Г. Н. Солтан, А. Е. Солтан, А. Ж. Жумадилова

ГЕОМЕТРИЯ

УЧЕБНИК

для учащихся 9 класса общеобразовательной школы

+CD

Рекомендовано Министерством образования и науки Республики Казахстан

KELESHEK 2030
КОКШЕТАУ

УДК 373.167.1
ББК 22.1я73
С60

Солтан Г. Н. и др.

С60 Геометрия: учебник для учащихся 9 класса общеобразовательной школы + CD / Г. Н. Солтан, А. Е. Солтан, А. Ж. Жумадилова. – Кокшетау: Келешек-2030, 2019. – 240 с.: ил.

ISBN 978-601-317-432-7

Электронный вариант учебника: http://keleshek-2030.kz/books/geom_9r.php

УДК 373.167.1
ББК 22.1я73

ISBN 978-601-317-432-7

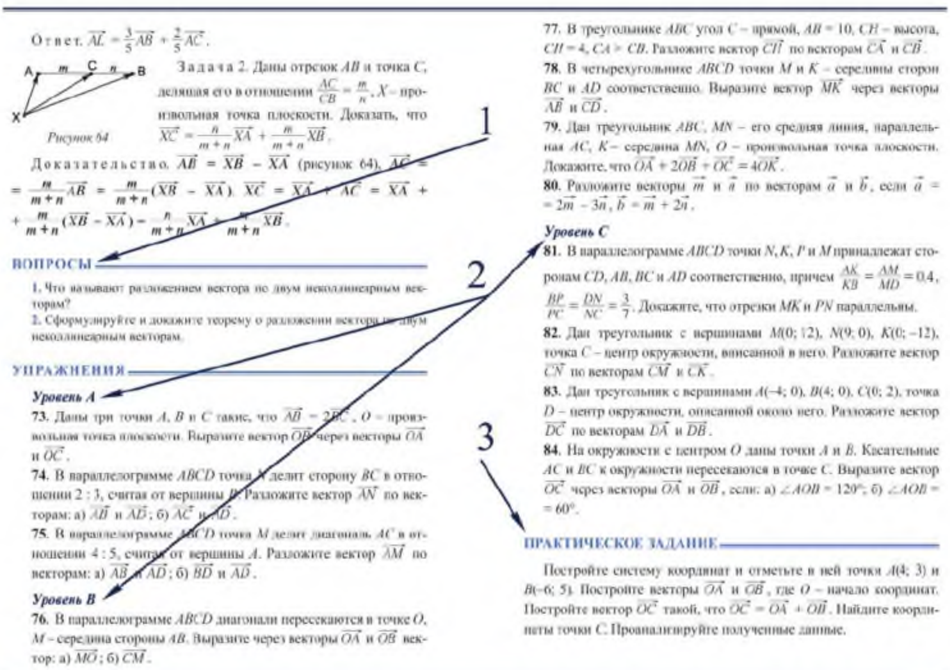
ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Дорогие девятиклассники!

В этом учебном году вы продолжите изучать предмет «Геометрия». При этом вы завершите изучение планиметрии и повторите весь курс геометрии 7–9 классов.

В предлагаемом учебнике отражено основное содержание курса геометрии 9 класса в соответствии с учебной программой. В него включены изложение теоретических вопросов, решение типовых задач, контрольные вопросы для проверки усвоения теории (1) и упражнения для самостоятельной работы, которые разделены на три уровня сложности: А, В и С (2). Для подготовки к изучению нового материала в конце некоторых пунктов предлагаются практические задания (3).



Ответ. $\overrightarrow{AL} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$.

Задача 2. Даны отрезок AB и точка C, делящая его в отношении $\frac{AC}{CB} = \frac{m}{n}$, X – произвольная точка плоскости. Доказать, что $\overrightarrow{XC} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{XA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{XB}$.

Рисунок 64

Доказательство. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{XB} - \overrightarrow{XA}$ (рисунок 64), $\overrightarrow{AC} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB} = \frac{m}{m+n}(\overrightarrow{XB} - \overrightarrow{XA})$. $\overrightarrow{XC} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{XA} + \frac{m}{m+n}(\overrightarrow{XB} - \overrightarrow{XA}) = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{XA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{XB}$.

1

ВОПРОСЫ

1. Что называют разложением вектора по двум неколлинеарным векторам?
2. Сформулируйте и докажите теорему о разложении вектора по двум неколлинеарным векторам.

2

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

73. Даны три точки A, B и C такие, что $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BC}$, O – произвольная точка плоскости. Выразите вектор $\overrightarrow{OB}$ через векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OC}$.

74. В параллелограмме $ABCD$ точка N делит сторону BC в отношении 2 : 3, считая от вершины B. Разложите вектор $\overrightarrow{AN}$ по векторам: а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$.

75. В параллелограмме $ABCD$ точка M делит диагональ AC в отношении 4 : 5, считая от вершины A. Разложите вектор $\overrightarrow{AM}$ по векторам: а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{AD}$.

Уровень В

76. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, M – середина стороны AB. Выразите через векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ вектор: а) $\overrightarrow{MO}$; б) $\overrightarrow{CM}$.

77. В треугольнике ABC угол C – прямой, $AB = 10$, CH – высота, $CH = 4$, $CA > CB$. Разложите вектор $\overrightarrow{CH}$ по векторам $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$.

78. В четырехугольнике $ABCD$ точки M и K – середины сторон BC и AD соответственно. Выразите вектор $\overrightarrow{MK}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$.

79. Дан треугольник ABC, MN – его средняя линия, параллельная AC, K – середина MN, O – произвольная точка плоскости. Докажите, что $\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OK}$.

80. Разложите векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} = 2\vec{m} - 3\vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} + 2\vec{n}$.

Уровень С

81. В параллелограмме $ABCD$ точки N, K, P и M принадлежат сторонам CD, AB, BC и AD соответственно, причем $\frac{AK}{KB} = \frac{AM}{MD} = 0,4$, $\frac{BP}{PC} = \frac{DN}{NC} = \frac{3}{7}$. Докажите, что отрезки MK и PN параллельны.

82. Дан треугольник с вершинами $M(0; 12)$, $N(9; 0)$, $K(0; -12)$, точка C – центр окружности, вписанной в него. Разложите вектор $\overrightarrow{CN}$ по векторам $\overrightarrow{CM}$ и $\overrightarrow{CK}$.

83. Дан треугольник с вершинами $A(-4; 0)$, $B(4; 0)$, $C(0; 2)$, точка D – центр окружности, описанной около него. Разложите вектор $\overrightarrow{DC}$ по векторам $\overrightarrow{DA}$ и $\overrightarrow{DB}$.

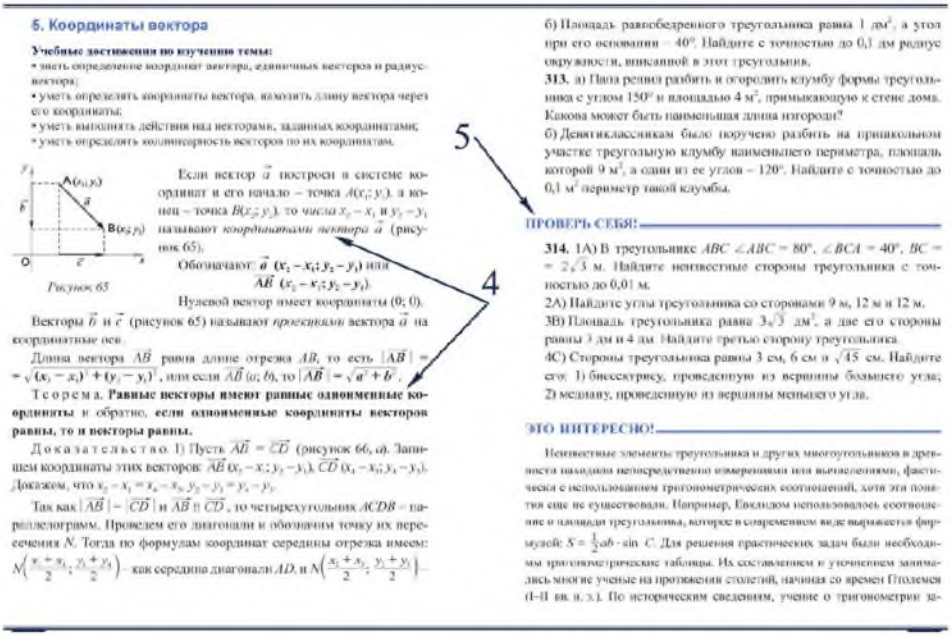
84. На окружности с центром O даны точки A и B. Касательные AC и BC к окружности пересекаются в точке C. Выразите вектор $\overrightarrow{OC}$ через векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, если: а) $\angle AOB = 120°$; б) $\angle AOB = 60°$.

3

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ

Постройте систему координат и отметьте в ней точки $A(4; 3)$ и $B(-6; 5)$. Постройте векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, где O – начало координат. Постройте вектор $\overrightarrow{OC}$ такой, что $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. Найдите координаты точки C. Проанализируйте полученные данные.

Определения, аксиомы, теоремы выделены специальными шрифтами (4). Для повторения учебного материала и подготовки к суммативному оцениванию в отдельные пункты выделены темы для решения задач, в которых предлагаются специальные задания под рубрикой *«Проверь себя!»* (5). К упражнениям даются ответы и указания.



5. Координаты вектора

Учебные достижения по изучению темы:

- знать определение координат вектора, единичных векторов и радиус-вектора;
- уметь определять координаты вектора, находить длину вектора через его координаты;
- уметь выполнять действия над векторами, заданных координатами;
- уметь определять коллинеарность векторов по их координатам.

Рисунок 65

Если вектор $\vec{a}$ построен в системе координат и его начало – точка $A(x_1; y_1)$, а конец – точка $B(x_2; y_2)$, то *числа* $x_2 - x_1$ и $y_2 - y_1$ называют *координатами вектора* $\vec{a}$ (рисунок 65).

Обозначают: $\vec{a}\ (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$ или $\overrightarrow{AB}\ (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$.

Нулевой вектор имеет координаты (0; 0).

Векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ (рисунок 65) называют *проекциями* вектора $\vec{a}$ на координатные оси.

Длина вектора $\overrightarrow{AB}$ равна длине отрезка AB, то есть $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, или если $\overrightarrow{AB}(a; b)$, то $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Теорема. **Равные векторы имеют равные одноименные координаты** и обратно, **если одноименные координаты векторов равны, то и векторы равны.**

Доказательство. 1) Пусть $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ (рисунок 66, *а*). Запишем координаты этих векторов: $\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$, $\overrightarrow{CD}(x_4 - x_3; y_4 - y_3)$. Докажем, что $x_2 - x_1 = x_4 - x_3$, $y_2 - y_1 = y_4 - y_3$.

Так как $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ и $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$, то четырехугольник $ACDB$ – параллелограмм. Проведем его диагонали и обозначим точку их пересечения N. Тогда по формулам координат середины отрезка имеем: $N\left(\frac{x_1 + x_4}{2}; \frac{y_1 + y_4}{2}\right)$ – как середина диагонали AD, и $N\left(\frac{x_2 + x_3}{2}; \frac{y_2 + y_3}{2}\right)$ –

б) Площадь равнобедренного треугольника равна 1 дм², а угол при его основании – 40°. Найдите с точностью до 0,1 дм радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

313. а) Папа решил разбить и огородить клумбу формы треугольника с углом 150° и площадью 4 м², примыкающую к стене дома. Какова может быть наименьшая длина изгороди?

б) Девятиклассникам было поручено разбить на пришкольном участке треугольную клумбу наименьшего периметра, площадь которой 9 м², а один из ее углов – 120°. Найдите с точностью до 0,1 м² периметр такой клумбы.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

314. 1А) В треугольнике ABC $\angle ABC = 80°$, $\angle BCA = 40°$, $BC = 2\sqrt{3}$ м. Найдите неизвестные стороны треугольника с точностью до 0,01 м.

2А) Найдите углы треугольника со сторонами 9 м, 12 м и 12 м.

3В) Площадь треугольника равна $3\sqrt{3}$ дм², а две его стороны равны 3 дм и 4 дм. Найдите третью сторону треугольника.

4С) Стороны треугольника равны 3 см, 6 см и $\sqrt{45}$ см. Найдите его: 1) биссектрису, проведенную из вершины большего угла; 2) медиану, проведенную из вершины меньшего угла.

ЭТО ИНТЕРЕСНО!

Неизвестные элементы треугольника и других многоугольников в древности находили непосредственно измерениями или вычислениями, фактически с использованием тригонометрических соотношений, хотя эти понятия еще не существовали. Например, Евклидом использовалось соотношение о площади треугольника, которое в современном виде выражается формулой: $S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin C$. Для решения практических задач были необходимы тригонометрические таблицы. Их составлением и уточнением занимались многие ученые на протяжении столетий, начиная со времен Птолемея (I–II вв. н. э.). По историческим сведениям, учение о тригонометрии за-

В этом учебном году вы изучите новые разделы: «Векторы» и «Геометрические преобразования», значительно расширите свои знания о видах и свойствах многоугольников, тригонометрических функциях угла, окружности и круге. Кроме того, вы будете больше внимания уделять применению алгебры в геометрии, а также геометрии в физике.

Желаем успехов!

Авторы

ПОВТОРЕНИЕ КУРСА ГЕОМЕТРИИ 8 КЛАССА

Геометрические фигуры, их признаки и свойства

Выпуклые четырехугольники

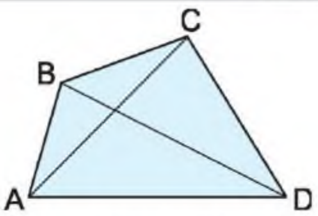


Рисунок 1

$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$

Параллелограмм

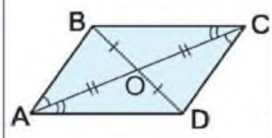


Рисунок 2

$AB \parallel DC,\ AD \parallel BC$

Трапеция

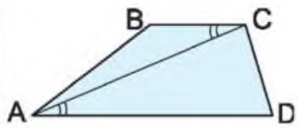


Рисунок 3

$AD \parallel BC,\ AB \nparallel DC$

***Признаки** параллелограмма*	***Свойства** параллелограмма*
Если в четырехугольнике две стороны равны и параллельны или противоположные стороны равны, или диагонали точкой пересечения делятся пополам, то он является параллелограммом.	В параллелограмме: • противоположные стороны равны; • противоположные углы равны; • диагонали точкой пересечения делятся пополам.

Параллелограмм и его виды

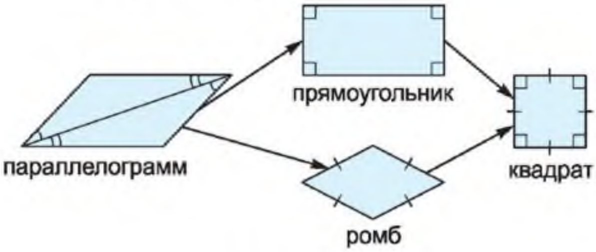


Рисунок 4

Свойство *сторон* (a, b) *и диагоналей* (d_1, d_2) ***параллелограмма*** $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$	***Особые свойства*** ***прямоугольника***: в прямоугольнике диагонали равны; ***ромба***: диагонали ромба перпендикулярны и делят углы ромба пополам.

Трапеция и ее виды

равнобедренная

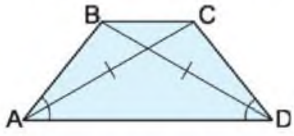


Рисунок 5

прямоугольная

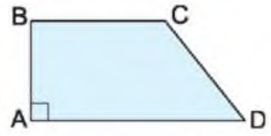


Рисунок 6

Четыре замечательные точки треугольника

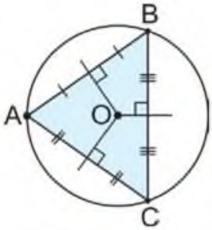


Рисунок 7

Точка пересечения ***серединных перпендикуляров,*** проведенных к сторонам треугольника, – центр окружности, описанной около него.

Точка пересечения ***медиан*** треугольника, которая делит каждую из них в отношении 2 : 1, считая от вершины.

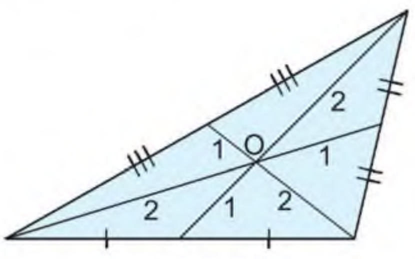


Рисунок 9

Точка пересечения ***биссектрис*** треугольника – центр окружности, вписанной в него.

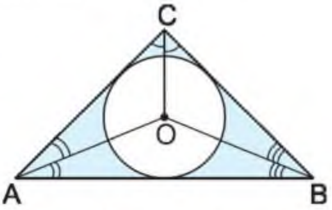


Рисунок 8

Точка пересечения прямых, содержащих ***высоты*** треугольника, – ортоцентр треугольника.

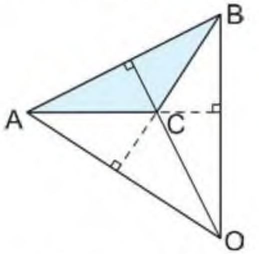


Рисунок 10

Теорема Фалеса

Если на одной из двух прямых отложить последовательно несколько равных отрезков и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то они отсекут на этой прямой равные между собой отрезки.

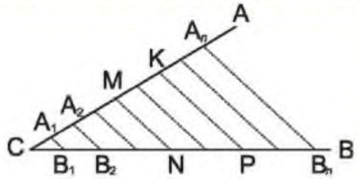


Рисунок 11

$$\frac{CM}{CN} = \frac{CK}{CP}$$

Теорема о пропорциональных отрезках

Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают от них пропорциональные отрезки.

Пропорциональные отрезки в треугольнике

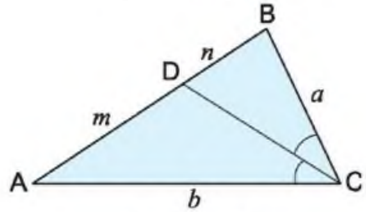


Рисунок 12

CD – биссектрисса, $\frac{m}{b} = \frac{n}{a}$

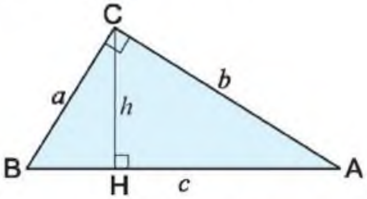


Рисунок 13

$$\frac{BH}{h} = \frac{h}{HA}, \quad h^2 = BH \cdot HA$$

$$\frac{c}{a} = \frac{a}{BH}, \quad a^2 = c \cdot BH$$

$$\frac{c}{b} = \frac{b}{AH}, \quad b^2 = c \cdot AH$$

Биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.

Средние пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике:

- *высота* является средним пропорциональным между отрезками, на которые она делит гипотенузу;
- *катет* является средним пропорциональным между гипотенузой и его проекцией на гипотенузу.

Средняя линия

треугольника

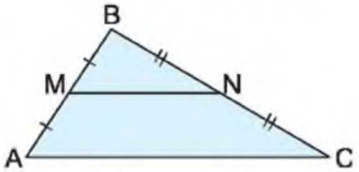


Рисунок 14

$MN \parallel AC$, $MN = \frac{1}{2}AC$

трапеции

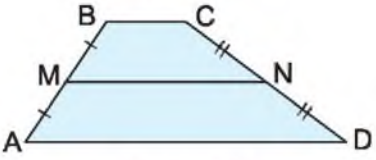


Рисунок 15

$MN \parallel BC$, $MN \parallel AD$, $MN = \frac{BC + AD}{2}$

Соотношения в прямоугольном треугольнике

Теорема Пифагора:

$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2}$.

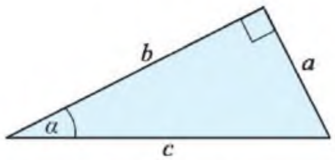


Рисунок 16

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$.

Тригонометрические тождества

$\boldsymbol{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$,

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$,

$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$,

$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$,

$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$,

$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$.

Прямоугольная система координат

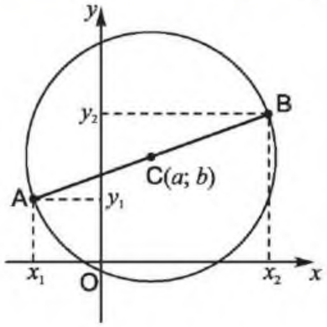


Рисунок 17

Координаты *середины* C отрезка AB:

$C\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

Длина отрезка AB:

$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Уравнение окружности с центром в точке C и радиусом R:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

Определение тригонометрических функций углов от 0° до 180°:

$\sin\alpha = y$, $\cos\alpha = x$,

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$.

Связь между тригонометрическими функциями острых и тупых углов:

$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$,

$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$,

$\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}(180° - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$.

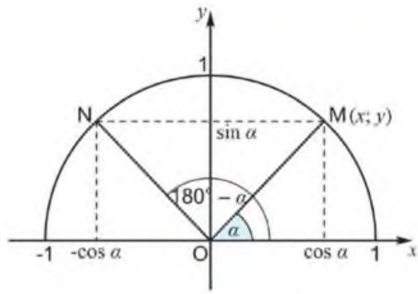


Рисунок 18

Площади фигур

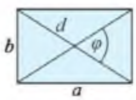


Рисунок 19

$S = ab$

или

$S = \frac{1}{2}d^2 \cdot \sin\varphi$

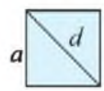


Рисунок 20

$S = a^2$

или

$S = \frac{1}{2}d^2$

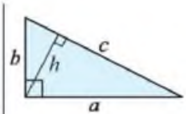


Рисунок 21

$S = \frac{1}{2}ab$

или

$S = \frac{1}{2}ch$

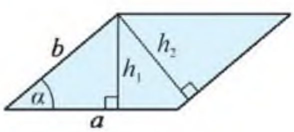


Рисунок 22

$S = ah_1$ или $S = bh_2$, или

$S = ab \cdot \sin\alpha$

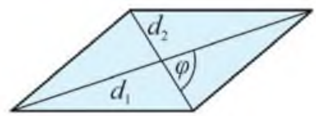


Рисунок 23

$S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \cdot \sin\varphi$

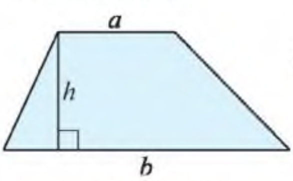


Рисунок 24

$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$

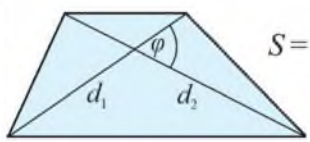


Рисунок 25

$S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \cdot \sin\varphi$

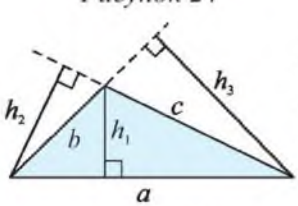


Рисунок 26

$S = \frac{1}{2}ah_1$

или

$S = \frac{1}{2}ch_2$,

или

$S = \frac{1}{2}bh_3$

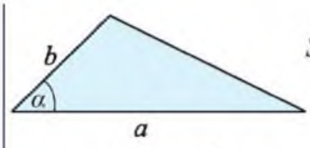
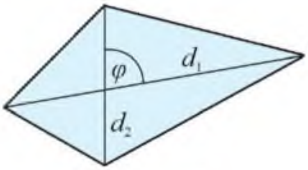


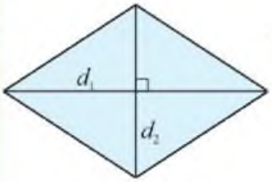
Рисунок 27

$S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin\alpha$



$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \cdot \sin\varphi$

Рисунок 28



$S = \frac{1}{2} d_1 d_2$

Рисунок 29

ВОПРОСЫ

1. Какая фигура называется четырехугольником? Чему равна сумма его углов?
2. Какой четырехугольник называется параллелограммом? Какие свойства параллелограмма вы знаете?
3. Какой параллелограмм называется: а) прямоугольником; б) ромбом; в) квадратом?
4. Перечислите известные вам свойства: а) прямоугольника; б) ромба; в) квадрата.
5. По каким признакам можно установить, что четырехугольник является параллелограммом?
6. При каком условии параллелограмм является: а) прямоугольником; б) ромбом?
7. При каком условии квадратом будет: а) прямоугольник; б) ромб?
8. Какой четырехугольник называется трапецией?
9. Сформулируйте признаки равнобедренной трапеции.
10. Чему равна сумма углов трапеции, прилежащих к боковой стороне?
11. Какие свойства имеют диагонали и углы равнобедренной трапеции?
12. Сформулируйте теорему Фалеса.
13. Дайте определения средней линии: а) треугольника; б) трапеции. Сформулируйте их свойства.
14. Перечислите четыре замечательные точки треугольника.
15. Каким свойством обладает точка пересечения: а) биссектрис треугольника; б) серединных перпендикуляров к сторонам треугольника; в) медиан треугольника?
16. Сформулируйте теорему Пифагора и теорему, обратную ей.
17. Как можно установить, является ли треугольник прямоугольным?
18. Какие отрезки в прямоугольном треугольнике являются средними пропорциональными?
19. Сформулируйте определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса острого угла прямоугольного треугольника.

