А. Н. Шыныбеков, Д. А. Шыныбеков, Р. Н. Жумабаев

АЛГЕБРА

Учебник для 9 класса общеобразовательной школы

9

Рекомендовано Министерством образования
и науки Республики Казахстан

Алматы «Атамұра» 2019

1–4334

УДК 373.167.1
ББК 22.14я72
Ш 99

Учебник подготовлен в соответствии с Типовой учебной программой обновленного содержания по предмету «Алгебра» для 10 класса уровня основного среднего образования, утвержденной Министерством образования и науки РК.

Под редакцией **М. Отелбаева** — доктора физико-математических наук, профессора НАН Республики Казахстан.

Условные обозначения

Вопросы по основным материалам темы

Практические задания

Материалы из истории

A Упражнения первого уровня сложности
B Упражнения второго уровня сложности
C Упражнения третьего уровня сложности
✻ Упражнения повышенной трудности и творческого характера
▲ Начало решения (доказательства) задачи
■ Конец решения (доказательства) задачи

Шыныбеков А. Н. и др.

Ш 99 Алгебра: Учебник для 9 класса общеобразовательной школы. А. Н. Шыныбеков, Д. А. Шыныбеков, Р. Н. Жумабаев. – Алматы: Атамұра, 2019.– 224 стр.

ISBN 978-601-331-600-0

УДК 373.167.1
ББК 22.14я72

ISBN 978-601-331-600-0

Предисловие

Данный учебник, предназначенный для 9-х классов общеобразовательных школ, имеет ряд специфических особенностей. Этот учебник так же является универсальным, как и учебник «Алгебра–8», в нем полностью охвачены как материал по программе общеобразовательных школ, так и материал по программе школ и классов с углубленным изучением математики. Кроме того, все задания группы **C**, в основном, предназначены для классов с углубленным изучением математики. Тем не менее учащиеся, обладающие математическими способностями, могут самостоятельно изучить эти материалы во внеурочное время.

В целом при изучении курса алгебры за 9 класс по данному учебнику, независимо от профиля класса, рекомендуем придерживаться следующих правил: при закреплении новой темы необходимо, чтобы каждый ученик в полном объеме освоил задания группы **A**. Иначе будет невозможным в полной мере освоить задания групп **B**, **C** и последующие новые темы. Поэтому необходимо следить за тем, чтобы учащиеся, которые в полном объеме освоили задания группы **A**, постепенно переходили к выполнению заданий следующих уровней сложности.

В целом отметим, что неустанный поиск, неутомимый труд и высокое стремление, несомненно, принесут свои плоды в освоении предмета!

Раздел 0. ПОВТОРЕНИЕ МАТЕРИАЛА, ПРОЙДЕННОГО В 8 КЛАССЕ

Изучив материалы данного раздела, вы:

- вспомните материал, пройденный в 8 классе;
- подготовитесь к освоению нового материала, изучаемого в 9 классе.

1. Что называется квадратным корнем? Приведите пример.

2. Что называется арифметическим квадратным корнем? Какие его свойства вы знаете?

3. Какие числа называются иррациональными? Приведите примеры.

4. Какие числа называются действительными и как вы понимаете множество действительных чисел?

5. Как найти целую (дробную) часть числа? Приведите пример.

6. Как найти координаты точки на числовой прямой? Приведите пример.

7. Какие числовые промежутки вы знаете? Выразите их с помощью неравенств. Приведите пример.

8. Перечислите свойства функции $y = \sqrt{x}$ и постройте ее график.

9. Как определяется квадратичная функция? Назовите особенности расположения графика квадратичной функции в зависимости от коэффициентов и дискриминанта квадратного трехчлена.

10. Напишите формулу нахождения корней квадратного уравнения. Что называется дискриминантом? Приведите пример.

11. Сформулируйте теорему Виета и обратную ей теорему. Приведите пример.

12. Как можно устно найти корни квадратного уравнения в случаях, когда $a \pm b + c = 0$? Приведите пример.

13. Укажите общие элементы и различия понятий квадратного уравнения, квадратного трехчлена и квадратичной функции. Приведите пример.

14. Как разложить квадратный трехчлен на множители?

15. Как решить квадратные неравенства? Приведите пример.

16. Назовите основные свойства неравенств. Объясните их на примерах.

17. Какие способы доказательств неравенств вы знаете? Покажите на примерах.

18. Какое неравенство называется рациональным? Как применяют метод интервалов?

Упражнения

A

0.1. Найдите значения выражений:

1) $0,5\sqrt{256}$; 2) $-5\sqrt{0,64}$; 3) $0,3\sqrt{\dfrac{25}{9}}$;

4) $\dfrac{\sqrt{0,16}}{2\sqrt{0,04}}$; 5) $\sqrt{4900}-\sqrt{289}$; 6) $0,07\sqrt{10000}-\sqrt{36}$;

7) $\dfrac{\sqrt{81}}{\sqrt{361}}+\sqrt{\dfrac{1}{4}}$; 8) $\sqrt{1\dfrac{9}{16}}+\sqrt{\dfrac{121}{25}}$; 9) $\sqrt{2\dfrac{7}{81}}-\dfrac{1}{\sqrt{36}}$.

9) ▲ $\sqrt{2\dfrac{7}{81}}-\dfrac{1}{\sqrt{36}}=\sqrt{\dfrac{162+7}{81}}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{13}{9}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{26-3}{18}=\dfrac{23}{18}=1\dfrac{5}{18}$ ■

0.2. Вычислите:

1) $\sqrt{360}\cdot\sqrt{2,5}$; 2) $\sqrt{90\cdot 4,9}$; 3) $\sqrt{72\cdot 32}$;

4) $\sqrt{3,6\cdot 12,1}$; 5) $\sqrt{13}\cdot\sqrt{52}$; 6) $\sqrt{63}\cdot\sqrt{7}$;

7) $\sqrt{\dfrac{2}{3}}\cdot\sqrt{\dfrac{3}{8}}$; 8) $\sqrt{1,2}\cdot\sqrt{3\dfrac{1}{3}}$; 9) $\sqrt{20}\cdot\sqrt{45}$.

0.3. Покажите справедливость неравенств:

1) $3,4<\sqrt{12}<3,6$; 2) $5<\sqrt{30}<6$;

3) $5<\sqrt{26}<5,1$; 4) $7,9<\sqrt{63}<8$.

0.4. Решите уравнения:

1) $\sqrt{x}=4$; 2) $\sqrt{y}=0,4$; 3) $3\sqrt{x}=7$; 4) $10\sqrt{z}=3$.

0.5. Найдите корни квадратных уравнений:

1) $2x^2-5x-3=0$; 2) $3x^2-3x+1=0$; 3) $3x^2-8x+5=0$;
4) $x^2+9x-22=0$; 5) $5x^2+9x+4=0$; 6) $7x^2-11x-6=0$;
7) $36x^2-12x+1=0$; 8) $3x^2+x-2=0$.

Алгебра и инженерное строительство

«Абай» – станция глубокого заложения Алматинского метрополитена. Она состоит из трех залов – центрального и двух боковых, которые образуют общую островную платформу шириной 15,2 м и длиной 104 м. Спуск и подъем осуществляется по эскалаторам (4 ленты) высотой 46 м, длиной 92 м. Решив квадратное уравнение $x^2-75x-234=0$, вы узнаете глубину заложения этой станции.

0.6. Найдите корни уравнений с помощью теоремы Виета:

1) $x^2-5x+6=0$; 2) $4x^2-12x+9=0$; 3) $x^2+2x-24=0$;
4) $x^2+9x+14=0$; 5) $x^2-7ax+12a^2=0$; 6) $x^2+5bx+6b^2=0$;
7) $x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}=0$; 8) $x^2+\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)x+2\sqrt{3}=0$.

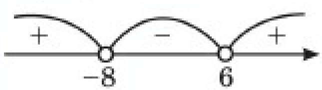
0.7. Решите неравенства графическим способом:

1) $x^2-3x-4<0$; 2) $x^2-3x-4>0$;
3) $2x^2+3x-5\geqslant 0$; 4) $-6x^2+6x+36\geqslant 0$.

0.8. Решите неравенства двумя способами:

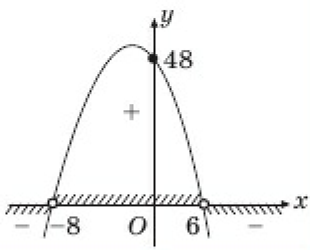
1) $x^2-x-9<0$; 2) $6x^2-7x+2>0$; 3) $-x^2-2x+48<0$;
4) $8x^2+10x-3\geqslant 0$; 5) $25x^2-10x+1\geqslant 0$; 6) $49x^2-28x+4<0$;
7) $-x^2-12x-100\leqslant 0$; 8) $4x^2-4x+15\leqslant 0$; 9) $5x^2+3x-8>0$.

3) ▲ **Способ 1.** $-x^2-2x+48<0 \Leftrightarrow x^2+2x-48>0 \Leftrightarrow (x+8)\times(x-6)>0$



Ответ: $x\in(-\infty;-8)\cup(6;+\infty)$. ■

▲ **Способ 2.** График функции $y=-x^2-2x+48$ является параболой, ветви которой направлены вниз. Эта парабола пересекает ось Ox в точках $(-8;\ 0)$ и $(6;\ 0)$.



Ответ: $x\in(-\infty;-8)\cup(6;+\infty)$. ■

0.9. Найдите все целые числа, удовлетворяющие неравенствам:

1) $6x-x^2>0$; 2) $3x+x^2>0$; 3) $x^2-4\leq 0$; 4) $5-x^2>0$.

0.10. Найдите множество решений неравенств:

1) $3x^2+40x+10<-x^2+11x+3$;
2) $9x^2-x+9\geq 3x^2+18x-6$;
3) $2x^2+8x-111<(3x-5)(2x+6)$;
4) $(5x+1)(3x-1)>(4x-1)(x+2)$;
5) $2x(3x-1)>4x^2+5x+9$;
6) $(5x+7)(x-2)<21x^2-11x-13$.

0.11. Постройте график функции. Определите вершину и ось параболы.

1) $y=3(x-5)^2-2$; 2) $y=2x^2-1$;
3) $y=-2(x+1)^2+3$; 4) $y=(x-5)^2$.

0.12. Разложите квадратные трехчлены на множители:

1) $x^2-16x+48$; 2) x^2-x-12; 3) $x^2+5x-14$;
4) $x^2+6x-16$; 5) $x^2+12x+27$; 6) $2x^2-5x+2$.

0.13. По заданным корням составьте квадратные уравнения:

1) 2 и 5; 2) -3 и 4; 3) -2 и -7;
4) 0,5 и 4; 5) $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{2}$; 6) $-\frac{1}{3}$ и $-\frac{1}{9}$.

B

0.14. Вычислите:

1) $6-\left(3\sqrt{\frac{4}{9}}+\sqrt{0,25}\right)$; 2) $11:\left(0,15\sqrt{1600}-0,29\sqrt{400}\right)$;

3) $\dfrac{\sqrt{225}+3\sqrt{121}}{\frac{2}{3}\sqrt{0,09}+0,78\sqrt{100}}$; 4) $\left(\dfrac{\sqrt{324}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{0,16}}{0,2}-6\sqrt{\dfrac{1}{4}}\right):\sqrt{25}$.

0.15. Найдите область определения выражений:

1) $\sqrt{x-3}$; 2) $\sqrt{x+3}$; 3) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{4x-1}$;

4) $\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}$; 5) $\sqrt{x^2-9}$; 6) $\sqrt{|x|-3}$.

0.16. Сравните числа:

1) $\sqrt{14}$ и $\sqrt{6}+\sqrt{8}$; 2) $7-\sqrt{2}$ и $5+\sqrt{2}$;
3) $\sqrt{15}-2$ и $\sqrt{3}+2$; 4) $\sqrt{10}$ и $\sqrt{20}-\sqrt{5}$.

4) ▲ $\left(\sqrt{14}\right)^2-\left(\sqrt{6}+\sqrt{8}\right)^2=14-\left(6+2\sqrt{48}+8\right)=-2\sqrt{48}<0\Rightarrow$

$\Rightarrow\left(\sqrt{14}\right)^2<\left(\sqrt{6}+\sqrt{8}\right)^2\Rightarrow\sqrt{14}<\sqrt{6}+\sqrt{8}$ ■

0.17. Разложите выражения на множители:

1) x^2-3; 2) $4a^2-5$; 3) $3y^2-2$; 4) $5b^2-6$;
5) $x-9$, $x>0$; 6) $y-5$, $y>0$; 7) $4-9b$, $b>0$; 8) $7c^2-3x^2$.

0.18. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби:

1) $\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$; 2) $\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$; 3) $\dfrac{1}{2\sqrt{a}+3\sqrt{b}}$; 4) $\dfrac{\sqrt{2a}+\sqrt{3b}}{\sqrt{2a}-\sqrt{3b}}$.

0.19. Докажите, что корни уравнения $ax^2+2kx+p=0$ можно найти по формуле $x_{1,2}=\dfrac{-k\pm\sqrt{k^2-ap}}{a}$.

0.20. Найдите корни уравнений по формуле, данной в задании **0.19**:

1) $3x^2-10x+3=0$; 2) $x^2+14x+33=0$;
3) $y^2-8y-84=0$; 4) $5y^2+26y+24=0$;
5) $16x^2+8x+1=0$; 6) $x^2-34x+289=0$.

0.21. Определите корни квадратных трехчленов и разложите их на множители:

1) $2x^2-5x+3$; 2) $2x^2-5x-7$; 3) $-y^2+6y-5$;
4) $5y^2+2y-3$; 5) $x^2-11x+30$; 6) $-x^2-5x+6$.

0.22. Разложите квадратные трехчлены на множители, если это возможно:

1) $4x^2-9x+5$; 2) $16a^2-24a+9$; 3) $3x^2-12x+12$;
4) $4b^2-9b+7$; 5) x^2-x-2; 6) $-48a^2-8a+1$;
7) $-3y^2+8y+11$; 8) $y^2-7y+11$; 9) $4x^2+x+0{,}04$.

0.23. Изготовьте шаблон параболы $y=0{,}5x^2$ из жесткой бумаги и с его помощью постройте графики функций:

1) $y=0{,}5(x-1)^2+2$; 2) $y=0{,}5x^2+4$;
3) $y=-0{,}5(x+2{,}5)^2-3$; 4) $y=0{,}5(x+4)^2$.

0.24. С помощью шаблона параболы $y=2x^2$ постройте графики функций:

1) $y=-2x^2$; 2) $y=2x^2-1$;
3) $y=-2(x-4)^2-4$; 4) $y=-2(x+3)^2$.

0.25. Найдите вершину и ось параболы и постройте ее график:
1) $y=x^2-4$; 2) $y=(x-4)^2$; 3) $y=x^2-4x+4$; 4) $y=2x^2+x-3$.

0.26. Постройте графики функций:

1) $y=x^2+2x-3$; 2) $y=\frac{x^2}{2}-4x+6$; 3) $y=-2x^2-5x-2$;
4) $y=-x^2+6x-10$; 5) $y=x^2-4x$; 6) $y=-x^2+5$.

0.27. Укажите посторонние корни уравнений:

1) $\frac{1}{x-2}+3=\frac{3-x}{x-2}$; 2) $5+\frac{1}{x-4}=\frac{5-x}{x-4}$;

3) $\frac{1}{x-5}+6=\frac{6-x}{x-5}$; 4) $\frac{8-x}{x-7}=8+\frac{1}{x-7}$.

В упражнениях **0.28–0.34** решите уравнения.

0.28. 1) $\frac{2x-1}{2x+1}=\frac{2x+1}{2x-1}+\frac{8}{1-4x^2}$; 2) $\frac{12}{1-9x^2}=\frac{1-3x}{1+3x}+\frac{1+3x}{1-3x}$;

3) $\frac{t^2-3}{1-t^2}+\frac{t+1}{t-1}=\frac{4}{1+t}$; 4) $\frac{y^2+17}{y^2-1}=\frac{y-2}{y+1}-\frac{5}{1-y}$.

0.29. 1) $x+2-\frac{3x+8}{x+2}=\frac{x}{x+2}$; 2) $\frac{6}{4x^2-1}+\frac{3}{2x+1}=\frac{2}{2x-1}+1$;

3) $\frac{4}{(x-3)(x-1)}+\frac{2}{3-x}+\frac{5}{x-1}=7$; 4) $\frac{1}{x+2}-\frac{3}{x-2}=\frac{4}{4-x^2}+1$.

0.30. 1) $x^4-29x^2+100=0$; 2) $x^4+7x^2+10=0$;
3) $5y^4+2y^2-3=0$; 4) $2y^4-5y^2-7=0$;
5) $x^4-(a^2+9)x^2+9a^2=0$; 6) $x^4-(9a^2+4)x^2+36a^2=0$.

0.31. 1) $(x+3)^4-13(x+3)^2+36=0$; 2) $(2x-1)^4-(2x-1)^2-12=0$;
3) $(x-1)^4-x^2+2x-73=0$; 4) $(x+2)^4+2x^2+8x-16=0$.

0.32. 1) $x^4+x^3-4x^2+x+1=0$; 2) $6x^4+5x^3-38x^2+5x+6=0$;
3) $x^3-3x^2-3x+1=0$; 4) $3x^3-7x^2-7x+3=0$;
5) $5x^4-12x^3+11x^2-12x+5=0$; 6) $x^4+5x^3+4x^2-5x+1=0$.

0.33. 1) $\sqrt{y+2}-\sqrt{y-6}=2$; 2) $\sqrt{22-x}-\sqrt{10-x}=2$;

3) $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x-1}=2$; 4) $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x-2}=7$;

5) $\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+3}=1$; 6) $\sqrt{3x-2}=2\sqrt{x+2}-2$.

2) ▲ ОДЗ : $x \leqslant 10$.

$$\sqrt{22-x} = 2 + \sqrt{10-x} \Rightarrow 22 - x = 4 + 4\sqrt{10-x} + 10 - x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8 = 4\sqrt{10-x} \Rightarrow 4 = 10 - x \Rightarrow x = 6 \in \text{ОДЗ}.$$

О т в е т: $x = 6$. ■

0.34. 1) $|x-3| + 2|x+1| = 4$; 2) $|5-2x| + |x+3| = 2-3x$;
3) $|5-x| + |x-1| = 10$; 4) $|4-x| + |x-2| = 2$.

0.35. При каких значениях параметра a уравнения
1) $ax^2-6x+9=0$; 2) $x^2+ax+0{,}25=0$;
3) $4x^2-ax+a-3=0$; 4) $(a-1)x^2-2(a+1)x+a-2=0$
имеют только один корень?

0.36. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} 21x^2+39x-6<0, \\ x<0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x^2+5x-6>0, \\ 7x>0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2-3x-4<0, \\ 3x-12>0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2+7x+10<0, \\ 4x-3{,}6>0; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x+7>0, \\ x^2+5x \geqslant 0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 2x^2+5x+20 \leqslant 0, \\ x-1{,}5 \geqslant 0. \end{cases}$

C

0.37. Сократите дроби:

1) $\dfrac{7x^2+x-8}{7x-7}$; 2) $\dfrac{5a+10}{2a^2+13a+18}$; 3) $\dfrac{b^2-8b+15}{b^2-25}$;

4) $\dfrac{y^2-5y-36}{81-y^2}$; 5) $\dfrac{c^2-10c-11}{22+9c-c^2}$; 6) $\dfrac{5a^2+8a+3}{14+3a-11a^2}$.

0.38. Докажите, что квадратичная функция $y=ax^2+bx+c$ принимает только положительные значения при $a>0$ и $D=b^2-4ac<0$.

0.39. Докажите, что квадратичная функция $y=ax^2+bx+c$ принимает только отрицательные значения при $a<0$ и $D=b^2-4ac<0$.

0.40. Постройте графики функций:
1) $y=|2-x^2|$; 2) $y=|x^2+x-2|$;
3) $y=5x^2-7|x|+2$; 4) $y=2x^2-5|x|-3$.

0.41. Разложите многочлены на множители:

1) x^3-4x; 2) x^3-10x^2+25x; 3) x^3+8;
4) y^3+12y^2+36y; 5) x^4-9; 6) x^3+10x^2-x-10;
7) z^5-1; 8) $z^3-8z^2-2z+16$.

0.42. Покажите, что числа 1 и $\frac{c}{a}$ являются корнями уравнения $ax^2+bx+c=0$, если $a+b+c=0$.

0.43. Покажите, что числа -1 и $-\frac{c}{a}$ являются корнями уравнения $ax^2+bx+c=0$, если $a-b+c=0$.

0.44. Найдите промежутки знакопостоянства функций:

1) $y=x-2$; 2) $y=2-3x$; 3) $y=x^2-3x+2$;
4) $y=-3x^2+5x-2$; 5) $y=(3x-10)(x+6)$; 6) $y=\frac{6-x}{x}$;
7) $y=\frac{4+2x}{5+x}$; 8) $y=\frac{6}{(x-1)(x+8)}$.

0.45. Для данных функций найдите область определения, область значений, нули, точки разрыва (если есть таковые), промежутки возрастания и убывания, промежутки знакопостоянства и постройте их графики:

1) $y=x^2+2$; 2) $y=3-4x^2$; 3) $y=3x^2-6x+1$;
4) $y=\frac{5}{x-2}$; 5) $y=\frac{x}{x+1}$; 6) $y=\frac{x+1}{x}$;
7) $y=\begin{cases} x-1, \text{если } x\geqslant 0, \\ -x^2, \text{ если } x<0; \end{cases}$ 8) $y=\begin{cases} x^2, \text{если } x\geqslant 0, \\ \frac{1}{x-1}, \text{ если } x<0. \end{cases}$

0.46. При каких значениях a все решения неравенства $x^2-(a^2-2a-3)x - a^3+3a+2 \leqslant 0$ лежат на отрезке $[-2; 4]$?

0.47. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} x^2+x-6<0, \\ -x^2+2x+3>0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+4x-5>0, \\ x^2-2x-8<0. \end{cases}$

0.48. Равносильны ли неравенства:

1) $\frac{x-3}{x+1}\geqslant 0$ и $(x-3)(x+1)\geqslant 0$;

2) $\frac{x+5}{x-8}<0$ и $(x+5)(x-8)<0$?

В упражнениях **0.49–0.51** решите уравнения.

0.49. 1) $\dfrac{2x-7}{x^2-9x+14}-\dfrac{1}{x^2-3x+2}=\dfrac{1}{x-1}$;

2) $\dfrac{2x+7}{x^2+5x-6}+\dfrac{3}{x^2+9x+18}=\dfrac{1}{x+3}$;

3) $\dfrac{9}{4x^2+1}-\dfrac{8x+29}{16x^4-1}=\dfrac{18x+5}{8x^3+4x^2+2x+1}$;

4) $\dfrac{\frac{1}{6}}{x^3+3x^2+x+3}+\dfrac{1}{x^4-1}=\dfrac{\frac{1}{6}}{x^3-3x^2-x+3}$.

0.50. 1) $28x^3+3x^2+3x+1=0$;

2) $126x^3-3x^2+3x-1=0$;

3) $(x^2+4x)(x^2-6x+8)=(x^3-16x)(x^2+2x-8)$;

4) $(x^2+5x)(x^2-3x-28)=(x^3-16x)(x^2-2x-35)$.

0.51. 1) $|x-2|x^2=10-5x$;

2) $(x^2-5x+6)^2+3|x-3|=0$;

3) $(7x^2-3x-4)^2+|7x+4|(x^2-1)^2=0$;

4) $6x-12=x^2|x-2|$.

0.52. Составьте такое биквадратное уравнение, чтобы числа $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{3}$ были его корнями.

0.53. При каких значениях параметров a и b три целых корня уравнения $x^4+x^3-18x^2+ax+b=0$ равны между собой?

0.54. При каких значениях параметра a уравнение $(a+4x-x^2-1)(a+1-|x-2|)=0$ имеет три корня?

0.55. При каких значениях x график функции $y=\dfrac{x-13}{x^2+x-6}$ лежит в промежутке $0 \leqslant y \leqslant 1$?

0.56. Докажите, что четырехзначное число является простым числом, если оно не имеет простых делителей, меньших, чем 100.

0.57. Покажите, что число: а) $\underbrace{77\ldots7}_{2004}\cdot 3$; б) $100^{100}-1$ является составным числом.

0.58. Упростите выражения:

1) $\sqrt{7+\sqrt{24}}$; 2) $\sqrt{7-\sqrt{24}}$; 3) $\sqrt{5+\sqrt{24}}$;

4) $\sqrt{7+\sqrt{48}}$; 5) $\sqrt{17-4\sqrt{9+4\sqrt{5}}}$; 6) $2\sqrt{6+2\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$.

0.59. Избавьтесь от иррациональности в знаменателях дроби:

1) $\dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$; 2) $\dfrac{x^2-2x}{\sqrt{x+2}-2}$; 3) $\dfrac{x}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1-2x}}$.

Раздел 1. УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ И ИХ СИСТЕМЫ

1.1. Нелинейные уравнения с двумя переменными и их геометрический смысл.

1.2. Решение систем нелинейных уравнений с двумя переменными.

1.3. Решение текстовых задач с помощью систем уравнений.

1.4. Неравенства с двумя переменными.

1.1. Нелинейные уравнения с двумя переменными и их геометрический смысл

Изучив материалы данной темы, вы будете:

- различать линейные и нелинейные уравнения с двумя переменными;
- знать геометрический смысл уравнений с двумя переменными.

1.1.1. Уравнения с двумя переменными

Работа в группе

Заполните таблицу

Функция	Название	Приведение ее к уравнению	Название уравнения
$y = kx + n$	Линейная функция	$kx - y + n = 0$	Линейное уравнение с двумя переменными
	Квадратичная функция		
		$ax^3 - y = 0$	
$y = \dfrac{k}{x}$			
			Уравнение окружности радиусом R с центром в точке $(a; b)$.

Задания к таблице

- Определите степень полученных уравнений.
- Среди полученных уравнений укажите нелинейные. Почему их называют нелинейными?
- Все ли уравнения определяют функциональную зависимость?
- Какие уравнения следует назвать нелинейными в зависимости от показателя степени?

Обоснуйте ответы и обсудите их вместе с классом. Сделайте выводы.

Если уравнение содержит не одну, а несколько переменных, то такое уравнение называется ***уравнением с несколькими переменными***. Например, каждое из уравнений $x^2+y^2+z^2-xy+xz+2yz+2=0$, $xyz+9=0$ содержит три переменные, а уравнения $x^2+2xy-x+2=0$, $3xy=4$, $2x+y^2-y=0$ являются уравнениями с двумя переменными. Чтобы определить степень уравнения, складывают показатели степеней переменных каждого слагаемого. Сравнивая числа, полученные таким образом, в качестве степени уравнения берут наибольшее из них. Определенное таким образом число называется ***степенью*** уравнения. Например, степень уравнения с тремя переменными $x^2+y^2+xyz+2z-2=0$ равна трем, степень уравнения с двумя переменными $xy^2+x^2-4=0$ равна трем, а уравнения с двумя переменными $x^2+3xy-y+4=0$, $2xy=5$, $2x-y^2-y=0$ являются уравнениями второй степени.

Линейное уравнение с двумя переменными в общем виде записывается так:

$$ax+by+c=0. \qquad (1)$$

Здесь a, b и c – заданные действительные числа, причем коэффициенты a и b одновременно не обращаются в нуль. Если $b\neq0$, то уравнение (1) легко приводится к виду: $y=kx+n$, где

$$k=-\frac{a}{b}, \quad n=-\frac{c}{b}.$$

В целом общий вид нелинейного уравнения второго порядка с двумя переменными записывается так:

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+k=0, \qquad (2)$$

где a, b, c, d, e, k – заданные действительные числа, k – свободный член, а коэффициенты a, b и c одновременно не обращаются в нуль, если $a=b=c=0$, уравнение (2) перестает быть уравнением 2-го порядка.

1.1.2. Геометрический смысл уравнений с двумя переменными

Как было отмечено выше, уравнения, задающие функциональную зависимость между переменными x и y, можно рассматривать как уравнения с двумя переменными. Мы хорошо знаем, что геометрический смысл таких уравнений есть график соответствующих функций. Например, геометрическим смыслом (графиком) линейного уравнения с двумя переменными является прямая. Также известно, что графиком уравнения $y=ax^2+bx+c$ является парабола, а уравнением $xy=k$ задается гипербола. Кроме того, существуют уравнения с двумя переменными, которые не задают функциональную зависимость.

К примеру, рассмотрим уравнение $x^2+y^2-4x+2y-4=0$. Преобразуем левую часть этого уравнения, дополнив до полного квадрата: $x^2+y^2-4x+2y-4=x^2-4x+4+y^2+2y+1-9=(x-2)^2+(y+1)^2-9$. Тогда исходное уравнение записывается так:

$$(x-2)^2+(y+1)^2=3^2. \qquad (3)$$

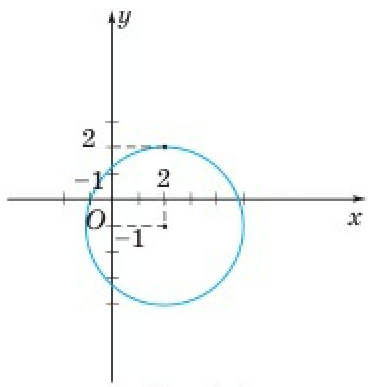


Рис. 1.1

Уравнением (3) в декартовой координатной системе Oxy определяется окружность с центром в точке $(2;-1)$ и радиусом 3 (рис. 1.1).

В целом уравнение с двумя переменными записывается в виде

$$F(x;\ y)=0. \qquad (4)$$

Здесь $F(x;\ y)$ – некоторое выражение с переменными x и y. Например, если $F(x;\ y)=x^2-2y$, то уравнение (4) записывается так:

$$x^2-2y=0,$$

а если $F(x;y)=\dfrac{2x-y}{x+y}-\dfrac{3-y}{x-y}$, то уравнение можно записать в виде $\dfrac{2x-y}{x+y}=\dfrac{3-y}{x-y}$ и т. п.

Если числа x_0 и y_0 после подстановки вместо переменных x и y обращают уравнение (4) в числовое тождество, то пару чисел $(x_0; y_0)$ называют ***решением уравнения*** (4). А множество всех решений уравнения (4) в координатной плоскости определяют некоторую фигуру. Эту фигуру называют ***графиком*** уравнения (4). Например, нетрудно проверить, что пары чисел (2; 2) и (−1; −1) являются решениями уравнения (3), а пара (2; 0) не является его решением. В основном уравнения с двумя переменными имеют бесконечно много решений и множество этих решений на координатной плоскости определяют некоторую кривую. Однако встречаются уравнения с двумя переменными, которые имеют конечное число решений или вовсе не имеют действительных решений. Например, уравнение $(x-3)^2+(y+1)^2=0$ имеет только одно решение $x=3$ и $y=-1$, а уравнение $x^2+y^2+9=0$ вовсе не имеет решения во множестве действительных чисел.

1. Какие уравнения называются уравнениями с несколькими переменными? Приведите пример.
2. Как определить степень уравнения? Приведите пример.
3. Напишите общий вид линейного уравнения с двумя переменными и уравнения второй степени.
4. Каков геометрический смысл уравнений с двумя переменными?
5. Что значит решить уравнение с двумя переменными?

Практическая работа

Дана точка $C(4;3)$. а) Постройте окружность с центром в точке C и проходящую через начало координат. б) Измерьте линейкой радиус окружности. в) Проверьте точность измерения аналитическим способом, т.е. найдите радиус окружности с помощью формулы нахождения расстояния между двумя точками. г) Напишите уравнение окружности. д) Раскройте скобки в полученном уравнении окружности и запишите ее в виде уравнения 2-го порядка. Сделайте вывод о свободном члене полученного уравнения. Обоснуйте ответ.

2–4334

Упражнения

A

1.1. Определите степени уравнений:

1) $4x^6-2x^7+x-1=0$; 2) $5y^2-y-2=0$;
3) $4xy+xy^2-5x^2+y=0$; 4) $8x^4y+5x^2y^2=11$;
5) $xy+xz+zy=1$; 6) $xyz-x^2-y^2-z^2=2$;
7) $(x-y)z^2+(x+y)z=z^2$; 8) $(x^2+y^2-xy)^2=xy^2$;
9) $(z^2+x-y)^3=x^2y^3z^4+1$; 10) $xyz^2+x^3-3xy^2-2z+9=0$.

1.2. Напишите уравнение окружности с центром в точке $(x_0; y_0)$ и радиусом R: 1) $(0;\ 0)$, $R=4$; 2) $(-1;\ 0)$, $R=2$; 3) $(2;\ 3)$, $R=3$.

1.3. Найдите угловой коэффициент прямой и постройте ее график:

1) $y=3x-5$; 2) $y=-0{,}7x+1$;
3) $2x+y-4=0$; 4) $x-2y+2=0$;
5) $3x+2y-4=0$; 6) $-5x+3y+16=0$.

1.4. Постройте графики уравнений:

1) $x^2+y^2=16$; 2) $(x-3)^2+(y-1)^2=9$;
3) $(x+2)^2+y^2=4$; 4) $y=(x-2)^2-1$;
5) $y=x^2-4x+3$; 6) $y=x^2-2$.

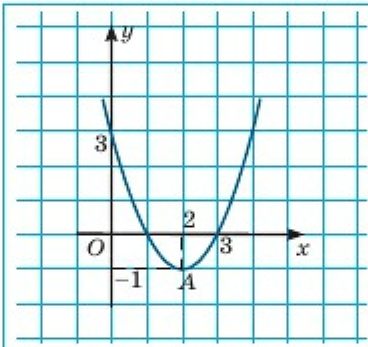


Рис. 1.2.

5) ▲ $y = x^2 - 4x + 3 \Rightarrow y= x^2 - 4x + 4 - 1 \Rightarrow y = (x - 2)^2 - 1$.
Этим уравнением на плоскости определяется парабола с вершиной в точке A(2; –1), ветви которой направлены вверх (см. рис. 1.2) ■

1.5. Какая из точек $A(1;\ 4)$, $B(-1;\ 4)$, $C\left(3; \frac{4}{3}\right)$ и $D\left(\frac{1}{2}; -8\right)$ лежит на графике уравнения $xy=4$?

1.6. Найдите ординату точки с абсциссой, равной 3 и принадлежащей графику уравнения:

1) $x^2-2xy+2y^2+x-6y+6=0$; 2) $2xy=9$;
3) $3x-2y+4=0$; 4) $x^2-3x-y+2=0$.

B

1.7. Постройте графики уравнений:

1) $y-|x|=0$; 2) $|x|+y=5$; 3) $|y|-x=0$; 4) $x+|y|=5$.

3) ▲ $|y|-x=0 \Rightarrow |y|=x \Rightarrow x \geqslant 0$. Если $y \geqslant 0$, то $y=x$, а если $y<0$, то $-y=x$. Поэтому данное уравнение равносильно следующей совокупности уравнений

$$|y|=x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x,\ x \geqslant 0, \\ y=-x,\ x \geqslant 0, \end{array}\right.$$

ее график изображен на рис. 1.3 ■

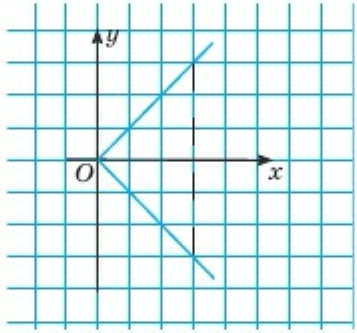


Рис. 1.3.

1.8. Определите координаты центра и радиус окружности:

1) $x^2+y^2-6x+8y+9=0$; 2) $x^2+y^2+3x-4y=0$;
3) $x^2+y^2+7y=0$; 4) $x^2+y^2-x-y-3=0$.

1.9. Определите геометрический смысл уравнений:

1) $x^2+3x-y+7=0$; 2) $y^2+3y-x+7=0$;
3) $x^2+y^2-8x+7=0$; 4) $xy=2$.

1.10. Постройте графики уравнений:

1) $2x^2-4x-y+5=0$; 2) $x^2+y^2-x+5y+\frac{1}{4}=0$;

3) $x^2+y^2-\frac{8}{3}y-\frac{20}{9}=0$; 4) $x^2-8x-y+13=0$.

1.11. Постройте графики уравнений:

1) $xy=3$; 2) $xy=-3$; 3) $x(y-2)=-3$; 4) $(x+1)(y-2)=3$.

1.12. Определите вершину параболы:

1) $3x^2-2x+y-5=0$; 2) $2x^2+3x-y+5=0$.

1.13. Напишите уравнения асимптот гиперболы:

1) $xy-x+y=2$; 2) $xy+3x-2y=8$.

C

В упражнениях **1.14–1.18** постройте графики заданных уравнений.

1.14. 1) $|x|=y$; 2) $x=|y|$; 3) $|x|=|y|$.

1.15. 1) $x^2+y^2-3x-3y+2=0$; 2) $|x^2+y^2-3x-3y+4{,}5|=2{,}5$;
3) $x^2+y^2-3|x|-3|y|+2=0$; 4) $|x^2+y^2-3|x|-3|y|+4{,}5|=2{,}5$.

1.16. 1) $y=x^2-4x+3$; 2) $y=|x^2-4x+3|$;
3) $y=x^2-4|x|+3$; 4) $y=|x^2-4|x|+3|$.

1.17. 1) $y=x^2-1$; 2) $|y|=x^2-1$; 3) $|y|=|x^2-1|$.

1.18 1) $xy=2$; 2) $|x|y=2$; 3) $x|y|=2$; 4) $|x|\cdot|y|=2$.

1.19. При каких значениях n и m вершина параболы $y=nx^2+mx$ расположена в точке (2; 3)?

Упражнения для повторения

1.20. Постройте график функции $y=\frac{2}{x}$. Найдите точки пересечения этого графика с прямой $y=2x$.

1.21. Оцените выражения: 1) $a+b$; 2) $a-b$; 3) $a\cdot b$; 4) $\frac{a}{b}$, если $3<a<4$ и $4<b<5$.

1.22. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x+y=4, \\ x-y=2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y=3, \\ 3y-x=1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} |x|+y=5, \\ x+4y=5. \end{cases}$

1.2. Решение систем нелинейных уравнений с двумя переменными

Изучив материалы данной темы, вы:

- повторите и вспомните способы решения систем линейных уравнений с двумя переменными;
- освоите способы решения систем нелинейных уравнений с двумя переменными.

1.2.1. Способы решения систем линейных уравнений

В 6 классе вы полностью рассмотрели решение систем двух линейных уравнений с двумя переменными. Здесь же с помощью примеров повторим пройденное.

Пример 1 (способ подстановки). Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=3, \\ 2x+y=1. \end{cases}$$

▲ Смысл способа заключается в следующем. В одном из уравнений системы одну переменную выражают через другую и подставляют это значение в другое уравнение системы. После чего последовательно находят значения переменных. В первом уравнении данной системы выразим x через y и подставим это значение x во второе уравнение: $x=2y+3 \Rightarrow$ $\Rightarrow 2(2y+3)+y=1 \Rightarrow 5y+6=1 \Rightarrow y=-1$. Из равенства $x=2y+3$ находим значение переменной x: $x=2\cdot(-1)+3=1$. Следовательно, $x=1$, $y=-1$.

На практике, используя символы равносильности, эту систему решают следующим образом:

$$\begin{cases} x-2y=3, \\ 2x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y+3, \\ 2(2y+3)+y=1 \end{cases} \Rightarrow 5y+6=1 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow x = 2\cdot(-1)+3=1.$$

Ответ: (1; −1). ■

Пример 2 (способ алгебраического суммирования). Решим эту же систему другим способом. Смысл заключается в следующем. По необходимости умножают уравнения системы на некоторые числа и, складывая (или вычитая одно из другого) полученные уравнения системы, избавляются от одной из переменных. После чего из полученного уравнения находят значение оставшейся переменной, а затем с помощью одного из уравнений исходной системы находят значение другой переменной.

▲ $$\begin{cases} x-2y=3, \\ 2x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=3, \\ 4x+2y=2 \end{cases} \Rightarrow 5x=5 \Rightarrow x=1 \Rightarrow 2\cdot 1+y=1 \Rightarrow y=-1.$$

Ответ: (1; −1). ■

Любая система линейных уравнений с двумя переменными легко решается одним из показанных способов. Указанные способы решения систем уравнений также широко используются при решении нелинейных систем уравнений.

1.2.2. Решение систем уравнений второго порядка

Если степень одного из уравнений системы равна 2, а степень второго уравнения не выше 2, то данная система называется системой уравнений ***второго порядка***. Например, системы

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 3 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x^2 + 3y^2 + xy = 4, \\ 2x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

являются системами уравнений второго порядка. Значения переменных x и y, которые обращают каждое уравнение системы в числовое тождество, называются ***решением*** этой системы. Например, система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ x - y = 1 \end{cases}$$

имеет два решения: 1) $x_1=-1$, $y_1=-2$; 2) $x_2=2$, $y_2=1$. В этом можно убедиться с помощью проверки:

$$1)\ \begin{cases} (-1)^2 + (-2)^2 = 5, \\ (-1) - (-2) = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 = 5, \\ 1 = 1; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} 2^2 + 1^2 = 5, \\ 2 - 1 = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 = 5, \\ 1 = 1. \end{cases}$$

Существует несколько способов решения систем уравнений второго порядка. Покажем их.

Пример 3. Решим систему способом подстановки:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2y - 9 = 0, \\ 3x - y - 1 = 0. \end{cases}$$

▲ $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2y - 9 = 0, \\ 3x - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (3x-1)^2 + 2(3x-1) - 9 = 0, \\ y = 3x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0, \\ y = 3x - 1. \end{cases}$

Уравнение $x^2-1=0$ имеет два корня: $x_1=-1$, $x_2=1$. Из уравнения $y=3x-1$ находим соответствующие значения y: $y_1=-4$, $y_2=2$.

Ответ: $(-1; -4)$, $(1; 2)$. ■

Иногда вместо примененного способа подстановки удобно использовать теорему Виета. Рассмотрим на примерах.

Пример 4. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6. \end{cases}$$

▲ По теореме Виета решения данной системы являются корнями квадратного уравнения $z^2-5z+6=0$. А это уравнение имеет два корня: $z_1=2$, $z_2=3$. Так как данная система уравнений симметрична относительно переменных x и y, то каждая из них может принимать любое из значений z_1 и z_2. Поэтому исходная система имеет два решения: $x_1=2$, $y_1=3$ и $x_2=3$, $y_2=2$. ■

Пример 5. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x-y=7, \\ xy=-10. \end{cases}$$

▲ Эту систему можно переписать так:

$$\begin{cases} x+(-y)=7, \\ x(-y)=10. \end{cases}$$

Тогда, как было отмечено в примере 4, числа x и $(-y)$ являются решениями квадратного уравнения $z^2-7z+10=0$. Следовательно, ответ исходной задачи записывается так: $x_1=2$, $y_1=-5$; $x_2=5$, $y_2=-2$. ■

Пример 6. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=20, \\ xy=8. \end{cases}$$

▲ *Способ* 1. Умножим второе уравнение системы на 2 и сложим его с первым уравнением. В результате получим уравнение $(x+y)^2=36$ или $x+y=\pm6$. Следовательно, исходная система равносильна совокупности следующих двух систем уравнений:

1) $\begin{cases} x+y=6, \\ xy=8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y=-6, \\ xy=8. \end{cases}$

Решая каждую из них так же, как и в примере 4, находим 4 решения исходной системы:

$x_1=-4$, $y_1=-2$; $x_2=-2$, $y_2=-4$; $x_3=4$, $y_3=2$; $x_4=2$, $y_4=4$.

Способ 2. Если ввести обозначения $x^2=u$, $y^2=v$, то исходную систему можно записать так:

$$\begin{cases} u+v=20, \\ uv=64. \end{cases}$$

Тогда $u_1=16$, $v_1=4$ и $u_2=4$, $v_2=16$, т.е. $x_1^2=16$, $y_1^2=4$; $x_2^2=4$, $y_2^2=16$.

Отсюда учитывая, что переменные x и y имеют одинаковые знаки ($xy=8$), получим ответ: $(4; 2)$, $(2; 4)$, $(-4; -2)$, $(-2; -4)$. ■

Пример 7. Нужно решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2-xy+y^2=3, \\ 2x^2-xy-y^2=5. \end{cases}$$

▲ Первое уравнение системы умножим на 5, а второе – на 3, затем из второго уравнения вычтем первое уравнение. В результате получим уравнение $x^2+2xy-8y^2=0$. Так как $y=0$ не является решением исходной системы, то $y\neq 0$. Поделив последнее уравнение на y^2, получим уравнение $\left(\frac{x}{y}\right)^2+2\left(\frac{x}{y}\right)-8=0$.

Вводя обозначение $\frac{x}{y}=z$, это уравнение можно записать так: $z^2+2z-8=0$. Корни этого уравнения равны $z_1=-4$, $z_2=2$. Следовательно, $\frac{x}{y}=-4$, $\frac{x}{y}=2$, т. е. $x=-4y$, $x=2y$. Поэтому исходная система равносильна совокупности следующих двух систем уравнений:

$$\begin{cases} x^2-xy+y^2=3, \\ x=-4y \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2-xy+y^2=3, \\ x=2y. \end{cases}$$

Решая системы так же, как в примере 3, получим ответ:

$$x_{1,2}=\pm\frac{4}{\sqrt{7}}, \quad y_{1,2}=\pm\frac{1}{\sqrt{7}}, \quad x_{3,4}=\pm 2, \quad y_{3,4}=\pm 1. \ ■$$

1. Каков смысл способов подстановки и алгебраического суммирования решения систем уравнений?
2. Какие системы уравнений называются системами уравнений 2-го порядка?
3. Какие способы решения систем уравнений 2-го порядка вы знаете?
4. Как записывается общий вид систем уравнений, решаемых с помощью теоремы Виета? А можно ли решить эти системы способом подстановки?

Практическая работа

На одной системе координат постройте прямую $y=x+2$ и параболу $y = 4 - x^2$ и приблизительно определите координаты точек пересечения. Проверьте правильность полученных ответов аналитическим способом, решив систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y = 4, \\ y = x + 2. \end{cases}$$

Упражнения

A

В упражнениях **1.23 – 1.38** решите системы уравнений.

1.23. 1) $\begin{cases} x + y = 1, \\ x - y = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x - 7y = 39, \\ x + y = -3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5x - 2y = -12, \\ 3x + 4y = -2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + 2y = 5, \\ -x + 7y = 13. \end{cases}$

1.24. 1) $\begin{cases} x + y = 6, \\ xy = 8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = 4, \\ xy = -3; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 - 6xy + 9y^2 = 16, \\ x - y = 6. \end{cases}$

1.25. 1) $\begin{cases} x^2 - y^2 = -21, \\ x + y = -3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 74, \\ x - y = 2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 34, \\ x + y = 7; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 - 2xy - y^2 = 1, \\ x + y = 2. \end{cases}$

1) ▲ $\begin{cases} x^2 - y^2 = -21, \\ x + y = -3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - y)(x + y) = -21, \\ x + y = -3; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 7, \\ x + y = -3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 4, \\ 2y = -10; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = -5. \end{cases}$

О т в е т: $x = 2,\ y = -5$. ■

1.26. 1) $\begin{cases} x + 2y = 13, \\ xy = 15; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - 2y = 2, \\ xy = 12; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 5(x - y) = 4y, \\ x^2 + 4y^2 = 181. \end{cases}$

1.27. 1) $\begin{cases} x^2 + 3xy - y^2 + 2x - 5y = -64, \\ x - y = -7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + 3y^2 - 4x - 5y - 8 = 0, \\ x - y + 1 = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4x^2 + 5y^2 = 16, \\ x^2 + 5y^2 = 25; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + xy = 15, \\ y^2 + xy = 10. \end{cases}$

B

1.28. 1) $\begin{cases} 2x - 3y = -18, \\ xy = -12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^2 - 3y^2 = -19, \\ xy = -6; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 65, \\ xy = 28. \end{cases}$

1.29. 1) $\begin{cases} y - x = 1, \\ x + |y| = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} |x - 1| + y = 4, \\ x + y = 3; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 - 3y = -5, \\ 7x + 3y = -1. \end{cases}$

1.30. 1) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4, \\ x + y - 3\sqrt{xy} = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{1}{y-1} - \dfrac{1}{y+1} = \dfrac{1}{x}, \\ y^2 - x - 9 = 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x + y = 5, \\ x^3 + y^3 = 35; \end{cases}$

3) ▲ $\begin{cases} x + y = 5, \\ x^3 + y^3 = 35; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 5, \\ (x + y)(x^2 - xy + y^2) = 35; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 5, \\ x^2 - xy + y^2 = 7; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 5, \\ (x + y)^2 - 3xy = 7; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 5, \\ 25 - 3xy = 7; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2,\ y = 3, \\ x = 3,\ y = 2. \end{array} \right.$

Ответ: (2; 3), (3; 2). ■

1.31. 1) $\begin{cases} 2x^2 - 3xy - 19y^2 = 25, \\ x^2 - 6y^2 = 250; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7x^2 - 6xy + 12y^2 = 108, \\ x^2 - \dfrac{5}{6}xy + \dfrac{7}{8}y^2 = 18. \end{cases}$

1.32. 1) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x} = 18, \\ x + y = 12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x} = 3, \\ x + y = 2. \end{cases}$

1.33. 1) $\begin{cases} \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{x} = 1, \\ x + y = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y - x = 2, \\ \dfrac{10x + y}{xy} = 3. \end{cases}$

1.34. 1) $\begin{cases} xy = 36, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2\sqrt{xy}, \\ x + y = 20. \end{cases}$

C

1.35. 1) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 1, \\ x + y = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + xy = 12, \\ xy - y^2 = 2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 8, \\ x - y = 2. \end{cases}$

1.36. 1) $\begin{cases} \dfrac{5}{x^2 + xy} + \dfrac{4}{y^2 + xy} = \dfrac{13}{6}, \\ \dfrac{8}{x^2 + xy} - \dfrac{1}{y^2 + xy} = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{2}{x^2 + 3xy} + \dfrac{3}{y^2 - xy} = \dfrac{25}{14}, \\ \dfrac{3}{x^2 + 3xy} - \dfrac{2}{y^2 - xy} = -\dfrac{4}{7}. \end{cases}$

1.37. 1) $\begin{cases} \dfrac{x + 2y}{x - y} + \dfrac{x - 2y}{x + y} = 4, \\ x^2 + xy + y^2 = 21; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{3x - 9y}{x + y} + \dfrac{2x + y}{x - y} = 4, \\ x^2 - y^2 = 48. \end{cases}$

1) ▲ $\begin{cases} \dfrac{x + 2y}{x - y} + \dfrac{x - 2y}{x + y} = 4, \\ x^2 + xy + y^2 = 21; \end{cases} \Leftrightarrow \left| \begin{matrix} x \neq y \\ x \neq -y \end{matrix} \right| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x + 2y)(x + y) + (x - 2y)(x - y) = 4\left(x^2 - y^2\right), \\ x^2 + xy + y^2 = 21; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4y^2, \\ x^2 + xy + y^2 = 21; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2y, \\ x^2 + xy + y^2 = 21; \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2y, \\ x^2 + xy + y^2 = 21; \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2y, \\ y^2 = 3; \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2y, \\ y^2 = 7; \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \pm 2\sqrt{3}, \\ y = \pm\sqrt{3}; \end{cases} \\ \begin{cases} x = \pm 2\sqrt{7}, \\ y = \mp\sqrt{7}. \end{cases} \end{array} \right.$

О т в е т: $\left(\pm 2\sqrt{3}; \pm\sqrt{3}\right)$, $\left(\pm 2\sqrt{7}; \mp\sqrt{7}\right)$. ■

1.38. 1) $\begin{cases} x + y + xy = -1, \\ x^2 + xy + y^2 = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^3y^2 - x^2y^3 = 36, \\ 2x^2y - xy^2 = 6. \end{cases}$

1.39*. При каких значениях a система уравнений

1) $\begin{cases} x + y = a, \\ xy = 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = a, \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$

имеет только одно решение?

1.40*. При каких значениях a система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = a \\ x - y = a \end{cases}$ имеет только одно решение?

Упражнения для повторения

1.41. Проходит ли график функции $y=x^2-4x+3$ через точку: 1) $A(2;-1)$; 2) $B(2;1)$?

1.42. Без построения графиков укажите, в каких координатных четвертях расположен график функции: 1) $y=x^2+4$; 2) $xy=-4$.

1.3. Решение текстовых задач с помощью систем уравнений

Изучив материалы данной темы, вы будете:

- решать текстовые задачи с помощью систем уравнений;
- закреплять навыки составления математической модели по условию задачи.

Во многих текстовых задачах бывает несколько неизвестных величин. При решении таких задач неизвестные величины обозначаются через переменные. Согласно условиям задачи, составляют систему с этими несколькими переменными (часто систему с двумя неизвестными). Решая составленную систему уравнений, получают ответ исходной задачи.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Значение первой цифры двузначного числа вдвое меньше значения его второй цифры, а сумма значений этих цифр равна 9. Найти это двузначное число.

▲ Если x – первая цифра, а y – вторая цифра искомого числа, то по условию задачи $y=2x$ и $x+y=9$. Итак, мы имеем систему уравнений

$$\begin{cases} y = 2x, \\ x + y = 9. \end{cases}$$

Эта система является математической моделью данной задачи. $x=3$, $y=6$ – ее решение.

О т в е т: 36. ■

Пример 2. Площадь участка земли прямоугольной формы равна 600 м². Для ограждения этого участка в три ряда потребовалось 420 м проволоки. Найти ширину и длину этого участка земли.

▲ Если через x и y обозначить ширину и длину этого участка, то по условию задачи $x \cdot y = 600$ м², а периметр можно найти, составив равенство 420 : 3=140 м, т.е. имеем уравнение $2x+2y=140$ или $x+y=70$. Таким образом, мы составили систему уравнений, являющуюся математической моделью задачи:

$$\begin{cases} xy = 600, \\ x + y = 70, \end{cases}$$

где $x<y$. По теореме Виета $x=10$, $y=60$.

О т в е т: 10 м, 60 м. ■

Пример 3. Два тракториста совместно вспахали бы участок земли под посев на 18 ч раньше, чем только первый тракторист, и на 32 ч раньше, чем только второй тракторист. За сколько часов вспахали бы этот участок земли каждый из трактористов по отдельности?

▲ Для решения задачи введем три переменные: t_1 – время работы первого тракториста, t_2 – второго тракториста, t – время совместной работы этих трактористов. Тогда по условию задачи имеем следующую математическую модель:

$$\begin{cases} t_1 - t = 18, \\ t_2 - t = 32, \\ \dfrac{1}{t_1} + \dfrac{1}{t_2} = \dfrac{1}{t}. \end{cases}$$

Так как $t_1=t+18$, $t_2=t+32$, то из третьего уравнения получим

$$\frac{1}{t+18} + \frac{1}{t+32} = \frac{1}{t} \Rightarrow t^2 + 32t + t^2 + 18t = t^2 + 50t + 576 \Rightarrow$$

$\Rightarrow t^2=576 \Rightarrow t=\pm 24$. Отсюда по смыслу задачи подходит только $t=24$ ч. Следовательно, $t_1= 42$ ч, $t_2= 56$ ч.

О т в ет: 42 ч, 56 ч. ■

В подобных задачах не всегда бывает понятной «природа» получения уравнений вида $\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} = \frac{1}{t}$. Поясним это. Появление подобных уравнений связано с понятием «скорость». Например, обозначим через s площадь данного участка. Тогда скорости вспахивания земли (т.е. количество земли, вспахиваемое за единицу времени, в производстве называют производительностью труда) каждым трактористом равны $\frac{s}{t_1}$ и $\frac{s}{t_2}$, а скорость совместной работы равна $\frac{s}{t}$. А так как при совместной работе скорости складываются, то получим равенство $\frac{s}{t_1}+\frac{s}{t_2}=\frac{s}{t}$, т.е., разделив обе части данного уравнения на s, получим уравнение $\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}=\frac{1}{t}$.

Практическая работа

Составьте текстовую задачу, которая решается с помощью системы уравнений и решите ее:

1) $\begin{cases} m+n=11, \\ mn=28; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3t_1=2t_2, \\ \frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}=\frac{1}{3}. \end{cases}$

Упражнения

А

1.43. Ширина прямоугольника на 3 см короче его длины, а их сумма равна 27 см. Найдите площадь прямоугольника.

1.44. Возвращаясь домой из сада, Нурлан и Самат взяли с собой несколько яблок. По пути они встретили Берика, которому Нурлан дал одно яблоко, а Самат – два. После этого у всех трех приятелей количество яблок оказалось равным. Сколько яблок было первоначально у Нурлана и Самата по отдельности?

1.45. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 10 см, а сумма катетов – 14 см. Найдите площадь треугольника.

1.46. Значение первой цифры двузначного числа на 4 больше значения второй цифры, а произведение их значений равно 21. Найдите это двузначное число.

▲ Сначала составим математическую модель задачи. Пусть $\overline{xy}$ – искомое двузначное число. По условию $x = y + 4$ и $xy = 21$. Тогда математическую модель задачи запишем в виде следующей системы уравнений: $\begin{cases} x = y + 4, \\ xy = 21. \end{cases}$

Решая эту систему, получим:

$$\begin{cases} x = y + 4, \\ (y + 4)y = 21; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 4, \\ y^2 + 4y - 21 = 0. \end{cases}$$

$y_1 = 3$, $y_2 = -7$ – корни второго уравнения. Тогда $x_1 = 7$, $x_2 = -3$. Здесь $x_2 = -3$, $y_2 = -7$ противоречат условию задачи.

Ответ: 73. ■

1.47. Три барана и корова за день съедают 11 кг комбикорма, а один баран и три коровы – 17 кг. Сколько килограммов комбикорма съедает один баран и одна корова за день по отдельности?

1.48. За 20 тетрадей и один дневник ученик заплатил 125 тг. Каковы цена тетради и цена дневника по отдельности, если за одну тетрадь и один дневник ученик заплатил 30 тг?

1.49. Бригада из 24 рабочих завершила данную работу за 6 дней. За сколько дней завершила бы эту работу бригада из 36 рабочих?

B

1.50. Катер за один час проплыл 15 км по течению реки и 4 км в стоячей воде. Скорость течения реки в 4 раза меньше скорости катера в стоячей воде. Какова скорость течения реки?

