АЛГЕБРА

Часть 1

Учебник для 9 класса общеобразовательных школ

Утверждено Министерством образования и науки Республики Казахстан

9

Алматы "Мектеп" 2019

УДК 373.167.1
ББК 22.14я72
А45

Авторы:
А.Е. Абылкасымова, Т.П. Кучер, В.Е. Корчевский, З.А. Жумагулова

Условные обозначения:

— определения, свойства, правила

— проблема, которая будет решена при овладении новыми знаниями

— вопросы для закрепления

— задания для самостоятельного изучения теоретического материала

— конец доказательства теоремы или свойства

— дополнительные материалы

A — обязательные упражнения для всех учащихся

B — упражнения средней сложности

C — упражнения повышенной сложности

— задачи на растворы, смеси и сплавы

— практико-ориентированные упражнения

— упражнения на использование электронных ресурсов

А45 **Алгебра:** Учебник для 9 кл. общеобразоват. шк.: Часть 1. / А.Е. Абылкасымова, Т.П. Кучер, В.Е. Корчевский, З.А. Жумагулова. — Алматы: Мектеп, 2019. — 184 с., ил.

ISBN 978—601—07—1079—5

А $\frac{4306020503—008}{404(05)—19}$ 22(1)—19

УДК 373.167.1
ББК 22.14я72

ISBN 978—601—07—1079—5

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данный учебник предназначен для изучения математики учащимися 9 классов. В учебнике изложены темы: "Уравнения, неравенства и их системы", "Элементы комбинаторики", "Последовательности", "Тригонометрия", "Элементы теории вероятностей".

Каждый параграф учебника, а их — 32, включает теоретическую часть, которая сопровождается подробными решениями примеров на использование теоретического материала. По ходу изложения теоретического материала предлагаются задания для самостоятельного обоснования (доказательства) некоторых утверждений и вопросы для самоконтроля, требующие вдумчивой самостоятельной работы над усвоением теории.

К каждому параграфу учебника предложены упражнения трех уровней сложности для закрепления изученного материала, которые обозначены с помощью букв **А, В, С**. К первому уровню (**А**) относятся упражнения, выполнение которых обязательно для каждого учащегося. Ко второму уровню (**В**) относятся упражнения средней сложности. Упражнения третьего уровня сложности (**С**), в том числе отмеченные звездочкой (*), рекомендуются тем учащимся, которые интересуются математикой и умеют творчески применять полученные теоретические знания.

В учебник включены практико-ориентированные задания, упражнения на использование электронных ресурсов.

В конце каждой главы даны тестовые задания. Соответственно содержанию курса учебник дополнен глоссарием.

В конце каждого параграфа имеются упражнения для повторения. Они предназначены для того, чтобы учащиеся при их выполнении могли вспомнить пройденный материал с целью его использования при изучении следующего параграфа.

Для проверки правильности выполнения упражнений в конце учебника имеются ответы.

Изучение математики потребует от учащихся упорства и трудолюбия, усидчивости и внимания, терпения и настойчивости. Только при таких качествах можно достигнуть успехов в учебе.

Авторы

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ КУРСА АЛГЕБРЫ 7—8 КЛАССОВ

Тождественные преобразования дробно-рациональных выражений

1. Упростите выражение:

1) $\frac{8}{6+x}-\frac{8}{x-7}$; 2) $\frac{9a^2+y^2}{3a-y}+\frac{6ay}{y-3a}$;

3) $\frac{ay}{a-yb}+\frac{3a-by}{by-a}$; 4) $\frac{a^2x^2+36y^2}{ax-6y}+\frac{12axy}{6y-ax}$.

2. Докажите, что тождественно равны выражения:

1) $\frac{1}{6x+10}-\frac{1}{9x-15}+\frac{5}{9x^2-25}$ и $\frac{1}{6(3x-5)}$;

2) $\frac{1}{2x-8}+\frac{1}{40-10x}+\frac{1}{x^2-8x+16}$ и $\frac{2x-3}{5(x-4)^2}$;

3) $\frac{1}{x-2}+\frac{x-2}{x^2+2x+4}-\frac{6x}{x^3-8}$ и $\frac{2x-4}{x^2+2x+4}$;

4) $\frac{2a^2+7a+3}{a^3-1}-\frac{1-2a}{a^2+a+1}-\frac{1}{a-1}$ и $\frac{3}{a-1}$.

3. Выполните действия над дробями:

1) $\frac{27c^2}{5d}:(-18c^3d^2)$; 2) $\frac{14a^2}{9x^3}:\frac{7a}{4x^2}$;

3) $\frac{7x^2}{10a^3}:\frac{x}{15a^5}$; 4) $27a^3\cdot\frac{a^2}{b^2}:\frac{18a^5}{7b^3}$.

4. Упростите выражение:

1) $\frac{9x^2}{5y^3}:\frac{27x^5}{2y^4}\cdot\frac{15}{4y(x-1)}$; 2) $\frac{25a(b-1)}{3^2d}:\frac{5cd^2}{27ab}:\frac{a^3(b-1)}{c^3d^2}$;

3) $\frac{28p^4}{5q^3}\cdot\frac{15q^2(p-2)}{7p^2}:\frac{3p^2}{4q^3}$; 4) $\frac{12x^5y^4}{13ab^2}:\frac{4xy^2}{13a^2b}:\frac{3x^2(y+3)}{ab}$.

5. Упростите выражение и найдите его значение:

1) $\frac{5-\frac{2}{3x}}{5+\frac{2}{3x}}+2$ при $x=0{,}5$;

2) $\dfrac{\dfrac{5n-3b}{b}+3}{\dfrac{25n+7b}{b}-7}$ при $n=2$;

3) $\dfrac{\dfrac{5x}{y^2}+\dfrac{y}{x^2}}{\dfrac{x}{y^2}-\dfrac{5y}{x^2}}-1$ при $\dfrac{y}{x}=1$;

4) $\left(\dfrac{x}{y}+1\right)^2-2+\left(\dfrac{x}{y}-1\right)^2$ при $x=0{,}25$ и $y=0{,}5$;

5) $3a-\dfrac{2a}{1-2a}+\dfrac{c-6a^2}{2a-1}$ при $a=-3,\ c=12$;

6) $\dfrac{a^2-n}{a-7}-\dfrac{6a}{7-a}-a$ при $a=2,\ n=-4$.

6. Упростите выражение :

1) $\left(b-\dfrac{b^2-3}{b+1}\right):\dfrac{b+3}{1-b^2}$;

2) $\left(b-\dfrac{b^2-6}{b+1}\right):\dfrac{b+6}{b^2-1}$;

3) $\left(1+2b-\dfrac{b^2+b}{b+1}\right)\cdot(1-b)$.

7. Докажите тождество :

1) $\left(\dfrac{b^3-1}{b-1}+b\right):\dfrac{b^2-1}{b-1}=b+1$;

2) $\dfrac{1+b}{1-b^2}\cdot\left(\dfrac{1+b^3}{1+b}-b\right)=1-b$.

8. Сократите дробь :

1) $\dfrac{a^4-4}{a^3+2a}$;

2) $\dfrac{x^4-4x^2+4}{x^3-2x}$;

3) $\dfrac{x^4-6x^2+9}{3x-x^3}$;

4) $\dfrac{x^2-2x+4}{x^3+8}$.

9. Упростите выражение :

1) $\left(\dfrac{p}{q}+\dfrac{q}{p}\right)^2-\left(\dfrac{p}{q}-\dfrac{q}{p}\right)^2-2$;

2) $\left(\dfrac{a+y}{a}-\dfrac{a-y}{y}\right)^2-\left(\dfrac{a+y}{a}+\dfrac{a-y}{y}\right)^2$;

3) $\dfrac{x}{x+1} \cdot \left(\dfrac{4x}{x^2-1} + \dfrac{x-1}{x+1}\right) - \dfrac{x}{x-1}$;

4) $a^4 \cdot \left(\dfrac{3a+b}{a} - 3\right)^2 + b^4 \cdot \left(\dfrac{a-2b}{b} + 2\right)^2 - 4\,(ab)^2$;

5) $\dfrac{a}{a-2} - \left(\dfrac{8a}{a^2-4} + \dfrac{a-2}{a+2}\right) \cdot \dfrac{a}{a+2}$;

6) $2 + \left(\dfrac{28c}{c^2-49} + \dfrac{c-7}{c+7}\right) \cdot \dfrac{c}{c+7} - \dfrac{c}{c-7}$;

7) $2 + \dfrac{9x^2 - 4^{-1}}{3x + 2^{-1}} - 3x$;

8) $3 + \dfrac{4x^2 - 9^{-1}}{2x + 3^{-1}} - 2(x-1)$;

9) $\dfrac{169^{-1} - a^2}{13^{-1} - a} - \left(a + 5\dfrac{1}{13}\right)$.

10. Найдите x из пропорции :

1) $\dfrac{x}{a+c} = \dfrac{c}{c^2-a^2}$;

2) $\dfrac{x}{2n+c} = \dfrac{4c}{c^2-4n^2}$;

3) $\dfrac{x}{a-3c} = \dfrac{2c}{9c^2-a^2}$;

4) $\dfrac{6c}{25c^2-4a^2} = \dfrac{x}{5c+2a}$;

5) $\dfrac{cx}{2a-3c} = \dfrac{2ac}{9c^2-4a^2}$;

6) $\dfrac{2ax}{3b-a} = \dfrac{6ab}{9b^2-a^2}$.

Тождественные преобразования выражений, содержащих квадратные корни

11. Вычислите значение выражения :

1) $7 - \left(3\sqrt{\dfrac{4}{9}} + \sqrt{0{,}25}\right) - 3{,}5$;

2) $6 - (\sqrt{225} + 3\sqrt{121}) : \left(\dfrac{2}{3}\sqrt{0{,}09} + 0{,}78\sqrt{100}\right)$;

3) $22 : (0{,}15\sqrt{1600} - 0{,}25\sqrt{400}) - 44$;

4) $\left(-6\sqrt{\dfrac{1}{4}} + \dfrac{\sqrt{324}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{0{,}16}}{0{,}2}\right) : \sqrt{25} - 2$.

12. Найдите значение выражения с переменной :

1) $\sqrt{5x-10}$ при $x = 2;\ 3{,}8;\ 7{,}2$;

2) $\sqrt{6-2c}$ при $c = 2{,}5;\ -5;\ -15;\ -37{,}5$;

3) $\dfrac{5+\sqrt{a}}{5-\sqrt{a}}$ при $a = 1;\ 16;\ 6{,}25$;

4) $\sqrt{2c-a}$ при $a = 0$ и $c = 2$; при $a = 4$ и $c = 7$.

13. Найдите значение числового выражения :

1) $5 + \sqrt{0{,}16} - (2\sqrt{0{,}1})^2$;

2) $(3\sqrt{3})^2 + (-3\sqrt{3})^2 - 2$;

3) $(0{,}4\sqrt{10})^2 + 1{,}5\sqrt{16} - 2$;

4) $(-5\sqrt{2})^2 - (-2\sqrt{5})^2 - 4$;

5) $2 - \sqrt{196 \cdot 0{,}81 \cdot 0{,}36}$;

6) $\sqrt{0{,}87 \cdot 36 + 0{,}82 \cdot 36} + 1{,}2$;

7) $\sqrt{\dfrac{165^2 - 124^2}{41}}$;

8) $\sqrt{\dfrac{72}{176^2 - 112^2}}$;

9) $\sqrt{\dfrac{148^2 - 21^2}{104^2 - 23^2}}$;

10) $\sqrt{\dfrac{65{,}5^2 - 15{,}5^2}{13{,}5^2 - 11{,}5^2}}$.

14. Сравните числа :

1) $\sqrt{3{,}4}$ и $\sqrt{3{,}6}$;

2) $\sqrt{3{,}335}$ и $\sqrt{3\frac{1}{6}}$;

3) $\sqrt{8{,}1}$ и $2{,}6$;

4) $\sqrt{\dfrac{4}{9}}$ и $\sqrt{\dfrac{6}{11}}$;

5) $4{,}2$ и $\sqrt{16{,}7}$.

15. Найдите значение выражения, если оно имеет смысл :

1) $\sqrt{(-32)^2} - \sqrt{-40^2} + \sqrt{-(-15)^2}$;

2) $-\sqrt{20^2} - \sqrt{(-21)^2} - \sqrt{(-23)^2}$;

3) $4\sqrt{(-2)^2} + 0{,}4\sqrt{2^8} + 2\sqrt{(-2)^{10}}$;

4) $3 \cdot \sqrt{10^6} - 0{,}2\sqrt{(-4)^4} + 4{,}5 \cdot \sqrt{(-0{,}2)^2}$.

***16.** При каких значениях переменной верно равенство :

1) $\sqrt{y^2} = y$;

2) $\sqrt{y^6} = y^3$;

3) $\sqrt{a^{10}} = -a^5$;

4) $\sqrt{x^{12}} = x^6$;

5) $\sqrt{c^{14}} = -c^7$;

6) $\sqrt{b^2} = -b$?

17. Расположите в порядке возрастания числа:

1) $\frac{4}{5}\sqrt{50}$; $\sqrt{31}$ и $4\sqrt{2}$;

2) $6\sqrt{0{,}6}$; $\sqrt{39}$ и $\frac{4}{5}\sqrt{75}$;

3) $3\sqrt{\frac{7}{2}}$; $\sqrt{15}$ и $\frac{1}{2}\sqrt{72}$;

4) $8\sqrt{0{,}5}$; $\sqrt{93}$ и $\frac{3}{4}\sqrt{160}$.

18. Найдите значение числового выражения:

1) $\frac{5}{11-2\sqrt{10}}+\frac{5}{11+2\sqrt{10}}$; 2) $\frac{\sqrt{11}-\sqrt{3}}{\sqrt{11}+\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{11}+\sqrt{3}}{\sqrt{11}-\sqrt{3}}$;

3) $\frac{5}{3-2\sqrt{3}}+\frac{5}{3+2\sqrt{3}}$; 4) $\frac{12+\sqrt{44}}{12-\sqrt{44}}+\frac{12-\sqrt{44}}{12+\sqrt{44}}$.

19. Докажите тождество:

1) $\sqrt{9-2\sqrt{14}}=\sqrt{7}-\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{6\sqrt{2}+11}=\sqrt{2}+3$;

3) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}=4$; 4) $\sqrt{8+2\sqrt{7}}+\sqrt{8-2\sqrt{7}}=2\sqrt{7}$.

***20.** Докажите, что является натуральным числом значение выражения:

1) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{6+4\sqrt{2}}\cdot\sqrt{6-4\sqrt{2}}$;

2) $\frac{7}{2\sqrt{2}+6}-\frac{7}{2\sqrt{2}-6}$;

3) $8+(\sqrt{7-2\sqrt{10}}+\sqrt{7+2\sqrt{10}})\cdot\sqrt{5}$;

4) $\frac{9}{8+2\sqrt{7}}+\frac{9}{8-2\sqrt{7}}$.

21. Вычислите значение выражения с переменной:

1) $x^2+4\sqrt{5}$ при $x=1-2\sqrt{5}$;

2) x^2-6x+4 при $x=3+\sqrt{3}$;

3) x^2-4x при $x=2-\sqrt{2}$.

22. Преобразуйте выражение :

1) $\sqrt{a^8b^2}$; 2) $\sqrt{\frac{16a^{16}}{9b^{14}}}$ при $b>0$;

3) $\sqrt{b^{10}x^8}$ при $b\geq 0$; 4) $\sqrt{25x^8a^{12}}$;

5) $\sqrt{\frac{4x^6}{y^2}}$ при $x<0,\ y<0$; 6) $\sqrt{0{,}25p^6y^{10}}$ при $p\geq 0,\ y\leq 0$.

***23.** Вынесите множитель из-под знака корня :

1) $\sqrt{(-5x)^2}$; 2) $\sqrt{(-a)^2(-x)^8}$;

3) $0{,}5\sqrt{20y^2}$; 4) $0{,}1\sqrt{75x^3}$;

5) $a\sqrt{18x^2y}$; 6) $0{,}5\sqrt{169a^2}$;

7) $0{,}2\sqrt{2{,}25a^7}$; 8) $-m^2\sqrt{0{,}81ym^4}$;

9) $\sqrt{0{,}09a^2c}$, где $a < 0$; 10) $\frac{1}{x^3}\sqrt{-x^3}$;

11) $2{,}1\sqrt{2500x^4}$, где $x > 0$; 12) $\sqrt{1{,}96a^3b^3}$, где $a < 0$, $b < 0$;

13) $\sqrt{50y^4x^3}$; 14) $a\sqrt{-3x^3a^4}$.

***24.** Внесите множитель под знак корня:

1) $x\sqrt{10}$, где $x \mid 0$; 2) $c\sqrt{\frac{7}{c}}$;

3) $a\sqrt{11}$, где $a < 0$; 4) $4ab\sqrt{\frac{a}{8b}}$, где $a < 0$, $b < 0$;

5) $c\sqrt{6c}$; 6) $c^3\sqrt{11c^2}$;

7) $3x^5 \cdot \sqrt{\frac{1}{x}}$; 8) $3a^2b\sqrt{\frac{2b}{a}}$, где $a > 0$, $b > 0$;

9) $x \cdot \sqrt{-\frac{3}{x}}$; 10) $-a^2\sqrt{12}$;

11) $6x\sqrt{-\frac{x}{8}}$; 12) $\frac{2a}{b}\sqrt{\frac{b^5}{8a}}$, где $a < 0$, $b < 0$.

25. Освободитесь от иррациональности в числителе дроби:

1) $\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$; 2) $\frac{2\sqrt{3}-3}{4\sqrt{3}}$; 3) $\frac{2-3\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$;

4) $\frac{x+\sqrt{7x}}{7\sqrt{x}}$; 5) $\frac{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}$; 6) $\frac{y+b\sqrt{y}}{b\sqrt{y}}$.

26. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

1) $\frac{2-\sqrt{2y}+y}{\sqrt{2}-\sqrt{y}}$; 2) $\frac{9+3\sqrt{c}+c}{3+\sqrt{c}}$;

3) $\frac{a^2b+3a\sqrt{b}+9}{3+a\sqrt{b}}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}$;

5) $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}-1}$; 6) $\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}-1}$.

Квадратный трехчлен. Теорема Виета

27. Найдите корни квадратного трехчлена:

1) $x^2 + 4x - 5$; 2) $x^2 - 14x - 15$;

3) $-x^2 + 4x + 12$; 4) $2x^2 + 3x - 5$.

28. Разложите на множители квадратный трехчлен:

1) $x^2 + 2x - 8$; 2) $3x^2 - 11x + 8$;
3) $-2x^2 + 5x - 3$; 4) $-3x^2 + 8x - 5$.

29. Разложите на множители квадратный трехчлен:

1) $-2x^2 + 10x - 8$; 2) $x^2 - 11x + 10$;
3) $-2x^2 + 7x - 5$; 4) $3x^2 + 4x - 7$;
5) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - 2$; 6) $0,5x^2 - 6x + 5,5$;
7) $-2x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$; 8) $0,3x^2 + 3x - 3,3$.

30. Разложите на множители выражение:

1) $x^2 + 7x - 8$; 2) $x^2 - 10x - 11$;
3) $-2,5x^2 + 7,65x - 5,15$; 4) $3\frac{2}{3}x^2 + 4\frac{1}{3}x - 8$.

31. Сократите дробь:

1) $\frac{x^2 - 7x - 8}{x - 8}$; 2) $\frac{x^2 - 9x + 8}{x - 1}$;
3) $\frac{2x^2 + 7x - 9}{x - 1}$; 4) $\frac{3x^2 - 7x - 10}{x + 1}$;
5) $\frac{2x^2 - 7x - 9}{x^2 + x}$; 6) $\frac{3x^2 - 9x + 6}{x^2 - x}$;
7) $\frac{5x^2 + 7x - 12}{x^2 - 1}$; 8) $\frac{2x^2 - 7x + 6}{x^2 - 4}$.

32. Составьте квадратное уравнение по его корням:

1) 2; 7; 2) –3; 5; 3) –1; 4;
4) –2,1; –0,3; 5) 0,2; 5,3; 6) –5; 5;
7) $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{5}$; 8) $3\frac{4}{5}$; $2\frac{3}{5}$; 9) $-\sqrt{7}$; $\sqrt{7}$;
10) $5 \pm \sqrt{3}$; 11) $-3 \pm \sqrt{5}$; 12) $\sqrt{2}$; $\sqrt{11}$.

33. Используя теорему, обратную теореме Виета, найдите корни квадратного уравнения:

1) $x^2 - 10x + 24 = 0$; 2) $x^2 - 11x + 24 = 0$;
3) $x^2 - 12x + 27 = 0$; 4) $x^2 + 11x + 24 = 0$;
5) $x^2 + 42x + 441 = 0$; 6) $x^2 + 14x - 32 = 0$;

7) $x^2 - (\sqrt{2} + 3)x + 3\sqrt{2} = 0;$

8) $x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = 0;$

9) $x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0;$

10) $x^2 - 3(\sqrt{5} + 4)x + 36\sqrt{5} = 0;$

11) $x^2 + 4\sqrt{5}x + 20 = 0;$

12) $x^2 - (\sqrt{2} - \sqrt{6})x - 2\sqrt{3} = 0.$

34. Найдите, не вычисляя корни, значения суммы и произведения корней уравнения:

1) $x^2 - 4x - 6 = 0;$
2) $x^2 + 12x - 2{,}5 = 0;$
3) $2x^2 - 14x + 5 = 0;$
4) $3x^2 - 5x + 2 = 0.$

35. Не вычисляя корни x_1 и x_2 уравнения $x^2 - 4x - 9 = 0$ найдите:

1) $x_1^2 + x_2^2;$ 2) $x_1^2x_2 + x_1x_2^2;$ 3) $x_1^3 + x_2^3;$ 4) $x_1^4 + x_2^4 + x_1x_2.$

Квадратные и дробно-рациональные уравнения

36. Решите уравнение:

1) $x^2 - 5x - 12 = 6;$
2) $x^2 - 5x - 4 = 10;$
3) $x^2 + 8x = -16 - 2x;$
4) $x^2 + x - 2 = 2 - 2x;$
5) $-x^2 + 3x - 12 = -4x;$
6) $9x - x^2 = 6 + 2x;$
7) $-x^2 + 5x = 18 - 6x;$
8) $x - 2x^2 + 7 = -1 - 5x;$
9) $2x - 3x^2 + 8 = -1 - 6x.$

37. Найдите корни дробно-рационального уравнения:

1) $\dfrac{x}{x-3} + \dfrac{x}{x+2} = 1;$

2) $\dfrac{2}{6+x} + \dfrac{5}{x-1} = 1;$

3) $\dfrac{1}{x^2 - 10x + 25} - \dfrac{1}{x+5} + \dfrac{10}{25 - x^2} = 0;$

4) $\dfrac{2}{x^2 + 12x + 36} - \dfrac{12}{36 - x^2} - \dfrac{1}{x-6} = 0;$

5) $\dfrac{x^3 + 8}{2x + 4} = 5x - 8;$

6) $\dfrac{8x^3 + 27}{2x + 3} = 6x - 5;$

7) $\dfrac{x^4-625}{25-x^2}=-8x-90;$

8) $\dfrac{x^4-256}{x^2-16}=8x+9.$

38. Приведите пример уравнения вида $x^2+n=0$, которое:
1) имеет два целых корня;
2) имеет два рациональных корня;
3) имеет два иррациональных корня;
4) не имеет действительных корней.

39. Приведите пример уравнения вида $(x-a)^2+n=0$, которое:
1) имеет два целых корня;
2) имеет два рациональных корня;
3) имеет два иррациональных корня;
4) не имеет действительных корней.

40. Решите квадратное уравнение, содержащее переменную под знаком модуля:

1) $x^2-8|x|+15=0;$ 2) $x^2-|x|+2=0;$
3) $4|x|-x^2-2x+8=0;$ 4) $x^2-2|x-1|-15=0;$
5) $x^2-5|x|+4=0;$ 6) $x^2+18|x|+80=0;$
7) $x|x|-9x+18=0;$ 8) $x|x|-15x-54=0;$
9) $x^2-\dfrac{12x}{|x|}+15=0;$ 10) $x|x|+\dfrac{x}{|x|}=0.$

41. Найдите значение суммы корней уравнения:

1) $x^2+2|x|-48=0;$ 2) $x^2-2|x|+5x-8=0;$
3) $x^2-2|x-2|-6=0;$ 4) $-2x^2-2|x+2|+4=0.$

42. Найдите значения параметра a, при которых равен нулю один из корней уравнения:

1) $2x^2-5x+2a-8=0;$ 2) $x^2-4x+a^2-25=0;$
3) $3x^2-(a-2)x+2a^2-8=0;$ 4) $3x^2-(a+1)x+4a^2-4=0.$

***43.** При каких значениях параметра a равны по модулю, но противоположны по знаку корни уравнения:

1) $x^2-(a-6)x-16=0;$
2) $3x^2-(3a+12)x-24=0;$
3) $4x^2-(2a^2-8)x-144=0;$
4) $0{,}5x^2-(a^2-25)x-5-a=0?$

***44.** Найдите значения параметра a, при которых имеет действительные корни уравнение:

1) $x^2 - 2(a - 2)x + a = 0$;
2) $x^2 + 2(a - 4)x + 4 - a = 0$;
3) $x^2 - 2(a + 3)x + 4a - 1 = 0$;
4) $x^2 + 4(a - 5)x + 4a^2 - 4 = 0$.

45. Способом введения новой переменной решите уравнение:

1) $(x - 1)^2(x^2 - 2x) = 30$;
2) $(x + 2)^2(x^2 + 4x) = 21$;
3) $(x^2 - 4x + 3)(x^2 - 4x - 1) = 5$;
4) $(x^2 + 3x + 3)(x^2 + 3x + 1) = -1$;
5) $x^4 + 5x^2 - 6 = 0$;
6) $x^4 - x^2 - 56 = 0$;
7) $(x + 1)^4 - (x^2 + 2x + 1) = 12$;
8) $(x - 2)^4 + (x^2 - 4x) = 16$;
9) $(x^2 - 2x + 3)(x^2 - 2x - 1) = 12$;
10) $(x^2 - 3x + 3)(x^2 - 3x + 1) = -1$;
11) $x^4 + 2x^3 - 11x^2 + 4x + 4 = 0$;
12) $x^4 - 2x^3 - 23x^2 + 8x + 16 = 0$.

***46.** Решите уравнение:

1) $x^2 - 4\left(\sqrt{x}\right)^2 - 12 = 0$;
2) $x^2 - 2\left(\sqrt{x - 2}\right)^2 - 7 = 0$;
3) $x^2 - \sqrt{x^2} - 20 = 0$;
4) $x^2 - 7\sqrt{x^2} - 8 = 0$;
5) $(x^2 - 25)\sqrt{4 - x} = 0$;
6) $(x^2 - 49)\sqrt{8 - 2x} = 0$;
7) $(81 - x^2)\sqrt{9 - 2x} = 0$;
8) $(144 - x^2)\sqrt{5x - 15} = 0$.

Функция и ее график

47. Постройте график функции $y = f(x)$. Найдите координаты точек пересечения с осью Ox и осью Oy графика функции $y = f(x)$:

1) $f(x) = x - 1{,}5$;
2) $f(x) = 2x + 0{,}5$;
3) $f(x) = |x|$;
4) $f(x) = |x| - 1$;
5) $f(x) = x^2 - 2$;
6) $f(x) = x^2 + 1{,}5$;
7) $f(x) = -x^2 + 4$;
8) $f(x) = -x^2 + 2{,}5$;

9) $f(x) = x^2 - 2$; 10) $f(x) = 2x + x^2$;

11) $f(x) = -1\frac{1}{3}x + 3x^2$; 12) $f(x) = 1,25\,x + 5x^2$.

48. Используя график функции $y = f(x)$, найдите, при каких значениях переменной функция принимает: а) положительные значения; б) отрицательные значения; в) наибольшее или наименьшее значение (рис. 1—4):

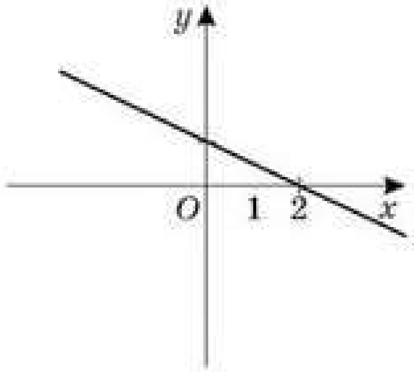


Рис. 1

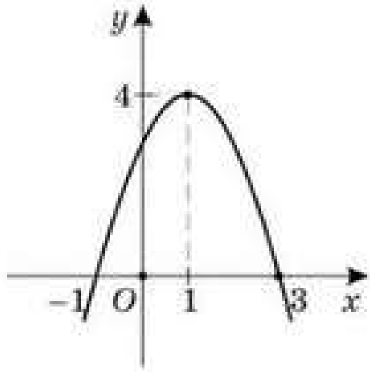


Рис. 2

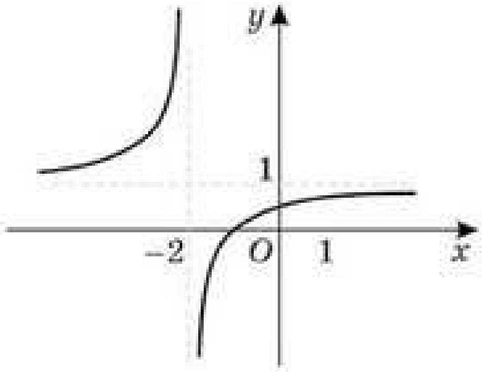


Рис. 3

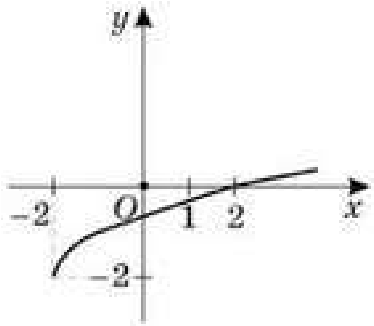


Рис. 4

49. Постройте график функции $y = f(x)$. Используя этот график, найдите, при каких значениях переменной функция принимает: а) положительные значения; б) отрицательные значения; в) наибольшее или наименьшее значение:

1) $f(x) = x^2 + 2$; 2) $f(x) = 2x^2 - 2,5$;

3) $f(x) = -4x^2 + 4$; 4) $f(x) = -1,5\,x^2 - 3$;

5) $f(x) = 2x - 3x^2$; 6) $f(x) = x - 4x^2$;

7) $f(x) = 4x^2 - 8x$; 8) $f(x) = x^2 - 6x$;

9) $f(x) = 6x^2 - 2x - 3$; 10) $f(x) = 3 - 4x + 2x^2$;

11) $f(x) = x^2 - 3x + 2$; 12) $f(x) = 2 - 2x - x^2$.

50. Постройте график функции:

1) $y = \dfrac{3x - 2}{x}$;　　2) $y = \dfrac{2x + 3}{2x}$;

3) $y = \sqrt{x - 2}$;　　4) $y = 1 - \sqrt{(x-2)^2}$;

5) $y = \dfrac{3}{|x|}$;　　6) $y = \dfrac{1}{|x - 3|}$;

7) $y = -x|x| + 2x^2$;　　8) $y = \dfrac{|x|}{x^2} + 2$.

51. Запишите уравнение функции, полученной путем параллельного переноса:

1) графика функции $y = x^2$ на 2 единицы вправо и на 3 единицы вверх;

2) графика функции $y = 2x^2$ на 3 единицы вправо и на 2 единицы вниз;

3) вершины графика функции $y = x^2$ в точку $(-1;\ 2)$;

4) вершины графика функции $y = 2x^2$ в точку $(3;\ -2)$.

52. Для некоторой реки экспериментально установили следующую зависимость скорости течения реки v(м/с) от глубины h(м): $v(t) = -h^2 + 2h + 3$. Постройте график функции в программе "Живая геометрия" и по графику найдите максимальную глубину реки (т.е. глубину, где $v = 0$) и глубину с максимально сильным течением.

Неравенства и их системы

53. Решите неравенство:

1) $(x - 8)(x + 3) \geq 0$;　　2) $(7 + x)(2 - x) \leq 0$;

3) $x(9 - x) < 0$;　　4) $x(x - 6) > 0$;

5) $\dfrac{x + 4}{5 - x} > 0$;　　6) $\dfrac{6 - x}{6 + x} \leq 0$;

7) $\dfrac{x + 4{,}5}{x(4{,}5 - x)} \geq 0$;　　8) $\dfrac{x(x + 1)}{2 - x} > 0$;

9) $(x - 3)(x + 3) \geq x^2 + 5x - 4$;　　10) $x^2 + 5x - 4 \leq 2$;

11) $x^2 + 3x - 4 > 6x$;　　12) $9x^2 - 6x + 1 \leq 0$.

54. Найдите наименьшее целое число, при котором верно неравенство:

1) $(x + 1)^2(x - 4) > 0$;　　2) $(x + 2)(x - 3)^2 \geq 0$;

3) $x^2 - 5x < -x + 5$;　　4) $-2x^2 - x > 2x - 5$.

55. Найдите наибольшее целое число, при котором верно неравенство:

1) $(x-2)^2(x-7)$ m 0;

2) $(x+4)(x-5)^2 < 0$;

3) $(x^2+14x+13)(x-10)$ m 0;

4) $(-7x^2-6x+1)(x-5)$ l 0.

56. При каких значениях x имеет смысл выражение:

1) $x+\sqrt{x^2-3x-10}$;

2) $2x-\sqrt{x^2-4x-12}$;

3) $\sqrt{3x^2-5x-8}+\frac{1}{x-2}$;

4) $\sqrt{5x^2+4x-1}+\frac{1}{x-8}$;

5) $\sqrt{x^2-4x-1}+\frac{1}{x^2-1}$;

6) $\sqrt{-x^2+4x+32}+\frac{1}{x^2-9}$;

7) $\sqrt{2x^2-6x-9}+\sqrt{x+2}$;

8) $\sqrt{-2x^2-4x+10}-\sqrt{3-x}$?

57. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases}\frac{x+7}{x-1}>0,\\ \frac{x-9{,}3}{x+3}<0;\end{cases}$

2) $\begin{cases}\frac{x+4}{x-25}\leqslant 0,\\ \frac{22-x}{4+x}<0;\end{cases}$

3) $\begin{cases}x^2-25\leqslant 0,\\ x^2+2x-8>0;\end{cases}$

4) $\begin{cases}x^2-x-2\geqslant 0,\\ x^2-3x-18<0;\end{cases}$

5) $\begin{cases}x^2-4\geqslant 0,\\ x^2-2x-15<0;\end{cases}$

6) $\begin{cases}x^2+x-2\geqslant 0,\\ x^2+3x-10<0.\end{cases}$

Решение текстовых задач

58. 1) Из пункта A в пункт B выехал автобус. Спустя 0,5 ч вслед за ним выехал автомобиль. Через 1,1 ч после своего выхода он обогнал автобус и между ними было 2 км пути. Найдите скорость автобуса, если известно, что она на 20 км/ч меньше скорости автомобиля.

2) Из пункта A в пункт B выехала грузовая автомашина. Спустя 1,2 ч вслед за ней выехал автобус. Через 0,8 ч после своего выхода автобус отставал от машины на 24 км пути. Найдите скорость автобуса, если известно, что она больше скорости грузовой автомашины на 30 км/ч.

3) Автомобиль проехал 360 км. Первую половину пути он двигался со скоростью 90 км/ч. Вторую половину пути — со скоростью 60 км/ч. Найдите среднюю скорость движения автомоб иля.

59. 1) Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить задание за 24 ч. Если первый рабочий, работая один, может выполнить половину задания, а затем его сменит второй рабочий, то все задание будет выполнено за 49 ч. За какое время каждый из них выполнит задание, работая по одному?

2) Две бригады, работая вместе, могут выполнить работу за 12 дней. Если сначала будет работать только одна из них и выполнит половину всего задания, а затем ее сменит другая бригада, то все задание будет выполнено за 25 дней. За какое время каждая бригада может выполнить это задание?

60. 1) Моторная лодка прошла путь длиной 45 км по течению реки и 22 км против течения реки, затратив на весь путь 5 ч. Найдите скорость движения лодки в стоячей воде, если скорость течения реки равна 2 км/ч.

2) Моторная лодка прошла путь длиной 10 км против течения реки и 7 км по течению реки, затратив на путь по течению реки на 30 мин меньше, чем на путь против течения реки. Собственная скорость лодки равна 12 км/ч. Найдите скорость течения реки.

61. 1) Для сада выделен участок земли прямоугольной формы. Длина изгороди, которой будет обнесен сад, окажется меньшей, если этот участок заменить участком квадратной формы такой же площади. Для этого надо длину выделенного участка уменьшить на 40 м, а ширину увеличить на 30 м. Какова длина и ширина выделенного участка?

2) Для школьной площадки выделен участок земли прямоугольной формы. Если его заменить участком такой же площади квадратной формы, то потребуется меньше материала для его огораживания. Для этого надо длину участка уменьшить на 12 м, ширину увеличить на 10 м. Чему равна длина стороны участка квадратной формы?

3) Длина садового участка на 10 м больше его ширины. Его площадь решили увеличить на 400 м^2. Для этого длину садового участка увеличили на 10 м, ширину — на 2 м. Найдите площадь нового садового участка.

4) Под строительную площадку отвели участок прямоугольной формы, длина которого на 25 м больше его ширины. При утверждении плана застройки длину участка увеличили на 5 м, ширину — на 4 м, в результате площадь участка увеличилась на 300 м^2. Найдите площадь образовавшейся строительной площадки.

62. 1) Вкладчик решил положить в банк на депозит 100 000 тг. Известно, что в банке А вклад возрастает один раз в год на 12%, а в банке В он возрастает ежемесячно на 1% от находящейся на депозите суммы. В каком из банков доход будет больше и на сколько?

2) Среди 400 000 жителей города 60% не интересуются футболом. Среди футбольных болельщиков 75% смотрели по телевидению финал мирового чемпионата по футболу.

а) Сколько жителей этого города смотрели этот матч?

б) Какой процент жителей города не смотрели этот матч?

3) Цена на книгу по акции “Уценка товара” была снижена на 50 тг/кн. Изначально цена книги была 300 тг/кн. На сколько процентов нужно поднять новую цену книги, чтобы вернуться к старой цене в 300 тг/кн.?

63. 1) Значение суммы цифр двузначного числа равно 15. Если цифры этого двузначного числа поменять местами, то получится число, которое меньше его на 27. Найдите эти числа.

2) Значение суммы цифр двузначного числа равно 12. Число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, составляет $\frac{4}{7}$ от исходного числа. Найдите эти числа.

МАТЕМАТИКА В БИЗНЕСЕ

64. Предприятие предоставило текущие расходы в течение месяца в виде диаграммы (рис. 5). Общая сумма расходов составляет 2 500 000 тенге. Найдите расходы предприятия на аренду помещения и рекламу.

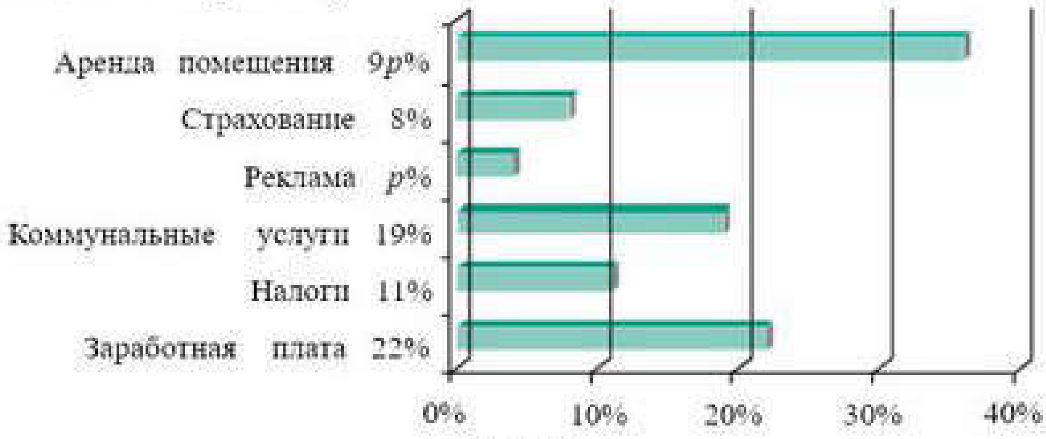


Рис. 5

МАТЕМАТИКА В МОЕЙ ЖИЗНИ

65. Измерьте: а) рост (в см), б) массу (в кг) учащихся вашего класса. Запишите ряд чисел.

Найдите:
1) среднее арифметическое значение этих результатов;
2) размах измерений;
3) моду измерений.

66. Для годовых отметок Алии за 8 класс составлена таблица абсолютных частот случайной величины полученных отметок (табл. 1).

Таблица 1

Отметка	3	4	5
Абсолютная частота	5	6	4
Относительная частота			

Заполните таблицу и найдите:
1) среднее арифметическое значение;
2) дисперсию отметок Алии.

67. 1) Наименьшее значение функции $y = x^2 - 4x + a$ равно 2. Найдите параметр a и постройте график этой функции.
2) Наибольшее значение функции $y = -x^2 + 6x + a$ равно 4. Найдите параметр a и постройте график этой функции.

68. Найдите промежутки возрастания и убывания функции по ее графику (рис. 6).

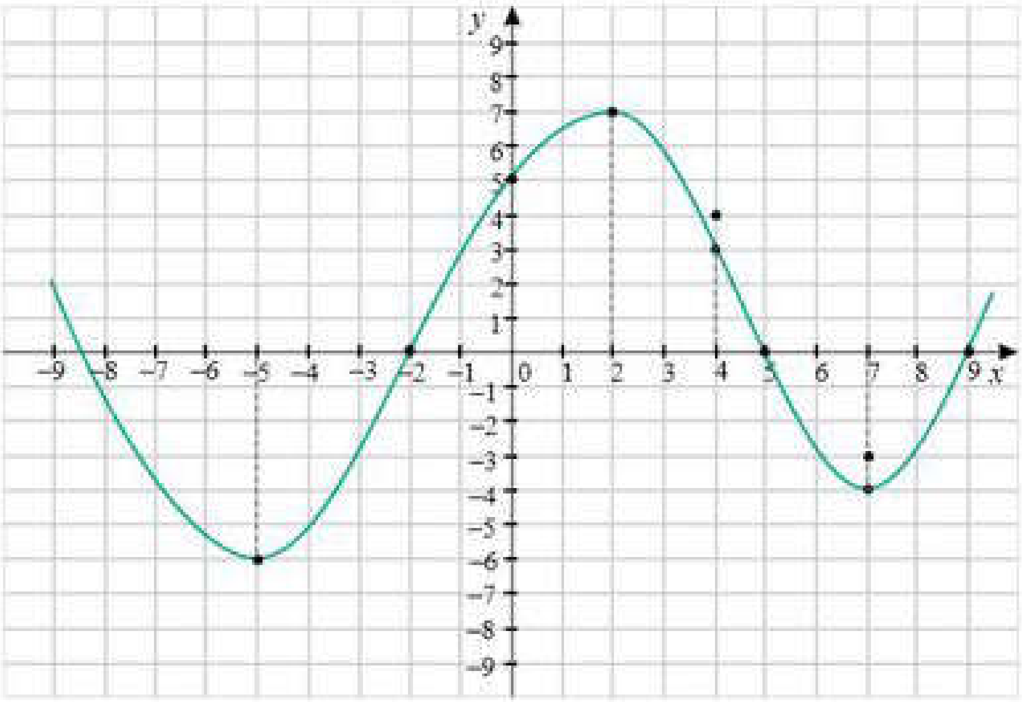


Рис. 6

69. В диаграмме представлена корзина продуктов питания в январе 2018 г. в г. Алматы (рис. 7).

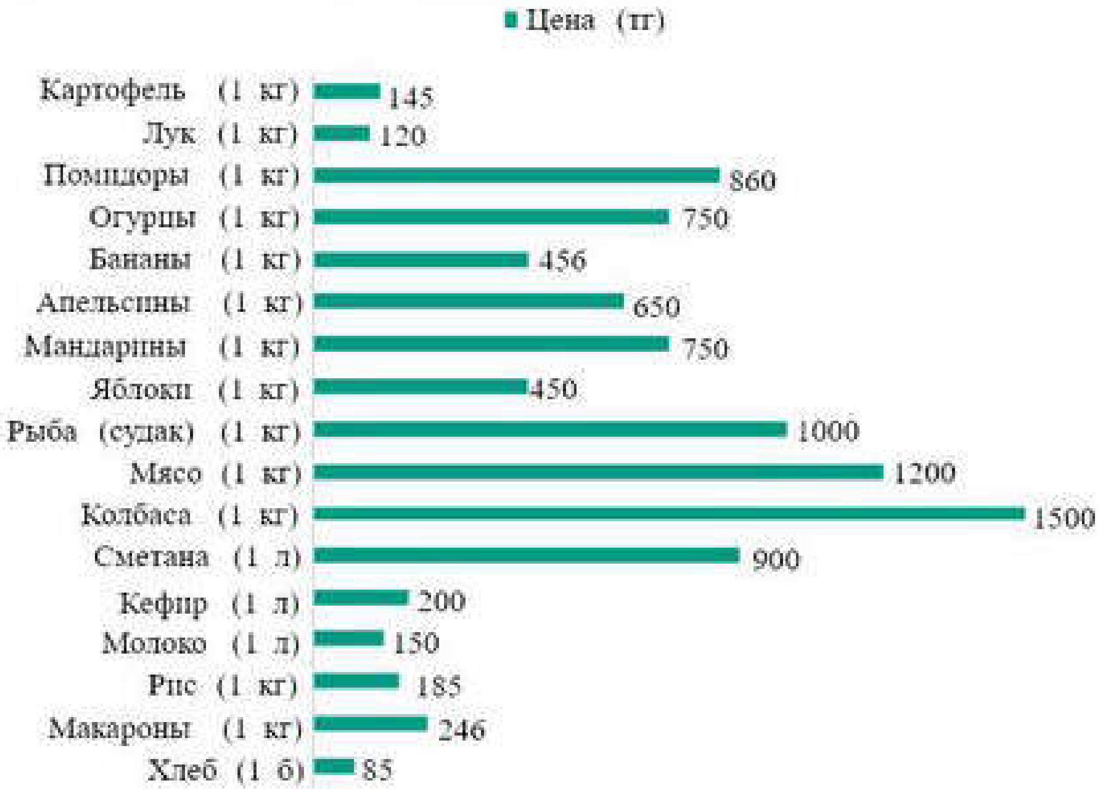


Рис. 7

Хозяйка имеет 50 000 тг. Если она купит по 1 кг овощей и фруктов, 2 булки хлеба, 1 кг макарон, 1 кг риса, 1 л молока и 1 кг колбасы, то сколько процентов составит стоимость покупки от имеющихся у нее денег?

Глава I. УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ И ИХ СИСТЕМЫ

§1. НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Ключевые понятия

Линейное уравнение, нелинейное уравнение, степень многочлена

Вы ознакомитесь с понятиями *линейного и нелинейного уравнения с двумя переменными;*
научитесь различать линейные и нелинейные уравнения с двумя переменными.

Рассмотрим уравнения вида: 1) $x(x+y)=3$; 2) $2x^2-5y=-2$; 3) $x(x-y^2)=x+10$ — эти уравнения содержат две переменные x и y.

***Уравнениями с двумя переменными** x и y называются уравнения, которые имеют вид $f(x;y)=q(x;y)$, где $f(x;y)$ и $q(x;y)$ — выражения с переменными x и y.*

Любое уравнение с двумя переменными можно привести к виду $F(x;y)=0$, левая часть которого — многочлен стандартного вида. Например, уравнение $2x(3x+y^2)=4x-1$ можно преобразовать в уравнение $2xy^2+6x^2-4x+1=0$, левая часть которого — многочлен стандартного вида.

*Степенью уравнения с двумя переменными, представленного в виде $F(x;y)=0$, $F(x;y)$ — где многочлен стандартного вида, называют **степенью многочлена** $F(x;y)$.*

ПРИМЕР

1. Уравнение $2x(3x+y^2)=4x-1$ есть уравнение третьей степени, так как его можно преобразовать в уравнение $2xy^2+6x^2-4x+1=0$, левая часть которого — многочлен стандартного вида третьей степени — значение суммы показателей степеней переменных первого слагаемого равно 3.

ВЫ ЗНАЕТЕ

Уравнение с двумя переменными, которое имеет общий вид $ax+by=c$ (где a и b действительные числа, одновременно не равные нулю, c — действительное число, x, y — переменные) — уравнение первой степени является *линейным уравнением с двумя переменными* .

Уравнение с двумя переменными $-65xy+35y=70$ не является линейным уравнением с двумя переменными, так как многочлен $-65xy+35y-70$ второй степени — значение суммы показателей степеней переменных первого слагаемого равно 2.

ОБЪЯСНИТЕ

Почему уравнения: $3x - xy + 2 = 0$ и $6y^3 - 4xy + 5x = 18$ не являются линейными уравнениями с двумя переменными?

Такие уравнения называют *нелинейными уравнениями с двумя переменными*.

Пара чисел $(x_0; y_0)$, которая обращает нелинейное уравнение с двумя переменными $F(x; y) = 0$ в верное числовое равенство $F(x_0; y_0) = 0$, называется ***решением нелинейного уравнения с двумя переменными***.

ПРИМЕР

2. Если в нелинейное уравнение с двумя переменными $x(x - y) = 4$ подставить вместо переменной x ее значение -1, а вместо переменной y — значение 3, то получится верное равенство: $-1 \cdot (-1 - 3) = 4$, поэтому пара $(-1; 3)$ значений переменных x и y является *решением нелинейного уравнения с двумя переменными*: $x(x - y) = 4$.

ОБЪЯСНИТЕ

1) Почему пара (4; 3) значений переменных x и y является решением нелинейного уравнения с двумя переменными: $x(x - y) = 4$, а пара (0; –4) значений переменных x и y не является его решением?

2) Является ли пара чисел (1; 0) решением нелинейного уравнения с двумя переменными: а) $y + x^3 = 1$; б) $xy + 1 = x$; в) $(y - x) \cdot y = 0$?

Уравнения с двумя переменными, как правило, имеют бесконечно много решений. Исключениями являются такие нелинейные уравнения с двумя переменными, как, например, $x^2 + (y^2 - 9)^2 = 0$, или $7x^2 + 8y^2 = 0$, или $x^4 + 12 + y^4 = 0$. Первое из них имеет только два решения (0; –3) и (0; 3), второе — только одно решение (0; 0), а последнее не имеет решений.

Если при решении уравнений с двумя переменными требуется найти пары целых чисел, то говорят, что уравнения надо решить в целых числах.

Два уравнения, имеющие одно и то же множество решений, называются ***равносильными уравнениями***.

Если все решения уравнения с двумя переменными изобразить точками в координатной плоскости, то получится график уравнения с двумя переменными.

Графиком уравнения с двумя переменными *называется множество точек координатной плоскости, координаты которых являются решениями этого уравнения.*

Как называется график уравнения: 1) $ax + by + c = 0$; 2) $y = ax^2 + bx + c$; 3) $y = x^3$, 4) $xy = k(k \neq 0)$?