20. Какое тождество называется основным тригонометрическим тождеством?

21. Как определяются синус, косинус, тангенс и котангенс углов от 0° до 180°?

22. Как, используя значения тригонометрических функций острых углов, находить значения тригонометрических функций тупых углов?

23. Пусть дан отрезок AB в прямоугольной системе координат, причем $A(a; b)$, $B(c; d)$. Запишите: а) формулу координат середины C отрезка AB; б) формулу длины отрезка AB; в) уравнение окружности с центром в точке B и радиусом R.

24. Запишите известные вам формулы для вычисления площади: а) прямоугольника; б) квадрата; в) прямоугольного треугольника; г) параллелограмма; д) ромба; е) треугольника; ж) трапеции.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

1. Используя данные на рисунке 30, найдите углы: а) параллелограмма $MNPK$; б) ромба $ABCD$; в) трапеции $EFTS$.

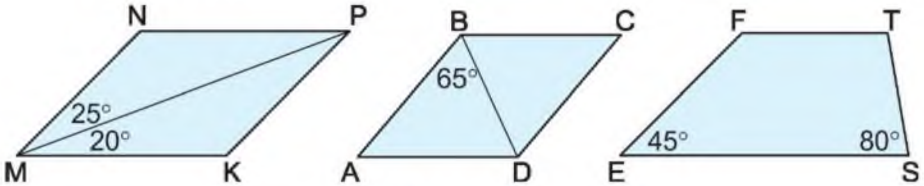


Рисунок 30

2. В четырехугольнике $ABCD$ к диагонали AC проведены перпендикуляры BF и DK, причем $BF = DK$, $\angle BAF = \angle DCK$. Докажите, что $ABCD$ – параллелограмм.

3. Докажите, что если в параллелограмме равны высоты, проведенные из одной вершины, то этот параллелограмм является ромбом.

4. Найдите периметр и площадь прямоугольной трапеции, если длины ее оснований равны 8 см и 12 см, а один из углов равен 135°.

5. В прямоугольнике одна сторона равна a, а диагональ – $2a$. Чему равен тупой угол между диагоналями прямоугольника и его площадь?

6. Найдите площадь равнобедренной трапеции, диагонали которой перпендикулярны, а основания равны 2 см и 4 см.

7. а) Найдите углы параллелограмма $MNPK$, изображенного на рисунке 31, если угол LPH равен 135°. б) По одну сторону от прямой b даны две точки B и C на расстоянии соответственно 8 см и 14 см от нее. Найдите расстояние от середины отрезка BC до прямой b.

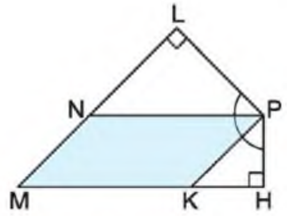


Рисунок 31

Уровень В

8. $ABCD$ – ромб, диагонали которого пересекаются в точке O и $\angle A = 60°$. Точки M и N – середины сторон AD и AB соответственно. Найдите периметр четырехугольника $MNOD$, если $BC = 16$ см.

9. а) Вершины четырехугольника $ABCD$ принадлежат окружности, причем AC – ее диаметр (рисунок 32, *а*). Найдите угол C, если угол A равен 125°. б) На рисунке 32, *б* $ABCD$ – трапеция, $AD \parallel MF \parallel NP \parallel KL$. Используя данные на этом рисунке, найдите длины отрезков MF, NP, KL.

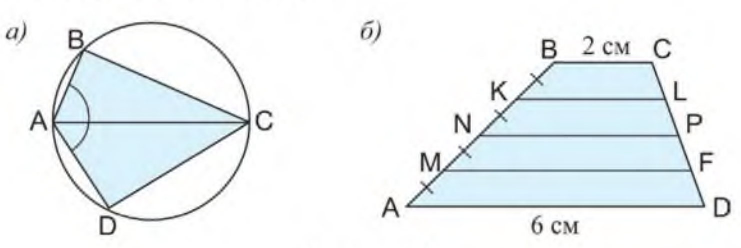


Рисунок 32

10. Через точку пересечения медиан треугольника ABC проведена прямая, параллельная стороне AB и пересекающая сторону BC в точке D. Докажите, что $CD : DB = 2 : 1$.

11. Точка O находится на расстоянии 18,5 см от каждой вершины прямоугольного треугольника, один из катетов которого равен 12 см. Найдите другой катет треугольника.

12. Радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника, равен $2\sqrt{3}$ см. Найдите его площадь.

13. Найдите радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами, равными 5 см и 12 см.

14. Найдите катеты прямоугольного треугольника, если его гипотенуза равна 17 см, а радиус окружности, вписанной в треугольник, равен 3 см.

15. Найдите стороны прямоугольного ΔABC ($\angle C = 90°$), если: а) высота $CD = 6$ см, $AD = 2$ см; б) высота $CD = 5\sqrt{2}$ см, $BD : DA = 1 : 2$.

16. Докажите, что треугольник со сторонами 3,7 см, 3,5 см и 1,2 см является прямоугольным и найдите его высоту, проведенную к большей стороне.

17. В прямоугольнике $ABCD$ точка N делит сторону AD в отношении $2 : 3$, считая от вершины A. В каком отношении отрезок BN делит площадь прямоугольника?

18. В прямоугольном ΔABC $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$, CH – высота. Докажите, что площадь ΔACH в 3 раза больше площади ΔBCH.

19. Высота равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, равна 4 см. Найдите другую высоту и площадь треугольника, если один из его углов равен 120°.

20. В ΔABC $\angle A = 30°$, $\angle C = 45°$, $AC = 2$ дм. Найдите высоту BD этого треугольника.

21. В треугольнике ABC угол B равен 60°, а высота CH делит сторону AB на части $BH = 5\sqrt{3}$ см и $AH = 8$ см. Найдите наибольшую сторону этого треугольника.

22. Некоторая точка A у подножия горы Чингизтау в Казахстане (рисунок 33) расположена так, что $\angle BAO = 25°$, где B – вершина горы, O – основание ее высоты. Точка C расположена так, что $\angle BCO = 19°$, причем $AC = 987$ м и точки O, A и C лежат на одной прямой. Какова высота этой горы? Ответ запишите с точностью до 1 м.

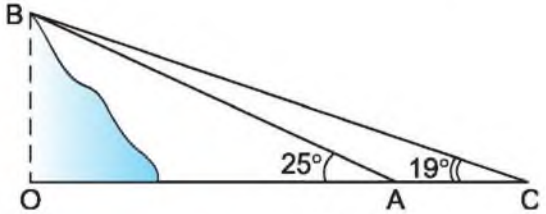


Рисунок 33

Уровень С

23. Основание равнобедренного треугольника равно 8 см, а высота, проведенная к основанию, – 16 см. Найдите длину медианы треугольника, проведенной к его боковой стороне.

24. В треугольнике ABC стороны BC и AC соответственно равны 10 см и 24 см, а медиана CM равна 13 см. Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

25. Найдите биссектрису BD треугольника ABC, в котором $AB = 4$ см, $BC = 6$ см, $\angle B = 120°$.

26. Даны точки $A(1; –2)$ и $B(9; 2)$. Найдите: а) координаты середины C отрезка AB; б) точки, лежащие на координатных осях и равноудаленные от точек A и B.

27. Постройте угол φ, если: а) $\sin \varphi = \frac{2}{5}$; б) $\cos \varphi = -\frac{3}{4}$. Сколько решений имеет задача?

28. Напишите уравнение окружности, описанной около треугольника ABC, если $A(–3; 0)$, $B(0; 3\sqrt{3})$, $C(3; 0)$.

29. Найдите площадь четырехугольника с вершинами в точках $A(–3; 1)$, $B(–2; 6)$, $C(3; 7)$, $D(2; 2)$.

I. ВЕКТОРЫ

знать

• определения: вектора, коллинеарных векторов, равных векторов, нулевого вектора, единичного вектора, длины вектора, координат вектора, угла между двумя векторами, скалярного произведения двух векторов;

• правила сложения, вычитания векторов и умножения вектора на число;

• условие коллинеарности векторов;

• способы разложения вектора по двум неколлинеарным векторам;

• свойства скалярного произведения двух векторов.

уметь

• находить: длину вектора, координаты вектора, угол между двумя векторами, скалярное произведение двух векторов;

• раскладывать вектор по двум неколлинеарным векторам;

• применять правила сложения, вычитания векторов, умножения вектора на число;

• выполнять действия над векторами, заданных координатами;

• применять векторы при решении задач.

1. Понятие вектора. Коллинеарные векторы

Учебные достижения по изучению темы:

• знать определения вектора, коллинеарных векторов, равных векторов, нулевого вектора и длины вектора;

• знать, какие векторы называются одинаково направленными, противоположно направленными, теорему об откладывании вектора от точки;

• уметь строить векторы, откладывать их от точки, решать задачи на определение равенства и коллинеарности векторов, а также на нахождение длин векторов.

Если тело при прямолинейном движении перемещено из точки A в точку B, то это перемещение удобно изобразить отрезком с указанием направления движения стрелкой в точке B. Такой отрезок называется *направленным отрезком*. **Направленный отрезок называется вектором**. Один конец этого отрезка называют началом вектора, а второй – его концом. Векторы обозначают двумя заглавными латинскими буквами со стрелкой над ними, причем первая буква обозначает начало вектора, а вторая – его конец, или одной строчной латинской буквой со стрелкой над ней.

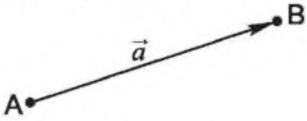


Рисунок 34

Например, на рисунке 34 изображен вектор $\overrightarrow{AB}$ или $\vec{a}$.

Длиной вектора (или модулем вектора) $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB. Длина вектора обозначается $|\overrightarrow{AB}|$, а длина вектора $\vec{a}$ обозначается $|\vec{a}|$. Например, на рисунке 35 $|\overrightarrow{CD}| = 2{,}5$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$.

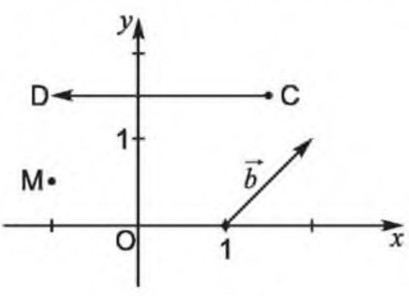


Рисунок 35

В геометрии используется также понятие нулевого вектора, в котором начало вектора совпадает с его концом. Нулевой вектор изображается точкой и обозначается $\vec{0}$ или, например, $\overrightarrow{MM}$ (рисунок 35), его длина считается равной 0, а направление не определяется.

Ненулевые векторы называются коллинеарными, если они лежат на параллельных прямых или на одной прямой. Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору. Например, на рисунке 36 векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$ коллинеарные, а векторы $\vec{a}$ и $\vec{d}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ неколлинеарные.

Два ненулевых вектора, лежащие на параллельных прямых, называются *одинаково направленными* (или *сонаправленными*), если их концы лежат по одну сторону от прямой, проходящей через их начала, и *противоположно направленными*, если их концы лежат по разные стороны от такой прямой. Лежащие на одной прямой ненулевые векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются одинаково направленными, если один из лучей AB или CD содержится в другом из них, и противоположно направленными, если ни один из лучей AB или CD не содержится в другом из них. На рисунке 36 коллинеарные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, например, одинаково направленные, их обозначают $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, а коллинеарные векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ противоположно направленные, их обозначают $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{c}$.

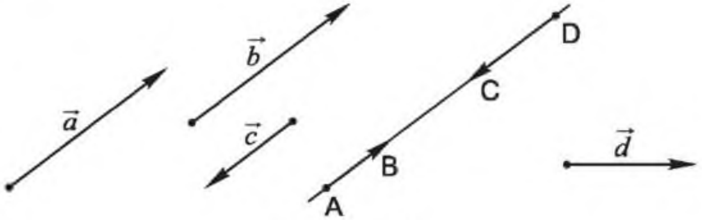


Рисунок 36

Два вектора называются равными, если они имеют равные длины и одинаково направлены. Например, на рисунке 36 векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны.

Построение вектора, например $\overrightarrow{MN}$, где $\overrightarrow{MN} = \vec{a}$ называется *откладыванием вектора* $\vec{a}$ *от точки M.*

Т е о р е м а (*об откладывании вектора от точки*). **От данной точки можно отложить только один вектор, равный данному вектору.**

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть даны вектор $\vec{a}$ и точка A. Построим $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$.

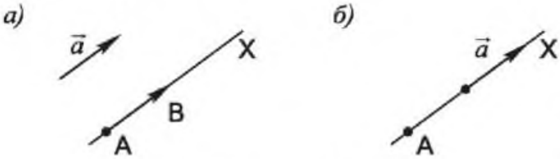


Рисунок 37

I случай. Точка A и вектор $\vec{a}$ не лежат на одной прямой. Проводим прямую AX, параллельную вектору $\vec{a}$. На этой прямой строим вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ (рисунок 37, *а*). Этот вектор единственный, что следует из аксиомы параллельных прямых и основных свойств измерения и откладывания отрезков.

II случай. Точка A и вектор $\vec{a}$ лежат на одной прямой (рисунок 37, *б*). Установите самостоятельно единственность такого вектора.

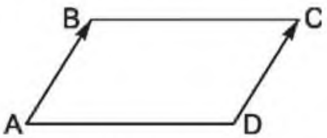


Рисунок 38

З а д а ч а 1. Дан параллелограмм $ABCD$. Доказать, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (рисунок 38).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ – одинаково направлены, их длины равны, как противоположные стороны параллелограмма. Следовательно, по определению равных векторов, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

З а д а ч а 2. Дан прямоугольник $ABCD$, угол между диагоналями которого равен 60°, $AB = 4$ см. Найти длину вектора $\overrightarrow{AD}$.

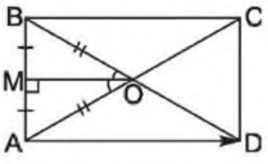


Рисунок 39

Р е ш е н и е. Пусть O – точка пересечения диагоналей данного прямоугольника (рисунок 39). По условию $\angle AOB = 60°$. Треугольник AOB – равнобедренный, так как диагонали прямоугольника равны и точкой пересечения делятся пополам. Проведем медиану OM этого треугольника, она является его высотой и биссектрисой. Следовательно, $AM = 2$ см, $\angle AOM = 30°$. В прямоугольном треугольнике AMO катет

$OM = AM \cdot \text{ctg}30° = 2\sqrt{3}$ (см). $OM = \frac{1}{2}AD$ как средняя линия ΔABD. Следовательно, $AD = 4\sqrt{3}$ см и $|\overrightarrow{AD}| = 4\sqrt{3}$ см.

Ответ. $4\sqrt{3}$ см.

ВОПРОСЫ

1. Что называется вектором? Назовите начало и конец вектора $\overrightarrow{CD}$.
2. Какой вектор называется нулевым?
3. Что называется длиной вектора? Чему равна длина нулевого вектора?
4. Какие векторы называются коллинеарными, одинаково направленными, противоположно направленными?
5. Дайте определение равных векторов.
6. Сформулируйте и докажите теорему об откладывании вектора от точки.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

30. Начертите векторы, изображающие полет самолета сначала на 400 км на восток от города M до N, а потом на 300 км на юг от города N до K. Постройте вектор $\overrightarrow{MK}$, изображающий перемещение из начальной точки полета в конечную. Найдите длину вектора $\overrightarrow{MK}$.

31. Постройте три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ так, чтобы $|\vec{a}| = 2$ см, $|\vec{b}| = 3{,}5$ см, $|\vec{c}| = 5$ см, если: а) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ коллинеарные векторы; б) $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарные, а $\vec{a}$ и $\vec{c}$ неколлинеарные векторы.

32. Постройте два вектора, имеющих равные длины, если они: а) неколлинеарные; б) одинаково направленные; в) противоположно направленные. В каком случае построенные векторы равны?

33. Верно ли утверждение: а) если $\vec{a} = \vec{b}$, то $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны; б) если $\vec{a} \upuparrows \vec{b}$, то $\vec{a} = \vec{b}$; в) если $\vec{a} = \vec{b}$, то $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$; г) если $\vec{a} = \vec{0}$, то $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$?

Уровень B

34. Верно ли, что если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$? Рассмотрите все возможные случаи.

35. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $AC = 12$ см, $CB = 5$ см, точки M и N – середины сторон AB и AC соответственно. Найдите длины векторов: а) $\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{CM}$; в) $\overrightarrow{MN}$.

36. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD. Найдите длины векторов $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{CD}$, если $AB = 6$ см, $BC = 10$ см, $AC = 12$ см.

37. Докажите, что если $\vec{a} = \vec{c}$ и $\vec{b} = \vec{c}$, то $\vec{a} = \vec{b}$.

Уровень C

38. Вершины шестиугольника $ABCDEF$ лежат на окружности с центром O. Известно, что $AB = BC = CD = DE = EF = FA = AO$. а) Докажите, что $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AF}$. б) Равны ли векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{ED}$?

39. Равны ли векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$, если точки A и A_1, B и B_1 симметричны относительно некоторой произвольной: а) точки; б) прямой?

40. Откладываются равные векторы от каждой точки: а) отрезка; б) треугольника. Какую фигуру образуют концы всех этих векторов?

41. В прямоугольной трапеции $ABCD$ большее основание $AD = 14$ см, $AB = 6\sqrt{3}$ см, $\angle D = 60°$. Найдите длины векторов: а) $\overrightarrow{CD}$; б) $\overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{AC}$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ

При помощи векторов постройте схему маршрута движения автомобилиста, если он проехал 32 км на север, 18 км на восток, 7 км на запад, 11 км на юг и 27 км снова на восток. Найдите расстояние от начальной до конечной точки маршрута. Изменится ли это расстояние, если поменять очередность пройденных участков пути, не меняя их направлений и длин?

2. Сложение и вычитание векторов

Учебные достижения по изучению темы:

• знать правила сложения и вычитания векторов;

• знать и уметь применять переместительный и сочетательный законы сложения и вычитания векторов;

• уметь применять правила треугольника и параллелограмма сложения и вычитания векторов при решении задач.

Пусть тело при прямолинейном движении перемещено из точки A в точку B, а затем из точки B в точку C. Это можно представить векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$. В результате этих перемещений тело переместилось из точки A в точку C, поэтому вектор $\overrightarrow{AC}$ называется суммой векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ (рисунок 40).

Суммой векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ называется вектор $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

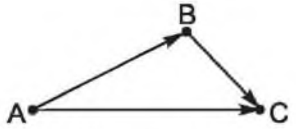


Рисунок 40

Сложение произвольных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется так. Сначала от произвольной точки A откладывают вектор $\overrightarrow{AB}$, равный вектору $\vec{a}$, затем от точки B – вектор $\overrightarrow{BC}$, равный вектору $\vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{AC}$ – сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рисунок 41). Такой способ получения суммы векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют *правилом треугольника*, так как, если векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ не коллинеарны, то их сумма $\overrightarrow{AC}$ изображается на стороне AC треугольника ABC.

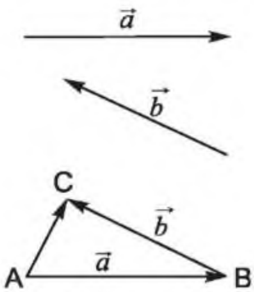


Рисунок 41

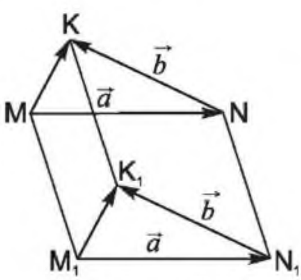


Рисунок 42

Длина суммы двух векторов не зависит от выбора точки, от которой они откладываются. Убедитесь в этом самостоятельно, используя рисунок 42.

Теорема. **Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется переместительный закон сложения, то есть $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.**

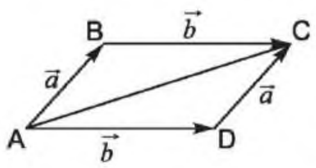


Рисунок 43

Доказательство. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарные векторы. Построим их сумму по правилу треугольника: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ (рисунок 43). Построим параллелограмм $ABCD$, его противоположные стороны равны и параллельны, поэтому $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$, то есть $\vec{b} + \vec{a} = \overrightarrow{AC}$. Следовательно, $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

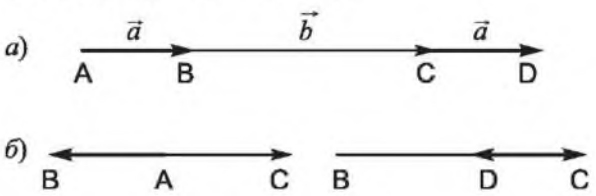


Рисунок 44

Случаи, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарные: а) $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$; б) $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ рассмотрите самостоятельно, используя рисунок 44, на котором $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{b} + \vec{a} = \overrightarrow{BD}$.

Доказав переместительный закон сложения для неколлинеарных векторов, мы получили еще один способ сложения двух векторов, который называется *правилом параллелограмма*, так как сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ изображается на диагонали параллелограмма, построенного на них, выходящей из общего начала этих векторов (рисунок 43).

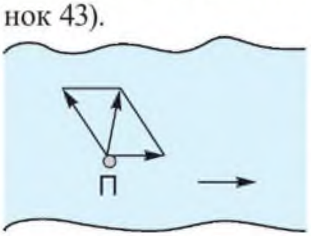


Рисунок 45

Правило параллелограмма удобно применять, когда тело при прямолинейном движении испытывает два перемещения, например, если пловец переплывает реку, то его перемещение складывается из перемещений к противоположному берегу и по течению (рисунок 45, где буквой П обозначен пловец).

Теорема. **Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ выполняется сочетательный закон сложения, то есть $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.**

Доказательство. Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ – неколлинеарные векторы. Отложим от точки A вектор $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, затем построим $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, а потом $\overrightarrow{CD}=\vec{c}$ (рисунок 46). Тогда $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}=$ $=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$, $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$.

Итак, $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$. Это доказательство применимо и для коллинеарных векторов. Теорема доказана.

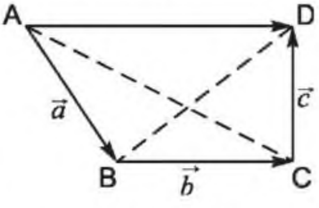


Рисунок 46

Сложение нескольких векторов осуществляется следующим образом: первый вектор складывается со вторым, затем их сумма с третьим и т. д. Из переместительного и сочетательного законов сложения векторов следует, что их сумма не зависит от того, в каком порядке они складываются. На рисунках 47, *а*, *б* показан такой способ построения суммы нескольких векторов, который называется *правилом многоугольника*. Заметим, что такое название условно.

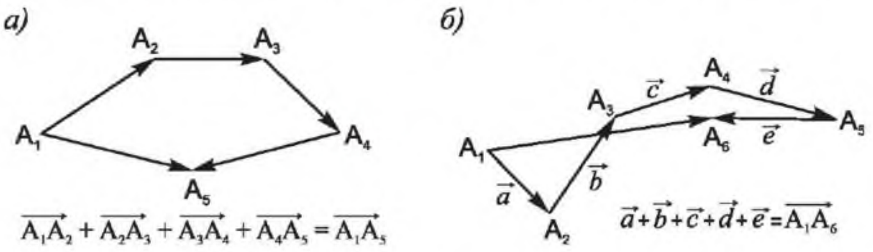


Рисунок 47

Правило многоугольника можно сформулировать так: если A_1, A_2, ..., A_n – произвольные точки, то $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\ldots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{A_1A_n}$.

Если начало первого вектора совпадает с концом последнего, то сумма всех векторов равна нулевому вектору, то есть $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+$ $\ldots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}+\overrightarrow{A_nA_1}=\overrightarrow{A_1A_1}=\vec{0}$. Из этого равенства следует, что ломаная $A_1A_2\ldots A_n$ – замкнутая.

Два вектора называются *противоположными*, если они противоположно направлены и их длины равны. Например, векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$ – противоположные, их сумма равна нулевому вектору, то есть

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}.$$

Вектор, противоположный вектору $\vec{a}$, обозначается «$-\vec{a}$» и читается «минус вектор *a*»,

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}.$$

Вычитание векторов, как и чисел, – действие, обратное сложению. *Разностью* $\vec{a} - \vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c}$, что $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$ (рисунок 48, *а*). Чтобы построить разность $\vec{a} - \vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, нужно отложить от какой-нибудь точки, например *A*, эти векторы: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$. Тогда $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$ (рисунок 48, *а*), так как $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$.

