Г. Н. Солтан, А. Е. Солтан, А. Ж. Жумадилова

ГЕОМЕТРИЯ

Жалпы білім беретін мектептің
9-сынып оқушыларына арналған

ОҚУЛЫҚ

+CD

Қазақстан Республикасының
Білім және ғылым министрлігі ұсынған

KELESHEK
2030
КӨКШЕТАУ

ӘОЖ 373.167.1
КБЖ 22.1я72
С60

Солтан Г. Н. және басқалары.
С60 **Геометрия:** жалпы білім беретін мектептің 9-сынып оқушыларына арналған оқулық + CD / Г. Н. Солтан, А. Е. Солтан, А. Ж. Жумадилова. – Көкшетау: Келешек-2030, 2019. – 240 б.: ил.

ISBN 978-601-317-429-7

Оқулықтың электрондық нұсқасы: http://keleshek-2030.kz/books/geom_9k.php

ӘОЖ 373.167.1
КБЖ 22.1я72

ISBN 978-601-317-429-7

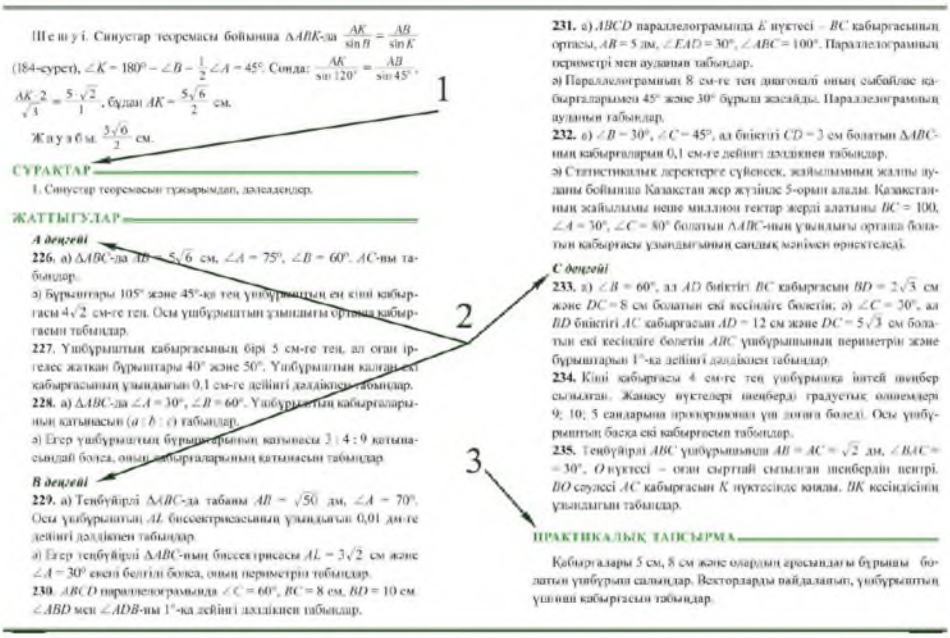
МАЗМҰНЫ

АЛҒЫ СӨЗ

Қымбатты оқушылар!

Бұл оқу жылында сендер «Геометрия» пәнін оқып-үйренуді одан әрі жалғастырасыңдар. Сонымен бірге планиметрияны оқуды тамамдайсыңдар және 7–9-сыныптарға арналған геометрияның толық курсын қайталайсыңдар.

Ұсынылып отырған оқулықта оқу бағдарламасына сәйкес 9-сынып геометрия курсының негізгі мазмұны қамтылған. Мұнда теориялық мәселелер баяндалған, типтік тапсырмалардың шешімі, теорияның игерілу деңгейін тексеруге арналған бақылау сұрақтары (1) және күрделілігі бойынша А, В, С үш деңгейіне бөлінген өздік жұмыстарға арналған жаттығулар (2) ұсынылған. Кейбір тармақтардың соңында жаңа материалды игеруге арналған практикалық тапсырмалар (3) берілген.



Шешуі. Синустар теоремасы бойынша ΔABK-да $\frac{AK}{\sin B} = \frac{AB}{\sin K}$ (184-сурет), $\angle K = 180^\circ - \angle B - \frac{1}{2}\angle A = 45^\circ$. Сонда: $\frac{AK}{\sin 120^\circ} = \frac{AB}{\sin 45^\circ}$, $\frac{AK \cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{1}$, бұдан $AK = \frac{5\sqrt{6}}{2}$ см.

Жауабы. $\frac{5\sqrt{6}}{2}$ см.

СҰРАҚТАР

1. Синустар теоремасын тұжырымдап, дәлелдеңдер.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

226. а) ΔABC-да $AB = 5\sqrt{6}$ см, $\angle A = 75^\circ$, $\angle B = 60^\circ$. AC-ны табыңдар.

ә) Бұрыштары 105° және 45°-қа тең үшбұрыштың ең кіші қабырғасы $4\sqrt{2}$ см-ге тең. Осы үшбұрыштың ұзындығы ортаңғы қабырғасын табыңдар.

227. Үшбұрыштың қабырғасының бірі 5 см-ге тең, ал оған іргелес жатқан бұрыштары 40° және 50°. Үшбұрыштың қалған екі қабырғасының ұзындығын 0,1 см-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

228. а) ΔABC-да $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 60^\circ$. Үшбұрыштың қабырғаларының қатынасын $(a : b : c)$ табыңдар.

ә) Егер үшбұрыштың бұрыштарының қатынасы $3 : 4 : 9$ қатынасындай болса, оның қабырғаларының қатынасын табыңдар.

В деңгейі

229. а) Теңбүйірлі ΔABC-да табаны $AB = \sqrt{50}$ дм, $\angle A = 70^\circ$. Осы үшбұрыштың AL биссектрисасының ұзындығын 0,01 дм-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

ә) Егер теңбүйірлі ΔABC-ның биссектрисасы $AL = 3\sqrt{2}$ см және $\angle A = 30^\circ$ екені белгілі болса, оның периметрін табыңдар.

230. $ABCD$ параллелограмында $\angle C = 60^\circ$, $BC = 8$ см, $BD = 10$ см. $\angle ABD$ мен $\angle ADB$-ны 1°-қа дейінгі дәлдікпен табыңдар.

231. а) $ABCD$ параллелограмында E нүктесі – BC қабырғасының ортасы, $AB = 5$ дм, $\angle EAD = 30^\circ$, $\angle ABC = 100^\circ$. Параллелограмның периметрі мен ауданын табыңдар.

ә) Параллелограмның 8 см-ге тең диагоналі оның сыбайлас қабырғаларымен 45° және 30° бұрыш жасайды. Параллелограмның ауданын табыңдар.

232. а) $\angle B = 30^\circ$, $\angle C = 45^\circ$, ал биіктігі $CD = 3$ см болатын ΔABC-ның қабырғаларын 0,1 см-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

ә) Статистикалық деректерге сүйенсек, жайылымның жалпы ауданы бойынша Қазақстан жер жүзінде 5-орын алады. Қазақстанның жайылымы неше миллион гектар жерді алатыны $BC = 100$, $\angle A = 30^\circ$, $\angle C = 80^\circ$ болатын ΔABC-ның ұзындығы ортаңғы болатын қабырғасы ұзындығының сандық мәнімен өрнектеледі.

С деңгейі

233. а) $\angle B = 60^\circ$, ал AD биіктігі BC қабырғасын $BD = 2\sqrt{3}$ см және $DC = 8$ см болатын екі кесіндіге бөлетін; ә) $\angle C = 30^\circ$, ал BD биіктігі AC қабырғасын $AD = 12$ см және $DC = 5\sqrt{3}$ см болатын екі кесіндіге бөлетін ABC үшбұрышының периметрін және бұрыштарын 1°-қа дейінгі дәлдікпен табыңдар.

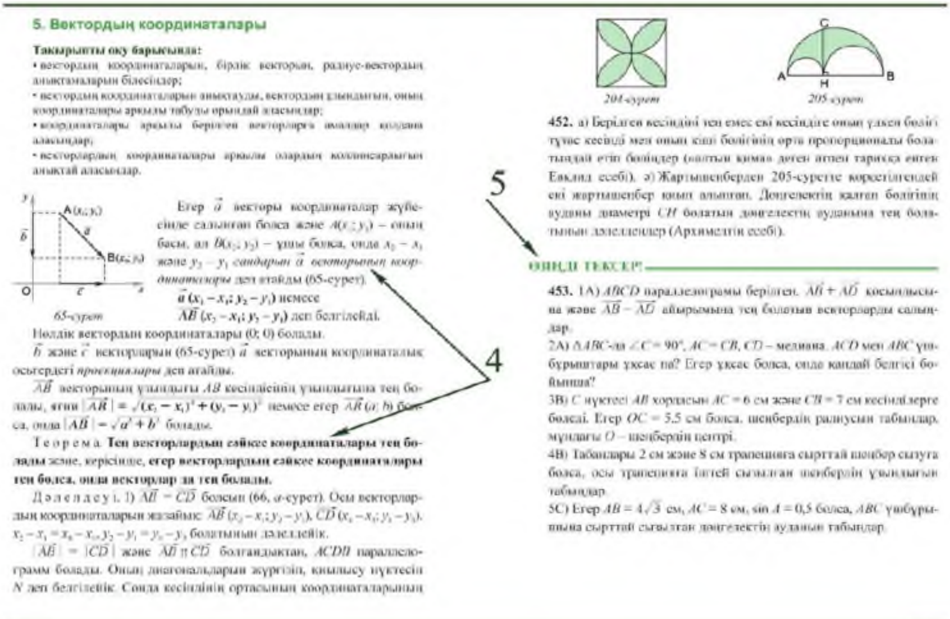
234. Кіші қабырғасы 4 см-ге тең үшбұрышқа іштей шеңбер сызылған. Жанасу нүктелері шеңберді градустық өлшемдері 9; 10; 5 сандарына пропорционал үш доғаға бөледі. Осы үшбұрыштың басқа екі қабырғасын табыңдар.

235. Теңбүйірлі ABC үшбұрышында $AB = AC = \sqrt{2}$ дм, $\angle BAC = 30^\circ$. O нүктесі – оған сырттай сызылған шеңбердің центрі. BO сәулесі AC қабырғасын K нүктесінде қияды. BK кесіндісінің ұзындығын табыңдар.

ПРАКТИКАЛЫҚ ТАПСЫРМА

Қабырғалары 5 см, 8 см және олардың арасындағы бұрышы болатын үшбұрыш салыңдар. Векторларды пайдаланып, үшбұрыштың үшінші қабырғасын табыңдар.

Анықтамалар, аксиомалар, теоремалар (4) арнайы қаріппен көрсетілген. Оқу материалын қайталау және жиынтық бағалауға дайындалу үшін есептер шығаруға арналған тақырыптар жеке тармақтарда келтірілген *«Өзіңді тексер!»* (5) деген айдармен арнайы тапсырмалар ұсынылған. Жаттығулармен қоса жауаптары және нұсқаулар берілген.


5. Вектордың координаталары

Тақырыпты оқу барысында:
• вектордың координаталарын, бірлік векторын, радиус-вектордың анықтамаларын білесіңдер;
• вектордың координаталарын анықтауды, вектордың ұзындығын, оның координаталары арқылы табуды орындай аласыңдар;
• координаталары арқылы берілген векторларға амалдар қолдана аласыңдар;
• векторлардың координаталары арқылы олардың коллинеарлығын анықтай аласыңдар.

Егер $\vec{a}$ векторы координаталар жүйесінде салынған болса және $A(x_1; y_1)$ – оның басы, ал $B(x_2; y_2)$ – ұшы болса, онда $x_2 - x_1$ және $y_2 - y_1$ *сандарын $\vec{a}$ векторының координаталары* деп атайды (65-сурет).
$\vec{a}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$ немесе
$\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$ деп белгілейді.

65-сурет

Нөлдік вектордың координаталары (0; 0) болады.
$\vec{b}$ және $\vec{c}$ векторларын (65-сурет) $\vec{a}$ векторының координаталық осьтердегі *проекциялары* деп атайды.
$\overrightarrow{AB}$ векторының ұзындығы AB кесіндісінің ұзындығына тең болады, яғни $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ немесе егер $\overrightarrow{AB}(a; b)$ болса, онда $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a^2 + b^2}$ болады.

Теорема. **Тең векторлардың сәйкес координаталары тең болады және, керісінше, егер векторлардың сәйкес координаталары тең болса, онда векторлар да тең болады.**

Дәлелдеуі. 1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ болсын (66, *а*-сурет). Осы векторлардың координаталарын жазайық: $\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$, $\overrightarrow{CD}(x_4 - x_3; y_4 - y_3)$. $x_2 - x_1 = x_4 - x_3$, $y_2 - y_1 = y_4 - y_3$ болатынын дәлелдейік.
$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ және $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$ болғандықтан, $ACDB$ параллелограмм болады. Оның диагональдарын жүргізіп, қиылысу нүктесін N деп белгілейік. Сонда кесіндінің ортасының координаталарының

204-сурет

205-сурет

452. а) Берілген кесіндіні тең емес екі кесіндіге оның үлкен бөлігі тұтас кесінді мен оның кіші бөлігінің орта пропорционалы болатындай етіп бөліңдер («алтын қима» деген атпен тарихқа енген Евклид есебі). ә) Жартышеңберден 205-суретте көрсетілгендей екі жартышеңбер қиып алынған. Дөңгелектің қалған бөлігінің ауданы диаметрі CH болатын дөңгелектің ауданына тең болатынын дәлелдеңдер (Архимедтің есебі).

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

453. 1А) $ABCD$ параллелограмы берілген. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ қосындысына және $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$ айырымына тең болатын векторларды салыңдар.
2А) $\triangle ABC$-да $\angle C = 90°$, $AC = CB$, CD – медиана. ACD мен ABC үшбұрыштары ұқсас па? Егер ұқсас болса, онда қандай белгісі бойынша?
3В) C нүктесі AB хордасын $AC = 6$ см және $CB = 7$ см кесінділерге бөледі. Егер $OC = 5{,}5$ см болса, шеңбердің радиусын табыңдар, мұндағы O – шеңбердің центрі.
4В) Табандары 2 см және 8 см трапецияға сырттай шеңбер сызуға болса, осы трапецияға іштей сызылған шеңбердің ұзындығын табыңдар.
5С) Егер $AB = 4\sqrt{3}$ см, $AC = 8$ см, $\sin A = 0{,}5$ болса, ABC үшбұрышына сырттай сызылған дөңгелектің ауданын табыңдар.

Осы жылы сендер «Векторлар» және «Геометриялық түрлендірулер» атты жаңа бөлімдерді зерделейтін боласыңдар. Көпбұрыштардың түрлері мен қасиеттері, бұрыштың тригонометриялық функциялары, шеңбер, дөңгелек туралы білімдеріңді едәуір кеңейтесіңдер. Сонымен қатар геометрияда алгебраны және физикада геометрияны қолдануға көбірек назар аударатын боласыңдар.

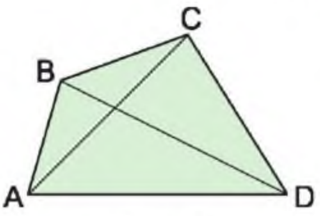
Сәттілік тілейміз!

Авторлар

8-СЫНЫП ГЕОМЕТРИЯ КУРСЫН ҚАЙТАЛАУ

Геометриялық фигуралар, олардың белгілері мен қасиеттері

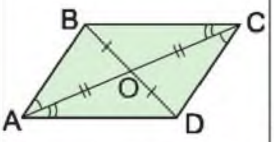
Дөңес төртбұрыштар



1-сурет

$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$

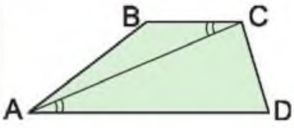
Параллелограмм



2-сурет

$AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$

Трапеция



3-сурет

$AD \parallel BC$, $AB \nparallel DC$

*Параллелограмның **белгілері***

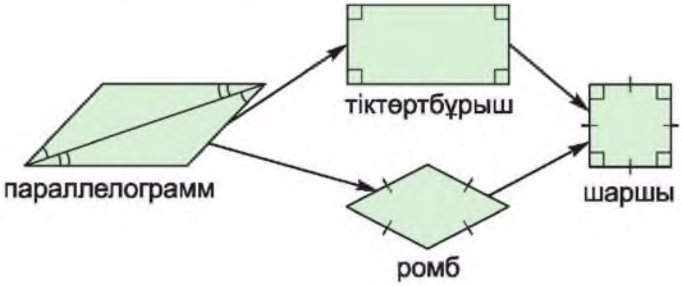
Егер төртбұрыштың екі қабырғасы тең және параллель болса, *немесе* карама-қарсы қабырғалары тең болса, *немесе* диагональдары қиылысу нүктесінде қақ бөлінсе, онда ол параллелограмм болады.

*Параллелограмның **қасиеттері***

Параллелограмның:

- қарама-қарсы қабырғалары тең;
- қарама-қарсы бұрыштары тең;
- диагональдары қиылысу нүктесінде қақ бөлінеді.

Параллелограмм және оның түрлері

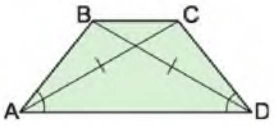


4-сурет

Параллелограмның (a, b) *қабырғалары мен* (d_1, d_2) *диагональдарының* ***қасиеті:*** $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$	***Ерекше қасиеттері*** ***тіктөртбұрыштың:*** тіктөртбұрыштың диагональдары тең; ***ромбтың:*** ромбтың диагональдары перпендикуляр және ромбтың бұрыштарын қақ бөледі.

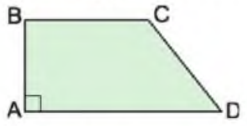
Трапеция және оның түрлері

теңбүйірлі



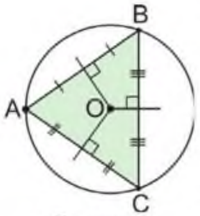
5-сурет

тікбұрышты



6-сурет

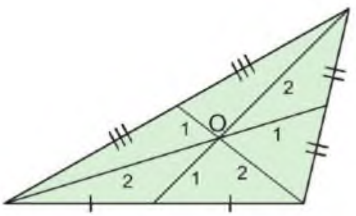
Үшбұрыштың төрт тамаша нүктесі



7-сурет

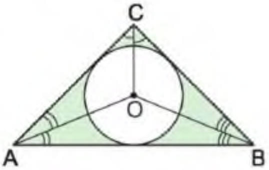
Үшбұрыштың қабырғаларына жүргізілген ***орта перпендикулярлардың*** қиылысу нүктесі – оған сырттай сызылған шеңбердің центрі.

Медианалардың қиылысу нүктесі ***медианалардың*** әрқайсысын үшбұрыштың төбесінен бастап есептегенде 2 : 1 қатынасындай бөледі.



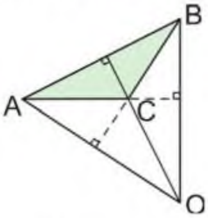
9-сурет

Үшбұрыштың ***биссектрисаларының*** қиылысу нүктесі – оған іштей сызылған шеңбердің центрі.



8-сурет

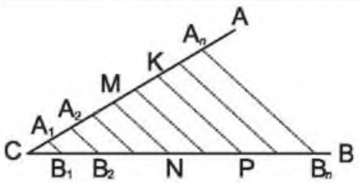
Үшбұрыштың ***биіктерін*** қамтитын түзулердің қиылысу нүктесі – үшбұрыштың *ортоцентрі*.



10-сурет

Фалес теоремасы

Егер екі түзудің біріне өзара тең бірнеше кесіндіні тізбектей салып, олардың ұштары арқылы екінші түзуді қиятын параллель түзулер жүргізсе, онда олар екінші түзуден өзара тең кесінділер қияды.



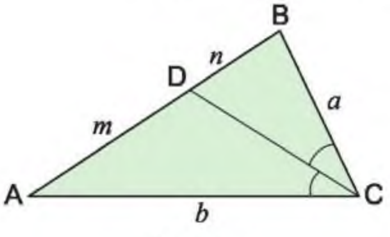
11-сурет

$$\frac{CM}{CN} = \frac{CK}{CP}$$

Пропорционал кесінділер туралы теорема

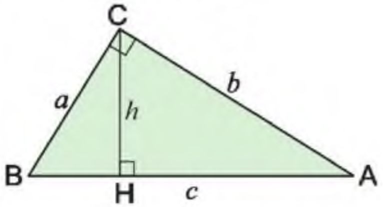
Бұрыштың қабырғаларын қиятын параллель түзулер олардан пропорционал кесінділер қияды.

Үшбұрыштағы пропорционал кесінділер



12-сурет

CD – биссектриса, $\frac{m}{b} = \frac{n}{a}$



13-сурет

$$\frac{BH}{h} = \frac{h}{HA}, \qquad h^2 = BH \cdot HA$$

$$\frac{c}{a} = \frac{a}{BH}, \qquad a^2 = c \cdot BH$$

$$\frac{c}{b} = \frac{b}{AH}, \qquad b^2 = c \cdot AH$$

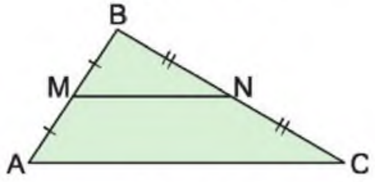
Үшбұрыштың *биссектрисасы* қарсы жатқан қабырғаны іргелес жатқан қабырғаларға пропорционал болатын кесінділерге бөледі.

Тікбұрышты үшбұрыштағы *орта пропорционал* кесінділер:

- *биіктік* гипотенузаның бөлінетін кесінділерінің орта пропорционалы болады;
- *катет* гипотенуза мен гипотенузаға түскен проекциясының орта пропорционалы болады.

Орта сызық

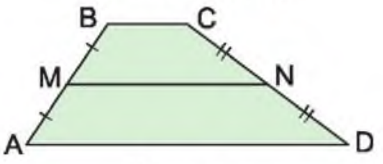
үшбұрыштың



14-сурет

$MN \parallel AC$, $MN = \frac{1}{2}AC$

трапецияның



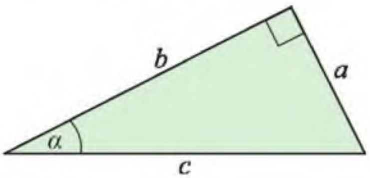
15-сурет

$MN \parallel BC$, $MN \parallel AD$, $MN = \dfrac{BC + AD}{2}$

Тікбұрышты үшбұрыштағы қатыстар

Пифагор теоремасы:

$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2.}$$



16-сурет

$\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$, $\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a}{b}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{b}{a}$.

Тригонометриялық тепе-теңдіктер

$$\boldsymbol{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},$$

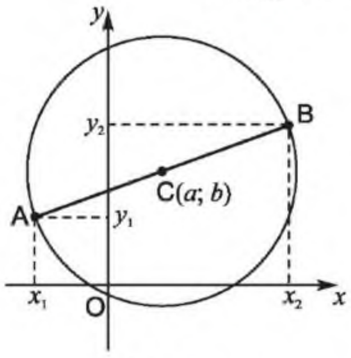
$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1,$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha},$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Тікбұрышты координаталар жүйесі



17-сурет

AB кесіндісінің *ортасы* болатын C нүктесінің координаталары:

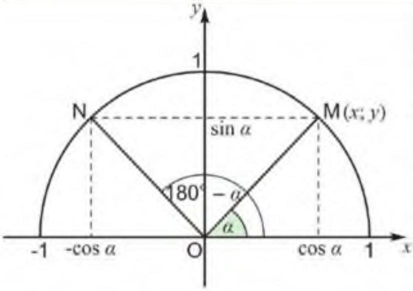
$$C\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

AB кесіндісінің ұзындығы:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

C нүктесі центрі, радиусы R болатын шеңбердің теңдеуі:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$



18-сурет

0°-тан 180°-қа дейінгі бұрыштардың тригонометриялық функцияларының анықтамасы:

$\sin\alpha = y$, $\cos\alpha = x$,

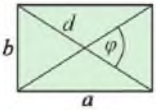
$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y}{x}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{x}{y}$.

Сүйір және доғал бұрыштардың тригонометриялық функцияларының арасындағы байланыс:

$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$,

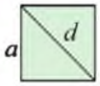
$\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}(180° - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$.

Фигуралардың аудандары



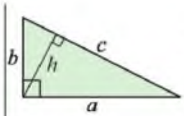
19-сурет

$S = ab$ *немесе* $S = \frac{1}{2}d^2 \cdot \sin\varphi$



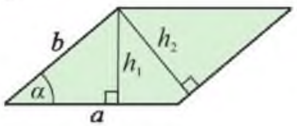
20-сурет

$S = a^2$ *немесе* $S = \frac{1}{2}d^2$



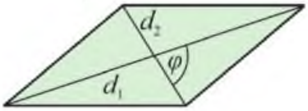
21-сурет

$S = \frac{1}{2}ab$ *немесе* $S = \frac{1}{2}ch$



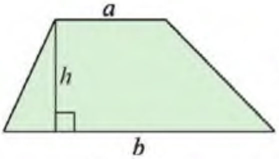
22-сурет

$S = ah_1$ *немесе* $S = bh_2$, *немесе* $S = ab \cdot \sin\alpha$



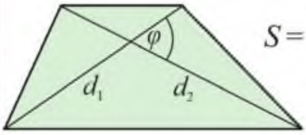
23-сурет

$S = \frac{1}{2}d_1d_2 \cdot \sin\varphi$



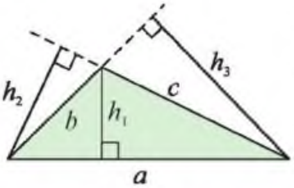
24-сурет

$S = \dfrac{a+b}{2} \cdot h$



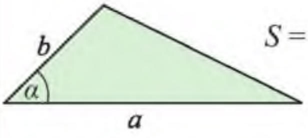
25-сурет

$S = \frac{1}{2}d_1d_2 \cdot \sin\varphi$



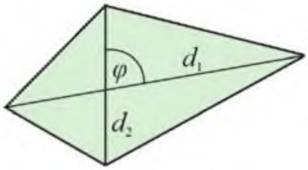
26-сурет

$S = \frac{1}{2}ah_1$ *немесе* $S = \frac{1}{2}ch_2$, *немесе* $S = \frac{1}{2}bh_3$



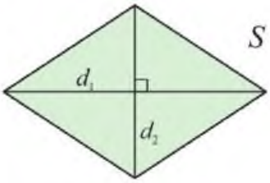
27-сурет

$S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin\alpha$



$$S = \frac{1}{2}d_1d_2 \cdot \sin\varphi$$

28-сурет



$$S = \frac{1}{2}d_1d_2$$

29-сурет

СҰРАҚТАР

1. Қандай фигура төртбұрыш деп аталады? Оның бұрыштарының қосындысы неге тең?

2. Қандай төртбұрыш параллелограмм деп аталады? Параллелограмның қандай қасиеттерін білесіңдер?

3. Қандай параллелограмм: а) тіктөртбұрыш; ә) ромб; б) шаршы деп аталады?

4. а) Тіктөртбұрыштың; ә) ромбтың; б) шаршының қасиеттерін атап шығыңдар.

5. Тіктөртбұрыштың параллелограмм болатынын қандай белгілері бойынша анықтауға болады?

6. Қандай шарт орындалғанда параллелограмм: а) тіктөртбұрыш; ә) ромб болады?

7. Қандай шарт орындалғанда: а) тіктөртбұрыш; ә) ромб шаршы болады?

8. Қандай төртбұрыш трапеция деп аталады?

9. Теңбүйірлі трапецияның белгілерін тұжырымдаңдар.

10. Трапецияның бүйір қабырғасына іргелес жатқан бұрыштарының қосындысы неге тең?

11. Теңбүйірлі трапецияның диагональдары мен бұрыштарының қандай қасиеттері бар?

12. Фалес теоремасын тұжырымдаңдар.

13. а) Үшбұрыштың; ә) трапецияның орта сызығының анықтамаларын беріңдер. Олардың қасиеттерін тұжырымдаңдар.

14. Үшбұрыштың тамаша төрт нүктесін атап шығыңдар.

15. Үшбұрыштың: а) биссектрисаларының; ә) қабырғаларына тұрғызылған орта перпендикулярларының; б) медианаларының қиылысу нүктесінің қандай қасиеті бар?

16. Пифагор теоремасын және оған кері теореманы тұжырымдаңдар.

17. Үшбұрыштың тікбұрышты үшбұрыш екенін қалай анықтауға болады?

18. Тікбұрышты үшбұрышта қандай кесінділер орта пропорционал болады?

19. Тікбұрышты үшбұрыштың сүйір бұрышының синусы, косинусы, тангенсі, котангенсінің анықтамасын тұжырымдаңдар.

20. Қандай тепе-теңдік негізгі тригонометриялық тепе-теңдік деп аталады?

21. 0°-тан 180°-қа дейінгі бұрыштардың синусы, косинусы, тангенсі, котангенсі қалай анықталады?

22. Тригонометриялық функциялардың сүйір бұрыштарының мәндерін пайдаланып, тригонометриялық функциялардың доғал бұрыштарының мәндерін қалай табуға болады?

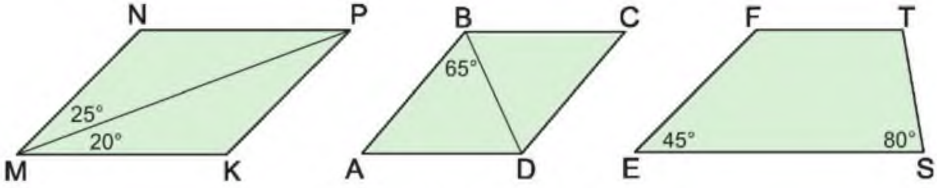
23. Тікбұрышты координата жүйесінде AB кесіндісі берілген болсын және $A(a; b)$, $B(c; d)$. а) AB кесіндісінің ортасы болатын C нүктесі координаталарының формуласын; ә) AB кесіндісінің ұзындығының формуласын; б) центрі B нүктесі, радиусы R болатын шеңбердің теңдеуін жазыңдар.

24. а) Тіктөртбұрыштың; ә) шаршының; б) тікбұрышты үшбұрыштың; в) параллелограмның; г) ромбтың; ғ) үшбұрыштың; д) трапецияның аудандарын есептейтін формулаларды жазыңдар.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

1. 30-суреттегі берілгендерді пайдаланып: а) $MNPK$ параллелограмының; ә) $ABCD$ ромбысының; б) $EFTS$ трапециясының бұрыштарын табыңдар.



30-сурет

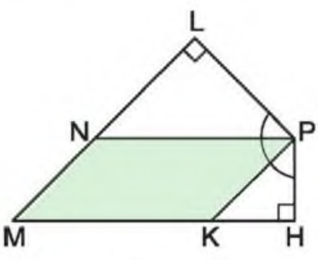
2. $ABCD$ төртбұрышының AC диагоналіне BF және DK перпендикулярлары тұрғызылған және $BF = DK$, $\angle BAF = \angle DCK$. $ABCD$ параллелограмм болатынын дәлелдеңдер.

3. Егер параллелограмның бір төбесінен жүргізілген биіктіктері тең болса, онда ол параллелограмм ромб болады.

4. Табандарының ұзындықтары 8 см және 12 см, ал бұрыштарының біреуі 135° болатын тікбұрышты трапецияның периметрі мен ауданын табыңдар.

5. Тіктөртбұрыштың бір қабырғасы a, ал диагоналі – $2a$. Тіктөртбұрыштың диагональдарының арасындағы доғал бұрышы мен ауданын табыңдар.

6. Диагональдары перпендикуляр, ал табандары 2 см және 4 см болатын теңбүйірлі трапецияның ауданын табыңдар.



31-сурет

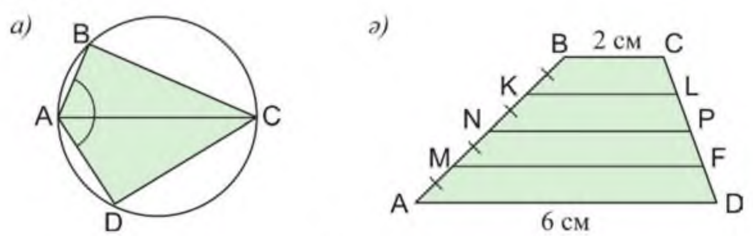
7. а) LPH бұрышы 135° болатын 31-суретте бейнеленген $MNPK$ параллелограмының бұрыштарын табыңдар.

ә) b түзуінің бір жағында одан 8 см және 14 см қашықтықта, сәйкесінше, B және C нүктелері берілген. BC кесіндісінің ортасынан b түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

B деңгейі

8. $ABCD$ ромбысының диагональдары O нүктесінде қиылысады және $\angle A = 60°$. M және N нүктелері, сәйкесінше, AD және AB қабырғаларының орталары. Егер $BC = 16$ см болса, $MNOD$ төртбұрышының периметрін табыңдар.

9. а) $ABCD$ төртбұрышының төбелері диаметрі AC болатын шеңберге тиісті (32, a-сурет). Егер A бұрышы 125° болса, C бұрышын табыңдар.



32-сурет

ә) 32, *ә*-суреттегі $ABCD$ – трапеция, $AD \parallel MF \parallel NP \parallel KL$. Берілгендерді пайдаланып, MF, NP, KL кесінділерінің ұзындықтарын табыңдар.

10. ABC үшбұрышының медианаларының қиылысу нүктесі арқылы AB қабырғасына параллель және BC қабырғасын D нүктесінде қиятын түзу жүргізілген. $CD : DB = 2 : 1$ болатынын дәлелдеңдер.

11. O нүктесі бір катеті 12 см-ге тең болатын тікбұрышты үшбұрыштың әрбір төбесінен 18,5 см қашықтықта орналасқан. Үшбұрыштың басқа катетін табыңдар.

12. Теңқабырғалы үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің радиусы $2\sqrt{3}$ см-ге тең. Оның ауданын табыңдар.

13. Катеттері 5 см және 12 см болатын тікбұрышты үшбұрышқа іштей сызылған шеңбердің радиусын табыңдар.

14. Гипотенузасы 17 см-ге, ал іштей сызылған шеңберінің радиусы 3 см-ге тең болатын тікбұрышты үшбұрыштың катеттерін табыңдар.

15. Егер: а) биіктігі $CD = 6$ см, $AD = 2$ см; ә) биіктігі $CD = 5\sqrt{2}$ см, $BD : DA = 1 : 2$ болатын тікбұрышты ΔABC-ның ($\angle C = 90°$) қабырғаларын табыңдар.

16. Қабырғалары 3,7 см, 3,5 см және 1,2 см болатын үшбұрыштың тікбұрышты болатынын дәлелдеңдер және оның үлкен қабырғасына тұрғызылған биіктігін табыңдар.

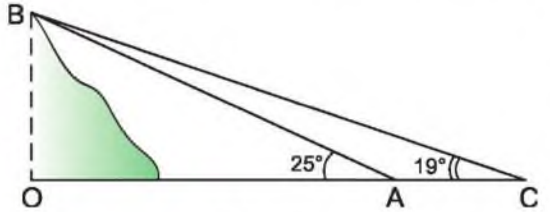
17. N нүктесі $ABCD$ тіктөртбұрышының AD қабырғасын A төбесінен бастап есептегенде $2 : 3$ қатынасындай бөледі. BN кесіндісі тіктөртбұрыштың ауданын қандай қатынаста бөледі?

18. ABC тікбұрышты үшбұрышында $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$, CH – биіктік. ACH үшбұрышының ауданы BCH үшбұрышының ауданынан 3 есе үлкен екенін дәлелдеңдер.

19. Теңбүйірлі үшбұрыштың табанына жүргізілген биіктігі 4 см-ге тең. Егер үшбұрыштың бір бұрышы 120°-қа тең болса, оның басқа биіктігі мен ауданын табыңдар.

20. ABC үшбұрышында $\angle A = 30°$, $\angle C = 45°$, $AC = 2$ дм. Осы үшбұрыштың BD биіктігін табыңдар.

21. ABC үшбұрышының B бұрышы 60°-қа тең, ал CH биіктігі AB қабырғасын $BH = 5\sqrt{3}$ см және $AH = 8$ см бөліктерге бөледі. Осы үшбұрыштың ең үлкен қабырғасын табыңдар.



33-сурет

22. Қазақстанның Шыңғыстау тауының етегіндегі қайсыбір A нүктесі (33-сурет) $\angle BAO = 25°$ болатындай алынған, мұндағы B – таудың төбесі, O – оның биіктігінің табаны. Ал C нүктесі $\angle BCO = 19°$, $AC = 987$ м, O, A және C нүктелері бір түзуде жататындай орналастырылған. Осы таудың биіктігін тауып, жауабын 1 м-ге дейінгі дәлдікпен жазыңдар.

С деңгейі

23. Теңбүйірлі үшбұрыштың табаны 8 см, ал табанына жүргізілген биіктігі 16 см. Үшбұрыштың бүйір қабырғасына жүргізілген медианасының ұзындығын табыңдар.

24. ABC үшбұрышының BC және AC қабырғаларының ұзындықтары, сәйкесінше, 10 см және 24 см-ге, ал CM медианасы 13 см-ге тең. ABC үшбұрышының тікбұрышты екенін дәлелдеңдер.

25. $AB = 4$ см, $BC = 6$ см, $\angle B = 120°$ болатын ABC үшбұрышының BD биссектрисасын табыңдар.

26. $A(1; -2)$ және $B(9; 2)$ нүктелері берілген. а) AB кесіндісінің ортасы болатын C нүктесінің координаталарын; ә) координата осьтерінде жататын және A мен B нүктелерінен бірдей қашықтықта болатын нүктелерді табыңдар.

27. а) $\sin\varphi = \frac{2}{5}$; ә) $\cos\varphi = -\frac{3}{4}$ болатын φ бұрышын салыңдар. Есептің неше шешімі бар?

28. Егер $A(-3; 0)$, $B(0; 3\sqrt{3})$, $C(3; 0)$ болса, ABC үшбұрышына сырттай сызылған шеңбердің теңдеуін жазыңдар.

29. Төбелері $A(-3; 1)$, $B(-2; 6)$, $C(3; 7)$, $D(2; 2)$ нүктелерінде болатын төртбұрыштың ауданын табыңдар.

I. ВЕКТОРЛАР

Бөлімді оқу нәтижесінде

• вектордың, коллинеар векторлардың, тең векторлардың, нөлдік вектордың, бірлік вектордың, вектор ұзындығының, вектордың координаталарының, екі вектордың арасындағы бұрыштың, екі вектордың скаляр көбейтіндісінің анықтамаларын;

• векторларды қосу, азайту және векторды санға көбейту ережелерін;

• векторлардың коллинеарлық шартын;

• векторды коллинеар емес екі векторға жіктеу тәсілдерін;

• екі вектордың скаляр көбейтіндісінің қасиеттерін **білу керек**.

• вектордың ұзындығын, вектордың координаталарын, екі вектордың арасындағы бұрышты, екі вектордың скаляр көбейтіндісін таба алу;

• векторды коллинеар емес екі векторға жіктей алу;

• векторларды қосудың, азайтудың, векторды санға көбейтудің ережелерін қолдана алу;

• координаталарымен берілген векторларға амалдар қолдана алу;

• векторларды есептер шығаруда қолдана **алу керек**.

1. Вектор ұғымы. Коллинеар векторлар

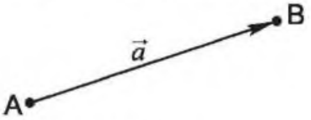
Тақырыпты оқу барысында:

• вектордың, коллинеар векторлардың, тең векторлардың, нөлдік вектордың және вектордың ұзындығының анықтамаларын білесіңдер;

• қандай векторлардың бірдей бағытталған, қарама-қарсы бағытталған деп аталатынын, векторды нүктеден бастап салу туралы теореманы білесіңдер;

• векторларды салуды, оларды нүктеден бастап салуды, векторлардың теңдігі мен коллинеарлығын анықтауға және векторлардың ұзындықтарын табуға есептер шығаруды орындай аласыңдар.

Егер дене түзу сызықты қозғалыс кезінде A нүктесінен B нүктесіне орын ауыстыратын болса, онда ондай орын ауыстыруды B нүктесінде бағыты көрсетілген кесінді арқылы бейнелеу ыңғайлы болады. Ондай кесіндіні бағытталған кесінді деп атайды. **Бағытталған кесінді вектор деп аталады.** Кесіндінің бір ұшын вектордың басы деп, ал екіншісін – вектордың ұшы деп атайды. Векторды үстінде нұсқары бар, біріншісі вектордың басын, екіншісі ұшын көрсететін латынның екі бас әрпімен немесе үстінде нұсқары бар латынның бір кіші әрпімен белгілейді.

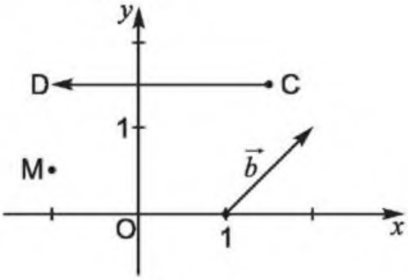


34-сурет

Мысалы, 34-суретте $\overrightarrow{AB}$ немесе $\vec{a}$ векторы бейнеленген.

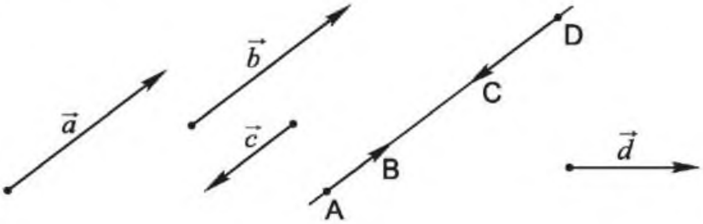
AB кесіндісінің ұзындығын $\overrightarrow{AB}$ *векторының ұзындығы* (немесе вектордың модулі) деп атайды. $\overrightarrow{AB}$ векторының ұзындығын $|\overrightarrow{AB}|$ деп, ал $\vec{a}$ векторының ұзындығын $|\vec{a}|$ деп белгілейді. Мысалы, 35-суретте $|\overrightarrow{CD}| = 2{,}5$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$.

Геометрияда вектордың басы мен ұшы беттесетін нөлдік вектор деген ұғым қолданылады. Нөлдік вектор бір нүктемен кескінделеді де, $\vec{0}$ деп немесе, мысалы, $\overrightarrow{MM}$ (35-сурет) белгіленеді, оның ұзындығы 0-ге тең деп есептеледі, ал бағыты анықталмайды.



35-сурет

Бір түзуде немесе параллель түзулерде жататын нөлдік емес векторларды коллинеар векторлар деп атайды. Нөлдік вектор кез келген векторға коллинеар деп есептеледі. Мысалы, 36-суреттегі $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$ – коллинеар векторлар, ал $\vec{a}$ мен $\vec{d}$, $\vec{c}$ мен $\vec{d}$ – коллинеар емес.



36-сурет

Егер параллель түзулерде жататын нөлдік емес екі вектордың ұштары олардың бастары арқылы өтетін түзудің бір жағында жатса, онда оларды *бірдей бағытталған (бағыттас)* векторлар деп, ал олардың ұштары сондай түзудің әртүрлі жағында жатса, *қарама-қарсы бағытталған* векторлар деп атайды. Нөлдік емес $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{CD}$ векторлары бір түзудің бойында жатып, *AB* және *CD* сәулелерінің бірі екіншінің бойында орналасса, векторлар бірдей бағытталған, ал *AB* және *CD* сәулелерінің бірі екіншінің бойында орналаспаса, векторлар қарама-қарсы бағытталған деп аталады. 36-суреттегі коллинеар векторлар $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ бірдей бағытталған, оларды $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ деп белгілейді, ал коллинеар векторлар $\vec{b}$ мен $\vec{c}$ қарама-қарсы бағытталған, оларды $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{c}$ деп белгілейді.

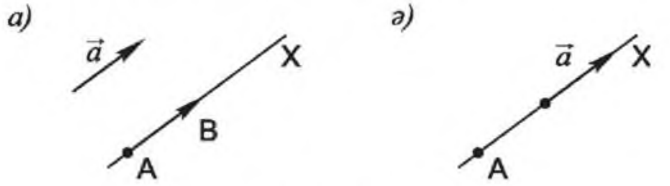
Ұзындықтары тең және бірдей бағытталған векторларды тең векторлар деп атайды. Мысалы, 36-суреттегі $\vec{a}$ және $\vec{b}$ – тең векторлар.

$\overrightarrow{MN}$ векторын $\overrightarrow{MN} = \vec{a}$ болатындай етіп салу $\vec{a}$ *векторын M нүктесінен бастап өлшеп салу* деп аталады.

Теорема (*векторды нүктеден бастап өлшеп салу туралы*). **Берілген нүктеден берілген векторға тең болатын тек бір ғана вектор өлшеп салуға болады.**

Дәлелдеуі. $\vec{a}$ векторы мен A нүктесі берілген болсын. $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ векторын салу керек.

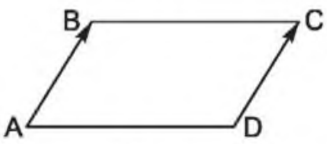
I жағдай. A нүктесі мен $\vec{a}$ векторы бір түзуде жатпайтын болсын. $\vec{a}$ векторына параллель болатын AX түзуін жүргіземіз. Осы түзуге $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ векторын өлшеп саламыз (37, *а*-сурет). Осы вектор жалғыз болады, бұл параллель түзулердің аксиомасы мен кесінділерді өлшеп салудың негізгі қасиетінен шығады.



37-сурет

II жағдай. A нүктесі мен $\vec{a}$ векторы бір түзуде жататын болсын (37, *ә*-сурет). Осы вектордың жалғыз болатынына өздерің көз жеткізіңдер.

1-есеп. $ABCD$ параллелограмы берілген. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ болатынын дәлелдеу керек (38-сурет).

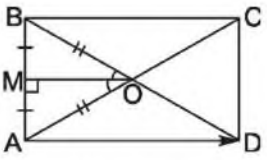


38-сурет

Дәлелдеуі. $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{DC}$ векторлары бірдей бағытталған және параллелограмның қарама-қарсы қабырғалары болғандықтан, олардың ұзындықтары да тең. Бұдан, тең векторлардың анықтамасы бойынша $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ болатыны шығады.

2 - е с е п. $AB = 4$ см, диагональдарының арасындағы бұрышы 60°-қа тең болатын $ABCD$ тіктөртбұрышы берілген. $\overrightarrow{AD}$ векторының ұзындығын табу керек.

Ш е ш у і. Берілген тіктөртбұрыштың диагональдарының қиылысу нүктесін O деп белгілейік (39-сурет). Есептің шарты бойынша $\angle AOB = 60°$. ΔAOB – теңбүйірлі, себебі тіктөртбұрыштың диагональдары тең және қиылысу нүктесінде қақ бөлінеді. OM медианасын жүргізейік, ол AOB үшбұрышының әрі биіктігі, әрі биссектрисасы болады. OM медиана мен биссектриса, себебі, $AM = 2$ см, $\angle AOM = 30°$. Тікбұрышты AMO үшбұрышында катет $OM = AM \cdot \operatorname{ctg} 30° = 2\sqrt{3}$ (см) болады. OM ΔABD-ның орта сызығы болғандықтан, $OM = \frac{1}{2}AD$ болады. Бұдан, $AD = 4\sqrt{3}$ см және $|\overrightarrow{AD}| = 4\sqrt{3}$ см болатыны шығады.



39-сурет

Ж а у а б ы. $4\sqrt{3}$ см.

СҰРАҚТАР

1. Вектор дегеніміз не? $\overrightarrow{CD}$ векторының басы мен ұшын атаңдар.
2. Қандай вектор нөлдік вектор деп аталады?
3. Вектордың ұзындығы деп нені атайды? Нөлдік вектордың ұзындығы неге тең?
4. Қандай векторлар коллинеар, бірдей бағытталған, қарама-қарсы бағытталған векторлар деп аталады?
5. Тең векторлардың анықтамасын беріңдер.
6. Векторды нүктеден бастап өлшеп салу туралы теореманы тұжырымдап, дәлелдеңдер.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

30. Ұшақтың, алдымен, 400 км шығысқа қарай M-нен N қаласына, содан кейін 300 км оңтүстікке қарай N-нен K қаласына ұшуын векторлар арқылы бейнелеңдер. Ұшудың бастапқы нүктесінен соңғы нүктесіне дейінгі қозғалысын бейнелейтін $\overrightarrow{MK}$ векторын салыңдар. $\overrightarrow{MK}$ векторының ұзындығын табыңдар.

31. Егер: а) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ коллинеар векторлар болса; ә) $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ коллинеар векторлар болса, ал $\vec{a}$ мен $\vec{c}$ коллинеар болмаса, $|\vec{a}| = 2$ см, $|\vec{b}| = 3{,}5$ см, $|\vec{c}| = 5$ см болатындай етіп, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларын салыңдар.

32. Ұзындықтары тең болатын және: а) коллинеар болмайтын; ә) бірдей бағытталған; б) қарама-қарсы бағытталған екі вектор салыңдар. Қандай жағдайда салынған векторлар тең болады?

33. Егер: а) $\vec{a} = \vec{b}$ болса, онда $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ коллинеар; ә) $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ болса, онда $\vec{a} = \vec{b}$; б) $\vec{a} = \vec{b}$ болса, онда $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$; в) $\vec{a} = \vec{0}$ болса, онда $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ деген тұжырым дұрыс па?

B деңгейі

34. Егер $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ болса, онда $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ деген дұрыс па? Барлық мүмкін болатын жағдайларды қарастырыңдар.

35. ABC үшбұрышында $\angle C = 90°$, $AC = 12$ см, $CB = 5$ см, M және N нүктелері, сәйкесінше, AB және AC қабырғаларының орталары. а) $\overrightarrow{AB}$; ә) $\overrightarrow{CM}$; б) $\overrightarrow{MN}$ векторларының ұзындықтарын табыңдар.

36. ABC үшбұрышының BD биссектрисасы жүргізілген. Егер $AB = 6$ см, $BC = 10$ см, $AC = 12$ см болса, онда $\overrightarrow{AD}$ және $\overrightarrow{CD}$ векторларының ұзындықтарын табыңдар.

37. Егер $\vec{a} = \vec{c}$ және $\vec{b} = \vec{c}$ болса, онда $\vec{a} = \vec{b}$ болатынын дәлелдеңдер.

C деңгейі

38. $ABCDEF$ алтыбұрышының төбелері центрі O нүктесі болатын шеңберде жатыр. $AB = BC = CD = DE = EF = FA = AO$ екені белгілі. а) $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AF}$ болатынын дәлелдеңдер. ә) $\overrightarrow{BC}$ мен $\overrightarrow{ED}$ векторлары тең бе?

39. Егер A мен A_1, B мен B_1 нүктелері қандай да бір: а) нүктеге қарағанда; ә) түзуге қарағанда симметриялы болса, $\overrightarrow{AB}$ мен $\overrightarrow{A_1B_1}$ векторлары тең бола ма?

40. а) Кесіндінің; ә) үшбұрыштың әрбір нүктесінен өзара тең векторлар өлшеп салынған. Осы векторлардың барлығының соңғы нүктелері қандай фигураны құрайды?

41. Тікбұрышты $ABCD$ трапециясының үлкен табаны $AD = 14$ см, $AB = 6\sqrt{3}$ см, $\angle D = 60°$. а) $\overrightarrow{CD}$; ә) $\overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{AC}$ векторларының ұзындықтарын табыңдар.

ПРАКТИКАЛЫҚ ТАПСЫРМА

Егер автокөлік жүргізуші солтүстікке қарай 32 км, шығысқа қарай 18 км, батысқа қарай 7 км, оңтүстікке қарай 11 км және 27 км шығысқа қарай жүрген болса, векторлардың көмегімен оның қозғалыс маршрутының схемасын салыңдар. Маршруттың бастапқы нүктесінен соңғы нүктесіне дейінгі қашықтықты табыңдар. Егер жүріп өткен жол учаскелерінің кезектілігін олардың бағыты мен ұзындықтарын өзгертпестен ауыстырса, осы арақашықтық өзгере ме?

2. Векторларды қосу және азайту

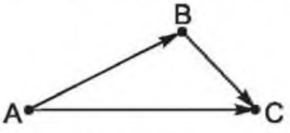
Тақырыпты оқу барысында:

• векторларды қосу мен азайтудың ережелерін білесіңдер;

• векторларды қосу мен азайтудың ауыстырымдылық және терімділік заңдарын біле және қолдана аласыңдар;

• есептер шығарғанда векторларды қосу мен азайтудың үшбұрыш және параллелограмм ережелерін қолдана аласыңдар.

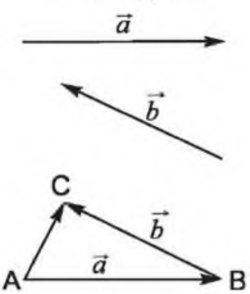
Дене орнын түзу сызықты қозғалыс кезінде A нүктесінен B нүктесіне, содан соң B нүктесінен C нүктесіне ауыстырды. Мұны $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{BC}$ векторлары арқылы көрсетуге болады. Осы қозғалыстардың нәтижесінде дене орнын A нүктесінен C нүктесіне ауыстырды, сондықтан $\overrightarrow{AC}$ векторын $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{BC}$ векторларының қосындысы деп айтуға болады (40-сурет).



40-сурет

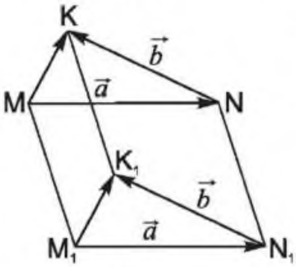
$\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{BC}$ векторларының *қосындысы* деп $\overrightarrow{AC}$ векторын айтады:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$



41-сурет

Кез келген $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларын қосу былай орындалады. Алдымен кез келген A нүктесінен $\vec{a}$ векторына тең болатын $\overrightarrow{AB}$ векторын өлшеп салады, содан соң B нүктесінен $\vec{b}$ векторына тең болатын $\overrightarrow{BC}$ векторын өлшеп салады. $\overrightarrow{AC}$ векторы – $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының қосындысы (41-сурет). $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының қосындысын осы тәсілмен табуды *үшбұрыш ережесі* деп атайды, себебі, егер $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{BC}$ векторлары коллинеар болмаса, онда олардың қосындысы болатын $\overrightarrow{AC}$ векторы ABC үшбұрышының AC қабырғасында бейнеленеді.

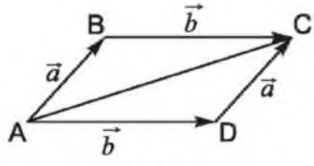


42-сурет

Екі вектордың қосындысының ұзындығы олардың қай нүктеден бастап салынғанына байланысты емес. 42-суретті пайдаланып, осыған өздерің көз жеткізіңдер.

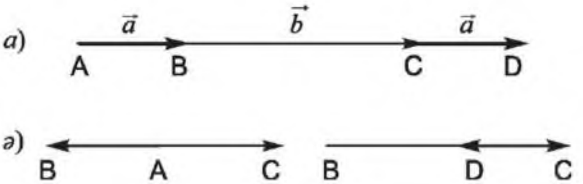
Т е о р е м а. **Кез келген $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары үшін қосудың ауыстырымдылық заңы орындалады, яғни $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ болады.**

Д ә л е л д е у і. $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары коллинеар болмасын. Үшбұрыштың ережесі бойынша олардың қосындысын салайық: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ (43-сурет). $ABCD$ параллелограмын салайық, оның қарама-қарсы қабырғалары тең және параллель болғандықтан, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ болады. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$, яғни $\vec{b} + \vec{a} = \overrightarrow{AC}$. Бұдан $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ болатыны шығады.



43-сурет

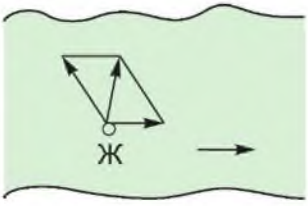
$\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары коллинеар болатын жағдайларды: а) $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$; ә) $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ өздігінен қарастырыңдар, ол үшін $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{b} + \vec{a} = \overrightarrow{BD}$ болатын 44-суретті пайдаланыңдар.



44-сурет

Коллинеар емес векторлар үшін қосудың ауыстырымдылық заңын дәлелдеп, екі векторды қосудың тағы бір тәсілін алдық, оны *параллелограмм ережесі* деп атайды, себебі $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының қосындысы осы векторлар арқылы салынған параллелограмның сол векторлардың ортақ басынан шығатын диагоналіне бейнеленеді (43-сурет).

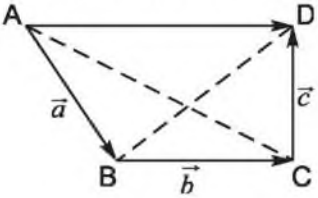
Параллелограмм ережесін түзу сызықты қозғалыстағы денеге екі түрлі қозғалыс күші әсер еткен жағдайда қолданған ыңғайлы. Мысалы, өзенді жүзіп өту кезіндегі қозғалыс қарсы жағаға қарай және өзен ағысымен қозғалыстардың қосындысынан тұрады (45-сурет, Ж – жүзуші).



45-сурет

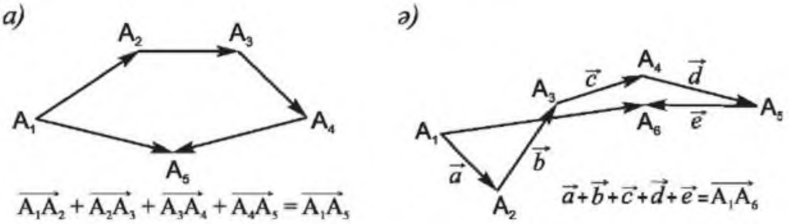
Теорема. **Кез келген $\vec{a}$, $\vec{b}$ және $\vec{c}$ векторлары үшін қосудың терімділік заңы орындалады, яғни $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.**

Дәлелдеуі. $\vec{a}$, $\vec{b}$ және $\vec{c}$ коллинеар емес векторлар болсын. A нүктесінен $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ векторын өлшеп салып, сосын $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, ал содан кейін $\overrightarrow{CD}=\vec{c}$ векторын салайық (46-сурет). Сонда $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$, $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$. Сонымен, $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ болатыны шықты. Бұл дәлелдеуді коллинеар векторлар үшін де қолдануға болады. Теорема дәлелденді.



46-сурет

Бірнеше векторды қосу былай орындалады: бірінші векторды екінші векторға қосып, олардың қосындысына үшінші векторды қосады және т. с. с. Қосудың ауыстырымдылық және терімділік заңдарынан векторлардың қосындысы олардың қандай ретпен қосылатынына байланысты емес екендігі шығады. 47-суреттерде бірнеше векторды қосудың *көпбұрыш ережесі* деп аталатын тәсілі көрсетілген. Бұл атау шартты түрде ғана айтылады.



47-сурет

Көпбұрыш ережесін былай тұжырымдауға болады: егер A_1, A_2, ..., A_n кез келген нүктелер болса, онда $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\ldots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{A_1A_n}$ болады.

Егер бірінші вектордың басы мен соңғы вектордың ұшы беттесетін болса, онда барлық векторлардың қосындысы нөлдік векторға тең болады, яғни $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + ... + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} + \overrightarrow{A_nA_1} = \overrightarrow{A_1A_1} = \vec{0}$. Бұл теңдіктен $A_1A_2 \dots A_n$ сынық сызығының тұйық болатыны шығады.

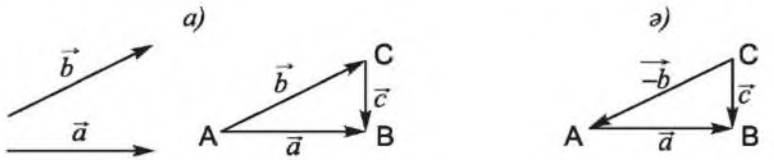
Егер екі вектор қарама-қарсы бағытталған және олардың ұзындықтары тең болса, онда оларды *қарама-қарсы* векторлар деп атайды. Мысалы, $\overrightarrow{AB}$ мен $\overrightarrow{BA}$ – қарама-қарсы векторлар, олардың қосындысы нөлдік векторға тең, яғни:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}.$$

$\vec{a}$ векторына қарама-қарсы вектор «$-\vec{a}$» деп белгіленеді де, «минус *a* векторы» деп оқылады,

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}.$$

Векторларды азайту сандарды азайту сияқты қосуға кері амал болады. $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының *айырымы* $\vec{a} - \vec{b}$ деп, $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$ болатындай $\vec{c}$ векторын айтады (48, *а*-сурет). $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының айырымы $\vec{a} - \vec{b}$ векторын салу үшін қандай да бір *A* нүктесінен $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ векторларын өлшеп салу керек. Сонда $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$ болады (48, *а*-сурет), себебі $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$.



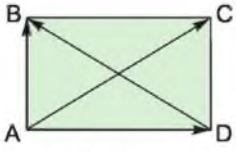
48-сурет

$\vec{a} - \vec{b}$ айырымын $\vec{a} + (-\vec{b})$ қосындысымен алмастыруға болады. Шынында да, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ болсын, сонда $\overrightarrow{CA} = -\vec{b}$ болады. Үшбұрыштың ережесі бойынша $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$ (48, *ә*-сурет). Бұдан $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ болатыны шығады.

Векторлық теңдіктің бір бөлігінен алынған кез келген векторды қарама-қарсы векторға алмастыру арқылы екіншісіне көшіруге болады. Мысалы, $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$ теңдігі орындалатын болса, теңдіктің екі жағына да $(-\vec{b})$ векторын қосып, мынаны аламыз:

$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + (-\vec{b}) = \vec{d} + (-\vec{b})$. Сонда $\vec{a} + (\vec{b} + (-\vec{b})) + \vec{c} = \vec{d} - \vec{b}$, $\vec{a} + \vec{c} = \vec{d} - \vec{b}$ болады.

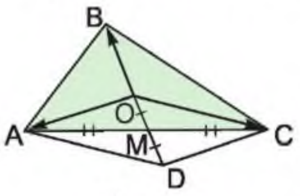
1 - е с е п. $ABCD$ тіктөртбұрышы берілген. Ондағы $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}|$ болатынын дәлелдеу керек.



49-сурет

Д ә л е л д е у і. Векторларды параллелограмм ережесі бойынша қосқанда $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ (49-сурет), бұдан $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AC}|$ шығады. Векторларды азайту ережесі бойынша $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$ болады, бұдан $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{DB}|$ шығады. Тіктөртбұрыштың диагональдары тең болғандықтан, $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}|$ болады. Дәлелдеу керегі де осы еді.

2 - е с е п. ΔABC-ның медианалары O нүктесінде қиылысады. Табу керек: $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}|$.



50-сурет

Ш е ш у і. ABC үшбұрышының BM медианасын $MD = OM$ кесіндісіне созайық (50-сурет). Сонда $AOCD$ төртбұрышы параллелограмм болады, себебі оның диагональдары қиылысу нүктесінде қақ бөлінеді.

Векторларды қосудың параллелограмм ережесі бойынша $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$ болады. Үшбұрыштың медианалары қиылысу нүктесінде төбесінен бастап есептегенде $2:1$ қатынасындай бөлінеді. Бұдан, $OB = 2OM$ болатыны шығады. Салуымыз бойынша $OD = 2OM$. Сонымен, $OD = OB$, ал $\overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OB}$. Сонда $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} = \vec{0}$ болады. Бұдан $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}| = 0$ болатыны шығады.

Ж а у а б ы. 0.

СҰРАҚТАР

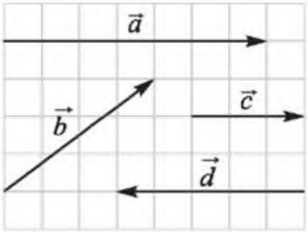
1. Екі вектордың қосындысы деп нені айтады?
2. Екі векторды: а) үшбұрыш; ә) параллелограмм ережесі бойынша қалай қосады? Мысал келтіріңдер.
3. Векторларды қосудың ауыстырымдылық және терімділік заңдарын формула арқылы жазыңдар.
4. Төрт векторды көпбұрыш ережесі бойынша қалай қосады? Мысал келтіріңдер.

5. Қандай векторды $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының айырымы деп атайды?
6. $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ векторын қалай салады? Салудың екі тәсілін көрсетіңдер.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

42. Векторларды 51-суреттегідей кескіндеңдер. а) $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} + \vec{c}$, $\vec{c} + \vec{d}$ векторларының қосындысына; ә) $\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{c}$, $\vec{c} - \vec{d}$ векторларының айырымына тең болатын векторларды салыңдар.



51-сурет

43. Кез келген $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары үшін мына теңсіздіктердің дұрыс болатынын дәлелдеңдер: а) $|\vec{a} + \vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|$; ә) $|\vec{a} - \vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

44. A және B нүктелері берілген. Жазықтықтың кез келген X және Y нүктелері үшін $|\overrightarrow{XB} - \overrightarrow{XA}| = |\overrightarrow{YB} - \overrightarrow{YA}|$ теңдігінің дұрыс болатынын дәлелдеңдер.

45. $ABCD$ параллелограмының диагональдары O нүктесінде қиылысады. $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = -(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD})$ болатынын дәлелдеңдер.

В деңгейі

46. $ABCD$ төртбұрышы берілген. $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CD}$ болатынын дәлелдеңдер.

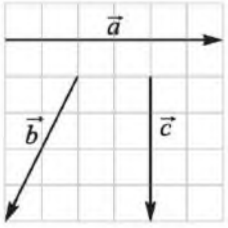
47. Қазақстанның картасынан Нұр-Сұлтан қаласынан шығып, жолда әрбір облыс орталығының қалаларына соғып, астанаға қайтып оралу қозғалысын көрсету үшін неше вектор қажет болады? Қалалардың астанаға қарағандағы орналасуын нүктелермен белгілеңдер және осындай қозғалыстардың бірін салып көрсетіңдер. Осындай векторлардың барлығының қосындысы неге тең?

48. FKT үшбұрышы берілген. а) $\overrightarrow{FK}$ және $\overrightarrow{KT}$; ә) $\overrightarrow{FK}$ және $\overrightarrow{FT}$; б) $\overrightarrow{KT}$ және $\overrightarrow{FT}$ векторларының қосындысы мен айырымына тең болатын векторларды салыңдар.

49. $ABCD$ тіктөртбұрышының диагональдары O нүктесінде қиылысады, $AB = 2$, $AD = 4$. а) $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}|$; ә) $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}|$; б) $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}|$; в) $|\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{OD}|$ табыңдар.

50. Диагональдары O нүктесінде қиылысатын $MNPK$ параллелограмы және $\vec{a} = \overrightarrow{ON}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OP}$ берілген. $\overrightarrow{MK}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{PN}$, $\overrightarrow{PK}$ векторларын $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары арқылы өрнектеңдер.

51. Табандары AD және BC болатын теңбүйірлі $ABCD$ трапециясы берілген, онда $AB = BC$, $\angle A = 60°$, K нүктесі – AD қабырғасының ортасы және $\vec{a} = \overrightarrow{AK}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$. $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DB}$ векторларын $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары арқылы өрнектеңдер.



52-сурет

52. Қабырғасы a-ға тең болатын теңқабырғалы ABC үшбұрышы берілген. а) $|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}|$; ә) $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$ болатынын дәлелдеңдер.

C деңгейі

53. Коллинеар емес $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлары берілген (52-сурет). а) $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{x}$; ә) $\vec{a} - \vec{x} = \vec{b} + \vec{c}$ болатындай $\vec{x}$ векторын салыңдар.

54. $ABCD$ параллелограмы мен жазықтықтың кез келген X нүктесі берілген. а) $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XD}$; ә) $\overrightarrow{XB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = -(\overrightarrow{BX} - \overrightarrow{CD})$ болатынын дәлелдеңдер.

55. $ABCD$ ромбысының диагональдары M нүктесінде қиылысады, $AD = 10$ см, $BD = 12$ см. а) $|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{MB}|$; ә) $|\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{MA}|$ табыңдар.

56. O нүктесі центрі болатын, радиусы 2 см-ге тең шеңбердің OA, OB және OC радиустары жүргізілген. $\angle AOB = \angle AOC = \angle BOC$ екені белгілі болса, $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}|$ табыңдар.

ПРАКТИКАЛЫҚ ТАПСЫРМА

Коллинеар емес $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларын салып, $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ векторын салыңдар. Осы векторлардың ұзындықтарын өлшеңдер. Егер $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының ұзындықтарын: а) екі есе; ә) бес есе ұзартса, $\vec{c}$ векторы ұзындығының қалай өзгеретінін зерттеңдер.

3. Векторды санға көбейту. Екі вектордың коллинеарлық шарты

Тақырыпты оқу барысында:

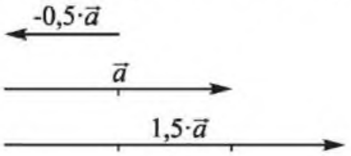
• векторды санға көбейту ережесін, екі вектордың коллинеарлық шартын білесіңдер;

• векторларды сандарға көбейтудің ауыстырымдылық және терімділік заңдарын біле және қолдана аласыңдар;

• есептер шығарғанда векторды санға көбейтудің ережелерін қолдана аласыңдар.

$\vec{a}$ *векторының нөлге тең емес x санына көбейтіндісі* деп ұзындығы $|x| \cdot |\vec{a}|$-ға тең болатын $\vec{b}$ векторын айтады, мұндағы $x > 0$ болса, онда $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары бірдей бағытталған, ал $x < 0$ болса, қарама-қарсы бағытталған болады. $\vec{b} = \boldsymbol{x} \cdot \vec{a}$ немесе $\vec{b} = x\vec{a}$ деп белгіленеді.

Мысалы, 53-суретте $\vec{a}$ векторын $-0,5$ санына және 1,5 санына көбейткенде шыққан векторлар кескінделген.



53-сурет

Нөлдік вектордың кез келген санға көбейтіндісі және кез келген вектордың 0 санына көбейтіндісі нөлдік вектор деп есептеледі, яғни: $\boldsymbol{x} \cdot \vec{0} = \vec{0}$; $\boldsymbol{0} \cdot \vec{a} = \vec{0}$.