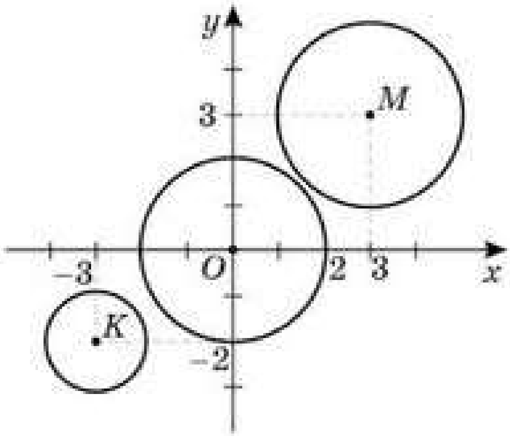


Рис. 8

На рисунке 8 изображены графики уравнений:
$x^2 + y^2 = 4$,
$(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 4$,
$(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 1$.

1. Приведите пример уравнения с двумя переменными первой, второй, третьей и четвертой степени.
2. Приведите пример линейного и нелинейного уравнения с двумя переменными.
3. Что общего и в чем различие линейного и нелинейного уравнения с двумя переменными?
4. Сколько решений может иметь уравнение с двумя переменными?
5. Приведите пример уравнения, графиком которого является: парабола; гипербола; прямая; окружность.

Упражнения

A

1.1. Постройте график линии, заданной уравнением:

1) $3x - 2y + 5 = 0$; 2) $2x - 5y = 7$;

3) $-x^2 + 2y = 0$; 4) $3y + 3x^2 - 6 = 0$;

5) $y - \frac{1}{2}x^2 - 1,5 = 0$;   6) $2y - |x| + 5 = 0$;

7) $y + 2|x| - 6 = 0$;   8) $|y| - x + 2 = 0$;

9) $y - |x + 1| - 2 = 0$.

1.2. Какие из точек $A(2; -3)$; $B(0,4; 2)$; $C(-1; 2)$; $M\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$ принадлежат графику уравнения:

1) $3x - y - 9 = 0$;   2) $2x - 5y + 12 = 0$;

3) $-x^2 - 2y + 4,16 = 0$;   4) $2y + 3x^2 - 3 = 0$;

5) $y - \frac{1}{2}x^2 - 1,5 = 0$;   6) $2y - 3|x| - 1 = 0$?

1.3. Найдите абсциссу точки с ординатой, равной 2 и принадлежащей графику уравнения:

1) $y - |x - 2| - 2 = 0$;   2) $y - 3|x + 1| - 6 = 0$;

3) $2y + |x + 1| - 3 = 0$;   4) $y - (x - 2)^2 - 2 = 0$;

5) $3y - (x + 1)^2 - 3 = 0$;   6) $yx - x^2 + 8 = 0$.

1.4. Найдите степень уравнения:

1) $xy - 3x = 0$;   2) $3x^2 - xy = 5$;

3) $(2x - y)^2 + x^2 - 5 = 0$;   4) $-1\frac{3}{7}x^2 + yx^2 - x = 7$;

5) $x^2y^2 + xy = 4$;   6) $(x^2 - 3y)^2 + x^3 = 9$.

B

1.5. Постройте график уравнения:

1) $3xy = 5$;   2) $y(x - 2) = 2$;

3) $y(x + 1) = -3$;   4) $y|x - 3| = 4$;

5) $y = |x^2 - 4|$;   6) $y = |3 - x^2|$.

1.6. Множество каких пар целых чисел является решением уравнения:

1) $x^2 + y^2 = 4$;   2) $3x^2 + y^2 = 7$;   3) $x^2 + 3y^2 = 16$?

1.7. Какой фигурой на координатной плоскости является множество точек, координаты которых являются решением уравнения:

1) $y = 3x - 2x^2$;   2) $y = -0,3x^2 - 2x$;

3) $xy - 3 = 0$;   4) $(2x - 3)y = 2$?

C

1.8. При каких значениях a и b вершина параболы $y = ax^2 - bx$ находится в точке $M(-1;\ 3)$?

1.9. Постройте график уравнения:

1) $y = x^2 - 2|x| + 2$; 2) $y = x^2 - |x - 1| - 2$; 3) $|x| \cdot y = 2$;
4) $|x| \cdot y = -1$; 5) $|y| = |x|$; 6) $|y| + |x| = 2$;
7) $|y| + 2|x| = 3$; 8) $y \cdot x^2 = 2$; 9) $y = ||x - 2| - 2|$.

ПОВТОРИТЕ

1.10. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} 2x - y = 3, \\ 3x + y = -4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -3x + 5y = 4, \\ 2x + y = 7; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x - 7y = 23, \\ 3x - y = 14; \end{cases}$

4) $\begin{cases} -5x - y = 26, \\ 3x - 2y = -15; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} -5x - 3y = 36, \\ 4x + y = -29; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 7x + 8y = 31, \\ 3x - 4y = -24. \end{cases}$

1.11. Своему постоянному клиенту компания сотовой связи решила предоставить на выбор одну из скидок: либо скидку 20% на звонки абонентам других компаний по Республике Казахстан, либо 25% на звонки зарубежных операторов, либо 15% на услуги мобильного интернета. Клиент рассмотрел распечатку своих звонков и выяснил, что за месяц он потратил 3000 тг на звонки по Республике Казахстан, 2500 тг на звонки зарубежных операторов и 2000 тг на мобильный интернет. Клиент предполагает, что в следующем месяце затраты будут такими же.

1) Какую из скидок выгоднее выбрать клиенту?
2) Сколько тенге составит эта скидка?
3) Если за месяц на звонки по Республике Казахстан будет потрачено 3500 тг, выгоднее ли взять скидку 20% на звонки абонентов компаний по Республике Казахстан и на сколько?

1.12. Решите методом интервалов неравенство:

1) $(x - 2)^2 \cdot (x + 1) \cdot (2x - 5) > 0$;
2) $(3x - 5)^2 \cdot (x - 1)^3 \cdot (2x + 5) < 0$;
3) $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 16}$ | 0;
4) $\dfrac{2x^2 - 7x + 6}{x^2 - 9}$ m 0.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

1.13. Является ли пара чисел (2; –5) решением системы уравнений:

1) $\begin{cases} x + y = -3, \\ 2x - y = 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = 7, \\ 2x + 3y = -11; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x + 2y = 3, \\ 2x - y = 9; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x + y = -1, \\ 3x - 2y = 16? \end{cases}$

1.14. Найдите радиус окружности, заданной уравнением:

1) $x^2 + y^2 = 9$; 2) $x^2 + y^2 = 49$;

3) $x^2 + y^2 = 72$; 4) $x^2 + 2x + y^2 = 15$.

1.15. Постройте график уравнения:

1) $x^2 + y = 2$; 2) $x^2 + y^2 - 4 = 0$;

3) $\frac{1}{x} - y = 0$; 4) $x^2 - 2x + y^2 = 8$.

Опорные понятия для овладения новыми знаниями

Уравнения, нелинейные уравнения, корни уравнения, решение уравнения, системы уравнений, решения системы уравнений, график уравнения.

§ 2. СИСТЕМА НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Ключевые понятия

Система нелинейных уравнений

Вы ознакомитесь с понятием *система нелинейных уравнений с двумя переменными* и способами решения;

научитесь находить решения системы нелинейных уравнений с двумя переменными.

Система уравнений с двумя переменными, в составе которой хотя бы одно уравнение не является линейным уравнением, называется ***системой нелинейных уравнений с двумя переменными*** .

ПРИМЕР

1. $\begin{cases} 7x + y = 21, \\ x^2 + 2y - 8xy = -37; \end{cases}$ $\begin{cases} x^3 + y^3 = 78, \\ x - y = 9; \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = -5 \end{cases}$ являются системами нелинейных уравнений с двумя переменными.

Пара чисел $(x_0; y_0)$, которая обращает каждое уравнение системы в верное числовое равенство одновременно, называется ***решением системы нелинейных уравнений с двумя переменными***.

ПРИМЕР

2. Пара чисел (0; –1) не является решением системы нелинейных уравнений с двумя переменными: $\begin{cases} x + 5y^2 = 5, \\ x - 5y = -5, \end{cases}$ так как при подстановке 0 и –1, соответственно, вместо x и y первое уравнение обращается в верное числовое равенство: $0 + 5 = 5$, второе — нет: $0 + 5 = -5$ — неверное числовое равенство.

Пара чисел (0; 1) является решением системы нелинейных уравнений с двумя переменными: $\begin{cases} x + 5y^2 = 5, \\ x - 5y = -5, \end{cases}$ так как при подстановке 0 и 1, соответственно, вместо x и y каждое уравнение системы обращается в верное числовое равенство: $\begin{cases} 0 + 5 = 5, \\ 0 - 5 = -5. \end{cases}$

Решить систему нелинейных уравнений с двумя переменными — значит найти множество ее решений.

Системы нелинейных уравнений с двумя переменными решают способом алгебраического сложения, способом подстановки, графическим способом, способом введения новой переменной и др.

Решите способом алгебраического сложения систему линейных уравнений с двумя переменными: $\begin{cases} x + 7y = 12, \\ x - 7y = -2. \end{cases}$

АЛГОРИТМ **Способ алгебраического сложения**

Для решения системы способом алгебраического сложения используют следующий алгоритм (*алгоритм* — это последовательность простейших действий, строго выполняемых для достижения определенной цели):

1) если коэффициенты одного из подобных слагаемых двух уравнений не являются противоположными числами, то умножить почленно уравнения системы, подбирая множители так, чтобы коэффициенты при одном из подобных слагаемых двух уравнений стали противоположными числами;
2) сложить почленно левые и правые части уравнений системы;
3) решить получившееся уравнение с одной переменной;
4) найти соответствующее значение второй переменной;
5) записать ответ в виде множества пар числовых значений переменных.

ПРИМЕР

3. Решим систему уравнений $\begin{cases} x^2 + 7y = 58, \\ -x^2 + 12y = 75. \end{cases}$

Решение. Сложим почленно уравнения системы. Получим уравнение с одной переменной: $19y = 133$, из которого находим $y = 7$. Подставим в первое уравнение системы вместо y число 7. Получим $x^2 + 49 = 58$ или $x^2 = 9$. Тогда $x_1 = -3$; $x_2 = 3$. Значит, система имеет два решения: $(-3;\ 7)$, $(3;\ 7)$.

Ответ : $\{(-3;7),\ (3;7)\}$.

Решите способом подстановки систему линейных уравнений с двумя переменными: $\begin{cases} x + 4y = -6, \\ 6x + 4y - 4 = 0. \end{cases}$

АЛГОРИТМ **Способ подстановки**

Для решения системы способом подстановки используют следующий алгоритм:

1) в одном из уравнений системы выразить одну переменную через другую;
2) подставить полученное выражение вместо переменной во второе уравнение;
3) решить полученное уравнение с одной переменной;
4) найти соответствующее значение второй переменной;
5) записать ответ в виде множества пар числовых значений переменных.

ПРИМЕР

4. Решим систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20, \\ x + y = 6. \end{cases}$

Решение. Выразим из второго уравнения x. Получим $x = 6 - y$. Подставив выражение $6 - y$ вместо x в первое уравнение, получим систему: $\begin{cases}(6 - y)^2 + y^2 = 20, \\ x = 6 - y.\end{cases}$

Решим первое уравнение системы: $(6 - y)^2 + y^2 = 20$. Получим $y_1 = 4$; $y_2 = 2$.

Подставим полученные значения y во второе уравнение $x = 6 - y$. Получим $x_1 = 2$, $x_2 = 4$.

Значит, система имеет два решения: $(2; 4)$, $(4; 2)$.

Ответ: $\{(2;4), (4;2)\}$.

Решите графическим способом систему линейных уравнений с двумя переменными: $\begin{cases}y - 2x = 2, \\ y = 7x - 3.\end{cases}$

АЛГОРИТМ **Графический способ**

Для решения системы графическим способом используют следующий алгоритм:

1) построить график каждого уравнения системы в одной и той же прямоугольной системе координат;

2) найти координаты точек пересечения графиков уравнений;

3) записать ответ в виде множества пар числовых значений переменных.

ПРИМЕР

5. Решим систему уравнений графическим способом: $\begin{cases}x^2 + y^2 = 16 \\ y = 4 - x.\end{cases}$

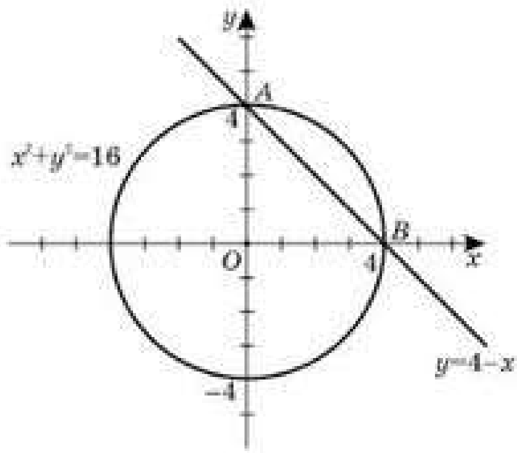


Рис. 9

Решение. Построим графики уравнений $x^2 + y^2 = 16$ и $y = 4 - x$ в одной и той же системе координат.

Графиком первого уравнения $x^2 + y^2 = 16$ является окружность с центром в начале координат и радиусом 4 (рис. 9).

Графиком второго уравнения $y = 4 - x$ является прямая.

Окружность и прямая пересекаются в двух точках: A $(0; 4)$ и B $(4; 0)$, поэтому система нелинейных уравнений с двумя переменными $\begin{cases}x^2 + y^2 = 16, \\ y = 4 - x\end{cases}$ имеет два решения: $(0; 4)$ и $(4; 0)$.

Ответ: $\{(0;4); (4;0)\}$.

АЛГОРИТМ **Способ введения новой переменной**

Для решения системы способом введения новой переменной используют следующий алгоритм:

1) ввести новую переменную (или новые переменные) для выражения определенного соотношения переменных уравнений системы;

2) записать уравнения системы, используя введенные переменные;

3) решить полученную систему уравнений относительно новой переменной (новых переменных);

4) найти значения исходных переменных, используя числовые значения введенной переменной (введенных переменных);

5) записать ответ в виде множества пар числовых значений переменных исходных уравнений системы.

ПРИМЕР

6. Решим систему уравнений $\begin{cases} x + 3y + 5xy = 17, \\ 4xy - 7(x + 3y + 5) = -76. \end{cases}$

Решение. Введем новые переменные: a и b. Обозначим: $a = x + 3y$; $b = xy$.

Получим систему уравнений: $\begin{cases} a + 5b = 17, \\ 4b - 7(a + 5) = -76 \end{cases}$ или $\begin{cases} a = 17 - 5b, \\ 4b - 7(17 - 5b + 5) = -76. \end{cases}$ Решив эту систему, получим $a = 7$ и $b = 2$.

Возвращаясь к переменным x и y, получим систему: $\begin{cases} x + 3y = 7, \\ xy = 2. \end{cases}$

Решим ее способом подстановки. Получим систему: $\begin{cases} x = 7 - 3y, \\ (7-3y)y = 2. \end{cases}$

Преобразуем и решим ее второе уравнение $3y^2 - 7y + 2 = 0$. Получим $y_1 = 2$; $y_2 = \frac{1}{3}$.

Из первого уравнения $x = 7 - 3y$ системы находим: $x_1 = 1$; $x_2 = 6$, поэтому система нелинейных уравнений с двумя переменными $\begin{cases} x + 3y + 5xy = 17, \\ 4xy - 7(x+3y+5) = -76 \end{cases}$ имеет два решения: $(1;\ 2)$ и $(6;\ \frac{1}{3})$.

Ответ : $\left\{(1; 2); \left(6; \frac{1}{3}\right)\right\}$.

1. Приведите пример системы нелинейных уравнений с двумя переменными.
2. Какие способы применяют для решения систем, состоящих из линейного уравнения и уравнения второй степени?
3. Какие способы применяют как для решения систем линейных уравнений с двумя переменными, так и для решения систем нелинейных уравнений с двумя переменными?

Упражнения

А

2.1. Какая из пар чисел (–2; 3) и (1; 2) является решением системы уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 9, \\ 3x - 5y = -7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^2 - y^2 + y = 2, \\ -x^2 + 2y^2 = 14; \end{cases}$

3) $\begin{cases} -3x^2 + 2y^2 = 5, \\ x - 5y = -9? \end{cases}$

2.2. Решите графическим способом систему уравнений (укажите приближенные значения ее решений):

1) $\begin{cases} 2x + y = 3, \\ x^2 - y = -1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^2 + y = 2, \\ -x + 2y = 8; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} -x^2 + y = -3, \\ 4x - 2y = -5. \end{cases}$

2.3. Найдите графическим способом число решений системы:

1) $\begin{cases} 0{,}5x - y = 2, \\ x^2 - 2y = -1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^2 + 2y = 5, \\ -x + 3y = 6; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x^2 + 3y = -3, \\ 4x^2 - 2y = -5. \end{cases}$

В

2.4. Докажите, что не имеет решений система уравнений:

1) $\begin{cases} |x| - y = -2, \\ x - 2y = -1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^2 - y + 1 = 0, \\ -x^2 - 2y = 4; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x^2 + y = -3, \\ 4|x| - 2y = -5. \end{cases}$

2.5. Решите графическим способом систему уравнений:

1) $\begin{cases} xy = 2, \\ x^2 - 2y = -3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^2 + 2y = 10, \\ -x + 3y = 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + 3y = 6, \\ -x^2 - 2y = -7; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y^2 + x^2 = 4, \\ y + x = 0. \end{cases}$

2.6. Докажите, что графики уравнений $x - y = 4$ и $y = 5 - 5x + x^2$ пересекаются только в одной точке. Найдите координаты этой точки.

C

2.7. Найдите значения параметра p, при котором система уравнений:

1) $\begin{cases} y - x^2 = 1, \\ y + x = p; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y - x^2 = -2, \\ y + |x| = p; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y^2 + x^2 = 4, \\ y + x = p \end{cases}$

а) имеет два решения; б) имеет одно решение; в) не имеет решений.

2.8. При каких значениях параметра p система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ y - |x| = p \end{cases}$ имеет: 1) три решения; 2) одно решение; 3) не имеет решений?

ПОВТОРИТЕ

2.9. Решите уравнение:

1) $x^4 - 8x^2 + 4 = 0$; 2) $3x^4 - 5x^2 + 2 = 0$;

3) $(4x^2 - 1)^2 - 3(1 - 8x^2) + 6 = 0$; 4) $(x^2 + 1)^2 - 3(1 - x^2) - 4 = 0$.

2.10. Решите способом подстановки систему уравнений:

1) $\begin{cases} 3x - y = 2, \\ 16x - 5 = 4y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 11x - 37 = 9y, \\ x - 2y = 1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x - 85 = y, \\ 5x - 2y = 127. \end{cases}$

2.11. 1) Два автомобиля выехали одновременно из города A в город B, длина пути по шоссе между которыми равна 540 км. Один автомобиль ехал со скоростью на 10 км/ч большей, чем другой и прибыл в город B на 45 мин раньше. Найдите скорость каждого автомобиля.

2) Велосипедист должен был проехать путь длиной 48 км, чтобы успеть к поезду, однако он задержался с выездом на 48 мин. Чтобы приехать на станцию вовремя, он ехал со скоростью на 3 км/ч большей, чем планировал первоначально. С какой скоростью ехал велосипедист?

3) Поезд задержан у семафора на 16 минут. Увеличив скорость на 10 км/ч, он сумел уложиться в график на перегоне длиной 80 км. Какова скорость поезда по расписанию?

2.12. Решите неравенство:

1) $\frac{x^2 - 2x}{x + 2} | 4$; 2) $\frac{3x^2 - 8x}{x - 2} < 4x$;

3) $\frac{2x^2 - 3x}{5 - x} | 3$; 4) $\frac{2x^2 + 7x}{7 - 2x} | x$.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

2.13. Является ли пара чисел (2; –1) решением системы уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 + y = 3, \\ 2x - y^2 = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy = -2, \\ 2x^2 - y = 9; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3xy = 1, \\ 3x - y^2 = 5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 9, \\ 3xy = 1? \end{cases}$

2.14. В одной координатной плоскости постройте графики функций и найдите координаты точек их пересечения:

1) $y = -x$ и $x^2 + y^2 = 8$; 2) $y = 2x$ и $x^2 + y^2 = 20$;

3) $y = \frac{1}{x}$ и $x^2 + y^2 = 2$.

Опорные понятия для овладения новыми знаниями

Уравнения, нелинейные уравнения, корни уравнения, решение уравнения, системы уравнений, решение систем уравнений, график уравнения, однородное уравнение, равносильные уравнения.

§3. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Ключевые понятия

Системы нелинейных уравнений, однородное уравнение

? Вы научитесь решать системы нелинейных уравнений с двумя переменными.

Рассмотрим еще один способ решения системы нелинейных уравнений с двумя переменными, а именно, способ почленного умножения и деления на примере.

ПРИМЕР

Решим систему уравнений $\begin{cases} x^2y = 9, \\ xy^2 = 3 \end{cases}$ способом почленного умножения и деления уравнен ий системы.

ОБЪЯСНИТЕ

Почему для данной системы $x \neq 0$ и $y \neq 0$?

Решение . Поскольку $x \neq 0$ и $y \neq 0$, то почленно умножим и разделим уравнения системы. Получим систему уравнений $\begin{cases} (xy)^3 = 3^3, \\ \frac{x}{y} = 3. \end{cases}$

Отметим сразу, что эта система уравнений может оказаться не равносильной данной системе уравнений. Действительно, решением системы уравнений $\begin{cases} x^2y = 9, \\ xy^2 = 3 \end{cases}$ могут быть только положительные числа, а решением системы уравнений $\begin{cases} (xy)^3 = 3^3 \\ \frac{x}{y} = 3 \end{cases}$ могут быть одновременно и отрицательные числа. Значит, при использовании этого способа могут появиться посторонние корни, поэтому нужна проверка решения.

Упростив уравнения системы $\begin{cases} (xy)^3 = 3^3, \\ \frac{x}{y} = 3, \end{cases}$ получим равносильную ей систему $\begin{cases} xy = 3, \\ x = 3y. \end{cases}$ Решим эту систему способом подстановки. Получим $y_1 = -1$, $y_2 = 1$, $x_1 = -3$, $x_2 = 3$.

Пара $(-3; -1)$ является решением системы уравнений $\begin{cases} (xy)^3 = 3^3, \\ \frac{x}{y} = 3, \end{cases}$ но не является решением системы уравнений $\begin{cases} x^2y = 9, \\ xy^2 = 3. \end{cases}$

Ответ : $\{(3; 1)\}$.

Значит, почленное умножение и деление уравнений может привести к приобретению посторонних корней. При решении системы уравнений с двумя переменными этим способом нужна проверка.

ПРИМЕР

Решим систему уравнений $\begin{cases} x^2 - 4xy + 3y^2 = 0, \\ 2x^2 - 3xy + y^2 = 10. \end{cases}$

Решение. Эта система содержит *однородное уравнение с двумя переменными*: $x^2 - 4xy + 3y^2 = 0$, так как его левая часть — однородный многочлен второй степени от двух переменных, а правая часть равна 0.

Из первого уравнения системы выясним, если $x = 0$, то $y = 0$. Но пара чисел (0; 0) не является решением второго уравнения, значит, и системы уравнений, поэтому для данной системы уравнений $x \neq 0$ и $y \neq 0$.

Разделим обе части первого уравнения на $y^2 \neq 0$. Получим равносильную систему уравнений $\begin{cases} \left(\dfrac{x}{y}\right)^2 - 4\left(\dfrac{x}{y}\right) + 3 = 0, \\ 2x^2 - 3xy + y^2 = 10. \end{cases}$ Решим первое уравнение системы, используя новую переменную $z = \dfrac{x}{y}$, т. е. решим уравнение $z^2 - 4z + 3 = 0$. Получим $z_1 = 1$, $z_2 = 3$.

Тогда $x = y$ или $x = 3y$.

Если $x = y$, то второе уравнение системы примет вид: $2x^2 - 3x^2 + x^2 = 10$ или $0 \cdot x^2 = 10$. Последнее уравнение не имеет корней.

Если $x = 3y$, то второе уравнение системы примет вид: $18y^2 - 9y^2 + y^2 = 10$ или $10y^2 = 10$. Значит, $y^2 = 1$. Тогда $y_1 = -1$, $y_2 = 1$ и $x_1 = -3$, $x_2 = 3$.

Ответ: {(–3; –1); (3; 1)}.

?

1. Будут ли равносильными системы двух уравнений с двумя переменными, если вторая система получена из первой способом умножения или деления уравнений первой системы?
2. Какое уравнение с двумя переменными является однородным уравнением с двумя переменными?

Упражнения

А

3.1. Найдите координаты точек, в которых пересекаются:

1) парабола, заданная формулой $y = x^2 - 6x + 5$, и прямая, заданная формулой $y = 3x - 3$;

2) окружность, заданная формулой $x^2 + y^2 = 16$, и прямая, заданная формулой $y = x + 4$;

3) окружность, заданная формулой $x^2 + y^2 = 25$, и парабола, заданная формулой $y = x^2 + 5$.

3.2. Способом подстановки решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x - y = 6, \\ x + xy = -4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 9, \\ x + y^2 = 29; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x - y = 1, \\ x^2 - 2y = 26; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x - y = -8, \\ x^2 + y = 14; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x - 1 = y^2, \\ y - x + 3 = 0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 0{,}5x - 1 = y^2, \\ y + 3x - 7 = 0; \end{cases}$

7) $\begin{cases} xy = -7, \\ y - x - 8 = 0; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x + y - 5 = 0, \\ y \cdot x - 6 = 0. \end{cases}$

3.3. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x + 1 = -y, \\ xy + 3x - 1 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^2 - 4 = -y, \\ 3y - x = -14; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 4x + 3 = 4y^2, \\ 3y - x - 2 = 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x + 1 = 2y, \\ 5xy + y^2 - 16 = 0; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17, \\ y - x + 3 = 0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 100, \\ 4y - 3x = 0; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8{,}5, \\ y - x + 4 = 0; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 11, \\ 2y + x - 3 = 0. \end{cases}$

3.4. Найдите решение системы:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = x - y, \\ 2y - 3x + 5 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^2 - 3y^2 + 6 - y = 0, \\ 2y - 3x + 2 = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - y^2 - x - y = 0, \\ 2x + 3y - 1 = 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 - y^2 = xy + 19, \\ y - x + 7 = 0. \end{cases}$

3.5. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2xy = 9, \\ x - y = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2xy = 16, \\ x + y = -2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2xy = 4, \\ x - y = 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} xy + x + y = 11, \\ xy(x + y) = 30; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2 - 5y^2 = -1, \\ 3xy + 7y^2 = 1; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ x^3 - y^3 = 7(x - y). \end{cases}$

3.6. Решите способом алгебраического сложения систему уравнений:

1) $\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 9, \\ y^2 - x^2 + 3 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 1, \\ 2y^2 - 3x^2 + 1 = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x^2 + yx = 16, \\ 3x^2 + xy = x + 18; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 - 3y^2 = x - 6, \\ 3y^2 - 2x^2 - 4 = 0. \end{cases}$

3.7. Найдите решение системы:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{5}{16}, \\ xy = 0{,}125; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0{,}75, \\ xy = -0{,}5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ xy = 3; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 61, \\ x^2 - y^2 = 11; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} xy + 2 = 2x, \\ 9 = y - xy; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} xy + y = 7 - x, \\ x + 4 = y + 2xy; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2xy = 10 + x, \\ 2 = y + xy; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} xy + 12 = 0, \\ y - 6x = \frac{2}{3}. \end{cases}$

3.8. Решите способом подстановки систему уравнений:

1) $\begin{cases} x + y = 4, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = 2, \\ \frac{10}{x} + \frac{1}{y} = 3; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x + y - 12 = 0, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 0{,}375; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x - y = 4, \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = -0{,}8; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x - y = 5, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6}; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 0{,}5x - y = 1, \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = -\frac{1}{3}. \end{cases}$

3.9. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} (x + 5) \cdot (y + 2) = 12, \\ 3x + 9 = 5y - 7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (x - 1) \cdot (y + 10) = 9, \\ x - y = 11; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2(x - y) = 5 - y, \\ (2x - y)^2 - 5x = 15; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x^2 - yx = -x, \\ 2(4x - 3y) + 3y - 9 = 0. \end{cases}$

3.10. Решите графическим способом и способом подстановки систему уравнений:

1) $\begin{cases} xy = 1, \\ y = x^2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = 4, \\ x^2 + y^2 = 16; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + 2y = 5, \\ y = x^2 + 1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x - y = 2, \\ y = 0{,}5x^2 - 2. \end{cases}$

3.11. Найдите целочисленные решения системы уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 + xy = -3, \\ y - 3x = 7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - xy = -1, \\ y + 4x = 6; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x^2 + xy = 14, \\ y - 3x = -3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 37, \\ y + x = 4. \end{cases}$

3.12. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 7, \\ x - y - 2 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 1, \\ x - y = 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - y^2 = -8, \\ xy = 3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + xy - y^2 = -1, \\ xy = 2. \end{cases}$

3.13. Найдите решение системы уравнений:

1) $\begin{cases} \frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{26}{5}, \\ xy = 6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{x+y}{x-y} + \frac{6(x-y)}{x+y} = 5, \\ xy = 2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{10}{3}, \\ x^2 + y^2 = 5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{x+y}{x-y} + \frac{5(x-y)}{x+y} = -6, \\ x^2 + y^2 = 13. \end{cases}$

3.14. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 + z^2 = 5, \\ x^4 - z^4 = 15; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^4 + x^2z^2 = 90, \\ x^2 + z^2 = 10; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - z^2 = 3, \\ x^4 - z^4 = 15; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} zx^2 + z^3 = 5, \\ x^3 + xz^2 = 10. \end{cases}$

B

3.15. Решите способом алгебраического сложения систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0, \\ x^2 + y^2 = 20; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + xy - 6y^2 = 0, \\ x^2 - 5xy + 2y^2 + 4 = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 0, \\ x^2 - y^2 = -12; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y^2 - 3x^2 - 2xy = 0, \\ y^2 - xy - 4x^2 = 4. \end{cases}$

3.16. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 + 3xy = 54, \\ 4y^2 + xy = 115; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 17, \\ x^2 - 2xy = -3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - xy + 3x + 7y = y^2 - 3, \\ 2y^2 + xy = x^2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y^2 - 3xy = 2, \\ y^2 - 4xy + x^2 = 3; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x^2 - 3xy = 3 - y^2, \\ x^2 - 2y^2 + 2xy = 6; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 3x^2 + xy - 2x = 5 - y, \\ 2x^2 - 3x - xy = 5 + y; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^2 - 3y + x = 2 - y^2, \\ x^2 + y^2 - 5x = 2 + y; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x^2 + x + y = 18 - y^2, \\ x^2 + y^2 + xy = 12; \end{cases}$

9) $\begin{cases} 3x^2 - 2xy = 35 - 5y^2, \\ x^2 - 2y^2 = 1. \end{cases}$

3.17. Являются ли равносильными системы уравнений:

1) $\begin{cases} 2xy - 3y^2 = 0, \\ 5x^2 + 2y = 3 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x - 3y = 0, \\ 5x^2 + 2y = 3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} (x + y)^2 = 9, \\ xy = 2 \end{cases}$ и $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ xy = 2? \end{cases}$

3.18. Решите систему уравнений, где a — параметр:

1) $\begin{cases} x + y = 3a, \\ xy = 2a^2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 4a, \\ xy = 3a^2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - y = 3a, \\ xy = 4a^2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5a^2, \\ xy = 2a^2. \end{cases}$

3.19. Найдите решение системы:

1) $\begin{cases} x^3 + xy^2 = 10, \\ x^3 + x^2y = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ y^6 + x^2y^4 = 80; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ y^4 + x^2y^2 = 90; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y^2 = 3, \\ y^4 + x^4 + 6x = 29. \end{cases}$

3.20. Решите способом подстановки и способом сложения систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 7, \\ xy^2 + x^2y = -2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 65, \\ xy^2 - x^2y = 20; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 65, \\ xy^2 - x^2y = 20; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 - xy = 2, \\ y^2 - xy = -1. \end{cases}$

Решите системы уравнений **(3.21—3.22)** :

3.21. 1) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + 2xy - y = 0, \\ x^2 + y^2 + xy + y = 2 - 2x; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^3 + y^3 - x + 2xy - y = 2, \\ x^3 + y^3 - xy + 2y = 5 - 2x; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^3 + xy^2 - x + 2x^2y - y = 2, \\ y^3 + 2xy^2 + x^2y + y = 6 - x; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^3 + xy^2 - x^2y - y^3 = 5, \\ y^3 + xy^2 + x^2y + x^3 = 15. \end{cases}$

3.22. 1) $\begin{cases} x^2 - 5y^2 + 4xy = 0, \\ x^2 - 3xy + 4y = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x^2 + y^2 - 3xy = 0, \\ x^2 + 9xy - y^2 = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5x^2 + 10y^2 - 15xy = 14, \\ 3x^2 - 9xy + 6y^2 = 7. \end{cases}$

3.23. Найдите решение системы уравнений:

1) $\begin{cases} |x| + |y| = 6, \\ x^2 - y^2 = 24; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} |x| + |y| = 1, \\ x^2 + y^2 = 0{,}5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} |x| + |y| = 3, \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$

3.24. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 - y^2 = \dfrac{13}{4}, \\ \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = -2{,}5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 68, \\ \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{17}{4}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y = 2, \\ \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x} = 3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y = 12, \\ \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x} = 18. \end{cases}$

3.25. Найдите решение системы уравнений:

1) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5, \\ xy = 36; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1, \\ xy = 4; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}} + \sqrt{\dfrac{y}{x}} = \dfrac{5}{2}, \\ x + y = 10. \end{cases}$

3.26. Решите систему уравнений способом почленного умножения и деления уравнений системы:

1) $\begin{cases} x^5y^7 = 32, \\ x^7y^5 = 128; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^8y^6 = 64, \\ x^6y^8 = 256; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2y^3 = 16, \\ x^3y^2 = 2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} (y+x)\cdot xy = 6, \\ (y-x)\cdot xy = -2; \end{cases}$

5) $\begin{cases} (x-y)\cdot(x+2y)-4=0, \\ (x+y)\cdot(x+2y)-12=0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} (y-1)\cdot x = 2, \\ (y-1)\cdot xy^2 = 8; \end{cases}$

7) $\begin{cases} (y+1)\cdot x = 6, \\ (y+1)\cdot xy^2 = 24; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} (y-1)\cdot x = 0, \\ (y-1)\cdot xy^2 = 0; \end{cases}$

9) $\begin{cases} (y^2-1)\cdot x = 9, \\ (y^2-1)\cdot xy = 18. \end{cases}$

3.27. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} 5y^2 - x^2 = 1, \\ 7y^2 + 3xy = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y^2 - x^2 = 12, \\ y^2 - 3xy + x^2 = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y^2 - x^2 = -3, \\ 2y^2 - 3xy + 2x^2 = 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 4x^2 + xy = 5, \\ x^2 + 3xy - 4 = 0; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2 - 2xy + 3y = 2x, \\ y^2 - 3xy + 6y = 4x; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2 = 3 + y^2, \\ 2x^2 - 3xy = 4 - 2y. \end{cases}$

Решите системы уравнений (**3.28—3.31**):

3.28. 1) $\begin{cases} x^3 + y^3 - 65 = 0, \\ xy\cdot(x+y) - 20 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^4 = 5, \\ xy^2 = 2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 7, \\ xy\cdot(x+y) = -2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 35, \\ x + y = 5. \end{cases}$

3.29. 1) $\begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{x+y} = \dfrac{10}{3}, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 0{,}75; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{xy} = \dfrac{5}{6}, \\ x^2 - y^2 = 5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{xy} = \dfrac{5}{6}, \\ x^2 + y^2 = 15; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{y} + \dfrac{y}{x-1} = 2, \\ x^2 + xy = 6; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{xy}=\dfrac{26}{5}, \\ x^2-y^2=24; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}-\left(\dfrac{y-x}{x}\right)^2=1, \\ 2y^2-x^2=1. \end{cases}$

3.30. 1) $\begin{cases} 2x^2-y^2=2, \\ |x+y|=1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+y^2=37, \\ |x-y|=7; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2+y^2=41, \\ |x+y|=9; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x^3+2xy=9, \\ |2x+y|=5. \end{cases}$

3.31. 1) $\begin{cases} x^3-x=z^3-z, \\ 2x^2-5xz+2z^2=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^3-7x=z^3-7z, \\ x^2-z^2=3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^3-x=z^3-z, \\ 2x^2-5xz+3z^2=0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2-2zx=5z^2-2, \\ 3x^2+2xz+z^2=2. \end{cases}$

C

3.32. Решите способом введения новой переменной систему уравнений:

1) $\begin{cases} (u+v)^2-5(u+v)+4=0, \\ (u-v)^2-(u-v)-2=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (u+v)^2-4(u+v)-45=0, \\ (u-v)^2-2(u-v)-3=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} u+uv+v=5, \\ u^2+uv+v^2=7; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} u-uv+v=1, \\ u^2+2u+2v+v^2=11. \end{cases}$

Решите системы уравнений (**3.33—3.37**):

3.33. 1) $\begin{cases} (z-1)\cdot(y-1)=1, \\ zy\cdot(z+y)=16; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (z-2)\cdot(y-2)=4, \\ zy+z^2+y^2=3. \end{cases}$

3.34. 1) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}+xy=5, \\ \dfrac{6(x-y)}{x+y}+xy=4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{x+y}=0,5, \\ xy^2+x^2y=-2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{2}{z}+\dfrac{y}{3}=3, \\ \dfrac{z}{2}+\dfrac{3}{y}=1,5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} zy-\dfrac{y}{z}=0,5, \\ zy-\dfrac{z}{y}=2. \end{cases}$

3.35. 1) $\begin{cases} \dfrac{5}{x^2+xy}+\dfrac{4}{xy+y^2}=\dfrac{13}{6}, \\ \dfrac{8}{x^2+xy}-\dfrac{1}{xy+y^2}=1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{2}{x^2+3xy}+\dfrac{3}{y^2-xy}=\dfrac{25}{14}, \\ \dfrac{3}{x^2+3xy}-\dfrac{2}{y^2-xy}=-\dfrac{4}{7}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{3}{2x-y} + \dfrac{2}{x+y} = \dfrac{4}{x}, \\ x^2 + 2y^2 = 72; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{y^2}{x^2-xy} + \dfrac{x^2}{y^2-xy} = 1, \\ x^3 - y^3 = 2. \end{cases}$

3.36. 1) $\begin{cases} x+y=3, \\ y+z=-1, \\ xz=-3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+y^2=5, \\ y-2z=3, \\ x+z=1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} z-x=4, \\ y-z=-3, \\ x^2+y^2+z^2=30; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} xy=6, \\ yz=2, \\ x^2+z^2=10. \end{cases}$

***3.37.** 1) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=12, \\ xy+xz+yz=12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=3, \\ x+z+y=3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=108, \\ x+z+y=18. \end{cases}$

***3.38.** Найдите множество значений параметра p, при котором имеет единственное решение система уравнений:

1) $\begin{cases} x+y=p, \\ x^2+y^2=2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+y=p, \\ x^2-y=-1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+y=p, \\ 2x+y^2=1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x-y=p, \\ x^2+y^2=4. \end{cases}$

ПОВТОРИТЕ

3.39. Решите неравенство:

1) $0{,}4x(3x-1) - x - 1{,}1 < 1{,}2x(x-3)$;

2) $4 + 0{,}2x(x-1) - x(0{,}2x+0{,}5) < 0{,}6x$;

3) $15y^2 - 12y - 30 > 10y + 7$;

4) $(y+0{,}6)\cdot(y+1{,}6)\cdot(1{,}2-y) > 0$.

3.40. При каких значениях переменной принимает неотрицательные значения выражение:

1) $-x^2 - 2x + 120$; 2) $2x^2 - 9x - 45$;

3) $\dfrac{9}{x} - \dfrac{x}{4}$; 4) $\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2-2x}$?

3.41. 1) Длина прямоугольника на 5 см больше его ширины. Какой может быть длина, если площадь прямоугольника меньше 36 см^2?

2) Длина участка прямоугольной формы на 7 м больше его ширины. Какую ширину должен иметь этот участок, чтобы его площадь была больше 60 м^2?

МАТЕМАТИКА В СЕЛЬСКОМ ХОЗЯЙСТВЕ

3) У хозяина птицефермы имеется материал для построения забора длиной 96 м. Вычислите стороны прямоугольного загона для уток и гусей на птицеферме площадью 5,4 а (1 а = = 100 м^2).

3.42. Постройте график функции $y = f(x)$:

1) $f(x) = x^2 - 6x$; 2) $f(x) = -x^2 + 4x$; 3) $f(x) = 2x^2 - 6x + 3$; 4) $f(x) = -x^2 - 6x + 2$ и по графику найдите промежутки ее убывания и возрастания.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

3.43. 1) Из двух населенных пунктов, длина пути (расстояние) между которыми по реке равна 57 км, навстречу друг другу движутся две моторные лодки, собственные скорости которых равны. Лодка, идущая по течению, до встречи шла 1 ч, а лодка, идущая против течения, 2 ч. Скорость течения реки равна 3 км/ч. Найдите собственную скорость каждой лодки.

2) Длина пути (расстояние) по реке между пунктами A и B равна 45 км. Одновременно навстречу друг другу вышли две моторные лодки, собственные скорости которых равны. Через 1,5 ч они встретились. Найдите собственную скорость лодок, если скорость течения реки равна 3 км/ч.

3) Катер на подводных крыльях прошел по течению реки за 2 ч такой же путь (расстояние), какой он проходит за 2 ч 15 мин против течения реки. Скорость течения реки равна 3 км/ч. Найдите собственную скорость катера.

4) По течению реки катер прошел за 7 ч путь такой же длины, какой он проходит за 8 ч против течения. Собственная скорость катера 30 км/ч. Найдите скорость течения реки.

3.44. 1) В коробке лежат несколько одинаковых пачек печенья. Если из коробки вынуть 7 пачек печенья, то в ней останется

$\frac{1}{4}$ от всего числа пачек, которое в ней может поместить ся. Если же добавить $\frac{3}{4}$ от имеющегося числа пачек, то одна пачка не помести тся. Сколько пачек печенья лежит в коробке?

2) В ведре было несколько литров воды. Если отлить половину всей воды, то там останется на 7 л воды меньше, чем помещается в ведро. Если же добавить 2 л воды, то количество литров воды составит $\frac{2}{3}$ от вместимости ведра. Сколько лит ров воды вмещается в ведро?

3.45. 1) Из пункта A в пункт B, длина пути (расстояние) между которыми 80 км, выехал автобус. В середине пути он был задержан на 10 мин, но, увеличив скорость на 20 км/ч, прибыл в пункт B вовремя. С какой скоростью автобус проехал первую половину пути?

2) Лыжник должен был пройти путь длиной 10 км, чтобы в назначенное время вернуться в туристический лагерь. В середине пути он задержался на 15 мин. Однако, увеличив скорость на 10 км/ч, лыжник пришел в лагерь вовремя. Какова была первоначальная скорость лыжника?

Опорные понятия для овладения новыми знаниями

Текстовая задача, математическая модель, алгоритм решения текстовой задачи, системы уравнений, решение системы уравнений.

§4. РЕШЕНИЕ ТЕКСТОВЫХ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Ключевые понятия

Задача, система уравнений, математическая модель

Вы научитесь решать текстовые задачи с помощью систем нелинейных уравнений; составлять математическую модель по условию задачи.

При решении задач с помощью составления системы двух уравнений вводятся два неизвестных, в отличие от решения задач путем составления уравнения с одной переменной.

Чтобы правильно составлять уравнения очень важно четко выделить условия, описывающие процессы, указанные в задаче.

АЛГОРИТМ При решении задач с помощью системы уравнений можно придерживаться следующего алгоритма:

1) внимательно изучить условие задачи и ее вопрос;
2) обозначить буквами искомые или некоторые неизвестные величины;
3) выразить искомые и неизвестные величины через данные величины;
4) составить уравнения с двумя переменными и из них соответствующую систему;
5) найти решение системы;
6) исследовать по условию задачи, какие из решений системы удовлетворяют условию задачи.

ПРИМЕР

1. Пароход от пункта A до пункта B идет 5 ч, а от пункта B до пункта A — 7 ч. Сколько часов будут плыть по течению реки плоты от пункта A до пункта B?

Решение. Длину пути (расстояние) от пункта A до пункта B примем за 1. Пусть x ч будут плыть по течению реки плоты от A до B. Тогда $\frac{1}{x}$ км/ч — скорость плотов и скорость течения реки.

Пусть y км/ч — скорость парохода. Тогда от пункта A до пункта B пароход идет со скоростью $(y + \frac{1}{x})$ км/ч, а от B до A — $(y - \frac{1}{x})$ км/ч.

От пункта A до пункта B пароход проходит расстояние $(y + \frac{1}{x}) \cdot 5$ км, а от B до A — $(y - \frac{1}{x}) \cdot 7$ км, которое приняли за 1. Получим систему нелинейных уравнений с двумя переменными:

$$\begin{cases} \left(y + \frac{1}{x}\right) \cdot 5 = 1, \\ \left(y - \frac{1}{x}\right) \cdot 7 = 1. \end{cases}$$

Эту систему можно заменить равносильной системой:

$$\begin{cases} y + \frac{1}{x} = \frac{1}{5}, \\ y - \frac{1}{x} = \frac{1}{7}. \end{cases}$$

Полученную систему можно реши ть используя способ алгебраического слож ения или способ введения новой переменной, обозначив $\frac{1}{x}$ буквой z.

Решите систему уравнений: $\begin{cases} y + \frac{1}{x} = \frac{1}{5}, \\ y - \frac{1}{x} = \frac{1}{7}. \end{cases}$

Ответ : 35 ч.

ПРИМЕР

2. Две бригады, работая вместе, могут отремонтировать шоссе за 18 дней. Если бы сначала первая бригада, работая одна, выполнила $\frac{2}{3}$ всей работы, а затем вторая бригада оставшуюся часть, то на ремонт всего шоссе потребовалось бы 40 дней. За сколько дней каждая бригада, работая отдельно, могла бы отремонтировать шоссе?

Решение. Пусть всю работу первая бригада выполнит за x дней, а вторая бригада — за y дней. Тогда их производительность, соответственно, равна $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{y}$. По условию задачи имеем: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{18}$ — производительность при совместной работе.

$\frac{2}{3} : \frac{1}{x} + \frac{1}{3} : \frac{1}{y} = 40$ (дней) потребовалось на ремонт всего шоссе.

Получим систему двух уравнений с двумя переменными:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{18}, \\ \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y = 40. \end{cases}$$

Отсюда: $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{18}, \\ 2x + y = 120; \end{cases}$ $\begin{cases} 18y + 18x = xy, \\ y = 120 - 2x \end{cases}$ или

$$\begin{cases} 18(120-2x) + 18x = x(120-2x), \\ y = 120 - 2x. \end{cases}$$

Решите систему уравнений $\begin{cases} 18(120-2x) + 18x = x(120-2x), \\ y = 120 - 2x. \end{cases}$

Ответ: 45 дней и 30 дней или 24 дня и 72 дня.

Решение задач на сплавы и смеси основано на использовании понятий: *концентрация* , *процентное содержание* и др.

1) все рассматриваемые смеси (сплавы, растворы) однородны;

2) не делается различий между литром как единицей емкости и литром как единицей массы.

Концентрацией вещества, имеющего массу m_1 в смеси (сплаве, растворе) массой m, называется ***величина*** $\frac{m_1}{m}$.

Алгебра

Процентным содержанием вещества, имеющего массу m_1 в смеси (сплаве, растворе) массой m, называется ***величина*** $\frac{m_1}{m} \cdot 100\%$.

Если смесь (сплав, раствор) массы m_1 состоит из веществ, которые имеют массы, соответственно, m_1, m_2 и m_3, то $\frac{m_1}{m} + \frac{m_2}{m} + \frac{m_3}{m} = 1$.

ПРИМЕР

3. Имеются два сплава золота и железа. Сначала взяли 117 кг первого и 468 кг второго сплава, переплавили и получили новый сплав с 10%-ным содержанием золота. Затем переплавили 186 кг первого и 279 кг второго — получили сплав с 91%-ным содержанием железа. Найдите процентное содержание золота в первоначальных сплавах.

Решение. Пусть в первом сплаве процентное содержание золота p%, а во втором сплаве процентное содержание золота r%.

Составим таблицу.

Таблица 2

Сплав		Масса (кг)	Процентное содержание золота в сплаве	Масса золота в сплаве (кг)
Первая переплавка сплавов	масса первого сплава	117	p%	$\frac{117p}{100}$
	масса второго сплава	468	r%	$\frac{468r}{100}$
	масса нового сплава	117+468=585	10%	58,5
Вторая переплавка сплавов	масса первого сплава	186	p%	$\frac{186p}{100}$
	масса второго сплава	279	r%	$\frac{279r}{100}$
	масса нового сплава	186+279=465	9%	41,85

Исходя из таблицы составим два уравнения для первой и второй переплавки: $\frac{117p}{100} + \frac{468r}{100} = 58,5$ и $\frac{186p}{100} + \frac{279r}{100} = 41,85$.

Умножим обе части уравнений на 100, получим систему уравнений $\begin{cases} 117p + 468r = 5850, \\ 186p + 279r = 4185. \end{cases}$

Решая полученную систему найдем, что $p = 6\%$, $r = 11\%$.

Ответ : 6% и 11%.

?

1. Какого вида задачи можно решить, составив систему двух нелинейных уравнений с двумя переменными?
2. Какие величины (искомые или неизвестные) следует обозначить буквами, чтобы решить задачу с помощью системы двух нелинейных уравнений с двумя переменными?
3. Всегда ли решение системы двух нелинейных уравнений с двумя переменными, с помощью которой решали задачу, является ответом на вопрос задачи?

Упражнения

A

4.1. 1) Значение суммы длин радиусов двух кругов равно 14 см, а значение разности площадей этих кругов равно 28π см^2. Найдите длины радиусов кругов.

2) Значение суммы квадратов двух положительных чисел равно 202, а значение разности квадратов этих чисел равно 40. Найдите эти числа.

3) (Задача Диофанта, III в.) Найдите два числа, отношение которых равно 3, а отношение значения суммы квадратов этих чисел к значению их суммы равно 5.

4) Найдите двузначное число, если оно в 4 раза больше значения суммы его цифр и на 16 больше значения произведения его цифр.

5) Найдите двузначное число, если оно в 4 раза больше значения суммы его цифр и в 2 раза больше значения произведения его цифр.

4.2. 1) Найдите два натуральных числа, если их среднее арифметическое равно 35, а их среднее геометрическое равно 28.

2) Найдите два натуральных числа, если их среднее арифметическое равно 61, а их среднее геометрическое равно 60.

4.3. 1) Длина пути между двумя пристанями по реке равна 60 км. Теплоход проходит этот путь по течению реки и против течения реки за 5,5 ч. Найдите скорость теплохода в стоячей воде и скорость течения реки, если скорость течения реки на 20 км/ч меньше скорости теплохода в стоячей воде.

2) Катер шел 3 ч по течению реки и 2 ч против течения реки и прошел путь длиной 88 км. Найдите скорость течения реки и скорость катера в стоячей воде, если по течению он прошел на 32 км пути больше, чем против течения.

4.4. 1) Фермер отправился на машине в город, длина пути до которого по шоссе равна 110 км. Через 20 мин из города на ферму выехал его сын, который ехал со скоростью на 5 км большей, чем отец. Встреча произошла в 50 км пути от города. С какой скоростью ехал фермер?

2) Из пунктов A и B, длина пути между которыми равна 40 км, вышли одновременно навстречу друг другу два туриста. Через 4 ч им осталось пройти до встречи 4 км пути. Если бы из пункта A турист вышел на 1 ч раньше, то они встретились бы на середине пути. Найдите скорость каждого туриста.

