшенеді?
3. Төбесі шеңберден тыс жатқан және бір қабырғасы шеңберді қиып өтетін, ал екінші қабырғасы шеңберді жанайтын бұрыш қалай өлшенеді?

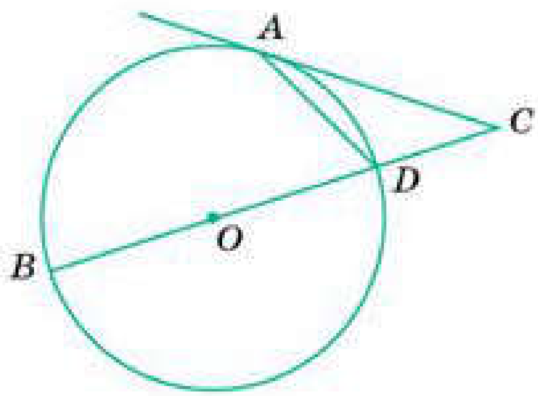
Жаттығулар

А

1. Шеңберге іштей сызылған ADB және DAE бұрыштары сәйкесінше $50°$ және $25°$-қа тең. Қиылысқан AD және BE хордаларының арасындағы ACB бұрышын табыңдар (18.4-сурет).
2. Шеңбердің AB және DE доғалары сәйкесінше $85°$ және $45°$-қа тең. C нүктесінде қиылысқан AD және BE хордаларының арасындағы ACB бұрышын табыңдар (18.4-сурет).
3. Шеңберге іштей сызылған ADB және DBE бұрыштары градустық өлшемдері сәйкесінше $118°$ және $42°$-қа тең болатын доғаларға тіреледі (18.2-сурет). ACB бұрышын табыңдар.
4. ACB бұрышы $42°$-қа тең. Шеңбердің AB доғасының градустық өлшемі $124°$-қа тең. DBE бұрышын табыңдар (18.2-сурет).
5. 18.5-суреттегі ACB бұрышының CA қабырғасы шеңберді жанайды, CB қабырғасы шеңбердің центрі арқылы өтеді, ал оның қабырғаларымен шектелген AD доғасы $50°$-қа тең. Осы бұрышты табыңдар.
6. 18.5-суреттегі ACB бұрышының CA қабырғасы шеңберді жанайды, CB қабырғасы шеңбердің центрі арқылы өтеді, ал оның қабырғаларымен шектелген AB доғасы $125°$-қа тең. Осы бұрышты табыңдар.
7. 18.5-суреттегі ACB бұрышы $38°$-қа тең. Оның CA қабырғасы шеңберді жанайды, CB қабырғасы шеңбердің центрі арқылы өтеді. Осы бұрыштың қабырғаларымен шектелген AB доғасының градустық шамасын табыңдар.



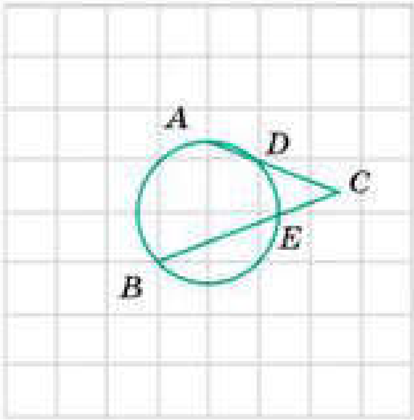
18.4-сурет



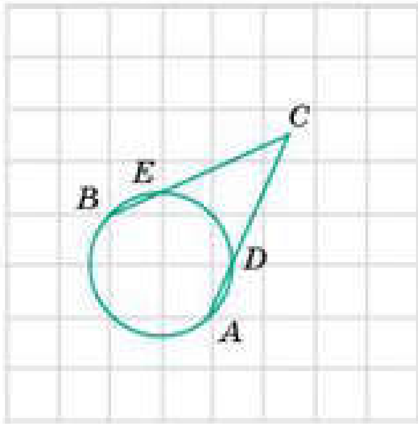
18.5-сурет

B

8. 18.6-суреттегі ACB бұрышының шамасын табыңдар.



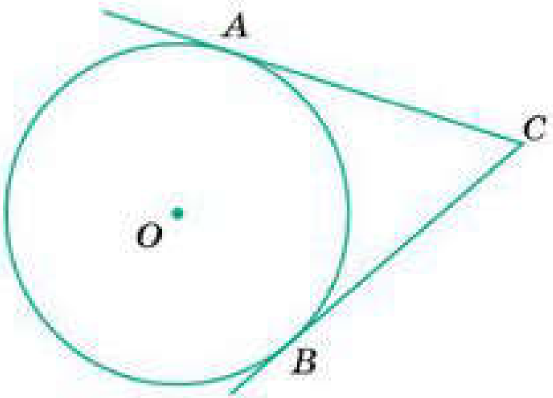
18.6-сурет



18.7-сурет

9. 18.7-суреттегі ACB бұрышының шамасын табыңдар.

C



18.8-сурет

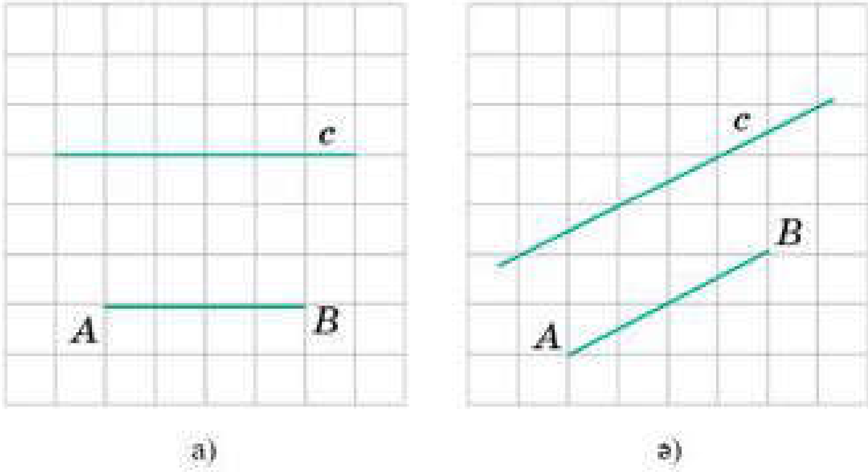
10. Бір нүктеден шеңберге жүргізілген екі жанаманың арасындағы бұрыш оның қабырғаларымен шектелген екі доғаның айырымының жартысына тең болатынын дәлелдеңдер (18.8-сурет).

11. ACB бұрышына іштей шеңбер сызылған. Жанасу нүктелері шеңберді екі доғаға бөледі. Бұл доғалардың шамаларының қатынасы 2 : 1. ACB бұрышының шамасын табыңдар (18.8-сурет).

12. Берілген A және B нүктелері үшін ACB бұрышы тік болатындай C нүктелерінің геометриялық орнын табыңдар.

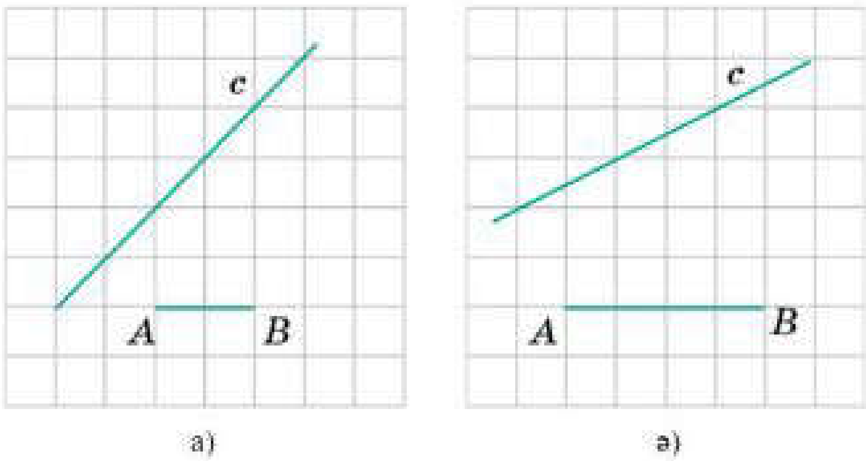
13. Берілген A және B нүктелері үшін ACB бұрышы: 1) сүйір; 2) доғал болатындай C нүктелерінің геометриялық орнын табыңдар.

14. 18.9-суреттегі AB кесіндісі ең үлкен бұрышпен көрінетіндей c түзуінің бойынан C нүктесін көрсетіңдер.



18.9-сурет

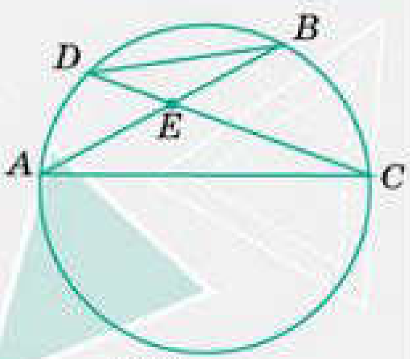
15. 18.10-суреттегі AB кесіндісі ең үлкен бұрышпен көрінетіндей c түзуінің бойынан C нүктесін көрсетіңдер.



18.10-сурет

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

16. 18.11-суретте шеңбер және E нүктесінде қиылысатын AB және CD хордалары кескінделген. ACE және DBE үшбұрыштары ұқсас болатынын дәлелдеңдер.



18.11-сурет

19. ШЕҢБЕРМЕН БАЙЛАНЫСҚАН КЕСІНДІЛЕР

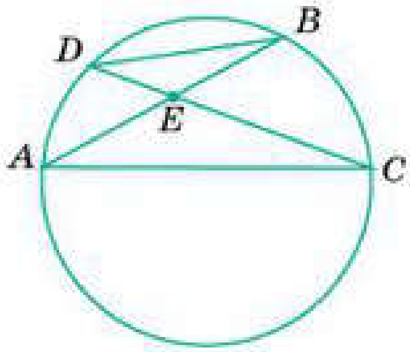
Шеңбермен байланысқан кесінділердің арасындағы қатынастарды анықтау үшін үшбұрыштардың ұқсастығын қолданамыз.

Шеңбердің бойында жатқан екі нүктені қосатын кесінді ***хорда*** деп аталады. Шеңбердің центрі арқылы өтетін хорда осы шеңбердің ***диаметрі*** деп аталады.

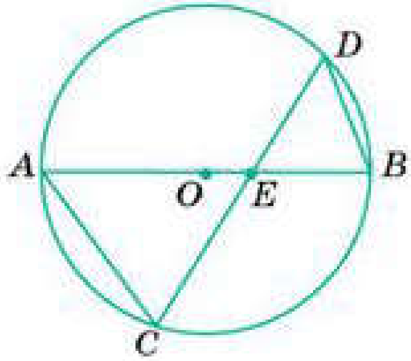
1-теорема . Егер шеңбердің екі хордасы қиылысса, онда олардың әрқайсысының қиылысу нүктесімен бөлінген кесінділерінің ұзындықтарының көбейтінділері тең болады.

Дәлелдеуі. Шеңбердің AB және CD хордалары E нүктесінде қиылысатын болсын. AC және BD кесінділерін жүргіземіз (19.1-сурет). BAC және BDC бұрыштары бір доғаға тірелетін іштей сызылған бұрыштар ретінде тең болады. Осыған ұқсас ACD және ABD бұрыштары бір доғаға тірелетін іштей сызылған бұрыштар ретінде тең болады. Демек, ACE және DBE үшбұрыштары ұқсас болады. Ендеше $\frac{AE}{DE}=\frac{CE}{BE}$. Осыдан $AE \cdot BE = CE \cdot DE$, яғни бір хорданың кесінділерінің көбейтіндісі екінші хорданың кесінділерінің көбейтіндісіне тең болады. $\square$

Дербес жағдайда, шеңбердің ішінде жатқан нүкте арқылы жүргізілген хордалардың кесінділерінің көбейтіндісі тұрақты шама болады және осы нүкте арқылы жүргізілген диаметрдің кесінділерінің көбейтіндісіне тең болады (19.2-сурет).



19.1-сурет

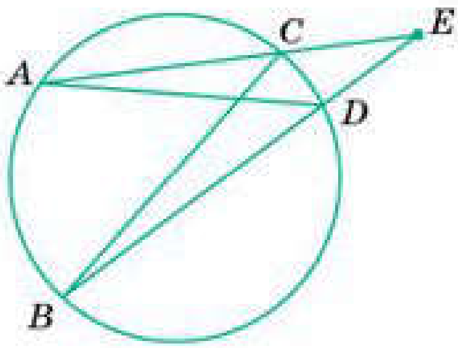


19.2-сурет

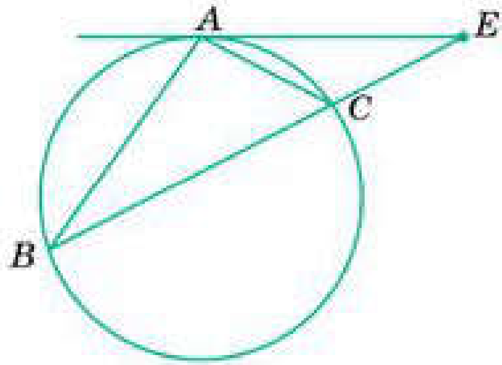
2-теорема. Егер шеңберден тыс жатқан нүкте арқылы осы шеңберге екі қиюшы жүргізілсе, онда әрбір қиюшы ұзындығының оның сыртқы бөлігіне көбейтінділері тең болады.

Дәлелдеуі. Шеңберден тыс жатқан E нүктесі арқылы осы шеңберге EA және EB қиюшылары жүргізілсін (19.3-сурет). Олардың шеңбермен қиылысу нүктелерін C және D деп белгілейміз. $AE \cdot CE = BE \cdot DE$ екенін дәлелдейік. AD және BC хордаларын жүргіземіз. CAD және CBD бұрыштары бір доғаға тірелетін іштей сызылған бұрыштар ретінде тең болады. Демек, ADE және BCE үшбұрыштары ұқсас болады. Ендеше $\frac{AE}{BE}=\frac{DE}{CE}$. Осыдан аламыз:

$$AE \cdot CE = BE \cdot DE. \square$$



19.3-сурет



19.4-сурет

3-теорема. Егер шеңберден тыс жатқан нүкте арқылы осы шеңберге жанама мен қиюшы жүргізілсе, онда жанама кесіндісінің квадраты қиюшының оның сыртқы бөлігіне көбейтіндісіне тең болады.

Дәлелдеуі. Шеңберден тыс жатқан E нүктесінен EA жанама және EB қиюшы жүргізілсін (19.4-сурет). Қиюшының шеңбермен екінші қиылысу нүктесін C деп белгілейміз. $AE^2 = BE \cdot CE$ екенін дәлелдейік. AB және AC хордаларын жүргіземіз. EAC бұрышы AC доғасының жартысымен өлшенеді, демек, ABC бұрышына тең болады. Ендеше, ABE және CAE үшбұрыштары ұқсас болады. Демек, $\frac{AE}{CE} = \frac{BE}{AE}$. Осыдан аламыз: $AE^2 = BE \cdot CE$.

?

1. Шеңбердің қиылысқан хордалары кесінділерінің көбейтінділері туралы не айтуға болады?
2. Бір нүктеден шеңберге жүргізілген қиюшылардың кесінділерінің көбейтінділері туралы не айтуға болады?
3. Бір нүктеден шеңберге жүргізілген қиюшы кесінділері мен жанама кесінділерінің арасында қандай қатынас болады?

Жаттығулар

A

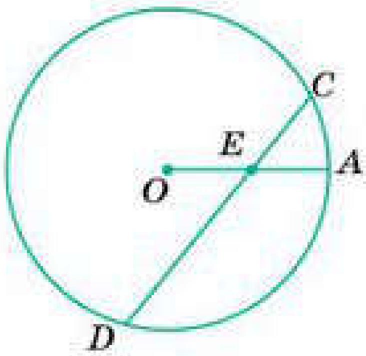
1. Шеңбердің AB және CD хордалары E нүктесінде қиылысады (19.1-сурет), $AE = 6$, $DE = 4$, $CE = 8$. BE кесіндісін табыңдар.
2. Шеңберден тыс жатқан E нүктесі арқылы екі сәуле жүргізілген және олар осы шеңберді сәйкесінше A, C және B, D нүктелерінде қиып өтеді (19.3-сурет). $AE = 18$, $CE = 7$, $DE = 6$. BE кесіндісін табыңдар.
3. Шеңберден тыс жатқан E нүктесі арқылы екі сәуле жүргізілген және олар осы шеңберді сәйкесінше A, C және B, D нүктелерінде

қиып өтеді (19.3-сурет). $AE = 12$, $CE = 5$, $BE = 15$. DE кесіндісін табыңдар.

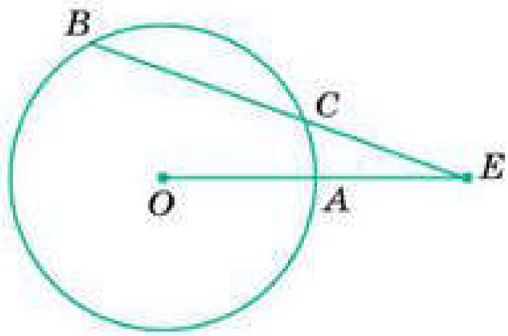
4. Шеңберден тыс жатқан E нүктесі арқылы екі сәуле жүргізілген және олардың біреуі шеңбермен A нүктесінде жанасады, екіншісі шеңберді B және C нүктелерінде қиып өтеді (19.4-сурет). $BE = 9$, $CE = 4$. AE кесіндісін табыңдар.
5. Шеңберден тыс жатқан E нүктесі арқылы екі сәуле жүргізілген және олардың біреуі шеңбермен A нүктесінде жанасады, екіншісі шеңберді B және C нүктелерінде қиып өтеді (19.4-сурет). $AE = 12$, $BE = 18$. CE кесіндісін табыңдар.

B

6. Шеңбердің OA радиусы 2-ге тең. Оның ортасы E нүктесі арқылы CD хордасы жүргізілген (19.5-сурет). CE және DE кесінділерінің көбейтіндісін табыңдар.
7. Шеңбердің OA радиусы 8-ге тең. Оның ортасы E нүктесі арқылы CD хордасы жүргізілген (19.5-сурет). $CE = 4,8$. DE кесіндісін табыңдар.
8. Шеңбердің радиусы 1 см-ге тең. Радиустың созындысы бойынан шеңбердің O центрінен 2 см қашықтықта E нүктесі алынған (19.6-сурет). E нүктесі арқылы шеңберді B және C нүктелерінде қиып өтетін сәуле жүргізілген. BE және CE кесінділерінің көбейтіндісін табыңдар.
9. Шеңбердің радиусы 4 см-ге тең. Радиустың созындысы бойынан шеңбердің O центрінен 8 см қашықтықта E нүктесі алынған. E нүктесі арқылы шеңберді B және C нүктелерінде қиып өтетін сәуле жүргізілген (19.6-сурет). $BE = 10$ см. CE кесіндісін табыңдар.



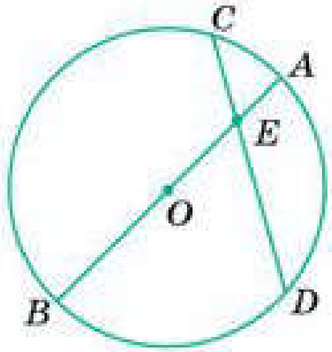
19.5-сурет



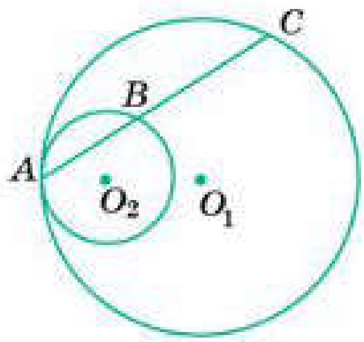
19.6-сурет

C

10. Шеңбердің радиусы 11 см-ге тең. E нүктесі шеңбердің центрінен 7 см қашықтықта жатыр. E нүктесі арқылы 18 см-ге тең CD хордасы жүргізілген. CD хордасының E нүктесімен бөлінетін кесінділерін табыңдар (19.7-сурет).



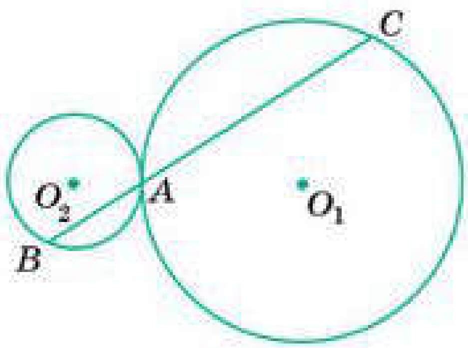
19.7-сурет



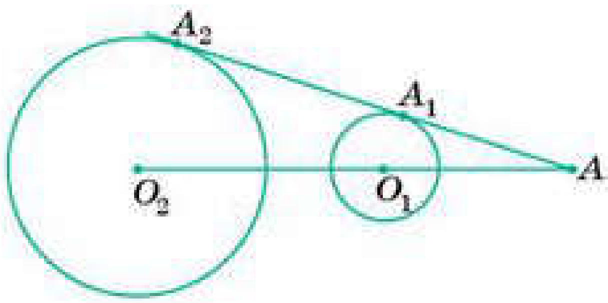
19.8-сурет

11. 19.8-суретте центрлері O_1, O_2 және радиустары 10 және 4 болатын екі шеңбер A нүктесінде іштей жанасады. A нүктесі арқылы өтетін түзу шеңберлерді B және C нүктелерінде қиып өтеді. $AB = 6$. AC кесіндісін табыңдар.

12. 19.9-суретте центрлері O_1, O_2 және радиустары 10 және 4 болатын екі шеңбер A нүктесінде сырттай жанасады. A нүктесі арқылы өтетін түзу шеңберлерді B және C нүктелерінде қиып өтеді. $AC = 15$. AB кесіндісін табыңдар.



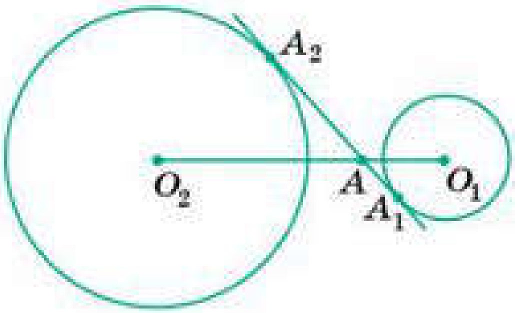
19.9-сурет



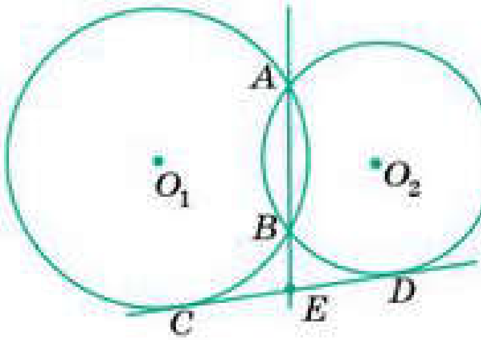
19.10-сурет

13. 19.10-суретте түзу центрлері O_1, O_2 және радиустары 4 пен 10 болатын екі шеңбермен сәйкесінше A_1, A_2 нүктелерінде жанасады. $AA_1 = 12$. AA_2 кесіндісін табыңдар.

14. 19.11-суретте түзу центрлері O_1, O_2 және радиустары 4 пен 10 болатын екі шеңбермен сәйкесінше A_1, A_2 нүктелерінде жанасады. $AA_1 = 3$. AA_2 кесіндісін табыңдар.



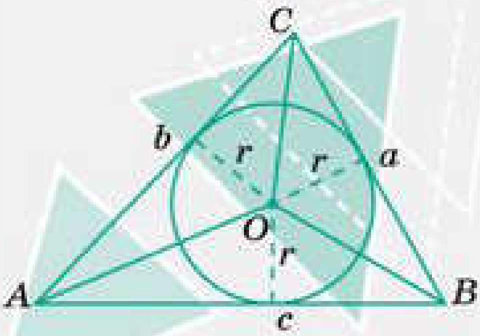
19.11-сурет



19.12-сурет

15. Екі шеңбер A және B нүктелерінде қиылысады. Түзу осы шеңберлерді C және D нүктелерінде жанайды. AB түзуі CD кесіндісін оның E ортасында қиып өтетінін дәлелдеңдер (19.12-сурет).

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар



19.13-сурет

16. Үшбұрыштың ауданын табу формуласын қайталаңдар.

17. 19.13-суретті пайдаланып, ABC үшбұрышына іштей сызылған шеңбердің радиусын оның қабырғалары мен ауданы арқылы өрнектеңдер.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

1. ABC үшбұрышында $AB = 3$, $\angle A = 45°$, $\angle C = 60°$. BC қабырғасын табыңдар.

A) $\sqrt{6}$; B) $\sqrt{3}$; C) $2\sqrt{3}$; D) $2\sqrt{2}$.

2. ABC үшбұрышында $BC = 2$, $AC = 2\sqrt{2}$ және $\angle A = 45°$. B бұрышын табыңдар.

A) 30°; B) 45°; C) 60°; D) 90°.

3. ABC үшбұрышында $\angle A = 120°$, $\angle B = 30°$. Оның $AC : BC$ қабырғаларының қатынасын табыңдар.

A) $\sqrt{3} : 1$; B) $1 : \sqrt{3}$; C) $2 : \sqrt{3}$; D) $3 : \sqrt{3}$.

