А.Н. Шыныбеков, Д.А. Шыныбеков,
Р.Н. Жумабаев

ГЕОМЕТРИЯ

Учебник для 9 класса
общеобразовательной школы

9

Рекомендовано Министерством образования и науки
Республики Казахстан

Алматы «Атамұра» 2019

1–4336

УДК 373.167.1
ББК 22.151я72
Ш 99

Учебник подготовлен в соответствии с Типовой учебной программой обновленного содержания по предмету «Геометрия» для 9 класса уровня основного среднего образования, утвержденной Министерством образования и науки РК

Под редакцией **М. Отелбаева** – доктора физико-математических наук, профессора, академика НАН Республики Казахстан.

Условные обозначения

- Вопросы по основным материалам раздела
- Практические и творческие задания
- Материалы из истории
- Задачи повышенной сложности
- ▲ Начало решения (доказательства) задачи
- ■ Конец решения (доказательства) задачи

- **A** Задачи I уровня сложности
- **B** Задачи II уровня сложности
- **C** Задачи III уровня сложности

Шыныбеков А.Н. и др.
Ш 99 **Геометрия.** Учебник для 9 класса общеобразовательной шк. А.Н. Шыныбеков, Д.А. Шыныбеков, Р.Н. Жумабаев. – Алматы: Атамұра, 2019.–176 стр.

ISBN 978-601-331-603-1

УДК 373.167.1
ББК 22.151я72

ISBN 978-601-331-603-1

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данный учебник предназначен для 9-х классов общеобразовательных школ. Он имеет ряд специфических особенностей. Остановимся на некоторых правилах пользования данным учебником.

Задачи и упражнения, приведенные в учебнике, после каждой темы по степени сложности условно разделены на три группы: **A**, **B** и **C**. В группах **A** и **B** сосредоточены соответственно задачи легкие и средней сложности, а задачи из группы **C**, в основном, предназначены для учащихся классов с углубленным изучением математики. Тем не менее учащиеся, обладающие математическими способностями, могут самостоятельно изучить эти материалы во внеурочное время.

В учебнике имеются практические задания, материалы из истории. Они приведены в конце каждой темы.

Рекомендуем способным учащимся самостоятельно проработать дополнительный материал по программе углубленного изучения математики, так как освоение этого материала способствует результативному участию в математических олимпиадах и конкурсах. Кроме того, должно войти в привычку умение отвечать на теоретические вопросы и выполнять практические задания.

Решать задачи по геометрии непросто, но интересно. Не всегда удается сразу найти решение. В таком случае не унывайте, проявите терпение и настойчивость. Неустанный поиск, неутомимый труд и целеустремлённость, несомненно, принесут свои плоды в освоении предмета.

Доброго вам пути, ребята!

Раздел 0. ПОВТОРЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ, ПРОЙДЕННЫХ В 7–8 КЛАССАХ

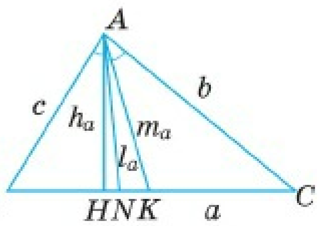
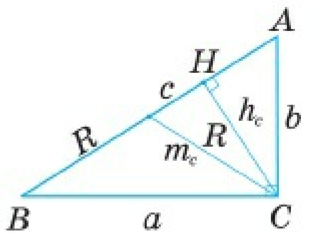
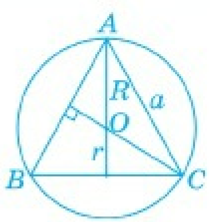
Изучая материалы раздела, вы:

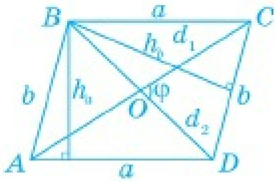
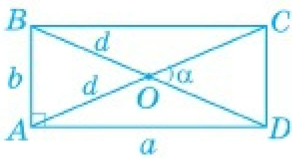
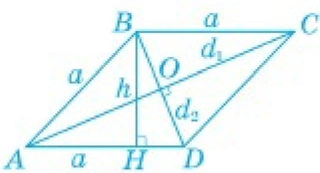
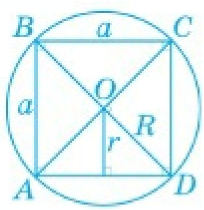
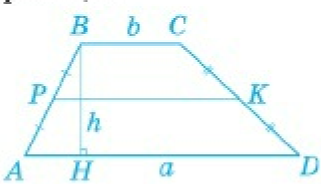
- вспомните и повторите материалы, пройденные в 7–8 классах;
- подготовитесь к изучению новых материалов.

Известно, что в геометрии да и в целом в математике широко используются пройденные темы при изложении новой темы. Поэтому, чтобы лучше освоить материалы, изучаемые в курсе геометрии за 9 класс, вам необходимо вспомнить и повторить темы, пройденные в 7–8 классах. Особое внимание стоит обратить на следующие вопросы.

1. Какие углы называются смежными, а какие – вертикальными? Укажите их на рисунке. Постройте соответствующий рисунок.
2. Укажите на рисунке углы, образованные при пересечении двух прямых третьей прямой. Назовите их.
3. Какие две прямые называются параллельными, а какие – перпендикулярными?
4. Какие признаки параллельности прямых вы знаете? Сформулируйте их.
5. Какая фигура называется треугольником? Какие виды треугольников вы знаете? Назовите и укажите на рисунке все элементы каждого названного вами вида треугольника. Постройте соответствующий рисунок.
6. Сколько признаков равенства треугольников существует? Сформулируйте их.
7. Какая фигура называется выпуклым многоугольником? Чему равна сумма внутренних и сумма внешних углов n-угольника?
8. Какой четырехугольник называется параллелограммом? Сформулируйте признаки параллелограмма и разъясните их смысл на рисунке.
9. Что такое прямоугольник, ромб, квадрат? Какие их свойства вы знаете?
10. Что такое средняя линия треугольника? Какие ее свойства вы знаете?
11. Что такое трапеция? Какие ее виды и свойства вы знаете?
12. Какими свойствами обладают четырехугольники, описанные около окружности и вписанные в нее?
13. Напишите теорему Пифагора и постройте треугольник, соответствующий этой теореме.
14. Укажите связь между тригонометрическими функциями острого угла и сторонами прямоугольного треугольника.
15. Напишите значения тригонометрических функций угла, равного 30°, 45°, 60°.
16. Запишите формулы нахождения площади прямоугольника, треугольника, параллелограмма и трапеции. Назовите и укажите на рисунках элементы, применяемые в этих формулах. Постройте соответствующий рисунок.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ПЛАНИМЕТРИИ

№	Фигура	Основные формулы
1	2	3
1.	**Произвольный треугольник**  m_a – медиана l_a – биссектриса h_a – высота	$P = a + b + c;\ p = \frac{1}{2}(a + b + c);$ $m_a = \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}};$ $R = \frac{abc}{4S};\ r = \frac{S}{p};$ $S = \frac{1}{2}a \cdot h_a;\ \ S = \frac{1}{2}b \cdot c \cdot \sin A;$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$ $S = rp;\ S = \frac{abc}{4R}.$
2.	**Прямоугольный треугольник** 	$c^2 = a^2 + b^2, \angle C = 90°.$ $h_c = \sqrt{AH \cdot BH};\ a^2 = c \cdot BH;$ $b^2 = c \cdot AH;$ $m_c = R = \frac{c}{2};\ r = \frac{a + b - c}{2};$ $a = c \cdot \sin A = c \cdot \cos B;$ $b = c \cdot \cos A = c \cdot \sin B;$ $c = \frac{a}{\sin A} = \frac{a}{\cos B};$ $a = b \cdot \mathrm{tg} A = b \cdot \mathrm{ctg} B;$ $S = \frac{1}{2}a \cdot b = \frac{1}{2}c \cdot h_c.$
3.	**Правильный треугольник** 	$\angle A = \angle B = \angle C = 60°;$ $AB = AC = BC = a;$ $R = \frac{\sqrt{3}}{3}a;\ r = \frac{\sqrt{3}}{6}a;\ R = 2r;$ $S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2.$

4.	**Параллелограмм** 	$AO = OC;\ BO = OD;$ $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = 180^\circ;$ $AC^2 + BD^2 = 2\left(a^2 + b^2\right);$ $S = a \cdot h_a;\quad S = b \cdot h_b;$ $S = a \cdot b \cdot \sin A;$ $S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\varphi.$
5.	**Прямоугольник** 	$AC = BD;\ AO = OC,\ BO = OD;$ $S = a \cdot b;\ S = \frac{d^2 \cdot \sin\alpha}{2};\ R = \frac{AC}{2};$ $AC = BC = \sqrt{a^2 + b^2};\ R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}.$
6.	**Ромб** 	$AC \perp BD;$ $AO = OC;\ BO = OD;$ $AB = BC = CD = AD = a;$ $S = a \cdot h;\ S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2.$ $S = a^2 \sin A.$
7.	**Квадрат** 	$AC \perp BD;\ AC = BD;$ $AO = OC = BO = OD = R;$ $AC = \sqrt{2}a;\quad R = \frac{\sqrt{2}}{2}a;\quad r = \frac{a}{2};$ $S = a^2;\ S = \frac{AC^2}{2}.$
8.	**Трапеция** 	$\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = 180^\circ.$ $PK = \frac{a+b}{2};\ S = \frac{h}{2}(a+b) = PK \cdot h;$ $AD \parallel BC \parallel PK$, PK – средняя линия.

Упражнения

А

0.1. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O, которая является серединой каждого из этих отрезков. Верно ли равенство $\triangle AOC = \triangle BOD$? Укажите другие пары равных треугольников.

0.2. Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 12 см, а периметр треугольника ABD – 8 см. Найдите длину диагонали BD.

0.3. Что можно сказать о: 1) четырехугольнике; 2) треугольнике, у которого все углы равны между собой? Постройте рисунок.

0.4. Найдите углы ромба, в котором одна из диагоналей равна его стороне.

0.5. Какую фигуру можно построить, последовательно соединяя середины сторон: 1) параллелограмма; 2) прямоугольника; 3) ромба; 4) квадрата? Обоснуйте ответ.

0.6. Стороны треугольника равны 10 см, 12 см и 15 см. Найдите длины средних линий этого треугольника.

0.7. Углы при основании трапеции равны 60° и 80°. Найдите другие два угла.

0.8. Противоположные углы четырехугольника равны 120° и 60°. Докажите, что около этого четырехугольника можно описать окружность.

0.9. В прямоугольном треугольнике a и b – катеты, c – гипотенуза, а α – угол, противоположный катету a. Найдите неизвестные элементы по заданным: 1) $a = 4$ см, $b = 3$ см; 2) $a = 12$ см, $c = 13$ см; 3) $\alpha = 30^\circ$, $c = 40$ см; 4) $\alpha = 45^\circ$, $b = 4$ см; 5) $\alpha = 60^\circ$, $b = 5$ см; 6) $c = 10$ дм, $b = 6$ дм.

0.10. Найдите площадь прямоугольника, стороны которого равны a и b: 1) $a = 3$ см, $b = 4$ см; 2) $a = \sqrt{2}$ м, $b = \sqrt{8}$ м; 3) $a = \frac{3}{2}$ дм, $b = 2\frac{2}{3}$ дм.

0.11. Найдите площадь: а) параллелограмма; б) треугольника по двум сторонам и углу между ними:
1) $a = 2$ см, $b = 3$ см, $\alpha = 30^\circ$; 2) $a = 4$ м, $b = \sqrt{3}$ м, $\alpha = 60^\circ$;
3) $a = 1{,}7$ см, $b = 2{,}2$ см, $\alpha = 45^\circ$; 4) $a = \frac{4}{3}$ м, $b = \frac{3}{4}$ м, $\alpha = 30^\circ$.

0.12. Найдите по основанию a и проведенной к нему высоте h_a площадь: а) параллелограмма; б) треугольника:
1) $a = 4$ см, $h_a = 5$ см; 2) $a = 1{,}2$ м, $h_a = 0{,}5$ м;
3) $a = 1\frac{1}{3}$ см, $h_a = 2\frac{1}{7}$ см.

0.13. Найдите площадь ромба, сторона и одна из диагоналей которого равны 4 см.

0.14. Найдите площадь трапеции по основаниям a, b и высоте h:
1) $a = 4$ см, $b = 2$ см, $h = 2$ см; 2) $a = 7$ см, $b = 3$ см, $h = 5$ см;
3) $a = 0{,}2$ м, $b = 3{,}5$ м, $h = 1{,}4$ м; 4) $a = 1\frac{1}{2}$ см, $b = \frac{1}{2}$ см, $h = 3$ см.

B

0.15. Докажите, что биссектриса внешнего угла при вершине B и биссектриса угла C треугольника ABC пересекаются под углом, равным $\frac{1}{2}\angle A$.

0.16. Стороны параллелограмма относятся как $3 : 4$, а его периметр равен 28 см. Найдите стороны параллелограмма.

0.17. Докажите, что медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна ее половине.

0.18. Периметр ромба равен 16 см, высота 2 см. Найдите углы ромба.

0.19. Постройте квадрат по диагонали.

0.20. Докажите, что каждый треугольник можно разделить на две части так, что из этих частей можно составить параллелограмм.

0.21. Основания равнобокой трапеции равны 17 см и 27 см, а острый угол равен 60°. Найдите ее периметр.

0.22. Заданы треугольник ABC и точки D и E, являющиеся серединами сторон AB и AC соответственно. Найдите середину стороны BC, пользуясь только линейкой.

0.23. Докажите, что если в параллелограмм можно вписать окружность, то он является ромбом.

Рис 0.1

0. 24. На рис. 0.1 дано изображение станции «Жибек Жолы» в метрополитене г. Алматы. Станция глубокого заложения (глубина 30 м). Состоит из трех залов – центрального и двух боковых, которые образуют общую основную платформу шириной 19,8 м, длиной 104 м. Спуск и подъем на станцию осуществляется по эскалаторам (4 ленты) высотой 28,5 м, длиной 57 м. Определите угол наклона эскалатора.

0.25. Диагонали ромба равны 10 см и $10\sqrt{3}$ см. Найдите углы ромба.

0.26. Докажите, что среди всех прямоугольников с одинаковыми периметрами наибольшую площадь имеет квадрат.

0.27. Площадь параллелограмма равна 7 см^2, его смежные стороны равны 4 см и 7 см. Найдите его высоту и острый угол.

0.28. Углы треугольника, прилежащие к стороне a, равны α и β. Найдите площадь треугольника.

0.29. Площадь трапеции равна 594 м^2, высота 22 м, а разность оснований 6 м. Найдите основания трапеции.

C

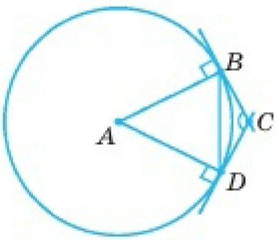


Рис. 0.2

0.30. Через концы хорды, длина которой равна радиусу окружности, проведены две касательные. Найдите угол между этими касательными (рис. 0.2)

0.31. При каком значении n число диагоналей n-угольника равно n?

0.32. Докажите, что биссектрисы противоположных углов параллелограмма параллельны.

0.33. Докажите, что четырехугольник, диагонали которого являются биссектрисами его углов, есть ромб.

0.34. Постройте треугольник по двум сторонам и медиане, проведенной к третьей стороне.

0.35. У равнобедренной трапеции меньшее основание равно боковой стороне и в два раза меньше большего основания. Найдите углы этой трапеции.

0.36. Докажите, что сумма диаметров описанной и вписанной окружностей прямоугольного треугольника равна сумме его катетов.

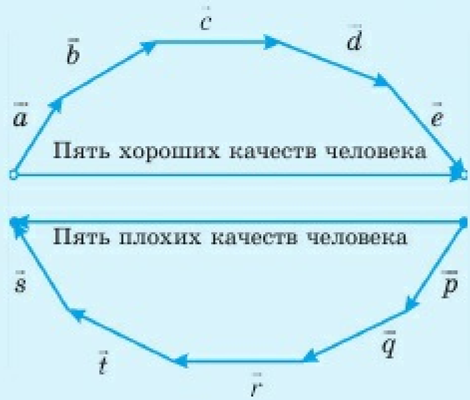
0.37. Докажите, что около четырехугольника, образованного биссектрисами внешних углов выпуклого четырехугольника, можно описать окружность.

0.38. Докажите, что в четырехугольнике с перпендикулярными диагоналями суммы квадратов противоположных сторон равны между собой.

0.39. Как из данного квадрата можно вырезать другой квадрат, чтобы данный квадрат был разделен на две равновеликие части?

0.40. Найдите площадь равнобедренного треугольника, основание которого равно a, а высота, проведенная к боковой стороне, – h.

РАЗМИНКА Векторная интерпретация стихотворения Абая «Ғылым таппай мақтанба».



$\vec{a}$ – целеустремленность, $\vec{b}$ – трудолюбие, $\vec{c}$ – глубокомыслие, $\vec{d}$ – удовлетворенность, $\vec{e}$ – милосердие;

$\vec{p}$ – склонность к сплетням, $\vec{q}$ – лживость, $\vec{r}$ – хвастовство, $\vec{t}$ – леность, $\vec{s}$ – расточительность.

Векторное объяснение пяти хороших и плохих качеств человека.

Раздел 1. ВЕКТОРЫ НА ПЛОСКОСТИ

1.1. Понятие вектора. Равенство векторов.
1.2. Сложение и вычитание векторов.
1.3. Умножение вектора на число.
1.4. Угол между векторами. Скалярное произведение векторов.
1.5. Координаты вектора.
1.6. Выражение скалярного произведения через координаты векторов.
1.7. Некоторые применения векторов при решении задач.

1.1. Понятие вектора. Равенство векторов

Изучив материалы данной темы, вы будете:

- знать определения вектора, коллинеарных векторов, равных векторов, нулевого вектора, единичного вектора и длины вектора;
- знать, что любой ненулевой вектор определяет преобразование параллельного переноса.

1.1.1. Понятие вектора

Нам известны два вида величин. Например, длина, площадь, объем, масса и т.д. полностью определяются заданием своих численных величин. Такие величины называются ***скалярными величинами*** или просто ***скалярами***.

А многие физические величины, например, сила, перемещение материальной точки, скорость и т.д., характеризуются не только своим числовым значением, но и направлением в пространстве. Подобные физические величины называются ***векторными величинами*** или просто ***векторами***. Например, если на какое-либо тело воздействовать определенной силой, то, как нам известно из курса физики, эта сила изображается «направленным отрезком» (рис.1.1). Здесь длина отрезка соответствует численной величине силы, а стрелка указывает на направление воздействия этой силы.

Аналогично можно ввести понятие геометрического вектора. В отличие от физических векторов векторы в геометрии не имеют конкретной природы (т.е. не выражают силу, скорость и т.п.). Геометрические векторы рассматриваются

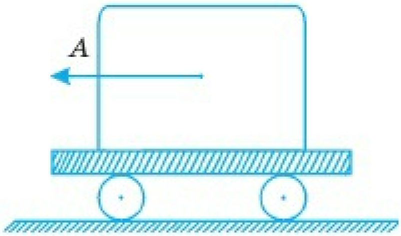


Рис. 1.1

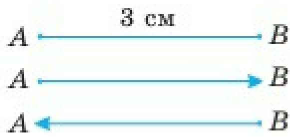


Рис. 1.2

просто как «направленные отрезки». Так, например, всякий отрезок имеет два конца. Назовем один из этих концов *начальной точкой*, или *началом*, а другой – *концом* и будем считать, что отрезок направлен от начала к концу (рис. 1.2). Конец вектора изображается стрелкой. Очевидно, что из любого отрезка можно получить два направленных отрезка (в зависимости от выбора начала и конца этого отрезка). Теперь определим понятие геометрического вектора.

Определение 1. ***Любой направленный отрезок называется вектором.***

Если на отрезке AB точку A принять за начало, а B – за конец, то получится вектор, который обозначается $\overrightarrow{AB}$. Например, на рисунке 1.2 изображены векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$.

Итак, если задан вектор $\overrightarrow{AB}$, то точка A – начало, а B – конец этого вектора. Для вектора $\overrightarrow{BA}$, наоборот, B – начало, а A – конец этого вектора. Векторы также обозначаются строчными буквами латинского алфавита со стрелкой сверху: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ и т.д. (рис.1.3).

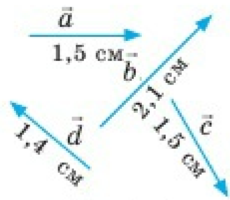


Рис. 1.3

В геометрии также рассматривается вектор, в котором начало и конец совпадают. Такой вектор называется ***нулевым вектором***. Отсюда следует, что любую точку плоскости можно рассматривать как нулевой вектор. Нулевой вектор обозначается так: $\vec{0}$.

1.1.2. Равенство векторов

Длину отрезка AB называют ***модулем*** вектора $\overrightarrow{AB}$ и обозначают так: $|\overrightarrow{AB}|$. Аналогично, модуль (длину) вектора $\vec{a}$

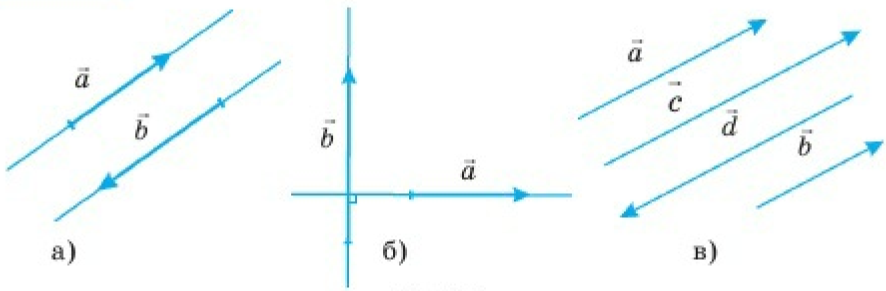


Рис.1.4

также записывают через $|\vec{a}|$. Вектор, длина (модуль) которого равна (равен) 1, называется ***единичным вектором.***

Например, модули векторов, изображенных на рисунках 1.2 и 1.3, равны $|\overrightarrow{AB}|=3$, $|\overrightarrow{BA}|=3$, $|\vec{a}|=1{,}5$, $|\vec{b}|=2{,}1$, $|\vec{c}|=1{,}5$, $|\vec{d}|=1{,}4$.

Если отрезок AB лежит на прямой a, то говорят, что вектор $\overrightarrow{AB}$ также лежит на прямой a.

Если два вектора лежат на одной прямой или на параллельных прямых, то такие векторы называются ***коллинеарными.*** Коллинеарность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ записывают так: $\vec{a} \parallel \vec{b}$ (рис. 1.4, *а*).

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ лежат на перпендикулярных прямых, то их называют ***перпендикулярными*** (***ортогональными***) векторами и записывают так: $\vec{a} \perp \vec{b}$ (рис. 1.4, *б*).

Аналогично, если вектор $\vec{a}$ лежит на прямой, параллельной (перпендикулярной) прямой c, то вектор $\vec{a}$ называется параллельным (перпендикулярным) прямой c. Это записывают так: $\vec{a} \parallel c$ ($\vec{a} \perp c$).

Если коллинеарные векторы имеют одинаковые направления, то их называют ***сонаправленными*** векторами. Сонаправленность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ записывают так: $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$. Если векторы и коллинеарны и имеют разные направления, то их называют ***противоположно направленными*** и записывают так: $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$. Например, на рисунке 1.4, в) $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{c}$, $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{c}$ и $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{d}$, $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{d}$, $\vec{c} \uparrow\downarrow \vec{d}$.

Примечание. Можно дать более точное определение сонаправленных и противоположно направленных векторов. Например, два ненулевых вектора, лежащих на параллельных прямых, называются сонаправленными (противоположно направленными), если их концы лежат по одну сторону (на разных сторонах) от прямой, проходящей через начала этих векторов. Сформулируйте аналогичное определение для ненулевых векторов, лежащих на одной прямой.

В целом нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору. Смысл этого предложения будет понятен после изучения пункта 1.2.

Сонаправленные векторы обладают нижеследующими свойствами.

1°. Если $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$ и $\vec{b}\uparrow\uparrow\vec{c}$, то $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{c}$.

2°. Если $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{d}$ и $\vec{b}\uparrow\downarrow\vec{d}$, то $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$.

▲ Доказательство свойства 1°. Так как $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$ и $\vec{b}\uparrow\uparrow\vec{c}$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$ будут коллинеарными (две прямые, параллельные третьей, параллельны между собой). А так как векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$ имеют одинаковое направление с вектором $\vec{b}$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$ одинаково направлены, т.е. $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{c}$. Свойство 2° доказывается аналогично (рис. 1.4, *в*). ■

Определение 2. ***Векторы называются равными, если они сонаправлены и их модули равны.*** Другими словами, если $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$ и $|\vec{a}|=|\vec{b}|$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются ***равными***, т.е. $\vec{a}=\vec{b}$.

Пусть даны фигуры F, F_1 и вектор $\vec{a}$ $(|\vec{a}|\neq 0)$. Если любая точка A фигуры F переходит в точку A_1 фигуры F_1 при условии, что $\overrightarrow{AA_1}=\vec{a}$, то говорят, что фигура F_1 получена из фигуры F ***параллельным переносом*** на вектор $\vec{a}$ (рис. 1.5, *а*). Данное преобразование называется параллельным переносом на вектор $\vec{a}$. Здесь фигура F_1 также называется образом фигуры F при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$.

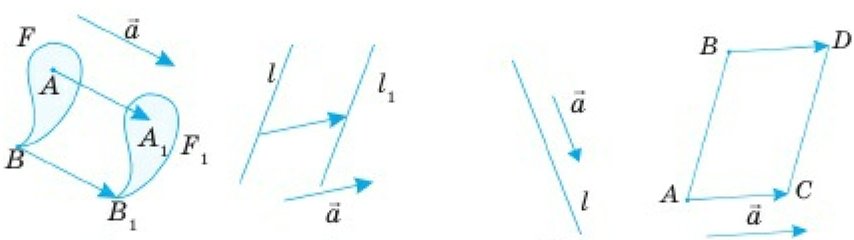
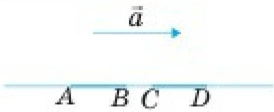


Рис.1.5



д)
Рис.1.5

При параллельном переносе на вектор $\vec{a}$: 1) прямая l переходит в параллельную ей прямую l_1, если $l \nparallel \vec{a}$ (рис. 1.5, *б*); прямая l переходит в себя, если $l \parallel \vec{a}$ (рис. 1.5, *в*); 2) отрезок переходит в параллельный ему отрезок (рис. 1.5, *г*), а также в отрезок, лежащий с данным отрезком на одной прямой (рис. 1.5, *д*).

Аналогичное определение и свойства параллельного переноса более подробно мы будем рассматривать в разделе 2.

1.1.3. Свойства равных векторов

Теорема. *Равные векторы можно совместить параллельным переносом, и, обратно, если векторы совмещаются параллельным переносом, то эти векторы равны.*

▲ Пусть векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равны (рис.1.6, *а*). Тогда по определению $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ и $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$, т.е. четырехугольник $ABDC$ является параллелограммом, так как противоположные стороны AB и CD параллельны и равны. Следовательно, $AC = BD$ и $AC \parallel BD$. Здесь векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$ сонаправлены, т.к. они расположены на одной полуплоскости относительно прямой AB, т.е. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. Это значит, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ можно совместить параллельным переносом. При этом точка A переходит в точку C, а точка B – в точку D.

Обратно, пусть векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ совмещаются некоторым параллельным переносом и при этом точка A переходит в точку C, а точка B – в точку D. Тогда по определению параллельного переноса $AC = BD$ и $AC \parallel BD$, т.е. $ABDC$ – параллелограмм. Следовательно, $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ и $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$. Так как при параллельном переносе начало вектора $\overrightarrow{AB}$ переходит в

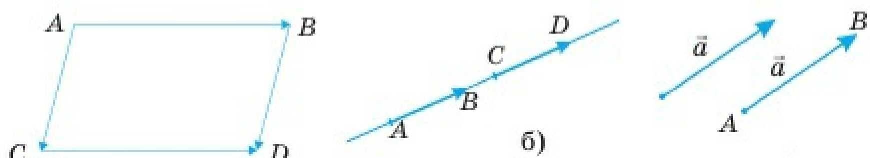


Рис. 1.6

начало $\overrightarrow{CD}$, а конец $\overrightarrow{AB}$ – в конец $\overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$, т.е. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.■

Из доказанной теоремы следует, что векторы, которые могут быть совмещены параллельным переносом, могут быть названы равными.

ДОКАЖИТЕ САМОСТОЯТЕЛЬНО

В случае, когда векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ расположены на одной прямой, теорема доказывается несложно (рис. 1.6, *б*).

Следствие 1. ***Если*** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, ***то*** $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ (рис. 1.6, *а*, *б*).

Если точка A является началом вектора $\vec{a}$, то говорят, что вектор $\vec{a}$ отложен от точки A.

Следствие 2. ***От любой точки A можно отложить единственный вектор, равный данному вектору*** $\vec{a}$ (рис. 1.6, *в*).

Действительно, существует единственный параллельный перенос, переводящий начало вектора $\vec{a}$ в точку A. Тогда при этом параллельном переносе образ вектора $\vec{a}$ также будет единственным, и этот образ $\overrightarrow{AB}$ по доказанной теореме равен вектору $\vec{a}$.

Итак, ***каждый ненулевой вектор однозначно определяет некоторый параллельный перенос и, обратно, любой параллельный перенос однозначно определяет некоторый вектор.***

1. Какова разница между векторными и скалярными величинами?
2. Что такое вектор и как его обозначают?
3. Какие векторы называются коллинеарными? Приведите примеры сонаправленных и противоположно направленных векторов.
4. Какие векторы называются равными?
5. Какая связь между равенством векторов и параллельным переносом?
6. Что такое модуль (длина) вектора?
7. Что вы знаете о нулевом векторе?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА

1. Постройте два вектора:
   а) равные по длине, но не коллинеарные;
   б) равные по длине и сонаправленные;
   в) равные по длине и противоположно направленные.

В каком из этих трех случаев построенные векторы равны между собой? Обоснуйте ответ.

2. Постройте векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ($\vec{a} \nparallel \vec{b}$). Отметьте точку O и постройте параллелограмм $OABC$ так, чтобы выполнялись равенства $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{b}$.

3. Постройте произвольно вектор $\vec{a}$ такой, что $|\vec{a}| = 3$ см. Отметьте точку A и постройте квадрат $ABCD$ так, чтобы выполнялось равенство $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$. Сколько таких квадратов можно построить?

Упражнения

А

1.1. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Какие из векторов с началом и концом в вершинах параллелограмма и точке O: 1) лежат на прямой BD; 2) параллельны прямой AD; 3) коллинеарны вектору $\overrightarrow{AB}$; 4) равны вектору $\overrightarrow{CB}$; 5) равны вектору $\overrightarrow{OC}$?

1.2. Известно, что точка B лежит между точками A и C. Найдите среди векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$ пары сонаправленных и противоположно направленных векторов.

1.3. Среди векторов, определенных сторонами прямоугольника $ABCD$, найдите: 1) коллинеарные; 2) перпендикулярные; 3) равные между собой векторы.

1.4. Что можно сказать о точках A, B и C, если выполняется равенство: 1) $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$; 2) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$; 3) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$; 4) $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$?

1.5. В треугольнике ABC проведена медиана AD. Докажите равенство $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC}$.

1.6. В прямоугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Найдите длины векторов $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{DO}$, если $AB = 6$ см, $AD = 8$ см.

1.7. В равнобедренном треугольнике ABC на основание опущена высота AD. Укажите пары векторов: 1) модули которых равны; 2) которые равны между собой; 3) которые взаимно перпендикулярны.

B

1.8. В прямоугольнике $ABCD$ сторона $AB = 3$ см, сторона $BC = 4$ см и точка N является серединой AB. Найдите модули векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{NA}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AC}$.

1.9. В трапеции $ABCD$ $\angle A = 90^\circ$, $\angle D = 45^\circ$, $AD = 12$ см, $AB = 5$ см. Найдите длину векторов $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{AC}$.

1.10. Отметьте точки A, B и найдите точку X такую, чтобы выполнялось равенство $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{XB}$.

1.11. Определите вид четырехугольника $ABCD$, если: 1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ и $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$; 2) $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{AB}$.

1.12. Как можно отложить вектор $\vec{a}$ от точки C? (Рассмотрите отдельно случай, когда вектор $\vec{a}$ и точка C : а) расположены на одной прямой; б) не расположены на одной прямой.)

1.13. Для точек A, B, C, D, не лежащих на одной прямой, выполняется равенство $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Покажите, что отрезки AC и BD пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

C

1.14. Пусть диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Что можно сказать о четырехугольнике $ABCD$, если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ и: 1) $\overrightarrow{AO} \perp \overrightarrow{BO}$; 2) $\overrightarrow{AO} \perp \overrightarrow{BO}$ и $|\overrightarrow{AO}| = |\overrightarrow{BO}|$?

1.15. Докажите обратное утверждение к задаче 1.13. Если отрезки AC и BD делятся пополам в точке их пересечения, то выполняется равенство $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

1.16. Из одного города одновременно в северном и западном направлениях вылетели два самолета со скоростью 600 км/ч и 800 км/ч. Какое расстояние будет между самолетами через 1 ч?

1.17. Из одного города одновременно в северном и западном направлениях вылетели два самолета со скоростью 600 км/ч и 800 км/ч. Через 2 ч они изменили направление и полетели на разной высоте навстречу друг другу. Через сколько часов после вылета они встретятся?

1.2. Сложение и вычитание векторов

Изучив материалы данной темы, вы будете:

- знать и применять правила сложения векторов и их свойства:
- знать и применять разложение вектора на сумму составляющих векторов, расположенных на пересекающихся прямых.

1.2.1. Сложение векторов

Скажем, требуется перенести некоторое тело из точки A в точку B, а затем – из точки B в точку C. Очевидно, такое перемещение нужно считать как параллельный перенос. Эти параллельные переносы определяются векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ соответственно, и тело из точки A переходит в точку C. Результат этого перемещения можно указать вектором $\overrightarrow{AC}$ (рис.1.7).

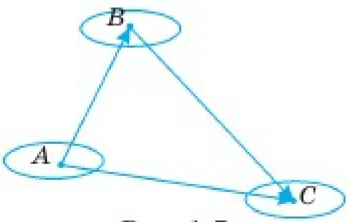


Рис. 1.7

А вектором $\overrightarrow{AC}$ определяется параллельный перенос, который получается последовательным применением параллельных переносов, определяемых векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ соответственно. Поэтому вектор $\overrightarrow{AC}$ можно рассматривать как сумму векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.$$

Аналогично определяют сумму любых двух векторов.

Определение 1. ***Пусть даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Отметим на плоскости точку A и отложим от этой точки вектор $\overrightarrow{AB}$, равный вектору $\vec{a}$, а от точки B отложим вектор $\overrightarrow{BC}$ равный вектору $\vec{b}$. Полученный вектор $\overrightarrow{AC}$ называют суммой век-***

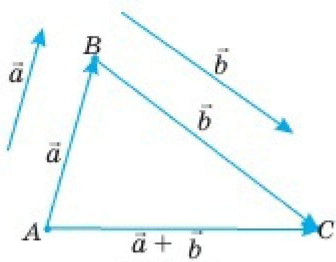


Рис. 1.8

торов $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *и пишут:* $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ (рис. 1.8).

Такой способ получения суммы двух векторов называется ***правилом треугольника сложения векторов.***

Теперь покажем, что сумма векторов не зависит от выбора точки A. Другими словами, если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B_1C_1}$, то выполняется равенство $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1}$.

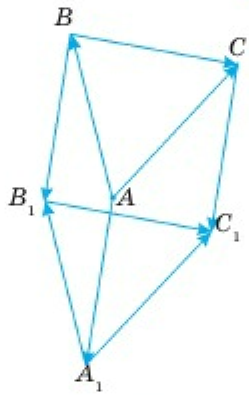


Рис. 1.9

▲ Действительно, из равенства $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$ следует $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1}$ (следствие 1 подпункта 1.1.3) и из равенства $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B_1C_1}$ следует равенство $= \overrightarrow{CC_1}$. Следовательно, $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{CC_1}$. Тогда из следствия 1 (п.1.1.3) имеем $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1}$ (рис. 1.9).

Из правила треугольника сложения векторов следует, что для любого вектора справедливо равенство $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.

Итак, для любых точек A, B, C верно равенство $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Здесь некоторые из точек A, B, C могут и совпадать. ■

1.2.2. Свойства сложения векторов

Теорема 1. *Для любых векторов* $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ *верно равенство:*

1^0. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (*переместительный закон*);

2^0. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (*сочетательный закон*).

▲ 1) Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны. От некоторой точки A плоскости отложим векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Тогда, как показано на рис. 1.10, получим параллелограмм $ABCD$. По правилу треугольника $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} =$

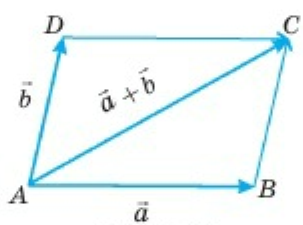


Рис. 1.10

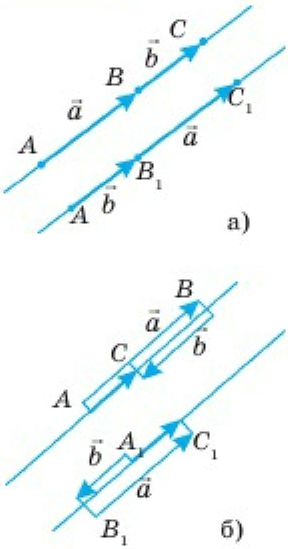


Рис. 1.11

$=\vec{a}+\vec{b}$. Аналогично, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\vec{b}+\vec{a}$. Следовательно, $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то векторы $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ расположены на одной прямой (рис. 1.11). Тогда векторы $\overrightarrow{AB_1}=\vec{b}$ и $\overrightarrow{B_1C_1}=\vec{a}$ также лежат на одной прямой. Докажем, что точки C и C_1 совпадают.

Если $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, то совпадение точек C и C_1 следует из правила сложения отрезков (рис. 1.11, *а*).

Если $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$, то совпадение точек C и C_1 следует из правила вычитания отрезков (рис. 1.11, *б*).

2) Отметим точку A на плоскости и отложим векторы $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ и $\overrightarrow{CD}=\vec{c}$ (рис. 1.12.). Тогда $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$. С другой стороны, $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$. Отсюда имеем $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$. ■

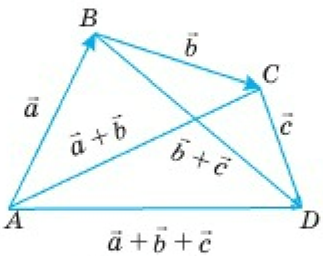
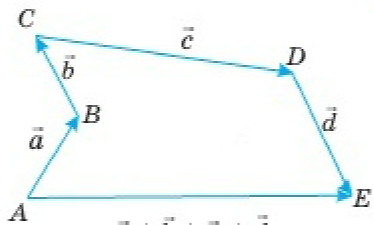


Рис. 1.12

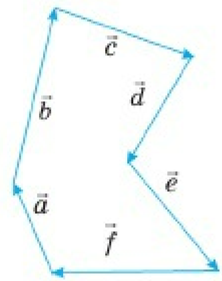
При доказательстве свойства 1° мы видели, что сумма $\vec{a}+\vec{b}$ неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определяется диагональю параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е., чтобы изобразить сумму неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, нужно от некоторой точки A отложить векторы $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ и построить параллелограмм $ABCD$. Тогда $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$. Этот способ получения суммы векторов называется ***правилом параллелограмма***. Правило параллелограмма применяется в физике, например, при сложении сил.

Из переместительного и сочетательного законов суммы векторов следует, что в сумме нескольких векторов можно перемещать и сочетать слагаемые любым способом. Это облегчает нахождение суммы нескольких (более двух) векторов. Например, требуется найти сумму векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ (рис. 1.13.). Для этого от некоторой точки A отложим векторы $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{CD}=\vec{c}$ и $\overrightarrow{DE}=\vec{d}$. Тогда начало и конец ломаной $ABCDE$ определяет вектор $\overrightarrow{AE}$, который и является суммой векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$: $\overrightarrow{AE}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$.



$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$

Рис. 1.13



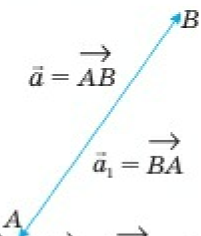
$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}+\vec{f}=\vec{0}$

Рис. 1.14

В целом для любых точек A_1, A_2, ..., A_n плоскости справедливо равенство $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\ldots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{A_1A_n}$.

Это правило построения суммы нескольких векторов называется ***правилом многоугольника*** или ***правилом последовательного складывания векторов***. Если при последовательном складывании векторов получим замкнутую ломаную, т.е. если начало первого вектора и конец последнего вектора совпадают, то эта сумма равна нулевому вектору (рис. 1.14).

Если ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{a}_1$ удовлетворяют условиям $|\vec{a}|=|\vec{a}_1|$ и $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{a}_1$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{a}_1$ называются ***противоположными векторами***. Вектор, противоположный вектору $\vec{a}$, обозначается через $-\vec{a}$, т.е. $\vec{a}_1=-\vec{a}$. Нулевой вектор считается противоположным самому себе. На рис.1.15 векторы $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{BA}=\vec{a}_1$ – противоположные векторы. Отсюда следует, что сумма противоположных векторов равна нулевому вектору: $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.



$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$

Рис. 1.15

1.2.3. Разность векторов

Определение 2. ***Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор, который в сумме с вектором $\vec{b}$ равен вектору $\vec{a}$. Разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначают так: $\vec{a}-\vec{b}$.***

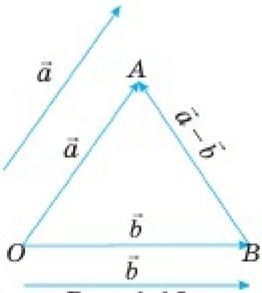


Рис. 1.16

Разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ строится так: от некоторой точки O откладываем векторы $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$. Тогда вектор $\overrightarrow{BA}$ равен разности $\vec{a}-\vec{b}$ (рис.1.16). Так как $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}$, то $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\vec{a}-\vec{b}$. На рис. 1.16 конец вектора $\vec{a}-\vec{b}$ направлен к концу вектора $\vec{a}$.

Если сумма двух векторов равна нулю, то эти векторы будут противоположными.

▲ Действительно, пусть $\vec{a}+\vec{a}_1=\vec{0}$, то $|\vec{a}|=|\vec{a}_1|$ и $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{a}_1$, т.е. $\vec{a}$ и $\vec{a}_1$ противоположные векторы.

Теперь покажем, что разность векторов можно представить в виде суммы, т.е. для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ верно равенство $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$.

Действительно, как показано на рис.1.16, $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\vec{a}-\vec{b}$, но по правилу треугольника сложения векторов имеем: $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA}$. Здесь $\overrightarrow{BO}=-\overrightarrow{OB}=-\vec{b}$, поэтому $\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA}+(-\overrightarrow{OB})=\vec{a}+(-\vec{b})$, что и требовалось доказать. ■

Отсюда вытекает, что векторы можно переносить на другую сторону равенства, меняя знак на противоположный. Из равенства $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$ вытекает, что $\vec{c}=\vec{a}+(-\vec{b})$.