4.5. 1) Двое рабочих, работая вместе, выполняют задание за 3 ч 45 мин. Первый рабочий, работая один, может выполнить задание на 4 ч быстрее, чем второй рабочий. Сколько времени потребуется каждому рабочему для выполнения этого задания?

2) Один тракторист может вспахать поле на 24 ч быстрее, чем другой тракторист. Если это поле они будут пахать вместе, то работу выполнят за 35 ч. Сколько времени потребуется каждому трактористу для вспашки поля?

4.6. 1) Из пунктов A и B, длина пути между которыми по шоссе равна 180 км, одновременно навстречу друг другу выехали два мотоциклиста и встретились через 3 ч. Один из них прибыл в пункт A через 2 ч после встречи, второй — в пункт B через 4,5 ч. Найдите скорость каждого мотоциклиста.

2) Длина пути по шоссе между двумя городами равна 480 км. Легковой автомобиль проходит этот путь на 2 ч быстрее, чем автобус. Если легковой автомобиль уменьшит скорость на 5 км/ч, то этот путь он пройдет на 1,6 ч быстрее, чем автобус. Найдите скорость автобуса и автомобиля.

4.7. 1) Из пунктов A и B, длина пути между которыми по шоссе равна 80 км, одновременно навстречу друг другу выехали два автомобиля. Один из них прибыл в пункт A через 20 мин после встречи, второй — в пункт B через 45 мин после встречи. Найдите скорость каждого автомобиля.

2) Из двух железнодорожных станций, длина пути между которыми равна 270 км, одновременно навстречу друг другу отправляются два поезда и встречаются через 3 ч. На станцию назначения один поезд прибывает на 1 ч 21 мин раньше, чем другой. Найдите скорости поездов.

4.8. 1) Сочинение писали 108 экзаменующихся. Им было роздано 480 листов бумаги, причем каждая девушка получила на один лист больше каждого юноши, а все девушки получили столько же листов, сколько все юноши. Сколько было девушек и сколько юношей?

2) Велосипедист каждую минуту проезжает на 500 м меньше, чем мотоциклист, поэтому на путь длиной 30 км он затрачивает времени на 0,5 ч больше, чем мотоциклист. Найдите скорости мотоциклиста и велосипедиста.

4.9. 1) Длина пути от пункта A до пункта B по железной дороге равна 88 км, а по реке составляет 108 км. Поезд из пункта A выходит на 1 ч позже теплохода и прибывает в пункт B на 15 мин раньше. Найдите скорость поезда, если известно, что она на 40 км/ч больше скорости теплохода.

2) Мотоциклист остановился для заправки горючим на 12 минут. После этого, увеличив скорость движения на 15 км/ч, он наверстал потерянное время, проехав путь длиной 60 км. С какой скоростью мотоциклист двигался после остановки?

4.10. 1) В 500 кг руды находится некоторое количество железа. После удаления из руды 200 кг примесей, содержащих в среднем 12,5% железа, в оставшейся руде железа повысилось на 20%. Какое количество железа осталось еще в руде?

2) Имеется кусок сплава меди с оловом общей массой 12 кг, содержащей 45% меди. Сколько чистого олова надо прибавить к этому куску сплава, чтобы полученный новый сплав содержал 40% меди?

4.11. 1) Бассейн наполнится, если первую трубу открыть на 12 мин, вторую трубу — на 7 минут. Если открыть обе трубы на 6 мин, то бассейн наполнится на $\frac{2}{3}$ своего объема. Сколько времени потребуется для наполнения бассейна только через вторую трубу?

2) Если открыть два крана, то бассейн наполняется за 6 часов. Если открыть только один первый кран, то понадобится на 5 ч больше, если открыть только второй кран. Сколько времени надо для наполнения бассейна через каждый кран?

B

4.12. 1) Одновременно из города A в одном и том же направлении выехали две машины со скоростями 80 км/ч и 100 км/ч. Спустя 1 ч в том же направлении из города A выехал легковой автомобиль, который догнал вторую машину через 3 ч после того, как догнал первую машину. Найдите скорость легкового автомобиля.

2) Из пункта A в пункт B выехал грузовик. Через час из пункта A выехал легковой автомобиль. Через 2 ч после выезда он догнал грузовик и прибыл в пункт B на 3 ч раньше грузовика. Сколько времени ехал грузовик от пункта A до пункта B?

4.13. 1) От пристани A в одном и том же направлении отплыли плот и катер. Пройдя 90 км пути катер повернул обратно и прибыл на эту же пристань, затратив на весь путь 12,5 ч. На обратном пути он встретил плот в 30 км пути от пристани. Найдите скорость течения реки и собственную скорость катера.

2) От пристани A вниз по течению реки отплыли плот и катер. Пройдя 96 км пути катер повернул обратно и вернулся в пристань A, затратив на весь путь 14 ч. На обратном пути он встретил плот в 24 км пути от пристани. Найдите скорость течения реки и собственную скорость катера.

4.14. 1) Имеются два сплава золота и серебра. В первом сплаве массы этих металлов находятся в отношении 2 : 3, во втором — 3 : 7. Сколько нужно взять каждого сплава, чтобы получить 8 кг нового сплава, в котором золото и серебро находятся в отношении 5 : 11?

2) Сплавили два одинаковых по массе куска чугуна с разным содержанием хрома и получили сплав, в котором находилось 12 кг хрома. Если бы первый кусок был в два раза тяжелее, то в сплаве находилось бы 16 кг хрома. Найдите процентное содержание хрома в каждом куске чугуна, если процентное содержание хрома в первом куске на 5% меньше, чем во втором.

4.15. 1) Из бака, наполненного глицерином, отлили 8 л. Затем долили бак водой и отлили 6 л смеси. После этого вновь долили бак водой, в результате получили смесь, содержащую 68% глицерина. Найдите вместимость бака.

2) Сосуд вместимостью 40 л наполнен чистым спиртом. Из него отлили некоторое количество спирта и долили водой, затем отлили такое же количество смеси. После этого в сосуде

осталось 22,5 л чистого спирта. Сколько литров жидкости отливали каждый раз?

4.16. 1) Имеются два сосуда, содержащих 4 кг и 6 кг раствора одной кислоты разных концентраций. Если их слить вместе, то получится раствор, содержащий 35% кислоты. Если же слить равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 36% кислоты. Сколько килограммов кислоты находится в каждом растворе?
2) Имеются два сплава алюминия и платины с содержанием платины 11% и 4%. В каком отношении нужно взять эти сплавы, чтобы их переплавить и получить сплав, содержащий 7% платины?

4.17. 1) Имеются два разных сплава серебра. Первый массой в 25 кг содержит 84% серебра, второй массой в 12,5 кг содержит 72% серебра. Какой процент серебра находится в сплаве, полученном при их сплавлении?
2) Имеются два разных сплава серебра. Первый массой в 12 кг содержит 75% серебра, второй массой в 10 кг содержит 20% серебра. Какой процент серебра находится в сплаве, полученном при их сплавлении?

C

4.18. Положив в банк на депозит некоторую сумму, вкладчик получил через год 42 000 тг прибыли. Однако он не стал забирать деньги из банка и добавил к ним еще 58 000 тг. Через год на депозите стало 456 000 тг. Сколько тенге было положено в банк первоначально и какой годовой процент прибыли давал банк?

4.19. При одновременной работе двух насосов разной мощности бассейн наполняется за 8 часов. После ремонта насосов производительность первого из них увеличилась в 1,2 раза, второго — в 1,6 раза. После этого при одновременной их работе бассейн стал наполняться за 6 часов. Найдите время наполнения бассейна одним первым насосом до и после ремонта.

4.20. Два лыжника одновременно вышли со старта с постоянными скоростями по одному маршруту, причем скорость первого составляет $\frac{7}{6}$ от скорости второго. Вслед за ними через 20 мин отправился третий лыжник, скорость которого 18 км/ч. Третий лыжник догнал второго лыжника на 30 мин раньше, чем первого. Найдите скорость первого и второго лыжников.

4.21. От двух слитков с массой в 7 кг и 3 кг с разным процентным содержанием магния отрезали по куску одинаковой массы. Затем кусок, отрезанный от первого слитка, сплавили с остатком второго слитка, а кусок, отрезанный от второго слитка, сплавили с остатком от первого слитка и получили сплавы с одинаковым процентным содержанием магния. Найдите массу каждого из отрезанных кусков.

4.22. 1) Две бригады должны были выполнить одинаковую работу. Первая бригада выполнила работу на 30 мин раньше второй бригады. Если бы в первой бригаде было на 5 человек больше, то она могла бы закончить работу на 2 ч раньше. Найдите число рабочих в каждой бригаде, если производительность обеих бригад одинакова.

2) Два насоса, работая вместе, наполняют бассейн за 10 часов. Если первый насос включить в 6 ч, второй через 2 ч, то в 12 ч в бассейне будет 400 м^3 воды. Найдите емкость бассейна, учитывая, что половину бассейна второй насос может наполнить на 7,5 ч позже, чем первый.

4.23. Три бригады, работая одновременно, отремонтируют железнодорожный путь за 8 дней. Второй бригаде надо на эту работу на 8 дней больше, чем первой, и в 2 раза меньше, чем для третьей. За какое время каждая бригада в отдельности выполнит эту работу?

4.24. Имеются три раствора, составленные из трех элементов A, B и C. В первый раствор входят только элементы A и B, массы которых находятся в отношении 1 : 2, во второй раствор — элементы B и C, массы которых находятся в отношении 1 : 3, в третий раствор — элементы A и C, массы которых находятся в отношении 2 : 1. В каком отношении нужно взять эти растворы, чтобы во вновь полученном растворе содержались элементы A, B и C, массы которых находятся в отношении 11 : 3 : 8?

ПОВТОРИТЕ

4.25. Решите неравенство:

1) $\frac{49 - x^2}{x + 2} > 0$; 2) $\frac{x}{4} - \frac{16}{x} < 0$; 3) $\frac{5}{2x} - \frac{3}{3 - x} < 0$; 4) $\frac{9 - x^2}{x^2 - 16} > 0$.

4.26. Решите систему линейных неравенств:

1) $\begin{cases} 3x - 2 \geqslant 5 - 6x, \\ |2x + 4| \geqslant 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7x - 2,2 \geqslant 5,3 - 9x, \\ |x - 7,4| < 3. \end{cases}$

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

4.27. Постройте график и найдите промежутки знакопостоянства функции $y = f(x)$:

1) $f(x) = -0,5x^2 + 2$; 2) $f(x) = -2x^2 + 4x$;

3) $f(x) = x^2 + 6x + 9$; 4) $f(x) = x^2 - 5x - 10$.

4.28. В одной координатной плоскости постройте графики функций и найдите число точек пересечения их графиков:

1) $y = x^2$ и $y = x^2 - 2x$; 2) $y = 2x - 3$ и $y = -x^2 - 3x$;

3) $y = |x + 1|$ и $y = x^2 + 4x + 3$;

4) $y = |x - 1|$ и $y = |x^2 - 4x + 3|$.

4.29. Постройте окружность, заданную уравнением. Установите, находится ли точка $M(-1; 2)$ внутри круга, ограниченного этой окружностью:

1) $x^2 + y^2 = 9$; 2) $x^2 + 2x + y^2 = 8$;
3) $x^2 - 2x + y^2 = 24$; 4) $x^2 + y^2 - 2y = 15$.

Опорные понятия для овладения новыми знаниями

Неравенство, решение неравенства, равносильные неравенства, неравенства с двумя переменными, множество решений неравенств, координатная плоскость.

§5. НЕРАВЕНСТВА С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Ключевые понятия

Неравенства

Вы научитесь решать неравенства с двумя переменными.

Неравенства вида: $f(x;y) > g(x;y)$; $f(x;y) < g(x;y)$; $f(x;y) \geq g(x;y)$, $f(x;y) \leq g(x;y)$, *где* $f(x;y)$ *и* $g(x;y)$ *выражения с двумя переменными, называются* ***неравенствами с двумя переменными***.

Например, $4 + x > y$; $y^2 + x^2 < 16$; $y - 4 \geq x^2 + 2x$ — неравенства с двумя переменными.

Решением неравенства с двумя переменными *называется пара значений переменных, обращающих неравенство в верное числовое неравенство.*

Пара чисел (1; 0) является решением неравенств $4 + x > y$; $y^2 + x^2 < 16$, но не является решением неравенства $y - 4 \geq x^2 + 2x$.

Поскольку любой паре чисел соответствует точка на координатной плоскости, то множество решений неравенства с двумя переменными можно изобразить на координатной плоскости.

ПРИМЕР

Изобразим на координатной плоскости множество решений неравенства $y - x \leq 1$.

Решение. Сначала выразим y через x. Получим неравенство $y \leq x + 1$. Построим график функции $y = x + 1$ — прямую линию (рис. 10.1).

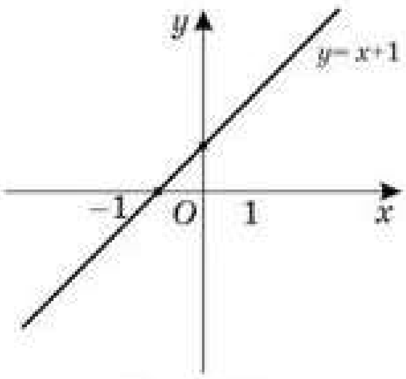


Рис. 10.1

Сравните ординаты точек, расположенных выше и ниже прямой и имеющих абсциссу 3, с ординатой точки с такой же абсциссой, но принадлежащей графику функции $y = x + 1$.

Поскольку ордината любой точки, лежащей ниже прямой, меньше чем ордината точки, имеющей такую же абсциссу, но лежащей на прямой, то множество точек плоскости, расположенных на прямой и ниже нее, являются изображением множества решений неравенства $y \leq x + 1$ (рис. 10.2).

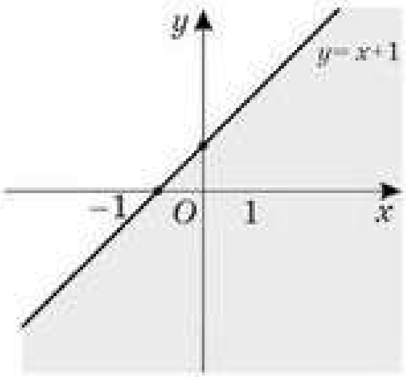


Рис. 10.2

ОБЪЯСНИТЕ

Используя рисунки 11—14, объясните, как изобразили множества решений неравенств: 1) $y \geqslant \frac{1}{x}$ и $xy \geqslant 1$; 2) $y < \frac{1}{x}$ и $xy < 1$; 3) $x^2 + y^2 \leqslant 4$ и $x^2 + y^2 \geqslant 4$; 4) $y \leqslant x^2$ и $y \geqslant x^2$.

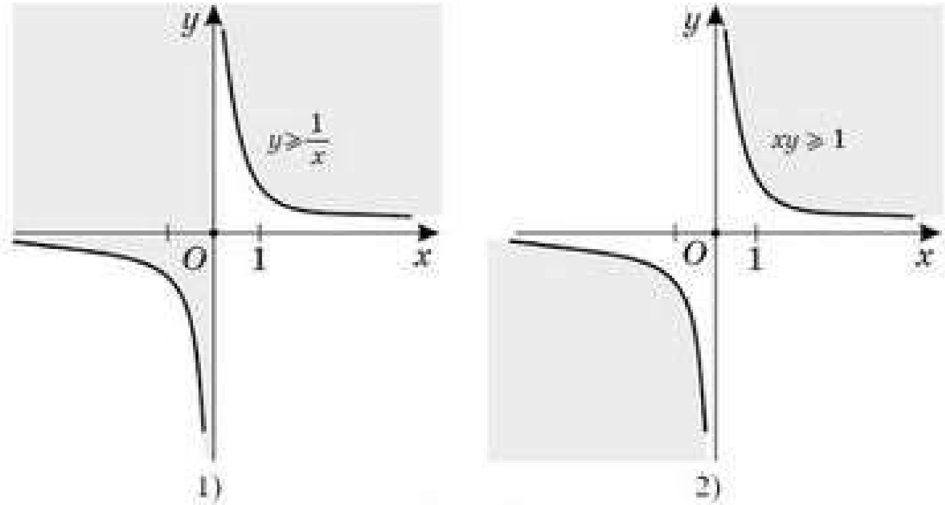


Рис. 11

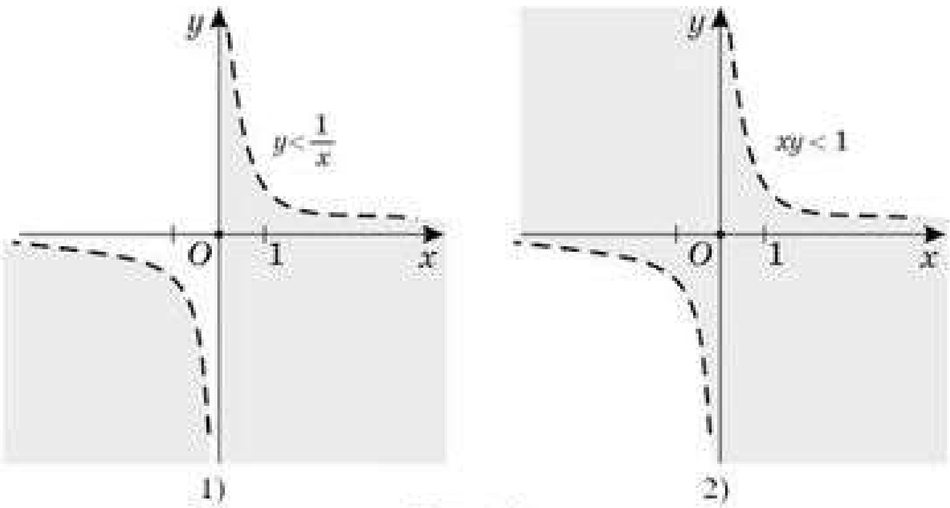


Рис. 12

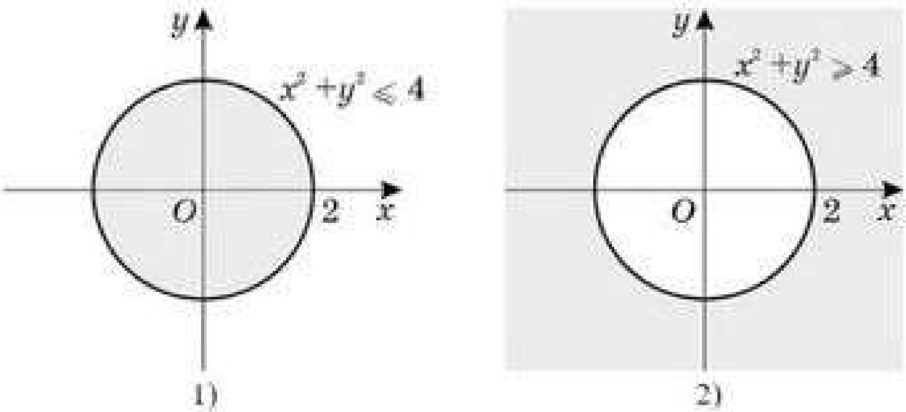
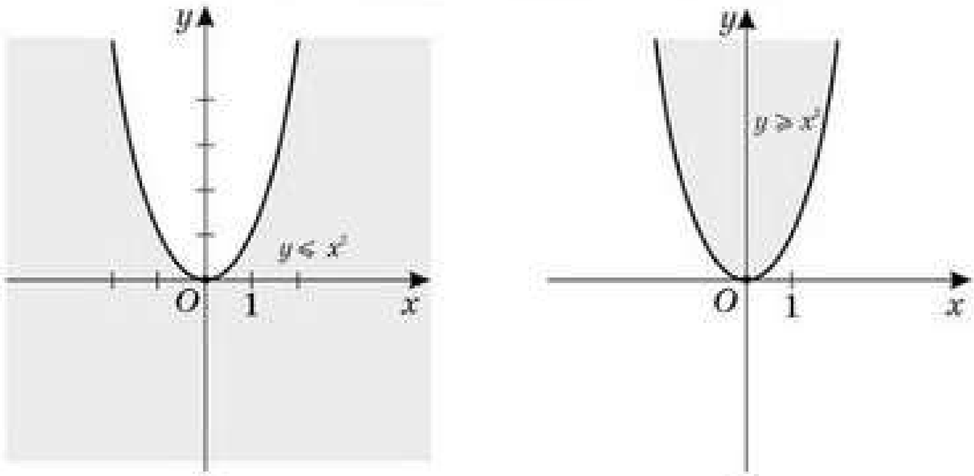


Рис. 13



1) 2)

Рис. 14

?

1. Из точек $A(2;\ 0)$, $B\ (2;\ 4)$, $C(2;\ -3)$ укажите точки, лежащие выше графика функции: 1) $y = 4 - x$; 2) $y = 4 - x^2$.
2. Из точек $A(-2;\ 0)$, $B\ (-3;\ 4)$, $C(-5;\ 4)$ укажите точки, принадлежащие кругу с центром в начале координат и радиусом 6.
3. Чем отличается изображение множеств решений строгого неравенства с двумя переменными от решения нестрогого неравенства с двумя переменными?

Упражнения

A

5.1. Является ли пара чисел $(2;\ 5)$, $(-3;\ 1)$, $(-2;\ -4)$ и $(-2{,}6;\ 0)$ решением неравенства:

1) $-2x + 5y \geq 0$; 2) $x^2 - 2x + 2y < 0$;

3) $4xy - 2x + 5y \geq 0$; 4) $x - 2x^2 - 3y \leq 0$?

5.2. Изобразите на координатной плоскости множество решений неравенства:

1) $4x + 3y - 5 \leq 0$; 2) $2x^2 + 3y - 3x - 1 > 0$;

3) $x^2 - 2y - 3 > 3x$; 4) $0{,}5x^2 + y - 2x < 1$.

5.3. На координатной плоскости покажите штриховкой множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству:

1) $xy \geq 3$; 2) $xy \leq 0{,}5$; 3) $3xy - 4 \geq 0$; 4) $xy - y \geq 2$.

5.4. Изобразите на координатной плоскости множество точек, заданное неравенством:

1) $x^2 + y^2 \leq 4$; 2) $x^2 + y^2 \geq 16$;

3) $x^2 + y^2 < 12$; 4) $x^2 > 8 - y^2$;

5) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 \le 9$; 6) $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 \le 10$;

7) $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 \ge 4$; 8) $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 > 10$;

9) $(2 - x)^2 + (y - 2)^2 > 16$.

5.5. Какую геометрическую фигуру образует множество точек плоскости, которое задается неравенством:

1) $(x + 2)^2 + y^2 \ge 5$; 2) $x^2 + (y - 2)^2 \le 7$;

3) $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 \ge 4$; 4) $x^2 + (y + 1)^2 \le 8$?

B

5.6. Множество решений неравенства $x^2 - xy + y^2 \le 5$ изображается некоторой фигурой с границей L. Пересекает ли линию L отрезок, концами которого служат точки $A(5; 1)$ и $B(-1; 1)$?

5.7. Напишите неравенство, множество решений которого изображается:

1) кругом с центром в точке (1; 2) и длиной радиуса, равной 5;

2) множеством точек вне круга с центром в точке (–2; 2) и длиной радиуса, равной 7;

3) кругом, не включая окружность — границу круга, с центром в точке (0; 2,5) и длиной радиуса, равной 3;

4) множеством точек вне круга, не включая окружность — границу круга, с центром в точке с координатами (3,5; 0) и длиной радиуса, равной 1.

5.8. Какое множество точек на координатной плоскости задано неравенством:

1) $x^2 + y^2 + 4x - 2y \ge 4$; 2) $x^2 + y^2 - 6x - 4y \ge 0$;

3) $x^2 + y^2 - x + 4y \ge 1$; 4) $x^2 + y^2 - 2x - y \le 0$?

C

5.9. Запишите неравенство, множество решений которого изображается точками координатной плоскости, лежащими выше прямой, проходящей через точки:

1) A (0; 0) и B (2; 2); 2) A (–1; 2) и B (2; –3);

3) A (3; –2) и B(–2; 3); 4) A (–4; –1) и B(–2; –1).

5.10. Запишите неравенство, множество решений которого изображается точками координатной плоскости, лежащими выше параболы, проходящей через точки:

1) $A(2;\ -1)$, $C(-1;\ 5)$ и $B(1;\ -3)$; 2) $A(-1;\ 10)$, $C(2;\ 7)$ и $B(1;\ 4)$.

5.11. На координатной плоскости изобразите штриховкой множество точек, координаты которых являются решениями неравенства:

1) $|y| \le x$; 2) $|y| \ge 2x$; 3) $|y| + |x| \le 1$;

4) $|y| + |x| \le 3$; 5) $|y| + 2|x| \le 2$; 6) $2|y| + |x| \ge 4$.

ПОВТОРИТЕ

5.12. Решите неравенство:

1) $x^2 - 5x - 5 > 2x^2 + 1$; 2) $3x^2 - 5x > 2x^2 - 6$.

***5.13.** Постройте график функции $y = \max\{x^2 - 3;\ 3x + 7\}$.

5.14. Значение суммы цифр двузначного числа равно 9, а значение произведения его цифр равно 18. Найдите это число.

5.15. Благодаря применению в фермерском хозяйстве новых технологий урожайность бобовых возросла на 4 ц/га. В результате было собрано 150 ц, что на 3 ц больше, чем в прошлом году, хотя под бобовые отвели на 1 га меньше. Какова была урожайность бобовых в прошлом и текущем году и какая площадь была отведена под бобовые в прошлом и текущем году?

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

5.16. Постройте график уравнения :

1) $3x - 4y + 5 = 0$; 2) $-2x - y + 3 = 0$;

3) $3xy - 2 = 0$; 4) $xy + 2 = 0$;

5) $xy - y - 2 = 0$; 6) $xy + 2y - 3 = 0$;

7) $xy - 3y + 1 = 0$; 8) $xy - 5y + 1 = 0$.

5.17. На координатной плоскости покажите штриховкой множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству:

1) $|x - 1| \le 3$; 2) $|x - 2| \ge 2$; 3) $|y - 1| \le 3$; 4) $|y - 1| \ge 1$;

5) $xy \ge 1$; 6) $xy \le 2$; 7) $xy - 2 \ge 0$; 8) $xy - 7y < 2$.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

5.18. Изобразите на координатной плоскости множество точек, заданное неравенством:

1) $x^2 + y^2 \mathrm{m} 9$; 2) $x^2 + y^2 \mathrm{l}\ 4$;

3) $x^2 + y^2 < 8$; 4) $(x-1)^2 + y^2 \mathrm{m} 9$;

5) $x^2 + (y-1)^2 \mathrm{l}\ 10$; 6) $(x+1)^2 + (y-2)^2 \mathrm{m} 5$;

7) $(x+2)^2 + (y-1)^2 \mathrm{l}\ 8$; 8) $(x+1)^2 + (y-3)^2 > 10$;

9) $(2-x)^2 + (y+2)^2 \mathrm{m} 16$.

5.19. Назовите множество точек координатной плоскости, которое задано с помощью неравенства:

1) $(x-1)^2 + y^2 \mathrm{l}\ 12$; 2) $x^2 + (y-3)^2 < 3$;

3) $(x+1)^2 + (y-3)^2 \mathrm{l}\ 9$; 4) $x^2 + (y-21)^2 \mathrm{m} 0$;

5) $(x+2)^2 + y - 2 \mathrm{l}\ 0$; 6) $(x-2)^2 + y + 3 \mathrm{m} 0$.

Опорные понятия для овладения новыми знаниями

Неравенство, решение неравенства, неравенства с двумя переменными, множество решений неравенств, координатная плоскость, системы нелинейных неравенств.

§ 6. СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Ключевые понятия

Системы нелинейных неравенств

Вы научитесь решать системы нелинейных неравенств с двумя переменными.

Рассмотрим системы неравенств с двумя переменными, в которых одно или несколько неравенств являются нелинейными.

Например, $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4, \\ y < \frac{1}{x}; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 4, \\ xy < 1; \end{cases}$ $\begin{cases} y \leq x^2, \\ y \geq \frac{1}{x}; \end{cases}$ $\begin{cases} y \leq x^2, \\ xy > 1 \end{cases}$ — это системы нелинейн ых неравенст в с двумя переменными.

Решение системы нелинейных неравенств с двумя переменными изображают на координатной плоскости. Для этого надо изобразить в одной и той же координатной плоскости решения каждого неравенства в отдельности, а затем найти их общее решение.

Используя рисунки 15 и 16 объясните, как найти множества решений систем нелинейных неравенств с двумя переменными: $\begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 4, \\ y < \dfrac{1}{x}; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+y^2 \geqslant 4, \\ xy < 1; \end{cases}$ $\begin{cases} y \leqslant x^2, \\ y \geqslant \dfrac{1}{x}; \end{cases}$ $\begin{cases} y \leqslant x^2, \\ xy \geqslant 1 \end{cases}$ и как показать эти множества решений на координатной плоскости.

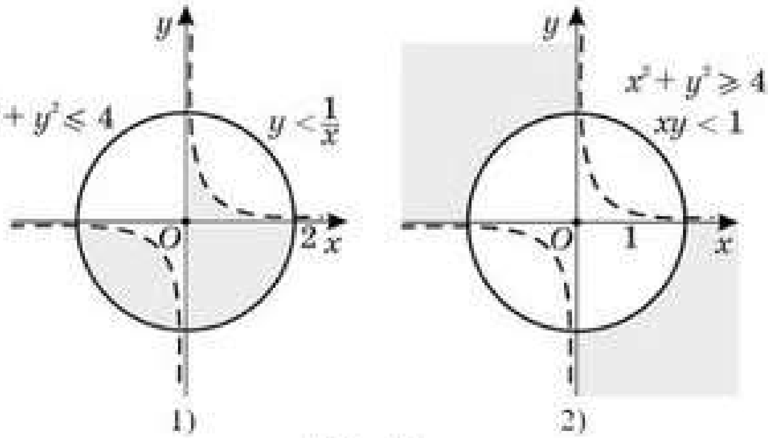


Рис. 15

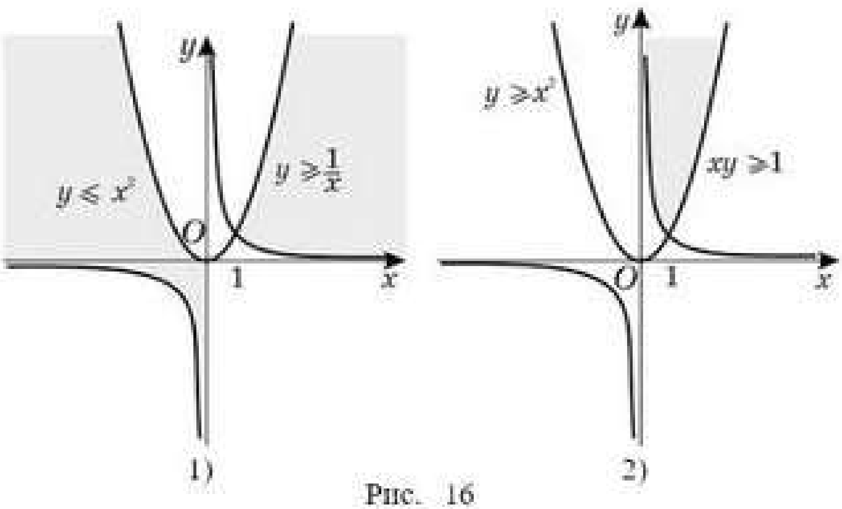


Рис. 16

Поскольку множество решений системы нелинейных неравенств с двумя переменными изображают на координатной плоскости, то говорят, что система нелинейных неравенств с двумя переменными задает на координатной плоскости множество точек или некоторую геометрическую фигуру.

1. Что является решением системы нелинейных неравенств с двумя переменными?
2. Сколько решений может иметь система нелинейных неравенств с двумя переменными?

Упражнения

А

6.1. Изобразите штриховкой на координатной плоскости множество точек, заданных системой неравенств:

1) $\begin{cases} y - x < 0, \\ 2x + y \leqslant 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y - 2x < 0, \\ 3x + y \leqslant 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2y - x \geqslant 0, \\ 2x - y \leqslant 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y - 3x + 1 \geqslant 0, \\ x + 2y \leqslant 6. \end{cases}$

6.2. Является ли решением системы неравенств $\begin{cases} 2x + y + 4 > 0, \\ y - 2 \geqslant x^2 \end{cases}$ пара значений переменных x и y:

1) (2; –1); 2) (1; 6); 3) (–4; 7); 4) (0; 4)?

6.3. На координатной плоскости покажите штриховкой множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств:

1) $\begin{cases} 3x - y - 1 < 0, \\ y < 3 - x^2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y - 2 < 0, \\ y < 4{,}5 - x^2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - y + 4 > 0, \\ y \geqslant x^2 - 1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x - y + 3 > 0, \\ y \leqslant x^2 + 2. \end{cases}$

6.4. Задайте системой неравенств множество точек:

1) I четверть; 2) II четверть; 3) III четверть; 4) IV четверть координатной плоскости.

6.5. Начертите на координатной плоскости прямоугольник, заданный системой неравенств, и найдите его площадь:

1) $\begin{cases} -2 \leqslant y \leqslant 3, \\ -1 \leqslant x \leqslant 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -3 \leqslant y \leqslant 4, \\ -2 \leqslant x \leqslant 5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} -2 \leqslant y \leqslant 0, \\ 1 \leqslant x \leqslant 3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2{,}1 \leqslant y \leqslant 3, \\ 1{,}2 \leqslant x \leqslant 3{,}5. \end{cases}$

6.6. Покажите, что является прямоугольником четырехугольник, заданный системой неравенств:

1) $\begin{cases} 0 \leqslant x - y \leqslant 3, \\ -1 \leqslant x + y \leqslant 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 0 \leqslant x - y \leqslant 5, \\ -2 \leqslant x + y \leqslant 5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 0 \leqslant 2x - y \leqslant 4, \\ -1 \leqslant 0{,}5x + y \leqslant 2. \end{cases}$

6.7. На координатной плоскости покажите штриховкой множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств:

1) $\begin{cases} y - x^2 < 0, \\ 2x + y \leqslant 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y - 2x^2 < 0, \\ 3x + y \leqslant 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2y - x^2 \geqslant 0, \\ 2x^2 + y \leqslant 3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y - 3x^2 + 1 \geqslant 0, \\ x^2 + 2y \leqslant 6. \end{cases}$

6.8. Является ли решением системы неравенств $\begin{cases} x^2 + y^2 \geqslant 9, \\ y \geqslant x^2 - 3 \end{cases}$ пара значений переменных x и y:

1) $(1;\ 2)$; 2) $(2;\ 9)$; 3) $(-3;\ 0)$; 4) $(-2;\ -2)$?

B

6.9. На координатной плоскости покажите штриховкой множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств:

1) $\begin{cases} y - 1 < 0, \\ x^2 + y^2 < 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y \geqslant 0, \\ x^2 + y^2 < 5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x - 1 < 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 9; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x + 1 \geqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 16; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} y + x < 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 1; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} y - x \geqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 4; \end{cases}$

7) $\begin{cases} y + 2x \geqslant 0, \\ x^2 + y^2 \geqslant 9; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} y - 0{,}5x \leqslant 0, \\ x^2 + y^2 \geqslant 16. \end{cases}$

6.10. Изобразите на координатной плоскости множество точек, заданное системой неравенств:

1) $\begin{cases} y - x^2 \geqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y - 0{,}5x^2 \leqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 9; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y - x^2 \geqslant 1, \\ x^2 + y^2 \geqslant 1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y - x^2 \geqslant -2{,}5, \\ x^2 + y^2 > 16. \end{cases}$

6.11. Изобразите множество точек плоскости, которое задается системой неравенств:

1) $\begin{cases} x + y < 2, \\ x^2 + y^2 \leqslant 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + y < 1, \\ x^2 + y^2 \leqslant 4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x - y \geqslant 3, \\ x^2 + y^2 \leqslant 1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} -x + y < 2, \\ x^2 + y^2 \leqslant 25. \end{cases}$

6.12. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых являются решениями системы неравенств:

1) $\begin{cases} y^2 + x^2 \geqslant 1, \\ x^2 + y^2 \leqslant 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y - 0{,}5x^2 \leqslant 1, \\ x^2 + y^2 \leqslant 9; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y - 2x^2 + x \leqslant 1, \\ x^2 + y^2 \geqslant 1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y^2 + x^2 \geqslant 5, \\ x^2 + y^2 \leqslant 16. \end{cases}$

6.13. Постройте треугольник, заданный системой неравенств:

1) $\begin{cases} 2y - 5 \leqslant 3x, \\ 2x + y \leqslant 6, \\ y + 3 \geqslant 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y - 3 \leqslant 4x, \\ 3x + y \leqslant 7, \\ y + 2 \geqslant 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y - 4 \leqslant -3x, \\ 2x - y \leqslant 6, \\ x \geqslant -4. \end{cases}$

6.14. Задайте системой неравенств кольцо, если его ограничивают окружности, которые имеют центр в точке:

1) $A(2;\ 5)$ и их радиусы равны 2 и 4;

2) $A(-1;\ 2)$ и их радиусы равны 1 и 3;

3) $A(-2;\ -1)$ и их радиусы равны $\sqrt{3}$ и $\sqrt{6}$;

4) $A(1,5;\ -2)$ и их радиусы равны $\sqrt{5}$ и $2\sqrt{2}$.

C

6.15. Изобразите на координатной плоскости множество точек, заданное системой неравенств:

1) $\begin{cases} |x| < 2, \\ x^2 + y^2 \leqslant 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} |x| \geqslant 1, \\ x^2 + y^2 \leqslant 4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} |x| \leqslant 3, \\ x^2 + y^2 \geqslant 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} |x| < 4, \\ x^2 + y^2 \geqslant 1; \end{cases}$

5) $\begin{cases} |y| < 2, \\ x^2 + y^2 > 8; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} |y| < 1,5, \\ x^2 + y^2 \leqslant 9; \end{cases}$

7) $\begin{cases} |y| < 4,5, \\ x^2 + y^2 \geqslant 2,89; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} |y| \geqslant 2, \\ x^2 + y^2 < 16. \end{cases}$

6.16. Запишите систему неравенств, задающих на плоскости множество точек, показанных штриховкой на рисунке 17.

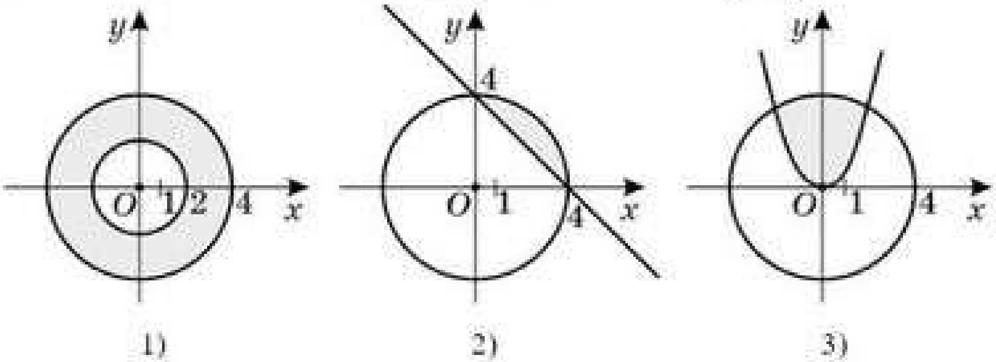


Рис. 17

6.17. Покажите штриховкой множество точек координатной плоскости, заданной системой неравенств:

1) $\begin{cases} y \geq |x|, \\ x + y \leq 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y \geq 3 - |x|, \\ 3x - y \leq 4; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y \geq 2 - |x|, \\ 0{,}5x + y \leq 3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y \geq 3 - |x|, \\ 3x - y \leq 2. \end{cases}$

6.18. Покажите штриховкой множество точек координатной плоскости, заданной системой неравенств:

1) $\begin{cases} y \geq |x|, \\ x^2 + y \leq 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y \geq |x|, \\ x^2 + y \leq 4; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y \geq 2 - |x|, \\ x^2 + y \leq 3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y \geq 3 - |x|, \\ x^2 - y \leq 3. \end{cases}$

***6.19.** При каких значениях параметров a и c системой неравенств $\begin{cases} 2x - y \leq 3c, \\ ax + y \leq 3 \end{cases}$ задается на координатной плоскости полоса? При ведите пример.

6.20. Покажите штриховкой множество точек координатной плоскости, заданной системой неравенств:

1) $\begin{cases} |y| \geq |x|, \\ x^2 + y^2 \leq 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} |y| \leq |x|, \\ x^2 + y^2 \leq 4; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y \geq 2 - |x|, \\ x^2 + y^2 \leq 5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y \geq 3 - |x|, \\ x^2 + y^2 \leq 7. \end{cases}$

ПОВТОРИТЕ

6.21. Найдите корни уравнения:

1) $x^3 - 2x^2 - 4x = -8;$ 2) $x^3 - 5x^2 = 2x - 10;$
3) $x^4 - 2x^2 - 4x^3 = -8x.$

6.22. Значение разности квадратов двух чисел равно 100. Если из утроенного первого числа вычесть удвоенное второе число, то получим число 30. Найдите эти числа.

6.23. Постройте график уравнения:

1) $\dfrac{2x - y}{x - 1} = 0;$ 2) $\dfrac{x^2 - y}{x + 1} = 0;$
3) $\dfrac{2x + x^2 - y}{x + 1} = 0;$ 4) $\dfrac{4x - x^2 - y}{x - 1} = 0.$

6.24. В специализированном книжном магазине продается 60 видов книг для детей дошкольного возраста. Они распределены по цене (граничную цену относят к более высокой категории):

Таблица 3

Цена (в тенге)	до 150	от 150 до 300	от 300 до 500	500—600	более 600
Количество видов	7	8	?	20	5

Найдите по таблице 3:
1) сколько видов книг, стоимость которых от 300 до 500 тенге;
2) отношение количества самых дорогих книг к общему количеству;
3) процент видов книг ценой от 500 тенге и дороже от общего числа.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

6.25. В таблице 4 представлены результаты бега на дистанции 200 м среди юношей в возрасте 17 лет.

Таблица 4

Интервалы результата бега (в секундах)	24—25	26—27	28—29	30—31	32—33
Число юношей 17 лет	2	7	8	10	3

1) Сколько юношей в возрасте 17 лет участвовало в соревновании?
2) У скольких юношей показатели от 28 с до 31 с?
3) Сколько юношей имеют результаты не более 29 с?

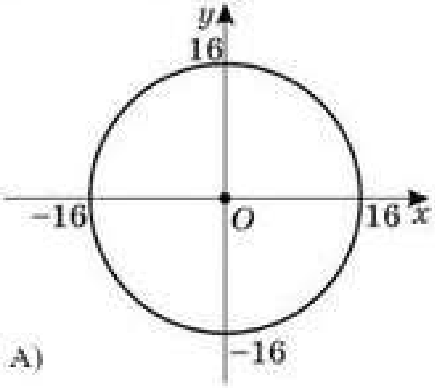
6.26. Если составлять двузначные числа, используя только цифры 0, 5 и 6, то сколько двузначных чисел можно составить?

Опорные понятия для овладения новыми знаниями

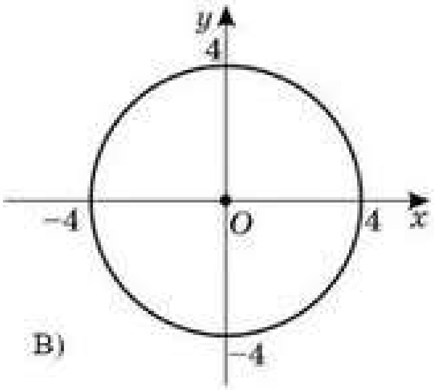
Множество, элементы множества, отношение между множествами, подмножество, объединение и пересечение множеств, пустое множество.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

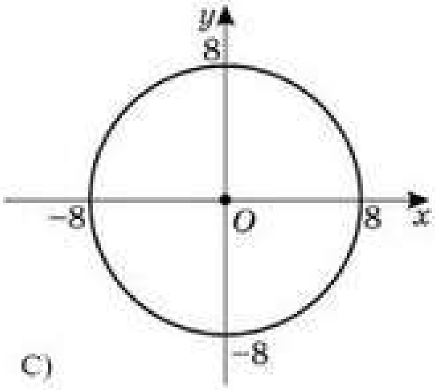
1. Какой из представленных ниже рисунков изображает график уравнения $x^2 + y^2 = 16$?



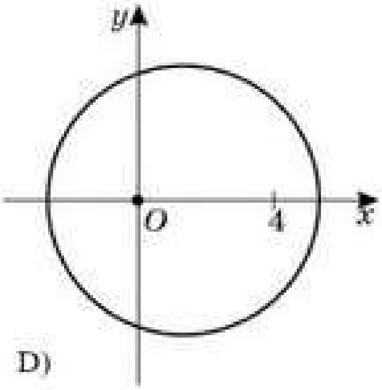
A)



B)

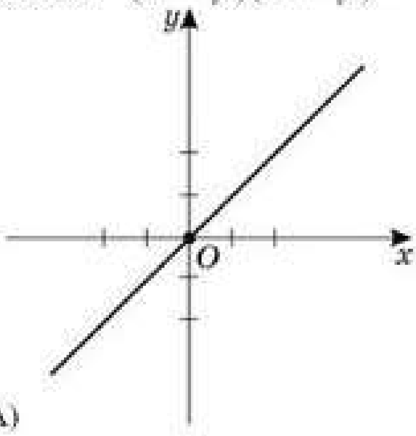


C)

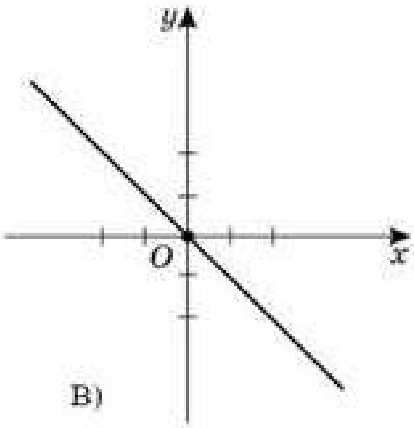


D)

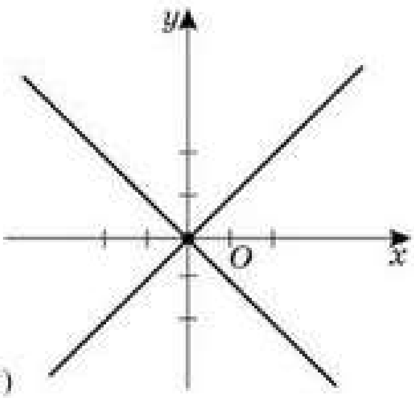
2. Какой из представленных ниже рисунков является графиком уравнения $(x - y)(x + y) = 0$?



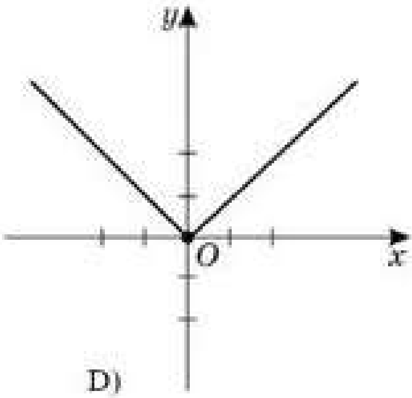
A)



B)



C)



D)

3. Напишите уравнение окружности с центром в начале координат, если известно, что она проходит через точку $A\ (5;\ 12)$:

A) $x^2 + y^2 = 169$; B) $(x + 5)^2 + (y + 12)^2 = 169$;
C) $x^2 + y^2 = 13$; D) $(x - 5)^2 + (y - 12)^2 = 169$.

4. Какая из точек принадлежит окружности $x^2 + y^2 = 144$:
A) $(6;\ 10)$; B) $(0;\ 12)$; C) $(9;\ 8)$; D) $(-12;\ 12)$?

5. Является ли решением уравнения $x^2 - y = -2$ пара значений переменных:
A) $(1;\ 3)$; B) $(0;\ 0)$; C) $(-2;\ 2)$; D) $(-1;\ -3)$?

6. Какие из значений переменных являются решением уравнения $(x^2 + 1)y = 0$:
A) $x = -1;\ y = 1$; B) $x = 1;\ y = 0$;
C) $x = -1;\ y = -1$; D) $x = 0;\ y = 5$?

7. Какие из значений переменных являются решением уравнения $x(1 - y) = 15$:
A) $x = 15;\ y = 0$; B) $x = 0;\ y = 16$;
C) $x = 15;\ y = 1$; D) $x = 16;\ y = 0$?

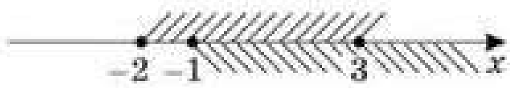
8. Какие из значений переменных не удовлетворяют уравнению $(x - 1)(y - 2) = 0$:
A) $x = -1;\ y = 2$; B) $x = 1;\ y = -2$;
C) $x = 1;\ y = 2$; D) $x = -1;\ y = -2$?

9. Какие из значений переменных являются решением уравнения $x - 3y = 1$:
A) $x = 0;\ y = 0$; B) $x = 4;\ y = -1$;
C) $x = 0;\ y = -1$; D) $x = 4;\ y = 1$?

10. Сколько решений имеет уравнение $(x + 5)^2 + (y - 3)^2 = -1$:
A) не имеет решения; B) одно решение;
C) два решения; D) не указан правильный ответ?

11. Изображением решения системы неравенств $\begin{cases} x^2 - x \geqslant 6, \\ x + 1 \geqslant 0 \end{cases}$ на числовой прямой является:

A) 

B) 

C) 

D) 

12. Найдите область определения функции $y = \dfrac{\sqrt{x^3 - 4x}}{x}$:

Алгебра

A) $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$;
B) $[-2;\ 0) \cup (0;\ 2]$;
C) $(-\infty;\ 0] \cup (0;\ +\infty)$;
D) $[-2;\ 0) \cup (0;\ +\infty]$;
E) $(-2;\ 0) \cup (2;\ +\infty)$.

13. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^3 \cdot y^5 = 8, \\ x^5 \cdot y^3 = 32: \end{cases}$

A) $\{(2;\ 1),\ (-2;\ -1)\}$;
B) $\{(1;\ 1),\ (0;\ 1)\}$;
C) $\{(1;\ -1),\ (1;\ 1)\}$;
D) $\{(0;\ -2),\ (-2;\ 0)\}$;
E) $\{(-1;\ 2),\ (2;\ -1)\}$.

14. Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y = -1, \\ x^2 + y^2 = 1: \end{cases}$

A) $\{(-1;\ 0),\ (0;\ -1)\}$;
B) $\{(1;\ 0),\ (0;\ 1)\}$;
C) $\{(-2;\ 0),\ (0;\ -2)\}$;
D) $\{(1;\ 1),\ (-1;\ 1)\}$;
E) $\left\{\left(0; \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}; 0\right)\right\}$.

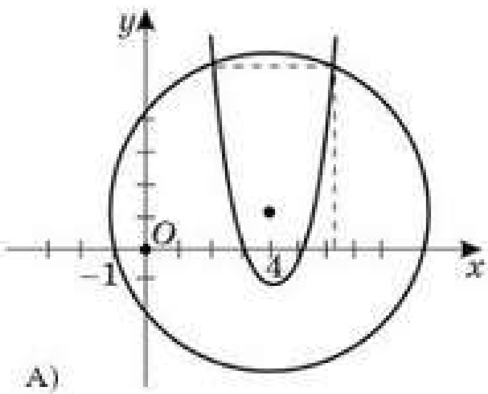
15. Решите систему уравнений $\begin{cases} xy + x = -4, \\ x - y = 6: \end{cases}$

A) $\left\{(-1;5), \left(5; \frac{1}{2}\right)\right\}$;
B) $\{(5;\ -1),\ (-1;\ -5)\}$;
C) $\{(1;\ -5),\ (4;\ -2)\}$;
D) $\{(2;\ 4),\ (-5;\ -1)\}$;
E) $\{(-2;\ -4),\ (5;\ 1)\}$.

