АЛГЕБРА

Часть 2

Учебник для 9 класса общеобразовательных школ

Утверждено Министерством образования и науки Республики Казахстан

9

Алматы "Мектеп" 2019

УДК 373.167.1
ББК 22.14я72
А45

Авторы:
**А.Е. Абылкасымова, Т.П. Кучер, В.Е. Корчевский,
З.А. Жумагулова**

Условные обозначения:

— определения, свойства, правила

— проблема, которая будет решена при овладении новыми знаниями

— вопросы для закрепления

— задания для самостоятельного изучения теоретического материала

— конец доказательства теоремы или свойства

— дополнительные материалы

A — обязательные упражнения для всех учащихся

B — упражнения средней сложности

C — упражнения повышенной сложности

— задачи на растворы, смеси и сплавы

— практико-ориентированные упражнения

— упражнения на использование электронных ресурсов

А45 **Алгебра:** Учебник для 9 кл. общеобразоват. шк.: Часть 2. / А.Е. Абылкасымова, Т.П. Кучер, В.Е. Корчевский, З.А. Жумагулова. — Алматы: Мектеп, 2019. — 152 с., ил.

ISBN 978—601—07—1080—1

А $\frac{4306020503-009}{404(05)-19}$ 22(1)—19

УДК 373.167.1
ББК 22.14я72

ISBN 978—601—07—1080—1

Глава IV. ТРИГОНОМЕТРИЯ

§19. ГРАДУСНАЯ И РАДИАННАЯ МЕРА УГЛОВ И ДУГ

Ключевые понятия

Радиан, градус, единичная окружность

Вы ознакомитесь с понятием *радианная мера угла*;

научитесь переводить градусы в радианы и радианы в градусы; отмечать числа 0; $\frac{\pi}{2}$; π; $\frac{3\pi}{2}$; 2π на единичной окружности.

ВЫ ЗНАЕТЕ

Угол — это геометрическая фигура, образованная двумя лучами, исходящими из одной точки (рис. 35).

Рис. 35

Угол также можно определить как фигуру, которая получается в результате поворота луча относительно его начала (рис. 36). Действительно, начальное и последнее положение луча дает ту же геометрическую фигуру, которую до этого назвали углом.

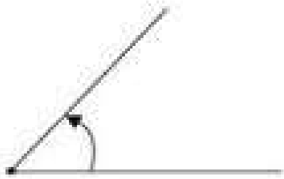


Рис. 36

Поворот одного и того же луча можно выполнить в двух противоположных направлениях. Обычно повороты против движения часовой стрелки считаются положительными, а повороты по направлению движения часовой стрелки — отрицательными (рис. 37).

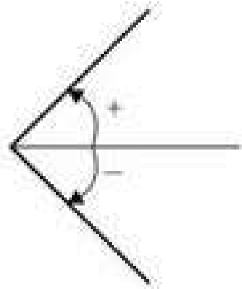


Рис. 37

Угол α считается *положительным*, если он образован поворотом луча против движения часовой стрелки, и *отрицательным*, если он образован поворотом луча по направлению движения часовой стрелки (рис. 37).

Выполним вокруг точки O поворот луча OA на угол α. Получим луч OB (рис. 38).

Этот же луч OB получим, если совершим поворот луча OA на угол α, да еще любое целое число поворотов в положительном или в отрицательном направлении (рис. 38).

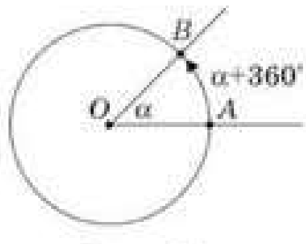


Рис. 38

Следовательно, углу $\angle AOB = \alpha$ соответствует бесчисленное множество углов как положительных, так и отрицательных, которые получаются по формуле $\beta = \alpha + 360°k$ (где k — любое целое число, т.е. $k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$).

ПРИМЕР

1. Если луч повернуть вокруг точки O в положительном направлении на угол 20°, то такому положению луча соответствуют положительные углы: 20°, 380°, 740°, ... или отрицательные углы: –340°, –700°, ...

Все полученные углы можно записать с помощью формулы $\beta = 20° + 360°k$ при $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ для положительных углов, при $k = -1, -2, -3, \ldots$ для отрицательных углов.

Если луч повернуть в отрицательном направлении на угол 40°, то такому положению луча соответствуют: отрицательные углы: –40°, –400°, –760°, ... или положительные углы: 320°, 680°, ...

Все полученные углы можно записать с помощью формулы $\beta = -40° + 360°k$ при $k = 1, 2, 3, \ldots$ для положительных углов, при $k = 0, -1, -2, -3, \ldots$ для отрицательных углов.

ВЫ ЗНАЕТЕ

Из курса геометрии вы знаете, что длина дуги окружности, как и величина угла, измеряется в градусах.

Угол, градусная мера которого равна $\frac{1}{360}$ части от полного угла, полученного в результате поворота вокруг точки O против часовой стрелки, равен *одному градусу*. Пишут 1°.

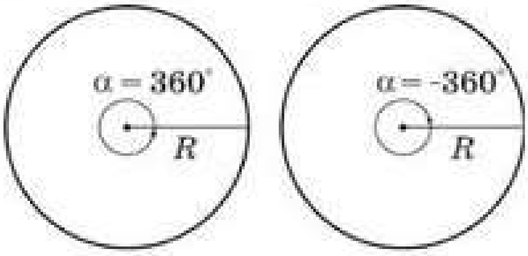


Рис. 39

Совершив полный поворот вокруг точки O против часовой стрелки, получим угол 360°, а совершив один полный поворот вокруг точки O по часовой стрелке, получим угол –360° (рис. 39).

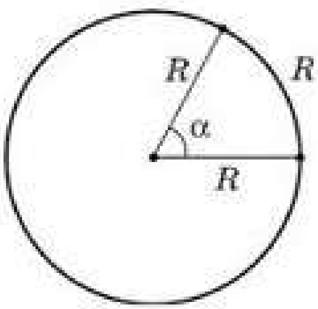


Рис. 40

Напомним, что 1′ (минута) равна $\frac{1}{60}$ от 1°, 1″ (секунда) равна $\frac{1}{60}$ от 1′.

В математике, физике, астрономии и других науках широко применяется другая мера углов — *радианная*.

Часто за единицу длины дуги окружности принимают длину дуги, равную длине радиуса этой окружности (рис. 40).

ПРИМЕР

2. Если сказано, что "величина дуги AB равна 2,3", то это означает, что построенная дуга окружности содержит 2,3 дуги, длиной, равной длине радиуса окружности (рис. 41).

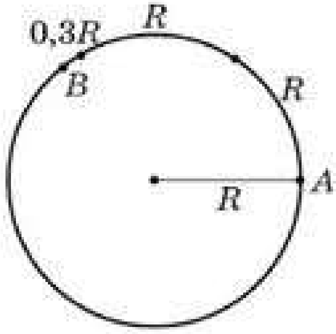


Рис. 41

Если в качестве единицы длины дуги взять длину радиуса R, то он содержится в окружности 2π раз, так как длина окружности вычисляется по формуле $C = 2\pi R$, где R длина радиуса окружности.

Такое измерение длины всей окружности или длины ее дуги называется *измерением в радианах.*

Таким образом, в качестве радианной меры длины дуги l или величины угла α берется отношение длины дуги окружности l, образующей угол α, к длине ее радиуса R (рис. 42). Тогда радианную меру угла α, соответствующего дуге окружности длиной l, можно записать так:

$\alpha = \dfrac{l}{R}$, где l – длина дуги окружности,
R — длина радиуса этой окружности,
α — величина угла, соответствующего дуге окружности.

Если $l = R$, тогда радианная мера угла будет равна 1. Такой угол называется *углом в 1 радиан* (рис. 43).

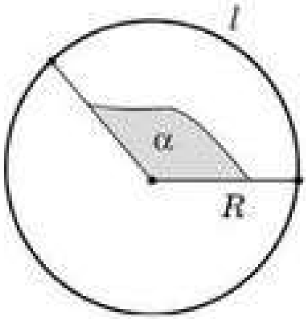


Рис. 42

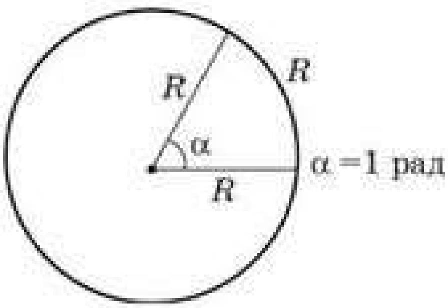


Рис. 43

Величина центрального угла, опирающегося на дугу, длиною, равной длине радиуса окружности, называется ***1 радианом*** .

1 радиан сокращенно записывают: 1 рад.

Радиан (от лат. *radius* — "луч", "радиус") — основная единица для измерения плоских углов в математике.

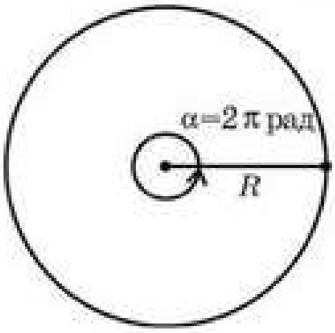


Рис. 44

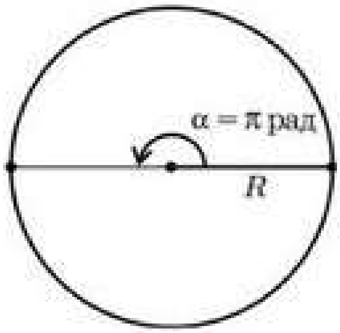


Рис. 45

Поскольку в окружности содержится 2π дуг, каждая длиной, равной длине радиуса, то полный угол и длина всей окружности равны по 2π рад (рис. 44).

Радианная мера полуокружности и развернутого угла равны по π рад (рис. 45).

Поскольку градусная мера дуги полуокружности равна 180°, а радианная — π рад, то:

1) градусная мера дуги и величина угла в один радиан равна $\frac{180}{\pi}$, т. е. $1_{\text{рад}} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17' 45''$;

2) радианная мера дуги и величина угла в один градус равна $\frac{\pi}{180}$, т. е. $1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ}$ рад $\approx 0{,}017$ рад.

Величину любого угла, заданного в градусной мере, можно перевести в радианную и, наоборот, величину угла, заданного в радианной мере, можно перевести в градусную меру.

Пусть α° — градусная мера некоторого угла, a — радианная мера того же угла; тогда справедлива следующая пропорция:

$$\alpha^\circ : 180^\circ = a : \pi.$$

Из этой пропорции выразим a рад и α°. Получим формулы:

$$a \text{ рад} = \frac{\pi\alpha^\circ}{180^\circ}, \qquad (1)$$

$$\alpha^\circ = \frac{a \cdot 180^\circ}{\pi}. \qquad (2)$$

С помощью формулы (1) переведите в радианы углы: 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 135°, 150°, 180°, 270°, 360°.

Ниже приведена таблица радианной и градусной мер некоторых наиболее часто встречающихся углов (табл. 5).

Таблица 5

α	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
a рад	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

Как, используя свойства углов и сторон прямоугольного треугольника, без транспортира построить на окружности точки, соответствующие углам 0°, 30°, 45°, 60°, 90° (рис. 46)?

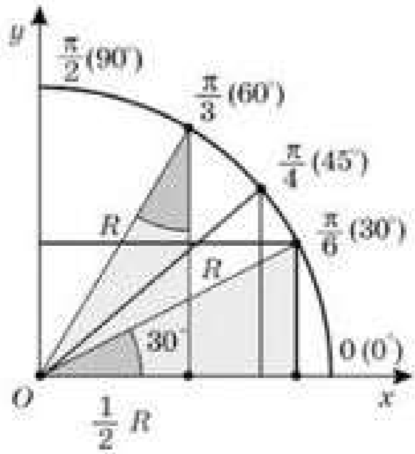


Рис. 46

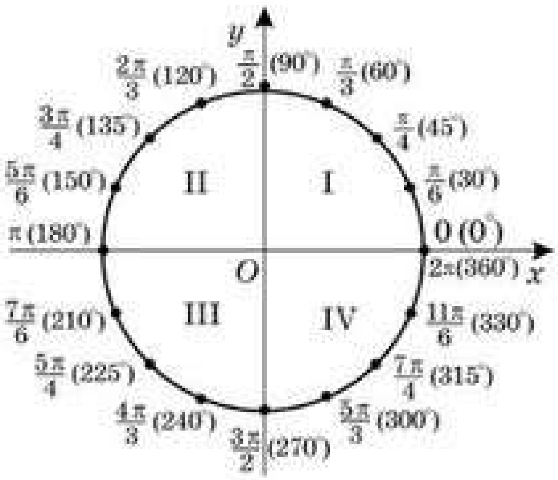


Рис. 47

На окружности (рис. 47) отмечены точки, соответствующие наиболее часто встречающимся углам (в градусах и радианах).

ПРИМЕР

3. Найдем приближенное значение в радианах величины угла 30°.

Решение. Поскольку $30° = \frac{\pi}{6}$ (рад), то $30° \approx \frac{3{,}14}{6}$ (рад) $\approx 0{,}52$ (рад), $30° \approx \frac{3{,}1416}{6}$ (рад) $\approx 0{,}5236$ (рад).

Ответ : ≈ 0,52 рад, ≈ 0,5236 рад и т. д.

ПРИМЕР

4. Найдем приближенное значение в градусах величины угла $a = 0{,}3$ рад.

Решение. Используя формулу $\alpha° = \frac{a \cdot 180°}{\pi}$, получим $\alpha° = \frac{180° \cdot 0{,}3}{\pi} \approx$ $\approx \frac{54°}{3{,}14} \approx 17°$.

Ответ : ≈17°.

Для быстрого перевода любых углов из градусной меры в радианную или из радианной меры в градусную меру во всех справочниках по математике имеются соответствующие таблицы.

ПРИМЕР

5. Найдем все числа (величины углов), которые соответствуют точке P_t числовой окружности (рис. 48).

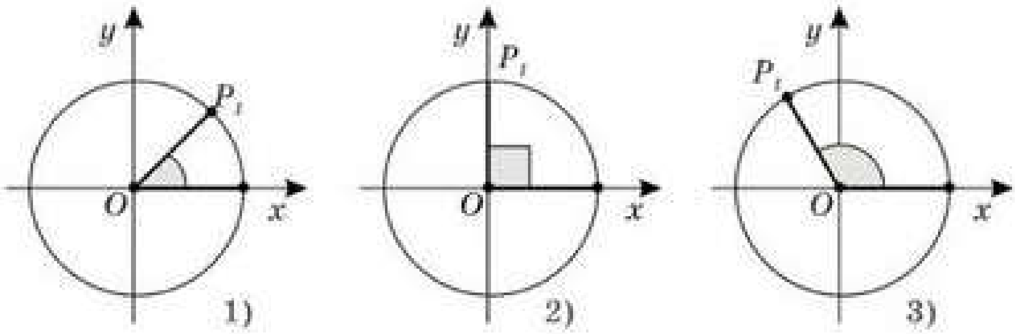


Рис. 48

Ответ : 1) $t = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, k — любое целое число;

2) $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, k — любое целое число;

3) $t = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, k — любое целое число.

Проверьте правильность приведенных ответов предыдущего примера.

?

1. Какие углы считаются положительными, какие — отрицательными?
2. В каких единицах измеряют углы?
3. Как перевести радианную меру угла в градусную и наоборот?

Упражнения

A

19.1. Запишите с помощью π радианную меру угла, если его градусная мера равна:

1) 30°; 2) 45°; 3) 60°; 4) 90°; 5) 150°; 6) 180°.

19.2. Запишите градусную меру угла, если его радианная мера равна:

1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{3\pi}{4}$; 3) $\frac{\pi}{3}$; 4) $\frac{2\pi}{3}$; 5) $\frac{5\pi}{6}$; 6) $\frac{\pi}{2}$.

19.3. 1) Запишите с помощью π в радианах углы равнобедренного прямоугольного треугольника;

2) запишите с помощью π в радианах углы равностороннего треугольника;

3) запишите с помощью π в радианах углы прямоугольника.

19.4. Выразите в градусах угол поворота:

1) 1 рад; 2) 0,4 рад; 3) 2,3 рад;
4) –4,2 рад; 5) –3,5 рад; 6) –10 рад.

19.5. Выразите в радианах заданные в градусах углы:

1) $24°$; 2) $240°$; 3) $154°$; 4) $1025°$; 5) $2040°$; 6) $2405°$.

19.6. Углом какой четверти является угол α, если:

1) $\alpha = \frac{5\pi}{3}$; 2) $\alpha = \frac{9\pi}{4}$; 3) $\alpha = \frac{16\pi}{5}$; 4) $\alpha = \frac{17\pi}{6}$?

B

19.7. 1) Радианная мера одного из углов ромба равна $0,2\pi$. Найдите радианные меры остальных углов ромба.
2) Радианная мера одного из углов ромба равна $0,7\pi$. Найдите радианные меры остальных углов ромба.

19.8. 1) Радианная мера одного из углов равнобокой трапеции равна $\frac{\pi}{6}$. Найдите радианные меры остальных углов трапеции.

2) Радианная мера одного из углов равнобокой трапеции равна $\frac{2\pi}{3}$. Найдите радианные меры остальных углов трапеции.

19.9. Найдите радианную меру угла, смежного углу, содержащего радиан:
1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{\pi}{6}$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{3\pi}{4}$; 5) $\frac{4\pi}{9}$; 6) $\frac{7\pi}{11}$.

19.10. Представьте в виде $\alpha = \alpha_0 + 2\pi n$ (где $0 \le \alpha_0 < 2\pi$ и n — целое число) угол α:

1) $\alpha = 2,5\pi$; 2) $\alpha = 14,3\pi$; 3) $\alpha = -2,2\pi$;

4) $\alpha = -19,7\pi$; 5) $\alpha = -\frac{13}{4}\pi$; 6) $\alpha = -\frac{23}{6}\pi$.

19.11. В какой четверти находится угол поворота α, если:

1) $\alpha = 3,7\pi$; 2) $\alpha = 4,2\pi$; 3) $\alpha = -3,2\pi$;

4) $\alpha = -9{,}8\,\pi$; 5) $\alpha = -\frac{14}{5}\pi$; 6) $\alpha = -\frac{25}{7}\,\pi$?

19.12. На единичной окружности отметьте точку, соответствующую углу α, равному:

1) $30°$; 2) $150°$; 3) $-150°$; 4) $-270°$; 5) $420°$; 6) $-300°$.

19.13. 1) Выразите в радианах внутренние углы равнобедренного треугольника, у которого внешний угол при основании треугольника равен $130°$.

2) Выразите в радианах внутренние углы равнобедренного треугольника, у которого внешний угол при вершине треугольника равен $140°$.

19.14. 1) Выразите в радианах внутренние углы равнобедренной трапеции, у которой внешний угол при большем основании равен $120°$.
2) Выразите в радианах внутренние углы равнобедренной трапеции, у которой внешний угол при большем основании равен $110°$.

C

19.15. Верно ли утверждение:

1) если $0 < \alpha < 90°$, то α — угол первой четверти;

2) если α — угол первой четверти, то $0 < \alpha < 90°$;

3) если $90° < \alpha < 180°$, то α — угол второй четверти;

4) если α — угол второй четверти, то $90° < \alpha < 180°$?

19.16. Угловая скорость колеса равна 23 рад/с. Найдите число полных оборотов колеса в минуту.

19.17. Какой угол (в градусной и радианной мерах) описывает минутная стрелка в течение:

1) 3 ч; 2) 6 ч; 3) 9 ч; 4) суток?

19.18. Постройте на единичной окружности точку:

1) $P_{\frac{\pi}{6}}$; 2) $P_{\frac{5\pi}{6}}$; 3) $P_{\frac{7\pi}{6}}$;

4) $P_{\frac{4\pi}{3}}$; 5) $P_{\frac{5\pi}{3}}$; 6) $P_{\frac{5\pi}{4}}$.

ПОВТОРИТЕ

19.19. Покажите штриховкой в координатной плоскости решение системы:

1) $\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 9, \\ y\geqslant x^2-3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 16, \\ y\leqslant x^2-4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 25, \\ y\geqslant x^2+2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2+y^2\geqslant 4, \\ y\leqslant x^2+9. \end{cases}$

19.20. Найдите область определения функции:

1) $y=\sqrt{x^2-3x-6}$; 2) $y=\sqrt{2x^2-5x-3}$;

3) $y=\sqrt{-x^2-6x+8}$; 4) $y=\sqrt{-2x^2+x+6}$.

19.21. Постройте график функции:

1) $y=(x-3)^2-2$; 2) $y=(x+1)^2-3$;

3) $y=3-(x-2)^2$; 4) $y=4-(x+2)^2$.

19.22. Найдите значения x, при которых функция $y=\dfrac{2x^2-1}{3x+1}$ принимает значения, равные 2; 3; 4,5.

19.23. PISA На диаграмме (рис. 49) указано количество гвоздик на клумбе.

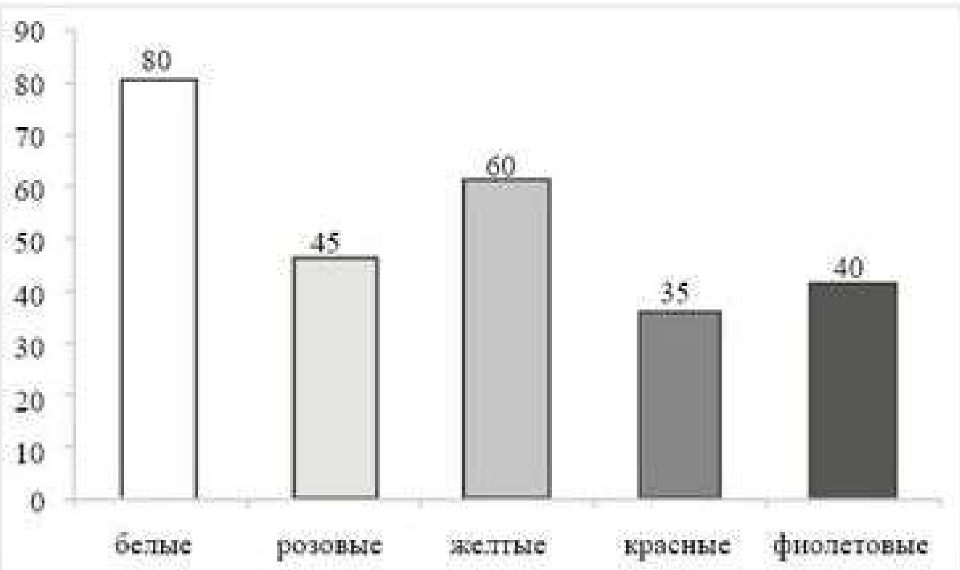


Рис. 49

Выберите верное утверждение, если A — количество желтых и розовых гвоздик, B — количество белых и красных гвоздик:

A) $A = B$; B) $A > 2B$; C) $A + 15 < B$;

D) $A > B$; E) $A + 10 = B$.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

19.24. Найдите значение выражения:

1) $2\sin 60° - 3\mathrm{tg}45°$; 2) $2\cos 60° - 3\mathrm{ctg}45°$;

3) $2\sin 45° - 3\mathrm{ctg}60°$; 4) $4\sin 30° - 3\mathrm{tg}30°$.

19.25. На координатной плоскости постройте точку $A(2; 6)$. Соедините точку $O(0; 0)$ с этой точкой. Найдите значение тангенса угла, образованного лучом OA с положительным направлением: 1) оси OX; 2) оси OY.

Опорные понятия для овладения новыми знаниями

Угол, виды углов, градусная и радианная меры углов, синус, косинус, тангенс и котангенс острого угла прямоугольного треугольника и их обозначения, абсцисса и ордината точки на координатной плоскости, круг, радиус круга, четверти координатной плоскости.

§ 20. СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС И КОТАНГЕНС ПРОИЗВОЛЬНОГО УГЛА. ЗНАЧЕНИЯ СИНУСА, КОСИНУСА, ТАНГЕНСА И КОТАНГЕНСА УГЛОВ

Ключевые понятия

Синус, косинус, тангенс и котангенс произвольного угла, функция, единичная окружность

Вы ознакомитесь с определениями тригонометрических функций;

узнаете о взаимосвязи координат точек ($\cos\alpha$; $\sin\alpha$) единичной окружности с тригонометрическими функциями.

До сих пор вы изучали алгебраические функции: $y = ax + b$; $y = ax^2 + bx + c$; $y = x^n$ и др., которые записывались с помощью алгебраических операций: сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень, извлечения квадратного корня. Но многие жизненные ситуации часто описываются и функциями другого типа, например, *тригонометрическими функциями*.

Для введения тригонометрических функций, кроме числовой прямой, нам потребуется *числовая окружность*.

Вспомните, что такое *числовая прямая*. Назовите координаты точек M, O, E, K (рис. 50).

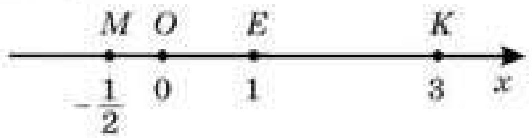


Рис. 50

ВЫ ЗНАЕТЕ

Вам известно, что числовая прямая задается прямой, с указанием на ней: 1) начальной точки O, 2) единичного отрезка и 3) положительного направления. Любое действительное число можно отметить точкой на этой прямой и обратно — каждой точке числовой прямой соответствует некоторое действительное число.

Также вам известно, что координата любой точки на числовой прямой выражается положительным или отрицательным числом в зависимости, где эта точка расположена относительно начальной точки O.

Числовой окружностью *называется окружность, на которой указана начальная точка, единичная дуга, положительное направление.*

Для построения числовой окружности надо:

1) построить окружность;

2) отметить начальную точку;

3) принять за единицу длину дуги, равную длине радиуса окружности;

4) принять направление против движения часовой стрелки за положительное, по часовой стрелке — за отрицательное (рис. 51).

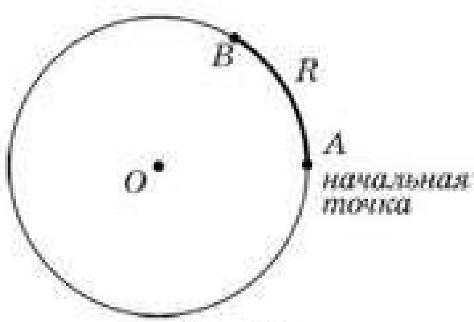


Рис. 51

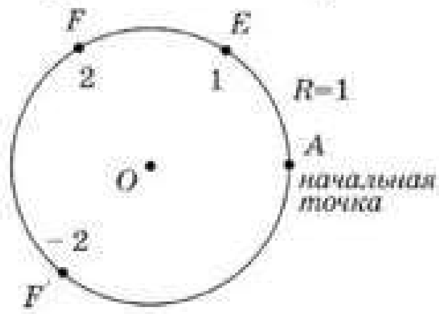


Рис. 52

По аналогии с числовой прямой, действительное число t можно отметить такой точкой B на числовой окружности, которая является концом дуги $AB = t$ рад. Это число называют *круговой координатой* точки B и пишут $B(t)$.

Нетрудно понять, что таким путем всякому действительному числу будет поставлена в соответствие определенная точка окружности. Так, числу 0 будет соответствовать начальная точка A, числу 1 будет соответствовать точка E — конец дуги $AE = 1$ рад, числу 2 будет соответствовать точка F — конец дуги $AF = 2$ рад, числу 6,5 будет соответствовать точка, служащая концом дуги в 6,5 рад (при условии, что началом дуги является A). Всякому отрицательному числу будет соответствовать точка, служащая концом отрицательной дуги. Например, числу $z = -2$ будет соответствовать точка F' — конец отрицательной дуги $AF' = -2$ рад (рис. 52).

1. В чем сходство и в чем отличие числовой прямой и числовой окружности?
2. Каждому ли действительному числу соответствует единственная точка на числовой прямой (на числовой окружности)?
3. Каждой ли точке числовой прямой (числовой окружности) соответствует единственное действительное число?

Каждой точке В числовой окружности соответствует бесконечное множество действительных чисел.

В курсе геометрии были определены синус, косинус и тангенс острого угла α.

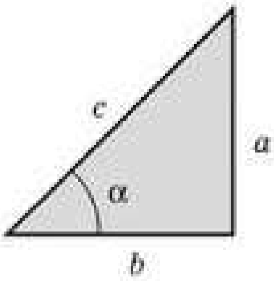


Рис. 53

Вспомните, что называется $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, где α острый угол прямоугольного треугольника (рис. 53).

$$\sin\alpha = \frac{a}{c},\ \cos\alpha = \frac{b}{c},\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b},\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}.$$

Благодаря работам знаменитого арабского ученого Насир эд-Дина тригонометрия становится самостоятельной научной дисциплиной. Насир эд-Дин рассмотрел все случаи решения плоских и сферических треугольников.

Слово "тригонометрия" составлено из двух греческих слов: *тригонон* — "треугольник" и *метрео* — "измеряю".


Іайнд эä-Äні
(1201—1274)

Введем определения для угла α произвольной величины. Для этого сначала рассмотрим числовую окружность, построенную в системе координат.

В прямоугольной системе координат построим окружность с центром в начале координат (рис. 54).

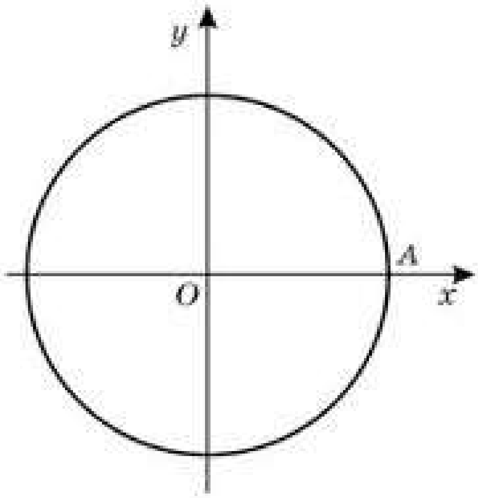


Рис. 54

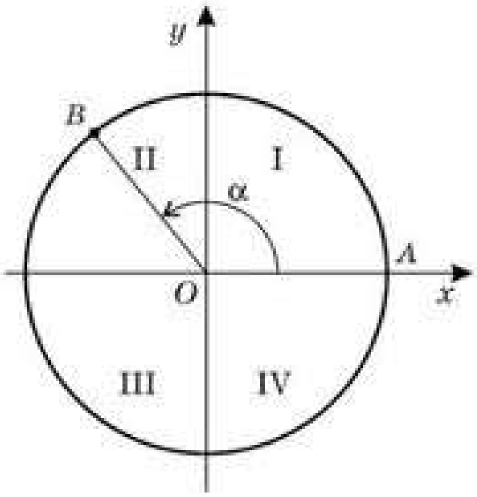


Рис. 55

Например, если конец подвижного радиуса OB — точка B лежит во II четверти, то угол α заканчивается во II четверти (рис. 55).

Углом какой четверти является угол α, β, γ, ϕ (рис. 56)?

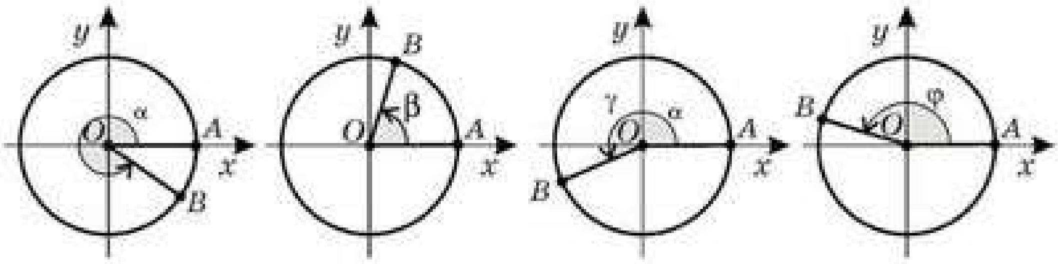


Рис. 56

Углы, кратные $\frac{\pi}{2}$, не заканчиваются ни в какой четверти.

Пусть при повороте вокруг точки O на угол α начальный радиус OA займет положение радиуса OB (рис. 57).

Используя известные определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса острого угла для прямоугольного треугольника OBC (рис. 57), сформулируем определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса для любого угла следующим образом.

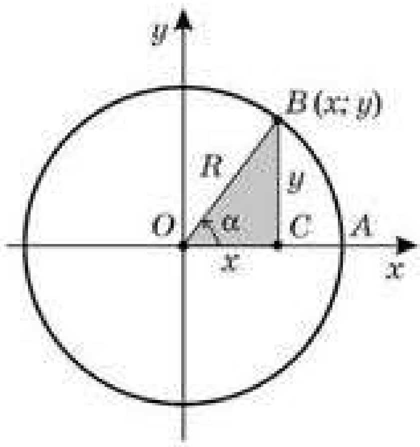


Рис. 57

Синусом угла α *называется отношение ординаты точки B, лежащей на окружности, к ее радиусу.*

Косинусом угла *α называется отношение абсциссы точки B, лежащей на окружности, к ее радиусу.*

Тангенсом угла *α называется отношение ординаты точки B, лежащей на окружности, к ее абсциссе.*

Котангенсом угла *α называется отношение абсциссы точки B, лежащей на окружности, к ее ординате.*

Если координаты точки B обозначим буквами x и y, а длину радиуса окружности буквой R, то получим равенства:

$$\sin\alpha = \frac{y}{R};\ \cos\alpha = \frac{x}{R};\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x};\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}.$$

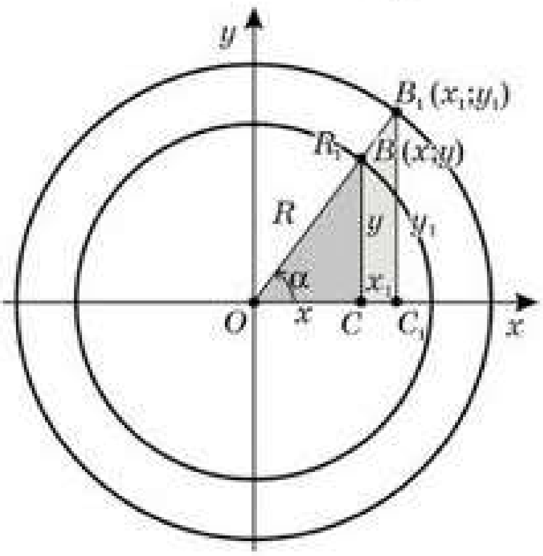


Рис. 58

Для данного угла α отношения: $\frac{y}{R}, \frac{x}{R}, \frac{x}{y}, \frac{y}{x}$ постоянные, поэтому их величина не зависи т от длины радиуса. Действительно, пусть B_1 является любой точкой, лежащей на подвижном радиусе OB или на его продолжении (рис. 58).

Тогда из подобия треугольников OBC и $O_1B_1C_1$ получим:

$$\frac{y}{R} = \frac{y_1}{R_1};\ \frac{x}{R} = \frac{x_1}{R_1};\ \frac{y}{x} = \frac{y_1}{x_1};\ \frac{x}{y} = \frac{x_1}{y_1},$$

где $R_1 = OB_1$, а x_1 и y_1 — коордін аты точки B_1.

Поскольку $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ не зависят от длины радиуса, то рассматривают окружность, длина радиуса которого равна 1. Такую окружность называют *единичной окружностью.*

Таким образом, значения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ зависят только от величины угла α. При этом каждому углу α соответствует единственное значение синуса , косинуса, тангенса (за исключением углов $\frac{\pi}{2} + \pi k$, где $k \in Z$) и котангенса (за исключением углов πk, где $k \in Z$) этого угла.

Зависимости синуса, косинуса, тангенса и котангенса от величины угла α *называются* ***тригонометрическими функциями*** .

Обозначение тригонометрических функций: $y = \sin\alpha$, $y = \cos\alpha$, $y = \operatorname{tg}\alpha$, $y = \operatorname{ctg}\alpha$.

Тригонометрические функции можно рассматривать как функции, зависящие от числа, так как угол наряду с градусной мерой имеет и радианную меру. Следовательно, тригонометрические функции в α радиан можно рассматривать как тригонометрические функции, зависящие от числа a.

ПРИМЕР

1. Найдем тригонометрические функции угла α, конечная сторона которого проходит через точку окружности $B\ (3;-2)$ (рис. 59).

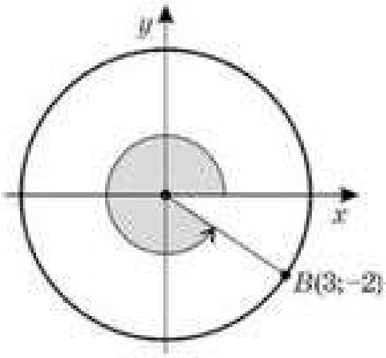


Рис. 59

Решение. $x = 3$; $y = -2$, поэтому

$$R = \sqrt{9+4} = \sqrt{13};\quad \sin\alpha = \frac{y}{R} = -\frac{2\sqrt{13}}{13};$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{R} = \frac{3\sqrt{13}}{13};\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} = -\frac{2}{3};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y} = -\frac{3}{2} = -1{,}5.$$

Ответ: $\sin\alpha = -\frac{2\sqrt{13}}{13}$; $\cos\alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$; $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{2}{3}$; $\operatorname{ctg}\alpha = -1{,}5$.

ПРИМЕР

2. Найдем значения тригонометрических функций углов: 1) 0°; 2) 180°; 3) 270° (рис. 60).

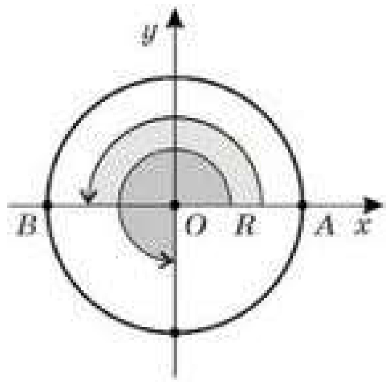


Рис. 60

Решение.

1) Если $\alpha = 0$, то, следовательно, $\sin 0° = 0$, $\cos 0° = 1$, $\operatorname{tg}0° = \frac{0}{R} = 0$, $\operatorname{ctg}0° = \frac{R}{0}$ — не существует.

2) Если $\alpha = 180°$, $x = -R$, $y = 0$, то, следовательно, $|OA| = |OB| = R$ и $\sin 180° = \frac{0}{R} = 0$, $\cos 180° = \frac{-R}{R} = -1$; $\operatorname{tg} 180° = \frac{y}{x} = \frac{0}{R} = 0$, $\operatorname{ctg}180° = \frac{x}{y} = \frac{R}{0}$ — не существует.

3) Если $\alpha = 270°$, то конечная сторона угла совпадает с отрицательным направлением оси Oy, поэтому $x = 0$ и $y = -R$.

Ответ: 1) $\sin 0° = 0$, $\cos 0° = 1$, $\operatorname{tg}0° = 0$, $\operatorname{ctg}0°$ — не существует.
2) $\sin 180° = 0$, $\cos 180° = -1$, $\operatorname{tg}180° = 0$; $\operatorname{ctg} 180°$ — не существует;
3) $\sin 270° = -1$; $\cos 270° = 0$, $\operatorname{ctg}270° = 0$, $\operatorname{tg}270°$ — не существует.

В таблице 6 и на рисунке 61 записаны значения тригонометрических функций угла α, заданного в радианах (градусах), которые часто применяются при решении задач.

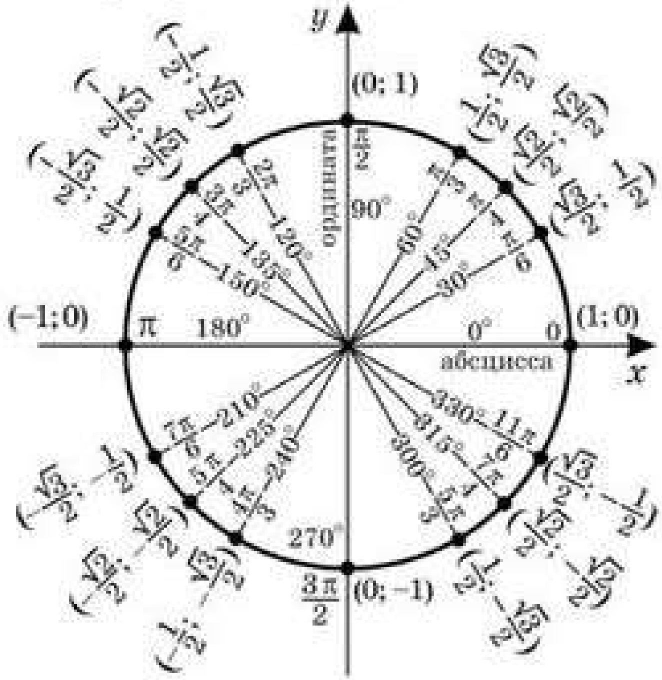


Рис. 61

Таблица 6

Угол α / Функция	Значение угла в радианах (градусах)									
	0 $(0°)$	$\frac{\pi}{6}$ $(30°)$	$\frac{\pi}{4}$ $(45°)$	$\frac{\pi}{3}$ $(60°)$	$\frac{\pi}{2}$ $(90°)$	$\frac{2\pi}{3}$ $(120°)$	$\frac{5\pi}{6}$ $(150°)$	π $(180°)$	$\frac{3\pi}{2}$ $(270°)$	2π $(360°)$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	-1
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	не сущ.	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	не сущ.	0
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	не сущ.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{3}$	не сущ.	0	не сущ.

ПРИМЕР

3. Вычислим значение выражения: $2\cos 0° + 3\sin 90° + 4\mathrm{tg}\, 45°$.

Решение. Используя составленную таблицу 6, получим:

$$2\cos 0° + 3\sin 90° + 4\mathrm{tg}\, 45° = 2\cdot 1 + 3\cdot 1 + 4\cdot 1 = 9.$$

Ответ: 9.

1. Какие функции называются *тригонометрическими функциями* ?
2. Что такое *числовая окружность* ?
3. Что такое *синус, косинус, тангенс* и *котангенс произвольного угла* ?

Упражнения

А

20.1. На единичной окружности отметьте точку, соответствующую углу α, равному: $45°$, $-60°$, $90°$ и вычислите при помощи измерений синус и косинус этих углов.

20.2. Постройте угол α, если:

1) $\sin\alpha = \frac{1}{4}$; 2) $\sin\alpha = \frac{2}{3}$;

3) $\cos\alpha = \frac{3}{4}$; 4) $\cos\alpha = \frac{3}{5}$;

5) $\mathrm{tg}\,\alpha = 2$; 6) $\mathrm{tg}\,\alpha = 3$.

20.3. Начертите единичную окружность с центром в начале координат, поверните начальный радиус на угол α, где α равна:

1) $35°$; 2) $75°$; 3) $135°$; 4) $170°$; 5) $-80°$; 6) $-130°$.

20.4. Найдите значение выражения:

1) $2\sin30° + 2\cos45°$; 2) $3\sin60° - 2\cos60°$;

3) $\sin30° - 3\mathrm{tg}45°$; 4) $\sin45° + 2\mathrm{ctg}60°$.

20.5. Чему равно значение выражения:

1) $\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{3} + 2\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{6}$; 2) $\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4} - 3\mathrm{ctg}\,\frac{5\pi}{6}$;

3) $3\cos\frac{\pi}{3} + 2\sin\frac{\pi}{4}$; 4) $-\sin\frac{\pi}{2} + 2\mathrm{ctg}\,\frac{3\pi}{4}$?

