В.А. Смирнов, Е.А. Туяков

ГЕОМЕТРИЯ 9

Учебник для 9 классов общеобразовательных школ

Утверждено Министерством образования и науки Республики Казахстан

Алматы "Мектеп" 2019

УДК 373.167.1
ББК 22.15я72
С50

Условные обозначения:

— определения, свойства, правила

— вопросы для закрепления

— проблема, которая будет решена при овладении новыми знаниями

— задания для самостоятельного изучения теоретического материала

— конец доказательства теоремы или свойства

A — обязательные упражнения для всех учащихся

B — упражнения средней сложности

C — упражнения повышенной сложности

Смирнов В.А., Туяков Е.А.
С50 **Геометрия.** Учебник для 9 кл. общеобразоват. шк. — Алматы: Мектеп, 2019. — 176 с., илл.

ISBN 978—601—07—1098—6

$С\dfrac{4306020502—012}{404(05)—19}$ 21(1)—19

УДК 373.167.1
ББК 22.15я72

ISBN 978—601—07—1098—6

ВЕКТОРЫ НА ПЛОСКОСТИ 1

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЛОСКОСТИ 2

РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ 3

ОКРУЖНОСТЬ. МНОГОУГОЛЬНИКИ 4

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий учебник предназначен для изучения геометрии в девятом классе. В нем Вы познакомитесь с новыми методами изучения свойств геометрических фигур, такими как векторный метод, метод преобразований (движений и подобия), а также научитесь решать задачи на доказательство, на нахождение длин отрезков, величин углов, площадей фигур, познакомитесь с векторным методом и др.

Весь материал учебника разбит на главы и пункты, которые содержат теоретический материал, задания для самостоятельной работы, вопросы для повторения, задачи различного уровня трудности.

Конец доказательства теоремы помечен знаком ◪.

Задачи разделены по уровням А, В и С. Задачи уровня А имеют начальный уровень трудности и отвечают за понимание основного материала. Задачи уровня В являются базовыми. Их выполнение свидетельствует об освоении учебного материала данного пункта. Задачи уровня С имеют повышенный уровень трудности.

Пункты, отмеченные звездочкой (*), содержат дополнительный материал научно-популярного и прикладного характера, не входящий в учебную программу. Он может быть использован как на основных уроках, так и на дополнительных занятиях по математике (кружках, курсах по выбору и т. п.), а также при организации проектной и исследовательской деятельности учащихся и написании рефератов.

В конце каждой главы предлагается тест на проверку освоения пройденного учебного материала.

В конце учебника приведены ответы к задачам.

Желаем успехов в изучении геометрии!

Авторы

ПОВТОРЕНИЕ КУРСА ГЕОМЕТРИИ ДЛЯ 8 КЛАССОВ

1. МНОГОУГОЛЬНИКИ. ИССЛЕДОВАНИЕ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКОВ

1. Углы

1. Найдите острый угол параллелограмма, если его тупой угол равен 118°.
2. Найдите тупой угол параллелограмма, если его острый угол равен 64°.
3. Один из внешних углов параллелограмма равен 62°. Найдите больший угол параллелограмма.
4. Разность углов, прилежащих к одной стороне параллелограмма, равна 40°. Найдите меньший угол параллелограмма.
5. Сумма двух углов параллелограмма равна 260°. Найдите один из оставшихся углов.
6. Один угол параллелограмма больше другого на 70°. Найдите меньший угол параллелограмма.
7. Один угол параллелограмма меньше другого на 68°. Найдите больший угол параллелограмма.
8. Найдите меньший угол параллелограмма, если два его угла относятся как 3 : 7.
9. Диагональ параллелограмма образует с двумя его сторонами углы 26° и 34°. Найдите меньший угол параллелограмма.
10. Высота параллелограмма образует с его стороной угол 28°. Найдите больший угол параллелограмма.
11. Диагональ прямоугольника образует с его стороной угол 58°. Найдите угол между диагоналями прямоугольника.
12. Угол между диагоналями прямоугольника равен 48°. Найдите меньший из углов, которые образует диагональ со сторонами прямоугольника.
13. Острый угол параллелограмма равен 60°. Найдите угол между высотами этого параллелограмма, проведенными из вершины тупого угла.
14. Угол между высотами параллелограмма, проведенными из вершины тупого угла, равен 50°. Найдите острый угол параллелограмма.
15. Один из углов ромба равен 50°. Найдите больший из углов, которые образуют диагонали этого ромба с его сторонами.
16. Угол между диагональю ромба и его стороной равен 61°. Найдите угол между этой диагональю и другой стороной ромба.

17. Найдите меньший угол равнобедренной трапеции, если известно, что разность противолежащих углов равна $50°$.
18. Один угол равнобедренной трапеции в два раза больше другого. Найдите больший угол этой трапеции.
19. Сумма двух углов равнобедренной трапеции равна $220°$. Найдите меньший угол трапеции.
20. Два противолежащих угла равнобедренной трапеции относятся как $4:5$. Найдите меньший угол трапеции.
21. Два противолежащих угла равнобедренной трапеции относятся как $2:3$. Найдите больший угол трапеции.
22. Сумма двух углов прямоугольной трапеции равна $200°$. Найдите меньший угол трапеции.
23. Сумма двух углов прямоугольной трапеции равна $160°$. Найдите больший угол трапеции.
24. Угол между диагоналями равнобедренной трапеции равен $76°$. Найдите угол между основанием и диагональю трапеции.
25. Три угла выпуклого четырехугольника равны $60°$, $80°$ и $100°$. Найдите четвертый угол четырехугольника.
26. Сумма трех углов выпуклого четырехугольника равна $300°$. Найдите его четвертый угол.
27. Углы выпуклого четырехугольника относятся как $1:2:3:4$. Найдите больший угол четырехугольника.
28. В четырехугольнике $ABCD$ $AB = AD$, $BC = CD$, $\angle A = 60°$, $\angle B = 105°$. Найдите угол C.
29. Углы выпуклого четырехугольника относятся как $1:2:2:4$. Найдите меньший угол четырехугольника.

2. Длины

1. Периметр параллелограмма равен 50 см. Одна сторона параллелограмма на 5 см меньше другой. Найдите большую сторону параллелограмма.
2. Одна сторона параллелограмма в два раза больше другой. Найдите большую сторону, если периметр параллелограмма равен 30 см.
3. Две стороны параллелограмма относятся как $2:3$, а периметр его равен 60 см. Найдите меньшую сторону параллелограмма.
4. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 10 см. Из точки, взятой на основании этого треугольника, проведены две прямые, параллельные боковым сторонам. Найдите периметр получившегося параллелограмма.

5. Найдите диагональ прямоугольника, если его периметр равен 28 см, а периметр одного из треугольников, на которые диагональ разделила прямоугольник, равен 24 см.
6. Прямая, проведенная параллельно боковой стороне трапеции через конец меньшего основания, равного 4 см, отсекает треугольник, периметр которого равен 15 см. Найдите периметр трапеции.
7. В равнобедренной трапеции основания равны 12 см и 27 см, острый угол равен 60°. Найдите ее периметр.
8. Периметр трапеции равен 50 см, а сумма непараллельных сторон равна 20 см. Найдите среднюю линию трапеции.
9. Периметр равнобедренной трапеции равен 80 см, ее средняя линия равна боковой стороне. Найдите боковую сторону трапеции.
10. Диагонали четырехугольника равны 4 см и 5 см. Найдите периметр четырехугольника, вершинами которого являются середины сторон четырехугольника.
11. Найдите сторону квадрата, диагональ которого равна $\sqrt{8}$ см.
12. В квадрате расстояние от точки пересечения диагоналей до одной из его сторон равно 7 см. Найдите сторону квадрата.
13. Меньшая сторона прямоугольника равна 6 см, диагонали пересекаются под углом 60°. Найдите диагональ прямоугольника.
14. В прямоугольнике диагональ делит угол в отношении $1:2$, меньшая его сторона равна 8 см. Найдите диагональ прямоугольника.
15. В прямоугольнике расстояние от точки пересечения диагоналей до меньшей стороны на 2 см больше, чем расстояние от нее до большей стороны. Периметр прямоугольника равен 28 см. Найдите меньшую сторону прямоугольника.
16. Две стороны параллелограмма равны 6 см и 8 см, а его острый угол равен 45°. Найдите меньшую высоту параллелограмма.
17. Высоты параллелограмма равны 3 см и 4 см. Угол между ними равен 60°. Найдите большую сторону параллелограмма.
18. Найдите меньшую диагональ ромба, сторона которого равна 1 см, а тупой угол равен 120°.
19. Найдите сторону ромба, диагонали которого равны 10 см и 24 см.
20. Диагонали ромба равны 6 см и 8 см. Найдите высоту ромба.
21. Средняя линия трапеции равна 12 см, а большее основание равно 18 см. Найдите меньшее основание трапеции.
22. Основания равнобедренной трапеции равны 12 см и 8 см, один из углов равен 135°. Найдите высоту трапеции.

23. В равнобедренной трапеции большее основание равно 25 см, боковая сторона равна 10 см, угол между ними — 60°. Найдите меньшее основание.
24. Средняя линия трапеции равна 7 см, а одно из ее оснований больше другого на 4 см. Найдите большее основание трапеции.
25. Перпендикуляр, опущенный из вершины тупого угла на большее основание равнобедренной трапеции, делит его на части, имеющие длины 10 см и 4 см. Найдите среднюю линию этой трапеции.
26. Основания трапеции равны 3 см и 2 см. Найдите отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции.
27. Основания трапеции относятся как 2 : 3, а средняя линия равна 5. Найдите меньшее основание.
28. Основания равнобедренной трапеции равны 10 см и 4 см. Боковые стороны равны 5 см. Найдите высоту трапеции.
29. Основания прямоугольной трапеции равны 12 см и 6 см. Боковая сторона, перпендикулярная основаниям, равна 8 см. Найдите вторую боковую сторону трапеции.
30. Средняя линия трапеции равна 12 см. Одна из диагоналей делит ее на два отрезка, разность которых равна 2 см. Найдите большее основание трапеции.

3. Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника

1. В треугольнике ABC угол C равен 90°, угол A равен 30°, $AC = 6$. Найдите AB.
2. В треугольнике ABC угол C равен 90°, угол A равен 45°, $AC = 2$. Найдите AB.
3. В треугольнике ABC угол C равен 90°, угол A равен 60°, $AC = 2$. Найдите BC.
4. В треугольнике ABC угол C равен 90°, CH – высота, угол A равен 30°, $AB = 4$. Найдите AH.
5. В треугольнике ABC угол C равен 90°, угол A равен 45°, CH — высота, $AB = 4$. Найдите CH.
6. В треугольнике ABC угол C равен 90°, угол A равен 60°, CH — высота, $AB = 1$. Найдите CH.
7. В треугольнике ABC $AC = BC$, угол C равен 120°, $AC = 1$. Найдите AB.
8. В треугольнике ABC $AC = BC = 2$, угол C равен 150°. Найдите высоту AH.
9. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\cos A = 0{,}8$, $AC = 4$. Найдите AB.

10. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $BC = 4$, $\sin A = 0{,}8$. Найдите AB.
11. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\operatorname{tg} A = \frac{3}{4}$, $BC = 6$. Найдите AC.
12. В треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 18$, $\cos A = 0{,}6$. Найдите AC.
13. В треугольнике ABC $AC = BC = 10$, $\sin A = 0{,}8$. Найдите AB.
14. В треугольнике ABC угол B — тупой, $AB = BC$, $AC = 10$, $\cos C = 0{,}6$, CH — высота. Найдите AH.
15. В треугольнике ABC угол B — тупой, $AB = BC$, $AC = 10$, $\sin C = 0{,}6$. Найдите высоту CH.
16. В треугольнике ABC угол B — тупой, $AB = BC$, $\operatorname{tg} C = 0{,}75$, CH — высота, $AH = 8$. Найдите CH.
17. Найдите высоту равностороннего треугольника, стороны которого равны 1.
18. Найдите сторону равностороннего треугольника, высота которого равна 3.
19. В треугольнике ABC $AC = BC = 10$, $AB = 12$. Найдите высоту CH.
20. В треугольнике ABC $AC = BC = 10$, $AB = 12$. Найдите высоту AH.
21. В прямоугольном треугольнике ABC $(\angle C = 90°)$ $AC = 3$, $AB = 7$. Найдите высоту CD.
22. В прямоугольном треугольнике ABC $(\angle C = 90°)$ $AC = 3$, $BC = 6$, CD — высота. Найдите AD.
23. В прямоугольном треугольнике ABC $(\angle C = 90°)$ $AC = 3$, $BC = 6$, CD — высота. Найдите BD.
24. В прямоугольном треугольнике ABC $(\angle C = 90°)$ $AC = 6$, $BC = 8$. Найдите медиану CD.

4. Площадь

1. Найдите сторону квадрата, площадь которого равна площади прямоугольника со сторонами 4 и 9.
2. Найдите площадь квадрата, если его диагональ равна 4.
3. Найдите периметр квадрата, площадь которого равна 25.
4. Даны два квадрата, диагонали которых равны 10 и 6. Найдите диагональ квадрата, площадь которого равна разности площадей данных квадратов.
5. Найдите площадь прямоугольника, сторона которого равна 5, а диагональ равна 13.
6. Площадь прямоугольника равна 24. Найдите его большую сторону, если она на 2 больше меньшей стороны.

7. Найдите площадь прямоугольника, если его периметр равен 12 и одна сторона в два раза больше другой.
8. Диагонали прямоугольника равны 8. Угол между ними равен 45°. Найдите площадь прямоугольника.
9. Площадь квадрата равна 10. Найдите площадь квадрата, вершинами которого являются середины сторон данного квадрата.
10. Площадь квадрата, описанного около окружности, равна 16. Найдите площадь квадрата, вписанного в эту окружность.
11. Найдите площадь параллелограмма, если его стороны равны 2 и 4, а один из углов равен 150°.
12. Найдите площадь ромба, если его высота равна 2, а острый угол — 45°.
13. Найдите площадь параллелограмма, две стороны которого равны 6 и 8, а меньшая высота равна 4.
14. Стороны параллелограмма равны 9 и 15. Высота, опущенная на меньшую сторону, равна 10. Найдите высоту, опущенную на большую сторону параллелограмма.
15. Параллелограмм и прямоугольник имеют равные стороны. Найдите острый угол параллелограмма, если его площадь равна половине площади прямоугольника.
16. Площадь ромба равна 18. Одна из его диагоналей равна 12. Найдите другую диагональ.
17. Площадь ромба равна 6. Одна из его диагоналей в 3 раза больше другой. Найдите меньшую диагональ.
18. Диагонали параллелограмма равны 6 и 8. Угол между ними равен 30°. Найдите площадь параллелограмма.
19. Площадь параллелограмма равна 10. Найдите площадь параллелограмма, вершинами которого являются середины сторон данного параллелограмма.
20. Найдите площадь ромба, стороны которого равны 3, а радиус вписанной в него окружности равен 1.
21. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если его катеты равны 5 и 8.
22. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если его катет и гипотенуза равны соответственно 6 и 10.
23. Площадь прямоугольного треугольника равна 12. Один из его катетов на 2 больше другого. Найдите меньший катет.
24. Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен 30°. Боковая сторона треугольника равна 10. Найдите площадь треугольника.

25. Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен 150°. Найдите боковую сторону треугольника, если его площадь равна 100.
26. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 10, а основание равно 16. Найдите площадь треугольника.
27. У треугольника со сторонами 9 и 6 проведены высоты к этим сторонам. Высота, проведенная к первой стороне, равна 4. Найдите высоту, проведенную ко второй стороне.
28. Две высоты треугольника равны 6 и 9. Угол между ними равен 60°. Найдите площадь треугольника.
29. Площадь треугольника равна 12. Найдите площадь треугольника, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника.
30. Периметр треугольника равен 12, а радиус вписанной окружности равен 1. Найдите площадь треугольника.
31. Основания трапеции равны 1 и 3, высота — 1. Найдите площадь трапеции.
32. Основание трапеции равно 13, высота равна 5, а площадь равна 50. Найдите второе основание трапеции.
33. Основания трапеции равны 8 и 14, площадь равна 66. Найдите ее высоту.
34. Высота трапеции равна 10, площадь равна 150. Найдите среднюю линию трапеции.
35. Средняя линия трапеции равна 12, площадь равна 96. Найдите высоту трапеции.
36. Основания прямоугольной трапеции равны 12 и 4. Ее площадь равна 64. Найдите острый угол трапеции.
37. Основания равнобедренной трапеции равны 14 и 26, а ее боковые стороны равны 10. Найдите площадь трапеции.
38. Основания трапеции равны 18 и 6, боковая сторона, равная 7, образует с одним из оснований трапеции угол 150°. Найдите площадь трапеции.
39. Площадь треугольника ABC равна 12. DE — средняя линия. Найдите площадь трапеции $ABDE$.
40. Средняя линия трапеции равна 10. Радиус вписанной окружности равен 4. Найдите площадь трапеции.

5. Прямоугольная система координат на плоскости

1. На координатной плоскости изобразите точки $A(1;\ 2)$, $B(3;\ 1)$, $C(2;\ 4)$, $D(-2;\ 3)$, $E(-3;\ -2)$, $F(2;\ -3)$.

2. На прямой, параллельной оси абсцисс, взяты две точки. У одной из них ордината равна 5. Чему равна ордината другой точки?
3. На прямой, перпендикулярной оси абсцисс, взяты две точки. У одной из них абсцисса равна 4. Чему равна абсцисса другой точки?
4. Из точки $A(3;\ 2)$ опущен перпендикуляр на ось абсцисс. Найдите координаты основания перпендикуляра.
5. Через точку $A(3;\ 2)$ проведена прямая, параллельная оси абсцисс. Найдите координаты ее точки пересечения с осью ординат.
6. Найдите координаты середины отрезка AB, если: а) $A(2;\ -1)$, $B(6;\ 5)$; б) $A(-4;\ 3)$, $B(2;\ 1)$; в) $A(7;\ 5)$, $B(-5;\ -3)$.
7. Для данной системы координат на плоскости изобразите точки $A(1;\ 1)$ и $B(-1;\ 1)$. Изобразите отрезок AB. Пересекает ли он какую-нибудь ось координат? Найдите координаты точек пересечения (если они есть).
8. Точки $O(0;\ 0)$, $A(6;\ 0)$, B и $C(2;\ 6)$ являются последовательными вершинами параллелограмма. Найдите координаты точки B.
9. Точки $O(0;\ 0)$, $A(6;\ 2)$, $B(8;\ 10)$, $C(2;\ 8)$ являются вершинами четырехугольника. Найдите координаты точки P пересечения его диагоналей.
10. Найдите расстояние между точками: а) $A_1(2;\ 1)$ и $A_2(1;\ -1)$; б) $B_1(4;\ 3)$ и $B_2(-1;\ 3)$.
11. Найдите расстояние от точки $A(3;\ 2)$ до оси: а) Ox; б) Oy.
12. Какая из точек $A\ (1;\ 2)$ или $B\ (1;\ -2)$ лежит ближе к началу координат?
13. Найдите координаты центра C и радиус R окружности, заданной уравнением: а) $(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 16$; б) $x^2 + (y + 3)^2 = 9$.
14. Напишите уравнение окружности: а) с центром в точке $O(0;\ 0)$ и радиусом 2; б) с центром в точке $C(-2;\ 1)$ и радиусом 3.
15. Выясните, как расположена точка относительно окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 = 25$, если она имеет координаты: а) $(2;\ 1)$; б) $(4;\ 3)$; в) $(3;\ -4)$; г) $(5;\ 0)$; д) $(-1;\ 5)$.
16. Напишите уравнение окружности с центром в точке $C(2;\ 1)$, касающейся оси абсцисс.
17. Составьте уравнение окружности с центром в точке $C(4;\ -3)$, проходящей через начало координат.
18. Докажите, что уравнение: а) $x^2 + 4x + y^2 = 0$; б) $x^2 - 2x + y^2 + 4y + 4 = 0$ задает окружность. Найдите ее радиус и координаты центра.
19. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;\ 1)$ и параллельную оси: а) Ox; б) Oy.

20. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $A(3;\ 2)$ и перпендикулярную оси: а) Ox; б) Oy.

21. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $A(-1;\ 2)$ с угловым коэффициентом: а) $k = 1$; б) $k = 2$; в) $k = 0{,}5$ г) $k = -1$; д) $k = -2$; е) $k = -0{,}5$.

22. На координатной плоскости изобразите квадрат, две противолежащие вершины которого имеют координаты $(1;\ 0)$ и $(4;\ 1)$. Найдите его площадь.

23. На координатной плоскости изобразите прямоугольник, три вершины которого имеют координаты $(-3;\ 0)$, $(-1;\ -2)$, $(0;\ 3)$. Найдите его площадь.

24. На координатной плоскости изобразите параллелограмм $OABC$, для которого $O(0;\ 0)$, $A(3;\ 1)$, $B(3;\ 3)$. Найдите его площадь.

25. На координатной плоскости изобразите ромб $ABCD$, для которого $A(0;\ -2)$, $B(1;\ 0)$, $D(-1;\ 0)$. Найдите его площадь.

Глава 1

ВЕКТОРЫ НА ПЛОСКОСТИ

1. ПОНЯТИЕ ВЕКТОРА

Многие физические величины, например скорость, сила и т. д., характеризуются не только своим значением, но и направлением. Такие величины называют ***векторными***.

На рисунке 1.1 показаны примеры скалярных и векторных величин. К первым относятся, например, масса, длина, температура, ко вторым — скорость, сила, перемещение. В чем разница между скалярными и векторными величинами? Приведите примеры скалярных и векторных величин.

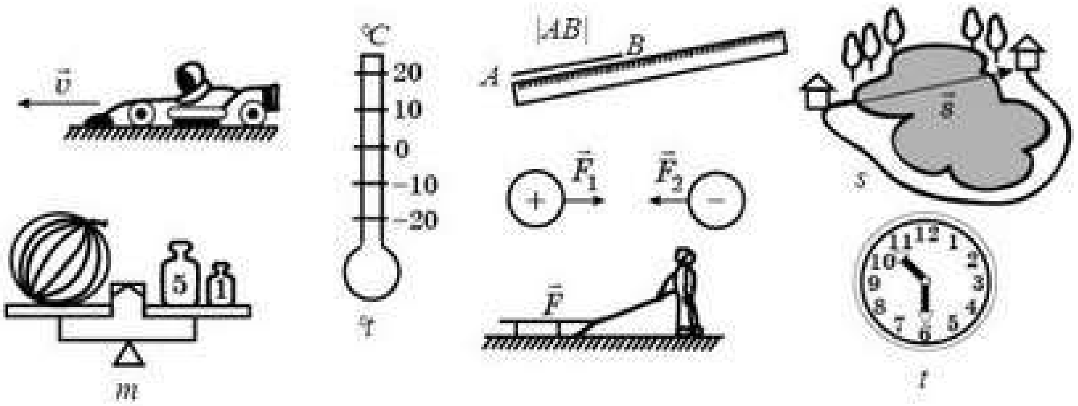


Рис. 1.1

Вектором называется направленный отрезок, т. е. отрезок, в котором указаны его начало и конец.

Вектор с началом в точке A и концом в точке B обозначается $\overline{AB}$ и изображается стрелкой с началом в точке A и концом в точке B. Векторы обозначаются также и одной строчной латинской буквой со стрелкой над ней. Например, $\vec{a}$, $\vec{b}$ и т. д. (рис. 1.2).

Рассматривают также ***нулевые векторы***, у которых начало совпадает с концом. Они обозначаются $\vec{0}$.

Два ненулевых вектора называются ***коллинеарными***, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

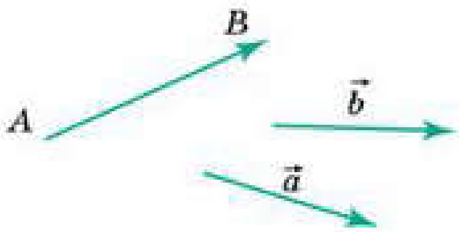


Рис. 1.2

Самостоятельно определите, какие два вектора являются неколлинеарными.

Два ненулевых вектора $\overline{AB}$ и $\overline{A'B'}$, лежащих на одной прямой, называются ***одинаково направленными***, если один из лучей AB или $A'B'$ содержится в другом (рис. 1.3).

В противном случае они называются ***противоположно направленными***.

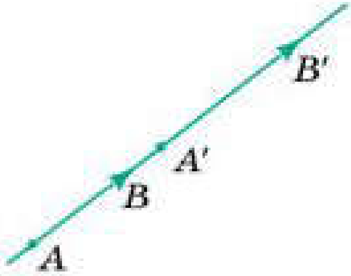


Рис. 1.3

Два ненулевых вектора, не лежащих на одной прямой, называются ***одинаково*** (***противоположно***) ***направленными***, если они лежат на параллельных прямых по одну сторону (по разные стороны) от прямой, проходящей через их начала (рис. 1.4).

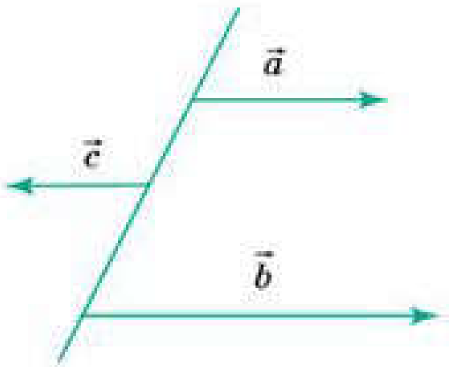


Рис. 1.4

Одинаково направленные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначаются $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$. Противоположно направленные векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$ обозначаются $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{c}$.

? Верно ли, что два ненулевых вектора называются ***коллинеарными***, если они одинаково направлены или противоположно направлены?

Длиной, или ***модулем***, вектора называется длина соответствующего отрезка. Длина вектора $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$ обозначается $|\overrightarrow{AB}|$, $|\vec{a}|$.

Длина нулевого вектора считается равной нулю.

Единичным вектором называется вектор, длина которого равна единице.

Два вектора называются ***равными***, если они имеют одинаковое направление и равные длины.

Все нулевые векторы считаются равными между собой.

Во время тренировки бейсболист бросил мяч высоко и, пробежав по прямой, поймал его. Сравните перемещения игрока и мяча.

Пример. Сколько различных векторов задают стороны параллелограмма?

Решение. Пусть $ABCD$ — данный параллелограмм. Его стороны задают четыре различных вектора: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DA}$.

?

1. Что называется *вектором*?
2. Какой вектор называется *нулевым*?
3. Какие два вектора называются: а) *одинаково направленными*; б) *противоположно направленными*?
4. Какие два вектора называются *коллинеарными*?
5. Что называется *длиной* (модулем) вектора?
6. Какие два вектора называются *равными*?

Задачи

А

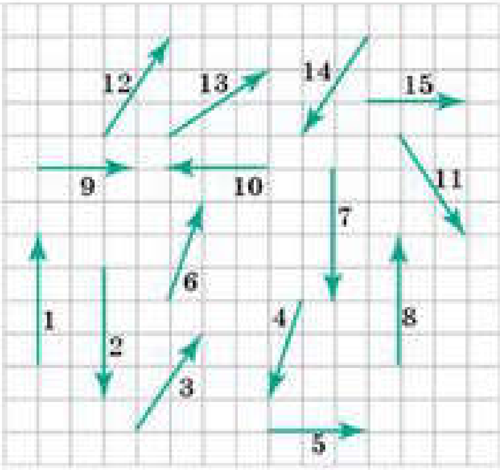


Рис. 1.5

1. Какие из векторов, изображенных на рисунке 1.5: а) одинаково направлены; б) противоположно направлены; в) равны?
2. Сколько неравных векторов задают стороны прямоугольника (рис. 1.6)?
3. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O (рис. 1.7). Сколько имеется неравных векторов с началом и концом в точках A, B, C, D, O?

Рис. 1.6

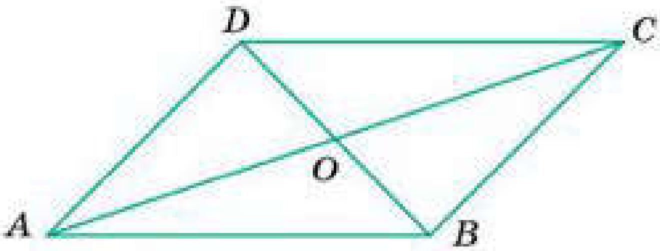


Рис. 1.7

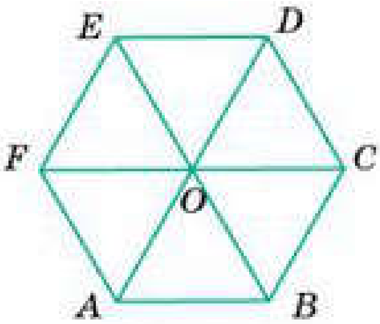


Рис. 1.8

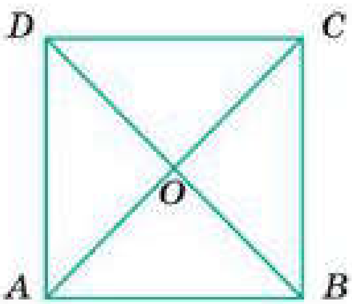


Рис. 1.9

4. Сколько неравных векторов задают стороны правильного шестиугольника $ABCDEF$ (рис. 1.8).
5. Для правильного шестиугольника $ABCDEF$ и точки O пересечения его диагоналей (рис. 1.8) запишите векторы с началом и концом в вершинах этого шестиугольника, равные вектору: а) $\overrightarrow{AO}$; б) $\overrightarrow{OC}$.
6. Диагонали единичного квадрата $ABCD$ пересекаются в точке O (рис. 1.9). Найдите длину вектора: а) $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{BO}$; в) $\overrightarrow{DB}$.
7. Стороны правильного шестиугольника $ABCDEF$ равны 1, O — точка пересечения его диагоналей (рис. 1.8). Найдите длину вектора: а) $\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{AC}$; в) $\overrightarrow{AD}$; г) $\overrightarrow{AE}$.

B

8. В прямоугольнике $ABCD$ $AB = 4$ см, $BC = 3$ см. Найдите длины векторов: а) $\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{DC}$; г) $\overrightarrow{AC}$; д) $\overrightarrow{DB}$.

9. Диагонали AC и BD ромба $ABCD$ пересекаются в точке O и равны соответственно 6 см и 8 см. Найдите длину вектора: а) $\overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{AO}$; в) $\overrightarrow{BO}$.

10. Стороны треугольника ABC равны 1, O — точка пересечения медиан AA_1, BB_1, CC_1. Найдите длину вектора: а) $\overrightarrow{AA_1}$; б) $\overrightarrow{AO}$; в) $\overrightarrow{OA_1}$.

11. Основание AB трапеции $ABCD$ равно 12 см, угол A прямой, $AD = 5$ см, $\angle B = 45°$. Найдите длины векторов: а) $\overrightarrow{BD}$; б) $\overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{AC}$.

C

12. Определите вид четырехугольника $ABCD$, если: а) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$; б) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ и $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$.

13. Докажите, что если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

14. Докажите, что если векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равны, то середины отрезков AD и BC совпадают.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

15. Предложите способ сложения двух: а) одинаково направленных; б) противоположно направленных векторов.

16. Выразите длину суммы: а) одинаково направленных; б) противоположно направленных векторов через их длины.

17. Повторите определения и свойства параллелограмма.

2. СЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Для векторов определена операция сложения. Для того чтобы сложить два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, вектор $\vec{b}$ откладывают так, чтобы его начало совпало с концом вектора $\vec{a}$ (рис. 2.1).

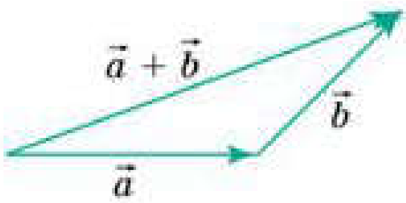


Рис. 2.1

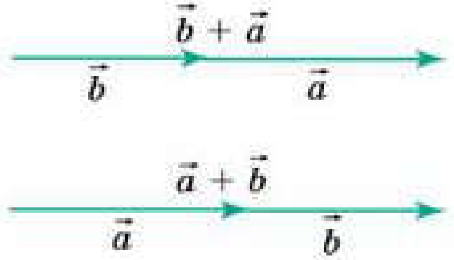


Рис. 2.2

Вектор, у которого начало совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец — с концом вектора $\vec{b}$, называется ***суммой*** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и обозначается $\vec{a}+\vec{b}$.

Такой способ сложения векторов называется ***правилом треугольника*** .

Для операции сложения векторов справедливы следующие свойства, аналогичные свойствам сложения чисел.

Свойство 1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (переместительный закон).

Доказательство. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ одинаково направлены, то требуемое равенство непосредственно следует из определения сложения векторов (рис. 2.2).

Аналогичное равенство имеет место для противоположно направленных векторов.

В случае, если данные векторы неколлинеарны, отложим их от одной точки O. Для получившихся векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ рассмотрим параллелограмм $OACB$ (рис. 2.3).

В нем $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BC}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC}=\vec{b}$. Тогда по определению сложения векторов будем иметь:

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\vec{b}+\vec{a}.$$

Такой способ сложения векторов называется ***правилом параллелограмма*** .

Свойство 2. $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ (сочетательный закон).

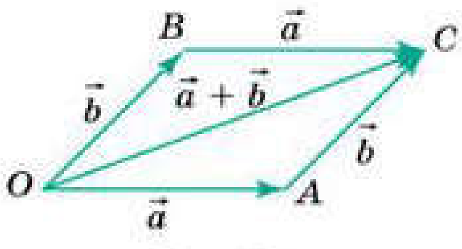


Рис. 2.3

Доказательство. Отложим вектор $\vec{a}$ от некоторой точки A: $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$. Вектор $\vec{b}$ отложим от точки B: $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$, а вектор $\vec{c}$ — от точки C: $\vec{c}=\overrightarrow{CD}$ (рис. 2.4).

Тогда по определению сложения векторов будем иметь:

$$\vec{b}+\vec{c}=\overrightarrow{BD},\ \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=$$
$$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}.$$

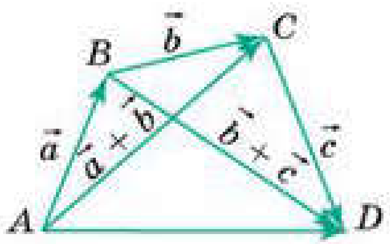


Рис. 2.4

С другой стороны,

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC},\ (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=$$
$$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}.$$

Следовательно, $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.

Для того чтобы сложить три вектора, сначала складывают два из них, а затем полученную сумму складывают с третьим вектором. Из сочетательного закона сложения векторов следует, что сумма трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ не зависит от того, в каком порядке они складываются. Поэтому эта сумма обозначается без скобок, т. е. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

Аналогичным образом, складываются четыре вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$. Их сумма обозначается $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$ и т. д.

Такой способ сложения векторов называется ***правилом многоугольника*** .

Изобразите: а) три; б) четыре вектора. Определите их сумму.

Пример. Стороны прямоугольника $ABCD$ равны 1 и 2. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

Ответ: $\sqrt{5}$.

Докажите, что операция сложения векторов не зависит от выбора точки, от которой откладываются векторы, т. е. для разных точек получаются равные векторы.

Решение . Изобразим прямоугольник $ABCD$ и проведем в нем диагональ AC, длина которой будет равна длине искомого вектора .

1. Как определяется операция сложения векторов?
2. Сформулируйте переместительный закон сложения векторов.
3. Сформулируйте сочетательный закон сложения векторов.
4. Как складываются три вектора?

Задачи

А

1. В треугольнике ABC укажите векторы:
а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}$;
в) $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}$; г) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}$.

2. На рисунке 2.5 укажите векторы:
а) $\vec{a} + \vec{b}$; б) $\vec{c} + \vec{d}$;
в) $\vec{b} + \vec{c}$; г) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$;
д) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$.

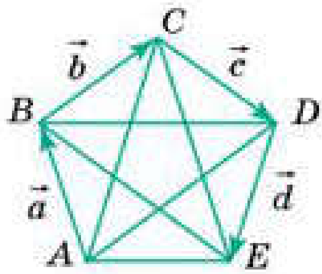


Рис. 2.5

3. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Верны ли равенства:
а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC}$;

в) $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO}$; г) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CB}$;
д) $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$?

4. Может ли сумма двух ненулевых векторов равняться нулевому вектору? Если может, то в каком случае?

B

5. Может ли сумма трех ненулевых векторов равняться нулевому вектору? Если может, то приведите пример.

6. A, B, C, D — произвольные точки плоскости. Выразите через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$ векторы:
а) $\overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{BD}$; в) $\overrightarrow{AC}$.

7. Сторона равностороннего треугольника ABC равна a. Найдите:
а) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}|$; б) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$; в) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}|$.

8. В треугольнике ABC $AC = 6$, $BC = 8$, $\angle C = 90°$. Найдите:
а) $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}|$; б) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}|$;
в) $|\overrightarrow{CA}| + |\overrightarrow{CB}|$; г) $|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}|$.

9. Сторона правильного шестиугольника $ABCDEF$ равна 1. Найдите:
а) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}|$; б) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE}|$;
в) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FE}|$; г) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FE}|$.

10. Упростите выражение:
а) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB})$; б) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}$.
в) $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{HE}$; г) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{CD}$.

C

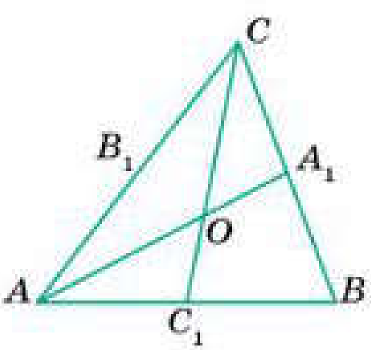


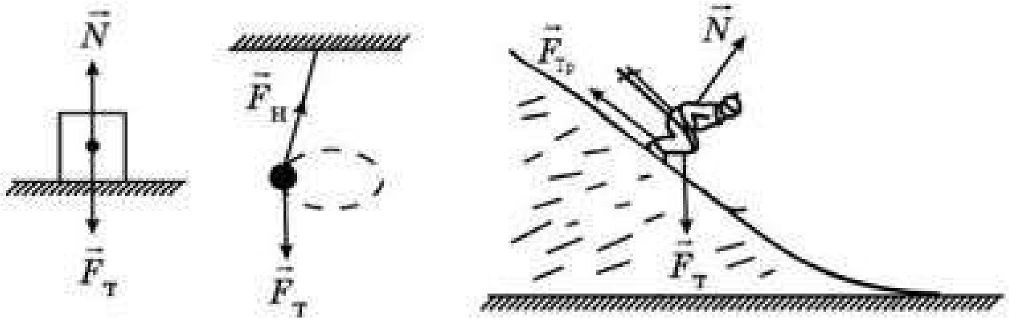
Рис. 2.6

11. Дан параллелограмм $ABCD$. Докажите, что $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}$.

12. O – точка пересечения медиан треугольника ABC (рис. 2.6). Докажите, что $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

13. Докажите, что $|\vec{a} + \vec{b}|$ m $|\vec{a}| + |\vec{b}|$. При каком расположении векторов достигается равенство?

14. Постройте равнодействующую сил, действующих на тело (рис. 2.7).



а) б) в)

Рис. 2.7

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

15. Определите операцию умножения (произведения) вектора на число. Рассмотрите случаи, когда число: а) больше нуля; б) равно нулю; в) меньше нуля.

16. Выразите длину произведения вектора на число через длину данного вектора и данное число.

17. Повторите теорему о пропорциональных отрезках.

3. УМНОЖЕНИЕ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО

Кроме операции сложения, для векторов определена операция умножения (произведения) вектора на число.

Произведением вектора $\vec{a}$ на число t называется вектор, длина которого равна $|t| \cdot |\vec{a}|$, а направление остается прежним, если $t > 0$, и меняется на противоположное, если $t < 0$. Произведением вектора на нуль считается нулевой вектор.

Произведение вектора $\vec{a}$ на число t обозначается $t\vec{a}$. По определению $|t\vec{a}| = |t| \cdot |\vec{a}|$.

Произведение вектора $\vec{a}$ на число -1 называется ***вектором*** , ***противоположным*** $\vec{a}$ и обозначается $-\vec{a}$.

По определению вектор $-\vec{a}$ имеет направление, противоположное вектору $\vec{a}$, и $|-\vec{a}|=|\vec{a}|$.

Для умножения вектора на число справедливы свойства, аналогичные свойствам умножения чисел.

Свойство 1. $(ts)\vec{a} = t(s\vec{a})$ (сочетательный закон).

Свойство 2. $(t + s)\vec{a} = t\vec{a} + s\vec{a}$ (первый распределительный закон).

Свойство 3. $t(\vec{a} + \vec{b}) = t\vec{a} + t\vec{b}$ (второй распределительный закон).

Первое и второе свойства следуют непосредственно из определения. Докажем третье свойство. Пусть, для определенности, векторы

$\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны и $t > 0$. Рассмотрим параллелограмм $OACB$, для которого $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Тогда $\overrightarrow{OC} = \vec{a} + \vec{b}$. На луче OA отложим вектор $\overrightarrow{OA'} = t\vec{a}$, а на луче OB — вектор $\overrightarrow{OB'} = t\vec{b}$. Через точку A' проведем прямую, параллельную прямой OB, и точку ее пересечения с лучом OC обозначим C' (рис. 3.1).

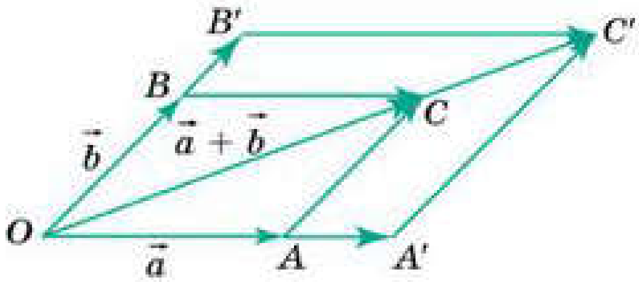


Рис. 3.1

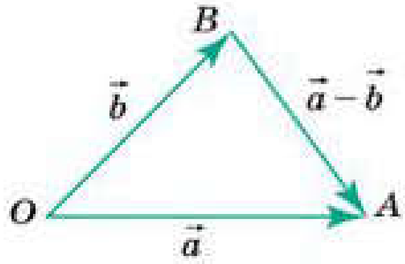


Рис. 3.2

По теореме о пропорциональных отрезках $\frac{OC'}{OC} = \frac{OA'}{OA} = t$. Через точку B' проведем прямую, параллельную прямой OA, и точку ее пересечения с лучом OC обозначим C''. По теореме о пропорциональных отрезках $\frac{OC''}{OC} = \frac{OB'}{OB} = t$. Из равенств отношений $\frac{OC'}{OC}, \frac{OC''}{OC}$ одному и тому же числу t следует, что точка C'' совпадает с точкой C'. Значит, $OA'C'B'$ — параллелограмм, для которого, с одной стороны, $\overrightarrow{OC'} = t\overrightarrow{OC} = t(\vec{a} + \vec{b})$, а с другой стороны, $\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} = t\vec{a} + t\vec{b}$. Следовательно, имеет место равенство $t(\vec{a} + \vec{b}) = t\vec{a} + t\vec{b}$. ☐

Случай коллинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ рассмотрите самостоятельно.

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{a} + (-\vec{b})$, который обозначается $\vec{a} - \vec{b}$.

Для того чтобы найти разность $\vec{a} - \vec{b}$, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ откладывают так, чтобы их начала совпадали (рис. 3.2).

Вектор, у которого начало совпадает с концом вектора $\vec{b}$, а конец — с концом вектора $\vec{a}$, будет искомой разностью векторов.

Докажите, что разность векторов не зависит от выбора точки, от которой откладываются векторы, т. е. для разных точек получаются равные векторы.

1. Как определяется произведение вектора $\vec{a}$ на число t?
2. Как обозначается произведение вектора $\vec{a}$ на число t?
3. Какой вектор называется *противоположным данному вектору*? Как он обозначается?
4. Что называется *разностью двух векторов*? Как она обозначается?
5. Сформулируйте сочетательный закон умножения вектора на число.
6. Сформулируйте первый распределительный закон умножения вектора на число.
7. Сформулируйте второй распределительный закон умножения вектора на число.

Задачи

А

1. В треугольнике ABC точки D, E — середины сторон соответственно AC и BC. Выразите вектор $\overrightarrow{DE}$ через вектор $\overrightarrow{AB}$.

2. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 3.3). Постройте вектор:

а) $\vec{a}-\vec{b}$; б) $\vec{a}+2\vec{b}$.

3. В треугольнике ABC (рис. 3.4) укажите векторы:

а) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$; в) $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}$; г) $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{CA}$.

4. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O (рис. 3.5). Укажите векторы:

а) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AB}$; в) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$; г) $2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{OD}$.

5. Сторона равностороннего треугольника ABC равна 1. Найдите:

а) $|\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}|$; б) $|\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|$.

6. Диаго нали AC и BD ромба $ABCD$ равны соответственно 8 и 6. Найдите длину вектора:

а) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CD}$; в) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$; г) $2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{OD}$.

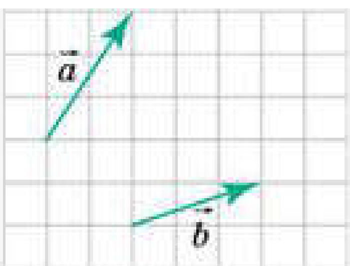


Рис. 3.3

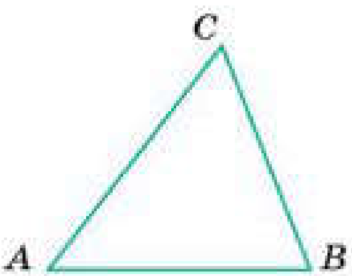


Рис. 3.4

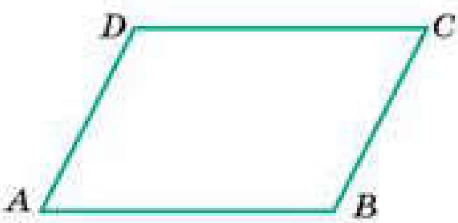


Рис. 3.5

B

7. Диагонали правильного шестиугольника $ABCDEF$ пересекаются в точке O (рис. 3.6). Укажите вектор, равный вектору $\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BE}$, началом и концом которого явля ются вершины этого шестиугольника.

8. Упростите выражение $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DA}$.

9. В треугольнике ABC $AC = 8$, $BC = 6$, $\angle C = 90°$. Найдите:
а) $|\overrightarrow{AC}| - |\overrightarrow{BC}|$; б) $|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}|$; в) $|\overrightarrow{AC}| - \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|$; г) $|\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}|$.

10. Изобразите векторы $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$, для которых $\vec{a} + \vec{x} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} + \vec{y} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} + \vec{z} = \overrightarrow{AB}$ (рис. 3.7).

11. В трапеции $ABCD$ отрезок EF — средняя линия (рис. 3.8). Выразите вектор $\overrightarrow{EF}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$.

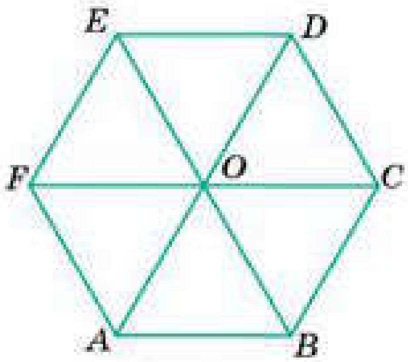


Рис. 3.6

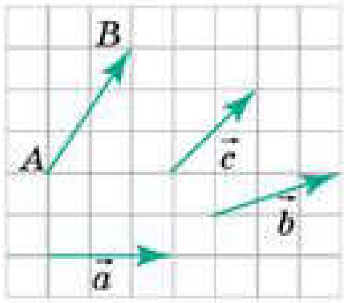


Рис. 3.7

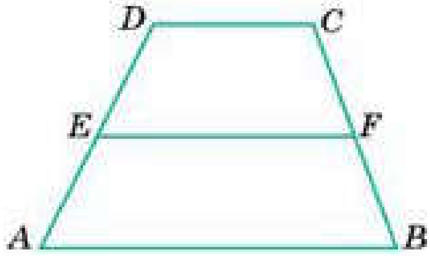


Рис. 3.8

C

12. Дан параллелограмм $ABCD$. Докажите, что для любой точки X выполняется равенство $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XD}$.

13. В каком случае выполняются равенства:
а) $\vec{a} - \vec{b} = \vec{b} - \vec{a}$; б) $\vec{a} - \vec{b} = -\vec{a} - \vec{b}$?

14. Докажите, что выполняется равенство $t(\vec{a} - \vec{b}) = t\vec{a} - t\vec{b}$.

15. Докажите, что выполняется равенство $(\vec{a} - \vec{b}) - \vec{c} = \vec{a} - (\vec{b} + \vec{c})$.

16. Докажите, что $||\vec{a}| - |\vec{b}||$ m $|\vec{a} - \vec{b}|$. При каком расположении векторов достигается равенство?

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

17. Повторите определение коллинеарных векторов.

18. Для двух данных ненулевых коллинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ укажите число t, для которого выполняется равенство $\vec{b} = t\vec{a}$. Выразите это число через длины векторов.

4. РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА

Рассмотрим вопрос о выражении (разложении) одного вектора через другие. Начнем со случая коллинеарных векторов.

Теорема. Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ два ненулевых коллинеарных вектора, то существует единственное число t, для которого выполняется равенство $\vec{b} = t \cdot \vec{a}$.

Доказательство. Рассмотрим случай, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ одинаково направлены, положим $t = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ (рис. 4.1).

Тогда векторы $\vec{b}$ и $\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$ одинаково направлены и имеют равные длины. Значит, они равны, т. е. $\vec{b} = t \cdot \vec{a}$.

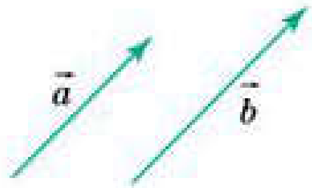


Рис. 4.1

Докажем, что такое число t единственно. Действительно, если выполняется равенство $\vec{b} = t \cdot \vec{a}$, то выполняются равенства $|\vec{b}| = |t \cdot \vec{a}| = t|\vec{a}|$. Следовательно, $t = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$.

В случае, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ противоположно направлены, положим $t = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$. Тогда векторы $\vec{b}$ и $-\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$ одинаково направлены и имеют равные длины. Значит, они равны, т. е. $\vec{b} = t \cdot \vec{a}$. Единственность числа t доказывается аналогично.

Докажите единственность числа t самостоятельно.

Рассмотрим теперь случай неколлинеарных векторов и докажем теорему о разложении вектора по двум неколлинеарным векторам.

Теорема. Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ два ненулевых неколлинеарных вектора, то для любого вектора $\vec{c}$ существуют единственные числа t и s, для которых выполняется равенство $\vec{c} = t \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}$.

Доказательство. Для нулевого вектора $\vec{c}$ положим $t = s = 0$. Для ненулевого вектора $\vec{c}$ обозначим A и B его начало и конец. Проведем через точки A и B прямые, параллельные прямым, на которых лежат векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соответственно. Обозначим C их точку пересечения (рис. 4.2).

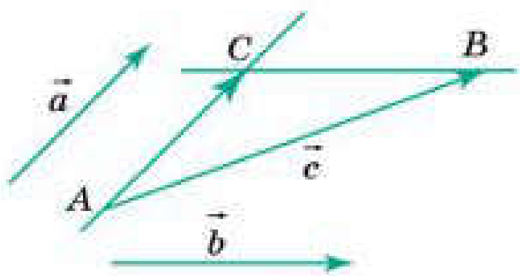


Рис. 4.2

Имеем равенство $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$. Так как векторы $\vec{a}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны, то существует единственное число t, для которого $\overrightarrow{AC} = t \cdot \vec{a}$. Так как векторы $\vec{b}$ и $\overrightarrow{CB}$ коллинеарны, то существует единственное число s, для которого $\overrightarrow{CB} = s \cdot \vec{b}$. Подставляя эти выражения в равенство $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ получим требуемое равенство

$$\vec{c} = t \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}.$$

1. Сформулируйте теоремы о выражении вектора через коллинеарный ему вектор.
2. Сформулируйте теорему о разложении вектора по двум неколлинеарным векторам.

Задачи

А

1. Для правильного шестиугольника $ABCDEF$ (рис. 4.3) найдите такое число t, для которого: а) $\overrightarrow{AD} = t \cdot \overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{CF} = t \cdot \overrightarrow{AB}$; в) $\overrightarrow{DE} = t \cdot \overrightarrow{CF}$; г) $\overrightarrow{BE} = t \cdot \overrightarrow{DC}$.

2. Для параллелограмма $ABCD$ (рис. 4.4) выразите вектор: а) $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{BD}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

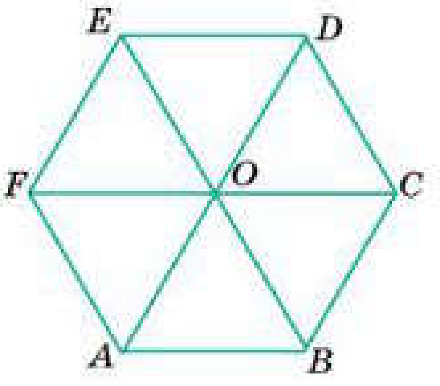


Рис. 4.3

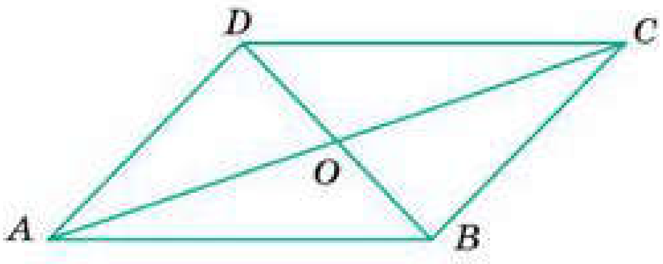


Рис. 4.4

3. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O (рис. 4.4). Выразите вектор: а) $\overrightarrow{AO}$; б) $\overrightarrow{BO}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

4. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O (рис. 4.4). Выразите вектор: а) $\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{AD}$ через векторы $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{BO}$.

B

5. Выразите векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ через векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ (рис. 4.5).

6. Диагонали правильного шестиугольника $ABCDEF$ пересекаются в точке O (рис. 4.3). Найдите такие числа t, s, для которых: а) $\overline{AC} = t \cdot \overline{AB} + s \cdot \overline{AD}$; б) $\overline{AD} = t \cdot \overline{AB} + s \cdot \overline{AF}$; в) $\overline{AE} = t \cdot \overline{AD} + s \cdot \overline{BE}$.

7. Точки K и N – середины сторон соответственно AB и AC треугольника ABC (рис. 4.6). Выразите векторы: а) $\overline{BK}$; б) $\overline{NC}$; в) $\overline{KN}$; г) $\overline{BN}$; д) $\overline{CB}$ через векторы $\vec{a} = \overline{AK}$, $\vec{b} = \overline{AN}$.

8. Отрезки AA_1, BB_1, CC_1 – медианы треугольника ABC (рис. 4.7). Выразите векторы: а) $\overline{AA_1}$; б) $\overline{BB_1}$; в) $\overline{CC_1}$ через векторы $\vec{b} = \overline{AC}$ и $\vec{c} = \overline{AB}$.