1.51. Крестьянское хозяйство вспахало участок земли под посев за три дня. В первый день было вспахано на 2310 га земли больше, чем во второй, а в третий день были вспаханы оставшиеся 330 га земли, что составляют 2% всего участка земли. Сколько гектаров земли было вспахано за первый и второй дни работы по отдельности?

1.52. Количество ног кур и баранов равно 40, а количество их голов – 15. Сколько кур и баранов?

1.53. На турбазе 83 туриста были размещены в 25 домиках и палатках. В каждом домике разместились по 5 туристов, а в каждой палатке – по 2 туриста. Сколько домиков и палаток на турбазе?

1.54. Из двух населенных пунктов одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста. Они встретились через 3 ч. В час один из велосипедистов проходит на 2 км больше другого. Какова скорость каждого велосипедиста, если расстояние между населенными пунктами равно 66 км?

1.55. Скорость катера на 16 км больше скорости течения реки. Катер за 2 ч проплыл 18 км по течению реки и 20 км против течения реки. Каковы скорости катера и течения реки?

▲ Пусть x – скорость катера в стоячей воде, а y – скорость течения реки. По условию задачи $x = y + 16$. Кроме того, катер 18 км по течению реки пройдет за $\frac{18}{x+y}$ ч, а 20 км против течения реки – за $\frac{20}{x-y}$ ч. Поэтому необходимо, чтобы выполнялось равенство $\frac{18}{x+y} + \frac{20}{x-y} = 2$ ч.

Следовательно, математическую модель задачи запишем в виде следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} x = y + 16, \\ \dfrac{18}{x+y} + \dfrac{20}{x-y} = 2. \end{cases}$$

Решив систему, получим $x = 20$, $y = 4$.

Ответ: $x = 20$ км/ч, $y = 4$ км/ч. ■

1.56. Площадь трех участков земли равна 60 га. Площадь первого участка составляет 25% суммы площадей всех трех участков, площади второго и третьего участков соотносятся как 4 : 5. Какова площадь каждого из участков?

1.57. Катер прошел 20 км вверх по реке и 30 км вниз, затратив на весь путь 2 ч. Какова скорость течения реки, если скорость катера в стоячей воде 25 км/ч?

1.58. Расстояние между станциями A и B равно 120 км. Вслед за поездом, вышедшим из A в B, через 3 ч в этом же направлении отправился второй поезд, скорость которого на 10 км/ч больше скорости первого поезда. Известно, что первый поезд прибыл на станцию B на 2 ч раньше, чем второй. За сколько часов пройдет путь от A до B второй поезд?

C

1.59. Двое рабочих изготовили 131 одинаковую деталь. Из них 65 деталей изготовил первый рабочий, причем на это ему потребовалось затратить на один день меньше, чем второму. В день первый рабочий изготавливает на 2 детали больше, чем второй. Сколько деталей изготовили рабочие за день совместной работы?

1.60. Две бригады должны были собрать весь урожай за 12 дней. Однако после 8 дней совместной работы первая бригада была переведена на другую работу, и оставшуюся часть работы вторая бригада завершила за 7 дней. За сколько дней каждая бригада в отдельности собрала бы весь урожай?

1.61. Двум рабочим было поручено изготовить партию некоторых деталей. После того как первый рабочий проработал 7 ч, а второй – 4 ч, стало известно, что выполнено $\frac{5}{9}$ всей работы. Через 4 ч совместной работы им оставалось выполнить $\frac{1}{18}$ всего объема. За сколько часов каждый рабочий в отдельности выполнил бы всю работу?

1.62. С первого земельного участка было собрано 2880 ц урожая, а со второго участка, площадь которого меньше на 12 га, – 2160 ц. Известно, что с каждого гектара первого участка было собрано на 4 ц больше, чем с каждого гектара второго участка. Найдите площадь каждого участка.

1.63. В сплаве алюминия и магния содержится 22 кг алюминия. Этот сплав переплавили, добавив к нему 15 кг магния. В новом сплаве доля магния выросла на 45%. Какова масса первоначального сплава?

3–4334

1.64. Два тела движутся по окружности в одном направлении. Одно из них совершает полный оборот на 2 с раньше другого. Известно, что они встречаются через каждые 60 с. Какую часть окружности преодолевает каждое тело за 1 с?

Упражнения для повторения

1.65. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} 2x - 3y = 5, \\ 3x + y = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - 2y = 0, \\ x + 3y = 5. \end{cases}$

1.66. Решите неравенства:

1) $|x - 2| < 3;$ 2) $x^2 - 5x + 60 \geqslant 0.$

1.4. Неравенства с двумя переменными

Изучив материалы данной темы, вы будете:

- знать понятие решения неравенства с двумя переменными;
- решать систему неравенств нелинейных уравнений с двумя переменными.

1.4.1. Понятие решения неравенства с двумя переменными

Теперь определим геометрический смысл неравенств с двумя переменными. Например, рассмотрим неравенство $2x + y - 3 \leqslant 0$. Уравнением $2x + y - 3 = 0$, или $y = -2x + 3$ задается прямая (рис. 1.4). А все точки $(x; y)$, удовлетворяющие неравенству $2x+y-3\leqslant 0$, лежат ниже этой прямой, либо на ней. Например, точка $(0; 0)$ удовлетворяет этому неравенству: $2\cdot 0+0-3<0$. Следовательно, множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют данному неравенству, является полуплоскостью, расположенной ниже прямой $y = -2x + 3$. Тогда неравенством $2x + y - 3 > 0$ задается полуплоскость, находящаяся выше этой прямой (рис. 1.4).

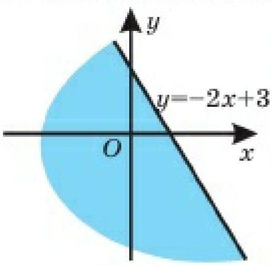


Рис. 1.4

Итак, решение неравенства с двумя переменными – нахождение множества всех значений переменных, удовлетворяющих данному неравенству. Например, если данное неравенство зависит от переменных x и y, то пара чисел $(x; y)$ на координатной плоскости определяет точку. Следовательно, решить неравенство с двумя переменными – это значит, что на плоскости надо указать все точки, координаты которых удовлетворяют данному неравенству.

Рассмотрим теперь неравенство $x^2 + y^2 < 4$. Уравнением $x^2 + y^2 = 4$ задается окружность радиуса 2 с центром в начале координат. Если для точки $(x_0;\ y_0)$ верно неравенство $x_0^{\ 2} + y_0^{\ 2} < 4$, то это означает, что расстояние от точки $(x_0;\ y_0)$ до начала координат $(0;\ 0)$ меньше 2. Следовательно, точка $(x_0;\ y_0)$ расположена в круге, границей которого служит окружность $x^2+y^2<4$ Итак, неравенством $x^2+y^2<4$ задается круг радиуса 2 с центром в точке $(0;\ 0)$. В это множество точки окружности не входят, так как знак неравенства строгий (рис.1.5). Тогда неравенством $x^2+y^2<4$ задается внешняя часть этого круга.

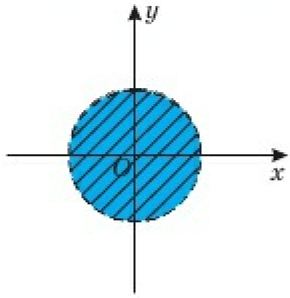


Рис. 1.5

1.4.2. Решение системы неравенств с двумя переменными

Сначала рассмотрим пример.

Пример 1. Треугольник с вершинами в точках $A(-1;\ 0)$, $B(1;\ 3)$ и $C(4;\ -2)$ задайте с помощью неравенств.

▲ С помощью формулы прямой, проходящей через две заданные точки, запишем уравнения прямых AB, AC и BC.

Прямая AB: $3x - 2y + 3 = 0 \Rightarrow y = \dfrac{3x+3}{2}$.

Прямая AC: $2x + 5y + 2 = 0 \Rightarrow y = \dfrac{-2x-2}{5}$.

Прямая BC: $5x + 3y - 14 = 0 \Rightarrow y = \dfrac{-5x+14}{3}$.

Треугольник ограничен прямыми AB, BC и AC. Они расположены выше или ниже друг друга. Это можно записать в виде следующей системы неравенств (рис. 1.6):

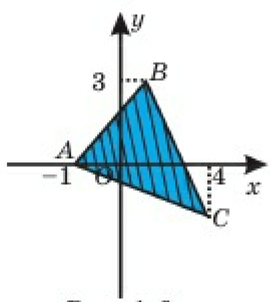


Рис. 1.6

$$\begin{cases} y \leqslant \dfrac{1}{2}(3x+3), \\ y \geqslant \dfrac{1}{5}(-2x-2), \\ y \leqslant \dfrac{1}{3}(-5x+14) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 3x - 2y + 3 \geqslant 0, \\ 2x + 5y + 2 \geqslant 0, \\ 5x + 3y - 14 \leqslant 0. \end{cases}$$ ■

Итак, решая пример 1, мы получили систему линейных неравенств. Решение этой системы неравенств на плоскости определяется совокупностью точек треугольника ABC. Решение нелинейных систем неравенств на плоскости также определяется совокупностью точек некоторой фигуры. Рассмотрим пример.

Пример 2. Построим фигуру, заданную системой неравенств $\begin{cases} x^2 - y - 2x - 1 \leqslant 0, \\ x - y + 3 \geqslant 0. \end{cases}$

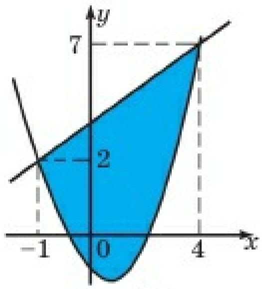


Рис. 1.7

▲ Так как $x^2 - y - 2x - 1 \leqslant 0 \Rightarrow y \geqslant x^2 - 2x - 1$, или $y \geqslant (x-1)^2 - 2$, то искомая фигура расположена выше параболы $y = (x-1)^2 - 2$. А так как $x - y + 3 \geqslant 0 \Rightarrow y \leqslant x + 3$, то она лежит ниже прямой $y = x + 3$. Следовательно, искомая фигура ограничена параболой $y = (x-1)^2 - 2$ и прямой $y \leqslant x + 3$ (рис. 1.7). ■

Творческая работа

Два молочных комбината одного аграрно-производственного объединения расположены в 120 км друг от друга. Ассортимент, качество и цена соответствующих готовых продуктов одинаковые. Из-за особенностей рельефа местности транспортные расходы у них разные. Если первый комбинат на транспортировку одной единицы выпускаемой продукции (например, 1 коробки продукции) расходует 6 тг/км, то второй комбинат на это тратит 12 тг/км. Как нужно поделить рынок сбыта между данными комбинатами так, чтобы это было выгодно указанному аграрно-производственному объединению?

1) Обозначьте место нахождения первого комбината точкой A, а второго – точкой B и выберите прямоугольную систему координат Oxy так, чтобы начало координат O совпало с серединой отрезка AB, а ось Ox была сонаправлена с вектором $\overline{AB}$. Найдите координаты точек A и B.

2) Пусть в магазине, расположенном в точке $P\ (x;\ y)$, продукты этих комбинатов имеют одинаковые цены (с учетом расходов на транспортировку). Покажите, что координаты всех таких точек P удовлетворяют уравнению $(x - 100)^2 + y^2 = 80^2$.

3) Заштрихуйте область рынка сбыта для комбината, расположенного в точке B. Каким неравенством определяется эта область?

4) Сформулируйте ответ, полученный математическим способом, т.е. сформулируйте рекомендации для руководства объединения.

Упражнения

A

1.67. Определите степени и количество переменных неравенств:

1) $4x^6-2x^7+x-1<0$; 2) $5y^2-y-2>0$;
3) $4xy+xy^2-5x^2+y\leqslant 0$; 4) $8x^4y+5x^2y^2\geqslant 11$;
5) $xy+xz+zy>1$; 6) $xyz-x^2-y^2-z^2>2$;
7) $(x-y)z^2+(x+y)z\geqslant z^2$; 8) $(x^2+y^2-xy)^2\leqslant xy^2$;
9) $(z^2+x-y)^3<x^2y^3z^4+1$.

1.68. Напишите уравнение окружности радиуса R с центром в точке $(x_0;y_0)$: 1) $R=4$, $(0;0)$; 2) $R=2$, $(-1;0)$; 3) $R=3$, $(2;3)$. Напишите неравенства, определяющие внутреннюю и внешнюю части этой окружности.

1.69. На координатной плоскости изобразите фигуры, заданные неравенствами: 1) $y>3x-4$; 2) $y\leqslant 5-x$; 3) $x+y\geqslant 2$; 4) $0{,}5y-x<3$.

1.70. Решите неравенства графически:
1) $x^2+y^2\leqslant 81$; 2) $x^2+y^2>9$; 3) $(x-3)^2+(y+1)^2<25$.

1.71. Постройте фигуры, заданные системой неравенств:

1) $\begin{cases} y\leqslant x+3, \\ y\geqslant 5-3x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2\leqslant x\leqslant 5, \\ 1\leqslant y\leqslant 4 \end{cases}$ (рис. 1.8);

3) $\begin{cases} -1< x\leqslant 2, \\ -5\leqslant y<-1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y-2x+4\geqslant 0, \\ 3y-9x+6<0. \end{cases}$

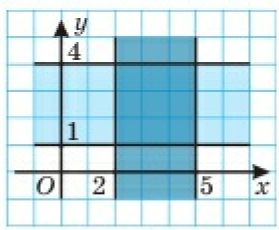


Рис. 1.8

B

1.72. Лежит ли точка: 1) $A(-1;2)$ 2) $B(0;-5)$; 3) $C\left(\dfrac{1}{3};4\right)$; 4) $D(2;2)$ в круге с радиусом 3, с центром в начале координат?

1.73. Решите неравенства графически:
1) $y\leqslant 3x^2$; 2) $y\geqslant 2x^2-3$; 3) $y<x^2-3x+2$;
4) $x^2+y^2-2x+4y\geqslant 4$; 5) $xy<5$; 6) $y\geqslant\dfrac{x-1}{x+1}$.

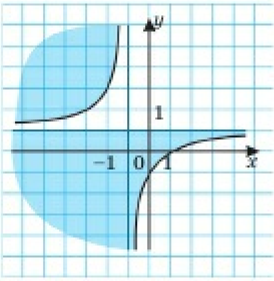


Рис. 1.9

6) ▲ Преобразуем данное выражение и запишем его так: $y \geqslant 1 - \frac{2}{x+1}$. Область, которая удовлетворяет этому неравенству, изображена на рис. 1.9. ■

1.74. Постройте графики системы неравенств:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 64, \\ x > 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 25, \\ y \geqslant 5 - x; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 4 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 16, \\ x \leqslant y. \end{cases}$

1.75. Постройте графики фигур, заданных уравнениями:

1) $2x - y = 3$; 2) $x + y - 2 = 0$; 3) $2|x| - y = 3$;
4) $|x| + y - 2 = 0$; 5) $2x - y = 3,\ -1 \leqslant x \leqslant 3$;
6) $x + y = 2,\ -1 \leqslant x \leqslant 2$; 7) $|x| + y = 2,\ -1 \leqslant x \leqslant 2$.

1.76. Постройте графики фигур, заданных уравнениями:

1) $x^2+y^2=16$; 2) $(x+1)^2+(y+1)^2=9$;
3) $x^2+y^2-4x+6y=12$; 4) $x^2+y^2-x-y=\frac{7}{4}$;
5) $x^2+2x+y=0$; 6) $2\ x^2-4x-y=5$.

1.77. Изобразите фигуры, заданные неравенствами:

1) $x - 2y + 1 \geqslant 0$; 2) $2x + y \leqslant 4$; 3) $|x| - 2y + 1 < 0$;
4) $2|x| + y > 4$; 5) $y + x^2 \leqslant 2x$; 6) $y - x^2 + x > 1$;
7) $x^2 + y^2 - 2x + 4y \leqslant 4$; 8) $(x+1)^2 + (y-1)^2 > 4$;
9) $xy \leqslant 2$; 10) $(x-2)y > 1$.

C

1.78*. Задайте системой неравенств многоугольник с вершинами в точках: 1) $A(-3; 4)$, $B(2; 1)$, $C(4; -2)$; 2) $A(-4; 0)$, $B(0; 5)$, $C(4; 0)$, $D(0; -5)$; 3) $A(-4; -1)$, $B(-2; 2)$, $C(2; 3)$, $D(4; 0)$, $E(1; -4)$.

В упражнениях **1.79–1.82*** постройте фигуры, заданные неравенствами или системой неравенств:

1.79. 1) $(x-2)(|y|-3) \leqslant 0$; 2) $(|x|-1)(y+3) \leqslant 0$; 3) $|y| < 2|x| - 3$.

1.80. 1) $xy \leqslant 1$; 2) $|x|y \leqslant 1$; 3) $x|y| \leqslant 1$; 4) $|xy| \leqslant 1$.

1.81. 1) $y \geqslant x^2 - 5|x| + 6$; 2) $y < |x^2 - 5x + 6|$.

1.82*. 1) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 4(x + y - 1), \\ y \geqslant |x - 2|; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} |x - y| \leqslant 2, \\ (x + y)\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right) \leqslant 0. \end{cases}$

1) ▲ $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 4(x + y) - 1, \\ y \geqslant |x - 2|; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + y^2 - 4y \leqslant -1, \\ -y \leqslant x - 2 \leqslant y; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 2)^2 \leqslant 7, \\ x + y \geqslant 2, \\ x - y \leqslant 2. \end{cases}$

Решение каждого неравенства изображено на рис. 1.10. ■

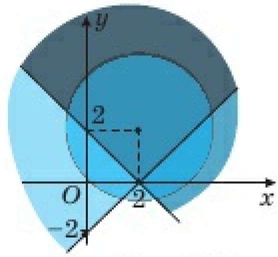


Рис. 1.10

Упражнения для повторения

1.83. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x + y = 11, \\ xy = 24; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ y = \dfrac{4}{3}x; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - y = 3, \\ xy = 40; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 96, \\ x - y = 8. \end{cases}$

1.84. Решите неравенства:

1) $\dfrac{2 - \sqrt{3}}{2x - 1} \leqslant 0;$ 2) $\dfrac{2\sqrt{2} - 3}{4 + 5x} > 0;$ 3) $\dfrac{2x + 1}{x - 2} < 2.$

Названия терминов на трех языках

На русском языке	На казахском языке	На английском языке
Уравнения с двумя переменными	Екі айнымалысы бар теңдеулер	Equations with two variables
Неравенства с двумя переменными	Екі айнымалысы бар теңсіздіктер	Inequations with two variables
Система уравнений (неравенств) с двумя переменными	Екі айнымалысы бар теңдеулер (теңсіздіктер) жүйесі	Systems of equations (inequations) with two variables
Геометрический смысл уравнения (неравенства) с двумя переменными	Екі айнымалысы бар теңдеудің (теңсіздіктің) геометриялық мағынасы	Geometric value of equations (inequations) with two variables

Раздел 2. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Изучив материал данного раздела, вы будете:

- знать правила комбинаторики (правила суммы и произведения);
- знать определение факториала числа;
- знать определения перестановки, размещения, сочетания без повторений;
- знать формулы комбинаторики для вычисления чисел перестановок, размещений, сочетания без повторений;
- решать задачи, применяя формулы комбинаторики для вычисления числа перестановок, размещений, сочетания без повторений.

На практике приходится подсчитывать все возможные варианты взаимного расположения предметов или знать все возможные исходы какой-либо нашей деятельности и посчитать все возможные способы её выполнения. Сколькими способами можно распределить 5 книг между двумя учениками?

Сколькими способами могут быть распределены золотая, серебряная и бронзовая медали между полуфиналистами чемпионата мира по футболу и т.д.? В этих задачах рассматриваются все возможные способы расположения объектов или комбинации всевозможных действий. Поэтому такие задачи называются ***комбинаторными задачами***, а отрасль математики, изучающая комбинаторные задачи, – ***комбинаторикой***. Существует ряд закономерностей и формул, применяемых при решении задач комбинаторики.

2.1. Правило суммы

Количество элементов любого конечного множества A обозначают через $n(A)$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Для любых конечных множеств A и B верно равенство*

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B). \tag{1}$$

▲ В состав суммы $n(A)+n(B)$ вошло количество элементов каждого из множеств A и B по отдельности. Поэтому в этой сумме количество элементов пересечения $A \cap B$ учтено дважды: один раз в составе $n(A)$ и второй раз в составе $n(B)$ (рис. 2.1). Следовательно,

$$n(A) + n(B) = n(A \cup B) + n(A \cap B).$$

Отсюда легко получается формула (1). ■

Если $m=3$, то формула (1) записывается так:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - \\ - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C). \tag{2}$$

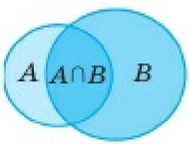


Рис. 2.1

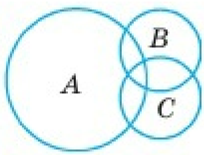


Рис. 2.2

Пример 1. Из 32 учеников класса 14 участвовали во внутришкольном турнире по футболу, 10 – по баскетболу и 8 – по волейболу. Из их числа 6 учеников участвовали в турнирах как по футболу, так и по баскетболу, 5 учеников – по футболу и по волейболу, 4 ученика – по волейболу и баскетболу, а 3 ученика участвовали во всех трех игровых видах турнира. Сколько учеников класса не участвовали ни в одном виде турнира?

▲ Для наглядности применим диаграммы Эйлера-Венна (рис. 2.2). Пусть A – множество учеников класса, участвовавших в турнире по футболу, B – по баскетболу, C – по волейболу, а U – множество всех учеников класса. Тогда по условию задачи имеем: $n(U)=32$, $n(A)=14$, $n(B)=10$, $n(C)=8$, $n(A\cap B)=6$, $n(A\cap C)=5$, $n(B\cap C)=4$, $n(A\cap B\cap C)=3$. По формуле (2) получим количество учеников класса, участвовавших в каком-либо турнире: $n(A\cup B\cup C)=14+10+8-6-5-4+3=20$. Тогда в турнире не принимали участия $n(U)-n(A\cup B\cup C)=32-20=12$ учеников.

Ответ: 12 учеников. ■

Следствие. *Если $A\cap B=\varnothing$, то верно равенство $n(A\cup B) = n(A) + n(B)$.*

▲ Так как $A\cup B=\varnothing$, то $n(A\cup B)=0$ и из формулы (1) получим требуемое равенство. ■

2.2. Правило произведения

Сначала рассмотрим пример.

Пример 2. Три члена совета директоров объединения претендуют быть избранными на пост председателя, а двое – на пост заместителя председателя совета директоров. Сколькими способами можно избрать председателя и его заместителя?

▲ Претендентов на пост председателя обозначим через $П_1$, $П_2$, $П_3$, а претендентов на пост заместителя – через $З_1$ и $З_2$. Здесь любой претендент на пост председателя вместе с любым претендентом на пост заместителя могут составить пару «председатель – заместитель». Всевозможных таких пар можно получить с помощью следующей таблицы:

$П$ / $З$	$П_1$	$П_2$	$П_3$
$З_1$	$(П_1; З_1)$	$(П_2; З_1)$	$(П_3; З_1)$
$З_2$	$(П_1; З_2)$	$(П_2; З_2)$	$(П_3; З_2)$

Отсюда видно, что председателя и его заместителя можно избрать $3\cdot 2=6$ различными способами. ■

На рис. 2.3 это решение показано графическим способом.

Схему, изображенную на этом рисунке, называют **«деревом анализа»**. Если от его начала пройтись по любой его ветке, то получим определенную пару «председатель – заместитель».

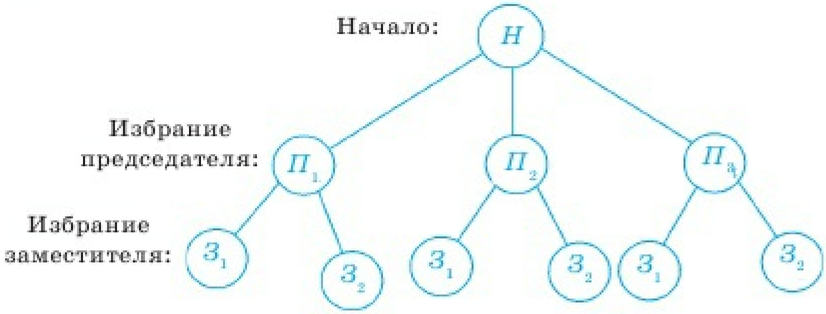


Рис. 2.3

Общие выводы из этого примера можно сформулировать в нижеследующей теореме.

Теорема 2. *Для любых конечных множеств A и B количество* m *всех пар вида* $(a;\ b)$, $(a \in A)$, $(b \in B)$ *равно произведению количества элементов этих множеств:*

$$m = n(A) \cdot n(B). \tag{3}$$

▲ Заданы множества $A=\{a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_p\}$ и $B=\{b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_k\}$, $(n(A)=p,\ n(B)=k)$. Тогда, чтобы показать справедливость формулы (4), достаточно составить таблицу аналогично приведенной в примере 2.

$b \backslash a$	a_1	a_2	$\ldots$	a_p
b_1	$(a_1;\ b_1)$	$(a_2;\ b_1)$	$\ldots$	$(a_p;\ b_1)$
b_2	$(a_1;\ b_2)$	$(a_2;\ b_2)$	$\ldots$	$(a_p;\ b_2)$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
b_k	$(a_1;\ b_k)$	$(a_2;\ b_k)$	$\ldots$	$(a_p;\ b_k)$

Отсюда видно, что $m=p \cdot k=n(A) \cdot n(B)$. ■

2.3. Размещения с повторениями

Пусть дано непустое множество X. Рассмотрим последовательность элементов множества X:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_k), (x_i \in X). \tag{4}$$

Здесь некоторые элементы могут повторяться. Всякий такой набор элементов вида (4) называется ***кортежем длиной k***.

Определение. *Пусть $n(X)=n$. Тогда всякий кортеж длиной k, составленный из элементов множества X, называется* ***размещением с повторениями из n элементов по k***. А количество всех размещений n элементов по k обозначается через $\widetilde{A}_n^k$, и это число вычисляется по формуле:

$$\widetilde{A}_n^k = n^k. \tag{5}$$

▲ В самом деле, на каждом месте кортежа (4) можно расположить любой элемент множества X. Тогда по правилу умножения

$$\widetilde{A}_n^k = \underbrace{n(X) \cdot n(X) \cdot \ldots \cdot n(X)}_{k \text{ раз}} = \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k \text{ раз}} = n^k,$$

что и требовалось доказать. ■

Пример 3. Как показано на рис. 2.4, населенные пункты A и B соединены двумя дорогами. Между населенными пунктами A и B эти дороги пересекаются тремя параллельными дорогами. Сколькими способами можно добраться из пункта A в пункт B, не повторяя уже пройденный путь?

▲ Тремя параллельными улицами каждая из верхней и нижней дорог делится на четыре части. Чтобы добраться из пункта A в пункт B путник должен пройти по одной из этих частей. Например, путь, указанный на рис. 2.4, можно записать коротко в виде (***в***, ***н***, ***в***, ***в***). Здесь через ***в*** обозначена часть пути, пройденного по верхней дороге, а через ***н*** – часть пути, пройденного по нижней дороге. Тогда всякий способ прохождения из

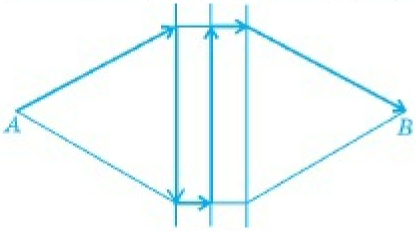


Рис. 2.4

A в B можно рассматривать как размещение пути длиной, равной 4 элементам множества $\{в;\ н\}$ с повторениями. Следовательно, из пункта A в пункт B можно добраться $\tilde{A}_2^4 = 2^4 = 16$ различными способами. ■

Пример 4. Сколькими способами можно разместить пять монет различного достоинства по двум карманам?

▲ Будем различать эти карманы как правый и левый. Тогда каждую монету можно «пометить» буквами «$п$» или «$л$», в зависимости от того, в какой карман она попала, т.е. всякий кортеж длиной 5, составленный из элементов множества $\{п;\ л\}$, определяет способ распределения монет по карманам. Например, кортеж $(п,\ л,\ л,\ л,\ п)$ означает, что первая и пятая монеты попали в правый карман, а вторая, третья и четвертая монеты попали в левый карман. Следовательно, по формуле (6) данные 5 монет по двум карманам можно распределить $\tilde{A}_2^5 = 2^5 = 32$ различными способами. ■

2.4. Размещения без повторений. Перестановки

В комбинаторике часто рассматривают произведение нескольких начальных натуральных чисел. Их называют ***факториалами числа***. Например, произведение натуральных чисел от 1 до n включительно коротко обозначают через $n!$ и читают его как «эн факториал».

Итак, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$ (6)

Например, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$; $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ и т.п. По определению полагают, что $0! = 1$.

Пусть множество X состоит из n элементов. Тогда всякий кортеж длиной k, составленный из элементов множества X, где элементы не повторяются, называется ***размещением из n элементов по k без повторений***. Если в размещениях с повторениями n и k могут принимать любые натуральные значения, то в размещениях без повторений необходимо, чтобы $n \geqslant k$. Количество всех размещений из n элементов по k без повторений обозначают через A_n^k, и это число вычисляют по формуле

$$A_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1) \tag{7}$$

или

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \tag{7'}$$

▲ Действительно, первой координатой кортежа длиной k может быть любой из n элементов множества X, поскольку элементы не должны повторяться, то второй координатой этого кортежа может быть любой из оставшихся $(n-1)$ элементов множества X и т.д. k координатой кортежа может быть любой из оставшихся $(n-k+1)$ элементов множества X. Тогда по правилу произведения имеем, что $A_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1)$. Отсюда

$$A_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Формулы (7) и (7′) доказаны полностью. ■

Если $n=k$, то размещение без повторений называется *перестановкой из n элементов*. Количество всех перестановок из n элементов обозначается через P_n, и справедлива формула

$$P_n = n! \tag{8}$$

Действительно, учитывая, что $0!=1$, из формулы (7′) имеем:

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

Пример 5. Сколькими способами четырех учеников можно рассадить на 7 стульях?

▲ Здесь множество X состоит из 7 элементов (стульев). Тогда искомое число равно количеству всех размещений без повторений из 7 элементов по 4, т.к. считается, что несколько учеников не могут сесть на один стул.

Тогда $A_7^4 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ способов. ■

Пример 6. Сколькими способами можно расставить 5 человек в очереди?

▲ Требуемое число равно количеству всех перестановок из пяти элементов: $P_5 = 5! = 120$. ■

Пример 7. Сколькими способами можно рассадить 7 учеников в ряд из 7 стульев так, чтобы определенные три подруги сидели рядом?

▲ Данных трех подруг из условия задачи обозначим через A_1, A_2, A_3, а других учеников – через B, C, D, E. Пусть $A=\{A_1, A_2, A_3\}$. Тогда во всех перестановках элементов A, B, C, D, E данные три подруги будут сидеть рядом. Число таких перестановок равно $P_5=5!=120$. С другой стороны, эти подруги по отношению друг к другу могут располагаться в любом порядке, т.е. они между собой могут меняться местами всего $P_3=3!=6$ способами. Поэтому 7 учеников рассадить на 7 стульях так, чтобы три подруги сидели рядом, можно различными $P_5 \cdot P_3=120 \cdot 6 = 720$ способами. ■

2.5. Сочетания без повторений

Определение. *Пусть $n(X)=n$, тогда каждое k-элементное подмножество множества X называется* ***сочетанием из n по k без повторений****. Количество всех сочетаний из n по k без повторений обозначается через C_n^k.*

Теорема 3. *Верна формула*

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{9}$$

Здесь число C_n^k называется ***коэффициентом сочетания****.*

▲ **Доказательство.** Верно равенство $A_n^k = P_k C_n^k$. Действительно, все размещения из n по k без повторений получаются различными $P_k=k!$ перестановками каждого сочетания из n по k, т.е. $A_n^k = P_k C_n^k$. Отсюда нетрудно получить формулу (9). ■

Пример 8. В круговом турнире по шахматам участвовали 12 игроков. Сколько партий было сыграно в турнире?

▲ В каждой партии участвуют 2 игрока. Поэтому количество сыгранных в турнире партий равно количеству всех сочетаний из 12 по 2: $C_{12}^2 = \dfrac{12!}{2!10!} = \dfrac{12 \cdot 11}{2} = 66$. ■

2.6. Бином Ньютона и его свойства

Вспомним формулы сокращенного умножения:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

С другой стороны по формуле коэффициента сочетания имеем:

$C_2^0 = \frac{2!}{0!2!} = 1$, $C_2^1 = \frac{2!}{1!1!} = 2$, $C_2^2 = \frac{2!}{2!0!} = 1$ и также $C_3^0 = 1$, $C_3^1 = 3$, $C_3^2 = 3$, $C_3^3 = 1$. Поэтому упомянутые выше формулы можно записывать так:

$$(a+b)^2 = C_2^0 a^2 \cdot b^0 + C_2^1 a^1 b^1 + C_2^2 \cdot a^0 \cdot b^2,$$

$$(a+b)^3 = C_3^0 a^3 \cdot b^0 + C_3^1 a^2 b^1 + C_3^2 \cdot a^1 \cdot b^2 + C_3^3 \; a^0 \cdot b^3.$$

Разложите выражения $(a + b)^4$ и $(a + b)^5$ по указанной закономерности. Полученные результаты проверьте, используя тождества $(a + b)^4 = (a + b)(a + b)^3$, $(a + b)^5 = (a + b)\times$ $\times(a + b)^4$. Таким образом, для любого натурального n справедлива формула

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 \, a^{n-2} \cdot b^2 + \ldots + C_n^k a^{n-k} \cdot b^k + \ldots + C_n^n b^n. \quad (10)$$

Эта формула называется ***биномом Ньютона***.

Если учесть, что $(a + b)^0 = 1$, $(a + b)^1 = a + b$, то коэффициенты бинома Ньютона можно определить по следующей схеме:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

Эту схему называют треугольником Паскаля, и отсюда $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

Пример 9. Найдем количество всех подмножеств данного множества, состоящего из n элементов.

▲ Количество всех одноэлементных подмножеств равно C_n^1, количество всех двухэлементных подмножеств равно C_n^2 и т. д., количество всех k-элементных подмножеств равно C_n^k, где $k=1, 2, \ldots, n$. Так как пустое множество является подмножеством любого множества, то требуемое число m равно сумме

$$m = 1 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^k + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n.$$

Здесь, учитывая, что $1 = C_n^0 = \dfrac{n!}{0!n!}$, имеем $m = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k$. Применим формулу бинома Ньютона:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, a^{n-k} b^k.$$

Предположим, что $a=1$, $b=1$, то

$$m = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot 1^{n-k} \cdot 1^k = (1+1)^n = 2^n.$$

Итак, количество всех подмножеств n-элементного множества равно 2^n. ■

Пример 10. На рис. 2.5 дана сеточная фигура, узловые точки которой имеют «целочисленные» координаты. Сколькими способами можно добраться из точки $O(0;\ 0)$ до точки $A(k;\ n)$, двигаясь по сторонам сеточной фигуры вверх или вправо?

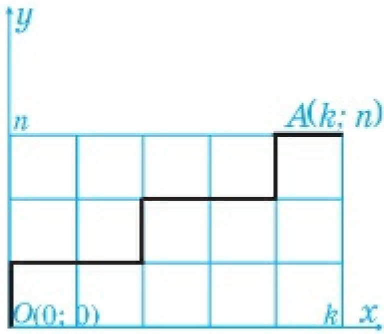


Рис. 2.5

▲ Чтобы добраться из точки $O(0;\ 0)$ до точки $A(k;\ n)$, мы должны пройти через определенные n вертикальные стороны и k горизонтальные стороны клеток. Поэтому в каждом случае мы проходим через $(k+n)$ сторон определенных клеток. Причем каждый такой набор из $(k+n)$ сторон клеток могут отличаться друг от друга лишь порядком расположения вертикальных и горизонтальных сторон клеток, т.е. для выбора определенного пути нам достаточно указать n вертикальных сторон клеток. Тогда количество всех путей будет равно количеству сочетаний из $(k+n)$ по n: C_{k+n}^k. ■

Замечание. В рассуждениях данной задачи можно было бы выбрать k горизонтальных отрезков из $(k + n)$ сторон, и мы получили бы число, равное C_{k+n}^{k}. А из формулы (9) легко получить равенство $C_{k+n}^{k} = C_{k+n}^{n}$.

Число C_n^k называется биномиальным коэффициентом. Теперь рассмотрим несколько свойств числа C_n^k:

1°. $C_n^k = C_n^{n-k}$.

2°. $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$.

3°. $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k}$.

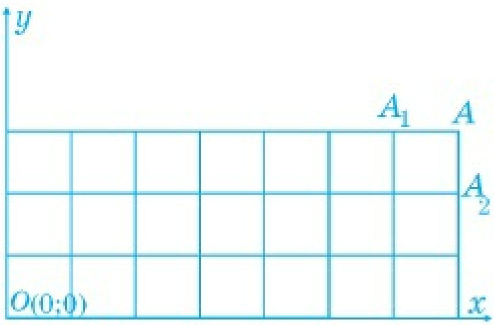


Рис. 2.6

▲ Свойство 1° вытекает непосредственно из формулы (9), а свойство 2° было показано в примере 9. Докажем свойство 3°. Добраться из точки $O(0; 0)$ до точки $A(k;\ n-k)$ (рис. 2.6), двигаясь вверх и вправо, можно различными $C_{k+(n-k)}^{k} = C_n^k$ способами. А множество всех этих способов можно разбить на подмножества: первое – количество способов, проходящих через точку A_1, второе – количество всех способов, проходящих через точку A_2 (рис. 2.6). Согласно примеру 10, количество способов, проходящих через точку A_1, таково: $C_{k+(n-1-k)}^{k} = C_{n-1}^{k}$, а количество способов, проходящих через точку A_2, таково: $C_{k-1+(n-1)}^{k-1} = C_{n-1}^{k-1}$. Следовательно, $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k}$. ■

Упражнения

А

2.1. В магазине имеются 6 видов шоколадных конфет и 10 видов карамели. Сколькими способами можно купить: 1) конфеты одного вида; 2) по одному виду шоколадных конфет и карамели?

2.2. В меню столовой имеются 3 вида первого, 4 вида второго и 5 видов третьего блюда. Сколькими способами из них можно составить обед?

2.3. На книжной полке расположены 2 книги по комбинаторике, 5 книг – по теории вероятностей, 4 книги – по алгебре, 3 книги – по истории и 6 книг – по литературе. Сколькими способами можно выбрать: 1) одну книгу по математике; 2) одну книгу по математике или по литературе?

2.4. Сколько двузначных натуральных чисел делится и на 3, и на 4?

2.5. На почтамте имеются 3 вида конвертов и 5 видов марок. Сколькими способами для отправки письма можно выбрать один конверт и одну марку?

2.6. Сколькими способами два ученика могут поделиться пятью книгами?

2.7. На почтамте имеются 5 видов марок. Сколькими способами можно выбрать из них 3 вида марок?

2.8. Сколькими способами с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 можно составить: 1) трехзначное число; 2) трехзначное число, цифры которого не повторяются?

2.9. Сколькими способами из букв слова «логарифм» можно составить слово, состоящее из: 1) 5 букв; 2) 8 букв?

▲ 1) В слове «логарифм» 8 неповторяющихся букв. Тогда мы должны разместить 5 букв из 8 на 5 мест без повторений, т.е. мы всего можем составить A_8^5 слов, состоящих из 5 букв.

Ответ: можем составить $A_8^5 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720$ слов. ■

2.10. Сколькими способами можно рассадить 6 человек: 1) в один ряд; 2) за круглым столом?

2.11. Сколькими способами можно выбрать 2 дежурных из 25 учеников класса?

2.12. Сколько существует различных хорд с концами в данных 10 точках окружности?

2.13. Сколько существует различных треугольников с вершинами в данных 10 точках окружности?

2.14. Сколькими способами можно расставить 5 шашек на черных клетках шахматной доски?

2.15. У одного ученика имеются 7 книг, а у второго – 8 книг. Сколькими способами они могут произвести обмен книгами два на два?

▲ Первый ученик из 7 книг для обмена может выбрать 2 книги $C_7^2 = \dfrac{7 \cdot 6}{2} = 21$ способами, а второй из 8 книг для обмена может выбрать 2 книги $C_8^2 = \dfrac{8 \cdot 7}{2} = 28$ способами. Т.к. каждый ученик независимо друг от друга отбирает по 2 книги, то по правилу умножения они могут произвести обмен всего $21 \cdot 28 = 588$ способами. ■

2.16. Сколькими способами можно разместить 6 монет разного достоинства по двум карманам?

B

2.17. Сколько существует трехзначных чисел, делящихся на 2, на 5 или на 7?

2.18. Сколько существует трехзначных чисел, делящихся только на два из чисел 2, 5, 7 и не делящихся на третье из этих чисел?

2.19. Из 35 учеников класса 15 – девушки. Сколькими способами из них можно отобрать: 1) одну девушку и одного юношу; 2) двух юношей; 3) двух девушек?

2.20. Сколькими способами на шахматной доске можно выбрать:
1) одну белую и одну черную клетки; 2) одну белую и одну черную клетки, не расположенные на одной горизонтали и на одной вертикали?

2.21. Каждый сотрудник Министерства внутренних дел владеет, по крайней мере, одним иностранным языком (английским, немецким или французским). Из них 10 владеют английским языком, 6 – немецким, 4 – французским, 4 – и английским, и немецким, 3 – и английским, и французским, 2 – и немецким, и французским, а один сотрудник владеет всеми тремя языками. Сколько: 1) сотрудников работают в отделе; 2) сотрудников владеют только одним иностранным языком?

2.22. Сколькими способами из 35 учеников класса можно отобрать старосту, его заместителя и ответственных за работу редколлегии, за спортивную работу?

2.23. Сколькими способами можно составить четырехзначное число, в котором: 1) цифры могут повторяться; 2) цифры не повторяются?

2.24. Сколькими способами можно переставить буквы в слове «логарифм» так, чтобы на втором, четвертом и шестом местах находились гласные буквы?

2.25. Если лист бумаги, в котором написаны цифры, повернуть на 180°, то цифры 0, 1, 8 не меняются, а цифры 6 и 9 переходят один к другому. Сколько существует пятизначных чисел, которые не меняются при повороте бумаги на 180°?

▲ В середине пятизначного числа может располагаться одна из цифр 0, 1, 8. И это осуществится $C_3^1 = 3$ способами. На первое место мы можем поставить любую из цифр 1, 8, 6, 9, и это можно выполнить $C_4^1 = 4$ способами. На второе место можно поставить любую из цифр 0, 1, 8, 6, 9, это еще $C_5^1 = 5$ способов. Если на первых двух местах записаны цифры 0, 1, 8, то на 4 и 5 местах эти цифры повторяются соответственно, если записаны 6 или 9, то на 4 и 5 местах нужно записать 9 или 6 соответственно. Т.к. на первых трёх местах цифры располагаются независимо друг от друга, то по правилу умножения имеем: $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ чисел.
Ответ: имеются 60 чисел, которые не меняются при повороте бумаги на 180°. ■

2.26. В пассажирском поезде имеются 15 вагонов. Сколькими способами можно рассадить трех путников по разным вагонам?

2.27. Для участия в турнире по баскетболу тренер из 14 юношей отобрал 5. Известно, что определенные два юноши обязательно войдут в состав команды. Сколькими способами тренер может составить команду?

2.28. Сколько параллелограммов может образоваться в результате пересечения n параллельных прямых с другими m параллельными прямыми?

2.29. На книжной полке 8 книг по математике и 5 книг по физике. Сколькими разными способами можно взять 3 книги по математике и 2 книги по физике?

2.30. Сколькими разными способами можно посадить 8 человек в 2 легковые автомашины так, чтобы в каждой автомашине было не менее 3 человек?

2.31. Сколькими разными способами можно выбрать две согласные и одну гласную буквы из слова «логарифм»?

C

2.32. Сколько четных чисел, меньших, чем 10^4, можно написать с помощью цифр 0, 4, 5?

2.33. В классе 35 учеников. Староста дал заместителю директора следующий отчет об участии учеников класса в спортивных мероприятиях школы: 16 учеников участвовали в турнире по футболу, 15 – по волейболу, 14 – по баскетболу, 4 ученика участвовали в турнирах и по футболу, и по волейболу, 3 – и по волейболу, и по баскетболу, 3 – и по футболу, и по баскетболу, а 2 ученика участвовали во всех трех видах игры. Почему заместитель директора представленный отчет признал не соответствующим действительности?

2.34. Каждый из учеников класса является либо девушкой, либо ростом меньше, чем 165 см, либо любит математику. Из 18 девушек класса 14 девушек имеет рост менее 165 см. В целом у 22 учеников класса рост менее 165 см и 12 из них любят математику. Из 18 учеников класса, любящих математику, 8 девушек. Из всех девушек с ростом менее 165 см 6 любят математику. Сколько учеников в классе?

2.35. За круглым столом сидят n людей. Покажите, что количество всех перестановок этих людей определяется формулой $\frac{P_n}{n} = (n-1)!$

2.36. На железнодорожной станции имеется m светофоров. Каждый светофор может подавать сигналы красного, желтого и зеленого цветов. Сколько различных видов сигналов можно подавать при помощи этих m светофоров?

2.37. Сколькими способами можно рассадить 5 юношей и 5 девушек за круглым столом так, чтобы никакие 2 юноши и никакие 2 девушки не сидели рядом?

2.38. Сколько можно написать чисел, меньших, чем 10^4, с помощью цифр 2, 4, 5: 1) нечетных; 2) четных?

2.39. На уроке к доске были вызваны 5 учеников. Известно, что ни один из них не получит «двойку». Сколькими способами можно поставить им оценки?

2.40. Сколькими способами можно поделить между 4 учениками поровну 12 учебников?

2.41. Нужно поделить 30 учеников на подгруппы по 10 человек для изучения английского, немецкого и французского языков. Сколькими способами это можно сделать?

2.42. В круговом турнире по шахматам двое участников, сыгравших по три партии, выбыли из турнира по состоянию здоровья. В турнире было сыграно всего 16 партий. Сколько участников было в турнире первоначально?

2.43. Докажите тождества:

1) $C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \ldots + \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$;

2) $C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + nC_n^n = n2^{n-1}$;

3) $C_n^1 - 2C_n^2 + \ldots + (-1)^{n-1}nC_n^n = 0$.

2.44. Найдите сумму:

1) $C_n^0+2C_n^1+2^2C_n^2+\ldots+2^nC_n^n$;

2) $C_n^0+C_n^2+C_n^4+\ldots$; 3) $C_n^0+C_n^2+C_n^5+\ldots$.

2.45. Решите уравнения:

1) $\dfrac{C_x^3+C_x^4}{C_{x+1}^2}=11$; 2) $\dfrac{C_{x+1}^3-C_x^2}{C_x^2}=11$.

2.46. Докажите тождество $\left(C_n^0\right)^2+\left(C_n^1\right)^2+\ldots+\left(C_n^n\right)^2=C_{2n}^n$.

Упражнения для повторения

2.47. Принадлежит ли число 10 области значений функции

$y=\sqrt{x^2-2x+12}$?

2.48. Найдите область определения функции:

1) $y=\sqrt{x}+\sqrt{x-4}$; 2) $y=\sqrt{x(x-4)}$.

2.49. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} x\leqslant 3-\dfrac{1}{x-1}, \\ |x+1|<4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x+7}{x-5}+\dfrac{3x+1}{2}\geqslant 0, \\ |5-x|\leqslant 2. \end{cases}$

2.50. Найдите все решения неравенства $\dfrac{x^2-4x}{x-1}\leqslant 0$, которые удовлетворяют неравенству $(x^2-1)(3-x)\geqslant 0$.

Названия терминов на трех языках

Формулы	На русском языке	На казахском языке	На английском языке
$n(A \cup B)=n(A)+ +n(B)-n(A \cap B)$	Правило суммы	Қосу ережесі	Addition rules
$n(A \times B)= =n(A) \cdot n(B)$	Правило произведения	Көбейту ережесі	Multiplication rules
$\bar{A}_n^k = n^k$	Количество всех размещений из n по k с повторениями	Барлық n-нен k бойынша алынған қайталанбалы орналастырулар саны	Humber of all repetitive placements of elements from n by k
$A_n^k = \dfrac{n}{(n-k)!}$	Количество всех размещений из n по k без повторений	Барлық n-нен k бойынша алынған қайталанбалы орналастырулар саны	Humber of all none repetitive placements of elements from n by k
$P_n = n!$	Количество всех перестановок из n элементов	n элементтің барлық алмастырулар саны	Humber of rear range ments of n elements
$C_n^k = \dfrac{n!}{k(n-k)!}$	Количество всех сочетаний из n по k без повторений (коэффициент сочетания)	Барлық n-нен k бойынша алынған терулер саны (теру коэффициенті)	Humber of combinations out of all elements from n by k (combination coefficient)
$(a+b)^n = C_n^0 a^n + +C_n^1 a^{n-1} \cdot b + \ldots + +C_n^k a^{n-k} \cdot b^k + \ldots + +C_n^n \cdot b^n$	Бином Ньютона	Ньютон биномы	Binominal theorem

Раздел 3. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

«Начала» (греч. Στοιχεια, лат. *elementa*) — главный труд Евклида, написанный примерно в 300 г. до н.э. и посвящённый систематическому построению геометрии. В этой книге Евклид касается темы геометрических прогрессий и доказывает несколько теорем.

3.1. Понятие числовой последовательности.
3.2. Метод математической индукции.
3.3. Арифметическая прогрессия. Формула n-го члена арифметической прогрессии.
3.4. Геометрическая прогрессия. Формула n-го члена геометрической прогрессии.
3.5. Формулы суммы первых n членов арифметической и геометрической прогрессий.
3.6. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.

3.1. Понятие числовой последовательности

Изучив материалы данной темы, вы будете:

- иметь представление о числовой последовательности;
- находить n-й член последовательности;
- различать возрастающие и убывающие последовательности.

3.1.1. Определение числовой последовательности

До сих пор мы часто пользовались понятием числовой последовательности. А именно, бесконечная десятичная дробь в понятии действительных чисел тесно связана с понятием числовой последовательности. Например, чтобы получить десятичные приближения числа $\sqrt{2}$ по недостатку, мы рассматривали числовую последовательность

$$1;\ 1,4;\ 1,41;\ 1,414;\ 1,4142;\ \dots .$$

А если расположить четные числа в порядке возрастания, то получим последовательность:

$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ \dots .$$

Первый член этой последовательности равен 2, второй – 4, третий – 6, четвертый – 8, двадцать пятый – 50, сотый – 200 и т. д.

Итак, числовой последовательностью называется множество чисел, элементы которого можно пронумеровать. Числа, составляющие числовую последовательность, называются членами этой последовательности, а именно по порядку первым, вторым, третьим, четвертым и т. д. членами последовательности. Обычно числовую последовательность обозначают малыми буквами латинского алфавита с индексами, указывающими на номер этого члена последовательности:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots\ .$$

Здесь a_n называется общим членом последовательности, а саму последовательность коротко обозначают через $\{a_n\}$. Например, члены последовательности $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ по порядку можно расписать так:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ldots,\ \frac{1}{n},\ldots\ .$$

Пример 1. Нужно найти общий член последовательности $\frac{1}{2\cdot3},\ \frac{1}{3\cdot4},\ \frac{1}{4\cdot5},\ \frac{1}{5\cdot6},\ \ldots$.

▲ В знаменателе каждого члена последовательности находится произведение двух последовательных натуральных чисел и $a_1 = \frac{1}{2\cdot3}$. Тогда, если предположить, что $a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$, то, используя данную формулу, мы можем найти любой член последовательности.

Ответ: $a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$. ■

Если мы можем указать любой член последовательности, то эта последовательность считается заданной.

3.1.2. Способы задания числовых последовательностей

Вообще числовые последовательности можно задавать различными способами. Из этих способов наиболее удобным и часто применяемым является *задание последовательности формулой ее n-го члена* (*общего члена* a_n), т.е. формулой, выражающей любой член последовательности. Например, с помощью формулы $a_n = n^2$ мы можем найти любой член последовательности: $a_1=1$ при $n=1$, $a_2=4$ при $n=2$, $a_3=9$ при $n=3$, $a_4=16$ при $n=4$ и т. д. Тогда формулой $a_n=n^2$ определяется числовая последовательность 1, 4, 9, 16, 25, ..., n^2, ... А формулой $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ определяется последовательность $\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{4}{5}, \ldots, \dfrac{n}{n+1}, \ldots$.

Иногда числовую последовательность задают *способом описания* членов этой последовательности. Например, последовательность 1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; ... мы определили как последовательность десятичных приближений числа $\sqrt{2}$ по недостатку.

Кроме этого, последовательность определяется заданием нескольких первых ее членов и заданием способа определения последующих членов с помощью ее предыдущих членов. Например, пусть $a_1=1$, $a_2=1$, а последующие члены равны сумме предшествующих двух ее членов: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $(n \geqslant 3)$. Тогда мы получим следующую последовательность: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... Эту последовательность чисел называют числами Фибоначчи (Фибоначчи (Леонардо Пизанский), 1170–1250, итальянский математик). Указанный способ определения числовой последовательности называют *рекуррентным способом* (от латинского слова *recurro*, означающего возврат, возвращение), а соответствующую формулу – *рекуррентной формулой*.

3.1.3. Монотонные последовательности

Если для последовательности $\{a_n\}$ при любом натуральном n верно неравенство $a_{n+1} > a_n$, т. е., если любой член последовательности, начиная со второго, больше предыдущего ее члена, то эта последовательность называется *возрастающей*. А если выполняется неравенство $a_{n+1} < a_n$, $(n \in N)$, то эта последовательность называется *убывающей*.

Если вместо указанных неравенств $a_{n+1} > a_n$ (или $a_{n+1} < a_n$) выполняются неравенства вида $a_{n+1} \geqslant a_n$ (или $a_{n+1} \leqslant a_n$), то соответствующая последовательность называется *неубывающей* (*невозрастающей*). В целом возрастающие и убывающие, неубывающие и невозрастающие последовательности называются *монотонными последовательностями*. Например, последовательности

$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \ldots,\ 2n,\ \ldots$$

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{4}{5},\ \ldots,\ \frac{n}{n+1},\ \ldots$$

являются возрастающими, а последовательности

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots,\frac{1}{n},\ldots; \qquad \frac{4}{5},\frac{5}{7},\frac{6}{9},\ldots,\frac{n+1}{2n-1},\ldots$$

являются убывающими. Если убывание членов последовательности $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ не вызывает сомнения, то факт убывания последовательности $\frac{n+1}{2n-1}$ требует доказательства. Действительно, так как $a_n = \frac{n+1}{2n-1}$, $a_{n+1} = \frac{n+2}{2n+1}$, то определим знак разности $a_{n+1} - a_n$:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+2}{2n+1} - \frac{n+1}{2n-1} = \frac{2n^2+3n-2-2n^2-3n-1}{(2n+1)(2n-1)} =$$

$$= \frac{-3}{(2n+1)(2n-1)} < 0.$$

Следовательно, $a_{n+1} < a_n$, т. е. последовательность $\left\{a_n = \frac{n+1}{2n-1}\right\}$ является убывающей. Аналогично последовательность $1,\ 1,\ \frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\ldots$ является неубывающей, так как некоторые члены этой последовательности равны между собой и каждый член последовательности не больше предыдущего.

Не все последовательности являются монотонными. Например, последовательность $-1,\ 1,\ -1,\ \ldots,\ (-1)^n,\ \ldots$ не является монотонной (является *знакочередующейся*).

Если существует число A такое, что для каждого члена последовательности $\{a_n\}$ выполняется неравенство $a_n > A$, то последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной снизу*. А если же существует число B такое, что верно неравенство $a_n < B$ для любого $n \in N$, то последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной сверху*. Если последовательность ограничена как сверху, так и снизу, т. е. если существуют числа A

и B такие, что для каждого члена последовательности $\{a_n\}$ выполнены неравенства $A<a_n<B$, то эту последовательность называют *ограниченной*. Например, рассмотрим последовательность:

1) $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots;$ 2) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots;$

3) $1; 1{,}4; 1{,}41; 1{,}414; \ldots;$ 4) $-1, -2, -3, \ldots, -n, \ldots;$

5) $-1, 2, -3, \ldots, (-1)^n n, \ldots.$

Здесь последовательности 1), 2) и 3) ограничены снизу, так как каждый член этих последовательностей больше нуля. Последовательности 2), 3) и 4) ограничены сверху, так как каждый член этих последовательностей меньше, например, двух. Тогда последовательности 2) и 3) ограничены как снизу, так и сверху, т.е. являются ограниченными. А последовательность 5) не ограничена ни сверху, ни снизу.

1. Что называется числовой последовательностью?
2. Что такое общий член последовательности?
3. Какие способы задания последовательности вы знаете?
4. Какие последовательности называются возрастающими (убывающими)?
5. Какие последовательности называются неубывающими (невозрастающими)?
6. Какие последовательности называются монотонными?

Практическая работа

Первый член a_1 последовательности $\{a_n\}$ равен $\frac{1}{5}$. Каждый следующий член последовательности получается прибавлением двойки как к числителю, так и к знаменателю предыдущего члена.

1) Какой будет последовательность $\{a_n\}$: возрастающей или убывающей?
2) Определите формулу общего члена последовательности.
3) Полагая, что первый член последовательности $a_1 = \frac{p}{q} > 0$ является правильной (неправильной) дробью и, прибавляя число $r > 0$ к ее числителю и знаменателю, ответьте на вопросы 1) и 2). Обоснуйте ответ.

Упражнения

А

3.1. Напишите первые пять членов последовательности:

1) $x_n=2n-1$; 2) $x_n=n^2+1$; 3) $x_n=\dfrac{1}{n+1}$; 4) $y_n=(-1)^n$;

5) $y_n=2^{n-3}$; 6) $a_n=0{,}5\cdot4^n$; 7) $b_n=\dfrac{2n-1}{2n+1}$; 8) $c_n=\dfrac{1}{2^n}$.