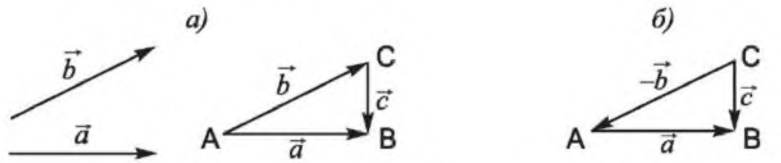


Рисунок 48

Вычитание $\vec{a} - \vec{b}$ можно заменить сложением $\vec{a} + (-\vec{b})$. Действительно, пусть $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, тогда $\overrightarrow{CA} = -\vec{b}$. По правилу треугольника $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$ (рисунок 48, *б*). Следовательно, $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

Любой вектор из одной части векторного равенства можно перенести в другую, заменив его на противоположный. Например, если выполняется равенство $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$, то, прибавив к его обеим частям вектор $(-\vec{b})$, получим:

$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + (-\vec{b}) = \vec{d} + (-\vec{b})$. Тогда $\vec{a} + (\vec{b} + (-\vec{b})) + \vec{c} = \vec{d} - \vec{b}$, $\vec{a} + \vec{c} = \vec{d} - \vec{b}$.

З а д а ч а 1. Дан прямоугольник *ABCD*. Доказать, что $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}|$.

Доказательство. По правилу параллелограмма сложения векторов $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ (рисунок 49), следовательно, $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AC}|$. По правилу вычитания векторов $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$, следовательно, $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{DB}|$. Так как диагонали прямоугольника равны, то $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}|$. Что и требовалось доказать.

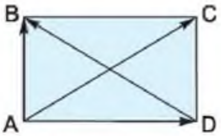


Рисунок 49

Задача 2. Медианы ΔABC пересекаются в точке O. Найти $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}|$.

Решение. Продлим медиану BM треугольника ABC на отрезок $MD = OM$ (рисунок 50). Тогда четырехугольник $AOCD$ – параллелограмм, так как его диагонали точкой пересечения делятся пополам. По правилу параллелограмма сложения векторов $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$.

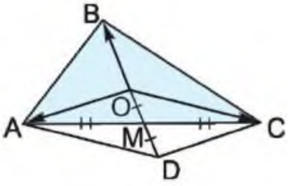


Рисунок 50

Медианы треугольника делятся точкой пересечения в отношении 2 : 1, считая от вершины. Следовательно, $OB = 2OM$. По построению $OD = 2OM$. Таким образом, $OD = OB$, а $\overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OB}$. Тогда $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} = \vec{0}$. Следовательно, $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = 0$.

Ответ. 0.

ВОПРОСЫ

1. Что называется суммой двух векторов?
2. Как сложить два вектора по правилу: а) треугольника; б) параллелограмма? Приведите примеры.
3. Запишите формулами переместительный и сочетательный законы сложения векторов.
4. Как сложить четыре вектора по правилу многоугольника? Приведите пример.
5. Какой вектор называется разностью двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$?
6. Как построить вектор $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$? Предложите два способа построения.

УПРАЖНЕНИЯ

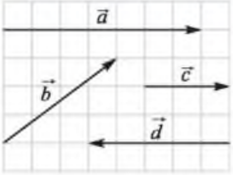


Рисунок 51

Уровень А

42. Изобразите векторы, как на рисунке 51. Постройте векторы, равные: а) сумме векторов: $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}+\vec{c}$, $\vec{c}+\vec{d}$; б) разности векторов $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{c}$, $\vec{c}-\vec{d}$.

43. Докажите, что для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ верно неравенство: а) $|\vec{a}+\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$; б) $|\vec{a}-\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$.

44. Даны точки A и B. Докажите, что для любых точек X и Y плоскости верно равенство $|\overrightarrow{XB}-\overrightarrow{XA}|=|\overrightarrow{YB}-\overrightarrow{YA}|$.

45. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Докажите, что $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=-(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD})$.

Уровень В

46. Дан четырехугольник $ABCD$. Докажите, что $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}=$ $=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CD}$.

47. Сколько нужно векторов для того, чтобы на карте Казахстана показать перемещение из столицы с заходом в каждый областной город один за другим и снова в Нур-Султан? Отметьте точками примерное положение городов по отношению к столице и покажите одно из таких перемещений. Чему равна сумма всех таких векторов?

48. Дан треугольник FKT. Постройте векторы, равные сумме и разности векторов: а) $\overrightarrow{FK}$ и $\overrightarrow{KT}$; б) $\overrightarrow{FK}$ и $\overrightarrow{FT}$; в) $\overrightarrow{KT}$ и $\overrightarrow{FT}$.

49. В прямоугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, $AB=2$, $AD=4$. Найдите: а) $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|$; б) $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}|$; в) $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}|$; г) $|\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{OD}|$.

50. Дан параллелограмм $MNPK$, диагонали которого пересекаются в точке O, и векторы $\vec{a}=\overrightarrow{ON}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OP}$. Выразите через $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторы $\overrightarrow{MK}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{PN}$, $\overrightarrow{PK}$.

51. Дана равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC, в которой $AB=BC$, $\angle A=60°$, точка K – середина AD и векторы $\vec{a}=\overrightarrow{AK}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$. Выразите через $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторы $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DB}$.

52. Дан равносторонний треугольник ABC со стороной, равной a. Докажите, что: а) $|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}|$; б) $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$.

Уровень С

53. Даны три неколлинеарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (рисунок 52). Постройте вектор $\vec{x}$ такой, что: а) $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{x}$; б) $\vec{a} - \vec{x} = \vec{b} + \vec{c}$.

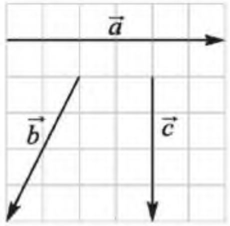


Рисунок 52

54. Даны параллелограмм $ABCD$ и произвольная точка X плоскости. Докажите, что: а) $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XD}$; б) $\overrightarrow{XB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = -(\overrightarrow{BX} - \overrightarrow{CD})$.

55. В ромбе $ABCD$ диагонали пересекаются в точке M, $AD = 10$ см, $BD = 12$ см. Найдите: а) $|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{MB}|$; б) $|\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{MA}|$.

56. Дана окружность с центром O и радиусом 2 см и проведены ее радиусы OA, OB и OC, причем $\angle AOB = \angle AOC = \angle BOC$. Найдите $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}|$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ

Начертите два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и постройте вектор $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$. Измерьте длины этих векторов. Исследуйте, как изменяется длина вектора $\vec{c}$, если длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ увеличить: а) в два раза; б) в пять раз.

3. Умножение вектора на число. Критерий коллинеарности двух векторов

Учебные достижения по изучению темы:

- знать правила умножения вектора на число, критерий коллинеарности двух векторов;
- знать и уметь применять переместительный и сочетательный законы умножения векторов на числа;
- уметь применять правила умножения вектора на число при решении задач.

Произведением вектора $\vec{a}$ на не равное нулю число x называется вектор $\vec{b}$, длина которого равна $|x| \cdot |\vec{a}|$ и который одинаково направлен с вектором $\vec{a}$, если $x > 0$, и противоположно направлен с ним, если $x < 0$. Обозначается: $\vec{b} = \boldsymbol{x} \cdot \vec{a}$ или $\vec{b} = x\vec{a}$.

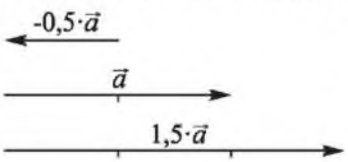


Рисунок 53

Например, на рисунке 53 изображены векторы, полученные в результате умножения вектора $\vec{a}$ на число $-0{,}5$ и на число $1{,}5$.

Произведение нулевого вектора на любое число и произведение любого вектора на число 0 принимается равным нулевому вектору: $\boldsymbol{x} \cdot \vec{\mathbf{0}} = \vec{\mathbf{0}}$; $\mathbf{0} \cdot \vec{a} = \vec{\mathbf{0}}$.

Теорема (*критерий коллинеарности двух векторов*). **Вектор $\vec{b}$ коллинеарен вектору $\vec{a}$ тогда и только тогда, если существует такое число x, что $\vec{b} = x \cdot \vec{a}$.**

Доказательство. 1) Если $\vec{b} = x \cdot \vec{a}$, то есть вектор $\vec{b}$ получается из вектора $\vec{a}$ умножением на число x, то коллинеарность векторов $\vec{b}$ и $\vec{a}$ следует из определения произведения вектора на число.

2) Пусть векторы $\vec{b}$ и $\vec{a}$ – коллинеарны, причем $\vec{a} \neq \vec{0}$. Найдем число x такое, что $\vec{b} = x \cdot \vec{a}$. Для этого возьмем отношение $\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} = k$, тогда $|\vec{b}| = k \cdot |\vec{a}|$. Если $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$, то равенство $\vec{b} = x \cdot \vec{a}$ верно при $x = k$; если $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$, то это равенство верно при $x = -k$. Если $\vec{b} \neq \vec{0}$, то $x \neq 0$. Теорема доказана.

Из критерия (условия) коллинеарности двух векторов следует, что два вектора, отложенные от одной точки, лежат на одной прямой лишь тогда, когда один из них получается из другого умножением на число.

Свойства умножения векторов на числа.

Для любых чисел x, y и любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ справедливы равенства:

1) $x \cdot (y \cdot \vec{a}) = (xy) \cdot \vec{a}$ (сочетательный закон);

2) $x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{a} = (x + y) \cdot \vec{a}$ (I распределительный закон);

3) $x \cdot \vec{a} + x \cdot \vec{b} = x \cdot (\vec{a} + \vec{b})$ (II распределительный закон).

Свойства 1) и 2) следуют из определения произведения вектора на число. Докажем свойство 3).

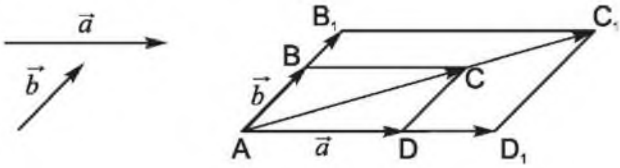


Рисунок 54

Доказательство. Пусть даны неколлинеарные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Построим их сумму по правилу параллелограмма. Пусть $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, тогда $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ (рисунок 54). Построим вектор $\overrightarrow{AC_1} = x \cdot (\vec{a} + \vec{b})$. Проведем прямые C_1B_1 и C_1D_1, соответственно параллельные AD и AB. Тогда $AB_1 = x \cdot AB$, $AD_1 = x \cdot AD$ (по теореме о пропорциональных отрезках). Так как $AB_1C_1D_1$ – параллелограмм, то $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AD_1} + \overrightarrow{AB_1}$, то есть $x \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = x \cdot \vec{a} + x \cdot \vec{b}$, что и требовалось доказать.

Задача 1. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Построить вектор $\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$.

Решение. Построим векторы $\vec{m} = \frac{1}{2}\vec{a}$ и $\vec{n} = \frac{2}{3}\vec{b}$, используя теорему Фалеса (рисунок 55, *а*). Далее построим вектор $\vec{c} = \vec{m} + \vec{n}$ по правилу треугольника (рисунок 55, *б*).

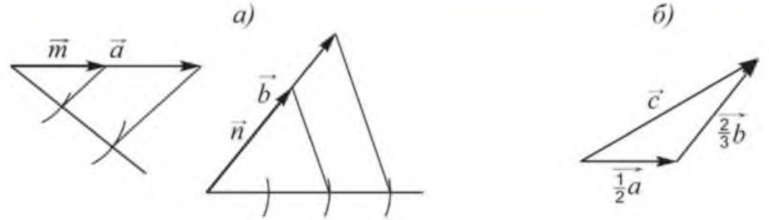


Рисунок 55

З а д а ч а 2. Даны отрезок AB и его середина – точка O. Доказать равенство: $\overrightarrow{XO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB})$, где X – произвольная точка плоскости.

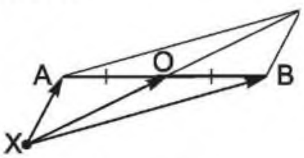


Рисунок 56

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть точка X не принадлежит прямой AB (рисунок 56). Тогда при сложении векторов по правилу параллелограмма и свойству диагоналей параллелограмма имеем: $2\overrightarrow{XO} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB}$. Отсюда $\overrightarrow{XO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB})$.

Случай, когда точка X принадлежит прямой AB, рассмотрите самостоятельно.

З а д а ч а 3. Доказать, что медианы данного треугольника могут являться сторонами другого треугольника.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть даны ΔABC и его медианы AM, BN и CK (рисунок 57, *а*). Тогда $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$, $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA})$. Сложим левые и правые части этих равенств:

$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CK} = \frac{1}{2}\left((\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB})\right) = \frac{1}{2} \cdot \vec{0}.$$

Итак, $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CK} = \vec{0}$, следовательно, из медиан данного треугольника можно построить треугольник.

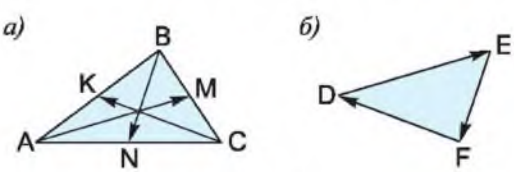


Рисунок 57

На рисунке 57, *б* ΔDEF удовлетворяет условию задачи, так как $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{CK}$.

З а д а ч а 4. Доказать, что если на одной стороне угла B отложены отрезки BM и BA, а на другой – пропорциональные им отрезки BN и BC (рисунок 58), то прямые MN и AC параллельны.

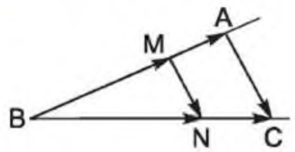


Рисунок 58

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию $\frac{BM}{BN} = \frac{BA}{BC}$. По свойству пропорции это равенство можно записать так: $\frac{BM}{BA} = \frac{BN}{BC}$. Пусть $\frac{BM}{BA} = \frac{BN}{BC} = k$. Тогда: $\overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BN} = k\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{BC} - k\overrightarrow{BA} = k(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}) = k\overrightarrow{AC}$. Так как $\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{AC}$, то векторы $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны. Следовательно, прямые MN и AC параллельны, что и требовалось доказать.

ВОПРОСЫ

1. Что называется произведением вектора на не равное нулю число?
2. Чему равно произведение нулевого вектора на любое число и любого вектора на число 0?
3. Запишите формулами свойства умножения векторов на числа.
4. Сформулируйте критерий коллинеарности двух векторов.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

57. Докажите, что: а) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$; б) $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$; в) $x \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = x \cdot \vec{a} - x \cdot \vec{b}$.

58. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны. Сравните длины векторов $\vec{a}$ и $k\vec{b}$, если: а) $k = -1$; б) $k = 0{,}9$.

59. Дан треугольник ABC, M и K – середины его сторон AB и BC соответственно. Докажите, что $\overrightarrow{MK} = 0{,}5\overrightarrow{AC}$.

60. Начертите неколлинеарные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, как на рисунке 59. Постройте вектор, равный: а) $2\vec{a} + \vec{b}$; б) $\vec{a} - 0{,}5\vec{b}$; в) $-\vec{a} - \vec{b}$; г) $\frac{4}{5}\vec{a} + \frac{5}{4}\vec{b}$.

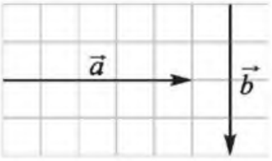


Рисунок 59

61. Известно, что один и тот же вектор параллелен вектору, равному как сумме, так и разности двух других векторов. Постройте такие векторы.

Уровень B

62. Известно, что $\vec{a} = \vec{x} + \vec{y}$, $\vec{b} = \vec{x} - \vec{y}$. Выразите через $\vec{x}$ и $\vec{y}$ векторы: а) $\frac{1}{2}\vec{a} + 3\vec{b}$; б) $4\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$; в) $-0{,}3\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b}$.

63. Дан параллелограмм $ABCD$, точки: M – середина DC, O – середина AM и векторы $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Выразите через $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{CO}$.

64. На сторонах AD и CD прямоугольника $ABCD$ отмечены точки M и N так, что $AM : MD = 1 : 2$, а N – середина CD. Даны векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AC}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{BD}$. Выразите через $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторы $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CN}$, $\overrightarrow{DM}$.

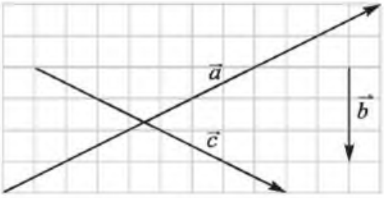


Рисунок 60

65. Начертите неколлинеарные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, как на рисунке 60. Постройте вектор, равный: а) $\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$; б) $\frac{1}{2}\vec{a} - 2\vec{b} - \frac{1}{4}\vec{c}$.

66. Даны неколлинеарные векторы $\vec{m} = 2\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{n} = -\vec{a} + 3\vec{b}$. Могут ли быть коллинеарными векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$? Ответ объясните.

67. В трапеции $ABCD$ точки M и K – середины боковых сторон AB и CD соответственно, $AD = 16$ см, $BC = 12$ см. Найдите такие числа x и y, что $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{MK}$, $\overrightarrow{CB} = y\overrightarrow{MK}$.

68. Дан четырехугольник $ABCD$ и точки M и N – середины его сторон AB и CD соответственно. Докажите, что $\overrightarrow{MN} = 0{,}5(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$.

69. В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD точки M и K – середины ее диагоналей AC и BD соответственно. а) Выразите вектор $\overrightarrow{MK}$ через векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$. б) Найдите $|\overrightarrow{MK}|$, если $BC = 6$ см, $AD = 16$ см.

Уровень C

70. В треугольнике ABC точки M, N и K – середины его сторон, O – произвольная точка плоскости. Докажите, что $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

71. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O так, что $\frac{AO}{OB} = \frac{OD}{OC} = 2$. Докажите, что отрезки BC и AD параллельны.

72. На сторонах AB, BC, CD и AD четырехугольника $ABCD$ отмечены точки K, L, M и N так, что $\frac{AK}{KB} = \frac{AN}{ND} = \frac{CL}{LB} = \frac{CM}{MD} = 3$. Докажите, что четырехугольник $KLMN$ – параллелограмм.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ

Начертите три неколлинеарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Измерьте длины этих векторов. Представьте вектор $\vec{c}$ как сумму векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, умноженных на числа x и y: $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$. Определите все возможные значения x и y.

4. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам

Учебные достижения по изучению темы:
• знать теорему о разложении вектора по двум неколлинеарным векторам и теорему о пропорциональных отрезках;
• уметь выражать неизвестный вектор через сумму (разность) известных векторов.

Представление вектора $\vec{c}$ в виде $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$, где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – неколлинеарные векторы, x и y – числа, называется разложением вектора $\vec{c}$ по двум неколлинеарным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Теорема (*о разложении вектора по двум неколлинеарным векторам*). **Любой вектор $\vec{c}$ можно единственным образом представить в виде $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$, где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – неколлинеарные векторы, x и y – числа.**

Доказательство. Пусть даны векторы $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рисунок 61). Проведем через точки A и B прямые, параллельные векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и обозначим точку C их пересечения. Тогда $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$. Так как векторы $\vec{a}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарные, то существует такое число x, что $\overrightarrow{AC} = x\vec{a}$. Векторы $\vec{b}$ и $\overrightarrow{CB}$ тоже коллинеарные, следовательно, существует такое число y, что $\overrightarrow{CB} = y\vec{b}$. Таким образом, $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

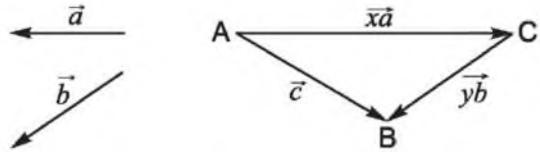


Рисунок 61

Докажем единственность такого представления вектора $\vec{c}$ способом от противного. Допустим, что имеется другое представление: $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$. Тогда $x\vec{a} + y\vec{b} = m\vec{a} + n\vec{b}$, $(x-m)\vec{a} = (n-y)\vec{b}$, $\vec{a} = \frac{n-y}{x-m}\vec{b}$, где $x - m \neq 0$. Следовательно, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – коллинеарные. Но это противоречит условию теоремы, значит, допущение неверно, представление вектора $\vec{c}$ в виде $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$ – единственное.

Если вектор $\vec{c}$ коллинеарен вектору $\vec{a}$ или $\vec{b}$, то одно из чисел соответственно y или x равно 0; если $\vec{c} = \vec{0}$, то $x = y = 0$. Теорема доказана.

Т е о р е м а (*о пропорциональных отрезках*). **Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают от них пропорциональные отрезки, которые пропорциональны отрезкам этих параллельных прямых, заключенным между сторонами угла.**

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть стороны угла C пересечены параллельными прямыми AA_1 и BB_1 (рисунок 62). Докажем, что $\frac{CB}{CA} = \frac{CB_1}{CA_1} = \frac{BB_1}{AA_1}$.

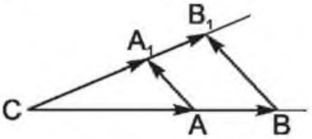


Рисунок 62

По правилу сложения векторов имеем:

$$\overrightarrow{CB_1} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BB_1},\ \overrightarrow{CA_1} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AA_1}.$$

По критерию коллинеарности векторов $\overrightarrow{CB} = x_1 \cdot \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BB_1} = x_2 \cdot \overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{CB_1} = x_3 \cdot \overrightarrow{CA_1}$, где x_1, x_2, x_3 – не равные нулю числа. Тогда $x_3 \cdot \overrightarrow{CA_1} = x_1 \cdot \overrightarrow{CA} + x_2 \cdot \overrightarrow{AA_1}$, отсюда $\overrightarrow{CA_1} = \frac{x_1}{x_3}\overrightarrow{CA} + \frac{x_2}{x_3}\overrightarrow{AA_1}$. Из последнего равенства и равенства $\overrightarrow{CA_1} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AA_1}$ следует, что $\frac{x_1}{x_3} = 1$ и $\frac{x_2}{x_3} = 1$, так как разложение вектора по двум векторам единственное. Поэтому $x_1 = x_2 = x_3$. Тогда из равенств $\overrightarrow{CB} = x_1 \cdot \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BB_1} = x_2 \cdot \overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{CB_1} = x_3 \cdot \overrightarrow{CA_1}$ следует, что $\frac{CB}{CA} = \frac{CB_1}{CA_1} = \frac{BB_1}{AA_1}$. Теорема доказана.

З а д а ч а 1. Дан треугольник ABC, в котором $AB = 2$, $AC = 3$, AL – биссектриса. Разложить вектор $\overrightarrow{AL}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

Р е ш е н и е. По свойству биссектрисы треугольника имеем: $\frac{BL}{LC} = \frac{2}{3}$ (рисунок 63). Тогда $\frac{BL}{BC} = \frac{2}{5}$, $\overrightarrow{BL} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC} = \frac{2}{5}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$; $\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BL} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$.

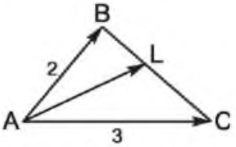


Рисунок 63

О т в е т. $\overrightarrow{AL} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$.

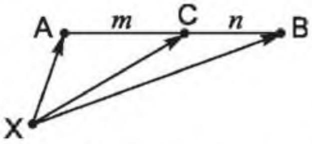


Рисунок 64

Задача 2. Даны отрезок AB и точка C, делящая его в отношении $\frac{AC}{CB} = \frac{m}{n}$, X – произвольная точка плоскости. Доказать, что $\overrightarrow{XC} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{XA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{XB}$.

Доказательство. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{XB} - \overrightarrow{XA}$ (рисунок 64), $\overrightarrow{AC} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB} = \frac{m}{m+n}(\overrightarrow{XB} - \overrightarrow{XA})$. $\overrightarrow{XC} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{XA} + \frac{m}{m+n}(\overrightarrow{XB} - \overrightarrow{XA}) = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{XA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{XB}$.

ВОПРОСЫ

1. Что называют разложением вектора по двум неколлинеарным векторам?
2. Сформулируйте и докажите теорему о разложении вектора по двум неколлинеарным векторам.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень A

73. Даны три точки A, B и C такие, что $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BC}$, O – произвольная точка плоскости. Выразите вектор $\overrightarrow{OB}$ через векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OC}$.

74. В параллелограмме $ABCD$ точка N делит сторону BC в отношении 2 : 3, считая от вершины B. Разложите вектор $\overrightarrow{AN}$ по векторам: а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$.

75. В параллелограмме $ABCD$ точка M делит диагональ AC в отношении 4 : 5, считая от вершины A. Разложите вектор $\overrightarrow{AM}$ по векторам: а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{AD}$.

Уровень B

76. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, M – середина стороны AB. Выразите через векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ вектор: а) $\overrightarrow{MO}$; б) $\overrightarrow{CM}$.

77. В треугольнике ABC угол C – прямой, $AB = 10$, CH – высота, $CH = 4$, $CA > CB$. Разложите вектор $\overrightarrow{CH}$ по векторам $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$.

78. В четырехугольнике $ABCD$ точки M и K – середины сторон BC и AD соответственно. Выразите вектор $\overrightarrow{MK}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$.

79. Дан треугольник ABC, MN – его средняя линия, параллельная AC, K – середина MN, O – произвольная точка плоскости. Докажите, что $\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OK}$.

80. Разложите векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} = 2\vec{m} - 3\vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} + 2\vec{n}$.