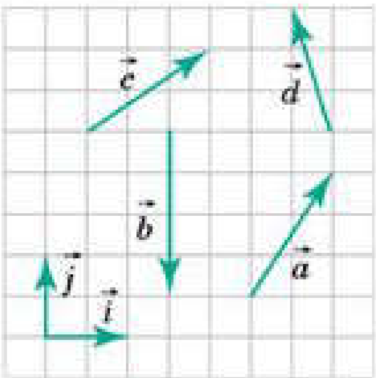


Рис. 4.5

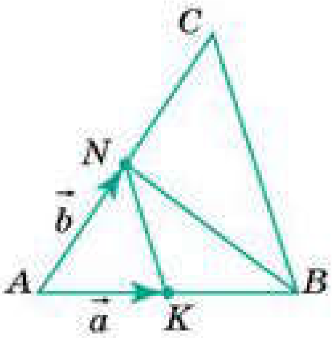


Рис. 4.6

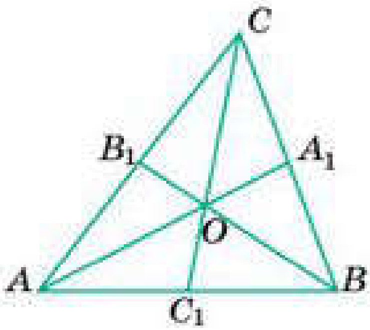


Рис. 4.7

9. Лодка движется от одного берега реки к другому со скоростью 4 км/ч. Скорость течения реки 3 км/ч. Какова истинная скорость лодки?

C

10. Точка C — середина отрезка AB, O — произвольная точка плоскости. Докажите, что $\overline{OC} = \frac{1}{2}\left(\overline{OA} + \overline{OB}\right)$.

11. Точка C принадлежит отрезку AB, $AC : AB = t$, O — произвольная точка плоскости. Докажите, что $\overline{OC} = (1 - t)\overline{OA} + t\,\overline{OB}$.

12. Используя векторы, докажите, что средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна ее половине.

13. O — точка пересечения медиан треугольника ABC, точка X — произвольная точка плоскости. Докажите, что $\overline{XO} = \frac{1}{3}\left(\overline{XA} + \overline{XB} + \overline{XC}\right)$.

14. Используя векторы, докажите, что средняя линия трапеции параллельна ее основаниям и равна их полусумме.
15. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Докажите, что $\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{AD} + \overline{AE} + \overline{AF} = 3\overline{AD}$.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

16. Повторите определения угла и тригонометрических функций.
17. Определите понятие угла между векторами.
18. Для квадрата $ABCD$ найдите угол между векторами: а) $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$; б) $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$; в) $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$.

5. УГОЛ МЕЖДУ ВЕКТОРАМИ. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

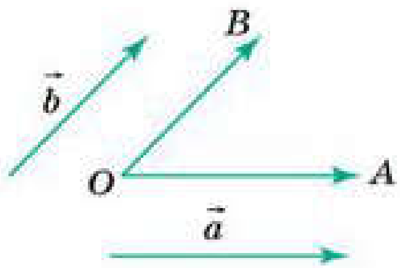


Рис. 5.1

Определим понятие угла между векторами. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ два ненулевых вектора. Отложим их от точки O так, что $\overline{OA} = \vec{a}$, $\overline{OB} = \vec{b}$ (рис. 5.1). Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не являются одинаково направленными, то угол, образованный лучами OA и OB, называется ***углом между векторами*** $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Угол между двумя одинаково направленными векторами считается равным нулю. Два вектора называются ***перпендикулярными*** , если угол между ними прямой.

Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

Если хотя бы один из векторов нулевой, то скалярное произведение таких векторов считается равным нулю.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается $\vec{a} \cdot \vec{b}$. По определению

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi,$$

где φ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Произведение $\vec{a} \cdot \vec{a}$ называется ***скалярным квадратом*** и обозначается $\vec{a}^2$. Из формулы скалярного произведения следует равенство $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

Ясно, что скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда угол между ними равен 90°, поскольку именно в данном случае косинус угла между этими векторами равен нулю.

Для скалярного произведения векторов выполняются свойства, аналогичные произведению чисел, а именно:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$; 2) $(t\vec{a})\cdot\vec{b}=t(\vec{a}\cdot\vec{b})$;
3) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$.

Выясните, в каком случае скалярное произведение двух ненулевых векторов принимает наибольшее значение.

Скалярное произведение векторов имеет простой физический смысл. Оно связывает работу А, производимую постоянной силой $\vec{F}$ при перемещении тела на вектор $\vec{a}$, составляющий с направлением силы $\vec{F}$ угол φ. А именно, имеет место следующая формула:

$$A=\vec{F}\cdot\vec{a}=|\vec{F}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos\varphi,$$

означающая, что работа является скалярным произведением силы на перемещение.

Пример. В прямоугольнике $ABCD$ $AB=\sqrt{3}$, $BC=1$. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$.

Решение. $AC=BD=2$, угол между векторами равен 120°. Скалярное произведение этих векторов равно 2.

1. Что называется *углом между двумя векторами* ?
2. Какие два вектора называются *перпендикулярными* ?
3. Что называется *скалярным произведением двух векторов* ? Как обозначается скалярное произведение?
4. Что называется *скалярным квадратом* ?
5. В каком случае скалярное произведение двух векторов равно нулю?
6. Какой физический смысл имеет скалярное произведение?

Задачи

А

1. Найдите скалярное произведение двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, а угол между ними равен: а) 45°; б) 90°; в) 135°; г) 180°.

2. Найдите угол между двумя векторами, если их длины равны 1, а скалярное произведение равно: а) 0; б) 0,5; в) –1.

3. В прямоугольнике $ABCD$ $AB=4$, $AD=3$. Найдите скалярное произведение векторов: а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$; в) $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AC}$.

4. Для единичного квадрата $ABCD$ найдите скалярное произведение векторов: а) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$; б) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

5. Для ромба $ABCD$, стороны которого равны 1, а угол A равен 60°, найдите скалярный квадрат вектора: а) $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{BD}$.

B

6. Для правильного шестиугольника $ABCDEF$ (рис. 5.2) найдите угол между векторами: а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$; в) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{EF}$; г) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BE}$.

7. Для правильного шестиугольника $ABCDEF$ со стороной 1 найдите скалярное произведение: а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$; в) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{EF}$; г) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BE}$.

8. В равностороннем треугольнике ABC со стороной 1 проведена высота CD (рис. 5.3). Найдите скалярное произведение векторов: а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$; г) $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CD}$.

9. В равностороннем треугольнике ABC со стороной 2 проведены медианы AA_1, BB_1, CC_1 (рис. 5.4). Найдите скалярное произведение векторов: а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AA_1}$; б) $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{BB_1}$.

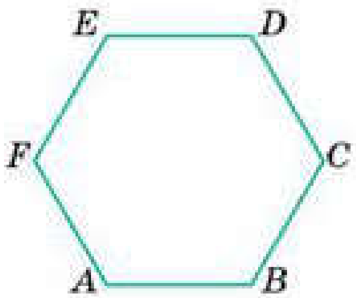


Рис. 5.2

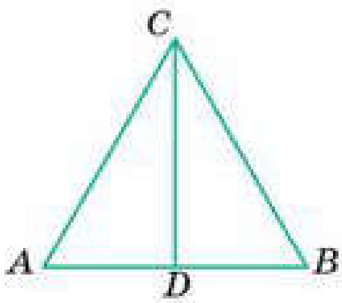


Рис. 5.3

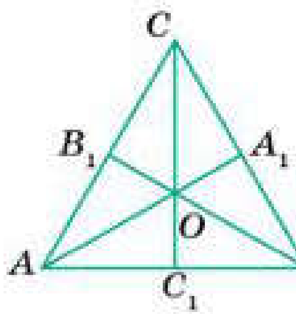


Рис. 5.4

C

10. Найдите скалярное произведение векторов: а) $\vec{a}$ и $\vec{b}$; б) $\vec{a}$ и $\vec{c}$; в) $\vec{a}$ и $\vec{d}$ (рис. 5.5). Стороны клеток равны 1.

11. При каком угле между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ их скалярное произведение будет: а) наибольшим; б) наименьшим?

12. Докажите, что если длины ненулевых неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны, то векторы $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ перпендикулярны.

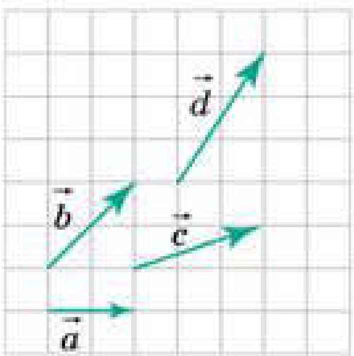


Рис. 5.5

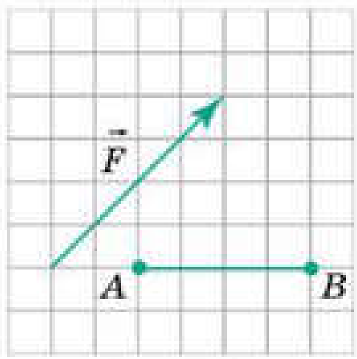


Рис. 5.6

13. Вычислите, какую работу A производит сила $\vec{F}$, когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения A в положение B (рис. 5.6). Стороны клеток равны 1.

14. Используя векторы, докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

15. Используя векторы, докажите, что диагонали ромба перпендикулярны.

16. Покинув пункт A, двое путешественников направились дальше разными маршрутами. Один прошел 4 км на юг, затем 5 км на юго-запад и столько же на северо-запад. Другой прошел 5 км на северо-запад, затем 5 км на юго-запад и 4 км на юг. Сравните их перемещения.

17. Корабль плывет со скоростью 10 км/ч относительно берега. Пассажир пересекает палубу корабля (поперек) со скоростью 4 км/ч. Чему равна скорость пассажира относительно берега?

18. Два пловца одновременно с одного берега реки (из одной точки) поплыли на другой берег с одинаковыми скоростями. Первый направился прямо к противоположному берегу и был снесен течением на некоторое расстояние. Второй поплыл вверх по течению под некоторым углом и оказался на другом берегу напротив места старта. Кто из них первым достиг противоположного берега?

19. Чтобы пересечь реку перпендикулярно течению, лодку направляют под углом 55° к берегу. Чему равна скорость течения реки, если собственная скорость лодки равна 12 км/ч?

20. Самолет летит со скоростью 1000 км/ч под углом 37° к востоку от направления на север. Найдите составляющие вектора скорости в направлениях на север и восток. На какое расстояние переместится самолет в каждом из этих направлений за 2,5 ч?

21. Мальчик тянет тележку под углом 30° к горизонту с силой 20 Н (рис. 5.7). Какую работу он совершит, переместив ее на 150 м?

22. Чему равна работа, совершаемая против силы тяжести при подъеме рюкзака массой 10 кг на холм высотой 10 м (рис. 5.8)? Зависит ли работа от крутизны холма?

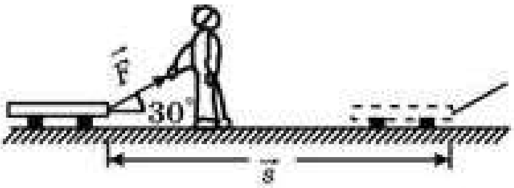


Рис. 5.7

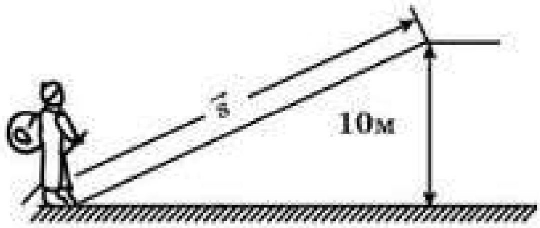


Рис. 5.8

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

23. Повторите определение прямоугольной системы координат и формулу расстояния между двумя точками.

24. Для вектора на координатной плоскости попробуйте определить понятие координат вектора.

6. КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА

Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат. Определим понятие координат вектора. Для этого отложим вектор так, чтобы его начало совпало с началом координат. Тогда координаты его конца называются ***координатами вектора***.

Обозначим $\vec{i}$, $\vec{j}$ векторы с координатами (1; 0), (0; 1) соответственно. Их длины равны единице, а направления совпадают с направлениями соответствующих осей координат. Будем изображать эти векторы, отложенными от начала координат и называть их ***координатными векторами*** (рис. 6.1).

Для точки $A(x; y)$ на координатной плоскости вектор $\overrightarrow{OA}$ называется ***радиус-вектором*** точки A. Ясно, что координаты радиуса-вектора точки A совпадают с координатами точки A.

Теорема. Вектор $\vec{a}$ имеет координаты $(x; y)$ тогда и только тогда, когда представим его в виде $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Доказательство. Отложим вектор $\vec{a}$ от начала координат и его конец обозначим A. Имеет место равенство $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_x} + \overrightarrow{OA_y}$ (рис. 6.2).

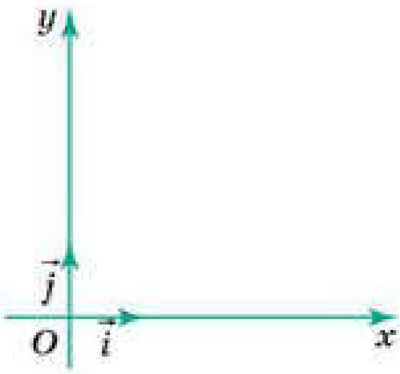


Рис. 6.1

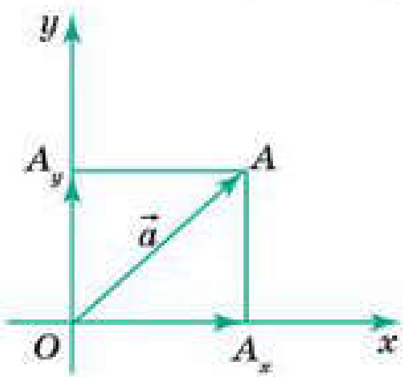


Рис. 6.2

Точка A имеет координаты $(x; y)$ тогда и только тогда, когда выполняются равенства $\overrightarrow{OA_x} = x\vec{i}$, $\overrightarrow{OA_y} = y\vec{j}$, значит, $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$. ◻

Теорема. При сложении двух векторов их соответствующие координаты складываются.

Доказательство. Пусть даны векторы $\vec{a}_1(x_1;\ y_1)$ и $\vec{a}_2(x_2;\ y_2)$. Докажем, что их сумма $\vec{a}_1+\vec{a}_2$ будет иметь координаты $(x_1+x_2;\ y_1+y_2)$. Для этого разложи м векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ по координатным векторам :

$$\vec{a}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j},\ \vec{a}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}.$$

Тогда для суммы $\vec{a}_1+\vec{a}_2$ имеет место равенство:

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j}) + (x_2\vec{i} + y_2\vec{j}) = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j},$$

следовательно, пара чисел $(x_1+x_2;\ y_1+y_2)$ является координатами вектора $\vec{a}_1+\vec{a}_2$. ☐

Аналогично показывается, что при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число. Другими словами, вектор $t\vec{a}$ имеет координаты $(tx\ ;\ ty)$, где $(x\ ;\ y)$ – координаты вектора $\vec{a}$.

Докажите это самостоятельно.

Из этих свойств, в частности, следует, что разность $\vec{a}_1-\vec{a}_2$ векторов $\vec{a}_1(x_1;\ y_1)$, $\vec{a}_2(x_2;\ y_2)$ имеет координаты $(x_1-x_2;\ y_1-y_2)$.

Рассмотрим теперь вопрос о том, как найти координаты вектора, отложенного не от начала координат. Пусть вектор $\vec{a}$ имеет своим началом точку $A_1(x_1;\ y_1)$ и концом – точку $A_2(x_2;\ y_2)$. Тогда вектор $\vec{a}$ можно представить как разность векторов, а именно: $\vec{a} = \overline{A_1A_2} = \overline{OA_2} - \overline{OA_1}$, следовательно, он имеет координаты $(x_2-x_1;\ y_2-y_1)$ (рис. 6.3).

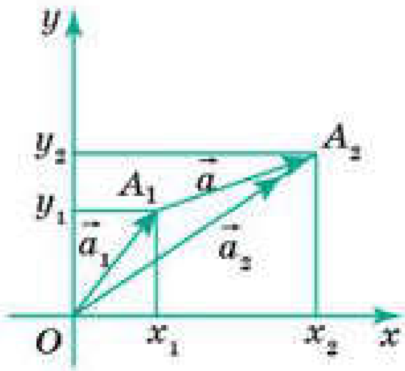


Рис. 6.3

Из формулы расстояния между двумя точками следует, что длина вектора $\overline{A_1A_2}$ выражается формулой

$$|\overline{A_1A_2}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}.$$

Выразим скалярное произведение векторов через их координаты. Пусть даны векторы $\vec{a}_1(x_1;\ y_1)$, $\vec{a}_2(x_2;\ y_2)$. Тогда $\vec{a}_1 = x_1\vec{i}+y_1\vec{j}$, $\vec{a}_2 = x_2\vec{i}+y_2\vec{j}$.

Следовательно, $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = (x_1\vec{i}+y_1\vec{j}) \cdot (x_2\vec{i}+y_2\vec{j}) = x_1\vec{i} \cdot x_2\vec{i} + x_1\vec{i} \cdot y_2\vec{j} + y_1\vec{j} \cdot x_2\vec{i} + y_1\vec{j} \cdot y_2\vec{j}$.

Учитывая, что $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = 1$, $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$, окончательно получаем формулу, выражающую скалярное произведение векторов через их координаты:

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = x_1x_2 + y_1y_2.$$

1. Что называется *координатами вектора* ?
2. Какие векторы называются *координатными* ?
3. Сформулируйте теорему о разложении вектора по координатным векторам.
4. Что происходит с координатами при сложении двух векторов?
5. Что происходит с координатами при умножении вектора на число?
6. Как находятся координаты вектора по известным координатам его начала и конца?
7. Как скалярное произведение векторов выражается через их координаты?

Задачи

A

1. Назовите координаты векторов:
а) $-2\vec{i} + 6\vec{j}$; б) $\vec{i} + 3\vec{j}$; в) $-3\vec{j}$; г) $-5\vec{i}$.

2. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$, если точки A_1, A_2 имеют координаты (–3; 5), (2; 3) соответственно.

3. Выразите длину вектора $\vec{a}$ через его координаты $(x; y)$.

4. Найдите координаты точки N, если вектор $\overrightarrow{MN}$ имеет координаты (4; –3) и точка $M(1; -3)$.

5. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}_1(-1; 2)$ и $\vec{a}_2(2; -1)$.

6. Найдите косинус угла между векторами $\vec{a}_1(1; 2)$ и $\vec{a}_2(2; 1)$.

B

7. Вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты $(a; b)$. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{BA}$.

8. Даны три точки $A(1; 1)$, $B(-1; 0)$, $C(0; 1)$. Найдите координаты точки D, для которой векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равны.

9. Найдите координаты векторов $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$, если $\vec{a}(1; 0)$, $\vec{b}(0; 3)$.

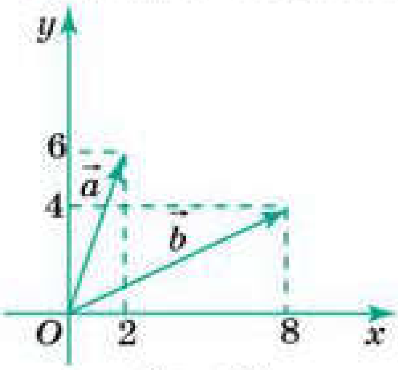


Рис. 6.4

10. Даны векторы $\vec{a}(-1; 2)$ и $\vec{b}(2; -4)$. Найдите координаты вектора:
а) $3\vec{a} + 2\vec{b}$; б) $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b}$; в) $-\vec{a} + 5\vec{b}$.

11. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, изображенных на рисунке 6.4.

C

12. Докажите, что векторы с координатами $(a;\ b)$ и $(-b;\ a)$ перпендикулярны.
13. При каком значении t вектор $2\vec{a} + t\vec{b}$ перпендикулярен вектору $\vec{a} + \vec{b}$, если $\vec{a}(2;\ -1)$, $\vec{b}(4;\ 3)$?
14. Найдите угол A треугольника с вершинами $A(-1;\ \sqrt{3})$, $B(1;\ -\sqrt{3})$, $C(1;\ \sqrt{3})$.
15. В прямоугольнике $ABCD$ $AB = 3$, $BC = 2$. Найдите скалярное произведение векторов $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$.
16. Вычислите работу A, которую совершает сила $\vec{F}(-3;\ 4)$, когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения $B(5;\ -1)$ в положение $C(2;\ 1)$.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

17. Повторите уравнение прямой на координатной плоскости.
18. Для прямой, заданной уравнением $2x + y - 3 = 0$, попробуйте найти координаты какого-нибудь вектора, перпендикулярного этой прямой.
19. Попробуйте написать уравнение прямой, проходящей через начало координат и перпендикулярной этому вектору $\vec{n}(1;\ 2)$.

7*. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ

В курсе геометрии восьмого класса было доказано, что прямая на координатной плоскости задается уравнением

$$ax + by + c = 0,$$

где a, b, c — некоторые числа, причем a, b одновременно не равны нулю.

Здесь мы приведем еще один способ вывода уравнения прямой, использующий понятие вектора.

Рассмотрим прямую на координатной плоскости. Вектор $\vec{n}$, перпендикулярный этой прямой, называется ***вектором нормали*** (рис. 7.1).

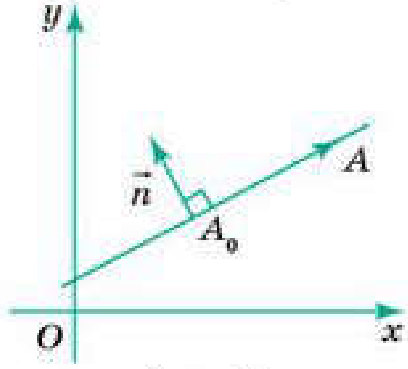


Рис. 7.1

Пусть точка $A_0(x_0;\ y_0)$ принадлежит этой прямой. Тогда точка $A(x;\ y)$ будет принадлежать этой прямой, если вектор $\overline{A_0A}(x - x_0;\ y - y_0)$ будет перпендикулярен вектору нормали $\vec{n}(a;\ b)$, т. е. если скалярное произведение этих векторов будет равно нулю.

Расписывая скалярное произведение через координаты данных векторов, получим уравнение $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$.

Точка $A(x;y)$ будет принадлежать данной прямой тогда и только тогда, когда ее координаты обращают это уравнение в тождество.

Обозначая $-ax_0 - by_0 = c$, данное уравнение можно переписать в виде

$$ax + by + c = 0.$$

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема. Прямая на плоскости задается уравнением

$$ax + by + c = 0,$$

где a, b, c — некоторые числа, причем a, b одновременно не равны нулю и составляют координаты вектора нормали $\vec{n}$.

Если $b \neq 0$, то, разделив на b, уравнение прямой приводится к виду $y = kx + l$.

Найдите координаты вектора нормали для прямой, заданной уравнением $y = kx + l$.

Найдем уравнение прямой, проходящей через две точки $A_1(x_1;\ y_1)$, $A_2(x_2;\ y_2)$. В этом случае в качестве вектора нормали можно взять вектор $\vec{n}(y_2 - y_1;\ x_1 - x_2)$. Он перпендикулярен вектору $\overline{A_1A_2}\,(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$, так как скалярное произведение этих векторов равно нулю.

В качестве точки A_0, принадлежащей данной прямой, возьмем точку $A_1(x_1;y_1)$. Подставляя координаты вектора нормали и точки A_1 в уравнение прямой, получим уравнение

$$(y_2 - y_1)(x - x_1) + (x_1 - x_2)(y - y_1) = 0,$$

которое можно переписать в виде

$$(y_2 - y_1)x + (x_1 - x_2)y + x_2y_1 - y_2x_1 = 0.$$

В случае, если $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$, разделим предпоследнее уравнение на $(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$ и перенесем одно из получившихся слагаемых в правую часть. Получим уравнение прямой

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема. Прямая, проходящая через точки $A_1(x_1;\ y_1)$, $A_2(x_2;\ y_2)$ задается уравнением

$$(y_2 - y_1)x + (x_1 - x_2)y + x_2y_1 - y_2x_1 = 0.$$

В случае, если $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$, это уравнение можно переписать в виде

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Выясним взаимное расположение прямых на плоскости, в зависимости от их уравнений.

Для двух прямых, заданных уравнениями

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0, \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0,$$

векторы нормали $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ соответственно имеют координаты $(a_1; b_1)$, $(a_2; b_2)$. Эти прямые будут параллельны, если их векторы нормали коллинеарны, т. е. для некоторого числа t выполняется равенство $\vec{n}_1 = t\,\vec{n}_2$, значит, выполняются равенства $a_2 = ta_1$, $b_2 = tb_1$.

Если две прямые пересекаются, то угол φ между ними можно вычислить через формулу скалярного произведения их векторов нормали.

Так как векторы нормали перпендикулярны соответствующим прямым, то угол φ между прямыми или равен углу между их векторами нормали, или дополняет их до 180°.

В первом случае

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}.$$

Во втором случае

$$\cos\varphi = -\frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}.$$

В общем случае имеет место формула

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

В частности, прямые будут перпендикулярны, если скалярное произведение векторов $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ равно нулю, т. е. выполняются равенства

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = a_1a_2 + b_1b_2 = 0.$$

Еще одним способом задания прямой на координатной плоскости является способ, использующий параметрические уравнения

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

где $x(t)$, $y(t)$ — некоторые функции от t.

Этот способ позволяет задавать не только прямые, но и многие другие кривые. Кривая на плоскости, описываемая точкой, координаты которой удовлетворяют этим уравнениям при изменении параметра t,

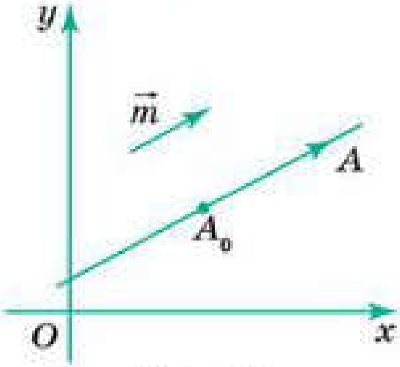


Рис. 7.2

называется ***параметрически заданной кривой*** на плоскости. Сами уравнения называются ***параметрическими уравнениями***.

Рассмотрим прямую на координатной плоскости. Вектор $\vec{m}(k;\ l)$, параллельный этой прямой, или лежащей на ней, называется ***направляющим вектором*** (рис. 7.2).

Пусть точка $A_0(x_0;\ y_0)$ принадлежит прямой. Тогда точка $A(x;\ y)$ будет принадлежать этой прямой, если вектор $\overline{A_0A}(x - x_0;\ y - y_0)$ будет коллинеарен направляющему вектору $\vec{m}(k;\ l)$, т. е. если для некоторого числа t выполняются равенства

$$\begin{cases} x - x_0 = kt, \\ y - y_0 = lt. \end{cases}$$

Перенесем координаты точки A_0 соответственно в правые части этих уравнений. Получим параметрические уравнения прямой

$$\begin{cases} x = x_0 + kt, \\ y = y_0 + lt. \end{cases}$$

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема. Прямая на плоскости, проходящая через точку $A_0(x_0;\ y_0)$, задается параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x_0 + kt, \\ y = y_0 + lt, \end{cases}$$

где k, l — некоторые числа, одновременно не равные нулю и составляющие координаты направляющего вектора $\vec{m}$.

Если представлять параметр t как время, а изменение положения точки $A(x;\ y)$ на прямой при изменении параметра t как движение, то направляющий вектор $\vec{m}(k;\ l)$ будет вектором скорости, а его длина $\sqrt{k^2 + l^2}$ — величиной скорости.

Для двух прямых, заданных параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x_1 + k_1 t, \\ y = y_1 + l_1 t. \end{cases} \quad \begin{cases} x = x_2 + k_2 t, \\ y = y_2 + l_2 t, \end{cases}$$

направляющие векторы $\overline{m_1}$, $\overline{m_2}$ соответственно имеют координаты $(k_1;\ l_1)$, $(k_2;\ l_2)$. Эти прямые будут параллельны, если их направляющие векторы коллинеарны, значит, для некоторого числа s выполняется равенство $\overline{m_2} = s \cdot \overline{m_1}$, т. е. выполняются равенства $k_2 = sk_1$, $l_2 = sl_1$.

Если две прямые пересекаются, то угол φ между ними можно вычислить через формулу скалярного произведения их направляющих векторов.

Получите эту формулу самостоятельно.

Для точки $A_0(x_0; y_0)$ и прямой, заданной уравнением $ax + by + c = 0$, выведем формулу расстояния $h = A_0A$ от данной точки до данной прямой (рис. 7.3).

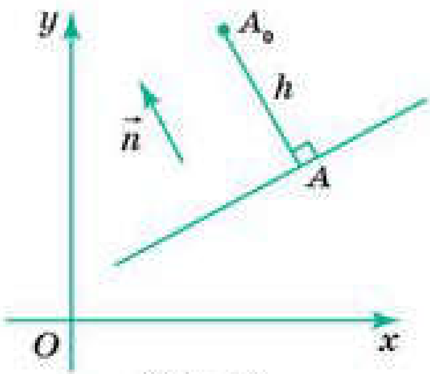


Рис. 7.3

Найдем параметрические уравнения прямой, проходящей через точку A_0 и перпендикулярной данной прямой. Учитывая, что вектор нормали $\vec{n}$ является направляющим вектором этой прямой, получим уравнения

$$\begin{cases} x = x_0 + at, \\ y = y_0 + bt. \end{cases}$$

Найдем координаты точки A отрезка AA_0. Для этого подставим выражения x и y из параметрических уравнений в уравнение данной прямой. Получим равенство

$$a(x_0 + at) + b(y_0 + bt) + c = 0.$$

Из него находим

$$t = \frac{-ax_0 - by_0 - c}{a^2 + b^2}.$$

Вектор $\overline{A_0A}$ имеет координаты $(at; bt)$. Его длина равна искомому расстоянию h от точки до прямой и равна

$$\sqrt{a^2t^2 + b^2t^2} = |t|\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема. Расстояние h от точки $A_0(x_0; y_0)$ до прямой, заданной уравнением $ax + by + c = 0$, выражается формулой

$$h = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

1. Какой вектор называется *вектором нормали прямой* ?
2. Каким уравнением задается прямая, проходящая через данную точку с данным вектором нормали?
3. Каким уравнением задается прямая, проходящая через две данные точки?
4. В каком случае два уравнения определяют: а) параллельные прямые; б) одну и ту же прямую; в) пересекающиеся прямые?
5. Как вычисляется угол между пересекающимися прямыми?
6. В каком случае две прямые перпендикулярны?
7. Какие уравнения называются *параметрическими* ?
8. Какой вектор называется *направляющим вектором прямой* ?
9. Какими параметрическими уравнениями задается прямая, проходящая через данную точку с данным направляющим вектором?
10. В каком случае параметрические уравнения определяют: а) параллельные прямые; б) одну и ту же прямую; в) пересекающиеся прямые?
11. Какой формулой выражается расстояние от точки до прямой?

Задачи

A

1. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $A_0(2;\ 1)$ и вектором нормали: а) $\vec{n}(1;\ 1)$; б) $\vec{n}(-1;\ 2)$.

2. Прямая задана уравнением $2x - 3y + 1 = 0$. Чему равны координаты вектора нормали? Нарисуйте эту прямую и вектор нормали.

3. Найдите координаты точки пересечения прямой, заданной уравнением $ax + by + c = 0$, с осями координат $(a \neq 0;\ b \neq 0)$.

4. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки $A(0;\ 1)$, $B(1;\ 0)$.

5. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки $M(-1; 3)$, $N(1;\ 4)$. Найдите координаты вектора нормали этой прямой.

6. Напишите параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $A_0(2;\ 1)$ и направляющим вектором; а) $\vec{m}(1;\ 1)$; б) $\vec{m}(-1;\ 2)$.

B

7. Напишите уравнения прямых a_1, a_2, изображенных на рисунке 7.4.

8. Найдите расстояние от точки $O(0;\ 0)$ до прямой $x + y = 1$.

9. Найдите угол между прямыми, заданными уравнениями: а) $2x + y - 1 = 0$, $x - 2y + 3 = 0$; б) $x + y + 1 = 0$, $x - y - 1 = 0$. Нарисуйте эти прямые.

10. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $A_0(2;\ 1)$ и перпендикулярную прямой, задаваемой уравнением: а) $x + y + 1 = 0$; б) $2x - 3y + 4 = 0$.

11. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $M(-2;\ 1)$ и перпендикулярной прямой: а) $2x + y - 1 = 0$; б) $x - 2y + 1 = 0$.

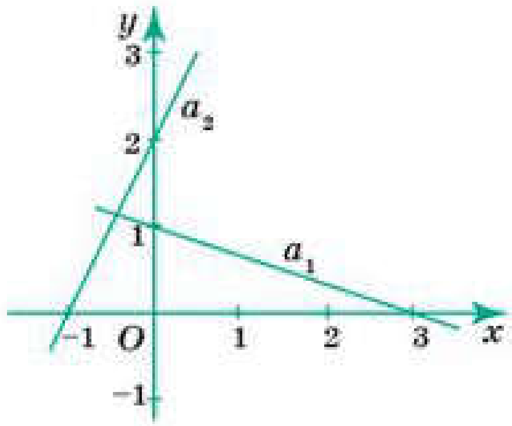


Рис. 7.4

12. Определите, какие из перечисленных ниже пар прямых: а) параллельны; б) перпендикулярны:
1) $x + y - 2 = 0$, $x + y + 3 = 0$;
2) $x + y - 2 = 0$, $x - y - 3 = 0$;
3) $-7x + y = 0$, $7x - y + 4 = 0$;
4) $4x - 2y - 8 = 0$, $-x - 2y + 4 = 0$.

13. Напишите параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $A_0(3;\ -2)$ и параллельную прямой, заданной параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = 2t, \\ y = 3t. \end{cases}$

14. Движение точки по прямой описывается параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = 1 + 3t, \\ y = 2 - 4t. \end{cases}$ Найдите скорость точки.

C

15. Найдите расстояние от точки $A_0(4;\ 3)$ до прямой: а) $x + y + 3 = 0$; б) $3x + 4y - 4 = 0$.

16. Точка $H(2;\ -1)$ является основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат O на прямую. Напишите уравнение этой прямой.

17. Найдите координаты точки пересечения прямых:
а) $x - y - 1 = 0$, $x + y + 3 = 0$;
б) $x - 3y + 2 = 0$, $2x - 5y + 1 = 0$.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

18. Нарисуйте какой-нибудь вектор $\vec{a}$ и какой-нибудь отрезок AB. Отложите от концов этого отрезка вектор $\vec{a}$. Концы полученных векторов обозначьте соответственно A' и B'. Что можно сказать об отрезке $A'B'$?

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Сколько различных векторов задают стороны треугольника:

A) 1; B) 2; C) 3; D) 6?

2. Сторона правильного шестиугольника $ABCDEF$ равна 1. Найдите длину вектора $\overrightarrow{BE}$:

A) 1; B) 2; C) $\sqrt{3}$; D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Сторона равностороннего треугольника KLM равна a. Найдите $|\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{KM}|$:

A) a; B) $a\sqrt{2}$; C) $a\sqrt{3}$; D) $a\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) стороны $AC = 6$ см и $BC = 8$ см. Найдите $|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}|$:

A) 10 см; B) 14 см; C) 8 см; D) 6 см.

5. Упростите выражение $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{FH} + \overrightarrow{EH} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CE}$:

A) $\overrightarrow{AE}$; B) $\overrightarrow{AF}$; C) $\overrightarrow{HE}$; D) $\overrightarrow{AH}$.

6. В треугольнике ABC точка D — середина стороны BC. Выразите вектор $\overrightarrow{AD}$ через векторы $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$:

A) $\vec{b} - \vec{c}$; B) $\vec{b} + \vec{c}$; C) $\frac{\vec{b} - \vec{c}}{2}$; D) $\frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}$.

7. В параллелограмме $ABCD$ точка E — середина стороны CD. Выразите вектор $\overrightarrow{AE}$ через векторы $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{d} = \overrightarrow{AD}$:

A) $0{,}5\,\vec{b} - \vec{d}$; B) $\vec{b} + 0{,}5\,\vec{d}$; C) $0{,}5\,\vec{b} + \vec{d}$; D) $\vec{b} - 0{,}5\,\vec{d}$.

8. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{PQ}$, если $P(1; -3)$ и $Q(3; -1)$:

A) (2; 1); B) (2; 2); C) (2; –2); D) (1; 2).

9. Вектор $\overrightarrow{AC}$ имеет координаты (9; –12). Найдите координаты точки C, если $A(-6; 5)$:

A) (3; –7); B) (–3; –7); C) (–3; 7); D) (3; 7).

10. Найдите длину вектора $\vec{m}(3; -4)$:

A) 3; B) 4; C) 5; D) 10.

11. Для правильного шестиугольника $ABCDEF$, стороны которого равны 1, найдите длину вектора $\overrightarrow{BF}$:

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; B) $\sqrt{3}$; C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; D) $\sqrt{2}$.

12. Для правильного шестиугольника $ABCDEF$ найдите угол между векторами $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$:

A) $30°$; B) $45°$; C) $60°$; D) $90°$.

13. Для правильного шестиугольника $ABCDEF$, стороны которого равны 1, найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{DE}$:

A) -1; B) $-0,5$; C) $0,5$; D) 1.

14. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$, если $A(0; -5)$, $B(3; 6)$, $C(-8; 10)$:

A) 44; B) 33; C) 22; D) 11.

15. Найдите угол между векторами $\vec{a}(1; 3)$ и $\vec{b}(2; 1)$:

A) $30°$; B) $45°$; C) $90°$; D) $135°$.

***16.** Найдите уравнение прямой, проходящей через точку $A_0(2; -3)$, и вектором нормали $\vec{n}(1; -2)$:

A) $-x + 2y - 8 = 0$; B) $x - 2y + 8 = 0$;
C) $x - 2y - 8 = 0$; D) $x + 2y + 8 = 0$.

***17.** Найдите уравнение прямой, проходящей через точки $A_1(2; 0)$, $A_2(0; -3)$:

A) $3x + 2y - 6 = 0$; B) $3x - 2y - 6 = 0$;
C) $2x + 3y - 6 = 0$; D) $2x - 3y - 6 = 0$.

***18.** Найдите уравнение прямой, проходящей через точку $A_1(2; 1)$ и параллельной прямой $x - 2y - 3 = 0$:

A) $x + 2y - 4 = 0$; B) $x - 2y + 4 = 0$;
C) $2x + y - 5 = 0$; D) $x - 2y = 0$.

***19.** Найдите уравнение прямой, проходящей через точку $A_1(2; 3)$ и перпендикулярной прямой $2x - y - 1 = 0$:

A) $x + 2y - 8 = 0$; B) $x - 2y + 4 = 0$;
C) $2x + y - 7 = 0$; D) $x - 2y + 4 = 0$.

***20.** Найдите расстояние от начала координат до прямой $3x + 4y = 12$:

A) 1; B) 2; C) 2,4; D) 3,6.

Глава 2

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЛОСКОСТИ

8. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС

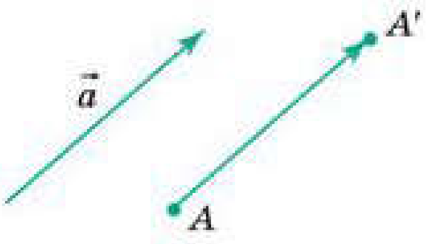


Рис. 8.1

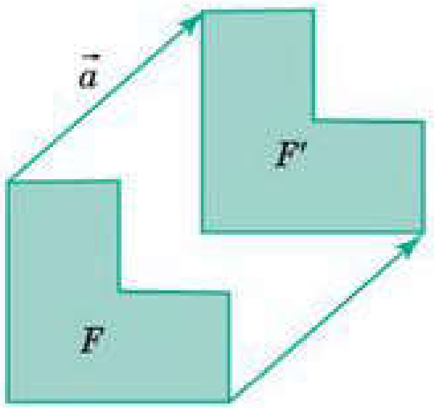


Рис. 8.2

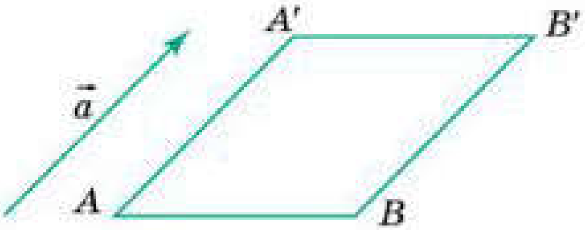


Рис. 8.3

Пусть на плоскости задан вектор $\vec{a}$. Каждой точке A плоскости сопоставим точку A', для которой $\overline{AA'} = \vec{a}$. Соответствие, при котором точке A сопоставляется точка A' так, что вектор AA' равен заданному вектору $\vec{a}$, называется ***параллельным переносом*** на вектор $\vec{a}$ (рис. 8.1).

Говорят, что фигура F' получается ***параллельным переносом*** фигуры F на вектор $\vec{a}$, если все точки фигуры F' получаются параллельным переносом всевозможных точек фигуры F на вектор $\vec{a}$ (рис. 8.2).

Рассмотрим некоторые свойства параллельного переноса.

Свойство 1. Параллельный перенос сохраняет расстояния между точками.

Доказательство. Пусть точки A', B' получены параллельным переносом на вектор $\vec{a}$ точек A и B соответственно, и вектор $\overrightarrow{AB}$ неколлинеарен вектору $\vec{a}$ (рис. 8.3). Тогда в четырехугольнике $ABB'A'$ стороны AA' и BB' равны и параллельны. Следовательно, этот четырехугольник — параллелограмм. Значит, $AB = A'B'$.

Самостоятельно рассмотрите случай, когда вектор $\overrightarrow{AB}$ коллинеарен вектору $\vec{a}$.

Свойство 2. Параллельный перенос переводит отрезки в отрезки, лучи в лучи, прямые в прямые.

Доказательство. Рассмотрим случай отрезков. Для данного отрезка AB обозначим точки A', B', полученные параллельным переносом на вектор $\vec{a}$ соответственно точек A, B. Пусть точка C принадлежит отрезку AB. Тогда $AC + CB = AB$. Так как параллельный перенос сохраняет расстояние между точками, то для точки C', полученной параллельным переносом на вектор $\vec{a}$, будет выполняться равенство $A'C' + C'B' = A'B'$ (рис. 8.4). Следовательно, точка C' принадлежит отрезку $A'B'$. Значит, параллельный перенос на вектор $\vec{a}$ переводит отрезок AB в отрезок $A'B'$.

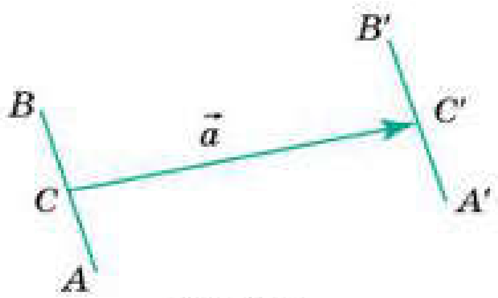


Рис. 8.4

Самостоятельно рассмотрите случаи луча и прямой.

Свойство 3. Параллельный перенос сохраняет величины углов.

Доказательство. Для данного угла AOB обозначим O', A', B' точки, полученные параллельным переносом на вектор $\vec{a}$ соответственно точек O, A, B (рис. 8.5).

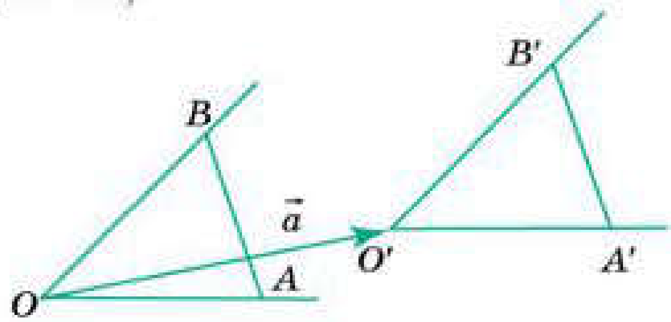


Рис. 8.5

Поскольку параллельный перенос сохраняет расстояние между точками, то имеют место равенства отрезков: $A'O' = AO$, $B'O' = BO$, $A'B' = AB$. Треугольник $A'O'B'$ будет равен треугольнику AOB (по трем сторонам). Следовательно, угол $A'O'B'$ будет равен углу AOB.

1. Что называется *параллельным переносом*?
2. Сохраняет ли параллельный перенос расстояние между точками?
3. Куда при параллельном переносе переходят отрезок, луч, прямая?
4. Сохраняет ли параллельный перенос величины углов?

Задачи

A

1. Изобразите точку A', полученную из точки A параллельным переносом на вектор $\vec{a}$ (рис. 8.6).

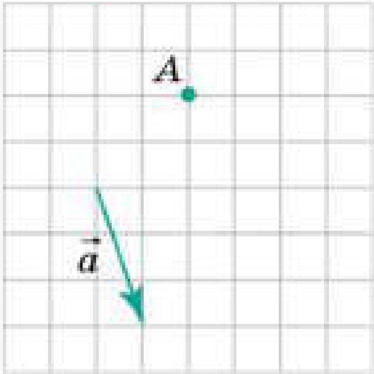


Рис. 8.6

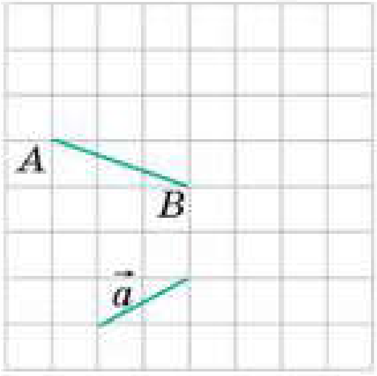


Рис. 8.7

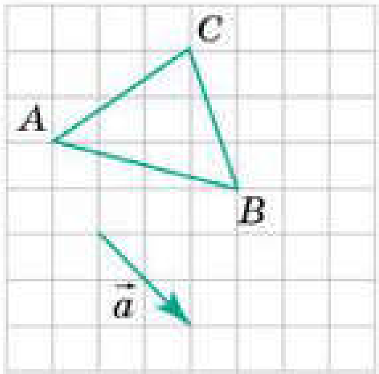


Рис. 8.8

2. Изобразите отрезок $A'B'$, полученный из отрезка AB параллельным переносом на вектор $\vec{a}$ (рис. 8.7).
3. При каком условии существует параллельный перенос, переводящий один отрезок в другой?
4. Изобразите треугольник, полученный из треугольника ABC параллельным переносом на вектор $\vec{a}$ (рис. 8.8).
5. Существует ли параллельный перенос, при котором: а) одна сторона треугольника переходит в его другую сторону; б) одна сторона квадрата переходит в его другую сторону?
6. Для какого четырехугольника существует параллельный перенос, переводящий одну его сторону в другую?

B

7. Изобразите точку A, из которой получается точка A' параллельным переносом на вектор $\vec{a}$ (рис. 8.9).
8. Изобразите отрезок AB, из которого получается отрезок $A'B'$ параллельным переносом на вектор $\vec{a}$ (рис. 8.10).
9. Изобразите треугольник ABC, из которого получается треугольник $A'B'C'$ параллельным переносом на вектор $\vec{a}$ (рис. 8.11).

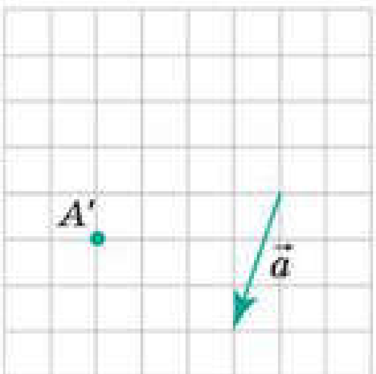


Рис. 8.9

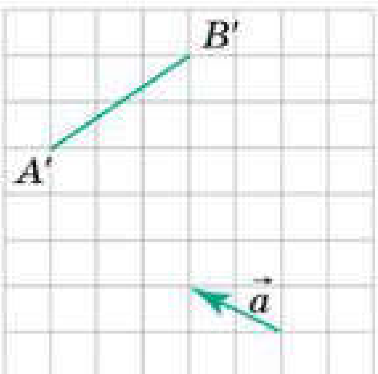


Рис. 8.10

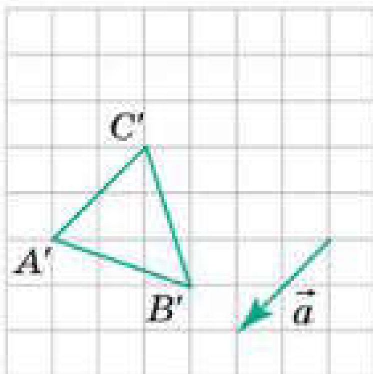


Рис. 8.11

10. Изобразите прямую c', полученную параллельным переносом прямой c на вектор $\vec{a}$ (рис. 8.12).

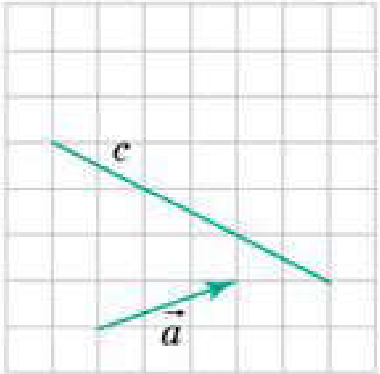


Рис. 8.12

11. Казахский орнамент — яркий элемент национальной культуры. Это часть истории казахского народа, дань его обычаям и традициям. На рисунке 8.13 изображены части геометрических казахских орнаментов. Изобразите следующие орнаменты, полученные из данного орнамента параллельным переносом на вектор $\vec{a}$.

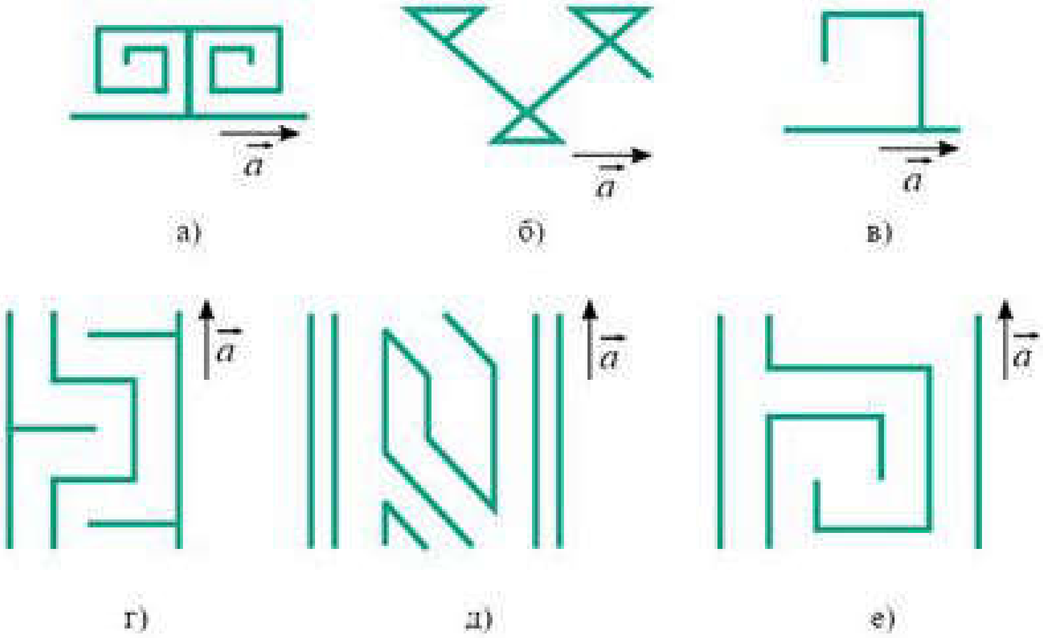


Рис. 8.13

12. Докажите, что параллельный перенос переводит треугольник в равный ему треугольник.

13. Докажите, что параллельный перенос переводит: а) параллелограмм в параллелограмм; б) прямоугольник в прямоугольник; в) ромб в ромб; г) квадрат в квадрат.

14. Докажите, что параллельный перенос переводит окружность в окружность того же радиуса.

15. Точка A имеет координаты $(3; -2)$. Найдите координаты точки A', полученной параллельным переносом точки A на вектор $\vec{a}(-2; 1)$.

16. Найдите координаты вектора $\vec{a}$, параллельный перенос на который переводит точку $A(3; 4)$ в точку $A'(-2; 1)$.

C

17. Напишите уравнение окружности, полученной параллельным переносом окружности $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ на вектор $\vec{a}(k;\ l)$.

18. Напишите уравнение окружности, полученной из окружности, заданной уравнением $x^2 + 2x + y^2 - 3 = 0$, параллельным переносом на вектор: а) $\vec{a}(-1;\ 0)$; б) $\vec{a}(1;\ -2)$.

19. Напишите уравнение прямой, полученной параллельным переносом прямой $ax + by + c = 0$ на вектор $\vec{m}(k;\ l)$.

20. Напишите уравнение прямой, полученной из прямой, заданной уравнением $x + y - 1 = 0$, параллельным переносом на вектор: а) $\vec{a}(2;\ -3)$; б) $\vec{a}(2;\ -2)$.

21. Докажите, что при параллельном переносе прямая переходит в параллельную ей прямую или сама в себя.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

22. Повторите понятия перпендикулярности прямых и серединного перпендикуляра.

23. Нарисуйте какую-нибудь прямую c и какой-нибудь отрезок AB. Изобразите точки A' и B' так, чтобы прямая c была серединным перпендикуляром к отрезкам AA' и BB'. Что можно сказать об отрезке $A'B'$?

9. ОСЕВАЯ СИММЕТРИЯ

Слово "симметрия" в переводе с древнегреческого языка означает соразмерность, некоторую правильность формы геометрической фигуры.

Проявления симметрии можно увидеть в природе, архитектуре, живописи и т. д.

Здесь мы рассмотрим понятие симметрии с точки зрения математики, и начнем с осевой симметрии.

Две точки A и A' называются ***симметричными*** относительно прямой c, если эта прямая проходит через середину отрезка AA' и перпендикулярна к нему (рис. 9.1). Каждая точка прямой c считается симметричной самой себе.

Соответствие, при котором каждой точке A плоскости сопоставляется симметричная ей относительно прямой c точка A', называется ***осевой симметрией***. Прямая c при этом называется ***осью симметрии***.

Две фигуры F и F' называются ***симметричными*** относительно оси c, если каждой точке одной фигуры соответствует симметричная точка другой фигуры (рис. 9.2).

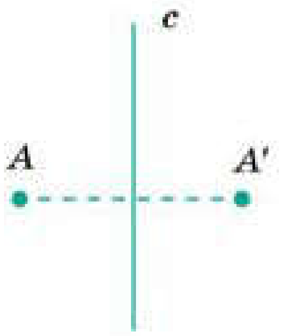


Рис. 9.1

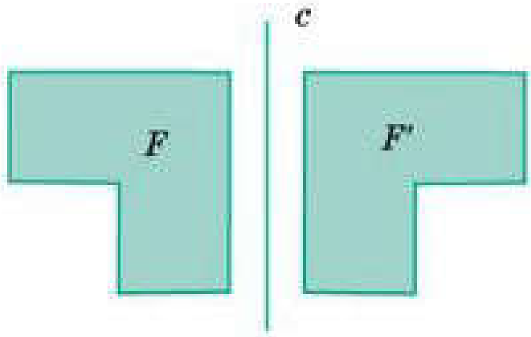


Рис. 9.2

Фигура F называется ***симметричной*** относительно оси c, если она симметрична сама себе.

Рассмотрим некоторые свойства осевой симметрии.

Свойство 1. Осевая симметрия сохраняет расстояния между точками.

Доказательство. Пусть точки A', B' получены симметрией относительно оси c из точек A, B соответственно. Предположим, что точки A, B лежат по одну сторону от c (рис. 9.3).

Обозначим через C, D точки пересечения прямых AA', BB' соответственно с прямой c. Прямоугольные треугольники ACD и $A'CD$ равны (по двум катетам). Следовательно, $\angle ADC = \angle A'DC$ и $AD = A'D$. Треугольники ADB и $A'DB'$ равны (по первому признаку равенства треугольников). Следовательно, $AB = A'B'$.

Самостоятельно рассмотрите случай, когда точки A, B лежат по разные стороны от c.

Свойство 2. Осевая симметрия переводит отрезки в отрезки, лучи в лучи и прямые в прямые.

Свойство 3. Осевая симметрия сохраняет величины углов.