1.2.4. Разложение вектора на сумму составляющих векторов, расположенных на пересекающихся прямых

Определение 3. ***Если $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$, то векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называются составляющими вектора $\vec{a}$. Также говорят, что вектор $\vec{a}$ разложен на сумму составляющих векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$.***

Теорема 2. *Пусть даны две пересекающиеся прямые. Тогда любой вектор можно разложить на сумму составляющих, расположенных на данных прямых.*

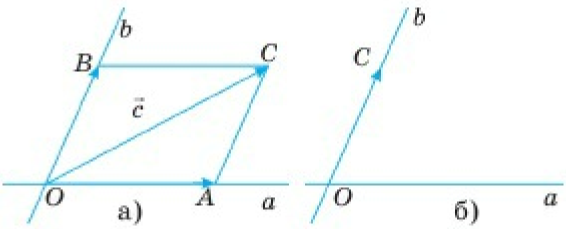


Рис. 1.17

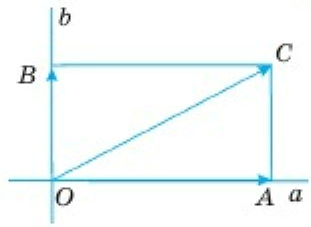


Рис. 1.18

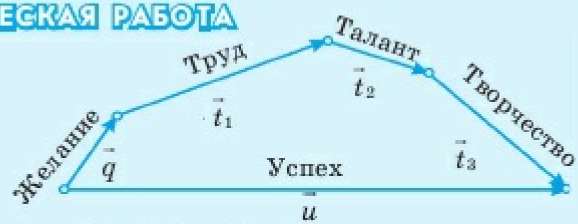
▲Пусть прямые a и b пересекаются в точке O. Отложим данный вектор $\vec{c}$ от точки O: $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Тогда с помощью прямых a и b построим параллелограмм $OACB$ так, чтобы отрезок OC был его диагональю (рис. 1.17, *а*). По правилу параллелограмма $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. Следовательно, векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ являются составляющими вектора $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$, расположенными на прямых a и b соответственно. В этом случае вектор $\overrightarrow{OC}$ не лежит на прямой a или b.

Если вектор $\overrightarrow{OC}$ лежит на одной из прямых a или b, то одна из составляющих этого вектора равна самому вектору $\overrightarrow{OC}$, а вторая составляющая – нулевому вектору (рис. 1.17, б). ■

Если составляющие вектора $\overrightarrow{OC}$ перпендикулярны между собой ($\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$), то $OACB$ является прямоугольником, а отрезки OA и OB – проекциями диагонали OC на прямые a и b соответственно (рис.1.18).

1. Сформулируйте правило треугольника и правило параллелограмма сложения векторов.
2. Покажите, что правило параллелограмма не зависит от выбора точки, от которой откладываются слагаемые.
3. Какими свойствами обладает сумма векторов?
4. Как определяется разность векторов?
5. Какие векторы называются противоположными?
6. Как можно разложить вектор на сумму составляющих по двум пересекающимся прямым?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА



$\vec{u} = \vec{q} + \vec{t}_1 + \vec{t}_2 + \vec{t}_3$ – «формула успеха»

1. В паре или группе проанализируйте «формулу успеха». Результаты анализа обсудите со всем классом.
2. Возьмите попарно неколлинеарные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$ и постройте сумму векторов: а) $\vec{a}+\vec{b}$; б) $\vec{c}+\vec{d}$; в) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$; г) $\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}$; д) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}$.
3. Возьмите взаимно неколлинеарные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и постройте вектор: а) $\vec{a}-\vec{b}$; б) $\vec{b}-\vec{a}$; в) $\vec{c}-\vec{a}$; г) $-\vec{b}$; д) $(\vec{a}-\vec{b})-\vec{c}$.
4. Возьмите взаимно коллинеарные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ($\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \uparrow\downarrow \vec{c}$) и постройте вектор: а) $\vec{a}+\vec{b}$; б) $\vec{b}+\vec{c}$; в) $\vec{a}-\vec{b}$; г) $\vec{a}-\vec{c}$.
5. В паре выполните нижеследующее задание.
   На листе бумаги начертите пару пересекающихся прямых и некоторый ненулевой вектор $\vec{a}$ и обменяйтесь бумагами. На полученном листе бумаги разложите вектор $\vec{a}$ по составляющим векторам, расположенным на данных пересекающихся прямых.

Упражнения

А

1.18. Дан четырехугольник $ABCD$. Докажите, что:

1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$; 2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$.

1.19. Дан параллелограмм $ABCD$. Суммой каких векторов является вектор: 1) $\overrightarrow{CA}$; 2) $\overrightarrow{DA}$?

1.20. Найдите сумму векторов:

1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}$;

3) $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NN}$; 4) $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{DE}$.

1.21. Найдите сумму векторов: 1) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{KP}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NK}$; 3) $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{QR}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RO}$.

1.22. Выразите вектор $\overrightarrow{BC}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

1.23. На стороне BC треугольника ABC дана точка D. Выразите вектор $\overrightarrow{BD}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

1.24. Дан параллелограмм $ABCD$. Найдите разность векторов: 1) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$; 2) $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CD}$.

1.25. Найдите разность векторов: 1) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$; 2) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$; 3) $\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{PR}$; 4) $(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})-\overrightarrow{CD}$; 5) $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{NN}$.

1.26. Дан параллелограмм $ABCD$. Постройте сумму векторов: 1) $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}$; 2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$; 3) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$.

1.27. Дан параллелограмм $ABCD$. Найдите векторы:
1) $(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})+\overrightarrow{AC}$; 2) $(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AO})-\overrightarrow{OD}$. Точка O является точкой пересечения диагоналей параллелограмма.

B

1.28. В треугольнике ABC $AB = 6$ см, $BC = 8$ см, $\angle B = 90^\circ$. Найдите: 1) $|\overrightarrow{BA}|-|\overrightarrow{BC}|$ и $|\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}|$; 2) $|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{BC}|$ и $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}|$; 3) $|\overrightarrow{BA}|+|\overrightarrow{BC}|$ и $|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}|$; 4) $|\overrightarrow{AB}|-|\overrightarrow{BC}|$ и $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}|$.

1.29. Самолет сначала пролетел 200 км на северо-восток, а затем – 300 км на восток. Изобразите векторами весь путь самолета и найдите расстояние, на которое удалился самолет от первоначального пункта вылета.

1.30. От пристани отплыла лодка в направлении, перпендикулярном относительно течения реки, ширина которой равна a. Известно, что скорость течения реки равна v_1, а скорость лодки v_2. На какое расстояние удалится лодка от пристани по истечению времени t? Как определить длину пути лодки?

1.31. Упростите выражение: 1) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{MC})+(\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{KD})$; 2) $(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC})-(\overrightarrow{NK}+\overrightarrow{KD})$, применяя метод последовательного сложения векторов.

1.32. В треугольнике ABC $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$. Выразите: 1) $\overrightarrow{BA}$; 2) $\overrightarrow{CB}$; 3) $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

1.33. Точки H и N являются серединами сторон AB и AC соответственно треугольника ABC. Выразите векторы $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{HN}$, $\overrightarrow{BN}$ через векторы $\vec{a}=\overrightarrow{AH}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{AN}$.

1.34. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Выразите выражения $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{BO}-\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{DA}$ через векторы $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$.

1.35. Объясните действия лебедя, рака и щуки из известной басни И.А. Крылова с помощью векторов.

1.36. Дан равносторонний треугольник ABC со стороной a. Найдите: 1) $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}|$; 2) $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|$; 3) $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}|$; 4) $|\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}|$; 5) $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|$.

1.37. Покажите, что для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ верно неравенство: 1) $|\vec{a}+\vec{b}|\leqslant|\vec{a}|+|\vec{b}|$; 2) $|\vec{a}-\vec{b}|\leqslant|\vec{a}|+|\vec{b}|$. При каких условиях выполняется знак равенства?

1.38. Дан параллелограмм $ABCD$. Точки P и O являются серединами сторон BC и CD соответственно. 1) Постройте составляющие векторов $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{DP}$, $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{PO}$ по прямым AB и AD. 2) Постройте составляющие векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{AC}$ по прямым AP и AO.

1.39. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют общее начало. 1) Взяв в качестве одного из составляющих вектора $\vec{a}$ вектор $\vec{b}$, постройте его второй составляющий вектор $\vec{c}$; 2) наоборот, взяв в качестве первого составляющего вектора $\vec{b}$ вектор $\vec{a}$, постройте его второй составляющий вектор $\vec{d}$. Как будут расположены векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$?

1.40. Можно ли разложить вектор длиной 10 на составляющие так, чтобы один из составляющих векторов по модулю был равен: 1) 1; 2) 100?

C

1.41. Дан параллелограмм $ABCD$. Докажите, что для любой точки X на плоскости верно равенство $\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XC}=\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XD}$.

1.42. Корабль со скоростью v_1 по компасу направился на восток. В каком направлении поплывет корабль, если дует северный ветер со скоростью v_2 и вода течет на юго-восток со скоростью v_3?

1.43. Вне треугольника ABC на его сторонах построены параллелограммы $AKLB$, $BMNC$, $CPQA$. Можно ли составить треугольник из отрезков: 1) LM, NP, QK; 2) LP, MQ, NK? Стороны составленных треугольников должны быть параллельны соответствующим отрезкам.

1.44. Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\vec{a}$ и $\vec{c}$ равен 120°, $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|$. Покажите, что выполняется равенство $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$. Угол AOB называется углом между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$.

1.45. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ отложены от точки O так, что $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ и $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$, причем $\angle AOB=90^\circ$, $\angle AOC=135^\circ$, $\angle BOC=135^\circ$, $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ и $|\vec{c}|=\sqrt{2}$. Докажите, что выполняется равенство $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$.

1.46. Середины сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$ по порядку обозначены буквами P, Q, R и K соответственно. Докажите, что для любой точки O этой плоскости выполняется равенство $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OK}$.

1.47. Найдите $|\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CD}|$, если в трапеции $ABCD$ $\angle A=90^\circ$, $\angle ACB=45^\circ$ и $\angle ACD=90^\circ$. Здесь $AB=a$.

1.3. Умножение вектора на число

Изучив материалы данной темы, вы будете:
- умножать вектор на число и знать о свойствах умножения вектора на число, применять их;
- выводить условие коллинеарности векторов и применять при решении задач.

1.3.1. Умножение вектора на число и его свойства

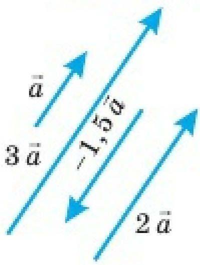


Рис. 1.19

Определение. ***Произведением вектора $\vec{a}\neq\vec{0}$ на число k называется вектор, модуль которого равен числу $|k|\cdot|\vec{a}|$ и сонаправлен с вектором $\vec{a}$ при $k>0$, противоположно направлен с вектором $\vec{a}$ при $k<0$. Произведение числа k на вектор $\vec{a}$ записывают так: $k\cdot\vec{a}$.***

Если $k=0$, то $0\cdot\vec{a}=\vec{0}$. На рис. 1.19 изображены векторы $\vec{a}$, $3\vec{a}$, $-1{,}5\vec{a}$, $2\vec{a}$.

Теорема 1. Для любых чисел α, β и любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ верно равенство:

1°. $(\alpha\cdot\beta)\vec{a}=\alpha(\beta\vec{a})$ (*сочетательный закон*);

2°. $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$ (I *распределительный закон*);

3°. $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$ (II *распределительный закон*).

▲ 1°. Если $\alpha\beta>0$, т.е. числа α и β имеют одинаковые знаки, то векторы $(\alpha\cdot\beta)\vec{a}$ и $\vec{a}$; $\alpha(\beta\vec{a})$ и $\vec{a}$ сонаправлены, а если числа α и β имеют разные знаки, то векторы $(\alpha\cdot\beta)\vec{a}$ и $\vec{a}$; $\alpha(\beta\vec{a})$ и $\vec{a}$ противоположно направлены. Поэтому для любых чисел α, β векторы $(\alpha\cdot\beta)\vec{a}$ и $\alpha(\beta\vec{a})$ сонаправлены. Теперь осталось показать, что модули векторов равны:

$$|(\alpha\cdot\beta)\vec{a}|=|\alpha\beta|\cdot|\vec{a}|=|\alpha|\cdot|\beta|\cdot|\vec{a}| \text{ и } |\alpha(\beta\vec{a})|=|\alpha||\beta\vec{a}|=|\alpha|\cdot|\beta||\vec{a}|.$$

Следовательно, $(\alpha\cdot\beta)\vec{a}=\alpha(\beta\vec{a})$.

2°. Пусть $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\alpha\neq0$, $\beta\neq0$. Тогда нужно показать, что векторы $(\alpha+\beta)\vec{a}$ и $\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$ сонаправлены и модули этих векторов равны. Возможны два случая: 1) числа α и β имеют одинаковые знаки; 2) числа α и β имеют разные знаки.

1) Пусть числа α и β имеют одинаковые знаки. Тогда

$$|(\alpha+\beta)\vec{a}|=|\alpha+\beta|\cdot|\vec{a}|. \qquad (1)$$

При $\alpha>0$, $\beta>0$ длина вектора $\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$ равна $(\alpha+\beta)\cdot|\vec{a}|$, а при $\alpha<0$, $\beta<0$ длина вектора $\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$ равна $(-\alpha-\beta)\cdot|\vec{a}|$. Поэтому

$$|\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}|=|\alpha+\beta|\cdot|\vec{a}|. \qquad (2)$$

Итак, при $\alpha\cdot\beta>0$ модули векторов $(\alpha+\beta)\vec{a}$ и $\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$ равны. Теперь проверим их сонаправленность.

Действительно, при $\alpha>0$, $\beta>0$ векторы $(\alpha+\beta)\vec{a}$ и $\vec{a}$; $\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$ и $\vec{a}$ сонаправлены, а при $\alpha<0$, $\beta<0$ эти векторы и вектор $\vec{a}$ противоположно направлены. Следовательно,

$$(\alpha+\beta)\vec{a}\uparrow\uparrow\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}.$$

2) Случай $\alpha\cdot\beta<0$ доказывается аналогично (этот случай рассмотрите самостоятельно).

3°. Пусть треугольники OA_1B_1 и OAB на рис. 1.20 подобны с коэффициентом подобия α. Тогда $\overrightarrow{OA}=\alpha\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\alpha\vec{b}$, $\overrightarrow{OB}=\alpha(\vec{a}+\vec{b})$. Здесь $\overrightarrow{OA_1}=\vec{a}$, $\overrightarrow{A_1B_1}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OB_1}=\vec{a}+\vec{b}$. С другой стороны, по правилу треугольника $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$. Отсюда $\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}=\alpha(\vec{a}+\vec{b})$.

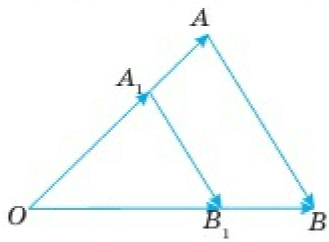


Рис. 1.20

Если в этом свойстве число α равно нулю, либо один из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен нулю, то доказательство свойства намного упрощается. ■

1.3.2. Признак коллинеарности векторов

Применяя действие умножения вектора на число, можно доказать следующий важный признак коллинеарности векторов.

Теорема 2. *Чтобы вектор $\vec{b}$ был коллинеарен ненулевому вектору $\vec{a}$, необходимо и достаточно существования числа α такого, что $\vec{b}=\alpha\vec{a}$.*

▲ *Необходимость.* Докажем, что существует число α такое, что $\vec{b}=\alpha\vec{a}$ при $\vec{a}\parallel\vec{b}$.

1) Если $\vec{b}=\vec{0}$, то при $\alpha=0$ получим $\vec{b}=0\cdot\vec{a}=\vec{0}$.

2) Пусть $\vec{b}\neq\vec{0}$.

а) Если $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, то при $\alpha=\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ получим равенство $\vec{b}=\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\cdot\vec{a}$,

так как $\vec{b}\uparrow\uparrow\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\cdot\vec{a}$ и $|\vec{b}|=\left|\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\right|\cdot|\vec{a}|=\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\cdot|\vec{a}|=|\vec{b}|$.

б) Если $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$, то при $\alpha=-\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ получим равенство $\vec{b}=\alpha\vec{a}$.

Достаточность. Если $\vec{b}=\alpha\vec{a}$, *то векторы* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны по определению. ■

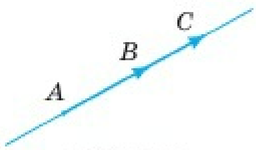


Рис. 1.21

Следствие. ***Для того чтобы точка C лежала на прямой AB, необходимо и достаточно, чтобы существовало число α такое, что*** $\overrightarrow{AC}=\alpha\overrightarrow{AB}$ (рис. 1.21).

1. Каким может быть произведение $k\cdot\vec{a}$, если: 1) $\vec{a}=\vec{0}$; 2) $k=0$?
2. Как умножить число, не равное нулю, на ненулевой вектор?
3. Какими свойствами обладает умножение числа на вектор?
4. Докажите признак коллинеарности векторов.
5. Какое условие является необходимым и достаточным для того, чтобы точки A, B и C лежали на одной прямой?

РАБОТА В ГРУППЕ

Выполните на листе бумаги А4 следующие задания. Возьмите неколлинеарные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

а) Отложите от некоторой точки O векторы $3\cdot\vec{a}$, $\frac{1}{2}\vec{b}$, $0{,}4\vec{c}$.

б) Отложите от другой точки A векторы $2\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}$, $3\vec{b}-2\vec{c}$.

Упражнения

А

1.48. Пусть даны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и числа α и β. Сумма $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$ называется *линейной комбинацией* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

1) Представьте векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{0}$ в виде линейной комбинации векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. 2) Как расположены эти линейные комбинации по сравнению с векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}\parallel\vec{b}$?

1.49. При каком условии точка C лежит на прямой AB?

1.50. Даны неколлинеарные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Докажите, что существуют числа α и β такие, что $\vec{c}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$.

1.51. Пусть $\vec{x}=\vec{m}+\vec{n}$, $\vec{y}=\vec{m}-\vec{n}$. Выразите векторы: 1) $2\vec{x}-2\vec{y}$; 2) $2\vec{x}+\dfrac{\vec{y}}{2}$; 3) $-\vec{x}-\dfrac{\vec{y}}{3}$ через векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$.

1.52. В параллелограмме $ABCD$ точка O является точкой пересечения его диагоналей, а точка E – серединой стороны CD. Выразите векторы: 1) $\overrightarrow{OA}$; 2) $\overrightarrow{AE}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

1.53. Диагонали квадрата $ABCD$ пересекаются в точке O, а точки E и K — середины сторон AB и AD соответственно. Выразите векторы: 1) $\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{AC}$; 3) $\overrightarrow{OD}$; 4) $\overrightarrow{KE}$; 5) $\overrightarrow{ED}$; 6) $\overrightarrow{KC}$ через векторы $\overrightarrow{AE}$ и $\overrightarrow{AK}$.

B

1.54. Точка N лежит на стороне BC параллелограмма $ABCD$ так, что $BN : NC=3 : 1$. Выразите векторы $\overrightarrow{AN}$ и $\overrightarrow{ND}$ через векторы $\vec{a}=\overrightarrow{AD}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$.

1.55. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O, а точка N делит сторону AD в отношении $AN : ND = 1 : 2$. Выразите через векторы $\vec{x}=\overrightarrow{AD}$ и $\vec{y}=\overrightarrow{AB}$ векторы: 1) $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OA}$; 2) $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{ON}$.

1.56. Определите расположение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ относительно друг друга, если выполняется равенство: 1) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$; 2) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|$; 3) $|2\vec{a}-3\vec{b}|=2|\vec{a}|+3|\vec{b}|$.

1.57. Даны точки A и B. Определите точку X так, чтобы: 1) $\overrightarrow{XA}=3\overrightarrow{XB}$; 2) $\overrightarrow{BX}=-\overrightarrow{AX}$; 3) $\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}=\overrightarrow{AB}$.

1.58. Точка O — середина медианы AD треугольника ABC. Выразите вектор $\overrightarrow{AO}$ через векторы $\vec{a}=\overrightarrow{BA}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$.

1.59. Выбрана точка H на стороне BC параллелограмма $ABCD$ так, что выполняется соотношение $BH : HC=1 : 4$. Выразите векторы $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{HD}$ через $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$.

1.60. На стороне QR ромба $PQRT$ взята точка K так, чтобы выполнялось равенство $QK=5\cdot KR$, а точка E является серединой стороны PQ. Выразите векторы $\overrightarrow{TK}$ и $\overrightarrow{KE}$ через векторы $\overrightarrow{TP}=\vec{m}$ и $\overrightarrow{TR}=\vec{n}$.

C

1.61. Точки P и O — середины диагоналей AC и BD в четырехугольнике $ABCD$. Докажите, что $\overrightarrow{PO}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}\right)$.

1.62. Покажите, что можно построить треугольник, стороны которого равны медианам треугольника ABC и параллельны этим медианам.

1.63. Докажите, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен основаниям и равен полуразности этих оснований.

1.64. Покажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных сторон произвольного четырехугольника, в точке пересечения делятся пополам.

1.65. Точки A, B и C расположены на прямой так, что $\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Покажите, что для произвольной точки O верно равенство $\overrightarrow{OB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OC}$.

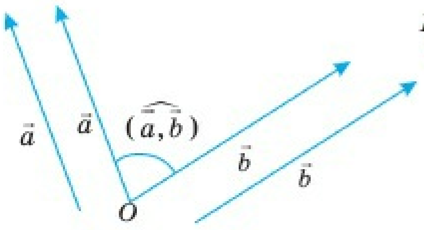


Рис. 1.22

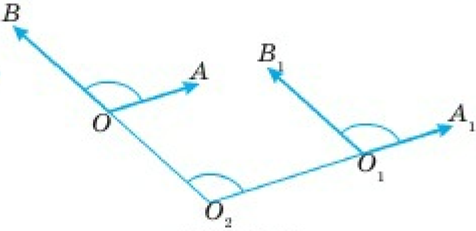


Рис. 1.23

1.4. Угол между векторами. Скалярное произведение векторов

Изучив материалы данной темы, вы будете:
- знать определение угла между векторами;
- находить скалярное произведение векторов;
- решать задачи векторным методом;

1.4.1. Понятие угла между векторами

Определение. ***Углом между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ называется угол BAC. Углом между ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется угол, образованный при откладывании этих векторов от одной точки.***

Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначают через $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$ (рис. 1.22). Используя признак параллельности прямых, можно доказать, что угол между векторами не зависит от выбора точки, от которой откладываются эти векторы (рис. 1.23).

Если векторы сонаправлены, то угол между ними равен $0°$, а если векторы противоположно направлены, то угол между ними равен $180°$.

1.4.2. Скалярное произведение векторов

Определение. ***Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними, т.е. скалярное произведение векторов равно числу $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$.***

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначают так: $\vec{a}\cdot\vec{b}$ Итак, если $\varphi = (\widehat{\vec{a},\vec{b}})$, то

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi. \qquad (1)$$

Скалярное произведение равных векторов называется ***скалярным квадратом*** этого вектора и обозначается так: $\vec{a}^{\,2}$. По формуле (1) $\vec{a}^{\,2}=\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos 0^\circ=|\vec{a}|^2$, т.е. выполняется равенство $\vec{a}^{\,2}=|\vec{a}|^2$.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны (перпендикулярны), то $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=90^\circ$ и выполняется равенство $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos 90^\circ=0$.

Обратно, если для ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется равенство $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, то по формуле (1) $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi=0$. Так как $|\vec{a}|\neq 0$, $|\vec{b}|\neq 0$, то необходимо, чтобы $\cos\varphi=0$, значит, $\varphi=90^\circ$. Итак, мы показали, что для того чтобы векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

Скалярное произведение векторов обладает следующими свойствами.

1°. *Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ верно равенство*

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}.$$

2°. *Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и любого действительного числа k верно равенство*

$$(k\vec{a})\cdot\vec{b}=k(\vec{a}\cdot\vec{b}).$$

3°. *Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ верно равенство*

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}.$$

▲ Доказательство свойства 1° непосредственно следует из определения (формула (1)).

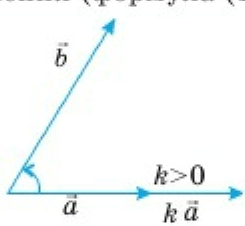


Рис. 1.24

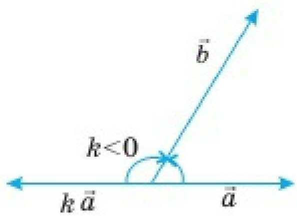


Рис. 1.25

Докажем справедливость свойства 2°.

Если $k>0$, то $\vec{a}\uparrow\uparrow k\vec{a}$ и выполняется равенство $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=(\widehat{(k\vec{a}),\vec{b}})$ (рис. 1.24). Тогда $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=|k\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\widehat{(k\vec{a}),\vec{b}})=|k||\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=$ $=k(|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

Если $k<0$, то $\vec{a}\uparrow\downarrow k\vec{a}$ и $(\widehat{(k\vec{a}),\vec{b}})=180^\circ-(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$ (рис. 1.25). Следовательно, $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=|k\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\widehat{(k\vec{a}),\vec{b}})=|k||\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(180^\circ-(\widehat{\vec{a},\vec{b}}))=$ $=-|k||\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=k|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

Здесь учитывалось, что $-|k|=k$. ■

Доказательство свойства 3° будет показано в следующем пункте.

1.4.3. Некоторые применения векторов

Примеры применения скалярного произведения векторов известны из курса физики. Например, в механике, если для перемещения тела по пути $\vec{s}$ была приложена к нему сила $\vec{F}$ (рис. 1.26), то выполненная работа A вычисляется по формуле

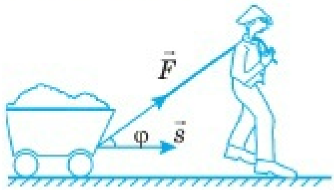


Рис. 1.26

$$A=|\vec{F}|\cdot|\vec{s}|\cdot\cos\varphi$$

Пример 1. Покажем, что векторы $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ перпендикулярны, если $|\vec{a}|=|\vec{b}|\neq 0$.

▲ Для этого достаточно показать, что $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$.

Действительно,

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}^{\,2}-\vec{b}^{\,2}=$
$=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2=0$. ■

Пример 2. Покажем, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

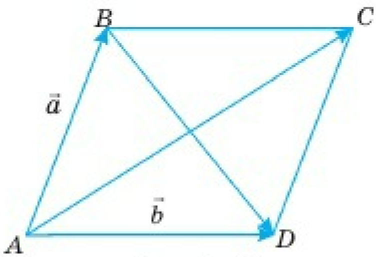


Рис. 1.27

▲ Если в параллелограмме $ABCD$ ввести обозначения $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, то $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\vec{a}+\vec{b}$ и $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$ (рис. 1.27). Отсюда

$AC^2=\overrightarrow{AC}^{\,2}=(\vec{a}+\vec{b})^2=\vec{a}^{\,2}+\vec{b}^{\,2}+2\vec{a}\cdot\vec{b}=\overrightarrow{AB}^{\,2}+\overrightarrow{AD}^{\,2}+2\vec{a}\cdot\vec{b}=$
$=AB^2+AD^2+2\cdot\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$;

$BD^2=\overrightarrow{BD}^{\,2}=(\vec{b}-\vec{a})^2=\vec{a}^{\,2}+\vec{b}^{\,2}-2\vec{a}\cdot\vec{b}=\overrightarrow{AB}^{\,2}+\overrightarrow{AD}^{\,2}-2\vec{a}\,\vec{b}=$
$=AB^2+AD^2-2\cdot\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$. Складывая почленно полученные равенства, получим: $AC^2+BD^2=AB^2+AD^2+AB^2+AD^2=AB^2+BC^2+$ $+CD^2+AD^2$. Здесь мы использовали равенства $AD=BC$, $AB=$ $=CD$. ■

Раздел математики, изучающий векторы и действия над ними, называется ***векторной алгеброй***. Итак, основные действия над векторами, изученные нами в этой главе, составляют основу векторной алгебры. Аппарат векторной алгебры удобен при решении геометрических и физических задач. Процесс решения каждой задачи, решаемой с помощью векторов, разделяют на три этапа.

1-й этап. *Вводя векторы в удобной для нас форме, нужно переписать условие задачи с помощью векторов.*

2-й этап. *Преобразовывая задачу, записанную в векторной форме, получаем ее решение в векторной форме.*

3-й этап. *Решение задачи, полученное в векторных соотношениях, нужно перевести на исходный «язык» задачи и записать ответ.*

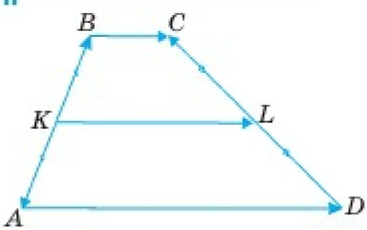


Рис. 1.28

Пример 3. Покажем, что средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

▲ Пусть AD и BC — основания, а KL — средняя линия трапеции $ABCD$ (рис. 1.28). 1) То, что точка K является серединой стороны AB, L – серединой стороны CD и $AD \| BC$, в векторной форме запишем так:

$$\overrightarrow{KA} = -\overrightarrow{KB}, \quad \overrightarrow{LD} = -\overrightarrow{LC}, \quad \overrightarrow{AD} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BC}.$$

Показать, что $\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$.

2) $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} = \vec{0}$ и $\overrightarrow{LC} + \overrightarrow{LD} = \vec{0}$. Кроме этого, $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DL}$ и $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CL}$. Суммируя эти равенства, получим: $2\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DL} + \overrightarrow{CL} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$, т.е. $\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$.

3) Так как $\overrightarrow{AD} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BC}$, то $\overrightarrow{KL} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{KL} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BC}$, т.е. $KL \| AD$ и $KL \| BC$. Кроме того, $|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AD}| + |\overrightarrow{BC}| = AD + BC$. Поэтому $KL = \frac{1}{2}(AD + BC)$, что и требовалось доказать. ■

МАТЕРИАЛЫ ИЗ ИСТОРИИ

История становления векторного исчисления, в основном, развивалась в трех направлениях: геометрическое (исчисление направленных отрезков), алгебраическое и физическое.

Основателем исчисления направленных отрезков был норвежец Каспар Вессель (1745–1818). Он всю свою сознательную жизнь провел в Академии наук Дании в качестве геодезиста, картографа и землемера. Поэтому он свои труды посвятил определению отрезка по величине и направлению алгебраическим способом, в целях облегчения труда геодезиста-землемера старался строить удобные «геометрические исчисления».

Дальнейшее развитие векторного исчисления тесно связано с именами английского математика Уильяма Гамильтона (1805–1865) и немецкого ученого Германа Грассмана (1809–1877).

Первый из них основал алгебру комплексных чисел и другие теории, которые являются алгебраической основой развития векторного исчисления до современного уровня. Он первым в своих трудах вводит понятие «вектор» (применяется, в смысле, от латинского *vector* – несущий, вектор изображает перемещение точки от начальной точки до конечной) и понятие «скаляр» (происходит от латинского *scalaris* – ступенчатый, он показывает порядковое отношение множества действительных чисел, т.е. возможность сравнения действительных чисел между собой). Л. Грассман в своих трудах одновременно с Гамильтоном и независимо от него основал векторное исчисление с геометрической точки зрения.

Третье направление изучения векторов порождено потребностями естественных наук.

Например, процесс развития векторного исчисления в первой половине XIX века получил продолжение в трудах французского ученого-механика Сен-Венана (1797–1886), в труде «Рациональная механика» русского ученого И.И. Сомова (1815–1876), в трудах одного из основателей теории электромагнитного поля знаменитого английского ученого Джеймса Кларка Максвелла (1831–1879) и других известных ученых.

Гамильтон вместе с векторной алгеброй, в которой изучаются постоянные векторы, основал векторный анализ, где изучаются переменные векторы, векторные функции. Векторные исчисления начали систематически применяться уже в конце XIX века при изучении теории электромагнитного поля и в гидромеханике, а в XX веке в теоретической механике, аналитической и дифференциальной геометрии.

1. Какой угол называется углом между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$?
2. Как определяется угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в общем случае?

3. Сформулируйте определение скалярного произведения двух векторов? Что является скалярным произведением векторов: число или вектор?
4. Сформулируйте свойства скалярного произведения.
5. Какое условие является необходимым и достаточным для перпендикулярности двух векторов?
6. Укажите принципы применения элементов векторной алгебры.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА

Начертите векторы с разными начальными точками и углами между ними: а) 30°; б) 45°; в) 60°; г) 90°; д)180°. Результат проверьте путем параллельного переноса с помощью транспортира.

Упражнения

А

1.66. Какой знак имеет скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}$, если угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$: 1) острый; 2) тупой?

1.67. Что можно сказать об угле $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$, если скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}$: 1) положительное; 2) равно нулю; 3) отрицательное?

1.68. Найдите скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}$, если $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=\sqrt{3}$ и угол $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$ равен: 1) 30°; 2) 45°; 3) 90°; 4) 150°.

1.69. Если $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\varphi$, то для единичных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется равенство $\vec{a}\cdot\vec{b}=\cos\varphi$ Покажите это.

1.70. Заполните таблицу:

$\lvert\vec{a}\rvert$	5	$\sqrt{3}$	0,5		a
$\lvert\vec{b}\rvert$	4	2		2	b
$\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$	0,6		0,8	0,5	
$\vec{a}\cdot\vec{b}$		3	4	5	$0{,}5a\cdot b$

1.71. Дан квадрат $ABCD$, сторона которого равна единице. Вычислите:

1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}$; 2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$; 3) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}$; 4) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$;

5) $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{DC}$; 6) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$; 7) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}$; 8) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB})$.

1.72. Дан равносторонний треугольник ABC, сторона которого равна единице. Вычислите: 1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$; 2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$; 3) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC})$; 4) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{BC}$.

B

1.73. Заполните таблицу:

$\lvert\vec{a}\rvert$	$\sqrt{3}$	8	7	0,01		$\sqrt{2}$	4
$\lvert\vec{b}\rvert$	4	5		9,01	2	6	$\sqrt{3}$
$(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$	30°		45°		120°	135°	
$\vec{a}\cdot\vec{b}$		20	7	0	−3		−6

1.74. Преобразуйте выражения:

1) $(2\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-3\vec{b})$; 2) $\vec{c}(\vec{a}+\vec{c})-\vec{a}(\vec{a}+\vec{c})$;

3) $(\vec{a}-\vec{b})(\vec{a}-\vec{c})-(\vec{a}-\vec{b})(\vec{b}-\vec{c})$.

1.75. Докажите тождества:

1) $(\vec{a}+\vec{b})^2+(\vec{a}-\vec{b})^2=2(\vec{a}^{\,2}+\vec{b}^{\,2})$;

2) $(\vec{a}+\vec{b})^2-(\vec{a}-\vec{b})^2=4\vec{a}\,\vec{b}$;

3) $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2=\vec{a}^{\,2}+\vec{b}^{\,2}+\vec{c}^{\,2}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{a}\cdot\vec{c}+2\vec{b}\cdot\vec{c}$.

1.76. Найдите углы между векторами, если для единичных векторов $\vec{l}_1$ и $\vec{l}_2$ $\left(\widehat{\vec{l}_1,\vec{l}_2}\right)=\alpha$: 1) $\vec{l}_1$ и $\vec{l}_1+\vec{l}_2$; 2) $\vec{l}_1$ и $\vec{l}_1-\vec{l}_2$; 3) $\vec{l}_2$ и $\vec{l}_1+\vec{l}_2$; 4) $\vec{l}_2$ и $\vec{l}_1-\vec{l}_2$; 5) $\vec{l}_1+\vec{l}_2$ и $\vec{l}_1-\vec{l}_2$.

1.77. Единичные векторы $\vec{l}_1$ и $\vec{l}_2$ взаимно перпендикулярны и $\vec{a}=2\vec{l}_1-\vec{l}_2$, $\vec{b}=\vec{l}_1+2\vec{l}_2$. Найдите значения $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|\vec{a}+\vec{b}|$, $|\vec{a}-\vec{b}|$ и угол между векторами $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$.

1.78. Полагая, что $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=60^\circ$, найдите значения $|\vec{a}+\vec{b}|$ и угол $(\widehat{\vec{a},\vec{b}+\vec{b}})$.

1.79. Если $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$, $\vec{a}\nparallel\vec{b}$, то векторы $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ перпендикулярны. Докажите.

1.80. Если векторы $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ перпендикулярны, то выполняется равенство $|\vec{a}|=|\vec{b}|$. Покажите это.

1.81. Пусть $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ и $\vec{a}\perp\vec{b}$. Найдите угол между векторами $\vec{a}+2\vec{b}$ и $2\vec{a}+\vec{b}$.

1.82. Дан вектор $\vec{a}$. Постройте единичный вектор $\vec{b}$ так, чтобы выполнялось равенство $\vec{a}\cdot\vec{b}=1$. Всегда ли существует такой вектор $\vec{b}$?

1.83. Сторона ромба $ABCD$ равна a, угол при вершине A равен 60° и точка O – точка пересечения диагоналей ромба. Вычислите: 1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$; 2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CO}$; 3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}$; 4) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DO}$; 5) $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BO}$.

1.84. Докажите, что сумма квадратов диагоналей ромба равна квадрату стороны, умноженную на 4. Приведите векторный и невекторный способы доказательства.

C

1.85. Следует ли равенство $\vec{b}=\vec{c}$ из равенства $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$? Обоснуйте ответ.

1.86. Найдите вектор $\vec{x}$, удовлетворяющий равенству если $\vec{a}\vec{x}=\vec{b}\vec{x}=\vec{c}\vec{x}$, $\vec{a}\nparallel\vec{b}$, $\vec{a}\nparallel\vec{c}$, $\vec{b}\nparallel\vec{c}$.

1.87. Покажите, что для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и выполняется неравенство $-|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\leqslant|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$. При каких условиях выполняется равенство?

1.88. Известно, что для действительных чисел α, β, γ выполняется равенство $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$. Выполняется ли аналогичное равенство для скалярного произведения векторов, т.е. выполняется ли равенство $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$ для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$?

1.89. Покажите, что выполняется равенство $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ для любых точек плоскости A, B, C, D.

1.90. Вне треугольника ABC на его сторонах построены параллелограммы ABB_1A_2, BCC_1B_2 и ACC_2A_1. Покажите, что можно построить треугольник, стороны которого равны и параллельны отрезкам A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2.

1.91. Покажите, что сумма квадратов медиан треугольника равна $\frac{3}{4}$ суммы квадратов его сторон.

1.92. В треугольнике ABC проведена медиана CC_1. Покажите, что если:

1) $2CC_1 > AB$, то угол C – острый;
2) $2CC_1 = AB$, то угол C – прямой;
3) $2CC_1 < AB$, то угол C – тупой.

1.93. Покажите, что для любого треугольника ABC верно равенство $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ если $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, $\angle C = \gamma$. Докажите теорему Пифагора с помощью этого равенства.

1.94. Докажите, что векторы $\vec{p} = \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{q}) - \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{q})$ и $\vec{q}$ перпендикулярны.

1.95. В параллелограмме $ABCD$ на стороне AD взята точка K так, что выполняется равенство $AK = \lambda \cdot AD (0 < \lambda < 1)$. Прямая BK пересекает диагональ AC в точке N. Найдите отношение $AN : AC$.

1.5. Координаты вектора

Изучив материалы данного пункта, вы будете:
- находить координаты вектора;
- находить длину вектора;
- выполнять действия над векторами в координатах.

1.5.1. Разложение любого вектора по двум неколлинеарным векторам

Теорема 1. *Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то для любого вектора $\vec{c}$ найдутся числа x и y такие, что выполняется равенство*

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}, \qquad (1)$$

причем коэффициенты разложения x и y определяются единственным образом.

▲ На плоскости отложим от точки O векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Концы полученных векторов соответственно обозначим через A, B и C (рис. 1.29). Тогда, по теореме 2 (пункт 1.2.4.) о разложении вектора на составляющие по двум пересекающимся прямым вдоль прямых OA и OB найдутся единственные векторы $\overrightarrow{OA_1}$ и $\overrightarrow{OB_1}$ такие, что

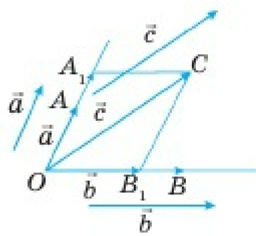


Рис. 1.29

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1}. \qquad (2)$$

Так как $\overrightarrow{OA} \parallel \overrightarrow{OA_1}$ и $\overrightarrow{OB} \parallel \overrightarrow{OB_1}$, то по теореме о коллинеарных векторах (теорема 2, п. 1.3.2) существуют единственные действительные числа x и y, что $\overrightarrow{OA_1} = x \cdot \overrightarrow{OA} = x\vec{a}$ и $\overrightarrow{OB_1} = y \cdot \overrightarrow{OB} = y \cdot \vec{b}$. Поэтому из равенства (2) следует единственное представление вида

$$\vec{c} = \overrightarrow{OC} = x\vec{a} + y\vec{b}. \ ■$$

Из этой теоремы следует, что любой вектор можно разложить по двум произвольным неколлинеарным векторам. Если на плоскости выбраны такие два неколлинеарных вектора, то они называются ***базисными векторами*** плоскости. Итак, любые два неколлинеарных вектора можно принять в качестве базисных векторов и любой вектор этой плоскости однозначно разлагается по этим базисным векторам. В доказанной теореме $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – базисные векторы. А действительные числа x и y называются ***координатами вектора*** $\vec{c}$ в базисе $\vec{a}$, $\vec{b}$.

1.5.2. Координаты вектора в прямоугольной системе координат

Рассмотрим прямоугольную систему координат Oxy. Пусть $\vec{i}$ — единичный вектор, сонаправленный с осью Ox, а $\vec{j}$ –единичный вектор, сонаправленный с осью Oy. Эти векторы называются ***координатными векторами***. Так как векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ не коллинеарны, то их можно рассматривать в качестве базисных векторов. Тогда, в силу доказанной теоремы, для любого вектора $\vec{a}$ плоскости Oxy найдутся единственные действительные числа x и y такие, что

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}. \qquad (3)$$

Здесь числа x и y называются ***координатами*** вектора $\vec{a}$ в прямоугольной системе координат Oxy, и это записывают так: $\vec{a} = (x;\ y)$.

Из рисунка 1.30 можно увидеть запись вектора (3) в виде равенства. Здесь

$\vec{a} = -4\vec{i} - 2\vec{j}$ или $\vec{a} = (-4; -2)$; $\vec{b} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$ или $\vec{b} = (-4; 3)$;

$\vec{c} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$ или $\vec{c} = (4; -3)$; $\vec{d} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ или $\vec{d} = (3; 2)$.

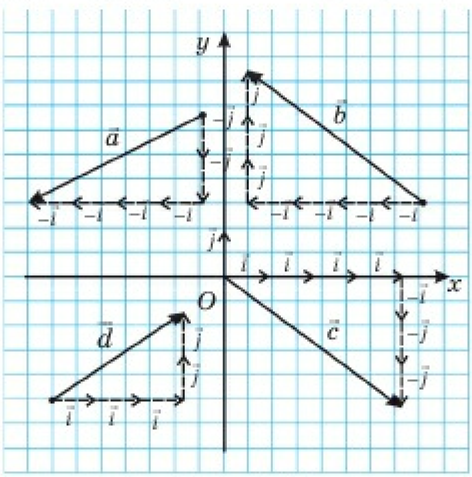


Рис. 1.30

Приведем некоторые свойства координат вектора.

1. ***У равных векторов соответствующие координаты равны, т.е., если*** $\vec{a}=(x;\ y)$, $\vec{b}=(u;\ v)$ и $\vec{a}=\vec{b}$, то $x=u$, $y=v$.

Обратно, если у двух векторов соответствующие координаты равны, то эти векторы равны между собой, т.е., если $\vec{a}=(x;\ y)$, $\vec{b}=(u;\ v)$ и $x=u$, $y=v$, то $\vec{a}=\vec{b}$.

▲ Действительно, если $x\vec{i}+y\vec{j}=\vec{a}=\vec{b}=u\vec{i}+v\vec{j}$ или $(x-u)\vec{i}=-(y-v)\vec{j}$, т.к. векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ неколлинеарны, то данное равенство верно только при $x-u=0$, $y-v=0$, т.е. $x=u$, $y=v$.