Теорема (*екі вектордың коллинеарлық шарты*). **Егер $\vec{b} = \boldsymbol{x} \cdot \vec{a}$ теңдігі орындалатындай x саны бар болған жағдайда ғана $\vec{b}$ векторы $\vec{a}$ векторына коллинеар болады.**

Дәлелдеуі. 1) Егер $\vec{b} = x \cdot \vec{a}$ болса, яғни $\vec{b}$ векторы $\vec{a}$ векторын x санына көбейткенде шықса, онда $\vec{b}$ мен $\vec{a}$ векторларының коллинеарлығы векторды санға көбейтудің анықтамасынан шығады.

2) $\vec{b}$ мен $\vec{a}$ векторлары коллинеар және $\vec{a} \neq \vec{0}$ болсын. $\vec{b} = x \cdot \vec{a}$ болатындай x санын табайық. Ол үшін $\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} = k$ деп алайық, сонда $|\vec{b}| = k \cdot |\vec{a}|$ болады. Егер $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$ болса, онда $\vec{b} = x \cdot \vec{a}$ теңдігі $x = k$ болғанда дұрыс болады; ал егер $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$ болса, онда бұл теңдік $x = -k$ болғанда дұрыс болады. Егер $\vec{b} \neq \vec{0}$ болса, онда $x \neq 0$ болады. Теорема дәлелденді.

Екі вектордың коллинеарлық шартынан бір нүктеден бастап өлшеп салынған екі вектордың біреуі екіншісін кез келген санға көбейту арқылы алынған болса ғана екеуі бір түзуде жататыны шығады.

Векторды санға көбейтудің қасиеттері.

Кез келген x және y сандары мен кез келген $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары үшін төмендегі теңдіктер дұрыс:

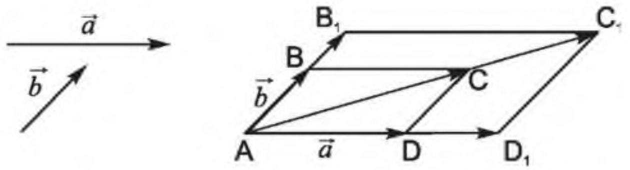
1) $x \cdot (y \cdot \vec{a}) = (xy) \cdot \vec{a}$ (терімділік заңы);

2) $x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{a} = (x + y) \cdot \vec{a}$ (I үлестірімділік заңы);

3) $x \cdot \vec{a} + x \cdot \vec{b} = x \cdot (\vec{a} + \vec{b})$ (II үлестірімділік заңы).

1) және 2) қасиеттер векторды санға көбейтудің анықтамасынан шығады. 3) қасиетті дәлелдейік.

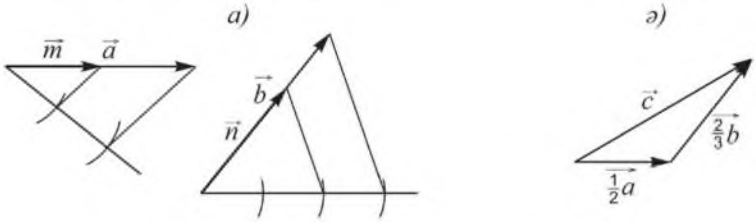
Дәлелдеуі. Коллинеар емес $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары берілген болсын. Олардың қосындысын параллелограмм ережесі бойынша салайық. $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ болсын, сонда $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ болады (54-сурет). $\overrightarrow{AC_1} = x \cdot (\vec{a} + \vec{b})$ векторын салайық. AD және AB түзулеріне, сәйкесінше, параллель болатын C_1B_1 және C_1D_1 түзулерін жүргізейік. Сонда $AB_1 = x \cdot AB$, $AD_1 = x \cdot AD$ болады (пропорционал кесінділер туралы теорема бойынша). $AB_1C_1D_1$ параллелограмм болғандықтан, $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AD_1} + \overrightarrow{AB_1}$ болады, яғни $x \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = x \cdot \vec{a} + x \cdot \vec{b}$ шығады. Дәлелдеу керегі де осы еді.



54-сурет

1-есеп. $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары берілген. $\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$ векторын салу керек.

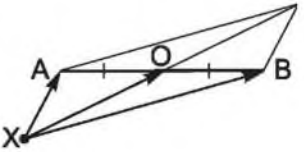
Шешуі. Фалес теоремасын пайдаланып, $\vec{m} = \frac{1}{2}\vec{a}$ және $\vec{n} = \frac{2}{3}\vec{b}$ векторларын салайық (55, *а*-сурет). Сонан соң үшбұрыштар ережесі бойынша $\vec{c} = \vec{m} + \vec{n}$ векторын саламыз (55, *ә*-сурет).



55-сурет

2-есеп. AB кесіндісі мен оның ортасы – O нүктесі берілген. $\overrightarrow{XO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB})$ теңдігін дәлелдеу керек, мұндағы X – жазықтықтың кез келген нүктесі.

Дәлелдеуі. X нүктесі AB түзуіне тиісті емес болсын (56-сурет). Сонда векторларды қосудың параллелограмм ережесі мен параллелограмның диагональдарының қасиетінен мынаны аламыз: $2\overrightarrow{XO} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB}$.



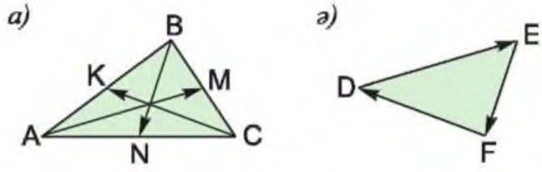
56-сурет

Бұдан $\overrightarrow{XO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB})$ шығады.

X нүктесі AB түзуіне тиісті болатын жағдайды өздігінен қарастырыңдар.

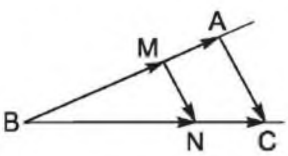
3-есеп. Қабырғалары берілген үшбұрыштың медианаларына тең болатын үшбұрыштың бар болатынын дәлелдеу керек.

Дәлелдеуі. ΔABC мен оның AM, BN және CK медианалары берілген болсын (57, *а*-сурет). Сонда $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$, $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA})$ болады. Осы теңдіктердің оң жақ және сол жақ бөліктерін қосып, мынаны аламыз: $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CK} = \frac{1}{2}\left((\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB})\right) = \frac{1}{2} \cdot \vec{0}$. Сонымен, $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CK} = \vec{0}$ болды, бұдан үшбұрыштың медианаларынан үшбұрыш салуға болатыны шықты. 57, *ә*-суреттегі ΔDEF есептің шартын қанағаттандырады, себебі $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{CK}$.



57-сурет

4 - е с е п. Егер B бұрышының бір қабырғасынан BM және BA кесінділері, ал екіншісіне оларға сәйкес пропорционал болатын BN және BC кесінділері салынған болса (58-сурет), онда MN және AC түзулерінің параллель болатынын дәлелдеңдер.



58-сурет

Д ә л е л д е у і. Шарт бойынша $\frac{BM}{BN} = \frac{BA}{BC}$. Пропорцияның қасиеті бойынша бұл теңдікті былай жазуға болады: $\frac{BM}{BA} = \frac{BN}{BC}$. $\frac{BM}{BA} = \frac{BN}{BC} = k$ болсын. Сонда $\overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BN} = k\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{BC} - k\overrightarrow{BA} = k(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}) = k\overrightarrow{AC}$ болады. $\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{AC}$ болғандықтан, $\overrightarrow{MN}$ және $\overrightarrow{AC}$ векторлары коллинеар болады. Бұдан MN және AC түзулерінің параллель болатыны шығады, дәлелдеу керегі де осы еді.

СҰРАҚТАР

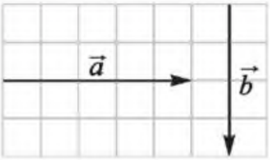
1. Вектордың 0-ге тең емес санға көбейтіндісі деп нені айтады?
2. Нөлдік вектордың кез келген санға көбейтіндісі және кез келген вектордың 0 санына көбейтіндісі неге тең болады?
3. Векторлардың сандарға көбейтіндісінің қасиеттерін формулалармен жазыңдар.
4. Екі вектордың коллинеарлық шартын тұжырымдаңдар.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

57. а) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$; ә) $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$; б) $x \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = x \cdot \vec{a} - x \cdot \vec{b}$ болатынын дәлелдеңдер.

58. $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары тең. Егер: а) $k = -1$; ә) $k = 0{,}9$ болса, $\vec{a}$ және $k\vec{b}$ векторларының ұзындықтарын салыстырыңдар.



59-сурет

59. ABC үшбұрышы берілген, M және K нүктелері – AB және BC қабырғаларының орталары. $\overrightarrow{MK} = 0,5\overrightarrow{AC}$ болатынын дәлелдеңдер.

60. 59-суреттегідей коллинеар емес $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларын салыңдар. а) $2\vec{a} + \vec{b}$; ә) $\vec{a} - 0,5\vec{b}$; б) $-\vec{a} - \vec{b}$; в) $\frac{4}{5}\vec{a} + \frac{5}{4}\vec{b}$ векторларына тең вектор салыңдар.

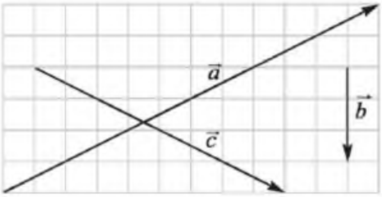
61. Бір вектордың басқа екі вектордың қосындысына және айырымына тең болатын векторларға параллель екені белгілі. Сондай векторларды салыңдар.

В деңгейі

62. $\vec{a} = \vec{x} + \vec{y}$, $\vec{b} = \vec{x} - \vec{y}$ екені белгілі. а) $\frac{1}{2}\vec{a} + 3\vec{b}$; ә) $4\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$; б) $-0,3\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b}$ векторларын $\vec{x}$ және $\vec{y}$ векторлары арқылы өрнектеңдер.

63. $ABCD$ параллелограмы берілген. M нүктесі – DC кесіндісінің, ал O – MA кесіндісінің ортасы және $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. $\overrightarrow{AM}$ және $\overrightarrow{CO}$ векторларын $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары арқылы өрнектеңдер.

64. $ABCD$ тіктөртбұрышының AD және CD қабырғаларына $AM : MD = 1 : 2$ қатынасындай M және N нүктелері белгіленген, ал N – CD-ның ортасы. $\vec{a} = \overrightarrow{AC}$ және $\vec{b} = \overrightarrow{BD}$ векторлары берілген. $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CN}$, $\overrightarrow{DM}$ векторларын $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары арқылы өрнектеңдер.



60-сурет

65. 60-суретте көрсетілгендей коллинеар емес $\vec{a}$, $\vec{b}$ және $\vec{c}$ векторларын салыңдар. а) $\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$; ә) $\frac{1}{2}\vec{a} - 2\vec{b} - \frac{1}{4}\vec{c}$ векторына тең вектор салыңдар.

66. Коллинеар емес $\vec{m} = 2\vec{a} - \vec{b}$ және $\vec{n} = -\vec{a} + 3\vec{b}$ векторлары берілген. $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының коллинеар болуы мүмкін бе? Жауабын түсіндіріңдер.

67. M және K нүктелері, сәйкесінше, $ABCD$ трапециясының AB және CD бүйір қабырғаларының орталары, $AD = 16$ см, $BC = 12$ см. $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{MK}$, $\overrightarrow{CB} = y\overrightarrow{MK}$ болатындай x және y сандарын табыңдар.

68. M және N нүктелері, сәйкесінше, $ABCD$ төртбұрышының AB және CD қабырғаларының орталары. $\overrightarrow{MN} = 0{,}5(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$ болатынын дәлелдеңдер.

69. Табандары BC және AD болатын $ABCD$ трапециясы берілген. M және K нүктелері, сәйкесінше, оның AC және BD диагональдарының орталары. а) $\overrightarrow{MK}$ векторын $\overrightarrow{BC}$ және $\overrightarrow{AD}$ векторлары арқылы өрнектеңдер. ә) Егер $BC = 6$ см, $AD = 16$ см болса, $|\overrightarrow{MK}|$-ны табыңдар.

C деңгейі

70. M, N және K нүктелері – ABC үшбұрышының қабырғаларының орталары, O – жазықтықтың кез келген нүктесі. $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ болатынын дәлелдеңдер.

71. AB және CD кесінділері O нүктесінде $\frac{AO}{OB} = \frac{OD}{OC} = 2$ болатындай қиылысқан. BC және AD кесінділерінің параллель екенін дәлелдеңдер.

72. $ABCD$ төртбұрышының AB, BC, CD және AD қабырғаларына $\frac{AK}{KB} = \frac{AN}{ND} = \frac{CL}{LB} = \frac{CM}{MD} = 3$ болатындай K, L, M және N нүктелері белгіленген. $KLMN$ төртбұрышының параллелограмм болатынын дәлелдеңдер.

ПРАКТИКАЛЫҚ ТАПСЫРМА

Коллинеар емес үш $\vec{a}$, $\vec{b}$ және $\vec{c}$ векторларын салыңдар. Осы векторлардың ұзындықтарын өлшеңдер, $\vec{c}$ векторын $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының x пен y сандарына көбейтіндісінің қосындысы ретінде көрсетіңдер: $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$. x пен y-тің барлық мүмкін мәндерін анықтаңдар.

4. Векторды коллинеар емес екі вектор бойынша жіктеу

Тақырыпты оқу барысында:

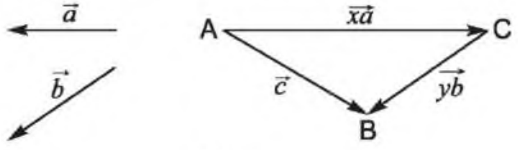
• векторды коллинеар емес екі вектор бойынша жіктеу туралы теореманы және пропорционал кесінділер туралы теореманы білесіңдер;

• белгісіз векторды белгілі векторлардың қосындысы (айырымы) арқылы өрнектей білесіңдер.

$\vec{c}$ векторын $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$ түрінде көрсету, мұндағы $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ – коллинеар емес векторлар, x және y – сандар, $\vec{c}$ векторын коллинеар емес $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары бойынша *жіктеу* деп аталады.

Теорема (*векторды коллинеар емес екі вектор бойынша жіктеу туралы*). **Кез келген $\vec{c}$ векторын тек бір ғана жолмен $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$ түрінде көрсетуге болады, мұндағы $\vec{a}$ және $\vec{b}$ – коллинеар емес векторлар, x және y – сандар.**

Дәлелдеуі. $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары берілген болсын (61-сурет). A және B нүктелерінен $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларына параллель түзулер жүргізіп, олардың қиылысу нүктесін C деп белгілейік, сонда $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ болады. $\vec{a}$ мен $\overrightarrow{AC}$ векторлары коллинеар болғандықтан, $\overrightarrow{AC} = x\vec{a}$ болатындай x саны табылады. $\vec{b}$ мен $\overrightarrow{CB}$ векторлары да коллинеар, сондықтан $\overrightarrow{CB} = y\vec{b}$ болатындай y саны табылады. Сонымен, $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$ болады.

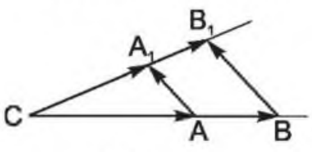


61-сурет

$\vec{c}$ векторын осы түрде көрсетудің жалғыз жолы бар екенін кері жору арқылы дәлелдейік. $\vec{c}$ векторын $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$ түрінде де көрсетуге болады делік. Сонда $x\vec{a} + y\vec{b} = m\vec{a} + n\vec{b}$ болады, бұдан $(x-m)\vec{a} = (n-y)\vec{b}$, $\vec{a} = \frac{n-y}{x-m}\vec{b}$ шығады, мұндағы $x - m \neq 0$. Демек, $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары – коллинеар. Бұл теореманың шартына қайшы келеді, бұдан біздің кері жоруымыздың дұрыс емес екендігі шығады, яғни $\vec{c}$ векторын $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$ түрінде көрсетудің жалғыз жолы бар екен.

Егер $\vec{c}$ векторы $\vec{a}$ немесе $\vec{b}$ векторларына коллинеар болса, онда не y, не x сандарының біреуі нөлге тең болады; егер $\vec{c} = \vec{0}$ болса, онда $x = y = 0$ болады. Теорема дәлелденді.

Теорема (*пропорционал кесінділер туралы*). **Бұрыштың қабырғаларын қиятын параллель түзулер олардан пропорционал кесінділер қиып түседі және олар параллель түзулердің сол бұрыштың қабырғаларының арасындағы кесінділеріне де пропорционал болады.**



62-сурет

Дәлелдеуі. C бұрышының қабырғалары AA_1 және BB_1 түзулерімен қиылған болсын (62-сурет). $\frac{CB}{CA} = \frac{CB_1}{CA_1} = \frac{BB_1}{AA_1}$ болатынын дәлелдейік.

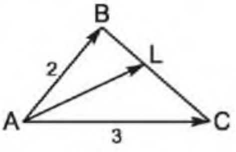
Векторларды қосу ережесі бойынша мынаны аламыз:

$$\overrightarrow{CB_1} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BB_1},\ \overrightarrow{CA_1} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AA_1}.$$

Векторлардың коллинеарлық шарты бойынша $\overrightarrow{CB} = x_1 \cdot \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BB_1} = x_2 \cdot \overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{CB_1} = x_3 \cdot \overrightarrow{CA_1}$ болады, мұндағы x_1, x_2, x_3 – нөлге тең емес сандар. Сонда $x_3 \cdot \overrightarrow{CA_1} = x_1 \cdot \overrightarrow{CA} + x_2 \cdot \overrightarrow{AA_1}$, бұдан $\overrightarrow{CA_1} = \frac{x_1}{x_3}\overrightarrow{CA} + \frac{x_2}{x_3}\overrightarrow{AA_1}$. Осы теңдік пен $\overrightarrow{CA_1} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AA_1}$ теңдігінен векторды екі векторға жіктеудің бір ғана жолы бар болатындықтан, мынаны аламыз: $\frac{x_1}{x_3} = 1$ және $\frac{x_2}{x_3} = 1$, бұдан $x_1 = x_2 = x_3$ шығады. Сонда $\overrightarrow{CB} = x_1 \cdot \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BB_1} = x_2 \cdot \overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{CB_1} = x_3 \cdot \overrightarrow{CA_1}$ теңдіктерінен мынаны аламыз: $\frac{CB}{CA} = \frac{CB_1}{CA_1} = \frac{BB_1}{AA_1}$. Теорема дәлелденді.

1-есеп. ABC үшбұрышы берілген, онда $AB = 2$, $AC = 3$, AL – биссектриса. $\overrightarrow{AL}$ векторын $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{AC}$ векторлары бойынша жіктеңдер.

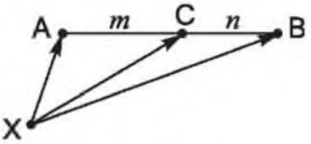
Ш е ш у і. Үшбұрыштың биссектрисасының қасиеті бойынша: $\frac{BL}{LC} = \frac{2}{3}$ (63-сурет). Сонда $\frac{BL}{BC} = \frac{2}{5}$, $\overrightarrow{BL} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC} = \frac{2}{5}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$; $\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BL} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$.



63-сурет

Ж а у а б ы. $\overrightarrow{AL} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$.

2 - е с е п. AB кесіндісі мен оны $\frac{AC}{CB} = \frac{m}{n}$ қатынасында бөлетін C нүктесі және жазықтықтың кез келген X нүктесі берілген. $\overrightarrow{XC} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{XA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{XB}$ болатынын дәлелдеу керек.



64-сурет

Д ә л е л д е у і. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{XB} - \overrightarrow{XA}$ (64-сурет), $\overrightarrow{AC} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB} = \frac{m}{m+n}(\overrightarrow{XB} - \overrightarrow{XA})$. $\overrightarrow{XC} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{XA} + \frac{m}{m+n}(\overrightarrow{XB} - \overrightarrow{XA}) = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{XA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{XB}$.

СҰРАҚТАР

1. Векторды коллинеар емес екі вектор бойынша жіктеу деп нені айтады?
2. Векторды коллинеар емес екі вектор бойынша жіктеу туралы теореманы тұжырымдап, дәлелдеңдер.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

73. $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BC}$ болатындай A, B және C үш нүктесі берілген, O – жазықтықтың кез келген нүктесі. $\overrightarrow{OB}$ векторын $\overrightarrow{OA}$ және $\overrightarrow{OC}$ векторлары арқылы өрнектеңдер.

74. $ABCD$ параллелограмында N нүктесі BC қабырғасын B төбесінен бастап есептегенде 2 : 3 қатынасындай бөледі. $\overrightarrow{AN}$ векторын: а) $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{AD}$; ә) $\overrightarrow{AC}$ және $\overrightarrow{AD}$ векторлары бойынша жіктеңдер.

75. $ABCD$ параллелограмында M нүктесі AC диагоналін A төбесінен бастап есептегенде $4:5$ қатынасындай бөледі. $\overrightarrow{AM}$ векторын: а) $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{AD}$; ә) $\overrightarrow{BD}$ және $\overrightarrow{AD}$ векторлары бойынша жіктеңдер.

B деңгейі

76. $ABCD$ параллелограмының диагональдары O нүктесінде қиылысады, M нүктесі – AB қабырғасының ортасы. а) $\overrightarrow{MO}$; ә) $\overrightarrow{CM}$ векторын $\overrightarrow{OA}$ және $\overrightarrow{OB}$ векторлары арқылы өрнектеңдер.

77. ABC үшбұрышында $\angle C = 90°$, $AB = 10$, CH – биіктік, $CH = 4$, $CA > CB$. $\overrightarrow{CH}$ векторын $\overrightarrow{CA}$ және $\overrightarrow{CB}$ векторлары бойынша жіктеңдер.

78. $ABCD$ төртбұрышында M және K нүктелері, сәйкесінше, BC және AD қабырғаларының орталары. $\overrightarrow{MK}$ векторын $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{CD}$ векторлары арқылы өрнектеңдер.

79. ABC үшбұрышы берілген, MN – оның AC қабырғасына параллель орта сызығы, K – MN-нің ортасы, O – жазықтықтың кез келген нүктесі. $\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OK}$ болатынын дәлелдеңдер.

80. Егер $\vec{a} = 2\vec{m} - 3\vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} + 2\vec{n}$ болса, $\vec{m}$ және $\vec{n}$ векторларын $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары бойынша жіктеңдер.

C деңгейі

81. $ABCD$ параллелограмында N, K, P және M, сәйкесінше, CD, AB, BC және AD қабырғаларына тиісті нүктелер, мұндағы $\frac{AK}{KB} = \frac{AM}{MD} = 0{,}4$, $\frac{BP}{PC} = \frac{DN}{NC} = \frac{3}{7}$. MK және PN кесінділерінің параллель болатынын дәлелдеңдер.

82. Төбелері $M(0;\ 12)$, $N(9;\ 0)$, $K(0;\ -12)$ болатын үшбұрыш берілген, C – оған іштей сызылған шеңбердің центрі. $\overrightarrow{CN}$ векторын $\overrightarrow{CM}$ және $\overrightarrow{CK}$ векторлары бойынша жіктеңдер.

83. Төбелері $A(-4;\ 0)$, $B(4;\ 0)$, $C(0;\ 2)$ болатын үшбұрыш берілген, D – оған сырттай сызылған шеңбердің центрі. $\overrightarrow{DC}$ векторын $\overrightarrow{DA}$ және $\overrightarrow{DB}$ векторлары бойынша жіктеңдер.

84. Центрі O болатын шеңберде жататын A және B нүктелері берілген. Шеңбердің AC және BC жанамалары C нүктесінде қиылысады. Егер: а) $\angle AOB = 120°$; ә) $\angle AOB = 60°$ болса, $\overrightarrow{OC}$ векторын $\overrightarrow{OA}$ және $\overrightarrow{OB}$ векторлары арқылы өрнектеңдер.

ПРАКТИКАЛЫҚ ТАПСЫРМА

Координаталар жүйесін салып, оған $A(4;\ 3)$ және $B(-6;\ 5)$ нүктелерін белгілеңдер. $\overrightarrow{OA}$ және $\overrightarrow{OB}$ векторларын салыңдар, мұндағы O – координаталар басы. $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ болатындай $\overrightarrow{OC}$ векторын салыңдар. C нүктесінің координаталарын табыңдар. Шыққан нәтижені талдаңдар.

5. Вектордың координаталары

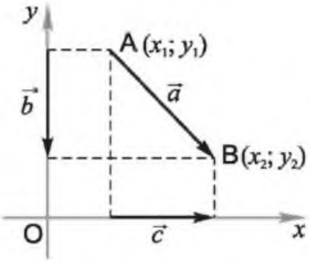
Тақырыпты оқу барысында:

• вектордың координаталарын, бірлік векторын, радиус-вектордың анықтамаларын білесіңдер;

• вектордың координаталарын анықтауды, вектордың ұзындығын оның координаталары арқылы табуды орындай аласыңдар;

• координаталары арқылы берілген векторларға амалдар қолдана аласыңдар;

• векторлардың координаталары арқылы олардың коллинеарлығын анықтай аласыңдар.



65-сурет

$A(x_1; y_1)$ нүктесі координаталар жүйесіне салынған $\vec{a}$ векторының басы, ал $B(x_2; y_2)$ ұшы болса, онда $x_2 - x_1$ және $y_2 - y_1$ сандарын $\vec{a}$ *векторының координаталары* деп атайды (65-сурет).

$\vec{a}$ $(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$ немесе

$\overrightarrow{AB}$ $(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$ деп белгілейді.

Нөлдік вектордың координаталары (0; 0) болады.

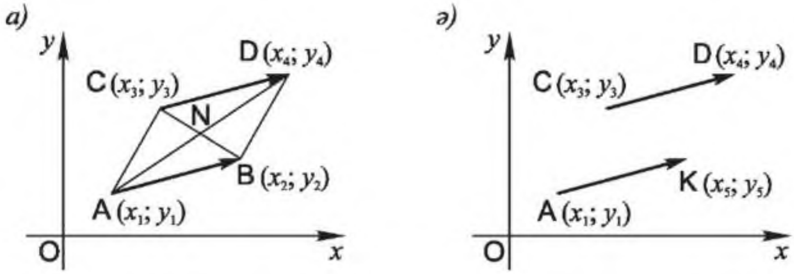
$\vec{b}$ және $\vec{c}$ векторларын (65-сурет) $\vec{a}$ векторының координаталық осьтердегі *проекциялары* деп атайды.

$\overrightarrow{AB}$ векторының ұзындығы AB кесіндісінің ұзындығына тең болады, яғни $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ немесе егер $\overrightarrow{AB}(a; b)$ болса, онда $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a^2 + b^2}$ болады.

Теорема. **Тең векторлардың сәйкес координаталары тең болады** және, керісінше, **егер векторлардың сәйкес координаталары тең болса, онда векторлар да тең болады.**

Дәлелдеуі. 1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ болсын (66, *а*-сурет). Осы векторлардың координаталарын жазайық: $\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$, $\overrightarrow{CD}(x_4 - x_3; y_4 - y_3)$. $x_2 - x_1 = x_4 - x_3$, $y_2 - y_1 = y_4 - y_3$ болатынын дәлелдейік.

$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ және $\overrightarrow{AB} \upuparrows \overrightarrow{CD}$ болғандықтан, $ACDB$ параллелограмм болады. Оның диагональдарын жүргізіп, қиылысу нүктесін N деп белгілейік. Сонда кесіндінің ортасының координаталарының формуласы бойынша мынаны аламыз: $N\left(\frac{x_1+x_4}{2}; \frac{y_1+y_4}{2}\right)$ – AD диагоналінің ортасы және $N\left(\frac{x_2+x_3}{2}; \frac{y_2+y_3}{2}\right)$ – CB диагоналінің ортасы. Демек, $\frac{x_1+x_4}{2} = \frac{x_2+x_3}{2}$, $\frac{y_1+y_4}{2} = \frac{y_2+y_3}{2}$. Осыдан $x_4 - x_3 = x_2 - x_1$, $y_4 - y_3 = y_2 - y_1$.

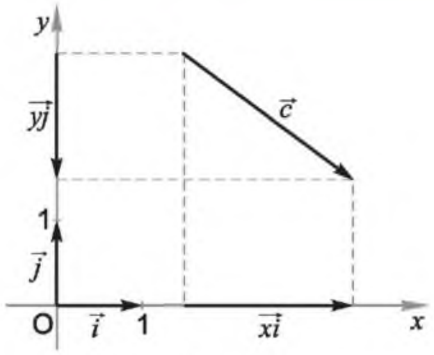


66-сурет

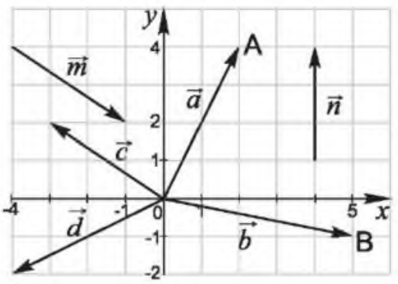
2) $\overrightarrow{AB}\,(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$, $\overrightarrow{CD}\,(x_4 - x_3; y_4 - y_3)$ және $x_2 - x_1 = x_4 - x_3$, $y_2 - y_1 = y_4 - y_3$ болсын. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ болатынын дәлелдейік.

$\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$ деп ұйғарып, $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{CD}$ векторын салайық (66, ә-сурет), мұндағы $K(x_5; y_5)$. Сонда $x_5 - x_1 = x_4 - x_3$ және $y_5 - y_1 = y_4 - y_3$. Осы теңдіктер мен теореманың шартынан шығатыны: $x_5 - x_1 = x_2 - x_1$, $y_5 - y_1 = y_2 - y_1$, яғни $x_5 = x_2$ және $y_5 = y_2$. Ендеше, K нүктесі B нүктесімен беттеседі және $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ болады. Теорема дәлелденді.

Координаталар жүйесіне оның басынан бастап Ox және Oy сәулелеріне салынған ұзындықтары 1-ге тең векторларды *бірлік* векторлар немесе *координаталық* векторлар деп атайды да, $\vec{i}$ және $\vec{j}$ деп белгілейді (67-сурет). Бұл векторлар коллинеар емес, сондықтан кез келген $\vec{c}$ векторын $\vec{i}$ және $\vec{j}$ векторлары бойынша жіктеуге болады, яғни $\vec{c} = x\vec{i} + y\vec{j}$, мұндағы x және y сандарының жалғыз жолмен анықталатынын еске сала кетейік. Бұл сандарды осы координаталар жүйесіндегі $\vec{c}$ *векторының координаталары* деп атайды.



67-сурет



68-сурет

Егер $\vec{a}\,(a_1; a_2)$ векторы берілген болса, онда координаталық жазықтықта осы векторға тең шексіз көп векторлар салуға болады. Егер вектордың басы $O(0; 0)$ болса, онда вектордың ұшының координаталары $(a_1; a_2)$ болады. $\overrightarrow{OM}$ векторы, мұндағы M – координаталық жазықтықтың кез келген нүктесі, осы нүктенің *радиус-векторы* деп аталады. Оның координаталары M нүктесінің координаталарына тең, себебі, егер $M(x; y)$ болса, онда $\overrightarrow{OM}\,(x - 0; y - 0) = \overrightarrow{OM}\,(x; y)$ болады. Мысалы, 68-суретте $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{a}\,(2; 4)$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{b}\,(5; -1)$ ($\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{m}$ және $\vec{n}$ векторларының координаталарын өздігінен көрсетіңдер).

Векторлардың координаталарын пайдалана отырып, олардың қосындысы, айырымы мен вектордың санға көбейтіндісінің координаталарын мына ережелер бойынша табуға болады:

- *екі немесе одан да көп векторлардың қосындысының әрбір координатасы сол векторлардың сәйкес координаталарының қосындысына тең болады;*
- *екі вектордың айырымының әрбір координатасы сол векторлардың сәйкес координаталарының айырымына тең болады;*
- *вектордың санға көбейтіндісінің әрбір координатасы сол вектордың сәйкес координаталарын осы санға көбейткенге тең болады.*

Шындығында да, $\vec{a}\,(x_1; y_1)$ және $\vec{b}\,(x_2; y_2)$ векторлары берілген болсын. $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$, $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$ болғандықтан, векторларды қосу мен векторды санға көбейтудің қасиеттері бойынша мынаны аламыз: $\vec{a} + \vec{b} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + x_2\vec{i} + y_2\vec{j} = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j}$. Бұдан $\vec{a} + \vec{b}$ векторының координаталары $(\boldsymbol{x_1 + x_2; y_1 + y_2})$ болатыны шығады. Тура осылай $\vec{a} - \vec{b}$ векторының координаталары $(\boldsymbol{x_1 - x_2; y_1 - y_2})$ болатыны дәлелденеді. Мұны өздігінен дәлелдеңдер.

$n\vec{a}$ векторының координаталарын табайық, мұндағы n – кез келген сан: $n\vec{a} = nx_1\vec{i} + ny_1\vec{j}$. Бұдан $n\vec{a}$ векторының координаталары $(\boldsymbol{nx_1; ny_1})$ болатыны шығады.

Соңғы ережеден шығатыны, *коллинеар векторлардың сәйкес координаталары пропорционал болады* (векторлардың координаталары нөлге тең болмаған жағдайда); керісінше, *егер екі вектордың сәйкес координаталары пропорционал болса, онда ол векторлар коллинеар болады.*

1 - е с е п. $A(1; 2)$, $B(-2; 1)$ және $C(5; 0)$ нүктелері берілген. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CM}$ болатындай $M(x; y)$ нүктесін табыңдар.

Ш е ш у і. $\overrightarrow{AB}(-3; -1)$, $\overrightarrow{CM}(x - 5; y)$ болады. Шарт бойынша $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CM}$ болғандықтан, $x - 5 = -3$, $y = -1$; $x = 2$, $y = -1$ болады.

Ж а у а б ы. $M(2; -1)$.

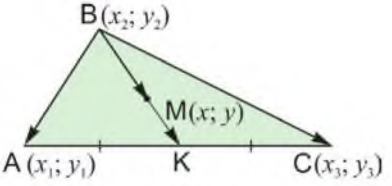
2 - е с е п. Егер $\vec{a}$ векторының координаталары берілмеген, ал $\vec{b}(-2; 4)$ болса, $\vec{c} = 2(\vec{a} + \vec{b}) - 2\vec{a} + 3\vec{b}$ векторының ұзындығын табуға бола ма? Егер болса, онда оны табыңдар.

Ш е ш у і. $\vec{c} = 2(\vec{a} + \vec{b}) - 2\vec{a} + 3\vec{b} = 5\vec{b}$; $\vec{c}(-10; 20)$, $|\vec{c}| = \sqrt{(-10)^2 + 20^2} = 10\sqrt{5}$.

Ж а у а б ы. Болады, $|\vec{c}| = 10\sqrt{5}$.

3 - е с е п. Төбелері $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$ болатын үшбұрыш берілген. Оның медианаларының қиылысу нүктесі болатын M нүктесінің $(x; y)$ координаталарын табыңдар.

Ш е ш у і. 1) K нүктесі AC қабырғасының ортасы болсын (69-сурет), сонда $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$, ал $\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BK}$, сондықтан $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$ болады.



69-сурет

2) Мына векторлардың координаталарын табайық:

$\overrightarrow{BA}\,(x_1 - x_2;\ y_1 - y_2)$, $\overrightarrow{BC}\,(x_3 - x_2;\ y_3 - y_2)$, $\overrightarrow{BM}\,(x - x_2;\ y - y_2)$ немесе $\overrightarrow{BM}\left(\frac{1}{3}(x_1 + x_3 - 2x_2);\ \frac{1}{3}(y_1 + y_3 - 2y_2)\right)$.

3) Тең векторлардың сәйкес координаталары тең болатындықтан, $\frac{1}{3}(x_1 + x_3 - 2x_2) = x - x_2$ және $\frac{1}{3}(y_1 + y_3 - 2y_2) = y - y_2$, бұдан $x = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$, $y = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$.

Ж а у а б ы. $x = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$, $y = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$.

СҰРАҚТАР

1. Вектордың координаталары қалай анықталады?

2. $\vec{a}\,(m;\ n)$ векторының ұзындығы неге тең?

3. Координаталары берілген екі вектордың тең болу шартын тұжырымдаңдар.

4. Қандай векторлар координаталық векторлар деп аталады?

5. Векторды екі координаталық векторлар бойынша қалай жіктеуге болады? Мысал келтіріңдер.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

85. Егер: а) $A(2;\ 9)$, $B(7;\ 4)$; ә) $A(7{,}4;\ 0)$, $B(-12{,}6;\ 14)$ болса, $\overrightarrow{AB}$ векторының координаталарын табыңдар.

86. Егер: а) $\overrightarrow{AB}\,(2;\ -2)$, $A(2;\ 5)$; ә) $\overrightarrow{AB}\,(-1{,}5;\ 4)$, $A(3;\ -2{,}5)$ болса, онда $\overrightarrow{AB}$ векторының ұшының координаталарын табыңдар.

87. Егер: а) $|\overrightarrow{AB}| = 5$, $B(-1;\ 3)$, $A(3;\ y)$; ә) $|\overrightarrow{AB}| = 17$, $B(8;\ -2)$, $A(x;\ 13)$ болса, $\overrightarrow{AB}$ векторының басының белгісіз координатасын табыңдар.

88. а) $\vec{a}\,(4;\ -3)$, $\vec{b}\,(15;\ 0)$, $\vec{c}\,(1;\ \sqrt{3})$, $\vec{d}\,(-0{,}5;\ 1{,}2)$ векторларының ұзындықтарын табыңдар. ә) $\vec{a}\,(2;\ -1)$, $\vec{b}\,(-3;\ -5)$ векторлары берілген. Егер $\vec{m} = \vec{a} - \vec{b}$ және $\vec{n} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$ болса, онда $\vec{m}$ және $\vec{n}$ векторларының координаталарын табыңдар. б) $\vec{a}\,(6;\ 8)$,

$\vec{b}(9;\ 12)$ векторлары берілген. Егер $\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$, $\vec{d} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$ болса, онда $\vec{c}$ және $\vec{d}$ векторларының ұзындықтарын табыңдар.

89. $\vec{a}(3;\ -4)$, $\vec{b}(-4;\ 2)$, $\vec{c}(1{,}5;\ -2)$, $\vec{d}(6;\ -3)$ векторлары берілген. Коллинеар векторлардың жұбын көрсетіңдер. Олардың қайсысы бірдей бағытталған, ал қайсысы қарама-қарсы бағытталған?

B деңгейі

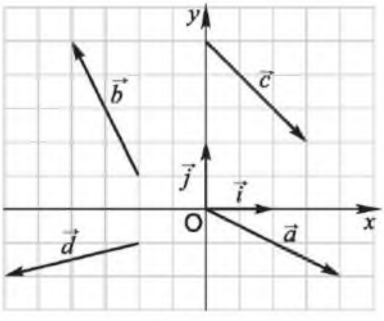
90. $\vec{m}\left(\frac{1}{2};\ \frac{3}{4}\right)$ және $\vec{n}(-2;\ y)$ коллинеар векторлар екені белгілі болса, y-ті табыңдар.

91. $\vec{a}(0;\ 3)$, $\vec{b}(-5;\ 0)$ және $\vec{c}(0;\ -4)$ векторларының арасында коллинеар векторлар бар ма? Егер бар болса, оларды көрсетіңдер.

92. $\vec{a}(-0{,}6;\ 0{,}8)$, $\vec{b}\left(-\frac{9}{5};\ 2\frac{2}{5}\right)$, $\vec{c}\left(\frac{4}{5};\ -\frac{3}{5}\right)$, $\vec{d}(0{,}3;\ -0{,}4)$ векторлары берілген. а) Олардың ұзындықтарын табыңдар. ә) Коллинеар векторлардың жұбын көрсетіңдер.

93. Егер $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ және $\overrightarrow{OC}$ векторларының координаталық векторларға жіктелуі белгілі болса: $\overrightarrow{OA} = \vec{i} + 2\vec{j}$, $\overrightarrow{OB} = -3\vec{i} + 3\vec{j}$, $\overrightarrow{OC} = 0{,}5\vec{i} - \vec{j}$, осы векторларды xOy координата жазықтығына салып көрсетіңдер.

94. 70-суретте бейнеленген $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ векторларын $\vec{i}$ және $\vec{j}$ координаталық векторлары бойынша жіктеңдер және олардың координаталарын жазыңдар.



70-сурет

95. $\vec{a}(3;\ 2)$ және $\vec{b}(0;\ 1)$ векторлары берілген. а) $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$; ә) $\vec{d} = -\vec{a} + 4\vec{b}$ векторларының координаталарын және ұзындықтарын табыңдар.

96. $A(-1;\ 4)$, $B(1;\ -2)$, $C(0;\ -4)$ және $D(2;\ 2)$ нүктелері берілген. а) $\vec{m} = 2\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BC}$; ә) $\vec{n} = 0{,}5\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{DC}$ векторларының координаталарын табыңдар.

C деңгейі

97. $A(2; 4)$, $B(1; 3)$, $C(1{,}75; 1{,}25)$, $D(3; 0)$ нүктелері берілген. Егер $\overrightarrow{DK} = 4\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$ болса, M және K нүктелерінің координаталарын табыңдар.

98. Егер вектордың басы $M(2; 1)$ нүктесі болса, координаталық жазықтықта $\vec{a}(0; 3)$, $\vec{b}(-2; -3)$, $\vec{c}(-3; -0{,}5)$ векторларын және олардың осьтегі проекцияларын салыңдар.

99. Егер: а) $\vec{a}(3; 6)$, $\vec{b}(2; -2)$, $\vec{c}(7; 2)$; ә) $\vec{a}(2; 0)$, $\vec{b}(-1; 3)$, $\vec{c}(2; 6)$ болса, $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$ жіктелуіндегі x және y коэффициенттерін тауып, $\vec{c}$ векторын салыңдар.

100. $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i}$, $\overrightarrow{OB} = 3\vec{j}$ векторлары берілген. $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ және $\overrightarrow{OK} = \dfrac{3|\vec{j}|}{2|\vec{i}|}\overrightarrow{OA} + \dfrac{2|\vec{i}|}{3|\vec{j}|}\overrightarrow{OB}$ векторларының ұзындықтары тең екенін дәлелдеңдер.

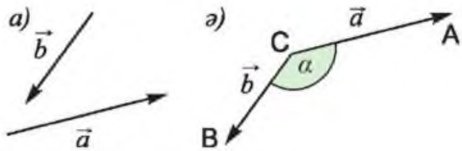
101. Егер: а) $A(2; 3)$, $B(0; -4)$, $C(4; 4)$; ә) $A(-1; -1)$, $B(6; 8)$, $C(4; 2)$ болса, ABC үшбұрышы медианаларының қиылысу нүктесінің координаталарын табыңдар.

ПРАКТИКАЛЫҚ ТАПСЫРМА

Декарттық координаталар жүйесіне басы координаталар басымен дәл түсетіндей етіп, $\vec{a}(4; 3)$ векторын салыңдар. Тригонометриялық функцияларды пайдаланып, осы вектор мен Ox осінің арасындағы бұрыштың жуық мәнін табыңдар. Тура осылай $\vec{b}(-5; 2)$ мен Ox осінің арасындағы бұрышты табыңдар. Осыларды пайдаланып, $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының арасындағы бұрышты есептеңдер.

6. Векторлардың арасындағы бұрыш. Екі вектордың скаляр көбейтіндісі

Тақырыпты оқу барысында:
• екі вектордың арасындағы бұрыш пен екі вектордың скаляр көбейтіндісінің анықтамасын білесіңдер;
• екі вектордың скаляр көбейтіндісін және векторлардың арасындағы бұрышты таба аласыңдар;
• екі вектордың скаляр көбейтіндісінің қасиеттерін біле және қолдана аласыңдар.



71-сурет

Нөлдік емес $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының арасындағы бұрыш деп бастапқы нүктесі ортақ болатын оларға тең векторлардың арасындағы бұрышты атайды. Белгіленуі: $\angle(\vec{a}, \vec{b})$. Мысалы, 71-суретте $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \angle(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \angle ACB$. Векторлардың арасындағы бұрыш 180°-тан артық болмайды. Бірдей бағытталған векторлардың арасындағы бұрыш 0°-қа, ал қарама-қарсы бағытталған векторлардың арасындағы бұрыш 180°-қа тең деп алынады.

Екі вектордың скаляр көбейтіндісі деп олардың ұзындықтарының осы векторлардың арасындағы бұрыштың косинусына көбейтіндісін атайды. Белгіленуі: $\vec{a} \cdot \vec{b}$ немесе $\vec{a}\vec{b}$. Анықтамасы бойынша $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\angle(\vec{a}, \vec{b})$. Бұл анықтамадан шығатыны: $\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

Егер екі нөлдік емес вектордың скаляр көбейтіндісі нөлге тең болса, онда олар перпендикуляр болады және, керісінше, **егер нөлдік емес векторлар перпендикуляр болса, онда олардың скаляр көбейтіндісі нөлге тең болады.**

Шынымен де, егер $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ және $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ нөлдік векторлар болмаса, онда анықтамадан $\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ шығады. Демек, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90°$.

Керісінше, егер $\vec{a} \perp \vec{b}$, яғни $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90°$ болса, онда $\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ болады. Демек, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Екі вектордың скаляр көбейтіндісінің анықтамасынан мынаны аламыз: егер $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ болса, онда $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ болады. Дербес жағдайда $\vec{a}\vec{a} = |\vec{a}|^2$. $\vec{a}\vec{a}$ скаляр көбейтіндісі $\vec{a}$ векторының скаляр квадраты деп аталады да, $\vec{a}^2$ деп белгіленеді. **Вектордың скаляр квадраты оның ұзындығының квадратына тең болады:** $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

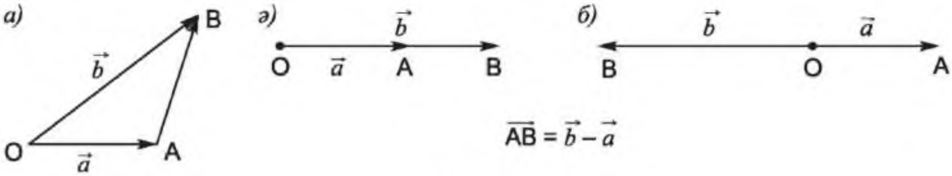
Векторлардың скаляр көбейтіндісінің қасиеттері:

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$; 2) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$; 3) $\vec{a} \cdot (k\vec{b}) = k(\vec{a}\vec{b})$.

Теорема. $\vec{a}(x_1; y_1)$ **және** $\vec{b}(x_2; y_2)$ **векторларының скаляр көбейтіндісі мына формуламен өрнектеледі:** $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$.

Дәлелдеуі. Егер $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары коллинеар болмаса және $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ болса, онда $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ болады (72-сурет). Сонда векторлардың скаляр көбейтіндісінің қасиеттерін пайдаланып, мынаны аламыз: $(\vec{b} - \vec{a})^2 = \vec{b}^2 + \vec{a}^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{a} = |\vec{b}|^2 + |\vec{a}|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{a}$. Бұдан $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{b}|^2 + |\vec{a}|^2 - |\vec{b} - \vec{a}|^2)$ екені шығады. $|\vec{b}|^2 = x_2^2 + y_2^2$, $|\vec{a}|^2 = x_1^2 + y_1^2$, $|\vec{b} - \vec{a}|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ болғандықтан, $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ $= \frac{1}{2}(x_2^2 + y_2^2 + x_1^2 + y_1^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2) = x_1 x_2 + y_1 y_2$ болады.

Егер $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары коллинеар болса, онда да $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$ теңдігі дұрыс болады (72, ә, б-суреттер). Бұл теңдік векторлардың ең болмағанда біреуі нөлдік вектор болған жағдайда да дұрыс болады.

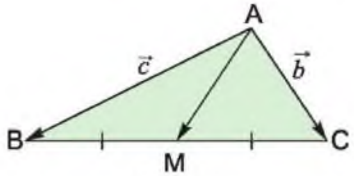


72-сурет

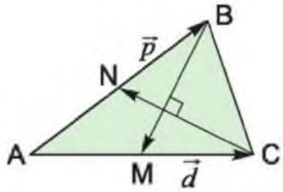
Бұл теоремадан шығатыны, егер $\vec{a}(a_1; a_2)$ және $\vec{b}(b_1; b_2)$ болса, онда $\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$.

1 - е с е п. ABC үшбұрышы берілген, онда $AC = b$, $AB = c$, AM кесіндісі – оның медианасы. $MA = 0,5\sqrt{b^2 + 2bc \cdot \cos\angle BAC + c^2}$ болатынын дәлелдеу керек.

Д ә л е л д е у і. $\overrightarrow{AM} = 0,5(\vec{b} + \vec{c})$ (73-сурет). Бұдан $MA^2 = |\overrightarrow{AM}|^2 = $ $= \left(0,5(\vec{b} + \vec{c})\right)^2 = 0,25(\vec{b}^{\,2} + 2\vec{b}\vec{c} + \vec{c}^{\,2}) = 0,25(b^2 + 2bc \cdot \cos\angle BAC + c^2)$. Сонда $MA = 0,5\sqrt{b^2 + 2bc \cdot \cos\angle BAC + c^2}$, дәлелдеу керегі де осы еді.



73-сурет



74-сурет

2 - е с е п. Теңбүйірлі үшбұрыштың бүйір қабырғаларына жүргізілген медианалары өзара перпендикуляр болса, сол бүйір қабырғалардың арасындағы бұрышты 1° дәлдікпен табыңдар.

Ш е ш у і. ABC үшбұрышында $AB = AC$, BM және CN – перпендикуляр медианалар (74-сурет). $\overrightarrow{AB} = \vec{p}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{d}$ деп белгілейік. Сонда $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = -\vec{p} + \frac{1}{2}\vec{d}$, $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AN} = -\vec{d} + \frac{1}{2}\vec{p}$. BM және CN медианалары перпендикуляр болғандықтан, $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CN} = 0$, яғни $\left(-\vec{p} + \frac{1}{2}\vec{d}\right)\left(-\vec{d} + \frac{1}{2}\vec{p}\right) = 0$. Бұдан шығатыны:

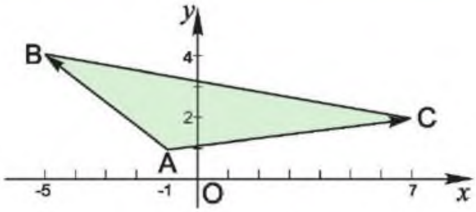
$$\vec{p} \cdot \vec{d} - \frac{1}{2}\vec{d}^{\,2} - \frac{1}{2}\vec{p}^{\,2} + \frac{1}{4}\vec{p} \cdot \vec{d} = 0, \qquad \frac{5}{4}\vec{p} \cdot \vec{d} - \frac{1}{2}\vec{d}^{\,2} - \frac{1}{2}\vec{p}^{\,2} = 0,$$

$$\frac{5}{4}|\vec{p}| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos\alpha - \frac{1}{2}|\vec{d}|^2 - \frac{1}{2}|\vec{p}|^2 = 0.$$

$|\vec{p}| = |\vec{d}|$ және $\alpha = \angle A$ болғандықтан, соңғы теңдікті былай жазамыз: $\frac{5}{4}|\vec{p}|^2 \cdot \cos\angle A - |\vec{p}|^2 = 0$, осыдан $\cos\angle A = 0,8$, $\angle A \approx 37°$ болады.

Ж а у а б ы. $\approx 37°$.

3 - е с е п. Төбелері $A(-1;\ 1)$, $B(-5;\ 4)$, $C(7;\ 2)$ болатын үшбұрыштың ауданын табыңдар.



75-сурет

Ш е ш у і. 1) Ауданы $S_{\Delta ABC} = 0{,}5AB \cdot AC \cdot \sin\angle BAC$ (75-сурет), $\cos\angle BAC = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \cdot AC}$.

Негізгі тригонометриялық тепе-теңдіктен мынаны аламыз: $\sin\angle BAC = \sqrt{1 - \cos^2\angle BAC}$.

2) $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{AC}$ векторларының координаталары мен олардың скаляр көбейтіндісін табайық: $\overrightarrow{AB}(-4;\ 3)$, $\overrightarrow{AC}(8;\ 1)$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -4 \cdot 8 + 3 \cdot 1 = -29$.

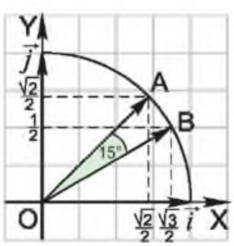
3) Қабырғаларының ұзындықтарын табайық: $AB = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$, $AC = \sqrt{8^2 + 1^2} = \sqrt{65}$.

4) Сонда $\cos\angle BAC = \dfrac{-29}{5\sqrt{65}}$, $\sin\angle BAC = \sqrt{1 - \dfrac{29^2}{25 \cdot 65}} = \dfrac{28}{5\sqrt{65}}$.

5) $S_{\Delta ABC} = 0{,}5 \cdot 5 \cdot \sqrt{65} \cdot \dfrac{28}{5\sqrt{65}} = 14$ (кв. бірлік).

Ж а у а б ы. 14 кв. бірлік.

4 - е с е п. $\cos 15° = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ болатынын дәлелдеңдер.



76-сурет

Д ә л е л д е у і. XOY координаталық жүйесіне $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = 1$, $\angle AOX = 45°$, $\angle BOX = 30°$ болатындай $\overrightarrow{OA}$ және $\overrightarrow{OB}$ векторларын салайық, сонда $\angle AOB = 15°$ болады (76-сурет). Мына векторлардың скаляр көбейтіндісін табайық: $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 15° = \cos 15°$. $\overrightarrow{OA}$ және $\overrightarrow{OB}$ векторларының координаталары: $\overrightarrow{OA}(1 \cdot \cos 45°;\ 1 \cdot \sin 45°)$, $\overrightarrow{OB}(1 \cdot \cos 30°;\ 1 \cdot \sin 30°)$, яғни $\overrightarrow{OA}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\overrightarrow{OB}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$. Сонда

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ болады.

Сонымен, $\cos 15° = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$, дәлелдеу керегі де осы еді.

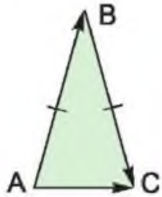
СҰРАҚТАР

1. Векторлардың арасындағы бұрыш түсінігінің анықтамасын беріңдер.
2. Екі вектордың скаляр көбейтіндісі деп нені айтады?
3. Вектордың скаляр квадраты неге тең?
4. Екі вектордың скаляр көбейтіндісінің қасиеттерін атап шығыңдар.
5. Екі вектордың перпендикулярлық шартын тұжырымдаңдар.
6. Қандай шарт орындалғанда екі вектордың көбейтіндісі: а) теріс санға; ә) оң санға тең болады?

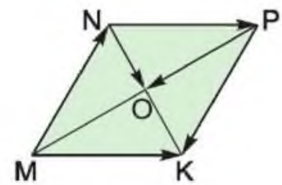
ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

102. Теңбүйірлі ABC үшбұрышында $AB = BC$, $\angle B = 30°$ (77-сурет). а) $\overrightarrow{AB}$ мен $\overrightarrow{AC}$; ә) $\overrightarrow{AB}$ мен $\overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{AC}$ мен $\overrightarrow{BA}$ векторларының арасындағы бұрышты табыңдар.



77-сурет



78-сурет

103. $MNPK$ ромбысында $\angle M = 60°$, O – диагональдарының қиылысу нүктесі (78-сурет). а) $\overrightarrow{MN}$ мен $\overrightarrow{NP}$; ә) $\overrightarrow{MK}$ мен $\overrightarrow{PK}$; б) $\overrightarrow{MN}$ мен $\overrightarrow{PK}$; в) $\overrightarrow{MK}$ мен $\overrightarrow{NP}$; г) $\overrightarrow{NO}$ мен $\overrightarrow{PO}$ векторларының арасындағы бұрышты табыңдар.

104. $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{b} = -3\vec{i} + 4\vec{j}$ және $\vec{c} = 1{,}5\vec{i} - 0{,}2\vec{j}$ векторлары берілген. а) $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының скаляр көбейтіндісін; ә) $\vec{c}$ векторының скаляр квадратын табыңдар.

105. Егер $\vec{a}(2;\ 1)$ және $\vec{b}(-2;\ 3)$ болса, $(3\vec{i} + 2\vec{j})(2\vec{a} - \vec{b})$ көбейтіндісін табыңдар.

106. $A(-4;\ -4)$, $B(-2;\ 4)$, $C(6;\ 6)$, $D(4;\ -2)$ нүктелері мен AC және CD кесінділерінің, сәйкесінше, орталары болатын M және N нүктелері берілген. а) $\overrightarrow{AB}$ мен $\overrightarrow{BC}$; ә) $\overrightarrow{AC}$ мен $\overrightarrow{BD}$; б) $\overrightarrow{MC}$ мен $\overrightarrow{AN}$ векторларының скаляр көбейтіндісін табыңдар.

107. Егер: а) $|\vec{a}|=|\vec{b}|=6$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=60°$; ә) $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=2\sqrt{3}$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=150°$ болса, $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының скаляр көбейтіндісін табыңдар.

В деңгейі

108. K нүктесі – теңқабырғалы MNP үшбұрышының MP қабырғасының ортасы, $MP=4$. а) $\overrightarrow{MN}$ және $\overrightarrow{KP}$; ә) $\overrightarrow{MK}$ және $\overrightarrow{NK}$; б) $\overrightarrow{MP}$ және $\overrightarrow{PK}$; в) $\overrightarrow{MN}$ және $\overrightarrow{NK}$ векторларының скаляр көбейтіндісін табыңдар.

109. $\vec{a}(-4;\ 0)$ және $\vec{b}(4;\ -4)$ векторларының арасындағы бұрышты табыңдар.

110. Төбелері $M(-2\sqrt{3};\ -1)$, $N(0;1)$, $K(0;\ -1)$ болатын үшбұрыштың M бұрышын табыңдар.

111. Нөлдік емес $\vec{a}(m;\ n)$ және $\vec{b}(-n;\ m)$ векторларының перпендикуляр болатынын дәлелдеңдер.

112. $\vec{a}=m\vec{i}-j$ және $\vec{b}=(2m-1)\vec{i}+\vec{j}$ векторлары перпендикуляр болатындай m-нің барлық мәндерін табыңдар.

113. $ABCD$ тіктөртбұрышының AC диагоналінің ұзындығы 4-ке тең. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$ табыңдар.

114. Қабырғасы 5-ке тең болатын $ABCD$ шаршысы берілген. $(\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{BC})^2$ табыңдар.

115. а) $(\vec{a}+\vec{b})^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$; ә) $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$ болатынын дәлелдеңдер.

С деңгейі

116. Периметрі 12-ге тең болатын теңқабырғалы ABC үшбұрышы берілген. $(\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC})^2$-ты табыңдар.

117. $|\vec{a}|=|\vec{b}|=2$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=60°$ екені белгілі. $|\vec{a}+\vec{b}|$-ны табыңдар.

118. $ABCD$ параллелограмы берілген. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0{,}25(AC^2-DB^2)$ болатынын дәлелдеңдер.

119. а) $\vec{a}\cdot\vec{b}\le|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$; ә) $(\vec{a}\cdot\vec{b})^2\le\vec{a}^2\cdot\vec{b}^2$ теңсіздігін дәлелдеңдер.

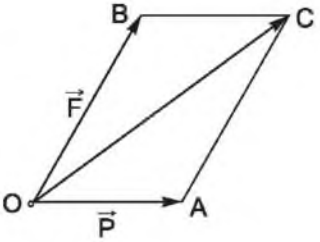
120. cos 75°-ты табыңдар.

7. Векторларды есеп шығаруда қолдану

Тақырыпты оқу барысында:

- векторларды есептер шығаруда қолдануды білетін боласыңдар;
- есептерді векторлық әдіспен шешуді білесіңдер.

1-есеп. Қайсыбір материалдың O нүктесіне $P = 2$ Н және $F = 3$ Н күштері түсірілген. Осы күштерді кескіндейтін векторлардың арасындағы бұрыш 60°-қа тең. P және F күштерінің тең әсерлі күшін табыңдар.



79-сурет

Шешуі. P және F күштері мен олардың тең әсерлі күшін, сәйкесінше, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ және $\overrightarrow{OC}$ векторларымен белгілейік (79-сурет).

Векторларды қосу ережесі бойынша: $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. Сонда $\overrightarrow{OC}^2 = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})^2 = \overrightarrow{OA}^2 + 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB}^2 = OA^2 + 2OA \cdot OB \cdot \cos\angle AOB + {}$ ${}+ OB^2$.

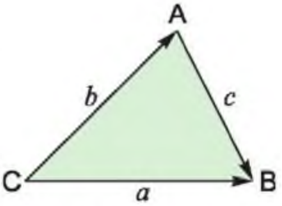
Вектордың скаляр квадраты оның ұзындығының квадратына тең болатындықтан, мынаны аламыз:

$OC^2 = OA^2 + 2OA \cdot OB \cdot \cos\angle AOB + OB^2$,

$OC = \sqrt{2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos 60° + 3^2} = \sqrt{19}$ (Н).

Жауабы. $\sqrt{19}$ Н.

2-есеп. $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ болатын ABC үшбұрышы берілген (80-сурет). $\cos\angle C$-ны табыңдар.



80-сурет

Шешуі. Векторларды азайтудың ережесі бойынша $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$. Сонда $|\overrightarrow{AB}|^2 =$ $= \overrightarrow{AB}^2 = (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})^2 = \overrightarrow{CB}^2 - 2\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}^2 =$ $= |\overrightarrow{CB}|^2 + 2|\overrightarrow{CB}| \cdot |\overrightarrow{CA}| \cdot \cos\angle C + |\overrightarrow{CA}|^2$. $|\overrightarrow{AB}| = c$, $|\overrightarrow{CB}| = a$, $|\overrightarrow{CA}| = b$ екенін ескере отырып, мынаны аламыз: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle C$. Бұдан $\cos\angle C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.

Жауабы. $\cos\angle C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.

3 - е с е п. Егер $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ болса, $\overrightarrow{AB}$ векторы жатқан түзудің теңдеуін жазу керек.

Ш е ш у і. Ізделінді теңдеуді $y = kx + b$ түрінде жазайық және k мен b мәндерін табайық. Түзу $A(x_1; y_1)$ нүктесі арқылы өтетіндіктен, $y_1 = kx_1 + b$ болады. Осы теңдіктен b-ны табамыз, оны $y = kx + b$ теңдеуіне қойып, мынаны аламыз: $y - y_1 = k(x - x_1)$. Осы теңдеуге B нүктесінің координаталарын қойып, мынаны аламыз: $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$. Бұдан $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ болады. k-ның мәнін $y - y_1 = k(x - x_1)$ теңдеуіне қойып, ізделінді теңдеуді аламыз: $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$.

$y_2 \neq y_1$ шарты орындалған жағдайда соңғы теңдеудің екі жағын $y_2 - y_1$ мәніне бөліп, мына түрдегі теңдеуді аламыз: $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$.

Егер $y_2 = y_1$, яғни $\overrightarrow{AB}$ векторы Ox осіне параллель болса немесе сонда жатса, онда ізделінді теңдеу $y = y_1$ түрінде жазылады.

Егер $x_2 = x_1$, яғни $\overrightarrow{AB}$ векторы Oy осіне параллель болса немесе сонда жатса, онда ізделінді теңдеу $x = x_1$ түрінде жазылады.

Ж а у а б ы. Егер $y_2 \neq y_1$ болса, $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$; егер $y_2 = y_1$ болса, $y = y_1$; егер $x_2 = x_1$ болса, $x = x_1$ болады.

4 - е с е п. a және b түзулері, сәйкесінше, мына теңдеулермен берілген: $y = k_1x + b_1$ және $y = k_2x + b_2$. Егер $k_1 \cdot k_2 = -1$ болса, онда $a \perp b$ болатынын дәлелдеу керек.

Д ә л е л д е у і. a түзуінде $A(x_1; k_1x_1 + b_1)$ және $B(x_2; k_1x_2 + b_1)$, ал b түзуінде $C(x_1; k_2x_1 + b_2)$ және $D(x_2; k_2x_2 + b_2)$ нүктелерін таңдайық. Сонда $\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1; k_1(x_2 - x_1))$, $\overrightarrow{CD}(x_2 - x_1; -\frac{1}{k_1}(x_2 - x_1))$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = (x_2 - x_1)^2 + k_1\left(-\frac{1}{k_1}\right)(x_2 - x_1)^2 = 0$ болады. Демек, $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$ және $a \perp b$.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

121. Қайсыбір материалдық нүктеге $P = 100$ Н және $F = 200$ Н күштері түсірілген. Осы күштерді кескіндейтін векторлардың арасындағы бұрыш 50°. P және F күштерінің тең әсерлі күшін 1 Н-ға дейінгі дәлдікпен табыңдар.

122. Салмағы 3 Н жүк көкжиекке 30° бұрыш жасай көлбеген тегіс бетте орналасқан. Жүктің сырғып кетпеуі үшін оны қандай күшпен ұстап тұру керек?

123. Құс оңтүстікке 50 км/сағ меншікті жылдамдығымен ұшып барады. Шығыстан 10 км/сағ жылдамдықпен соққан жел оны ұшу бағытынан ауытқытады. Құстың жерге қарағандағы жылдамдығы қандай? Жауабын бірлікке дейін дөңгелектеңдер.

B деңгейі

124. Дененің қайсыбір нүктелеріне $\vec{F}$ және $\vec{Q}$ күштері түсірілген, $|\vec{F}| = |\vec{Q}| = 4$ Н. Сол күштердің тең әсерлі күші $4\sqrt{3}$ Н. $\vec{F}$ және $\vec{Q}$ күштерінің арасындағы бұрышты табыңдар.

125. Жазықтықтағы қайсыбір жүк ABC үшбұрышының медианаларының қиылысу нүктесі болатын O нүктесінде орналасқан. Оған $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ және $\overrightarrow{OC}$ күштері түсірілген. Жүк орнынан қозғалды ма? Жауабын түсіндіріңдер.

126. Нұр-Сұлтаннан ұшып шыққан екі ұшақтың бірі Орал қаласына, екіншісі Алматыға бет алды. а) Егер Нұр-Сұлтан мен Орал әуежайларының арасы – 1 395 км, Нұр-Сұлтан мен Алматынікі – 973 км, Орал мен Алматынікі – 2 109 км болса, ұшақтардың қозғалысын бейнелейтін векторлардың арасындағы бұрышты табыңдар. ә) Егер бір ұшақ Нұр-Сұлтаннан Оралға, ал екіншісі Алматыдан Нұр-Сұлтанға ұшса, онда ондай бұрыштың шамасы қандай болады?

127. AB және CD түзулері мен оларда жататын $\overrightarrow{AB}(3; 4)$ және $\overrightarrow{CD}(m; 2)$ векторлары берілген. m-нің қандай мәнінде осы векторлар перпендикуляр болады?

C деңгейі

128. $\vec{m}(4; 5)$ векторы: а) $4x + 5y = 0$; ә) $4x + 5y = 7$ теңдеуімен берілген түзуге перпендикуляр болатынын дәлелдеңдер.

129. Егер: а) $A(2; 3)$, $C(0; 4)$; ә) $A(-14; 15)$, $C(5; 10)$ болса, $\overrightarrow{AC}$ векторы жатқан түзудің теңдеуін жазыңдар.

8. «Векторлар» бөлімін қайталауға арналған жаттығулар

А деңгейі

130. $\overrightarrow{MN}(2; 3)$ векторы жатқан түзудің теңдеуін жазуға бола ма? Жауабын түсіндіріңдер.

131. Төбелері $A(-7; 5)$, $B(3; -1)$, $C(5; 3)$ болатын үшбұрыш берілген. а) Оның BC қабырғасына параллель болатын MN орта сызығының; ә) BH биіктігінің теңдеуін жазыңдар.

132. $\overrightarrow{AB}(2; 0)$ мен $\overrightarrow{CD}(-2; 2)$ векторларының және AB мен CD түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.

133. Мына теңдеулермен берілген түзулердің арасындағы бұрышты 1°-қа дейінгі дәлдікпен табыңдар: а) $y = \frac{1}{4}x$, $y = 4x$; ә) $y = -x + 3$, $y = 2x + 3$.

В деңгейі

134. Төбелері $A(-2; -2)$, $B(-3; 1)$, $C(7; 7)$ және $D(3; -1)$ болатын төртбұрыш берілген. Оның диагональдарының арасындағы бұрыштың синусын табыңдар.

135. Егер: а) $A(-6; -2)$, $B(4; 8)$, $C(2; -8)$; ә) $A(-2; -2)$, $B(1; 1)$, $C(3; -7)$ болса, ABC үшбұрышының ауданын табыңдар.

136. $\vec{a} = 6\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ векторларына тұрғызылған параллелограмның ауданын табыңдар.

137. ABC үшбұрышының AC қабырғасы 14 см-ге тең. BC қабырғасына оны $BK : KC = 2 : 5$ қатынасындай бөлетін K нүктесі, ал AB қабырғасына оны $BM : MA = 5 : 2$ қатынасындай бөлетін M нүктесі белгіленген. AC қабырғасына параллель болатын KP мен MN кесінділерінің ұзындығын табыңдар ($P \in AB$, $N \in BC$).

138. $AB = 4$ см және $\angle A = 30°$ болатын $ABCD$ ромбысының AC диагоналі ұзындығын табыңдар.

139. Шеңбердің OA, OB, OC радиустары жүргізілген. Егер $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ болса, $\angle AOB$-ны табыңдар.

140. Векторларды қолданып, ромб диагональдарының перпендикуляр болатынын дәлелдеңдер.

141. Табандары BC және AD болатын $ABCD$ трапециясы берілген, M және N нүктелері, сәйкесінше, AB және CD қабырғаларының орталары. $\overrightarrow{AC}$ және $\overrightarrow{BD}$ векторларының қосындысына тең болатын вектордың $\overrightarrow{MN}$ векторына коллинеар болатынын дәлелдеңдер.