3.2. Напишите первые пять членов последовательности:

1) $a_n=2^n+\dfrac{1}{2^n}$; 2) $x_n=3n^2+2n+1$;

3) $a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, \text{ если } n \text{ – четное число,}\\ \dfrac{n-1}{n}, \text{ если } n \text{ – нечетное число;}\end{cases}$

4) $c_n=\dfrac{2n-1}{2n+3}$; 5) $b_n=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ корней}}$;

6) $y_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}$; 7) $x_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$;

8) $d_n=\dfrac{2}{(-1)^n}+2$; 9) $b_n=1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{27}+\ldots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}$.

▲ 3) В зависимости от четности номера последовательности будем применять первую или вторую формулу системы:

$a_1=\dfrac{1-1}{1}=0,\ a_2=\dfrac{1}{2},\ a_3=\dfrac{3-1}{3}=\dfrac{2}{3},\ a_4=\dfrac{1}{4},$

$a_5=\dfrac{5-1}{5}=\dfrac{4}{5},\ \ldots$

Ответ: $0;\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{4}{5}$. ■

B

3.3. Напишите формулу общего члена последовательности натуральных чисел, кратных 3.

3.4. Напишите формулу общего члена последовательности натуральных чисел, кратных 7.

3.5. Напишите формулу общего члена последовательности натуральных чисел, при делении которых на 4 в остатке получается 1.

▲ Числа, кратные 4, записываются в виде $4n$ ($n \in N$). Тогда формула общего члена последовательности натуральных чисел, при делении которых на 4 в остатке получается 1, записывается в виде $a_n = 4n + 1$.■

3.6. Напишите формулу общего члена последовательности натуральных чисел, при делении которых на 5 в остатке получается 2.

3.7. Напишите формулу общего члена последовательности:

1) $1, 5, 9, 13, 17, \ldots;$ 2) $2, -2, 2, -2, \ldots;$

3) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots;$ 4) $\frac{1}{4}, \frac{1}{7}, \frac{1}{10}, \frac{1}{13}, \ldots;$

5) $3, 6, 12, 24, 48, \ldots;$ 6) $1, -2, 3, -4, \ldots;$

7) $\frac{1}{3}, \frac{4}{9}, \frac{9}{27}, \frac{16}{81}, \ldots;$ 8) $\frac{1}{3}, \left(\frac{2}{5}\right)^2, \left(\frac{3}{7}\right)^3, \left(\frac{4}{9}\right)^4, \ldots.$

3.8. Напишите члены a_{10}, a_{n+1}, a_{2n}, если $a_n = \frac{1}{2n+1}$.

3.9. Напишите члены x_3, x_5, x_{n+1}, x_{2n+1}, если $x_n = \frac{1}{2^n+1}$

3.10. Определите, является ли последовательность возрастающей, убывающей, ограниченной сверху или снизу:

1) $a_n = \frac{1}{n^2+1}$; 2) $x_n = \frac{2^n-1}{2^n}$; 3) $y_n = (-0{,}5)^n$;

4) $u_n = \frac{2n^2+1}{3n^2}$; 5) $b_n = \frac{n^2-1}{2n}$; 6) $c_n = \frac{(-1)^n}{n}$;

7) $x_n = \frac{2n^2+1}{4n^2+5}$; 8) $a_n = \frac{2n^2+1}{n^2}$; 9) $y_n = \frac{n^2}{n^2+1}$;

10) $b_n = \frac{2n+1}{2^n}$; 11) $z_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$; 12) $p_n = 1 + (-1)^n$.

7) ▲ $x_n = \dfrac{2n^2+1}{4n^2+5}$; $x_{n+1} = \dfrac{2(n+1)^2+1}{4(n+1)^2+5} = \dfrac{2n^2+4n+3}{4n^2+8n+9} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_n - x_{n+1} = \frac{2n^2+1}{4n^2+5} - \frac{2n^2+4n+3}{4n^2+8n+9} =$$

$$= \frac{(2n^2+1)(4n^2+8n+9)-(4n^2+5)(2n^2+4n+3)}{(4n^2+5)(4n^2+8n+9)} =$$

$$= \frac{8n^4+16n^3+22n^2+8n+9-(8n^2+16n^3+22n^2+20n+15)}{(4n^2+5)(4n^2+8n+9)} =$$

$$= \frac{-12n-6}{(4n^2+5)(4n^2+8n+9)} < 0 \Rightarrow x_n - x_{n+1} < 0 \Rightarrow x_n < x_{n+1},$$

т.е. последовательность возрастающая. ■

C

3.11. Напишите члены a_1, a_2, a_{n+1}, a_{2n}, если $a_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2}$.

3.12. Напишите формулу общего члена последовательности, заданной рекуррентной формулой $\{x_n\}$, и укажите ее первые 4 члена:

1) $x_1=3$, $x_{n+1}=2x_n$, $n \geqslant 1$; 2) $x_1=1$, $x_{n+1}=1-x_n$, $n \geqslant 1$.

3.13. Напишите члены a_1, a_{n+1}, a_{n-1}, если $a_n = \dfrac{1}{1\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 5} + \dfrac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

3.14. Докажите, что последовательность, заданная формулой общего члена $x_n = \dfrac{3n-1}{5n+2}$, является возрастающей.

3.15. Докажите, что последовательность, заданная формулой общего члена $a_n = \dfrac{n+1}{2n+1}$, является убывающей.

3.16. При каких значениях a и b последовательность, заданная формулой общего члена $x_n = \dfrac{an+2}{bn+1}$, является возрастающей или убывающей?

5–4334

Упражнения для повторения

3.17. Упростите выражения:

1) $\dfrac{ap+aq-bp-bq}{ap-aq-bp+bq}$; 2) $\dfrac{mc-nc+md-nd}{mc+nc+md+nd}$.

3.18. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} 3x+y+4=0, \\ x^2-y^2=2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{3x-2y}{3}-\dfrac{x-y}{2}=5, \\ 7x+3y=38. \end{cases}$

3.19. Укажите область определения функции:

1) $y=\dfrac{4}{\sqrt{18x^2-3x-1}}$; 2) $y=\sqrt{(x+4)(7-x)}$.

3.20. Напишите функцию обратной пропорциональности, график которой проходит через точку $A(3;\ -6)$.

3.2. Метод математической индукции

Изучив материалы данной темы, вы будете:

- знать и применять метод математической индукции.

Способ рассуждения, при котором на основании частных утверждений делается более общий вывод (утверждение), называется ***индукцией***. Например, рассмотрим суммы первых нечетных натуральных чисел:

$$1=1^2,$$
$$1+3=4=2^2,$$
$$1+3+5=9=3^2,$$
$$1+3+5+7=16=4^2,$$
$$1+3+5+7+9=25=5^2,$$

. . . .

Здесь первую строку будем рассматривать как сумму, состоящую из одного слагаемого. Подобные суммы часто используются в математике. На основании этих частных примеров можно выдвинуть гипотезу о том, что при произвольном количестве слагаемых сумма первых нечетных чисел равна квадрату числа слагаемых, т.е. для каждого натурального числа n верно равенство $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$. Очевидно, что это лишь недоказанная гипотеза. Ее истинность покажем позже.

Рассмотрим еще один пример. Пусть задан квадратный трехчлен $P(n)=n^2+n+41$, где n – натуральное число. При n, равном 1, 2, 3, 4, 5, нетрудно установить, что значения этого квадратного трехчлена – простые числа: $P(1)=43$, $P(2)=47$, $P(3)=53$; $P(4)=61$, $P(5)=71$ и т.д. Отсюда напрашивается гипотеза о том, что значения квадратного трехчлена $P(n)$ при любом натуральном n являются простыми числами. Однако эта гипотеза является ошибочной, т.к. при $n=41$ $P(41)=41^2+41+41=41\cdot43$ не является простым числом.

Из этих двух примеров видим, что на основе одних и тех же методов рассуждений мы получили различные результаты. Если выводы первого примера истинны, то выводы второго примера являются ложными. Поэтому указанный метод рассуждения, когда делают общие выводы на основе частных утверждений, не является методом доказательства математических утверждений. Однако этот метод способствует выдвижению гипотез, истинность которых устанавливается другими методами. Рассмотренный нами метод рассуждения называется ***неполной индукцией***.

Если вывод сделан на основе анализа всех возможных частных исходов, то этот метод умозаключений называется ***полной индукцией***. Очевидно, что данный метод удобно применять в тех случаях, когда количество всех возможных исходов конечно. Рассмотрим примеры применения полной индукции.

Пример 1. Докажем, что количество простых множителей натуральных чисел n, удовлетворяющих неравенству $2\leqslant n\leqslant15$, не превышает 3.

▲ Действительно, данному неравенству удовлетворяют только следующие простые числа: 2, 3, 5, 7, 11, 13. Поэтому мы их будем считать состоящими из одного сомножителя. А числа 4, 6, 9, 10, 14, 15 состоят из произведения двух простых множителей. И, наконец, числа 8 и 12 состоят из трех простых сомножителей. Итак, мы рассмотрели все возможные случаи. Следовательно, данное утверждение истинно. ■

Пример 2. Покажем, что равенство $3m^2-4n^2=13$ не выполняется ни при каких целых значениях m и n.

▲ Рассмотрим следующие 2 случая.

1) Пусть $m=2k$, $k\in Z$ – любое четное целое число, а n – любое целое число. Тогда имеем равенство $12k^2-4n^2=13$. Это равенство не может выполняться ни при каких целых k и n, т.к. его левая часть делится на 4, а правая – не делится на 4.

2) Пусть $m=2k+1$, $k\in Z$ – любое нечетное целое число, а n – произвольное целое число. Тогда имеем равенство $3(2k+1)^2-4n^2=13$, или $12k^2+12k-4n^2=10$, или $6k^2+6k-2n^2=5$. Это равенство также не может быть выполнено, т. к. его левая часть является четным числом, а правая – нечетным.

Итак, мы показали, что равенство $3m^2-4n^2=13$ не выполняется при любом целом n и при любом четном m или нечетном m. Следовательно, равенство $3m^2-4n^2=13$ не выполняется при любых целых m и n. Что и требовалось доказать. ■

Теперь покажем, что равенство

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2 \qquad (1)$$

верно при любом натуральном n. Как было отмечено выше, равенством (1) определяется лишь гипотеза, которая зависит от натурального n. Для удобства это утверждение, т.е. гипотезу, определяемую равенством (1), обозначим через $A(n)$. Выше мы проверили истинность высказываний $A(1)$, $A(2)$, $A(3)$, $A(4)$, $A(5)$. Напишем утверждение $A(5)$: $1+3+5+7+9=5^2$. Считая это утверждение доказанным, в качестве его следствия покажем истинность утверждения $A(6)$. Действительно,

$$1+3+5+7+9+11=5^2+11=5^2+2\cdot5+1=(5+1)^2=6^2.$$

Вообще, если утверждение $A(k)$ истинно, т.е. верно равенство

$$1+3+5+\ldots+(2k-1)=k^2,$$

то истинность утверждения $A(k+1)$ проверяется легко:

$$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+2k+1=(k+1)^2.$$

Отсюда имеем следующую цепочку истинных утверждений:

$$A(5)\Rightarrow A(6)\Rightarrow A(7)\Rightarrow A(8)\Rightarrow A(9)\ldots$$

Эту запись нужно понимать так: «Если истинно $A(5)$, то истинно $A(6)$, если истинно $A(6)$, то истинно $A(7)$ и т. д.». Итак, продолжая эту цепочку рассуждений из истинности утверждения $A(1)$, можно получить истинность утверждения

$A(n)$ для любого натурального n. Этот метод доказательства называется ***методом математической индукции***. Теперь дадим его формулировку.

Если утверждение $A(n)$ истинно при $n=1$ и из его истинности при $n=k$ (k – любое натуральное число) вытекает истинность утверждения $A(n)$ при $n=k+1$, то данное утверждение истинно при любом натуральном n.

Этот метод математической индукции, который часто используют при доказательстве многих математических утверждений, является одной из основных аксиом теории натуральных чисел.

Итак, применение метода математической индукции состоит из следующих двух этапов.

I этап. Проверка истинности утверждения $A(1)$.

II этап. Считая, что при $n=k$ утверждение $A(k)$ истинно, нужно доказать истинность утверждения $A(k+1)$ при $n=k+1$, т. е. нужно показать истинность логического следования $A(k) \Rightarrow A(k+1)$.

Если доказаны оба указанных этапа, то по методу математической индукции утверждение $A(n)$ истинно для любого натурального n.

Теперь по поводу истинности равенства (1): утверждение $A(1)$ истинно и из истинности $A(k)$ вытекает истинность утверждения $A(k+1)$. Следовательно, по методу математической индукции равенство (1) верно для любого натурального n.

Пример 3. Найдем сумму

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)} \qquad (2)$$

при любом натуральном n.

▲ Сначала, применяя метод неполной индукции, определим закономерность этой суммы, т.е. выдвинем необходимую гипотезу. Для этого сумму (2) обозначим через S_n. Тогда

$$S_1=\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2},$$

$$S_2=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{2}{3},$$

$$S_3 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{3}{4},$$

$$S_4 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} = \frac{4}{5}.$$

Отсюда мы видим, что числители этих сумм равны количеству слагаемых, а знаменатель на единицу больше числителя.

Следовательно, можно выдвинуть гипотезу о том, что для любого натурального n верно равенство

$$S_n = \frac{n}{n+1} \qquad (3)$$

Теперь докажем эту гипотезу по методу математической индукции.

1) Если $n=1$, то $S_1 = \frac{1}{2}$, и утверждение $A(1)$ истинно.

2) Теперь, считая, что $A(k)$ истинно, нужно доказать истинность утверждения $A(k+1)$, т.е. нужно показать истинность утверждения $S_k = \frac{k}{k+1} \Rightarrow S_{k+1} = \frac{k+1}{k+2}$.

Пусть равенство $S_k = \frac{k}{k+1}$ верно. Тогда

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} =$$

$$= \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2} \Rightarrow S_{k+1} = \frac{k+1}{k+2},$$

что и требовалось установить. Тогда по методу математической индукции равенство $S_n = \frac{n}{n+1}$ верно для любого натурального n. ■

Замечание. *Иногда утверждение $A(n)$, хотя и не выполняется для $n=1$, $n=2$, ..., $n=m-1$, может быть верным, начиная с $n=m$. Тогда первый этап доказательства методом математической индукции начинают с проверки истинности утверждения $A(m)$, а затем, полагая истинным утверждение $A(k)$, $(k\geqslant m)$, доказывают истинность утверждения $A(k+1)$.*

Пример 4. Покажем, что для любого натурального $n\geqslant 5$ верно неравенство $2^n>n^2$.

▲ 1) Если $n=5$, то $2^n=2^5=32$ и $n^2=5^2=25$ и выполняется данное неравенство.

2) Пусть при $n=k$, $k\geqslant5$ верно неравенство $2^k>k^2$. Нужно показать, что выполняется неравенство $2^{k+1}>(k+1)^2$.

Для этого, умножив неравенство $2^k>k^2$ на 2, получим неравенство $2^{k+1}>2k^2$. Достаточно показать, что при $k\geqslant5$ выполняется неравенство $2k^2>(k+1)^2$ или $2k^2-(k+1)^2>0$.

Действительно, так как $2k^2-(k+1)^2=k^2-2k-1=(k-1)^2-2$, $k\geqslant5$, то выполняется неравенство $(k-1)^2\geqslant4^2$ или $(k-1)^2-2>0$, т.е. $2k^2-(k+1)^2>0$. Итак, исходное неравенство верно для любого натурального $n\geqslant5$. ■

1. Что такое индукция?
2. Как вы понимаете полную (неполную) индукцию?
3. Сформулируйте метод математической индукции.

Упражнения

B

3.21. Докажите тождества, используя метод математической индукции:

1) $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$;

2) $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

3) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$;

4) $1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)$;

5) $1^2+2^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2=\dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$;

6) $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\ldots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

7) $1\cdot4+2\cdot7+3\cdot10+\cdots+n(3n+1)=n(n+1)^2$;

8) $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\cdots+n(n+1)(n+2)=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$;

9) $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}$;

10) $\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+\ldots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}$.

7) ▲При $n=1$ имеем $1\cdot 4 = 1\cdot(1+1)^2 = 1\cdot 4$, т.е. данное тождество истинное; при $n=2$ также $1\cdot 4+2\cdot 7 = 2\cdot(2+1)^2 \Rightarrow 18=18$ – утверждение является истинным. Пусть при $n=k$ верно тождество: $1\cdot 4+2\cdot 7+\ldots+k(3k+1)=k(k+1)^2$ и покажем, что при $n=k+1$ выполняется равенство $1\cdot 4+2\cdot 7+\ldots+k(3k+1)+(k+1)\times(3k+4)=(k+1)(k+2)^2$.
Действительно, $1\cdot 4+2\cdot 7+\ldots+k(3k+1)+(k+1)(3k+4)= k\cdot(k+1)^2(k+1)(3k+4)=(k+1)[k(k+1)+3k+4]=(k+1)(k^2+4k+4)=(k+1)(k+2)^2$,
что и требовалось доказать. ■

3.22. Докажите утверждения для любого натурального n:

1) $n^3+5n \vdots 6$; 2) $7^n+3n-1 \vdots 9$; 3) $8^n+6 \vdots 7$;
4) $10^n+18n-28 \vdots 27$; 5) $9^n-8n-9 \vdots 8$, $n>1$;
6) $n^4+6n^3+11n^2+6n \vdots 24$.

C

3.23. Найдите сумму для любого натурального n:

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}.$$

3.24. Докажите, что n прямых линий, среди которых не имеются параллельные между собой прямые и никакие три из них не проходят через одну точку, делят плоскость на $\frac{n^2+n+2}{2}$ частей.

3.25. Последовательность $\{a_n\}$ задана рекуррентной формулой: $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+8n$. Докажите, что каждый член последовательности является точным квадратом целого числа.

3.26. Последовательность $\{b_n\}$ задана рекуррентной формулой $b_1=3$, $b_{n+1}=7b_n+3$. Покажите, что общий член этой последовательности определяется формулой $b_n=\frac{7^n-1}{2}$.

▲ При $n = 1$ имеем $b_1 = \dfrac{7^1 - 1}{2} = 3$, т.е. утверждение является истинным.

Пусть при $n = k$ выполняется равенство $b_k = \dfrac{7^k - 1}{2}$.

Покажем справедливость равенства $b_{k+1} = \dfrac{7^{k+1} - 1}{2}$ при $n = k + 1$. Действительно, $b_{k+1} = 7 \cdot b_k + 3 = 7 \cdot \dfrac{7^k - 1}{2} + 3 =$

$= \dfrac{7^{k+1} - 7 + 6}{2} = \dfrac{7^{k+1} - 1}{2}$, что и требовалось доказать. ■

3.27. Покажите, что утверждение верно при любом натуральном n:

1) число $6^n+20n+24$ кратно 25;
2) если $0<a<b$, то $a^n<b^n$.

3.28. Докажите неравенство при любых указанных натуральных n:

1) $2^n>n$, $n\geqslant 0$;
2) $2^n>2n+1$, $n\geqslant 3$;
3) $2^n>n^3$, $n\geqslant 10$;
4) $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$, $n\geqslant 2$.

3.29. Докажите неравенство $(1+h)^n>1+nh$ для любого натурального $n\geqslant 2$, если $h>-1$, $h\neq 0$. Это неравенство называется ***неравенством Бернулли***.

Упражнения для повторения

3.30. Постройте график функции:

1) $y=7-3x-x^2$;
2) $y = \dfrac{2x+3}{x+1}$.

3.31. Найдите область определения функции $f(x) = \dfrac{\sqrt{x - x^2 + 2}}{x}$.

3.3. Арифметическая прогрессия. Формула n-го члена арифметической прогрессии

Изучив материалы данной темы, вы будете:

- распознавать арифметическую прогрессию среди числовых последовательностей;
- знать и применять формулу n-го члена арифметической прогрессии.

3.3.1. Понятие арифметической прогрессии

Рассмотрим последовательность натуральных чисел, при делении которых на 3 остаток равен 1: 1, 4, 7, 10, 13, 16, ... Мы видим, что каждый член последовательности, начиная со второго, получается прибавлением числа 3 к предшествующему члену последовательности. Эта последовательность является примером арифметической прогрессии. Термин *прогрессия* произошел от латинского слова *progressio*, что означает «движение вперед». Теперь приведем определение арифметической прогрессии.

Определение. *Числовая последовательность a_1, a_2, ..., a_n, ..., в которой каждое число, начиная со второго, равно предыдущему, сложенному с одним и тем же числом, называется* ***арифметической прогрессией****. Другими словами, если для любого натурального числа n и некоторого постоянного числа d выполняется равенство*

$$a_{n+1}=a_n+d,\ d\neq 0, \tag{1}$$

то последовательность $\{a_n\}$ называется ***арифметической прогрессией****, а число d –* ***разностью*** *арифметической прогрессии.* Числа, составляющие прогрессию, называются ее членами.

Итак, для разности арифметической прогрессии выполняется равенство

$$d=a_{n+1}-a_n. \tag{2}$$

В рассмотренном выше примере $a_n=3n-2$, $a_{n+1}=3n+1$, поэтому $d=a_{n+1}-a_n=3n+1-(3n-2)=3$.

3.3.2. Формула n-го члена арифметической прогрессии

Покажем, что арифметическая прогрессия полностью определяется заданием ее первого члена a_1 и разности d. Для этого достаточно выразить a_n через d и a_1.

▲ По определению арифметической прогрессии

$$a_2=a_1+d,$$
$$a_3=a_2+d=(a_1+d)+d=a_1+2d,$$
$$a_4=a_3+d=(a_1+2d)+d=a_1+3d,$$
$$a_5=a_4+d=(a_1+3d)+d=a_1+4d.$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

Отсюда получаем гипотезу $a_n=a_1+(n-1)d$.

Эта формула доказывается методом математической индукции.

1) При $n=2$ равенство $a_2=a_1+d$ истинно.

2) Считая, что при $n=k$ верно равенство $a_k=a_1+(k-1)d$, докажем истинность равенства $a_{k+1}=a_1+kd$ при $n=k+1$.

Действительно, по определению арифметической прогрессии

$$a_{k+1}=a_k+d=(a_1+(k-1)d)+d=a_1+((k-1)d+d)=a_1+kd,$$

что и требовалось доказать. ■

Итак, мы имеем *формулу n-го члена арифметической прогрессии:*

$$a_n=a_1+(n-1)d. \qquad (3)$$

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Найти 25-й член арифметической прогрессии $\{a_n\}$, если $a_1=-2$, $d=0{,}5$.

▲ По формуле (3) $a_{25}=a_1+24d=-2+24\cdot 0{,}5=10$. ■

Пример 2. Между числами 9 и 5 нужно расположить 7 чисел так, чтобы они вместе с данными числами составляли арифметическую прогрессию.

▲ Если числа 9 и 5 вместе с искомыми семью числами составляют арифметическую прогрессию, то $a_1=9$, $a_9=5$. Тогда требуется найти числа a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8. По формуле (3) получим, что $5=a_9=a_1+8d=9+8d \Rightarrow 8d=-4 \Rightarrow d=-0{,}5$. Тогда $a_2=a_1+d=9-0{,}5=8{,}5$, $a_3=8$, $a_4=7{,}5$, $a_5=7$, $a_6=6{,}5$, $a_7=6$, $a_8=5{,}5$. ■

Преобразуя равенство (3), получим равенство $a_n=dn+(a_1-d)$. Следовательно, n-й член арифметической прогрессии можно представить в виде $a_n= kn+b$, где k и b – заданные числа. Справедливо и обратное утверждение. Для любых чисел k и b, заданных формулой

$$a_n=kn+b, \qquad (4)$$

определяется арифметическая прогрессия $\{a_n\}$.

▲ Действительно, рассмотрим разность $(n+1)$-го и n-го членов последовательности $\{a_n\}$:

$$a_{n+1}-a_n=k(n+1)+b-(kn+b)=k.$$

Итак, для любого натурального n выполняется равенство $a_{n+1}-a_n=k$. Тогда по определению $\{a_n\}$ является арифметической прогрессией с разностью k. ■

Кроме того, каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен *среднему арифметическому* двух соседних с ним членов прогрессии:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \qquad (5)$$

▲ Действительно, по определению $a_n=a_{n-1}+d$, $a_n=a_{n+1}-d$. Почленно складывая эти равенства, получим: $2a_n=(a_{n-1}+d)+$ $+(a_{n+1}-d)=a_{n-1}+a_{n+1}$ или $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$. ■

1. Какую числовую последовательность называют арифметической прогрессией?
2. Что называется разностью арифметической прогрессии?
3. Напишите формулу n-го члена арифметической прогрессии.

Практическая работа

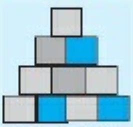


Рис. 3.1

Воспитанники детского сада из кубиков с ребром 8 см построили «стену» так, как показано на рисунке 3.1. Сколько кубиков расположено в основании этой «стенки», если высота «стены» равна 56? Какова высота этой «стены», если в основании расположено 11 кубиков? Обоснуйте ответ.

Упражнения

А

3.32. Найдите 5-й член арифметической прогрессии: 1) 19, 15, 11, ...; 2) −1, 3, 7, ...

3.33. Напишите первые четыре члена арифметической прогрессии $\{a_n\}$, если:

1) $a_1=10$, $d=4$; 2) $a_1=1{,}7$, $d=-0{,}2$; 3) $a_1=-3{,}5$, $d=0{,}6$;
4) $a_1 = \dfrac{4}{3}$, $d = \dfrac{1}{6}$.

3.34. Найдите: 1) a_{11}, если $a_1=-3$, $d=0{,}7$; 2) a_{20}, если $a_1=18$, $d=-0{,}5$; 3) a_5, если $a_1=20$, $d=3$; 4) b_{21}, если $b_1=5{,}8$, $d=-1{,}5$.

3.35. Найдите 5-й и n-й члены арифметической прогрессии:
1) $\frac{1}{3}$, -1, ...; 2) 2,3; 1; ...; 3) -8, $-6{,}5$, ...; 4) 11, 7, ...

1) ▲ $a_1=\frac{1}{3}$, $a_2=-1 \Rightarrow d=a_2-a_1=-1-\frac{1}{3}=-\frac{4}{3}$. Тогда

$$a_n=a_1+(n-1)d=\frac{1}{3}+(n-1)\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{1-4n+4}{3}=\frac{5-4n}{3}.$$

Ответ: $a_n=\frac{5-4n}{3}$. ■

3.36. В арифметической прогрессии $\{a_n\}$ найдите a_n, если :

1) $a_1=2$, $d=0{,}1$, $n=5$; 2) $a_1=2{,}3$, $d=-1$, $n=10$;

3) $a_1=-3$, $d=0{,}8$, $n=16$; 4) $a_1=-1\frac{5}{6}$, $d=\frac{1}{3}$, $n=61$.

3.37. Найдите разность d, если: 1) $a_1=2$, $a_{10}=92$; 2) $a_1=-7$, $a_{16}=2$; 3) $a_1=0$, $a_{66}=-92$.

B

3.38. Сколько двузначных чисел делятся без остатка на:
1) 6; 2) 13?

3.39. Разместите между числами: 1) 5 и 1; 2) 2,5 и 4 четыре числа так, чтобы они вместе с данными числами образовали арифметическую прогрессию.

2) ▲ $a_1=2{,}5$, $a_6=4$. По формуле (3) $a_6=a_1+5d \Rightarrow 4=2{,}5+5d \Rightarrow 5d=1{,}5 \Rightarrow d=0{,}3$. Тогда $a_2=a_1+d=2{,}8$, $a_3=a_2+d=3{,}1$, $a_4=a_3+d=3{,}4$, $a_5=a_4+d=3{,}7$.

Ответ: между числами 2,5 и 4 нужно разместить числа 2,8; 3,1; 3,4; 3,7. ■

3.40. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии $\{c_n\}$, если: 1) $c_5=27$, $c_{27}=60$, 2) $c_{20}=0$, $c_{66}=-92$.

3.41. Является ли число: 1) 0; 2) -28 членом арифметической прогрессии $\{a_n\}$, если $a_1=32$, $d=-1{,}5$?

3.42. Какие 8 чисел нужно разместить между числами 1 и 16 так, чтобы они вместе с данными числами образовали арифметическую прогрессию?

3.43. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии, если:

1) $\begin{cases} a_1 + a_{10} = 12, \\ a_8 - a_5 = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} a_5 + a_{11} = -0,2, \\ a_4 + a_{10} = 2,6. \end{cases}$

3.44. Является ли число: 1) 156; 2) 295 членом арифметической прогрессии 2; 9; ... ?

3.45. При каких значениях n арифметической прогрессии $\{x_n\}$ выполняется неравенство:

1) $x_n \geqslant 0$, $x_{n+1} < 0$, если $x_1 = 8,7$, $d = -0,3$,?

▲ Необходимо, чтобы выполнялась система неравенств

$$\begin{cases} x_n = 8,7 - (n-1)0,3 \geqslant 0, \\ x_{n+1} = 8,7 - 0,3 \cdot n < 0. \end{cases}$$

Отсюда $\begin{cases} 9 - 0,3n \geqslant 0, \\ 8,7 - 0,3n < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 8,7 < 0,3n \leqslant 9 \Leftrightarrow 29 < n \leqslant 30$.

Итак, $x_{31} = -0,3 < 0$, $x_{30} = 0$.

Ответ: $n = 30$. ■

3.46. Является ли последовательность $\{a_n\}$ арифметической прогрессией, заданная формулой:

1) $a_n = 3n + 1$; 2) $a_n = n^2 - 5$; 3) $a_n = 4 + n$;

4) $a_n = \dfrac{1}{n+4}$; 5) $a_n = -0,5n + 1$; 6) $a_n = 6n$?

C

3.47. Пусть $a_p = q$, $a_q = p$. Выразите n-й член арифметической прогрессии $\{a_n\}$ через n, p и q.

3.48. Сколько общих членов имеют арифметические прогрессии 5, 8, 11, ... и 3, 7, 11, ... при $n = 100$?

3.49. Найдите двадцатый член возрастающей арифметической прогрессии $\{a_n\}$, если выполняются равенства $a_2 a_5 = 52$ и $a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 34$.

3.50. Докажите, что последовательность $(a+x)^2$, $a^2 + x^2$, $(a-x)^2$,... образует арифметическую прогрессию.

3.51. Покажите, что выполняется равенство

$\dfrac{1}{a_1 a_2} + \dfrac{1}{a_2 a_3} + \ldots + \dfrac{1}{a_{n-1} a_n} = \dfrac{n-1}{a_1 a_n}$, если числа a_1, a_2, ..., a_n являются последовательными членами арифметической прогрессии. Здесь $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, ..., $a_n \neq 0$.

3.52. Могут ли числа: 1) $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$; 2) $\sqrt{5}-\sqrt{2}, 1, \dfrac{1+4\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}+2}$ быть последовательными членами арифметической прогрессии?

3.53. Может ли арифметическая прогрессия, все члены которой являются точными квадратами натуральных чисел, иметь 2004 члена?

Упражнения для повторения

3.54. Докажите тождества:

1) $\dfrac{ac+bx+ax+bc}{ay+2bx+2ax+by}=\dfrac{x+c}{2x+y}$; 2) $\dfrac{x-xy+z-zy}{1-3y+3y^2-y^3}=\dfrac{x+z}{(1-y)^2}$.

3.55. Решите уравнения:

1) $x^4-17x^2+16=0$; 2) $3x^4+x^2-4=0$.

3.4. Геометрическая прогрессия. Формула *n*-го члена геометрической прогрессии

Изучив материалы данной темы, вы будете:

- распознавать геометрическую прогрессию среди числовых последовательностей;
- знать и применять формулы *n*-го числа арифметической прогрессии.

3.4.1. Понятие геометрической прогрессии

Определение. *Числовая последовательность* $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, в которой каждое число, *начиная со второго, равно предыдущему числу, умноженному на одно и то же число, не равное нулю, называется* ***геометрической прогрессией***. *Другими словами, если для любого натурального n и некоторого постоянного числа q выполняется равенство*

$$a_{n+1}=a_n \cdot q,\ q \neq 0,\ q \neq 1,\ a_1 \neq 0, \qquad (1)$$

то последовательность $\{a_n\}$ *называется* ***геометрической прогрессией***, *а число q –* ***знаменателем*** *геометрической прогрессии.*

Числа, составляющие прогрессию, называются ее членами.

Например, рассмотрим последовательность, членами которой являются числа 2, 2^2, 2^3, ..., 2^n, ... Каждый член этой последовательности, начиная со второго, равен произведению предшествующего члена на 2 : $a_{n+1}=a_n\cdot 2$, т.е. эта последовательность является геометрической прогрессией со знаменателем $q=2$. Здесь $a_1=2$, $a_2=2^2$, ..., $a_n=2^n$, ... являются членами геометрической прогрессии. Очевидно, что первый член каждой геометрической прогрессии $\{a_n\}$ отличен от нуля: $a_1\neq 0$. Т.к., если $a_1=0$, то каждый член этой последовательности был бы равен 0.

Если $a_1=1$ и $q=0,1$, то последовательность 1; 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001, ... является геометрической прогрессией.

Если $a_1=-3$ и $q=3$, то последовательность -3, -9, -27, -81, ... является геометрической прогрессией.

Если $a_1=2$ и $q=-5$, то последовательность 2, -10, 50, -250, ... является геометрической прогрессией.

Если $a_1=4$ и $q=1$, то последовательность 4, 4, 4, 4, ... не является геометрической прогрессией.

3.4.2. Формула *n*-го члена геометрической прогрессии

Определим n-й член геометрической прогрессии. По определению имеем:

$$a_2=a_1q;$$
$$a_3=a_2q=(a_1q)q=a_1q^2;$$
$$a_4=a_3q=(a_1q^2)q=a_1q^3;$$
$$a_5=a_4q=(a_1q^3)q=a_1q^4;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Отсюда

$$a_n=a_1\cdot q^{n-1}. \qquad (2)$$

Предположим, что выполняется эта формула. Докажем ее методом математической индукции.

▲ Действительно, при $n=2$ выполняется равенство $a_2=a_1q$. Пусть при $n=k$ формула $a_k=a_1q^{k-1}$ верна. Тогда при $n=k+1$ докажем справедливость равенства $a_{k+1}=a_1q^k$. По определению $a_{k+1}=a_kq=(a_1q^{k-1})q=a_1q^k$. Что и требовалось доказать. ■

Итак, n-й член геометрической прогрессии определяется формулой (2).

Пример 1. Пусть $a_1=27, q=\dfrac{1}{3}$. Найдем 8-й член геометрической прогрессии $\{a_n\}$.

▲ По формуле (2) $a_8 = a_1 q^7 = 27 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^7 = \frac{1}{81}$. ■

Пример 2. Найдем 4-й и n-й члены геометрической прогрессии 12, 24, … .

▲ Т. к. $a_1=12$, $a_2=24$, то $q = \frac{24}{12} = 2$. Тогда $a_4=a_1q^3=12\cdot 2^3=96$, $a_n=a_1\cdot q^{n-1}=12\cdot 2^{n-1}=3\cdot 2^{n+1}$. ■

Теперь покажем справедливость следующего утверждения.

Теорема. *Каждый член геометрической прогрессии с положительными членами, начиная со второго, равен среднему геометрическому двух соседних с ним членов:*

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}.$$

▲ Действительно, $a_n=a_{n-1}q$, $a_n=a_{n+1}\frac{1}{q}$ (по определению). Отсюда $a_n^2 = (a_{n-1}q)\cdot\left(a_{n+1}\frac{1}{q}\right) = a_{n-1}a_{n+1}$. Тогда $a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$. ■

1. Какую числовую последовательность называют геометрической прогрессией?
2. Что такое знаменатель геометрической прогрессии?
3. Напишите формулу n-го члена геометрической прогрессии.

Практическая работа

Претендент по контракту устроился на работу в некую фирму. По условию контракта претендент за первый квартал (3 месяца) будет получать зарплату в размере 1000000 тг. В следующих кварталах, если будет справляться со своими обязанностями, то будет получать зарплату предыдущего квартала, умноженную на число 1,3, а в противном случае он будет получать зарплату, умноженную на число 0,75. Работник в I квартале плохо справлялся со своими обязанностями, а в следующих кварталах он работал очень хорошо. Чему равна месячная зарплата работника в 4-м квартале? Какой была бы эта сумма, если работник все время работал очень хорошо (плохо)?

6–4334

Упражнения

A

3.56. Найдите первые четыре члена геометрической прогрессии $\{a_n\}$ если: 1) $a_1=6, q=2$; 2) $a_1=-16, q=0,5$; 3) $a_1=-24, q=-1,5$; 4) $a_1=0,4,\ q=\sqrt{2}$.

3.57. В геометрической прогрессии $\{x_n\}$ найдите:

1) x_7, если $x_1=16,\ q=0,5$; 2) x_8, если $x_1=-810,\ q=\dfrac{1}{3}$;

3) x_{10}, если $x_1=\sqrt{2}$, $q=-\sqrt{2}$; 4) x_6, если $x_1=125,\ q=0,2$.

3.58. Найдите 7-й и n-й члены геометрической прогрессии: 1) 2, −6, ...; 2) −0,125, 0,25, ...; 3) −40, −20, ...; 4) −10, 10, −10, ...

2) ▲ $b_1=-0,125$, $b_2=0,25$. По формуле (1) имеем $b_2=b_1\cdot q \Rightarrow$

$\Rightarrow 0,25=-0,125\cdot q \Rightarrow q=-\dfrac{0,25}{0,125}=-2.$ Тогда

$$b_7=b_1\cdot q^6=-0,125\cdot(-2)^6=-0,125\cdot 64=-8\cdot$$

$b_n=b_1\cdot q^{n-1}=-0,125\cdot(-2)^{n-1}=-0,125\cdot(-2)^3\cdot(-2)^{n-4}=(-2)^{n-4}$.

Ответ: $b_7=-8$, $b_n=(-2)^{n-4}$. ■

3.59. Найдите 6-й и n-й члены геометрической прогрессии: 1) 48, 12, ...; 2) $\dfrac{64}{9}, \dfrac{32}{3}$, ...; 3) −0,001, −0,01, ...; 4) −100, 10, ...

3.60. Найдите q, b_1, b_6, b_{n+3} геометрической прогрессии $\{b_n\}$, если:

1) $b_n=2\cdot 7^{n-1}$; 2) $b_n=\dfrac{3}{5^n}$; 3) $b_n=5\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$; 4) $b_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{3^n}$.

3.61. Найдите знаменатель геометрической прогрессии $\{b_n\}$, если:

1) $b_1=1,\ b_4=64$; 2) $b_6=25,\ b_8=9$; 3) $b_2=25,\ b_4=1$.

B

3.62. В геометрической прогрессии $\{b_n\}$ найдите: 1) b_1, если $b_6=3,\ q=3$; 2) b_1, если $b_5=17,5,\ q=-2,5$; 3) q, если $b_5=-6$, $b_7=-54$; 4) q, если $b_6=25,\ b_8=9$; 5) b_6, если $b_1=125,\ b_3=5$; 6) b_1, если $b_4=-1,\ b_6=-100$.

3.63. Найдите c_2 и c_3, если числа 2, c_2, c_3, 0,25 c_2 являются первыми четырьмя членами геометрической прогрессии.

3.64. Определите номер n, если в геометрической прогрессии $\{b_n\}$: 1) $q=3$, $b_1=2$, $b_n=162$; 2) $q=\frac{1}{2}$, $b_1=128$, $b_n=1$; 3) $q=-\frac{2}{3}$, $b_1=\frac{81}{4}$, $b_n=4$; 4) $q=0{,}1$, $b_1=2$, $b_n=0{,}002$.

3.65. Могут ли числа 10, 13, 14 быть членами одной геометрической прогрессии (не обязательно соседними)?

3.66. Между числами 1 и 256 расположите три числа так, чтобы полученные 5 чисел были последовательными членами геометрической прогрессии.

3.67. Найдите три числа, являющиеся первыми тремя членами геометрической прогрессии, у которой сумма первого и третьего членов равна 52, а квадрат второго члена равен 100.

3.68. Напишите первые несколько членов геометрической прогрессии, у которой разность третьего и первого членов равна 9, а разность пятого и третьего членов равна 36.

▲ $b_3 = b_1 \cdot q^2,\ b_5 = b_1 \cdot q^4 \Rightarrow \begin{cases} b_3 - b_1 = 9, \\ b_5 - b_3 = 36; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1\left(q^2 - 1\right) = 9, \\ b_1\left(q^4 - q^2\right) = 36; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b_1\left(q^2 - 1\right) = 9, \\ q^2 = 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = 3, \\ q = \pm 2. \end{cases}$

Ответ: если $q=2$, то $b_1=3$, $b_2=6$, $b_3=12$, ... ;
если $q=-2$, то $b=3$, $b_2=-6$, $b_3=12$, ... ■

3.69. Найдите знаменатель геометрической прогрессии $\{a_n\}$, если $a_1+a_4=27$ и $a_2a_3=72$.

3.70. Напишите первые несколько членов геометрической прогрессии $\{a_n\}$, если $a_1+a_4=35$ и $a_2+a_3=30$.

C

3.71. Разложите число 195 на три слагаемых так, чтобы слагаемые образовали геометрическую прогрессию, причем первое слагаемое должно быть меньше третьего на 120.

3.72. Докажите, что последовательность $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}, \frac{1}{2-\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \ldots$ является геометрической прогрессией.

3.73. Три числа образуют геометрическую прогрессию. Если от третьего числа отнять 4, то полученная тройка образует арифметическую прогрессию. А если от второго и третьего членов арифметической прогрессии отнять 1 и 5 соответственно, то они снова образуют геометрическую прогрессию. Найдите данные три числа.

3.74. Выполняется ли равенство $\frac{x^2+y^2}{x} = \frac{y^2+z^2}{z}$, если x, y, z – последовательные члены геометрической прогрессии?

Упражнения для повторения

3.75. Сократите дроби:

1) $\frac{7^n - 3 \cdot 7^{n-1}}{4}$; 2) $\frac{5^{2n+1} - 5^{2n-1}}{12 \cdot 5^{n-1}}$.

3.76. Упростите выражения:

1) $\frac{a^2+3a+2}{a^2+6a+5}$; 2) $\frac{b^2+2b+1}{b^2+8b+7}$.

3.5. Формулы суммы первых n членов арифметической и геометрической прогрессий

Изучив материалы данной темы, вы будете:

- знать и применять формулу суммы n первых членов и характеристическое свойство арифметической прогрессии;
- знать и применять формулу суммы n первых членов и характеристическое свойство геометрической прогрессии;
- решать текстовые задачи, связанные с геометрической и арифметической прогрессиями.

3.5.1. Сумма первых n членов арифметической прогрессии

Рассмотрим еще одно свойство арифметической прогрессии.

Если числа $a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$ являются первыми n членами арифметической прогрессии, то сумма членов, расположенных на одинаковом «расстоянии» от краев этой последовательности, равна сумме ее крайних членов, т.е. для любого числа $1 \leqslant k \leqslant n$ верно равенство

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n. \qquad (1)$$

▲ Действительно, $a_k + a_{n-k+1} = a_1 + (k-1)d + a_1 + (n-k)d = 2a_1 + (n-1)d = a_1 + (a_1 + (n-1)d) = a_1 + a_n$. Что и требовалось доказать. ■

Теперь определим сумму первых n членов арифметической прогрессии. Обозначим эту сумму через S_n. Тогда

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

или

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1.$$

Складывая эти равенства почленно, получим:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Применяя формулу (1), получим:

$$2 \cdot S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n)}_{n} = n \cdot (a_1 + a_n).$$

Отсюда имеем формулу

$$\boxed{S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}.} \qquad (2)$$

Если учесть, что $a_n = a_1 + (n-1)d$, то получим другую формулу для нахождения суммы:

$$\boxed{S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.} \qquad (3)$$

Пример 1. Найдем сумму всех двузначных чисел, кратных 3.

▲ Так как $a_1 = 12$ и $a_n = 99$, то сначала найдем значение n. По формуле $a_n = a_1 + (n-1)d$, $(d=3)$ имеем $99 = 12 + (n-1)3 \Rightarrow$ $\Rightarrow n = 30$. Тогда $S_{30} = \frac{1}{2}(12 + 99) \cdot 30 = 1665$. ■

3.5.2. Сумма первых n членов геометрической прогрессии

Теперь выведем формулу суммы первых n членов геометрической прогрессии. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ есть первые n члены геометрической прогрессии, а q – ее знаменатель. Если через S_n обозначим сумму первых n членов геометрической прогрессии, то из равенства $S_n=a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+a_n$, учитывая, что $a_k=a_1q^{k-1}$, имеем:

$$S_n=a_1+a_1q+\ldots+a_1q^{n-2}+a_1q^{n-1}. \qquad (4)$$

Умножив равенство (4) на q, получим:

$$qS_n=a_1q+a_1q^2+\ldots+a_1q^{n-1}+a_1q^n. \qquad (5)$$

Из равенства (4) вычтем равенство (5):

$$S_n-qS_n=a_1-a_1q^n.$$

Отсюда получим формулу

$$\boxed{S_n=\frac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q}.} \qquad (6)$$

Здесь $q\neq1$.

Пример 2. В геометрической прогрессии $\{a_n\}$ найдем S_{10}, если $S_3=9$, $S_6=-63$.

▲ По формуле (6)

$$\left.\begin{aligned} S_3 &= a_1\frac{1-q^3}{1-q}=9,\\ S_6 &= a_1\frac{\left(1-q^6\right)}{1-q}=-63 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{1-q^6}{1-q^3}=-7 \Rightarrow 1+q^3=-7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q^3=-8 \Rightarrow q=-2,\ a_1=3.$$

Отсюда снова, применяя формулу (6), получим:

$$S_{10}=\frac{3\left(1-(-2)^{10}\right)}{1-(-2)}=\frac{3\left(1-2^{10}\right)}{3}=-1023. \ ■$$

1. Напишите формулу суммы первых n членов арифметической прогрессии и докажите ее.
2. Напишите формулу суммы первых n членов геометрической прогрессии и докажите ее.

Практическая работа

Высота ступенчатой фигуры равна 56 см, в основании этой фигуры расположены 10 кубиков. Определите количество всех кубиков.

Упражнения

А

3.77. Найдите сумму первых 10 членов арифметической прогрессии:

1) $-23, -20; \ldots$; 2) $14{,}2; 9{,}6; \ldots$; 3) $b_1=-17$, $d=6$;
4) $b_1=6{,}4$, $d=0{,}8$; 5) $a_1=3$, $a_{10}=17$; 6) $a_1=-10{,}5$, $a_{10}=12$.

3.78. Найдите сумму первых 5 членов геометрической прогрессии:

1) $b_1=8$, $q=\frac{1}{2}$; 2) $b_1=500$, $q=\frac{1}{5}$; 3) $3, -6, \ldots$;
4) $54, 36, \ldots$; 5) $-32, 16, \ldots$; 6) $1, -\frac{1}{2}, \ldots$;
7) $c_1=-4$, $q=3$; 8) $c_1=1$, $q=-2$; 9) $u_1=3$, $q=2$.

3.79. Найдите сумму первых 15 членов арифметической прогрессии $\{a_n\}$, если:

1) $a_5=27$, $a_{27}=60$; 2) $a_{20}=0$, $a_{66}=-92$;
3) $a_1=-3$, $a_{61}=57$; 4) $a_1=-10{,}5$, $a_{63}=51{,}5$.

3.80. Найдите сумму первых 6 членов геометрической прогрессии $\{b_n\}$, если:

1) $b_5=-6$, $b_7=-54$; 2) $b_6=25$, $b_8=9$;
3) $b_1=125$, $b_3=5$; 4) $b_4=-1$, $b_6=-100$.

3.81. Покажите, что последовательность, заданная формулой общего члена, является арифметической прогрессией, и найдите S_{10}, если:

1) $a_n=5n+3$; 2) $a_n=5-\frac{n}{2}$.

3.82. Покажите, что последовательность, заданная формулой общего члена, является геометрической прогрессией, и найдите S_{10}, если:

1) $b_n=2\cdot3^{n+1}$; 2) $b_n=-\frac{3}{2^n}$.

1) ▲ $b_n = 2\cdot 3^{n+1} \Rightarrow b_{n+1} = 2\cdot 3^{n+2} \Rightarrow b_{n+1} : b_n = 2\cdot 3^{n+2} : 2\cdot 3^{n+1} = 3$, является постоянным числом. Тогда последовательность $\{b_n\}$ является геометрической прогрессией со знаменателем $q=3$. Т.к. $b_1=18$, то по формуле (6)

$$S_{10} = \frac{18\left(1-3^{10}\right)}{1-3} = 9\cdot\left(3^{10}-1\right) = 9\left(531441-1\right) = 4782960.$$

Ответ: 4782960. ■

3.83. Найдите сумму всех натуральных чисел: 1) не превышающих 100; 2) от 16-ти до 160.

B

3.84. Найдите сумму: 1) $2+4+6+\ldots+2n$; 2) $1+3+5+\ldots+(2n-1)$.

3.85. Найдите сумму членов от 20-го по 25-й арифметической прогрессии $\{a_n\}$, если $a_1=2$, $d=2$.

3.86. Найдите сумму всех натуральных чисел: 1) кратных 3 и не превышающих 200; 2) кратных 9 и не превышающих 250.

1) ▲ Общий член последовательности натуральных чисел, кратных 3, имеет вид $a_n=3n$. Тогда необходимо, чтобы $a_n=3n<200 \Rightarrow n<\frac{200}{3}=66\frac{2}{3}$.

Поэтому $n=66$. Разность этой арифметической прогрессии $\{3n\}$ равна 3, т.е. $d=3$.

Следовательно, $3+6+9+\ldots+198 = \frac{2\cdot 3+(66-1)\cdot 3}{2}\cdot 66 =$

$=(6+195)\cdot 33 = 6633.$

Ответ: 6633. ■

3.87. Сумма первых 8 членов геометрической прогрессии равна $\frac{85}{64}$, а знаменатель $q=-\frac{1}{2}$. Найдите ее первый член.

3.88. Найдите S_5, если в геометрической прогрессии $S_2=4$ и $S_3=13$.

3.89. Найдите S_{16}, если в геометрической прогрессии $S_4=-28$, $S_6=58$.

3.90. Найдите S_{20}, если в арифметической прогрессии a_6+ $+a_9+a_{12}+a_{15}=20$.

3.91. Найдите сумму первых n членов геометрической прогрессии:

1) $1, 3, 3^2, \ldots;$ 2) $2, 2^2, 2^3, \ldots;$
3) $1, -x, x^2, \ldots;$ $x\neq\pm1;$ 4) $1, x^2, x^4, \ldots;$ $x\neq\pm1;$
5) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots,$ 6) $1, -x^3, x^6, \ldots;$ $x\neq-1$

3.92. Найдите сумму первых 5 членов последовательности, заданной формулой общего члена:

1) $a_n=3n+1;$ 2) $a_n=n+4;$ 3) $a_n=-0{,}5n+1;$
4) $b_n=0{,}2\cdot5^n;$ 5) $b_n=3\cdot2^{n-1};$ 6) $b_n=3^{1+n}.$

C

3.93. Сумма трех чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 15. Если к этим числам соответственно прибавить 1, 4 и 19, то полученные числа составят первые три члена геометрической прогрессии. Найдите данные три числа.

3.94. Второй, первый и третий члены арифметической прогрессии с разностью, отличной от нуля, взятые в указанном порядке, составляют первые три члена геометрической прогрессии. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

3.95. Числа x, y, z образуют геометрическую прогрессию, а числа x, $2y$, $3z$ – арифметическую прогрессию. Найдите знаменатель геометрической прогрессии, отличный от 1.

3.96. Найдите сумму квадратов n членов геометрической прогрессии, первый член которой равен a, а знаменатель равен q.

3.97. Выразите произведение первых n членов геометрической прогрессии $\{a_n\}$ через a_1 и a_n.

3.98. Известно, что $\{u_n\}$ – геометрическая прогрессия, в которой $u_1+u_5=51$ и $u_2+u_6=102$. При каком значении n верно равенство $S_n=3069$?

3.99. Найдите сумму первых n членов последовательности 1; 11; 111; 1111; ... .

3.100. Докажите, что в арифметической прогрессии $\{a_n\}$ $\frac{S_n-S_k}{S_{n+k}}=\frac{n-k}{n+k}$ при $d=2a_1$.

3.101. В острый угол вписаны несколько окружностей, касающихся друг друга внешним образом. Докажите, что радиусы этих окружностей образуют геометрическую прогрессию.

3.102. Найдите сумму первых n членов последовательности $a_n=2(n+3^{n-1})-3$.

Упражнения для повторения

3.103. Напишите общий член последовательности:

1) 1, 4, 9, 25, 36, ...; 2) $-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, -\frac{5}{6}, \ldots$.

3.104. Докажите, что значение выражения $\frac{9-4\sqrt{5}}{9+4\sqrt{5}}+\frac{9+4\sqrt{5}}{9-4\sqrt{5}}$ равно целому числу.

3.105. Решите уравнение $x^2-x-2=0$ графическим способом.

Материалы из истории

С древних времен человечество умело применять закономерности арифметической и геометрической прогрессии. Например, сохранились клинописи Древнего Вавилона, папирусы египтян и древних греков с примерами на применение арифметической и геометрической прогрессий. Древнегреческие ученые знали некоторые свойства прогрессий и умели находить сумму конечного числа их элементов. Архимед (III век до н. э.) при вычислении площадей фигур и объемов тел находил сумму нескольких членов числовой последовательности, а также он вывел формулу $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=$ $=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. В те времена ученые знали о том, что если $q>1$, то члены геометрической прогрессии растут с невообразимой быстротой. Об этом свидетельствует дошедшая до нас легенда об изобретателе игры в шахматы. Царь Древней Индии Шерам пригласил к себе изобретателя шахмат Сета и спросил, какую бы награду он хотел получить за изобретение интересной игры. Тогда Сета попросил царя на первую клетку шахматной доски положить 1 зерно, на вторую – 2 зерна, на третью – 4, на четвертую – 8 и т. д., т.е. на каждую клетку вдвое больше зерна, чем на предыдущую клетку. Поначалу царь удивился «скромному» запросу изобретателя и поспешно повелел выполнить эту просьбу. Однако, как выяснилось, казна царя оказалась слишком «ничтожной» для выполнения этой просьбы. Действительно, чтобы выполнить эту просьбу, потребовалось бы количество зерен, равное сумме $1+2+2^2+..+2^{63}$, а эта сумма равна 18 446 744 073 709 551 615. Если считать, что 1 пуд зерна содержит 40000 зерен, то для выполнения просьбы потребовалось бы 230 584 300 921 369 пудов зерна. Если полагать, что в Казахстане в среднем ежегодно собирается 1 000 000 000 пудов зерна, то для выполнения указанной просьбы нашей стране нужно работать (не расходуя ни одного зерна) на протяжении 230 584 лет.

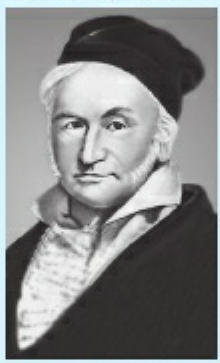
Вообще, название ***арифметическая прогрессия*** произошло от понятия *среднее арифметическое чисел* $\left(a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}\right)$, а название ***геометрическая прогрессия*** произошло от понятия *геометрическая пропорциональность отрезков* $\left(\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \dfrac{b_n}{b_{n-1}}\right)$.

Формулу суммы членов арифметической прогрессии впервые доказал греческий ученый Диофант (III век), а формула суммы членов геометрической прогрессии встречается в знаменитом труде Евклида «Начала» (III в. до н.э.). Ряд фактов по отношению к прогрессиям встречается также в трудах итальянского математика Л. Фибоначчи (1202 г.). А определение суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии дано в трудах французского математика Никола Шюке (1484 г.).

Относительно определения формулы суммы членов арифметической прогрессии $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ известен интересный эпизод из жизни знаменитого немецкого математика Карла Фридриха Гаусса (1777–1855). Учитель с целью проверки тетрадей учеников другого класса дал детям следующее задание: найти сумму чисел от 1 до 40. Эту задачу 9-летний Гаусс решил за одну минуту и объявил ответ. Он эту задачу решил следующим методом:

$$\begin{array}{r} 1,\ \ 2\ \ 3, \ldots, 20 \\ +\ 40, 39, 38, \ldots, 21 \\ \hline 41, 41, 41, \ldots, 41 \end{array}$$

Так как количество таких пар равно 20, то искомая сумма равна 41·20=820, т.е. юный Гаусс применил закономерности арифметической прогрессии.



Карл Фридрих Гаусс

Практическая работа

Полагая, что масса 5 зерен равна 1 г, определите массу пшеницы, которую запросил Сета. Ответ запишите в стандартном виде в тоннах. Сколько вагонов потребуется, чтобы погрузить эту пшеницу, если один вагон в среднем помещается 50 т зерна? Найдите длину состава поезда, составленного из этих вагонов, если длина каждого вагона равна 12 м.

3.6. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

Изучив материалы данной темы, вы будете:

- знать понятие бесконечно убывающей геометрической прогрессии;
- находить сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии;
- применять формулу бесконечно убывающей геометрической прогрессии для перевода десятичной периодической дроби в обыкновенную дробь;
- решать текстовые задачи, связанные с арифметическими и геометрическими прогрессиями.

3.6.1. Понятие бесконечно убывающей геометрической прогрессии

Работа с таблицей

Пусть b_1 – первый член геометрической прогрессии, а q – ее знаменатель. В паре или объединившись в малые группы с помощью калькулятора заполните следующую таблицу и результаты обсудите вместе с классом.

q	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	...	b_{10}	...	b_{15}	...	b_{20}	...	b_n
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	...	$\frac{1}{512}$	...	$\frac{1}{32\,768}$	...	$\frac{1}{1\,048\,576}$	...	$\frac{1}{2^{n-1}}$
$-\frac{1}{3}$	3					...		...		...		...	
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$					...		...		...		...	
$-\frac{3}{5}$	2					...		...		...		...	

Ответьте на нижеследующие вопросы.

- Какими общими свойствами обладают приведенные геометрические прогрессии? Каковы модули их знаменателей?
- Сравните модули членов последовательностей.
- С возрастанием номера n оцените, к какому числу «бесконечно приближается» число $|b_n|$?

Определение. *При* $|q| < 1$ *последовательность*

$$b, bq, bq^2, bq^3, \ldots, bq^{n-1}, \ldots \quad (1)$$

называется бесконечно убывающей геометрической прогрессией.