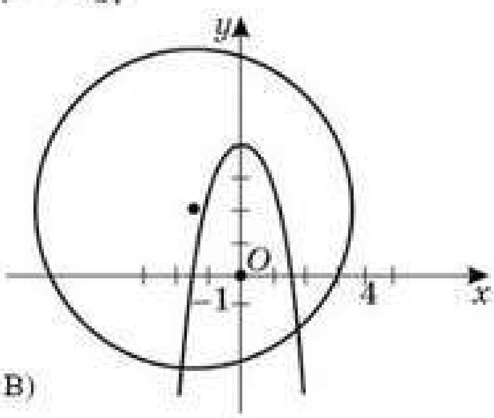
16. Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y = 14, \\ \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = 2\dfrac{1}{12}: \end{cases}$

A) $\{(6;\ 8),\ (8;\ 6)\}$;
B) $\{(10;\ 4),\ (4;\ 10)\}$;
C) $\{(-18;\ 4),\ (4;\ -18)\}$;
D) $\{(-6;\ -8),\ (-8;\ -6)\}$;
E) $\{(4;\ 2),\ (-2;\ -4)\}$.

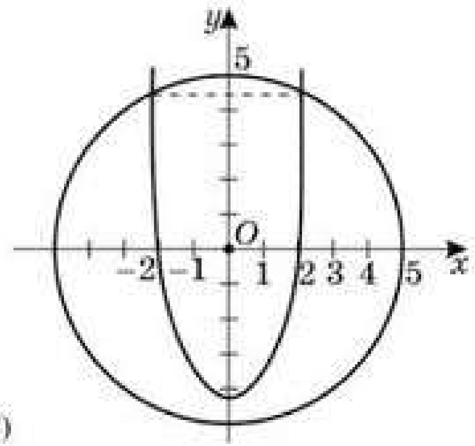
17. Определите, на каком из рисунков изображено графическое решение системы уравнений $\begin{cases} (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25, \\ y = x^2 - 4: \end{cases}$



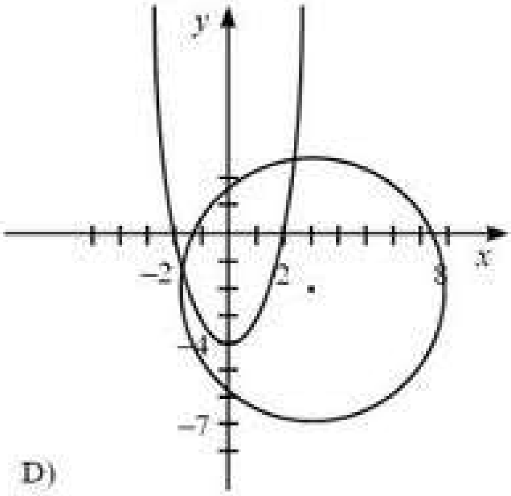
A)



B)



C)



D)

18. Какая пара чисел является решением системы $\begin{cases} x^2 - y^2 = -40, \\ x + y = 4: \end{cases}$

A) (–7; 3); B) (–3; 7); C) (7; –3); D) (–7; –3); E) (7; 3)?

19. Пусть $(x_0; y_0)$ — решение системы $\begin{cases} x - 2y = -3, \\ y^2 - 2x = 3. \end{cases}$ Найдите $x_0 + 2y_0$:

A) –1 или 9; B) 1 или 6; C) 1 или 9;
D) –1 или 6; E) 0 или 9.

20. Какая из систем не имеет решений:

A) $\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 2; \end{cases}$ B) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17, \\ xy = 4; \end{cases}$ C) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ x + y = 5; \end{cases}$

D) $\begin{cases} x - y = 1, \\ xy = -1; \end{cases}$ E) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 23, \\ xy = 1? \end{cases}$

21. Какая пара чисел является решением системы $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ x + y = -4: \end{cases}$

A) (–1; 3), (3; –1); B) (–1; –3), (5; 1);
C) (1; 3), (–5; –1); D) (–1; –3), (–3; –1);
E) (1; –3), (–5; 1)?

22. Пусть $(x_0; y_0)$ —решение системы $\begin{cases} x + 2y = 4, \\ y^2 + 2x = 5. \end{cases}$ Найдите $2x_0 - y_0$:

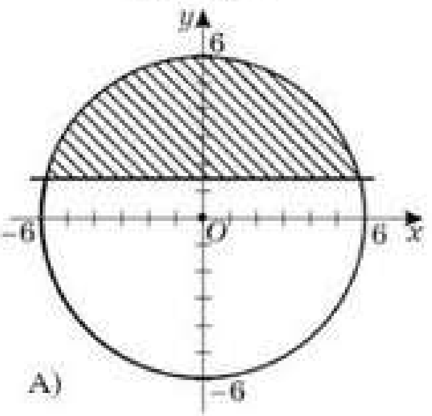
A) 0 или 4; B) 1 или –3; C) 3 или –7;
D) –3 или 3; E) 1 или –7.

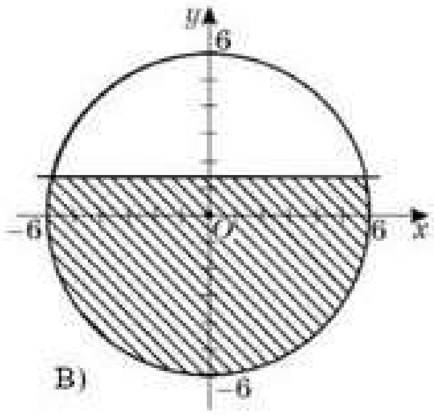
23. Какая из систем имеет решение:

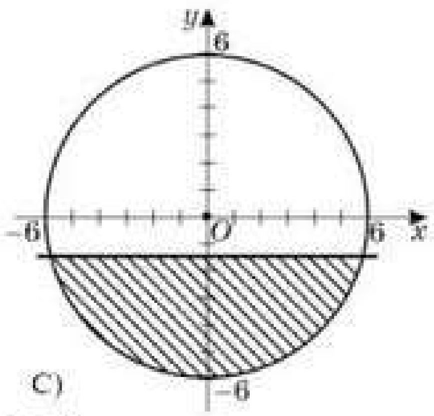
A) $\begin{cases} x^2 + y^2 = -3, \\ x + y = 2; \end{cases}$ B) $\begin{cases} x + y = 2, \\ xy = 2; \end{cases}$ C) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ xy = 2; \end{cases}$

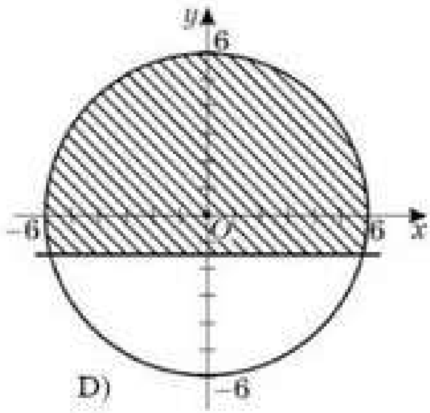
D) $\begin{cases} x - y = 1, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = -1; \end{cases}$ E) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = 2, \\ xy = -2? \end{cases}$

24. На каком из рисунков изображено решение системы неравенств $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 36, \\ y \geqslant 1{,}5: \end{cases}$

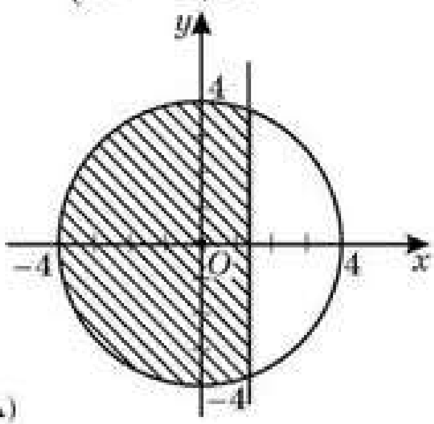

A)

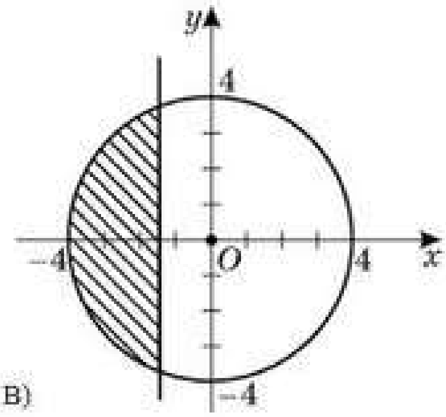

B)

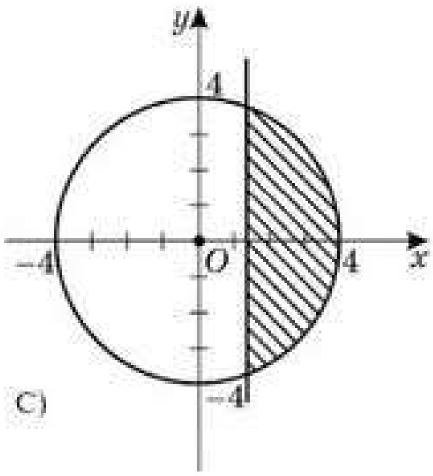

C)


D)

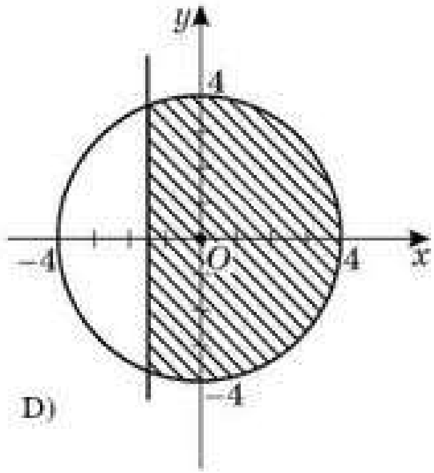
25. На каком из рисунков изображено решение системы неравенств $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 16, \\ x \geqslant -1{,}5: \end{cases}$


A)


B)

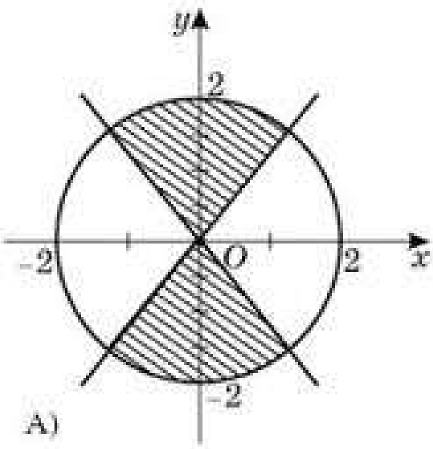


C)

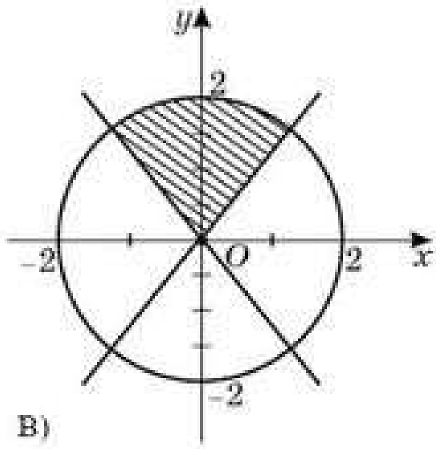


D)

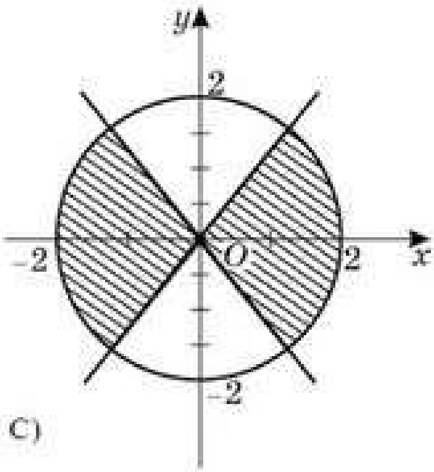
26. Укажите геометрическую иллюстрацию решений системы $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 4, \\ x^2 - y^2 \geqslant 0: \end{cases}$



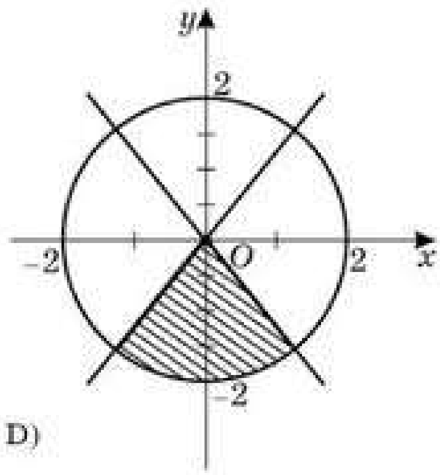
A)



B)

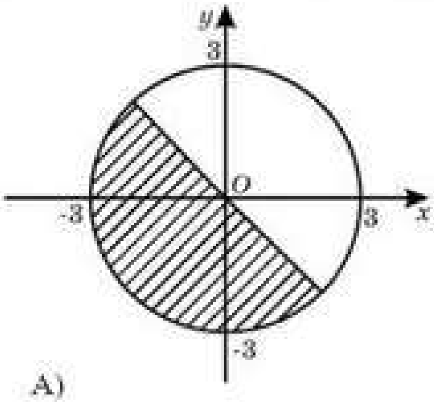


C)

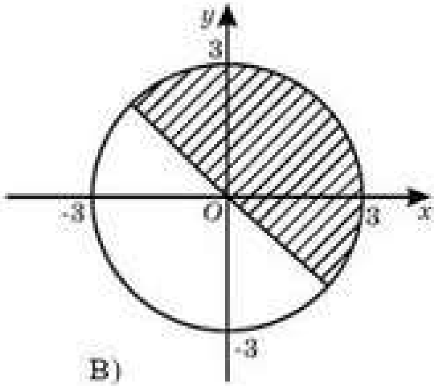


D)

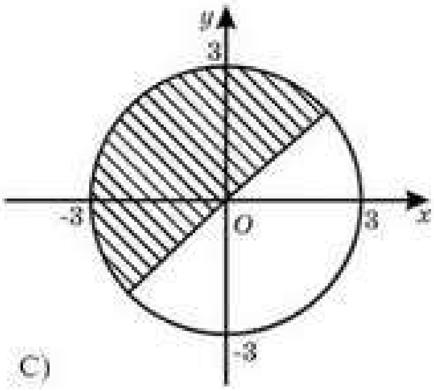
27. Используя рисунки, изобразите множество решений системы неравенств на координатной плоскости $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 9, \\ 2x^2 + 3y^2 \geqslant 0: \end{cases}$



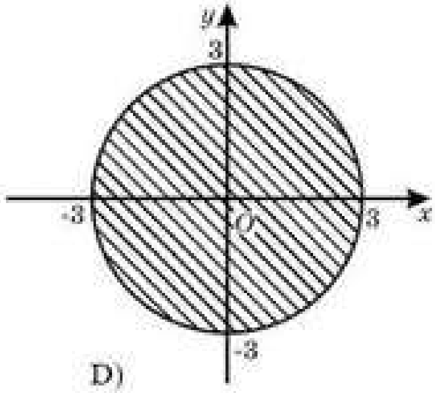
A)



B)



C)



D)

Глава II. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

§ 7. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ПРАВИЛА КОМБИНАТОРИКИ (ПРАВИЛО СУММЫ И ПРАВИЛО ПРОИЗВЕДЕНИЯ)

Ключевые понятия

Комбинаторика, правило суммы, правило произведения

Вы ознакомитесь с правилами комбинаторики (правилами суммы и произведения);

научитесь решать задачи на использование правил суммы и разности.

Задачи, в которых из элементов некоторого конечного множества по некоторым правилам составляются различные комбинации этих элементов и подсчитывается их число, называются ***комбинаторными задачами*** .

Область математики, в которой изучают комбинаторные задачи, называется *комбинаторикой* .

С комбинаторными задачами люди столкнулись в глубокой древности. Уже несколько тысячелетий назад в Древнем Китае увлекались составлением магических квадратов, в которых заданные числа располагали так, что их сумма по всем горизонталям, вертикалям и главным диагоналям была одной и той же.

Квадрат Ло Шу — магический квадрат 3 · 3. Был известен еще в Древнем Китае, первое изображение на черепаховом панцире датируется 2200 до н. э. (рис. 18).

4	9	2
3	5	7
8	1	6

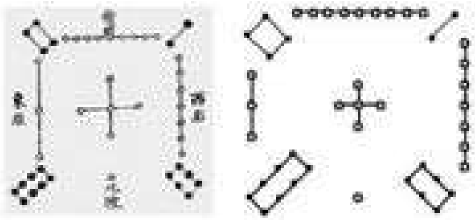


Рис. 18

Комбинаторика становится наукой лишь в XVII в., в период, когда возникла теория вероятностей.

Правило суммы позволяет найти *число элементов в объединении* двух множеств.

ВЫ ЗНАЕТЕ

Объединением множеств X и Y называется множество, состоящее из таких элементов, которые принадлежат хотя бы одному множеству X или Y.
Объединение множеств X и Y обозначают: $X \cup Y$.

Рассмотрим случай когда множества не имеют общих элементов.

В каком отношении находятся множества A и B (рис. 19)? Найдите $n(A)$ и $n(B)$ и $n(A \cup B)$.

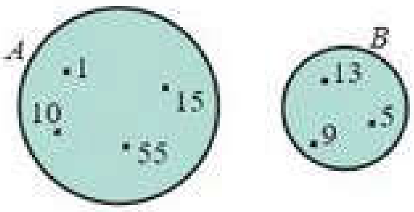


Рис. 19

Правило суммы:

Если множества X и Y не пересекаются и множество X содержит a элементов, а множество Y содержит b элементов, то объединение множеств X и Y содержит $(a + b)$ элементов.

$$X \cap Y = \varnothing \Rightarrow n(X \cup Y) = n(X) + n(Y).$$

ВЫ ЗНАЕТЕ

Пересечением множеств X и Y называется множество, состоящее из таких элементов, которые принадлежат одновременно множеству X и Y.
Пересечение множеств X и Y обозначают: $X \cap Y$.
Рассмотрим случай когда множества имеют общие элементы.

В каком отношении находятся множества C и D (рис. 20)? Найдите $n(C)$ и $n(D)$ и $n(C \cap D)$.

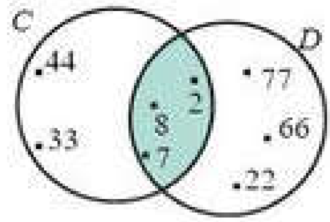


Рис. 20

ВЫ ЗНАЕТЕ

Множество, которое не содержит ни одного элемента, называется *пустым множеством* и обозначается символом $\varnothing$.

ОБЪЯСНИТЕ

Почему $X \cap Y \neq \varnothing \Rightarrow n(X \cup Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cap Y)$?

ПРИМЕР

1. Некоторые учащиеся класса учатся в музыкальной школе, другие ходят в спортивные секции. 10 учащихся класса учатся в музыкальной школе, 17 учащихся класса ходят в спортивные секции. Двое из них учатся и в музыкальной школе, и ходят в спортивные секции. Сколько учащихся в классе?

Решение.

A — множество учащихся класса, которые учатся в музыкальной школе, тогда $n(A) = 10$.

B — множество учащихся класса, которые ходят в спортивные секции, тогда $n(B) = 17$.

$A \cap B$ — множество учащихся класса, которые учатся и в музыкальной школе, и ходят в спортивные секции, тогда $n(A \cap B) = 2$.

Тогда число учащихся в классе есть $n(A \cup B) =$
$= n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 10 + 17 - 2 = 25.$

Ответ: в классе 25 учащихся.

Проверьте с помощью примера справедливость формулы: $n(X \cup Y \cup Z) = n(X) + n(Y) + n(Z) -$
$- n(X \cap Y) - n(X \cap Z) - n(Y \cap Z) + n(X \cap Y \cap Z)$ (рис. 21).

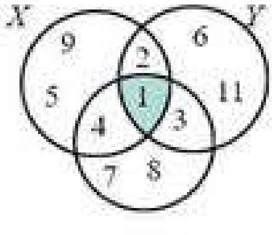


Рис. 21

ПРИМЕР

2. В олимпиаде по математике приняли участие 13 учащихся, по физике — 12, по химии — 10, по математике и химии — 5, по физике и химии — 3, по математике и физике — 2, по математике, физике и химии — 1. Сколько учащихся приняли участие в олимпиадах?

Решение.

A_1 — множество учащихся класса, которые приняли участие в олимпиаде по математике, тогда $n(A_1) = 13$.

A_2 — множество учащихся класса, которые приняли участие в олимпиаде по физике, тогда $n(A_2) = 12$.

A_3 — множество учащихся класса, которые приняли участие в олимпиаде по химии, тогда $n(A_3) = 10$.

$A_1 \cap A_2$ — множество учащихся класса, которые приняли участие в олимпиаде по математике и физике, тогда $n(A_1 \cap A_2) = 2$.

$A_1 \cap A_3$ — множество учащихся класса, которые приняли участие в олимпиаде по математике и химии, тогда $n(A_1 \cap A_3) = 5$.

$A_2 \cap A_3$ — множество учащихся класса, которые приняли участие в олимпиаде по физике и химии, тогда $n(A_2 \cap A_3) = 3$.

$A_1 \cap A_2 \cap A_3$ — множество учащихся класса, которые приняли участие в олимпиаде по математике, физике и химии, тогда $n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) =$
$= 1$.

$n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = ?$

По формуле
$n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 13 + 12 + 10 - 2 - 3 - 5 + 1 = 26$ (учащихся).

Ответ : 26 учащихся.

Рассмотрим другую формулировку правила суммы.

В каком отношении находятся множества A и B (рис. 22)? Сколькими способами можно выбрать *элемент* $a \in A$? Сколькими способами можно выбрать *элемент* $b \in B$? Сколькими способами можно выбрать *один элемент* *"a или b"*?

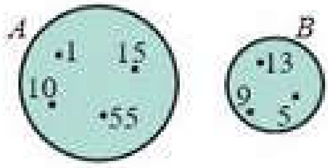


Рис. 22

Другая формулировка правила суммы:

Если элемент $a \in A$ можно выбрать m способами, а элемент $b \in B$ можно выбрать n способами, причем $A \cap B = \emptyset$, то выбрать один элемент "a или b" можно $m + n$ способами.

ПРИМЕР

3. Сколькими способами можно купить одного гуся, если у одного продавца их 4, у другого — 6?

Решение. A — множество гусей у одного продавца, тогда $n(A) = 4$. B — множество гусей у другого продавца, тогда $n(B) = 6$. По правилу суммы $4 + 6 = 10$ (сп.).

Ответ : 10 способами.

Рассмотрим правило произведения.

$X = \{1,3,5,7\}$ и $Y = \{2, 4\}$. Сколькими способами можно выбрать элемент $x \in X$? Сколькими способами можно выбрать элемент $y \in Y$? Составьте пары $(x; y)$, $x \in X$ и $y \in Y$. Сколько таких пар получилось? Сколькими способами можно выбрать пару "x и y"?

Правило произведения:

Если элемент $x \in X$ можно выбрать m способами, а элемент $y \in Y$ можно выбрать k способами, то пару "x и y" можно выбрать $m \cdot k$ способами.

ПРИМЕР

4. Сколько трехзначных чисел можно составить, используя цифры 5, 6, 7, если они в записи числа не повторяются?

Решение. Первую цифру искомого числа можно выбрать тремя способами (это может быть либо 5, либо 6, либо 7).

Вторую цифру искомого числа можно выбрать двумя способами, так как цифры в записи этого числа не повторяются (если первую цифру выбрали 5, то вторая может быть либо 6, либо 7, аналогично, если первая цифра 6, то вторая либо 5, либо 7 и т. д.).

Третью цифру искомого числа можно выбрать одним способом, а три цифры по правилу произведения можно выбрать $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ (способами).

Ответ: 6 трехзначных чисел.

Решите данную задачу способом перебора и запишите эти числа.

1. Приведите пример комбинаторной задачи.
2. В каких случаях используют правило суммы?
3. В каких случаях используют правило произведения?

Упражнения

A

7.1. Сколькими способами можно приобрести 1 кг яблок или груш, если в магазине имеется 4 различных сорта яблок и 3 различных сорта груш?

7.2. Сколькими способами можно приобрести 1 кг конфет и 1 кг печенья, если в магазине имеется 10 различных сортов конфет и 12 различных сортов печенья?

7.3. Сколько трехзначных чисел можно составить, используя цифры 2; 4; 9, если они в записи числа не повторяются?

7.4. Имеется 5 различных конвертов и 4 разные марки. Сколькими способами можно расклеить марки на конверты?

7.5. Все учащиеся класса либо увлекаются плаванием, либо игрой в теннис. 12 учащихся увлекаются плаванием, 18 учащихся — игрой в теннис, 5 учащихся — плаванием и игрой в теннис. Сколько в классе учащихся?

7.6. Составлено 7 букетов с тюльпанами, 9 — с нарциссами, 3 — с тюльпанами и нарциссами. Сколько всего букетов составлено?

B

7.7. 12 учащихся сдавали экзамены по математике и физике. Из двух экзаменов 1 учащийся не сдал экзамен по математике, 3 — по физике и 1 — по двум предметам. Сколько всего неуспевающих учащихся?

7.8. 42 учащихся приняли участие в олимпиаде по математике, 37 — по информатике, 19 — по двум предметам. Сколько всего учащихся участвовало в олимпиадах по этим предметам?

7.9. Из 9 простых и четных чисел 7 чисел являются простыми, одно простое четное. Сколько четных чисел из этих 9?

7.10. Из 30 чисел, которые больше 10, 20 чисел являются простыми, 25 — нечетными. Сколько простых нечетных чисел из них?

7.11. Имеется 20 прямоугольников, ромбов и квадратов. Из них 14 являются ромбами, 9 — прямоугольниками. Сколько всего квадратов?

C

7.12. Из группы 9 учащихся на экзаменах получили отличные отметки, 15 — хорошие, 7 — удовлетворительные, 6 — отличные и хорошие, 3 — удовлетворительные и хорошие, 3 — отличные и удовлетворительные, 2 — отличные, удовлетворительные и хорошие. Найдите число учащихся в группе.

7.13. Из 80 открыток на 40 изображены тюльпаны, на 20 — нарциссы, на 10 — сирень с тюльпанами, на 5 — сирень с нарциссами, на 5 — нарциссы с тюльпанами, на 10 — сирень с тюльпанами и нарциссами. Найдите число открыток с сиренью.

7.14. 1) Из 100 подарочных наборов в 50 находятся конфеты, в 45 — печенье, в 35 — мандарины, в 20 — конфеты, печенье и мандарины, в 25 — конфеты и печенье, в 15 — печенье и мандарины. Найдите число наборов с конфетами и мандаринами.
2) Из 50 сотрудников фирмы 40 человек владеют казахским языком, 20 — русским, 10 — английским, 15 — казахским и русским, 5 — казахским и английским, 5 — английским и русским. Сколько сотрудников владеют тремя языками — казахским, английским и русским?

ПОВТОРИТЕ

7.15. PISA Фирма предоставила текущие расходы за месяц в виде диаграммы (рис. 23). Общая сумма

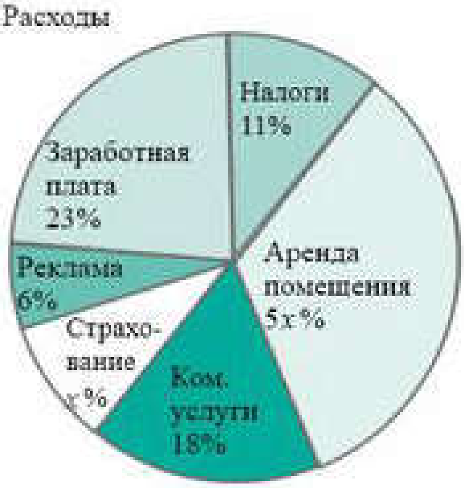


Рис. 23

расходов составляет 1 200 000 тг. Найдите расходы фирмы на налоги и страхование.

7.16. Поезд шел со скоростью 50 км/ч. Пассажир заметил, что встречный поезд прошел мимо него за 3 с. Найдите скорость встречного поезда, если его длина равна 80 м.

7.17. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 7, \\ 3x^2 - y^2 = 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^2 - 1 = y^2, \\ y^2 = x^2 - 0{,}5. \end{cases}$

7.18. Покажите штриховкой множество точек координатной плоскости, заданное системой неравенств:

1) $\begin{cases} |x| \geqslant 4; \\ y + 2x < 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y^2 + x^2 - 9 \leqslant 0; \\ y - 2|x| > 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} |x| \leqslant 2, \\ x^2 + y^2 - 16 \geqslant 0. \end{cases}$

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

7.19. Найдите число способов выбора четной цифры из цифр:

1) 1; 2; 3; 4; 5; 7; 8; 2) 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9.

7.20. Составьте все четные трехзначные числа, используя цифры 0, 5, 7, 9 при условии, что ни одна цифра не повторяется дважды.

Опорные понятия для овладения новыми знаниями

Множество, множество чисел, подмножество, элементы множества.

§ 8. ФАКТОРИАЛ ЧИСЛА. ПЕРЕСТАНОВКИ И РАЗМЕЩЕНИЯ

Ключевые понятия

Факториал, перестановка, размещение

Вы ознакомитесь с понятиями: *факториал числа, перестановка без повторений* и *размещение без повторений*, формулами комбинаторики для вычисления числа перестановок и размещений без повторений.

В математике часто встречаются произведения натуральных чисел начиная с 1 до некоторого числа. Например, $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$, или $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 700$ и т. п.

Произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно обозначают символически $n!$

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

Читают $n!$ — эн факториал.

Считают $1! = 1$ и $0! = 1$.

ПРИМЕР

1. $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$; $7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$.

Рассмотрим множество $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, которое требуется упорядочить, т. е. установить, какой элемент будет первым, какой вторым и т. д. Такие упорядоченные множества записываются не с помощью фигурных скобок, а с помощью круглых скобок. Записи (x_1, x_2) и (x_2, x_1) различны, поскольку порядок записи элементов в них неодинаков: $(x_1, x_2) \neq (x_2, x_1)$, но множества $\{x_1, x_2\}$ и $\{x_2, x_1\}$ равны.

Упорядоченные множества, содержащие все n элементов множества $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ называются ***перестановками из n элементов без повторений*** .

ПРИМЕР

2. $A = \{10, 17, 28, 9\}$, тогда $(10, 17, 28, 9)$, $(17, 10, 28, 9)$; $(9, 17, 10, 28)$ — перестановки без повторений из 4 элементов множества A.

Обозначение : P_n — *число перестановок без повторений из n элементов.*

Теорема. Число перестановок без повторений из n элементов равно $n!$

В краткой записи теорема выглядит так: $P_n = n!$

Доказательство. Рассмотрим процесс составления перестановки без повторений из n элементов множества $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Составить перестановку — значит установить, какой из элементов множества A будет первым, какой вторым и т.д. Поскольку в множестве A содержится n элементов, то первый элемент перестановки можно выбрать n способами, второй элемент — $(n - 1)$ способом, так как элементы не повторяются. Выбор третьего элемента можно осуществить $(n - 2)$ способами. Продолжая этот процесс получим, что n-й элемент перестановки можно выбрать одним способом. Все n элементов по правилу произведения —

$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$ способами. ◻

ПРИМЕР

3. Сколько можно составить трехзначных чисел из цифр 9, 3, 7 при условии, что ни одна цифра не повторяется дважды?

Решение. Дано множество: $\{9, 3, 7\}$. Требуется его упорядочить и подсчитать число получившихся перестановок или перебором 937, 973, 739, 793, 397, 379. Значит, $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Ответ: можно составить 6 чисел.

Четыре цифры 1, 2, 3, 4 можно переставить $P_4 = 4! = 24$ способами.

***Размещениями без повторений из n по k** называются упорядоченные множества из k элементов, выбранных из множества, содержащего n элементов.*

Обозначение : A_n^k — *число размещений без повторений* из n по k.

Следовательно, в подмножествах из n элементов по k учитывается порядок элементов.

Теорема. $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$, **или** $A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$.

Доказательство. Пусть $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$; $n(X) = n$.

Рассмотрим процесс составления размещения без повторений из n по k.

Первый элемент упорядоченного множества можно выбрать n способами;

второй элемент — $(n-1)$ способом;

третий элемент — $(n-2)$ способами;

k-й элемент — $(n-k+1)$ способами.

Число способов выбора k-элементов найдем по правилу произведения. Тогда получим:

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) =$$

$$= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k) \cdot \ldots \cdot 1}{(n-k) \cdot \ldots \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Справедлива формула $A_n^k = \frac{P_n}{(n-k)!}$.

ПРИМЕР

4. Сколько словарей надо издать, чтобы можно было непосредственно выполнять переводы с любого из пяти языков: казахского, русского, английского, французского и немецкого на любой другой из этих языков?

Решение. X = {казахский, русский, английский, французский, немецкий}, $n(X) = 5$. Надо составить упорядоченные пары (без повторений элементов), т. е. упорядоченные множества из двух элементов, например, (каз., рус.), (рус., каз.) и т. п. Значит, требуется найти $A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20.$

Ответ : 20 словарей.

?

1. Что означает символ $n!$?
2. Что означают записи (x_1, x_2) и $\{x_1, x_2\}$?
3. В чем сходство и различие перестановок и размещений без повторений?
4. В каких случаях используют перестановки без повторений?
5. В каких случаях используют размещения без повторений?

Упражнения

A

8.1. 1) По какой формуле вычисляется число перестановок без повторений из n элементов?
2) По какой формуле вычисляется число размещений без повторений из n элементов по k?

8.2. Вычислите:

1) P_4; 2) P_6; 3) $\frac{P_7}{P_5}$; 4) $\frac{P_6}{P_8}$; 5) $\frac{P_8}{P_7} + \frac{P_5}{P_6}$; 6) $\frac{P_9}{P_7} - \frac{P_7}{P_5}$.

8.3. Найдите:
1) число перестановок цифр, изменяющих число 3334;
2) число перестановок цифр, не изменяющих число 3334;
3) число перестановок букв, не изменяющих слово *комбинаторика* .

8.4. 1) Найдите число четырехзначных чисел, которые можно составить из цифр 6, 7, 8, 9, при условии, что ни одна цифра не повторяется дважды.
2) Найдите число способов раскрасить треугольник, круг и квадрат тремя различными цветами: синим, красным, желтым.
3) Найдите число способов распределения семи мест среди 7 участников соревнований.

8.5. Найдите: 1) A_7^4; 2) A_5^4.

B

8.6. Решите уравнение:

1) $A_x^1 = 2$; 2) $A_x^1 = 2x$; 3) $A_x^2 = 2x$; 4) $A_x^2 = 3x + 12$.

8.7. 1) Найдите число способов выбора старосты и физрука класса из 20 учащихся.

2) Найдите число способов выставления двум учащимся одной из отметок $\{3,\ 4,\ 5\}$.

C

8.8. Найдите число способов раскраски 2 фигур 6 цветами .

8.9. Решите уравнение:

1) $A_x^2 = 20$; 2) $P_x = 24$; 3) $A_x^2 = x(x-1)$.

8.10. Найдите корни уравнения:

1) $A_x^3 = 14x - 2x^2$; 2) $A_x^3 = 20x + 4x^2$; 3) $A_x^3 = 2x^3 - 5x^2 - 6x$.

ПОВТОРИТЕ

8.11. 1) Значение суммы цифр положительного двузначного числа равно 13. Если от этого числа вычесть 27, то получим число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите данное число.

2) Значение суммы квадратов цифр положительного двузначного числа равно 13. Если от этого числа вычесть 9, то получим число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите данное число.

8.12. На координатной плоскости изобразите множество точек, удовлетворяющих системе неравенств:

1) $\begin{cases} x^2 \leqslant 9; \\ y + x^2 < 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y^2 + x^2 - 9 \leqslant 0; \\ y > x^2 - 2x; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} |x| \leqslant 3; \\ x^2 + y^2 - 9 \geqslant 0. \end{cases}$

8.13. Найдите наибольшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству:

1) $(4-x)(x-6)^2 > 0$; 2) $(x-3)^2(x-10)$ m 0;

3) $\dfrac{x^2 - 81}{x + 5} < 0$; 4) $\dfrac{13x - x^2}{x - 5{,}5} \geqslant 0$.

8.14. Имеются два сплава, состоящие из цинка, меди и олова. Известно, что первый сплав содержит 25% цинка, второй — 50% меди. Процентное содержание олова в первом сплаве в 2 раза выше, чем во втором. Сплавив 200 кг первого и 300 кг второго, получили новый сплав, в котором оказалось 28% олова. Сколько килограммов меди содержится в получившемся новом сплаве?

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

8.15. 1) Сколько разных комплектов одежды, состоящих из куртки и брюк, можно составить из 4 разных курток и 4 разных брюк, если они все подходят друг другу?

2) В продуктовом магазине имеются колбасные изделия 4-х сортов, конфеты 2-х сортов и хлеб 3-х сортов. Сколькими способами можно приобрести 1 кг колбасы, 0,5 кг конфет и 1 булку хлеба?

8.16. Для множества $\{1, 2, 3, 4\}$ составьте все его подмножества: одноэлементные, двухэлементные, трехэлементные. Сколько подмножеств получилось, которые не содержат ни одного элемента? Сколько подмножеств содержат по одному элементу, по два элемента, по три элемента, по четыре элемента? Сколько всего подмножеств получилось?

Опорные понятия для овладения новыми знаниями

Множество, множество чисел, подмножество, элементы множества, размещения и перестановки без повторений.

§9. СОЧЕТАНИЯ БЕЗ ПОВТОРЕНИЙ. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ КОМБИНАТОРИКИ

Ключевые понятия

Сочетание, множество, подмножество

Вы ознакомитесь с понятием *сочетание без повторений*, формулами комбинаторики для вычисления числа сочетаний.

Сочетанием без повторений из n элементов по k *называется подмножество, содержащее k элементов множества, состоящего из n элементов.*

Обозначение : C_n^k — число сочетаний из n элементов по k.

Значит, в подмножествах из k элементов не учитывается порядок элементов, подмножества отличаются хотя бы одним элементом.

Теорема. $C_n^k = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$.

Доказательство. Пусть $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}, n(X) = n$. Рассмотрим процесс составления сочетания без повторений из n по k. Выбрать k элементов и упорядочить их можно A_n^k способами, т. е. $\frac{n!}{(n-k)!}$. В сочетаниях порядок расположения элементов роли не играет, поэтому сочетаний будет меньше во столько раз, сколько можно составить перестановок из k элементов, т. е. $k!$. Это значит, что $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. ■

ПРИМЕР

Сколькими способами можно выбрать 5 номеров из 36?

Решение. Здесь говорится о множестве номеров $A = \{1, \ldots, 36\}$, из которых надо выбрать 5 из них. Порядок выбора номеров роли не играет, поэтому здесь речь идет о сочетаниях без повторений. $C_{36}^5 = \frac{36!}{5! \cdot (36-5)!} = \frac{36!}{5! \cdot 31!} = 376\ 992$.

Ответ: 376 992 различных способа.

Некоторые свойства сочетаний без повторений

Свойство 1. $C_n^0 = C_n^n = 1$.

Доказательство. $C_n^0 = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$.

$C_n^n = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!} = 1$. Значит, $C_n^0 = C_n^n = 1$. ■

Свойство 2. $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Доказательство. $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Значит, $C_n^k = C_n^{n-k}$. ■

ПРИМЕР

1. $C_7^3 = C_7^4$; **2.** $C_9^6 = C_9^3$.

Свойство 3. $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$.

Доказательство. $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} =$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!\cdot(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!\cdot(n-1-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\cdot(n-k-1)!}\cdot\left(\frac{1}{n-k}+\frac{1}{k}\right) =$$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!\cdot(n-k-1)!}\cdot\frac{n}{(n-k)\cdot k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = C_n^k.$$

ПРИМЕР

1. $C_7^3 + C_7^4 = C_8^4$. **2.** $C_5^2 = C_4^1 + C_4^2$.

Свойство 4. $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

Теорема. ***Множество из n элементов имеет 2^n подмножеств.***

Доказательство.

Докажем с помощью метода математической индукции.

Проверим истинность утверждения при $n = 1$. $C_1^0 + C_1^1 = 2$; $2^1 = 2$.

Допустим, что при $n = k$ утверждение истинно, т. е.

$C_k^0 + C_k^1 + \ldots + C_k^k = 2^k$.

Докажем его истинность при $n = k + 1$, т. е.

$C_{k+1}^0 + C_{k+1}^1 + \ldots + C_{k+1}^{k+1} = 2^{k+1}$.

Действительно, $C_k^0 + C_k^1 + \ldots + C_k^k = 2^k$. $2(C_k^0 + C_k^1 + \ldots + C_k^k) = 2\cdot 2^k$.

$C_k^0 + (C_k^0 + C_k^1) + (C_k^1 + C_k^2) + (C_k^2 + C_k^3) + \ldots + (C_k^{k-1} + C_k^k) + C_k^k = 2^{k+1}$.

Введем следующую замену: $C_k^0 + C_k^1 = C_{k+1}^1$; $C_k^1 + C_k^2 = C_{k+1}^2$; $C_k^2 + C_k^3 = C_{k+1}^3$; $C_k^{k-1} + C_k^k = C_{k+1}^k$; $C_k^0 = C_{k+1}^0$; $C_k^k = C_{k+1}^{k+1}$ (по свойствам 1—3).

$C_{k+1}^0 + C_{k+1}^1 + \ldots + C_{k+1}^{k+1} = 2^{k+1}$.

?

1. Чем является сочетание без повторений из n элементов некоторого множества по k элементов для этого множества?
2. Что означает символ: C_n^0; C_n^n; C_n^k?
3. В чем сходство и различие сочетаний и размещений без повторений?
4. Сколько элементов в множестве, если у него всего 16 подмножеств?

Упражнения

А

9.1. Вычислите: 1) C_5^4; 2) C_5^0; 3) C_6^3; 4) C_{11}^9.

9.2. 1) Найдите число способов выбора 2 ручек из 5 и 2 карандашей из 3.

2) Найдите число способов выбора 3 тюльпанов из 10 и 4 нарциссов из 7.

3) Найдите число способов выбора 2 юношей из 20 и 2 девушек из 21.

9.3. Докажите равенство:

1) $C_8^4 + C_8^3 = C_9^4$; 2) $C_8^4 + C_8^5 + C_9^6 = C_{10}^6$;

3) $C_6^0 + C_6^1 + C_6^2 + \ldots + C_6^6 = 64$.

B

9.4. Решите уравнение:

1) $C_n^2 = 28$; 2) $C_n^{n-3} = 20$; 3) $C_n^{n-2} = 36$.

9.5. В меню столовой имеется 7 первых, 9 вторых и 4 третьих блюда. Сколькими способами можно выбрать обед из трех блюд (первое, второе и третье)?

9.6. Решите уравнение:

1) $C_{2n+1}^{n-1} : C_{2n}^{n+1} = \frac{5}{3}$; 2) $A_{2x+3}^{x-1} : A_{2x}^{x+1} = \frac{1}{30}$; 3) $C_n^2 \cdot A_n^2 = 32$.

C

9.7. На окружности последовательно отмечены точки $A_1, A_2, \ldots, A_{11}, A_{12}$. Найдите:

1) число хорд с концами в этих точках;

2) число треугольников с вершинами в этих точках.

***9.8.** Прямые a и b параллельны. На прямой a отмечено 6 точек, а на прямой b отмечено 9 точек. Найдите:

1) число треугольников с вершинами в этих точках;

2) число выпуклых четырехугольников с вершинами в отмеченных точках (три вершины четырехугольника не должны лежать на одной прямой).

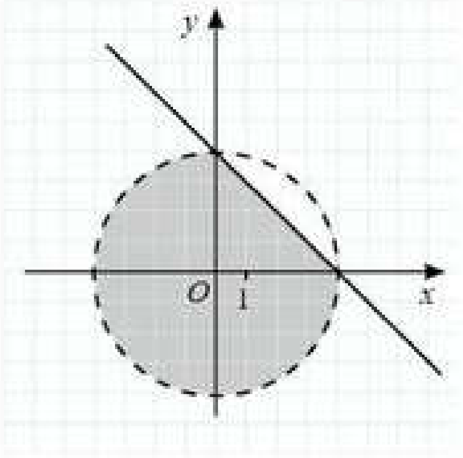
ПОВТОРИТЕ

9.9. Разложите многочлен на множители:

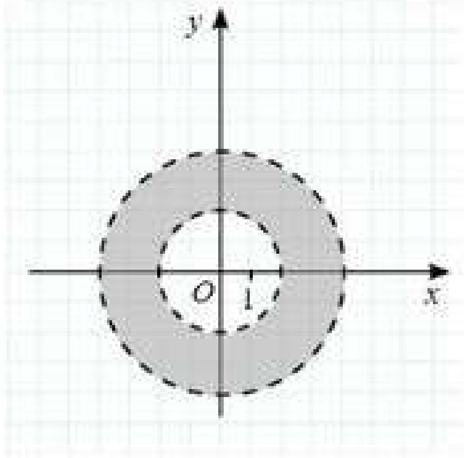
1) $x^3 + 3x - 4$; 2) $x^3 + 2x^2 - 3x - 6$;

3) $x^3 + 3x^2 + 3x + 9$; 4) $x^4 - 3x^2 - 4$.

9.10. Запишите систему неравенств, задающих на плоскости множество точек, показанных на рисунке 24.



1)



2)

Рис. 24

9.11. Решите уравнение с помощью замены переменной:

1) $x^4 - 7x^2 - 18 = 0$; 2) $x^4 + 4x^2 - 45 = 0$;

3) $x^2 - 4x - 3\sqrt{(x-2)^2} = 14$; 4) $x - 5 + 2\sqrt{x-5} = 8$.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

9.12. 1) Найдите число четных четырехзначных чисел, которые можно составить из цифр 0, 1, 3, 5, при условии, что ни одна цифра не повторяется дважды.

2) Найдите число способов распределения 10 мест среди 10 участников соревнований.

9.13. Сколько разных комплектов одежды, состоящих из блузки и брюк, можно составить из 4 разных блузок и 6 разных брюк, если они все подходят друг другу?

Опорные понятия для овладения новыми знаниями

Множество, множество чисел, подмножество, элементы множества, размещения, перестановки, сочетания без повторений .

§ 10. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФОРМУЛ КОМБИНАТОРИКИ

Ключевые понятия

Перестановки, сочетания, размещения

Вы научитесь решать задачи, применяя формулы комбинаторики для вычисления числа перестановок, размещений, сочетаний без повторений.

При решении комбинаторных задач с использованием перестановок, размещений и сочетаний без повторений важно установить характер операции, о которой идет речь в задаче над элементами множеств.

Это операции:

1) упорядочивание всех элементов n-элементного множества;

2) выделение k-элементного подмножества из n-элементного множества;

3) выделение k-элементного подмножества из n-элементного множества и его упорядочивание.

Результатом первой операции является перестановка без повторений из n-элементов, число которых находится по формуле: $P_n = n!$

Результатом второй операции является сочетание по k-элементов из n-элементов, число которых находится по формуле: $C_n^k = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$.

Результатом третьей операции является размещение по k-элементов из n-элементов, число которых находится по формуле: $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

ПРИМЕР

1. Чтобы войти в подъезд, на дверях дома надо набрать код — двузначное число, состоящее из двух различных цифр из десяти: 0, 1, 2, ..., 9, которые надо нажать: 1) одновременно; 2) последовательно. Входящий не знал эту комбинацию цифр. Сколько разных вариантов набора цифр он должен перепробовать, чтобы наверняка там оказался нужный вариант?

Решение. 1) Поскольку в задаче речь идет только о выделении 2-элементного подмножества из 10-элементного множества (цифры нажимаются одновременно, поэтому порядок их выбора роли не играет), то надо вычислить число сочетаний без повторений: $C_{10}^2 = \dfrac{10!}{2!8!} = \dfrac{9 \cdot 10}{2} = 45$.

2) Поскольку в задаче речь идет о выделении 2-элементного подмножества из 10-элементного множества и его упорядочивания (цифры нажимаются последовательно, поэтому порядок их выбора играет роль), то надо вычислить число размещений без повторений: $A_{10}^2 = \dfrac{10!}{8!} = 9 \cdot 10 = 90$.

Ответ: 1) 45 вариантов;
2) 90 вариантов.

ПРИМЕР

2. Кодовый замок имеет 5 кнопок. Чтобы его открыть, надо нажать кнопки в определенной последовательности (набрать код). Сколько разных вариантов набора цифр должны перепробовать, чтобы наверняка там оказался нужный вариант?

Решение. Поскольку в задаче речь идет об упорядочивании всех элементов 5-элементного множества, надо вычислить число перестановок без повторений из 5 элементов: $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Ответ : 120 вариантов.

? **1.** В каком случае при решении комбинаторной задачи используют перестановки без повторений; сочетания без повторений; размещения без повторений?

Упражнения

A

10.1. Найдите значение выражения:

1) $\dfrac{P_7}{P_4}$; 2) $\dfrac{A_8^5}{P_7}$; 3) $1 + \dfrac{P_8}{P_7} + \dfrac{P_5}{P_6}$; 4) $\dfrac{P_9}{P_7} - \dfrac{P_7}{P_5} - 2$.

10.2. Найдите число нечетных четырехзначных чисел, которые можно составить из цифр 2, 1, 8, 6, при условии, что ни одна цифра не повторяется дважды.

10.3. Решите уравнение:

1) $A_x^1 = 5$; 2) $A_x^1 = 5x$; 3) $A_x^2 = 5x$; 4) $A_x^2 = 4x + 24$.

10.4. Найдите число способов покупки 1 кг яблок и 1 кг мандаринов, если в магазине имеется 6 сортов яблок и 3 сорта мандаринов.

10.5. Докажите равенство:

1) $C_7^4 + C_7^3 = C_8^4$; 2) $C_8^4 + C_8^3 + C_9^5 = C_{10}^5$;

3) $C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + \ldots + C_5^5 = 32$.

10.6. Вычислите:

1) $\dfrac{P_4}{P_8} \cdot A_8^4$; 2) $\dfrac{P_5}{P_9} \cdot A_9^5$; 3) $\dfrac{P_{20}}{A_{20}^{15}} : A_{20}^3$; 4) $\dfrac{P_{14}}{A_{14}^{10}} : C_6^5 : C_{11}^{11}$.

B

10.7. На графике функции $y = ax^2 + bx + c$ последовательно отмечены точки $A_1, A_2, \ldots, A_{11}, A_{12}$. Найдите:

1) число отрезков с концами в этих точках;

2) число треугольников с вершинами в этих точках.

10.8. Абонент забыл последние 2 цифры номера телефона. Какое максимальное число номеров ему нужно перебрать, если он знает, что две последние цифры различны?

10.9. Сколько существует четырехзначных чисел, у которых все цифры различны?

C

10.10. В лифт 9-этажного дома зашли 3 человека. Сколькими способами они могут распределиться по этажам дома, если на первых трех этажах лифт не останавливается?

10.11. На тренировках занимаются 12 баскетболистов, один из них капитан. Сколько может быть образовано тренером различных стартовых пятерок, если капитан команды входит в эту пятерку?