20.6. Найдите несколько значений α, при которых:

1) $\sin\alpha = 0$; 2) $\sin\alpha = 0{,}5$;

3) $\cos\alpha = -1$; 4) $\cos\alpha = 1$;

5) $\cos\alpha = 0$; 6) $\sin\alpha = -1$.

20.7. Найдите несколько значений β, при которых:

1) $\mathrm{tg}\,\beta = 0$; 2) $\mathrm{tg}\,\beta = 1$;

3) $\mathrm{tg}\,\beta = -1$; 4) $\mathrm{ctg}\,\beta = 1$;

5) $\mathrm{ctg}\,\beta = -1$; 6) $\mathrm{ctg}\,\beta = 0$.

20.8. Найдите значение выражения:

1) $2\cos 0° + 3\mathrm{tg}45° - \sin 120°$;

2) $\sin 270° + 3\mathrm{tg}180°$;

3) $\cos 90° - 3\sin 360° + 2\mathrm{tg}180°$.

20.9. Укажите несколько значений угла β, при которых не имеет смысла выражение:

1) $\mathrm{tg}\,\beta$; 2) $\mathrm{ctg}\,\beta$; 3) $\mathrm{ctg}\,2\beta$; 4) $\mathrm{tg}\,2\beta$.

20.10. Существует ли угол α, при котором выполняется равенство:

1) $\sin\alpha = 1{,}22$; 2) $\sin\alpha = -3{,}2$;

3) $\cos\alpha = 2{,}25$; 4) $\cos\alpha = -1{,}2$?

20.11. Существует ли угол α, при котором выполняется равенство:

1) $\sin\alpha = 1 - \sqrt{3}$; 2) $\sin\alpha = \sqrt{5} - 1$;

3) $\cos\alpha = \sqrt{3} - 1$; 4) $\cos\alpha = \sqrt{7} - 1$?

B

20.12. Найдите значение выражения:

1) $\sin\frac{\pi}{6}\cdot\left(\mathrm{tg}\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{3}\right)$;

2) $\mathrm{tg}\frac{\pi}{6}\cdot\left(\sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{6}\right)$;

3) $\cos\frac{\pi}{4}\left(\mathrm{ctg}\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\right)$.

20.13. Вычислите значение выражения:

1) $-\sin\frac{\pi}{2}\cdot\left(2\mathrm{tg}\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{6}\right)$;

2) $\mathrm{ctg}\frac{\pi}{6}\cdot\left(\sin\frac{\pi}{3} - 3\cos\frac{\pi}{3}\right)$;

3) $\cos\frac{\pi}{4}\cdot\left(2\mathrm{ctg}\frac{\pi}{4} - 3\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

20.14. Выразите значение суммы чисел $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}$ через:

1) синусы острых углов; 2) косинусы острых углов.

20.15. Выразите значение алгебраической суммы чисел $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$ через:

1) синусы острых углов; 2) косинусы острых углов.

20.16. Выразите значение алгебраической суммы чисел $\frac{\sqrt{3}}{3} - 1$ через:

1) тангенсы острых углов; 2) котангенсы острых углов.

20.17. Найдите значение выражения $\sin\alpha + \cos\alpha$, если:

1) $\alpha = 0°$; 2) $\alpha = 120°$; 3) $\alpha = 30°$; 4) $\alpha = 135°$.

20.18. Найдите значение выражения:

1) $\dfrac{(-\sin 30° - \cos 30°)^2}{3\cos 45° \sin 45° - 6\,\mathrm{tg}\,30°\,\mathrm{ctg}\,60°}$; 2) $\dfrac{2\,\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{3}\cos\pi - 1}{\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{3}\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}}$;

3) $\dfrac{\sqrt{(\cos 60° - \sin 60°)^2}}{\sin 30° \cdot (1 - \mathrm{tg}\,60°)}$; 4) $\dfrac{\sqrt{\left(\mathrm{tg}\frac{\pi}{6} - \mathrm{tg}\frac{\pi}{3}\right)^2}}{\left(\mathrm{ctg}\frac{\pi}{6} - \mathrm{ctg}\frac{\pi}{3}\right)^2}$.

20.19. Найдите несколько значений α, при которых равно нулю значение выражения:

1) $\cos\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\alpha$; 2) $\sin\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha$; 3) $\sin\alpha + \cos\alpha$.

20.20. Проверьте, является ли последовательность $\dfrac{1}{\mathrm{tg}\frac{\pi}{6}}, \dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{3}}, \dfrac{1}{\mathrm{ctg}\frac{\pi}{6}}$ арифметической прогрессией .

20.21. Найдите четыре значения α, при которых:

1) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

20.22. Найдите четыре значения α, при которых:

1) $\cos\alpha = -0{,}5$; 2) $\mathrm{tg}\,\alpha = \sqrt{3}$; 3) $\mathrm{ctg}\,\alpha = -\sqrt{3}$.

20.23. Найдите значение выражения:

1) $2 \cdot \mathrm{tg}30°\mathrm{ctg}30°\cos 30° \sin 30° + \sqrt{3} \cdot \mathrm{tg}\,60°$;

2) $\dfrac{4 \cdot \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{2} + 2\cos\pi} + 2$.

20.24. Чему равно значение выражения:

1) $\sqrt{\frac{3}{4} + 2\cos^2 30°} + \sqrt{\frac{5}{4} - 3\,\mathrm{tg}^2\,30°}$; 2) $\sqrt{\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{3} - 2\frac{3}{4} - 2\sin\frac{3\pi}{4}}$?

20.25. Известно, что $\sin\alpha = 0,5$:

1) верно ли, что $\alpha = 30°$?
2) Укажите несколько углов, синус которых равен 0,5;
3) укажите в общем виде все углы, синус которых равен 0,5.

20.26. Известно, что $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$:

1) верно ли, что $\alpha = 45°$?
2) Укажите несколько углов, косинус которых равен $\frac{\sqrt{2}}{2}$;
3) укажите в общем виде все углы, косинус которых равен $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

20.27. Возможно ли равенство:

1) $\sin\alpha + 2\cos\alpha = 3$;
2) $3\sin\alpha - 2\cos\alpha = 5$;
3) $\sin\alpha - 7\cos\alpha = -8$;
4) $\sin\alpha + 2\cos\alpha = 1$?

20.28. Сравните значения выражений $A = 2\cos\beta$ и $B = 3\operatorname{tg}\beta$, если:
1) $\beta = 30°$; 2) $\beta = 45°$; 3) $\beta = 60°$.

C

20.29. В какой четверти находится угол α, если:
1) $\sin\alpha + \cos\alpha = -1,3$; 2) $\sin\alpha - \cos\alpha = 1,3$?

20.30. Имеет ли смысл выражение:

1) $\sqrt{\sin 150°}$; 2) $\sqrt{-\cos 180°}$; 3) $\sqrt{\cos 120°}$; 4) $\sqrt{\operatorname{tg} 180°}$?

20.31. Сравните значения выражений $A = -3\sin\beta$ и $B = -2\cos\beta$, если:
1) $\beta = 30°$; 2) $\beta = 45°$; 3) $\beta = 60°$.

ПОДГОТОВЬТЕ СООБЩЕНИЕ ОБ УЧЕНЫХ МАТЕМАТИКИ И АСТРОНОМИИ

20.32. 1) В середине XVIII в., благодаря швейцарскому математику Леонарду Эйлеру, тригонометрия приняла современный вид. Ученый разработал ее как науку о тригонометрических функциях, ввел записи $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, стороны ΔABC обозначил через a, b, c и углы, противоположные этим сторонам, соответственно через A, B, C.
Л. Эйлер рассматривал тригонометрические функции аргумента x — радианной меры соответствующего угла, давая этому аргументу различные значения: положительные, отрицательные и даже комплексные. Он же ввел и обратные тригонометрические функции.

Ëãiiàðä Ýéëåð
(1707—1783)

Региомонтан
(1436—1476)

2) Выдающийся немецкий астроном XV века Региомонтан составил таблицу синусов плоских углов с точностью до седьмой значащей цифры.

ПОВТОРИТЕ

20.33. Найдите значение суммы и значение произведения корней уравнения:

1) $3x^2 - 5x - 27 = 0$; 2) $5x^2 - 7x - 1{,}2 = 0$;

3) $3{,}5x^2 + 7{,}6x + 1 = 0$.

20.34. Решите неравенство и укажите наибольшее целое решение неравенства:

1) $\dfrac{x^2+4x-5}{(x-3)^2} < 0$; 2) $\dfrac{x^2-4x-5}{(x+2)^4} < 0$;

3) $\dfrac{7}{x^2-5x+6} + 1 < \dfrac{9}{3-x}$.

20.35. Выясните, является ли функция четной или нечетной и постройте ее график.

1) $y = x^2 + 6|x| - 2$; 2) $y = -2x^2 + 4|x| + 1$;

3) $y = \dfrac{2}{1+x^2}$; 4) $y = \dfrac{x^2-1}{x}$.

20.36. Найдите все целые положительные значения переменной x, удовлетворяющие двойному неравенству:

1) $1 < \dfrac{x+2}{5-x} < 6$; 2) $-1 < \dfrac{x-8}{x+1} < 3$.

20.37. На координатной плоскости изобразите множество решений системы неравенств:

1) $\begin{cases} 2 \leqslant x \leqslant 6, \\ -1 \leqslant y \leqslant 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 3, \\ -1 \leqslant y \leqslant 4; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 4, \\ y \leqslant 3 - x; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} -2 \leqslant x \leqslant 2, \\ y \leqslant x^2 - 1. \end{cases}$

20.38. Фермер и его сын выполнили некоторую работу за 6 часов. За сколько часов каждый из них мог бы выполнить эту работу, если сын затратил на нее на 5 ч больше, чем отец?

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

20.39. Найдите множество значений функции:

1) $y = x^2 - 4x + 1$; 2) $y = -x^2 + 2x + 3$;

3) $y = \sqrt{x+1} - 1$; 4) $y = 2 - \sqrt{1-x}$.

20.40. На одной координатной плоскости постройте график функции и найдите координаты их точек пересечения (приближенно):

1) $y = x^2 - 2x$ и $y = x - 2$;

2) $y = -x^2 - 4x$ и $y = x^2 - 2$.

Опорные понятия для овладения новыми знаниями

Числовая окружность, координатная четверть, тригонометрические функции числового аргумента, общий вид угла, область определения и область значений тригонометрических функций, общий вид записи значений угла, входящего в область определения каждой тригонометрической функции, числовые значения тригонометрических функций часто встречающихся углов.

§ 21. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ИХ СВОЙСТВА

Ключевые понятия

Область определения и множество значений, четность (нечетность), периодичность, монотонность и промежутки знакопостоянства

? Вы научитесь находить с помощью единичной окружности область определения и множество значений тригонометрических функций; объяснять с помощью единичной окружности четность (нечетность), периодичность, монотонность и промежутки знакопостоянства тригонометрических функций.

Области определения и множество значений тригонометрических функций

Поскольку $\sin\alpha$ — это ордината точки единичной окружности, а $\cos\alpha$ — это абсцисса точки единичной окружности, то при любых значениях аргумента α функции $y = \sin\alpha$, $y = \cos\alpha$ имеют определенные значения. Следовательно, области определения этих функций будут числовые промежутки $(-\infty; +\infty)$.

Области определения функций $y = \sin\alpha$, $y = \cos\alpha$ – $(-\infty; +\infty)$.

Причем, какое бы значение α не принимало, $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ не превышает 1 и не меньше –1, потому что и абсцисса, и ордината точки B — конца подвижного радиуса OB по модулю не больше длины этого радиуса, т. е. 1.

Таким образом, значения $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ принадлежат числовому отрезку $[-1; 1]$.

Множество значений функций $y = \sin\alpha$, $y = \cos\alpha$ – $[-1; 1]$.

Выше показано, что значения $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ выражаются отношением координат точки B.

В этих отношениях, если абсцисса точки B равна нулю, то $\operatorname{tg}\alpha$ не имеет значения, а если ордината точки B равна нулю, то $\operatorname{ctg}\alpha$ не имеет значения (потому что знаменатель дроби не может быть равным нулю).

Следовательно, значения α, равные $\pm\frac{\pi}{2}; \pm\frac{3\pi}{2}$ и т. д., не входят в область определения $\operatorname{tg}\alpha$; а значения α, равные $0, \pm\pi; \pm2\pi$ и т. д., не входят в область определения $\operatorname{ctg}\alpha$.

Объединив эти углы получим, что:

Области определения функций:

— $y = \operatorname{tg}\alpha$ *все значения* α, *за исключением* $\frac{\pi}{2} + \pi k$ (*где* k — *любое целое число*);

— $y = \operatorname{ctg}\alpha$ *все значения* α, *за исключением* πk (*где* k — *любое целое число*).

Вычислите значение дроби $\frac{1}{n}$ при n, равном:

1) 0,1; 0,01; 0, 00001; 0,000000001. Что происходит со значением дроби с числителем 1 и положительным знаменателем при его уменьшении до 0?

2) –0,1; –0,01; –0, 00001; –0,000000001. Что происходит со значением дроби с числителем 1 и отрицательным знаменателем при увеличении знаменателя до 0?

Поскольку $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ и $|\sin\alpha| \le 1$, $|\cos\alpha| \le 1$, то с уменьшением знаменателя до нуля значение дроби изменяется до бесконечности: увеличивается до $+\infty$, если знаменатель положительное число и уменьшается до $-\infty$, если знаменатель отрицательное число.

Множество значений функций $y = \operatorname{tg}\alpha$, $y = \operatorname{ctg}\alpha$ – $(-\infty; +\infty)$.

Промежутки знакопостоянства тригонометрических функций

Из определения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ следует, что знаки ("+" и "–") каждой тригонометрической функции $y = \sin\alpha$, $y = \cos\alpha$, $y = \operatorname{tg}\alpha$, $y = \operatorname{ctg}\alpha$ зависят от знаков координат конца подвижного радиуса, т. е. от того, в какой координатной четверти лежит этот конец.

Найдите знаки абсциссы и ординаты точек: *A, B, C, P, K* единичной окружности (рис. 62).

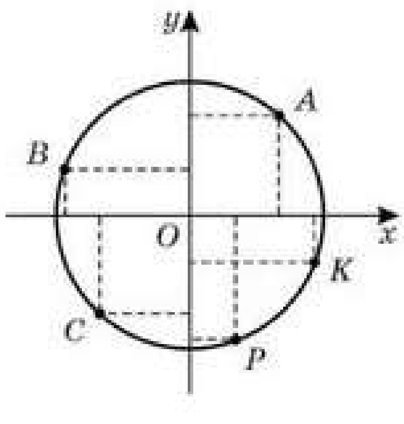


Рис. 62

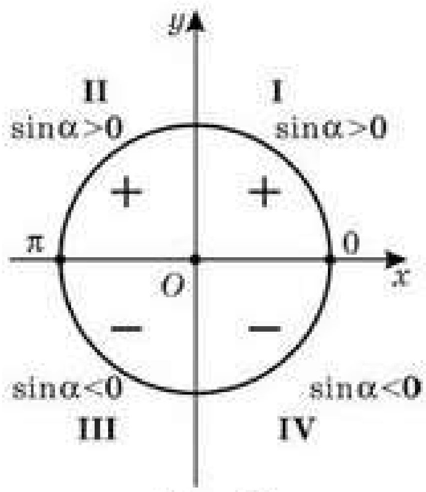


Рис. 63

Когда точка *B* находится на верхней полуокружности, ее ордината *y* положительна, а при переходе точки *B* на нижнюю полуокружность ее ордината *y* становится отрицательной. Поскольку знак синуса угла по определению зависит от знака ординаты *y*, то получим, что в I и II четверти $\sin\alpha > 0$, а в III и IV четверти $\sin\alpha < 0$ (рис. 63).

Из определения косинуса получим, что знак косинуса угла зависит от знака абсциссы *x* точки единичной окружности. Когда точка *B* находится на правой полуокружности, абсцисса x имеет положительный знак, а когда точка B находится на левой полуокружности, абсцисса x имеет отрицательный знак (рис. 64).

Таким образом, в I и IV четверти $\cos\alpha > 0$, в III и II четверти $\cos\alpha < 0$.

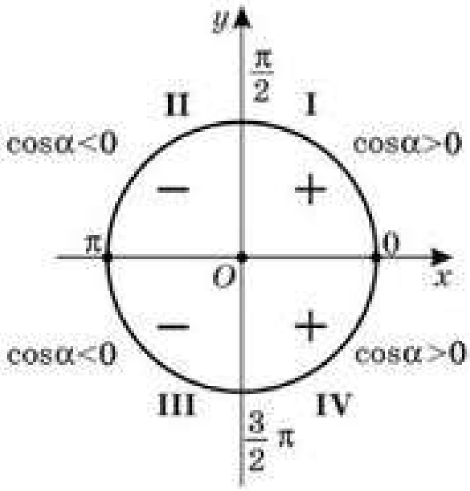


Рис. 64

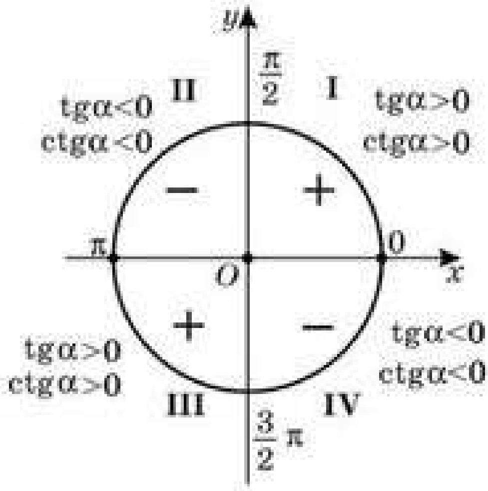


Рис. 65

Поскольку $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y}{x}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{x}{y}$, то знаки этих функций положительны в тех координатных четвертях, когда координаты точки B имеют одинаковые знаки, и отрицательны в тех четвертях, когда координаты точки B имеют противоположные знаки.

Следовательно, в I и III четверти $\operatorname{tg}\alpha > 0$, $\operatorname{ctg}\alpha > 0$, во II и IV четверти $\operatorname{tg}\alpha < 0$, $\operatorname{ctg}\alpha < 0$ (рис. 65).

На рисунке 66 показаны знаки синуса, косинуса, тангенса и котангенса угла α.

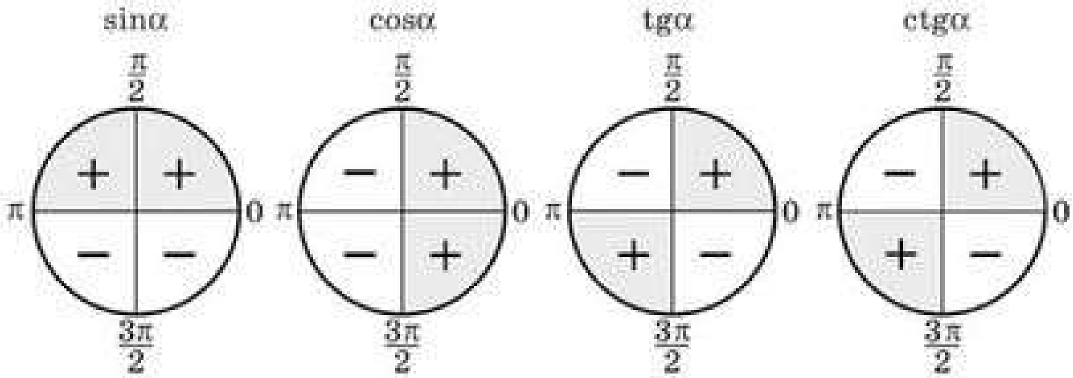


Рис. 66

В таблице 7 записаны знаки синуса, косинуса, тангенса и котангенса угла α.

Таблица 7

Четверти	I	II	III	IV
Знаки	$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$	$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$
$\sin\alpha$	+	+	–	–
$\cos\alpha$	+	–	–	+
$\text{tg}\,\alpha$	+	–	+	–
$\text{ctg}\,\alpha$	+	–	+	–

Периодичность тригонометрических функций

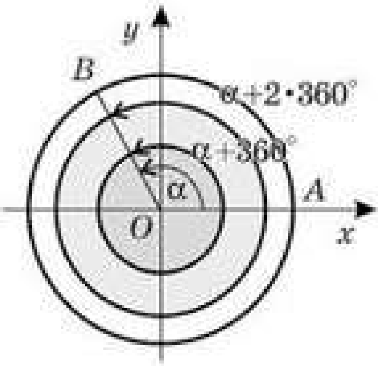


Рис. 67

Выше рассмотрен случай, когда подвижной радиус совершил только один полный оборот. Известно, что если подвижной радиус и дальше продолжит вращение, то его конец снова займет одно из положений, которые имели место от 0 до 2π. И эти положения не изменяются при увеличении числа полных оборотов подвижного радиуса.

Если к α прибавить 2π целое число раз, то от этого не изменятся значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса угла α.

На рисунке 67 при повороте радиуса *OA* и на угол α, и на угол $\alpha + 360°$, и на угол $\alpha + 2 \cdot 360°$ и т. д. получится один и тот же радиус *OB*, поэтому для углов α, $\alpha + 360°$, $\alpha + 2 \cdot 360°$ и т. д. значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса будут одни и те же.

ПРИМЕР

1. $\sin 45° = \sin(45° + 360°) = \sin(45° - 360°) = \sin(45° + 2 \cdot 360°) =$
$= \sin(45° - 2 \cdot 360°) = \sin(45° + 3 \cdot 360°) = \ldots = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

Это свойство позволяет свести нахождение значений синуса, косинуса, тангенса и котангенса любого угла к нахождению их значений для неотрицательного угла, меньшего 360°.

ПРИМЕР

2. Вычислим значение выражения: 1) $\sin 1470°$; 2) $\cos(-1845°)$.

Решение. Найдем, сколько полных углов содержит угол:

1) 1470°. Для этого выполним деление: 1470° : 360°. Получим 4 и в остатке 30°. Значит, $1470° = 360° \cdot 4 + 30°$.

Тогда $\sin 1470° = \sin(360° \cdot 4 + 30°) = \sin 30° = \frac{1}{2}$.

2) $-1845°$. Для этого выполним деление: $1845° : 360°$. Получим 5 и в остатке $45°$. Значит, $-1845° = -360° \cdot 5 - 45°$.

$\cos(-1845°) = \cos(-360° \cdot 5 - 45°) = \cos(-45°) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, поскольку $\cos(-45°) = \cos 45°$ (рис. 68).

Ответ: 1) $\dfrac{1}{2}$; 2) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

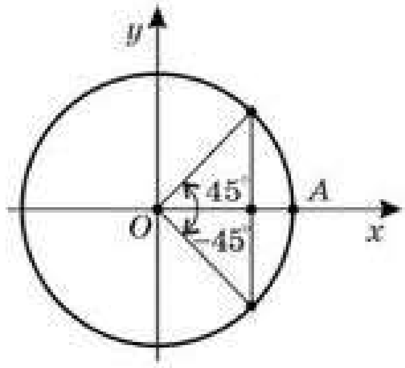


Рис. 68

Функции, обладающие рассмотренным выше свойством, называют *периодическими функциями*.

Функция $y = f(x)$ называется ***периодической функцией***, *если существует такое отличное от нуля число $T > 0$, что для любого x из области определения функции $y = f(x)$ выполняется равенство: $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$. Такое наименьшее число T называется* ***периодом функции***.

Следовательно, функции $y = \sin x$; $y = \cos x$; $y = \operatorname{tg} x$; $y = \operatorname{ctg} x$ являются периодическими функциями.

Не следует думать, что периодическими бывают только тригонометрические функции. Функция $y = [x]$, где $[x]$ — целая часть числа x (наибольшее целое число, не превосходящее x) позволяет определить функцию $y = \{x\}$, где $\{x\}$ — дробная часть числа x. По определению $\{x\} = x - [x]$ (например, $\{3,7\} = 0,7$, $\{-6\} = 0$, $\{-4,2\} = -4,2 - (-5) = 0,8$). Дробная часть числа — функция с периодом $T = 1$.

Целая часть числа также называется *Антье* от x и обозначается $E(x) = [x]$. График $E(x) = [x]$ изображен на рисунке 69. Дробная часть числа $y = \{x\} = x - [x]$, ее график изображен на рисунке 70.

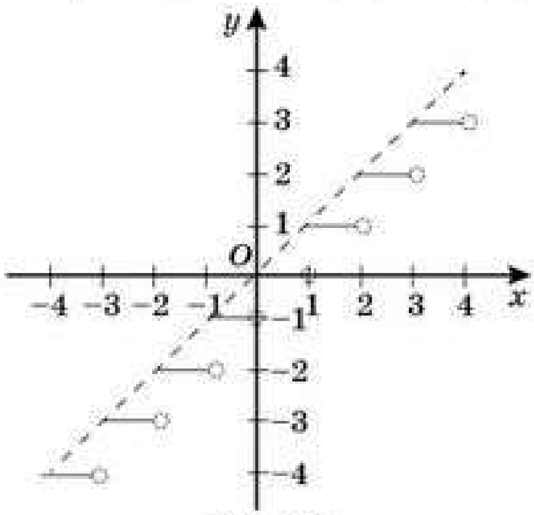


Рис. 69

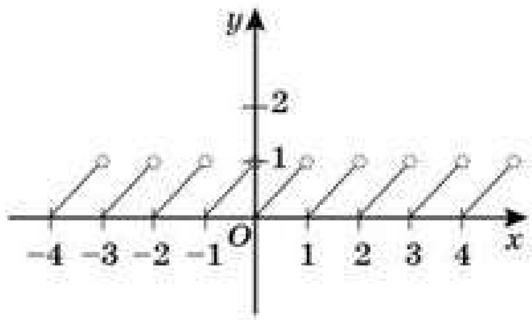


Рис. 70

Четность тригонометрических функций

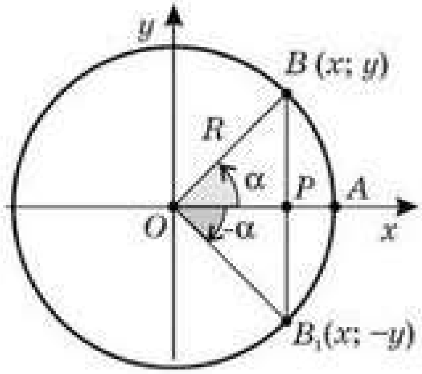


Рис. 71

В прямоугольной системе координат рассмотрим окружность с центром в начале координат и с радиусом OA.

Предположим, что при повороте радиуса OA на угол α он переходит в радиус OB, при повороте радиуса OA на угол $-\alpha$, он займет положение OB_1 (рис. 71).

Если соединить точки B и B_1, то получим равнобедренный треугольник OBB_1. OP является биссектрисой угла BOB_1 этого треугольника, поэтому точки B и B_1 будут симметричны относительно оси Ox.

ВЫ ЗНАЕТЕ

Точки, симметрично расположенные относительно оси Ox, имеют одинаковые абсциссы и противоположные ординаты.

Если координаты точки B обозначим через x и y, то координатами точки B_1 будут x и $-y$.

Тогда, $\sin(-\alpha) = \dfrac{-y}{R} = -\sin\alpha$; $\quad \operatorname{tg}(-\alpha) = \dfrac{-y}{x} = -\operatorname{tg}\alpha$;

$\cos(-\alpha) = \dfrac{x}{R} = \cos\alpha$; $\quad \operatorname{ctg}(-\alpha) = \dfrac{x}{-y} = -\operatorname{ctg}\alpha$.

Получили равенства:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha; \qquad \cos(-\alpha) = \cos\alpha;$$
$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha; \qquad \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

ВЫ ЗНАЕТЕ

Если для любого x из области определения функции, которая симметрична относительно начала координат, имеет место $f(-x) = f(x)$, то функция называется *четной*; если же имеет место $f(-x) = -f(x)$, то функция называется *нечетной*.

Из выше полученных равенств можно сделать вывод о том, что функции $y = \sin x$; $y = \operatorname{tg} x$; $y = \operatorname{ctg} x$ являются *нечетными* функциями, а функция $y = \cos x$ является *четной* функцией.

ПРИМЕР

3. Используя свойства четности тригонометрических функций, найдем значения выражений: $\sin(-60°)$; $\cos(-60°)$; $\operatorname{tg}(-45°)$; $\operatorname{ctg}(-30°)$.

Решение. $\sin(-60°) = -\sin60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos(-60°) = \cos60° = \frac{1}{2}$; $\mathrm{tg}(-45°) = -\mathrm{tg}45° = -1$; $\mathrm{ctg}\,(-30°) = -\mathrm{ctg}\,30° = -\sqrt{3}$.

Ответ : $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{1}{2}$; -1; $-\sqrt{3}$.

1. Существует ли такой угол, для которого верно равенство: $\sin\alpha = 2$; $\cos\alpha = -0$, $\cos\alpha = -0001$; $\mathrm{tg}\,x = 1\,000\,000$?
2. В какой четверти знаки синуса, косинуса, тангенса и котангенса одинаковые?
3. Какова связь между синусами, косинусами, тангенсами и котангенсами противоположных углов?
4. Может ли синус отрицательного угла быть положительным? Приведите пример.

Упражнения

A

21.1. Какие знаки имеют значения выражений $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$, если:

1) $\alpha = 67°$; 2) $\alpha = 127°$; 3) $\alpha = 267°$; 4) $\alpha = 319°$?

21.2. Найдите знак значения выражения:

1) $\sin 79°$; 2) $\sin 187°$;
3) $\cos 145°$; 4) $\cos 235°$;
5) $\mathrm{tg}\,123°$; 6) $\mathrm{tg}\,247°$;
7) $\sin 88° \cdot \cos 124°$; 8) $\sin 128° \cdot \cos 224°$;
9) $\sin 280° \cdot \cos 254°$; 10) $\sin 258° \cdot \cos 184°$.

21.3. В какой четверти находится угол α, если:

1) $\sin\alpha > 0$ и $\cos\alpha < 0$; 2) $\sin\alpha < 0$ и $\cos\alpha < 0$;
3) $\sin\alpha < 0$ и $\cos\alpha > 0$; 4) $\sin\alpha > 0$ и $\cos\alpha > 0$;
5) $\sin\alpha < 0$ и $\mathrm{tg}\,\alpha > 0$; 6) $\mathrm{tg}\,\alpha > 0$ и $\cos\alpha < 0$?

21.4. Найдите знак значения выражения:

1) $\sin\frac{3\pi}{5}$; 2) $\sin\frac{7\pi}{4}$; 3) $\cos\frac{13\pi}{3}$; 4) $\cos\frac{31\pi}{7}$;
5) $\mathrm{tg}\frac{15\pi}{4}$; 6) $\mathrm{ctg}\frac{36\pi}{11}$; 7) $\sin 2{,}7\pi$; 8) $\sin(-1{,}4\pi)$;
9) $\cos(-3{,}5\pi)$; 10) $\cos(-5{,}6\pi)$; 11) $\mathrm{tg}(-4{,}2\pi)$; 12) $\mathrm{ctg}(-5{,}2\pi)$.

21.5. Сравните значения выражений:

1) $\sin 0{,}6$ и $\sin 4{,}8$;
2) $\sin 1{,}6$ и $\sin 5{,}4$;
3) $\cos 1{,}96$ и $\cos 5{,}8$;
4) $\cos 1{,}2$ и $\sin 3{,}8$.

21.6. Запишите в порядке возрастания значения выражений:

1) $\sin\frac{\pi}{3}$; $\sin\frac{5\pi}{6}$; $\sin\frac{4\pi}{3}$;

2) $\cos\frac{\pi}{4}$; $\cos\frac{5\pi}{6}$; $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$;

3) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$; $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{6}$; $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}$.

21.7. Известно, что функция $f(x)$ задана на множестве R. При $x = 2$ имеем $f(2 + a) = f(2)$ и при $x = 5$ имеем $f(5 + a) = f(5)$. Можно ли утверждать, что функция $f(x)$ периодическая и имеет период $T = a$?

21.8. Найдите знак значения разности:

1) $\sin 30^\circ - 2\cos(-60^\circ)$;
2) $2\operatorname{tg}225^\circ - \cos 45^\circ$;
3) $3\cos 270^\circ - \operatorname{ctg}250^\circ$;
4) $4\sin 60^\circ - \operatorname{ctg}(-60^\circ)$.

В

21.9. Найдите знак значения числового выражения:

1) $\sin 45^\circ \cdot \cos 120^\circ \cdot \operatorname{tg}135^\circ$;
2) $\sin 60^\circ \cdot \cos 180^\circ \cdot \operatorname{ctg}135^\circ$;
3) $\sin 215^\circ \cdot \cos 150^\circ \cdot \operatorname{tg}225^\circ$;
4) $\operatorname{tg}145^\circ \cdot \cos 220^\circ \cdot \operatorname{tg}335^\circ$.

21.10. Докажите неравенство:

1) $\cos^2\alpha < \cos\alpha$, если $270^\circ < \alpha < 360^\circ$;
2) $\cos^2\alpha > \cos\alpha$, если $180^\circ < \alpha < 270^\circ$;
3) $\sin^2\alpha < \sin\alpha$, если $90^\circ < \alpha < 180^\circ$;
4) $\sin^2\alpha > \sin\alpha$, если $270^\circ < \alpha < 360^\circ$.

21.11. В какой координатной четверти может находиться угол , если:

1) $|\sin\alpha| = \sin\alpha$;
2) $|\sin\alpha| > \sin\alpha$;
3) $|\cos\alpha| = \cos\alpha$;
4) $|\cos\alpha| > \cos\alpha$;
5) $|\operatorname{tg}\alpha| = \operatorname{tg}\alpha$;
6) $|\operatorname{tg}\alpha| > \operatorname{tg}\alpha$;
7) $|\operatorname{ctg}\alpha| = \operatorname{ctg}\alpha$;
8) $|\operatorname{ctg}\alpha| > \operatorname{ctg}\alpha$?

21.12. По графику функции $y = f(x)$ выясните, является ли функция периодической. Если функция $y = f(x)$ периодическая, то найдите ее период (рис. 72).

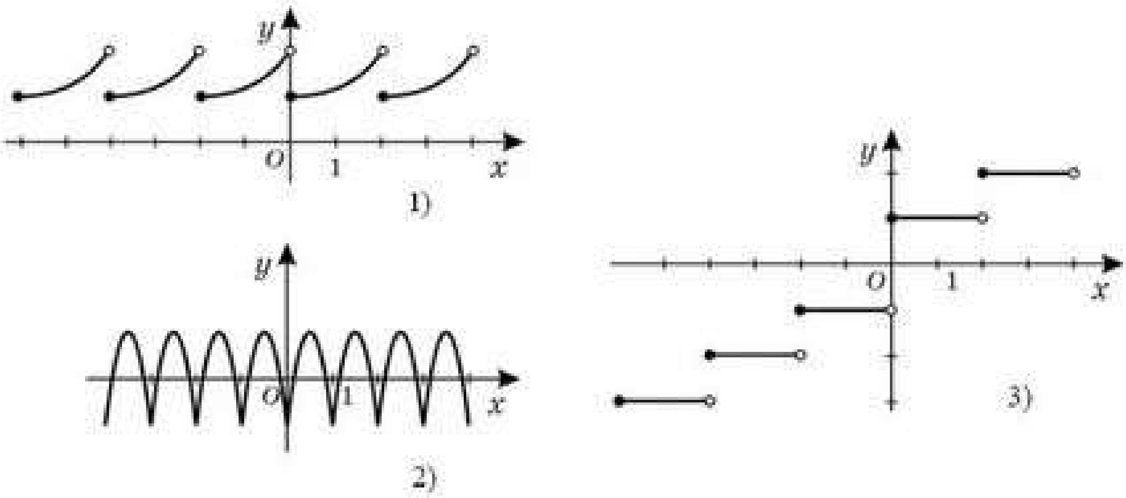


Рис. 72

21.13. Найдите знак выражения:

1) $1 - \sin 215^\circ \cos 135^\circ \ \mathrm{tg} 229^\circ$; 2) $\sin 320^\circ \cos 285^\circ \ \mathrm{tg} 30^\circ - 2$.

21.14. Известно, что функция $y = f(x)$ имеет период $T = 3$. Найдите период функции:

1) $y = f(x) + 5$; 2) $y = f(x) - 3$; 3) $y = 2f(x)$; 4) $y = -f(x)$.

21.15. Найдите углы в параллелограмме, если значение косинуса одного из его углов равно:

1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $-0,5$; 4) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

21.16. Найдите углы в параллелограмме, если значение тангенса одного из его углов равно:

1) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 2) $\sqrt{3}$; 3) -1; 4) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

21.17. Найдите углы в равнобокой трапеции, если значение косинуса одного из ее углов равно:

1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $-0,5$; 4) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

21.18. Известно, что $0 < \alpha < 90^\circ$. Докажите неравенство:

1) $\sin \alpha > \sin^4 \alpha$; 2) $\cos \alpha > \cos^4 \alpha$;

3) $\sin \alpha > \sin \alpha \cdot \cos \alpha$; 4) $\mathrm{tg}\, \alpha > \sin \alpha \cdot \mathrm{tg}\, \alpha$.

C

21.19. Докажите, что если $0 < \alpha < 90^\circ$, то $\sin \alpha + \cos \alpha > 1$.

21.20. Докажите, что для любого угла справедливо неравенство $|\sin \alpha| + |\cos \alpha| \geq 1$.

21.21. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения:

1) $1 + 3\sin 2x$; 2) $3 - 2\sin 3x$;

3) $4 - 3\cos 2x$; 4) $2 - 0{,}5\cos x$.

***21.22**. Известно, что функция $y = f(x)$ задана на множестве R и имеет период $T = 4$. При $x \in [0; 4]$ функция задана формулой $y = x^2 - 4x$. Постройте график функции $y = f(x)$ на R.

21.23. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения:

1) $1 + \sin^2 2x$; 2) $4 - \sin^4 3x$;

3) $4 - 3\,|\cos 2x|$; 4) $2{,}4 - 0{,}5\cos^2 x$.

***21.24.** Найдите период функции $y = f(x)$:

1) $y = \sin 2\pi x + \cos 4\pi x$; 2) $y = \sin \pi x + \cos 2\pi x$;

3) $y = \cos 4\pi x + \sin 8\pi x$; 4) $y = \operatorname{tg} 4\pi x + \sin 2\pi x$.

ПОВТОРИТЕ

21.25. Постройте график функции и укажите множество ее значений:

1) $y = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$; 2) $y = \dfrac{x^2 - 9}{x + 3}$;

3) $y = \dfrac{2x^2}{x}$; 4) $y = \dfrac{2(x - 1)^2}{x - 1}$.

21.26. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ x^2 - y^2 = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 18, \\ xy = 9. \end{cases}$

21.27. Упростите выражение:

1) $\dfrac{x + a}{x^2 + ax + a^2} \cdot \dfrac{x^3 - a^3}{a^2 - x^2} : \left(1 - \dfrac{1 + a}{a}\right)$;

2) $\left(\dfrac{4b + a}{2b} + \dfrac{6b}{a - 4b}\right) \cdot \left(\dfrac{a^2 - 2ab + b^2}{4b^2 - a^2} + 1\right)$.

21.28. Значение суммы катетов прямоугольного треугольника равно 79 см. Если длину одного из катетов увеличить на 23 см, другой уменьшить на 11 см, то полученный прямоугольный и данный треугольники будут иметь одинаковые длины гипотенуз. Найдите длины катетов данного треугольника.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

21.29. Проверьте тождество:

1) $\sin^2 60° + \cos^2 60° - \mathrm{tg} 45° = 0$;

2) $\sin^2 45° + \cos^2 45° - \mathrm{ctg} 45° = 0$.

21.30. В каких четвертях $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ принимают значения:

1) одного знака;
2) разных знаков?

Опорные понятия для овладения новыми знаниями

Тождество, тригонометрические функции угла, допустимые значения аргумента тригонометрических функций, область значений тригонометрических функций, четные и нечетные тригонометрические функции, теорема Пифагора.

§ 22. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ТОЖДЕСТВА

Ключевые понятия

Тригонометрические тождества, синус, косинус, тангенс и котангенс

Вы научитесь выводить и применять основные тригонометрические тождества.

Поскольку значения $\sin\alpha$; $\cos\alpha$; $\mathrm{tg}\,\alpha$; $\mathrm{ctg}\,\alpha$ не зависят от величины радиуса, а зависят лишь от величины угла, то при рассмотрении тригонометрических функций будем рассматривать окружность, длина радиуса которой равна 1 (одному) радиану. Тогда значение, например, функции синуса будет определено только ординатой y — конца точки B подвижного радиуса OB, а значение косинуса — абсциссой x — точки B (рис. 73.1).

Рассмотрим прямоугольный треугольник OBC (рис. 73.2). По теореме Пифагора получим $OB^2 = OC^2 + BC^2$. Поскольку $OB = 1$, $OC = x = \cos\alpha$, $BC = y = \sin\alpha$, то $1 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$, или

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \tag{1}$$

Данное равенство верно при любых значениях α, т. е. является тождеством.

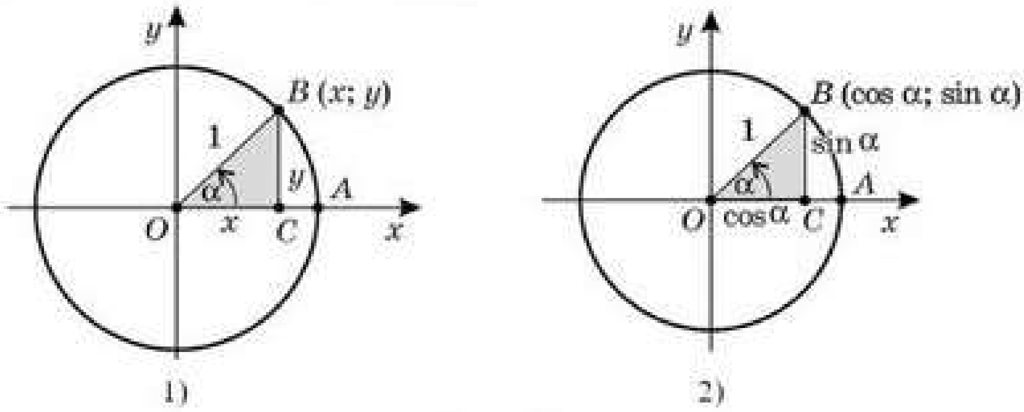


Рис. 73

По определению $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y}{x}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{x}{y}$. Поскольку $y = \sin\alpha$, $x = \cos\alpha$, то

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \tag{2}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \tag{3}$$

Равенства (1) — (3) называются *основными тригонометрическими тождествами* .

ЗАПОМНИТЕ

Основные тригонометрические тождества:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Тригонометрическим тождеством *называется равенство, в которое входят тригонометрические функции и верно при любых допустимых значениях аргумента тригонометрических функций, но неверно, если каждую из функций заменить произвольной величиной.*

Например, 1) тождество $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha$ не тригонометрическое, так как оно останется верным, если $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ заменить произвольными величинами a и b; тогда это будет алгебраическое тождество $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

2) тождество же $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha$ тригонометрическое, так как при замене $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ на произвольные

величины a и b оно обращается в нетождественное равенство $(a+b)^2 = 1 + 2ab$.

Почленно умножив тождества (2) и (3), получим $\text{tg}\,\alpha \cdot \text{ctg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 1$, т. е. тригонометрическое тождество:

$$\text{tg}\,\alpha \cdot \text{ctg}\,\alpha = 1. \qquad (4)$$

Если разделим обе части тождества (1) на $\sin^2\alpha$ при условии, что $\sin\alpha \neq 0$, то получим равенство $\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}$, или тригонометрическое тождес тво

$$1 + \text{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \qquad (5)$$

Докажите тождество:

$$1 + \text{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \qquad (6)$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{1}{\text{ctg}\alpha}, \qquad (7)$$

$$\text{ctg}\,\alpha = \frac{1}{\text{tg}\alpha}. \qquad (8)$$

В таблице 8 записаны формулы, которые выражают соотношения между тригонометрическими функциями одного аргумента.