4. ABC үшбұрышында $AB = 4$, $BC = 3$, $AC = 5$. Осы үшбұрыштың CD биссектрисасы AB қабырғасын бөлетін кесінділерді табыңдар.

A) $AD = 3$, $DB = 1$; B) $AD = 2$, $DB = 2$;
C) $AD = 2{,}5$, $DB = 1{,}5$; D) $AD = 1{,}5$, $DB = 2{,}5$.

5. ABC үшбұрышында $AB = 3$, $AC = 2$, $\angle A = 60°$. Оның үшінші қабырғасын табыңдар.

A) $\sqrt{7}$; B) $\sqrt{6}$; C) $\sqrt{5}$; D) $\sqrt{3}$.

6. ABC үшбұрышында $AC = BC = 1$, $AB = \sqrt{3}$. C бұрыш ын табыңдар.

A) 30°; B) 60°; C) 120°; D) 150°.

7. Үшбұрыштың қабырғалары 3, 4 және 5. Оның үлкен қабырғасына жүргізілген медианасын табыңдар.

A) 2; B) 2,5; C) 3; D) 3,5.

8. Шеңбердің $\frac{2}{5}$-сіне тең доғаға тірелетін іштей сызылған бұрышты табыңдар.

A) 54°; B) 60°; C) 66°; D) 72°.

9. Шеңбердің 30%-ын құрайтын доғаға тірелетін іштей сызылған бұрышты табыңдар.

A) 54°; B) 60°; C) 66°; D) 72°.

10. Шеңбердің $\smile{AC}$ және $\smile{BC}$ доғалары сәйкесінше 200° және 100°. Іштей сызылған ACB бұрышын табыңдар.

A) 30°; B) 40°; C) 50°; D) 60°.

11. Хорда шеңберді екі доғаға бөледі. Бұл доғалардың шамаларының қатынасы $2:3$. Осы хорда шеңбердің бойындағы нүктелерден қандай бұрышпен көрінеді?

A) $45°$ және $135°$; B) $60°$ және $120°$;
C) $72°$ және $108°$; D) $80°$ және $100°$.

12. AB хордасы шеңбердің доғасын $100°$-қа кереді. Осы хорда мен B нүктесі арқылы шеңберге жүргізілген жанаманың арасындағы бұрышты табыңдар.

A) $20°$; B) $30°$;
C) $40°$; D) $50°$.

13. Шеңбердің AB және CD доғалары сәйкесінше $90°$ және $60°$-қа тең. Қиылысқан AC және BD хордаларының арасындағы бұрышты табыңдар.

A) $30°$; B) $45°$;
C) $60°$; D) $75°$.

14. ACD бұрышының CA қабырғасы шеңбермен A нүктесінде жанасады, CB қабырғасы шеңбердің центрі арқылы өтеді, ал бұрыштың ішінде шектелген AB доғасы $120°$-қа тең. ACD бұрышын табыңдар.

A) $30°$; B) $45°$;
C) $60°$; D) $120°$.

15. Шеңбердің радиусы 6-ға тең. Оның ортасы C нүктесі арқылы AB хордасы жүргізілген. AC және BC кесінділерінің көбейтіндісін табыңдар.

A) 24; B) 27;
C) 32; D) 36.

16. Шеңбердің радиусы 1 см-ге тең. Радиустың созындысы бойынан шеңбердің центрінен 3 см қашықтықта C нүктесі алынған. C нүктесі арқылы шеңберді A және B нүктелерінде қиып өтетін сәуле жүргізілген. AC және BC кесінділерінің көбейтіндісін табыңдар.

A) 4; B) 6;
C) 8; D) 12.

17. Шеңбердің AB және CD хордалары E нүктесінде қиылысады. $AE = 2$, $DE = 4$, $CE = 3$. BE кесіндісін табыңдар.

A) 4; B) 6;
C) 8; D) 12.

18. Шеңбердің радиусы 3 см-ге тең. Берілген нүктеден шеңберге жүргізілген жанаманың кесіндісінің ұзындығы 4 см-ге тең. Осы нүктеден шеңбердің центріне дейінгі қашықтықты табыңдар.

A) 4 см; B) 5 см;
C) 6 см; D) 7 см.

19. Шеңбердің радиусы 5 см-ге тең. Нүкте шеңбердің центрінен 13 см қашықтықта жатыр. Осы нүктеден шеңберге жүргізілген жанаманың кесіндісінің ұзындығын табыңдар.

A) 6 см; B) 8 см;
C) 10 см; D) 12 см.

20. Шеңберден тыс жатқан C нүктесі арқылы екі сәуле жүргізілген. Олардың біреуі шеңберді D нүктесінде жанайды, ал екіншісі шеңберді A және B нүктелерінде қиып өтеді. Жанаманың CD кесіндісінің ұзындығын табыңдар, мұндағы $CA = 3$, $CB = 12$.

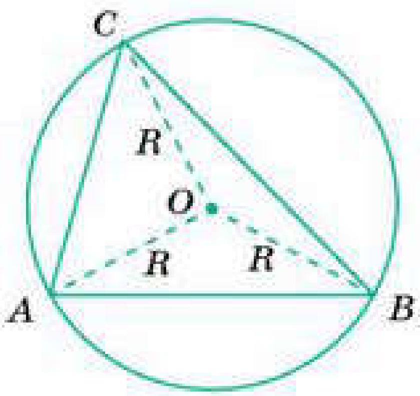
A) 6; B) 8;
C) 9; D) 12.

4-тарау

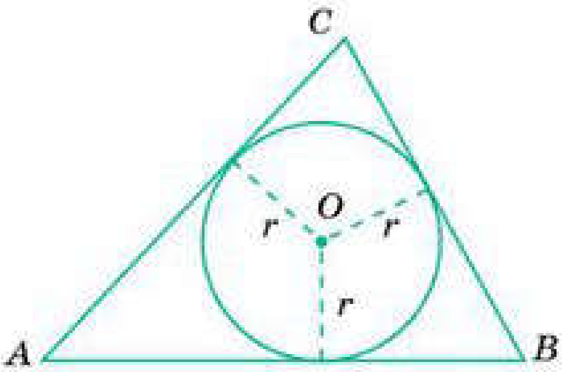
ШЕҢБЕР. КӨПБҰРЫШТАР

20. ҮШБҰРЫШТАР ЖӘНЕ ШЕҢБЕР

Егер үшбұрыштың барлық төбелері шеңбердің бойында жатса, онда үшбұрыш шеңберге ***іштей сызылған*** деп аталады. Бұл жағдайда шеңбер үшбұрышқа ***сырттай сызылған*** деп аталады (20.1-сурет).



20.1-сурет



20.2-сурет

Егер үшбұрыштың барлық қабырғалары шеңбермен жанасатын болса, онда үшбұрыш шеңберге ***сырттай сызылған*** деп аталады. Бұл жағдайда шеңбер үшбұрышқа ***іштей сызылған*** деп аталады (20.2-сурет).

7-сыныпта келесі теоремалар дәлелденген болатын.

Теорема . Кез келген үшбұрышқа сырттай шеңбер сызуға болады. Оның центрі үшбұрыштың қабырғаларына жүргізілген орта перпендикулярлардың қиылысу нүктесі болады.

Теорема. Кез келген үшбұрышқа іштей шеңбер сызуға болады. Оның центрі үшбұрыштың биссектрисаларының қиылысу нүктесі болады.

Енді іштей және сырттай сызылған шеңберлердің радиустарын табу формулаларын шығарамыз. Алдымен синустар теоремасын анықтап алайық.

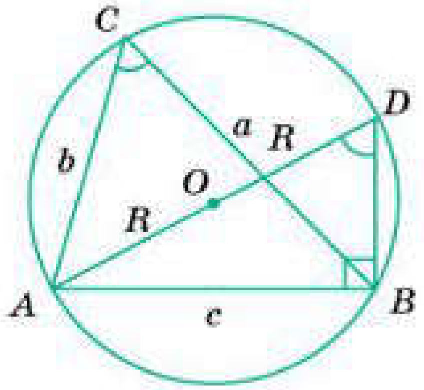
Теорема (Синустар теоремасы). Үшбұрыштың қабырғаларының оларға қарсы жатқан бұрыштардың синустарына қатынастары осы үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің диаметріне тең болады.

Дәлелдеуі. ABC үшбұрышында $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

теңдігін дәлелдейік. Мұндағы R — үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің радиусы.

Осы шеңберге іштей сызылған ABD үшбұрышын қарастырайық. Оның AD қабырғасы шеңбердің O центрі арқылы өтсін (20.3-сурет). C және D бұрыштары бір доғаға тіреледі, демек олар тең болады. ABD бұрышы шеңбердің жартысына тіреледі, демек ол 90°-қа тең болады. Сонымен, $\frac{AB}{\sin C} = \frac{AB}{\sin D} = AD$. Осыдан $\frac{c}{\sin C} = 2R$ теңдігі орынды болады.



20.3-сурет

Осыған ұқсас $\frac{a}{\sin A} = 2R$, $\frac{b}{\sin B} = 2R$ теңдіктері дәлелденеді.

Осыны өздерің орындаңдар.

Теорема. Қабырғалары $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ болатын ABC үшбұрышына сырттай сызылған шеңбердің R радиусы үшін

$$R = \frac{abc}{4S},$$

формуласы орынды болады. Мұндағы S — үшбұрыштың ауданы.

Дәлелдеуі. Қабырғалары $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ болатын ABC үшбұрышы үшін синустар теоремасы бойынша

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

мұндағы R — үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің радиусы.

Осы теңдіктен $\sin C$-ны өрнектейміз:

$$\sin C = \frac{c}{2R}.$$

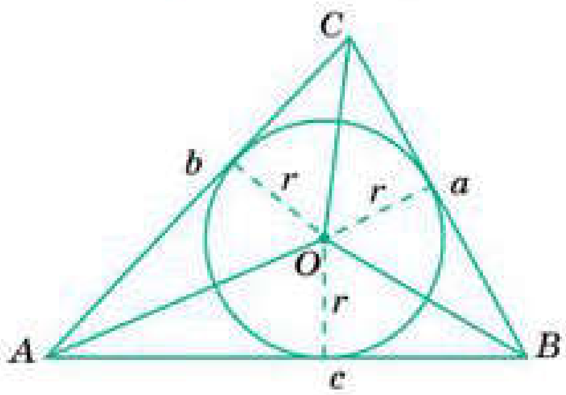
Осы өрнекті үшбұрыштың ауданын табудың $S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin C$ формуласына қоя отырып, аламыз:

$$S = \frac{abc}{4R}.$$

Осыдан

$$R = \frac{abc}{4S}.$$

Енді іштей сызылған шеңбердің радиусы үшін формуланы қорытып шығарайық.



20.4-сурет

Теорема. Қабырғалары $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ болатын ABC үшбұрышына іштей сызылған шеңбердің r радиусы үшін

$$r = \frac{2S}{a + b + c}$$

формуласы орынды болады. Мұндағы S – үшбұрыштың ауданы.

Дәлелдеуі. ABC үшбұрышына іштей сызылған радиусы r болатын шеңбердің центрін O деп белгілейміз. AO, BO, CO кесінділерін жүргіземіз (20.4-сурет).

ABC үшбұрышының S ауданы ABO, ACO, BCO үшбұрыштарының аудандарының қосындысына тең болады. Осы үшбұрыштардың биіктіктері оған іштей сызылған шеңбердің радиустары болатынын ескеріп, аламыз:

$$S = \frac{1}{2}c \cdot r + \frac{1}{2}b \cdot r + \frac{1}{2}a \cdot r = \frac{1}{2}(a + b + c) \cdot r.$$

Осыдан

$$r = \frac{2S}{a + b + c}.$$

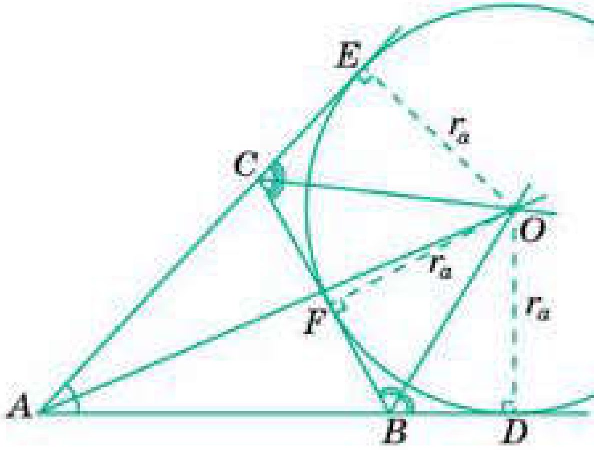
ABC үшбұрышының жарты периметрін p деп белгілейміз, яғни $p = \frac{a + b + c}{2}$. Сонда алынған формуланы келесі түрде жазуға болады: $r = \frac{s}{p}$.

*Үшбұрышқа сырт ынан сызылған шеңбер ұғымын қарастырайық.

Егер шеңбер үшбұрыштың бір қабырғасымен және қалған екі қабырғасының созындыларымен жанасатын болса, онда шеңбер үшбұрышқа ***сыртынан сызылған*** деп аталады.

Теорема. Кез келген үшбұрышқа сыртынан сызылған үш шеңбері болады. Әрбір қабырғасына сыртынан сызылған шеңбердің центрі үшбұрыштың осы қабырғасына қарсы жатқан бұрышының биссектрисасы мен қалған екі бұрышына сыртқы бұрыштарының биссектрисаларының қиылысу нүктесі болады.

Дәлелдеуі . ABC үшбұрышын қарастырайық. A бұрышының биссектрисасы және B мен C бұрыштарына сыртқы бұрыштарының биссектрисалары BC қабырғасы мен AB және AC қабырғаларының созындыларын жанайтын шеңбердің центрі болатын бір нүктеде қиылысатынын дәлелдейік (20.5-сурет) .



20.5-сурет

CBD сыртқы бұрышының биссектрисасы оның BC және BD қабырғаларынан бірдей қашықтықта жататын бұрыштың ішкі нүктелерінің геометриялық орны болады. BCE сыртқы бұрышының биссектрисасы оның CB және CE қабырғаларынан бірдей қашықтықта жататын бұрыштың ішкі нүктелерінің геометриялық орны болады. Олардың қиылысу O нүктесі үшбұрыштың AD және AE қабырғаларынан бірдей қашықтықта жатады, яғни сәйкесінше үшбұрыштың қабырғаларына түсірілген OD, OE және OF перпендикулярлары тең болады. Демек, O нүктесі A бұрышының биссектрисасында жатады, ал центрі O нүктесі, радиусы осы перпендикулярлардың ұзындығына тең болатын шеңбер ABC үшбұрышының BC қабырғасын және AB мен AC қабырғаларының созындыларын жанайтын болады.

Осыған ұқсас ABC үшбұрышына сыртынан сызылған тағы екі шеңбер бар екендігі дәлелденеді.

ABC үшбұрышына сыртынан сызылған тағы екі шеңбер бар екендігін өздерің дәлелдеңдер.

?

1. Қандай үшбұрыш шеңберге іштей сызылған деп аталады?
2. Қандай шеңбер үшбұрышқа сырттай сызылған деп аталады?
3. Кез келген үшбұрышқа сырттай шеңбер сызуға бола ма?
4. Үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің центрі қайда орналасады?
5. Үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің радиусы оның қабырғалары мен ауданы арқылы қалай өрнектеледі?
6. Үшбұрышқа іштей сызылған шеңбердің радиусы оның периметрі мен ауданы арқылы қалай өрнектеледі?
7. Қандай шеңбер үшбұрышқа сыртынан сызылған деп аталады?
8. Үшбұрышқа сыртынан сызылған шеңбердің центрі қайда орналасады?

Жаттығулар

A

1. Іштей және сырттай сызылған шеңберлері бар үшбұрышты салыңдар.

2. Үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің центрі: 1) үшбұрыштың ішінде; 2) үшбұрыштың қабырғасында; 3) үшбұрыштан тыс жатуы мүмкін бе? Мысалдар келтіріңдер.

3. Тікбұрышты үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің центрі қайда орналасады?

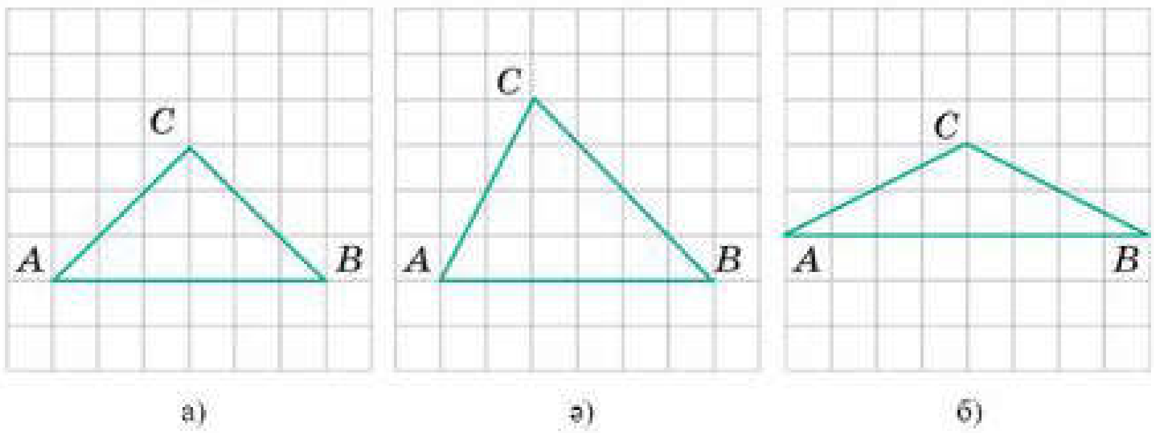
4. Шеңберге іштей сызылған теңбүйірлі үшбұрыштың бүйір қабырғасы 60°-қа тең доғаны кереді. Үшбұрыштың бұрыштарын табыңдар.

5. Шеңберге іштей сызылған теңбүйірлі үшбұрыштың табаны 100°-қа тең доғаны кереді. Үшбұрыштың бұрыштарын табыңдар.

6. Тікбұрышты үшбұрыштың катеттері 3 см және 4 см. Оған сырттай және іштей сызылған шеңберлердің радиустарын табыңдар.

B

7. 20.6-суреттегі үшбұрыштарға сырттай сызылған шеңберлердің центрлерін салыңдар.



20.6-сурет

8. Шеңбердің бойында орналасқан A, B, C нүктелері шеңберді үш доғаға бөледі. Бұл доғалардың шамаларының қатынасы 2 : 3 : 7. ABC үшбұрышының бұрыштарын табыңдар.

9. ABC үшбұрышының AB қабырғасы 10-ға тең және осы қабырғаға қарсы жатқан C бұрышы: 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°; 4) 90°; 5) 150°. Осы үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің радиусын табыңдар .

10. ABC үшбұрышына сырттай сызылған шеңбердің радиусы 3 см-ге тең. Үшбұрыштың AB қабырғасына қарсы жатқан C бұрышы: 1) $30°$; 2) $45°$; 3) $60°$; 4) $90°$; 5) $150°$-қа тең болса, осы қабырғаны табыңдар.

11. Үшбұрыштың қабырғалары 5, 5, 8. Оған сырттай және іштей сызылған шеңберлердің радиустарын табыңдар.

C

12. Шеңбердің бойында орналасқан A, B, C нүктелері шеңберді үш доғаға бөледі. Бұл доғалардың шамаларының қатынасы $11 : 3 : 4$. A, B, C нүктелері арқылы жанамалар жүргізілген. Осы жанамалардан құрылған үшбұрыштың бұрыштарын табыңдар.

13. Үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің центрі оның үлкен қабырғасына жақын орналасатынын дәлелдеңдер.

14. ABC үшбұрышында $\angle A = 30°$, $\angle B = 65°$. Үшбұрыштың қандай қабырғасы оған сырттай сызылған шеңбердің центріне жақын орналасқан?

15. Үшбұрышқа іштей сызылған шеңбердің центрі оның үлкен бұрышының төбесіне жақын орналасатынын дәлелдеңдер.

16. ABC үшбұрышында $AB = 3$, $AC = 4$, $BC = 5$. Үшбұрыштың қандай төбесі оған іштей сызылған шеңбердің центріне жақын орналасқан?

17. Үшбұрыштың қабырғалары 5, 6, 7. Оған сырттай және іштей сызылған шеңберлердің радиустарын табыңдар.

18. Қабырғалары $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ болатын ABC үшбұрышына сыртынан сызылған және BC қабырғасын жанайтын шеңбердің r_a радиусы үшін келесі формула орынды болатынын дәлелдеңдер:

$$r_a = \frac{2S}{b + c - a}.$$

19. Қабырғасы 1-ге тең дұрыс үшбұрышқа сыртынан сызылған шеңбердің радиусын табыңдар.

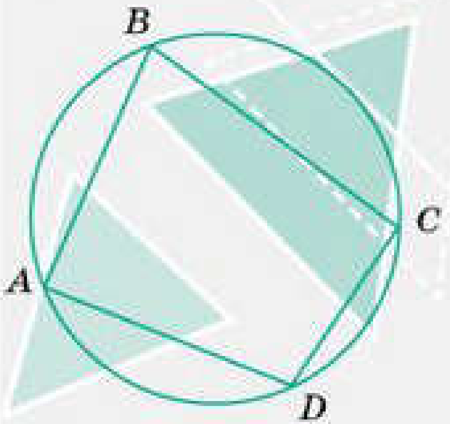
20. Катеттері 1-ге тең тікбұрышты үшбұрышқа сыртынан сызылған шеңбердің радиусын табыңдар.

21. Қабырғалары 5, 5, 8 болатын теңбүйірлі үшбұрышқа сыртынан сызылған шеңбердің радиусын табыңдар.

22. ABC үшбұрышының AA_1 және BB_1 биіктіктері H нүктесінде қиылысады. ABH және B_1A_1H үшбұрыштары ұқсас болатынын дәлелдеңдер.

23. ABC үшбұрышының AA_1 және BB_1 биіктіктері H нүктесінде қиылысады. ABC және A_1B_1C үшбұрыштары ұқсас болатынын дәлелдеңдер.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар



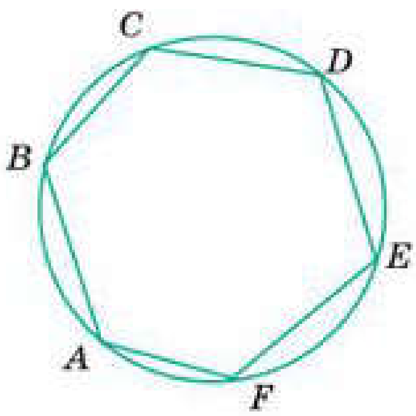
20.7-сурет

24. Көпбұрыш ұғымын және көпбұрыштың ауданын қайталаңдар.

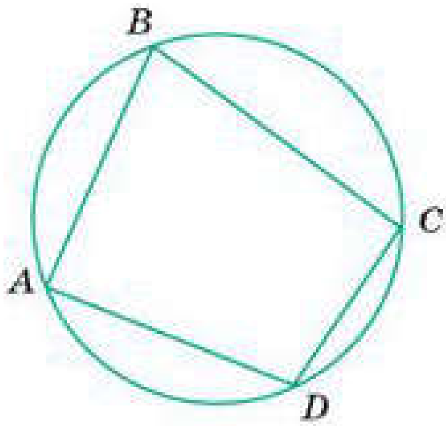
25. 20.7-суретте шеңберге іштей сызылған $ABCD$ төртбұрышы кескінделген. A және C, B және D бұрыштарының қосындысын тауып көріңдер.

21. ТӨРТБҰРЫШТАР ЖӘНЕ ШЕҢБЕР

Егер көпбұрыштың барлық төбелері шеңбердің бойында жатса, онда көпбұрыш шеңберге ***іштей сызылған*** деп аталады (21.1-сурет). Бұл жағдайда шеңбер көпбұрышқа ***сырттай сызылған*** деп аталады.



21.1-сурет



21.2-сурет

Қандай жағдайда төртбұрышқа сырттай шеңберді сызуға болатынын қарастырайық.

Теорема. Егер төртбұрышқа сырттай шеңбер сызуға болса, онда оның қарсы жатқан бұрыштарының қосындысы 180 °-қа тең болады.

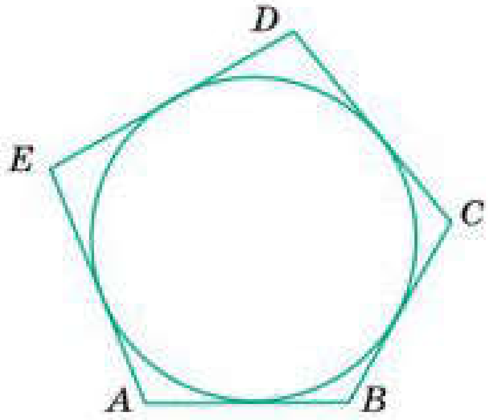
Дәлелдеуі. $ABCD$ төртбұрышына сырттай шеңбер сызылған болсын (21.2-сурет). $\angle A + \angle C = 180°$ екенін дәлелдейік. Расында да, бұл бұрыштар сәйкесінше BCD және BAD доғаларының жартысымен өлшенеді. Ол доғалар бірігіп барлық шеңберді құрайды. Демек, бұрыштардың қосындысы шеңбердің жартысымен өлшенеді, яғни олардың қосындысы 180 °-қа тең болады. ◻

Осыған кері тұжырым да дұрыс болады, яғни келесі теорема орынды.