10.12. В кафе в меню имеется 3 первых блюда, 4 вторых блюда и на выбор: кофе, чай, компот. Найдите число вариантов выбора посетителем своего ужина, состоящего из первого, второго блюда и напитка.

10.13. Из 25 вопросов к экзамену ученик 18 выучил, 4 совсем не знает, остальные — знает слабо. На экзамене в билетах будет три вопроса.

1) Найдите количество возможных вариантов билета.

2) Сколько из них тех, в которых ученик знает ответы на все вопросы?

3) Сколько из них тех, в которых есть вопросы всех трех типов?

ПОВТОРИТЕ

10.14. 1) Свежие ягоды содержат 90% влаги, сушеные — 12%. Сколько сушеных ягод получится из 40 кг свежих?

2) Свежие яблоки содержат 96% влаги, сушеные — 10%. Сколько свежих яблок надо собрать, чтобы получить 2 кг сушеных?

3) Из 40 т железной руды выплавляют 20 т стали, содержащей 6% примесей. Найдите процент примесей в руде.

10.15. 1) Решите неравенство $\frac{1}{x^2-2x}-\frac{3}{(x-5)(x-2)}\leqslant\frac{2}{x-5}$ и найдите значение суммы целых решений, принадлежащих отрезку $[-1;\ 6]$.

2) Решите неравенство $\frac{1}{x^2+2x}-\frac{6}{(x+5)(x+2)}\leqslant\frac{2}{x+5}$ и найдите значение суммы целых решений, принадлежащих отрезку $[-4;\ 4]$.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

10.16. Запишите в виде многочлена выражение:

1) $(2x-3)^3+27-(2x)^3+40x^2-1$;
2) $(1-2x)^3+8x^3-1$;
3) $(x-2)^3+2(3x-1)^2+10$;
4) $(3-x^2)^2+6x^2-3x-1$.

10.17. Решите уравнение:

1) $A_{x+1}^2=20$; 2) $A_{x+2}^2=26+8x$;
3) $C_{x+1}^2=45$; 4) $C_{x+2}^2=33+1{,}5x$.

Опорные понятия для овладения новыми знаниями

Множество, множество чисел, подмножество, элементы множества, размещения, перестановки и сочетания без повторений.

§ 11. БИНОМ НЬЮТОНА И ЕГО СВОЙСТВА

Ключевые понятия

Бином Ньютона, двучлен, степень, показатель степени, четное число, натуральное число

Вы ознакомитесь с формулой бинома Ньютона и его свойствами;
научитесь применять формулу бинома Ньютона и его свойства.

ВЫ ЗНАЕТЕ

Вами были изучены формулы сокращенного умножения. В частности, формула квадрата суммы двучлена и формула куба суммы двучлена:

$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$,

$(x + a)^3 = x^3 + 3ax^2 + + 3a^2x + a^3$.

Для того, чтобы получить формулу для суммы четвертой степени двучлена, можно воспользоваться формулой куба суммы и правилом умножения многочлена на многочлен. Тогда $(x + a)^4 = (x + a)^3(x + a) = (x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3)(x + a) = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4$.

Продолжая таким образом можно получить формулу для суммы двучлена n-й степени:

$$(x + a)^n = x^n + n \cdot a \cdot x^{n-1} + \frac{n(n-1)!}{2!} \cdot a^2 \cdot x^{n-2} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} a^k x^{n-k} + \ldots + a^n. \qquad (1)$$

Теперь заменим коэффициенты правой части формулы (1), используя формулу числа сочетаний $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

$$(x + a)^n = C_n^0 \cdot a^0 \cdot x^n + C_n^1 \cdot a^1 \cdot x^{n-1} + C_n^2 \cdot a^2 \cdot x^{n-2} + \ldots + C_n^n \cdot a^n \cdot x^n. \qquad (2)$$

Убедитесь, что полученные равенства можно представить в виде:

$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2 = C_2^0 x^2 + C_2^1 ax + C_2^2 a^2$;

$(x + a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 = C_3^0 x^3 + C_3^1 ax^2 + C_3^2 a^2x + C_3^3 a^3$;

$(x + a)^4 = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4 =$

$= C_4^4 x^4 + C_4^3 ax^3 + C_4^2 a^2x^2 + C_4^1 a^3x + C_4^4 a^4$;

$(x + a)^5 = x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x + a^5 =$

$= C_5^5 x^5 + C_5^4 ax^4 + C_5^3 a^2x^3 + C_5^2 a^3x^2 + C_5^1 a^4x + C_5^5 a^5$.

....

Формулу 2 кратко записывают $(x + a)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^k \cdot x^{n-k}$, *где* $\sum$ *знак суммы, и называют* ***биномом Ньютона***, *а* C_n^k — ***биномиальными коэффициентами***.

Слово *бином* (от лат. *bis* — "дважды" и греч. *номос* — "член") означает двучлен.

Исторические сведения

Известный французский математик Блез Паскаль предложил простой способ вычисления биномиальных коэффициентов с использованием специальной таблицы чисел, называемой *треугольником Паскаля*.

Треугольник Паскаля

$n=0$	1
$n=1$	1 1
$n=2$	1 2 1
$n=3$	1 3 3 1
$n=4$	1 4 6 4 1
$n=5$	1 5 10 10 5 1
$n=6$	1 6 15 20 15 6 1
$n=7$	1 7 21 35 35 21 7 1
$n=8$	1 8 28 56 70 56 28 8 1
	... ...

Блез Паскаль (1623—1662)

Как получаются числа каждой строки треугольника из его предыдущей верхней строки? Вычислите биномиальные коэффициенты при $n = 9$.

ПРИМЕР

1. Представим в виде многочлена степень: $(x + 2)^6$.

Решение. $(x + 2)^6 = x^6 + 6 \cdot 2 \cdot x^5 + 15 \cdot 2^2 \cdot x^4 + 20 \cdot 2^3 \cdot x^3 + 15 \cdot 2^4 \times$ $\times x^2 + 6 \cdot 2^5 \cdot x + 2^6 = x^6 + 12 \cdot x^5 + 60x^4 + 160x^3 + 240x^2 + 192x + 64.$

Ответ: $x^6 + 12 \cdot x^5 + 60x^4 + 160x^3 + 240x^2 + 192x + 64$.

Бином Ньютона обладает следующими свойствами:

1) число слагаемых бинома Ньютона на единицу больше, чем показатель степени бинома;

2) показатель степени x убывает от n до нуля, а показатель степени a возрастает от нуля до n. Значение суммы показателей степеней каждого слагаемого равно показателю степени бинома;

3) коэффициенты слагаемых, равноотстоящих от начала и от конца бинома, равны между собой;

4) любой член бинома находится по формуле

$$T_{k+1} = C_n^k \cdot a^k \cdot x^{n-k}, \qquad (3)$$

где k изменяется от 0 до n;

5) если $x = a = 1$, то $2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^k + ... + C_n^n$, т. е. сумма коэффициентов бинома Ньютона равна 2^n;

6) если показатель степени бинома — нечетное натуральное число, то в биноме число слагаемых будет четным; если показатель степени бинома — четное натуральное число, то число слагаемых в биноме нечетное число;

7) слагаемые бинома, имеющие наибольший коэффициент, называются *средними членами*. Если показатель степени бинома — нечетное число, то в разложении два средних члена; если показатель степени бинома — четное число, то в разложении бинома один средний член.

ПРИМЕР

2. Найдем четвертый и двадцатый члены бинома $(x + a)^5$.

Решение. $(x + a)^5 = x^5 + 5 \cdot a \cdot x^4 + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot a^2 \cdot x^3 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot a^3 \cdot x^2 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot a^4 \cdot x + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot a^5 \cdot x^0 = x^5 + 5ax^4 + 10a^2 \cdot x^3 + 10a^3 \cdot x^2 + 5a^4 \cdot x + a^5$.

ПРИМЕР

3. Найдем четвертый и двадцатый члены бинома $(x + a)^{25}$.

Решение. По формуле (3) найдем четвертый и двадцатый члены данного бинома.

$T_{3+1} = C_{25}^{3} \cdot a^3 \cdot x^{22} = 2300\, a^3x^{22}$ и $T_{19+1} = C_{25}^{19} \cdot a^{19} \cdot x^6 = 177\ 100\, a^{19}x^6$.

?

1. В каких преобразованиях можно использовать бином Ньютона?
2. Что означает слово *бином*, символ $\sum$?
3. Чем являются биномиальные коэффициенты?
4. Сколько слагаемых в биномах $(a + b)^4$ и $(a + b)^5$?
5. Запишите формулы для вычисления: $(a + b)^4$; $(a - b)^4$; $(a + b)^5$; $(a - b)^5$.
6. Назовите средние члены биномов $(a - b)^4$ и $(a + b)^5$.

Упражнения

A

11.1. Найдите разложение следующих полиномов:

1) $(x + a)^5$; 2) $(3x + 2a)^6$; 3) $(3x - a)^5$.

11.2. Найдите коэффициент при x^n в разложении бинома Ньютона:

1) $(x+2)^{10}$, $n=3$; 2) $(1-2x)^7$, $n=4$; 3) $\left(\sqrt{x}-\frac{2}{x}\right)^8$, $n=-4$.

11.3. Найдите сумму биномиальных коэффициентов бинома Ньютона $(x+y)^{11}$.

B

11.4. Докажите тождество:

1) $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k=0$; 2) $\sum\limits_{k=0}^{n} kC_n^k=n\cdot 2^{n-1}$; 3) $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}kC_n^k=0$.

11.5. Найдите n в разложении бинома $\left(3+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$, если отношение четвертого слагаемого разложения к третьему равно $3\sqrt{2}$.

11.6. Найдите коэффициент при x^3 у многочлена $P(x)$:

1) $P(x)=4x^3+(1+3x)^4$; 2) $P(x)=(3-2x)^5+2x^3+5$;

3) $P(x)=(x+2)^5-(2x+1)^4$; 4) $P(x)=(x+2)^5+(1-2x)^4-2x^3$.

11.7. Найдите наибольший коэффициент в разложении $(x+y)^n$, если значение суммы биномиальных коэффициентов в разложении равно:

1) 1024; 2) 512.

C

11.8. В разложении бинома $(x+\frac{1}{x})^{10}$ по степеням x найдите одночлен:

1) содержащий x^2; 2) содержащий x^4;

3) содержащий x^{-2}; 4) содержащий x.

11.9. 1) Значение суммы биномиальных коэффициентов разложения бинома $\left(2na+\frac{1}{2na^2}\right)^{3n}$ равно 64. Найдите слагаемое, не содержащее a.

2) Седьмое слагаемое разложения бинома $\left(\sqrt[3]{a}+\frac{1}{a}\right)^n$ не зависит от a. Найдите n.

11.10. Докажите, что верно равенство:

1) $C_n^1+2\cdot C_n^2+3\cdot C_n^3+\ldots+n\cdot C_n^n=n\cdot 2^{n-1}$;

2) $C_n^0 + 2 \cdot C_n^1 + 3 \cdot C_n^2 + \ldots + (n+1) \cdot C_n^n = (n+2) \cdot 2^{n-1}$.

11.11. Докажите, что для любого натурального $n > 1$ и любого положительного числа x справедливо неравенство $(1+x)^n > 1 + nx$.

ПОВТОРИТЕ

11.12. 1) Два токаря должны были изготовить определенное число деталей. После трехчасовой совместной работы работать продолжал только второй токарь, который проработал еще 4 часа. После этого задание оказалось перевыполненным на 12,5%. За какое время мог бы выполнить задание каждый токарь, если второму на это понадобится на 4 ч меньше, чем первому?
2) Слесарь может выполнить задание по обработке деталей на 15 ч быстрее, чем ученик. Если ученик отработает 18 ч, а слесарь продолжит выполнение задания в течение 6 ч, то будет выполнено 0,6 всего задания. Сколько времени потребуется ученику для самостоятельного выполнения задания?

11.13. Составьте задачу, которая решалась бы с помощью следующего уравнения:

1) $\frac{20}{x} + \frac{20}{x+2} = \frac{20}{8}$; 2) $\frac{8}{x} + \frac{8}{x+12} = 1$.

11.14. 1) Упростите выражение $\frac{2}{3-\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}+3} + \sqrt{x} - 2{,}2$ и найдите его значение при $x = 0{,}04$.

2) Упростите выражение $\frac{3}{\sqrt{y}+1} - \frac{3}{\sqrt{y}-1} + \sqrt{y} + 1{,}8$ и найдите его значение при $y = 1{,}44$.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

11.15. Функция $f(x)$ задана формулой. Найдите значения $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$:

1) $f(x) = x^2 + 2x$; 2) $f(x) = x^2 + 2x - 2$;
3) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 7x$; 4) $f(x) = x^2 + 2x + \sqrt{x}$.

11.16. Установите закономерность в записи чисел:

1) 2; 4; 6; 8; 10; …; 2) 5; 10; 15; 20; 25; …;
3) 1; 4; 9; 16; 26; …; 4) 1; –1; 1; –1; 1; … .

Опорные понятия для овладения новыми знаниями

Последовательность, функция, члены последовательности, монотонные последовательности; последовательность, ограниченная снизу; последовательность, ограниченная сверху; последовательность ограниченная, неубывающая последовательность, невозрастающая последовательность, бесконечная числовая последовательность, конечная числовая последовательность; рекуррентный способ, аналитический способ, графический способ, словесный способ.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Количество различных нечетных трехзначных чисел без повторений цифр, составленных из цифр 0, 2, 4, 7, 8, равно:
A) 16; B) 10; C) 9; D) 8.

2. Если в классе 25 учащихся, из которых 13 девочек, то число различных способов назначения двух дежурных из числа мальчиков равно:
A) 80; B) 66; C) 90; D) 120.

3. Одиннадцать баскетболистов команды строятся перед началом игры для приветствия. Первым становится капитан, остальные — случайным образом.
Тогда число способов построения команды равно:
A) 9!; B) 8!; C) 10!; D) 11!.

4. Корень уравнения $A_x^3 = x^3 - 4x^2 + 8x + 16$ равен:
A) 20; B) 12; C)10; D) 8.

5. На плоскости отметили точку. Из нее провели 5 лучей. Тогда число различных углов равно:
A) C_5^2; B) C_5^3; C) 3!; D) 5!.

6. Упростив выражение $\frac{n^3 - 4n}{(n+2)!} - \frac{2-n}{(n+1)!}$, получим:
A) n; B) $2n$; C) $\frac{n-2}{n!}$; D) $\frac{n}{(n-1)!}$.

7. Корнем уравнения $C_x^{x-2} = x^2 - x - 10$ является число:
A) 5; B) 6; C) 7; D) 4.

8. Коэффициент третьего члена в разложении бинома Ньютона $(x-1)^{20}$ равен:
A) 20; B) 120; C) 190; D) 210.

9. Составляется букет из пяти красных и четырех белых гвоздик. Найдите число способов составления букета, если имеются 8 красных и 8 белых гвоздик:
A) 3920; B) 4920; C) 3650; D) 4200.

10. Коэффициент при x^2 в разложении бинома Ньютона $(2x+1)^6$ равен:
A) 32; B) 40; C) 50; D) 60.

Глава III. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

§ 12. ЧИСЛОВАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ, ЕЕ ВИДЫ, СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ И СВОЙСТВА

Ключевые понятия

Числовая последовательность

Вы ознакомитесь с понятием *числовая последовательность*;

научитесь находить n-й член последовательности, например: $\frac{1}{2\cdot3}$; $\frac{1}{3\cdot4}$; $\frac{1}{4\cdot5}$; $\frac{1}{5\cdot6}$; ...

Рассмотрим записи, состоящие из действительных чисел, записанных в указанном порядке:

1) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ... — это числовая последовательность, состоящая из натуральных чисел;

2) 1, 3, 5, 7, 9, ..., 99 — это числовая последовательность, состоящая из нечетных натуральных чисел до 100;

3) –10, –12, –14, ..., –98 — это числовая последовательность, состоящая из четных двузначных отрицательных чисел;

4) $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{17}$, $\sqrt{19}$ — это числовая последовательность, состоящая из арифметических квадратных корней из простых чисел, меньших 20.

1. В записи: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ... — каждому натуральному числу соответствует число следующим образом: $1 \to 1$; $2 \to 2$; $3 \to 3$; $4 \to 4$; $5 \to 5$; $6 \to 6$; $7 \to 7$; $8 \to 8$; $9 \to 9$; ...

2. В записи: 1, 3, 5, 7, 9, ...99 — каждому натуральному числу от 1 до 50 соответствует некоторое нечетное натуральное число следующим образом: $1 \to 1$; $2 \to 3$; $3 \to 5$; $4 \to 7$; $5 \to 9$; ...; $50 \to 99$;

3. В записи: –10, –12, –14, ...–98 — каждому натуральному числу от 1 до 45 соответствует некоторое отрицательное число следующим образом: $1 \to -10$; $2 \to -12$; $3 \to -14$; ... $45 \to -98$;

4. В записи: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{17}$, $\sqrt{19}$ — каждому натуральному числу от 1 до 8 соответствует некоторое иррациональное число следующим образом: $1 \to \sqrt{2}$; $2 \to \sqrt{3}$; $3 \to \sqrt{5}$; $4 \to \sqrt{7}$; $5 \to \sqrt{11}$; $6 \to \sqrt{13}$; $7 \to \sqrt{17}$; $8 \to \sqrt{19}$.

Отсюда следует, что числовая последовательность является функцией натурального аргумента.

Если числовая последовательность (функция) задана на множестве первых n натуральных чисел, то она называется ***конечной числовой последовательностью,*** *если на множестве всех натуральных чисел, то —* ***бесконечной числовой последовательностью*** .

ПРИМЕР

1. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ... — бесконечная числовая последовательность; 1, 3, 5, 7, 9, ..., 99 — конечная числовая последовательность.

Числа, образующие последовательность, называются ***членами последовательности*** .

В общем виде члены последовательности обозначаются буквами с индексами, указывающими порядковые номера ее членов: a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...

В числовой последовательности: a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...

a_1 — первый член последовательности;

a_2 — второй член последовательности;

a_3 — третий член последовательности;

....

a_n — n-й член последовательности;

....

В последовательности $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{17}$, $\sqrt{19}$: $a_1 = \sqrt{2}$, $a_4 = \sqrt{7}$, $a_7 = \sqrt{17}$, $a_8 = \sqrt{19}$.

Последовательность кратко (символически) записывают: (a_n).

Последовательность (a_n) *называется* ***возрастающей*** *, если каждый ее член* a_n *больше предыдущего* a_{n-1}, *и* ***убывающей*** *, если каждый ее член* a_n *меньше предыдущего* a_{n-1}, ***постоянной*** *(стационарной), если каждый ее член* a_n *равен предыдущему* a_{n-1}.

ОБЪЯСНИТЕ

Почему числовая последовательность:

1, 3, 5, 7, 9, ..., 99 — возрастающая,

–10, –12, –14, ..., –98 — убывающая,

$\frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}$ — постоянная (стационарная)?

Последовательность (a_n) называется ***неубывающей,*** *если каждый ее член a_n больше или равен предыдущему a_{n-1}, и* ***невозрастающей*** *— если каждый ее член a_n меньше или равен предыдущему a_{n-1}.*

ОБЪЯСНИТЕ

Почему числовая последовательность:
1, 3, 3, 7, 9, 10, 10, 10 — неубывающая,
10, 10, 9, 9, 8, 7 — невозрастающая?

Возрастающие, убывающие, невозрастающие и неубывающие последовательности называются ***монотонными последовательностями***.

Найдите монотонные последовательности:
1) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ...
2) 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, ...
3) 1, 3, 4, 2, 7, 8, 5, 6, 9, ...
4) 1, 3, 2, 4, 5, 7, 6, 8, 9, ...
5) 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 9, ...
6) 9, 9, 8, 8, 7, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, ...

Если существует такое число, что каждый член последовательности (a_n) больше него, то последовательность (a_n) называется ***ограниченной снизу***.
Если существует такое число, что каждый член последовательности (a_n) меньше него, то последовательность (a_n) называется ***ограниченной сверху***.
Если выполняются оба условия, то последовательность (a_n) называется ***ограниченной***.

ПРИМЕР

2. Исследуем на ограниченность последовательность:
1) $-1;\ -2;\ -3;\ ...;\ -n;\ ...;$
2) $1;\ 2;\ 3;\ ...;\ n;\ ...;$
3) $100;\ 200;\ 300;\ ...;\ 1000;$
4) $-1;\ 2;\ -3;\ ...;\ (-1)^n\ n ...$

1) последовательность ограничена сверху, поскольку каждый член этой последовательности меньше нуля;

2) последовательность ограничена снизу, поскольку каждый член этой последовательности больше нуля;

3) последовательность ограничена как снизу, так и сверху, т. е. является ограниченной;

4) последовательность не ограничена ни сверху, ни снизу.

Числовую последовательность можно задать различными способами.

А. Словесный способ задания числовой последовательности.

С помощью этого способа закономерность расположения членов последовательности описывается словами.

Например, последовательность квадратов чисел натурального ряда. По этому описанию можно записать числовую последовательность: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, ...

Б. Аналитический способ задания числовой последовательности.

Числовая последовательность задана аналитическим способом, если она задана с помощью формулы n-го члена (говорят также общего члена).

> ***Формула n-го члена (общего члена)*** *— это формула, по которой можно найти любой член числовой последовательности, зная его номер.*

ПРИМЕР

3. Зададим числовую последовательность с помощью формулы n-го члена (общего члена): $a_n = 2^n$.

По данной формуле можно найти любой член последовательности:

— чтобы найти первый ее член, надо вместо n подставить число 1. Получим $a_1 = 2^1 = 2$;

— чтобы найти второй ее член, надо вместо n подставить число 2. Получим $a_2 = 2^2 = 4$.

Аналогично находим члены последовательности: $a_3 = 2^3 = 8$; $a_4 = 2^4 = 16$; $a_5 = 2^5 = 32$; $a_6 = 2^6 = 64$ и т. д. и записываем числовую последовательность: 2; 4; 8; 16; 32; 64; ... .

В. Рекуррентный способ задания числовой последовательности заключается в том, что любой член числовой последовательности, начиная с некоторого члена, выражается через предшествующие члены. При этом задается один или несколько первых членов последовательности и формула для нахождения членов числовой последовательности по известным предшествующим членам.

ПРИМЕР

4. Заданы первые два члена числовой последовательности: $a_1 = -15$; $a_2 = 5$ и формула $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$. По ним можно записать числовую последовательность: -15; 5; -10; -5; -15; -20; -35; … .

Действительно, $a_3 = a_1 + a_2$, т. е. $-15 + 5 = -10$;

$a_4 = a_2 + a_3$, т. е. $5 + (-10) = -5$;

$a_5 = a_3 + a_4$, т. е. $-10 + (-5) = -15$;

$a_6 = a_4 + a_5$, т. е. $-5 + (-15) = -20$;

$a_7 = a_5 + a_6$, т. е. $-15 + (-20) = -35$.

Г. *Графический способ задания числовой последовательности.*

Числовую последовательность можно задать и графическим способом.

График числовой последовательности состоит из изолированных точек, абсциссы которых — натуральные числа, ординаты — члены последовательности, соответствующие своим номерам.

ОБЪЯСНИТЕ

Как изобразили график числовой последовательности: -15; 5; -10; -5; -15 (рис. 25)?

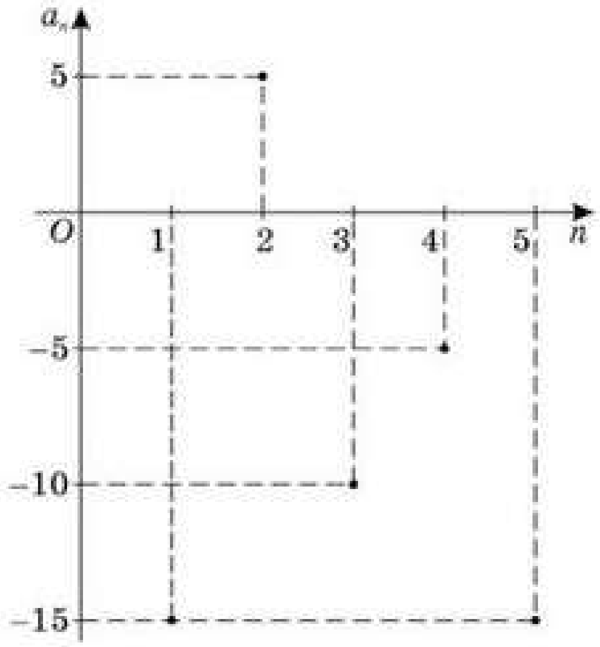


Рис. 25

?

1. Почему график числовой последовательности состоит из изолированных точек?
2. Почему последовательности 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; … ; $\frac{1}{n}$ и 1; $1{,}7$; $1{,}73$; $1{,}7320$; $1{,}73205$, … ($\sqrt{3} = 1{,}732050807\ldots$) являются ограниченными?

Упражнения

А

12.1. Выпишите первые пять членов возрастающей числовой последовательности, состоящей из натуральных чисел, которые:
1) при делении на 4 дают остаток 2;
2) при делении на 7 дают остаток 1;
3) при делении на 5 дают остаток 3;
4) при делении на 9 дают остаток 8.

12.2. Найдите первые пять членов числовой последовательности (a_n), если она задана с помощью формулы n-го члена:

1) $a_n = \dfrac{n}{\sqrt{n}+1}$; 2) $a_n = \dfrac{2n}{\sqrt{3n}-1}$;

3) $a_n = \dfrac{2n-1}{\sqrt{n}+2}$; 4) $a_n = \dfrac{3n}{\sqrt{2n-1}+1}$.

12.3. (a_n) – последовательность квадратов натуральных чисел, взятых в порядке возрастания. Выпишите члены последовательности a_5, a_9, a_{12}.

12.4. Найдите формулу n-го (общего) члена последовательности (a_n), если известны следующие ее первые члены:

1) 2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 2) 9; 11; 13; 15; 17; 19;

3) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{10}$; 4) 1; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{7}$; $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{11}$;

5) 1; 2; 4; 8; 16; 32; 6) –1; 2; –4; 8; –16; 32;

7) 1; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{27}$; $\frac{1}{64}$; $\frac{1}{125}$; $\frac{1}{216}$; 8) $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{6}{7}$;

9) $\frac{3}{2}$; $\frac{5}{4}$; $\frac{7}{6}$; $\frac{9}{8}$; $\frac{11}{10}$; $\frac{13}{12}$; 10) 2; 5; 8; 11; 14; 17.

12.5. Напишите первые пять членов числовой последовательности, заданной формулой:

1) $a_n = (-1)^n$; 2) $a_n = 2n + 3$; 3) $a_n = 5n - 2$;

4) $a_n = n^2 + 1$; 5) $a_n = n^2 + n$; 6) $a_n = n^2 - 2n$;

7) $a_n = n^2 + 2n + 1$; 8) $a_n = (-1)^n n^2$.

12.6. Числовая последовательность задана формулой $a_n = (-1)^n n^2 - 3n$. Запишите a_6, a_9, a_{14}.

12.7. Какие из следующих последовательностей являются:

а) возрастающими; б) убывающими;

в) ни возрастающими и ни убывающими:

1) $-1;\ -5;\ -9;\ -13;\ -17;$

2) $\frac{2}{3};\ \frac{2}{5};\ \frac{2}{7};\ \frac{2}{9};\ \frac{2}{11};$

3) $-1;\ -\frac{1}{8};\ -\frac{1}{27};\ -\frac{1}{64};\ -\frac{1}{125};$

4) $-1;\ \frac{1}{8};\ -\frac{1}{27};\ \frac{1}{64};\ -\frac{1}{125};\ \frac{1}{216};$

5) $\sqrt{3};\ \sqrt{5};\ \sqrt{7};\ 3;\ \sqrt{11};$

6) $\frac{6}{13};\ \frac{7}{14};\ \frac{8}{15};\ \frac{9}{16};\ \frac{10}{17};\ \frac{11}{18}$?

В

12.8. Имеется ли в последовательности, заданной формулой n-го члена:

1) $a_n = 37 - 2n$ член, равный 17;

2) $a_n = 49 - 3n$ член, равный -7;

3) $a_n = 3n - 2n^2$ член, равный -104;

4) $a_n = \frac{4n+3}{n+1}$ член, равный 13?

12.9. Какие формулы n-го члена задают: а) возрастающие; б) убывающие числовые последовательности:

1) $a_n = 3n - 7$; 2) $a_n = n^2 - 8$; 3) $a_n = 3\sqrt{n} + 4$;

4) $a_n = 1 + \frac{1}{n}$; 5) $a_n = 1 - \frac{1}{n+1}$; 6) $a_n = 1 + \frac{2}{2n+1}$?

12.10. Напишите первые пять членов числовой последовательности, заданной формулой:

1) $a_n = (-1)^n \cdot 2$; 2) $a_n = (-1)^n \cdot 2 + 2$;

3) $a_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$; 4) $a_n = n^2 + (-1)^n n$;

5) $a_n = 2^n + 1$; 6) $a_n = (-1)^n n^2 - 3n$;

7) $a_n = n^2 + 2n + (-2)^{n+1}$; 8) $a_n = (-1)^n n^2 + (-1)^{n+1}$;

9) $a_n = \frac{n+(-1)^n}{2n}$.

12.11. Исследуйте на монотонность последовательность (a_n), заданную формулой:

1) $a_n = -3^n$; 2) $a_n = 5^{n-1}$; 3) $a_n = \frac{3n+1}{n+2}$; 4) $a_n = \frac{5n+3}{n+1}$.

12.12. Запишите шесть первых членов числовой последовательности, заданной рекуррентно:

1) $a_1 = 3,\ a_{n+1} = a_n + 4;$ 2) $a_1 = 4,\ a_{n+1} = 3a_n - 1;$

3) $a_1 = 5,\ a_{n+1} = 2a_n - 4;$ 4) $a_1 = 88,\ a_{n+1} = 0{,}5 \cdot a_n.$

12.13. Докажите, что последовательность $a_n = \dfrac{2n + (-1)^n}{2n + 1}$ не является монотонной.

12.14. Выпишите первые шесть членов числовой последовательности, заданной рекуррентно:

1) $c_1 = 1,\ c_2 = 3,\ c_{n+2} = 2c_{n+1} - c_n;$

2) $c_1 = 2,\ c_2 = 3,\ c_{n+2} = 3c_{n+1} - 2c_n;$

3) $c_1 = -2,\ c_2 = 1,\ c_{n+2} = 2c_{n+1} - c_n;$

4) $c_1 = 4,\ c_2 = 7,\ c_{n+2} = c_{n+1} - 2c_n.$

12.15. Докажите, что является убывающей числовая последовательность (a_n), заданная формулой:

1) $a_n = 302 - 53n;$ 2) $a_n = -5n^2 + 3n - 2;$

3) $a_n = -9n^2 + 10n + 25;$ 4) $a_n = \dfrac{n-5}{n-2};$

5) $a_n = \dfrac{2n+5}{n+1};$ 6) $a_n = \dfrac{4n+15}{n-3}.$

12.16. Докажите, что является возрастающей числовая последовательность (a_n), заданная формулой:

1) $a_n = 30n - 2;$ 2) $a_n = n^2 + 2n - 2;$ 3) $a_n = 9n^2 + 4n - 5;$

4) $a_n = \dfrac{n+1}{n+2};$ 5) $a_n = \dfrac{2n-1}{n+1};$ 6) $a_n = \dfrac{4n+3}{n+3}.$

12.17. Найдите наименьший член числовой последовательности, заданной формулой n-го члена:

1) $a_n = n^2 - 12n;$

2) $a_n = n^2 - 13n + 2;$

3) $a_n = 2n^2 + 5n - 3.$

C

12.18. Найдите, если возможно, наименьший и наибольший член числовой последовательности:

Алгебра

1) $c_n = -\frac{1}{2} \cdot 3^n$; 2) $c_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \cdot 5$;

3) $c_n = -n^2 + 7$; 4) $c_n = n^2 + 7n$.

12.19. Найдите формулу общего (n-го) члена числовой последовательности, если известны следующие первые ее члены:

1) 0; 7; 26; 63; 124; 215; 2) 8; 26; 80; 242; 729;

3) 1; 7; 31; 127; 511; 4) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$; $\frac{1}{\sqrt{3}+1}$; $\frac{1}{\sqrt{4}-1}$; $\frac{1}{\sqrt{5}+1}$.

12.20. Исследуйте на ограниченность числовую последовательность:

1) $c_n = \frac{n+3}{n+1}$; 2) $c_n = \frac{(-1)^n}{n+2}$; 3) $c_n = \frac{2n-1}{2n+3}$; 4) $c_n = \frac{(-1)^n n}{n+1}$.

12.21. Выпишите первые пять членов числовой последовательности, если ее первый член равен 17, а каждый следующий член равен предыдущему, увеличенному на значение суммы его цифр.

***12.22.** Задайте рекуррентным или аналитическим способом числовую последовательность, первый член которой равен:

1) 1, третий член равен 5;

2) 3, третий член равен 11, а каждый из остальных членов равен среднему арифметическому двух соседних членов.

***12.23.** Задайте рекуррентным или аналитическим способом числовую последовательность:

1) 7; 14; 28; 56; 112; 2) 3; –3; 3; –3; 3; –3;

3) 23; 28; 38; 49; 62; 70; 4) $\frac{1}{1\cdot 2}$; $\frac{1}{2\cdot 3}$; $\frac{1}{3\cdot 4}$; $\frac{1}{4\cdot 5}$; $\frac{1}{5\cdot 6}$.

ПОДГОТОВЬТЕ СООБЩЕНИЕ ОБ УЧЕНОМ-МАТЕМАТИКЕ

12.24. Леонардо Пизанский (Фибоначчи) — итальянский математик, написал в 1202 г. труд под названием "Книга абака" (Liber Abaci), которая стала первой математической энциклопедией Средневековья, сыгравшей существенную роль в развитии математики в Европе. Он познакомил европейцев с десятичной системой исчисления.

Леонардо Пизанский (1180—1240)

ПОВТОРИТЕ

12.25. Решите уравнение:

1) $x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0$; 2) $3x^3 - 2x^2 - 27x + 18 = 0$;

3) $x^4 - 3x^2 - 18 = 0$; 4) $x^4 - 6x^2 - 27 = 0$.

12.26. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 45, \\ y - 2x = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 11, \\ x + 2y = 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 3xy = -1, \\ x + 2y = 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 - y + xy = -5, \\ x + 2y = 4. \end{cases}$

12.27. Постройте схематически графики уравнений системы и найдите число решений системы:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ y - x^2 = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 36, \\ y + 2x^2 = 6; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ y - |x| = 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ y - |x-2| = 0. \end{cases}$

12.28. Упростите выражение:

1) $a^3 c^{-4} \cdot 3a^{-2} c^5$; 2) $12a^5 c^4 : (3a^6 c^3)$;

3) $6a^7 c^8 : (8a^3 c^{-4})$; 4) $12a^5 c^{-4} : (3a^6 c^2) \cdot \frac{3}{8} ac^4$.

12.29. Из населенного пункта A в пункт B, длина пути по проселочной дороге между которыми 18 км, вышли одновременно два туриста. Один из них прибыл в пункт B на 54 мин раньше, чем другой. Найдите скорость каждого туриста, если известно, что скорость одного из них на 1 км/ч больше, чем скорость другого.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

12.30. Запишите пять первых членов последовательности, у которой каждый следующий член равен предыдущему члену, сложенному с числом 5, если:

1) первый член равен (–13); 2) первый член равен 11.

12.31. Числовая последовательность (a_n) задана формулой:

1) $a_n = 5n - 2$; 2) $a_n = 302 - 53n$;

3) $a_n = 7n - 5$; 4) $a_n = 45 - 11n$.

Найдите значение разности $a_7 - a_6$.

Опорные понятия для овладения новыми знаниями

Последовательность, член последовательности, множество, элемент множества, последующий член последовательности, n-й член последовательности.

§13. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ. ФОРМУЛА *n*-го ЧЛЕНА АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

Ключевые понятия

Арифметическая прогрессия, формула *n*-го члена

Вы ознакомитесь с понятием *арифметическая прогрессия*, характеристическим свойством и с формулой *n*-го члена арифметической прогрессии;

научитесь распознавать арифметическую прогрессию среди числовых последовательностей, находить *n*-й член арифметической прогрессии; решать задачи, связанные с арифметической прогрессией.

В практической деятельности человека можно увидеть, что при сложении большого числа бревен, труб, рулонов обоев, бумаги, ткани, линолеума в каждом верхнем ряду их кладут на одно число меньше, чем в нижнем ряду (рис. 26).

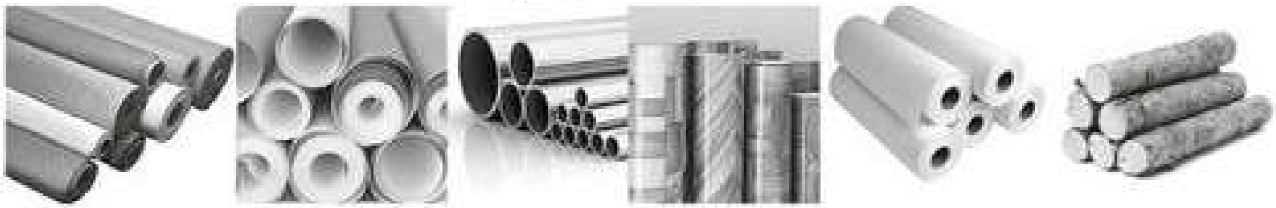


Рис. 26

В этих случаях число предметов, находящихся в каждом нижнем ряду, на один предмет больше, чем в верхнем ряду. Если записать число предметов в каждом ряду, то получим числовую последовательность, каждый член которой начиная со второго обладает свойством — он равен значению суммы предыдущего числа и, в данных случаях, единицы, т. е. одного и того же числа. Такие последовательности в математике имеют особые названия — *арифметические прогрессии* .

Числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с постоянным для этой последовательности числом d, называется ***арифметической прогрессией*** *. Число d называется* ***разностью арифметической прогрессии*** .

ОБЪЯСНИТЕ

Почему являются арифметическими прогрессиями числовые последовательности: 1) –8; –2; 4; 10; 16; 22; ...; 2) 5; 4; 3; 2; 1; 0?

Арифметическая прогрессия может быть конечной или бесконечной.

Если числовая последовательность (a_n) является арифметической прогрессией, то это символически записывают: $a_1; a_2; a_3; \dots$.

По определению арифметической прогрессии: $a_{n+1} = a_n + d$, где d — некоторое постоянное для числовой последовательности (a_n) число.

ПРИМЕР

1. Составим бесконечную арифметическую прогрессию, в которой: $a_1 = -20$, $d = 5$. Для этого воспользуемся формулой: $a_{n+1} = a_n + d$, в которую вместо буквы n подставляем по порядку числа 1; 2; 3; 4; 5 и т. д., а вместо буквы d число 5.

Получим $a_{1+1} = a_1 + 5$, или $a_2 = -20 + 5$, т. е. $a_2 = -15$;
$a_{2+1} = a_2 + 5$, или $a_3 = -15 + 5$, т. е. $a_3 = -10$;
$a_{3+1} = a_3 + 5$, или $a_4 = -10 + 5$, т. е. $a_4 = -5$;
$a_{4+1} = a_4 + 5$, или $a_5 = -5 + 5$, т. е. $a_5 = 0$;
....
и арифметическую прогрессию –20; –15; –10; –5; 0... .

Объясните как по заданной арифметической прогрессии найти ее разность.
Запишите формулу для нахождения разности арифметической прогрессии.
Можно ли, используя эту формулу, установить, является ли числовая последовательность арифметической прогрессией?

Характеристическое свойство арифметической прогрессии

Теорема. ***Числовая последовательность будет арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда каждый ее член, кроме первого и последнего (если она конечная), является средним арифметическим соседних с ним членов*** :

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Доказательство. Рассмотрим арифметическую прогрессию: a_1; a_2; a_3; … .

По формуле $a_{n-1} = a_n - d$ найдем $a_{n-1} = a_n - d$ и $a_{n-1} = a_n + d$.

Тогда $a_{n-1} + a_{n+1} = 2a_n$. Следовательно, $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$.

И, наоборот, если $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ (1), то числовая последовательность (a_n) — арифмет ическая прогрессия.

Действительно, из формулы (1) получим $a_{n-1} + a_{n-1} = 2a_n$, или $a_{n-1} - a_n = a_n - a_{n-1}$. Это равенство означает, что значение разности каждого ее члена и предыдущего есть число постоянное для данной последовательности. Обозначим его буквой d: $a_{n-1} - a_n = d$, поэтому числовая последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия.

Свойство членов арифметической прогрессии, выраженное формулой $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, является признаком арифметической прогрессии.

Формула n-го члена арифметической прогрессии

Запишем несколько первых членов арифметической прогрессии, используя определение арифметической прогрессии. Получим:

$a_2 = a_1 + d$,

$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$,

$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$,

$a_5 = a_4 + d = (a_1 + 3d) + d = a_1 + 4d$,

………………………………………

Сравнивая полученные результаты видим, что каждый член арифметической прогрессии можно представить в виде суммы ее первого члена и разности, умноженной на некоторый коэффициент, который на 1 меньше номера члена арифметической прогрессии.

Значит, $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$.

Формула $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$ называется ***формулой n-го члена арифметической прогрессии***.

ПРИМЕР

2. Найдем 27-й член арифметической прогрессии 216; 200; 184; 168; 152; … .

В этой прогрессии $a_1 = 216$, $d = 200 - 216 = -16$.

По формуле n-го члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$ получим $a_{27} = 216 + (27 - 1) \cdot (-16) = 216 - 416 = -200$.

Ответ: -200.

ПРИМЕР

3. Найдем номер члена 887 арифметической прогрессии: 7; 15; 23; 31; 39; ...

Решение. По условию $a_1 = 7$, $a_2 = 15$. Тогда $d = a_2 - a_1 = 15 - 7 = 8$. Теперь в формулу n-го члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$ подставим вместо a_1 число 7, вместо d число 8, вместо a_n число 887. Получим уравнение $887 = 7 + (n - 1) \cdot 8$. Решив его, найдем номер n-го члена 887:

$887 = 7 + (n - 1) \cdot 8$,

$n - 1 = 110$,

$n = 111$.

Ответ: 111.

ПРИМЕР

4. Выясним, является ли число $-505{,}8$ членом арифметической прогрессии 236,7; 154,2; ..., если является, то укажем его номер.

Решение. В данной прогрессии $a_1 = 236{,}7$, $a_2 = 154{,}2$. Вычислим разность этой арифметической прогрессии. Получим $d = a_2 - a_1 = 154{,}2 - 236{,}7 = -82{,}5$.

Используя формулу n-го члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$ получим $a_n = 236{,}7 + (n - 1) \cdot (-82{,}5)$. Требуется узнать, может ли $a_n = -505{,}8$ и найти n.

Число $-505{,}8$ будет являться членом арифметической прогрессии, если существует такое натуральное число n, при котором значение выражения $236{,}7 + (n - 1)(-82{,}5)$ равно $-505{,}8$.

Решим уравнение: $236{,}7 + (n - 1) \cdot (-82{,}5) = -505{,}8$.

$236{,}7 + 82{,}5 - 82{,}5n = -505{,}8$

$319{,}2 - 82{,}5n = -505{,}8$

$-82{,}5n = -825$

$n = 10$.

Значит, число $-505{,}8$ является десятым членом арифметической прогрессии 236,7; 154,2; ....

Ответ: является, $n = 10$.

ПРИМЕР

5. Найдем формулу n-го члена арифметической прогрессии 75; 64; 53; 42; 31; 20; ...

Решение. Для этого в формулу n-го члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$ подставим вместо a_1 число 75, вместо d число -11, так как $d = 64 - 75 = -11$. Получим равенство:

$a_n = 75 + (n - 1) \cdot (-11)$

$a_n = 75 - 11n + 11$

$a_n = 86 - 11n$ — формула n-го члена арифметической прогрессии 75; 64; 53; 42; 31; 20; ... .

Ответ: $a_n = 86 - 11n$.

ПРИМЕР

6. Найдем число членов арифметической прогрессии, если ее шестой член равен 31, десятый — 55, а последний — 73.

Решение. По условию $a_6 = 31$, $a_{10} = 55$, $a_n = 73$. Имеем $\begin{cases} a_6 = a_1 + 5d, \\ a_{10} = a_1 + 9d, \end{cases}$

откуда $a_{10} - a_6 = 4d$, $55 - 31 = 4d$ или $d = 6$. Тогда $a_1 = 1$.

По формуле n-го члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$ находим $73 = 1 + (n - 1) \cdot 6$, откуда $n = 13$.

Ответ: 13 членов.

График арифметической прогрессии

Поскольку арифметическая прогрессия является частным случаем числовой последовательности, поэтому ее графиком, как и графиком числовой последовательности, являются точки, у которых абсциссы — натуральные числа. Выясним, как располагаются эти точки.

Для этого рассмотрим формулу n-го числа арифметической прогрессии: $a_n = a_1 + d(n - 1)$. В ней независимой переменной является n, поэтому обозначим ее через x. Зависимой переменной является a_n — обозначим ее через y. Учтем также, что a_1 и d для данной последовательности являются постоянными числами.

Преобразуя формулу $a_n = a_1 + d(n - 1)$, получим $a_n = dn + (a_1 - d)$. Введем еще обозначения: $d = k$, $a_1 - d = b$. Тогда формула n-го члена арифметической прогрессии примет вид: $y = kx + b$. Как известно, эта формула задает линейную функцию. Следовательно, точки, изображающие на координатной плоскости члены арифметической прогрессии, лежат на одной прямой и имеют натуральные абсциссы.

Значит, арифметическая прогрессия является линейной функцией, заданной на множестве натуральных чисел.

ПРИМЕР

7. Построим график арифметической прогрессии, в которой $a_1 = -7$; $d = 3$.

Для построения графика арифметической прогрессии строим точки, абсциссы которых — номера членов, ординаты — соответствующие члены арифметической прогрессии: -7; -3; 1; 5; 9; … .

Как видно из графика, все построенные точки лежат на прямой (рис. 27).

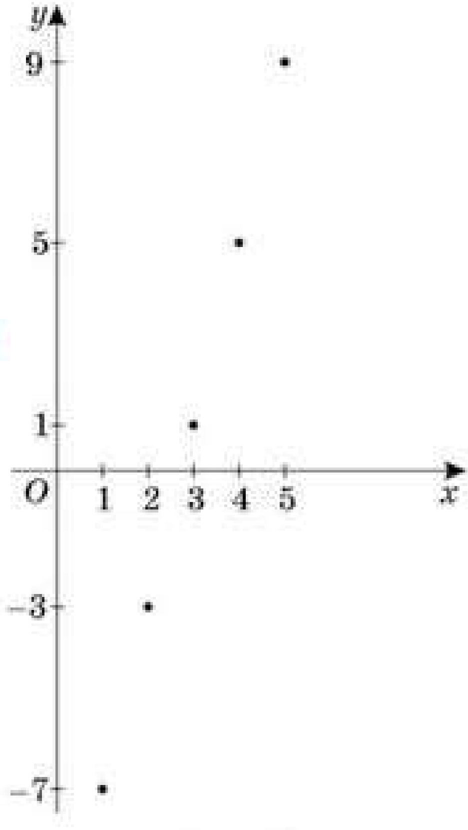


Рис. 27

Первоначально *прогрессией* (лат. *progressio* означает "движение вперед") называли любую числовую последовательность, например, последовательность натуральных чисел, их квадратов, кубов. В конце Средневековья этот термин перестал быть общеупотребительным.

Сведения, связанные с прогрессиями, впервые встречаются в дошедших до нас документах Древней Греции. Уже в V в. до н. э. греки знали следующие прогрессии: 1, 2, 3, … n и 2, 4, 6, …, $2n$.

Некоторые формулы, относящиеся к прогрессиям, были известны китайским и индийским ученым.

1. К какому способу задания числовой последовательности можно отнести арифметическую прогрессию?
2. Приведите примеры конечной и бесконечной арифметической прогрессии.
3. Что для арифметической прогрессии обозначает формула $d = a_{n+1} - a_n$?
4. По какому признаку можно установить, что числовая последовательность является арифметической прогрессией?

Упражнения

A

13.1. Какие из следующих конечных последовательностей являются арифметическими прогрессиями:

1) 2; 7; 12; 17; 22; 27;
2) –200; –100; –50; –25; –12,5;
3) 4; 20; 100; 500; 2500;
4) –11; –1; 9; 19; 29;
5) 1,35; 1,6; 1,85; 2,1; 2,35;
6) –1,3; 0,13; –0,013; 0,0013;
7) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{6}$; 0; $-\frac{1}{6}$;
8) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{18}$; $\frac{1}{54}$; $\frac{1}{162}$?

13.2. Выпишите первые шесть членов арифметической прогрессии (c_n), если:

1) $a_1 = 7$, $d = 3$;
2) $a_1 = 1{,}3$, $d = -0{,}2$;
3) $a_1 = -2{,}5$, $d = 0{,}7$;
4) $a_1 = \frac{2}{7}$, $d = \frac{1}{3}$.

13.3. Последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия. Найдите:

1) a_7, если $a_1 = -3$ и $d = 2$;
2) a_5, если $a_1 = 2{,}3$ и $d = 1{,}2$;
3) a_{11}, если $a_1 = -2{,}1$ и $d = -2{,}3$;
4) a_9, если $a_1 = 0{,}6$ и $d = 1{,}02$.

13.4. Найдите a_{19} и n-й член арифметической прогрессии:

1) 0,5; –1; –2,5; ...;
2) 13; 7; 1; ...;
3) –3,3; –1,2; 0,9; ...;
4) 2; 14; 26.

13.5. 1) Материальная точка в первую секунду движения прошла 6 см пути, а за каждую следующую секунду проходила на 2 см пути больше, чем за предыдущую секунду. Сколько сантиметров пути прошла точка за седьмую секунду?

2) Поезд, отойдя от станции, равномерно увеличивал скорость движения на 40 м/мин. Какой была скорость поезда через 20 минут?

13.6. Последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия. Найдите:

1) a_1, если $a_7 = -8$ и $d = 3$;
2) a_1, если $a_{10} = 7{,}3$ и $d = -0{,}2$;
3) a_1, если $a_{13} = -23{,}4$ и $d = 2{,}5$;
4) a_1, если $a_{27} = 10{,}6$ и $d = -1{,}12$.

13.7. Найдите разность арифметической прогрессии (a_n), в которой:

1) $a_1 = 3$ и $a_7 = -8$;
2) $a_3 = -2{,}3$ и $a_7 = -8$;
3) $a_2 = -1{,}7$ и $a_8 = 7{,}6$;
4) $a_5 = 21{,}5$ и $a_7 = 6{,}8$.

13.8. Является ли арифметической прогрессией последовательность (a_n), которая задана формулой:

1) $a_n = 2 - 0{,}3n$;
2) $a_n = 4 + 2n$;
3) $a_n = \frac{n-5}{8}$;
4) $a_n = \frac{4-n}{5}$;
5) $a_n = n \cdot (n+4)$;
6) $a_n = n \cdot (n^2 + 5)$?

B

13.9. 1) В арифметической прогрессии второй член равен 3,6, пятый — 9,6. Найдите номера членов прогрессии, принадлежащих числовому промежутку [15; 25].

2) В арифметической прогрессии третий член равен 2,4, шестой — 3,9. Найдите номера членов прогрессии, принадлежащих числовому промежутку [10; 20].

13.10. 1) Второй член арифметической прогрессии равен 3, седьмой — 23. Найдите две тысячи одиннадцатый член арифметической прогрессии.