Доказательства этих свойств аналогичны доказательствам соответствующих свойств для параллельного переноса.

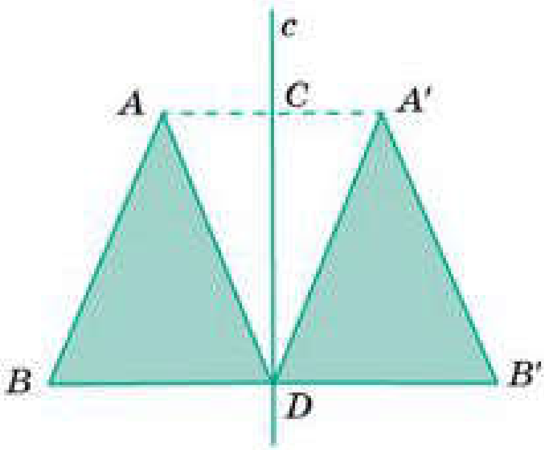


Рис. 9.3

Проведите их самостоятельно.

1. Какие точки называются *симметричными относительно прямой* ?
2. Что называется *осевой симметрией* , *осью симметрии* ?
3. Какие две фигуры называются *симметричными относительно оси*?
4. Какая фигура называется *симметричной относительно оси*?
5. Сохраняет ли осевая симметрия расстояние между точками?
6. Куда при осевой симметрии переходят отрезок, луч, прямая?
7. Сохраняет ли осевая симметрия величины углов?

Задачи

А

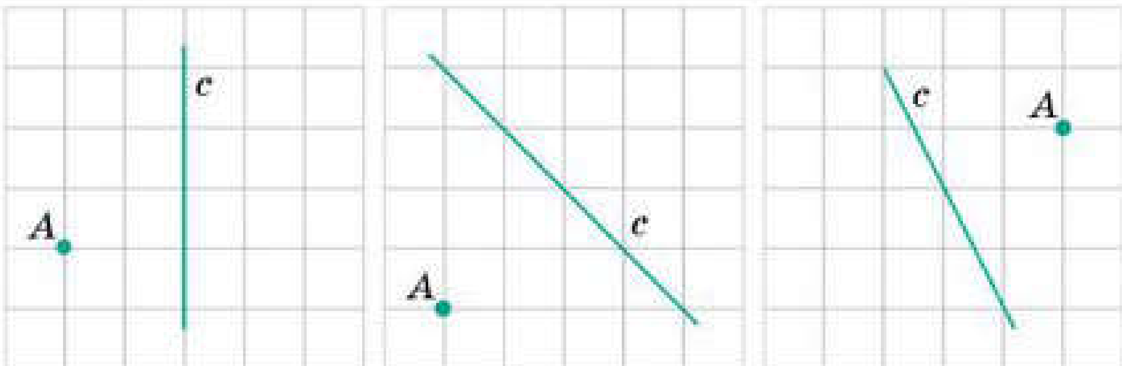
1. Какие точки при осевой симметрии переходят в себя?

2. Какие прямые при осевой симметрии переходят в себя?

3. Осевая симметрия переводит точку A в точку A'. Какая прямая является осью симметрии?

4. Приведите примеры фигур: а) имеющих осевую симметрию; б) не имеющих осевой симметрии.

5. Изобразите точку, симметричную точке A относительно прямой c (рис. 9.4).



а) б) в)

Рис. 9.4

6. Изобразите отрезок, симметричный отрезку AB относительно прямой c (рис. 9.5).

7. Изобразите треугольник, симметричный треугольнику ABC относительно прямой d (рис. 9.6).

8. Изобразите ось симметрии для треугольников, изображенных на рисунке 9.7.

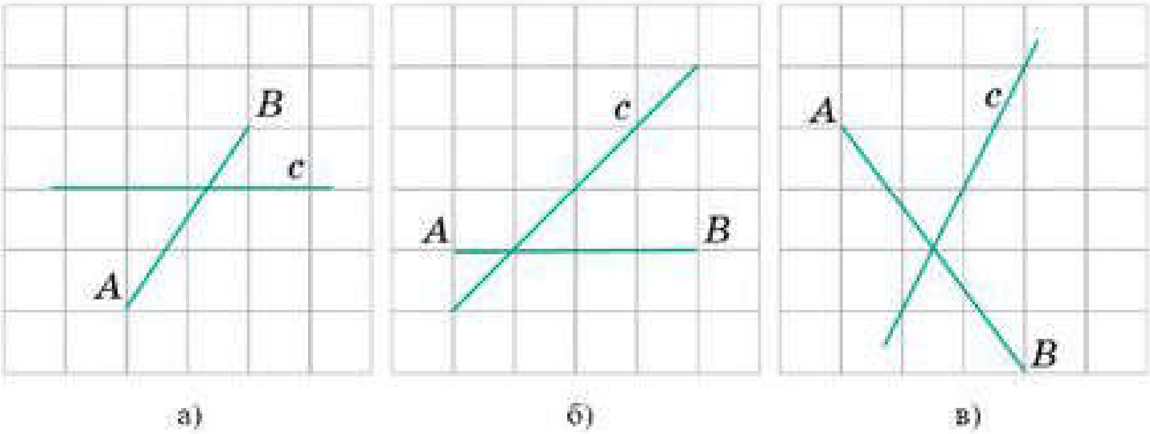


Рис. 9.5

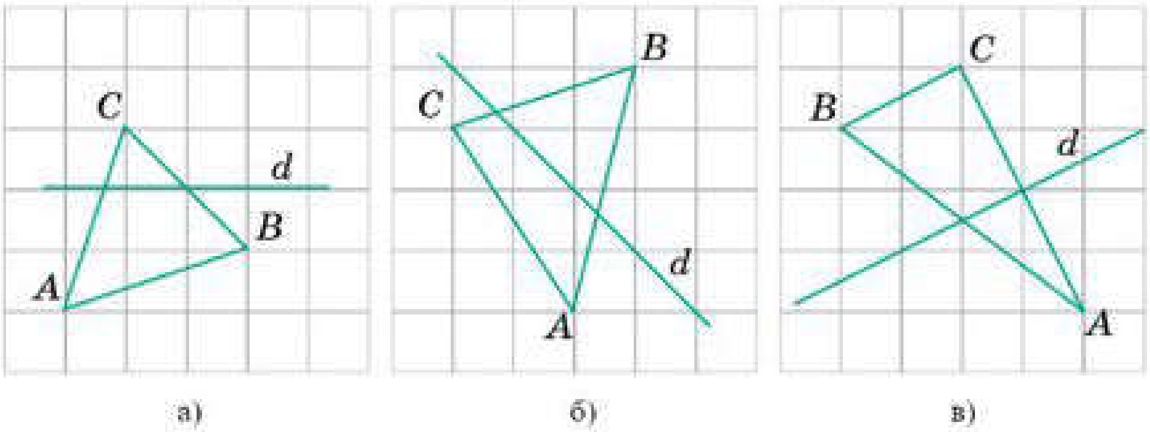


Рис. 9.6

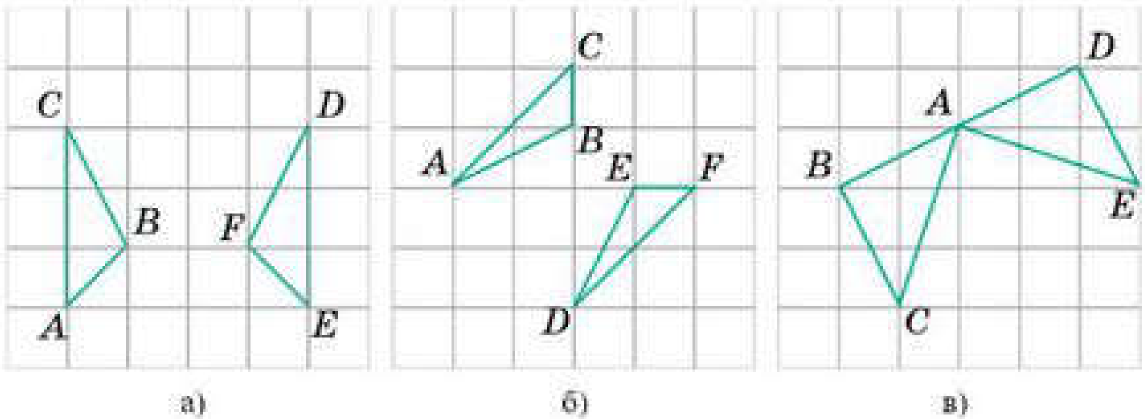
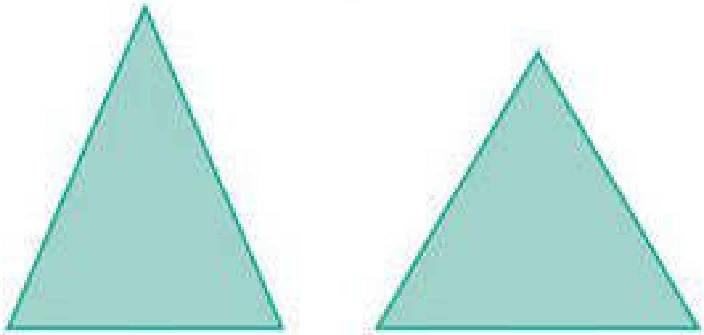


Рис. 9.7

B

9. Сколько осей симметрии имеет: а) равнобедренный треугольник, не являющийся правильным; б) правильный треугольник (рис. 9.8)?



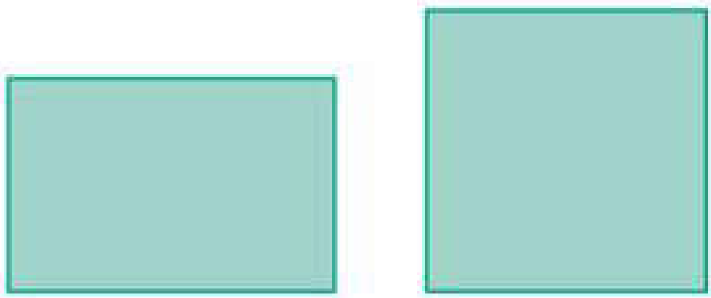
а) б)

Рис. 9.8

10. Сколько осей симметрии имеет: а) окружность; б) круг?

11. Сколько осей симметрии имеет прямая?

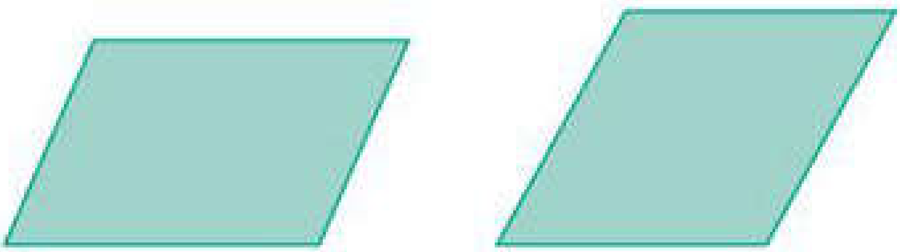
12. Сколько осей симметрии имеет: а) прямоугольник, отличный от квадрата; б) квадрат (рис. 9.9)?



а) б)

Рис. 9.9

13. Сколько осей симметрии имеет: а) параллелограмм, отличный от ромба; б) ромб (рис. 9.10)?

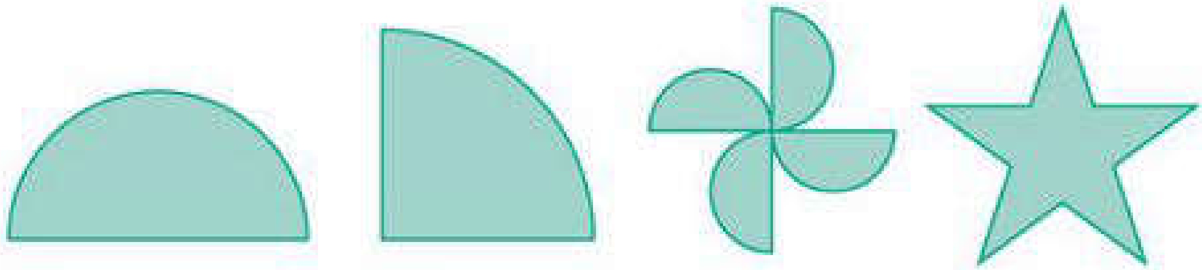


а) б)

Рис. 9.10

14. Сколько осей симметрии имеет правильный: а) пятиугольник; б) шестиугольник; в) n-угольник?

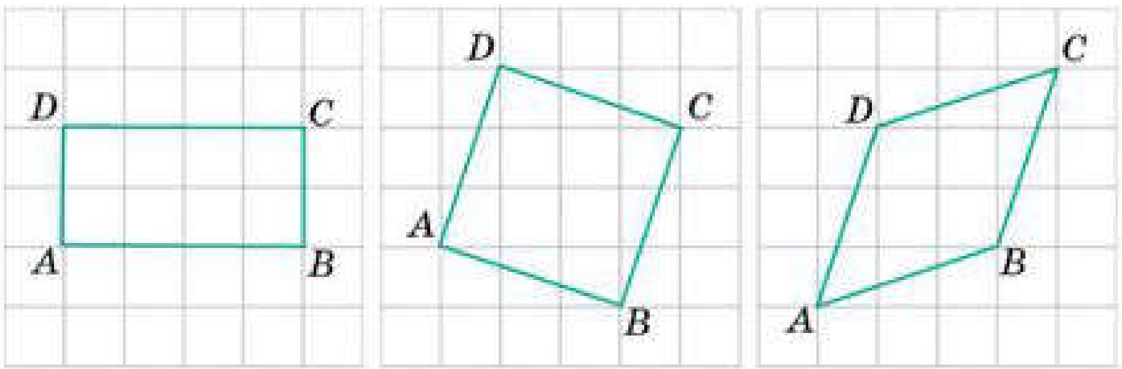
15. Какие фигуры, изображенные на рисунке 9.11, имеют оси симметрии?



а) б) в) г)

Рис. 9.11

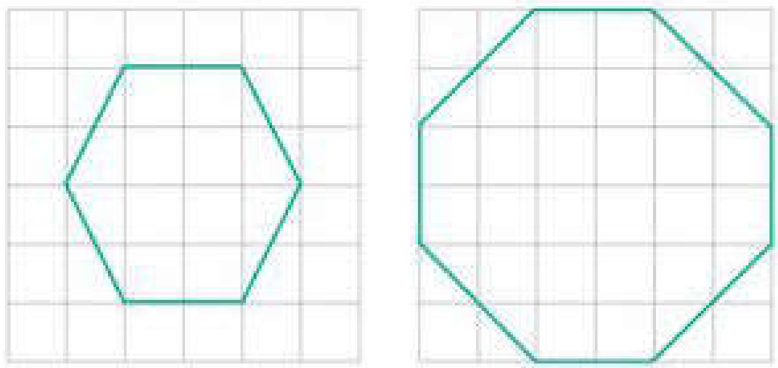
16. Изобразите оси симметрии для четырехугольников (рис. 9.12).



а) б) в)

Рис. 9.12

17. Изобразите оси симметрии для многоугольников, изображенных на рисунке 9.13.



а) б)

Рис. 9.13

18. Точка A на координатной плоскости имеет координаты (3; –4). Найдите координаты точки, симметричной точке A относительно: а) оси абсцисс; б) оси ординат.

19. Национальный орнамент — один из самых древних видов изобразительной деятельности казахского народа. Он символизировал защиту от темных сил, приносил удачу в скотоводстве и хозяйственной деятельности. На рисунке 9.14 изображены некоторые казахские орнаменты. Определите, сколько осей симметрии имеют приведенные орнаменты и изобразите их.

а) б) в) г)

Рис. 9.14

C

20. Напишите уравнение окружности, полученной осевой симметрией окружности $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ относительно: а) оси абсцисс; б) оси ординат.

21. Окружность на координатной плоскости задана уравнением $x^2 + 2x + y^2 - 4y - 4 = 0$. Напишите уравнение окружности, симметричной данной относительно: а) оси абсцисс; б) оси ординат.

22. Напишите уравнение прямой, полученной осевой симметрией прямой $ax + by + c = 0$ относительно: а) оси абсцисс; б) оси ординат.

23. Прямая на координатной плоскости задана уравнением $x - 2y + 3 = 0$. Напишите уравнение прямой, симметричной данной относительно: а) оси абсцисс; б) оси ординат.

24. Докажите, что последовательное выполнение двух осевых симметрий относительно параллельных прямых дает параллельный перенос.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

25. Нарисуйте какую-нибудь точку O и какой-нибудь отрезок AB. Изобразите точки A' и B' так, чтобы точка O была серединой отрезков AA' и BB'. Что можно сказать об отрезке $A'B'$?

10. ЦЕНТРАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ

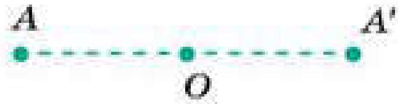


Рис. 10.1

Рассмотрим еще один вид симметрии.

Точки A и A' называются ***симметричными*** относительно точки O, если O является серединой отрезка AA'. Точка O считается симметричной сама себе (рис. 10.1).

Соответствие, при котором каждой точке A плоскости сопоставляется симметричная ей относительно точки O точка A', называется ***центральной симметрией***. Точка O при этом называется ***центром симметрии***.

Две фигуры F и F' называются ***центрально-симметричными*** относительно центра O, если каждой точке одной фигуры соответствует симметричная точка другой фигуры (рис. 10.2).

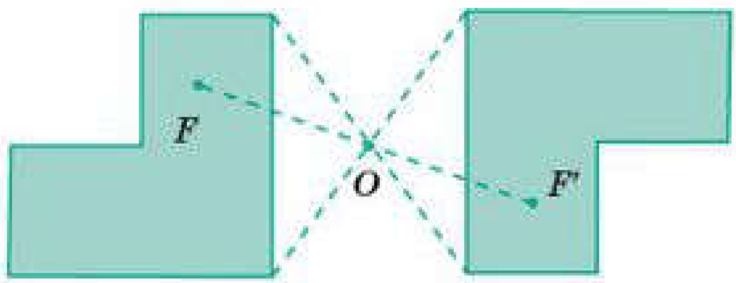


Рис. 10.2

Рис. 10.3

Фигура F называется ***центрально-симметричной*** относительно центра O, если она симметрична сама себе (рис. 10.3).

Рассмотрим некоторые свойства центральной симметрии.

Свойство 1. Центральная симметрия сохраняет расстояния между точками.

Доказательство. Пусть точки A', B' получены центральной симметрией относительно точки O точек A, B соответственно (рис. 10.4). Тогда треугольники OAB и $OA'B'$ равны (по первому признаку равенства треугольников) и, следователь но, $AB = A'B'$.

Свойство 2. Центральная симметрия переводит отрезки в отрезки, лучи в лучи и прямые в прямые.

Свойство 3. Центральная симметрия сохраняет величины углов.

Доказательства этих свойств аналогичны доказательствам соответствующих свойств для параллельного переноса.

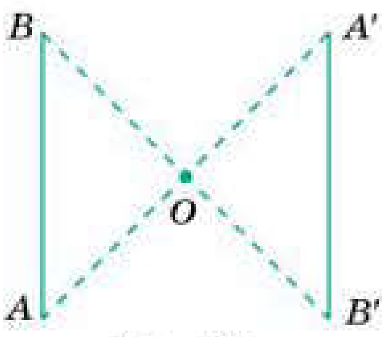


Рис. 10.4

Доказательство 2 и 3 свойств проведите самостоятельно.

1. Какие точки называются *симметричными относительно точки* ?
2. Что называется *центральной симметрией* ?
3. Какие фигуры называются *центрально-симметричными* ?
4. Какая фигура называется *центрально-симметричной* ?
5. Сохраняет ли центральная симметрия расстояние между точками?
6. Куда при центральной симметрии переходят отрезок, луч, прямая?
7. Сохраняет ли центральная симметрия величины углов?

Задачи

А

1. Какая точка при центральной симметрии переходит в себя?
2. Какая прямая при центральной симметрии переходит в себя?
3. Что является центром симметрии отрезка?
4. Центральная симметрия переводит точку A в точку A'. Где находится центр симметрии?
5. Имеет ли луч центр симметрии?
6. Изобразите точку, симметричную точке A относительно центра O (рис. 10.5).

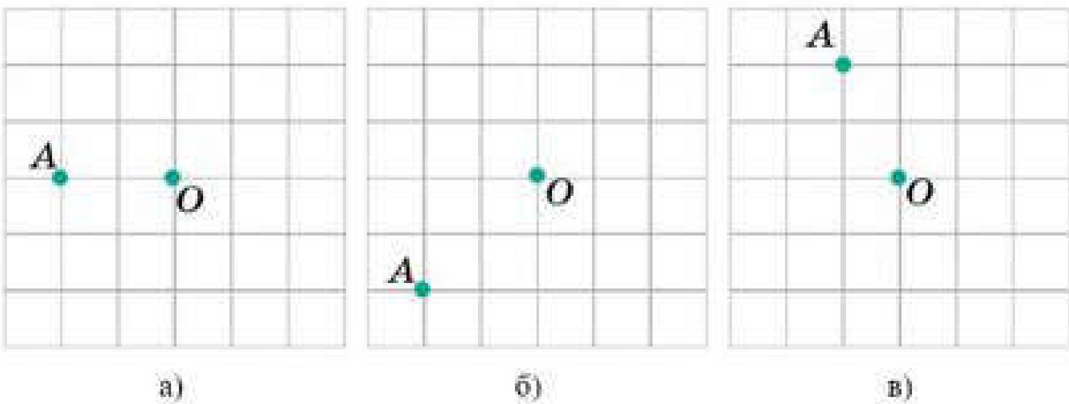
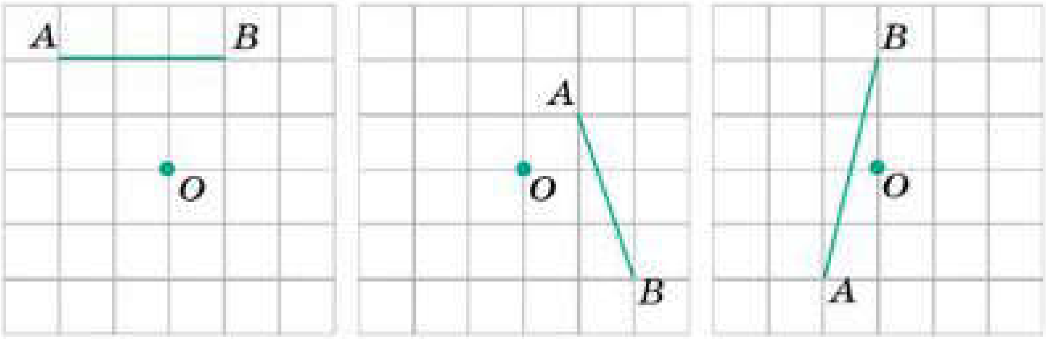


Рис. 10.5

7. Изобразите отрезок, симметричный отрезку AB относительно центра O (рис. 10.6).

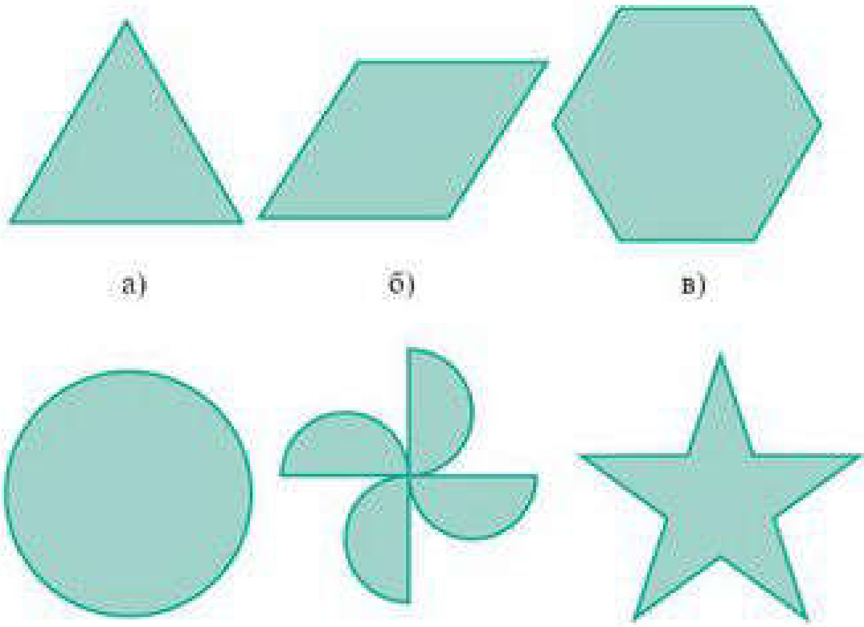


а) б) в)

Рис. 10.6

В

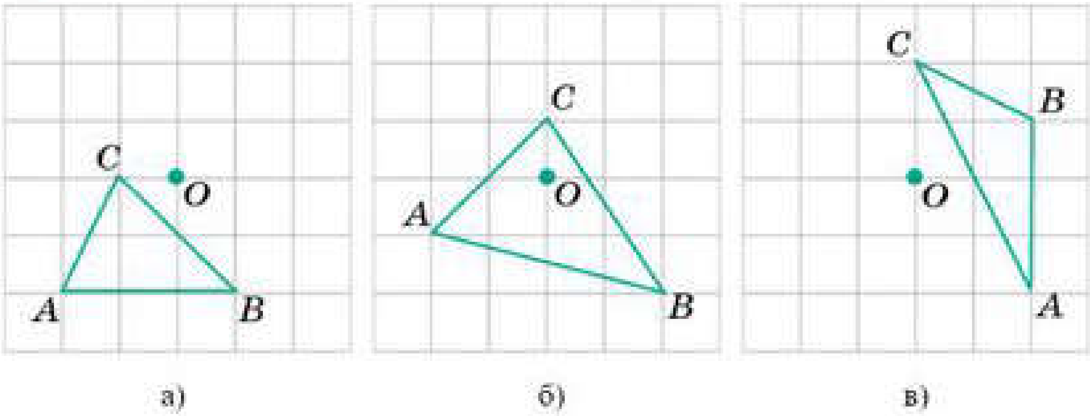
8. Сколько центров симметрии имеет: а) прямая; б) пара пересекающихся прямых; в) пара параллельных прямых?
9. Имеет ли центр симметрии: а) правильный треугольник; б) квадрат; в) правильный пятиугольник; г) правильный шестиугольник?
10. Имеет ли центр симметрии: а) параллелограмм; б) ромб; в) равнобедренная трапеция?
11. Какие из фигур, изображенных на рисунке 10.7, имеют центр симметрии?



а) б) в) г) д) е)

Рис. 10.7

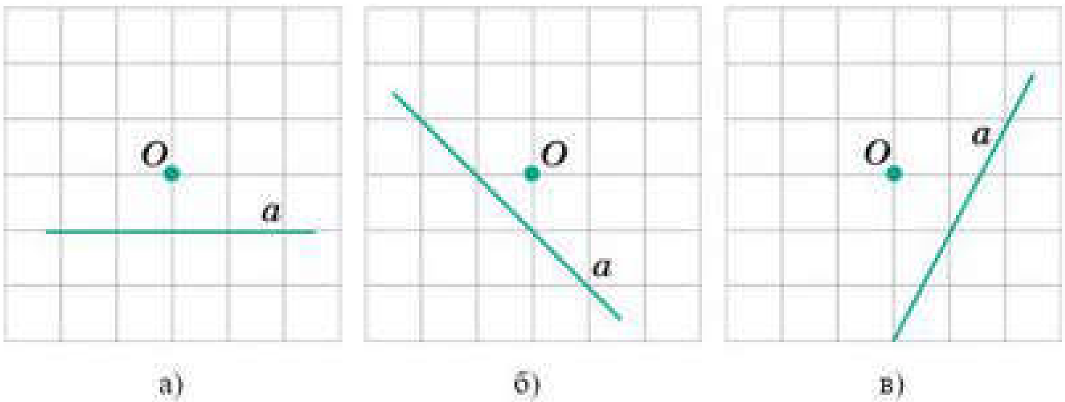
12. Изобразите треугольник, симметричный треугольнику ABC относительно центра O (рис. 10.8).



а) б) в)

Рис. 10.8

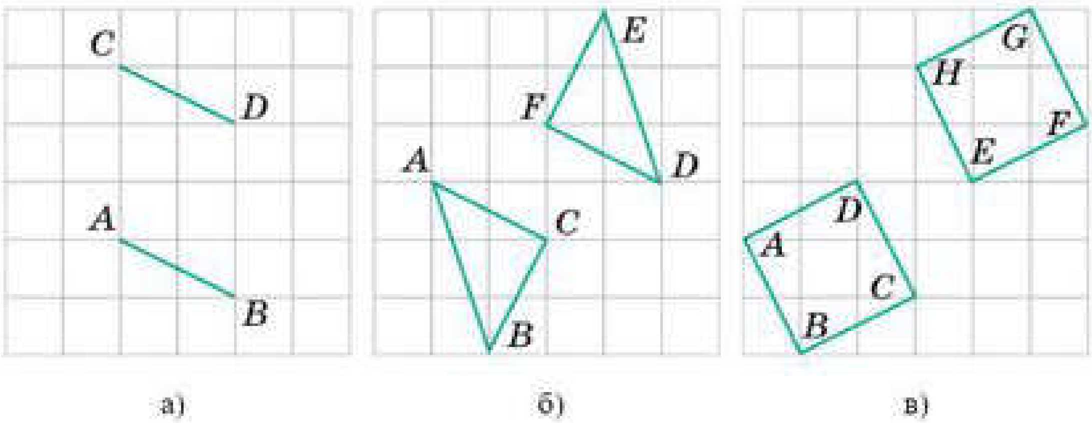
13. Изобразите прямую, симметричную прямой a относительно центра O (рис. 10.9).



а) б) в)

Рис. 10.9

14. Укажите центр симметрии для двух симметричных: а) отрезков; б) треугольников; в) квадратов, изображенных на рисунке 10.10.



а) б) в)

Рис. 10.10

15. Казахский орнамент уникален, как и любой другой. Несмотря на то что с латинского термин "орнамент" переводится как украшение, ученые приходят к выводу, что в каждом национальном узоре хранится какая-то информация. На рисунке 10.11 изображены некоторые казахские орнаменты. Какие из орнаментов имеют центр симметрии, если имеют, то укажите их.

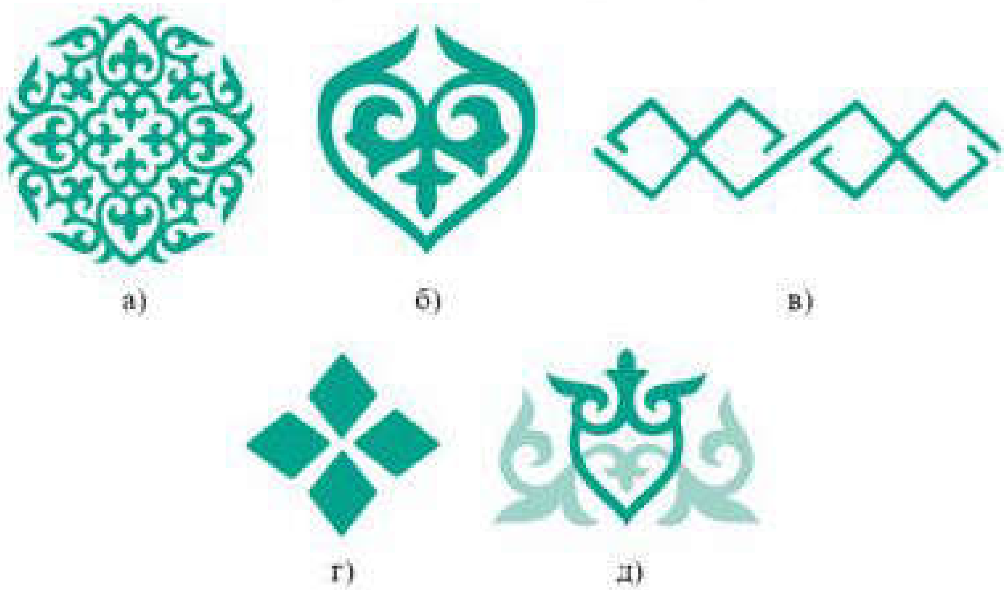


Рис. 10.11

16. Точка A на координатной плоскости имеет координаты $(3; -4)$. Найдите координаты точки, симметричной точке A относительно начала координат.

17. Докажите, что точка пересечения диагоналей параллелограмма является его центром симметрии.

18. Докажите, что центральная симметрия переводит окружность в окружность.

C

19. Докажите, что если четырехугольник имеет центр симметрии, то этот четырехугольник — параллелограмм.

20. Окружность задана уравнением $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$. Напишите уравнение центрально-симметричной окружности относительно начала координат.

21. Окружность на координатной плоскости задана уравнением $x^2 + 2x + y^2 - 4y - 3 = 0$. Напишите уравнение окружности, симметричной данной относительно начала координат.

22. Прямая задана уравнением $ax + by + c = 0$. Напишите уравнение центрально-симметричной прямой относительно начала координат.

23. Прямая на координатной плоскости задана уравнением $x - 2y + 3 = 0$. Напишите уравнение прямой, симметричной данной относительно начала координат.

24. Докажите, что если фигура имеет две перпендикулярные оси симметрии, то точка их пересечения является центром симметрии этой фигуры.

25. Докажите, что многоугольник с нечетным числом сторон не может иметь центр симметрии.

26. Докажите, что никакая фигура не может иметь ровно два центра симметрии.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

27. Нарисуйте какую-нибудь точку O и какой-нибудь отрезок AB. Изобразите точки A' и B' так, чтобы $OA = OA'$, $OB = OB'$ и углы AOA', BOB' равнялись данному углу φ. Что можно сказать об отрезке $A'B'$?

11. ПОВОРОТ. СИММЕТРИЯ n-го ПОРЯДКА

Еще одним видом симметрии является симметрия n-го порядка. Для ее определения рассмотрим сначала понятие поворота. Говорят, что точка A' плоскости получается из точки A ***поворотом*** вокруг точки O на угол φ, если $OA' = OA$ и $\angle AOA' = \varphi$ (рис. 11.1). Точка O называется ***центром поворота***, а угол φ — ***углом поворота***.

Соответствие, при котором данная точка O остается на месте, а все остальные точки поворачиваются вокруг точки O в одном и том же направлении (против часовой стрелки или по часовой стрелке) на заданный угол φ, называется ***поворотом*** вокруг точки O на угол φ.

Говорят, что фигура F' получается ***поворотом*** фигуры F вокруг точки O на угол φ, если все точки фигуры F' получаются поворотом всевозможных точек фигуры F вокруг точки O на угол φ (рис. 11.2).

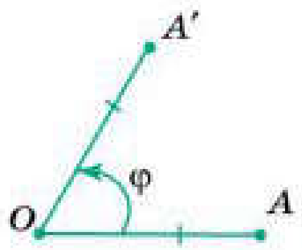


Рис. 11.1

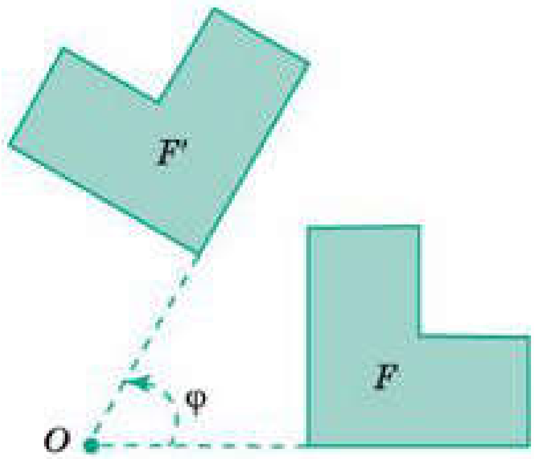


Рис. 11.2

Свойство 1. Поворот сохраняет расстояния между точками.

Доказательство. Пусть точки A', B' получены поворотом на угол φ вокруг точки O точек A, B соответственно (рис. 11.3). Тогда $\angle AOB = \angle AOA' - \angle BOA'$, $\angle A'OB' = \angle BOB' - \angle BOA'$. Учитывая, что $\angle AOA' = \angle BOB' = \varphi$, получаем равенство углов AOB и $A'OB'$. Треугольники AOB и $A'OB'$ равны (по двум сторонам и углу между ними, $OA = OA'$, $OB = OB'$, $\angle AOB = \angle A'OB'$). Следовательно, $AB = A'B'$.

Свойство 2. Поворот переводит отрезки в отрезки, лучи в лучи и прямые в прямые.

Свойство 3. Поворот сохраняет величины углов.

Доказательства этих свойств аналогичны доказательствам соответствующих свойств для параллельного переноса.

Проведите их самостоятельно.

* Точка O называется ***центром симметрии n-го порядка*** фигуры F, если при повороте фигуры F вокруг точки O на угол $\frac{360°}{n}$ фигура F совмещается сама с собой (рис. 11.4).

Ясно, что центр симметрии второго порядка является просто центром симметрии.

Пример. Докажите, что правильный треугольник имеет центр симметрии третьего порядка.

Решение. При повороте вокруг центра окружности, описанной около правильного треугольника на угол 120°, этот треугольник совместится сам с собой. Следовательно, центр окружности, описанной около правильного треугольника, является центром симметрии третьего порядка этого треугольника.

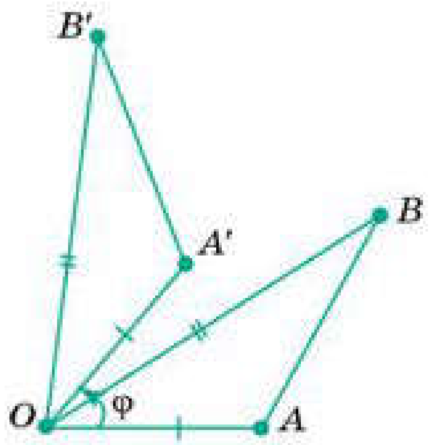


Рис. 11.3

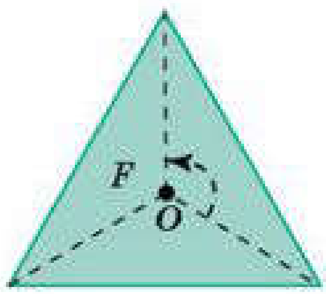


Рис. 11.4

1. Что называется *поворотом вокруг точки* ?
2. Сохраняет ли поворот расстояния между точками?
3. Куда при повороте переходят отрезок, луч, прямая?
4. Сохраняет ли поворот величины углов?
5. Что называется *центром симметрии n-го порядка фигуры* ?

Задачи

А

1. Изобразите точку A', полученную из точки A поворотом вокруг точки O на угол: а) $90°$; б) $270°$ против часовой стрелки (рис. 11.5).

2. Изобразите отрезок $A'B'$, полученный из отрезка AB поворотом вокруг точки O на угол $90°$ по часовой стрелке (рис. 11.6).

3. Изобразите треугольник $A'B'C'$, полученный из треугольника ABC поворотом вокруг точки O на угол $270°$ против часовой стрелки (рис. 11.7).

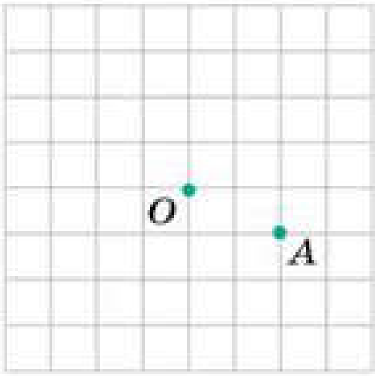


Рис. 11.5

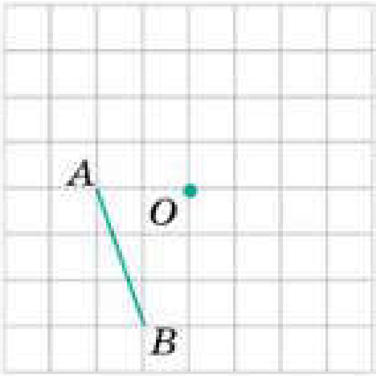


Рис. 11.6

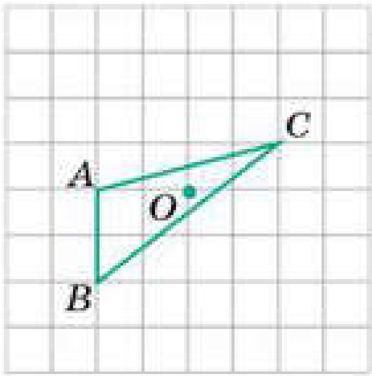


Рис. 11.7

4. На какой наименьший угол нужно повернуть квадрат вокруг центра описанной около него окружности, чтобы он совместился сам с собой?

В

5. Точка B получена поворотом точки A на угол $90°$ по часовой стрелке (рис. 11.8). Укажите центр поворота.

6. Отрезок $A'B'$ получен поворотом отрезка AB на угол $90°$ против часовой стрелки (рис. 11.9). Укажите центр поворота.

7. Треугольник DEF получен поворотом треугольника ABC (рис. 11.10). Укажите центр поворота.

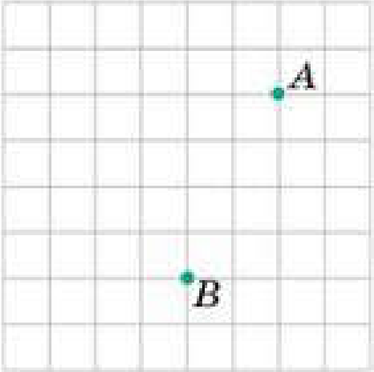


Рис. 11.8

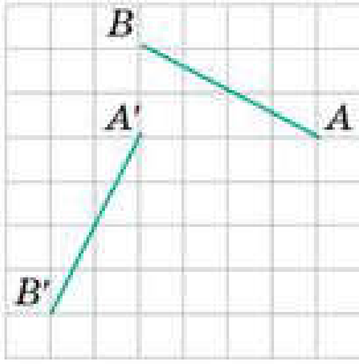


Рис. 11.9

8. Точка $A(1;\ 0)$ повернута вокруг начала координат на угол: а) $30°$; б) $45°$; в) $60°$; г) $90°$; д) $120°$; е) $135°$; ж) $150°$; з) $180°$ против часовой стрелки. Найдите координаты повернутой точки.

9. Точка $A(1;\ 0)$ повернута вокруг начала координат на угол: а) $30°$; б) $45°$; в) $60°$; г) $90°$; д) $120°$; е) $135°$; ж) $150°$; з) $180°$ по часовой стрелке. Найдите координаты повернутой точки.

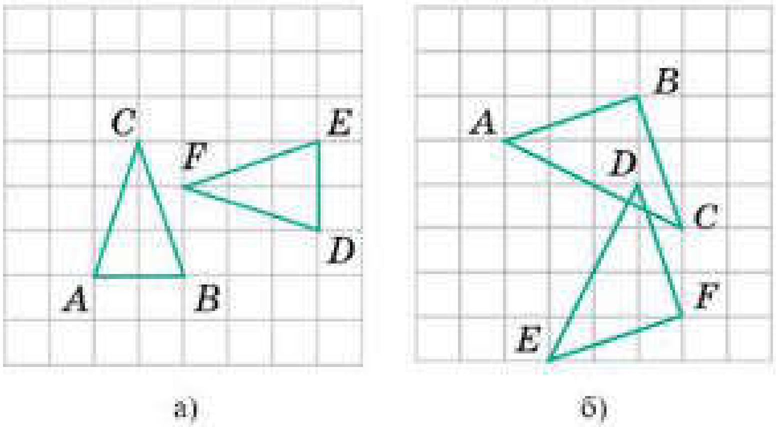


Рис. 11.10

C

10. Правильный треугольник повернули на $60°$ вокруг центра описанной окружности. Какой многоугольник является общей частью полученного и исходного треугольников? Найдите его сторону, если сторона исходного треугольника равна 1.

11. Квадрат повернули вокруг точки пересечения диагоналей на угол $45°$. Какой многоугольник является общей частью полученного и исходного квадратов? Найдите его сторону, если сторона исходного квадрата равна 1.

12. Докажите, что если n-угольник имеет центр симметрии n-го порядка, то он является правильным.

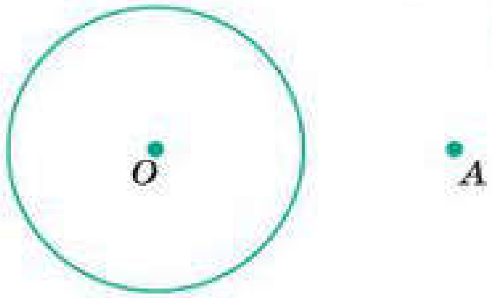


Рис. 11.11

13. Точка A удалена от центра окружности радиусом 1 на расстояние 2 (рис. 11.11). На какой наименьший угол нужно повернуть окружность вокруг точки A, чтобы повернутая окружность касалась исходной?

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

14. Какими общими свойствами обладают параллельный перенос, осевая симметрия, центральная симметрия и поворот?

12. ДВИЖЕНИЕ. РАВЕНСТВО ФИГУР

Параллельный перенос, осевая и центральная симметрии, поворот являются взаимно однозначными соответствиями между точками плоскости, т. е. такими соответствиями, которые удовлетворяют следующим условиям:

1) каждой точке плоскости сопоставляется точка плоскости;
2) разным точкам сопоставляются разные точки;
3) у каждой точки имеется точка, которой она соответствует.

Взаимно однозначные соответствия между точками плоскости называются ***преобразованиями плоскости*** .

В силу сказанного выше параллельный перенос, осевая и центральная симметрии, поворот являются преобразованиями плоскости.

Преобразование плоскости, сохраняющее расстояние между точками, называется ***движением*** .

Например, если движение переводит точки A, B соответственно в точки A', B', то имеет место равенство $AB = A'B'$.

Так как параллельный перенос, осевая и центральная симметрии, поворот сохраняют расстояния между точками, то они являются движениями.

Рассмотрим общие свойства движений.

Свойство 1. Движение переводит прямые в прямые, лучи в лучи и отрезки в отрезки.

Доказательство. Рассмотрим случай отрезков. Пусть точка C принадлежит отрезку AB и движение переводит точки A, B, C в точки A', B', C' соответственно (рис. 12.1). Так как точка C принадлежит отрезку AB, то выполняется равенство $AC + CB = AB$. Так

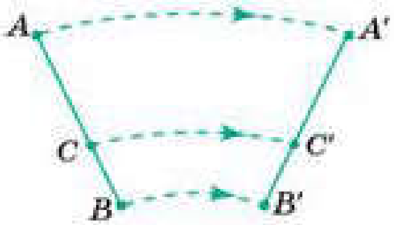


Рис. 12.1

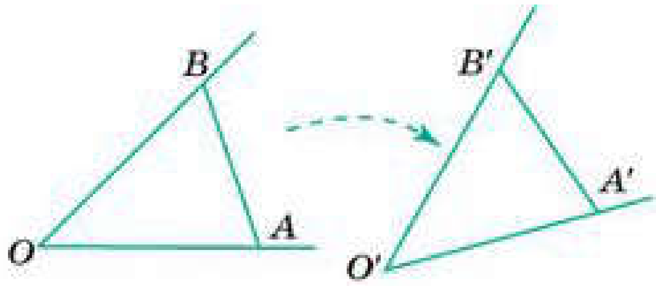


Рис. 12.2

как движение сохраняет расстояние между точками, то для точки C' будет выполняться равенство $A'C' + C'B' = A'B'$. Следовательно, точка C' принадлежит отрезку $A'B'$. Значит, движение переводит отрезок AB в отрезок $A'B'$.

Аналогичным образом доказывается, что луч AB переводится в луч $A'B'$ и вся прямая AB переходит в прямую $A'B'$.

Докажите это самостоятельно.

Свойство 2. При движении сохраняются величины углов.

Доказательство. Пусть дан угол AOB. Предположим, что движением точки A, O, B переводятся соответственно в точки A', O', B' (рис. 12.2).

Поскольку движение сохраняет расстояние между точками, то имеют место равенства отрезков: $A'O' = AO$, $B'O' = BO$, $A'B' = AB$. Треугольник $A'O'B'$ будет равен треугольнику AOB (по трем сторонам), следо вательно, угол $A'O'B'$ будет равен углу AOB.

Определим понятие композиции преобразований плоскости.

Пусть одно преобразование плоскости переводит точку A в точку A', а другое преобразование переводит точку A' в точку A''. Тогда преобразование плоскости, при котором точке A сопоставляется точка A'', называется ***композицией преобразований***. Она получается последовательным выполнением двух данных преобразований.

Свойство 3. Композиция движений является движением.

Доказательство. Пусть одно движение переводит точки A, B в точки A', B' соответственно, а другое движение переводит точки A', B' в точки A'', B'' соответственно. Тогда $AB = A'B' = A''B''$. Таким образом, композиция движений сохраняет расстояние между точками, следовательно, сама является движе нием.

Выясните, каким преобразованием является композиция двух осевых симметрий относительно параллельных прямых.

Напомним, что в курсе геометрии седьмого класса были определены понятия равенства отрезков, углов и треугольников, доказаны признаки равенства треугольников. Здесь мы определим общее понятие равенства фигур.

Две фигуры называются ***равными***, если они движением переводятся одна в другую.

Для обозначения равенства фигур используется обычный знак равенства. Запись $F = F'$ означает, что фигура F равна фигуре F'.

Следующая теорема устанавливает связь между понятием равенства фигур и введенным ранее понятием равенства треугольников.

Теорема. Два треугольника равны в том и только том случае, когда один из них переводится движением в другой.

Доказательство. Пусть треугольник ABC переводится движением в треугольник $A'B'C'$. Так как при движении сохраняются расстояния и углы, то $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$, $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$. Значит, треугольники ABC и $A'B'C'$ равны.

Обратно, пусть у треугольников ABC и $A'B'C'$ равны соответствующие стороны и углы. Докажем, что треугольник ABC движением переводится в треугольник $A'B'C'$ (рис. 12.3).

Действительно, если точки A и A' не совпадают, применим к треугольнику ABC параллельный перенос на вектор $\overline{AA'}$. Получим треугольник $A'B_1C_1$. Если B_1 и B' не совпадают, применим к треугольнику $A'B_1C_1$ поворот на угол $B_1A'B'$. При этом из равенства сторон $A'B_1$ и $A'B'$ следует, что вершина B_1 совместится с вершиной B'. Получим треугольник $A'B'C_2$. Если C_2 и C' лежат по одну сторону от прямой $A'B'$, то из равенства соответствующих отрезков и углов следует, что они должны совпадать. Если же они лежат по разные стороны от прямой $A'B'$, применим к треугольнику $A'B'C_2$ осевую симметрию относительно прямой $A'B'$. Тогда треугольник $A'B'C_2$

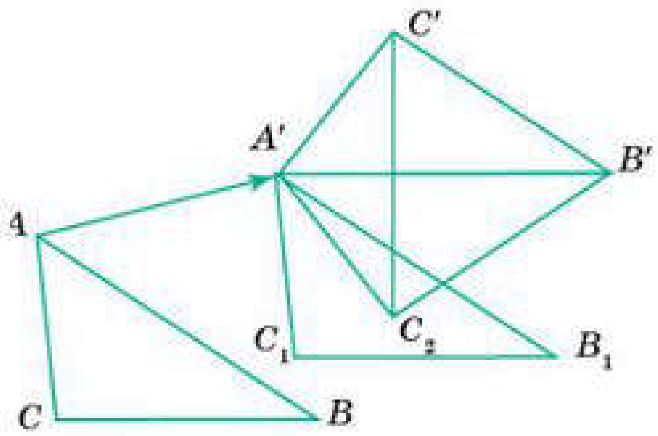


Рис. 12.3

перейдет в треугольник $A'B'C'$. Таким образом, треугольник $A'B'C'$ получается из треугольника ABC в результате движения.

Пример. Докажите, что два прямоугольника равны, если равны их соответствующие стороны.

Доказательство. Пусть в прямоугольниках $ABCD$ и $A'B'C'D'$ $AB = A'B'$, $AD = A'D'$ (рис. 12.4). Прямоугольные треугольники ABD и $A'B'D'$ равны по двум катетам. Следовательно, существует движение, переводящее треугольник ABD в треугольник $A'B'D'$. Так как движение сохраняет углы, то углы B и D прямоугольника $ABCD$ перейдут соответственно в углы B' и D' прямоугольника $A'B'C'D'$. Но тогда стороны BC и DC прямоугольника $ABCD$ перейдут соответственно в стороны $B'C'$ и $D'C'$ прямоугольника $A'B'C'D'$. Следовательно, прямоугольник $ABCD$ перейдет в прямоугольник $A'B'C'D'$. Значит, эти прямоугольники равны.

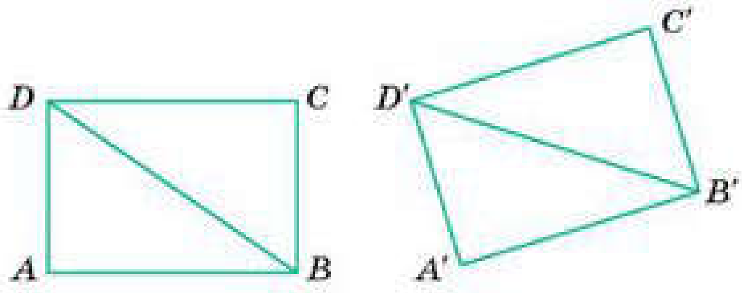


Рис. 12.4

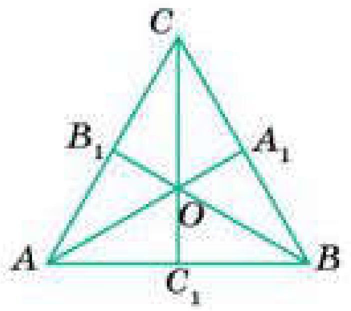


Рис. 12.5

Наличие движений, переводящих данную фигуру в себя, характеризует степень симметричности фигуры. Чем больше таких движений, тем более симметрична фигура.

В качестве примера рассмотрим правильный треугольник ABC и выясним, сколько имеется движений, переводящих этот треугольник в себя (рис. 12.5).

Возможны следующие случаи.

1. Все вершины треугольника ABC остаются на месте. Движением является тождественное преобразование.

2. Вершина A остается на месте, вершина B переходит в вершину C, а вершина C переходит в вершину B. Движением является симметрия относительно прямой, содержащей медиану AA_1 треугольника ABC.

3. Вершина A переходит в вершину B, вершина B переходит в вершину A, а вершина C остается на месте. Движением является симметрия относительно прямой, содержащей медиану CC_1 треугольника ABC.

4. Вершина A переходит в вершину B, вершина B переходит в вершину C, а вершина C переходит в вершину A. Движением явля-

ется поворот вокруг точки O пересечения медиан треугольника ABC на угол 120° против часовой стрелки.

5. Вершина A переходит в вершину C, вершина C переходит в вершину A, а вершина B остается на месте. Движением является симметрия относительно прямой, содержащей медиану BB_1 треугольника ABC.

6. Вершина A переходит в вершину C, вершина C переходит в вершину B, а вершина B переходит в вершину A. Движением является поворот вокруг точки O пересечения медиан треугольника ABC на угол 120° по часовой стрелке.

Таким образом, имеется шесть различных движений, переводящих правильный треугольник в себя.

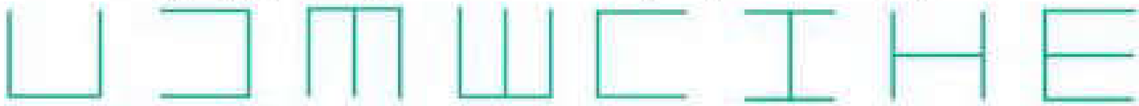
?

1. Какое соответствие между точками плоскости называется *взаимно однозначным*?
2. Что называется *преобразованием плоскости*?
3. Какое преобразование плоскости называется *движением*?
4. Приведите примеры движений.
5. Что называется *композицией преобразований плоскости*?
6. Какие фигуры называются *равными*?
7. В каком случае равны два треугольника?
8. Сколько имеется движений, переводящих правильный треугольник в себя?

Задачи

А

1. Какие из фигур, изображенных на рисунке 12.6, равны?