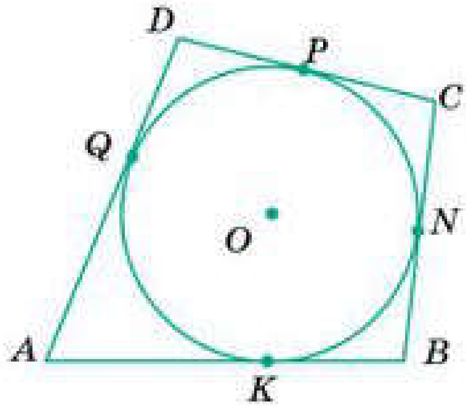
Теорема*. Егер төртбұрыштың қарсы жатқан бұрыштарының қосындысы 180 °-қа тең болса, онда оған сырттай шеңбер сызуға болады.

Осыны өздерің дәлелдеп көріңдер.

Егер көпбұрыштың барлық қабырғалары шеңбермен жанасатын болса, онда көпбұрыш шеңберге ***сырттай сызылған*** деп аталады. Бұл жағдайда шеңбер көпбұрышқа ***іштей сызылған*** деп аталады (21.3-сурет).



21.3-сурет



21.4-сурет

Теорема. Егер төртбұрышқа іштей шеңбер сызуға болса, онда оның қарама-қарсы қабырғаларының қосындысы тең болады.

Дәлелдеуі. $ABCD$ төртбұрышына іштей шеңбер сызылған болсын және ол төртбұрыштың қабырғаларын K, N, P, Q нүктелерінде жанап өтсін (21.4-сурет). $AB + CD = AD + BC$ екенін дәлелдейік. Расында да, бір нүктеден шеңберге жүргізілген жанамалардың кесінділерінің теңдігінен келесі теңдіктер алынады: $AK = AQ$, $BK = BN$, $CN = CP$, $DP = DQ$. Осыдан, $AB + CD = AK + BK + CP + DP = AQ + BN + CN + DQ = AD + BC$. ◻

Дөнес төртбұрыштар үшін кері тұжырым дұрыс болатынын дәлелдеп көріңдер. Егер дөнес төртбұрыштың қарама-қарсы қабырғаларының қосындысы тең болса, онда оған іштей шеңбер сызуға болады. Дөнес емес төртбұрыштар үшін кері тұжырымға мысал келтіріңдер.

Төртбұрышқа іштей сызылған шеңбердің r радиусын табу формуласын берейік.

Теорема. Ауданы S, ал жарты периметрі p болатын төртбұрышқа іштей сызылған шеңбердің r радиусы келесі формуламен есептеледі:

$$r = \frac{S}{p}.$$

Дәлелдеуі үшбұрышқа арналған формуланың сәйкесінше дәлелдеуіне ұқсас болады.

Осыны өздерің дәлелдеңдер.

?

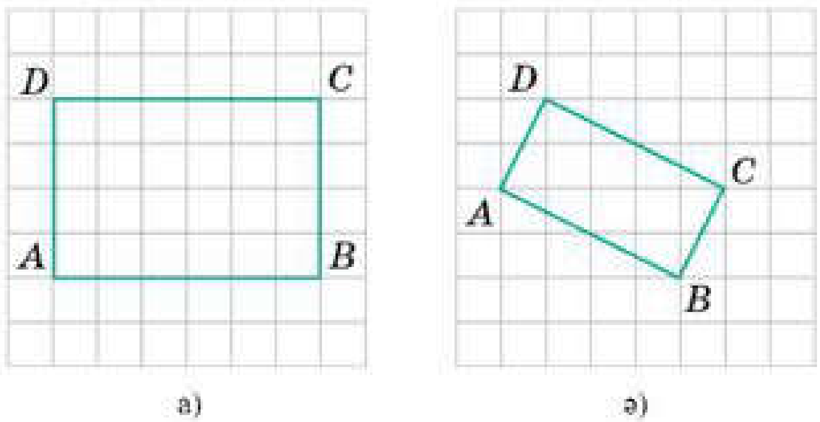
1. Қандай көпбұрыш шеңберге іштей сызылған деп аталады?
2. Қандай шеңбер көпбұрышқа сырттай сызылған деп аталады?
3. Кез келген төртбұрышқа шеңберді сырттай сызуға бола ма?
4. Қандай көпбұрыш шеңберге сырттай сызылған деп аталады?
5. Қандай шеңбер көпбұрышқа іштей сызылған деп аталады?
6. Кез келген төртбұрышқа шеңберді іштей сызуға бола ма?
7. Төртбұрышқа іштей сызылған шеңбердің радиусы оның жарты периметрі мен ауданы арқылы қалай өрнектеледі?

Жаттығулар

A

1. Шеңберді және оған іштей сызылған төртбұрышты салыңдар.

2. 21.5-суреттегі төртбұрыштарға сырттай сызылған шеңберлердің центрлерін көрсетіңдер. Торкөздің қабырғасы 1-ге тең болса, шеңберлердің радиустарын табыңдар.



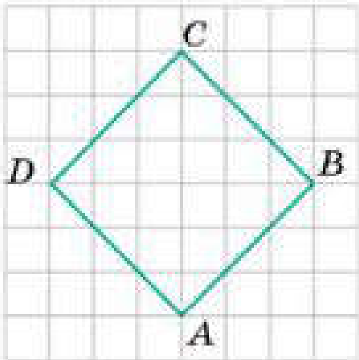
21.5-сурет

3. 1) Тіктөртбұрышқа; 2) тіктөртбұрыштан өзгеше параллелограмға; 3) квадратқа; 4) квадраттан өзгеше ромбыға сырттай шеңбер сызуға бола ма?

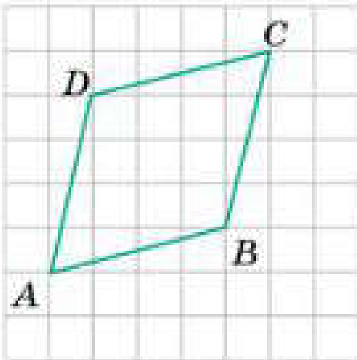
4. Төртбұрыштың ретімен алынған бұрыштары берілген: 1) 90°, 90°, 60°, 120°; 2) 40°, 125°, 55°, 140°. Осы төртбұрышқа сырттай шеңбер сызуға бола ма?

5. Шеңберге іштей сызылған төртбұрыштың екі бұрышы 80° және 60°. Төртбұрыштың қалған екі бұрышын табыңдар.

6. Қабырғасы 1-ге тең квадратқа сырттай сызылған шеңбердің радиусын табыңдар.
7. Қабырғалары 6 см және 8 см болатын тіктөртбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің радиусын табыңдар.
8. Радиусы 6 см-ге тең шеңберге іштей сызылған тіктөртбұрыштың диагоналін табыңдар.
9. 1) Квадратқа; 2) квадраттан өзгеше тіктөртбұрышқа; 3) ромбыға; 4) ромбыдан өзгеше параллелограмға іштей шеңбер сызуға бола ма?
10. 21.6-суреттегі төртбұрыштарға іштей сызылған шеңберлердің центрлерін көрсетіңдер.



а)



ә)

21.6-сурет

11. Төртбұрыштың ретімен алынған қабырғалары 1, 2, 3, 4. Осы төртбұрышқа іштей шеңбер сызуға бола ма?
12. Қабырғасы 1-ге тең квадратқа іштей сызылған шеңбердің радиусын табыңдар.
13. Іштей шеңбер сызуға болатын төртбұрыштың ретімен алынған қабырғалары 6 см, 8 см және 9 см. Осы төртбұрыштың төртінші қабырғасын және периметрін табыңдар.
14. Шеңберге сырттай сызылған төртбұрыштың қарама-қарсы қабырғалары 7 см және 10 см. Төртбұрыштың периметрін табыңдар.

B

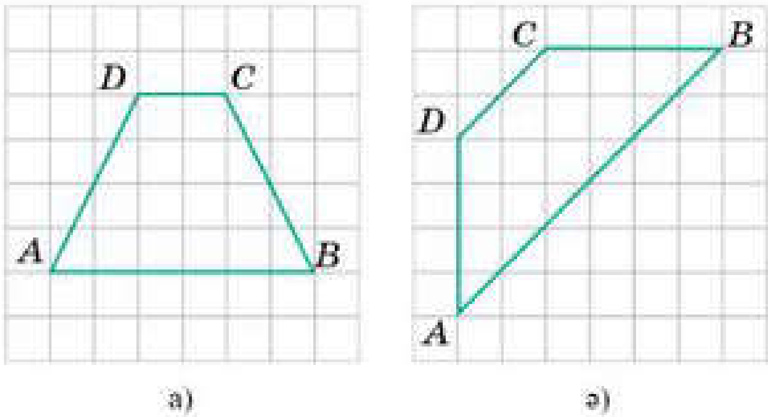
15. Шеңбер нүктелермен төрт бөлікке бөлінген. Бұл бөліктердің градустық шамаларының қатынасы 3 : 7 : 5 : 3. Бөліну нүктелерін ретімен қосқанда алынған төртбұрыштың бұрыштарын табыңдар.
16. Тіктөртбұрыштың кіші қабырғасы 5 см, ал диагональдарының арасындағы бұрыш 60°. Тіктөртбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің радиусын табыңдар.
17. Ромбының қабырғасы 4 см, сүйір бұрышы 30°. Ромбыға іштей сызылған шеңбердің радиусын табыңдар.

C

18. 21.6, ә-суреттегі ромбыға іштей сызылған шеңбердің радиусын табыңдар.

19. Егер трапецияға сырттай шеңберді сызуға болса, онда ол теңбүйірлі трапеция болатынын дәлелдеңдер.

20. 21.7-суреттегі төртбұрыштарға сырттай сызылған шеңберлердің центрлерін салыңдар. Торкөздің қабырғасы 1-ге тең болса, шеңберлердің радиустарын табыңдар.



21.7-сурет

21. Шеңберге сырттай сызылған трапецияның периметрі 18 см-ге тең. Трапецияның орта сызығын табыңдар.

22. Шеңберге сырттай сызылған трапецияның бүйір қабырғалары 1 см және 3 см. Трапецияның периметрін табыңдар.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

23. Шеңберге іштей сызылған және сырттай сызылған дұрыс көпбұрыш ұғымын қайталаңдар.

24. Дұрыс: а) бесбұрыштың; ә) алтыбұрыштың; б) сегізбұрыштың; в) 12-бұрыштың бұрыштарын табыңдар.

22. ДҰРЫС КӨПБҰРЫШТАР ЖӘНЕ ШЕҢБЕР

Барлық қабырғалары және барлық бұрыштары тең болатын дөңес көпбұрыш ***дұрыс көпбұрыш*** деп аталады. Дұрыс n-бұрыштың бұрыштары үшін жалпы формуланы қорытып шығарайық.

Теорема. Дұрыс n-бұрыштың әрбір бұрышы $180° - \frac{360°}{n}$ болады.

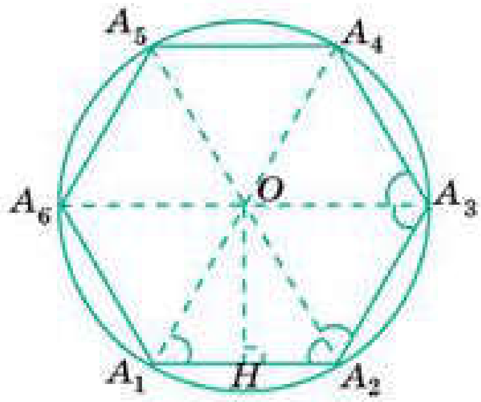
Дәлелдеуі. Дұрыс n-бұрыштың барлық бұрыштары тең, ал барлық бұрыштарының қосындысы $180°(n-2)$ болғандықтан, оның әрбір бұрыш ы $\frac{180°(n-2)}{n}$ болады. Демек, $180° - \frac{360°}{n}$. ◻

Дербес жағдайда дұрыс бесбұры штың бұрышы 108°, дұрыс алт ыбұрыштың бұрышы 120°-қа тең.

Теорема. Кез келген дұрыс n-бұрышқа сырттай шеңбер сызуға болады. Егер дұрыс n-бұрыштың қабырғасы a-ға тең болса, онда оған сырттай сызылған шеңбердің R радиусы келесі формуламен есептеледі:

$$R = \frac{a}{2\sin\frac{180°}{n}}.$$

Дәлелдеуі. $A_1 \ldots A_n$ — дұрыс n-бұрыш болсын (22.1-сурет).



22.1-сурет

$A_1A_2A_3$ үшбұрышына сырттай центрі O нүктесі және радиусы R болатын шеңбер сызамыз. A_4 төбесі де осы шеңбердің бойында жататынын дәлелдейік. Ол үшін $OA_4 = R$ екенін тексерсек жеткілікті. OA_1A_2 және OA_2A_3 — өзара тең теңбүйірлі үшбұрыштар. Сондықтан олардың табандарындағы бұрыштары тең және берілген n-бұрыштың бұрышының жартысы болады. Демек, OA_3A_4 бұрышы n-бұрыштың бұрышының жартысына тең болады. OA_3A_2 және OA_3A_4 үшбұрыштары екі қабырғасы мен олардың арасындағы бұрышы бойынша тең болады ($A_2A_3 = A_3A_4$, OA_3 — ортақ, $\angle OA_3A_2 = \angle OA_3A_4$). Ендеше $OA_2 = OA_4 = R$. Осыған ұқсас A_5 төбесі және т.б. берілген шеңбердің бойында жататыны көрсетіледі. Сонымен бұл шеңбер ізделінді сырттай сызылған шеңбер болып табылады. Оның центрі көпбұрыштың бұрыштарының биссектрисаларының қиылысу нүктесі болады.

Сырттай сызылған шеңбердің радиусын табу үшін OA_1A_2 теңбүйірлі үшбұрышын қарастырамыз. OH биіктігін жүргіземіз. OA_1H тікбұрышты үшбұрышында OA_1 гипотенузасы R-ге, A_1H катеті $\frac{a}{2}$-ге, A_1OH бұрышы $\frac{180°}{n}$-ге тең болады. Осыдан $R = \frac{a}{2\sin\frac{180°}{n}}$. ◻

Салдар. Радиусы R болатын шеңберге іштей сызылған дұрыс n-бұрыштың қабы рғалары $2R \cdot \sin\frac{180°}{n}$-ге тең бола ды.

Теорема. Екі дұрыс n-бұрыштардың периметрлерінің қатынасы оларға сырттай сызылған шеңберлердің радиустарының қатынасына тең болады.

Дәлелдеуі. P'_n, P''_n — радиустары сәйкесінше R' және R'' болатын шеңберлерге іштей сызылған дұрыс n-бұрыштардың периметрлері болсын. Сонда

$$P'_n = n \cdot 2R' \cdot \sin\frac{180^\circ}{n}, \quad P''_n = n \cdot 2R'' \cdot \sin\frac{180^\circ}{n}.$$

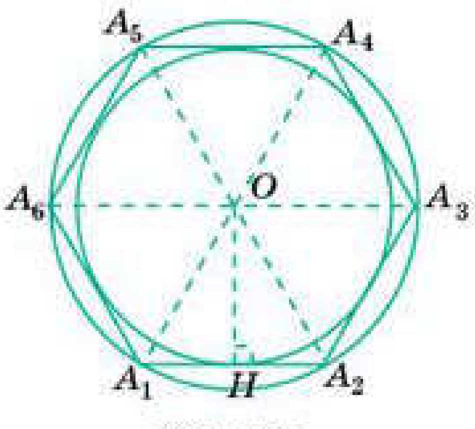
Осыдан $\dfrac{P'_n}{P''_n} = \dfrac{R'}{R''}$. ◻

Теорема. Кез келген дұрыс көпбұрышқа іштей шеңбер сызуға болады. Егер дұрыс n-бұрыштың қабырғасы a-ға тең болса, онда оған іштей сызылған шеңбердің r радиусы келесі формуламен есептеледі:

$$r = \frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}.$$

Дәлелдеуі. $A_1 \ldots A_n$ — дұрыс n-бұрыш болсын. Алдыңғы теоремада дәлелденгендей осы көпбұрышқа сырттай шеңбер сызуға болады және оның O центрі көпбұрыштың бұрыштарының биссектрисаларының қиылысу нүктесі болады. Биссектрисалардың қиылысу нүктесі көпбұрыштың барлық қабырғаларынан бірдей қашықтықта жатады. Ол қашықтықты r деп белгілейміз. Центрі O нүктесі және радиусы r болатын шеңбер осы көпбұрыштың барлық қабырғаларымен жанасады, яғни ізделінді іштей сызылған шеңбер болады (22.2-сурет).

Іштей сызылған шеңбердің радиусын табу үшін OA_1A_2 теңбүйірлі үшбұрышын қарастырамыз. OH биіктігін жүргіземіз. OA_1H тікбұрышты үшбұрышында OH катеті r-ге, A_1H катеті $\dfrac{a}{2}$-ге, A_1OH бұрышы $\dfrac{180^\circ}{n}$-ге тең болады. Осыдан $r = \dfrac{a}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}$. ◻



22.2-сурет

Салдар. Радиусы r болатын шеңберге сырттай сызылған дұрыс n-бұрыштың қабырғасы $2r \cdot \operatorname{tg}\dfrac{180^\circ}{n}$ болады.

Дұрыс көпбұрышқа іштей сызылған шеңбердің r радиусын табу формуласын берейік.

Теорема. Ауданы S, ал жарты периметрі p болатын дұрыс көпбұрышқа іштей сызылған шеңбердің r радиусы келесі формуламен есептеледі:

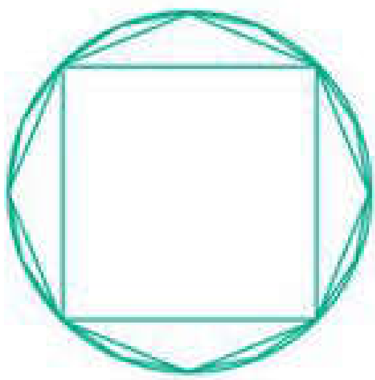
$$r = \frac{S}{p}.$$

Дәлелдеуі үшбұрышқа арналған сәйкесінше формуланың дәлелдеуіне ұқсас болады.

Осыны өздерің дәлелдеңдер.

Шеңберге іштей сызылған дұрыс көпбұрыштарды пайдаланып, шеңбердің ұзындығын анықтайық.

Шеңберге іштей сызылған дұрыс көпбұрыштардың қабырғаларының саны артқанда көпбұрыш шеңберге жақындай түседі (22.3-сурет).



22.3-сурет

Сондықтан іштей сызылған дұрыс көпбұрыштың қабырғалары санын шексіз арттырған кездегі көпбұрыш периметрінің шегі ***шеңбер ұзындығының*** дәл мәнін береді.

Теорема. Екі шеңбердің ұзындықтарының қатынасы олардың радиустарының қатынасына тең болады.

Бұл теореманы дәлелдеуде мектеп математика курсынан тыс шекке көшу әдісі қолданылады. Сондықтан біз тек дәлелдеу идеясын ғана береміз.

Радиустары R', R'' болатын шеңберлерді және оларға іштей сызылған дұрыс көпбұрыштарды қарастырайық. Дұрыс көпбұрыштардың қабырғаларының саны артқанда, олардың периметрлері сәйкесінше шеңберлердің ұзындықтарына жақындай түседі. Бұл периметрлердің қатынасы тұрақты және $\frac{R'}{R''}$-ке тең болғандықтан, осы периметрлер ұмтылатын сандардың қатынасы, яғни шеңбер лердің ұзындықтарының қат ынасы да $\frac{R'}{R''}$-ке тең бол ады.

Радиусы 1-ге тең шеңбердің ұзындығының жарты сы π грек әрпімен белгіленеді. Сонымен радиусы 1-ге тең шеңбердің ұзындығы 2π-ге тең болады.

Жоғарыда қарастырылған теоремадан радиусы R болатын шеңбердің ұзындығы $2\pi R$-ге тең екендігі шығады.

Сонымен радиусы R болатын шеңбердің C ұзындығы үшін келесі формула орынды болады:

$$C = 2\pi R.$$

π санын жуықтап есептеу үшін бірлік шеңберге іштей дұрыс көпбұрышты сызады және оның жарты периметрін табады. Іштей сызылған көпбұрыш қабырғаларының саны көп болған сайын π санының дәл мәні алынады.

Шеңбердің ұзындығын және π санын есептеу мәселесімен мыңдаған жылдар бойы ғұлама ғалымдар айналысқан.

Іштей және сырттай сызылған көпбұрышы бар шеңберлерді салыстыра отырып, π санының дәл мәнін алғашқы болып есептеген ежелгі грек математигі Архимед (б.з.д. 287–212 жж.) болды. Ол өзінің "Дөңгелекті өлшеу туралы" еңбегінде π саны үшін келесі теңсіздік орындалатынын дәлелдеді:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

π санының дәлме-дәл мәні шектеусіз периодты емес ондық бөлшек болып табылады:

$$3{,}14159265358979323851...\quad .$$

Практикада π санының жуық мәні ретінде 3,14 саны алынады.

Мысал. Қабырғасы 1-ге тең дұрыс алтыбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің ұзындығын табыңдар.

Шешуі. Дұрыс алтыбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің радиусы 1-ге тең. Демек, осы шеңбердің ұзындығы 2π-ге тең болады.

Шеңбердің $1°$ центрлік бұрышы жазыңқы бұрыштың $\frac{1}{180}$ бөлігін құрайтындықтан , осы бұрышты керетін доға жарты шеңбердің $\frac{1}{180}$ бөлігін құрайды. Сондықтан шеңбердің $1°$ доғасының ұзындығы жарты шеңбер ұзындығының $\frac{1}{180}$ бөлігін құрайды, яғни $\frac{\pi R}{360}$-ге тең болады, мұндағы R — шеңбердің радиусы.

Шеңбердің φ центрлік бұрышына сәйкес ***доғаның ұзындығы*** келесі формуламен есептеледі:

$$l = \frac{\pi R \varphi}{180},$$

мұндағы R — шеңбердің радиусы.

Бірлік шеңбердің φ центрлік бұрышына сәйкес доғаның ұзындығын өрнектейтін $l = \frac{\pi\varphi}{180}$ теңдігі доғаның ұзындығы мен оның градустық өлшемі арасындағы сәйкестікті орнатады.

Бұл бұрыштарды градустардың көмегімен ғана емес, сәйкесінше бірлік шеңбердің доғасының ұзындығы арқылы да өлшеуге мүмкіндік береді.

Доғаның ұзындығының шамасы ***бұрыштың радиандық өлшемі*** деп аталады. Бұрыштың радиандық өлшем бірлігі ***радиан*** болады. Бір радиан бұрыш — бірлік шеңбердің ұзындығы 1-ге тең доғасына сәйкес келетін бұрыш.

1 радиан бұрыштың градустық өлшемі $\frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ$-қа тең болады.

Бұрыштың радиандық өлшемі оның градустық шамасын $\frac{\pi}{180^\circ}$-қа көбейткенде шығады.

Мысал. Қабырғасы 1-ге тең дұрыс алтыбұрышқа сырттай шеңбер сызылған. Осы алтыбұрыштың қабырғасымен керілген шеңбердің доғасының ұзындығын табыңдар.

Шешуі. Берілген шеңбердің ұзындығы 2π-ге тең. Сондықтан ізделінді доғаның ұзындығы $\frac{\pi}{3}$-ке тең бола ды.

?

1. Қандай көпбұрыш дұрыс деп аталады?
2. Кез келген дұрыс көпбұрышқа шеңберді сырттай сызуға бола ма?
3. Қабырғасы a-ға тең дұрыс n-бұрышқа сырттай сызылған шеңбердің радиусы қалай өрнектеледі?
4. Дұрыс көпбұрышқа шеңберді іштей сызуға бола ма?
5. Қабырғасы a-ға тең дұрыс n-бұрышқа іштей сызылған шеңбердің радиусы қалай өрнектеледі?
6. Дұрыс көпбұрышқа іштей сызылған шеңбердің радиусы оның жарты периметрі мен ауданы арқылы қалай өрнектеледі?
7. Шеңбердің ұзындығы деп нені айтады?
8. Екі дұрыс n-бұрыштардың периметрлерінің қатынасы қандай?
9. Екі шеңбердің ұзындықтарының қатынасы қандай?
10. π грек әрпі нені білдіреді?
11. Радиусы R болатын шеңбердің ұзындығы неге тең?
12. π саны үшін қандай теңсіздіктер орындалады?
13. π санының жуық мәні қандай?
14. Шеңбердің 1° доғасының ұзындығы неге тең?
15. Шеңбердің φ центрлік бұрышына сәйкес доғаның ұзындығы неге тең?
16. 1 радиан бұрыштың градустық өлшемі неге тең?