Обратно, пусть $x=u$, $y=v$. Тогда согласно равенству (3)

$$\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}=u\vec{i}+v\vec{j}=\vec{b}.$$ ■

2. ***При сложении векторов складываются их соответствующие координаты, т.е., если*** $\vec{a}=(x;\ y)$, $\vec{b}=(u;\ v)$, то $\vec{a}+\vec{b}=(x+u;\ y+v)$.

▲ Действительно, согласно равенству (3)

$$\vec{a}+\vec{b}=(x\vec{i}+y\vec{j})+(u\vec{i}+v\vec{j})=(x+u)\vec{i}+(y+v)\vec{j},$$

что и требовалось доказать. ■

3. ***При умножении вектора на число его координаты умножаются на это же число, т.е., если*** $\vec{a}=(x;\ y)$ ***и*** λ ***– число, то*** $\lambda\cdot\vec{a}=(\lambda\cdot x;\ \lambda\cdot y)$.

▲ В самом деле $\lambda\cdot\vec{a}=\lambda(x\vec{i}+y\vec{j})=\lambda(x\vec{i})+\lambda(y\vec{j})=(\lambda x)\vec{i}+(\lambda y)\vec{j}$. ■

Следствие. *Координаты разности векторов равны разности соответствующих координат этих векторов: если* $\vec{a}=(x;\ y)$, $\vec{b}=(u;\ v)$, *то* $\vec{a}-\vec{b}=(x-u;\ y-v)$.

Доказательство следует из свойств 2 и 3.

1.5.3. Координаты вектора, заданного координатами концов. Радиус-вектор

Если на плоскости Oxy задана точка $A(x;\ y)$, то вектор $\overrightarrow{OA}$ называется ***радиус-вектором*** точки A. Для радиус-вектора $\overrightarrow{OA}$ верно равенство $\overrightarrow{OA}=(x;\ y)$, т.е. соответствующие координаты точки A и радиус-вектора $\overrightarrow{OA}$ совпадают.

Обозначим через A_x проекцию точки A на ось Ox и через A_y – проекцию точки A на ось Oy. Известно, что $A_x(x;\ 0)$, $A_y(0;\ y)$ (рис.1.31). Так как $\overrightarrow{OA_x} \parallel \vec{i}$ и $\overrightarrow{OA_y} \parallel \vec{j}$, то по правилу откладывания отрезка в пределах заданного масштаба выполняются равенства $\overrightarrow{OA}_x = x\vec{i}$ и $\overrightarrow{OA}_y = y\vec{j}$ или $\overrightarrow{OA}_x = x\vec{i} + 0\cdot\vec{j}$ и $\overrightarrow{OA}_y = 0\cdot\vec{i} + y\vec{j}$. Тогда $\overrightarrow{OA}_x = (x;0)$, $\overrightarrow{OA}_y = (0;y)$ и согласно свойству 2

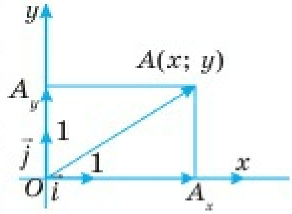


Рис. 1.31

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA}_x + \overrightarrow{OA}_y = (x+0;\ 0+y) = (x;\ y).$$

Пусть задан вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ ***и*** $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$. ***Тогда выполняется равенство***

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}, \qquad (4)$$

т.е. $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$.

▲ Действительно, так как $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB} = (x_2;\ y_2)$, $\overrightarrow{OA} = (x_1;\ y_1)$, то согласно следствию

$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$ (рис. 1.32). ■

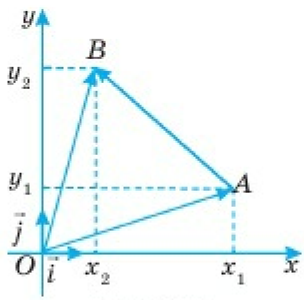


Рис. 1.32

Используя формулу вычисления расстояния между точками, можно найти модуль вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (5)$$

Если $\vec{a} = (x;\ y)$, то модуль вектора $\vec{a}$ вычисляется по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}. \qquad (6)$$

▲ Действительно, если начало и конец вектора $\vec{a}$ имеют координаты $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$, то по формуле (4)

$\vec{a}=(x_2-x_1;\ y_2-y_1)$. Согласно формуле (5) $|\vec{a}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$. А на основании единственности координат вектора необходимо, чтобы $x=x_2-x_1$, $y=y_2-y_1$, т.е. получена формула (6). ■

Пример 1. Даны точки $A(2;\ -3)$ и $B(3;\ 4)$. Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ и его модуль.

▲ По формуле (4) $\overrightarrow{AB}=(3-2;\ 4-(-3))=(1;\ 7)$. Согласно формуле (6) $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+7^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$. ■

Пример 2. Разложим вектор $\vec{a}=(5;\ -4)$ на слагаемые с помощью векторов $\vec{p}=(1;\ 1)$ и $\vec{q}=(1;\ -2)$.

▲ Так как векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ не коллинеарны (в этом можно убедиться, отложив их от начала координат), то их можно рассматривать в качестве базисных векторов. Тогда в силу теоремы 1 (п. 1.5, п.1.5.1) вектор $\vec{a}$ можно разложить по базисным векторам $\vec{p}$ и $\vec{q}$, т.е. найдутся действительные числа x и y такие, что $\vec{a}=x\vec{p}+y\vec{q}$. Итак, найдем значения x и y из равенства

$$x\cdot(1;\ 1)+y\cdot(1;\ -2)=(5;\ -4).$$

На основании свойств координат вектора 2 и 3

$(x\cdot 1;\ x\cdot 1)+(y\cdot 1;\ y\cdot(-2))=(5;\ -4)\Rightarrow(x+y;\ x-2y)=(5;\ -4)$.

По свойству равенства векторов получим систему уравнений

$$\begin{cases}x+y=5,\\ x-2y=-4\end{cases}.$$

Эта система имеет единственное решение: $x=2$, $y=3$. Следовательно, выполняется равенство $\vec{a}=2\vec{p}+3\vec{q}$. ■

1. Сформулируйте и докажите теорему о разложении вектора по двум неколлинеарным векторам.
2. Какие векторы называются базисными векторами на плоскости?
3. Что вы понимаете под координатами вектора и как их обозначают?
4. Напишите координаты векторов.
5. Какие свойства координат векторов вы знаете? Докажите их.
6. Какой вектор называется радиус-вектором точки A?
7. Как определяются координаты вектора, если заданы координаты его концов?
8. По какой формуле определяется модуль вектора?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА

В прямоугольной системе координат выберите точки A и B с целочисленными координатами. С помощью измерительных приборов измерьте длину отрезка AB. Результаты измерения проверьте с помощью формулы (5).

Упражнения

А

1.96. Определите координаты радиус-вектора $\overrightarrow{OA}$: 1) $A(1; -2)$; 2) $A(0; 3)$; 3) $A(-2; 0)$; 4) $A(\sqrt{2}; 0,7)$.

1.97. В прямоугольной системе координат Oxy отложите векторы $\vec{a}=(3; 0)$, $\vec{b}=(2; -1)$, $\vec{c}=(0; -3)$, $\vec{d}=(1; 1)$, $\vec{e}=(2; \sqrt{2})$ от начала координат.

1.98. Определите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$: 1) $A(0; 1)$, $B(1; 0)$; 2) $A(-2; 1)$, $B(-4; 2)$; 3) $A(p; q)$, $B(-p; -q)$.

1.99. Найдите координаты суммы $\vec{a}+\vec{b}$ и разности $\vec{a}-\vec{b}$: 1) $\vec{a}=(0;1)$, $\vec{b}=(1;0)$; 2) $\vec{a}=(-2;1)$, $\vec{b}=(4;-3)$; 3) $\vec{a}=(\sqrt{2}; \frac{1}{3})$, $\vec{b}=(-\sqrt{2}; \frac{1}{6})$; 4) $\vec{a}=(\frac{2}{7}; -0,6)$, $\vec{b}=(4; \frac{1}{3})$.

1.100. Даны вектор $\vec{a}=(4; -2)$ и число λ. Найдите координаты вектора $\lambda\vec{a}$ если: 1) $\lambda=2$; 2) $\lambda=-3$; 3) $\lambda=\frac{1}{2}$; 4) $\lambda=\sqrt{3}$.

1.101. Даны точки $A(1; 2)$, $B(-3; 0)$, $C(4; -2)$. Определите координаты и модули векторов: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$.

1.102. Даны точки $A(1; 2)$, $B(-3; 0)$, $C(4; -2)$. Определите координаты точки D так, чтобы выполнялось равенство: 1) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$; 2) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

1.103. Даны точки $A(0; 1)$, $B(1; 0)$, $C(1; 2)$, $D(2; 1)$. Равны ли векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$?

4–4336

1.104. Определите числа m и n, если $\vec{a} = (5;\ m)$, $\vec{b} = (n;\ 24)$, $|\vec{a}| = 13$ и $|\vec{b}| = 25$.

1.105. Дан вектор $\vec{a} = (-2;\ 1)$. Найдите координаты вектора, который сонаправлен с вектором $\vec{a}$ и модуль которого: 1) в 2 раза больше; 2) в 2 раза меньше числа $|\vec{a}|$.

B

1.106. Даны точки $A(1;\ 1)$, $B(3;\ -1)$, $C(7;\ 3)$. Найдите координаты и модуль вектора: 1) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}$; 3) $3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$; 4) $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} - 3\overrightarrow{AC}$.

1.107. Единичный вектор $\vec{a}$ образует угол α с положительным направлением оси Ox. Докажите, что $\vec{a} = (\cos\alpha;\ \sin\alpha)$ есть координаты этого вектора.

1.108. Найдите координаты единичного вектора, который с положительным направлением оси Ox образует угол: 0°; 30°; 45°; 60°; 120°; 135°; 150°; 180°.

1.109. Даны точки $A(1;\ -3)$, $B(8;\ 0)$, $C(4;\ 8)$, $D(-3;\ 5)$. Покажите, что четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом.

1.110 Даны точки $A(-1;\ 3)$, $B(2;\ -4)$, $C(-3;\ -1)$ и $D(5;\ 2)$. Определите координаты векторов: 1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}$; 3) $2\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{BD}$; 4) $\frac{1}{3}\overrightarrow{CD} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BA}$.

1.111. Даны точки $A(0;\ 0)$, $B(1;\ 1)$, $C(0;\ 2)$ и $D\ (-1;\ 1)$. Покажите, что четырехугольник $ABCD$ является квадратом.

1.112. Даны точки $A(1;\ 1)$, $B(2;\ 3)$, $C(0;\ 4)$, $D(-1;\ 2)$. Покажите, что четырехугольник $ABCD$ является квадратом.

1.113. Найдите координаты единичного вектора: 1) сонаправленного с вектором $\vec{a} = (6;\ 8)$; 2) противоположно направленного вектору $\vec{b} = (-2;\ 5)$.

1.114. Даны последовательные вершины параллелограмма: $A(-1; 3)$, $B(2; -5)$, $C(0; 4)$. Найдите координаты вершины D.

1.115. При каких значениях m треугольник, вершины которого расположены в точках $A(1; 3)$, $B(2; -1)$, $C(4; m)$, является равнобедренным?

1.116. В треугольнике ABC отрезок AA_1 — медиана. Приняв $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ в качестве базисных векторов, разложите вектор $\overrightarrow{AA_1}$ по этим векторам.

1.117. Даны векторы $\vec{p}=(3; -2)$ и $\vec{q}=(-1; 0)$. Найдите координаты и модуль вектора: 1) $5\vec{p}-2\vec{q}$; 2) $4\vec{p}+\vec{q}$.

C

1.118. Для векторов $\vec{a}=(x; y)$, $\vec{b}=(u; v)$ выполняется соотношение $x : y = u : v$. Докажите, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

1.119. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то векторы: 1) $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$; 2) $2\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}+\vec{b}$ также не коллинеарны. Докажите это.

1.120. Найдите числа x и y при условии, что $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны и: 1) $3\vec{a}-x\vec{b}=y\vec{a}+\vec{b}$; 2) $4\vec{a}+5\vec{b}-x\vec{a}+y\vec{b}=\vec{0}$; 3) $x\vec{a}+3\vec{b}-y\vec{b}=\vec{0}$.

1.121. Можно ли определить вид треугольника ABC по координатам его вершин: $A(-1; 1)$, $B(2; 3)$, $C(1; -2)$?

1.122. На координатной плоскости Oxy даны векторы $\overrightarrow{OA_1}=(1; 2)$ и $\overrightarrow{A_1A_2}=(-2; 3)$. Найдите координаты точки A_2.

1.123. Разложите вектор: 1) $\vec{a}=(5; 3)$; 2) $\vec{b}=(-2; 3)$; 3) $\vec{c}=(0; 2)$; 4) $\vec{d}=(0; 0)$ по векторам $\vec{p}=(-1; 1)$ и $\vec{q}=(1; 1)$.

1.124. Покажите, что не найдутся две точки с целочисленными координатами, которые равноудалены от точки $A(\sqrt{2}-1; \frac{1}{3})$.

1.125. Даны вектор $\vec{a}$ и точка A со своими координатами. Найдите координаты концов вектора, полученного путем откладывания вектора $\vec{a}$ от точки A: 1) $\vec{a}=(3;\ 4)$, $A(-2;\ 3)$; 2) $\vec{a}=(3;0)$, $A(0;0)$; 3) $\vec{a}=(-5;4)$, $A(1;0)$; 4) $\vec{a}=(3;-1)$, $A(-1;-2)$.

1.126. Докажите свойства средней линии треугольника, используя координатный способ.

1.6. Выражение скалярного произведения через координаты векторов

Изучив материалы данной темы, вы будете:

- знать и применять скалярное произведение векторов и его свойства;
- вычислять угол между векторами;
- применять условия коллинеарности и ортогональности векторов.

1.6.1. Координатный вид скалярного произведения

Скалярное произведение векторов $\vec{a}=(x_1;\ y_1)$ и $\vec{b}=(x_2;\ y_2)$ определяется по формуле

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2.} \qquad (1)$$

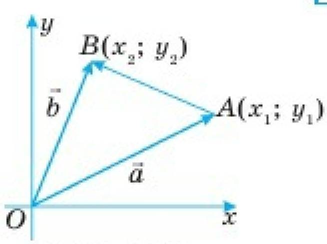


Рис. 1.33

▲ Действительно, если векторы $\vec{a}=(x_1;\ y_1)$, $\vec{b}=(x_2;\ y_2)$ отложить от начала координат, то они определяют соответственно радиус-векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ (рис. 1.33). Тогда $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$. Отсюда

$\overrightarrow{AB}^2=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})^2=(\vec{b}-\vec{a})^2=$ $=\vec{b}^2+\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}(\vec{a}^2+\vec{b}^2-\overrightarrow{AB}^2)$. Здесь, учитывая, что $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1;\ y_2-y_1)$ и $\overrightarrow{AB}^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$, $\vec{a}^2=x_1^2+y_1^2$, $\vec{b}^2=x_2^2+y_2^2$, имеем $\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}(x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2-x_1^2+2x_1x_2-x_2^2-y_1^2+$ $+2y_1y_2-y_2^2)=x_1x_2+y_1y_2$, что и требовалось доказать. ■

1.6.2. Координатный вид коллинеарности и перпендикулярности векторов. Определение угла между векторами

Если векторы $\vec{a} = (x_1; y_1)$ и $\vec{b} = (x_2; y_2)$ взаимно перпендикулярны, то $(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = 90°$. Поэтому их скалярное произведение равно нулю, т.е. $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos 90°=0$. Тогда по формуле (1)

$$\boxed{x_1x_2+y_1y_2 = 0.} \qquad (2)$$

Это и есть ***условие перпендикулярности*** ненулевых векторов.

Пусть векторы $\vec{a}=(x_1; y_1)$ и $\vec{b}=(x_2; y_2)$ коллинеарны. Тогда по теореме 2 (пункт 1.3, п. 1.3.2.) найдется такое число k, что $\vec{a}=k\cdot\vec{b}$, т. е. $(x_1; y_1)=(kx_2; ky_2)$. Отсюда $x_1= kx_2$, $y_1= ky_2$. Если $x_2\neq 0$, $y_2\neq 0$, то из последних равенств получим равенства $\frac{x_1}{x_2}=k$, $\frac{y_1}{y_2} = k$, т.е. выполняется равенство

$$\boxed{\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}.} \qquad (3)$$

Итак, мы видим, что ***соответствующие координаты коллинеарных векторов пропорциональны.***

С помощью формулы (1) можно найти косинус угла между векторами $\vec{a}= (x_1; y_1)$ и $\vec{b}= (x_2; y_2)$. Действительно, из формулы $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$ получим:

$$\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}.$$

Отсюда, с учетом формулы (1) и равенств $|\vec{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$, $|\vec{b}| = \sqrt{x_2^2+y_2^2}$, получим:

$$\boxed{\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}.} \qquad (4)$$

1. Как определить скалярное произведение векторов по их координатам? Запишите соответствующие формулы и докажите их.
2. Напишите условие перпендикулярности векторов и докажите его.

3. Напишите условие коллинеарности векторов и докажите его.
4. По какой формуле определяется косинус угла между векторами? Докажите ее.

Упражнения

A

1.127. Докажите, что ненулевые векторы $\vec{a} = (m; n)$ и $\vec{b} = (-n; m)$ являются перпендикулярными.

1.128. При каком значении m векторы $\vec{a} = (3; 4)$ и $\vec{b} = (m; 2)$ являются перпендикулярными?

1.129. Найдите скалярное произведение векторов: 1) $\vec{a} = (1; 1)$ и $\vec{b} = (2; 3)$; 2) $\vec{c} = (0; 4)$ и $\vec{d} = (-1; 2)$; 3) $\vec{m} = (0; \sqrt{3})$ и $\vec{n} = (2; \sqrt{3})$.

1.130. Являются ли следующие векторы перпендикулярными:

1) $\vec{a} = (2; 3)$ и $\vec{b} = (3; -2)$; 2) $\vec{a} = (-5; 1)$ и $\vec{b} = (-1; 5)$?

1.131. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

1) $\vec{a} = (a; 0)$, $\vec{b} = (b; 0)$; 2) $\vec{a} = (a; 0)$, $\vec{b} = (0; b)$; 3) $\vec{a} = (a; b)$, $\vec{b} = (a; b)$; 4) $\vec{a} = (a; b)$, $\vec{b} = (-a; -b)$.

1.132. Будут ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарными, если:

1) $\vec{a} = (-2; 1)$, $\vec{b} = (4; -2)$; 2) $\vec{a} = (1; -3)$, $\vec{b} = (1; 3)$; 3) $\vec{a} = (3; -2)$, $\vec{b} = (-3; 2)$; 4) $\vec{a} = (1; 0)$, $\vec{b} = (3; 0)$; 5) $\vec{a} = (0; -1)$, $\vec{b} = (1; 0)$; 6) $\vec{a} = (0; 0)$, $\vec{b} = (-2; 3)$?

1.133. Докажите, что если два вектора коллинеарны, то их соответствующие координаты пропорциональны. Покажите, что имеет место равенство $\frac{x}{y} = \frac{u}{v}$, если $\vec{a} = (x; y)$, $\vec{b} = (u; v)$ и $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

1.134. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — параллельные векторы. Докажите, что векторы: 1) $\vec{a}+3\vec{b}$ и $\vec{a}$; 2) $\vec{b}-2\vec{a}$ и $\vec{a}$ коллинеарны.

1.135. Найдите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если: 1) $\vec{a}=(1;\ 0)$, $\vec{b}=(2;\ 2)$; 2) $\vec{a}=(1;\ 1)$, $\vec{b}=(-1;\ \sqrt{3})$; 3) $\vec{a}=(-\sqrt{3};\ 3)$, $\vec{b}=(0;\ 1)$; 4) $\vec{a}=(2;\ 0)$, $\vec{b}=(1;\ -\sqrt{3})$.

1.136. Какие векторы взаимно перпендикулярны: 1) $\vec{a}=(2;\ 5)$, $\vec{b}=(-10;\ 4)$; 2) $\vec{c}=(1;\ 2)$, $\vec{d}=(1;\ -3)$; 3) $\vec{p}=(3;\ 1)$, $\vec{q}=(2;\ -6)$?

1.137. Найдите $\vec{a}\cdot\vec{b}$, если $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$ и угол $(\vec{a},\ \vec{b})$ равен: 1) 60°; 2) 135°; 3) 90°; 4) 0°; 5) 180°.

B

1.138. Пусть: 1) $\vec{m}\uparrow\downarrow\vec{n}$, $|\vec{m}|=0{,}5$ см, $|\vec{n}|=2$ см; 2) $\vec{m}\uparrow\uparrow\vec{n}$, $|\vec{m}|=12$ см, $|\vec{n}|=24$ см. Найдите число k такое, что $\vec{n}=k\vec{m}$.

1.139. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O, а точка N является серединой отрезка AO. Существует ли число k такое, что: 1) $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AO}$; 2) $\overrightarrow{BO}=k\overrightarrow{BD}$; 3) $\overrightarrow{OC}=k\overrightarrow{CA}$; 4) $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{DC}$; 5) $\overrightarrow{BC}=k\overrightarrow{DA}$; 6) $\overrightarrow{AN}=k\overrightarrow{CA}$; 7) $\overrightarrow{NC}=k\overrightarrow{AN}$; 8) $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AN}$; 9) $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{BC}$; 10) $\overrightarrow{AO}=k\overrightarrow{BD}$? Найдите это число, если оно существует.

1.140. Пусть $|\vec{a}|=1$ и вектор $\vec{a}$ составляет с осями координат Ox и Oy углы, равные α и β соответственно. Докажите, что $\vec{a}=(\cos\alpha;\ \cos\beta)$ и $\cos^2\alpha+\cos^2\beta=1$.

1.141. Даны векторы $\vec{a}=(1;\ 2)$ и $\vec{b}=(-2;\ 3)$. Найдите значение выражения: 1) $2\vec{a}\cdot\vec{b}$; 2) $\vec{a}\cdot(-3\vec{b})$; 3) $(-\frac{1}{2}\vec{a})\cdot(-\frac{1}{3}\vec{b})$; 4) $\vec{b}(\vec{a}+\vec{b})$; 5) $(\vec{a}+\vec{b})^2$; 6) $(\vec{a}-\vec{b})^2$; 7) $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})$.

1.142. Найдите координаты единичного вектора, перпендикулярного вектору $\vec{a}=(a;\ b)$.

1.143. Даны точки $A(-1;\ 2)$, $B(-2;\ -3)$, $C(1;\ 4)$, $D(4;\ 2)$. Найдите значение выражения: 1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$; 2) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}$; 3) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD})$; 4) $(2\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BC})(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD})$.

1.144. Точки K и N — середины сторон CD и BC соответственно квадрата $ABCD$ со стороной a. Найдите значение скалярного произведения: 1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}$; 2) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}$; 3) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DC}$; 4) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$; 5) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DC}$; 6) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}$; 7) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$; 8) $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AN}$; 9) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB})$.

1.145. Точки K и N — середины сторон BC и AC соответственно равностороннего треугольника ABC со стороной, равной 2. Найдите значение выражения: 1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$; 2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$; 3) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}$; 4) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$; 5) $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{BC}$; 6) $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{BN}$; 7) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})\overrightarrow{KN}$.

1.146. Даны векторы $\vec{m}=(1;\ 0)$ и $\vec{n}=(0;\ 1)$. Являются ли перпендикулярными векторы: $2\vec{m}+\vec{n}$ и $\vec{m}-2\vec{n}$?

1.147. В параллелограмме $ABCD$ дано: $\overrightarrow{AB}=2\vec{a}-\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{a}+3\vec{b}$, $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=60^\circ$. Найдите длины отрезков AC и BD.

1.148. Даны точки $A(1;\ 1)$, $B(4;\ 1)$, $C(4;\ 5)$. Найдите косинусы углов треугольника ABC.

1.149. Найдите углы треугольника с вершинами в точках $A(0;\ \sqrt{3})$, $B(2;\ \sqrt{3})$, $C(\frac{3}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2})$.

1.150. Даны точки $A(1;\ 1)$, $B(2;\ 3)$, $C(0;\ 4)$, $D(-1;\ 2)$. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — прямоугольник.

1.151. Даны точки $A(0;\ 0)$, $B(4;\ 4)$, $C(0;\ 8)$, $D(-4;\ 4)$. Покажите, что четырехугольник $ABCD$ — квадрат.

C

1.152. Даны векторы $\vec{a} = (1;\ 0)$ и $\vec{b} = (1;\ 1)$. Каким должно быть число α, чтобы векторы $\vec{a}+\alpha\vec{b}$ и $\vec{a}$ были перпендикулярными?

1.153. Дано $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ и $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=60^\circ$. Определите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{a}+\vec{b}$.

1.154. Если в треугольнике ABC угол B равен 90°, то необходимо и достаточно выполнение равенства $AC^2=AB^2+BC^2$. Докажите это, применяя скалярное произведение векторов.

1.155. Найдите длины биссектрис треугольника, стороны которого равны a, b и c.

1.156. Докажите, что сумма квадратов диагоналей трапеции равна сумме квадратов непараллельных сторон и удвоенного произведения ее оснований.

1.157. Докажите, что если в треугольнике две медианы равны между собой, то этот треугольник равнобедренный.

1.158. Найдите координаты вектора $\vec{a}$, если $\vec{i}=(1;0)$, $|\vec{a}|=3$, $(\widehat{\vec{i},\vec{a}})=30^\circ$.

1.159. В квадрате $ABCD$ даны вершины $A(-2;\ 1)$ и $B(3;\ 3)$. Найдите координаты других вершин квадрата.

1.160. Даны точки $A(1;\ 1)$, $B(2;\ 3)$, $C(5;\ 0)$, $D(7;\ -5)$. Покажите, что четырехугольник $ABCD$ является трапецией.

1.7. Некоторые применения векторов при решении задач

Изучив материалы данной темы, вы будете:

- применять векторный метод при выведении уравнений прямых;
- применять векторы при решении задач.

1.7.1. Уравнение прямой. Направляющий вектор и вектор нормали прямой

Уравнение прямой можно задать различными способами. Например, в 8 классе мы определили прямую как серединный перпендикуляр некоторого отрезка. Теперь определим уравнение прямой с помощью векторов.

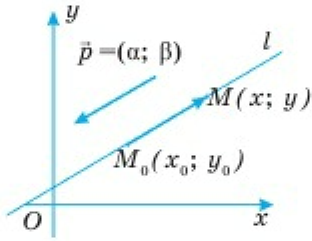


Рис. 1.34

Пусть задана точка $M_0(x_0;y_0)$ и вектор $\vec{p}=(\alpha;\beta)$. Тогда через точку M_0 параллельно вектору $\vec{p}$ проходит одна и только одна прямая l. Вектор $\vec{p}$ называется ***направляющим вектором*** прямой l. Итак, прямая l однозначно определяется точкой M_0 и направляющим вектором $\vec{p}$ (рис. 1.34). Если $M(x;\ y)$ является произвольной точкой прямой l, то $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{p}$. Здесь направляющий вектор $\vec{p}=(\alpha;\ \beta)$ не параллелен осям координат, т.е. $\alpha\neq 0$, $\beta\neq 0$. Используя условие коллинеарности векторов (3), (пункт 1.6), $\vec{p}$ и $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0;\ y-y_0)$, получим уравнение

$$\boxed{\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}.} \tag{1}$$

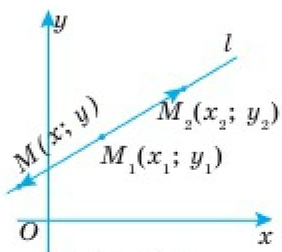


Рис. 1.35

Пример 1. Напишем уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(x_1;\ y_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2)$.

▲ Будем считать, что прямая M_1M_2 не параллельна осям координат ($x_1\neq x_2$, $y_1\neq y_2$). Если в качестве начальной точки прямой M_1M_2 выбрать точку M_1, а в качестве ее направляющего вектора – вектор $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1;\ y_2-y_1)$, то по формуле (1) получим уравнение прямой M_1M_2 (рис. 1.35):

$$\boxed{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.}\ \blacksquare \tag{2}$$

Пусть дана прямая l и вектор $\vec{n}=(a;\ b)$. Если $l\perp\vec{n}$, то

$\vec{n}$ называется ***вектором нормали*** прямой l. Если прямая l проходит через точку $M_0(x_0;\ y_0)$ и точка $M(x;\ y)$ – произвольная точка прямой l, то $\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$, т.е. $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$. Тогда уравнение

$$\boxed{a(x-x_0)+b(y-y_0)=0} \quad (3)$$

является уравнением прямой l, заданной точкой $M_0(x_0;\ y_0)$ и вектором $\vec{n}=(a;\ b)$ (рис. 1.36).

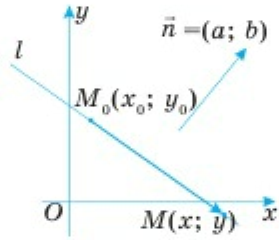


Рис. 1.36

Итак, мы записали уравнения прямой, определяемые направляющим вектором и вектором нормали (уравнения (1) и (3)). Каждое из этих уравнений можно свести к общему виду уравнения прямой:

$$\boxed{ax+by+c=0,} \quad (4)$$

которое мы рассматривали в 8 классе.

Например, уравнение (1) можно свести к виду $\beta(x-x_0)-\alpha(y-y_0)=0 \Rightarrow \beta x-\alpha y+(\alpha y_0-\beta x_0)=0$. Если ввести обозначения $a=\beta$, $b=-\alpha$, $c=\alpha y_0-\beta x_0$, то последнее уравнение сводится к виду (4).

Теперь обратно, если прямая l задана общим уравнением вида (4), то нетрудно показать, что вектор $\vec{p}=(-b;\ a)$ является направляющим вектором, а вектор $\vec{n}=(a;\ b)$ – вектором нормали этой прямой.

Если $b \neq 0$, то, поделив уравнение (4) на число b, можно свести его к виду $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$. Вводя обозначения $k=-\frac{a}{b}$, $r=-\frac{c}{b}$, мы получим привычное нам уравнение прямой с угловым коэффициентом k:

$$\boxed{y=kx+r.} \quad (5)$$

1.7.2. Некоторые применения метода координат

В качестве угла между прямыми l_1 и l_2 можно взять угол между векторами их нормали $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$. Пусть эти прямые заданы соответственно уравнениями

$$a_1x+b_1y+c_1=0 \quad \text{и} \quad a_2x+b_2y+c_2=0.$$

Тогда векторы нормали этих прямых соответственно имеют вид: $\vec{n}_1=(a_1;\ b_1)$ и $\vec{n}_2=(a_2;\ b_2)$. Если ввести обозначение $\varphi=(\widehat{l_1,\ l_2})=(\widehat{\vec{n}_1,\vec{n}_2})$, то по формуле (4) (п.1.6)

$$\cos\varphi = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}. \qquad (6)$$

Теперь определим расстояние от точки $M_0(x_0;\, y_0)$ до прямой l, не проходящей через эту точку. Пусть прямая l задана уравнением $ax+by+c=0$. Если точка $M_1(x_1;\, y_1)$ является основанием перпендикуляра, опущенного из точки M_0 на прямую l, то расстояние d от точки M_0 до прямой l определяется равенством $d=|\overrightarrow{M_0M_1}|$ (рис.1.37). Поэтому сначала мы должны определить координаты x_1 и y_1 точки M_1. Так как $\vec{n}_1=(a;\, b)\parallel \overrightarrow{M_0M_1}$, то существует число t такое, что $\overrightarrow{M_0M_1}=t\vec{n}_1$, т.е. $x_1-x_0=at$, $y_1-y_0=bt$. Отсюда $x_1= x_0+at$, $y_1= y_0+bt$. С другой стороны, точка M_1 лежит на прямой l: $ax_1+by_1+c=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow a(x_0+at)+b(y_0+bt)+c=0 \Rightarrow ax_0+by_0+c+(a^2+b^2)t = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow t=-\dfrac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}$. Поэтому $x_1=x_0-a\cdot\dfrac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}$,

$y_1=y_0-b\cdot\dfrac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}$. Тогда $d=|\overrightarrow{M_0M_1}|=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}=$

$$=\sqrt{a^2\cdot\frac{(ax_0+by_0+c)^2}{(a^2+b^2)^2}+b^2\cdot\frac{(ax_0+by_0+c)^2}{(a^2+b^2)^2}}=\sqrt{\frac{(ax_0+by_0+c)^2}{a^2+b^2}}=$$

$=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Итак, мы получили формулу

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}. \qquad (7)$$

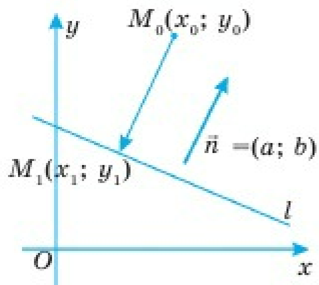


Рис. 1.37

Пример 2. Даны точки $A(-1;\ 1)$, $B(2;\ 6)$, $C(4;\ 2)$. Найдем: 1) уравнения прямых, проходящих через стороны треугольника ABC; 2) косинус угла BAC; 3) высоту AH;
4) координаты точки E — точки пересечения медиан треугольника.

▲ 1) Необходимые нам уравнения определяются по формуле (2) (рис. 1.38).

Прямая AB. $\dfrac{x+1}{2+1}=\dfrac{y-1}{6-1}\Rightarrow\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{5}\Rightarrow 5x-3y+8=0.$

Прямая AC. $\dfrac{x+1}{4+1}=\dfrac{y-1}{2-1}\Rightarrow\dfrac{x+1}{5}=\dfrac{y-1}{1}\Rightarrow x-5y+6=0.$

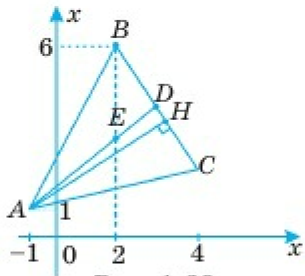


Рис. 1.38

Прямая BC. $\dfrac{x-2}{4-2}=\dfrac{y-6}{2-6}\Rightarrow\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-6}{-4}\Rightarrow 2x+y-10=0.$

2) Так как $\angle BAC = (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$, $\overrightarrow{AB}=(3;\ 5)$, $\overrightarrow{AC}=(5;\ 1)$, то

$$\cos(\angle BAC)=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{\left|\overline{AB}\right|\cdot\left|\overline{AC}\right|}=\frac{3\cdot5+5\cdot1}{\sqrt{9+25}\cdot\sqrt{25+1}}=\frac{20}{\sqrt{34}\cdot\sqrt{26}}=\frac{10}{\sqrt{221}}=$$

$$=\frac{10\cdot\sqrt{221}}{221}.$$

3) Высота AH равна расстоянию от точки A до прямой BC. Поэтому по формуле (7)

$$AH=\frac{\left|2\cdot(-1)+1-10\right|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{11}{\sqrt{5}}=\frac{11\cdot\sqrt{5}}{5}.$$

4) Медиана AD в точке E — точке пересечения медиан треугольника – делится в отношении $2:1$, т.е. отрезок AD в точке E делится в отношении $\lambda=2$. Сначала определим координаты точки D – середины отрезка BC:

$$x_D = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{2+4}{2} = 3, \quad y_D = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{6+2}{2} = 4, \text{ т.е. } D(3;\ 4).$$

Тогда по формуле деления в данном отношении имеем: $x_E = \frac{x_A + \lambda x_D}{1+\lambda} = \frac{-1+2\cdot 3}{1+2} = \frac{5}{3}$, $y_E = \frac{y_A + \lambda y_D}{1+\lambda} = \frac{1+2\cdot 4}{1+2} = 3$. Итак, $E(\frac{5}{3};3)$. ■

Пример 3. Покажем, что прямые, проходящие через высоты треугольника, пересекаются в одной точке.

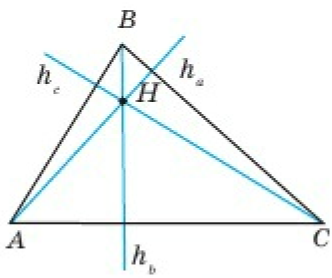


Рис. 1.39

▲ Пусть прямые h_a, h_b, h_c проходят через высоты, опущенные из вершин A, B, C соответственно данного треугольника (рис. 1.39). Через H обозначим точку пересечения прямых h_a и h_b. Тогда, так как $h_a \perp BC$, $h_b \perp AC$, то $HA \perp BC$ и $HB \perp AC$, т.е. выполняются равенства $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ и $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ (рис. 1.39). Учитывая, что $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HB}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HA}$, получим: $\overrightarrow{HA}(\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HB}) = 0$ и $\overrightarrow{HB}(\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HA}) = 0$, или $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB}$ и $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HA}$.

Отсюда $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} \Rightarrow (\overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HA}) \cdot \overrightarrow{HC} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC} = 0$. Следовательно, $HC \perp AB$. Значит, прямые h_a, h_b, h_c проходят через точку H, что и требовалось доказать. ■

1. Какой вектор называется направляющим вектором прямой?
2. Какая точка называется начальной точкой прямой? Напишите уравнение прямой по точке и направляющему вектору. Каков смысл ограничения о том, что направляющий вектор не должен быть параллелен осям координат?
3. Напишите уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.
4. Что такое вектор нормали прямой? Напишите уравнение прямой по точке и вектору нормали.
5. Напишите по общему уравнению прямой направляющий

вектор, вектор нормали и угловой коэффициент этой прямой.

6. По какой формуле определяется угол между прямыми?
7. Как определяется расстояние от точки до прямой?

Упражнения

А

1.161. Напишите уравнение прямой, заданной направляющим вектором $\vec{p}$ и точкой $M_0(x_0; y_0)$: 1) $\vec{p}=(2; -1)$, $M_0(-3; 2)$; 2) $\vec{p}=(-3; 4)$, $M_0(3; 5)$; 3) $\vec{p}=(0,5; 2,5)$, $M_0(5; 1)$; 4) $\vec{p}=(\frac{1}{3}; 1\frac{1}{2})$, $M_0(0; 1)$.

1.162. Напишите уравнение прямой, проходящей через заданные точки: 1) $A(1; 0)$, $B(0; 1)$; 2) $M_1(-3; 4)$, $M_2(5; 2)$; 3) $C(0; -3)$, $D(4; 1)$; 4) $H(\frac{1}{2}; \frac{1}{3})$, $K(-2,5; 1\frac{1}{3})$.

1.163. Напишите уравнение прямой, заданной точкой $M_0(x_0; y_0)$ и вектором нормали $\vec{n}$: 1) $M_0(2; -1)$, $\vec{n}=(-3; 2)$; 2) $M_0(-3; 4)$, $\vec{n}=(3; 5)$; 3) $M_0(2; -3)$, $\vec{n}=(0,5; 2,5)$; 4) $M_0(\frac{2}{3}; -1,5)$, $\vec{n}=(0;1)$.

1.164. Найдите направляющий вектор, вектор нормали и угловой коэффициент прямой:

1) $x+y+4=0$; 2) $2x-y-3=0$; 3) $3x+4y-1=0$;
4) $2y-x+3=0$; 5) $5x+6y=0$; 6) $x-y=0$.

1.165. Найдите угол между прямыми:

1) $5x-y+7=0$ и $3x+2y=0$;
2) $3x-2y+7=0$ и $2x+3y-3=0$;
3) $x-2y-4=0$ и $2x-4y+3=0$;
4) $3x+2y-1=0$ и $2x-4y+3=0$.

1.166. Найдите расстояние от заданной точки до прямой:

1) $A(2; -1)$, $3x+4y-1=0$; 2) $B(-2; 3)$, $x+3y+2=0$;
3) $C(5; -3)$, $2x-y-1=0$; 4) $D(0; -1)$, $4x-y+2=0$.

1.167. Треугольник ABC задан уравнениями прямых, проходящих через его стороны: $4x-3y-65=0$, $7x-24y+55=0$ и $3x+4y-5=0$. Найдите координаты его вершин.

1.168. Даны координаты вершин треугольника ABC: $A(2;\ 1)$, $B(-1;\ 4)$ и $C(3;\ -2)$. Найдите: 1) уравнения сторон AB, AC, BC; 2) уравнения прямых, проходящих через высоты AH_1, BH_2, CH_3; 3) углы треугольника; 4) длины высот.

1.169. Напишите уравнение прямой по угловому коэффициенту k и точке $M_0(x_0;\ y_0)$: 1) $k=1$, $M_0(0;\ 1)$; 2) $k=-2$, $M_0(1;\ -2)$; 3) $k=\frac{1}{2}$, $M_0(1;\ 0)$; 4) $k=-\frac{1}{3}$, $M_0(\frac{1}{2};\ \frac{1}{3})$.

B

1.170. Напишите уравнения прямых, изображенных на рис. 1.40, *а*), *б*), *в*), *г*). Найдите: 1) направляющий вектор; 2) вектор нормали; 3) угловой коэффициент этих прямых.

1.171. Прямая, проходящая через точку $M_0(x_0;\ y_0)$ с направляющим вектором $\vec{p}=(\alpha;\beta)$, параллельна оси: 1) Ox; 2) Oy. Как записывается направляющий вектор и уравнение этой прямой?

1.172. Какое условие должно выполняться для того, чтобы прямые, заданные уравнениями $a_1x+b_1y+c_1=0$ и $a_2x+b_2y+c_2=0$, 1) были параллельны; 2) были перпендикулярны; 3) совпадали?

1.173. Найдите угловой коэффициент прямой: 1) $-2x-3y=4$; 2) $y=-5$; 3) $x=3$; 4) проходящей через точки $(x_1;\ y_1)$ и $(x_2;\ y_2)$.

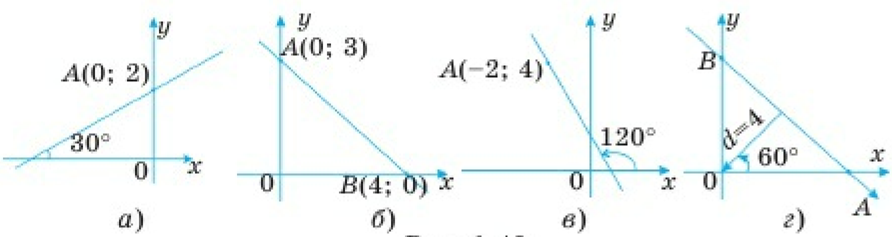


Рис. 1.40

1.174. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-2; 1)$ и: 1) параллельной; 2) перпендикулярной вектору $\overrightarrow{AB}$. Здесь $A(0; 1)$, $B(4; -3)$.

1.175. Какие пары прямых являются параллельными, а какие – перпендикулярными?

1) $3x-y+5=0$ и $x+3y-1=0$;
2) $3x+4y+1=0$ и $4x-3y+8=0$;
3) $6x-2y+1=0$ и $3x-y+7=0$;
4) $9x-12y+1=0$ и $8x+6y-13=0$;
5) $6x-15y+3=0$ и $10x+4y-2=0$;
6) $3x-4y+7=0$ и $6x-8y+1=0$.

1.176. При каком значении b прямые $2x-y+3=0$, $x+y+3=0$ и $bx+y-13=0$ пересекаются в одной точке?

1.177. Найдите длину перпендикуляра, опущенного из точки $M_0(4; -1)$ на прямую $12x-5y-27=0$.

1.178. Даны уравнения прямых, проходящих через стороны треугольника. Покажите, что этот треугольник является равнобедренным:

1) $x-2y+6=0$, $x+y=0$, $2x-y-6=0$;
2) $x+y+9=0$, $4x-7y+25=0$, $7x-4y-14=0$.

1.179. Каков смысл выражения:

1) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$; 2) $\overrightarrow{PO}=k\overrightarrow{AK}$; 3) $\overrightarrow{AK}=\lambda\overrightarrow{AC}$; 4) $\overrightarrow{AK}=0{,}5\overrightarrow{AC}$; 5) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$; 6) $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AC}$; 7) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{BD}=0$; 8) $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}|=|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{BD}|$?

1.180. Определите геометрический смысл выражения: 1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BD}|$; 2) $\overrightarrow{AB}^2=0$; 3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{PO}=0$; 4) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=-|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BD}|$; 5) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}$, $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OD}|$.