а) б) в) г) д) е) ж) з)

Рис. 12.6

2. Будут ли равны два четырехугольника, если у них все стороны соответственно равны?

3. Может ли движение переводить разные прямые в одну прямую?

4. Может ли движение переводить две параллельные прямые в пересекающиеся прямые?

В

5. Докажите, что движение переводит окружность в окружность того же радиуса.

6. Пусть движение переводит отрезок AB в отрезок $A'B'$. Докажите, что середина C отрезка AB перейдет в середину C' отрезка $A'B'$.
7. Пусть движение переводит угол AOB в угол $A'O'B'$. Докажите, что биссектриса OC угла AOB перейдет в биссектрису $O'C'$ угла $A'O'B'$.
8. Пусть движение переводит треугольник ABC в треугольник $A'B'C'$. Докажите, что при этом высоты, медианы и биссектрисы треугольника ABC перейдут в высоты, медианы и биссектрисы треугольника $A'B'C'$ соответственно.
9. Докажите, что две окружности равны, если равны их радиусы.

C

10. Для двух данных равных отрезков (рис. 12.7) укажите движение, переводящее один в другой.
11. Для двух данных равных углов (рис. 12.8) укажите движение, переводящее один в другой.
12. Докажите, что если у двух четырехугольников равны соответствующие стороны и равны соответствующие углы, то такие четырехугольники равны.
13. Придумайте какой-нибудь признак равенства параллелограммов. Докажите этот признак.
14. Докажите, что если у двух правильных n-угольников равны стороны, то эти n-угольники равны.
15. Сколько имеется различных движений, переводящих правильный n-угольник в себя?

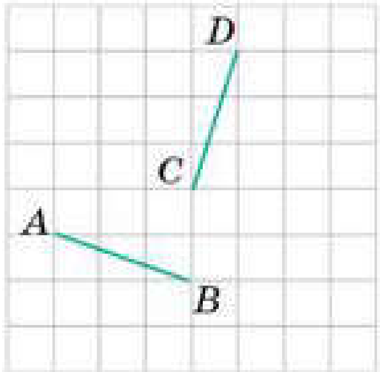


Рис. 12.7

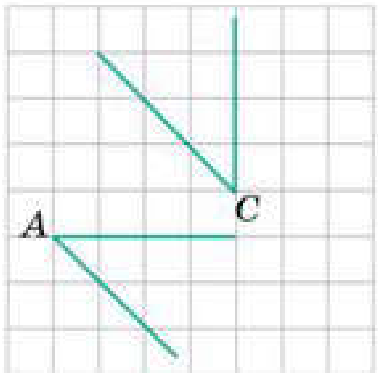


Рис. 12.8

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

16. Отметьте какие-нибудь точки O, A и B. Изобразите точки A', B', для которых: а) $OA' = 2OA$, $OB' = 2OB$; б) $OA' = 3OA$, $OB' = 3OB$; в) $OA' = 0,5\,OA$, $OB' = 0,5\,OB$. В каком отношении находятся отрезки $A'B'$ и AB?
17. Повторите понятие площади и его свойства.

13. ПОДОБИЕ ФИГУР. ГОМОТЕТИЯ

Равные фигуры можно представлять себе как фигуры, имеющие равные размеры. Помимо этого, встречаются фигуры, имеющие даже если и разные размеры, но одинаковую форму. Например, все окружности имеют одинаковую форму, все квадраты имеют одинаковую форму, все равносторонние треугольники имеют одинаковую форму и т. д. Такие фигуры в геометрии принято называть ***подобными***. Они переводятся друг в друга преобразованием подобия.

Преобразование плоскости, при котором расстояния между точками умножаются на одно и то же положительное число, называется ***подобием***. Само это число называется ***коэффициентом подобия***.

Таким образом, если точки A, B при подобии переходят соответственно в точки A', B', то $A'B' = k \cdot AB$, или, что то же самое, $A'B' : AB = k$, причем k — одно и то же число для всех точек A, B. Заметим, что подобие с коэффициентом $k = 1$ является движением, а композиция подобия и движения является подобием.

Две фигуры F и F' называются ***подобными***, если одна из них переводится в другую подобием (рис. 13.1).

Преобразование подобия применяется при выполнении чертежей деталей машин, зданий, планов местности и др. Коэффициентом подобия при этом является масштаб. Например, если участок местности изображается в масштабе 1:1000, то это означает, что одному сантиметру на плане соответствует 10 м на местности.

Приведем пример подобия. Зафиксируем точку O и положительное число k. Каждой точке A плоскости, отличной от O, сопоставим точку A' на луче OA так, что $OA' = k \cdot OA$ (рис. 13.2). Точке O сопоставим ее саму. Полученное преобразование плоскости называется ***гомотетией*** с центром в точке O и коэффициентом k.

Теорема. Гомотетия является подобием с тем же коэффициентом.

Доказательство. Пусть при гомотетии с центром в точке O и коэффициентом k точки A, B переходят соответственно в точки A', B' (рис. 13.2). Докажем, что $A'B' = k \cdot AB$. Имеем $\overline{OA'} = k\overline{OA}$, $\overline{OB'} = k\overline{OB}$.

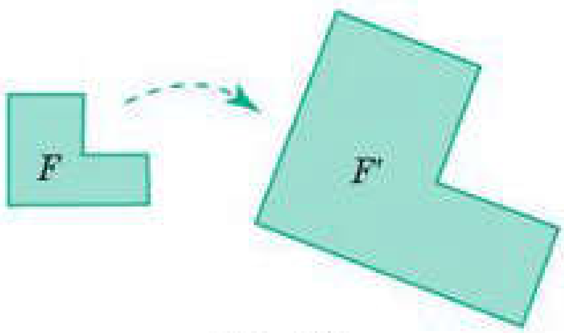


Рис. 13.1

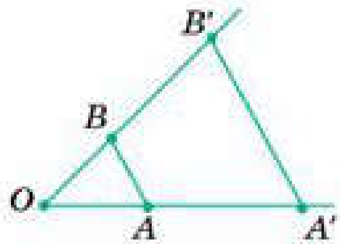


Рис. 13.2

Следовательно, $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OB} - k\overrightarrow{OA} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = k\overrightarrow{AB}$. Значит, $A'B' = k \cdot AB$. ☐ Рассмотрим некоторые свойства подобия.

Свойство 1. Подобие переводит отрезки в отрезки, лучи в лучи и прямые в прямые.

Доказательство. Пусть точка B принадлежит отрезку AC. Тогда $AB + BC = AC$. Подобие переводит эти точки соответственно в точки A', B', C'. Поскольку при подобии расстояния между точками умножаются на одно и то же положительное число, то для точек A', B', C' будет иметь место равенство $A'B' + B'C' = A'C'$. Следовательно, точка B' будет принадлежать отрезку $A'C'$. ☐

Самостоятельно рассмотрите случаи луча и прямой.

Свойство 2. Подобие сохраняет величины углов.

Доказательство. Рассмотрим угол AOB. Пусть подобие с коэффициентом k переводит точки O, A, B соответственно в точки O', A', B'. Докажем, что углы AOB и $A'O'B'$ равны (рис. 13.3).

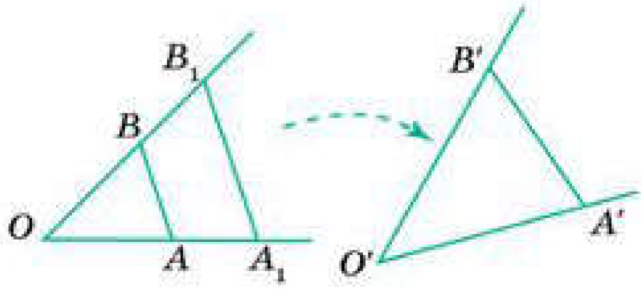


Рис. 13.3

Обозначим через A_1, B_1 точки, полученные гомотетией точек A, B с центром O и коэффициентом k. Тогда $OA_1 = k \cdot OA = O'A'$, $OB_1 = k \cdot OB = O'B'$, $A_1B_1 = k \cdot AB = A'B'$. Треугольники OA_1B_1 и $O'A'B'$ равны по трем сторонам, следовательно, $\angle A_1OB_1 = \angle A'O'B'$, или $\angle AOB = \angle A'O'B'$. ☐

Выясним, как связаны площади подобных фигур. Начнем с треугольников.

Теорема. Если треугольник $A'B'C'$ подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия k, то площадь S' треугольника $A'B'C'$ выражается через площадь S треугольника ABC формулой $S' = k^2S$.

Доказательство. Для сторон треугольника $A'B'C'$ имеют место равенства $A'B' = k \cdot AB$, $A'C' = k \cdot AC$. При этом угол A' равен углу A. Воспользуемся формулой площади треугольника $S' = \frac{1}{2}A'B' \cdot A'C' \times$ $\times \sin A'$. Тогда $S' = \frac{1}{2}k \cdot AB \cdot k \cdot AC \cdot \sin A = k^2 \cdot S$ (рис. 13.4). ☐

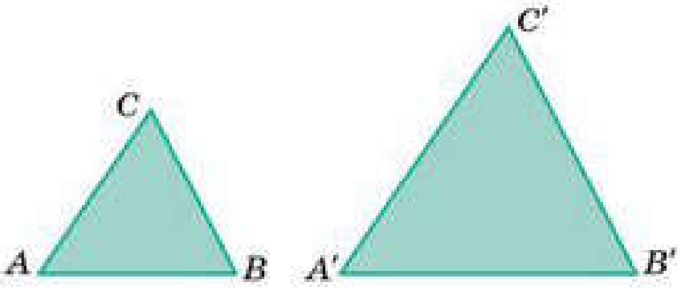


Рис. 13.4

Рассмотрим теперь выпуклые многоугольники.

Теорема. Если выпуклый многоугольник M' подобен выпуклому многоугольнику M с коэффициентом подобия k, то площадь S' многоугольника M' выражается через площадь S многоугольника M формулой $S' = k^2S$.

Доказательство. Разобьем многоугольник M проведением диагоналей на треугольники (рис. 13.5). Преобразование подобия, переводящее многоугольник M в многоугольник M', переведет эти треугольники в треугольники, разбивающие многоугольник M'. Площадь каждого такого треугольника в многоугольнике M' равна площади соответствующего треугольника в многоугольнике M, умноженной на k^2. Так как площади многоугольников M и M' равны сумме площадей треугольников, из которых они состоят, то площадь S' многоугольника M' будет равна площади S многоугольника M, умноженной на k^2, т. е. $S' = k^2S$. ☐

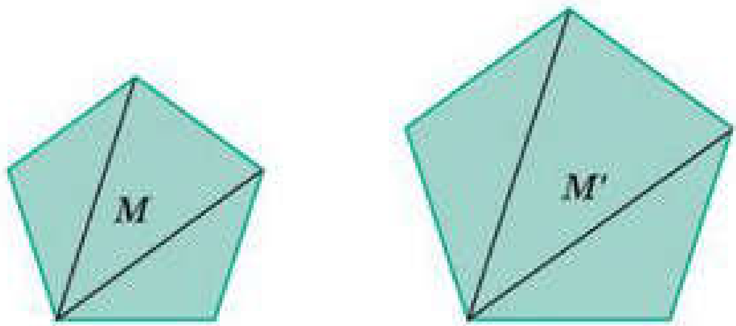


Рис. 13.5

Аналогичное равенство имеется и для площадей произвольных подобных фигур. А именно, если фигура Φ' подобна фигуре Φ с коэффициентом подобия k, то площадь S' фигуры Φ' выражается через площадь S фигуры Φ формулой $S' = k^2S$.

Примем это без доказательства.

1. Какое преобразование плоскости называется *подобием* ?
2. Что называется *коэффициентом подобия* ?
3. Какое преобразование плоскости называется *гомотетией* ?
4. Что называется *центром* и *коэффициентом гомотетии* ?
5. Сформулируйте свойства подобия.
6. Как связаны между собой площади подобных фигур?

Задачи

А

1. Стороны треугольника равны 3 см, 4 см и 5 см. Найдите стороны подобного ему треугольника, если коэффициент подобия равен: а) 2; б) 3; в) 0,5.

2. Стороны треугольника равны 4 см, 6 см и 8 см. Найдите стороны подобного ему треугольника, если его большая сторона равна 4 см.

3. Изобразите треугольник, полученный гомотетией треугольника ABC относительно центра A с коэффициентом 2 (рис. 13.6).

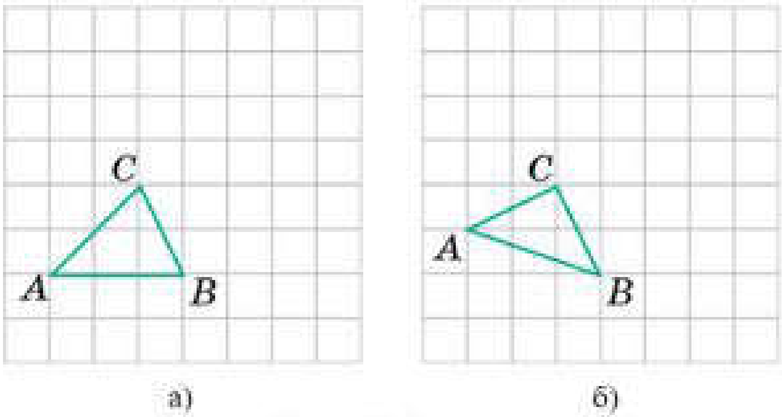


Рис. 13.6

4. Изобразите треугольник, полученный гомотетией треугольника ABC относительно центра O с коэффициентом 0,5 (рис. 13.7).

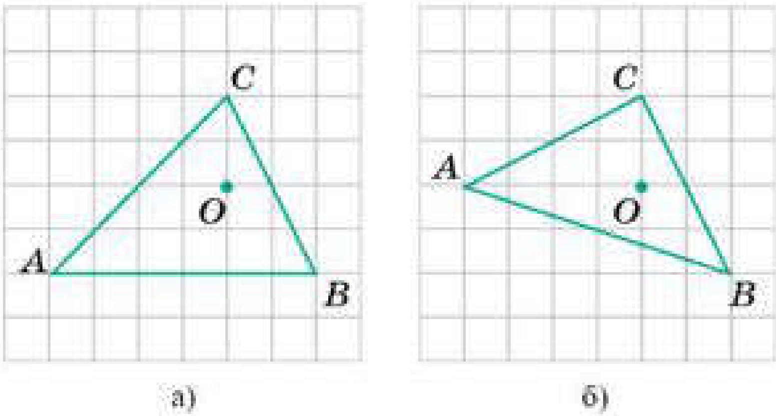


Рис. 13.7

5. Во сколько раз нужно увеличить сторону квадрата, чтобы его площадь увеличилась в: а) 25; б) 16; в) 4; г) 2 раза.
6. Фигура F' на рисунке 13.1 подобна фигуре F с коэффициентом подобия $k = 3$. Как связаны их площади S' и S?

B

7. Фигура F' подобна фигуре F с коэффициентом k. С каким коэффициентом фигура F подобна фигуре F'?

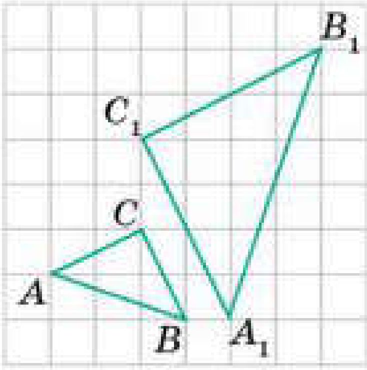


Рис. 13.8

8. Приведите примеры фигур, которые подобны сами себе при любом коэффициенте подобия.
9. Докажите, что композиция двух преобразований подобия является подобием.
10. Укажите преобразование подобия, переводящее треугольник ABC в треугольник $A_1B_1C_1$ (рис. 13.8). Сравните их площади S и S_1.

C

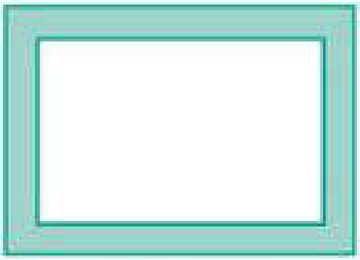


Рис. 13.9

11. Докажите, что любые два квадрата подобны.
12. Докажите, что любые две окружности подобны и коэффициент подобия равен отношению их радиусов.
13. Подобны ли прямоугольники, образующие рамку картины (рис. 13.9)? Ширина рамки постоянна.
14. На рисунке 13.10 изображен параллелограмм $ABCD$ со сторонами $AB = a$, $BC = b$, от которого отсечен другой параллелограмм $FBCE$, подобный данному. Каким должен быть отрезок BF?
15. Трапеция разделена средней линией на две трапеции (рис. 13.11). Будут ли они подобны?

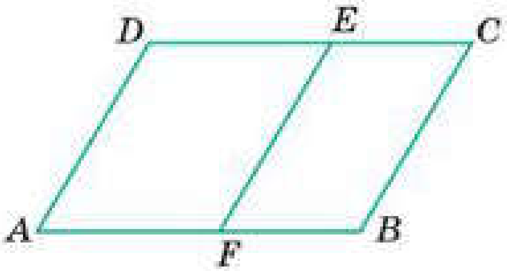


Рис. 13.10

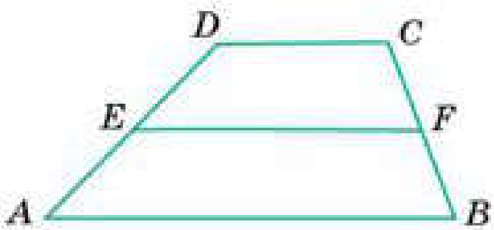


Рис. 13.11

16. Основания AB и CD трапеции $ABCD$ равны соответственно a и b. Каким должен быть отрезок EF, параллельный основаниям и делящий эту трапецию на две подобные трапеции (рис. 13.11)?

17. Основания AB и CD трапеции $ABCD$ равны соответственно 12 и 3. Отрезок EF параллелен основаниям и делит эту трапецию на две подобные трапеции (рис. 13.11). Найдите отрезок EF и отношение $AE : ED$.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

18. Повторите признаки равенства треугольников.

19. Придумайте какие-нибудь признаки подобия треугольников.

14. ПРИЗНАКИ ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

По аналогии с признаками равенства треугольников сформулируем и докажем признаки подобия треугольников.

Теорема (первый признак подобия треугольников). Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.

Доказательство. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ выполняются равенства $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC} = k$, $\angle A = \angle A_1$ (рис. 14.1).

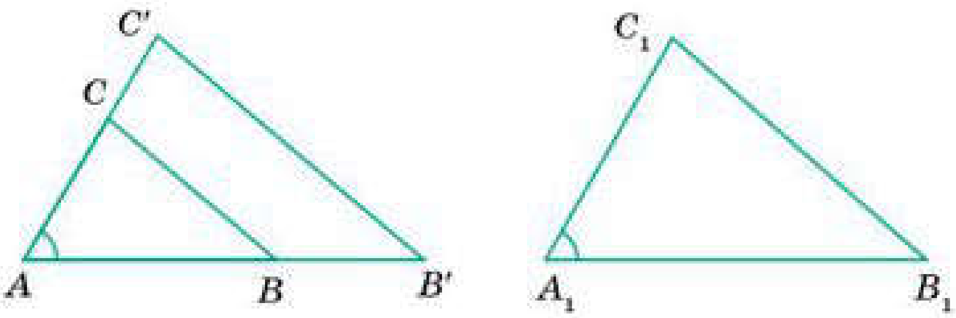


Рис. 14.1

Рассмотрим треугольник $AB'C'$, полученный гомотетией треугольника ABC с центром A и коэффициентом k. Треугольники $AB'C'$ и $A_1B_1C_1$ равны по двум сторонам и углу между ними ($AB' = A_1B_1$, $AC' = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$). Следовательно, треугольник $AB'C'$ переводится в треугольник $A_1B_1C_1$ движением. Композиция указанной гомотетии и этого движения переводит треугольник ABC в треугольник $A_1B_1C_1$. Значит, эти треугольники подобны.

Применяя этот признак к прямоугольным треугольникам, получаем следующий признак подобия прямоугольных треугольников.

Следствие. Если катеты одного прямоугольного треугольника пропорциональны катетам другого прямоугольного треугольника, то такие прямоугольные треугольники подобны.

Теорема. (Второй признак подобия треугольников.) Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Доказательство. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ (рис. 14.2)

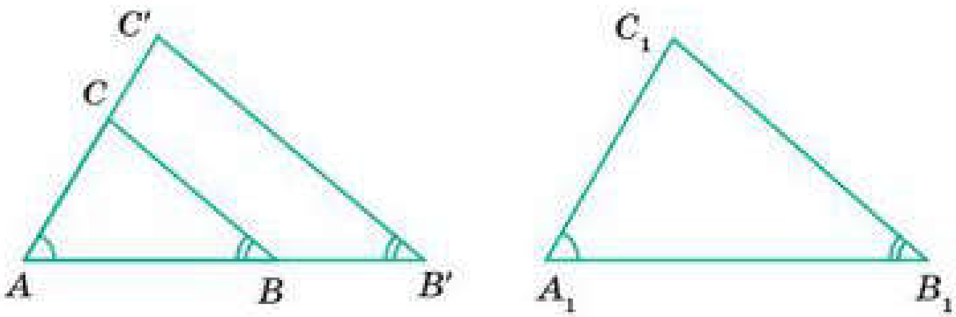


Рис. 14.2

Заметим, что в этом случае и $\angle C = \angle C_1$. Обозначим $\frac{A_1B_1}{AB} = k$. Рассмотрим треугольник $AB'C'$, полученны й гомотетией треуголь ника ABC с центром A и коэффициентом k. Треугольники $AB'C'$ и $A_1B_1C_1$ равны по стороне и двум прилежащим к ней углам ($AB' = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B' = \angle B_1$). Следовательно, треугольник $AB'C'$ переводится в треугольник $A_1B_1C_1$ движением. Композиция указанной гомотетии и этого дви жения переводит треугольник ABC в треугольник $A_1B_1C_1$. Значит, эти треугольник и подобны.

Применяя этот при знак к прямоугольным треуго льникам, получаем следующий признак подобия прямоугольных треугольников.

Следствие. Если острый угол одного прямоугольного треугольника равен острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие прямоугольные треугольники подобны.

Теорема. (Третий признак подобия треугольников.) Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Доказательство. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ выполняются рав енств а $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{B_1C_1}{BC} = k$ (рис. 14.3).

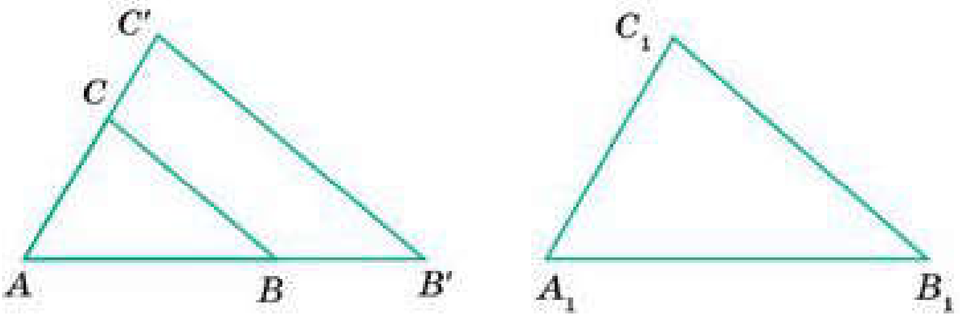


Рис. 14.3

Рассмотрим треугольник $AB'C'$, полученный гомотетией треугольника ABC с центром A и коэффициентом k. Треугольники $AB'C'$ и $A_1B_1C_1$ равны по трем сторонам ($AB' = A_1B_1$, $AC' = A_1C_1$, $B'C' = B_1C_1$). Следовательно, треугольник $AB'C'$ переводится в треугольник $A_1B_1C_1$ движением. Композиция указанной гомотетии и этого движения переводит треугольник ABC в треугольник $A_1B_1C_1$. Значит, эти треугольники подобны.

Самостоятельно сформулируйте признак подобия прямоугольных треугольников, являющийся следствием третьего признака подобия треугольников.

Пример. Один правильный треугольник вписан в окружность, а другой правильный треугольник описан около этой окружности. Найдите коэффициент подобия этих треугольников.

Решение. Так как у правильных треугольников углы равны 60°, то данные треугольники подобны. Если радиус данной окружности равен R, то сторона вписанного треугольника равна $\frac{\sqrt{3}}{6}R$, а описанного – $\frac{\sqrt{3}}{3}R$. Следовательно, коэффициент подобия равен 2.

1. Какие треугольники называются *подобными* ?
2. Сформулируйте первый признак подобия треугольников.
3. Сформулируйте второй признак подобия треугольников.
4. Сформулируйте третий признак подобия треугольников.
5. Сформулируйте признаки подобия прямоугольных треугольников.

Задачи

А

1. Подобны ли любые два: а) равносторонних треугольника; б) равнобедренных треугольника; в) равнобедренных прямоугольных треугольника?

2. Стороны треугольника равны 5 см, 8 см и 10 см. Найдите стороны подобного ему треугольника, если коэффициент подобия равен: а) 0,5; б) 2.

3. Подобны ли прямоугольные треугольники, если у одного из них есть угол 40°, а у другого 50°?

4. Подобны ли треугольники, изображенные на рисунке 14.4?

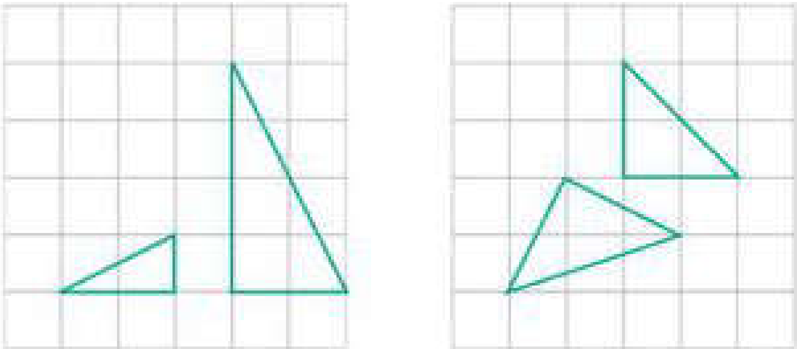


Рис. 14.4

5. На рисунке 14.5 укажите все подобные треугольники.

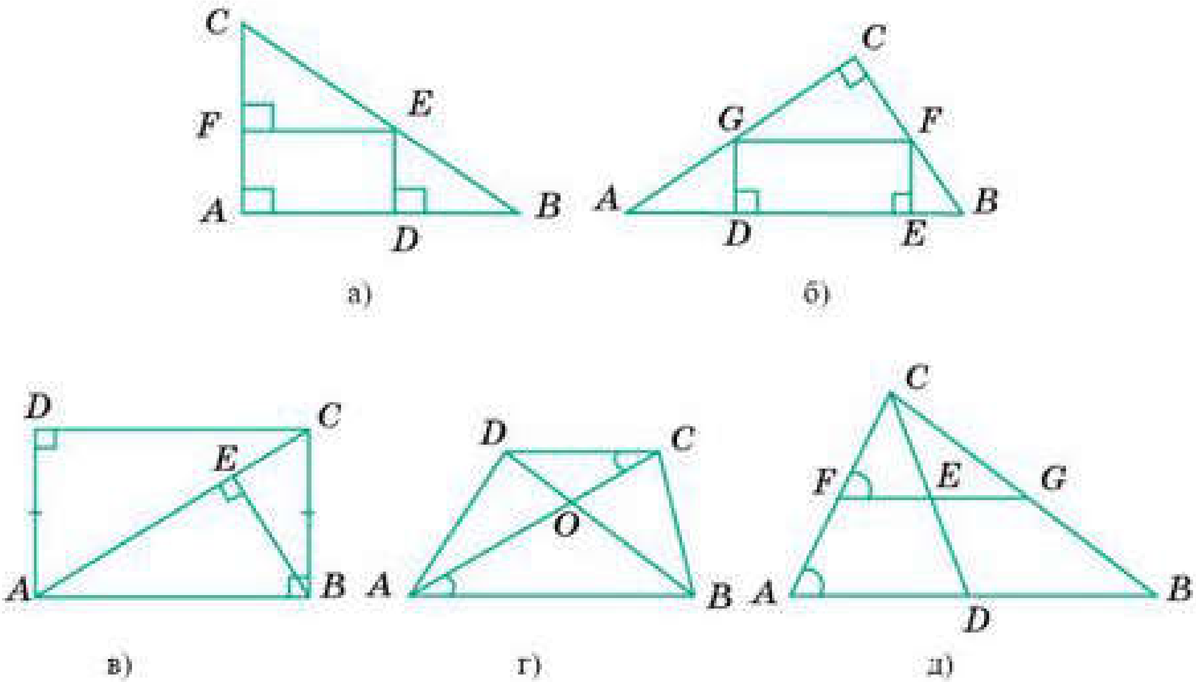


Рис. 14.5

6. Изобразите треугольник, подобный треугольнику ABC с коэффициентом подобия $k = 2$ (рис. 14.6, 14.7).

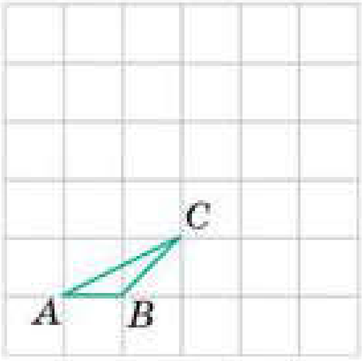


Рис. 14.6

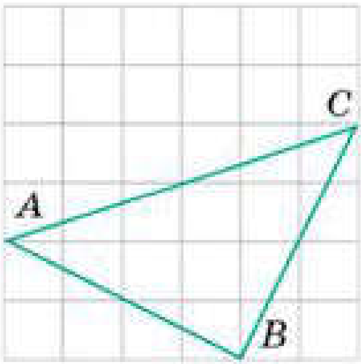
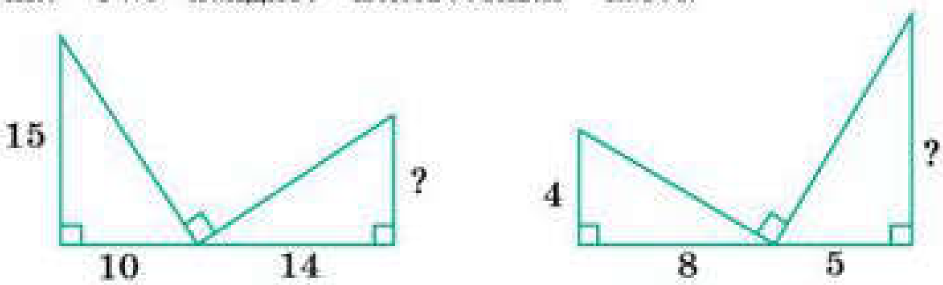


Рис. 14.7

7. На рисунке 14.8 найдите неизвестный катет.



а) б)

Рис. 14.8

8. В подобных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = 8$ см, $BC = 10$ см, $A_1B_1 = 5{,}6$ см, $A_1C_1 = 10{,}5$ см. Найдите AC и B_1C_1.

9. У треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $AB = 5$ м, $BC = 7$ м, $A_1B_1 = 10$ м, $A_1C_1 = 8$ м. Найдите остальные стороны треугольников.

10. Стороны одного треугольника 4 дм, 3,6 дм и 1,5 дм. Найдите стороны другого треугольника, подобного данному, если коэффициент подобия равен 1,6.

11. Стороны одного треугольника равны 8 см, 6 см и 5 см. Меньшая сторона второго треугольника, подобного первому, равна 2,5 см. Найдите другие стороны второго треугольника.

12. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $AB = 4$, $AC = 6$, $BC = 5$, $A_1B_1 = 6$, $A_1C_1 = 9$. Найдите сторону B_1C_1 треугольника $A_1B_1C_1$.

13. Подобны ли два треугольника, если их стороны имеют длины: а) 4, 5, 6 и 8, 10, 12; б) 3, 4, 6 и 9, 15, 18; в) 1, 2, 2 и 1, 1, 0,5?

14. На рисунке 14.9 $CE = 8$, $CD = 6$, $BC = 12$, угол BAC равен углу EDC. Найдите AC.

15. На рисунке 14.9 $DE = 10$, $CE = 8$, $BC = 12$, угол BAC равен углу EDC. Найдите AB.

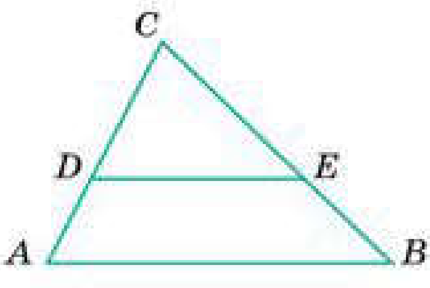


Рис. 14.9

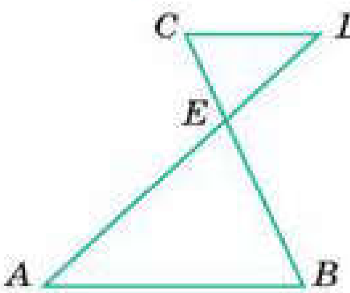


Рис. 14.10

16. На рисунке 14.10 $CE = 4$, $DE = 6$, $AE = 12$, AB параллельна CD. Найдите BE.

17. На рисунке 14.10 $DE = 6$, $AB = 10$, $AE = 12$, AB параллельна CD. Найдите CD.

18. Используя данные, приведенные на рисунке 14.11, найдите расстояние AB от лодки A до берега.

19. Используя данные, приведенные на рисунке 14.12, найдите ширину AB озера.

20. Используя данные, приведенные на рисунке 14.13, найдите ширину AB реки.

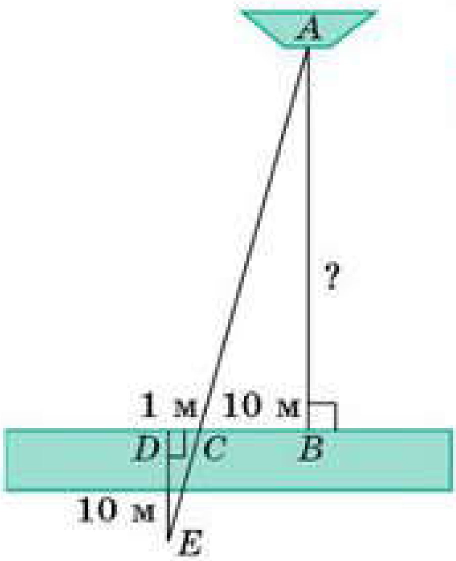


Рис. 14.11

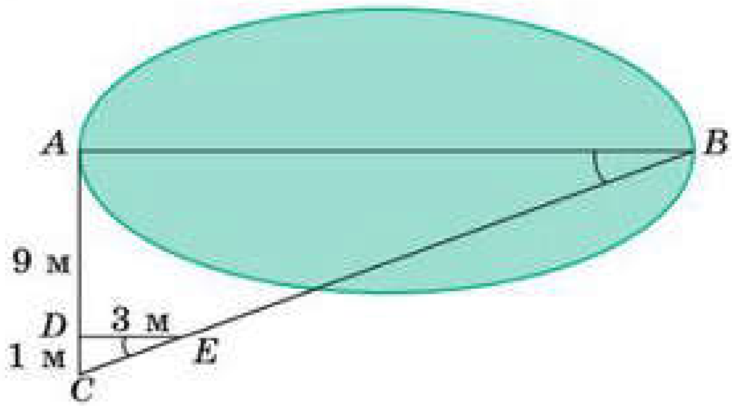


Рис. 14.12

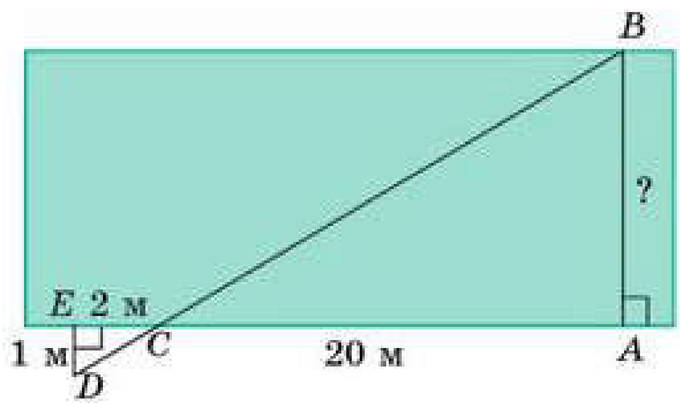


Рис. 14.13

B

21. Стороны треугольника относятся как 5 : 3 : 7. Найдите стороны подобного ему треугольника, у которого: а) периметр равен 45 см; б) меньшая сторона равна 5 см; в) большая сторона равна 7 см.

22. Стороны треугольника 12 м, 16 м и 18 м. Найдите стороны треугольника, подобного данному, если его меньшая сторона равна большей стороне данного треугольника.

23. Стороны треугольника равны 10, 15 и 20. Произведение сторон подобного ему треугольника равно 24. Найдите стороны второго треугольника.

24. У двух равнобедренных треугольников углы между боковыми сторонами равны. Боковая сторона и основание одного треугольника равны соответственно 17 см и 10 см, основание другого равно 8 см. Найдите его боковую сторону.

25. Докажите, что равнобедренные треугольники подобны, если углы при их вершинах, противолежащих основаниям, равны.

26. В треугольнике ABC проведены высоты AD и BE (рис. 14.14). Докажите, что треугольники ACD и BCE подобны.

27. Докажите, что у подобных треугольников периметры относятся как соответствующие стороны.

28. Подобны ли два треугольника, если все их средние линии соответственно пропорциональны?

29. На одной стороне угла A отложены отрезки $AB = 5$ см и $AC = 16$ см. На другой стороне этого же угла отложены отрезки $AD = 8$ см и $AE = 10$ см. Подобны ли треугольники ACD и ABE?

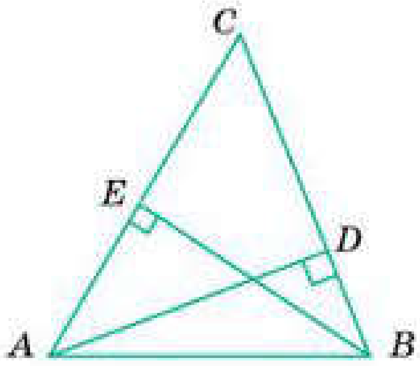


Рис. 14.14

30. На стороне AC треугольника ABC взята точка D, такая, что $\angle ABD = \angle ACB$. Найдите стороны треугольника ABD, если $AB = 8$ см, $BC = 12$ см, $AC = 18$ см.

31. В треугольнике ABC $AB = 25$ см, $BC = 20$ см и $AC = 30$ см. На стороне AB отложен отрезок $BK = 4$ см, а на стороне BC взята точка L таким образом, что угол BKL равен углу C треугольника ABC. Найдите периметр треугольника BKL.

32. Как узнать высоту недосягаемого предмета: дерева, столба, здания, скалы ..., используя свойства подобных треугольников (рис. 14.15)?

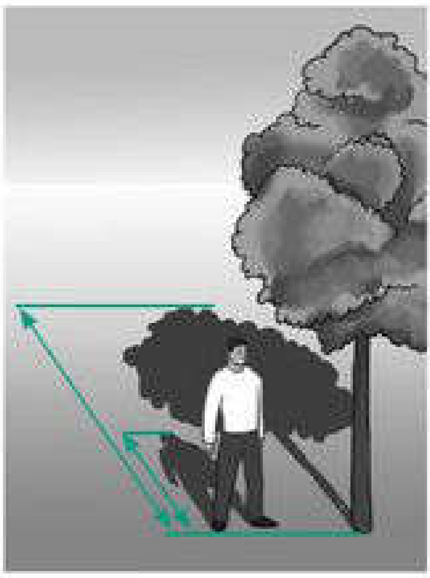


Рис. 14.15

33. Наблюдатель, находящийся в пункте A (рис. 14.16), видит конец шеста C и верхнюю точку D мачты, расположенными на одной прямой. Какова высота мачты, если $AE = 60$ м, $AB = 6$ м и $BC = 3$ м?

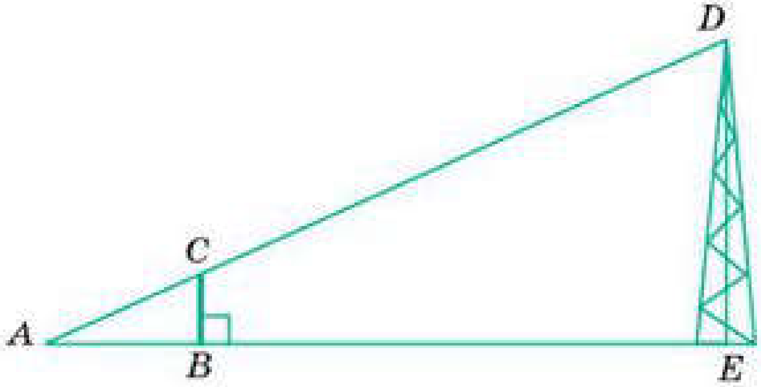


Рис. 14.16

34. Длина тени, отбрасываемой деревом, равна 8 м, в то время как длина тени палки, воткнутой вертикально в землю, равна 2 м. Определите высоту дерева, если длина палки равна 1 м.

35. Человек ростом 1,8 м стоит на расстоянии 12 м от столба, на котором висит фонарь на высоте 5,4 м. Найдите длину тени человека в метрах.

36. Человек ростом 1,7 м стоит на расстоянии 8 шагов от столба, на котором висит фонарь. Тень человека равна четырем шагам. На какой высоте (в метрах) расположен фонарь?

37. Карандаш длиною 15 см, помещенный вертикально в полуметре от свечи, бросает на стену тень длиною 75 см. Определите расстояние свечи от стены.

38. Окжетпес — величественная скала (в переводе на русский язык — "не долетит стрела"), расположенная на берегу озера Боровое — Аулиеколь (священное озеро) (рис. 14.17).

Рис. 14.17

По свидетельствам, об этой скале было сложено более 16 легенд и сказаний. Наблюдатель, находящийся у подножия горы в пункте A (рис. 14.18), видит конец шеста C и верхнюю точку D скалы, расположенными на одной прямой. Найдите высоту скалы от подножия, если $AE = 500$ м, $AB = 6$ м и $BC = 3$ м.

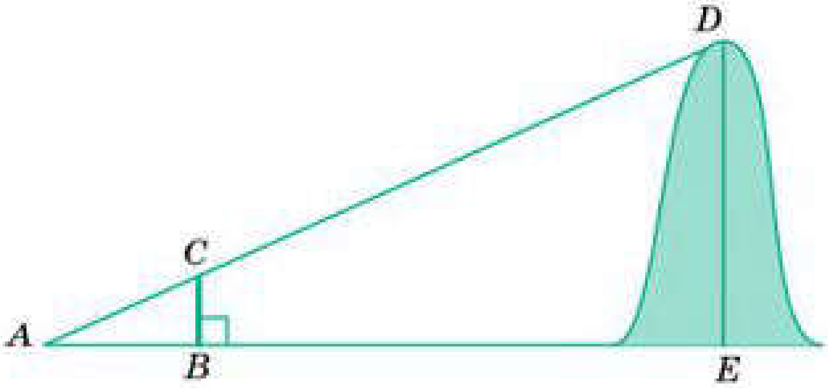


Рис. 14.18

39. Архитектурное сооружение "Байтерек" считается символом обновления, символом единения Казахстана и представляет собой высокую металлическую конструкцию с огромным позолоченным стеклянным шаром на вершине (рис. 14.19). Человек, находясь на некотором расстоянии от Байтерека, видит людей, присутствующих в панорамном зале. Найдите высоту сооружения, если $MD = 145{,}5$ м, $MB = 3$ м и $AB = 2$ м.

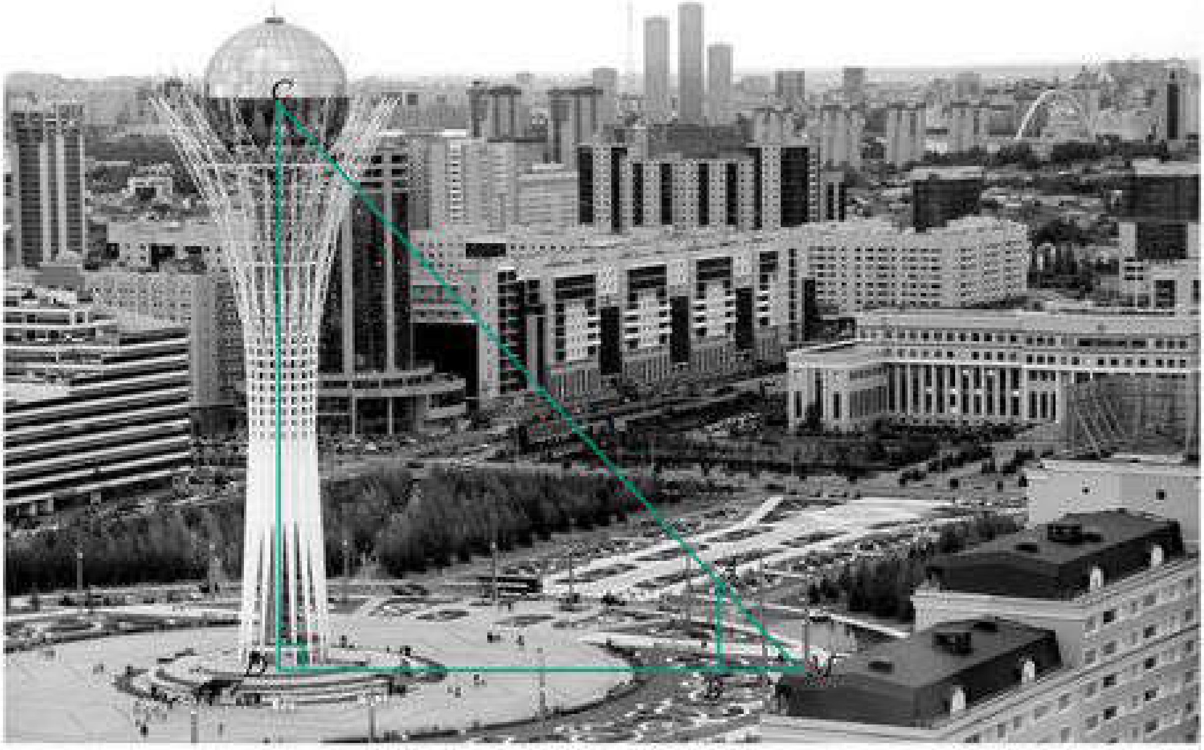


Рис. 14.19

40. Дворец мира и согласия — пирамида — одна из достопримечательностей столицы Республики Казахстан. Пирамида стала символом единения различных религий, этносов и культур, открытости народа и государства всему миру (рис. 14.20).

Рис. 14.20

Длина тени, отбрасываемой пирамидой, равна 93 м, в то время как длина тени палки, воткнутой вертикально в землю, равна 3 м (рис. 14.21). Определите высоту пирамиды, если длина палки равна 2 м.

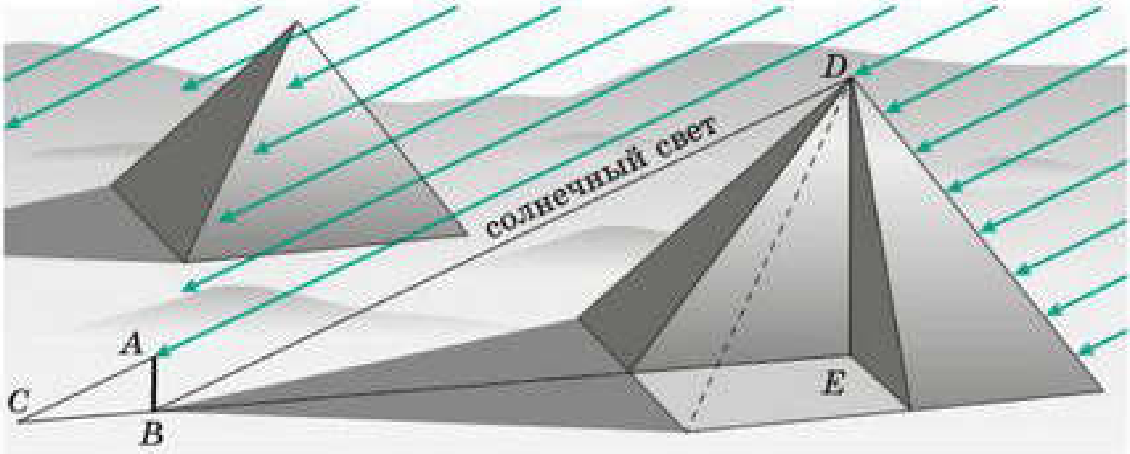


Рис. 14.21

41. Для определения высоты дерева можно использовать зеркало так, как показано на рисунке 14.22. Луч света FD, отражаясь от зеркала в точке D, попадает в глаз человека (точка B).

Определите высоту дерева, если $AC = 165$ см, $BC = 12$ см, $AD = 120$ см, $DE = 4{,}8$ м, $\angle 1 = \angle 2$.

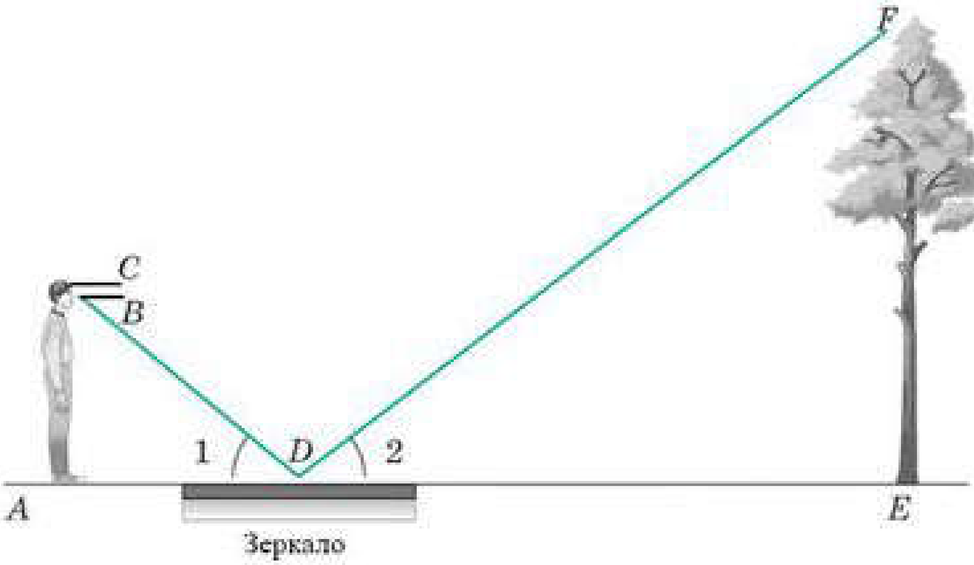
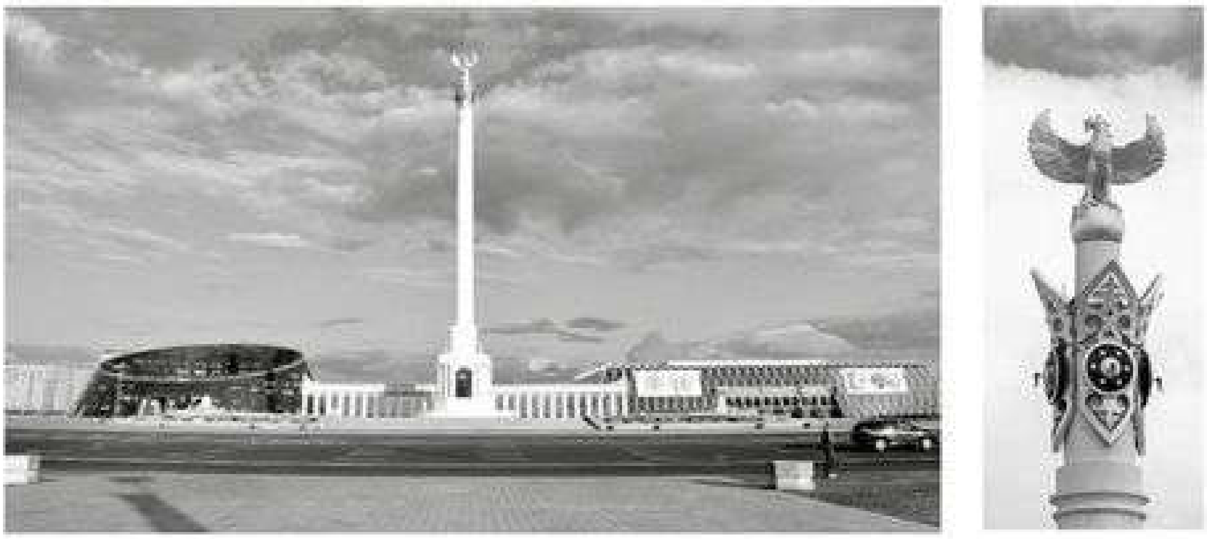


Рис. 14.22

42. Монумент "Қазақ елі" — одна из достопримечательностей г. Нур-Султана (рис. 14.23, а). Высота белоснежной стелы напоминает о годе, когда Казахстан стал независимым государством. Стела, устремленная вверх, на вершине которой установлена священная птица Самрук (рис. 14.23, б), демонстрирует стремление казахстанцев к дальнейшему развитию и процветанию.



а) б)

Рис. 14.23

Как можно вычислить высоту монумента с помощью зеркала (рис. 14.24)? Какие измерения при этом надо выполнить?

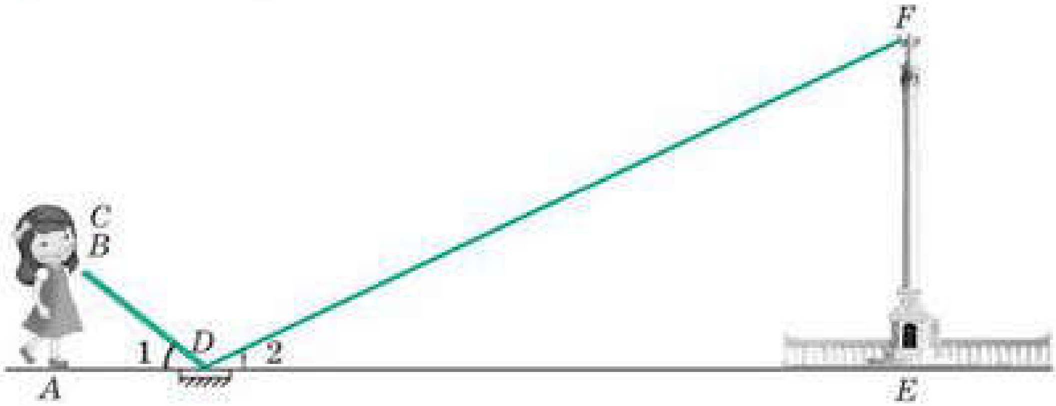


Рис. 14.24

43. На рисунке 14.25 показано, как можно найти ширину реки AD, построив на местности два подобных треугольника — ABC и DEC. Найдите AD, если $BC = 50$ м, $EC = 16$ м, $DC = 17$ м.

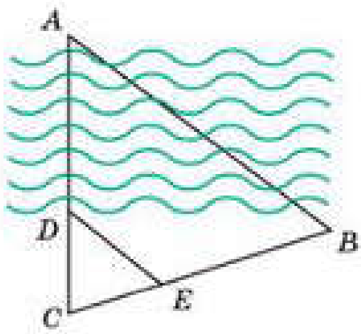


Рис. 14.25

44. Иртыш — самая длинная река-приток в мире, одна из больших рек Казахстана и основная водная артерия Восточно-Казахстанской и Павлодарской областей. Длина Иртыша составляет 4248 км, что превышает длину самой Оби. На рисунке 14.26 изображен вид на Иртыш в Павлодаре. Найдите ширину русла реки AD, построив на местности два подобных треугольника — ABC и DEC, где $BC = 608$ м, $EC = 16$ м, $DC = 17$ м.