Таблица 8

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$	$\text{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\text{ctg}\alpha}$
$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\text{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\text{tg}\alpha}$
$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$	$\text{tg}\,\alpha \cdot \text{ctg}\,\alpha = 1$
$1 + \text{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$	$1 + \text{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$

ПРИМЕР

1. Найдем значения $\sin\alpha$, $\text{tg}\,\alpha$ и $\text{ctg}\,\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{12}{13}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Решение. Из формулы (1) получим $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ или $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$. Поскольку α есть угол первой четверти, поэтому значения всех указанных функций будут положительны.

Тогда $\sin\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{144}{169}} = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13}$.

По формуле (2) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, так как $\sin\alpha = \frac{5}{13}$ и $\cos\alpha = \frac{12}{13}$,

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = \frac{5}{12}$. По формуле (8) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{12}{5} = 2{,}4$.

Ответ : $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$, $\operatorname{ctg}\alpha = 2{,}4$.

ПРИМЕР

2. Найдем значения $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если известно, что $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Решение. По условию α является углом II четверти, поэтому $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ отрицательные. Следовательно,

$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$;
$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = -\sqrt{3}$.

Ответ : $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\sqrt{3}$.

ПРИМЕР

3. Известно, что $\operatorname{ctg}\alpha = -3$ и $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$. Вычислим $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$.

Решение . Из формулы (5) $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$ получим $\sin^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$.

Поскольку значения $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ в IV четверти отрицательные, а $\cos\alpha$ — положительные, то $\sin\alpha = -\sqrt{\frac{1}{1+9}} = -\sqrt{\frac{1}{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$. Из формулы (3) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ получим $\cos\alpha = \operatorname{ctg}\alpha \cdot \sin\alpha = -3 \cdot \left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right) = \frac{3\sqrt{10}}{10}$.
По формуле (7) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha} = -\frac{1}{3}$.

Ответ : $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{3}$.

1. Произведение каких тригонометрических функций равно 1?
2. Каким тождественным равенством связаны функции синус и косинус?
3. Можно ли, зная значения синуса некоторого угла и его принадлежность некоторой четверти, вычислить значение котангенса этого угла?

Упражнения

А

22.1. Вычислите:

1) $\sin\beta$, если $\cos\beta = 0{,}5$ и $0° < \beta < 90°$;

2) $\cos\beta$, если $\sin\beta = 0{,}5$ и $0° < \beta < 90°$;

3) $\sin\beta$, если $\cos\beta = -0{,}5$ и $90° < \beta < 180°$;

4) $\cos\beta$, если $\sin\beta = -0{,}5$ и $180° < \beta < 270°$.

22.2. Упростите выражение:

1) $\dfrac{1-\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$; 2) $\dfrac{\cos^2\alpha - 1}{\sin\alpha}$;

3) $\sin^2\alpha - (1 + \operatorname{tg}^2\alpha)\cdot\cos^2\alpha$;

4) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\cdot(1 + \operatorname{ctg}^2\alpha)\cdot\sin^2\alpha$.

22.3. Найдите значение выражения:

1) $1 - \sin\alpha\cos\alpha\operatorname{ctg}\alpha$, если $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$;

2) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2}{3}$;

3) $\dfrac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2}{5}$;

4) $\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{3}{2}$;

5) $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1-\operatorname{ctg}^2\alpha}$, если $\sin\alpha = \dfrac{2}{3}$;

6) $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1-\operatorname{ctg}^2\alpha}$, если $\cos\alpha = -\dfrac{1}{3}$.

22.4. Упростите выражение:

1) $\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} - 1$; 2) $\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha} - 1$;

3) $\dfrac{1}{1-\cos\alpha} - \dfrac{1}{1+\cos\alpha}$; 4) $\dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}\alpha}$;

5) $\dfrac{1-\mathrm{ctg}\alpha}{1-\mathrm{tg}\alpha}$;

6) $\dfrac{\mathrm{tg}\alpha-1}{\mathrm{ctg}\alpha-1}$;

7) $\dfrac{1}{1+\sin\alpha}-\dfrac{1}{1-\sin\alpha}$;

8) $\dfrac{\mathrm{ctg}\alpha+1}{\mathrm{tg}\alpha+1}$;

9) $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\mathrm{ctg}\,\alpha$;

10) $\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}-\mathrm{tg}\,\alpha$;

11) $\dfrac{\sin\beta}{1-\cos\beta}+\dfrac{\sin\beta}{1+\cos\beta}$;

12) $\dfrac{\cos\beta}{1+\sin\beta}+\dfrac{\cos\beta}{1-\sin\beta}$.

22.5. Докажите тождество:

1) $\dfrac{\sin x+\cos x}{1+\mathrm{tg}x}=\cos x$;

2) $\dfrac{\mathrm{ctg}x-1}{\sin x-\cos x}=-\sin x$;

3) $\dfrac{1+\mathrm{ctg}x}{\sin x+\cos x}=\sin x$;

4) $\dfrac{\sin x-\cos x}{1-\mathrm{tg}x}=-\cos x$.

22.6. Преобразуйте выражение:

1) $\cos^2\alpha+\dfrac{\mathrm{tg}^2\alpha-1}{\mathrm{tg}^2\alpha+1}$;

2) $\sin^2\varphi+\dfrac{\mathrm{ctg}^2\varphi-1}{\mathrm{ctg}^2\varphi+1}$;

3) $\dfrac{\mathrm{ctg}^2\gamma-1}{\mathrm{ctg}^2\gamma+1}-\cos^2\gamma$;

4) $\dfrac{\mathrm{tg}^2x-1}{\mathrm{tg}^2x+1}-\sin^2x$.

В

22.7. Упростите выражение:

1) $\dfrac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}\beta}$;

2) $\dfrac{2\sin^2\alpha-1}{\sin\alpha+\cos\alpha}$;

3) $\dfrac{\cos^2\alpha-\mathrm{ctg}^2\alpha}{\sin^2\alpha-\mathrm{tg}^3\alpha}$;

4) $\mathrm{ctg}\,\beta+\dfrac{\sin\beta}{1+\cos\beta}$.

22.8. Докажите тождество:

1) $\sin^2x-\cos^2x=\sin^4x-\cos^4x$;

2) $(1+\cos\alpha)(1+\mathrm{tg}\,\alpha)=1+\sin\alpha+\cos\alpha+\mathrm{tg}\,\alpha$;

3) $(\mathrm{tg}\,x+\mathrm{ctg}\,x)^2-(\mathrm{tg}\,x-\mathrm{ctg}\,x)^2=4$;

4) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$;

5) $\sin^3x\,(1+\mathrm{ctg}\,x)+\cos^3x\,(1+\mathrm{tg}\,x)=\sin x+\cos x$;

6) $\dfrac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{\mathrm{ctg}\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}=2\mathrm{tg}^2\alpha$.

***22.9.** Докажите, что при всех допустимых значениях α верно равенство:

1) $3\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1$;

2) $\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} - \dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\mathrm{tg}^2\alpha - 1} = \sin\alpha + \cos\alpha.$

22.10. Докажите, что не зависит от переменной значение выражения:

1) $\dfrac{2\sin x\cos x - 1}{(\sin x - \cos x)^2}$; 2) $\dfrac{1}{1 + \mathrm{ctg}^2 x} + \dfrac{1}{1 + \mathrm{tg}^2 x}$;

3) $\dfrac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\sin^4\alpha - \cos^4\alpha}$; 4) $\dfrac{1}{1 - \mathrm{tg}^2 x} + \dfrac{1}{1 - \mathrm{ctg}^2 x}$.

22.11. Найдите значение выражения:

1) $\mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{ctg}^2\alpha$, если $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{1}{3}$;

2) $3\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha$, если $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$.

22.12. Упростите выражение:

1) $\dfrac{1}{\sqrt{1 - \cos^2\alpha}} + \sqrt{1 + \mathrm{ctg}^2\alpha}$; 2) $\dfrac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\alpha}} + \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$.

22.13. Докажите тождество:

1) $\dfrac{\cos^3\beta - \sin^3\beta}{1 + \cos\beta\cdot\sin\beta} = \cos\beta - \sin\beta$;

2) $\dfrac{\cos\beta}{1 + \sin\beta} - \dfrac{\cos\beta}{1 - \sin\beta} = -2\mathrm{tg}\,\beta$;

3) $(1 + \mathrm{tg}\,\beta)^2 + (1 - \mathrm{tg}\,\beta)^2 = \dfrac{2}{\cos^2\beta}$;

4) $\dfrac{1 - 4\cos^2\beta\cdot\sin^2\beta}{(\cos\beta + \sin\beta)^2} + 2\cos\beta\cdot\sin\beta = 1.$

22.14. Упростите выражение и найдите его значение:

1) $1 - \sin\gamma\cos\gamma\,\mathrm{tg}\,\gamma$, если $\sin\gamma = 0{,}6$;

2) $\cos^4\beta + \cos^2\beta\cdot\sin^2\beta$, если $\mathrm{tg}\,\beta = 3$;

3) $\dfrac{\sin\beta}{1 + \cos\beta} + \dfrac{\sin\beta}{1 + \cos\beta}$, если $\sin\beta = 0{,}3$;

4) $\dfrac{\cos\beta}{1 - \sin\beta} + \dfrac{\cos\beta}{1 + \sin\beta}$, если $\cos\beta = 0{,}4$.

22.15. Докажите тождество:

1) $\dfrac{\cos\alpha}{1 - \sin\alpha} + \mathrm{ctg}\,\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha}$;

2) $\dfrac{\cos\alpha}{1 + \sin\alpha} + \mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$;

3) $\sin(-\alpha) \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha + \cos(-\alpha) = 0$;

4) $\cos\alpha \cdot \mathrm{tg}(-\alpha) - \sin(-\alpha) = 0$.

22.16. Известно, что $\mathrm{tg}\,\alpha = 3$. Найдите:

1) $\dfrac{4\cos\alpha - 2\sin\alpha}{3\sin\alpha + \cos\alpha}$; 2) $\dfrac{5\cos\alpha + 3\sin\alpha}{3\sin\alpha - 2\cos\alpha}$;

3) $\dfrac{4\cos\alpha - 3\sin\alpha}{3\sin^3\alpha + \cos^3\alpha}$; 4) $\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha - 2\sin^2\alpha}{3\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha}$.

22.17. Известно, что $\mathrm{ctg}\,\alpha = 3$. Найдите:

1) $\dfrac{4\cos\alpha - \sin\alpha}{2\sin\alpha + \cos\alpha}$; 2) $\dfrac{4\cos\alpha + 6\sin\alpha}{3\sin\alpha - 2\cos\alpha}$;

3) $\dfrac{5\cos\alpha - 9\sin\alpha}{\sin^3\alpha + 5\cos^3\alpha}$; 4) $\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha - 3\sin^2\alpha}{3\sin^2\alpha + 5\cos^2\alpha}$.

C

***22.18.** Замените уравнением, не содержащим параметр α, систему уравнений:

1) $\begin{cases} x = 4\cos\alpha, \\ y = 4\sin\alpha; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 4\cos\alpha, \\ y = 6\sin\alpha; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = \sin\alpha + \cos\alpha, \\ y = \sin\alpha\cos\alpha; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \mathrm{tg}^4\alpha + \mathrm{ctg}^4\alpha = x, \\ \mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{ctg}^2\alpha = y. \end{cases}$

22.19. Найдите значения α, при которых достигается наибольшее и наименьшее значения выражения:

1) $\sin^2\alpha + 3\cos^2\alpha - 3$; 2) $3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 1$;

3) $4\sin^2\alpha + 3\mathrm{ctg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\alpha$; 4) $5\cos^2\alpha - \mathrm{ctg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\alpha$.

22.20. Докажите, что при всех допустимых значениях α является постоянной величиной значение выражения:

1) $\dfrac{(\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{ctg}\alpha)^2 - (\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{ctg}\alpha)^2}{\dfrac{1}{\cos^2\alpha \cdot \sin^2\alpha} - \mathrm{ctg}^2\alpha - \mathrm{tg}^2\alpha}$;

2) $\cos^6\alpha + \sin^6\alpha + 3\cos^2\alpha \cdot \sin^2\alpha$.

22.21. Упростите выражение:

1) $(1 + \mathrm{tg}\,\beta) \cdot \cos^3\beta + (1 + \mathrm{ctg}\,\beta) \cdot \sin^3\beta + 1$;

2) $2 - \left(\dfrac{\mathrm{ctg}\beta + \sin\beta}{\sin\beta \cdot \mathrm{tg}\beta + 1}\right)^2 + \mathrm{ctg}^2\beta$.

22.22. Существует ли угол α, для которого верно равенство:

1) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ и $\cos\alpha = \frac{3}{5}$; 2) $\sin\alpha = \frac{5}{8}$ и $\cos\alpha = \frac{3}{8}$;

3) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ и $\cos\alpha = \frac{3}{4}$; 4) $\operatorname{tg}\alpha = 1{,}4$ и $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{5}{7}$;

5) $\operatorname{tg}\alpha = -2{,}4$ и $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{5}{12}$; 6) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$ и $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$?

22.23. Найдите значение выражения $\operatorname{ctg}^2\beta + \frac{1}{\cos\beta \cdot \sin\beta} + \operatorname{tg}^2\beta$, если $\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{tg}\beta = 4$.

22.24. Упростите выражение:

1) $1 - \sin^2 3\beta - \cos^2 3\beta$; 2) $\frac{\left(\sin^2 4\alpha - \cos^2 4\alpha\right)^2}{1 - 4\sin^2 4\alpha \cdot \cos^2 4\alpha}$;

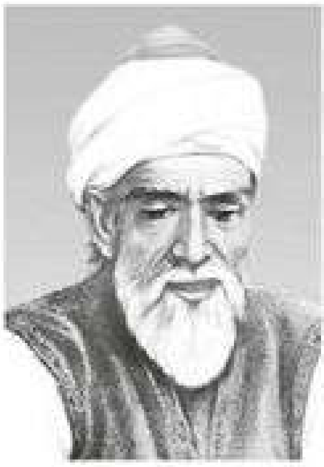
3) $2 - 2\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha - \sin^4\alpha - \cos^4\alpha$;

4) $1 - 2\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha - \sin^6\alpha - \cos^6\alpha$.

22.25. Известно, что $\sin\beta + \cos\beta = 0{,}6$. Найдите значение выражения: 1) $\sin\beta - \cos\beta$; 2) $\sin^3\beta + \cos^3\beta$; 3) $\sin^4\beta + \cos^4\beta$; 4) $\sin^6\beta + \cos^6\beta$.

ПОДГОТОВЬТЕ СООБЩЕНИЕ ОБ УЧЕНОМ-МАТЕМАТИКЕ

22.26. Â X â. áàãäàäñêèé ó÷åíûé Àáó-ëü-Âåôà ïðèñîåäèíèë ê ïîíÿòèÿì ñèíóñà è êîñè-íóñà ïîíÿòèÿ òàíãåíñà, êîòàíãåíñà, ñåêàíñà è êîñåêàíñà и óñòàíîâèë òàêæå îñíîâíûå ñîîòíîøåíèÿ ìåæäó íèìè.



Абу-ль-Вефа
(940—998)

ПОВТОРИТЕ

22.27. 1) Найдите значение суммы первых 105 членов арифметической прогрессии, если $a_{53} = 30$.
2) Найдите значение суммы первых 207 членов арифметической прогрессии, если $a_{103} = 15$.

22.28. Постройте график уравнения:

1) $\frac{y - x^2}{x - 2} = 0$; 2) $\frac{y - x^2 + 2}{x - 2} = 0$;

3) $\dfrac{y - 0{,}5x^2}{|x| - 2} = 0$; 4) $\dfrac{y + 0{,}5x^2}{|x| - 3} = 0$.

22.29. Упростите выражение:

1) $\left(\dfrac{1}{a - x} - \dfrac{3x^2}{a^3 - x^3} - \dfrac{x}{a^2 + ax + x^2}\right) \cdot \left(\dfrac{a^2}{a + x} + x\right)$;

2) $\dfrac{2x - 3}{3x} - \dfrac{1}{x + 3} \cdot \left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{3}{x}\right) + \dfrac{2}{3}$.

22.30. Решите неравенство:

1) $\dfrac{(x^2 - 7x - 8) \cdot (x - 10)^3}{(x + 2)^2 (3 - x)}$ m 0;

2) $\dfrac{(x^2 - 6x + 8) \cdot (x^2 - 9)}{5(x^3 - 8)}$ l 0;

3) $\dfrac{(3x^2 + 5x) \cdot (4x - x^2)}{(x + 5)^2}$ m 0;

4) $\dfrac{(x + 3)^4 \cdot (x - 5)^3}{6(x^2 + x - 2)}$ l 0.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

22.31. Расположите в порядке возрастания значения выражений:

1) $\sin 30°$, $\cos 60°$, $\sin 150°$, $\cos 120°$;

2) $\operatorname{tg} 30°$, $\operatorname{ctg} 60°$, $\operatorname{tg} 150°$, $\operatorname{ctg} 120°$.

22.32. Найдите значение выражения:

1) $\sin 90° + 2\cos 150° - \sin 150° + \operatorname{ctg} 120°$;

2) $2\sin 120° + \cos 90° - \cos 120° + \operatorname{tg} 150°$.

Опорные понятия для овладения новыми знаниями

Числовая окружность, начальный и подвижный радиус, поворот на угол α, определение тригонометрических функций числового аргумента, свойства тригонометрических функций, их знаки на координатных четвертях, периодичность, четность и нечетность, соотношения между тригонометрическими функциями одного аргумента.

§ 23. ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ

Ключевые понятия

Формулы приведения, синус, косинус, тангенс и котангенс

Вы научитесь выводить и применять формулы приведения.

При решении многих задач, связанных с тригонометрическими функциями, большое значение имеет приведение тригонометрических функций любого угла к тригонометрическим функциям острого угла. Иными словами, если даны тригонометрические функции угла вида $\frac{\pi}{2}k \pm \alpha$ (где k — любое целое число, α — острый угол), то целесообразно и намного удобнее их привести к тригонометрическим функциям угла α. Для этого применяются специальные формулы, называемые *формулами приведения*.

Сначала рассмотрим формулы приведения для синуса и косинуса, затем через них выведем формулы приведения для тангенса и котангенса.

Рассмотрим синусы и косинусы углов II четверти. Любой угол II четверти можно представить в виде $\frac{\pi}{2} + \alpha$ (где α — острый угол). Рассмотрим окружность. Радиус окружности $R = OA$ повернем вокруг точки O сначала на угол α, затем еще раз — на угол $\frac{\pi}{2} + \alpha$ (рис. 74). При этих поворотах радиус OA, соответственно, переходит в радиусы OB и OB_1. Из точек B и B_1 проводим перпендикуляры на координатные оси.

В результате получим два прямоугольника $OCBD$ и $OC_1B_1D_1$. Можно легко убедиться, что прямоугольник $OC_1B_1D_1$ получается поворотом прямоугольника $OCBD$ вокруг точки O на угол $\frac{\pi}{2}$ в положительном направлении. Действительно, так как $\angle BOB_1 = \frac{\pi}{2}$, при повороте точка B переходит в точку B_1. Точно так же точка C переходит в точку C_1, точка D переходит в точку D_1.

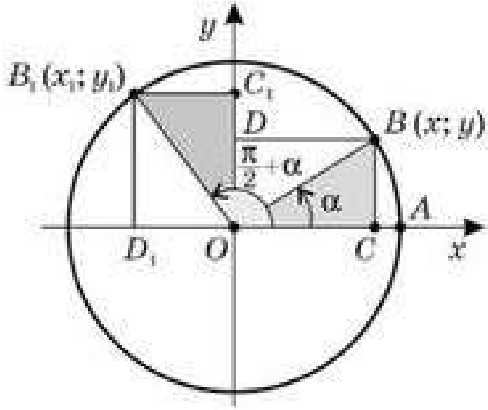


Рис.74

Таким образом, в качестве ординаты точки B_1 можно взять абсциссу точки B, а в качестве абсциссы точки B_1 можно взять ординату точки B с противоположным знаком:

$$y_1 = x \text{ и } x_1 = -y,$$

или

$$\frac{y_1}{R} = \frac{x}{R} \text{ и } \frac{x_1}{R} = -\frac{y}{R}.$$

ВЫ ЗНАЕТЕ

По определению синус угла равен отношению ординаты точки (конца подвижного радиуса) к радиусу, т. е.:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \frac{B_1D_1}{R} = \frac{y_1}{R}, \text{ а } \sin\alpha = \frac{BC}{R} = \frac{y}{R};$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \frac{OD_1}{R} = \frac{x_1}{R}, \text{ а } \cos\alpha = \frac{OC}{R} = \frac{x}{R}.$$

Из последних двух равенств получим две формулы приведения:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha; \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha. \qquad (1)$$

ПРИМЕР

Докажем, что функция $y = \sin x$ имеет период 2π.

Решение. Поскольку $\sin(x + 2\pi n) = \sin x$, где $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, то добавление $2\pi n$ к аргументу синуса не меняет его значение. Предположим, что P — такое число, т. е. равенство $\sin(x + P) = \sin x$ справедливо для любого значения x. Тогда оно имеет место и при $x = \frac{\pi}{2}$, т. е. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+P\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$, но по формуле приведения $\sin\left(\frac{\pi}{2}+P\right) = \cos P$.

Из двух последних равенств следует, что $\cos P = 1$, но мы знаем, что это верно лишь при $P = 2\pi n$. Так как наименьшим, отличным от нуля числом из $2\pi n$ является 2π, то это число и есть период функции $y = \sin x$. ◩

Рассмотрим $\sin 2x = \sin(2x + 2\pi n) = \sin[2(x + \pi n)]$. Значит, добавление πn к аргументу x не меняет значение функции. Наименьшее, отличное от нуля число из πn есть π, поэтому это период функции $y = \sin 2x$.

Чтобы вывести формулы приведения синуса и косинуса для угла $\frac{\pi}{2} - \alpha$, достаточно в формуле (1) заменить угол α на угол $-\alpha$, тогда получим:

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+(-\alpha)\right)=\cos(-\alpha)=\cos\alpha$, так как функция косинус — четная;

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+(-\alpha)\right)=-\sin(-\alpha)=-(-\sin\alpha)=\sin\alpha$, так как функция синус — нечетная.

Таким образом, получили еще две формулы приведения:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha;\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha. \qquad (2)$$

Эти две формулы справедливы для любого угла α, а не только для острого угла α.

Выведем формулы приведения синуса и косинуса для угла $\pi+\alpha$.

Для этого представим угол $\pi+\alpha$ в виде $\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ и дважды применим формулу (1).

Получим $\sin(\pi+\alpha)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$,

$\cos(\pi+\alpha)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha$.

Таким образом:

$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha;\ \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha. \qquad (3)$$

Представив угол $\pi-\alpha$ в виде $\pi+(-\alpha)$, из формулы (3) найдем синус и косинус угла $\pi-\alpha$. Получим еще две формулы приведения:

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha;\quad \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha. \qquad (4)$$

Докажите формулы (4).

Выведем формулы приведения синуса и косинуса угла $\frac{3\pi}{2}+\alpha$. Здесь также применяем тот же способ, который использовали при выводе формулы (3), другими словами, угол $\frac{3\pi}{2}+\alpha$ представим в виде $\frac{\pi}{2}+(\pi+\alpha)$. Затем последовательно воспользуемся формулами (1) и (3). В результате получим:

$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\left[\frac{\pi}{2}+(\pi+\alpha)\right]=\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$,

$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\left[\frac{\pi}{2}+(\pi+\alpha)\right]=-\sin(\pi+\alpha)=-(-\sin\alpha)=\sin\alpha$.

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha;\quad \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha. \qquad (5)$$

Выведите формулы приведения синуса и косинуса угла $\frac{3\pi}{2}-\alpha$.

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha;\quad \cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha. \qquad (6)$$

Выведем формулы приведения синусов и косинусов углов $2\pi+\alpha$ и $2\pi-\alpha$. Сначала рассмотрим формулы приведения для угла $2\pi+\alpha$.

ВЫ ЗНАЕТЕ

Если к углу α прибавить полный угол (2π), то от этого значения тригонометрических функций не изменятся.

Тогда получим еще две формулы приведения:

$$\sin(2\pi+\alpha)=\sin\alpha;\quad \cos(2\pi+\alpha)=\cos\alpha. \qquad (7)$$

Если в формуле (7) заменим угол α на угол $-\alpha$, то получим еще две формулы приведения:

$$\sin(2\pi-\alpha)=-\sin\alpha;\quad \cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha. \qquad (8)$$

1. Докажите формулы (8).
2. Используя формулу $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ и выше доказанные формулы (1) — (8), докажите формулы приведения тангенса и котангенса (9—12):

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\operatorname{ctg}\alpha;\quad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\operatorname{tg}\alpha; \qquad (9)$$

$$\operatorname{tg}(\pi\pm\alpha)=\pm\operatorname{tg}\alpha;\quad \operatorname{ctg}(\pi\pm\alpha)=\pm\operatorname{ctg}\alpha; \qquad (10)$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\operatorname{ctg}\alpha;\quad \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\operatorname{tg}\alpha; \qquad (11)$$

$$\operatorname{tg}(2\pi\pm\alpha)=\pm\operatorname{tg}\alpha;\quad \operatorname{ctg}(2\pi\pm\alpha)=\pm\operatorname{ctg}\alpha. \qquad (12)$$

Формулы приведения (1) — (12) занесем в одну таблицу:

Таблица 9

x	$\frac{\pi}{2}+\alpha$ $(90°+\alpha)$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$ $(90°-\alpha)$	$\pi+\alpha$ $(180°+\alpha)$	$\pi-\alpha$ $(180°-\alpha)$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$ $(270°+\alpha)$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$ $(270°-\alpha)$	$2\pi+\alpha$ $(360°+\alpha)$	$2\pi-\alpha$ $(360°-\alpha)$
$\sin x$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos x$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
$\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg} x$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$

Какую закономерность можно заметить из этой таблицы?
По данным таблицы ответьте на вопросы:
1. В каком случае (для каких углов) тригонометрическая функция не изменяется?
2. Когда (для каких углов) функция изменяется на схожую функцию (синус — на косинус, тангенс — на котангенс и, наоборот)?
3. Как устанавливается знак тригонометрической функции для правых частей формул приведения?

Правильно ответив на эти вопросы, получим вывод:

1) если аргумент (угол) некоторой приводимой тригонометрической функции имеет вид:

$\pi \pm \alpha (180^\circ \pm \alpha)$, $2\pi \pm \alpha (360^\circ \pm \alpha)$, то ее название не изменяется;

$\frac{\pi}{2} \pm \alpha (90^\circ \pm \alpha)$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha (270^\circ \pm \alpha)$, то ее название меняется: синус — на косинус, тангенс — на котангенс и, наоборот;

2) правая часть формул приведения имеет тот же знак, какой знак имеет приводимая функция в соответствующей четверти.

ПРИМЕР

1. Найдем значение $\sin \frac{7}{3}\pi$.

Решение . $\sin \frac{7}{3}\pi = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ : $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

ПРИМЕР

2. Найдем значение $\cos(-780^\circ)$.

Решение. $\cos(-780^\circ) = \cos 780^\circ = \cos(2 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.

Ответ : $\frac{1}{2}$.

ПРИМЕР

3. Вычислим значение $\mathrm{ctg}(-750^\circ)$.

Решение . $\mathrm{ctg}(-750^\circ) = -\mathrm{ctg}750^\circ = -\mathrm{ctg}(2 \cdot 360^\circ + 30^\circ) = -\mathrm{ctg}30^\circ = -\sqrt{3}$.

Ответ : $-\sqrt{3}$.

ПРИМЕР

4. Вычислим значение: 1) $\cos 510°$; 2) $\operatorname{tg} 1665°$; 3) $\sin\left(\frac{17}{3}\pi\right)$.

Решение .

1) $\cos 510° = \cos(360° + 150°) = \cos 150° = \cos(180° - 30°) = -\cos 30° =$
$= -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

2) $\operatorname{tg} 1665° = \operatorname{tg}(4 \cdot 360° + 225°) = \operatorname{tg} 225° = \operatorname{tg}(180° + 45°) = \operatorname{tg} 45° = 1$;

3) $-\sin\left(\frac{17}{3}\pi\right) = -\sin(3 \cdot 2\pi - \frac{\pi}{3}) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ : 1) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) 1; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

ПРИМЕР

5. Упростим выражение:

1) $\operatorname{ctg}(-5\pi - \alpha)\sin(\alpha - 3\pi)$;

2) $\frac{\sin(2\pi - \alpha)\operatorname{tg}(\pi + \alpha)\operatorname{ctg}(-\alpha - \pi)}{\cos(\pi - \alpha)\operatorname{tg}(3\pi - \alpha)}$.

Решение .

1) $\operatorname{ctg}(-5\pi - \alpha)\sin(\alpha - 3\pi) = \operatorname{ctg}[-(5\pi + \alpha)]\sin[-(3\pi - \alpha)] =$
$= -\operatorname{ctg}(5\pi + \alpha)[-\sin(3\pi - \alpha)] = -\operatorname{ctg}(\pi + \alpha)[-\sin(\pi - \alpha)] =$
$= -\operatorname{ctg}\alpha(-\sin\alpha) = \cos\alpha$.

2) $\frac{\sin(2\pi - \alpha)\operatorname{tg}(\pi + \alpha)\operatorname{ctg}(-\alpha - \pi)}{\cos(\pi - \alpha)\operatorname{tg}(3\pi - \alpha)} = \frac{-\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha[-\operatorname{ctg}(\pi + \alpha)]}{-\cos\alpha\operatorname{tg}(\pi - \alpha)} =$
$= \frac{-\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha(-\operatorname{ctg}\alpha)}{-\cos\alpha(-\operatorname{tg}\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 1$.

Ответ : 1) $\cos\alpha$; 2) 1.

?

1. Какие формулы носят название *формул приведения* ?
2. Надо ли запоминать отдельно каждую формулу приведения?
3. В каком случае при использовании формул приведения тригонометрическая функция меняется на противоположную функцию?

Упражнения

А

23.1. Приведите к тригонометрической функции угла α выражение:

1) $\sin(90° - \alpha)$; 2) $\cos(90° - \alpha)$; 3) $\sin(180° - \alpha)$;
4) $\cos(180° - \alpha)$; 5) $\sin(270° + \alpha)$; 6) $\cos(270° - \alpha)$;
7) $\sin(360° - \alpha)$; 8) $\cos(360° + \alpha)$; 9) $\operatorname{ctg}(180° - \alpha)$;
10) $\operatorname{tg}(90° + \alpha)$; 11) $\operatorname{ctg}(270° - \alpha)$; 12) $\operatorname{tg}(360° - \alpha)$.

23.2. Найдите значение выражения:

1) $\sin 225°$; 2) $\sin 330°$; 3) $\cos 210°$;

4) $\mathrm{tg} 225°$; 5) $\cos 120°$; 6) $\mathrm{ctg} 150°$.

23.3. Преобразуйте выражение:

1) $\sin(-225°)$; 2) $\sin\frac{7\pi}{6}$; 3) $\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$; 4) $\mathrm{tg}(-240°)$;

5) $\cos\frac{25\pi}{3}$; 6) $\mathrm{ctg}\left(-\frac{9\pi}{4}\right)$; 7) $\sin\left(-\frac{17\pi}{6}\right)$; 8) $\mathrm{tg}\left(-\frac{19\pi}{6}\right)$.

Упростите выражения **(23.4—23.5)**:

23.4. 1) $1-\sin^2(270°+\alpha)$; 2) $1-\cos^2(270°-\alpha)$;

3) $1-\sin^2(360°-\alpha)$; 4) $1-\cos^2(360°+\alpha)$;

5) $1+\mathrm{ctg}^2(270°-\alpha)$; 6) $1+\mathrm{tg}^2(360°-\alpha)$.

23.5. 1) $\sin(90°-\alpha)+\cos(180°+\alpha)+\mathrm{ctg}(270°-\alpha)+\mathrm{tg}(360°-\alpha)$;

2) $\cos(90°+\alpha)-\sin(180°+\alpha)+\mathrm{ctg}(270°+\alpha)+\mathrm{tg}(360°+\alpha)$;

3) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)-\sin(\pi+\alpha)+\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\mathrm{tg}(2\pi+\alpha)$;

4) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)-\cos(\pi+\alpha)+\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)+\mathrm{ctg}(2\pi+\alpha)$.

23.6. Приведите тригонометрическую функцию к функции угла α, где α $(0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4})$:

1) $\sin 545°$; 2) $\cos 945°$; 3) $\mathrm{tg}\ 1545°$;

4) $\mathrm{ctg}\ 545°$; 5) $\sin\frac{9\pi}{4}$; 6) $\cos\frac{91\pi}{5}$;

7) $\mathrm{tg}\frac{29\pi}{3}$; 8) $\mathrm{ctg}\frac{39\pi}{7}$; 9) $\sin\left(-\frac{49\pi}{4}\right)$;

10) $\cos\left(-\frac{419\pi}{5}\right)$; 11) $\sin(-2489°)$; 12) $\mathrm{tg}(-4789°)$.

23.7. Найдите значение выражения:

1) $\mathrm{ctg}(-45°)\cdot\cos 225°\cdot\sin 150°$; 2) $\mathrm{tg}(-135°)\cdot\cos 300°\cdot\sin 210°$;

3) $\mathrm{ctg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\cdot\cos 150°\cdot\sin\frac{5\pi}{3}$; 4) $\mathrm{ctg}(-225°)\cdot\cos\frac{8\pi}{3}\cdot\sin 330°$.

23.8. Докажите тождество:

1) $\cos^2(180°-x)+\cos^2(270°+x)=1$;

2) $\cos^2(720°-x)+\sin^2(540°+x)=1$;

3) $\operatorname{tg}(2\pi - x) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -1;$

4) $\operatorname{ctg}(6\pi - x)\operatorname{ctg}\left(\frac{9\pi}{2} - x\right) = -1.$

B

23.9. Найдите знак значения выражения:

1) $\sin 135° \cdot \cos 210° \cdot \operatorname{tg} 405° \cdot \operatorname{ctg} 330° \cdot \cos 560°;$

2) $\sin 425° \cdot \cos 250° \cdot \operatorname{ctg} 420° \cdot \operatorname{tg} 330° \cdot \sin 750°;$

3) $\sin\frac{7\pi}{3} \cdot \cos\frac{2\pi}{3} \cdot \operatorname{tg}\frac{9\pi}{4} \cdot \operatorname{ctg}\frac{13\pi}{6} \cdot \cos\frac{7\pi}{4};$

4) $\sin\frac{5\pi}{3} \cdot \cos\frac{7\pi}{6} \cdot \operatorname{tg}\frac{11\pi}{4} \cdot \operatorname{ctg}\frac{8\pi}{3} \cdot \sin\frac{11\pi}{6}.$

23.10. Упростите выражение:

1) $\frac{\sin(-\alpha) \cdot \operatorname{ctg}(\pi - \alpha)}{\cos(360° - \alpha) \cdot \operatorname{tg}(\pi + \alpha)};$

2) $\frac{\sin(\pi + \alpha) \cdot \operatorname{ctg}(2\pi - \alpha)}{\cos(720° - \alpha) \cdot \operatorname{tg}(2\pi + \alpha)};$

3) $\frac{\operatorname{tg}(-\alpha) \cdot \cos(\pi - \alpha)}{\sin(\pi - \alpha) \cdot \operatorname{ctg}(\pi + \alpha)}.$

23.11. Найдите значение выражения:

1) $\sin(-135°) \cdot \cos 390° \cdot \operatorname{tg} 405° \cdot \operatorname{ctg}(-330°);$

2) $\sin(-225°) \cdot \cos(-480°) \cdot \operatorname{ctg}(-420°) \cdot \operatorname{tg} 300°.$

23.12. Докажите тождество:

1) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}(180° - x) + \operatorname{ctg}(360° - x) = \operatorname{ctg}(180° - x);$

2) $\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg}(90° + x) + \operatorname{tg}(360° + x) = \operatorname{ctg}(270° - x);$

3) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \beta\right) \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) + \sin(180° - \beta) + \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \beta\right) = \operatorname{tg}\beta.$

23.13. Упростите выражение:

1) $\sin(2\pi - x) \cdot \cos(90° + x) - \cos(2\pi + x) \cdot \sin(270° - x) - 1;$

2) $\sin(4\pi - x) \cdot \cos(270° - x) + \cos(\pi + x) \cdot \sin(270° + x) - 1.$

23.14. Найдите значение выражения:

1) $\frac{\operatorname{tg}\frac{5\pi}{3} \cdot \cos\frac{\pi}{3}}{\sin 30°};$ 2) $\frac{\operatorname{ctg} 135° \cdot \sin 225°}{\cos\frac{\pi}{3}};$

3) $\dfrac{\operatorname{tg}315^\circ\cdot\sin135^\circ}{\cos^2\dfrac{\pi}{6}}$; 4) $\dfrac{\operatorname{tg}315^\circ\cdot\sin135^\circ}{\cos^2\dfrac{\pi}{6}}$.

23.15. Упростите выражение:

1) $\dfrac{\sin(-\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)}-\dfrac{\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{1+\sin\alpha}$; 2) $\dfrac{\cos(2\pi-\alpha)}{\sin(-\alpha)}+\dfrac{\sin(2\pi-\alpha)}{1+\cos(-\alpha)}$;

3) $\operatorname{tg}^2(270^\circ+\alpha)\cdot\sin^2(180^\circ+\alpha)+\operatorname{tg}315^\circ$;

4) $\operatorname{ctg}^2(360^\circ-\alpha)\cdot\cos^2(270^\circ+\alpha)+\sin270^\circ$.

23.16. Найдите числовое значение выражения:

1) $(\sin315^\circ-\cos315^\circ)^2$; 2) $(\sin225^\circ-\cos225^\circ)^2$;
3) $(\sin135^\circ+\cos135^\circ)^2$; 4) $(\sin315^\circ+\cos315^\circ)^2$.

23.17. Докажите, что верна формула:

1) $\sin(45^\circ+\alpha)=\cos(45^\circ-\alpha)$; 2) $\cos(45^\circ+\alpha)=\sin(45^\circ-\alpha)$;
3) $\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)=\operatorname{ctg}(45^\circ-\alpha)$; 4) $\operatorname{ctg}(45^\circ+\alpha)=\operatorname{tg}(45^\circ-\alpha)$;
5) $\sin(60^\circ-\alpha)=\cos(30^\circ+\alpha)$; 6) $\operatorname{ctg}(80^\circ-\alpha)=\operatorname{tg}(10^\circ-\alpha)$.

23.18. Докажите тождество:

1) $\dfrac{\operatorname{tg}(\pi-x)}{\cos(\pi+x)}\cdot\dfrac{\sin(270^\circ+x)}{\operatorname{tg}(270^\circ+x)}=\operatorname{tg}^2x$;

2) $\dfrac{\sin(\pi-x)}{\operatorname{tg}(\pi+x)}\cdot\dfrac{\operatorname{ctg}(270^\circ+x)}{\operatorname{ctg}(270^\circ+x)}\cdot\dfrac{\cos(2\pi-x)}{\sin x}=\sin x$.

23.19. Упростите и найдите значение выражения:

1) $\operatorname{tg}(\pi-\alpha)-2\operatorname{tg}(-\alpha)$ при $\alpha=-45^\circ$;

2) $\operatorname{ctg}(2\pi-\alpha)-2\operatorname{tg}(-2\alpha)$ при $\alpha=30^\circ$;

3) $\cos(3\pi-\alpha)-4\sin(-\alpha)$ при $\alpha=-45^\circ$;

4) $\cos(3\pi-\alpha)-3\sin(-\alpha)$ при $\alpha=-30^\circ$.

23.20. Упростите выражение:

1) $\dfrac{(1-\cos(2\pi-\alpha))\cdot(1+\cos(2\pi+\alpha))}{\sin(\pi-\alpha)}$;

2) $\dfrac{(1+\sin(2\pi-\alpha))\cdot(1+\cos(2\pi+\alpha))}{\cos(\pi-\alpha)}$;

3) $\dfrac{\operatorname{tg}(\pi-\alpha)\cdot\cos(\pi+\alpha)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}$;

4) $\dfrac{\operatorname{ctg}(\pi+\alpha)\cdot\sin(\pi+\alpha)}{\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)}$.

23.21. Докажите тождество:

1) $\dfrac{\cos^2(\pi+\alpha)}{1-\sin\alpha}-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=1;$

2) $\dfrac{\sin^2(\pi+\alpha)}{1-\cos\alpha}-\cos(2\pi-\alpha)=1;$

3) $\dfrac{\cos^2(2\pi-\alpha)}{1+\sin(-\alpha)}+\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)=1;$

4) $\dfrac{\sin^2(3\pi-\alpha)}{1-\cos(-\alpha)}+\cos(5\pi-\alpha)=1.$

C

23.22. Вычислите значение выражения:

1) $\sin135^\circ\cdot\cos210^\circ\cdot \mathrm{tg}405^\circ\cdot \mathrm{ctg}330^\circ;$

2) $\sin225^\circ\cdot\cos150^\circ\cdot \mathrm{ctg}420^\circ\cdot \mathrm{tg}300^\circ;$

3) $\sin\dfrac{\pi}{3}\cdot\cos\dfrac{2\pi}{3}\cdot \mathrm{tg}\dfrac{7\pi}{4}\cdot \mathrm{ctg}\dfrac{13\pi}{6};$

4) $\sin\dfrac{4\pi}{3}\cdot\cos\dfrac{5\pi}{6}\cdot \mathrm{tg}\dfrac{11\pi}{4}\cdot \mathrm{ctg}\dfrac{19\pi}{3}.$

23.23. Докажите, что если A, B, C — углы треугольника, то верно равенство:

1) $\sin(A+B)=\sin C;$ 2) $\sin\dfrac{A+B}{2}=\cos\dfrac{C}{2};$

3) $\cos(A+B)=-\cos C;$ 4) $\mathrm{tg}\dfrac{A+B}{2}=\mathrm{ctg}\dfrac{C}{2}.$

23.24. Найдите значение выражения:

1) $\mathrm{tg}15^\circ\cdot \mathrm{tg}210^\circ\cdot \mathrm{tg}75^\circ\cdot \mathrm{ctg}330^\circ;$

2) $\mathrm{ctg}35^\circ\cdot \mathrm{ctg}55^\circ\cdot \mathrm{tg}420^\circ\cdot \mathrm{ctg}300^\circ;$

3) $\sin\dfrac{4\pi}{3}\cdot\cos\dfrac{2\pi}{3}\cdot \mathrm{ctg}\dfrac{7\pi}{4}\cdot \mathrm{tg}\dfrac{13\pi}{6};$

4) $\sin\dfrac{5\pi}{3}\cdot\cos\dfrac{5\pi}{6}\cdot \mathrm{ctg}\dfrac{11\pi}{4}\cdot \mathrm{tg}\dfrac{19\pi}{3}.$

23.25. Упростите выражение:

1) $\mathrm{tg}1^\circ\cdot \mathrm{tg}2^\circ\cdot\ldots\cdot \mathrm{tg}88^\circ\cdot \mathrm{tg}89^\circ;$

2) $\mathrm{ctg}1^\circ\cdot \mathrm{ctg}2^\circ\cdot\ldots\cdot \mathrm{ctg}88^\circ\cdot \mathrm{ctg}89^\circ;$

3) $\mathrm{tg}1^\circ\cdot \mathrm{tg}3^\circ\cdot\ldots\cdot \mathrm{tg}87^\circ\cdot \mathrm{tg}89^\circ;$

4) $\mathrm{ctg}2^\circ\cdot \mathrm{ctg}4^\circ\cdot\ldots\cdot \mathrm{ctg}86^\circ\cdot \mathrm{ctg}88^\circ.$

23.26. Докажите тождество:

1) $\mathrm{ctg}^3\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}^3\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha + 2 = (\mathrm{tg}(\pi + \alpha) + \mathrm{ctg}(2\pi + \alpha))^2$;

2) $\sin^3\alpha \cdot (1 + \mathrm{tg}\,\alpha) + \cos^3\alpha \cdot (1 + \mathrm{ctg}\,\alpha) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$;

3) $\mathrm{ctg}^2(3\pi + \beta) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \cdot \frac{1}{\cos\beta} = \frac{1}{\sin^2\beta}$.