1.181. Найдите длины диагоналей параллелограмма $ABCD$, если $\overrightarrow{AB}=2\vec{a}+\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{a}-3\vec{b}$, $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=3$ и $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=60^\circ$.

1.182. Докажите, что диагонали параллелограмма в точке их пересечения делятся пополам.

5–4336

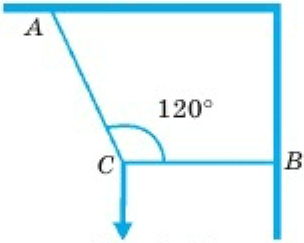


Рис. 1.41

1.183. Докажите, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

1.184. Груз весом 30 кг подвешен в точке C так, как показано на рис. 1.41. Угол ACB равен 120°. С какой силой действует этот груз на тросы AC и BC?

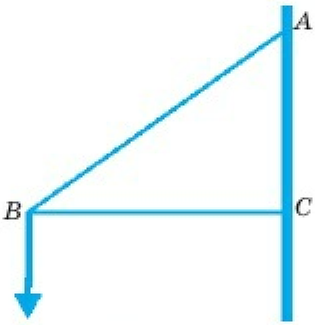


Рис. 1.42

1.185. Груз весом 60 кг подвешен в точке B на стержнях AB и CB так, как показано на рис. 1.42. Углы ACB и ABC равны 90° и 30° соответственно. Определите силы, воздействующие на стержни.

1.186. Дан треугольник, длины сторон которого равны a, b, c. Найдите: 1) косинус углов; 2) длины медиан; 3) длины биссектрис; 4) длины высот этого треугольника.

1.187. Докажите, что сумма квадратов медиан треугольника составляет $\frac{3}{4}$ суммы квадратов его сторон.

1.188. Покажите, что середины сторон любого выпуклого четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

C

1.189. Лучи света, проходя вдоль прямой $x-2y+5=0$, отражаются от прямой $3x-2y+7=0$, как от зеркальной поверхности. Напишите уравнение прямой, проходящей через луч отражения.

1.190. При каких значениях a и b прямые $ax+8y+b=0$ и $2x+ay-1=0$: 1) совпадают; 2) параллельны; 3) перпендикулярны?

1.191. При каком значении q прямые $qx+(2q+3)y+q+6=0$

и $(2q+1)x+(q-1)y+q-2=0$ пересекаются в точке, расположенной на оси ординат?

1.192. Из точки $D\ (-3;\ 4)$ опущен перпендикуляр на прямую, проходящую через точки $A(4;\ 13)$ и $B(0;\ -7)$. В каком отношении основание этого перпендикуляра делит отрезок AB?

1.193. Напишите уравнение сторон квадрата, одна вершина которого находится в точке $A(2;\ -4)$, а центр – в точке $K(5;\ 2)$.

1.194. Покажите, что уравнение прямой, отсекающей на координатных осях отрезки, равные $|a|$ и $|b|$, задается равенством

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

Это уравнение называется ***уравнением прямой в отрезках.***

1.195. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $A(8;\ 6)$ и отсекающей от координатного угла треугольник, площадь которого равна 12.

1.196. Покажите, что угол φ между прямыми $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ определяется по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}.$$

1.197. Докажите, что прямые $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда $k_1=-\dfrac{1}{k_2}$.

1.198. Напишите уравнение биссектрисы угла между прямыми $a_1x+b_1y+c_1=0$ и $a_2x+b_2y+c_2=0$ $\left(\dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2}\right)$.

1.199. Напишите уравнение биссектрисы угла между прямыми: 1) $x-3y+2=0$ и $3x+y-1=0$; 2) $\sqrt{3}\,y-x=12$ и $3x+4y=15$.

1.200. Напишите уравнения: 1) медиан; 2) биссектрис;

3) высот треугольника, составленного из прямых $y=0$, $3x-4y=0$ и $4x+3y-50=0$.

1.201. На стороне AB треугольника ABC взята точка K. Докажите (векторным способом) неравенство $KC\cdot AB<KA\cdot BC+KB\cdot AC$.

1.202. Покажите, что можно построить треугольник со сторонами, равными медианам $\triangle ABC$ и параллельными этим медианам.

1.203. Точка C делит отрезок AB в отношении $p:q$. Докажите, что для любой точки O плоскости верно равенство $\overrightarrow{OC}=\dfrac{q}{p+q}\overrightarrow{OA}+\dfrac{p}{p+q}\overrightarrow{OB}$.

1.204. Векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ не коллинеарны, а точка X определяется равенством $\overrightarrow{OX}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$. а) Определите геометрическое место точек X, если: 1) $\alpha\geqslant 0$, $\beta\geqslant 0$; 2) $\alpha\geqslant 0$, $\beta\leqslant 0$; 3) $\alpha=1$, $\beta\in(-\infty;+\infty)$; 4) $\alpha\geqslant 0$, $\beta=-1$; 5) $0\leqslant\alpha\leqslant 1$, $\beta=2$. б) Какими должны быть числа α и β, чтобы множество точек X определяло: 1) $\triangle AOB$; 2) параллелограмм?

1.205. Точки O_1 и O_2 являются точками пересечения медиан треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ соответственно. Докажите тождество $3\overrightarrow{O_1O_2}=\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{C_1C_2}$.

Название терминов на трех языках

На русском языке	На казахском языке	На английском языке
Вектор	Вектор	Vector
Коллинеарные векторы	Коллинар векторлар	Collinear vectors
Противоположные векторы	Қарама-қарсы векторлар	Opposite vectors

Параллельный перенос	Параллель көшіру	Translation (parallel transfer)
Скалярное произведение векторов	Векторлардың скалярлық көбейтіндісі	Scalar multiplication of vectors
Угол между векторами	Векторлардың арасындағы бұрыш	Angle between vectors
Условие коллинеарности векторов	Векторлардың коллинарлық шарты	Collinear condition of vectors
Условие перпендикулярности (ортогональности)	Векторлардың перпендикулярлық (ортогональдық) шарты	Perpendicularity condition of vector
Координаты вектора	Вектордың координатасы	Coordinates of vector
Длина (модуль) вектора	Вектордың ұзындығы (модулі)	Length (modulus) of vector

Раздел 2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПЛОСКОСТИ

2.1. Центральная и осевая симметрии.
2.2. Поворот и параллельный перенос.
2.3. Движение и наложение.
2.4. Преобразование подобия.
2.5. Признаки подобия треугольников.
2.6. Применение признаков подобия треугольников при решении задач. Свойство биссектрисы треугольника.

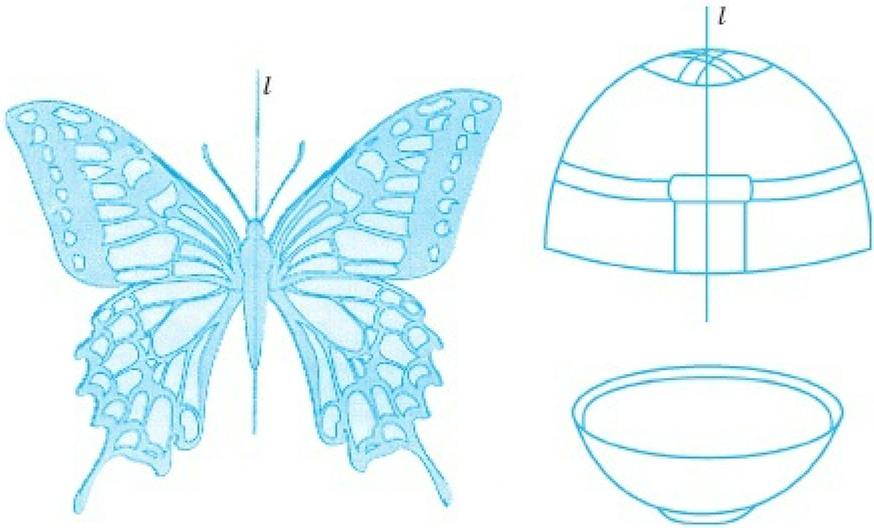


Рис. 2.1

В окружающей нас среде мы часто наблюдаем за симметричными предметами и любуемся ими (рис. 2.1). Изучив материалы данного раздела, вы будете знать, что преобразование симметрии является одним из видов движения.

Если по какому-либо закону путем отображения (перемещения) каждой точки фигуры F получена фигура F′, то говорят, что фигура F преобразована в фигуру F′, т.е. фигура F′ получена путем преобразования фигуры F.

Если подобным методом точка M плоскости преобразована в точку M', то считается, что задано ***преобразование плоскости***. Здесь каждая точка M плоскости отображается только в одну точку M' и называется ***образом*** точки M, а M — ***прообразом*** точки M'. Аналогично, если в процессе преобразования фигура F отображается в фигуру F', то F'

называется образом фигуры F, а F называется прообразом фигуры F'. Теперь мы познакомимся с четырьмя примерами преобразования плоскости.

2.1. Центральная и осевая симметрии

Изучив материалы данной темы, вы будете:

- строить образы фигур при центральных и осевых симметриях;
- решать задачи с применением преобразования симметрии.

2.1.1. Центральная симметрия

На плоскости отметим некоторую точку O. Для любой точки A плоскости на прямой OA возьмем точку A' так, чтобы имело место равенство $OA=OA'$. Тогда точки A и A' называются ***симметричными относительно точки*** O. Здесь O называется ***центром симметрии*** (рис. 2.2).

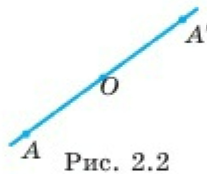


Рис. 2.2

Преобразование плоскости, которое каждую точку плоскости переводит в точку, симметричную ей относительно центра O***, называется преобразованием центральной симметрии.*** Если каждую точку фигуры F симметрично отображать относительно центра O, то в общем случае получим другую фигуру F'. Фигуры F и F' называются ***симметричными фигурами*** относительно центра O (рис. 2.3). Если при центральной симметрии фигура F отображается сама в себя, т.е. выполняется равенство $F=F'$, то точка O называется ***центром симметрии*** фигуры F. Например, точка пересечения диагоналей параллелограмма является его центром симметрии (рис. 2.4).

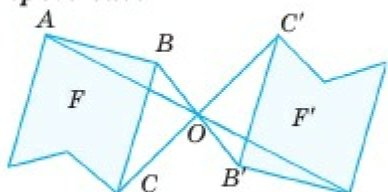


Рис. 2.3

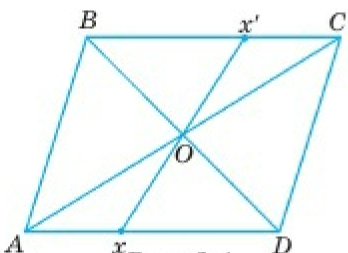


Рис. 2.4

Пусть начало координат совпадает с центром симметрии. Тогда определим координаты точки A', симметричной точке $A(x;\ y)$ относительно начала координат. По определению

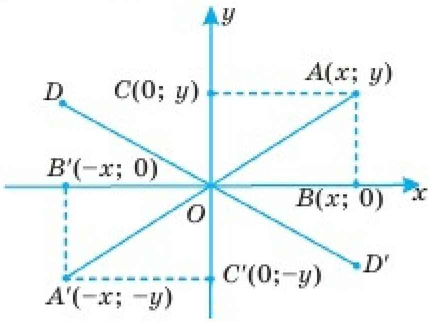


Рис. 2.5

центральной симметрии $OA=$ $=OA'$ и $\angle AOB=\angle A'OB'$ как вертикальные углы. Отсюда согласно равенству прямоугольных треугольников ΔAOB $=$ $=\Delta A'OB'$ (рис. 2.5). Поскольку $OB = OB'$ и $OC= OC'$, то $B'(-x; 0)$ и $C'(0; -y)$, т.е. $A'(-x; -y)$.

Итак, координаты точек, симметричных относительно начала координат, равны по модулю, а знаки противоположны, т.е. если точки $A(x;\ y)$ и $A'(x';\ y')$ симметричны относительно начала координат, то выполняются равенства $x'=-x$, $y'=-y$.

Теорема 1. *Преобразование центральной симметрии не меняет расстояния между соответствующими точками.*

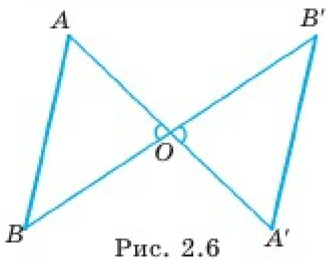


Рис. 2.6

▲ Условие теоремы следует понимать следующим образом. Если при центральной симметрии с центром в точке O точки A и B переходят в точки A' и B' соответственно, то выполняется равенство $AB=A'B'$. Именно это утверждение мы должны доказать.

Действительно, из равенств $\angle AOB=\angle A'OB'$, $AO=OA'$, $BO=$ $=OB'$ следует равенство $\Delta AOB=\Delta A'OB'$ (первый признак равенства треугольников). Отсюда $AB=A'B'$ (рис. 2.6).■

2.1.2. Осевая симметрия

На плоскости зафиксируем некоторую прямую l. Из любой точки A плоскости опустим перпендикуляр AB на прямую l ($B\in l$) и на прямой AB отметим точку A' так, чтобы имело место равенство $AB=BA'$. Тогда точки A и A' называются ***симметричными относительно прямой (оси)*** l. Здесь прямая l называется ***осью симметрии*** (рис. 2.7). При этом также говорят, что точка A переходит в точку A', симметричную ей относительно оси l.

Если при преобразовании плоскости каждая ее точка

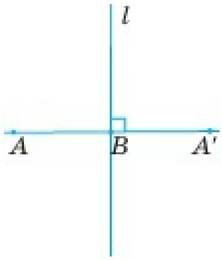


Рис. 2.7

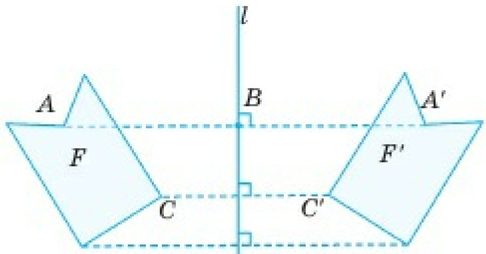


Рис. 2.8

переходит в точку, симметричную ей относительно оси l, то это преобразование ***называется осевой симметрией.***

Если при осевой симметрии каждую точку фигуры F отобразить в точку, симметричную ей относительно оси l, то получим некоторую фигуру F'. Фигуры F и F' называются ***симметричными фигурами*** относительно оси l (рис. 2.8).

Если при осевой симметрии фигура F отображается сама в себя, т.е. выполняется равенство $F=F'$, то эта фигура называется ***симметричной относительно оси*** l. Например, диагонали ромба являются его осями симметрии. Прямоугольник также имеет две оси симметрии (рис. 2.9).

Теперь, приняв в качестве оси симметрии одну из осей координат, установим связь между координатами взаимно симметричных точек. Пусть Oy есть ось симметрии, а $A(x;\ y)$ и $A'(x';\ y')$ – точки, симметричные относительно этой оси. По определению $AA' \perp Oy$. Следовательно, $AA' \parallel Ox$, т.е. $y'=y$. С другой стороны, так как $AC=CA'$, $(C=AA' \cap Oy)$, то $x'=-x$. *Итак, ординаты симметричных относительно оси Oy точек равны, а абсциссы равны по модулю, но знаки противоположны. Аналогично, абсциссы симметричных относительно оси Ox точек равны, а ординаты равны по модулю, но знаки противоположны* (рис. 2.10, 2.11).

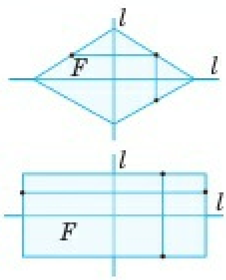


Рис. 2.9

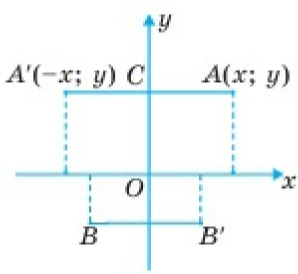


Рис. 2.10

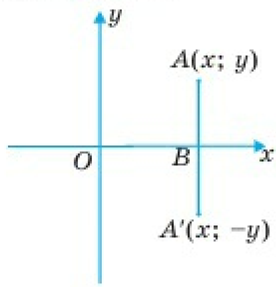


Рис. 2.11

Теорема 2. *Осевая симметрия не меняет расстояния между точками.*

▲ Пусть точки A и B при осевой симметрии относительно оси l переходят в точки A' и B' соответственно. Выберем систему координат Oxy так, чтобы l совпала с осью Oy. Тогда, как было показано выше, если $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$, то $A'(-x_1;\ y_1)$, $B'(-x_2;\ y_2)$. Теперь покажем справедливость равенства $AB=A'B'$:

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2},$$

$$A'B'=\sqrt{(-x_2-(-x_1))^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(-x_2+x_1)^2+(y_2-y_1)^2},$$

т.е. $AB=A'B'$. ■

В повседневной жизни мы часто наблюдаем объекты, имеющие центр или ось симметрии. Например, листочки деревьев, цветы, насекомые и т.п. Симметрией мы часто пользуемся в повседневной жизни, технике, в изобразительном искусстве и архитектуре. Например, орнаменты ковров, также различные технические детали имеют центр или ось симметрии (рис. 2.12).

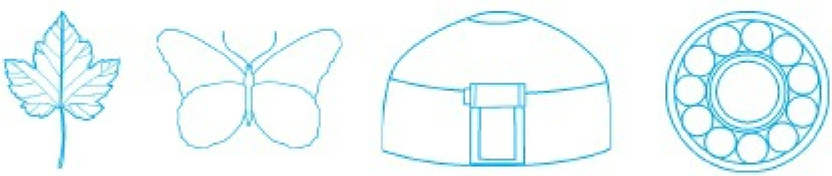


Рис. 2.12

1. Что такое преобразование плоскости?
2. Что такое образ, прообраз фигуры?
3. Какое преобразование называется центральной симметрией? Что такое центр симметрии?
4. Всякая ли фигура имеет центр симметрии? Приведите пример.
5. Какие свойства центральной симметрии вы знаете? Как начало координат является центром симметрии, если задается центральная симметрия?
6. Какое преобразование называется осевой симметрией? Какую прямую называют осью симметрии?
7. Всякая ли фигура имеет ось симметрии? Приведите пример.
8. Какое свойство осевой симметрии вы знаете? Если одна из

осей координат является осью симметрии, то как связаны между собой координаты симметричных точек?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА

1. Определите центр симметрии: а) параллелограмма; б) прямоугольника; в) ромба; г) квадрата; д) окружности; е) отрезка.
2. Определите оси симметрии фигур в задании 1. Сколько осей симметрии они имеют?
3. Возьмите некоторую фигуру, постройте фигуру, симметричную ей относительно заданного центра симметрии.
4. Выполните задание 3 относительно определенной оси симметрии.

Упражнения

А

2.1. Может ли треугольник иметь ось симметрии? Обоснуйте ответ.

2.2. Всякий ли треугольник может иметь ось симметрии? Какие треугольники могут иметь ось симметрии ?

2.3. Даны точки A и B. Постройте точку A', симметричную точке A относительно точки B.

2.4. Сколько центров симметрии имеет: 1) отрезок; 2) луч; 3) прямая; 4) угол?

2.5. Даны точка A и прямая l. Постройте точку A', симметричную точке A относительно l. Рассмотрите два различных случая: $A \notin l$ и $A \in l$.

2.6. Даны точки A, B и C. Постройте точку C', симметричную точке C относительно середины отрезка AB.

2.7. Может ли трапеция иметь ось симметрии (две боковые стороны не параллельны), центр симметрии?

2.8. Определите координаты точки, симметричной точке с координатами (2; −3) относительно: 1) начала координат; 2) оси Ox; 3) оси Oy.

B

2.9. Сколько центров симметрии имеет фигура, состоящая из двух взаимно параллельных прямых?

2.10. Решите задачу 2.5, пользуясь только циркулем.

2.11. Даны точки A, B и C, симметричные относительно некоторой оси. Постройте точку C', симметричную точке C относительно этой оси.

2.12. Докажите, что прямые, на которых лежат диагонали ромба, являются его осями симметрии.

2.13. Докажите, что точка пересечения диагоналей параллелограмма является его центром симметрии.

2.14. Докажите, что прямая, содержащая биссектрису угла, является его осью симметрии.

2.15. Докажите, что четырехугольник, имеющий центр симметрии, является параллелограммом.

2.16. Дан треугольник с вершинами в точках $A(0; 1)$, $B(2; 1)$, $C(-2; 3)$. Определите координаты вершин треугольника, симметричного данному треугольнику относительно: 1) начала координат; 2) оси Ox; 3) оси Oy.

C

2.17. Решите задачу 2.3, пользуясь только циркулем.

2.18. Докажите, что точка пересечения двух взаимно перпендикулярных осей симметрии фигуры является центром симметрии этой фигуры.

2.19. Даны две пересекающиеся прямые и точка, не лежащая на них. Постройте отрезок, концы которого лежат на данных прямых и данная точка является его серединой.

2.20. Даны попарно пересекающиеся прямые a, b, c, которые не проходят через одну точку. Постройте отрезок, который перпендикулярен прямой b и середина которого лежит на прямой b, а концы — на прямых a и c. Всегда ли задача имеет решение?

2.21. Дан прямоугольник с вершинами в точках $A(2;\ 1)$, $B(5;\ 4)$, $C(11;\ -2)$ и $D(8;\ -5)$. 1) Определите координаты центра симметрии. 2) Напишите уравнение осей симметрии этого прямоугольника.

2.22. Выпуклый четырехугольник, в котором одна из диагоналей является осью симметрии, называется ***дельтоидом***. Определите свойства дельтоидов.

2.23. Точки A и B расположены по одну сторону прямой m. На прямой m найдите точку K такую, чтобы сумма $AK+KB$ принимала наименьшее значение.

2.24. Точки A и B расположены по разным сторонам прямой m. Найдите на прямой m точку C такую, чтобы прямая m содержала биссектрису угла ACB.

2.25. Даны окружность, центр которой не отмечен, и две неравные параллельные хорды. Пользуясь только линейкой, разделите эти хорды пополам.

2.26. Из точки A к прямой m опущены три различные наклонные AB, AC и AD. Докажите, что три окружности, построенные на этих отрезках, как на диаметрах, имеют еще одну общую точку, отличную от A.

2.2. Поворот и параллельный перенос

Изучив материалы данной темы, вы будете:

- строить образы фигур при преобразовании поворота и параллельного переноса;
- решать задачи применением поворота и параллельного переноса.

2.2.1. Преобразование поворота

Пусть на плоскости даны точка O и угол α. Для каждой точки A плоскости луч OA повернем около точки O на угол α в определенном направлении (по ходу часовой стрелки или против хода часовой стрелки). Тогда точка A переходит в определенную точку A'. Очевидно, что $\angle AOA'=\alpha$, $OA=OA'$ и все точки плоскости в одном направлении переходят в

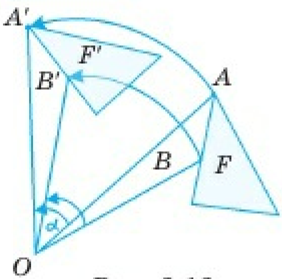


Рис. 2.13

другие точки. Лишь точка O переходит в себя, т.е. остается неподвижной. Такое преобразование плоскости называется ***преобразованием поворота***. Здесь точка O называется ***центром поворота***, а угол α – ***углом поворота***. Например, на рис. 2.13 изображено преобразование поворота на угол α против хода часовой стрелки. Если при преобразовании поворота каждая точка фигуры F, перемещаясь, образует фигуру F', то говорят, что фигура F' получена из фигуры F поворотом на угол α.

Также можно показать, что ***преобразование поворота сохраняет расстояние между точками.***

2.2.2. Параллельный перенос

Введя на плоскости декартову систему координат, поставим в соответствие каждой точке $A(x;\ y)$ точку $A'(x+a;\ y+b)$. Здесь a и b – заданные числа. Такое преобразование плоскости называется ***параллельным переносом***. Итак, если при параллельном переносе точка $A(x;\ y)$ переходит в точку $A'(x';\ y')$, то координаты этих точек связаны формулами $x'=x+a$, $y'=y+b$ (рис. 2.14).

При параллельном переносе точки перемещаются по параллельным (или совпадающим) прямым на одинаковое расстояние.

Действительно, если при параллельном переносе точки $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$ переходят в точки $A'(x_1+a;\ y_1+b)$ и $B'(x_2+a;\ y_2+b)$ соответственно, то отрезки AB' и $A'B$ в точке пересечения делятся пополам, т.к. координаты их середин одинаковы:

$$x=\frac{x_1+x_2+a}{2}, \qquad y=\frac{y_1+y_2+b}{2}.$$

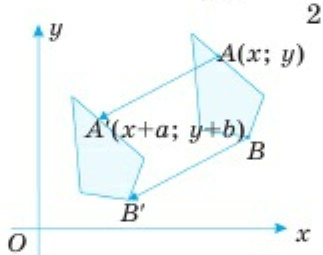


Рис. 2.14

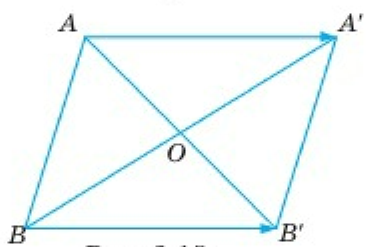


Рис. 2.15

Значит, диагонали четырехугольника $AA'B'B$ делятся пополам, т.е. $AA'B'B$ – параллелограмм (рис. 2.15). Тогда $AA' \parallel BB'$ и $AA'=BB'$. Вместе с тем выполняется равенство $AB=A'B'$. Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема 1. *Преобразование параллельного переноса переводит точки по параллельным (или совпадающим) прямым на одинаковое расстояние, не меняя расстояния между ними.*

Из этой теоремы видно, что векторы $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, т.е. векторы, соединяющие соответственные точки, имеют одинаковые координаты: $\overline{AA'} = \overline{BB'} = \vec{a} = (a; b)$. Следовательно, преобразование, определяемое формулами $x'=x+a$, $y'=y+b$, является преобразованием параллельного переноса на вектор $\vec{a} = (a; b)$ (см. п.1.2, раздел 1).

1. Что такое преобразование поворота? Как оно определяется?
2. На какую фигуру отображается: а) прямая, проходящая через центр поворота; б) окружность, центр которой совпадает с центром поворота; в) угол, вершина которого находится в центре поворота при повороте на определенный угол около данного центра?
3. Какие фигуры при повороте могут перейти сами в себя? Приведите пример и определите центр и величину угла поворота.
4. Что такое параллельный перенос? Как он определяется?
5. Докажите, что параллельный перенос сохраняет расстояние между точками.
6. Найдется ли неподвижная точка при параллельном переносе, а неподвижная фигура (т.е. фигура, переходящая сама в себя)?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА

1. Дан отрезок AB и центр поворота O, не лежащий на этом отрезке. Постройте образ этого отрезка при повороте на: а) 30°; б) 60°; в) 120°; г) 180°.
2. Постройте треугольник ABC и образ этого треугольника около вершины A при повороте на 60° против хода часовой стрелки.
3. Даны точки A, B, C. При параллельном переносе точка A переходит в точку B. Постройте образ C' точки C при этом параллельном переносе.

Упражнения

A

2.27. Отрезок AB длиной 4 см при повороте около точки A на 90° переходит в отрезок AB_1. Найдите длину отрезка BB_1.

2.28. Даны точка O и прямая m. Постройте прямую m', которая получается поворотом прямой m около точки O (против хода часовой стрелки) на 60°. Рассмотрите случай: 1) $O \notin m$; 2) $O \in m$.

2.29. Дан треугольник ABC. Постройте треугольник $AB'C'$ так, чтобы при параллельном переносе точка A перешла в точку B.

2.30. Преобразуйте прямую AB параллельным переносом так, чтобы точка A перешла в заданную точку C. Рассмотрите случай: 1) $C \notin AB$; 2) $C \in AB$.

2.31. Параллельный перенос задан формулами: $x'=x+1$, $y'=y-1$. Найдите образы точек (0; 0), (2; 1) и (−1; 2) при данном параллельном переносе.

2.32. При параллельном переносе, заданном формулами $x'=x+a$, $y'=y+b$, точка: 1) (1; 2) переходит в точку (3; 4); 2) (2; −1) переходит в точку (−1; 2); 3) (−1; −3) переходит в точку (0;−2). Найдите значения параметров a и b.

B

2.33. При параллельном переносе точка (1; 1) переходит в точку (−1; 3). В какую точку перейдет начало координат?

2.34. Существует ли параллельный перенос, при котором точка: 1) (1; 2) переходит в точку (3; 4), а точка (0; 1) − в точку (−1; 0); 2) (2; −1) переходит в точку (1; 0), а точка (3; 1) − в точку (2; 2)?

2.35. Данную окружность повернули около точки A, лежащей на ней, на 120° в двух направлениях. Каково взаимное расположение данной окружности и ее образов?

2.36. При повороте квадрата $ABCD$ около вершины A, при котором точка B перешла в точку D, получился квадрат ADC_1D_1. Сторона AB равна a. Найдите CD_1 и CC_1.

2.37. Угол ABC равен α. При повороте его на 60° около точки B по направлению от точки A в сторону точки C получается угол A_1BC_1. Найдите углы ABC_1 и CBA_1.

2.38. Даны параллельные прямые b и c и точка A, не лежащая на них. Постройте равнобедренный треугольник ABC так, чтобы вершины B и C лежали на прямых b и c соответственно.

2.39. Постройте трапецию по основаниям и двум диагоналям.

2.40. При параллельном переносе окружности получена окружность, касающаяся данной окружности. На какое расстояние перенесена параллельно эта окружность?

2.41. Даны равные, но непараллельные два отрезка. Определите центр поворота так, чтобы эти отрезки переводились друг в друга с помощью преобразования поворота.

2.42. При каком условии можно совместить параллельным переносом: 1) два отрезка; 2) две прямые; 3) два луча; 4) две окружности?

C

2.43. Даны две пары параллельных прямых: $a \parallel a_1$ и $b \parallel b_1$. Всегда ли найдется параллельный перенос, переводящий a в a_1 и b в b_1?

2.44. Острый угол равнобокой трапеции равен 60°. Докажите, что меньшее основание равно разности большего основания и боковой стороны.

2.45. Дана внутренняя точка C угла AOB. Постройте отрезок DE так, чтобы он точкой C делился пополам и $D \in OA$, $E \in OB$. Решите задачу, используя преобразование: 1) поворота; 2) параллельного переноса.

2.46. На какой наименьший угол нужно повернуть правильный n-угольник около центра, чтобы он переходил в себя?

6–4336

2.47. Определите центр поворота так, чтобы два равных между собой квадрата можно было бы совместить друг с другом с помощью поворота.

2.48. Какова связь между преобразованием поворота и центральной симметрией?

2.49. Равные между собой окружности касаются в точке K внешним образом. Секущая, параллельная прямой, соединяющей их центры, пересекает первую окружность в точках A и B, а вторую – в точках C и D. Докажите, что угол AKC не зависит от выбора секущей.

2.50. Проведены две прямые, проходящие через центр равностороннего треугольника и образующие между собой угол 60°. Покажите, что отрезки этих прямых, ограниченные сторонами треугольника, равны между собой.

2.3. Движение и наложение

Изучив материалы данной темы, вы будете:
- знать виды, композиции движений и их свойства;
- решать задачи с применением преобразований плоскости.

2.3.1. Движение и его свойства

Общим свойством всех преобразований, рассмотренных в предыдущем параграфе, является то, что они сохраняют расстояние между точками.

Определение. ***Преобразование, сохраняющее расстояние между точками, называется движением.***

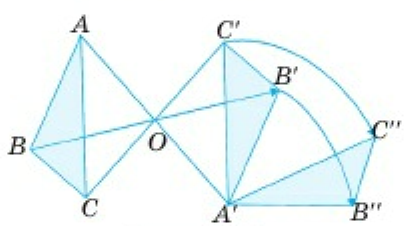


Рис. 2.16

Таким образом, упомянутые выше четыре преобразования являются движениями. На рис. 2.16 изображено, как треугольник ABC сначала преобразован относительно центра симметрии O в треугольник $A'B'C'$, и как затем треугольник $A'B'C$ поворотом около вершины A' по часовой стрелке на 60° переводится в треугольник $A'B''C''$. Так как последовательно примененные преобразования являются движениями, то из равенства треугольников ABC, $A'B'C'$ и треугольников $A'B'C'$,

$A'B''C''$ следует равенство треугольников ABC и $A'B''C''$. Следовательно, получили преобразование, переводящее треугольник ABC в треугольник $A'B''C''$ и являющееся также движением. Вместе с тем преобразование, получаемое при последовательном применении нескольких движений, также будет движением. Это действие называется ***композицией движения***. В данном примере рассмотрена композиция центральной симметрии и поворота.

Теорема 1. *При движении отрезок переходит в равный себе отрезок.*

▲ Так как при движении сохраняются расстояния между точками, для доказательства теоремы достаточно показать, что отрезок отображается в отрезок.

Допустим, что при движении концы отрезка AB отображаются в точки A_1 и B_1 соответственно. Возьмем на отрезке AB некоторую точку P и обозначим ее образ через P_1. Поскольку $P \in AB$, то выполняется равенство $AP+BP=AB$. В силу того, что движение сохраняет расстояние между точками, то выполняются равенства $AB=A_1B_1$, $A_1P_1=AP$ и $B_1P_1=BP$. Значит, $A_1P_1+B_1P_1=AP+BP=AB=A_1B_1$, т.е. поскольку выполняется равенство $A_1P_1+B_1P_1=A_1B_1$, то $P_1 \in A_1B_1$. Следовательно, точка P_1 отображается в точки отрезка A_1B_1. Обратно, покажем, что для каждой точки отрезка A_1B_1 найдется точка отрезка AB, являющаяся ее прообразом.

Пусть $P_1 \in A_1B_1$. Тогда при движении некоторая точка P плоскости должна отображаться в точку P_1. Отсюда, аналогично доказанному выше из равенства $A_1P_1+B_1P_1=A_1B_1$ получим равенство $AP+BP=AB$, т.е. $P \in AB$. ■

Следствие 1. ***При движении прямые переходят в прямые.***

▲ Пусть заданы прямая l и любые ее точки A и B. Допустим, что при движении точки A и B отображаются в точки A_1 и B_1 соответственно. Прямую, проходящую через точки A_1 и B_1, обозначим через l_1.

Возьмем точку $P \in l$. Аналогично доказательству предыдущей теоремы можно показать, что точка P_1, являющаяся образом точки P, лежит на прямой l_1. При этом нужно рассмотреть три различных случая: $P \in AB$, $A \in PB$ и $B \in AP$. ■

Следствие 2. ***При движении луч переходит в луч.***

Доказывается аналогично следствию 1.

Следствие 3. ***При движении треугольник отображается в равный себе треугольник.***

▲ Действительно, по доказанной теореме при движении каждая сторона треугольника отображается в равный себе отрезок. Поэтому треугольник отображается в треугольник с равными соответствующими сторонами, т.е. в равный треугольник (по третьему признаку равенства треугольников). ■

Следствие 4. ***При движении угол отображается в равный себе угол.***

Доказательство вытекает из следствий 2 и 3.

2.3.2. Наложение и движение

Мы до сих пор равенство фигур определяли с помощью наложения. Другими словами, если фигуры Φ и Φ_1 при наложении друг на друга совпадают (совмещаются), то фигуры Φ и Φ_1 считаются равными. Здесь понятие наложения как одно из основных отношений геометрии (как отношение принадлежности, «лежит между» и т.п.) принимали без определения. А между тем, наложение фигуры Φ на фигуру Φ_1 можно рассматривать как ***отображение*** (преобразование) фигуры Φ и Φ_1. Также следует считать, что при наложении преобразовываются не только точки фигуры Φ, но и любая другая точка плоскости отображается в некоторую точку этой же плоскости. Таким образом, наложение следует рассматривать как преобразование плоскости.

Теорема 2. *Наложение является движением.*

▲ Пусть концы отрезка AB при наложении отображаются в точки A_1 и B_1 соответственно. Тогда $AB=A_1B_1$. Следовательно, наложение не меняет расстояния между точками, т.е. является движением. ■

Теперь докажем обратное утверждение.

Теорема 3. *Любое движение является наложением.*

Рассмотрим произвольное движение, которое треугольник ABC отображает в треугольник $A_1B_1C_1$. Согласно следствию 3 треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны между собой. Следовательно, существует наложение, которое переводит точки A, B и C в точки A_1, B_1 и C_1 соответственно. Теперь нужно показать, что данное движение и определенное нами наложение задают одно и то же преобразование плоскости, т.е. произвольная точка D плоскости и при движении, и при наложении отображается в одну и ту же точку, т.е. в точку D_1.

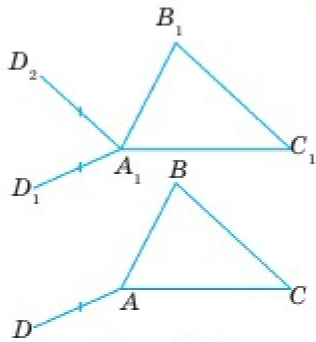


Рис. 2.17

Проведем доказательство методом от противного. Пусть точка D при движении переходит в точку D_1, а при наложении переходит в точку D_2 и пусть точки D_1 и D_2 не совпадают. Так как и движение, и наложение сохраняют расстояние между точками, то из равенств $AD=A_1D_1$, $AD=A_1D_2$ имеем: $A_1D_1=A_1D_2$. Аналогично можно получить равенства $B_1D_1=B_1D_2$ и $C_1D_1=C_1D_2$, т.е. точки A_1, B_1 и C_1 равноудалены от D_1 и D_2 (рис. 2.17). Поэтому каждая из точек A_1 B_1 и C_1 должна лежать на серединном перпендикуляре отрезка D_1D_2. А это невозможно, т.к. вершины треугольника $A_1B_1C_1$ не лежат на одной прямой. Полученное противоречие доказывает, что данное движение и наложение определяют одно и то же преобразование плоскости. ■

1. Какое преобразование называется движением?
2. Докажите, что при движении отрезок отображается в равный себе отрезок.
3. Какой фигурой при движении будет образ: а) прямого угла; б) острого угла; в) треугольника; г) окружности ?
4. Какая связь существует между движением и наложением?

Вырежьте из цветной бумаги равные между собой фигуры.
а) Две из них расположите так, чтобы одна переходила в другую с помощью: 1) центральной симметрии; 2) осевой симметрии; 3) преобразования поворота; 4) параллельного переноса.
б) Как показано на рисунке 2.16, три из них расположите так, чтобы можно было применить: 1) поворот и центральную симметрию; 2) поворот и осевую симметрию; 3) поворот и параллельный перенос; 4) параллельный перенос и осевую симметрию; 5) параллельный перенос и центральную симметрию.

Упражнения

А

2.51. Докажите, что при движении: 1) прямая отображается в прямую; 2) луч – в луч; 3) угол – в равный себе угол; 4) окружность – в равную себе окружность.

2.52. Докажите, что при движении: 1) параллелограмм отображается в параллелограмм; 2) трапеция – в трапецию; 3) ромб – в ромб; 4) прямоугольник – в прямоугольник; 5) квадрат – в квадрат.

3) ▲ Пусть дан ромб $ABCD$ и при некотором движении точки A, B, C и D отображаются в точки A_1, B_1, C_1 и D_1 соответственно. Тогда по теореме 1 верны равенства $AB=A_1B_1$, $BC=B_1C_1$, $CD=C_1D_1$ и $DA=D_1A_1$. Но с другой стороны $AB=BC=CD=DA$, т.к. $ABCD$ ромб. Поэтому также справедливы равенства $A_1B_1=B_1C_1=C_1D_1=D_1A_1$. Следовательно, $A_1B_1C_1D_1$ – есть ромб. Поскольку $AC=A_1C_1$ и $BD=B_1D_1$ (теорема 1), то ромбы $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ равны, т.к. имеют равные диагонали. ■

2.53. Докажите, что: 1) отрезки равной длины; 2) углы с равными градусными мерами; 3) окружности с равными радиусами равны между собой, т.е. совмещаются с помощью некоторого движения.

2.54. Для треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ выполняются равенства $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, $BC=B_1C_1$. Докажите, что найдется единственное движение, отображающее точки A, B, C в точки A_1, B_1, C_1 соответственно.

2.55. Даны параллелограммы $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, удовлетворяющие условиям $AB=A_1B_1$, $AD=A_1D_1$ и $\angle A=\angle A_1$. Покажите, что эти параллелограммы равны между собой, т.е. совмещаются с помощью движения.

2.56. Докажите, что два ромба равны между собой, если равны их диагонали.

2.57. Докажите, что точки пересечения двух окружностей симметричны относительно прямой, соединяющей их центры.

В

2.58. Докажите, что четырехугольник является ромбом, если диагонали четырехугольника являются его осями симметрии.

2.59. Является ли шестиугольник, имеющий центр симметрии, правильным? Обоснуйте ответ.

2.60. Покажите, что прямая, соединяющая середины параллельных хорд, проходит через центр окружности.

2.61. Докажите, что две трапеции равны между собой, если четыре стороны одной трапеции равны соответствующим сторонам другой трапеции.

2.62. Докажите, что число сторон многоугольника четное, если он имеет центр симметрии.

2.63. Две взаимно перпендикулярные прямые проходят через центр квадрата. Докажите, что отрезки этих прямых, ограниченные сторонами квадрата, равны между собой.

C

2.64. В окружность вписан треугольник ABC. Впишите второй треугольник $A_1B_1C_1$ в эту окружность так, чтобы выполнялись условия $AB \perp A_1B_1$, $AC \perp A_1C_1$, $BC \perp B_1C_1$.

2.65. Докажите, что при последовательном применении осевых симметрий относительно прямых l_1 и l_2 получается преобразование параллельного переноса, если $l_1 \parallel l_2$.

2.66. Докажите, что при последовательном применении двух центральных симметрий с центрами в точках O_1 и O_2 получается преобразование параллельного переноса.

2.67. Докажите, что если фигура имеет два разных центра симметрии, то она имеет бесконечно много центров симметрии.

2.68. Даны прямая и две окружности, расположенные по разные ее стороны. Постройте равносторонний треугольник так, чтобы две его вершины лежали на заданных окружностях, а высота, опущенная из третьей вершины, лежала на заданной прямой.

2.69. Дан угол AOB, вершина которого расположена вне листа бумаги, и точка C, расположенная на одной из сторон этого угла. Постройте отрезок, равный OC.

2.70. Даны две пересекающиеся окружности. Постройте отрезок так, чтобы концы лежали на двух заданных окружностях и середина совпала с точкой пересечения окружностей.

2.71. Постройте треугольник по трем медианам.

2.72. В четырехугольнике $ABCD$ углы при вершинах B и D равны, а диагональ BD делит диагональ AC пополам. Докажите, что $ABCD$ – параллелограмм.

2.73. Даны точки A, B и пересекающиеся прямые c, d. Постройте квадрат $ABCD$ так, чтобы вершины C и D лежали на прямых c и d соответственно.

2.4. Преобразование подобия

Изучив материалы данной темы, вы будете:
- знать определение и свойства подобных фигур;
- знать определение и свойства гомотетии;
- строить образы различных фигур при гомотетии.

2.4.1. Понятие преобразования подобия и его свойства

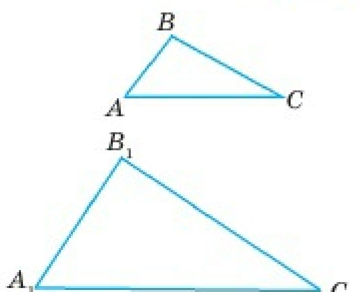


Рис. 2.18

В предыдущих параграфах мы рассмотрели только один из видов преобразования плоскости, т.е. преобразование движения, которое не меняет расстояния между точками. Однако существует множество других разновидностей преобразования плоскости. Например, на рис. 2.18 изображены треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, в которых отношение соответствующих сторон этих треугольников равно 2:

$\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{A_1C_1}{AC}=\frac{B_1C_1}{BC}=2$. Следовательно, можно рассмотреть преобразование плоскости, которое переводит точки A, B, C в точки A_1, B_1, C_1 соответственно. Расстояние между точками меняется в отношении 1:2 (т.е. увеличивается в 2 раза). В этом случае треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ называются ***подобными***, а ***коэффициент подобия*** равен 2.