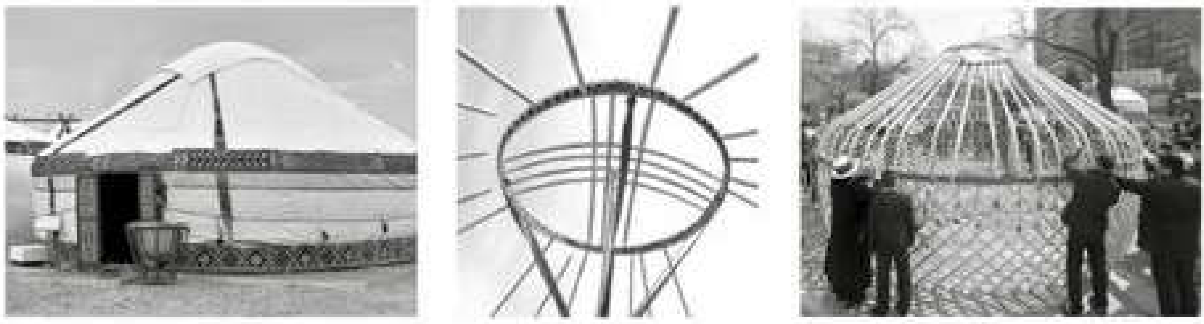
Жаттығулар

A

1. Радиусы 1-ге тең шеңберге іштей сызылған дұрыс алтыбұрыштың қабырғасын табыңдар.

2. Дұрыс алтыбұрыштың қабырғасы 3-ке тең. Осы алтыбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің радиусын табыңдар.

3. Вавилондықтар шеңбердің ұзындығы ретінде осы шеңберге іштей сызылған дұрыс алтыбұрыштың периметрін алған. Вавилондықтар үшін π санының жуық мәнін табыңдар.
4. Егер шеңбердің радиусы: 1) үш есе артса; 2) екі есе кемісе, онда шеңбердің ұзындығы қалай өзгереді?
5. Егер шеңбердің радиусы: 1) 1 см; 2) 2 см; 3) 5 см-ге артса, онда шеңбердің ұзындығы қаншаға артады?
6. $1°$ бұрышқа сәйкес шеңбер доғасының ұзындығы 1 м-ге тең. Шеңбердің ұзындығын табыңдар.
7. Шеңбердің ұзындығы 60 см. $18°$ бұрышқа сәйкес доғасының ұзындығын табыңдар.
8. Шеңбердің ұзындығы 1 см. 1) $30°$; 2) $90°$; 3) $120°$; 4) $270°$ центрлік бұрышқа сәйкес шеңбер доғасының ұзындығын табыңдар.
9. 1) $45°$; 2) $60°$; 3) $150°$ бұрыштың радиандық өлшемін табыңдар.
10. Бұрыштың радиандық өлшемі берілген: 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{7\pi}{18}$; 4) $\frac{4\pi}{3}$. Оның градустық шамасын табыңдар.
11. Арман қарағайлы орманда серуендеп жүріп кәрі ағашты көрді. Ағаштың жуандығын өлшегенде 2,2 м болды. Өлшеген жердегі ағаштың диаметрін табыңдар.
12. Киіз үй — көшпенділердің ежелден келе жатқан тұрғын үйі (22.4, а-сурет). Өлшемдері бойынша киіз үйлер әртүрлі болады.
1) Диаметрлері: а) 1 м; ә) 2 м болатын киіз үйдің шаңырағының (22.4, ә-сурет) ұзындығын;
2) диаметрлері: а) 5 м; ә) 10 м болатын киіз үйдің керегесінің (22.4, б-сурет) ұзындығын табыңдар.

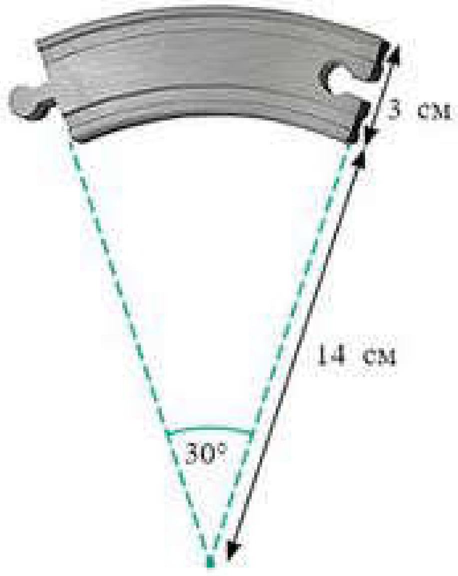


а) ә) б)

22.4-сурет

13. Беріктің кіші қарындасы Айгүлге пойызға арналған ағаш жиынтықпен ойнаған ұнайды. Берік қарындасына 22.5, а-суретте көрсетілгендей доғалы бөліктерден рельсті теміржол құрастыруға көмектеседі. Дөңгелек пішіндес рельсті теміржол құрастыру үшін Берік пен Айгүлге қанша доғалы бөліктер қажет болады?

Ойыншық пойыздың (22.5, ә-сурет) толық бір айналымдағы сыртқы доңғалағының жүріп өткен қашықтығы мен ішкі доңғалағының жүріп өткен қашықтығының айырмасы шамамен қандай?



а)


ә)

22.5-сурет

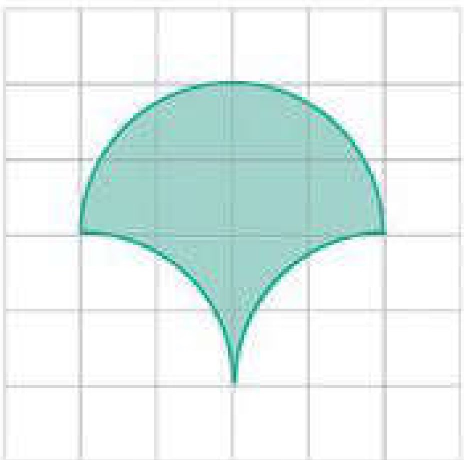
B

14. Шеңбердің ұзындығын: 1) 1 см; 2) 2 см; 3) 5 см-ге кішірейту үшін оның радиусын қаншаға кішірейту керек?

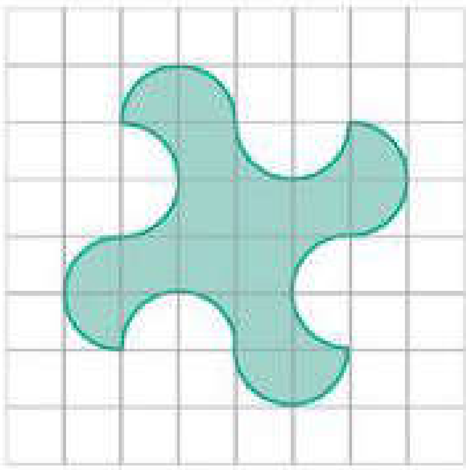
15. Қабырғасы 1-ге тең: 1) дұрыс үшбұрышқа; 2) квадратқа; 3) дұрыс алтыбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің ұзындығын табыңдар.

16. Қабырғасы 1-ге тең: 1) дұрыс үшбұрышқа; 2) квадратқа; 3) дұрыс алтыбұрышқа іштей сызылған шеңбердің ұзындығын табыңдар.

17. 22.6-суреттегі фигураны шектейтін қисықтың ұзындығын табыңдар. Торкөздің қабырғасы 1-ге тең.



22.6-сурет



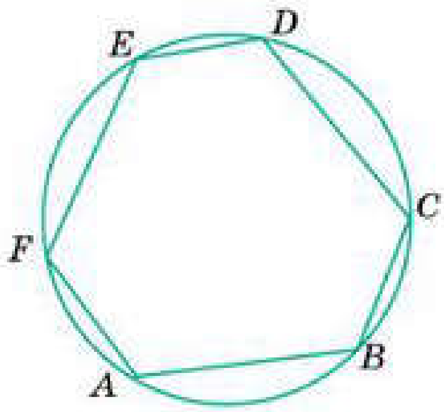
22.7-сурет

18. 22.7-суреттегі фигураны шектейтін қисықтың ұзындығын табыңдар. Торкөздің қабырғасы 1-ге тең.

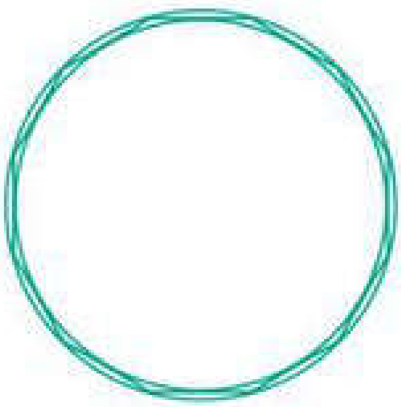
19. AB хордасы радиусы 1-ге тең шеңберді екі доғаға бөледі. Бұл доғалардың ұзындықтарының қатынасы 2 : 1 болса, AB хордасының ұзындығын табыңдар.

20. Жер шарының экватор бойымен жіппен тығыз тартылғанын елестетіп көріңдер. Оны Жер бетінен ұзын бойымен 1 м қашықтықта көтеру үшін жіптің ұзындығын қаншаға ұзарту керек?

C



22.8-сурет



22.9-сурет

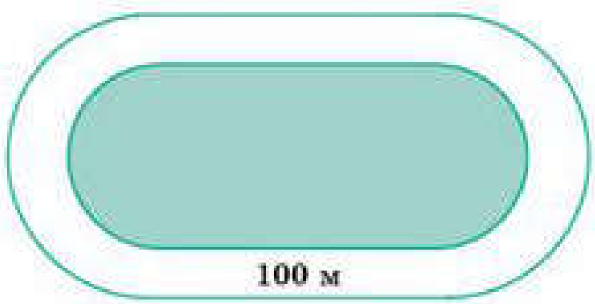
21. 22.8-суреттегі шеңберге іштей сызылған *ABCDEF* алтыбұрыштың *A*, *C* және *E* бұрыштарының қосындысын табыңдар.

22. Дұрыс он екі бұрыштың қабырғасы 1-ге тең. Оған сырттай және іштей сызылған шеңберлердің радиустарын табыңдар (22.9-сурет).

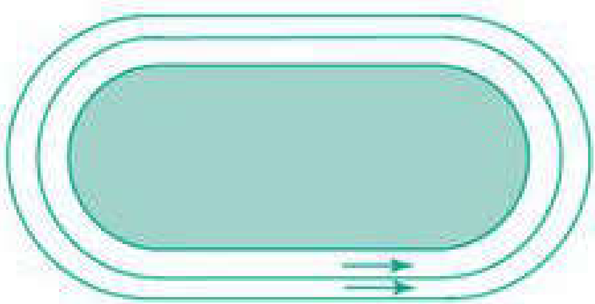
23. 1 метр — экватордың ұзындығының қырық миллионыншы бөлігі болатынын ескеріп, Жер шарының радиусын табыңдар.

24. Стадион — екі жағынан жартыдөңгелектермен жалғасып тұрған тіктөртбұрыш пішіндес алаң. Аланды айнала жүгіру жолының ұзындығы 400 м. Жолдың екі түзусызықты бөліктерінің әрқайсының ұзындығы 100 м-ге тең. Стадион алаңының енін табыңдар (22.10-сурет).

25. Стадион — екі жағынан жартыдөңгелектермен жалғасып тұрған тіктөртбұрыш пішіндес алаң. Екі спортшы стадион жолының бойымен бір айналым жүгіріп өтуі тиіс (22.11-сурет). Бір спортшы екіншісіне қарағанда шетінен 2 м алысырақ жолмен жүгіреді. Спортшылардың жүгіретін жолдары ұзындықтарының айырымын теңелту үшін олардың сөредегі арақашықтығы қандай болуы керек ($\pi \approx 3$ деп алыңдар)?



22.10-сурет



22.11-сурет

26. Пойыз 81 км/сағ жылдамдықпен жүріп келеді. Оның дөңгелегінің диаметрі 120 см. Пойыз дөңгелегі бір минутта қанша айналым жасайды ($\pi \approx 3$ деп алыңдар)?

27. Пойыз дөңгелегінің диаметрі 120 см және ол бір минутта 300 айналым жасайтын болса, пойыздың жылдамдығы қандай ($\pi \approx 3$ деп алыңдар)?

28. Егер адамның сұқ саусағындағы тырнағының ені шамамен 1 см, ал одан адамның көзіне дейінгі қашықтық шамамен 60 см-ге тең болса, онда адам өзінің сұқ саусағының тырнағын қандай бұрышпен көреді? Жауабында градусты бүтін санмен көрсетіңдер ($\pi \approx 3$ деп алыңдар).

29. Садақшы 120 см диаметрлі нысананы $1°$ бұрышпен көреді. Нысанаға дейінгі қашықтықты табыңдар. Бүтін санды метрмен өрнектелген жуық мәнді көрсетіңдер ($\pi \approx 3$ деп алыңдар).

30. Ай Жерден $0{,}5°$ бұрышпен көрінеді. Айдың диаметрі шамамен 3400 км екендігін біле отырып, Айға дейінгі қашықтықты жуықтап табыңдар. Жауабында километрді бүтін санмен көрсетіңдер ($\pi \approx 3$ деп алыңдар).

31. Күн Жерден $0{,}5°$ бұрышпен көрінеді. Күннің диаметрі шамамен 1300000 км екендігін біле отырып, Күнге дейінгі қашықтықты жуықтап табыңдар. Жауабында километрді бүтін санмен көрсетіңдер ($\pi \approx 3$ деп алыңдар).

32. Циркуль мен сызғыштың көмегімен дұрыс: а) үшбұрышты; ә) төртбұрышты; б) алтыбұрышты салыңдар.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

33. Аудан ұғымын қайталаңдар.

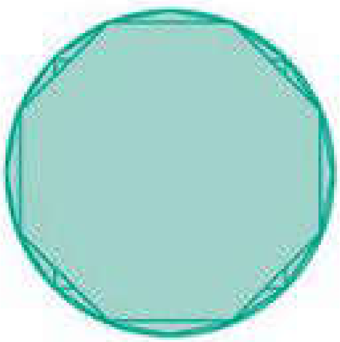
34. Радиусы 1-ге тең шеңберге іштей және сырттай сызылған дұрыс алтыбұрыштардың аудандарын табыңдар.

23. ДӨҢГЕЛЕКТІҢ ЖӘНЕ ОНЫҢ БӨЛІКТЕРІНІҢ АУДАНЫ

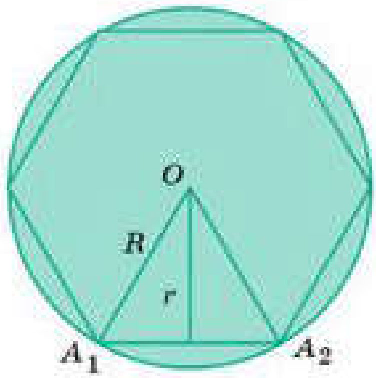
Шеңберден және жазықтықтың осы шеңбермен шектелген бөлігінен тұратын фигура ***дөңгелек*** деп аталады.

Дөңгелектің ауданын табу үшін сәйкесінше шеңберге іштей сызылған дұрыс көпбұрыштарды қарастырамыз (23.1-сурет).

Көпбұрыштың қабырғаларының санын арттырсақ, көпбұрыш шеңберге жақындай түседі.



23.1-сурет



23.2-сурет

Сондықтан іштей сызылған дұрыс көпбұрыштың қабырғаларының санын арттыру кезінде оның ауданы ұмтылатын санды ***дөңгелектің ауданы*** деп есептейді.

Теорема. Дөңгелектің ауданы оның шеңберінің ұзындығы мен радиусының көбейтіндісінің жартысына тең болады.

Шеңбердің ұзындығы сияқты бұл теореманы дәлелдеу мектеп математика курсының материалына енбейді. Сондықтан біз тек дәлелдеу идеясын ғана береміз.

Берілген шеңберге іштей сызылған дұрыс көпбұрышты қарастырайық (23.2-сурет).

Бұл көпбұрыштың ауданы оның периметрі мен оған іштей сызылған шеңбердің r радиусының көбейтіндісінің жартысына тең болады. Көпбұрыштардың қабырғаларының санын арттыру кезінде олардың периметрлері шеңбердің ұзындығына, ал іштей сызылған шеңбердің r радиусы бастапқы R радиусқа ұмтылатын болады. Сондықтан дөңгелектің ауданы оның шеңберінің ұзындығы мен радиусының көбейтіндісінің жартысына тең болады.

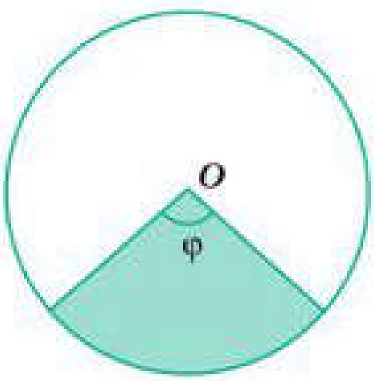
Сонымен радиусы R болатын дөңгелектің S ауданы келесі формуламен есептеледі:

$$S = \pi R^2.$$

Мысал. Қабырғасы 1-ге тең квадратқа іштей сызылған дөңгелектің ауданын табыңдар.

Шешуі. Берілген дөңгелектің радиусы 0,5-ке тең. Демек, осы дөңгелектің ауданы $0{,}25\,\pi$ болады.

Центрлік бұрышпен және ол тірелетін доғамен шектелген дөңгелектің бөлігі ***дөңгелек сектор*** немесе ***сектор*** деп аталады (23.3-сурет).



23.3-сурет

Сектордың ауданының формуласын табу кезінде 1° центрлік бұрышқа сәйкес сектордың ауданы дөңгелектің ауданынан 360 есе кіші екенін байқаймыз, яғни ол $\frac{\pi R^2}{360°}$-қа тең болады, мұндағы R — дөңгелектің радиусы. Сондықтан φ центрлік бұрышқа сәйкес сектордың ауданы келесі формуламен есептеледі:

$$S_{\text{сектор}} = \frac{\pi R^2 \varphi}{360°}.$$

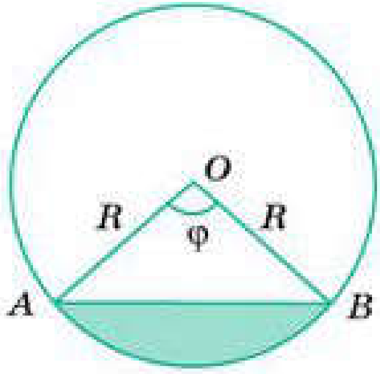
Теорема. Сектордың ауданы оны шектейтін доғаның ұзындығы мен шеңбердің радиусының көбейтіндісіне тең болады.

Дәлелдеуі. Радиусы R болатын шеңбердің l доғасы келесі формуламен есептеледі:

$$l = \frac{2\pi R\varphi}{360°}.$$

Осы өрнекті сектордың ауданын табу формуласына қоя отырып аламыз:

$$S_{\text{сектор}} = \frac{1}{2} l \cdot R. \quad \square$$



23.4-сурет

Шеңбердің доғасымен және осы доғаның ұштарын қосатын хордамен шектелген дөңгелектің бөлігі ***дөңгелек сегмент*** немесе ***сегмент*** деп аталады (23.4-сурет).

AB хордасымен шектелген сегменттің ауданын OAB секторының ауданынан OAB үшбұрышының ауданын азайту арқылы табуға болатынын көреміз.

Центрлік бұрыш ϕ градус, дөңгелектің радиусы R болсын. Сонда сектордың ауданы $\frac{\pi R^2 \varphi}{360°}$-қа тең болады. Үшбұрыштың ауданы $\frac{1}{2}R^2 \cdot \sin\phi$. Осыдан ***сегменттің ауданын*** табу формуласын келесі түрде жазамыз:

$$S_{\text{сегмент}} = S_{\text{сектор}} - S_{OAB} = \frac{\pi R^2 \varphi}{360°} - \frac{1}{2}R^2 \cdot \sin\phi.$$

Мысал. Қабырғасы 1-ге тең дұрыс алтыбұрышқа сырттай шеңбер сызылған. Осы алтыбұрыштың қабырғасымен дөңгелектен қиылып түскен сегменттің ауданын табыңдар.

Шешуі. Берілген шеңбердің радиусы 1-ге тең. Дұрыс алтыбұрыштың қабырғасымен керілген доғаның центрлік бұрышы 60°. Сегменттің S ауданын табу формуласы бойынша табамыз: $S = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$.

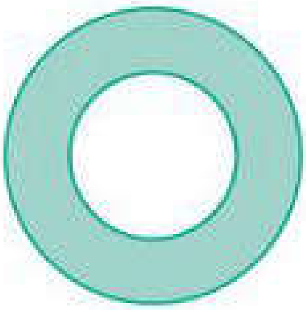
?

1. Дөңгелек дегеніміз не?
2. Дөңгелектің ауданы қалай анықталады?
3. Радиусы R болатын дөңгелектің ауданы неге тең?
4. Диаметрі d болатын дөңгелектің ауданы неге тең?
5. Қандай фигура сектор деп аталады?
6. Сектордың ауданы неге тең?
7. Қандай фигура сегмент деп аталады?
8. Сегменттің ауданы қалай есептеледі?

Жаттығулар

A

1. Дөңгелектің диаметрі: 1) 4 см; 2) 10 м. Оның ауданын табыңдар.
2. Дөңгелектің ауданы: 1) 4π см^2; 2) 16π м^2. Оның радиусын табыңдар.
3. Шеңбердің ұзындығы 1-ге тең. Осы шеңбермен шектелген дөңгелектің ауданын табыңдар.
4. Қабырғалары 6 және 8 болатын тіктөртбұрышқа сырттай сызылған дөңгелектің ауданын табыңдар.
5. Дөңгелектің радиусы 1-ге тең. 1) 60°; 2) 40°; 3) 120° центрлік бұрышқа сәйкес сектордың ауданын табыңдар.
6. Егер дөңгелектің радиусы: 1) 2 есе; 2) 3 есе; 3) 4 есе артса, онда оның ауданы неше есе артады?
7. Центрлері ортақ, ал радиустары 1 см және 2 см болатын екі шеңбердің арасында шектелген дөңгелек сақинаның ауданын табыңдар (23.5-сурет)
8. Сымның жуандығы 6 мм. Оның қимасының ауданын табыңдар.
9. Диаметрі: 1) 5 м; 2) 10 м-ге тең болатын киіз үйдің еденінің ауданын табыңдар (23.6-сурет).



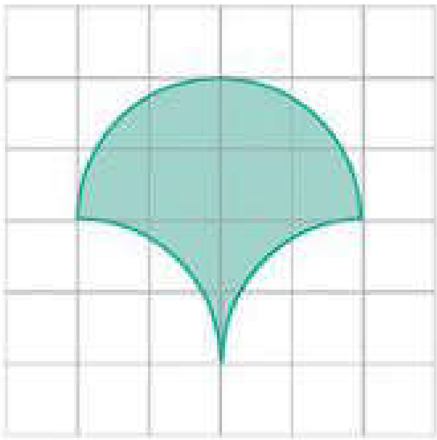
23.5-сурет

23.6-сурет

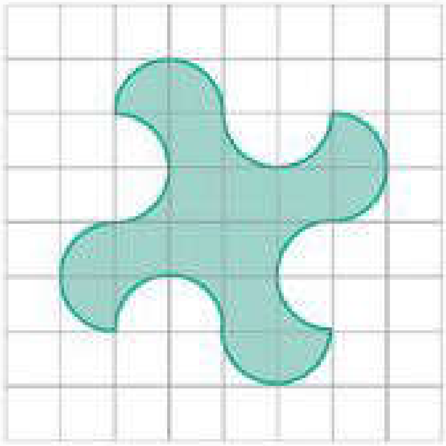
B

10. Қабырғасы 1-ге тең: 1) теңқабырғалы үшбұрышқа; 2) квадратқа; 3) дұрыс алтыбұрышқа сырттай сызылған дөңгелектің ауданын табыңдар.
11. Қабырғасы 1-ге тең: 1) теңқабырғалы үшбұрышқа; 2) квадратқа; 3) дұрыс алтыбұрышқа іштей сызылған дөңгелектің ауданын табыңдар.
12. Радиусы 1-ге тең дөңгелекті екі теңшамалы бөліктерге (сақина және дөңгелек) бөлетін шеңбердің радиусын табыңдар.

13. 23.7-суреттегі фигураның ауданын табыңдар. Торкөздің қабырғасы 1-ге тең.



23.7-сурет



23.8-сурет

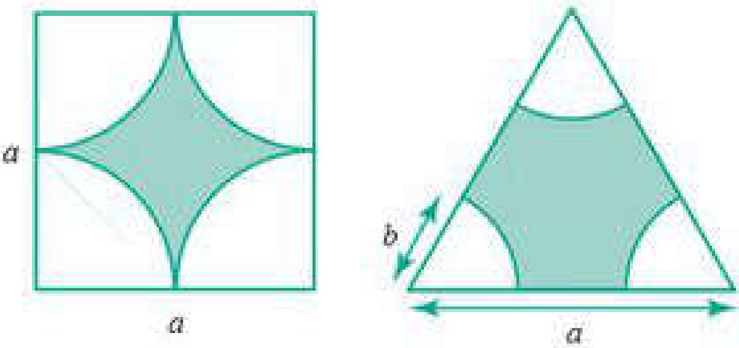
14. 23.8-суреттегі фигураның ауданын табыңдар. Торкөздің қабырғасы 1-ге тең.