23.27. Вычислите:

1) $\cos 20° + \cos 40° + \cos 60° + \ldots + \cos 160° + \cos 180°$;

2) $\mathrm{tg}\,20° + \mathrm{tg}\,40° + \mathrm{tg}\,60° + \ldots + \mathrm{tg}\,160° + \mathrm{tg}\,180°$;

3) $\mathrm{ctg}\,15° + \mathrm{ctg}\,30° + \mathrm{ctg}\,45° + \ldots + \mathrm{ctg}\,150° + \mathrm{ctg}\,165°$.

ПОВТОРИТЕ

23.28. Известно, что $90° < \alpha < 180°$. Вычислите:

1) $\sin\alpha$ и $\mathrm{ctg}\,\alpha$, если $\cos\alpha = -0{,}8$;

2) $\cos\alpha$ и $\mathrm{ctg}\,\alpha$, если $\sin\alpha = 0{,}6$;

3) $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, если $\mathrm{tg}\,\alpha = -4$;

4) $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, если $\mathrm{ctg}\,\alpha = -6$.

23.29. Постройте график функции:

1) $y = 3x^2 - 2|x|$; 2) $y = -x^2 - 2|x|$;

3) $y = x^2 - 2|x - 1|$; 4) $y = x^2 - |x + 2|$.

23.30. Из населенных пунктов A и B, длина пути между которыми по шоссе 75 км, отправились одновременно навстречу друг другу автобус и легковой автомобиль и встретились через полчаса. Автобус прибыл в пункт B на 25 мин позже, чем легковой автомобиль в пункт A. Найдите скорости автобуса и автомобиля.

23.31. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} x^2 - 3x - 18 \leqslant 0, \\ |x - 3| > 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + x - 12 \leqslant 0, \\ |x + 5| \leqslant 6; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x^2 + 3x - 14 < 0, \\ |x - 1| \geqslant 2. \end{cases}$

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

23.32. Упростите выражение:

1) $\cos(90° + \alpha) - 2\sin(180° + \alpha) + \mathrm{ctg}(270° + \alpha) + \mathrm{tg}(360° + \alpha)$;

2) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) - \sin(2\pi - \alpha) + \mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \mathrm{ctg}(2\pi + \alpha)$.

23.33. Постройте единичную окружность и вектор OA, где точка A лежит на окружности, составляющий с положительным направлением оси Ox угол в $60°$, $120°$, $210°$, $270°$.

Опорные понятия для овладения новыми знаниями

Числовая окружность, начальный и подвижный радиусы, основные тригонометрические тождества, формулы приведения, вектор, скалярное произведение векторов.

§ 24. ФОРМУЛЫ СИНУСА И КОСИНУСА СУММЫ И РАЗНОСТИ ДВУХ УГЛОВ

Ключевые понятия

Синус, косинус

Вы научитесь выводить и применять тригонометрические формулы суммы и разности углов.

Формулы, позволяющие выразить тригонометрические функции суммы и разности двух углов через тригонометрические функции этих же углов, называются ***формулами сложения***.

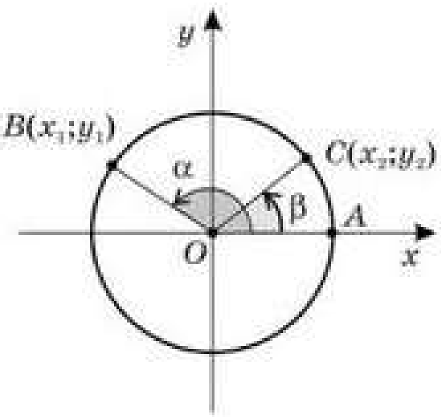


Рис. 75

Вначале выводим формулу косинуса разности двух углов через тригонометрические функции тех же углов. Для этого рассмотрим окружность, центр которой расположен в начале прямоугольной системы координат и с радиусом $R = OA$ (рис. 75).

Начальный радиус OA повернем вокруг точки O на углы α и β. В результате получим соответствующие радиусы OB и OC.

Из курса геометрии вам известно: если точка B имеет координаты x_1 и y_1, а точка C имеет координаты x_2 и y_2, то векторы $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$ также имеют, соответственно, те же координаты, т. е. $\overline{OB} = (x_1; y_1)$ и $\overline{OC} = (x_2; y_2)$.

Найдем скалярное произведение векторов $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$. Получим равенство:

$$\overline{OB} \cdot \overline{OC} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2. \qquad (1)$$

По определению косинуса и синуса углов α и β получим: $\cos\alpha = \frac{x_1}{R}$, $\sin\alpha = \frac{y_1}{R}$, $\cos\beta = \frac{x_2}{R}$, $\sin\beta = \frac{y_2}{R}$ (рис. 75). Выразим из этих равенств x_1, y_1, x_2, y_2.

Получим: $x_1 = R\cos\alpha$, $y_1 = R\sin\alpha$, $x_2 = R\cos\beta$, $y_2 = R\sin\beta$.

Подставляя значения x_1, y_1, x_2, y_2 в равенство (1) получим $\overline{OB} \cdot \overline{OC} = R^2 \cos\alpha\cos\beta + R^2 \sin\alpha \sin\beta = R^2 (\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)$.

Итак,

$$\overline{OB} \cdot \overline{OC} = R^2 (\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta). \qquad (2)$$

Используя теорему о скалярном произведении двух векторов, левую часть равенства (2) запишем в виде:

$$\overline{OB} \cdot \overline{OC} = |\overline{OB}| \cdot |\overline{OC}| \cos \angle BOC. \qquad (3)$$

Угол между векторами $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$ есть угол BOC или угол, равный $\alpha - \beta$ (рис. 76). Но в общем виде угол BOC между векторами $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$ может быть равным или $\alpha - \beta$, или $2\pi - (\alpha - \beta)$, или может отличаться от них на кратное число полного угла.

Во всех указанных выше случаях получим $\cos BOC = \cos(\alpha - \beta)$.

Используя последнее равенство и учитывая, что $|\overline{OB}| = R$, $|\overline{OC}| = R$, из равенства (3) можно записать:

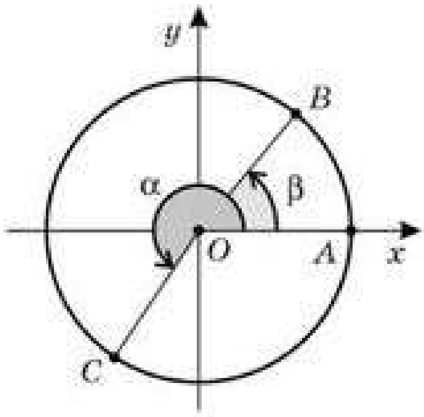


Рис. 76

$$\overline{OB} \cdot \overline{OC} = R \cdot R \cdot \cos(\alpha - \beta) \text{ или } \overline{OB} \cdot \overline{OC} = R^2 \cdot \cos(\alpha - \beta). \qquad (4)$$

В равенствах (2) и (4) равны их левые части, значит и равны их правые части: $R^2 \cdot \cos(\alpha - \beta) = R^2 (\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta)$. Упростив это выражение получим формулу:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta. \qquad (5)$$

Формулу (5) называют *формулой косинуса разности.*

> *Косинус разности двух углов равен произведению косинусов этих углов плюс произведение синусов этих углов.*

Чтобы получить формулу косинуса суммы двух углов, т. е. *косинуса суммы* , используем формулу (5) и представим сумму $\alpha + \beta$ в виде разности $\alpha - (-\beta)$. Получим $\cos(\alpha + \beta) = \cos[\alpha - (-\beta)] = \cos\alpha \cdot \cos(-\beta) + \sin\alpha \cdot \sin(-\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$, так как $\cos(-\beta) = \cos\beta$, $\sin(-\beta) = -\sin\beta$, по свойствам четности косинуса и нечетности синуса.

Таким образом, получили формулу:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta. \qquad (6)$$

Формулу (6) называют *формулой косинуса суммы.*

Косинус суммы двух углов равен произведению косинусов этих углов минус произведение синусов этих углов.

Выведем формулы синуса суммы и разности двух углов. Для этого используем формулу (5) и формулы приведения.

$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right]=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right]=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+$ $+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$, так как по формулам приведения $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$.

Следовательно,

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta. \qquad (7)$$

Формулу (7) называют *формулой синуса суммы*.

Синус разности двух углов равен произведению синуса первого угла на косинус второго плюс произведение косинуса первого угла на синус второго.

Выведем формулу синуса разности двух углов, используя формулу (7).

$\sin(\alpha-\beta)=\sin[\alpha+(-\beta)]=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-$ $-\cos\alpha\sin\beta$, так как $\cos(-\beta)=\cos\beta$, $\sin(-\beta)=-\sin\beta$ по свойствам четности косинуса и нечетности синуса.

Следовательно,

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta. \qquad (8)$$

Формулу (8) называют *формулой синуса разности*.

Синус разности двух углов равен произведению синуса первого угла на косинус второго минус произведение косинуса первого угла на синус второго.

ПРИМЕР

1. Найдем значение $\cos 105°$, не используя ни таблицу, ни микрокалькулятор.

Решение. Представим угол $105°$ в виде суммы: $60°+45°$.

Тогда $\cos 105°=\cos(60°+45°)=\cos 60°\cos 45°-\sin 60°\sin 45°=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-$ $-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{3})$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{3})$.

ПРИМЕР

2. Упростим выражение $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$.

Решение. Используем формулы синуса суммы и разности. В результате получим:

$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=$
$=2\cos\alpha\sin\beta$.

Ответ: $2\cos\alpha\sin\beta$.

1. Для каких углов α и β можно использовать формулы синуса и косинуса суммы и разности этих углов?
2. Назовите формулы сложения.

Упражнения

А

24.1. Упростите выражение:

1) $\sin(60°+\alpha)+\sin(\alpha-60°)$; 2) $\cos(60°+\alpha)+\cos(\alpha-60°)$;
3) $\sin(30°+\alpha)-\sin(30°-\alpha)$; 4) $\cos(30°+\alpha)-\cos(30°-\alpha)$;
5) $\cos2\varphi\cos3\varphi+\sin2\varphi\sin3\varphi$; 6) $\sin\gamma\cos2\gamma-\cos\gamma\sin2\gamma$;
7) $\cos\frac{1}{3}\alpha\cos\frac{2}{3}\alpha-\sin\frac{1}{3}\alpha\sin\frac{2}{3}\alpha$; 8) $\sin\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{3}{2}\gamma+\cos\frac{1}{2}\gamma\sin\frac{3}{2}\gamma$.

24.2. Найдите значение выражения:

1) $\sin20°\cos10°+\cos20°\sin10°$; 2) $\cos50°\cos5°+\sin50°\sin5°$;
3) $\sin71°\cos11°-\cos71°\sin11°$; 4) $\cos25°\cos65°-\sin25°\sin65°$.

24.3. Вычислите:

1) $\cos\frac{8\pi}{15}\cdot\cos\frac{\pi}{5}+\sin\frac{8\pi}{15}\cdot\sin\frac{\pi}{5}$;

2) $\cos\frac{1}{10}\pi\cdot\cos\frac{2}{5}-\sin\frac{1}{10}\pi\cdot\sin\frac{2}{5}\pi$;

3) $\sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{\pi}{12}+\cos\frac{\pi}{6}\cdot\sin\frac{\pi}{12}$;

4) $\sin\frac{1}{9}\pi\cdot\cos\frac{4}{9}\pi-\cos\frac{1}{9}\pi\cdot\sin\frac{4}{9}\pi$.

24.4. Известно, что α и β — углы I четверти и $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\beta=\frac{1}{3}$.

Вычислите:

1) $\sin(\alpha+\beta)$; 2) $\sin(\alpha-\beta)$; 3) $\cos(\alpha+\beta)$; 4) $\cos(\alpha-\beta)$.

24.5. Используя формулы сложения, найдите значение выражения:

1) $\sin105°$; 2) $\cos105°$; 3) $\sin165°$; 4) $\cos165°$.

24.6. С помощью формул сложения докажите тождество:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$; 2) $\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$;

3) $\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=-\sin\alpha$; 4) $\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$.

24.7. Выразите через тригонометрические функции угла α выражение:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$; 2) $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$; 3) $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$;

4) $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$; 5) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$; 6) $\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$.

24.8. Используя формулы сложения, вычислите:

1) $\sin 15°$; 2) $\sin 75°$; 3) $\cos 15°$; 4) $\cos 75°$;
5) $\operatorname{tg} 15°$; 6) $\operatorname{tg} 75°$; 7) $\operatorname{ctg} 15°$; 8) $\operatorname{ctg} 75°$.

24.9. Найдите значение выражения:

1) $\sin(45°-\alpha)$, если $\sin\alpha=0{,}3$ и $0°<\alpha<90°$;
2) $\sin(60°+\alpha)$, если $\cos\alpha=0{,}4$ и $0°<\alpha<90°$;
3) $\cos(45°-\alpha)$, если $\sin\alpha=0{,}2$ и $0°<\alpha<90°$;
4) $\sin(30°+\alpha)$, если $\cos\alpha=0{,}1$ и $0°<\alpha<90°$.

B

24.10. Упростите выражение:

1) $2\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)-\sqrt{3}\sin\alpha$; 2) $\frac{1}{2}\cos\alpha-\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$;

3) $\sqrt{2}\sin\alpha-2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$; 4) $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha$.

24.11. Упростите выражение:

1) $\sin(\alpha+\beta)-\sin\beta\cos\alpha$; 2) $\sin\alpha\sin\beta+\cos(\alpha+\beta)$;
3) $\cos(\alpha-\beta)-\cos\alpha\cos\beta$; 4) $\cos\alpha\sin\beta+\sin(\alpha-\beta)$.

Найдите значения выражений (**24.12—24.13**):

24.12. 1) $\sin(45°-\alpha)$, если $\cos\alpha=-0{,}5$ и $90°<\alpha<180°$;

2) $\sin(60°+\alpha)$, если $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $90°<\alpha<180°$;

3) $\cos(60°+\alpha)$, если $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $90°<\alpha<180°$;

4) $\cos(30°-\alpha)$, если $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $90°<\alpha<180°$.

24.13. 1) $\dfrac{\sin\dfrac{3\pi}{20}\cdot\cos\dfrac{21\pi}{10}+\cos\dfrac{3\pi}{20}\cdot\sin\dfrac{\pi}{10}}{\cos\dfrac{7\pi}{24}\cdot\cos\dfrac{\pi}{8}+\sin\dfrac{7\pi}{8}\cdot\sin\dfrac{7\pi}{24}}$;

2) $\dfrac{\sin\dfrac{15\pi}{7}\cdot\sin\dfrac{4\pi}{21}+\cos\dfrac{4\pi}{21}\cdot\cos\dfrac{6\pi}{7}}{\sin\dfrac{7\pi}{24}\cdot\cos\dfrac{\pi}{24}-\cos\dfrac{7\pi}{24}\cdot\sin\dfrac{23\pi}{24}}$.

24.14. Упростите выражение:

1) $\cos\beta+\sin\beta-\sqrt{2}\sin(45^\circ+\beta)$;

2) $\cos\beta+\sqrt{3}\sin\beta-2\cos(60^\circ-\beta)$;

3) $\cos\beta-\sin\beta-\sqrt{2}\sin(45^\circ-\beta)$;

4) $\sqrt{3}\cos\beta+\sin\beta-2\cos(30^\circ-\beta)$.

24.15. Докажите тождество:

1) $\sin(\alpha+\beta)+\sin(-\alpha)\cos\beta=\cos\alpha\sin\beta$;

2) $\cos(\alpha-\beta)-\sin(-\alpha)\sin(-\beta)=\cos\alpha\cos\beta$;

3) $\sin(\alpha-\beta)+\cos(-\alpha)\sin(-\beta)=\sin\alpha\cos\beta$;

4) $\cos(\alpha+\beta)-\cos(-\alpha)\cos(-\beta)=-\sin\alpha\cos\beta$;

5) $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta$;

6) $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$;

7) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$;

8) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$.

24.16. Упростите выражение:

1) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}$; 2) $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}$;

3) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}$; 4) $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}$.

C

24.17. Докажите тождество:

1) $\cos\alpha\cos(\beta+\gamma)-\cos\beta\cos(\alpha+\gamma)=\sin\gamma\sin(\alpha-\beta)$;

2) $\sin(\alpha-\beta)\sin\gamma+\sin(\beta-\gamma)\sin\alpha=\sin(\alpha-\gamma)\sin\beta$.

24.18. Докажите, что если α, β и γ — углы треугольника, то верно равенство:

1) $\sin\alpha=\sin\beta\sin\gamma+\cos\beta\sin\gamma$; 2) $\cos\alpha=\sin\beta\sin\gamma-\cos\beta\cos\gamma$.

24.19. Значения синусов двух острых углов треугольника равны 0,6 и 0,8. Найдите значение синуса третьего угла треугольника.

24.20. Значения косинусов двух углов треугольника равны $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{3}$. Найдите значение косинуса третьего угла треугольника.

24.21. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения:
1) $\sin\alpha + \cos\alpha$; 2) $\sin\alpha - \cos\alpha$; 3) $\sqrt{3}\cos\gamma - \sin\gamma$;
4) $\sin\beta + \sqrt{3}\cos\beta$; 5) $2\sin\alpha - 3\cos\alpha$; 6) $4\cos\gamma + 5\sin\gamma$.

ПОВТОРИТЕ

24.22. Решите систему уравнений:
1) $\begin{cases} x + y - 5xy = 0, \\ x - y - xy = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - x + 1 = y, \\ y^2 - y + 1 = x. \end{cases}$

24.23. 1) Из 40 т железной руды выплавляют 20 т стали, содержащей 6% примесей. Найдите процент примесей в руде.
2) Свежие грибы содержат 90% влаги, сушеные — 12%. Сколько сушеных грибов получится из 20 кг свежих?

24.24. В одной координатной плоскости постройте графики функций и запишите координаты точек их пересечения:
1) $y = \frac{3}{x}$ и $y = x^2 - 3x$; 2) $y = \frac{1}{x}$ и $y = -0{,}5x^3$.

24.25. На рисунке 77 изображен график функции $f(x) = ax^3 + bx + c$.
Используя этот график:
1) запишите координаты точки, которая является центром симметрии графика функции;
2) запишите множество значений функции, если переменная $x \in [-2;\ 2]$;
3) найдите значение выражения $2f(-2) - 3f(0) + 2f(1) + 2f(2)$;
4) найдите знак выражения ac для функции $f(x) = ax^3 + bx + c$.

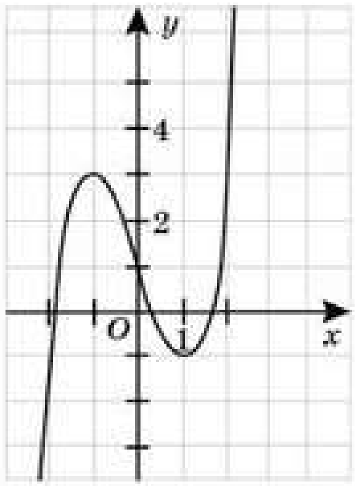


Рис. 77

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

24.26. Докажите тождество:
1) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}$; 2) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin\beta \cdot \cos\alpha}$.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

24.27. Упростите выражение:

1) $1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta$; 2) $\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta - 1$.

24.28. Найдите значение $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{2}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Опорные понятия для овладения новыми знаниями

Основные тригонометрические тождества, синус и косинус суммы и разности углов.

§ 25. ФОРМУЛЫ ТАНГЕНСА И КОТАНГЕНСА СУММЫ И РАЗНОСТИ ДВУХ УГЛОВ

Ключевые понятия

Тангенс, котангенс

Вы научитесь выводить и применять формулы тангенса и котангенса суммы и разности углов.

Вывести формулы сложения для тангенса и котангенса можно с помощью формул (5) и (8) из § 24, а также формул, через которые тангенс и котангенс выражаются через синус и косинус.

Для примера выведем формулу тангенса суммы:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}.$$

Разделим числитель и знаменатель полученной дроби на произведение $\cos\alpha \cdot \cos\beta$, предполагая, что $\cos\alpha \neq 0$ и $\cos\beta \neq 0$.

Тогда получим:

$$\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 - \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}.$$

Значит,

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}. \quad (1)$$

Формулу (1) называют *формулой тангенса суммы*.

Тангенс суммы двух углов равен сумме тангенсов, деленной на разность единицы и произведения тангенсов этих углов.

Докажите, что верна формула тангенса разности:

$$\mathrm{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta}{1 + \mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta} \qquad (2)$$

Объединив формулы (1) и (2), пишут:

$$\mathrm{tg}\ (\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha \pm \mathrm{tg}\beta}{1 \mp \mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}. \qquad (3)$$

Докажите двумя способами, что верна формула котангенса суммы и разности:

$$\mathrm{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{1 - \mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta} \text{ и } \mathrm{ctg}\ (\alpha - \beta) = \frac{1 + \mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}{\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta} \qquad (4)$$

или $\mathrm{ctg}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{1 \mp \mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}{\mathrm{tg}\alpha \pm \mathrm{tg}\beta}$.

ПРИМЕР

Найдем значение тангенса суммы углов α и β, если $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{2}$, $\mathrm{tg}\ \beta = \frac{1}{3}$, α и β — острые углы.

Решение. Для нахождения значения тангенса суммы $\alpha + \beta$ воспользуемся формулой (1), тогда:

$$\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{1 - \mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{6}}{1 - \frac{1}{6}} = 1.$$

$\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = 1$, отсюда следует $\alpha + \beta = 45°$.

Ответ : 45°.

1. Для каких углов α и β можно использовать формулы тангенса и котангенса суммы и разности этих углов?
2. Что означают знаки $\pm$ и $\mp$ в формулах суммы и разности тангенсов двух углов? Как их используют при применении формулы с этими знаками?

Упражнения

А

25.1. Известно, что $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{3}$, $\mathrm{tg}\,\beta = \frac{3}{5}$. Найдите:

1) $\mathrm{tg}(\alpha + \beta)$; 2) $\mathrm{tg}(\alpha - \beta)$; 3) $\mathrm{ctg}(\alpha + \beta)$; 4) $\mathrm{ctg}(\alpha - \beta)$.

25.2. Найдите значения: $\mathrm{ctg}(\alpha + \beta)$ и $\mathrm{ctg}(\alpha - \beta)$, если $\mathrm{ctg}\ \alpha = 2$ и $\mathrm{ctg}\,\beta = -1{,}6$.

25.3. Используя формулы сложения для тангенса и котангенса, найдите значения:

1) $\operatorname{tg}15°$; 2) $\operatorname{ctg}15°$; 3) $\operatorname{tg}75°$;
4) $\operatorname{tg}105°$; 5) $\operatorname{ctg}75°$; 6) $\operatorname{ctg}105°$.

25.4. Выразите через тригонометрические функции угла α:

1) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$; 2) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$; 3) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$;

4) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$; 5) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$; 6) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$.

25.5. Найдите значение выражения:

1) $\dfrac{\operatorname{tg}20° + \operatorname{tg}25°}{1 - \operatorname{tg}20° \cdot \operatorname{tg}25°}$; 2) $\dfrac{\operatorname{tg}70° - \operatorname{tg}10°}{1 + \operatorname{tg}70° \cdot \operatorname{tg}10°}$;

3) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{7\pi}{24} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}{1 + \operatorname{tg}\frac{7\pi}{24} \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}$; 4) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{20} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{5}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{20} \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{5}}$.

B

25.6. Упростите выражение:

1) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$;

2) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) \cdot \operatorname{tg}(\alpha-\beta) \cdot (1 - \operatorname{tg}^2\alpha \cdot \operatorname{tg}^2\beta)$.

25.7. Докажите тождество:

1) $\dfrac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta) - \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}(\alpha+\beta)} = \operatorname{tg}\beta$;

2) $\operatorname{tg}(\alpha-\beta) + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta$.

25.8. Упростите выражение:

1) $\dfrac{\operatorname{tg}^2 25° - \operatorname{tg}^2 15°}{1 - \operatorname{tg}^2 25° \cdot \operatorname{tg}^2 15°}$; 2) $\dfrac{\operatorname{tg}^2 1{,}8 - \operatorname{tg}^2 1{,}2}{1 - \operatorname{tg}^2 1{,}8 \cdot \operatorname{tg}^2 1{,}2}$.

25.9. Преобразуйте выражение:

1) $\operatorname{tg}(45°+\alpha) \cdot \operatorname{tg}(45°-\alpha)$;

2) $\operatorname{tg}(\alpha+60°) \cdot \operatorname{tg}(\alpha-60°)$;

3) $\dfrac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha} - \operatorname{tg}(45°-\alpha)$;

4) $\operatorname{tg}(45°+\alpha) - \dfrac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}$.

25.10. Докажите тождество:

1) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta} - \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)} + \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta} = \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta$;

2) $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta} + \dfrac{\sin(\beta-x)}{\sin\beta\sin x} + \dfrac{\sin(x-\alpha)}{\sin x\sin\alpha} = 0$.

C

25.11. Докажите, что если α и β — углы I четверти, то верно неравенство:

1) $\sin(\alpha+\beta) < \sin\alpha + \sin\beta$; 2) $\sin(\alpha+\beta) < \cos\alpha + \cos\beta$;

3) $\cos(\alpha-\beta) < \cos\alpha + \sin\beta$; 4) $\mathrm{tg}(\alpha+\beta) > \mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta$.

25.12. Упростите выражение:

1) $(\mathrm{tg}\,\alpha - 1)\cdot\mathrm{tg}\,\beta + (\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta)\cdot\mathrm{ctg}(\alpha+\beta)$;

2) $1 - \dfrac{\mathrm{tg}(\alpha+\beta) - \mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta}{\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}(\alpha+\beta)}$.

25.13. Известно, что $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{3}{8}$, $\mathrm{tg}\,\beta = \dfrac{5}{11}$, где α и β — углы первой четверти. Докажите, что $\alpha + \beta = 45°$.

25.14. Докажите тождество:

1) $\dfrac{\mathrm{tg}\,4\beta - \mathrm{tg}\,3\beta}{1 + \mathrm{tg}\,4\beta\cdot\mathrm{tg}\,3\beta} = \mathrm{tg}(\beta - 5\pi)$; 2) $\dfrac{\mathrm{tg}^2 2\beta - \mathrm{tg}^2\beta}{1 - \mathrm{tg}^2 2\beta\cdot\mathrm{tg}^2\beta} = \mathrm{tg}\,\beta\cdot\mathrm{tg}3\,\beta$.

ПОВТОРИТЕ

25.15. Найдите множество значений выражения:

1) $\sin\alpha + 2\cos\alpha$; 2) $3\sin\alpha - \cos\alpha$; 3) $\sqrt{3}\cos\gamma + \sin\gamma$;

4) $\sin\beta - \sqrt{3}\cos\beta$; 5) $5\sin\alpha - 4\cos\alpha$; 6) $\cos\gamma + 3\sin\gamma$.

25.16. Значения синусов двух острых углов треугольника равны 0,6 и 0,8. Найдите косинус третьего угла этого треугольника.

25.17. Решите неравенство:

1) $x^2 + 3|x| - 18$ l 0; 2) $x^2 - 2|x-2| - 9$ m 0.

25.18. Постройте график функции и укажите множество значений:

1) $y = x^2 + 3|x|$; 2) $y = -x^2 + 2|x|$;

3) $y = 2x^2 - 3|x-1|$; 4) $y = -2x^2 + |x+1|$.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

25.19. Докажите тождество:

1) $\sin(\alpha-\beta) + \sin(-\alpha)\cos(-\beta) = \cos\alpha\sin(-\beta)$;

2) $\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta) = 2\cos\alpha\cos(-\beta)$;

3) $\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta) = -2\sin(-\alpha)\cos(-\beta)$;

4) $\sin(\beta-\alpha)\sin(\alpha+\beta) = \sin^2\beta - \sin^2\alpha$.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

25.20. Упростите выражение:

1) $\sin\beta + \cos\beta + \sqrt{2}\sin(45° - \beta)$;

2) $\sqrt{3}\cos\beta + \sin\beta + 2\cos(\beta - 30°)$.

25.21. Докажите тождество :

1) $\dfrac{\operatorname{tg}5\beta - \operatorname{tg}3\beta}{1 + \operatorname{tg}5\beta \cdot \operatorname{tg}3\beta} = \operatorname{tg}2\beta$;
2) $\dfrac{\operatorname{tg}^2 3\beta - \operatorname{tg}^2\beta}{1 - \operatorname{tg}^2 3\beta \cdot \operatorname{tg}^2\beta} = \operatorname{tg}2\beta \cdot \operatorname{tg}4\beta$.

Опорные понятия для овладения новыми знаниями

Основные тригонометрические тождества, формулы сложения тригонометрических функций.

§ 26. ФОРМУЛЫ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДВОЙНОГО И ПОЛОВИННОГО УГЛОВ

Ключевые понятия

Синус, косинус, тангенс, котангенс

Вы научитесь выводить и применять формулы двойного и половинного углов.

При упрощении тригонометрических выражений, доказательстве тождеств и многих других случаях приходится выражать тригонометрические функции двойного угла через тригонометрические функции того же самого угла. Иными словами, синус, косинус, тангенс и котангенс угла 2α надо выразить через тригонометрические функции угла α.

Формулы двойного угла можно вывести используя формулы сложения. Так, например, чтобы выразить $\sin 2\alpha$ через тригонометрические функции угла α, применим формулу синуса суммы: $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$. В этой формуле угол β заменим на угол α, тогда получим:

$\sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.

Таким образом, доказали формулу синуса двойного угла:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha. \qquad (1)$$

Синус двойного угла равен удвоенному произведению синуса этого угла на косинус этого угла .

Докажите, что верны формулы:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha. \qquad (2)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}. \qquad (3)$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha}. \qquad (4)$$

Формулы (1) — (4) называются *формулами двойного угла*.

Формулы двойного угла:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}.$$

ПРИМЕР

1. Упростим выражение $\dfrac{\cos 80^\circ}{\cos 40^\circ + \sin 40^\circ}$.

Решение. Представим угол 80° в виде произведения двух множителей и применим формулу (2). Получим $\cos 80^\circ = \cos(2 \cdot 40^\circ) = \cos^2 40^\circ - \sin^2 40^\circ = (\cos 40^\circ + \sin 40^\circ) \cdot (\cos 40^\circ - \sin 40^\circ)$.

Подставим вместо $\cos 80^\circ$ выражение $(\cos 40^\circ + \sin 40^\circ) \cdot (\cos 40^\circ - \sin 40^\circ)$ в выражение $\dfrac{\cos 80^\circ}{\cos 40^\circ + \sin 40^\circ}$. Тогда получим

$$\frac{\cos 80^\circ}{\cos 40^\circ + \sin 40^\circ} = \frac{(\cos 40^\circ + \sin 40^\circ)(\cos 40^\circ - \sin 40^\circ)}{\cos 40^\circ + \sin 40^\circ} = \cos 40^\circ - \sin 40^\circ.$$

Ответ: $\cos 40^\circ - \sin 40^\circ$.

ПРИМЕР

2. Докажем тождество $4\sin\alpha\cos\alpha \cdot (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = \sin 4\alpha$.

Решение. Для левой части равенства одновременно применим формулы синуса двойного угла (1) и косинуса двойного угла (2), тогда получим $4\sin\alpha\cos\alpha \cdot (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 2 \cdot \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha = \sin 4\alpha$.

ПРИМЕР

3. Вычислим значение $\sin 2\alpha$, зная, что $\sin\alpha = \dfrac{2}{3}$ и $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

Решение. Воспользуемся формулой синуса двойного угла: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$. Значит, чтобы вычислить значение $\sin 2\alpha$, надо знать значения $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$. Значение $\sin\alpha$ известно, $\cos\alpha$ —

неизвестно. Найдем его используя основное тригонометрическое тождество и учитывая, что α — угол первой четверти. Получим

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Найдем значение $\sin 2\alpha$:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{4\sqrt{5}}{9}, \text{ или } \sin 2\alpha = \frac{4\sqrt{5}}{9}.$$

Ответ : $\frac{4\sqrt{5}}{9}$.

Докажите, что верны формулы.

Формулы понижения степени:

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha);$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha).$$

Выведем формулы тригонометрических функций половинного угла. Для этого используем известную нам формулу косинуса двойного угла (2): $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ — это равенство имеет место для любого угла, в том числе и для угла $\frac{\alpha}{2}$. Следовательно, мы можем в данной формуле вместо угла $\frac{\alpha}{2}$ поставить угол α, тогда получим

$$\cos\alpha = \cos\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right) = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

или

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}. \qquad (A)$$

Запишем основное тригонометрическое тождество для угла $\frac{\alpha}{2}$:

$$1 = \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}. \qquad (B)$$

Сложим почленно левые и правые части равенств (A) и (B), получим

$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$, отсюда $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$.

Почленно вычитая из равенства (B) равенство (A) получим

$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$, отсюда $\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$.

Формулы косинуса и синуса половинного угла:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}, \qquad (5)$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}. \qquad (6)$$

Докажите, что верны формулы тангенса и котангенса половинного угла:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}};\quad \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}.$$

ПРИМЕР

4. Известно, что $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ и $180° < \alpha < 270°$. Найдем значения: $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Решение. Поскольку $180° < \alpha < 270°$, то $90° < \frac{\alpha}{2} < 135°$, т. е. $\frac{\alpha}{2}$ находится во II четверти. Синус этого угла будет положительным числом, косинус — отрицательным: $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,

$\cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = -\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}{2}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Значение $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ можно найти двумя способами.

Способ 1. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = -\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}{1+\left(-\frac{3}{5}\right)}} = -2.$

Способ 2. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} : \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = -2.$

Ответ: $\frac{2\sqrt{5}}{5}$; $-\frac{\sqrt{5}}{5}$; -2.

Выразим $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ через $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha},\ \text{так как}\ 2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1+\cos\alpha$$

или

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \text{так как}\ 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1-\cos\alpha.$$

Отсюда,

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

ПРИМЕР

5. Найдем значение $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$.

Решение. Угол $\frac{\pi}{8}$ находится в I четверти, тогда

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}-1.$$

Ответ: $\sqrt{2}-1$.

ПРИМЕР

6. Докажем тождество $\dfrac{\cos^2\alpha}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{1}{4}\sin 2\alpha$.

Доказательство. $\dfrac{\cos^2\alpha}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{\cos^2\alpha}{\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}} =$

$$= \frac{\cos^2\alpha\sin\alpha}{2\cos\alpha} = \frac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{4}\sin 2\alpha.$$

?

1. Для каких углов α и β можно использовать формулы косинуса, синуса и тангенса двойного и половинного углов?
2. Для каких углов α и β можно использовать формулы понижения степени?

Упражнения

А

26.1. Упростите выражение:

1) $\dfrac{\sin 2x}{2\cos x}$; 2) $\dfrac{2\sin^2 x}{\sin 2x}$; 3) $\sin^2 x-\cos^2 x$;

4) $\dfrac{\cos 2x}{\sin x-\cos x}$; 5) $\dfrac{\sin 2\alpha-2\sin\alpha}{\cos\alpha-1}$; 6) $\dfrac{\cos\alpha-\sin 2\alpha}{1-2\sin\alpha}$;

7) $\dfrac{(\sin x-\cos x)^2}{1-\sin 2x}$; 8) $\dfrac{\cos 2\alpha\cdot\operatorname{tg}2\alpha}{2\sin\alpha}$; 9) $\dfrac{2\cos x\cos 2x}{\operatorname{ctg}2x}$.

26.2. Найдите значение выражения:

1) $\dfrac{\cos^2\frac{\pi}{8}}{1-\sin^2\frac{\pi}{8}}$; 2) $\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{12}}+1$; 3) $2-\dfrac{2\operatorname{tg}75^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 75^\circ}$;

4) $2\sin15^\circ\cos15^\circ$; 5) $4\sin15^\circ\cos15^\circ\cos30^\circ$; 6) $\cos^2 15^\circ\cos^2 75$.

Упростите выражения **(26.3—26.4)**:

26.3. 1) $1-2\sin^2\alpha$; 2) $2\cos^2\alpha-1$; 3) $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha$;

4) $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$; 5) $\operatorname{tg}2\alpha(1-\operatorname{tg}^2\alpha)$.

26.4. 1) $\dfrac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}$; 2) $\dfrac{\cos\beta}{\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\beta}{2}}$; 3) $\dfrac{\cos^2 2\alpha}{\sin4\alpha}$; 4) $\dfrac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{1-\sin^2 2\alpha}$.

26.5. Выразите $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ через:

1) $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$; 2) $\operatorname{tg}\alpha$; 3) $\operatorname{ctg}\alpha$.

26.6. Найдите значение $\sin2\alpha$, $\cos2\alpha$, $\operatorname{ctg}2\alpha$ и $\operatorname{tg}2\alpha$, если $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ и $\sin\alpha=\frac{2}{5}$.

26.7. Вычислите $\sin2\alpha$, $\cos2\alpha$, $\operatorname{ctg}2\alpha$ и $\operatorname{tg}2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=2{,}4$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

26.8. Найдите значения: $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=0{,}5$.

26.9. Упростите выражение:

1) $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha-\cos2\alpha$; 2) $\sin2\beta-\operatorname{tg}\beta-\cos2\beta\operatorname{tg}\beta$;

3) $\operatorname{ctg}\varphi-\sin2\varphi-\operatorname{ctg}\varphi\cos2\varphi$; 4) $\dfrac{1}{1-\operatorname{tg}\alpha}-\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}\alpha}$;

5) $(\sin\alpha-\sin\beta)^2+(\cos\alpha-\cos\beta)^2$; 6) $1+\dfrac{1-\cos2x+\sin2x}{1+\cos2x+\sin2x}$;

7) $\cos\alpha(\cos\alpha+\cos\beta)+\sin\alpha(\sin\alpha+\sin\beta)$;

8) $1+\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-2\operatorname{ctg}2\alpha$;

9) $\cos^2\alpha-4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}-\cos2\alpha$;

10) $\operatorname{ctg}2\alpha-\operatorname{ctg}\alpha$.

26.10. Преобразуйте выражение:

1) $4\sin^2 1°\cos^2 1° - \cos^2 2°$;   2) $16\sin^2 3°\cos^2 3°\cos^2 6°$;

3) $(\sin 10° + \sin 80°)(\cos 80° - \cos 10°)$;

4) $(\cos 5° + \cos 95°)(\sin 85° + \sin 175°)$;

5) $\dfrac{\cos 36° + \sin^2 18°}{\cos^2 18°} - 1$;   6) $\dfrac{\cos 56°}{\cos 28° + \sin 28°} + \sin 28°$.

26.11. Найдите значения: $\sin\dfrac{\alpha}{2}$, $\cos\dfrac{\alpha}{2}$, $\text{ctg}\,\dfrac{\alpha}{2}$ и $\text{tg}\,\dfrac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$ и $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

26.12. Найдите значения: $\sin\dfrac{\alpha}{2}$, $\cos\dfrac{\alpha}{2}$, $\text{tg}\,\dfrac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha\ \dfrac{14}{50}$ и $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

26.13. Используя формулы половинного угла найдите значения: $\sin 22°30'$; $\cos 22°30'$ и $\text{tg}\,22°30'$.

26.14. Докажите тождество:

1) $1 + \sin\alpha = 2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}\right)$;   2) $1 - \sin\alpha = 2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}\right)$.

B

26.15. Упростите выражение:

1) $1 - 8\sin 2\beta \cdot \cos 2\beta$;   2) $\text{tg}\,\beta \cdot (1 + \cos 2\beta) - \sin 2\beta$;

3) $\dfrac{2\sin\beta - \sin 2\beta}{2\sin\beta + \sin 2\beta}$;   4) $\dfrac{\text{ctg}\,(45° - \beta)}{1 - \text{ctg}^2\,(45° - \beta)}$.

26.16. Докажите тождество:

1) $2 + \dfrac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha} - \dfrac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} = 0$;   2) $\text{tg}\,\alpha + 2\text{ctg}\,2\alpha = \text{ctg}\,\alpha$;

3) $\text{tg}\,2\alpha + 2\text{ctg}\,2\alpha = \dfrac{2}{\sin 4\alpha}$;   4) $\dfrac{1 - \cos\alpha + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - \sin\alpha} = \text{ctg}\,\alpha$;

5) $\text{ctg}\,\alpha - \cos 2\alpha \cdot \text{ctg}\,\alpha = \sin 2\alpha$;

6) $\text{ctg}\,2\alpha - \sin 4\alpha = \cos 4\alpha \cdot \text{ctg}\,2\alpha$;

7) $1 + \cos(3\pi + 3\alpha)\cos 2\alpha - \cos(1{,}5\pi - 3\alpha)\sin 2\alpha = 2\sin^2 2{,}5\alpha$;

8) $\text{tg}^4\alpha \cdot (8\cos^2(\pi - \alpha) - \cos(\pi + 4\alpha) - 1) = 8\sin^4\alpha$;

9) $\dfrac{1 - 2\sin^2\alpha}{2\text{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right)} = 1$;

10) $2\text{tg}\,\dfrac{\alpha}{2} \cdot (\text{tg}\,\alpha + \text{ctg}\,\alpha) \cdot \left(1 - \text{tg}^2\,\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{1}{\cos^4\dfrac{\alpha}{2}}$.

26.17. 1) Пусть $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{6}$ и $\pi < \alpha < 1{,}5\pi$. Найдите: $\sin 2\alpha$; $\cos 2\alpha$; $\operatorname{tg} 2\alpha$.

2) Пусть $\cos\alpha = -0{,}8$ и $\pi < \alpha < 1{,}5\pi$. Найдите: $\sin 0{,}5\alpha$; $\cos 0{,}5\alpha$; $\operatorname{tg} 0{,}5\alpha$.

26.18. Вычислите:

1) $\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$, если $\cos 2\alpha = \frac{1}{3}$ и $\pi < \alpha < \frac{5\pi}{4}$;

2) $\operatorname{tg}\beta + \operatorname{ctg}\beta$, если $\cos 2\beta = 0{,}8$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

3) $\operatorname{tg}^2\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right)$, если $\sin 2\alpha = -\frac{1}{3}$;

4) $\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right)$, если $\sin 2\beta = 0{,}25$;

5) $\cos 2\alpha$, если $\frac{\cos\alpha - 2\sin\alpha}{\sin\alpha - 2\cos\alpha} = -0{,}5$;

6) $\sin 2\alpha$, если $\frac{\cos\alpha + 2\sin\alpha}{2\sin\alpha - 3\cos\alpha} = -2$.