Уровень C

81. В параллелограмме $ABCD$ точки N, K, P и M принадлежат сторонам CD, AB, BC и AD соответственно, причем $\frac{AK}{KB} = \frac{AM}{MD} = 0{,}4$, $\frac{BP}{PC} = \frac{DN}{NC} = \frac{3}{7}$. Докажите, что отрезки MK и PN параллельны.

82. Дан треугольник с вершинами $M(0;\ 12)$, $N(9;\ 0)$, $K(0;\ -12)$, точка C – центр окружности, вписанной в него. Разложите вектор $\overrightarrow{CN}$ по векторам $\overrightarrow{CM}$ и $\overrightarrow{CK}$.

83. Дан треугольник с вершинами $A(-4;\ 0)$, $B(4;\ 0)$, $C(0;\ 2)$, точка D – центр окружности, описанной около него. Разложите вектор $\overrightarrow{DC}$ по векторам $\overrightarrow{DA}$ и $\overrightarrow{DB}$.

84. На окружности с центром O даны точки A и B. Касательные AC и BC к окружности пересекаются в точке C. Выразите вектор $\overrightarrow{OC}$ через векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, если: а) $\angle AOB = 120°$; б) $\angle AOB = 60°$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ

Постройте систему координат и отметьте в ней точки $A(4;\ 3)$ и $B(-6;\ 5)$. Постройте векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, где O – начало координат. Постройте вектор $\overrightarrow{OC}$ такой, что $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. Найдите координаты точки C. Проанализируйте полученные данные.

5. Координаты вектора

Учебные достижения по изучению темы:

• знать определения координат вектора, единичных векторов и радиус-вектора;

• уметь определять координаты вектора, находить длину вектора через его координаты;

• уметь выполнять действия над векторами, заданных координатами;

• уметь определять коллинеарность векторов по их координатам.

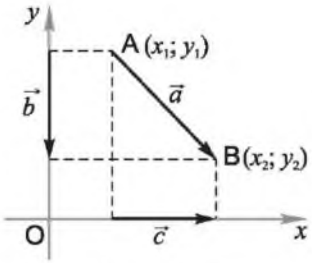


Рисунок 65

Если вектор $\vec{a}$ построен в системе координат и его начало – точка $A(x_1; y_1)$, а конец – точка $B(x_2; y_2)$, то *числа* $x_2 - x_1$ и $y_2 - y_1$ называют *координатами вектора* $\vec{a}$ (рисунок 65).

Обозначают: $\vec{a}$ $(\boldsymbol{x_2 - x_1; y_2 - y_1})$ или $\overrightarrow{AB}$ $(\boldsymbol{x_2 - x_1; y_2 - y_1})$.

Нулевой вектор имеет координаты (0; 0).

Векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ (рисунок 65) называют *проекциями* вектора $\vec{a}$ на координатные оси.

Длина вектора $\overrightarrow{AB}$ равна длине отрезка AB, то есть $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, или если $\overrightarrow{AB}$ $(a; b)$, то $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Т е о р е м а. **Равные векторы имеют равные одноименные координаты** и обратно, **если одноименные координаты векторов равны, то и векторы равны.**

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ (рисунок 66, *а*). Запишем координаты этих векторов: $\overrightarrow{AB}$ $(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$, $\overrightarrow{CD}$ $(x_4 - x_3; y_4 - y_3)$. Докажем, что $x_2 - x_1 = x_4 - x_3$, $y_2 - y_1 = y_4 - y_3$.

Так как $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ и $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$, то четырехугольник $ACDB$ – параллелограмм. Проведем его диагонали и обозначим точку их пересечения N. Тогда по формулам координат середины отрезка имеем: $N\left(\frac{x_1 + x_4}{2}; \frac{y_1 + y_4}{2}\right)$ – как середина диагонали AD, и $N\left(\frac{x_2 + x_3}{2}; \frac{y_2 + y_3}{2}\right)$ –

как середина диагонали CB. Следовательно, $\frac{x_1 + x_4}{2} = \frac{x_2 + x_3}{2}$, $\frac{y_1 + y_4}{2} = \frac{y_2 + y_3}{2}$. Отсюда $x_4 - x_3 = x_2 - x_1$, $y_4 - y_3 = y_2 - y_1$.

2) Пусть $\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$, $\overrightarrow{CD}(x_4 - x_3; y_4 - y_3)$ и $x_2 - x_1 = x_4 - x_3$, $y_2 - y_1 = y_4 - y_3$. Докажем, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Предположим, что $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$ и построим вектор $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{CD}$ (рисунок 66, *б*), где точка $K(x_5; y_5)$. Тогда $x_5 - x_1 = x_4 - x_3$ и $y_5 - y_1 = y_4 - y_3$. Из этих равенств и условия следует, что $x_5 - x_1 = x_2 - x_1$, $y_5 - y_1 = y_2 - y_1$, то есть $x_5 = x_2$ и $y_5 = y_2$. Значит, точка K совпадает с точкой B и $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Теорема доказана.

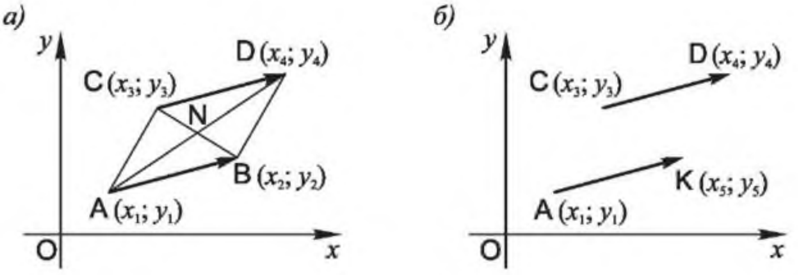


Рисунок 66

Если в системе координат от ее начала на лучах Ox и Oy отложены векторы, длины которых равны 1, то их называют *единичными*, или *координатными* векторами, и обозначают $\vec{i}$ и $\vec{j}$ (рисунок 67). Эти векторы неколлинеарные, поэтому любой вектор $\vec{c}$ можно разложить по векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$, то есть $\vec{c} = x\vec{i} + y\vec{j}$, причем числа x и y определяются единственным образом. Эти числа называют *координатами вектора* $\vec{c}$ в данной системе координат.

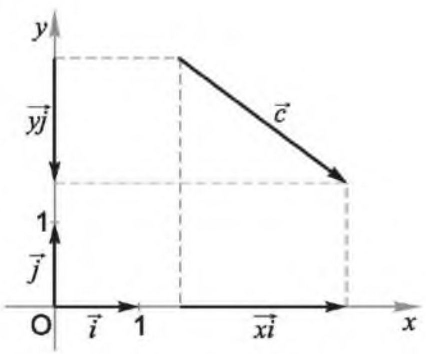


Рисунок 67

Отметим, что если дан вектор $\vec{a}(a_1; a_2)$, то в координатной плоскости можно построить бесконечно много векторов, равных данному.

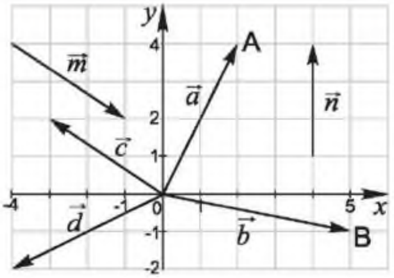


Рисунок 68

Если начало вектора – точка $O(0;\ 0)$, то конец вектора имеет координаты $(a_1;\ a_2)$. Вектор $\overrightarrow{OM}$, где M – произвольная точка координатной плоскости, называется *радиус-вектором* этой точки. Его координаты равны координатам точки M. Действительно, если $M(x;\ y)$, то $\overrightarrow{OM}\ (x-0;\ y-0) = \overrightarrow{OM}\ (x;\ y)$.

Например, на рисунке 68 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{a}\,(2;\ 4)$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{b}\,(5;\ -1)$ (самостоятельно определите координаты векторов $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{m}$ и $\vec{n}$).

Используя координаты векторов, можно находить координаты векторов, равных их сумме, разности и произведению вектора на число, по следующим правилам:

- *каждая координата суммы двух или более векторов равна сумме соответствующих координат этих векторов;*
- *каждая координата разности двух векторов равна разности соответствующих координат этих векторов;*
- *каждая координата произведения вектора на число равна произведению соответствующих координат вектора на это число.*

Действительно, пусть даны векторы $\vec{a}\,(x_1;\ y_1)$ и $\vec{b}\,(x_2;\ y_2)$. Так как $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$, $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$, то по свойствам сложения векторов и умножения вектора на число получим: $\vec{a} + \vec{b} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + x_2\vec{i} + y_2\vec{j} = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j}$. Отсюда следует, что координаты вектора $\vec{a} + \vec{b}$ равны $\boldsymbol{(x_1 + x_2;\ y_1 + y_2)}$. Аналогично доказывается, что координаты вектора $\vec{a} - \vec{b}$ равны $\boldsymbol{(x_1 - x_2;\ y_1 - y_2)}$. Докажите это самостоятельно.

Найдем координаты вектора $n\vec{a}$, где n – произвольное число: $n\vec{a} = nx_1\vec{i} + ny_1\vec{j}$. Отсюда следует, что координаты вектора $n\vec{a}$ равны $\boldsymbol{(nx_1;\ ny_1)}$.

Из последнего правила следует, что *у коллинеарных векторов одноименные координаты пропорциональны* (при условии, что координаты векторов не равные нулю числа); верно и обратное: *если* *одноименные координаты двух векторов пропорциональны, то эти векторы коллинеарны.*

З а д а ч а 1. Даны точки $A(1; 2)$, $B(-2; 1)$ и $C(5; 0)$. Найдите точку $M(x; y)$ такую, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CM}$.

Р е ш е н и е. Запишем координаты векторов: $\overrightarrow{AB}(-3; -1)$, $\overrightarrow{CM}(x - 5; y)$. Так как по условию $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CM}$, то $x - 5 = -3$, $y = -1$; $x = 2$, $y = -1$.

О т в е т. $M(2; -1)$.

З а д а ч а 2. Можно ли найти длину вектора $\vec{c} = 2(\vec{a} + \vec{b}) - 2\vec{a} + 3\vec{b}$, если координаты вектора $\vec{a}$ не даны, а $\vec{b}(-2; 4)$? Если можно, то найдите ее.

Р е ш е н и е. $\vec{c} = 2(\vec{a} + \vec{b}) - 2\vec{a} + 3\vec{b} = 5\vec{b}$; $\vec{c}(-10; 20)$, $|\vec{c}| = \sqrt{(-10)^2 + 20^2} = 10\sqrt{5}$.

О т в е т. Можно, $|\vec{c}| = 10\sqrt{5}$.

З а д а ч а 3. Дан треугольник с вершинами $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$. Найти координаты $(x; y)$ точки M пересечения его медиан.

Р е ш е н и е. 1) Пусть точка K – середина AC (рисунок 69), тогда $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$, а $\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BK}$, поэтому $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$.

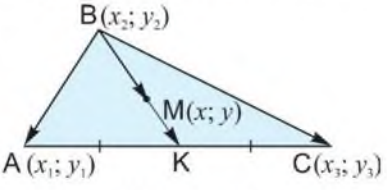


Рисунок 69

2) Найдем координаты векторов:

$$\overrightarrow{BA}(x_1 - x_2; y_1 - y_2),\ \overrightarrow{BC}(x_3 - x_2; y_3 - y_2),\ \overrightarrow{BM}(x - x_2; y - y_2) \text{ или}$$

$$\overrightarrow{BM}\left(\frac{1}{3}(x_1 + x_3 - 2x_2); \frac{1}{3}(y_1 + y_3 - 2y_2)\right).$$

3) Так как равные векторы имеют равные координаты, то $\frac{1}{3}(x_1 + x_3 - 2x_2) = x - x_2$ и $\frac{1}{3}(y_1 + y_3 - 2y_2) = y - y_2$, откуда $x = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$, $y = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$.

О т в е т. $x = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$, $y = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$.

ВОПРОСЫ

1. Как определяются координаты вектора?

2. Чему равна длина вектора $\vec{a}\,(m;\,n)$?
3. Сформулируйте условие равенства двух векторов с данными координатами.
4. Какие векторы называются координатными?
5. Как можно разложить вектор по двум координатным векторам? Приведите пример.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень A

85. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если: а) $A(2;\ 9)$, $B(7;\ 4)$; б) $A(7{,}4;\ 0)$, $B(-12{,}6;\ 14)$.

86. Найдите координаты конца вектора $\overrightarrow{AB}$, если: а) $\overrightarrow{AB}\,(2;\ -2)$, $A(2;\ 5)$; б) $\overrightarrow{AB}\,(-1{,}5;\ 4)$, $A(3;\ -2{,}5)$.

87. Найдите неизвестную координату начала вектора $\overrightarrow{AB}$, если: а) $|\overrightarrow{AB}| = 5$, $B(-1;\ 3)$, $A(3;\ y)$; б) $|\overrightarrow{AB}| = 17$, $B(8;\ -2)$, $A(x;\ 13)$.

88. а) Найдите длины векторов $\vec{a}\,(4;\ -3)$, $\vec{b}\,(15;\ 0)$, $\vec{c}\,(1;\ \sqrt{3})$, $\vec{d}\,(-0{,}5;\ 1{,}2)$. б) Даны векторы $\vec{a}\,(2;\ -1)$, $\vec{b}\,(-3;\ -5)$. Найдите координаты векторов $\vec{m}$ и $\vec{n}$, если $\vec{m} = \vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{n} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$. в) Даны векторы $\vec{a}\,(6;\ 8)$, $\vec{b}\,(9;\ 12)$. Найдите длины векторов $\vec{c}$ и $\vec{d}$, если $\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$, $\vec{d} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$.

89. Даны векторы $\vec{a}\,(3;\ -4)$, $\vec{b}\,(-4;\ 2)$, $\vec{c}\,(1{,}5;\ -2)$, $\vec{d}\,(6;\ -3)$. Укажите пары коллинеарных векторов. Какие из них одинаково направленные, а какие – противоположно направленные?

Уровень B

90. Известно, что векторы $\vec{m}\left(\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$ и $\vec{n}\,(-2;\ y)$ коллинеарны. Найдите y.

91. Имеются ли среди векторов $\vec{a}\,(0;\ 3)$, $\vec{b}\,(-5;\ 0)$ и $\vec{c}\,(0;\ -4)$ коллинеарные векторы? Если имеются, то укажите их.

92. Даны векторы $\vec{a}\,(-0{,}6;\ 0{,}8)$, $\vec{b}\left(-\frac{9}{5};\ 2\frac{2}{5}\right)$, $\vec{c}\left(\frac{4}{5};\ -\frac{3}{5}\right)$, $\vec{d}\,(0{,}3;\ -0{,}4)$. а) Найдите их длины; б) укажите пары коллинеарных векторов.

93. Постройте в координатной плоскости xOy векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, если известны их разложения по координатным векторам: $\overrightarrow{OA} = \vec{i} + 2\vec{j}$, $\overrightarrow{OB} = -3\vec{i} + 3\vec{j}$, $\overrightarrow{OC} = 0{,}5\vec{i} - \vec{j}$.

94. Разложите векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, изображенные на рисунке 70, по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$ и запишите их координаты.

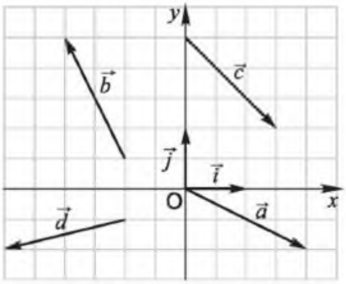


Рисунок 70

95. Даны векторы $\vec{a}(3;\ 2)$ и $\vec{b}(0;\ 1)$. Найдите координаты и длину вектора: а) $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$; б) $\vec{d} = -\vec{a} + 4\vec{b}$.

96. Даны точки $A(-1;\ 4)$, $B(1;\ -2)$, $C(0;\ -4)$ и $D(2;\ 2)$. Найдите координаты вектора: а) $\vec{m} = 2\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BC}$; б) $\vec{n} = 0{,}5\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{DC}$.

Уровень С

97. Даны точки: $A(2;\ 4)$, $B(1;\ 3)$, $C(1{,}75;\ 1{,}25)$, $D(3;\ 0)$. Найдите координаты точек M и K, если $\overrightarrow{DK} = 4\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$.

98. Постройте в координатной плоскости векторы $\vec{a}(0;\ 3)$, $\vec{b}(-2;\ -3)$, $\vec{c}(-3;\ -0{,}5)$ и их проекции на оси, если начало каждого вектора – точка $M(2;\ 1)$.

99. Найдите коэффициенты x и y разложения вектора $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$ и постройте вектор $\vec{c}$, если: а) $\vec{a}(3;\ 6)$, $\vec{b}(2;\ -2)$, $\vec{c}(7;\ 2)$; б) $\vec{a}(2;\ 0)$, $\vec{b}(-1;\ 3)$, $\vec{c}(2;\ 6)$.

100. Даны векторы $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i}$, $\overrightarrow{OB} = 3\vec{j}$. Докажите, что длины векторов $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OK} = \frac{3|\vec{j}|}{2|\vec{i}|}\overrightarrow{OA} + \frac{2|\vec{i}|}{3|\vec{j}|}\overrightarrow{OB}$ равны.

101. Найдите координаты точки пересечения медиан треугольника ABC, если: а) $A(2;\ 3)$, $B(0;\ -4)$, $C(4;\ 4)$; б) $A(-1;\ -1)$, $B(6;\ 8)$, $C(4;\ 2)$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ

В декартовой системе координат постройте вектор $\vec{a}(4;\ 3)$, начало которого совпадает с началом координат. Используя тригонометрические функции, найдите приближенно угол между этим вектором и осью Ox. Аналогично найдите угол между вектором $\vec{b}(-5;\ 2)$ и осью Ox. Имея эти данные, вычислите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

6. Угол между векторами. Скалярное произведение двух векторов

Учебные достижения по изучению темы:
- знать определения угла между двумя векторами и скалярного произведения двух векторов;
- уметь находить скалярное произведение двух векторов и угол между векторами;
- знать и уметь применять свойства скалярного произведения двух векторов.

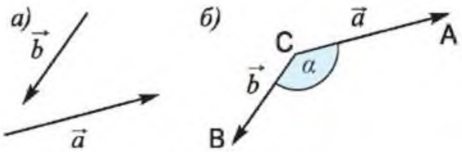


Рисунок 71

Углом между ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется угол между равными им векторами с общим началом, обозначается: $\angle(\vec{a}, \vec{b})$. Например, на рисунке 71 $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \angle(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \angle ACB$. Угол между векторами не больше 180°. Угол между одинаково направленными векторами принимается равным 0°, а между противоположно направленными – 180°.

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

Обозначается: $\vec{a} \cdot \vec{b}$ или $\vec{a}\vec{b}$. По определению $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\angle(\vec{a}, \vec{b})$.

Из этого определения следует, что $\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

Если скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю, то они перпендикулярны и обратно, **если ненулевые векторы перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю.**

Действительно, если $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ и векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ненулевые, то из определения получаем, что $\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$. Следовательно, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90°$.

Обратно: если $\vec{a} \perp \vec{b}$, то есть $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90°$, то $\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$. Следовательно, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Из определения скалярного произведения двух векторов следует, что если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. В частности, $\vec{a}\vec{a} = |\vec{a}|^2$. Скалярное произведение $\vec{a}\vec{a}$ называется скалярным квадратом вектора $\vec{a}$ и обозначается $\vec{a}^2$. **Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины:** $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

Скалярное произведение векторов имеет следующие свойства:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$; 2) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}$; 3) $\vec{a}\cdot(k\vec{b}) = k(\vec{a}\vec{b})$.

Теорема. **Скалярное произведение векторов $\vec{a}(x_1; y_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2)$ выражается формулой $\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$.**

Доказательство. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны и $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, то $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ (рисунок 72). Тогда, используя свойства скалярного произведения векторов, получаем: $(\vec{b}-\vec{a})^2 = \vec{b}^2 + \vec{a}^2 - 2\vec{b}\cdot\vec{a} = |\vec{b}|^2 + |\vec{a}|^2 - 2\vec{b}\cdot\vec{a}$. Отсюда имеем: $\vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{b}|^2 + |\vec{a}|^2 - |\vec{b}-\vec{a}|^2)$. Так как $|\vec{b}|^2 = x_2^2 + y_2^2$, $|\vec{a}|^2 = x_1^2 + y_1^2$, $|\vec{b}-\vec{a}|^2 = (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2$, то $\vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{1}{2}(x_2^2 + y_2^2 + x_1^2 + y_1^2 - (x_2-x_1)^2 - (y_2-y_1)^2) = x_1x_2 + y_1y_2$.

Равенство $\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$ верно и если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны (смотрите рисунки 72, *б*, *в*). Оно также верно, если хотя бы один из векторов нулевой.

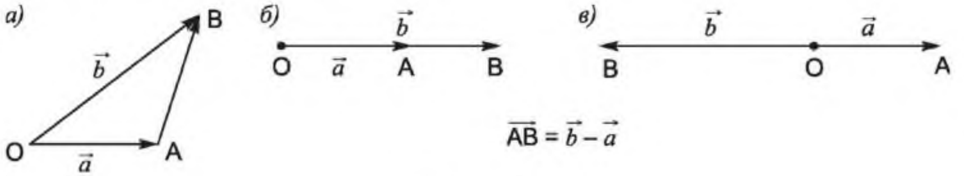


Рисунок 72

Из этой теоремы следует, что если $\vec{a}(a_1; a_2)$ и $\vec{b}(b_1; b_2)$, то $\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$.

Задача 1. Дан треугольник ABC, в котором $AC = b$, $AB = c$, отрезок AM – его медиана. Доказать, что $AM = 0{,}5\sqrt{b^2 + 2bc\cdot\cos\angle BAC + c^2}$.

Доказательство. $\overrightarrow{AM} = 0{,}5(\vec{b}+\vec{c})$ (рисунок 73). Отсюда $AM^2 = |\overrightarrow{AM}|^2 = (0{,}5(\vec{b}+\vec{c}))^2 = 0{,}25(\vec{b}^2 + 2\vec{b}\vec{c} + \vec{c}^2) =$
$= 0{,}25(b^2 + 2bc\cdot\cos\angle BAC + c^2)$.

Тогда $AM = 0{,}5\sqrt{b^2 + 2bc \cdot \cos\angle BAC + c^2}$, что и требовалось доказать.

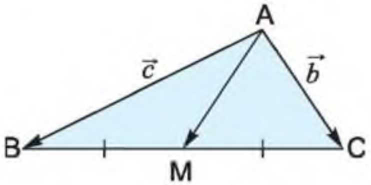


Рисунок 73

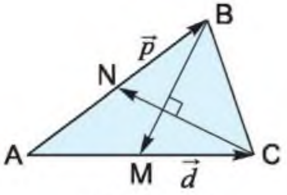


Рисунок 74

З а д а ч а 2. Найти с точностью до 1° угол между боковыми сторонами равнобедренного треугольника, в котором медианы, проведенные к ним, перпендикулярны.

Р е ш е н и е. Пусть в ΔABC $AB = AC$, BM и CN – перпендикулярные медианы (рисунок 74). Обозначим $\overrightarrow{AB} = \vec{p}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{d}$. Тогда

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = -\vec{p} + \frac{1}{2}\vec{d}, \qquad \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AN} = -\vec{d} + \frac{1}{2}\vec{p}.$$

Так как $BM \perp CN$, то $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CN} = 0$, то есть $\left(-\vec{p} + \frac{1}{2}\vec{d}\right)\left(-\vec{d} + \frac{1}{2}\vec{p}\right) = 0$. Отсюда

$$\vec{p} \cdot \vec{d} - \frac{1}{2}\vec{d}^2 - \frac{1}{2}\vec{p}^2 + \frac{1}{4}\vec{p} \cdot \vec{d} = 0, \qquad \frac{5}{4}\vec{p} \cdot \vec{d} - \frac{1}{2}\vec{d}^2 - \frac{1}{2}\vec{p}^2 = 0,$$

$\frac{5}{4}|\vec{p}| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos\alpha - \frac{1}{2}|\vec{d}|^2 - \frac{1}{2}|\vec{p}|^2 = 0$. Так как $|\vec{p}| = |\vec{d}|$ и $\alpha = \angle A$, то последнее равенство запишем так: $\frac{5}{4}|\vec{p}|^2 \cdot \cos\angle A - |\vec{p}|^2 = 0$, откуда $\cos\angle A = 0{,}8$, $\angle A \approx 37°$.

О т в е т. $\approx 37°$.

З а д а ч а 3. Найти площадь треугольника с вершинами $A(-1; 1)$, $B(-5; 4)$, $C(7; 2)$.

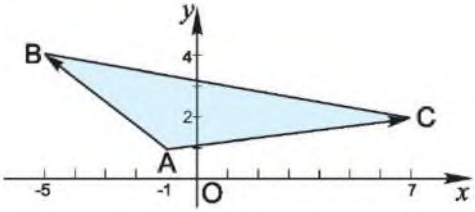


Рисунок 75

Р е ш е н и е. 1) $S_{\Delta ABC} = 0{,}5AB \cdot AC \cdot \sin\angle BAC$ (рисунок 75), $\cos\angle BAC = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \cdot AC}$.