2) Третий член арифметической прогрессии равен 4, девятый — 22. Найдите две тысячи двадцать первый член арифметической прогрессии.

13.11. 1) Является ли число 95 членом арифметической прогрессии 15; 19; 23; …? Если да, то укажите номер этого члена.

2) Является ли число 2011 членом арифметической прогрессии 33; 42; 51; …? Если да, то укажите номер этого члена.

3) Является ли число 2035 членом арифметической прогрессии –13; 19; 51; …? Если да, то укажите номер этого члена.

13.12. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии, если:

1) $c_{10} = 8$ и $c_{21} = 63$; 2) $c_{12} = 16$ и $c_{21} = 88$;

3) $c_9 = -1,8$ и $c_{19} = 23,2$; 4) $c_{17} = 3,4$ и $c_{29} = -18,2$.

13.13. Найдите число отрицательных членов арифметической прогрессии:

1) –24,5; –23; …; 2) –13,3; –10,1; …; 3) –22,4; –19,6; … .

13.14. Известны два члена арифметической прогрессии (a_n) $a_7 = -1,6$ и $a_{13} = 4,8$. Найдите для этой прогрессии:

1) первый член и разность;

2) число отрицательных членов;

3) первый положительный член прогрессии.

13.15. Известны два члена арифметической прогрессии (a_n) $a_5 = -2,4$ и $a_{11} = 6,8$. Найдите для этой прогрессии:

1) первый член и разность;

2) число отрицательных членов;
3) первый положительный член прогрессии.

13.16. Известны два члена арифметической прогрессии (a_n) $a_6 = 3{,}6$ и $a_{12} = -7{,}8$. Найдите для этой прогрессии:
1) первый член и разность;
2) число положительных членов;
3) первый отрицательный член прогрессии.

13.17. Известны два члена арифметической прогрессии (a_n) $a_9 = -2{,}2$. и $a_{14} = -10{,}8$. Найдите для этой прогрессии:
1) первый член и разность;
2) число положительных членов;
3) первый отрицательный член прогрессии.

13.18. Расположите между числами a и c три числа так, чтобы они образовали арифметическую прогрессию вместе с числами:

1) $a = 4$; $c = 16$; 2) $a = -2$; $c = 21$; 3) $a = 1{,}2$; $c = 4{,}8$.

13.19. При каких значениях переменной x образуют арифметическую прогрессию три числа, записанные в указанном порядке:

1) $1,\ x,\ 8 - x$; 2) $3,\ x - 1,\ 13 - 4x$?

13.20. Задана арифметическая прогрессия (a_n). Известно, что $a_8 = \frac{5}{12}$. Найдите значение суммы:

1) $a_7 + a_9$; 2) $a_6 + a_{10}$; 3) $a_5 + a_{11}$; 4) $a_3 + a_{13}$.

13.21. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии, если известно, что:

1) $a_1 + a_5 = 24$ и $a_1 \cdot a_3 = 60$;

2) $a_2 + a_4 = 16$ и $a_1 \cdot a_5 = 28$.

C

13.22. Задана арифметическая прогрессия (a_n), у которой $a_1 = -3$ и $d = 7$. Является ли членом этой прогрессии число: 1) 247; 2) 346; 3) 2067? Если да, то укажите его номер.

13.23. Укажите номера членов арифметической прогрессии, являющихся двузначными числами:

1) 3; 8; … ; 2) −12; −4; … ;

3) 156; 135; … ; 4) 251; 229; … .

***13.24**. Есть ли в арифметической прогрессии 2,35; 3,1; … члены, являющиеся целыми числами, не превосходящими число 20? Если есть, то найдите их.

***13.25**. Конечные арифметические прогрессии 7; 11; … и 8; 11; … имеют по 100 членов. Найдите число одинаковых членов этих прогрессий.

***13.26**. Конечные арифметические прогрессии 4; 12; … и 5; 12; … имеют по 200 членов. Найдите число одинаковых членов этих прогрессий.

13.27. В арифметической прогрессии $\frac{c_5}{c_3} = \frac{7}{4}$. Докажите, что $c_7 = 4c_2$.

13.28. Значение суммы первых трех членов возрастающей арифметической прогрессии с положительными членами равно 9, а значение суммы их квадратов равно 99. Найдите пятый член этой прогрессии.

13.29. При каких значениях переменной a значения выражений $a^2 - 3$, $2a^2 + 1$ и $a^4 + 1$, взятые в указанном порядке, являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии?

ПОВТОРИТЕ

13.30. Методом интервалов решите неравенство:

1) $\frac{(x-2)^2 \cdot (x+3)}{x-3} > 0$; 2) $\frac{(x+2)^2 \cdot (x+5)}{x-2} < 0$;

3) $\frac{(x-1)^3 \cdot (x+2)}{(x-3)^2}$ l 0; 4) $\frac{(x-4)^3 \cdot (x+6)}{(x-1)^2}$ m 0.

13.31. Постройте график функции и найдите промежутки ее возрастания:

1) $y = 2x^2 - 3x + 1$; 2) $y = -2x^2 + 5x + 3$;

3) $y = -0{,}5x^2 - 3x + 4$.

13.32. Найдите область определения функции:

1) $y = \sqrt{x^2 - 3x - 4} + \sqrt{4 - x}$; 2) $y = \sqrt{x^2 + 3x - 4} + \sqrt{9 - x^2}$.

13.33. Решите уравнение:

1) $(x+3)^4 - x^2 - 6x - 11 = 0$; 2) $(x-6)^4 - 2x^2 + 24x - 80 = 0$.

Алгебра

13.34. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^3 + x^3y^3 = 17 - y^3, \\ x + xy = 5 - y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + 3xy = 3 - 2y^2, \\ 5x^2 - 2xy = 5 + y^2. \end{cases}$

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

13.35. Является ли последовательность арифметической прогрессией? Найдите значение суммы первых четырех членов последовательности:

1) 2; 7; 12; 17; 22; 27; 2) –200; –100; –50; –25; –12,5;

3) 4; 20; 100; 500; 2500; 4) –11; –1; 9; 19; 29.

13.36. Арифметическая прогрессия задана формулой $a_n = 2n - 5$. Найдите значение суммы ее первых пяти членов.

Опорные понятия для овладения новыми знаниями

Последовательность, член последовательности, арифметическая прогрессия, n-й член арифметической прогрессии, разность прогрессии.

§ 14. ФОРМУЛА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЯ СУММЫ ПЕРВЫХ n ЧЛЕНОВ АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

Ключевые понятия

Арифметическая прогрессия, сумма членов арифметической прогрессии

?

Вы ознакомитесь с формулой суммы первых n членов арифметической прогрессии;

научитесь применять формулы суммы первых n членов арифметической прогрессии; решать задачи, связанные с арифметической прогрессией.

Пусть требуется найти значение суммы первых пятидесяти натуральных чисел. Это можно найти последовательно выполняя сложение чисел, но вычисления будут трудоемкими и понадобится много времени.

Попытаемся найти более рациональный способ нахождения значения искомой суммы. Запишем сумму натуральных чисел от 1 до 50 дважды, расположив первый раз слагаемые в порядке возрастания, второй раз — в порядке убывания:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 48 + 49 + 50,$$
$$50 + 49 + 48 + \ldots + 3 + 2 + 1.$$

Заметим, что значение суммы чисел, расположенных друг под другом, одно и то же: $1 + 50 = 2 + 49 = 3 + 48 = \ldots = 48 + 3 = 49 + 1 = 50 + 1 = 51$. Другими словами, значение суммы двух членов конечной арифметической прогрессии: $1; 2; 3; \ldots; 48; 49; 50$, равностоящих от концов, равно значению суммы ее крайних членов. Значит, каждая такая пара чисел в сумме дает 51, а число пар в двух рядах равно 25, поэтому $1 + 2 + 3 + \ldots + 48 + 49 + 50 = \frac{51 \cdot 50}{2} = 51 \cdot 25 = 1275$.

Этим же приемом воспользуемся для вывода формулы суммы первых n членов арифметической прогрессии. Обозначим эту сумму через S_n:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n. \quad (1)$$

Если слагаемые в правой части равенства (1) напишем в обратном порядке, сумма S_n от этого не изменится. Получим

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1. \quad (2)$$

Почленно складывая равенства (1) и (2), получим

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

В каждой скобке записана сумма двух членов арифметической прогрессии, которые находятся на одинаковых расстояниях (равностоящих) от ее концов.

Убедитесь, что значения всех этих сумм в скобках равны между собой и равны значению суммы ее крайних членов $a_1 + a_n$. Для этого используйте формулу n-го члена арифметической прогрессии.

Таких скобок всего n — столько, сколько членов прогрессии, поэтому $2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n$. Тогда $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ — формула суммы первых n членов арифметической прогрессии.

Выше проведенные рассуждения есть доказательство теоремы.

Теорема. ***Сумма первых n членов арифметической прогрессии равна полусумме ее крайних членов, умноженной на число членов.***

Докажите, что если воспользоваться формулой n-го члена арифметической прогрессии, то формула суммы первых n членов арифметической прогрессии имеет вид:

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

Формулу суммы первых n членов арифметической прогрессии можно найти геометрическим способом, используя рисунок 28.

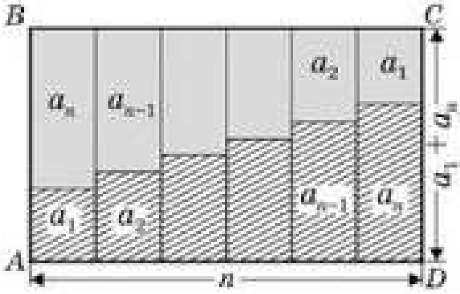


Рис. 28

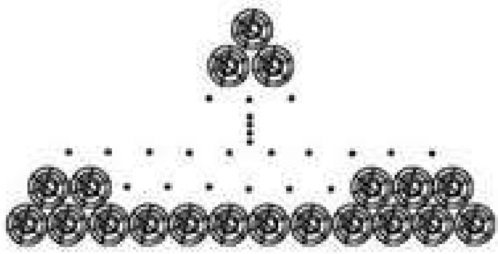


Рис. 29

Рассмотрим практическое применение формулы суммы n членов арифметической прогрессии на примере следующей задачи.

ПРИМЕР

1. Для хранения бревна уложили так, что в каждом верхнем ряду их оказалось на одно бревно меньше, чем в нижнем ряду (рис. 29). Как учетчику быстро узнать, сколько бревен находится в одной кладке?

Решение. Поскольку в каждом верхнем ряду на одно бревно меньше, а в нижнем ряду их 12 (можно сосчитать), то число бревен в каждом ряду образует конечную арифметическую прогрессию: 12; 11; 10; 9; 8; 7; 6; 5; 4; 3; 2; 1, для которой $a_1 = 12$, $a_n = 1$, $n = 12$. Используя формулу $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ получим $S_{12} = 78$.

Ответ: 78 бревен.

Придумайте задачи на арифметическую прогрессию, используя рисунок 30.

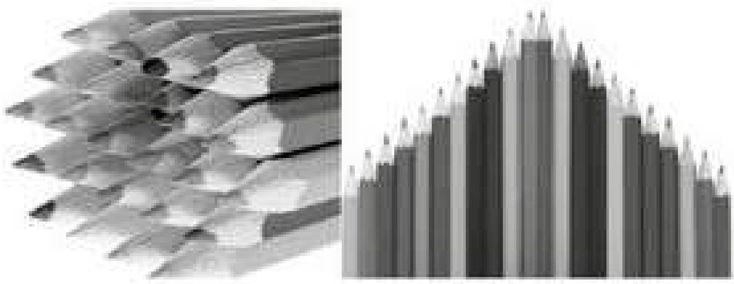


Рис. 30

ПРИМЕР

2. Найдем значение суммы первых 20 членов арифметической прогрессии: 1; 3,5; … .

Решение. Первый член прогрессии равен 1, разность — 2,5. Сначала найдем 20-й член этой прогрессии по формуле n-го члена.

Получим $b_{20} = 1 + 2,5 \cdot (20 - 1) = 1 + 2,5 \cdot 19 = 48,5$.

Затем вычислим искомое значение суммы 20 членов по формуле суммы n членов арифметическ ой прогрессии. Получим

$$S_{20} = \frac{(1 + 48,5) \cdot 20}{2} = 49,5 \cdot 10 = 495.$$

Ответ: 495.

ПРИМЕР

3. Докажем, что значение суммы n последовательных членов арифметической прогрессии, начиная с члена k, вычисляется по формуле: $S_n = \frac{a_k + a_{k+n-1}}{2} \cdot n$.

Решение. Рассмотрим арифметическую прогрессию: $a_1 + a_2 + ... + a_k + ...$. Требуется найти значение суммы n последовательных членов арифметической прогрессии, начиная с члена k, т. е. сумму конечной последовательности, первый член которой a_k. Выясним, какой номер у последнего члена этой прогрессии. У первого члена — номер k, у второго — $k + 1$, у третьего — $k + 2$, у четвертого — $k + 3$, ... у n-го — $k + n - 1$. Значит, требуется найти значение суммы членов конечной арифметической прогрессии $a_k + a_{k-1} + ... + a_{k+n-1}$, поэтому $S_n = \frac{a_k + a_{k+n-1}}{2} \cdot n$.

1. Запишите формулу для нахождения значения суммы k $(k + 1)$ членов арифметической прогрессии.
2. Как можно вычислить значение суммы последовательных n членов арифметической прогрессии, начиная с члена k, не используя формулу из примера 2?

Упражнения

А

14.1. Найдите значение суммы 99 членов арифметической прогрессии:

1) 32, 35; ... ;
2) 106; 103; ... ;
3) –33; –29; ... ;
4) –23,5; –23; ... .

14.2. Найдите a_n и S_n, если:

1) $a_1 = 5$, $d = 3$ и $n = 14$;
2) $a_1 = 12$, $d = 7$ и $n = 24$;
3) $a_1 = -55$, $d = 8$ и $n = 32$;
4) $a_1 = -7,3$, $d = 8$ и $n = 19$;
5) $a_1 = -16,8$, $d = -1,2$ и $n = 26$;
6) $a_1 = 12,56$, $d = -6,4$ и $n = 104$.

14.3. Найдите n и S_n, если:

1) $a_1 = 3$, $d = 3$ и $a_n = 27$;

2) $a_1 = 14$, $d = 6$ и $a_n = 84$;

3) $a_1 = -5{,}4$, $d = 1{,}8$ и $a_n = 30{,}6$;

4) $a_1 = -7{,}3$, $d = -2{,}6$ и $a_n = -30{,}7$.

14.4. Найдите n, если:

1) $a_1 = 25$, $d = -2$, $S_n = 168$;

2) $a_1 = 5$, $d = 2$, $S_n = 192$;

3) $a_1 = -12{,}5$, $d = 3$, $S_n = 195{,}5$;

4) $a_1 = -2{,}4$, $d = -0{,}8$, $S_n = -70{,}4$.

14.5. Найдите разность арифметической прогрессии (a_n), если:

1) $a_1 = 18$, $n = 27$, $S_n = 2241$; 2) $a_1 = -8$, $n = 17$, $S_n = -408$;

3) $a_1 = -5$, $n = 23$, $S_n = 1909$; 4) $a_1 = 81$, $n = 34$, $S_n = 510$.

14.6. Найдите 20-й член и значение суммы 20 первых членов арифметической прогрессии:

1) 1,3; 2,1; ...; 2) $3\frac{1}{3}$; $3\frac{7}{12}$; ...;

3) –2,87; –2,77; ...; 4) –3,43; –3,49; ...

14.7. Найдите разность арифметической прогрессии, если:

1) $a_{11} = 6$, $a_{16} = 8{,}5$; 2) $a_8 = 4$, $a_{13} = 7{,}5$;

3) $a_3 = 3$, $a_8 = 10{,}5$; 4) $a_2 = 2$, $a_9 = 6{,}9$.

14.8. Арифметическая прогрессия (x_n) задана формулой:

1) $x_n = 3n + 2$. Найдите значение суммы 20 первых ее членов;

2) $x_n = 2n - 9$. Найдите значение суммы 30 первых ее членов;

3) $x_n = -4n + 12$. Найдите значение суммы 12 первых ее членов;

4) $x_n = -2{,}3n - 7{,}2$. Найдите значение суммы 29 первых ее членов.

14.9. Найдите значение суммы:

1) $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n$, слагаемыми которой являются все четные натуральные числа от 2 до $2n$, включая $2n$;

2) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)$, слагаемыми которой являются все нечетные натуральные числа от 1 до $2n - 1$, включая $2n - 1$;

3) $3 + 6 + 9 + \ldots + 3n$, слагаемыми которой являются все натуральные числа, кратные 3, от 3 до $3n$, включая $3n$;

4) $5 + 10 + 15 + \ldots + 5n$, слагаемыми которой являются все натуральные числа, кратные 5, от 5 до $5n$, включая $5n$.

B

14.10. 1) Второй член арифметической прогрессии в 3 раза больше девятого ее члена. Найдите значение суммы первых 24 членов этой прогрессии.

2) Третий член арифметической прогрессии в 4 раза больше двенадцатого ее члена. Найдите значение суммы первых 29 членов этой прогрессии.

14.11. 1) В арифметической прогрессии $a_n = 5n - 100$. Найдите значение суммы всех отрицательных членов этой прогрессии.

2) В арифметической прогрессии $a_n = 7n - 130$. Найдите значение суммы всех отрицательных членов этой прогрессии.

3) В арифметической прогрессии $a_n = 51 - 3n$. Найдите значение суммы всех положительных членов этой прогрессии.

4) В арифметической прогрессии $a_n = 58 - 4n$. Найдите значение суммы всех положительных членов этой прогрессии.

14.12. Найдите a_1 и n, если:

1) $d = 3$, $a_n = 59$, $S_n = 603$; 2) $d = -5$, $a_n = -8$, $S_n = 30$;
3) $d = 2$, $a_n = 49$, $S_n = 702$; 4) $d = -7$, $a_n = -18$, $S_n = -20$.

14.13. Напишите формулу n-го члена и суммы n первых членов арифметической прогрессии (a_n) с положительными членами:

1) $a_2 + a_5 = 41$ и $a_1 + a_3 = 144$;

2) $a_2 + 2a_4 = 27$ и $a_{17} = 50$;

3) $a_2 a_5 = 112$ и $\frac{a_1}{a_5} = 2$; 4) $a_3 a_4 = 28$ и $\frac{a_1}{a_5} = 13$.

14.14. 1) Найдите седьмой член арифметической прогрессии, если $a_3 + a_{11} = 20$.

2) Найдите десятый член арифметической прогрессии, если $a_7 + a_{13} = 24$.

14.15. 1) Найдите значение суммы всех четных двузначных чисел.
2) Найдите значение суммы всех нечетных двузначных чисел.

Алгебра

14.16. Найдите значение суммы всех двузначных чисел, кратных: 1) 3; 2) 7.

14.17. Найдите значение суммы всех двузначных чисел, которые при делении на: 1) 5 дают остаток 1; 2) 9 дают остаток 4.

14.18. Найдите значение суммы всех трехзначных чисел, кратных: 1) 8; 2) 13.

14.19. Найдите значение суммы всех трехзначных чисел, которые при делении на: 1) 5 дают остаток 3; 2) 25 дают остаток 11.

14.20. Найдите наибольшее из возможных значений сумм n первых членов арифметической прогрессии, если $a_1 = 137$, $a_2 = 121$.

C

14.21. В арифметической прогрессии (a_n) вычислите значение суммы:

1) $a_7^2 + 2a_7a_5 + a_5^2 - (a_8 + a_4)^2$; 2) $4a_9^2 - 4a_1a_9 + a_1^2 - a_{17}^2$.

14.22. 1) Значение суммы первого, четвертого и тринадцатого членов арифметической прогрессии равно 23. Найдите a_6 и S_{11}.

2) Значение суммы первого, шестого и четырнадцатого членов арифметической прогрессии равно 63. Найдите a_{10} и S_{19}.

14.23. Решите уравнение, если известно, что слагаемые в левой его части составляют арифметическую прогрессию:

1) $2 + 8 + 14 + \ldots + x = 184$; 2) $5 + 8 + 11 + \ldots + x = 185$.

14.24. В конечной арифметической прогрессии с нечетным числом членов средний член равен 17, а значение суммы всех слагаемых на 112 больше их числа. Найдите число членов прогрессии.

14.25. В арифметической прогрессии n-й член задан формулой $a_n = 2{,}5n + 2$. Найдите значение суммы членов прогрессии с одиннадцатого по двадцатый включительно.

14.26. При свободном падении в первую секунду тело проходит путь длиной 5,9 м, а в каждую следующую секунду — на 9,8 м больше. Найдите длину пройденного пути свободно падающего тела:

1) за пятую секунду после начала движения;

2) за пять секунд после начала движения;

3) за седьмую секунду после начала движения;
4) за семь секунд после начала движения.

ПОДГОТОВЬТЕ СООБЩЕНИЕ ОБ УЧЕНОМ-МАТЕМАТИКЕ

14.27. С формулой $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ связан интересный эпизод из жизни немецкого математика Карла Фридриха Гаусса. Когда ему было 9 лет, учитель, занятый проверкой работ учащихся других классов, задал на уроке следующую задачу: "Найти значение суммы всех натуральных чисел от 1 до 100 включительно:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + 100".$$

Карл Фридрих Гаусс (1777—1855)

Каково же было удивление учителя когда один из учеников (это был Гаусс) через минуту воскликнул: "Я уже решил". Большинство учеников после долгих подсчетов получили неверный результат. В тетради Гаусса было только одно число, но зато верное.
Вот схема его рассуждений. Значение суммы чисел в каждой паре равно 101:

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{rrrrr} 1, & 2, & 3, & ..., & 100 \\ 100, & 99, & 98, & ..., & 1 \end{array} \\ \hline \begin{array}{rrrrr} 101, & 101, & 101, & ..., & 101 \end{array} \end{array}$$

Таких пар 100, поэтому значение искомой суммы равно значению произведения $101 \cdot 50 = 5050$.

ПОВТОРИТЕ

14.28. Постройте на одной координатной плоскости графики функций и запишите приближенные значения координат их точек пересечения:

1) $y = 2x^2 + 3x - 1$ и $y = -x^2 + 4x - 2$;

2) $y = 3x^2 + 4x + 1$ и $y = -2x^2 + x + 3$.

14.29. Решите уравнение:

1) $\frac{x}{x-3} - \frac{18}{x^2 - 9} = \frac{5}{x+3}$;   2) $\frac{3x}{x+4} + \frac{17}{x-4} = \frac{70}{x^2 - 16}$.

14.30. Решите графически уравнение:

1) $7x - 6 = x^3$; 2) $x^3 = \sqrt{x}$;

3) $0,5x - 2 = \frac{6}{x}$; 4) $3x - 1 = \frac{2}{x}$.

14.31. Решите способом подстановки систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 - xy + 8 = -y, \\ y - 2x = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + 3xy + y^2 = 1, \\ 3y + x = 0. \end{cases}$

14.32. Площадь прямоугольного треугольника равна 44 см^2. Если длину одного из его катетов увеличить на 2 см, а другого уменьшить на 1 см, то площадь прямоугольника станет равной 50 см^2. Найдите длины катетов данного треугольника.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

14.33. Как получен последующий член конечной последовательности:

1) 2; 8; 32; 128; 512; 2048; 2) –200; –100; –50; –25; –12,5;

3) 4; 20; 100; 500; 2500;

4) –11; –1,1; –0,11; –0,011; –0,0011?

14.34. Установите закономерность и запишите член последовательности под знаком (*):

1) 8; 4; 2; 1; (*); 2) 8; –4; 2; –1; (*);

3) $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; $-\frac{1}{16}$; (*); 4) –4; 16; –64; 256. (*)

Опорные понятия для овладения новыми знаниями

Последовательность, член последовательности, n-й член последовательности, последующий член последовательности.

§ 15. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ. ФОРМУЛА *n*-го ЧЛЕНА ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

Ключевые понятия

Геометрическая прогрессия, формула *n*-го члена

?

Вы ознакомитесь с понятием *геометрическая прогрессия*, формулой *n*-го члена и характеристическим свойством геометрической прогрессии;

научитесь распознавать геометрическую прогрессию среди числовых последовательностей, формулы *n*-го члена и характеристическое свойство геометрической прогрессии; решать задачи, связанные с геометрической прогрессией.

В казахской игре "тоғызқұмалақ" (девять камушков), отдаленно напоминающей шахматы, берется доска с 20 лунками: две лунки — казына — в игре не участвуют, а служат для складывания камушков. В каждом боковом крае доски располагаются по девять лунок, значительно меньших размером, чем казына, всего 18 таких лунок (рис. 31). Кроме этого используется 162 камушка.

Таким образом, в этой игре присутствуют числа: 2, 18, 162.

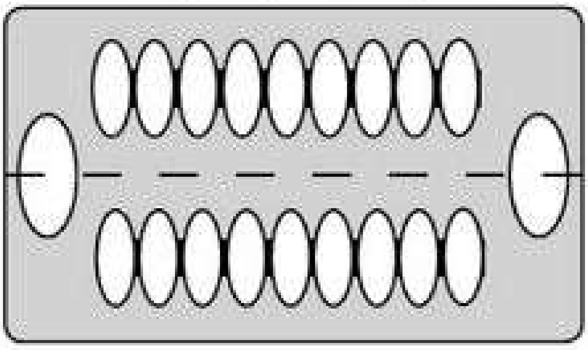


Рис. 31

Подумайте, какая имеется закономерность между членами последовательности 2, 18, 162?

Можно ли заключить, что в данной последовательности каждый последующий член равен предыдущему, умноженному на 9? Действительно, легко убедиться, что $2 \cdot 9 = 18$ и $18 \cdot 9 = 162$.

Числовую последовательность, члены которой обладают подобным свойством, называют *геометрической прогрессией*.

Числовая последовательность, первый член которой отличен от нуля, а каждый член начиная со второго, равен предшествующему члену, умноженному на одно и то же, не равное нулю число, называется ***геометрической прогрессией****.*

ПРИМЕР

1. Каждый член последовательности $2; 2^2; 2^3; 2^4; 2^5; 2^6$, начиная со второго, получается умножением предыдущего члена на 2. Эта последовательность является геометрической прогрессией.

Число, на которое надо умножить член геометрической прогрессии, чтобы получить последующий ее член, называется ***знаменателем геометрической прогрессии*** *и обозначается буквой q.*

ПРИМЕР

2. Рассмотрим несколько примеров:

1) 3, 6, 12, 24, …; 2) 4, 12, 36, 108, ...;

3) 40, 20, 10, 5, 2,5, … ; 4) $\frac{3}{4}, -\frac{3}{8}, \frac{3}{16}, -\frac{3}{32}, \ldots$.

Эти последовательности являются геометрическими прогрессиями со знаменателями, равными: 2; 3; $\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$, соответственно.

Из определения следует, что отношение любого ее члена, начиная со второго, к предыдущему члену равно q, т. е. $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$.

Последовательность 7, 7, 7, …, членами которой является одно и то же число, можно рассматривать как геометрическую прогрессию со знаменателем $q = 1$.

Геометрическую прогрессию обозначают: $b_1; b_2; b_3; \ldots; b_n; \ldots$.

Пусть дана геометрическая прогрессия $b_1; b_2; b_3; \ldots; b_n; \ldots$ со знаменателем q.

Зная первый член b_1 и знаменатель q, используя определение геометрической прогрессии, можно найти второй, третий, четвертый и вообще любой ее член.

Чтобы найти второй член, умножим первый член на знаменатель, для нахождения третьего его члена умножим второй член на знаменатель и т. д. Этот способ не всегда удобен, поэтому при нахождении членов с достаточно большими номерами удобнее пользоваться формулой, которая выражает любой член геометрической прогрессии через первый член, знаменатель и номер искомого члена.

$$\left.\begin{array}{l} b_2 = b_1 q \\ b_3 = b_2 q \\ b_4 = b_3 q \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{n-1} = b_{n-2} q \\ b_n = b_{n-1} q \end{array}\right]$$

Рассмотрим полученную совокупность равенств, состоящую из $(n - 1)$ равенства.

Левые и правые части этих равенств почленно умножим. Получим

$$b_2 b_3 \ldots b_{n-1} b_n = b_1 b_2 b_3 \ldots b_{n-1} q^{n-1}.$$

Разделим обе части полученного равенства на $b_2 b_3 \ldots b_{n-1} \neq 0$.

Получим формулу n-го члена геометрической прогрессии:

$$b_n = b_1 q^{n-1}$$

Любой член геометрической прогрессии равен первому ее члену, умноженному на степень знаменателя прогрессии, показатель которой равен числу предшествующих ему членов.

ПРИМЕР

3. Рассмотрим равносторонний треугольник, длины сторон которого равны по 4 см.

Построим треугольник, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника (рис. 32).

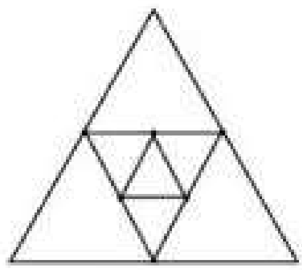


Рис. 32

Согласно свойствам средней линии треугольника, длины сторон полученного равностороннего треугольника будут равны по 2 см. Если продолжим такое построение дальше, то получим равносторонние треугольники, у которых длины сторон равны: 1 см; $\frac{1}{2}$ см; $\frac{1}{4}$ см.

Запишем последовательность чисел, выражающих длины сторон этих треугольников: 4; 2; 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; ... .

Напишем формулу n-го члена полученной геометрической прогрессии. В этой прогрессии $b_1 = 4$, $q = \frac{1}{2}$, поэтому по формуле n-го члена геометрической прогрессии $b_n = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

ПРИМЕР

4. Найдем шестой член геометрической прогрессии, если первый член равен 6, знаменатель $-\frac{1}{3}$.

Решение. Согласно формуле n-го члена геометрической прогрессии получим:

$$b_6 = 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{6-1} = 6 \cdot \frac{1}{3^5} = \frac{2}{3^4} = \frac{2}{81}.$$

Ответ: $\frac{2}{81}$.

ПРИМЕР

5. Найдем номер члена геометрической прогрессии: $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$; 1; 2; 4; 8, ..., который равен 128.

Решение. Находим, что $b_1 = \frac{1}{4}$, $q = 2$ и $b_n = 128$. По формуле n-го члена геометрической прогрессии получим $128 = \frac{1}{4} \cdot 2^{n-1}$, или $512 = 2^{n-1}$. Поскольку $512 = 2^9$, то $2^9 = 2^{n-1}$, или $9 = n - 1$, тогда $n = 10$.

Ответ : 10.

ПРИМЕР

6. Найдем восьмой член геометрической прогрессии (b_n), если $b_3 = 18$, $b_1 = 162$.

Решение . Используя формулу n-го члена геометрической прогрессии выразим b_3 через b_1 и q. Получим $b_3 = b_1q^2$ и выразим из полученной формулы $q^2 = \frac{b_3}{b_1} = \frac{18}{162} = \frac{1}{9}$. Значит, $q = \frac{1}{3}$ или $q = -\frac{1}{3}$, т.е. существуют две геометрические прогрессии, удовлетворяющие условию задачи. Для одной прогрессии $b_8 = b_1q^7 = 162 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^7 = \frac{2 \cdot 3^4}{3^7} = \frac{2}{27}$, для другой — $b_8 = b_1q^7 = 162 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^7 = -\frac{2 \cdot 3^4}{3^7} = -\frac{2}{27}$.

Ответ : Задача имеет два решения: $b_8 = \frac{2}{27}$ и $b_8 = -\frac{2}{27}$.

ПРИМЕР

7. Найдем первые два члена геометрической прогрессии, если четвертый ее член равен $\frac{1}{32}$, а шестой член равен $\frac{1}{512}$.

Решение . Если обозначим первый член прогрессии через b_1 и знаменатель через q, то из условия задачи получим систему уравнений:

$$\begin{cases} b_1 \cdot q^3 = \frac{1}{32}, \\ b_1 \cdot q^5 = \frac{1}{512}. \end{cases}$$

Решая ее получим $b_1 = 2$; $q = \pm\frac{1}{4}$. Тогда для второго члена $b_2 = b_1q = 2 \cdot \left(\pm\frac{1}{4}\right) = \pm\frac{1}{2}$.

Ответ : первый член равен 2, второй член равен $\frac{1}{2}$ или $-\frac{1}{2}$.

Теорема 1. ***Любой член геометрической прогрессии с положительными членами $b_1, b_2, b_3, \dots b_{n-1}, b_n, b_{n+1} \dots$, начиная со второго, равен среднему геометрическому соседних с ним членов.***

Другими словами, при $n \geq 2$ выполняется равенство:
$b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$.

Действительно, при $n \geq 2$, используя формулу n-го члена геометрической прогрессии, выразим b_n через предыдущий член и через последующий член. Получим два равенства: $b_n = b_{n-1} \cdot q$ и $b_n = \frac{b_{n+1}}{q}$, поэтому $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$ и $b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$.

На геометрические прогрессии, содержащие отрицательные члены, эта теорема не распространяется, ведь среднее геометрическое определено только для положительных чисел.

ПРИМЕР

8. Значение суммы трех чисел, составляющих арифметическую прогрессию, равно 15. Если к ним прибавить соответственно числа 1, 4 и 19, то получатся три числа, составляющие геометрическую прогрессию. Найдем эти числа.

Решение. По условию $a_1 + a_2 + a_3 = 15$. Поскольку $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$, то $2a_2 = a_1 + a_3$. Из условия получим $a_2 + 2a_2 = 15$, отсюда $3a_2 = 15$, $a_2 = 5$. Тогда $a_1 = 5 - d$, $a_2 = 5$, $a_3 = 5 + d$.

По условию $b_1 = a_1 + 1 = 6 - d$, $b_2 = a_2 + 4 = 9$, $b_3 = a_3 + 19 = 5 + d + 19 = 24 + d$.

Используя формулу $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$, можно записать, что $b_2^2 = b_1 \cdot b_3$, тогда получим $9^2 = (6 - d) \cdot (24 + d)$.

Из полученного уравнения найдем d, получим два корня: $d = 3$ или $d = -21$.

Тогда $a_1 = 2$ или $a_1 = 26$.

Получим две тройки чисел: 2; 5; 8 и 26; 5; –16.

Ответ : 2; 5; 8 и 26; 5; –16.

Верна и теорема, обратная теореме 1.

Теорема 2. ***Если каждый член числовой последовательности с положительными членами, начиная со второго, равен среднему геометрическому соседних с ним членов, то такая числовая последовательность является геометрической прогрессией.***

Докажите теорему 2.

Свойство членов геометрической прогрессии, выраженное формулой $b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$, является признаком геометрической прогрессии.

1. Является ли числовая последовательность: 1) 0; 0; 0; 0; ...; 2) 1; 1; 1; ... геометрической прогрессией?
2. Может ли знаменатель геометрической прогрессии быть числом:
   1) положительным дробным;
   2) отрицательным;
   3) иррациональным;
   4) нулем?
3. Какими способами можно установить, является ли числовая последовательность геометрической прогрессией?

Упражнения

А

15.1. Какие из следующих конечных последовательностей являются:

а) арифметическими прогрессиями; б) геометрическими прогрессиями:

1) –14; –4; 6; 16; 26; 2) 2; 20; 200; 2000; 20 000;

3) $\frac{1}{2}; \frac{1}{6}; \frac{1}{18}; \frac{1}{54}; \frac{1}{108}$; 4) $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{6}; 0; -\frac{1}{6}$;

5) $2; -\sqrt{2}; 1; -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2}$; 6) $\frac{14}{17}; \frac{9}{17}; \frac{4}{17}; -\frac{1}{17}; -\frac{6}{17}$?

15.2. Задана геометрическая прогрессия (b_n). Найдите:

1) b_7, если $b_1 = 18$, $q = \frac{1}{4}$; 2) b_5, если $b_1 = 64$, $q = \frac{1}{4}$;

3) b_8, если $b_1 = 4$, $q = \frac{1}{5}$; 4) b_9, если $b_1 = -625$, $q = -\frac{1}{5}$.

15.3. Задана геометрическая прогрессия (b_n). Найдите:

1) b_1, если $b_3 = 18$, $q = \frac{1}{3}$; 2) b_1, если $b_6 = 64$, $q = \frac{1}{4}$;

3) b_1, если $b_8 = 16$, $q = -\frac{1}{2}$; 4) b_1, если $b_7 = 375$, $q = -\frac{1}{5}$.

15.4. Задана геометрическая прогрессия (b_n). Найдите:

1) q, если $b_1 = 18$, $b_2 = 54$; 2) q, если $b_2 = 33$, $b_3 = 44$;

3) q, если $b_2 = -13$, $b_3 = 169$; 4) q, если $b_5 = 0{,}4$, $b_6 = -0{,}08$.

15.5. В геометрической прогрессии (b_n) найдите:

1) b_7, если $b_1 = 3\sqrt{2}$, $q = -\sqrt{2}$;

2) b_5, если $b_1 = -2\sqrt{3}$, $q = \sqrt{3}$;

3) b_6, если $b_1 = \sqrt{2}$, $q = -\frac{1}{\sqrt{2}}$;

4) b_3, если $b_1 = 1 - \sqrt{2}$, $q = 1 + \sqrt{2}$.

15.6. Запишите пять первых членов геометрической прогрессии (b_n), если:

1) $b_1 = 0{,}6$ и $q = 2$; 2) $b_1 = -1{,}2$ и $q = \frac{1}{3}$;

3) $b_1 = -27$ и $q = -\frac{2}{3}$; 4) $b_1 = 3{,}6$ и $q = \frac{1}{6}$.

15.7. Второй член геометрической прогрессии равен 6. Найдите значение произведения первых трех членов этой прогрессии.

15.8. Третий член геометрической прогрессии равен $\sqrt{3}$. Найдите значение произведения первых пяти членов этой прогрессии.

15.9. Запишите пять первых членов геометрической прогрессии, у которой третий член равен — 8, а пятый равен — 332.

15.10. Запишите пять первых членов геометрической прогрессии, у которой третий член равен $3\sqrt{3}$, а пятый равен $9\sqrt{3}$.

15.11. Запишите шестой и n-й член геометрической прогрессии:

1) 192; 48; 12; ...; 2) $\frac{64}{9}$; $-\frac{32}{3}$; ...;

3) $-0{,}0001$; $0{,}001$; $-0{,}01$; ...; 4) 2; $-2\sqrt{2}$; 4; ...

B

15.12. Геометрическая прогрессия (x_n) состоит из четырех членов: 1) 2, x_2, x_3, 0,25; 2) 3, x_2, x_3, $-\frac{1}{9}$. Найдите x_2 и x_3.

15.13. Длины сторон прямоугольного треугольника образуют геометрическую прогрессию. Найдите ее знаменатель, если длина гипотенузы равна: 1) 2 м; 2) 6 м.

15.14. 1) Величины углов выпуклого четырехугольника образуют конечную геометрическую прогрессию со знаменателем, равным 2. Найдите величины углов этого четырехугольника.

2) Величины углов треугольника образуют конечную геометрическую прогрессию со знаменателем, равным 3. Найдите величины углов этого треугольника.

15.15. 1) Второй член геометрической прогрессии составляет 20% от ее первого члена. Сколько процентов составляет пятый ее член от третьего члена?

2) Второй член геометрической прогрессии составляет 110% от ее первого члена. Сколько процентов составляет ее шестой член от четвертого члена?

3) Банк дает своим вкладчикам 8% годовых. Чему будет равен вклад в 100 000 тг через 2 года?

4) Снижение себестоимости производства товара равно 5% в год. Первоначальная себестоимость товара равна 10 000 тг. Чему станет равной ее себестоимость через 2 года?

15.16. Встретится ли среди членов геометрической прогрессии 2, 6, 18, ... число:

1) 54; 2) 72; 3) 486; 4) 576?

При положительном ответе найдите номер члена прогрессии.

15.17. С какого номера члены геометрической прогрессии:

1) 32, 16, 8, … меньше 0,01; 2) $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}$ … больше 50?

15.18. 1) Между числами 15 и 405 вставьте два числа так, чтобы вместе с данными числами они составили геометрическую прогрессию.

2) Между числами 36 и 2,25 вставьте три числа так, чтобы вместе с данными числами они составили геометрическую прогрессию.

15.19. Найдите значения x, при которых будут тремя последовательными членами геометрической прогрессии выражения, взятые в указанном порядке:

1) x, $\sqrt{x}$, $x-5$; 2) x, $\sqrt{x-8}$, $\frac{x}{36}$.

15.20. 1) Геометрическая прогрессия состоит из пяти членов: 6; x_2; x_3; x_4; $\frac{2}{27}$. Найдите x_2; x_3; x_4.

2) Геометрическая прогрессия состоит из пяти членов: 6; x_2; x_3; x_4; $\frac{3}{8}$. Найдите x_2; x_3; x_4.

МАТЕМАТИКА В ЖИЗНИ МОЕЙ СЕМЬИ

15.21. 1) Вкладчик положил в банк на депозит 100 тыс. тг под 10% годовых. Какая сумма будет находиться на депозите через два года?

2) Вкладчик положил в банк на депозит 200 тыс. тг под 8% годовых. Какая сумма будет находиться на депозите через три года?

15.22. 1) Вкладчик решил положить в банк на депозит 50 000 тг. Известно, что в одном банке вклад возрастает один раз в год на 12%, а в другом он возрастает ежемесячно на 1% от накопленной на депозите суммы. В каком из банков доход будет больше и на сколько тенге больше?

2) Клиент открыл в банке депозит под 10% годовых сроком на три года и положил 200 000 тг. Какая сумма будет на депозите через три года?

C

15.23. Четыре числа составляют возрастающую геометрическую прогрессию. Найдите эти числа, если известно, что значение суммы крайних членов равно 84, а значение произведения средних членов равно 243.

15.24. В геометрической прогрессии (b_n) найдите b_k, если:

1) $b_{k-m} = 13$ и $b_{k+m} = 107$; 2) $b_{k-m} = 1,2$ и $b_{k+m} = 19,2$.

15.25. 1) Найдите три положительных числа, составляющих геометрическую прогрессию, если значение их суммы равно 42, а значение суммы обратных им чисел равно $\frac{21}{32}$.

2) Найдите три положительных числа, образующих геометрическую прогрессию, если значение их суммы равно 21, а значение суммы обратных им чисел равно $\frac{21}{16}$.

15.26. Значение суммы трех чисел, образующих геометрическую прогрессию, равно 13, а значение суммы их квадратов равно 91. Найдите эти числа.

15.27. Четвертый член геометрической прогрессии больше второго на 24, а значение суммы второго и третьего членов этой прогрессии равно 6. Найдите четыре первых члена этой прогрессии.

15.28. Значение суммы трех положительных чисел, составляющих арифметическую прогрессию, равно 21. Если к этим числам прибавить, соответственно, 1, 1, 5, то получится геометрическая прогрессия. Найдите эти числа.

15.29. 1) Между числом 3 и неизвестным числом поставлено еще одно число так, что все три числа составляют арифметическую прогрессию. Если средний член этой прогрессии уменьшить на 6, то получится геометрическая прогрессия. Найдите неизвестное число.

2) x, y и z в указанном порядке образуют геометрическую прогрессию. $x + a$, $y + a$ и $z + a$ также образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

15.30. Найдите длины сторон треугольника, если они выражаются целыми числами, образующими геометрическую прогрессию, а значение их произведения равно 1000 см^3.

15.31. Три отличных от нуля числа образуют арифметическую прогрессию, а квадраты этих чисел — геометрическую прогрессию. Найдите знаменатель этой геометрической прогрессии.

15.32. Найдите четыре числа, из которых первые три числа составляют геометрическую прогрессию, а последние три числа — арифметическую прогрессию. Значение суммы крайних чисел равно 32, а значение суммы средних чисел равно 24.

ПОВТОРИТЕ

15.33. При каком значении параметра a имеет единственное решение система уравнений:

1) $\begin{cases} 2x + y^2 = 1, \\ x + y = a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x + y = a; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ x + 2y = 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ x + y = 3? \end{cases}$

15.34. Какое множество точек на координатной плоскости задает неравенство:

1) $x^2 + y^2 + 2x - 6y \,|\, 4$; 2) $x^2 + y^2 - 10x - 2y \,|\, 0$;

3) $x^2 + y^2 - x + y < 1$; 4) $x^2 + y^2 - 2x - 2y < 2$?

15.35. 1) Найдите значение суммы всех трехзначных чисел, меньших 600 и кратных 8.

2) Найдите значение суммы всех трехзначных чисел, больших 500, которые при делении на 23 дают в остатке число 10.

15.36. Упростите выражение и найдите его значение при $x = 2{,}5$:

1) $\dfrac{x^6 - 1}{x^2 + x + 1} : \dfrac{x^3 + 1}{x - 1} - 2$;

2) $\dfrac{x^9 - 1}{x^6 + x^3 + 1} : \dfrac{x^3 + 1}{x^2 - 1} - \dfrac{3(x + 1)}{x - 1}$.

15.37. Упростите выражение:

1) $\dfrac{8^3 : 4^4}{14^0 \cdot a^{-2}} \cdot a^{53}$; 2) $\dfrac{5^5 (x^3 \cdot x)^2}{(-5x^2)^3}$;

3) $\dfrac{(a^3 \cdot 2x^4)^2}{(a^2)^2 \cdot 4x^7}$; 4) $\dfrac{8(b^3 \cdot x^4)^3}{(-2b^3)^2 \cdot x^{12}}$.

15.38. Найдите значение числового выражения:

1) $\dfrac{\left(\frac{1}{9}\right)^{-3} \cdot \frac{1}{9}}{3^5} + \dfrac{2}{3}$; 2) $90 \cdot \dfrac{5^{-2}}{9^2} - 2 \cdot 5^{-1} \cdot 3^{-2}$;

3) $17 - \dfrac{34^3}{17^2 \cdot 2^4} \cdot 2^2$; 4) $210 - \dfrac{51^3}{17^2 \cdot 9^3} \cdot 18^2$.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

15.39. Для геометрической прогрессии $b_1 = 16$, $q = -0{,}5$ запишите:

1) b_3; 2) b_6; 3) b_7; 4) b_{10}.

15.40. Для геометрической прогрессии $b_1 = 2$, $q = -2$ запишите первые пять членов и найдите значение их суммы.

Опорные понятия для овладения новыми знаниями

Последовательность, член последовательности, геометрическая прогрессия, n-й член геометрической прогрессии, знаменатель прогрессии.

§16. ФОРМУЛА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЯ СУММЫ ПЕРВЫХ *n* ЧЛЕНОВ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

Ключевые понятия

Геометрическая прогрессия, сумма членов геометрической прогрессии

Вы ознакомитесь с формулой суммы первых n членов геометрической прогрессии;

научитесь применять формулы суммы первых n членов геометрической прогрессии; решать задачи, связанные с геометрической прогрессией.

Большой известностью пользуется задача 2000-летней давности о вознаграждении изобретателя шахматной игры. По преданию, индийский принц Сирам предложил изобретателю шахматной игры просить у него награду, какую он захочет.

Изобретатель попросил, чтобы ему дали за первый квадрат шахматной доски одно пшеничное зерно, за второй квадрат 2 зерна, за третий 4 и т. д., увеличивая вдвое за каждый из следующих квадратов.

Принц согласился. Но когда посчитали количество зерен пшеницы, которое следует выдать за все 64 квадрата шахматной доски, то оказалось, что награда в этом размере не может быть выдана по недостатку пшеницы. Сколько же зерен пришлось бы выдать изобретателю?

Количество зерен, которое надлежало бы выдать за все 64 квадрата, равно значению суммы S следующего ряда чисел:

$$S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{62} + 2^{63}.$$

Найдем значение этой суммы, не вычисляя отдельно слагаемые, так: умножим обе части написанного равенства на 2:

$$2S = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{63} + 2^{64}.$$

Затем вычтем из этого равенства предыдущее. Получим

$$\begin{array}{r} 2S = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{63} + 2^{64} \\ - \\ S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{63} \\ \hline S = 2^{64} - 1 \end{array}$$

Можно вычислить, что если бы такое число зерен рассыпать равномерно по всей земной суше, то образовался бы слой пшеницы толщиной около 9 мм. Теперь подсчитаем, что масса такого числа пшеничных зерен больше триллиона тонн. Это заведомо превосходит количество пшеницы, собранной человечеством до настоящего времени.

Для нахождения значения суммы $S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1} + b_n$ первых n членов геометрической прогрессии со знаменателем $q \neq 1$ воспользуемся тем же приемом, который использовали в рассмотренном выше примере.

Используя определение геометрической прогрессии, S_n запишем так:

$$S_n = b_1 + b_1q + b_1q^2 + \ldots + b_1q^{n-1}.$$

Умножим обе части этого равенства на q. В результате получим равенство: $qS_n = b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + \ldots + b_1q^n$.

Затем вычтем почленно из этого равенства предыдущее. Получим

$$\begin{array}{l} S_n = b_1 + b_1q + b_1q^2 + \ldots + b_1q^{n-1} \\ - \\ \underline{qS_n = b_1q + b_1q^2 + \ldots + b_1q^{n-1} + b_1q^n} \\ S_n - qS_n = b_1 - b_1q^n \end{array}$$

Вынесем в левой и правой частях полученного равенства общие множители. Получим $(1 - q)S_n = b_1(1 - q^n)$, или $S_n = \dfrac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}$, $q \neq 1$.

Сумма первых n членов геометрической прогрессии со знаменателем $q \neq 1$ равна дроби, у которой числитель есть произведение первого члена на разность между единицей и n-й степенью знаменателя, а знаменатель есть разность между единицей и знаменателем прогрессии.

В случае, когда знаменатель прогрессии $q > 1$, для вычисления суммы ее первых n членов удобно пользоваться формулой $S_n = \dfrac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$, которая получается из формулы (4), если числитель и знаменатель дроби в правой части умножить на (–1).

Если $q = 1$, то все члены прогрессии равны первому члену и $S_n = nb_1$.

Формулы суммы первых n членов геометрической прогрессии:
$S_n = \dfrac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}$, $q \neq 1$, или $S_n = \dfrac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$ — со знаменателем $q \neq 1$;
$S_n = nb_1$ — со знаменателем $q = 1$.

Докажите, что верно равенство $S_n = \dfrac{b_1 - b_{n+1}}{1 - q}$, $q \neq 1$.

ПРИМЕР

1. Найдем значение суммы десяти первых членов геометрической прогрессии (b_n): 1; 2; 4; 8; … .

Решение. Первый член прогрессии равен 1, знаменатель — 2. Найдем 10-й член этой прогрессии: $b_{10} = 1 \cdot 2^{10-1} = 2^9$. Теперь воспользуемся формулой суммы первых n членов геометрической прогрессии:

$$S_{10} = \frac{2^9 \cdot 2 - 1}{2 - 1} = 2^{10} - 1 = 1024 - 1 = 1023.$$

Ответ: 1023.

ПРИМЕР

2. Найдем значение суммы первых пяти членов геометрической прогрессии: 6; 2; $\frac{2}{3}$; …

Решение. В данной геометрической прогрессии $b_1 = 6$, $q = \frac{1}{3}$, поэтому по формуле $S_n = \dfrac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}$ получим:

$$S_5 = \frac{6\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^5\right]}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{6 \cdot \left(1 - \frac{1}{243}\right)}{\frac{2}{3}} = \frac{6 \cdot 242 \cdot 3}{2 \cdot 243} = \frac{242}{27} = 8\frac{26}{27}.$$

Ответ: $8\frac{26}{27}$.

ПРИМЕР

3. Найдем значение суммы $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7$.

Решение. Данная сумма является суммой первых восьми членов геометрической прогрессии, в которой $b_1 = 1$, $q = 3$.