Итак, мы видим, что при $|q| < 1$ число q^n с возрастанием номера n бесконечно приближается к нулю. Этот факт записывают так:

$q^n \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому общий член бесконечно убывающей геометрической прогрессии стремится к нулю при $n \to \infty$, т.е. $b_n = b_1 \cdot q^{n-1} \to 0$ при $n \to \infty$.

3.6.2. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии

Работа в группе

Решите нижеследующие задачи.

Задание 1-й группы. Найдите сумму площадей бесконечного числа квадратов, вписанных друг в друга так, как показано на рис. 3.2. Здесь сторона большого квадрата равна 1.

Задание 2-й группы. Найдите сумму площадей бесконечного числа правильных треугольников, вписанных друг в друга так, как показано на рис. 3.3. Здесь сторона большого треугольника равна 1.

Рис. 3.2

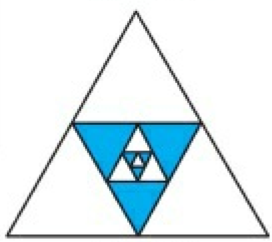


Рис. 3.3

При $|q| < 1$ общий вид бесконечно убывающих геометрических прогрессий представлен в виде (1). Теперь определим сумму всех членов этой прогрессии:

$$S = b + bq + bq^2 + \ldots + bq^{n-1} + \ldots = b\left(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + \ldots\right).$$

Рассмотрим сумму первых n членов этой прогрессии:

$$S_n = \frac{b\left(1-q^n\right)}{1-q} = \frac{b}{1-q}\left(1-q^n\right).$$

Как уже отмечали при $|q| < 1$ и $n \to \infty$ имеем $q^n \to 0$, поэтому $S_n = \frac{b}{1-q}(1-0) = \frac{b}{1-q}$. С другой стороны $S_n \to S$ при $n \to \infty$, следовательно,

$$S = \frac{b}{1-q}. \qquad (2)$$

Отсюда следует следующее правило.

Теорема. *Сумма S бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна отношению ее первого члена к числу, равному разности единицы и знаменателя прогрессии.*

Теперь по формуле (2) найдем сумму площадей всех квадратов и треугольников, упомянутых выше.

1) Последовательность площадей квадратиков имеет вид:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \ldots$$

Тогда $b = 1$, $q = \frac{1}{2}$, и по формуле (2)

$$S = \frac{b}{1-\frac{1}{2}} = 2,$$

т.е. сумма площадей всех квадратов на рис. 3.2 равна 2.

2) Аналогично последовательность площадей треугольников (рис. 3.3) имеет вид $\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{8}, \frac{\sqrt{3}}{16}, \ldots$. По формуле (2)

$$S = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

т.е. сумма площадей всех треугольников равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Пример 3.

1) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1;$

2) $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}+\ldots=\frac{\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{3};$

3) $\frac{4}{5}+\frac{8}{15}+\frac{16}{45}+\ldots+\frac{4}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+\ldots=\frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{2}{3}}=\frac{12}{5}.$

3.6.3. Обращение десятичной периодической дроби в обыкновенную дробь

Здесь на примерах рассмотрим способ обращения десятичной периодической дроби в обыкновенную дробь с применением формулы суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Пример 4. Запишем число 2,7 (31) в виде обыкновенной дроби.

▲ $2,7(31)=2+\frac{7}{10}+\left(\frac{3}{10^2}+\frac{1}{10^3}\right)+\left(\frac{3}{10^4}+\frac{1}{10^5}\right)+\ldots=$

$$=2+\frac{7}{10}+\frac{31}{10^3}+\frac{31}{10^5}+\ldots=\frac{27}{10}+\frac{31}{10^3}\left(1+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^4}+\ldots\right).$$

Здесь ряд $1+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^4}+\ldots$ является суммой членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $\frac{1}{10^2}$. Тогда по формуле (4)

$$1+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^4}+\ldots=\frac{1}{1-0,01}=\frac{100}{99.}$$

Поэтому $2,7(31)=\frac{27}{10}+\frac{31}{10^3}\cdot\frac{100}{99}=\frac{27}{10}+\frac{31}{990}=\frac{2704}{990}=\frac{1352}{495}.$ ■

Пример 5. Запишем число 0,2(3) в виде обыкновенной дроби.

$$▲\ 0,2(3)=\frac{2}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\ldots=\frac{2}{10}+\frac{3}{10^2}\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{2}{10}+\frac{3}{10^2}\cdot\frac{1}{1-0,1}=\frac{2}{10}+\frac{3}{90}=\frac{18+3}{90}=\frac{7}{30}.\ ■$$

1. Верны ли утверждения: а) всякая монотонная последовательность имеет предел; б) всякая ограниченная последовательность имеет предел. Приведите примеры.
2. Что такое числовой ряд, бесконечно убывающая геометрическая прогрессия?
3. Как следует понимать сумму ряда?
4. Напишите формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии и докажите ее.

Упражнения

A

3.106. Какая из последовательностей является бесконечно убывающей геометрической прогрессией:

1) $x_n=\frac{1}{3^n}$; 2) $y_n=\frac{3^n-2}{3^n}$; 3) $z_n=\frac{64}{2^n}$?

3.107. Обратите число в обыкновенную дробь:

1) 1,21(32); 2) 0,27(345); 3) −2,3(9);
4) 0,(1); 5) 0,(6); 6) 0,(36).

3.108. Обратите число в обыкновенную дробь:

1) 0,2(3); 2) 1,(81);
3) 0,32(45); 4) 1,6(3201).

3.109. Обратите число в обыкновенную дробь:

1) 0,9(285714); 2) 0,(04109589).

B

3.110. Будет ли геометрическая прогрессия $\{a_n\}$ бесконечно убывающей, если:

1) $a_1=1,\ a_2=\frac{1}{2}$; 2) $a_1=3,\ a_2=-1$;

3) $a_2=1,\ a_3=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$; 4) $a_1=\sqrt{2},\ a_2-a_1=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$;

5) $a_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ a_3=\dfrac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}},\ a_2>0$; 6) $\begin{cases} a_1+a_4=\dfrac{7}{16}, \\ a_1-a_2+a_3=\dfrac{7}{8} \end{cases}$?

3.111. Найдите сумму ряда:

1) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\ldots+\dfrac{1}{3^n}+\ldots$; 2) $\dfrac{4}{25}-\dfrac{8}{125}+\ldots+\left(-\dfrac{2}{5}\right)^n+\ldots$;

3) $\sqrt{3}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{\sqrt{3}}{3^{n-1}}+\ldots$ 4) $\dfrac{5}{7}-\dfrac{25}{49}+\ldots+(-1)^{n-1}\left(\dfrac{5}{7}\right)^n+\ldots$

3.112. При каких значениях x ряд имеет конечную сумму:

1) $1+x^4+x^8+\ldots+x^{4(n-1)}+\ldots$;

2) $1-x^3+x^6-\ldots+(-1)^{(n-1)}x^{3(n-1)}+\ldots$;

3) $\dfrac{1-x}{x}+\dfrac{(1-x)^2}{x^2}+\ldots+\left(\dfrac{1-x}{x}\right)^n+\ldots$?

3) ▲ Общий член ряда имеет вид $b_n=\left(\dfrac{1-x}{x}\right)^n$ и последовательность слагаемых образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q=\dfrac{1-x}{x}$. Для того чтобы ряд имел конечную сумму, необходимо, чтобы $|q|=\left|\dfrac{1-x}{x}\right|<1$. Решим это неравенство: $\dfrac{|x-1|}{|x|}<1$ и $x\neq 0 \Rightarrow |x-1|<|x|$.

Если $x<0 \Rightarrow -(x-1)<-x \Rightarrow 1<0$, это невозможно, $x\in\varnothing$;

если $0<x<1 \Rightarrow -(x-1)<x \Rightarrow x>\dfrac{1}{2} \Rightarrow x\in\left(\dfrac{1}{2};1\right)$;

если $x=1 \Rightarrow b_n=0$ и прогрессии $\{b_n\}$ не существует;

если $x>1 \Rightarrow x-1<x \Rightarrow -1<0$ – истинное неравенство; $x\in(1;+\infty)$.

Ответ: $x\in\left(\dfrac{1}{2};1\right)\cup(1;+\infty)$.

C

3.113. Приведите пример последовательности: 1) рациональных чисел, пределом которой является иррациональное число; 2) иррациональных чисел, пределом которой является рациональное число.

2) ▲ $C_n = \dfrac{2\pi^n + 7}{\pi^n} \Rightarrow C_n = 2 + \dfrac{7}{\pi^n}$. Все члены последовательности $\{C_n\}$ являются иррациональными числами. При $n \to \infty$ имеем $\dfrac{7}{\pi^n} \to 0$. Поэтому $C_n \to 2$ при $n \to \infty$. ■

3.114. Докажите, что последовательность $x_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ корней}}$ сходится, и найдите ее предел.

3.115. Решите уравнение:

1) $x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots=\dfrac{3}{7}$;

2) $x-x^2+x^3-\ldots+(-1)^{n-1}+x^n+\ldots=-4$.

3.116. Может ли сумма ряда $a-a^2+a^3-a^4+\ldots+(-1)^{n-1}a^n+\ldots$ при некоторых значениях a быть равной: 1) 0,25; 2) −0,6; 3) 0,5?

3.117. Найдите сумму $\left(4\sqrt{3}+8\right)\left(\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-2\right)+\dfrac{3-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}}+\ldots\right)$.

3.118. Первый член бесконечно убывающей геометрической прогрессии с положительными членами равен 4, а разность третьего и пятого членов равна $\dfrac{32}{81}$. Найдите сумму этой прогрессии.

3.119. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\{a_n\}$, если выполняются равенства $a_1+a_4=54$ и $a_2+a_3=36$.

3.120. Сумма членов с четными номерами бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 12, а сумма ее членов с нечетными номерами равна 36. Определите эту прогрессию, т.е. найдите a_1 и q.

3.121. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 56, а сумма квадратов ее членов равна 448. Найдите первый член и знаменатель этой прогрессии.

3.122. Напишите бесконечно убывающую геометрическую прогрессию с первым членом, равным 3, и суммой, равной $\frac{7}{2}$.

3.123. Напишите бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, каждый член которой в 10 раз превышает сумму всех членов, следующих за ним.

3.124. Докажите, что сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем, равным 0,5, в 4 раза больше второго члена этой прогрессии.

3.125. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 3, а сумма кубов ее членов равна $\frac{108}{13}$. Напишите эту прогрессию.

Дополнительные упражнения к разделу 3

3.126. Выпишите первые 5 членов последовательности $\{a_n\}$:

1) $a_n = \frac{n-1}{3n+2}$; 2) $a_n = (-1)^{n-1}$; 3) $a_n = \cos(n \cdot 45°)$.

3.127. Напишите формулу общего члена последовательности:

1) 1, 4, 7, 10, ...; 2) 4, 16, 36, 64, ... ;

3) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots$.

3.128. Определите, является ли последовательность возрастающей (убывающей), ограниченной сверху (снизу), ограниченной или неограниченной:

1) 2, 4, 6, 8, ...;

2) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$;

3) 1; –0,5; 0,05; –0,005; ... .

3.129. Докажите, что последовательность $a_n = \left(\frac{a^2+1}{2a}\right)^n$, где $a>0$, является монотонно возрастающей.

3.130. Покажите, что последовательность $b_n = \frac{2n+3}{6n-5}$ является монотонно убывающей.

3.131. Приведите пример последовательности:

1) ограниченной сверху, но не ограниченной снизу;
2) ограниченной снизу, но не ограниченной сверху;
3) не ограниченной ни сверху, ни снизу.

3.132. Напишите формулу общего члена арифметической прогрессии:

1) $a_1=6,\ a_4=0$;
2) $a_1=5,\ a_2=-5$;
3) $a_4=-4,\ a_{17}=-17$;
4) $a_{10}=0,\ a_{40}=-30$.

3.133. Напишите формулу общего члена геометрической прогрессии:

1) $a_1=7,\ a_2=8$;
2) $a_1=3,\ a_3=\frac{1}{3}$;
3) $a_4=a_6=-1$.

3.134. Составьте арифметическую прогрессию, если:

1) $\begin{cases} a_2 + a_4 = 16, \\ a_1 \cdot a_5 = 28; \end{cases}$
2) $\begin{cases} a_2 + a_{10} = 24, \\ a_1 \cdot a_{11} = 44. \end{cases}$

3.135. Составьте геометрическую прогрессию, если:

1) $\begin{cases} a_2 - a_1 = -4, \\ a_3 - a_1 = 8; \end{cases}$
2) $\begin{cases} a_1 + a_4 = 0{,}4375, \\ a_3 - a_2 + a_1 = 0{,}875. \end{cases}$

3.136. Покажите, что для арифметической прогрессии $\{a_n\}$ с положительными членами и разностью, отличной от нуля, выполняются неравенства: $a_1a_n < a_2a_{n-1} < a_3a_{n-2} < \ldots$.

3.137. Докажите, что числа $\frac{1}{y+z}$, $\frac{1}{z+x}$, $\frac{1}{x+y}$ составляют арифметическую прогрессию тогда и только тогда, когда числа x^2, y^2, z^2 образуют арифметическую прогрессию.

3.138. Определите арифметическую прогрессию $\{a_n\}$ так, чтобы для любого натурального n выполнялось равенство

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = n.$$

3.139. Дано четное число членов геометрической прогрессии. Докажите, что отношение суммы ее членов с четными номерами к сумме членов с нечетными номерами равно знаменателю этой прогрессии.

3.140. Числа x_1, x_2 являются корнями уравнения $x^2+ax+4=0$, а числа x_3, x_4 – корнями уравнения $x^2+bx+16=0$. Числа x_1, x_3, x_2, x_4 в указанном порядке являются членами геометрической прогрессии. Найдите числа a и b.

3.141. Могут ли длины сторон прямоугольного треугольника составить:

1) арифметическую прогрессию?
2) геометрическую прогрессию?

3.142. Вычислите значение выражения $\dfrac{0,1(2)+0,3(4)}{0,4(5)-0,2(3)}$.

3.143. Если a – первый член, q – знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\{a_n\}$, то найдите сумму:

1) $a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots$;

2) $a_1^3+a_2^3+a_3^3+\ldots$;

3) $(a_1+a_2)^2+(a_3+a_4)^2+(a_5+a_6)^2+\ldots$;

4) $(a_1-a_2)^2+(a_3-a_4)^2+(a_5-a_6)^2+\ldots$;

5) $a_1+\dfrac{1}{2}a_2+\dfrac{1}{4}a_3+\ldots$;

6) $\left(a_1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(a_2-\dfrac{1}{4}\right)+\ldots$;

7) $\dfrac{a_2}{a_1}+\dfrac{a_4}{a_2}+\dfrac{a_6}{a_3}+\cdots$;

8) $(a_1+a_2+a_3)^2+(a_4+a_5+a_6)^2+\ldots$.

3.144. Решите уравнения:

1) $1+x+x^2+\ldots+x^9=0$; 2) $1+x+x^2+\ldots+x^{10}=0$.

3.145. Найдите сумму:

1) $\left(c+\dfrac{1}{c}\right)^2+\left(c^2+\dfrac{1}{c^2}\right)^2+\ldots+\left(c^n+\dfrac{1}{c^n}\right)^2$;

2) $1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+n\cdot n!$;

3) $\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\dfrac{3}{4!}+\ldots+\dfrac{n}{(n+1)!}$.

3.146. Пусть последовательность $\{a_n\}$ – арифметическая прогрессия. Докажите тождества:

1) $\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\ldots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n}$;

2) $\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}$.

3.147. Найдите сумму:

1) $\frac{1}{4\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 18}+\ldots+\frac{1}{(7n-3)(7n+4)}$;

2) $\frac{1}{3\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 11}+\ldots+\frac{1}{(4n-1)(4n+3)}$.

3.148. Постройте график функции:

1) $y=x+\frac{x}{1+x^2}+\frac{x}{(1+x^2)^2}+\ldots$;

2) $y=x^2+\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{x^2}{(1+x^2)^2}+\ldots$.

3.149. Является ли последовательность $\{|a_n|\}$ арифметической прогрессией, если $\{a_n\}$ – арифметическая прогрессия?

3.150. Является ли последовательность $\{|a_n|\}$ геометрической прогрессией, если $\{a_n\}$ – геометрическая прогрессия?

3.151. Найдите сумму:

1) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}+\ldots$;

2) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n(n+1)}+\ldots$.

Названия терминов на трех языках

На русском языке	На казахском языке	На английском языке
Числовая последовательность	Сан тізбегі	Seguence of numbers
Общий член	Жалпы мүшесі	General term
Арифметическая (геометрическая) прогрессия	Арифметикалық (геометриялық) прогрессия	Arithmetig-geometrical progression
Формула общего члена	Жалпы мүшесі формуласы	Formula of common member
Разность арифметической прогрессии	Арифметикалық прогрессияның айырымы	Remainder of arithmetic progression
Знаменатель геометрической прогрессии	Геометриялық прогрессияның еселігі	Denominator of geometric progression
Формула суммы первых n членов арифметической (геометрической) прогрессии	Арифметикалық (геометриялық) прогрессияның алғашқы n мүшелерінің қосындысы	Addition of n members of arithmetic-geometrical progression
Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии	Шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысы	Addition of infinite decreasing geometrical progression

Раздел 4. ТРИГОНОМЕТРИЯ

4.1. Градусная и радианная меры угла и дуги

Изучив материалы данной темы, вы:

- усвоите понятие радианной меры угла;
- научитесь переводить градусы в радианы и радианы в градусы;
- научитесь отмечать на единичной окружности точки, соответствующие числам $0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2},\ 2\pi$.

4.1.1. Углы и дуги

С тригонометрическими функциями $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ вы уже встречались в курсе геометрии за 8 класс. Теперь мы приступим к систематическому изучению тригонометрических функций. Для этого сначала глубже рассмотрим понятие угла.

В курсе геометрии вы в основном рассматривали углы в пределах до 360°, а тригонометрические функции для углов до 180°. Лишь изредка нами рассматривались углы, бо́льшие, чем 360°. Например, сумма внутренних углов n-угольника равна $(n-2)\cdot180°$. Если $n=5$, то сумма внутренних углов пятиугольника равна $3\cdot180°=540°$. Если $\alpha \leqslant 360°$, то величину этого угла геометрически можно изобразить так, как показано на рис. 4.1. Поэтому возникают вопросы «как нужно понимать угол, равный 540°?», «каков его геометрический смысл?»

Чтобы ответить на эти вопросы, рассмотрим окружность с центром в начале координат и радиусом R (рис. 4.2). Вектор $\overline{OA}$, соединяющий начало координат и точку A окружности, называется *радиус-вектором* точки A. Тогда любой угол можно рассмотреть как фигуру, образованную вращением радиус-вектора $\overline{OA}$ около центра O. Здесь нужно заметить, что радиус-вектор $\overline{OA}$ можно вращать в двух направлениях: против хода часовой стрелки и по ходу часовой стрелки. Направление вращения против хода часовой стрелки называется *положительным направлением*, а по ходу часовой стрелки – *от-*

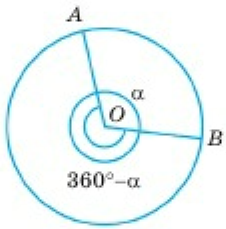


Рис. 4.1

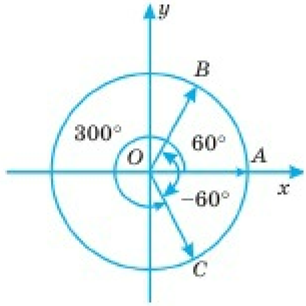


Рис. 4.2

рицательным направлением. Углы, полученные вращением радиус-вектора $\overline{OA}$ в положительном направлении, берутся со знаком «плюс», а в отрицательном направлении – со знаком «минус». Например, на рис. 4.2 изображены углы, равные $+60°$ и $-60°$. Здесь $\angle AOB=60°$, $\angle AOC=-60°$. Угол между вектором $\overline{OA}$ и положительным направлением оси Ox (рис. 4.3), т.е. угол, соответствующий неподвижному состоянию радиус-вектора $\overline{OA}$, считается равным 0°. Однако вектор $\overline{OA}$ может возвратиться на свое исходное положение, сделав несколько оборотов вокруг центра против хода часовой стрелки. В таких случаях, т.е. когда радиус-вектор $\overline{OA}$ возвращается в исходное положение, сделав n оборотов против хода часовой стрелки, говорят, что угол между радиус-вектором $\overline{OA}$ и положительным направлением оси Ox равен $n\cdot360°$. Например, на рис. 4.3 угол между вектором $\overline{OA}$ и осью Ox равен $2\cdot360°=720°$. Если вектор $\overline{OA}$ возвращается в исходное положение, сделав m оборотов по ходу часовой стрелки, то угол между вектором $\overline{OA}$ и осью Ox считается равным $m\cdot360°$. Аналогично рассматривается геометрический смысл любого угла. Например, 440° можно представить так: $440°=80°+360°$. Тогда считается, что радиус-вектор $\overline{OB}$, составляющий с положительным направлением оси Ox угол, равный 80°, возвращается в исходное по-

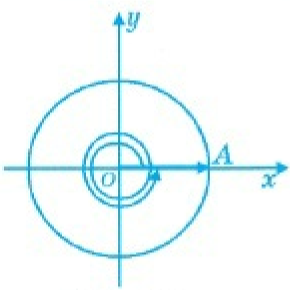


Рис. 4.3

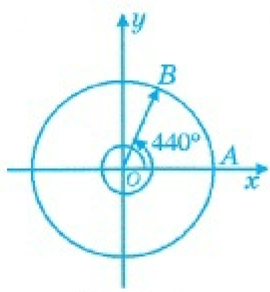


Рис. 4.4

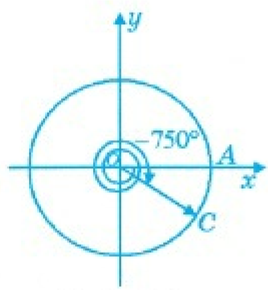


Рис. 4.5

ложение, сделав полный оборот по окружности против хода часовой стрелки (рис.4.4). Так как $-750° = -30° - 2 \cdot 360°$, то радиус-вектор $\overrightarrow{OC}$, сделав два полных оборота по ходу часовой стрелки, будет расположен так, чтобы он составил с положительным направлением оси Ox угол, равный $-30°$ (рис. 4.5).

4.1.2. Радианная мера угла

До сих пор углы мы измеряли в градусах и научились изображать углы любой заданной градусной меры.

Теперь рассмотрим еще одну меру измерения углов. Эту единицу измерения углов называют *радианом*. Дадим определение этому понятию. Из курса геометрии известно, что градусная мера дуги окружности равна градусной мере центрального угла, стороны которого опираются на эту дугу.

Определение. ***Радианом*** *называется угловая мера дуги окружности, длина которой равна радиусу окружности.*

Здесь радианную меру дуги (угла) мы определили через радиус окружности. Мы должны показать, что радианная мера угла не зависит от выбора окружности. Действительно, длина окружности с радиусом r равна $2\pi r$. Тогда дуга, длина которой равна r, составляет $\frac{1}{2\pi}$ часть длины окружности. Поэтому центральный угол должен составлять $\frac{1}{2\pi}$ часть от $360°$ (рис. 4.6, 4.7):

$\frac{1}{2\pi} \cdot 360° \approx 57°17'45''$. А этот угол не зависит от радиуса окружности. Итак,

$$1 \text{ радиан} - \frac{1}{2\pi}\ 360° = \frac{1}{\pi}\ 180° \approx 57°17'45''. \qquad (1)$$

Отсюда

$$1° - \frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180°} \approx 0{,}17 \text{ радиана}.$$

(2)

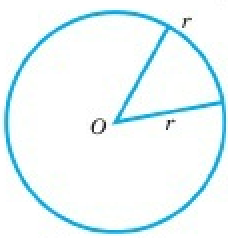


Рис. 4.6

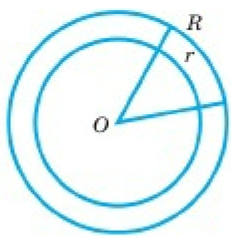


Рис. 4.7

Обычно на практике вместо записи $\alpha=1$ радиану, $\alpha=-0,5$ радиана, $\alpha=\frac{4}{3}$ радиана и т. п. просто пишут $\alpha=1$, $\alpha=-0,5$, $\alpha=\frac{4}{3}$, т.е. если углы заданы без указания их градусной меры, то считается, что этот угол задан в радианной мере. Чтобы перейти от градусной меры угла к ее радианной мере и обратно, от радианной меры к ее градусной мере, нужно воспользоваться формулами (1) и (2). В общем случае формулу перехода от градусной меры угла к его радинной мере и обратно легче запомнить в виде следующей таблицы.

Градусная мера угла	Направление перехода	Радианная мера угла
n°	$\rightarrow$	$\frac{n^\circ}{360^\circ}\cdot 2\pi=\frac{n^\circ}{180}\cdot\pi$
$\frac{\alpha}{2\pi}\cdot 360^\circ=\frac{\alpha}{\pi}\cdot 180^\circ$	$\leftarrow$	α радианов

Работа в паре

С помощью этой формулы заполните таблицу.

Градусная мера угла	30°		60°		180°	
Радианная мера угла	$\frac{30}{180}\cdot\pi=\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$

Аналогично показанному выше можно изобразить любой угол, заданный в радианной мере. Например, на рис. 4.8 один и тот же радиус-вектор $\overline{OB}$ определяет неравные между собой углы $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{4}+2\pi$.

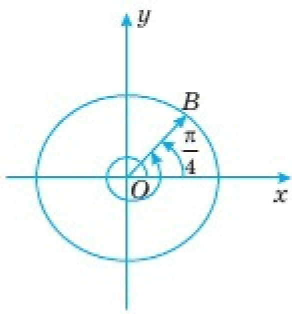


Рис. 4.8

Замечание. Рассмотренную здесь окружность часто называют ***единичной окружностью***. Радиус этой окружности равен 1.

Работа в паре

На единичной окружности отметьте точки, соответствующие углам с радианной мерой

$$0,\ \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{2\pi}{3},\ \frac{3\pi}{4},\ \frac{5\pi}{6},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2},\ 2\pi.$$

1. Что называется радиус-вектором?
2. Как определяется мера угла в положительном и отрицательном направлениях?
3. На какую дугу опирается угол в 1 радиан? Что вы понимаете под радианной мерой угла?
4. Как можно перейти от градусной меры угла к ее радианной мере и, обратно, от радианной меры к ее градусной мере?

Практическая работа

Части квадрата и правильного треугольника отсечены прямой, проходящей через середины сторон, имеющие общую вершину. Найдите градусную и радианную меры углов, образовавшихся пятиугольника и четырехугольника (рис. 4.9).

Рис. 4.9

Упражнения

А

4.1. С помощью тригонометрического круга изобразите углы, градусные меры которых равны $150°$, $210°$, $540°$, $-45°$, $-135°$, $-720°$.

4.2. В какой координатной четверти находится радиус-вектор, соответствующий углу, равному:

1) $179°$; 2) $325°$; 3) $-150°$; 4) $-10°$; 5) $800°$; 6) $10000°$?

4.3. В какой координатной четверти находится радиус-вектор, соответствующий углу, равному:
1) $289°$; 2) $190°$; 3) $100°$; 4) $-20°$; 5) $-110°$; 6) $4200°$?

4.4. Выразите углы $40°$, $150°$, $315°$, $1000°$, $-20°$, $-120°$, $-300°$ в радианах.

4.5. Выразите углы $\frac{\pi}{3}$; $-\frac{2\pi}{3}$; $\frac{21\pi}{4}$; $\frac{\pi}{8}$; 3; 100; 0,8; $\frac{5\pi}{2}$ в градусах.

B

4.6. Величина дуги единичной окружности равна $\frac{3\pi}{4}$. Чему равна длина этой дуги?

4.7. Угловая мера дуги равна $\frac{3\pi}{2}$, а радиус равен 8 м. Найдите длину этой дуги.

4.8. Углы треугольника соотносятся как 3 : 4 : 5. Найдите градусные и радианные меры углов этого треугольника.

▲ Пусть α, β, γ – углы треугольника, тогда $\alpha : \beta : \gamma = 3 : 4 : 5$. Поэтому $\alpha = 3k$, $\beta = 4k$, $\gamma = 5k$.

а) Градусная мера. $\alpha + \beta + \gamma = 180° \Rightarrow 3k + 4k + 5k = 180° \Rightarrow 12k = 180° \Rightarrow k = 15° \Rightarrow \alpha = 45°,\ \beta = 60°,\ \gamma = 75°$.

б) Радианная мера. $\alpha + \beta + \gamma = \pi \Rightarrow 3k + 4k + 5k = \pi \Rightarrow$

$$\Rightarrow k = \frac{\pi}{12} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4},\ \beta = \frac{\pi}{3},\ \gamma = \frac{5\pi}{12}.$$

Ответ: 45°, 60°, 75° или $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{12}$. ■

4.9. В прямоугольном треугольнике: а) катеты равны между собой; б) один из катетов равен половине гипотенузы. Найдите градусные и радианные меры углов этого треугольника.

4.10. Выразите в радианах углы правильного n-угольника:
1) $n=3$; 2) $n=4$; 3) $n=5$; 4) $n=6$; 5) $n=9$; 6) $n=18$.

4.11. Укажите наименьшую неотрицательную радианную меру угла, соответствующую точкам пересечения единичной окружности с осями координат. Напишите общий вид радианной меры углов, соответствующих этим точкам.

C

4.12. Как расположены на числовой оси и единичной окружности точки, соответствующие числам:

1) x и $-x$; 2) x и $x+\pi$;
3) x и $x+2n\pi$; 4) $x-\pi$ и $x+\pi$?

4.13. На единичной окружности укажите точки, координаты которых удовлетворяют условиям:

1) $y = \frac{1}{2}$, $x > 0$; 2) $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y > 0$;

3) $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x < 0$; 4) $x = -\frac{1}{2}$, $y < 0$

Напишите множество чисел, соответствующих этим точкам.

4.14. Напишите общий вид градусной и радианной меры угла, радиус-вектор которого находится: 1) в положительной части оси абсцисс; 2) в отрицательной части оси абсцисс; 3) в положительной части оси ординат; 4) в отрицательной части оси ординат; 5) на одной из координатных осей; 6) на биссектрисе в III координатной четверти; 7) на биссектрисе в I или III координатной четверти; 8) на биссектрисе в IV координатной четверти.

4.15. Найдите угловую скорость диска в рад/с, который совершает 300 оборотов в минуту.

Упражнения для повторения

4.16. Решите уравнения:

1) $x^2-7x+6=0$; 2) $4x^2+5x+1=0$;

3) $3x^2-8x+5=0$; 4) $2x^2+x+1=0$.

4.17. Постройте графики функций:

1) $y=(x-2)^2+3$; 2) $y=x^2-4x$.

4.18. Разложите многочлены на множители:

1) $5x^3-3x^2-2x$; 2) $3x^2+2x-2$.

4.19. При каких значениях x функция $y = \frac{x^2+1}{2x+1}$ принимает значение, равное 1?

4.2. Определение тригонометрических функций

Изучив материалы данной темы, вы будете:

- знать определения тригонометрических функций;
- знать взаимосвязь координат точек ($\cos\alpha$; $\sin\alpha$) единичной окружности с тригонометрическими функциями;
- находить с помощью единичной окружности область определения и множество значений тригонометрических функций.

4.2.1. Определение тригонометрических функций для любого угла

Здесь мы определим тригонометрические функции *синус*, *косинус*, *тангенс* и *котангенс* для произвольного угла α. Рассмотрим окружность с центром в начале координат и радиусом R. На этой окружности возьмем точку B так, чтобы угол между радиус-вектором $\overline{OB}$ и положительным направлением оси Ox был равен α. Обозначим через $(x; y)$ координаты точки B: $B(x; y)$ (рис. 4.10).

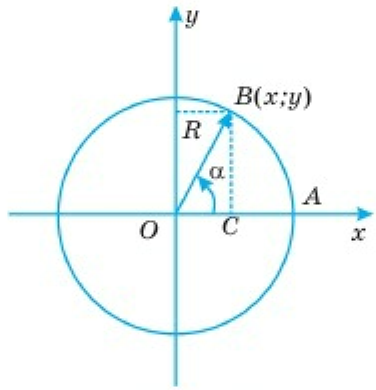


Рис. 4.10

Определение. 1) *Отношение ординаты точки B к радиусу R окружности называется синусом угла* α:

$$\sin\alpha = \frac{y}{R}. \qquad (1)$$

2) *Отношение абсциссы точки B к радиусу R окружности называется косинусом угла* α:

$$\cos\alpha = \frac{x}{R}. \qquad (2)$$

3) *Отношение синуса угла* α *к косинусу этого угла называется тангенсом угла* α:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}. \qquad (3)$$

4) *Отношение косинуса угла* α *к синусу этого угла называется котангенсом угла* α:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \qquad (4)$$

В курсе геометрии мы показали, что при $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ синус, косинус, тангенс и котангенс угла α зависят только от величины угла α и не зависят от выбора соответствующего прямоугольного треугольника. Аналогично покажем, что при любом α эти функции не зависят от радиуса окружности R, т. е. значения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ не зависят от выбранной нами окружности.

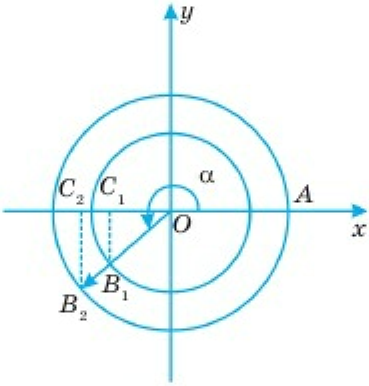


Рис. 4.11

▲ Действительно, как показано на рис. 4.11, рассмотрим две окружности радиусами R_1 и R_2 с общим центром в точке O. Пусть угол между вектором $\overline{OB_2}$ и положительным направлением оси Ox равен α и луч $\overline{OB_2}$ пересекает окружность радиусом R_1 в точке B_1. Тогда пусть $B_1(x_1;\ y_1)$ и $B_2(x_2;\ y_2)$. Через C_1 и C_2 обозначим основания перпендикуляров, опущенных из точек B_1 и B_2 соответственно на ось Ox. Тогда из подобия прямоугольных треугольников B_1C_1O и B_2C_2O имеем: $\frac{B_1C_1}{B_1O}=\frac{B_2C_2}{B_2O}$. Так как $B_1C_1=|y_1|$, $B_2C_2=|y_2|$, $B_1O=R_1$ и $B_2O=R_2$, то получим равенство $\frac{|y_1|}{R_1}=\frac{|y_2|}{R_2}$. Отсюда, так как точки B_1 и B_2 расположены в одной координатной четверти, то числа y_1 и y_2 имеют одинаковые знаки. Следовательно, верно равенство $\frac{y_1}{R_1}=\frac{y_2}{R_2}$, т.е. отношение $\frac{y}{R}$ не зависит от радиуса R окружности.■

Так как отношение $\frac{y}{R}$ определено для любого угла α, то выражение $\sin\alpha$ определено для любого угла α. Аналогично и выражение $\cos\alpha$ определено для любого угла α. Напротив, выражения $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ определены не для всех углов α. Например, выражение $\operatorname{tg}\alpha$ определено лишь для тех углов α, для которых $\cos\alpha\neq0$.

Так как $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{y}{R}:\frac{x}{R}=\frac{y}{x}$, то необходимо, чтобы $x\neq0$. Следовательно, $\alpha\neq90°+n\cdot180°$, $n\in Z$. Итак, при α, равном $\pm90°$, $\pm270°$, $\pm450°$, ..., выражение $\operatorname{tg}\alpha$ не определено, т.к отношение $\frac{y}{x}$ не имеет смысла. Аналогично, при α, равном $0°$, $\pm180°$, $\pm360°$, ..., выражение $\operatorname{ctg}\alpha$ не определено, т.е. выражение $\mathrm{ctg}\alpha$ определено для всех α, за исключением $\alpha=n\cdot 180°$, $n=0, \pm1, \pm2, \ldots$.

Любое действительное число x можно рассматривать как радианную меру некоторого угла. Следовательно, для любого x выражения $\sin x$ и $\cos x$ определены. Поэтому выражения $\sin x$ и $\cos x$ можно рассматривать как функции, зависящие от аргумента x. Аналогично определяются и функции $\mathrm{tg}x$, $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in Z$ и $\mathrm{ctg}x$, $x \neq n\pi$, $n \in Z$ (здесь Z – множество целых чисел). В целом функции $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\mathrm{tg}x$ и $y=\mathrm{ctg}x$ называются ***тригонометрическими функциями***. Как было замечено выше, областью определения функции $y=\sin x$ и $y=\cos x$ является множество всех действительных чисел $(-\infty; +\infty)$.

А из неравенств $-1 \leqslant \frac{x}{R} \leqslant 1$ и $-1 \leqslant \frac{y}{R} \leqslant 1$ следует справедливость неравенств $|\cos x| \leqslant 1$ и $|\sin x| \leqslant 1$. Следовательно, множество $[-1;1]$ является областью значений функций $y=\sin x$ и $y=\cos x$.

Область определения функции $y=\mathrm{tg}x$ определяется неравенствами $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in Z$, а функции $y=\mathrm{ctg}x$ – неравенствами $x \neq n\pi$, $n \in Z$. Кроме того, из неравенств $-\infty < \frac{y}{x} < +\infty$ и $-\infty < \frac{x}{y} < +\infty$ следует, что областью значений функций $y=\mathrm{tg}x$ и $y=\mathrm{ctg}x$ является множество всех действительных чисел.

Из рис. 4.10 видно, что выполняется равенство $OC^2+BC^2=OB^2$. Отсюда имеем, что верно равенство $x^2+y^2=R^2$ или $\left(\frac{x}{R}\right)^2 + \left(\frac{y}{R}\right)^2 = 1$. Поэтому по определению тригонометрических функций имеем, что для любого x верно тождество

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1. \qquad (5)$$

Это тождество называется ***основным тригонометрическим тождеством***.

Замечание. Иногда вместо круга радиусом R рассматривают круг радиусом 1. Так как $OB=1$, то $\sin\alpha$ определяется как ордината точки B, а $\cos\alpha$ – как абсцисса этой точки. Поэтому круг радиусом 1 называется ***тригонометрическим кругом***.

8–4334

4.2.2. Значения тригонометрических функций некоторых углов

Пример 1. Окружность с центром в начале координат и радиусом 1 точками $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{11}$ разделена на 12 равных частей. Эти точки, начиная с $A_0(1;\ 0)$, расположены на окружности против хода часовой стрелки в порядке возрастания номеров. Требуется найти значения тригонометрических функций углов, соответствующих этим точкам.

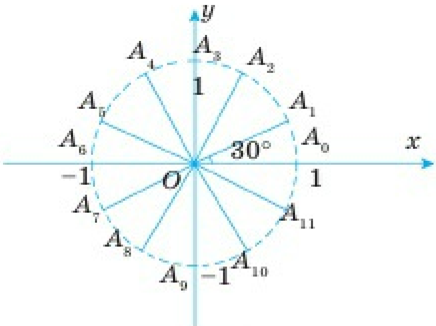


Рис. 4.12

▲ Точкам $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{11}$ соответствуют углы 0°, 30°, 60°, 90°, 120°, 150°, 180°, 210°, 240°, 270°, 300°, 330° (в радианах эти углы таковы:

$0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}, \frac{11\pi}{6}$) (рис. 4.12).

А так как $A_0(1;\ 0)$, $A_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $A_2\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $A_3(0;\ 1)$, $A_4\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $A_5\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $A_6(-1;\ 0)$, $A_7\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, $A_8\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $A_9(0;\ -1)$, $A_{10}\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $A_{11}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, то $\sin 0°=0$, $\sin 30°=\frac{1}{2}$, $\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 90°=1$, ... и $\cos 0°=1$, $\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60°=\frac{1}{2}$, $\cos 90°=0$, ...

Кроме того, если учесть, что $\sin 45°=\sin 135°=\cos 45°=\cos 315°=$ $=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin 225°=\sin 315°=\cos 135°=\cos 225°=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$,

$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, то получим следующую таблицу:

α	0° 0	30° $\frac{\pi}{6}$	45° $\frac{\pi}{4}$	60° $\frac{\pi}{3}$	90° $\frac{\pi}{2}$	120° $\frac{2\pi}{3}$	135° $\frac{3\pi}{4}$	150° $\frac{5\pi}{6}$	180° π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	–

α	210° $\frac{7\pi}{6}$	225° $\frac{5\pi}{4}$	240° $\frac{4\pi}{3}$	270° $\frac{3\pi}{2}$	300° $\frac{5\pi}{3}$	315° $\frac{7\pi}{4}$	330° $\frac{11\pi}{6}$	360° 2π
$\sin\alpha$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	–

1. Сформулируйте определения тригонометрических функций для любого угла.
2. Покажите, что определения тригонометрических функций не зависят от радиуса тригонометрического круга.
3. Напишите основное тригонометрическое тождество и докажите его.

Практическая работа

Найдите значения тригонометрических функций при углах, равных: 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°.

Упражнения

A

4.20. Найдите синус и косинус: 1) 0; 2) $\frac{\pi}{2}$.

4.21. Существует ли угол α, при котором верны равенства:

1) $\sin\alpha = \frac{21}{29}$, $\cos\alpha = \frac{20}{29}$; 2) $\sin\alpha = -\frac{12}{37}$, $\cos\alpha = \frac{35}{37}$;

3) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, $\cos\alpha = \frac{2}{5}$; 4) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\alpha = \frac{3}{5}$?

3)▲ Если существует такой угол α, то должно выполняться тождество $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Проверим это:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{1}{9} + \frac{4}{25} = \frac{61}{225} \neq 1.$$

Следовательно, не существует такого угла α, при котором были бы верны равенства $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ и $\cos\alpha = \frac{2}{5}$. ■

4.22. Может ли значение $\sin\alpha$ при некотором α быть равным:

1) 0,67; 2) $\frac{12}{11}$; 3) $\frac{4}{\sqrt{15}}$; 4) $\frac{\sqrt{15}}{4}$?

4.23. Существует ли угол α, при котором $\cos\alpha$ равен:

1) $\sqrt{2}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 3) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$?

4.24. Найдите значения выражений:

1) $2\cos60° + \sqrt{3}\cos30°$; 2) $5\sin30° - \mathrm{ctg}45°$;
3) $2\sin45° - 4\cos30°$; 4) $6\mathrm{ctg}60° - 2\sin60°$.

4.25. Используя тождество $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, упростите выражения:

1) $\sin^2\alpha - 1$; 2) $\sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha$;
3) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$;
4) $\cos^2\alpha - \cos^4\alpha + \sin^4\alpha$.

B

4.26. Выберите какое-либо значение m так, чтобы $-1<m<1$, и постройте угол φ, удовлетворяющий равенству:

1) $\sin\varphi=m$; 2) $\cos\varphi=m$.

Сколько таких углов α существует? Обоснуйте ответ.

4.27. Упростите выражения:

1) $\sin^4\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha$;

2) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha-\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$;

3) $\dfrac{\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$; 4) $\dfrac{1-2\sin^2\alpha}{2\cos^2\alpha-1}$.

4.28. Вычислите:

1) $2\cos\dfrac{\pi}{3}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3}$; 2) $7\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{6}\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{6}$; 3) $2\sin\dfrac{\pi}{6}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}$;

4) $3\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3}$; 5) $4\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{4}\sin\dfrac{\pi}{3}$; 6) $12\sin\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{3}$.

4.29. Найдите значения выражений:

1) $\sin\dfrac{3\pi}{4}\cos\dfrac{3\pi}{4}-\operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{4}+1{,}5\operatorname{ctg}\dfrac{3\pi}{4}$;

2) $\operatorname{tg}^2\dfrac{2\pi}{3}-\operatorname{ctg}^2\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{10}{3}\sin^2\dfrac{2\pi}{3}+\cos^2\dfrac{2\pi}{3}$;

3) $4\cos\dfrac{5\pi}{6}\sin\dfrac{5\pi}{6}+3\operatorname{tg}^2\dfrac{5\pi}{6}$; 4) $\operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{4}\sin\dfrac{3\pi}{2}-\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{\pi}{6}$.

4.30. Упростите выражения:

1) $(1+\operatorname{tg}^2\alpha)\cos^2\alpha$; 2) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$; 3) $\dfrac{\cos^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha}{\sin^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}$.

4.31. Найдите значение выражения $\sin^2\alpha-\cos\alpha+\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha$ при:

1) $\varphi=\dfrac{4\pi}{3}$; 2) $\varphi=\dfrac{5\pi}{3}$; 3) $\varphi=\dfrac{5\pi}{4}$; 4) $\varphi=\dfrac{7\pi}{4}$.

4.32. Найдите значение выражения $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)+2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)+$

$+4\cos x+2\cos\cdot\left(x+\dfrac{3\pi}{4}\right)$ при: 1) $x=\dfrac{\pi}{4}$; 2) $x=\dfrac{3\pi}{4}$.

C

4.33. Докажите тождество:

1) $\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$; 2) $\dfrac{1-2\sin^2\alpha}{2\cos^2\alpha-1}=1$.

4.34. Найдите значение выражения $\dfrac{4\cos\varphi-3\sin\varphi}{\sin\varphi+2\cos\varphi}$, если:

1) $\operatorname{tg}\varphi=2$; 2) $\operatorname{ctg}\varphi=0{,}5$.

2) ▲ $\operatorname{ctg}\varphi=0{,}5 \Rightarrow \dfrac{4\cos\varphi-3\sin\varphi}{\sin\varphi+2\cos\varphi}=\dfrac{\sin\varphi\left(4\dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi}-3\right)}{\sin\varphi\left(1+2\dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\right)}=$

$=\dfrac{4\operatorname{ctg}\varphi-3}{1+2\operatorname{ctg}\varphi}=\dfrac{2-3}{1+1}=-0{,}5$.

Ответ: $-0{,}5$. ■

4.35. Докажите тождество:

1) $\dfrac{\sin^2\gamma}{\sin\gamma-\cos\gamma}+\dfrac{\sin\gamma+\cos\gamma}{1-\operatorname{tg}^2\gamma}=\sin\gamma+\cos\gamma$;

2) $\dfrac{1-4\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{(\sin\varphi+\cos\varphi)^2}=1-2\sin\varphi\cos\varphi$;

3) $\dfrac{\operatorname{tg}^2\beta+\operatorname{tg}\beta+1}{\operatorname{ctg}^2\beta+\operatorname{ctg}\beta+1}=\operatorname{tg}^2\beta$.

Упражнения для повторения

4.36. Решите квадратные неравенства:

1) $x^2-4x+3<0$; 2) $2x^2-5x+3\geqslant0$;
3) $4x^2+x+1\leqslant0$; 4) $3x^2-x-1>0$.

4.37. Покажите, что выражение:

1) $\left(5+3\sqrt{7}\right)^2+\left(5-3\sqrt{7}\right)^2$; 2) $\left(\sqrt{\sqrt{45}+2\sqrt{5}}+\sqrt{\sqrt{45}-2\sqrt{5}}\right)^2-6\sqrt{5}$

является рациональным числом.

4.3. Свойства тригонометрических функций

Изучив материалы данной темы, вы будете:

- находить с помощью единичной окружности область определения и множество значений тригонометрических функций;
- определять с помощью единичной окружности четность (нечетность) и промежутки знакопостоянства тригонометрических функций.

Рассмотрим некоторые простейшие свойства тригонометрических функций.

4.3.1. Знаки тригонометрических функций

По определению на единичной окружности ($R=1$) верны равенства $\sin\alpha=y$, $\cos\alpha=x$, $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{y}{x}$ и $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{x}{y}$ (рис. 4.13).

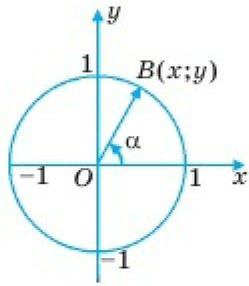


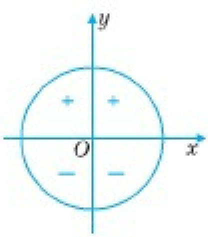
Рис. 4.13

Если $B(x;y)$ находится в I координатной четверти, то $x>0$, $y>0$, а следовательно, выполняются неравенства $\sin\alpha>0$, $\cos\alpha>0$, $\operatorname{tg}\alpha>0$, $\operatorname{ctg}\alpha>0$.

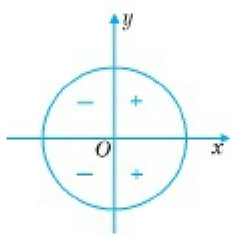
Если $B(x;y)$ находится во II четверти, то $x<0$, $y>0$. Поэтому $\sin\alpha>0$, $\cos\alpha<0$, $\operatorname{tg}\alpha<0$, $\operatorname{ctg}\alpha<0$.

Если $B(x;y)$ находится в III четверти, то $x<0$, $y<0$. Поэтому $\sin\alpha<0$, $\cos\alpha<0$, $\operatorname{tg}\alpha>0$, $\operatorname{ctg}\alpha>0$.

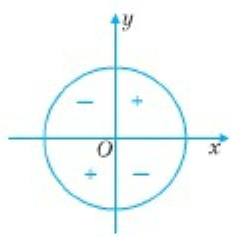
Если $B(x;y)$ находится в IV четверти, то $x>0$, $y<0$. Поэтому $\sin\alpha<0$, $\cos\alpha>0$, $\operatorname{tg}\alpha<0$, $\operatorname{ctg}\alpha<0$.



Знаки синуса



Знаки косинуса



Знаки тангенса и котангенса

Рис. 4.14

На рис. 4.14 изображены знаки тригонометрических функций в соответствующих координатных четвертях.

Пример 1. Пусть а) $\alpha = 350°$; б) $\alpha = \frac{3\pi}{5}$. Определим знаки $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$.

▲ а) Так как угол, равный 350°, находится в IV четверти, то $\sin 350°<0$, $\cos 350°>0$, $\operatorname{tg} 350°<0$, $\operatorname{ctg} 350°<0$.

б) Так как $\frac{\pi}{2}<\frac{3\pi}{5}<\pi$, то соответствующий угол находится во II четверти. Тогда $\sin\frac{3\pi}{5}>0$, $\cos\frac{3\pi}{5}<0$, $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{5}<0$, $\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{5}<0$. ■

4.3.2. Четность тригонометрических функций

Определение 1. *Функция $y=f(x)$ называется **четной**, если для каждого значения аргумента x выполняется равенство*

$$f(-x)=f(x). \qquad (1)$$

Здесь область определения функции должна быть симметричной относительно начала координат.

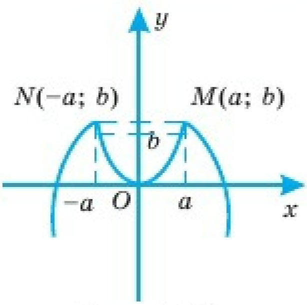


Рис. 4.15

Например, функции $y=x^2$, $y=|x|$ четные, так как $(-x)^2=x^2$, $|-x|=|x|$.

Если точка $M(a;\ b)$ принадлежит графику функции $y=f(x)$, то выполняется равенство $b=f(a)$. А в силу равенства (1) $f(-a)=f(a)=b$. Следовательно, точка $N(-a;\ b)$ также принадлежит графику функции $y=f(x)$. Отсюда следует, что *график четной функции симметричен относительно оси Oy* (рис. 4.15).

Определение 2. *Функция $y=f(x)$ называется **нечетной**, если для каждого значения аргумента x выполняется равенство*

$$f(-x)=-f(x). \qquad (2)$$

Здесь область определения функции должна быть симметричной относительно начала координат.

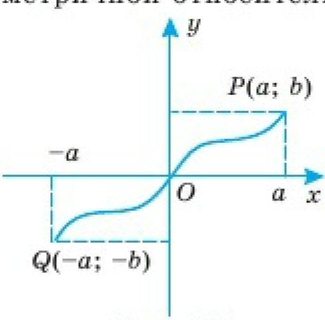


Рис. 4.16

Например, функции $y=x$, $y=x^3$ нечетные.

Если точка $P(a;\ b)$ принадлежит графику нечетной функции $y=f(x)$, то $b=f(a)$. По определению $f(-a)=-f(a)=-b$. Следовательно, точка $Q(-a;\ -b)$ также принадлежит графику этой функции, т.е. *график нечетной функции симметричен относительно начала координат* (рис. 4.16).

Из сказанного выше не следует думать, что функции делятся на четные и нечетные. Например, функция $f(x)=x+x^2$ не является четной и не является нечетной, т.к. $f(-x)=-x+x^2$, т.е. $f(-x)\neq f(x)$ и $f(-x)\neq -f(x)$, ни одно из равенств (1) и (2) не выполняется.

Наряду с этим, чтобы функция являлась четной или нечетной, *область ее определения должна быть симметрична относительно начала координат*, потому что в области определения функции наряду с точкой a находится и точка $-a$. Только тогда представляется возможность проверки четности или нечетности функции с помощью равенств (1), (2).

Функции, которые не являются четными и не являются нечетными, называются ***функциями общего вида*** (ФОВ). Тогда функция $f(x)=x+x^2$ является функцией общего вида.

На рис. 4.17 углам α и $-\alpha$ соответствуют точки B и C. Если $B(x;\,y)$, то $C(x;\,-y)$. Поэтому $\sin(-\alpha)=-y=-\sin\alpha$, $\cos(-\alpha)=x=\cos\alpha$,

$$\operatorname{tg}(-\alpha)=\frac{-y}{x}=-\operatorname{tg}\alpha,\ \operatorname{ctg}(-\alpha)=\frac{x}{-y}=-\operatorname{ctg}\alpha.$$

Тогда по определению функции $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ являются ***нечетными***, а функция $\cos\alpha$ – ***четной***.

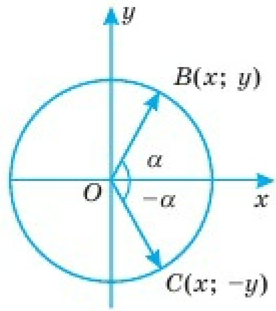


Рис. 4.17

Пример 2. Определим четность или нечетность функции $f(x)=\sin x\cdot\operatorname{tg}^2x$.

▲ Если для каждого значения x справедливо равенство $f(-x)=-f(x)$, то функция $f(x)$ является нечетной. А если справедливо равенство $f(-x)=f(x)$, то функция $f(x)$ является четной. Из этого определения, учитывая, что $\sin x$, $\operatorname{tg}x$ – нечетные функции, получим равенство

$$f(-x)=\sin(-x)\operatorname{tg}^2(-x)=(-\sin x)(-\operatorname{tg}x)^2=-\sin x\operatorname{tg}^2x=-f(x).$$

Тогда $f(x)$ – нечетная функция. ■

4.3.3. Периодичность тригонометрических функций

Определение 3. *Если для функции $y=f(x)$ существует число $T\neq 0$ такое, что для любого значения аргумента x выполняется равенство*

$$f(x+T)=f(x), \qquad (3)$$

*то функция называется **периодической**, а число T – **периодом** функции.*

Из равенства (3) следует, что каждое значение периодической функции $y=f(x)$ повторяется через каждый промежуток длиной T. Это свойство периодической функции используют при построении ее графика. Например, функция $y=\{x\}$ периодическая (выражение $\{x\}$ определяет дробную часть числа x), ее период равен 1. Действительно, если к числу x прибавить 1,

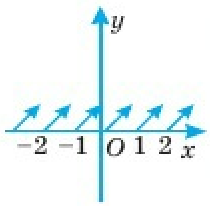


Рис. 4.18

то целая часть числа увеличится на 1, а дробная ее часть не меняется: $\{x+1\}=\{x\}$. Это значит, что вид графика этой функции в промежутке $[0;\ 1)$ такой же, что и в промежутках $[1;\ 2)$, $[2;\ 3)$ и т. д. (рис. 4.18). Если число T является периодом функции $y=f(x)$, то числа $\pm 2T$, $\pm 3T$, $\pm 4T$,... также являются периодами этой функции. Действительно,

$f(x+2T)=f((x+T)+T)=f(x+T)=f(x)$,

$f(x+3T)=f((x+2T)+T)=f(x+2T)=f(x)$, ... и т.п.,

аналогично

$f(x-T)=f((x-T)+T)=f(x)$,

$f(x-2T)=f((x-2T)+2T)=f(x)$, ... и т.п.

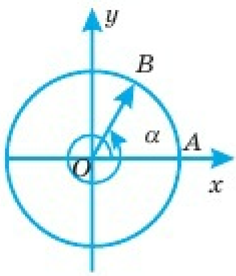


Рис. 4.19

Итак, каждая периодическая функция имеет бесчисленное множество периодов. А здесь в качестве T берут наименьший положительный период этой функции. Например, для функции $y=\{x\}$ числа ± 1, ± 2, ± 3, ± 4 являются периодами, а 1 – ее наименьший положительный период.

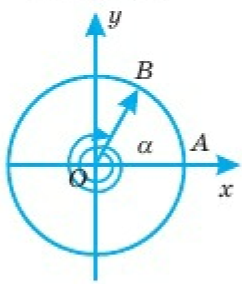


Рис. 4.20

На рис. 4.19 точке B соответствует угол α или угол $\alpha+2\pi$. А на рис. 4.20 точке B соответствует угол α или угол $\alpha-4\pi$. Следовательно, по определению $\sin\alpha=y$, $\sin(\alpha+2\pi)=y$, $\sin(\alpha-4\pi)=y$. Отсюда $\sin\alpha=\sin(\alpha+2\pi)=\sin(\alpha-4\pi)$. В целом аналогично точке B соответствуют углы α и $\alpha+2\pi n$, $n\in Z$ и поэтому верно равенство $\sin(\alpha+2\pi n)=\sin\alpha$, т.е. функция $\sin\alpha$ периодическая и ее период равен $2\pi n$, n – любое целое число. Аналогично $\cos(\alpha+2\pi n)=\cos\alpha$, где $n\in Z$, т.е. функция $\cos\alpha$ периодическая и ее период равен $2\pi n$. Так как полному обороту против хода часовой стрелки соответствует угол 2π, то это число является наименьшим положительным периодом функций $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

А наименьший положительный период функций $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ равен π. Действительно, радиус-векторы, определяемые углами α и $\alpha+\pi$, противоположно направлены и поэтому находятся в противоположных координатных четвертях. Следовательно, если углу α на единичной окружности соответствует точка $B(x;y)$, то углу $\alpha+\pi$ – точка $C(-x;-y)$ (рис. 4.21). Так как $\sin(\alpha+\pi)=-\sin\alpha$, $\cos(\alpha+\pi)= =-\cos\alpha$, то

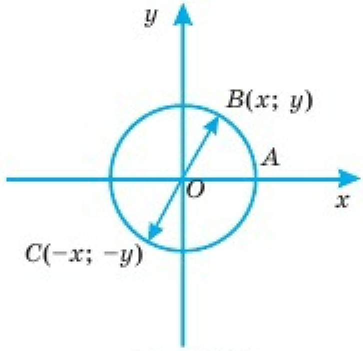


Рис. 4.21

$$\operatorname{tg}(\alpha+\pi)=\frac{\sin(\alpha+\pi)}{\cos(\alpha+\pi)}=\frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha,$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\pi)=\frac{\cos(\alpha+\pi)}{\sin(\alpha+\pi)}=\frac{-\cos\alpha}{-\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha.$$

Отсюда имеем, что период функций $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ равен $n\pi$ $(n\in Z)$.