26.19. Упростите выражение:

1) $\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\alpha}$; 2) $\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin\alpha}$; 3) $\sqrt{\frac{1 + \cos 4\alpha}{2}}$;

4) $\sqrt{\frac{1 - \cos 6\alpha}{8}}$; 5) $\sqrt{2 + \sqrt{2 + 2\cos 4\alpha}}$, если $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

C

26.20. Выведите формулы:

1) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$;

2) $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$;

3) $\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}$.

26.21. Известно, что $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -2$. Найдите: 1) $\sin 3\alpha$; 2) $\cos 3\alpha$.

26.22. Вычислите:

1) $\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ$; 2) $\sin^2 10^\circ \cdot \sin^2 50^\circ \cdot \sin^2 70^\circ$;

3) $\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 80^\circ$;

4) $\cos\frac{\pi}{5} \cdot \cos\frac{2\pi}{5}$; 5) $\sin\frac{\pi}{10} \cdot \sin\frac{3\pi}{10}$.

26.23. Докажите тождество:

1) $4\sin^3\alpha \cdot \cos3\beta + 4\cos^3\beta \cdot \sin3\beta = 3\sin4\beta$;

2) $\dfrac{\cos^3\beta - \cos3\beta}{\sin^3\beta + \sin3\beta} = \operatorname{tg}\beta$.

ПОВТОРИТЕ

26.24. Докажите тождество:

1) $\sin2x < 2\sin x$, если $0 < x < \pi$;

2) $\sin2x < 2\cos x$, если $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$.

26.25. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения:

1) $\cos^2x + 3\sin^2x$; 2) $\sin^4x + \cos^4x$; 3) $\sin^6x + \cos^6x$.

26.26. Упростите выражение:

1) $\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \beta\right) - \sin\beta$; 2) $\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \beta\right) - \cos\beta$.

26.27. Постройте график функции:

1) $y = \begin{cases} x^2 - 2x, \text{ если } x \geq 0, \\ 1 - 3x, \text{ если } x < 0; \end{cases}$ 2) $y = \begin{cases} -x^2 + x, \text{ если } x \leq 0, \\ 2x - 3, \text{ если } x > 0. \end{cases}$

26.28. PISA Надо выложить кафелем фартук на кухне длиной 6 м и высотой 80 см. Сколько коробок кафеля нужно для этого купить, если размер плитки 25 см · 30 см, в коробку входит 20 штук, а на отходы уходит 5% от всего числа кафельной плитки, необходимой по площади фартука?

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

26.29. Представьте в виде произведения выражение:

1) $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$; 2) $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$;

3) $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$; 4) $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$.

Опорные понятия для овладения новыми знаниями

Основные тригонометрические тождества, формулы сложения тригонометрических функций, формулы двойного и половинного аргумента.

§ 27. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СУММЫ И РАЗНОСТИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Ключевые понятия

Синус, косинус, тангенс, котангенс

Вы научитесь выводить и применять формулы преобразования суммы и разности тригонометрических функций в произведение.

Представим угол α в виде суммы: $\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}$ и угол β — в виде разности: $\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}$.

Преобразуем сумму $\sin\alpha+\sin\beta$.

Получим $\sin\alpha+\sin\beta=\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=$

$=\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-$

$-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

Получили формулу суммы синусов:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (1)$$

Сумма синусов двух углов равна удвоенному произведению синуса полусуммы этих углов на косинус их полуразности.

Преобразуем разность $\sin\alpha-\sin\beta$.

Получим $\sin\alpha-\sin\beta=\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)-\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=$

$=\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}-\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+$

$+\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.

Получили формулу разности синусов:

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (2)$$

Разность синусов двух углов равна удвоенному произведению косинуса полусуммы этих углов на синус их полуразности.

Преобразуем сумму $\cos\alpha+\cos\beta$.

Получим $\cos\alpha+\cos\beta=\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=$

$$= \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} +$$
$$+ \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Получили формулу суммы косинусов:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (3)$$

Сумма косинусов двух углов равна удвоенному произведению косинуса полусуммы этих углов на косинус их полуразности.

Преобразуем разность $\cos\alpha - \cos\beta$.

Получим $\cos\alpha - \cos\beta = \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) =$

$$= \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} -$$
$$- \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Получили формулу разности косинусов:

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (4)$$

Разность косинусов двух углов равна удвоенному произведению синуса полусуммы этих углов на синус их полуразности, взятому со знаком минус.

Преобразуем сумму $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta$.

Получим $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$.

Получили формулу суммы тангенсов:

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}. \qquad (5)$$

Сумма тангенсов двух углов равна синусу суммы этих углов, деленному на произведение косинусов этих углов.

Докажите формулу разности тангенсов $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$.

Формула разности тангенсов:

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}. \quad (6)$$

Разность тангенсов двух углов равна синусу разности этих углов, деленному на произведение косинусов этих углов.

ПРИМЕР

1. Вычислим значение суммы $\cos 75° + \cos 15°$.

Решение. По формуле $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ получим

$\cos 75° + \cos 15° = 2\cos 45°\cos 30° = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

ПРИМЕР

2. Преобразуем в произведение сумму $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha$.

Решение. $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha = (\sin\alpha + \sin 3\alpha) + \sin 2\alpha =$

$= 2\sin 2\alpha \cos\alpha + \sin 2\alpha = 2\sin 2\alpha(\cos\alpha + \frac{1}{2}) = 2\sin 2\alpha(\cos\alpha +$

$+ \cos 60°) = 4\sin 2\alpha \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$.

Ответ: $4\sin 2\alpha \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$.

ПРИМЕР

3. Преобразуем в произведение сумму $\sin\alpha + \cos\alpha$.

Решение. $\sin\alpha + \cos\alpha = \sin\alpha + \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = 2\sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos(\frac{\pi}{4} - \alpha) =$

$= \sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4} - \alpha)$.

Ответ: $\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4} - \alpha)$.

?

1. Для каких углов α и β можно использовать формулы суммы и разности тригонометрических функций этих углов?
2. Какие формулы можно применить, чтобы преобразовать в произведение сумму (разность) тангенса и котангенса некоторого угла?

Упражнения

A

27.1. Представьте тригонометрическое выражение в виде произведения:

1) $\sin 3x + \sin 5x$; 2) $\sin 2\beta + \sin 6\beta$; 3) $\sin 15 + \sin 15$;

4) $\sin 130° + \sin 10°$; 5) $\cos 3x + \cos 7x$; 6) $\cos 13\alpha - \cos 5\alpha$;

7) $\cos 13 - \cos 27$; 8) $\cos 78° + \cos 18°$.

27.2. Преобразуйте выражение в произведение:

1) $\sin\frac{\pi}{5} + \sin\frac{3\pi}{5}$; 2) $\cos\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{6}$;

3) $\sin\frac{3\pi}{10} - \sin\frac{\pi}{10}$; 4) $\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{3\pi}{4}$;

5) $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$; 6) $\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right)$;

7) $\sin x + \sin y$; 8) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$;

9) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$; 10) $\sin x - \cos y$;

11) $\sin 2x + \cos 4x$; 12) $\cos\beta - \sin 6\beta$.

27.3. Преобразуйте в произведение тригонометрическое выражение:

1) $\sin\alpha + \frac{1}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin\alpha$; 3) $\frac{1}{2} - \sin\alpha$;

4) $\sin\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}$; 5) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos\alpha$; 6) $\cos\alpha + \frac{1}{2}$;

7) $\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}$; 8) $\frac{1}{2} - \cos\alpha$; 9) $1 + 2\cos x$;

10) $2\cos x - \sqrt{2}$; 11) $\sqrt{3} - 2\sin 4x$; 12) $\sqrt{3} + 2\cos 2x$.

27.4. Упростите выражение:

1) $\frac{\sin 37° + \sin 23°}{\sin 37° - \sin 23°}$; 2) $\frac{\cos 20° - \cos 140°}{\cos 20° + \cos 140°}$;

3) $\frac{\sin 55° - \sin 35°}{\cos 55° - \cos 35°}$; 4) $\frac{\cos 25° - \cos 85°}{\sin 25° + \sin 85°}$;

5) $\frac{\cos\alpha - \cos\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}$; 6) $\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta}$;

7) $\frac{\cos\alpha + \cos\beta}{\sin\beta - \sin\alpha}$; 8) $\frac{\cos\alpha - \cos\beta}{\sin\alpha + \sin\beta}$.

9) $\dfrac{\cos 5x - \cos x}{\sin 5x + \sin x}$; 10) $\dfrac{\sin 2x - \sin x}{\cos 2x + \cos x}$;

11) $\dfrac{\sin 2x + \sin 6x}{\cos 2x - \cos 6x}$; 12) $\dfrac{\cos 2x - \cos 3x}{\sin 2x - \sin 3x}$;

13) $\dfrac{\sin 4\alpha - \sin 6\alpha}{\cos 3\alpha + \cos 7\alpha}$; 14) $\dfrac{\sin 7\beta + \sin 11\beta}{\cos 10\beta - \cos 8\beta}$;

15) $\dfrac{\cos(45^\circ - \alpha) + \cos(45^\circ + \alpha)}{\sin(45^\circ - \alpha) + \sin(45^\circ + \alpha)}$; 16) $\dfrac{\sin(45^\circ + \alpha) + \sin(45^\circ - \alpha)}{\sin(45^\circ + \alpha) - \sin(45^\circ - \alpha)}$.

27.5. Докажите тождество:

1) $(\sin\alpha + \sin\beta)^2 + (\cos\alpha + \cos\beta)^2 = 4\cos^2\dfrac{\alpha - \beta}{2}$;

2) $\sin^2(x + y) - \sin^2(x - y) = \sin 2x \sin 2y$;

3) $\cos^2(\alpha + \beta) - \cos^2(\alpha - \beta) = -\sin 2\alpha \sin 2\beta$;

4) $(\sin x - \sin y)^2 + (\cos x - \cos y)^2 = 4\sin^2\dfrac{x - y}{2}$.

27.6. Преобразуйте выражение:

1) $\mathrm{tg}75^\circ - \mathrm{tg}15^\circ$; 2) $\mathrm{ctg}11^\circ + \mathrm{ctg}34^\circ$;

3) $\mathrm{tg}25^\circ + \mathrm{tg}65^\circ$; 4) $\mathrm{tg}85^\circ + \mathrm{ctg}85^\circ$;

5) $\mathrm{ctg}50^\circ - \mathrm{ctg}20^\circ$; 6) $\mathrm{tg}25^\circ - \mathrm{ctg}85^\circ$;

7) $\mathrm{tg}15^\circ + \mathrm{ctg}75^\circ$; 8) $\mathrm{ctg}15^\circ - \mathrm{tg}75^\circ$.

B

27.7. Докажите тождество:

1) $\dfrac{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha} = \mathrm{tg}3\alpha$;

2) $\dfrac{\sin 4\alpha + \sin 5\alpha + \sin 6\alpha}{\cos 4\alpha + \cos 5\alpha + \cos 6\alpha} = \mathrm{tg}5\alpha$;

3) $\dfrac{\sin\alpha - 2\cos 3\alpha - \sin 5\alpha}{\cos\alpha + 2\sin 3\alpha - \cos 5\alpha} = -\mathrm{ctg}3\alpha$;

4) $\dfrac{\sin 6\alpha + \sin 7\alpha - \sin 8\alpha - \sin 9\alpha}{\cos 6\alpha + \cos 7\alpha + \cos 8\alpha + \cos 9\alpha} = -\mathrm{tg}\,\alpha$.

27.8. Преобразуйте в произведение выражение:

1) $\sin^2\alpha - \sin^2\beta$; 2) $\cos^2\alpha - \cos^2\beta$;

3) $\dfrac{3}{4} - \sin^2 x$; 4) $\cos^2 x - \dfrac{1}{2}$.

27.9. Упростите выражение:

1) $\dfrac{2\sin^2 49^\circ - 1}{\cos 53^\circ - \cos 37^\circ}$; 2) $\dfrac{\sin 11^\circ - \sin 49^\circ}{1 - 2\cos^2 54^\circ 30'}$;

3) $\dfrac{3\sin 124^\circ - \cos 146^\circ - 2\cos 34^\circ}{\cos 49^\circ \cos 15^\circ + \cos 41^\circ \cos 75^\circ}$; 4) $\dfrac{6\sin 25^\circ - 3\cos 65^\circ + 7\sin 155^\circ}{\cos 53^\circ \cos 12^\circ - \cos 37^\circ \cos 78^\circ}$;

5) $\dfrac{4\sin 139^\circ - 7\cos 131^\circ + 2\sin 41^\circ}{\cos 68^\circ \cos 19^\circ + \cos 22^\circ \cos 71^\circ}$; 6) $\dfrac{\cos 37^\circ - 8\cos 143^\circ + 2\sin 127^\circ}{\sin 42^\circ \sin 79^\circ + \sin 48^\circ \sin 11^\circ}$.

27.10. Преобразуйте выражение и найдите его значение:

1) $\dfrac{\sin 36^\circ + \sin 40^\circ + \sin 44^\circ + \sin 48^\circ}{2\sin 88^\circ \cos 4^\circ \sin 42^\circ}$;

2) $\dfrac{\cos 6^\circ + \cos 12^\circ + \cos 36^\circ + \cos 42^\circ}{\sin 87^\circ \cos 15^\circ \cos 24^\circ}$;

3) $\dfrac{\cos 16^\circ - \cos 24^\circ - \cos 32^\circ + \cos 40^\circ}{\cos 86^\circ \sin 8^\circ \cos 28^\circ}$;

4) $\dfrac{\sin 48^\circ - \sin 60^\circ - \sin 72^\circ + \sin 84^\circ}{4\cos 84^\circ \sin 12^\circ \sin 66^\circ}$.

27.11. Упростите выражение:

1) $1 - 2\sin^2\alpha + \cos(4\alpha - 2\pi)$; 2) $\sin\left(\dfrac{\pi}{3} + \alpha\right) + \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - \alpha\right)$.

C

27.12. Преобразуйте в произведение выражение:

1) $1 + \sin\beta + \cos\beta$; 2) $1 + \sin\beta - \cos\beta$;

3) $1 - \sin\beta + \cos\beta$; 4) $1 - \sin\beta - \cos\beta$.

27.13. Разложите на множители или представьте в виде дроби выражение:

1) $3 - 4\sin^2 4\alpha$; 2) $4\cos^2 4\beta - 3$;

3) $\operatorname{tg}^2 5\beta - 3$; 4) $1 - \operatorname{ctg}^2 3\alpha$.

27.14. Докажите тождество:

1) $\dfrac{3 - 4\cos 2x + \cos 4x}{3 + 4\cos 2x + \cos 4x} = \operatorname{tg}^4 x$;

2) $\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - 2x\right) + \sin(3\pi - 4x) - \cos\left(\dfrac{5\pi}{2} + 6x\right)}{4\sin(5\pi - 3x) \cdot \cos(x - 4\pi)} = \cos 2x$.

27.15. Докажите, что если A, B и C — меры внутренних углов треугольника, то верны равенства:

1) $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\dfrac{A}{2} \cdot \cos\dfrac{B}{2} \cdot \cos\dfrac{C}{2}$;

2) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$;

3) $\sin 4A + \sin 4B + \sin 4C = -4\sin 2A \cdot \sin 2B \cdot \sin 2C$.

27.16. Вычислите:

1) $tg9° - tg27° - tg63° + tg81°$;
2) $ctg7,5° - tg7,5° + tg67,5° - ctg\ 67,5°$;
3) $4 \cdot (\cos24° - \cos12° + \cos48° - \cos 84°)$;
4) $\cos^2 3° + \cos^2 117° + \cos^2 123°$.

ПОВТОРИТЕ

27.17. Найдите:

1) $\cos\beta$, если $\sin\beta = 0,6$ и $90° < \beta < 180°$;
2) $\sin\beta$, если $\cos\beta = -0,2$ и $180° < \beta < 270°$;
3) $tg\beta$, если $\cos\beta = -0,4$ и $90° < \beta < 180°$;
4) $ctg\beta$, если $\sin\beta = -0,3$ и $270° < \beta < 360$.

27.18. Вычислите:

1) $\dfrac{5}{6 + 7\sin2\beta}$, если $tg\beta = 0,2$;
2) $\dfrac{4}{3 + 4\cos2\beta}$, если $tg\beta = 0,2$;
3) $\dfrac{1}{2 + 3\sin2\beta}$, если $tg\beta = 0,1$;
4) $\dfrac{2}{5 - \cos2\beta}$, если $tg\beta = 0,3$.

27.19. Упростите выражение:

1) $\sin(\pi + x) \cdot \sin(4\pi + x) - \cos(6\pi - 2x)$;
2) $\sin(2\pi + 2x) + 4\sin x \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$.

27.20. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} x^2 - 6x - 16 \leqslant 0, \\ |4x^2 - 3| > 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - x - 2 \geqslant 0, \\ |2x^2 - 5| < 3. \end{cases}$

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

27.21. Преобразуйте тригонометрическое выражение:

1) $\cos(\alpha + 2\beta) + \sin\alpha \cdot \sin2\beta$;
2) $\cos(3\alpha - 2\beta) - \sin3\alpha \cdot \sin2\beta$.

27.22. Преобразуйте выражение:

1) $\sin(2\alpha + \beta) - \sin2\alpha \cdot \cos\beta$;
2) $\sin(3\alpha + 2\beta) + \cos3\alpha \cdot \sin2\beta$.

Опорные понятия для овладения новыми знаниями

Основные тригонометрические тождества, формулы приведения, формулы сложения тригонометрических функций, формулы двойного и половинного аргументов, формулы преобразования суммы и разности тригонометрических функций в произведение.

§ 28. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В СУММУ ИЛИ РАЗНОСТЬ

Ключевые понятия

Синус, косинус, тангенс, котангенс

Вы научитесь выводить и применять формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму или разность.

Используя формулы сложения, можно получить формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму. Действительно, используя формулы синуса суммы и разности двух углов, найдем $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$. Для этого почленно сложим равенства:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

Получим равенство:

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta.$$

Из этого равенства следует, что

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]. \qquad (1)$$

Аналогично рассуждая, используя формулы синуса суммы и разности двух углов, найдем $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$. Для этого почленно вычтем равенства:

$$-\begin{array}{l}\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\\ \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.\end{array}$$

Получим равенство:

$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta.$$

Из этого равенства следует, что

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]. \qquad (2)$$

Аналогично рассуждая, используя формулы косинуса суммы и разности двух углов, найдем $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$. Для этого почленно сложим равенства:

$$
+\begin{array}{l}\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.\end{array}
$$

Получим равенство:

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta.$$

Из этого равенства следует, что

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]. \qquad (3)$$

Аналогично рассуждая, используя формулы косинуса суммы и разности двух углов, найдем $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$. Для этого почленно вычтем равенства:

$$
-\begin{array}{l}\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.\end{array}
$$

Получим равенство:

$$\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\sin\beta.$$

Из этого равенства следует, что

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]. \qquad (4)$$

ПРИМЕР

1. Вычислим значение выражения $\cos75°\cos15°$.

Решение. Используя формулу (3), получим $\cos75°\cos15°=\frac{1}{2}$; $[\cos(75°+15°)+\cos(75°-15°)]=\frac{1}{2}(\cos90°+\cos60°)=\frac{1}{2}(0+\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$.

Ответ: $\frac{1}{4}$.

ПРИМЕР

2. Преобразуем в сумму произведение $\sin3\alpha\sin7\alpha\cos4\alpha$.

Решение. Используя формулу (4) для первых двух множителей, получим $\sin3\alpha\sin7\alpha\cos4\alpha=\frac{1}{2}[\cos(3\alpha-7\alpha)-\cos(3\alpha+7\alpha)]\cos4\alpha=$ $=\frac{1}{2}(\cos4\alpha-\cos10\alpha)\cos4\alpha=\frac{1}{2}(\cos^2 4\alpha-\cos10\alpha\cos4\alpha)$. Далее, используя формулу (3), получим

$\frac{1}{2}(\cos^2 4\alpha-\cos10\alpha\cos4\alpha)=\frac{1}{2}(\cos^2 4\alpha-\frac{1}{2}\cos14\alpha-\frac{1}{2}\cos6\alpha)$. Раскрыв скобки, получим $\frac{1}{2}\cos^2 4\alpha-\frac{1}{4}\cos14\alpha-\frac{1}{4}\cos6\alpha$.

Ответ: $\frac{1}{2}\cos^2 4\alpha-\frac{1}{4}\cos14\alpha-\frac{1}{4}\cos6\alpha$.

1. Для каких углов можно использовать формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму?
2. Почему формулу $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$ относят к формулам преобразования произведения тригонометрических функций в сумму, а не в разность?

Упражнения

А

28.1. Запишите в виде суммы тригонометрических функций выражение:

1) $\sin5\alpha \cdot \cos2\alpha$;
2) $\sin8\alpha \cdot \cos12\alpha$;
3) $\cos5\alpha \cdot \cos7\alpha$;
4) $\cos6\alpha \cdot \cos(-15\alpha)$;
5) $\sin6\alpha \cdot \sin14\alpha$;
6) $\sin3\alpha \cdot \sin(-21\alpha)$;
7) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - 5\alpha\right)\cos3\alpha$;
8) $\sin(\pi+5\alpha)\cos(3\pi-3\alpha)$;
9) $\cos7\alpha \cdot \cos(2\pi+9\alpha)$.

28.2. Представьте в виде суммы или разности выражение:

1) $2\sin27^\circ\cos9^\circ$;
2) $-2\sin25^\circ\sin15^\circ$;
3) $2\sin\alpha\cos3\alpha$;
4) $2\cos2\alpha\cos\alpha$;
5) $\cos(x+1)\cos(x-1)$;
6) $2\sin(a+b)\cos(a-b)$;
7) $\sin(m+n)\sin(m-n)$;
8) $\sin(2x+3)\sin(x-3)$;
9) $\sin(1-x)\cdot\cos(1-2x)$.

28.3. Вычислите:

1) $2\sin22^\circ30' \cdot \cos7^\circ30'$;
2) $2\cos7^\circ30' \cdot \sin52^\circ30'$;
3) $\cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{12}$;
4) $\sin\frac{\pi}{4} \cdot \sin\frac{\pi}{12}$.

28.4. Докажите справедливость равенства:

1) $\cos75^\circ \cdot \sin345^\circ = -0{,}25$;
2) $\sin105^\circ \cdot \sin295^\circ = 0{,}25$.

28.5. Найдите значение выражения:

1) $\cos(\alpha+\beta)$, если $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}$ и $\cos\alpha\cos\beta = -\frac{1}{2}$;
2) $\cos(\alpha-\beta)$, если $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}$ и $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}$;

3) $\sqrt{2}\cos(\alpha-\beta)$, если $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}$ и $\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}$;

4) $3\cos(\alpha+\beta)$, если $\cos\alpha\cos\beta=-\frac{1}{2}$ и $\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}$.

28.6. Упростите выражение:

1) $2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$; 2) $2\sin\left(\beta+\frac{2\pi}{3}\right)\sin\left(\beta+\frac{\pi}{3}\right)$.

28.7. Докажите справедливость равенства:

1) $4\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{3}+2\cos\alpha$;

2) $2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}\right)=1-\sqrt{2}\sin\alpha$;

3) $\cos^2(45^\circ-x)-\cos^2(60^\circ+x)-\cos75^\circ\sin(75^\circ-2x)=\sin2x$;

4) $\sin^2(45^\circ+x)-\sin^2(30^\circ-x)-\cos75^\circ\cdot\cos(15^\circ+2x)=\sin2x$.

28.8. Верно ли равенство:

1) $\cos100^\circ\cos110^\circ+\cos20^\circ\cos10^\circ=\cos10^\circ$;

2) $2\cos47^\circ\cos73^\circ-\sin64^\circ=-0{,}5$?

В

28.9. Запишите в виде суммы выражение:

1) $8\cos\beta\cdot\cos2\beta\cdot\cos4\beta$; 2) $\cos3\beta\cdot\cos5\beta\cdot\cos8\beta$;
3) $4\sin\beta\cdot\sin4\beta\cdot\cos5\beta$; 4) $2\cos\alpha\cdot\sin2\alpha\cdot\cos6\alpha$;
5) $\sin\alpha\cdot\sin3\alpha\cdot\sin6\alpha$; 6) $16\sin\alpha\cdot\cos2\alpha\cdot\sin10\alpha$.

28.10. Найдите значение выражения:

1) $\cos8\alpha+\cos6\alpha+2\sin5\alpha\cdot\sin3\alpha$, если $\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{3}}$;

2) $\cos12\alpha-\cos6\alpha+2\cos5\alpha\cdot\cos7\alpha$, если $\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}}$;

3) $\sin2\alpha\cos5\alpha-\sin\alpha\cos6\alpha$, если $\sin\alpha=a$;

4) $\cos7\alpha\cos4\alpha-\cos8\alpha\cos3\alpha$, если $\cos\alpha=a$.

28.11. Докажите, что верно равенство:

1) $\cos75^\circ\cdot\cos15^\circ=\frac{1}{4}$;

2) $\sin105^\circ\cdot\sin75^\circ=\frac{1}{4}$;

3) $4\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=1-4\sin^2\alpha$;

4) $4\sin\left(\frac{\pi}{6}-\beta\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\beta\right)=3-4\cos^2\beta$.

28.12. Найдите значение выражения:

1) $\cos 6x + \cos 8x + 2\sin 3x \cdot \sin 5x$, если $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

2) $\cos 12x - \cos 6x - 2\cos 7x \cdot \cos 5x$, если $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

28.13. Докажите тождество:

1) $\sin^2 2x - \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) \cdot \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4}$;

2) $1 + 2\cos 2x - 4\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 0$.

28.14. Найдите значение тригонометрического выражения:

1) $\sin 15^\circ \cos 7^\circ - \cos 11^\circ \cos 79^\circ - \sin 4^\circ \sin 86^\circ$;

2) $\cos 17^\circ \cos 73^\circ - \sin 13^\circ \cos 21^\circ - \cos 4^\circ \cos 86^\circ$.

28.15. Упростите выражение:

1) $\sin 5x \cdot \sin 4x + \sin 4x \cdot \sin 3x - \sin 2x \cdot \sin x - 2\sin 3x \cdot$
$\cdot \sin 5x \cdot \cos x$;

2) $1 + \mathrm{tg}\,3x - \mathrm{tg}(60^\circ + x) \cdot \mathrm{tg}\,x$.

28.16. Докажите тождество:

1) $\frac{\sin 5\alpha - 2\sin 3\alpha\cos 3\alpha}{1 - \cos 5\alpha - 2\sin^2 3\alpha} = \mathrm{ctg}\,5{,}5\alpha$;

2) $\frac{2\cos^2 2\beta + \cos 5\beta - 1}{\sin 5\beta + 2\cos 2\beta\sin 2\beta} = \mathrm{ctg}\,4{,}5\beta$;

3) $\frac{\sin 4\alpha + 2\sin 2\alpha}{2(\cos\alpha + \cos 3\alpha)} = \cos\alpha \cdot \mathrm{tg}\,2\alpha$;

4) $\frac{2\cos\beta + \cos 3\beta + \cos 5\beta}{\cos 3\beta + \sin\beta\sin 2\beta} = 4\cos 2\beta$.

C

28.17. Преобразуйте в сумму тригонометрических функций произведение:

1) $4\sin 5^\circ \cdot \cos 15^\circ \cdot \sin 25^\circ$;   2) $4\sin 20^\circ \cdot \cos 20^\circ \cdot \cos 80^\circ$.

28.18. Докажите тождество:

1) $4\cos 3\alpha \cdot \cos 5\alpha \cdot \cos 6\alpha = \cos 8\alpha + \cos 4\alpha + 2\cos 5\alpha \cdot \cos 3\alpha$;

2) $8\sin^3\alpha \cdot \cos^2\alpha = \sin\alpha - 0{,}5\sin^3\alpha$.

28.19. Вычислите:

1) $\cos 5^\circ \cdot \cos 55^\circ \cdot \cos 65^\circ$;

2) $\cos 12^\circ \cdot \cos 24^\circ \cdot \cos 36^\circ \cdot \cos 48^\circ \cdot \cos 72^\circ \cdot \cos 84^\circ$.

ПОВТОРИТЕ

28.20. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{25}{12}, \\ x^2 - y^2 = 7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{5}{6}, \\ x^2 - y^2 = 5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{3x}{y} - \dfrac{y}{x} = -2, \\ x^2 - y^2 = -8; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{4y}{x} = 5, \\ xy = 4. \end{cases}$

28.21. Найдите область определения функции:

1) $y = \sqrt{\dfrac{x^3 - 3x^2 - 10x}{x + 4}}$;

2) $y = \sqrt{\dfrac{-x^3 + 4x^2 + 12x}{x - 1}}$;

3) $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 3x - 10}{x + 4}} + \sqrt{2x + 5}$;

4) $y = \sqrt{\dfrac{-x^2 + 2x + 15}{x + 7}} - \dfrac{2}{5 - x}$.

28.22. Найдите значение выражения:

1) $1 + \sin^2 68° - \sin^2 38° - 0{,}5\sin 106°$;

2) $\sin^2 35° + \sin^2 25° + 0{,}5\cos 10° - 3$.

28.23. Постройте график и запишите наибольшее или наименьшее значение и ось симметрии графика функции:

1) $y = 2x^2 - 4x + 5$; 2) $y = -x^2 - 6x + 3$;

3) $y = \dfrac{3}{4}x^2 - x - 2$; 4) $y = \dfrac{1}{4}x^2 - x + 1$.

28.24. Мяч подбрасывается вертикально вверх. Его высоту над землей вычисляют по формуле $h(t) = -3t^2 + 12t$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Используя программу “Живая геометрия”, постройте график этой функции. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее 9 м?

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

28.25. Упростите выражение:

1) $2 - \dfrac{\cos^2\alpha - 4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{1 - 8\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}$; 2) $\dfrac{\sin^4\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - \cos^4\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha - 1}$.

28.26. Докажите тождество:

1) $\dfrac{\sin\alpha + \sin4\alpha + \sin7\alpha}{\cos\alpha + \cos4\alpha + \cos7\alpha} = \operatorname{tg}4\alpha$; 2) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)} = \operatorname{tg}\alpha$;

3) $\dfrac{\sin\alpha - 2\cos4\alpha - \sin7\alpha}{\cos\alpha + 2\sin4\alpha - \cos7\alpha} = -\operatorname{ctg}4\alpha$;

4) $\dfrac{\sin9\alpha + \sin8\alpha - \sin7\alpha - \sin6\alpha}{\cos6\alpha + \cos7\alpha + \cos8\alpha + \cos9\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$.

Опорные понятия для овладения новыми знаниями

Основные тригонометрические тождества, формулы приведения, формулы сложения тригонометрических функций, формулы двойного и половинного аргументов, формулы преобразования суммы и разности тригонометрических функций в произведение, формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму или разность.

§ 29. ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Ключевые понятия

Синус, косинус, тангенс, котангенс

Вы научитесь выполнять тождественные преобразования тригонометрических выражений.

Рассмотрим преобразования тригонометрических выражений на примерах.

ПРИМЕР

1. Докажем тождество $\dfrac{1 - \cos2x + \sin2x}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) + \sin x} = 2\sin x$.

Решение. Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ и формулами двойного угла: $\cos2x = \cos^2x - \sin^2x$ и $\sin2x = 2\sin x\cos x$. Далее в знаменателе применим формулу приведения $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$.

Тогда получим:

$$\frac{1-\cos 2x+\sin 2x}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sin x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x-\cos^2 x+\sin^2 x+2\sin x\cos x}{\cos x+\sin x}=$$

$$=\frac{2\sin x(\cos x+\sin x)}{\cos x+\sin x}=2\sin x.$$

ПРИМЕР

2. Выразим дробь $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$ через $\operatorname{tg}\alpha$.

Решение. Разделим каждое слагаемое числителя и знаменателя дроби на $\cos\alpha \neq 0$.

Тогда $$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+1}{\operatorname{tg}\alpha-1}.$$

Ответ: $\frac{\operatorname{tg}\alpha+1}{\operatorname{tg}\alpha-1}$.

ПРИМЕР

3. Докажем тождество $\frac{\sin 22^\circ+\sin 8^\circ}{\sin 30^\circ}=\frac{\sin 12^\circ-\sin 2^\circ}{\cos 70^\circ-\cos 80^\circ}$.

Доказательство. Упростим левую часть равенства. Для этого используем формулы суммы синусов и двойного угла для синуса.

Тогда $$\frac{\sin 22^\circ+\sin 8^\circ}{\sin 30^\circ}=\frac{2\sin 15^\circ\cos 7^\circ}{2\sin 15^\circ\cos 15^\circ}=\frac{\cos 7^\circ}{\cos 15^\circ}.$$

Теперь упростим правую часть равенства. Для этого используем формулы разности синусов и разности косинусов.

Тогда $$\frac{\sin 12^\circ-\sin 2^\circ}{\cos 70^\circ-\cos 80^\circ}=\frac{2\sin 5^\circ\cos 7^\circ}{-2\sin 75^\circ\sin(-5^\circ)}=\frac{2\sin 5^\circ\cos 7^\circ}{2\cos 15^\circ\sin 5^\circ}=$$

$=\frac{2\sin 5^\circ\cos 7^\circ}{2\cos 15^\circ\sin 5^\circ}=\frac{\cos 7^\circ}{\cos 15^\circ}$. После преобразования правой и левой частей тождества $\frac{\sin 22^\circ+\sin 8^\circ}{\sin 30^\circ}=\frac{\sin 12^\circ-\sin 2^\circ}{\cos 70^\circ-\cos 80^\circ}$ получили одинаковое выражение $\frac{\cos 7^\circ}{\cos 15^\circ}$. Следовательно, $\frac{\sin 22^\circ+\sin 8^\circ}{\sin 30^\circ}=\frac{\sin 12^\circ-\sin 2^\circ}{\cos 70^\circ-\cos 80^\circ}$.

ПРИМЕР

4. Докажем тождество $-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha=\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-1$.

Доказательство. Выполним преобразование правой части равенства. Для этого к ней прибавим и вычтем одно и то же выражение

$2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$. Получим $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha - 1 = (\sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha) - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha - 1 = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha - 1 = -2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$, что и требовалось доказать.

В некоторых случаях для доказательства тождества приходится выполнить преобразования обеих его частей и получить одно и то же выражение.

ПРИМЕР

5. Докажем тождество $2(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) + 1 = 3(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha)$.

Доказательство. Сначала преобразуем выражение, стоящее в левой части: $2(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) + 1 = 2[(\sin^2\alpha)^3 + (\cos^2\alpha)^3] + 1 = 2[(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\sin^4\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha)] + 1 = 2[1\cdot(\sin^4\alpha - \sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha + \cos^4\alpha - 3\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha + 3\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha)] + 1 = 2[(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha] + 1 = 2(1 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha) + 1 = 2 - 6\sin^2\alpha\cos^2\alpha + 1 = 3 - 6\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

Теперь преобразуем выражение, стоящее в правой части:

$3(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha) = 3[(\sin^2\alpha)^2 + (\cos^2\alpha)^2 + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha] = 3[(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha] = 3(1 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha) = 3 - 6\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

Таким образом, преобразовав обе части равенства, получили одно и то же выражение: $3 - 6\sin^2\alpha\cos^2\alpha$, что и требовалось доказать.

В отдельных случаях при доказательстве тождеств используют различные правила, свойства и т. п.

ПРИМЕР

6. Докажем тождество $\dfrac{1 - \sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{1 + \sin\alpha}$.

Доказательство. Если это равенство рассматривать как пропорцию, то можно воспользоваться свойством: равенство $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ явля ется пропорцией тогда и только тогда, когда произведение ее крайних членов ad равно произведению ее средних членов bc. Вместо данного тождества докажем тождество: $(1 - \sin\alpha)(1 + \sin\alpha) = \cos\alpha\cdot\cos\alpha$. Преобразуем его левую часть, получим $(1 - \sin\alpha)(1 + \sin\alpha) = 1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha$.

Преобразуем правую часть, получим $\cos\alpha\cdot\cos\alpha = \cos^2\alpha$.

Примечание . При доказательстве тождеств, содержащих дробные выражения, надо обязательно учитывать допустимые значения переменной.

Таким образом, в после днем 6-м примере — $\cos\alpha \neq 0$, $\sin\alpha \neq -1$.

Алгебра

Преобразование каких частей тождества можно выполнять для его доказательства?

Упражнения

A

29.1. Упростите тригонометрическое выражение :

1) $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$;

2) $8\mathrm{tg}945^\circ + \mathrm{tg}(810^\circ + \alpha) - \mathrm{ctg}(450^\circ - \alpha)$;

3) $\sin(2\alpha - \pi) + 2\cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)\sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$;

4) $\sin(\alpha + \pi) + \mathrm{tg}(\alpha - \pi)$;

5) $\sin(23\pi + 2018) + \cos\left(\frac{31\pi}{2} + 2018\right)$;

6) $\sin\left(\frac{35\pi}{2} - \alpha\right) + \cos(68\pi - \alpha)$;

7) $\mathrm{tg}(9\pi - \alpha) + \mathrm{ctg}\left(\frac{57\pi}{2} + \alpha\right)$;

8) $\dfrac{\mathrm{tg}\left(\frac{11\pi}{2} + \alpha\right)\cos\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right)\cos(\alpha - 4\pi)}{\mathrm{ctg}(5\pi - \alpha)\cdot\sin\left(\frac{11\pi}{2} + \alpha\right)}$;

9) $\sin(7\pi - \alpha)\cos\left(\frac{15\pi}{2} + \beta\right) - \sin\left(\frac{19\pi}{2} - \alpha\right)\cos(6\pi - \beta)$;

10) $\dfrac{\sin(4\pi - \alpha)\mathrm{tg}\left(\frac{25\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos\left(\frac{9\pi}{2} + \alpha\right)\mathrm{ctg}(17\pi - \alpha)}$;

11) $\mathrm{tg}^2(540^\circ - \alpha)\left(\dfrac{1}{\cos^2(630^\circ + \alpha)} - 1\right)$;

12) $\mathrm{tg}(13\pi - \alpha)\mathrm{tg}\left(\frac{13\pi}{2} + \alpha\right) - \sin(\alpha - 22\pi)$.

29.2. Найдите значение выражения, предварительно преобразовав его:

1) $\sin7^\circ\cos23^\circ + \sin23^\circ\cos7^\circ + 1$;

2) $\dfrac{4\sin25^\circ\sin65^\circ}{\cos40^\circ}$;

3) $\dfrac{\mathrm{tg}22^\circ + \mathrm{tg}23^\circ}{1 - \mathrm{tg}22^\circ\,\mathrm{tg}23^\circ}$;

4) $\sin64^\circ\cos26^\circ + \cos64^\circ\sin26^\circ - \sin30^\circ$;

5) $\dfrac{\cos14^\circ + \sin14^\circ + \cos42^\circ + \sin42^\circ}{\sqrt{2}\cos14^\circ\sin73^\circ}$;

6) $\dfrac{\sin 36^\circ \sin 40^\circ + \cos 62^\circ + \cos 42^\circ}{4\cos 6^\circ \cos 4^\circ \sin 38^\circ}$;

7) $\dfrac{\sin 8^\circ - \sin 10^\circ - \sin 12^\circ + \sin 14^\circ}{4\sin 11^\circ \cos 1^\circ \sin^2 1^\circ}$;

8) $\dfrac{\cos 5^\circ + \cos 85^\circ + \sin 75^\circ + \sin 15^\circ}{4\sqrt{2}\cos 5^\circ \sin 55^\circ}$.

29.3. Упростите выражение и найдите его значение:

1) $\dfrac{3\cos 215^\circ - 4\cos 35^\circ - 2\sin 125^\circ}{\cos 17^\circ \cos 18^\circ - \cos 73^\circ \cos 72^\circ}$; 2) $\dfrac{5\sin 211^\circ + 8\cos 59^\circ - 5\sin 31^\circ}{\sin 54^\circ \sin 67^\circ - \sin 36^\circ \sin 23^\circ}$;

3) $\dfrac{7\cos 29^\circ - 2\cos 151^\circ + 4\sin 61^\circ}{\cos 67^\circ \cos 38^\circ + \cos 23^\circ \cos 52^\circ}$; 4) $\dfrac{2\sin 54^\circ + 3\cos 36^\circ - 2\cos 144^\circ}{\sin 70^\circ \sin 74^\circ - \sin 20^\circ \sin 16^\circ}$.

29.4. Проверьте справедливость равенства:

1) $\sin 93^\circ - \sin 63^\circ = \sin 33^\circ$; 2) $\cos 14^\circ - \sin 16^\circ = \cos 46^\circ$.

29.5. Вычислите:

1) $\dfrac{4(\cos 20^\circ - \sin 20^\circ)}{\sqrt{2}\sin 25^\circ}$; 2) $\dfrac{\sqrt{2}\left(\cos 25^\circ - \sin 25^\circ\right)}{\sin 20^\circ}$;

3) $\dfrac{1 - 2\cos^2 13^\circ}{\cos 26^\circ}$; 4) $\dfrac{1 - 2\sin^2 46^\circ}{8\cos 92^\circ}$.

29.6. Вычислите:

1) $\dfrac{\sin\beta\cos\beta + 2}{5\cos^2\beta + 1}$, если $\operatorname{tg}\beta = 2$;

2) $\dfrac{\sin\beta\cos\beta - 3}{6\cos^2\beta - \sin^2\beta}$, если $\operatorname{tg}\beta = -2$;

3) $\dfrac{2\sin\beta\cos\beta + 3}{4\cos^2\beta + \sin^2\beta}$, если $\operatorname{tg}\beta = -4$;

4) $\dfrac{\cos^2\beta + 2}{\cos^2\beta + 3\sin\beta\cos\beta}$, если $\operatorname{tg}\beta = 3$.

B

29.7. Найдите значение тригонометрического выражения:

1) $\dfrac{\cos 11\alpha + 3\cos 9\alpha + 3\cos 7\alpha + \cos 5\alpha}{\cos 8\alpha}$, если $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$;

2) $\cos 2\alpha - \cos 6\alpha$, если $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$;

3) $\sin 5\alpha - \sin 3\alpha$, если $\sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$;

4) $\cos 3\alpha - \cos 5\alpha$, если $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

29.8. Вычислите :

1) $\operatorname{tg}1^\circ \cdot \operatorname{tg}5^\circ \cdot \operatorname{tg}9^\circ \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg}85^\circ \cdot \operatorname{tg}89^\circ$;
2) $\operatorname{ctg}2^\circ \cdot \operatorname{ctg}8^\circ \cdot \operatorname{ctg}14^\circ \cdot \ldots \cdot \operatorname{ctg}82^\circ \cdot \operatorname{ctg}88^\circ$.

29.9. Вычислите:

1) $\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}$, если $\sin x = 0{,}21$;
2) $\operatorname{tg}x$, если $\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} = \sqrt{0{,}4}$;
3) $\cos x$, если $\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2} = \sqrt{0{,}5}$;
4) $\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}$, если $\sin x = -0{,}44$;
5) $\sin x$, если $\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} = 0{,}6$;
6) $\sqrt{10}\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)$, если $\cos x = 0{,}8$.

29.10. Вычислите :

1) $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}$;
2) $\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}$.

29.11. Найдите значение выражения:

1) $\sin(\alpha - \beta)$, если $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{4}$; $\alpha + \beta = \frac{9\pi}{2}$;
2) $\sin(\alpha + \beta)$, если $\sin\alpha\cos\beta = -\frac{1}{4}$; $\alpha - \beta = -\frac{\pi}{2}$;
3) $5\cos(\alpha - \beta)$, если $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}$; $\alpha + \beta = \frac{\pi}{3}$;
4) $4\sin(\alpha - \beta)$, если $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{4}$; $\alpha + \beta = -\frac{\pi}{6}$.