Определение. ***Если при отображении фигуры Φ в фигуру Φ_1 расстояние между соответствующими точками меняется на одинаковое отношение k, то фигура Φ подобна фигуре Φ_1. Другими словами, если произвольные точки A и B фигуры Φ отображаются соответственно в точки A_1 и B_1 фигуры Φ_1 и выполняется равенство***

$$A_1B_1=k\cdot AB, \tag{1}$$

то фигуры Φ и Φ_1 называются подобными. Здесь число k называется коэффициентом подобия. Очевидно, что $k>0$.

Если $k=1$, то расстояние между соответствующими точками не меняется. Поэтому движение является частным случаем подобия. Коэффициент подобия равен 1.

Если фигура Φ подобна фигуре Φ_1, то этот факт записывается так: $\Phi \backsim \Phi_1$. А если необходимо указать коэффициент подобия, то записывают следующим образом: $\Phi \overset{k}{\backsim} \Phi_1$. Преобразование подобия обладает следующими свойствами.

1) Каждая фигура подобна себе: $\Phi \overset{k}{\backsim} \Phi$; коэффициент подобия равен единице.

2) Если $\Phi_1 \overset{k}{\backsim} \Phi_2$, то $\Phi_2 \overset{\frac{1}{k}}{\backsim} \Phi_1$.

▲ Действительно, если $\Phi_1 \overset{k}{\backsim} \Phi_2$, то для любых точек A_2, $B_2 \in \Phi_2$ найдутся соответствующие им прообразы A_1, $B_1 \in \Phi_1$, такие, что выполняется равенство $A_1B_1=k\cdot A_2B_2$. Отсюда вытекает равенство $A_2B_2=\dfrac{1}{k}A_1B_1$. Следовательно, фигура Φ_2 подобна фигуре Φ_1 с коэффициентом подобия $\dfrac{1}{k}$. ■

3) Если $\Phi \overset{k_1}{\backsim} \Phi_1$ и $\Phi_1 \overset{k_2}{\backsim} \Phi_2$, то $\Phi \overset{k_1\cdot k_2}{\backsim} \Phi_2$.

▲ Если A и B – любые две точки фигуры Φ, то найдутся точки A_1, $B_1 \in \Phi_1$, удовлетворяющие условию

$$A_1B_1=k_1\cdot AB. \tag{2}$$

А поскольку $\Phi_1 \overset{k_2}{\backsim} \Phi_2$, то найдутся точки A_2, $B_2 \in \Phi_2$, удовлетворяющие равенству

$$A_2B_2=k_2\cdot A_1B_1. \tag{3}$$

Из равенств (2) и (3) получим равенство $A_2B_2=k_1\cdot k_2\cdot AB$. Тогда фигура Φ подобна фигуре Φ_2 и коэффициент подобия равен $k_1\cdot k_2$. ■

2.4.2. Гомотетия

Пусть на плоскости зафиксирована точка O и задано положительное число k.

Определение. ***Для любой точки A плоскости на луче OA возьмем точку A_1, удовлетворяющую условию***

$$\frac{OA_1}{OA}=k. \qquad (4)$$

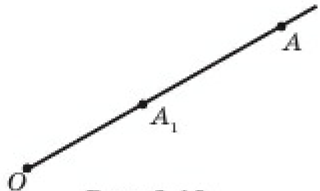


Рис. 2.19

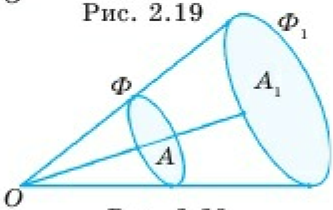


Рис. 2.20

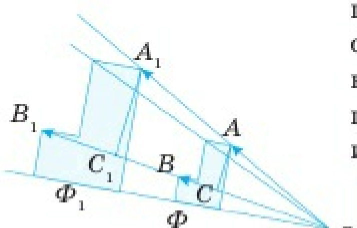


Рис. 2.21

Тогда A_1 называется гомотетичной точкой точке A. Такое преобразование плоскости называется гомотетией. При этом O называется центром, а k – коэффициентом гомотетии (коэффициентом подобия).

На рис. 2.19 изображены гомотетичные точки A и A_1. Так как $OA_1=\frac{1}{3}OA$, то $k=\frac{1}{3}$. Если каждая точка фигуры $Ф$ гомотетична точке фигуры $Ф_1$ относительно точки O, то фигуры $Ф$ и $Ф_1$ называются ***гомотетичными***. Например, для гомотетичных фигур $Ф$ и $Ф_1$, изображенных на рис. 2.20, $k=2$.

Теорема. *Гомотетия является преобразованием подобия.*

▲ Пусть фигуры $Ф$ и $Ф_1$ гомотетичны относительно центра O и коэффициент гомотетии равен k. Для точек A и B фигуры $Ф$ возьмем гомотетичные им точки A_1 и B_1 фигуры $Ф_1$ (рис. 2.21). Так как $\frac{OA_1}{OA}=\frac{OB_1}{OB}=k$, то по свойству пропорциональных отрезков $AB \| A_1B_1$. Из точек A и A_1 опустим соответствующие перпендикуляры AC и A_1C_1 на луч OB. По свойству соответственных углов $\angle OBA=\angle OB_1A_1=\varphi$. Если введем обозначения $\angle AOB=\alpha$, то из прямоугольных треугольников OAC и OA_1C_1 имеем: $AC=OA\sin\alpha$ и $A_1C_1=OA_1\sin\alpha$.

Отсюда $\quad \dfrac{A_1C_1}{AC}=\dfrac{OA_1\sin\alpha}{OA\sin\alpha}=\dfrac{OA_1}{OA}=k.$ (5)

Из прямоугольных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ имеем $AC=AB\sin\varphi$ и $A_1C_1=A_1B_1\sin\varphi$ соответственно. Тогда, учитывая отношения (5), получим:

$$k=\frac{A_1C_1}{AC}=\frac{A_1B_1\sin\varphi}{AB\sin\varphi}=\frac{A_1B_1}{AB}.$$

Поскольку A и B – произвольные точки фигуры Φ, то это значит, что фигуры Φ и Φ_1 подобны, т.е. для соответствующих точек имеем $A_1B_1=k\cdot AB$. ■

Отметим простые свойства гомотетии.

1°. *Гомотетия переводит прямую в параллельную ей прямую, а прямая, проходящая через центр гомотетии, отображается в себя.*

2°. *Гомотетия переводит отрезок в параллельный себе отрезок.*

3°. *Гомотетия переводит угол в равный себе угол, соответствующие стороны которых параллельны.*

4°. *Гомотетия переводит окружность в окружность. Вообще любые две окружности можно рассматривать как гомотетичные. При этом коэффициент подобия равен отношению их радиусов.*

5°. *Если точка A_1 лежит на луче OA, то найдется только одна гомотетия с центром O, отображающая точку A в точку A_1.*

6°. *Любое преобразование подобия можно получить путем последовательного применения движения и гомотетии. При этом коэффициенты подобия, как преобразования подобия, так и гомотетии, равны между собой.*

Например, на рис. 2.22 изображено преобразование подобия треугольника ABC в треугольник $A_1B'C'$. Для того чтобы получить это преобразование, сначала построим гомотетичный треугольнику ABC треугольник $A_1B_1C_1$, затем этот тре угольник повернем около вершины A_1 по часовой стрелке на угол α.

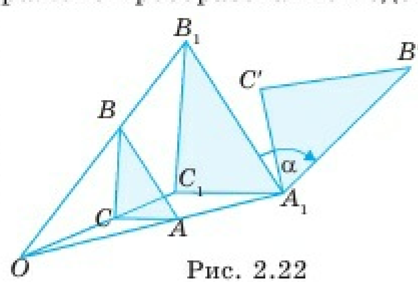


Рис. 2.22

ДОКАЖИТЕ САМОСТОЯТЕЛЬНО

Первые пять приведенных свойств доказываются легко.

Поскольку доказательство свойства 6° выходит за рамки школьной программы, мы опускаем его.

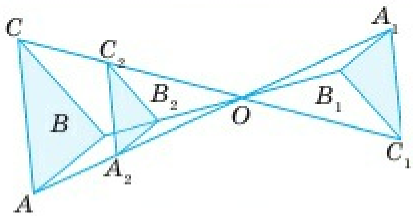


Рис. 2.23

Замечание. По определению гомотетии известно, что точки A и A_2 лежат на луче OA. Теперь точку A_1 возьмем на дополнительном луче к OA и пусть выполняется условие $\frac{OA_1}{OA}=k$ (рис. 2.23). Это преобразование называется иногда ***обратной*** или ***отрицательной гомотетией***. Указанное преобразование мы рассматриваем как обычное преобразование подобия, не присоединяя его к числу гомотетии. Действительно, сначала мы переводим треугольник ABC в гомотетичный ему треугольник $A_2B_2C_2$, затем, применяя к этому треугольнику центральную симметрию, получим треугольник $A_1B_1C_1$.

1. Какие фигуры называются подобными фигурами?
2. Какое число называется коэффициентом подобия?
3. Что вы понимаете под преобразованием подобия?
4. Какие свойства преобразования подобия вы знаете? Сформулируйте их и докажите.
5. Что такое гомотетия? Какие точки называются гомотетичными?
6. Что такое центр гомотетии, коэффициент гомотетии?
7. Докажите, что гомотетия является преобразованием подобия.
8. Сформулируйте свойства гомотетии и докажите их.

1. Возьмите произвольный треугольник и постройте гомотетичный ему треугольник относительно данного центра гомотетии. Выполните задание, приняв: 1) $k=2$; 2) $k=\frac{1}{2}$.
2. Выполните предыдущее задание, заменяя треугольник на квадрат и окружность.

Упражнения

A

2.74. Возможно ли равенство подобных фигур? Приведите пример.

2.75. Найдите k, если для фигур Φ_1 и Φ_2 выполняются соотношения $\Phi_1 \overset{k}{\backsim} \Phi_2$ и $\Phi_2 \overset{k}{\backsim} \Phi_1$.

2.76. Точки A и A_1 гомотетичны с коэффициентом подобия, равным 2. Определите центр гомотетии.

2.77. Постройте фигуры, гомотетичные данной фигуре: 1) окружности; 2) отрезку; 3) треугольнику; 4) четырехугольнику. Центр и коэффициент гомотетии выберите сами.

2.78. Можно ли найти центр гомотетии, если из соответствующих точек: 1) известна только одна пара; 2) известны две пары точек, не лежащих на одной прямой?

2.79. Могут ли быть гомотетичными между собой: 1) две пересекающиеся прямые; 2) два луча, лежащих на пересекающихся прямых?

2.80. Принимая за центр гомотетии одну из вершин данного треугольника, постройте гомотетичный ему треугольник с коэффициентом подобия, равным 2.

B

2.81. Даны точки A, B и C, не лежащие на одной прямой. Постройте фигуру, подобную данной фигуре с коэффициентом подобия, равным: а) 3; б) 0,5.

2.82. Докажите, что две концентрические окружности радиусами, равными 2 и 4, подобны и определите коэффициент подобия.

2.83. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны. Найдите $\angle A_1$ и A_1B_1, если $\angle A=30^\circ$, $AB=1$ м, $BC=2$ м, $B_1C_1=3$ м?

2.84. Докажите, что два равнобедренных треугольника подобны, если углы при вершинах равны.

2.85. У двух равнобедренных треугольников равны углы при вершинах. Основание одного из треугольников равно 8 см. Найдите боковую сторону этого треугольника, если боковая сторона и основание другого треугольника равны 17 см и 10 см соответственно.

2.86. Острые углы двух прямоугольных треугольников равны. Докажите, что эти треугольники подобны.

2.87. Какие данные и какое их количество необходимо задать, чтобы полностью определить гомотетию?

2.88. Даны гомотетичные между собой пары точек A и A_1, B и B_1. Как эти точки расположены между собой? Как определяется центр гомотетии?

2.89. Укажите фигуры, отображающиеся в себя при гомотетии. При этом покажите, как располагается центр гомотетии.

C

2.90. Даны угол и точка A, лежащая внутри этого угла. Постройте окружность, касающуюся сторон угла и проходящую через точку A.

2.91. Впишите квадрат в данный треугольник так, чтобы две его вершины лежали на одной стороне, а другие две — на других сторонах.

2.92. В треугольник с основанием a и высотой h вписан квадрат так, что две вершины лежат на основании треугольника, а две другие — на боковых сторонах. Найдите сторону квадрата.

2.93. В треугольнике ABC на сторонах AB и AC взяты точки D и E соответственно так, что $DE \parallel BC$. Докажите, что окружности, описанные около треугольников ABC и ADE, касаются.

2.94. Две окружности касаются внутренним образом. Секущая, проходящая через точку их касания, пересекает эти окружности в других точках A и B. Докажите, что касательные, проведенные в точках A и B к соответствующим окружностям, параллельны между собой.

2.95. Верно ли утверждение: если два треугольника гомотетичны третьему треугольнику, то эти треугольники гомотетичны между собой?

2.5. Признаки подобия треугольников

Изучив материалы данной темы, вы будете:
- знать и применять признаки подобия треугольников;
- знать и применять признаки подобия прямоугольных треугольников.

2.5.1. Признаки подобия треугольников

Первый признак подобия треугольников. ***Если два угла одного треугольника равны соответствующим двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.***

▲ Пусть даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ такие, что $\angle A=\angle A_1$ и $\angle B=\angle B_1$. Докажем, что эти треугольники подобны.

Предположим, что $\frac{A_1B_1}{AB}=k$. Тогда построим треугольник $A_2B_2C_2$, гомотетичный треугольнику ABC относительно некоторого центра O с коэффициентом подобия, равным k (рис. 2.24). Так как $A_2B_2=k\cdot AB$ и $A_1B_1=k\cdot AB$, то $A_1B_1=A_2B_2$. Из равенств $\angle A_1=\angle A_2$ и $\angle B_1=\angle B_2$ следует, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равны между собой (по стороне и прилежащим к ней углам). Так как треугольники ABC и $A_2B_2C_2$ подобны с коэффициентом подобия k и треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ также подобны с коэффициентом подобия 1, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны с коэффициентом подобия $k=1\cdot k$. ■

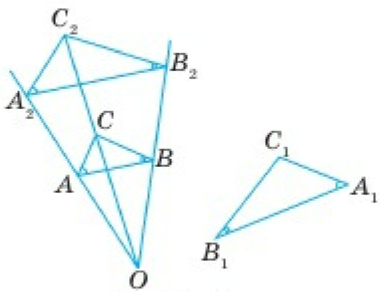


Рис. 2.24

Второй признак подобия треугольников. ***Если две стороны одного треугольника пропорциональны соответствующим двум сторонам другого треугольника и углы между ними равны, то эти треугольники подобны.***

▲ Пусть даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ такие, что $\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{A_1C_1}{AC}$ и $\angle A=\angle A_1$. Покажем, что эти треугольники подобны. Для этого достаточно показать, что $\angle B=\angle B_1$ (по первому признаку подобия треугольников).

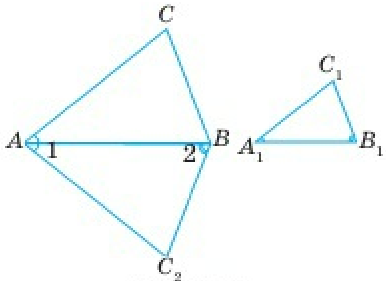


Рис. 2.25

Рассмотрим треугольник ABC_2 такой, что $\angle 1=\angle A_1$, $\angle 2=\angle B_1$ (рис. 2.25). По первому признаку подобия треугольников треугольники ABC_2 и $A_1B_1C_1$ подобны. Поэтому имеет место равенство

$$\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{A_1C_1}{AC_2}.$$

А по условию теоремы $\frac{A_1B_1}{AB}=$ $=\frac{A_1C_1}{AC}$, тогда $AC=AC_2$. Отсюда треугольники ABC и ABC_2 равны (по двум сторонам и углу между ними). Следовательно, $\angle 2=\angle B$, по построению $\angle 2=\angle B_1$, т.е. $\angle B=\angle B_1$.■

Третий признак подобия треугольников. ***Если три стороны одного треугольника пропорциональны соответствующим трем сторонам другого треугольника, то эти треугольники подобны.***

▲ Пусть стороны треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ пропорциональны, т.е.

$$\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{A_1C_1}{AC}=\frac{B_1C_1}{BC}. \qquad (1)$$

Для того чтобы доказать подобие треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, достаточно показать (по второму признаку), что $\angle A=\angle A_1$. Для этого построим треугольник ABC_2, где $\angle 1=$ $=\angle A_1$, $\angle 2=\angle B_1$ (рис. 2.25). По первому признаку подобия треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC_2 подобны. Поэтому выполняются отношения $\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{A_1C_1}{AC_2}=\frac{B_1C_1}{BC_2}$. Сравнивая их с формулой (1), получим, что $AC=AC_2$ и $BC=BC_2$. Тогда треугольники ABC и ABC_2 равны (по трем сторонам), т.е. $\angle A=\angle 1$. Учитывая, что $\angle 1=\angle A_1$, получим равенство $\angle A=\angle A_1$. ■

2.5.2. Признаки подобия прямоугольных треугольников

I признак. ***Если острый угол одного прямоугольного треугольника равен острому углу другого прямоугольного треугольника, то эти прямоугольные треугольники подобны.***

▲ Действительно, если в прямоугольных треугольниках острые углы равны, то и другие острые углы также равны. Поэтому эти прямоугольные треугольники подобны (по первому признаку подобия треугольников). ■

II признак. ***Если два катета прямоугольного треугольника пропорциональны соответствующим двум катетам другого прямоугольного треугольника, то эти прямоугольные треугольники подобны.***

▲ Действительно, так как углы между катетами прямые, то эти углы равны. Отсюда, по второму признаку подобия треугольников эти прямоугольные треугольники подобны. ■

III признак. ***Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника пропорциональны гипотенузе и соответствующему катету другого прямоугольного треугольника, то эти прямоугольные треугольники подобны.***

▲ Действительно, пусть ABC и $A_1B_1C_1$ – прямоугольные треугольники, где $A_1B_1=k \cdot AB$ и $A_1C_1=k \cdot AC$. Так как AB и A_1B_1 – гипотенузы соответствующих треугольников, то

$B_1C_1=\sqrt{A_1B_1^2-A_1C_1^2}=\sqrt{k^2\cdot AB^2-k^2\cdot AC^2}=k\sqrt{AB^2-AC^2}=$ $=k\cdot BC$, т.е. и третьи стороны этих треугольников пропорциональны. Тогда по третьему признаку эти прямоугольные треугольники подобны. ■

1. Сформулируйте и докажите первый признак подобия треугольников и соответствующий признак подобия прямоугольных треугольников.
2. Сформулируйте и докажите второй признак подобия треугольников и соответствующий признак подобия прямоугольных треугольников.
3. Сформулируйте и докажите третий признак подобия треугольников и соответствующий признак подобия прямоугольных треугольников.

Постройте на глаз два подобных треугольника, результат проверьте по: 1) первому признаку; 2) второму признаку; 3) третьему признаку, производя необходимые измерительные работы.

Упражнения

А

2.96. Подобны ли друг другу равносторонние треугольники?

2.97. В заданном треугольнике проведены все средние линии. Покажите среди образованных таким образом треугольников подобные.

2.98. Подобны ли два треугольника, если их стороны равны: 1) 1,2 м, 1,6 м, 2,4 м и 3 см, 4 см, 6 см; 2) 0,5 м, 0,6 м, 1 м и 10 см, 12 см, 15 см; 3) 1 м, 1,5 м, 2 м и 10 см, 15 см, 20 см; 4) 4 м, 40 м, 40 м и 4 см, 40 см, 40 см?

2.99. Покажите истинность или неправильность нижеуказанных предложений: 1) треугольники, соответствующие стороны которых параллельны, являются подобными; 2) треугольники, соответствующие стороны которых перпендикулярны, являются подобными; 3) два равнобедренных треугольника, углы при вершинах которых равны, являются подобными; 4) два равнобедренных треугольника, имеющих равные между собой углы, подобны; 5) два равнобедренных треугольника, углы при основании которых равны, подобны; 6) два прямоугольных равнобедренных треугольника являются подобными; 7) два прямоугольных треугольника, острые углы которых равны, являются подобными; 8) любые два прямоугольных треугольника подобны.

2.100. Подобны ли два прямоугольных треугольника, если острый угол одного прямоугольного треугольника равен 40°, а острый угол другого прямоугольного треугольника равен: 1) 50°; 2) 60°?

2.101. Подобны ли треугольники ABC и DEF, если в этих треугольниках: 1) $\angle A=36°$, $\angle B=34°$, $\angle E=110°$, $\angle F=34°$; 2) $AC=44$ см, $AB=52$ см, $BC=76$ см, $DE=15{,}6$ см, $DF=22$ см, $EF=13{,}2$ см?

2.102. Разделите отрезок AB в отношении: 1) 2:5; 2) 3:7; 3) 4:3.

В

2.103. Докажите, что с помощью прямой, пересекающей две стороны неравнобедренного треугольника и не являющейся параллельной его третьей стороне, можно отсечь треугольник, подобный данному треугольнику.

2.104. Докажите, что отношение периметров подобных треугольников равно отношению их соответствующих сторон.

2.105. Стороны первого треугольника равны 0,8 м, 1,6 м и 2 м, а периметр второго треугольника, подобного данному, равен 5,5 м. Найдите стороны второго треугольника.

2.106. Периметр одного треугольника составляет $\frac{11}{13}$ часть периметра подобного ему треугольника, а разница соответствующих сторон этих треугольников составляет 1 м. Определите эти соответствующие стороны.

2.107. Высота, опущенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, делит ее на отрезки 9 см и 16 см. Найдите стороны треугольника.

2.108. Дан треугольник со сторонами 3,5 см, 4 см и 5 см. Большая сторона подобного ему треугольника равна 6 см. Найдите стороны другого треугольника.

2.109. Стороны данного треугольника равны 15 см, 20 см и 30 см. Найдите стороны подобного ему треугольника, периметр которого равен 26 см.

2.110. Докажите, что отношение высот, опущенных к соответственным сторонам подобных треугольников, равно отношению этих сторон.

2.111. Отрезок BD является биссектрисой треугольника ABC. Найдите AB, если известно, что: 1) $AC=30$, $AD=20$, $BD=16$ и $\angle BDC=\angle C$; 2) $BC=9$, $AD=7{,}5$, $DC=4{,}5$.

2.112. Отрезок AD является биссектрисой треугольника ABC. Найдите отрезки BD и CD, если $AB=14$ см, $BC=20$ см, $AC=21$ см.

2.113. Используя подобие треугольников, найдите высоту: 1) дома (школы); 2) тополя (вышки или столба).

2.114. Постройте прямоугольный треугольник по заданному отношению.

C

2.115. Используя признаки подобия треугольников, докажите, что медианы треугольника в точке их пересечения делятся в отношении 2 : 1, считая от вершины.

2.116. Докажите, что биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.

2.117. Как определить ширину реки, используя подобие треугольников?

2.118. Точка пересечения двух прямых находится за пределами листа бумаги. Укажите способ нахождения расстояния от точки, лежащей на одной из прямых, до недоступной точки пересечения этих прямых.

2.119. Постройте треугольник по двум углам и биссектрисе третьего угла.

2.120. Постройте треугольник по двум углам и высоте, опущенной из вершины третьего угла.

2.121. Постройте треугольник ABC по углу A и медиане AH, если $AB : AC = 2 : 3$.

2.122. Покажите, что биссектриса между сторонами треугольника меньше 12 см, если эти стороны равны 10 см и 15 см.

2.6. Применение признаков подобия треугольников при решении задач. Свойство биссектрисы треугольника

Изучив материалы данной темы, вы будете:
- знать и применять свойство биссектрисы треугольника;
- знать формулу зависимости между площадями фигур и коэффициентом подобия;
- применять признаки подобия треугольников при решении задач.

Теорема 1. *Биссектриса треуголь-ника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.*

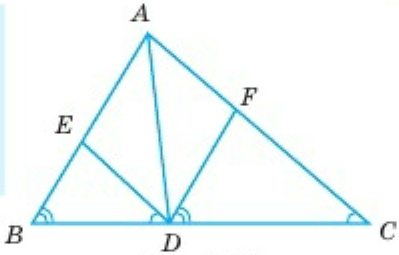


Рис. 2.26

▲ (Смотрите задание 2.116.) Пусть отрезок AD – биссектриса треугольника ABC. Тогда необходимо доказать выполнение равенства $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BD}{CD}$. Для этого проведем через точку D прямые, параллельные сторонам AB и AC треугольника ABC. Построим параллелограмм $AEDF$, являющийся ромбом, поскольку диагональ AD – биссектриса углов A и D (рис. 2.26). Во-вторых, так как соответствующие его стороны параллельны, то треугольники ABC, BED и DFC подобны друг другу. Поэтому получаем равенства $\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{BD}{DE}$ и $\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{DC}{DF}$ или $BC \cdot DE = AC \cdot BD$ и $BC \cdot DF = AB \cdot DC$. Учитывая, что $DE=DF$, получим $AC \cdot BD = AB \cdot DC$. Откуда следует, что $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BD}{CD}$. ■

Пример 1. Впишите квадрат в остроугольный треугольник так, чтобы две вершины его находились на основании треугольника, а две другие вершины — на боковых сторонах треугольника.

▲1. *Анализ.* Пусть необходимый нам квадрат $MNPQ$ построен. Рассматривая точку A в качестве центра гомотетии, несложно построить квадрат $M_1N_1P_1Q_1$, гомотетичный квадрату $MNPQ$. Для чего проведем перпендикуляр M_1N_1 из любой точки стороны AB к стороне AC. На стороне AC возьмем точку Q_1, расположенную между точками M_1 и C так, чтобы выполнялось равенство $M_1Q_1=$

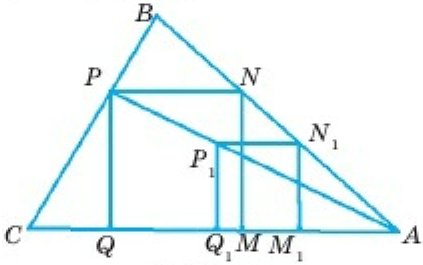


Рис. 2.27

$=M_1N_1$. Наконец, несложно построить точку P_1 так, чтобы $M_1N_1P_1Q_1$ был квадратом (рис. 2.27). В этом построенном квадрате две вершины лежат на стороне AC треугольника ABC, а третья — на боковой стороне AB. Квадраты $M_1N_1P_1Q_1$ и $MNPQ$ гомотетичны относительно центра A. Поэтому, чтобы построить квадрат $MNPQ$, нужно по указанному способу построить квадрат $M_1N_1P_1Q_1$ и достаточно найти точку P, являющуюся точкой пересечения прямой AP_1 и стороны BC. Это одна из вершин необходимого нам квадрата. Теперь нетрудно построить квадрат $MNPQ$ по намеченному плану.

2. *Построение.* По указанному при анализе способу построим квадрат $M_1N_1P_1Q_1$. Обозначив точку пересечения прямой AP_1 и стороны BC точкой P, возьмем точку $Q \in AC$ так, чтобы $PQ \perp AC$. Через N обозначим точку пересечения прямой, проходящей через точку P параллельно AC, чтобы $PN=PQ$. Теперь возьмем точку $M \in AC$ так, чтобы $MN \perp AC$. Тогда $MNPQ$ – необходимый нам квадрат.

3. *Доказательство.* По построению $MNPQ$ – прямоугольник, поскольку три его угла прямые, а точки P_1 и P гомотетичны относительно центра A. Так как $P_1Q_1=N_1P_1$, то $PQ=PN$, т.е. $MNPQ$ – квадрат.

4. *Исследование.* Задача имеет только одно решение. ■

Пример 2. Необходимо построить общую касательную к двум данным окружностям.

▲Здесь мы приведем только указание анализа и исследования, а полное описание решения и выполнение задания предоставим самим учащимся. Пусть даны окружности с разными радиусами (рис. 2.28). Эти окружности гомотетичны, и центр гомотетии лежит на прямой O_1O. Если в первой окружности возьмем радиус OA, то гомотетичный ему радиус O_1A_1 удовлетворяет условию $OA \| O_1A_1$. Если проведем прямую AA_1, то она пересекается с прямой OO_1 в центре гомотетии P. Во-

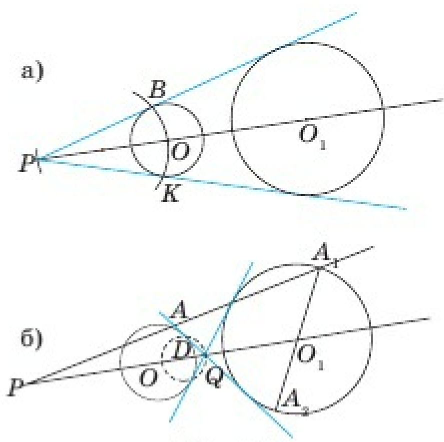


Рис. 2.28

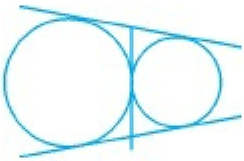


Рис. 2.29

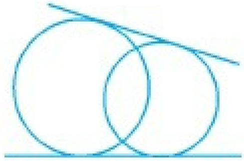


Рис. 2.30

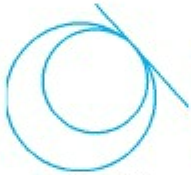


Рис. 2.31

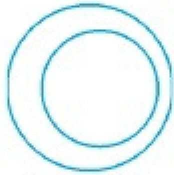


Рис. 2.32

вторых, если PB и PK – общие касательные к окружности, то PBO и PKO – прямоугольные треугольники, равные между собой. Тогда точки P, B, O, K лежат на одной окружности, центром которой является точка C, расположенная на середине гипотенузы PO. Таким образом, если провести окружность с центром в точке C и радиусом, равным CP, то эта окружность пересекает данную окружность (окружность с центром O) в точках B и K. Тогда прямые PB и PK –общие касательные к окружностям (рис. 2.28 (*а*)).

Аналогично, если взять точку A_2, дополняющую радиус O_1A_1 до диаметра, то точки A и A_2 обратно гомотетичны. Его центром является точка пересечения Q отрезков AA_2 и OO_1. Тогда окружность с центром D, являющимся серединой отрезка OQ, и радиусом, равным DO, пересекает первую окружность в двух точках. Соединяя эти образованные точки с точкой Q, получим общие касательные к данным окружностям (рис. 2.28 (*б*)).

Как показано на рис. 2.28, имеются четыре общие касательные к окружностям. Если окружности касаются внешним образом, то у них имеются три общие касательные (рис. 2.29). У пересекающихся окружностей имеются две общие касательные (рис. 2.30). У окружностей, касающихся друг друга внутренним образом, только одна общая касательная (рис. 2.31). У окружностей, находящихся внутри друг друга, нет общих касательных (рис. 2.32).

1. Обоснуйте и докажите свойства биссектрис треугольника.
2. Из скольких этапов состоят задачи на построение? Раскройте цель и содержание этих уровней.

РАБОТА В ГРУППЕ

На примерах треугольника и прямоугольника покажите, что отношение площадей подобных фигур с коэффициентом подобия k равна k^2 : $F_1 \overset{k}{\sim} F_2 \Rightarrow \dfrac{S(F_1)}{S(F_2)} = k^2$.

Упражнения

А

2.123. Отрезок BD — биссектриса треугольника ABC. Найдите: 1) отрезки AD и DC, если: $AB=10$ м, $BC=15$ м, $AC=20$ м; 2) сторону BC, если $AD:DC=8:5$ и $AB=16$ м; 3) сторону AC, если $AB:BC=2:7$ и $DC-AD=1$ м.

2.124. Вершины D, E, F ромба $ADEF$, вписанного в треугольник ABC, лежат на сторонах AB, BC, AC соответственно. Найдите отрезки BE и EC, если $AB=14$ см, $BC=12$ см и $AC=10$ см.

2.125. Стороны треугольника 51 см, 85 см и 104 см. Центр окружности, касающейся двух меньших сторон треугольника, лежит на его большей стороне. На какие части делит этот центр большую сторону треугольника?

2.126. Отрезки $AB=15$ м, $AC=21$ м и $BC=24$ м являются хордами окружности. Точка D – середина дуги CB. На какие части прямая AD делит хорду BC?

2.127. Проведите к окружностям с разными радиусами общие касательные, когда: 1) окружности не пересекаются; 2) окружности касаются внешним образом; 3) окружности пересекаются в двух точках.

B

2.128. Биссектриса CC_1 треугольника ABC делит сторону AB на отрезки $AC_1=m$, $BC_1=n$. Докажите, что $m=\dfrac{bc}{a+b}$, $n=\dfrac{ac}{a+b}$, если $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$.

2.129. Сумма двух сторон треугольника равна 14 единиц, а третью сторону его биссектриса делит на отрезки, равные 3 и 4. Найдите стороны треугольника.

2.130. Высота равнобедренного треугольника равна 20 см, а отношение основания к боковой стороне равно 4:3. Найдите радиус вписанной окружности.

2.131. Центр вписанной в равнобедренный треугольник окружности делит высоту треугольника в отношении 12:5, боковая сторона равна 60 см. Найдите основание.

2.132. В прямоугольнике $ABCD$ точки E и F — середины сторон AD и BC соответственно. Найдите отношение $AB:AD$, если треугольники ABC и AEF подобны.

C

2.133. Стороны треугольника ABC равны a, b и c. В каком отношении делит центр вписанной в треугольник окружности биссектрису AA_1?

2.134. Докажите, что выполняется равенство $b:2p=B_1O:B_1B$, если BB_1 – биссектриса треугольника ABC, точка O – центр вписанной окружности, $AC=b$ и p – его полупериметр.

2.135. Постройте ромб по отношению диагоналей и стороне.

2.136. Постройте квадрат так, чтобы его вершины лежали на сторонах данного ромба.

2.137. Постройте параллелограмм по отношению диагоналей, углу между диагоналями и длине одной из сторон.

Название терминов на трех языках

На русском языке	На казахском языке	На английском языке
Центральная симметрия; центр симметрии	Центрлік симметрия; симметрия центрі	Central symmetry; centre of symmetry
Осевая симметрия; ось симметрии	Өстік симметрия; симметрия өсі	Axis symmetry; axis of symmetry
Параллельный перенос	Параллель көшіру	Translation (parallel transfer)
Преобразование поворота	Бұру түрлендіруі	Conversion of rotation
Движение	Қозғалыс	Motion
Композиция движений	Қозғалыстар композициясы	Composition of motion
Гомотетия	Гомотетия	Homothety
Центр гомотетии	Гомотетия центрі	Centre of homothety
Преобразование подобия	Ұқсастық түрлендіруі	Conversion of similarity
Признаки подобия треугольников	Үшбұрыштардың ұқсастық белгілері	Features of triangles'similarity

Раздел 3. РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

3.1. Теоремы косинусов и синусов.
3.2. Решение треугольников.
3.3. Применение тригонометрии в решении треугольников.

3.1. Теоремы косинусов и синусов

Изучив материалы данной темы, вы будете:
- знать и применять теорему косинусов;
- знать и применять теорему синусов;
- определять радиусы описанной около треугольника окружности, вписанной в треугольник окружности.

3.1.1. Теорема косинусов

Теорема 1. (Теорема косинусов.) *Если a, b и c являются сторонами треугольника ABC, противолежащими соответственно углам A, B, C, то верны равенства:*

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2b\cdot c\cdot\cos\angle A,\\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2a\cdot c\cdot\cos\angle B, \qquad (1)\\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2a\cdot b\cdot\cos\angle C, \end{aligned}$$

т.е. квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними.

▲ Достаточно доказать одну из формул (1). Другие доказываются аналогично.

Пусть в треугольнике ABC $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ (рис. 3.1).

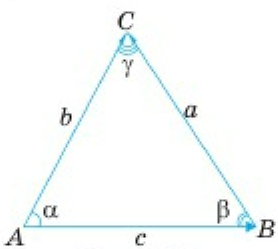


Рис. 3.1

Так как $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, то

$a^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - 2\cdot\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = b^2 + c^2 - 2\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\times$ $\times\cos A = b^2 + c^2 - 2bc\cos\angle A$. ■

Пример 1. Найдите высоту CD треугольника ABC по заданным сторонам a, b, c.

▲ Пусть треугольник ADC – прямоугольный ($\angle ADC = 90°$) с острым углом A (рис. 3.2,а). Тогда $AD = AC\cdot\cos\angle A = b\cdot\cos\angle A$ и по теореме Пифагора $CD = \sqrt{AC^2 - AD^2}$. Из первого равенства формулы (1) имеем:

$$b \cdot \cos\angle A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}.$$

Следовательно, $AD = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$.

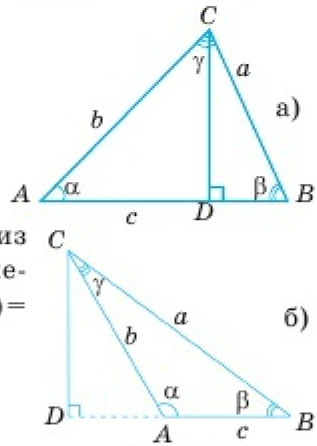


Рис. 3.2

Если угол A тупой (рис. 3.2, б), то из прямоугольного треугольника ADC имеем: $AD = AC \cdot \cos\angle CAD = AC \cdot \cos(180^\circ - \angle A) = -b \cdot \cos\angle A$.

Значит,

$$AD = -\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}.$$

Итак, в зависимости от величины угла A (острый или тупой), верно равенство

$$AD = \pm\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}.$$

Если угол A острый, то берется знак «+», а если угол A тупой, то берется знак «–».

Следовательно, $CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{b^2 - \left(\dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right)^2}$. ■ (2)

Теорема 2. *Если квадрат одной из сторон треугольника: а) меньше; б) равен; в) больше суммы квадратов других сторон, то угол, лежащий против этой стороны, соответственно: а) острый; б) прямой; в) тупой.*

▲ Пусть в треугольнике ABC дано $\angle A = \alpha$, $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Тогда по теореме косинусов

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha. \qquad (1)$$

а) Если $a^2 < b^2 + c^2$, то из равенства (1) следует, что $2bc \cdot \cos\alpha > 0$, или $\cos\alpha > 0$, т.е. угол $\alpha < 90$ (острый).

б) Если $a^2 = b^2 + c^2$, то из равенства (1) следует, что

$2bc \cdot \cos\alpha = 0$, или $\cos\alpha = 0$, т.е. угол $\alpha = 90^\circ$ (прямой).

в) Если $a^2 > b^2 + c^2$, то из равенства (1) следует, что $2bc \cdot \cos\alpha < 0$, или $\cos\alpha < 0$, т.е. угол $\alpha > 90^\circ$ (тупой). ■

3.1.2. Теорема синусов

Теорема 3. (Теорема синусов.) *Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов, т.е. если углы A, B, C, противолежащие сторонам a, b, c, соответственно равны α, β, γ, то верно равенство*

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}. \qquad (3)$$

▲ Рассмотрим высоту треугольника ABC, опущенную из вершины C. Пусть $\alpha>\beta$. Если угол α острый, то $CD=b\cdot\sin\alpha$ (рис. 3.3), а если угол α тупой, то $CD=b\cdot\sin(180°-\alpha)=$ $=b\sin\alpha$ (рис. 3.4). Так как угол β острый (треугольник не может иметь два тупых угла), то $CD=a\sin\beta$. Итак, $b\sin\alpha=a\sin\beta$, или

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}. \qquad (4)$$

Аналогично, рассматривая высоту треугольника ABC, опущенную из вершины B, получим:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{c}{\sin\gamma}. \qquad (5)$$

Из равенств (4), (5) получим формулу (3). ■

Пример 2. Если R – радиус окружности, описанной около треугольника ABC, то покажем справедливость формулы

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R. \qquad (6)$$

▲ Если в $\triangle ABC$ $\angle BAC=\alpha$ и $AC=b$, $AB=c$, то $S_\triangle=\frac{1}{2}b\cdot c\cdot\sin\alpha$. Пусть R – радиус окружности, описанной около треугольника ABC и $BC=a$, то верно равенство (см. стр 5) $R=\frac{abc}{4S_\triangle}$. Отсюда $2R=\frac{abc}{2S_\triangle}=\frac{abc}{bc\cdot\sin\alpha}=\frac{a}{\sin\alpha}$. Тогда $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$. ■

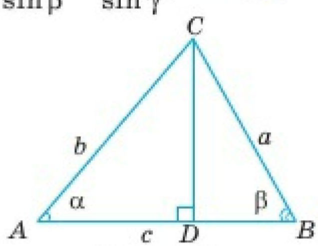


Рис. 3.3

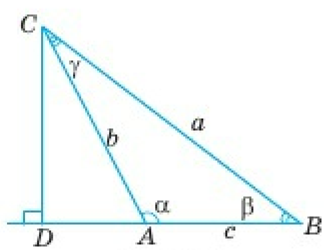


Рис. 3.4

Если в треугольнике ABC $\angle C = \gamma$, $BC = a$, $AC = b$ и $AB = c$, то по теореме косинусов

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Отсюда, если $\gamma = 90°$ и $\cos\gamma = \cos 90° = 0$, то получим равенство $c^2 = a^2 + b^2$, т.е. мы привели еще одно доказательство теоремы Пифагора. Отсюда следует, что теорема Пифагора является частным случаем теоремы косинусов. Поэтому, иногда теорему косинусов называют обобщением теоремы Пифагора.

1. Докажите теорему косинусов. Почему ее называют обобщением теоремы Пифагора?
2. Как найти высоту треугольника, зная длину всех его сторон?
3. Докажите теорему синусов.
4. Как найти диаметр описанной окружности, зная угол и противолежащую сторону?

МАТЕРИАЛЫ ИЗ ИСТОРИИ

На протяжении двух тысяч лет «Начала» Евклида были базовыми учебными пособиями по геометрии. Эти труды были опубликованы в 300 году до н.э. и внесли большой вклад в развитие математики.

Упражнения

A

3.1. Стороны треугольника равны 3 м, 4 м и 5 м. Найдите косинусы его углов.

3.2. Найдите угол B, если в треугольнике ABC $\angle A = 30°$, $AC = 2$ см, $BC = \sqrt{2}$ см.

3.3. В треугольнике даны стороны a, b и угол γ между ними. Найдите третью сторону c этого треугольника, если:

1) $a=3$ м, $b=5$ м, $\gamma=30°$; 2) $a=2\sqrt{2}$ м, $b=3$ м, $\gamma=45°$; 3) $a=8$ см, $b=3\sqrt{3}$ см, $\gamma=120°$; 4) $a=4$ см, $b=7$ см, $\gamma=60°$.

3.4. Две стороны треугольника равны 5 см и 7 см, а угол, противолежащий третьей стороне, равен $45°$. Найдите третью сторону треугольника.

3.5. Сторона треугольника равна $5\sqrt{3}$ м, а прилежащие к ней углы $45°$ и $75°$. Найдите радиус описанной около этого треугольника окружности.

3.6. Площадь треугольника равна 44 см². Найдите угол треугольника, заключенный между его сторонами, равными 8 см и 11 см.

3.7. Стороны параллелограмма равны 4 см и $2\sqrt{3}$ см, а его площадь равна 12 см². Найдите острый угол параллелограмма.

3.8. В треугольнике даны стороны a, b и угол α, противолежащий стороне a. Найдите угол β, противолежащий стороне b, если: 1) $a=3$ м, $b=5$ м, $\alpha=30°$; 2) $a=8$ м, $b=7$ м, $\alpha=60°$; 3) $a=2\sqrt{2}$ см, $b=3$ см, $\alpha=45°$; 4) $a=6$ см, $b=2\sqrt{3}$ см, $\alpha=120°$.