Итак, период функций $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ равен $2\pi n$, $(360°\pi)$, а их наименьший положительный период равен 2π, $(360°)$. Также период функций $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ равен πn, $(180°n)$, а их наименьший положительный период равен π, $(180°)$. Здесь $n=0;\ \pm1;\ \pm2;\ \pm3;\ \pm4;\ \ldots$ – любое целое число.

Пример 3. Найдем значения функций $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ при: а) $\alpha=-1125°$; б) $\alpha=\frac{25\pi}{3}$.

▲ а) Здесь надо учитывать периодичность тригонометрических функций. Так как $1125°=3\cdot360°+45°$, то

$$\sin(-1125°)=-\sin1125°=-\sin(3\cdot360°+45°)=-\sin45°=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos(-1125°)=\cos1125°=\cos(3\cdot360°+45°)=\cos45°=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\operatorname{tg}(-1125°)=-\operatorname{tg}1125°=-\operatorname{tg}45°=-1,$$

$$\operatorname{ctg}(-1125°)=-\operatorname{ctg}45°=-1.$$

б) Так как $\frac{25\pi}{3} = 4\cdot 2\pi + \frac{\pi}{3}$, то

$$\sin\frac{25\pi}{3} = \sin\left(4\cdot 2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos\frac{25\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg}\frac{25\pi}{3} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3},\ \operatorname{ctg}\frac{25\pi}{3} = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$ ■

1. Сформулируйте основные свойства тригонометрических функций:
   а) их знаки;
   б) четность;
   в) периодичность.
   Обоснуйте их.
2. Назовите наименьший положительный период тригонометрических функций.

Практическая работа

Разбейте промежуток $\left(-\frac{\pi}{2};\pi\right)$ на две части так, чтобы в каждой из них функция: 1) $y = \sin x$; 2) $y = \cos x$ не меняла свой знак.

Упражнения

А

4.38. Определите знаки тригонометрических функций углов:

1) $143°$; 2) $-243°$; 3) $735°$; 4) $-735°$; 5) $300°$;
6) $\frac{3\pi}{5}$; 7) $\frac{4\pi}{3}$; 8) $-0,5$; 9) 4; 10) $-7,3$.

4.39. Определите знаки выражений:

1) $\sin 300° \cdot \cos 200°$; 2) $\sin 193° \cdot \operatorname{tg} 202°$;
3) $\cos 40° \cdot \sin 120° \cdot \operatorname{tg} 150°$; 4) $\operatorname{tg} 97° \cdot \operatorname{ctg} 197° \cdot \cos 297°$;
5) $\sin\frac{3\pi}{5} \cdot \cos\frac{4\pi}{3}$; 6) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{3} \cdot \operatorname{ctg}\frac{7\pi}{6}$;
7) $\cos 8 \cdot \cos 5 \cdot \operatorname{tg} 1$; 8) $\operatorname{tg} 5 \cdot \operatorname{ctg} 3 \cdot \sin 2$;
9) $\operatorname{ctg}(-3) \cdot \cos(-5)$.

8) ▲ Нужно определить знак выражения $\operatorname{tg} 5 \cdot \operatorname{ctg} 3 \cdot \sin 2$.
Т.к. $4,75 < \frac{3\pi}{2} < 5 < 2\pi$, $\frac{\pi}{2} < 3 < \pi$, $\frac{\pi}{2} < 2 < \pi$, то $\operatorname{tg} 5 < 0$, $\operatorname{ctg} 3 < 0$ и $\sin 2 > 0$. Поэтому $\operatorname{tg} 5 \cdot \operatorname{ctg} 3 \cdot \sin 2 > 0$. ■

4.40. В какой координатной четверти расположен угол α, если:

1) $\sin\alpha>0$ и $\cos\alpha>0$; 2) $\sin\alpha<0$ и $\cos\alpha>0$;
3) $\sin\alpha>0$ и $\cos\alpha<0$; 4) $\operatorname{tg}\alpha<0$ и $\cos\alpha>0$;
5) $\sin\alpha>0$ и $\operatorname{tg}\alpha>0$; 6) $\operatorname{ctg}\alpha>0$ и $\sin\alpha<0$?

4.41. В какой координатной четверти знаки выражений:

1) $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$; 2) $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$; 3) $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ одинаковые?

4.42. Определите четность функции (устно):

1) $y=x^{10}$; 2) $y=x^{-2}$; 3) $y=\sqrt{x}$;
4) $y=\sqrt{x^6}$; 5) $y=x^4-2x^2+3$; 6) $y=x^3-5x$;
7) $y=x+\sin x$; 8) $y=x^2-\cos x$; 9) $y=x^5\cdot\operatorname{tg}x$.

4.43. Исследуйте функцию на четность:

1) $f(x)=9$; 2) $g(x)=0$; 3) $h(x)=(2-3x)^3+(2+3x)^3$;
4) $f(x)=(5x-2)^4+(5x+2)^4$;
5) $f(x)=(x-6)^9(x+3)^5+(x+6)^9(x-3)^5$.

B

4.44. Определите четность функции:

1) $y=(x+3)|x-1|+(x-3)|x+1|$; 2) $y=(x+5)|x-3|-(x-5)|x+3|$;

3) $y=\dfrac{|x-7|}{x+1}+\dfrac{|x+7|}{x-1}$; 4) $y=\dfrac{|x-4|}{x+2}+\dfrac{|x+4|}{x-2}$;

5) $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2}{x+1}-\dfrac{x^3+2x^2}{x-1}$;

6) $g(x)=\dfrac{(x-1)^5}{(3x+4)^3}-\dfrac{(x+1)^5}{(3x-4)^3}$.

4.45. Укажите наименьший положительный период функции:

1) $y=\{2x\}$; 2) $y=\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$; 3) $y=\left\{\dfrac{x}{3}\right\}$;

4) $y=\operatorname{tg}3x$; 5) $y=\sin 2x$; 6) $y=\operatorname{ctg}\left(\dfrac{x}{3}\right)$.

3) ▲ $y=\left\{\dfrac{x}{3}\right\}\Rightarrow 0\leqslant\dfrac{x}{3}<1\Rightarrow 0\leqslant x<3\Rightarrow$ наименьший положительный период, равный 3.

Ответ: 3. ■

4.46. Определите знаки выражений: 1) $\sin\frac{5\pi}{6}\cdot\cos\frac{2\pi}{5}$;

2) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}$; 3) $\cos\frac{5\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{4}$; 4) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}+\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}$.

4.47. Исследуйте функции на четность:

1) $y=1-\cos x$; 2) $y=x-\sin x$; 3) $y=x^2-\cos x$; 4) $y=x^3+\sin x$;

5) $y=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$; 6) $y=\frac{\operatorname{tg}x+1}{\operatorname{tg}x-1}$; 7) $y=\frac{x+\sin x}{x-\sin x}$;

8) $y=\frac{x^2-\sin^2 x}{1+\sin^2 x}$; 9) $y=\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$; 10) $y=\cos x\cdot\sin x$;

11) $y=\operatorname{tg}x\cdot\sin^2 x$; 12) $y=\sin x\cdot\operatorname{ctg}^2 x$.

4.48. Используя периодичность тригонометрических функций, найдите значения выражений:

1) $\sin 390°$; 2) $\cos 420°$; 3) $\operatorname{tg}540°$; 4) $\operatorname{ctg}450°$;

5) $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{3}$; 6) $\sin\frac{11\pi}{6}$; 7) $\cos\frac{9\pi}{4}$; 8) $\operatorname{ctg}\frac{10\pi}{3}$.

4.49. Проверьте справедливость утверждения:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{6}$; 2) $\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{6}<1$.

1) ▲ а) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$; б) $\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+$ $+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}>1$. Тогда $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\neq\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{6}$. ■

C

4.50. В какой координатной четверти может лежать угол α, если:

1) $|\sin\alpha|=\sin\alpha$; 2) $|\cos\alpha|=-\cos\alpha$;

3) $|\operatorname{tg}\alpha|=-\operatorname{tg}\alpha$; 4) $|\operatorname{ctg}\alpha|=\operatorname{ctg}\alpha$?

4.51. Напишите общую формулу для всех углов α, удовлетворяющих равенству:

1) $\sin\alpha=1$; 2) $\sin\alpha=0$; 3) $\sin\alpha=-1$;

4) $\cos\alpha=1$; 5) $\cos\alpha=0$; 6) $\cos\alpha=-1$.

4.52. Найдите знак суммы $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma$, если α, β и γ – углы треугольника.

4.53. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражений:

1) $1+\sin\alpha$; 2) $1-\cos\alpha$; 3) $2-3\sin\alpha$;
4) $2\cos^2\alpha-1$; 5) $|2-5\cos\alpha|$; 6) $2-5|\cos\alpha|$.

4.54. Может ли выполняться равенство:

1) $\sin\alpha+2\cos\alpha=3$; 2) $3\sin\alpha-2\cos\alpha=5$;
3) $5\cos\alpha-3\sin\alpha=8$; 4) $2\sin\alpha+5\cos\alpha=-7$?

4.55. Пусть функция $y=f(x)$ четная и: 1) $f(x)=\sqrt{x}$, $x\geqslant 0$; 2) $f(x)=x^2-3x$, $x\geqslant 0$; 3) $f(x)=x^2-2x$, $x\leqslant 0$; 4) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$, $x\leqslant 0$. Запишите формулу, определяющую функцию $f(x)$, и постройте график этой функции.

4.56. Пусть функция $y=f(x)$ нечетная и: 1) $f(x)=x^2$, $x\geqslant 0$; 2) $f(x)=x^2$, $x\leqslant 0$; 3) $f(x)=x^2-2x$, $x\geqslant 0$; 4) $f(x)=\sqrt{x}$, $x>0$. Запишите формулу, определяющую функцию $f(x)$, и постройте график этой функции.

4.57. Найдите наименьший положительный период функции $y=\{x\}+\cos\pi x$.

4.58. Найдите наименьший положительный период функции:

1) $y=\sin 2\pi x$; 2) $y=|\cos x|$; 3) $y=1+\sin^2 x$;
4) $y=\sin 2x+3\cos 3x$; 5) $y=\operatorname{tg}3x+5\operatorname{ctg}2x$.

Упражнения для повторения

4.59. Может ли функция $y=x^2+6x-1$ принимать значение, равное:

1) -1; 2) -8; 3) -11?

4.60. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} 2x-6<3-x \\ x^2-5x+4\leqslant 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2-3x+2\geqslant 0 \\ 2x^2-9x<0. \end{cases}$

4.4. Формулы приведения

Изучив материалы данной темы, вы будете:

- выводить и применять формулы приведения.

Если выполняется равенство $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$, то углы α и β являются углами, дополняющими друг друга до $\frac{\pi}{2}$ (***дополнительными углами***). А тригонометрические функции синус и косинус, тангенс и котангенс являются ***сходственными функциями***.

Теорема. *Значения сходственных функций дополнительных углов равны.*

▲ Покажем, что для дополнительных углов α и $\frac{\pi}{2}-\alpha$ верны равенства

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha,\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha. \qquad (1)$$

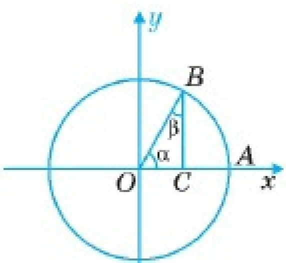


Рис. 4.22

Пусть $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, этому углу на единичной окружности соответствует точка $B(x;\ y)$ (рис. 4.22). Если $C(x;0)$, то $\beta=\angle OBC=\frac{\pi}{2}-\alpha$. Отсюда, по свойству прямоугольного треугольника, имеем $\cos\alpha=x$, $\sin\beta=x$, $\cos\beta=y$, $\sin\alpha=y$. Тогда $\sin\beta=\cos\alpha$ и $\cos\beta=\sin\alpha$, т.е. $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$.

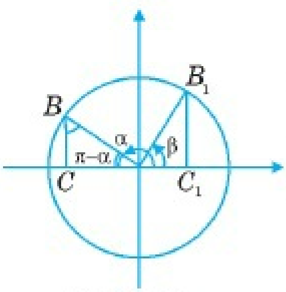


Рис. 4.23

Пусть теперь $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ (рис. 4.23). Здесь $B(x;y)$, $C(x;0)$. Если $\angle BOC=\pi-\alpha$, то $\angle CBO=\frac{\pi}{2}-\angle BOC=-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$. На единичной окружности возьмем точку $B_1(x_1;\ y_1)$, соответствующую углу $\beta=-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$. Тогда из равенства прямоугольных треугольников OBC и OB_1C_1 имеем равенства $y_1=-x$, $x_1=y$. Отсюда $\sin\beta=\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=y_1=-x=-\cos\alpha$. Так как $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$, то $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\alpha$. Равенство

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$ доказывается аналогично. В целом аналогично доказывается справедливость равенств (1) для любого угла α.

Теорема для других сходственных функций доказывается так:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha,$$
$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha. \quad (2)$$

Теорема доказана полностью. ■

Формулы, выражающие тригонометрические функции углов $\frac{\pi}{2}\pm\alpha, \pi\pm\alpha, \frac{3\pi}{2}\pm\alpha$ и $2\pi\pm\alpha$ через тригонометрические функции угла α, называют *формулами приведения*.

а) Если в формулах (1) и (2) α заменить на $-\alpha$, то получим формулы

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos(-\alpha)=\cos\alpha,$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sin(-\alpha)=-\sin\alpha, \quad (3)$$
$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{ctg}\alpha, \quad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{tg}\alpha.$$

б) Аналогично верны равенства

$$\sin(\pi+\alpha)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha,$$
$$\cos(\pi+\alpha)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha, \quad (4)$$
$$\operatorname{tg}(\pi+\alpha)=\operatorname{tg}\alpha, \qquad \operatorname{ctg}(\pi+\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha.$$

в) Если в формулах (4) α заменить на $-\alpha$, то получим формулы

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha, \qquad \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha, \qquad \operatorname{ctg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha. \quad (5)$$

г) Для угла $\frac{3\pi}{2}+\alpha$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+(\pi+\alpha)\right)=\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha,$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+(\pi+\alpha)\right)=-\sin(\pi+\alpha)=\sin\alpha, \qquad (6)$$

$$\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\mathrm{ctg}\alpha, \qquad \mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\mathrm{tg}\alpha .$$

д) Если в формулах (6) α заменить на $-\alpha$, то получим формулы

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha, \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha,$$

$$\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\mathrm{ctg}\alpha, \quad \mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\mathrm{tg}\alpha. \qquad (7)$$

е) Наконец, если учесть, что 2π является периодом тригонометрических функций, то

$$\sin(2\pi-\alpha)=\sin(-\alpha)=-\sin\alpha, \qquad \cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha,$$
$$\mathrm{tg}(2\pi-\alpha)=-\mathrm{tg}\alpha, \qquad \mathrm{ctg}(2\pi-\alpha)=-\mathrm{ctg}\alpha \qquad (8)$$

и

$$\sin(2\pi+\alpha)=\sin\alpha, \qquad \cos(2\pi+\alpha)=\cos\alpha,$$
$$\mathrm{tg}(2\pi+\alpha)=\mathrm{tg}\alpha, \qquad \mathrm{ctg}(2\pi+\alpha)=-\mathrm{ctg}\alpha. \qquad (9)$$

Итак, формулы (1)–(9) называются *формулами приведения*, которые легче записать в виде следующей таблицы:

x	$\frac{\pi}{2}-\alpha$ $90°-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$ $90°+\alpha$	$\pi-\alpha$ $180°-\alpha$	$\pi+\alpha$ $180°+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$ $270°-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$ $270°+\alpha$	$2\pi-\alpha$ $360°-\alpha$
$\sin x$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos x$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\mathrm{tg}x$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$
$\mathrm{ctg}x$	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$

Пример 1. Пусть а) $\beta=\frac{10\pi}{3}$; б) $\beta=-960°$. Найдем значения $\sin\beta$, $\cos\beta$, $\mathrm{tg}\beta$ и $\mathrm{ctg}\beta$.

▲ а) Так как $\beta=\frac{10\pi}{3}=3\pi+\frac{\pi}{3}=2\pi+\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)$, то, применяя формулы приведения, имеем:

$$\sin\frac{10\pi}{3}=\sin\left(2\pi+\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos\frac{10\pi}{3}=\cos\left(2\pi+\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2},$$

$$\mathrm{tg}\frac{10\pi}{3}=\mathrm{tg}\left(3\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3},$$

$$\mathrm{ctg}\frac{10\pi}{3}=\mathrm{ctg}\left(3\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\mathrm{ctg}\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

б) Учитывая, что $\beta=-960^\circ=-3\cdot360^\circ+120^\circ=-3\cdot360^\circ+(90^\circ+30^\circ)$, получим равенства

$$\sin(-960^\circ)=\sin(-3\cdot360^\circ+(90^\circ+30^\circ))=\sin(90^\circ+30^\circ)=\cos30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos(-960^\circ)=\cos(-3\cdot360^\circ+(90^\circ+30^\circ))=\cos(90^\circ+30^\circ)=-\sin30^\circ=-\frac{1}{2},$$

$$\mathrm{tg}(-960^\circ)=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}=-\sqrt{3},\qquad \mathrm{ctg}(-960^\circ)=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}.$$ ■

Пример 2. Докажем, что для любого α верно равенство

$$\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos^2\alpha}{1-\cos^2(\pi+\alpha)}+\frac{\cos^2(2\pi-\alpha)\sin^2\alpha}{1-\sin^2(2\pi+\alpha)}=1.$$

▲ По формулам приведения

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sin^2\alpha,\quad \cos^2(\pi+\alpha)=\cos^2\alpha,\quad \cos^2(2\pi-\alpha)=\cos^2\alpha,$$

$\sin^2(2\pi+\alpha)=\sin^2\alpha$. Тогда

$$\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos^2\alpha}{1-\cos^2(\pi+\alpha)}+\frac{\cos^2(2\pi-\alpha)\sin^2\alpha}{1-\sin^2(2\pi+\alpha)}=\frac{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}=$$

$$=\frac{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1.$$ ■

Замечание. Формулы приведения верны для любого угла α. Например, формулу $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$ нужно понимать следующим образом. Для любого угла α верно равенство $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$. Если предложить, что $\alpha=\frac{\pi}{12}$, то верно равенство $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{12}\right)=-\sin\frac{\pi}{12}$, а если $\alpha=\frac{7\pi}{12}$, то справедливо равенство $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{7\pi}{12}\right)=-\sin\frac{7\pi}{12}$.

Формулы приведения в виде таблицы, указанной выше, запомнить очень сложно. Если тщательно проанализировать таблицу формул приведения, то мы видим, что функции либо не меняются, либо меняются на сходственные функции. При этом знаки также меняются (либо знак «+», либо – «–»). Поэтому предполагая, что α – острый угол $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$, достаточно запомнить следующие правила применения формул приведения.

1-е правило. Определение знака. Нужно определить координатную четверть, в которой расположен радиус-вектор, соответствующий углу $\frac{\pi}{2}k+\alpha$, $(90°\cdot k+\alpha)$ или углу $\pi k+\alpha$, $(180°\cdot k+\alpha)$. Для формулы приведения берется тот знак, который имеет рассматриваемая функция в этой координатной четверти.

2-е правило. Изменение названия функции. Если в аргументе функции имеются слагаемые, кратные $\frac{\pi}{2}$, $(90°)$, т.е. слагаемые вида $\frac{\pi}{2}\cdot k$, $(90°\cdot k)$ (здесь k – нечетное число), то функция меняется на сходственную функцию.

Если в аргументе функции имеются слагаемые вида πk, $(180°k)$, то название функции не меняется.

Например, $\sin\left(\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha$, т.к. радиус-вектор угла $\frac{7\pi}{2}+\alpha=3\pi+\frac{\pi}{2}+\alpha$ расположен в IV четверти, и в нем синус принимает отрицательные значения, то берется знак «–». А поскольку угол $\frac{7\pi}{2}$ кратен $\frac{\pi}{2}$, то синус меняется на косинус.

1. Какие углы являются дополнительными?
2. Какие тригонометрические функции являются сходственными?
3. Докажите равенство значений сходственных тригонометрических функций дополнительных углов.
4. Что такое формулы приведения? Как вы их понимаете?

Практическая работа

На рис. 4.24. изображен график периодической функции $y=f(x)$ на отрезке $[-1;\ 1]$, основной период которой равен 2. Постройте график функции на отрезке $[-2;\ 5]$.

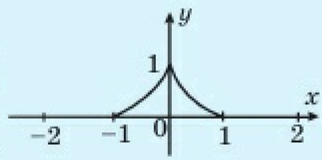


Рис. 4.24

Упражнения

А

4.61. Упростите выражение используя формулы приведения:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$; 2) $\cos(2\pi-\alpha)$; 3) $\operatorname{ctg}(360°-\alpha)$;

4) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$; 5) $\sin(2\pi+\alpha)$; 6) $\cos(90°-\alpha)$;

7) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$; 8) $\operatorname{tg}(180°-\alpha)$; 9) $\sin(270°-\alpha)$.

4.62. Приведите выражения к тригонометрической функции угла из промежутка $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$:

1) $\cos 0,7\pi$; 2) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{3\pi}{7}\right)$; 3) $\sin 1,6\pi$; 4) $\operatorname{tg}\left(-\frac{9\pi}{5}\right)$.

4.63. Приведите выражения к тригонометрической функции угла из промежутка $(0°;\ 90°)$:

1) $\operatorname{tg}137°$; 2) $\sin(-178°)$; 3) $\sin 680°$; 4) $\cos(-1000°)$.

4.64. Найдите значения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$ и $\mathrm{ctg}\alpha$, если:

1) $\alpha = \frac{3\pi}{2}$; 2) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$; 3) $\alpha = \frac{5\pi}{6}$.

4.65. Найдите значения выражений:

1) $\sin 240°$; 2) $\cos(-210°)$; 3) $\cos\frac{7\pi}{6}$; 4) $\cos\frac{4\pi}{3}$.

3) ▲ $\cos\frac{7\pi}{6} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. ■

4.66. Найдите значения выражений:

1) $\sin 330°$; 2) $\mathrm{tg} 300°$; 3) $\mathrm{ctg}(-225°)$;
4) $\sin(-150°)$; 5) $\mathrm{tg}(-225°)$; 6) $\cos 120°$.

5) ▲ $\mathrm{tg}\,(-225°) = -\mathrm{tg}225° = -\mathrm{tg}\,(180° + 45°) = -\mathrm{tg}45° = -1$. ■

B

4.67. Найдите значение $\mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$, если $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{10}{11}$.

4.68. Вычислите:

1) $3\sin\frac{\pi}{2} + 4\cos\frac{2\pi}{3} + 6\sin\frac{13\pi}{6}$;

2) $2\mathrm{tg}180° - 0{,}5\sin(-270°) + 0{,}5\cos 180°$.

4.69. Найдите значение выражения $2\mathrm{tg}1095° + \mathrm{ctg}975° - \mathrm{tg}(-195°)$, если $\mathrm{tg}15° = 2 - \sqrt{3}$.

4.70. Докажите тождества, если α, β и γ – углы треугольника:

1) $\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \cos\frac{\gamma}{2}$; 2) $\mathrm{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} = \cos\frac{\gamma}{2}$.

4.71. Упростите выражения:

1) $\sin^2(\pi+\alpha)$; 2) $\mathrm{tg}^2\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$; 3) $\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$;

4) $\sin^2(180° - x) + \sin^2(270° - x)$; 5) $\cos^2(\pi + x) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.

2) ▲ $\mathrm{tg}^2\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = (-\mathrm{ctg}\alpha)^2 = \mathrm{ctg}^2\alpha$. ■

4.72. Упростите выражения:

1) $\left(\sin(\pi+\alpha)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)^2+\left(\cos(2\pi-\alpha)-\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\right)^2$;

2) $\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)^2-\left(\operatorname{ctg}(\pi+\alpha)+\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\right)^2$;

3) $\sin160°\cos110°+\sin250°\cos340°+\operatorname{tg}110°\operatorname{tg}340°$;

4) $\operatorname{tg}18°\operatorname{tg}288°+\sin32°\sin148°-\sin302°\sin122°$.

C

4.73. Докажите тождества:

1) $\sin(60°-\alpha)=\cos(30°+\alpha)$; 2) $\operatorname{ctg}(80°-\alpha)=\operatorname{tg}(10°+\alpha)$;

3) $\dfrac{\cos^2(\pi-\alpha)+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos(\pi+\alpha)\cos(2\pi-\alpha)}{\operatorname{tg}^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{ctg}^2\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}=\cos^2\alpha$.

4.74. Найдите значения выражений:

1) $\operatorname{tg}15°\operatorname{tg}30°\operatorname{tg}45°\operatorname{tg}60°\operatorname{tg}75°$; 2) $\operatorname{ctg}18°\operatorname{ctg}36°\operatorname{ctg}54°\operatorname{ctg}72°$;

3) $\operatorname{tg}1°\operatorname{tg}2°\ldots\operatorname{tg}88°\operatorname{tg}89°$; 4) $\operatorname{ctg}88°\operatorname{ctg}86°\ldots\operatorname{ctg}4°\operatorname{ctg}2°$.

4.75. Вычислите:

1) $\sin225°\cos120°\operatorname{tg}330°\operatorname{ctg}240°$;

2) $\sin\frac{7\pi}{4}\cos\frac{7\pi}{6}\operatorname{tg}\frac{5\pi}{3}\operatorname{ctg}\frac{4\pi}{3}$;

3) $\cos(-7{,}9\pi)\operatorname{tg}(-1{,}1\pi)-\sin5{,}6\pi\operatorname{ctg}4{,}4\pi$;

4) $\sin5{,}9\pi\operatorname{tg}(-0{,}6\pi)+\cos3{,}6\pi\operatorname{ctg}(-4{,}9\pi)$.

Упражнения для повторения

4.76. Определите знаки тригонометрических функций углов:

1) $36°$; 2) $240°$; 3) $\frac{5\pi}{6}$; 4) 3.

4.77. Решите неравенства:

1) $\dfrac{2x^2-7x+5}{4-x^2}<0$; 2) $\dfrac{3x^2+4x-7}{x^2+8x+7}\leqslant 0$.

4.5. Тригонометрические формулы

Изучив материалы данной темы, вы будете:

- применять основные тригонометрические тождества при решении задач;
- выводить и применять тригонометрические формулы суммы и разности углов, формулы двойного и половинного углов;
- выводить и применять формулы преобразования в сумму или разность.
- выполнять тождественные преобразования тригонометрических выражений.

4.5.1. Применение основных тригонометрических тождеств при преобразовании тригонометрических выражений

При преобразовании тригонометрических выражений, зависящих от одного и того же аргумента, используют основное тригонометрическое тождество

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1, \qquad (1)$$

формулы, полученные из определения тангенса и котангенса:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad (2)$$

и следствия этих формул. Например, из равенств (2) получаем тождество

$$\operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{ctg}\alpha=1, \qquad (3)$$

а при почленном делении тождества (1) на $\sin^2\alpha$ и $\cos^2\alpha$ соответственно получаем тождества

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}, \qquad (4)$$

$$1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}. \qquad (5)$$

Теперь покажем применение этих формул для преобразования более сложных тригонометрических выражений.

Пример 1. Упростим выражение
$\sin\alpha\cos^2\alpha(1+\operatorname{tg}^2\alpha)+\cos\alpha\sin^2\alpha\cdot(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)$.

▲ Применяя формулы (4) и (5), имеем:

$$\sin\alpha\cos^2\alpha(1+\operatorname{tg}^2\alpha)+\cos\alpha\sin^2\alpha(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)=$$

$$=\sin\alpha\cos^2\alpha\frac{1}{\cos^2\alpha}+\cos\alpha\sin^2\alpha\frac{1}{\sin^2\alpha}=\sin\alpha+\cos\alpha.\ ■$$

Пример 2. Упростим выражение $2(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)-3(\sin^4\alpha+$ $+\cos^4\alpha)$.

▲ Возведя в квадрат правую и левую части формулы (1), имеем:

$$1=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2=\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha.$$

Отсюда $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2\cos^2\alpha\sin^2\alpha$.

Аналогично имеем:

$$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=(\sin^2\alpha)^3+(\cos^2\alpha)^3=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)\times$$
$$\times(\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)=\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha=$$
$$=1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha.$$

Тогда исходное выражение преобразовывается так:

$$2(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)-3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)=2(1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha)-$$
$$-3(1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha)=2-6\sin^2\alpha\cos^2\alpha-3+6\sin^2\alpha\cos^2\alpha=-1.$$ ■

Пример 3. Докажем тождество $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\cos^{-1}\alpha}{\cos\alpha-\operatorname{ctg}\alpha}=\operatorname{tg}\alpha\cos^{-1}\alpha$,

▲ Преобразуем левую часть данного тождества.

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha-\cos^{-1}\alpha}{\cos\alpha-\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{\cos^{-1}\alpha(\sin\alpha-1)}{\cos\alpha\left(1-\dfrac{1}{\sin\alpha}\right)}=\frac{\cos^{-1}\alpha(\sin\alpha-1)}{\operatorname{ctg}\alpha(\sin\alpha-1)}=\operatorname{tg}\alpha\cos^{-1}\alpha.$$

что и требовалось доказать. ■

Пример 4. Найдем значение выражения $\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=2{,}3$.

▲ Возведя обе части равенства $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=2{,}3$ в квадрат, получим:

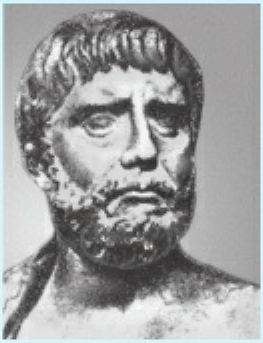
$$2{,}3^2=5{,}29=\operatorname{tg}^2\alpha+2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha=\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha+2.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha=5{,}29-2=3{,}29.$$ ■

Материалы из истории

Ученые с древних времен при измерении различных углов могли пользоваться элементами тригонометрии. Например, по свидетельству клинописных табличек в Древнем Вавилоне (2000 лет до н.э.) люди умели вычислять длину хорды круга по диаметру и высоте соответствующего сегмента. В своих



Фалес

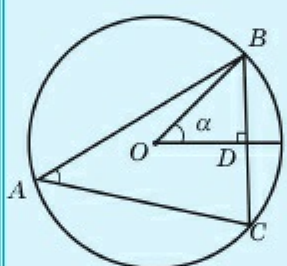
трудах Фалес Милетский (625–547 гг. до н.э.) отмечал, что египтяне могли вычислять высоту объекта по длине его тени.

Первую системную тригонометрическую таблицу создал К. Птоломей (II в. н.э.). Он в своих трудах, используя шестидесятиричную систему исчисления, рассматривал окружность, разделенную на 360 равных частей, влияние которой сохранилось по сей день (360°, минуты, секунды и т. п.). Вообще во II веке до н.э. древнегреческие ученые широко пользовались таблицей длин хорд окружности. В самом деле синус угла α, стягивающий хорду BC и вписанный в единичную окружность, равен половине хорды BD:

$\sin\alpha = \dfrac{BD}{BO} = BD$, так как $BO = 1$.

Улугбек

А индийские ученые в своих вычислениях, наряду с синусами, пользуясь косинусами, создали таблицу синусов и косинусов с довольно высокой точностью. Таблицы синусов и тангенсов также встречаются в астрономических трактатах аль-Хорезми (787–850). Впервые тригонометрию, независимо от астрономии, рассматривал уроженец города Туса (юг Азербайджана) Насиреддин ат-Туси (1201–1274). Он в своих трактатах доказал теорему синусов. Итак, ученые Средней Азии создали на арабском языке астрономические и тригонометрические таблицы (зиджи) – с разъяснениями и доказательствами о взаимосвязи тригонометрических функций. На сегодня сохранились сотни зиджей, среди которых особое место занимают таблицы Улугбека (уроженец Самарқанда, 1394–1449), которые на протяжении многих веков имели наивысшую точность.



Среди европейских математиков одним из первых, кто начал заниматься системным изложением тригонометрии, был немецкий математик И. Мюллер (его часто называют Региомонтаном – по названию места рождения, 1436–1476). До XVIII века тригонометрия не была сформирована в полной мере. Из-за того, что не было единого символического обозначения, тригонометрические формулы описывались в словесной форме, не до конца были решены вопросы о знаках тригонометрических функций в разных четвертях круга.

Л. Эйлер (1707–1783) при определении тригонометрических функций использовал тригонометрический круг и, опираясь на основные тригонометрические тождества, вывел и доказал все тригонометрические формулы. Он, рассматривая тригонометрические функции как безмерные числовые выражения, полностью решил вопрос о знаках для любого числового аргумента.

Нынешнее название тригонометрических функций появилось в XVI–XVIII веках. Слово *синус* на латинском означает *пазуха*, а добавка «ко» в слове *косинус* взята от латинского слова *complementi*, что означает *дополнение*. Современное обозначение $\sin x$ и $\cos x$ впервые в 1739 г. было предложено И. Бернулли в письме к Л. Эйлеру. В последующем Л. Эйлер и другие стали широко применять эти обозначения.

Упражнения

А

4.78. Упростите выражения:

1) $\mathrm{ctg}\beta - \dfrac{\cos\beta - 1}{\sin\beta}$;
2) $\dfrac{1}{\sin\alpha - 1} - \dfrac{1}{\sin\alpha + 1}$;

3) $\dfrac{1 - \mathrm{ctg}\gamma}{\mathrm{tg}\gamma - 1}$;
4) $\dfrac{\sin^2\theta - 1}{\cos^2\theta - 1} + \mathrm{tg}\theta\,\mathrm{ctg}\theta$;

5) $\mathrm{tg}^2\alpha(\sin^2\alpha - 1)$;
6) $\cos^2\alpha - (\mathrm{ctg}^2\alpha + 1)\sin^2\alpha$.

4.79. Преобразуйте выражения:

1) $\mathrm{tg}(-\alpha)\cos\alpha + \sin\alpha$;
2) $\cos^2\alpha\,\mathrm{tg}^2(-\alpha) - 1$;

3) $\dfrac{\mathrm{ctg}(-\beta)\sin\beta}{\cos\beta}$;
4) $\dfrac{1 - \mathrm{tg}(-x)}{\sin x + \cos(-x)}$;

5) $\mathrm{ctg}\alpha\sin(-\alpha) - \cos(-\alpha)$;
6) $\mathrm{tg}(-u)\mathrm{ctg}u + \sin^2 u$;

7) $\dfrac{1 - \sin^2(-y)}{\cos y}$;
8) $\dfrac{\mathrm{tg}(-x) + 1}{1 - \mathrm{ctg}x}$.

4.80. Покажите, что значения выражений не зависит от α:

1) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$;
2) $(\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{ctg}\alpha)^2 - (\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{ctg}\alpha)^2$;

3) $\dfrac{1}{1 + \mathrm{tg}^2\alpha} + \dfrac{1}{1 + \mathrm{ctg}^2\alpha}$;
4) $\dfrac{1 + \sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \dfrac{1 - \sin\alpha}{\cos\alpha}$;

5) $\dfrac{2 - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{3\sin^2\alpha + 3\cos^2\alpha}$;
6) $\dfrac{\sin^4\alpha - \cos^4\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$.

3) ▲ $\dfrac{1}{1+\text{tg}^2\alpha}+\dfrac{1}{1+\text{ctg}^2\alpha}=\left|\begin{matrix}1+\text{tg}^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\\ 1+\text{ctg}^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}\end{matrix}\right|=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1.$ ■

B

4.81. Докажите тождества:

1) $\dfrac{1+2\sin\alpha\cos\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}=1;$ 2) $\dfrac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha+1}{\sin^2\alpha}=2;$

3) $(2-\sin\alpha)(2+\sin\alpha)+(2-\cos\alpha)(2+\cos\alpha)=7;$

4) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha.$

4.82. Докажите тождества:

1) $\text{ctg}\alpha+\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{1}{\sin\alpha};$

2) $\dfrac{1-2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\sin\alpha-\cos\alpha;$

3) $\dfrac{1-\sin^2 x}{1-\cos^2 x}=\dfrac{1}{\text{tg}^2 x};$ 4) $\dfrac{\text{ctg}x}{\text{ctg}x+\text{tg}x}=\cos^2 x.$

4) ▲ $\dfrac{\text{ctg}\,x}{\text{ctg}\,x+\text{tg}\,x}=\dfrac{\dfrac{\cos x}{\sin x}}{\dfrac{\cos x}{\sin x}+\dfrac{\sin x}{\cos x}}=\dfrac{\cos x}{\sin x\left(\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin x\cdot\cos x}\right)}=\cos^2 x.$ ■

4.83. Найдите наибольшие значения выражений:

1) $1-(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha);$ 2) $1-\sin\alpha\ \cos\alpha\ \text{tg}\alpha;$

3) $\cos^2\alpha\ \text{tg}^2\alpha+5\cos^2\alpha-1;$ 4) $\sin\alpha+3\sin^2\alpha+3\cos^2\alpha.$

4.84. Вычислите:

1) $1+\sin\dfrac{\pi}{6}+\sin^2\dfrac{\pi}{6}+\sin^3\dfrac{\pi}{6};$ 2) $1-\cos\dfrac{\pi}{4}+\cos^2\dfrac{\pi}{4}-\cos^3\dfrac{\pi}{4};$

3) $1-\text{tg}\dfrac{\pi}{6}+\text{tg}^2\dfrac{\pi}{6}-\text{tg}^3\dfrac{\pi}{6};$ 4) $1+\cos\dfrac{\pi}{6}+\cos^2\dfrac{\pi}{6}+\cos^3\dfrac{\pi}{6}.$

4.85. Упростите выражения:

1) $\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}+\text{tg}\alpha;$ 2) $\text{ctg}x+\dfrac{\sin x}{1+\cos x};$

3) $\dfrac{1-\sin^2 x}{1-\cos^2 x}+\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{ctg}x$; 4) $(1-\cos^2\alpha)\operatorname{tg}^2\alpha+1-\operatorname{tg}^2\alpha$;

5) $(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha)^2-(\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha)^2$; 6) $\operatorname{ctg}^6 x-\dfrac{\cos^2 x-\operatorname{ctg}^2 x}{\sin^2 x-\operatorname{tg}^2 x}$.

6) ▲ $\operatorname{ctg}^6 x-\dfrac{\cos^2 x-\operatorname{ctg}^2 x}{\sin^2 x-\operatorname{tg}^2 x}=\operatorname{ctg}^6 x-\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\cdot\dfrac{1-\dfrac{1}{\sin^2 x}}{1-\dfrac{1}{\cos^2 x}}=$

$=\operatorname{ctg}^6 x-\operatorname{ctg}^2 x\cdot\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\cdot\dfrac{\sin^2 x-1}{\cos^2 x-1}=\operatorname{ctg}^6 x-\operatorname{ctg}^4 x\cdot\dfrac{-\cos^2 x}{-\sin^2 x}=$

$=\operatorname{ctg}^6 x-\operatorname{ctg}^6 x=0$. ■

4.86. Преобразуйте выражения:

1) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{tg}(\pi-\alpha)+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin(\pi-\alpha)$;

2) $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)+\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{tg}(2\pi-\alpha)$;

3) $(\operatorname{ctg}(6{,}5\pi-\alpha)\cos(-\alpha)+\cos(\pi-\alpha))^2+2\sin^2(\pi-\alpha)\operatorname{ctg}(\alpha-\pi)$;

4) $\left(\cos(2{,}5-\alpha)\operatorname{tg}(3\pi+\alpha)+\sin(-\alpha)\operatorname{tg}\left(\dfrac{5\pi}{2}+\alpha\right)\right)^2+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)$.

C

4.87. Избавьтесь от параметра t:

1) $\begin{cases}x=5\cos t,\\ y=5\sin t;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x=3\cos t,\\ y=5\sin t;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}x=\sin t+\cos t,\\ y=\sin t\cos t.\end{cases}$

4.88. Докажите тождества:

1) $(\operatorname{ctg}\alpha-\cos\alpha)(\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha)=(1+\cos\alpha)(1-\sin\alpha)$;

2) $1+\cos\alpha-\sin\alpha-\operatorname{ctg}\alpha=(1-\operatorname{ctg}\alpha)(1-\sin\alpha)$.

4.89. Найдите значения выражений, если $\operatorname{tg}\alpha=2$:

1) $\dfrac{3\sin\alpha-5\cos\alpha}{4\sin\alpha+\cos\alpha}$; 2) $\dfrac{2\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}{3\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha}$;

3) $\dfrac{\sin^3\alpha-2\cos^3\alpha}{2\sin^3\alpha+\cos^3\alpha}$; 4) $\dfrac{\sin\alpha+3\cos\alpha}{(\sin\alpha-\cos\alpha)\operatorname{ctg}^2\alpha}$

4.90. Найдите значения выражений, если $\operatorname{ctg}\alpha=-2$:

1) $\dfrac{2\sin\alpha+3\cos\alpha}{5\sin\alpha-\cos\alpha}$; 2) $\dfrac{2\cos^2\alpha-7\sin^2\alpha}{3\cos^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha}$;

3) $\dfrac{\cos\alpha+2\sin\alpha}{\sin^3\alpha-2\cos^3\alpha}$; 4) $\dfrac{(\sin\alpha+3\cos\alpha)\operatorname{tg}^2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$.

4.91. Докажите тождества:

1) $\dfrac{\cos\alpha\operatorname{ctg}\alpha-\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-\sin\alpha\cos\alpha}=\dfrac{1}{\sin\alpha}-\dfrac{1}{\cos\alpha}$;

2) $\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha-\cos^2\alpha\sin\alpha-\sin^2\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha+\cos\alpha\operatorname{ctg}\alpha}=\sin\alpha\cos\alpha$.

4.92. Докажите тождества:

1) $\sin^2\alpha\cos^2\beta-\cos^2\alpha\sin^2\beta=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$;

2) $\cos^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$;

3) $(\sin\alpha+\sin\beta)(\sin\alpha-\sin\beta)-(\cos\alpha+\cos\beta)(\cos\beta-\cos\alpha)=0$;

4) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$.

Упражнения для повторения

4.93. Найдите значения $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$, $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

4.94. Изобразите фигуру, заданную системой неравенств

$$\begin{cases} x+2y\leqslant 4, \\ y\geqslant x^2+6x-7 \end{cases}$$

4.95. Решите уравнение графически: $x^2-3x+2=0$.

4.5.2. Формулы сложения

Формулы, выражающие тригонометрические функции суммы и разности углов через тригонометрические функции этих углов, называются ***формулами сложения***. Выведем эти формулы.

Пусть даны углы α и β, $\alpha\geqslant\beta$, $\alpha-\beta\leqslant\pi$ и пусть на единичной окружности точка $B(x_1;y_1)$ соответствует углу α, а точка $C(x_2; y_2)$ – углу β (рис. 4.25). Тогда вектор $\overline{OB}$ имеет координаты $(x_1; y_1)$, а вектор $\overline{OC}$ – координаты $(x_2; y_2)$. По определению скалярного произведения векторов имеем:

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=x_1x_2+y_1y_2. \qquad (1)$$

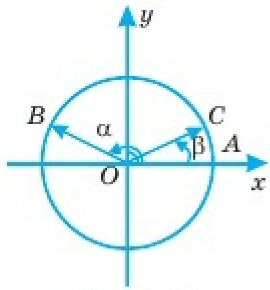


Рис. 4.25

Так как по определению синуса и косинуса выполняются равенства $\sin\alpha=y_1$, $\sin\beta=y_2$, $\cos\alpha=x_1$, $\cos\beta=x_2$, то равенство (1) можно записать так:

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\cos\alpha\,\cos\beta+\sin\alpha\,\sin\beta. \qquad (2)$$

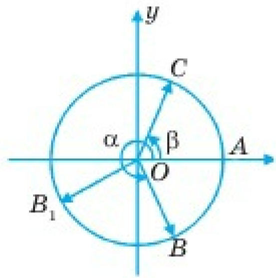


Рис. 4.26

С другой стороны, так как $\angle BOC=\alpha-\beta$, то по другому определению скалярного произведения векторов имеем:

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\left|\overrightarrow{OB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OC}\right|\cos(\angle BOC)=\cos(\alpha-\beta)\,. \qquad (3)$$

Теперь, сравнивая равенства (2) и (3), получим формулу

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\,\sin\beta. \qquad (4)$$

Здесь учитывается равенство $\left|\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OC}\right|=1$.

Если $\alpha-\beta>\pi$ (рис. 4.26), то $\angle BOC=2\pi-(\alpha-\beta)<\pi$ и выполняется равенство $\cos(\angle BOC)=\cos(2\pi-(\alpha-\beta))=\cos(\alpha-\beta)$. И в этом случае также выполняется формула (4).

Замечание. Мы показали справедливость формулы (4) при $0\leqslant\alpha<2\pi$, $0\leqslant\beta<2\pi$. На самом деле эта формула верна для любых углов α и β. Только нужно учесть, что в этом случае могут появиться дополнительные слагаемые вида $2\pi n$.

Итак, мы показали, что для любых α и β верна формула

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\,\cos\beta+\sin\alpha\,\sin\beta.$$

Из этой формулы вытекает справедливость формулы

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\,\cos\beta-\sin\alpha\,\sin\beta. \qquad (5)$$

Действительно,

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha-(-\beta))=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)=$$
$$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$

что и требовалось доказать. Аналогично верны формулы

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta, \qquad (6)$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta. \qquad (7)$$

Справедливость этих формул устанавливается так:

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)=$$
$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

и

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha+(-\beta))=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)=$$
$$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

Формулы (4)–(7) называются ***формулами сложения*** для синуса и косинуса. Из этих формул несложно получить справедливость формул

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}, \qquad \operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$
$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}, \qquad \operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}. \qquad (8)$$

Действительно:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}=$$
$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Докажите самостоятельно

Аналогично можно доказать другие формулы.

Пример 1. Найдем значения выражений:

а) $\cos\frac{7\pi}{12}$; б) $\sin105°$; в) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$.

▲ а) $\cos\frac{7\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} =$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}\left(1 - \sqrt{3}\right)}{4}.$$

б) $\sin 105° = \sin(60° + 45°) = \sin 60° \cos 45° + \cos 60° \sin 45° =$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}\left(1 + \sqrt{3}\right)}{4}.$$

в) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}}$. ■

Пример 2. Найдем наибольшее значение выражения $\cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha$.

▲ Записав данное выражение в виде

$$\cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha = 2\left(\frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)$$

и учитывая, что $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, имеем:

$$\cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha = 2\left(\sin\frac{\pi}{6}\cos\alpha - \cos\frac{\pi}{6}\sin\alpha\right) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right).$$

Так как наибольшее значение выражения $2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)$ равно 2, то наибольшее значение данного выражения также равно 2. ■

1. Какие формулы называются формулами сложения?
2. Приведите доказательство формул (4)–(8).

Практическая работа

С 2016 года банк выплачивает 10,5% от суммы вклада в тенге. Сколько денег получит вкладчик через 2 года, если первоначальная сумма вклада составляет 1 000 000 тг?

Упражнения

А

4.96. Преобразуйте выражения, пользуясь формулами сложения:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$; 2) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+y\right)$; 3) $\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$;

4) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$; 5) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$; 6) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+y\right)$;

7) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$; 8) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$.

4.97. Вычислите:

1) $\cos40°\cos20°-\sin40°\sin20°$;

2) $\cos70°\cos40°+\sin70°\sin40°$.

4.98. Упростите выражения:

1) $\cos5x\cos2x+\sin5x\sin2x$; 2) $\cos3x\cos x-\sin3x\sin x$;

3) $\cos\beta\sin5\beta-\sin\beta\cos5\beta$; 4) $\sin3\alpha\cos2\alpha+\sin2\alpha\cos3\alpha$.

4.99. Упростите выражения:

1) $\sin(x+y)-\cos x\sin y$; 2) $\cos(x-y)-\sin x\sin y$;

3) $\sin\alpha\cos\beta-\sin(\alpha-\beta)$; 4) $\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha-\beta)$.

4.100. Упростите выражения:

1) $\frac{\operatorname{tg}2x+\operatorname{tg}3x}{1-\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}3x}$; 2) $\frac{\operatorname{tg}5x-\operatorname{tg}2x}{1+\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}5x}$;

3) $\frac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}$; 4) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$;

5) $\frac{\cos\frac{3\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}-\sin\frac{3\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)}$; 6) $\frac{\cos\frac{5\pi}{6}\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{5\pi}{6}\sin\frac{\pi}{3}}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)}$.

6) ▲ $\frac{\cos\frac{5\pi}{6}\cdot\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{5\pi}{6}\cdot\sin\frac{\pi}{3}}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)}=\frac{\cos\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)}=\frac{\cos\frac{3\pi}{6}}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)}=0.$ ■

B

4.101. Докажите тождества:

1) $\sin(30°+x)\cos x-\cos(30°+x)\sin x=0,5$;

2) $\cos(60°+x)\cos x+\sin(60°+x)\sin x=0,5$;

3) $\dfrac{0,5\sin 20°-\cos 10°}{\sin 3°\sin 17°-\cos 3°\cos 17°}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

4) $\dfrac{\sin^2(x+y)+\sin^2(x-y)}{2\cos^2 x\cos^2 y}=\mathrm{tg}^2 x+\mathrm{tg}^2 y$;

5) $\dfrac{\mathrm{tg}(x-y)+\mathrm{tg}y}{\mathrm{tg}(x+y)-\mathrm{tg}y}=\dfrac{\cos(x+y)}{\cos(x-y)}$.

4.102. Проверьте истинность равенств:

1) $\dfrac{\sin 24°\cos 6°-\sin 6°\sin 66°}{\sin 21°\cos 39°-\sin 39°\cos 21°}=-1$;

2) $\dfrac{\sin 20°\cos 10°+\cos 160°\cos 100°}{\sin 21°\cos 9°+\cos 159°\cos 99°}=1$;

3) $\dfrac{\cos 63°\cos 3°+\cos 87°\cos 27°}{\cos 132°\cos 72°-\cos 42°\cos 18°}=1$;

4) $\dfrac{\cos 64°\cos 4°-\cos 86°\cos 26°}{\cos 71°\cos 3°+\cos 87°\cos 19°}=1$;

5) $\dfrac{\cos 66°\cos 4°-\cos 86°\cos 24°}{\cos 65°\cos 5°-\cos 85°\cos 25°}=1$;

6) $\dfrac{\cos 70°\cos 10°+\cos 80°\cos 20°}{\cos 68°\cos 8°+\cos 82°\cos 22°}=1$.

4) ▲ $\dfrac{\cos 64°\cdot\cos 4°-\cos 86°\cdot\cos 26°}{\cos 71°\cdot\cos 3°+\cos 87°\cdot\cos 19°}=$

$=\dfrac{\cos 64°\cdot\cos 4°-\cos(90°-4°)\cdot\cos(90°-64°)}{\cos 71°\cdot\cos 3°+\cos(90°-3°)\cdot\cos(90°-71°)}=$

$=\dfrac{\cos 64°\cdot\cos 4°-\sin 4°\cdot\sin 64°}{\cos 71°\cdot\cos 3°+\sin 3°\cdot\sin 71°}=\dfrac{\cos(64°+4°)}{\cos(71°-3°)}=\dfrac{\cos 68°}{\cos 68°}=1$. ■

4.103. Вычислите:

1) $\cos 105°$; 2) $\cos 15°$; 3) $\sin\dfrac{\pi}{12}$; 4) $\sin\dfrac{7\pi}{12}$; 5) $\mathrm{tg}75°$; 6) $\mathrm{ctg}15°$.

4.104. Найдите: 1) $\sin(\alpha-\beta)$, если $\cos\alpha = \frac{5}{13}$, $\sin\beta=-0,6$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$; 2) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$, если $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{3}$;

3) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, если $\sin\alpha = -\frac{40}{41}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{9}{40}$, $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.

4.105. Докажите тождество $\sin\gamma=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$, если α, β и γ – углы треугольника.

4.106. Найдите: 1) $\sin(\alpha+\beta)$ и $\cos(\alpha-\beta)$, если $\sin\alpha = \frac{8}{17}$, $\cos\beta = \frac{4}{5}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$; 2) $\cos(\alpha+\beta)$ и $\sin(\alpha-\beta)$, если $\sin\alpha = \frac{9}{41}$, $\sin\beta = -\frac{40}{41}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, $\frac{3\pi}{2}<\beta<2\pi$.

C

4.107. Найдите:

1) $\cos y$, если $\cos x=0,6$, $\cos(x+y)=0$, $0<x<\frac{\pi}{2}$, $\pi<y<\frac{3\pi}{2}$;

2) $\alpha+\beta$, если $\operatorname{tg}\alpha=0,5$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{3}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$;

3) $\alpha-\beta$, если $\sin\alpha = \frac{40}{41}$, $\sin\beta = -\frac{9}{41}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}<\beta<0$;

4) $\alpha+\beta$, $\operatorname{tg}\alpha=3$, $\operatorname{tg}\beta=-0,5$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}<\beta<0$.

4.108. Докажите, что: 1) $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$, если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{5}{11}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{3}{8}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$; 2) $\alpha-\beta=\frac{\pi}{6}$, если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{3a}}{4-a}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{a-1}{\sqrt{3}}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$.

4.109. Докажите тождества:

1) $\frac{\sin(x-y)}{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y}=\cos x\cos y$; 2) $\frac{\operatorname{ctg}x+\operatorname{ctg}y}{\sin(x+y)}=\frac{1}{\sin x\sin y}$;

3) $\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y}=\frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)}$; 4) $\frac{\sin(x-y)}{\sin(x+y)}=\frac{\operatorname{ctg}y-\operatorname{ctg}x}{\operatorname{ctg}y+\operatorname{ctg}x}$.

4.110. Найдите наименьшее и наибольшее значения выражений:

1) $\sin x+\cos x$; 2) $\sqrt{3}\cos y-\sin y$; 3) $\sin u-\sqrt{3}\cos u$;
4) $\sqrt{2}\sin x+\sqrt{6}\cos x$; 5) $3\sin x+4\cos x$; 6) $2\sin y-5\cos y$.

4.111. Упростите выражения:

1) $\sin^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+\sin^2 x$;

2) $\cos^2 x+\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}+x\right)$;

3) $\cos(x-y)(\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y-1)+(1+\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y)\cos(x+y)$;

4) $(\operatorname{ctg}x\operatorname{ctg}y+1)\cos(x+y)+(1-\operatorname{ctg}x\operatorname{ctg}y)\cos(x-y)$;

5) $\frac{\sin^2(x-y)+\sin^2(x+y)}{2\cos^2 x\cos^2 y}-\operatorname{tg}^2 x$;

6) $\operatorname{ctg}^2 x\operatorname{ctg}^2 y-\frac{\cos^2(x-y)+\cos^2(x+y)}{2\sin^2 x\sin^2 y}$.

4.5.3. Формулы двойного угла

Если в выражениях $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$, $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ и $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)$ формул сложения предположить, что $\alpha=\beta$, то тригонометрические функции двойного аргумента 2α можем выразить через тригонометрические функции угла α:

$$\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\cos\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha,$$

т.е. имеем формулы

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha, \qquad (1)$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha. \qquad (2)$$

Аналогично справедливы формулы

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}, \qquad \operatorname{ctg}2\alpha=\frac{1}{2}(\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha). \qquad (3)$$

Эти формулы называются *формулами двойного угла*. Преобразуя формулу (2), можно получить равенства

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-2\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha$$

и

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=2\cos^2\alpha-1.$$

Из этих равенств получаются формулы

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}, \qquad \cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}. \qquad (4)$$

Эти формулы называются *формулами понижения степени*.

Пример 1. Выразим $\sin3\alpha$ через $\sin\alpha$.

▲ $\sin3\alpha=\sin(2\alpha+\alpha)=\sin2\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\cos2\alpha=$
$=2\sin\alpha\cos\alpha\cos\alpha+(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\sin\alpha=$
$=2\sin\alpha\cos^2\alpha+\cos^2\alpha\sin\alpha-\sin^3\alpha=3\sin\alpha\cos^2\alpha-\sin^3\alpha=$
$=3\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)-\sin^3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha.$

Итак, $\sin3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$. Аналогично получается и формула $\cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$. ■

4.5.4. Формулы половинного угла

Если в формулах ((1)–(4)) двойного угла вместо α подставить $\frac{\alpha}{2}$, то получим формулы *половинного угла*:

$$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2},\quad \cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2},\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right),\quad \sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2},\quad \cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}. \qquad (5)$$

Применяя эти формулы, имеем:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Также верны равенства

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha},\qquad \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}.$$

Пример 2. Не применяя таблицу, нужно найти значение $\operatorname{tg}22°30'$.

▲ $$\operatorname{tg}22°30'=\operatorname{tg}\frac{45°}{2}=\frac{\sin45°}{1+\cos45°}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1\approx0,41.$$ ■

1. Напишите формулы $\sin2\alpha$, $\cos2\alpha$, $\operatorname{tg}2\alpha$, $\operatorname{ctg}2\alpha$ и докажите их.
2. Напишите формулы $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ и докажите их.