По формуле $S_n = \dfrac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}$ получим: $S_8 = \dfrac{1 \cdot (3^8 - 1)}{3 - 1} = \dfrac{6561 - 1}{2} =$ $= 3280$.

Ответ: 3280.

ПРИМЕР

4. Значение суммы первых n членов геометрической прогрессии $S_n = -93$. Первый член этой прогрессии $b_1 = -3$, знаменатель — $q = 2$. Найдем n.

Решение. Воспользуемся формулой $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$, получим: $-93 = \frac{-3(2^n - 1)}{2 - 1} = -3(2^n - 1)$; $31 = 2^n - 1$; $32 = 2^n$; $2^5 = 2^n$; $n = 5$.

Ответ : $n = 5$.

? 1. Какой формулой для нахождения значения суммы n членов геометрической прогрессии удобно пользоваться при:
1) $q < 1$; 2) $q > 1$; 3) $q = 1$?

Упражнения

А

16.1. В геометрической прогрессии (b_n) найдите n и S_n, если:
1) $b_1 = 0{,}5$, $b_n = 256$, $q = 2$; 2) $b_1 = 80$, $b_n = 5$, $q = 0{,}5$;
3) $b_1 = 3$, $b_n = 243$, $q = 3$; 4) $b_1 = 1{,}5$, $b_n = 240$, $q = 2$.

16.2. В геометрической прогрессии (b_n) найдите q и S_n, если:
1) $b_1 = 90$, $b_n = 3\frac{1}{3}$, $n = 4$; 2) $b_1 = \frac{1}{3}$, $b_n = 81$, $n = 6$;
3) $b_1 = 120$, $b_n = 3{,}75$, $n = 6$; 4) $b_1 = 0{,}02$, $b_n = 312{,}5$, $n = 7$.

16.3. В геометрической прогрессии (b_n) найдите q и n, если:
1) $b_1 = 2$, $b_n = 1024$, $S_n = 2046$;
2) $b_1 = 512$, $b_n = 1$, $S_n = 1023$;
3) $b_1 = 0{,}5$, $b_n = 16$, $S_n = 31{,}5$;
4) $b_1 = \frac{2}{9}$, $b_n = 18$, $S_n = 26\frac{8}{9}$.

16.4. В геометрической прогрессии (b_n) найдите b_n и S_n, если:
1) $b_1 = 243$, $q = -\frac{2}{3}$, $n = 6$; 2) $b_1 = -\frac{3}{2}$, $q = 2$, $n = 7$;
3) $b_1 = 20$, $q = -0{,}1$, $n = 5$; 4) $b_1 = \frac{3}{5}$, $q = -\sqrt{5}$, $n = 5$.

16.5. В геометрической прогрессии (b_n) найдите n и b_n, если:
1) $b_1 = 3$, $q = 2$, $S_n = 93$; 2) $b_1 = 6$, $q = -2$, $S_n = -510$;
3) $b_1 = \frac{3}{5}$, $q = -0{,}5$, $S_n = \frac{3}{8}$; 4) $b_1 = -13$, $q = -0{,}3$, $S_n = -10{,}27$.

16.6. В геометрической прогрессии (b_n) найдите b_1 и S_n, если:

1) $q = 0{,}5$, $n = 6$, $b_n = 3$; 2) $q = 3$, $n = 5$, $b_n = 486$;

3) $q = 0{,}5$, $n = 4$, $b_n = 0{,}375$; 4) $q = 1{,}5$, $n = 5$, $b_n = \frac{9}{16}$.

16.7. В геометрической прогрессии (b_n) найдите b_1 и b_n, если:

1) $q = 2$, $n = 11$, $S_n = 2047$; 2) $q = \frac{1}{3}$, $n = 5$, $S_n = 121$;

3) $q = 0{,}5$, $n = 6$, $S_n = 7\frac{7}{8}$; 4) $q = -2$, $n = 7$, $S_n = 258$.

16.8. В геометрической прогрессии (b_n) найдите b_1 и n, если:

1) $q = 0{,}5$, $b_n = 3$, $S_n = 93$; 2) $q = 3$, $b_n = 54$, $S_n = \frac{242}{3}$;

3) $q = -2$, $b_n = -4$, $S_n = -\frac{63}{24}$; 4) $q = -\frac{1}{3}$, $b_n = -\frac{1}{3}$, $S_n = \frac{182}{3}$.

16.9. 1) В геометрической прогрессии $b_2 = 1$, $b_3 = 2$ найдите $\frac{S_{14}}{S_7}$.

2) В геометрической прогрессии $b_3 = 3$, $b_4 = 1{,}5$ найдите $\frac{S_9}{S_{18}}$.

16.10. 1) Второй член геометрической прогрессии составляет 20% от ее первого члена. Сколько процентов составляет пятый ее член от третьего?

2) Второй член геометрической прогрессии составляет 110% от ее первого члена. Сколько процентов составляет шестой член от четвертого?

МАТЕМАТИКА В БИЗНЕСЕ

***16.11.** 1) Банк дает своим вкладчикам 10% годовых. Каким будет вклад в 200 000 тг через 2 года?

2) Снижение себестоимости производства товара равно 5% в год. Первоначальная себестоимость товара равна 10 000 тг. Чему станет равной ее себестоимость через 2 года?

***16.12.** 1) Значение суммы первых 85 членов геометрической прогрессии равно 2225. Найдите значение суммы первых 85 членов такой прогрессии, каждый член которой составляет 40% от соответствующего члена данной прогрессии.

2) Значение суммы первых 85 членов геометрической прогрессии равно 8255. Найдите значение суммы первых 85

членов такой прогрессии, каждый член которой составляет 60% от соответствующего члена данной прогрессии.

16.13. 1) В геометрической прогрессии первый член равен $\sqrt{2}$, седьмой член равен $\sqrt{128}$. Найдите значение суммы шести первых членов этой прогрессии.

2) В геометрической прогрессии первый член равен $\sqrt{3}$, пятый член равен $\sqrt{243}$. Найдите значение суммы шести первых членов этой прогрессии.

B

16.14. В геометрической прогрессии (b_n) известно, что:

1) $S_3 = 219$, $b_1 b_2 b_3 = 13\ 824$. Найдите b_5.

2) $S_3 = 93$, $b_1 b_2 b_3 = 3375$. Найдите S_4.

16.15. В геометрической прогрессии (b_n) известно, что

$S_3 = 6$, $b_1 + b_3 + b_5 = 10{,}5$. Найдите q.

16.16. Найдите значение суммы членов геометрической прогрессии:

1) 4; 12; 36; ...; 2916; 2) $\frac{81}{4}$; $\frac{27}{4}$; $\frac{9}{4}$; ...; $\frac{1}{108}$;

3) –1; 2; –4; ...; –256; 4) 3; –6; 12; –24; ...; 192.

16.17. В геометрической прогрессии (b_n) известно, что:

1) $q = 2$, $S_5 = 62$. Найдите b_1.

2) $q = -3$, $S_5 = 244$. $S_6 = -738$. Найдите b_1.

МАТЕМАТИКА В БИЗНЕСЕ

16.18. Стоимость оборудования равна 200 000 тг. Какой будет стоимость оборудования через четыре года, если она ежегодно уменьшается на 2%?

16.19. 1) Для геометрической прогрессии (b_n) известно, что $S_2 = 4$ и $S_3 = 13$. Найдите b_1 и S_5.

2) Для геометрической прогрессии (b_n) известно, что $S_3 = 42$ и $S_4 = 170$. Найдите b_1 и S_5.

16.20. Найдите число членов геометрической прогрессии 3; 6; 12; 24; ..., чтобы значение их суммы было: 1) больше 3066; 2) больше 6000.

16.21. Значение суммы первых трех членов геометрической прогрессии равно 1,4, а значение их произведения равно 0,064. Найдите S_5.

16.22. В геометрической прогрессии (b_n) значение суммы первого и пятого членов равно 51, а значение суммы второго и шестого членов равно 102. Сколько членов этой прогрессии надо взять, чтобы значение их суммы было равно 3069?

16.23. Найдите третий член геометрической прогрессии, если ее знаменатель равен 3, а значение суммы первых четырех ее членов равно (–40).

C

16.24. 1) Найдите значение суммы членов геометрической прогрессии с 15 члена по 21 включительно, если $S_7 = 14$, $S_{14} = 18$.

2) В геометрической прогрессии с четным числом членов значение суммы всех ее членов в 3 раза больше значения суммы членов, стоящих на нечетных местах. Найдите знаменатель прогрессии.

16.25. Найдите значение суммы:

1) 2 + 22 + 222 + ... + 222 222 222;

2) 5 + 55 + 555 + ... + 555 555 555;

3) 8 + 88 + 888 + ... + 888 888 888.

***16.26.** В возрастающей геометрической прогрессии первый член равен 1, а значение суммы первых ее пяти членов в 16 раз больше значения суммы обратных этим же членам чисел. Найдите значение суммы первых десяти членов этой прогрессии.

***16.27.** 1) Три числа, значение суммы которых равно 15,6, являются первыми членами геометрической прогрессии и одновременно вторым, четырнадцатым и пятидесятым членами арифметической прогрессии. Найдите значение суммы первых шести членов геометрической прогрессии.

2) Три числа, значение суммы которых равно 78, являются членами возрастающей геометрической прогрессии и одно-

временно первым, третьим и девятым членами арифметической прогрессии. Найдите среди этих чисел большее.

3) Найдите возрастающую арифметическую прогрессию, если известно, что значение суммы первых десяти ее членов равно 300, а первый, второй и пятый ее члены, кроме того, образуют геометрическую прогрессию.

16.28. В правильном треугольнике провели средние линии и получили четыре правильных треугольника. Если в полученных треугольниках провести средние линии, затем в новых треугольниках еще провести средние линии, то сколько правильных треугольников будет получено?

16.29. Найдите пятый член возрастающей геометрической прогрессии, если известно, что ее первый член равен $7 - 3\sqrt{5}$ и каждый ее член, начиная со второго, равен разности двух соседних с ним членов.

16.30. Значение суммы четырех членов геометрической прогрессии равно –40, а значение суммы их квадратов равно 3280. Найдите эту прогрессию.

16.31. Решите уравнение $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{109} = 0$.

ПОВТОРИТЕ

16.32. Решите неравенство:

1) $(x - 1) \cdot (x - 6) < 50$; 2) $(x - 14) \cdot (x - 2) > 64$.

16.33. Найдите значения параметра p, при которых при любых значениях переменной x верно неравенство:

1) $2x^2 - 4x + p > 0$; 2) $px^2 + 5x - 4 < 0$.

16.34. 1) Найдите значение суммы всех натуральных чисел, не превосходящих 200, которые не кратны 5.

2) Найдите значение суммы всех натуральных чисел, больших 100 и не превосходящих 200, которые не кратны 3.

16.35. Постройте график функции:

1) $y = 2x^2 - 3x$; 2) $y = 2x^2 + 5x$;
3) $y = -x^2 + 4x$; 4) $y = -2x^2 - 6x$.

16.36. Между числами 5 и 25 вставьте еще семь членов так, чтобы получилась арифметическая прогрессия.

16.37. Пусть $a_1, a_2, \ldots a_n$ составляют геометрическую прогрессию. Выразите через a_1, n и q сумму:

1) $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$;

2) $(a_1 + 1)^2 + (a_2 + 1)^2 + \ldots + (a_n + 1)^2$.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

16.38. В геометрической прогрессии (b_n) найдите S_n, если:

1) $b_1 = 1,\ q = 2,\ n = 11$; 2) $b_1 = 81,\ q = \frac{1}{3},\ n = 5$.

16.39. В геометрической прогрессии (b_n) найдите q, если:

1) $b_1 = 0{,}125,\ b_6 = -4$; 2) $b_1 = 81,\ b_6 = -\frac{1}{9}$.

Опорные понятия для овладения новыми знаниями

Геометрическая прогрессия, n-й член геометрической прогрессии, знаменатель геометрической прогрессии, убывающая геометрическая прогрессия, сумма n членов геометрической прогрессии.

§ 17. ФОРМУЛА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЯ СУММЫ ЧЛЕНОВ БЕСКОНЕЧНО УБЫВАЮЩЕЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

Ключевые понятия

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, десятичная периодическая дробь, обыкновенная дробь

Вы ознакомитесь с формулой суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии;

научитесь применять формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии для перевода десятичной периодической дроби в обыкновенную дробь.

На числовой оси отложим отрезок MN, длина которого равна длине единичного отрезка, т. е. 1 (рис. 32). От точки N вправо отложим отрезок NN_1, равный $\frac{1}{4}$ от единичного отрезка, т. е. $NN_1 = \frac{1}{4}MN$. От точки N_1 вправо отложим третий отрезок $N_1N_2 = \frac{1}{4}MN$ и т. д., т. е. длина каждого последующего отрезка равна $\frac{1}{2}$ части от длины предыдущего.

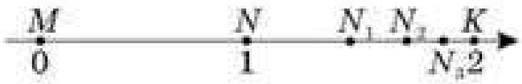


Рис. 32

В результате получим последовательность отрезков MN; NN_1; N_1N_2; N_2N_3; ... и их длин $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{16}$; ... ; $\frac{1}{2^{n-1}}$; ... ; — бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \frac{1}{2}$.

Рассмотрим бесконечную геометрическую прогрессию со знаменателем $q = -\frac{1}{3}$, первый член которой равен трем: 3; –1; $\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{9}$; $\frac{1}{27}$; ... ; $3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$; ...

В этих двух прогрессиях модуль знаменателя прогрессии $|q| < 1$, поэтому с возрастанием номера n член каждой из этих бесконечных геометрических прогрессий по модулю приближается к нулю.

Такие геометрические прогрессии называют *бесконечно убывающими геометрическими прогрессиями*.

Геометрическая прогрессия со знаменателем $|q| < 1$ называется ***бесконечно убывающей геометрической прогрессией***.

Для вывода формулы суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии b_1; b_2; b_3; ...; b_n; ... воспользуемся формулой суммы — первых n членов геометрической прогрессии: $S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}$.

Преобразуем выражение, записанное в правой части равенства:

$$S_n = \frac{b_1 - b_1 q^n}{1 - q} = \frac{b_1}{1 - q} - \frac{b_1}{1 - q} \cdot q^n.$$

Если $|q| < 1$, то при неограниченном увеличении n значение степени q^n бесконечно уменьшается, поэтому значение произведения $\frac{b_1}{1 - q} \cdot q^n$ стремится к нулю. Значит, при неограниченном увеличении n значение суммы S_n стремится к значению выражения $\frac{b_1}{1 - q}$.

Выражение $\frac{b_1}{1 - q}$ принимают за сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $|q| < 1$. Обозначив его буквой S, получим формулу $S = \frac{b_1}{1 - q}$.

$S = \dfrac{b_1}{1 - q}$ — формула суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, знаменатель которой $|q| < 1$.

С помощью графической интерпретации (рис. 33) убедитесь, что значение суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$ выражается натуральным числом 1.

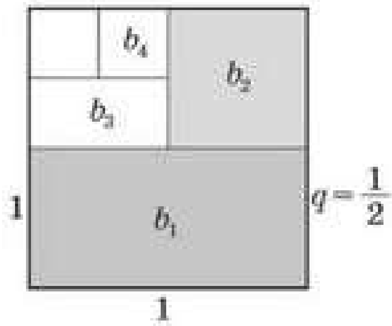


Рис. 33

ПРИМЕР

1. Найдем значение суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если первый ее член равен 3, а знаменатель равен $\frac{1}{3}$.

Решение. Применив формулу суммы членов при $b_1 = 3$ и $q = \frac{1}{3}$, получим $S = \dfrac{b_1}{1 - q} = \dfrac{3}{1 - \frac{1}{3}} = \dfrac{3}{\frac{2}{3}} = 4{,}5$.

Ответ: 4,5.

ПРИМЕР

2. Найдем значение суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$

Решение. Найдем первый член прогрессии $b_1 = 1$ и знаменатель $q = \frac{1}{2}$. Применим формулу $S = \dfrac{b_1}{1 - q}$. Получим $S = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$.

Ответ: 2.

ПРИМЕР

3. Представим бесконечную десятичную периодическую дробь 3,(03) в виде обыкновенной дроби.

Решение. Число 0,(03) можно записать в виде суммы: $0{,}(03) = 0{,}03 + 0{,}0003 + 0{,}000003 + \dots$.

Эта сумма является суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем 0,01, поэтому $S = \dfrac{0{,}03}{1 - 0{,}01} = \dfrac{0{,}03}{0{,}99} = \dfrac{3}{99} = \dfrac{1}{33}$.

Ответ: $\frac{1}{33}$.

ПРИМЕР

4. Обратим бесконечную периодическую десятичную дробь 0,2(54) в обыкновенную дробь.

Решение. Число 0,2(54) можно записать в виде суммы: 0,2(54) = = 0,2 + 0,054 + 0,00 054 + … .

В сумме 0,054 + 0,00 054 + 0,0 000 054 + … слагаемые являются членами бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q = 0{,}01$.

Применив формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, найдем:

$$S = \frac{0{,}054}{1 - 0{,}01} = \frac{0{,}054}{0{,}99} = \frac{54}{990} = \frac{3}{55}.$$

Значит, $0{,}2(54) = 0{,}2 + \frac{3}{55} = \frac{14}{55}$.

Ответ: $\frac{14}{55}$.

ПРИМЕР

5. Решим уравнение $1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = 3{,}5$, где $|x| < 1$.

Решение. В левой части уравнения записана сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии, поэтому $1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{1}{1 - x}$. Тогда уравнение $1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = 3{,}5$ примет вид: $\frac{1}{1 - x} = 3{,}5$. Получим $x = \frac{5}{7}$.

Ответ: $\frac{5}{7}$.

? 1. В каком случае бесконечная геометрическая прогрессия будет убывающей?

Упражнения

А

17.1. Найдите значение суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

1) $1; \frac{1}{3}; \frac{1}{9}; \ldots$; 2) $-25; -5; -1; -0{,}2; \ldots$; 3) $6; 1; \frac{1}{6}; \frac{1}{36}; \ldots$.

17.2. Найдите значение суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если:

1) $b_1 = -20$, $q = \frac{1}{7}$; 2) $b_1 = 16$, $q = \frac{1}{4}$.

17.3. Найдите значение суммы:

1) $1 - \frac{3}{4} + \frac{9}{16} - \ldots;$

2) $8 - 4 + 2 - 1 + 0{,}5 - \ldots;$

3) $100 - 10 + 1 - 0{,}1 + \ldots.$

17.4. Запишите в виде обыкновенной дроби бесконечную периодическую десятичную дробь: 1) 0,(3); 2) 14,(17); 3) 2,(126); 4) 3,(71).

17.5. Найдите значение суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

1) $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \ldots;$ 2) $\sqrt{3};\ 1;\ \frac{1}{\sqrt{3}}; \ldots;$

3) $\sqrt{2};\ -1;\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ \ldots;$ 4) $\frac{3}{7};\ -\frac{9}{49};\ \frac{27}{343}; \ldots;$

5) $3\sqrt{3};\ -\sqrt{3};\ \frac{\sqrt{3}}{3}; \ldots;$ 6) $5;\ -\sqrt{5};\ 1;\ \ldots$

17.6. Запишите в виде обыкновенной дроби бесконечную периодическую десятичную дробь:

1) 3,2(3); 2) 4,36(13);

3) 21,00(12); 4) 33,04(731).

17.7. 1) Найдите значение суммы бесконечной геометрической прогрессии, если ее второй член равен 9, а пятый член равен $\frac{1}{3}$.

2) Найдите значение суммы бесконечной геометрической прогрессии, если ее третий член равен 25, а шестой член равен 0,2.

17.8. В бесконечной геометрической прогрессии с положительными членами значение суммы первых трех ее членов равно 10,5, а значение суммы всех членов прогрессии равно 12. Найдите эту прогрессию.

17.9. В бесконечной геометрической прогрессии с положительными членами значение суммы первых пяти членов равно $\frac{93}{16}$, а значен ие суммы всех членов прогрессии равно 6. Найдите эту прогрессию.

17.10. Найдите первый член бесконечной геометрической прогрессии, если известно:

1) $q = -\frac{5}{8},\ S = 80;$ 2) $q = \frac{3}{7},\ S = 42.$

17.11. Найдите знаменатель бесконечной геометрической прогрессии, если известно:

1) $b_1 = 15$, $S = 18$; 2) $b_1 = 18$, $S = 15$.

B

17.12. Значение произведения первого, третьего и пятого членов бесконечно убывающей прогрессии равно 8, а значение суммы ее второго и четвертого членов равно (–5). Найдите значение суммы всех членов геометрической прогрессии.

17.13. Найдите значение суммы $\sqrt{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} + \dfrac{2\sqrt{3}-3}{2+\sqrt{3}} + \dots$.

17.14. 1) Известно, что в бесконечно убывающей геометрической прогрессии каждый член в 2,5 раза больше суммы всех последующих членов. Найдите знаменатель прогрессии.
2) Известно, что в бесконечно убывающей геометрической прогрессии каждый член в 4 раза больше значения суммы всех последующих членов. Найдите знаменатель прогрессии.

17.15. Значение суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии на 16 больше ее первого члена, а значение суммы ее первых двух членов равно 24. Найдите восьмой член этой прогрессии.

17.16. В квадрат, длина стороны которого равна 8 см, вписан другой квадрат, вершинами которого являются середины сторон данного квадрата. В полученный квадрат таким же способом вписан другой квадрат и т. д. Найдите значение суммы периметров и значение суммы площадей этих квадратов.

17.17. В равносторонний треугольник, длина стороны которого равна 8 см, вписан другой равносторонний треугольник, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника. В полученный треугольник таким же способом вписан другой равносторонний треугольник и т. д. Найдите значение суммы периметров и значение суммы площадей этих треугольников.

17.18. Дан равносторонний треугольник, длина стороны которого равна 16 см. Из его высот построен другой треугольник, а из высот этого треугольника построен третий и т. д. Докажите, что периметры этих треугольников образуют бесконечную геометрическую прогрессию, и найдите значение суммы периметров этих треугольников.

17.19. Найдите значение суммы: $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{9}+\frac{1}{8}-\frac{1}{27}+\dots$.

17.20. Первый член бесконечной геометрической прогрессии на 8 больше второго, а значение суммы ее членов равно 18. Найдите четвертый член этой прогрессии.

17.21. В равносторонний треугольник, длина стороны которого равна 16 см, вписан круг. В этот круг вписан равносторонний треугольник, в этот треугольник вписан круг и т. д. Найдите значение суммы площадей вписанных кругов.

C

17.22. Первый член бесконечной геометрической прогрессии (c_n) равен c, а знаменатель равен q. Найдите значение суммы:

1) $c_1^2+c_2^2+c_3^2+\dots$;

2) $(c_1+c_2)^2+(c_3+c_4)^2+(c_5+c_6)^2+\dots$;

3) $c_1^3+c_2^3+c_3^3+\dots$;

4) $(c_1-c_2)^2+(c_3-c_4)^2+(c_5-c_6)^2+\dots$.

17.23. Найдите корень уравнения:

$$1+\frac{x+1}{x-1}+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3+\dots=\frac{x^2}{2}.$$

17.24. Найдите бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, первый член которой равен 1, а каждый ее последующий член в три раза больше значения суммы следующих за ним членов.

17.25. Найдите значение суммы: $\frac{1}{3}+\frac{3}{4}+\frac{1}{9}+\frac{9}{16}+\frac{1}{27}+\frac{27}{64}+\dots$.

17.26. Решите уравнение: $x^{-2}+x^{-4}+\dots+x^{-2(n-1)}+\dots=\frac{1}{8}$.

17.27. Найдите первый член и знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии (b_n), у которой второй член равен 6, а значение суммы ее членов равно $\frac{1}{8}$ от значения суммы квадратов ее членов.

17.28. Последовательность чисел образует бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, значение суммы членов которой равно 8. Найдите первый член и знаменатель прогрессии, если значение суммы кубов ее членов равно $\frac{512}{37}$.

ПОВТОРИТЕ

17.29. Найдите корни уравнения:

1) $\dfrac{x-6}{x-1}=\dfrac{13}{6}-\dfrac{x-1}{x-6}$; 2) $\dfrac{x-4}{x+2}=\dfrac{17}{4}-\dfrac{x+2}{x-4}$.

17.30. Постройте график функции:

1) $y = x^2 + 2|x|$; 2) $y = x^2 + 2|x|$;

3) $y = -x^2 + 4|x|$; 4) $y = -x^2 - |x|$.

17.31. Разложите на множители выражение:

1) $x^4 - 2x^3 + x - 2$; 2) $x^4 - 5x^3 - x + 5$;

3) $x^4 - 2x^3 - x^2 + 2$; 4) $x^4 + 4x^3 - x^2 - 4$.

17.32. Углы выпуклого четырехугольника образуют арифметическую прогрессию. Найдите значение суммы наименьшего и наибольшего углов этого четырехугольника.

17.33. Найдите значение суммы всех натуральных чисел, кратных 5, заключенных в промежутке от 50 до 150.

17.34. Пусть члены последовательности заданы формулой $a_n = (2n + 1) \cdot 3^n$. Докажите, что значение суммы первых n членов этой последовательности вычисляется по формуле $S_n = n \cdot 3^{n+1}$.

17.35. При каких значениях a, b и c график функции $y = ax^2 + bx + c$ проходит через точки $M(1; -3)$ и $N(6; -48)$ и имеет с осью абсцисс одну общую точку?

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

17.36. Докажите, что при $n = 3$ выражение $4^n + 12n - 1$ делится на 3.

17.37 . Найдите значение суммы $\dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + \ldots + \dfrac{1}{9 \cdot 11}$.

Опорные понятия для овладения новыми знаниями

Последовательность, член последовательности, закономерность, сумма членов последовательности.

§ 18. МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

Ключевые понятия

Математическая индукция

Вы ознакомитесь с методом математической индукции;

научитесь применять метод математической индукции.

Математическая индукция в математике — один из методов доказательства. Используется, чтобы доказать справедливость некоторого утверждения для всех натуральных чисел.

Например, 1) доказать, что для любого натурального n справедливо равенство $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$;

2) доказать, что для любого натурального n значение выражения $4^n + 15n - 1$ делится на 9;

3) доказать, что при любом натуральном $n > 1$ верно неравенство $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$.

Во всех этих утверждениях присутствует переменная величина n, которая принимает только натуральные значения.

Теорема. ***Если утверждение $A(n)$, содержащее натуральную переменную, верно при $n = 1$ и из того, что оно верно при $n = k$ следует, что оно верно и при $n = k + 1$, то оно будет верно при всех натуральных значениях n.***

Чтобы доказать некоторое утверждение, проверяют сначала его справедливость для $n = 1$. Затем доказывают, что при любом натуральном значении k из справедливости рассматриваемого утверждения при $n = k$ вытекает его справедливость и при $n = k + 1$. Тогда утверждение считается доказанным для всех n.

В самом деле, утверждение справедливо при $n = 1$, но тогда оно справедливо и для следующего числа $n = 1 + 1 = 2$. Из справедливости утверждения для $n = 2$ следует его справедливость для $n = 2 + 1 = 3$. Отсюда следует справедливость утверждения для $n = 4$ и т. д. В конце концов дойдем до любого натурального числа n. Значит, утверждение верно для любого n.

ПРИМЕР

1. Докажем, что для любого натурального числа n верно равенство $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$. Обозначим это равенство (1).

Доказательство.

1) Проверим, верно ли равенство (1) при $n = 1$. Для этого найдем значение выражения в левой части равенства (1) — оно равно 1 и в правой части равенства $\frac{n \cdot (n+1)}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$. Значит, при $n = 1$ равенство (1) верно.

2) Допустим, что равенство (1) верно при $n = k$, т. е. $1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k \cdot (k+1)}{2}$.

3) Докажем, что равенство (1) верно и при $n = k + 1$, т. е. убедимся, что верно равенство: $1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k + 1) = \frac{(k+1) \cdot (k+2)}{2}$.

Действительно, используя допущение и выполнив преобразования, получим: $1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k+1) = \frac{k \cdot (k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k \cdot (k+1) + 2 \cdot (k+1)}{2} = \frac{(k+1) \cdot (k+2)}{2}$. Значит, равенство $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ верно для любого натурального числа n.

ПРИМЕР

2. Докажем, что для любого натурального числа n значение выражения $6^{2n} - 1$ делится на 35.

Доказательство.

1) Проверим, верно ли, что при $n = 1$ значение выражения $6^{2n} - 1$ делится на 35. Действительно, оно равно 35, а 35 делится на 35.

2) Допустим, что $6^{2n} - 1$ делится на 35 при $n = k$, т. е. $(6^{2k} - 1) : 35$.

3) Докажем, что $6^{2n} - 1$ делится на 35 и при $n = k + 1$, т. е. убедимся, что верно $(6^{2(k+1)} - 1) : 35$.

Действительно, $6^{2(k+1)} - 1 = 6^{2k+2} - 1 = 36 \cdot 6^{2k} - 1 = (6^{2k} - 1) + 35 \cdot 6^{2k}$. Значение полученной суммы делится на 35, так как каждое слагаемое этой суммы делится на 35. Значит, для любого натурального числа n значение выражения $6^{2n} - 1$ делится на 35.

ПРИМЕР

3. Докажем справедливость неравенства $2^n > n$ для любого натурального числа n.

Доказательство.

1) Проверим, что при $n = 1$ неравенство $2^1 > 1$ верно. Оно верно, так как $2 > 1$.

2) Допустим, что неравенство $2^n > n$ выполняется для натурального числа $n = k$, т. е. неравенство $2^k > k$ верно.

3) Докажем, что это же неравенство верно и для следующего натурального числа $k + 1$, т. е. докажем справедливость неравенства $2^{k+1} > k + 1$.

Действительно, так как $2^k > k$ (по предположению), то умножив обе части верного неравенства на 2, получим верное неравенство: $2 \cdot 2^k > 2k$ или $2^{k+1} > k + k$. (*)

Поскольку k натуральное число, то $k \geq 1$. Если $k = 1$, то неравенство (*) примет вид: $2^{k+1} > k + 1$, что и требовалось доказать.

Если $k > 1$, то, прибавив к обеим частям неравенства одно и то же число k, получим верное неравенство $k + k > k + 1$. Используя это неравенство и неравенство (*), получим $2^{k+1} > k + 1$.

Значит, неравенство $2n > n$ верно для любого натурального числа n.

ПРИМЕР

4. Докажем, что число диагоналей выпуклого n-угольника можно вычислить по формуле $\frac{n(n-3)}{2}$.

Решение. Самое маленькое число сторон выпуклого многоугольника равно 3, поэтому будем доказывать формулу для $n \geq 3$.

1) Проверим, верно ли, что при $n = 3$ утверждение справедливо, т. е. число диагоналей выпуклого треугольника можно вычислить по формуле. Действительно, при $n = 3$ значение выражения $\frac{n(n-3)}{2} = \frac{3(3-3)}{2}$ — это верно, так как в треугольнике нет диагоналей.

2) Допустим, что утверждение верно при $n = k$, т. е. число диагоналей выпуклого k-угольника можно вычислить по формуле $\frac{k(k-3)}{2}$.

3) Докажем, что утверждение верно и при $n = k + 1$, т. е. убедимся, что число диагоналей выпуклого $(k + 1)$-угольника можно вычислить по формуле $\frac{(k+1)(k-2)}{2}$.

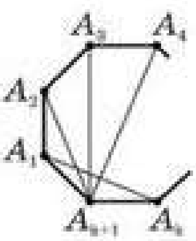


Рис. 34

Пусть $A_1A_2A_3A_4 \ldots A_kA_{k+1}$ — выпуклый $(k + 1)$-угольник (рис. 34). Проведем в нем диагональ A_1A_k (ее не было в k-угольнике).

Чтобы подсчитать общее число диагоналей $(k + 1)$-угольника, нужно подсчитать число диагоналей в k-угольнике $A_1A_2A_3A_4 \ldots A_k$, прибавить к полученному числу $k - 2$, т. е. число диагоналей $(k + 1)$-угольника, исходящих из вершины A_{k+1}, и, кроме того, следует добавить диагональ A_1A_k.

Таким образом, получим $\frac{k(k-3)}{2} + (k-2) + 1 = \frac{k(k-3)}{2} + k - 1 = \frac{k^2 - 3k + 2k - 2}{2} = \frac{k^2 - k - 2}{2} = \frac{(k+1)(k-2)}{2}$. Значит, утверждение верно для любого выпуклого n-угольника.

? 1. При доказательстве каких утверждений можно использовать метод математической индукции?

Упражнения

А

18.1. Докажите методом математической индукции для арифметической и геометрической прогрессий формулы:

1) $a_n = a_1 + d(n-1)$;

2) $b_n = b_1 + q^{n-1}$.

18.2. Докажите, что для всех натуральных чисел выполняется равенство:

1) $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

2) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

18.3. Методом математической индукции докажите, что для всех натуральных чисел верно равенство:

1) $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n+1)$;

2) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$;

3) $1 - 2 + 3 - 4 + \ldots + (-1)^{n-1} n = (-1)^{n-1}\left[\frac{n+1}{2}\right]$;

4) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n \cdot (n+1) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{3}$.

18.4. Докажите, что $n^3 - n$ делится на 3 при любом натуральном n.

18.5. Методом математической индукции докажите, что для всех натуральных чисел верно равенство:

1) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n \cdot (2n-1)(2n+1)}{3}$;

2) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - \ldots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n \cdot (n+1)}{2}$.

18.6. Подберите формулу для нахождения значения суммы и докажите методом математической индукции, что она верна для всех натуральных чисел:

1) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 8 + ... + n(3n - 1)$;

2) $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + ... + n(3n + 1)$.

18.7. Методом математической индукции докажите, что для всех натуральных чисел:

1) $7^n - 6 \cdot 2^n$ делится на 5; 2) $7^n + 3 \cdot 3^n$ делится на 4;

3) $15^n + 6$ делится на 7; 4) $9^n + 3$ делится на 4.

B

18.8. Найдите значение суммы:

1) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + ... + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)}$;

2) $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + ... + \frac{1}{(3n-2) \cdot (3n+1)}$.

18.9. Докажите, что при любом $n \in N$ выполняется равенство:

1) $1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + ... + n(2n + 1) = \frac{n(n+1)(4n+5)}{6}$;

2) $2 \cdot 2 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 8 + ... + (n + 1)(3n - 1) = \frac{n(2n^2 + 5n + 1)}{2}$.

18.10. Методом математической индукции докажите, что при четном $n \in N$:

1) $7^n - 5^n$ делится на 24; 2) $5^n - 3^n$ делится на 16.

18.11. Докажите, что при любом натуральном n значение выражения:

1) $21^n + 16 \cdot 4^n$ кратно 17; 2) $15^n + 7 \cdot 7^n$ кратно 8;

3) $13^n + 9 \cdot 3^n$ кратно 10; 4) $5^n + 7 \cdot 9^n$ кратно 4.

18.12. Докажите, что при любом нечетном натуральном n значение выражения:

1) $5^n + 2^n$ кратно 7; 2) $5^n + 11^n + 2$ кратно 6.

18.13. Докажите, что любой член числовой последовательности (a_n), для которой:

1) $a_n = n^3 + 35n$ делится на 6;

2) $a_n = n^3 + 17n$ делится на 6;

3) $a_n = 4^n + 15n - 1$ делится на 9;

4) $a_n = 7^n + 3n - 1$ делится на 9.

C

18.14. Докажите неравенство:

1) $4^n > 7n - 5$ при $n \in N$; 2) $2^n > 5n + 1$ при $n \in N$, $n \geq 5$.

18.15. Докажите, что при любом натуральном n значение выражения:

1) $5^n + 2 \cdot 3^n + 5$ кратно 8; 2) $5^n - 3^n + 2n$ кратно 4.

18.16. Докажите, что выполняется неравенство:

1) $3^n - 2^n \geq n$ при любом $n \in N$;

2) $3^{n-1} > 2n^2 - n$ при любом $n \in N$, $n \geq 5$.

18.17. Докажите, что n различных прямых, лежащих в одной плоскости и проходящих через одну общую точку, делят плоскость на $2n$ частей.

18.18. 1) Последовательность (a_n) задана рекуррентно: $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 7a_n + 3$.

Докажите, что $a_n = \dfrac{7^n - 1}{2}$.

2) Последовательность (a_n) задана рекуррентно: $a_1 = 4$, $a_{n-1} = 3a_n - 2$.

Докажите, что $a_n = n^3 + 1$ при $n \geq 2$.

18.19. Методом математической индукции докажите, что для всех натуральных чисел верно неравенство:

1) $2^n > n^3$; 2) $2^{n-2} > 2n + 5$; 3) $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + ... + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{1}{2}$.

18.20. Докажите, что значение выражения $\dfrac{n \cdot (2n^2 + 3n + 1)}{6}$ при любых натураль ных n является натуральн ым числом.

***18.21.** Найдите значение суммы:

1) $\dfrac{1}{4 \cdot 11} + \dfrac{1}{11 \cdot 18} + \dfrac{1}{18 \cdot 25} + ...$;

2) $\dfrac{1}{3 \cdot 11} + \dfrac{1}{11 \cdot 19} + \dfrac{1}{19 \cdot 27} + ...$;

3) $\dfrac{1}{5 \cdot 16} + \dfrac{1}{16 \cdot 27} + \dfrac{1}{27 \cdot 38} + ...$;

4) $\dfrac{1}{9 \cdot 13} + \dfrac{1}{13 \cdot 17} + \dfrac{1}{17 \cdot 21} + ...$.

ПОДГОТОВЬТЕ СООБЩЕНИЕ ОБ УЧЕНОМ-МАТЕМАТИКЕ

18.22. Осознание метода математической индукции, как отдельного важного метода, восходит к Блезу Паскалю (1623—1662), хотя отдельные случаи применения встречаются у Евклида (ок. 300 г. до н. э).

Название метода было введено шотландским математиком де Морганом в 1838 г.

Де Морган
(1806—1871)

ПОВТОРИТЕ

18.23. Предприниматель положил в коммерческий банк некоторую сумму денег под фиксированный процент годового дохода. Через два года сумма вклада увеличилась на 60 000 тг, а за третий год еще на 49 000 тг. Найдите первоначальную сумму вклада.

18.24. Если двузначное число разделить на значение произведения его цифр, то в частном получится 3, а в остатке 9. Если к значению суммы квадратов цифр этого числа прибавить значение произведения его цифр, то получится это же число. Найдите это число.

18.25. Решите уравнение $2 + 4 + 6 + \ldots + x = 930$.

18.26. Значение суммы трех последовательных чисел геометрической прогрессии равно 114. Эти числа можно рассматривать как первый, четвертый и двадцать пятый члены арифметической прогрессии. Найдите эти числа.

18.27. Решите уравнение:

1) $(x^2 + x + 1)^2 - 3x^2 - 3x - 1 = 0$;

2) $(2x^2 + 3x - 1)^2 - 10x^2 - 15x + 9 = 0$.

18.28. Найдите область определения функции:

1) $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 4x + 3}{5 - 2x}} + \dfrac{2}{x + 1}$;

2) $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 5x + 6}{7 - 3x}} + \dfrac{1}{x}$.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

18.29. На координатной плоскости с центром в начале координат постройте окружность радиусом 2 см. Постройте центральные углы в 30°, 45°, 90°, 150°.

18.30. На координатной плоскости с центром в начале координат постройте окружность радиусом 4 см. Постройте дугу с начальной точкой на положительной оси OX в 30°, –45°, – 90°, 150°.

Опорные понятия для овладения новыми знаниями

Угол, величина угла и ее измерение, виды углов, окружность, радиус окружности, дуга окружности, полуокружность, число π, *поворот на плоскости.*

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. $\{a_n\}$ — арифметическая прогрессия. Найдите a_4, если $a_1 = 10$, $d = -0{,}1$:

A) 9,7; B) 97; C) –97; D) 10,3; E) –10,3.

2. $\{b_n\}$ — геометрическая прогрессия. Найдите b_6, если $b_1 = 4$, $q = \frac{1}{2}$:

A) –0,125; B) 0,125; C) 1,25; D) 12,5; E) –1,25.

3. Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии: 12; 6; … :

A) 6; B) –12; C) 24; D) –24; E) 12.

4. Найдите сумму 100 первых членов последовательности $\{x_n\}$, если $x_n = 2n + 1$:

A) 20 400; B) 1200; C) 102; D) 1020; E) 10 200.

5. $\{b_n\}$ — геометрическая прогрессия, $b_1 = 625$, $q = \frac{1}{5}$. Найдите S_5:

A) –781; B) 781; C) 871; D) –871; E) –10.

6. Арифметическая прогрессия: 10; 8; … . Найдите S_{10}:

A) 190; B) –190; C) 10; D) 1; E) –10.

7. Найдите двадцать пятый член арифметической прогрессии: –3; –6; … :

A) 69; B) –69; C) 75; D) –72; E) –75.

8. Вычислите S_4, если $\{b_n\}$ — геометрическая прогрессия, $b_1 = 1$, $q = 3$:

A) 81; B) 40; C) 80; D) –80; E) –40.

9. Найдите восьмой член геометрической прогрессии $\{b_n\}$, если $b_1 = 32$, $q = \frac{1}{2}$:

A) $\frac{1}{2}$; B) $-\frac{1}{4}$; C) $\frac{1}{4}$; D) $-\frac{1}{2}$; E) 64.

10. $\{a_n\}$ — арифметическая прогрессия и $a_1 = -10$, $d = 2$. Найдите S_5:

A) –28; B) –70; C) 70; D) –30; E) 39.

11. Найдите десятый член арифметической прогрессии: 3; 7; … :

A) –36; B) 36; C) –33; D) 33; E) 39.

12. Сумма первых шести членов арифметической прогрессии равна 9, разность между четвертым и вторым членами равна 0,4. Найдите первый член прогрессии:

A) 0; B) –1; C) 1; D) –2; E) 2.

13. Сумма трех чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 111, второе число больше первого в 5 раз. Найдите эти числа:

A) 10; 50; 61;	B) 8,5; 42,5; 60;
C) 9,4; 47; 54,6;	D) 8; 40; 63;
E) 7,4; 37; 66,6.

14. Найдите разность арифметической прогрессии, если $a_{21} = 15$, $a_1 = 5$:

A) 1,5;	B) –1;	C) 0,5;	D) 1;	E) –0,5.

15. Найдите сумму всех натуральных чисел от 2 до 102 включительно:

A) 2626;	B) 5256;	C) 4040;	D) 5252;	E) 10 504.

16. Вычислите сумму: $\frac{1}{5} + \frac{8}{15} + \frac{13}{15} + ... + \frac{33}{15}$:

A) 15,4;	B) 120;	C) 60,8;	D) 63,8;	E) 8,4.

17. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если $b_1 = 2$, $q = 0{,}875$:

A) 18;	B) 16;	C) 32;	D) 64;	E) 100.

18. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии 9; –3; 1; ... :

A) 6,75;	B) $-6\frac{4}{9}$;	C) –27;	D) 81;	E) $\frac{1}{3}$.

19. Дана геометрическая прогрессия $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; ... . Найдите $\frac{b_6}{b_4}$:

A) $\frac{3}{5}$;	B) $\frac{7}{9}$;	C) $\frac{5}{9}$;	D) $\frac{4}{9}$;	E) $\frac{2}{3}$.

20. Найдите сумму членов бесконечной геометрической прогрессии 8, 4, ...:

A) 8;	B) 12;	C) 15;	D) $\frac{255}{16}$;	E) 16.

ГЛОССАРИЙ

Алгоритм	*Алгоритм* — это последовательность простейших действий, строго выполняемых для достижения определенной цели.
Аналитический способ задания числовой последовательности	Числовая последовательность задана аналитическим способом, если она задана с помощью формулы n-го члена (говорят также — общего члена).
Арифметическая прогрессия	Числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с постоянным для этой последовательности числом d, называется *арифметической прогрессией*. Число d называется *разностью арифметической прогрессии.*
A_n^k	A_n^k — число размещений без повторений из n по k.
Бесконечная числовая последовательность	Если числовая последовательность (функция) задана на множестве всех натуральных чисел, то она называется *бесконечной числовой последовательностью.*
Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия	Геометрическая прогрессия со знаменателем $\|q\| < 1$ называется *бесконечно убывающей геометрической прогрессией.*
Бином	Слово *бином* (от лат. *bis* — "дважды" и греч. *номос* — "член") означает двучлен.
Бином Ньютона	Формулу: $(x + a)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^k \cdot x^{n-k}$, где " знак суммы, называют *биномо м Ньютона.*
Биномиальные коэффициенты	C_n^k в биноме Ньютона называют *биномиальными коэффициентами.*
Благоприятствующий исход	Исход опыта, в котором наблюдается интересующее нас событие, называется *благоприятствующим исходом.*
Вероятность классическая	*Вероятностью события* A называется отношение числа m, благоприятствующих этому событию исходов, к общему числу исходов n, если они равновозможные.
Возрастающая последовательность	Последовательность (a_n) называется *возрастающей* , если каждый ее член a_n больше предыдущего a_{n-1}.
Геометрическая прогрессия	Числовая последовательность, первый член которой отличен от нуля, а каждый член, начиная со второго, равен предшествующему члену, умноженному на одно и то же, неравное нулю число, называется *геометрической прогрессией.*

Продолжение

Геометрические вероятности	*Геометрические вероятности* — вероятности попадания точки в часть отрезка, плоскости, пространственной фигуры.
График уравнения	*Графиком уравнения с двумя переменными* называется множество точек координатной плоскости, координаты которых являются решениями этого уравнения.
Графический способ задания числовой последовательности	График числовой последовательности состоит из изолированных точек, абсциссы которых — натуральные числа, ординаты — члены последовательности, соответствующие своим номерам.
Достоверное событие	Событие называется *достоверным*, если оно обязательно произойдет в данном испытании.
Знаменатель геометрической прогрессии	Число, на которое надо умножить член геометрической прогрессии, чтобы получить последующий ее член, называется *знаменателем геометрической прогрессии* и обозначается буквой q.
Комбинаторика	Область математики, в которой изучают комбинаторные задачи, называется *комбинаторикой*.
Комбинаторная задача	Задачи, в которых из элементов некоторого конечного множества по некоторым правилам составляются различные комбинации этих элементов и подсчитывается их число, называются *комбинаторными задачами*.
Конечная числовая последовательность	Если числовая последовательность (функция) задана на множестве первых n натуральных чисел, то она называется *конечной числовой последовательностью*.
Концентрация вещества	*Концентрацией вещества*, имеющего массу m_1, в смеси (сплаве, растворе) массой m, называется величина $\frac{m_1}{m}$.
Косинус угла α	*Косинусом угла* α называется отношение абсциссы точки B, лежащей на окружности, к ее радиусу.
Котангенс угла α	*Котангенсом угла* α называется отношение абсциссы точки B, лежащей на окружности, к ее ординате.
Математическая индукция	*Математическая индукция* — в математике — один из методов доказательства. Используется, чтобы доказать справедливость некоторого утверждения для всех натуральных чисел. Если утверждение $A(n)$, содержащее натуральную переменную, верно при $n = 1$, и из того, что оно верно при $n = k$, следует, что оно верно и при $n = k + 1$, то оно будет верно при всех натуральных значениях n.

Продолжение

Монотонные последовательности	Возрастающие, убывающие, невозрастающие и неубывающие последовательности называются *монотонными последовательностями.*
Невозможное событие	Событие называется *невозможным* , если оно не может произойти в данном испытании, т. е. свершение которого при данных условиях исключается.
Неубывающая последовательность	Последовательность (a_n) называется *неубывающей,* если каждый ее член a_n больше или равен предыдущему — a_{n-1}.
Невозрастающая последовательность	Последовательность (a_n) называется *невозрастающей,* если каждый ее член a_n меньше или равен предыдущему — a_{n-1}.
Неравенства с двумя переменными	Неравенства вида: $f(x; y) > g(x; y)$; $f(x; y) < g(x; y)$; $f(x; y) \geq g(x; y)$, $f(x; y) \leq g(x; y)$, где $f(x; y)$ и $g(x; y)$ выражения с двумя переменными, называются *неравенствами с двумя переменными.*
$n!$	$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$.
Ограниченная последовательность	Если последовательность ограничена сверху и снизу, то последовательность (a_n) называется *ограниченной.*
Ограниченная сверху последовательность	Если существует такое число, что каждый член последовательности (a_n) меньше него, то последовательность (a_n) называется *ограниченной сверху.*
Ограниченная снизу последовательность	Если существует такое число, что каждый член последовательности (a_n) больше него, то последовательность (a_n) называется *ограниченной снизу.*
Перестановка из n элементов без повторений	Упорядоченные множества, содержащие все n элементов множества $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, называются *перестановками из n элементов без повторений.*
Периодическая функция	Функция $y = f(x)$ называется *периодической функцией*, если существует такое отличное от нуля число T, что для любого x из области определения функции $y = f(x)$ выполняется равенство: $f(x + T) = f(x)$. Такое наименьшее число называется *периодом функции.*
P_n	Число перестановок без повторений из n элементов.
Постоянная (стационарная) последовательность	Последовательность (a_n) называется *постоянной* (*стационарной*), если каждый ее член a_n равен предыдущему — a_{n-1}.
Правило суммы	Если множества X и Y не пересекаются и множество X содержит a элементов, а множество Y содержит b элементов, то объединение множеств X и Y содержит $(a + b)$ элементов.

Продолжение

	Если элемент $a \in A$ можно выбрать m способами, а элемент $b \in B$ можно выбрать n способами, причем $A \cap B = \emptyset$, то выбрать один элемент "a или b" можно $m + n$ способами.
Признак арифметической прогрессии	Свойство членов арифметической прогрессии, выраженное формулой $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, является признаком арифметической прогре ссии.
Признак геометрической прогрессии	Свойство членов геометрической прогрессии, выраженное формулой $b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$, является признаком геометрической прогрессии.
Противоположное событие	*Событием, противоположным событию A*, называется событие $\bar{A}$, которое наступает тогда и только тогда, когда не наступает событие A.
Процентное содержание вещества	*Процентным содержанием вещества*, имеющего массу m_1 в смеси (сплаве, растворе) массой m, называется величина $\dfrac{m_1}{m} \cdot 100\%$.
Равносильные уравнения	Два уравнения, имеющие одно и то же множество решений, называются *равносильными уравнениями*.
Радиан	Величина центрального угла, опирающегося на дугу, равной длине радиуса окружности, называется 1 *радианом*.
Размещения без повторений	*Размещениями без повторений* из n по k называются упорядоченные множества из k элементов, выбранных из множества, содержащего n элементов.
Рекуррентный способ задания числовой последовательности	*Рекуррентный способ* задания числовой последовательности заключается в том, что любой член числовой последовательности, начиная с некоторого члена, выражается через предшествующие члены. При этом задается один или несколько первых членов последовательности и формула для нахождения членов числовой последовательности по известным предшествующим членам.
Решение нелинейного уравнения с двумя переменными	Пара чисел $(x_0; y_0)$, которая обращает нелинейное уравнение с двумя переменными $F(x; y) = 0$ в верное числовое равенство $F(x_0; y_0) = 0$, называется *решением нелинейного уравнения с двумя переменными*.
Решение неравенства с двумя переменными	*Решением неравенства с двумя переменными* называется пара значений переменных, обращающих неравенство в верное числовое неравенство.