142. Егер: а) $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=3$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=60°$ болса, $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының қосындысына; ә) $|\vec{a}|=\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=8$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=45°$ болса, $\vec{b}-\vec{a}$ векторларының айырымына тең болатын вектордың ұзындығын табыңдар.

143. Векторларды пайдаланып, параллелограмның диагональдары квадраттарының қосындысы оның қабырғаларының квадраттары қосындысына тең болатынын дәлелдеңдер.

С деңгейі

144. Радиусы R болатын шеңберге іштей теңқабырғалы ABC үшбұрышы салынған. $MA^2+MB^2+MC^2$ қосындысын табыңдар, мұндағы M – шеңбердің кез келген нүктесі.

145. Векторларды пайдаланып, үшбұрыштың биіктіктерін қамтитын түзулердің бір нүктеде қиылысатынын дәлелдеңдер.

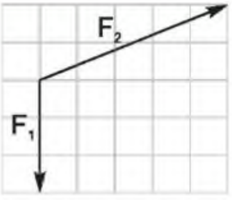
146. Центрі O болатын шеңбердің AB және CD екі перпендикуляр хордасы K нүктесінде қиылысады. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OK}$ болатынын дәлелдеңдер.

147. A және B нүктелері берілген. Мына теңдіктер орындалатындай барлық X нүктелер жиынынан тұратын фигураны салыңдар: а) $|\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}|=|\overrightarrow{XA}-\overrightarrow{XB}|$; ә) $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AX}|=|\overrightarrow{AB}|$; б) $|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AX}|=|\overrightarrow{AX}|$.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

148. 1А) 81-суретте көрсетілгендей денеге F_1 және F_2 күштерімен әсер еткен. Осы күштердің тең әсерлі күштерін салыңдар.

2А) $AB=4$ см кесіндісі мен оған тиісті C нүктесі берілген. $\overrightarrow{CK}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ векторын салыңдар.



81-сурет

3В) $ABCD$ параллелограмы берілген және оның AB мен CD қабырғаларынан $AK = KB$, ал $CM : MD = 2 : 3$ болатын, сәйкесінше, K және M нүктелері алынған. $\overrightarrow{KM}$ векторын $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{AD}$ векторлары бойынша жіктеңдер.

4В) Егер: $A(0; -2)$, $B(-2\sqrt{3}\,; 0)$, $C(1; 1{,}5)$, $D(5; 1{,}5)$ нүктелерінің координаталары белгілі болса, $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{CD}$ векторларының арасындағы бұрышты табыңдар.

5С) $B(4; 2)$ нүктесінен өтіп, $\vec{a}\,(3; -5)$ векторына перпендикуляр болатын түзудің теңдеуін жазыңдар.

БҰЛ ҚЫЗЫҚТЫ!

Бағытталған кесінді ұғымын өте ерте заманнан бастап, вектор деп аталмай тұрған кезде қолданған болатын. Көп заттар, мысалы, найза, жайтартқыш бағытталған кесінді түрінде жасалатын. Физикада бағытталған кесінді арқылы күшті, қозғалыс бағытын белгілейтін болған. Вектор ұғымы геометрияда XIX ғасырдағы неміс математигі Г. Грассманның (1809–1877 жж.) және ирланд математигі У. Гамильтонның (1805–1865 жж.) еңбектерінде пайда болған. Вектор туралы ілімнің қазіргі түрі XIX ғасырдың аяғында америкалық ғалым Дж. Гиббстың (1839–1903 жж.) еңбектерінде берілді.

Г. Вейль

Геометрияның мектеп курсында векторды бағытталған кесінді деп қарастырады және оның қасиеттері дәлелденеді. Қазіргі кезде векторды оқытудың басқа да жолы бар, онда нүкте мен векторды негізгі ұғым (анықтамасыз қабылданатын) деп есептейді, ал оның кейбір қасиеттерін аксиома ретінде қабылдайды. Геометрияны осылай қалыптастыру нұсқасын неміс математигі Г. Вейль (1885–1955 жж.) 1917 ж. ұсынған болатын. Бұдан әрі векторлардың геометрия ғылымындағы қолданысы артып, оны қазіргі математика, физика, экономика және де басқа ғылымдарда пайдаланатын болды.

II. ЖАЗЫҚТЫҚТАҒЫ ТҮРЛЕНДІРУЛЕР

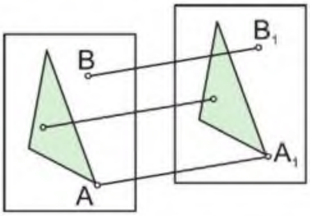
Бөлімді оқу нәтижесінде

• жазықтықтағы түрлендіру ұғымын;
• қозғалыстың, гомотетияның, ұқсас фигуралардың анықтамаларын;
• қозғалыс түрлерін (нүктеге және түзуге қарағандағы симметриялар, параллель көшіру, бұру), олардың қасиеттері мен композицияларын;
• үшбұрыштардың ұқсастық белгілерін;
• екі ұқсас көпбұрыштың аудандарының қатынасы туралы формуланы **білу керек**.

• симметрияларда, параллель көшіруде, бұруда және гомотетияда фигуралардың бейнелерін сала алу;
• жазықтықтағы түрлендірулерді қолданып есептер шығара алу;
• үшбұрыштардың (оның ішінде тікбұрышты үшбұрыштардың) ұқсастық белгілерін қолдана алу;
• үшбұрыштағы пропорционал кесінділердің қасиеттерін қолдана **алу керек**.

9. Жазықтықтағы түрлендірулер. Қозғалыс және оның түрлері

Тақырыпты оқу барысында:
- жазықтықтағы түрлендіру ұғымын, қозғалыстың анықтамасын білесіңдер;
- қозғалыс түрлерін (нүктеге және түзуге қарағандағы симметрия, параллель көшіру, бұру), олардың қасиеттері мен композицияларын білесіңдер;
- фигуралардың симметриялардағы, параллель көшірудегі, бұрудағы бейнелерін саласыңдар.

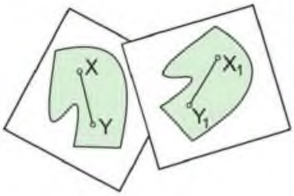


82-сурет

Жазықтықтың әрбір A нүктесіне оның қайсыбір A_1 нүктесі және де әртүрлі A мен B нүктелеріне әртүрлі A_1 мен B_1 нүктелері сәйкестендірілген болсын. Егер осы жағдайда кез келген A_1 нүктесіне сәйкес келетін A нүктесі бар болса, онда жазықтықтың өзіне-өзінің өзара бір мәнді бейнелеуі берілген дейді (82-сурет).

Мұндай бейнелеуді **жазықтықтағы түрлендіру** деп атайды.

Жазықтықтағы түрлендіруді орындағанда F фигурасы F_1 фигурасына бейнеленеді. Бұл жағдайда F фигурасы F_1 фигурасына көшеді немесе түрлендіру F фигурасын F_1 фигурасына көшіреді, немесе F_1 фигурасын F фигурасының осы түрлендірудегі бейнесі деп айтады.



83-сурет

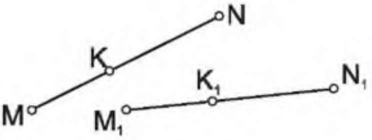
Нүктелердің арақашықтығы сақталатын түрлендіруді қозғалыс деп атайды. Яғни, егер кез келген X және Y нүктелері X_1 және Y_1 нүктелеріне бейнеленетін болса, $XY = X_1Y_1$ болады. 83-суретте осындай түрлендірудің мысалы көрсетілген.

Қозғалыстың кейбір түрлерімен алдыңғы сыныптарда танысқан болатынсыңдар, олар центрлік және остік симметриялар. Жазық фигуралардың орын ауыстыруы арқылы қозғалысты көрнекі түрде көрсетуге болады.

Қозғалыстың кейбір қасиеттерін қарастырайық.

Т е о р е м а. **Қозғалыста кесінді өзіне тең кесіндіге бейнеленеді.**

Д ә л е л д е у і. Жазықтықтың қозғалысы кезінде MN кесіндісінің M және N ұштары M_1 және N_1 нүктелеріне бейнеленетін болсын (84-сурет). MN кесіндісі толығымен оған тең M_1N_1 кесіндісіне бейнеленетінін дәлелдейік. K – MN кесіндісінің кез келген нүктесі, ал K_1 нүктесі қозғалыс кезінде K нүктесі көшетін нүкте болсын. Сонда $MK + KN = MN$ болады. Қозғалыста нүктелердің арақашықтығы сақталатын болғандықтан, $M_1N_1 = MN$, $M_1K_1 = MK$, $N_1K_1 = NK$ болады. Бұл теңдіктерден мынаны аламыз: $M_1K_1 + K_1N_1 = M_1N_1$.



84-сурет

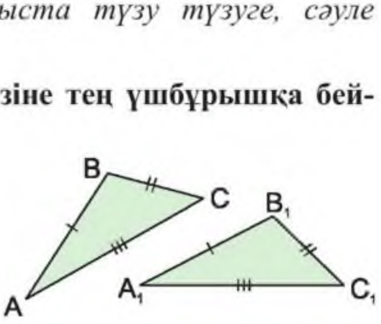
Демек, K_1 нүктесі M_1N_1 кесіндісіне тиісті және ол M_1 мен N_1 нүктелерінің арасында жатыр. Сонымен, MN кесіндісінің нүктелері M_1N_1 кесіндісінің нүктелеріне бейнеленетіні дәлелденді.

Тағы, осы қозғалыста M_1N_1 кесіндісінің әрбір K_1 нүктесі MN кесіндісінің K нүктесінің бейнесі болатынын дәлелдеу керек. Дәл осылай пайымдай отырып, $M_1N_1 = MN$, $M_1K_1 = MK$, $N_1K_1 = NK$, $M_1K_1 + K_1N_1 = M_1N_1$ теңдіктерінен мынаны аламыз: $MK + KN = MN$. Демек, MN кесіндісінде K_1 нүктесіне бейнеленетін K нүктесі бар екен. Теорема дәлелденді.

Бұл теоремадан шығатыны: *қозғалыста түзу түзуге, сәуле сәулеге бейнеленеді.*

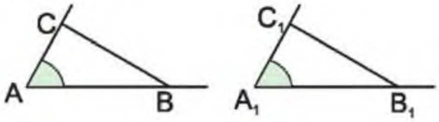
Т е о р е м а. **Қозғалыста үшбұрыш өзіне тең үшбұрышқа бейнеленеді.**

Д ә л е л д е у і. ΔABC берілген болсын. Қозғалыста AB, BC және CA кесінділері, сәйкесінше, оларға тең A_1B_1, B_1C_1 және C_1A_1 кесінділеріне бейнеленеді (85-сурет). Демек, ΔABC өзіне тең $\Delta A_1B_1C_1$-ге бейнеленеді (үшбұрыштардың теңдігінің үшінші белгісі бойынша), дәлелдеу керегі де осы еді.



85-сурет

Теорема. **Қозғалыста бұрыш өзіне тең бұрышқа бейнеленеді.**



86-сурет

Дәлелдеуі. A бұрышы берілген болсын. Оның қабырғаларына B және C нүктелерін белгілейік (86-сурет). Қозғалыста ΔBAC өзіне тең $\Delta B_1A_1C_1$-ге бейнеленеді. Сонда $\angle A$ өзіне тең $\angle A_1$-ге бейнеленеді.

Жалпы, *қозғалыста кез келген фигура өзіне тең фигураға бейнеленеді.* Бірнеше қозғалыстан тұратын түрлендіру қозғалыс болатынын айта кетелік.

Егер фигураларды бір-бірімен дәл беттестіруге болса, оларды тең фигуралар деп атағанбыз. Фигураларды беттестіру қозғалыс болады. Енді фигуралардың теңдігі ұғымының жалпылама анықтамасын берейік. *Егер бір фигура екінші фигураға қозғалыс арқылы бейнеленетін болса, онда олар тең фигуралар деп аталады.*

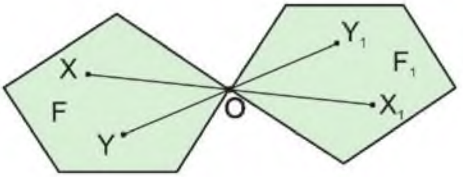
Қозғалыс ұғымының анықтамасы мен қарастырылған қасиеттерінен мыналар шығады:

1) егер F фигурасы F_1 фигурасына тең болса, онда F_1 фигурасы F фигурасына тең болады;

2) егер F фигурасы F_1 фигурасына тең болса, ал F_1 фигурасы F_2 фигурасына тең болса, онда F фигурасы F_2 фигурасына тең болады.

Егер O нүктесі XX_1 кесіндісінің ортасы болса, онда X және X_1 нүктелері *O нүктесіне қарағанда симметриялы нүктелер* деп аталатынын еске салайық. Мұнда O нүктесі өзіне-өзі симметриялы болады.

F фигурасын, оның әрбір X нүктесі берілген O нүктесіне қарағанда симметриялы болатын X_1 нүктесіне бейнелейтіндей F_1 фигурасына түрлендіру O нүктесіне қарағанда симметрия арқылы түрлендіру (немесе центрлік симметрия) деп аталады.

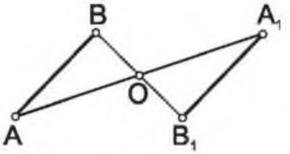


87-сурет

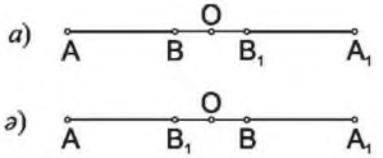
Бұл жағдайда F және F_1 фигуралары O нүктесіне қарағанда симметриялы деп аталады (87-сурет). Нүктеге қарағанда симметрия арқылы түрлендіруде өзіне-өзі көшетін фигураны *центрлік симметриялы фигура* деп, ал нүктені *симметрия центрі* деп атайды. Мысалы, параллелограмм – симметрия центрі диагональдарының қиылысу нүктесі болатын центрлік симметриялы фигура.

1 - е с е п. Нүктеге қарағанда симметрия арқылы түрлендіру қозғалыс болатынын дәлелдеңдер.

Д ә л е л д е у і. A, B және O нүктелері бір түзуде жатпайтын болсын, ал A_1 мен B_1 нүктелері, сәйкесінше, A мен B нүктелерінің O нүктесіне қарағанда центрлік симметриядағы бейнесі болсын (88-сурет). Сонда $\Delta AOB = \Delta A_1OB_1$ (үшбұрыштардың теңдігінің бірінші белгісі бойынша). Демек, $A_1B_1 = AB$.



88-сурет

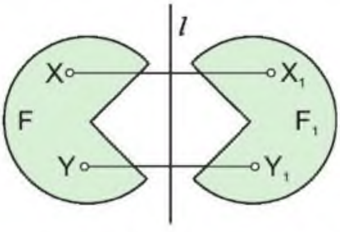


89-сурет

A, B және O нүктелері бір түзуде жататын болсын. Сонда, егер O нүктесі A және B нүктелерінің арасында жатпаса, онда $A_1B_1 = |OA_1 - OB_1| = |OA - OB| = AB$ болады (89, *а*-сурет); егер O нүктесі A және B нүктелерінің арасында жатса, онда $A_1B_1 = OA_1 + OB_1 = OA + OB = AB$ болады (89, *ә*-сурет).

Сонымен, центрлік симметрия нүктелердің арақашықтығын сақтайды, демек, бұл түрлендіру қозғалыс болады.

X және X_1 нүктелері XX_1 кесіндісінің орта перпендикуляры болатын *l түзуіне қарағанда симметриялы нүктелер* деп аталатынын еске салайық. Бұл жағдайда l симметрия осіне тиісті кез келген нүкте өзіне-өзі симметриялы болады.



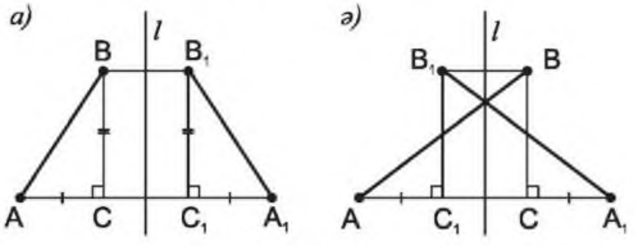
90-сурет

F фигурасын оның әрбір X нүктесі берілген l түзуіне қарағанда симметриялы болатын X_1 нүктесіне бейнелейтіндей F_1 фигурасына түрлендіру l түзуіне қарағанда симметрия арқылы түрлендіру (немесе осьтік симметрия) деп аталады.

Бұл жағдайда F және F_1 фигуралары l түзуіне қарағанда симметриялы деп аталады (90-сурет). Егер түзуге қарағанда симметрия арқылы түрлендіру фигураны өзіне-өзі көшіретін болса, онда ол фигураны *түзуге қарағанда симметриялы* деп, ал түзуді фигураның симметрия осі деп атайды. Мысалы, шеңбердің симметрия осі оның диаметрін қамтитын кез келген түзу болады.

2 - е с е п. Осьтік симметрия қозғалыс болатынын дәлелдеу керек.

Д ә л е л д е у і. A және B нүктелері l түзуінің бір жағында жатсын, ал A_1 және B_1 нүктелері, сәйкесінше, олардың l түзуіне қарағанда осьтік симметриядағы бейнесі болсын (91, *а*-сурет). l түзуіне параллель болатын BC және B_1C_1 кесінділерін салайық. Сонда CBB_1C_1 төртбұрышы – тіктөртбұрыш және тікбұрышты ACB мен $A_1C_1B_1$ үшбұрыштары екі катеті бойынша тең болады. Демек, олардың гипотенузалары да тең болады, яғни $A_1B_1 = AB$.

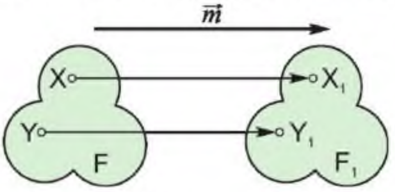


91-сурет

A және B нүктелері l түзуінің әртүрлі жағында жататын (91, *ә*-сурет) немесе l түзуіне тиісті болатын жағдайларды өздігінен қарастырыңдар.

Жазықтықтағы түрлендірудің тағы екі түрін: параллель көшіру мен берілген нүктеден айналдыра бұруды қарастырамыз.

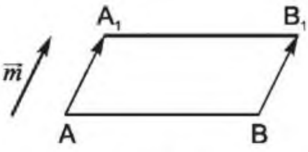
X – F фигурасының, X_1 – F_1 фигурасының нүктесі. Берілген $\vec{m}$ векторына тең $\overrightarrow{XX_1}$ векторы F фигурасының әрбір X нүктесін F_1 фигурасының X_1 нүктесіне бейнелейтіндей F фигурасын F_1 фигурасына түрлендіру параллель көшіру деп аталады.



92-сурет

Бұл жағдайда $\vec{m}$ векторы параллель көшіру векторы деп аталады (92-сурет).

3 - е с е п. Параллель көшіру қозғалыс болатынын дәлелдеу керек.



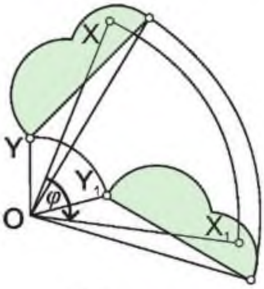
93-сурет

Д ә л е л д е у і. A және B нүктелері $\vec{m}$ векторына параллель көшіргенде, сәйкесінше, A_1 және B_1 нүктелеріне бейнеленетін болсын, ал $\vec{m}$ және $\overrightarrow{AB}$ векторлары коллинеар болмасын (93-сурет). Сонда параллель көшіру ұғымының анықтамасы бойынша мынаны аламыз: $\overrightarrow{AA_1} = \vec{m}$ және $\overrightarrow{BB_1} = \vec{m}$. Демек, $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1}$, яғни $AA_1 \parallel BB_1$ және $AA_1 = BB_1$, ал AA_1B_1B – параллелограмм. Сондықтан $A_1B_1 = AB$ (параллелограмның қарама-қарсы қабырғалары болғандықтан).

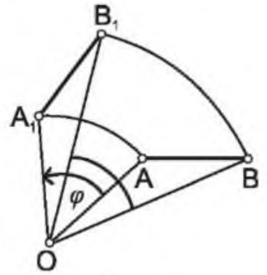
Егер $\vec{m}$ және $\overrightarrow{AB}$ векторлары коллинеар болса, онда да $A_1B_1 =$ $= AB$ болады (мұны өздігінен тексеріңдер). Ендеше, параллель көшіру нүктелердің арақашықтығын сақтайды, сондықтан қозғалыс болады.

Дәлелденген тұжырымнан шығатыны, *параллель көшіргенде түзу өзіне параллель немесе өзіне бейнеленеді.*

X – F фигурасының, X_1 – F_1 фигурасының нүктесі. $OX = OX_1$, $\angle XOX_1 = \varphi$ шартын қанағаттандыратындай F фигурасының әрбір X нүктесін F_1 фигурасының X_1 нүктесіне бейнелейтіндей F фигурасын F_1 фигурасына түрлендіру берілген O нүктесінен айналдыра φ бұрышына бұру деп аталады. Ол нүктені *бұру центрі* деп, ал φ бұрышын *бұру бұрышы* деп атайды және де φ бұрышының градустық өлшемімен қатар бағыты да: сағат тілі бағытымен немесе сағат тіліне қарсы бағытпен деп беріледі (94-сурет).



94-сурет



95-сурет

4-есеп. Нүктеден айналдыра бұру қозғалыс болатынын дәлелдеу керек.

Дәлелдеуі. A, B және O нүктелері бір түзуде жатпайтын болсын және O центрінен айналдыра сағат тіліне қарсы бағытпен φ бұрышына бұрғанда A және B нүктелері, сәйкесінше, A_1 және B_1 нүктелеріне бейнеленетін болсын (95-сурет). Сонда $\Delta AOB = \Delta A_1OB_1$ болады (үшбұрыштардың теңдігінің бірінші белгісі бойынша). Демек, $A_1B_1 = AB$. A, B және O нүктелері бір түзуде жататын жағдайды өздігінен қарастырыңдар.

Бірнеше қозғалысты тізбектей орындауды олардың *композициясы* деп атайды. Қозғалыстардың композициясы терімділік қасиетке ие, сондықтан оларды кез келген тәртіппен орындау бірдей нәтиже береді. Остік симметрия мен параллель көшіруден тұратын қозғалыстардың композициясын *сырғымалы симметрия* деп атайды.

СҰРАҚТАР

1. Жазықтықтағы түрлендіру дегеніміз не екенін түсіндіріңдер.
2. Жазықтықтағы қандай түрлендіруді қозғалыс деп атайды?
3. Қозғалыстың қандай қасиеттерін білесіңдер?
4. Қандай екі нүкте: а) берілген нүктеге қарағанда; ә) берілген түзуге қарағанда симметриялы деп аталады?
5. Қандай түрлендіру: а) центрлік симметрия; ә) остік симметрия деп аталады?
6. а) Параллель көшіру; ә) берілген нүктеден айналдыра бұру ұғымдарының анықтамасын беріңдер.

7. Мына түрлендірулердің әрқайсысының қозғалыс болатынын дәлелдеңдер: а) центрлік симметрия; ә) осьтік симметрия; б) параллель көшіру; в) берілген нүктеден айналдыра бұру.

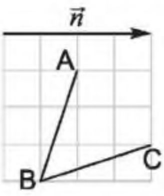
ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

149. AB сәулесі мен онда жатпайтын O нүктесі берілген. Осы сәуленің O нүктесіне қарағанда центрлік симметрияда бейнеленетін фигурасын салыңдар.

150. ΔABC-да $\angle C = 100°$, $AC = 3$ см, $BC = 4$ см. ΔABC мен оның: а) AM медианасын; ә) AH биіктігін қамтитын түзуге қарағандағы осьтік симметриядағы бейнесін салыңдар.

151. ABC үшбұрышының A төбесінен өтетін түзуге қарағандағы симметрияда оның B нүктесі C нүктесіне бейнеленеді. ΔABC-ның теңбүйірлі екенін дәлелдеңдер.



96-сурет

152. ABC бұрышы мен $\vec{n}$ векторы берілген (96-сурет). $\vec{n}$ векторына параллель көшіргенде осы бұрыштың бейнесін салыңдар.

В деңгейі

153. а) MNK теңбүйірлі үшбұрышының MK табанын қамтитын түзуге K нүктесі M және C нүктелерінің арасында жататындай C нүктесі белгіленген. NK кесіндісі BC кесіндісіне бейнеленетіндей параллель көшіру векторын көрсетіңдер. MNK үшбұрышының осы параллель көшірудегі бейнесін салыңдар.

ә) Қозғалыстың қандай да бір түрімен (немесе олардың композициясымен) Министрліктер үйінің алтын мұнараларының бірін екіншісіне түрлендіруге бола ма (97-сурет)?

97-сурет

154. а) $\angle C = 90°$, $AC = 3$ см, $BC = 1{,}5$ см болатын ABC үшбұрышы мен AB түзуіне тиісті O нүктесі берілген, $OA = 2$ см және A нүктесі OB кесіндісінде жатыр. ABC үшбұрышын сағат тілінің бағытымен O нүктесінен айналдыра $60°$ бұрышқа бұрғанда шығатын бейнесін салыңдар.
ә) Центрлері A және B нүктелеріндегі екі тең шеңбер C және D нүктелерінде қиылысады. Шеңберлердің бірі екіншісімен беттесуі үшін оны C нүктесінен айналдыра қандай бұрышқа бұру керек?
155. а) AB кесіндісін сағат тіліне қарсы оған тиісті емес нүктені айналдыра $45°$-қа және сол кесіндіге тиісті қайсыбір нүктені айналдыра $30°$-қа бұруларды; ә) ΔABC-ны $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ векторына тең векторға параллель көшіруді және жазықтықтың қандай да бір M нүктесін айналдыра сағат тілі бағытымен $60°$-қа бұруды; б) шеңберді $\overrightarrow{m}$ векторына параллель көшіруді және еркімізше таңдап алынған l түзуіне қарағанда осьтік симметрияны орындаңдар.

С деңгейі

156. Теңқабырғалы ABC үшбұрышының AM және BN медианалары O нүктесінде қиылысады. Қандай екі қозғалыстың композициясы ΔAON-ді ΔBOM-ге көшіретінін анықтаңдар.
157. а) Теңқабырғалы ABC үшбұрышының медианалары O нүктесінде қиылысады. O нүктесінен айналдыра $120°$ бұрышқа бұрғанда ABC үшбұрышы өзіне-өзі бейнеленетінін дәлелдеңдер. ә) Қабырғаларының саны тақ болатын центрлік симметриялы көпбұрыштың болмайтынын дәлелдеңдер.

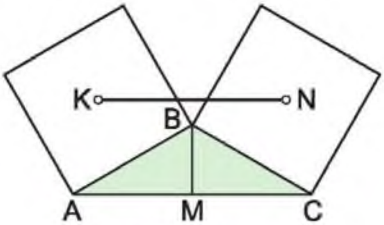
10. Қозғалыстарды есеп шығаруда қолдану

Тақырыпты оқу барысында:

• әртүрлі қозғалыстарды қолданып, есептер шығара аласыңдар.

Әртүрлі қозғалыстарды пайдаланып, есептер шығарудың мысалдарын келтірейік. Есеп шығарудағы негізгі ой – қажетті нәтижеге жеткізетіндей қозғалысты дұрыс таңдап, оны орындау.

1 - е с е п. Теңбүйірлі ABC үшбұрышының AB және BC бүйір қабырғаларына шаршылар салынған, K мен N – олардың диагональдарының қиылысу нүктелері (98-сурет). KN кесіндісінің осы үшбұрыштың BM медианасына перпендикуляр болатынын дәлелдеу керек.

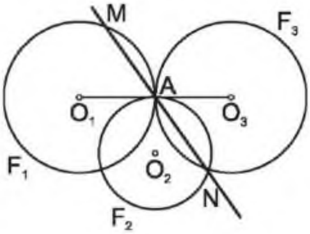


98-сурет

Д ә л е л д е у і. Теңбүйірлі үшбұрыштың қасиеті бойынша BM түзуі ABC үшбұрышының симметрия осі болады. Сонда AB мен CB кесінділері және сол кесінділерге тұрғызылған шаршылар BM түзуіне қарағанда симметриялы болады. Демек, шаршылардың диагональдарының қиылысу нүктелері болатын K мен N де сол түзуге қарағанда симметриялы, сондықтан KN мен BM кесінділері перпендикуляр болады.

2 - е с е п. Тең емес F_1 және F_2 шеңберлерінің ортақ A нүктесінен өтіп, олардан тең хордалар қиятындай түзу жүргізу керек.

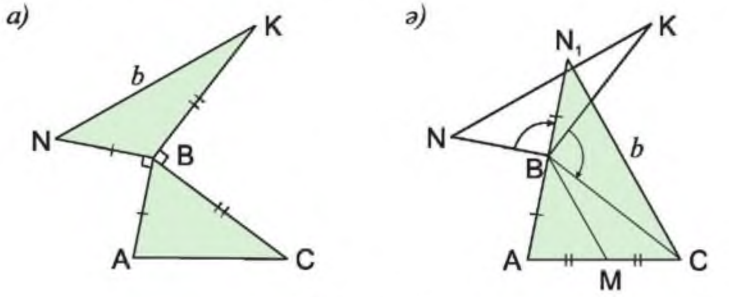
Ш е ш у і. F_1 шеңберіне A нүктесіне қарағанда симметриялы болатын F_3 шеңберін салайық (99-сурет). F_3 шеңбері F_1 шеңберіне тең және F_2 шеңберімен AN ортақ хордасы бар болады. AN түзуі F_1 шеңберін A центріне қарағанда N нүктесіне симметриялы болатын M нүктесінде қиып өтетіндіктен және $AM = AN$ болғандықтан, ол ізделінді түзу болады.



99-сурет

3 - е с е п. ABC және NBK үшбұрыштары берілген, оларда $NB \perp AB$ және $NB = AB$, $KB \perp BC$ және $KB = BC$, $NK = b$ (100, *а*-сурет). ABC үшбұрышының BM медианасының ұзындығын табыңдар.

Ш е ш у і. BNK үшбұрышын B нүктесінен айналдыра сағат тілінің бағытымен 90°-қа бұрайық (100, *ә*-сурет).



100-сурет

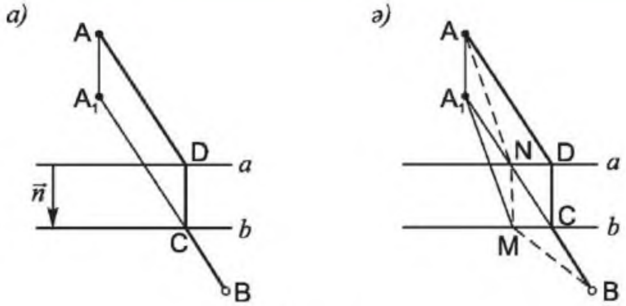
Сонда ол өзіне тең ΔBN_1C-ға бейнеленеді. A, B және N_1 нүктелері бір түзуде жатады, ал BK кесіндісі BC кесіндісімен беттеседі. ABC үшбұрышының BM медианасы AN_1C үшбұрышының орта сызығы болады, сондықтан $BM = 0{,}5b$.

Ж а у а б ы. $0{,}5b$.

4 - е с е п. Өзеннің екі жағында орналасқан ауылдардың арасын қысқа жолмен қосу үшін жағалауы параллель болатын өзенге көпірді қай жерге салу керек?

Ш е ш у і. a және b түзулері өзен жағалауы болсын, ал осы өзеннен өтетін көпірдің ұзындығы $\vec{n}$ векторының ұзындығына тең болсын (101, *а*-сурет). A нүктесі мен a түзуін $\vec{n}$ векторына көшіреміз, сонда A нүктесі A_1 нүктесіне, ал a түзуі b түзуіне бейнеленеді. A_1 мен B нүктелерінің ең қысқа арақашықтығы A_1B кесіндісі болады, ол b түзуін C нүктесінде қиып өтеді. Сонда CD – көпірдің орнын, ал $ADCB$ сынық сызығы A және B ауылдарының көпір арқылы жүретін ең қысқа арақашықтығын көрсетеді.

Көпірдің орны басқа жерде болған жағдайда A-дан B-ға дейінгі жолдың ұзынырақ болатынын дәлелдейік. MN кесіндісі көпірдің басқа орны болсын (101, *ә*-сурет). $ANMB$ мен $ADCB$ сынық сызықтарының ұзындықтарын салыстырайық. $MN = CD$ болғандықтан, $AN + MB$ мен $AD + CB$ қосындыларын салыстырсақ жеткілікті болады. $AN + MB = A_1M + MB$ ($AN = A_1M$, A_1ANM параллелограмының қарама-қарсы қабырғалары ретінде). $AD + CB = A_1B$. Үшбұрыштың теңсіздігі бойынша $A_1M + MB > A_1B$. Демек, $AN + MB > AD + CB$, яғни A мен B ауылдарының арасындағы ең қысқа жол CD көпірі арқылы өтеді.



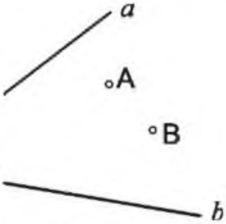
101-сурет

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

158. а) Түзу мен оның бір жағында орналасқан A және B нүктелері берілген. Түзуден ABC үшбұрышының периметрі ең аз болатындай C нүктесін табыңдар. ә) Сүйірбұрышты үшбұрыш пішіндес пластинканы үш бөлікке қалай бөліп, тіктөртбұрыш құрастыруға болады?

159. A мен B елді мекендері a және b жолдарының арасында орналасқан (102-сурет). Осы жолдардың қай жеріне M және N ($M \in a$, $N \in b$) пункттерін $AMNB$ жолы ең қысқа болатындай етіп орналастыру керек?

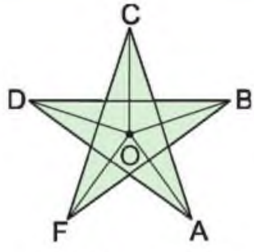


102-сурет

В деңгейі

160. A және B пункттері теміржолдың бір жағында орналасқан. $AMKB$ жолының ұзындығы ең қысқа болуы үшін теміржол бойының қай жеріне MK платформасын орналастыру керек?

161. Екі тең шеңбер берілген. Нүктені айналдыра бұру арқылы бір шеңберді екінші шеңбермен беттестіруге болатындай нүктелердің геометриялық орнын табыңдар.



103-сурет

162. *ABCDF* фигурасы (103-сурет) *O* центрін айналдыра $x°$, $2x°$, $3x°$, $4x°$, $5x°$ бұрыштарға бұрғанда өзіне-өзі бейнеленеді. а) x неге тең? ә) *AC* кесіндісінің *O* нүктесінен айналдыра $x°$-қа бұрғанда шыққан бейнелерін атаңдар.

163. а) Қайсыбір нүктеден айналдыра $x°$, $2x°$, $3x°$-қа бұрғанда өзіне-өзі бейнеленетін алтыбұрыш салыңдар.

ә) а) есебінде салынған алтыбұрыштың симметрия центрі, симметрия осі бар ма? Бар болса, оларды көрсетіңдер.

С деңгейі

164. а) Теңқабырғалы *ABC* үшбұрышының *CA* және *CB* қабырғаларына ұзындықтарының қосындысы үшбұрыштың қабырғасына тең болатын *CM* және *CN* кесінділері салынған. *MON* бұрышын табыңдар, мұндағы *O* – үшбұрыш медианаларының қиылысу нүктесі. ә) Теңқабырғалы үшбұрыштың центрі арқылы арасындағы бұрышы 60°-қа тең болатын және үшбұрыштың төбесі арқылы өтпейтін екі түзу жүргізілген. Осы түзулердің үшбұрыштың қабырғалары арасындағы кесінділерінің тең болатынын дәлелдеңдер.

165. а) $y = 2x + 5$ түзуіне координаталар басына қарағанда симметриялы болатын түзудің; ә) $y = 2x - 4$ түзуін координаталар басынан айналдыра сағат тіліне қарсы бағытта 90°-қа бұрғанда шыққан түзудің теңдеуін жазыңдар.

ПРАКТИКАЛЫҚ ТАПСЫРМА

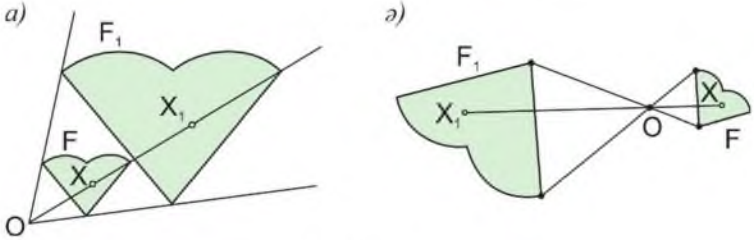
Кез келген *ABC* үшбұрышын салып, онда жатпайтын *O* нүктесі арқылы *AO*, *BO* және *CO* түзулерін жүргізіңдер. Осы түзулерге $\overrightarrow{AO} = 2\overrightarrow{A_1O}$, $\overrightarrow{BO} = 2\overrightarrow{B_1O}$, $\overrightarrow{CO} = 2\overrightarrow{C_1O}$ болатындай етіп, A_1, B_1 және C_1 нүктелерін белгілеңдер. $A_1B_1C_1$ үшбұрышының қабырғасы мен ауданы *ABC* үшбұрышынан неше есе артық?

11. Гомотетия мен ұқсастық түрлендірулер және олардың қасиеттері

Тақырыпты оқу барысында:
- гомотетияның, ұқсастықтың және ұқсас фигуралардың анықтамаларын білесіңдер;
- гомотетия мен ұқсастықтың қасиеттерін біле және қолдана аласыңдар.

F фигурасын оның әрбір X нүктесі $\overrightarrow{OX_1} = k \cdot \overrightarrow{OX}$, мұндағы O – берілген нүкте, k – нөлге тең емес сан болатын X_1 нүктесіне бейнеленетіндей F_1 фигурасына түрлендіру, центрі – O, коэффициенті k болатын гомотетия деп аталады.

104-суретте осындай түрлендірулердің $k > 0$ (104, *а*-сурет) және $k < 0$ (104, *ә*-сурет) болғандағы мысалдары көрсетілген.



104-сурет

Егер бір фигура екінші фигураға гомотетия түрлендіруі арқылы көшетін болса, оларды *гомотетиялы* фигуралар деп атайды.

Нүктелердің арақашықтығының арасындағы қатынас сақталатын түрлендіруді ұқсастық түрлендіру деп атайды. Яғни, егер осы түрлендіру кезінде кез келген X және Y нүктелері X_1 және Y_1 нүктелеріне бейнеленсе, онда $\dfrac{X_1Y_1}{XY} = k$ болады, мұндағы k – берілген оң сан. k саны *ұқсастық коэффициенті* деп аталады.

Егер бір фигура екінші фигураға ұқсастық түрлендіру арқылы көшетін болса, оларды *ұқсас* фигуралар деп атайды. F_1 фигурасының F_2 *фигурасына ұқсастығы* былай жазылады: $F_1 \sim F_2$. Мысалы, Қазақстанның географиялық картасының әртүрлі үлкейтулер арқылы орындалған суреттері ұқсас фигуралар болады (105-сурет).

а)

ә)

105-сурет

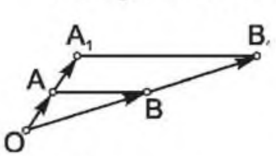
Ұқсастық түрлендірудің анықтамасынан шығатын негізгі қасиеттерін қарастырайық.

1) Егер F_1 фигурасы F_2 фигурасына ұқсас және ұқсастық коэффициенті k болса, онда F_2 фигурасы F_1 фигурасына ұқсас және ұқсастық коэффициенті $\frac{1}{k}$ болады.

2) Егер F_1 фигурасы F_2 фигурасына ұқсас және ұқсастық коэффициенті k_1, ал F_2 фигурасы F_3 фигурасына ұқсас және ұқсастық коэффициенті k_2 болса, онда F_1 фигурасы F_3 фигурасына ұқсас және ұқсастық коэффициенті $k_1 \cdot k_2$ болады.

3) Қозғалыс ұқсастық коэффициенті 1-ге тең болатын ұқсастық түрлендіру болады.

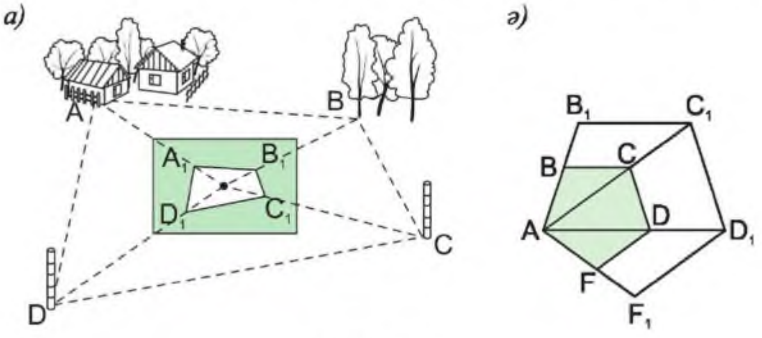
Теорема. **Гомотетия ұқсастық түрлендіру болады.**



106-сурет

Дәлелдеуі. O нүктесі – гомотетия центрі, k – гомотетия коэффициенті, ал A мен B нүктелері A_1 мен B_1 нүктелеріне бейнеленетін болсын (106-сурет). Сонда $\overrightarrow{OA_1} = k \cdot \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB_1} = k \cdot \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OB_1} = k(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB})$. $\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{B_1A_1}$, ал $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$ болғандықтан, $\overrightarrow{B_1A_1} = k \cdot \overrightarrow{BA}$ болады. Демек, $\frac{B_1A_1}{BA} = |k|$, яғни гомотетия нүктелердің арақашықтығының қатынасын сақтайды, ендеше ол ұқсастық түрлендіру болады. Теорема дәлелденді.

Гомотетияның бұл қасиетін ұқсас фигуралар салуға қолданған ыңғайлы. Мысалы, 107, *а*-суретте $ABCD$ төртбұрышын құрайтын жер телімінің жобасы болатын гомотетиялы және ұқсас $A_1B_1C_1D_1$ төртбұрышын салу тәсілі, ал 107, *ә*-суретте бір төбесін гомотетия центрі етіп алып, ұқсас көпбұрыштарды салу әдісі көрсетілген.



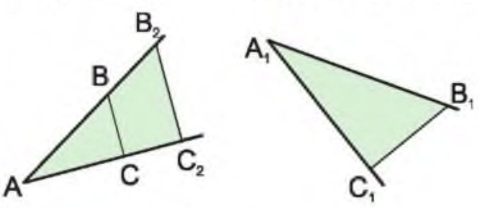
107-сурет

Теореманың дәлелдеуінен шығатыны, гомотетия *өзінің центрі арқылы өтпейтін түзуді оған параллель түзуге бейнелейді.*

Егер екі ұқсас фигура бар болса, онда бір фигураны екіншісіне тең болатын фигураға бейнелейтін гомотетиялы түрлендіруі бар болатынын айта кетелік.

1-есеп. *Ұқсастық түрлендіру бұрышты өзіне тең бұрышқа бейнелейтінін* дәлелдеу керек.

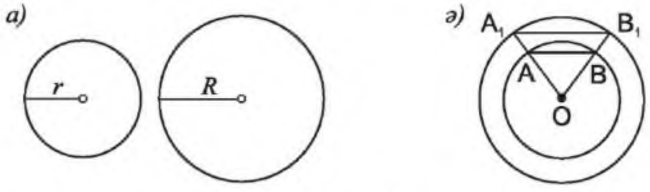
Дәлелдеуі. Ұқсастық коэффициенті k болатын ұқсастық түрлендіру $\angle BAC$-ны $\angle B_1A_1C_1$-ге бейнелейтін болсын (108-сурет). $\angle BAC$-ға центрі A нүктесі, коэффициенті k болатын гомотетия түрлендіруін орындайық. Сонда B мен C нүктелері, сәйкесінше, B_2 мен C_2 нүктелеріне бейнеленетін болсын. Сонда $\Delta B_2AC_2 = \Delta B_1A_1C_1$ (үшбұрыштардың теңдігінің III белгісі бойынша). Демек, $\angle A = \angle A_1$, дәлелдеу керегі де осы еді.



108-сурет

Гомотетия ұқсастық түрлендіру болғандықтан, *ол бұрышты өзіне тең бұрышқа бейнелейді.*

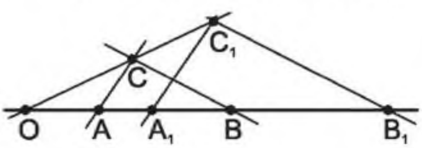
2 - е с е п. Кез келген екі шеңбердің ұқсас болатынын дәлелдейік.



109-сурет

Д ә л е л д е у і. Радиустары r және R болатын екі шеңбер берілген болсын (109, *а*-сурет). Осы шеңберлердің центрлерін беттестірейік (109, *ә*-сурет). Сонда бір шеңбердің кез келген A және B нүктелеріне гомотетиялы, O – гомотетия центрі, $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{R}{r} = k$ гомотетия коэффициенті болатын екінші шеңберге A_1 және B_1 нүктелерін салуға болады. Сондықтан шеңберлер ұқсас болады.

3 - е с е п. Қайсыбір гомотетияда A, B және олардың бейнесі болатын A_1, B_1 нүктелері бір түзуде жатыр. Гомотетия центрін салу керек.



110-сурет

Ш е ш у і. AB түзуінде жатпайтын кез келген C нүктесін белгілейік (110-сурет). Сонда AC және BC түзулері осы гомотетияда, сәйкесінше, оларға параллель болатын A_1C_1 және B_1C_1 нүктелеріне бейнеленеді, ал AB мен CC_1 түзулерінің қиылысу нүктесі O гомотетия центрі болады.

СҰРАҚТАР

1. а) Гомотетияның; ә) ұқсастық түрлендірудің анықтамасын беріңдер.

2. Қандай екі фигура: а) гомотетиялы; ә) ұқсас деп аталады?

3. Гомотетияның ұқсастық түрлендіру болатынын дәлелдеңдер.

4. Гомотетия мен ұқсастық түрлендірудің қандай қасиеттерін білесіңдер?

5. а) Гомотетиялы; ә) ұқсас екі фигураны салу әдісін мысалдар арқылы түсіндіріңдер.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

166. Қабырғалары 7 см, 6 см, 5 см болатын үшбұрыш берілген. Берілген үшбұрышқа гомотетия центрі, оның медианаларының қиылысу нүктесі және гомотетия коэффициенті: а) $\frac{3}{2}$; ә) –0,5 болатын гомотетиялы үшбұрыш салыңдар. Берілген үшбұрыш пен салынған үшбұрыштың сәйкес бұрыштарын салыстырыңдар.

167. Тіктөртбұрыштың қабырғалары 2 см және 3 см. Ұқсастық коэффициенті 2-ге тең болатын оған ұқсас тіктөртбұрыш салып, салынған және берілген тіктөртбұрыштардың аудандарының қатынасын табыңдар.

В деңгейі

168. ABC үшбұрышының C бұрышы тік, $AC = 8$ см, $BC = 6$ см. а) Бір сызбаға ABC үшбұрышына ұқсас, ұқсастық коэффициенттері, сәйкесінше, $\frac{1}{4}$ және $\frac{3}{4}$-ке тең болатын ΔAB_1C_1 мен ΔAB_2C_2 салыңдар. ә) Салынған үшбұрыштардың C_1M_1 және C_2M_2 медианаларының ұзындықтарын табыңдар.

169. $ABCD$ ромбысы берілген, онда $AC = 8$ см, $BD = 6$ см. а) A нүктесі центрі болатын, ұқсастық коэффициенті $\frac{3}{4}$-ке тең гомотетияны пайдаланып, берілген ромбқа ұқсас ромб салыңдар. ә) Салынған ромбтың биіктігін табыңдар.

170. ΔABC-ның AC қабырғасына параллель, ұштары, сәйкесінше, AB және BC қабырғаларында жататын DE кесіндісі жүргізілген. Егер $AB = 16$ см, $BC = 20$ см, $BE = 15$ см болса, AD-ны табыңдар.

С деңгейі

171. Центрі – O, радиусы 2 см болатын шеңбер мен O нүктесінен 3 см қашықтықта жататын түзу берілген. Центрі O, коэффициенті 2-ге тең гомотетияда берілген түзуге тиісті нүктелерге бейнеленетін шеңбердің екі нүктесін табыңдар.

172. Шеңбер берілген және оның екі радиусы жүргізілген. Шеңбердің осы радиустармен тең үш бөлікке бөлінетін хордасын салыңдар.

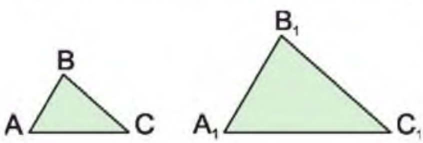
12. Ұқсас үшбұрыштар

Тақырыпты оқу барысында:

• ұқсас үшбұрыштардың анықтамасы мен белгілерін білесіңдер;

• үшбұрыштардың ұқсастық белгілерін есептер шығаруда қолдана аласыңдар.

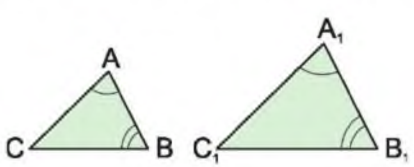
Егер екі үшбұрыштың біреуі екіншісіне ұқсастық түрлендіру арқылы көшетін болса, оларды ұқсас үшбұрыштар деп атайды.



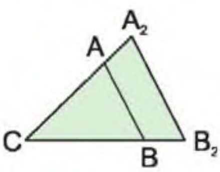
111-сурет

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ жазуы мынаны білдіреді: ұқсастық түрлендіруде үшбұрыштың A төбесі A_1-ге, B – B_1-ге, C – C_1-ге бейнеленеді. Ұқсастық түрлендірудің анықтамасы мен қасиеттерінен шығатыны, ABC және $A_1B_1C_1$ ұқсас үшбұрыштарының (111-сурет) сәйкес бұрыштары тең және сәйкес қабырғалары пропорционал болады, яғни $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$ және $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC} = k$, мұндағы k – үшбұрыштардың *ұқсастық коэффициенті*.

Т е о р е м а (*үшбұрыштардың ұқсастығының бірінші белгісі*). **Егер бір үшбұрыштың екі бұрышы екінші үшбұрыштың екі бұрышына тең болса, ондай үшбұрыштар ұқсас болады.**



112-сурет



113-сурет

Д ә л е л д е у і. ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштарында $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ болсын (112-сурет). $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ болатынын дәлелдейік. Коэффициенті $k = \frac{A_1B_1}{AB}$ және C нүктесі центрі болатын гомотетия арқылы ΔABC-ның бейнесін саламыз (113-сурет).

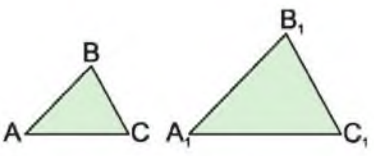
Сонда ΔABC оған ұқсас ΔA_2B_2C-ге бейнеленеді, әрі $\angle A_2 = \angle A$, $\angle B_2 = \angle B$ және $A_2B_2 = k \cdot AB = A_1B_1$ болады. Сонда үшбұрыштардың теңдігінің екінші белгісі бойынша $\Delta A_2B_2C = \Delta A_1B_1C_1$ болады.

Ұқсастық коэффициенті k болатын $\Delta ABC \sim \Delta A_2B_2C$ және ұқсастық коэффициенті 1 болатын $\Delta A_2B_2C \sim \Delta A_1B_1C_1$ алдық. Демек, $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$. Теорема дәлелденді.

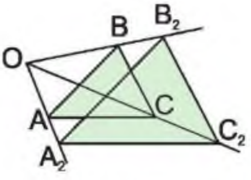
Теорема (*үшбұрыштардың ұқсастығының екінші белгісі*). **Егер бір үшбұрыштың екі қабырғасы екінші үшбұрыштың екі қабырғасына пропорционал және сол қабырғалардың арасындағы бұрыштары тең болса, ондай үшбұрыштар ұқсас болады.** Бұл белгіні өздігінен дәлелдеңдер.

Теорема (*үшбұрыштардың ұқсастығының үшінші белгісі*). **Егер бір үшбұрыштың үш қабырғасы екінші үшбұрыштың үш қабырғасына пропорционал болса, ондай үшбұрыштар ұқсас болады.**

Дәлелдеуі. ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштарында $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC} = k$ болсын (114-сурет). $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ болатынын дәлелдейік.



114-сурет



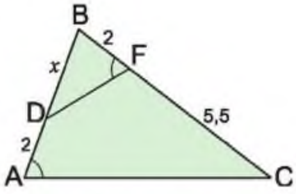
115-сурет

Коэффициенті k және центрі O нүктесі болатын гомотетия арқылы ΔABC-ның бейнесін салайық (115-сурет). Сонда ΔABC оған ұқсас $\Delta A_2B_2C_2$-ге бейнеленеді, әрі $A_2B_2 = k \cdot AB = A_1B_1$, $A_2C_2 = k \cdot AC = A_1C_1$, $C_2B_2 = k \cdot CB = C_1B_1$ болады. Сонда үшбұрыштардың теңдігінің үшінші белгісі бойынша $\Delta A_2B_2C_2 = \Delta A_1B_1C_1$ болады.

Ұқсастық коэффициенті k болатын $\Delta ABC \sim \Delta A_2B_2C_2$ және ұқсастық коэффициенті 1 болатын $\Delta A_2B_2C_2 \sim \Delta A_1B_1C_1$ алдық. Демек, $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$. Теорема дәлелденді.

Үшбұрыштардың ұқсастық белгілерінен мынаны аламыз: **егер екі тікбұрышты үшбұрыштың: бір-бірден сүйір бұрыштары тең болса;** немесе **олардың катеттері пропорционал болса;** немесе **бір үшбұрыштың гипотенузасы мен катеті екінші үшбұрыштың гипотенузасы мен катетіне пропорционал болса, ондай тікбұрышты үшбұрыштар ұқсас болады.**

Ұқсас үшбұрыштардың сәйкес биіктіктерінің, медианалары мен биссектрисаларының, осы үшбұрыштарға іштей сызылған шеңбер радиустарының және сырттай сызылған шеңбер радиустарының қатынасы ұқсастық коэффициентіне тең болады (мұны өздігінен дәлелдеңдер). Үшбұрыштардың ұқсастығын пайдаланып, 8-сыныпта өтілген үшбұрыштың биссектрисасының қасиетін өздігінен дәлелдеңдер.



116-сурет

1 - е с е п. ABC үшбұрышының AB және BC қабырғаларына $\angle BFD = \angle BAC$ болатындай, сәйкесінше, D және F нүктелері белгіленген (116-сурет). Егер $AD = BF = 2$ см, $FC = 5{,}5$ см болса, BD кесіндісінің ұзындығын табу керек.

Ш е ш у і. 1) $\Delta BFD \sim \Delta BAC$, себебі оларда екі тең бұрыш бар: $\angle B$ – ортақ, $\angle BFD = \angle BAC$.

2) Ұқсас үшбұрыштардың сәйкес қабырғалары тең бұрыштарға қарсы жатады, сондықтан $\dfrac{BD}{BC} = \dfrac{BF}{AB}$.

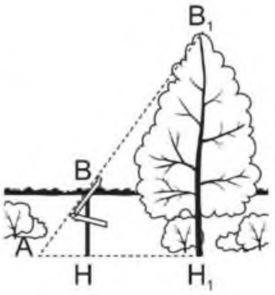
3) $BD = x$ см болсын, сонда $\dfrac{x}{7{,}5} = \dfrac{2}{2+x}$ болады. $x^2 + 2x - 15 = 0$ теңдеуін шешіп, мынаны аламыз: $x_1 = -5$, $x_2 = 3$. Демек, $BD = 3$ см.

Ж а у а б ы. 3 см.

2 - е с е п. Үшбұрыштардың ұқсастығын пайдаланып, ағаштың B_1H_1 биіктігін өлшеу тәсілін табу керек (117-сурет).

Ш е ш у і. Қада алып, оны жерге тігінен қойып, жоғарғы ұшына қозғалмалы таяқша бекітеміз. Таяқшаның бір ұшын ағаштың төбесіне бағыттаймыз (екінші ұшы жер бетіне бағытталады). A, H және H_1 нүктелері бір түзудің бойында жатуы керек. Сонда тікбұрышты

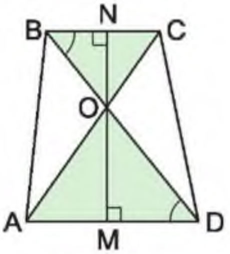
ABH және AB_1H_1 үшбұрыштары ұқсас болады, себебі A сүйір бұрышы ортақ (117-сурет). Сондықтан $\frac{B_1H_1}{BH} = \frac{AH_1}{AH}$, бұдан ағаштың биіктігі болатын $B_1H_1 = \frac{AH_1 \cdot BH}{AH}$ болады.



117-сурет

3 - е с е п. Трапецияның табандары 6 см және 9 см, ал биіктігі 10 см. Трапецияның диагональдарының қиылысу нүктесінен оның табандарына дейінгі қашықтықты табу керек.

Ш е ш у і. $ABCD$ трапециясының табандары $AD = 9$ см, $BC = 6$ см, O – диагональдарының қиылысу нүктесі, биіктігі $NM = 10$ см болсын (118-сурет). ON мен OM-ді табайық.

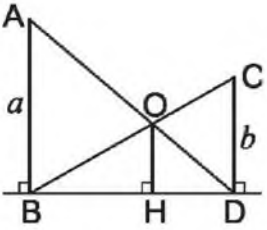


118-сурет

$\angle BOC = \angle DOA$ – вертикаль бұрыштар, $\angle CBO = \angle ODA$ – айқыш бұрыштар ($AD \parallel BC$, BD – қиюшы), ендеше $\Delta BOC \sim \Delta DOA$, ұқсастық коэффициенті $k = \frac{AD}{BC} = \frac{3}{2}$ болады. Ұқсас үшбұрыштардың сәйкес биіктіктерінің қатынасы ұқсастық коэффициентіне тең болады. Сондықтан $\frac{OM}{ON} = \frac{3}{2}$, яғни $\frac{OM}{10 - OM} = \frac{3}{2}$. Бұдан $OM = 6$ см, сонда $ON = 4$ см болатыны шығады.

Ж а у а б ы. 4 см және 6 см.

4 - е с е п. Өзара тең емес $AB = a$ және $CD = b$ кесінділері BD кесіндісіне перпендикуляр. AD және BC кесінділерінің қиылысу нүктесі O-дан BD кесіндісіне дейінгі қашықтықты табу керек.



119-сурет

Ш е ш у і. Ізделінді қашықтық BD түзуіне перпендикуляр болатын OH кесіндісінің ұзындығына тең (119-сурет). $OH \parallel AB$ және $OH \parallel CD$ болғандықтан, $\Delta ABD \sim \Delta OHD$, ал $\Delta CDB \sim \Delta OHB$ болады. Демек, $\frac{OH}{AB} = \frac{HD}{BD}$ және $\frac{OH}{CD} = \frac{BH}{BD}$. Осы теңдіктердің сол жақтары мен оң жақтарын мүшелеп қосып, мынаны аламыз: $\frac{OH}{AB} + \frac{OH}{CD} = \frac{BH + HD}{BD}$. $OH = x$ деп белгілейік, сонда $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1$, бұдан $x = \frac{ab}{a+b}$ болады.

Жауабы. $\frac{ab}{a+b}$.

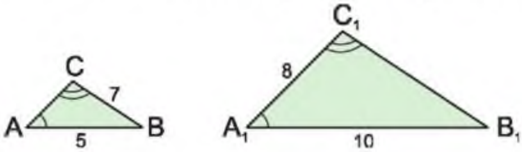
СҰРАҚТАР

1. Қандай екі үшбұрыш ұқсас деп аталады?
2. Екі үшбұрыштың ұқсастық белгілерін тұжырымдап, дәлелдеңдер.
3. Екі тікбұрышты үшбұрыштың ұқсастығының қандай белгілерін білесіңдер?

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

173. Егер: а) бір үшбұрыштың екі бұрышы 60° және 70°, ал екіншісінің екі бұрышы – 50° және 80°; ә) бір үшбұрыштың екі бұрышы 108° және 20°, ал екіншісінің екі бұрышы 52° және 20° болса, ондай екі үшбұрыш ұқсас бола ма?

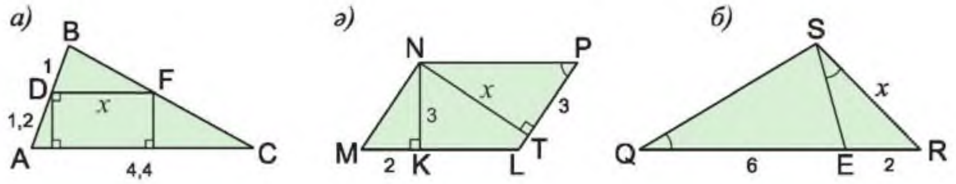


120-сурет

174. Берілгені: ΔABC және $\Delta A_1B_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$, $AB = 5$ см, $BC = 7$ см, $A_1B_1 = 10$ см, $A_1C_1 = 8$ см (120-сурет). Үшбұрыштардың қалған қабырғаларын табыңдар.

175. а) Екі теңқабырғалы үшбұрыштың ұқсас болатынын дәлелдеңдер. ә) Қабырғасы 6 см болатын теңқабырғалы ABC үшбұрышын салыңдар. Ұқсастық коэффициенті $k = \frac{2}{3}$, $\Delta ABC \sim \Delta MNC$ болатындай етіп MN түзуін және ұқсастық коэффициенті $k = \frac{1}{3}$, $\Delta ABC \sim \Delta M_1N_1C$ болатындай M_1N_1 түзуін жүргізіңдер. MNC мен M_1N_1C үшбұрыштары ұқсас бола ма? Егер ұқсас болса, онда ұқсастық коэффициентін табыңдар.

176. 121, *а*, *ә*, *б*-суреттердегі берілгендері бойынша *x*-ті табыңдар.



121-сурет

В деңгейі

177. Екі теңбүйірлі үшбұрыштың бүйір қабырғаларының арасындағы бұрыштары тең. Бір үшбұрыштың бүйір қабырғасы мен табаны 36 см және 24 см; екіншісінің табаны 16 см. Оның бүйір қабырғасын табыңдар.

178. а) *ABCD* трапециясының *AC* және *BD* диагональдары *O* нүктесінде қиылысады. Егер трапецияның орта сызығы 24 см, ал $AO : CO = 3 : 1$ болса, оның табандарын табыңдар.

ә) *ABCD* трапециясының 6 м-ге тең *AC* диагоналі оны екі ұқсас үшбұрышқа бөледі. Трапецияның үлкен табаны 12 м-ге тең болса, оның кіші табаны *BC*-ны табыңдар.

179. Ағаштың көлеңкесі 10,2 м-ге, ал сол уақытта бойы 1,7 м-ге тең кісінің көлеңкесі 2 м-ге тең. Ағаштың биіктігін табыңдар.

180. Сүйірбұрышты *ABC* үшбұрышының AA_1 және BB_1 биіктіктері жүргізілген, $AB_1 = B_1C = 5$ см, $AA_1 = 8$ см. $\Delta AA_1C \sim \Delta BB_1C$ болатынын дәлелдеңдер және *ABC* үшбұрышының ауданын табыңдар.

181. Катеттері 12 см және 6 см болатын тікбұрышты *ABC* үшбұрышына іштей *C* тік бұрышы ортақ болатын *CDNK* шаршысы сызылған, *N* нүктесі гипотенузада жатыр. Шаршының периметрін табыңдар.

182. Қабырғалары *AB* = 15 см, *AC* = 10 см болатын *ABC* үшбұрышына іштей *M*, *N* және *K* нүктелері, сәйкесінше, *AB*, *BC* және *AC* қабырғаларында жататын *AMNK* ромбысы сызылған. Ромбтың қабырғасын табыңдар.

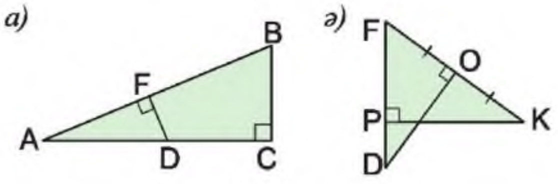
183. ABC үшбұрышында $AB = 15$ см, $AC = 20$ см. AB қабырғасына $MA = 8$ см кесінді, ал AC қабырғасына $AN = 6$ см кесінді салынған. ABC мен ANM үшбұрыштары ұқсас бола ма? Жауабын түсіндіріңдер.

184. ABC және MNK үшбұрыштарында $\angle B = \angle N$, $\dfrac{AB}{MN} = \dfrac{BC}{NK} = \dfrac{2}{3}$. Егер $AC + MK = 20$ см болса, AC мен MK-ны табыңдар.

185. Егер $AB = \dfrac{5}{4}$ м, $AC = \dfrac{3}{4}$ м, $BC = \dfrac{4}{5}$ м, $A_1B_1 = 5$ см, $A_1C_1 = 3$ см, $B_1C_1 = 3{,}2$ см болса, ABC мен $A_1B_1C_1$ үшбұрыштары ұқсас бола ма? Жауабын түсіндіріңдер.

186. Қазақстанның Ақтөбе, Петропавл, Қызылорда қалалары масштабы 1 : 10 000 000 болатын картада периметрі 36,4 см APK үшбұрышын құрайды. Егер AP қашықтығы PK қашықтығынан 160 км-ге, ал AK-дан 150 км-ге артық екені белгілі болса, осы қалалардың нақты арақашықтығын табыңдар.

187. Егер: а) $AF = 6$ м, $FB = 10$ м, $AC = 12$ м;
ә) $FK = 5$ дм, $PK = 4$ дм болса, 122-суреттегі берілгендері бойынша DF-ті табыңдар.



122-сурет

C деңгейі

188. Төбелерінің координаталары:
а) $A(3; 2)$, $B(1; 3)$, $C(3; 6)$, $A_1(3; -2)$, $B_1(1; -3)$, $C_1(3; -6)$;
ә) $A(1; -3)$, $B(5; -1)$, $C(1; 5)$, $A_1(-2; 1)$, $B_1(-4; 2)$, $C_1(-2; 5)$ болатын ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштарын салыңдар. Осы үшбұрыштар ұқсас бола ма? Жауабын түсіндіріңдер.

189. Ұқсас үшбұрыштардың сәйкес қабырғалары a және a_1, оларға жүргізілген биіктіктер, сәйкесінше, h және h_1 болсын.

$h + h_1 = 3{,}6$ см, $a_1 = 3{,}2$ см және $\frac{a_1}{a} = 2$ екені белгілі болса, осы үшбұрыштардың аудандарын табыңдар.

190. Тікбұрышты ΔABC-ның C тік бұрышынан CD биіктігі жүргізілген және ACD мен BCD үшбұрыштарына іштей радиустары, сәйкесінше, r_1 және r_2 болатын шеңберлер сызылған. Егер $r_2 = 2$ см, $BD = 5$ см, $CD = 12$ см болса, r_1-ді табыңдар.

ПРАКТИКАЛЫҚ ТАПСЫРМА

Теңбүйірлі трапеция салыңдар. Оның табандарына параллель және биіктігін 2 : 1 қатынасында бөлетін түзу жүргізіңдер. Сонда шыққан екі трапеция ұқсас па? Олардың бүйір қабырғаларының қатынасы неге тең?

13. Ұқсас көпбұрыштар

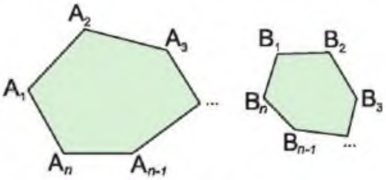
Тақырыпты оқу барысында:

• ұқсас көпбұрыштардың анықтамасын және олардың қасиеттерін білесіңдер;

• екі ұқсас көпбұрыштың аудандарының қатынасы туралы формуланы білесіңдер;

• үшбұрыштың биссектрисасы мен ұқсас көпбұрыштардың қасиеттерін есеп шығаруда қолдануды білетін боласыңдар.

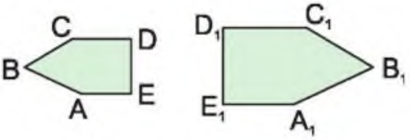
Ұқсастық түрлендірудің анықтамасы мен қасиеттерінен шығатыны, егер **екі n-бұрыш ұқсас болса, онда бір көпбұрыштың бұрыштары екінші көпбұрыштың сәйкес бұрыштарына тең және сәйкес тең бұрыштары бар қабырғалары пропорционал болады.**



123-сурет

Мысалы, егер екі n-бұрыш (123-сурет) $A_1A_2 \ldots A_{(n-1)}A_n$ және $B_1B_2 \ldots B_{(n-1)}B_n$ ұқсас болса, онда оларда $\angle A_1 = \angle B_1$, $\angle A_2 = \angle B_2$, ..., $\angle A_n = \angle B_n$ және $\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \ldots \frac{A_{n-1}A_n}{B_{n-1}B_n} = k$ болады, мұндағы k – ұқсастық коэффициенті.

Т е о р е м а. **Екі ұқсас көпбұрыштың периметрлерінің қатынасы сол көпбұрыштардың ұқсастық коэффициентіне тең болады.**



124-сурет

Д ә л е л д е у і. Мысалы, ұқсас бесбұрыштар берілген болсын (124-сурет). Сонда $A_1B_1 = k \cdot AB$, $B_1C_1 = k \cdot BC$, ..., $E_1A_1 = k \cdot EA$. Осы теңдіктердің сол жақтары мен оң жақтарын мүшелеп қосып, мынаны аламыз: $P = k \cdot P_1$, мұндағы P мен P_1 осы көпбұрыштардың периметрлері, k – ұқсастық коэффициенті. Теорема дәлелденді. Осы теорема кез келген дөңес n-бұрыш үшін де дәл осылай дәлелденеді.