Упражнения

A

4.112. Сократите дроби:

1) $\dfrac{\sin 2\alpha}{2\cos\alpha}$; 2) $\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}$; 3) $\dfrac{2\cos^2\alpha}{\sin 2\alpha}$; 4) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$.

4.113. Упростите выражения:

1) $\cos2\alpha+\sin^2\alpha$; 2) $\cos^2\alpha-\cos2\alpha$;

3) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$; 4) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}-\cos\alpha$.

4.114. Упростите выражения:

1) $\cos^4 2x-\sin^4 2x$; 2) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha}-\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}$; 3) $1+\cos2x+2\sin^2x$;

4) $2\sin^2\alpha-1$; 5) $\sin^2x+\cos^4x-0{,}75$; 6) $2\cos^2x-1$.

3) ▲ $1+\cos2x+2\sin^2x=1+\cos^2x-\sin^2x+2\sin^2x=1+$ $+\cos^2x+\sin^2x=2$. ■

4.115. Упростите выражения:

1) $\cos^2\alpha-4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$; 2) $1-4\sin^2x\cos^2x$;

3) $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}2\alpha$; 4) $\dfrac{\cos 2x}{\sin x}+\dfrac{\sin 2x}{\cos x}$;

5) $\dfrac{\cos^2 x}{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}-\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}}$; 6) $\cos^4\dfrac{\alpha}{2}-\sin^4\dfrac{\alpha}{2}$.

4.116. Сократите дроби:

1) $\dfrac{\sin 40^\circ}{\sin 20^\circ}$; 2) $\dfrac{\cos 80^\circ}{\cos 40^\circ+\sin 40^\circ}$;

3) $\dfrac{\sin 100}{\cos 50^\circ}{}^\circ$; 4) $\dfrac{\cos 36^\circ+\sin^2 18^\circ}{\cos 18^\circ}$.

B

4.117. Найдите: 1) $\sin2\alpha$, $\cos2\alpha$, $\operatorname{tg}2\alpha$ и $\operatorname{ctg}2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{3}{4}$, $180^\circ<\alpha<270^\circ$; 2) $\cos2\alpha$ и $\sin2\alpha$, если $\sin\alpha=-\dfrac{12}{13}$, $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$.

2) ▲ $\sin\alpha = -\frac{12}{13},\ \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} =$

$= -\sqrt{1-\frac{144}{169}} = -\frac{5}{13}$. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot\left(-\frac{12}{13}\right)\left(-\frac{5}{13}\right) = \frac{120}{169}$,

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \left(-\frac{12}{13}\right)^2 - \left(-\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{144-25}{169} = \frac{119}{169}$. ■

4.118. Найдите $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\mathrm{tg}\, 2\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{7}{25}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

4.119. Найдите значения $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$ и $\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$, если:

1) $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;
2) $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$, $\frac{5\pi}{2} < \alpha < 3\pi$;
3) $\cos\alpha = -\frac{3}{4}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;
4) $\sin\alpha = -0,8$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

4.120. Упростите выражения:

1) $\dfrac{1-2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}-1}$;
2) $2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3x}{2}\right)-1$;
3) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha - \cos 2\alpha$;
4) $2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{3x}{2}\right)-1$.

4.121. Упростите выражения:

1) $\dfrac{1+\cos 42^\circ}{1-\cos 42^\circ}$;
2) $\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)-\sin^2 x$;
3) $\dfrac{1-2\cos\frac{x}{2}+\cos x}{1+2\cos\frac{x}{2}+\cos x}$;
4) $\dfrac{1-2\sin\frac{x}{2}-\cos x}{1+2\sin\frac{x}{2}-\cos x}$.

4.122. Выразите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$ и $\mathrm{ctg}\,\alpha$ через $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$.

4.123. Найдите значение выражения $\dfrac{2\sin\alpha - 3\cos\alpha}{4\sin\alpha + 5\cos\alpha}$, если $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = 3$.

C

4.124. Найдите: 1) $\cos 2\alpha$, если $\dfrac{\cos\alpha - 2\sin\alpha}{\sin\alpha - 2\cos\alpha} = -0,5$;

2) $\sin 2\alpha$, если $\dfrac{\cos\alpha + 2\sin\alpha}{2\sin\alpha - 3\cos\alpha} = -2$.

4.125. Вычислите:

1) $8\sin^2\dfrac{15\pi}{16}\cdot\cos^2\dfrac{17\pi}{16}$; 2) $\sin^4\dfrac{23\pi}{12} - \cos^4\dfrac{13\pi}{12}$;

3) $\mathrm{tg}\,\dfrac{7\pi}{8} + \mathrm{ctg}\,\dfrac{7\pi}{8}$; 4) $\mathrm{ctg}\,\dfrac{5\pi}{8} + \mathrm{ctg}\,\dfrac{9\pi}{8}$;

5) $\sin^2\dfrac{2\pi}{13} + \sin^2\dfrac{11\pi}{26}$; 6) $\cos^2\dfrac{3\pi}{34} + \cos^2\dfrac{7\pi}{17}$.

4.126. Докажите тождества:

1) $4\sin\alpha\,\cos^3\alpha - 2\sin 2\alpha\,\sin^2\alpha = \sin 4\alpha$;

2) $\dfrac{\mathrm{tg}\,x}{1+\mathrm{tg}^2 x} + \dfrac{\mathrm{ctg}\,x}{1+\mathrm{ctg}^2 x} = \sin 2x$;

3) $\mathrm{tg}^4\alpha(8\cos^2(\pi-\alpha) - \cos(\pi+4\alpha) - 1) = 8\sin^4\alpha$;

4) $2\mathrm{tg}\,\dfrac{\alpha}{2}(\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{ctg}\alpha)\left(1 - \mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{1}{\cos^4\dfrac{\alpha}{2}}$.

4.127. Упростите выражения:

1) $0,125\cos 4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha$;

2) $\sin^2\gamma\,\mathrm{tg}\gamma - \cos^2\gamma\,\mathrm{ctg}\gamma + 2\mathrm{ctg}\,2\gamma$;

3) $\dfrac{1}{\mathrm{tg}^2 x} - \dfrac{2\cos 2x}{1+\sin(2x+1,5\pi)}$;

4) $\dfrac{1}{1-\mathrm{tg}\,x} - \dfrac{\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)\sin x}{\cos 2x}$.

4.5.5. Формулы преобразования суммы и разности тригонометрических функций в произведение

При решении многих задач возникает необходимость преобразования суммы и разности тригонометрических функций в произведение. В этой связи преобразуем выражения $\sin\alpha+\sin\beta$, $\sin\alpha-\sin\beta$, $\cos\alpha+\cos\beta$, $\cos\alpha-\cos\beta$ в произведение.

Для этого, вводя обозначения $\alpha=x+y$, $\beta=x-y$ и применяя формулы сложения, имеем:

$$\sin\alpha+\sin\beta=\sin(x+y)+\sin(x-y)=$$
$$=\sin x\cdot\cos y+\sin y\cdot\cos x+\sin x\cdot\cos y-\sin y\cdot\cos x=2\sin x\cos y.$$

Из равенств $\alpha=x+y$, $\beta=x-y$ получаем $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$, $y=\frac{\alpha-\beta}{2}$. Поэтому верна формула

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (1)$$

Аналогично можно вывести формулы

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}, \qquad (2)$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \qquad (3)$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (4)$$

4.5.6. Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму или разность

Кроме того, имеются формулы, преобразующие выражения $\cos\alpha\cdot\cos\beta$, $\sin\alpha\cdot\sin\beta$ и $\sin\alpha\cdot\cos\beta$ в сумму:

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)], \qquad (5)$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)], \qquad (6)$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]. \qquad (7)$$

Методы доказательства этих формул подобны. Поэтому приведем доказательство лишь формулы (5). По формуле сложения $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$, $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\times$ $\times\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$. Почленно складывая эти равенства, получим:

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cdot\cos\beta,$$

или

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)].$$

Формулы (6) и (7) доказываются аналогично.

Пример 1. Упростим выражение $\sin 84° + \sin 36°$.

▲ По формуле (1)

$$\sin 84° + \sin 36° = 2\sin\frac{84° + 36°}{2}\cos\frac{84° - 36°}{2} = 2\sin 60°\cos 24° =$$

$$= \sqrt{3}\cos 24°. \blacksquare$$

Пример 2. Найдем значение выражения $\cos 12° - 2\sin 36°\sin 24°$.

▲ По формуле (6)

$$\cos 12° - 2\cdot\frac{1}{2}[\cos(36° - 24°) - \cos(36° + 24°)] = \cos 12° - \cos 12° +$$

$$+ \cos 60° = 0{,}5. \blacksquare$$

Пример 3. Преобразуем сумму $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y$ в произведение.

▲ $$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin x\cos y + \cos x\sin y}{\cos x\cos y} = \frac{\sin(x + y)}{\cos x\cos y}. \blacksquare$$

1. Напишите формулы, преобразующие сумму тригонометрических функций в произведение, и докажите их.
2. Напишите формулы, преобразующие произведение тригонометрических функций в сумму, и докажите их.
3. Как можно преобразовать сумму (разность) $\sin\alpha \pm \cos\beta$ в произведение?

Практическая работа

В учебниках, изданных ранее, часто встречаются обозначения $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$ (секанс) и $\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha}$ (косеканс). Преобразуйте сумму в произведение: 1) $\sec\alpha \pm \sec\beta$; 2) $\operatorname{cosec}\alpha \pm \operatorname{cosec}\beta$.

Упражнения

A

4.128. Преобразуйте в произведение:

1) $\cos 47° - \cos 15°$; 2) $\cos 58° + \cos 24°$;
3) $\sin 70° + \sin 30°$; 4) $\sin 17° - \sin 35°$.

4.129. Напишите в виде произведения:

1) $\sin\dfrac{2\pi}{5} + \sin\dfrac{\pi}{5}$; 2) $\cos\dfrac{11\pi}{12} + \cos\dfrac{3\pi}{4}$;

3) $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)+\cos\alpha$; 4) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$;

5) $\sin\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{9}$; 6) $\sin\alpha-\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$.

4.130. Напишите выражения в виде произведения:

1) $\sin15°+\cos65°$; 2) $\cos40°-\sin16°$; 3) $\cos50°+\sin80°$;
4) $\sin40°-\cos40°$; 5) $\cos18°-\sin22°$; 6) $\cos36°+\sin36°$.

4.131. Разложите на множители:

1) $\sin3\alpha+\sin\alpha$; 2) $\cos2\alpha+\cos3\alpha$;
3) $\cos x-\cos3x$; 4) $\sin y-\sin5y$.

4.132. Преобразуйте произведение в сумму:

1) $\sin\left(x+\frac{\pi}{8}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{8}\right)$; 2) $\cos(x+y)\cos(x-y)$;

3) $\sin75°\sin15°$; 4) $\cos40°\cos20°$;

5) $\sin(30°+x)\cos(30°-x)$; 6) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+y\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-y\right)$.

5) ▲ $\sin(30°+x)\cos(30°-x)=\frac{1}{2}\left[\sin(30°+x+30°-x)+\right.$
$\left.+\sin(30°+x-30°+x)\right]=\frac{1}{2}(\sin60°-\sin2x)=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{2}\sin2x$. ■

4.133. Представьте в виде произведения:

1) $\cos x+\sin y$; 2) $\sin x-\cos y$; 3) $\sin^2x-\sin^2y$;
4) $\cos^2x-\cos^2y$; 5) $\sin^2x-\cos^2y$; 6) $\mathrm{tg}\,x-\mathrm{tg}\,y$.

B

4.134. Докажите тождества:

1) $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$; 2) $\sin x-\cos x=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$.

4.135. Представьте в виде произведения:

1) $\mathrm{ctg}\,x+\mathrm{ctg}\,y$; 2) $\mathrm{ctg}\,x-\mathrm{ctg}\,y$; 3) $1+\mathrm{tg}\,x$; 4) $1+\mathrm{ctg}\,x$.

4.136. Разложите на множители:

1) $1+\cos\beta+\cos\frac{\beta}{2}$; 2) $3-\mathrm{tg}^2\beta$; 3) $\cos\beta-\sin\beta\sin2\beta$;

4) $\mathrm{ctg}^2\beta-3$; 5) $\cos\beta+\sin2\beta-\cos3\beta$;

6) $1-\mathrm{tg}\beta+\dfrac{1}{\cos\beta}$; 7) $3-4\sin^2\beta$; 8) $1-4\cos^2\beta$.

5) ▲ $\cos\beta+\sin2\beta-\cos3\beta=(\cos\beta-\cos3\beta)+\sin2\beta=$
$=-2\sin\dfrac{\beta+3\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\beta-3\beta}{2}+\sin2\beta=2\sin2\beta\cdot\sin\beta+\sin2\beta=$
$=\sin2\beta\,(2\sin\beta+1)$. ■

4.137. Упростите выражения:

1) $\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$; 2) $\dfrac{\sin x+\sin y}{\cos x+\cos y}$;

3) $\dfrac{2\sin y-\sin2y}{2\sin y+\sin2y}$; 4) $\dfrac{\mathrm{tg}2y+\mathrm{tg}y}{\mathrm{tg}2y-\mathrm{tg}y}$;

5) $\dfrac{1}{\mathrm{tg}2x\,\mathrm{tg}x+1}$; 6) $\dfrac{\sin(x+y)+\sin(x-y)}{\sin(x+y)-\sin(x-y)}$.

4.138. Вычислите:

1) $\sin15^\circ\cos7^\circ-\cos11^\circ\cos79^\circ-\sin4^\circ\sin86^\circ$;

2) $\cos17^\circ\cos73^\circ-\cos13^\circ\cos21^\circ-\cos4^\circ\cos86^\circ$.

C

4.139. Напишите в виде произведения:

1) $\sqrt{2}-2\cos\beta$; 2) $0,5+\sin\beta$.

4.140. Докажите тождества:

1) $1+2\cos2x=4\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+x\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)$;

2) $\sqrt{3}-2\sin2y=4\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-y\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+y\right)$;

3) $1-4\sin^2x=4\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+x\right)$;

4) $3-4\cos^2y=-4\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+y\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-y\right)$.

4.141. Упростите выражения:

1) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta-\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)$;

2) $\sin^2\varphi+\sin^2\psi+\cos(\varphi+\psi)\cos(\varphi-\psi)$;

3) $\cos^2\left(\varphi-\dfrac{5\pi}{8}\right)-\sin^2\left(\varphi-\dfrac{5\pi}{8}\right)$

4.142. Докажите формулы:

1) $\sin3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$; 2) $\cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$;

3) $\mathrm{tg}3\alpha=\dfrac{3\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}^3\alpha}{1-3\mathrm{tg}^2\alpha}$; 4) $\mathrm{ctg}3\alpha=\dfrac{\mathrm{ctg}^3\alpha-3\mathrm{ctg}\alpha}{3\mathrm{ctg}^2\alpha-1}$

4.143. Докажите тождества:

1) $\dfrac{\sin5\varphi-2\sin3\varphi\cos3\varphi}{1-\cos5\varphi-2\sin^2 3\varphi}=\mathrm{ctg}5,5\varphi$;

2) $\dfrac{2\cos^2 2\alpha+\cos5\alpha-1}{\sin5\alpha+2\cos2\alpha\sin2\alpha}=\mathrm{ctg}4,5\alpha$;

3) $\dfrac{\sin4\beta+2\sin2\beta}{2(\cos\beta+\cos3\beta)}=\cos\beta\ \mathrm{tg}2\beta$;

4) $\dfrac{2\cos\psi+\cos3\psi+\cos5\psi}{\cos3\psi+\sin\psi\sin2\psi}=4\cos2\psi$.

4.144. Напишите в виде произведения:

1) $\sqrt{3}-2\cos\varphi$; 2) $2\sin\varphi-\sqrt{3}$;

3) $\sqrt{2}+2\cos\varphi$; 4) $0,5-\sin\varphi$.

4.145. Разложите на множители:

1) $\sin\gamma+\sin2\gamma+\sin3\gamma+\sin4\gamma$;

2) $\cos2\gamma-\cos4\gamma-\cos6\gamma+\cos8\gamma$.

4.146. Найдите значение выражений:

1) $\cos2\gamma-\cos6\gamma$, если $\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$;

2) $\sin5\gamma-\sin3\gamma$, если $\sin\gamma=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Дополнительные упражнения к разделу 4

4.147. Докажите тождества:

1) $\dfrac{\mathrm{tg}2x+\mathrm{ctg}3y}{\mathrm{ctg}2x+\mathrm{tg}3y}=\dfrac{\mathrm{tg}2x}{\mathrm{tg}3y}$;

2) $\mathrm{tg}\gamma+\mathrm{ctg}\gamma+\mathrm{tg}3\gamma+\mathrm{ctg}3\gamma=\dfrac{8\cos^2 2\gamma}{\sin6\gamma}$;

3) $\dfrac{\sin 2x - \sin 3x + \sin 4x}{\cos 2x - \cos 3x + \cos 4x} = \operatorname{tg} 3x;$

4) $\sin^6 \dfrac{y}{2} - \cos^6 \dfrac{y}{2} = \dfrac{\sin^2 y - 4}{4} \cdot \cos y;$

5) $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + 4\alpha\right) + \sin(3\pi - 8\alpha) - \sin(4\pi - 12\alpha) =$

$= 4\cos 2\alpha \cos 4\alpha \sin 6\alpha;$

6) $(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 = 4\sin^2 \dfrac{\alpha - \beta}{2};$

7) $\dfrac{1 - \operatorname{tg}(90^\circ + \beta)}{1 + \operatorname{ctg}(360^\circ - \beta)} = \dfrac{\operatorname{tg}(180^\circ + \beta) + 1}{\operatorname{ctg}(270^\circ - \beta) - 1};$

8) $\dfrac{1 - 2\sin^2 x}{1 + \sin 2x} = \dfrac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x};$

9) $\cos 4\beta - \sin 4\beta \operatorname{ctg} 2\beta = \cos 2\beta - 2\cos^2\beta;$

10) $\cos^2 y - \sin^2 2y = \cos^2 y(1 - 4\sin^2 y).$

4.148. Упростите выражения:

1) $1 - \sin^2\left(\dfrac{x}{2} - 3\pi\right) - \cos^2\left(\dfrac{x}{4}\right) + \sin^2\left(\dfrac{x}{4}\right);$

2) $\sin^2\left(\dfrac{\alpha}{2} + 2\gamma\right) - \sin^2\left(\dfrac{\alpha}{2} - 2\gamma\right);$

3) $\cos^2(\varphi + 2\beta) + \sin^2(\varphi - 2\beta) - 1;$

4) $\sin^2(x + 2y) + \sin^2(x - 2y) - 1;$

5) $(\cos\alpha - \cos 2\beta)^2 + (\sin\alpha + \sin 2\beta)^2;$

6) $\dfrac{\operatorname{ctg}^2\left(\beta + \dfrac{\pi}{2}\right) - \cos^2\left(\beta - \dfrac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}^2\left(\beta - \dfrac{\pi}{2}\right) - \cos^2\left(\beta + \dfrac{\pi}{2}\right)};$

7) $\dfrac{\operatorname{ctg}(270^\circ - x)}{1 - \operatorname{tg}^2(x - 180^\circ)} \cdot \dfrac{\operatorname{ctg}^2(360^\circ - x) - 1}{\operatorname{ctg}(180^\circ + x)}.$

4.149. Разложите на множители:

1) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\beta}{2}\right) + \operatorname{ctg}\left(\dfrac{\beta}{2}\right) + 2;$

2) $\sin 4\beta - 2\cos^2 2\beta + 1;$

3) $\cos^{-4} y - \sin^{-4} y;$

4) $\dfrac{\operatorname{tg}^4\beta - \operatorname{tg}^6\beta}{\operatorname{ctg}^4\beta - \operatorname{ctg}^2\beta};$

5) $\dfrac{\sin\varphi-2\cos3\varphi-\sin5\varphi}{-\cos\varphi-2\sin3\varphi+\cos5\varphi}$; 6) $\dfrac{\sin4\varphi+\sin5\varphi+\sin6\varphi}{\cos4\varphi+\cos5\varphi+\cos6\varphi}$;

7) $\sin5\varphi-\sin6\varphi-\sin7\varphi+\sin8\varphi$;

8) $\cos3\varphi-\cos4\varphi-\cos5\varphi+\cos6\varphi$;

9) $\sin2\alpha+\sin4\alpha+\sin6\alpha$; 10) $3+4\cos4\alpha+\cos8\alpha$.

4.150. Вычислите:

1) $\sin^2\dfrac{\pi}{8}+\cos^2\dfrac{3\pi}{8}+\sin^2\dfrac{5\pi}{8}+\cos^2\dfrac{7\pi}{8}$;

2) $\mathrm{tg}435°+\mathrm{tg}375°$; 3) $\mathrm{tg}255°-\mathrm{tg}195°$;

4) $\mathrm{ctg}\left(\dfrac{13\pi}{12}\right)-\mathrm{ctg}\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$; 5) $\sin\left(2x+\dfrac{5\pi}{4}\right)$ при $\mathrm{tg}x=\dfrac{2}{3}$;

6) $\cos\left(2x+\dfrac{7\pi}{4}\right)$ при $\mathrm{ctg}x=\dfrac{2}{3}$; 7) $\sin2x$ при $\sin x-\cos x=p$;

8) $\mathrm{tg}\left(\dfrac{5\pi}{4}+x\right)+\mathrm{tg}\left(\dfrac{5\pi}{4}-x\right)$ при $\mathrm{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)=0{,}75$;

9) $\sin\dfrac{x+y}{2}$ и $\cos\dfrac{x+y}{2}$ при $\sin x+\sin y=-\dfrac{21}{65}$,

$\cos x+\cos y=-\dfrac{27}{65}$, $\dfrac{5\pi}{2}<x<3\pi$ и $\dfrac{\pi}{2}<y<0$.

4.151. Найдите наименьшее и наибольшее значения выражения $\dfrac{2\cos^2x+\cos4x-1}{\cos^4\dfrac{x}{2}-\sin^4\dfrac{x}{2}}$.

4.152. Вычислите:

1) $\sin18°$; 2) $\sin42°$; 3) $\sin15°$; 4) $\sin\dfrac{3\pi}{10}\cdot\sin\dfrac{\pi}{10}$.

4.153. Упростите выражения:

1) $\sin^32\alpha\cdot\cos6\alpha+\cos^32\alpha\cdot\sin6\alpha$;

2) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)$;

3) $9\sin\alpha\cos3\alpha+9\sin\alpha\cos\alpha-3\sin3\alpha\cos3\alpha-3\sin3\alpha\cos\alpha$;

4) $4(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)-4(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)-1$.

4.154. Докажите тождества:

1) $\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}2\alpha-\mathrm{tg}3\alpha=-\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}2\alpha\,\mathrm{tg}3\alpha$;

2) $\dfrac{1}{\mathrm{tg}3x-\mathrm{tg}x}-\dfrac{1}{\mathrm{ctg}3x-\mathrm{ctg}x}=\mathrm{ctg}2x$;

3) $\sin\alpha+\sin3\alpha+\sin5\alpha+\sin7\alpha=4\cos\alpha\,\cos2\alpha\,\sin4\alpha$;

4) $\sin^6\alpha-\cos^6\alpha=\cos2\alpha(0,25\sin2\alpha-1)$.

4.155. Если A, B, C – углы треугольника, то докажите тождества:

1) $\mathrm{tg}A+\mathrm{tg}B+\mathrm{tg}C=\mathrm{tg}A\,\mathrm{tg}B\,\mathrm{tg}C$;

2) $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$;

3) $\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C=1-2\cos A\,\cos B\,\cos C$;

4) $\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=2+2\cos A\,\cos B\,\cos C$.

4.156. Преобразуйте в произведение:

1) $\mathrm{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$; 2) $\cos2\varphi+\sin2\varphi\cdot\mathrm{tg}\varphi$;

3) $2+\mathrm{tg}2\varphi+\mathrm{ctg}2\varphi$; 4) $1-0,25\sin^22\varphi-\cos^22\varphi\,\cos^4\varphi$.

4.157. Докажите справедливость формулы $\cos(n+1)x=2\cos nx\times\times\cos x-\cos(n-1)x$. Пользуясь этой формулой, представьте выражения $\cos3x$ и $\cos4x$ в виде многочлена от $\cos x$.

4.158. Докажите тождества:

1) $\dfrac{3-4\cos2\alpha+\cos4\alpha}{3+4\cos2\alpha+\cos4\alpha}=\mathrm{tg}^4\alpha$;

2) $\cos^6\alpha+\sin^6\alpha=\dfrac{5+3\cos4\alpha}{8}$;

3) $16\sin^5\alpha-20\sin^3\alpha+5\sin\alpha=\sin5\alpha$;

4) $\cos^8\alpha-\sin^8\alpha=0,25\cos2\alpha(3+\cos4\alpha)$.

4.159. Докажите, что выражение $\cos^2\alpha+\cos^2\varphi+\cos^2(\alpha-\varphi)-2\cos\alpha\times\times\cos\varphi\cdot\cos(\alpha-\varphi)$ не зависит от α и φ.

4.160. Если A, B, C – углы треугольника, то докажите тождества:

1) $\sin2nA+\sin2nB+\sin2nC=(-1)^{n+1}4\sin nA\,\sin nB\,\sin nC$;

2) $\sin(2n+1)A+\sin(2n+1)B+\sin(2n+1)C=(-1)^n4\cos\dfrac{2n+1}{2}\times$

$\times A\cos\dfrac{2n+1}{2}B\cos\dfrac{2n+1}{2}C$.

4.161. Найдите наименьшее значение выражения $\dfrac{\mathrm{ctg}\alpha-\mathrm{tg}\alpha}{\cos4\alpha+1}$ при $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$.

4.162. Найдите наибольшее значение выражения $\dfrac{\cos 2\alpha + 1}{\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}$ при $0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$.

4.163. Докажите равенства: 1) $\sin 2\alpha=\sin 2\beta$; 2) $\cos 2\alpha=-\cos 2\beta$, если $\operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{tg}\beta=1$.

4.164. Докажите равенство $\sin(\alpha+2\beta)=\sin\alpha$, если $\cos(\alpha+\beta)=0$.

4.165. Составьте уравнение для определения $\cos\dfrac{\alpha}{3}$, если $\cos\alpha=m$.

4.166. Найдите $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{5}$.

4.167. Найдите сумму:

1) $\cos 3\alpha+\cos 5\alpha+\cos 7\alpha+\cos 9\alpha$;

2) $\dfrac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x}$.

4.168. Докажите тождество $3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)-2(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha) =1$.

4.169. Докажите, что значение выражения $\sin^2 2\varphi \cdot 0,5\cos 4\varphi+ +2\sin^2\varphi + \cos 2\varphi$ не зависит от φ.

4.170. Является ли функция $y = \cos^2 x$ периодической? Если да, то найдите ее наименьший положительный период.

4.171. Покажите, что значение выражения $\cos^2 x + \cos^2(\alpha+x)- -2\cos\alpha \cdot \cos x \cdot \cos(\alpha+x)$ не зависит от x.

4.172. Упростите выражение $\dfrac{\sin^2\varphi}{\sin\varphi - \cos\varphi} + \dfrac{\sin\varphi + \cos\varphi}{1 + \operatorname{tg}^2\varphi} - \sin\varphi$.

4.173. Докажите тождество $\operatorname{tg}^3\varphi + \operatorname{tg}^2\varphi + \operatorname{tg}\varphi + 1 - \dfrac{\sin\varphi}{\cos^3\varphi} = \dfrac{1}{\cos^2\varphi}$.

Названия терминов на трех языках

На русском языке	На казахском языке	На английском языке
Радианная мера угла	Бұрыштың радиандық өлшемі	Radiant value of angle
Градусная мера угла	Бұрыштың градустық өлшемі	Degree value of angle
Единичная тригонометрическая окружность	Бірлік тригонометриялық шеңбер	One unit trigonometric disc
Тригонометрические фукции	Тригонометриялық функциялар	Trigonometric functions
Основное тригонометрическое тождество	Негізгі тригонометриялық теңбе-теңдік	Main trigonometric eguation
Основной период	Негізгі период	Main period
Формулы приведения	Келтіру формулалары	Adduction formula
Формулы суммы	Қосу формулалары	Addition formulas
Формулы двойного (половинного) угла	Қос (жарты) бұрыш формулалары	Double (half) angle formulas

Раздел 5. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Жилой комплекс «Северное сияние», город Нур-Султан.

Жилой комплекс состоит из четырех зданий, объединенных общей платформой. Эти здания состоят из 20, 28, 38 и 43 этажей соответственно. Изучив материалы данного раздела, вы сможете определить вероятность того, что житель, вошедший в лифт на 1-м этаже, проживает на 15-м этаже.

5.1. Основы теории вероятностей

Изучив материалы данной темы, вы будете:

- осваивать понятия *событие, случайное событие, достоверное событие, невозможное событие, благоприятствующие исходы, равновозможные и противоположные события*;
- различать элементарное событие от неэлементарного;
- знать классическое определение вероятности и применять его при решении задач;
- знать статическое определение вероятности.

5.1.1. Пространство элементарных событий

К числу основных понятий теории вероятностей относится понятие элементарного события и понятие пространства элементарных событий.

Элементарным событием называют выполнение какого-либо исхода (результата) эксперимента (опыта, испытания), т.е. всякий «неразлагаемый» исход эксперимента называется элементарным событием. Например, при бросании игральной кости может выпасть очко, равное 1, 2, 3, 4, 5 или 6. В результате этого эксперимента (бросание игральной кости) может произойти одно из следующих равновозможных элементарных событий A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6. Здесь A_k выражает выпадение k очков (k=1, 2, 3, 4, 5, 6) в результате данного эксперимента. Если в процессе однократного бросания игральной кости нас интересует выпадение четного числа очков, то оно также является случайным событием «выпадение четного числа очков». Однако оно не является элементарным событием, т.к. событие, выражающее выпадение четного числа очков, разлагается на элементарные события A_2, A_4, A_6, т.е. определяется выполнением одного из этих событий. Аналогично, если в качестве испытания взять однократное бросание монеты, то мы ожидаем два равновозможных исхода: $Г$ – выпадение монеты гербовой стороной, $Р$ – выпадение монеты числовой стороной.

Если каждый элемент множества U выражает какой-либо элементарный исход эксперимента и, наоборот, любой элементарный исход данного эксперимента является элементом множества U, то множество U называется ***пространством элементарных событий***. Для простоты здесь и далее будем считать, что количество элементарных событий конечно. Например, как было показано выше, при бросании игральной кости пространство элементарных событий состоит из 6 элементов: $U=\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$, а при бросании монеты имеем пространство $U = \{Г, Р\}$.

Каждое подмножество пространства элементарных событий называется ***случайным событием***. Например, при бросании игральной кости подмножество $A=\{A_2, A_4, A_6\}$ определяет случайное событие «выпадение четного числа очков».

Если заранее известно, что при любом исходе испытания событие наступит, то такое событие называется *достоверным*, а если известно, что событие не наступит, то это событие называется *невозможным*. Достоверное событие обозначают через U, а невозможное событие – через $\varnothing$. Например, при однократном бросании игральной кости выпадание очков не меньше, чем 1, есть достоверное событие, а появление очков более, чем 7 – невозможное событие. Заметим, что достоверное событие содержит все элементы пространства элементарных событий, а невозможное событие не содержит ни одного элемента этого пространства.

Два случайных события называются ***несовместными***, если они не могут произойти одновременно при одном и том же исходе испытания; а в других случаях, т.е., если два события могут произойти одновременно при некотором исходе испытания, их называют ***совместными***. Например, все элементы рассматриваемого нами пространства $U=\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$ попарно несовместные. Аналогично события $A = \{A_2, A_4, A_6\}$ и $B = \{A_1, A_3\}$ несовместные, а события $A = \{A_2, A_4, A_6\}$ и $C = \{A_1, A_2, A_3\}$ совместные, т.к. эти подмножества имеют общий элемент A_2.

Итак, *чтобы наступило данное событие $A \subset U$, необходимо и достаточно, чтобы выполнилось одно из элементарных событий, входящих в состав события A.*

Случайные события P и Q называются *равными* (*одинаковыми*), если они составлены из одних и тех же элементарных событий и при этом пишут $P=Q$. Например, при однократном бросании игральной кости через P обозначим событие «выпадение очков менее, чем 4», а через Q – событие «выпадение очков не более, чем 3». Тогда $P=\{A_1, A_2, A_3\}$ и $Q=\{A_1, A_2, A_3\}$, тем самым выполняется равенство $P=Q$.

Событие, выражающее невыполнение данного события A, называется ***противоположным событием*** событию A и обозначается через $\overline{A}$. Например, для $A =\{A_2, A_4, A_6\}$ противоположным является событие $\overline{A} =\{A_1, A_3, A_5\}$, т.е. событие «выпадение четного числа очков при однократном бросании игральной кости».

Если выполнение или невыполнение события A не влияет на выполнение или невыполнение события B, то события A и B называются *взаимно независимыми*, а в противном случае эти события называются *зависимыми*. Например, при бросании двух игральных костей количество выпавших очков на одной из них не зависит от количества выпавших очков на другой игральной кости.

5.1.2. Действия, применяемые к событиям

Суммой событий A и B называется событие «выполнение хотя бы одного из событий A или B», и ее обозначают через $A + B$.

Отсюда видно, что событие $A + B$ состоит из тех элементарных событий, которые входят в состав события A или B. Например, при бросании игральной кости нужно определить сумму событий «выпадение четного числа очков» и «выпадение очков, меньших, чем 3», т.е. нужно найти сумму событий $A = \{A_2, A_4, A_6\}$ и $B =\{A_1, A_2\}$: $A + B =\{A_1, A_2, A_4, A_6\}$.

Произведением событий A и B называется событие «одновременное выполнение событий A и B», и его обозначают через $A \cdot B$. Итак, $A \cdot B$ состоит из тех элементарных событий, которые входят как в состав события A, так и в состав события B. Например, произведение событий $A=\{A_2, A_4, A_6\}$ и $B=\{A_1, A_2\}$ из предыдущего примера определяется так: $A \cdot B=\{A_2\}$.

Разностью событий A и B называется событие «выполнение события A и невыполнение события B», и ее обозначают через $A-B$. Таким образом, $A-B$ состоит из тех элементарных событий, которые входят только в состав события A и не входят в состав события B. Например, для событий $A =\{A_2, A_4, A_6\}$ и $B =\{A_1, A_2\}$ имеем $A-B =\{A_4, A_6\}$ и $B-A =\{A_1\}$.

Если для элементарных событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ выполнены условия $A_1 + A_2 +\ldots+ A_n = U$ и $A_i \cdot A_j = \varnothing$ $(i\neq j)$, то говорят, что события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют ***полную группу элементарных событий***. Действительно, при бросании игральной кости появляется одно из событий (одно из шести очков) A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, т.е. сумма $A_1+A_2+A_3+A_4+A_5+A_6 = U$ является достоверным событием. Кроме того, при однократном бросании игральной кости выпадание двух различных очков невозможно, т.е. $A_i \cdot A_j = \varnothing$, $(i \neq j)$ – невозможное событие.

Если при каждом появлении события B также наступает событие A, то A называется ***следствием*** события B. Это записывают так: $B\subset A$. Например, если $A=\{A_2, A_4, A_6\}$ и $B=\{A_2, A_4\}$, то A является следствием события B. Для взаимно противоположных событий A и $\overline{A}$ выполняются равенства $A \cdot \overline{A} = \varnothing$ и $A + \overline{A} = U$.

Случайные события и действия, применяемые к ним, удобно иллюстрировать диаграммами Эйлера–Венна (рис. 5.1).

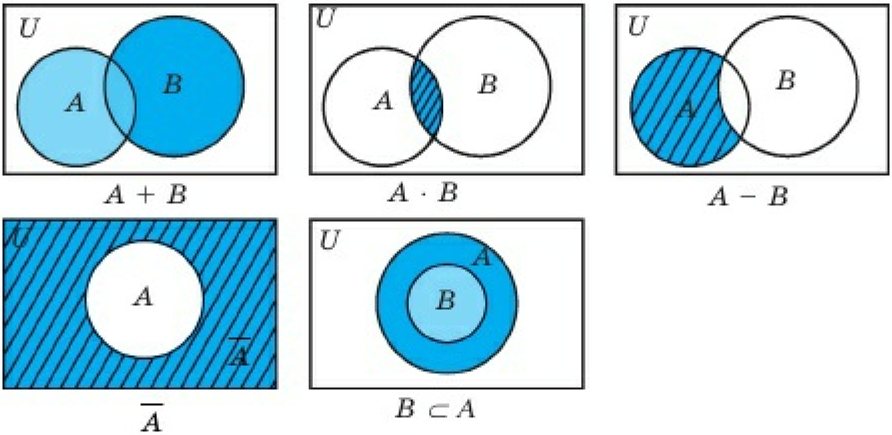


Рис. 5.1

Кроме того, *для любых событий A и B верны тождества*

1) $\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$, 2) $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$.

▲ 1) Пусть $A_i \in \overline{A+B}$. Тогда $\{A_i \notin A+B\} \Leftrightarrow \{A_i \notin A$ и $A_i \notin B\} \Leftrightarrow \{A_i \in \overline{A}$ и $A_i \in \overline{B}\} \Leftrightarrow \{A_i \in \overline{A} \cdot \overline{B}\}$. Отсюда видно, что события $\overline{A+B}$ и $\overline{A} \cdot \overline{B}$ состоят из одних и тех же элементарных событий, т.е. $\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$.

2) Доказывается аналогично. ■

Пример 1. Каждый из трех стрелков произвел по одному выстрелу по цели. Пусть A выражает попадание в цель первым стрелком, B – вторым и С – третьим стрелком. Нужно раскрыть смысл событий: 1) $A+B$; 2) $AB\overline{C}$; 3) $AB+AC+BC$.

▲ 1) Цель поразили первый или второй стрелки. 2) В цель попали первый и второй стрелки, а третий – промахнулся. 3) В цель попали по меньшей мере два стрелка. ■

Пример 2. Используя условие предыдущего примера, выразим через A, B и C следующие события: 1) в цель попал только первый стрелок; 2) в цель попали только два стрелка; 3) все три стрелка промахнулись.

▲ 1) В цель попал только первый стрелок, а двое других промахнулись. Тогда выполняется и событие A, и событие $\overline{B}$, и событие $\overline{C}$. Поэтому по определению произведения событий данное событие выражается произведением $A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$.

2) В этом случае известно, что по цели попали только два стрелка, а третий промахнулся, т.е. выполняется одно из событий $AB\overline{C}$, или $A\overline{B}C$, или $\overline{A}BC$. Следовательно, данное событие выражается суммой $AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC$.

3) Если ни один из стрелков не попал по цели, то одновременно выполняются события $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, т.е. происходит событие $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$. ■

1. Какие события называются элементарными событиями?
2. Что такое пространство элементарных событий? Приведите пример.
3. Какие события называются достоверными, невозможными, совместными и несовместными? Приведите пример.
4. Что такое случайное событие? Приведите пример.
5. Что такое противоположное событие, следствие? Приведите пример.
6. Объясните понятия зависимых и независимых событий.
7. Какие действия применяются к событиям? Объясните их диаграммами Эйлера–Венна.

Практическая работа

Докажите соотношения: 1) $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$;
2) $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ с помощью диаграмм Эйлера–Венна.

Упражнения

A

5.1. В коробке имеются альчики белого, красного и синего цветов. Через A, B и C обозначим события «наудачу извлеченный из коробки альчик окажется соответственно белого, красного и синего цветов». Разъясните смысл события: 1) $A+C$; 2) A; 3) $A+B$.

5.2. Пространство элементарных событий состоит из пяти элементов: $U=\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$. Тогда из событий $A=\{A_1, A_2\}$, $B=\{A_3, A_4\}$, $C=\{A_4, A_5\}$, $D=\{A_1, A_3, A_5\}$ укажите: 1) попарно несовместные события; 2) все пары совместных событий; 3) для каждого из них запишите противоположные события.

5.3. Используя условие предыдущей задачи, укажите все элементарные события, входящие в состав события: 1) $A+B$; 2) $B+C$; 3) $A+D$; 4) $A \cdot B$; 5) $B \cdot C$; 6) $A \cdot D$; 7) $A-B$; 8) $B-C$; 9) $A-D$; 10) $D-A$; 11) $(\overline{A}+C)-\overline{D}$; 12) $\overline{C} \cdot D-A$.

5.4. При однократном бросании игральной кости событие A является: 1) событием «выпала шестерка»; 2) событием «выпало нечетное число очков»; 3) событием «выпало число очков, не меньшее, чем 3»; 4) событием «выпало число очков, более, чем 2, и менее, чем 6». Каков смысл события $\overline{A}$?

5.5. События $A=\{A_2\}$, $B=\{A_1, A_3\}$, $C=\{A_1, A_2, A_3\}$, $D=\{A_1, A_3, A_5\}$ определены в пространстве элементарных событий $U=\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$. Следствием какого из данных событий A, B, C, D является событие: 1) C; 2) D; 3) $\overline{A}$?

5.6. Монета брошена два раза. Запишите пространство элементарных событий.

▲ Через $Г$ обозначим событие «монета упала гербовой стороной вверх», а через $Ч$ – событие «монета упала числовой стороной вверх». Тогда при бросании монеты дважды наступает одно из элементарных событий: $ГГ$, $ГЧ$, $ЧГ$, $ЧЧ$. ■

5.7. Даны события A, B, C и D.
A – событие «два раза выпал герб при двухкратном бросании монеты»;
B – событие «наудачу записанное двузначное число не превышает 99»;
C – событие «при бросании игральной кости выпавшее очко не превышает 5»;
D – событие «при бросании двух игральных костей сумма выпавших очков больше, чем 12».
Из этих событий укажите: 1) достоверное; 2) невозможное событие.

B

5.8. Пусть событие A является следствием события B. Определите значение выражения: 1) $A+B$; 2) $A \cdot B$.

5.9. В урне имеются шары. Определите событие $\overline{A}$, если событие A – событие «в урне имеется хотя бы один белый шар».

▲ $\overline{A}$ – событие «в урне не содержится белый шар». ■

5.10. Имеется два лотерейных билета из двух разных лотерейных игр (по одному из каждой игры). A – событие «выпал выигрыш по первому билету, а B – событие «выпал выигрыш по второму билету». Каков смысл события: 1) $P=A\overline{B}+\overline{A}B$; 2) $Q=A\overline{B}+\overline{A}B+AB$?

5.11. Даны случайные события A, B и C. Каков смысл равенства: 1) $ABC=A$; 2) $A+B+C=A$?

1) ▲ Если $ABC = A$, то события B и C являются следствиями события A. ■

5.12. A, B и C – данные случайные события. Выразите через A, B и C событие: 1) «наступило только событие A»; 2) «наступили события A и B, а событие C не наступило»; 3) «все три события наступили»; 4) «хотя бы одно из этих событий наступило»; 5) «хотя бы 2 из этих событий наступили»; 6) «наступило только одно из этих событий»; 7) «наступили только 2 из этих событий»; 8) «ни одно из этих событий не наступило»; 9) «наступило не более двух из этих событий».

5.13. Упростите выражение: 1) $A+B+C$; 2) $(A+B)\cdot C$; 3) $A\cdot B+C$, если $A\subset B$.

5.14. Брошены две игральные кости. Сколько элементов содержит пространство элементарных событий?

C

5.15. Три стрелка произвели по одному выстрелу по мишени. Пусть A – событие «первый стрелок попал в мишень», B – событие «второй стрелок попал в мишень», C – событие «третий стрелок поразил мишень». Известно, что первые два стрелка поразили мишень, а третий – промахнулся. Определите, наступило или не наступило событие: 1) $A + B \cdot \overline{C}$; 2) $(A + B)\overline{C}$; 3) $\overline{A}B + C$; 4) ABC; 5) $AB\overline{C}$.

5.16. Для произвольных событий A, B и C разложите сумму: 1) $A + B$; 2) $A + B + C$ на суммы попарно несовместных событий.

5.17. Докажите, что события A, $\overline{A}\,B$, $\overline{A + B}$ образуют полную группу.

5.18. Докажите справедливость равенства:

1) $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$; 2) $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$.

5.19. Докажите, что для равенства событий A и B необходимо и достаточно выполнения условий $A \subset B$ и $B \subset A$.

5.20. Стрелок, имеющий 5 пуль, стреляет по мишени до первого попадания. Напишите пространство элементарных событий.

Упражнения для повторения

5.21. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} 2x + y = 7, \\ xy = 6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - xy = -3, \\ y^2 - xy = 12. \end{cases}$

5.22. Упростите выражения:

1) $\cos 2\alpha + 2\sin(\alpha + 30°)\sin(\alpha - 30°)$;

2) $2\cos^2\frac{\varphi}{2} - \cos\varphi$.

5.23. Найдите сумму всех трехзначных натуральных чисел, которые при делении на 5 дают в остатке 1.

5.1.3. Классическое определение вероятности события

Пусть даны пространство элементарных событий $U = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ и случайное событие $A = \{A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots, A_{n_m}\}$, где $A_{n_i} \in U$. Здесь элементарные события $A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots, A_{n_m}$ называются *благоприятствующими исходами* для случайного события A. Например, при бросании игральной кости для случайного события «выпадение четного числа очков $A = \{A_2, A_4, A_6\}$», имеется три благоприятствующих исхода: A_2, A_4, A_6.

Определение. *Вероятностью случайного события $A \subset U$ называется отношение числа всех благоприятствующих исходов события A к числу всех возможных исходов (на число всех элементарных событий) и обозначается через $P(A)$. Итак, если $U = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ и $A = \{A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots, A_{n_m}\}$ $A_{n_i} \in U$,* то по определению имеем, что вероятность события A вычисляется по формуле

$$P(A) = \frac{m}{n}. \qquad (1)$$

Это определение называют ***классическим определением*** вероятности, т.к. считается, что все элементы пространства элементарных событий U являются равновозможными событиями, т.е. вероятность каждого элементарного события равна $\frac{1}{n}$.

Так как $U \subset U$, то его также можно рассмотреть в качестве элементарного события. Тогда U является достоверным событием и по формуле (1) $P(U) = \frac{n}{n} = 1$, т.е. вероятность достоверного события равна 1, а вероятность невозможного события $\varnothing$ равна 0.

Действительно, так как для невозможного события $\varnothing$ не существует ни одного благоприятствующего исхода ($m = 0$), то по формуле (1) $P(\varnothing) = \frac{0}{n} = 0$.

Пример 1. В мешочке имеются 6 альчиков белого цвета и 4 альчика красного цвета. Определим вероятность того, что наудачу извлеченный из мешочка альчик окажется красного цвета.

▲ Считая, что все альчики, имеющиеся в мешочке, внешне имеют одинаковые формы, через A обозначим то событие, которое означает, что наудачу извлеченный из мешочка альчик окажется красного цвета. Тогда из всех $n = 4 + 6 = 10$ равновозможных исходов событию A благоприятствуют 4 исхода. Поэтому по формуле (1) имеем: $P(A) = \frac{4}{10} = 0,4$. ■

Пример 2. На Павлодарском заводе выпущены 65% всех имеющихся в крестьянском хозяйстве тракторов. Найдем вероятность того, что случайно выбранный трактор окажется не произведенным на Павлодарском заводе.

▲ Как видно из данного примера, во многих случаях доля благоприятствующих исходов интересующего нас случайного события выражается в процентах. В таких случаях все возможные исходы считаются равными 100%. Тогда доля благоприятствующих исходов составляет $100\% - 65\% = 35\%$. Поэтому требуемая вероятность равна $P(A) = \dfrac{35\%}{100\%} = 0,35$. ■

5.1.4. Статистическое определение вероятности события

Классическое определение вероятности применимо только для определения вероятностей равновозможных событий. Например, при бросании игральной кости выпадение какого-либо из очков, наудачу отобранный альчик из мешочка и т.п. являются равновозможными событиями. В паре или объединившись в малые группы, выполните следующее задание. Каждая группа должна подбросить альчик 50 раз и заполнить таблицу.

Положение альчика	Айкур (алшы)	Тауа (тәйке)	Шик или чик (шік)	Бук (бүк)
Количество выпадений того или иного положения альчика				

Является ли равновозможными событиями выпадение определенного положения альчика?

Соберите экспериментальные данные всех групп и найдите среднее арифметическое по каждой колонке. Обсудите и проанализируйте полученные результаты вместе с классом. Сделайте вывод.

Пусть при n кратном проведении эксперимента событие A наступает m раз. Тогда число m называется ***частотой*** наступления события A, а число $\dfrac{m}{n}$ называется ***относительной***

частотой. С возрастанием n относительная частота $\frac{m}{n}$ будет наиболее близка вероятности события A. Например, английский математик Карл Пирсон (1857 – 1936) подбросил монету 24000 раз и при этом монета выпала гербовой стороной 12012 раз. Здесь 12012 – частота выпадения герба, а относительная частота такова:

$$\frac{12012}{24000} = 0,5005.$$

С другой стороны, выпадение герба как равновозможного события наступает с вероятностью 0,5.

Поэтому для оценки вероятности неравновозможного события берут относительную частоту этого события. Оценка вероятности события с помощью его относительной частоты называют ***статистическим определением вероятности***. Итак, если при серии из n испытаний событие A наступает m раз, то в качестве вероятности события A берут число $\frac{m}{n}$ (или $\frac{m}{n} \cdot 100\%$). Например, часто говорят, что тот или иной знаменитый баскетболист поражает корзину с вероятностью 80%. Это следует понимать так, как дано ниже.

В каждой серии из 100 бросков баскетболист попадает в корзину в среднем 80 раз, иногда он в корзину может попасть 78 или 79 раз, а иногда 82 или 84 раза. А в некоторых редких случаях он может попасть в корзину намного больше, или меньше, чем 80 раз. Однако с увеличением количества бросков брошенный им мяч попадает в корзину с вероятностью 0,8 (80%). Число 80 показывает уровень мастерства игрока, как правило, это очень устойчивое число.

5.1.5. Свойства вероятности

Вероятности событий обладают следующими свойствами.

1°. *Для любого события A верно неравенство* $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

▲ Если число всех элементарных событий равно n и число благоприятствующих исходов для события A равно m, то выполняется неравенство $0 \leqslant m \leqslant n$. Отсюда $0 \leqslant \frac{m}{n} \leqslant 1$, т.е. $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$. Здесь, если A – достоверное событие, то, как было показано выше, $P(A)=1$, а если A – невозможное событие, то $P(A) = 0$.■

2°. **Правило суммы.** *Если A и B – несовместные события, то верно равенство*

$$P(A+B) = P(A) + P(B). \tag{2}$$

▲Пусть число благоприятствующих событию A исходов равно m, число благоприятствующих событию B исходов равно k, а число всех возможных исходов равно n. Так как A и B – несовместные события, то сумме $(A+B)$ благоприятствуют $(m + k)$ исходов. Тогда по формуле (1)

$$P(A+B) = \frac{m+k}{n} = \frac{m}{n} + \frac{k}{n} = P(A) + P(B).$$ ■

Пример 3. В урне имеются 6 белых, 4 красных и 5 синих шаров. Найдем вероятность того, что наудачу извлеченный из урны шар окажется белого или синего цвета.

▲ Пусть A – событие «из урны извлечен белый шар», B – событие «из урны извлечен синий шар» и C – событие «из урны извлечен белый или синий шар». Тогда по правилу суммы имеем, что $C=A+B$. Здесь A и B – несовместные события (т.к. наудачу извлеченный из урны шар не может быть одновременно и белого, и синего цвета). По свойству 2° верно равенство $P(C)=P(A+B)=P(A)+P(B)$. Здесь $P(A) = \frac{6}{15}$, $P(B) = \frac{5}{15}$. Поэтому $P(C) = \frac{6}{15} + \frac{5}{15} = \frac{11}{15}$. ■

Свойство 2° остается справедливым для любого конечного числа попарно несовместных событий. Например, для попарно несовместных событий A, B, C верно равенство

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C).$$

События A и $\overline{A}$ – также несовместные и $A + \overline{A} = U$. Тогда по формуле (2)

$$P(A) + P(\overline{A}) = P(A+\overline{A}) = P(U) = 1.$$

Отсюда получим формулу

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A). \tag{3}$$

3°. **Правило произведения.** *Если A и B – независимые события, то верно равенство*

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B). \tag{4}$$

▲ Пусть из n_1 всех элементарных событий m_1 благоприятствуют событию A и из n_2 всех элементарных событий m_2 благоприятствуют событию B (здесь независимые события A и B определены в разных пространствах элементарных событий). Так как A и B – независимые события, то из всех возможных $n_1 \cdot n_2$ исходов событию $A \cdot B$ благоприятствуют $m_1 \cdot m_2$ исходов. Тогда

$$P(A \cdot B) = \frac{m_1 \cdot m_2}{n_1 \cdot n_2} = \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} = P(A) \cdot P(B). \ ■$$

Формула (4) остается верной и для попарно независимых нескольких сомножителей. Например, если A, B, C – попарно независимые случайные события, то верна формула

$$P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C).$$

Пример 4. Два стрелка могут поразить мишень с вероятностями 0,7 и 0,8. Какова вероятность того, что мишень будет поражена, если они по мишени произвели по одному выстрелу?

▲ То, что в мишень попал первый стрелок, обозначим через A, а то, что попал второй стрелок, – через B. Мишень будет поражена, если в нее попала, по меньшей мере, одна пуля. Тогда нам следует найти вероятность события $C = A + B$. Так как события A и B совместные, но независимые, то мы не можем использовать формулу (2). В данном случае удобно пользоваться формулами (3) и (4). Поскольку $\overline{C} = \overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$, $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,7 = 0,3$ и $P(\overline{B}) = 1 - 0,8 = 0,2$, то $P(C) = P(A + B) = 1 - P(\overline{A} \cdot \overline{B}) = 1 - P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = 1 - 0,3 \cdot 0,2 = 0,94$. ■

4°. **Обобщенное правило суммы.** *Для любых событий A и B верно равенство*

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B). \qquad (5)$$

▲ Каждое событие разлагается на сумму несовместных событий: $A = AB + A \cdot \overline{B}$, $B = AB + \overline{A} \cdot B$. Отсюда $A + B = (AB + A \cdot \overline{B}) + (AB + \overline{A} \cdot B) = AB + A\overline{B} + \overline{A}B$. Тогда

$$P(A + B) = P(AB) + P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B). \qquad (6)$$

С другой стороны,

$$P(A) = P(AB) + P(A\overline{B}),$$
$$P(B) = P(AB) + P(\overline{A}B).$$

Отсюда, учитывая равенство (6), получим равенство

$$P(A) + P(B) = 2P(AB) + P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B) =$$
$$= (P(AB) + P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B)) + P(AB) = P(A + B) + P(A \cdot B),$$

из которого легко получить формулу (5). ■

Применив формулу (5), легко можно пример 4: $P(A+B)=$ $=P(A)+P(B)-P(AB)=0,7+0,8-P(A)\cdot P(B)=1,5-0,7\cdot 0,8=0,94$.

Аналог формулы (5) верен и для любого конечного числа слагаемых. Например, для любых событий A, B, C верна формула

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(A\cdot B\cdot C).$$

Теперь рассмотрим понятие условной вероятности. Пусть брошена игральная кость. Через A обозначим событие «выпало нечетное число очков», а через B – событие «выпавшее число очков меньше, чем 4». Эти события совместные, и легко можно вычислить их вероятности: $P(A)=\dfrac{3}{6}=0,5$, $P(B)=\dfrac{3}{6}=0,5$. Теперь, полагая, что событие B уже свершилось, найдем вероятность события A, т.е. *вероятность A при условии, что событие B совершилось. Такие вероятности называются **условными вероятностями*** и обозначаются так: $P_B(A)$.

Так как в пространстве элементарных событий $U = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$ имеем $A = \{A_1, A_3, A_5\}$, $B = \{A_1, A_2, A_3\}$ и при условии, что B совершилось, то из элементарных событий A_1, A_2, A_3 для A благоприятствуют события A_1 и A_3.

Тогда $P_B(A)=\dfrac{2}{3}$.

5°. **Обобщенное правило произведения.** *Для любых событий A и B верно равенство*

$$P(A\cdot B)=P(B)\cdot P_B(A)=P(A)\cdot P_A(B). \qquad (7)$$

▲ Пусть в пространстве элементарных событий с n элементами событию A благоприятствуют m элементов, а событию B – k элементов, т.е. $P(A)=\dfrac{m}{n}$, $P(B)=\dfrac{k}{n}$.

Пусть также при условии, что событие B уже совершилось, событию A благоприятствуют l элементарных исходов, т.е. для произведения $(A \cdot B)$ благоприятствуют l элементов. Тогда

$$P_B(A) = \frac{l}{k} = \frac{l}{n} : \frac{k}{n} = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}.$$

Отсюда

$$P(A \cdot B) = P(B) \cdot P_B(A).$$

Вторая половина формулы (7) доказывается аналогично. Если A и B – несовместные события, то $P_B(A) = P(A)$. Тогда из формулы (7) получим формулу (4). ■

1. Что такое благоприятствующие исходы и все возможные исходы испытания?
2. Как определяется вероятность события в пространстве равновозможных элементарных событий?
3. Сформулируйте определение частоты и относительной частоты события? Приведите пример.
4. Как определяют вероятность события с помощью относительной частоты? Как можно увеличить точность этой вероятности? Приведите пример.
5. Чему равны вероятности достоверного и невозможного событий?
6. В каких пределах заключена вероятность события?
7. Сформулируйте правило суммы несовместных событий и докажите его.
8. Сформулируйте правило произведения независимых событий и докажите его.
9. Сформулируйте и докажите обобщенное правило суммы.
10. Что такое условная вероятность? Приведите пример.
11. Сформулируйте и докажите обобщенное правило произведения.

Практическая работа

Полагая, что в вашем классе на следующем уроке математики к доске будут вызваны 2 ученика, найдите вероятность того, что это будут: 1) обе девушки; 2) оба юноши; 3) девушка и юноша.

Упражнения

A

5.24. Отдел технического контроля обнаружил 8 бракованных изделий в партии из 1000 изделий. Найдите частоту изготовления бракованного изделия.

5.25. Из 20 выстрелов в мишень зарегистрировано 18 попаданий. Найдите относительную частоту попаданий в мишень.

5.26. При испытании партии приборов относительная частота годных приборов оказалась равной 0,9. Найдите количество годных приборов, если испытано всего 200 приборов.