15. Ағаштың құлашы (шеңберінің ұзындығы) 120 см. Оның дөңгелек пішіндес көлденең қимасының ауданын (см^2) табыңдар ($\pi \approx 3$ деп алыңдар).

16. Диаметрлері 10 см және 24 см болатын екі құбырды олардың өткізу көлемін өзгертпей бір құбырмен ауыстыру қажет. Жаңа құбырдың диаметрі қандай болуы керек?

17. Адам көзінің дөңгелек пішіндес қарашығы өзінің диаметрін жарыққа байланысты 1,5 мм-ден 7,5 мм-ге дейін өзгерте алады. Бұл жағдайда қарашық бетінің ауданы неше есе артады?

18. 23.9-суреттегі боялған фигураның ауданын табыңдар.



23.9-сурет

23.10-сурет

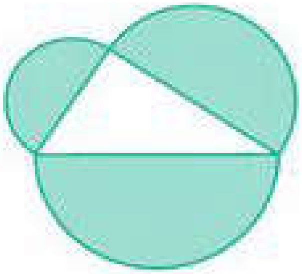
19. Кішкентай жарты шеңберлердің әрқайсысының диаметрі үлкен жарты шеңбердің радиусына тең (23.10-сурет). Егер үлкен жарты шеңбердің радиусы R болса, боялған фигураның ауданы неге тең болады?

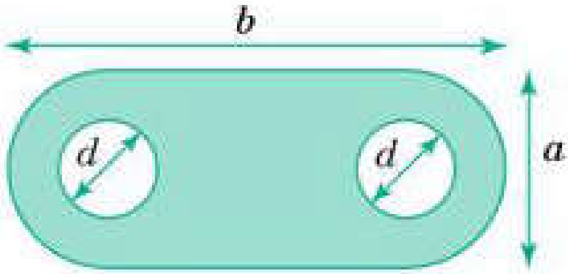

23.11-сурет

Мұндай фигураны Архимед *арбелос* деп атаған. "αρβυλος" грек сөзі, етікшінің пышағы дегенді білдіреді (23.11-сурет). Бұл есепте диаметрлері бірдей кіші дөңгелектерден тұратын арбелос (теңбүйірлі арбелос) қарастырылады .

C

20. Тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасын диаметрі деп алып жарты шеңбер салынған. Жарты шеңбердің ауданы үшбұрыш катеттерін диаметрлері ретінде салынған жарты шеңберлердің аудандарының қосындысына тең болатынын дәлелдеңдер (23.12-сурет).


23.12-сурет



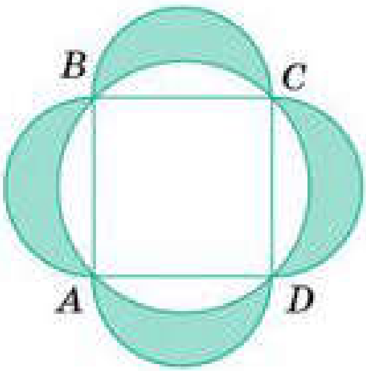
23.13-сурет

21. 23.13-суреттегі боялған фигураның ауданын табыңдар, мұндағы $d = 1$ см, $a = 2$ см, $b = 6$ см.

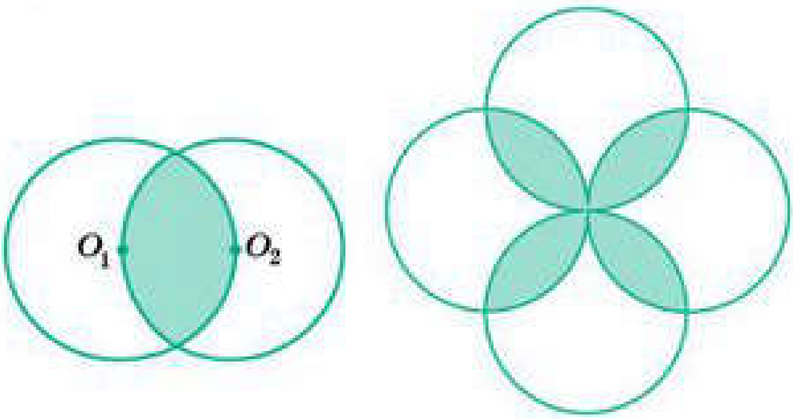
22. 23.14-суреттегі боялған фигура төрт Гиппократ айшықтарынан тұрады. Оның ауданы $ABCD$ квадратының ауданына тең болатынын дәлелдеңдер.

23. Радиусы 1-ге тең дөңгелектің: 1) 60°; 2) 90°; 3) 120° доғасына сәйкес сегменттің ауданын табыңдар.

24. 23.15-суреттегі боялған фигуралардың аудандарын табыңдар. Шеңберлердің радиустары 1-ге тең.



23.14-сурет



23.15-сурет

25. "Бәйтерек" монументі — еліміздің астанасындағы сәулет өнерінің бірегей туындысы. "Бәйтерек" монументінің төменгі деңгейінде аквариум орналасқан (23.16, а-сурет), оның табаны радиустары 10 м және 9,3 м болатын концентрлік шеңберлерден жасалған сақинаның бөлігін құрайды. Кіші шеңбер доғасының ұзындығы 8 м. Дөңгелек сақинаның ауданын табыңдар (23.16, ә-сурет).

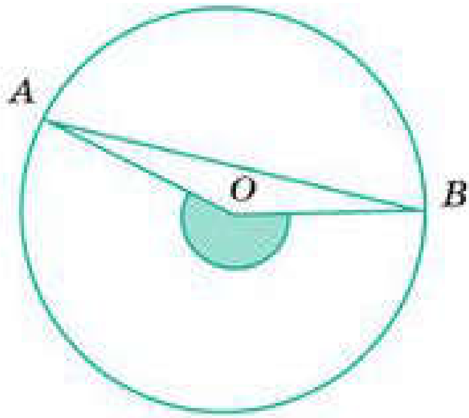
а)

ә)

23.16-сурет

26. "Қазақстан теміржолы" ұлттық компаниясының әкімшілік ғимараты — еліміздің астанасының зәулім құрылыстарының бірі (23.17, а-сурет). Ғимарат бірін-бірі толықтырып тұратын жарты-дөңгелекті екі мұнарадан тұрады (23.17, ә-сурет). Ғимараттың биіктігі 175 м. Ғимараттың табаны дөңгелек сегмент тәріздес, оның радиусы R = 21,5 м және бұрышы α = 200°. Сегменттің ауданын табыңдар .

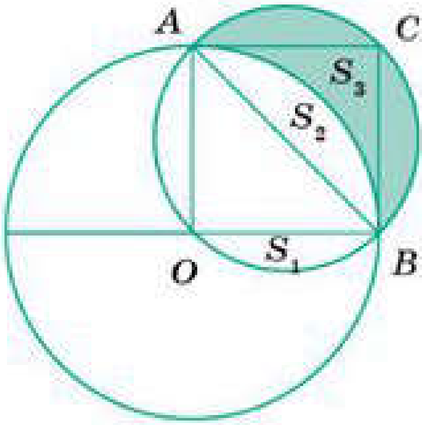
а)



ә)

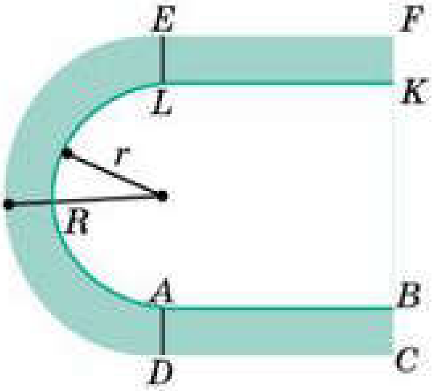
23.17-сурет

27. "Шабыт" шығармашылық сарайы — қазақтың ұлттық өнер мен өнерлі жастарды біріктіретін еліміздің астанасындағы бірегей кешен. Оның бір қабаты екі шеңбердің доғаларымен шектелген Гиппократтың әйгілі айшықты кескінімен жасалған. 23.18-суреттегі боялған айшықтың ауданы ABC тікбұрышты үшбұрыштың ауданына тең болатынын дәлелдеңдер.



23.18-сурет

28. "Eurocenter" бизнес орталығы — еліміздің астанасындағы кеме тәріздес, тік бұрыштары жоқ зәулім ғимарат (23.19-сурет). Ғимараттың 16-шы қабатында балкон бар (балкон суретте көгілдір түспен көрсетілген). Егер $AB = 15$ м, $r = 7$ м және $R = 9{,}55$ м болса, онда балконның ауданын табыңдар .



23.19-сурет

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

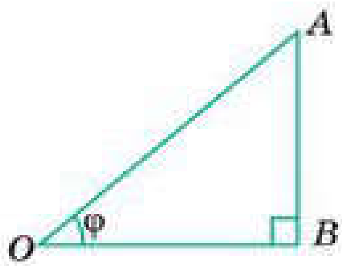
29. Тікбұрышты үшбұрыштың сүйір бұрышының "тригонометриялық функциялары" ұғымын қайталаңдар.

30. Тік және доғал бұрыштардың тригонометриялық функцияларын анықтап көріңдер.

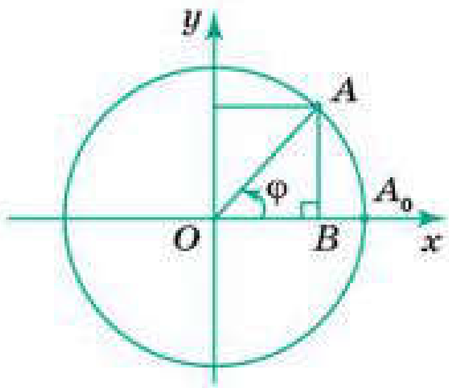
24*. КЕЗ КЕЛГЕН БҰРЫШТАРДЫҢ ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ФУНКЦИЯЛАРЫ

Тікбұрышты үшбұрыштың φ сүйір бұрышы ($0° < \varphi < 90°$) үшін $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\operatorname{tg}\varphi$ және $\operatorname{ctg}\varphi$ тригонометриялық функциялары анықталған болатын. Егер AOB тікбұрышты үшбұрыштың ($\angle B = 90°$) AOB тік бұрышы φ-ға тең болса (24.1-сурет), онда

$$\sin\varphi = \frac{AB}{OA},\ \cos\varphi = \frac{OB}{OA},\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{AB}{OB},\ \operatorname{ctg}\varphi = \frac{OB}{AB}.$$



24.1-сурет



24.2-сурет

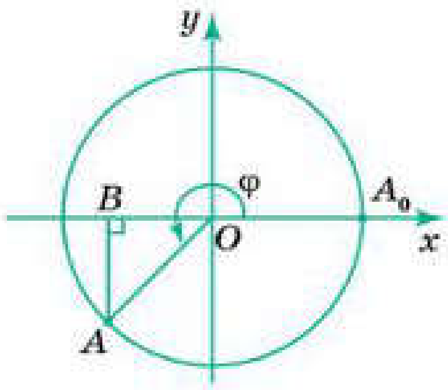
Кез келген φ бұрыштың тригонометриялық функцияларын анықтаймыз.

Декарттық координаталар жүйесін және центрі O координаталар басында болатын радиусы 1-ге тең шеңберді қарастырайық (24.2-сурет). Мұндай шеңберді ***бірлік шеңбер*** деп атаймыз.

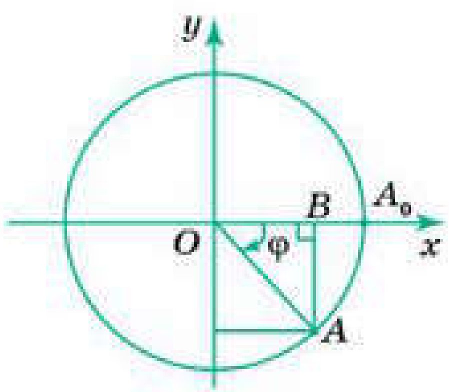
Бірлік шеңберде әрбір φ сүйір бұрышқа ($0° < \varphi < 90°$) A нүктесі сәйкес келеді және ол $A_0(1;\ 0)$ нүктесін сағат тіліне қарсы бағытта φ бұрышқа бұру арқылы алынады. AOB тікбұрышты үшбұрыштың OA гипотенузасы 1-ге тең болғандықтан, осы бұрыштың синусы A нүктесінің ординатасына, ал косинусы A нүктесінің абсциссасына тең болады.

Енді $0° < \varphi < 360°$ болғанда $\sin\varphi$ және $\cos\varphi$ функцияларын анықтаймыз. Ол үшін $A_0(1;\ 0)$ нүктесін O нүктесінен айналдыра сағат тіліне қарсы бағытта φ бұрышқа бұру арқылы алынған A нүктесін қарастырамыз (24.3-сурет). O нүктесін $\varphi = 0°$ және $\varphi = 360°$ бұрыштарына бұру кезінде барлық нүктелер өз орындарында қалады деп есептейміз.

A нүктесінің ординатасы *φ бұрышының синусы* деп аталады және $\sin\varphi$ деп белгіленеді. A нүктесінің абсциссасы *φ бұрышының косинусы* деп аталады және $\cos\varphi$ деп белгіленеді. Сондықтан осы



24.3-сурет



24.4-сурет

бұрыштардың синусы мен косинусын A_0 нүктесінің сәйкесінше ординатасы мен абсциссасы деп есептейміз, яғни $\sin 0° = \sin 360° = 0$, $\cos 0° = \cos 360° = 1$.

Енді $A_0(1; 0)$ нүктесін $\varphi > 360°$ бұрышқа бұруды анықтаймыз. Ол үшін φ-ді $\varphi = \varphi_1 + \ldots + \varphi_n$ қосындысы түрінде көрсетеміз, мұндағы $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ мәндері 360°-тан кіші. Сағат тіліне қарсы бағытта $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ бұрыштарына бұруды ретімен орындау нәтижесі ізделінді A_0 нүктесін φ бұрышқа бұру болады. A нүктесін толық бұру нәтижесінде алынған ордината мен абсцисса сәйкесінше φ бұрыштың синусы мен косинусы деп аталады және $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ деп белгіленеді.

$\varphi < 0°$ бұрышқа бұру алдыңғыға ұқсас анықталады, бірақ сағат тілі бағытымен айналады. Бұл жағдайда $\sin\varphi$ және $\cos\varphi$ функциялары A_0 нүктесін бұру арқылы алынған A нүктесінің сәйкесінше ординатасы мен абсциссасына тең деп ұйғарылады (24.4-сурет).

Синус пен косинустың анықтамаларынан келесі тепе-теңдіктер орынды болады:

(1) $\sin(\varphi + 360°) = \sin\varphi$, $\cos(\varphi + 360°) = \cos\varphi$;

(2) $\sin(\varphi + 180°) = -\sin\varphi$, $\cos(\varphi + 180°) = -\cos\varphi$;

(3) $\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$, $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$;

(4) $\sin(90° - \varphi) = \cos\varphi$, $\cos(90° - \varphi) = \sin\varphi$.

Осыны өздерің тексеріңдер.

Кез келген φ бұрышы үшін $\operatorname{tg}\varphi$ және $\operatorname{ctg}\varphi$ тригонометриялық функциялары әдеттегідей анықталады, яғни

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}, \ \operatorname{ctg}\varphi = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}.$$

$\operatorname{tg}\varphi$ мәні $\varphi \neq 0$ болғанда ғана анықталады, яғни $\varphi \neq 90° + 180° \cdot k$, мұндағы k — бүтін сан; $\operatorname{ctg}\varphi$ мәні $\sin\varphi \neq 0$ болғанда ғана анықталады, яғни $\varphi \neq 180° \cdot k$, мұндағы k — бүтін сан.

Теорема. Кез келген ϕ бұрышы үшін келесі негізгі тригонометриялық тепе-теңдік орынды болады:

$$\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1.$$

Дәлелдеуі. Анықтама бойынша $(\cos\phi; \sin\phi)$ бірлік шеңбердегі нүктенің координаталарын береді, ал $\sin^2\phi + \cos^2\phi$ осы нүктеден координаталар басына дейінгі қашықтықтың квадраты болады. Осыдан $\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1$. ◻

1-мысал. Сағаттың минуттық тілі 2 сағ 30 минутта қандай бұрышқа бұрылады?

Шешуі. Бір сағатта минуттық тіл 360°-қа бұрылады. 2 сағатта ол 720°-қа және 30 минутта 180°-қа бұрылады. Сонымен бұру 720° + + 180° = 900°-ты құрайды.

2-мысал. $\sin 510°$ және $\cos(-300°)$-ты табыңдар.

Шешуі. $\sin 510° = \sin(360° + 150°) = \sin 150° = \sin(180° - 30°) = = \sin 30° = \frac{1}{2}$; $\cos(-300°) = \cos(-300° + 360°) = \cos 60° = \frac{1}{2}$.

Бұрыштарды градуспен ғана емес, радианмен де өлшеуге болатынын еске саламыз. Бұрыштың радиандық өлшем бірлігі ***радиан*** болады. Бір радиан бұрыш — бірлік шеңбердің ұзындығы 1-ге тең доғасына сәйкес келетін бұрыш.

Бірлік шеңбердің ϕ центрлік бұрышына сәйкес доғаның ұзындығын өрнектейтін $l = \frac{\pi\phi}{180°}$ теңдігі доғаның ұзындығы мен оның градустық өлшемі арасындағы сәйкестікті орнатады.

Осы сәйкестікті кез келген ϕ градустық өлшемдеріне қолданамыз. Бұл тригонометриялық функцияларды градустық өлшемдер үшін ғана емес, сандық аргументтер үшін де анықтауға мүмкіндік береді.

Сандық аргументтің тригонометриялық функцияларын 10-сыныпта толығымен оқып білетін боламыз. Мұнда тек олардың мәндерін табуға мысалдар келтіреміз.

Мысалы,

$$\sin 0 = \sin 0° = 0,\ \sin\frac{\pi}{6} = \sin 30° = \frac{1}{2},\ \sin\frac{\pi}{4} = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\sin\frac{\pi}{3} = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\frac{\pi}{2} = \sin 90° = 1,\ \sin\frac{5\pi}{6} = \sin 150° = \frac{1}{2},$$

$$\sin 2\pi = \sin 360° = 0,\ \sin\frac{7\pi}{3} = \sin 420° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

1. Қандай шеңбер бірлік шеңбер деп аталады?
2. $0° < \phi < 360°$ болғанда, $\sin\phi$ және $\cos\phi$ қалай анықталады?
3. $\phi = 0°$ және $\phi = 360°$ болғанда, $\sin\phi$ және $\cos\phi$ қалай анықталады?
4. $\phi > 360°$ болғанда, $\sin\phi$ және $\cos\phi$ қалай анықталады?
5. ϕ теріс градустық өлшемдері үшін $\sin\phi$ және $\cos\phi$ қалай анықталады?
6. Кез келген градустық өлшемдерде синус пен косинус үшін қандай тепе-теңдіктер орындалады?
7. Кез келген ϕ бұрышы үшін $\mathrm{tg}\,\phi$ және $\mathrm{ctg}\,\phi$ қалай анықталады?
8. ϕ бұрышының қандай градустық өлшемдері анықталмаған: а) $\mathrm{tg}\,\phi$; ә) $\mathrm{ctg}\,\phi$?
9. Негізгі тригонометриялық тепе-теңдіктің мәні неде?
10. Сандық аргументтің тригонометриялық функциялары қалай анықталады?

Жаттығулар

А

1. Центрі координаталар басында болатын бірлік шеңберде $A_0(1;\ 0)$ нүктесін: 1) 450°; 2) 540°; 3) –270°; 4) –300° бұрышқа бұрғанда алынған нүктені кескіндеңдер.

2. Сағаттың минуттық тілі: 1) 1 сағ 45 мин-та; 2) 2 сағ 30 мин-та; 3) 3 сағ 20 мин-та қандай градустық шамаға бұрылады?

3. A нүктесі $A_0(1;\ 0)$ нүктесін: 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°; 4) 90° бұрышқа бұру нәтижесінде алынды. A нүктесінің координаталарын табыңдар.

4. A нүктесі $A_0(1;\ 0)$ нүктесін: 1) 120°; 2) 135°; 3) 150°; 4) 180° бұрышқа бұру нәтижесінде алынды. A нүктесінің координаталарын табыңдар.

5. A нүктесі $A_0(1;\ 0)$ нүктесін: 1) 210°; 2) 225°; 3) 240°; 4) 270° бұрышқа бұру нәтижесінде алынды. A нүктесінің координаталарын табыңдар.

6. A нүктесі $A_0(1;\ 0)$ нүктесін: 1) 300°; 2) 315°; 3) 330°; 4) 360° бұрышқа бұру нәтижесінде алынды. A нүктесінің координаталарын табыңдар.

7. 1) $\sin(-30°)$; 2) $\sin(-150°)$; 3) $\cos 420°$; 4) $\cos(-135°)$ мәндері н табыңдар.

8. 1) $\cos 0°$; 2) $\cos\frac{\pi}{6}$; 3) $\cos\frac{\pi}{4}$; 4) $\cos\frac{\pi}{3}$; 5) $\cos\frac{\pi}{2}$; 6) $\cos\frac{2\pi}{3}$; 7) $\cos\frac{3\pi}{4}$; 8) $\cos\frac{5\pi}{6}$; 9) $\cos\pi$ мәндерін табыңдар .

9. 1) $\sin(-\frac{\pi}{6})$; 2) $\sin(-\frac{\pi}{4})$; 3) $\sin(-\frac{\pi}{3})$; 4) $\sin(-\frac{\pi}{2})$; 5) $\sin(-\frac{5\pi}{6})$; 6) $\sin(-2\pi)$; 7) $\sin(-\frac{7\pi}{3})$ мәндерін табыңдар.

B

10. Центрі координаталар басында болатын бірлік шеңберде $A_0(1;\ 0)$ нүктесін: 1) 3π; 2) $\frac{5\pi}{2}$; 3) $-\frac{3\pi}{4}$; 4) $-\frac{7\pi}{3}$ бұрышқа бұрғанда алынған нүктені кескіндеңдер.

11. Қандай уақытта сағаттың минуттық тілі: 1) 300°; 2) 420°; 3) 540°-қа бұрылады?

12. Синус пен косинус: 1) 1-ден үлкен; 2) –1-ден кіші мәндерді қабылдауы мүмкін бе?

13. Қандай градустық шамада синус: 1) оң мәнді; 2) нөлге тең мәнді; 3) теріс мәнді қабылдайды?

14. Қандай градустық шамада косинус: 1) оң мәнді; 2) нөлге тең мәнді; 3) теріс мәнді қабылдайды?

15. Тангенс пен котангенс: 1) 1-ден үлкен; 2) –1-ден кіші мәндерді қабылдауы мүмкін бе?

16. 1) $\operatorname{tg}(-30°)$; 2) $\operatorname{tg}(-150°)$; 3) $\operatorname{ctg} 420°$; 4) $\operatorname{ctg}(-135°)$ мәндерін табыңдар.

C

17. 1) $\operatorname{tg}(\frac{7\pi}{4})$; 2) $\operatorname{tg}(-\frac{\pi}{6})$; 3) $\operatorname{ctg}(\frac{5\pi}{3})$; 4) $\operatorname{ctg}(-\frac{3\pi}{4})$ мәндерін табыңдар.

18. Қандай градустық өлшемде тангенс: 1) нөлден үлкен мәнді; 2) нөлге тең мәнді; 3) нөлден кіші мәнді қабылдайды?

19. Қандай градустық өлшемде котангенс: 1) нөлден үлкен мәнді; 2) нөлге тең мәнді; 3) нөлден кіші мәнді қабылдайды?

20. Келесі тепе-теңдіктер орынды екенін дәлелдеңдер:

$$\operatorname{tg}(\varphi + 180°) = \operatorname{tg}\varphi, \quad \operatorname{ctg}(\varphi + 180°) = \operatorname{ctg}\varphi,$$

$$\operatorname{tg}(-\varphi) = -\operatorname{tg}\varphi, \quad \operatorname{ctg}(-\varphi) = -\operatorname{ctg}\varphi.$$

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

1. Үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің центрі оның бір қабырғасында жатыр. Үшбұрыштың түрін анықтаңдар.

A) теңқабырғалы; B) сүйірбұрышты;
C) тікбұрышты; D) доғалбұрышты.

2. Үшбұрышқа іштей сызылған шеңбердің центрі үшбұрыштың ішінде жатыр. Үшбұрыштың түрін анықтаңдар.

A) сүйірбұрышты; B) тікбұрышты;
C) доғалбұрышты; D) анықтау мүмкін емес.

3. Теңқабырғалы үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің радиусы оған іштей сызылған шеңбердің радиусынан неше есе үлкен?

A) 2 есе; B) 3 есе; C) 4 есе; D) 6 есе.

4. $ABCD$ төртбұрышына сырттай шеңбер сызылған. Оның A, B, C бұрыштарының қатынасы $1:2:3$. D бұрышын табыңдар.

A) 30°; B) 45°; C) 60°; D) 90°.

5. $ABCD$ төртбұрышына іштей шеңбер сызылған. $AB = 11$ см, $CD = 17$ см. Төртбұрыштың периметрін табыңдар.

A) 14 см; B) 28 см; C) 40 см; D) 56 см.

6. Тіктөртбұрыштың кіші қабырғасы 3,6 см-ге тең. Диагональдарының арасындағы бұрыш 120°. Оған сырттай сызылған шеңбердің диаметрін табыңдар.