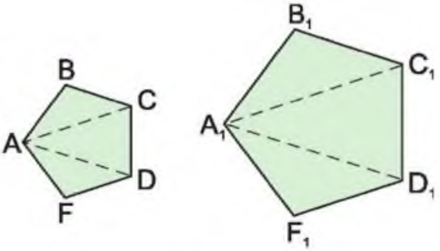
Т е о р е м а. **Екі ұқсас көпбұрыштың аудандарының қатынасы осы көпбұрыштардың ұқсастық коэффициентінің квадратына тең болады.**

Д ә л е л д е у і. Алдымен ұқсас үшбұрыштарды қарастырайық.

Егер $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ (125-сурет), онда $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$ және $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC} = k$ болады.

125-сурет

Осы үшбұрыштардың B және B_1 төбелерінен биіктіктер жүргізіп, h және h_1 деп белгілейміз, $\frac{h_1}{h} = k$. Сонда $\frac{S_{\Delta A_1B_1C_1}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{0,5 \cdot A_1C_1 \cdot h_1}{0,5 \cdot AC \cdot h} = \frac{A_1C_1}{AC} \cdot \frac{h_1}{h} = k^2$ болады.

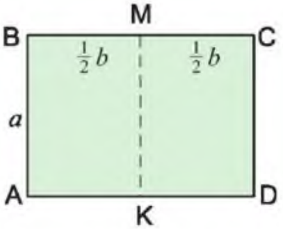


126-сурет

Енді кез келген екі ұқсас $ABCDF$ және $A_1B_1C_1D_1F_1$ бесбұрыштарын қарастырайық, олардың ұқсастық коэффициенті k болсын (126-сурет). Осы көпбұрыштарды 126-суретте көрсетілгендей үшбұрыштарға бөліп, мынаны аламыз: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, $\Delta ACD \sim \Delta A_1C_1D_1$, $\Delta ADF \sim \Delta A_1D_1F_1$. Сонда $S_{\Delta A_1B_1C_1} = k^2 \cdot S_{\Delta ABC}$, $S_{\Delta A_1C_1D_1} = k^2 \cdot S_{\Delta ACD}$, $S_{\Delta A_1D_1F_1} = k^2 \cdot S_{\Delta ADF}$. Осы теңдіктердің сол жақтары мен оң жақтарын мүшелеп қосып, мынаны аламыз: $S_{A_1B_1C_1D_1F_1} = k^2 \cdot S_{ABCDF}$. Демек, $\frac{S_{A_1B_1C_1D_1F_1}}{S_{ABCDF}} = k^2$. Теорема дәлелденді.

Осы теорема кез келген дөңес n-бұрыш үшін де дәл осылай дәлелденеді.

1 - е с е п. Тікбұрышты парақ қағазды тең екіге бүктеген. Қандай шарт орындалғанда осы парақ пен оның жартысы ұқсас болады?



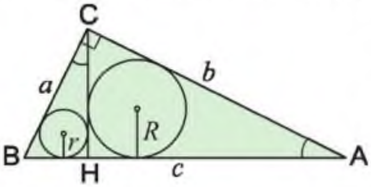
127-сурет

Ш е ш у і. Парақ қағаз $ABCD$ тіктөртбұрышы болсын. $AB = a$, $AD = b$, MK түзуі оның симметрия осі болсын (127-сурет). Егер $\frac{AB}{AD} = \frac{BM}{AB}$ болса, $ABMK$ және $ABCD$ тіктөртбұрыштары ұқсас болады. $BM = \frac{b}{2}$ болғандықтан, $\frac{a}{b} = \frac{b}{2a}$, сонда $2a^2 = b^2$, $\frac{b^2}{a^2} = 2$, $\frac{b}{a} = \sqrt{2}$ болады.

Ж а у а б ы. Тікбұрышты парақ қағаздың көршілес қабырғаларының қатынасы $\sqrt{2} \approx 1{,}414$ шарты орындалған жағдайда ғана ұқсас болады.

A4 пішімдегі парақ қағаздың ұзындығы мен енінің қатынасы дәл осындай екенін айта кетелік, яғни (297 × 210 мм), $\frac{297}{210} \approx 1{,}414$.

2 - е с е п. Тікбұрышты ABC үшбұрышының C тік бұрышының төбесінен CH биіктігі жүргізілген. ACH және BCH үшбұрыштарына іштей сызылған шеңберлердің радиустары, сәйкесінше, R және r. ABC үшбұрышына іштей сызылған шеңбердің радиусын табу керек.

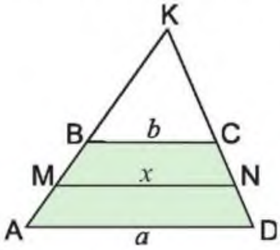


128-сурет

Ш е ш у і. Ізделінді радиусты x деп белгілейік, $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ (128-сурет). Ортақ сүйір бұрыштары болатын ACH және ABC, CBH және ABC тікбұрышты үшбұрыштары ұқсас болғандықтан, $\frac{x}{R} = \frac{c}{b}$ және $\frac{x}{r} = \frac{c}{a}$ болады. Бұдан $b = \frac{R \cdot c}{x}$, $a = \frac{r \cdot c}{x}$. Пифагор теоремасы бойынша $c^2 = \left(\frac{R \cdot c}{x}\right)^2 + \left(\frac{r \cdot c}{x}\right)^2$. Бұдан $1 = \frac{R^2 + r^2}{x^2}$, сонда $x = \sqrt{R^2 + r^2}$ болады.

Ж а у а б ы. $\sqrt{R^2 + r^2}$.

3 - е с е п. Табандары $AD = a$, $BC = b$ ($a > b$) болатын $ABCD$ трапециясы берілген. Ұштары трапецияның бүйір қабырғаларында жататын және табандарына параллель болатын, трапецияны тең шамалы екі бөлікке бөлетін кесінді салу керек.



129-сурет

Ш е ш у і. *Талдау.* $MN = x$ – ізделінді кесінді, ал трапецияның бүйір қабырғалары жататын түзулер K нүктесінде қиылысатын болсын (129-сурет). Есептің шарты бойынша $MBCN$ және $AMND$ трапецияларының аудандары тең, $S_{MBCN} = S_{AMND} = S$, $S_{\Delta BKC} = Q$ деп белгілейік. $\Delta MKN \sim \Delta BKC$ болғандықтан, $\frac{S + Q}{Q} = \frac{x^2}{b^2}$ болады. $\Delta AKD \sim \Delta BKC$ болғандықтан, $\dfrac{2S+Q}{Q}=\dfrac{a^2}{b^2}$ болады. Осы пропорциялардан мынаны аламыз: $\dfrac{S}{Q}+1=\dfrac{x^2}{b^2}$, $\dfrac{2S}{Q}+1=\dfrac{a^2}{b^2}$. Теңдіктердің әрқайсысынан $\dfrac{S}{Q}$-ді табайық: $\dfrac{S}{Q}=\dfrac{x^2}{b^2}-1$, $\dfrac{S}{Q}=\dfrac{a^2}{2b^2}-\dfrac{1}{2}$. Сонда $\dfrac{x^2}{b^2}-1=\dfrac{a^2}{2b^2}-\dfrac{1}{2}$, бұдан $x^2=\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{b^2}{2}$, $x=\sqrt{\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\dfrac{b}{\sqrt{2}}\right)^2}$ болады.

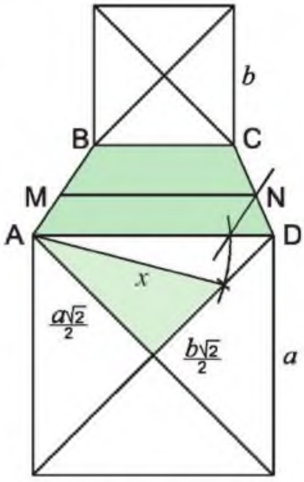
x кесіндісі катеттері $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ және $\dfrac{b\sqrt{2}}{2}$ болатын тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасына тең болады. Бұл катеттері, сәйкесінше, қабырғалары a және b болатын шаршылардың диагональдарының жартысына тең болады.

Салу. 1) Қабырғалары a және b болатын шаршылар салып, олардың диагональдарын жүргіземіз (130-сурет).

2) Катеттері $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ және $\dfrac{b\sqrt{2}}{2}$ болатын тікбұрышты үшбұрыш саламыз.

3) Трапецияның AD қабырғасына A нүктесінен бастап осы тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасына тең болатын x кесіндісін салып, оның ұшынан трапецияның AB қабырғасына параллель түзу жүргіземіз.

4) Оның CD қабырғасымен қиылысу нүктесін N деп белгілеп, сол нүктеден AD табанына параллель түзу жүргізіп, оның AB қабырғасымен қиылысу нүктесін M деп белгілейміз. MN ізделінді кесінді болады.



130-сурет

СҰРАҚТАР

1. Қандай екі n-бұрыш ұқсас деп аталады?

2. а) Ұқсас көпбұрыштардың периметрлерінің қатынасы туралы; ә) ұқсас көпбұрыштардың аудандарының қатынасы туралы теоремаларды тұжырымдап, дәлелдеңдер.

ЖАТТЫҒУЛАР

A деңгейі

191. Қабырғалары a және b, ал $\frac{a}{b} = \frac{2}{5}$ болатын екі шаршы берілген. Олардың: а) периметрлерінің; ә) аудандарының қатынасын табыңдар.

192. а) Ұқсас екі көпбұрыштың ең қысқа қабырғалары 35 см және 21 см, ал олардың периметрлерінің айырымы 40 см. Осы көпбұрыштардың әрқайсысының периметрін табыңдар. ә) Бір көпбұрыштың периметрі оған ұқсас көпбұрыштың периметрінің $\frac{11}{13}$ бөлігін құрайды. Осы көпбұрыштардың сәйкес қабырғаларының айырымы 4 см-ге тең. Сол қабырғаларды табыңдар.

193. а) Қабырғалары әртүрлі үшбұрыштың биссектрисасы оны екі ұқсас үшбұрышқа бөле ме?

ә) ΔABC-ның AL биссектрисасы BC қабырғасын BL = 2,1 см, LC = 8,4 см кесінділерге бөледі. $AC : AB$ қатынасын табыңдар.

б) Үшбұрыштың қабырғалары 4,8 м, 1,6 м және 6 м. Периметрі 15,5 м болатын оған ұқсас үшбұрыштың қабырғаларын табыңдар.

B деңгейі

194. Екі ұқсас көпбұрыштың сәйкес қабырғаларының қатынасы: а) 4; ә) 0,2. Егер екінші көпбұрыштың ауданы $8\sqrt{3}$ см^2 болса, біріншісінің ауданын табыңдар.

195. Екі ұқсас көпбұрыштың аудандарының қатынасы: а) 36; ә) 0,09. Осы көпбұрыштардың сәйкес қабырғаларының қатынасы неге тең?

196. а) Ауданы, қабырғасы 10 см-ге тең болатын теңқабырғалы үшбұрыштың ауданынан 2 есе артық болатын теңқабырғалы үшбұрыштың периметрін табыңдар.

ә) Егер Бейбітшілік пен Келісім сарайы (131-сурет) табаны 62 м және бүйір қабырғасы $31\sqrt{6}$ м болатын теңбүйірлі үшбұрыш болса, ғимараттың жоғарғы бөлігінің (көк түспен ерекшеленген) бүйір жағының ауданы мен периметрін табыңдар.

131-сурет

197. ABC үшбұрышының ауданы 36 см^2. BD медианасынан алынған O нүктесі арқылы AC қабырғасына параллель MN ($M \in AB$, $N \in BC$) түзуі жүргізілген. Егер: а) O – BD медианасының ортасы; ә) O – ABC үшбұрышының медианаларының қиылысу нүктесі болса, MBN үшбұрышының ауданын табыңдар.

198. а) ΔABC-да $AB : BC = 4 : 5$, BK кесіндісі – биссектрисасы, ΔABK ауданының ΔCBK ауданына қатынасын табыңдар.

ә) Үшбұрыштың табанына параллель түзу оны төбесінен бастап есептегенде аудандарының қатынасы $4 : 5$ болатын екі бөлікке бөледі. Ол түзу үшбұрыштың бүйір қабырғаларын қандай қатынаста бөледі?

С деңгейі

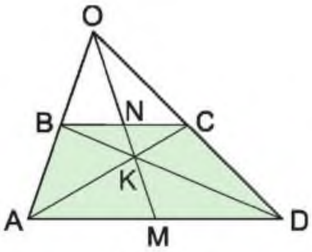
199. Бір шаршының қабырғасы екінші шаршының қабырғасының $\frac{1}{3}$ бөлігін құрайды. а) Екінші шаршының ауданы бірінші шаршының ауданынан неше пайызға артық; ә) бірінші шаршының ауданы екінші шаршының ауданынан неше пайызға кем?

200. Табандары $AD = a$, $BC = b$ $(a > b)$ болатын $ABCD$ трапециясы берілген. Трапецияның табандарына параллель болатын, ұштары оның бүйір қабырғаларында жататын және оны екі ұқсас трапецияға бөлетін кесінді салыңдар.

14. Гомотетия мен ұқсастық түрлендіруді есептер шығаруда қолдану

Тақырыпты оқу барысында:

• гомотетия мен ұқсастықты есептер шығаруда қолдануды білетін боласыңдар.



132-сурет

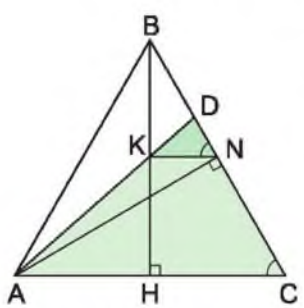
1 - е с е п. $ABCD$ трапециясының BC және AD табандарының орталары болатын N және M нүктелері мен оның диагональдарының қиылысу нүктесі – K және бүйір қабырғаларын қамтитын түзулердің қиылысу нүктесі – O, бәрі бір түзуде жататынын дәлелдеу керек.

Д ә л е л д е у і. Центрі O болатын гомотетияда BC кесіндісі AD кесіндісіне бейнеленетін болсын, сонда оның ортасы болатын N нүктесі M нүктесіне бейнеленеді (132-сурет). Демек, O, M және N нүктелері бір түзуде жатады.

Центрі K нүктесі болатын гомотетияда BC кесіндісі AD кесіндісіне бейнеленетін болсын, сонда N нүктесі M нүктесіне бейнеленеді. Демек, K, M және N нүктелері бір түзуде жатады.

M және N екі нүктесі арқылы тек бір ғана түзу жүргізуге болатындықтан, M, N, K және O нүктелерінің барлығы бір түзудің бойында жатады, дәлелдеу керегі де осы еді.

2 - е с е п. Теңқабырғалы ABC үшбұрышының қабырғасы 3 см-ге тең, BH – биіктігі, K нүктесі – оның ортасы, AK сәулесі BC қабырғасын D нүктесінде қияды. AD кесіндісінің ұзындығын табу керек.



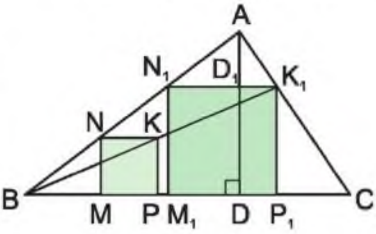
133-сурет

Ш е ш у і. ABC үшбұрышының AN биіктігін жүргізейік (133-сурет), $AN = 3 \cdot \sin 60° = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ (см). Тікбұрышты AND үшбұрышынан $AD = \sqrt{AN^2 + DN^2}$ болады. DN-ді табайық. Ол үшін KN кесіндісін жүргізейік, ол HC-ға параллель және BCH үшбұрышының орта сызығы болғандықтан, ұзындығы $\frac{1}{2}HC$ болады. $\Delta ADC \sim \Delta KDN$, себебі оларда D – ортақ бұрыш, ал AC және KN параллель түзулері мен BC қиюшысынан пайда болған ACD мен KND сәйкес бұрыштары тең. Демек, $\frac{DN + NC}{DN} = \frac{AC}{KN} = 4$, сонда $4DN = DN + NC$. Бұдан $DN = \frac{1}{3}NC = = \frac{1}{2}$ (см). Сонда $AD = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{7}$ (см).

Жауабы. $\sqrt{7}$ см.

3-есеп. ABC үшбұрышына іштей екі төбесі BC қабырғасында, ал қалған екі төбесі AB мен AC қабырғаларында жататын шаршы сызылған. Егер $BC = a$, ал биіктігі $AD = h$ болса, шаршының қабырғасын табу керек.

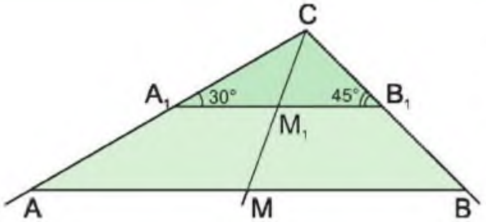
Шешуі. Үшбұрыштың ішіне M және P төбелері BC қабырғасында, N – AB қабырғасында, ал K үшбұрыштың ішінде жататындай $MNKP$ шаршысын саламыз (134-сурет). Сонан соң B нүктесі гомотетия центрі болатын, $MNKP$ шаршысына гомотетиялы және K_1 төбесі AC қабырғасында жататын ізделінді $M_1N_1K_1P_1$ шаршысын саламыз.



134-сурет

Осы шаршының қабырғасының ұзындығын табайық. $\Delta AN_1K_1 \sim \Delta ABC$, себебі оларда $\angle A$ – ортақ, ал BC және N_1K_1 параллель түзулері мен AC қиюшысынан пайда болған сәйкес бұрыштар болғандықтан, $\angle C = \angle N_1K_1A$. AD мен AD_1 – осы үшбұрыштардың сәйкес биіктіктері. Сондықтан, $\frac{AD_1}{AD} = \frac{N_1K_1}{BC}$. $D_1D = N_1K_1 = x$ деп белгілейік. Сонда $\frac{h - x}{h} = \frac{x}{a}$, бұдан $ha - xa = xh$, $x = \frac{ah}{a + h}$ болады.

Жауабы. $\frac{ah}{a + h}$.



135-сурет

4 - е с е п. Берілген екі бұрышы: $\angle A = 30°$, $\angle B = 45°$ және медианасы $CM = 2{,}3$ см бойынша ABC үшбұрышын салу керек.

С а л у ы.

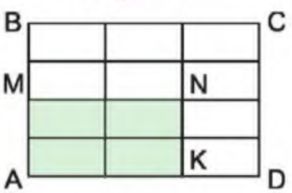
1) $\Delta A_1B_1C \sim \Delta ABC$ (135-сурет) саламыз, мұндағы A_1B_1 – кез келген кесінді, $\angle A_1 = 30°$, $\angle B_1 = 45°$.

2) CM_1 медианасын жүргізіп, CM_1 сәулесіне $CM = 2{,}3$ см кесінді саламыз.

3) M нүктесі арқылы ұштары C бұрышының қабырғаларында жататын $AB \parallel A_1B_1$ кесіндісін жүргіземіз. ABC ізделінді үшбұрыш болады, себебі ол есептің барлық шарттарын қанағаттандырады.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі



136-сурет

201. $ABCD$ тіктөртбұрышы 136-суретте көрсетілгендей тіктөртбұрыштарға бөлінген. $ABCD$ мен $AMNK$ тіктөртбұрыштары ұқсас па? Жауабын түсіндіріңдер.

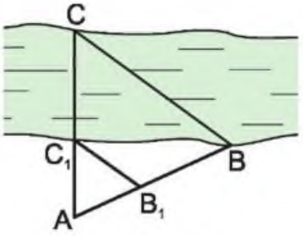
202. Масштабы 1 : 10 000 болатын сызбада мал жайылымының периметрі 12 см. Осы жерді екі қатар етіп қоршау үшін қанша метр сым қажет болады?

В деңгейі

203. A нүктесінен баруы қиын B нүктесіне дейінгі қашықтықты анықтау үшін жақын жерден C нүктесін белгілеп, AC кесіндісінің ұзындығы мен BAC және BCA бұрыштарын өлшеген. Содан кейін қағазға ΔABC-ға ұқсас $A_1C_1 = 3$ см, $A_1B_1 = 15$ см болатын $\Delta A_1B_1C_1$ салған. Егер $AC = 21$ м болса, AB қашықтығын табыңдар.

204. а) 137-суретте ABC және AB_1C_1 ұқсас үшбұрыштарын қарастыра отырып, өзеннің CC_1 енін қалай өлшеуге болатыны көрсетілген. Егер $AB = 25$ м, $AB_1 = 2$ м, $AC_1 = 3$ м болса, CC_1-ді табыңдар.

ә) ΔABC мен оның BD биссектрисасын салыңдар. AB сәулесі мен оны M нүктесінде қиятын және BD-ға параллель болатын CM түзуін жүргізіңдер. 1) $\frac{AB}{AD}$ мен $\frac{BC}{DC}$; 2) $\frac{AB + BC}{AB}$ мен $\frac{MC}{BD}$ қатынастарын салыстырыңдар.



137-сурет

205. $ABCD$ параллелограмының AB қабырғасына $AM : MB = 1 : 2$ болатындай M нүктесі белгіленген. Егер $AC = 16$ см болса, AC диагоналінің MD кесіндісімен бөлінетін кесінділерін табыңдар.

206. ABC үшбұрышына M, N, P нүктелері, сәйкесінше, AB, BC, AC қабырғаларында жататындай $AMNP$ параллелограмы іштей сызылған. $AB = 6$ см, $AC = 8$ см және $MN : NP = 2 : 1$ екені белгілі болса, параллелограмның периметрін табыңдар.

С деңгейі

207. Ромбқа іштей төбелері ромбтың қабырғаларында жататын шаршы салынған. Егер ромбтың қабырғасы 8 см, ал сүйір бұрышы 60° болса, шаршының периметрін табыңдар.

208. $ABCD$ трапециясының бүйір қабырғаларының созындылары K нүктесінде қиылысады және $KC : CD = 1 : 3$. $AB = 4{,}5$ см, $CD = 6$ см, $AD = 10$ см және BKC үшбұрышының KN биіктігі 1,2 см-ге тең болса: а) BKC үшбұрышының қабырғаларын; ә) $ABCD$ трапециясының биіктігін табыңдар.

15. «Жазықтықтағы түрлендірулер» бөлімін қайталауға арналған жаттығулар

А деңгейі

209. Табаны 4,8 см, ал бүйір қабырғасы 4 см болатын теңбүйірлі үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің радиусын табыңдар.

210. Бүйір қабырғасы 10 см, ал табаны 6 см болатын теңбүйірлі үшбұрышқа іштей шеңбер сызылған. Оның бүйір қабырғалармен жанасатын нүктелерінің арақашықтығын табыңдар.

211. Тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасы 36 см-ге тең, ал катеттерінің біреуі – 12 см. Екінші катетінің гипотенузаға түскен проекциясын табыңдар.

В деңгейі

212. Үшбұрыштың бір қабырғасы 16 см. Сол қабырғаға параллель түзу үшбұрышты екі тең шамалы көпбұрышқа бөледі. Осы түзудің үшбұрыштың басқа екі қабырғасының арасында орналасқан кесіндісінің ұзындығын табыңдар.

213. Табаны AC болатын теңбүйірлі ABC үшбұрышының BD медианасы және BC-ға перпендикуляр DE кесіндісі жүргізілген. $BD : DE = 3 : 2$ және DEC үшбұрышының ауданы 20 см^2 екені белгілі болса, ABC үшбұрышының ауданын табыңдар.

214. ABC үшбұрышында $\angle A = 45°$, $AB = 5\sqrt{2}$ см, $AC = 8$ см, MN, NK, KM кесінділері – үшбұрыштың орта сызықтары. MNK үшбұрышының ауданын табыңдар.

215. ABC үшбұрышына іштей $AKMN$ параллелограмы сызылған. Оның K, M және N нүктелері, сәйкесінше, AB, BC және AC қабырғаларына тиісті және $BM : MC = 5 : 1$. Осы параллелограмның ауданы ABC үшбұрышының ауданының қандай бөлігін құрайды?

216. $ABCD$ теңбүйірлі трапециясының AC диагоналі оның CD бүйір қабырғасына перпендикуляр және трапецияның BH биіктігін $BK = 2{,}2$ см, $KH = 1$ см кесінділерге бөледі. Осы трапецияның ауданын 0,1 см^2-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

217. Теңбүйірлі ΔABC-да $AC = BC = 8$ см, $\angle C = 36°$, BD – биссектриса. $\Delta ABD \sim \Delta ACB$ болатынын дәлелдеңдер және AB қабырғасын табыңдар.

218. ΔABC-да $\angle A = 50°$, $\angle B = 70°$, BH және AK – биіктіктер. $\Delta BAC \sim \Delta HKC$ болатынын дәлелдеңдер және HKC үшбұрышының бұрыштарын табыңдар.

С деңгейі

219. ABC үшбұрышында $\angle A = 30°$, $\angle B = 50°$, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. $\frac{b}{c} = \frac{c}{a+b}$ болатынын дәлелдеңдер.

220. ΔABC-да AA_1, BB_1, CC_1 – медианалар, M – олардың қиылысу нүктесі, M_1 нүктесі M нүктесіне B_1 нүктесіне қарағанда симметриялы. а) ΔAMM_1 қабырғалары ABC үшбұрышының медианаларына тең болатын ΔDPF-ке ұқсас екенін дәлелдеңдер. ә) Осы үшбұрыштардың аудандарының қатынасын табыңдар. б) ΔDPF-тің ауданы ΔABC-ның ауданының қандай бөлігін құрайды?

221. Шеңбердің AB диаметрі мен өзара параллель AC мен BD хордалары жүргізілген. Егер мүмкін болса, осы хордалардың симметрия центрі мен осін салыңдар.

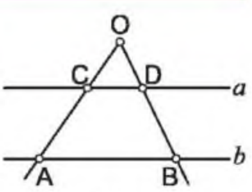
222. Координаталар басынан айналдыра сағат тілі бағытымен бұрғанда $A(6; 8)$ нүктесі $B(8; 6)$ нүктесіне көшті. Бұру бұрышының косинусын табыңдар.

223. Параллель көшіргенде $A(3; 2)$ нүктесі $B(0; 6)$ нүктесіне, ал C нүктесі $D(-3; 2)$ нүктесіне бейнеленеді. C нүктесінің координаталарын табыңдар.

224. Бұрыш пен оның ішінде жатқан нүкте берілген. Бұрыштың қабырғаларын жанайтын және сол берілген нүктеден өтетін шеңбер салыңдар.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

225. 1А) a және b параллель түзулері O бұрышының қабырғаларын, сәйкесінше, C, D және A, B нүктелерінде қиып өтеді (138-сурет). $\Delta OAB \sim \Delta OCD$ болатынын дәлелдеңдер.
2А) Егер $OC = 2$ см, $AC = 3$ см болса, OAB және OCD үшбұрыштарының (138-сурет) периметрлерінің қатынасын табыңдар.



138-сурет

3В) Екі ұқсас көпбұрыштың қабырғаларының қатынасы 3 : 4, ал олардың аудандарының айырымы 70 см^2. Осы көпбұрыштардың аудандарын табыңдар.
4В) $ABCD$ трапециясының табандары $BC = 5$ см және $AD = 7{,}2$ см, $\angle ABD = \angle BCD$. BD диагоналін табыңдар.
5С) $AB : AC = 2 : 3$ және $AD = 5$ см болатын $ABCD$ тіктөртбұрышын салыңдар.

БҰЛ ҚЫЗЫҚТЫ!

Фигураларды түрлендіруді геометриялық зерттеулерде грек оқымыстылары Фалес пен Архимед ертеден пайдаланған болатын. Бірақ геометрияның «Негіздерін» дайындаған Евклид геометрияның ғылым ретінде дамуындағы түрлендірудің рөлі мен мәнін бағаламады және оны қолданбады да. Сонымен қатар оның «Негіздерінің» алтыншы кітабында ұқсас көпбұрыштар туралы ілім бар. Мысалы, ол ұқсас көпбұрыштар ұғымын былай айтқан: «Ұқсас түзу сызықты фигуралар – ретімен алынған бұрыштары тең және тең бұрыштардағы қабырғалары пропорционал болатын фигуралар». Ұқсас көпбұрыштардың қасиеттері туралы теоремалардың тұжырымдамалары қазіргілерге жақын. Мысалы, осы кітаптағы 8-сөйлемде былай айтылған: «Егер тікбұрышты үшбұрыштың тік бұрышынан табанына перпендикуляр жүргізілсе, сонда пайда болған үшбұрыштар бүтініне де, өзара да ұқсас болады».

Фигураларды түрлендіру қазақ халқының дәстүрлі бұйымдарында, мысалы, қару-жарақ өнерінде, қазақ үйінің жиһазы, зергерлік бұйымдары, ыдыс-аяқ, киім-кешек, кілемдерінде оюлар жасап, құрастыру кеңінен қолданылады. 139-суретте қазақ халқының 200-ден астам ою түрлерінің екі түрі мысалға келтірілген.

139-сурет

Геометриялық түрлендіру ілімі XIX ғасырда өркендей бастады. Оған көп үлес қосқан швейцарлық көрнекті ғалым, 30 жылдан астам Ресейдің Петербург ғылыми академиясында еңбек еткен Леонард Эйлердің (1707–1783 жж.) еңбектері болатын. Эйлер түрлендірудің негізгі қасиеттері туралы теоремалардың бірқатарын дәлелдеп, фигуралардың гомотетиясын қарастырған. XIX ғасырдың екінші жартысында әртүрлі геометриялық түрлендірулерге байланысты көптеген ғылыми нәтижелер жинақталып, оларды бір жүйеге келтіріп, топтастыру мәселесі туындады. Осы мәселенің шешімін 1872 жылы неміс оқымыстысы Феликс Клейн (1849–1925 жж.) өзінің «Ең жаңа геометриялық зерттеулерге салыстырмалы шолу» еңбегінде ұсынған болатын.

Қазіргі заманда геометрия, физика, информатика салаларымен олардың қосымшаларында геометриялық түрлендірулердің алатын орны өте үлкен. Мысалы, симметрияны сәулет өнері мен құрылыста, ұқсастық түрлендіру мен гомотетияны компьютерлік графикада кеңінен қолданады.

Л. Эйлер

Ф. Клейн

III. ҮШБҰРЫШТАРДЫ ШЕШУ

Бөлімді оқу нәтижесінде

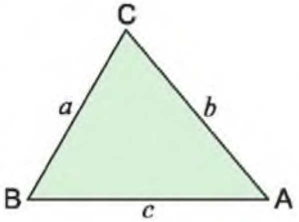
• синустар теоремасын және косинустар теоремасын;
• үшбұрыш бұрышы косинусының оның қабырғаларына байланысын; үшбұрыштың ауданы мен қабырғаларының арасындағы оған іштей және сырттай сызылған шеңберлердің радиустарының арасындағы байланыстарын өрнектейтін формулаларды;
• «үшбұрышты шешу» ұғымын **білу керек**.

• синустар теоремасы мен косинустар теоремасын дәлелдей алу;
• синустар және косинустар теоремаларын қолдануды, оның ішінде қолданбалы есептерге қолдана алу;
• үшбұрыштардың белгісіз элементтерін тригонометрияны пайдаланып таба алу;
• $S = \frac{abc}{4R}$, $S = pr$ формулаларын есептер шығарғанда қолдана **алу керек**.

16. Синустар теоремасы

Тақырыпты оқу барысында:
• синустар теоремасын біле және оны дәлелдей аласыңдар;
• синустар теоремасын есептер шығаруда қолдануды білетін боласыңдар.

Теорема. **Үшбұрыштың қабырғалары оларға қарсы жатқан бұрыштардың синустарына пропорционал.**



140-сурет

Дәлелдеуі. Кез келген ΔABC-да $BC = a$, $AC = b$ және $AB = c$ болсын (140-сурет). $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ болатынын дәлелдейік.

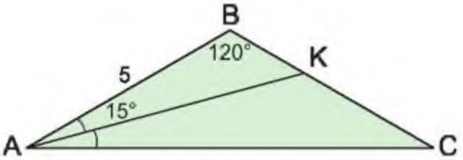
$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}bc \cdot \sin A = \frac{1}{2}ac \cdot \sin B = \frac{1}{2}ab \cdot \sin C.$

Осы теңдіктің барлық бөлігін $\frac{1}{2}abc$ көбейтіндісіне бөліп, мынаны аламыз: $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$, бұдан $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$. Теорема дәлелденді.

1-есеп. ΔABC-да $\angle A = 30°$, $\angle C = 105°$. $BC : AC$ қатынасын табу керек.

Шешуі. $\angle B = 180° - (\angle A + \angle C) = 180° - 135° = 45°$. Синустар теоремасы бойынша $\frac{BC}{\sin 30°} = \frac{AC}{\sin 45°}$, бұдан: $\frac{BC}{AC} = \frac{\sin 30°}{\sin 45°} = \frac{1}{2} : \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Жауабы. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.



141-сурет

2-есеп. $AB = 5$ см, $\angle B = 120°$, $\angle A = 30°$ болатын ΔABC-ның AK биссектрисасын табу керек.

Ш е ш у і. Синустар теоремасы бойынша ΔABK-да $\frac{AK}{\sin B} = \frac{AB}{\sin K}$ (141-сурет), $\angle K = 180° - \angle B - \frac{1}{2}\angle A = 45°$. Сонда: $\frac{AK}{\sin 120°} = \frac{AB}{\sin 45°}$, $\frac{AK \cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{1}$, бұдан $AK = \frac{5\sqrt{6}}{2}$ см.

Ж а у а б ы. $\frac{5\sqrt{6}}{2}$ см.

СҰРАҚТАР

Синустар теоремасын тұжырымдап, дәлелдеңдер.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

226. а) ΔABC-да $AB = 5\sqrt{6}$ см, $\angle A = 75°$, $\angle B = 60°$. AC-ны табыңдар.

ә) Бұрыштары 105° және 45°-қа тең үшбұрыштың ең кіші қабырғасы $4\sqrt{2}$ см-ге тең. Осы үшбұрыштың ұзындығы орташа қабырғасын табыңдар.

227. Үшбұрыштың қабырғасының бірі 5 см-ге тең, ал оған іргелес жатқан бұрыштары 40° және 50°. Үшбұрыштың қалған екі қабырғасының ұзындығын 0,1 см-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

В деңгейі

228. а) ΔABC-да $\angle A = 30°$, $\angle B = 60°$. Үшбұрыштың қабырғаларының қатынасын $(a : b : c)$ табыңдар. ә) Үшбұрыштың бұрыштары 3 : 4 : 8 қатынасындай, үшбұрыштың қабырғаларының үш таңбалы сандармен берілген қатынасын табыңдар.

229. а) Теңбүйірлі ΔABC-да табаны $AB = \sqrt{50}$ дм, $\angle A = 70°$. Осы үшбұрыштың AL биссектрисасының ұзындығын 0,01 дм-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар. ә) Егер теңбүйірлі ΔABC-ның биссектрисасы $AL = 3\sqrt{2}$ см және $\angle A = 30°$ екені белгілі болса, оның периметрін 0,1 см-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

230. $ABCD$ параллелограмында $\angle C = 60°$, $BC = 8$ см, $BD = 10$ см. $\angle ABD$ мен $\angle ADB$-ны 1°-қа дейінгі дәлдікпен табыңдар.

231. а) $ABCD$ параллелограмында E нүктесі – BC қабырғасының ортасы, $AB = 5$ дм, $\angle EAD = 30°$, $\angle ABC = 100°$. Параллелограмның периметрі мен ауданын табыңдар.

ә) Параллелограмның 8 см-ге тең диагоналі оған іргелес қабырғалармен 45° және 30° бұрыш жасайды. Параллелограмның ауданын табыңдар.

232. а) $\angle B = 30°$, $\angle C = 45°$, ал биіктігі $CD = 3$ см болатын ΔABC-ның қабырғаларын 0,1 см-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

ә) Статистикалық деректерге сүйенсек, жайылымның жалпы ауданы бойынша Қазақстан жер жүзінде 5-орын алады. Қазақстанның жайылымы неше миллион гектар жерді алатынын $BC = 100$, $\angle A = 30°$, $\angle C = 80°$ болатын ΔABC-ның орташа қабырғасы ұзындығының сандық мәнін табу арқылы білетін боласыңдар.

С деңгейі

233. а) $\angle B = 60°$, ал AD биіктігі BC қабырғасын $BD = 2\sqrt{3}$ см және $DC = 8$ см болатын екі кесіндіге бөлетін; ә) $\angle C = 30°$, ал BD биіктігі AC қабырғасын $AD = 12$ см және $DC = 5\sqrt{3}$ см болатын екі кесіндіге бөлетін ABC үшбұрышының периметрін және бұрыштарын 1°-қа дейінгі дәлдікпен табыңдар.

234. Кіші қабырғасы 4 см-ге тең үшбұрышқа іштей шеңбер сызылған. Жанасу нүктелері шеңберді градустық өлшемдері 9, 10, 5 сандарына пропорционал үш доғаға бөледі. Осы үшбұрыштың ең үлкен қабырғасын 0,1 см-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

235. Теңбүйірлі ABC үшбұрышында $AB = AC = \sqrt{2}$ дм, $\angle BAC = 30°$, O нүктесі – оған сырттай сызылған шеңбердің центрі. BO сәулесі AC қабырғасын K нүктесінде қияды. BK кесіндісінің ұзындығын табыңдар.

ПРАКТИКАЛЫҚ ТАПСЫРМА

Қабырғалары 5 см, 8 см және олардың арасындағы бұрышы 60° болатын үшбұрыш салыңдар. Векторларды пайдаланып, үшбұрыштың үшінші қабырғасын табыңдар.

17. Косинустар теоремасы

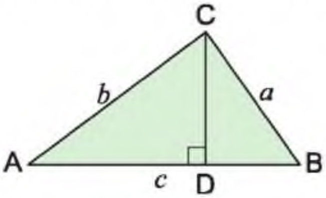
Тақырыпты оқу барысында:

• косинустар теоремасын біле және оны дәлелдей аласыңдар;

• үшбұрыш бұрышы косинусының оның қабырғасына тәуелділік формуласын білесіңдер;

• косинустар теоремасын есептер шығаруда қолдана аласыңдар.

Теорема. **Үшбұрыштың қабырғасының квадраты басқа екі қабырғасының квадраттарының қосындысынан осы қабырғалар мен олардың арасындағы бұрыштың косинусының екі еселенген көбейтіндісінің айырымына тең.**



142-сурет

Дәлелдеуі. $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ болатын ABC үшбұрышы берілген болсын. Мысалы, $\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A}$ болатынын дәлелдейік.

ABC үшбұрышының CD биіктігін жүргізейік (142-сурет). ΔADC-да: $AD = b \cdot \cos A$, $CD = b \cdot \sin A$. Сонда $DB = c - b \cdot \cos A$. ΔBDC-да Пифагор теоремасы бойынша:

$$a^2 = (b \cdot \sin A)^2 + (c - b \cdot \cos A)^2 = b^2\sin^2 A + c^2 - 2bc \cdot \cos A + b^2\cos^2 A =$$
$$= b^2(\sin^2 A + \cos^2 A) + c^2 - 2bc \cdot \cos A = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$
$$(\text{себебі } \sin^2 A + \cos^2 A = 1).$$

Сонымен, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$.

A бұрышы тік немесе доғал болатын жағдайларды өздігінен қарастырыңдар.

Мына қатыстар да дәл осылай дәлелденеді:

$$\boldsymbol{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B, \; c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C.}$$

Косинустар теоремасынан шығатыны:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Осы формулалардан шығатыны, үшбұрыштың бұрышы: а) егер қарсы жатқан қабырғасының квадраты басқа екі қабырғасының квадраттарының қосындысына тең болса, **тік** болады; ә) егер қарсы жатқан қабырғасының квадраты басқа екі қабырғасының квадраттарының қосындысынан кем болса, **сүйір** болады; б) егер қарсы жатқан қабырғасының квадраты басқа екі қабырғасының квадраттарының қосындысынан артық болса, **доғал** болады.

Косинустар теоремасын координаталар әдісімен де дәлелдеуге болатынын айта кетелік (мұны өздігінен орындаңдар).

1 - е с е п. Қабырғалары 17 см, 25 см және 28 см болатын үшбұрыштың кіші бұрышын табу керек.

Ш е ш у і. Үшбұрыштың кіші бұрышы 17 см-ге тең ең қысқа қабырғасына қарсы жатады. Ол бұрышты α деп белгілейік. Косинустар теоремасы бойынша:

$17^2 = 25^2 + 28^2 - 2 \cdot 25 \cdot 28 \cdot \cos \alpha$, бұдан $\cos \alpha = \dfrac{25^2 + 28^2 - 17^2}{2 \cdot 25 \cdot 28} =$ $= 0{,}8$.

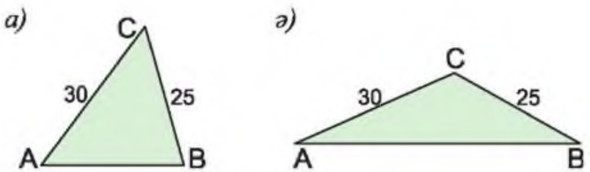
Косинустар кестесін немесе калькуляторды пайдаланып, $\alpha \approx 37°$ болатынын табамыз.

Ж а у а б ы. $\approx 37°$.

2 - е с е п. Үшбұрыштың екі қабырғасы 25 см және 30 см, ал ауданы 300 см^2. Үшбұрыштың үшінші қабырғасын табу керек.

Ш е ш у і. ΔABC-да $BC = 25$ см, $AC = 30$ см, ауданы $S = 300$ см^2 (143-сурет).

$S = \dfrac{1}{2} AC \cdot CB \cdot \sin C$, сонда $300 = \dfrac{1}{2} \cdot 30 \cdot 25 \cdot \sin C$, бұдан $\sin C = 0{,}8$.



143-сурет

Негізгі тригонометриялық тепе-теңдікті $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ пайдаланып, C бұрышының косинусын табамыз: $\cos C = \pm\sqrt{1 - \sin^2 C}$, бұдан $\cos C = \sqrt{1 - 0{,}64} = 0{,}6$ немесе $\cos C = -\sqrt{1 - 0{,}64} = -0{,}6$.

Егер $\cos C = 0{,}6$ болса, онда $\angle C$ сүйір (143, *а*-сурет), косинустар теоремасы бойынша:

$$AB^2 = 25^2 + 30^2 - 2 \cdot 25 \cdot 30 \cdot 0,6 = 25^2, \text{ бұдан } AB = 25 \text{ см.}$$

Егер $\cos C = -0,6$ болса, онда $\angle C$ доғал (143, ә-сурет), косинустар теоремасы бойынша:

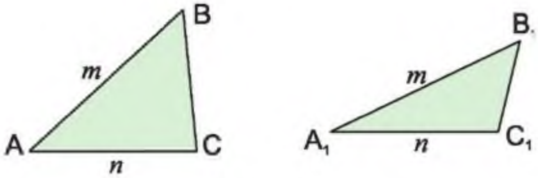
$AB^2 = 25^2 + 30^2 + 2 \cdot 25 \cdot 30 \cdot 0,6 = 2425$, бұдан $AB = \sqrt{2425} = 5\sqrt{97}$ (см).

Қабырғалары 25 см, 30 см, 25 см және 25 см, 30 см, $5\sqrt{97}$ см болатын үшбұрыш бар болады (себебі олар үшін үшбұрыш теңсіздігі орындалады).

Ж а у а б ы. 25 см немесе $5\sqrt{97}$ см.

3 - е с е п. Егер бір үшбұрыштың екі қабырғасы екінші үшбұрыштың екі қабырғасына тең болса, ал үшінші қабырғалары тең болмаса, онда сол қабырғалардың үлкеніне қарсы үлкен бұрыш жататынын дәлелдеу керек.

Д ә л е л д е у і. ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштарында $AB = A_1B_1 = m$, $AC = A_1C_1 = n$, $BC > B_1C_1$ болсын (144-сурет). $\angle A > \angle A_1$ болатынын дәлелдейік.



144-сурет

Косинустар теоремасы бойынша:

$$BC^2 = m^2 + n^2 - 2mn \cdot \cos A,$$
$$B_1C_1^2 = m^2 + n^2 - 2mn \cdot \cos A_1.$$
$$BC > B_1C_1 \text{ болғандықтан,}$$
$$m^2 + n^2 - 2mn \cdot \cos A > m^2 + n^2 - 2mn \cdot \cos A_1,$$
$$-2mn \cdot \cos A > -2mn \cdot \cos A_1, \cos A < \cos A_1.$$

Демек, $\angle A > \angle A_1$, себебі, бұрыш үлкейген сайын оның косинусы кішірейеді.

СҰРАҚТАР

Косинустар теоремасын тұжырымдап, дәлелдеңдер.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

236. Үшбұрыштың екі қабырғасы a мен b, ал арасындағы бұрышы $60°$. Егер: а) $a = 10$ см, $b = 16$ см; ә) $a = 8$ см, $b = 15$ см болса, оның үшінші қабырғасын табыңдар.

237. Шеңбердің екі радиусының арасындағы бұрыш $16°$-қа тең. Егер шеңбердің диаметрі 10 дм-ге тең болса, оның сол екі радиусының ұштарын қосатын хорданың ұзындығын 0,1 дм-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

238. а) Егер $AB = 6$ см, $AC = 19$ см, $\sin A = 0{,}6$ болса, ABC үшбұрышының BC қабырғасының ұзындығын 0,1 см-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

ә) Алматы мен Шу қалаларының арақашықтығы 260 км, ал Шу мен Тараздың арақашықтығы 208 км. Егер Алматы мен Тараз қалаларының арақашықтығы тура жолмен 453 км-ді құраса, осы қалаларды біріктіретін теміржол тармағы қандай бұрыш жасап бұрылатынын табыңдар (145-сурет).

145-сурет

В деңгейі

239. а) Жер телімінің пішіні дөңес $ABCD$ төртбұрышы тәрізді және $AB = 10$ м, $AD = 9$ м, $BC = CD$, $\angle B = 105°$, $\angle D = 135°$. Осы жер телімінің ауданын 0,1 м^2-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

ә) ΔABC-да $\frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}$, $\frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$. C бұрышының косинусын табыңдар.

240. а) Параллелограмның диагональдары 2 дм және 3 дм, ал олардың арасындағы бұрышы $45°$. Параллелограмның қабырғаларын 0,01 дм-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар. ә) $ABCD$ параллелограмының BD диагоналі 10 см, ал диагональдарының арасындағы бұрышы 60°. Егер параллелограмның ауданы $30\sqrt{3}$ см^2-ге тең болса, оның қабырғалары мен екінші диагоналін табыңдар.

241. а) Параллелограмның қабырғалары 3 см және 3,5 см-ге, ал оның диагональдарының біреуі 5,5 см-ге тең. Параллелограмның екінші диагоналін табыңдар. ә) Параллелограмның диагональдары 14 см және 18 см, ал қабырғаларының қатынасы 4 : 7 қатынасындай. Параллелограмның периметрін табыңдар.

242. а) Қабырғалары a, b, c болатын үшбұрыштың m_a медианасының ұзындығын $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$ формуласымен табуға болатынын дәлелдеңдер.

ә) Қабырғалары 7 см, 11 см және 12 см болатын үшбұрыштың үлкен қабырғасына жүргізілген медианасының ұзындығын табыңдар.

243. а) ΔABC-да $AB = 10$ см және медианалары $AM = 2\sqrt{13}$ см, $BN = \sqrt{73}$ см. Осы үшбұрыштың AC мен CB қабырғаларының ұзындықтарын табыңдар. ә) ΔABC-ның AM мен BN медианалары перпендикуляр және K нүктесінде қиылысады. Егер $AC = 12$ см, $BC = 9$ см болса, AB қабырғасын табыңдар.

244. Қабырғалары: а) 5 см, 12 см және 13 см; ә) 7 см, 8 см және 9 см; б) 6 см, 8 см және 12 см; в) $\sqrt{8}$ см, $\sqrt{12}$ см және $\sqrt{20}$ см болатын үшбұрыштың бұрыштарын табыңдар.

С деңгейі

245. а) Үшбұрыштың периметрі 30 см. Егер үшбұрыштың биссектрисасы оның 14 см-ге тең қабырғасын 3 : 5 қатынасындай бөлсе, сол қабырғаға қарсы жатқан бұрышты табыңдар.

ә) Қабырғасы 10 см, оған қарсы жатқан бұрышы 45°, ал ауданы 8 см^2-ге тең болатын үшбұрыштың периметрін табыңдар.

246. Егер төртбұрыштың қарама-қарсы қабырғаларының квадраттарының қосындылары тең болса, оның диагональдарының арасындағы бұрышты табыңдар.

18. Үшбұрыштарды шешу

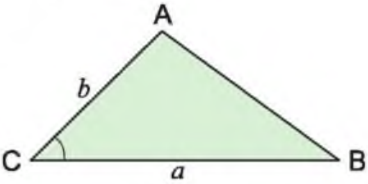
Тақырыпты оқу барысында:
- «үшбұрыштарды шешу» ұғымын білесіңдер;
- синустар мен косинустар теоремаларын есептер шығаруда қолдануды білетін боласыңдар.

Үшбұрыштың үш қабырғасы мен үш бұрышын оның негізгі элементтері деп атайды, ал үшбұрышты шешу деп оның берілген үш элементі бойынша белгісіз қабырғалары мен бұрыштарын табуды айтады. Үшбұрыш тікбұрышты болған жағдайда оның бір элементі (тік бұрышы) белгілі болады. Тікбұрышты үшбұрыштарды шешуді сендер алдыңғы сыныпта қарастырған болатынсыңдар. Енді кез келген үшбұрышты шешудің негізгі есептерін қарастырамыз.

1-есеп (*екі қабырғасы мен олардың арасындағы бұрышы бойынша үшбұрышты шешу*).

Берілгені: ΔABC, $BC = a$, $AC = b$, $\angle C$ (146-сурет).

Табу керек: AB, $\angle A$, $\angle B$.



146-сурет

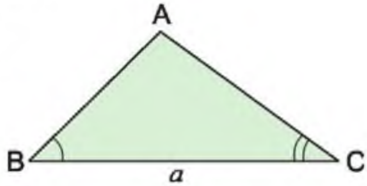
Шешуі. $AB = c$ болсын. Сонда косинустар теоремасы бойынша, $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos C}$, ал $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$. Егер сандық мәндері берілген болса, онда әрі қарай кестеден немесе калькулятормен A бұрышын табамыз. $\angle B = 180° - (\angle A + \angle C)$. Мысалы, егер $a = 12$, $b = 8$, $\angle C = 60°$, онда $c = \sqrt{12^2 + 8^2 - 2\cdot 12\cdot 8\cdot 0{,}5} = \sqrt{112} \approx$ $\approx 10{,}58$, $\cos A = \dfrac{112 + 64 - 144}{2\cdot 8\cdot 10{,}58} \approx 0{,}189$, $\angle A \approx 79°$, $\angle B \approx 41°$ болады.

Жауабы. $AB \approx 10{,}58$, $\angle A \approx 79°$, $\angle B \approx 41°$.

2-есеп (*бір қабырғасы мен оған іргелес жатқан екі бұрышы бойынша үшбұрышты шешу*).

Берілгені: ΔABC, $BC = a$, $\angle B$, $\angle C$ (147-сурет).

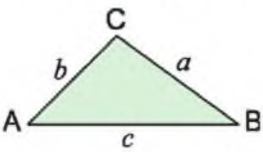
Табу керек: AB, AC, $\angle A$.



147-сурет

Ш е ш у і. $\angle A = 180° - (\angle B + \angle C)$. Синустар теоремасын пайдаланып, мынаны табамыз: $AC = \dfrac{a \cdot \sin B}{\sin A}$, $AB = \dfrac{a \cdot \sin C}{\sin A}$. Мысалы, егер ΔABC-да $BC = 5$ дм, $\angle B = 30°$, $\angle C = 45°$ болса, онда $\angle A = 180° - 75° = 105°$; $AC = \dfrac{BC \cdot \sin B}{\sin A} \approx \dfrac{5 \cdot 0,5}{0,966} \approx 2,59$ (дм), $AB = \dfrac{BC \cdot \sin B}{\sin A} \approx \approx \dfrac{5 \cdot 0,707}{0,966} \approx 3,66$ (дм).

Ж а у а б ы. $AB \approx 3,66$ дм, $AC \approx 2,59$ дм, $\angle A = 105°$.



148-сурет

3 - е с е п (*үш қабырғасы бойынша үшбұрышты шешу*).

Берілгені: ΔABC, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ (148-сурет).

Табу керек: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.

Ш е ш у і. Косинустар теоремасы бойынша $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, $\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$. Егер сандық мәндері берілген болса, онда кестеден немесе калькуляторды пайдаланып, A және B бұрыштарын табамыз. $\angle C = 180° - (\angle A + \angle B)$. Мысалы, егер $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$ болса, онда $\cos A = \dfrac{9 + 16 - 4}{24} = \dfrac{21}{24} = 0,875$, $\angle A \approx 29°$; $\cos B = \dfrac{4 + 16 - 9}{16} = \dfrac{11}{16} \approx 0,688$, $\angle B \approx 47°$, $\angle C \approx 180° - (29° + 47°) = 104°$ болады.

Ж а у а б ы. $\angle A \approx 29°$; $\angle B \approx 47°$, $\angle C \approx 104°$.

СҰРАҚТАР

1. «Үшбұрыштарды шешу» деп нені айтады?
2. Үшбұрышты оның: а) қабырғасы мен екі бұрышы; ә) екі қабырғасы мен бұрышы; б) үш қабырғасы бойынша шешу тәсілін түсіндіріңдер.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

247. Егер: а) $AB = 4$ см, $BC = 5$ см, $\angle B = 110°$; ә) $AB = 2$ дм, $BC = 5$ дм, $\angle A = 40°$; б) $BC = 4$ см, $AB = 3$ см, $\angle A = 120°$; в) $BC = 3$ см, $AB = 4$ см,

$\angle A = 60°$ болса, ABC үшбұрышының белгісіз қабырғалары мен бұрыштарын табыңдар.

248. а) PKH үшбұрышында $\angle K = 100°$, $PK = 6$ дм, $KH = 5$ дм. HM медианасы мен PMH үшбұрышының ауданын табыңдар. ә) Теңбүйірлі үшбұрыштың 10 см-ге тең бүйір қабырғасына 9 см-ге тең медиана жүргізілген. Үшбұрыштың ауданын 0,1 см^2-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

249. Егер: а) теңбүйірлі үшбұрыштың табаны $(\sqrt{5} - 1)$ см-ге, ал төбесіндегі бұрышы 36°-қа тең болса, оның бүйір қабырғасын; ә) $ABCD$ параллелограмының 10 см-ге тең BD диагоналі B бұрышын 48° және 72°-қа тең бөліктерге бөлсе, оның қабырғаларын табыңдар.

B деңгейі

250. Бір қабырғасы 51 см-ге, диагональдары 40 см және 74 см-ге тең болатын параллелограмның ауданын табыңдар. (Жауабын 0,1 см^2-ге дейінгі дәлдікпен дөңгелектеңдер.)

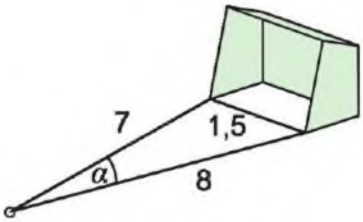
251. Ромбтың сүйір бұрышы 80°-қа, ал үлкен диагоналі 12 см-ге тең. Ромбтың ауданын 0,1 см^2-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

252. Теңбүйірлі үшбұрыш салып, оның қабырғаларын өлшеңдер. 0,1 үлеске дейінгі дәлдікпен оның төбесіндегі бұрыштың косинусы мен табанындағы синусын табыңдар.

253. а) Тікбұрышты ABC үшбұрышында $\angle A = 15°$, $AC = \sqrt{3}$ дм. Тік бұрышының төбесінен CL биссектрисасы жүргізілген. AL кесіндісін табыңдар. ә) $\angle A = 60°$, $\angle C = 30°$, $AC = 6$ см. ABC үшбұрышында AA_1 және BB_1 биссектрисаларын 0,1 см-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

254. ABC үшбұрышында $AB = 5$ см, $BC = 4$ см, $AC = 3$ см. CC_1 және AA_1 медианаларының арасындағы сүйір бұрышты табыңдар.

255. Шайба ені 1,5 м-ге тең қақпа табанының екі жақтауынан 7 м және 8 м қашықтықта жатыр (149-сурет). Шайбаның мұзбен сырғанап, қақпаға кіру бұрышының ең үлкен бүтін градустық өлшемін табыңдар.



149-сурет

256. Сүйірбұрышты ABC үшбұрышының AH және CK биіктіктері, сәйкесінше, 1 дм және 2 дм-ге, ал олардың арасындағы бұрыш 60°-қа тең. AC қабырғасын табыңдар.

C деңгейі

257. Теңқабырғалы ΔABC-ның B төбесінен оның AC қабырғасын A төбесінен бастап есептегенде $1:2$ қатынасында бөлетін BD сәулесі жүргізілген. ABD және CBD бұрыштарының синустарын табыңдар.

258. а) $ABCD$ ромбысының сүйір бұрышынан жүргізілген AL сәулесі осы бұрышты $1:3$, ал BC қабырғасын $3:5$ қатынасында бөледі. Ромбтың доғал бұрышының косинусын табыңдар.

ә) $ABCD$ трапециясының AB бүйір қабырғасы оның BC кіші табанынан 2 есе ұзын, $\angle BAD = \alpha$. BAC бұрышының косинусын табыңдар.

259. ΔABC-да $\angle A : \angle B : \angle C = 4:2:1$, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ болатынын дәлелдеңдер.

ПРАКТИКАЛЫҚ ТАПСЫРМА

Центрі O нүктесінде болатын шеңбер салыңдар. A, B, C нүктелері оның бойында жатсын және A, B нүктелері шеңбердің диаметрінің ұштары болмасын. ACB мен AOB бұрыштарын өлшеңдер. Олардың арасындағы қандай тәуелділікті байқадыңдар?

19. Шеңберге іштей сызылған бұрыштар және олардың қасиеттері

Тақырыпты оқу барысында:

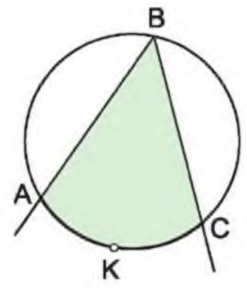
• шеңберге іштей сызылған бұрыштың анықтамасы мен қасиеттерін білесіңдер;

• шеңберге іштей сызылған бұрышты өлшеу туралы теореманы білесіңдер;

• шеңберге іштей сызылған бұрыштың қасиеттерін есептер шығаруда қолдануды білетін боласыңдар.

Төбесі шеңбердің центрі болатын бұрыш *центрлік бұрыш* деп аталатынын еске салайық. Доғаның градустық өлшеміне оған сәйкес келетін центрлік бұрыштың градустық өлшемі алынады. Толық шеңбердің градустық өлшемі толық бұрыштың градустық өлшеміне тең, яғни 360°, жарты шеңбердің градустық өлшемі 180°. Бір шеңбердің немесе тең шеңберлердің екі доғасының градустық өлшемдері тең болса, оларды тең доғалар деп атайды.

Шеңберге іштей сызылған бұрыш деп төбесі шеңбердің бойында жататын, ал қабырғалары оны қиып өтетін бұрышты айтады.



150-сурет

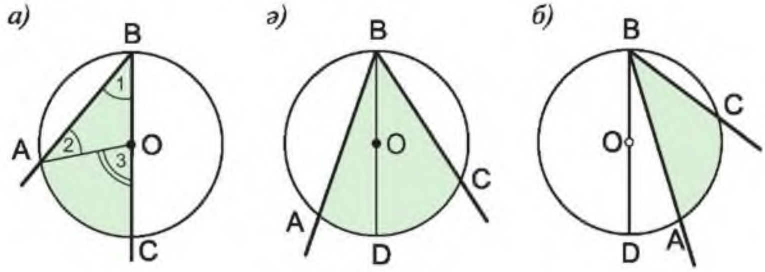
Мысалы, 150-суретте ABC бұрышы шеңберге іштей сызылған, AKC доғасы оның ішінде жатыр. ABC бұрышы AKC доғасына тірелген деп айтады.

Теорема (*шеңберге іштей сызылған бұрышты өлшеу туралы*). **Шеңберге іштей сызылған бұрыштың градустық өлшемі өзі тірелетін доғаның градустық өлшемінің жартысына тең.**

Дәлелдеуі. Шеңбердің центрі оған іштей сызылған бұрыштың қабырғасында, ішінде немесе сыртында да жатуы мүмкін (151-сурет).

1) Шеңбердің O центрі оған іштей сызылған $\angle ABC$-ның қабырғасында жатсын (151, *а*-сурет). OA радиусын жүргізейік. Сонда $\angle 1 = \angle 2$ (теңбүйірлі ΔABO-ның табанындағы бұрыштары), $\angle 3 = \angle 1 + \angle 2$ (үшбұрыштың сыртқы бұрышының қасиеті бойынша).

Бұдан $\angle 1 = \frac{1}{2} \cdot \angle 3$ болатыны шығады. $\angle 3$ центрлік бұрыш болғандықтан, оның градустық өлшемі AC доғасының градустық өлшеміне тең болады. Демек, $\angle ABC = \frac{1}{2} \smile AC$.



151-сурет

2) Шеңбердің центрі оған іштей сызылған $\angle ABC$-ның ішінде жатсын (151, *ә*-сурет). Шеңбердің BD диаметрін жүргізейік. Сонда:

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC = \frac{1}{2} \smile AD + \frac{1}{2} \smile DC = \frac{1}{2} \smile AC.$$

3) Шеңбердің центрі оған іштей сызылған $\angle ABC$-ның сыртында жатсын (151, *б*-сурет). Шеңбердің BD диаметрін жүргізейік. Сонда:

$\angle ABC = \angle DBC - \angle DBA = \frac{1}{2} \smile DC - \frac{1}{2} \smile DA = \frac{1}{2} \smile AC$. Теорема дәлелденді.

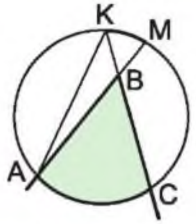
Бұл теоремадан шығатыны:

– *шеңбердің бір доғасына немесе тең доғаларға (бір шеңбердің немесе тең шеңберлердің) тірелетін іштей сызылған бұрыштар тең болады;*

– *шеңбердің диаметріне тірелетін іштей сызылған бұрыш тік болады.*

1 - е с е п. Төбесі дөңгелектің ішінде жататын $\angle ABC$ (152-сурет) осы бұрыштың қабырғаларының арасындағы AC доғасы мен сол қабырғалар созындыларының арасындағы KM доғасы қосындысының жартысымен өлшенетінін дәлелдеу керек.

Д ә л е л д е у і. AK хордасын жүргізейік. Сонда $\angle KAM = \frac{1}{2}\smile KM$, $\angle AKC = \frac{1}{2}\smile AC$ (іштей сызылған бұрыштың қасиеті бойынша).

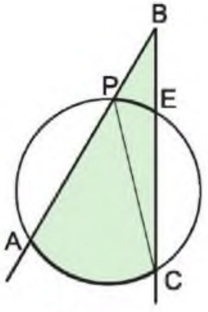


152-сурет

$\angle ABC = \angle KAM + \angle AKC$ (үшбұрыштың сыртқы бұрышының қасиеті бойынша).

Демек, $\boldsymbol{\angle ABC = \frac{1}{2}(\smile KM + \smile AC)}$, дәлелдеу керегі де осы еді.

2 - е с е п. Төбесі дөңгелектің сыртында жататын, ал қабырғалары шеңберді қиып өтетін $\angle ABC$ (153-сурет) өзінің қабырғаларының арасындағы AC мен PE доғаларының айырымының жартысымен өлшенетінін дәлелдеу керек.



153-сурет

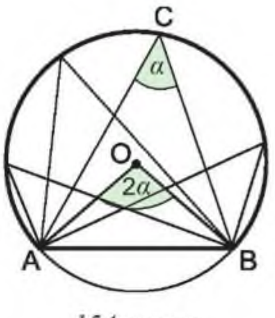
Д ә л е л д е у і. PC хордасын жүргізейік. Сонда:

$$\angle APC = \frac{1}{2}\smile AC, \text{ ал } \angle PCE = \frac{1}{2}\smile PE.$$

$\angle APC = \angle ABC + \angle PCE$ (үшбұрыштың сыртқы бұрышының қасиеті бойынша). Демек, $\boldsymbol{\angle ABC = \frac{1}{2}(\smile AC - \smile PE)}$, дәлелдеу керегі де осы еді.

3 - е с е п. Ортақ табаны AB болатын және басқа екі қабырғасының арасындағы бұрышы α-ға тең үшбұрыштардың барлық төбелерінің жиынын табу керек.

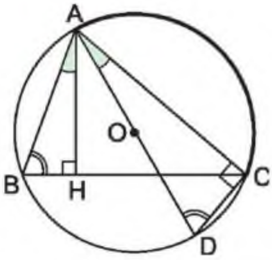
Ш е ш у і. Градустық өлшемі 2α-ға тең болатын AB доғасына тірелетін кез келген іштей сызылған бұрыш α-ға тең болады (154-сурет). Сондықтан үшбұрыштың ізделінді төбелерінің жиыны шеңбердің AB хордасына тірелетін ACB доғасы болады.



154-сурет

ACB доғасының барлық нүктелерінің жиынын (154-сурет) берілген *AB кесіндісі α бұрышпен көрінетін нүктелер жиыны* деп атайды.

4 - е с е п. Сүйірбұрышты ABC үшбұрышының A төбесі оған сырттай сызылған шеңбердің O центрімен кесінді арқылы қосылған және үшбұрыштың AH биіктігі жүргізілген. $\angle BAH = \angle OAC$ болатынын дәлелдеу керек.



155-сурет

Д ә л е л д е у і. AO түзуін жүргізіп, оның шеңбермен қиылысу нүктесін D деп белгілейік (155-сурет). Сонда AC доғасына тірелетін іштей сызылған $\angle ADC = \angle ABC$ болады. Шеңбердің диаметріне тірелгендіктен, $\angle ACD$ тік болады. Сонда, $\angle DAC = 90° - \angle ADC$ және $\angle BAH = 90° - \angle ABC$.

Бұдан $\angle BAH = \angle DAC$, яғни $\angle BAH = \angle OAC$ шығады, дәлелдеу керегі де осы еді.

СҰРАҚТАР

1. Қандай бұрыш центрлік бұрыш деп аталады?
2. Доғаның градустық өлшемі қалай анықталады?
3. Қандай бұрышты шеңберге іштей сызылған бұрыш деп атайды?
4. Шеңберге іштей сызылған бұрышты өлшеу туралы теореманы тұжырымдап, дәлелдеңдер.
5. Жарты шеңберге тірелетін шеңберге іштей сызылған бұрыштың градустық өлшемі неге тең?

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

260. Шеңбердің екі параллель хордасының арасындағы доғалардың градустық өлшемдері тең болатынын дәлелдеңдер.

261. Шеңберге іштей сызылған: а) 45°; ә) 60°; б) 90°; в) 150°-қа тең бұрыш салыңдар.

262. Хорда шеңберді градустық өлшемдері 4 : 5 қатынасындай етіп екі доғаға бөледі. Осы хордаға тірелетін шеңберге іштей сызылған бұрыш неге тең?

В деңгейі

263. а) A, B, C нүктелері шеңберде жатыр. Егер AC хордасы радиусқа тең болса, $\angle ABC$-ны табыңдар. ә) A, B, C және D нүктелері шеңберде жатыр. Егер $\angle ABC = 60°$ болса, $\angle ADC$ неге тең?

264. а) AB хордасы 105°-қа тең доғаны, ал AC хордасы 45°-қа тең доғаны кереді. $\angle BAC$-ны табыңдар. ә) 52°-қа тең доғаны керетін AB хордасы мен BC диаметрінің арасындағы бұрышты табыңдар.

265. AOB центрлік бұрышы AB доғасына тірелетін іштей сызылған бұрыштан 42°-қа артық. Осы бұрыштардың әрқайсысын табыңдар.

266. Шеңбердің AB және CD хордалары K нүктесінде қиылысады. Егер AD доғасының градустық өлшемі 50°-қа, ал BC доғасынікі 83°-қа тең болса, BKC бұрышын табыңдар.

267. Шеңберден тыс жатқан нүктеден жүргізілген екі қиюшының арасындағы доғалардың градустық өлшемдері 41° және 135° болса, қиюшылардың арасындағы сүйір бұрышты табыңдар.

С деңгейі

268. Шеңбердің AB хордасы CD диаметріне параллель. Егер $AC = 3$ дм, $BC = 4$ дм болса, AB-ны табыңдар.

269. $AB = 4$ см, $\angle C = 40°$ және CH биіктігі 5 см-ге тең болатын ΔABC-ны салыңдар.

20. Шеңбердің жанамасы мен қиюшысының, қиылысатын хордаларының қасиеттері

Тақырыпты оқу барысында:

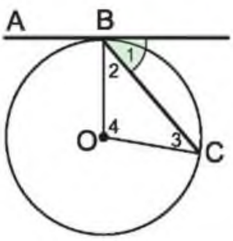
• жанама мен хорданың арасындағы бұрышты өлшеу туралы теореманы білесіңдер;

• ортақ нүктеден шеңберге жүргізілген жанама мен қиюшының қасиеті туралы теореманы білесіңдер;

• шеңбердің қиылысатын екі хордасының қасиеті туралы теореманы білесіңдер;

• шеңбердің жанамасының және қиюшысының, қиылысатын хордаларының қасиеттерін есептер шығаруда қолдануды білетін боласыңдар.