29.12. Вычислите:

1) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$;
2) $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = 0{,}8$;
3) $\sin^3\alpha - \cos^3\alpha$, если $\sin\alpha - \cos\alpha = 1{,}2$;
4) $\frac{1}{\sin^4\alpha} + \frac{1}{\cos^4\alpha}$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$;
5) $\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sin^3\alpha} + \frac{1}{\cos^3\alpha}\right)$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$;
6) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

29.13. Найдите значение тригонометрической функции:
1) $\operatorname{tg}\alpha$, если $2\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha + 5\cos\alpha = 10$;
2) $\operatorname{ctg}\alpha$, если $3\operatorname{ctg}\alpha + 4\sin\alpha - \cos\alpha = 12$;
3) $\operatorname{ctg}\alpha$, если $2\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha + 10\cos\alpha = 20$;
4) $\operatorname{tg}\alpha$, если $3\operatorname{ctg}\alpha - 0{,}1\sin\alpha - \cos\alpha = -0{,}3$.

29.14. Упростите выражение:
1) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta - \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$;
2) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$;
3) $\cos^2\left(\alpha - \frac{5\pi}{8}\right) - \sin^2\left(\alpha - \frac{3\pi}{8}\right)$; 4) $\sin^2\left(\beta - \frac{5\pi}{12}\right) - \cos^2\left(\beta + \frac{7\pi}{12}\right)$.

29.15. Докажите, что верно равенство:
$$\operatorname{tg}30^\circ + \operatorname{tg}40^\circ + \operatorname{tg}50^\circ + \operatorname{tg}60^\circ = \frac{8\cos 20^\circ}{\sqrt{3}}.$$

C

29.16. Докажите тождество:
1) $\sin\alpha + \sin2\alpha + \sin3\alpha + \ldots + \sin n\alpha = \dfrac{\sin\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$;

2) $\cos\alpha + \cos2\alpha + \cos3\alpha + \ldots + \cos n\alpha = \dfrac{\sin\frac{n\alpha}{2}\cos\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

29.17. Найдите значение выражения $\dfrac{\sin 4\alpha}{\sin\alpha}$, если известно, что $4\sin^2\alpha - 9\cos\alpha - 6 = 0$.

29.18. Сократите дробь: $\dfrac{4\cos^2 2\alpha - 4\cos^2\alpha + 3\sin^2\alpha}{4\cos^2\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) - \sin^2(2\alpha - 2\pi)}$.

29.19. Упростите выражение:
1) $0{,}125\cos4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha$;
2) $\sin^2\beta\operatorname{tg}\beta - \cos^2\beta\operatorname{ctg}\beta + 2\operatorname{ctg}2\beta$;
3) $\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha} - \dfrac{2\cos2\alpha}{1 + \sin(2\alpha + 1{,}5\pi)}$; 4) $\dfrac{1}{1 - \operatorname{tg}\beta} - \dfrac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right)\sin\beta}{\cos2\beta}$.

29.20. Докажите тождество:
$$\sin x + \sin3x + \sin5x + \sin7x = 4\cos x\cos2x\sin4x.$$

29.21. Найдите множество значений выражения:
1) $\operatorname{tg}x\cos x + \operatorname{ctg}x\sin x$; 2) $\operatorname{tg}x\cos x - \operatorname{ctg}x\sin x$.

29.22. Упростите выражение:

1) $\sqrt{2 + \sqrt{2 + 2\cos 4\beta}}$ при $0 \le \beta \le 90°$;

2) $\sqrt{2 + \sqrt{2 + 2\cos \beta}}$ при $360° \le \beta \le 720°$.

29.23. Докажите, если $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, то $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \times$ $\times \operatorname{tg}\gamma$.

29.24. Докажите тождество :

1) $\dfrac{\sin 4x}{1 + \cos 4} \cdot \dfrac{\cos 2x}{1 + \cos 2x} = \operatorname{tg} x$;   2) $\dfrac{\cos^3 x - \cos 3x}{\sin^3 x + \sin 3x} = \operatorname{tg} x$;

3) $\sin 4x + \cos 4x \operatorname{ctg} 2x = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{2\operatorname{tg} x}$;

4) $4\sin x \sin\left(\dfrac{\pi}{3} + x\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) = \sin 3x$.

29.25. Найдите значение выражения:

1) $\dfrac{1 + \cos 2\beta}{3 + 2\sin 2\beta}$, если $\operatorname{tg}\beta = 2$;   2) $\dfrac{3\sin 4\beta}{1 + 4\cos 2\beta}$, если $\operatorname{tg}\beta = -3$.

29.26. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения:
$\dfrac{2\cos^2\alpha + \cos 4\alpha - 1}{\cos^4\dfrac{\alpha}{2} - \sin^4\dfrac{\alpha}{2}}$.

29.27. Найдите значение суммы:

1) $\sin\dfrac{\pi}{6} + \sin^2\dfrac{\pi}{6} + \sin^3\dfrac{\pi}{6} + \ldots + \sin^n\dfrac{\pi}{6} + \ldots$;

2) $\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{3} + \operatorname{ctg}^2\dfrac{\pi}{3} + \operatorname{ctg}^3\dfrac{\pi}{3} + \ldots + \operatorname{ctg}^n\dfrac{\pi}{3} + \ldots$

29.28. Докажите, что значение выражения $\cos^2\alpha + \cos^2(\alpha + \beta) -$ $- 2\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos(\alpha + \beta)$ не зависит от величины α.

ПОВТОРИТЕ

29.29. Найдите значение выражения:

1) $1 + \dfrac{P_{10}}{P_9} - \dfrac{P_7}{P_6}$;   2) $\dfrac{P_7}{P_9} \cdot A_9^3 + 2$;

3) $\dfrac{4P_7}{P_{10}} \cdot A_{10}^2 + 0{,}5$;   4) $\dfrac{A_6^4}{P_3} : C_6^5$.

29.30. Найдите количество четных четырехзначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 3, 5, 0, при условии, что ни одна цифра не повторяется дважды.

29.31. Решите уравнение:

1) $A_x^2 = 7x$; 2) $A_x^2 = 5x + 24$.

29.32. На диаграмме (рис. 78) показана продажа продукции фирмы по месяцам 2018 г.

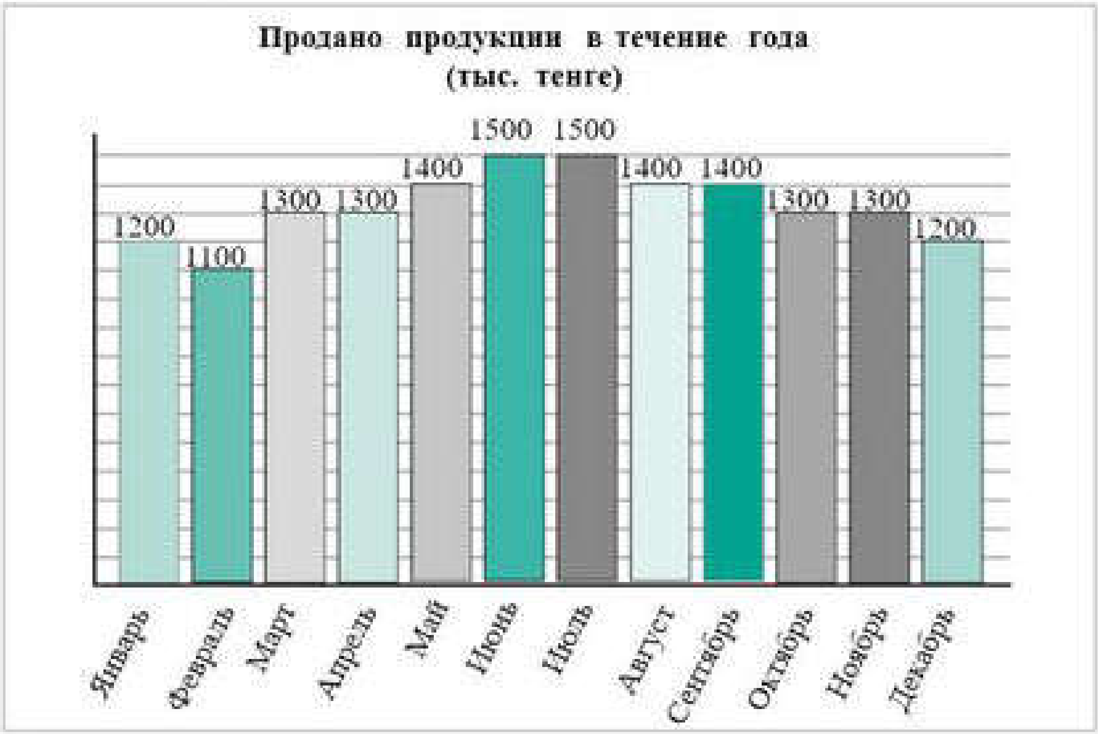


Рис. 78

На сколько процентов увеличилась выручка от продаж продукции в III квартале по сравнению с продажами в I квартале 2018 г.?

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

29.33. Найдите число способов покупки 1 кг груш и 1 кг мандаринов, если в магазине имеется 5 сортов груш и 4 сорта мандаринов.

29.34. В двух ящиках было 120 яблок. Три яблока переложили из первого ящика во второй. В результате количество яблок во втором ящике стало в два раза больше, чем в первом. Сколько яблок было в первом ящике первоначально?

Опорные понятия для овладения новыми знаниями

Множество, подмножество, элементы множества, размещения, перестановки, сочетания.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Отношение ординаты точки на окружности к ее абсциссе называется:

A) синусом угла; B) косинусом угла;
C) тангенсом угла; D) котангенсом угла.

2. В какой четверти расположен угол в 75°:

A) I; B) II; C) III; D) IV?

3. Найдите значение cos 30°:

A) $\frac{1}{2}$; B) 1; C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; D) $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

4. Поворотом на какой угол радиус займет такое же положение, что и при повороте на угол 80°:

A) 180°; B) 440°; C) 380°; D) 120°?

5. Найдите значение выражения $4\cos 90° - 8\sin 60°$:

A) $-4\sqrt{3}$; B) $4 - 4\sqrt{3}$; C) 0; D) –4.

6. Среди чисел найдите число, которое меньше нуля:

A) sin140°; B) cos140°; C) sin50°; D) cos50°.

7. Найдите значение cos(–30 °):

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; B) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; C) $-\frac{1}{2}$; D) $\frac{1}{2}$.

8. Углом какой четверти является угол α, если $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha > 0$:

A) I; B) II; C) III; D) IV?

9. Найдите значение sin390°:

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; B) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; C) $-\frac{1}{2}$; D) $\frac{1}{2}$.

10. Какое из выражений не имеет смысла:

A) cos0°; B) tg0°; C) ctg0°; D) ctg90° ?

11. Выразите в градусах угол $\frac{3\pi}{4}$:

A) 30°; B) 135°; C) $\frac{3}{4}$; D) 45°.

12. Выразите в радианах угол 200°:

A) $\frac{7\pi}{9}$; B) $\frac{10\pi}{9}$; C) 200π; D) 2π.

13. В какой четверти расположен угол $\frac{10\pi}{9}$:

A) I; B) II; C) III; D) IV?

14. Упростите $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$:

A) $\sin\alpha$; B) $\cos\alpha$; C) $-\sin\alpha$; D) $-\cos\alpha$.

15. Замените тригонометрической функцией угла α выражение $\mathrm{tg}(180° - \alpha)$:

A) $\mathrm{tg}\,\alpha$; B) $\mathrm{ctg}\,\alpha$; C) $-\mathrm{tg}\,\alpha$; D) $-\mathrm{ctg}\,\alpha$.

16. Найдите значение $\cos\frac{7\pi}{6}$:

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; B) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; C) $-\frac{1}{2}$; D) $\frac{1}{2}$.

17. Найдите значение $\cos 150°$:

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; B) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; C) $-\frac{1}{2}$; D) $\frac{1}{2}$.

18. Упростите выражение $\cos^2(360° - x) + \cos^2(270° + x)$:

A) $\frac{1}{2}$; B) -1; C) 1; D) 0.

19. Найдите $\mathrm{tg}2\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{4}{5}\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$:

A) $-\frac{24}{7}$; B) $\frac{24}{7}$; C) $-\frac{24}{25}$; D) $\frac{24}{25}$; E) $\frac{25}{7}$.

20. Найдите $\mathrm{ctg}2\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{3}{5}\left(\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}\right)$:

A) $\frac{7}{24}$; B) $\frac{24}{7}$; C) $\frac{25}{24}$; D) $\frac{24}{25}$; E) $\frac{25}{7}$.

21. $\sin\alpha = \frac{5}{13}\left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$. Вычислите $\mathrm{tg}\,\alpha$:

A) $-\frac{5}{12}$; B) $\frac{5}{12}$; C) $\frac{12}{13}$; D) $-\frac{12}{13}$; E) 5.

22. $\cos 2\alpha = \frac{1}{4}$. Вычислите $\sin^2 2\alpha$:

A) 0,75; B) 0,9375; C) 0,125; D) 0,5; E) –0,725.

23. $\cos\alpha = \frac{1}{5}$. Вычислите $\frac{2\sin\alpha + \sin 2\alpha}{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}$:

A) 0,25; B. 0,5; C) 0,75; D) 1,25; E) 1,5.

24. $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{3}{5}$. Вычислите $\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}$:

A) –2; B) 2; C) –4; D) 4; E) $\frac{4}{5}$.

25. Упростите выражение $\frac{\sin 2\alpha - \sin 3\alpha + \sin 4\alpha}{\cos 2\alpha - \cos 3\alpha + \cos 4\alpha}$:

A) $\mathrm{tg}\,\alpha$; B) $\mathrm{ctg}\,\alpha$; C) $\mathrm{tg}2\alpha$; D) $\mathrm{tg}3\alpha$; E) 1.

Глава V. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 30. СОБЫТИЕ И ЕГО ВИДЫ

Ключевые понятия

Событие, случайное событие, достоверное событие, невозможное событие, элементарное событие, благоприятствующие исходы, равновозможные и противоположные события

Вы ознакомитесь с понятиями: *событие, случайное событие, достоверное событие, невозможное событие, благоприятствующие исходы, равновозможные и противоположные события;*

научитесь различать элементарное событие от неэлементарного.

Под *событием* понимается всякое явление, о котором имеет смысл говорить, что оно происходит (имеет место) или не происходит.

ПРИМЕР

1. 1) "Утром пойдет дождь";
2) "девятиклассники изучают алгебру";
3) "на елке вырастут яблоки";
4) "при телефонном вызове абонент окажется занят";
5) "число вызовов по телефонной связи в каждый момент времени";
6) "попадание в цель при стрельбе из оружия".

Событиями являются и результаты различных опытов, наблюдений и измерений.

ПРИМЕР

2. 1) "Выпал герб (в опыте подбрасывания монеты)";
2) "выпала решка (в опыте подбрасывания монеты)".

Испытание , или *опыт* — это комплекс условий, в которых могут осуществиться или не осуществиться рассматриваемые события (результаты).

При многократном повторении комплекса условий говорят о *серии испытаний* .

Для обозначения событий используют символы: A, B, C и т. д.

События делят на *достоверные, случайные* и *невозможные* .

События

Достоверные	Случайные	Невозможные
Событие называется *достоверным*, если оно обязательно произойдет в данном испытании	Событие называется *случайным*, если оно может произойти, но может и не произойти	Событие называется *невозмож-ным*, если оно не может произойти в данном испытании, т. е. свершение которого при данных условиях исключается

ПРИМЕР

3. Примером случайного события является событие:

1) "выпадение герба", связанного с опытом подбрасывания монеты, в одних случаях, которое может произойти, в других — может и не произойти, или

2) "утром пойдет дождь", связанного с состоянием погоды, в одних случаях, которое может произойти, в других — может и не произойти.

Примером достоверного события является событие:

1) "девятиклассники изучают алгебру";

2) "за осенью наступит зима".

Примером невозможного события является событие:

1) "при подбрасывании монеты достоинством 5 тг выпадет 2 тг";

2) "за июнем сразу наступит январь".

В результате опыта могут произойти различные случайные события. Случайное событие "при бросании игральной кости выпала четверка" является элементарным событием — его нельзя разделить на более простые. Событие "при бросании игральной кости выпало нечетное число очков" не является элементарным событием — его можно разделить на более простые: "при бросании игральной кости выпало одно очко", "при бросании игральной кости выпало три очка", "при бросании игральной кости выпало пять очков".

События, которые нельзя разделить на более простые события, называются ***элементарными событиями***.

Исход опыта, в котором наблюдается интересующее нас событие, называется ***благоприятствующим исходом***.

ПРИМЕР

4. В классе 25 учащихся. Из них 17 мальчиков. Рассмотрим событие А: "наугад выбранный учащийся является мальчиком". Число благоприятствующих событию А исходов равно 17.

Если из некоторого множества отбирается один элемент и при этом никакому элементу множества не отдается предпочтения по сравнению с другими, то говорят, что каждому элементу множества обеспечена равная возможность быть отобранной (принцип равновозможности). Такие события называют *равновозможными событиями* .

Равновозможными исходами *называются исходы опыта, которые имеют одинаковые шансы наступления.*

ПРИМЕР

5. Так, являются равновозможными события:
A: "при бросании игральной кости выпала цифра 1";
B: "при бросании игральной кости выпала цифра 2";
C: "при бросании игральной кости выпала цифра 3";
D: "при бросании игральной кости выпала цифра 4";
E: "при бросании игральной кости выпала цифра 5";
F: "при бросании игральной кости выпала цифра 6".

Событием, противоположным событию A, называется событие $\overline{A}$, которое наступает тогда и только тогда, когда не наступает событие A.

ПРИМЕР

6. Парами противоположных событий являются:
"попадание при выстреле" и "промах при выстреле";
"безотказная работа всех элементов системы" и "отказ работы хотя бы одного элемента системы";
"выпал герб при бросании монеты" и "выпала решка при бросании монеты".

Событием, противоположным событию "вынули синий шар" в опыте, когда вынимают один шар из ящика с зелеными, желтыми и синими шарами, является "вынули шар хотя бы один: желтый или зеленый".

Достоверное событие обозначают буквой U.
Невозможное событие обозначают буквой V.
$\overline{U} = V$, $\overline{V} = U$.

1. Приведите примеры случайных событий.
2. Являются ли события "выпал герб при бросании монеты" и "выпала решка при бросании монеты" равновозможными?
3. Почему событие "при бросании игральной кости выпало четное число очков" не является элементарным?
4. Назовите событие, которое противоположно событию "при бросании игральной кости выпало четное число очков".

Упражнения

A

30.1. Как им (невозможным, достоверным или случайным) является событие — из списка журнала учащихся 9 класса (в котором есть девочки и мальчики) случайным образом выбран один учащийся:
1) это мальчик;
2) выбранному учащемуся 14 лет;
3) выбранному учащемуся 14 месяцев;
4) этому ученику больше 5 лет?

30.2. Каким (невозможным, достоверным или случайным) является событие — сегодня в городе барометр показывает нормальное атмосферное давление, при этом:
1) вода в чайнике закипела при температуре 70°С;
2) когда температура упала до –9°С, то вода в луже замерзла?

30.3 . Каким (невозможным, достоверным или случайным) является событие: "Измерены длины сторон треугольника: оказалось, что длина каждой стороны меньше значения суммы длин двух других сторон"?

30.4. Каким (невозможным, достоверным или случайным) является событие — бросают две игральные кости:
1) на первой кости выпало 2 очка, на второй — 5 очков;
2) сумма выпавших на двух костях очков равна 1;
3) сумма выпавших на двух костях очков равна 13;
4) сумма выпавших на двух костях очков меньше 14?

30.5. Каким (невозможным, достоверным или случайным) является событие — случайным образом открывается учебник казахского языка и находится второе слово на левой странице. Это слово начинается с буквы:

1) "Ә" или "Ң"; 2) "Ъ"?

30.6. Приведите пять примеров противополож ных событий.

B

30.7. Является ли элементарным данное событие? Если нет, то разделите его на простые события:

1) событие A: "случайным образом составленное квадратное уравнение имеет действительные корни";

2) событие B: "дискриминант квадратного уравнения отрицателен".

30.8. Являются ли равновозможными событие A и событие B, если событие A заключается в том, что случайным образом выбранная функция $y = f(x)$ на множестве R монотонно возрастает; событие B заключается в том, что $f(56) < f(57)$?

30.9 . Перечислите все равновозможные события, которые могут произойти в результате подбрасывания:

1) одной монеты;

2) игрального кубика;

3) двух монет.

30.10. Укажите события, противоположные событию:

1) моего соседа по парте зовут не Алибек и не Азамат;

2) явка на выборы была от 82% до 93%;

3) на контрольной работе по математике я не выполнил, как минимум, два задания из пяти.

30.11. Назовите событие, противоположное событию в данном испытании:

1) при бросании монеты выпала решка;

2) при бросании игральной кости выпало 4 очка;

3) из корзины, в которой лежат 3 белых и 6 красных шаров, случайным образом вынут красный шар;

4) при бросании игральной кости выпало меньше 4-х очков;

5) случайно выбранная цифра меньше 7;

6) из 5 выстрелов по мишени хотя бы одна пуля попала в цель.

C

30.12. При бросании игральной кости выпало нечетное число очков. Является ли это событие элементарным? Разделите это событие на простые события.

30.13. Из перечисленных событий назовите равновозможные:
событие A: при бросании игрального кубика выпало 2 очка;
событие B: при бросании игрального кубика выпало 4 очка;
событие C: при бросании игрального кубика выпало 6 очков;
событие D: при вынимании из колоды карт одной карты был вынут туз;
событие E: при вынимании из колоды карт одной карты был вынут валет.

ПОВТОРИТЕ

30.14. Выполните:

1) $\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\cdot\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$;

2) $\left(\frac{1}{a-\sqrt{x}}+\frac{1}{a+\sqrt{x}}\right):\frac{a}{a^2-x}$.

30.15. Решите методом интервалов неравенство:

1) $\frac{x}{x+1}\leqslant\frac{2}{x-1}$;   2) $\frac{2x}{x+2}-1\geqslant\frac{2}{x-2}$.

30.16. 1) На сколько процентов увеличится значение произведения двух чисел, если одно из них увеличить на 30%, другое — на 20%?

2) На сколько процентов уменьшится значение произведения двух чисел, если одно из них уменьшить на 25%, другое — на 40%?

3) На сколько процентов уменьшится дробь, если ее числитель уменьшить на 40%, знаменатель — на 20%?

4) На сколько процентов уменьшится значение произведения двух чисел, если одно из них уменьшить на 50%, другое увеличить на 20%?

30.17. Известно, что график функции $y = x^2 - ax + 4$ проходит через точку $M(-1; 3)$. Постройте график этой функции и найдите наименьшее значение функции.

30.18. PISA На диаграмме (рис. 79) показано количество цветов в цветочном магазине. Сколько гвоздик в магазине, если всего цветов 900 штук и гвоздик в целое число раз больше, чем астр?

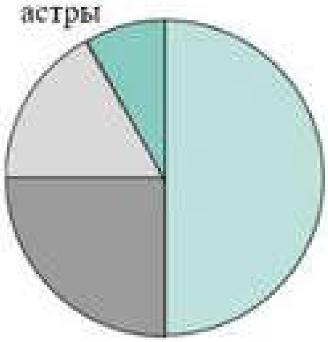


Рис. 79

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

30.19. Если бросается игральная кость, то какие элементарные события соответствуют тому, что выпавшее число очков: 1) четное; 2) нечетное; 3) больше 3?

30.20. Составьте несколько правильных обыкновенных дробей, если числа, стоящие в числителе этой дроби, выбираются из множества натуральных чисел, принадлежащих интервалу (2; 6), а числа, стоящие в знаменателе, — из множества натуральных чисел, принадлежащих интервалу (5; 8).

Опорные понятия для овладения новыми знаниями

Событие, элементарное событие, равновозможные исходы, благоприятствующие исходы, перестановки, размещения, сочетания.

§31. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КЛАССИЧЕСКОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ

Ключевые понятия

Вероятность, статистическая вероятность

Вы ознакомитесь с классическим определением вероятности и статистическим определением вероятности;

научитесь применять классическое определение вероятности и статистическое определение вероятности для решения задач.

Предвидеть события в массовых явлениях позволяет такой раздел математики, как теория вероятностей. Она применяется при анализе различных процессов и явлений, изучает количественные закономерности, которым подчиняются однородные массовые события.

Для практической деятельности надо уметь сравнивать события по степени возможности их наступления. Например, в реке плавают щуки и караси. Очевидно, что события "поймали щуку" и "поймали карася" обладают разной степенью возможности их наступления, поэтому для их сравнения нужна определенная количественная мера.

Количественной мерой возможности наступления события является *вероятность*. Наиболее широкое распространение получили два определения вероятности события: *классическое* и *статистическое*.

Классическое определение *вероятности* применимо только для тех событий, которые равновозможны.

Вероятностью события A *называется отношение числа* m*, благоприятствующих этому событию исходов, к общему числу исходов* n*, если они равновозможные.*

Вероятность событий обозначается большой латинской буквой P (от французского слова *probabilite*, что означает "возможность", "вероятность").

Вероятность события A обозначается: $P(A)$.

Вероятность события A *вычисляется по формуле:* $P(A) = \frac{m}{n}$, *где* m *— число исходов, благоприятствующих этому событию* A, n *— общее число равновозможных исходов.*

ПРИМЕР

1. Вероятность события A — "выпадет "орел" и события B — "выпадет "решка" можно записать так: $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}5$ или $P(A) = 50\%$, $P(B) = 50\%$.

ОБЪЯСНИТЕ

Почему вероятность события A заключена между нулем и единицей: 0 m $P(A)$ m 1?

ПРИМЕР

2. Найдем вероятность события X — "число выброшенных очков на игральной кости является простым числом".

Решение. Для нахождения вероятности события X воспользуемся формулой: $P(X) = \frac{m}{n}$, где m — число благоприятствующих исходов события A, n — общее число исходов.

Поскольку всего количество очков может быть только 1; 2; 3; 4; 5; 6, то $n = 6$. Простыми из чисел 1; 2; 3; 4; 5; 6 являются три числа: 2; 3; 5, поэтому $m = 3$. Получим $P(X) = \frac{3}{6} = 0{,}5$.

Ответ: 0,5.

Свойства вероятности

Свойство 1. *Если все случаи являются благоприятствующими данному событию, то это событие обязательно произойдет. Рассматриваемое событие является* ***достоверным****, а вероятность его появления равна* 1.

Свойство 2. *Если нет ни одного случая, благоприятствующего данному событию, то это событие в результате опыта произойти не может. Рассматриваемое событие является* ***невозможным****, а вероятность его появления равна* 0.

Свойство 3. *Вероятность наступления событий, образующих полную группу, равна* 1.

Свойство 4. *Вероятность наступления противоположного события данному определяется так же, как и вероятность наступления данного события. Вероятность наступления противоположного события равна значению разности между единицей и вероятностью наступления события.*

***Статистической вероятностью события** A называется относительная частота (частотность) появления этого события в n произведенных испытаниях.*

Статистическая вероятность события A вычисляется по формуле:

$P(A) = w(A) = \frac{m}{n}$, где $w(A)$ — относительная частота события A; m — число испытаний, в которых появилось событие A, n — общее число испытаний.

ПРИМЕР

3. Из 500 рожденных детей родилось 240 девочек. Найдите частоту рождения девочек.

Решение. $w(A) = \frac{240}{500} = 0{,}48$.

Ответ : 0,48.

?

1. Может ли частота события быть:
1) отрицательным числом; 2) числом, которое больше 2?

2. Какова вероятность события:
1) достоверного; 2) невозможного; 3) равновозможного из двух?

Упражнения

A

31.1. При бросании игрального кубика выпадает одна из цифр от 1 до 6. Найдите вероятность события:
1) выпадет цифра 2;
2) выпадет цифра 1 или 2;
3) выпадет цифра 4 или 6;
4) выпадет нечетная цифра.

31.2. а) В урне 2 белых и 5 красных шаров. Найдите вероятность того, что наудачу извлеченный из урны шар окажется: 1) белый; 2) красный; 3) зеленый.
б) В урне 4 красных и 7 синих шаров. Найдите вероятность того, что наудачу извлеченный из урны шар окажется: 1) красный; 2) не белый; 3) синий.

31.3. Испытание состоит в подбрасывании игральной кости. Рассмотрим события A, B и C. Событие A: "выпавшее на верхней грани число очков делится на 12", B: "выпавшее на верхней грани число очков равно 2", C: "выпавшее на верхней грани число очков делится на 2". Объясните, какое утверждение верно, а какое нет:

1) $P(A) = 1$; 2) $P(A) = 0$;

3) $P(C) = 0{,}5$; 4) $P(\overline{B}) = \frac{5}{6}$;

5) $P(B) = \frac{1}{6}$.

31.4. 1) В классе 25 учащихся, из которых 5 учатся на отлично, 12 — на хорошо, 6 — на удовлетворительно и 2 — слабо. Какова вероятность того, что наугад вызванный к доске учащийся отличник или ударник?

2) Среди 25 экзаменационных билетов 5 "легких". Двое учащихся по очереди берут по одному билету. Какова вероятность того, что первый учащийся взял "легкий" билет?

31.5. Брошена игральная кость. Найдите вероятность выпадения:

1) трех или пяти очков;

2) пяти или шести очков;

3) семи очков.

B

31.6. Брошены две игральные кости. Найдите вероятность того, что значение произведения очков равно 5.

31.7. 1) Монета брошена два раза. Какова вероятность того, что хотя бы один раз появится герб?

2) Брошены три монеты. Какова вероятность того, что выпадут ровно два герба?

31.8. Для экзамена подготовлены билеты с номерами от 1 до 25. Какова вероятность того, что взятый учащимся билет наугад имеет:

1) однозначный номер;

2) двузначный номер?

31.9. Случайным образом выбрали двузначное число. Найдите вероятность того, что оно:

1) оканчивается нулем;

2) состоит из одинаковых цифр;

3) больше 27, но меньше 46;

4) является квадратом целого числа.

31.10. Найдите частоту события, если:

1) на один из пяти приобретенных лотерейных билетов выпал выигрыш;

2) на четыре из 100 приобретенных лотерейных билетов выпал выигрыш;

3) из 20 выстрелов получилось шесть попаданий в мишень;

4) из 30 дней было 12 солнечных дней.

C

31.11. Произведено 160 выстрелов по мишени. Известно, что статистическая вероятность поражения мишени равна 0,3. Найдите число попаданий в мишень.

31.12. Дано выражение $\sqrt{n-10}$. Значение переменной n случайно выбирается среди натуральных чисел от 1 до 99. Найдите вероятность того, что значение выражения:

1) не определено; 2) меньше 10;

3) принадлежит отрезку [1; 6].

31.13. 1) Случайным образом выбирается натуральное число из интервала (–1; 6). Найдите вероятность того, что это число является корнем уравнения $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$.

2) Случайным образом выбирается целое число из интервала (–2; 6). Найдите вероятность того, что это число является корнем уравнения $x^3 - x^2 - 6x = 0$.

3) Случайным образом выбирается целое число из промежутка [–1; 10]. Найдите вероятность того, что это число является решением неравенства $x^2 - 5x - 6 < 0$.

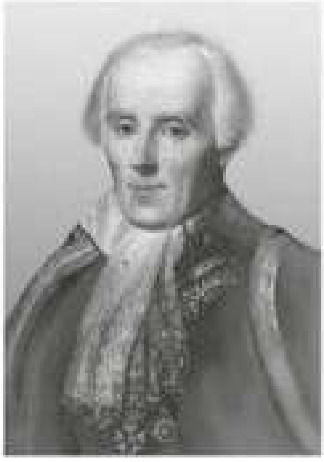
4) Случайным образом выбирается целое число из промежутка [–1; 10]. Найдите вероятность того, что это число является решением неравенства $x^2 - 5x - 6$ m 0.

31.14. Подготовьте сообщение из истории появления теории вероятностей.

ПОДГОТОВЬТЕ СООБЩЕНИЕ ОБ УЧЕНЫХ-МАТЕМАТИКАХ

31.15. О Пьере-Симоне Лапласе — одном из создателей теории вероятностей ;

о Б. Паскале, в работах которого впервые отражены основные понятия теории вероятностей.



Пьер-Симон Лаплас
(1749 —1827)

Блез Паскаль
(1623—1662)

ПОВТОРИТЕ

31.16. Найдите значение тригонометрического выражения:

1) $\dfrac{\operatorname{tg} 30^\circ + \cos\dfrac{\pi}{6}}{\sin\dfrac{\pi}{2} - 4 \cdot \operatorname{ctg} 135^\circ}$; 2) $\dfrac{\sqrt{2} \cdot \sin 45^\circ + \sqrt{2} \cdot \cos\dfrac{\pi}{4}}{5 \cdot \operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{4} - 3 \cdot \operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{4}}$.

31.17. Постройте график уравнения:

1) $\dfrac{y - x^2 + 3x}{x^2 - 4} = 0$; 2) $\dfrac{y - \sqrt{x + 2}}{x^2 - 1} = 0$.

31.18. Установите закономерность в последовательности чисел:

1) –1; 2; 7; 14; 23; … ; 2) 4; 7; 12; 19; 28; … .

31.19. 1) Каждое простейшее животное инфузория-туфелька размножается делением на две части. Сколько инфузорий было первоначально, если после шестикратного деления их стало 320?

2) Тело падает с башни высотой 62 м. В первую секунду пролетает 2 м, а в каждую следующую секунду летит в 2 раза быстрее, чем за предыдущую. Сколько секунд пройдет до удара тела о землю?

МАТЕМАТИКА В ПРОФЕССИИ ПОВАРА

31.20. Сколько нужно взять молока 10%-ной жирности и пломбира 30%-ной жирности, чтобы получить 200 г 16%-го праздничного коктейля?

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

31.21. 1) В равносторонний треугольник со стороной 6 см вписан круг. Найдите отношение площади круга к площади треугольника.

2) В квадрат со стороной 8 см вписан круг. Найдите отношение площади круга к площади квадрата.

31.22. Найдите длину интервала, числа из которого являются решением неравенства:

1) $x^2 + 2x - 8 < 0$;   2) $x^2 - 3x - 10 < 0$;
3) $x^2 - 6x - 2 < 0$;   4) $x^2 + 12x - 4 < 0$.

Опорные понятия для овладения новыми знаниями

Событие, элементарное событие, благоприятное событие, вероятность события, классическая вероятность, статистическая вероятность, длина отрезка, площадь фигуры, площадь круга .

§ 32. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ

Ключевые понятия

Вероятность, геометрические вероятности

Вы научитесь применять геометрическую вероятность при решении задач.

Кроме классического и статистического определения вероятности в практике используется и геометрическая вероятность. Вы знаете, что классическое определение вероятности применимо только тогда, когда исходы равновозможны. При этом предполагается, что число исходов конечно. Применение статистического определения вероятности требует проведения испытаний. В случаях, если число возможных исходов бесконечно, используют геометрические вероятности.

Геометрические вероятности — вероятности попадания точки в часть отрезка, плоскости, пространственной фигуры.

ПРИМЕР

1. Пусть на плоскости задана некоторая геометрическая фигура D и геометрическая фигура E, являющаяся частью фигуры D (рис. 80).

В результате испытания выбирается случайно точка, принадлежащая фигуре D. Надо найти вероятность того, что эта точка окажется принадлежащей фигуре E.

Решение. Выбранная точка может быть из любой области фигуры D, но вероятность выбора точки из области фигуры E прямо пропорциональна площади этой фигуры и не зависит от ее формы и расположения в фигуре D.

Тогда вероятность события A — выбранная точка окажется из области фигуры E и находится по формуле $P(A)=\frac{S(E)}{S(D)}$, где $S(E)$ — площадь фигуры E, $S(D)$ — площадь фигуры D.

Вероятность события A — выбранная точка окажется из области фигуры E, которая находится по формуле: $P(A)=\frac{S(E)}{S(D)}$, где $S(E)$ — площадь геометрической фигуры E, $S(D)$ — площадь геометрической фигуры D, а фигура E полностью вмещается в фигуру D и является *геометрической вероятностью*.

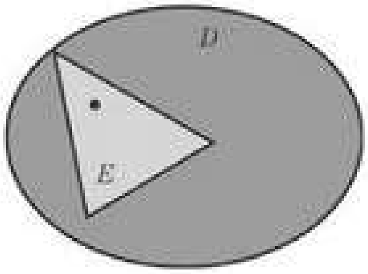


Рис. 80

Пусть плоская фигура площадью S_1 включается в плоскую фигуру площадью S_2. Вероятность события A "наудачу брошенная точка попала на плоскую фигуру площадью S_1" определяется равенством:

$$P(A)=\frac{S_1}{S_2}.$$

ПРИМЕР

2. В квадрат, длина стороны которого равна 4 см, вписан круг радиусом 2 см. Какова вероятность того, что точка, случайным образом поставленная в квадрат, окажется внутри круга?

Решение. По определению геометрической вероятности искомая вероятность равна отношению площади круга (в который точка должна попасть) к площади квадрата (в которой точка ставится), т. е.

$$P = \frac{S_{кр}}{S_{кв}} = \frac{4\pi}{16} = \frac{\pi}{4} = \frac{3{,}14}{4} = 0{,}785.$$

Ответ : 0,785.

ПРИМЕР

3. В квадрат с вершинами (0; 0), (0; 1), (1; 1), (1; 0) наудачу брошена точка $(x; y)$. Найдем вероятность того, что координаты этой точки удовлетворяют неравенству $y < 2x$.

Решение. По заданным в условии координатам построим квадрат и график уравнения $y = 2x$ (рис. 81).

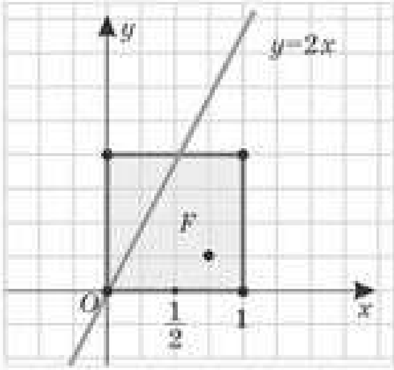


Рис. 81

Для того чтобы координаты точки, брошенной наугад в квадрат с вершинами (0; 0), (0; 1), (1; 1), (1; 0), удовлетворяли неравенству $y = 2x$, надо чтобы эта точка попала в фигуру F, которая является частью квадрата, расположенного ниже прямой — графика функции $y = 2x$.

Воспользуемся формулой $P(A) = \frac{S(F)}{S(E)}$, где $S(F)$ — площадь фигуры F, $S(F)$ — площадь квадрата. Вычислим $S(E)$ и $S(F)$.

$S(E) = 1$ и $S(F) = S(E) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Тогда $P(A) = \frac{3}{4}$.

Ответ : $\frac{3}{4}$.

Геометрической вероятностью события A (выбранная точка окажется из области отрезка FE) является и вероятность события, которая находится по формуле $P(A) = \frac{l(FE)}{l(MN)}$, где $l(MN)$ — длина некоторого отрезка MN, $l(FE)$ — длина некоторого отрезка FE, и отрезок FE полностью вмещается в отрезок MN (рис. 82).

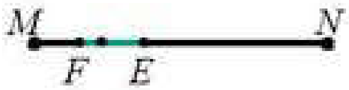


Рис. 82

Пусть отрезок длиной l включается в отрезок длиной L. Вероятность события A — "наудачу брошенная точка попала на отрезок длиной l" определяется равенством:

$$P(A) = \frac{l}{L}.$$

ПРИМЕР

4. На отрезке AD длиной 15 см наугад отметили точку X. Какова вероятность того, что она находится на расстоянии не более 7 см от точки A и не больше 11 см от точки D?

Решение . Изобразим условие с помощью рисунка 83. По условию задачи $AC = 7$ см, $BD = 11$ см.

Рис. 83

Точка X лежит на отрезке BC, длина которого равна $7 + 11 - 15 = 3$ (см).

Тогда по формуле $P(A) = \dfrac{BC}{AD} = \dfrac{3}{15} = \dfrac{1}{5} = 0{,}2$.

Ответ : 0,2.

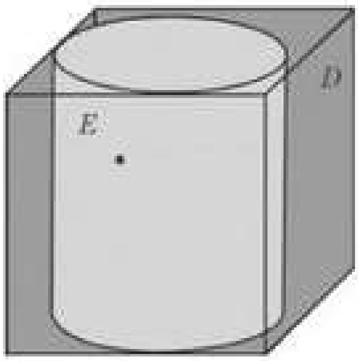


Рис. 84

Геометрической вероятностью события A — "выбранная точка окажется из области тела E" является вероятность события, которая нах одится по формуле $P(A) = \dfrac{V(E)}{V(D)}$, где $V(E)$ — объ ем тела E, $V(D)$ — объем тела D, и тело E полностью вмещается в тело D (рис. 84).

Пусть пространственная фигура объемом v включается в пространственную фигуру обьемом V. Вероятность события A "наудачу брошенная точка попала на пространственную фигуру объемом v" определяется равенством:

$$P(A) = \frac{v}{V}.$$

ПРИМЕР

5. Внутри прямоугольного параллелепипеда с измерениями 4 см, 8 см, 16 см находится куб, длина ребра которого равна 4 см. Какова вероятность того, что наудачу выбранная точка X прямоугольного параллелепипеда окажется внутри куба?

Решение. Объем куба равен 64 см^3, объем параллелепипеда — 512 см^3. Следовательно, $P(A) = \frac{V_k}{V_n} = \frac{64}{512} = \frac{1}{8} = 0,125$.

Ответ: 0,125.

ОБЪЯСНИТЕ

Почему все рассмотренные случаи вычисления геометрической вероятности можно выразить одной формулой $P = \frac{m_E(F_1)}{m_E(F)}$, где $F_1 \subset F$, $m_E(F_1)$ и $m_E(F)$ — геометрические меры (длины, площади или объема)?

?

1. К каким геометрическим величинам применяют геометрическую вероятность?
2. В каком случае геометрическая вероятность равна: 1) 0; 2) 1?

Упражнения

А

32.1. На стол бросают игральный кубик. Найдите вероятность того, что:
1) на кубике появится 4 очка;
2) на кубике появится четное число очков.

32.2. На отрезок длиной в 1 см наугад брошена точка. Какова вероятность того, что расстояние от точки до концов отрезка превосходит $\frac{1}{4}$?

32.3. В квадрат, длина стороны которого равна 2 см, наугад брошена точка A. Какова вероятность того, что точка A попадает в квадрат, находящийся в первом квадрате, длина стороны которого равна 1 см?

32.4. В квадрат, длина стороны которого равна 2 см, наугад брошена точка A. Какова вероятность того, что точка A не попадает в квадрат, находящийся в первом квадрате, длина стороны которого равна 1 см?

32.5. В круг, длина радиуса которого равна 2 см, наугад брошена точка B. Найдите вероятность того, что эта точка попадает в круг, находящийся внутри первого круга, длина радиуса которого равна 1 см.

32.6. В круг, длина радиуса которого равна 2 см, наугад брошена точка B. Найдите вероятность того, что эта точка не попадает в круг, находящийся внутри первого круга, длина радиуса которого равна 1 см.

32.7. В шар, длина радиуса которого равна 3 см, наугад брошена точка B. Найдите вероятность того, что эта точка попадает в шар, находящийся внутри первого шара, длина радиуса которого равна 2 см.