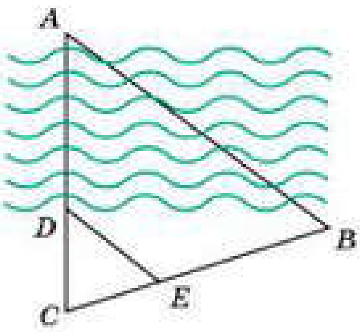


Рис. 14.26

C

45. Можно ли треугольник пересечь прямой, непараллельной его стороне, так, чтобы отсечь от него подобный треугольник?

46. Докажите, что высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, разбивает его на два треугольника, подобных исходному.

47. В треугольник ABC вписан ромб $ADEF$ так, что угол A у них общий, а вершина E находится на стороне BC (рис. 14.27). Найдите сторону ромба, если $AB = c$ и $AC = b$.

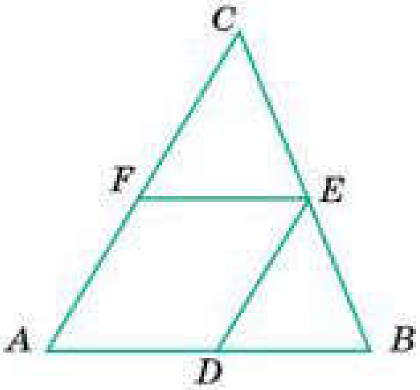


Рис. 14.27

48. В треугольник ABC со стороной $AB = c$ и высотой $CD = h$ вписан квадрат так, что две его вершины принадлежат стороне AB, а две другие — двум другим сторонам треугольника (рис. 14.28). Найдите сторону квадрата.

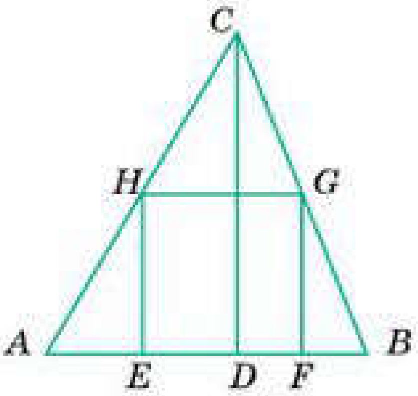


Рис. 14.28

49. На горе находится башня, высота которой равна 100 м (рис. 14.29). Некоторый предмет A у подножия горы наблюдают сначала с вершины B башни под углом 60° к горизонту, а потом с ее основания C под углом 30°. Найдите высоту H горы.

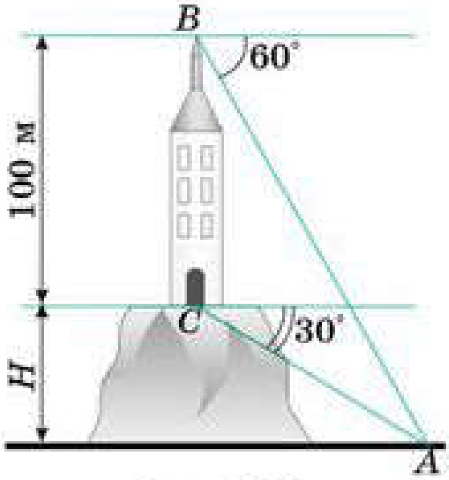


Рис. 14.29

50. Диаметр Луны приближенно равен 3400 км, и она находится на расстоянии 408000 км от Земли. На какое расстояние (в сантиметрах) от наблюдателя нужно удалить монету диаметром 1 см, чтобы на вид она стала такой же величины, как Луна?

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

51. Повторите тригонометрические функции углов.

52. Для треугольника ABC попробуйте выразить сторону AC через сторону BC и углы A и B этого треугольника.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Какие прямые переходят сами в себя при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$:

A) вектор нормали прямой перпендикулярен вектору $\vec{a}$;
B) вектор нормали прямой одинаково направлен с вектором $\vec{a}$;
C) вектор нормали прямой противоположно направлен с вектором $\vec{a}$;
D) таких прямых нет?

2. Какие прямые при осевой симметрии переходят в себя:

A) параллельные оси симметрии;
B) перпендикулярные оси симметрии;
C) пересекающие ось симметрии под острым углом;
D) таких прямых нет?

3. Сколько осей симметрии имеет прямая:

A) одну; B) две;
C) бесконечно много; D) ни одной?

4. Сколько осей симметрии имеет луч:

A) одну; B) две;
C) бесконечно много; D) ни одной?

5. Сколько центров симметрии имеет прямая:

A) один; B) два;
C) бесконечно много; D) ни одного?

6. Сколько центров симметрии имеет луч:

A) один; B) два;
C) бесконечно много; D) ни одного?

7. На какой угол нужно повернуть прямую вокруг точки, не принадлежащей ей, чтобы получить прямую, параллельную данной:

A) 45°; B) 90°; C) 135°; D) 180°?

8. Центром симметрии какого порядка является точка пересечения диагоналей квадрата:

A) второго; B) третьего;
C) четвертого; D) шестого?

9. На какой наименьший угол нужно повернуть правильный треугольник вокруг его центра описанной окружности, чтобы этот треугольник совместился сам с собой:

A) 30°; B) 60°; C) 90°; D) 120°?

10. Сколько осей симметрии имеет правильный шестиугольник:

A) 2; B) 3; C) 4; D) 6?

11. При каких движениях каждая прямая переходит в параллельную прямую или в саму себя:

A) при центральной симметрии и параллельном переносе;
B) при центральной симметрии, осевой симметрии и параллельном переносе;
C) при центральной и осевой симметриях;
D) при осевой симметрии и параллельном переносе?

12. Сколько пар подобных треугольников получится, если в прямоугольном треугольнике провести высоту из вершины прямого угла:

A) 2; B) 3; C) 4; D) 6?

13. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) найдите высоту CH, если $AH = 3$ см, $BH = 6$ см:

A) $3\sqrt{2}$ см; B) $2\sqrt{3}$ см;
C) $\sqrt{6}$ см; D) $3\sqrt{3}$ см.

14. Катеты прямоугольного треугольника равны 3 см и 4 см. Найдите катеты подобного прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна 6 см:

A) 3,2 см и 4,4 см; B) 3,4 см и 4,6 см;
C) 3,6 см и 4,8 см; D) 3,8 см и 4,2 см.

15. Стороны треугольника равны 2 см, 3 см, 4 см. Большая сторона подобного ему треугольника равна 36 см. Найдите периметр второго треугольника:

A) 36 см; B) 81 см;
C) 144 см; D) 234 см.

16. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$ и $\angle B = \angle B_1$, $AB = 4$ см, $BC = 6$ см, $AC = 3$ см, $B_1C_1 = 3$ см. Найдите A_1B_1 и A_1C_1:

A) 3 см и 4 см; B) 3 см и 1,5 см;
C) 2 см и 3 см; D) 2 см и 1,5 см.

17. Прямая делит параллелограмм на два подобных параллелограмма. Стороны меньшего из них равны 4 см и 6 см. Найдите периметр первоначального параллелограмма:

A) 14 см; B) 20 см;
C) 30 см; D) 46 см.

18. Основания трапеции равны 3 см и 12 см. Прямая делит эту трапецию на две подобные трапеции. Найдите их общее основание:

A) 6 см; B) 8 см;
C) 9 см; D) 10 см.

19. Периметр параллелограмма равен 96 см. Каждая его диагональ разделена на три равные части. Найдите периметр четырехугольника, вершинами которого являются точки деления:

A) 16 см; B) 24 см;
C) 32 см; D) 64 см.

20. Найдите коэффициент подобия данного квадрата и квадрата, вершинами которого являются середины его сторон:

A) $\frac{1}{2}$; B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; D) 2.

Глава 3

РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

15. ТЕОРЕМА СИНУСОВ

Теорема (теорема синусов). Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.

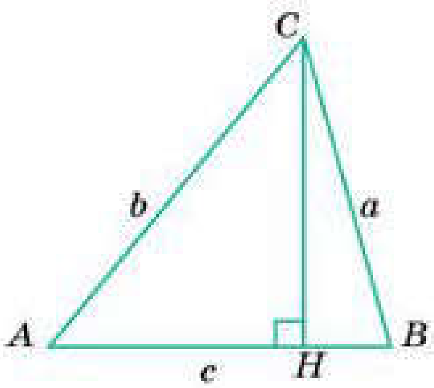


Рис. 15.1

Доказательство. Пусть ABC — данный треугольник, $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Проведем высоту CH (рис. 15.1).

Имеем

$$CH = b \cdot \sin A = a \cdot \sin B.$$

Следовательно,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}.$$

Аналогично доказывается, что выполняется равенство

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Сделайте это самостоятельно.

Оба эти равенства дают равенства

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

которые означают, что стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.

Используя теорему синусов, докажем одно важное свойство биссектрисы треугольника.

Теорема. Биссектриса угла треугольника делит сторону, противолежащую этому углу, на части, пропорциональные сторонам треугольника, прилежащих к этому углу.

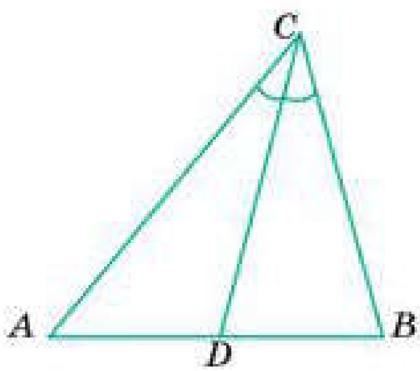


Рис. 15.2

Доказательство. Пусть ABC — данный треугольник, CD — биссектриса (рис. 15.2).

Докажем, что выполняется равенство

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC}.$$

По теореме синусов, примененной к треугольнику ACD, имеет место равенство

$$\frac{AD}{\sin\angle ACD} = \frac{AC}{\sin\angle ADC}.$$

По теореме синусов, примененной к треугольнику BCD, имеет место равенство

$$\frac{BD}{\sin\angle BCD} = \frac{BC}{\sin\angle BDC}.$$

Учитывая, что $\sin\angle ACD = \sin\angle BCD$ и $\sin\angle ADC = \sin\angle BDC$, из этих равенств получаем требуемое равенство

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC}.$$

Теорема синусов позволяет:

1) по известным углам и одной стороне треугольника найти две другие его стороны;

2) по известным двум сторонам треугольника и углу, противолежащему одной из этих сторон, найти другие углы этого треугольника.

Действительно, если в треугольнике ABC известна сторона AB, равная c, и углы A, B и C, то стороны AC и BC выражаются формулами:

$$AC = c\frac{\sin B}{\sin C}, \qquad BC = c\frac{\sin A}{\sin C}.$$

Самостоятельно выразите синус угла B треугольника ABC через его стороны $BC = a$, $AC = b$ и синус угла A.

С помощью теоремы синусов решаются практические задачи нахождения расстояний до недоступных предметов.

Пусть требуется определить расстояние от данного пункта A до недоступного пункта C, т. е. такого, для которого нельзя произвести непосредственное измерение расстояния AC. В этом случае берут еще один пункт B и измеряют расстояние AB и углы A и B в треугольнике ABC (рис. 15.3). Затем, используя приведенные выше формулы, находят расстояние AC.

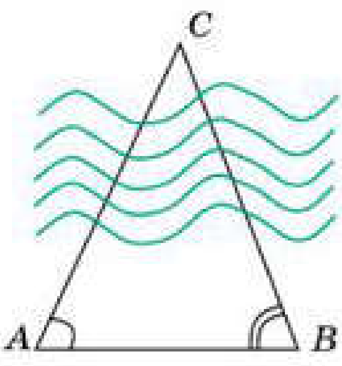


Рис. 15.3

Пример. Найдите расстояние от данного пункта A до недоступного пункта C (рис. 15.3), если $AB = 100$ м, $\angle A = 60°$, $\angle B = 70°$. Воспользуйтесь таблицей приближенных значений тригонометрических функций.

Решение. Угол C равен $50°$. По теореме синусов

$$AC = AB\frac{\sin B}{\sin C} = 100 \cdot \frac{0{,}94}{0{,}77} \approx 122 \text{ (м)}.$$

?

1. Сформулируйте теорему синусов.
2. Сформулируйте теорему о биссектрисе треугольника.
3. Как выражаются стороны треугольника через известную сторону и его углы?
4. Как выражается синус угла треугольника через две известные стороны и его угол?
5. Какую практическую задачу позволяет решить теорема синусов?

Задачи

А

1. В треугольнике ABC $AB = 6$, $\angle A = 45°$, $\angle C = 60°$. Найдите сторону BC.

2. В треугольнике ABC $BC = 5$, $\angle A = 30°$, $\angle B = 105°$. Найдите сторону AB.

3. В треугольнике ABC даны две стороны $BC = 3$, $AC = 3\sqrt{2}$ и $\angle A$, равный $45°$. Найдите угол B.

4. В остроугольном треугольнике ABC даны две стороны $BC = 1$, $AC = \sqrt{2}$ и $\angle A$, равный $30°$. Найдите угол B.

5. Найдите отношения сторон $AC : BC$ и $AB : BC$ в треугольнике ABC, в котором: а) $\angle A = 45°$, $\angle B = 30°$; б) $\angle A = 120°$, $\angle B = 30°$.

В

6. В треугольнике ABC даны две стороны $BC = 2$, $AC = 2\sqrt{2}$ и $\angle A$, равный $30°$. Найдите угол B.

7. Диагональ параллелограмма равна c и образует со сторонами этого параллелограмма углы φ и ψ. Выразите стороны параллелограмма через c, φ и ψ.

8. В треугольнике ABC $AB = 8$, $BC = 6$, $AC = 10$. Найдите отрезки, на которые биссектриса CD этого треугольника делит его сторону AB (рис. 15.4).

9. В треугольнике ABC $AB = 1$, $AC = BC = 2$. Найдите отрезки, на которые бис-

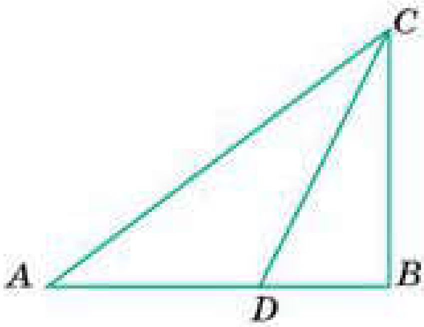


Рис. 15.4

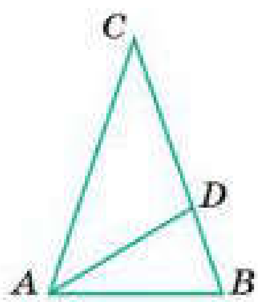


Рис. 15.5

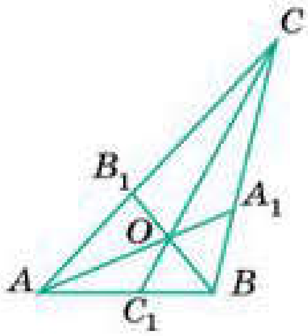


Рис. 15.6

сектриса AD этого треугольника делит его сторону BC (рис. 15.5).

10. В треугольнике ABC $AB = 2$, $BC = 3$, $AC = 4$. Найдите отрезки, на которые биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1 этого треугольника делят его стороны (рис. 15.6).

C

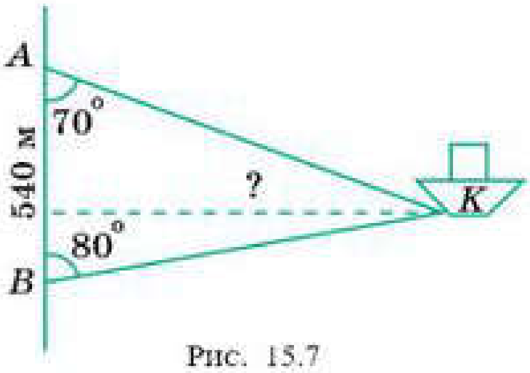


Рис. 15.7

11. В треугольнике ABC проведена медиана CD. Докажите, что $AC : BC = \sin\angle DCB : \sin\angle DCA$.

12. В трапеции $ABCD$ ($AB \parallel CD$) $AB = a$, $CD = b$ ($a > b$), $\angle A = \varphi$, $\angle B = \psi$. Выразите боковые стороны AD и BC трапеции через a, b, φ и ψ.

13. В треугольнике ABC $AB = c$, $\angle A = \varphi$, $\angle B = \psi$. Выразите высоту CH этого треугольника через c, φ и ψ.

14. Используя данные, указанные на рисунке 15.7, найдите расстояние от корабля K до берега AB. В ответе укажите целое число метров.

15. Из некоторой точки вершина горы видна под углом 30°. При приближении к горе на 1000 м вершина стала видна под углом 45°. Найдите приблизительную высоту горы (рис. 15.8). В ответе укажите целое число метров.

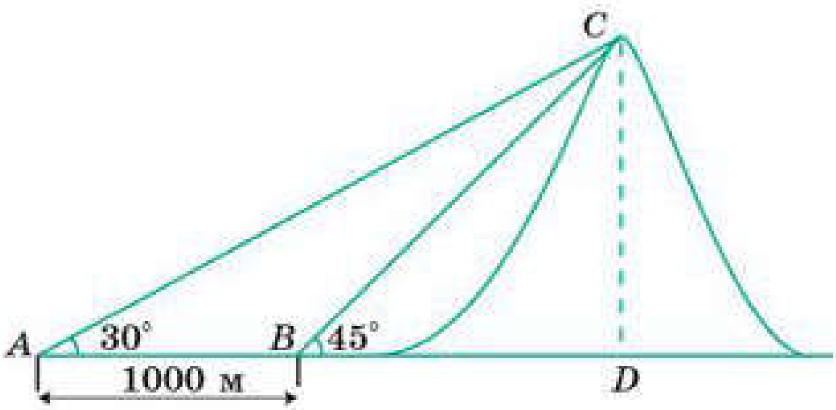


Рис. 15.8

16. С помощью теодолита (или эклиметра) и рулетки сделайте необходимые измерения и найдите высоту недоступного предмета (например, дерева) (рис. 15.9).

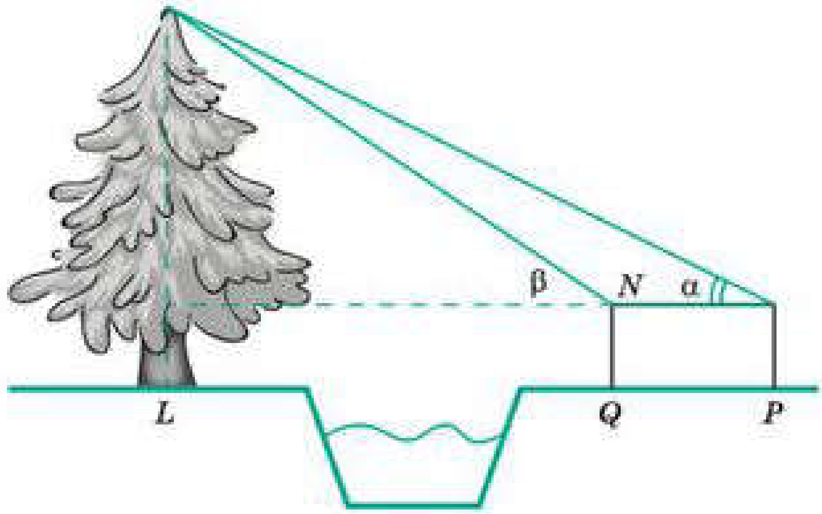


Рис. 15.9

Рис. 15.10

17. Высота архитектурного сооружения "Байтерек" — самой главной и узнаваемой достопримечательности столицы Казахстана — 97 м. (рис. 15.10). Вычислите длины BC, AC, если $BC = AB$, $AO = OC$, $\angle BOC = \angle BOA = 90°$, $\angle BCO = 30°$, $\angle AOC = 60°$.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

18. Повторите понятие скалярного произведения векторов и его свойства.

19. В треугольнике ABC $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, AH — высота (рис. 15.11). Выразите через a, b и угол C отрезки AH, CH, BH. Используя эти выражения, найдите выражение c^2 через a, b и косинус угла C.

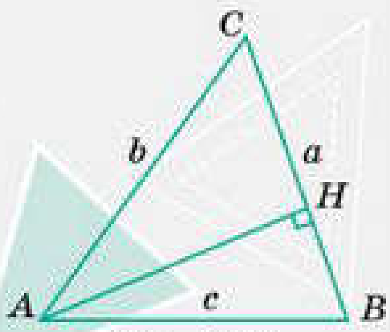


Рис. 15.11

16. ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ

Следующая теорема является обобщением теоремы Пифагора.

Теорема (теорема косинусов). Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.

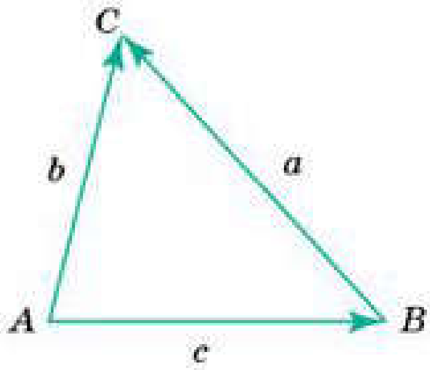


Рис. 16.1

Доказательство. Пусть ABC — произвольный треугольник. Обозначим $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ и докажем, что выполняется равенство

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

Заметим, что в случае, если угол C равен 90°, косинус C равен нулю и мы имеем теорему Пифагора $c^2 = a^2 + b^2$.

Воспользуемся векторным равенством $\overline{AB} = \overline{AC} - \overline{BC}$ (рис. 16.1) Возведем это равенство в квадрат. Получим:

$$\overline{AB^2} = \left(\overline{AC} - \overline{BC}\right)^2 = \overline{AC^2} + \overline{BC^2} - 2\overline{AC} \cdot \overline{BC}.$$

Так как $\overline{AB^2} = c^2$, $\overline{AC^2} = b^2$, $\overline{BC^2} = a^2$, $\overline{AC} \cdot \overline{BC} = b \cdot a \cdot \cos C$, то это равенс тво можно переписать в виде $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$.

Пример. В треугольнике ABC $BC = 3$, $AC = 4$, $AB = 5$. Найдите косинусы его углов A, B, C.

Решение. По теореме косинусов имеем равенства:

$$5^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos C;$$
$$4^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos B;$$
$$3^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos A;$$

Из первого равенства получаем, что $\cos C = 0$. Следовательно, $\angle C = 90°$. Из второго равенства находим $\cos B = 0{,}6$. Из третьего равенства находим $\cos A = 0{,}8$.

Используя теорему косинусов, докажите, что если для сторон a, b, c треугольника ABC выполняется неравенство $c^2 > a^2 + b^2$, то этот треугольник тупоугольный.

Используя теорему косинусов, докажем одно важное свойство диагоналей параллелограмма.

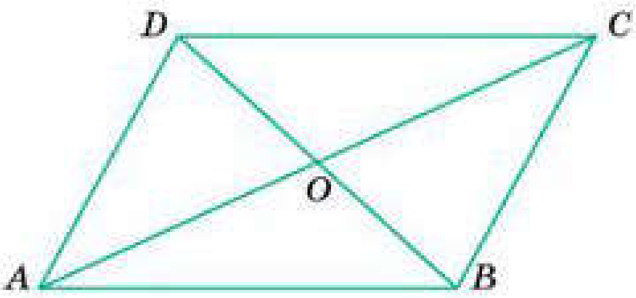


Рис. 16.2

Теорема. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

Доказательство. Для параллелограмма $ABCD$ рассмотрим треугольники ABC и ABD (рис. 16.2). Применяя к ним теорему косинусов, получим равенства

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos B,$$
$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos A.$$

Складывая эти равенства и учитывая, что $AB = CD$ и $\cos B = -\cos A$, получаем требуемое равенство

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2.$$

Применим эту теорему для нахождения медианы треугольника с данными сторонами.

Теорема. Пусть в треугольнике ABC $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Тогда для медианы m_c этого треугольника, проведенной из вершины C, имеет место формула

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}.$$

Доказательство. Достроим треугольник ABC до параллелограмма $ACBD$ (рис. 16.3). Его диагональ CD равна удвоенной медиане CO треугольника ABC. По доказанной теореме имеет место равенство

$$c^2 + (2m_c)^2 = 2a^2 + 2b^2,$$

из которого непосредственно следует требуемое равенство.

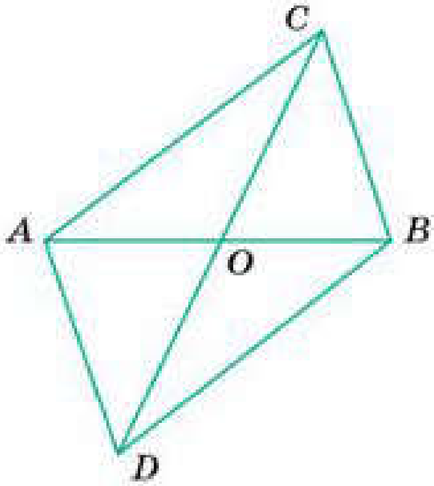


Рис. 16.3

Пример. Найдите медианы треугольника, стороны которого равны 6, 8, 10.

Решение. Пусть в треугольнике ABC $AB = 10$, $AC = 8$, $BC = 6$. Тогда для медиан m_a, m_b, m_c, проведенных из вершин A, B, C, имеет место формула

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2 \cdot 8^2 + 2 \cdot 10^2 - 6^2} = \sqrt{73},$$
$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2 \cdot 6^2 + 2 \cdot 10^2 - 8^2} = \sqrt{52},$$
$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2 \cdot 6^2 + 2 \cdot 8^2 - 10^2} = 5.$$

Воспользуемся теоремой косинусов для вывода еще одной формулы, выражающей площадь треугольника через его стороны. Она впервые была найдена древнегреческим математиком Героном Александрийским и носит название ***формулы Герона.***

Теорема. Площадь S треугольника ABC, для которого $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, выражается формулой

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ — полупериметр треугольника ABC.

Доказательство. Воспользуемся формулой площади треугольника

$$S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin C.$$

Выразим $\sin C$ через стороны треугольника. Получим

$$\sin^2 C = 1 - \cos^2 C = (1 + \cos C) \cdot (1 - \cos C).$$

По теореме косинусов $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.

Подставляя это выражение в формулу для $\sin^2 C$, будем иметь

$$\sin^2 C = \frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \cdot \frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2ab} =$$

$$= \frac{(a + b + c)(a + b - c)(c + a - b)(c - a + b)}{4a^2b^2} = \frac{4p(p - a)(p - b)(p - c)}{a^2b^2}.$$

Следовательно,

$$\sin C = \frac{2}{ab}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Подставляя это выражение в формулу площади треугольника, окончательно получим

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \square$$

1. Сформулируйте теорему косинусов.
2. Почему теорема косинусов является обобщением теоремы Пифагора?
3. Сформулируйте теорему о сумме квадратов диагоналей параллелограмма.
4. Сформулируйте теорему о медиане треугольника.
5. Как выражается площадь треугольника через его стороны?

Задачи

А

1. При каких значениях угла треугольника квадрат стороны, лежащей против этого угла: а) меньше суммы квадратов двух других сторон; б) равен сумме квадратов двух других сторон; в) больше суммы квадратов двух других сторон?

2. Не вычисляя углы треугольника, укажите его вид (относительно углов), если стороны треугольника равны: а) 7, 8, 12; б) 30, 40, 50; в) 13, 14, 15.
3. В треугольнике ABC $AB = 12$, $AC = 8$, $\angle A = 60°$. Найдите третью сторону.
4. Найдите сторону треугольника, лежащую против угла в 30°, если прилежащие к нему стороны равны 2 и $\sqrt{3}$.
5. Найдите сторону треугольника, лежащую против угла в 45°, если прилежащие к нему стороны равны 2 и $\sqrt{2}$.
6. В треугольнике ABC $AC = BC = 1$, угол C равен 120°. Найдите AB.
7. В треугольнике ABC $AC = BC = 1$, угол C равен 135°. Найдите AB.
8. В треугольнике ABC $AC = BC = 1$, угол C равен 150°. Найдите AB.
9. В треугольнике ABC $AC = BC = 1$, $AB = \sqrt{3}$. Найдите его углы.
10. Даны три стороны треугольника $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$. Найдите косинусы его углов A, B, C.
11. Используя рисунок 16.4, укажите способ нахождения расстояния между двумя объектами A и B, разделенными преградой.

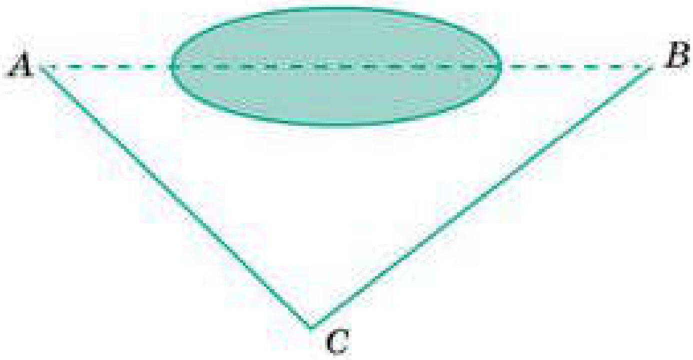


Рис. 16.4

B

12. Стороны параллелограмма равны 3 см и 4 см. Один из его углов равен 60°. Найдите диагонали этого параллелограмма.
13. Диагонали параллелограмма равны 6 см и 8 см. Угол между ними равен 60°. Найдите стороны этого параллелограмма.
14. Стороны параллелограмма равны 2 см и 3 см, одна диагональ равна 4 см. Найдите другую диагональ.
15. Стороны треугольника равны 2 см, 3 см и 4 см. Найдите медиану, проведенную к большей стороне.
16. В равнобедренном треугольнике боковые стороны равны 4 см. Найдите основание этого треугольника, если медиана, проведенная к боковой стороне, равна 3 см.

C

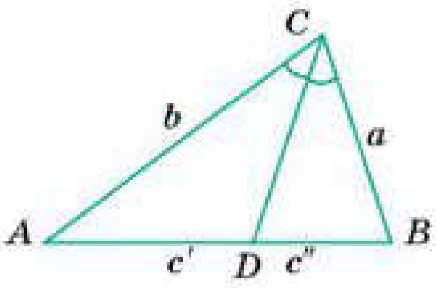


Рис. 16.5

17. В треугольнике ABC $AC = b$, $BC = a$. Докажите, что для биссектрисы l_c, проведенной из вершины C, имеет место формула

$$l_c = \sqrt{ab - c'c''},$$

где c', c'' — отрезки, на которые биссектриса делит сторону AB (рис. 16.5).

18. В треугольнике ABC $AB = 10$, $AC = 8$, $BC = 6$. Найдите биссектрису BD.

19. В треугольнике ABC $AB = 5$, $AC = BC = 20$. Найдите биссектрису AD.

20. В треугольнике ABC $AC = 12$, $BC = 15$, $AB = 18$. Найдите биссектрису CD.

21. Найдите площадь треугольника, стороны которого равны 5, 6, 7.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

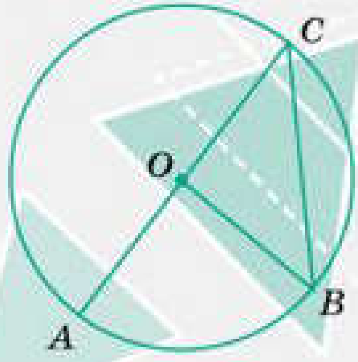


Рис. 16.6

22. Повторите понятие окружности.

23. На рисунке 16.6 изображена окружность и ее центр O. Попробуйте выразить угол ACB через угол AOB.

17. УГЛЫ, ВПИСАННЫЕ В ОКРУЖНОСТЬ

Рассмотрим различное расположение углов по отношению к данной окружности.

Угол с вершиной в центре окружности называется ***центральным*** (рис. 17.1).

Угол, вершина которого принадлежит окружности, а стороны пересекают окружность, называется ***вписанным*** (рис. 17.2).

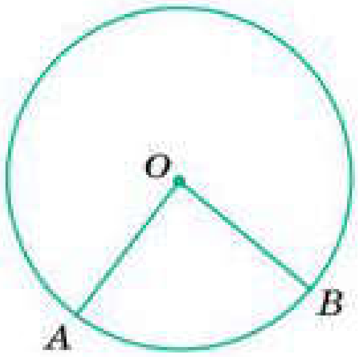


Рис. 17.1

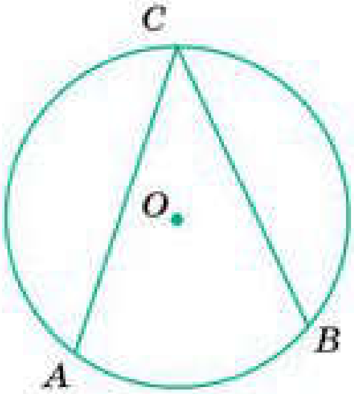


Рис. 17.2

Каждый центральный и вписанный углы данной окружности определяют ***дуги*** окружности, которые состоят из точек окружности, принадлежащих этим углам. При этом говорят, что углы опираются на соответствующие дуги окружности.

Теорема. Вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу окружности.

Доказательство. Пусть угол ACB вписан в окружность с центром в точке O. Рассмотрим случай, когда одна из сторон угла, например AC, проходит через центр O окружности (рис. 17.3).

Треугольник BOC — равнобедренный ($OB = OC$), следовательно, $\angle B = \angle C$. Угол AOB — внешний угол треугольника BOC, следовательно, равен сумме углов B и C. Поэтому $\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB$.

В случае, если центр O окружности лежит внутри угла ACB (рис. 17.4), проведем диаметр CD и рассмотрим углы ACD и BCD.

По доказанному $\angle ACD = \frac{1}{2}\angle AOD$, $\angle BCD = \frac{1}{2}\angle BOD$. Складывая эти равенства, получаем $\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB$. ◪

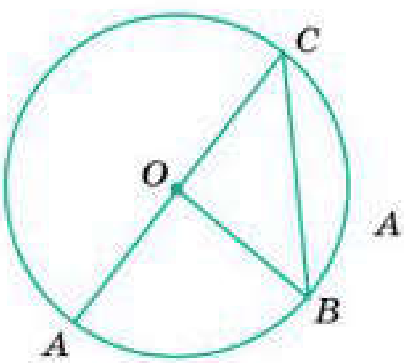


Рис. 17.3

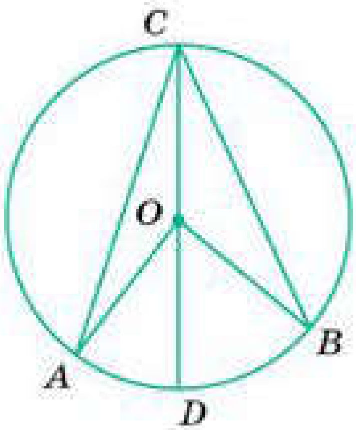


Рис. 17.4

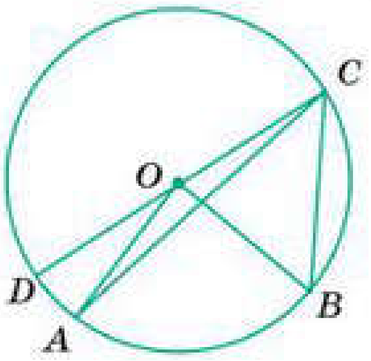


Рис. 17.5

Самостоятельно рассмотрите случай, когда центр O окружности лежит вне угла ACB. Используйте рисунок 17.5.

Следствие. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу окружности, равны.

Доказательство. Действительно, если вписанные углы ACB и ADB опираются на одну и ту же дугу $\smile AB$ (рис. 17.6), то у них один и тот же центральный угол AOB. По доказанной теореме данные вписанные углы равны половине центрального угла AOB и, следовательно, равны между собой.

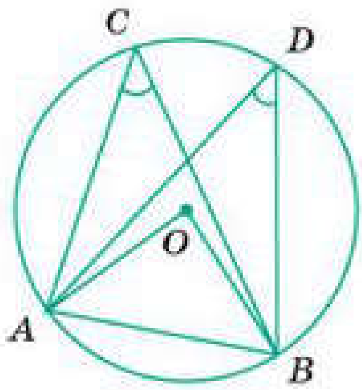


Рис. 17.6

Дуги окружности измеряются соответствующими центральными углами. Поэтому теорему о вписанном угле можно переформулировать следующим образом:

Теорема. Вписанный угол измеряется половиной дуги окружности, на которую он опирается.

Докажите самостоятельно.

Теперь рассмотрим случай, когда вершина угла принадлежит окружности, одна его сторона пересекает окружность, а другая касается окружности (рис. 17.7).

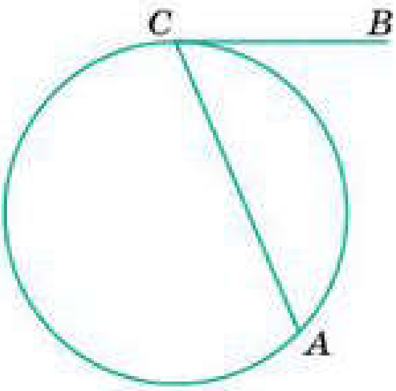


Рис. 17.7

Теорема. Угол, вершина которого принадлежит окружности, одна его сторона пересекает окружность, а другая касается окружности, измеряется половиной дуги окружности, заключенной внутри этого угла.

Доказательство. Пусть вершина C угла ACB принадлежит окружности, сторона AC пересекает окружность, а сторона BC касается окружности в точке C. Рассмотрим случай, когда угол ACB острый (рис. 17.8). Проведем диаметр CD. Угол BCD прямой, следовательно, измеряется половиной дуги окружности, заключенной внутри этого угла. Угол ACD вписанный, следовательно, измеряется половиной дуги $\smile AD$, заключенной внутри этого угла. Угол ACB можно

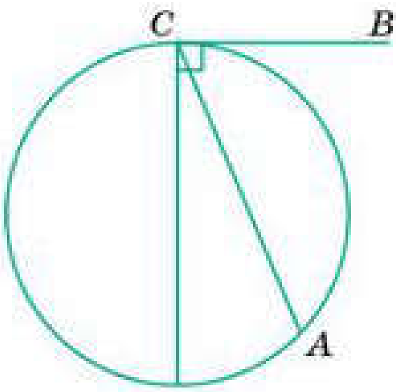


Рис. 17.8

представить как разность углов BCD и ACD. Следовательно, он измеряется половиной разностей дуг, заключенных внутри этих углов, т.е. измеряется половиной дуги $\smile AC$.

Самостоятельно рассмотрите случай, когда угол ACB тупой.

1. Какой угол называется *центральным* ?
2. Какой угол называется *вписанным* ?
3. Что называется *дугой окружности* ?
4. Как связаны между собой вписанный и центральный углы, опирающиеся на одну и ту же дугу?
5. Чем измеряется угол, вершина которого принадлежит окружности, одна сторона пересекает окружность, а другая касается окружности?

Задачи

А

1. Какие из углов на рисунке 17.9 являются вписанными?
2. Чему равен вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности?
3. Центральный угол на 35° больше вписанного угла, опирающегося на ту же дугу окружности. Найдите каждый из этих углов.
4. Вписанный угол на 20° меньше центрального угла, опирающегося на ту же дугу окружности. Найдите каждый из этих углов.

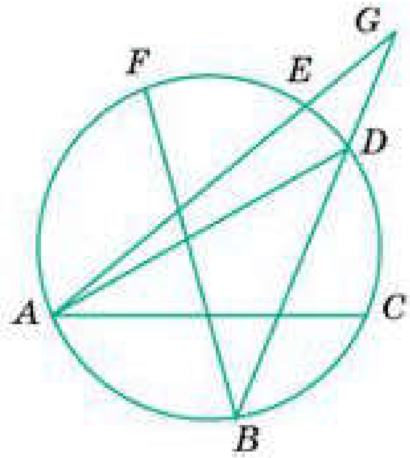


Рис. 17.9

5. Найдите вписанный угол, опирающийся на дугу, которая составляет: а) $\frac{1}{3}$ окружности; б) $\frac{1}{4}$ окружности; в) $\frac{1}{5}$ окружности; г) $\frac{1}{6}$ окружности .
6. Найдите вписанный угол, опира ющийся на дугу, которая составляет: а) 10% окружности; б) 20% окружности; в) 40% окружности; г) 50% окружности.
7. В окружности с центром O AB и CD — диаметры. Вписанный угол ABC равен 30°. Найдите центральный угол AOD (рис. 17.10).

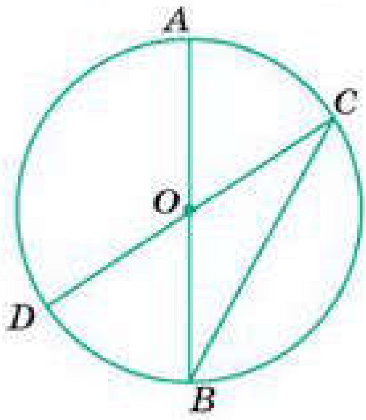


Рис. 17.10

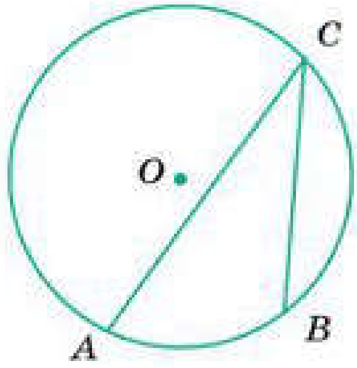


Рис. 17.11

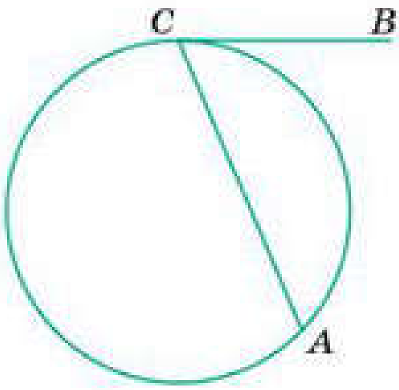


Рис. 17.12

8. В окружности с центром O AB и CD — диаметры. Центральный угол AOD равен 110°. Найдите вписанный угол ABC рис. (17.10).

9. Дуги AC и BC окружности составляют соответственно 200° и 90° (рис. 17.11). Найдите вписанный угол ACB.

10. Хорда делит окружность на две части, градусные величины которых относятся как 4 : 5. Под какими углами видна эта хорда из точек окружности?

11. Хорда AC стягивает дугу окружности в 140°. Найдите угол ACB между этой хордой и касательной к окружности, проведенной через точку C (рис. 17.12).

12. Угол между хордой AC и касательной BC к окружности равен 80°. Найдите градусную величину дуги, стягиваемую хордой AC (рис. 17.12).

B

13. Найдите величину угла ACB (рис. 17.13).

14. Найдите величину угла ACB (рис. 17.14).

15. Найдите величину угла ACB (рис. 17.15).

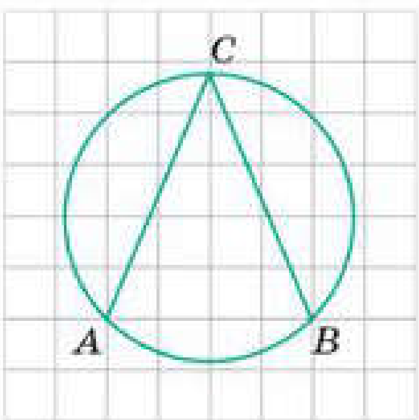


Рис. 17.13

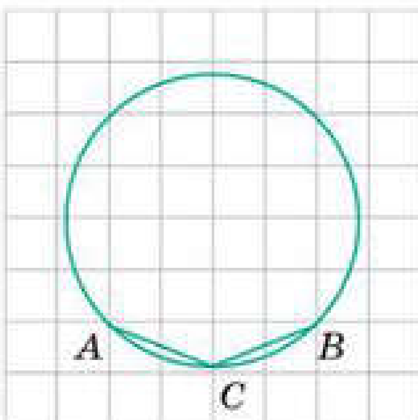


Рис. 17.14

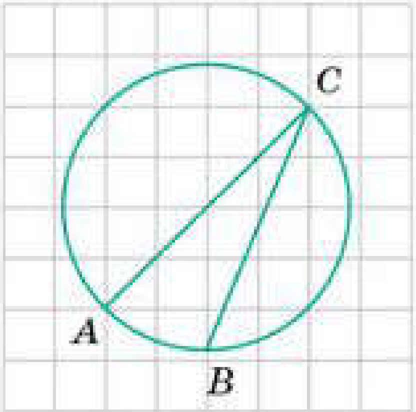


Рис. 17.15

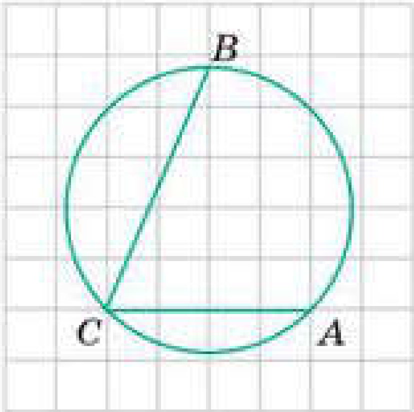


Рис. 17.16

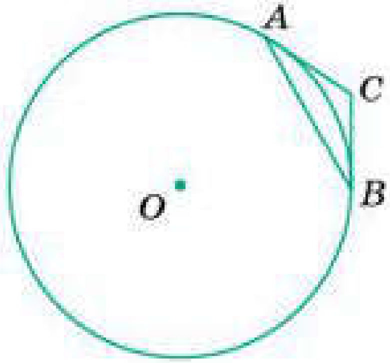


Рис. 17.17

16. Найдите величину угла ACB (рис. 17.16).

17. Чему равен острый вписанный угол, опирающийся на хорду, равную радиусу окружности?

18. Чему равен тупой вписанный угол, опирающийся на хорду, равную радиусу окружности?

19. Через концы дуги в $60°$ проведены касательные. Найдите угол между ними (рис. 17.17).

20. Укажите способ нахождения центра окружности с помощью угольника.

C

21. Докажите, что если хорды AC и BD окружности параллельны, то дуги $\overset{\frown}{AB}$ и $\overset{\frown}{CD}$, заключенные между этими хордами, равны (рис. 17.18).

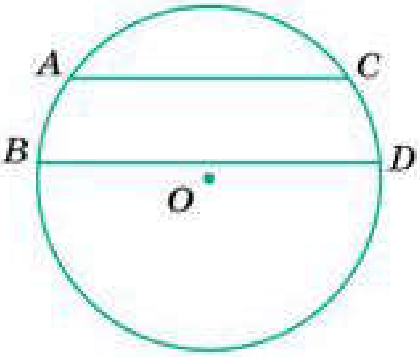


Рис. 17.18

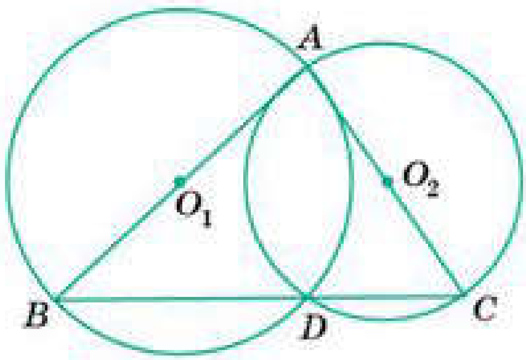


Рис. 17.19

22. Из точки A пересечения двух окружностей проведены их диаметры AB и AC. Докажите, что точки B, C и вторая точка D пересечения окружностей принадлежат одной прямой (рис. 17.19).

23. К двум окружностям, касающимся внешним образом в точке A, проведена общая касательная BC (B и C — точки касания). Докажите, что угол BAC — прямой (рис. 17.20).

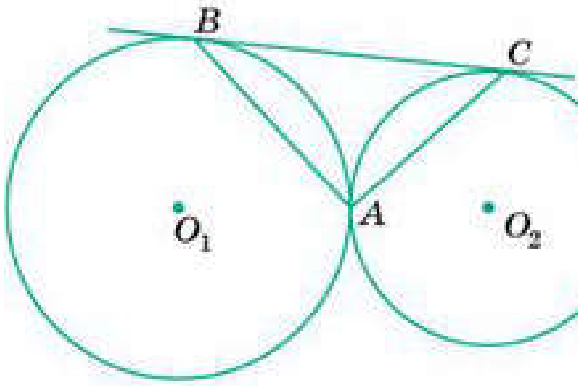


Рис. 17.20

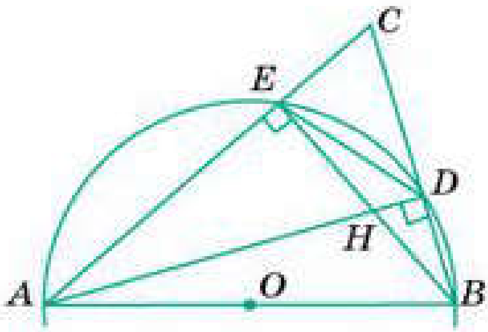


Рис. 17.21

24. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD и BE, пересекающиеся в точке H (рис. 17.21). Докажите, что треугольники ABH и EDH подобны.

25. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD и BE, пересекающиеся в точке H. Используя рисунок 17.21, докажите, что треугольники ABC и DEC подобны.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

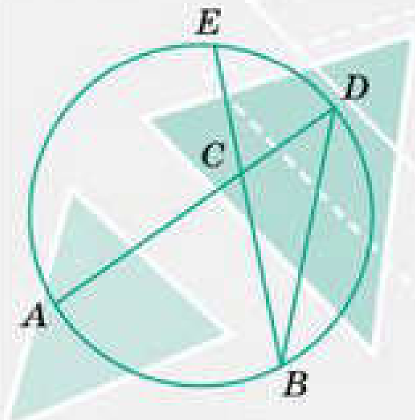


Рис. 17.22

26. На рисунке 17.22 изображена окружность и хорды AD и BE, пересекающиеся в точке C. Попробуйте выразить угол ACB через углы ADB и DBE.

18. УГЛЫ, СВЯЗАННЫЕ С ОКРУЖНОСТЬЮ

Рассмотрим случай расположения угла и окружности, при котором вершина угла лежит внутри окружности.

Теорема. Угол с вершиной внутри окружности измеряется полусуммой дуг, на которые опираются данный угол и вертикальный с ним угол.

Доказательство. Рассмотрим угол ACB с вершиной C внутри окружности, стороны которого пересекают окружность в точках A и B. Пусть D, E — точки пересечения с окружностью сторон вертикального с ним угла (рис. 18.1).

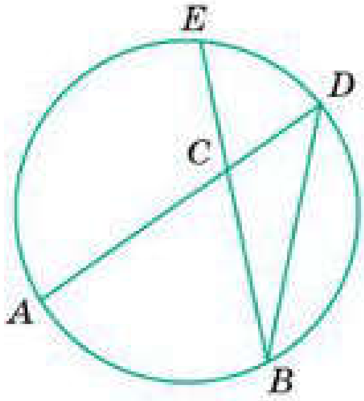


Рис. 18.1

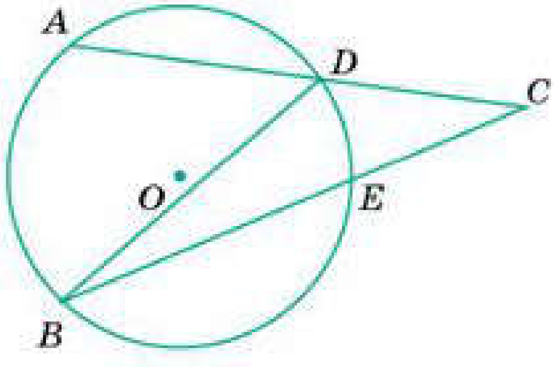


Рис. 18.2

Проведем хорду BD. Угол ACB является внешним углом треугольника BCD. Следовательно, $\angle ACB = \angle CBD + \angle CDB$. Углы, стоящие в правой части этого равенства, измеряются половинами соответствующих дуг. Следовательно, $\angle ACB = \frac{1}{2}(\smile AB + \smile DE)$. ☐

Следствие. Угол с вершиной внутри окружности больше половины центрального угла, опирающегося на ту же дугу.

Обоснуйте это самостоятельно.

Рассмотрим теперь случай расположения угла и окружности, при котором вершина угла лежит вне окружности.

Теорема. Угол с вершиной вне окружности, стороны которого пересекают окружность, измеряется полуразностью дуг окружности, заключенных внутри этого угла.

Доказательство. Рассмотрим угол ACB с вершиной C вне окружности, стороны которого пересекают окружность соответственно в точках A, D и B, E (рис. 18.2).

Проведем хорду BD. Угол ADB является внешним углом треугольника BCD. Следовательно, $\angle ACB = \angle ADB - \angle CBD$. Углы, стоящие в правой части этого равенства, измеряются половинами соответствующих дуг. Значит, $\angle ACB = \frac{1}{2}(\smile AB - \smile DE)$. ☐

Следствие. Угол с вершиной вне окружности, стороны которого пересекают окружность, меньше половины центрального угла, опирающегося на большую дугу окружности, заключенной внутри данного угла.

Обоснуйте это самостоятельно.

Теорема. Угол с вершиной вне окружности, одна сторона которого пересекает окружность, а другая касается окружности, измеряется полуразностью дуг окружности, заключенных внутри этого угла.

Доказательство. Рассмотрим угол ACB с вершиной C вне окружности, сторона AC которого касается окружности в точке A, а сторона BC пересекает окружность в точках B и D (рис. 18.3).

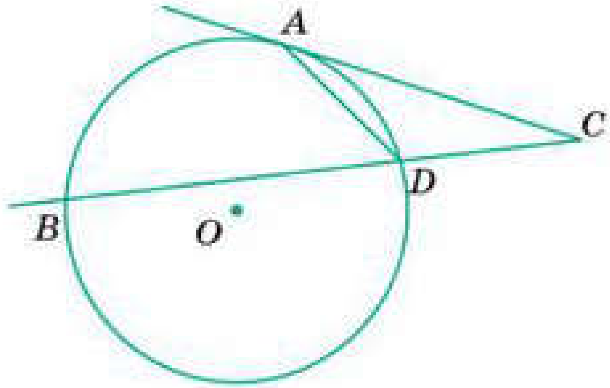


Рис. 18.3

Проведем хорду AD. Угол ADB является внешним углом треугольника ACD. Следовательно, $\angle ACB = \angle ADB - \angle CAD$. Углы, стоящие в правой части этого равенства, измеряются половинами соответствующих дуг. Значит, $\angle ACB = \frac{1}{2}(\smile AB - \smile AD)$. □

1. Чем измеряется угол, вершина которого лежит внутри окружности?
2. Чем измеряется угол с вершиной вне окружности, стороны которого пересекают окружность?
3. Чем измеряется угол с вершиной вне окружности, одна сторона которого пересекает окружность, а другая касается окружности?

Задачи

А

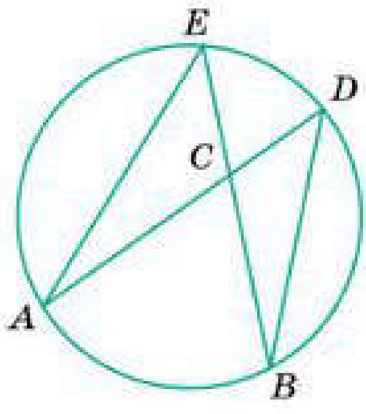


Рис. 18.4

1. Вписанные углы ADB и DAE равны соответственно 50° и 25°. Найдите угол ACB, образованный пересекающимися хордами AD и BE (рис. 18.4).

2. Дуги AB и DE окружности составляют соответственно 85° и 45°. Найдите угол ACB, образованный хордами AD и BE, пересекающимися в точке C (рис. 18.4).

3. Найдите угол ACB, если вписанные углы ADB и DBE опираются на дуги окружности, градусные величины которых равны соответственно 118° и 42° (рис. 18.2).

4. Угол ACB равен $42°$. Градусная величина дуги AB окружности равна $124°$. Найдите угол DBE (рис. 18.2).

5. Найдите угол ACB, если его сторона CA касается окружности, сторона CB проходит через центр окружности, а дуга AD окружности, заключенная внутри этого угла, равна $50°$ (рис. 18.5).