Теорема (*жанама мен хорданың арасындағы бұрышты өлшеу туралы*). **Жанама мен жанасу нүктесі арқылы өтетін қиюшының арасындағы бұрыштың градустық өлшемі осы бұрыш қамтитын доғаның градустық өлшемінің жартысына тең.**

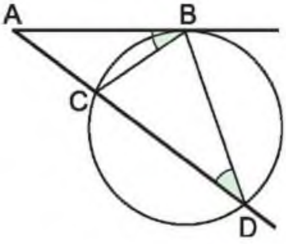


156-сурет

Дәлелдеуі. Центрі O нүктесі болатын шеңбер мен AB жанамасы және BC хордасы берілген болсын (156-сурет). OB және OC радиустарын жүргізейік. Сонда $\angle 2 = \angle 3$ болады (теңбүйірлі ΔBOC-ның табанындағы бұрыштары ретінде). Жанаманың қасиеті бойынша $\angle 1 + \angle 2 = 90°$, бұдан $\angle 1 = 90° - \angle 2$. Үшбұрыштың бұрыштарының қосындысы болатын $\angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180°$. Бұдан $\angle 2 = \angle 3$ екенін ескере отырып, мынаны аламыз: $\angle 4 = 180° - 2 \cdot \angle 2$. $\angle 1$ мен $\angle 4$-ті салыстыра отырып, мынаны аламыз: $\angle 1 = 0{,}5 \cdot \angle 4$. $\angle 4$ центрлік бұрыш болғандықтан, $\angle 4 = \smile BC$. Демек, $\angle 1 = 0{,}5 \cdot (\smile BC)$. Теорема дәлелденді.

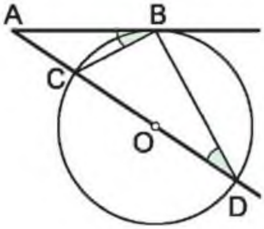
Теорема (*шеңберге бір нүктеден жүргізілген жанама мен қиюшының қасиеті*). **Егер шеңберде жатпайтын A нүктесі арқылы оған AB жанамасы (B – жанасу нүктесі) мен шеңбермен ортақ нүктелері C мен D болатын AD қиюшысы жүргізілсе, онда $AB^2 = AC \cdot AD$ болады.**

Дәлелдеуі. Шеңбердің BC және BD хордаларын жүргізейік (157-сурет). Сонда, үшбұрыштардың ұқсастығының бірінші белгісі бойынша $\Delta ADB \sim \Delta ABC$ ($\angle A$ – ортақ, $\angle ABC = \angle ADB$, себебі олардың әрқайсысы BC доғасының жартысымен өлшенеді). Осы үшбұрыштардың ұқсастығынан мынаны аламыз: $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB}$. Бұдан $AB^2 = AC \cdot AD$ болады, дәлелдеу керегі де осы еді.



157-сурет

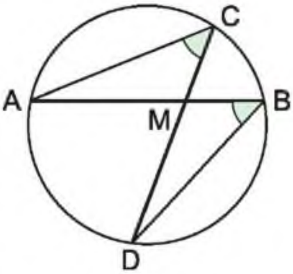
Бұл теоремадан шығатыны, егер шеңбердің радиусы R-ге, ал A нүктесінен оның центріне дейінгі қашықтық d-ға тең болса, онда $\boldsymbol{AB^2 = AC \cdot AD = d^2 - R^2}$ болады (AD қиюшысы шеңбердің центрінен өтуі де мүмкін (158-сурет), онда $AC = d - R$, ал $AD = d + R$).



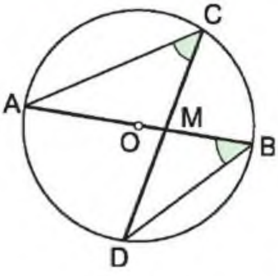
158-сурет

Теорема (*шеңбердің қиылысатын екі хордасының қасиеті туралы*). **Егер шеңбердің AB мен CD хордалары M нүктесінде қиылысса, онда бір хорданың кесінділері ұзындықтарының көбейтіндісі екінші хорданың кесінділері ұзындықтарының көбейтіндісіне тең болады, яғни $MA \cdot MB = CM \cdot MD$.**

Дәлелдеуі. AC және BD хордаларын жүргізіп, ACM және DBM үшбұрыштарын қарастырайық (159-сурет). Олар үшбұрыштардың ұқсастығының бірінші белгісі бойынша ұқсас болады, себебі $\angle ACD = \angle ABD$ (AD доғасына тірелетін шеңберге іштей сызылған бұрыштар ретінде), $\angle AMC = \angle BMD$ (вертикаль бұрыштар). Бұдан $\frac{MA}{MD} = \frac{CM}{MB}$, $MA \cdot MB = CM \cdot MD$ болады. Дәлелдеу керегі де осы еді.



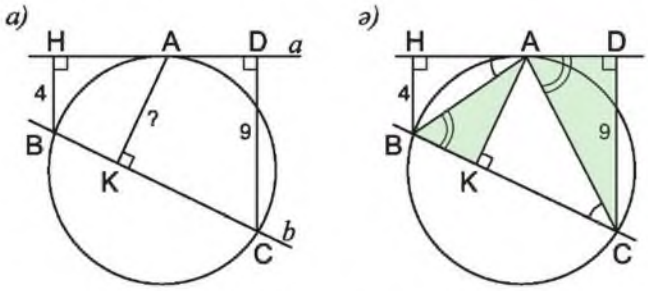
159-сурет



160-сурет

Бұл теоремадан шығатыны, егер шеңбердің радиусы R-ге, ал M нүктесінен оның центріне дейінгі қашықтығы d-ға тең болса, онда $\boldsymbol{MA \cdot MB = CM \cdot MD = R^2 - d^2}$ болады. (AB хордасы шеңбердің центрінен өтуі де мүмкін (160-сурет), сонда $MB = R - d$, ал $MA = R + d$ болады.)

1 - е с е п. a түзуі шеңберді A нүктесінде жанайды, ал b түзуі оны B және C нүктелерінде қиып өтеді (161, a-сурет). Егер B және C нүктелерінен a түзуіне дейінгі қашықтық, сәйкесінше, 4 см және 9 см болса, A нүктесінен b түзуіне дейінгі қашықтықты табу керек.

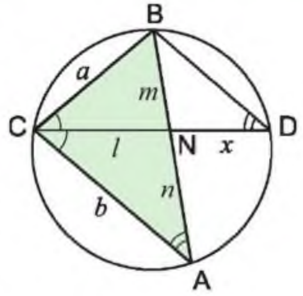


161-сурет

Ш е ш у і. AB және AC хордаларын жүргізейік (161, ә-сурет). Сонда екі жұп ұқсас үшбұрыштар шығады: $\Delta ABK \sim \Delta CAD$, себебі $\angle B = \frac{1}{2} \cdot \smile AC = \angle A$ және $\angle K = \angle D = 90°$; $\Delta ABH \sim \Delta ACK$, себебі $\angle A = \frac{1}{2} \cdot \smile AB = \angle C$ және $\angle H = \angle K = 90°$. Осы үшбұрыштардың ұқсастығынан шығатыны: $\frac{AK}{9} = \frac{AB}{AC}$ және $\frac{AB}{AC} = \frac{4}{AK}$. Демек, $\frac{AK}{9} = \frac{4}{AK}$, бұдан $AK^2 = 36$, $AK = 6$ см.

Ж а у а б ы. 6 см.

2 - е с е п. ABC үшбұрышында $BC = a$, $AC = b$, CN – биссектриса, $BN = m$, $AN = n$. Дәлелдеу керек: $\boldsymbol{CN} = \sqrt{ab - mn}$.



162-сурет

Дәлелдеуі. $CN = l$ деп және ABC үшбұрышына сырттай сызылған шеңбер мен CN биссектрисасының қиылысу нүктесін D деп белгілейік, ал $ND = x$ болсын (162-сурет). Шеңбердің қиылысатын хордаларының қасиеті бойынша $l \cdot x = m \cdot n$. $\Delta CBD \sim \Delta CNA$, себебі оларда $\angle BCD = \angle ACN$ шарт бойынша және $\angle BDC = \angle CAN = \frac{1}{2}\smile BC$. Демек, $\frac{a}{l} = \frac{l+x}{b}$. Бұдан мынаны аламыз: $x = \frac{mn}{l}$ және $x = \frac{ab}{l} - l$, $\frac{mn}{l} = \frac{ab}{l} - l$, $mn = ab - l^2$, $l = \sqrt{ab - mn}$.

СҰРАҚТАР

1. Шеңбердің жанамасы мен жанасу нүктесінен жүргізілген хордасының арасындағы бұрышының градустық өлшемі неге тең?
2. Бір нүктеден шеңберге жүргізілген жанама мен қиюшы туралы теореманы тұжырымдап, дәлелдеңдер.
3. Шеңбердің қиылысатын хордалары туралы теореманы тұжырымдап, дәлелдеңдер.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

270. A және B нүктелері шеңберді градустық өлшемдерінің қатынасы 7 : 17 қатынасындай болатын AMB және ANB доғаларына бөледі. A нүктесі арқылы шеңберге CD жанамасы жүргізілген. CD және AB түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.

271. O нүктесі центрі болатын шеңберге AB жанамасы (B – жанасу нүктесі) және шеңбермен ортақ нүктелері C және D болатын AO қиюшысы (C нүктесі A мен O нүктелерінің арасында жатыр) жүргізілген. Егер $\smile BD = 124°$ болса, $\angle ABC$ мен $\angle BAC$-ны табыңдар.

272. а) Шеңбердің AB және CD хордалары M нүктесінде қиылысады және $CM = MD$, $AM = 8$ см, $MB = 2$ см. CD хордасын табыңдар. ә) Шеңбердің қиылысатын екі хордасының бірі қиылысу нүктесінде 12 см және 18 см-ге тең кесінділерге, ал екіншісі 3 : 8 қатынасындай кесінділерге бөлінеді. Екінші хорданың ұзындығын табыңдар. б) Шеңбердің AB және CD хордалары M нүктесінде қиылысады. $AB = 15$ см, $CM = 9$ см, $MD = 4$ см, ал A нүктесінен C нүктесіне дейінгі қашықтық 11 см болса, осы хордалардың арасындағы сүйір бұрышты табыңдар.

В деңгейі

273. Шеңбердің 2,6 см-ге тең радиусына оның центрінен 1 см қашықтықта C нүктесі белгіленген. C нүктесі арқылы 5 см-ге тең AB хордасы жүргізілген. AC және CB кесінділерін табыңдар.

274. Шеңберден тыс жатқан A нүктесі арқылы шеңберге AB жанамасы (B – жанасу нүктесі) мен шеңберді C және D нүктелерінде (C нүктесі A мен D-ның арасында жатыр) қиятын қиюшы жүргізілген. $AB = 16$ см, $AD = 32$ см, ал шеңбердің центрінен қиюшыға дейінгі қашықтық 5 см-ге тең екені белгілі болса, шеңбердің радиусын табыңдар.

275. Шеңберден тыс жатқан B нүктесі арқылы шеңберге BM (M – жанасу нүктесі) мен шеңберді C және D нүктелерінде (C нүктесі B мен D-ның арасында жатыр) қиятын қиюшы жүргізілген. $BD = 12$ см, $BM = \frac{2}{3} \cdot CD$ екені белгілі болса, BM кесіндісінің ұзындығын табыңдар.

276. а) Тікбұрышты үшбұрыштың катеттері 6 см және 12 см. Оның тік бұрышынан жүргізілген биссектрисасының ұзындығын табыңдар. ә) Егер ΔABC-да $AC = 7$ см, $CB = 9$ см және $AD = CD$ болса, оның CD биссектрисасының ұзындығын табыңдар.

С деңгейі

277. Шеңберден тыс жатқан M нүктесі арқылы оған екі қиюшы жүргізілген, олардың біреуі шеңберді A және B, екіншісі C және D нүктелерінде қияды. $MA \cdot MB = MC \cdot MD$ болатынын дәлелдеңдер.

278. A және B нүктелерінде қиылысатын екі шеңбер мен олардың MN ортақ жанамасы берілген, мұндағы M және N – жанасу нүктелері. AB түзуінің MN кесіндісін қақ бөлетінін дәлелдеңдер.

279. Әртүрлі қабырғалы BAC үшбұрышының AN биссектрисасы: а) оның AH биіктігі мен оған сырттай сызылған шеңбердің AD диаметрінің арасындағы бұрышты қақ бөлетінін; ә) AH биіктігі мен AK медианасының арасында жататынын дәлелдеңдер.

ПРАКТИКАЛЫҚ ТАПСЫРМА

Кез келген үш үшбұрыш салып, олардың әрқайсысына іштей шеңбер сызыңдар. Осы шеңберлердің радиустары мен үшбұрыштардың қабырғаларын өлшеңдер. Үшбұрыштың ауданы мен периметрінің және іштей сызылған шеңбердің радиусының арасында қандай тәуелділік орната аласыңдар?

21. Тригонометрияны үшбұрыш аудандарының формулаларын қорытып шығаруға және есептер шығаруда қолдану

Тақырыпты оқу барысында:

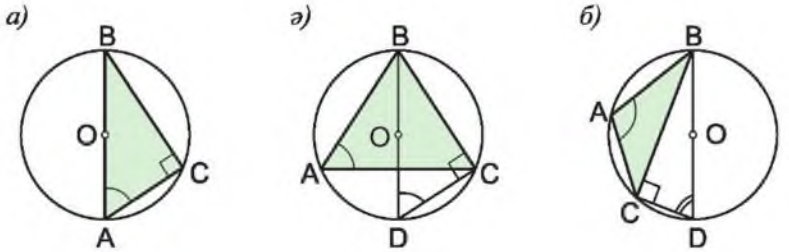
• үшбұрыштың ауданы, қабырғалары мен оған іштей және сырттай сызылған шеңберлер радиустарының арасындағы тәуелділікті өрнектейтін формулаларды білесіңдер;

• сол формулаларды есептер шығаруда қолдануды білетін боласыңдар.

1-есеп. Кез келген үшбұрыштың қабырғасының оған қарсы жатқан бұрышының синусына қатынасы үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің диаметріне тең болатынын дәлелдеу керек.

Дәлелдеуі. ΔABC берілген және оған сырттай сызылған шеңбердің центрі O, радиусы R болсын. $\frac{BC}{\sin A}=2R$ болатынын дәлелдейік.

Егер шеңбердің центрі үшбұрыштың қабырғасында жатса (163, *а*-сурет), онда ол тікбұрышты болғаны, сондықтан $\frac{BC}{\sin A}=2R$. Егер шеңбердің центрі ΔABC-ның ішінде жатса (163, *ә*-сурет), онда шеңбердің BD диаметрін жүргіземіз, сонда $\angle BDC = \angle BAC$ (BC доғасына тірелетін іштей сызылған бұрыштар ретінде). Тікбұрышты ΔBCD-дан мынаны аламыз: $\frac{BC}{\sin D}=2R$. Демек, $\frac{BC}{\sin A}=2R$. Егер шеңбердің центрі ΔABC-ның сыртында жатса (163, *б*-сурет), онда $\angle D = 180° - \angle A$ және $\sin(180° - \angle A) = \sin A$ болғандықтан, бұл жағдайда да $\frac{BC}{\sin A}=2R$ болады.

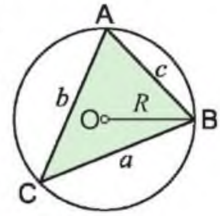


163-сурет

Дәл осылай, $\dfrac{AC}{\sin B} = 2R$ және $\dfrac{AB}{\sin C} = 2R$ болатыны да дәлелденеді.

Осы есептің шешуінен синустар теоремасын: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$ дәлелдеудің тағы бір әдісі шығатынын ескерте кетейік.

2 - е с е п. **Радиусы *R* болатын шеңберге іштей сызылған, қабырғалары *a*, *b*, *c* болатын үшбұрыштың ауданы** $S = \dfrac{abc}{4R}$ **болатынын** дәлелдеу керек.



164-сурет

Д ә л е л д е у і. ΔABC берілген болсын (164-сурет). Оның ауданы $S = \dfrac{1}{2}bc \cdot \sin A$. $\dfrac{BC}{\sin A} = 2R$ болғандықтан, $\sin A = \dfrac{a}{2R}$ болады. Сонда $S = \dfrac{abc}{4R}$. Дәлелдеу керегі де осы еді.

3 - е с е п. **Үшбұрыштың *S* ауданы оның *p* жарты периметрі мен оған іштей сызылған шеңбердің *r* радиусының көбейтіндісіне тең:** $S = pr$. Өздігінен дәлелдеңдер.

4 - е с е п. Қабырғалары a, b және c болатын үшбұрыштың ауданы $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ болатынын дәлелдеу керек, мұндағы p – үшбұрыштың жарты периметрі (Герон формуласы, б. з. I ғ-ғы ежелгі грек оқымыстысы).

Д ә л е л д е у і. ABC үшбұрышының ауданы $S = \dfrac{1}{2}ab \cdot \sin C$ (164-сурет).

$\sin C$-ны a, b, c және p арқылы өрнектейік. $\sin^2 C + \cos^2 C = 1$ болғандықтан, $\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C}$ болады.

Косинустар теоремасы бойынша $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$, бұдан $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$. Сонда $\sin C = \sqrt{1 - \left(\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{(2ab)^2 - (a^2+b^2-c^2)^2}{(2ab)^2}} =$

$$= \sqrt{\frac{(2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2)}{(2ab)^2}} = \sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)}{(2ab)^2}} =$$

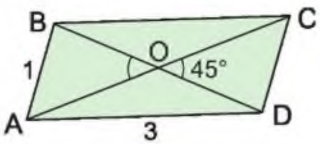
$$= \frac{\sqrt{2p \cdot 2(p-c) \cdot 2(p-b) \cdot 2(p-a)}}{2ab} = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{ab}.$$

$\sin C$-ның соңғы өрнегін $S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin C$ формуласына қойып, мынаны аламыз: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Дәлелдеу керегі де осы еді.

5 - е с е п. Қабырғалары 1 см, 3 см және диагональдарының арасындағы бұрышы 45° болатын параллелограмм салуға бола ма?

Ш е ш у і. Осындай $ABCD$ параллелограмы бар болады делік. Оның BD және AC диагональдары O нүктесінде қиылысатын болсын (165-сурет). $AO = x$ см, $BO = y$ см деп белгілейік.

Косинустар теоремасы бойынша ΔAOD-дан: $AD^2 = AO^2 + DO^2 - 2 \cdot AO \cdot DO \cdot \cos AOD$, $\cos 135° = \cos(90° + 45°) = -\cos 45°$, $9 = x^2 + y^2 + 2xy \cdot \cos 45°$, ал ΔAOB-дан: $1 = x^2 + y^2 - 2xy \cdot \cos 45°$ шығады.



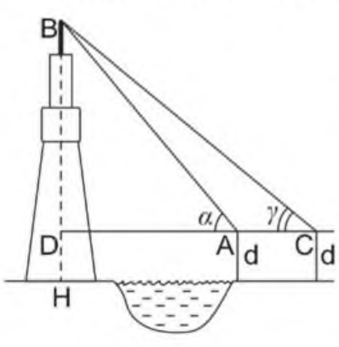
165-сурет

Осы теңдіктердің сол жақтары мен оң жақтарын мүшелеп азайтып, мынаны аламыз: $8 = 4xy \cdot \cos 45°$.

Параллелограмның ауданы $S = \frac{1}{2}AC \cdot BD \cdot \sin\angle AOB = \frac{1}{2} \cdot 4xy \times \sin 45° = 4$ (см^2).

Бірақ параллелограмның ауданы оның іргелес екі қабырғасы мен олардың арасындағы 90°-қа тең бұрыштың синусына көбейтіндісінен аспауы керек. Біздің жағдайда бұл аудан 3 см^2-ден аспауы керек. Демек, мұндай параллелограмм салуға болмайды.

Ж а у а б ы. Болмайды.



166-сурет

6 - е с е п. Қасына бара алмайтын заттың биіктігін қалай өлшеуге болады (166-сурет)?

Ш е ш у і. Затқа жақындап бара алатындай тегіс жерден екі бұрыштың шамасын: $\angle DAB = \alpha$, $\angle DCB = \gamma$ және AC кесіндісін өлшейміз (166-сурет). Сонда ΔABC-дан мынаны аламыз: $\frac{AB}{\sin\gamma} = \frac{AC}{\sin(\alpha-\gamma)}$, себебі $\angle ABC = \alpha - \gamma$ (үшбұрыштың сыртқы бұрышының қасиеті бойынша). Бұдан $AB = \dfrac{AC \cdot \sin\gamma}{\sin(\alpha-\gamma)}$.

Тікбұрышты ΔBDA-дан мынаны аламыз: $BD = AB \cdot \sin\alpha = \dfrac{AC \cdot \sin\gamma \cdot \sin\alpha}{\sin(\alpha-\gamma)}$. Ізделінді биіктік $BH = \dfrac{AC \cdot \sin\gamma \cdot \sin\alpha}{\sin(\alpha-\gamma)} + d$ болады.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

280. Үшбұрыштың бір қабырғасы b-ға, ал оған қарсы жатқан бұрышы β-ға тең. Егер: а) $b = 8$ см, $\beta = 135°$; ә) $b = 4\sqrt{3}$ дм, $\beta = 120°$ болса, осы үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің радиусын табыңдар.

281. а) Шеңберге іштей сызылған үшбұрыштың $2\sqrt{3}$ см-ге тең қабырғасынан шеңбердің центріне дейінгі қашықтық 1 см-ге тең. Осы қабырғаға қарсы жатқан бұрышты табыңдар. ә) ΔABC-ға сырттай сызылған шеңбердің центрі үшбұрыштың сыртында жатыр, оның A бұрышы – ең үлкені. Егер $AB = 3$ м, $AC = 4$ м және $S_{\Delta ABC} = 3$ м^2 болса, $\angle A$-ны табыңдар.

282. Сүйірбұрышты ΔABC-да $CB = 5$ см, $\sin\angle C = 0{,}64$, ал оған сырттай сызылған шеңбердің центрінен BC қабырғасына дейінгі қашықтық 0,5 см-ге тең. 0,1 см-ге дейінгі дәлдікпен AB қабырғасын табыңдар.

283. а) Теңбүйірлі ABC үшбұрышының табаны $AB = 18$ см, $AC = 15$ см. ΔABC-ға: 1) іштей; 2) сырттай сызылған шеңбердің радиусын табыңдар. ә) Үшбұрыштың екі қабырғасы 6 см және 8 см, ал олардың арасындағы бұрышы 60° екені белгілі. Осы үшбұрышқа іштей сызылған шеңбердің радиусын 0,1 см-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

284. а) Үшбұрыштың екі қабырғасы 10 см және 7 см-ге, ал олардың арасындағы бұрыштың косинусы $\frac{4}{5}$-ке тең. Осы үшбұрыштың ауданын табыңдар. ә) Қабырғалары $CB = a$ және $CA = b$ болатын ΔABC-ның ауданы ең үлкен болуы үшін C бұрышы қандай болуы керек?

285. Қабырғалары: а) 13 см, 14 см және 15 см; ә) 12 см, 16 см және 21 см болатын үшбұрыштың ауданын табыңдар.

286. Табандары 4 см және 9 см-ге, үлкен бүйір қабырғасы 5 см-ге, ал оған іргелес бұрышы 36°-қа тең болатын трапецияның ауданы мен кіші диагоналін табыңдар.

287. Қабырғасы 7,5 см-ге, бұрышы 35°-қа тең болатын ромбтың диагональдары мен ауданын табыңдар.

В деңгейі

288. ΔABC-да $AB = 13$ см, $BC = 14$ см, $AC = 15$ см, AN – биіктік, M – AB қабырғасының ортасы. AMN үшбұрышына сырттай сызылған шеңбердің радиусын табыңдар.

289. Тікбұрышты үшбұрыштың тік бұрышынан жүргізілген биссектрисасының ұзындығы $\frac{60\sqrt{2}}{17}$ см-ге, гипотенузасы 13 см-ге тең. Осы үшбұрышқа іштей сызылған шеңбердің радиусын табыңдар.

290. а) Тіктөртбұрыштың ауданы $9\sqrt{3}$ см^2, ал диагональдарының арасындағы бұрышы 120°. Тіктөртбұрыштың қабырғаларын табыңдар. ә) Тіктөртбұрыштың диагоналі 7,5 см-ге, ал диагональдарының арасындағы бұрышы 48°-қа тең. Тіктөртбұрыштың периметрін табыңдар.

291. Тікбұрышты үшбұрыштың тік бұрышының төбесінен 12 см-ге тең биіктігі мен 15 см-ге тең медианасы жүргізілген. Осы үшбұрыштың қабырғалары мен сүйір бұрыштарын табыңдар.

292. а) $ABCD$ параллелограмында $AB = 4$ см, $AD = 5$ см және диагоналі $BD = 6$ см. Параллелограмның CBD бұрышы мен ауданын табыңдар. ә) Екі медианасы 6 см және 8 см-ге, ал олардың арасындағы бұрышы 100°-қа тең болатын үшбұрыштың ауданын 0,1 см^2-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

293. $ABCD$ параллелограмында $\angle A = 60°$, $BD = 2\sqrt{31}$ см. Диагональдарының қиылысу нүктесінен AD қабырғасына жүргізілген перпендикуляр $2,5\sqrt{3}$ см-ге тең. Параллелограмның AC диагоналі мен қабырғаларын табыңдар.

294. 60°-қа тең бұрыштың ішіндегі нүктеден оның қабырғаларына дейінгі қашықтық 2 см-ге және 5 см-ге тең. Осы нүктеден бұрыштың төбесіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

295. ABC үшбұрышының BC және AC қабырғаларының қосындысы мен A және B бұрыштары белгілі болса, осы берілгендері бойынша оның қабырғаларын табуға бола ма? Жауабын түсіндіріңдер.

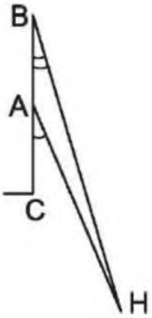
296. Тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасы $5\sqrt{5}$ см, ал катеті 5 см. Оның тік бұрышының төбесінен жүргізілген биссектрисасының ұзындығын табыңдар.

297. Теңбүйірлі үшбұрыштың табаны мен бүйір қабырғасы, сәйкесінше, 5 см және 20 см. Оның табанындағы бұрышының биссектрисасын табыңдар.

298. Қазақстанның Қарақия ойпатының ең төменгі H нүктесі (167-сурет) ойпаттың бір шетіндегі C нүктесінен 100 м биіктіктен 25°-қа тең HAC бұрышымен, ал 200 м биіктіктен 18°-қа тең HBC бұрышымен көрінеді (бір кездерде ойпаттың түбінде Батыр деп аталатын тұзды көл болған). Осы ойпаттың C нүктесіне (шетіне) қарағандағы тереңдігін анықтаңдар. (Жауабын 1 м-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.)

а)

ә)



167-сурет

C деңгейі

299. Тікбұрышты ΔABC-да $\angle A = 60°$, оның ішкі M нүктесінен AB, BC және AC қабырғаларына дейінгі қашықтықтар, сәйкесінше, 3 см, 4 см және 5 см-ге тең. Осы үшбұрыштың ауданын 0,1 см^2-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

300. Теңқабырғалы немесе тікбұрышты үшбұрыштың ауданы $\frac{1}{2}\pi R^2$-тан кем болатынын дәлелдеңдер, мұндағы R – үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің радиусы.

301. Периметрі 27 см-ге тең болатын теңқабырғалы үшбұрышқа іштей шеңбер сызылған. Содан кейін осы шеңберді және үшбұрыштың екі қабырғасын жанайтын екінші шеңбер салынған. Екінші шеңбердің радиусын табыңдар.

302. а) Радиусы R болатын шеңбердің AB диаметріне оның O центрінен m қашықтықта M нүктесі белгіленген. AB-ға параллель болатын қайсыбір CD хордасы жүргізілген. Қабырғалары CM және DM болатын екі шаршының аудандарының қосындысын табыңдар. ә) ABC үшбұрышының BH биіктігі B бұрышын 2 : 1, ал AC қабырғасын A нүктесінен бастап есептегенде 3 : 1 қатынасында бөледі. C бұрышын табыңдар.

303. Екі параллель түзу мен олардың арасында жататын нүкте берілген. Тік бұрышының төбесі осы нүктеде, ал қалған екі төбесі берілген түзулерде жататын, ауданы ең аз болатын тікбұрышты үшбұрыш салыңдар.

22. «Үшбұрыштарды шешу» бөлімін қайталауға арналған жаттығулар

А деңгейі

304. а) ΔABC-да $\angle C = 135°$, биіктіктері: $AK = 4\sqrt{2}$ см және $BH = 8$ см. Осы үшбұрыштың AB қабырғасы мен ауданын табыңдар. ә) Қабырғасы 20 м-ге, оған іргелес бұрыштары 37° және 53°-қа тең болатын үшбұрыш тәрізді жер телімінің ауданын табыңдар.

305. ΔABC-да $\angle A = 30°$, $\angle B = 45°$; биіктік $BD = 3\sqrt{2}$ см. Үшбұрыштың қабырғаларын табыңдар.

306. Мына берілгендері бойынша ABC үшбұрышын шешіңдер: а) $AB = 8$, $\angle A = 143°$, $\angle B = 22°$; ә) $BC = 9$, $\angle B = 33°$, $\angle C = 66°$.

307. Егер ΔABC-да $AB = 3$ см, $AC = 5$ см, $\angle A = 60°$ болса, оның белгісіз қабырғасы мен бұрыштарын табыңдар.

В деңгейі

308. Ауданы шамамен 662 м^2-ге, $\angle A = 60°$, $\angle C = 45°$ болатын үшбұрыш тәрізді жер телімінің AB және AC қабырғаларын 0,1 м-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

309. Теңбүйірлі үшбұрыштың бүйір қабырғасы 8 см-ге, ал төбесіндегі бұрышы 72°-қа тең. Үшбұрыштың табанының және табанындағы бұрыштың төбесінен жүргізілген биссектрисасының ұзындықтарын табыңдар.

310. Қабырғалары a, b, диагоналі d болатын параллелограмда: а) $d^2 = a^2 + b^2 + \sqrt{3}\,ab$ болса; ә) диагоналінің квадраты сыбайлас екі қабырғасы айырымының толымсыз квадратына тең болса, оның бұрыштарын табыңдар.

311. а) Егер тіктөртбұрыштың диагоналі 10 см-ге, ал диагональдарының арасындағы бұрышы 45°-қа тең болса, оның қабырғалары мен ауданын табыңдар. ә) Тіктөртбұрыштың диагональдары 70° бұрышпен қиылысады, ал оның ауданы 67,6 м^2. Тіктөртбұрыштың қабырғаларын 0,01 м-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

С деңгейі

312. а) Теңбүйірлі үшбұрыштың төбесіндегі бұрышы 120°-қа, ал оған іштей сызылған шеңбердің радиусы 5 см-ге тең. Үшбұрыштың ауданын 1 $см^2$-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар. ә) Теңбүйірлі үшбұрыштың ауданы 1 $дм^2$-ге, ал табанындағы бұрышы 40°-қа тең. Осы үшбұрышқа іштей сызылған шеңбердің радиусын 0,1 дм-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

313. а) Әкесі үлкен қабырғасын үйдің іргесіне тақап, төбесіндегі бұрышы 150°-қа, ауданы 4 $м^2$-ге тең болатын үшбұрыш тәрізді гүлзар орналастырды және оны қоршамақшы болды. Қоршаудың ең қысқа ұзындығы қандай болуы мүмкін?

ә) Тоғызыншы сынып оқушыларына мектеп жанындағы учаскеге периметрі ең аз болатын, ауданы 9 $м^2$-ге, ал бұрыштарының бірі 120°-қа тең болатын үшбұрышты гүлзар жасау тапсырылды. Осы гүлзардың периметрін 0,1 м-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

314. 1A) ABC үшбұрышында $\angle ABC = 80°$, $\angle BCA = 40°$, $BC = 2\sqrt{3}$ м. Үшбұрыштың белгісіз қабырғаларын 0,01 м-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

2A) Қабырғалары 9 м, 12 м және 12 м болатын үшбұрыштың бұрыштарын табыңдар.

3B) Үшбұрыштың ауданы $3\sqrt{3}$ $дм^2$, ал екі қабырғасы 3 дм және 4 дм-ге тең. Үшбұрыштың үшінші қабырғасын табыңдар.

4C) Үшбұрыштың қабырғалары 3 см, 6 см және $\sqrt{45}$ см. Оның: 1) үлкен бұрышының төбесінен жүргізілген биссектрисасын; 2) кіші бұрышының төбесінен жүргізілген медианасын табыңдар.

БҰЛ ҚЫЗЫҚТЫ!

Ертеде үшбұрыштың және басқа да көпбұрыштардың белгісіз элементтерін тікелей өлшеу немесе есептеу арқылы тапқан, тригонометрия туралы түсініктері болмаса да, іс жүзінде тригонометриялық катынастарды пайдаланған. Мысалы, Евклид үшбұрыштың ауданын табуға қазіргі кезде $S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin C$ формуласымен өрнектелетін қатынасты пайдаланған. Практикалық есептерді шығаруға тригонометриялық кестелер қажет болды. Оларды құрастырумен және дәлірек анықтаумен Птолемей (I–II ғасыр) заманынан бастап көптеген оқымыстылар жүздеген жылдар бойы айналысқан болатын. Тарихи мағлұматтарға қарағанда тригонометриялық ілім Үндістанда туындаған. Мысалы, синустар теоремасын үнді математигі Брахмагупта (598–660 жж.) ашқан, сонымен қатар шеңберге іштей сызылған төртбұрыштың ауданын есептеу формуласын ұсынған болатын: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, мұндағы p – төртбұрыштың жарты периметрі, a, b, c, d – оның қабырғаларының ұзындықтары. Синустар және косинустар теоремалары кейінірек дәлелденген, ол дәлелдеу ортаазиялық оқымысты әл-Бирунидің (973–1048 жж.) еңбектерінде де бар. Еуропада XVI жүзжылдықта араб тілінен аударма кітаптардан кейін ғана тригонометрияның дамуы басталды.

Тригонометрия қазіргі кезде геометрияда, алгебрада, физикада және басқа да ғылымдарда кеңінен қолданылады.

Брахмагупта

әл-Бируни

IV. ШЕҢБЕР. КӨПБҰРЫШТАР

Бөлімді оқу нәтижесінде

• шеңберге іштей сызылған және шеңберге сырттай сызылған көпбұрыштың; дұрыс көпбұрыштың анықтамаларын;
• шеңбердің ұзындығы және оның доғасының ұзындығы, дөңгелектің, сектордың, сегменттің ауданы ұғымдарын;
• шеңберге іштей сызылған және шеңберге сырттай сызылған төртбұрыштың; дұрыс көпбұрыштардың қасиеттерін;
• шеңберге іштей сызылған және шеңберге сырттай сызылған төртбұрыштың белгілерін;
• шеңбер мен оның доғасының ұзындықтарының, дөңгелектің, сектордың және сегменттің аудандарының формулаларын **білу керек**.

• шеңберге іштей сызылған бұрышты өлшеудің; шеңберге іштей сызылған және шеңберге сырттай сызылған төртбұрыштың; дұрыс көпбұрыштың қасиеттерін дәлелдей алу;
• шеңбердің, оның доғасының ұзындықтарының және дөңгелектің, секторы мен сегментінің аудандарының формулаларын қорытып шығара алу;
• есеп шығарғанда: шеңберге іштей сызылған бұрыштың, шеңберге іштей сызылған және шеңберге сырттай сызылған төртбұрыштың қасиеттерін; шеңберге іштей сызылған және шеңберге сырттай сызылған төртбұрыштың белгілерін, шеңбердің және оның доғасының ұзындығының, дөңгелек, сектор және сегмент аудандарының формулаларын қолдана алу;
• дұрыс көпбұрыштарды сала **алу керек.**

23. Шеңберге іштей сызылған төртбұрыштар

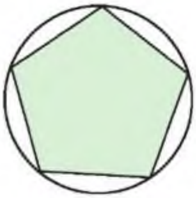
Тақырыпты оқу барысында:

• шеңберге іштей сызылған көпбұрыштың анықтамасын білесіңдер;

• шеңберге іштей сызылған төртбұрыштың қасиеттері мен белгілерін білесіңдер;

• осы қасиеттерді дәлелдеуді және есептер шығаруда қолдануды білетін боласыңдар.

Барлық төбелері шеңбер бойында жататын көпбұрышты шеңберге іштей сызылған деп, ал шеңберді көпбұрышқа сырттай сызылған деп атайды.

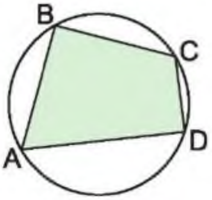


168-сурет

Мысалы, 168-суретте бесбұрыш шеңберге іштей сызылған, ал шеңбер оған сырттай сызылған.

Т е о р е м а. **Егер төртбұрыш шеңберге іштей сызылған болса, онда оның қарама-қарсы бұрыштарының қосындысы 180°-қа тең болады.**

Д ә л е л д е у і. $ABCD$ төртбұрышы шеңберге іштей сызылған болсын (169-сурет). Сонда $\angle B = 0,5 \cdot (\smile ADC)$, $\angle D = 0,5 \cdot (\smile ABC)$, $\angle B + \angle D = 0,5(\smile ADC + \smile ABC) = 180°$ болады. $ABCD$ төртбұрышының бұрыштарының қосындысы 360°-қа тең болғандықтан, $\angle A + \angle C = 360° - (\angle B + \angle D) = 180°$ болады. Теорема дәлелденді.



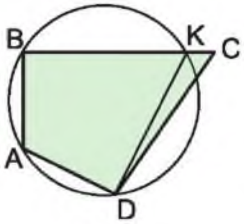
169-сурет

Төртбұрышты үшбұрышқа қарағанда шеңберге іштей сызу үнемі мүмкін бола бермейді.

Т е о р е м а (*шеңберге іштей сызылған төртбұрыштың белгісі*). **Егер төртбұрыштың қарама-қарсы бұрыштарының қосындысы 180°-қа тең болса, онда оны шеңберге іштей сызуға болады.**

Д ә л е л д е у і. $ABCD$ төртбұрышының қарама-қарсы бұрыштарының қосындысы 180°-қа тең болсын. A, B және D нүктелері арқылы шеңбер жүргізейік. $ABCD$ төртбұрышының C төбесі де осы шеңбердің бойында жататынын дәлелдейік.

C төбесі шеңберде жатпайды деп жориық. BC түзуі шеңберді K нүктесінде қиып өтсін және K нүктесі B мен C нүктелерінің арасын-

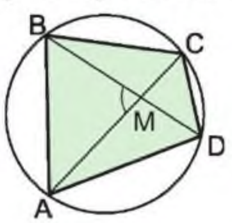


170-сурет

да жатсын (170-сурет). Сонда $\angle ADK = \angle ADC$ болады, себебі олардың әрқайсысы $180° - \angle ABC$ (шеңберге іштей сызылған төртбұрыштың қарама-қарсы бұрыштарының қасиеті бойынша $\angle ADK = 180° - \angle ABC$, теореманың шарты бойынша $\angle ADC = 180° - \angle ABC$). Бірақ олай болуы мүмкін емес, себебі бір жарты жазықтыққа DA сәулесінен $180° - \angle ABC$-ға тең бір ғана бұрыш салуға болады. Демек, біздің жоруымыз дұрыс болмады, яғни C нүктесі шеңберге тиісті екен. Осы жүргізілген дәлелдеуді C нүктесі B мен K нүктелерінің арасында жататын жағдайға да қолдануға болады.

Бұл теоремадан *параллелограмдардың ішінен тек тіктөртбұрышты (соның ішінде шаршыны), ал трапецияны тек теңбүйірлі болғанда ғана шеңберге іштей сызуға болатыны шығады.*

1-есеп. Радиусы R-ге тең шеңберге іштей сызылған төртбұрыштардың қайсысының ауданы ең үлкен болады?



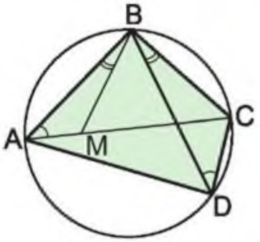
171-сурет

Шешуі. $ABCD$ төртбұрышы радиусы R болатын шеңберге іштей сызылған болсын (171-сурет). Төртбұрыштың AC және BD диагональдарын жүргізіп, олардың қиылысу нүктесін M деп белгілейік. $ABCD$ төртбұрышының ауданы $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin\angle AMB$. Егер AC, BD және $\sin\angle AMB$-ның мәндері ең үлкен болса, онда S-тің мәні де ең үлкен болады.

AC мен BD кесінділері шеңбердің диаметрлері болса ғана олардың мәндері ең үлкен болады, ал $\sin\angle AMB$ ең үлкен мәнді қабылдауы үшін $\angle AMB$ тік болуы керек. Сонда ізделінді төртбұрыш – диагоналі $2R$-ге тең шаршы.

Жауабы. Диагоналі $2R$-ге тең шаршы.

2-есеп. *Шеңберге іштей сызылған төртбұрыштың диагональдары ұзындықтарының көбейтіндісі оның қарама-қарсы қабырғалары көбейтінділерінің қосындысына тең болатынын* дәлелдеу керек (Птолемей теоремасы, б. д. д. I ғ.-ғы ежелгі грек оқымыстысы).



172-сурет

Д ә л е л д е у і. $ABCD$ төртбұрышы шеңберге іштей сызылған болсын. $BD \cdot AC = AB \cdot CD + AD \cdot BC$ болатынын дәлелдейік.

CBD бұрышына тең болатын ABM бұрышын салайық (172-сурет). Сонда:

1) $\Delta ABM \sim \Delta CBD$ (үшбұрыштардың ұқсастығының бірінші белгісі бойынша: $\angle ABM = \angle CBD$ – салуымыз бойынша, ал $\angle BAC = \angle BDC = 0{,}5 \cdot \smile BC$).

Демек, $\dfrac{AB}{BD} = \dfrac{MA}{CD} = \dfrac{BM}{BC}$, бұдан $AB \cdot CD = BD \cdot MA$.

2) $\Delta ABD \sim \Delta MBC$ (үшбұрыштардың ұқсастығының екінші белгісі бойынша $\angle ABD = \angle MBC$, себебі $\angle ABD = \angle ABM + \angle MBD$, ал $\angle MBC = \angle CBD + \angle MBD$ және $\dfrac{AB}{BM} = \dfrac{BD}{BC}$ болатыны ABM және CBD үшбұрыштарының ұқсастығынан алынған $\dfrac{AB}{BD} = \dfrac{BM}{BC}$ пропорциясынан шығады). Демек, $\dfrac{AD}{MC} = \dfrac{BD}{BC}$, бұдан $AD \cdot BC = MC \cdot BD$.

3) Сонда $AB \cdot CD + AD \cdot BC = BD \cdot MA + MC \cdot BD = BD \cdot (MA + MC) = BD \cdot AC$ болады. Дәлелдеу керегі де осы еді.

СҰРАҚТАР

1. Қандай төртбұрыш шеңберге іштей сызылған деп аталады?

2. Шеңберге іштей сызылған төртбұрыштың бұрыштарының қасиетін тұжырымдап, дәлелдеңдер.

3. Шеңберге іштей сызылған төртбұрыштың белгісін тұжырымдап, дәлелдеңдер.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

315. а) Ретімен алынған бұрыштарының қатынасы: а) 2 : 2 : 3 : 3; ә) 2 : 5 : 3 : 4; б) 3 : 5 : 3 : 1 қатынасындай болатын төртбұрышқа сырттай шеңбер сызуға бола ма?

316. Қарама-қарсы екі бұрышының қатынасы 3 : 5, ал басқа екеуінікі 4 : 5 қатынасындай болатын шеңберге іштей сызылған төртбұрыштың бұрыштарын табыңдар. ә) Шеңберге іштей сызылған *ABCD* төртбұрышының *A*, *B*, *C* және *D* нүктелері шеңберді градустық өлшемдері 17 : 21 : 19 : 15 қатынасындай болатын доғаларға бөледі. Осы төртбұрыштың бұрыштарын табыңдар.

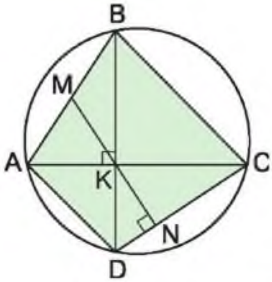
B деңгейі

317. Шеңберге іштей сызылған *ABCD* төртбұрышында $\angle A = 60°$, ал *B* бұрышы *A* бұрышынан 20 %-ға артық. Төртбұрыштың белгісіз бұрыштарын табыңдар.

318. *A* нүктесі берілген шеңбердің *BC* доғасын тең екі доғаға бөледі. Сол нүктеден *BC* хордасын, сәйкесінше, *M* және *N* нүктелерінде қиятын *AD* және *AK* хордалары жүргізілген. *DKNM* төртбұрышына сырттай шеңбер сызуға болатынын дәлелдеңдер.

319. а) Бір табаны екіншісінен 6 см-ге артық, ал іштей сызылған шеңберінің радиусы 4 см-ге тең болатын тікбұрышты трапецияның периметрін табыңдар. ә) *ABCD* трапециясы шеңберге іштей сызылған, оның *AD* табаны шеңбердің диаметрі болады, ал шеңбердің *BC* хордасы 60°-қа тең доғаны кереді. Егер шеңбердің радиусы *R*-ге тең болса, трапецияның ауданын табыңдар.

C деңгейі



173-сурет

320. Табандары 6 дм және 8 дм, ал биіктігі 1 дм болатын трапеция шеңберге іштей сызылған. Оның радиусын табыңдар.

321. Шеңберге іштей сызылған *ABCD* төртбұрышының диагональдары *K* нүктесінде тік бұрыш жасап қиылысады, *M* нүктесі – *AB* қабырғасының ортасы (173-сурет). *MK* түзуі *CD* хордасына перпендикуляр екенін дәлелдеңдер.

ПРАКТИКАЛЫҚ ТАПСЫРМА

Шеңбер сызып, оған сырттай төртбұрыш салыңдар және оның қабырғаларының ұзындықтарын өлшеңдер. Салынған төртбұрыштың қарама-қарсы қабырғалары ұзындықтарының қосындысын салыстырыңдар.

24. Шеңберге сырттай сызылған төртбұрыштар

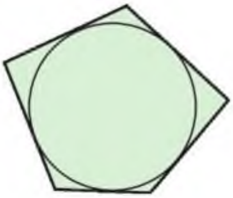
Тақырыпты оқу барысында:

• шеңберге сырттай сызылған көпбұрыштың анықтамасын білесіңдер;

• шеңберге сырттай сызылған төртбұрыштың қасиеттері мен белгілерін білесіңдер;

• осы қасиеттерді дәлелдеуді және есептер шығаруда қолдануды білетін боласыңдар.

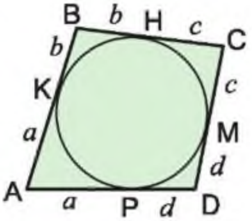
Барлық қабырғалары шеңбермен жанасатын көпбұрышты шеңберге сырттай сызылған деп, ал шеңберді көпбұрышқа іштей сызылған деп атайды.



174-сурет

Мысалы, 174-суретте бесбұрыш шеңберге сырттай сызылған, ал шеңбер оған іштей сызылған.

Теорема. **Егер төртбұрыш шеңберге сырттай сызылған болса, онда оның қарама-қарсы қабырғаларының қосындылары тең болады.**



175-сурет

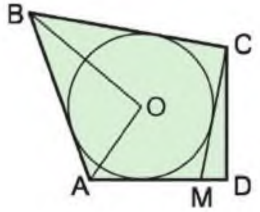
Дәлелдеуі. $ABCD$ төртбұрышы шеңберге сырттай сызылған және оның қабырғалары шеңберді K, H, M және P нүктелерінде жанайтын болсын (175-сурет). Бір нүктеден шеңберге жүргізілген жанамалардың қасиеті бойынша $AK = AP = a$, $BK = BH = b$, $CM = CH = c$, $DM = DP = d$. Сонда $AB + CD = a + b + c + d = BC + AD$. Дәлелдеу керегі де осы еді.

Төртбұрыш үшбұрыштай емес, оны әрқашан шеңберге сырттай сызуға мүмкін бола бермейді.

Теорема (*шеңберге сырттай сызылған төртбұрыштың белгісі*). **Егер төртбұрыштың қарама-қарсы қабырғаларының қосындылары тең болса, онда оны шеңберге сырттай сызуға болады.**

Дәлелдеуі. $ABCD$ төртбұрышында $AB + CD = BC + AD$ болсын. Оның AB, AD және BC қабырғаларын жанайтын шеңбер салайық (бұл шеңбердің O центрі A және B бұрыштары биссектрисаларының қиылысу нүктесі болады). Осы шеңбер төртбұрыштың

CD қабырғасын да жанайтынын, сондықтан оған іштей сызылғандығын дәлелдейік.



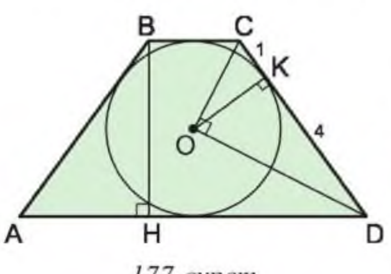
176-сурет

Олай емес деп жорыық. Шеңбер толығымен *ABCD* төртбұрышының ішінде жатсын (176-сурет). *CB*-дан басқа шеңберге жанама болатын *CM* түзуін жүргізейік (*M* оның *AD* кесіндісімен қиылысатын нүктесі болсын). Сонда: $AB + CD = AD + BC$ (шарты бойынша) және $AB + CM = AM + BC$ (салуымыз бойынша).

Осы теңдіктердің сол жақтары мен оң жақтарын мүшелеп азайтып, мынаны аламыз: $CD - CM = AD - AM$, яғни $CD - CM = MD$ немесе $CD = CM + MD$. Үшбұрыштың теңсіздігі бойынша бұлай болуы мүмкін емес. Демек, біздің жоруымыз дұрыс болмады, яғни *M* және *D* нүктелері беттеседі. Бұл дәлелдеуді шеңбер толығымен *ABCD* төртбұрышында жатпаған жағдайға да қолдануға болады.

Бұл теоремадан шығатыны, *шеңберге параллелограмдардың ішінен тек ромб пен шаршыны ғана сырттай сызуға болады екен.*

Е с е п. *O* нүктесі центрі болатын шеңбер *ABCD* теңбүйірлі трапециясына іштей сызылған және оның *CD* бүйір қабырғасымен *K* нүктесінде жанасады. $CK = 1$ см, $KD = 4$ см екені белгілі болса, трапецияның ауданын табу керек.



177-сурет

Ш е ш у і. Трапецияның ауданы: $S = \frac{BC + AD}{2} \cdot BH$, мұндағы *BH* – трапецияның биіктігі. Трапецияға шеңбер іштей сызылғандықтан, *BH* биіктігі шеңбердің диаметріне тең болады немесе $BH = 2OK$ (177-сурет). Трапецияға іштей сызылған шеңбердің *O* центрі *C* және *D* бұрыштарының биссектрисаларының қиылысу нүктесі болады. $\angle C + \angle D = 180°$ болғандықтан, $\frac{1}{2}\angle C + \frac{1}{2}\angle D = 90°$ болады. Демек, *COD* үшбұрышы – тікбұрышты, ал *OK* кесіндісі – оның биіктігі, $OK = \sqrt{CK \cdot KD} = 2$ см, сонда $BH = 4$ см болады. Шеңберге сырттай сызылған төртбұрыштың қарама-қарсы қабырғалары тең, ал трапеция теңбүйірлі болғандықтан, $\frac{BC + AD}{2} = CD = 5$ (см) болады. Демек, $S = 5 \cdot 4 = 20$ (см^2).

Ж а у а б ы. 20 см^2.

СҰРАҚТАР

1. Қандай төртбұрыш шеңберге сырттай сызылған деп аталады?
2. Шеңберге сырттай сызылған төртбұрыштың қабырғаларының қасиетін тұжырымдап, дәлелдеңдер.
3. Шеңберге сырттай сызылған төртбұрыштың белгісін тұжырымдап, дәлелдеңдер.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

322. Ретімен алынған қабырғаларының қатынасы: а) 2 : 3 : 4 : 3; ә) 2 : 3 : 4 : 5 қатынасындай болатын төртбұрышқа іштей шеңбер сызуға бола ма?

323. Шеңберге сырттай сызылған төртбұрыштың қарама-қарсы екі қабырғасының қосындысы 4,5 дм-ге тең, ал басқа екі қабырғасының қатынасы 2 : 3 қатынасындай. Осы қабырғалардың ұзындықтарын табыңдар.

324. Шеңберге сырттай сызылған теңбүйірлі трапецияның орта сызығы 5 см-ге, ал сүйір бұрышының синусы 0,8-ге тең. Трапецияның ауданын табыңдар.

В деңгейі

325. Шеңберге сырттай теңбүйірлі трапеция сызылған. Оның: а) бүйір қабырғасы табандарының арифметикалық ортасына тең болатынын; ә) биіктігі табандарының геометриялық ортасына тең болатынын дәлелдеңдер.

326. а) Табандары 5 см және 7,5 см болатын тікбұрышты трапецияға; ә) үлкен табаны 3 дм, ал сүйір бұрышы 60° болатын теңбүйірлі трапецияға іштей сызылған шеңбердің радиусын табыңдар.

327. а) Егер төртбұрыш шеңберге сырттай сызылған болса, онда оның ауданы жарты периметр мен осы шеңбердің радиусының көбейтіндісіне тең болатынын дәлелдеңдер. ә) Қарама-қарсы екі қабырғасының қосындысы 12 см, ал ауданы 60 см^2 болатын төртбұрышқа іштей сызылған шеңбердің радиусын табыңдар.

328. $ABCD$ төртбұрышына радиусы 1,7 см-ге тең шеңбер іштей сызылған. $AB : CD = 2 : 3$, $AD : BC = 2 : 1$ екені белгілі. Егер төртбұрыштың ауданы 12,75 см^2-ге тең болса, оның қабырғаларын табыңдар.

329. Циркуль мен сызғыштың көмегімен берілген қабырғасы мен оған іштей сызылған шеңбердің радиусы бойынша ромб салыңдар.

330. а) Периметрі P-ға, ал сүйір бұрышы α-ға тең болатын теңбүйірлі трапеция шеңберге сырттай сызылған. Трапецияның ауданын табыңдар.

ә) Кіші табаны 3 см-ге тең тікбұрышты трапеция радиусы 2 см-ге тең шеңберге сырттай сызылған. Осы трапецияның ауданын табыңдар.

331. Циркуль мен сызғыштың көмегімен: а) берілген шеңберге іштей сызылған; ә) берілген шеңберге сырттай сызылған шаршы салыңдар.

С деңгейі

332. Шеңберге іштей сызылған тіктөртбұрыштың төбелері арқылы оған жүргізілген жанамалардың ромб құрайтынын дәлелдеңдер. Қандай жағдайда осы ромб шаршы болады?

333. Трапеция табандарына параллель кесінділермен әрқайсысының ішіне шеңбер сызуға болатындай үш трапецияға бөлінген. Осы шеңберлердің үлкені мен кішісінің радиустары, сәйкесінше, 8 см және 2 см-ге тең. Үшінші шеңбердің радиусын табыңдар.

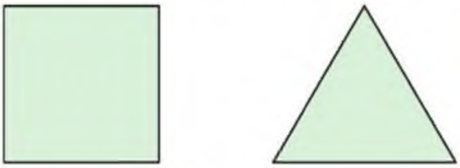
334. а) Периметрі P-ға, доғал бұрышы α-ға тең параллелограмм шеңберге сырттай сызылған. Осы шеңбердің радиусын табыңдар.

ә) Табандары 2 см және 4,5 см-ге тең трапецияға іштей және сырттай шеңбер сызуға болатыны белгілі болса, осы трапецияны салыңдар.

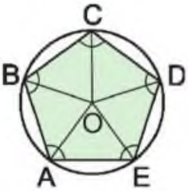
25. Дұрыс көпбұрыштар. Дұрыс көпбұрышқа іштей және сырттай сызылған шеңберлер

Тақырыпты оқу барысында:
• дұрыс көпбұрыштың анықтамасы мен қасиеттерін білесіңдер;
• дұрыс көпбұрыштың центрі мен центрлік бұрышы туралы ұғымдарды білесіңдер;
• шеңберге іштей және сырттай сызылған көпбұрыштардың қасиеттері мен белгілерін дәлелдеуді білесіңдер;
• осы қасиеттер мен белгілерді есептер шығаруда қолдануды білетін боласыңдар;
• дұрыс көпбұрыштарды салуды білетін боласыңдар.

Егер дөңес көпбұрыштың барлық қабырғалары тең және барлық бұрыштары тең болса, онда оны дұрыс көпбұрыш деп атайды. Мысалы, шаршы, теңқабырғалы үшбұрыш (178-сурет).



178-сурет

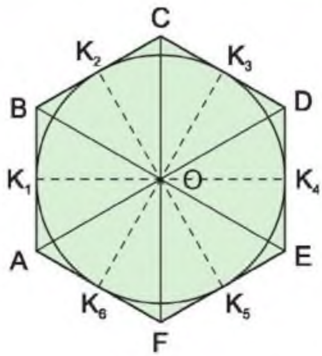


179-сурет

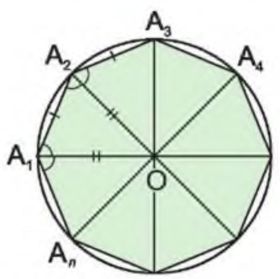
Дұрыс көпбұрыштарды салуды шеңберді пайдаланып орындау ыңғайлы. Шеңберді тең доғаларға бөліп, сол нүктелерді тізбектей хордалармен қосып, дұрыс көпбұрыш аламыз. Мысалы, 179-суреттегі дұрыс бесбұрыш солай салынған. Осы тәсілмен салынған көпбұрыш шынымен де дұрыс болады, себебі оның барлық қабырғалары тең доғаларды керетін хордалар, ал барлық бұрыштары тең доғаларға тірелетін іштей сызылған бұрыштар ретінде тең болады.

Егер шеңберді тең доғаларға бөліп, сол нүктелер арқылы оған жанамалар жүргізсе, онда сол жанамалар да дұрыс көпбұрыш құрайды.

Мысалы, 180-суреттегі дұрыс алтыбұрыш осылай салынған. Бұл көпбұрыш шынымен де дұрыс, себебі оның барлық қабырғалары төбелері шеңбердің центрі болатын бірдей теңбүйірлі үшбұрыштардың табандары ретінде тең (мұны өздігінен дәлелдеңдер) және барлық



180-сурет



181-сурет

бұрыштары да тең, себебі олардың әрқайсысы сол теңбүйірлі үшбұрыштардың табанындағы бұрыштарынан екі есе артық.

Т е о р е м а. **Кез келген дұрыс көпбұрышқа сырттай шеңбер сызуға болады және ол тек біреу ғана болады.**

Д ә л е л д е у і. $A_1A_2A_3...A_n$ дұрыс көпбұрышы берілген болсын (181-сурет). A_1 және A_2 бұрыштарының биссектрисаларының O қиылысу нүктесін көпбұрыштың басқа төбелерімен қосайық. $OA_1 = OA_2 ... = OA_n$ болатынын дәлелдейік.

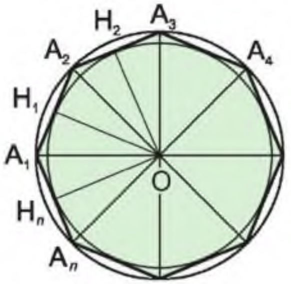
$\Delta A_1A_2O = \Delta A_3A_2O$ (екі қабырғасы мен олардың арасындағы бұрышы бойынша: $A_1A_2 = A_2A_3$ шарт бойынша, A_2O – ортақ қабырға, $\angle A_1A_2O = \angle A_3A_2O$ салуымыз бойынша). Демек, $OA_1 = OA_3$. ΔA_1A_2O теңбүйірлі болғандықтан (салуымыз бойынша A_1A_2 қабырғасына іргелес бұрыштары тең), мынаны аламыз: $OA_1 = OA_2 = OA_3$ және $\angle A_2A_3O = \angle A_3A_2O = \frac{1}{2}\angle A_2$. Бұдан, A_3O сәулесі A_3 бұрышының биссектрисасы екені шығады.

Мына теңдіктер де дәл осылай дәлелденеді: $\Delta A_2A_3O = \Delta A_4A_3O$, $\Delta A_3A_4O = \Delta A_5A_4O$ және сол сияқты, бұдан көпбұрыштың барлық төбелерінің O нүктесінен бірдей қашықтықта екені шығады. Демек, центрі O нүктесінде, радиусы OA_1 болатын шеңбер $A_1A_2A_3...A_n$ көпбұрышына сырттай сызылған.

Мұндай шеңбердің жалғыз екенін дәлелдейік. Көпбұрыштың қайсыбір үш төбесін алайық, мысалы, A_1, A_2, A_3. Осы үш нүкте арқылы тек бір ғана шеңбер жүргізуге болатындықтан, ол $A_1A_2A_3...A_n$ көпбұрышына сырттай сызылған жалғыз шеңбер болады. Теорема дәлелденді.

Т е о р е м а. **Кез келген дұрыс көпбұрышқа іштей шеңбер сызуға болады және ол тек біреу ғана болады.**

Д ә л е л д е у і. $A_1A_2A_3...A_n$ дұрыс көпбұрышы берілген болсын, ал O нүктесі оған сырттай сызылған шеңбердің центрі болсын (182-сурет). Сонда алдыңғы теоремада дәлелдегеніміз бойынша $\Delta OA_1A_2 = \Delta OA_2A_3 = \cdots = \Delta OA_nA_1$. Сондықтан осы үшбұрыштардың O төбесінен жүргізілген биіктіктері де тең болады, яғни $OH_1 = OH_2 = ... = OH_n$. Демек, центрі O, радиусы OH_1 болатын шеңбер $H_1, H_2, ..., H_n$ нүктелерінен өтіп, көпбұрыштың қабырғаларымен жанасады, яғни ол $A_1A_2A_3...A_n$ көпбұрышына іштей сызылған шеңбер болады.



182-сурет

Мұндай шеңбердің жалғыз болатынын дәлелдейік. Осы көпбұрышқа іштей сызылған басқа да шеңбер бар деп жориық. Сонда оның O_1 центрі көпбұрыштың қабырғаларынан бірдей қашықтықта болады, сондықтан O_1 нүктесі көпбұрыштың әрбір бұрышының биссектрисасына тиісті болады. Демек, O_1 нүктесі O нүктесімен беттеседі, ал OH_1 осы шеңбердің радиусы болады. Сонымен, бұл шеңберлер беттеседі, яғни $A_1A_2A_3...\,A_n$ көпбұрышына іштей сызылған шеңбер жалғыз болады екен. Теорема дәлелденді.

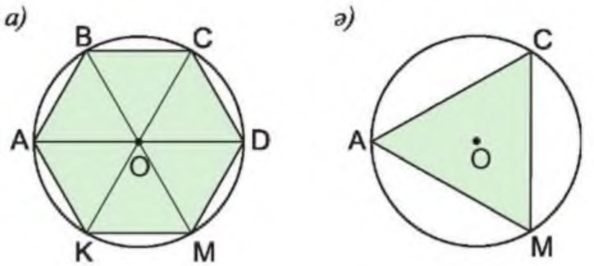
Дәлелденген теоремадан шығатыны, **дұрыс көпбұрышқа іштей және сырттай сызылған шеңберлердің центрлері беттеседі және көпбұрыш бұрыштары биссектрисаларының қиылысу нүктесі болады**. Бұл нүкте дұрыс көпбұрыштың центрі деп аталады, ал төбесі осы центрде болатын және көпбұрыштың қабырғасына тірелетін бұрыш дұрыс көпбұрыштың *центрлік бұрышы* деп аталады.

$A_{k-1}OA_{k+1}$ бұрышының биссектрисасын қамтитын түзу $A_1A_2...\,A_n$ дұрыс көпбұрышының симметрия осі болатынын айта кетелік. Қабырғаларының саны жұп болатын дұрыс көпбұрыштың центрі оның симметрия центрі болады, ал қабырғаларының саны тақ болатын дұрыс көпбұрыштың симметрия центрі болмайды. Дұрыс n-бұрышты оның центрінен айналдыра $\frac{360^\circ k}{n}$ бұрышқа бұрғанда, дұрыс көпбұрыш өзіне-өзі бейнеленеді, мұндағы k мен n – натурал сандар және $k \leq n$. (Осы қасиеттерді өздігінен түсіндіріңдер.)

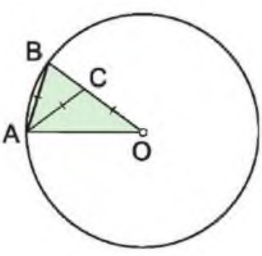
1 - е с е п. Циркуль мен сызғыштың көмегімен берілген шеңберге іштей сызылған дұрыс: а) алтыбұрыш; ә) үшбұрыш; б) онбұрыш; в) бесбұрыш; г) сегізбұрыш салу керек.

Ш е ш у і. а) $ABCDMK$ дұрыс алтыбұрышы центрі O нүктесі болатын шеңберге іштей сызылған болсын (183, *а*-сурет). Сонда ΔAOB-ның барлық бұрыштары 60°, яғни ол теңқабырғалы болады. Сондықтан, шеңберге іштей сызылған дұрыс алтыбұрыштың қабырғасы оның радиусына тең. Шеңбердің радиусына тең $AB = BC = CD = DM = MK = KA$ хордаларын салып, ізделінді $ABCDMK$ дұрыс алтыбұрышын аламыз (183, *а*-сурет).

ә) а) есебіндегі сияқты шеңберді тең 6 бөлікке бөліп, $AC = CM = MA$ хордаларын жүргіземіз. ACM ізделінді үшбұрыш болады (183, *ә*-сурет).



183-сурет



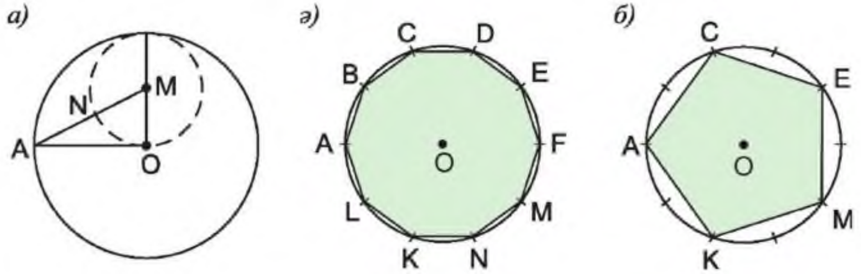
184-сурет

б) O нүктесі центрі болатын, радиусы R-ге тең шеңбер берілген болсын, ал AB хордасы дұрыс онбұрыштың қабырғасына тең болсын. Сонда $\angle AOB = 36°$, $\angle OAB = \angle OBA = 72°$ болады (184-сурет). OAB үшбұрышының AC биссектрисасын жүргіземіз, сонда ΔOAC теңбүйірлі және $AC = OC$ болады. ΔBCA да теңбүйірлі, себебі $\angle BCA = 180° - (72° + 36°) = 72°$ және $AB = AC$. Сонымен, мынаны алдық: $AB = AC = OC$. $AB = OC = x$ деп белгілейік. OAB үшбұрышының

AC биссектрисасының қасиеті бойынша: $\frac{OC}{BC} = \frac{OA}{BA}$, яғни $\frac{x}{R-x} = \frac{R}{x}$, бұдан $x^2 + Rx - R^2 = 0$. Осы квадрат теңдеуді шешіп, мынаны табамыз: $x = -\frac{R}{2} + \sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 + R^2}$. x-ке тең кесінді саламыз:

1) $\sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 + R^2}$ – катеттері R және $\frac{R}{2}$ болатын тікбұрышты AOM үшбұрышының AM гипотенузасы; 2) $x = AM - OM = AN$ (185, *а*-сурет).

Содан соң әрқайсысы AN-ге тең болатын 10 хорданы шеңберге тізбектей салып, ізделінді $ABCDEFMNKL$ онбұрышын аламыз (185, *ә*-сурет).



185-сурет

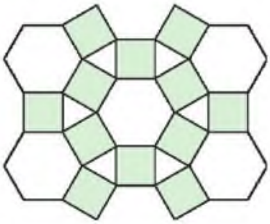
в) б) есебіндегідей шеңберді алдымен тең 10 бөлікке бөліп, сосын сол нүктелерді арасына біреуден қалдырып кесінділермен қосып, ізделінді $ACEMK$ бесбұрышын аламыз (185, *б*-сурет).

г) Дұрыс сегізбұрышты өздігінен салыңдар.

Циркуль мен сызғыштың көмегімен кез келген дұрыс көпбұрыш салуға келе бермейтінін айта кетелік. Мысалы, циркуль мен сызғыштың көмегімен дұрыс жетібұрыш, тоғызбұрыш салынбайды.

2 - е с е п. Дұрыс алтыбұрыш, төртбұрыш және үшбұрыштардың комбинациясын пайдаланып, бір-біріне қабаттастырмай, алаңқайды толығымен жауып шығуға бола ма? Егер болса, онда мысал келтіріңдер.

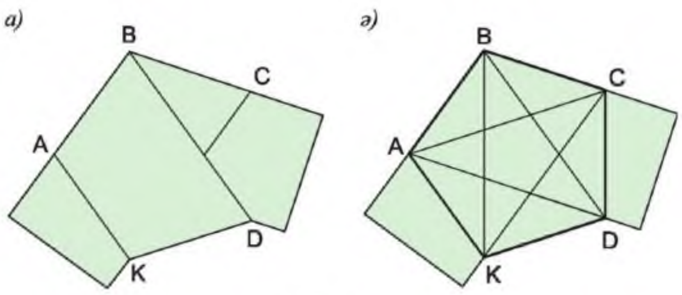
Ш е ш у і. Алаңқайды көпбұрыштармен жауып шығу үшін олардың ортақ төбесіндегі бұрыштарының қосындысы 360°-қа тең болуы керек. Егер дұрыс алтыбұрыштың көршілес екі қабырғасына



186-сурет

шаршылар тұрғызса, онда сол ортақ төбедегі үш бұрыштың қосындысы 300° болады. Осы шаршылардың арасына қабырғасы шаршының қабырғасына тең болатын дұрыс үшбұрыш сыяды (186-сурет). Көпбұрыштардың осындай комбинациясы жалғыз болады, себебі басқаша құрастырған жағдайда олардың ортақ төбесіндегі бұрыштарының қосындысы 360°-қа тең болмайды (мұны өздігінен тексеріңдер).