32.8. В шар, длина радиуса которого равна 3 см, наугад брошена точка B. Найдите вероятность того, что эта точка не попадает в шар, находящийся внутри первого шара, длина радиуса которого равна 2 см.

B

32.9. На отрезке AB длиной 12 см наугад ставят точку M. Найдите вероятность того, что площадь квадрата, построенного на отрезке AM, будет заключена между площадями, равными 36 см^2 и 81 см^2.

32.10. 1) Случайным образом выбирается целое число из промежутка $[1; 10]$. Найдите вероятность того, что это число является решением неравенства $x^2 - 5x + 6 < 0$.

2) Случайным образом выбирается целое число из промежутка $[1; 10]$. Найдите вероятность того, что это число является решением неравенства $x^2 - 5x - 6$ m 0.

32.11. 1) В квадрат , длина стороны которого равна 1 см, наугад брошена точка A. Какова вероятность того, что расстояние от точки A до стороны квадрата не превосходит $\frac{1}{3}$?

2) В квадрат , длина стороны которого равна 1 см, наугад брошена точка A. Какова вероятность того, что расстояние от точки A до центра квадрата не превосходит $\frac{1}{3}$?

3) В квадрат , длина стороны которого равна 1 см, наугад брошена точка A. Какова вероятность того, что расстояние от точки A до указанной вершины квадрата не превосходит $\frac{1}{4}$?

32.12. На координатной плоскости построены две концентрические окружности, длины радиусов которых равны 5 см и 10 см.

Точка брошена наудачу в большой круг. Найдите вероятность того, что точка попадет также и в кольцо, образованное построенными окружностями.

C

32.13. В куб вписан шар. Точка наугад бросается в куб. Найдите вероятность того, что точка попадет в шар.

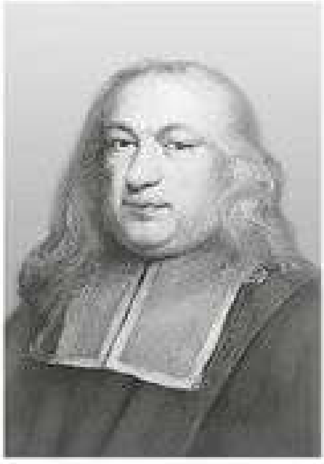
***32.14** . В шар вписан куб. Точка наугад бросается в шар. Какова вероятность того, что она попадет в куб?

***32.15** . В куб вписан шар. Точка наугад бросается в куб. Найдите вероятность того, что она не попадет в шар.

ПОДГОТОВЬТЕ СООБЩЕНИЕ ОБ УЧЕНЫХ-МАТЕМАТИКАХ

32.16. Возникновение теории вероятностей как науки относят к Средним векам .

Самые ранние работы ученых в области теории вероятностей относятся к XVII в. Исследуя прогнозирование выигрыша в азартных играх, Блез Паскаль и Пьер де Ферма открыли первые вероятностные закономерности, возникающие при бросании костей . Решением тех же задач занимался и Христиан Гюйгенс . Важный вклад в теорию вероятностей внес Якоб Бернулли .



Пьер де Ферма
(1601—1655)

Христиан Гюйгенс
(1629—1695)

Якоб Бернулли
(1654—1705)

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. События, которые в результате испытания могут наступить одновременно, называются:

A) достоверными; B) невозможными; C) случайными;
D) противоположными; E) равновозможными.

2. В корзине лежат 9 красных, 5 синих и 6 желтых шариков. Из корзины вынимается один шарик. Вероятность того, что шарик окажется синим, равна:

A) $\frac{2}{5}$; B) 0,25; C) $\frac{5}{16}$; D) $\frac{3}{8}$; E) 0,4.

3. Натуральные числа от 1 до 32 записаны на одинаковых карточках и помещены в урну. Из урны извлекается одна карточка. Найдите вероятность того, что число на этой карточке кратно числу 4:

A) $\frac{8}{25}$; B) 0,5; C) $\frac{7}{32}$; D) 0,25; E) 0,3.

4. Найдите вероятность того, что в выбранном наудачу двузначном числе все цифры разные:

A) 0,5; B) $\frac{8}{9}$; C) 0,6; D) 0,75; E) 0,85.

7. В мешочке находится 10 альчиков красного цвета, 10 — синего, 6 — желтого и 6 белого цвета. Найдите вероятность того, что наудачу вынутый альчик будет красным или белым:

A) 0,2; B) 0,3; C) 0,4; D) 0,5; E) 0,35.

6. В магазине имеются 40 смартфонов, причем 20 из них импортного производства. Найдите вероятность того, что среди 6 проданных в течение дня смартфонов окажется 3 импортных, предполагая, что вероятности покупки смартфонов разных марок одинаковы:

A) $\frac{C_{20}^3}{C_{40}^3}$; B) $\frac{2C_{20}^3}{C_{40}^6}$; C) $\frac{C_{20}^3}{C_{40}^6}$; D) $\frac{C_{20}^2 \cdot C_{20}^3}{C_{40}^6}$; E) $\frac{C_{20}^2 + C_{20}^3}{C_{40}^6}$.

7. Выбирается натуральное число от 1 до 20. Найдите вероятность того, что это число является корнем уравнения $(x^2 - 10x + 24) \cdot (x^2 - 8x + 15) = 0$:

A) 0,25; B) 0,5; C) 0,4; D) 0,2; E) 0,1.

8. Точка отмечается внутри квадрата со стороной 20 см. Найдите вероятность того, что она не выбрана из круга, вписанного в этот квадрат:

A) 0,25; B) $1 - \frac{\pi}{4}$; C) 0,4; D) $\frac{\pi}{4}$; E) 0,6.

9. Выбирается натуральное число от 1 до 10 включительно. Найдите вероятность того, что это число является решением неравенства $(x^2 - 2x - 24)(x^2 - 2x - 15)$ m 0:

A) 0,25; B) 0,3; C) 0,4; D) 0,1; E) 0,2.

10. Выбирается целое число от –9 до 10 включительно. Найдите вероятность того, что это число является решением неравенства $(x^2 - 9)(x^2 - 8x - 9) < 0$:

A) 0,25; B) 0,3; C) 0,4; D) 0,2; E) 0,5.

11. Среди 30 экзаменационных вопросов 5 "легких" и 6 "сложных". Двое учащихся получают один из вопросов. Какова вероятность того, что второй ученик получил "сложный" вопрос, если первый ученик получил "легкий" вопрос:

A) 0,15; B) $\frac{2}{29}$; C) 0,14; D) $\frac{6}{29}$; E) 0,3?

12. Дано выражение $\sqrt{n-6}$. Значение переменной n случайно выбирается среди натуральных чисел от 1 до 100. Найдите вероятность того, что значение выражения меньше 4:

A) 0,12; B) 0,16; C) 0,18; D) 0,2; E) 0,3.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ КУРСА 9 КЛАССА

Вычисление выражений

1. Найдите значение выражения:

1) $\cos 60° - \sin 60° + \operatorname{ctg} 60° - \operatorname{tg} 60°$;
2) $-\sin 30° + \cos 30° - \operatorname{ctg} 30° + \operatorname{tg} 30°$;
3) $\cos 45° - \operatorname{tg} 45° - \sin 45° + \operatorname{ctg} 45°$;
4) $\sin 0° - \cos 30° + \operatorname{tg} 45° - \operatorname{ctg} 60°$;
5) $-\cos 0° + \operatorname{tg} 30° - \operatorname{ctg} 45° + \sin 60°$;
6) $\operatorname{tg} 0° - \operatorname{ctg} 90° - \sin 0° - \cos 90°$.

2. Найдите значение выражения:

1) $\sin\frac{\pi}{6} - 4\cos\frac{\pi}{6} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} - 5\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}$;
2) $\cos\frac{\pi}{2} + 9\sin\frac{\pi}{2} - \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} - 7\operatorname{tg} 0°$;
3) $\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} + 2\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} - 11\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$;
4) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2} - 5\sin\frac{\pi}{3} + 6\cos\frac{\pi}{3} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$.

3. Вычислите:

1) $\dfrac{\cos\frac{\pi}{6} - \sqrt{3}\cdot\operatorname{tg} 60°}{\sin\frac{\pi}{6} + \cos 60°}$; 2) $\dfrac{\sqrt{3}\cdot\operatorname{ctg} 30° + \sqrt{2}\cdot\sin\frac{\pi}{4}}{2\cdot\operatorname{tg} 45° - \cos 0°}$;

3) $\dfrac{\operatorname{tg} 30° + \cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{2} - 4\cdot\operatorname{ctg} 45°}$; 4) $\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sin 45° + \sqrt{2}\cdot\cos\frac{\pi}{4}}{5\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - 4\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}}$;

5) $6\cos 40° - 8\cos^3 40°$; 6) $\dfrac{4\sin 25°\sin 65°}{\cos 40°}$.

4. Найдите:

1) $\cos\alpha$, $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha = 0{,}7$ и $0° < \alpha < 90°$;
2) $\sin\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\cos\alpha = 0{,}6$ и $270° < \alpha < 360°$;
3) $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $\cos 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = 5$ и $180° < \alpha < 270°$.

5. Вычислите:

1) $\sin 2\alpha$, $\cos 4\alpha$, $\operatorname{ctg} 4\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ и $0° < \alpha < 90°$;
2) $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$, $\sin 4\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ и $180° < \alpha < 270°$.

6. Найдите:

1) $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{7}{9}$ и $0° < \alpha < 90°$;

2) $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{4\sqrt{2}}{9}$ и $90° < \alpha < 180°$.

7. Найдите:

$\cos(\alpha + \beta)$, $\sin(\alpha - \beta)$, $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$, если $\sin\alpha = \frac{1}{6}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{35}}{6}$,

$\sin\beta = \frac{1}{9}$, $\cos\beta = \frac{4\sqrt{5}}{9}$ и α, $\beta \in$ I четверти.

8. Найдите:

$\cos(\alpha - \beta)$, $\sin(\alpha + \beta)$, $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$, если $\sin\alpha = \frac{6}{7}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{13}}{7}$,

$\sin\beta = \frac{7}{8}$, $\cos\beta = \frac{\sqrt{15}}{8}$ и α, $\beta \in$ I четверти.

9. Вычислите d и a_n арифметической прогрессии, если:

1) $a_1 = 8{,}5$; $a_2 = 10{,}5$; $n = 4$;

2) $a_1 = -19$; $a_2 = -16$; $n = 6$;

3) $a_1 = 23$; $a_2 = 19$; $n = 5$;

4) $a_1 = -1{,}7$; $a_2 = -3{,}7$; $n = 7$.

10. Найдите a_1 и a_n арифметической прогрессии, если:

1) $a_1 = 1{,}6$; $d = 0{,}2$; $n = 10$;

2) $a_3 = 27$; $d = -0{,}5$; $n = 8$;

3) $a_4 = 4{,}6$; $d = 2{,}3$; $n = 7$;

4) $a_2 = 0$; $d = -4{,}1$; $n = 9$.

11. Найдите n и S_m арифметической прогрессии, если:

1) $a_1 = -35$; $a_n = -20$; $d = 5$ и $m = 6$;

2) $a_2 = 30$; $a_n = 20$; $d = -5$ и $m = 5$;

3) $a_4 = 6{,}2$; $a_n = 7{,}4$; $d = -0{,}4$ и $m = 10$;

4) $a_3 = -6{,}6$; $a_n = -7{,}3$; $d = 0{,}7$ и $m = 20$.

12. Найдите a_1, если:

1) $d = -20$; $S_4 = 320$;

2) $d = 20$; $S_6 = 60$;

3) $d = 30$; $S_7 = 259$;

4) $d = -40$; $S_9 = 1350$.

13. Вычислите q и b_n геометрической прогрессии, если:

1) $b_1 = 0{,}7$; $b_2 = 1{,}4$; $n=5$;

2) $b_1 = 0{,}6$; $b_2 = 1{,}8$; $n = 7$;

3) $b_1 = 0{,}2$; $b_2 = 1{,}4$; $n=4$;

4) $b_1 = 0{,}3$; $b_2 = -1{,}2$; $n = 6$.

14. Найдите b_1 и b_n геометрической прогрессии, если:

1) $b_2 = -243$; $q = -\frac{1}{3}$; $n = 4$; 2) $b_3 = 81$; $q = -\frac{1}{3}$; $n = 8$;

3) $b_4 = 128$; $q = -\frac{1}{2}$; $n = 10$; 4) $b_5 = 64$; $q = -\frac{1}{2}$; $n = 9$.

15. Найдите S_n геометрической прогрессии, если:

1) $b_1 = -1000$; $q = 0,5$; $n = 6$; 2) $b_1 = 400$; $q = 0,2$; $n = 7$;

3) $b_1 = 900$; $q = 0,01$; $n = 6$; 4) $b_1 = -500$; $q = -0,2$; $n = 8$.

16. Найдите b_1 геометрической прогрессии, если:

1) $b_4 = -\frac{27}{32}$; $q = -\frac{3}{4}$; 2) $b_5 = -16$; $q = \frac{2}{3}$;

3) $b_3 = 90$; $q = \frac{3}{5}$; 4) $b_4 = 12,5$; $q = -\frac{5}{6}$.

Тождественные преобразования выражений

17. Упростите выражение:

1) $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \mathrm{ctg}(2\pi - \alpha) \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \mathrm{tg}(2\pi + \alpha)$;

2) $\cos(2\pi - \alpha) \cdot \left(\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)\right)^2 \cdot \mathrm{tg}(\pi + \alpha) \cdot \left(\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\right)^2$.

18. Докажите, что значение выражения $2\sin(-\alpha) \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \cos(360° - 2\alpha) \cdot \mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) - 2\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$ равно нулю.

19. Верно ли равенство $0,5\cos 8\alpha - 1,5 - \cos^2 4\alpha = 1$?

20. Упростите выражение:

1) $\dfrac{\mathrm{ctg}^2(270° - 3\alpha) \cdot \cos(2\alpha + 90°) \cdot \cos(\alpha - 180°) \cdot \mathrm{ctg}(-\alpha)}{\sin(\alpha - 90°) \cdot \mathrm{tg}(270° + \alpha) \cdot \cos(-\alpha) \cdot \mathrm{tg}^2(180° + 3\alpha)}$;

2) $\dfrac{\sin(\beta + 63°) + \sin(\beta - 57°)}{2\cos(\beta - 87°)}$.

21. Докажите, что значение выражения

$$2 \cdot \left(0,5 - 0,5\cos 4\alpha + \frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2 2\alpha}\right) - (1 - \sin^2 2\alpha) \cdot \frac{1}{\mathrm{ctg}^2 2\alpha} - \cos^2 2\alpha$$

равно единице.

22. Упростите выражение:

1) $\left[\left(1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\left(\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)\right]:$

$:\left[\left(1-\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{\operatorname{ctg}\left(90^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\operatorname{ctg}\left(180^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right];$

2) $\frac{\sin^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}{\cos^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha};$

3) $\frac{1}{8}\cos4\alpha+0{,}5\cos2\alpha+\frac{3}{8};$

4) $\frac{\sin^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}{\cos^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha}.$

23. Верно ли равенство:

$$\frac{\cos^2(\pi+4\alpha)-\cos^2(\alpha+\beta)+\cos^2\left(4\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\sin^2(\pi-(\alpha+\beta))+\operatorname{tg}^2(\alpha+\beta)-\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)}=\cos^2(\alpha+\beta)?$$

24. Упростите выражение:

1) $\operatorname{tg}7\alpha\cdot\operatorname{ctg}7\alpha+\sin^2\frac{\alpha}{3}\cdot\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{3}+\sin^2\frac{\alpha}{3};$

2) $(0{,}5+0{,}5\cos10\alpha):(0{,}5-0{,}5\cos10\alpha)\cdot\operatorname{tg}^2 5\alpha;$

3) $\frac{\cos^2\alpha-4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}}{1-8\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}};$

4) $\frac{\sin^4\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha-\cos^4\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha-1}.$

25. Докажите тождество:

1) $\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-4\alpha\right)\cdot\sin(2\pi-2\alpha)\cdot\cos(-2\alpha)}{\operatorname{ctg}(2\pi-4\alpha)\cdot\left(\cos^2 2\alpha-\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)\right)}=0{,}5\operatorname{tg}4\alpha;$

2) $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta+(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=1;$

3) $(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta) \cdot \operatorname{ctg}(\alpha - \beta) - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = 1$;

4) $4\sin^6\alpha + 4\cos^6\alpha - 1 = 3\cos^2 2\alpha$.

Уравнения и их системы

26. Укажите три пары чисел, являющихся решением уравнения:

1) $3x - 4y = 10$; 2) $5x + 0{,}2y = 1$.

27. Среди пар чисел $(0;\ 0{,}4)$, $(0{,}4;\ 0)$, $(0;\ -0{,}4)$, $(-0{,}4;\ 0)$, $(4;\ 6)$, $(-4;\ -6)$, $(0;\ 0)$ найдите решение уравнения $8x - 5y - 2 = 0$.

28. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии, если значение суммы первого и четвертого членов равно 23, а значение суммы третьего и шестого членов равно 31.

29. Найдите четвертый член и знаменатель бесконечной геометрической прогрессии, значение суммы которой равно 6, а значение пяти первых членов равно $\frac{93}{16}$.

30. Вычислите значение суммы первых пяти членов геометрической прогрессии, если:

1) $\begin{cases} b_1 + b_4 = 68{,}4, \\ b_2 + b_3 = -8{,}4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} b_1 - b_3 = 384, \\ b_1 + b_4 = 403{,}2. \end{cases}$

31. Найдите значение суммы первых восьми членов арифметической прогрессии, если:

1) $\begin{cases} 2a_2 - 5a_6 = 23, \\ a_1 - 9a_5 = 86; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4a_3 - 5a_2 = -75, \\ 6a_2 + 5a_7 = 135. \end{cases}$

32. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} 5y^2 - x^2 = 1, \\ 7y^2 + 3xy = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x^2 + xy = 5, \\ x^2 + 3xy = 4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y^2 - x^2 = 12, \\ y^2 - 3xy + 2x^2 = 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y^2 - 3xy = 2, \\ y^2 - 4xy + x^2 = 3. \end{cases}$

33. Способом введения новой переменной решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} (u + v)^2 - 4(u + v) = 45, \\ (u - v)^2 - 2(u - v) = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (u + v)^2 - 5(u + v) = -4, \\ (u - v)^2 - (u - v) = 2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} u - uv + v = 1, \\ u^2 + 2u + 2v + v^2 = 11; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} u + uv + v = 5, \\ u^2 + uv + v^2 = 7. \end{cases}$

34. Решите графическим способом систему уравнений:

1) $\begin{cases} y = x^2 + 2x, \\ x^2 + (y+3)^2 = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y - x^2 - x = 0, \\ (x-2)^2 + y^2 = 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 = 4, \\ x + y = 3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} (x+5)^2 + (y-3)^2 = 9, \\ x - y = -8. \end{cases}$

Неравенства и их системы

35. Решите неравенство:

1) $(x-10)(x+5)(x-6)$ l 0; 2) $(x+2)(x-7)(x+11)$ m 0;

3) $\frac{x+5}{x-6}$ l 0; 4) $\frac{x-7}{x+2}$ m 0;

5) $\frac{x}{x-7}$ l 2; 6) $\frac{x}{6+x}$ m -1;

7) $(x-1)(x-2)^2(x-3) < 0$; 8) $(x+3)^2(x+2)(x+1) < 0$.

36. С помощью графика квадратичной функции и методом интервалов решите неравенство:

1) $x^2 - 2x - 5$ l 0; 2) $-x^2 - 2x + 15$ m 0.

37. Решите неравенство:

1) $6x^2 - 13x - 5 > 0$; 2) $4x^2 + 33x - 27 < 0$.

38. Найдите наименьшее натуральное число, которое удовлетворяет неравенству:

1) $\frac{x+1}{x-5}$ m 0; 2) $\frac{10-x}{x-2}$ l 0.

39. Найдите наибольшее натуральное число, которое удовлетворяет неравенству:

1) $(2-x)(x-8)^2$ l 0; 2) $(x-3)^2(x-9) < 0$.

40. Найдите наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству:

1) $\frac{x^2-81}{x}$ l 0; 2) $\frac{7x-x^2}{x+7}$ m 0.

41. Найдите наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству:

1) $(x+5)(x-6)^2 < 0$; 2) $(x+6)^2(5-x) > 0$.

42. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} x^2 - 4x \geqslant 0, \\ x - 12 > 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 6x - x^2 < 0, \\ -4 - x \leqslant 0. \end{cases}$

43. 1) Найдите наименьшее и наибольшее натуральные числа, которые удовлетворяют системе неравенств $\begin{cases} -x^2 + 6x + 16 > 0, \\ x^2 - 12x + 27 < 0. \end{cases}$

2) Вычислите значение суммы наименьшего и наибольшего целых чисел, удовлетворяющих системе неравенств $\begin{cases} x^2 + 8x + 7 \geqslant 0, \\ x^2 + 15x + 36 < 0. \end{cases}$

44. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} |x| \geqslant 5, \\ 6 + x > 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} |x| \leqslant 3, \\ -9 + x^2 \leqslant 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} |x-2| \leqslant 3, \\ x^2 - x + 12 < 0. \end{cases}$

45. 1) Вычислите значение суммы целых чисел, удовлетворяющих системе неравенств $\begin{cases} |2x - 3| \leqslant 1, \\ x^2 + x > 0. \end{cases}$

2) Найдите множество всех целых чисел, удовлетворяющих системе неравенств $\begin{cases} |2x+5| \leqslant 3, \\ x^2 - 5x - 24 \leqslant 0. \end{cases}$

46. В координатной плоскости покажите штриховкой множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют системе неравенств:

1) $\begin{cases} y < x^2, \\ x - 5 \geqslant 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 4, \\ x - y < 2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y < -x^2 + 2, \\ x^2 + y^2 + 2y \geqslant 3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y > x^2 - 2x, \\ x^2 + y^2 - 4y \geqslant 1. \end{cases}$

Функция и ее график

48. Постройте график функции:

1) $y = 2x^2 - 4x + 3;$ 2) $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2;$

3) $y = -x^2 + 3x - 1;$ 4) $y = -\frac{1}{3}x^2 - x + 1.$

49. Постройте график и укажите область определения и множество значений функции:

1) $y = 2x^2 + |x|;$ 2) $y = -x^2 + 3|x|;$

3) $y = 2x - x \cdot |x|;$ 4) $y = x \cdot |x| - 3x.$

50. Постройте график функции и найдите наибольшее или наименьшее значение функции (если они существуют):

1) $y = 4x^2 - 2x + 3$; 2) $y = -x^2 - 4x + 2$;
3) $y = 2 - \sqrt{x-1}$; 4) $y = 2 + \sqrt{2-x}$.

51. Решите уравнение графическим способом и запишите приближенные значения корня уравнения:

1) $x^2 - 4x = \dfrac{1}{x+1}$; 2) $-3x^2 + 2x - 2 = \dfrac{x+1}{x-2}$.

52. Постройте график уравнения:

1) $\dfrac{y - x^2 + 2}{x - 1} = 0$; 2) $\dfrac{y - x^2 + 2x}{x + 1} = 0$;

3) $\dfrac{y^2 - x^2 - 4}{x^2 - 1} = 0$; 4) $\dfrac{y^2 - x^2 - 4x}{x^2 - 4} = 0$.

53. На рисунке 85 построен график квадратичной функции:
1) укажите промежутки монотонности функции;

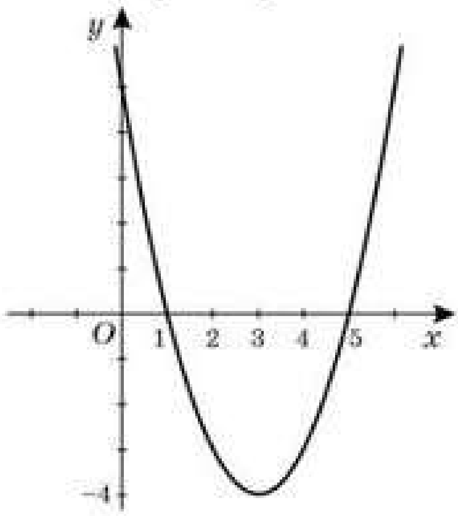


Рис. 85

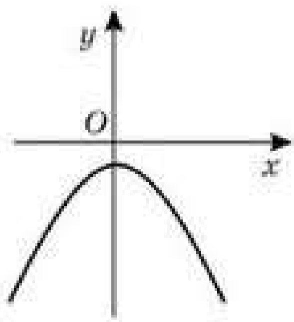


Рис. 86

2) запишите промежутки знакопостоянства функции;
3) запишите уравнение оси симметрии графика;
4) запишите наименьшее значение функции.

54. 1) На рисунке 86 изображен график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, а $D = b^2 - 4ac$. Найдите знаки чисел a, b, c и D.

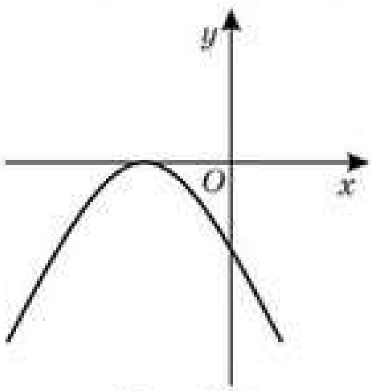


Рис. 87

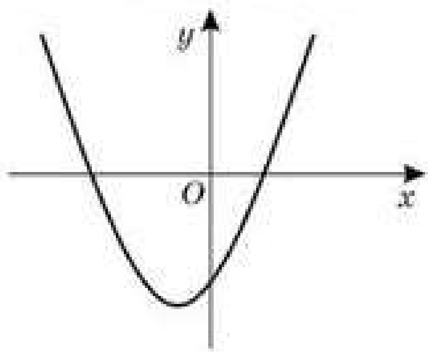


Рис. 88

2) На рисунке 87 изображен график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, а $D = b^2 - 4ac$. Найдите знаки чисел a, b, c и D.

3) На рисунке 88 изображен график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, а $D = b^2 - 4ac$. Тогда справедливы соотношения:

а) $ab < 0$; б) $Dc > 0$;

в) $Db > 0$; г) $bc > 0$;

д) $aD > 0$.

Практико-ориентированные задания

55. Дано 10 закрытых замков и 10 похожих ключей к ним. К каждому замку подходит только один ключ, но ключи смешались. Если взять первый замок и попробовать открыть его каждым из десяти ключей, то в лучшем случае он откроется первым же ключом, в худшем — только десятым. Сколько нужно максимум произвести проб, чтобы открыть все замки?

56. На одной из улиц города по обе стороны в один ряд расположены 100 домов. Каждому дому присвоен порядковый номер. Дома с нечетными номерами расположены слева, с четными — справа. На каком месте расположен дом № 90?

57. В доме, в котором живет Алия, один подъезд. На каждом этаже по 10 квартир. Алия живет в квартире № 88. На каком этаже живет Алия?

58. Станок разрезает 300 шестиметровых досок на куски по 2 м в каждом за 1 ч. Сколько времени потребуется, чтобы на этом же станке разрезать 400 восьмиметровых досок такой же ширины и толщины на куски по 2 м в каждом?

59. Периметр прямоугольника равен 36 см. Длины его сторон выражены целыми числами. Сколько можно построить прямоугольников согласно условию задачи?

60. В семье 9 детей, значение суммы их возрастов 117. Найдите возрасты всех детей, если известно, что они рождались каждые 3 года.

61. В классе 28 учащихся. Из них — 12 ходят на вокал, 19 — на танцы и 5 человек занимаются в обоих кружках. Сколько учащихся из этого класса не занимаются ни в одном из этих кружков?

62. Арман и Нуржан считают деревья, растущие вокруг пруда. Они двигаются в одном направлении, но начинают счет с разных деревьев. То дерево, которое Арман назвал двадцатым, у Нуржана оказалось четвертым, а дерево, которое Арман посчитал десятым, для Нуржана оказалось сорок шестым. Сколько деревьев растет вокруг пруда?

63. Масса ящика с яблоками равна 20 кг. После продажи половины всех яблок, ящик поставили на весы. Весы показали 12 кг. Какова масса пустого ящика?

МАТЕМАТИКА В СТРОИТЕЛЬСТВЕ

64. 1) Для перевозки 56 т груза на 300 км можно использовать машины одной из транспортных компаний, причем грузоподъемность машин разная. Данные о перевозках компаний приведены в таблице.

Таблица 10

Транспортные компании	Грузоподъемность машины	Стоимость перевозки одной машиной в тг на 100 км
I	3 т	6 000
II	5 т	8 000
III	6 т	10 000

Услугами какой компании надо воспользоваться для самой дешевой перевозки?

2) При увеличении здания на один этаж, высота здания увеличивается на 3,5 метра. В микрорайоне построено 5 пятиэтажных, 4 девятиэтажных домов, детский садик в два этажа и школа в три этажа. Найдите значение суммы высот всех зданий микрорайона.

МАТЕМАТИКА В БИЗНЕСЕ

65. На диаграмме (рис. 89) представлены данные о сумме первоначального вклада и сумме вклада с учетом годового прироста в банках X и Y.

1) Найдите годовой процентный прирост суммы вклада в банках X и Y;

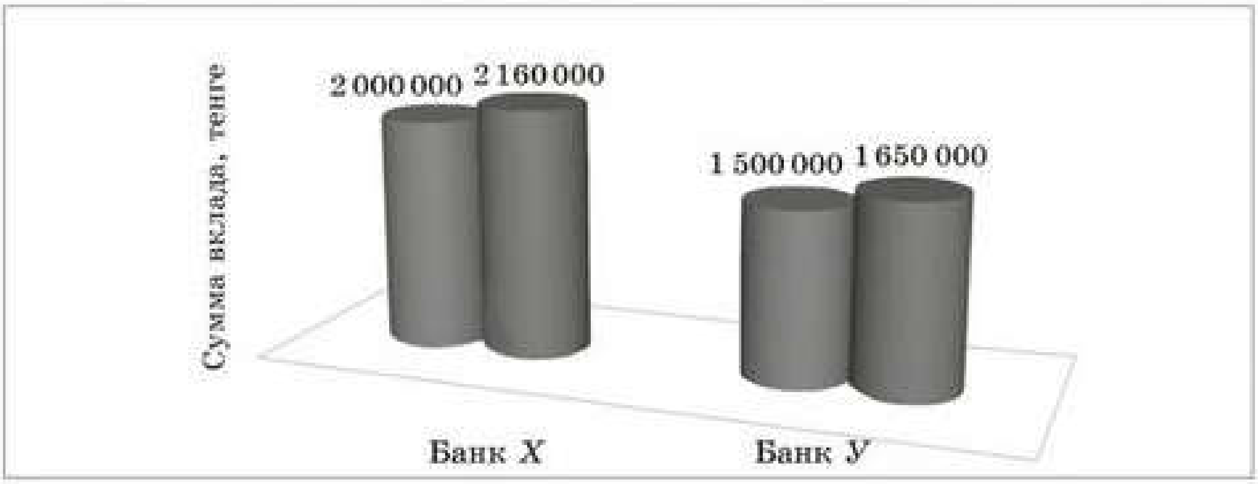


Рис. 89

2) Найдите разницу между годовыми процентными приростами в банках X и $У$.

МАТЕМАТИКА В ПРОФЕССИИ ШОФЕРА

66. В штате гаража числится 54 шофера. Найдите количество дней отдыха, которые может иметь каждый шофер в месяц (30 дней), если ежедневно 25% автомашин, из имеющихся 60, остаются в гараже для профилактического ремонта.

Элементы теории вероятностей

67. а) В урне 4 белых и 8 красных шаров. Найдите вероятность того, что наудачу извлеченный из урны шар окажется: 1) белый; 2) красный.
б) В урне 6 красных, 4 белых и 10 синих шаров. Найдите вероятность того, что наудачу извлеченный из урны шар окажется: 1) красный; 2) не белый; 3) синий.

68. Брошена игральная кость. Найдите вероятность выпадения:
1) двух или трех очков;
2) пяти или четырех очков;
3) нечетного очка.

69. Для экзамена подготовлены билеты с номерами от 1 до 30. Какова вероятность того, что взятый наугад школьником билет имеет:
1) однозначный номер;
2) нечетный номер?

70. 1) В квадрат, длина стороны которого равна 4 см, наугад брошена точка A. Какова вероятность того, что точка A не попадет в квадрат, находящийся в первом квадрате, длина стороны которого равна 2 см?

2) В круг, длина радиуса которого равна 4 см, наугад брошена точка B. Найдите вероятность того, что эта точка попадет в круг, находящийся внутри первого круга, длина радиуса которого равна 2 см.

3) Случайным образом выбирается число из промежутка $[-2;\ 8]$. Найдите вероятность того, что это число является решением неравенства $x^2 - 2x + 8 < 0$.

4) Случайным образом выбирается число из промежутка $[-3;\ 7]$. Найдите вероятность того, что это число является решением неравенства $x^2 - 2x + 9 \le 0$.

Задания для подготовки к олимпиаде

71. Решите уравнение: $(3x - 1)(\sqrt{x} + 3x - 1) = 2x$.

72. Решите уравнение: $x^3 - 2x - 4\sqrt{6} = 0$.

73. При каких значениях параметра a корни уравнения $x^3 - 12x^2 + ax - 28 = 0$ образуют арифметическую прогрессию? Найдите эти корни.

74. При каких значениях параметра a корни уравнения $x^3 + ax^2 + 48x - 27 = 0$ образуют геометрическую прогрессию?

75. При каких значениях параметров a и b многочлен $x^3 + 7x^2 + ax + b$ делится на многочлен $x^2 + x + 2019$?

76. Найдите корни уравнения: $(x^2 - 5x - 8)^3 = x^2(x^2 + x - 8)$.

77. Докажите, что при любом действительном значении x верно неравенство $x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 > 0$.

78. Докажите, что при любом x верно неравенство $x^8 + x^6 - 4x^4 + x^4 + 1 \ge 0$.

79. Докажите, что если $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{2}{b}$ и $ac > 0$, то верно неравенство $\dfrac{a+b}{2a-b} + \dfrac{c+b}{2c-b} \ge 4$.

80. Докажите, что если $a, b, c \in R_+$ и $abc = 1$, то имеет место неравенство: $ab + bc + ca + a + b + c - 6 \ge 0$.

81. Докажите, что $1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n - 1) < n^n$.

Алгебра

82. Используя метод математической индукции, докажите: $2^n \geq 2n + 1$ при $n \in N$ и $n \geq 3$.

83. Докажите, что если $n \geq 2$, то $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^n - 1} < n$.

84. Величины углов образуют арифметическую прогрессию 5°; 10°; 15°; … . Найдите наименьшее число членов этой прогрессии, начиная с первого, чтобы значение суммы их косинусов было равно нулю.

85. Преобразуйте выражение: $\sin\alpha + \sin(\alpha + \varphi) + \sin(\alpha + 2\varphi) + \ldots + \sin(\alpha + n)$.

Комбинаторика

86. 1) Найдите число четырехзначных чисел, которые можно составить из цифр 2, 4, 7, 8, при условии, что ни одна цифра не повторяется дважды;

2) найдите число способов раскрасить прямоугольник, ромб и квадрат тремя различными цветами: синим, красным, зеленым.

87. 52 школьника приняли участие в олимпиаде по математике, 33 — по информатике, 11 — по двум предметам. Сколько всего школьников участвовало в олимпиадах по этим предметам?

88. Из 70 открыток на 47 изображены ромашки, на 30 — нарциссы, на 10 — сирень с ромашками, на 6 — сирень с нарциссами, на 5 — нарциссы с ромашками, на 4 — сирень с ромашками и нарциссами. Найдите число открыток с сиренью.

89. Найдите корни уравнения:

1) $A_x^3 = 8x - 3x^2$;

2) $A_x^3 = 2x^3 - 3x^2 - 14x$;

3) $C_x^2 = x + 5$.

90. В меню столовой имеются 4 салата, 3 первых, 5 вторых и 3 третьих блюда. Сколькими способами можно выбрать обед из четырех блюд (салат, первое, второе и третье)?

91. 1) Абонент забыл последние 2 цифры номера телефона. Какое максимальное число номеров ему нужно перебрать, если он знает, что две последние цифры различны и нечетные?

2) Из 30 вопросов к экзамену учащийся 22 выучил, 4 совсем не смотрел, а в остальных что-то знает, а что-то нет. На экзамене в билетах будет три вопроса. Сколько из них тех, в которых учащийся знает ответы на все вопросы?

92. В разложении $\left(2x + \frac{1}{x}\right)^4$ по степеням x найдите одночлен:

1) содержащий x^2;

2) не содержащий x.

ГЛОССАРИЙ

Алгоритм	*Алгоритм* — это последовательность простейших действий, строго выполняемых для достижения определенной цели.
Аналитический способ задания числовой последовательности	Числовая последовательность задана аналитическим способом, если она задана с помощью формулы n-го члена (говорят также — общего члена).
Арифметическая прогрессия	Числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с постоянным для этой последовательности числом d, называется *арифметической прогрессией*. Число d называется *разностью арифметической прогрессии*.
A_n^k	A_n^k — число размещений без повторений из n по k.
Бесконечная числовая последовательность	Если числовая последовательность (функция) задана на множестве всех натуральных чисел, то она называется *бесконечной числовой последовательностью*.
Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия	Геометрическая прогрессия со знаменателем $\|q\| < 1$ называется *бесконечно убывающей геометрической прогрессией*.
Бином	Слово *бином* (от лат. *bis* — "дважды" и греч. *номос* — "член") означает двучлен.
Бином Ньютона	Формулу: $(x + a)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^k \cdot x^{n-k}$, где " знак суммы, называют *биномом Ньютона*.
Биномиальные коэффициенты	C_n^k в биноме Ньютона называют *биномиальными коэффициентами*.
Благоприятствующий исход	Исход опыта, в котором наблюдается интересующее нас событие, называется *благоприятствующим исходом*.
Вероятность классическая	*Вероятностью события A* называется отношение числа m, благоприятствующих этому событию исходов, к общему числу исходов n, если они равновозможные.
Возрастающая последовательность	Последовательность (a_n) называется *возрастающей*, если каждый ее член a_n больше предыдущего a_{n-1}.
Геометрическая прогрессия	Числовая последовательность, первый член которой отличен от нуля, а каждый член, начиная со второго, равен предшествующему члену, умноженному на одно и то же, неравное нулю число, называется *геометрической прогрессией*.

Продолжение

Геометрические вероятности	*Геометрические вероятности* — вероятности попадания точки в часть отрезка, плоскости, пространственной фигуры.
График уравнения	*Графиком уравнения с двумя переменными* называется множество точек координатной плоскости, координаты которых являются решениями этого уравнения.
Графический способ задания числовой последовательности	График числовой последовательности состоит из изолированных точек, абсциссы которых — натуральные числа, ординаты — члены последовательности, соответствующие своим номерам.
Достоверное событие	Событие называется *достоверным*, если оно обязательно произойдет в данном испытании.
Знаменатель геометрической прогрессии	Число, на которое надо умножить член геометрической прогрессии, чтобы получить последующий ее член, называется *знаменателем геометрической прогрессии* и обозначается буквой q.
Комбинаторика	Область математики, в которой изучают комбинаторные задачи, называется *комбинаторикой*.
Комбинаторная задача	Задачи, в которых из элементов некоторого конечного множества по некоторым правилам составляются различные комбинации этих элементов и подсчитывается их число, называются *комбинаторными задачами*.
Конечная числовая последовательность	Если числовая последовательность (функция) задана на множестве первых n натуральных чисел, то она называется *конечной числовой последовательностью*.
Концентрация вещества	*Концентрацией вещества*, имеющего массу m_1, в смеси (сплаве, растворе) массой m, называется величина $\frac{m_1}{m}$.
Косинус угла α	*Косинусом угла* α называется отношение абсциссы точки B, лежащей на окружности, к ее радиусу.
Котангенс угла α	*Котангенсом угла* α называется отношение абсциссы точки B, лежащей на окружности, к ее ординате.
Математическая индукция	*Математическая индукция* — в математике — один из методов доказательства. Используется, чтобы доказать справедливость некоторого утверждения для всех натуральных чисел. Если утверждение $A(n)$, содержащее натуральную переменную, верно при $n = 1$, и из того, что оно верно при $n = k$, следует, что оно верно и при $n = k + 1$, то оно будет верно при всех натуральных значениях n.

Продолжение

Монотонные последовательности	Возрастающие, убывающие, невозрастающие и неубывающие последовательности называются *монотонными последовательностями.*
Невозможное событие	Событие называется *невозможным*, если оно не может произойти в данном испытании, т. е. свершение которого при данных условиях исключается.
Неубывающая последовательность	Последовательность (a_n) называется *неубывающей,* если каждый ее член a_n больше или равен предыдущему — a_{n-1}.
Невозрастающая последовательность	Последовательность (a_n) называется *невозрастающей,* если каждый ее член a_n меньше или равен предыдущему — a_{n-1}.
Неравенства с двумя переменными	Неравенства вида: $f(x; y) > g(x; y)$; $f(x; y) < g(x; y)$; $f(x; y) \geq g(x; y)$, $f(x; y) \leq g(x; y)$, где $f(x; y)$ и $g(x; y)$ выражения с двумя переменными, называются *неравенствами с двумя переменными.*
$n!$	$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.
Ограниченная последовательность	Если последовательность ограничена сверху и снизу, то последовательность (a_n) называется *ограниченной.*
Ограниченная сверху последовательность	Если существует такое число, что каждый член последовательности (a_n) меньше него, то последовательность (a_n) называется *ограниченной сверху.*
Ограниченная снизу последовательность	Если существует такое число, что каждый член последовательности (a_n) больше него, то последовательность (a_n) называется *ограниченной снизу.*
Перестановка из n элементов без повторений	Упорядоченные множества, содержащие все n элементов множества $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, называются *перестановками из n элементов без повторений.*
Периодическая функция	Функция $y = f(x)$ называется *периодической функцией*, если существует такое отличное от нуля число T, что для любого x из области определения функции $y = f(x)$ выполняется равенство: $f(x + T) = f(x)$. Такое наименьшее число называется *периодом функции.*
P_n	Число перестановок без повторений из n элементов
Постоянная (стационарная) последовательность	Последовательность (a_n) называется *постоянной (стационарной)*, если каждый ее член a_n равен предыдущему — a_{n-1}.
Правило суммы	Если множества X и Y не пересекаются и множество X содержит a элементов, а множество Y содержит b элементов, то объединение множеств X и Y содержит $(a + b)$ элементов.

Продолжение

	Если элемент $a \in A$ можно выбрать m способами, а элемент $b \in B$ можно выбрать n способами, причем $A \cap B = \emptyset$, то выбрать один элемент "a или b" можно $m + n$ способами.
Признак арифметической прогрессии	Свойство членов арифметической прогрессии, выраженное формулой $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, является признаком арифметической прогре ссии.
Признак геометрической прогрессии	Свойство членов геометрической прогрессии, выраженное формулой $b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$, является признаком геометрической прогрессии.
Противоположное событие	*Событием противоположным событию* A, называется событие $\bar{A}$, которое наступает тогда и только тогда, когда не наступает событие A.
Процентное содержание вещества	*Процентным содержанием вещества*, имеющего массу m_1 в смеси (сплаве, растворе) массой m, называется величина $\dfrac{m_1}{m} \cdot 100\%$.
Равносильные уравнения	Два уравнения, имеющие одно и то же множество решений, называются *равносильными уравнениями.*
Радиан	Величина центрального угла, опирающегося на дугу, равной длине радиуса окружности, называется 1 *радианом.*
Размещения без повторений	*Размещениями без повторений* из n по k называются упорядоченные множества из k элементов, выбранных из множества, содержащего n элементов.
Рекуррентный способ задания числовой последовательности	*Рекуррентный способ* задания числовой последовательности заключается в том, что любой член числовой последовательности, начиная с некоторого члена, выражается через предшествующие члены. При этом задается один или несколько первых членов последовательности и формула для нахождения членов числовой последовательности по известным предшествующим членам.
Решение нелинейного уравнения с двумя переменными	Пара чисел $(x_0; y_0)$, которая обращает нелинейное уравнение с двумя переменными $F(x; y) = 0$ в верное числовое равенство $F(x_0; y_0) = 0$, называется *решением нелинейного уравнения с двумя переменными.*
Решение неравенства с двумя переменными	*Решением неравенства с двумя переменными* называется пара значений переменных, обращающих неравенство в верное числовое неравенство.