A) 1,8 см; B) 3,6 см; C) 7,2 см; D) 14,4 см.

7. Ромбының қабырғасы 12 см және бұрышы 30°. Оған іштей сызылған шеңбердің радиусын табыңдар.

A) 3 см; B) 4 см; C) 6 см; D) 8 см.

8. Шеңберге сырттай сызылған тікбұрышты трапецияның периметрі 20 см, оның үлкен бүйір қабырғасы 6 см. Шеңбердің радиусын табыңдар.

A) 2 см; B) 4 см; C) 10 см; D) 14 см.

9. Шеңберге іштей сызылған дұрыс алтыбұрыштың периметрі 36 см. Шеңбердің диаметрін табыңдар.

A) 6 см; B) 9 см; C) 12 см; D) 18 см.

10. Шеңберге іштей сызылған дұрыс n-бұрыштың қабырғасы мен осы қабырғаның бір ұшынан жүргізілген шеңбердің радиусы арасындағы бұрыш 70°-қа тең. n-ді табыңдар.

A) 6; B) 8; C) 9; D) 12.

11. Дөңгелектің диаметрі 4 см-ге тең. Оның ауданын табыңдар.

A) π см^2; B) 2π см^2; C) 4π см^2; D) 16π см^2.

12. Дөңгелектің ауданы 45π дм^2-қа тең. Оның радиусын табыңдар.

A) 9 дм; B) 22,5 дм; C) $9\sqrt{5}$ дм; D) $3\sqrt{5}$ дм.

13. Ауданы радиустары 4 см және 3 см болатын екі дөңгелектің аудандарының қосындысына тең болатын дөңгелектің диаметрін табыңдар.

A) 5 см; B) 6 см; C) 8 см; D) 10 см.

14. Шеңбердің радиусы қақ бөлінген және бөліну нүктесі арқылы берілген шеңберді іштей жанайтын шеңбер жүргізілген. Сәйкесінше дөңгелектердің аудандарының қатынасын табыңдар.

A) 1 : 2; B) 1 : 3; C) 1 : 4; D) 2 : 3.

15. Қабырғасы 3 см-ге тең теңқабырғалы үшбұрышқа сырттай сызылған дөңгелектің ауданын табыңдар.

A) 2π см^2; B) 3π см^2; C) $4{,}5\pi$ см^2; D) 9π см^2.

16. Қабырғасы 6 см-ге тең дұрыс үшбұрышқа іштей сызылған дөңгелектің ауданын табыңдар.

A) π см^2; B) 2π см^2; C) 3π см^2; D) $\frac{1}{2}\pi$ см^2.

17. Бірлік квадратқа іштей және сырттай сызылған дөңгелектердің аудандарының қатынасын табыңдар.

A) 1 : 2; B) 1 : 4; C) 1 : $\sqrt{2}$; D) $\sqrt{2}$: 2.

18. Берілген шеңберге іштей және сырттай сызылған дұрыс алтыбұрыштардың аудандарының қатынасын табыңдар.

A) 1 : 2; B) 3 : 4; C) 1 : 6; D) 2 : 3.

19. Дөңгелектің радиусы 8 дм. 45° центрлік бұрышқа сәйкес сектордың ауданын табыңдар.

A) 4π дм^2; B) 8π дм^2; C) 16π дм^2; D) 64π дм^2.

20. Сектордың ауданы дөңгелектің ауданының $\frac{4}{15}$-іне тең. Сектордың центрлік бұрышын табыңдар.

A) 24°; B) 48°; C) 90°; D) 96°.

9-СЫНЫПТАҒЫ ГЕОМЕТРИЯ КУРСЫН ҚАЙТАЛАУ

1. Жазықтықтағы векторлар

1. $ABCD$ тіктөртбұрыштың екі қабырғасы 6 және 8. $\overrightarrow{AC}$ векторының ұзындығын табыңдар.
2. $ABCD$ тіктөртбұрыштың екі қабырғасы 6 және 8. $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{AD}$ векторларының қосындысының ұзындығын табыңдар.
3. $ABCD$ тіктөртбұрыштың екі қабырғасы 6 және 8. $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{AD}$ векторларының айырымының ұзындығын табыңдар.
4. $ABCD$ тіктөртбұрыштың AB және AD қабырғалары сәйкесінше 6 және 8. $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{AC}$ векторларының қосындысының ұзындығын табыңдар.
5. $ABCD$ тіктөртбұрыштың AB және AD қабырғалары сәйкесінше 6 және 8. $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{AC}$ векторларының айырымының ұзындығын табыңдар.
6. $ABCD$ тіктөртбұрыштың екі қабырғасы 6 және 8. $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{AD}$ векторларының скаляр көбейтіндісін табыңдар.
7. $ABCD$ тіктөртбұрыштың AB және AD қабырғалары сәйкесінше 6 және 8. Диагональдары O нүктесінде қиылысады. $\overrightarrow{AO}$ және $\overrightarrow{BO}$ векторларының қосындысының ұзындығын табыңдар.
8. $ABCD$ тіктөртбұрыштың AB және AD қабырғалары сәйкесінше 6 және 8. Диагональдары O нүктесінде қиылысады. $\overrightarrow{AO}$ және $\overrightarrow{BO}$ векторларының айырымының ұзындығын табыңдар.
9. $ABCD$ ромбының диагональдары 12 және 16. $\overrightarrow{AB}$ векторының ұзындығын табыңдар.
10. $ABCD$ ромбының AC және BD диагональдары сәйкесінше 12 және 16. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ векторының ұзындығын табыңдар.
11. $ABCD$ ромбының AC және BD диагональдары сәйкесінше 12 және 16. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$ векторының ұзындығын табыңдар.
12. $ABCD$ ромбының AC және BD диагональдары сәйкесінше 12 және 16. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ векторының ұзындығын табыңдар.
13. $ABCD$ ромбының AC және BD диагональдары O нүктесінде қиылысады және сәйкесінше 12 мен 16-ға тең. $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO}$ векторының ұзындығын табыңдар.
14. $ABCD$ ромбының AC және BD диагональдары O нүктесінде қиылысады және сәйкесінше 12 мен 16-ға тең. $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{BO}$ векторының ұзындығын табыңдар.

15. $ABCD$ ромбының AC және BD диагональдары O нүктесінде қиылысады және сәйкесінше 12 мен 16-ға тең. $\overrightarrow{AO}$ және $\overrightarrow{BO}$ векторларының скаляр көбейтіндісін табыңдар.

16. ABC дұрыс үшбұрышының қабырғалары 1-ге тең. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ векторының ұзындығын табыңдар.

17. ABC дұрыс үшбұрышының қабырғалары 3-ке тең. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ векторының ұзындығын табыңдар.

18. ABC дұрыс үшбұрышының қабырғалары 3-ке тең. $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{AC}$ векторларының скаляр көбейтіндісін табыңдар.

19. ABC дұрыс үшбұрышының қабырғалары 3-ке тең, O нүктесі — оған сырттай сызылған шеңбердің центрі. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ векторының ұзындығын табыңдар.

20. ABC дұрыс үшбұрышының қабырғалары 3-ке тең, O нүктесі — оған сырттай сызылған шеңбердің центрі. $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ векторының ұзындығын табыңдар.

21. ABC дұрыс үшбұрышының қабырғалары 3-ке тең, O нүктесі — оған сырттай сызылған шеңбердің центрі. $\overrightarrow{OA}$ және $\overrightarrow{OB}$ векторларының скаляр көбейтіндісін табыңдар.

22. ABC дұрыс үшбұрышының қабырғалары 3-ке тең, O нүктесі — оған сырттай сызылған шеңбердің центрі. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ векторының ұзындығын табыңдар.

23. $A(2; 4)$, $B(8; 6)$ нүктелері берілген. $\overrightarrow{AB}$ векторының координаталарын табыңдар.

24. $\overrightarrow{AB}$ векторының координаталары $(9; 3)$. Оның басы $A(3; 6)$ нүктесі болса, ұшы B нүктесінің координаталарын табыңдар.

25. $\overrightarrow{AB}$ векторының координаталары $(3; 1)$. Оның ұшы $B(5; 4)$ нүктесі болса, басы A нүктесінің координаталарын табыңдар.

26. $\vec{a}(2; 6)$, $\vec{b}(8; 4)$ векторлары берілген. $\vec{a} + \vec{b}$ векторының координаталарын табыңдар.

27. $\vec{a}(2; 6)$, $\vec{b}(8; 4)$ векторлары берілген. $\vec{a} + \vec{b}$ векторының ұзындығын табыңдар.

28. $\vec{a}(2; 6)$, $\vec{b}(8; 4)$ векторлары берілген. $\vec{a} - \vec{b}$ векторының координаталарын табыңдар.

29. $\vec{a}(2; 6)$, $\vec{b}(8; 4)$ векторлары берілген. $\vec{a} - \vec{b}$ векторының ұзындығын табыңдар.

30. $\vec{a}(2; 6)$, $\vec{b}(8; 4)$ векторлары берілген. $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының скаляр көбейтіндісін табыңдар.

31. $\vec{a}(2;\ 6)$, $\vec{b}(8;\ 4)$ векторлары берілген. $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының арасындағы бұрышты табыңдар.

32. $\vec{a}(2;\ 6)$, $\vec{b}(8;\ 4)$ векторлары берілген. $\vec{a}$ векторы $\vec{a}-t\vec{b}$ векторына перпендикуляр болатындай t санын табыңдар.

33. $\vec{a}(1;\ 1)$, $\vec{b}(-1;\ 1)$, $\vec{c}(1;\ 2)$ векторлары берілген. $t\vec{a}+\vec{b}$ векторы $\vec{c}$ векторына перпендикуляр болатындай t санын табыңдар.

34. $\vec{a}(1;\ 1)$, $\vec{b}(-1;\ 1)$, $\vec{c}(1;\ 2)$ векторлары берілген. $\vec{c}=t\vec{a}+s\vec{b}$ болатындай t, s сандарын табыңдар.

2. Жазықтықтағы түрлендірулер

1. A, B, C нүктелері үшін C нүктесін $\overline{AB}$ векторына параллель көшіргенде алынған C' нүктесін салыңдар.

2. Параллель көшіру кезінде өзіне-өзі көшетін нүктелер бар бола ма?

3. Параллель көшіру кезінде өзіне-өзі көшетін кесінділер бар бола ма?

4. Қандай жағдайда бір кесіндіні екінші кесінді бейнелейтін параллель көшіру бар болады?

5. Параллель көшіру кезінде өзіне-өзі көшетін түзулер бар бола ма?

6. Екі параллель түзулер берілген. Олардың біреуін екіншісіне көшіретін неше параллель көшіру бар болады?

7. Дұрыс бесбұрыштың бір қабырғасын оның екінші қабырғасына көшіретін параллель көшіру бар бола ма?

8. Дұрыс алтыбұрыштың бір қабырғасын оның екінші қабырғасына көшіретін параллель көшіру бар бола ма?

9. Осьтік симметрия кезінде өзіне-өзі көшетін нүктелер бар бола ма?

10. Осьтік симметрия кезінде өзіне-өзі көшетін кесінділер бар бола ма?

11. Қандай түзулер осьтік симметрия кезінде өзіне-өзі көшеді?

12. Осьтік симметрия A нүктесін A' нүктесіне көшіреді. Симметрия осі қайда орналасқан?

13. Циркуль мен сызғыштың көмегімен берілген оське қатысты берілген нүктеге симметриялы нүктені салыңдар.

14. Осьтік симметриясы бар фигураларға мысалдар келтіріңдер.

15. Осьтік симметриясы жоқ фигураларға мысалдар келтіріңдер.

16. 1) Ромбының; 2) ромбыдан өзгеше параллелограмның; 3) теңбүйірлі трапецияның симметрия осі бола ма?

17. 1) Дұрыс үшбұрыштың; 2) квадраттың; 3) шеңбердің неше симметрия осьтері болады?
18. Дұрыс n-бұрыштың неше симметрия осі болады?
19. Қандай жағдайда осьтік симметрия кезінде түзу оған параллель түзуге көшеді?
20. Центрлік симметрия кезінде өзіне-өзі көшетін нүктелер бар бола ма?
21. Центрлік симметрия кезінде өзіне-өзі көшетін кесінділер бар бола ма?
22. Қандай түзулер центрлік симметрия кезінде өзіне-өзі көшеді?
23. Кесіндінің симметрия центрі не болады?
24. Центрлік симметрия A нүктесін A' нүктесіне көшіреді. Симметрия центрі қайда орналасқан?
25. 1) Сәуленің; 2) қиылысқан түзулер жұбының симметрия центрі бола ма?
26. 1) Дұрыс үшбұрыштың; 2) дұрыс емес теңбүйірлі үшбұрыштың; 3) тіктөртбұрыштың; 4) ромб болмайтын параллелограмның; 5) теңбүйірлі трапецияның; 6) шеңбердің симметрия центрі бола ма?
27. Фигураның симметрия центрі оған тиісті болмауы мүмкін бе?
28. Фигураның: 1) екі; 2) үш; 3) шексіз көп симметрия центрі бола ма?
29. 1) O нүктесі AB түзуінде жатыр; 2) O нүктесі AB түзуінен тыс жатыр. O центріне қатысты AB кесіндісіне симметриялы кесіндіні салыңдар.
30. Түзуден тыс жатқан нүктеге қатысты берілген түзуге симметриялы түзуді салыңдар.
31. Симметрия центрі бар және симметрия осі жоқ фигураға мысалдар келтіріңдер.
32. Симметрия осі бар және симметрия центрі жоқ фигураға мысалдар келтіріңдер.
33. A нүктесін берілген O нүктесінен айналдыра 30°, 60°, 120°, 180°, 270°-қа бұрғанда алынған нүктені салыңдар.
34. Берілген түзуді қандай бұрышқа бұрғанда алынған түзу бастапқы түзумен: 1) перпендикуляр; 2) параллель болады?
35. A' нүктесі A нүктесін бұрғанда алынды. Осы берілгендер бойынша бұру бұрышын анықтауға бола ма?
36. A' нүктесі A нүктесін 60°-қа бұрғанда алынды. Осы берілгендер бойынша айналдыра бұру жүргізілген O нүктесін анықтауға бола ма?

37. Дұрыс үшбұрыш оған сырттай сызылған шеңбердің центрінен айналдыра 180°-қа бұрылды. Пайда болған және бастапқы үшбұрыштардың ортақ бөлігі қандай фигура болады?
38. Дұрыс бесбұрыш оған сырттай сызылған шеңбердің центрінен айналдыра 36°-қа бұрылды. Пайда болған және бастапқы бесбұрыштардың ортақ бөлігі қандай фигура болады?
39. 1) Ромбыдан өзгеше параллелограмның; 2) квадраттан өзгеше ромбының; 3) квадраттан өзгеше тіктөртбұрыштың; 4) квадраттың диагональдарының қиылысу нүктесі қандай ретті симметрия центрі болады?
40. Қозғалыс кезінде әртүрлі нүктелер бір нүктеге көшуі мүмкін бе?
41. Қозғалыс шеңберді радиусы дәл сондай болатын шеңберге көшіретінін дәлелдеңдер.
42. Қозғалыс ABC үшбұрышын $A'B'C'$ үшбұрышына көшірсін. ABC үшбұрышының биіктіктері, медианалары және биссектрисалары $A'B'C'$ үшбұрышының сәйкесінше биіктіктері, медианалары және биссектрисаларына көшетінін дәлелдеңдер.
43. Берілген екі тең кесінділер үшін біреуін екіншісіне көшіретін қозғалысты көрсетіңдер.
44. Егер екі шеңбердің радиустары тең болса, онда олар өзара тең екенін дәлелдеңдер.
45. Егер екі төртбұрыштың сәйкесінше барлық қабырғалары тең болса, онда бұл төртбұрыштар тең бола ма?
46. k ұқсастық коэффициенті бойынша F' фигурасы F фигурасына ұқсас. Қандай коэффициентпен F фигурасы F' фигурасына ұқсас болады?
47. Кез келген ұқсастық коэффициентте өз-өзіне ұқсас фигураларға мысалдар келтіріңдер.
48. Егер екі бұрыш ұқсас болса, онда олар тең болатыны ақиқат па?
49. A' нүктесі A нүктесінен гомотетия кезінде алынды. Егер: 1) $0 < k < 1$; 2) $k > 1$ болса, онда осы нүктелердің қайсысы гомотетияның O центріне жақын орналасқан?
50. Гомотетия кезінде өзіне-өзі көшетін түзулер бар бола ма?
51. A, B нүктелері және оларға сәйкесінше гомотетиялы A', B' нүктелері берілген. Гомотетия центрін табуға бола ма?
52. Егер гомотетия центрі екі шеңбердің біреуінің: 1) центрі; 2) бойында жатқан нүкте болса, онда екі шеңбер бір-біріне қатысты қалай орналасады?
53. Кез келген екі шеңбер ұқсас екенін және ұқсастық коэффициенті олардың радиустарының қатынасына тең болатынын дәлелдеңдер.

54. Центрі берілген үшбұрыштың төбесі және коэффициенті: 1) 3; 2) $\frac{1}{3}$ болатын гомотетия кезінде берілген үшбұрыштан алынған үшбұрышты салыңдар.

55. Төртбұрыштың қабырғалары 14 см, 21 см, 10 см және 32 см. Осы төртбұрышқа ұқсас төртбұрыштың кіші қабырғасы 20 см-ге тең болса, қалған қабырғаларын табыңдар.

56. Екі ромбы ұқсас болуы үшін қандай шарттар орындалуы керек?

57. Екі: 1) теңқабырғалы үшбұрыш; 2) теңқабырғалы үшбұрыштан өзгеше теңбүйірлі үшбұрыш; 3) теңбүйірлі тікбұрышты үшбұрыш ұқсас бола ма?

58. Үшбұрыштың қабырғалары 5 см, 8 см және 10 см. Осы үшбұрышқа ұқсас үшбұрыштың қабырғаларын табыңдар, мұндағы ұқсастық коэффициент: 1) $\frac{1}{2}$; 2) 2.

59. Екі үшбұрыш ұқсас. Бір үшбұрыштың екі бұрышы 55° және 80°. Екінші үшбұрыштың ең кіші бұрышын табыңдар.

60. ABC және $A_1B_1C_1$ ұқсас үшбұрыштарында $AB = 8$ см, $BC = 10$ см, $A_1B_1 = 5{,}6$ см, $A_1C_1 = 10{,}5$ см. AC және B_1C_1-ді табыңдар.

61. ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштарында $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $AB = 5$ м, $BC = 7$ м, $A_1B_1 = 10$ м, $A_1C_1 = 8$ м. Үшбұрыштардың қалған қабырғаларын табыңдар.

62. Үшбұрыштың қабырғалары 5 : 3 : 6 қатынасындай. Осы үшбұрышқа ұқсас үшбұрыштың: 1) периметрі 28 см-ге тең; 2) үлкен қабырғасы 24 см-ге тең. Екінші үшбұрыштың қабырғаларын табыңдар.

63. Егер екі теңбүйірлі үшбұрыштың табандарына қарсы жатқан төбелеріндегі бұрыштары тең болса, онда олар ұқсас болатынын дәлелдеңдер.

64. Егер екі тікбұрышты үшбұрыштардың сүйір бұрыштары тең болса, онда олар ұқсас болатынын дәлелдеңдер.

65. Тікбұрышты үшбұрыштың тік бұрышынан жүргізілген биіктігі оны бастапқымен ұқсас екі үшбұрышқа бөлетінін дәлелдеңдер.

66. Екі теңбүйірлі үшбұрыштардың бүйір қабырғаларының арасындағы бұрыштары тең. Бір үшбұрыштың бүйір қабырғасы мен табаны сәйкесінше 17 см және 10 см, екінші үшбұрыштың табаны 8 см. Екінші үшбұрыштың бүйір қабырғасын табыңдар.

67. Бір теңбүйірлі емес тікбұрышты үшбұрыштың катеттері екінші тікбұрышты үшбұрыштың катеттерінен 3 см-ге артық. Осы үшбұрыштар ұқсас бола ма?

68. ABC үшбұрышында AB, BC және AC қабырғаларына параллель сәйкесінше DE, EG және DG орта сызықтары жүргізілген. Пайда болған үшбұрыштардың ішінен ұқсас болатындарды көрсетіңдер .

69. Бір үшбұрыштың қабырғалары 8 см, 6 см және 5 см. Осы үшбұрышқа ұқсас екінші үшбұрыштың кіші қабырғасы 2,5 см. Екінші үшбұрыштың қалған қабырғаларын табыңдар.

70. Үшбұрыштың қабырғалары 6 м, 8 м және 9 м. Осы үшбұрышқа ұқсас үшбұрыштың кіші қабырғасы берілген үшбұрыштың үлкен қабырғасына тең. Екінші үшбұрыштың қабырғаларын табыңдар.

3. Үшбұрыштарды шешу

1. ABC үшбұрышында $AB = 9$, $\angle A = 45°$ $\angle C = 60°$. BC қабырғасын табыңдар.

2. ABC үшбұрышында $AB = 6$ см, $\angle A = 45°$, $\angle C = 120°$. BC қабырғасын табыңдар.

3. ABC үшбұрышында $BC = 3$, $AC = \sqrt{3}$ және $\angle A = 60°$. B бұрышын табыңдар.

4. Үшбұрыштың қабырғаларының ұзындықтары $2 : 3 : 4$ қатынасындай. Оның бұрыштарының синустарының қатынасын табыңдар.

5. Үшбұрыштың бұрыштарының синустары $3 : 4 : 5$ қатынасындай. Қабырғалары қандай қатынаста болады? Бұл қандай үшбұрыш?

6. ABC үшбұрышында: 1) $\angle A = 120°$, $\angle B = 30°$; 2) $\angle A = 90°$, $\angle B = 30°$. $AC : BC$ және $AB : BC$ қатынастарын табыңдар.

7. Үшбұрыштың бұрыштарының қатынасы $1 : 2 : 3$. Қабырғаларының қатынасын табыңдар.

8. ABC үшбұрышында $AB = 4$, $BC = 3$, $AC = 5$. Үшбұрыштың CD биссектрисасы оның AB қабырғасын бөлетін кесінділерді табыңдар.

9. ABC үшбұрышында $AB = 3$, $AC = BC = 6$. Үшбұрыштың AD биссектрисасы оның BC қабырғасын бөлетін кесінділерді табыңдар.

10. ABC үшбұрышында $AC = BC = 1$, $\angle C = 30°$. AB қабырғасын табыңдар.

11. ABC үшбұрышында $AC = BC = 1$, $\angle C = 45°$. AB қабырғасын табыңдар.

12. ABC үшбұрышында $AB = 12$ см, $AC = 8$ см, $\angle A = 60°$. Оның үшінші қабырғасын табыңдар.

13. Үшбұрыштың $120°$-қа тең бұрышына іргелес жатқан қабырғалары: 1) 6 см және 10 см; 2) 7 мм және 8 мм болса, оған қарсы жатқан қабырғасын табыңдар.

14. Үшбұрыштың A бұрышының қандай мәнінде оған қарсы жатқан қабырғасының квадраты: а) қалған екі қабырғасының квадраттарының қосындысынан кіші; ә) қалған екі қабырғасының квадраттарының қосындысына тең; б) қалған екі қабырғасының квадраттарының қосындысынан үлкен болады?

15. Үшбұрыштың қабырғалары 5 м, 6 м және 7 м. Оның бұрыштарының косинустарын табыңдар.

16. Параллелограмның диагональдары 6 және 8-ге тең. Олардың арасындағы бұрыш 30°. Параллелограмның қабырғаларын табыңдар.

17. Параллелограмның қабырғалары 6 және 8-ге, бір бұрышы 45°-қа тең. Параллелограмның диагональдарын табыңдар.

18. Үшбұрыштың қабырғалары a, b және c. c қабырғасына қарсы жатқан C бұрышы 120°. $c^2 = a^2 + ab + b^2$ теңдігі орындалатынын дәлелдеңдер.

19. Параллелограмның қабырғалары 6 мм және 7 мм, бір диагоналі 11 мм-ге тең. Оның екінші диагоналін табыңдар.

20. Теңбүйірлі үшбұрыштың қабырғалары 6, 7 және 7. Оның бүйір қабырғасына жүргізілген медианасын табыңдар.

21. Шеңбердің диаметріне тірелген іштей сызылған бұрыш қандай болады?

22. Шеңбердің бір доғасына тірелген центрлік бұрыш іштей сызылған бұрыштан 25°-қа үлкен. Осы бұрыштарды табыңдар.

23. Шеңберд ің: 1) $\frac{1}{5}$-іне; 2) 15%-ын а тең доғаға тірелетін іштей сызылған бұрышты табыңдар.

24. Гипотенузасы AC болатын ABC тікбұрышты үшбұрыштың B төбелерінің геометриялық орнын көрсетіңдер.

25. Берілген A және B нүктелері үшін ACB бұрышы: 1) сүйір; 2) доғал болатындай C нүктелерінің геометриялық орнын табыңдар.

26. Хорда шеңберді екі доғаға бөледі. Бұл доғалардың шамаларының қатынастары 5 : 7 болса, осы хорда шеңбердің бойындағы нүктелерден қандай бұрышпен көрінеді?