3 - е с е п. Ені бірдей қағаз таспа қарапайым түйінмен байланып, жазық фигура болатындай тартылған (187, *а*-сурет). $ABCDK$ бесбұрышының дұрыс болатынын дәлелдеу керек.



187-сурет

Д ә л е л д е у і. Осы бесбұрыштың AD, AC, BK, BD және CK диагональдарын жүргізейік (187, *ә*-сурет). ΔABC теңбүйірлі болады, $AB = BC$, себебі оның A және C төбелерінен жүргізілген биіктіктері таспаның еніне тең. Дәл осылай, ΔKAB-да $AK = AB$, ал ΔBCD-да $BC = CD$ болатыны шығады. Демек, $AK = AB = BC = CD$, $KABC$ және $ABCD$ трапециялары теңбүйірлі, $\angle KAB = \angle ABC = \angle BCD$. Сонда $\Delta KAB = \Delta ABC = \Delta BCD$, $BK = AC = BD$ және $\angle AKB = \angle ABK = \angle BAC = \angle BCA = \angle CBD = \angle CDB = \alpha$.

$KABD$ мен $ABCD$ трапецияларындағы айқыш бұрыштар: $\angle DBK = \angle AKB = \alpha$, $\angle DAC = \angle ACB = \alpha$, $\angle ADB = \angle DBC = \alpha$. ABD үшбұрышында $\angle DAB = \angle DBA = 2\alpha$, яғни ол теңбүйірлі, $AD = BD$. Демек, $\Delta ABD = \Delta KDB$, себебі олар теңбүйірлі және $BK = AD = BD$, $\angle ADB =$

$= \angle KBD = \alpha$. Сондықтан, $AB = KD$ және $\angle DKB = \angle KDB = 2\alpha$. Сонда $\angle AKD = \angle CDK = 3\alpha = \angle ABC$. Сонымен, $ABCDK$ бесбұрышының барлық қабырғалары тең және барлық бұрыштары да тең, сондықтан ол дұрыс бесбұрыш болады.

СҰРАҚТАР

1. Қандай көпбұрыш дұрыс көпбұрыш деп аталады?
2. Кез келген дұрыс көпбұрышқа: а) сырттай; ә) іштей тек бір ғана шеңбер сызуға болатынын дәлелдеңдер.
3. Дұрыс көпбұрышқа іштей және сырттай сызылған шеңберлердің центрлері беттесетінін дәлелдеңдер.
4. Дұрыс көпбұрыштың центрі деп нені айтады?

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

335. Шеңберге: а) іштей; ә) сырттай сызылған теңқабырғалы көпбұрыш дұрыс көпбұрыш бола ма? Жауабын негіздеңдер. б) Циркуль мен сызғыштың көмегімен қабырғасы $(\sqrt{3}+1)$ см-ге тең болатын дұрыс үшбұрыш салыңдар.

336. а) Дұрыс n-бұрыштың әрбір төбесінен бір-бірден алынған сыртқы бұрыштарының қосындысы неге тең? ә) Дұрыс 16-бұрыштың бұрышын табыңдар.

337. Дұрыс көпбұрыштың бұрышы: а) 140°; ә) 144°; б) 150°; в) 160°-қа тең болса, оның неше қабырғасы бар?

338. а) Бұрыштарының қосындысы 1620°-қа тең дұрыс көпбұрыштың қабырғасы нешеу? ә) Бұрышы 110°-қа тең болатын дұрыс көпбұрыш бола ма?

В деңгейі

339. Дұрыс көпбұрыштың қабырғаларының орталары басқа дұрыс көпбұрыштың төбелері болатынын дәлелдеңдер.

340. Дұрыс n-бұрыштың кіші диагоналі берілген. Егер: а) $n = 6$; ә) $n = 8$ болса, циркуль мен сызғыштың көмегімен осы n-бұрышты салыңдар.

С деңгейі

341. а) Дұрыс алтыбұрыштың периметрі $12\sqrt{2}$ см-ге тең. Оның ауданын табыңдар.

ә) Ажарға оның достары Арман мен Анар шаршы тәрізді торт алып келді. Осы тортты оларға әрқайсысы екі тілімнен алатындай қалай тең бөліп беруге болады? Есептің екі шешімін келтіріңдер.

188-сурет

б) Биіктігі 40 см, диаметрі 140 см болатын қазақша үстелге шаршы пішінді дастарқан таңдау керек (188-сурет). Үстелдің бетін толығымен жауып, шеттері еденге тимейтіндей дастарқан қабырғаларының ең үлкен және ең кіші өлшемдерін табыңдар.

342. Дұрыс үшбұрыштың ауданы $4\sqrt{3}$ см^2. Осы үшбұрышқа: а) сырттай; ә) іштей сызылған шеңбердің радиусын табыңдар.

ПРАКТИКАЛЫҚ ТАПСЫРМА

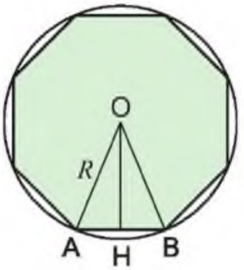
Шеңбер сызып, оған сырттай ромб та, трапеция да болмайтын төртбұрыш салыңдар. Оның қабырғаларын және шеңбердің радиусын өлшеңдер. Салынған төртбұрыштың ауданы мен оның периметрінің және іштей сызылған шеңбер радиусының арасындағы тәуелділікті орнатыңдар.

26. Дұрыс көпбұрыштардың қабырғаларының ұзындықтары мен аудандарын табу

Тақырыпты оқу барысында:
• дұрыс көпбұрыштың қабырғаларын, периметрін, ауданын оған іштей және сырттай сызылған шеңберлердің радиустарымен байланыстыратын формулаларды біле және қолдана аласыңдар.

1-есеп. Дұрыс көпбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің радиусы R-ге тең болса, оның қабырғасының ұзындығын табу керек.

Шешуі. AB – дұрыс көпбұрыштың қабырғасы, O – осы көпбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің центрі, $OA = OB = R$ болсын (189-сурет). Теңбүйірлі AOB үшбұрышының OH биіктігін жүргізейік. Сонда $AH = BH$, ал $\angle AOH = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{1}{2} \cdot \frac{360^\circ}{n} = \frac{180^\circ}{n}$, мұндағы n – дұрыс көпбұрыштың қабырғаларының саны. Тікбұрышты AOH үшбұрышынан мынаны аламыз: $AH = R \cdot \sin\frac{180^\circ}{n}$.



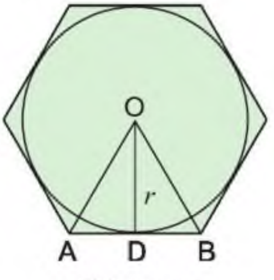
189-сурет

Сонда $AB = 2R \cdot \sin\frac{180^\circ}{n}$. Егер дұрыс көпбұрыштың қабырғасын a_n деп белгілесек, онда ол былай жазылады: $\boldsymbol{a_n = 2R \cdot \sin\frac{180^\circ}{n}}$.

Дербес жағдайда, $\boldsymbol{a_3 = R\sqrt{3}}$, $\boldsymbol{a_4 = R\sqrt{2}}$, $\boldsymbol{a_6 = R}$.

2-есеп. Егер дұрыс n-бұрышқа іштей сызылған шеңбердің радиусы r-ге тең болса, оның қабырғасының ұзындығын табу керек.

Шешуі. Дұрыс көпбұрыштың қабырғасы – AB, O – осы көпбұрышқа іштей сызылған шеңбердің центрі, $OD = r$ болсын (190-сурет). Тікбұрышты OBD үшбұрышынан мынаны табамыз:



190-сурет

$BD = r \cdot \mathrm{tg}\dfrac{180^\circ}{n}$. Сонда $AB = 2r \cdot \mathrm{tg}\dfrac{180^\circ}{n}$. Егер дұрыс көпбұрыштың қабырғасын a_n деп белгілесек, сонда шыққан формула мына түрге келеді: $\boldsymbol{a_n = 2r \cdot \mathrm{tg}\dfrac{180^\circ}{n}}$.

Дербес жағдайда, $\boldsymbol{a_3 = 2\sqrt{3}\,r}$, $\boldsymbol{a_4 = 2r}$, $\boldsymbol{a_6 = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}r}$.

Теорема. **Дұрыс *n*-бұрыштар ұқсас, ал олардың қабырғалары мен периметрлерінің қатынасы оларға сырттай немесе іштей сызылған шеңберлердің радиустарының қатынасына тең.**

Дәлелдеуі. Дұрыс n-бұрыштың қабырғалары пропорционал, ал олардың әрбір бұрышы $\dfrac{180^\circ(n-2)}{n}$-ге тең. Демек, олар ұқсас. Дұрыс n-бұрыштың P_1 мен P_2 периметрлері: $P_1 = 2nR_1 \cdot \sin\dfrac{180^\circ}{n}$, $P_2 = 2nR_2 \cdot \sin\dfrac{180^\circ}{n}$, мұндағы R_1 мен R_2 – оларға сырттай сызылған шеңберлердің радиустары. Периметрлерінің қатынасы: $\dfrac{P_1}{P_2} = \dfrac{R_1}{R_2}$.

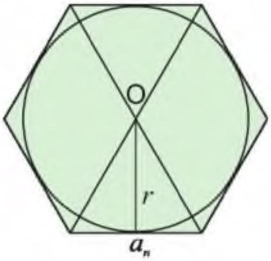
Дұрыс n-бұрыштың P_1 және P_2 периметрлері оларға іштей сызылған шеңберлердің r_1 және r_2 радиустары арқылы былай өрнектеледі: $P_1 = 2nr_1 \cdot \mathrm{tg}\dfrac{180^\circ}{n}$ және $P_2 = 2nr_2 \cdot \mathrm{tg}\dfrac{180^\circ}{n}$. Демек, периметрлерінің қатынасы: $\dfrac{P_1}{P_2} = \dfrac{r_1}{r_2}$. Дәлелдеу керегі де осы еді.

Теорема. **Дұрыс көпбұрыштың *S* ауданы оның жарты периметрі мен оған іштей сызылған шеңбердің радиусының көбейтіндісіне тең болады.**

Дәлелдеуі. $\boldsymbol{S = p \cdot r}$ формуласын алу үшін дұрыс көпбұрыштың центрін оның әрбір төбесімен қосу керек (191-сурет). Сонда көпбұрыштың ауданы табаны көпбұрыштың қабырғасына, ал биіктігі көпбұрышқа іштей сызылған шеңбердің радиусына тең болатын теңбүйірлі үшбұрыштардың аудандарының қосындысына тең болады, яғни $S = \dfrac{1}{2}a_n rn = pr$. Теорема дәлелденді.

Мына теореманың да дәл осындай әдіспен дәлелденетінін айта кетелік: *шеңберге сырттай сызылған кез келген көпбұрыштың ауда-*

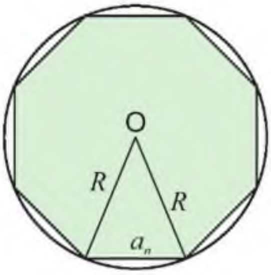
ны оның жарты периметрі мен сол шеңбердің радиусының көбейтіндісіне тең болады.



191-сурет

Теорема. **Дұрыс көпбұрыштың ауданы $S = \frac{1}{2}R^2 n \cdot \sin\frac{360^\circ}{n}$, мұндағы R – көпбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің радиусы, n – қабырғаларының саны.**

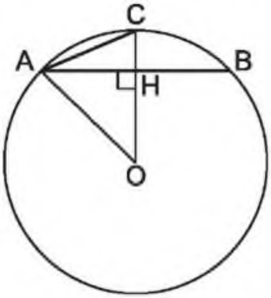
Бұл формуланы 192-суретті пайдаланып, өздігінен қорытып шығарыңдар.



192-сурет

3 - е с е п. Радиусы R-ге тең шеңберге іштей қабырғасы a-ға тең болатын дұрыс n-бұрыш және қабырғасының саны $2n$-ге тең болатын дұрыс көпбұрыш салынған. Осы көпбұрыштың b қабырғасы $b = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - a^2}}$ болатынын дәлелдеу керек.

Д ә л е л д е у і. $AB = a$, $AC = b$, O шеңбердің центрі болсын (193-сурет). Сонда OC мен AB кесінділері перпендикуляр және олардың қиылысу H нүктесі AB кесіндісін қақ бөледі.



193-сурет

Үшбұрыш AOC-дан: $AC^2 = OA^2 + OC^2 - 2OA \cdot OC \cdot \cos\angle AOC$, бұдан $AC^2 = 2R^2 - 2R \cdot OH$. Тікбұрышты ΔAOH-тан $OH = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}$ шығады. Демек, $b^2 = 2R^2 - 2R \cdot \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}} = 2R^2 - R\sqrt{4R^2 - a^2}$, $b = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - a^2}}$.

СҰРАҚТАР

1. Дұрыс көпбұрыштың қабырғасы оған: а) сырттай; ә) іштей сызылған шеңбердің радиусы арқылы қалай өрнектеледі?
2. Дұрыс n-бұрыштардың ұқсас болатынын дәлелдеңдер.
3. Дұрыс n-бұрыштың ауданының: а) оның қабырғасы мен оған іштей сызылған шеңбердің радиусы арқылы; ә) оған сырттай сызылған шеңбердің радиусы мен оның центрлік бұрышы арқылы өрнектелетін формулаларын қорытып шығарыңдар.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

343. а) Дұрыс n-бұрышқа сырттай және іштей сызылған шеңберлердің радиустары, сәйкесінше, R және r. Осы көпбұрыштың қабырғасын табыңдар. ә) Дұрыс n-бұрышқа сырттай және іштей шеңберлер сызылған. Осы шеңберлердің диаметрлері квадраттарының айырымы n-бұрыштың қабырғасының квадратына тең болатынын дәлелдеңдер.

344. а) Шеңберге іштей сызылған дұрыс алтыбұрыштың қабырғасы 7 см-ге тең. Осы шеңберге іштей сызылған дұрыс үшбұрыштың периметрін табыңдар. ә) Шеңберге іштей шаршы мен дұрыс алтыбұрыш салынған. Шаршының периметрі 42 мм-ге тең. Алтыбұрыштың периметрін табыңдар.

В деңгейі

345. а) Шеңберге іштей сызылған дұрыс үшбұрыштың қабырғасы 8 см-ге тең. Осы шеңберге іштей сызылған шаршының периметрін табыңдар. ә) Шеңберге іштей сызылған шаршының периметрі 18 см-ге тең. Осы шеңберге іштей сызылған дұрыс үшбұрыштың қабырғасын табыңдар.

346. Дұрыс сегізбұрыштың ең үлкен диагоналі 6 см-ге тең. Оның ең кіші диагоналін табыңдар.

347. Қабырғасы: а) 5 см-ге тең дұрыс үшбұрыштың; ә) 2 см-ге тең дұрыс алтыбұрыштың ауданын табыңдар.

С деңгейі

348. Сырттай сызылған шеңберінің радиусы: а) 2 см-ге тең дұрыс тоғызбұрыштың; ә) 4 см-ге тең дұрыс онбұрыштың ауданын 0,1 см^2-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

349. а) Төбелері берілген дұрыс алтыбұрыштың қабырғаларының орталары болатын көпбұрыштың ауданы сол алтыбұрыштың ауданының қандай бөлігін құрайды? ә) Қиылған бөліктерінен аудандарының қатынасы 3 : 1 қатынасына тең екі дұрыс алтыбұрыш құрастыруға болатындай дұрыс алтыбұрышты қиып жеті бөлікке бөліңдер.

27. Шеңбер мен оның доғасының ұзындығы

Тақырыпты оқу барысында:

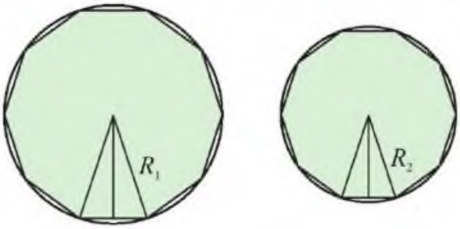
- шеңбердің ұзындығы мен оның доғасының ұзындығы ұғымдарын білесіңдер;
- шеңбердің ұзындығының және оның доғасының ұзындығының формулаларын біле және қорытып шығара аласыңдар;
- осы формулаларды есептер шығаруда қолдануды білетін боласыңдар.

Шеңбердің де сызық сияқты ұзындығы болады. Кейбір жағдайда өлшеу арқылы шеңбер ұзындығының жуық мәнін табуға болады. Мысалы, дөңгелек тиынның шеңберінің ұзындығын білу үшін оның шеңберін айналдыра жіппен орап, жіптің ұзындығын өлшеу керек. Әрине, шеңбердің ұзындығын осылай табу ылғи да мүмкін бола бермейді.

Шеңбердің ұзындығына оған іштей сызылған дұрыс көпбұрыштардың қабырғалар санын шексіз арттырғанда олардың периметрлерінің ұмтылатын мәнін алады. Жалпы жағдайда шеңбердің ұзындығын оның радиусы немесе диаметрі арқылы табады.

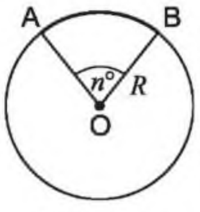
Теорема. **Радиусы R-ге тең шеңбердің C ұзындығы: $C = 2\pi R$.**

Дәлелдеуі. Радиустары R_1 және R_2 болатын екі шеңбер берілген болсын. Осы шеңберлердің әрқайсысына іштей қабырғаларының n саны үлкен болатын дұрыс көпбұрыштар салайық (194-сурет). Осы көпбұрыштардың периметрлерін P_1 және P_2 деп белгілейік, сонда $P_1 = 2nR_1\sin\frac{180^\circ}{n}$, $P_2 = 2nR_2\sin\frac{180^\circ}{n}$. Бұдан $\frac{P_1}{P_2} = \frac{2R_1}{2R_2}$. Егер дұрыс көпбұрыштардың қабырғаларының n санын шектеусіз үлкейтсек, онда олардың P_1 және P_2 периметрлері шеңберлердің C_1 және C_2 ұзындықтарына жуық болады. Сондықтан $\frac{C_1}{C_2} = \frac{2R_1}{2R_2}$ немесе $\frac{C_1}{2R_1} = \frac{C_2}{2R_2}$. Сонымен, шеңбердің ұзындығының оның диаметріне қатынасы тұрақты сан болады



194-сурет

екен. Бұл қатынас π = 3,1416... иррационал санына тең. Шеңбердің C ұзындығы π саны мен оның диаметрінің көбейтіндісіне тең болатыны шықты немесе $C = 2\pi R$. Есеп шығарғанда көбінесе π санының 0,01 дәлдікпен алынған жуық мәнін пайдаланады, яғни $\pi \approx 3{,}14$.


195-сурет

Шеңбердің $n°$ центрлік бұрышына сәйкес келетін **доғасының *l* ұзындығын** (195-сурет) мына формуламен: $l = \frac{\pi R n}{180}$ есептейді, өйткені 1°-тық доғаның ұзындығы $\frac{2\pi R}{360}$ болады.

1 - е с е п. Шеңбердің ұзындығын 1 м-ге ұзартқанда оның радиусы неше метрге ұзарады? Жауабын 0,01 м-ге дейінгі дәлдікпен беру керек.

Ш е ш у і. Шеңбердің радиусын R деп, ал ізделінді шаманы x деп белгілейік. Есептің шарты бойынша: $2\pi(R + x) = 2\pi R + 1$. Бұдан $x = \frac{1}{2\pi} \approx 0{,}16$ (м).

Ж а у а б ы. ≈ 0,16 м.

2 - е с е п. Шеңбердің екі нүктесі оны бұрыштық шамалары 11 : 13 қатынасындай болатын екі доғаға бөледі. Егер шеңбердің радиусы 6 см-ге тең болса, осы доғалардың ұзындықтарын табу керек.

Ш е ш у і. Шеңбердің бір бөлігінің градустық өлшемі $x°$-қа тең болсын, сонда бір доғаның градустық өлшемі $11x°$, ал екіншісінікі $13x°$ болады. Шеңбердің градустық өлшемі 360°-қа тең болғандықтан, $11x + 13x = 360$. Бұдан $x = 15$. Сонда $11x° = 165°$, $13x° = 195°$ болады.

Шеңбер доғасының ұзындығы формуласынан ізделінді доғалардың ұзындықтарын табамыз: $\frac{\pi \cdot 6 \cdot 165}{180} = 5{,}5\pi$ (см), $\frac{\pi \cdot 6 \cdot 195}{180} = 6{,}5\pi$ (см).

Ж а у а б ы. $5{,}5\pi$ см, $6{,}5\pi$ см.

3 - е с е п. Радиусы R-ге тең шеңбердің доғасының l ұзындығы $\boldsymbol{l = R \cdot \alpha}$ болатынын дәлелдеу керек, мұндағы α – осы доғаның радиандық өлшемі.

Д ә л е л д е у і. Шеңбердің $n°$-тық бұрыштық центрлік бұрышына сәйкес келетін доғасының l ұзындығы мына формуламен есептеледі: $l = \frac{\pi R n}{180}$, мұндағы $\frac{\pi \cdot n}{180}$ – осы бұрыштың радиандық өлшемі. Центрлік бұрыштың градустық өлшемі оған сәйкес келетін доғаның градустық өлшеміне тең болатындықтан, $\frac{\pi \cdot n}{180} = \alpha$ болады. Демек, $l = R \cdot \alpha$, дәлелдеу керегі де осы еді.

СҰРАҚТАР

1. Шеңбердің ұзындығы дегеніміз не?
2. Радиусы R болатын шеңбер ұзындығының формуласын қорытып шығарыңдар.
3. Радиусы R болатын шеңбер доғасы ұзындығының формуласын қорытып шығарыңдар.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

350. Егер шеңбердің радиусын: а) 2 есе үлкейтсе; ә) 3 есе кішірейтсе, оның ұзындығы қалай өзгереді?

351. а) Шеңбердің радиусын 5 см-ге ұзартқан. Шеңбердің ұзындығы неше сантиметрге ұзарған? ә) Шеңбердің 4 дм-ге тең радиусын 3 дм-ге ұзартқан. Шеңбердің ұзындығы неше пайызға ұзарған?

352. Берілген шеңбердің диаметрі тең үш кесіндіге бөлінген. Ол кесінділер басқа үш шеңбердің диаметрлері болады. Осы шеңберлердің ұзындықтарының қосындысы бастапқы шеңбердің ұзындығына тең болатынын дәлелдеңдер.

353. 3 км қашықтықта арбаның дөңгелегі 960 толық айналым жасайды. Осы дөңгелектің диаметрін табыңдар.

354. Ағаштың жуандығын табу үшін (көлденең қимасы шеңберінің диаметрін), оны айналдыра орап (көлденең қимасы шеңберінің ұзындығын) өлшеу керек. Шеңберінің ұзындығы: а) 1,5 м; ә) 2,2 м болатын ағаштың жуандығын есептеңдер.

355. а) Егер шеңбердің радиусы 8 см-ге тең болса, оның 45°-қа тең центрлік бұрышына сәйкес келетін доғасының ұзындығын табыңдар. ә) Егер шеңбердің радиусы 10 см-ге тең болса, оның

60°-қа тең центрлік бұрышына сәйкес келетін доғасының ұзындығын табыңдар.

В деңгейі

356. а) Ұзындығы 6 см-ге тең шеңберді жазып, радиусы 5 см болатын шеңбердің доғасын алған. Осы доғаның градустық өлшемін табыңдар. ә) Радиусы 4 см, градустық өлшемі 120° доға қандай да бір шеңбердің ұзындығына тең. Сол шеңбердің радиусын табыңдар.

357. Радиусын 6370 км деп алып, Жер экваторының 1°-тық доғасының ұзындығын табыңдар.

358. а) Табаны 12 см, оған іргелес бұрышы 30° болатын теңбүйірлі үшбұрышқа; ә) диагоналі 9 см, үлкен табанындағы бұрышы 60° болатын теңбүйірлі трапецияға сырттай сызылған шеңбердің ұзындығын табыңдар.

359. а) Катеттері 12 см және 9 см болатын тікбұрышты үшбұрышқа іштей сызылған; ә) периметрі 28 см, ал ауданы 48 см^2 болатын тікбұрышты үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің ұзындығын табыңдар.

360. Шеңберге сырттай периметрі шеңбердің ұзындығынан 2 есе артық болатын теңбүйірлі трапеция салынған. Трапецияның бұрыштарын табыңдар.

361. Доғасының ұзындығы: а) $2R$; ә) $0,5R$-ге тең, радиусы R болатын шеңбердің центрлік бұрышының радиандық өлшемін табыңдар.

362. а) Сүйір бұрыштарының қатынасы 3 : 2 болатын тікбұрышты үшбұрыштың; ә) екі бұрышының қатынасы 1 : 2 болатын теңбүйірлі үшбұрыштың; б) екі бұрышының қатынасы 5 : 4 болатын теңбүйірлі трапецияның бұрыштарының градустық және радиандық өлшемдерін табыңдар.

363. Дұрыс: а) үшбұрыштың; ә) бесбұрыштың; б) 12-бұрыштың бұрышы мен центрлік бұрышының шамаларын радианмен өрнектеңдер.

364. Егер шеңбердің R радиусы мен оның доғасының радиандық өлшемі α белгілі болса: а) $\alpha = 2$ рад., $R = 1$ см; ә) $\alpha = 0{,}75\pi$, $R = 6$ см доғасының ұзындығын табыңдар.

365. Егер доғаның ұзындығы π дм, ал радиандық өлшемі: а) $\frac{\pi}{4}$; ә) $\frac{5\pi}{6}$ болса, доғаның радиусын табыңдар.

366. Ұзындығы 7 м, ал радиусы: а) 2 м; ә) 3,5 м болатын доғаның радиандық өлшемін табыңдар.

С деңгейі

367. Сағаттың минуттық тілінің ұзындығы 0,6 м. Сағат тілінің ұшының: а) 15 минут; ә) 50 минут аралығында сызатын доғасының ұзындығын табыңдар.

368. а) Егер қабырға сағатының маятнигі тербелісінің центрлік бұрышы 30°-тан аспайтын болса, ал оның ұшының сызатын доғасының ең үлкен ұзындығы 2 дм-ге тең болса, маятниктің ұзындығын табыңдар.

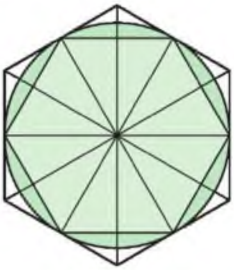
196-сурет

ә) Нұр-Сұлтан қаласында орналасқан диаметрі 65 м «Ailand» шолу шеңбері (196-сурет) 12 минутта толық айналым жасайды. «Шеңбер» кабинасындағы адам 1 минут ішінде өтетін аралықты табыңдар.

28. Дөңгелектің, оның секторы мен сегментінің ауданы

Тақырыпты оқу барысында:
- дөңгелектің, сектордың және сегменттің ауданы ұғымын білесіңдер;
- дөңгелектің, сектордың және сегменттің ауданының формулаларын біле және қорытып шығара аласыңдар;
- осы формулаларды есептер шығаруда қолдана аласыңдар.

Дөңгелектің ауданына оған іштей сызылған дұрыс n-бұрыштар мен сырттай сызылған дұрыс n-бұрыштардың қабырғалар санын шексіз ұлғайтқанда олардың аудандарының ұмтылатын шамасы алынады.



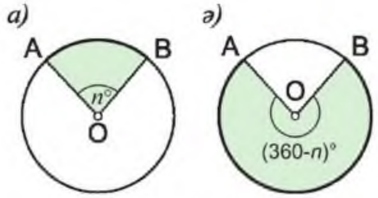
197-сурет

Т е о р е м а. **Радиусы R-ге тең дөңгелектің S ауданы: $S = \pi R^2$.**

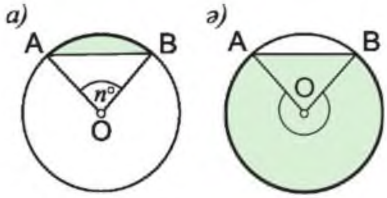
Д ә л е л д е у і. Радиусы R болатын дөңгелек берілген болсын. Дөңгелекке іштей және сырттай сызылған дұрыс n-бұрыштар салайық (197-сурет). Дөңгелекке іштей сызылған көпбұрыштың S_1 ауданы: $S_1 = \frac{1}{2}P_1 \cdot R \cdot \cos\frac{180^\circ}{n}$, мұндағы P_1 – оның периметрі және $S_1 < S$ болады.

Дөңгелекке сырттай сызылған көпбұрыштың S_2 ауданы: $S_2 = \frac{1}{2}P_2 \cdot R$, мұндағы P_2 – оның периметрі және $S < S_2$ болады. Сонымен, $S_1 < S < S_2$. Дұрыс көпбұрыштардың қабырғаларының n санын шексіз ұлғайтқанда олардың P_1 және P_2 периметрлерінің шеңбердің C ұзындығынан айырмашылығы өте аз, ал $\cos\frac{180^\circ}{n}$-нің шамасы 1-ге жақын болады. Демек, мұндай көпбұрыштардың аудандарының $\frac{1}{2}CR$-ден айырмашылығы өте аз болады. Осы шама дөңгелектің S ауданын береді, яғни $S = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot R = \pi R^2$.

Дөңгелек шеңберінің доғасы мен сол доғаның ұштарын оның центрімен қосатын екі радиусымен шектелген бөлігін сектор деп атайды (198-сурет). Ал доғаны *сектордың доғасы* деп атайды.



198-сурет



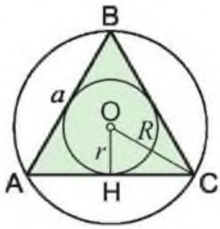
199-сурет

Доғасы $n°$-қа тең болатын (198, *а*-сурет) сектордың ауданы мына формуламен есептеледі: $S_{\text{сект.}} = \frac{\pi R^2 n}{360}$, себебі 1°-тық доғамен шектелген сектордың ауданы $\frac{\pi R^2}{360}$-қа тең болады. Егер сектордың доғасы α радианға тең болса, онда сектордың ауданының формуласынан мынаны аламыз: $S_{\text{сект.}} = \frac{1}{2}R^2\alpha$.

Дөңгелектің хорда мен сол хорда керетін шеңбер доғасының арасындағы бөлігін сегмент деп атайды (199-сурет). Ал доғаны *сегменттің доғасы* деп атайды.

Сегменттің ауданы: егер $n < 180°$ болса, $S_{\text{сегм.}} = \frac{\pi R^2 n}{360} - S_{\Delta AOB}$ (199, *а*-сурет); егер $n > 180°$ болса, $S_{\text{сегм.}} = \frac{\pi R^2 n}{360} + S_{\Delta AOB}$ (199, *ә*-сурет) формулаларымен есептеледі.

1 - е с е п. Дұрыс үшбұрышқа сырттай сызылған дөңгелектің ауданы S_1-ге, ал оған іштей сызылған дөңгелектің ауданы S_2-ге тең. $S_1 : S_2$ қатынасын табу керек.



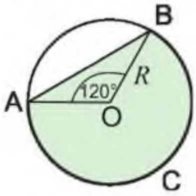
200-сурет

Ш е ш у і. Қабырғасы a-ға тең, O нүктесі центрі болатын дұрыс ΔABC берілген болсын (200-сурет). Сонда $OC = R$ – ΔABC-ға сырттай сызылған шеңбердің, ал $OH = r$ оған іштей сызылған шеңбердің радиусы болады. Тікбұрышты ΔOHC-дан мынаны табамыз: $R = \frac{a}{2\cos 30°} = \frac{a}{\sqrt{3}}$,

$r = \frac{a \cdot \operatorname{tg} 30°}{2} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$. Сонда $\frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi R^2}{\pi r^2} = \frac{\pi a^2 \cdot 12}{3 \cdot \pi a^2} = 4$.

Ж а у а б ы. 4.

2 - е с е п. AB хордасы дөңгелекті екі сегментке бөледі. Егер дөңгелектің радиусы R-ге тең, ал $\angle AOB = 120°$ болса, ACB сегментінің ауданын табу керек (201-сурет).



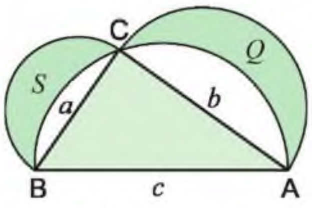
201-сурет

Ш е ш у і. ACB доғасының градустық өлшемі және оған сәйкес келетін центрлік бұрыш 240°-қа тең, сондықтан ізделінді аудан:

$$S_{\text{сегм.}} = \frac{\pi R^2 240°}{360°} + S_{\Delta AOB} = \frac{2\pi R^2}{3} + \frac{1}{2}R^2 \sin 120° =$$

$$= \frac{2\pi R^2}{3} + \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{R^2(8\pi + 3\sqrt{3})}{12}.$$

Ж а у а б ы. $\dfrac{R^2(8\pi + 3\sqrt{3})}{12}$.



202-сурет

3 - е с е п. Тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасы диаметр етіп тұрғызылған жарты шеңбер мен оның катеттері диаметр етіп тұрғызылған жарты шеңберлердің араларындағы айшықтардың (202-сурет) аудандары қосындысы осы үшбұрыштың ауданына тең болатынын дәлелдеу керек. (Гиппократ есебі, б. з. д. V ғ.-ғы ежелгі грек оқымыстысы).

Д ә л е л д е у і. Осы айшықтардың аудандарын S және Q, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ деп белгілейік. Гипотенузаға тұрғызылған жарты дөңгелектің ауданы $\frac{\pi c^2}{8}$, ал катеттерге тұрғызылған жарты дөңгелектердің аудандары $\frac{\pi a^2}{8}$ және $\frac{\pi b^2}{8}$ болады.

Пифагор теоремасы бойынша $c^2 = a^2 + b^2$, осы теңдікті $\frac{\pi}{8}$-ге көбейтіп, мынаны аламыз: $\frac{\pi c^2}{8} = \frac{\pi a^2}{8} + \frac{\pi b^2}{8}$, бұл тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасына тұрғызылған жарты дөңгелектің ауданы оның катеттеріне тұрғызылған жарты дөңгелектің аудандарының қосындысына тең болатынын көрсетеді.

Егер $\frac{\pi c^2}{8}$-ден катеттердің жарты дөңгелектен қиып түсіретін сегменттері аудандарының қосындысын азайтсақ, онда $S_{\Delta ABC}$ шығады.

Егер сол қосындыны $\left(\frac{\pi a^2}{8}+\frac{\pi b^2}{8}\right)$ өрнегінен азайтсақ, онда $S+Q$ шығады. $\frac{\pi c^2}{8}=\frac{\pi a^2}{8}+\frac{\pi b^2}{8}$ болғандықтан, $S_{\Delta ABC}=S+Q$ болады.

СҰРАҚТАР

1. Радиусы R-ге тең болатын дөңгелек ауданының формуласын қорытып шығарыңдар.
2. Дөңгелек секторы ауданының формуласын қорытып шығарыңдар.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

369. Егер дөңгелектің радиусын: а) k есе үлкейтсе; ә) k есе кішірейтсе, оның ауданы қалай өзгереді?

370. Центрлері ортақ екі шеңбер берілген. Үлкен радиусты шеңбердің 6 см-ге тең хордасы екінші шеңберді жанап өтеді. Осы шеңберлердің арасындағы сақинаның ауданын табыңдар.

371. Диаметрлері 6 дм және 8 дм екі құбырды өткізу қабілеті сондай бір құбырмен ауыстыру керек. Сондай құбырдың диаметрін табыңдар.

372. а) Ұзындығы 50,24 м шеңбермен шектелген дөңгелектің ауданын табыңдар. ә) Ауданы 50,24 м^2 дөңгелекті шектеп тұрған шеңбердің ұзындығын табыңдар.

373. а) Дөңгелекті аудандары тең болатын үш секторға қалай бөлуге болады? ә) Шеңбер екі нүктемен ұзындықтарының қатынасы 5 : 7 болатын екі доғаға бөлінген. Осы нүктелерге шеңбердің радиустарын жүргізгенде шыққан секторлардың аудандарының қатынасын табыңдар.

374. а) Шеңбердің 30°-тық доғасының ұзындығы 3 м-ге тең. Радиусы осы шеңбердің радиусына, ал центрлік бұрышы 50°-қа тең болатын сектордың ауданын табыңдар. ә) Шеңберінің радиусы 7 дм-ге, ал 180°-тан кіші сектордың доғасын керетін хорданың ұзындығы 8 дм-ге тең болатын сектордың ауданын табыңдар.

В деңгейі

375. Шеңбердің жанамасы мен жанасу нүктесіне жүргізілген хордасының арасындағы бұрыш 60°-қа тең. Егер осы хорданың ұзындығы 6 м-ге тең болса, сол хорданы қамтитын сектордың ауданын табыңдар.

376. Радиусы 4 см, ал доғасының радиандық өлшемі: а) $\frac{\pi}{6}$; ә) 1,2 рад болатын сектордың ауданын табыңдар.

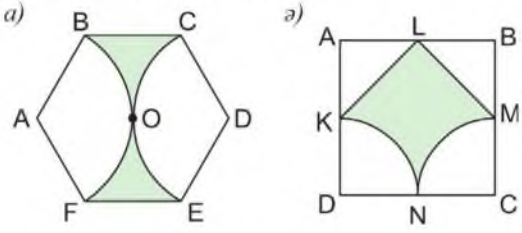
377. Радиусы R болатын дөңгелектің ішіне әрқайсысы $\frac{2\pi}{3}$ радиан доғаны керетін екі параллель хордалар жүргізілген. Осы екі хорданың арасындағы дөңгелек бөлігінің ауданын табыңдар.

378. Шеңбер өзінің диаметрінен 10,5 см-ге ұзын. Осы шеңбермен шектелген дөңгелектің ауданын табыңдар.

379. Шеңберге іштей сызылған дұрыс үшбұрыштың қабырғасы осы шеңберге іштей сызылған дұрыс төртбұрыштың қабырғасынан 4 см-ге артық екені белгілі болса, шеңбермен шектелген дөңгелектің ауданын табыңдар.

380. Шеңбердің центрінің екі жағына ұзындықтары 6 см және 8 см, арақашықтықтары 7 см болатын екі хорда жүргізілген. Осы шеңбермен шектелген дөңгелектің ауданын табыңдар.

381. а) Табаны 12 см, бүйір қабырғасы 10 см болатын теңбүйірлі үшбұрышқа; ә) қабырғасы 5 см, ал оған іргелес бұрыштары 40° және 80° болатын үшбұрышқа сырттай сызылған дөңгелектің ауданын табыңдар.



203-сурет

382. Егер: а) $ABCDEF$ – қабырғасы a, центрі O болатын дұрыс алтыбұрыш (203, *а*-сурет), ал EOC мен FOB центрлері, сәйкесінше, D және A нүктелері болатын шеңберлердің доғалары болса; ә) $ABCD$ – қабырғасы b-ға тең шаршы (203, *ә*-сурет), ал DKN мен CMN тең секторлар болса, боялған фигураның ауданын табыңдар.

383. Қабырғасы 12 см-ге тең дұрыс *ABC* үшбұрышына іштей шеңбер сызылған және центрі *C* нүктесі, радиусы 6 см болатын екінші шеңбер жүргізілген. Пайда болған дөңгелектердің ортақ бөлігінің ауданын табыңдар.

384. а) Өлшемі 5 дм × 5 дм болатын шаршы қаңылтырдан ауданы ең үлкен болатын дөңгелек қиып алынған. Қалған бөлігінің ауданын табыңдар. ә) Өлшемі 8 см × 8 см болатын шаршы қаңылтырдан диаметрі 1 см болатын дөңгелектер қиып алу керек. Осы қаңылтырдан сондай 65 дөңгелек қиып алуға бола ма?

C деңгейі

385. а) Жаңа жылдық костюмге арнап қалпақ жасау үшін доғасының ұзындығы бастың орамына тең болатын сектор қиып алады. Егер сектордың радиусы 20 см, ал бастың орамы 52 см болса, онда сектор доғасының градустық өлшемін табыңдар. ә) Киіз үйдің еденінің диаметрі 5 м (204-сурет). Оның төбесін киізбен жабу үшін радиусы 2,76 м сектор қиып алады. Осы сектордың ауданы мен доғасының градустық өлшемін табыңдар.

204-сурет

29. «Шеңбер. Көпбұрыштар» бөлімін қайталауға арналған жаттығулар

А деңгейі

386. Ұзындығы 12π см шеңбермен шектелген дөңгелектің ауданын табыңдар.

387. Доғаның градустық өлшемі 120°, ал радиусы 6 см. Осы доғаның ұзындығын 0,1 см-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

388. Дұрыс көпбұрыштың ішкі бір бұрышы мен центрлік бұрышының қосындысы 180°-қа тең болатынын дәлелдеңдер.

389. Көлденең қимасының диаметрі 2 см-ге тең білікшені көлденең қимасынан шаршы шығатындай етіп қиған. Осы шаршының қабырғасының ең үлкен өлшемі қандай болуы мүмкін? ә) Радиустары 0,9 м және 0,3 м-ге, ал центрлерінің арақашықтығы 2,4 м-ге тең екі шкив бір-біріне белбеумен қатты тартылған. Осы белбеудің шкивтермен жанаспайтын бір бөлігінің ұзындығын 0,01 м-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

390. а) Шеңберге іштей сызылған шаршының қабырғасы $8\sqrt{2}$ см-ге тең. Осы шеңберге сырттай сызылған дұрыс үшбұрыштың ауданын табыңдар. ә) Шеңберге сырттай сызылған дұрыс үшбұрыштың әрбір қабырғасы сол шеңберге іштей сызылған дұрыс төртбұрыштың қабырғасынан $\sqrt{6}$ см-ге артық. Үшбұрыштың қабырғасын табыңдар. б) Дұрыс үшбұрышқа сырттай және іштей сызылған шеңберлердің радиустарының айырымы 4 см-ге тең. Осы үшбұрыштың ауданын табыңдар.

В деңгейі

391. Шеңберге сырттай сызылған көпбұрыштың периметрі 60 см-ге, ал ауданы 240 см^2-ге тең болса, шеңбердің радиусын табыңдар. Осы көпбұрыш дұрыс болуы мүмкін бе?

392. Өлшемдері 6 м × 3,64 м тіктөртбұрышты еденге қабырғасы 12 см дұрыс алтыбұрыш тәрізді паркет төселмекші. Ол үшін 600 паркет тақтайшасы жеткілікті бола ма?

393. Берілген шеңбердің центрінен b қашықтықта жатқан нүктеден оған арасындағы бұрышы α-ға тең болатын екі жанама жүргізілген. Осы шеңберге іштей сызылған дұрыс үшбұрыштың ауданын табыңдар.

394. а) Қабырғасы 4 см-ге тең дұрыс сегізбұрыштың ауданын табыңдар. ә) Қабырғасы 8 см-ге тең шаршыны бұрыштарынан қиып, дұрыс сегізбұрыш жасаған. Осы сегізбұрыштың ауданын табыңдар.

395. Радиусы 4 см-ге тең шеңберге іштей сызылған дұрыс 12-бұрыштың қабырғасын табыңдар.

396. Қабырғасы 8 см-ге тең дұрыс алтыбұрыштың диагональдарын табыңдар.

397. Дұрыс сегізбұрыштың ауданын оның ең үлкен және ең кіші диагональдарының ұзындықтары арқылы өрнектеңдер.

398. а) Дұрыс n-бұрыштың ішінен алынған кез келген нүктеден оның қабырғаларын қамтитын түзулерге дейінгі қашықтықтардың қосындысы тұрақты болатынын дәлелдеңдер. ә) Қабырғасы $2\sqrt{3}$ дм-ге тең дұрыс алтыбұрыштың ішінен нүкте белгіленген. Сол нүктеден алтыбұрыштың қабырғалары жатқан түзулерге дейінгі қашықтықтардың қосындысын табыңдар.

399. Қабырғасы 8 см-ге тең дұрыс сегізбұрыштың диагональдарын табыңдар.

400. Егер ағаштың орамы 88 см-ге тең болса, оның көлденең қимасының ауданын табыңдар.

401. AB доғасы 135°-ты құрайды, ал оның ұзындығы a-ға тең. AB хордасының ұзындығын табыңдар.

402. Радиусы 5 м, ал доғасының ұзындығы: а) 1 м; ә) 2,5 м болатын сектордың ауданын табыңдар.

403. Доғасының радиандық өлшемі $\frac{2\pi}{5}$ болатын, ал ауданы 45π м^2-ге тең сектордың радиусын табыңдар.

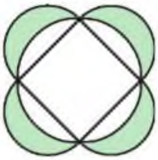
404. Ұзындығы мен шектелген дөңгелегінің ауданы бірдей санмен өрнектелетін шеңбердің радиусын табыңдар.

C деңгейі

405. Сегменттің доғасының бұрыштық өлшемі 120°, ал ұзындығы b-ға тең. Осы сегментке іштей сызылған радиусы ең үлкен болатын шеңбердің ұзындығын табыңдар. (Сегменттің доғасы мен хорданы жанайтын шеңберді сегментке іштей сызылған шеңбер деп санайды.)

406. а) Қабырғасы 4 см-ге тең дұрыс үшбұрышқа сырттай және іштей шеңберлер сызылған. Олардың арасындағы сақинаның ауданын табыңдар. ә) Қабырғасы b-ға тең дұрыс алтыбұрышқа сырттай және іштей шеңбер сызылған. Осы шеңберлердің арасындағы сақинаның ауданын табыңдар.

407. Дөңгелекке сүйір бұрышы α-ға тең, периметрі $2p$ болатын теңбүйірлі трапеция сырттай сызылған. Трапеция ауданының дөңгелектің ауданына қатынасын табыңдар.



205-сурет

408. Қабырғасы 4 см шаршыға сырттай сызылған шеңбер мен оның қабырғаларын диаметр етіп салған жарты шеңберлердің арасындағы төрт айшықтан тұратын фигураның ауданын табыңдар (205-сурет).

409. Дұрыс үшбұрыштың қабырғасы a-ға тең. Оның центрінен $\frac{a}{3}$ радиуспен шеңбер сызылған. Үшбұрыштың сол шеңбердің сыртындағы бөлігінің ауданын табыңдар.

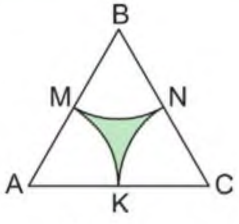
ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

410. 1А) Бұрышы 135°-қа тең дұрыс көпбұрыштың неше қабырғасы бар?

2А) Шеңберге іштей сызылған дұрыс алтыбұрыштың қабырғасы 12 см-ге тең. Осы шеңберге сырттай сызылған шаршының ауданын табыңдар.

3В) Циркуль мен сызғыштың көмегімен дұрыс 12-бұрыш салыңдар.

4B) Қабырғасы a-ға тең дұрыс ABC үшбұрышы берілген. Центрлері A, B, C нүктелерінде, радиусы $0,5a$ болатын шеңберлердің доғалары жүргізілген (206-сурет). MNK фигурасының ауданын табыңдар.



206-сурет

5C) Бүйір қабырғасы $2\sqrt{3}$ см және төбесіндегі бұрышы $120°$ болатын теңбүйірлі үшбұрыш дөңгелекке іштей сызылған. Үшбұрыштың бүйір қабырғасымен шектелген және берілген үшбұрышты қамтымайтын сегменттің ауданын табыңдар.

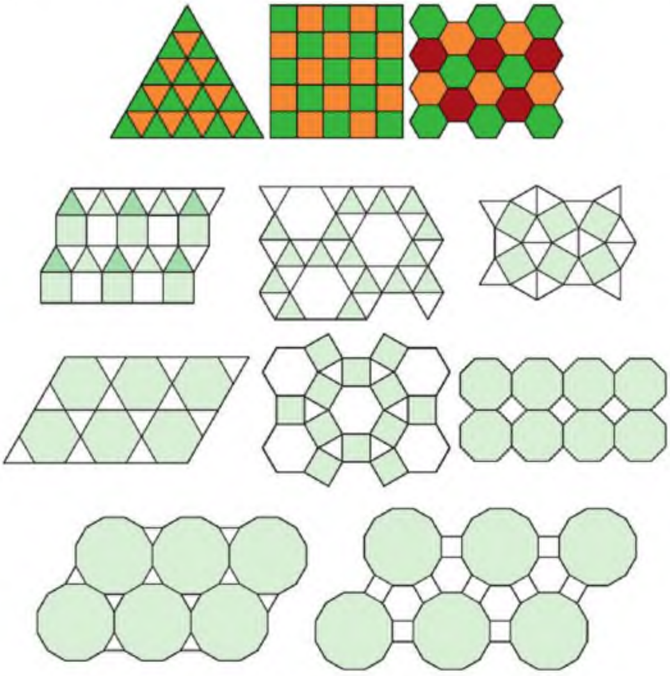
БҰЛ ҚЫЗЫҚТЫ!

Көпбұрыштар мен шеңбердің көптеген қасиеттері Евклидтің «Негіздерінің» 3, 4 және 5-кітаптарында баяндалған. Мысалы, шеңберге іштей сызылған бұрыштың өлшемі туралы үшінші кітаптың 20-сөйлемінде былай тұжырымдалған: «Егер дөңгелектің ішіндегі екі бұрыштың табанындағы доғалары бірдей болса, онда центрдегі бұрыш төбесі шеңбердегі бұрыштан екі есе үлкен болады». Дөңгелекке іштей сызылған төртбұрыштың қасиеті 22-сөйлемде былай баяндалған: «Дөңгелекке іштей сызылған төртқабырғалылардың қарама-қарсы бұрыштары бірге екі тік бұрышқа тең». Осы теоремаға кері теореманы, яғни шеңберге іштей сызылған төртбұрыштың белгісін II ғасырда Птолемей тұжырымдаған болатын және ол Европадағы планиметрия курсында тек 1778 жылы француз математигі Л. Бертранның еңбектерінде пайда болды.

К. Ф. Гаусс

Дұрыс көпбұрыштар туралы ілім және оларды шеңберді пайдаланып салу Евклидтің «Негіздерінің» төртінші кітабында баяндалған. Дұрыс бұрыштарды салумен көптеген оқымыстылар ерте кезден бастап айналысқан. Сонда, циркуль мен сызғыштың көмегімен n-нің белгілі бір мәнінде және жалпы жағдайдағы көпбұрыштарды салу әдістерін табу мәселесі туындады. Бұл мәселені XVIII жүзжылдықта көрнекті неміс математигі К. Ф. Гаусс (1777–1855 жж.) 19 жасында шешіп берді. Ол мұндай салу $n = 2^{2^k} + 1$, (мұндағы k – бүтін теріс емес сан) болғанда ғана мүмкін екенін дәлелдеп берді. Бұл формуладан циркуль мен сызғышты пайдаланып, дұрыс жетібұрыш салуға болмайтыны, ал дұрыс 17-бұрыш салуға болатыны шығады. Циркуль мен сызғышты пайдаланып салуға болмайды деген сөз – басқа сызба құралдарын пайдаланып, дұрыс көпбұрыш салуға болмайды дегенді білдірмейді.

Дұрыс көпбұрыштар мен олардың қасиеттері сәулетте, құрылыста, мысалы, паркеттерді жасауда және төсеуде қолданылады. Дұрыс көпбұрыштардан құрастырылған паркеттердің тек 11 түрі бар екені белгілі (207-сурет).



207-сурет

Шеңбердің ұзындығы мен дөңгелектің ауданын шеңберге іштей сызылған дұрыс n-бұрыштардың қасиеттерін пайдаланып табу Ежелгі Грекия оқымыстыларына белгілі болған. Мысалы, атақты физик және математик Архимед б. з. д. III ғасырда «Дөңгелекті өлшеу» деген ғылыми еңбегінде шеңбердің ұзындығы мен дөңгелектің ауданының формулаларын қорытып

Архимед

шығару үшін шеңберге іштей және сырттай сызылған дұрыс 96-бұрыштың периметрлерінің тізбегін пайдаланған болатын. Ол шеңбердің ұзындығының оның диаметріне қатынасы $3\frac{1}{7}$-ден кіші және $3\frac{10}{71}$-нан үлкен болатынын тапқан. Бұл бөлшектердің жуық мәндері: $3\frac{1}{7} \approx 3{,}142857$, $3\frac{10}{71} \approx 3{,}140846$, яғни Архимед қазіргі кездегі есептеулерде пайдаланып жүрген π санының $\pi \approx 3{,}14$ жуық мәнін тапқан болатын. π санының жуық мәнін анықтаумен геометрия пәні мамандары көптеген ғасырлар бойы айналысып келді. XVIII ғасырда π-дің иррационал сан екені анықталды. Ежелгі Грекия оқымыстылары π санын циркуль мен сызғыштың көмегімен ауданы дөңгелектің ауданына тең болатын шаршы салу арқылы да таппақ болған. Бұл проблеманы, яғни дөңгелектің квадратурасы деп аталатын есепті шешудің мүмкін еместігін 1882 жылы неміс математигі К. Линдеман нақтылаған болатын.

30. 9-сынып геометрия курсын қайталау

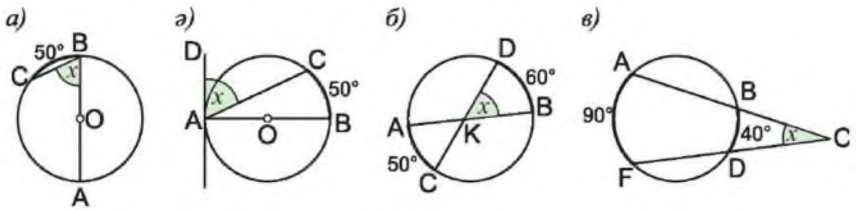
А деңгейі

411. Егер $|\vec{m}| = 35$ болса, $\vec{n}\,(-3; 4)$ векторына коллинеар $\vec{m}$ векторының координаталарын табыңдар.

412. $\overrightarrow{AB}\,(3; -4)$ векторына параллель көшіргенде $M(0{,}5; 1{,}5)$ нүктесі көшетін нүктенің координаталарын табыңдар.

413. Егер: а) екі үшбұрыш тікбұрышты және біреуінің катеттері 3 дм және 4 дм, ал екіншісінің катеттері 0,6 дм және 0,8 дм; ә) бірінші үшбұрыштың қабырғалары 3 см, 4 см және 6 см, ал екіншісінің қабырғалары 6 см, 8 см және 12 см болса, ондай екі үшбұрыш ұқсас бола ма?

414. 208-суреттегі берілгендер бойынша x-ті табыңдар.



208-сурет

415. Табандары $BC = 18$ см, $AD = 24$ см болатын $ABCD$ трапециясы берілген. Трапецияның диагональдары K нүктесінде қиылысады және ΔAKD-ның ауданы 84 см^2. ΔBKC-ның ауданын табыңдар.

416. а) Бұрыштарының қосындысы 1080°-қа тең көпбұрыштың неше қабырғасы бар? ә) Бұрыштарының қосындысы дөңес тоғызбұрыштың бұрыштарының қосындысынан екі есе артық болатын дөңес көпбұрышта неше қабырға бар?

417. Қабырғалары 8 см, 12 см, 16 см болатын үшбұрыштың ауданын табыңдар.

418. Егер: а) $BC = AB = 4$ дм, $\angle A = 30°$; ә) $AC = 15$ мм, $\angle A = 30°$, $\angle C = 50°$; б) $AB = 5$ см, $AC = 9$ см, $\sin A = \frac{4}{5}$ болса, ΔABC-ның белгісіз қабырғалары мен бұрыштарын табыңдар.

419. а) 150°-қа тең центрлік бұрыштың радиусы 6 дм болатын доғасының ұзындығы қандай да бір шеңбердің ұзындығына тең. Сол шеңбердің радиусын табыңдар. ә) Тербеліс бұрышы 36°-қа, маятнигінің ұшы сызатын доғасының ұзындығы 16 см-ге тең қабырға сағаты маятнигінің ұзындығын 0,1 см-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар (209-сурет).

209-сурет

В деңгейі

420. Берілгені: $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{a}+\vec{b}|=4$. а) Осы векторларды салыңдар. ә) $|\vec{a}-\vec{b}|$ табыңдар. б) $\vec{a}+\vec{b}$ мен $\vec{a}-\vec{b}$ векторларының арасындағы бұрыш неге тең?

421. $A(5; -1)$, $B(9; 5)$, $C(12; 6)$, $D(14; 2)$ нүктелері трапецияның төбелері болатынын дәлелдеңдер. Осы трапецияның орта сызығының ұзындығын табыңдар.

422. $\vec{i}$ және $\vec{j}$ – бірлік векторлар, $\vec{i}\perp\vec{j}$. Егер $\overrightarrow{AB}=6\vec{i}+3\vec{j}$ және $\overrightarrow{AC}=3\vec{i}+9\vec{j}$ болса, ΔABC-ның бұрыштарын табыңдар.

423. $ABCD$ төртбұрышының AC және BD диагональдары O нүктесінде қиылысады. $AO = OC = 4$, $BO = 2$, $DO = 8$, $\angle BOC = 60°$ екені белгілі болса, $\overrightarrow{AB}$ мен $\overrightarrow{DC}$ векторларының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

424. $M(2\sqrt{5}; 1)$ нүктесінен айналдыра сағат тіліне қарсы бағытта 30° бұрышқа бұрғанда, $A(3\sqrt{5}; 1)$ нүктесі B нүктесіне бейнеленген. AB қашықтығын табыңдар.

425. Ағаштың көлеңкесінің ұзындығы 24 м-ге тең. Сол уақыттағы биіктігі 1,5 м-ге тең тік бағананың көлеңкесінің ұзындығы 1,6 м. Ағаштың биіктігін табыңдар.

426. Үшбұрыштың қабырғалары 5, 6 және 8 сандарына пропорционал. Осы үшбұрышқа ұқсас үшбұрыштың ең ұзын және ең қысқа қабырғаларының айырымы 9 мм-ге тең болса, оның қабырғаларын табыңдар.

427. Шеңберге іштей сызылған $ABCD$ төртбұрышының диагональдары K нүктесінде қиылысады. $AB = 6$ см, $BK = 4$ см, $AK = 3$ см, $CD = 7$ см екені белгілі болса, CK мен DK-ны табыңдар.

428. Шеңбердің AB хордасы оның радиусына тең. OA және OB радиустарына OM және OK кесінділері салынған және $MA : MO = BK : KO = 2 : 1$. Егер шеңбердің радиусы 5 см-ге тең болса, MK кесіндісінің ұзындығын табыңдар.

429. Егер үшбұрыш: а) әртүрлі қабырғалы; ә) теңбүйірлі; б) теңқабырғалы болса, одан сол үшбұрышқа ұқсас үшбұрыш қиятын және ешбір қабырғасына параллель болмайтын түзу жүргізуге бола ма? Егер болса, оған мысал келтіріңдер.

430. ABC үшбұрышы берілген. BC қабырғасына $\angle BAD = \angle ACB$, $BD = 4$ см, $BC = 9$ см болатындай D нүктесі белгіленген. AB қабырғасын және ABD мен ABC үшбұрыштарының аудандарының қатынасын табыңдар.

431. а) Гипотенузасы $c = 8$ см, катеттерінің қатынасы $b : a = 1 : 2$ болатын тікбұрышты үшбұрыш салыңдар.

ә) $AB : AC = 2 : 3$, $\angle A = 60°$ және биссектрисасы $AK = 5$ см болатын ABC үшбұрышын салыңдар.

432. а) Екі ромбтың; ә) екі параллелограмның ұқсастық белгілерін тұжырымдап, оны негіздеңдер.

433. Ұзындығы 12 см-ге тең тіктөртбұрышты екі бүктеп, берілген тіктөртбұрышқа ұқсас болатын екі төртбұрыш алу үшін оның ені қандай болуы керек?

434. а) O нүктесі центрі болатын шеңбердің A нүктесі арқылы AB жанамасы мен AC хордасы жүргізілген, D нүктесі үлкен AC доғасына тиісті, $\angle BAC = 72°$. ADC бұрышының радиандық өлшемін табыңдар.

ә) AB мен AC – центрі O болатын шеңбердің жанамалары (B мен C – жанасу нүктелері), D нүктесі үлкен BC доғасына тиісті, $OA = 8$ см, шеңбердің центрінен BC хордасына дейінгі қашықтық 6 см-ге тең. BDC бұрышының радиандық өлшемін табыңдар.

435. Бір нүктеден шеңберге жүргізілген екі жанаманың жанасу нүктелері арқылы бөлінген шеңбер доғаларының радиандық өлшемдерінің қатынасы 3 : 2 тең болса, жанамалардың арасындағы бұрыштың радиандық өлшемін табыңдар.

436. C нүктесі AB хордасын ұзындықтары 12 см және 14 см болатын кесінділерге бөледі. Егер шеңбердің центрінен C нүктесіне дейінгі қашықтық 11 см-ге тең болса, оның радиусын табыңдар.

437. а) Шеңберге іштей сызылған дұрыс үшбұрыштың қабырғасы 6 см-ге тең. Осы шеңберге іштей сызылған шаршының ауданын табыңдар.

ә) Қабырғасы 4 дм-ге тең шаршыға сырттай шеңбер, ал шеңберге сырттай дұрыс алтыбұрыш сызылған. Осы алтыбұрыштың ауданын табыңдар.

438. Тікбұрышты трапецияға іштей сызылған шеңбердің центрінен трапецияның үлкен бүйір қабырғасының ұштарына дейінгі қашықтық 6 см және 8 см-ге тең. Трапецияның ауданын табыңдар.

439. Шеңберге іштей бір қабырғасы $2\sqrt{3}$ см-ге тең болатын үшбұрыш салынған. Егер: а) осы қабырғаға қарсы жатқан бұрыш $120°$ болса, шеңбердің радиусын; ә) осы қабырға шеңбердің центрінен 1 см-ге тең қашықтықта жатса, оған қарсы жатқан бұрышты табыңдар.

440. Қабырғалары 15 м, 15 м, 24 м болатын үшбұрышқа іштей сызылған дөңгелектің ауданын табыңдар.

441. Тікбұрышты ΔABC-да ($\angle C = 90°$) $AC = 18$ см, $\angle B = 60°$. Центрі C нүктесі болатын, гипотенузаны жанайтын дөңгелек салынған. Үшбұрыштың ішінде жатқан сектордың ауданын табыңдар.

442. Шеңберді қиятын түзу оны ұзындықтарының қатынасы 1 : 3 болатындай екі доғаға бөледі. Осы түзу дөңгелектің ауданын қандай қатынаста бөледі?

C деңгейі

443. Егер $ABCD$ ($BC \parallel AD$) трапециясы: а) сүйір бұрышы D болатын тікбұрышты және $|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}|=|\overrightarrow{BA}|$; ә) теңбүйірлі және $|\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{AB}|$ болса, оның бұрыштарын табыңдар.

444. Егер $\vec{d}+3\vec{c}$ және $2\vec{d}+0{,}4\vec{c}$ векторлары перпендикуляр екені белгілі болса, ұзындықтары бірге тең $\vec{c}$ және $\vec{d}$ векторлары қандай бұрыш құрайды?

445. $ABCDF$ дұрыс бесбұрышы берілген, K – AC мен BF диагональдарының қиылысу нүктесі. AKB бұрышын тауып, оны радиан арқылы өрнектеңдер.

446. B нүктесінен шеңберге BA жанамасы (A – жанасу нүктесі) және шеңберді C мен D нүктелерінде қиятын қиюшы жүргізілген, C нүктесі B мен D нүктелерінің арасында жатыр. Егер $AB = 24$ см, $BC = 14{,}4$ см, ал шеңбердің центрінен қиюшыға дейінгі қашықтық 9,6 см-ге тең болса, шеңбердің радиусын табыңдар.

447. а) Қабырғасы b-ға тең шаршының бұрыштарын дұрыс сегізбұрыш шығатындай етіп қиған. Осы сегізбұрыштың қабырғасын табыңдар.

ә) Қабырғасы a болатын дұрыс 12-бұрыштың әрбір екінші қабырғаларының орталарын қосып, дұрыс алтыбұрыш алған. Осы алтыбұрыштың қабырғасын табыңдар.

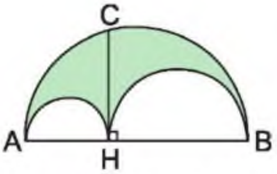
448. Әртүрлі қабырғалы үшбұрыштың қабырғалары 8, 15, x-ке тең, мұндағы x – ең үлкен қабырға. x-тің қандай мәндерінде осы үшбұрыш: а) тікбұрышты; ә) доғалбұрышты; б) сүйірбұрышты болады?

449. Теңбүйірлі үшбұрыштың табанына жүргізілген биіктігі 5 дм-ге, ал оған іштей сызылған шеңбердің радиусы 2 дм-ге тең. Үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің ұзындығын табыңдар.

450. $ABCD$ ($BC \parallel AD$) трапециясына сырттай шеңбер сызылған және BC мен AD хордалары оның центрінің екі жағында орналасқан, $AD = 4\sqrt{3}$ см, $BC = 4\sqrt{2}$ см, $\angle BDC = 45°$. Ұштары трапецияның көршілес төбелері болатын шеңбер доғаларының ұзындықтарын табыңдар.

451. Қабырғасы b болатын шаршының әрбір қабырғасын диаметр етіп алып, шаршының ішінде жататын жарты шеңбер салынған. Шыққан фигураның (210-сурет) ауданын табыңдар.

210-сурет



211-сурет

452. а) Берілген кесіндіні тең емес екі кесіндіге оның үлкен бөлігі тұтас кесінді мен оның кіші бөлігінің орта пропорционалы болатындай етіп бөліңдер («алтын қима» деген атпен тарихқа енген Евклид есебі). ә) Жарты дөңгелектен 211-суретте көрсетілгендей екі жарты дөңгелек қиып алынған. Дөңгелектің қалған бөлігінің ауданы диаметрі CH болатын дөңгелектің ауданына тең болатынын дәлелдеңдер (Архимедтің есебі).

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

453. 1А) $ABCD$ параллелограмы берілген. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ қосындысына және $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$ айырымына тең болатын векторларды салыңдар.

2А) ΔABC-да $\angle C = 90°$, $AC = CB$, CD – медиана. ACD мен ABC үшбұрыштары ұқсас па? Егер ұқсас болса, онда қандай белгісі бойынша?

3В) C нүктесі AB хордасын $AC = 6$ см және $CB = 7$ см кесінділерге бөледі. Егер $OC = 5{,}5$ см болса, шеңбердің радиусын табыңдар, мұндағы O – шеңбердің центрі.

4В) Табандары 2 см және 8 см трапецияға сырттай шеңбер сызуға болса, осы трапецияға іштей сызылған шеңбердің ұзындығын табыңдар.

5С) Егер $AB = 4\sqrt{3}$ см, $AC = 8$ см, $\sin A = 0{,}5$ болса, ABC үшбұрышына сырттай сызылған дөңгелектің ауданын табыңдар.

ҚОРЫТЫНДЫ ӨЗІН-ӨЗІ ТЕКСЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТАПСЫРМАЛАР

8-сынып геометрия курсы бойынша тапсырмалар

1. Теңбүйірлі үшбұрыштың периметрі 14 см-ге, ал қабырғаларының біреуі 3 см-ге тең. Үшбұрыштың қалған қабырғаларының ұзындықтарын табыңдар.

(5,5 см, 5,5 см)

2. Егер үшбұрыштың бұрыштарының біреуі қалған екі бұрышының айырмасына тең екені белгілі болса, оның ең үлкен бұрышын табыңдар.

(90°)

3. Параллелограмның қабырғаларының ұзындықтары 5 см және 12 см. Доғал бұрышының биссектрисасы параллелограмның қабырғасын қандай ұзындығы бар кесінділерге бөледі?

(5 см, 7 см)

4. Параллелограмм диагональдарының біреуімен әрқайсысының периметрі 8 дм болатын екі үшбұрышқа бөлінеді. Егер параллелограмның периметрі 10 дм-ге тең болса, онда осы диагональдің ұзындығын табыңдар.

(3 дм)

5. Табаны AC болатын теңбүйірлі ABC үшбұрышының AB қабырғасына орта перпендикуляр жүргізілген, ол BC қабырғасын P нүктесінде қияды. Егер BCA бұрышы 70°-қа тең болса, PAC бұрышын табыңдар.

(30°)

6. $ABCD$ параллелограмының A сүйір бұрышының төбесінен BC және CD түзулеріне AF және AN перпендикулярлары жүргізілген. Егер FAN бұрышы 130°-қа тең болса, параллелограмның бұрыштарын табыңдар.

(50°, 130°, 50°, 130°)

7. Трапецияның табандарының ұзындықтары 25 см және 4 см, ал бүйір қабырғаларының ұзындықтары 20 см және 13 см. Трапецияның ауданын табыңдар.

(174 см^2)

8. Диагональдары перпендикуляр және 8 см мен 12 см-ге тең болатын трапецияның ауданын табыңдар.

(48 см^2)

9. $ABCD$ ромбысының биіктігі $4\sqrt{3}$ дм, ал $\angle ADC = 120°$. BC түзуінде кез келген F нүктесі алынған. AFD үшбұрышының ауданын табыңдар.

($16\sqrt{3}$ дм^2)

10. а) Периметрі 2 м-ге тең, ал диагональдары 3 : 4 қатынасындай болатын ромбтың ауданын табыңдар.

ә) Ауданы S, ал диагональдары $m : n$ қатынасындай болатын ромбтың қабырғасын табыңдар.

(а) 24 дм^2; ә) $\frac{S}{mn}\sqrt{m^2+n^2}$)

11. Пішіні трапеция болатын жер учаскесінен үшбұрышты учаскені бөліп алу керек. Оның ауданы қалған бөлігінің ауданына тең болуы үшін мұны қалай жүзеге асыруға болады?

(Үшбұрыштың табанын трапецияның табандарының жарты қосындысына, ал биіктігін трапецияның биіктігіне тең етіп алу керек)

12. Тікбұрышты үшбұрыштың катеттерінің ұзындықтары 20 см және 21 см-ге тең. Тік бұрыштың төбесінен жүргізілген биссектрисаның ұзындығын табыңдар.