Продолжение

Решение системы нелинейных уравнений с двумя переменными	Пара чисел $(x_0; y_0)$, которая обращает каждое уравнение системы в верное числовое равенство одновременно, называется *решением системы нелинейных уравнений с двумя переменными.*
Синус угла α	*Синусом угла* α называется отношение ординаты точки B, лежащей на окружности, к ее радиусу.
Система нелинейных уравнений с двумя переменными	Система уравнений с двумя переменными, в составе которой хотя бы одно уравнение не является линейным уравнением, называется *системой нелинейных уравнений с двумя переменными.*
Словесный способ задания числовой последовательности	С помощью этого способа закономерность расположения членов последовательности описывается словами.
Случайное событие	Событие называется *случайным* , если оно может произойти, но может и не произойти.
Событие	Под *событием* понимается всякое явление, о котором имеет смысл говорить, что оно происходит (имеет место) или не происходит. Событиями являются и результаты различных опытов, наблюдений и измерений.
Сочетание без повторений из n элементов по k	*Сочетанием без повторений* из n элементов по k называется подмножество, содержащее k элементов множества, состоящего из n элементов.
C_n^k	C_n^k — число сочетаний из n элементов по k.
Статистическая вероятность	*Статистической вероятностью события* A называется относительная частота (частость) появления этого события в n произведенных испытаниях.
Степень уравнения	*Степенью уравнения с двумя переменными* , представленного в виде $F(x, y) = 0$, где $F(x, y)$ — многочлен стандартного вида, называют степень многочлена $F(x, y)$.
Тангенс угла α	*Тангенсом угла* α называется отношение ординаты точки B, лежащей на окружности, к ее абсциссе.
Тригонометрические функции	Зависимости синуса, косинуса, тангенса и котангенса от величины угла α называются *тригонометрическими функциями.*
Тригонометрическое тождество	*Тригонометрическим тождеством* называется равенство, в которое входят тригонометрические функции, и которое верно при любых допустимых значениях угла — аргумента тригонометрических функций, но неверно, если каждую из функций заменить произвольной величиной.

Продолжение

Убывающая последовательность	Последовательность (a_n) называется *убывающей*, если каждый ее член a_n меньше предыдущего a_{n-1}.
Уравнение с двумя переменными	*Уравнениями с двумя переменными* x и y называются уравнения, которые имеют вид: $f(x, y) = q(x, y)$, где $f(x, y)$ и $q(x, y)$ — выражения с переменными x и y.
Факториал	*эн факториал* — произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно.
Формула для вычисления числа перестановок без повторений из n элементов	$P_n = n!$
Формула для вычисления числа размещений без повторений из n элементов по k	$A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$
Формула для вычисления числа сочетаний без повторений из n элементов по k	$C_n^k = \dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$
Формула n-го члена арифметической прогрессии	Формула $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$ называется *формулой n-го члена арифметической прогрессии*.
Формула n-го члена геометрической прогрессии	Формула $b_n = b_1q^{n-1}$ называется *формулой n-го члена геометрической прогрессии*.
Формула n-го члена числовой последовательности	*Формула n-го члена (общего члена)* — это формула, по которой можно найти любой член числовой последовательности, зная его номер.
Формулы приведения	Формулы, по которым тригонометрические функции угла вида $\frac{\pi}{2}k \pm \alpha$ (где k — любое целое число, α — острый угол) приводятся к тригонометрическим функциям угла α, называются *формулами приведения*.
Формулы сложения	Формулы, позволяющие выразить тригонометрические функции суммы и разности двух углов через тригонометрические функции этих же углов, называются *формулами сложения*.
Формула суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии	$S = \dfrac{b}{1-q}$ — формула суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, знаменатель которой $\|q\|<1$.

Продолжение

Формула суммы первых n членов арифметической прогрессии	$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$, $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$ — формула суммы первых n членов арифметической прогрессии.
Формула суммы первых n членов геометрической прогрессии	$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ — формула суммы первых n членов геометрической прогрессии.
Функция Антье от x	*Функцией Антье* называется функция $E(x) = [x]$, где $[x]$ — целая часть числа x (наибольшее целое число, не превосходящее x).
Числовая окружность	*Числовой окружностью* называется окружность, на которой указана начальная точка, единичная дуга, положительное направление.
Члены последовательности	Числа, образующие последовательность, называются *членами последовательности.*
Элементарные события	События, которые нельзя разделить на более простые события, называются *элементарными событиями.*

ОТВЕТЫ

Глава IV. ТРИГОНОМЕТРИЯ

19.6. 1) IV четверть; 2) I четверть; 3) III четверть; 4) II четверть. **19.7.** 1) $0{,}2\pi$; $0{,}8\pi$; $0{,}2\pi$; $0{,}8\pi$; 2) $0{,}7\pi$; $0{,}3\pi$; $0{,}7\pi$; $0{,}3\pi$. **19.8.** 1) $\frac{\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{\pi}{6}$; 2) $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$. **19.10**. 1) $a = \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot 1$; 2) $a = 0{,}3\pi + 2\pi \cdot 7$; 4) $a = 0{,}3\pi + 2\pi \cdot (-10)$. **19.11.** 1) IV четверть; 2) I четверть; 3) II четверть; 4) I четверть. **19.14.** 1) $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{\pi}{3}$; 2) $\frac{7\pi}{18}$; $\frac{11\pi}{18}$; $\frac{11\pi}{18}$; $\frac{7\pi}{18}$. **19.15.** 1) Да; 2) нет, не всегда; 3) да; 4) нет, не всегда. **19.16.** 219 оборотов. **19.17.** 1) $1080°$ или 6π рад; 4) $8640°$ или 48π рад. **19.20.** 1) $\left(-\infty; \frac{3-\sqrt{33}}{2}\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{33}}{2}; +\infty\right)$; 4) $[-1{,}5; 2]$. **19.24.** 1) $\sqrt{3} - 3$; 2) -2; 3) $\sqrt{2} - \sqrt{3}$; 4) $2 - \sqrt{3}$. **19.25.** 1) 3; 2) $\frac{1}{3}$. **20.4.** 1) $1 + \sqrt{2}$; 2) $\frac{3\sqrt{3} - 2}{2}$; 3) $-2{,}5$; 4) $\frac{3\sqrt{2} + 4\sqrt{3}}{6}$. **20.5.** 1) $3\sqrt{3}$; 3) $1{,}5 + \sqrt{2}$; 4) -3. **20.6.** 1) $a_1 = 180°$; $a_2 = 360°$; $a_3 = 720°$; 2) $a_1 = 30°$; $a_2 = 150°$; $a_3 = 390°$; 5) $a_1 = 90°$; $a_2 = -90°$; $a_3 = 450°$. **20.8.** 1) $5 - \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) -1; 3) 0. **20.9.** 1) $\beta = \frac{\pi}{2}$; $\beta = \frac{3\pi}{2}$; $\beta = \frac{\pi}{2}$; 2) $\beta = \frac{\pi}{2}$; $\beta = \frac{\pi}{2}$; $\beta = \frac{3\pi}{2}$.

20.10. 1) Нет; 2) нет; 3) нет; 4) нет; **20.11.** 1) да; 2) нет; 3) да; 4) нет. **20.12.** 1) 0,75; 3) $\frac{2\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$. **20.14.** 1) $\sin 60° + \sin 30°$; 2) $\cos 30° + \cos 60°$. **20.15.** 1) $\sin 60° - \sin 45°$; 2) $\cos 30° + \cos 45°$. **20.16.** 1) $\mathrm{tg}\,30° - \mathrm{tg}\,45°$; 2) $\mathrm{ctg}\,60° - \mathrm{ctg}\,45°$. **20.17.** 2) $\frac{\sqrt{3} - 1}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{3} + 1}{2}$; 4) $-\sqrt{2}$. **20.18.** 1) $-(2 + \sqrt{3})$; 2) -14; 3) -1; 4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **20.19.** 1) π; 3π; 4π; 2) $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$; 3) $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{11\pi}{4}$. **20.20.** Является. **20.23.** 1) $3 + \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $2 - \sqrt{3}$. **20.24.** 1) 2; 2) $\frac{1 - 2\sqrt{2}}{2}$. **20.25.** 1) Нет, не всегда; 2) $\alpha = 150°$; $\alpha = 390°$; 3) $\alpha = (-1)^n \cdot 30° + 180° \cdot n$, $n \in Z$. **20.26.** 1) Нет, не всегда; 2) $\alpha = -45°$; $\alpha = 315°$; 3) $\alpha = \pm 45° + 360° \cdot n$, $n \in Z$. **20.27.** 1) Нет; 2) нет; 3) нет; 4) да. **20.29.** 1) III четверть; 2) II четверть. **20.30.** 1) Да; 2) да; 3) нет; 4) да. **20.33.** 1) $x_1 + x_2 = \frac{5}{3}$; $x_1 \cdot x_2 = -9$; 2) $x_1 + x_2 = 1{,}4$; $x_1 \cdot x_2 = -\frac{6}{25}$. **20.34.** 1) 0; 2) 4; 3) 0. **20.36.** 1) 2; 3; 2) 4; 5; 6;… . **20.38.** Отец — 10 ч, сын — 15 ч. **20.39.** 1) $[-3; +\infty)$; 2) $(-\infty; 4]$; 3) $[-1; +\infty)$; 4) $(-\infty; 2]$. **21.3.** 1) II четверть; 2) III четверть; 3) IV четверть; 5) III четверть; 6) III четверть. **21.4.** 1) +; 2) –; 6) +; 8) +; 9) 0; 10) +; 12) –. **21.7.** Нельзя. **21.8.** 1) –; 2) +; 3) –; 4) +. **21.9.** 1) +; 2) + ; 3) +; 4) –. **21.11.** 1) I и II четверти; 2) III и IV четверти; 4) II и III четверти; 6) II и IV четверти; 8) II и IV четверти. **21.12.** 1) да, 2; 2) да, 1; 3) нет. **21.13.** 1) +; 2) –. **21.14.** 1) – 4) $T = 3$. **21.15.** 1) $30°$; $150°$; $30°$; $150°$; 3) $60°$; $120°$; $60°$; $120°$. **21.16.** 3) $45°$; $135°$; $45°$; $135°$; 4) $30°$; $150°$; $30°$; $150°$. **21.17.** 3) $60°$; $120°$; $120°$; $60°$; 4) $30°$; $150°$; $150°$; $30°$. **21.21.** 1) 4, – 2; 2) 5; 1; 3) 7; 1. **21.23.** 1) 2 и 1; 2) 4 и 3;

3) 4 и 1; 4) 2,4 и 1,9. **21.24.** 1) 1; 2) 2; 3) 0,5; 4) 1. **21.26.** 1) (±2; ±1); 2) (3; 3); (−3; −3). **21.27.** 1) a; 2) $\frac{5b-2a}{8b-2a}$. **21.28.** 16 см и 63 см. **21.30.** 1) I и III четвертях; 2) II и IV четвертях. **22.1.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **22.2.** 1) $\cos\alpha$; 2) $-\sin\alpha$; 3) $-\cos^2\alpha$; 4) 1. **22.3.** 1) $\frac{1}{3}$; 4) 1,2; 6) −8. **22.4.** 9) $\frac{1}{\sin\alpha}$; 10) $\frac{1}{\cos\alpha}$; 11) $\frac{2}{\sin\beta}$; 12) $\frac{2}{\cos\beta}$. **22.6.** 1) $\sin^2\alpha$; 2) $\cos^2\varphi$; 4) $-\cos^2x$. **22.7.** 1) $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$; 2) $\sin\alpha-\cos\alpha$; 4) $\frac{1}{\sin\beta}$. **22.11.** 1) $9\frac{1}{9}$; 2) $2\frac{1}{9}$. **22.12.** 1) $\frac{2}{|\sin\alpha|}$; 2) $2|\cos\alpha|$. **22.14.** 1) 0,64; 2) 0,1; 3) $6\frac{2}{3}$; 4) 5. **22.16.** 3) $-\frac{25}{41}$; 4) $-\frac{15}{29}$. **22.17.** 1) $\frac{11}{5}$; 2) −6; 3) $\frac{15}{34}$; 4) 0. **22.18.** 1) $x^2+y^2=16$; 2) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}=1$; 3) $x^2-2y=1$; 4) $x-y^2=-2$, где $x>0$, $y>0$. **22.19.** 1) Наименьшее — (−2) при $\alpha=90°+180°n$, $n\in Z$; наибольшее — 0 при $\alpha=180°n$; 3) множество значений выражения числовой интервал (3; 7), наибольшего и наименьшего значений указать нельзя; 4) множество значений выражения числовой интервал (−1; 4), наибольшего и наименьшего значений указать нельзя. **22.21.** 1) $\sin\beta+\cos\beta+1$; 2) 2. **22.22.** 1) Да; 2) нет; 3) нет; 4) да; 5) нет; 6) нет. **22.23.** 18. *Указание*: $\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha$. **22.24.** 1) 0; 2) 1; 3) 1; 4) $0{,}25\sin^2 2\alpha$. **22.25.** 1) $\pm\sqrt{1{,}64}$; 2) 1,176; 3) 0,7952. **22.27.** 1) 3150; 2) 3105. **22.29.** 1) 1; 2) 1. **22.30.** 1) $[-1;\ 3)\cup[8;\ +\infty)$; 4) $\{-3\}\cup(-2;\ 1)\cup[5;\ +\infty)$. **22.32.** 1) $\frac{1}{2}-\frac{4\sqrt{3}}{3}$; 2) $\frac{1}{2}+\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **23.4.** 1) $\cos^2\alpha$; 2) $\sin^2\alpha$; 3) $\cos^2\alpha$; 4) $\sin^2\alpha$; 5) $\frac{1}{\cos^2\alpha}$; 6) $\frac{1}{\cos^2\alpha}$. **23.5.** 3) $2\sin\alpha$; 4) 0. **23.6.** 1) −sin5°; 2) −cos45°; 3) −ctg15°; 5) sin45°; 7) $-\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$; 9) $-\sin\frac{\pi}{4}$; 10) $\cos\frac{\pi}{5}$; 11) −sin31°; 12) ctg19°. **23.7.** 1) $\frac{\sqrt{2}}{4}$; 2) $-\frac{1}{4}$; 3) $\frac{3}{4}$; 4) $-\frac{1}{4}$. **23.9.** 1) −; 2) +; 3) −; 4) −. **23.10.** 1) $\operatorname{ctg}\alpha$; 2) $\operatorname{ctg}\alpha$; 3) $\operatorname{tg}\alpha$. **23.11.** 1) $-\frac{3\sqrt{2}}{4}$; 2) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$. **23.13.** 1) 0; 2) 0. **23.14.** 1) $-\sqrt{3}$; 2) $-\sqrt{3}$; 3) $\sqrt{2}$; 4) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **23.15.** 1) $\frac{1}{\cos\alpha}$; 2) $-\frac{1}{\sin\alpha}$; 3) $-\sin^2\alpha$; 4) $-\sin^2\alpha$. **23.16.** 1) 2; 2) 0; 3) 0; 4) 0. **23.19.** 1) −1; 2) $\sqrt{3}$; 3) $-\frac{5\sqrt{2}}{2}$; 4) $-\frac{3+\sqrt{3}}{2}$. **23.20.** 1) $\sin\alpha$; 2) $-\cos\alpha$; 3) $\operatorname{tg}\alpha$; 4) 1. **23.22.** 1) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$; 2) $-\frac{\sqrt{6}}{4}$; 3) 0,75; 4) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$. **23.25.** 1) 1; 2) 1; 3) 1; 4) 1. **23.27.** 1) −1; 2) 0; 3) 0. **23.28.** 1) $\sin\alpha=0{,}6$; $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{4}{3}$. **23.30.** 60 км/ч и 90 км/ч. **23.31.** 1) $[-3;\ 2)\cup(4;\ 6]$; 2) $[-4;\ -1]$. **23.32.** 1) $\sin\alpha$; 2) $2\sin\alpha+1$. **24.1.** 1) $\sin\alpha$; 5) $\cos\varphi$; 6) $-\sin\gamma$; 7) $\cos\alpha$; 8) $\sin2\gamma$. **24.2.** 1) 0,5; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) 0. **24.3.** 1) 0,5; 2) 0; 3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **24.4.** 1) $\frac{3+8\sqrt{2}}{15}$; 2) $\frac{3-8\sqrt{2}}{15}$; 3) $\frac{4-6\sqrt{2}}{15}$; 4) $\frac{4+6\sqrt{2}}{15}$. **24.5.** 1) $-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$; 2) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$; 3) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; 4) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

24.8. 6) $2+\sqrt{3}$; 7) $2+\sqrt{3}$. **24.9.** 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(\sqrt{0{,}91}-0{,}3)$; 4) $\frac{\sqrt{3}-10\sqrt{91}}{20}$. **24.10.** 1) $\cos\alpha$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin\alpha$; 3) $\sqrt{2}\cos\alpha$; 4) $0{,}5\ \sin\alpha$. **24.11.** 1) $\sin\alpha\cdot\cos\beta$; 2) $\cos\alpha\cdot\cos\beta$; 3) $\sin\alpha\times$ $\times\cos\beta$; 4) $\sin\alpha\cdot\cos\beta$. **24.13.** 1) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; 2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **24.14.** 1) 0; 2) 0; 3) 0; 4) 0. **24. 16.** 1) $\mathrm{ctg}\,\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\beta$; 2) $-\mathrm{ctg}\,\alpha\cdot\mathrm{ctg}\,\beta$; 4) $-\mathrm{tg}\,\alpha$. **24.19.** 1. **24.20.** $\frac{2\sqrt{10}-2}{9}$. **24.21.** 1) $\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}$; 3) 2; -2; 5) $\sqrt{13}$; $-\sqrt{13}$; 6) $\sqrt{41}$; $-\sqrt{41}$. **24.22.** 1) $\{(0;\ 0);\ \left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{3}\right)\}$; 2) $\{(1;\ 1)\}$. **24.23.** 1) 53%; 2) $2\frac{3}{11}$ кг. **24.25.** 1) $(0;\ 1)$; 2) $f(x)\in[-1;\ 3]$; 4) $ac>0$. **24. 27.** 1) $\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$; 2) $\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$. **24.28.** $\mathrm{tg}\,\alpha=-\frac{2}{\sqrt{21}}$, $\mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{\sqrt{21}}{2}$. **25.1.** 1) $1\frac{1}{6}$; 2) $-\frac{2}{9}$; 3) $\frac{6}{7}$; 4) $-4{,}5$. **25.2.** $-10{,}5$; $\frac{11}{18}$. **25.3.** 1) $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$; 6) $\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$. **25.5.** 1) 1; 2) $\sqrt{3}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 4) 1. **25.6.** 1) $\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta$; 2) $\mathrm{tg}^2\alpha-\mathrm{tg}^2\beta$. **25.8.** 1) $\mathrm{tg}40^\circ\cdot\mathrm{tg}10^\circ$; 2) $\mathrm{tg}3^\circ\cdot\mathrm{tg}0{,}6^\circ$. **25.9.** 1) 1; 2) $\frac{\mathrm{tg}^2\alpha-3}{1-3\mathrm{tg}^2\alpha}$; 3) 0; 4) 4) $\frac{4\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}$. **25.12.** 1) $1-\mathrm{tg}\,\beta$; 2) $1-\mathrm{tg}\,\beta$. **25.15.** 1) $[-\sqrt{5};\sqrt{5}]$; 2) $[-\sqrt{10};\sqrt{10}]$; 3) $[-2;\ 2]$; 4) $[-2;\ 2]$; 5) $[-\sqrt{41};\sqrt{41}]$; 6) $[-3\sqrt{5};3\sqrt{5}]$. **25.16.** 0. **25.17.** 1) $(-\infty;\ -3]\cup[3;\ +\infty)$; 2) $[-1-\sqrt{14};1+\sqrt{6}]$. **25.20**. 1) $2\sin\beta$; 2) $2\sin\beta$. **26.1.** 2) $\mathrm{tg}\,x$; 3) $-\cos2x$; 4) $-(\sin x+$ $+\cos x)$; 5) $2\sin\alpha$; 6) $\cos\alpha$; 7) 1; 9) $4\sin x\cdot\cos^2x$. **26.2.** 1) 1; 2) $\frac{\sqrt{3}}{3}+1$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{3}+2$; 4) 0,5; 5) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 6) $\frac{1}{16}$. **26.3.** 1) $\cos2\alpha$; 2) $\cos2\alpha$; 3) $2\mathrm{ctg}2\alpha$; 4) $\cos2\alpha$; 5) $2\mathrm{tg}\,\alpha$. **26.4.** 1) $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$; 2) $\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\beta}{2}$; 3) $0{,}5\ \mathrm{ctg}2\alpha$; 4) $\frac{1}{1-\sin2\alpha}$. **26.9.** 1) 0; 2) 0; 3) 0; 4) $\mathrm{tg}2\alpha$; 5) $4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}$; 7) $2\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}$; 8) 1; 9) 0; 10) $-\frac{1}{\sin2\alpha}$. **26.10.** 1) $-\cos4^\circ$; 2) $\sin^212^\circ$; 3) $-\cos20^\circ$; 5) 0; 6) $\cos28^\circ$. **26.15.** 1) $\cos4\beta$; 2) 0; 3) $\mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2}$; 4) $-0{,}5\mathrm{ctg}2\beta$. **26.17.** 1) $\frac{60}{61}$; $\frac{11}{61}$; $\frac{60}{11}$; 2) $\sqrt{0{,}9}$; $-\sqrt{0{,}1}$; -3. **26.18.** 2) $-3\frac{1}{3}$; 5) 1; 6) $\frac{60}{61}$. **26.19.** 1) $|\sin\frac{\alpha}{2}|$; 2) $|\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2})|$; 3) $|\cos2\alpha|$; 4) $0{,}5|\sin3\alpha|$; 5) $\begin{cases}2\cos\alpha \text{ при } 0\ \mathrm{m}\ \alpha\ \mathrm{m}\ \frac{\pi}{4}\\ 2\sin\alpha \text{ при } \frac{\pi}{4}<\alpha\ \mathrm{m}\ \frac{\pi}{2}\end{cases}$. **26.22.** 1) $\frac{1}{8}$; 2) $\frac{1}{64}$; 3) $\frac{1}{16}$; 4) $\frac{1}{4}$; 5) $\frac{1}{4}$. **26.25.** 1) 2; 1; 2) 1; 0,5; 3) 1; 0,25. **26.26.** 1) $\cos\beta$; 2) $\sin\beta$. **26.28.** 4 коробки. **27.1.** 1) $2\sin4x$; 2) $2\sin4\beta\cdot\cos2\beta$; 3) $2\cos10\cdot\sin5$; 4) $\sqrt{3}\cdot\cos70^\circ$; 6) $2\sin9\alpha\cdot\sin4\alpha$. **27.2.** 2) $\sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{12}$; 3) $2\cos\frac{\pi}{5}\cdot\sin\frac{\pi}{10}$; $6\sin x$; 9) $\sqrt{3}\cos\alpha$; 12) $2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{5\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{7\beta}{2}\right)$. **27.3.** 9) $4\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}\right)$; 11) $4\cos\left(\frac{\pi}{6}+2x\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)$; 12) $4\cos\left(\frac{\pi}{12}+x\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}-x\right)$. **27. 4.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{ctg}7^\circ$; 2) $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}80^\circ$; 3) $\mathrm{tg}10^\circ$; 9) $-\mathrm{tg}2x$; 11) $\mathrm{ctg}2x$; 12) $-\mathrm{tg}\frac{5x}{2}$; 14) $-\frac{\cos2\beta}{\sin\beta}$; 15) 1; 16) $\mathrm{ctg}\,\alpha$. **27.6.** 1) $2\sqrt{3}$;

2) $\frac{\sqrt{2}}{2\sin 11^\circ \cdot \sin 34^\circ}$; 4) $\frac{2}{\sin 10^\circ}$; 6) $\frac{-\cos 110^\circ}{\cos 25^\circ \cdot \sin 85^\circ}$; 7) $\frac{1}{2\cos^2 15^\circ}$; 8) 0. **27.8.** 1) $\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta)$; 3) $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$; 4) $\frac{1}{2}\cos 2x$. **27.9.** 1) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $-\sqrt{3}$; 3) 2; 4) 10; 5) 13; 6) 11. **27.10.** 1) 2; 2) 4; 3) – 4; 4) –1. **27.11.** 1) $2\cos 3\alpha \cdot \cos\alpha$; 2) $\sqrt{3}\cos\alpha$. **27.12.** 1) $2\sqrt{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)$; 3) $2\sqrt{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)$. **27.13.** 1) $4\cos(\frac{\pi}{6} + 4\beta) \cdot \cos(\frac{\pi}{6} - 4\beta)$; 2) $4\sin(\frac{\pi}{6} + 4\beta) \cdot \sin(\frac{\pi}{6} - 4\beta)$; 3) $-\frac{\cos 10\beta}{\cos^2 5\beta}$; 4) $-\frac{\cos 6\alpha}{\sin^2 3\alpha}$.

27.16. 1) 4; 2) $6 + 2\sqrt{3}$; 3) 2; 4) 1,5. **27.17.** 1) –0,8; 2) $-\sqrt{0,96}$; 3) $-5\sqrt{21}$; 4) $\frac{\sqrt{91}}{3}$. **27.18.** 1) $\frac{65}{113}$; 2) $\frac{52}{87}$. **27.19.** 1) $-\cos^2 x$; 2) $-\sin 2x$. **27.20.** 1) $[-2; -1)\cup\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup(1; 8]$; 2) $(-2; -1)$. **27.21.** 1) $\cos\alpha \cdot \cos 2\beta$; 2) $\cos 3\alpha \cdot \cos 2\beta$. **27.22.** 1) $\cos 2\alpha \cdot \sin\beta$; 2) $\sin 3\alpha \cdot \cos 2\beta$. **28.1.** 1) $\frac{1}{2}(\sin 7\alpha + \sin 3\alpha)$; 4) $\frac{1}{2}(\cos 9\alpha + \cos 21\alpha)$; 6) $-\frac{1}{2}(\cos 18\alpha + \cos 24\alpha)$; 8) $\frac{1}{2}(\sin 8\alpha + \sin 2\alpha)$. **28.3.** 1) $\frac{2 + \sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$; 2) $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{3} + 1}{4}$; 4) $\frac{\sqrt{3} - 1}{4}$. **28.5.** 1) –1; 2) 1; 3) $\sqrt{2}$; 4) –3. **28.9.** 1) $2(\cos\beta + \cos 3\beta + \cos 5\beta + \cos 7\beta)$; 6) $4(\cos 7\alpha - \cos 13\alpha - \cos 9\alpha + \cos 11\alpha)$. **28.10.** 1) $\frac{14}{27}$; 2) $-\frac{42}{125}$; 3) $2a(1 - 2a^2)^2 - a$; 4) $4a(2a^2 - 1) \cdot (1 - a^2)$. **28.12.** 1) $-\frac{14}{27}$; 2) $-\frac{14}{27}$. **28.14.** 1) 0; 2) 0. **28.15.** 1) 0; 2) 1.

28.17. 1) cos5° – cos15° + cos35° – cos45°; 2) cos10° + sin20° – sin60°.

28.19. 1) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{16}$; 2) $\frac{1}{64}$. **28.20.** 1) {(4; 3); (–4; –3)}; 2) {(–3; –2); (3; 2)}; 3) {(–1; –3); (1; 3)}; 4) {(2; 2); (–2; –2); (4; 1); (–4; –1)}. **28.21.** 1) $(-\infty; -4)\cup[-2; 0]\cup[5; +\infty)$; 2) $[-2; 0]\cup(1; 6]$. **28.22.** 1) 1; 2) –2. **28.23.** 1) $y_{наим} = 3$, уравнение оси симметрии $x = 1$. **28.25.** 1) 1; 2) $2\cos^2\alpha$. **29.1.** 1) $\sqrt{2}\cos(\alpha - \frac{\pi}{4})$; 4) $2\text{tg}\,\alpha \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2}$; 5) 0; 6) 0; 7) $-2\text{tg}\,\alpha$; 8) $\sin\alpha$; 11) 1; 12) $1 + \sin\alpha$. **29.2.** 1) $\frac{3}{2}$; 2) 2; 3) 1; 4) 0,5; 5) 3; 6) 1; 7) –2; 8) 0,5. **29.3.** 1) –9; 2) –2; 3) 13; 4) 7. **29.5.** 1) 4; 2) 2; 3) –1; 4) 0,125.

29.6. 1) 1,2; 2) –8,5; 3) 2,15; 4) 2,1. **29.7.** 1) $\frac{8}{27}$; 2) $-\frac{32}{27}$; 3) $-\frac{28\sqrt{5}}{125}$; 4) $-\frac{16\sqrt{3}}{27}$.

29.8. 1) 1; 2) 1. **29.9.** 1) –1,1 или 1,1; 2) –0,75 или 0,75; 3) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ или $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) –1,2 или 1,2; 5) –0,64; 6) ±4; ±2. **29.10.** 1) –0,5; 2) –0,5. **29.11.** 1) –0,5; 2) 0,5; 3) 2,5; 4) 1. **29.12.** 1) $\frac{7}{8}$; 2) 0,944; 3) 0,936; 4) 224; 5) –80; 6) $\frac{13}{16}$.

29.13. 1) 5; 2) 4; 3) 0,1; 4) –10. **29.14.** 1) 1; 2) 1; 3) $\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2\alpha$; 4) $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\beta$.

29.17. $\frac{7}{8}$. **29.18.** $\frac{8\cos 2\alpha + 1}{2(\cos 2\alpha - 1)}$. **29.19.** 1) 0,125; 2) 0; 3) 1.

29.21. 1) $[-\sqrt{2}; -1)\cup(-1; 1)\cup(1; \sqrt{2}]$; 2) $[-\sqrt{2}; -1)\cup(-1; 1)\cup(1; \sqrt{2}]$.

29.22. 1) $\begin{cases} 2\cos\beta, \text{ если } 0 \;m\; \beta \;m\; 45°, \\ 2\sin\beta, \text{ если } 45° < \beta \;m\; 90°; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2\sin\dfrac{\beta}{4}, \text{ если } 360° \;m\; \beta \;m\; 540°, \\ 2\cos\dfrac{\beta}{4}, \text{ если } 540° < \beta \;m\; 720°. \end{cases}$ **29.25.** 1) $\frac{2}{23}$; 2) $-\frac{72}{55}$. **29.26.** 2 и –2. **29.27.** 1) 1; 2) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$. **29.29.** 1) 4; 2) 9; 3) 1; 4) 10. **29.30.** 6. **29.31.** 1) 8; 2) 8. **29.32.** 19.4%. **29.33.** 20 способов. **29.34.** 43 яблока.

Глава V. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

30.1. 1) Случайное; 2) случайное; 3) невозможное; 4) достоверное. **30.2.** 1) Невозможное; 2) достоверное. **30.3.** Достоверное. **30.4.** 1) Случайное; 2) невозможное; 3) невозможное; 4) достоверное. **30.5.** 1) Случайное; 2) невозможное. **30.10.** 1) Моего соседа по парте зовут Алибек или Азамат; 2) явка на выборы не была от 82% до 93%; 3) на контрольной работе по математике я выполнил, как минимум, три задания из пяти. **30.11.** 1) При бросании монеты выпал герб; 2) при бросании игральной кости 4 очка не выпало; 3) из корзины, в которой лежат 3 белых и 6 красных шара, случайным образом вынут белый шар; 4) при бросании игральной кости выпало 4 и более очков; 5) случайно выбранная цифра больше или равна 7; 6) из 5 выстрелов по мишени ни одна из пуль в мишень не попала. **30.12.** Не является, простые события: выпало 1 очко, выпало 3 очка, выпало 5 очков. **30.13.** Равновозможные события — A, B, C; равновозможные события — D, E. **30.14.** 1) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; 2) 2. **30.15.** 1) $[\frac{-3-\sqrt{17}}{2}; -)\cup[\frac{-3+\sqrt{17}}{2}; 1)$; 2) $(-\infty; -2)\cup[0; 2)\cup[6; +\infty)$. **30.16.** 1) На 56%; 2) на 55%; 3) на 25%; 4) уменьшится на 40%. **30.17.** 3. **30.18.** 150 шт. **30.19.** 1) Выпали цифры 2, 4 или 6; 2) выпали цифры 1, 3 или 5; 3) выпали числа 4, 5 или 6. **30.20.** Например, $\frac{3}{7}$; $\frac{4}{7}$; $\frac{5}{6}$. **31.1.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{1}{3}$; 4) $\frac{1}{2}$. **31.2.** а) 1) $\frac{2}{7}$; 2) $\frac{5}{7}$; 3) 0; б) 1) $\frac{4}{11}$; 2) 1; 3) $\frac{7}{11}$. **31.3.** 1) Неверное; 2) верное; 3) верное; 4) верное; 5) верное. **31.4.** 1) $\frac{17}{25}$; 2) $\frac{1}{5}$. **31.5.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) 0. **31.6.** $\frac{1}{18}$. **31.7.** 1) $\frac{3}{4}$; 2) $\frac{3}{8}$. **31.8.** 1) $\frac{9}{25}$; 2) $\frac{16}{25}$. **31.9.** 1) 0,1; 2) 0,1; 3) 0,2; 4) $\frac{7}{90}$. **31.10.** 1) 0,2; 2) 0,04; 3) 0,3; 4) $\frac{12}{30}=\frac{2}{5}$. **31.11.** 48 попаданий. **31.12.** 1) $\frac{9}{99}=\frac{1}{11}$; 2) $\frac{90}{99}=\frac{10}{11}$. **31.13.** 1) 0,4; 2) $\frac{3}{7}$; 3) 0,5. **31.16.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{6}$; 2) –0,25. **31.18.** 1) n^2-2; 2) n^2+3. **31.19.** 1) 5 шт. 2) 5 с. **31.20.** Молока 140 г, пломбира 60 г. **31.21.** 1) $\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$; 2) $\frac{\pi}{4}$. **32.1.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{1}{2}$. **32.2.** 0,5. **32.3.** 0,25. **32.4.** 0,75. **32.5.** 0,25. **32.6.** 0,75. **32.7.** $\frac{8}{27}$. **32.9.** $\frac{1}{4}$. **32.12.** 0,75. **32.13.** $\frac{\pi}{6}$. **32.14.** $\frac{2\sqrt{3}}{3\pi}$. **32.15.** $1-\frac{\pi}{6}$.

ПОВТОРЕНИЕ КУРСА АЛГЕБРЫ 9 КЛАССА

1. 1) $\frac{3-7\sqrt{3}}{6}$; 2) $\frac{-3-\sqrt{3}}{6}$; 3) 0; 4) $\frac{6-5\sqrt{3}}{6}$; 5) $\frac{5\sqrt{3}-12}{6}$; 6) 0. **2.** 1) $\frac{3-20\sqrt{3}}{6}$; 2) 8; 3) $\frac{4\sqrt{3}-57}{6}$; 4) $\frac{18-17\sqrt{3}}{6}$. **3.** 1) $\frac{9-7\sqrt{3}}{2}$; 2) 4; 3) $\frac{-5\sqrt{3}}{18}$; 4) 2;5) 1; 6) 2. **4.** 1) $\frac{\sqrt{51}}{10}$; $0{,}14\cdot\sqrt{51}$; 0,02; 2) 0,8, $-\frac{3}{4}$, $\frac{24}{7}$; 3) $-\frac{1}{\sqrt{26}}$, $-\frac{5}{\sqrt{26}}$, $-\frac{12}{13}$. **5.** 1) $\frac{4\sqrt{2}}{9}$, $\frac{17}{81}$, $\frac{17\sqrt{2}}{112}$; 2) $\frac{7}{9}$, $\frac{4\sqrt{2}}{7}$, $\frac{56\sqrt{2}}{81}$. **6.** 1) $\frac{1}{3}$, $\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\frac{4\sqrt{2}}{9}$; 2) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\frac{1}{3}$, $-\frac{7}{9}$, $-\frac{4\sqrt{2}}{7}$. **7.** $\cos(\alpha+\beta)=\frac{20\sqrt{7}-1}{54}$; $\sin(\alpha-\beta)=\frac{4\sqrt{5}-\sqrt{35}}{54}$; $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{(4+\sqrt{7})\cdot\sqrt{5}}{20\sqrt{7}-1}$. **8.** $\cos(\alpha-\beta)=\frac{\sqrt{195}+42}{56}$; $\sin(\alpha+\beta)=\frac{27\sqrt{15}}{56}$; $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{7\sqrt{13}+6\sqrt{15}}{42+\sqrt{195}}$.

9.

№	1	2	3	4
d	2	3	–4	–2
a_n	14,5	–4	7	–13,7

10.

№	1	2	3	4
a_1	1,4	28	–2,3	4,1
a_n	3,2	24,5	11,5	–28,7

11.

№	1	2	3	4
n	4	4	1	2
S_n	–135	125	56	–27

12.

№	1	2	3	4
a_1	110	–40	–53	310

13.

№	1	2	3	4
q	2	3	–7	–4
b_n	11,2	437,4	68,6	–307,2

14.

№	1	2	3	4
b_1	729	729	1024	1024
b_n	–27	$\frac{1}{3}$	2	4

15.

№	1	2	3	4
S_n	–1968,75	499,9936	909,0909	–416,6656

16.

№	1	2	3	4
b_1	2	–81	250	–21,6

17. 1) $-\cos\alpha$; 2) $\sin\alpha$. **19.** Неверно. **20.** 1) $-2\sin\alpha$; 2) 0,5. **22.** 1) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$; 2) $-\operatorname{ctg}2\alpha$; 3) $\cos^4\alpha$; 4) $\operatorname{tg}^6\alpha$. **23.** Верно. **24.** 1) 2; 2) 1; 3) 1; 4) $\cos2\alpha$. **27.** (0; –0,4) и (4; 6). **28.** $a_1 = 8,5$; $d = 2$. **29.** $q = 0,5$; $b_4 = 0,375$. **30.** 1) $S_5 = -420,2$ или $S_5 = 60\frac{1}{35}$; 2) $S_5 = 499,84$ или $S_5 = 246$. **31.** 1) $S_8 = 72$; 2) $S_8 = 80$. **32.** 1) (–0,5; 0,5); (0,5; –0,5); (–2; 1); (2; –1); 3) (–2; –4); (2; 4). **33.** 2) (0; 1); (3; 1); (1,5; 2,5); (1,5; –0,5); 4) (1; 2); (2; 1). **35.** 1) $[-5;\ 6]\cup[10;\ +\infty)$; 2) $(-\infty;\ -11]\cup[-2;\ 7]$; 3) $(-\infty;\ -5]\cup(6;\ +\infty)$; 4) $(-2;\ 7]$; 5) $(7;\ 14]$; 6) $(-6;\ -3]$; 7) $(1;\ 2)\cup(2;\ 3)$; 8) $(-\infty;\ -3)\cup(-3;\ -2)\cup(-1;\ +\infty)$. **36.** 1) $(-\infty;\ -3]\cup[5;\ +\infty)$. **37.** 1) $(-\infty;\ -\frac{1}{3})\cup(2,5;\ +\infty)$; 2) $(-9;\ \frac{3}{4})$. **38.** 1) 1; 2) 3. **39.** 1) 8; 2) 8. **40.** 1) –8; 2) –6. **41.** 1) –6; 2) 4. **42.** 1) $(12;\ +\infty)$; 2) $(-\infty;\ -4]$. **43.** 1) 4; 7; 2) –18. **44.** 1) $(-6;\ -5]\cup[5;\ +\infty)$; 2) $[-2;\ 2]$; 3) $[-1;\ 4)$. **45.** 1) 3; 2) {–3; –2; –1}. **46.** 1) {–4; –1}; *Указание* : В первой дроби числитель почленно разделите на x, а во второй дроби числитель и знаменатель разделите на x, затем введите новую переменную: $a = x + \frac{4}{x}$; 2) {1; 2}; *Указание* : введите новую переменную: $a = x + \frac{2}{x}$, разделив числитель и знаменатель дроби, стоящей в левой части уравнения, на x^2. **50.** 1) $y_{наиб}$ — нет, $y_{наим} = 2,75$; 2) $y_{наиб} = 6$, $y_{наим}$ — нет; 3) $y_{наиб} = 2$, $y_{наим}$ — нет; 4) $y_{наиб}$ — нет, $y_{наим} = 2$. **55.** 44. **56.** 45 справа. **57.** На 9 этаже. **59.** 9. **60.** 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25. **61.** 2 ученика. **62.** 52. **63.** 4 кг. **64.** 1) II компанией, 288 000 тг. **71.** $\left\{\frac{1}{9};\ \frac{1}{36}(1+\sqrt{13})^2\right\}$. **72.** $\left\{\sqrt{6}\right\}$. **73.** $q = 39$, {1; 4; 7}. **74.** $a = -16$. **75.** $a = 2025$, $b = 12114$. **76.** {–1; 8}. **84.** 35.

85. $\dfrac{\sin\frac{(n+1)\varphi}{2}\sin\frac{(2\alpha+n\varphi)}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}$, если $\varphi \neq 2\pi k$, $k \in Z$; $(n+1)\sin\alpha$, если $\varphi = 2\pi k$, $k \in Z$. **86.** 1) 24; 2) 6. **87.** 74. **88.** 10. **89.** 1) 6; 2) 4; 3) 5. **90.** 180. **91.** 1) A_4^2; 2) C_{22}^5. **92.** 1) $32x^2$; 2) 24.

СОДЕРЖАНИЕ

Глава IV. ТРИГОНОМЕТРИЯ

Глава V. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебное издание

Абылкасымова Алма Есимбековна
Кучер Татьяна Павловна
Корчевский Владимир Евгеньевич
Жумагулова Зауре Абдыкеновна

АЛГЕБРА

Часть 2

Учебник для 9 класса общеобразовательных школ

Редактор *С. Родионова*
Худож. редактор *А. Сланова*
Техн. редактор *И. Тарапунец*
Компьютерная верстка *Г. Алимшеевой*

Государственная лицензия № 0000001 выдана издательству
Министерством образования и науки Республики Казахстан 7 июля 2003 года

ИБ № 5818

Подписано в печать 21.05.19. Формат 70x100 $^1/_{16}$ Бумага офсетная.
Гарнитура "SchoolBook Kza". Печать офсетная. Усл.-печ. л. 12,26 + 0,32 форзац.
Усл. кр.-отт. 25,81. Уч.-изд. л. 6,73 + 0,54 форзац.
Тираж 65000 экз. Заказ №

Издательство "Мектеп", 050009, г. Алматы, пр. Абая, 143
Факс.: 8(727) 394-37-58, 394-42-30.
Тел.: 8(727) 394-41-76, 394-42-34.
E-mail: mektep@mail.ru
Web-site: www.mektep.kz