Из основного тригонометрического тождества следует, что $\sin\angle BAC = \sqrt{1 - \cos^2\angle BAC}$.

2) Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ и их скалярное произведение: $\overrightarrow{AB}(-4; 3)$, $\overrightarrow{AC}(8; 1)$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -4 \cdot 8 + 3 \cdot 1 = -29$.

3) Найдем длины сторон: $AB = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$, $AC = \sqrt{8^2 + 1^2} = \sqrt{65}$.

4) Тогда $\cos\angle BAC = \dfrac{-29}{5\sqrt{65}}$, $\sin\angle BAC = \sqrt{1 - \dfrac{29^2}{25 \cdot 65}} = \dfrac{28}{5\sqrt{65}}$.

5) $S_{\Delta ABC} = 0{,}5 \cdot 5 \cdot \sqrt{65} \cdot \dfrac{28}{5\sqrt{65}} = 14$ (кв. ед.).

О т в е т. 14 кв. ед.

З а д а ч а 4. Доказать, что $\cos 15° = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Построим в системе координат XOY векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ такие, что $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = 1$ и $\angle AOX = 45°$, $\angle BOX = 30°$, тогда $\angle AOB = 15°$ (рисунок 76). Найдем скалярное произведение векторов: $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 15° = \cos 15°$. Координаты векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$:

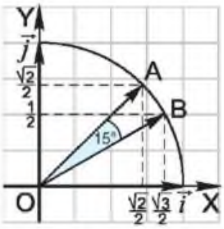


Рисунок 76

$\overrightarrow{OA}(1 \cdot \cos 45°; 1 \cdot \sin 45°)$, $\overrightarrow{OB}(1 \cdot \cos 30°; 1 \cdot \sin 30°)$, то есть $\overrightarrow{OA}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\overrightarrow{OB}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$. Тогда $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

Итак, $\cos 15° = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$, что и требовалось доказать.

ВОПРОСЫ

1. Дайте определение понятия угла между векторами.
2. Что называется скалярным произведением двух векторов?
3. Чему равен скалярный квадрат вектора?
4. Перечислите свойства скалярного произведения двух векторов.
5. Сформулируйте условие перпендикулярности двух векторов.
6. При каком условии скалярное произведение двух векторов равно: а) отрицательному числу; б) положительному числу?

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

102. Дан равнобедренный ΔABC, в котором $AB = BC$, $\angle B = 30°$ (рисунок 77). Найдите угол между векторами: а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BA}$.

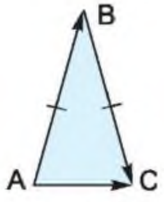


Рисунок 77

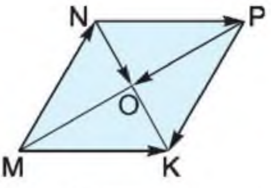


Рисунок 78

103. В ромбе $MNPK$ $\angle M = 60°$, O – точка пересечения диагоналей (рисунок 78). Найдите угол между векторами: а) $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{NP}$; б) $\overrightarrow{MK}$ и $\overrightarrow{PK}$; в) $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{PK}$; г) $\overrightarrow{MK}$ и $\overrightarrow{NP}$; д) $\overrightarrow{NO}$ и $\overrightarrow{PO}$.

104. Даны векторы $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{b} = -3\vec{i} + 4\vec{j}$ и $\vec{c} = 1{,}5\vec{i} - 0{,}2\vec{j}$. Найдите: а) скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$; б) скалярный квадрат вектора $\vec{c}$.

105. Найдите произведение $(3\vec{i} + 2\vec{j})(2\vec{a} - \vec{b})$, если $\vec{a}(2; 1)$ и $\vec{b}(-2; 3)$.

106. Даны точки $A(-4; -4)$, $B(-2; 4)$, $C(6; 6)$, $D(4; -2)$ и середины отрезков AC и CD точки M и N – соответственно. Найдите скалярное произведение векторов: а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$; в) $\overrightarrow{MC}$ и $\overrightarrow{AN}$.

107. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если: а) $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 6$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60°$; б) $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 2\sqrt{3}$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 150°$.

Уровень В

108. В равностороннем ΔMNP точка K – середина стороны MP, причем $MP = 4$. Найдите скалярное произведение векторов: а) $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{KP}$; б) $\overrightarrow{MK}$ и $\overrightarrow{NK}$; в) $\overrightarrow{MP}$ и $\overrightarrow{PK}$; г) $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{NK}$.

109. Найдите угол между векторами $\vec{a}(-4; 0)$ и $\vec{b}(4; -4)$.

110. Найдите угол M треугольника с вершинами $M(-2\sqrt{3}; -1)$, $N(0; 1)$, $K(0; -1)$.

111. Докажите, что ненулевые векторы $\vec{a}(m; n)$ и $\vec{b}(-n; m)$ перпендикулярны.

112. Найдите все значения m, при которых векторы $\vec{a} = m\vec{i} - \vec{j}$ и $\vec{b} = (2m - 1)\vec{i} + \vec{j}$ перпендикулярны.

113. Длина диагонали AC прямоугольника $ABCD$ равна 4. Найдите $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$.

114. Дан квадрат $ABCD$, сторона которого равна 5. Найдите $(\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC})^2$.

115. Докажите, что:
а) $(\vec{a} + \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$; б) $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$.

Уровень C

116. Дан равносторонний треугольник ABC, периметр которого равен 12. Найдите $(\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC})^2$.

117. Известно, что $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$, $\angle(\vec{a}; \vec{b}) = 60°$. Найдите $|\vec{a} + \vec{b}|$.

118. Дан параллелограмм $ABCD$. Докажите, что $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0{,}25(AC^2 - DB^2)$.

119. Докажите неравенство: а) $\vec{a} \cdot \vec{b} \le |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$; б) $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \le \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2$.

120. Найдите cos 75°.

7. Применение векторов при решении задач

Учебные достижения по изучению темы:
- уметь применять векторы при решении задач;
- уметь решать задачи векторным методом.

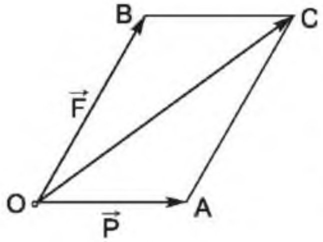


Рисунок 79

Задача 1. Силы $P = 2$ Н и $F = 3$ Н приложены к некоторой материальной точке O. Угол между векторами, изображающими эти силы, равен 60°. Найти равнодействующую сил P и F.

Решение. Изобразим силы P, F и их равнодействующую векторами $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ соответственно (рисунок 79).

По правилу сложения векторов имеем: $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. Тогда $\overrightarrow{OC}^2 = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})^2 = \overrightarrow{OA}^2 + 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB}^2 = OA^2 + 2OA \cdot OB \cdot \cos\angle AOB + OB^2$.

Так как скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины, то получим $OC^2 = OA^2 + 2OA \cdot OB \cdot \cos\angle AOB + OB^2$, $OC = \sqrt{2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos 60° + 3^2} = \sqrt{19}$ (Н).

Ответ. $\sqrt{19}$ Н.

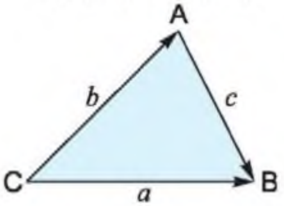


Рисунок 80

Задача 2. Дан треугольник ABC, в котором $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ (рисунок 80). Найти $\cos\angle C$.

Решение. По правилу вычитания векторов: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$.

Тогда $|\overrightarrow{AB}|^2 = \overrightarrow{AB}^2 = (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})^2 = \overrightarrow{CB}^2 - 2\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}^2 = |\overrightarrow{CB}|^2 + 2|\overrightarrow{CB}| \cdot |\overrightarrow{CA}| \cdot \cos\angle C + |\overrightarrow{CA}|^2$. Учитывая, что $|\overrightarrow{AB}| = c$, $|\overrightarrow{CB}| = a$, $|\overrightarrow{CA}| = b$, получим: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle C$. Отсюда $\cos\angle C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.

Ответ. $\cos\angle C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.

Задача 3. Составить уравнение прямой, на которой лежит вектор $\overrightarrow{AB}$, если $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$.

Р е ш е н и е. Запишем искомое уравнение в виде $y = kx + b$ и найдем значения k и b. Так как прямая проходит через точку $A(x_1; y_1)$, то $y_1 = kx_1 + b$. Выразив из этого равенства b и подставив его в уравнение $y = kx + b$, получим: $y - y_1 = k(x - x_1)$. Подставив в последнее уравнение координаты точки B, получим: $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$. Отсюда $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Подставив значение k в уравнение $y - y_1 = k(x - x_1)$, получим искомое уравнение: $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$.

При условии, что $y_2 \neq y_1$, разделив обе части этого уравнения на $y_2 - y_1$, получим уравнение вида: $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$.

Если $y_2 = y_1$, то есть вектор $\overrightarrow{AB}$ параллелен оси Ox или лежит на ней, то искомое уравнение имеет вид: $y = y_1$.

Если $x_2 = x_1$, то есть вектор $\overrightarrow{AB}$ параллелен оси Oy или лежит на ней, то искомое уравнение имеет вид: $x = x_1$.

О т в е т. $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$, если $y_2 \neq y_1$; $y = y_1$, если $y_2 = y_1$; $x = x_1$, если $x_2 = x_1$.

З а д а ч а 4. Прямые a и b заданы соответственно уравнениями $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$. Доказать, что если $k_1 \cdot k_2 = -1$, то $a \perp b$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем на прямой a точки $A(x_1; k_1x_1 + b_1)$ и $B(x_2; k_1x_2 + b_1)$, а на прямой b точки $C(x_1; k_2x_1 + b_2)$ и $D(x_2; k_2x_2 + b_2)$. Тогда $\overrightarrow{AB}\,(x_2 - x_1;\ k_1(x_2 - x_1))$, $\overrightarrow{CD}\,(x_2 - x_1;\ -\frac{1}{k_1}(x_2 - x_1))$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = (x_2 - x_1)^2 + k_1\left(-\frac{1}{k_1}\right)(x_2 - x_1)^2 = 0$. Следовательно, $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$ и $a \perp b$.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

121. Силы $P = 100$ Н и $F = 200$ Н приложены к некоторой материальной точке. Угол между векторами, изображающими эти силы, равен 50°. Найдите с точностью до 1 Н равнодействующую сил P и F.

122. Груз весом 3 Н находится на гладкой плоскости, которая наклонена к горизонту под углом 30°. С какой силой надо его удерживать, чтобы он находился в покое?

123. Птица летит на юг с собственной скоростью 50 км/ч. Ее сносит восточный ветер, скорость которого равна 10 км/ч. Какова скорость птицы относительно земли? Ответ округлите до единиц.

Уровень B

124. К некоторой точке тела приложены силы $\vec{F}$ и $\vec{Q}$, причем $|\vec{F}| = |\vec{Q}| = 4$ Н. Равнодействующая этих сил равна $4\sqrt{3}$ Н. Найдите угол между силами $\vec{F}$ и $\vec{Q}$.

125. На плоскости некоторый груз находится в точке O пересечения медиан треугольника ABC. К нему были приложены силы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$. Сдвинулся ли груз с места? Ответ объясните.

126. Два самолета вылетели из Нур-Султана, один – в Уральск, другой – в Алматы. а) Найдите угол между векторами, изображающими перемещение самолетов, если расстояния между аэропортами Нур-Султана и Уральска – 1395 км, Нур-Султана и Алматы – 973 км, Уральска и Алматы – 2109 км; б) Какова величина такого угла, если один самолет летит из Нур-Султана в Уральск, а другой – из Алматы в Нур-Султан?

127. Даны прямые AB и CD, на которых лежат векторы $\overrightarrow{AB}(3; 4)$ и $\overrightarrow{CD}(m; 2)$. При каком значении m эти прямые перпендикулярны?

Уровень C

128. Докажите, что вектор $\vec{m}(4; 5)$ перпендикулярен прямой, заданной уравнением: а) $4x + 5y = 0$; б) $4x + 5y = 7$.

129. Составьте уравнение прямой, на которой лежит вектор $\overrightarrow{AC}$, если: а) $A(2; 3)$, $C(0; 4)$; б) $A(-14; 15)$, $C(5; 10)$.

8. Упражнения на повторение раздела «Векторы»

Уровень А

130. Можно ли составить уравнение прямой, на которой лежит вектор $\overrightarrow{MN}(2; 3)$? Ответ объясните.

131. Дан треугольник с вершинами $A(-7; 5)$, $B(3; -1)$, $C(5; 3)$. Составьте уравнение прямой, содержащей: а) его среднюю линию MN, параллельную BC; б) высоту BH.

132. Найдите угол между векторами $\overrightarrow{AB}(2; 0)$ и $\overrightarrow{CD}(-2; 2)$ и угол между прямыми AB и CD.

133. Найдите с точностью до 1° угол между прямыми, заданными уравнениями: а) $y = \frac{1}{4}x$, $y = 4x$; б) $y = -x + 3$, $y = 2x + 3$.

Уровень В

134. Дан четырехугольник с вершинами $A(-2; -2)$, $B(-3; 1)$, $C(7; 7)$ и $D(3; -1)$. Найдите синус угла между его диагоналями.

135. Найдите площадь ΔABC, если: а) $A(-6; -2)$, $B(4; 8)$, $C(2; -8)$; б) $A(-2; -2)$, $B(1; 1)$, $C(3; -7)$.

136. Найдите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 6\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$.

137. Сторона AC треугольника ABC равна 14 см. На стороне BC отмечена точка K так, что $BK : KC = 2 : 5$, а на стороне AB – точка M так, что $BM : MA = 5 : 2$. Найдите длины отрезков KP и MN, параллельных стороне AC ($P \in AB$, $N \in BC$).

138. Найдите длину диагонали AC ромба $ABCD$, если $AB = 4$ см и $\angle A = 30°$.

139. В окружности проведены радиусы OA, OB, OC. Найдите $\angle AOB$, если $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$.

140. Докажите, применяя векторы, что диагонали ромба перпендикулярны.

141. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD, точки M и N – середины ее сторон AB и CD соответственно. Докажите, что вектор, равный сумме векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$, коллинеарен вектору $\overrightarrow{MN}$.

142. Найдите длину вектора, равного: а) сумме векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=3$, $\angle(\vec{a},\vec{b}) = 60°$; б) разности $\vec{b} - \vec{a}$ векторов, если $|\vec{a}|=\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=8$, $\angle(\vec{a},\vec{b}) = 45°$.

143. Докажите, используя векторы, что сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин его сторон.

Уровень С

144. В окружность радиуса R вписан равносторонний треугольник ABC. Найдите сумму $MA^2 + MB^2 + MC^2$, где M – произвольная точка окружности.

145. Докажите, используя векторы, что прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке.

146. В окружности с центром O проведены две перпендикулярные хорды AB и CD, пересекающиеся в точке K. Докажите, что $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OK}$.

147. Даны точки A и B. Постройте фигуру, состоящую из множества всех точек X, таких, что: а) $|\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB}| = |\overrightarrow{XA} - \overrightarrow{XB}|$; б) $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AX}| = |\overrightarrow{AB}|$; в) $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AX}| = |\overrightarrow{AX}|$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

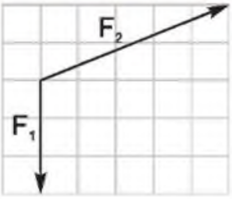


Рисунок 81

148. 1А) На тело действовали силы F_1 и F_2, как показано на рисунке 81. Постройте равнодействующую этих сил.

2А) Дан отрезок $AB = 4$ см и точка C, принадлежащая ему. Постройте вектор $\overrightarrow{CK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

3В) Дан параллелограмм $ABCD$ и точки K и M на сторонах AB и CD соответственно такие, что $AK = KB$, а $CM : MD = 2 : 3$. Разложите вектор $\overrightarrow{KM}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

4В) Найдите угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, если известны координаты точек: $A(0; –2)$, $B(-2\sqrt{3}; 0)$, $C(1; 1,5)$, $D(5; 1,5)$.

5С) Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $B(4; 2)$ и перпендикулярной вектору $\vec{a}$ (3; –5).

ЭТО ИНТЕРЕСНО!

Понятие направленного отрезка, который еще не называли вектором, использовалось в глубокой древности. Многие предметы, например, копье, громоотвод, имели его форму. В физике направленными отрезками обозначали силу, направление движения. Понятие вектора появилось сравнительно недавно в геометрии в XIX веке в трудах немецкого математика Г. Грассмана (1809–1877) и ирландского математика У. Гамильтона (1805–1865). Современный вид учение о векторах приобрело в конце XIX века в трудах американского ученого Дж. Гиббса (1839–1903).

В школьном курсе геометрии вектор определяется как направленный отрезок, а его свойства доказываются. В настоящее время имеется и другой путь изложения геометрии, в котором точка и вектор считаются основными (неопределяемыми понятиями), а некоторые свойства векторов принимаются за аксиомы. Такой вариант построения геометрии был предложен немецким математиком Г. Вейлем (1885–1955) в 1917 г. В дальнейшем векторы получили еще большее развитие и применение в геометрической науке и используются в современной математике, физике, экономических и других науках.

Г. Вейль

II. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЛОСКОСТИ

знать

• понятие преобразования плоскости;

• определения движения, гомотетии, подобных фигур;

• виды движения (симметрии относительно точки и прямой, параллельный перенос, поворот), их свойства и композиции;

• признаки подобия треугольников;

• формулу об отношении площадей двух подобных многоугольников.

уметь

• строить образы фигур при симметриях, параллельном переносе, повороте и гомотетии;

• решать задачи с применением преобразований плоскости;

• применять признаки подобия треугольников (в том числе прямоугольных);

• применять свойства пропорциональных отрезков в треугольнике.

9. Преобразование плоскости. Движение и его виды

Учебные достижения по изучению темы:
• знать понятие преобразования плоскости, определение движения;
• знать виды движения (симметрии относительно точки и прямой, параллельный перенос, поворот), их свойства и композиции;
• строить образы фигур при симметриях, параллельном переносе, повороте.

Пусть каждой точке A плоскости ставится в соответствие некоторая ее точка A_1, причем для различных точек A и B точки A_1 и B_1 различны. Если при этом для всякой точки A_1 существует соответствующая ей точка A, то говорят, что задано взаимно однозначное отображение плоскости на себя (рисунок 82). Такое отображение называется **преобразованием плоскости.**

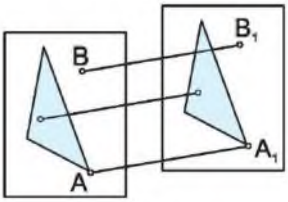


Рисунок 82

При выполнении преобразования плоскости фигура F отображается на фигуру F_1. При этом говорят также, что фигура F переходит в фигуру F_1 или преобразование переводит фигуру F в фигуру F_1, или фигура F_1 является образом фигуры F в этом преобразовании.

Преобразование, при котором сохраняется расстояние между точками, называется движением. То есть, если произвольные точки X и Y отображаются на точки X_1 и Y_1, то $XY = X_1Y_1$. На рисунке 83 показан пример такого преобразования.

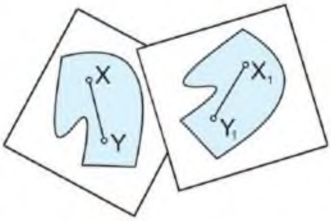


Рисунок 83

С некоторыми видами движения вы знакомились в предыдущих классах, это центральная и осевая симметрии. Наглядное представление о движении дают перемещения плоских фигур.

Рассмотрим некоторые свойства движения.

Теорема. **При движении отрезок отображается на равный ему отрезок.**

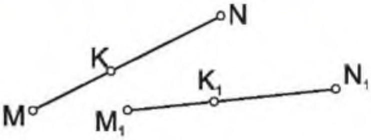


Рисунок 84

Доказательство. Пусть при движении плоскости концы M и N отрезка MN отображаются в точки M_1 и N_1 (рисунок 84). Докажем, что весь отрезок MN отображается на равный ему отрезок M_1N_1. Пусть K – произвольная точка отрезка MN, K_1 – точка, в которую переходит точка K при движении. Тогда $MK + KN = MN$. Так как при движении сохраняется расстояние между точками, то $M_1N_1 = MN$, $M_1K_1 = MK$, $N_1K_1 = NK$. Из этих равенств получаем $M_1K_1 + K_1N_1 = M_1N_1$.

Следовательно, точка K_1 принадлежит отрезку M_1N_1, причем она лежит между точками M_1 и N_1. Итак, доказано, что точки отрезка MN отображаются на точки отрезка M_1N_1.

Нужно еще доказать, что при этом движении каждая точка K_1 отрезка M_1N_1 является образом некоторой точки K отрезка MN. Рассуждая аналогично, из равенств $M_1N_1 = MN$, $M_1K_1 = MK$, $N_1K_1 = NK$, $M_1K_1 + K_1N_1 = M_1N_1$ следует, что $MK + KN = MN$. Значит, на отрезке MN существует точка K, которая отображается на точку K_1. Теорема доказана.

Из этой теоремы следует, что *при движении прямая отображается на прямую, а луч – на луч.*

Теорема. **При движении треугольник отображается на равный ему треугольник.**

Доказательство. Пусть дан ΔABC. При движении отрезки AB, BC и CA отображаются соответственно на равные им отрезки A_1B_1, B_1C_1 и C_1A_1 (рисунок 85). Следовательно, ΔABC отображается на равный ему $\Delta A_1B_1C_1$ (по третьему признаку равенства треугольников), что и требовалось доказать.

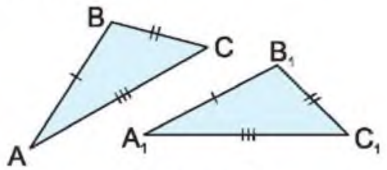


Рисунок 85

Т е о р е м а. **При движении угол отображается на равный ему угол.**

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть дан угол A. Отметим на его сторонах точки B и C (рисунок 86). При движении ΔBAC отображается на равный ему $\Delta B_1A_1C_1$. При этом угол A отображается на равный ему угол A_1.

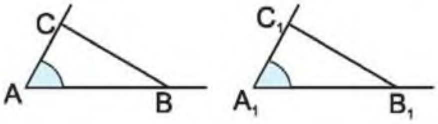


Рисунок 86

Вообще, *при движении любая фигура отображается на равную ей фигуру.* Отметим, что преобразование, состоящее из нескольких движений, является движением.

Мы называли фигуры равными, если их можно совместить наложением. Наложение фигур является движением. Теперь дадим более общее определение понятия равенства фигур. *Две фигуры называются равными, если они отображаются одна на другую движением.*

Из определения понятия движения и рассмотренных свойств следует, что:

1) если фигура F равна фигуре F_1, то фигура F_1 равна фигуре F;

2) если фигура F равна фигуре F_1, а фигура F_1 равна фигуре F_2, то фигура F равна фигуре F_2.

Напомним, что точки X и X_1 называются *симметричными относительно точки* O, если она является серединой отрезка XX_1. При этом точка O симметрична самой себе.

Преобразование фигуры F в фигуру F_1, при котором каждая ее точка X отображается на точку X_1, симметричную относительно данной точки O, называется преобразованием симметрии относительно точки O (или центральной симметрией).

При этом фигуры F и F_1 называются симметричными относительно точки O (рисунок 87). Если преобразование симметрии относительно точки переводит фигуру в себя, то эта фигура называется *центрально-симметричной*, а точка называется центром симметрии такой фигуры. Например, параллелограмм – центрально-симметричная фигура, центром его симметрии является точка пересечения диагоналей.

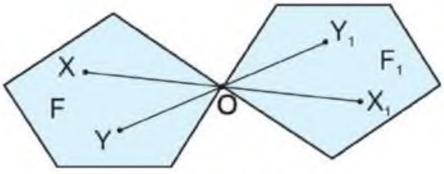


Рисунок 87

Задача 1. Доказать, что симметрия относительно точки является движением.

Доказательство. Пусть точки A, B и O не лежат на одной прямой, а точки A_1 и B_1 являются соответственно образами точек A и B при центральной симметрии относительно точки O (рисунок 88). Тогда $\Delta AOB = \Delta A_1OB_1$ (по первому признаку равенства треугольников). Следовательно, $A_1B_1 = AB$.

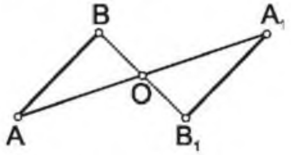


Рисунок 88

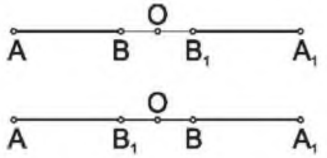


Рисунок 89

Пусть точки A, B и O лежат на одной прямой. Тогда, если точка O не лежит между точками A и B, то $A_1B_1 = |OA_1 - OB_1| = |OA - OB| = AB$ (рисунок 89, *а*); если точка O лежит между точками A и B, то $A_1B_1 = OA_1 + OB_1 = OA + OB = AB$ (рисунок 89, *б*).