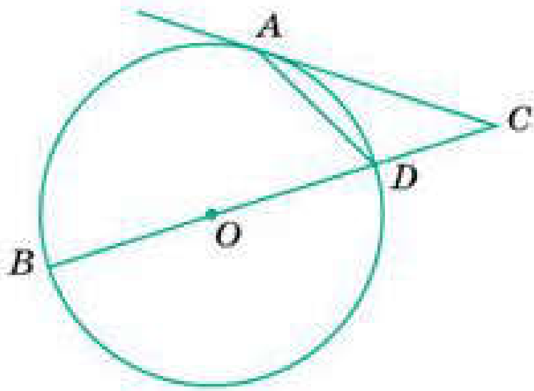


Рис. 18.5

6. Найдите угол ACB, если его сторона CA касается окружности, сторона CB проходит через центр окружности, а дуга AB окружности, заключенная внутри этого угла, равна $125°$ (рис. 18.5).

7. Угол ACB равен $38°$. Его сторона CA касается окружности, сторона CB проходит через центр окружности. Найдите градусную величину дуги AB окружности, заключенной внутри этого угла (рис. 18.5).

B

8. Найдите величину угла ACB (рис. 18.6).

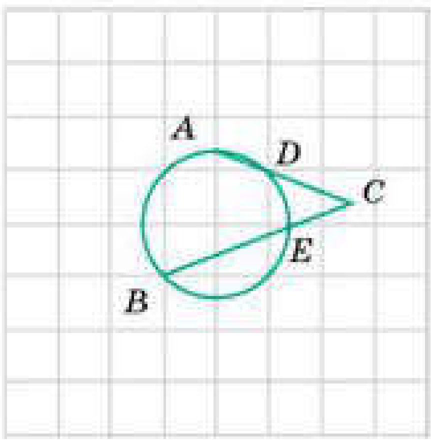


Рис. 18.6

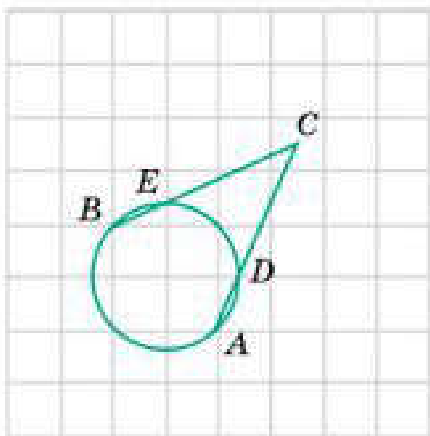


Рис. 18.7

9. Найдите величину угла ACB (рис. 18.7).

C

10. Докажите, что угол между двумя касательными к окружности, проведенными из одной точки, измеряется полуразностью дуг, заключенных между этим углом (рис. 18.8).

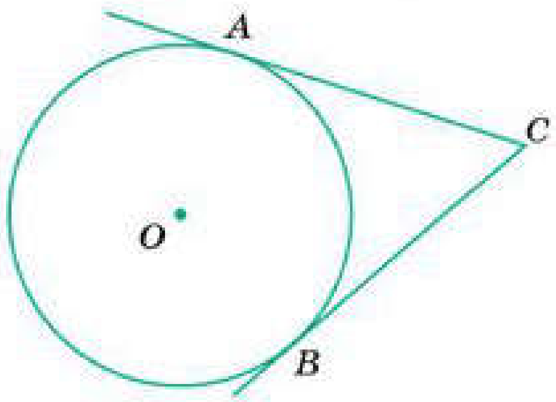


Рис. 18.8

11. В угол ACB вписана окружность. Точки касания делят окружность на дуги, градусные величины которых относятся как 2 : 1. Найдите величину угла ACB (рис. 18.8).

12. Для данных точек A и B найдите геометрическое место точек C, для которых угол ACB прямой.

13. Для данных точек A и B найдите геометрическое место точек C, для которых угол ACB : а) острый; б) тупой .

14. На прямой c укажите точку C, из которой отрезок AB виден под наибольшим углом (рис. 18.9).

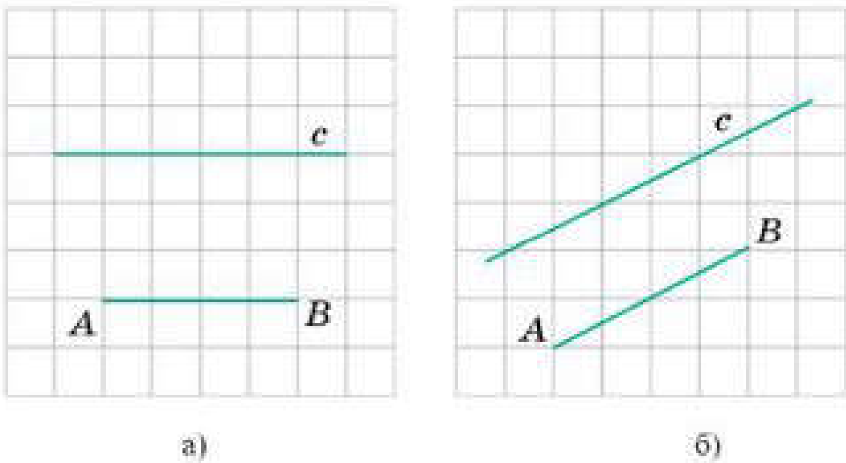


Рис. 18.9

15. На прямой c укажите точку C, из которой отрезок AB виден под наибольшим углом (рис. 18.10).

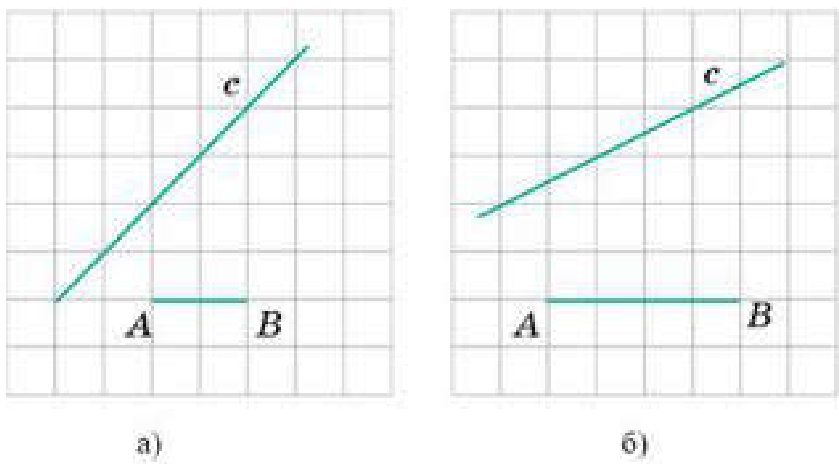


Рис. 18.10

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

16. На рисунке 18.11 изображена окружность и хорды AB и CD, пересекающиеся в точке E. Докажите, что треугольники ACE и DBE подобны.

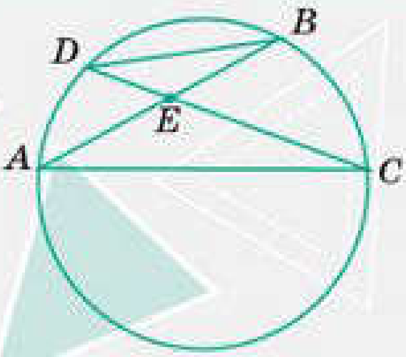


Рис. 18.11

19. ОТРЕЗКИ, СВЯЗАННЫЕ С ОКРУЖНОСТЬЮ

Здесь мы применим подобие треугольников для установления соотношений между отрезками, связанными с окружностями.

Напомним, что ***хордой*** окружности называется отрезок, соединяющий две точки этой окружности. Хорда, проходящая через центр окружности, называется ***диаметром*** этой окружности

Теорема 1. Если две хорды окружности пересекаются, то их точка пересечения делит эти хорды на отрезки так, что произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды.

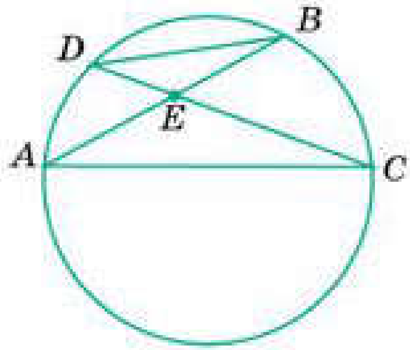


Рис. 19.1

Доказательство. Пусть хорды AB и CD окружности пересекаются в точке E. Проведем отрезки AC и BD (рис. 19.1). Углы BAC и BDC равны как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу окружности. Аналогично углы ACD и ABD равны как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу окружности. Значит, треуголь ники ACE и DBE подобны. Следовательно, $\frac{AE}{DE}=\frac{CE}{BE}$. Откуда получаем $AE \cdot BE = CE \cdot DE$, т.е. произведение отрезков одно й хорды равно произведению отрезков друго й хорды.

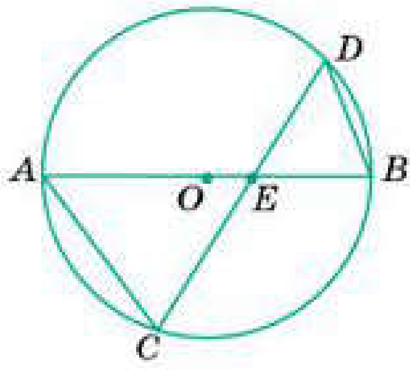


Рис. 19.2

В частности, произведение отрезков хорд, проведенных через внутреннюю точку окружности, постоянно и равно произведению отрезков диаметра, проведенного через ту же точку (рис. 19.2).

Теорема 2. Если из точки, лежащей вне окружности, проведены две секущие, то произведение одной секущей на ее внешнюю часть равно произведению другой секущей на ее внешнюю часть.

Доказательство. Пусть из точки E, лежащей вне окружности, проведены две секущие EA и EB (рис. 19.3). Обозначим C и D их точки пересечения с окружностью. Докажем, что $AE \cdot CE = BE \cdot DE$. Проведем хорды AD и BC. Углы CAD и CBD равны, как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу окружности. Значит, треугольники ADE и BCE подобны. Следовательно, $\frac{AE}{BE} = \frac{DE}{CE}$. Откуда получаем $AE \cdot CE = BE \cdot DE$. ◻

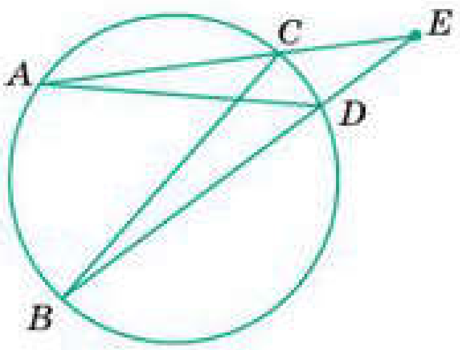


Рис. 19.3

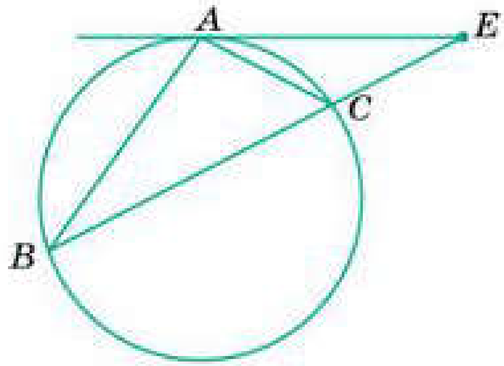


Рис. 19.4

Теорема 3. Если из точки, лежащей вне окружности, проведены касательная и секущая, то квадрат длины отрезка касательной равен произведению секущей на ее внешнюю часть.

Доказательство. Пусть из точки E, лежащей вне окружности, проведены касательная EA и секущая EB (рис. 19.4). Обозначим C вторую точку пересечения секущей с окружностью. Докажем, что $AE^2 = BE \cdot CE$. Проведем хорды AB и AC. Угол EAC измеряется половиной дуги $\smile{AC}$, следовательно, равен углу ABC. Значит, треугольники ABE и CAE подобны. Следовательно, $\frac{AE}{CE} = \frac{BE}{AE}$. Откуда получаем $AE^2 = BE \cdot CE$. ◻

1. Что можно сказать о произведениях отрезков пересекающихся хорд окружности?
2. Что можно сказать о произведениях отрезков секущих, проведенных к окружности из одной точки?
3. Какое соотношение имеется между отрезками секущей и отрезком касательной, проведенными к окружности из одной точки?

Задачи

A

1. Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке E (рис. 19.1), $AE = 6$, $DE = 4$, $CE = 8$. Найдите BE.

2. Через точку E, лежащую вне окружности, проведены два луча, пересекающие эту окружность соответственно в точках A, C и B, D (рис. 19.3). $AE = 18$, $CE = 7$, $DE = 6$. Найдите BE.

3. Через точку E, лежащую вне окружности, проведены два луча, пересекающие эту окружность соответственно в точках A, C и B, D (рис. 19.3). $AE = 12$, $CE = 5$, $BE = 15$. Найдите DE.

4. Через точку E, лежащую вне окружности, проведены два луча, один из которых касается окружности в точке A, а другой пересекает окружность в точках B и C (рис. 19.4). $BE = 9$, $CE = 4$. Найдите AE.

5. Через точку E, лежащую вне окружности, проведены два луча, один из которых касается окружности в точке A, а другой пересекает окружность в точках B и C (рис. 19.4). $AE = 12$, $BE = 18$. Найдите CE.

B

6. Радиус OA окружности равен 2. Через его середину E проведена хорда CD (рис. 19.5). Найдите произведение отрезков CE и DE.

7. Радиус OA окружности равен 8. Через его середину E проведена хорда CD (рис. 19.5), $CE = 4{,}8$. Найдите DE.

8. Радиус окружности равен 1 см. На продолжении радиуса взята точка E, отстоящая от центра O окружности на расстояние 2 см. Через точку E проведен луч, пересекающий окружность в точках B и C (рис. 19.6). Найдите произведение отрезков BE и CE.

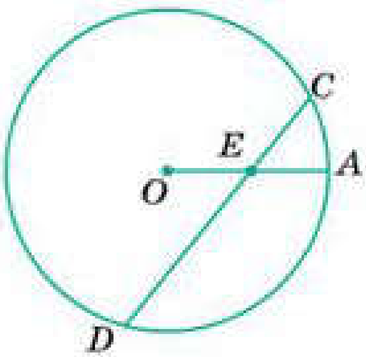


Рис. 19.5

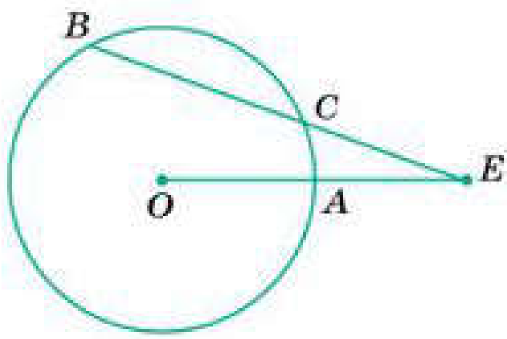


Рис. 19.6

9. Радиус окружности равен 4 см. На продолжении радиуса взята точка E, отстоящая от центра O окружности на расстояние 8 см. Через точку E проведен луч, пересекающий окружность в точках B и C (рис. 19.6), $BE = 10$. Найдите CE.

C

10. Радиус окружности равен 11 см. Точка E удалена от центра окружности на 7 см. Через точку E проведена хорда CD, равная 18 см. Найдите отрезки, на которые точка E делит хорду CD (рис. 19.7).

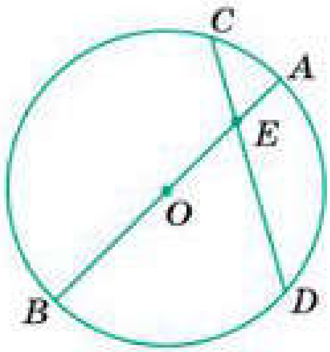


Рис. 19.7

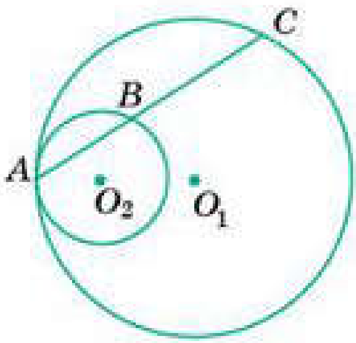


Рис. 19.8

11. На рисунке 19.8 две окружности с центрами O_1, O_2 и радиусами 10 и 4 касаются внутренним образом в точке A. Прямая, проходящая через точку A, пересекает окружности в точках B и C, $AB = 6$. Найдите AC.

12. На рисунке 19.9 две окружности с центрами O_1, O_2 и радиусами 10 и 4 касаются внешним образом в точке A. Прямая, проходящая через точку A, пересекает окружности в точках B и C, $AC = 15$. Найдите AB.

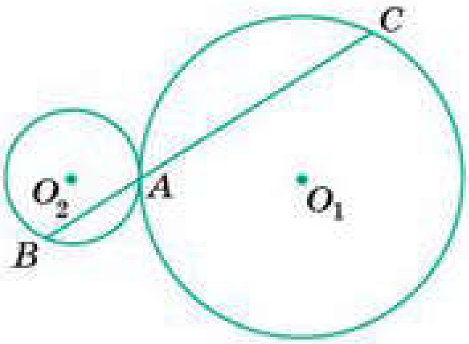


Рис. 19.9

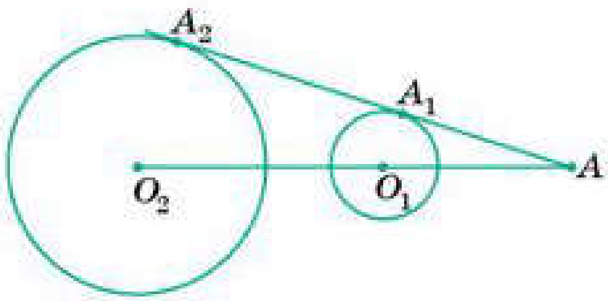


Рис. 19.10

13. На рисунке 19.10 прямая касается двух окружностей с центрами O_1, O_2 и радиусами 4 и 10 соответственно, A_1, A_2 — точки касания, $AA_1 = 12$. Найдите AA_2.

14. На рисунке 19.11 прямая касается двух окружностей с центрами O_1, O_2 и радиусами 4 и 10 соответственно, A_1, A_2 — точки касания, $AA_1 = 3$. Найдите AA_2.

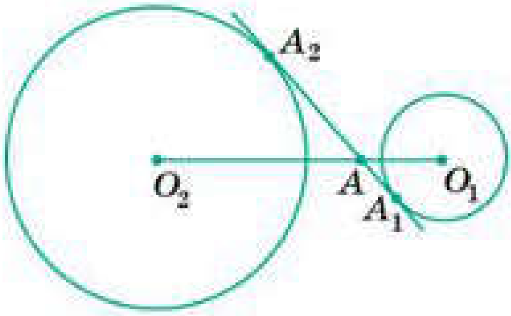


Рис. 19.11

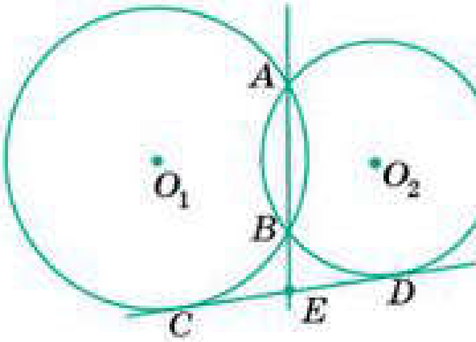


Рис. 19.12

15. Две окружности пересекаются в точках A и B. Прямая касается этих окружностей в точках C и D. Докажите, что прямая AB пересекает отрезок CD в его середине E (рис. 19.12).

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

16. Повторите формулы площади треугольника.

17. Используя рисунок 19.13, выразите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, через стороны и площадь этого треугольника.

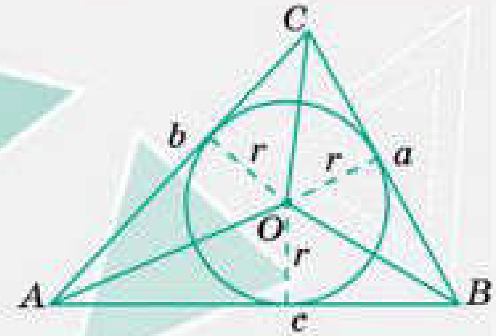


Рис. 19.13

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. В треугольнике ABC $AB = 3$, $\angle A = 45°$, $\angle C = 60°$. Найдите сторону BC:

A) $\sqrt{6}$; B) $\sqrt{3}$; C) $2\sqrt{3}$; D) $2\sqrt{2}$.

2. В треугольнике ABC даны две стороны $BC = 2$, $AC = 2\sqrt{2}$ и $\angle A$, равный $45°$. Найдите угол B:

A) $30°$; B) $45°$; C) $60°$; D) $90°$.

3. Найдите отношения сторон $AC : BC$ в треугольнике ABC, в котором $\angle A = 120°$, $\angle B = 30°$:

A) $\sqrt{3} : 1$; B) $1 : \sqrt{3}$; C) $2 : \sqrt{3}$; D) $3 : \sqrt{3}$.

4. В треугольнике ABC $AB = 4$, $BC = 3$, $AC = 5$. Найдите отрезки, на которые биссектриса CD этого треугольника делит его сторону AB:

A) $AD = 3$, $DB = 1$; B) $AD = 2$, $DB = 2$;
C) $AD = 2{,}5$, $DB = 1{,}5$; D) $AD = 1{,}5$, $DB = 2{,}5$.

5. В треугольнике ABC $AB = 3$, $AC = 2$, $\angle A = 60°$. Найдите третью сторону:

A) $\sqrt{7}$; B) $\sqrt{6}$; C) $\sqrt{5}$; D) $\sqrt{3}$.

6. В треугольнике ABC $AC = BC = 1$, $AB = \sqrt{3}$. Найдите угол C:

A) $30°$; B) $60°$; C) $120°$; D) $150°$.

7. Стороны треугольника равны 3, 4 и 5. Найдите медиану, проведенную к большей стороне:

A) 2; B) 2,5; C) 3; D) 3,5.

8. Найдите вписанный угол, опирающийся на дугу, которая составляет $\frac{2}{5}$ окружности:

A) $54°$; B) $60°$; C) $66°$; D) $72°$.

9. Найдите вписанный угол, опирающийся на дугу, которая составляет 30% окружности:

A) $54°$; B) $60°$; C) $66°$; D) $72°$.

10. Дуги $\smile AC$ и $\smile BC$ окружности составляют соответственно $200°$ и $100°$. Найдите вписанный угол ACB:

A) $30°$; B) $40°$; C) $50°$; D) $60°$.

11. Хорда делит окружность на две части, градусные величины которых относятся как $2 : 3$. Под какими углами видна эта хорда из точек окружности:

A) $45°$ и $135°$; B) $60°$ и $120°$; C) $72°$ и $108°$; D) $80°$ и $100°$?

12. Хорда AB стягивает дугу окружности в $100°$. Найдите угол между этой хордой и касательной к окружности, проведенной через точку B:

A) $20°$; B) $30°$; C) $40°$; D) $50°$.

13. Дуги $\smile{AB}$ и $\smile{CD}$ окружности составляют соответственно $90°$ и $60°$. Найдите угол, образованный пересекающимися хордами AC и BD:

A) $30°$; B) $45°$; C) $60°$; D) $75°$.

14. Найдите угол ACD, если его сторона CA касается окружности в точке A, сторона CB проходит через центр окружности, а дуга $\smile{AB}$ окружности, заключенная внутри этого угла, равна $120°$.

A) $30°$; B) $45°$; C) $60°$; D) $120°$.

15. Радиус окружности равен 6. Через его середину C проведена хорда AB. Найдите произведение отрезков AC и BC:

A) 24; B) 27; C) 32; D) 36.

16. Радиус окружности равен 1 см. На продолжении радиуса взята точка C, отстоящая от центра окружности на расстояние 3 см. Через точку C проведен луч, пересекающий окружность в точках A и B. Найдите произведение отрезков AC и BC:

A) 4; B) 6; C) 8; D) 12.

17. Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке E, $AE = 2$, $DE = 4$, $CE = 3$. Найдите BE:

A) 4; B) 6; C) 8; D) 12.

18. Радиус окружности равен 3 см. Отрезок касательной, проведенной из точки к этой окружности, равен 4 см. Найдите расстояние от этой точки до центра данной окружности:

A) 4 см; B) 5 см; C) 6 см; D) 7 см.

19. Радиус окружности равен 5 см. Точка удалена от центра окружности на расстояние 13 см. Найдите отрезок касательной, проведенной из этой точки к данной окружности:

A) 6 см; B) 8 см; C) 10 см; D) 12 см.

20. Через точку C, лежащую вне окружности, проведены два луча, один из которых касается окружности в точке D, а другой пересекает окружность в точках A и B. Найдите отрезок CD касательной, если $CA = 3$, $CB = 12$:

A) 6; B) 8; C) 9; D) 12.

Глава 4

ОКРУЖНОСТЬ. МНОГОУГОЛЬНИКИ

20. ТРЕУГОЛЬНИКИ И ОКРУЖНОСТЬ

Напомним, что треугольник называется ***вписанным*** в окружность, если все его вершины принадлежат окружности. Окружность при этом называется ***описанной*** около треугольника (рис. 20.1).

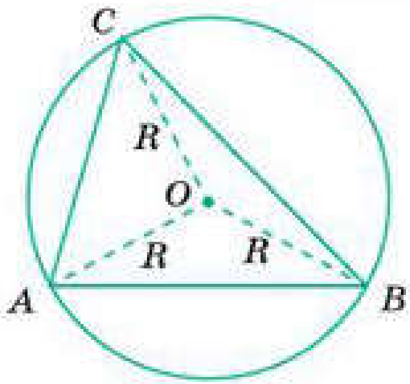


Рис. 20.1

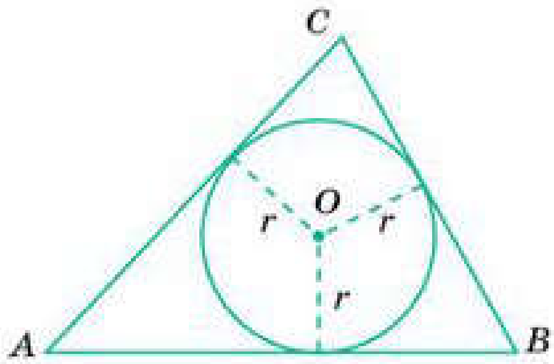


Рис. 20.2

Треугольник называется ***описанным*** около окружности, если все его стороны касаются этой окружности. Сама окружность при этом называется ***вписанной*** в треугольник (рис. 20.2).

В седьмом классе были доказаны следующие теоремы.

Теорема . Около всякого треугольника можно описать окружность. Ее центром является точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

Теорема. В любой треугольник можно вписать окружность. Ее центром будет точка пересечения биссектрис этого треугольника.

Здесь мы выведем формулы для радиусов вписанной и описанной окружностей, но сначала уточним теорему синусов.

Теорема (теорема синусов). Отношения сторон треугольника к синусам противолежащих углов равно диаметру окружности, описанной около этого треугольника.

Доказательство. Пусть в треугольнике ABC $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Докажем, что имеют место равенства

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

где R — радиус описанной окружности.

Рассмотрим треугольник ABD, вписанный в ту же окружность, сторона AD которого проходит через центр O этой окружности (рис. 20.3).

Углы C и D опираются на одну и ту же дугу и, следовательно, равны. Угол ABD опирается на половину окружности, следовательно, равен 90°. Таким образом, $\frac{AB}{\sin C} = \frac{AB}{\sin D} = AD$. Следовательно, имеет место равенство $\frac{c}{\sin C} = 2R$. Аналогично доказывается, что имеют место равенства $\frac{a}{\sin A} = 2R$, $\frac{b}{\sin B} = 2R$.

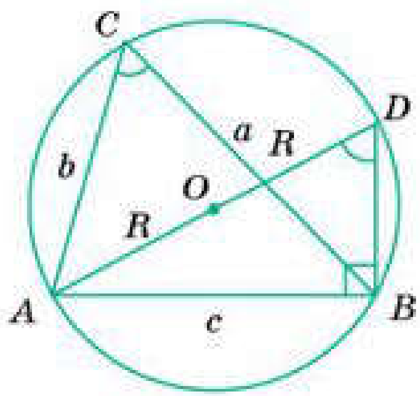


Рис. 20.3

Сделайте это самостоятельно.

Теорема. Для радиуса R окружности, описанной около треугольника ABC со сторонами $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, имеет место формула

$$R = \frac{abc}{4S},$$

где S — площадь треугольника ABC.

Доказательство. По теореме синусов для треугольника ABC со сторонами $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ имеет место формула

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

где R — радиус окружности, описанной около треугольника.

Выразим из формулы $\sin C$. Получим

$$\sin C = \frac{c}{2R}.$$

Подставляя это выражение синуса в формулу площади треугольника $S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin C$, получим

$$S = \frac{abc}{4R}.$$

Откуда

$$R = \frac{abc}{4S}.$$

Выведем теперь формулу для радиуса вписанной окружности.

Теорема. Для радиуса r окружности, вписанной в треугольник ABC со сторонами $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, имеет место формула

$$r = \frac{2S}{a + b + c}.$$

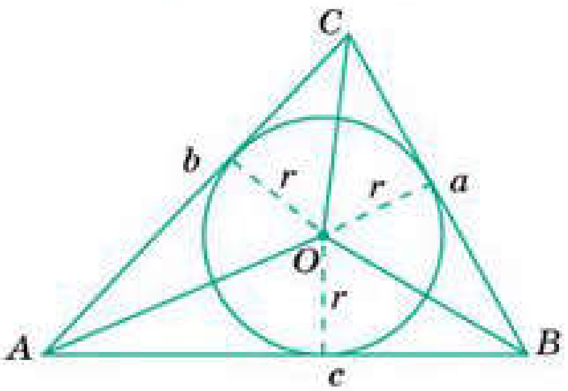


Рис. 20.4

Доказательство. Обозначим O центр вписанной в этот треугольник окружности радиусом r. Проведем отрезки AO, BO, CO (рис. 20.4).

Площадь S треугольника ABC равна сумме площадей треугольников ABO, ACO, BCO. Учитывая, что высотами в этих треугольниках являются радиусы вписанной окружности, будем иметь

$$S = \frac{1}{2}c \cdot r + \frac{1}{2}b \cdot r + \frac{1}{2}a \cdot r = \frac{1}{2}(a + b + c) \cdot r.$$

Откуда

$$r = \frac{2S}{a + b + c}.$$

Обозначим p полупериметр треугольника ABC, $p = \frac{a+b+c}{2}$. Тогда полученную формулу можно переписать в виде $r = \frac{S}{p}$.

*Рассмотрим понятие окружности, вневписанной в треугольник.

Окружность называется ***вневписанной*** в треугольник, если она касается одной стороны и продолжений двух других сторон этого треугольника.

Теорема. Для любого треугольника имеется три вневписанные окружности. Центром каждой вневписанной окружности является точка пересечения биссектрисы одного угла треугольника и двух биссектрис внешних углов к двум другим углам треугольника.

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC. Докажем, что биссектриса угла A и биссектрисы внешних углов к углам B и C пересекаются в одной точке, которая будет центром окружности, касающейся стороны BC и продолжений сторон AB и AC (рис. 20.5).

Биссектриса внешнего угла CBD является геометрическим местом внутренних точек этого угла, равноудаленных от его сторон BC и BD. Биссектриса внешнего угла BCE является геометрическим местом внутренних точек этого угла, равноудаленных от его сторон CB и CE. Их точка пересечения O будет равноудалена от сторон AD и AC угла A, т. е. будут равны перпендикуляры OD, OE и OF, опущенные на соответствующие стороны. Следовательно, точка O будет принадлежать биссектрисе угла A, а окружность с центром O и радиусом,

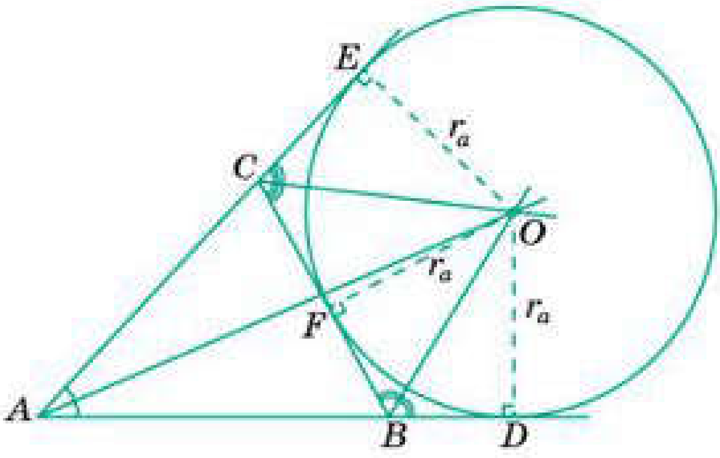


Рис. 20.5

равным длине этих перпендикуляров, будет касаться стороны BC и продолжений сторон AB и AC треугольника ABC.

Аналогично доказывается, что имеются две другие окружности, вневписанные в треугольник ABC.

Сделайте это самостоятельно.

1. Какой треугольник называется *вписанным в окружность*?
2. Какая окружность называется *описанной около треугольника*?
3. Около всякого ли треугольника можно описать окружность?
4. Где находится центр описанной около треугольника окружности?
5. Как выражается радиус окружности, описанной около треугольника, через его стороны и площадь?
6. Как выражается радиус окружности, вписанной в треугольник, через его периметр и площадь?
7. Какая окружность называется *вневписанной в треугольник*?
8. Что является центром окружности, вневписанной в треугольник?

Задачи

А

1. Изобразите треугольник, вписанную в него и описанную около него окружности.

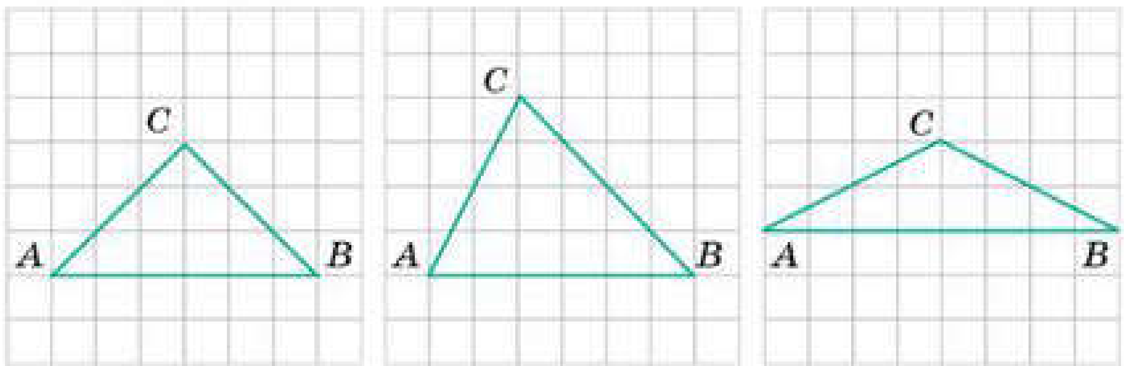
2. Может ли центр окружности, описанной около треугольника, находиться: а) внутри треугольника; б) на стороне треугольника; в) вне этого треугольника? Приведите примеры.

3. Где находится центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника?

4. Найдите углы вписанного в окружность равнобедренного треугольника, боковая сторона которого стягивает дугу в 60°.
5. Найдите углы вписанного в окружность равнобедренного треугольника, если его основание стягивает дугу в 100°.
6. Катеты прямоугольного треугольника равны 3 см и 4 см. Найдите радиусы описанной и вписанной окружностей.

B

7. Для данных треугольников (рис. 20.6) постройте центры описанных окружностей.



а) б) в)

Рис. 20.6

8. Точки A, B, C, расположенные на окружности, делят эту окружность на три дуги, градусные величины которых относятся как 2 : 3 : 7. Найдите углы треугольника ABC.
9. Сторона AB треугольника ABC равна 10. Найдите радиус описанной около этого треугольника окружности, если противолежащий этой стороне угол C равен: а) 30°; б) 45°; в) 60°; г) 90°; д) 150°.
10. Радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 3 см. Найдите сторону AB этого треугольника, если противолежащий ей угол C равен: а) 30°; б) 45°; в) 60°; г) 90°; д) 150°.
11. Стороны треугольника равны 5, 5, 8. Найдите радиусы описанной и вписанной окружностей.

C

12. Окружность разделена точками A, B, C на дуги, градусные величины которых относятся как 11 : 3 : 4. Через точки A, B, C проведены касательные до их взаимного пересечения. Найдите углы образовавшегося треугольника.

13. Докажите, что центр описанной окружности расположен ближе к большей стороне треугольника.

14. В треугольнике ABC $\angle A = 30°$, $\angle B = 65°$. Какая из сторон треугольника расположена ближе к центру описанной окружности?

15. Докажите, что центр вписанной окружности расположен ближе к вершине большего угла треугольника.

16. В треугольнике ABC $AB = 3$, $AC = 4$, $BC = 5$. Какая из вершин треугольника расположена ближе к центру вписанной окружности?

17. Стороны треугольника равны 5, 6, 7. Найдите радиусы описанной и вписанной окружностей.

18. Докажите, что для радиуса r_a окружности, вневписанной в треугольник ABC со сторонами $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ и касающейся стороны BC, имеет место формула

$$r_a = \frac{2S}{b + c - a}.$$

19. Найдите радиус вневписанной окружности для правильного треугольника со стороной 1.

20. Найдите радиусы вневписанных окружностей для прямоугольного треугольника, катеты которого равны 1.

21. Найдите радиусы вневписанных окружностей для равнобедренного треугольника, стороны которого равны 5, 5, 8.

22. Высоты AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке H. Докажите, что треугольники ABH и B_1A_1H подобны.

23. Высоты AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке H. Докажите, что треугольники ABC и A_1B_1C подобны.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

24. Повторите понятия многоугольника и площади многоугольника.

25. На рисунке 20.7 изображен четырехугольник $ABCD$, вписанный в окружность. Попробуйте найти суммы углов A и C, B и D.

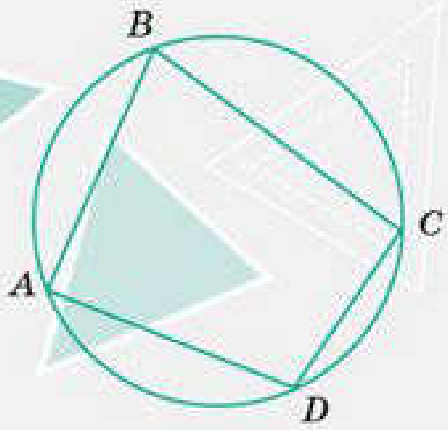


Рис. 20.7

21. ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ И ОКРУЖНОСТЬ

Многоугольник называется ***вписанным*** в окружность, если все его вершины принадлежат окружности. Окружность при этом называется ***описанной*** около многоугольника (рис. 21.1).

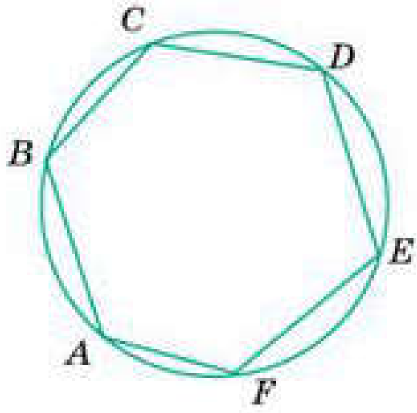


Рис. 21.1

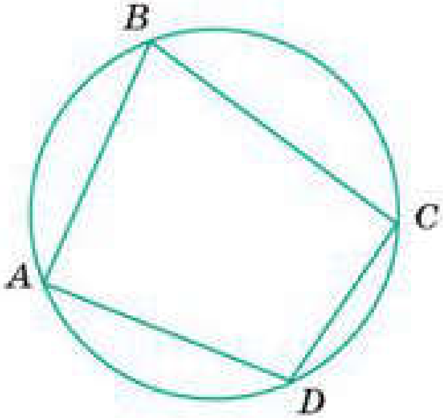


Рис. 21.2

Рассмотрим вопрос о том, когда около четырехугольника можно описать окружность.

Теорема. Если около четырехугольника можно описать окружность, то суммы его противолежащих углов равны 180°.

Доказательство. Пусть $ABCD$ — четырехугольник, около которого описана окружность (рис. 21.2).

Докажем, что $\angle A + \angle C = 180°$. Действительно, эти углы измеряются половинами соответствующ их дуг $\overset{\smile}{BCD}$ и $\overset{\smile}{BAD}$, котор ые вместе составляют всю окружность. Следовательно, сами углы в сумме измеряются половиной окружности, т. е. их сумма равна 180°.

Оказывается, верно и обратное утверждение, т. е. справедлива следующая теорема.

Теорема*. Если суммы противолежащих углов четырехугольника $ABCD$ равны 180°, то около него можно описать окружность.

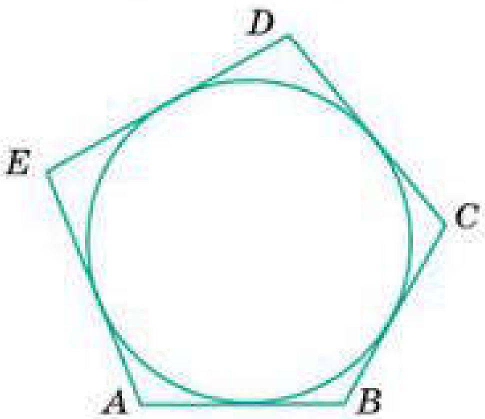


Рис. 21.3

Попробуйте доказать это самостоятельно.

Многоугольник называется ***описанным*** около окружности, если все его стороны касаются этой окружности. Сама окружность при этом называется ***вписанной*** в многоугольник (рис. 21.3).

Теорема. Если в четырехугольник можно вписать окружность, то суммы его противолежащих сторон равны.

Доказательство. Пусть $ABCD$ — четырехугольник, в который вписана окружность, касающаяся его сторон в точках K, N, P, Q (рис. 21.4). Докажем, что $AB + CD = AD + BC$. Действительно, из равенства отрезков касательных, проведенных к окружности из одной точки, следуют равенства: $AK = AQ$, $BK = BN$, $CN = CP$, $DP = DQ$. Следовательно, $AB + CD = AK + BK + CP + DP = AQ + BN + CN + DQ = AD + BC$.

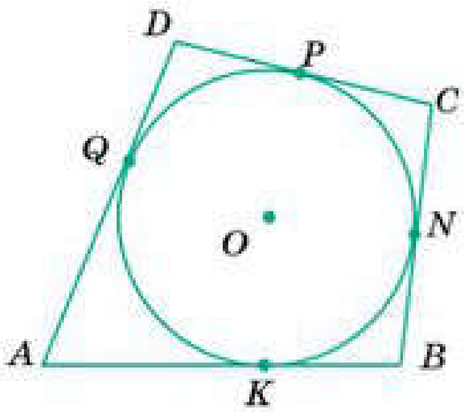


Рис. 21.4

Попробуйте доказать, что для выпуклых четырехугольников справедливо и обратное утверждение, т. е. если суммы противолежащих сторон выпуклого четырехугольника равны, то в него можно вписать окружность. Приведите опровергающий пример для невыпуклых четырехугольников.

Выведем формулу радиуса r окружности, вписанной в четырехугольник.

Теорема. Радиус r окружности, вписанной в четырехугольник, площадь которого равна S, а полупериметр равен p, выражается формулой

$$r = \frac{S}{p}.$$

Доказательство аналогично доказательству соответствующей формулы для треугольника.

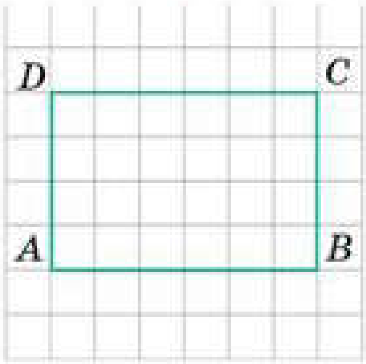
Проведите его самостоятельно.

1. Какой многоугольник называется *вписанным в окружность*?
2. Какая окружность называется *описанной около многоугольника*?
3. Около всякого ли четырехугольника можно описать окружность?
4. Какой многоугольник называется *описанным около окружности*?
5. Какая окружность называется *вписанной в многоугольник*?
6. Во всякий ли четырехугольник можно вписать окружность?
7. Как выражается радиус окружности, вписанной в четырехугольник, через его полупериметр и площадь?

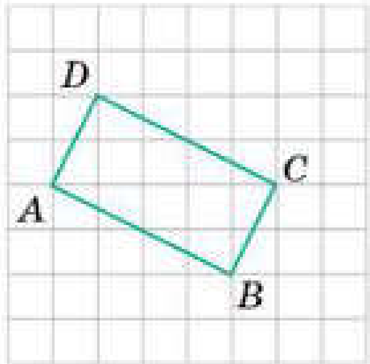
Задачи

A

1. Нарисуйте окружность и четырехугольник, вписанный в эту окружность.



а)



б)

Рис. 21.5

2. Укажите центры окружностей, описанных около четырехугольников, изображенных на рисунке 21.5. Найдите их радиусы, если стороны клеток равны 1.

3. Можно ли описать окружность около: а) прямоугольника; б) параллелограмма, отличного от прямоугольника; в) квадрата; г) ромба, отличного от квадрата?

4. Можно ли описать окружность около четырехугольника, углы которого последовательно равны: а) 90°, 90°, 60°, 120°; б) 40°, 125°, 55°, 140°?

5. Два угла вписанного в окружность четырехугольника равны 80° и 60°. Найдите два других угла четырехугольника.

6. Найдите радиус окружности, описанной около квадрата со стороной 1.

7. Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольника, стороны которого равны 6 см и 8 см.

8. Найдите диагональ прямоугольника, вписанного в окружность радиусом 6 см.

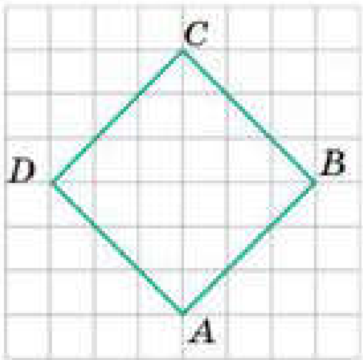
9. Можно ли вписать окружность в: а) квадрат; б) прямоугольник, отличный от квадрата; в) ромб; г) параллелограмм, отличный от ромба?

10. Укажите центры окружностей, вписанных в четырехугольники, изображенные на рисунке 21.6.

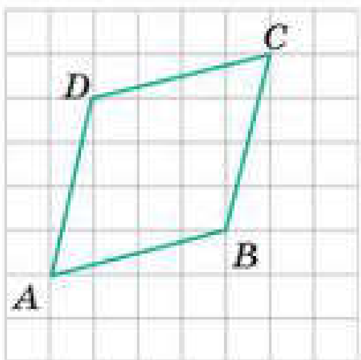
11. Можно ли вписать окружность в четырехугольник, стороны которого последовательно равны 1, 2, 3, 4?

12. Найдите радиус окружности, вписанной в квадрат со стороной 1.

13. Три последовательные стороны четырехугольника, в который можно вписать окружность, равны 6 см, 8 см и 9 см. Найдите четвертую сторону и периметр этого четырехугольника.



а)



б)

Рис. 21.6

14. Противолежащие стороны четырехугольника, описанного около окружности, равны 7 см и 10 см. Найдите периметр четырехугольника.

B

15. Окружность разделена точками на четыре части, градусные величины которых относятся как 3 : 7 : 5 : 3. Найдите углы четырехугольника, полученного последовательным соединением точек деления.

16. Меньшая сторона прямоугольника равна 5 см. Угол между диагоналями равен 60°. Найдите радиус описанной окружности.

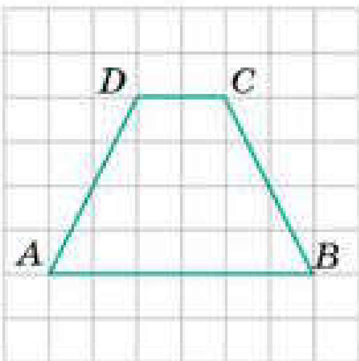
17. Сторона ромба равна 4 см, острый угол — 30°. Найдите радиус вписанной окружности.

C

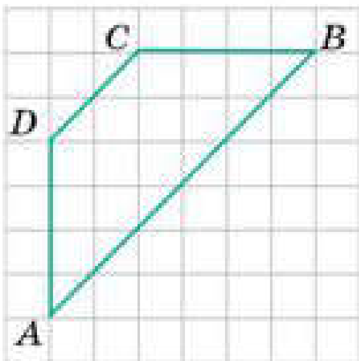
18. Найдите радиус окружности, вписанной в ромб, изображенный на рисунке 21.6, б.

19. Докажите, что если около трапеции можно описать окружность, то она является равнобедренной.

20. Постройте центры окружностей, описанных около четырехугольников, изображенных на рисунке 21.7. Найдите их радиусы, если стороны клеток равны 1.



а)



б)

Рис. 21.7

21. Около окружности описана трапеция, периметр которой равен 18 см. Найдите ее среднюю линию.

22. Боковые стороны трапеции, описанной около окружности, равны 1 см и 3 см. Найдите периметр трапеции.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

23. Повторите понятия правильного многоугольника, вписанного и описанного многоугольника.

24. Найдите углы правильного: а) пятиугольника; б) шестиугольника; в) восьмиугольника; г) двенадцатиугольника.

22. ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ И ОКРУЖНОСТЬ

Напомним, что ***правильным многоугольником*** называется выпуклый многоугольник, у которого все стороны равны и все углы равны.

Выведем общую формулу для углов правильного n-угольника.

Теорема. Углы правильного n-угольника равны $180° - \frac{360°}{n}$.

Доказательство. Воспользуемся тем, что сумма углов выпуклого n-угольника равна $180°(n-2)$. Так как все углы правильного n-угольника равны, то каждый из них равен $\frac{180°(n-2)}{n}$, следовательно, равен $180° - \frac{360°}{n}$. ◪

В частности, углы правильного пятиугольника равны 108°, углы правильного шестиугольника равны 120°.

Теорема. Около любого правильного n-угольника можно описать окружность. Если сторона правильного n-угольника равна a, то радиус R описанной окружности выражается формулой

$$R = \frac{a}{2\sin\frac{180°}{n}}.$$

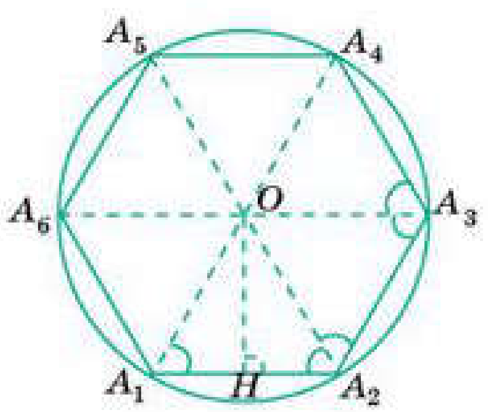


Рис. 22.1

Доказательство. Пусть $A_1 \ldots A_n$ — правильный n-угольник (рис. 22.1).

Опишем около треугольника $A_1A_2A_3$ окружность с центром в точке O и радиусом R. Докажем, что следующая вершина A_4 также принадлежит этой окружности. Для этого достаточно проверить, что $OA_4 = R$. Имеем OA_1A_2 и OA_2A_3 — равные равнобедренные треугольники. Поэтому их углы при основаниях равны и составляют половину угла данного n-угольника. Значит, угол OA_3A_4 также составляет половину угла n-угольника. Треугольники OA_3A_2 и OA_3A_4 равны по двум сторонам и углу между ними ($A_2A_3 = A_3A_4$, OA_3 — общая, $\angle OA_3A_2 = \angle OA_3A_4$). Следовательно, $OA_2 = OA_4 = R$. Аналогично показывается, что вершины A_5 и т. д. принадлежат данной окружности. Таким образом, эта окружность является искомой описанной окружностью. Ее центром является точка пересечения биссектрис углов многоугольника.

Для нахождения радиуса описанной окружности рассмотрим равнобедренный треугольник OA_1A_2. Проведем высоту OH. В прямоугольном треугольнике OA_1H гипотенуза OA_1 равна R, катет A_1H равен $\frac{a}{2}$, угол A_1OH равен $\frac{180°}{n}$. Следовательно,

$$R = \frac{a}{2\sin\frac{180°}{n}}. \square$$

Следствие. Стороны правильного n-угольника, вписанного в окружность радиусом R, равны $2R \cdot \sin\frac{180°}{n}$.

Теорема. Периметры двух правильных n-угольников относятся как радиусы описанных около них окружностей.

Доказательство. Пусть P_n', P_n'' — периметры правильных n-угольников, вписанных в окружности радиусов R' и R'' соответственно. Тогда

$$P_n' = n \cdot 2R' \cdot \sin\frac{180°}{n}, \quad P_n'' = n \cdot 2R'' \cdot \sin\frac{180°}{n}.$$

Следовательно, $\frac{P_n'}{P_n''} = \frac{R'}{R''}$. $\square$

Теорема. В любой правильный многоугольник можно вписать окружность. Если сторона правильного n-угольника равна a, то радиус r вписанной окружности выражается формулой

$$r = \frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{180°}{n}}.$$

Доказательство. Пусть $A_1 \dots A_n$ — правильный n-угольник. Как было доказано в предыдущей теореме, около этого многоугольника можно описать окружность и ее центром O является точка пересечения биссектрис углов многоугольника. Точка пересечения биссек-

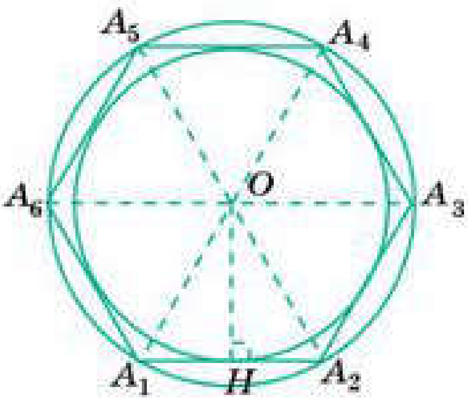


Рис. 22.2

трис одинаково удалена от всех сторон многоугольника. Обозначим это расстояние через r. Окружность с центром в точке O и радиусом r будет касаться всех сторон этого многоугольника, т. е. будет искомой вписанной окружностью (рис. 22.2).

Для нахождения радиуса описанной окружности рассмотрим равнобедренный треугольник OA_1A_2. Проведем высоту OH. В прямоугольном треугольнике OA_1H катет OH равен r, катет A_1H равен $\frac{a}{2}$, угол A_1OH равен $\frac{180°}{n}$. Следовательно, $r = \dfrac{a}{2\operatorname{tg}\frac{180°}{n}}$.

Следствие. Стороны правильного n-угольника, описанного около окружности радиусом r, равны $2r \cdot \operatorname{tg}\frac{180°}{n}$.

Выведем формулу радиуса r окружности, вписанной в правильный многоугольник.

Теорема. Радиус r окружности, вписанной в правильный многоугольник, площадь которого равна S, а полупериметр равен p, выражается формулой $r = \frac{S}{p}$.

Доказательство аналогично доказательству соответствующей формулы для треугольника.

Проведите его самостоятельно.

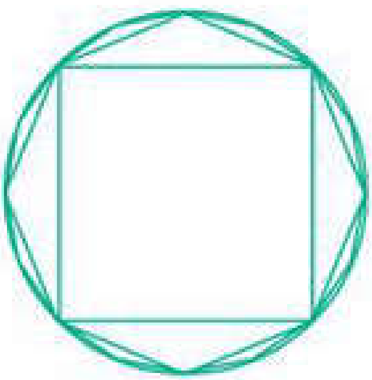


Рис. 22.3

Воспользуемся правильными многоугольниками, вписанными в окружность, для определения и нахождения ее длины.

При увеличении числа сторон правильных многоугольников, вписанных в окружность, их стороны приближаются к окружности (рис. 22.3).