5.27. Для проверки на всхожесть было посеяно 200 семян, из которых 170 проросло. Сколько семян в среднем взойдет из каждой тысячи посеянных?

▲ Сначала определим относительную частоту всхожести семян, т.е. оценим вероятность всхожести семян: $\frac{m}{n} = \frac{170}{200} = \frac{17}{20}$. Тогда из 1000 посеянных семян в среднем прорастет $1000 \cdot \frac{17}{20} = 50 \cdot 17 = 850$ семян. ■

5.28. Найдите частоту появления буквы «к» в тексте этой страницы данного учебника.

5.29. Найдите частоту слов из шести букв в любом газетном тексте.

5.30. Найдите частоту имен существительных в любом газетном тексте.

5.31. При печатании текста пробел между словами засчитывается как одна буква. Найдите частоту пробела в любом газетном тексте.

5.32. Путем опроса всех семиклассников вашей школы определите частоты дней рождения, попадающих на каждый месяц.

5.33. Найдите вероятность выпадения: 1) герба при однократном бросании монеты; 2) «шестерки» при однократном бросании игральной кости.

5.34. Из 10 альчиков, имеющихся в коробке, 4 окрашены. Найдите вероятность того, что наудачу извлеченный из коробки альчик окажется: 1) окрашенным; 2) неокрашенным.

5.35. Монета подброшена дважды. Какова вероятность того, что монета: 1) дважды выпадет гербовой стороной; 2) только один раз выпадет гербовой стороной; 3) по меньшей мере один раз выпадет гербовой стороной?

5.36. Ученик в тетради случайно написал двузначное число. Какова вероятность того, что это число окажется: 1) нечетным; 2) кратным трем?

5.37. Оказалось, что 5 учеников из 35 пришли неподготовленными к уроку. Какова вероятность того, что случайно вызванный к доске ученик окажется неподготовленным к уроку?

5.38. Два стрелка произвели по одному выстрелу по мишени. Один из стрелков может поразить мишень с вероятностью, равной 0,7, а второй – с вероятностью 0,8. Какова вероятность того, что: 1) в мишень попал только один стрелок; 2) в мишень попал по крайней мере один стрелок; 3) оба стрелка попали в мишень; 4) оба стрелка промахнулись; 5) один из стрелков промахнулся?

5.39. На заводе 27% продукции высшего качества, а 70% – I сорта. Найдите вероятность того, что наудачу взятый продукт окажется высшего или I сорта.

▲ Пусть A означает, что наудачу взятая продукция завода оказалась высшего качества, а B – 1-го сорта. Тогда нам нужно найти верорятность $P(A + B)$. Т.к. события A и B несовместные и $P(A) = 0{,}27$, $P(B) = 0{,}7$, то $P(A + B) = P(A) + P(B) = 0{,}27 + 0{,}7 = 0{,}97$. ■

5.40. Стрелок попал в мишень, которая разделена на три непересекающиеся части. Вероятность попадания стрелка в 1-ю часть мишени равна 0,45, а во 2-ю часть – 0,35. Найдите вероятность того, что стрелок попал: 1) в 1-ю или во 2-ю части мишени; 2) во 2-ю или в 3-ю части мишени; 3) в 3-ю часть мишени?

5.41. В среднем одна из ста лампочек, имеющихся в магазине, бывает бракованной. Какова вероятность того, что из двух купленных в этом магазине лампочек: 1) обе являются небракованными; 2) только одна бракованная; 3) обе являются бракованными?

5.42. Карточки, в которых записаны по одной букве слова «вероятность», были перевернуты и тщательно перемешаны. Найдите вероятность того, что наудачу взятая карточка окажется с гласной буквой.

5.43. Какова вероятность того, что наудачу взятое натуральное число, не превосходящее 20, будет: 1) кратным 5; 2) кратным 3; 3) простым числом; 4) составным числом?

5.44. В мешочке 11 альчиков (внешне одинаковых), из которых 5 окрашенных. Первый извлеченный альчик оказался окрашенным. Найдите вероятность того, что наудачу извлеченный второй альчик также окажется окрашенным.

5.45. В ящике 15 деталей, среди которых 10 окрашенных. Найдите вероятность того, что наудачу извлеченная сборщиком деталь окажется окрашенной.

5.46. Монета подбрасывается дважды. Чему равна вероятность того, что «орел» выпадет хотя бы один раз?

5.47. В ящике 10 белых и 15 черных шаров. Наудачу извлекается один шар. Найдите вероятность того, что вынутый шар окажется белым.

B

5.48. Отдел технического контроля обнаружил 5 бракованных книг в партии из случайно отобранных 100 книг. Найдите относительную частоту появления бракованных книг.

5.49. Двое по очереди бросают монету, причем выигрывает тот, у кого раньше появится «орел». Воспроизведите эту игру 20 раз и найдите относительную частоту выигрыша для начинающего игру.

5.50. Составьте таблицу частот букв казахского алфавита, используя текст гимна Республики Казахстан.

5.51. Используя условие задачи **5.27**, оцените вероятность прорастания отдельного семени в этой партии.

5.52. Для контроля качества продукции одного завода из каждой партии готовых изделий выбирают для проверки 100 деталей. Проверку не выдерживают в среднем 8 изделий. Чему равна вероятность того, что наугад взятое изделие этого завода будет качественным? Сколько примерно бракованных изделий будет в партии из 1000 единиц?

5.53. Монета подбрасывается трижды. Чему равна вероятность того, что «орел» выпадет хотя бы один раз?

▲ Пусть E_i – событие «при i-м подбрасывании монеты она выпадет гербовой стороной, $i = 1, 2, 3$». Тогда нам нужно найти $P(E_1 + E_2 + E_3)$. По формуле (3)

$$P\left(E_1 + E_2 + E_3\right) = 1 - P\left(\overline{E_1 + E_2 + E_3}\right) = 1 - P\left(\overline{E_1} \cdot \overline{E_2} \cdot \overline{E_3}\right) =$$

$$= 1 - P\left(\overline{E_1}\right) \cdot P\left(\overline{E_2}\right) \cdot P\left(\overline{E_3}\right) = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{8}.$$

Ответ: $\frac{7}{8}$. ■

5.54. Какова вероятность того, что наудачу взятое двузначное число при делении на 8 даст в остатке 1?

5.55. Игральная кость брошена дважды. Найдите вероятность того, что: 1) по крайней мере один раз выпавшее очко окажется меньше 3; 2) ровно один раз выпавшее очко окажется меньше 3.

5.56. Используя условие предыдущей задачи, через A обозначим событие «сумма выпавших очков – нечетное число», а через B – событие «по меньшей мере один раз выпало число 1». Найдите вероятность события: 1) $A+B$; 2) $A \cdot B$; 3) $A \cdot \overline{B}$.

5.57. На районной математической олимпиаде среди 9 классов 5 из 12 участников являются отличниками учебы. Какова вероятность того, что все три призера окажутся отличниками учебы? Здесь считается, что все 12 участников олимпиады имеют равные возможности.

5.58. В учреждении имеются две установки, оповещающие о пожаре. В случае пожара первая установка может сработать с вероятностью 0,95, а вторая – с вероятностью 0,8. Какова вероятность того, что в случае пожара сработает только одна противопожарная установка?

5.59. Вероятность того, что в течение суток станок-автомат выйдет из строя равна 0,01. Какова вероятность того, что станок-автомат будет работать без остановки в течение двух суток?

▲ Пусть A_i – событие «станок не выйдет из строя в i-й день, $i = 1,2$». Тогда $P\left(\overline{A_i}\right) = 0,01$ и $P(A_i) = 0,99$. Найдем $P(A_1A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 0,99 \cdot 0,99 = 0,9801$. ■

5.60. Техническое устройство состоит из трех независимо работающих блоков, которые могут выйти из строя соответственно с вероятностями 0,05; 0,03 и 0,04. Для того чтобы это устройство вышло из строя, достаточно неисправности одного из его блоков. Какова вероятность того, что установка выйдет из строя?

5.61. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 1000 одинаковых мелких кубиков, после чего эти кубики тщательно перемешаны. Какова вероятность того, что у наудачу взятого кубика количество окрашенных граней окажется равным: 1) одному; 2) двум; 3) трем?

5.62. Чтобы вывести из строя вражеский мост, достаточно одного точного попадания авиабомбой. В него были брошены две авиабомбы с вероятностями поражения цели, равными соответственно 0,6 и 0,7. Найдите вероятность того, что мост выйдет из строя.

5.63. В результате четырех выстрелов стрелок поразил цель с вероятностью, равной 0,9984. С какой вероятностью он поразит цель при одном выстреле?

5.64. В электрическую цепь последовательно подключены три элемента, которые могут выйти из строя с вероятностью, соответственно равной 0,1; 0,15 и 0,2. С какой вероятностью эта цепь выйдет из строя?

C

5.65. В мешочке 4 белых и 2 красных альчика. Какова вероятность того, что наудачу извлеченные 2 альчика имеют различные цвета?

5.66. Из палочек длиной 2 см, 5 см, 6 см и 10 см наудачу извлекаются три палочки. Найдите вероятность того, что из выбранных палочек можно составить треугольник.

5.67. Брошены 2 игральные кости, n – сумма выпавших очков. Что вероятнее: $n=7$ или $n=8$?

5.68*. Известно, что из всех сайгаков, обитающих в степях Сарыарки, 400 животных имеют клеймо. Из случайно отобранных для изучения 20 сайгаков 8 имели клеймо. Укажите приближенное количество сайгаков этого региона.

5.69. В мешочке 20 альчиков, из них 5 окрашены в красный цвет, 8 – в синий, а остальные не окрашены. Из мешочка наудачу вынимают один альчик. Опишите все элементарные исходы возможного цвета этого альчика. Составьте шкалу вероятностей.

5.70. Монета подбрасывается дважды. Опишите все возможные исходы этого эксперимента. Составьте шкалу вероятностей.

5.71. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,6. По цели стреляют до первого попадания. Найдите вероятность того, что по цели будет произведено не более, чем 3 выстрела.

5.72. Двое игроков подбрасывают монеты по очереди. По договоренности выигрывает тот, у кого монета выпала гербовой стороной. Найдите вероятность выигрыша каждого игрока.

5.73. Решите предыдущую задачу для трех игроков.

5.74. Докажите неравенство $P_A(B)>P(B)$, если $P_B(A)>P(A)$.

5.75. Найдите $P(A)$, если $P(AB) = 0{,}72$, $P(A\overline{B}) = 0{,}18$.

5.76. Найдите $P(A\overline{B})$, если $P(A) = a$, $P(B) = b$, $P(A+B) = c$.

▲ $c = P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = a + b - P(A \cdot B) \Rightarrow$
$\Rightarrow P(AB) = a + b - c$. $A \cdot B + A\overline{B} = A(B + \overline{B}) = A \Rightarrow P(AB+$
$+ A\overline{B}) = P(A) \Rightarrow P(AB) + P(A\overline{B}) = P(A) \Rightarrow a + b - c +$
$+ P(A\overline{B}) = a \Rightarrow P(A\overline{B}) = c - b$. ■

5.77. Брошены две игральные кости, пронумерованные цифрами 1 и 2. Какова вероятность того, что количество очков, выпавших на первой игральной кости, больше, чем на второй?

5.78. В урне имеются n шаров, пронумерованных от 1 до n. Из урны наудачу извлекают по одному шару и откладывают в сторону. Определите вероятность того, что минимум один раз номер шара совпадет с номером хода (т.е. с порядковым номером вынимания шара из урны)?

Упражнения для повторения

5.79. Упростите выражения:

1) $\left(\dfrac{ax-y}{x+y}-\dfrac{ay+x}{y-x}\right)\cdot\left(\dfrac{x^2-y^2}{a^2-1}:\dfrac{x^2+y^2}{a-1}\right);$

2) $\left(\dfrac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-1}+b^{-1}}-\dfrac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-1}-b^{-1}}\right)\cdot\left(\dfrac{4ab}{b^2-a^2}\right)^{-1}.$

5.80. Решите уравнение $|x+3|=2x-1$.

5.81. Упростите выражения:

1) $\dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\sin x+\sin(\pi-x)}-\dfrac{\mathrm{tg}x\cdot\cos(\pi-x)}{2};$

2) $\dfrac{2\sin\varphi\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\varphi\right)}{2\cos^2\varphi-1}.$

5.2. Геометрическая вероятность

Изучив материалы данной темы, вы будете:

- применять геометрическую вероятность при решении текстовых задач.

Во многих случаях невозможно определить вероятность события классическим способом. Обычно в таких случаях множество всех возможных исходов и благоприятствующих исходов содержат бесконечное множество элементов. Например, пусть плоская область G содержит в себе некоторую меньшую область g (рис. 5.2). Нужно определить вероятность того, что случайно выбранная из области G точка M содержится и в области g. Считается, что выбор точки M области G осуществляется с равными возможностями по отношению ко всем точкам этой области. Здесь количество всех возможных исходов выбора точки (т.е. испытания) равно «количеству» точек области G. Множество g также содержит бесконечно много точек (это «количество» благоприятствующих ис-

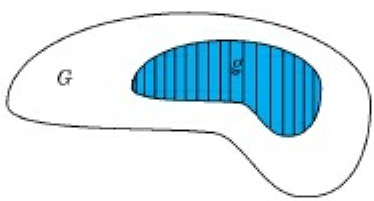


Рис. 5.2

ходов). Поэтому эта вероятность не может быть определена формулой $P(A)=\frac{m}{n}$.

Такие вероятности называются ***геометрическими вероятностями*** и вероятность интересующего нас события определяется отношением площадей данных областей g и G:

$$\boxed{P=\frac{S_g}{S_G}}. \qquad (1)$$

Формулу (1) следует рассматривать в качестве некой универсальной формулы. Так как и отрезок, и плоские области, и пространственные тела содержат бесконечно много точек, то в зависимости от смысла задачи соответствующие вероятности для точек на отрезках определяются отношением длин этих отрезков, для плоских фигур – отношением площадей, а для точек пространственных тел – отношением объемов.

Пример 1. На отрезке AB длиной 12 см случайно выбрана точка C. Определим вероятность того, что площадь квадрата со стороной AC больше 36 см^2 и меньше 81 см^2.

▲ Площадь квадрата со стороной $AC=x$ равна x^2. Тогда по условию задачи верно неравенство $36<x^2<81 \Rightarrow 6<x<9$. Если на числовой оси в качестве координат точки A возьмем 0, т.е. $A(0)$, то $B(12)$ и $C(x)$. Тогда необходимо, чтобы $x\in(6;\ 9)$ (рис. 5.3). А длина этого интервала равна 3 см, и требуемая вероятность определяется отношением 3 : 12:

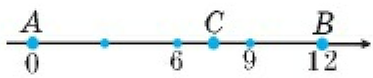


Рис. 5.3

$P=\frac{3}{12}=0{,}25$. ■

Пример 2. Рабочий контролирует работу двух независимо работающих станков. Многолетние наблюдения показали, что каждый станок (независимо друг от друга) за час работы в среднем требует 10 мин внимания рабочего. Определим вероятность того, что за время, когда рабочий занят работой первого станка, его внимания потребует и второй станок.

▲ Обозначим через x то время, когда рабочий занят работой первого станка, а через y – время, когда и второму станку необходимо уделить внимание. Если за то время, когда рабочий занят работой первого станка, необходимо уделить внимание работе второго станка, то должно выполняться неравенство $|x-y|<10$, т.е. имеем двойное неравенство $-10<x-y<10$. На первый взгляд хотя и кажется, что сначала вышел из строя I станок, а затем неполадки обнаружились во II станке, т.е. $x \geqslant y$, случай $y \geqslant x$ в полной мере отвечает условиям задачи, ибо по условиям задачи нас интересует то, что станки потребуют внимания рабочего в одних и тех же отрезках времени. Итак, множество всех благоприятствующих нам точек плоскости удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} y > x - 10, \\ y < x + 10, \\ 0 \leqslant y \leqslant 60, \\ 0 \leqslant y \leqslant 60, \end{cases}$$

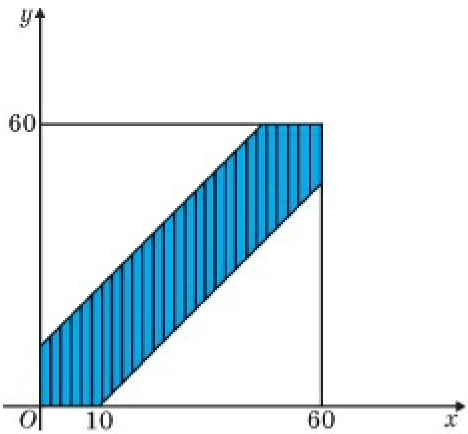


Рис. 5.4

а множество всех возможных исходов определяется неравенствами $0 \leqslant x \leqslant 60$, $0 \leqslant y \leqslant 60$. На рисунке 5.4 множество всех возможных исходов изображено в виде квадрата со стороной 60, а множество благоприятствующих нам исходов определяется закрашенной фигурой. Тогда по формуле (1) имеем: $P = \dfrac{60^2 - 50 \cdot 50}{60^2} = \dfrac{11}{36}$. ■

Как правило, не сразу обнаруживается, что задачу необходимо решать геометрическим способом. Поэтому, проделав полный анализ условия задачи, следует обратить внимание на следующие моменты:

- множество всех возможных исходов испытания и множество благоприятствующих нам исходов принимают бесконечное множество значений (во множестве действительных чисел);
- если в процессе решения задачи вводятся независимые переменные, меняющиеся во множестве действительных чисел, то способ решения задачи во многом зависит от количества вводимых переменных: при одной переменной задача

решается на числовой оси; при двух переменных задача решается на координатной плоскости и т. д.

Упражнения

А

5.82. Точка C является серединой отрезка AB, длина которого равна 20 см. На отрезке AB наудачу отмечается точка. Если все точки отрезка AB могут быть отмечены с равными возможностями, то какова вероятность того, что отмеченная точка принадлежит отрезку BC?

5.83. Отрезок разделен на три равные части. Какова вероятность того, что наудачу взятая точка отрезка принадлежит ее средней части?

5.84. Внутри единичного квадрата случайно отмечена точка A. Найдите вероятность того, что расстояние от точки A до определенной стороны квадрата не превышает числа a $(0<a<0{,}5)$.

▲ Искомая вероятность равна отношению $S_{ABRT} : S_{ABCD}$, т.к. $AB = 1$, то $S_{ABCD} = 1$ и $S_{ABRT} = 1 \cdot a = a$ (рис. 5.5). Тогда $P = a$. ■

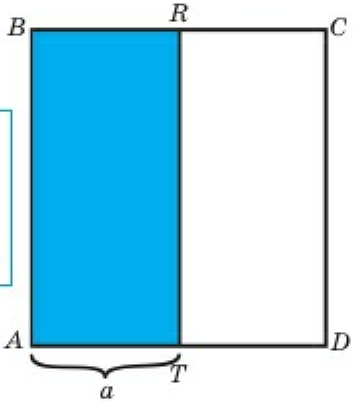


Рис. 5.5

5.85. Внутри квадрата со стороной a случайно отмечена точка. Какова вероятность того, что эта точка принадлежит кругу, вписанному в этот квадрат?

5.86. Внутри равностороннего треугольника со стороной a случайно отмечена точка. Какова вероятность того, что эта точка принадлежит треугольнику, образованному средними линиями данного треугольника?

В

5.87. Используя задачу **5.84**, найти вероятность того, что расстояние от точки A до: 1) определенной вершины квадрата; 2) центра квадрата не превышает числа a $(0<a<0{,}5)$.

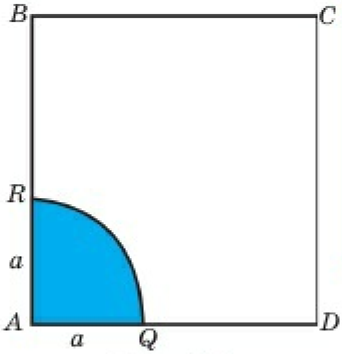


Рис. 5.6

▲ 1) Искомая вероятность равна отношению $S_{сек.ARQ} : S_{ABCD}$ (рис. 5.6). Здесь $AR = QA = a$ и $S_{сек.\ ARQ} = \frac{1}{4}\pi a^2$, $S_{ABCD} = 1$, поэтому $P = \frac{\pi a^2}{4}$. 2) $P=2\pi a^2$. ■

5.88. Какова вероятность того, что случайно выбранная точка круга радиусом R принадлежит: 1) квадрату; 2) правильному треугольнику; 3) прямоугольнику со стороной $2a$ $(0<a<R)$; 4) равнобедренной трапеции с основаниями $2a$ и $2b$ $(0<a<R,\ 0<b<R)$, вписанной в данный круг?

5.89. Даны два концентрических круга радиусами, равными 2 см и 4 см. В большем круге случайно отмечена точка. Какова вероятность того, что эта точка принадлежит: 1) малому кругу, 2) кольцу, ограниченному окружностями данных кругов?

5.90. Последовательным соединением середин сторон данного квадрата получен 2-й, меньший квадрат, далее последовательным соединением середин сторон этого квадрата получен 3-й квадрат. Какова вероятность того, что случайно отмеченная точка внутри данного квадрата принадлежит: 1) 3-му квадрату; 2) частям 2-го квадрата, являющегося «внешностью» 3-го квадрата; 3) кругу, вписанному в третий квадрат?

5.91. Решите предыдущую задачу, взяв вместо квадрата равносторонний треугольник.

5.92. Круг разделен на 6 равных секторов, каждый из которых последовательно окрашен в красный, синий и желтый цвета. В этот круг, вращающийся вокруг центра, произвели один выстрел из пневматической винтовки. Какова вероятность того, что пуля попадет в сектор желтого цвета?

C

5.93. Прут длиной 1 м случайно переломился на две части. Нужно определить вероятность того, что длина каждой части прута не меньше, чем 30 см. Здесь следует считать, что прут может обломиться в любой точке с равными возможностями.

▲ Пусть длина 1-й части прутика равна x, а длина второй – y. Тогда длина его третьей части равна $1 - x - y$. Поэтому по условию задачи имеем:

$$\begin{cases} x \geqslant 0,3, \\ y \geqslant 0,3, \\ 1 - x - y \geqslant 0,3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0,3, \\ y \geqslant 0,3, \\ x + y \leqslant 0,7. \end{cases}$$

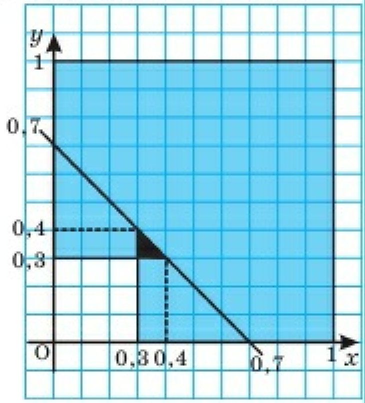


Рис. 5.7

Т.к. $0 < x < 1$, $0 < y < 1$, то точки $(x; y)$ заполняют единичный квадрат (рис. 5.7.). А множество точек $(x; y)$ удовлетворяют системе неравенств (изображена синим цветом, рис. 5.7.) Катеты этого треугольника равны 0,1, поэтому его площадь равна $\frac{1}{2} \cdot 0,1 \cdot 0,1 = 0,005$, а площадь квадрата равна 1. Тогда искомая вероятность такова: $\frac{0,005}{1} = 0,005$. ■

5.94. Прутик длиной l случайно обломился в двух местах и разделился на 3 части. Какова вероятность того, что: 1) из этих частей можно образовать треугольник; 2) длина каждой из этих частей не меньше, чем $\frac{l}{4}$?

5.95. На шахматную доску, длина стороны каждой клетки которой равна $2a$, случайно уронили монету диаметром $2r$ $(r<a)$. Какова вероятность того, что монета целиком окажется внутри: 1) одной клетки; 2) клетки черного цвета?

5.96. Какова вероятность того, что из трех отрезков, длины которых не превосходят l, можно составить треугольник?

5.97. Один из радиусов кольца вдвое больше другого. В точке малой окружности кольца поместили источник света. Найдите вероятность того, что наудачу выбранная точка кольца окажется освещенной.

5.98. Решите предыдущую задачу, взяв вместо окружностей концентрические сферы. Необходимые для решения задачи формулы можно взять из математических справочников.

5.99. (Задача о встрече.) Двое условились встретиться в определенном месте между 17 и 18 ч. По договоренности каждый из них приходит в назначенное место и ждет второго ровно T минут и в случае, если второй партнер за это время не приходит в назначенное место, он уходит. Какова вероятность встречи партнеров? Решите задачу при: 1) T=15 мин; 2) T=20 мин; 3) T=30 мин.

Упражнения для повторения

5.100. Решите уравнение:

1) $\frac{4}{x}+5=\frac{1}{x^2}$; 2) $\frac{2}{x^2+3}+\frac{4}{x^2+7}=1$.

5.101. Найдите значение $\operatorname{tg} x$, если $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=-2$.

5.102. Первый член геометрической прогрессии равен 150, а четвертый член равен 1,2. Найдите ее пятый член.

Дополнительные задачи к разделу 5

5.103. Монету подбрасывают до тех пор, пока она не выпадет гербовой стороной или до тех пор, пока монета 4 раза подряд не выпадет числовой стороной. Определите пространство элементарных событий.

5.104. Из цифр от 1 до 9 наудачу выбрали одну. Какова вероятность того, что выбранное число окажется: 1) четным; 2) нечетным; 3) простым?

5.105. Выявлено, что 1,5% продуктов некоторого производства бывают бракованными. Сколько деталей в среднем окажутся бракованными из 1000 деталей, произведенных на этом производстве?

5.106. Какова вероятность того, что при трехкратном подбрасывании игральной кости по крайней мере один раз выпадет «шестерка»?

5.107. Покажите, что среди любых 9 людей найдутся 3 человека, знакомых друг с другом, или 4 человека, которые не знакомы друг с другом.

5.108. Из шахматной доски вырезали две клетки, расположенные на одной диагонали. Можно ли оставшуюся часть доски полностью покрыть прямоугольником, составленным из одной белой и одной черной клеток?

5.109. На почтамте в продаже есть10 видов марок. Сколькими способами можно купить: 1) 8 марок; 2) 8 различных марок?

5.110. В коробке имеются 2 синих, 4 красных и 5 белых альчиков. Сколькими способами из этой коробки можно извлечь: 1) 3 альчика; 2) 3 альчика разных цветов; 3) 3 альчика так, чтобы два из них были одного цвета?

5.111. В течение 15 дней учащиеся должны сдать 5 экзаменов. Среди них один экзамен по алгебре, а другой – по геометрии. Сколькими способами можно составить график экзаменов так, чтобы экзамены по алгебре и геометрии не следовали друг за другом?

5.112. Сколько пятизначных чисел можно написать с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 так, чтобы они состояли из 3 нечетных, 2 четных цифр и все цифры в них не повторялись?

5.113. Сколькими способами можно переставлять местами буквы в слове «сорняк» так, чтобы между двумя гласными буквами были расположены 2 согласные буквы?

5.114. Докажите тождества:

1) $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$; 2) $C_n^1 + 6C_n^2 + 6C_n^3 = n^3$;

3) $C_n^0 + 7C_n^1 + 12C_n^2 + 6C_n^3 = (n+1)^3$.

5.115. В биноминальном разложении выражения $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^m$ сумма коэффициентов первого и третьего слагаемых равна 46. Найдите слагаемое, не содержащее переменную x.

5.116. Найдите коэффициент при x^5 многочлена:

1) $(1+x-x^2)^3$; 2) $(1+x^2-x^3)^4$.

5.117. Населенные пункты A и B соединены тремя дорогами, и эти дороги пересекаются 4 параллельными между собой дорогами. Сколькими способами можно добраться из пункта A в пункт B, не повторяя пройденный путь?

5.118. Пусть B и C – несовместные события и $P(A)\neq 0$. Докажите равенство

$$P_A(B+C) = P_A(B) + P_A(C).$$

5.119. Пусть $P(A)\neq 0$. Докажите равенство

$$P_A(B+C)=P_A(B)+P_A(C)-P_A(BC).$$

5.120. На «бесконечную» шахматную доску, сторона каждого квадрата которой равна $2a$, брошена монета радиусом r ($r<a$). Какова вероятность того, что монета целиком окажется в одном квадрате?

5.121. 1) В древности один хан с целью хоть как-то облегчить участь неверного слуги, которого должны были наказать, велел дать ему 2 белых и 2 красных альчика. По условию хана слуга должен был распределить эти альчики по двум мешочкам, а затем палач случайно отбирает один из этих мешочков и из выбранного мешочка извлекает один альчик. Если вынутый альчик окажется белого цвета, то слуга будет помилован, а если этот альчик окажется красного цвета, то он будет наказан. Как слуге нужно распределить эти альчики по двум мешочкам так, чтобы он был помилован с наибольшей вероятностью?

2) В квадрат случайно брошены 4 точки. Какова вероятность того, что ровно 2 из этих точек попадут в круг, вписанный в данный квадрат?

Отдельные комбинаторные задачи интересовали и древнегреческих математиков. Однако первые важные результаты в этой области, связанные с развитием алгебры и теории вероятности, были получены математиками XVII и XVIII веков. Первоначально теория вероятностей зародилась в основном из-за потребностей азартных игр (подбрасывание игральных костей, карточные игры и т. п.). Так, например, во времена Людовика XIV истинный любитель азартных игр Кавалер де Мере обнаружил, что при подбрасывании трех игральных костей в сумме 11 очков появляется чаще, чем 12. Однако он считал, что в сумме каждое из этих очков можно получить 6 различными комбинациями:

для 11 очков: (6, 4, 1), (6, 3, 2), (5, 5,1), (5, 4, 2), (5, 3, 3),(4, 4, 3);
для 12 очков: (6, 5, 1),(6, 4, 2), (6, 3,3), (5, 5, 2), (5, 4, 3), (4, 4, 4).

На ошибку де Мере указал французский математик Блез Паскаль (1623–1662). Де Мере считал, что указанные им комбинации имеют равные возможности. На самом деле эти события не являются равновозможными. Например, комбинацию (6, 4, 1) можно получить шестью различными способами: (6, 4, 1), (6, 1, 4), (4, 1, 6), (4, 6, 1), (1, 4, 6), (1, 6, 4), а комбинацию (4, 4, 4) – единственным способом. (Укажите на ошибку де Мере, самостоятельно подсчитав вероятности появления очков 11 и 12 при подбрасывании трех игральных костей.) Во второй половине XVII века в переписке между собой ученые Паскаль и Ферма пытались научно обосновать закономерности, встречающиеся в азартных играх. Ученые-историки считают, что теория вероятностей берет начало именно с этой переписки. В дальнейшее развитие теории вероятностей весомый вклад внесли нидерландский математик Х. Гюйгенс (1629–1695), немецкий математик Г. В. Лейбниц (1646–1716), швейцарский математик Я. Бернулли (1654–1705) и другие.

В XVIII веке с развитием естествознания и в связи с потребностями повседневной жизни (теория стрельбы, теория статистики и т. п.) развитие теории вероятностей поднялось на более высокую ступень. В числе первых, кто начал применять аналитические методы в теории вероятностей, были такие математики, как А. Муавр (1667–1754), П. С. Лаплас (1749–1827), К. Гаусс (1777–1855), С. Пуассон (1781–1840) и др. В XIX–XX веках важный вклад в развитие теории вероятностей и математической статистики внесли также и русские математики. Среди них П. Л. Чебышев (1821–1894), А. А. Марков (1856–1922), А. М. Ляпунов (1857–1918), С. Н. Бернштейн (1880–1968), А. Я. Хинчин (1894–1959), А. Н. Колмогоров (1903–1987). Например, А. Н. Колмогоров рассмотрел теорию вероятностей аксиоматическим путем.

Названия терминов на трех языках

На русском языке	На казахском языке	На английском языке
Случайное событие	Кездейсоқ оқиға	Random event
Элементарное событие	Элементар оқиға	Elementary event
Пространство элементарных событий	Элементар оқиғалар кеңістігі	Elementary event space
Совместные события	Үйлесімді оқиғалар	Joint events
Несовместные события	Үйлесімсіз оқиғалар	Non concurrent events
Независимые события	Тәуелсіз оқиғалар	Independent events
Зависимые события	Тәуелді оқиғалар	Dependent events
Противоположные события	Қарама-қарсы оқиғалар	Opposite events
Количество благоприятствующих исходов	Қолайлы жағдайлар саны	Number of favourable outcomes
Количество всех возможных исходов	Барлық мүмкін жағдайлар саны	The number of all possible outcomes
Классическое определение вероятности	Ықтималдықтың классикалық анықтамасы	The classic definition of probability
Статистическое определение вероятности	Ықтималдықтың статистикалық анықтамасы	Statistical definition of probability
Геометрическая вероятность	Геометриялық ықтималдық	Geometric probability

Раздел 6. УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ КУРСА АЛГЕБРЫ ЗА VII–IX КЛАССЫ

6.1. Натуральные и целые числа. Делимость чисел

6.1. При каких значениях a число $\overline{5431a}$ делится на: 1) 2; 2) 3; 3) 4; 4) 5; 5) 6; 6) 9; 7) 10; 8) 11?

6.2. Сформулируйте признак делимости целого числа на: 1) 18; 2) 25.

6.3. Докажите, что число $\overline{abc}-\overline{cba}$ делится на 9, если $a > c$.

6.4. Докажите, что при каждом натуральном n число: 1) n^4-n^2 делится на 12; 2) n^9-n^3 делится на 504; 3) n^4+14n^2+49 при n нечетном делится на 64; 4) 5^n-5 делится на 20; 5) 7^n-7 делится на 42.

6.5. Докажите, что произведение четырех последовательных целых чисел делится на 24.

6.6. Докажите, что разность куба целого числа и самого числа делится на 24.

6.7. Докажите, что разность квадрата нечетного числа и единицы делится на 8.

6.8. Если три простых числа, больших, чем 3, образуют арифметическую прогрессию, то разность этой прогрессии кратна 6. Докажите.

6.9. Докажите, что любое нечетное простое число представляется в виде $4m-1$ или $4m+1$, где m – натуральное число.

6.10. Найдите a и b, если: 1) $a:b=4:7$ и $(a, b)=8$; 2) $[a, b]=124$ и $(a, b)=31$; 3) $ab=375$ и $[a, b]=75$.

6.2. Рациональные и иррациональные числа. Квадратные корни

6.11. Вычислите:

1) $15\frac{6}{7}-12\frac{6}{7}\cdot\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{15}\right)$; 2) $\left(2{,}125\cdot1\frac{15}{17}-1\frac{7}{12}\right):7{,}25$;

3) $\dfrac{12{,}8:0{,}64+3{,}05:0{,}05}{8\frac{2}{3}:1\frac{4}{9}-1}$; 4) $\dfrac{203{,}4:9-(5{,}39-7{,}39)}{\frac{3}{14}\cdot\frac{7}{9}-\frac{1}{3}}$;

5) $\left(1\frac{1}{3}\cdot0{,}27-3\frac{1}{3}\cdot0{,}15\right)-1500\cdot(-0{,}1)^3$;

6) $\left(\frac{6}{64}\cdot 5\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right):\left(-\frac{1}{3}\right)^3+(-1)^5$;

7) $(0,3)^{-3}+\left(\frac{3}{7}\right)^{-1}+(-0,5)^{-2}\cdot\frac{3}{4}+(-1)^6\cdot 6$;

8) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}-\left(\frac{1}{9}\right)^{-1}+\left(\frac{6}{17}\right)^0\cdot\frac{1}{8}-0,25^{-2}\cdot 16$.

6.12. Вычислите:

1) $\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}+1$;   2) $\sqrt{\left(\sqrt{5}-3\right)^2}-3$;

3) $\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{5}-3\right)^2}$;   4) $\left(\sqrt{5}-3\right)\cdot\sqrt{14+6\sqrt{5}}$;

5) $\left(\sqrt{5}-2\right)\cdot\sqrt{9+4\sqrt{5}}$;   6) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{5-2\sqrt{6}}$;

7) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$.

6.13. Сравните числа:

1) $\sqrt{0,63}$ и $\sqrt{0,83}$;   2) $\sqrt[3]{0,63}$ и $\sqrt[4]{0,63}$;

3) $\sqrt{1,63}$ и $\sqrt[3]{1,63}$;   4) $\sqrt{2}$ и $\sqrt[3]{3}$.

6.14. Покажите иррациональность числа: 1) $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{3}$; 3) $\sqrt{5}$.

6.15. Постройте график функции: 1) $y=\sqrt{x}$; 2) $y=\sqrt{x^2}$; 3) $y=\left(\sqrt{x}\right)^2$.

6.3. Формулы сокращенного умножения

6.16. Докажите формулы:

1) $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$;
2) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$;
3) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$;
4) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$;
5) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$;
6) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$;
7) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$;
8) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$;
9) $a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+\ldots+a+1)$;
10) $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1})$;

11) $a^{2n+1}+1=(a+1)(a^{2n}-a^{2n-1}+\ldots-a+1)$;

12) $a^{2n+1}+b^{2n+1}=(a+b)(a^{2n}-a^{2n-1}b+\ldots-ab^{2n-1}+b^{2n})$.

6.17. Разложите выражения на множители:

1) $9(x+5)^2-(x-7)^2$;
2) $49(y-4)^2-9(y+2)^2$;
3) $x^3+y^3+2xy(x+y)$;
4) $5a^2-5-4(a-1)^2$;
5) $2(x+y)^2+x^2-y^2$;
6) $a^4+ab^3-a^3b-b^4$;
7) $(x-y+4)^2-x^2+2xy-y^2$;
8) $(a-b)^3+(a+b)^3$;
9) $(x+2y)^3+(2x-y)^3$.

6.18. Разложите выражения на множители:

1) $5xy^3+30x^2z^2-6x^3yz-25\,y^2z$;

2) $15m^3n^2p-35p^2nq^3+25mn^3q^2-21m^2p^3q$;

3) $32c^5-3^5$;
4) $(4a)^5+(2b)^5$;
5) $(2x)^6+(3y)^6$.

6.19. Запишите выражения в виде двучлена:

1) $(2x+1)(16x^4-8x^3+4x^2-2x+1)$;

2) $\left(\frac{2}{3}x-3ab\right)\cdot\left(\frac{8}{27}x^3+\frac{4}{3}x^2ab+6xa^2b^2+27a^3b^3\right)$.

6.20. Покажите, что число: 1) $143^{15}-81^{15}$ делится на 62; 2) $12^{31}+$ $+28^{31}$ делится на 80.

6.4. Квадратное уравнение. Теорема Виета

6.21. Докажите, что, если $k^2-ac>0$, то корни уравнения ax^2+ $+2kx+c=0$ определяются по формулам

$$x_1=\frac{-k-\sqrt{k^2-ac}}{a},\quad x_2=\frac{-k+\sqrt{k^2-ac}}{a}.$$

6.22. Докажите теорему Виета.

6.23. Решите уравнения и разложите на множители соответствующий квадратный трехчлен:

1) $2x^2+5x-7=0$;
2) $4x^2-x-14=0$;
3) $3x^2-8x+5=0$;
4) $7x^2+x-8=0$.

6.24. Докажите тождество $a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)=ax^2+bx+c$.

6.25. Покажите, что числа $x_1=1$, $x_2=\frac{c}{a}$ являются корнями уравнения $ax^2+bx+c=0$, если $a+b+c=0$.

6.26. Покажите, что числа $x_1=-1$, $x_2=-\frac{c}{a}$ являются корнями уравнения $ax^2+bx+c=0$, если $a-b+c=0$.

6.27. При каких значениях a уравнение $(x^2-a)(x^2+3ax+a)=0$ имеет ровно 2 корня?

6.28. При каких значениях a уравнение $(x^2-3x-4)(x^2-a)=0$ имеет ровно 3 корня?

6.29. Не решая уравнения $3x^2-x-1=0$, найдите для его корней x_1 и x_2 значение выражения:

1) x_1+x_2; 2) x_1x_2; 3) $x_1^2+x_2^2$; 4) $x_1^2+2x_1x_2+x_2^2$;

5) $x_1^3+3x_1^2x_2+3x_1x_2^2+x_2^3$; 6) $x_1x_2^4+x_1^4x_2$; 7) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$.

6.30. Составьте квадратное уравнение по заданным корням:

1) $x_1=-3$, $x_2=5$; 2) $x_1=x_2=7$;

3) $x_1=3a+1$, $x_2=5a-2$; 4) $x_1=6-\sqrt{5}$, $x_2=6+\sqrt{5}$;

5) $x_1=\sqrt{7}-\sqrt{6}$, $x_2=\sqrt{7}+\sqrt{6}$; 6) $x_1=-2-\sqrt{3}$, $x_2=-2+\sqrt{3}$.

6.31. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x+y=7, \\ xy=6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+2y=7, \\ xy=3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x-3y=7, \\ xy=-2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x+y+xy=11, \\ xy(x+y)=30. \end{cases}$

6.5. Многочлены и их корни

6.32. Разделите многочлен на многочлен с остатком:
1) x^4+x^2+1 на $x+5$; 2) x^7-1 на x^3+x+1; 3) x^6-64 на $x-3$.

6.33. При каких значениях a делится без остатка:
$(x^3+6x^2+ax+12):(x+4)$?

6.34. Докажите, что при делении многочлена $f(x)$ на двучлен $x-a$ в остатке получится $f(a)$.

6.35. Если α является целым корнем многочлена $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$, где a_1, a_2, …, a_n – целые числа, то a_n делится на α без остатка. Докажите.

6.36. Найдите целые корни многочлена и разложите его на множители:

1) x^3-7x-6; 2) $x^3+9x^2+11x-21$;
3) x^3-5x^2+3x+1; 4) $x^3+9x^2+23x+15$;
5) $x^4+3x^3-12x^2-38x-24$; 6) $x^4-6x^3-14x^2-11x-4$.

6.37. Докажите, что при каждом натуральном n значение выражения n^5-5n^3+4n делится на 120.

6.38. Упростите выражения:

1) $\left(\dfrac{x^2-y^2}{xy}-\dfrac{1}{x+y}\left(\dfrac{x^2}{y}-\dfrac{y^2}{x}\right)\right):\dfrac{x-y}{x}$;

2) $\left(\dfrac{m^2+n^2}{m^2n^2}\cdot\left(\dfrac{1}{m^2}-\dfrac{1}{n^2}\right)-\left(\dfrac{1}{p^2}-\dfrac{1}{n^2}\right)\cdot\dfrac{p^2+n^2}{p^2n^2}\right):\dfrac{p^2+m^2}{p^2m^2}$;

3) $\left(\dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{b^3}\right)\cdot\left(\dfrac{a(b-a)}{a^2-ab+b^2}+1\right)$;

4) $\left(\dfrac{a^2+b^2}{ab}-2\right):\left(\dfrac{2a^2+2ab}{a^2+2ab+b^2}-1\right)\cdot\left(\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a-b}\right)$;

5) $\dfrac{(x^2-y^2-z^2-2yz)(x+y-z)}{(x+y+z)(x^2+z^2-2xz-y^2)}$;

6) $\dfrac{a^2-3ab+ac+2b^2-2bc}{a^2-b^2+2bc-c^2}$.

6.6. Уравнения и системы уравнений

6.39. Решите уравнения:

1) $\dfrac{3x+1}{5x-6}=0$; 2) $\dfrac{9x^2-1}{3x+1}=0$; 3) $\dfrac{5x+7}{49-25x^2}=0$;

4) $\dfrac{x^2-3x}{x^2+7x-30}=\dfrac{5x^2-x-42}{x^2+7x-30}$; 5) $x^2+\dfrac{3x-1}{x+4}=16-\dfrac{1-3x}{x+4}$;

6) $\dfrac{1}{3x+2}+\dfrac{3}{5x+6}=\dfrac{2}{7x+8}$; 7) $\dfrac{12}{x^2-9}+\dfrac{x}{x+3}=\dfrac{2}{x-3}$.

6.40. Решите уравнения при каждом значении параметра a:

1) $a(a-1)x=a$; 2) $x^2+ax+36=0$; 3) $x^2-(2a+1)x+a^2+a=0$;

4) $\dfrac{x-a}{x-3}=0$; 5) $\dfrac{x^2-a^2}{x-3}=0$; 6) $\dfrac{x+a}{x+3}=0$

6.41. Решите уравнения:

1) $x^4-5x^2+4=0$; 2) $7x^4-x^2-6=0$; 3) $3x^4-5x^2+2=0$;
4) $(5x^2+x-1)^2-(5x^2+x-1)-2=0$;
5) $(3x^2-x-1)^2-18x^2+6x-1=0$;
6) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+6=0$; 7) $x^2+5x+8+\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$;
8) $x^4-5x^3+8x^2-5x+1=0$; 9) $10x^4-29x^3+30x^2-29x+10=0$;
10) $\dfrac{2x^2-5x+4}{3x-2}+\dfrac{15x-10}{2x^2-5x+4}=0$;
11) $\dfrac{x^2+5x-1}{2x-1}+\dfrac{2x-1}{x^2+5x-1}=5,2$.

6.42. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases}3x+5y=11,\\2x-3y=17;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}20x-15y=51,\\4x-3y=10,2;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}3x+5y=20,\\6x+10y=7;\end{cases}$

4) $\begin{cases}x+2y=3,\\x^2-3xy+5y^2=3;\end{cases}$ 5) $\begin{cases}3x+4y=12,\\x^2+y^2=5,76;\end{cases}$

6) $\begin{cases}5x-12y=60,\\x^2+y^2=4;\end{cases}$ 7) $\begin{cases}x=3y,\\x^2+5xy+7y^2=31;\end{cases}$

8) $\begin{cases}2x-3y=0,\\x^2+3xy+5y^2=47;\end{cases}$ 9) $\begin{cases}x^2-5xy+4y^2=0,\\x^2+3xy+5y^2=5.\end{cases}$

6.43. При каких значениях a система уравнений имеет по меньшей мере три разных корня:

$$\begin{cases}y^2+2y(2+x)+(x^2+2x)(4-x^2)=0,\\y-ax-3a=0?\end{cases}$$

6.7. Доказательство неравенств

6.44. Докажите неравенства:

1) $(6u-1)(u+2)<(3u+4)(2u+1)$;
2) $(3v-1)(2v+1)>(2v-1)(2+3v)$;
3) $\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$; 4) $a+\dfrac{1}{a}\geqslant 2,\ a>0$;
5) $\dfrac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$; 6) $(x+y)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)\geqslant 4,\ (x>0,\ y>0)$;

7) $a+b+c \geqslant \sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc}$, $(a \geqslant 0,\ b \geqslant 0,\ c \geqslant 0)$;

8) $(1-a)(1-b)(1-c) \geqslant 8abc$, $(a \geqslant 0,\ b \geqslant 0,\ c \geqslant 0,\ a+b+c=1)$.

6.45. Докажите, что каждая сторона треугольника меньше его полупериметра.

6.46. Сравните числа: 1) $\frac{86}{87}$ и $\frac{87}{88}$; 2) $\frac{113}{112}$ и $\frac{112}{111}$;

3) $\sqrt{23}-\sqrt{11}$ и $\sqrt{22}-\sqrt{10}$; 4) $\sqrt{38}+\sqrt{20}$ и $\sqrt{37}+\sqrt{21}$;

5) $b+5$ и $2b+3$; 6) a^4+1 и $2a|a|$.

6.47. Сравните время, за которое моторная лодка проплывает 20 км пути по озеру, и время, за которое она проплывает 10 км пути против течения и 10 км пути по течению реки.

6.8. Решение неравенств. Метод интервалов

6.48. Решите неравенства:

1) $17-x>10-6x$; 2) $30+5x \geqslant 18-17x$; 3) $6x-34 \geqslant x+1$;

4) $3u-1<6u-1$; 5) $5x^2-5x(x+4) \geqslant 100$; 6) $p(p-1)-p^2>12-6p$.

6.49. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} -3<2x-3<-1, \\ 1-4x<0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 0<1-3x<1, \\ 3-4x<2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x-3 \leqslant 0, \\ \dfrac{2x-5}{x-2} \geqslant 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x-2 \leqslant 5x-8, \\ \dfrac{2x-1}{2-x}<4. \end{cases}$

6.50. Решите неравенства методом интервалов:

1) $(2x+7)(3x-4)(x+5)>0$; 2) $(x-6)(0{,}5x+4)(5x+10)<0$;

3) $\dfrac{x^2-2x+3}{x^2-4x+3}>-3$; 4) $\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}>3$;

5) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x+3}>\dfrac{3}{x+2}$; 6) $\dfrac{x-2}{x+2} \geqslant \dfrac{2x-3}{4x-1}$.

6.51. Решите неравенства:

1) $x^2-3x-4>0$; 2) $x^2-5x-6 \leqslant 0$; 3) $x^2 \geqslant 16$;

4) $|x^2-7x+5| \geqslant 5$; 5) $|x^2-3x| \leqslant x$; 6) $|x^2-3x|>x$.

6.52. При каких значениях a неравенство $x^2-3ax+1>0$ верно для любого x?

6.53. При каких значениях a число $x=1$ является решением неравенства $ax^2+(3a^2+1)x-3>0$?

6.54. При каких значениях a любое решение неравенства $x^2-3x-4<0$ является решением неравенства $x^2-a^2<0$?

6.55. При каких значениях a любое решение неравенства $x^2-5x+4\leqslant 0$ является решением неравенства $x^2-a^2>0$?

6.9. Степень с целым и рациональным показателями

6.56. Упростите выражения:

1) $\dfrac{x^{-1}+y^{-1}}{(x+y)^2}$; 2) $\dfrac{ab^{-1}-a^{-1}b}{a^{-1}-b^{-1}}$; 3) $\dfrac{a^5+a^6+a^7}{a^{-5}+a^{-6}+a^{-7}}$;

4) $\dfrac{a^{-n}+b^{-n}}{a^{-2n}-b^{-2n}}:\left(\dfrac{1}{b^{-n}}-\dfrac{1}{a^{-n}}\right)^{-1}$; 5) $\dfrac{a^{-2n}-b^{-2n}}{a^{-n}-b^{-n}}\cdot\left(\dfrac{1}{b^{-n}}+\dfrac{1}{a^{-n}}\right)^{-1}$.

6.57. Упростите выражения:

1) $a^{\frac{5}{3}}b^{-\frac{1}{6}}\left(a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}\right)^4$; 2) $\left(c^{-\frac{3}{7}}x^{-0,4}\right)^3\cdot c^{\frac{2}{7}}x^{0,2}$; 3) $\sqrt[10]{c^3\sqrt{c^2}}$;

4) $\sqrt[3]{y^2\cdot\sqrt[4]{y^{-3}}}$; 5) $\sqrt[7]{x^4}:\sqrt[14]{x}$; 6) $\sqrt[5]{m^2\sqrt{m}}:\sqrt[3]{m\sqrt{m}}$.

6.58. Упростите выражения:

1) $$\frac{\left(m^{\frac{5}{6}}n^{-\frac{1}{6}}+m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}\right)^2+\left(m^{\frac{5}{6}}n^{-\frac{1}{6}}-m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}\right)^2}{\left(n^{-\frac{1}{3}}-m^{-\frac{1}{3}}\right)\left(n^{\frac{2}{3}}+m^{\frac{2}{3}}+n^{\frac{1}{3}}m^{\frac{1}{3}}\right)}-2n+\frac{4n^2}{n-m};$$

2) $$\frac{\left(a^{\frac{5}{9}}b^{-\frac{1}{9}}-a^{\frac{2}{9}}b^{\frac{2}{9}}\right)^3+3\left(\sqrt[3]{a^4}-\sqrt[3]{a^3b}\right)}{\left(\sqrt[3]{a^{-1}}+\sqrt[3]{b^{-1}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)}-\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}+\frac{a+b}{2}.$$

6.59. Найдите зависимость между x и у:

1) $x=t^{\frac{1}{2}}$, $y=t^{-\frac{1}{2}}$; 2) $x=t^{\frac{1}{3}}$, $y=t^{\frac{1}{6}}$;

3) $x=3t^{\frac{1}{2}}$, $y=2t^{-\frac{1}{3}}$; 4) $x=0,5t^{-\frac{1}{2}}$, $y=0,4t^{-\frac{1}{2}}$.

6.10. Исследование функции и построение ее графика

6.60. Постройте графики функций:

1) $y=x^2$; 2) $y=\dfrac{1}{x}$; 3) $y=|x|$; 4) $y=x^3$;

5) $y=\sqrt{x}$; 6) $y=\sqrt[3]{x}$; 7) $y=\dfrac{1}{x^2}$; 8) $y=\sqrt{1-x^2}$.

6.61. Найдите область определения функции:

1) $y=\dfrac{1}{2x-5}$; 2) $y=\dfrac{x}{x^2-5x+6}$; 3) $y=\sqrt{3x-9}$;

4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{-4x+2}}$; 5) $y=\dfrac{2}{\sqrt{x}-3}$; 6) $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$;

7) $y=\dfrac{3}{x-2\sqrt{x}}$; 8) $y=\dfrac{2}{\sqrt{x^2-6x+8}-2}$.

6.62. Исследуйте функции и постройте их графики:

1) $y=|x-1|+|x|$; 2) $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$; 3) $y=x^2-6x+3$;

4) $y=|x^2-6x+3|$; 5) $y=x^2-6|x|+3$; 6) $y=|x^2-6|x|+3|$.

6.63. Постройте графики функций:

1) $y=\dfrac{1}{x+2}$; 2) $y=\dfrac{1}{x}-3$; 3) $y=\dfrac{1}{x-3}+1$; 4) $y=\dfrac{x-2}{x-3}$;

5) $y=\left|\dfrac{x-2}{x-3}\right|$; 6) $y=\dfrac{|x|-2}{|x|-3}$; 7) $y=\left|\dfrac{|x|-2}{|x|-3}\right|$; 8) $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$.

6.11. Числовая последовательность. Арифметическая и геометрическая прогрессии

6.64. Выпишите первые 5 членов последовательности:

1) $x_n=2n+3$; 2) $x_n=(-1)^n 2$; 3) $x_n=\dfrac{3n-1}{2n+3}$; 4) $x_n=\dfrac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$.

6.65. Напишите формулу общего члена последовательности:

1) $1,\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{9},\ \dfrac{1}{16},\ \ldots$; 2) 3, 6, 12, 24, 48, ...;

3) $1,\ \dfrac{2}{101},\ \dfrac{4}{201},\ \dfrac{8}{301},\ \ldots$; 4) $\dfrac{2}{3},\ -\dfrac{4}{9},\ \dfrac{8}{27},\ -\dfrac{16}{81},\ \ldots$.

6.66. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ – арифметическая прогрессия с разностью d. Докажите формулы

$$a_n=a_1+(n-1)d, \quad 2a_n=a_{n-1}+a_{n+1}, \quad S_n=\frac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n,$$

где S_n — сумма первых n членов прогрессии.

6.67. Пусть b_1, b_2, ..., b_n, ... – геометрическая прогрессия со знаменателем q. Докажите формулы:

$$b_n=b_1q^{n-1}, b_n^2 = b_{n-1}b_{n+1}, S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q},$$

где S_n — сумма первых n членов прогрессии.

6.68. Пусть b_1, b_2, ..., b_n, ... – бесконечно убывающая геометрическая прогрессия со знаменателем q ($|q|<1$). Докажите формулу $b_1 + b_2 + ... + b_n + ... = \frac{b_1}{1-q}$.

6.69. Найдите сумму первых 10 членов арифметической прогрессии, если:

1) $a_2=7$, $a_4=11$; 2) $a_3=5$, $a_8=13$; 3) $a_5+a_6=11$.

6.70. Пусть a_1, a_2, ..., a_n – арифметическая прогрессия, $a_1=a$, $a_n= b$, ($a>0$, $b>0$). Выразите сумму

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}$$ через a, b и n.

6.71. Запишите формулу общего члена арифметических прогрессий -7; 11; 29; .... и -3; 11; 25; .... .

6.72. Найдите первый член и знаменатель геометрической прогрессии:

1) $b_2=7$, $b_3=-1$; 2) $b_3=2$, $b_5=8$;
3) $b_{12}=-131$, $b_{185}=243$; 4) $b_2+b_3=7$, $b_3+b_4=49$.

6.73. Между числами 5 и 25 разместите семь чисел так, чтобы они вместе с данными числами образовали геометрическую прогрессию.

6.74. При каких значениях a корни уравнений $x^2-5x+4=0$ и $2x-a=0$ образуют первые три члена геометрической прогрессии?

6.75. Пусть b_1, b_2, ...,b_n, ... – бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Выразите сумму через b_1 и q:

1) $b_1+b_2+b_3+...$; 2) $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + ...$; 3) $b_1^3 + b_2^3 + b_3^3 + ...$.

6.76. Первый член бесконечно убывающей геометрической прогрессии равен 0,3, а ее сумма равна 0,9. Найдите ее знаменатель.

6.77. Найдите сумму ряда:

1) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+...$; 2) $1+\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\frac{1}{125}+...$.

6.78. Обратите бесконечную периодическую дробь в обыкновенную:

1) 1,21(32); 2) 0,27(345); 3) 3,(31); 4) 2,1(4).

6.79. Три числа, первое из которых равно 1, образуют геометрическую прогрессию. Если одно из этих чисел удвоить и взять их в указанном порядке, то получим арифметическую прогрессию. Найдите эти числа.

6.80. Восьмой член арифметической прогрессии равен 60. Члены a_1, a_7 и a_{25} образуют геометрическую прогрессию. Найдите знаменатель этой прогрессии.

6.12. Тригонометрические выражения

6.81. Найдите значения тригонометрических функций угла α, если:

1) $\sin\alpha = -\frac{3}{5},\ \pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$; 2) $\cos\alpha = -\frac{12}{13},\ \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

3) $\mathrm{tg}\alpha = 2\sqrt{2},\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$; 4) $\mathrm{ctg}\alpha = -2\sqrt{6},\ \frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.

6.82. При каких значениях a число $\frac{\pi}{6}$ является корнем уравнения

$$3\sin6x+2\sin5x+5\cos4x-3\sin3x+2\cos2x-\sin^2x=a\ ?$$

6.83. Пусть $0<x<\frac{\pi}{2}$. Найдите на единичной окружности точку, соответствующую углу:

1) $x,\ \pi-x,\ \pi+x,\ \frac{\pi}{2}-x,\ \frac{\pi}{2}+x$; 2) $x+2\pi k,\ k\in Z$;

3) $\pm x+2\pi k,\ k\in Z$; 4) $x+\pi k,\ k\in Z$; 5) $(-1)^k+\pi k,\ k\in Z$.