Итак, доказано, что центральная симметрия сохраняет расстояние между точками, значит, это преобразование является движением.

Напомним, что точки X и X_1 называются *симметричными относительно прямой l*, если она является серединным перпендикуляром к отрезку XX_1. При этом любая точка, принадлежащая оси симметрии l, симметрична самой себе.

Преобразование фигуры F в фигуру F_1, при котором каждая ее точка X отображается на точку X_1, симметричную относительно данной прямой l, называется преобразованием симметрии относительно прямой l (или осевой симметрией).

При этом фигуры F и F_1 называются симметричными относительно прямой l (рисунок 90). Если преобразование симметрии относительно прямой переводит фигуру в себя, то эта фигура называется *симметричной относительно прямой*, а прямая – осью симметрии такой фигуры. Например, осью симметрии окружности является любая прямая, содержащая ее диаметр.

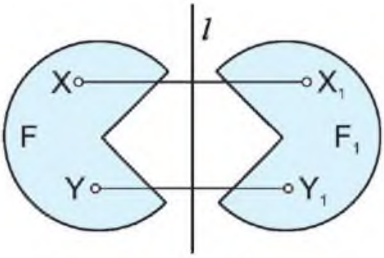


Рисунок 90

З а д а ч а 2. Доказать, что осевая симметрия является движением.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть точки A и B лежат по одну сторону от прямой l, а точки A_1 и B_1 соответственно – их образы при осевой симметрии относительно l (рисунок 91, *а*), Построим отрезки BC и B_1C_1, параллельные прямой l. Тогда четырехугольник CBB_1C_1 – прямоугольник и треугольники ACB и $A_1C_1B_1$ равны как прямоугольные по двум катетам. Следовательно, равны и их гипотенузы, то есть $A_1B_1 = AB$.

Случаи, когда точки A и B лежат по разные стороны от прямой l (рисунок 91, *б*) или принадлежат прямой l рассмотрите самостоятельно.

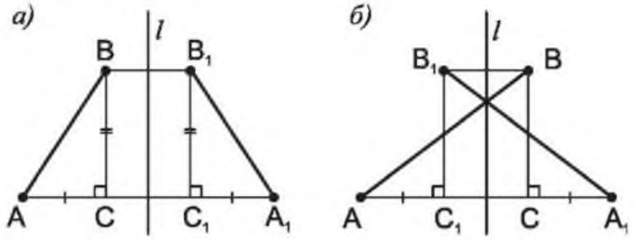


Рисунок 91

Рассмотрим еще два вида преобразования плоскости: параллельный перенос и поворот около данной точки.

Преобразование фигуры F в фигуру F_1, при котором каждая ее точка X отображается на точку X_1 такую, что вектор $\overrightarrow{XX_1}$ равен данному вектору $\overrightarrow{m}$, называется параллельным переносом.

При этом вектор $\overrightarrow{m}$ называется вектором параллельного переноса (рисунок 92).

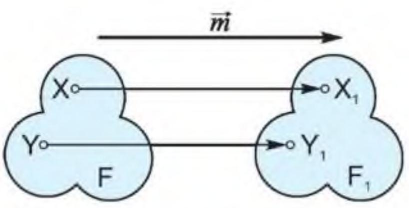


Рисунок 92

Задача 3. Доказать, что параллельный перенос является движением.

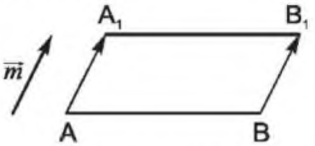


Рисунок 93

Доказательство. Пусть точки A и B при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{m}$ отображаются соответственно на точки A_1 и B_1, а векторы $\overrightarrow{m}$ и $\overrightarrow{AB}$ неколлинеарные (рисунок 93). Тогда на основании определения понятия параллельного переноса имеем: $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{m}$ и $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{m}$. Следовательно, $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1}$, значит, $AA_1 \parallel BB_1$ и $AA_1 = BB_1$, а AA_1B_1B – параллелограмм. Поэтому $A_1B_1 = AB$ (как противоположные стороны параллелограмма).

Если векторы $\overrightarrow{m}$ и $\overrightarrow{AB}$ коллинеарные, то также $A_1B_1 = AB$ (проверьте это самостоятельно). Значит, параллельный перенос сохраняет расстояние между точками, поэтому является движением.

Из доказанного утверждения следует, что *при параллельном переносе прямая отображается на параллельную ей прямую или на себя*.

Преобразование фигуры F в фигуру F_1, при котором каждая ее точка X отображается на точку X_1 такую, что отрезок OX равен отрезку OX_1 и угол XOX_1 равен данному углу φ, называется поворотом около данной точки O на угол φ. Эта точка называется *центром поворота*, а угол φ – *углом поворота*, причем угол φ задается не только градусной мерой, но и направлением: по часовой стрелке или против часовой стрелки (рисунок 94).

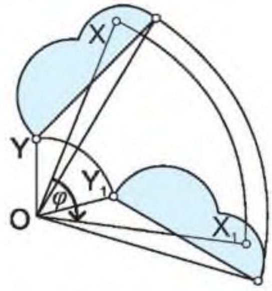


Рисунок 94

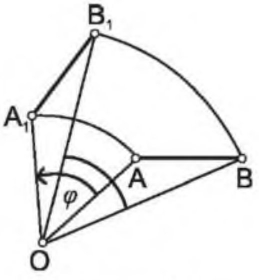


Рисунок 95

З а д а ч а 4. Доказать, что поворот около данной точки является движением.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть точки A, B и O не лежат на одной прямой и при повороте около центра O против часовой стрелки на угол φ точки A и B отображаются соответственно на точки A_1 и B_1 (рисунок 95). Тогда $\Delta AOB = \Delta A_1OB_1$ (по первому признаку равенства треугольников). Следовательно, $A_1B_1 = AB$. Случай, когда точки A, B и O лежат на одной прямой, рассмотрите самостоятельно.

Отметим, что последовательное выполнение нескольких движений называется их *композицией*. Композиция движений обладает сочетательным свойством, поэтому при любом порядке их выполнения результат будет один и тот же. Композицию движений, состоящую из осевой симметрии и параллельного переноса, называют *скользящей симметрией*.

ВОПРОСЫ

1. Объясните, что такое преобразование плоскости.
2. Какое преобразование плоскости называется движением?
3. Какие свойства движения вы знаете?
4. Какие две точки называются симметричными: а) относительно данной точки; б) относительно данной прямой?
5. Какое преобразование называется: а) центральной симметрией; б) осевой симметрией?
6. Дайте определение понятия: а) параллельный перенос; б) поворот около данной точки.
7. Докажите, что движением является каждое из следующих преобразований: а) центральная симметрия; б) осевая симметрия; в) параллельный перенос; г) поворот около данной точки.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

149. Даны луч AB и не принадлежащая ему точка O. Постройте фигуру, на которую отображается этот луч при центральной симметрии относительно точки O.

150. В ΔABC $\angle C = 100°$, $AC = 3$ см, $BC = 4$ см. Постройте ΔABC и его образ при осевой симметрии относительно прямой, содержащей его: а) медиану AM; б) высоту AH.

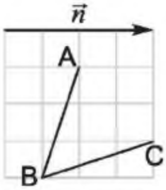


Рисунок 96

151. При симметрии относительно прямой, проходящей через вершину A треугольника ABC, точка B отображается на точку C. Докажите, что ΔABC – равнобедренный.

152. Даны угол ABC и вектор $\vec{n}$ (рисунок 96). Постройте образ этого угла при параллельном переносе на вектор $\vec{n}$.

Уровень В

153. а) На прямой MK, содержащей основание равнобедренного ΔMNK, отмечена точка C так, что K лежит между точками M и C. Укажите вектор параллельного переноса, при котором отрезок NK отображается на отрезок BC. Постройте образ ΔMNK при этом параллельном переносе.

б) Можно ли каким-либо видом движений (или их композицией) преобразовать изображение одной из золотых башен Дома министерств в другую (рисунок 97)?

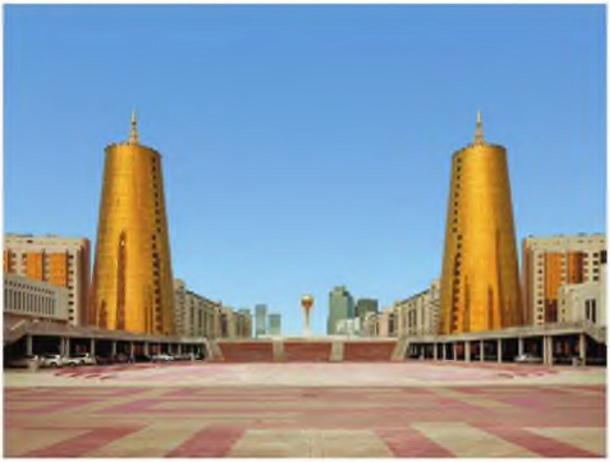


Рисунок 97

154. а) Даны ΔABC, в котором $\angle C = 90°$, $AC = 3$ см, $BC = 1,5$ см, и точка O, принадлежащая прямой AB, причем $OA = 2$ см и точка A лежит на отрезке OB. Постройте образ ΔABC при повороте около точки O по часовой стрелке на угол $60°$.

б) Две равные окружности с центрами в точках A и B пересекаются в точках C и D. На какой угол надо повернуть одну из них около точки C, чтобы она совпала с другой окружностью?

155. Выполните композицию: а) поворотов против часовой стрелки данного отрезка AB на угол $45°$ вокруг не принадлежащей ему точки и на угол $30°$ около какой-либо его внутренней точки; б) параллельного переноса ΔABC на вектор, равный $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, и поворота на угол $60°$ по часовой стрелке вокруг какой-нибудь точки M плоскости; в) параллельного переноса окружности на вектор $\vec{m}$ и осевой симметрии относительно произвольно выбранной прямой l.

Уровень C

156. В равностороннем треугольнике ABC медианы AM и BN пересекаются в точке O. Установите, композицией каких двух движений ΔAON может быть переведен в ΔBOM.

157. а) В равностороннем треугольнике ABC медианы пересекаются в точке O. Докажите, что при повороте около точки O на угол $120°$ треугольник ABC отображается на себя.

б) Докажите, что не существует центрально-симметричного многоугольника с нечетным числом сторон.

10. Применение движений к решению задач

Учебные достижения по изучению темы:

• уметь решать задачи с использованием различных видов движений.

Приведем примеры решений задач с использованием различных видов движения. Основная идея в решении этих задач заключается в удачном выборе и выполнении такого движения, которое дает необходимый результат.

З а д а ч а 1. На боковых сторонах AB и BC равнобедренного ΔABC построены квадраты, K и N – точки пересечения их диагоналей (рисунок 98). Доказать, что отрезок KN перпендикулярен медиане BM этого треугольника.

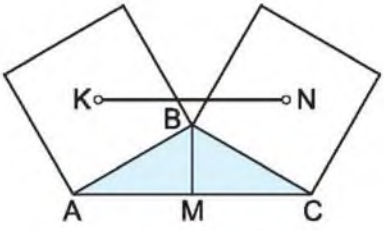


Рисунок 98

Д о к а з а т е л ь с т в о. По свойству равнобедренного треугольника прямая BM является осью симметрии треугольника ABC. При этом отрезки AB и CB и квадраты, построенные на них, симметричны относительно прямой BM. Следовательно, симметричны относительно этой прямой и точки K и N пересечения диагоналей квадратов, поэтому отрезки KN и BM перпендикулярны.

З а д а ч а 2. Через общую точку A двух неравных окружностей F_1 и F_2 провести прямую так, чтобы эти окружности отсекали на ней равные хорды.

Р е ш е н и е. Построим окружность F_3, симметричную окружности F_1 относительно точки A (рисунок 99). Окружность F_3 равна окружности F_1 и имеет с окружностью F_2 общую хорду AN. Тогда прямая AN будет искомой, так как она пересекает окружность F_1 в точке M, симметричной точке N относительно центра A, и $AM = AN$.

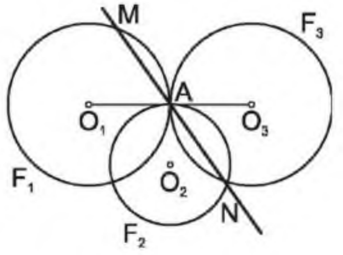


Рисунок 99

З а д а ч а 3. Даны треугольники ABC и NBK такие, что $NB \perp AB$ и $NB = AB$, $KB \perp BC$ и $KB = BC$, $NK = b$ (рисунок 100, *а*). Найти длину медианы BM треугольника ABC.

Р е ш е н и е. Повернем ΔBNK около точки B на 90° по часовой стрелке (рисунок 100, *б*).

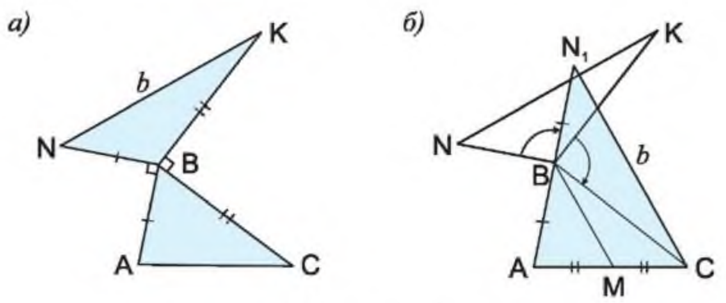


Рисунок 100

Он отобразится на равный ему ΔBN_1C. При этом точки A, B и N_1 будут лежать на одной прямой, а отрезок BK совпадет с отрезком BC. Тогда медиана BM треугольника ABC будет средней линией треугольника AN_1C, поэтому $BM = 0{,}5b$.

О т в е т. $0{,}5b$.

З а д а ч а 4. Где нужно построить мост через реку с параллельными берегами, чтобы соединить пункты A и B, расположенные по разные стороны реки, кратчайшим путем?

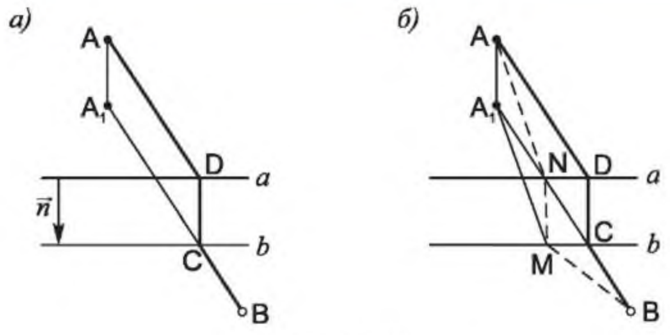


Рисунок 101

Р е ш е н и е. Пусть прямые a и b – это берега реки, а длина моста через эту реку равна длине вектора $\vec{n}$ (рисунок 101, *а*). Переместим точку A и прямую a на вектор $\vec{n}$. Тогда точка A отобразится на точку A_1, а прямая a отобразится на прямую b. Кратчайшее расстояние между точками A_1 и B – это отрезок A_1B, он пересекает прямую b в точке C. Тогда CD – положение моста, а ломаная $ADCB$ – кратчайшее расстояние между пунктами A и B через мост.

Докажем, что при другом положении моста путь из пункта A в пункт B будет длиннее. Пусть отрезок MN – это положение моста (рисунок 101, *б*). Сравним длины ломаных $ANMB$ и $ADCB$. Так как $MN = CD$, достаточно сравнить суммы отрезков $AN + MB$ и $AD + CB$. $AN + MB = A_1M + MB$ ($AN = A_1M$ как противоположные стороны параллелограмма A_1ANM). $AD + CB = A_1B$. По неравенству треугольника $A_1M + MB > A_1B$. Следовательно, $AN + MB > AD + CB$, то есть путь между пунктами A и B через мост CD – кратчайший.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

158. а) Даны прямая и две точки A и B, расположенные по одну сторону от нее. Найдите на прямой такую точку C, чтобы треугольник ABC имел наименьший периметр. б) Пластинка имеет форму остроугольного треугольника. Как разрезать ее на три части, из которых можно составить прямоугольник?

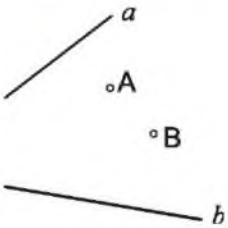


Рисунок 102

159. Два пункта A и B расположены между дорогами a и b (рисунок 102). Где на этих дорогах должны быть пункты M и N ($M \in a$, $N \in b$), чтобы путь $AMNB$ был кратчайшим?

Уровень В

160. По одну сторону от железной дороги расположены два пункта A и B. Где надо расположить платформу MK вдоль железной дороги, чтобы длина дороги $AMKB$ была наименьшей?

161. Даны две равные окружности. Найдите геометрическое место точек, около которых можно осуществить поворот одной окружности, чтобы она совпала с другой.

162. Фигура $ABCDF$ (рисунок 103) поворотами вокруг центра O на $x°$, $2x°$, $3x°$, $4x°$, $5x°$ отображается на себя. а) Чему равен x? б) Назовите образы отрезка AC при повороте около точки O на $x°$.

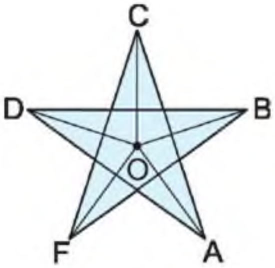


Рисунок 103

163. а) Постройте шестиугольник, который при повороте вокруг некоторой точки на $x°$, $2x°$, $3x°$ отобразится сам на себя. б) Имеет ли построенный в задаче а) шестиугольник центр симметрии; ось симметрии? Если имеет, то укажите их.

Уровень С

164. а) На сторонах CA и CB равностороннего треугольника ABC отложены отрезки CM и CN, сумма длин которых равна стороне треугольника. Найдите угол MON, где O – точка пересечения медиан треугольника.

б) Через центр равностороннего треугольника проведены две прямые, угол между которыми равен 60° и которые не содержат вершин треугольника. Докажите, что отрезки этих прямых, заключенные между сторонами треугольника, равны.

165. Запишите уравнение: а) прямой, симметричной прямой $y = 2x + 5$ относительно начала координат; б) прямой, полученной из прямой $y = 2x - 4$ поворотом вокруг начала координат на 90° против часовой стрелки.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ

Постройте произвольный треугольник ABC и через точку O, не принадлежащую ему, проведите прямые AO, BO и CO. Отметьте точки A_1, B_1 и C_1 на этих прямых так, чтобы $\overrightarrow{AO} = 2\overrightarrow{A_1O}$, $\overrightarrow{BO} = 2\overrightarrow{B_1O}$, $\overrightarrow{CO} = 2\overrightarrow{C_1O}$. Во сколько раз стороны и площадь треугольника $A_1B_1C_1$ больше треугольника ABC?

11. Преобразования гомотетии и подобия, их свойства

Учебные достижения по изучению темы:
- знать определения гомотетии, подобия и подобных фигур;
- знать и применять свойства гомотетии и подобия.

Преобразование фигуры F в фигуру F_1, при котором каждая ее точка X отображается на точку X_1 такую, что $\overrightarrow{OX_1} = k \cdot \overrightarrow{OX}$, где O – данная точка, k – не равное нулю число, называется гомотетией с центром O и коэффициентом k.

На рисунке 104 показан пример такого преобразования, при $k > 0$ (рисунок 104, *а*) и при $k < 0$ (рисунок 104, *б*).

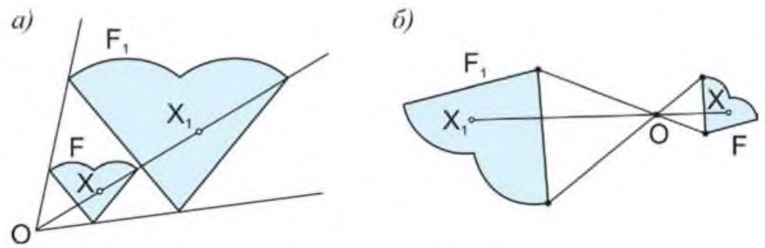
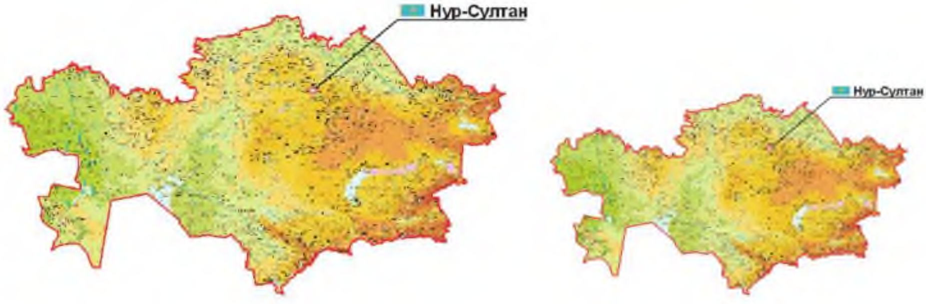


Рисунок 104

Две фигуры называются *гомотетичными*, если они переводятся одна в другую преобразованием гомотетии.

Преобразование, при котором сохраняется отношение расстояний между точками, называется преобразованием подобия. То есть, если при этом преобразовании произвольные точки X и Y отображаются на точки X_1 и Y_1, то $\frac{X_1Y_1}{XY} = k$, где k – данное положительное число. Число k называется *коэффициентом подобия*.

Две фигуры называются *подобными*, если они переводятся одна в другую преобразованием подобия. То что фигура F_1 *подобна фигуре* F_2 записывают так: $F_1 \sim F_2$. Например, подобными фигурами являются две фотографии географической карты Казахстана, выполненные при разных увеличениях (рисунок 105, *а*, *б*).



а) *б)*

Рисунок 105

Рассмотрим основные свойства преобразования подобия, которые следуют из определения этого понятия.

1) Если фигура F_1 подобна фигуре F_2 с коэффициентом подобия k, то фигура F_2 подобна фигуре F_1 с коэффициентом подобия, равным $\frac{1}{k}$.

2) Если фигура F_1 подобна фигуре F_2 с коэффициентом подобия k_1, а фигура F_2 подобна фигуре F_3 с коэффициентом k_2, то фигура F_1 подобна фигуре F_3 с коэффициентом подобия, равным $k_1 \cdot k_2$.

3) Движение является преобразованием подобия с коэффициентом, равным 1.

Теорема. **Гомотетия является преобразованием подобия.**

Доказательство. Пусть точка O – центр гомотетии, k – коэффициент гомотетии, а точки A и B отображаются на точки A_1 и B_1 (рисунок 106). Тогда $\overrightarrow{OA_1} = k \cdot \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB_1} = k \cdot \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OB_1} = k(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB})$. Так как $\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{B_1A_1}$,

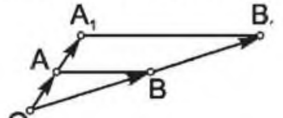


Рисунок 106

а $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$, то $\overrightarrow{B_1A_1} = k \cdot \overrightarrow{BA}$. Следовательно, $\frac{B_1A_1}{BA} = |k|$, то есть гомотетия сохраняет отношение расстояний между точками, значит, она является подобием.

Это свойство гомотетии удобно использовать для построения подобных фигур. Например, на рисунке 107, *а* показан способ построения плана участка местности – четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$, гомотетичного и подобного четырехугольнику $ABCD$, а на рисунке 107, *б* – способ построения подобных многоугольников, когда за центр гомотетии принимается одна из его вершин.

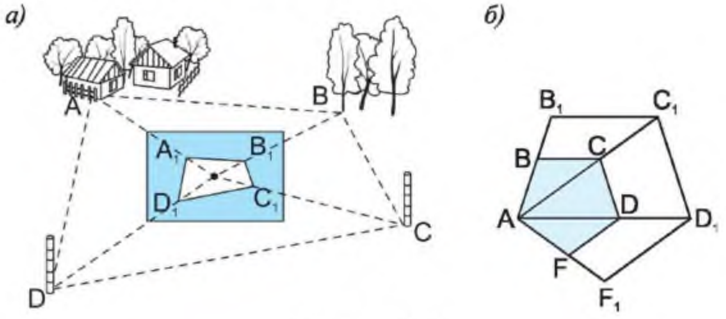


Рисунок 107

Из доказательства теоремы следует, что при гомотетии *прямая, не проходящая через ее центр, отображается на параллельную ей прямую.*

Отметим, что если есть две подобные фигуры, то существует преобразование гомотетии, при которой одна фигура отображается на фигуру, равную другой.

З а д а ч а 1. Доказать, что *при преобразовании подобия угол отображается на равный ему угол.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\angle BAC$ при преобразовании подобия с коэффициентом k отображается на $\angle B_1A_1C_1$ (рисунок 108). Подвергнем $\angle BAC$ гомотетии с центром в его вершине A и коэффициентом гомотетии k. При этом точки B и C отобразятся на точки B_2 и C_2 соответственно. Тогда $\Delta B_2AC_2 = \Delta B_1A_1C_1$ (по третьему признаку равенства треугольников). Следовательно, $\angle A = \angle A_1$, что и требовалось доказать.