($\approx$ 14,5 см)

13. Қабырғасы a-ға тең теңқабырғалы үшбұрыштың ішкі жағында кез келген нүкте алынған. а) Осы нүктеден үшбұрыштың қабырғаларына дейінгі қашықтықтардың қосындысы тұрақты екенін дәлелдеңдер. ә) Осы нүктеден үшбұрыштың қабырғаларына дейінгі қашықтықтардың қосындысын табыңдар.

(ә) $0{,}5a\sqrt{3}$)

14. Тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасына жүргізілген биіктік 8 дм-ге, ал катеттерінің біреуі 10 дм-ге тең. Гипотенузаның ұзындығын табыңдар.

($16\frac{2}{3}$ дм)

15. *ABC* үшбұрышының биіктіктерін қамтитын түзулердің қиылысу нүктесі осы бұрыштан тыс орналасқан, ал *C* бұрышы – ең үлкені. Егер үшбұрыштың ауданы $2\sqrt{3}$ м^2, $AC = 2$ м, $BC =$ $= 4$ м болса, *C* бұрышының шамасын табыңдар.

(120°)

16. Егер тікбұрышты трапецияның табандарының ұзындықтары 8 см және 12 см-ге, ал бұрыштарының біреуі 135°-қа тең болса, оның периметрін табыңдар.

($(24 + 4\sqrt{2})$ см)

17. Теңбүйірлі үшбұрыштың сыртқы бұрыштарының біреуі 60°-қа тең, ал бүйір қабырғасына жүргізілген биіктік 18 см-ге тең болады. Үшбұрыштың табанының ұзындығын табыңдар.

(36 см)

18. *AB* және *AC* – центрі *O* болатын шеңберге жүргізілген жанамалар (*B* және *C* – жанасу нүктелері). Егер шеңбер центрінен *A* нүктесіне дейінгі қашықтық 8 см-ге, ал *BC* хордасына дейінгі қашықтық 6 см-ге тең болса, кіші *BC* доғасының градустық өлшемін табыңдар.

(60°)

19. Бұрыштары 40°, 50°, 90° болатын үшбұрыш шеңберге сырттай сызылған. Шеңбер жанасу нүктелерімен бөлінген доғалардың градустық өлшемдерін табыңдар.

(90°, 130°, 140°)

20. Тікбұрышты үшбұрышқа іштей сызылған шеңбердің жанасу нүктесі гипотенузаны 4 см және 21 см-ге тең болатын кесінділерге бөледі. Осы үшбұрыштың ауданын табыңдар.

(84 см^2)

21. Тіктөртбұрыш қабырғасының ұзындығы 9 см-ге, ал диагональдарымен құрылған бұрыштарының біреуінің шамасы $150°$-қа тең. Тіктөртбұрыштың ауданын табыңдар.

($81(2 \pm \sqrt{3})$ см^2)

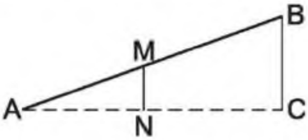
9-сынып геометрия курсы бойынша тапсырмалар

22. Берілген параллелограмға: а) төбелерінің біреуіне қатысты; ә) қабырғаларының біреуіне қатысты симметриялы болатын параллелограмды салыңдар.

23. Циркуль мен сызғыштың көмегімен берілген ABC үшбұрышына AH қабырғасы үшбұрыштың AC қабырғасында, ал K және P төбелері, сәйкесінше, AB және BC қабырғаларында жататындай $AKPH$ ромбысын іштей сызыңдар.

(Алдымен K_1 нүктесі AB қабырғасында, ал H_1 – AC қабырғасында жататындай етіп $AK_1P_1H_1$ ромбысын салыңдар. Содан кейін A нүктесі центрі болатын P_1 нүктесін BC қабырғасына тиісті P нүктесіне бейнелейтін гомотетияны пайдаланып, $AKPH$ ромбысын салыңдар.)

24. $AB = a$ болатын тасымалдауышпен жүкті көтереді (1-сурет). Тасымалдауыш табанынан $AM = b$ қашықтықта биіктігі m-ге тең MN бекітпесі орнатылған. Жүкті көтеру BC биіктігін осы берілгендері арқылы өрнектеңдер.



1-сурет

$\left(\frac{am}{b}\right)$

25. ABC үшбұрышы берілген. AC қабырғасында $AK = 4$ см, $AC = 9$ см, $\angle ABK = \angle BCK$ болатындай K нүктесі алынған. AB-ны және ABK мен ABC үшбұрыштарының аудандарының қатынасын табыңдар.

(6 см, 4 : 9)

26. Егер дөңес көпбұрыш бұрыштар қосындысы дөңес тоғызбұрыштың бұрыштарының қосындысынан 2 есе артық болса, онда оның неше қабырғасы бар?

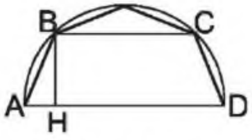
(16)

27. Трапецияның бүйір жақтары 3 см және 5 см-ге тең. Егер оған шеңберді іштей сызуға болатыны белгілі болса, осы трапецияның периметрін табыңдар.

(16 см)

28. Төртбұрышқа сырттай сызылған шеңбері бар, ал бұрыштардың өлшемдері: а) 1 : 2 : 3 : 4; ә) 5 : 5 : 9 : 10 қатынасындай болса, төртбұрышты салуға бола ма?

(а) Болады; ә) болмайды)



2-сурет

29. Үйдің мансардты жабынының вертикаль қимасы дұрыс сегізбұрыштың «жартысын» құрайды (2-сурет). Егер $AD = 6$ м болса, $ABCD$ мансардты бөлмесінің BH биіктігін табыңдар.

($\approx$ 2,1 м).

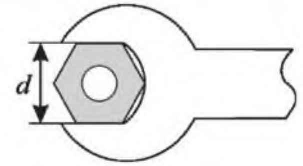
30. *Жазықтықты дұрыс көпбұрыштармен екі көпбұрыштың не ортақ қабырғасы, не ортақ төбесі болатындай немесе ортақ нүктелері болмайтындай және де оның кез келген берілген төбесі басқа кез келген берілген төбесімен қиысатындай етіп өзіне-өзін беттестіре жабуды дұрыс паркет деп атайды.*

Төбелерінде: а) 5; ә) 4; б) 3 көпбұрыш түйісетін екі дұрыс паркеттің мысалдарын келтіріңдер. Барлығы неше дұрыс паркет бар болады?

(Мысалы: а) дұрыс үшбұрыштар мен шаршылардан; ә) дұрыс үшбұрыштар мен алтыбұрыштардан; б) шаршылар мен дұрыс сегізбұрыштардан құрастырылған паркет.)

31. Егер сомынның дұрыс алтыбұрышының қабырғасы: а) 10 мм; ә) 15 мм болса, сомын кілттің d өлшемін табыңдар (3-сурет).

(а) 17; ә) 26)



3-сурет

32. Қабырғаларының біреуі 6 см-ге тең үшбұрышқа шеңбер іштей сызылған. Егер осы қабырғаға қарсы жатқан үшбұрыштың бұрышы 60°-қа тең болса, шеңбердің центрінен осы қабырғаға дейінгі қашықтықты табыңдар.

($\sqrt{3}$ см)

33. Радиусы 8 см-ге тең шеңбер ABC үшбұрышына сырттай сызылған. BC қабырғасының ұзындығы 12 см-ге, ал AC қабырғасына түсірілген үшбұрыштың биіктігі 5 см-ге тең екені белгілі болса, AB қабырғасының ұзындығын табыңдар.

($\frac{20}{3}$ см)

34. Егер $AB = 5$ м, $AC = 9$ м, $\sin A = 0{,}8$ болса, ABC үшбұрышының периметрін табыңдар.

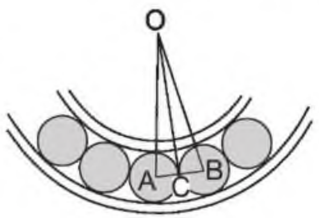
(($14 + 2\sqrt{13}$) м немесе ($14 + 4\sqrt{10}$) м)

35. Қабырғаларының ұзындықтары 12 мм, 16 мм және 21 мм болса, үшбұрыштың ауданын табыңдар.

($\approx 95{,}4$ мм^2)

36. Мойынтіректе 18 болат шарик бар (олар бір-біріне тығыз орналасқан). Егер шариктердің сыртқы сырғанау дөңгелегінің радиусы $(OB + r) = 60$ мм болса (4-сурет), шариктің r радиусын табыңдар.

(≈ 9 мм)



4-сурет

37. а) Параллелограмның диагональдарының ұзындықтары 13 см-ге және 19 см-ге, ал кіші қабырғасының ұзындығы 11 см-ге тең. Параллелограмның үлкен қабырғасының ұзындығын табыңдар.

ә) Үшбұрыштың қабырғаларының ұзындықтары 11 см, 13 см және 16 см-ге тең. Кіші қабырғасына жүргізілген медианасының ұзындығын табыңдар.

(а) 12 см; ә) 13,5 см)

38. Жердің Күнді айналу периоды шамамен 365 тәулікке тең. Жерден Күнге дейінгі қашықтық шамамен 150 млн км-ге тең. Жердің Күнді айналу жылдамдығын (км/с-пен) табыңдар.

($\approx$ 29,9 км/с)

39. Жерсерік Жерді 7,9 км/с жылдамдықпен айналады. Қанша уақытта жерсерік Жерді толық бір айналып шығады? (Жердің радиусы $\approx$ 6370 км, орбитаның биіктігі $\approx$ 500 км.)

(1,5 сағ.)

40. (*Қызықты есеп*). Жер экватор бойымен құрсаулап тартылған деп болжамдайық. Егер осы құрсаудың ұзындығын 1 м-ге үлкейтсе, онда саңылау пайда болады. а) Осы саңылаудан мысық өте ала ма? ә) Егер дәл осылай футбол добын құрсаулап, сосын құрсаудың ұзындығын 1 м-ге үлкейтсе, онда қай жағдайда саңылау үлкен болады? Жерде ме, әлде допта ма?

(ә) Жерде де, допта да саңылаудың ені $\frac{1}{2\pi}$ м-ге тең болады.)

41. Шеңбердің екі нүктесі оны градустық өлшемдерінің айырмасы 50°-қа тең болатын екі доғаға бөледі. Егер шеңбердің радиусы 8 см-ге тең болса, осы доғалардың ұзындықтарын табыңдар.

($\approx$ 21,6 см, $\approx$ 28,6 см)

42. Теміржол төсемінің бұрылу радиусы 1 км-ге тең, бұрылу доғасы 20°-ты құрайды. Осы доғаның ұзындығын табыңдар.

($\approx$ 349 м)

43. а) Тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасы 5 дм-ге, ал кіші катеттің гипотенузаға түсірілген проекциясы 1,8 дм-ге тең. Осы үшбұрышқа іштей сызылған шеңбердің ұзындығын табыңдар.

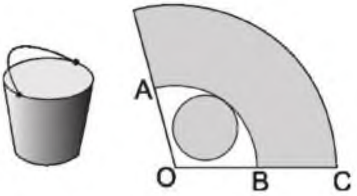
ә) Периметрі 28 см-ге, ал ауданы 48 $см^2$-ге тең тікбұрышты үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің ұзындығын табыңдар.

(а) ≈ 6,28 дм; ә) ≈ 33,2 см)

44. Қабырғалары 15 см, 15 см, 24 см-ге тең үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің радиусын табыңдар.

(12,5 см)

45. Егер шелек түбінің диаметрі 20 см, $\angle AOB = 115°$, $OB = BC$ болса (5-сурет), шелек жасауға қажет мырышталған қаңылтырдың (тігісін есепке алмағандағы) ауданын табыңдар.



5-сурет

(≈ 0,32 $м^2$)

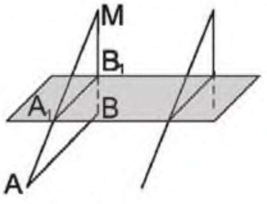
46. Барлық қырларының ұзындықтарының қосындысы $\sqrt{12}$ дм болатын кубтың бетінің ауданын табыңдар.

(0,5 $дм^2$)

47. Қыры 4 дм болатын кубтың жазбасын қиып алу үшін тікбұрышты парақтың өлшемдері қандай болуы керек?

(12 дм × 16 дм, кем емес)

48. Ғимараттың ішкі әрлеу жұмыстарын орындау үшін мінбе қолданады (6-сурет). Мінбенің төсем қалқаны таған табанынан $AA_1 = a$ және тағандардың қиылысу нүктесінен $MA_1 = b$ қашықтықта бекітілген. Таған табандарының арақашықтығы $AB = c$. Төсемнің тағандармен қиылысу нүктелерінің A_1B_1 арақашықтығын табыңдар.



6-сурет

$\left(A_1B_1 = \dfrac{bc}{a+b}\right)$

49. Егер тікбұрышты үшбұрыштың қабырғалары ұзындықтарының айырмасы 2 см-ге тең арифметикалық прогрессияны құрайтын болса, гипотенузаның ұзындығын табыңдар.

(10 см)

50. Тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасының ұзындығы 12 см-ге тең. Егер үлкен катеттің ұзындығы кіші катеттен гипотенузаның арифметикалық ортасына тең екені белгілі болса, катеттердің ұзындықтарын табыңдар.

(9,6 см, 7,2 см)

51. а) Радиусы 9 см болатын шеңберге іштей сызылған төртбұрыштың ең үлкен ауданын табыңдар.
ә) Радиусы 6 м-ге тең шеңбердің O центрінен 8 м қашықтықта M нүктесі алынған. Егер X шеңбердің кез келген нүктесі болса, OMX үшбұрышының ең үлкен ауданын табыңдар.

(а) 162 см^2; ә) 24 м^2)

52. ABC үшбұрышында $AC = 2$ дм, $\angle A = 30°$, $\angle C = 45°$. AC қабырғасына жүргізілген үшбұрыштың биіктігін табыңдар.

(($\sqrt{3}$ – 1) дм)

53. Тікбұрышты үшбұрыштың катеттері 9 см және 40 см-ге тең. Үшбұрышқа іштей сызылған шеңбердің центріне дейінгі қашықтықты табыңдар.

(2,5$\sqrt{41}$ см)

ЖАУАПТАР МЕН НҰСҚАУЛАР

1. а) $\angle M = \angle P = 45°$, $\angle N = \angle K = 135°$; ә) $\angle B = \angle D = 130°$, $\angle A = \angle C = 50°$; б) $\angle F = 135°$, $\angle T = 100°$. **2.** $AB = CD$ және $AB \parallel CD$ болатынын дәлелдеңдер. **4.** $(24 + 4\sqrt{2})$ см, 40 см^2. **5.** 120°, $a^2\sqrt{3}$. **6.** 9 см^2. Диагональдарының қиылысу нүктесі арқылы биіктік жүргізіп, оның трапеция табандарының қосындысының жартысына тең болатынын дәлелдеңдер. **7.** а) 45°, 135°, 45°, 135°; ә) 11 см. **8.** 32 см. **9.** а) 55°. ΔABC және ΔADC түрлерін анықтаңдар; ә) 5 см, 4 см, 3 см. **10.** Медианалардың қасиеті мен Фалес теоремасын пайдаланыңдар. **11.** 35 см. O нүктесінің берілген үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің центрі болатынын анықтаңдар. **12.** $9\sqrt{3}$ см^2. **13.** 2 см. **14.** 8 см, 15 см. Шеңберге бір нүктеден жүргізілген жанамалардың қасиеттерін пайдаланып, катеттерін белгілеңдер, Пифагор теоремасы бойынша теңдеу құрыңдар. **15.** а) $2\sqrt{10}$ см, $6\sqrt{10}$ см, 20 см; ә) 15 см, $5\sqrt{3}$ см, $5\sqrt{6}$ см. **16.** $1\frac{5}{37}$ см. **17.** 1 : 4. **18.** $BC = a$ болсын. Гипотенуза мен BH және AH кесінділерін a арқылы өрнектеңдер. Әрі қарай көрсетілген үшбұрыштардың аудандарын a және h арқылы өрнектеп, олардың қатынасын табыңдар. **19.** $4\sqrt{3}$ см, $16\sqrt{3}$ см^2. **20.** $(\sqrt{3} - 1)$ дм. BD биіктігі мен DC кесіндісін x деп белгілеңдер, сонда $AD = 2 - x$ және ΔABD-дан tg$A$-ны тауып, пропорция құрыңдар. **21.** $10\sqrt{3}$ см. **22.** ≈ 1300 м. $OA = x$ болсын. ΔAOB мен ΔCOB-дан OA және OC катеттерін ctg$A$ мен ctg$C$ арқылы өрнектеңдер. **23.** 10 см. $AB = BC$ болатын ΔABC берілген болсын. AM медианасын табу керек. AM-нің созындысына $MN = AM$ кесіндісін салыңдар, сонда $ABNC$ параллелограмм болады. Параллелограмның қабырғалары мен диагональдарының қасиеттерін пайдаланыңдар. **24.** 23-есептегі сияқты, алдымен, параллелограмның қабырғалары мен диагональдарының қасиеттерін пайдаланып, AB қабырғасын табыңдар. **25.** 2,4 см. ΔABC-ның ауданын тауып, оны ΔABD мен ΔCBD-ның аудандарының қосындысы ретінде өрнектеп, теңдеу құрыңдар. **26.** а) $C(5; 0)$; ә) (5; 0), (0; 10). **27.** Центрі координата басы бірлік жарты шеңберді және 0°-тан 180°-қа дейінгі тригонометриялық функциялардың анықтамаларын пайдаланыңдар. Есептің: а) екі шешімі, ә) бір шешімі бар. **28.** $x^2+(y-\sqrt{3})^2=12$. Алдымен үшбұрыштың түрін анықтаңдар, сосын ізделінді шеңбердің центрінің координаталары мен радиусын табыңдар. **29.** 24 кв. бірлік. $ABCD$ төртбұрышының түрін анықтаңдар. **30.** 500 км. **32.** ә) жағдайында. **33.** а) және в) – дұрыс; ә) және б) – дұрыс емес. **34.** Дұрыс. **35.** а) 13 см; ә) 6,5 см; б) 2,5 см. **36.** 4,5 см және 7,5 см. **38.** ә) Тең емес. **39.** а) тең емес. **40.** а) Берілгенге тең кесінді; ә) берілгенге тең үшбұрыш. **41.** а) 12 см; ә) 8 см; б) $2\sqrt{43}$ см. **43.** Коллинеар емес векторлар үшін немесе, егер екі вектордың бірі не екеуі де $\vec{0}$-ға тең болса ғана орындалатынына көз жеткізіңдер. **44.** Векторлардың айырымының анықтамасы бойынша. **46.** Көпбұрыш ережесі мен векторлардың айырымының анықтамасын пайдаланып, теңдіктің оң жағы мен сол жағы тең болатын векторларды табыңдар. **47.** 15 вектор, көпбұрыш ережесі бойынша олардың қосындысы $\vec{0}$-ға тең. **49.** а) 4; ә) $\sqrt{5}$; б) 0; в) $2\sqrt{5}$. **50.** $\overrightarrow{MK}=\vec{b}-\vec{a}$, $\overrightarrow{MN}=\vec{b}+\vec{a}$, $\overrightarrow{PN}=\vec{a}-\vec{b}$, $\overrightarrow{PK}=-\vec{a}-\vec{b}$. **51.** $AD=2BC$. $\overrightarrow{CB}=-\vec{a}$, $\overrightarrow{DC}=\vec{b}-\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}+\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{a}+\vec{a}$, $\overrightarrow{DB}=\vec{b}-(\vec{a}+\vec{a})$ болатынына көз жеткізіңдер. **53.** а) және ә) теңдіктерінің әрқайсысынан $\vec{x}$-ын өрнектеп, оны векторлардың қосындысы түрінде көрсетіңдер және көпбұрыш ережесін қолданыңдар. **54.** а) Векторды теңдіктің бір жағынан екінші жағына көшіру қасиетін және векторлардың айырымының анықтамасын пайдаланыңдар. ә) Теңдіктің оң жағы мен сол жағындағы өрнектердің қандай векторларға тең екенін табыңдар. **55.** а) 8 см; ә) 0. **56.** 4 см. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ қосындысының $\overrightarrow{OC}$ векторына қарама-қарсы векторға тең болатынын дәлелдеңдер. **61.** Мысалы, бірдей бағытталған үш вектор салып, олардың бірінің қалған екі векторлардың қосындысына да, айырымына да параллель болатынына көз жеткізіңдер. **62.** а) $3\frac{1}{2}\vec{x}-2\frac{1}{2}\vec{y}$; ә) $3\frac{1}{3}\vec{x}+4\frac{2}{3}\vec{y}$; б) $-0{,}55\vec{x}-0{,}05\vec{y}$. **63.** $\overrightarrow{AM}=\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}$, $\overrightarrow{CO}=\frac{3}{4}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$. **64.** $\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$, $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b})$, $\overrightarrow{CN}=\frac{1}{4}(\vec{b}-\vec{a})$, $\overrightarrow{DM}=-\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})$. **66.** Бола алмайды. $\vec{a}=k\vec{b}$ деп ұйғарып, бұдан $\vec{m}$ және $\vec{n}$ векторларының коллинеар екендігін, мұның шартқа қайшы келетінін анықтаңдар. **67.** $x = \frac{8}{7}$, $y = -\frac{6}{7}$. **68.** Көпбұрыш ережесін қолданып, $\overrightarrow{MN}$ векторын екі жолмен өрнектеңдер және шыққан теңдіктердің сол жақтары мен оң жақтарын мүшелеп қосыңдар. **69.** а) $\overrightarrow{MK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC})$. $\overrightarrow{MK}$ векторын екі жолмен өрнектеп, шыққан теңдіктердің сол жақтары мен оң жақтарын мүшелеп қосыңдар. ә) $|\overrightarrow{MK}| = 5$ см. **70.** O нүктесін кесіндінің ортасымен қосатын әрбір векторды O нүктесін кесіндінің ұштарымен қосатын векторлармен өрнектеңдер (3-тармақтағы 2-есептің шешімін қараңдар) және шыққан теңдіктердің сол жақтары мен оң жақтарын мүшелеп қосыңдар. **71.** $\overrightarrow{BC}$ және $\overrightarrow{AD}$ векторларының коллинеар екенін дәлелдеңдер. **72.** $\overrightarrow{NK} = \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AD} = ...$, $\overrightarrow{ML} = ...$, $\overrightarrow{NK} = \overrightarrow{ML}$ екенін дәлелдеңдер. **73.** $\overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OC}$. **74.** а) $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$; ә) $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} - \frac{3}{5}\overrightarrow{AD}$. **75.** а) $\overrightarrow{AM} = \frac{4}{9}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{9}\overrightarrow{AD}$; ә) $\overrightarrow{AM} = \frac{8}{9}\overrightarrow{AD} - \frac{4}{9}\overrightarrow{BD}$. **76.** а) $\overrightarrow{MO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$; ә) $\overrightarrow{CM} = 1\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$. **77.** $CH^2 = AH \cdot HB$ формуласын пайдаланып, теңдеу құрыңдар және H нүктесі гипотенузаны қандай қатынаста бөлетінін табыңдар. $\overrightarrow{CH} = \frac{4}{5}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{CA}$. **78.** $\overrightarrow{MK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. **79.** $\overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}) = ...$ **80.** $\vec{m} = \frac{3}{7}\vec{b} + \frac{2}{7}\vec{a}$, $\vec{n} = \frac{2}{7}\vec{b} - \frac{1}{7}\vec{a}$. **81.** $\overrightarrow{MK}$ және $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{PN}$ және $\overrightarrow{DB}$ векторларының коллинеар болатынын дәлелдеңдер: $\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AM} = \frac{2}{7}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{7}\overrightarrow{AD} = ...$, $\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{CP} = ...$ **82.** Берілген үшбұрышты координаталар жүйесіне салыңдар. C нүктесі осы үшбұрыштың биссектрисаларының қиылысу нүктесі екенін ескеріп, $CN : OC = 5 : 4$ (O – координата басы) болатынын көрсетіңдер. Сосын $\overrightarrow{CN} = -\frac{5}{4}\overrightarrow{CO} = ... = -\frac{5}{8}(\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{CK})$. **83.** D нүктесі үшбұрыштың қабырғаларына тұрғызылған орта перпендикулярлардың қиылысу нүктесі екенін ескере отырып, $D(0; y)$ болатынын анықтаңдар және $AD^2 = CD^2$ теңдеуін құрып, одан y-ті табыңдар. Әрі қарай $DC : DO = 5 : 3$ болғандықтан, $\overrightarrow{DC} = \frac{5}{3}\overrightarrow{DO} = ... = \frac{5}{6}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB})$ болады. **84.** OC диагоналі болатын, қабырғалары OA және OB түзулерінде жататын $OMCN$ параллелограмын салыңдар. Сосын, CAO және CAM тікбұрышты үшбұрыштарынан мынаны анықтаңдар: а) $AO = AM$, $\overrightarrow{OC} = 2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$; ә) $MA : AO = 1 : 3$, себебі $MA = AC \cdot \operatorname{tg} 30°$, $AO = AC \cdot \operatorname{tg} 60°$, демек $\overrightarrow{OC} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$. **85.** а) $\overrightarrow{AB}(5; -5)$; ә) $\overrightarrow{AB}(-20; 14)$. **86.** а) $B(4; 3)$; ә) $B(1,5; 1,5)$. **87.** а) $A(3; 0)$ немесе $A(3; 6)$; ә) $A(16; 13)$ немесе $A(0; 13)$. **88.** а) $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 15$, $|\vec{c}| = 2$, $|\vec{d}| = 1,3$; ә) $\vec{m}(5; 4)$, $\vec{n}(0; -13)$; б) $|\vec{c}| = 5$, $|\vec{d}| = 10$. **89.** $\vec{a} = 2\vec{c}$, $\vec{b} = -\frac{2}{3}\vec{d}$. **90.** $y = -3$. **91.** Бар болады, олар $\vec{a}$ және $\vec{c}$ векторлары. **92.** а) $|\vec{a}| = |\vec{c}| = 1$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{d}| = 0,5$; ә) $\vec{b} = 3\vec{a}$, $\vec{a} = -2\vec{d}$, $\vec{b} = -6\vec{d}$. **93.** Әрбір вектордың координаталарын жазыңдар, олардың вектордың ұшының координаталарына тең болатынын ескеріңдер. **94.** $\vec{a}(2; -1)$, $\vec{b}(-1; 2)$, $\vec{c}(1,5; -1,5)$, $\vec{d}(-2; -0,5)$. **95.** а) $\vec{c}(6; 1)$, $|\vec{c}| = \sqrt{37}$; ә) $\vec{d}(-3; 2)$, $|\vec{d}| = \sqrt{13}$. **96.** а) $\vec{m}(5; 14)$; ә) $\vec{n}(-3; -15)$. **97.** $M(-1; 1)$, $K(-2; 5)$. **98.** а) $\vec{a} = \overrightarrow{MA}$, $A(2; 4)$; ә) $\vec{b} = \overrightarrow{MB}$, $B(0; -2)$; б) $\vec{c} = \overrightarrow{MC}$, $C(-1; 0,5)$. **99.** а) $x = 1$, $y = 2$; ә) $x = 2$, $y = 2$. **100.** $\overrightarrow{OM}$ және $\overrightarrow{OK}$ векторларының координаталарын тауып, $|\overrightarrow{OM}| = |\overrightarrow{OK}| = \sqrt{13}$ болатынын анықтаңдар. **101.** а) (2; 1); ә) (3; 3). **102.** а) 75°; ә) 150°; б) 105°. **103.** а) 60°; ә) 120°; б) 180°; в) 0°; г) 90°. **104.** а) –10; ә) 2,29. **105.** 16. **106.** а) 32; ә) 0; б) 75. **107.** а) 18; ә) –15. **108.** а) 4; ә) 0; б) –8; в) –12. **109.** 135°. **110.** 30°. **112.** $-\frac{1}{2}$ немесе 1. **113.** 16. **114.** 250. $\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC}$ векторына тең вектор салып, тікбұрышты үшбұрыштан оның ұзындығын табыңдар. **116.** 48. **117.** $\sqrt{12}$. $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2$ табыңдар. **118.** $AC^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})^2 = ...$, $DB^2 = (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD})^2 = ...$ **119.** а) Себебі $-1 \le \cos\alpha \le 1$; ә) себебі $0 \le \cos^2\alpha \le 1$. **120.** Қосындысы 75°-қа тең болатындай етіп, координаталық жазықтыққа $\angle AOx = 45°$ және $\angle BOx = 30°$ салыңдар. $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = 1$ болсын, сонда $\overrightarrow{OA}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

$\overrightarrow{OB}\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$ болады. Сосын $\cos\angle(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$ табыңдар. **121.** ≈ 275 Н. **122.** 1,5 Н. Жүк *OM* көлбеу жазықтықта жатсын, *ON* – көкжиек сызығы болсын, $\angle MON = 30°$. *A* – жүктің ауырлық центрі. Жүктің салмағын кескіндейтін $\overrightarrow{AC}$ векторы *ON*-ге перпендикуляр және $|\overrightarrow{OC}| = 3$. $\overrightarrow{AC}$ векторын $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{AD}$ перпендикуляр векторлары бойынша жіктеңдер, $\overrightarrow{AB}\perp OM$, $\overrightarrow{AD}\parallel OM$. Жүк қозғалмай тұру үшін оған $\overrightarrow{AD}$ векторына қарама-қарсы $\overrightarrow{AF}$ векторымен кескінделетін күш түсіру керек. $|\overrightarrow{AF}| = |\overrightarrow{AD}|$. $\angle BAC = 30°$ болатынын анықтап, тікбұрышты ΔABC-дан $\overrightarrow{AD}$ векторының ұзындығын $\overrightarrow{AD} = BC$ табыңдар. **123.** ≈ 51 км/сағ. Құстың жерге қарағандағы жылдамдығы – оның меншікті жылдамдығын кескіндейтін $\overrightarrow{AB}$ мен желдің жылдамдығын кескіндейтін $\overrightarrow{AD}$ векторларының қосындысына тең $\overrightarrow{AC}$ векторы. $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$ болғандықтан, $|\overrightarrow{AC}| = AC$ – тікбұрышты ΔABC-ның гипотенузасы. **124.** 60°. $\vec{F} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{Q} = \overrightarrow{AD}$ болсын, олардың тең әсерлі күші $\overrightarrow{AC}$ болады. *ABCD* ромб болатынын анықтаңдар, *O* оның диагональдарының қиылысу нүктесі болсын. ΔBAO-дан $\cos\frac{\angle A}{2}$ табыңдар. **125.** Жоқ, себебі $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}|=0$ (2-тармақтағы 2-есептің шығару жолын қараңдар). **126.** а) $\approx 125°$; ә) $\approx 55°$. Ізделінді бұрыштың косинусын $\cos\angle C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ формуласын табыңдар, мұндағы *a*, *b*, *c* – ΔABC-ның қабырғалары (7-тармақтағы 2-есептің шешуін қараңдар). **127.** $-\frac{8}{3}$. **128.** Берілген түзуден екі нүкте, мысалы, *A* және *B* нүктелерін алыңдар да, $\vec{m}$ және $\overrightarrow{AB}$ векторларының скаляр көбейтіндісін табыңдар. **129.** а) $x + 2y - 8 = 0$; ә) $5x + 19y - 215 = 0$. 7-тармақтағы 3-есепті шешкенде шыққан теңдеуді пайдаланыңдар. **130.** Жоқ, себебі ондай векторлар шексіз көп. **131.** а) $y = 2x + 6$, *M* және *N* нүктелерінің координаталарын тауып, 7-тармақтағы 3-есепті шешкенде алынған қорытындыны пайдаланып, түзудің теңдеуін құрыңдар; ә) $y = 6x - 19$, *H* нүктесінің координаталары $(x; y)$ болсын, $\overrightarrow{BH}$ және $\overrightarrow{AC}$ векторларының координаталарын жазып, олардың перпендикулярлық шартын пайдаланыңдар. **132.** $\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 135°$, түзулердің арасындағы бұрыш 45°, себебі ол екі түзудің қиылысқанда пайда болған бұрыштарының ең кішісі. **133.** а) $\approx 62°$; ә) $\approx 72°$. Берілген түзулерді салып, олардың әрқайсысынан 2 нүктеден алыңдар да, түзулерде жатқан векторлардың арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар. № 132-есептің шешуіндегі нұсқауды ескеріңдер. **134.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **135.** а) 70 кв. бірлік; ә) 15 кв. бірлік. **136.** 21 кв. ед. **137.** 4 см, 10 см. 4-тармақта дәлелденген пропорционал кесінділер туралы теореманы пайдаланыңдар. **138.** $2(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ см. 6-тармақтағы 4-есепті қолданыңдар. **139.** 120°. **140.** *ABCD* ромб болсын, $\overrightarrow{AC}$ және $\overrightarrow{DB}$ векторларын $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{AD}$ векторлары арқылы өрнектеп, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$ скаляр көбейтіндісін табыңдар. **141.** Үшбұрыш ережесі бойынша $\overrightarrow{AC}$ және $\overrightarrow{DB}$ векторларының қосындысын тауып, $(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) \upuparrows \overrightarrow{MN}$ болатынын анықтаңдар. **142.** а) 7; ә) $5\sqrt{2}$. $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 = \ldots$ табыңдар. **143.** *ABCD* параллелограмы берілген болсын, $\overrightarrow{AC}$ және $\overrightarrow{DB}$ векторларын $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ және $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ векторлары арқылы өрнектеп, $\overrightarrow{AC}^2$ және $\overrightarrow{DB}^2$ табыңдар, сосын шыққан теңдіктердің сол жақтары мен оң жақтарын мүшелеп қосыңдар. **144.** $6R^2$. $MA^2 = |\overrightarrow{MA}|^2 = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 = \ldots$, $\overrightarrow{MB}^2 = \ldots$, $\overrightarrow{MC}^2 = \ldots$. Сосын $MA^2 + MB^2 + MC^2$ қосындысын табыңдар және $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ болатынын ескеріңдер (2-тармақтағы 2-есептің шешуін қараңдар). **145.** *ABC* үшбұрышының *BH* және *AK* биіктіктерін қамтитын түзулер *O* нүктесінде қиылысатын болсын. *OC* түзуінің осы үшбұрыштың *CN* биіктігін қамтитынын дәлелдеңдер, яғни *OC* және *AB* түзулерінің перпендикуляр екенін дәлелдеңдер. Ол үшін $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ деп белгілеңдер, сонда векторлар $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \ldots$, $\overrightarrow{CA} = \ldots$ болады. $\vec{a} \cdot \overrightarrow{BC}$, $\vec{b} \cdot \overrightarrow{CA}$ скаляр көбейтінділерінің неге тең болатынын жазып, шыққан теңдіктердің сол жақтары мен оң жақтарын мүшелеп қосыңдар. Сосын $\vec{c} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ болатынын анықтаңдар, бұдан *OC* және *AB* түзулерінің перпендикулярлығы шығады. **146.** *M* және *N* нүктелері, сәйкесінше, *AB* және *CD* хордаларының орталары болсын, сонда $\overrightarrow{OK} =$

$= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + ...$ болады. **147.** Ондай X нүктелері: а) диаметрі AB болатын шеңбер; ә) центрі B нүктесінде, радиусы AB-ға тең болатын шеңберде; б) AB кесіндісінің орта перпендикулярында жататынын анықтаңдар. **148.** 3В) $\frac{1}{10}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$; 4В) 150°; 5С) $3x - 5y - 2 = 0$. **153.** а) $\vec{m} = \overrightarrow{KC}$. **154.** ә) $\angle ACB$, мұндағы A, B – шеңберлердің центрлері. **156.** Мысалы, O нүктесін айналдыра сағат тілі бағытымен 120°-қа бұру және BO түзуіне қарағанда осьтік симметрия. **157.** ә) Көпбұрыштың әрбір төбесінің бейнесі оның басқа төбесі болады, сондықтан төбелерінің саны жұп болуы керек. **158.** а) Мысалы, A нүктесіне берілген түзуге қарағанда симметриялы A_1 нүктесін салыңдар. A_1B кесіндісі берілген түзуді C нүктесінде қиып өтсін. $A_1X + XB$ мен A_1B-ны салыстырып, ΔABC-ның периметрінің ең кіші болатынын дәлелдеңдер, мұндағы X – берілген түзуден еркімізше алынған нүкте. **159.** Шешуі № 158 есептікі сияқты. A нүктесіне a түзуіне қарағанда симметриялы A_1 нүктесін және B нүктесіне b түзуіне қарағанда симметриялы B_1 нүктесін салыңдар. A_1B_1 кесіндісі a және b түзулерін, сәйкесінше, M және N нүктелерінде қиып өтетін болсын. Басқа M_1 және N_1 нүктелерін алып, $A_1M_1N_1B_1$ сынық сызығының ұзындығын A_1B_1 кесіндісінің ұзындығымен салыстырып, $AMNB$ жолының ең қысқа екенін дәлелдеңдер. **160.** MK платформасының ұзындығы a болсын. A пунктін $\vec{a}$ векторына параллель көшіріп, A_1 нүктесін алыңдар. A_1 нүктесіне платформа тұруы керек түзуге қарағанда симметриялы A_2 нүктесін салыңдар. A_2B кесіндісі сол түзуді K нүктесінде қиып өтеді, M – AA_1KM параллелограмының төбесі. Сонда $AMKB$ жолының ұзындығы ең қысқа болады. **161.** O_1O_2 кесіндісінің орта перпендикуляры, мұндағы O_1, O_2 – берілген шеңберлердің центрлері. **162.** а) 72°; ә) BD немесе FB. **163.** а) O центрі болатын шеңбер салып, оны тең 6 бөлікке бөліңдер. Бөлген нүктелерді, мысалға, A, B, C, D, E, F деп белгілеп, $ABCDEF$ алтыбұрышының есептің шартын қанағаттандыратынын дәлелдеңдер. ә) Осы алтыбұрыштың симметрия центрі шеңбердің O центрі болады, симметрия осьтері алтау, соларды көрсетіңдер. **164.** а) 120°; ә) үшбұрышты

O центрінен айналдыра сағат тілінің бағытымен (немесе оған қарсы бағытта) 120°-қа бұрыңдар. **165.** а) $y = 2x - 5$; ә) $y = -\frac{1}{2}x + 2$. **167.** $S_1 : S = 4$. **168.** ә) $C_1M_1 = 1{,}25$, $C_2M_2 = 3{,}75$. **169.** ә) 3,6 см. $ABCD$ ромбысының ауданын екі әдіспен өрнектеп, оның биіктігін табыңдар, сосын ұқсастық түрлендірудің қасиеттерін пайдаланып, салынған ромбтың биіктігін табыңдар. **170.** 4 см. ΔBDE мен ΔBAC гомотетиялы, яғни ұқсас екенін дәлелдеңдер. **171.** Берілген түзуге перпендикуляр OH кесіндісін салыңдар, OH кесіндісінің ортасы болатын C нүктесінен $AB \perp OH$ хордасын жүргізіңдер. Центрі O нүктесінде және коэффициенті 2 болатын гомотетияда A мен B нүктелері берілген түзуге тиісті A_1 мен B_1 нүктелеріне бейнеленетінін дәлелдеңдер. **172.** OA және OB радиустары жүргізілген болсын. Кіші AB доғасының ортасы болатын C нүктесінен берілген шеңберге жанама жүргізіңдер. OA және OB сәулелері оны, сәйкесінше, A_1 және B_1 нүктелерінде қиып өтетін болсын. Жанамаға $M_1A_1 = A_1B_1 = B_1N_1$ кесінділерін салып, OM_1 және ON_1 сәулелерін жүргізіңдер. Олар осы шеңберді, сәйкесінше, M және N нүктелерінде қиып өтсін, сонда MN ізделінді хорда болады. MN хордасы OA және OB сәулелерімен тең үш бөлікке бөлінетінін дәлелдеңдер. **173.** а) Жоқ; ә) ұқсас. **174.** $AC = 4$ см, $C_1B_1 = 14$ см. **175.** ә) Ұқсас, $k = \frac{1}{2}$. **176.** а) 2; ә) 4,5; б) 4. **177.** 24 см. **178.** а) 12 см, 36 см; ә) 3 м. ΔABC және ΔACD-ның қандай бұрыштары тең екенін анықтаңдар. **179.** 8,67 м. **180.** $33\frac{1}{3}$ см^2. **181.** 16 см. **182.** 6 см. **183.** II белгісі бойынша ұқсас. **184.** $AC = 8$ см, $MK = 12$ см. **185.** III белгісі бойынша ұқсас. **186.** 1060 км, 1210 км, 1370 км. **187.** а) $2\sqrt{7}$ м; ә) $4\frac{1}{6}$ дм. **188.** а) Ұқсас, $k = 1$; ә) ұқсас, $k = \frac{1}{2}$. **189.** 0,96 см^2, 3,84 см^2. **190.** 4,8 см. $\Delta ACD \sim \Delta CBD$ болатынын дәлелдеңдер. **191.** а) $\frac{2}{5}$; ә) $\frac{4}{25}$. Кез келген екі шаршының ұқсас болатынын дәлелдеңдер. **192.** а) 100 см, 60 см; ә) 22 см, 26 см. **193.** б) 6 м, 2 м, 7,5 м. **194.** а) $128\sqrt{3}$ см^2; ә) $0{,}32\sqrt{3}$ см^2. **195.** а) 6; ә) 0,3. **196.** а) $30\sqrt{2}$ см. **197.** а) 9 см^2; ә) 16 см^2. **198.** ә) 2:1. **199.** а) 800 %-ға; ә) $88\frac{8}{9}$ %-ға. **200.** Ізделінді кесінді $\sqrt{ab}$-ға тең. Ол тікбұрышты үшбұрыштың ұзындығы $a + b$ болатын гипотенузасына түсірілген биіктігіне тең болады. Диаметрі $KL = KH + HL$, мұндағы $KH = a$, $HL = b$ болатын шеңбер және KL диаметріне перпендикуляр HS салыңдар (S – оның шеңбермен қиылысу нүктесі). $SH = \sqrt{ab}$ болатынын дәлелдеңдер. Содан кейін ұштары $ABCD$ трапециясының бүйір қабырғаларында жататын осы кесіндіні салыңдар (13-тармақтың 3-есебінде). **202.** 2400 м. **203.** 105 м. **204.** а) 34,5 м. **205.** 4 см және 12 см. **206.** 14,4 см. **207.** $16(3 - \sqrt{3})$ см. **208.** а) 1,5 см, 2 см, 2,5 см; ә) 3,6 см. **209.** 2,5 см. Теңбүйірлі ABC үшбұрышының BC бүйір қабырғасына OK перпендикулярын жүргізіп (O – сырттай сызылған шеңбердің центрі), OBK және CBH ұқсас үшбұрыштарын қарастырыңдар (BH – ΔABC-ның биіктігі). **210.** 4,2 см. Шеңберге бір нүктеден жүргізілген жанамалардың қасиетін және үшбұрыштардың ұқсастығын пайдаланыңдар. **211.** 32 см. **212.** $8\sqrt{2}$ см. Берілген үшбұрыш пен параллель түзу қиып түсірген үшбұрыштың аудандарының қатынасын жазып, олардың ұқсастық коэффициентін табыңдар. **213.** 90 см^2. **214.** 5 см^2. **215.** $\frac{5}{18}$. **216.** $\approx 18{,}3$ см^2. **217.** $4(\sqrt{5} - 1)$ см. **218.** $\angle H = 70°$, $\angle K = 50°$. **219.** AC қабырғасының созындысына $CF = a$ кесіндісін салыңдар. $\Delta ABC \sim \Delta AFB$ болатынын дәлелдеңдер. **220.** ә) $\frac{4}{9}$; б) $\frac{3}{4}$. Медианалардың үшбұрышты 6 тең шамалы үшбұрышқа бөлетін қасиетін пайдаланыңдар. **221.** $AC = BD$ және $ABCD$ тіктөртбұрыш екенін дәлелдеңдер. **222.** 0,96. $\overrightarrow{OA}$ және $\overrightarrow{OB}$ векторларының арасындағы бұрыштың косинусын олардың скаляр көбейтіндісінен табыңдар. **223.** $C(0; -2)$. $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{CD}$ векторларының теңдігін пайдаланыңдар. **224.** A бұрышы мен оның ішінде жататын M нүктесі берілген болсын. Осы бұрышқа іштей сызылған шеңбердің центрі оның AO биссектрисасында жатады. Алдымен O нүктесі центрі болатын және бұрыштың қабырғаларын жанайтын шеңбер салыңдар, сосын центрі A нүктесі болатын гомотетияны қарастырыңдар. AM сәулесі салынған шеңберді екі, мысалы, K және N нүктелерінде қиып өтеді. Осы нүктелердің әрқайсысы M нүктесіне бейнеленуі мүмкін, сондықтан есептің екі шешімі бар болады.

N нүктесі M нүктесіне көшетін болсын, сонда ізделінді шеңбердің O_1 центрін табу үшін $MO_1 \parallel NO$ жүргізіңдер, O_1 – AO биссектрисасы мен MO_1 түзуінің қиылысу нүктесі. Ізделінді шеңбердің радиусы O_1 нүктесінен A бұрышының қабырғасына дейінгі қашықтық болады. **225.** 2A) $\frac{5}{2}$; 3B) 90 см^2, 160 см^2; 4B) 6 см; 5C) алдымен $ABCD$ тіктөртбұрышына гомотетиялы және $AB_1 : AC_1 = 2 : 3$ болатын $AB_1C_1D_1$ тіктөртбұрышын салыңдар (A нүктесі гомотетия центрі болсын), содан кейін $AD = 5$ см болатын $ABCD$ тіктөртбұрышын салыңдар. **226.** а) 15 см. **227.** ≈ 3,2 см, ≈ 3,8 см; **228.** а) $1 : \sqrt{3} : 2$; ә) 588 : 743 : 995. **229.** а) ≈ 6,88 дм; ә) ≈ 11,1 см немесе ≈ 12,9 см. **230.** ≈ 44°, ≈ 76°. **231.** а) ≈ 40,6 дм, ≈ 75,4 дм^2; ә) ≈ 23,4 см^2. **232.** а) $BC = 6$ см, $AB \approx 4,4$ см, $AC \approx 3,1$ см; ә) ≈ 188 млн. га. **233.** а) $6(\sqrt{3} + 3)$ см, ≈ 37°, ≈ 83°; ә) $5(7 + \sqrt{3})$ см, ≈ 22°, ≈ 128°. **234.** ≈ 7,7 см. **235.** 1 дм. **236.** а) 14 см; ә) 13 см. **237.** ≈ 1,4 дм. **238.** а) ≈ 14,6 см немесе ≈ 24,1 см. **239.** а) ≈ 20,1 м^2; ә) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. BC және AC қабырғаларын AB қабырғасы арқылы өрнектеп, косинустар теоремасын пайдаланып, $\angle C$-ның косинусын табыңдар. **240.** а) ≈ 1,06 дм, ≈ 2,32 дм; ә) $\sqrt{31}$ см, $\sqrt{91}$ см, 12 см. **241.** а) 3,5 см; ә) 44 см. Параллелограмның қабырғалары мен диагональдарының қасиеттерін пайдаланып, теңдеу құрыңдар. **242.** а) Үшбұрышты диагональдары a мен $2m_a$ болатын параллелограмға дейін толықтырыңдар және параллелограмның қабырғалары мен диагональдарының қасиеттерін пайдаланыңдар; ә) 7 см. **243.** а) 6 см, 8 см. Медиананың ұзындығын үшбұрыштың қабырғалары арқылы өрнектейтін формуланы қолданып (№ 242, а-есеп), екі айнымалысы бар екі теңдеулер жүйесін құрып шешіңдер. ә) $3\sqrt{5}$ см. Мысалы, $KN = x$, $KM = y$ деп белгілеп, AKN мен BKM үшбұрыштарына Пифагор теоремасын қолданып, теңдеулер жүйесін құрыңдар. Оны шешіп, AM медианасының $3y$-ке тең ұзындығын табыңдар. Әрі қарай медиананың ұзындығының формуласын пайдаланып, теңдеу құрыңдар. **244.** а) 90°, ≈ 22°, ≈ 68°; ә) ≈ 74°, ≈ 48°, ≈ 58°; б) ≈ 117°, ≈ 26°, ≈ 37°; в) 90°, ≈ 39°, ≈ 51°. **245.** а) 120°. Биссектрисаның қасиетін пайдаланып, үшбұрыштың қабырғаларын табыңдар. ә) $(12 + 8\sqrt{2})$ см. Үшбұрыш ауданының формуласын

($S = \frac{1}{2}ab \sin C$) және косинустар теоремасын пайдаланып, екі айнымалысы бар екі теңдеулер жүйесін құрыңдар. **246.** 90°. Есептің шартына қарай төртбұрыштың сыбайлас қабырғаларының квадраттарының тең айырмаларын құрыңдар. Косинустар теоремасын қолданып, ізделінді бұрыштың қандай мәнінде сол айырмалардың тең болатынын анықтаңдар. **247.** а) ≈ 7,4 см, ≈ 40°, ≈ 30°; ә) ≈ 6,37 дм, ≈ 15°, ≈ 125°; б) ≈ 1,5 см, ≈ 40°, ≈ 20°; AC қабырғасын табу үшін косинустар теоремасы бойынша теңдеу құрыңдар; в) есептің шешімі жоқ. **248.** а) ≈ 6,3 дм, ≈ 7,4 дм^2; ә) ≈ 44,9 см^2. **249.** а) ≈ 2,0 см; ә) ≈ 11 см, ≈ 8,6 см. **250.** ≈ 1230 см^2. **251.** ≈ 60,4 см^2. **253.** а) $\sqrt{2}$ дм; ә) ≈ 3,5 см, ≈ 2,7 см. **254.** ≈ 87°. **255.** 8°. **256.** 2 дм. Биіктіктер O нүктесінде қиылысатын болсын. $KOHB$ төртбұрышының B бұрышын табыңдар, содан кейін тікбұрышты BAH және BCK үшбұрыштарынан, сәйкесінше, AB мен BC қабырғаларын табыңдар. **257.** $\frac{\sqrt{21}}{14}$, $\frac{\sqrt{21}}{7}$. Косинустар теоремасын пайдаланып, ΔABD-дан BD-ны берілген теңқабырғалы үшбұрыштың қабырғасы арқылы өрнектеңдер. Әрі қарай ABD мен CBD үшбұрыштарына синустар теоремасын қолданыңдар. **258.** а) $\cos B = -\frac{7}{18}$. Ромбтың AC диагоналін жүргізіңдер және AL ΔABC-ның биссектрисасы болатынына көз жеткізіңдер. Оның қасиетін пайдаланып, AC қабырғасын өрнектеңдер. ә) $\frac{2+\cos\alpha}{\sqrt{5+4\cos\alpha}}$. $BC = a$, $AB = 2a$, M – AB қабырғасының ортасы болсын. ΔAMC-ның MC мен AC қабырғаларын a мен $\cos\alpha$ арқылы өрнектеп, одан BAC бұрышының косинусын табыңдар (ΔMBC мен ΔABC-ға косинустар теоремасын қолданыңдар). **259.** Синустар теоремасын пайдаланып, a мен b қабырғаларын c мен сәйкес бұрыштардың синустары арқылы өрнектеңдер. $\frac{\sin\alpha}{c\cdot\sin 4\alpha} + \frac{\sin\alpha}{c\cdot\sin 2\alpha} = \frac{1}{c}$ немесе $\frac{\sin\alpha}{\sin 4\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha} = 1$ теңдігін алыңдар. Әрі қарай теңдіктің сол жағындағы бөлшектерді қосып, бөліміндегі ($\sin\alpha + \sin 4\alpha$) қосындыны көбейтіндімен алмастырып, бөлшекті қысқартыңдар. Бұл үшбұрыштың бұрыштары үшін $\sin 4\alpha = \sin 3\alpha$ теңдігінің орындалатынын ескеріңдер, себебі $\sin\angle A =$

$= \sin(180° - (\angle B + \angle C)) = \sin(\angle B + \angle C)$. **260.** Айқыш бұрыштардың қасиетін пайдаланыңдар. **261.** Сәйкес келетін центрлік бұрыштарды салыңдар. **262.** 80° немесе 100°. **263.** а) 30° немесе 150°; ә) 120° немесе 60°. **264.** а) 30° немесе 105°; ә) 64°. **265.** 84° және 42° немесе 148° және 106°. **266.** 66,5°. **267.** 47°. **268.** 1,4 дм. Теңбүйірлі трапецияның диагональдарының қасиетін және тікбұрышты үшбұрыштағы орта пропорционал кесінділердің қасиетін пайдаланыңдар. **269.** AB кесіндісі 40°-пен көрінетін нүктелер жиыны центрі O нүктесі болатын шеңбердің доғасы болады. Алдымен $AB = 4$ см, $\angle A = \angle B = 50°$ болатын теңбүйірлі ΔAOB және центрі O, радиусы OA болатын шеңбер салыңдар. Сосын осы шеңберден AB түзуінен 5 см қашықтықта жататын C нүктесін табыңдар. **270.** 52,5°. **271.** 28° және 34°. **272.** а) 8 см; ә) 33 см; б) ≈ 55° немесе ≈ 61°. **273.** 3,2 см және 1,8 см. Қиылысатын екі хорданың қасиеті туралы теоремадан шығатын салдарды пайдаланыңдар: $AC \cdot CB = R^2 - d^2$. **274.** 13 см. **275.** 6 см. **276.** а) $4\sqrt{2}$ см; ә) 5,25 см. **277.** MN жанамасын жүргізіп, жанама мен қиюшы туралы теореманы пайдаланыңдар. **278.** AB түзуі MN-ді C нүктесінде қиятын болсын. NC^2 пен MC^2-тың неге тең болатынын жазыңдар. **279.** а) AN сәулесі шеңберді F нүктесінде қиятын болсын, сонда ΔADF тікбұрышты болады. Тікбұрышты үшбұрыштардан $\angle FAD$ мен $\angle HAN$-ді өрнектеп, оларды BF және FC доғаларының тең екенін ескере отырып салыстырыңдар; ә) ΔBFC-ның теңбүйірлі екеніне көз жеткізіңдер, демек, $FK \perp BC$, яғни $FK \parallel AH$ ... **280.** а) $4\sqrt{2}$ см; ә) 4 дм. **281.** а) 60° немесе 120°; ә) 150°. **282.** ≈ 3,3 см. **283.** а) 1) $\frac{9}{2}$ см; 2) $9\frac{3}{8}$ см; ә) ≈ 2,0 см. **284.** а) 21 см^2; ә) 90°. **285.** а) 84 см^2; ә) $8{,}75\sqrt{119}$ см^2. **286.** ≈ 19,1 см^2; ≈ 5,8 см. **287.** ≈ 4,5 см; ≈ 14,3 см; ≈ 32,3 см^2. **288.** 8,45 см. **289.** 2 см. Гипотенузасы 13 см-ге тең болатын тікбұрышты үшбұрышқа іштей сызылған шеңбердің радиусы $\frac{a+b-13}{2}$, мұндағы a мен b – осы үшбұрыштың катеттері. Катеттердің қосындысын табу үшін үшбұрыштың ауданын екі тәсілмен жазып және Пифагор теоремасын пайдаланып, теңдеулер жүйесін құрыңдар:

$\begin{cases} \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}\cdot\frac{60\sqrt{2}}{17}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b), \\ a^2+b^2=169. \end{cases}$ **290.** а) 3 см, $3\sqrt{3}$ см; ә) ≈ 20 см. **291.** 30 см, $6\sqrt{5}$ см, $12\sqrt{5}$ см, $\approx 27°$, $\approx 63°$. **292.** а) $\approx 41°$, $7{,}5\sqrt{7}$ см^2; ә) $\approx 31{,}5$ см^2. **293.** 10 см, 12 см, $2\sqrt{91}$ см. **294.** $2\sqrt{13}$ см. A бұрышы мен оның ішінде D нүктесі берілген болсын. D нүктесінен бұрыштың қабырғаларына дейінгі қашықтықтар: $DB = 2$ см және $DC = 5$ см. CD-ның созындысы AB қабырғасымен F нүктесінде қиылыссын, сонда ΔAFC тікбұрышты, сүйір бұрышы 30°. sin 30° пен tg 30°-ты пайдаланып, FD мен AC-ны табыңдар, сосын Пифагор теоремасы бойынша AD-ны табыңдар. **295.** Болады. Қабырғалары AC, $AB + BC$ және арасындағы бұрышы A болатын үшбұрыш салыңдар. Оның белгісіз бұрыштарын тауып, синустар теоремасын қолданыңдар. **296.** $\frac{10\sqrt{2}}{3}$ см. Үшбұрыштың ауданын екі әдіспен өрнектеп, теңдеу құруға болады. **297.** 6 см. $a = 5$ см, $b = 20$ см болсын. Үшбұрыштың қабырғасын биссектрисаның бөлетін m және n кесінділерін тауып алып, сосын $l = \sqrt{ab - mn}$ формуласын қолдану керек (20-тармақтағы 2-есепке қараңдар). **298.** ≈ 129 м. **299.** $\approx 92{,}8$ см^2. Үшбұрыштың бір қабырғасын x-пен белгілеп, басқа қабырғаларын x арқылы өрнектеңдер және үшбұрыштың ауданын екі тәсілмен жазып, теңдеу құрыңдар. **300.** Теңқабырғалы үшбұрыштың ауданын және тікбұрышты үшбұрыштың ең үлкен ауданын оларға сырттай сызылған шеңбердің радиусымен өрнектеп, шыққан өрнекті $\frac{1}{2}\pi R^2$ өрнегімен салыстырыңдар. **301.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см. ΔABC-ға O нүктесі центрі болатын шеңбер сызылған болсын. Екі шеңбердің жанасу нүктесі арқылы үшбұрыштың табанына параллель және оның басқа қабырғаларын M мен N нүктелерінде қиып өтетін түзу жүргізіңдер. BH биіктігін жүргізіп, OH радиусын осы үшбұрыштың қабырғасы арқылы өрнектеңдер. $\Delta MBN \sim \Delta ABC$ болғандықтан, бұл үшбұрыштарға іштей сызылған шеңберлердің радиустарының қатынасы олардың ұқсастық коэффициентіне тең, яғни $\frac{1}{3}$. **302.** а) $2m^2 + 2R^2$.

$\angle AOC = \angle BOD$ болатынын көрсетіңдер. $\angle AOC = \alpha$ болсын, сонда $\angle AOD = 180° - \alpha$ болады. OMC мен OMD үшбұрыштарынан CM^2 пен MD^2-ты өрнектеп, шыққан теңдіктерді қосыңдар. ә) 60°. $\angle CBH = \alpha$, $\angle ABH = 2\alpha$ болсын. CBH және ABH тікбұрышты үшбұрыштарынан BH биіктігін өрнектеп, мысалы, tg α-ға байланысты теңдеу құрыңдар және $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$ формуласын пайдаланыңдар. **303.** m, n түзулері мен C нүктесі берілген болсын. ΔABC салынды деп есептейік ($A \in n$, $B \in m$). Егер оның катеттерінің ұзындықтары ең аз болса, оның ауданы да ең аз болады. C нүктесінен n және m түзулеріне дейінгі ең аз қашықтық – сәйкесінше, $CN = a$ және $CM = b$ перпендикулярының ұзындықтары болады. Тікбұрышты ACN және BCM үшбұрыштарынан AC және CB катеттерін a, b және сәйкес бұрыштардың синустары арқылы өрнектеп, ACN бұрышының қандай шамасында ізделінді ауданның ең аз болатынын табамыз. Мынаны аламыз: $S = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{b}{\sin\alpha} = \dfrac{ab}{\sin 2\alpha}$, мұндағы $\alpha = \angle ACN = 45°$. **304.** а) $8\sqrt{5}$ см; 32 см^2; ә) $\approx$ 96 м^2. **305.** $AB = 6\sqrt{2}$ см, $AC \approx 6{,}2$ см, $BC \approx 4{,}4$ см. **306.** а) $\angle C = 15°$, $AC \approx 11{,}6$; $BC \approx 18{,}6$; ә) $\angle A = 87°$, $AC \approx 4{,}9$; $AB \approx 8{,}2$. **307.** $BC = \sqrt{19}$ см, $\angle C \approx 36°$, $\angle B \approx 84°$. **308.** $AC \approx 45{,}8$ м; $AB \approx 33{,}4$ м. **309.** $\approx$ 9,4 см; $\approx$ 7,7 см. **310.** а) 30° және 150°; ә) 60° және 120°. **311.** а) $\approx$ 3,8 см, $\approx$ 9,2 см, $\approx$ 35 см^2; ә) $\approx$ 6,88 м, $\approx$ 9,83 м. **312.** а) $\approx$ 201 см^2; ә) $\approx$ 0,4 дм. **313.** а) 8 м; ә) $\approx$ 17,0 м. 8-сынып алгебра курсынан белгілі қасиетті пайдаланыңдар, яғни, егер ab көбейтіндісі тұрақты болса, онда $a + b$ қосындысы $a = b$ болғанда ғана ең аз болады. **314.** 1А) $\approx$ 3,94 м, $\approx$ 2,57 м; 2А) $\approx$ 44°, $\approx$ 68°, $\approx$ 68°; 3В) $\sqrt{13}$ дм немесе $\sqrt{37}$ дм; 4С) 1) $2\sqrt{2}$ см, 2) $\dfrac{3\sqrt{17}}{2}$ см. **315.** а), б) – болады; ә) болмайды. **316.** а) 112,5°, 80°, 67,5°, 100°; ә) 85°, 105°, 95°, 75°; **317.** 72°, 120°, 108°. **318.** Төртбұрыштың қарама-қарсы бұрыштарының қосындысы 180°-қа тең екенін дәлелдеңдер (AB және AC доғаларының теңдігін пайдаланыңдар). **319.** а) 36 см; ә) $\dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4}$. **320.** 5 см. $ABCD$ трапециясы берілген болсын, оның BH биіктігін шеңбермен, мысалы, F нүктесінде қиылысқанға дейін созыңдар. Сонда ΔFBC – тікбұрышты, демек, FC – шеңбердің диаметрі. Қиылысатын AD және BF хордалары туралы теореманы пайдаланып, HF-ті табыңдар. Әрі қарай Пифагор теоремасы бойынша FC-ны табыңдар. **321.** MK түзуі DC-ны N нүктесінде қиятын болсын. ΔABK мен ΔDKN-нің сүйір бұрыштары тең болатынын анықтаңдар (ABK үшбұрышының KM медианасының қасиетін пайдаланыңдар). **322.** а) Болады; ә) болмайды. **323.** 1,8 дм, 2,7 дм. **324.** 20 см^2. **325.** ә) 174-суретті пайдаланыңдар. $CK = \frac{1}{2}BC$, $KD = \frac{1}{2}AD$ болатынын анықтаңдар және тікбұрышты ΔOCD-ның OK биіктігінің қасиетін пайдаланыңдар. **326.** а) 3 см. $ABCD$ трапециясында $\angle A = \angle B = 90°$, $BC = 5$ см, $AD = 7{,}5$ см, $OK = r$, мұндағы K – шеңбердің CD қабырғасымен жанасу нүктесі болсын. $CK = 5 - r$, $KD = 7{,}5 - r$ болатынын табыңдар. Әрі қарай тікбұрышты ΔOCD-ның OK биіктігінің қасиетін пайдаланыңдар. ә) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ дм. 174-суретті пайдаланыңдар. Шеңбердің OK радиусын тікбұрышты ΔOKD-дан $\mathrm{tg}\angle ODK$-ны пайдаланып табыңдар. **327.** а) Шеңбердің центрін төртбұрыштың төбелерімен қосыңдар, сонда оның қабырғасымен шеңбердің жанасу нүктесіне жүргізілген радиусы шыққан үшбұрыштардың биіктіктері болады. ә) 5 см. **328.** 3 см, 2,5 см, 4,5 см, 5 см. **329.** $AB = a$, биіктігі $BH = 2r$ болатын $ABCD$ ромбысын салу керек болсын. Алдымен BH катеті мен AB гипотенузасы бойынша тікбұрышты ΔABH-ты салыңдар. **330.** а) $\frac{1}{16}P^2\sin\alpha$; ә) 18 см^2. **333.** 4 см. A, B, C нүктелері – көрсетілген шеңберлердің центрлері, ал M, N, K, сәйкесінше, осы шеңберлердің трапецияның бүйір қабырғасымен жанасу нүктелері, D – бүйір қабырғасы мен AC түзуінің қиылысу нүктесі болсын, сонда DKC, DNB және DMA үшбұрыштары ұқсас болады. DKC мен DMA үшбұрыштарының ұқсастығынан пропорция құрып, D нүктесінен трапецияның жоғарғы табанына дейінгі d-қашықтықты өрнектеңдер: $\frac{2}{8} = \frac{d+2}{d+4+2r+8}$ немесе $\frac{1}{4} = \frac{d+2}{d+12+2r}$ $d =$ $= \ldots$ d-ның осы мәнін DCK мен DBN үшбұрыштарының ұқсастығынан алынған пропорцияға қойып, r-ді табыңдар. **334.** а) $\frac{P}{8}\sin\alpha$; ә) 325, ә-есептің шешіміндегі нәтижені пайдаланып, трапецияның биіктігін табыңдар. **335.** а) Болады; ә) жоқ, мысалы, ромб. **336.** а) 360°; ә) 157,5°. **337.** а) 9; ә) 10; б) 12; в) 18. **338.** а) 11; ә) болмайды. **340.** а) Дұрыс алтыбұрыштың кіші диагоналі дұрыс үшбұрыштың қабырғасына тең болатынын дәлелдеңдер. Осы үшбұрышты және оған сырттай сызылған шеңберді салыңдар. Содан кейін ізделінді алтыбұрышты салыңдар. ә) Дұрыс сегізбұрыштың кіші диагоналі шаршының қабырғасына тең екенін дәлелдеңдер... . **341.** а) $12\sqrt{3}$ см^2. **342.** а) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ см; ә) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ см. **343.** а) $2\sqrt{R^2-r^2}$; ә) гипотенузасы R-ге, катеттері r және $\frac{a}{2}$-ге тең болатын тікбұрышты үшбұрышты пайдаланыңдар. **344.** а) $21\sqrt{3}$ см; ә) $31{,}5\sqrt{2}$ мм. **345.** а) $\frac{32\sqrt{6}}{3}$ см; ә) $\frac{9\sqrt{6}}{4}$ см. **346.** $3\sqrt{2}$ см. **347.** а) $\frac{25\sqrt{3}}{4}$ см^2; ә) $6\sqrt{3}$ см^2. **348.** а) $\approx 11{,}6$ см^2; ә) $\approx 47{,}0$ см^2. **349.** а) $\frac{3}{4}$; ә) а) есебінің жауабын пайдаланыңдар. **350.** а) 2 есе үлкейеді; ә) 3 есе қысқарады. **351.** а) $\approx 31{,}4$ см; ә) 75 %. **353.** ≈ 1 м. **354.** а) $\approx 47{,}8$ см; ә) $\approx 70{,}1$ см. **355.** а) $\approx 6{,}3$ см; ә) $\approx 10{,}5$ см. **356.** а) $\approx 69°$; ә) $1\frac{1}{3}$ см. **357.** ≈ 111 км. **358.** а) $8\pi\sqrt{3}$ см; ә) $6\pi\sqrt{3}$ см. Шеңберге іштей сызылған үшбұрыштың қабырғасының оған қарсы жатқан бұрышының синусына қатынасын пайдаланыңдар: $\frac{a}{\sin A}=2R$. **359.** а) $\approx 18{,}8$ см; ә) $\approx 33{,}2$ см. **360.** $\approx 40°$, $\approx 140°$, $\approx 140°$, $\approx 40°$. **361.** а) 2 рад.; ә) 0,5 рад. **362.** а) $90° = \frac{\pi}{2}$, $54° = \frac{3\pi}{10}$, $36° = \frac{\pi}{5}$; ә) $36° = \frac{\pi}{5}$, $72° = \frac{2\pi}{5}$, $72° = \frac{2\pi}{5}$ немесе $45° = \frac{\pi}{4}$, $45° = \frac{\pi}{4}$, $90° = \frac{\pi}{2}$; б) $100° = \frac{5\pi}{9}$, $80° = \frac{4\pi}{9}$, $80° = \frac{4\pi}{9}$, $100° = \frac{5\pi}{9}$. **363.** а) $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$; ә) $\frac{3\pi}{5}$, $\frac{2\pi}{5}$; б) $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6}$. **364.** а) 2 см; ә) $\approx 14{,}1$ см. **365.** а) 4 дм; ә) 1,2 дм. **366.** а) 3,5 рад.; ә) 2 рад. **367.** а) $\approx 0{,}94$ м; ә) $\approx 3{,}14$ м. **368.** а) $\approx 3{,}8$ дм. **369.** а) k^2 есе үлкейеді; ә) k^2 есе кішірейеді. **370.** 9π см^2. **371.** 10 дм.