Поэтому ***длиной окружности*** считают число, к которому стремятся периметры правильных многоугольников, вписанных в эту окружность, при увеличении числа их сторон.

Теорема. Отношение длин двух окружностей равно отношению их радиусов.

Доказательство этой теоремы использует предельный переход и выходит за рамки школьного курса математики. Здесь мы дадим только идею доказательства.

Рассмотрим окружности радиусов R', R'' и вписанные в них правильные многоугольники. При увеличении числа сторон периметры правильных многоугольников приближаются к длинам соответствующих окружностей. Поскольку отношение этих периметров постоянно и равно $\frac{R'}{R''}$, то и отношение чисел, к которым стремятся эти периметры, т. е. отношение длин окружностей, также будет равно $\frac{R'}{R''}$.

Половина длины окружности единичного радиуса обозначается греческой буквой π. Таким образом, длина окружности единичного радиуса равна 2π.

Из рассмотренной выше теоремы следует, что длина окружности радиусом R равна $2\pi R$.

Таким образом, для длины окружности C радиусом R имеет место следующая формула

$$C = 2\pi R.$$

Для приближенного вычисления числа π в единичную окружность вписывают правильный многоугольник и находят его полупериметр. Чем больше число сторон вписанного многоугольника, тем более точное значение получается для числа π.

Вопрос о вычислении длины окружности и числа π занимал умы ученых на протяжении тысячелетий. Первое вычисление числа π, использующее строгие рассуждения, было сделано величайшим математиком древности Архимедом (287—212 гг. до н. э.). В своей работе "Об измерении круга" он доказал, что для числа π выполняются неравенства

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

Точным значением числа π является бесконечная непериодическая десятичная дробь

$$3,14159265358979323 85... \quad .$$

На практике приближенное значение числа π обычно берется равным 3,14.

Пример. Найдите длину окружности, описанной около правильного шестиугольника, стороны которого равны 1.

Решение . Радиус окружности, описанной около данного правильного шестиугольника, равен 1. Следовательно, длина этой окружности равна 2π.

Так как центральный угол в 1° окружности составляет $\frac{1}{180}$ часть развернутого угла, то и дуга, на которую опирается этот угол, составляет $\frac{1}{180}$ часть полуокруж ности. Поэтому длина дуги окружности в 1° составляет $\frac{1}{180}$ часть длины полуокруж ности, т. е. равна $\frac{\pi R}{180}$, где R — радиус окружности.

Длина l дуги окружности в φ градусов выражается формулой

$$l = \frac{\pi R \varphi}{180^\circ},$$

где R — радиус окружности.

Рав енство $l = \frac{\pi\varphi}{180^\circ}$, выражающе е длину дуги единичной окружности с центральным углом в φ градусов, устанавливает соответствие между длиной дуги и ее градусной мерой. Это позволяет измерять углы не только с помощью градусов, но и с помощью длины дуги соответствующей окружности единичного радиуса. Величина длины дуги называется ***радианной мерой угла*** . Единицей радианной меры углов является ***радиан*** . Угол в один радиан — это угол, для которого длина соответствующей дуги единичной окружности равна единице.

Градусная мера угла в один радиан равна $\frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ$.

Пример. Окружность описана около правильного шестиугольника со стороной 1. Найдите длину дуги окружности, стягиваемую стороной этого шестиугольника.

Решение. Длина данной окружности равна 2π. Следовательно, дли на иско мой дуги равна $\frac{\pi}{3}$.

1. Какой многоугольник называется *правильным* ?
2. Около всякого ли правильного многоугольника можно описать окружность?
3. Как выражается радиус окружности, описанной около правильного n-угольника со стороной a?
4. Можно ли вписать окружность в правильный многоугольник?
5. Как выражается радиус окружности, вписанной в правильный n-угольник со стороной a?
6. Как выражается радиус окружности, вписанной в правильный многоугольник, через его полупериметр и площадь?
7. Что считается длиной окружности?
8. Как относятся периметры двух правильных n-угольников?
9. Как относятся длины двух окружностей?
10. Что обозначает греческая буква π?
11. Чему равна длина окружности радиусом R?
12. Какие неравенства выполняются для числа π?
13. Каково приближенное значение числа π?
14. Чему равна длина дуги окружности в $1°$?
15. Чему равна длина дуги окружности в ϕ градусов?
16. Чему равна градусная мера угла в 1 радиан?

Задачи

А

1. Чему равна сторона правильного шестиугольника, вписанного в окружность радиусом 1?
2. Сторона правильного шестиугольника равна 3. Найдите радиус описанной около него окружности.
3. За длину окружности вавилоняне принимали периметр правильного шестиугольника, вписанного в эту окружность. Найдите приближение для числа π, которым пользовались вавилоняне.
4. Как изменится длина окружности, если радиус окружности: а) увеличить в три раза; б) уменьшить в два раза?
5. На сколько увеличится длина окружности, если ее радиус увеличить на: а) 1 см; б) 2 см; в) 5 см?
6. Какой будет длина окружности, в которой дуга в $1°$ имеет длину 1 м?
7. Длина окружности равна 60 см. Найдите длину дуги этой окружности, содержащую $18°$.
8. Найдите длину дуги окружности радиусом 1, соответствующей центральному углу в: а) $30°$; б) $90°$; в) $120°$; г) $270°$.
9. Найдите радианную величину углов в: а) $45°$; б) $60°$; в) $150°$.

10. Найдите градусную величину угла, если его радианная мера равна: а) $\frac{\pi}{2}$; б) $\frac{\pi}{4}$; в) $\frac{7\pi}{18}$; г) $\frac{4\pi}{3}$.

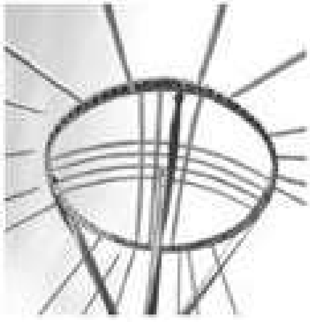
11. Гуляя в сосновом бору, вы увидели старое дерево и измерили обхват его ствола — он оказался 2,2 м. Найдите диаметр этого ствола в месте измерения.

12. Юрта — древнейшее и в то же время современное жилище кочевников (рис. 22.4, а). Юрты бывают разные по размерам. Найдите периметр:

1) шаңырака (купол юрты, рис. 22.4, б), если его диаметр равен: а) 1 м; б) 2 м;

2) кереге (круглая вертикальная стена, рис. 22.4, в), если диаметр юрты равен: а) 5 м; б) 10 м.

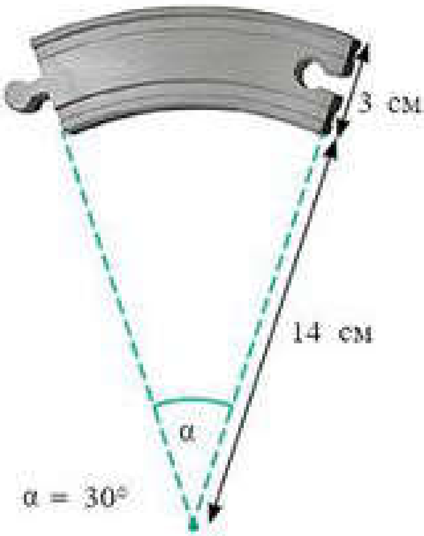
а)



б)

в)

Рис. 22.4



а)

б)

Рис. 22.5

13. Маленькой сестре Берика, Айгуль, очень нравится играть со своим деревянным набором для поезда. Берик помогает ей строить колею из дугообразных частей, как показано ниже (рис. 22.5, а). Сколько дугообразных частей, показанных выше, понадобится Берику и Айгуль для построения колеи в форме круга? Какова примерно разность между расстоянием, которое проехало внешнее колесо поезда (рис. 22.5, б) за один полный круг, и расстоянием, которое при этом проехало внутреннее колесо?

B

14. На сколько нужно уменьшить радиус окружности, чтобы ее длина уменьшилась на: 1 см; б) 2 см; в) 5 см?

15. Найдите длину окружности, описанной около: а) правильного треугольника; б) квадрата; в) правильного шестиугольника со стороной 1.

16. Найдите длину окружности, вписанной в: а) правильный треугольник; б) квадрат; в) правильный шестиугольник со стороной 1.

17. Найдите длину кривой, ограничивающей фигуру, изображенную на рисунке 22.6. Стороны клеток равны 1.

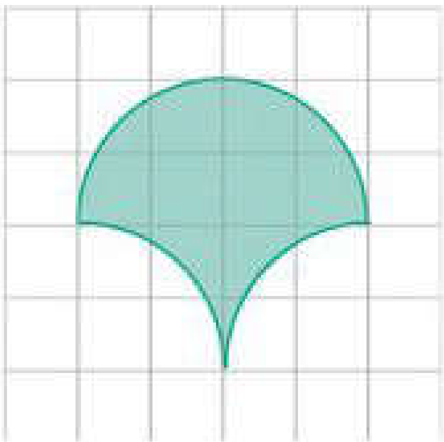


Рис. 22.6

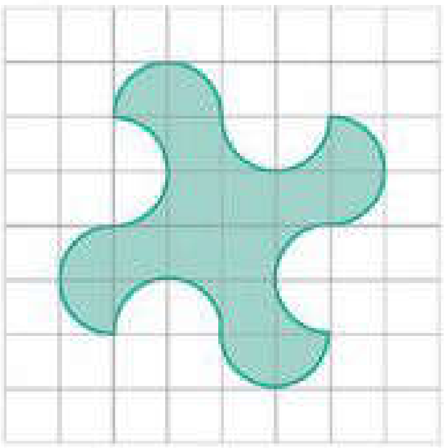


Рис. 22.7

18. Найдите длину кривой, ограничивающей фигуру, изображенную на рисунке 22.7. Стороны клеток равны 1.

19. Какой длины должна быть хорда AB окружности радиусом 1, чтобы длины дуг, на которые она разбивает окружность, относились как 2 : 1?

20. Вообразите, что земной шар плотно обтянут по экватору веревкой. На сколько нужно увеличить длину веревки, чтобы ее можно было поднять над поверхностью Земли по всей длине на расстояние 1 м?

C

21. Для шестиугольника $ABCDEF$, вписанного в окружность, найдите сумму углов A, C и E (рис. 22.8).

22. Для правильного двенадцатиугольника, стороны которого равны 1, найдите радиусы описанной и вписанной окружностей (рис. 22.9).

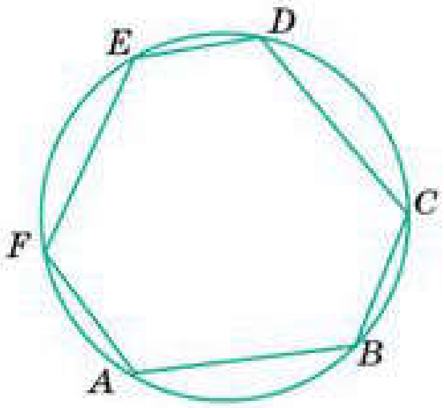


Рис. 22.8

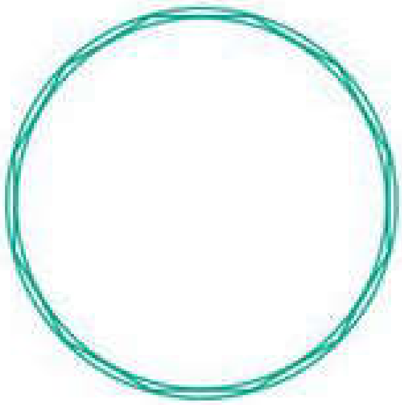


Рис. 22.9

23. Найдите радиус земного шара, исходя из того, что 1 м составляет одну сорокамиллионную долю длины экватора.

24. Поле стадиона имеет форму прямоугольника с примыкающими к нему с двух сторон полукругами. Длина беговой дорожки вокруг поля равна 400 м. Длина каждого из двух прямолинейных участков дорожки равна 100 м. Найдите ширину поля стадиона (рис. 22.10).

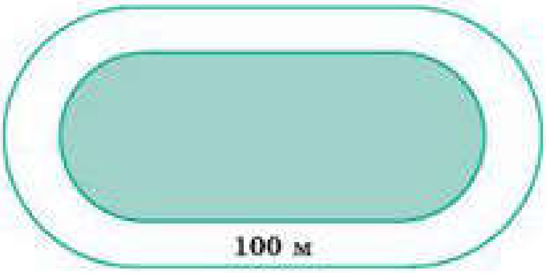


Рис. 22.10

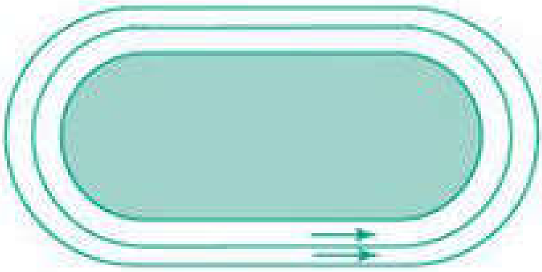


Рис. 22.11

25. Два спортсмена должны пробежать один круг по дорожке стадиона, форма которого — прямоугольник с примыкающими к нему с двух сторон полукругами (рис. 22.11). Один бежит по дорожке, расположенной на 2 м дальше от края, чем другой. Какое расстояние должно быть между ними на старте, чтобы компенсировать разность длин дорожек, по которым они бегут (примите $\pi \approx 3$)?

26. Поезд едет со скоростью 81 км/ч. Диаметр его колеса равен 120 см. Сколько оборотов в минуту делает колесо поезда (примите $\pi \approx 3$)?

27. Какова скорость поезда (в км/ч), если диаметр его колеса равен 120 см и оно делает 300 оборотов в минуту (примите $\pi \approx 3$)?

28. Под каким углом человек видит ноготь своего указательного пальца вытянутой руки, если ширина ногтя примерно равна

1 см, а расстояние от него до глаза человека примерно равно 60 см? В ответе укажите целое число градусов (примите $\pi \approx 3$).

29. Стрелок из лука видит мишень диаметром 120 см под углом 1°. Найдите расстояние до мишени. Укажите приближенное значение, выражаемое целым числом метров (примите $\pi \approx 3$).

30. Луна видна с Земли под углом 0,5°. Найдите приближенное расстояние до Луны, зная, что ее диаметр приближенно равен 3400 км. В ответе укажите целое число километров (примите $\pi \approx 3$).

31. Солнце видно с Земли под углом 0,5°. Найдите приближенное расстояние до Солнца, зная, что его диаметр приближенно равен 1300000 км. В ответе укажите целое число километров (примите $\pi \approx 3$).

32. Используя циркуль и линейку, постройте правильный: а) треугольник; б) четырехугольник; в) шестиугольник.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

33. Повторите понятие площади.

34. Найдите площади правильных шестиугольников, вписанного и описанного около окружности, радиусом 1.

23. ПЛОЩАДЬ КРУГА И ЕГО ЧАСТЕЙ

Фигура, состоящая из части плоскости, ограниченной окружностью, называется ***кругом*** .

Для нахождения площади круга рассмотрим правильные многоугольники, вписанные в соответствующую окружность (рис. 23.1).

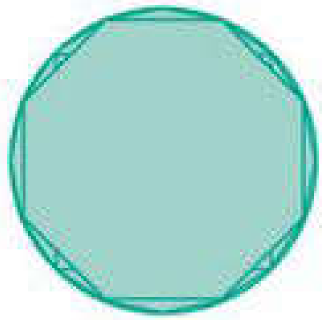


Рис. 23.1

При увеличении числа сторон многоугольники приближаются к окружности. Поэтому ***площадью круга*** считают число, к которому приближаются площади вписанных правильных многоугольников при увеличении числа их сторон.

Теорема. Площадь круга равна половине произведения длины его окружности на радиус.

Как и в случае длины окружности, доказательство данной теоремы выходит за рамки школьного курса математики. Здесь мы дадим только набросок доказательства.

Рассмотрим правильный многоугольник, вписанный в данную окружность (рис. 23.2).

Площадь этого многоугольника равна половине произведения его периметра на радиус r вписанной в него окружности. При уве-

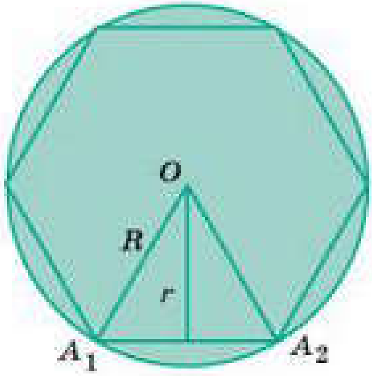


Рис. 23.2

личении числа сторон многоугольников их периметры стремятся к длине окружности, а радиусы r вписанных окружностей стремятся к радиусу R исходной окружности. Поэтому площадь круга равна половине произведения длины окружности на радиус круга.

Таким образом, площадь S круга радиусом R вычисляется по формуле

$$S = \pi R^2.$$

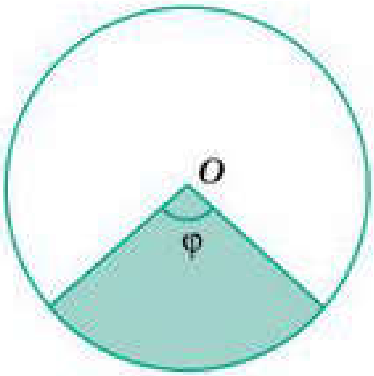


Рис. 23.3

Пример. Найдите площадь круга, вписанного в квадрат со стороной 1.

Решение. Радиус данного круга равен 0,5. Следовательно, площадь этого круга равна $0{,}25\ \pi$.

Круговым сектором , или просто ***сектором*** , называется общая часть круга и центрального угла с вершиной в центре этого круга (рис. 23.3).

Для нахождения формулы ***площади сектора*** заметим, что площадь сектора с центральным углом в $1°$ в 360 раз меньше площади круга и, следоват ельно, равна $\frac{\pi R^2}{360°}$, где R — радиус круга. Поэтому площадь сектора с це нтральным углом в φ градусо в будет выражаться формулой

$$S_{\text{сектора}} = \frac{\pi R^2 \varphi}{360°}.$$

Теорема. Площадь сектора равна половине произведения длины ограничивающей его дуги на радиус окружности.

Доказательство. Длина l дуги окружности радиусом R вычисляется по формуле

$$l = \frac{2\pi R\varphi}{360°}.$$

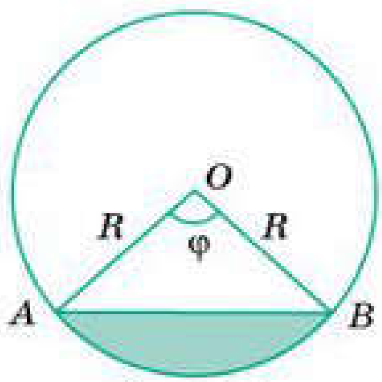


Рис. 23.4

Подставляя это выражение в формулу для площади сектора, получим

$$S_{\text{сектора}} = \frac{1}{2} l \cdot R.$$

Круговым сегментом , или просто ***сегментом*** , называется часть круга, отсекаемая от него какой-нибудь хордой (рис. 23.4).

Площадь сегмента, ограниченного хордой AB, можно найти как разность площади сектора OAB и площади треугольника OAB. Пусть центральный угол равен ϕ градусов, радиус круга R. Тогда площадь секто ра равна $\frac{\pi R^2 \varphi}{360^\circ}$. Площадь треугольника равна $\frac{1}{2} R^2 \cdot \sin\phi$. Поэтому ***площадь сегмента*** будет выражаться формулой

$$S_{\text{сегмента}} = S_{\text{сектора}} - S_{OAB} = \frac{\pi R^2 \varphi}{360^\circ} - \frac{1}{2} R^2 \cdot \sin\phi.$$

Пример. Окружность описана около правильного шестиугольника со стороной 1. Найдите площадь сегмента, отсекаемого от соответствующего круга стороной данного шестиугольника.

Решение. Радиус данной окружности равен 1. Центральный угол, опирающийся на дугу, стягиваемую стороной правильного шестиугольника, равен 60°. По формуле площади S сегмента находим $S = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$.

?

1. Что такое *круг* ?
2. Что считается площадью круга?
3. Чему равна площадь круга радиусом R?
4. Чему равна площадь круга диаметром d?
5. Какая фигура называется *сектором* ?
6. Чему равна площадь сектора?
7. Какая фигура называется *сегментом* ?
8. Как вычисляется площадь сегмента?

Задачи

А

1. Вычислите площадь круга, диаметр которого равен: а) 4 см; б) 10 м.

2. Вычислите радиус круга, площадь которого равна: а) 4π см^2; б) 16π м^2.

3. Найдите площадь круга, длина окружности которого равна 1 м.

4. Найдите площадь круга, описанного около прямоугольника со сторонами 6 и 8.

5. Найдите площадь сектора круга радиусом 1, если соответствующий этому сектору центральный угол равен: а) 60°; б) 40°; в) 120°.

6. Во сколько раз увеличится площадь круга, если его радиус увеличить в: а) 2; б) 3; в) 4 раза?

7. Найдите площадь кругового кольца (рис. 23.5), заключенного между двумя концентрическими окружностями с радиусами 1 и 2.
8. Толщина проволоки 6 мм. Найдите площадь ее сечения.
9. Найдите площадь основания юрты (рис. 23.6), если его диаметр равен: а) 5 м; б) 10 м.

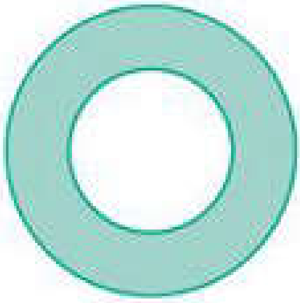


Рис. 23.5


Рис. 23.6

B

10. Найдите площадь круга, описанного около: а) равностороннего треугольника; б) квадрата; в) правильного шестиугольника со стороной 1.
11. Найдите площадь круга, вписанного в: а) равносторонний треугольник; б) квадрат; в) правильный шестиугольник со стороной 1.
12. Найдите радиус окружности, которая делит круг радиусом 1 на две равновеликие части — кольцо и круг.
13. Найдите площадь фигуры, изображенной на рисунке 23.7. Стороны клеток равны 1.
14. Найдите площадь фигуры, изображенной на рисунке 23.8. Стороны клеток равны 1.
15. Дерево имеет в обхвате 120 см. Найдите примерную площадь поперечного сечения (в см^2), имеющего форму круга (примите $\pi \approx 3$).
16. Две трубы, диаметры которых равны 10 см и 24 см, требуется заменить одной, не изменяя их пропускной способности. Каким должен быть диаметр новой трубы?

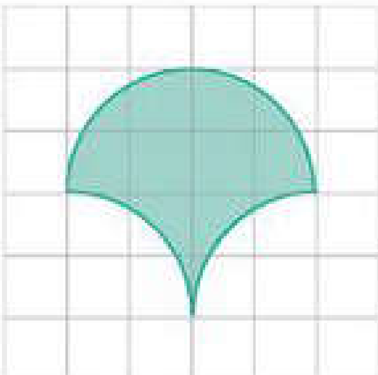


Рис. 23.7

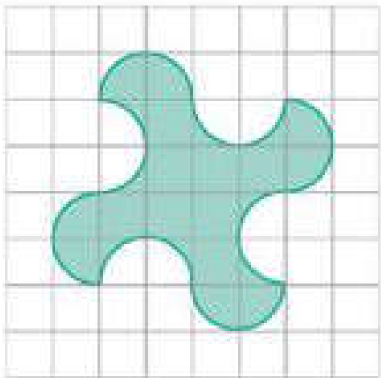


Рис. 23.8

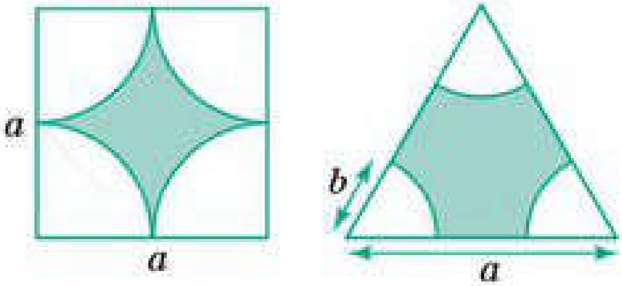


Рис. 23.9

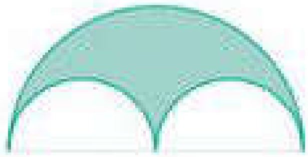


Рис. 23.10

Рис. 23.11

17. Зрачок человеческого глаза, имеющий форму круга, может изменять свой диаметр в зависимости от освещения от 1,5 мм до 7,5 мм. Во сколько раз при этом увеличивается площадь поверхности зрачка?

18. Найдите площади заштрихованных фигур на рисунке 23.9.

19. Диаметр каждой из маленьких полуокружностей (рис. 23.10) равен радиусу большой полуокружности. Чему равна площадь закрашенной фигуры, если радиус большой полуокружности равен R. Такую фигуру Архимед называет *арбелосом* — от греческого слова αρβυλος — сапожный нож (рис. 23.11). В данной задаче рассматривается арбелос с равными диаметрами маленьких кругов (равнобокий арбелос).

C

20. Докажите, что площадь полукруга, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника как на диаметре (рис. 23.12), равна сумме площадей полукругов, построенных на катетах как на диаметрах.

21. Найдите площадь фигуры, изображенной на рисунке 23.13, если $d = 1$ см, $a = 2$ см, $b = 6$ см.

22. На рисунке 23.14 заштрихованная фигура состоит из четырех, так называемых луночек Гиппократа. Докажите, что ее площадь равна площади квадрата $ABCD$.

23. Найдите площадь сегмента, отсекаемого от круга радиусом 1 хордой, стягивающей дугу этого сегмента величиной: а) 60°; б) 90°; в) 120°.

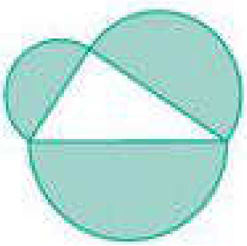


Рис. 23.12

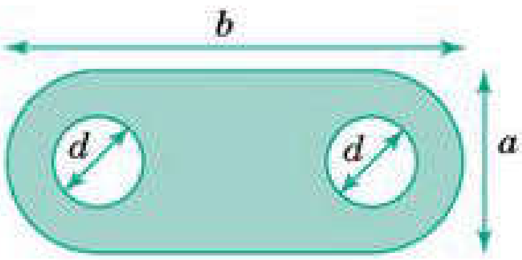


Рис. 23.13

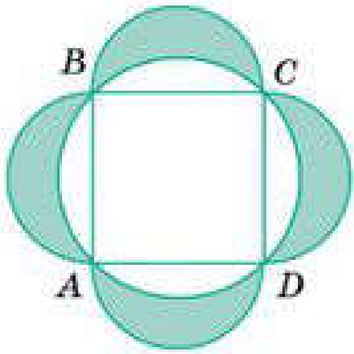


Рис. 23.14

24. Найдите площади заштрихованных фигур на рисунке 23.15. Радиусы окружностей равны 1.

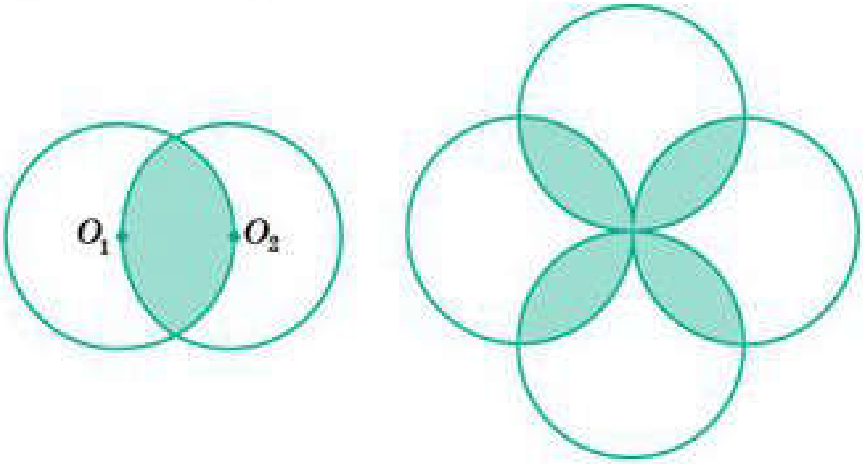


Рис. 23.15

25. Монумент "Байтерек" — уникальное произведение архитектуры в столице нашей страны. В подземном уровне монумента расположен аквариум, основание которого представляет собой часть кольца, образованного концентрическими окружностями радиусами 10 м и 9,3 м. Длина дуги меньшей окружности 8 м. Найдите площадь кругового кольца (рис. 23.16).

Рис. 23.16

26. Административное здание Национальной компании "Қазақстан темір жолы" — одно из самых высоких в Казахстане. Оно состоит из двух смещенных относительно друг друга полукруглых башен (рис. 23.17). Высота здания — 175 м. Основание башни имеет форму кругового сегмента радиусом $R = 21{,}5$ м и углом $\alpha = 200°$. Найдите площадь сегмента.

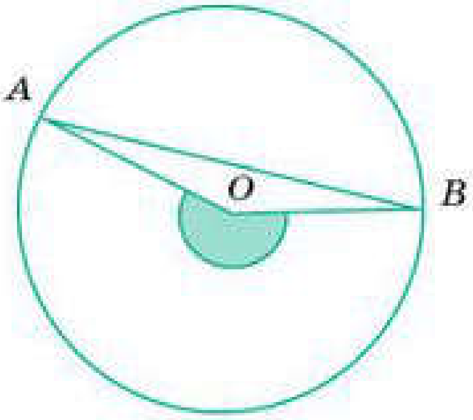


Рис. 23.17

27. Дворец творчества “Шабыт” — уникальный комплекс в г. Нур-Султане, объединяющий под своей крышей творческую молодежь. План одного из этажей удивительным образом напоминает знаменитые Гиппократовы луночки — серповидные фигуры, ограниченные дугами двух окружностей. Докажите, что площадь закрашенной луночки равна площади прямоугольного треугольника ABC (рис. 23.18).

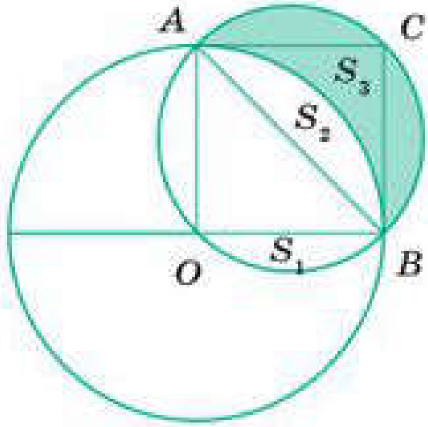


Рис. 23.18

28. Бизнес-центр *Eurocenter* — величественное здание, почти не имеющее прямых углов, не уступает по высоте многим архитектурным сооружениям столицы и своим видом напоминает корабль (рис. 23.19). На 16-м этаже здания имеется балкон (на рисунке он выделен голубым цветом). Найдите площадь балкона, если $AB = 15$ м, $r = 7$ м и $R = 9{,}55$ м.

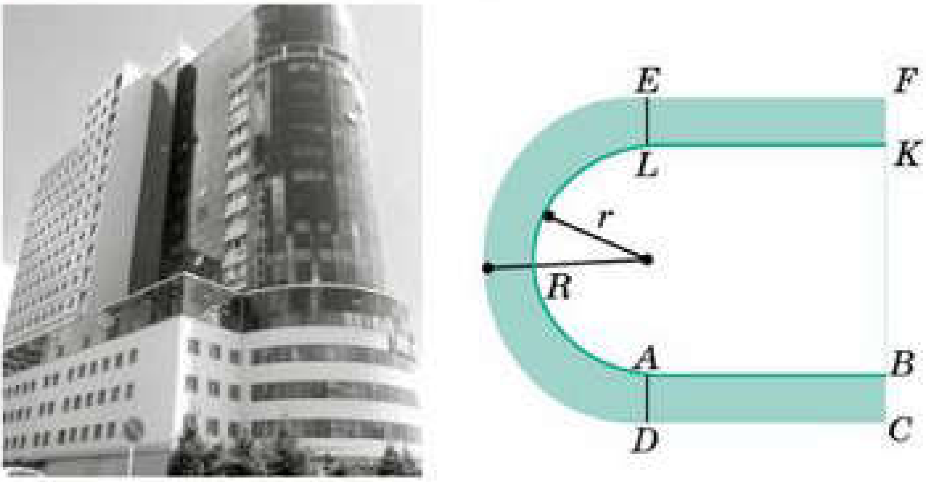


Рис. 23.19

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

29. Повторите понятие тригонометрических функций острого угла прямоугольного треугольника.

30. Попробуйте определить тригонометрические функции для прямого и тупого углов.

24*. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ГРАДУСНЫХ ВЕЛИЧИН

Напомним, что тригонометрические функции $\sin \varphi$, $\cos \varphi$, $\operatorname{tg} \varphi$ и $\operatorname{ctg} \varphi$ определялись для острого угла φ прямоугольного треугольника ($0° < \varphi < 90°$). А именно, если угол AOB прямоугольного треугольника AOB ($\angle B = 90°$) равен φ (рис. 24.1), то:

$$\sin \varphi = \frac{AB}{OA},\ \cos \varphi = \frac{OB}{OA},\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{AB}{OB},\ \operatorname{ctg} \varphi = \frac{OB}{AB}.$$

Нашей задачей является определение тригонометрических функций для произвольных градусных величин φ.

Рассмотрим декартову систему координат и окружность единичного радиуса с центром в начале координат O (рис. 24.2).

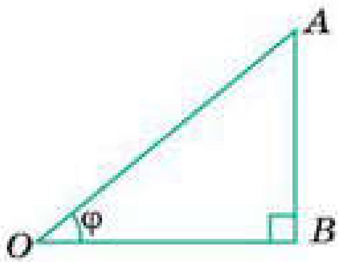


Рис. 24.1

Такую окружность будем называть ***единичной***. Каждому острому углу φ, $0° < \varphi < 90°$ соответствует точка A на единичной окружности, полученная поворотом точки $A_0(1;\ 0)$ на угол φ против часовой стрелки. Поскольку гипотенуза OA прямоугольного треугольника AOB равна единице, то синус этого угла будет равен ординате точки A, а косинус — абсциссе точки A.

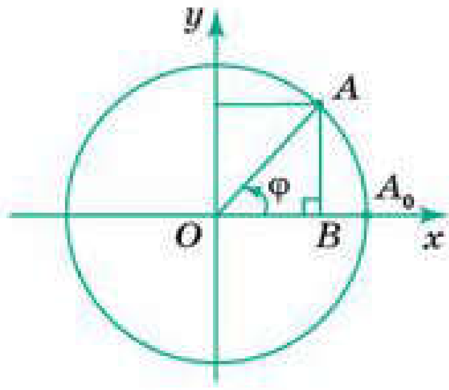


Рис. 24.2

Определим теперь $\sin\phi$ и $\cos\phi$ в случае $0° < \phi < 360°$. Для этого рассмотрим точку A, получающуюся поворотом точки $A_0(1;\ 0)$ вокруг точки O на угол ϕ против часовой стрелки (рис. 24.3). Будем считать, что поворот точки O на углы $\phi = 0°$ и $\phi = 360°$ оставляют все точки на месте.

Ордината точки A называется ***синусом*** ϕ и обозначается $\sin\phi$. Абсцисса точки A называется ***косинусом*** ϕ и обозначается $\cos\phi$.

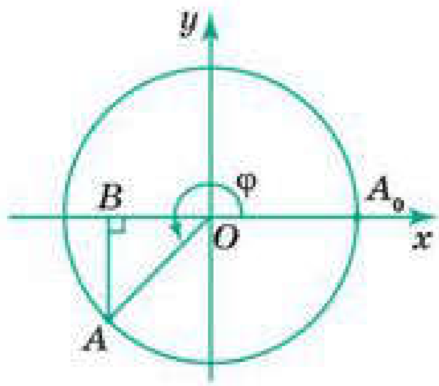


Рис. 24.3

Поэтому для этих углов синусом и косинусом будем считать соответственно ординату и абсциссу точки A_0, т.е. $\sin 0° = \sin 360° = 0$, $\cos 0° = \cos 360° = 1$.

Определим теперь поворот точки $A_0(1;\ 0)$ на градусную величину $\phi > 360°$. Для этого представим ϕ в виде суммы $\phi = \phi_1 + \ldots + \phi_n$, где $\phi_1, \ldots \phi_n$ меньше $360°$. Результат последовательного выполнения поворотов на углы $\phi_1, \ldots \phi_n$ против часовой стрелки и будет искомым поворотом точки A_0 на ϕ. Ордината и абсцисса полученной в результате полного поворота точки A называется соответственно ***синусом*** ϕ и ***косинусом*** ϕ и обозначается $\sin\phi$ и $\cos\phi$.

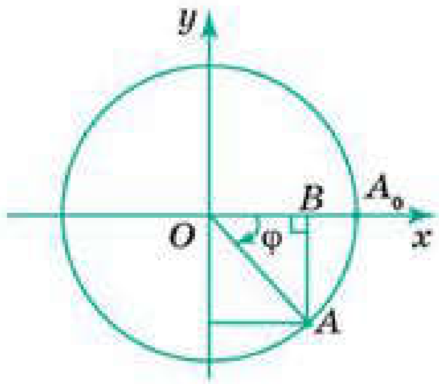


Рис. 24.4

Для градусных величин $\phi < 0°$ поворот на ϕ определяется аналогичным образом, но делается в направлении по часовой стрелке. В этом случае $\sin\phi$ и $\cos\phi$ также полагаются равными соответственно ординате и абсциссе точки A, полученной в результате поворота точки A_0 (рис. 24.4).

Из определения синуса и косинуса следует, что выполняются следующие тождества:

(1) $\sin(\phi + 360°) = \sin\phi$, $\cos(\phi + 360°) = \cos\phi$;

(2) $\sin(\phi + 180°) = -\sin\phi$, $\cos(\phi + 180°) = -\cos\phi$;

(3) $\sin(-\phi) = -\sin\phi$, $\cos(-\phi) = \cos\phi$;

(4) $\sin(90° - \phi) = \cos\phi$, $\cos(90° - \phi) = \sin\phi$.

Проверьте это самостоятельно.

Тригонометрические функции $\operatorname{tg}\varphi$ и $\operatorname{ctg}\varphi$ для произвольных градусных величин φ определяются обычным образом, а именно,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}, \ \operatorname{ctg}\varphi = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}.$$

Отметим, что $\operatorname{tg}\varphi$ определен только в случае, если $\cos\varphi \neq 0$, т. е. если φ отлично от $90° + 180° \cdot k$, где k — целое число; $\operatorname{ctg}\varphi$ определен только в случае, если $\sin\varphi \neq 0$, т. е. если φ отлично от $180° \cdot k$, где k — целое число.

Теорема. Для произвольных градусных величин φ имеет место основное тригонометрическое тождество

$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1.$$

Доказательство. По определению $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ представляет собой координаты точки на единичной окружности, а $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi$ является квадратом расстояния от этой точки до начала координат. Следовательно, $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$.

Пример 1. На какую градусную величину повернется минутная стрелка за 2 ч 30 мин?

Решение. За час минутная стрелка поворачивается на 360°. За 2 ч она повернется на 720°, и за 30 мин – на 180°. Таким образом, поворот составит $720° + 180° = 900°$.

Пример 2. Найдите $\sin 510°$ и $\cos(-300°)$.

Решение. $\sin 510° = \sin(360° + 150°) = \sin 150° = \sin(180° - 30°) =$ $= \sin 30° = \frac{1}{2}$; $\cos(-300°) = \cos(-300° + 360°) = \cos 60° = \frac{1}{2}$.

Напомним, что углы можно измерять не только в градусах, но и в радианах. Единицей радианной меры углов является ***радиан***. Угол в один радиан — это угол, для которого длина соответствующей дуги единичной окружности равна единице.

Равенство $l = \frac{\pi\varphi}{180°}$, выражающее длину дуги единичной окружности в φ градусов, устанавливает соответствие между длиной дуги единичной окружности и ее градусной величиной.

Распространим это соответствие на произвольные градусные величины φ. Это позволяет определить тригонометрические функции не только для градусных величин, но и для числового аргумента.

Подробно тригонометрические функции числового аргумента мы будем изучать в 10 классе. Здесь же рассмотрим примеры нахождения их значений.

Например,

$$\sin 0 = \sin 0° = 0,\ \sin\frac{\pi}{6} = \sin 30° = \frac{1}{2},\ \sin\frac{\pi}{4} = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin\frac{\pi}{3} = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\frac{\pi}{2} = \sin 90° = 1,\ \sin\frac{5\pi}{6} = \sin 150° = \frac{1}{2},$$

$$\sin 2\pi = \sin 360° = 0,\ \sin\frac{7\pi}{3} = \sin 420° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

?

1. Какая окружность называется *единичной* ?
2. Как определяются $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ в случае $0° < \varphi < 360°$?
3. Как определяются $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ в случае $\varphi = 0°$ и $\varphi = 360°$?
4. Как определяются $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ в случае $\varphi > 360°$?
5. Как определяются $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ для отрицательных градусных величин φ?
6. Какие тождества выполняются для синуса и косинуса в случае произвольных градусных величин?
7. Как определяются $\operatorname{tg}\varphi$ и $\operatorname{ctg}\varphi$ в случае произвольных градусных величин φ?
8. Для каких градусных величин φ не определен: а) $\operatorname{tg}\varphi$; б) $\operatorname{ctg}\varphi$?
9. В чем состоит основное тригонометрическое тождество?
10. Как определяются тригонометрические функции для числового аргумента?

Задачи

А

1. На единичной окружности с центром в начале координат изобразите точку, полученную поворотом точки $A_0(1;\ 0)$ на угол: а) 450°; б) 540°; в) –270°; г) –300°.

2. На какую градусную величину повернется минутная стрелка за: а) 1 ч 45 мин; б) 2 ч 30 мин; в) 3 ч 20 мин?

3. Точка A получена в результате поворота точки $A_0(1;\ 0)$ на угол: а) 30°; б) 45°; в) 60°; г) 90°. Чему равны координаты точки A?

4. Точка A получена в результате поворота точки $A_0(1;\ 0)$ на угол: а) 120°; б) 135°; в) 150°; г) 180°. Чему равны координаты точки A?

5. Точка A получена в результате поворота точки $A_0(1;\ 0)$ на угол: а) 210°; б) 225°; в) 240°; г) 270°. Чему равны координаты точки A?

6. Точка A получена в результате поворота точки $A_0(1;\ 0)$ на угол: а) 300°; б) 315°; в) 330°; г) 360°. Чему равны координаты точки A?

7. Найдите: а) $\sin(-30°)$; б) $\sin(-150°)$; в) $\cos 420°$; г) $\cos(-135°)$.

8. Найдите: а) $\cos 0°$; б) $\cos\frac{\pi}{6}$; в) $\cos\frac{\pi}{4}$; г) $\cos\frac{\pi}{3}$; д) $\cos\frac{\pi}{2}$; е) $\cos\frac{2\pi}{3}$; ж) $\cos\frac{3\pi}{4}$; з) $\cos\frac{5\pi}{6}$; и) $\cos\pi$.

9. Найдите: а) $\sin(-\frac{\pi}{6})$; б) $\sin(-\frac{\pi}{4})$; в) $\sin(-\frac{\pi}{3})$; г) $\sin(-\frac{\pi}{2})$; д) $\sin(-\frac{5\pi}{6})$; е) $\sin(-2\pi)$; ж) $\sin(-\frac{7\pi}{3})$.

B

10. На единичной окружности с центром в начале координат изобразите точку, полученную поворотом точки $A_0(1;\ 0)$ на угол: а) 3π; б) $\frac{5\pi}{2}$; в) $-\frac{3\pi}{4}$; г) $-\frac{7\pi}{3}$.

11. За сколько времени минутная стрелка повернется на: а) 300°; б) 420°; в) 540°?

12. Могут ли синус и косинус принимать значения: а) больше 1; б) меньше -1?

13. Укажите, для каких градусных величин синус принимает: а) положительные значения; б) значения, равные нулю; в) отрицательные значения.

14. Укажите, для каких градусных величин косинус принимает: а) положительные значения; б) значения, равные нулю; в) отрицательные значения.

15. Могут ли тангенс и котангенс принимать значения: а) больше 1; б) меньше -1?

16. Найдите: а) $\operatorname{tg}(-30°)$; б) $\operatorname{tg}(-150°)$; в) $\operatorname{ctg} 420°$; г) $\operatorname{ctg}(-135°)$.

C

17. Найдите: а) $\operatorname{tg}(\frac{7\pi}{4})$; б) $\operatorname{tg}(-\frac{\pi}{6})$; в) $\operatorname{ctg}(\frac{5\pi}{3})$; г) $\operatorname{ctg}(-\frac{3\pi}{4})$.

18. Для каких градусных величин тангенс принимает значения: а) больше нуля; б) равные нулю; в) меньше нуля?

19. Для каких градусных величин котангенс принимает значения: а) больше нуля; б) равные нулю; в) меньше нуля?

20. Докажите, что имеют место тождества:

$$\operatorname{tg}(\varphi + 180°) = \operatorname{tg}\varphi, \quad \operatorname{ctg}(\varphi + 180°) = \operatorname{ctg}\varphi,$$
$$\operatorname{tg}(-\varphi) = -\operatorname{tg}\varphi, \quad \operatorname{ctg}(-\varphi) = -\operatorname{ctg}\varphi.$$

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Определите вид треугольника, если центр описанной около него окружности находится на одной из его сторон:

A) равносторонний; B) остроугольный;
C) прямоугольный; D) тупоугольный.

2. Центр окружности, вписанной в треугольник, лежит внутри него. Определите вид треугольника:

A) остроугольный; B) прямоугольный;
C) тупоугольный; D) нельзя определить.

3. Во сколько раз радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника, больше радиуса вписанной в этот треугольник окружности:

A) в 2 раза; B) в 3 раза; C) в 4 раза; D) в 6 раз?

4. Около четырехугольника $ABCD$ описана окружность. Его углы A, B, C относятся как $1:2:3$. Найдите угол D:

A) 30°; B) 45°; C) 60°; D) 90°.

5. В четырехугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB = 11$ см, $CD = 17$ см. Найдите периметр четырехугольника:

A) 14 см; B) 28 см; C) 40 см; D) 56 см.

6. Меньшая сторона прямоугольника равна 3,6 см. Угол между диагоналями 120°. Найдите диаметр описанной окружности:

A) 1,8 см; B) 3,6 см; C) 7,2 см; D) 14,4 см.

7. Найдите радиус окружности, вписанной в ромб со стороной 12 см и углом 30°:

A) 3 см; B) 4 см; C) 6 см; D) 8 см.

8. Периметр прямоугольной трапеции, описанной около окружности, равен 20 см, ее большая боковая сторона равна 6 см. Найдите радиус окружности:

A) 2 см; B) 4 см; C) 10 см; D) 14 см.

9. Периметр правильного шестиугольника, вписанного в окружность, равен 36 см. Найдите диаметр окружности:

A) 6 см; B) 9 см; C) 12 см; D) 18 см.

10. Угол между стороной правильного n-угольника, вписанного в окружность, и радиусом этой окружности, проведенным в один из концов этой стороны, равен 70°. Найдите n:

A) 6; B) 8; C) 9; D) 12.

11. Найдите площадь круга, диаметр которого равен 4 см:
A) π см^2; B) 2π см^2; C) 4π см^2; D) 16π см^2.

12. Найдите радиус круга, если его площадь равна 45π дм^2:
A) 9 дм; B) 22,5 дм; C) $9\sqrt{5}$ дм; D) $3\sqrt{5}$ дм.

13. Найдите диаметр круга, площадь которого равнялась бы сумме площадей двух кругов радусами 4 см и 3 см:
A) 5 см. B) 6 см; C) 8 см; D) 10 см.

14. Радиус окружности разделен пополам, и через точку деления проведена окружность, концентрическая данной окружности. Найдите отношение площадей соответствующих кругов:
A) 1 : 2; B) 1 : 3; C) 1 : 4; D) 2 : 3.

15. Найдите площадь круга, описанного около равностороннего треугольника со стороной 3 см:
A) 2π см^2; B) 3π см^2; C) $4{,}5\pi$ см^2; D) 9π см^2.

16. Найдите площадь круга, вписанного в правильный треугольник со стороной, равной 6 см:
A) π см^2; B) 2π см^2; C) 3π см^2; D) $\frac{1}{2}\pi$ см^2.

17. Найдите отношени е площадей кругов, вписа нного и описанного около единичного квадрата:
A) 1 : 2; B) 1 : 4; C) 1 : $\sqrt{2}$; D) $\sqrt{2}$: 2.

18. Найдите отношение площадей правильных шестиугольников, один из которых вписан, а другой описан около данной окружности:
A) 1 : 2; B) 3 : 4; C) 1 : 6; D) 2 : 3.

19. Найдите площадь сектора, лежащего внутри центрального угла в 45°, если радиус круга равен 8 дм:
A) 4π дм^2; B) 8π дм^2; C) 16π дм^2; D) 64π дм^2.

20. Сколько градусов содержит центральный угол сектора, если он сост авляет $\frac{4}{15}$ площад и круга:
A) 24°; B) 48°; C) 90°; D) 96°?

ПОВТОРЕНИЕ КУРСА ГЕОМЕТРИИ 9 КЛАССА

1. Векторы на плоскости

1. Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 6 и 8. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AC}$.

2. Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 6 и 8. Найдите длину суммы векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

3. Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 6 и 8. Найдите длину разности векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

4. Стороны AB и AD прямоугольника $ABCD$ равны соответственно 6 и 8. Найдите длину суммы векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

5. Стороны AB и AD прямоугольника $ABCD$ равны соответственно 6 и 8. Найдите длину разност и векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

6. Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 6 и 8. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

7. Стороны AB и AD прямоугольника $ABCD$ равны соответственно 6 и 8. Диагонали пересекаются в точке O. Найдите длину суммы векторов $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{BO}$.

8. Стороны AB и AD прямоугольника $ABCD$ равны соответственно 6 и 8. Диагонали пересекаются в точке O. Найдите длину разности векторов $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{BO}$.

9. Диагонали ромба $ABCD$ равны 12 и 16. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB}$.

10. Диагонали AC и BD ромба $ABCD$ равны соответственно 12 и 16. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

11. Диагонали AC и BD ромба $ABCD$ равны соответственно 12 и 16. Найдите дл ину вектора $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.

12. Диагонали AC и BD ромба $ABCD$ равны соответственно 12 и 16. Найдите длин у вектора $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

13. Диагонали AC и BD ромба $ABCD$ пересекаются в точке O и равны соответственно 12 и 16. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO}$.

14. Диагонали AC и BD ромба $ABCD$ пересекаются в точке O и равны соответствено 12 и 16. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{BO}$.

15. Диагонали AC и BD ромба $ABCD$ пересекаются в точке O и равны соответственно 12 и 16. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{BO}$.

16. Стороны правильного треугольника ABC равны 1. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
17. Стороны правильного треугольника ABC равны 3. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.
18. Стороны правильного треугольника ABC равны 3. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.
19. Стороны правильного треугольника ABC равны 3, O — центр описанной окружности. Найдите длину вектора $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.
20. Стороны правильного треугольника ABC равны 3, O — центр описанной окружности. Найдите длину вектора $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$.
21. Стороны правильного треугольника ABC равны 3, O — центр описанной окружности. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$.
22. Стороны правильного треугольника ABC равны 3, O — центр описанной окружности. Найдите длину вектора $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.
23. Для точек $A(2;\ 4)$, $B(8;\ 6)$ найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$.
24. Вектор $\overrightarrow{AB}$ с началом в точке $A(3;\ 6)$ имеет координаты $(9;\ 3)$. Найдите координаты точки B.
25. Вектор $\overrightarrow{AB}$ с концом в точке $B(5;\ 4)$ имеет координаты $(3;\ 1)$. Найдите координаты точки A.
26. Для векторов $\vec{a}(2;\ 6)$, $\vec{b}(8;\ 4)$ найдите координаты вектора $\vec{a} + \vec{b}$.
27. Для векторов $\vec{a}(2;\ 6)$, $\vec{b}(8;\ 4)$ найдите длину вектора $\vec{a} + \vec{b}$.
28. Для векторов $\vec{a}(2;\ 6)$, $\vec{b}(8;\ 4)$ найдите координаты вектора $\vec{a} - \vec{b}$.
29. Для векторов $\vec{a}(2;\ 6)$, $\vec{b}(8;\ 4)$ найдите длину вектора $\vec{a} - \vec{b}$.
30. Для векторов $\vec{a}(2;\ 6)$, $\vec{b}(8;\ 4)$ найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
31. Для векторов $\vec{a}(2;\ 6)$, $\vec{b}(8;\ 4)$ найдите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
32. Для векторов $\vec{a}(2;\ 6)$, $\vec{b}(8;\ 4)$ найдите число t, при котором вектор $\vec{a}$ перпендикулярен вектору $\vec{a} - t\vec{b}$.
33. Для векторов $\vec{a}(1;\ 1)$, $\vec{b}(-1;\ 1)$, $\vec{c}(1;\ 2)$ найдите число t, при котором вектор $t\vec{a} + \vec{b}$ перпендикулярен вектору $\vec{c}$.
34. Для векторов $\vec{a}(1;\ 1)$, $\vec{b}(-1;\ 1)$, $\vec{c}(1;\ 2)$ найдите такие числа t, s, для которых $\vec{c} = t\vec{a} + s\vec{b}$.

2. Преобразования плоскости

1. Для данных точек A, B, C постройте точку C', получающуюся из точки C параллельным переносом на вектор $\overline{AB}$.
2. Существуют ли точки, которые при параллельном переносе переходят сами в себя?
3. Существуют ли отрезки, которые при параллельном переносе переходят сами в себя?
4. При каком условии существует параллельный перенос, отображающий один отрезок на другой?
5. Существуют ли прямые, которые при параллельном переносе переходят сами в себя?
6. Даны две параллельные прямые. Сколько существует параллельных переносов, переводящих одну из них в другую?
7. Существует ли параллельный перенос, при котором одна сторона правильного пятиугольника переходит в его другую сторону?
8. Существует ли параллельный перенос, при котором одна сторона правильного шестиугольника переходит в другую его сторону?
9. Существуют ли точки, которые при осевой симметрии переходят в себя?
10. Существуют ли отрезки, которые при осевой симметрии переходят в себя?
11. Какие прямые при осевой симметрии переходят в себя?
12. Осевая симметрия переводит точку A в точку A'. Где находится ось симметрии?
13. Постройте при помощи циркуля и линейки точку, симметричную данной точке относительно данной оси.
14. Приведите примеры фигур, имеющих осевую симметрию.
15. Приведите примеры фигур, не имеющих осевой симметрии.
16. Имеет ли оси симметрии: а) ромб; б) параллелограмм, отличный от ромба; в) равнобедренная трапеция?
17. Сколько осей симметрии имеет: а) правильный треугольник; б) квадрат; в) окружность?
18. Сколько осей симметрии имеет правильный n-угольник?
19. В каком случае прямая при осевой симметрии переходит в параллельную ей прямую?
20. Существуют ли точки, которые при центральной симметрии переходят в себя?
21. Существуют ли отрезки, которые при центральной симметрии переходят в себя?
22. Какие прямые при осевой симметрии переходят в себя?