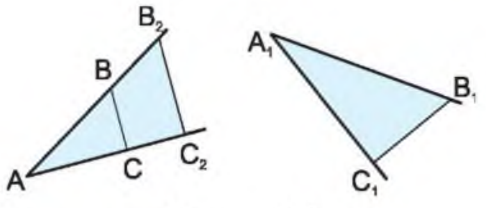


Рисунок 108

Отметим, что *при гомотетии угол отображается на равный ему угол*, так как гомотетия является преобразованием подобия.

Задача 2. Доказать, что любые две окружности подобны.

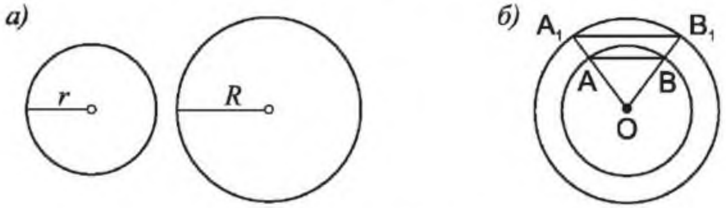


Рисунок 109

Доказательство. Пусть даны две окружности, радиусы которых равны r и R (рисунок 109, *а*). Совместим центры этих окружностей (рисунок 109, *б*). Тогда для любых двух точек A и B одной окружности можно построить гомотетичные им точки A_1 и B_1 второй окружности с центром гомотетии O и коэффициентом гомотетии, равным $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{R}{r} = k$. Поэтому окружности подобны.

Задача 3. При некоторой гомотетии точки A, B и их образы A_1, B_1 лежат на одной прямой. Построить центр гомотетии.

Решение. Отметим произвольную точку C, не лежащую на прямой AB (рисунок 110). Тогда прямые AC и BC при этой гомотетии отображаются соответственно на параллельные им прямые A_1C_1 и B_1C_1, а центром гомотетии является точка O пересечения прямых AB и CC_1.

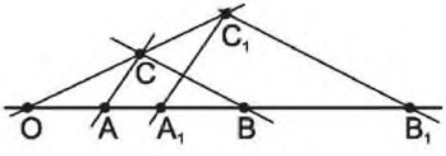


Рисунок 110

ВОПРОСЫ

1. Дайте определение преобразования: а) гомотетии; б) подобия.
2. Какие две фигуры называются: а) гомотетичными; б) подобными?
3. Докажите, что гомотетия является преобразованием подобия.
4. Какие свойства гомотетии и подобия вы знаете?
5. Объясните на примерах способы построения двух фигур: а) гомотетичных; б) подобных.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

166. Дан треугольник со сторонами, равными 7 см, 6 см, 5 см. Постройте треугольник, гомотетичный данному, с центром гомотетии в точке пересечения его медиан и коэффициентом гомотетии, равным: а) $\frac{3}{2}$; б) –0,5. Сравните соответствующие углы данного и построенных треугольников.

167. Стороны прямоугольника равны 2 см и 3 см. Постройте подобный ему прямоугольник с коэффициентом подобия, равным 2, и найдите отношение площадей построенного и данного прямоугольников.

Уровень В

168. В ΔABC угол C – прямой, $AC = 8$ см, $BC = 6$ см. а) На одном чертеже постройте ΔAB_1C_1 и ΔAB_2C_2, подобные ΔABC, с коэффициентами подобия соответственно равными $\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{4}$. б) Найдите длины медиан C_1M_1 и C_2M_2 построенных треугольников.

169. Дан ромб $ABCD$, в котором $AC = 8$ см, $BD = 6$ см. а) Используя гомотетию с центром в точке A, постройте ромб, подобный данному, с коэффициентом подобия, равным $\frac{3}{4}$. б) Найдите высоту построенного ромба.

170. В ΔABC проведен отрезок DE, параллельный стороне AC, с концами на сторонах AB и BC соответственно. Найдите AD, если $AB = 16$ см, $BC = 20$ см, $BE = 15$ см.

Уровень C

171. Даны окружность с центром O и радиусом 2 см и прямая, удаленная от точки O на расстояние, равное 3 см. Найдите на окружности две точки, которые при гомотетии с центром O и коэффициентом, равным 2, отобразятся на точки, принадлежащие данной прямой.

172. Дана окружность и проведены два ее радиуса. Постройте хорду этой окружности, которая делится данными радиусами на три равных отрезка.

12. Подобные треугольники

Учебные достижения по изучению темы:

• знать определение подобных треугольников и их признаки;

• уметь применять признаки подобия треугольников при решении задач.

Два треугольника называются подобными, если они переводятся один в другой преобразованием подобия.

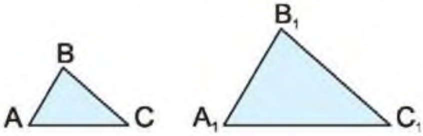


Рисунок 111

В записи $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ предполагается, что при преобразовании подобия вершина A отображается на A_1, B – на B_1, C – на C_1. Из определения и свойств преобразования подобия следует, что у подобных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ (рисунок 111) соответствующие углы равны и соответствующие стороны пропорциональны, то есть $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$ и $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC} = k$, где k – *коэффициент подобия* треугольников.

Теорема (*первый признак подобия треугольников*). **Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то треугольники подобны.**

Доказательство. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ (рисунок 112). Докажем, что $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

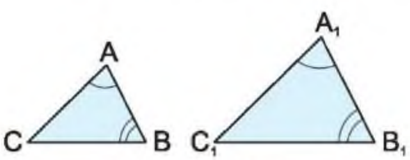


Рисунок 112

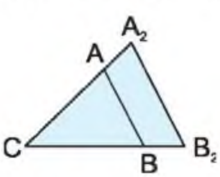


Рисунок 113

Построим образ ΔABC при гомотетии с коэффициентом $k = \frac{A_1B_1}{AB}$ и центром в точке C (рисунок 113). Тогда ΔABC отобразится на подобный ему ΔA_2B_2C, при этом $\angle A_2 = \angle A$, $\angle B_2 = \angle B$ и $A_2B_2 = k \cdot AB = A_1B_1$. Следовательно, $\Delta A_2B_2C = \Delta A_1B_1C_1$ по второму признаку равенства треугольников.

Получили $\Delta ABC \sim \Delta A_2B_2C$ с коэффициентом подобия k, а $\Delta A_2B_2C \sim \Delta A_1B_1C_1$ с коэффициентом подобия 1. Следовательно, $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$. Теорема доказана.

Теорема (*второй признак подобия треугольников*). **Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы между этими сторонами равны, то треугольники подобны.** Докажите этот признак самостоятельно.

Теорема (*третий признак подобия треугольников*). **Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то треугольники подобны.**

Доказательство. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC} = k$ (рисунок 114). Докажем, что $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

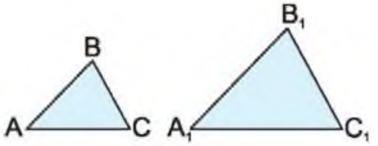


Рисунок 114

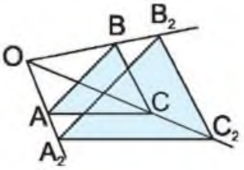


Рисунок 115

Построим образ ΔABC при гомотетии с коэффициентом k и центром в точке O (рисунок 115). Тогда ΔABC отобразится на подобный ему $\Delta A_2B_2C_2$, при этом $A_2B_2 = k \cdot AB = A_1B_1$, $A_2C_2 = k \cdot AC = A_1C_1$, $C_2B_2 = k \cdot CB = C_1B_1$. Значит, $\Delta A_2B_2C_2 = \Delta A_1B_1C_1$ по третьему признаку равенства треугольников.

Получили $\Delta ABC \sim \Delta A_2B_2C_2$ с коэффициентом подобия k, а $\Delta A_2B_2C_2 \sim \Delta A_1B_1C_1$ с коэффициентом подобия 1. Следовательно, $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$. Теорема доказана.

Из признаков подобия треугольников следует, что **два прямоугольных треугольника подобны, если: они имеют по одному равному острому углу**; или **их катеты пропорциональны**; или **гипотенуза и катет одного треугольника соответственно пропорциональны гипотенузе и катету другого треугольника**.

Отметим, что в подобных треугольниках отношение соответствующих высот, медиан, биссектрис, радиусов вписанных окружностей и радиусов окружностей, описанных около этих треугольников, равно коэффициенту подобия (докажите это самостоятельно).

Докажите самостоятельно изученное в 8 классе свойство биссектрисы, используя подобие треугольников.

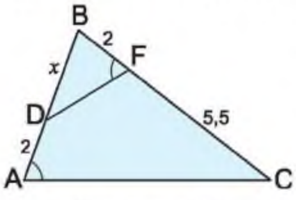


Рисунок 116

З а д а ч а 1. На сторонах AB и BC треугольника ABC отмечены точки соответственно D и F так, что $\angle BFD = \angle BAC$ (рисунок 116). Найти длину отрезка BD, если $AD = BF = 2$ см, $FC = 5{,}5$ см.

Р е ш е н и е. 1) $\Delta BFD \sim \Delta BAC$, так как в них есть два равных угла: $\angle B$ – общий, $\angle BFD = \angle BAC$.

2) В подобных треугольниках соответствующие стороны лежат против равных углов, поэтому $\dfrac{BD}{BC} = \dfrac{BF}{AB}$.

3) Пусть $BD = x$ см, тогда $\dfrac{x}{7{,}5} = \dfrac{2}{2 + x}$.

Решив уравнение $x^2 + 2x - 15 = 0$, получим $x_1 = -5$, $x_2 = 3$.

Значит, $BD = 3$ см.

О т в е т. 3 см.

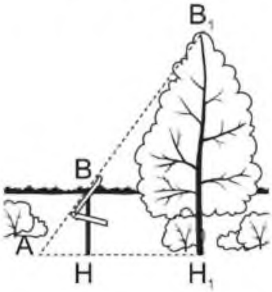


Рисунок 117

З а д а ч а 2. Найти способ измерения высоты B_1H_1 дерева, используя подобие треугольников (рисунок 117).

Р е ш е н и е. Возьмем шест, прикрепим на его конце подвижную планку, поставим его вертикально и наведем один конец планки на вершину дерева (второй конец при этом направлен на поверхность земли). Убедимся, что точки A, H и H_1 лежат на одной прямой. Тогда прямоугольные треугольники ABH и AB_1H_1 подобны, так как имеют общий острый угол A (рисунок 117). Поэтому $\dfrac{B_1H_1}{BH} = \dfrac{AH_1}{AH}$, откуда неизвестная высота дерева $B_1H_1 = \dfrac{AH_1 \cdot BH}{AH}$.

З а д а ч а 3. Основания трапеции 6 см и 9 см, а ее высота 10 см. Найти расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до ее оснований.

Р е ш е н и е. Пусть в трапеции $ABCD$ основания $AD = 9$ см, $BC = 6$ см, O – точка пересечения ее диагоналей, высота $NM = 10$ см (рисунок 118). Найдем ON и OM.

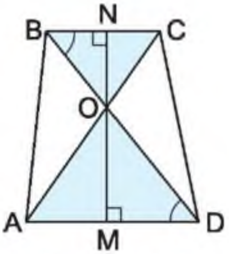


Рисунок 118

Так как $\angle BOC = \angle DOA$ как вертикальные, $\angle CBO = \angle ODA$ как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей BD, то $\Delta BOC \sim \Delta DOA$ и коэффициент их подобия равен $k = \frac{AD}{BC} = \frac{3}{2}$. В подобных треугольниках отношение соответствующих высот равно коэффициенту подобия. Поэтому $\frac{OM}{ON} = \frac{3}{2}$, то есть $\frac{OM}{10 - OM} = \frac{3}{2}$. Отсюда $OM = 6$ см, тогда $ON = 4$ см.

О т в е т. 4 см и 6 см.

З а д а ч а 4. Два неравных отрезка AB и CD перпендикулярны отрезку BD. Найти расстояние от точки O пересечения отрезков AD и BC до отрезка BD, если $AB = a$, $CD = b$.

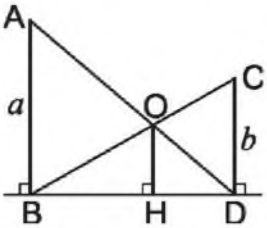


Рисунок 119

Р е ш е н и е. Искомое расстояние равно длине перпендикуляра OH к прямой BD (рисунок 119). Так как $OH \parallel AB$ и $OH \parallel CD$, то $\Delta ABD \sim \Delta OHD$, а $\Delta CDB \sim \Delta OHB$. Следовательно, $\frac{OH}{AB} = \frac{HD}{BD}$ и $\frac{OH}{CD} = \frac{BH}{BD}$. Сложив левые и правые части этих равенств, получим $\frac{OH}{AB} + \frac{OH}{CD} = \frac{BH + HD}{BD}$. Обозначим $OH = x$, тогда $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1$, откуда $x = \frac{ab}{a + b}$.

О т в е т. $\frac{ab}{a + b}$.

ВОПРОСЫ

1. Какие два треугольника называются подобными?
2. Сформулируйте и докажите признаки подобия двух треугольников.
3. Какие признаки подобия двух прямоугольных треугольников вы знаете?

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

173. Подобны ли два треугольника, если: а) два угла одного равны 60° и 70°, а два угла второго – 50° и 80°; б) два угла одного равны 108° и 20°, а второго – 52° и 20°?

174. Дано: ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$, $AB = 5$ см, $BC = 7$ см, $A_1B_1 = 10$ см, $A_1C_1 = 8$ см (рисунок 120). Найдите остальные стороны треугольников.

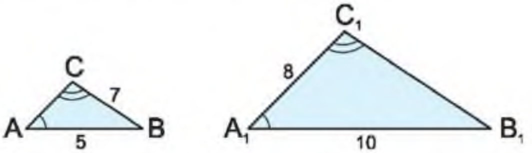


Рисунок 120

175. а) Докажите, что два равносторонних треугольника подобны. б) Постройте равносторонний ΔABC со стороной 6 см и проведите прямые MN и M_1N_1 так, чтобы $\Delta ABC \sim \Delta MNC$ с коэффициентом подобия $k = \frac{2}{3}$ и $\Delta ABC \sim \Delta M_1N_1C$ с коэффициентом подобия $k = \frac{1}{3}$. Подобны ли треугольники MNC и M_1N_1C? Если подобны, то найдите коэффициент подобия.

176. По данным на рисунках 121, *а*, *б*, *в* найдите *x*.

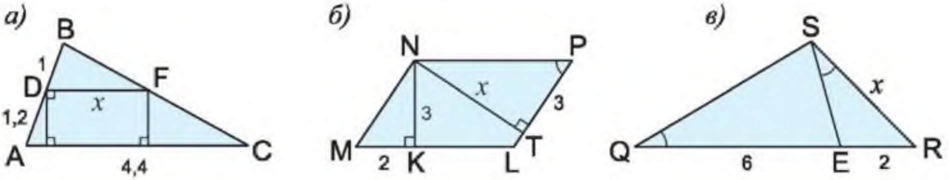


Рисунок 121

Уровень В

177. У двух равнобедренных треугольников углы между боковыми сторонами равны. Боковая сторона и основание одного треугольника равны 36 см и 24 см; основание другого равно 16 см. Найдите его боковую сторону.

178. а) Диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Найдите основания трапеции, если ее средняя линия равна 24 см, а $AO : CO = 3 : 1$. б) Диагональ AC трапеции $ABCD$, равная 6 м, делит ее на два подобных треугольника. Найдите меньшее основание трапеции BC, если ее большее основание равно 12 м.

179. Длина тени дерева равна 10,2 м, а в это же время длина тени человека, рост которого 1,7 м, равна 2 м. Найдите высоту дерева.

180. В остроугольном ΔABC проведены высоты AA_1 и BB_1, причем $AB_1 = B_1C = 5$ см, $AA_1 = 8$ см. Докажите, что $\Delta AA_1C \sim \Delta BB_1C$ и найдите площадь ΔABC.

181. В прямоугольный ΔABC с катетами 12 см и 6 см вписан квадрат $CDNK$, имеющий с треугольником общий прямой угол C, а точка N лежит на гипотенузе. Найдите периметр квадрата.

182. В ΔABC со сторонами $AB = 15$ см, $AC = 10$ см вписан ромб $AMNK$ так, что точки M, N и K принадлежат сторонам AB, BC и AC соответственно. Найдите сторону ромба.

183. В треугольнике ABC $AB = 15$ см, $AC = 20$ см. На стороне AB отложен отрезок $AM = 8$ см, а на стороне AC – отрезок $AN = 6$ см. Подобны ли треугольники ABC и ANM? Ответ объясните.

184. В треугольниках ABC и MNK $\angle B = \angle N$, $\dfrac{AB}{MN} = \dfrac{BC}{NK} = \dfrac{2}{3}$. Найдите AC и MK, если $AC + MK = 20$ см.

185. Подобны ли треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, если $AB = \dfrac{5}{4}$ м, $AC = \dfrac{3}{4}$ м, $BC = \dfrac{4}{5}$ м, $A_1B_1 = 5$ см, $A_1C_1 = 3$ см, $B_1C_1 = 3{,}2$ см? Ответ объясните.

186. Города Актобе, Петропавловск, Кызылорда образуют ΔAPK, периметр которого на карте, выполненной в масштабе

1 : 10 000 000, равен 36,4 см. Найти расстояние между этими городами в действительности, если расстояние AP на 160 км меньше PK и на 150 км больше AK.

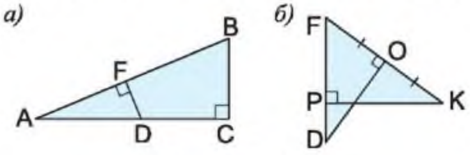


Рисунок 122

187. По данным на рисунке 122 найдите DF, если:

а) $AF = 6$ м, $FB = 10$ м, $AC = 12$ м;

б) $FK = 5$ дм, $PK = 4$ дм.

Уровень C

188. Постройте треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, имеющие следующие координаты вершин:

а) $A(3; 2)$, $B(1; 3)$, $C(3; 6)$, $A_1(3; -2)$, $B_1(1; -3)$, $C_1(3; -6)$;

б) $A(1; -3)$, $B(5; -1)$, $C(1; 5)$, $A_1(-2; 1)$, $B_1(-4; 2)$, $C_1(-2; 5)$. Подобны ли эти треугольники? Ответ объясните.

189. В подобных треугольниках соответственные стороны a и a_1 и высоты, проведенные к этим сторонам, h и h_1 соответственно. Известно, что $h + h_1 = 3{,}6$ см, $a_1 = 3{,}2$ см и $\frac{a_1}{a} = 2$. Найдите площади этих треугольников.

190. Из вершины C прямого угла ΔABC проведена высота CD и в треугольники ACD и BCD вписаны окружности, радиусы которых равны соответственно r_1 и r_2. Найдите r_1, если $r_2 = 2$ см, $BD = 5$ см, $CD = 12$ см.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ

Постройте равнобедренную трапецию. Проведите прямую параллельную основаниям, которая делит высоту трапеции в отношении 2 : 1. Являются ли две полученные при этом трапеции подобными? Чему равно отношение их боковых сторон?

13. Подобные многоугольники

Учебные достижения по изучению темы:

• знать определение подобных многоугольников и их свойства;

• знать формулу об отношении площадей двух подобных многоугольников;

• уметь применять свойства биссектрисы треугольника и подобных многоугольников при решении задач.

Из определения и свойств преобразования подобия следует, что если два ***n*-угольника подобны, то углы одного многоугольника соответственно равны углам другого многоугольника и их стороны, между которыми заключены соответственно равные углы, пропорциональны**.

Например, если два n-угольника (рисунок 123) $A_1A_2 \ldots A_{(n-1)}A_n$ и $B_1B_2 \ldots B_{(n-1)}B_n$ подобны, то в них $\angle A_1 = \angle B_1, \angle A_2 = \angle B_2, \ldots, \angle A_n = B_n$ и $\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \ldots \frac{A_{n-1}A_n}{B_{n-1}B_n} = k$, где k – коэффициент подобия многоугольников.

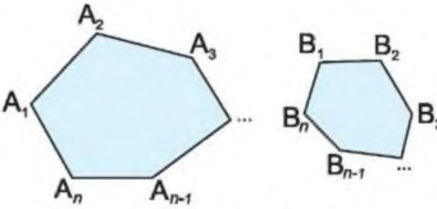


Рисунок 123

Теорема. **Отношение периметров двух подобных многоугольников равно коэффициенту подобия этих многоугольников.**

Доказательство. Пусть даны, например, подобные пятиугольники (рисунок 124). Тогда $A_1B_1 = k \cdot AB$, $B_1C_1 = k \cdot BC, \ldots, E_1A_1 = k \cdot EA$. Сложив левые и правые части этих равенств, получим $P = k \cdot P_1$, где P и P_1 периметры этих многоугольников, k – коэффициент их подобия. Аналогично доказывается эта теорема для любых выпуклых n-угольников.

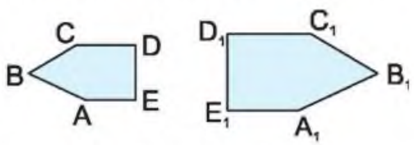


Рисунок 124

Теорема. **Отношение площадей двух подобных многоугольников равно квадрату коэффициента подобия этих многоугольников.**

Доказательство. Рассмотрим вначале подобные треугольники.

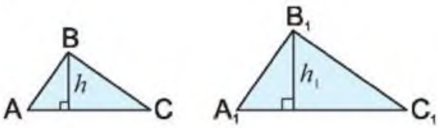


Рисунок 125

Если $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ (рисунок 125), то $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$ и $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC} = k$.

Проведем в этих треугольниках из вершин B и B_1 высоты и обозначим их через h и h_1, $\frac{h_1}{h} = k$. Тогда $\frac{S_{\Delta A_1B_1C_1}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{0{,}5 \cdot A_1C_1 \cdot h_1}{0{,}5 \cdot AC \cdot h} = \frac{A_1C_1}{AC} \cdot \frac{h_1}{h} = k^2$.

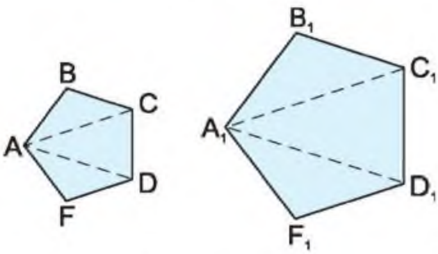


Рисунок 126

Рассмотрим теперь два произвольных подобных пятиугольника $ABCDF$ и $A_1B_1C_1D_1F_1$, например, с коэффициентом подобия k (рисунок 126). Разбив эти многоугольники на треугольники, как показано на рисунке 125, получим: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, $\Delta ACD \sim \Delta A_1C_1D_1$, $\Delta ADF \sim \Delta A_1D_1F_1$. Тогда $S_{\Delta A_1B_1C_1} = k^2 \cdot S_{\Delta ABC}$, $S_{\Delta A_1C_1D_1} = k^2 \cdot S_{\Delta ACD}$, $S_{\Delta A_1D_1F_1} = k^2 \cdot S_{\Delta ADF}$.

Сложив левые и правые части этих равенств, получим: $S_{A_1B_1C_1D_1F_1} = k^2 \cdot S_{ABCDF}$. Следовательно, $\frac{S_{A_1B_1C_1D_1F_1}}{S_{ABCDF}} = k^2$.

Аналогично доказывается эта теорема для любых выпуклых n-угольников.

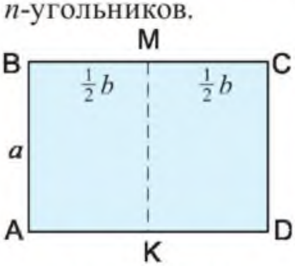


Рисунок 127

Задача 1. Прямоугольный лист бумаги сложили пополам. При каком условии этот лист и его половина подобны?

Решение. Пусть лист бумаги – это прямоугольник $ABCD$, у которого $AB = a$, $AD = b$, прямая MK – его ось симметрии (рисунок 127). Прямоугольники $ABMK$ и $ABCD$ подобны, если $\frac{AB}{AD} = \frac{BM}{AB}$. Так как $BM = \frac{b}{2}$, то $\frac{a}{b} = \frac{b}{2a}$, тогда $2a^2 = b^2$, $\frac{b^2}{a^2} = 2$, $\frac{b}{a} = \sqrt{2}$.

О т в е т. При условии, что отношение двух соседних сторон прямоугольного листа бумаги равно $\sqrt{2} \approx 1{,}414$.

Заметим, что как раз таково отношение длины и ширины листа бумаги формата А4 (297 × 210 мм), $\frac{297}{210} \approx 1{,}414$.

З а д а ч а 2. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины C прямого угла проведена высота CH. Радиусы окружностей, вписанных в треугольники ACH и BCH, равны соответственно R и r. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

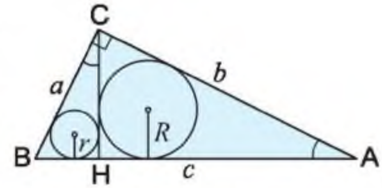


Рисунок 128

Р е ш е н и е. Обозначим искомый радиус x, $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ (рисунок 128). Так как прямоугольные треугольники ACH и ABC, CBH и ABC, имеющие общие острые углы, подобны, то $\frac{x}{R} = \frac{c}{b}$ и $\frac{x}{r} = \frac{c}{a}$. Отсюда $b = \frac{R \cdot c}{x}$, $a = \frac{r \cdot c}{x}$.