3.9. Найдите длину высоты CD и площадь треугольника ABC, если: 1) $AB=2$ см, $AC=7$ см, $BC=6$ см; 2) $AB=4$ см, $AC=6$ см, $BC=5$ см; 3) $AB=0{,}3$ м, $AC=0{,}4$ м, $BC=0{,}6$ м; 4) $AB=13$ дм, $AC=12$ дм, $BC=5$ дм.

3.10. Найдите по стороне a и углу α, противолежащему этой стороне, радиус окружности, описанной около данного треугольника, если: 1) $a=5$ м, $\alpha=30°$; 2) $a=3\sqrt{2}$ см, $\alpha=45°$; 3) $a=0{,}6$ дм, $\alpha=150°$; 4) $a=21$ см, $\alpha=60°$.

B

3.11. Найдите неизвестные элементы треугольника ABC, если: 1) $a=3$, $c=2$, $\angle B=60°$; 2) $b=3$, $c=4$, $\angle A=135°$; 3) $a=2{,}4$, $b=1{,}3$, $\angle C=30°$; 4) $a=0{,}15$, $b=0{,}62$, $\angle B=150°$; 5) $a=4$, $b=5$, $c=6$; 6) $a=12$,

$b=5$, $c=13$; 7) $a=24,6$, $\angle B=45°$, $\angle C=70°$; 8) $a=16$, $b=10$, $\angle A=80°$; 9) $c=14$, $\angle A=60°$, $\angle B=40°$; 10) $b=4,5$, $\angle A=30°$, $\angle C=75°$.

3.12. Найдите угол C треугольника ABC, если $BC=a$, $AC=b$, а его площадь равна S. Решите эту задачу, если:
1) $a=7$, $b=8$, $S=14$; 2) $a=12$, $b=5\sqrt{3}$, $S=45$.

3.13. Диагонали параллелограмма равны d_1 и d_2, а меньшая сторона равна a. Найдите угол между его диагоналями. Решите задачу при: 1) $d_1 = 10$ см, $d_2 = 12$ см, $a = \sqrt{31}$ см; 2) $d_1 = 4$ м, $d_2 = 2\sqrt{3}$ м, $a = 1$м.

3.14. Две стороны остроугольного треугольника равны 6 см и 8 см, а синус угла между ними 0,6. Найдите синус двух других его углов и третью сторону.

3.15. В треугольнике ABC углы A и C равны 45° и 30° соответственно, а высота $AD = 3$ м. Найдите стороны треугольника.

3.16. В равнобедренной трапеции меньшее основание равно боковой стороне, большая сторона 10 см, а угол при основании 70°. Найдите периметр трапеции.

3.17. Угол между ножками циркуля, расстояние между которыми 10 см, равен 30°. Найдите угол между ножками циркуля, если расстояние между ними равно 20 см.

3.18. Определите вид треугольника, если стороны треугольника равны: 1) 5, 4 и 4; 2) 17, 8 и 15; 3) 9, 5 и 6.

3.19. Стороны треугольника равны a, b, c. Докажите, что если:
1) $a^2 + b^2 > c^2$, то угол, противолежащий стороне c, острый;
2) $a^2 + b^2 = c^2$, то угол, противолежащий стороне c, прямой;
3) $a^2 + b^2 < c^2$, то угол, противолежащий стороне c, тупой.

3.20. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами 5 м, 6 м и 7 м.

3.21. Как найти стороны параллелограмма, если известны его диагонали и угол между ними?

C

3.22. Докажите, что против тупого угла лежит наибольшая сторона треугольника.

3.23. Найдите высоту дерева по данным на рисунке 3.5, если $BC = a$.

3.24. Найдите H по данным на рисунке 3.6.

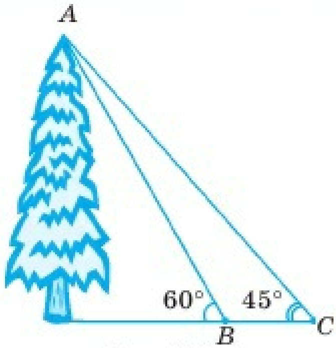


Рис. 3.5

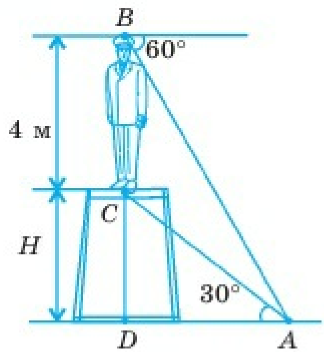


Рис. 3.6

3.25. Углы, прилежащие к стороне a, равны α и β. Найдите биссектрисы треугольника.

3.26. Отрезки $A_1A_2=d_1$, $A_2A_3=d_2$ и точки A_1, A_2, A_3 лежат на одной прямой. Из точки K эти отрезки видны под углом φ. Найдите длины отрезков A_1K, A_2K, A_3K.

3.27. Покажите, что в треугольнике со сторонами a, b, c высоту, опущенную на сторону c, можно найти по формуле

$$h_c = \frac{2S}{c}.$$

Пользуйтесь только формулой (2).

3.28. Покажите, что в треугольнике со сторонами a, b, c радиус вписанной в него окружности можно найти по формуле

$$r = \frac{S}{p},$$

где $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

3.29. В треугольнике ABC проведена медиана CD. Докажите, что если $AC > BC$, то $\angle ACD < \angle BCD$.

3.30. Как, пользуясь теоремой синусов, найти расстояние между пунктами A и B, находящимися по разные стороны реки?

3.31.* Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке O. Докажите, что радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC, AOB, AOC, BOC, равны между собой.

3.2. Решение треугольников

Изучив материалы данной темы, вы будете:
- знать понятие решения треугольников;
- выводить формулу площади треугольника по сторонам и радиусу описанной окружности;
- выводить формулу площади описанного многоугольника по его полупериметру и радиусу вписанной в него окружности.

Нахождение всех сторон и углов треугольника по заданным элементам называют решением треугольника. Теперь рассмотрим несколько примеров. Углы треугольника, противолежащие сторонам a, b, c, обозначим через $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ соответственно.

Пример 1. Дано c, $\angle A$ и $\angle B$. Найдем две другие стороны треугольника и третий угол.

▲ $\angle C=180^\circ-\angle A-\angle B$. Тогда по теореме синусов

$$\frac{a}{\sin\angle A}=\frac{c}{\sin\angle C} \text{ и } \frac{b}{\sin\angle B}=\frac{c}{\sin\angle C}. \text{ Отсюда } a=\frac{c\cdot\sin\angle A}{\sin\angle C}, b=\frac{c\cdot\sin\angle B}{\sin\angle C}. \blacksquare$$

Пример 2. Даны стороны треугольника a, b, c. Найдем его углы.

▲ По теореме косинусов имеем:

$$\cos\angle A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\ \cos\angle B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac},\ \cos\angle C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

Тогда по четырехзначным таблицам можно найти приближенные значения углов A, B, C. ■

Пример 3. Найдем расстояние между двумя точками, расположенными в недоступном для измерительных работ месте.

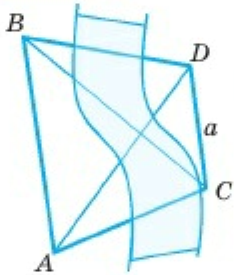


Рис. 3.7

▲ Найдем расстояние между точками A и B, находясь на другой стороне реки (рис. 3.7). Но на противоположной стороне реки можно проводить следующие измерительные работы: $CD=a$, $\angle ACD=\alpha$, $\angle ADC=\beta$, $\angle BCD=\gamma$ и $\angle BDC=\varphi$. Тогда $\angle CAD=180^\circ-\alpha-\beta$, $\angle CBD=180^\circ-\gamma-\varphi$ и по теореме синусов имеем:

$$\frac{AC}{\sin\beta}=\frac{a}{\sin(180^\circ-\alpha-\beta)}=\frac{a}{\sin(\alpha+\beta)}$$ или

$AC=\dfrac{a\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. Аналогично из $\triangle BCD$ имеем:

$$\frac{BC}{\sin\varphi}=\frac{a}{\sin(180^\circ-\gamma-\varphi)}=\frac{a}{\sin(\gamma+\varphi)},\text{ или } BC=\frac{a\cdot\sin\varphi}{\sin(\gamma+\varphi)}.$$

В треугольнике ABC $\angle ACB=\alpha-\gamma$. Тогда по теореме косинусов получим:

$AB^2=AC^2+BC^2-2\cdot AC\cdot BC\cdot\cos(\alpha-\gamma)$.

Теперь найдем расстояние между точками A и B:

$$AB=\sqrt{\frac{a^2\sin^2\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)}+\frac{a^2\sin^2\varphi}{\sin^2(\gamma+\varphi)}-2\cdot\frac{a^2\sin\beta\sin\varphi\cos(\alpha-\gamma)}{\sin(\alpha+\beta)\sin(\gamma+\varphi)}}.$$ ■

РАБОТА В ГРУППЕ

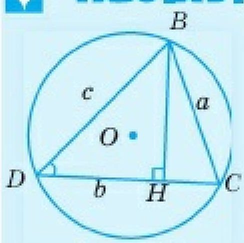


Рис. 3.8

Задание группы 1. Покажите, что площадь треугольника со сторонами a, b, c и радиусом R описанной около него окружности (рис. 3.8) вычисляется по формуле

$$S=\frac{abc}{4R}.$$

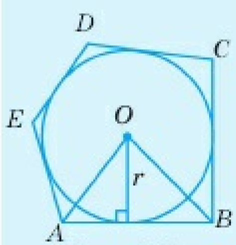


Рис. 3.9

Задание группы 2. Покажите, что площадь многоугольника, описанного около окружности радиусом r (рис. 3.9), вычисляется по формуле $S=r\cdot p$, где p – полупериметр многоугольника.

Указание. 1) Выразите высоту BH через сторону c и угол α, затем воспользуйтесь формулой $\dfrac{a}{\sin\alpha}=2R$.

2) Соедините вершины многоугольника с центром окружности, вписанной в него, и найдите площади каждого из полученных треугольников.

1. Что такое решение треугольника?
2. Какие теоремы применяются при решении треугольника?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА

Пользуясь методом, показанным на рис. 3.5, вычислите высоту: 1) школы; 2) столба.

Упражнения

А

3.32. В треугольнике ABC $\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$, $\angle C=\gamma$, $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$. Найдите неизвестные элементы треугольника, если:[1]

1) $a=5$, $\alpha=60°$, $\beta=40°$;
2) $b=4{,}56$, $\alpha=30°$, $\gamma=75°$;
3) $c=14$, $\beta=45°$, $\gamma=70°$;
4) $a=12$, $b=8$, $\gamma=60°$;
5) $b=9$, $c=17$, $\alpha=80°$;
6) $a=7$, $c=10$, $\beta=120°$;
7) $a=2$, $b=3$, $c=4$;
8) $a=4$, $b=10$, $c=7$.

3.33. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника, стороны которого равны 5 м, 4 м и 3 м.

3.34. Стороны параллелограмма равны a и b, а острый угол равен α. Найдите диагонали параллелограмма, если:

1) $a=3$ м, $b=2$ м, $\alpha=30°$;
2) $a=0{,}8$ м, $b=0{,}5$ м, $\alpha=45°$;
3) $a=\frac{3}{4}$ м, $b=\frac{5}{4}$ м, $\alpha=60°$.

3.35. Диагонали параллелограмма равны c и d, а угол между ними α. Найдите стороны параллелограмма, если:

1) $c=5$ м, $d=6$ м, $\alpha=60°$;
2) $c=22$ см, $d=14$ см, $\alpha=30°$;
3) $c=0{,}5$ м, $d=1{,}5$ м, $\alpha=120°$;
4) $c=\frac{4}{3}$ м, $d=\frac{3}{4}$ м, $\alpha=45°$.

3.36. Найдите сторону AC и площадь треугольника ABC,

1) Здесь и далее, если специально не оговорено, то фразу «найти угол» нужно понимать как найти косинус или синус этого угла.

если сторона $AB=12$ см, а прилежащие к ней углы $\angle A=75°$, $\angle B=60°$.

3.37. Найдите AC и BC, если $S_{ABC}=120$ см^2, $\angle A=30°$, $AB=$ $=75$ см.

3.38. Даны одна сторона и два угла треугольника. Найдите его третий угол, остальные две стороны и площадь, если: 1) $BC=8$ см, $\angle B=30°$, $\angle C=45°$; 2) $AB=5$ см, $\angle A=75°$, $\angle C=45°$; 3) $AC=12$ см, $\angle B=40°$, $\angle C=120°$; 4) $BC=20$ см, $\angle B=30°$, $\angle C=120°$.

3.39. Даны три стороны треугольника. Найдите его углы и площадь, если: 1) $a=2$ см, $b=4$ см, $c=5$ см; 2) $a=3$ м, $b=4$ м, $c=5$ м; 3) $a=7$ дм, $b=3$ дм, $c=8$ дм; 4) $a=15$ см, $b=24$ см, $c=18$ см.

3.40. Найдите решение треугольника, если даны две стороны и угол, противолежащий одной из них: 1) $a=4$ см, $b=5$ см, $\alpha=60°$;
2) $b=7$ см, $c=3\sqrt{2}$ см, $\gamma=45°$; 3) $a=4\sqrt{3}$ м, $c=4$ м, $\alpha=120°$;
4) $a=8$ дм, $b=5$ дм, $\beta=30°$.

3.41. В параллелограмме стороны равны 4 см и 6 см, а острый угол равен 45°. Найдите его меньшую диагональ.

B

3.42. Стороны треугольника равны 4 см, 5 см и 6 см. Найдите проекции двух сторон треугольника на его большую сторону.

3.43. Даны две стороны треугольника и угол между ними. Найдите третью сторону и площадь треугольника, если:

1) $a=3$ см, $b=8$ см, $\gamma=30°$; 2) $a=6$ см, $c=4$ см, $\beta=60°$;

3) $b=\dfrac{4}{3}$ м, $c= =\dfrac{3}{4}$ м, $\alpha=45°$; 4) $a=0{,}6$ м, $b=0{,}8$ м, $\gamma=120°$.

3.44. Найдите все высоты треугольника, если его стороны равны 5 см, 6 см и 7 см.

3.45. Две равные силы, образующие между собой угол 72°, приложены к одной точке. Равнодействующая им сила равна 120 Н. Определите величину этих сил.

3.46. Силы величиной 100 Н и 200 Н, образующие между собой угол 50°, приложены к одной точке. Найдите величину равнодействующей силы и углы, образованные этой силой с исходными силами.

3.47. Две стороны треугольника равны $\sqrt{13}$ и $\sqrt{10}$, а третья сторона – высоте, опущенной к ней. Найдите третью сторону треугольника.

3.48. Одна из диагоналей ромба, равная 20 см, образует со стороной угол 20°. Найдите сторону и другую диагональ ромба.

3.49. Как найти расстояние между точками A и C, если $AB=a$, $\angle BAC=\alpha$, $\angle ABC=\beta$ (рис. 3.10)?

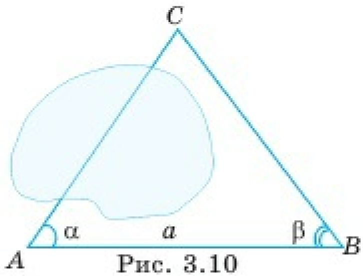


Рис. 3.10

3.50. Найдите радиус окружности, вписанной в ромб со стороной a и острым углом α.

3.51. В трапеции основания равны 14 м и 19 м, а боковые стороны – 6 м и 8 м. Найдите углы трапеции.

3.52. В параллелограмме одна из диагоналей, равная 18 см, образует со сторонами углы 20° и 40°. Найдите стороны параллелограмма.

C

3.53. В треугольнике две стороны равны 5 м и 6 м, а косинус угла между ними 0,6. Найдите медианы треугольника.

3.54. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD. Докажите, что выполняется равенство $AB : AC = BD : CD$.

3.55. Определите биссектрисы треугольника, стороны которого равны a, b, c.

3.56. Найдите третью сторону остроугольного треугольника, если медианы, опущенные к сторонам a и b, взаимно перпендикулярны.

3.57. Найдите стороны прямоугольного треугольника по периметру $2p$ и высоте h_c, опущенной к гипотенузе.

3.58. В треугольнике ABC угол A в два раза больше угла B и $AB=c$, $AC=b$. Найдите сторону BC.

3.59. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD, равная 12,5 см. Найдите стороны треугольника, если $\angle A=120^\circ$, $AC=20$ см.

3.60. В равнобокой трапеции основания равны 12 см и 16 см, а центр описанной около нее окружности лежит на большем основании. Найдите боковую сторону и диагональ трапеции.

3.61. В треугольнике ABC проведены высота AH, биссектриса AD и медиана AE. Докажите, что выполняется неравенство $AH\leqslant AD\leqslant AE$.

3.62. В треугольнике ABC разность углов A и B равна φ. Высота, опущенная из вершины C, равна разности BC и AC. Найдите углы треугольника.

3.3. Применение тригонометрии

Изучив материалы данной темы, вы будете:

- анализировать условия геометрической задачи;
- применять теоремы косинусов и синусов при решении прикладных задач;
- строить правильные многоугольники.

3.3.1. Применение тригонометрии в решении треугольников

(*тема предназначена для классов с углубленным изучением математики*)

В предыдущем параграфе мы видели, что при решении треугольников с помощью теорем синусов и косинусов важное место занимают элементы тригонометрии. Теперь на примерах покажем, что элементы тригонометрии применяются при решении более сложных задач планиметрии. Для одаренных учеников и тех, кто желает самостоятельно расширить свои знания по математике, здесь содержатся задачи повышенной трудности. Решение таких задач имеет ряд специфических особенностей, и каждая задача не решается сразу по готовой формуле или с помощью некоторого алгоритма. Поэтому определение путей и способов решения геометрических задач (вообще сложных задач) надо начинать с анализа условий задач. При анализе сначала нужно выделить все факты и сведения об объектах, заданных в условиях задачи, а затем установить механизм их связи со свойствами объектов, которые подлежат нахождению, определению или доказательству и при этом по необходимости определяют форму нужного рисунка. После чего нужно построить намеченный рисунок и по этому рисунку вкратце записать условие задачи. На следующем этапе, системно выполняя намеченные при анализе действия, следует записывать ответ задачи. Разумеется, это лишь общая схема решения задач. Теперь ее рассмотрим на примерах.

Пример 1. В равнобедренном треугольнике, в который вписана окружность, угол при основании равен α. Высота, опущенная на основание треугольника, на a больше радиуса вписанной окружности. Найдите основание треугольника и радиус описанной около него окружности.

▲ Сначала проведем анализ условия задачи. Обычно процесс анализа проводится устно.

Итак, равнобедренный треугольник задан углом при основании α и разностью a между высотой, опущенной на основание, и радиусом вписанной в треугольник окружности. Из этих данных можно получить следующие сведения:

1) по углу α при основании мы можем определить все углы треугольника;

2) известно, что центр окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, лежит на высоте, опущенной к основанию, и что точка касания этой окружности с основанием треугольника совпадает с основанием данной высоты.

По этим фактам нужно построить необходимый рисунок и продолжить анализ по построенному чертежу (рис. 3.11). На рисунке BD – высота,

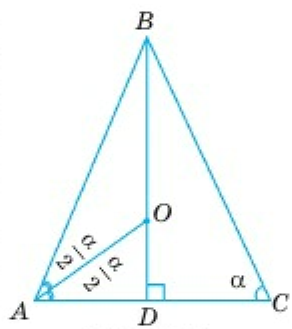


Рис. 3.11

O – центр вписанной окружности (точка пересечения биссектрис треугольника). Тогда OD является радиусом вписанной окружности. Следовательно, $BD - OD = BO = a$.

Теперь составим план решения задачи. Для того чтобы найти основание AC, достаточно определить AD (так как $AD = DC$). Однако не существует формулы, позволяющей сходу определить AD через α и $BO = a$. Мы смогли бы найти длину AD из прямоугольного треугольника ABD, если бы была известна длина отрезка AB или BD, но они нам неизвестны. Теперь нужно найти длину BD или AB по заданным условиям задачи.

1) Найти механизм (если он существует), связывающий BD с BO и α, нелегко, и порой поиск такой связи может усложнить задачу. Следовательно, нужно найти способ определения AB, т.е. другой путь решения задачи.

2) Заметим, что отрезки AB и BO взаимосвязаны посредством треугольника AOB. Все углы этого треугольника можно выразить через α, т.е. заданием BO и угла α треугольник AOB определяется однозначно.

Итак, используя теорему синусов, в треугольнике AOB можно определить AB, а затем и AD. В конце с помощью формулы $2R = \dfrac{AB}{\sin\alpha}$ находим радиус окружности, описанной около ΔABC.

Примерно, подобным образом нужно уметь проводить устный анализ условий каждой задачи. Способности, навыки решения сложных задач прямо пропорциональны умению проведения анализа и умению правильно выполнить необходимый рисунок.

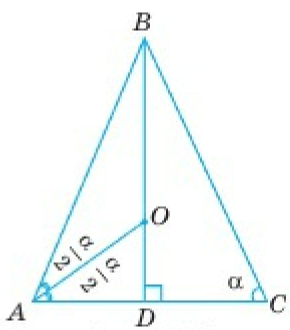


Рис. 3.12

После чего, опираясь на анализ, необходимо построить рисунок и по нему вкратце написать условие задачи:

Дано: ΔABC, $AB=BC$, $\angle A=\angle C=\alpha$,

$BD \perp AC$, $\angle OAD=\dfrac{\alpha}{2}$, $OB=a$ (рис. 3.12).

Найти AC и R – радиус описанной окружности.

▲ На рис. 3.12

$\angle BAO = \angle OAD = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \angle AOD = 90° - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \angle AOB = 180° -$
$-(90° - \frac{\alpha}{2}) = 90° + \frac{\alpha}{2}$.

Рассмотрим $\triangle AOB$. По теореме синусов

$$\frac{AB}{\sin(\angle AOB)} = \frac{BO}{\sin\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \frac{AB}{\sin\left(90° + \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{a}{\sin\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow AB = \frac{a \cdot \cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} =$$
$$= a \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2};$$

$\triangle ABD$ – прямоугольный треугольник. Поэтому

$AD = AB \cdot \cos\alpha = a \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\alpha \Rightarrow AC = 2 \cdot AD = 2a \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \times$
$\times \cos\alpha$,

$$2R = \frac{AB}{\sin\alpha} = \frac{a \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow R = \frac{a}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Ответ: $AC = 2a \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\alpha$, $R = \frac{a}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$. ■

1. Что вы понимаете под анализом условия геометрической задачи?
2. Как составить план решения задачи?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА

Проведите письменный анализ данных некоторых задач (рассмотрите задачи 3.63, 3.64).

Упражнения

А

3.63. В параллелограмме высоты равны h_1 и h_2. Найдите острый угол параллелограмма, если его периметр равен $2p$.

3.64. В параллелограмме острый угол равен α, а расстояния от точки пересечения диагоналей до неравных сторон равны m и n. Найдите диагонали и площадь параллелограмма.

3.65. В ромбе острый угол равен α, а высота равна h. Найдите площадь ромба.

3.66. Найдите площадь прямоугольника, в котором угол между диагоналями равен 45°, а диагональ равна $10\sqrt{2}$ см.

3.67. В треугольнике ABC проведены высоты BD и CE. Найдите площадь треугольника, если $\angle A=60°$, $BD=4$ см, $CE=6$ см.

3.68. В треугольнике ABC проведена высота CD, равная 5 м. Найдите стороны треугольника, если $\angle A=45°$, $\angle B=30°$.

3.69. В равнобокой трапеции с боковой стороной a и острым углом α меньшее основание равно боковой стороне. Найдите большее основание и площадь трапеции.

3.70. В равнобедренном треугольнике основание равно 10 см, а угол при основании равен 30°. Найдите радиусы описанной около треугольника и вписанной в треугольник окружностей.

B

3.71. В равнобедренном треугольнике угол при основании равен α. Найдите отношение радиусов описанной около треугольника и вписанной в треугольник окружностей.

3.72. Найдите третью сторону треугольника, если две стороны его равны m и n, а площадь равна $0{,}3mn$.

3.73. В трапеции, описанной около окружности, острые углы при основании равны α и β. Найдите радиус окружности, если площадь трапеции равна S.

3.74. В равнобокой трапеции высота равна h, а угол между диагоналями, противолежащий боковой стороне, равен α. Найдите среднюю линию трапеции.

3.75. В прямоугольнике диагональ, равная d, делит угол в отношении $p:q$. Найдите периметр прямоугольника.

3.76. В равнобедренном треугольнике высота, опущенная к боковой стороне, делит ее в отношении $m:n$. Найдите углы треугольника.

3.77. В равнобедренном треугольнике даны основание a и угол при основании α. Найдите медиану, опущенную к боковой стороне.

3.78. В треугольнике даны стороны a, b и угол α между ними. Найдите высоту, опущенную к третьей стороне.

3.79. В ромб, площадь которого равна S, вписана окружность с радиусом r. Найдите острый угол ромба.

3.80. В равнобедренном треугольнике угол при вершине равен α, а радиус вписанной в него окружности равен r. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника.

C

3.81. В треугольнике ABC угол A равен α, стороны AB и AC равны c и b соответственно ($b>c$).Найдите отрезок биссектрисы внешнего угла A, ограниченный прямой BC.

3.82. На стороны угла с вершиной в точке O из внутренней точки A опущены перпендикуляры AB и AC. Найдите AB и AC, если $\angle BOC=\alpha$, $OB=m$, $OC=n$.

3.83. В треугольнике длины двух сторон равны a и b, а биссектриса угла между ними равна l. Найдите площадь треугольника.

3.84. Зная углы треугольника, найдите угол между медианой и высотой, опущенными из одной вершины.

3.85. В остроугольном треугольнике ABC высоты, опущенные из вершин A и B, равны m и n, а острый угол между этими высотами равен α. Найдите сторону AB треугольника.

3.86. В треугольнике длины двух сторон равны a и b, а биссектриса угла между ними равна l. Найдите этот угол треугольника.

3.87. Луч, выходящий из вершины равностороннего треугольника, делит противолежащую сторону в отношении $p:q$. Найдите угол между этим лучом и основанием треугольника.

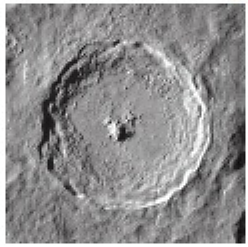
3.88. Внутренняя точка O треугольника ABC удовлетворяет равенству $\angle ABO = \angle BCO = \angle CAO = \varphi$. Выразите $\operatorname{tg}\varphi$ через площадь треугольника и его стороны.

3.89. Докажите, что углы α, β, γ при вершинах A, B, C соответственно удовлетворяют равенству $\cos\frac{\beta-\gamma}{2} = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}$, если центр O окружности, вписанной в треугольник ABC, удовлетворяет равенству $OA^2 = OB \cdot OC$.

Название терминов на трех языках

На русском языке	На казахском языке	На английском языке
Решение треугольников	Үшбұрыштарды шешу	Solution triangles
Теорема косинусов	Косинустар теоремасы	The cosine theorem
Теорема синусов	Синустар теоремасы	The sine theorem
Правильные многоугольники	Дұрыс көпбұрыш	Proper polygon

Тихо – ударный кратер на Луне, названный в честь датского астронома и алхимика середины XVI века Тихо Браге. Такие кратеры являются одними из множества примеров окружностей, появляющихся в природе естественным путем.



Раздел 4. ОКРУЖНОСТЬ. МНОГОУГОЛЬНИКИ

4.1. Длина окружности.
4.2. Площадь круга и его частей.
4.3. Вписанные и описанные четырехугольники.
4.4. Пропорциональные отрезки круга.
4.5. Многоугольники.

4.1. Длина окружности

Изучив материалы данной темы, вы будете:
- знакомы с понятием длины дуги кривой;
- выводить формулы длины окружности и дуги окружности, применять их при решении задач.

4.1.1. Понятие длины кривой

Длину непрямолинейной дороги небольшой протяженности можно измерить шагами. Длину железнодорожного пути между двумя станциями можно измерить числом промежутков между телеграфными столбами. А длину кривой на чертеже или на карте можно измерить циркулем с постоянным раствором. Во всех рассмотренных примерах мы заменили длину кривой длиной вписанной в нее ломаной. Следовательно, на практике мы находим не точное значение длины кривой, а ее приближенное значение с определенной точностью. Степень точности приближенных значений длин кривой зависит от длин звеньев вписанной в нее ломаной. Чем меньше длины звеньев вписанной в кривую ломаной, тем больше степень точности приближенных значений (рис. 4.1.) Опираясь на эти примеры, можно дать определение понятия длины кривой.

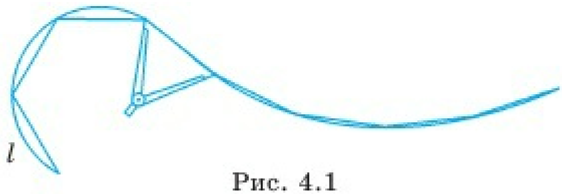


Рис. 4.1

Пусть n – количество звеньев вписанной в кривую l ломаной (с одинаковыми длинами звеньев) и P_n – длина этой ломаной. Ради простоты предположим, что длины всех звеньев этой ломаной одинаковы. Тогда предел выражения P_n при $n \to \infty$ называется длиной данной кривой l.

4.1.2. Длина окружности

Длина окружности определяется способом, рассмотренным в подпункте 4.1.1, т.е. ***длиной окружности называется предел периметров вписанных в нее правильных многоугольников при бесконечном увеличении числа сторон этих многоугольников.***

В целом можно увеличить число сторон, вписанных в окружность правильных многоугольников. Например, на рисунке 4.2 изображены вписанные в окружность правильные 3-, 6-, 12-угольники. Аналогично можно построить вписанные в окружность правильные 4-, 8-, 16-угольники и т.д. (рис. 4.3). Сначала докажем нижеследующую теорему.

Теорема. *Отношение длин любых двух окружностей равно отношению их соответствующих радиусов.*

▲ Пусть даны окружности $\omega_1(O_1; R_1)$ и $\omega_2(O_2; R_2)$. Обозна-

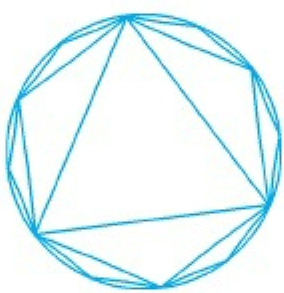


Рис. 4.2

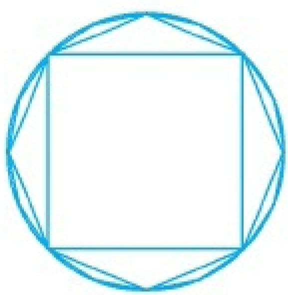


Рис. 4.3

чим длины этих окружностей через C_1 и C_2 соответственно. Покажем, что выполняется равенство

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{R_1}{R_2}. \quad (1)$$

Действительно, впишем в данные окружности правильные n-угольники и обозначим их периметры через P_1 и P_2 соответственно (рис. 4.4). Тогда из подобия правильных n-угольников следует, что

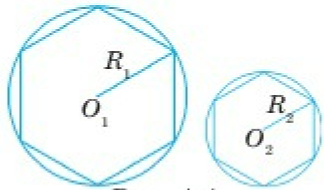


Рис. 4.4

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{R_1}{R_2}.$$

Если число сторон многоугольника очень большое, то по определению отличие длин периметров P_1, P_2 от соответствующих длин C_1, C_2 незначительно и при увеличении числа n оно будет становиться значительно меньше, т.е. предел отношения $\frac{P_1}{P_2}$ стремится к отношению $\frac{C_1}{C_2}$. Поэтому выполняется равенство

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{R_1}{R_2}. \blacksquare$$

Следствие. ***Отношение длины окружности к ее диаметру есть одно и то же число для всех окружностей.***

▲ Действительно, по доказанной теореме для любых окружностей $\omega_1(O_1; R_1)$ и $\omega_2(O_2; R_2)$ выполняется равенство

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{R_1}{R_2}.$$

Здесь C_1 и C_2 – соответствующие длины окружностей ω_1 и ω_2. Отсюда

$$\frac{C_1}{R_1} = \frac{C_2}{R_2} \left(\frac{C_1}{2R_1} = \frac{C_2}{2R_2} \right),$$

что и требовалось доказать. ■

Таким образом, для любой окружности отношение ее длины C к диаметру $2R$ есть постоянное число, не зависящее от окружности. Это число обозначается через π (греческая буква «пи»):

$$\frac{C}{2R} = \pi$$

Отсюда получим формулу

$$C = 2\pi R. \qquad (2)$$

Вообще, $\pi = 3{,}14159...$ – иррациональное число. Часто применяется приближенное значение числа π с точностью до 0,01, т.е. число 3,14.

ОБЪЯСНИТЕ

Длина дуги окружности пропорциональна величине соответствующего центрального угла.

Поэтому длина дуги окружности, соответствующей центральному углу, равному 1°, равна $\frac{1}{360}$ длины окружности. Следовательно, длина этой дуги равна $\frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}$. Значит, длина дуги, соответствующей центральному углу, равному α, вычисляется по формуле

$$l = \pi R \frac{\alpha}{180}. \qquad (3)$$

Рассмотрим теперь случай, когда величина центрального угла дана с помощью радианной меры. Длина дуги, соответствующей центральному углу величиной, равной 1 радиану, равна $\frac{1}{2\pi}$ длины окружности, т.е. она равна $\frac{2\pi R}{2\pi} = R$. Тогда длина дуги окружности, соответствующей центральному углу величиной, равной α радиан, вычисляется по формуле

$$l = R \cdot \alpha \qquad (4)$$

МАТЕРИАЛЫ ИЗ ИСТОРИИ

Теперь приведем исторические сведения об иррациональном числе π. На практике часто применяют его приближенное значение с точностью до 0,01: $\pi \approx \approx 3{,}14$. Это приближенное значение числа π впервые использовал великий греческий ученый Архимед (III в. до н.э.). Приближенные значения числа π можно найти с помощью периметра P_n вписанного в окружность правильного n-угольника: $\pi \approx \frac{P_n}{2 \cdot R}$.

Архимед


Л. Эйлер

Среднеазиатский астроном Улугбек и величайший математик Востока аль-Каши (XV в.), рассматривая правильный 800335168-угольник и применяя этот метод, нашли приближенное значение числа π с точностью до 16-го знака. Обозначение отношения длины окружности к диаметру через число π впервые ввел Леонард Эйлер (1707–1783). Буква π – это первая буква греческого слова «окружность». Кроме того, применяя методы высшей математики, Эйлер нашел приближенное значение числа π с точностью до 153-го знака. В наши дни с помощью компьютера можно найти число π с точностью до нескольких тысяч знаков. Однако на практике нет особой необходимости в подобной точности.

1. Как найти приближенное значение длины кривой? Что такое длина кривой?
2. Дайте определение длины окружности. Объясните, как вы это понимаете.
3. Докажите теорему о длине окружности.
4. С помощью какой формулы определяют длину окружности?
5. Напишите формулу для нахождения длины дуги окружности.
6. Что вы знаете о числе π?
7. а) Как назвать зависимость между радиусом и длиной окружности?
   б) Как изменится длина окружности, если ее радиус увеличить в два раза?
   в) Как изменится радиус окружности, если ее длину увеличить на b единиц?
   г) Как изменится длина окружности, если ее радиус увеличить на величину r?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА

Выберите некоторое тело цилиндрической формы, т.е. поперечным сечением которого является круг.

1) Обмотайте это тело нитью и измерьте длину одного полного мотка нити. Найдите по результатам измерения радиус поперечного сечения.
2) Измерьте диаметр поперечного сечения этого тела и найдите по формуле (2) длину окружности, ограничивающей поперечное сечение.
3) Сравните результаты длин окружностей поперечного сечения, полученные в заданиях 1 и 2. Сравните также числа $\frac{C}{2R}$ и π.

Упражнение

А

4.1. Длина окружности с радиусом R равна C. Заполните таблицу:

C			4π		27		6,25
R	2	5		$\frac{2}{7\pi}$		$\sqrt{3}$	

4.2. Найдите диаметр дерева, обхват которого равен: 1) 2 м; 2) 1,5 м.

4.3. Сторона правильного треугольника равна 3 см. Найдите радиус: 1) описанной окружности; 2) вписанной окружности.

4.4. Сторона квадрата равна 4 см. Найдите длину: 1) описанной окружности; 2) вписанной окружности.

4.5. Найдите длину дуги, по которой проходит конец минутной стрелки часов длиной 5 см за: 1) 5 мин; 2) 20 мин; 3) 1 ч.

4.6. Найдите длину дуги окружности радиусом 15 см, соответствующей центральному углу: 1) 30°; 2) 40°; 3) $\frac{\pi}{5}$; 4) $\frac{2\pi}{3}$.

4.7. Найдите центральный угол, соответствующий 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $\frac{1}{5}$; 4) $\frac{1}{6}$; 5) $\frac{2}{3}$; 6) $\frac{3}{4}$ длины окружности.

В

4.8. Когда телега проехала 942 м пути, то ее колесо совершило 300 полных оборотов. Каков диаметр колеса?

4.9. Длина экватора 40 000 000 м. Найдите радиус Земли в метрах, считая, что она имеет шарообразную форму.

4.10. Угол колебания маятника настенных часов равен 38°, а длина дуги, которую проделывает конец маятника, равна 24 см. Найдите длину маятника.

4.11. Как изменится экватор земного шара, если его радиус увеличится на 1 см?

4.12. На рисунке 4.5 радиусы малых окружностей равны r (они одинаковые), а радиус большой окружности равен R. Выразите r через R.

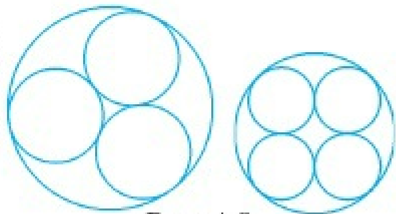


Рис. 4.5

4.13. Радиус поворота железной дороги равен 5 км, а длина дуги поворота равна 400 м. На сколько градусов отклонилось направление дороги по сравнению с первоначальным направлением?

4.14. Фигура, ограниченная двумя концентрическими окружностями, называется кольцом, а разность радиусов данных окружностей – шириной этого кольца.

1) Выразите ширину кольца через длины окружностей.

2) Радиусы окружностей кольца равны 26 см и 10 см. Найдите длину наибольшего отрезка, который целиком можно поместить в данное кольцо.

4.15. Найдите длину окружности, вписанную в: 1) прямоугольный треугольник с катетом a и противолежащим острым углом φ; 2) равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой c; 3) ромб с диагоналями, равными a и b.

C

4.16. Найдите длину дуги, по которой проходит конец минутной стрелки часов до совпадения с часовой стрелкой, начиная с 15.00 ч.

4.17. Сравните длину большей полуокружности с суммой длин малых полуокружностей (рис. 4.6).

4.18. Найдите длину кривой, выделенной жирной линией (рис. 4.7).

4.19. Точки A, B и C лежат на окружности радиусом R, а длина дуги ABC равна $0{,}5\pi R$. Под каким углом должен быть виден отрезок AC из точки D, лежащей на данной окружности?

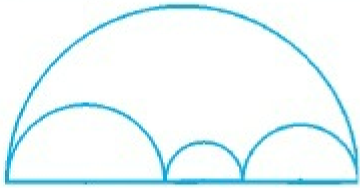
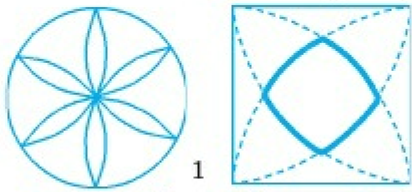


Рис. 4.6



1 2

Рис. 4.7

4.20. Спутник, вращающийся вокруг земного шара по окружности, пролетает за один оборот 42076 км. На каком расстоянии от поверхности Земли пролетает спутник, если ее радиус равен 6370 км?

4.21. Как построить правильный восьмиугольник по заданной стороне?

4.2. Площадь круга и его частей

Изучив материалы данной темы, вы будете:
- выводить формулы площади круга и его частей, применять их при решении задач.

4.2.1. Площадь круга

Кругом называется часть плоскости, ограниченной окружностью. Если центр этой окружности находится в точке O, а радиус равен R, то расстояние от любой точки круга до ее центра будет не больше радиуса R.

Теперь, прежде чем вывести формулу площади круга, остановимся на способе вычисления его площади. Аналогично определению длины окружности (п.4.1) покажем, что площадь круга можно определить с помощью площадей правильных многоугольников, вписанных в окружность, ограничивающую этот круг.

Действительно, обозначим через S_3, S_4, ..., S_n, ... последовательность площадей правильных многоугольников, вписанных в ограничивающую круг окружность, а через S – площадь круга.

Нетрудно проверить, что это числовая последовательность, ограниченная сверху, монотонно возрастает, т.к. каждый член этой последовательности меньше, чем площадь описанного около этого круга многоугольника (допустим, квадрата). Тогда по теореме о монотонных последовательностях существует предел последовательности S_3, S_4, ..., S_n, ... , который назовем площадью круга:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Теперь можно вывести формулу площади круга.

Теорема. *Площадь круга радиусом R определяется по формуле $S = \pi R^2$.*

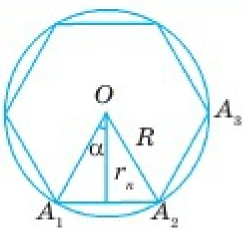


Рис. 4.8

▲ Пусть правильный многоугольник $A_1 A_2 \ldots A_n$ вписан в данный круг радиусом R (рис. 4.8). Если соединить каждую вершину этого многоугольника с центром окружности, то многоугольник разделится на n равных друг другу равнобедренных треугольников. Рассмотрим $\triangle A_1OA_2$. Высота, опущенная из вершины O, равна $R \cdot \cos\alpha$. Обозначим ее через r_n, а площадь n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$ – через S_n. Так как площадь треугольника OA_1A_2 равна $\frac{1}{2} r_n \times$ $\times A_1A_2$, то площадь n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$ определяется по формуле

$$S_n = \frac{1}{2} r_n \cdot A_1A_2 \cdot n.$$

Поскольку периметр P_n n-угольника равен $A_1A_2 \cdot n$, то получим формулу $S_n = \frac{1}{2} r_n \cdot P_n$. Здесь $r_n = R\cdot\cos\alpha = R\cdot \cos\frac{180^\circ}{n}$.

При $n\to\infty$ имеем, что $r_n \to R$, $P_n \to C = 2\pi R$. Следовательно,

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot R \cdot 2\pi R = \pi R^2. \ ■$$

4.2.2. Площадь сектора и сегмента

Круговым сектором называется часть круга, лежащая внутри соответствующего центрального угла (рис. 4.9).

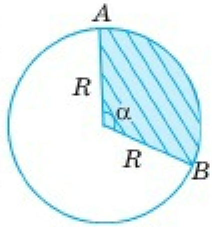


Рис. 4.9

Площадь сектора, соответствующего центральному углу в 1°, равна $\frac{1}{360}$ площади круга, т.е. $\frac{\pi R^2}{360}$. Тогда площадь сектора с центральным углом α вычисляется по формуле: $S_{\text{сек.}} = \frac{\pi R^2 \cdot \alpha}{360}$.

Если угол α дан в радианах, то нетрудно показать, что площадь соответствующего сектора вычисляется по формуле $S_{\text{сек.}} = \frac{\alpha}{2} \cdot R^2$.