6.84. Упростите выражения:

1) $1+\sin(\pi-\varphi)\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\varphi\right)$; 2) $1-\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\varphi\right)\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$;

3) $1+\mathrm{tg}\beta\,\mathrm{tg}2\beta$; 4) $\mathrm{ctg}\alpha-\mathrm{ctg}2\alpha$.

6.85. Докажите тождества:

1) $(1+\mathrm{ctg}^2\alpha)(1-\sin^2\alpha)=\mathrm{ctg}^2\alpha$; 2) $(1+\mathrm{tg}^2\beta)(1-\cos^2\beta)=\mathrm{tg}^2\beta$;

3) $\frac{\sin x+\cos x\,\mathrm{tg}x}{\cos x+\sin x\,\mathrm{ctg}x}=2\mathrm{tg}x$; 4) $\frac{1}{\mathrm{tg}^2y+1}-\frac{1}{\mathrm{ctg}^2y+1}=\cos2y$.

6.86. Покажите, что значение выражения не зависит от y:

1) $\cos(38^\circ+y)\cos(52^\circ-y)-\sin(38^\circ+y)\sin(52^\circ-y)$;

2) $\sin\left(\frac{\pi}{10}-y\right)\cos\left(\frac{\pi}{15}+y\right)+\cos\left(\frac{\pi}{10}-y\right)\sin\left(\frac{\pi}{15}+y\right)$.

ОТВЕТЫ

0.1. 1) 8; 2) −4; 3) 0,5; 4) 1; 5) 53; 6) 1; 7) $\frac{37}{38}$; 8) $3\frac{9}{20}$; 9) $1\frac{5}{18}$. **0.2.** 1) 30; 2) 21; 3) 48; 4) 6,6; 5) 26; 6) 21; 7) 0,5; 8) 2. **0.4.** 1) $x = 16$; 2) $y = 0{,}16$; 3) $x = 5\frac{4}{9}$; 4) $z = 0{,}09$. **0.5.** 1) −0,5; 3; 2) ∅; 3) 1; $\frac{5}{3}$; 4) −11; 2; 5) −1; −0,8; 6) $-\frac{3}{7}$; 2; 7) 8; 4; 8) $\frac{1}{6}$; 9) $-1; \frac{2}{3}$. **0.6.** 1) 2; 3; 2) 1,5; 3) −6; 4; 4) −7; −2; 5) $3a$; $4a$; 6) $-3b$; $-2b$; 7) 1; $\sqrt{2}$; 8) $-\sqrt{6}$; $-\sqrt{2}$. **0.7.** 1) (−1; 4); 2) $(-\infty; -1)\cup(4; +\infty)$; 3) $(-\infty; -2{,}5]\cup[1; +\infty)$; 4) [−2; 3]. **0.8.** 2) $(-\infty; 0{,}5)\cup\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$; 4) $(-\infty; -1{,}5]\cup[0{,}25; +\infty)$; 5) $(-\infty; +\infty)$; 6) ∅; 8) ∅. **0.9.** 1) 1; 2; 3; 4; 5; 2) −3; −2; −1; 0; 3) −2; −1; 0; 1; 2; 4) −2; −1; 0; 1; 2; **0.10.** 1) (−7; −0,25); 2) $(-\infty; 1{,}5]\cup\left[\frac{5}{3}; +\infty\right)$; 3) $(-\infty; +\infty)$; 4) $\left(-\infty; \frac{9-\sqrt{37}}{22}\right)\cup\left(\frac{9+\sqrt{37}}{22}; +\infty\right)$; 5) $(-\infty; -1)\cup(4{,}5; +\infty)$; 6) $x\neq0{,}25$. **0.12.** 1) $(x-4)(x-12)$; 2) $(x+3)(x-4)$; 3) $(x+7)(x-2)$; 4) $(x+8)(x-2)$; 5) $(x+3)(x+9)$; 6) $(2x-1)(x-2)$. **0.13.** 1) $x^2-7x+10=0$; 2) $x^2-x-12=0$; 3) $x^2+9x+14=0$; 4) $2x^2-9x+4=0$; 5) $6x^2-13x+6=0$; 6) $27x^2+12x+1=0$. **0.14.** 1) 3; 2) 55; 3) 6; 4) 3. **0.15.** 1) $x\geqslant3$; 2) $x\geqslant-3$; 3) $x\geqslant0{,}25$; 4) $x>3$; 5) $(-\infty; -3]\cup[3; +\infty)$; 6) $(-\infty; -3]\cup[3; +\infty)$. **0.16.** 1) $\sqrt{14} < \sqrt{6} + \sqrt{8}$; 2) $7-\sqrt{2} < 5+\sqrt{2}$; 3) $\sqrt{15}-2 < \sqrt{3}+2$; 4) $\sqrt{10} > \sqrt{20} - \sqrt{5}$. **0.17.** 1) $\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)$; 2) $\left(2a-\sqrt{5}\right)\left(2a+\sqrt{5}\right)$; 6) $\left(\sqrt{y}-\sqrt{5}\right)\times\left(\sqrt{y}+\sqrt{5}\right)$; 7) $\left(2-3\sqrt{b}\right)\left(2+3\sqrt{b}\right)$. **0.18.** 1) $\frac{\sqrt{x}-2}{x-2}$; 2) $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{x-2}$; 3) $\frac{2\sqrt{a}-3\sqrt{b}}{4a-9b}$; 4) $\frac{2a+3b+2\sqrt{6ab}}{2a-3b}$. **0.20.** 1) $\frac{1}{3}$, 3; 2) −11; −3; 3) −6; 14; 4) −4; −1,2; 5) −0,25; 6) 17. **0.21.** 1) $(x-1)(2x-3)$; 2) $(x+1)\times(2x-7)$; 3) $(y-1)(5-y)$; 4) $(5y-3)(y+1)$; 5) $(x-5)(x-6)$; 6) $(1-x)\times(x+6)$. **0.22.** 1) $(x-1)(4x-5)$; 2) $(4a-3)^2$; 3) $3(x-2)^2$; 4) не разлагается; 5) $(x+1)(x-2)$; 6) $(4a+1)(1-12a)$; 7) $(y+1)(11-3y)$; 8) $\left(y-\frac{7-\sqrt{5}}{2}\right)\times\left(y-\frac{7+\sqrt{5}}{2}\right)$; 9) $(4x+0{,}2)(x+0{,}2)$. **0.27.** 1) 2; 2) 4; 3) 5; 4) 7. **0.28.** 1) 1; 2) $\pm\frac{\sqrt{5}}{3}$; 3) 4; 4) 5. **0.29.** 1) 2; 2) 1; 3) $\frac{10}{7}$;

4) 0. **0.30.** 1) ± 2; ± 5; 2) $\varnothing$; 3) $\pm\sqrt{0,6}$; 4) $\pm\sqrt{3,5}$; 5) ± 3; $\pm a$; 6) ± 2; $\pm 3a$. **0.31.** 1) -1; -5; 0; -6; 2) $-0,5$; 1,5; 3) 4; -2; 4) 0; -4. **0.32.** 1) 1; $\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$; 2) -3, $-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$; 2; 3) -1; $2\pm\sqrt{3}$; 4) -1; $\frac{1}{3}$; 3; 5) $\frac{6+\sqrt{31}\pm\sqrt{12\sqrt{31}-33}}{10}$; 6) $-1\pm\sqrt{2}$; $\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$. **0.33.** 1) 7; 2) 6; 3) 1; 5; 4) 6; 5) -1; 6) 34; 2. **0.34.** 1) -1; 2) $(-\infty;\ -3]$; 3) -2; 8; 4) $[2;\ 4]$. **0.35.** 1) 0; 1; 2) ± 1; 3) 4; 12; 4) 0,2. **0.36.** 1) $(-2;\ 0)$; 2) $(0,75;\ +\infty)$; 3) $\varnothing$; 4) $\varnothing$; 5) $(-7;\ -5]\cup[0;\ +\infty)$; 6) $\varnothing$. **0.37.** 1) $x+\frac{8}{7}$; 2) $\frac{5}{2a+9}$; 3) $\frac{b-3}{b+5}$; 4) $-\frac{y+4}{y+9}$; 5) $-\frac{c+1}{c+2}$; 6) $\frac{5a+3}{14-11a}$. **0.41.** 1) $x(x-2)(x+2)$; 2) $x(x-5)^2$; 3) $(x+2)(x^2-2x+4)$; 4) $y(y+6)^2$; 5) $\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x^2+3\right)$; 6) $(x-1)(x+1)(x+10)$; 7) $(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)$; 8) $\left(z-\sqrt{2}\right)\left(z+\sqrt{2}\right)(z-8)$. **0.44.** 6) На промежутке $(-\infty;\ 0)\cup(6;\ +\infty)$ принимает отрицательные значения, а на промежутке $(0;\ 6)$ – положительные значения. **0.45.** 8) $(-\infty;\ +\infty)$ – область определения; $(-1;\ +\infty)$ – область значений; нуль $x=0$; точка разрыва $x=0$; на промежутке $(-\infty;\ 0)$ принимает отрицательные значения, а на промежутке $(0;+\infty)$ – положительные значения; на промежутке $(-\infty;\ 0)$ убывает, а на промежутке $(0;\ +\infty)$ – возрастает; экстремума не имеет (рис. 1).

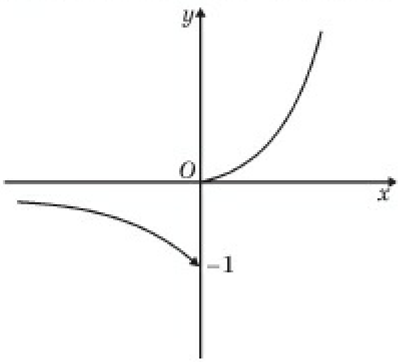


Рис. 1

0.46. $a\in[-2;0]\cup\{1\}$. **0.47.** 1) $(-1;\ 2)$; 2) $(1;\ 4)$. **0.48.** 1) Не равносильны; 2) равносильны. **0.49.** 1) 0; 2) -8; 3) $\varnothing$, 4) -27. **0.50.** 1) $-0,25$; 2) $\frac{1}{6}$; 3) ± 4; 0; -3; 2; 4) ± 5; 0; -4; 7. **0.51.** 1) 2; $-\sqrt{5}$; 2) 3; 4) 2; $\sqrt{6}$. **0.52.** $x^4-5x^2+6=0$. **0.53.** $a=-52$, $b=-40$. **0.54.** $a=-1$. **0.55.** $[13;\ +\infty)$. **0.58.** 1) $\sqrt{6}+1$; 2) $\sqrt{6}-1$; 3) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; 4) $\sqrt{3}+2$; 5) $\sqrt{5}-2$; 6) $2\sqrt{3}+2$.

Раздел 1

1.1

1.3. 2) $k=-0,7$; 6) $k=\frac{5}{3}$. **1.6.** 1) 3; 4) 2. **1.8.** 2) $R=2,5$; $C(-1,5;\ 2)$; 3) $R=3,5$; $C(0;\ -3,5)$. **1.12.** 1) $\left(\frac{1}{3};5\frac{1}{3}\right)$; 2) $\left(-\frac{3}{4};3\frac{7}{8}\right)$. **1.13.** 2) $x=2$ и $y=-3$. **1.19.** $n=-\frac{3}{4}$, $m=-3$. **1.22.** 1) (3; 1); 3) (5; 0), (−3; 2).

1.2

1.23. 1) (3; −2); 3) (−2; 1). **1.24.** 2) (3; −1); (1; −3); 3) (7; 1); (11; 5). **1.25.** 2) (7; 5), (−5; −7); 3) ∅. **1.26.** 2) (6; 2), (−4; −3). **1.27.** 1) $\left(-\frac{10}{3};\ \frac{11}{3}\right)$; (2; 9). 3) ∅. **1.28.** 3) (±4; ±7), (±7; ±4) **1.29.** 1) (0; 1). **1.30.** 3) (2; 3), (3; 2). **1.31.** 1) (±20; ±5); 2) ∅. **1.32.** 1) (4; 8), (8; 4). **1.33.** 1) (2; 2). **1.34.** 1) (4; 9), (9; 4). **1.35.** 1) (1; 0), (0; 1); 3) (2; 0), (0; −2). **1.36.** 2) (±1; ±2), (±3,5; ±0,5). **1.37.** 2) (±8; ±4), (±7; ±1). **1.38** 1) (−1; −1), (−1; 2); (2; −1). **1.39.** 1) $a=\pm6$; 2) $a=\pm2$. **1.40.** 0; 2.

1.3

1.43. 180 см². **1.44.** 4 и 5 яблок. **1.45.** 24 см². **1.46.** 73. **1.47.** 2 кг, 5 кг. **1.48.** 25 тг, 5 тг. **1.49.** 4 дня. **1.50.** 4 км/ч. **1.51.** 9240 га, 6930 га. **1.52.** 10 кур, 5 баранов. **1.53.** 11 домиков, 14 палаток. **1.54.** 12 км/ч, 10 км/ч. **1.55.** 20 км/ч, 4 км/ч. **1.56.** 15 га, 20 га, 25 га. **1.57.** 5 км/ч. **1.58.** 3 ч. **1.59.** 24 детали. **1.60.** 28 дней, 21 день. **1.61.** 18 ч, 24 ч. **1.62.** 72 га, 60 га; 108 га, 120 га. **1.63.** 25 кг. **1.64.** $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{12}$.

1.4

1.68. 1) $x^2+y^2=16$; 3) $(x-2)^2+(x-3)^2=9$. **1.78.** 3) Фигура определяется системой неравенств: $3x-2y+10\geqslant0$; $3x+5y+17\geqslant0$; $x-4y+10\geqslant0$; $3x+2y-12\leqslant0$; $4x-3y-16\leqslant0$. **1.79.** 3) Рис. 2. **1.80.** 4) Рис. 3. **1.82*.** 2) Рис. 4. **1.83.** 1) (3; 8), (8; 3); 2) (±3; ±4), 3) (8; 5), (−5; −8); 4) $\left(4\pm4\sqrt{2};\ -4\pm4\sqrt{2}\right)$. **1.84.** 1) (−∞; −0,5); 2) (−∞; −0,8); 3) (−∞; 2).

Раздел 2

2.1. 1) 16; 2) 60. **2.2.** 60. **2.3.** 1) 11; 2) 17. **2.4.** 8. **2.5.** 15. **2.6.** 32. **2.7.** 2) 10. **2.8.** 1) 216; 2) 120. **2.9.** 1) A_8^5; 2) 8! **2.10.** 1) 720; 2) 120. **2.11.** 300. **2.12.** 45. **2.13.** 120. **2.14.** C_{32}^5. **2.15.** 588. **2.17.** 888. **2.19.** 1) 300; 2) 190; 3) 105. **2.20.** 1) 1024; 2) 768. **2.21.** 1) 12; 2) 5. **2.22.** A_{35}^4. **2.23.** 1) $9\cdot10^3$; 2) $9\cdot A_9^3$. **2.24.**

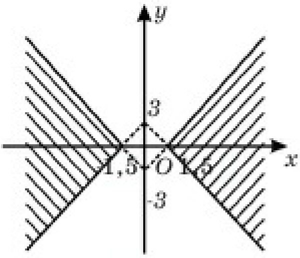


Рис. 2

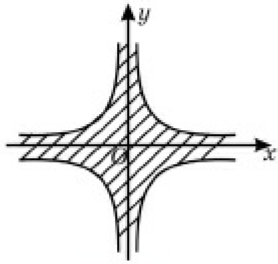


Рис. 3

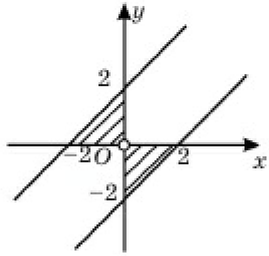


Рис. 4

720. **2.25.** 60. **2.26.** $3!\cdot C_{15}^3$. **2.27.** 220. **2.28.** $C_n^2\cdot C_m^2$. **2.29.** 560. **2.30.** 126. **2.31.** 30. **2.34.** 32. **2.36.** 3^m. **2.37.** 5!5! **2.38.** 1) 13; 2) 26. **2.39.** $3^5=243$. **2.40.** $C_{12}^3\cdot C_9^3\cdot C_6^3$. **2.41.** $C_{30}^{10}\cdot C_{20}^{10}$. **2.44.** 1) Если $m<n \Rightarrow (-1)^m C_{n-1}^m$; если $n=m\Rightarrow 0$; 2) 2^{n-1}; 3) 2^{n-1}. **2.45.** 1) 13; 2) 35.

Раздел 3

3.1

3.2. 3) $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{4}{5}$. **3.3.** $a_n=3n$. **3.4.** $7n$. **3.5.** $4n+1$. **3.6.** $5n+2$. **3.7.** 1) $4n-3$; 2) $(-1)^{n-1}\cdot 2$; 3) $\frac{1}{n^2}$; 4) $\frac{1}{3n+1}$; **3.8.** $a_{10}=\frac{1}{21}$, $a_{n+1}=\frac{1}{2n+3}$, $a_{2n}=\frac{1}{4n+1}$. **3.10.** 1) $0<a_n<1$; $a_{n+1}-a_n<0$, последовательность убывает, ограничена; 9) возрастает, ограничена. **3.12.** 1) $x_n=$ $=3\cdot 2^{n-1}$; 3; 6; 12; 24; … **3.16.** $x_{n+1}-x_n=\frac{a-2b}{(b\cdot n+b+1)(b\cdot n+1)} \Rightarrow$ $\Rightarrow$ Если $a>2b$, то $x_{n+1}>x_n$ возрастает; если $a<2b\Rightarrow x_{n+1}<x_n$ убывает; $a=2b\Rightarrow x_n=2$ – постоянная последовательность. **3.17.** 1) $\frac{p+q}{p-q}$. **3.18.** 1) $(-1{,}5;\ 0{,}5)$; 2) $(8;\ -6)$. **3.19.** 2) $[-4;\ 7]$. **3.20.** $y=-\frac{18}{x}$.

3.2

3.21. 3) Если $n=1$, то $S_1=1^3=1$, $\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\frac{4}{4}=1$. Пусть при $n=k$ верно равенство $S_k=1^3+2^3+\ldots+k^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}$. Тогда при $n=k+1$

имеем, что $S_{k+1}=S_k+(k+1)^3=\dfrac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3=\dfrac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4}=$ $=\dfrac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$, что и требовалось доказать; 10) $n=1\Rightarrow \dfrac{1}{1\cdot 5}=\dfrac{1}{5}$; $n=k\Rightarrow$ верно равенство $S_k=\dfrac{1}{1\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 9}+\ldots+\dfrac{1}{(4k-3)(4k+1)}=$ $=\dfrac{k}{4k+1}$. Тогда при $n=k+1\Rightarrow S_{k+1}=S_k+\dfrac{1}{(4k+1)(4k+5)}=\dfrac{k}{4k+1}+$ $+\dfrac{1}{(4k+1)(4k+5)}=\dfrac{(4k+1)(k+1)}{(4k+1)(4k+5)}=\dfrac{k+1}{4k+5}$. **3.22.** 6) $n=1\Rightarrow 1+6+11+$ $+6=24\,\vdots\,24$. Пусть при $n=k\Rightarrow k^4+6k^3+11k^2+6k\,\vdots\,24$. При $n=k+1\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $(k+1)^4+6(k+1)^3+11(k+1)^2+6(k+1)=(k^4+6k^3+11k^2+6k)+4(k+1)(k+$ $+2)(k+3)\,\vdots\,24$. Так как произведение последовательно расположенных чисел $k+1$, $k+2$, $k+3$ делится и на 2, и на 3, значит, делится и на 6. **3.25.** Достаточно показать, что определяется формулой $a_n=(2n-1)^2$. **3.27.** $n=1\Rightarrow 6+20+24=50\,\vdots\,25$. Тогда при $n=k\Rightarrow 6^k+20k+24\,\vdots\,25$. Пусть при $n=k+1\Rightarrow 6^{k+1}+20(k+1)+24=6\cdot 6^k+20k+$ $+20+24=(6^k+20k+24)+5\cdot 6^k+20=(6^k+20k+24)+5\cdot(6^k+4)\,\vdots\,25$, так как число 6^k+4 оканчивается нулем. **3.28.** 4) $n=2\Rightarrow 1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}>$ $>\dfrac{2,41}{1,42}>1,6>\sqrt{2}$. Пусть при $n=k\Rightarrow$ верно равенство $S_k=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+$ $+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{k}}>\sqrt{k}$. Тогда при $n=k+1\Rightarrow S_{k+1}=S_k+\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k}+\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}=$ $=\dfrac{\sqrt{k(k+1)}+1}{\sqrt{k+1}}>\dfrac{\sqrt{k^2}+1}{\sqrt{k+1}}=\sqrt{k+1}$. **3.31.** $[-1;0)\cup(0;2]$.

3.3

3.32. 1) $a_5=3$; 2) $a_5=15$. **3.33.** 1) 10; 14; 18; 22. 2)1,7; 1,5; 1,3; 1,1. 3) $-3,5$; $-2,9$; $-2,3$; $-1,7$; 4) $\dfrac{4}{3}$, $\dfrac{3}{2}$, $\dfrac{5}{3}$, $\dfrac{11}{6}$. **3.34.** 1) $a_{11}=4$; 2) $a_{20}=8,5$; 3) $a_5=32$; 4) $b_{21}=-24,2$. **3.35.** 1) $a_5=-5$, $a_n=\dfrac{5-4n}{3}$; 2) $a_5=-2,9$, $a_n=3,6-$ $-1,3n$. 3) $a_5=-2$, $a_n=1,5n-9,5$; 4) $a_5=-5$, $a_n=15-4n$. **3.36.** 2) $a_{10}=-6,7$, 4) $a_{61}=\dfrac{109}{6}$. **3.37.** 1) 10; 2) 0,6; 3) $-\dfrac{92}{65}$. **3.38.** 1) 15; 2) 7. **3.39.** 2) 2,5; 2,8; 3,1; 3,4; 3,7; 4. **3.40.** 1) $d=1,5$, $c_1=21$; 2) $d=-2$, $c_1=38$. **3.41.** 1) Нет,

не является; 2) $a_{41}=-28$. **3.42.** $1, 2\frac{2}{3}, 4\frac{1}{3}, 6, 7\frac{2}{3}, 9\frac{1}{3}, 11, 12\frac{2}{3}, 14\frac{1}{3}, 16$.
3.43. 1) $a_1=0, d=1\frac{1}{3}$; 2) $a_1=9{,}7, d=-1{,}4$. **3.44.** 1) $a_{23}=156$; 2) не является.
3.45. 1) $n\leqslant 30$; 2) $n>30$. **3.46.** 1) Да; 2) нет; 3) да; 4) нет; 5) да; 6) да.
3.47. $a_n=p+q-n$. **3.48.** Имеют 25 общих членов. **3.49.** $a_1=1, d=3, a_{20}=58$.
3.50. $d=-2ax$. **3.52.** 1) Нет; 2) да; $d=1+\sqrt{2}-\sqrt{5}$ **3.53.** Нет, не может. Арифметическая прогрессия, имеющая хотя бы один точный квадрат, имеет бесконечно много точных квадратов. **3.55.** 1) ± 1, ± 4; 2) ± 1.

3.4

3.56. 1) 6; 12; 24; 48. 4) $0{,}4; 0{,}4\sqrt{2}; 0{,}8; 0{,}8\sqrt{2}$. **3.57.** 1) $x_7=0{,}25$; 2) $x_8=-\frac{10}{27}$; 3) $x_{10}=-32$; 4) $x_6=0{,}04$. **3.58.** 1) $a_7=1458$; $a_n=2(-3)^{n-1}$; 3) $a_7=-\frac{5}{8}$, $a_n=-\frac{5}{2^{n-4}}$. **3.59.** 2) $a_6=54$, $a_n=\frac{3^{n-3}}{2^{n-7}}$; 4) $a_6=0{,}001$, $a_n=(-1)^n\times$ $\times 10^{3-n}$. **3.60.** 3) $q=-\frac{1}{2}$, $b_1=5$, $b_6=-\frac{5}{32}$, $b_{n+3}=5\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+2}$. **3.61.** 2) $\pm\frac{3}{5}$.
3.62. 1) $b_1=\frac{1}{81}$; 2) $b_1=\frac{56}{125}$; 3) ± 3; 4) $\pm 0{,}6$; 5) $b_6=\pm 0{,}2$. **3.63.** $C_2=\pm 1$; $C_3=\frac{1}{2}$. **3.64.** 1) 5; 2) 8; 3) 5; 4) 4. **3.65.** Не может. **3.66.** 1; ± 4; 16; ± 64; 256. **3.67.** 50, 10, 2, или 50, -10, 2, или 2, 10, 50, или 2, -10, 50.
3.68 3; ± 6; 12; ± 24; … . **3.69.** $q=2$ или $q=\frac{1}{2}$. **3.70.** 8, 12, 18, 27, …, или 27, 18, 12, 8, … . **3.71.** 15; 45; 135, или 125; -175; 245. **3.72.** Достаточно показать равенство $\frac{u_2}{u_1}=\frac{u_3}{u_1}$. **3.73.** 1, 3, 9, или $\frac{1}{9}, \frac{7}{9}, \frac{49}{9}$.
3.74. Выполняется. **3.75.** 1) 7^{n-1}; 2) $2\cdot 5^n$. **3.76.** 1) $\frac{a+2}{a+5}$; 2) $\frac{b+1}{b+7}$.

3.5

3.77. 1) -95; 2) -65; 3) 100; 5) 100; 6) 7,5. **3.78.** 1) 15,5; 2) 624,8; 3) 33; 4) $\frac{422}{3}$; 5) -22; 6) $\frac{11}{16}$; 7) -484; 8) 11. **3.79.** 1) 472,5; 2) 360; 3) 60

4) $-52{,}5$. **3.80.** 1) $q=3 \Rightarrow S_6=-\frac{728}{27}$; $q=-3 \Rightarrow S_6=\frac{364}{27}$; 3) $q=\frac{1}{5} \Rightarrow$ $\Rightarrow S_6=\frac{3906}{25}$; $q=\frac{1}{5} \Rightarrow S_6=\frac{2604}{25}$; **3.81.** 1) 305; 2) 22,5. **3.82.** 1) $9(3^{10}-1)$; 2) $-\frac{3069}{1024}$. **3.83.** 1) 5050; 2) 12760. **3.84.** 1) $n(n+1)$; 2) n^2. **3.85.** 270. **3.86.** 1) 6633; 2) 3402. **3.87.** $b_1=2$. **3.88.** $q=3 \Rightarrow S_5=121$; $q=-\frac{3}{4} \Rightarrow$ $\Rightarrow S_5=\frac{181}{16}$. **3.90.** 100. **3.91.** 1) $\frac{3^n-1}{2}$; 2) $2(2^n-1)$; 3) $\frac{1-(-x)^n}{1+x}$; 4) $\frac{x^{2n}-1}{x^2-1}$; 5) $\frac{2^n-(-1)^n}{2^n\cdot 3}$; 6) $\frac{1-(-x)^{3n}}{1+x^3}$. **3.92.** 1) 50; 2) 35; 3) $-2{,}5$; 4) 781; 5) 93; 6) 1089. **3.93.** 2; 5; 8 или 26; 5; -16. **3.94.** $q=-2$. **3.95.** $q=\frac{1}{3}$. **3.96.** $\frac{a^2\left(1-q^{2n}\right)}{1-q^2}$. **3.97.** $\sqrt{\left(a_1a_n\right)^n}$. **3.98.** $n=10$. **3.99.** $\frac{1}{9}\left[\frac{10\left(10^n-1\right)}{9}-n\right]$. **3.102.** $S_n=3^n+(n+1)^2-2$. **3.103.** 1) $a_n=n^2$; 2) $a_n=(-1)^n\frac{n}{n+1}$.

3.6

3.106. 1) Предел 0, колеблющаяся последовательность; 2) $-1<y_n<$ <1, возрастающая, потому сходящаяся. **3.107.** 1) $\frac{12011}{9900}$; 2) $\frac{4553}{16650}$; 3) $-\frac{12}{5}$; 4) $\frac{1}{9}$; 5) $\frac{2}{3}$; 6) $\frac{4}{11}$. **3.108.** 1) $\frac{7}{30}$; 2) $\frac{20}{11}$; 3) $\frac{357}{1100}$; 4) $\frac{989}{606}$. **3.109.** 1) $\frac{6253}{6734}$; 2) $\frac{3}{73}$. **3.110.** 1) 0,5. 2) $-\frac{1}{3}$; 4) $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$; 6) $-0{,}5$. **3.111.** 1) 0,5. 2) $\frac{4}{35}$; 3) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{5}{12}$. **3.112.** 1) $|x|<1$; 2) $|x|<1$. **3.114.** $\sqrt{2}\leqslant x_n<2$ ограничена, $x_n<x_{n+1}$, возрастающая. Пусть предел последовательности равен a. Тогда $a=\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\ldots}}} \Rightarrow a^2=2+$ $+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\ldots}}}=2+a \Rightarrow a^2-a-2=0 \Rightarrow a=2$. **3.115.** 1) 0,7; 2) $-0{,}8$. **3.116.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) $-\frac{3}{8}$; 3) не может.

3.117. $-6\left(\sqrt{3}+1\right)$. **3.118.** $q=\frac{1}{3}\Rightarrow S=6; q=\frac{2\sqrt{2}}{3}\Rightarrow S=12(3+2\sqrt{2})$.
3.119. $S=96$. **3.120.** $a_n=\frac{32}{3^{n-1}}$. **3.121.** $a_1=14$, $q=0{,}75$. **3.122.** 3, $\frac{3}{7}, \frac{3}{49}, \dots$ **3.123.** $a_1, \frac{a_1}{11}, \frac{a_1}{121}, \dots$. **3.125.** $a_1=2$, $q=\frac{1}{3}$.

Дополнительные задачи к разделу 3

3.126. 2) 1; −1; 1; −1; 1; … **3.127.** 1) $3n-2$; 2) $4n^2$; 3) $\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. **3.128.** 1) $1<a_n$, возрастающая, снизу ограничена, а сверху не ограничена; 2) $0<a_n\leqslant 1$, ограничена, $a_{n+1}<a_n$ убывающая; 3) $-1\leqslant a_n\leqslant 1$, ограниченная, колеблющаяся. **3.132.** 1) $8-2n$; 2) $15-10n$; 3) $-n$; 4) $10-n$. **3.133.** 1) $\frac{8^{n-1}}{7^{n-2}}$; 2) $(\pm1)^{n-1}\cdot 3^{2-n}$.
3.134. 1) $a_1=2$, $d=3$ или $a_1=14$, $d=-3$. **3.135.** 2) $a_1=0{,}5$, $q=-0{,}5$.

3.138. $a_1=1$, $d=2$. **3.140.** $a=\pm5$, $b=\pm10$ или $a=\pm5$, $b=\mp10$.

3.141. 2) Может, $q=\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$. **3.142.** 2,1. **3.143.** 1) $\frac{a^2}{1-q^2}$; 2) $\frac{a^3}{1-q^3}$; 3) $\frac{a^2(1+q)^2}{1-q^4}$; 4) $\frac{a^2(1-q)^2}{1-q^4}$; 5) $\frac{2a}{2-q}$; 6) $\frac{a-1+q}{1-q}$; 7) $\frac{q}{1-q}$; 8) $\frac{a^2\left(1+q+q^2\right)^2}{1-q^6}$. **3.144.** 1) $x=-1$; 2) $\varnothing$. **3.145.** 1) $\frac{\left(c^{2n-1}\right)\left(c^{2n+2}+1\right)}{c^{2n}\left(c^2-1\right)}+2n$; 2) $(n+1)!-1$. **3.147.** 1) $\frac{n}{7n+4}$; 2) $\frac{n}{4n+3}$. **3.148.** 1) $y=x+\frac{1}{x}$; 2) $y=1+x^2$. **3.149.** Если $\{a_n\}$ – последовательность с постоянным знаком, то $\{|a_n|\}$ является арифметической прогрессией, а если $\{a_n\}$ – знакочередующаяся последовательность, то $\{|a_n|\}$ не является арифметической прогрессией. **3.150.** Да, является.

Раздел 4

4.1

4.2. 1) II; 2) IV; 3) III; 4) IV; 5) I; 6) IV. **4.3.** 1) IV; 2) III; 3) II; 4) IV; 5) III; 6) III. **4.4.** $\frac{2\pi}{9}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{4}, \frac{50\pi}{9}, -\frac{\pi}{9}, -\frac{2\pi}{3}, -\frac{5\pi}{3}$. **4.5.** $60°, -120°, 945°, 22°30'$, $\frac{540°}{\pi}, \frac{18000°}{\pi}, \frac{144°}{\pi}$, $450°$. **4.6.** $\frac{3\pi}{4}$. **4.7.** 12π. **4.8.** $45°$, $60°$, $75°$, или $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{12}$. **4.9.** 1) $45°$, $45°$, $90°$, или $\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$, 2) $30°$, $60°$, $90°$, или $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$. **4.10.** 1) $\frac{\pi}{3}$, 2) $\frac{\pi}{2}$, 3) $\frac{3\pi}{5}$, 4) $\frac{2\pi}{3}$, 5) $\frac{7\pi}{9}$, 6) $\frac{8\pi}{9}$. **4.11.** 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{4}$. **4.13.** 1) $\frac{\pi}{6}+2\pi k$, 2) $\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k\in Z$; 3) $\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, $k\in Z$, 4) $\frac{7\pi}{6}+$ $+2\pi k$, $k\in Z$. **4.14.** 1) $n \cdot 360°$, или $2\pi n$; 4) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, или $-90°+360n°$; 8) $-\frac{\pi}{4}+2\pi n$, или $-45°+n360°$, $n\in Z$. **4.15.** 10π рад/с. **4.16.** 1) 1; 6; 2) -1; $-\frac{1}{4}$; 3) 1; $\frac{5}{3}$; 4) $\varnothing$. **4.18.** 1) $x(x-1)(5x+2)$. **4.19.** 0; 2.

4.2

4.20. 1) $\sin 0°=0$, $\cos 0°=1$. **4.21.** 1) Существует; 2) существует; 3) не существует; 4) существует. **4.22.** 1) Да; 2) нет; 3) нет; 4) да. **4.23.** 1) Нет; 2) существует; 3) нет; 4) существует. **4.24.** 1) 2,5; 2) 1,5; 3) $\sqrt{2}-2\sqrt{3}$; 4) $\sqrt{3}$. **4.25.** 1) $-\cos^2\alpha$; 2) 1; 3) 2; 4) $\sin^2\alpha$. **4.27.** 1) 1; 2) 0; 3) 1; 4) 1. **4.28.** 1) $\sqrt{3}$; 2) 7; 3) 1; 4) $3\sqrt{3}$; 5) $2\sqrt{3}$; 6) $3\sqrt{3}$. **4.29.** 1) -1; 2) $\frac{5}{12}$; 3) $1-\sqrt{3}$; 4) 1. **4.30.** 1) 1; 2) $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta$; 3) $\operatorname{ctg}^6\alpha$. **4.31.** 1) $\frac{17}{4}$; 3) $\frac{1+\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{1-\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{2}$; **4.32.** 2) $-2-2\sqrt{2}$. **4.34.** 1) $-0,5$; 2) $-0,5$. **4.36.** 2) $(-\infty; 1]\cup[1,5; +\infty)$; 3) $\varnothing$.

4.3

4.38. 10) $\sin(-7,3)=-\sin 7,3<0$, $\cos(-7,3)>0$, $\operatorname{tg}(-7,3)<0$, $\operatorname{ctg}(-7,3)<0$. **4.39.** 1) «+»; 6) «−»; 9) «+». **4.40.** 1) I; 2) IV; 3) II; 4) IV; 5) I; 6) III. **4.41.** 1) I; III; 2) I ; II; III; IV; 3) I; II. **4.43.** 1) Четная; 2) и четная, и нечетная; 3) четная; 4) четная; 5) четная. **4.44.**

1) Нечетная; 2) четная; 3) нечетная; 4) нечетная; 5) нечетная; 6) четная. **4.45.** 1) 0,5; 2) 4π; 3) 3; 4) $\frac{\pi}{3}$; 5) π; 6) 3π. **4.46.** 1) «+»; 2) «+»; 3) «–»; 4) «+». **4.47.** 1) Четная; 2) нечетная; 3) четная; 4) нечетная; 5) четная; 6) ФОВ; 7) четная; 8) четная; 9) ФОВ; 10) нечетная; 11) нечетная; 12) нечетная. **4.48.** 1) 0,5; 2) 0,5; 3) 0; 4) 0; 5) $\sqrt{3}$; 6) $-0,5$; 7) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 8) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **4.50.** 2) II и III; 4) I и III. **4.51.** 1) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$; $n\in Z$; 5) $\frac{\pi}{2}+\pi n$; $n\in Z$; 6) $(2n+1)\pi$, $n\in Z$. **4.52.** Положительный. **4.53.** 1) 0; 2; 2) 0; 2; 3) -1; 5; 4) -1; 1; 5) 0; 7; 6) -3; 2. **4.54.** 1) Не выполняется, т.к. не существует угла α, удовлетворяющего равенствам $\sin\alpha=1$ и $\cos\alpha=1$ одновременно. **4.55.** 1) $f(x)=\sqrt{|x|}$; 4) $f(x)=\frac{1}{1-|x|}$. **4.56.** 2) $f(x)=-x\,|x|$; 3) $f(x)=x(|x|-2)$. **4.57.** 2. **4.58.** 1) 1; 2) π; 3) π; 4) 2π; 5) π. **4.59.** 1) Да; 2) да; 3) нет. **4.60.** 1) [1; 3); 2) (0; 1]$\cup$[2;4,5).

4.4

4.61. 1) $\cos\alpha$; 4) $\sin\alpha$; 6) $\sin\alpha$; 9) $-\cos\alpha$. **4.62.** 2) $-\mathrm{ctg}\frac{3\pi}{7}$; 3) $-\cos 0,1\pi$. **4.63.** 1) $-\mathrm{ctg}47°$; 2) $-\sin 2°$; 3) $-\sin 40°$; 4) $\sin 10°$. **4.64.** 2) $\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos=\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\mathrm{tg}\frac{3\pi}{4}=\mathrm{ctg}\frac{3\pi}{4}=-1$. **4.65.** 1) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $-0,5$. **4.66.** 1) $-0,5$; 2) $-\sqrt{3}$; 3) -1; 4) $-0,5$; 5) -1; 6) $-0,5$. **4.67.** $-1,1$. **4.68.** 1) 4; 2) -1. **4.69.** $8-4\sqrt{3}$. **4.71.** 1) $\sin^2\alpha$; 3) $\sin^2\alpha$; 5) 1. **4.72.** 1) 4; 2) 4; 3) 0; 4) 0. **4.74.** 1) 1; 2) 1; 3) 1; 4) 1. **4.75.** 1) $-\frac{\sqrt{2}}{12}$; 2) $-\frac{\sqrt{6}}{4}$; 3) 0; 4) 0. **4.77.** 1) $(-\infty;\,-2)\cup(1;\,2)\cup(2,5;\,+\infty)$; 2) $\left(-7;\,-\frac{7}{3}\right]\cup(-1;\,1]$.

4.5

4.78. 1) $\frac{1}{\sin\beta}$; 2) $-\frac{2}{\cos^2\alpha}$; 3) $\mathrm{ctg}\gamma$; 4) $\frac{1}{\sin^2\theta}$; 5) $-\sin^2\alpha$; 6) $-\sin^2\alpha$. **4.79.** 1) 0; 2) $-\cos^2\alpha$; 3) -1; 4) $\frac{1}{\cos x}$; 5) $-2\cos\alpha$; 6) $-\cos^2 u$; 7) $\cos y$; 8) $-\mathrm{tg}x$. **4.80.** 1) 2; 2) 4; 3) 1; 4) 1; 5) $\frac{1}{3}$; 6) 1. **4.83.** 1) 2; 4) 4. **4.84.** 1) $\frac{15}{8}$; 2) $\frac{6-3\sqrt{2}}{4}$;

3) $\frac{12-4\sqrt{3}}{9}$; 4) $\frac{14+7\sqrt{3}}{8}$. **4.85.** 1) $\frac{1}{\cos\alpha}$; 2) $\frac{1}{\sin\alpha}$; 3) $\frac{1}{\sin^2\alpha}$; 4) $\cos^2\alpha$. **4.86.** 1) $\cos^2\alpha$; 2) $\frac{1}{\cos^2\alpha}$; 3) 1; 4) $\mathrm{tg}^2\alpha$. **4.87.** 1) $x^2+y^2=25$; 2) $25x^2+9y^2=225$; 3) $x^2-2y=1$. **4.89.** 1) $\frac{1}{9}$; 2) $\frac{3}{7}$; 3) $\frac{6}{17}$; 4) 20. **4.90.** 1) $-\frac{4}{7}$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) 0; 4) $-\frac{5}{12}$. **4.93.** $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$, $\mathrm{tg}\alpha=-\frac{3}{4}$, $\mathrm{ctg}\alpha=-\frac{4}{3}$. **4.96.** 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\sin x)$; 2) $\frac{1}{2}\cos y+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin y$; 3) $\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$; 5) $\frac{1-\mathrm{tg}x}{1+\mathrm{tg}x}$. **4.97.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **4.98.** 1) $\cos 3x$; 2) $\cos 4x$; 3) $\sin 4\beta$; 4) $\sin 5\alpha$. **4.99.** 1) $\sin x\ \cos y$; 2) $\cos x\ \cos y$; 3) $\sin\beta\ \cos\alpha$; 4) $-\sin\alpha\ \sin\beta$. **4.100.** 1) $\mathrm{tg}5x$; 2) $\mathrm{tg}3x$; 3) $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$; 4) 1; 5) 0; 6) 0. **4.101.** 1) $\frac{\sqrt{2}\left(1-\sqrt{3}\right)}{4}$; 2) $\frac{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)}{4}$; 3) $\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}$; 4) $\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{4}$; 5) $2+\sqrt{3}$; 6) $2+\sqrt{3}$. **4.104.** 1) $-\frac{33}{65}$; 2) $\sqrt{3}$; 3) $-\frac{1519}{720}$. **4.106.** 1) $\frac{77}{85}$, $\frac{84}{85}$; 2) 0; $-\frac{1519}{1681}$. **4.107.** 1) $-\frac{4}{5}$; 3) $\frac{\pi}{2}$. **4.110.** 1) $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$; 2) -2; 2; 3) -2; 2; 4) $-2\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$; 5) -5; 5; 6) $-\sqrt{29}$; $\sqrt{29}$. **4.111.** 1) 1,5; 2) 1,5; 3) 0; 4) 0; 5) tg^2y; 6) -1. **4.112.** 1) $\sin\alpha$; 4) $\cos\alpha-\sin\alpha$. **4.113.** 2) $\sin^2\alpha$; 3) $\frac{1}{2}\mathrm{tg}2\alpha$. **4.114.** 1) $\cos 4x$; 3) 2; 5) $\frac{1}{4}\cos^2 2x$. **4.115.** 2) $\cos^2 2x$; 4) $\frac{1}{\sin x}$; 6) $\cos\alpha$. **4.116.** 1) $2\cos 20°$; 4) $\cos 18°$. **4.117.** 1) $\mathrm{tg}2\alpha=\frac{24}{7}$, $\sin 2\alpha=\frac{24}{25}$, $\cos 2\alpha=\frac{7}{25}$, $\mathrm{ctg}2\alpha=\frac{7}{24}$. **4.118.** $\sin 2\alpha=-\frac{336}{625}$, $\cos 2\alpha=-\frac{527}{625}$, $\mathrm{tg}2\alpha=\frac{336}{527}$. **4.119.** 1) $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{\sqrt{26}}$; $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{5}{\sqrt{26}}$, $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=5$; 4) $\cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=-2$. **4.120.** 1) 1; 2) $\sin 3x$; 3) 0; 4) $\sin 3x$. **4.121.** 1) $\mathrm{ctg}^2 21°$; 2) $\cos^2 x$; 3) $-\mathrm{tg}^2\frac{x}{4}$; 4) $\frac{\sin\frac{x}{2}-1}{\sin\frac{x}{2}+1}$. **4.123.** $-2{,}25$. **4.124.** 1) 1; 2) $\frac{60}{61}$. **4.125.** 1) $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$; 2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $-2\sqrt{2}$; 4) 2; 5) 1; 6) 1. **4.127.** 1) $\frac{1}{8}$; 2) 0; 3) 1; 4) 1. **4.129.** 4) $\sqrt{3}\sin\alpha$; 6) $-\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$. **4.130.** 1) $2\sin 20°\cdot\cos 5°$. **4.133.** 4) $-\sin(x+y)\sin(x-y)$.

4.135. 3) $\dfrac{\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}{\cos x}$; 4) $\dfrac{\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\sin\alpha}$. **4.136.** 1) $4\cos\dfrac{\beta}{4}\cdot\cos\left(\dfrac{\beta}{4}+\dfrac{\pi}{6}\right)\cos\left(\dfrac{\beta}{4}-\dfrac{\pi}{6}\right)$; 6) $\dfrac{2\sqrt{2}\cos\dfrac{\beta}{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\beta}{2}\right)}{\cos\beta}$. **4.137.** 1) $\mathrm{tg}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$; 2) $\mathrm{tg}\,\dfrac{x+y}{2}$; 3) $\mathrm{tg}^2\dfrac{y}{2}$; 4) $\dfrac{\sin 3y}{\sin y}$; 5) $\cos 2x$; 6) $\mathrm{tg}x\ \mathrm{ctg}y$. **4.138.** 1) 0; 2) 0. **4.139.** 2) $2\sin\left(\dfrac{\beta}{2}+\dfrac{\pi}{12}\right)\cos\left(\dfrac{\beta}{2}-\dfrac{\pi}{12}\right)$. **4.141.** 1) 1. **4.144.** 2) $4\sin\left(\dfrac{\varphi}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)\cos\left(\dfrac{\varphi}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)$. **4.145.** 1) $4\sin\dfrac{5\gamma}{2}\cdot\cos\gamma\cos\dfrac{\gamma}{2}$; 2) $-4\cos5\gamma\times\times\sin2\gamma\cdot\sin\gamma$. **4.146.** 1) $-\dfrac{32}{27}$; 2) $-\dfrac{28\sqrt{5}}{125}$. **4.148.** 2) $\sin\alpha\cdot\sin4\gamma$; 3) $-\sin2\varphi\cdot\sin4\beta$; 6) 1; 7) 1. **4.149.** 4) $\mathrm{tg}^8\beta$; 5) $\mathrm{ctg}3\varphi$; 6) $\mathrm{tg}5\varphi$; 10) $8\cos^4 2\alpha$. **4.150.** 1) 2; 2) 4; 3) $2\sqrt{3}$; 7) $1-p^2$. **4.152.** 3) $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$. **4.153.** 4) $-\cos^2 2\alpha$. **4.156.** 2) 1. **4.161.** 2. **4.162.** 0,5. **4.163** $4\cos^3\dfrac{\alpha}{3}-3\cos\dfrac{\alpha}{3}=m$. **4.166.** 2, $-\dfrac{1}{3}$. **4.167.** 1) $4\cos\alpha\cos2\alpha\cos6\alpha$; 2) $\mathrm{tg}\dfrac{5x}{2}$. **4.170.** Да, является, Т = π. **4.172.** $\cos\varphi$.

Раздел 5

5.1

5.1. 3) Взяли белый или красный альчик. **5.3.** 5) $BC=\{A_4\}$; 12) $\{A_3\}$. **5.4.** 4) $\overline{A}=\{A_1, A_2, A_6\}$. **5.5.** 1) $A\subset C$, $B\subset C$. **5.8.** 2) B. **5.10.** 2) Выпал по крайней мере один выигрыш. **5.11.** 1) $A\subset B$, $A\subset C$. **5.12.** 8) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$. **5.13.** 2) BC. **5.14.** 36. **5.15.** 3) Невозможное; 5) достоверное. **5.16.** 1) $A+\overline{A}\cdot B$. **5.21.** 1) (2; 3), (1,5; 4); 2) (1; 4), (−1; −4). **5.22.** 1) 0,5; 2) 1. **5.23.** 98730. **5.24.** 0,008. **5.26.** 180. **5.27.** 850. **5.33.** 2) $\dfrac{1}{6}$. **5.34.** 1) 0,4. **5.35.** 3) 0,75. **5.36.** 2) $\dfrac{1}{3}$. **5.37.** $\dfrac{1}{7}$. **5.38.** 2) 0,94; 5) 0,44. **5.39.** 0,97. **5.40.** 3) 0,2. **5.41.** 2) 0,0198. **5.43.** 1) $\dfrac{1}{5}$; 2) 0,3; 3) 0,4; 4) 0,55. **5.44.** 0,4. **5.45.** $\dfrac{2}{3}$. **5.46.** 0,75. **5.47.** $\dfrac{2}{5}$. **5.48.** 0,05. **5.51.** 0,85. **5.52.** 0,92; 80 бракованных деталей. **5.53.** $\dfrac{7}{8}$. **5.54.** $\dfrac{11}{90}$. **5.55.** 1) $\dfrac{5}{9}$; 2) $\dfrac{4}{9}$. **5.56.** 1) 0,75; 2) $\dfrac{1}{18}$; 3) $\dfrac{1}{3}$. **5.57.** $\dfrac{1}{22}$. **5.58.** 0,23. **5.59.** 0,9801. **5.60.** 0,12. **5.61.** 1) 0,384. 2) 0,096;

3) 0,008. **5.63.** 0,8. **5.64.** 0,388. **5.65.** $\frac{8}{15}$. **5.66.** $\frac{1}{2}$. **5.67.** $P(7)=\frac{1}{6}>$ $>P(8)=\frac{5}{36}$. **5.68.** Примерно 1000. **5.69.** Красные – $\frac{1}{4}$, синие – $\frac{2}{5}$, неокрашенные – $\frac{7}{20}$. **5.71.** 0,936. **5.72.** $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{3}$. **5.73.** $\frac{4}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{1}{7}$. **5.74.** Используйте равенство $P(B)P_B(A)=P(A)P_A(B)$. **5.75.** 0,9. **5.76.** $P(A)=P(AB)+$ $+P(A\overline{B})\Rightarrow P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$; $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)\Rightarrow$ $\Rightarrow P(AB)=P(A)+P(B)-P(A+B)\Rightarrow P(AB)=a+b-c\Rightarrow P(A\overline{B})=$ $=P(A)-a-b+c=c-b$. **5.77.** $\frac{5}{12}$. **5.78.** $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$. **5.79.** 1) 1; 2) –1. **5.80.** 4.

5.2

5.82. 0,5. **5.83.** $\frac{1}{3}$. **5.84.** a. **5.85.** $\frac{\pi}{4}$. **5.86.** 0,25. **5.87.** 1) $\frac{\pi a^2}{4}$; 2) πa^2. **5.88.** 1) $\frac{2}{\pi}$; 2) $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$; 3) $\frac{2a\sqrt{R^2-a^2}}{\pi R^2}$; 4) $\frac{(a+b)\left(\sqrt{R^2-a^2}+\sqrt{R^2-b^2}\right)}{\pi R^2}$. **5.89.** 1) 0,25; 2) 0,75. **5.90.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $\frac{\pi}{16}$. **5.91.** 1) $\frac{1}{16}$; 2) $\frac{3}{16}$; 3) $\frac{\sqrt{3}\pi}{144}$. **5.92.** $\frac{1}{3}$. **5.94.** 1) $\frac{1}{8}$; 2) $\frac{1}{32}$. **5.95.** 1) $\frac{(a-r)^2}{a^2}$; 2) $\frac{(a-r)^2}{2a^2}$. **5.96.** 0,5. **5.97.** $\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{9\pi}$. **5.98.** $\frac{1}{24}$. **5.99.** 1) $\frac{7}{16}$; 2) $\frac{5}{9}$; 3) $\frac{3}{4}$. **5.100.** 1) –1; 0,2; 2) ±1. **5.101.** –3. **5.102.** 0,24.

Дополнительные задачи к разделу 5

5.103. {*г*; *рг*; *ррг*; *рррг*; *рррр*}. **5.104.** 1) $\frac{4}{9}$; 2) $\frac{5}{9}$; 3) $\frac{4}{9}$. **5.105.** Примерно 15. **5.106.** $\frac{91}{216}$. **5.108.** Нет, нельзя. **5.109.** 1) 8^{10}; 2) A_{10}^8. **5.110.** 1) 1320; 2) 40; 3) 111. **5.111.** 72. **5.112.** 1440. **5.113.** 144. **5.115.** 252. **5.116.** 1) 3; 2) –12. **5.117.** 243. **5.120.** $\frac{(a-r)^2}{a^2}$. **5.121.** 1) В один мешочек нужно положить один белый альчик, а в другой – все остальные; 2) $\frac{3\pi^2(4-\pi)^2}{128}$.

Упражнения для повторения курса алгебры за VII – IX классы

6.1. **6.1.** 4) 0; 5; 5) 2; 8; 7) 0; 8) 8. **6.10.** 1) $a=32$, $b=56$.

6.2. **6.11.** 2) $\frac{1}{3}$; 5) 1,36. **6.12.** 1) $\sqrt{5}$; 2) $-\sqrt{5}$; 3) 2; 4) –4; 5) 1; 6) 1; 7) 9.

6.3. **6.17.** 1) $8(x+11)(x+2)$; 4) $(a-1)(a+9)$; 8) $2a(a^2+3b^2)$. **6.18.** 2) $(5mn^2-7p^2q)(3m^2p+5nq^2)$. **6.19.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) $-\frac{1}{3}$; 3) $\frac{7}{9}$.

6.20. 3) $x^2+(1-8a)x+15a^2-a-2=0$; 5) $x^2-2\sqrt{7}\,x+1=0$.

6.4. **6.21.** 1) (1; 6), (6; 1); 2) (1; 3); (6; 0,5); 3) (1;–2), $\left(6; -\frac{1}{3}\right)$; 4) (1; 5); (5; 1), (2; 3), (3; 2).

6.5. **6.32.** 2) $x^7-1=(x^3+x+1)(x^4-x^2-x+1)+2x^2-2$. **6.33.** $a=11$. **6.34.** 3) $(x-1)(x^2-4x-1)$; 6) $(x+1)(x^3-7x^2-7x-4)$. **6.38.** 4) $\frac{2}{b}$; 5) 1.

6.6. **6.39.** 1) $-\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\varnothing$; 4) –3,5; 5) 4; 6) 2. **6.40.** 3) $a\in(-\infty;+\infty)\Rightarrow x_1=a$, $x_2=a+1$; 4) $a\neq 3\Rightarrow x=a$, $a=3\Rightarrow x\in\varnothing$. **6.41.** 1) ±1; ±2. **6.42.** 1) $x=\frac{145}{19}$, $y=-\frac{29}{19}$; 2) имеет бесконечно много решений; 3) $\varnothing$; 4) (2,2; 0,4), (1;1). **6.43.** *Указание.* Первое уравнение системы нужно рассматривать как квадратное уравнение относительно y.

6.8. **6.49.** 1) $\left(\frac{1}{4};1\right)$; 2) $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{3}\right)$; 4) $[3;+\infty)$. **6.51.** 2) $[-1;6]$; 3) $(-\infty;-4]\cup[4;+\infty)$; 5) $x=0$; $x\in[2;4]$; 6) $x\in(-\infty;0)\cup(0;3)\cup(4;+\infty)$. **6.52.** $a\in\left(-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$. **6.53.** $a\in(-\infty;-1)\cup\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$. **6.54.** $a\in[4;+\infty)$. **6.55.** $a\in(-1;1)$.

6.9. **6.56.** 2) $-(a+b)$; 5) $\frac{1}{a^nb^n}$. **6.57.** 5) $\sqrt{x}$. **6.59.** 1) $xy=1$; 4) $4x=5y$.

6.10. **6.61.** 3) $[3;+\infty)$; 6) $[0;1)\cup(1;+\infty)$; 8) $(-\infty;3-\sqrt{5})\cup(3-\sqrt{5};2)\cup[4;3+\sqrt{5})\cup(3+\sqrt{5};+\infty)$.

6.11. **6.65.** 1) $a_n=\frac{1}{n^2}$; 2) $a_n=3\cdot2^{n-1}$; 4) $a_n=(-1)^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^n$. **6.69.** 2) 90. **6.70.** $\frac{n-1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$. **6.71.** $a_n=18n-25$ и $b_n=14n-17$. **6.72.** 1) $b_1=-49$, $q=-\frac{1}{7}$; 4) $b_1=\frac{1}{8}$, $q=7$. **6.74.** $a=32$, или $a=\frac{1}{2}$ и т. п. **6.75.** 3) $\frac{b_1^3}{1-q^3}$. **6.76.** $q=\frac{2}{3}$. **6.77.** 1) $\frac{3}{4}$; 2) $\frac{5}{4}$. **6.79.** $q=\sqrt{2}\pm\sqrt{3}$. **6.80.** 3.

6.12. **6.81.** 1) $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$, $\text{tg}\alpha=\frac{3}{4}$; 2) $\sin\alpha=-\frac{1}{5}$, $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{6}}{5}$, $\text{tg}\alpha=-\frac{\sqrt{6}}{12}$. **6.82.** $a=-\frac{15}{4}$. **6.84.** 2) 0; 3) $\frac{1}{\cos2\beta}$.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Шыныбеков Абдухали Насырулы
Шыныбеков Данияр Абдухалиулы
Жумабаев Ринат Нурланович

АЛГЕБРА

Учебник для 9 класса общеобразовательной школы

Зав. редакцией *Н. Жиенгалиев*
Редактор *А. Изтлеуова*
Художественный редактор *А. Лукманов*
Технический редактор *О. Рысалиева*
Корректор *Ю. Гюльоглу*
Методист *З. О. Курмангалиева*
Компьютерная верстка *А. Куватовой*

ИБ № 091

Сдано в набор 12.02.2019. Подписано в печать 31.05.2019.
Формат $60\times90\ ^1/_{16}$. Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Школьная».
Усл. печ.л. 14,0. Учет.-изд. л. 8,96. Тираж 10000 экз. Заказ №4334.

ТОО «Корпорация «Атамұра», 050000, г. Алматы, пр. Абылай хана, 75.
Полиграфкомбинат ТОО «Корпорация «Атамұра»
Республики Казахстан, 050002, г. Алматы, ул. М. Макатаева, 41.