27. Доғаның ұштары арқылы арасындағы бұрышы 50° болатын жанамалар жүргізілген. Олардың арасындағы бұрышты табыңдар.

28. AB хордасы шеңбердің доғасын 44°-қа кереді. Осы хорда мен хорданың ұштары арқылы жүргізілген жанаманың арасындағы бұрышты табыңдар.

29. ACB бұрышына іштей шеңбер сызылған. Жанасу нүктелері шеңберді екі доғаға бөледі. Бұл доғалардың шамаларының қатынасы 5 : 7. $\overset{\smile}{ACB}$ бұрышының шамасын табыңдар.

30. Шеңбердің AB және DE доғалары сәйкесінше 85° және 45°-қа тең. C нүктесінде қиылысқан AD және BE хордаларының арасындағы ACB бұрышын табыңдар.

31. ACD бұрышының CA қабырғасы шеңберді жанайды, CD қабырғасы шеңбердің центрі арқылы өтеді, ал оның қабырғаларымен шектелген $\smile{AD}$ доғасы 70°-қа тең. Осы бұрышты табыңдар.

32. Шеңбердің AB және CD хордалары E нүктесінде қиылысады, $AE = 3$, $DE = 2$, $CE = 6$. BE кесіндісін табыңдар.

33. Шеңберден тыс жатқан E нүктесі арқылы екі сәуле жүргізілген және олардың біреуі шеңбермен A нүктесінде жанасады, екіншісі шеңберді B және C нүктелерінде қиып өтеді. $BE = 8$, $CE = 2$. AE кесіндісін табыңдар.

34. Шеңбердің OA радиусы 6-ға тең. Оның ортасы E нүктесі арқылы CD хордасы жүргізілген. CE және DE кесінділерінің көбейтіндісін табыңдар.

35. Шеңбердің OA радиусы 8-ге тең. Оның ортасы E нүктесі арқылы CD хордасы жүргізілген. $CE = 6$. DE кесіндісін табыңдар.

36. Шеңбердің радиусы 3 см-ге тең. Радиустың созындысы бойынан шеңбердің O центрінен 5 см қашықтықта E нүктесі алынған. E нүктесі арқылы шеңберді B және C нүктелерінде қиып өтетін сәуле жүргізілген. BE және CE кесінділерінің көбейтіндісін табыңдар.

37. Шеңбердің радиусы 2 см-ге тең. Радиустың созындысы бойынан шеңбердің O центрінен 4 см қашықтықта E нүктесі алынған. E нүктесі арқылы шеңберді B және C нүктелерінде қиып өтетін сәуле жүргізілген. $BE = 5$ см. CE кесіндісін табыңдар.

38. Шеңбердің радиусы 5 см-ге тең. E нүктесі шеңбердің центрінен 3 см қашықтықта жатыр. E нүктесі арқылы 8 см-ге тең CD хордасы жүргізілген. CD хордасының E нүктесімен бөлінетін кесінділерін табыңдар.

39. Радиустары 2 см және 5 см болатын екі шеңбер A нүктесінде іштей жанасады. A нүктесі арқылы өтетін түзу шеңберлерді B және C нүктелерінде қиып өтеді. $AB = 2$ см. AC кесіндісін табыңдар.

40. Радиустары 2 см және 5 см болатын екі шеңбер A нүктесінде сырттай жанасады. A нүктесі арқылы өтетін түзу шеңберлерді B және C нүктелерінде қиып өтеді. $AC = 5$ см. AB кесіндісін табыңдар.

4. Шеңбер. Көпбұрыштар

1. Іштей және сырттай сызылған шеңберлері бар үшбұрышты салыңдар.

2. 1) Сүйірбұрышты; 2) тікбұрышты; 3) доғал бұрышты үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің центрі қайда орналасады?

3. Шеңберге іштей сызылған теңбүйірлі үшбұрыштың бүйір қабырғасы $90°$-қа тең доғаны кереді. Үшбұрыштың бұрыштарын табыңдар.
4. Шеңберге іштей сызылған теңбүйірлі үшбұрыштың табаны $60°$-қа тең доғаны кереді. Үшбұрыштың бұрыштарын табыңдар.
5. Тікбұрышты үшбұрыштың катеттері 6 см және 8 см. Оған сырттай және іштей сызылған шеңберлердің радиустарын табыңдар.
6. Берілген үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің центрін салыңдар.
7. Шеңбердің бойында орналасқан A, B, C нүктелері шеңберді үш доғаға бөледі. Бұл доғалардың шамаларының қатынасы $3:4:5$. ABC үшбұрышының бұрыштарын табыңдар.
8. ABC үшбұрышының AB қабырғасы 6-ға тең және осы қабырғаға қарсы жатқан C бұрышы: 1) $30°$; 2) $45°$; 3) $60°$; 4) $90°$; 5) $150°$. Осы үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің радиусын табыңдар.
9. ABC үшбұрышына сырттай сызылған шеңбердің радиусы 6 см-ге тең. Үшбұрыштың AB қабырғасына қарсы жатқан C бұрышы: 1) $30°$; 2) $45°$; 3) $60°$; 4) $90°$; 5) $150°$-қа тең болса, осы қабырғаны табыңдар.
10. ABC үшбұрышында $\angle A = 40°$, $\angle B = 60°$. Үшбұрыштың қандай қабырғасы оған сырттай сызылған шеңбердің центріне жақын орналасқан?
11. ABC үшбұрышында $AB = 4$, $AC = 5$, $BC = 6$. Үшбұрыштың қандай төбесі оған іштей сызылған шеңбердің центріне жақын орналасқан?
12. Үшбұрыштың қабырғалары 3, 3, 4. Оған сырттай және іштей сызылған шеңберлердің радиустарын табыңдар.
13. Шеңберді және оған іштей сызылған төртбұрышты салыңдар.
14. Төртбұрыштың ретімен алынған бұрыштары берілген: 1) $90°$, $80°$, $70°$, $120°$; 2) $50°$, $110°$, $120°$, $80°$. Осы төртбұрышқа сырттай шеңбер сызуға бола ма?
15. Шеңберге іштей сызылған төртбұрыштың екі бұрышы $100°$ және $110°$. Төртбұрыштың қалған екі бұрышын табыңдар.
16. Қабырғасы 2-ге тең квадратқа сырттай сызылған шеңбердің радиусын табыңдар.
17. Қабырғалары 3 және 4 болатын тіктөртбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің радиусын табыңдар.
18. 1) Квадратқа; 2) квадраттан өзгеше тіктөртбұрышқа; 3) ромбыға; 4) параллелограмға іштей шеңбер сызуға бола ма?

19. Төртбұрыштың ретімен алынған қабырғалары 2, 3, 4, 5. Осы төртбұрышқа іштей шеңбер сызуға бола ма?

20. Қабырғасы 2-ге тең квадратқа іштей сызылған шеңбердің радиусын табыңдар.

21. Іштей шеңбер сызуға болатын төртбұрыштың ретімен алынған қабырғалары 3 см, 4 см және 5 см. Осы төртбұрыштың төртінші қабырғасын және периметрін табыңдар.

22. Шеңберге сырттай сызылған төртбұрыштың қарама-қарсы қабырғалары 6 см және 7 см. Төртбұрыштың периметрін табыңдар.

23. Ромбының қабырғасы 4 см, сүйір бұрышы 45°. Ромбыға іштей сызылған шеңбердің радиусын табыңдар.

24. Шеңберге сырттай сызылған трапецияның периметрі 20 см-ге тең. Трапецияның орта сызығын табыңдар.

25. Радиусы 2-ге тең шеңберге іштей сызылған дұрыс алтыбұрыштың қабырғасын табыңдар.

26. Дұрыс алтыбұрыштың қабырғасы 3-ке тең. Осы алтыбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің радиусын табыңдар.

27. Егер шеңбердің радиусы: 1) 2 есе артса; 2) 3 есе кемісе, онда шеңбердің ұзындығы қалай өзгереді?

28. Егер шеңбердің радиусы: 1) 2 см; 2) 3 см; 3) 5 см-ге кемісе, онда шеңбердің ұзындығы қаншаға кемиді?

29. 2° бұрышқа сәйкес шеңбер доғасының ұзындығы 1 см-ге тең. Шеңбердің ұзындығын табыңдар.

30. Шеңбердің ұзындығы 72 см. 20° бұрышқа сәйкес доғасының ұзындығын табыңдар.

31. Шеңбердің ұзындығы 6 см. 1) 20°; 2) 45°; 3) 60°; 4) 90° центрлік бұрышқа сәйкес шеңбер доғасының ұзындығын табыңдар.

32. 1) 30°; 2) 60°; 3) 90°; 4) 120° бұрышының радиандық өлшемін табыңдар.

33. Бұрыштың радиандық өлшемі берілген: 1) $\frac{\pi}{6}$; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{\pi}{3}$; 4) $\frac{2\pi}{3}$. Оның градустық шамасын табыңдар.

34. Қабырғасы 2-ге тең: 1) дұрыс үшбұрышқа; 2) квадратқа; 3) дұрыс алтыбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің ұзындығын табыңдар.

35. Қабырғасы 2-ге тең: 1) дұрыс үшбұрышқа; 2) квадратқа; 3) дұрыс алтыбұрышқа іштей сызылған шеңбердің ұзындығын табыңдар.

36. Дөңгелектің диаметрі: 1) 2 см; 2) 5 м. Оның ауданын табыңдар.

37. Дөңгелектің ауданы: 1) 9π см^2; 2) 25π м^2. Оның радиусын табыңдар.

38. Шеңбердің ұзындығы 2 м-ге тең. Осы шеңбермен шектелген дөңгелектің ауданын табыңдар.

39. Дөңгелектің ауданы 1-ге тең. Осы дөңгелекті шектеп тұрған шеңбердің ұзындығын табыңдар.

40. Дөңгелектің радиусы 1-ге тең. 1) 1°; 2) 5°; 3) 10° центрлік бұрышқа сәйкес сектордың ауданын табыңдар.

41. Егер дөңгелектің радиусы: 1) 3 есе; 2) 4 есе; 3) 5 есе кемісе, онда оның ауданы неше есе кемиді?

42. Центрлері ортақ, ал радиустары 2 және 3 болатын екі шеңбердің арасында шектелген дөңгелек сақинаның ауданын табыңдар .

43. Қабырғасы 2-ге тең: 1) теңқабырғалы үшбұрышқа; 2) квадратқа; 3) дұрыс алтыбұрышқа сырттай сызылған дөңгелектің ауданын табыңдар.

44. Қабырғасы 2-ге тең: 1) теңқабырғалы үшбұрышқа; 2) квадратқа; 3) дұрыс алтыбұрышқа іштей сызылған дөңгелектің ауданын табыңдар.

45. Радиусы 1-ге тең дөңгелектің: 1) 60°; 2) 90°; 3) 120° доғасына сәйкес сегменттің ауданын табыңдар.

Тригонометриялық функциялардың жуық мәндерінің кестесі

A	sin A	tg A	A	sin A	tg A	A	sin A	tg A
30'	0,0087	0,0087	30°	0,50	0,58	60°	0,87	1,73
1°	0,0175	0,0175	31°	0,52	0,60	61°	0,87	1,80
2°	0,035	0,035	32°	0,53	0,62	62°	0,88	1,88
3°	0,05	0,05	33°	0,54	0,65	63°	0,89	1,96
4°	0,07	0,07	34°	0,56	0,68	64°	0,90	2,02
5°	0,09	0,09	35°	0,57	0,70	65°	0,91	2,15
6°	0,10	0,11	36°	0,59	0,73	66°	0,91	2,25
7°	0,12	0,12	37°	0,60	0,75	67°	0,92	2,36
8°	0,14	0,14	38°	0,62	0,78	68°	0,93	2,48
9°	0,16	0,16	39°	0,63	0,81	69°	0,93	2,61
10°	0,17	0,18	40°	0,64	0,84	70°	0,94	2,78
11°	0,19	0,19	41°	0,66	0,87	71°	0,95	2,90
12°	0,21	0,21	42°	0,67	0,9	72°	0,95	3,08
13°	0,23	0,23	43°	0,68	0,93	73°	0,96	3,27
14°	0,24	0,25	44°	0,69	0,97	74°	0,96	3,49
15°	0,26	0,27	45°	0,71	1,00	75°	0,97	3,73
16°	0,28	0,29	46°	0,72	1,04	76°	0,97	4,01
17°	0,29	0,31	47°	0,73	1,07	77°	0,97	4,33
18°	0,31	0,32	48°	0,74	1,11	78°	0,98	4,71
19°	0,33	0,34	49°	0,75	1,15	79°	0,98	5,15
20°	0,34	0,36	50°	0,77	1,19	80°	0,98	5,67
21°	0,36	0,38	51°	0,78	1,23	81°	0,99	6,31
22°	0,37	0,40	52°	0,79	1,28	82°	0,99	7,12
23°	0,39	0,42	53°	0,80	1,33	83°	0,992	8,14
24°	0,41	0,45	54°	0,81	1,38	84°	0,994	9,51
25°	0,42	0,47	55°	0,82	1,43	85°	0,996	11,43
26°	0,44	0,49	56°	0,83	1,48	86°	0,998	14,30
27°	0,45	0,51	57°	0,84	1,54	87°	0,999	19,08
28°	0,47	0,53	58°	0,85	1,60	88°	1,00	28,64
29°	0,48	0,55	59°	0,86	1,66	89°	1,00	57,29

ПӘНДІК АТАУ КӨРСЕТКІШТЕРІ

ЖАУАПТАРЫ

8-СЫНЫПТАҒЫ ГЕОМЕТРИЯ КУРСЫН ҚАЙТАЛАУ

1. Бұрыштар

1. 62°. **2.** 116°. **3.** 118°. **4.** 70°. **5.** 50°. **6.** 55°. **7.** 124°. **8.** 54°. **9.** 60°. **10.** 118°. **11.** 64°. **12.** 24°. **13.** 60°. **14.** 50°. **15.** 65°. **16.** 61°. **17.** 65°. **18.** 120°. **19.** 70°. **20.** 80°. **21.** 108°. **22.** 70°. **23.** 110°. **24.** 38°. **25.** 120°. **26.** 60°. **27.** 144°. **28.** 90°. **29.** 40°.

2. Ұзындық

1. 15 см. **2.** 10 см. **3.** 12 см. **4.** 20 см. **5.** 10 см. **6.** 23 см. **7.** 69 см. **8.** 15 см. **9.** 20 см. **10.** 9 см. **11.** 2. **12.** 14. **13.** 12. **14.** 16. **15.** 5. **16.** $3\sqrt{2}$. **17.** $\frac{8\sqrt{3}}{3}$. **18.** 1. **19.** 13. **20.** 4,8. **21.** 6. **22.** 2. **23.** 15. **24.** 9. **25.** 10. **26.** 0,5. **27.** 4. **28.** 4. **29.** 10. **30.** 14.

3. Үшбұрыштың қабырғалары мен бұрыштарының арасындағы қатынастар

1. $4\sqrt{3}$. **2.** $2\sqrt{2}$. **3.** $2\sqrt{3}$. **4.** $\sqrt{3}$. **5.** 2. **6.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **7.** $\sqrt{3}$. **8.** 1. **9.** 5. **10.** 5. **11.** 8. **12.** 15. **13.** 12. **14.** 8. **15.** 6. **16.** 6. **17.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **18.** $2\sqrt{3}$. **19.** 8. **20.** 9,6. **21.** $\frac{6\sqrt{10}}{7}$. **22.** $\frac{3\sqrt{5}}{5}$. **23.** $\frac{12\sqrt{5}}{5}$. **24.** 5.

4. Аудан

1. 6. **2.** 8. **3.** 20. **4.** 8. **5.** 60. **6.** 6. **7.** 8. **8.** $16\sqrt{2}$. **9.** 5. **10.** 8. **11.** 4. **12.** $4\sqrt{2}$. **13.** 32. **14.** 6. **15.** 30°. **16.** 3. **17.** 2. **18.** 12. **19.** 5. **20.** 6. **21.** 20. **22.** 24. **23.** 4. **24.** 25. **25.** 20. **26.** 48. **27.** 6. **28.** $18\sqrt{3}$. **29.** 3. **30.** 6. **31.** 2. **32.** 7. **33.** 6. **34.** 15. **35.** 8. **36.** 45°. **37.** 160. **38.** 42. **39.** 9. **40.** 80.

5. Жазықтықтағы тікбұрышты координаталар жүйесі

2. 5. **3.** 4. **4.** (3; 0). **5.** (0; 2). **6.** 1) (4; 2); 2) (–1; 2); 3) (1; 1). **7.** (0; 1). **8.** (8; 6). **9.** (4; 5). **10.** 1) $\sqrt{5}$; 2) 5. **11.** 1) 2; 2) 3. **12.** Қашықтықтар тең. **13.** 1) (–5; 2), 4; 2) (0; –3), 3. **14.** 1) $x^2 + y^2 = 4$; 2) $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$. **15.** а) Шеңбердің ішінде; ә), б), в) шеңбердің бойында; г) шеңбердің сыртында. **16.** $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$. **17.** $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 25$. **19.** 1) $y = 1$; 2) $x = 2$. **20.** 1) $x = 3$; 2) $y = 2$. **21.** 1) $y - 2 = x + 1$; 2) $y - 2 = 2(x + 1)$; 3) $y - 2 = \frac{1}{2}(x + 1)$; 4) $y - 2 = -(x + 1)$; 5) $y - 2 = -2(x + 1)$; 6) $y - 2 = -\frac{1}{2}(x + 1)$. **22.** 5. **23.** 12. **24.** 6. **25.** 4.

1-тарау. ЖАЗЫҚТЫҚТАҒЫ ВЕКТОРЛАР

1. Вектор ұғымы

2. 4. **3.** 12. **4.** 6. **5.** 1) $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{FE}$; 2) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{ED}$. **6.** 1) $\sqrt{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\sqrt{2}$. **7.** 1) 1; 2) $\sqrt{3}$; 3) 2; 4) $\sqrt{3}$. **8.** 1) 4 см; 2) 3 см; 3) 4 см; 4) 5 см; 5) 5 см. **9.** 1) 5 см; 2) 3 см; 3) 4 см. **10.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **11.** 1) 13 см; 2) $5\sqrt{2}$ см; 3) $\sqrt{74}$ см. **12.** 1) Параллелограмм; 2) ромб.

2. Векторлардың қосындысы

1. 1) $\overrightarrow{AC}$; 2) $\overrightarrow{CA}$; 3) $\overrightarrow{CB}$; 4) $\overrightarrow{CA}$. **2.** 1) $\overrightarrow{AC}$; 2) $\overrightarrow{CE}$; 3) $\overrightarrow{BD}$; 4) $\overrightarrow{AD}$; 5) $\overrightarrow{AE}$. **3.** 1), 3), 5) иә; 2), 4) жоқ. **4.** Иә. **5.** Иә. **6.** 1) $\overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$; 2) $\overrightarrow{BD} = \vec{b} + \vec{c}$; 3) $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$. **7.** 1) a; 2) $\sqrt{3}\,a$; 3) $\sqrt{3}\,a$. **8.** 1) 18; 2) 6; 3) 14; 4) 10. **9.** 1) 1; 2) 0; 3) $\sqrt{3}$; 4) 2. **10.** 1) $\overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{AD}$; 3) $\vec{0}$; 4) $\vec{0}$.

3. Векторды санға көбейту

1. $\overrightarrow{DE} = 0{,}5\,\overrightarrow{AB}$. **3.** 1) $\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{CB}$; 3) $\overrightarrow{CA}$. **4.** 1) $\overrightarrow{DB}$; 2) $\overrightarrow{CA}$; 3) $\overrightarrow{AD}$; 4) $\overrightarrow{AC}$. **5.** 1) 1; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **6.** 1) 6; 2) 8; 3) 5; 4) 8. **7.** $\overrightarrow{AD}$. **8.** $\overrightarrow{AC}$. **9.** 1) 2; 2) 10; 3) 3; 4) 5. **11.** $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\right)$. **13.** 1) $\vec{a} = \vec{b}$; 2) $\vec{a} = \vec{0}$.

4. Вектордың жіктелуі

1. 1) 2; 2) –2; 3) 0,5; 4) –0,5. **2.** 1) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$; 2) $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$. **3.** 1) $\overrightarrow{AO} = 0{,}5\overrightarrow{AB} + 0{,}5\overrightarrow{AD}$; 2) $\overrightarrow{BO} = 0{,}5\overrightarrow{AD} - 0{,}5\overrightarrow{AB}$. **4.** 1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{BO}$; 2) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO}$. **5.** $\vec{a} = \vec{i} + 1{,}5\vec{j}$; $\vec{b} = -2\vec{j}$; $\vec{c} = 1{,}5\vec{i} + \vec{j}$; $\vec{d} = -0{,}5\vec{i} + 1{,}5\vec{j}$. **6.** 1) $t = 1$, $s = 0{,}5$; 2) $t = s = 2$; 3) $t = s = 0{,}5$. **7.** 1) $-\vec{a}$; 2) $\vec{b}$; 3) $\vec{b} - \vec{a}$; 4) $\vec{b} - 2\vec{a}$; 5) $2\vec{a} - 2\vec{b}$. **8.** 1) $0{,}5\vec{b} + 0{,}5\vec{c}$; 2) $0{,}5\vec{b} - \vec{c}$; 3) $-\vec{b} + 0{,}5\vec{c}$. **9.** 5 км/сағ.

5. Векторлардың арасындағы бұрыш. Векторлардың скаляр көбейтіндісі

1. 1) $3\sqrt{2}$; 2) 0; 3) $-3\sqrt{2}$; 4) –6. **2.** 1) 90°; 2) 60°; 3) 180°. **3.** 1) 0; 2) 16; 3) 9. **4.** 1) 0; 2) 1. **5.** 1) 3; 2) 1. **6.** 1) 60°; 2) 120°; 3) 120°; 4) 90°. **7.** 1) 0,5; 2) –0,5; 3) –0,5; 4) 0. **8.** 1) 0,5; 2) 0,5; 3) 0; 4) $-\frac{3}{4}$. **9.** 1) 3; 2) –1,5. **10.** 1) 4; 2) 6; 3) 4. **11.** 1) 0°; 2) 180°. **13.** 16. **17.** $v_{\text{нәт.}} = \sqrt{v^2_{\text{көл.}} + v^2_{\text{жол.}}} \approx 10{,}8$ км/сағ. **18.** Екінші. **19.** $v_{\text{ағын}} = v_{\text{қайық}} \cdot \sin(90° - 55°) \approx 6{,}9$ км/сағ. **20.** $v_{\text{с}} = v_{\text{ұшақ}} \cdot \cos 37° \approx 798{,}6$ км/сағ.

$S_c \approx 1996{,}5$ км; $v_{\text{ш}} = v_{\text{ұшақ}} \cdot \sin 37^\circ \approx 601{,}8$ км/сағ, $S_{\text{ш}} \approx 1504{,}5$ км. **21.** $A = \vec{F} \cdot \vec{S} = |\vec{F}| \cdot |\vec{S}| \cdot \cos 30^\circ \approx 2600$ Дж. **22.** Адам рюкзакқа әсер ететін ауырлық күшіне қарама-қарсы бағытта тұрақты күш салады. Сонда $A = |\vec{F}| \cdot |\vec{S}| \cdot \cos\alpha = |\vec{F}| \cdot h = mgh \approx 980$ Дж. Жұмыс таудың көлбеулігіне байланысты болмайды.

6. Вектордың координаталары

1. 1) $(-2;\ 6)$; 2) $(1;\ 3)$; 3) $(0;\ -3)$; 4) $(-5;\ 0)$. **2**. $(5;\ -2)$. **3**. $\sqrt{x^2+y^2}$. **4**. $(5;\ -6)$. **5**. -4. **6**. 0,8. **7**. $(-a;\ -b)$. **8**. $(-2;\ 0)$. **9**. $(1;\ 3)$ және $(1;\ -3)$. **10**. 1) $(1;\ -2)$; 2) $(-1;\ 2)$; 3) $(11;\ -22)$. **11**. 40. **13**. $-\frac{2}{3}$. **14**. 60°. **15**. -5. **16**. 17.

7*. Түзудің теңдеуі

1. 1) $x+y-3=0$; 2) $-x+2y=0$. **2**. $(2;\ -3)$. **3**. $\left(-\frac{c}{a};\ 0\right)$, $\left(0;\ -\frac{c}{b}\right)$. **4**. $x+y-1=0$. **5**. $x-2y+7=0$, $\vec{n}(1;\ -2)$. **6**. 1) $\begin{cases} x = 2+t, \\ y = 1+t; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 2-t, \\ y = 1+2t. \end{cases}$ **7**. a_1: $x+3y-3=0$; a_2: $2x-y+2=0$. **8**. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **9**. 1), 2) 90°. **10**. 1) $x-y-1=0$; 2) $3x+2y-8=0$. **11**. 1) $x-2y+4=0$; 2) $2x+y+3=0$. **12**. 1) 1, 3; 2) 2, 4. **13**. $\begin{cases} x = 3+2t, \\ y = -2+3t. \end{cases}$ **14**. 5. **15**. 1) $5\sqrt{2}$; 2) 4. **16**. $2x-y-5=0$. **17**. 1) $(-1;\ -2)$; 2) $(7;\ 3)$.