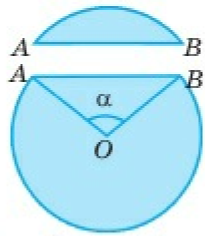


Рис. 4.10

Любая хорда делит круг на две части. Каждую из этих частей называют ***круговым сегментом***. Как показано на рисунке 4.10, в зависимости от величины угла α площадь сегмента определяется вычитанием или прибавлением к площади сектора площади треугольника AOB, т.е.

$$S_{\text{сег.}} = S_{\text{сек.}} \pm S_{\triangle},$$

где $S_{\triangle} = S_{AOB}$. Если $\alpha < 180°$, то эту формулу нужно использовать со знаком «−», если $\alpha > 180°$, то со знаком «+».

МАТЕРИАЛЫ ИЗ ИСТОРИИ

В Древней Греции многие ученые-математики до определения числа π пытались с помощью циркуля и линейки построить равновеликий с данным кругом квадрат. Эту задачу называют ***квадратурой круга***. Только в конце XIX в. была доказана неразрешимость этой задачи.

1. Что такое круг?
2. Как определяется площадь круга?
3. Напишите формулу площади правильного многоугольника.
4. Напишите формулу площади круга.
5. Как определяется площадь кругового сектора?
6. Как найти площадь сегмента?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА

Постройте окружность с помощью некоторого тела круглой формы (чашки или пиалы) и найдите площадь круга, ограниченного этой окружностью

Упражнения

A

4.22. Заполните с помощью формулы выражения площади круга S, ограниченного окружностью с радиусом R.

R			$\frac{3}{\sqrt{\pi}}$	2	5		
S	4π	25π				9	11

4.23. Как изменится площадь соответствующего круга, если: 1) уменьшить его радиус в два раза; 2) увеличить его радиус в три раза?

4.24. Сторона правильного n-угольника равна a. Вычислите площадь описанного около него и вписанного в него круга, если $n=3$; 4; 6.

4.25. Каково отношение диаметров двух кругов, если отношение их площадей равно $2:3$?

4.26. Сектор с центральным углом 45° имеет площадь 1 м^2. Найдите радиус соответствующего круга.

4.27. Какую часть площади круга составляет площадь сектора, центральный угол которого равен: 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°; 4) 90°; 5) 180°; 6) 300°?

B

4.28. Вычислите площадь кольца, ограниченного вписанной и описанной окружностями, указанными в задаче **4.24.**

4.29. Хорда, проведенная на расстоянии h от центра окружности с радиусом R, делит круг на две части (сегменты). Найдите площадь этих частей ($h < R$).

4.30. Решите предыдущую задачу при условии, что хорда соответствует центральному углу α и радиус окружности равен R.

4.31. В круг вписан прямоугольник со сторонами 16 см и 12 см. Найдите площадь круга.

4.32. Внутренний диаметр газовой трубы равен 1376 мм, а внешний – 1420 мм. Найдите площадь поперечного сечения трубы. Какое преимущество имеют трубы с большим диаметром при транспортировке газа на дальние расстояния?

C

4.33. Определите площадь фигур, изображенных на рис. 4.11.

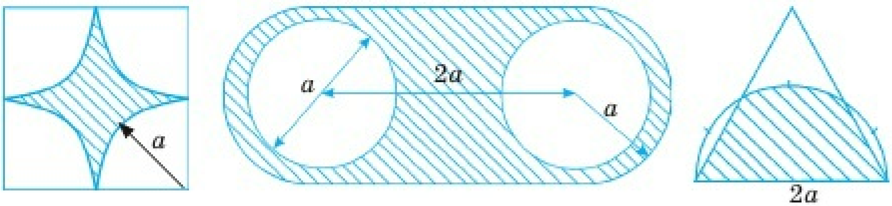


Рис. 4.11

4.34. Определите отношение площади сектора с центральным углом 60° к площади вписанного в него круга.

4.35. В правильный n-угольник со стороной a вписана окружность и около него описана окружность. Покажите, что площадь кольца, ограниченного этими окружностями, зависит от n.

4.36. Даны две концентрические окружности и хорда большей окружности, касающаяся малой окружности. Покажите, что площадь круга, построенного на данной хорде как на диаметре, равна площади кольца, ограниченного данными концентрическими окружностями.

4.37. Постройте описанный около данной окружности правильный: 1) треугольник; 2) четырехугольник; 3) шестиугольник; 4) восьмиугольник.

4.38. Бассейн наполняется двумя трубами радиусами R и r. Эти трубы заменили одной трубой, пропускная способность которой равна пропускной способности двух труб. Каков диаметр новой трубы?

4.39. Общие хорды двух кругов соответствуют их дугам, равным $60°$ и $120°$. Найдите отношение площадей этих кругов.

4.3. Вписанные и описанные четырехугольники

Изучив материалы данной темы, вы будете:
- знать определение и свойства вписанного угла;
- знать свойства вписанного и описанного четырехугольников и применять их при решении задач.

4.3.1. Углы, вписанные в окружность

Определения. 1) ***Многоугольник называется вписанным в окружность, если все его вершины лежат на этой окружности.***

2) ***Многоугольник называется описанным около окружности, если все его стороны касаются этой окружности.***

3) ***Угол, образованный двумя хордами, исходящими из одной точки, называется вписанным в окружность*** (рис.4.12). Общую точку этих хорд называют вершиной угла. Дуга BC называется дугой, на которую опирается вписанный угол. Сначала рассмотрим одно свойство вписанного угла (остальные его свойства рассмотрим в специальной главе).

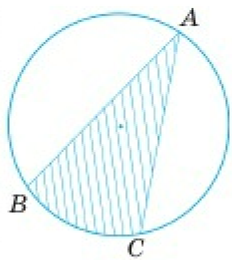


Рис. 4.12

Теорема 1. *Величина вписанного угла равна половине градусной величины дуги, на которую он опирается.*

▲ Возможны три случая расположения вписанного угла относительно центра окружности.

1) Пусть центр окружности лежит на стороне вписанного угла (рис. 4.13).

Тогда $OA=OB$ и треугольник AOB равнобедренный. Откуда $\angle OAB=\angle OBA$ и $\angle AOB=$ $=180°-(\angle OAB+\angle OBA)=180°-2\cdot\angle OAB$. Так как $\angle COB=2\cdot\angle OAB$, $\angle COB=\smile CB$, то $\angle OAB=\frac{1}{2}\smile CB$, $\angle CAB=\frac{1}{2}\smile CB$.

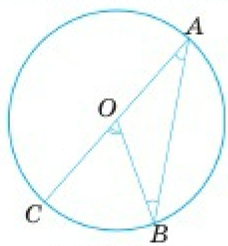


Рис. 4.13

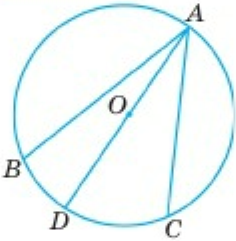


Рис. 4.14

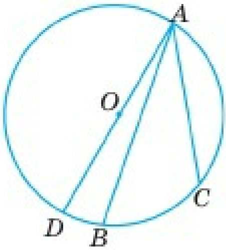


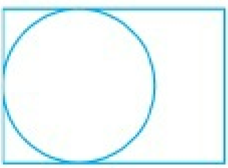
Рис. 4.15

2) Центр окружности лежит внутри вписанного угла (рис. 4.14). Тогда по доказанному $\angle BAD = \frac{1}{2}\smile BD$ и $\angle DAC=\frac{1}{2}\smile DC$, т.е $\angle BAC = \angle BAD + \angle DAC = \frac{1}{2}(\smile BD + \smile DC) = \frac{1}{2}\smile BC$.

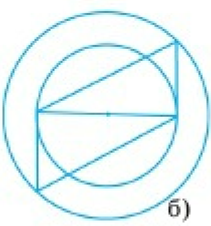
3) Центр окружности лежит вне вписанного угла (рис. 4.15). Тогда $\angle DAC=\frac{1}{2}\smile DC$ и $\angle DAB = \frac{1}{2}\smile DB$. Значит, $\angle BAC=\angle DAC-\angle DAB=\frac{1}{2}\smile DC- \frac{1}{2}\smile DB=\frac{1}{2}\smile BC$. ■

Следствие. *Вписанный угол, опирающийся на диаметр, равен 90°.*

4.3.2. Вписанные и описанные четырехугольники



а)



б)

Рис. 4.16

В треугольник всегда можно вписать и описать около него окружность, а в четырехугольник не всегда можно вписать и описать около него окружность. Например, в прямоугольник, не являющийся квадратом, нельзя вписать окружность, а около параллелограмма, не являющегося прямоугольником, нельзя описать окружность (рис. 4.16 *а*), *б*)). Но все же существуют вписанные и описанные четырехугольники. Рассмотрим некоторые их свойства.

Теорема 2. *Сумма противоположных углов вписанного четырехугольника равна 180°.*

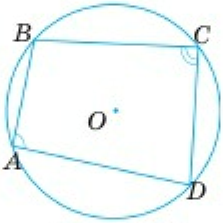


Рис. 4.17

▲ Пусть $ABCD$ – вписанный четырехугольник (рис. 4.17). Тогда по свойству вписанных углов $\angle A = \frac{1}{2}\smile BCD$, $\angle C = \frac{1}{2}\smile BAD$.

Значит, $\angle A + \angle C=\frac{1}{2}\smile BCD + \frac{1}{2}\smile BAD=\frac{1}{2}\times(\smile BCD + \smile BAD)$. Но сумма дуг $\smile BCD$ и $\smile BAD$ составляет полную окружность. Поэтому $\angle A + \angle C = \frac{1}{2}\cdot 360° = 180°$. ■

Теорема 3. *Если сумма противоположных углов четырехугольника равна 180°, то около этого четырехугольника можно описать окружность.*

▲ Пусть в четырехугольнике $ABCD$ $\angle A+\angle C=180°$. Около треугольника ABD опишем окружность. Теперь докажем, что точка C лежит на окружности. Если это не так, то точка C должна находиться внутри окружности (рис. 4.18). Пусть прямая BC пересекает окружность в точке E. Тогда $\angle A+\angle C=180°$ и $\angle A+\angle E=180°$, откуда получим $\angle C+\angle E$, что невозможно. Полученное противоречие показывает, что точка C не может находиться внутри окружности. Аналогично можно доказать, что точка C не лежит вне окружности (рис. 4.19). Поэтому точка C лежит на окружности, т.е. около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность. ■

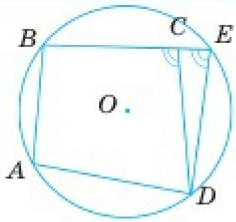


Рис. 4.18

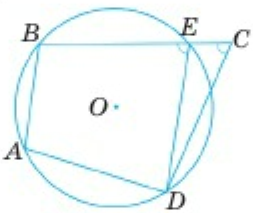


Рис. 4.19

Теорема 4. *В описанном вокруг окружности четырехугольнике суммы противоположных сторон равны.*

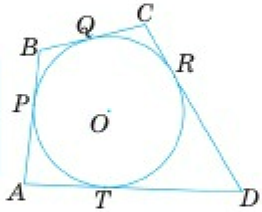


Рис. 4.20

▲ Пусть четырехугольник $ABCD$ описанный. Обозначим точки касания вписанной окружности со сторонами четырехугольника через P, Q, R, T (рис. 4.20). Мы знаем, что касательные к окружности, проведенные из одной точки, таковы: $AP=AT, BP=BQ, CR=CQ, DR=DT$. Сложив почленно эти равенства, получим: $(AP+BP)+(CR+DR)=(AT+DT)+(BQ+CQ)$ или $AB+CD=AD+BC$. ■

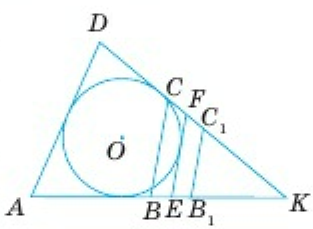


Рис. 4.21

Теорема 5. *Если в выпуклом четырехугольнике суммы противоположных сторон равны, то в этот четырехугольник можно вписать окружность.*

▲ Пусть в четырехугольнике $ABCD$ имеет место равенство $AB+CD=AD+BC$. Обозначим через K точку пересечения продолжения сторон AB и CD (рис. 4.21). (Если эти стороны не пересекаются, то обозначим через K точку пересечения продолжения сторон AD и BC. Но если и они не пересекаются, то $ABCD$ является квадратом и в него можно вписать окружность.) Используя метод, показанный в теореме 3, докажите самостоятельно, что окружность, вписанная в треугольник ADK, касается стороны BC четырехугольника $ABCD$. ■

1. Дайте определения вписанного и описаного многоугольников?
2. Какой угол называют вписанным?
3. Какая зависимость существует между вписанным углом и дугой, на которую он опирается (соответствующим центральным углом)? Сформулируйте и докажите соответствующее свойство.
4. Сформулируйте и докажите теорему о сумме углов вписанного четырехугольника.
5. Сформулируйте и докажите теорему об описанных четырехугольниках.
6. В какие параллелограммы можно вписать окружность? Около каких параллелограммов можно описать окружность?
7. Какой вид имеет трапеция: 1) вписанная в окружность; 2) описанная около окружности?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА

1. Постройте вписанную и описанную окружности, если даны: 1) равносторонний треугольник; 2) квадрат.
2. В данную окружность впишите трапецию и около нее опишите трапецию.

Упражнения

A

4.40. Постройте квадрат: 1) вписанный в данную окружность; 2) описанный около данной окружности; 3) по радиусу описанной окружности; 4) по радиусу вписанной окружности.

4.41. Можно ли описать окружность около четырехугольника, если его углы, взятые в последовательном порядке, равны: 1) 90°, 90°, 60°, 120°; 2) 70°, 130°, 110°, 50°; 3) 45°, 75°,135°, 105°?

4.42. Можно ли описать окружность около четырехугольника, углы которого, взятые в последовательном порядке, пропорциональны числам: 1) 2, 3, 4, 3; 2) 7, 2, 4, 5?

4.43. Докажите, что: 1) любая трапеция, вписанная в окружность, равнобедренная; 2) любой параллелограмм, вписанный в окружность, есть прямоугольник; 3) любой ромб, вписанный в окружность, есть квадрат.

4.44. Можно ли вписать окружность в четырехугольник, стороны которого, взятые в последовательном порядке, пропорциональны числам: 1) 2, 2, 3, 3; 2) 2, 5, 3, 4; 3) 3, 5, 3, 1?

4.45. Сумма двух противоположных сторон описанного четырехугольника равна 15 см. Найдите периметр четырехугольника.

B

4.46. Постройте прямоугольник по радиусу описанной окружности и углу между диагоналями.

4.47. Постройте ромб по стороне и радиусу вписанной окружности.

4.48. Докажите, что если в параллелограмм можно вписать окружность, то он является ромбом.

4.49. Докажите, что ромб, около которого можно описать окружность, является квадратом.

4.50. В прямоугольнике диагональ образует с одной из сторон угол в 30°, а радиус окружности, описанной около него, равен R. Найдите меньшую сторону прямоугольника.

4.51. Докажите, что около всякого прямоугольника можно описать окружность.

4.52. Боковая сторона равнобедренной трапеции, описанной около окружности, равна 14 см. Найдите периметр трапеции.

4.53. Перпендикуляры, проведенные к сторонам угла AOB в точках A и B, пересекаются в точке C, лежащей внутри этого угла. Докажите, что около четырехугольника *ACBO* можно описать окружность.

4.54. Если в параллелограмм можно вписать и около него описать окружность, то он является квадратом. Докажите.

C

4.55. Докажите, что около четырехугольника, полученного при пересечении биссектрис произвольного выпуклого четырехугольника, можно описать окружность.

4.56. Докажите, что около четырехугольника, полученного при пересечении биссектрис внешних углов произвольного выпуклого четырехугольника, можно описать окружность.

4.57. Окружность на сторонах выпуклого четырехугольника отсекает равные между собой хорды. Докажите, что суммы противоположных сторон этого четырехугольника равны.

4.58. Может ли радиус окружности, вписанной в равнобедренную трапецию с основаниями 24 см и 16 см, равняться 8 см?

4.59. Докажите, что прямые, соединяющие точки касания противоположных сторон описанной равнобедренной трапеции, проходят через точку пересечения ее диагоналей.

4.60. Покажите, что заключение задачи **4.59** выполняется для любого четырехугольника, описанного около окружности.

4.4. Пропорциональные отрезки круга

Изучив материалы данной темы, вы будете:
- знать теоремы о пропорциональных отрезках на круге, применять их при решении задач;
- выводить метрические соотношения в прямоугольных треугольниках, применять их при решении задач.

4.4.1. Пропорциональные отрезки круга

Теорема 1. *Если хорды окружности AB и CD пересекаются в точке E, то выполняется равенство $AE \cdot BE = CE \cdot DE$.*

▲ Проверить подобие треугольников AED и CEB нетрудно (рис. 4.22). Тогда выполняется равенство $\dfrac{DE}{BE} = \dfrac{AE}{CE}$, или

$AE \cdot BE = CE \cdot DE$. ■

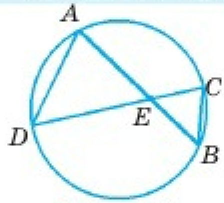


Рис. 4.22

Теорема 2. *Пусть из точки P, лежащей вне окружности, проведены две секущие, пересекающие эту окружность в точках A, B и C, D* (рис. 4.23). *Тогда выполняется равенство*

$AP \cdot BP = CP \cdot DP$.

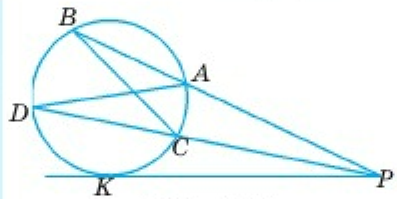


Рис. 4.23

▲ Из подобия треугольников ADP и BCP имеем равенство $\dfrac{AP}{CP} = \dfrac{DP}{BP}$, или $AP \cdot BP = CP \cdot DP$. ■

Следствие. *Пусть из точки P, лежащей вне окружности, проведены касательная, касающаяся этой окружности в точке K, и секущая, пересекающая ее в точках A, B* (рис. 4.23). *Тогда выполняется равенство $KP^2 = BP \cdot AP$.*

▲ Поскольку треугольники PAK и PKB подобны, т.к. $\angle PBK = \angle PKA = \dfrac{1}{2}(\smile AK)$, выполняется равенство $KP^2 = BP \cdot AP$. ■

4.4.2. Метрические соотношения в прямоугольном треугольнике

Формулы, выражающие зависимость между расстояниями точек (длинами отрезков), называются метрическими соотношениями.

Одним из основных метрических соотношений в прямоугольном треугольнике является теорема Пифагора: $c^2=a^2+b^2$, где a и b – катеты прямоугольного треугольника, а c – его гипотенуза. В прямоугольном треугольнике имеются и другие метрические соотношения.

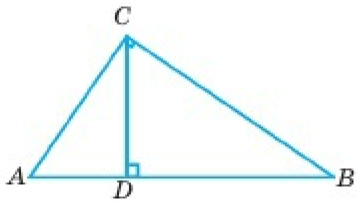


Рис. 4.24

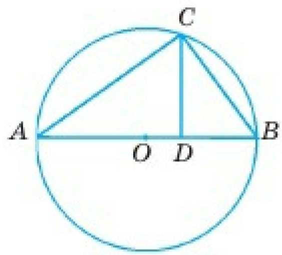


Рис. 4.25

Теорема 3. *Каждый катет прямоугольного треугольника* (рис. 4.24) *есть среднее геометрическое между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу, т.е. выполняется равенство*

$$AC^2 = AB \cdot AD.$$

▲Пусть CD – высота, опущенная из вершины прямого угла C прямоугольного треугольника ABC (рис. 4.24). Необходимо доказать равенство $AC^2=AB\cdot AD$. Действительно, так как один из острых углов прямоугольных треугольников ACD и ABC общий, то они подобны. Отсюда $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD}$, или $AC^2 = AB\cdot AD$. ■

Следствие. *Каждая хорда, соединяющая точку окружности с концом диаметра, есть среднее геометрическое между диаметром и проекцией этой хорды на диаметр, т.е.* $AC^2 = AB\cdot AD$ *или* $BC^2 = AB\cdot BD$ (рис.4.25).

Теорема 4. *Произведение катетов прямоугольного треугольника равно произведению гипотенузы и опущенной к ней высоты.*

▲ Пусть CD – высота, опущенная из вершины прямого угла C прямоугольного треугольника ABC (рис. 4.24).

Докажем равенство $AC\cdot BC = AB\cdot CD$.

Действительно, площадь S прямоугольного треугольника ABC можно вычислить по формуле $S = \frac{1}{2}AC\cdot BC$ или $S = \frac{1}{2}AB \cdot CD$. Отсюда $\frac{1}{2}AC \cdot BC = \frac{1}{2}AB \cdot CD$, или $AC \cdot BC = AB \cdot CD$.■

Теорема 5. *Высота, опущенная из вершины прямого угла прямоугольного треугольника, равна среднему геометрическому отрезков, на которые она делит гипотенузу.*

▲ Необходимо доказать выполнение равенства $CD^2 = AD \cdot BD$ (рис. 4.24).

Действительно, из подобия треугольников ACD и BCD следует равенство $\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD}$, или $CD^2 = AD \cdot BD$. ■

1. Как связаны между собой две взаимно пересекающиеся хорды?
2. Как связаны между собой секущие, проведенные из одной точки?
3. Какая связь между секущей и касательной к окружности, проведенных из одной точки?
4. Назовите основные метрические соотношения в прямоугольном треугольнике и докажите их.
5. Как определить вид угла в треугольнике (острый, прямой или тупой)?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА

1. Постройте произвольную окружность и проведите в ней две пересекающиеся хорды. Проверьте выполнение теоремы 1 с помощью измерительных работ.
2. Постройте произвольную окружность и проведите из точки, лежащей вне этой окружности, две секущие. Путем измерения проверьте выполнение теоремы 2.

Упражнения

А

4.61. Хорда окружности, перпендикулярная диаметру, делит его на части, равные 24 см и 6 см. Найдите длину этой хорды.

4.62. Из точки, лежащей вне окружности, проведены касательная и секущая, разделенная окружностью пополам. Какова длина касательной, если часть секущей, ограниченная окружностью, равна 4 см?

4.63. Радиус окружности 7 см, секущая, проведенная из точки, находящейся на расстоянии 9 см от центра, делится окружностью пополам. Найдите длину секущей.

4.64. Одна из пересекающихся хорд точкой пересечения делится пополам, а другая – на отрезки 4 см и 16 см. Какова длина первой хорды?

4.65. В окружность диаметром 10 см вписан равнобедренный треугольник высотой, проведенной к основанию. Найдите основание треугольника, если высота равна 2 см.

4.66. Найдите диаметр окружности, вписанной в равнобедренный треугольник с основанием 12 см и высотой 3 см.

4.67. Прямая, проведенная через точку пересечения медиан треугольника ABC и параллельная стороне AB, пересекает стороны AC и BC в точках A_1 и B_1 соответственно. Найдите отношения: 1) $A_1B_1 : AB$; 2) $S_{A_1B_1C} : S_{ABB_1A_1}$.

4.68. Из точки E к окружности проведены касательная AE и секущая BE. Эта секущая пересекает окружность в точках B и C. Найдите длину AE, если $BC=5$ см, $BE=4$ см, точка B лежит между точками C и E.

4.69. Докажите, что угол между хордой и касательной, проведенной к окружности из одного конца данной хорды, равен половине центрального угла, натянутого на эту хорду.

4.70. Две хорды пересекаются внутри круга. Одна из хорд делится на отрезки, равные 24 см и 14 см, а одна из частей второй хорды равна 28 см. Найдите другую часть этой хорды.

B

4.71. Отрезки AB и CD пересекаются в точке F. Лежат ли точки A, B, C и D на одной окружности, если $AF=7$ см, $BF=21$ см, $CF=3$ см и $DF=16$ см?

4.72. Радиус Земли равен 6370 км. Как далеко можно увидеть с самолета на высоте 4 км от поверхности Земли?

4.73. Из точки, лежащей вне окружности, проведены касательная и секущая, разделенная окружностью пополам. Какая часть секущей ограничена окружностью, если длина касательной равна 4 см?

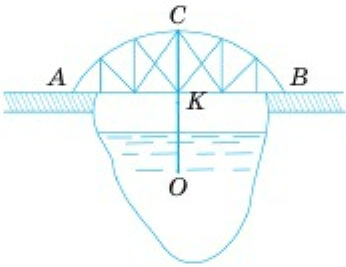


Рис. 4.26

4.74. Мост построен в виде дуги окружности (рис. 4.26). Найдите: 1) длину AB, если $CK=h=3$ м, $CO=$ $=R=8{,}5$ м; 2) радиус дуги фермы, если $AB=6$ м, $h=1{,}2$ м.

4.75. Длина касательной, проведенной из некоторой точки к окружности, равна 20 см, а длина наибольшей секущей, проведенной из этой точки, равна 50 см. Найдите радиус окружности.

4.76. Докажите, что касательные, проведенные из продолжения общей хорды двух пересекающихся окружностей к этим окружностям, равны.

4.77. Секущая в $2\frac{1}{4}$ раза длиннее своего внешнего отрезка. Во сколько раз она длиннее касательной, проведенной из той же точки?

4.78. Из одной точки проведены касательная и секущая. Касательная длиннее внешнего отрезка секущей на 5 см и короче внутреннего отрезка на столько же. Найдите касательную.

4.79. Через середину хорды длиной a проведена хорда длиной b. На какие отрезки делится хорда длиной b?

4.80. Окружность пересекает сторону угла на расстоянии a и b от его вершины, а другой стороны касается. Найдите расстояние от вершины угла до точки касания.

4.81. В окружности радиусом R проведена хорда. Расстояние от центра окружности до хорды равно d. Найдите длину хорды.

4.82. Отношение катетов в прямоугольном треугольнике равно $3:4$, а гипотенуза равна 50 см. На какие отрезки делит гипотенузу высота, опущенная из прямого угла?

4.83. Высота, проведенная из прямого угла прямоугольного треугольника, делит гипотенузу на отрезки, меньший из которых равен 11 см. Найдите гипотенузу, если отношение катетов треугольника равно $6:5$.

4.84. Какие условия должны выполняться, чтобы центр окружности, описанной около треугольника, был внутри треугольника, снаружи или на одной из его сторон?

4.85. Биссектрисы AD и BK треугольника ABC пересекаются в точке O. Чему равно отношение $OK:OB$, если $AB=5$ см, $BC=3$ см, $AC=7$ см?

C

4.86. Постройте окружность, касающуюся двух данных прямых и проходящую через данную точку.

4.87. Докажите, что если биссектриса треугольника делит его на два треугольника с равными периметрами, то этот треугольник равнобедренный.

4.88. Ромб $ADEF$ вписан в треугольник ABC так, что его вершины D, E, F лежат на сторонах AB, BC, AC соответственно. Найдите отрезки BE и EC, если $AB=14$ см, $BC=12$ см и $AC=10$ см.

4.89. Докажите, что если две медианы треугольника равны, то он равнобедренный.

4.90. Из одной точки к окружности проведены секущая и касательная. Сумма их длин равна 30 см, а внешний отрезок секущей короче касательной на 2 см. Найдите касательную и секущую.

4.91. В полуокружность с центром в точке O и радиусом

16 см вписана окружность диаметром 12 см. Найдите расстояние от точки касания малой окружности диаметром до точки O.

4.92. Из одной точки к окружности проведены касательная и секущая. Внешний отрезок секущей в $\frac{5}{4}$ раза длиннее ее внутреннего отрезка. Во сколько раз секущая длиннее касательной?

4.93. Докажите, что центр вписанной в треугольник окружности лежит внутри треугольника, образованного средними линиями данного треугольника.

4.94. Отрезок AB виден из точек C и D под разными углами. В каком случае точки A, B, C и D лежат на одной окружности?

4.95. Докажите, что прямая, соединяющая середины оснований трапеции, проходит через точку пересечения продолжения боковых сторон.

4.96. Впишите квадрат в полуокружность так, чтобы одна из его сторон лежала на диаметре полуокружности.

4.97. Докажите, что если прямая, соединяющая середины противоположных сторон выпуклого четырехугольника, проходит через точку пересечения двух других сторон, то этот четырехугольник является трапецией.

4.98. Окружность проведена так, что сторона AB треугольника ABC является ее диаметром. Докажите, что если: 1) точка C лежит вне окружности, то $\angle C$ острый; 2) точка C лежит на окружности, то $\angle C$ прямой; 3) точка C лежит внутри окружности, то $\angle C$ тупой.

4.5. Многоугольники

Изучив материалы данной темы, вы будете:

- знать определение и свойства правильных многоугольников;
- знать и применять зависимости радиусов окружности, вписаной в многоугольник, и окружности, описанной около правильного многоугольника;

- применять формулы, связывающие сторону, площадь правильного многоугольника и радиус окружности, вписанной в него;
- знать свойства симметричности правильных многоугольников.

4.5.1. Правильные многоугольники

Если в выпуклом многоугольнике все стороны и все углы равны между собой, то его называют правильным многоугольником. Например, правильный треугольник – это равносторонний треугольник, правильный четырехугольник – это квадрат.

Мы хорошо знаем, что существуют вписанные и описанные окружности для любого правильного треугольника и любого квадрата, причем центры этих окружностей совпадают. Теперь покажем, что этим свойством обладает любой правильный многоугольник.

Точка, равноудаленная от всех вершин правильного многоугольника, называется его центром.

Теорема 1. *Для любого правильного многоугольника существуют описанная около него и вписанная в него окружности, причем их центры совпадают с центром данного многоугольника.*

▲ Чтобы доказать теорему, достаточно показать, что для любого правильного многоугольника существует центр, равноудаленный от всех сторон многоугольника.

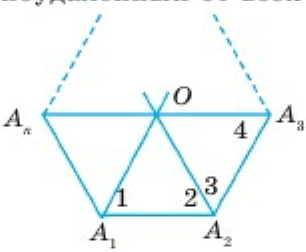


Рис. 4.27

Пусть задан правильный многоугольник $A_1A_2...A_n$. Проведем биссектрисы углов A_1 и A_2 и точку их пересечения обозначим через O. Другие вершины многоугольника соединим с точкой O (рис. 4.27).

Докажите, что точка O равноудалена от всех вершин многоугольника:

$$OA_1=OA_2=OA_3=...=OA_n.$$

Углы 1 и 2 равны как половины равных углов, поэтому треугольник A_1OA_2 – равнобедренный. Тогда $OA_1= OA_2$. Так как сторона OA_2 – общая, $A_1A_2=A_2A_3$ и $\angle 2=\angle 3$, то по первому признаку равенства треугольников $\Delta A_1OA_2=\Delta A_2OA_3$ и тем самым $OA_2=OA_3$ и $\angle 3=\angle 4$. Тогда из равенства $\angle 4=\angle 3=\frac{1}{2}\angle A_2=\frac{1}{2}\angle A_3$ получим равенство $\angle 4=\angle 5$. Поэтому OA_3 является биссектрисой угла A_3.

Продолжая этот процесс, получим равенство $OA_1=OA_2=$ $=OA_3=\ldots=OA_n$, т.е. точка O является центром многоугольника и вместе с тем центром описанной окружности.

Теперь покажем, что точка O равноудалена от всех сторон многоугольника. По доказанному $\Delta A_1OA_2=\Delta A_2OA_3=\ldots=$ $=\Delta A_{n-1}OA_n=\Delta A_nOA_1$. Тогда высоты этих треугольников, опущенные из их общей вершины, также равны. Следовательно, точка O равноудалена от всех сторон многоугольника, т.е. в данный многоугольник можно вписать окружность. ■

Теорема 2. *Если сторона правильного n-угольника равна* $\boldsymbol{a_n}$, *радиус описанной окружности* $\boldsymbol{R}$, *а радиус вписанной окружности* $\boldsymbol{r}$, *то верны формулы*

$$a_n = 2R\cdot\sin\frac{180^\circ}{n},\quad a_n=2r\cdot\mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n}. \qquad (1)$$

▲ Пусть сторона правильного n-угольника $A_1A_2=a_n$, а точка O – его центр (рис. 4.28).

Рис. 4.28

Тогда $OA_1=OA_2=R$, $OK=r$, $A_1K=A_2K=\frac{a_n}{2}$ и $\angle A_1OK=\frac{1}{2}\angle A_1OA_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{360^\circ}{n}=\frac{180^\circ}{n}$. Из прямоугольного треугольника A_1OK имеем:

$$A_1K = R\cdot\sin\frac{180^\circ}{n},\quad A_1K = r\cdot\mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n}.$$

Используя эти равенства, получим формулу (1). ■

Следствие. *Если R и r радиусы описанной около правильного n-угольника окружности и окружности, вписанной в правильный n-угольник, то верно равенство*

$$r = R\cdot\cos\frac{180^\circ}{n}.$$

ДОКАЖИТЕ САМОСТОЯТЕЛЬНО

Докажите следствие.

РАБОТА В ГРУППЕ

Покажите справедливость следующих формул:

$$S_n = \frac{1}{2} n \cdot a_n \cdot r, \qquad (3)$$

$$S_n = \frac{1}{4} n \cdot a_n \sqrt{4R^2 - a_n^2}, \qquad (4)$$

$$a_n^2 = 4(R^2 - r^2), \qquad (5)$$

здесь S_n – площадь правильного n–угольника, a_n – его сторона, R – радиус описанной окружности, r – радиус вписанной окружности (рис. 4.28).

4.5.2. Построение правильных многоугольников

С младших классов мы знаем способы построения правильных равносторонних треугольников (рис. 4.29) и квадратов (рис. 4.30).

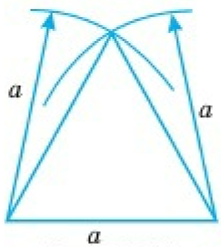


Рис. 4.29

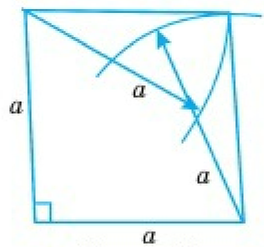


Рис. 4.30

В паре с помощью рис. 4.31–4.33 сформулируйте алгоритм построения правильных пятиугольника и шестиугольника. Результаты обсудите вместе с классом.

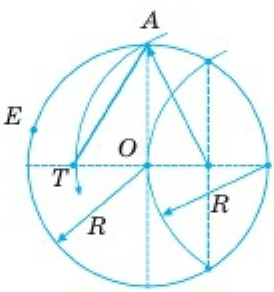


Рис. 4.31

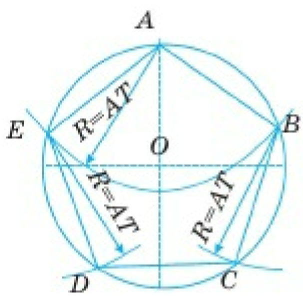


Рис. 4.32

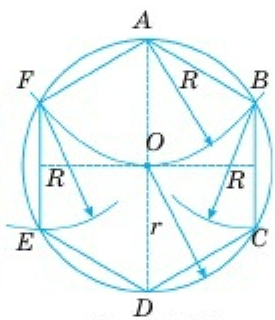


Рис. 4.33

Если построен правильный n-угольник, то можно построить правильный $2n$-угольник. Рассмотрим это на примере построения правильного 8-угольника с помощью построенного квадрата.

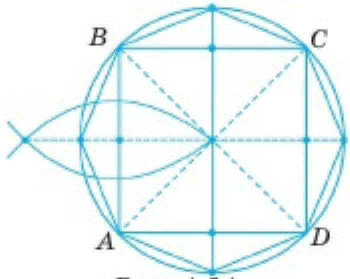


Рис. 4.34

▲ 1) Сначала найдем центр окружности, описанной около квадрата (рис. 4.34), и построим эту окружность.

2) По методу деления отрезка пополам найдем середину каждой стороны квадрата.

3) Проведем лучи с началом в центре окружности и проходящие через середины сторон квадрата.

4) Найдем точки пересечения данных лучей с окружностью. Эти точки вместе с вершинами исходного квадрата являются вершинами правильного 8-угольника. ■

В целом существуют правильные многоугольники, которые нельзя построить с помощью циркуля и линейки. Например, таковыми являются правильные 7, 9, 11, 13, 14-угольники. Кстати, с помощью циркуля и линейки можно построить правильный 17-угольник. Полное решение построения правильных многоугольников с помощью циркуля и линейки дал Карл Гаусс в 1796 году.

4.5.3. Подобие правильных многоугольников

Теорема 3. *Любые два правильных n-угольника подобны между собой.*

▲ Пусть заданы два правильных n-угольника P_1 и P_2: $A_1A_2 \ldots A_n$ и $B_1B_2\ldots B_n$ соответственно. Применяя гомотетию, центр которой совпадает с центром многоугольника P_1, а коэффициент равен $k=\dfrac{B_1B_2}{A_1A_2}$, преобразуем многоугольник P_1 в многоугольник P_1': $A_1'A_2'A_3'\ldots A_n'$. Теперь покажем равенство многоугольников P_1' и P_2, т.е. докажем, что многоугольники P_1' и P_2 могут быть совмещены каким-либо движением, т.к. при последовательном применении гомотетии и движения получим преобразование подобия,

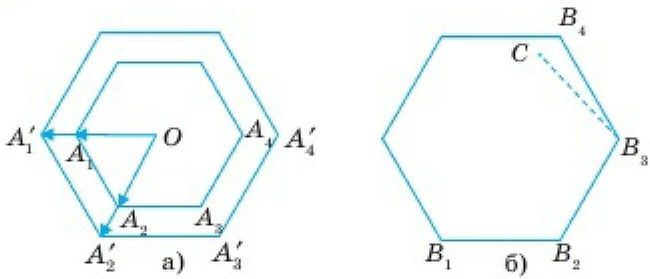


Рис. 4.35

при котором многоугольники P_1 и P_2 будут подобными (рис. 4.35, а).

Так как $\angle A_1A_2A_3 = \angle A_1'A_2'A_3'$ и $\angle A_1A_2A_3 = \angle B_1B_2B_3$, то $\angle A_1'A_2'A_3' = \angle B_1B_2B_3$. Кроме того $A_1'A_2' = |k|\ A_1A_2 = \frac{B_1B_2}{A_1A_2}$, $A_1A_2 = B_1B_2$. Из равенств $A_1'A_2' = A_2'A_3'$, $B_1B_2 = B_2B_3$ получим равенство $A_2'A_3' = B_2B_3$. Тогда по первому признаку равенства треугольников $\Delta A_1'A_2'A_3' = \Delta B_1B_2B_3$.

Итак, при рассматриваемом движении точка A_1' переходит в точку B_1, точка A_2' – в точку B_2, а точка A_3' – в точку B_3. Покажем, что точка A_4' перейдет в точку B_4. Действительно, пусть точка A_4' переходит в точку C (рис. 4.29, б). По доказанному выше $\angle A_2'A_3'A_4' = \angle B_2B_3B_4$ и $A_3'A_4' = B_3B_4$. А при движении расстояние между точками и величина углов не изменяются. Поэтому $\angle A_2'A_3'A_4' = \angle B_2B_3C$ и $A_3'A_4' = B_3C$. Тогда точки B_4 и C совпадают. Аналогично при данном движении можно показать, что и другие соответствующие вершины многоугольников P_1' и P_2 переходят друг в друга, т.е. многоугольники P_1' и P_2 равны. ■

Коэффициент подобия подобных фигур равен отношению их соответствующих линейных измерений. В правильных n-угольниках к числу таких линейных измерений относятся длина стороны, радиусы описанной и вписанной окружностей и т.д. Отсюда получается следующее следствие.

Следствие. *Периметры правильных n-угольников P_1 и P_2 равны p и p', радиусы описанной и вписанной окружностей соответственно равны r, R и r', R'. Тогда верны равенства*

$$\frac{p'}{p} = \frac{r'}{r} = \frac{R'}{R}.$$

Кроме этого, правильные многоугольники обладают свойствами симметрии (рис. 4.36–4.39).

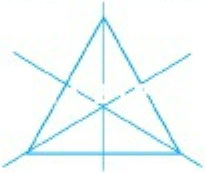


Рис. 4.36

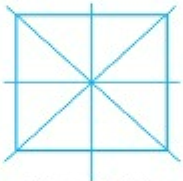


Рис. 4.37

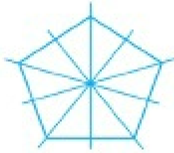


Рис. 4.38

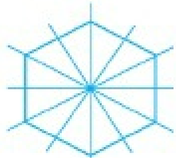


Рис. 4.39

РАБОТА В ГРУППЕ

- Сколько осей симметрии имеется в правильном n-угольнике?
- Может ли правильный n-угольник иметь центр симметрии?
- Какие многоугольники имеют центр симметрии? Обоснуйте ответ.

1. Что такое ломаная? Как определяется ее длина?
2. Что такое многоугольник? Какие его элементы вы знаете? Что такое выпуклый многоугольник?
3. Какая окружность называется описанной около многоугольника, а какая – вписанной в многоугольник?
4. Что такое правильный многоугольник? Как определяется его центр?
5. Какова связь между стороной правильного n-угольника и радиусами описанной и вписанной окружностей?
6. Докажите, что любые два правильных n-угольника подобны.
7. На рис. 4.34 центр окружности был найден как пересечение диагоналей квадрата. Как определить в общем случае центр описанной окружности? Обоснуйте ответ.
8. С помощью рис. 4.29 и 4.30 сформулируйте алгоритм построения равностороннего треугольника и квадрата.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА

Постройте правильный: 1) треугольник; 2) четырехугольник; 3) шестиугольник. Постройте описанную около них и вписанную в них окружности. Выразите стороны многоугольников через радиусы описанной около них и вписанной в них окружностей.

Упражнения

A

4.99. Может ли простая замкнутая ломаная иметь звенья, равные 1 см, 2 см, 3 см, 4 см и 11 см?

4.100. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, если каждый его угол равен: 1) 135°; 2) 150° ?

4.101. Чему равна сумма внешних углов правильного n-угольника?

4.102. Сколько вершин имеет правильный многоугольник, если величина каждого внешнего угла равна: 1) 36°; 2) 24°?

4.103. Какие из утверждений верны?

1) Если все стороны выпуклого многоугольника равны, то он является правильным многоугольником.

2) Если все углы выпуклого многоугольника равны, то он является правильным многоугольником.

Дополните эти утверждения так, чтобы они стали верными утверждениями.

4.104. Докажите, что любой правильный многоугольник является квадратом.

4.105. При каком значении n сторона правильного n-угольника:

1) больше радиуса описанной окружности;

2) равна радиусу описанной окружности;

3) меньше радиуса описанной окружности?

4.106. Найдите угол правильного n-угольника, если: 1) $n=3$; 2) $n=4$; 3) $n=5$; 4) $n=6$; 5) $n=10$; 6) $n=18$.

B

4.107. Докажите, что хорда, перпендикулярная радиусу и проходящая через середину этого радиуса, является стороной правильного треугольника.

4.108. Докажите, что радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, в два раза меньше радиуса окружности, описанной около него.

4.109. На доске надо просверлить пять отверстий на равных между собой расстояниях и на одном и том же расстоянии от указанного центра. Как это можно сделать?

4.110. Около окружности описаны квадрат и правильный шестиугольник. Периметр шестиугольника равен 48 см. Найдите периметр квадрата.

4.111. Сторона вписанного в окружность треугольника равна a. Найдите сторону вписанного в эту окружность квадрата.

4.112. Докажите, что если радиус окружности равен R, то сторона вписанного в нее: 1) правильного восьмиугольника равна $R\sqrt{2-\sqrt{2}}$; 2) правильного двенадцатиугольника равна $R\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

4.113. Найдите отношение периметров описанных около окружности и вписанных в окружность правильных n-угольников. Решите задачу при $n = 3$, 4 и 6.

4.114. Найдите стороны правильного пятиугольника и правильного десятиугольника, вписанных в окружность радиусом R.

4.115. Периметр правильного n-угольника равен P, а сторона a_n. Радиус окружности, описанной около этого n-угольника, равен R, а радиус окружности, вписанной в него, равен r. Найдите неизвестные элементы многоугольника по следующим данным: 1) $n=4$, $R=3\sqrt{2}$ см; 2) $n=3$, $P=24$ см; 3) $n=6$, $r=9$ см; 4) $n=3$, $r=5\sqrt{3}$ см.