372. а) ≈ 201 м^2; ә) $\approx 25{,}1$ м. **373.** ә) $5 : 7$. **374.** а) $\approx 14{,}3$ м^2; ә) $\approx 29{,}9$ дм^2. **375.** $\approx 12{,}6$ м^2. **376.** а) $\approx 4{,}2$ см^2; ә) $9{,}6$ см^2. **377.** $\frac{1}{6}R^2(2\pi + 3\sqrt{3})$. **378.** $\approx 18{,}8$ см^2. **379.** ≈ 497 см^2. **380.** $\approx 78{,}5$ см^2. **381.** а) ≈ 123 см^2; ә) $\approx 26{,}2$ см^2. **382.** а) $\frac{1}{6}a^2(9\sqrt{3} - 4\pi)$; ә) $\frac{1}{8}b^2(6 - \pi)$. **383.** $(10\pi - 12\sqrt{3})$ см^2. **384.** а) $\approx 5{,}38$ дм^2; ә) болмайды. **385.** а) $\approx 149°$; ә) $\approx 326°$, $\approx 21{,}7$ м^2. **386.** 36π см^2; **387.** $\approx 12{,}6$ см; **389.** а) $\sqrt{2}$ см. **390.** а) $192\sqrt{3}$ см^2; ә) $1{,}2(\sqrt{6} + 1)$ см; б) $48\sqrt{3}$ см^2. **391.** 8 см, мүмкін. **392.** Жетеді. **393.** $\frac{3b^2\sqrt{3}}{4} \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2}$. **394.** а) $32(\sqrt{2} + 1)$ см^2. $a^2 = R^2 + R^2 - 2R^2\cos 45°$ қатынасын пайдаланып, R-ді табыңдар. ә) $128(\sqrt{2} - 1)$ см^2. $ABCD$ – берілген шаршы, O – оған іштей сызылған шеңбердің центрі, MN – осы шеңберге сырттай сызылған сегізбұрыштың қабырғасы, H – шаршының BD диагоналі мен MN қабырғасының қиылысу нүктесі болсын. $MN = 2BH$ болатынын анықтап, шеңберге сырттай сызылған көпбұрыштың ауданының формуласын: $S = pr$ пайдаланыңдар. **395.** $4\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ см, $a^2 = R^2 + R^2 - 2R^2\cos 30°$ қатынасын пайдаланыңдар. **396.** 16 см, $8\sqrt{3}$ см. **397.** d_1d_2, мұндағы d_1 – сегізбұрыштың кіші диагоналі, ал d_2 – үлкен диагоналі. Сегізбұрыштың ауданын қабырғасы d_1 болатын шаршының ауданы мен табаны d_1, биіктігі $\frac{1}{2}(d_2 - d_1)$ болатын 4 теңбүйірлі үшбұрыштың аудандарының қосындысы түрінде өрнектеңдер. **398.** а) Осы нүктені көпбұрыштың төбелерін кесінділермен қосыңдар және бұл қосындының $\frac{2S}{a}$-ға тең болатынын дәлелдеңдер, мұндағы S – көпбұрыштың ауданы, a – оның қабырғасы. ә) 18 см. Осы қосындының алтыбұрышқа іштей сызылған шеңбердің үш еселенген диаметріне тең болатынын дәлелдеңдер. **399.** $8\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ см, $8\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$ см, $8\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$ см. $ABCDMNPK$ – берілген сегізбұрыш, O – оған сырттай сызылған шеңбердің центрі болсын. AC диагоналін ΔABC-дан табыңдар: $AC^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cdot \cos 135°$; диагональ $AM = 2R$, ал R-ді тікбұрышты ΔAOC-дан; диагональ AD-ны ΔAOD-дан табыңдар. **400.** ≈ 617 см^2. **401.** $\frac{4a}{3\pi}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$. **402.** а) $2{,}5$ м^2; ә) $6{,}25$ м^2. **403.** 15 м.

404. 2. **405.** $\frac{3}{4}b$. **406.** а) 4π см^2; ә) $\frac{\pi b^2}{4}$. **407.** $\frac{4}{\pi \cdot \sin a}$. **408.** 16 см^2. **409.** $\frac{a^2(3\sqrt{3}-\pi)}{18}$. **410.** 1A) 8; 2A) 576 см^2; 4B) $\frac{1}{8}a^2(2\sqrt{3}-\pi)$; 5C) $(2\pi - 3\sqrt{3})$ см^2. **411.** $\vec{m}(-21; 28)$, $\vec{m}(21; -28)$. **412.** $N(3{,}5; -2{,}5)$. **413.** а), ә) – ұқсас. **414.** а) 65°; ә) 65°; б) 55°; в) 25°. **415.** 47,25 см^2. **416.** а) 8; ә) 16. **417.** $12\sqrt{15}$ см^2. **418.** а) $AC = 4\sqrt{3}$ дм, $\angle C = 30°$, $\angle B = 120°$; ә) $AB \approx 11{,}7$ мм, $BC \approx 7{,}6$ мм, $\angle B = 100°$; б) $BC = 2\sqrt{13}$ см, $\angle A \approx 53°$, $\angle B \approx 94°$, $\angle C \approx 33°$ немесе $BC = 4\sqrt{10}$ см, $\angle A \approx 127°$, $\angle B \approx 35°$, $\angle C \approx 18°$. **419.** а) $2{,}5\pi$ дм; ә) $\approx 25{,}5$ см. **420.** ә) $4\sqrt{3}$; б) 90°. **421.** $2\sqrt{10}$. **422.** 45°, 90°, 45°. **423.** $\frac{13}{14}$. **424.** $\sqrt{10-5\sqrt{3}}$. **425.** 22,5 м. **426.** 15 мм, 18 мм, 24 мм. **427.** $4\frac{2}{3}$ см және 3,5 см; **428.** $1\frac{2}{3}$ см. **429.** а), ә) – болады, мысалы, $AB = 2$, $BC = 3$, $M \in AB$, $N \in BC$, $BM = 1{,}5$, $BN = 1$ (ә) жағдай үшін AB – табаны); б) болмайды. **430.** 6 см, $\frac{4}{9}$. **431.** а) Алдымен $\frac{AC_1}{C_1B_1} = \frac{1}{2}$ болатын $\Delta AB_1C_1 \sim \Delta ABC$ салыңдар, сонан соң AB_1 сәулесіне $AB = 8$ см кесінді салып, $BC \parallel B_1C_1$ жүргізіңдер. **432.** а) Егер бір ромбтың бұрышы екінші ромбтың бұрышына тең болса, олар ұқсас болады. ә) Егер бір параллелограмның іргелес екі қабырғасы екіншінің екі қабырғасына пропорционал, ал олардың арасындағы бұрыштары тең болса, екі параллелограмм ұқсас болады. **433.** $6\sqrt{2}$ см немесе $12\sqrt{2}$ см. **434.** а) $\frac{2\pi}{5}$; ә) $\frac{\pi}{6}$. **435.** $\frac{\pi}{5}$. **436.** 17 см. C нүктесінен өтетін диаметр жүргізіп, қиылысатын екі хорданың кесінділерінің көбейтіндісі туралы теореманы қолданыңдар. **437.** а) 24 см^2; ә) $16\sqrt{3}$ дм^2. **438.** 94,08 см^2. **439.** а) 2 см; ә) 60° немесе 120°. **440.** 16π м^2. **441.** $\frac{81\pi}{4}$ см^2. **442.** $\frac{\pi - 2}{3\pi + 2}$. **443.** а) 90°, 90°, 135°, 45°; ә) 60°, 120°, 120°, 60°. **444.** 120°. **445.** $\frac{3\pi}{5}$. **446.** 16 см. **447.** а) $b(\sqrt{2}-1)$; ә) $a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)$. Мысалы, BC және AD табандары, сәйкесінше, 12-бұрыш пен алтыбұрыштың қабырғалары болатын $ABCD$ трапециясын қарастырыңдар. Оның BH және CK биіктіктерін жүргізіп, ΔCDK-дан DK кесіндісін табыңдар. **448.** а) 17; ә) $17 < x < 23$; б) $15 < x < 17$. **449.** 9π дм. **450.** 2π см, $\frac{8\pi}{3}$ см, $\frac{5\pi}{3}$ см, $\frac{5\pi}{3}$ см. **451.** $\frac{b^2(\pi - 2)}{2}$. **452.** ә) Тікбұрышты ABC үшбұрышының CH биіктігінің қасиетін пайдаланып, оны қиып алынған екі шеңбердің радиустары арқылы өрнектеңдер. **453.** 3B) 8,5 см; 4B) 4π см; 5C) 16π см^2 немесе 48π см^2.

ПӘНДІК КӨРСЕТКІШ

1-ҚОСЫМША

Синус пен косинустың 0°-тан 90°-қа дейінгі бұрыштарының жуық мәндерінің кестесі

A	$\sin A$	B	A	$\sin A$	B	A	$\sin A$	B
0°	0,000	90°	30°	0,500	60°	60°	0,866	30°
1°	0,017	89°	31°	0,515	59°	61°	0,875	29°
2°	0,035	88°	32°	0,530	58°	62°	0,883	28°
3°	0,052	87°	33°	0,545	57°	63°	0,891	27°
4°	0,070	86°	34°	0,559	56°	64°	0,899	26°
5°	0,087	85°	35°	0,574	55°	65°	0,906	25°
6°	0,105	84°	36°	0,588	54°	66°	0,914	24°
7°	0,122	83°	37°	0,602	53°	67°	0,921	23°
8°	0,139	82°	38°	0,616	52°	68°	0,927	22°
9°	0,156	81°	39°	0,629	51°	69°	0,934	21°
10°	0,174	80°	40°	0,643	50°	70°	0,940	20°
11°	0,191	79°	41°	0,656	49°	71°	0,946	19°
12°	0,208	78°	42°	0,669	48°	72°	0,951	18°
13°	0,225	77°	43°	0,682	47°	73°	0,956	17°
14°	0,242	76°	44°	0,695	46°	74°	0,961	16°
15°	0,259	75°	45°	0,707	45°	75°	0,966	15°
16°	0,276	74°	46°	0,719	44°	76°	0,970	14°
17°	0,292	73°	47°	0,731	43°	77°	0,974	13°
18°	0,309	72°	48°	0,743	42°	78°	0,978	12°
19°	0,326	71°	49°	0,755	41°	79°	0,982	11°
20°	0,342	70°	50°	0,766	40°	80°	0,985	10°
21°	0,358	69°	51°	0,777	39°	81°	0,988	9°
22°	0,375	68°	52°	0,788	38°	82°	0,990	8°
23°	0,391	67°	53°	0,799	37°	83°	0,993	7°
24°	0,407	66°	54°	0,809	36°	84°	0,995	6°
25°	0,423	65°	55°	0,819	35°	85°	0,996	5°
26°	0,438	64°	56°	0,829	34°	86°	0,998	4°
27°	0,454	63°	57°	0,839	33°	87°	0,999	3°
28°	0,469	62°	58°	0,848	32°	88°	0,999	2°
29°	0,485	61°	59°	0,857	31°	89°	1,000	1°
30°	0,500	60°	60°	0,866	30°	90°	1,000	0°
A	$\cos B$	B	A	$\cos B$	B	A	$\cos B$	B

Тангенстің 0°-тан 89°-қа дейінгі бұрыштарының жуық мәндерінің кестесі

A	tg A	A	tg A	A	tg A	A	tg A	A	tg A
0°	0,000	20°	0,364	40°	0,839	60°	1,73	80°	5,67
1°	0,017	21°	0,384	41°	0,869	61°	1,80	81°	6,31
2°	0,035	22°	0,404	42°	0,900	62°	1,88	82°	7,12
3°	0,052	23°	0,424	43°	0,933	63°	1,96	83°	8,14
4°	0,070	24°	0,445	44°	0,966	64°	2,05	84°	9,51
5°	0,087	25°	0,466	45°	1,000	65°	2,14	85°	11,4
6°	0,105	26°	0,488	46°	1,04	66°	2,25	86°	14,3
7°	0,123	27°	0,510	47°	1,07	67°	2,36	87°	19,1
8°	0,141	28°	0,532	48°	1,11	68°	2,48	88°	28,6
9°	0,158	29°	0,554	49°	1,15	69°	2,60	89°	57,3
10°	0,176	30°	0,577	50°	1,19	70°	2,75		
11°	0,194	31°	0,601	51°	1,23	71°	2,90		
12°	0,213	32°	0,625	52°	1,28	72°	3,08		
13°	0,231	33°	0,649	53°	1,33	73°	3,27		
14°	0,249	34°	0,675	54°	1,38	74°	3,49		
15°	0,268	35°	0,700	55°	1,43	75°	3,73		
16°	0,287	36°	0,727	56°	1,48	76°	4,01		
17°	0,306	37°	0,754	57°	1,54	77°	4,33		
18°	0,325	38°	0,781	58°	1,60	78°	4,70		
19°	0,344	39°	0,810	59°	1,66	79°	5,14		

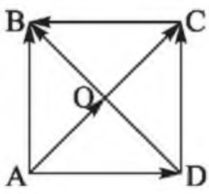
2-ҚОСЫМША

Жаттықтырғыш есептер

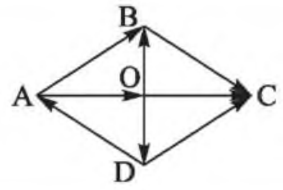
Т1. Вектор ұғымы. Коллинеар векторлар

1. *ABCD*: 1) шаршы; 2) ромб болса, тең және коллинеар векторларды көрсетіңдер:

1)

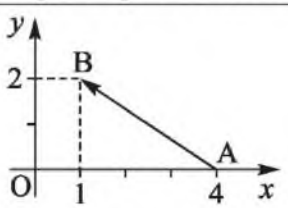


2)



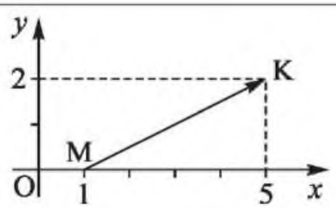
2. Вектордың ұзындығын табыңдар:

1)



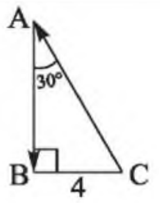
$|\overrightarrow{AB}|$ – ?

2)



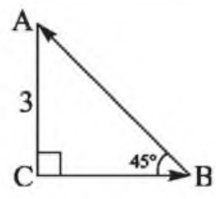
$|\overrightarrow{MK}|$ – ?

3)



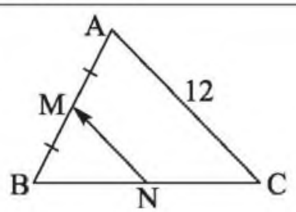
$|\overrightarrow{CA}|$ – ? $|\overrightarrow{AB}|$ – ?

4)



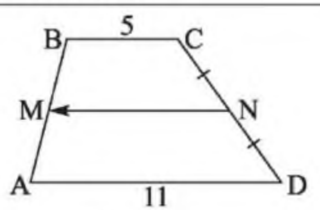
$|\overrightarrow{CB}|$ – ? $|\overrightarrow{BA}|$ – ?

5)



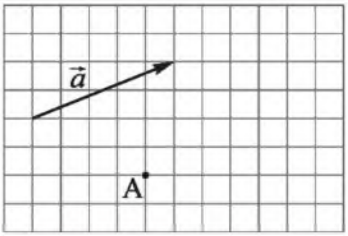
$MN \parallel AC$; $|\overrightarrow{NM}|$ – ?

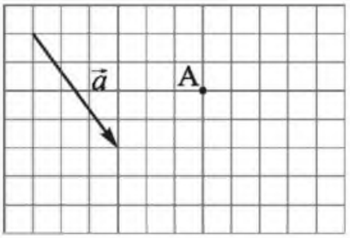
6)



$MN \parallel AD$; $|\overrightarrow{NM}|$ – ?

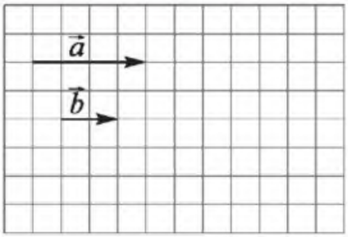
3. A нүктесінен $\vec{a}$ -ға тең болатын векторды салыңдар:

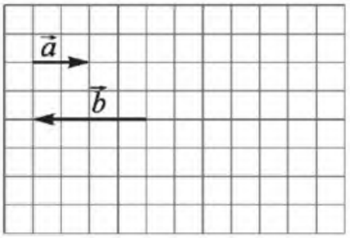
1)


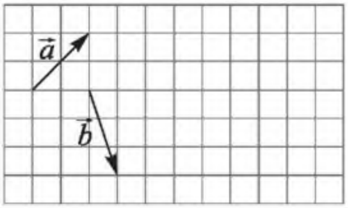
2)


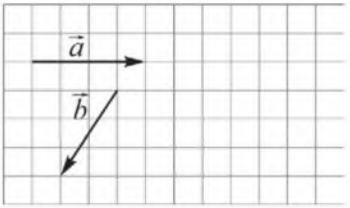
Т2. Векторларды қосу және азайту

1. $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$, $-\vec{a}$ векторларын салыңдар:

1)


2)


3)


4)


2. Өрнекті ықшамдаңдар:

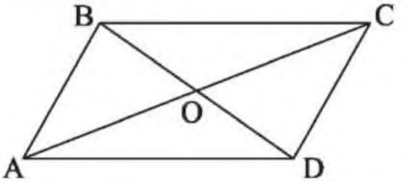
1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$;	2) $\overrightarrow{KM}+\overrightarrow{MC}$;
3) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$;	4) $\overrightarrow{KM}-\overrightarrow{KC}$;
5) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}$;	6) $\overrightarrow{KM}-\overrightarrow{MC}$;
7) $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{KE}+\overrightarrow{NK}$;	8) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EK}$;
9) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AM}$;	10) $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{DK}-\overrightarrow{DN}+\overrightarrow{KM}$;
11) $(\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{TA})-$ $-(\overrightarrow{PX}-\overrightarrow{TX})$;	12) $(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NK}-\overrightarrow{PK})-$ $-(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{PD})$.

3. Суретті пайдаланып, өрнекті ықшамдаңдар:

ABCD – параллелограмм;

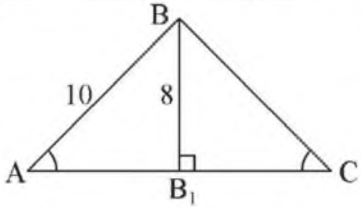
1) $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{OB}$;

2) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{OD}$.



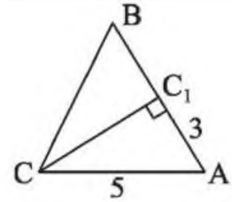
4. $\vec{x}$ векторының ұзындығын табыңдар:

1)



$|\vec{x}|=|\overrightarrow{BB_1}-\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{B_1C}|-?$

2)

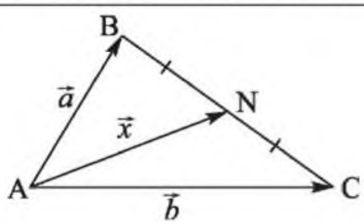


$|\vec{x}|=|\overrightarrow{BC_1}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}|-?$

Т3. Векторды санға көбейту

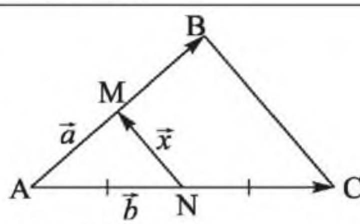
1. Векторларды $\vec{a}$ және $\vec{b}$ арқылы өрнектеңдер:

1)



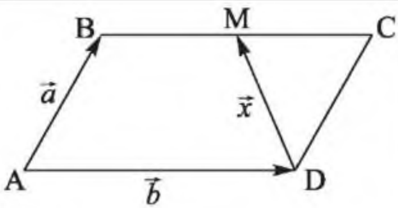
$\vec{x}-?$

2)



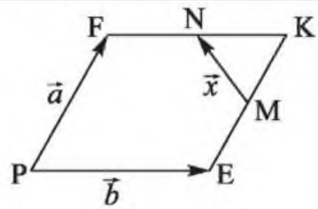
$BC \parallel MN$; $\vec{x}-?$

3)



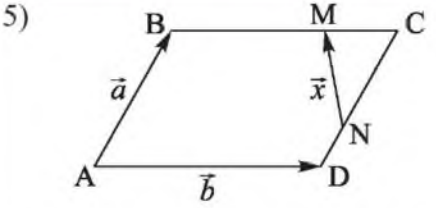
$BM = MC$; $\vec{x}-?$

4)



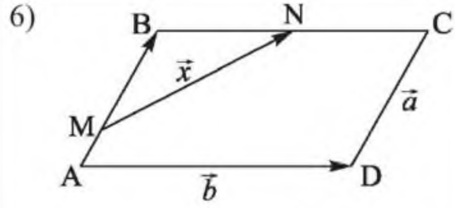
$FN = NK$, $ME = MK$; $\vec{x}-?$

5)



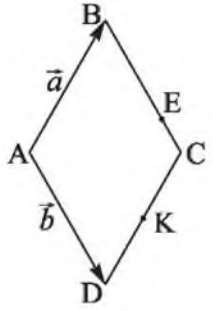
$BM : MC = 7 : 2$, $DN : NC = 1 : 2$;
$\vec{x}$ – ?

6)



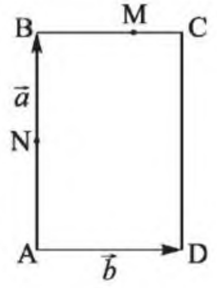
$AM : MB = 1 : 3$, $BN : NC = 7 : 9$;
$\vec{x}$ – ?

7)



$DK = KC$, $BE : EC = 3 : 1$;
$\overrightarrow{AE}$ – ? $\overrightarrow{AK}$ – ? $\overrightarrow{KE}$ – ?

8)



$AN = NB$, $BM : MC = 4 : 3$;
$\overrightarrow{AM}$ – ? $\overrightarrow{MD}$ – ? $\overrightarrow{MN}$ – ?

T4. Вектордың координаталары

1. Белгісіз координаталарды табыңдар:

	A	B	$\overrightarrow{AB}$	$2\overrightarrow{AB}$	$-0{,}5\overrightarrow{AB}$
1)	(2; 3)	(–1; 2)			
2)		(2; 4)	(–1; 1)		
3)	(2; 0)			(–6; 2)	
4)	(–2; 1)				(4; –3)
5)	(–1; 3)	(4; 1)			
6)	(–2; 4)		(3; 0)		
7)		(–1; 5)			(3; –1)
8)		(2; –2)		(–6; 4)	

2. $|\vec{x}|$-ті табыңдар:

$\vec{x}$	$(-2; 3)$	$(\sqrt{2}; -\sqrt{3})$	$\left(\frac{5}{13}; -\frac{12}{13}\right)$	$\left(\frac{8}{17}; -\frac{15}{17}\right)$
$\lvert\vec{x}\rvert$				
$\vec{x}$	$(1; -5)$	$(2\sqrt{3}; -1)$	$\left(-\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right)$	$\left(1; \frac{4\sqrt{2}}{7}\right)$
$\lvert\vec{x}\rvert$				

3. Егер $\vec{a}$ және $\vec{b}$ коллинеар векторлар болса, онда белгісіз координаталарды табыңдар:

$\vec{a}$	$(-2; 3)$	$(x; -1)$	$(5; y)$	$(\sqrt{3}; \sqrt{2})$	$\left(x; 1\frac{2}{3}\right)$	$\left(3\frac{1}{3}; 5\right)$
$\vec{b}$	$(6; y)$	$(3; -4)$	$\left(\frac{1}{3}; 3\right)$	$(x; 3\sqrt{2})$	$(6; 2)$	$(-2; y)$

4. Кестені толтырыңдар:
$\vec{a} = \{1; 3\}$, $\vec{b} = \{-2; 4\}$

$\vec{a} + \vec{b}$	$\vec{a} - \vec{b}$	$2\vec{a}$	$0{,}5\vec{b}$	$2\vec{a} - \vec{b}$	$\vec{a} - 3\vec{b}$

5. Кестені толтырыңдар:
$A(-3; 1)$, $B(0; 2)$, $C(2; -3)$, $D(-1; 0)$

$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{DC}$	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$	$-2\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD}$
$\overrightarrow{BD}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AC}$	$\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}$

Т5. Векторлардың арасындағы бұрыш. Векторлардың скаляр көбейтіндісі

1. Кестені толтырыңдар:

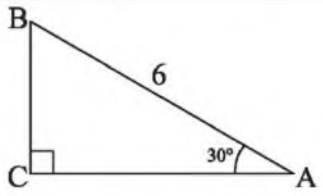
	1)	2)	3)	4)	5)	6)
$\lvert\vec{a}\rvert$	2	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	3		1
$\lvert\vec{b}\rvert$	3		4	5	4	$\sqrt{3}$
$\angle(\vec{a}, \vec{b})$	30°	45°		120°	60°	
$\vec{a} \cdot \vec{b}$		5	–6		5	1,5

2. Кестені толтырыңдар:

	1)	2)	3)	4)	5)	6)
$\vec{a}$	(–2; 3)	(1; –2)	$\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{5}\right)$	$(-\sqrt{2}; \_\_)$	$(2\sqrt{5}; -1)$	$\left(\frac{2}{7}; 3\frac{2}{5}\right)$
$\vec{b}$	(2; 3)	(__; 3)	$\left(\frac{3}{4}; \frac{5}{8}\right)$	$(2\sqrt{2}; 3)$	$(3; -\sqrt{5})$	(–14; __)
$\vec{a} \cdot \vec{b}$		2		–4		–3

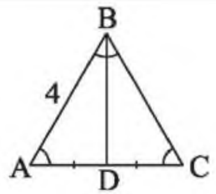
3. Есептеңдер:

1)



$\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA}$ – ?
$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$ – ?
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA}$ – ?

2)



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ – ?
$\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC}$ – ?
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ – ?

4. $\vec{a} \perp \vec{b}$ болса, x-тің мәнін анықтаңдар:

	1)	2)	3)	4)	5)	6)
$\vec{a}$	$(2; x)$	$(x; 3)$	$(x-1; -2)$	$(x^2; 3)$	$(2; x+1)$	$(3; 2)$
$\vec{b}$	$(-3; 2)$	$(1; x+2)$	$(-4; x)$	$(1; -x)$	$(3; x)$	$(x; 3)$
x						

5. Кестені толтырыңдар, мұндағы $\alpha = \angle(\vec{a}, \vec{b})$:

	1)	2)	3)	4)	5)	6)
$\vec{a}$	(–1; 1)	(2; 3)	(–2; –1)	(1; –2)	(1,5; 2)	(3; –4)
$\vec{b}$	(0; 1)	(–3; 0)	(1; 3)	(4; 3)	(2; –1)	(–6; 8)
$\vec{a} \cdot \vec{b}$						
$\lvert\vec{a}\rvert$						
$\lvert\vec{b}\rvert$						
$\cos\alpha$						

Т6. Векторларды есеп шығаруда қолдану

1. $\overrightarrow{AB}$ векторы жататын түзудің теңдеуін құрыңдар:

	1)	2)	3)	4)	5)	6)
A	(2; 1)	(–1; 2)	(4; –3)	(–1; 3)	(–3; 1)	(–1; –2)
B	(–3; 4)	(2; 0)	(0; –2)	(–2; –1)	(–1; 3)	(1; –4)
(AB)						

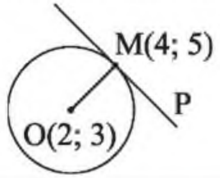
2. $ABCD$ параллелограмм болатынын дәлелдеңдер:
1) $A(2; -1)$, $B(5; -3)$, $C(-2; 11)$, $D(-5; 13)$;
2) $A(1; 1)$, $B(3; 5)$, $C(9; -1)$, $D(7; 5)$.

3. ABC үшбұрышының B бұрышын табыңдар:
1) $A(2; 2\sqrt{3})$, $B(0; 0)$, $C(3; \sqrt{3})$;
2) $A(4; 1)$, $B(0; 0)$, $C(-1; 4)$.

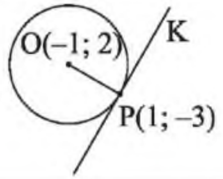
4. $ABCD$-ның трапеция болатынын дәлелдеңдер:
1) $A(-2; -3)$, $B(-3; 1)$, $C(-1; 4)$, $D(2; 3)$;
2) $A(-2; 1)$, $B(0; 3)$, $C(2; 3)$, $D(-1; -3)$.

5. Суретті пайдаланып, жанаманың теңдеуін жазыңдар:

1)

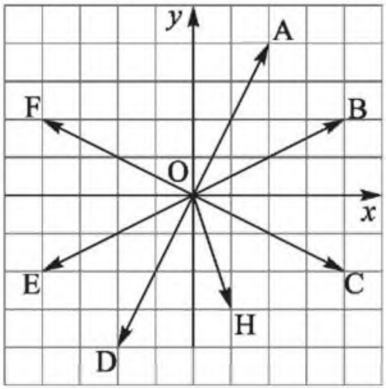


2)



6. $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60°$, $|\vec{a} - \vec{b}|$ – ?

7.



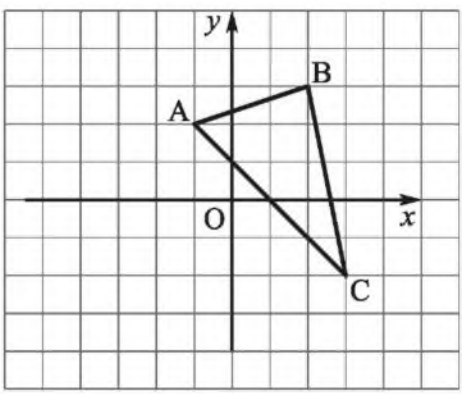
1) Берілген векторлардың қайсысы $4\vec{i} - 2\vec{j}$-ге тең?

2) Қай вектордың координаталары (–4; 2) болады?

3) $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{HC}$, $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB}$ векторларының координаталарын жазыңдар.

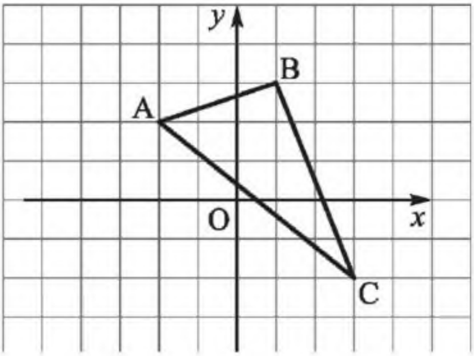
Т7. Жазықтықты түрлендіру. Қозғалыс

1. O нүктесіне қарағанда ΔABC-ға симметриялы $\Delta A_1B_1C_1$-ді салыңдар. A_1, B_1, C_1 нүктелерінің координаталарын табыңдар. Қорытынды жасаңдар.



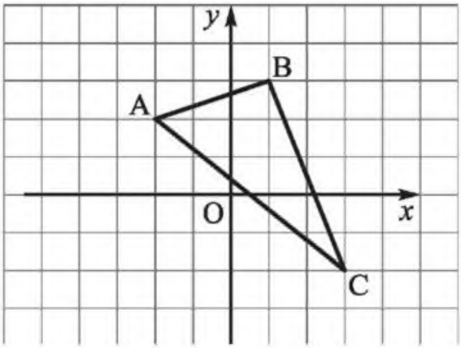
2. Егер $M(1; 3)$, $H(-2; -4)$, $F(5; -2)$ болса, $M_1 = Z_O(M)$, $H_1 = Z_O(H)$, $F_1 = Z_O(F)$ нүктелерінің координаталарын табыңдар.

3. Ox осіне қарағанда ΔABC-ға симметриялы $\Delta A_1B_1C_1$-ді салыңдар. A_1, B_1, C_1 нүктелерінің координаталарын табыңдар. Қорытынды жасаңдар.



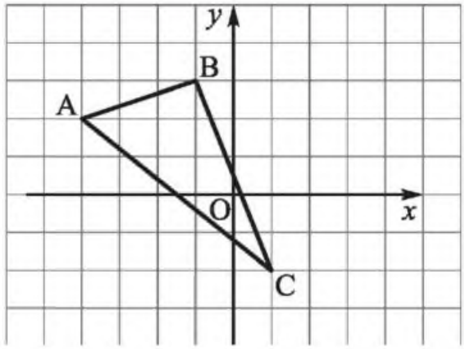
4. Егер $M(1; 3)$, $H(-2; -4)$, $F(5; -2)$ болса, $M_1 = S_{Ox}(M)$, $H_1 = S_{Ox}(H)$, $F_1 = S_{Ox}(F)$ нүктелерінің координаталарын табыңдар.

5. Oy осіне қарағанда ΔABC-ға симметриялы $\Delta A_1B_1C_1$-ді салыңдар. A_1, B_1, C_1 нүктелерінің координаталарын табыңдар. Қорытынды жасаңдар.



6. Егер $M(1; 3)$, $H(-2; -4)$, $F(5; -2)$ болса, $M_1 = S_{Oy}(M)$, $H_1 = S_{Oy}(H)$, $F_1 = S_{Oy}(F)$ нүктелерінің координаталарын табыңдар.

7. $\vec{a}\,(2; -1)$ векторына параллель көшіргенде ΔABC-ға симметриялы $\Delta A_1B_1C_1$-ді салыңдар. A_1, B_1, C_1 нүктелерінің координаталарын табыңдар. Қорытынды жасаңдар.



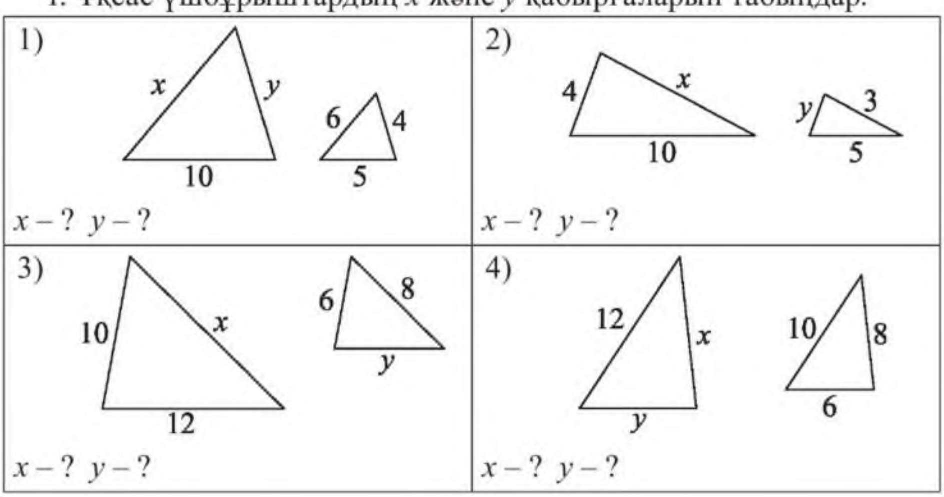
8. Егер $M(1;\ 3)$, $H(-2;\ -4)$, $F(5;\ -2)$ және $\vec{a}\,(2;\ -1)$ болса, $M_1 = T_{\vec{a}}(M)$, $H_1 = T_{\vec{a}}(H)$, $F_1 = T_{\vec{a}}(F)$ нүктелерінің координаталарын табыңдар.

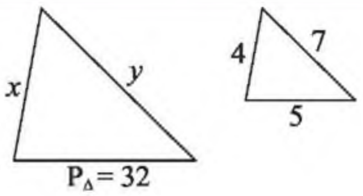
9. $A(-1;\ 3)$ нүктесі $A'(2;\ 4)$ нүктесіне, ал $B(1;\ -3)$ нүктесі $B'(x;\ y)$ нүктесіне параллель көшеді. x және y-ті табыңдар.

10. A_1B_1 $\vec{a}\,(2;\ -1)$ векторына параллель көшіргенде AB түзуінің бейнелеуі болып табылады, мұндағы $A(-2;\ 5)$, $B(1;\ -3)$. A_1B_1 түзуінің теңдеуін жазыңдар.

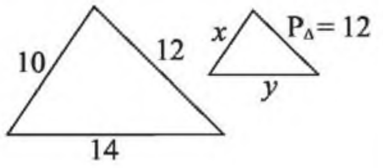
Т8. Үшбұрыштардың ұқсастығы

1. Ұқсас үшбұрыштардың x және y қабырғаларын табыңдар:

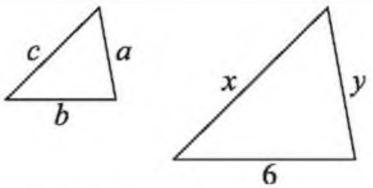


5) 

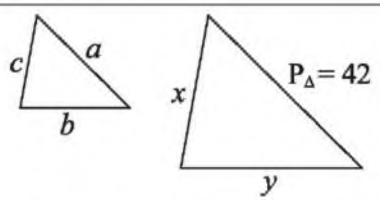
$x - ?$ $y - ?$

6) 

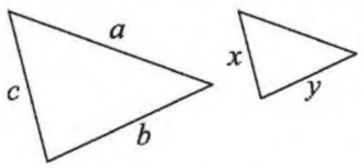
$x - ?$ $y - ?$

7) 

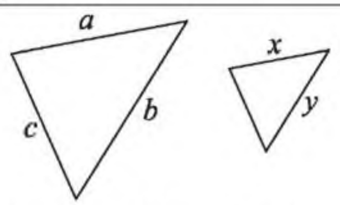
$c : a : b = 9 : 4 : 8;$
$x - ?$ $y - ?$

8) 

$c : a : b = 3 : 6 : 5;$
$x - ?$ $y - ?$

9) 

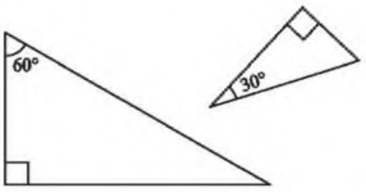
$c : a : b = 6 : 7 : 8,\ y - x = 4;$
$x - ?$ $y - ?$

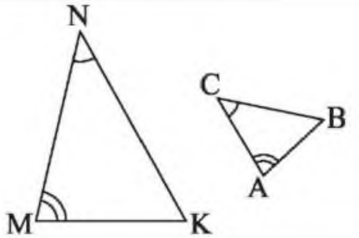
10) 

$c : a : b = 6 : 7 : 8,\ y + x = 45;$
$x - ?$ $y - ?$

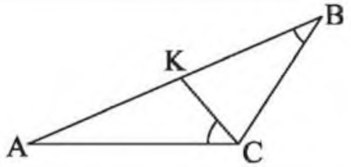
Т9. Ұқсастық белгілері

1. Ұқсас үшбұрыш жұптарын табыңдар және ұқсастықтың сәйкес белгісін көрсетіңдер:

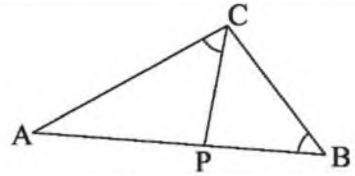
1) 

2) 

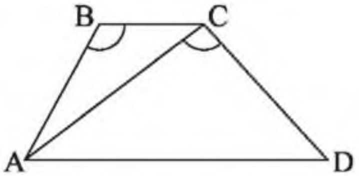
3)



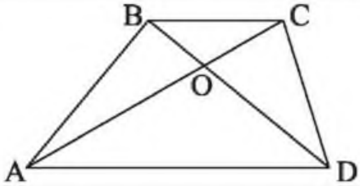
4)



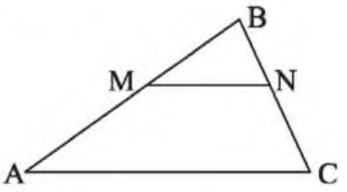
5)



6)

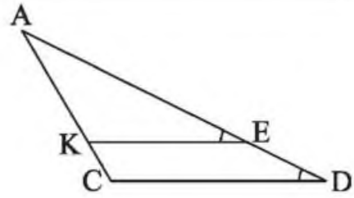


7)

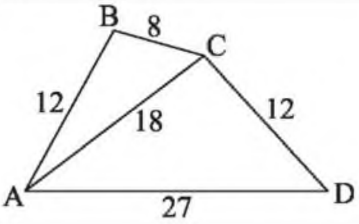


$MN \parallel AC$

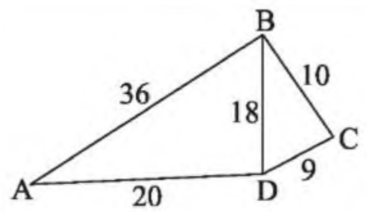
8)



9)

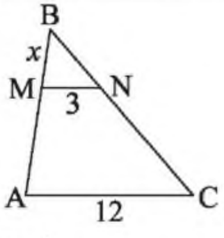


10)



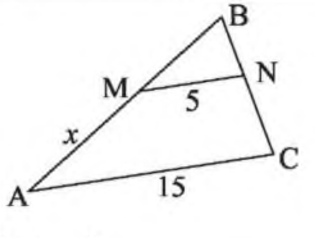
2. ABC үшбұрышында $MN \parallel AC$. x және y-ті табыңдар:

1)



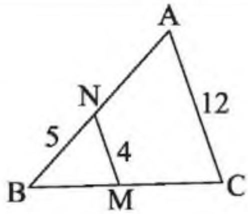
$AB = 16;\ x - ?$

2)



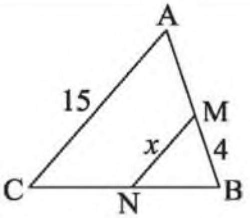
$AB = 30;\ x - ?$

3)



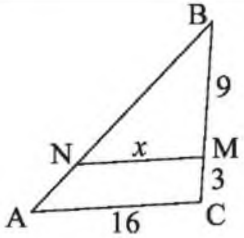
$AB = x - ?$

4)



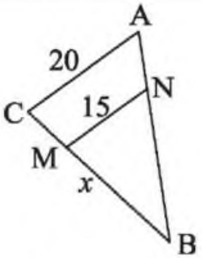
$AB = 12;\ x - ?$

5)



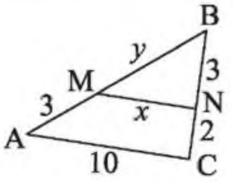
$x - ?$

6)



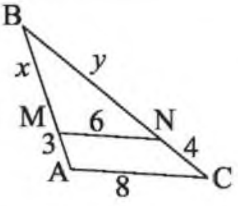
$CB = 28;\ x - ?$

7)



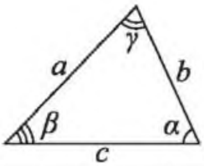
$x - ?\ y - ?$

8)



$x - ?\ y - ?$

T10. Синустар теоремасы



1. Кестені толтырыңдар:

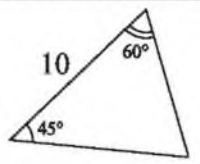
	1)	2)	3)	4)	5)	6)
a	5					10
b		20	26	12		
c			35		14	
α		75°		36°	64°	60°
β	30°	60°	40°	25°		
γ	45°		120°		48°	45°

2. Кестені толтырыңдар:

	1)	2)	3)	4)	5)	6)
a	12		20	6	18	21
b	5	27		8	12	
c		9	24			25
α	120°				72°	
β		60°		30°		
γ			140°			100°
R						

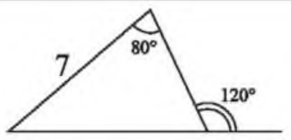
3. Белгісіз элементтерді табыңдар:

1)



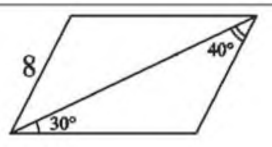
P – ?

2)



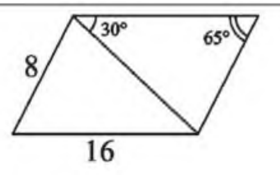
P – ?

3)



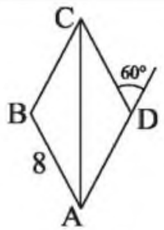
P – ?

4)



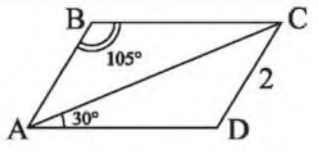
P – ?

5)



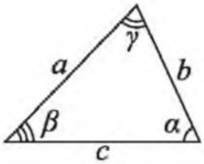
$ABCD$ – ромб; AC – ?
BD – ? S – ?

6)



AC – ?

Т11. Косинустар теоремасы



1. Кестені толтырыңдар:

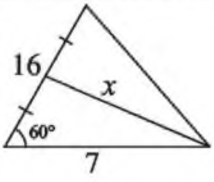
	1)	2)	3)	4)	5)	6)
a	12		15	7		10
b	8	17		14	6	
c		9	35		15	12
α		70°			80°	
β			30°			45°
γ	60°			120°		
S						

2. Кестені толтырыңдар:

	1)	2)	3)	4)	5)	6)
a	15	7	15	5	80	8
b	13	4	14	5	65	35
c	4	5	13	6	17	29
α						
β						
γ						
S						

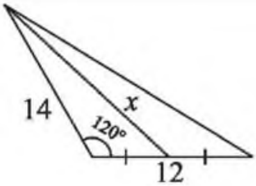
3. Белгісіз элементтерді табыңдар:

1)



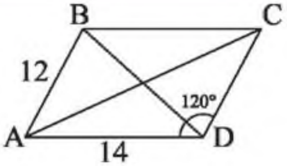
x – ?

2)



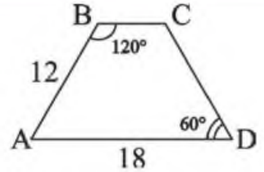
x – ?

3)



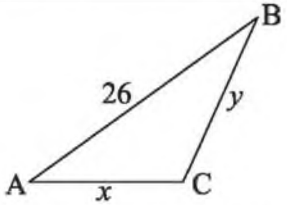
$AC - ?\ \ BD - ?$

4)



$AC - ?\ \ BD - ?$

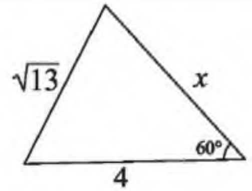
5)



$AC : BC = 7 : 8;\ \ \angle C = 120°$

$x - ?\ \ y - ?$

6)

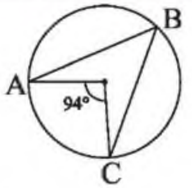


$x - ?$

T12. Шеңберге іштей сызылған бұрыштар

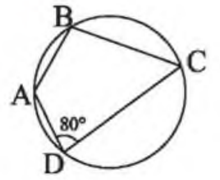
1. Бұрыштарды табыңдар.

1)



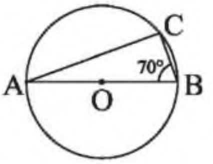
$\angle ABC - ?$

2)



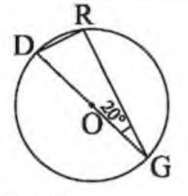
$\angle ABC - ?$

3)



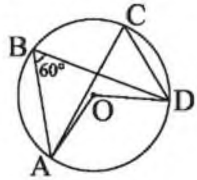
$\angle A - ?\ \ \angle C - ?$

4)



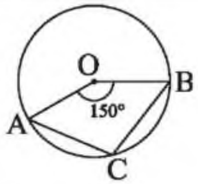
$\angle D - ?\ \ \angle R - ?$

5)



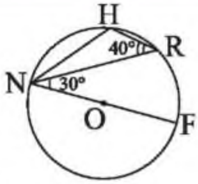
$\angle ACD - ?\ \ \angle AOD - ?$

6)



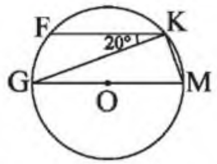
$\angle ACB - ?$

7)



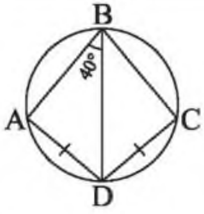
$\angle HNR$ – ?

8)



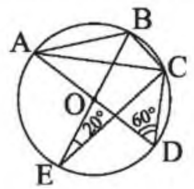
$FK \parallel GM$; $\angle M$ – ? $\angle FKM$ – ?

9)



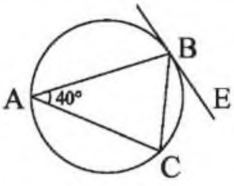
$\angle ADC$ – ?

10)



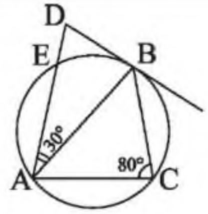
$\angle BAD$ – ?

11)



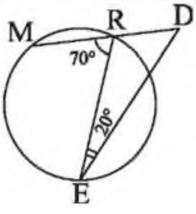
$\angle CBE$ – ?

12)



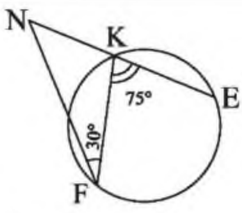
$\angle ADB$ – ?

13)



$\angle MDE$ – ?

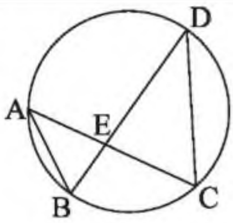
14)



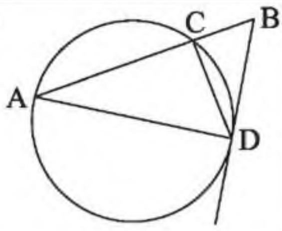
$\angle FNE$ – ?

2. Үшбұрыштардың ұқсастығын дәлелдеңдер:

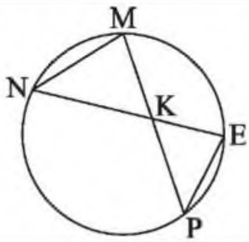
1)



2)

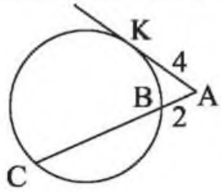
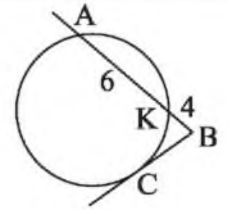
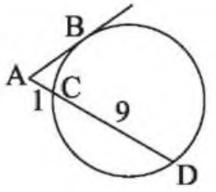
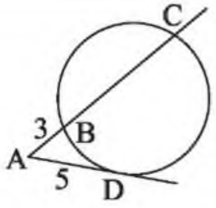
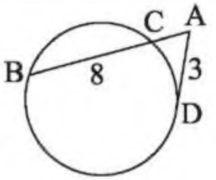
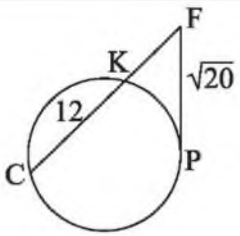
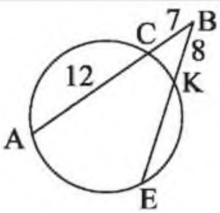
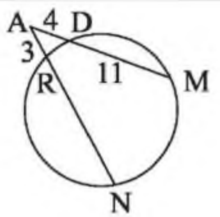


3)

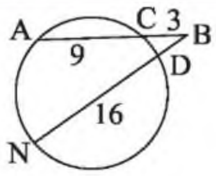


Т13. Шеңбердің жанамасы мен қиюшысының, қиылысатын хордаларының қасиеттері

1. Белгісіз элементтерді табыңдар:

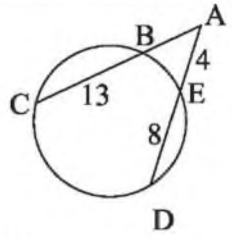
1)  *AC* – ?	2)  *BC* – ?
3)  *AB* – ?	4)  *AC* – ?
5)  *AB* – ?	6)  *FC* – ?
7)  *BE* – ?	8)  *AN* – ?

9)



$BD - ?$

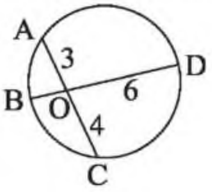
10)



$AC - ?$

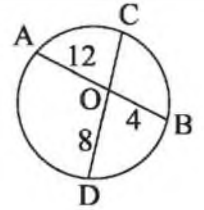
2. Белгісіз элементтерді табыңдар:

1)



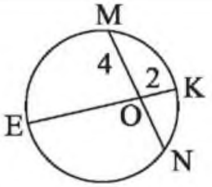
$BO - ?$

2)



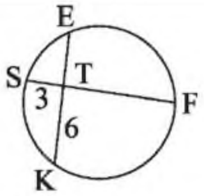
$OC - ?$

3)



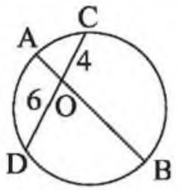
$KE = 7$; $ON - ?$

4)



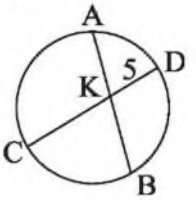
$EK = 10$; $ET - ?$

5)



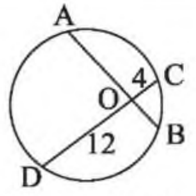
$BO - AO = 5$; $AO - ?$ $BO - ?$

6)



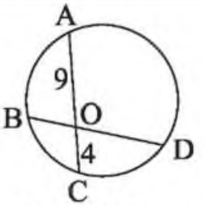
$CD = 17$, $KB - AK = 4$;
$AK - ?$ $KB - ?$

7)



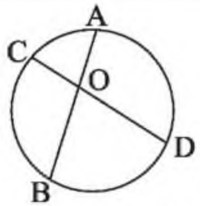
$AO : OB = 4 : 3$; $AB - ?$

8)



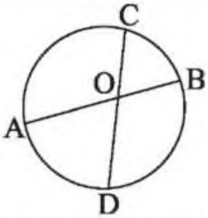
$BO : OD = 1 : 4$; $BD - ?$

9)



$AO : OB = 1 : 6,\ CO : OD = 1 : 3,$
$BO - AO = 20;\ CO - ?\ BO - ?$

10)



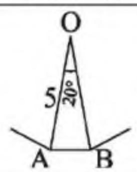
$DO - CO = 11,\ AO + OB = 16,$
$AO : OB = 5 : 3;\ CO - ?\ OB - ?$

Т14. Дұрыс көпбұрыштардың қабырғаларының ұзындықтары мен аудандарын табу

a – дұрыс көпбұрыштың қабырғасы; n – қабырғаларының саны; R – көпбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің радиусы; r – іштей сызылған шеңбердің радиусы; S – дұрыс көпбұрыштың ауданы.

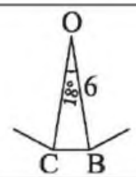
1. Белгісіз элементтерді табыңдар:

1)



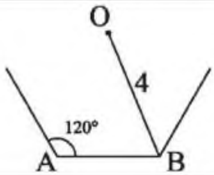
$n - ?$
$a - ?$
$r - ?$
$S - ?$

2)



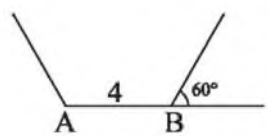
$n - ?$
$a - ?$
$r - ?$
$S - ?$

3)



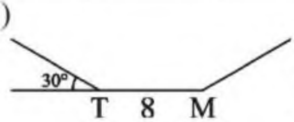
$n - ?$
$a - ?$
$r - ?$
$S - ?$

4)



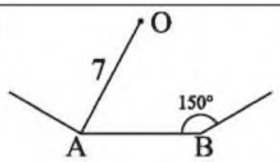
$n - ?$
$a - ?$
$r - ?$
$S - ?$

5)



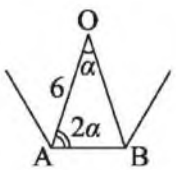
$n - ?$
$R - ?$
$r - ?$
$S - ?$

6)



$n - ?$
$a - ?$
$r - ?$
$S - ?$

7)

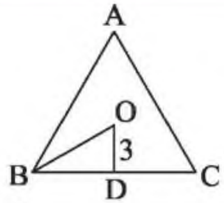


$\alpha - ?$
$n - ?$
$a - ?$
$r - ?$
$S - ?$

8)

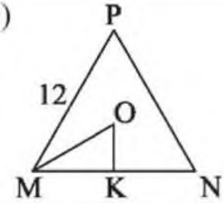
$\alpha - ?$
$n - ?$
$R - ?$
$r - ?$
$S - ?$

9)



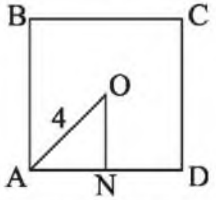
a – ?
R – ?
S – ?

10)



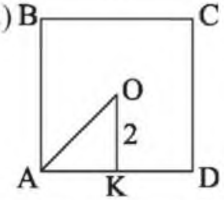
R – ?
r – ?
S – ?

11)



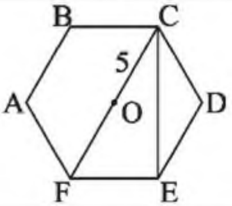
a – ?
r – ?
S – ?

12)



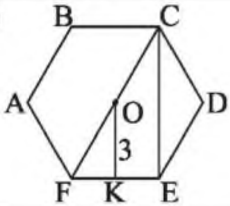
a – ?
R – ?
S – ?

13)



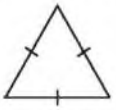
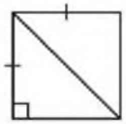
a – ?
r – ?
S – ?
FC – ?
CE – ?

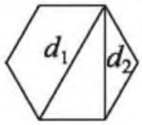
14)



a – ?
R – ?
S – ?
FC – ?
CE – ?

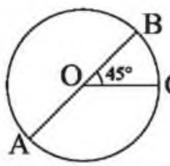
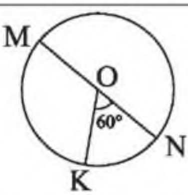
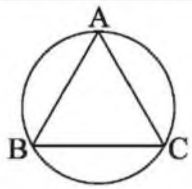
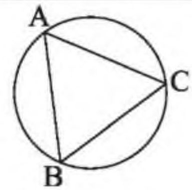
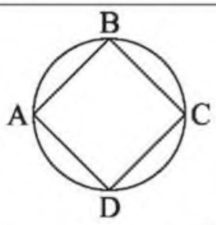
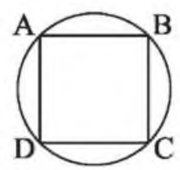
2. Кестені толтырыңдар:

	a_n	R	r	d_1	d_2	S
дұрыс үшбұрыш 	5			–	–	
		$2\sqrt{3}$		–	–	
				–	–	$4\sqrt{3}$
			4	–	–	
шаршы 		$2\sqrt{2}$			–	
				$3\sqrt{2}$	–	
	7				–	
			3		–	
					–	25

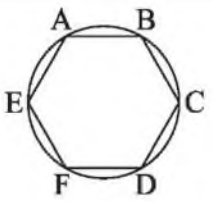
	a_n	R	r	d_1	d_2	S
дұрыс алтыбұрыш 		5				
			$2\sqrt{3}$			
						$\frac{27\sqrt{3}}{2}$
				12		
	4					
					$2\sqrt{3}$	

T15. Шеңбер мен оның доғасының ұзындығы

1. Шеңбердің ұзындығы (C) мен доғаларының ұзындығын (l) табыңдар:

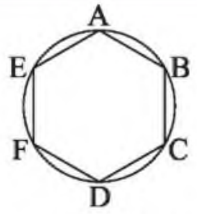
1)  $AB = 10$; l_{CB} – ? l_{AC} – ? C – ?	2)  $MN = 12$; l_{MK} – ? l_{KN} – ? C – ?
3)  ΔABC дұрыс, $BC = 2\sqrt{3}$; l_{AC} – ? C – ?	4)  ΔABC дұрыс, $AB = 3\sqrt{3}$; l_{BC} – ? C – ?
5)  $ABCD$ – шаршы, $BC = 2\sqrt{2}$; l_{AD} – ? C – ?	6)  $ABCD$ – шаршы, $AD = 6\sqrt{2}$; l_{DC} – ? C – ?

7)



ABCDFE – дұрыс алтыбұрыш,
$AB = 4$; l_{FD} – ? C – ?

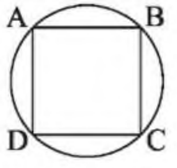
8)



ABCDFE – дұрыс алтыбұрыш,
$BC = 5$; l_{FE} – ? C – ?

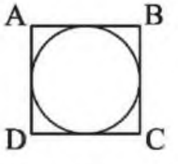
2. Белгісіз элементтерді табыңдар:

1)



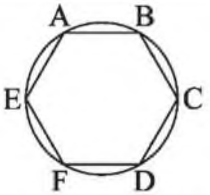
ABCD – шаршы, $l_{AD} = 4\pi$;
S_{ABCD} – ?

2)



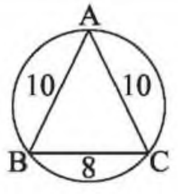
ABCD – шаршы, $P_{ABCD} = 16$;
C – ?

3)



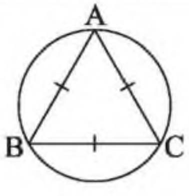
ABCDEF – дұрыс алтыбұрыш
$S_{ABCDEF} = 36\sqrt{3}$; l_{AFE} – ?

4)



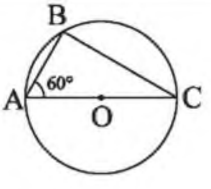
C – ?

5)



$l_{AB} = 2\pi$; S_{ABC} – ?

6)

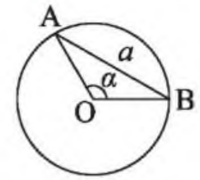


$AB = 2$; l_{AB} – ? l_{BC} – ?

Т16. Дөңгелектің, оның секторы мен сегментінің ауданы

1. Кестені толтырыңдар:

R – дөңгелектің радиусы;
a – хорда ұзындығы;
α – центрлік бұрышы;
$S_{сек}$ – сектордың ауданы;
$S_{сегм}$ – сегменттің ауданы.

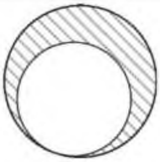


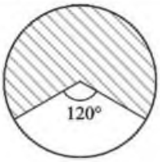
	1)	2)	3)	4)	5)
R	4		4	1	
a					6
α	120°	30°			60°
S_{AOB}					
$S_{сек}$		$\frac{\pi}{3}$	$\frac{8\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	
$S_{сегм}$					

2. Боялған фигураның ауданын табыңдар:

1)

$R_1 = 5, R_2 = 2;$ $S - ?$

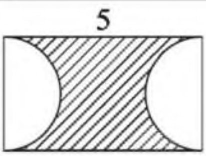
2)

$R_1 = 4, R_2 = 3;$ $S - ?$

3)


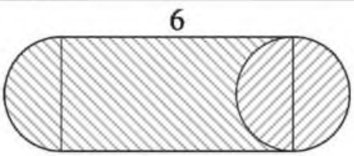
$R = 5;$ $S - ?$

4)


$R = 3;$ $S - ?$

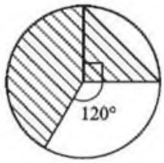
5)


$R_1 = R_2 = 1;$ $S - ?$

6)


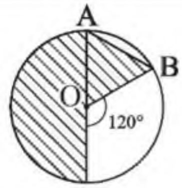
$R_1 = R_2 = 2;$ $S - ?$

7)



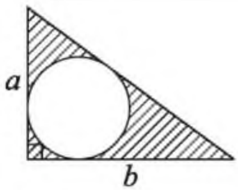
$R = 4$; $S - ?$

8)



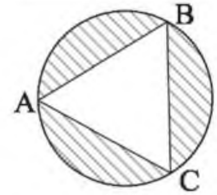
$R = 4$; $S - ?$

9)



$a = 6$, $b = 8$; $S - ?$

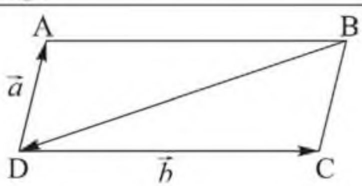
10)



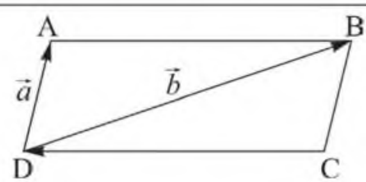
ΔABC дұрыс, $AB = 2\sqrt{3}$; $S - ?$

T17. 9-сынып геометрия курсын қайталау

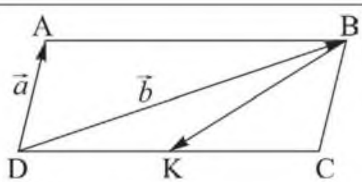
1. $ABCD$ – параллелограмм. Векторларды $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ арқылы өрнектеңдер:



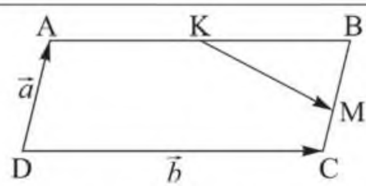
$\overrightarrow{BD}$ – ?



$\overrightarrow{CD}$ – ?



$DK = KC$; $\overrightarrow{BK}$ – ?



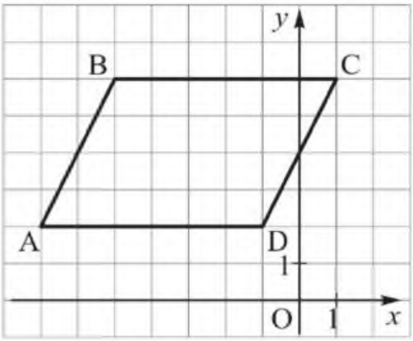
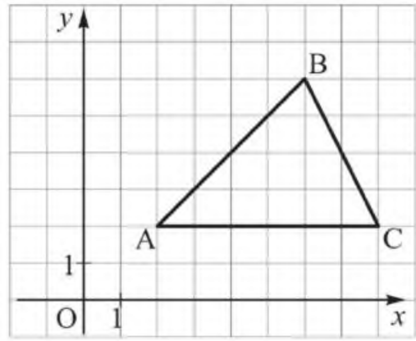
$AK = KB$, $BM : MC = 2 : 1$; $\overrightarrow{KM}$ – ?

2. Векторлардың координаталарын табыңдар, мұндағы $A(2; 4)$, $B(1; -3)$, $C(5; 2)$, $D(-4; 0)$:

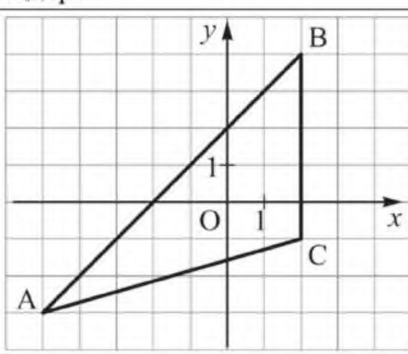
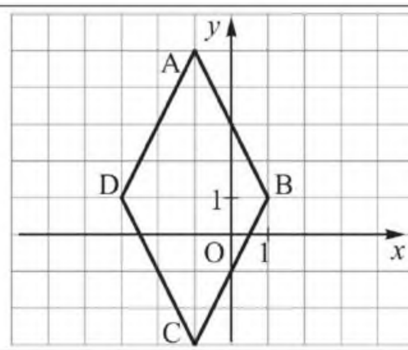
$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{DA}$	$\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA}$	$-3\overrightarrow{AC}$	$2\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{DB}$	$\overrightarrow{CD}$	$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}$	$1{,}5\overrightarrow{BC}$	$0{,}5\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{DB}$

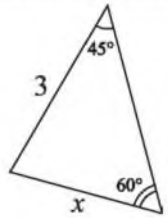
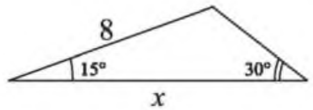
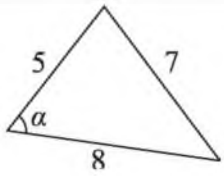
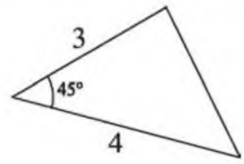
3. Дәптерге:

 	
1) *Oy* түзуіне қатысты симметриядан; 2) $\vec{a}\,(-3;\ -2)$ векторына параллель көшіруден; 3) сағат тілі бағытымен 90°-қа бұрудан тұратын қозғалыс композициясын салыңдар.	1) *Ox* түзуіне қатысты симметриядан; 2) *O* нүктесіне қатысты симметриядан; 3) сағат тіліне қарсы бағытта 90°-қа бұрудан тұратын қозғалыс композициясын салыңдар.

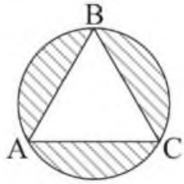
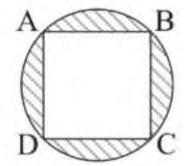
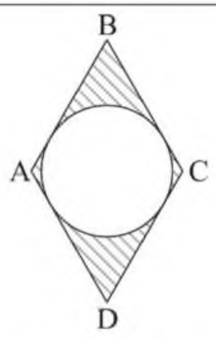
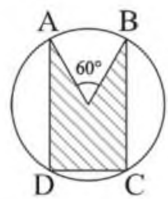
4. Дәптерге берілген фигураларға гомотетиялы фигураларды салыңдар:

 	
гомотетия центрі – *O* нүктесі, гомотетия коэффициенті $k = 2$	гомотетия центрі – *B* нүктесі, гомотетия коэффициенті $k = -2$

5. Белгісіз элементтерді табыңдар:

 x – ?	 x – ?
 x – ?	 x – ?

6. Фигураның штрих сызықпен боялған бөлігінің ауданын табыңдар:

 ABC – дұрыс үшбұрыш, $AB = 4$; S – ?	 $ABCD$ – шаршы, $R = 8$; S – ?
 $ABCD$ – ромб, $\angle B = 60°$, $AC = 6$; S – ?	 $R = 10$, $\smile AB = 60°$; S – ?

ҚОСЫМША ӘДЕБИЕТ

1. Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф., Кадомцев С. Б. и др. Геометрия. 7–9 классы. – М.: Просвещение, 2010.

2. Барчунова Ф. М., Колягин Ю. М., Ройтман П. Б. 8 кластағы геометрия сабақтары: Бірінші және екінші жарты жыл. Мұғалімдерге арналған құрал. – Алматы: Мектеп, 1976.

3. Гордин Р. К. Геометрия. Планиметрия. 7–9 классы. – 3-е изд., испр. – М.: МЦНМО, 2006.

4. Закарин А. Абель. Галуа. Лобачевский. Эйнштейн: Математика ғалымдарының өмірі мен ғылыми еңбектері. – Алматы: Қазақстан, 1968.

5. Қаниев С. Математикадан конкурстық есептер. – Алматы: Мектеп, 1975.

6. Солтан Г. Н., Жумадилова А. Ж. Геометрия: жалпы білім беретін мектептің 7-сынып оқушыларына арналған оқулық + CD. – Көкшетау: Келешек-2030, 2016.

7. Солтан Г. Н., Солтан А. Е., Жумадилова А. Ж. Геометрия: жалпы білім беретін мектептің 8-сынып оқушыларына арналған оқулық + CD. – Көкшетау: Келешек-2030, 2018.

8. Тасболатова Р. Планиметрия есептері: Жалпы білім беретін орта мектептің жоғары сынып оқушылары мен математика пәні мұғалімдеріне арналған оқу құралы. – Респ. баспа кабинеті, 2000.

Қосалқы беттердегі иллюстрацияларда пайдаланылған фотосуреттер тізімі

1. «Астана-Бәйтерек» монументі – 17 б.

2. Ақорда – Қазақстан Республикасы Президентінің резиденциясы – 61 б.

3. «ҚазМұнайГаз» ҰК АҚ әкімшілік ғимараттарының кешені; «Хан Шатыр» сауда-ойын сауық орталығы – 102 б.

4. «Астаналық цирк» – 136 б.