Өзіңді тексер!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	B	C	A	B	D	C	B	A	C	B	C	B	D	B	C	B	D	A	C

2-тарау. ЖАЗЫҚТЫҚТАҒЫ ТҮРЛЕНДІРУЛЕР

8. Параллель көшіру

3. Егер кесінділер тең және параллель болса. **5**. 1) Жоқ; 2) иә, қарама-қарсы қабырғалары үшін. **6**. Параллелограмм. **15**. $(1;\ -1)$. **16**. $(-5;\ -3)$. **17**. $(x-k-x_0)^2 + (y-l-y_0)^2 = R^2$. **18**. 1) $x^2+4x+y^2=0$; 2) $x^2+y^2+4y=0$. **19**. $a(x-k)+b(y-l)+c=0$. **20**. 1) $x+y=0$; 2) $x+y-1=0$.

9. Осьтік симметрия

1. Симметрия осінде жататын нүктелер. **2**. Симметрия осіне перпендикуляр түзулер және симметрия осі. **3**. AA' кесіндісіне жүргізілген орта перпендикуляр. **9**. 1) Біреу; 2) үшеу. **10**. 1), 2) Шексіз көп. **11**. Шексіз көп. **12**. 1) Екеу; ә) төртеу. **13**. 1) Біреу де емес; ә) екеу. **14**. 1) 5; 2) 6; 3) n. **15**. 1), 2), 4). **18**. 1) $(3;\ 4)$; 2) $(-3;\ -4)$. **20**. 1) $(x-x_0)^2+(y+y_0)^2=R^2$; 2) $(x+x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$. **21**. 1) $x^2+2x+y^2+4y-4=0$; 2) $x^2-2x+y^2-4y-4=0$. **22**. 1) $ax-by+c=0$; 2) $-ax+by+c=0$. **23**. 1) $x+2y+3=0$; 2) $x+2y-3=0$.

10. Центрлік симметрия

1. Симметрия центрі. **2**. Симметрия центрі арқылы өтетін түзу. **3**. Кесіндінің ортасы. **4**. AA' кесіндісінің ортасында. **5**. Жоқ. **8**. 1), 3) Шексіз көп; 2) біреу. **9**. 1), 3) Жоқ; 2), 4) иә. **10**. 1), 2) Иә; 3) жоқ. **11**. 2), 3), 4), 5). **16**. (–3; 4). **20**. $(x + x_0)^2 + (y + y_0)^2 = R^2$. **21**. $x^2 - 2x + y^2 + 4y - 3 = 0$. **22.** $ax + by - c = 0$. **23**. $x - 2y - 3 = 0$.

11. Бұру. *n*-ші ретті симметрия

4. 90°. **8**. 1) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$; 2) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 3) $\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 4) (0; 1); 5) $\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 6) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 7) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$; 8) (–1; 0). **9**. 1) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$; 2) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 3) $\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 4) (0; –1); 5) $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 6) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 7) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$; 8) (–1; 0). **10**. Қабырғасы $\frac{1}{3}$-ге тең дұрыс алтыбұрыш. **11**. Қабырғасы $(\sqrt{2}-1)$-ге тең дұрыс сегізбұрыш. **13**. 60°.

12. Қозғалыс. Фигуралардың теңдігі

1. 1), 2) және 5); 3), 4) және 8); 6) және 7). **2**. Жоқ. **3**. Жоқ. **4**. Жоқ. **15**. $2n$.

13. Фигуралардың ұқсастығы. Гомотетия

1. 1) 6 см, 8 см, 10 см; 2) 9 см, 12 см, 15 см; 3) 1,5 см, 2 см, 2,5 см. **2**. 2 см, 3 см, 4 см. **5.** 1) 5; 2) 4; 3) 2; 4) $\sqrt{2}$. **6.** $S' = 9S$. **7**. $\frac{1}{k}$. **10.** $S_1 = 4S$. **13**. Жоқ. **14**. $\frac{b^2}{a}$. **15**. Жоқ. **16**. $\sqrt{ab}$. **17**. 6, 2:1.

14. Үшбұрыштардың ұқсастығының белгілері

1. 1), 3) Иә; 2) жоқ. **2**. 1) 2,5 см, 4 см, 5 см; 2) 10 см, 16 см, 20 см. **3**. Иә. **4**. 1), 2) Иә. **5**. 1) ABC, DBE, FEC; 2) ABC, ADG, GFC, FBE; 3) ABE, BCE, CAD; 4) ABO, CDO; 5) ABC және FGC, ADC және FEC, DBC және EGC. **7**. 1) $9\frac{1}{3}$; 2) 10. **8**. AC = 15 см, B_1C_1 = 7 см. **9**. AC = 4 см, B_1C_1 = 14 см. **10**. 6,4 дм, 5,76 дм және 2,4 дм. **11**. 4 см және 3 см. **12**. 7,5 см. **13**. 1), 3) Иә; 2) жоқ. **14**. 9. **15**. 15. **16**. 8. **17**. 5. **18**. 100 м. **19**. 30 м. **20**. 10 м. **21**. 1) 15 см, 9 см, 21 см; 2) 5 см, $8\frac{1}{3}$ см, $11\frac{2}{3}$ см; 3) 5 см, 3 см, 7 см. **22**. 18 м, 24 м, 27 м. **23**. 2, 3, 4. **24**. 13,6 см. **28**. Иә. **29**. Иә. **30**. $3\frac{5}{9}$ см, $5\frac{1}{3}$ см, 8 см. **31**. 15 см. **33**. 30 м. **34.** 4 м. **35.** 6 м. **36.** 5,1 м. **37.** 2,5 м. **38.** 250 м. **39.** 97 м. **40.** 62 м. **41.** 6,12 м. **42.** 91 м. **43.** $36\frac{1}{8}$ м. **44.** 629 м. **45**. Иә, егер үшбұрыш теңқабырғалы болмаса. **47**. $\frac{bc}{b+c}$. **48**. $\frac{ch}{b+h}$. **49**. 50 м. **50**. 120 см.

Өзіңді тексер!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A	B	C	A	C	D	D	C	D	D	A	B	A	C	B	D	C	A	C	B

3-тарау. ҮШБҰРЫШТАРДЫ ШЕШУ

15. Синустар теоремасы

1. $2\sqrt{6}$. **2**. $5\sqrt{2}$. **3**. 90°. **4**. 45°. **5**. 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **6**. 45° немесе 135°. **7**. $\frac{c \cdot \sin\varphi}{\sin(\varphi+\psi)}$, $\frac{c \cdot \sin\psi}{\sin(\varphi+\psi)}$. **8**. $AD = 5$, $BD = 3$. **9**. $BC = \frac{2}{3}$, $CD = \frac{4}{3}$. **10**. $AC_1 = 1\frac{1}{7}$, $BC_1 = \frac{6}{7}$; $BA_1 = 1$, $CA_1 = 2$; $AB_1 = 1\frac{3}{5}$, $CB_1 = 2\frac{2}{5}$. **12**. $AD = \frac{(a-b)\cdot\sin\psi}{\sin(\varphi+\psi)}$, $BC = \frac{(a-b)\cdot\sin\varphi}{\sin(\varphi+\psi)}$. **13**. $CH = \frac{c \cdot \sin\varphi \cdot \sin\psi}{\sin(\varphi+\psi)}$. **14.** ≈ 995 м. **15.** ≈ 1365 м. **17.** $BC = 194$ м, $AC = 97\sqrt{3}$ м.

16. Косинустар теоремасы

1. 1) 90°-тан кіші; 2) 90°; 3) 90°-тан үлкен. **2**. 1) Доғалбұрышты; 2) тікбұрыш ты; 3) сүйірбұрышты. **3.** $4\sqrt{7}$. **4**. 1. **5**. $\sqrt{2}$. **6**. $\sqrt{3}$. **7**. $\sqrt{2+\sqrt{2}}$. **8**. $\sqrt{2+\sqrt{3}}$. **9**. 30°, 30°, 120°. **10**. $\cos A = \frac{7}{8}$, $\cos B = \frac{11}{16}$, $\cos C = -\frac{1}{4}$. **12**. $\sqrt{13}$ см, $\sqrt{37}$ см. **13**. $\sqrt{13}$ см, $\sqrt{37}$ см. **14**. $\sqrt{10}$ см. **15**. $\frac{\sqrt{10}}{2}$ см. **16**. $\sqrt{10}$ см. **18**. $3\sqrt{5}$. **19**. 6. **20**. 10. **21.** $6\sqrt{6}$.

17. Шеңберге іштей сызылған бұрыштар

1. CAD, CAE, DBF, ADB. **2.** 90°. **3.** 35° және 70°. **4.** 20° және 40°. **5**. 1) 60°; 2) 45°; 3) 36°; 4) 30°. **6**. 1) 18°; 2) 36°; 3) 72°; 4) 90°. **7**. 120°. **8**. 35°. **9**. 35°. **10**. 80° және 100°. **11**. 70°. **12**. 160°. **13**. 45°. **14**. 135°. **15**. 22,5°. **16**. 67,5°. **17**. 30°. **18**. 150°. **19**. 120°.

18. Шеңбермен байланысқан бұрыштар

1. 75°. **2.** 65°. **3**. 38°. **4**. 20°. **5**. 40°. **6**. 35°. **7**. 128°. **8**. 45°. **9**. 45°. **11**. 60°. **12.** Диаметрі AB болатын A және B нүктелерінсіз шеңбер. **13**. 1) Диаметрі AB болатын шеңберден тыс жатқан AB түзуіне тиісті емес нүктелер; 2) Диаметрі AB болатын шеңбердің ішінде жатқан AB кесіндісіне тиісті емес нүктелер.

19. Шеңбермен байланысқан кесінділер

1. $5\frac{1}{3}$. **2**. 21. **3.** 4. **4**. 6. **5**. 8. **6**. 3. **7**. 10. **8**. 3. **9**. 4,8. **10.** 12 см және 6 см. **11**. 15. **12**. 6. **13**. 30. **14**. 7,5.

Өзіңді тексер!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A	D	B	C	A	C	B	D	A	A	C	D	D	A	B	C	B	B	D	A

4-тарау. ШЕҢБЕР. КӨПБҰРЫШТАР

20. Үшбұрыштар және шеңбер

2. 1), 2), 3) Иә. **3**. Гипотенузаның ортасында. **4**. 30°, 30°, 120°. **5**. 50°, 65°, 65°. **6**. 2,5 және 1. **8**. 30°, 45°, 105°. **9**. 1) 10; 2) $5\sqrt{2}$; 3) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$; 4) 5; 5) 10. **10**. 1) 3; 2) $3\sqrt{2}$; 3) $3\sqrt{3}$; 4) 6; 5) 3. **11**. 1) $4\frac{1}{6}$; 2) $1\frac{1}{3}$. **12**. 40°, 60°, 80°. **14**. *AB*. **16**. *A*. **17**. $\frac{35\sqrt{6}}{24}$, $\frac{2\sqrt{6}}{3}$. **19**. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **20**. $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$. **21**. 3, 12.

21. Төртбұрыштар және шеңбер

3. 1), 3) Иә; 2), 4) жоқ. **4**. 1), 2) Жоқ. **5**. 100° және 120°. **6**. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **7**. 5 см. **8**. 12 см. **9**. 1), 3) Иә; 2), 4) жоқ. **11**. Жоқ. **12**. 0,5. **13**. 7 см. **14**. 34 см. **15**. 120°, 80°, 60°, 100°. **16**. 5 см. **17**. 1. **18**. $\frac{15\sqrt{17}}{34}$. **20**. 1) $\sqrt{10}$; 2) $2\sqrt{5}$. **21**. 4,5 см. **22.** 8 см.

22. Дұрыс көпбұрыштар және шеңбер

1. 1. **2.** 3. **3.** 3. **4.** 1) 3 есе артады; 2) 2 есе кемиді. **5.** 1) 2π см; 2) 4π см; 3) 10π см. **6.** 360 м. **7**. 3 см. **8.** 1) $\frac{\pi}{6}$; 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) $\frac{2\pi}{3}$; 4) $\frac{3\pi}{2}$. **9.** 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{\pi}{3}$; 3) $\frac{5\pi}{6}$. **10.** 1) 90°; 2) 45°; 3) 70°; 4) 240°. **11.** 0,7 м. **12.** 1) а) 3,14 м; ә) 6,28 м; 2) а) 15,7 м; ә) 31,4 м. **14**. 1) $\frac{1}{2\pi}$ см; 2) $\frac{1}{\pi}$ см; 3) $\frac{5}{2\pi}$ см. **15**. 1) $\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$; 2) $\sqrt{2}\pi$; 3) 2π. **16**. 1) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$; 2) π; 3) $\sqrt{3}\pi$. **17**. 4π. **18**. 8π. **19**. $\sqrt{3}$. **20**. 2π м. **21**. 180°. **22.** $\sqrt{2+\sqrt{3}}$, $\frac{\sqrt{7+4\sqrt{3}}}{2}$. **23**. ≈ 6369427 м. **24**. $\frac{200}{\pi}$ ≈ **64** м. **25.** 12 м. **26.** 375. **27.** 64,8 км/сағ. **28.** 1°. **29.** 72 м. **30.** 408000 км. **31**. 156 000 000 км.

23. Дөңгелектің және оның бөліктерінің ауданы

1. 1) 4π; 2) 25π. **2.** 1) 2 см; 2) 4 м. **3**. $\frac{1}{4\pi}$ м^2. **4**. 25π. **5**. 1) $\frac{\pi}{6}$; 2) $\frac{\pi}{9}$; 3) $\frac{\pi}{3}$. **6**. 1) 4; 2) 9; 3) 16. **7.** 3π. **8.** 9π мм^2. **9.** 1) $6,25\pi$ м^2; 2) 25π м^2. **10**. 1) $\frac{\pi}{3}$; 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) π. **11**. 1) $\frac{\pi}{12}$;

2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{3\pi}{4}$. **12**. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **13**. 8. **14**. 16. **15**. 1200 см^2. **16**. 13 см. **17**. 25. **18**. 1) $a^2 - \frac{\pi a^2}{4}$;
2) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi b^2}{2}$. **19.** π. **21**. $\left(8 + \frac{\pi}{2}\right)$ см^2. **23**. 1) $\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$; 2) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$; 3) $\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$.
24. 1) $\frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{6}$; 2) $2\pi - 4$.

24*. Кез келген бұрыштардың тригонометриялық функциялары

2. 1) 630°; 2) 900°; 3) 1200°. **3**. 1) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$; 2) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 3) $\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 4) (0; 1).
4. 1) $\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 2) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 3) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$; 4) (–1; 0). **5**. 1) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$; 2) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;
3) $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 4) (0; –1). **6**. 1) $\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 2) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 3) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$; 4) (1; 0).
7. 1) $-\frac{1}{2}$; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **8**. 1) 1; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\frac{1}{2}$; 5) 0; 6) $-\frac{1}{2}$; 7) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 8) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$;
9) –1. **9**. 1) $-\frac{1}{2}$; 2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) –1; 5) $-\frac{1}{2}$; 6) 0; 7) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **11**. 1) 50 мин; 2) 1 сағ 10 мин;
3) 1 сағ 30 мин. **12**. 1), 2) Жоқ. **13**. 1) $360°\cdot k < \varphi < 180° + 360°\cdot k$; 2) $\varphi = 180°\cdot k$; 3) $-180° + 360\cdot k < \varphi < 360°\cdot k$, k – бүтін сан. **14**. 1) $-90° + 360°\cdot k < \varphi < 90° + 360°\cdot k$;
2) $\varphi = 90° + 180°\cdot k$; 3) $90° + 360°\cdot k < \varphi < 270° + 360°\cdot k$, k – бүтін сан. **15**. 1), 2) Иә. **16**. 1) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$;
2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 4) 1. **17**. 1) –1; 2) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; 3) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; 4) 1. **18**. 1) $180°\cdot k < \varphi < 90° + 180°\cdot k$;
2) $\varphi = 180°\cdot k$; 3) $90° + 180°\cdot k < \varphi < 180°\cdot k$, k – бүтін. **19**. 1) $180°\cdot k < \varphi < 90° + 180°\cdot k$;
2) $\varphi = 180°\cdot k$; 3) $-90° + 180°\cdot k < \varphi < 180°\cdot k$, k – бүтін сан.

Өзіңді тексер!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C	D	A	D	D	C	A	A	C	C	C	D	D	C	B	C	A	B	B	D

9-СЫНЫПТАҒЫ ГЕОМЕТРИЯ КУРСЫН ҚАЙТАЛАУ

1. Жазықтықтағы векторлар

1. 10. **2**. 10. **3**. 10. **4**. $4\sqrt{13}$. **5**. 8. **6**. 0. **7**. 8. **8**. 6. **9.** 10. **10**. 12. **11.** 16. **12**. 10. **13**. 10. **14**. 10. **15**. 0. **16**. $\sqrt{3}$. **17**. 3. **18**. 4,5. **19**. $\sqrt{3}$. **20**. 3. **21**. –1,5. **22**. 0. **23**. (6; 2). **24**. (12; 9). **25**. (2; 3). **26**. (10; 10). **27**. $10\sqrt{2}$. **28**. (–6; 2). **29**. $2\sqrt{10}$. **30**. 40. **31**. 45°. **32**. 1. **33**. $-\frac{1}{3}$. **34**. $t = 1,5$, $S = 0,5$.

2. Жазықтықтағы түрлендірулер

2. Жоқ. **3**. Жоқ. **4**. Кесінділер тең және параллель түзулерде немесе бір түзудің бойында жатыр. **5**. Иә, егер түзу параллель көшіру векторына параллель болса. **6**. Шексіз көп. **7**. Жоқ. **8**. Иә. **9**. Иә, симметрия осіне тиісті нүктелер. **10**. Иә. **11**. Симметрия осінің өзі және симметрия осіне перпендикуляр түзулер. **12.** AA' кесіндісіне жүргізілген орта перпендикуляр болады. **16**. 1), 3) Иә; 2) жоқ. **17**. 1) Үшеу; 2) төртеу; 3) шексіз көп. **18**. n. **19**. Егер ол симметрия осіне параллель болса. **20.** Иә, симметрия центрі. **21.** Иә, ортасы симметрия центрі болатын кесінділер. **22**. Симметрия центрі арқылы өтетін түзулер. **23**. Кесіндінің ортасы. **24.** AA' кесіндісінің ортасында. **25**. 1) Жоқ; 2) иә. **26**. 1), 2), 5) Жоқ; 3), 4), 6) иә. **27**. Иә. **28**. 1), 2) Жоқ; 3) иә. **34**. 1) 90°; 2) 180°. **35**. Жоқ. **36**. Жоқ. **37**. Дұрыс алтыбұрыш. **38**. Дұрыс онбұрыш. **39**. 1), 2), 3) Екінші; 4) төртінші. **40**. Жоқ. **45**. Жоқ. **46**. $\frac{1}{k}$. **47**. Мысалы, түзу. **48**. Иә. **49**. 1) A'; 2) A. **50**. Иә, гомотетия центрі арқылы өтетін түзулер. **51**. Иә. **52**. 1) Ортақ центрі бар; 2) жанасады. **55**. 28 см, 42 см, 20 см және 64 см. **56**. Ромбылардың сәйкесінше бұрыштары тең болады. **57**. 1), 3) Иә; 2) жоқ. **58**. 1) 2,5 см, 4 см және 5 см; 2) 10 см, 16 см және 20 см. **59.** 45°. **60.** $AC = 15$ см, $B_1C_1 = 7$ см. **61**. $AC = 16$ м, $B_1C_1 = 14$ м. **62**. 1) 10 см, 6 см, 12 см; 2) 20 см, 12 см, 24 см. **66**. 13,6 см. **67.** Жоқ. **68**. ABC, AFD және DEC. **69**. 4 см, 3 см. **70**. 18 м, 24 м, 27 м.

3. Үшбұрыштарды шешу

1. $3\sqrt{6}$. **2**. $2\sqrt{6}$. **3**. 30°. **4**. 2 : 3 : 4. **5**. 3 : 4 : 5, тікбұрышты. **6**. 1) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 2) 0,5. **7**. 3 : 4 : 5. **8**. 2,5 және 1,5. **9**. 2 және 4. **10**. $\sqrt{2-\sqrt{3}}$. **11**. $\sqrt{2-\sqrt{2}}$. **12**. $\sqrt{4-\sqrt{7}}$. **13**. 1) 14 см; 2) 13 мм. **14**. 1) 90°-тан кіші; 2) 90°; 3) 90°-тан үлкен. **15**. $\frac{5}{7}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{19}{35}$. **16**. $\sqrt{25-12\sqrt{3}}$, $\sqrt{25+12\sqrt{3}}$. **17**. $\sqrt{100-48\sqrt{2}}$, $\sqrt{100+48\sqrt{2}}$. **19**. 7 мм. **20**. 5,5. **21.** 90°. **22**. 50° және 25°. **23**. 1) 36°; 2) 27°. **24**. Диаметрі AC болатын A және C нүктелерінсіз шеңбер. **25**. 1) Диаметрі AB болатын шеңберден тыс жатқан AB түзуіне тиісті емес нүктелерсіз нүктелер; 2) Диаметрі AB болатын шеңбердің ішінде жатқан AB кесіндісіне тиісті емес нүктелерсіз нүктелер. **26**. 75° және 105°. **27**. 50°. **28**. 22°. **29**. 30°. **30**. 75°. **31**. 20°. **32**. 4. **33**. 4. **34**. 27. **35**. 8. **36**. 16 см. **37**. 2,4 см. **38**. 4 см және 4 см. **39**. 5 см. **40.** 2 см.

4. Шеңбер. Көпбұрыштар

2. 1) Үшбұрыштың ішінде; 2) гипотенузада; 3) үшбұрыштан тыс. **3**. 45°, 45°, 90°. **4**. 30°, 75°, 75°. **5**. 5 см және 2 см. **7**. 45°, 60°, 75°. **8**. 1) 6; 2) $3\sqrt{2}$; 3) $2\sqrt{3}$; 4) 3; 5) 6. **9**. 1) 6; 2) $6\sqrt{2}$; 3) $6\sqrt{3}$; 4) 12; 5) 6. **10**. *AB*. **11**. *A*. **12**. $\frac{9\sqrt{5}}{10}$, $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **14**. 1), 2) Жоқ. **15**. 80° және 70°. **16**. $\sqrt{2}$. **17**. 2,5. **18**. 1), 3) Иә; 2), 4) жоқ. **19**. Жоқ. **20**. 1. **21**. 4 см, 16 см. **22**. 26 см. **23**. $\sqrt{2}$ см. **24.** 5 см. **25**. 2. **26**. 3. **27**. 1) 2 есе артады; 2) 3 есе кемиді. **28**. 1) 4π см; 2) 6π см; 3) 10π см. **29**. 180 см. **30**. 4 см. **31**. 1) $\frac{2\pi}{3}$; 2) $\frac{3\pi}{2}$; 3) 2π; 4) 3π. **32**. 1) $\frac{\pi}{6}$; 2) $\frac{\pi}{3}$; 3) $\frac{\pi}{4}$; 4) $\frac{\pi}{3}$. **33**. 1) 30°; 2) 90°; 3) 60°; 4) 120°. **34**. 1) $\frac{4\pi\sqrt{3}}{3}$; 2) $2\sqrt{2}\pi$; 3) 4π. **35**. 1) $\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$; 2) 2π; 3) $2\sqrt{3}\pi$. **36**. 1) π см^2; 6,25 π м^2. **37**. 1) 3 см; 2) 5 м. **38**. $\frac{1}{n}$ м^2. **39**. $\sqrt{2}\pi$. **40**. 1) $\frac{\pi}{360}$; 2) $\frac{\pi}{72}$; 3) $\frac{\pi}{36}$. **41**. 1) 9; 2) 16; 3) 25. **42**. 5π. **43**. 1) $\frac{4\pi}{3}$; 2) 2π; 3) 4π. **44**. 1) $\frac{\pi}{3}$; 2) π; 3) 3π. **45**. 1) $\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}$; 2) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$; 3) $\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}$.

МАЗМҰНЫ

Учебное издание

Смирнов Владимир Алексеевич
Туяков Есенкельды Алыбаевич

ÀÀÍÀÓÐÈß

Учебник для 9 классов общеобразовательных школ
(*на казахском языке*)

Редакторы *Ж. Өміржанова*
Көркемдеуші редакторы *Л. Уралбаева*
Техникалық редакторы *Л. Садықова*
Корректоры *С. Дәуірхан*
Компьютерде беттеген *Г. Оразақынова*

Баспаға Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігінің № 0000001 мемлекеттік лицензиясы 2003 жылы 7 шілдеде берілген

ИБ №5829

Басуға 21.05.19 қол қойылды. Пішімі 70×100 $^{1}/_{16}$. Офсеттік қағаз. Қаріп түрі «SchoolBook Kza». Офсеттік басылыс. Шартты баспа табағы 14,84+0,32 қосарбет. Шартты боялы беттаңбасы 30,97. Есептік баспа табағы 7,50+0,54 қосарбет. Таралымы 100000 дана. Тапсырыс №

«Мектеп» баспасы, 050009, Алматы қаласы, Абай даңғылы, 143-үй
Факс: 8(727) 394-37-58, 394-42-30
Тел.: 8(727) 394-42-34
E-mail: mektep@mail.ru
Web-site: www.mektep.kz