23. Что является центром симметрии отрезка?
24. Центральная симметрия переводит точку A в точку A'. Где находится центр симметрии?
25. Имеет ли центр симметрии: а) луч; б) пара пересекающихся прямых?
26. Имеет ли центр симметрии: а) правильный треугольник; б) равнобедренный треугольник, не являющийся правильным; в) прямоугольник; г) параллелограмм, не являющийся ромбом; д) равнобедренная трапеция; е) окружность?
27. Может ли центр симметрии фигуры не принадлежать ей?
28. Может ли фигура иметь: а) два; б) три; в) бесконечно много центров симметрии?
29. Постройте отрезок, симметричный отрезку AB относительно центра O, если: а) O принадлежит прямой AB; б) O не принадлежит прямой AB.
30. Постройте прямую, симметричную данной прямой относительно точки, не принадлежащей этой прямой.
31. Приведите примеры фигур, имеющих центр симметрии и не имеющих оси симметрии.
32. Приведите примеры фигур, имеющих оси симметрии и не имеющих центра симметрии.
33. Постройте точки, в которые переходит заданная точка A при повороте вокруг заданной точки O на углы $30°$, $60°$, $120°$, $180°$, $270°$.
34. На какой угол нужно повернуть прямую, чтобы полученная прямая была: а) перпендикулярна исходной; б) параллельна исходной.
35. Точка A' получена из точки A поворотом. Можно ли по этим данным однозначно определить угол поворота?
36. Точка A' получена из точки A поворотом на угол $60°$. Можно ли по этим данным однозначно определить точку O, вокруг которой произведен поворот?
37. Правильный треугольник повернули на $180°$ вокруг центра описанной окружности. Какая фигура является общей частью полученного и исходного треугольников?
38. Правильный пятиугольник повернули на угол $36°$ вокруг центра описанной окружности. Какая фигура является общей частью полученного и исходного пятиугольника?
39. Центром симметрии какого порядка является точка пересечения диагоналей: а) параллелограмма, отличного от ромба; б) ромба, отличного от квадрата; в) прямоугольника, отличного от квадрата; г) квадрата?

40. Могут ли при движении разные точки переходить в одну точку?

41. Докажите, что движение переводит окружность в окружность того же радиуса.

42. Пусть движение переводит треугольник ABC в треугольник $A'B'C'$. Докажите, что при этом высоты, медианы и биссектрисы треугольника ABC перейдут в высоты, медианы и биссектрисы треугольника $A'B'C'$ соответственно.

43. Для двух данных равных отрезков укажите движения, переводящие один в другой.

44. Докажите, что две окружности равны, если равны их радиусы.

45. Будут ли равны два четырехугольника, если у них все стороны соответственно равны?

46. Фигура F' подобна фигуре F с коэффициентом k. С каким коэффициентом фигура F подобна фигуре F'?

47. Приведите примеры фигур, которые подобны сами себе при любом коэффициенте подобия.

48. Верно ли, что если два угла подобны, то они равны?

49. Точка A' получена гомотетией точки A. Какая из этих точек расположена ближе к центру гомотетии O, если: а) $0 < k < 1$; б) $k > 1$?

50. Существуют ли прямые, которые переводятся гомотетией сами в себя?

51. Даны точки A, B и гомотетичные им точки A', B' соответственно. Можно ли найти центр данной гомотетии?

52. Как расположены две окружности друг относительно друга, если их центром гомотетии является: а) центр одной из окружностей; б) точка, принадлежащая одной из данных окружностей?

53. Докажите, что любые две окружности подобны и коэффициент подобия равен отношению их радиусов.

54. Постройте треугольник, гомотетичный данному, приняв за центр одну из вершин данного треугольника и коэффициент гомотетии, равный: а) 3; б) $\frac{1}{3}$.

55. Стороны четырехугольника равны 14 см, 21 см, 10 см и 32 см. Найдите стороны подобного ему четырехугольника, если известно, что его меньшая сторона равна 20 см.

56. Какие условия должны выполняться, чтобы были подобны два ромба?

57. Подобны ли любые два: а) равносторонних треугольника; б) равнобедренных треугольника, отличных от равносторонних; в) равнобедренных прямоугольных треугольника?

58. Стороны треугольника равны 5 см, 8 см и 10 см. Найдите стороны подобного ему треугольника, если коэффициент подобия равен: а) $\frac{1}{2}$; б) 2.

59. Два треугольника подобны. Два угла одного треугольника равны $55°$ и $80°$. Найдите наименьший угол второго треугольника.

60. В подобных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = 8$ см, $BC = 10$ см, $A_1B_1 = 5{,}6$ см, $A_1C_1 = 10{,}5$ см. Найдите AC и B_1C_1.

61. У треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $AB = 5$ м, $BC = 7$ м, $A_1B_1 = 10$ м, $A_1C_1 = 8$ м. Найдите остальные стороны треугольников.

62. Стороны треугольника относятся как 5 : 3 : 6. Найдите стороны подобного ему треугольника, у которого: а) периметр равен 28 см; б) большая сторона равна 24 см.

63. Докажите, что равнобедренные треугольники подобны, если углы при их вершинах, противолежащих основаниям, равны.

64. Докажите, что два прямоугольных треугольника подобны, если у них есть по равному острому углу.

65. Докажите, что высота прямоугольного треугольника разбивает его на два треугольника, подобных исходному.

66. У двух равнобедренных треугольников углы между боковыми сторонами равны. Боковая сторона и основание одного треугольника равны соответственно 17 см и 10 см, основание другого равно 8 см. Найдите его боковую сторону.

67. Катеты одного неравнобедренного прямоугольного треугольника на 3 см больше катетов другого прямоугольного треугольника. Подобны ли треугольники?

68. В треугольнике ABC проведены его средние линии DE, EG и DG, параллельные сторонам соответственно AB, BC и AC. Среди всех образовавшихся треугольников укажите подобные.

69. Стороны одного треугольника равны 8 см, 6 см и 5 см. Меньшая сторона второго треугольника, подобного первому, равна 2,5 см. Найдите другие стороны второго треугольника.

70. Стороны треугольника 6 м, 8 м и 9 м. Найдите стороны треугольника, подобного данному, если его меньшая сторона равна большей стороне данного треугольника.

3. Решение треугольников

1. В треугольнике ABC $AB = 9$, $\angle A = 45°$, $\angle C = 60°$. Найдите сторону BC.

2. В треугольнике ABC $AB = 6$ см, $\angle A = 45°$, $\angle C = 120°$. Найдите сторону BC.

3. В треугольнике ABC даны две стороны $BC = 3$, $AC = \sqrt{3}$ и $\angle A$, равный $60°$. Найдите угол B.
4. Стороны треугольника относятся как $2 : 3 : 4$. Найдите отношения синусов углов.
5. Синусы углов треугольника относятся как $3 : 4 : 5$. Как относятся стороны? Какой это треугольник?
6. Найдите отношения сторон $AC : BC$ и $AB : BC$ в треугольнике ABC, в котором: а) $\angle A = 120°$, $\angle B = 30°$; б) $\angle A = 90°$, $\angle B = 30°$.
7. Углы треугольника относятся как $1 : 2 : 3$. Найдите отношение сторон.
8. В треугольнике ABC $AB = 4$, $BC = 3$, $AC = 5$. Найдите отрезки, на которые биссектриса CD этого треугольника делит его сторону AB.
9. В треугольнике ABC $AB = 3$, $AC = BC = 6$. Найдите отрезки, на которые биссектриса AD этого треугольника делит его сторону BC.
10. В треугольнике ABC $AC = BC = 1$, угол C равен $30°$. Найдите AB.
11. В треугольнике ABC $AC = BC = 1$, угол C равен $45°$. Найдите AB.
12. В треугольнике ABC $AB = 12$ см, $AC = 8$ см, $\angle A = 60°$. Найдите третью сторону.
13. Найдите сторону треугольника, лежащую против угла в $120°$, если прилежащие к нему стороны равны: а) 6 см и 10 см; б) 7 мм и 8 мм.
14. При каких значениях угла A квадрат стороны треугольника, лежащей против этого угла: а) меньше суммы квадратов двух других сторон; б) равен сумме квадратов двух других сторон; в) больше суммы квадратов двух других сторон?
15. Стороны треугольника 5 м, 6 м и 7 м. Найдите косинусы его углов.
16. Даны диагонали параллелограмма 6 и 8 и угол между ними равен $30°$. Найдите стороны параллелограмма.
17. Даны стороны параллелограмма 6 и 8 и один из его углов равен $45°$. Найдите диагонали параллелограмма.
18. Стороны треугольника равны a, b и c. Угол C, противолежащий стороне c, равен $120°$. Докажите, что выполняется равенство $c^2 = a^2 + ab + b^2$.
19. Стороны параллелограмма равны 6 мм и 7 мм, одна диагональ равна 11 мм. Найдите другую диагональ.
20. Стороны равнобедренного треугольника равны 6, 7 и 7. Найдите медиану, проведенную к боковой стороне.

21. Чему равен вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности?

22. Центральный угол на 25° больше вписанного угла, опирающегося на ту же дугу. Найдите каждый из этих углов.

23. Найдите вписанный угол, опирающийся на дугу, которая составляет: а) $\frac{1}{5}$ окружности; б) 15% окружности.

24. Укажите геометрическое место вершин B прямоугольных треугольников ABC с данной гипотенузой AC.

25. Для данных точек A и B укажите геометрическое место точек C, для которых угол ACB: а) острый; б) тупой.

26. Хорда делит окружность на две части, градусные величины которых относятся как 5 : 7. Под какими углами видна эта хорда из точек окружности?

27. Через концы дуги в 50° проведены касательные. Найдите угол между ними.

28. Хорда AB стягивает дугу окружности в 44°. Найдите углы, которые образует эта хорда с касательными к окружности, проведенными через ее концы.

29. В угол ACB вписана окружность. Точки касания делят окружность на дуги, градусные величины которых относятся как 5 : 7. Найдите величину угла ACB.

30. Дуги $\overset{\smile}{AB}$ и $\overset{\smile}{DE}$ окружности составляют соответственно 85° и 45°. Найдите угол ACB, образованный хордами AD и BE, пересекающимися в точке C.

31. Найдите угол ACD, если его сторона CA касается окружности, сторона CD проходит через центр окружности, а дуга $\overset{\smile}{AD}$ окружности, заключенная внутри этого угла, равна 70°.

32. Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке E, $AE = 3$, $DE = 2$, $CE = 6$. Найдите BE.

33. Через точку E, лежащую вне окружности, проведены два луча, один из которых касается окружности в точке A, а другой пересекает окружность в точках B и C. $BE = 8$, $CE = 2$. Найдите AE.

34. Радиус OA окружности равен 6. Через середину E радиуса проведена хорда CD. Найдите произведение отрезков CE и DE.

35. Радиус OA окружности равен 8. Через середину E радиуса проведена хорда CD, $CE = 6$. Найдите DE.

36. Радиус окружности равен 3 см. На продолжении радиуса взята точка E, отстоящая от центра O окружности на расстояние 5 см. Через точку E проведен луч, пересекающий окружность в точках B и C. Найдите произведение отрезков BE и CE.

37. Радиус окружности равен 2 см. На продолжении радиуса взята точка E, отстоящая от центра O окружности на расстояние 4 см. Через точку E проведен луч, пересекающий окружность в точках B и C, $BE = 5$ см. Найдите CE.

38. Радиус окружности равен 5 см. Точка E удалена от центра окружности на 3 см. Через точку E проведена хорда CD, равная 8 см. Найдите отрезки, на которые точка E делит хорду CD.

39. Две окружности радиусами 2 см и 5 см касаются внутренним образом в точке A. Прямая, проходящая через точку A, пересекает окружности соответственно в точках B и C, $AB = 2$ см. Найдите AC.

40. Две окружности радиусами 2 см и 5 см касаются внешним образом в точке A. Прямая, проходящая через точку A, пересекает окружности соответственно в точках B и C, $AC = 5$ см. Найдите AB.

4. Окружность. Многоугольники

1. Изобразите треугольник, вписанную и описанную окружности.

2. Где находится центр окружности, описанной около: а) остроугольного; б) прямоугольного; в) тупоугольного треугольника?

3. Найдите углы вписанного в окружность равнобедренного треугольника, боковая сторона которого стягивает дугу в $90°$.

4. Найдите углы вписанного в окружность равнобедренного треугольника, если его основание стягивает дугу в $60°$.

5. Катеты прямоугольного треугольника равны 6 см и 8 см. Найдите радиусы описанной и вписанной окружностей.

6. Для данного треугольника (см. задачу 5) постройте центр описанной окружности.

7. Точки A, B, C, расположенные на окружности, делят эту окружность на три дуги, градусные величины которых относятся как $3 : 4 : 5$. Найдите углы треугольника ABC.

8. Сторона AB треугольника ABC равна 6. Найдите радиус описанной около этого треугольника окружности, если противолежащий этой стороне угол C равен: а) $30°$; б) $45°$; в) $60°$; г) $90°$; д) $150°$.

9. Радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 6 см. Найдите сторону AB этого треугольника, если противолежащий ей угол C равен: а) $30°$; б) $45°$; в) $60°$; г) $90°$; д) $150°$?

10. В треугольнике ABC $\angle A = 40°$, $\angle B = 60°$. Какая из сторон треугольника расположена ближе к центру описанной окружности?

11. В треугольнике ABC $AB = 4$, $AC = 5$, $BC = 6$. Какая из вершин треугольника расположена ближе к центру вписанной окружности?

12. Стороны треугольника равны 3, 3, 4. Найдите радиусы описанной и вписанной окружностей.

13. Нарисуйте окружность и четырехугольник, вписанный в эту окружность.

14. Можно ли описать окружность около четырехугольника, углы которого последовательно равны: а) $90°$, $80°$, $70°$, $120°$; б) $50°$, $110°$, $120°$, $80°$?

15. Два угла вписанного в окружность четырехугольника равны $100°$ и $110°$. Найдите два других угла четырехугольника.

16. Найдите радиус окружности, описанной около квадрата со стороной 2.

17. Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольника, стороны которого равны 3 и 4.

18. Можно ли вписать окружность в: а) квадрат; б) прямоугольник, отличный от квадрата; в) ромб; г) параллелограмм, отличный от ромба?

19. Можно ли вписать окружность в четырехугольник, стороны которого последовательно равны 2, 3, 4, 5?

20. Найдите радиус окружности, вписанной в квадрат со стороной 2.

21. Три последовательные стороны четырехугольника, в который можно вписать окружность, равны 3 см, 4 см и 5 см. Найдите четвертую сторону и периметр этого четырехугольника.

22. Противолежащие стороны четырехугольника, описанного около окружности, равны 6 см и 7 см. Найдите периметр четырехугольника.

23. Сторона ромба равна 4 см, острый угол — $45°$. Найдите радиус вписанной окружности.

24. Около окружности описана трапеция, периметр которой равен 20 см. Найдите ее среднюю линию.

25. Чему равна сторона правильного шестиугольника, вписанного в окружность радиусом 2?

26. Сторона правильного шестиугольника равна 3. Найдите радиус описанной около него окружности.

27. Как изменится длина окружности, если радиус окружности: а) увеличить в два раза; б) уменьшить в три раза?

28. На сколько уменьшится длина окружности, если ее радиус уменьшить на: а) 2 см; б) 3 см; в) 5 см?

29. Какой будет длина окружности, в которой дуга в $2°$ имеет длину 1 см?
30. Длина окружности равна 72 см. Найдите длину дуги этой окружности, содержащую $20°$.
31. Найдите длину дуги окружности радиусом 6, соответствующей центральному углу в: а) $20°$; б) $45°$; в) $60°$; г) $90°$.
32. Найдите радианную величину углов в: а) $30°$; б) $60°$; в) $90°$; г) $120°$.
33. Найдите градусную величину угла, если его радианная мера равна: а) $\frac{\pi}{6}$; б) $\frac{\pi}{4}$; в) $\frac{\pi}{3}$; г) $\frac{2\pi}{3}$.
34. Найдите длину окружности, описанной около: а) правильного треугольника; б) квадрата; в) правильного шестиугольника со стороной 2.
35. Найдите длину окружности, вписанной в: а) правильный треугольник; б) квадрат; в) правильный шестиугольник со стороной 2.
36. Вычислите площадь круга, диаметр которого равен: а) 2 см; б) 5 м.
37. Вычислите радиус круга, площадь которого равна: а) 9π см^2; б) 25π м^2.
38. Найдите площадь круга, длина окружности которого равна 2 м.
39. Найдите длину окружности, ограничивающей круг, площадь которого равна 1.
40. Найдите площадь сектора круга радиусом 1, если соответствующий этому сектору центральный угол равен: а) $1°$; б) $5°$; в) $10°$.
41. Во сколько раз уменьшится площадь круга, если его радиус уменьшить в: а) 3; б) 4; в) 5 раз?
42. Найдите площадь кругового кольца, заключенного между двумя концентрическими окружностями с радиусами 2 и 3.
43. Найдите площадь круга, описанного около: а) равностороннего треугольника; б) квадрата; в) правильного шестиугольника со стороной 2.
44. Найдите площадь круга, вписанного в: а) равносторонний треугольник; б) квадрат; в) правильный шестиугольник со стороной 2.
45. Найдите площадь сегмента, отсекаемого от круга радиусом 1 хордой, стягивающей дугу этого сегмента величиной: а) $60°$; б) $90°$; в) $120°$.

Таблица приближенных значений тригонометрических функций

A	sinA	tgA	A	sinA	tgA	A	sinA	tgA
30′	0,0087	0,0087	30°	0,50	0,58	60°	0,87	1,73
1°	0,0175	0,0175	31°	0,52	0,60	61°	0,87	1,80
2°	0,035	0,035	32°	0,53	0,62	62°	0,88	1,88
3°	0,05	0,05	33°	0,54	0,65	63°	0,89	1,96
4°	0,07	0,07	34°	0,56	0,68	64°	0,90	2,02
5°	0,09	0,09	35°	0,57	0,70	65°	0,91	2,15
6°	0,10	0,11	36°	0,59	0,73	66°	0,91	2,25
7°	0,12	0,12	37°	0,60	0,75	67°	0,92	2,36
8°	0,14	0,14	38°	0,62	0,78	68°	0,93	2,48
9°	0,16	0,16	39°	0,63	0,81	69°	0,93	2,61
10°	0,17	0,18	40°	0,64	0,84	70°	0,94	2,78
11°	0,19	0,19	41°	0,66	0,87	71°	0,95	2,90
12°	0,21	0,21	42°	0,67	0,9	72°	0,95	3,08
13°	0,23	0,23	43°	0,68	0,93	73°	0,96	3,27
14°	0,24	0,25	44°	0,69	0,97	74°	0,96	3,49
15°	0,26	0,27	45°	0,71	1,00	75°	0,97	3,73
16°	0,28	0,29	46°	0,72	1,04	76°	0,97	4,01
17°	0,29	0,31	47°	0,73	1,07	77°	0,97	4,33
18°	0,31	0,32	48°	0,74	1,11	78°	0,98	4,71
19°	0,33	0,34	49°	0,75	1,15	79°	0,98	5,15
20°	0,34	0,36	50°	0,77	1,19	80°	0,98	5,67
21°	0,36	0,38	51°	0,78	1,23	81°	0,99	6,31
22°	0,37	0,40	52°	0,79	1,28	82°	0,99	7,12
23°	0,39	0,42	53°	0,80	1,33	83°	0,992	8,14
24°	0,41	0,45	54°	0,81	1,38	84°	0,994	9,51
25°	0,42	0,47	55°	0,82	1,43	85°	0,996	11,43
26°	0,44	0,49	56°	0,83	1,48	86°	0,998	14,30
27°	0,45	0,51	57°	0,84	1,54	87°	0,999	19,08
28°	0,47	0,53	58°	0,85	1,60	88°	1,00	28,64
29°	0,48	0,55	59°	0,86	1,66	89°	1,00	57,29

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Векторы
— нулевые 14
— одинаково направленные 15
— противоположно направленные 15
— коллинеарные 14
— нормали 35
— перпендикулярные 28
— равные 15
Гомотетия 70
Диаметр 111
Движение 64
Длина
— вектора 15
— дуги окружности 132
— окружности 130
Дуга окружности 101
Композиция преобразований 65
Координатные векторы 32
Координаты вектора 32
Коэффициент подобия 70
Круг 137
Круговой
— сегмент 138
— сектор 138
Многоугольник
— вписанный в окружность 124
— описанный около окружности 124
— правильный 128
Модуль вектора 15
Окружность
— вневписанная 120
— вписанная в многоугольник 124
— вписанная в треугольник 118
— единичная 144
— описанная около многоугольника 124
— описанная около треугольника 118
Осевая симметрия 48
Ось симметрии 48
Параллельный перенос 44
Параметрически заданная кривая 38
Параметрические уравнения 38
Площадь
— круга 137
— сегмента 139
— сектора 138
Поворот 60
Подобие 70

Правило
— многоугольника 19
— параллелограмма 18
— треугольника 18
Преобразование плоскости 64
Признаки подобия треугольников 75
Произведение вектора на число 21
Радиан 132
Радианная мера угла 132
Радиус-вектор 32
Разность векторов 22
Сегмент 138
Сектор 138
Скалярное произведение векторов 28
Скалярный квадрат вектора 28
Сумма векторов 18
Теорема косинусов 95
Теорема синусов 91
Треугольник
— вписанный в окружность 118
— описанный около окружности 118
Угол
— вписанный 101
— между векторами 28
— поворота 60
— центральный 101
Фигуры
— подобные 70
— равные 66
— симметричные 49
— центрально-симметричные 55
Формула Герона 97
Хорда 111
Центр
— поворота 60
— симметрии 55
— n-го порядка 61
Центральная симметрия 55

ОТВЕТЫ

ПОВТОРЕНИЕ КУРСА ГЕОМЕТРИИ ДЛЯ 8 КЛАССОВ

1. Углы

1. 62°. **2.** 116°. **3.** 118°. **4.** 70°. **5.** 50°. **6.** 55°. **7.** 124°. **8.** 54°. **9.** 60°. **10.** 118°. **11.** 64°. **12.** 24°. **13.** 60°. **14.** 50°. **15.** 65°. **16.** 61°. **17.** 65°. **18.** 120°. **19.** 70°. **20.** 80°. **21.** 108°. **22.** 70°. **23.** 110°. **24.** 38°. **25.** 120°. **26.** 60°. **27.** 144°. **28.** 90°. **29.** 40°.

2. Длины

1. 15 см. **2.** 10 см. **3.** 12 см. **4.** 20 см. **5.** 10 см. **6.** 23 см. **7.** 69 см. **8.** 15 см. **9.** 20 см. **10.** 9 см. **11.** 2. **12.** 14. **13.** 12. **14.** 16. **15.** 5. **16.** $3\sqrt{2}$. **17.** $\frac{8\sqrt{3}}{3}$. **18.** 1. **19.** 13. **20.** 4,8. **21.** 6. **22.** 2. **23.** 15. **24.** 9. **25.** 10. **26.** 0,5. **27.** 4. **28.** 4. **29.** 10. **30.** 14.

3. Соотношения между сторонами и углами треугольника

1. $4\sqrt{3}$. **2.** $2\sqrt{2}$. **3.** $2\sqrt{3}$. **4.** $\sqrt{3}$. **5.** 2. **6.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **7.** $\sqrt{3}$. **8.** 1. **9.** 5. **10.** 5. **11.** 8. **12.** 15. **13.** 12. **14.** 8. **15.** 6. **16.** 6. **17.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **18.** $2\sqrt{3}$. **19.** 8. **20.** 9,6. **21.** $\frac{6\sqrt{10}}{7}$. **22.** $\frac{3\sqrt{5}}{5}$. **23.** $\frac{12\sqrt{5}}{5}$. **24.** 5.

4. Площадь

1. 6. **2.** 8. **3.** 20. **4.** 8. **5.** 60. **6.** 6. **7.** 8. **8.** $16\sqrt{2}$. **9.** 5. **10.** 8. **11.** 4. **12.** $4\sqrt{2}$. **13.** 32. **14.** 6. **15.** 30°. **16.** 3. **17.** 2. **18.** 12. **19.** 5. **20.** 6. **21.** 20. **22.** 24. **23.** 4. **24.** 25. **25.** 20. **26.** 48. **27.** 6. **28.** $18\sqrt{3}$. **29.** 3. **30.** 6. **31.** 2. **32.** 7. **33.** 6. **34.** 15. **35.** 8. **36.** 45°. **37.** 160. **38.** 42. **39.** 9. **40.** 80.

5. Прямоугольная система координат на плоскости

2. 5. **3.** 4. **4.** (3; 0). **5.** (0; 2). **6.** а) (4; 2); б) (–1; 2); в) (1; 1). **7.** (0; 1). **8.** (8; 6). **9.** (4; 5). **10.** а) $\sqrt{5}$; б) 5. **11.** а) 2; б) 3. **12.** Расстояния равны. **13.** а) (–5; 2), 4; б) (0; –3), 3. **14.** а) $x^2 + y^2 = 4$; б) $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$. **15.** а) Лежит внутри окружности; б), в), г) принадлежит окружности; д) лежит вне окружности. **16.** $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$. **17.** $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 25$. **19.** а) $y = 1$; б) $x = 2$. **20.** а) $x = 3$; б) $y = 2$. **21.** а) $y - 2 = x + 1$; б) $y - 2 = 2(x + 1)$; в) $y - 2 = \frac{1}{2}(x+1)$; г) $y - 2 = -(x + 1)$; д) $y - 2 = -2(x + 1)$; е) $y - 2 = -\frac{1}{2}(x + 1)$. **22.** 5. **23.** 12. **24.** 6. **25.** 4.

Глава 1. ВЕКТОРЫ НА ПЛОСКОСТИ

1. Понятие вектора

2. 4. **3.** 12. **4.** 6. **5.** а) $\overline{BC}$, $\overline{FE}$; б) $\overline{AB}$, $\overline{ED}$. **6.** а) $\sqrt{2}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\sqrt{2}$. **7.** а) 1; б) $\sqrt{3}$; в) 2; г) $\sqrt{3}$. **8.** а) 4 см; б) 3 см; в) 4 см; г) 5 см; д) 5 см. **9.** а) 5 см; б) 3 см; в) 4 см. **10.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; в) $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **11.** а) 13 см; б) $5\sqrt{2}$ см; в) $\sqrt{74}$ см. **12.** а) Параллелограмм; б) ромб.

2. Сложение векторов

1. а) $\overline{AC}$; б) $\overline{CA}$; в) $\overline{CB}$; г) $\overline{CA}$. **2.** а) $\overline{AC}$; б) $\overline{CE}$; в) $\overline{BD}$; г) $\overline{AD}$; д) $\overline{AE}$. **3.** а), в), д) Да; б), г) нет. **4.** Да. **5.** Да. **6.** а) $\overline{AD} = \vec a + \vec b + \vec c$; б) $\overline{BD} = \vec b + \vec c$; в) $\overline{AC} = \vec a + \vec b$. **7.** а) a; б) $\sqrt{3}\,a$; в) $\sqrt{3}\,a$. **8.** а) 18; б) 6; в) 14; г) 10. **9.** а) 1; б) 0; в) $\sqrt{3}$; г) 2. **10.** а) $\overline{AB}$; б) $\overline{AD}$; в) $\vec 0$; г) $\vec 0$.

3. Умножение вектора на число

1. $\overline{DE} = 0,5\ \overline{AB}$. **3.** а) $\overline{BC}$; б) $\overline{CB}$; в) $\overline{CA}$. **4.** а) $\overline{DB}$; б) $\overline{CA}$; в) $\overline{AD}$; г) $\overline{AC}$. **5.** а) 1; б) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **6.** а) 6; б) 8; в) 5; г) 8. **7.** $\overline{AD}$. **8.** $\overline{AC}$. **9.** а) 2; б) 10; в) 3; г) 5. **11.** $\dfrac{1}{2}\left(\overline{AB} + \overline{DC}\right)$. **13.** а) $\vec a = \vec b$; б) $\vec a = \vec 0$.

4. Разложение вектора

1. а) 2; б) –2; в) 0,5; г) –0,5. **2.** а) $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AD}$; б) $\overline{BD} = \overline{AD} - \overline{AB}$. **3.** а) $\overline{AO} = 0,5\overline{AB} + 0,5\overline{AD}$; б) $\overline{BO} = 0,5\overline{AD} - 0,5\overline{AB}$. **4.** а) $\overline{AB} = \overline{AO} - \overline{BO}$; б) $\overline{AD} = \overline{AO} + \overline{BO}$. **5.** $\vec a = \vec i + 1,5\vec j$; $\vec b = -2\vec j$; $\vec c = 1,5\vec i + \vec j$; $\vec d = -0,5\vec i + 1,5\vec j$. **6.** а) $t = 1$, $s = 0,5$; б) $t = s = 2$; в) $t = s = 0,5$. **7.** а) $-\vec a$; б) $\vec b$; в) $\vec b - \vec a$; г) $\vec b - 2\vec a$; д) $2\vec a - 2\vec b$. **8.** а) $0,5\,\vec b + 0,5\,\vec c$; б) $0,5\,\vec b - \vec c$; в) $-\vec b + 0,5\,\vec c$. **9.** 5 км/ч.

5. Угол между векторами. Скалярное произведение векторов

1. а) $3\sqrt{2}$; б) 0; в) $-3\sqrt{2}$; г) –6. **2.** а) 90°; б) 60°; в) 180°. **3.** а) 0; б) 16; в) 9. **4.** а) 0; б) 1. **5.** а) 3; б) 1. **6.** а) 60°; б) 120°; в) 120°; г) 90°. **7.** а) 0,5; б) –0,5; в) –0,5; г) 0. **8.** а) 0,5; б) 0,5; в) 0; г) $-\dfrac{3}{4}$. **9.** а) 3; б) –1,5. **10.** а) 4; б) 6; в) 4. **11.** а) 0°; б) 180°. **13.** 16. **17.** $v_{рез} = \sqrt{v^2_{тор} + v^2_{пас}} \approx 10,8$ км/ч. **18.** Второй. **19.** $v_т = v_п \cdot \sin(90° - 55°) \approx 6,9$ км/ч. **20.** $v_C = v_{сам} \cdot \cos 37° \approx 798,6$ км/ч., $S_C \approx 1996,5$ км; $v_В = v_{сам} \cdot \sin 37° \approx 601,8$ км/ч. $S_В \approx 1504,5$ км. **21.** $A = \vec F \cdot \vec S = |\vec F| \cdot |\vec S| \cdot \cos 30° \approx 2600$ Дж. **22.** Можно считать, что человек прилагает к рюкзаку постоянную силу, направленную противоположно силе тяжести, действующей на рюкзак, и численно ей равную, тогда $A = \vec F \cdot \vec S \cdot \cos\alpha = \vec F \cdot h \approx 980$ Дж. Работа не зависит от крутизны холма.

6. Координаты вектора

1. а) (–2; 6); б) (1; 3); в) (0; –3); г) (–5; 0). **2.** (5; –2). **3.** $\sqrt{x^2 + y^2}$. **4.** (5; –6). **5.** –4. **6.** 0,8. **7.** $(-a; -b)$. **8.** (–2; 0). **9.** (1; 3) и (1; –3). **10.** а) (1; –2); б) (–1; 2); в) (11; –22). **11.** 40. **13.** $-\dfrac{2}{3}$. **14.** 60°. **15.** –5. **16.** 17.

7*. Уравнение прямой

1. а) $x + y - 3 = 0$; б) $-x + 2y = 0$. **2**. (2; –3). **3**. $\left(-\frac{c}{a}; 0\right)$, $\left(0; -\frac{c}{b}\right)$. **4**. $x + y - 1 = 0$. **5**. $x - 2y + 7 = 0$, $\vec{n}(1; -2)$. **6**. а) $\begin{cases} x = 2 + t, \\ y = 1 + t; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = 2 - t, \\ y = 1 + 2t. \end{cases}$ **7**. a_1: $x + 3y - 3 = 0$; a_2: $2x - y + 2 = 0$. **8**. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **9**. а), б) 90°. **10**. а) $x - y - 1 = 0$; б) $3x + 2y - 8 = 0$. **11**. а) $x - 2y + 4 = 0$; б) $2x + y + 3 = 0$. **12**. а) 1, 3; б) 2, 4. **13**. $\begin{cases} x = 3 + 2t, \\ y = -2 + 3t. \end{cases}$ **14**. 5. **15**. а) $5\sqrt{2}$; б) 4. **16**. $2x - y - 5 = 0$. **17**. а) (–1; –2); б) (7; 3).

Проверь себя!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	B	C	A	B	D	C	B	A	C	B	C	B	D	B	C	B	D	A	C

Глава 2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПЛОСКОСТИ

8. Параллельный перенос

3. Если отрезки равны и параллельны. **5**. а) Нет; б) да, для противолежащих сторон. **6**. Для параллелограмма. **15**. (1; –1). **16**. (–5; –3). **17**. $(x - k - x_0)^2 + (y - l - y_0)^2 = R^2$. **18**. а) $x^2 + 4x + y^2 = 0$; б) $x^2 + y^2 + 4y = 0$. **19**. $a(x - k) + b(y - l) + c = 0$. **20**. а) $x + y = 0$; б) $x + y - 1 = 0$.

9. Осевая симметрия

1. Точки, принадлежащие оси симметрии. **2**. Прямые, перпендикулярные оси симметрии, и ось симметрии. **3**. Серединный перпендикуляр к отрезку AA'. **9**. а) Одну; б) три. **10**. а), б) Бесконечно много. **11**. Бесконечно много. **12**. а) Две; б) четыре. **13**. а) Ни одной; б) две. **14**. а) 5; б) 6; в) n. **15**. а), б), г). **18**. а) (3; 4); б) (–3; –4). **20**. а) $(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2 = R^2$; б) $(x + x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$. **21**. а) $x^2 + 2x + y^2 + 4y - 4 = 0$; б) $x^2 - 2x + y^2 - 4y - 4 = 0$. **22**. а) $ax - by + c = 0$; б) $-ax + by + c = 0$. **23**. а) $x + 2y + 3 = 0$; б) $x + 2y - 3 = 0$.

10. Центральная симметрия

1. Центр симметрии. **2**. Прямая, проходящая через центр симметрии. **3**. Середина отрезка. **4**. В середине отрезка AA'. **5**. Нет. **8**. а), в) Бесконечно много; б) один. **9**. а), в) Нет; б), г) да. **10**. а), б) Да; в) нет. **11**. б), в), г), д). **16**. (–3; 4). **20**. $(x + x_0)^2 + (y + y_0)^2 = R^2$. **21**. $x^2 - 2x + y^2 + 4y - 3 = 0$. **22.** $ax + by - c = 0$. **23**. $x - 2y - 3 = 0$.

11. Поворот. Симметрия n-го порядка

4. 90°. **8**. а) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$; б) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; в) $\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; г) (0; 1); д) $\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; е) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; ж) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$; з) (–1; 0). **9**. а) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$; б) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; в) $\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; г) (0; –1);

д) $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; е) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; ж) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$; з) (–1; 0). **10**. Правильный шестиугольник со стороной, равной $\frac{1}{3}$. **11**. Правильный восьмиугольник со стороной $(\sqrt{2}-1)$. **13**. 60°.

12. Движение. Равенство фигур

1. а), б) и д); в), г) и з); е) и ж). **2**. Нет. **3**. Нет. **4**. Нет. **15**. $2n$.

13. Подобие фигур. Гомотетия

1. а) 6 см, 8 см, 10 см; б) 9 см, 12 см, 15 см; в) 1,5 см, 2 см, 2,5 см. **2**. 2 см, 3 см, 4 см. **5.** а) 5; б) 4; в) 2; г) $\sqrt{2}$. **6.** $S' = 9S$. **7.** $\frac{1}{k}$. **10.** $S_1 = 4S$. **13**. Нет. **14**. $\frac{b^2}{a}$. **15**. Нет. **16**. $\sqrt{ab}$. **17**. 6, 2:1.

14. Признаки подобия треугольников

1. а), в) Да; б) нет. **2**. а) 2,5 см, 4 см, 5 см; б) 10 см, 16 см, 20 см. **3**. Да. **4**. а), б) Да. **5**. а) ABC, DBE, FEC; б) ABC, ADG, GFC, FBE; в) ABE, BCE, CAD; г) ABO, CDO; д) ABC и FGC, ADC и FEC, DBC и EGC. **7**. а) $9\frac{1}{3}$; б) 10. **8**. $AC = 15$ см, $B_1C_1 = 7$ см. **9**. $AC = 4$ см, $B_1C_1 = 14$ см. **10**. 6,4 дм, 5,76 дм и 2,4 дм. **11**. 4 см и 3 см. **12**. 7,5 см. **13**. а), в) Да; б) нет. **14**. 9. **15**. 15. **16**. 8. **17**. 5. **18**. 100 м. **19**. 30 м. **20**. 10 м. **21**. а) 15 см, 9 см, 21 см; б) 5 см, $8\frac{1}{3}$ см, $11\frac{2}{3}$ см; в) 5 см, 3 см, 7 см. **22**. 18 м, 24 м, 27 м. **23**. 2, 3, 4. **24**. 13,6 см. **28**. Да. **29**. Да. **30**. $3\frac{5}{9}$ см, $5\frac{1}{3}$ см, 8 см. **31**. 15 см. **33**. 30 м. **34.** 4 м. **35.** 6 м. **36.** 5,1 м. **37.** 2,5 м. **38.** 250 м. **39.** 97 м. **40.** 62 м. **41.** 6,12 м. **42.** 91 м. **43.** $36\frac{1}{8}$ м. **44.** 629 м. **45**. Да, если треугольник не равносторонний. **47**. $\frac{bc}{b+c}$. **48**. $\frac{ch}{b+h}$. **49.** 50 м. **50**. 120 см.

Проверь себя!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A	B	C	A	C	D	D	C	D	D	A	B	A	C	B	D	C	A	C	B

Глава 3. РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

15. Теорема синусов

1. $2\sqrt{6}$. **2**. $5\sqrt{2}$. **3**. 90°. **4**. 45°. **5**. а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **6**. 45° или 135°. **7**. $\frac{c \cdot \sin\varphi}{\sin(\varphi+\psi)}$, $\frac{c \cdot \sin\psi}{\sin(\varphi+\psi)}$. **8**. $AD = 5$, $BD = 3$. **9**. $BC = \frac{2}{3}$, $CD = \frac{4}{3}$. **10**. $AC_1 = 1\frac{1}{7}$, $BC_1 = \frac{6}{7}$;

$BA_1 = 1$, $CA_1 = 2$; $AB_1 = 1\frac{3}{5}$, $CB_1 = 2\frac{2}{5}$. **12**. $AD = \frac{(a-b)\cdot\sin\psi}{\sin(\varphi+\psi)}$, $BC = \frac{(a-b)\cdot\sin\varphi}{\sin(\varphi+\psi)}$.

13. $CH = \frac{c\cdot\sin\varphi\cdot\sin\psi}{\sin(\varphi+\psi)}$. **14.** ≈ 995 м. **15.** ≈1365 м. **17.** $BC = 194$ м, $AC = 97\sqrt{3}$ м.

16. Теорема косинусов

1. а) Меньше 90°; б) 90°; в) больше 90°. **2**. а) Тупоугольный; б) прямоугольный; в) остроугольный. **3**. $4\sqrt{7}$. **4**. 1. **5**. $\sqrt{2}$. **6**. $\sqrt{3}$. **7**. $\sqrt{2+\sqrt{2}}$. **8**. $\sqrt{2+\sqrt{3}}$. **9**. 30°, 30°, 120°. **10**. $\cos A = \frac{7}{8}$, $\cos B = \frac{11}{16}$, $\cos C = -\frac{1}{4}$. **12**. $\sqrt{13}$ см, $\sqrt{37}$ см. **13**. $\sqrt{13}$ см, $\sqrt{37}$ см. **14**. $\sqrt{10}$ см. **15**. $\frac{\sqrt{10}}{2}$ см. **16**. $\sqrt{10}$ см. **18**. $3\sqrt{5}$. **19**. 6. **20**. 10. **21.** $6\sqrt{6}$.

17. Углы, вписанные в окружность

1. CAD, CAE, DBF, ADB. **2.** 90°. **3.** 35° и 70°. **4.** 20° и 40°. **5**. а) 60°; б) 45°; в) 36°; г) 30°. **6**. а) 18°; б) 36°; в) 72°; г) 90°. **7**. 120°. **8**. 35°. **9**. 35°. **10**. 80° и 100°. **11**. 70°. **12**. 160°. **13**. 45°. **14**. 135°. **15**. 22,5°. **16**. 67,5°. **17**. 30°. **18**. 150°. **19**. 120°.

18. Углы, связанные с окружностью

1. 75°. **2.** 65°. **3**. 38°. **4**. 20°. **5**. 40°. **6**. 35°. **7**. 128°. **8**. 45°. **9**. 45°. **11**. 60°. **12.** Окружность с диаметром AB без точек A и B. **13**. а) Точки, расположенные вне окружности с диаметром AB, не принадлежащие прямой AB; б) точки, расположенные внутри окружности с диаметром AB, не принадлежащие отрезку AB.

19. Отрезки, связанные с окружностью

1. $5\frac{1}{3}$. **2**. 21. **3**. 4. **4**. 6. **5**. 8. **6**. 3. **7**. 10. **8**. 3. **9**. 4,8. **10.** 12 см и 6 см. **11**. 15. **12**. 6. **13**. 30. **14**. 7,5.

Проверь себя!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A	D	B	C	A	C	B	D	A	A	C	D	D	A	B	C	B	B	D	A

Глава 4. ОКРУЖНОСТЬ. МНОГОУГОЛЬНИКИ

20. Треугольники и окружность

2. а), б), в) Да. **3**. В середине гипотенузы. **4.** 30°, 30°, 120°. **5**. 50°, 65°, 65°. **6**. 2,5 и 1. **8**. 30°, 45°, 105°. **9**. а) 10; б) $5\sqrt{2}$; в) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$; г) 5; д) 10. **10**. а) 3; б) $3\sqrt{2}$; в) $3\sqrt{3}$; г) 6;

д) 3. **11**. а) $4\frac{1}{6}$; б) $1\frac{1}{3}$. **12**. 40°, 60°, 80°. **14**. AB. **16**. A. **17**. $\frac{35\sqrt{6}}{24}$, $\frac{2\sqrt{6}}{3}$. **19**. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **20**. $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$. **21**. 3, 12.

21. Четырехугольники и окружность

3. а), в) Да; б), г) нет. **4**. а), б) Нет. **5**. 100° и 120°. **6**. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **7**. 5 см. **8**. 12 см. **9**. а), в) Да; б), г) нет. **11**. Нет. **12**. 0,5. **13**. 7 см. **14**. 34 см. **15**. 120°, 80°, 60°, 100°. **16**. 5 см. **17**. 1. **18**. $\frac{15\sqrt{17}}{34}$. **20**. а) $\sqrt{10}$; б) $2\sqrt{5}$. **21**. 4,5 см. **22**. 8 см.

22. Правильные многоугольники и окружность

1. 1. **2**. 3. **3**. 3. **4**. а) Увеличится в 3 раза; б) уменьшится в 2 раза. **5**. а) 2π см; б) 4π см; в) 10π см. **6**. 360 м. **7**. 3 см. **8**. а) $\frac{\pi}{6}$; б) $\frac{\pi}{2}$; в) $\frac{2\pi}{3}$; г) $\frac{3\pi}{2}$. **9**. а) $\frac{\pi}{4}$; б) $\frac{\pi}{3}$; в) $\frac{5\pi}{6}$. **10**. а) 90°; б) 45°; в) 70°; г) 240°. **11**. 0,7 м. **12**. 1) а) 3,14 м; б) 6,28 м; 2) а) 15,7 м; б) 31,4 м. **14**. а) $\frac{1}{2\pi}$ см; б) $\frac{1}{\pi}$ см; в) $\frac{5}{2\pi}$ см. **15**. а) $\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$; б) $\sqrt{2}\pi$; в) 2π. **16**. а) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$; б) π; в) $\sqrt{3}\pi$. **17**. 4π. **18**. 8π. **19**. $\sqrt{3}$. **20**. 2π м. **21**. 180°. **22**. $\sqrt{2+\sqrt{3}}$, $\frac{\sqrt{7+4\sqrt{3}}}{2}$. **23**. ≈ 6369427 м. **24**. $\frac{200}{\pi}\approx 64$ м. **25**. 12 м. **26**. 375. **27**. 64,8 км/ч. **28**. 1°. **29**. 72 м. **30**. 408000 км. **31**. 156 000 000 км.

23. Площадь круга и его частей

1. а) 4π; б) 25π. **2**. а) 2 см; б) 4 м. **3**. $\frac{1}{4\pi}$ м². **4**. 25π. **5**. а) $\frac{\pi}{6}$; б) $\frac{\pi}{9}$; в) $\frac{\pi}{3}$. **6**. а) 4; б) 9; в) 16. **7**. 3π. **8**. 9π мм². **9**. а) $6{,}25\pi$ м²; б) 25π м². **10**. а) $\frac{\pi}{3}$; б) $\frac{\pi}{2}$; в) π. **11**. а) $\frac{\pi}{12}$; б) $\frac{\pi}{4}$; в) $\frac{3\pi}{4}$. **12**. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **13**. 8. **14**. 16. **15**. 1200 см². **16**. 13 см. **17**. 25. **18**. а) $a^2-\frac{\pi a^2}{4}$; б) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi b^2}{2}$. **19**. π. **21**. $\left(8+\frac{\pi}{2}\right)$ см². **23**. а) $\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}$; б) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$; в) $\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}$. **24**. а) $\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{6}$; б) $2\pi-4$.

24*. Тригонометрические функции произвольных градусных величин

2. а) 630°; б) 900°; в) 1200°. **3**. а) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$; б) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; в) $\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; г) (0, 1). **4**. а) $\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; б) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; в) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$; г) (–1, 0). **5**. а) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$; б) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

в) $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; г) (0; –1). **6**. а) $\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; б) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; в) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$; г) (1; 0). **7**. а) $-\frac{1}{2}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{2}$; г) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **8**. а) 1; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\frac{1}{2}$; д) 0; е) $-\frac{1}{2}$; ж) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; з) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; и) –1. **9**. а) $-\frac{1}{2}$; б) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) –1; д) $-\frac{1}{2}$; е) 0; ж) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **11**. а) 50 мин; б) 1 ч 10 мин; в) 1 ч 30 мин. **12**. а), б) Нет. **13**. а) $360° \cdot k < \phi < 180° + 360° \cdot k$; б) $\phi = 180° \cdot k$; в) $-180° + 360 \cdot k < \phi < 360° \cdot k$, k — целое. **14**. а) $-90° + 360° \cdot k < \phi < 90° + 360° \cdot k$; б) $\phi = 90° + 180° \cdot k$; в) $90° + 360° \cdot k < \phi < 270° + 360° \cdot k$, k — целое. **15**. а), б) Да. **16**. а) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; г) 1. **17**. а) –1; б) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; в) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; г) 1. **18**. а) $180° \cdot k < \phi < 90° + 180° \cdot k$; б) $\phi = 180° \cdot k$; в) $90° + 180° \cdot k < \phi < 180° \cdot k$, k — целое. **19**. а) $180° \cdot k < \phi < 90° + 180° \cdot k$; б) $\phi = 180° \cdot k$; в) $-90° + 180° \cdot k < \phi < 180° \cdot k$, k — целое.

Проверь себя!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C	D	A	D	D	C	A	A	C	C	C	D	D	C	B	C	A	B	B	D

ПОВТОРЕНИЕ КУРСА ГЕОМЕТРИИ ДЛЯ 9 КЛАССОВ

1. Векторы на плоскости

1. 10. **2**. 10. **3**. 10. **4**. $4\sqrt{13}$. **5**. 8. **6**. 0. **7**. 8. **8**. 6. **9**. 10. **10**. 12. **11**. 16. **12**. 10. **13**. 10. **14**. 10. **15**. 0. **16**. $\sqrt{3}$. **17**. 3. **18**. 4,5. **19**. $\sqrt{3}$. **20**. 3. **21**. –1,5. **22**. 0. **23**. (6; 2). **24**. (12; 9). **25**. (2; 3). **26**. (10; 10). **27**. $10\sqrt{2}$. **28**. (–6; 2). **29**. $2\sqrt{10}$. **30**. 40. **31**. 45°. **32**. 1. **33**. $-\frac{1}{3}$. **34**. $t = 1{,}5$, $s = 0{,}5$.

2. Преобразования плоскости

2. Нет. **3**. Нет. **4**. Отрезки равны и лежат на параллельных прямых или одной прямой. **5**. Да, если прямая параллельна вектору параллельного переноса. **6**. Бесконечно много. **7**. Нет. **8**. Да. **9**. Да, точки, принадлежащие оси симметрии. **10**. Да. **11**. Сама ось симметрии и прямые, перпендикулярные оси симметрии. **12**. Является серединным перпендикуляром к отрезку AA'. **16**. а), в) Да; б) нет. **17**. а) Три; б) четыре; в) бесконечно много. **18**. n. **19**. Если она параллельна оси симметрии. **20**. Да, центр симметрии. **21**. Да, отрезки, серединой которых является центр симметрии. **22**. Прямые, проходящие через центр симметрии. **23**. Середина отрезка. **24**. В середине отрезка AA'. **25**. а) Нет; б) да. **26**. а), б), д) Нет; в), г), е) да. **27**. Да. **28**. а), б) Нет; в) да. **34**. а) 90°; б) 180°. **35**. Нет. **36**. Нет. **37**. Правильный шестиугольник. **38**. Правильный десятиугольник. **39**. а), б), в) Второго; г) четвертого. **40**. Нет. **45**. Нет. **46**. $\frac{1}{k}$. **47**. Например, прямая. **48**. Да. **49**. а) A'; б) A. **50**. Да, прямые, проходящие через центр гомотетии. **51**. Да. **52**. а) Имеют общий центр; б) касаются. **55**. 28 см, 42 см, 20 см и 64 см. **56**. Равны соответствующие углы ромбов. **57**. а) в) Да; б) нет. **58**. а) 2,5 см, 4 см и 5 см; б) 10 см, 16 см и 20 см. **59**. 45°. **60**. $AC = 15$ см, $B_1C_1 = 7$ см. **61**. $AC = 16$ м, $B_1C_1 = 14$ м. **62**. а) 10 см, 6 см, 12 см; б) 20 см, 12 см, 24 см. **66**. 13,6 см. **67**. Нет. **68**. ABC, AFD и DEC. **69**. 4 см, 3 см. **70**. 18 м, 24 м, 27 м.

3. Решение треугольников

1. $3\sqrt{6}$. **2**. $2\sqrt{6}$. **3**. 30°. **4**. 2 : 3 : 4. **5**. 3 : 4 : 5, прямоугольный. **6**. а) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) 0,5. **7**. 3 : 4 : 5. **8**. 2,5 и 1,5. **9**. 2 и 4. **10**. $\sqrt{2-\sqrt{3}}$. **11**. $\sqrt{2-\sqrt{2}}$. **12**. $\sqrt{4-\sqrt{7}}$. **13**. а) 14 см; б) 13 мм. **14**. а) Меньше 90°; б) равен 90°; в) больше 90°. **15**. $\frac{5}{7}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{19}{35}$. **16**. $\sqrt{25-12\sqrt{3}}$, $\sqrt{25+12\sqrt{3}}$. **17**. $\sqrt{100-48\sqrt{2}}$, $\sqrt{100+48\sqrt{2}}$. **19**. 7 мм. **20**. 5,5. **21**. 90°. **22**. 50° и 25°. **23**. а) 36°; б) 27°. **24**. Окружность с диаметром AC без точек A и C. **25**. а) Точки, расположенные вне окружности с диаметром AB без точек прямой AB; б) точки, расположенные внутри окружности с диаметром AB без точек отрезка AB. **26**. 75° и 105°. **27**. 50°. **28**. 22°. **29**. 30°. **30**. 75°. **31**. 20°. **32**. 4. **33**. 4. **34**. 27. **35**. 8. **36**. 16 см. **37**. 2,4 см. **38**. 4 см и 4 см. **39**. 5 см. **40**. 2 см.

4. Окружность. Многоугольники

2. а) Внутри треугольника; б) на гипотенузе; в) вне треугольника. **3**. 45°, 45°, 90°. **4**. 30°, 75°, 75°. **5**. 5 см и 2 см. **7**. 45°, 60°, 75°. **8**. а) 6; б) $3\sqrt{2}$; в) $2\sqrt{3}$; г) 3; д) 6. **9**. а) 6; б) $6\sqrt{2}$; в) $6\sqrt{3}$; г) 12; д) 6. **10**. *AB*. **11**. *A*. **12**. $\frac{9\sqrt{5}}{10}$, $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **14**. а), б) Нет. **15**. 80° и 70°. **16**. $\sqrt{2}$. **17**. 2,5. **18**. а), в) Да; б), г) нет. **19**. Нет. **20**. 1. **21**. 4 см, 16 см. **22**. 26 см. **23**. $\sqrt{2}$ см. **24.** 5 см. **25**. 2. **26**. 3. **27**. а) Увеличится в 2 раза; б) уменьшится в 3 раза. **28**. а) 4π см; б) 6π см; в) 10π см. **29**. 180 см. **30**. 4 см. **31**. а) $\frac{2\pi}{3}$; б) $\frac{3\pi}{2}$; в) 2π; г) 3π. **32**. а) $\frac{\pi}{6}$; б) $\frac{\pi}{3}$; в) $\frac{\pi}{4}$; г) $\frac{\pi}{3}$. **33**. а) 30°; б) 90°; в) 60°; г) 120°. **34**. а) $\frac{4\pi\sqrt{3}}{3}$; б) $2\sqrt{2}\pi$; в) 4π. **35**. а) $\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$; б) 2π; в) $2\sqrt{3}\pi$. **36**. а) π см^2; $6{,}25\,\pi$ м^2. **37**. а) 3 см; б) 5 м. **38**. $\frac{1}{\pi}$ м^2. **39**. $\sqrt{2}\pi$. **40**. а) $\frac{\pi}{360}$; б) $\frac{\pi}{72}$; в) $\frac{\pi}{36}$. **41**. а) 9; б) 16; в) 25. **42**. 5π. **43**. а) $\frac{4\pi}{3}$; б) 2π; в) 4π. **44**. а) $\frac{\pi}{3}$; б) π; в) 3π. **45**. а) $\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}$; б) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$; в) $\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}$.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 4
Повторение курса геометрии для 8 классов 5

Глава 1. ВЕКТОРЫ НА ПЛОСКОСТИ

1. Понятие вектора 14
2. Сложение векторов 17
3. Умножение вектора на число 21
4. Разложение вектора 25
5. Угол между векторами. Скалярное произведение векторов 28
6. Координаты вектора 32
7*. Уравнение прямой 35
Проверь себя! 42

Глава 2. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЛОСКОСТИ

8. Параллельный перенос 44
9. Осевая симметрия 48
10. Центральная симметрия 55
11. Поворот. Симметрия n-го порядка 60
12. Движение. Равенство фигур 64
13. Подобие фигур. Гомотетия 70
14. Признаки подобия треугольников 75
Проверь себя! 88

Глава 3. РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

15. Теорема синусов 91
16. Теорема косинусов 95
17. Углы, вписанные в окружность 100
18. Углы, связанные с окружностью 106
19. Отрезки, связанные с окружностью 111
Проверь себя! 116

Глава 4. ОКРУЖНОСТЬ. МНОГОУГОЛЬНИКИ

20. Треугольники и окружность 118
21. Четырехугольники и окружность 124
22. Правильные многоугольники и окружность 128
23. Площадь круга и его частей 137
24*. Тригонометрические функции произвольных градусных величин 144
Проверь себя! 149
Повторение курса геометрии для 9 классов 151
Предметный указатель 163
Ответы 165

Учебное издание

Смирнов Владимир Алексеевич
Туяков Есенкельды Алыбаевич

ÀÀÏÀÔÐÈß

Учебник для 9 классов общеобразовательных школ

Редактор *К. Амирова*
Худож. редактор *А. Сланова*
Техн. редактор *Л. Садыкова*
Корректор *Е. Шумских*
Компьютерная верстка *Г. Оразакыновой*

Государственная лицензия № 0000001 выдана издательству Министерством образования и науки Республики Казахстан 7 июля 2003 года

ИБ №5830

Подписано в печать 22.05.19. Формат 70×100 1/16. Бумага офсетная.
Гарнитура "SchoolBook Kza". Печать офсетная. Усл.-печ. л. 14,19+0,32 форзац.
Усл. кр.-отт. 29,67. Уч.-изд. л. 7,55+0,54 форзац.
Тираж 55000 экз. Заказ №

Издательство "Мектеп", 050009, г. Алматы, пр. Абая, 143
Факс: 8(727) 394-37-58, 394-42-30.
Тел.: 8(727) 394-41-76, 394-42-34.
E-mail: mektep@mail.ru
Web-site: www.mektep.kz