Продолжение

Решение системы нелинейных уравнений с двумя переменными	Пара чисел $(x_0; y_0)$, которая обращает каждое уравнение системы в верное числовое равенство одновременно, называется *решением системы нелинейных уравнений с двумя переменными.*
Синус угла α	*Синусом угла* α называется отношение ординаты точки B, лежащей на окружности, к ее радиусу.
Система нелинейных уравнений с двумя переменными	Система уравнений с двумя переменными, в составе которой хотя бы одно уравнение не является линейным уравнением, называется *системой нелинейных уравнений с двумя переменными.*
Словесный способ задания числовой последовательности	С помощью этого способа закономерность расположения членов последовательности описывается словами.
Случайное событие	Событие называется *случайным* , если оно может произойти, но может и не произойти.
Событие	Под *событием* понимается всякое явление, о котором имеет смысл говорить, что оно происходит (имеет место) или не происходит. Событиями являются и результаты различных опытов, наблюдений и измерений.
Сочетание без повторений из n элементов по k	*Сочетанием без повторений* из n элементов по k называется подмножество, содержащее k элементов множества, состоящего из n элементов.
C_n^k	C_n^k — число сочетаний из n элементов по k.
Статистическая вероятность	*Статистической вероятностью события* A называется относительная частота (частость) появления этого события в n произведенных испытаниях.
Степень уравнения	*Степенью уравнения с двумя переменными* , представленного в виде $F(x, y) = 0$, где $F(x, y)$ — многочлен стандартного вида, называют степень многочлена $F(x, y)$.
Тангенс угла α	*Тангенсом угла* α называется отношение ординаты точки B, лежащей на окружности, к ее абсциссе.
Тригонометрические функции	Зависимости синуса, косинуса, тангенса и котангенса от величины угла α называются *тригонометрическими функциями.*
Тригонометрическое тождество	*Тригонометрическим тождеством* называется равенство, в которое входят тригонометрические функции, и которое верно при любых допустимых значениях угла — аргумента тригонометрических функций, но неверно, если каждую из функций заменить произвольной величиной.

Продолжение

Убывающая последовательность	Последовательность (a_n) называется *убывающей*, если каждый ее член a_n меньше предыдущего a_{n-1}.
Уравнение с двумя переменными	*Уравнениями с двумя переменными* x и y называются уравнения, которые имеют вид: $f(x, y) = q(x, y)$, где $f(x, y)$ и $q(x, y)$ — выражения с переменными x и y.
Факториал	*эн факториал* — произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно.
Формула для вычисления числа перестановок без повторений из n элементов	$P_n = n!$
Формула для вычисления числа размещений без повторений из n элементов по k	$A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$
Формула для вычисления числа сочетаний без повторений из n элементов по k	$C_n^k = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$
Формула n-го члена арифметической прогрессии	Формула $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ называется *формулой n-го члена арифметической прогрессии.*
Формула n-го члена геометрической прогрессии	Формула $b_n = b_1 q^{n-1}$ называется *формулой n-го члена геометрической прогрессии.*
Формула n-го члена числовой последовательности	*Формула n-го члена (общего члена)* — это формула, по которой можно найти любой член числовой последовательности, зная его номер.
Формулы приведения	Формулы, по которым тригонометрические функции угла вида $\frac{\pi}{2}k \pm \alpha$ (где k — любое целое число, α — острый угол) приводятся к тригонометрическим функциям угла α, называются *формулами приведения.*
Формулы сложения	Формулы, позволяющие выразить тригонометрические функции суммы и разности двух углов через тригонометрические функции этих же углов, называются *формулами сложения.*
Формула суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии	$S = \dfrac{b}{1-q}$ — формула суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, знаменатель которой $\lvert q\rvert<1$.

Продолжение

Формула суммы первых n членов арифметической прогрессии	$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$, $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$ — формула суммы первых n членов арифметической прогрессии.
Формула суммы первых n членов геометрической прогрессии	$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ — формула суммы первых n членов геометрической прогрессии.
Функция *Антье* от x	*Функцией Антье* называется функция $E(x) = [x]$, где $[x]$ — целая часть числа x (наибольшее целое число, не превосходящее x).
Числовая окружность	*Числовой окружностью* называется окружность, на которой указана начальная точка, единичная дуга, положительное направление.
Члены последовательности	Числа, образующие последовательность, называются *членами последовательности.*
Элементарные события	События, которые нельзя разделить на более простые события, называются *элементарными событиями.*

ОТВЕТЫ

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ КУРСА АЛГЕБРЫ 7—8 КЛАССОВ

1. 1) $\frac{104}{(7-x)(x+6)}$; 2) $3a-y$; 3) $\frac{y(a+b)-3a}{a-yb}$; 4) $ax-6y$. **3.** 1) $-0{,}3\,c^{-1}\cdot d^{-3}$; 2) $\frac{8a}{9x}$; 3) $10{,}5\,xa^{-2}$; 4) $10{,}5\,b$. **4.** 1) $\frac{1}{2x^3(x-1)}$; 2) $\frac{15bc^2}{ad}$; 3) $16(p-2)\cdot q^2$; 4) $\frac{x^2y^2a^2}{y+3}$. **5.** 1) $\frac{49}{19}$; 2) 0,2; 3) –2,5. 4) $\frac{1}{2}$; 5) $-2\frac{1}{7}$; 6) –6. **6.** 1) $1-\sqrt{x}$; 2) $\sqrt{y}-1$; 3) $1-x$. **8.** 1) $\frac{a^2-2}{a}$; 2) $\frac{x^2-2}{x}$; 3) $\frac{3-x^2}{x}$; 4) $\frac{1}{x+2}$. **9.** 1) 2; 2) $\frac{4y^2-4a^2}{ay}$; 3) 0; 4) $-2a^2b^2$; 5) 0; 6) 2; 7) 1,5; 8) $\frac{14}{3}$; 9) –5. **10.** 1) $\frac{c}{c-a}$; 2) $\frac{4c}{c-2n}$; 3) $\frac{-2c}{3c+a}$; 4) $\frac{6c}{5c-2a}$; 5) $\frac{-2a}{3c+2a}$; 6) $\frac{3b}{3b+a}$. **11**. 1) 1; 2) 0; 3) –22; 4) 1. **12.** 1) 0; 3; $\sqrt{26}$; 2) 1; 4; 6; 9; 3) 1,5; 9; 3; 4) 2; $\sqrt{10}$. **13.** 1) 5; 2) 52; 3) 5,6; 4) 26; 5) –5,56; 6) 9; 7) 17; 8) $\frac{1}{16}$; 9) $1\frac{4}{9}$; 10) 9. **15.** 1) Не имеет смысла; 2) –64; 3) 102,4; 4) 2997,7. **16.** 1) y ǀ 0; 2) y ǀ 0; 3) a ǀ 0; 4) x — любое действительное число; 5) c m 0; 6) b m 0. **17.** 1) $\sqrt{31}; 4\sqrt{2}$; 2) $6\sqrt{0{,}6}; \sqrt{39}; 4\sqrt{3}$; 3) $\sqrt{15}; 3\sqrt{2}; 3\sqrt{\frac{7}{2}}$; 4) $8\sqrt{0{,}5}; 3\sqrt{10}; \sqrt{93}$. **18.** 1) $\frac{110}{81}$; 2) $-\frac{\sqrt{33}}{2}$; 3) –10; 4) 3,76. **21.** 1) 21; 2) –2; 3) –2. **22.** 1) a^4b; 2) $\frac{4a^8}{3b^7}$; 3) b^5x^4; 4) $5x^4a^6$; 5) $\frac{2x^3}{y}$; 6) $-0{,}5\,p^3y^3$. **23.** 1) $5|x|$; 2) $|a|x^4$; 3) $2|y|\sqrt{5}$; 4) $0{,}5\sqrt{3x^3}$; 5) $3a|x|\sqrt{2y}$; 6) $6{,}5|a|$; 7) $0{,}3\,a^3\sqrt{a}$; 8) $-m^4 0{,}9\sqrt{y}$; 9) $-0{,}3\,a\sqrt{c}$; 10) $-\frac{1}{x^2}\sqrt{-x}$; 11) $105x^2$; 12) $1{,}4\,ab\sqrt{ab}$; 13) $5y^2x\sqrt{2x}$; 14) $a^3|x|\sqrt{-3x}$. **24.** 1) $\sqrt{10x^2}$; 2) $\sqrt{7c}$; 3) $-\sqrt{11a^2}$; 4) $\sqrt{2a^3b}$; 5) $\sqrt{6c^3}$; 6) $\sqrt{11c^8}$; 7) $\sqrt{9x^9}$; 8) $\sqrt{18a^3b^3}$; 9) $\sqrt{-3x}$; 10) $-\sqrt{12a^4}$; 11) $\sqrt{-\frac{9x^3}{2}}$; 12) $\sqrt{0{,}5ab^3}$. **25.** 1) $\frac{6}{3\sqrt{3}-3}$; 2) $\frac{1}{8+4\sqrt{3}}$; 3) $-\frac{25}{9+\sqrt{6}}$; 4) $\frac{x-7}{7(\sqrt{x}-\sqrt{7})}$; 5) $\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; 6) $\frac{y-b^2}{b(\sqrt{y}-b)}$. **26.** 1) $\frac{2\sqrt{2}+y\sqrt{y}}{2-y}$; 2) $\frac{c\sqrt{c}-27}{c-9}$; 3) $\frac{a^3b\sqrt{b}-27}{a^2b-9}$; 4) $\frac{2+\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; 5) $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{6}-4}{4}$; 6) $7+3\sqrt{6}-5\sqrt{2}-4\sqrt{3}$. **27.** 1) –5; 1; 2) –1; 15; 3) –2; 6; 4) –1; 2,5. **28.** 1) $(x+4)(x-2)$; 2) $(3x-8)(x-1)$; 3) $(x-1)(3-2x)$; 4) $(x-1)(5-3x)$. **29.** 1) $2(1-x)(x-4)$; 2) $(x-1)(x-9)$; 3) $(1-x)(2x-5)$; 4) $(x-1)(3x+7)$; 5) $0{,}5(x+4)(x-1)$; 6) $0{,}5(x-1)(x-11)$; 7) $(1-x)(3x+1)$; 8) $0{,}3(x-1)(x+11)$; **30.** 1) $(x+8)(x-1)$; 2) $(x+1)(x-11)$; 3) $-2{,}5(x-2{,}06)\cdot(x-1)$; 4) $\frac{1}{3}(x-1)(11x+24)$. **31.** 1) $(x+1)$; 2) $x-8$; 3) $2x+9$; 4) $3x-10$; 5) $\frac{2x-9}{x}$; 6) $\frac{3(x-2)}{x}$; 7) $\frac{5x+12}{x+1}$; 8) $\frac{2x-3}{x+2}$. **32.** 1) $x^2-9x+14=0$; 2) $x^2-2x-15=0$; 3) $x^2-3x-4=0$; 4) $x^2+2{,}4x+0{,}63=0$; 5) $x^2-5{,}5x+1{,}06=0$; 6) $x^2-25=0$; 7) $x^2-1{,}1x+0{,}3=0$;

8) $x^2 - 6{,}4x + 9{,}88 = 0$; 9) $x^2 - 7 = 0$; 10) $x^2 - 10x + 122 = 0$; 11) $x^2 + 6x + 4 = 0$; 12) $x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{11})x + \sqrt{22} = 0$. **33.** 1) 6; 4; 2) 3; 8; 3) 9; 3; 4) –8; –3; 5) –21; 6) –16; 2; 7) 3; $\sqrt{2}$; 8) $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; 9) $\sqrt{2} \pm 1$; 10) $3\sqrt{5}$; 12; 11) $2\sqrt{5}$; 12) $\sqrt{2}$; $-\sqrt{6}$. **34.** 1) $x_1 + x_2 = 4$; $x_1x_2 = -6$; 2) $x_1 + x_2 = -12$; $x_1x_2 = -2{,}5$; 3) $x_1 + x_2 = 7$; $x_1x_2 = 2{,}5$; 4) $x_1 + x_2 = \frac{5}{3}$; $x_1x_2 = \frac{2}{3}$. **35.** 1) 34; 2) –36; 3) 172; 4) 1216. **36.** 1) $\left\{\frac{5 \pm \sqrt{97}}{2}\right\}$; 2) {–2;7}; 3) {–2; –8}; 4) {–4; 1}; 5) {4;3}; 6) {1;6}; 7) {2; 9}; 8) {–1; 4}; 9) $\left\{\frac{4 \pm \sqrt{43}}{3}\right\}$.
37. 1) $\varnothing$; 2) $1 \pm \sqrt{35}$; 3) 6; 4) –4; 5) 2; 10; 6) $\varnothing$; 7) 13; 8) 1;7. **38.** 1) $x^2 - 36 = 0$; 2) $x^2 - 2{,}25 = 0$; 3) $x^2 - 13 = 0$; 4) $x^2 + 7 = 0$. **39.** 1) $(x - 3)^2 - 16 = 0$; 2) $\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 - 4 = 0$; 3) $(x + 5)^2 - 7 = 0$; 4) $(x - 0{,}5)^2 + 2 = 0$. **40.** 1) {±3; ±5}; 2) $\varnothing$; 3) $\{4; -3 \pm \sqrt{17}\}$; 4) $\{-3; -5; 1 + \sqrt{14}\}$; 5) {±1; ±4} 6) $\varnothing$; 7) $\left\{3; 6; \frac{-9 - \sqrt{153}}{2}\right\}$; 8) {–9; –6; 18}; 9) $\varnothing$; 10) $\varnothing$. **41.** 1) 0; 2) $\frac{-19 + \sqrt{41}}{2}$; 3) $\sqrt{3} - \sqrt{11}$; 4) –1. **42.** 1) 4; 2) ±5; 3) –2; 4) 1. **43.** 1) 6; 2) –4; 3) ±2; 4) 5. **44.** 1) $(-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$; 2) $(-\infty; 3] \cup [4; +\infty)$; 3) $\varnothing$; 4) $(-\infty; 2{,}6]$. **45.** 1) $\{1 \pm \sqrt{6}\}$; 2) $\{-2 \pm \sqrt{7}\}$; 3) $\{2; 2 \pm \sqrt{6}\}$; 4) $\{-2; -1\}$; 5) {±1}; 6) $\{\pm 2\sqrt{2}\}$; 7) {–3; 1}; 8) {0; 4}; 9) {–1; 3}; 10) {1; 2}; 11) {1; 2}; 12) $\left\{-4; 1; \frac{5 \pm \sqrt{41}}{2}\right\}$.
46. 1) {6}; 2) {3}; 3) {±5}; 4) {±8}; 5) {–5; 4}; 6) {–7; 4}; 7) {–9; 4,5} 8) {3; 12}.
47. 1) (1,5; 0) и (0; –1,5); 2) $\left(-\frac{1}{4}; 0\right)$ и (0; 0,5); 3) (0;0); 4) (1; 0); (–1; 0) и (0; 1); 5) $(\sqrt{2}; 0)$; $(-\sqrt{2}; 0)$ и (0; –2); 6) $\varnothing$; (0; 1,5); 7) (2; 0); (–2; 0) и (0; 4); 8) (0; 0); (–2; 0). **51.** 1) $y = (x - 2)^2 + 3$; 2) $y = 2(x - 3)^2 - 2$; 3) $y = (x + 1)^2 + 2$; 4) $y = 2(x - 3)^2 - 2$. **54.** 1) 5; 2) –2; 3) 0; 4) –2. **55.** 3) 10; 4) 5. **56.** 1) $(-\infty; -2] \cup [5; +\infty)$; 4) $(-\infty; -1] \cup [0{,}2; 8) \cup (8; +\infty)$; 5) $(-\infty; -1) \cup [5; +\infty)$; 7) $\left[-2; \frac{3 - 3\sqrt{3}}{2}\right] \cup \left[\frac{3 + 3\sqrt{3}}{2}; +\infty\right)$; 8) $(-\infty; -1 - \sqrt{6}] \cup [-1 + \sqrt{6}; +\infty)$. **57.** 1) (1; 9,3).
58. 1) 40 км/ч; 2) 70 км/ч; 3) 72 км/ч. **59.** 1) 42 ч и 56 ч или 56 ч и 42 ч; 2) 20 дней и 30 дней или 30 дней и 20 дней. **60.** 1) 13 км/ч; 2) 2 км/ч. **61.** 1) 160 м и 90 м; 2) 60 м; 3) 1600 $м^2$; 4) 1200 $м^2$. **62.** 1) В банке В больше на 682 тг; 2) а) 120 000 чел.; б) 70%; 3) 20%. **63.** 1) 96 и 69; 2) 84 и 48. **64.** 1 000 000 тг. **66.** 1) 4,07; 2) ≈0,596. **67.** 1) $a = 6$; 2) $a = -5$. **68.** Функция монотонно убывает на множествах $(-\infty; -5]$; [2; 4) и [4; 7); Функция монотонно возрастает на множествах [–5; 2] и $(7; +\infty)$. **69.** ≈12,9%.

Глава I. УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ И ИХ СИСТЕМЫ

1.3. 1) 2; 2) $\varnothing$; 3) $\varnothing$; 4) 2; 5) $-1 \pm \sqrt{3}$; 6) –2; 4. **1.4.** 1) Вторая; 2) вторая; 3) вторая; 4) третья; 5) четвертая; 6) четвертая. **1.6.** 1) {(0; ±2); (±2; 0)}; 2) {(1; 2); (–1; –2); (1; –2); (–1; 2)}; 3) {(–4; 0), (4; 0), (2; –2), (–2; –2), (2;2)}. **1.7.** 1) Парабола; 2) парабола; 3) гипербола; 4) гипербола. **1.8.** $a = -3$; $b = 6$. **1.11.** 1) 25% на звонки зарубежных операторов; 2) 625 тг; 3) 700 тг. **1.12.** 1) $(-\infty; -1) \cup (2{,}5; +\infty)$; 3) $(-\infty; -4) \cup [2; 3] \cup (4; +\infty)$. **1.13.** 1) Да; 2) да; 3) нет; 4) да. **1.14.** 1) 3; 2) 7; 3) $6\sqrt{2}$; 4) 4. **2.3.** 1) $\varnothing$; 2) 2; 3) $\varnothing$. **2.6.** $M(3; -1)$. **2.7.** 1) а) $p > \frac{3}{4}$; б) $p = \frac{3}{4}$; в) $p < \frac{3}{4}$; 2) а) $p \in (-2; +\infty)$; б) $p = -2$; в) $p \in (-\infty; -2)$. **2.8.** 1) $p = -3$; 2) $p = 3$; 3) $p \in (-\infty; -3\sqrt{2}) \cup$

$\cup(3;\ +\infty)$. **2.9.** 1) $\{\pm\sqrt{4 \pm 2\sqrt{3}}\}$; 4) $\{\pm 1\}$. **2.11.** 1) 90 км/ч и 80 км/ч; 3) 50 км/ч. **2.12.** 1) $(-2; 3 - \sqrt{17}] \cup [3 + \sqrt{17}; +\infty)$. **2.13.** 1) Да; 2) да; 3) нет; 4) нет. **2.14.** 1) (–2; 2) и (2; –2); 2) (–2; –4) и (2; 4); 3) (–1; –1) и (1; 1). **3.2.** 1){(4; –2); (1; –5)}; 2){(4; 5); (13; –4)}; 3){(6; 5); (–4; –5)}; 7){(–1; 7); (–7; 1)}; 8) {(2; 3); (3; 2)}. **3.3.** 1){(1; –2)}; 5) {(–1; 4); (4; –1)}; 6) {(–8; –6); (8; 6)}. **3.8.** 4) {(–1; –5); (5; 1)}; **3.9.** 4) {(0; –3); (6; 13)}. **3.10.** 1) {(1; 1)}. **3.11.** 4) {(1; 3)}. **3.12.** 1) {(5; 3); (3; 1)}; 2){(1; 0); (3; 2)}; 3) {(–1; –3); (1; 3)}; 4) {(–1; 2); (1; 2)}. **3.13.** 1) {(–3; –2); (3; 2)}; 2) {(–2; –1); (2; 1); $\left(-\sqrt{6}; -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$; $\left(\sqrt{6}; \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$}; 3) {(–2; –1); (2; 1); (–2; 1); (2; –1)}; 4) {(–2; –3); (2; 3); $(0; -\sqrt{13})$; $(0; \sqrt{13})$}. **3.14.** 1) {(–2; –1); (–2; 1); (2; –1); (2; 1)}; 2) {(–3; –1); (–3; 1); (3; –1); (3; 1)}; 3) {(±2; ±1)}; 4) {(2; 1)}. **3.15.** 1) {(–4; –2); (4; 2); $(-\sqrt{10}; -\sqrt{10})$; $(\sqrt{10}; \sqrt{10})$}; 2) {(–2; –1); (2; 1)}; 3) {(2; 4); (–2; –4)}; 4) {(–1; –3); (1; 3)}. **3.16.** 1) {(–3; –5); (3; 5); (–36; 11,5); (36; –11,5)}; 4) $\{(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}); (\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2})\}$; 5) {(–2; –1); (2; 1)}; 7) {(–0,5; –0,6); (1; 3)}; 8) {(2; –4); (–4; 2)}; 9) {(±3; ±2); $\left(\pm\frac{25}{\sqrt{113}}; \mp\frac{16}{\sqrt{113}}\right)$}. **3.17.** 1) Нет; 2) да. **3.18.** 1) {(a; 2a); (2a; a)}; 4) {(a; 2a); (2a; a); (–a; –2a); (–2a; –a)}. **3.19.** 1) (2; 1); 2) (–1; –2); (–1; 2); (1; –2); (1; 2); 3) (–1; –3); (–1; 3); (1; –3); (1; 3); 4) (2; 1); (2; –1); $(-2; \pm\sqrt{5})$. **3.20.** 1) {(2; –1); (–1; 2)}; 2) {(4; –1); (1; –4)}; 3) {(5; 1); (–1; –5)}; 4) {(–2; –1); (2; 1)}. **3.21.** 1) {(0; 1); (–3; 1)}; 2) {(1; 1)}; *указание* : рассмотрите разность уравнений системы; 3) {(1; 1)}. *указание*: сложите уравнения системы и получите $x + y = 2$ системы; 4) {(2; 1)}. **3.22.** 1) {(0; 0); (2; 2); (0,5; –0,1)}; 2) {(0; 0)}; 3) ∅. **3.23.** 1) {(5; 1); (5; –1); (–5; 1); (–5; –1)}; 2) {(±0,5; ±0,5); 3) {(±1; ±2); (±2; ±1)}. **3.24.** 3) $\{\left(\frac{4}{3}; \frac{2}{3}\right); \left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)\}$; 4) {(4; 8); (8; 4)}. **3.25.** 1) (4; 9); (9; 4); 2) (4; 1); 3) (2; 8); (8; 2). **3.26.** 1) {(2; 1); (–2; –1)}; 3) {(0,5; 4)}; 4){(2; 1)}; 5){(2; 1); (–2; –1)}; 7){(2; 2); (–6; –2)}; 8) {(0, любое число); (любое число; 1)}. **3.27.** 1) {(–2; 1); (2; –1); (0,5; –0,5); (–0,5; 0,5)}; 5) {(0; 0); (1; 1); (1,6; –3,2)}. **3.28.** 1) {(4; 1); (1; 4)}; 2) {(2; 1); (2; –1); $(1; \sqrt{2})$; $(1; -\sqrt{2})$}; 3) {(2; –1); (–1; 2)}; 4) {(2; 3); (3; 2)}. **3.29.** 1) {(2; 4); (4; 2)}; 2) {(–3; –2); (3; 2)}; 3) {(3; 2); (–3; –2); (–2; 3); (2; –3)}; 4) {(2; 1); (–1,5; –2,5)}; 5) {(5; 1); (–5; –1)}; 6) {(1; 1); (–1; –1)}. **3.30.** 1) {(–3; 4); (3; –4); (1; 0); (0; 1)}; 2) {(–1; 6); (1; –6); (6; –1); (–6; 1)}; 3){(5; 4); (4; 5); (–4; –5); (–5; –4)}; 4) {(9; –13); (–9; 13); (1; 3); (–1; –3)}. **3.31.** 3) {(a; a), где $a \in R$; $\left(\frac{3}{\sqrt{19}}; \frac{2}{\sqrt{19}}\right)$; $\left(-\frac{3}{\sqrt{19}}; -\frac{2}{\sqrt{19}}\right)$}; 4) {(1; –1); (–1; 1); $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$}. **3.32.** 1) {(0; 1); (3; 1); (1,5; 2,5); (1,5; –0,5)}; 3) {(1; 2); (2; 1)}; 4) {(1; 2); (2; 1); (1; –4); (–4; 1)}. **3.33.** 1) {(2; 2); $(-2 + 2\sqrt{2}; -2 - 2\sqrt{2})$; $(-2 - 2\sqrt{2}; -2 + 2\sqrt{2})$}; 2) {(2; 1); (–2; –1)}. **3.34.** 1) {(2; 1); (–2; –1); $\left(\sqrt{\frac{7}{3}}; \sqrt{21}\right)$; $\left(-\sqrt{\frac{7}{3}}; -\sqrt{21}\right)$}; 2) {(–1; –1); (–1; 2); (2; –1)}. **3.35.** 1) {(2; 1); (–2; –1)}; 3) {(8; –2); (–8; 2); $(2\sqrt{6}; 2\sqrt{6})$; $(-2\sqrt{6}; -2\sqrt{6})$}; 4) {(1; –1)}. **3.36.** 1) {(1; 2; –3); (3; 0; –1)}; 2) {(2; 1; –1)}; 4) {(3; 2; 1); (–3; –2; –1)}. **3.37.** 1) {(2; 2; 2); (–2; –2; –2)}; 2) {(1; 1; 1)}; 3) {(6; 6; 6)}. **3.38.** 1) {–2; 2}; 2) {0}; 3) {1}; 4) $\{-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\}$. **3.39.** 1) $(-\infty; 0{,}5)$;

2) $\left(3\frac{1}{13}; +\infty\right)$; 3) $(-\infty; -1) \cup (2\frac{7}{15}; +\infty)$; 4) $(-\infty; -1,6) \cup (-0,6; 1,2)$. **3.40.** 1) $[-12; 10]$; 2) $(-\infty; -3] \cup [7,5; +\infty)$; 3) $(-\infty; -6] \cup (0; 6]$; 4) $(-\infty; -0,5] \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$. **3.41.** 1) Больше 5 см, но меньше 9 см; 2) больше 5 м; 3) 30 м и 18 м. **3.43.** 1) 20 км/ч; 2) 15 км/ч; 4) 2 км/ч. **3.44.** 1) 12 пачек; 2) 9 л. **3.45.** 1) 60 км/ч; 2) 10 км/ч. **4.1.** 1) 8 см и 6 см; 2) 9 и 11; 3) 6 и 2; 4) 24 или 48; 5) 36. **4.2.** 1) 14 и 56; 2) 72 и 50. **4.3.** 1) 22 км/ч и 2 км/ч; 2) 3 км/ч и 17 км/ч. **4.4.** 1) 45 км/ч; 2) 4 км/ч и 5 км/ч. **4.5.** 1) 6 ч и 10 ч. 2) 84 ч и 60 ч. **4.6.** 1) 36 км/ч и 24 км/ч; 2) 60 км/ч и 80 км/ч. **4.7.** 1) 96 км/ч и 64 км/ч; 2) 40 км/ч и 50 км/ч. **4.8.** 1) 48 и 60; 2) 30 км/ч и 60 км/ч. **4.9.** 1) 88 км/ч; 2)75 км/ ч. **4.10.** 1) 187,5 т; 2) 1,5 кг. **4.11.** 1) 15 мин; 2) 10 ч и 15 ч. **4.12.** 1) 120 км/ч; 2) 12 ч. **4.13.** 1) 3 км/ч и 15 км/ч; 2) 2 км/ч и 14 км/ч. **4.14.** 1) 1 кг и 7 кг; 2) 5% и 10%. **4.15.** 1) 40 л; 2) 10 л. **4.16.** 1) 1,64 кг и 1,86 кг; 2) 3 : 4. **4.17.** 1) 80%. **4.18.** 300 000 тг, 14%. **4.19.** 12 ч и 10 ч. **4.20.** 14 км/ч, 12 км/ч. **4.21.** 2,1кг. **4.22.** 1) 25 чел., 24 чел.; 2) 750 м^3. **4.23.** 16 дней, 24 дня, 48 дней. **4.24**. 3 : 4 : 15. **4.25.** 1) $(-\infty; -7) \cup$ $\cup (-2; 7)$. **4.26.** 1) $\left(\frac{7}{9}; +\infty\right)$; 2) $(4,4; 10,4)$. **5.6.** Да. **5.7.** 1) $(x-1)^2 + (y-2)^2 \leqslant 25$; 3) $x^2 + (y-2,5)^2 > 3$; 4) $(x-3,5)^2 + y^2 > 1$. **5.8.** 2) Окружность с центром в точке O (3; 2) и радиусом длиной $\sqrt{13}$ и множество точек, расположенных вне этой окружности; 4) круг с центром в точке с координатами (1; 0,5) и радиусом длиной $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **5.9.** 1) $y > x$; 2) $y > -\frac{5}{3}x + \frac{1}{3}$; 4) $y > -1$. **5.10.** 1) $y > -6x^2 + 4x - 1$; 2) $y > 2x^2 - 3x + 5$. **5.12.** 1)$(-3; -2)$; 2)$(-1; 6)$. **5.14.** 36 или 63. **5.15.** 21 ц и 25 ц, 7 га и 6 га. **6.2.** 1) Нет; 2) да; 3) нет; 4) да. **6.4.** 1) $\begin{cases} y > 0, \\ x > 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y > 0, \\ x < 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y < 0, \\ x < 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y < 0, \\ x > 0. \end{cases}$

6.8. 1) Да; 2) нет; 3) да; 4) нет. **6.14.** 1) $\begin{cases} x^2 - 4x + y^2 - 10y + 25 \leqslant 0, \\ x^2 - 4x + y^2 - 10y + 27 \geqslant 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + 4x + y^2 + 2y \leqslant 1, \\ x^2 + 4x + y^2 + 2y \geqslant -2. \end{cases}$ **6.16.** 1) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 16, \\ x^2 + y^2 \geqslant 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 16, \\ x + y \geqslant 4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 16, \\ y \geqslant x^2. \end{cases}$ **6.21.** 1) $\{-2; 2\}$; 2) $\{\pm\sqrt{2}; 5\}$; 3) $\{0; \pm\sqrt{2}; 4\}$.

6.22. 26 и 24 или 10 и 0. **6.24.** 1) 20; 2) $\frac{1}{12}$; 3) 41,7%. **6.25.** 1) 30; 2) 18; 3) 17. **6.26**. 6.

Глава II. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

7.1. 7. **7.2.** 120. **7.3.** 6 чисел. **7.4.** 20. **7.5.** 25 учащихся. **7.6.** 13 букетов. **7.7.** 3 учащихся. **7.8.** 60. **7.9.** 3 четных числа. **7.10.** 20. **7.11.** 3. **7.12.** 21. **7.13.** 30. **7.14.** 1) 10; 2) 5. **7.16.** 46 км/ч. **7.17.** 1) $\{(2; \sqrt{3}), (-2; \sqrt{3}), (-2; \sqrt{3}), (-2; -\sqrt{3})\}$; 2)$\{(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}; 0)\}$. **7.19.** 1) 3; 2) 4. **7.20.** 5790; 5970; 7590; 7950; 9570; 9750. **8.2.** 1) 24; 2) 720; 3) 42; 4) $\frac{1}{56}$; 5) $8\frac{1}{6}$; 6) 30. **8.3.** 1)3; 2) 4; 3) 4. **8.4.** 1) 24; 2) 6; 3) 7!. **8.5.** 1) 840; 2) 120. **8.6.** 1) $\{2\}$; 2) $\varnothing$; 3) $\{3\}$; 4) $\{6\}$. **8.7.** 1) 380; 2) 9. **8.8.** 30.

8.9. 1) $\{5\}$; 2) $\{4\}$; 3) $x > 2$, $x \in N$. **8.10.** 1) 4; 2) 9; 3) 4. **8.12.** 1) 85; 2) 32. **8.13.** 1) 3; 2) 10; 3) 8; 4) 13. **8.14.** 220 кг. **8.15**. 1) 16; 2) 24. **8.16.** 1, 4, 6, 4, 1, всего 16. **9.1.** 1) 5; 2) 10; 3)15; 4) 55. **9.2.** 1) 30; 2) 4200; 3) 3990. **9.4.** 1) 8; 2) 6; 3) 9. **9.5.** 252. **9.6.** 1) 7; 2) 1; 3) $\varnothing$. **9.7.** 1) 153; 2) 816. **9.8.** 1) $9C_6^2 + 6C_9^2$; 2) $C_6^2 \cdot C_9^2$. **9.9.** 1) $(x-1)(x^2+x+4)$; 2) $(x+2)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$; 3) $(x+3)(x^2+3)$; 4) $(x+2)\times$ $\times(x-2)(x^2+1)$. **9.10.** 1) $\begin{cases} y^2 + x^2 \leqslant 16; \\ y \geqslant 4 - x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y^2 + x^2 \leqslant 16; \\ x^2 + y^2 \geqslant 4. \end{cases}$ **9.11.** 1) $\{\pm 3\}$; 2) $\{\pm\sqrt{5}\}$; 3) $\{-4; 8\}$; 4) $\{9\}$. **9.12.** 1) 6; 2) 10!. **9.13.** 24. **10.1.** 1) 210; 2) $\frac{1}{7}$; 3) $9\frac{1}{6}$; 4) 28. **10.2.** 6. **10.3.** 1) $\{5\}$; 2) $\varnothing$; 3) $\{6\}$; 4) $\{8\}$. **10.4.** 18 способов. **10.6.** 1) 1; 2) 5; 3) $\frac{1}{57}$; 4) 4. **10.7.** 1) C_{12}^2; 2) C_{12}^3. **10.8.** A_{10}^2. **10.9.** 4536. **10.10.** $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$. **10.11.** C_{11}^4. **10.12.** 36. **10.13**. 1) C_{25}^3; 2) C_{18}^3; 3) $18 \cdot 4 \cdot 3 = 216$. **10.14.** 1) $4\frac{6}{11}$ кг; 2) 45 кг; 3) 53%. **10.15.** 1) 7; 2) 9. **10.16.** 1) $4x^2 + 54x - 1$; 2) $12x^6 - 6x$; 3) $x^3 + 12x^2 + 4$; 4) $x^4 - 3x + 8$. **10.17.** 1) $\{4\}$; 2) $\{8\}$; 3) $\{9\}$; 4) $\{8\}$. **11.3.** 2^{11}. **11.5.** 5. **11.6.** 1)112 ; 2) –718; 3) 8; 4) 6. **11.7.** 1) $C_{10}^5 = 252$; 2) $C_9^4 = 126$. **11.8.** 1) $10x^3$; 2) $120x^4$; 3) $210x^{-2}$; 4) 252. **11.9.** $C_6^2 \cdot 36$. **11.12.** 1) 12 ч и 8 ч; 2) 45 ч. **11.14.** 1) $-\frac{7}{11}$; 2) –27. **11.16.** 1) $2n$; 2) $5n$; 3) n^2; 4) $(-1)^{n+1}$.

Глава III. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

12.1. 1) 2; 6; 10; 14; 18; 2) 1; 8; 15; 22; 29; 4) 8; 17; 26; 35; 44. **12.2.** 1) $\frac{1}{2}$; $2(\sqrt{2}-1)$; $1{,}5(\sqrt{3}-1)$; $\frac{4}{3}$; $\frac{5(\sqrt{5}-1)}{4}$; 2) $\sqrt{3}+1$; $\frac{4(\sqrt{6}+1)}{5}$; 3; $\frac{8(\sqrt{12}+1)}{11}$; $\frac{5(\sqrt{15}+1)}{7}$; 4) $\frac{3}{2}$; $3(\sqrt{3}-1)$; $\frac{9(\sqrt{5}-1)}{4}$; $2(\sqrt{7}-1)$; $\frac{15}{4}$. **12.3.** $a_5 = 25$, $a_9 = 81$, $a_{12} = 144$. **12.4.** 1) $a_n = 2n$; 2) $a_n = 2n + 7$; 5) $a_n = 2^{n-1}$; 6) $a_n = (-1)^n \cdot 2^{n-1}$; 8) $a_n = \frac{n}{n+1}$; 9) $a_n = \frac{2n+1}{2n}$; 10) $a_n = 3n - 1$. **12.6.** $a_6 = 18$; $a_9 = -108$; $a_{14} = 154$. **12.7.** Возрастающие – 3), 5); убывающие – 1), 2), 6). **12.8.** 1) Да, $a_{10} = 17$; 3) да, $a_8 = -104$; 4) да, $a_3 = 13$. **12.9.** Возрастающие – 1, 3, 5; убывающие – 4, 6. **12.11.** 1) Убывающая; 2) возрастающая; 3) возрастающая; 4) возрастающая. **12.14.** 1) 1; 3; 5; 7; 9; 11; 2) 2; 3; 5; 9; 17; 33. **12.17.** 1) – 36; 2) – 40; 3) 4. **12.18.** 1) Наибольший $c_1 = -1{,}5$; 2) наибольший и наименьший члены последовательности указать нельзя; 3) наибольший $c_1 = 6$; наименьший член последовательности указать нельзя; 4) наименьший $c_1 = 8$; наибольший указать нельзя. **12.19.** 1) $a_n = n^3 - 1$; 2) $a_n = 3^{n+1} - 1$; 3) $a_n = 2^{2n-1} - 1$; 4) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + (-1)^n}$. **12.21.** 17; 25; 32; 37; 47. **12.22.** 1) $a_n =$ $= 2(n-1) + 1$; 2) $a_n = 4n - 1$. **12.23.** 1) $a_1 = 7$, $a_{n+1} = 2a_n$; 2) $a_n = (-1)^{n+1} \cdot 3$; 4) $a_n = \frac{1}{n \cdot (n+1)}$. **12.25.** 1) $\{2; \pm 3\}$; 4) $\{\pm 3\}$. **12.26.** 1) $\{(3; 6); (-3; -6)\}$. **12.27.** 1) 2; 2) 3; 3) 2; 4) 1. **12.28.** 1) $3ac$; 2) $\frac{4}{ac}$; 4) $\frac{3}{2c^2}$. **12.29.** 5 км/ч и 4 км/ч. **12.30.** 1) –13 ; –8; –3; 2; 7; 2) 11; 16; 21; 26; 31. **12.31.** 1) 5;

2) −53; 3) 7; 4) −11. **13.1.** Арифметическая прогрессия − 1, 4, 5, 7. **13.3.** 1) $a_7 = 9$; 2) $a_5 = -2,5$; 4) $a_9 = 8,76$. **13.5.** 1) 18 см; 2) 800 м/мин. **13.9.** 1) с 8-го по 12-й; 2) с 19-го по 38-й. **13.10.** 1) 8039; 2) 6058. **13.11.** 1) Является, $n = 21$; 2) не является; 3) является, $n = 65$. **13.12.** 1) $c_1 = -37$; $d = 5$; 2) $c_1 = -72$; $d = 8$; 3) $c_1 = -21,8$; $d = 2,5$; 4) $c_1 = 32,2$; $d = -1,8$. **13.13.** 1) 17; 2) 5; 3) 8. **13.18.** 1) 7; 10; 13; 2) 3,75; 9,5; 15,25. **13.19.** 1) 3; 2) 3. **13.22.** 1) Да, $n = 37$; 2) нет; 3) да, $n = 297$. **13.23.** 1) с 3-го по 20-ый; 2) с 4-го по 14-ый; 3) с 4-го по 7-ой; 4) с 8-го по 11-ый. **13.24.** Нет. **13.25.** 25 членов. **13.26.** 25 членов. **13.28.** 21. **13.29.** −2; 2. **13.30.** 1) $(-\infty; -3)\cup(3; +\infty)$; 3) $(-\infty; -2]\cup[1; 3)\cup(3; +\infty)$. **13.32.** 1) $(-\infty; -1)\cup\{4\}$. **13.33.** 1) $\{-3\pm\sqrt{2}\}$; 2) $\{4; 8\}$. **13.34.** 1) $\{(1; 2), (2; 1)\}$; 2) $\{(1; -2), (-1; 2), \left(\frac{13}{\sqrt{138}}; \frac{5}{\sqrt{138}}\right), \left(\frac{-13}{\sqrt{138}}; \frac{-5}{\sqrt{138}}\right)\}$. **13.35.** 1) Да, 38; 2) нет, −375; 3) нет, 624; 4) да, 16. **13.36.** 0. **14.1.** 1) 12 870; 2) −4059; 3) 16 137; 4) 99. **14.2.** 1) 44 и 343; 2) 173 и 2220; 3) 193 и 2208; 4) 136,7 и 1229,3. **14.3.** 1) $n = 9$ и $S_9 = 135$; 2) $n = 11$ и $S_{11} = 484$; 3) $n = 21$ и $S_{21} = 264,6$; 4) $n = 10$ и $S_{10} = -190$. **14.4.** 1) 12 или 14; 2) 12; 3) 17; 4) 11. **14.5.** 1) 5; 2) −2; 4) −4. **14.7.** 1) 0,5; 4) 0,7. **14.8.** 1) 670; 3) −168; 4) −1209,3. **14.9.** 1) $n(n+1)$; 3) $\frac{3n(n+1)}{2}$; 4) $\frac{5n(n+1)}{2}$. **14.10.** 1) 0; 2) 0. **14.11.** 1) −950; 2) −1143; 4) 392. **14.12.** 1) $a_1 = 8$ и $n = 18$; 3) $a_1 = 5$ и $n = 26$; 4) $a_1 = 10$ и $n = 5$. **14.13.** 1) $a_n = 5n + 3$, $S_n = \frac{n}{2}\cdot(5n + 11)$; 3) $a_n = 18 - 2n$, $S_n = n\cdot(17 - n)$. **14.1 4.** 1) 10; 2) 12. **14.15.** 1) 2430; 2) 2475. **14.16.** 1) 1665 ; 2) 728. **14.17.** 1) 963; 2) 535. **14.18.** 1) 61 376; 2) 37 674. **14.19.** 1) 99 090; 2) 19 746. **14.20.** 657. **14.22.** 1) $\frac{23}{3}$, $\frac{253}{3}$; 2) 21, 399. **14.23.** 1) 44; 2) 32. **14.24.** 7. **14.25.** 407,5. **14.26.** 1) 45,1 м; 2) 127,5 м; 3) 64,7 м; 4) 247,1 м. **14.29.** 1) $\{-1\}$; 2) $\{\frac{1}{3}; -2\}$. **14.31.** 1) $\{(-2; -4), (4; 8)\}$; 2) $\{(-3; 1), (3; -1)\}$. **14.32.** 11 см и 8 см. **14.34.** 1) 0,5; 2) 0,5; 3) $\frac{1}{32}$; 4) −1024. **15.5.** 4) $-1 - \sqrt{2}$. **15.7.** 216. **15.8.** $9\sqrt{3}$. **15.9.** −2; −4; −8; 16; −32. **15.10.** $\sqrt{3}$; 3; $3\sqrt{3}$; 9; $9\sqrt{3}$ или $\sqrt{3}$; −3; $3\sqrt{3}$; −9; $9\sqrt{3}$. **15.12.** 1) (−3; −2); 2) (−1; 6). **15.13.** 1) $\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$; 2) $\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$. **15.14.** 1) 24°, 48°, 96°, 192°; 2) $\frac{180°}{13}$; $\frac{540°}{13}$; $\frac{1620°}{13}$. **15.15.** 1) 4%; 3) 116 640 тг. **15.16.** 1) $n = 4$; 2) нет; 3) $n = 6$; 4) нет. **15.1 7.** 1) $n = 13$; 2) $n = 9$. **15.18.** 1) 45 и 135; 2) 18, 9 и 4,5. **15.19.** 1) 6; 2) 24 или 12. **15.20.** 1) $x_2 = 2$; $x_3 = \frac{2}{3}$; $x_4 = \frac{2}{9}$; 2) $x_2 = 3$; $x_3 = 1,5$; $x_4 = 0,75$. **15.21.** 1) 121 тыс. тг; 2) 251 942,4 тг. **15.22.** 1) Во втором банке больше примерно на 341 тг; 2) 266 200 тг. **15.23.** 3, 9, 27, 81. **15.24.** 1) ±39; 2) ±4,8. **15.25.** 1) 2, 8, 32 или 32, 8, 2; 2) 1, 4, 16 или 16, 4, 1. **15.26.** 1, 3, 9 или 9, 3, 1. **15.27.** 0,2; 1; 5; 25. **15.28.** 3; 7; 1. **15.29.** 1) 27; 2) −2. **15.30.** 10, 10, 10. **15.31.** 1; $3\pm2\sqrt{2}$. **15.32.** 32; 16; 8; 0 или 2; 6; 18; 30. **15.33.** 1) 1; 2) $\pm2\sqrt{2}$; 3) 3,2. **15.35.** 1) 21 576; 2) 16 665. **15.36.** 1) 0,25; 2) −1,75. **15.38.** 1)1; 2) 0; 3) −17; 4) 6. **15.39.** 1) $b_3 = 4$; 2) $b_6 = -0,5$; 3) $b_7 = 0,25$; 4) $b_{10} = \frac{1}{32}$. **15.40.** 22. **16.1.** 1) $n = 10$, $S_{10} = 1023$; 2) $n = 5$, $S_5 = 155$; 3) $n = 5$, $S_5 = 363$. **16.3.** 3) $q = 2$, $n = 6$; 4) $q = 3$, $n = 5$. **16.5.** 3) $n = 4$, $b_n = -\frac{3}{40}$; 4) $n = 3$, $b_n = -1,17$. **16.6.** 3) $b_1 = 3$, $S_n = \frac{45}{8}$; 4) $b_1 = \frac{1}{9}$, $S_n = \frac{65}{72}$. **16.7.** 1) $b_1 = 1$, $b_n = 1024$;

2) $b_1 = 81$, $b_n = 1$. **16.8.** 1) $b_1 = 48$, $n = 5$; 3) $b_1 = 0{,}125$, $n = 6$; 4) $b_1 = 81$, $n = 6$. **16.9.** 1) 129 : 1; 2) 512 : 513. **16.10.** 1) 4%; 2) 121%. **16.11.** 1) 242 000 тг; 2) 18 818 тг. **16.12.** 1) 890; 4) 4953. **16.13.** 1) $7 \cdot (2 + \sqrt{2})$; 2) $13 \cdot (3 + \sqrt{3})$. **16.14.** 1) 192; 2) 468. **16.17.** 1) 2; 2) 4. **16.18.** 188 238 тг. **16.19.** 1) $b_1 = 1$ и $S_5 = 121$; 2) $b_1 = 2$ и $S_5 = 682$. **16.20.** 1) n ǀ 10; 2) n ǀ 11. **16.21.** 6,2. **16.22.** 10. **16.23.** –9. **16.24.** 1) $1\frac{1}{7}$; 2) 2. **16.25.** 1) 246 913 578; 2) 617 2 83 945; 3) 987 654 312. **16.26.** 1023. **16.27.** 1) 436,8. 2) 54; 3) 3; 9; 15; .... **16.28.** 85. **16.29.** 2. **16.30.** – 54; 18; –6; 2 или 2, –6; 18; –54. **16.31.** –1. **16.32.** 1) (–4; 11); 2) $(-\infty; -2) \cup (18; \infty)$. **16.33.** 1) $(2; +\infty)$; 2) $(-\infty; -1\frac{9}{16})$. **16.34.** 1) 16 900; 2) 10 100. **16.36.** 7,5; 10; 12,5; 15; 17,5; 20; 22,5. **16.37.** 1) $\frac{a_1^2(1 - q^{2n})}{1 - q^2}$; 2) $\frac{a_1^2(1 - q^{2n})}{1 - q^2} + \frac{2a_1(1 - q^n)}{1 - q} + n$. **16.38.** 1) $S_{11} = 2047$; 2) $S_5 = 121$. **16. 39.** 1) $q = -2$; 2) $q = -\frac{1}{3}$. **17.1.** 1) 1,5; 2) $-\frac{125}{4}$; 3) 7,2. **17.2.** 1) $-\frac{70}{3}$; 2) $\frac{64}{3}$. **17.3.** 1) $\frac{4}{7}$; 2) $\frac{16}{3}$; 3) $\frac{1000}{11}$. **17.5.** 1) 1,5; 2) $1{,}5 \cdot (\sqrt{3} + 1)$; 3) $2\sqrt{2} - 2$; 4) 0,3; 5) $\frac{9\sqrt{3}}{4}$; 6) $\frac{5(\sqrt{5} - 1)}{4}$. **17.7.** 1) 40,5; 2) 781,25. **17.8.** 6; 3; 1,5; ... **17.12.** $\frac{16}{3}$. **17.13.** $\frac{3 + \sqrt{3}}{2}$. **17.14.** 1) $\frac{2}{7}$; 2) 0,2. **17.15.** 0,125. **17.16.** $32(2 + \sqrt{2})$ см; 128 см^2. **17.17.** 48 см; $\frac{64\sqrt{3}}{3}$ см^2. **17.19.** 0,5. **17.20.** $\frac{4}{9}$. **17.21.** $\frac{256\pi}{9}$ см^2. **17.22.** 1) $\frac{c^2}{1 - q^2}$; 2) $\frac{c^2(1 + q)^2}{1 - q^4}$; 4) $\frac{c^2(1 + q)^2}{1 - q^4}$. **17.23.** $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$. **17.24.** 1; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{16}$; ... . **17.25.** 3,5. **17.26.** ±3.

17.27. $b_1 = 12$, $q = 0{,}5$. **17.28.** $b_1 = 2$, $q = 0{,}75$. **17.29.** 1) –9; 16; 2) –4; 6. **17.32.** 180°. **17.33.** 2100. **17.35.** $a = -3$, $b = 12$, $c = -12$ или $a = -1{,}08$, $b = -1{,}44$, $c = -0{,}48$.

17.37. $\frac{5}{11}$. **18.6.** 1) $n^2 \cdot (n + 1)$; 2) $n \cdot (n + 1)^2$. **18.8.** 1) $\frac{n}{2n + 1}$; 2) $\frac{n}{3n + 1}$. **18.21.** 1) $\frac{1}{28}$; 2) $\frac{1}{24}$; 3) $\frac{1}{55}$; 4) $\frac{1}{36}$. **18.23.** 62 50 0 тг. **18.24.** 63. **18.25.** 60. **18.26.** 2; 14; 98. **18.27.** 1) $\left\{-1; 0; \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$; 2) {–2,5; –2; 0,5; 1}. **18.28.** 1) $(-\infty; -1) \cup (-1; 1] \cup (2{,}5; 3]$; 2) $(-\infty; 0) \cup (0; 2] \cup (2\frac{1}{3}; 3]$.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Абылкасымова Алма Есимбековна
Кучер Татьяна Павловна
Корчевский Владимир Евгеньевич
Жумагулова Зауре Абдыкеновна

АЛГЕБРА

Часть 1

Учебник для 9 класса общеобразовательных школ

Редактор *С. Родионова*
Худож. редактор *А. Сланова*
Техн. редактор *И. Тарапунец*
Компьютерная верстка *Г. Алимшеевой*

Государственная лицензия № 0000001 выдана издательству
Министерством образования и науки Республики Казахстан 7 июля 2003 года

ИБ № 5817

Подписано в печать 21.05.19. Формат 70х100 $^{1}/_{16}$ Бумага офсетная.
Гарнитура "SchoolBook Kza". Печать офсетная. Усл.-печ. л. 14,84 + 0,32 форзац.
Усл. кр.-отт. 30,97. Уч.-изд. л. 8,70 + 0,54 форзац.
Тираж 65000 экз. Заказ №

Издательство "Мектеп", 050009, г. Алматы, пр. Абая, 143
Факс.: 8(727) 394-37-58, 394-42-30.
Тел.: 8(727) 394-41-76, 394-42-34.
E-mail: mektep@mail.ru
Web-site: www.mektep.kz