4.116. Выразите наименьшую диагональ правильного n-угольника через его сторону a_n : 1) $a_n=1$ см, $n=5$; 2) $a_n=5$ см, $n=6$.

4.117. Через середины смежных сторон квадрата, вписанного в окружность радиусом R, проведена хорда. Найдите длину этой хорды, если:1) $R=2$ см; 2) $R=3$ см.

C

4.118. Из бревна, диаметр поперечного сечения которого равен 40 см, вырезали 4 одинаковые балки с квадратными поперечными сечениями. Какой может быть наибольшая длина стороны поперечного сечения балки?

4.119. Докажите, что в правильном пятиугольнике: 1) любые две диагонали равны; 2) диагонали параллельны одной из его сторон.

4.120. Докажите, что если в пятиугольнике имеются две оси симметрии, то этот пятиугольник правильный.

4.121. Правильный двенадцатиугольник $A_1A_2...A_{12}$ описан около окружности с радиусом r. Покажите, что выполняется равенство $A_1A_2+A_1A_4=2r$.

4.122. В окружность радиусом R вписан правильный двенадцатиугольник $A_1A_2...A_{12}$. Найдите площадь треугольника $A_1A_2A_3$.

4.123. Используя условие задачи **4.122**, найдите площадь: 1) четырехугольника $A_1A_2A_3A_4$; 2) пятиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5$.

4.124. Докажите, что середины сторон правильного n-угольника являются вершинами другого правильного n-угольника.

Задачи для повторения

4.125. Углы AOB и BOC, равные α и β соответственно, имеют общую сторону. Определите угол между биссектрисами этих углов. Рассмотрите случай, когда эти углы смежные.

4.126. Углы AOB, BOC и COD, равные α, β и γ соответственно, расположены последовательно. Найдите угол между биссектрисами углов AOB и COD.

4.127. Докажите, что отрезок, ограниченный вершиной треугольника и противоположной ей стороной, меньше наибольшей стороны треугольника.

4.128. Докажите, что отрезок, ограниченный двумя сторонами треугольника, меньше наибольшей его стороны.

4.129. Докажите, что прямая, проведенная через вершину равнобедренного треугольника параллельно его основанию, является биссектрисой внешнего угла при этой вершине.

4.130. Найдите угол между высотой и медианой, опущенными из прямого угла прямоугольного треугольника. Выразите этот угол через острые углы прямоугольного треугольника.

4.131. Докажите, что четырехугольник, вершины которого находятся на серединах сторон любого выпуклого четырехугольника, является параллелограммом.

4.132. Докажите, что середины диагоналей трапеции и середины ее боковых сторон лежат на одной прямой.

4.133. Найдите расстояние между серединами диагоналей трапеции, если даны ее основания.

4.134. Найдите угол между касательными, проведенными к окружности в вершинах вписанного в окружность треугольника, если даны углы этого вписанного треугольника.

4.135. При каком условии центр описанной около треугольника окружности лежит внутри него, на его стороне, снаружи его?

4.136. Докажите, что любые два квадрата подобны.

4.137. Основание BC треугольника ABC равно a, точки D, E делят стороны AB и BC соответственно в отношении $m:n$. Найдите длину DE.

4.138. Разделите параллелограмм на три части так, чтобы из них можно было составить прямоугольник.

4.139. Разделите треугольник на три части так, чтобы из них можно было составить прямоугольник.

4.140. Трапеция своими диагоналями делится на четыре треугольника. Докажите, что треугольники, основаниями которых являются ее боковые стороны, равновелики.

4.141. Найдите общую касательную окружностей радиусами R и r, касающихся друг друга внешним образом.

4.142. По данной площади треугольника постройте квадрат одинаковой с ним площади.

4.143. Квадрат со стороной, равной 8 см, разрезали так, как показано на рисунке 4.40, и составили прямоугольник (рис. 4.41). Почему площадь полученного прямоугольника не равна площади квадрата?

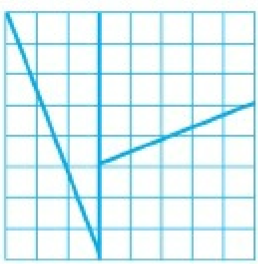


Рис. 4.40

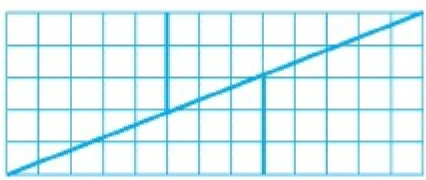


Рис. 4.41

4.144. Докажите формулу $S=\dfrac{abc}{4R}$, если a, b, c – стороны треугольника, а R – радиус описанной около него окружности.

4.145. Докажите формулу $\dfrac{1}{h_1}+\dfrac{1}{h_2}+\dfrac{1}{h_3}=\dfrac{1}{r}$, если h_1, h_2, h_3 – высоты треугольника, а r – радиус вписанной в него окружности.

4.146. Найдите площадь треугольника и высоту h_a по его сторонам a, b, c.

4.147. Докажите, что для взаимной перпендикулярности диагоналей четырехугольника необходимо и достаточно выполнение равенства суммы квадратов его противоположных сторон.

4.148. С внешней стороны прямоугольного треугольника построены полукруги так, что его стороны являются их диаметрами. Покажите равенство площади большего полукруга сумме площадей двух других полукругов.

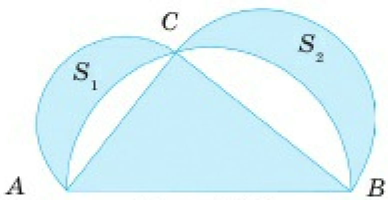


Рис. 4.42

4.149. Докажите, что выполняется равенство $S_{ABC}=S_1+S_2$, где S_1 и S_2 – площади полумесяцев, ограниченных полуокружностями, диаметры которых есть стороны прямоугольного треугольника ABC ($\angle C=90^\circ$) (рис. 4.42).

4.150. Найдите площадь ромба, сумма диагоналей которого равна m, а периметр $2p$.

4.151. Найдите третью сторону треугольника, если две его стороны равны a и b, а площадь $S=\dfrac{3}{5}ab$.

4.152. Высота треугольника, равная 4 см, делит его основание в отношении 1 : 8. Отрезок, параллельный этой высоте, делит данный треугольник на две равновеликие части. Найдите длину отрезка.

4.153. Меньшая сторона трапеции, описанной около окружности радиусом R, равна 1,5 R. Найдите площадь этой трапеции.

4.154. Найдите углы параллелограмма периметром $2p$ и высотами h_1, h_2.

Вопросы для повторения планиметрии

Мы здесь приводим перечень теоретических вопросов для повторения курса планиметрии.

7 класс

1. Что такое геометрия, планиметрия?

2. Как вы понимаете выражение: точка B лежит между точками A и C?

3. Что такое луч? Дополняющий луч?

4. Что такое отрезок, концы отрезков, внутренние точки отрезка?

5. Какими инструментами измеряют длину отрезка? Какие единицы измерения вы знаете?

6. Какую фигуру называют углом? Какие элементы имеет угол? Как их обозначают?

7. Что такое плоский, прямой, острый и тупой углы?

8. Каким инструментом и в каких единицах измеряют углы?

9. Что такое смежные углы и чему равна сумма смежных углов?

10. Что такое вертикальные углы и какие их свойства вы знаете?

11. Какие прямые называются взаимно перпендикулярными?

12. Что такое накрест лежащие, соответственные и внутренние односторонние углы?

13. Какие прямые называются параллельными?

14. Назовите признаки параллельности прямых. Докажите их.

15. Какие свойства параллельных прямых вы знаете? (О двух прямых, параллельных третьей прямой.)

11–4336

16. Что такое треугольник? Какие виды треугольника вы знаете? Из каких элементов они состоят?

17. Что такое медиана, биссектриса и высота треугольника?

18. Докажите теорему о сумме внутренних углов треугольника.

19. Назовите признаки равенства треугольников. Докажите их.

20. Что такое прямоугольный треугольник? Какие его свойства вы знаете?

21. Докажите признаки равенства прямоугольных треугольников.

22. Что такое перпендикуляр, секущая, проекция? Какие их свойства вы знаете?

23. Какая длина отрезка принимается в качестве расстояния от точки до прямой?

24. Как можно построить треугольник по трем сторонам, двум сторонам и углу между ними, стороне и прилежащим к ней двум углам?

25. Как построить угол, равный данному углу?

26. Как строится биссектриса угла?

27. Как находится середина отрезка?

28. Как построить перпендикуляр, опущенный из данной точки к прямой?

29. Что такое серединный перпендикуляр отрезка? Как его построить?

30. Что такое окружность? Какие ее элементы вы знаете?

8 класс

1. Какую фигуру называют многоугольником?

2. Какова сумма внутренних и внешних углов выпуклого многоугольника?

3. Какую фигуру называют четырехугольником? Какова сумма его внутренних углов?

4. Что такое параллелограмм?

5. Докажите свойства параллелограмма.

6. Докажите признаки параллелограмма.

7. Что такое прямоугольник? Назовите его свойства.

8. Что такое ромб, квадрат? Каковы их свойства?

9. Докажите теорему Фалеса.

10. Что такое средняя линия треугольника? Докажите ее свойства.

11. Что такое трапеция, равнобокая трапеция, прямоугольная трапеция?

12. Докажите теорему о средней линии трапеции.

13. Что такое замечательные точки треугольника?

14. Докажите, что можно описать около треугольника окружность и вписать в треугольник окружность.

15. Какие свойства вписанных и описанных четырехугольников вы знаете?

16. Как определяется косинус острого угла?

17. Докажите теорему Пифагора.

18. Что такое косинус, синус, тангенс острого угла?

19. Определите связь между тригонометрическими функциями прямоугольного треугольника.

20. Каковы значения синуса, косинуса и тангенса для некоторых углов?

21. Докажите, что катет прямоугольного треугольника есть среднее геометрическое гипотенузы и проекции этого катета на гипотенузу.

22. Какие свойства высоты, опущенной из прямого угла на гипотенузу, вы знаете? Докажите их.

23. Докажите теорему Стюарта.

24. Какие фигуры называются равновеликими, равносоставными?

25. Как определяется площадь прямоугольника?

26. Какими формулами определяются площади параллелограмма, треугольника и трапеции? Выведите их.

27. Что такое декартова система прямоугольных координат? Что такое координаты точек?

28. Как определяется расстояние между двумя точками?

29. Выведите формулу деления отрезка в данном отношении. Как определяется центр отрезка?

30. Напишите уравнения прямой и окружности.

31. Каковы особенности расположения прямой и окружности относительно осей координат?

32. Напишите формулу уравнения эллипса, гиперболы и параболы.

33. Как определяются синус, косинус и тангенс углов от 0° до 180°?

34. Напишите формулы приведения.

9 класс

1. Что такое скалярная величина, векторная величина? Что такое коллинеарные векторы? Какая связь между вектором и параллельным переносом?

2. Что такое модуль векторов? Какие векторы называют равными?

3. Что такое сумма векторов? Назовите правило треугольника и правило параллелограмма сложения векторов.

4. Что такое разность векторов? Определите действие умножения вектора на число. Какими свойствами обладает это действие?

5. Что такое угол между векторами?

6. Докажите единственность разложения векторов по базису.

7. Что такое координаты вектора? Как выполняются действия сложения и умножения на число вектора с заданными координатами? Как определяется его модуль?

8. Что такое скалярное произведение векторов?

9. Определите координаты центра тяжести треугольника, применив элементы векторной алгебры.

10. Что такое решение треугольников?

11. Докажите теорему косинусов.

12. Докажите теорему синусов.

13. Как решить треугольник по двум сторонам и углу между ними, по стороне и двум углам?

14. Что такое ломаная линия? Какие свойства она имеет?

15. Что такое выпуклый многоугольник? Что такое правильный многоугольник?

16. Что называют направляющим вектором, вектором нормали? Напишите уравнение прямой.

17. Расскажите о преобразовании плоскости.

18. Что такое центральная симметрия, что такое осевая симметрия?

19. Что такое параллельный перенос, поворот?

20. Какое преобразование называется движением? Какая связь между движением и наложением?

21. Какое преобразование называется преобразованием подобия? Что такое коэффициент подобия?

22. Расскажите о гомотетии. Какие ее свойства вы знаете? Что называется центром гомотетии, коэффициентом гомотетии?

23. Что вы знаете о признаках подобия треугольников?

24. Назовите признаки подобия прямоугольного треугольника.

25. Какие свойства биссектрисы треугольника вы знаете?

26. Расскажите о пропорциональных отрезках в окружности. Какие их свойства вы знаете?

27. Что такое окружность? Назовите ее основные элементы.

28. Какие свойства касательной вы знаете?

29. Как может располагаться прямая относительно окружности?

30. Какие свойства хорд и дуг, опирающихся на них, вы знаете?

31. Сколько осей симметрии и центров симметрии у окружности?

32. Что такое вписанный в окружность угол, центральный угол? Какие их свойства вы знаете?

33. Как могут располагаться две окружности относительно друг друга? Как найти расстояние между центрами окружностей?

34. Чему равен угол, расположенный между касательной и хордой?

35. Как определить угол, образованный двумя секущими окружности?

36. Чему равна сумма внутренних углов выпуклого многоугольника, внешних углов?

37. Что такое центр, апофема правильного многоугольника?

38. Докажите теорему о соотношении длины окружности и ее диаметра. По какой формуле можно найти длину окружности?

39. Чему равно отношение площадей подобных треугольников, подобных многоугольников?

40. Что такое круг? Какие его элементы вы знаете?

41. Как найти площадь круга? Напишите ее формулу.

42. Как определить площадь сектора, сегмента?

43. Как найти площадь правильного многоугольника?

44. Что такое пропорциональные отрезки круга? Какие их свойства вы знаете?

45. Какие метрические соотношения в прямоугольном треугольнике вы знаете?

46. Какие виды треугольника вы знаете (остроугольный, прямоугольный, тупоугольный)?

47. Какие свойства биссектрисы вы знаете?

48. Какая связь существует между сторонами и диагоналями вписанного четырехугольника?

ОТВЕТЫ

Повторение материалов, пройденных в 7–8 классах

0.2. 2 см. **0.4.** 60°, 120°. **0.6.** 5 см, 6 см, 7,5 см. **0.7.** 120°, 100°. **0.9.** 1) $c=5$ см, $\sin\alpha=\frac{4}{5}$; 6) $a=8$ дм, $\sin\alpha=0,8$. **0.10.** 2) 4 м². **0.11.** 1) а) 3 см²; б) 1,5 см²; 4) а) 0,5 м²; б) 0,25 м². **0.12.** 2) а) 0,6 м²; б) 0,3 м². **0.13.** $8\sqrt{3}$ см². **0.14.** 2) 25 см²; 3) 2,59 м². **0.16.** 6 см, 8 см. **0.17.** Равна радиусу описанной окружности. **0.18.** 30° и 150°. **0.20.** Нужно провести все средние линии. **0.21.** 64 см. **0.22.** Нужно соединить точку пересечения медиан BE и CD с вершиной A. **0.24.** 30°. **0.25.** 60°, 120°. **0.27.** $h_a=1$ см, $h_b=1,75$ см, $\sin\alpha=0,25$. **0.28.** $S=\frac{a^2\sin\alpha\cdot\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$ **0.29.** $a=30$ м, $b=24$ м. **0.30.** 120°. **0.31.** $n=5$. **0.32.** Нужно показать, что в параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов A и C перпендикулярны биссектрисе угла B. **0.34.** Нужно построить треугольник по отрезкам a, b и $2m$. **0.35.** 60°, 120°. **0.38.** Нужно применить теорему Пифагора. **0.40.** $\frac{ha^2}{4\sqrt{a^2-h^2}}$.

Раздел 1. П. 1.1. **1.4.** 1) Точки A и B совпадают. **1.6.** $|\overrightarrow{BC}|=8$ см, $|\overrightarrow{CD}|=6$ см, $|\overrightarrow{AC}|=10$ см, $|\overrightarrow{AO}|=|\overrightarrow{CO}|=|\overrightarrow{DO}|=5$ см. **1.8.** $|\overrightarrow{NC}|=\sqrt{18,25}$ см. **1.9.** $|\overrightarrow{BD}|=13$ см, $|\overrightarrow{CD}|=5\sqrt{2}$ см, $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{74}$ см. **1.10.** Точка X – середина отрезка AB. **1.11.** 1) Ромб; 2) параллелограмм. **1.14.** 1) Ромб; 2) квадрат. **1.15.** Следует из свойства параллелограмма. **1.16.** 1000 км. **1.17.** $3\frac{3}{7}$ ч.

П.1.2. **1.21.** 1) $\overrightarrow{OC}$; 3) $\vec{0}$. **1.25.** 2) $\overrightarrow{BC}$; 4) $\overrightarrow{DB}$. **1.26.** 3) $\vec{0}$. **1.28.** 2) 14 и 10; 4) -2 и 10. **1.29.** $100\sqrt{13+6\sqrt{2}}$ км. **1.30.** $a\sqrt{1+\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2}$. **1.31.** 2) $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AN}$. **1.32.** 3) $-\vec{b}$. **1.36.** 1) a; 3) $\sqrt{3}\,a$; 5) a. **1.40.** 1) Можно; 2) можно. **1.43.** 1) Можно; 2) можно. **1.47.** a.

П.1.3. **1.49.** $\overrightarrow{AC}=k\cdot\overrightarrow{AB}$, k – действительное число. **1.51.** 1) $4\vec{n}$; 2) $2,5\vec{m}+1,5\vec{n}$; 3) $-\frac{4}{3}\vec{m}-\frac{2}{3}\vec{n}$. **1.52.** 2) $\overrightarrow{AD}+0,5\overrightarrow{AB}$. **1.53.** 1) $2\cdot\overrightarrow{AK}$; 3) $\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{AE}$; 6) $\overrightarrow{AK}+2\cdot\overrightarrow{AE}$. **1.54.** $\overrightarrow{AN}=\frac{3}{4}\vec{a}+\vec{b}$, $\overrightarrow{ND}=\frac{1}{4}\vec{a}-\vec{b}$. **1.56.** 2) $\vec{a}\downarrow\uparrow\vec{b}$, $|\vec{a}|\geqslant|\vec{b}|$. **1.57.** 1) $XA:AB=1:2$; 2) $AX:XB=1:1$; 3) $A=X$. **1.58.** $-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$. **1.60.** $\overrightarrow{TK}=\vec{n}+\frac{1}{6}\vec{m}$, $\overrightarrow{KE}=\frac{5}{6}\vec{m}-\frac{1}{2}\vec{n}$. **1.61.** $\overrightarrow{PO}=\overrightarrow{AO}-$

$-\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$, $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\Rightarrow\overrightarrow{PO}=0{,}5(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB})$.**1.62.**См. задачу 1.61. **1.64.** Середины сторон четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

П.1.4. **1.68.** 1) 6; 2) $2\sqrt{6}$; 3) 0; 4) −6. **1.71.** 1) 0; 3) 1; 5) −1; 8) 0. **1.72.** 2) −0,5. **1.74.** 2) $|\vec{c}|^2-|\vec{a}|^2$; 3) $(\vec{a}-\vec{b})^2$. **1.75.** Нужно группировать, раскрывая скобки. **1.76.** 1) $\varphi=\frac{\alpha}{2}$; 5) $\varphi=90^\circ$. **1.77.** 90°. **1.78.** $\sqrt{3}$, 30°. **1.81.** $\cos\varphi=\frac{4}{5}$. **1.83.** 1) $\frac{a^2}{2}$; 4) $-\frac{1}{4}a^2$; 5) 0. **1.86.** Пусть $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$. Если точки A, B, C принадлежат одной прямой, то $\vec{x}$ является любым вектором, перпендикулярным $\overrightarrow{AB}$. Если точки A, B, C не принадлежат одной прямой, то вектор $\vec{x}=\vec{0}$. **1.95.** $AN:AC=\frac{\lambda}{1+\lambda}$.

П.1.5. **1.96.** 3) (−2; 0). **1.98.** 2) (−2; 1). **1.99.** 1) (1; 1), (−1; 1); 2) (2; −2), (−6; 4). **1.100.** 3) (2; −1); 4) $(4\sqrt{3}; -2\sqrt{3})$. **1.102.** 1) $D(0; -4)$; 2) $D(8;0)$. **1.103.** Равны. **1.104.** $m=\pm12$, $n=\pm7$. **1.105.** 2) (−1; 0,5). **1.106.** 4) (−8; 0), 8. **1.110.** 4) $(-\frac{11}{6}; \frac{23}{2})$. **1.113.** 1) $\vec{e}=(0{,}6;\ 0{,}8)$; 2) $\vec{e}=(\frac{2}{\sqrt{29}}; -\frac{5}{\sqrt{29}})$. **1.114.** $D(-3; 12)$. **1.115.** $3\pm2\sqrt{2}$; $\pm\sqrt{13}-1$; $\frac{13}{8}$. **1.117.** 1) (17; −10), $\sqrt{389}$; 2) (11; −8), $\sqrt{185}$. **1.120.** 1) $x=-1$, $y=3$; 2) $x=4$, $y=-5$; 3) $x=0$, $y=3$. **1.122.** $A_2(-1; 5)$. **1.123.** 1) $\vec{a}=-\vec{p}+4\vec{q}$; 3) $\vec{c}=\vec{p}+\vec{q}$. **1.125.** 2) $A(0; 0)$, $B(3; 0)$; 4) $A(-1; -2)$, $B(2; -3)$.

П.1.6. **1.128.** $-\frac{8}{3}$. **1.129.** 1) 5; 2) 8; 3) 3. **1.131.** 2) 0; 4) $-a^2-b^2$. **1.135.** 1) 45°; 3) 30°. **1.137.** 1) 3; 2) $-3\sqrt{2}$; 3) 0; 4) 6; 5) −6. **1.138.** 1) −4; 2) 2. **1.139.** 1) 2; 2) 0,5; 8) $k=4$; 10) $k\in\varnothing$. **1.141.** 1) 8; 2) −12; 3) $\frac{2}{3}$; 4) 17; 5) 26; 6) 10; 7) −8. **1.142.** $\vec{e}=(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}; -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}})$. **1.143.** 4) −7. **1.144.** 2) $-a^2$; 3) 0; 8) a^2. **1.145.** 1) 2; 4) 2; 5) 0; 7) 0. **1.147.** $AC=\sqrt{115}$, $BD=7$. **1.148.** $\angle B=90^\circ$, $\cos A=\frac{3}{5}$, $\cos C=\frac{4}{5}$. **1.149.** 30°, 60°, 90°. **1.152.** $\alpha=-1$. **1.153.** $\varphi=30^\circ$. **1.155.** $AD=\frac{\sqrt{bc}\sqrt{(b+c)^2-a^2}}{b+c}$, $BE=\frac{\sqrt{ac}\sqrt{(a+c)^2-b^2}}{a+c}$, $CF=\frac{\sqrt{ab}\sqrt{(a+b)^2-c^2}}{a+b}$. **1.158.** $(\frac{3\sqrt{3}}{2}; \pm\frac{3}{2})$.

П.1.7. **1.161.** 2) $4x+3y-27=0$. **1.162.** 3) $x-y-3=0$. **1.163.** 4) $y=-1{,}5$. **1.164.** 1) $\vec{n}=(1; 1)$, $\vec{p}=(1; -1)$, $k=-1$; 3) $\vec{n}=(3;\ 4)$, $\vec{p}=(-4;\ 3)$, $k=-\frac{3}{4}$.

1.165. 2) 90°; 4) $\cos\varphi=-\dfrac{1}{\sqrt{65}}$. **1.166.** 1) $\dfrac{1}{5}$; 3) $\dfrac{12\sqrt{5}}{5}$. **1.167.** (23; 9), (−1; 2), (11; −7). **1.168.** 2) $2x-3y-1=0$, $x-3y+13=0$, $x-y-5=0$. **1.169.** 1) $x-y+1=0$; 3) $x-2y-1=0$; 4) $2x+6y-3=0$. **1.170.** По рисунку 1.40: $\vec{p}=(\sqrt{3};-1)$, $\vec{n}=(1;\sqrt{3})$, $k=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **1.171.** 1) $\vec{p}=(\alpha;0)$, $y=y_0$. **1.172.** 1) $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}\neq\dfrac{c_1}{c_2}$; 2) $a_1a_2+b_1b_2=0$; 3) $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$. **1.173.** 4) $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. **1.174.** 1) $x+y+1=0$; 2) $x-y+3=0$. **1.175.** 5) Перпендикулярны; 6) параллельны. **1.176.** −7. **1.177.** 2. **1.180.** 5) $\angle AOB=\angle COD$. **1.181.** $AC=2\sqrt{13}$, $BD=4\sqrt{19}$. **1.184.** $20\sqrt{3}$ кг, $10\sqrt{3}$ кг. **1.185.** 120 кг, $60\sqrt{3}$ кг. **1.186.** 4) $h_a=\dfrac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. **1.187.** Нужно применить равенство: «Сумма квадратов сторон параллелограмма равна сумме квадратов его диагоналей». **1.189.** $29x-2y+33=0$. **1.190.** 1) $a=-4$, $b=2$, или $a=4$, $b=-2$; 2) $a=4$, $b\neq-2$ или $a=-4$, $b\neq2$; 3) $a=0$. **1.191.** 0; 6. **1.192.** Делит на равные части. **1.195.** $\dfrac{x}{4}-\dfrac{x}{6}=1$ или $\dfrac{x}{8}-\dfrac{y}{3}=-1$ **1.199.** 1) $4x-2y+1=0$, $2x+4y-3=0$. **1.200.** 1) $12x-41y=0$, $6x+7y-75=0$, $24x-7y-150=0$. **1.204.** 1) $0\leqslant\alpha\leqslant1$, $0\leqslant\beta\leqslant1$, $0\leqslant\alpha+\beta\leqslant1$; 2) $0\leqslant\alpha\leqslant1$, $0\leqslant\beta\leqslant1$.

Раздел 2. П.2.1. **2.3.** Точка B – середина отрезка AA'. **2.4.** 1) 1; 2) не имеет; 3) каждая точка является центром симметрии; 4) не имеет. **2.8.** 1) (−2; 3); 2) (2; 3); 3) (−2; −3). **2.9.** Бесконечно много. Множество центров симметрии есть прямая, расположенная параллельно им; и эта прямая проходит посередине данных прямых. **2.14.** Точки биссектрисы находятся на равных расстояниях от сторон угла. **2.16.** 3) $A'(0;\ 1)$, $B'(-2;\ 1)$, $C'(2;\ 3)$. **2.19.** Если A является внутренней точкой угла $\angle(a;\ b)$, то нужно рассматривать центральную симметрию с центром в точке A. **2.20.** Нужно рассмотреть осевую симметрию относительно прямой b. **2.21.** 1) (6,5; −0,5); 2) $x+y-6=0$, $x-y-7=0$. **2.23.** Прямая m является осью симметрии. **2.26.**Примените свойства вписанного прямоугольного треугольника.

П.2.2. **2.27.** $4\sqrt{2}$ см. **2.31.** $(0;0)\to(1;-1)$, $(2;1)\to(3;0)$, $(-1;2)\to(0;1)$. **2.32.** 1) $a=2$, $b=2$; 2) $a=-3$, $b=3$; 3) $a=1$, $b=1$. **2.33.** (−2; 2). **2.34.** 1) Не существует; 2) существует: $x'=x-1$, $y'=y+1$. **2.36.** $CD_1=a\sqrt{5}$, $CC_1=2a$. **2.37.** $\angle ABC_1=\alpha+60^\circ$, $\angle CBA_1=|60^\circ-\alpha|$. **2.40.** На расстоянии, равном диаметру. **2.41.** Точка пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам, соединяющим соответствующие концы. **2.42.** 4) Равные окружности. **2.46.** $\frac{360^\circ}{n}$.

П.2.3. **2.57.** Примените свойства дельтоида, т.е. четырехугольника с взаимно перпендикулярными диагоналями и одна из диагоналей в точке пересечения делится пополам. **2.59.** Не обязательно. **2.60.** Учтите, что диаметр является осью симметрии.**2.63.** Нужно повернуть на 90° (от центра). **2.68.** Нужно рассмотреть осевую симметрию относительно данной прямой. **2.69.** Нужно рассмотреть центральную симметрию относительно точки C. **2.70.** Нужно построить изображение одной окружности в центральной симметрии относительно точки пересечения. **2.73.** Рассмотрите перенос, параллельный вектору $\overrightarrow{AB}$.

П.2.4. **2.74.** Возможно, k=1. **2.80.** Нужно увеличить длину сторон в два раза. **2.82.** k=0,5. **2.83.** A_1B_1 =1,5 м, $\angle A_1=30^\circ$. **2.85.** 13,6 см. **2.92.** $\frac{ah}{a+h}$.

П.2.5. **2.98.** 1) Подобны, k=40; 2) не подобны, потому что 1 м=100 см; 3) подобны, k=10; 4) подобны, k=100. **2.99.** 5) Подобны; 8) не подобны. **2.100.** 1) Подобны; 2) не подобны. **2.105.** a=1 м, b=2 м, c=2,5 м. **2.106.** 5,5 м, 6,5 м. **2.107.** 15 см, 20 см, 25 см. **2.108.** 4,2 м, 4,8 м, 6 м. **2.109.** 6 см, 8 см, 12 см. **2.111.** 1) 32; 2) 15. **2.112.** 8 см, 12 см.

П.2.6. **2.123.** 1) 8 см, 12 см; 3) AC=1,8 м. **2.124.** BE=7 см, CE= 5 см. **2.125.** 39 см, 65 см. **2.126.** 10 м, 14 м.**2.129.** 6 и 8. **2.130.** r=8. **2.131.** 50 см. **2.132.** $1:\sqrt{2}$. **2.133.** $\frac{b+c}{a}$.

Раздел 3. П.3.1. **3.1.** $\alpha=90^\circ$, $\cos\beta=\frac{3}{5}$, $\cos\gamma=\frac{4}{5}$. **3.2.** $\angle B=45^\circ$. **3.3.** 1) $\sqrt{34-15\sqrt{3}}$; 4) $\sqrt{37}$. **3.4.** $\sqrt{74-35\sqrt{2}}$. **3.5.** 5 м. **3.6.** 90°. **3.7.** 60°. **3.8.** 2) $\sin\beta=\frac{7\sqrt{3}}{16}$; 3) $\sin\beta=\frac{3}{4}$. **3.9.** 1) $CD=\frac{3\sqrt{55}}{4}$ см, $S=\frac{3\sqrt{55}}{4}$ см^2; 4) $CD=$ $=4\frac{8}{13}$ дм, S=30 дм^2. **3.10.** 2) 3 см; 3) 0,6 дм. **3.12.** 1) $\angle C=30^\circ$; 2) $\angle C=60^\circ$. **3.13.** 1) 60°; 2) 30°. **3.14.** $\sqrt{23,2}$ см, $\sin\beta=\frac{9}{\sqrt{145}}$, $\sin\gamma=\frac{12}{\sqrt{145}}$. **3.15.** 6 м, $3\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$ м, $6(\sqrt{3}-1)$ м. **3.17.** $\cos\alpha=\sqrt{3}(2-\sqrt{3})$. **3.18.** 1) Равнобедренный, остроугольный; 2) прямоугольный; 3) тупоугольный. **3.20.** $\frac{35\sqrt{6}}{24}$. **3.21.** $a=\frac{1}{2}\sqrt{d_1^2+d_2^2-2d_1d_2\cos\alpha}$, $b=\frac{1}{2}\sqrt{d_1^2+d_2^2+2d_1d_2\cos\alpha}$. **3.24.** H=2 м.

3.25. $AD=\dfrac{a\sin\beta}{\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}+\beta\right)}$, $BE=\dfrac{a\sin\alpha}{\sin\left(\alpha+\dfrac{\beta}{2}\right)}$, $CF=\dfrac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}$. **3.26.** $A_1K=\dfrac{d_2(d_1+d_2)}{\sqrt{(d_1+d_2)^2-4d_1d_2\cos^2\varphi}}$, $A_2K=\dfrac{2d_1d_2\cdot\cos\varphi}{\sqrt{(d_1+d_2)^2-4d_1d_2\cos^2\varphi}}$, $A_3K=\dfrac{d_1(d_1+d_2)}{\sqrt{(d_1+d_2)^2-4d_1d_2\cos^2\varphi}}$. **П.3.2.** **3.33** 2,5 м. **3.34.** 3) $D_1=\dfrac{\sqrt{19}}{4}$ см, $D_2=\dfrac{7}{4}$ см. **3.35.** 3) $a=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ м, $b=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ м. **3.36.** $AC=6\sqrt{6}$ см, $S=18(3+\sqrt{3})$ см^2. **3.38.** 4) $\angle A=30^\circ$, $AC=20$ см, $AB=20\sqrt{3}$ см, $S=100\sqrt{3}$ см^2. **3.39.** 3) $\alpha=60^\circ$, $\cos\beta=\dfrac{13}{14}$, $\cos\gamma=-\dfrac{1}{7}$, $S=6\sqrt{3}$ дм. **3.40.** 4) $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$, $\cos\gamma=\dfrac{4-3\sqrt{3}}{10}$, $c=\sqrt{57+24\sqrt{3}}$ см. **3.41.** $2\sqrt{13-6\sqrt{2}}$ см. **3.42.** $\dfrac{15}{4}$ см, $\dfrac{9}{4}$ см. **3.43.** 2) $b=2\sqrt{7}$ см, $\sin\gamma=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$, $\sin\alpha=\dfrac{3\sqrt{21}}{14}$. **3.44.** 2,4 $\sqrt{6}$ см, 2 $\sqrt{6}$ см, $\dfrac{12\sqrt{6}}{7}$ см. **3.45.** ≈74,2 кг. **3.46.** $F\approx275$ H, $\alpha\approx16^\circ$, $\beta\approx34^\circ$. **3.47.** 3. **3.48.** $\dfrac{10}{\cos20^\circ}$ см, $20\mathrm{tg}20^\circ$ см. **3.49.** $AC=\dfrac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. **3.50.** $\dfrac{\alpha}{2}\sin\alpha$. **3.51.** $\cos A=-\dfrac{1}{20}$, $\cos B=\dfrac{1}{20}$, $\cos C=-\dfrac{53}{80}$, $\cos D=\dfrac{53}{80}$. **3.52.** $12\sqrt{3}\sin40^\circ$, $12\sqrt{3}\sin20^\circ$. **3.53.** $\dfrac{\sqrt{97}}{3}$ м, 4 м, $\dfrac{\sqrt{97}}{3}$ м.
3.55. $BD=\dfrac{2\sqrt{acp(p-b)}}{a+c}$ и т.д. **3.56.** $\dfrac{\sqrt{5(a^2+b^2)}}{5}$. **3.57.** $\dfrac{2p^2}{h+2p}$.
3.58. $\sqrt{b^2+bc}$. **3.59.** $\dfrac{100}{3}$ см, $\dfrac{140}{3}$ см. **3.60.** $AB=4\sqrt{2}$ см, $BD=AC=4\sqrt{14}$ см. **П.3.3.** **3.63.** $\sin\alpha=\dfrac{h_1+h_2}{p}$. **3.64.** $\dfrac{2}{\sin\alpha}\sqrt{m^2+n^2\pm2mn\cos\alpha}$, $S=\dfrac{4mn}{\sin\alpha}$. **3.65.** $\dfrac{h^2}{\sin\alpha}$. **3.66.** $50\sqrt{2}$ см^2. **3.67.** $8\sqrt{3}$ см^2. **3.68.** $5\sqrt{2}$ м, 10 м, $5(\sqrt{3}+1)$ м. **3.69.** $a+2a\cos\alpha$, $S=a^2\sin\alpha(1+\cos\alpha)$. **3.70.** $5(2-\sqrt{3})$ см, $\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$ см. **3.71.** $\sin2\alpha\ \mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}$. **3.72.** $\sqrt{m^2+n^2-1,6mn}$.
3.73. $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{S\cdot\sin\alpha\sin\beta}{\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}}}$. **3.74.** $h\mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$. **3.75.** $2\sqrt{2}\,d\cos\dfrac{(p-q)45^0}{p+q}$.
3.76. $\cos\beta=\dfrac{m}{m+n}$, $\cos\alpha=\cos\gamma=\sqrt{\dfrac{n}{2(m+n)}}$. **3.77.** $\dfrac{\alpha}{4}\sqrt{9+\mathrm{tg}^2\alpha}$.

3.78. $\dfrac{ab\sin\alpha}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}}$. **3.79.** $\sin\alpha=\dfrac{4r^2}{S}$. **3.80.** $\dfrac{r\left(1+\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\cos\dfrac{\alpha}{2}\cdot\sin\alpha}$.

3.81. $\dfrac{2bc\cos\dfrac{\alpha}{2}}{b-c}$. **3.82.** $AC=\dfrac{m-n\cos\alpha}{\sin\alpha}$, $AB=\dfrac{n-m\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

3.83. $\dfrac{l(a+b)}{ab}\sqrt{4a^2b^2-l^2(a+b)^2}$. **3.84.** $\mathrm{tg}\varphi=\dfrac{1}{2}(\mathrm{ctg}b-\mathrm{ctg}\gamma)$.

3.85. $\dfrac{\sqrt{m^2+n^2-2mn\cos\alpha}}{\sin\alpha}$. **3.86.** $\cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{(a+b)l}{2ab}$. **3.87.** $\mathrm{ctg}\varphi=$ $=\dfrac{\sqrt{3}(p-q)}{3(p+q)}$. **3.88.** $\mathrm{tg}\varphi=\dfrac{4S}{a^2+b^2+c^2}$.

Раздел 4. П. 4.1. **4.2.** 1) 64 см; 2) 48 см. **4.3.** 1) $\sqrt{3}$ см; 2) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ см. **4.4.** 1) $4\sqrt{2}\,\pi$см; 2) 4π см. **4.6.** 1) $\dfrac{5\pi}{2}$; 2) $\dfrac{10\pi}{3}$; 3) 3π; 4) 10π. **4.7.** 5) $\dfrac{4\pi}{3}$; 6) $\dfrac{3\pi}{2}$. **4.8.** 1 м. **4.9.** 6369426,7 м. **4.10.** 36,2 см. **4.11.** 6,28 см. **4.12.** 1) $(2\sqrt{3}-3)R$; 2) $(\sqrt{2}-1)R$. **4.13.** $4^\circ36'$. **4.14.** 2) 48 см. **4.15.** 2) $c\pi(\sqrt{2}-1)$. **4.16.** $\dfrac{6\pi R}{11}$. **4.17.** Равны. **4.18.** 1) $4\pi R^2$; 2) $\dfrac{2\pi a}{3}$. **4.20.** 330 км.

П.4.2. **4.23.** 1) В 4 раза уменьшится; 2) в 9 раз увеличится. **4.24.** 1) $S_c=\dfrac{\pi a^2}{3}$, $S_i=\dfrac{\pi a^2}{12}$. **4.25.** $\sqrt{2}:\sqrt{3}$. **4.26.** $2\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$ м. **4.27.** 2) $\dfrac{1}{8}$; 4) $\dfrac{1}{4}$; 6) $\dfrac{5}{6}$. **4.28.** 1) $\dfrac{\pi a^2}{4}$; 2) $\dfrac{\pi a^2}{4}$; 3) $\dfrac{\pi a^2}{4}$. **4.29.** $S_1=\dfrac{\pi R^2\alpha}{360^\circ}-h\sqrt{R^2-h^2}$, $S_2=\dfrac{\pi R^2(360^\circ-\alpha)}{360^\circ}+h\sqrt{R^2-h^2}$, здесь $\cos\alpha=\dfrac{2h^2-R^2}{R^2}$. **4.31.** 100π см². **4.32.** $30\,756\pi$ мм². **4.33.** 1) $(4-\pi)a^2$; 2) $\dfrac{8+\pi}{2}a^2$; 3) $\dfrac{\pi+3\sqrt{3}}{6}a^2$. **4.34.** 3:2. **4.38.** $2\sqrt{R^2+r^2}$. **4.39.** 3:1.

П.4.3. **4.41.** 1) Нет; 2) да; 3) да. **4.42.** 1) Да; 2) нет. **4.44.** 1) Да; 2) нет; 3) да. **4.45.** 30 см. **4.46.** Нужно построить треугольник по R и углу α. **4.50.** R. **4.52.** 56 см. **4.55.** Покажите, что этот четырехугольник является прямоугольником. **4.57.** В него можно вписать окружность, так как равные хорды находятся на равных расстояниях от центра окружности. **4.58.** Не может. **4.59.** Сначала нужно показать, что угол между пересекающимися хордами равен полусумме дуг, на которые они опираются. Если O – точка пересечения диагоналей, a, P, Q – точки касания, то достаточно показать, что $\angle POQ = 180^\circ$. **4.60.** См. задачу **4.59.**

П.4.4. **4.61.** 24 см. **4.62.** $4\sqrt{2}$ см. **4.63.** 8 см. **4.64.** 16 см. **4.65.** 8 см. **4.66.** 15 см. **4.67.** 1) 2:3; 2) 4:9. **4.68.** 6 см. **4.70.** 12 см. **4.72.** 225,8 км. **4.73.** $2\sqrt{2}$ см. **4.74.** 1) ≈13 м; 2) 4,35 м. **4.75.** 21 см. **4.77.** В 1,5 раза. **4.78.** 10 см. **4.80.** $\sqrt{ab}$. **4.81.** $2\sqrt{R^2 - d^2}$. **4.82.** 18 см, 32 см. **4.83.** $\frac{671}{25}$ см. **4.85.** 7:8. **4.88.** $BE=7$ см, $EC=5$ см. **4.90.** 12 см, 18 см. **4.91.** 8 см. **4.92.** $\frac{3\sqrt{5}}{5}$. **4.95.** За центр гомотетии нужно принять точку пересечения боковых сторон.

П.4.5. **4.99.** Невозможно. **4.100.** 1) 8; 2) 12. **4.101.** 360°. **4.102.** 1) 10; 2) 15. **4.105.** 1) $n<6$; 2) $n=6$; 3) $n>6$. **4.106.** 1) 60°; 3) 108°; 5) 144°. **4.110.** $32\sqrt{3}$ см. **4.111.** $\frac{\sqrt{6}}{3}a$. **4.113.** 1) 2; 2) $\sqrt{2}$; 3) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **4.114.** $a_5=2R\sin 36^\circ$, $a_{10}=2R\sin 18^\circ$. **4.115.** 4) $R=10\sqrt{3}$ см, $a_3=30$ см, $P_3=90$ см. **4.116.** 2) $D=5\sqrt{3}$ см. **4.117.** 1) $2\sqrt{3}$ см; 2) $3\sqrt{3}$ см. **4.118.** $10\sqrt{2}$ см. **4.122.** $\frac{2-\sqrt{3}}{4}R^2$. **4.123.** 2) $\frac{4-\sqrt{3}}{4}R^2$. **4.124.** Примените равенство треугольников.

Содержание

Учебное издание

Шыныбеков Абдухали Насырулы
Шыныбеков Данияр Абдухалиулы
Жумабаев Ринат Нурланович

ГЕОМЕТРИЯ

Учебник для 9 класса общеобразовательной школы

Зав. редакцией *Н. Жиенгалиев*
Редактор *А. Изтлеуова*
Художественный редактор *Д. Курманов*
Технический редактор *О. Рысалиева*
Корректор *Ю. Гюльоглу*
Компьютерная верстка *А. Чагимкуловой*

ИБ № 116

Сдано в набор 03.02.2019. Подписано в печать 29.05.2019. Формат $60 \times 90^1/_{16}$.
Гарнитура «Школьная». Бумага офсетная. Усл.печ.л. 11,0. Уч.-изд.л. 8,39.
Тираж 10000 экз. Заказ 4336.

ТОО «Корпорация «Атамұра», 050000, г. Алматы, пр. Абылай хана, 75.

Полиграфкомбинат ТОО «Корпорация «Атамұра» Республики Казахстан,
050002, г. Алматы, ул. М. Макатаева, 41.