По теореме Пифагора $c^2 = \left(\frac{R \cdot c}{x}\right)^2 + \left(\frac{r \cdot c}{x}\right)^2$. Отсюда $1 = \frac{R^2 + r^2}{x^2}$, тогда $x = \sqrt{R^2 + r^2}$.

О т в е т. $\sqrt{R^2 + r^2}$.

З а д а ч а 3. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = a$, $BC = b$ $(a > b)$. Построить отрезок, с концами на боковых сторонах трапеции и параллельный основаниям, который делит ее на две равновеликие трапеции.

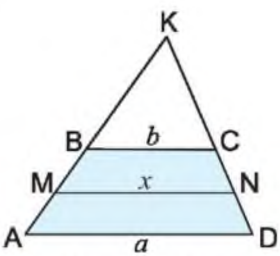


Рисунок 129

Р е ш е н и е. *Анализ.* Пусть $MN = x$ – искомый отрезок, а прямые, на которых лежат боковые стороны трапеции, пересекаются в точке K (рисунок 129). По условию задачи площади трапеций $MBCN$ и $AMND$ равны, обозначим: $S_{MBCN} = S_{AMND} = S$, $S_{\Delta BKC} = Q$. Так как $\Delta MKN \sim \Delta BKC$, то $\frac{S+Q}{Q} = \frac{x^2}{b^2}$. Так как $\Delta AKD \sim \Delta BKC$, то $\frac{2S+Q}{Q} = \frac{a^2}{b^2}$. Из полученных пропорций следует, что $\frac{S}{Q}+1=\frac{x^2}{b^2}$, $\frac{2S}{Q}+1=\frac{a^2}{b^2}$. Выразим $\frac{S}{Q}$ из каждого равенства: $\frac{S}{Q}=\frac{x^2}{b^2}-1$, $\frac{S}{Q}=\frac{a^2}{2b^2}-\frac{1}{2}$. Тогда $\frac{x^2}{b^2}-1=\frac{a^2}{2b^2}-\frac{1}{2}$, откуда $x^2=\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}$, $x=\sqrt{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2}$. Отрезок x равен гипотенузе прямоугольного треугольника с катетами $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ и $\frac{b\sqrt{2}}{2}$. Эти катеты равны половинам диагоналей квадратов со сторонами a и b соответственно.

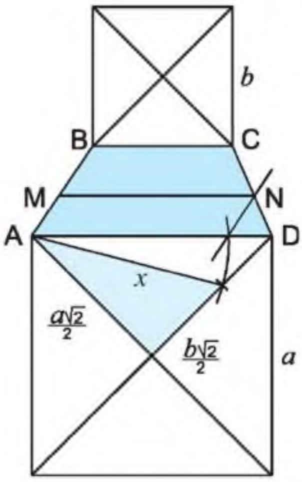


Рисунок 130

Построение. 1) Строим квадраты со сторонами a и b и их диагонали (рисунок 130).

2) Строим прямоугольный треугольник с катетами $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ и $\frac{b\sqrt{2}}{2}$.

3) Откладываем на стороне AD трапеции от точки A отрезок x, равный гипотенузе этого прямоугольного треугольника, и через второй его конец проводим прямую, параллельную стороне AB трапеции.

4) Обозначаем точку N ее пересечения со стороной CD, проводим прямую, параллельную основанию AD, и отмечаем точку M ее пересечения со стороной AB. Искомый отрезок MN построен.

ВОПРОСЫ

1. Какие два n-угольника называются подобными?

2. Сформулируйте и докажите теоремы: а) об отношении периметров подобных многоугольников; б) об отношении площадей подобных многоугольников.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

191. Даны два квадрата со сторонами a и b, причем $\frac{a}{b} = \frac{2}{5}$. Найдите отношение: а) периметров этих квадратов; б) площадей данных квадратов.

192. а) В двух подобных многоугольниках меньшие стороны 35 см и 21 см, а разность их периметров 40 см. Найдите периметр каждого многоугольника. б) Периметр одного многоугольника составляет $\frac{11}{13}$ периметра подобного ему многоугольника. Разность двух соответственных сторон этих многоугольников равна 4 см. Найдите эти стороны.

193. а) Делит ли разносторонний треугольник на два подобных треугольника его биссектриса?

б) Биссектриса AL треугольника ABC делит сторону BC на отрезки $BL = 2{,}1$ см, $LC = 8{,}4$ см. Найдите отношение $AC : AB$.

в) Стороны треугольника равны 4,8 м, 1,6 м и 6 м. Найдите стороны подобного ему треугольника, периметр которого равен 15,5 м.

Уровень В

194. Отношение соответственных сторон двух подобных многоугольников равно: а) 4; б) 0,2. Найдите площадь первого из них, если площадь второго равна $8\sqrt{3}$ см^2.

195. Отношение площадей двух подобных многоугольников равно: а) 36; б) 0,09. Чему равно отношение соответственных сторон этих многоугольников?

196. а) Найдите периметр равностороннего треугольника, площадь которого вдвое больше, чем площадь равностороннего треугольника со стороной, равной 10 см.

б) Найдите площадь и периметр верхней части (выделена синим цветом) боковой грани Дворца Мира и Согласия (рисунок 131), если грань является равнобедренным треугольником с основанием 62 м и боковой стороной $31\sqrt{6}$ м.

197. Площадь ΔABC равна 36 см^2. Через точку O, взятую на медиане BD, проведена прямая MN ($M \in AB$, $N \in BC$), параллельная стороне AC. Найдите площадь ΔMBN, если: а) точка O – середина медианы; б) O – точка пересечения медиан ΔABC.

198. а) В ΔABC известно, что $AB : BC = 4 : 5$, отрезок BK – его биссектриса. Найдите отношение площади ΔABK к площади ΔCBK.

б) Прямая, параллельная основанию треугольника, делит его на части, площади которых относятся как 4 : 5, считая от вершины. В каком отношении она делит боковые стороны треугольника?

Уровень С

199. Сторона первого квадрата составляет $\frac{1}{3}$ стороны второго квадрата. На сколько процентов: а) площадь второго квадрата больше площади первого квадрата; б) площадь первого квадрата меньше площади второго квадрата?

200. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = a$, $BC = b$ ($a > b$). Построить отрезок с концами на боковых сторонах трапеции и параллельный основаниям, который делит ее на две подобные трапеции.

14. Применение гомотетии и подобия при решении задач

Учебные достижения по изучению темы:
• уметь применять гомотетию и подобие при решении задач.

З а д а ч а 1. Доказать, что на одной прямой лежат середины N и M оснований BC и AD трапеции $ABCD$, точка K пересечения ее диагоналей и точка O пересечения прямых, содержащих ее боковые стороны.

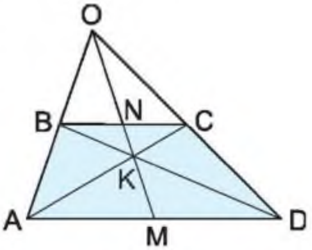


Рисунок 132

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть при гомотетии с центром O отрезок BC отображается на отрезок AD, тогда его середина N отображается на точку M (рисунок 132). Следовательно, точки O, M и N лежат на одной прямой.

Пусть при гомотетии с центром K отрезок BC отображается на отрезок AD, тогда точка N отображается на точку M. Следовательно, точки K, M и N лежат на одной прямой.

Так как через две точки M и N можно провести только одну прямую, то все точки M, N, K и O лежат на одной прямой, что и требовалось доказать.

З а д а ч а 2. В равностороннем треугольнике ABC сторона равна 3 см, BH – высота, точка K – ее середина, луч AK пересекает сторону BC в точке D. Найти длину отрезка AD.

Р е ш е н и е. Проведем высоту AN треугольника ABC (рисунок 133), $AN = 3 \cdot \sin 60° = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ (см). Из прямоугольного ΔAND $AD = \sqrt{AN^2 + DN^2}$. Найдем DN. Для этого проведем отрезок KN, он параллелен HC и равен $\frac{1}{2}HC$ как средняя линия ΔBCH. $\Delta ADC \sim \Delta KDN$, так как в них угол D – общий, а углы ACD и KND равны, как соответ-

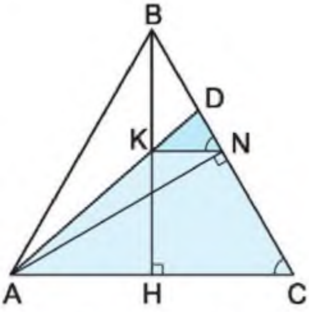


Рисунок 133

ственные при параллельных прямых AC и KN и секущей BC. Следовательно, $\frac{DN + NC}{DN} = \frac{AC}{KN} = 4$, тогда $4DN = DN + NC$. Отсюда $DN = \frac{1}{3}NC = \frac{1}{2}$ (см). Тогда $AD = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{7}$ (см).

Ответ. $\sqrt{7}$ см.

Задача 3. В треугольник ABC вписать квадрат так, чтобы две его вершины лежали на стороне BC, а остальные – на сторонах AB и AC. Найти сторону этого квадрата, если $BC = a$, а высота $AD = h$.

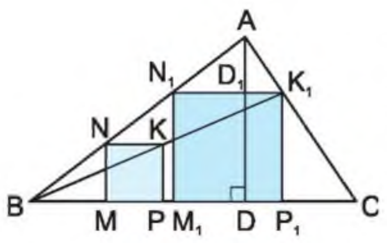


Рисунок 134

Решение. Построим квадрат $MNKP$ так, чтобы его вершины M и P лежали на стороне BC, N – на стороне AB, а K – внутри треугольника (рисунок 134). Далее построим искомый квадрат $M_1N_1K_1P_1$, гомотетичный квадрату $MNKP$, с центром гомотетии в точке B так, чтобы его вершина K_1 принадлежала стороне AC.

Найдем длину стороны этого квадрата. $\Delta AN_1K_1 \sim \Delta ABC$, так как у них $\angle A$ – общий, а $\angle C = \angle N_1K_1A$ как соответственные углы при параллельных прямых BC и N_1K_1 и секущей AC. Отрезки AD и AD_1 – соответствующие высоты этих треугольников. Следовательно, $\frac{AD_1}{AD} = \frac{N_1K_1}{BC}$. Обозначим $D_1D = N_1K_1 = x$. Тогда имеем: $\frac{h - x}{h} = \frac{x}{a}$, откуда $ha - xa = xh$, $x = \frac{ah}{a + h}$.

Ответ. $\frac{ah}{a + h}$.

Задача 4. Построить треугольник ABC по двум его углам: $\angle A = 30°$, $\angle B = 45°$ и медиане $CM = 2{,}3$ см.

Построение.

1) Строим $\Delta A_1B_1C \sim \Delta ABC$ (рисунок 135), где A_1B_1 – произвольный отрезок, $\angle A_1 = 30°$, $\angle B_1 = 45°$.

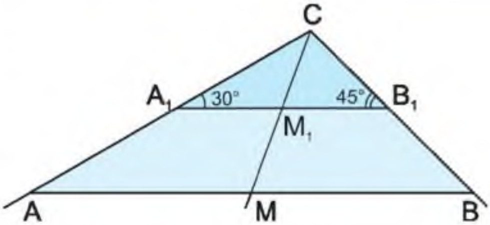


Рисунок 135

2) Проводим медиану CM_1 и на луче CM_1 откладываем отрезок $CM = 2{,}3$ см.

3) Через точку M проводим отрезок $AB \parallel A_1B_1$, концы которого лежат на сторонах угла C. ΔABC – искомый, так как удовлетворяет всем условиям задачи.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень A

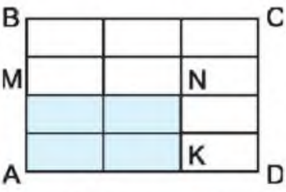


Рисунок 136

201. Прямоугольник $ABCD$ разбит на прямоугольники, как показано на рисунке 136. Подобны ли прямоугольники $ABCD$ и $AMNK$? Ответ объясните.

202. На плане в масштабе 1 : 10 000 участок пастбища имеет периметр 12 см. Сколько метров проволоки понадобится для того, чтобы огородить этот участок в 2 ряда?

Уровень B

203. Чтобы определить расстояние от точки A до недоступной точки B, на местности выбрали точку C и измерили отрезок AC и углы BAC и BCA. Затем на бумаге построили $\Delta A_1B_1C_1$, подобный ΔABC, у которого $A_1C_1 = 3$ см, $A_1B_1 = 15$ см. Найдите расстояние AB, если $AC = 21$ м.

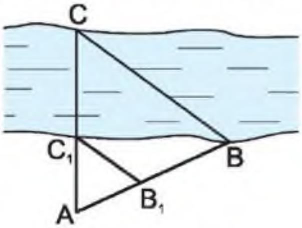


Рисунок 137

204. а) На рисунке 137 показано, как можно измерить ширину CC_1 реки, рассматривая два подобных треугольника ABC и AB_1C_1. Найдите CC_1, если $AB = 25$ м, $AB_1 = 2$ м, $AC_1 = 3$ м.

б) Постройте ΔABC и его биссектрису BD. Проведите луч AB и прямую CM, пересекающую его в точке M и параллельную BD. Сравните отношения: 1) $\frac{AB}{AD}$ и $\frac{BC}{DC}$; 2) $\frac{AB+BC}{AB}$ и $\frac{MC}{BD}$.

205. На стороне AB параллелограмма $ABCD$ отмечена точка M так, что $AM : MB = 1 : 2$. Найдите отрезки, на которые делится диагональ AC отрезком MD, если $AC = 16$ см.

206. В ΔABC вписан параллелограмм $AMNP$ так, что точки M, N, P лежат на сторонах AB, BC, AC соответственно. Известно, что $AB = 6$ см, $AC = 8$ см и $MN : NP = 2 : 1$. Найдите периметр параллелограмма.

Уровень C

207. В ромб вписан квадрат так, что его вершины лежат на сторонах ромба. Найдите периметр этого квадрата, если сторона ромба равна 8 см, а его острый угол $60°$.

208. Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке K, причем $KC : CD = 1 : 3$. Известно, что $AB = 4{,}5$ см, $CD = 6$ см, $AD = 10$ см и высота KN треугольника BKC равна 1,2 см. Найдите: а) стороны ΔBKC; б) высоту трапеции $ABCD$.

15. Упражнения на повторение раздела «Преобразования плоскости»

Уровень А

209. Найдите радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника с основанием 4,8 см и боковой стороной 4 см.

210. В равнобедренный треугольник с боковой стороной 10 см и основанием 6 см вписана окружность. Найдите расстояние между точками касания, принадлежащими боковым сторонам.

211. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 36 см, а один из катетов – 12 см. Найдите проекцию другого катета на гипотенузу.

Уровень В

212. Длина одной стороны треугольника равна 16 см. Прямая, параллельная ей, делит треугольник на два равновеликих многоугольника. Найдите длину отрезка этой прямой, заключенного между двумя другими сторонами треугольника.

213. В равнобедренном ΔABC с основанием AC проведены медиана BD и отрезок DE, перпендикулярный BC. Известно, что $BD : DE = 3 : 2$, а площадь ΔDEC равна 20 см^2. Найдите площадь ΔABC.

214. В ΔABC $\angle A = 45°$, $AB = 5\sqrt{2}$ см, $AC = 8$ см, отрезки MN, NK, KM – средние линии треугольника. Найдите площадь ΔMNK.

215. В треугольник ABC вписан параллелограмм $AKMN$, где точки K, M и N принадлежат сторонам AB, BC и AC соответственно, причем $BM : MC = 5 : 1$. Какую часть площади ΔABC составляет площадь этого параллелограмма?

216. В равнобедренной трапеции $ABCD$ диагональ AC перпендикулярна ее боковой стороне CD и делит высоту BH трапеции на отрезки $BK = 2{,}2$ см, $KH = 1$ см. Найдите площадь этой трапеции с точностью до 0,1 см^2.

217. В равнобедренном ΔABC $AC = BC = 8$ см, $\angle C = 36°$, BD – биссектриса. Докажите, что $\Delta ABD \sim \Delta ACB$ и найдите сторону AB.

218. В ΔABC $\angle A = 50°$, $\angle B = 70°$, BH и AK – высоты. Докажите, что $\Delta BAC \sim \Delta HKC$ и найдите углы ΔHKC.

Уровень C

219. В треугольнике ABC $\angle A = 30°$, $\angle B = 50°$, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Докажите, что $\frac{b}{c} = \frac{c}{a+b}$.

220. В ΔABC AA_1, BB_1, CC_1 – медианы, M – точка их пересечения, M_1 – точка, симметричная точке M относительно точки B_1: а) докажите, что ΔAMM_1 подобен ΔDPF, стороны которого равны медианам ΔABC; б) найдите отношение площадей этих треугольников; в) какую часть площади ΔABC составляет площадь ΔDPF?

221. В окружности проведены диаметр AB и параллельные между собой хорды AC и BD. Постройте, если возможно, центр и ось симметрии этих хорд.

222. При повороте вокруг начала координат по часовой стрелке точка $A(6; 8)$ перешла в точку $B(8; 6)$. Найдите косинус угла поворота.

223. При параллельном переносе точка $A(3; 2)$ отображается на точку $B(0; 6)$, а точка C – на точку $D(-3; 2)$. Найдите координаты точки C.

224. Даны угол и точка внутри него. Постройте окружность, касающуюся сторон данного угла и проходящую через эту точку.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

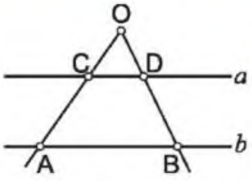


Рисунок 138

225. 1А) Параллельные прямые a и b пересекают стороны угла O в точках C, D и A, B соответственно (рисунок 138). Докажите, что $\Delta OAB \sim \Delta OCD$.

2А) Найдите отношение периметров треугольников OAB и OCD (рисунок 138), если $OC = 2$ см, $AC = 3$ см.

3B) Стороны двух подобных многоугольников относятся как 3 : 4, а разность их площадей равна 70 $см^2$. Найдите площади этих многоугольников.

4B) В трапеции $ABCD$ основания $BC = 5$ см и $AD = 7{,}2$ см, $\angle ABD = \angle BCD$. Найдите диагональ BD.

5C) Постройте прямоугольник $ABCD$, в котором $AB : AC = 2 : 3$ и $AD = 5$ см.

ЭТО ИНТЕРЕСНО!

Преобразования фигур в геометрических исследованиях использовали в древности, например, греческие ученые Фалес и Архимед. Однако создатель «Начал» геометрии Евклид недооценивал роль и значение преобразований фигур в развитии геометрии как науки и не применял их. В то же время в шестой книге его «Начал» имеется учение о подобных многоугольниках. Например, он определял понятие подобных многоугольников так: «Подобные прямолинейные фигуры суть те, которые имеют углы равные по порядку и стороны при равных углах пропорциональные». Формулировки теорем о свойствах подобных многоугольников близки к современным. Например, предложение 8-е в этой книге изложено так: «Если в прямоугольном треугольнике проведен из прямого угла к основанию перпендикуляр, то треугольники при перпендикуляре подобны и целому, и между собой».

Преобразования фигур широко использовались и используются для создания орнаментов, например, в традиционных изделиях казахского народа: оружейном искусстве, убранстве юрт, ювелирных изделиях, коврах, посуде, одежде. На рисунке 139 показаны примеры двух из более чем 200 известных видов казахских орнаментов.

Рисунок 139

Расцвет учения о геометрических преобразованиях относится к XIX столетию. Он был подготовлен в большой мере в XVIII веке трудами выдающегося швейцарского ученого Леонарда Эйлера (1707–1783), который более 30 лет трудился в России в Петербуржской академии наук. Эйлер, в частности, доказал ряд основных теорем о свойствах преобразования подобия, рассматривал гомотетию фигур. Во второй половине XIX века было накоплено много научных результатов, относящихся к разным геометрическим преобразованиям, и стала востребованной задача их классификации и систематизации. Решение этой задачи было предложено в 1872 году немецким ученым Феликсом Клейном (1849–1925) в труде «Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований».

В современных геометрии, физике, информатике и их приложениях геометрические преобразования имеют большое значение. Например, симметрия широко используется в архитектуре и строительстве, подобие и гомотетия – в компьютерной графике.

Л. Эйлер

Ф. Клейн

III. РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

знать

• теорему синусов и теорему косинусов;

• формулы, выражающие зависимость: косинуса угла треугольника от его сторон; между площадью, сторонами треугольника и радиусами окружностей, описанной около него и вписанной в него;

• понятие «решение треугольника».

уметь

• доказывать теорему синусов и теорему косинусов;

• применять теоремы синусов и косинусов, в том числе для прикладных задач;

• уметь находить неизвестные элементы треугольников с использованием тригонометрии;

• применять формулы $S = \frac{abc}{4R}$, $S = pr$ при решении задач.

16. Теорема синусов

Учебные достижения по изучению темы:
- знать теорему синусов и уметь доказывать ее;
- уметь применять теорему синусов для решения задач.

Теорема. **Стороны треугольника пропорциональны синусам противоположных им углов.**

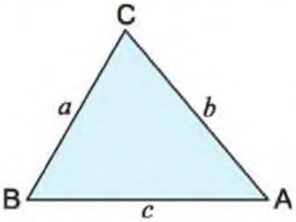


Рисунок 140

Доказательство. Пусть в произвольном ΔABC $BC = a$, $AC = b$ и $AB = c$ (рисунок 140). Докажем, что $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}bc \cdot \sin A = \frac{1}{2}ac \cdot \sin B = \frac{1}{2}ab \cdot \sin C.$

Разделив все части этих равенств на произведение $\frac{1}{2}abc$, получим: $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$, откуда $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$. Теорема доказана.

Задача 1. В ΔABC $\angle A = 30°$, $\angle C = 105°$. Найти отношение $BC : AC$.

Решение. $\angle B = 180° - (\angle A + \angle C) = 180° - 135° = 45°$. По теореме синусов $\frac{BC}{\sin 30°} = \frac{AC}{\sin 45°}$, откуда $\frac{BC}{AC} = \frac{\sin 30°}{\sin 45°} = \frac{1}{2} : \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Задача 2. Найти биссектрису AK треугольника ABC, если $AB = 5$ см, $\angle B = 120°$, $\angle A = 30°$.

Решение. В ΔABK по теореме синусов $\frac{AK}{\sin B} = \frac{AB}{\sin K}$ (рисунок 141) $\angle K = 180° - \angle B - \frac{1}{2}\angle A = 45°$. Тогда имеем: $\frac{AK}{\sin 120°} = \frac{AB}{\sin 45°}$,

$\frac{AK \cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{1}$, откуда $AK = \frac{5\sqrt{6}}{2}$.

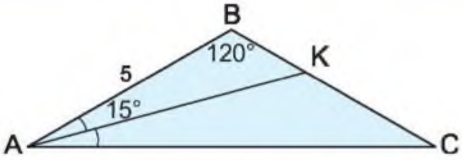


Рисунок 141

Ответ. $\frac{5\sqrt{6}}{2}$ см.

ВОПРОСЫ

Сформулируйте и докажите теорему синусов.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень A

226. а) В ΔABC $AB = 5\sqrt{6}$ см, $\angle A = 75°$, $\angle B = 60°$. Найдите AC.

б) В треугольнике с углами 105° и 45° наименьшая сторона равна $4\sqrt{2}$ см. Найдите среднюю по длине сторону этого треугольника.

227. В треугольнике одна из сторон равна 5 см, а прилежащие к ней углы равны 40° и 50°. Найдите с точностью до 0,1 см длины двух других сторон треугольника.

Уровень B

228. а) В ΔABC $\angle A = 30°$, $\angle B = 60°$. Найдите отношение $(a : b : c)$ сторон треугольника.

б) Найдите отношение сторон треугольника, выраженное трехзначными числами, если его углы относятся как 3 : 4 : 8.

229. а) В равнобедренном ΔABC основание $AB = \sqrt{50}$ дм, $\angle A = 70°$. Найдите биссектрису AL этого треугольника с точностью до 0,01 дм.

б) Найдите с точностью до 0,1 см периметр равнобедренного ΔABC, если известны его биссектриса $AL = 3\sqrt{2}$ см и $\angle A = 30°$.

230. В параллелограмме $ABCD$ $\angle C = 60°$, $BC = 8$ см, $BD = 10$ см. Найдите с точностью до 1° $\angle ABD$ и $\angle ADB$.

231. а) В параллелограмме $ABCD$ точка E – середина стороны BC, $AB = 5$ дм, $\angle EAD = 30°$, $\angle ABC = 100°$. Найдите периметр и площадь параллелограмма.
б) Найдите площадь параллелограмма, диагональ которого, равная 8 см, составляет углы 45° и 30° с двумя его смежными сторонами.

232. а) Найдите с точностью до 0,1 см стороны ΔABC, если $\angle B = 30°$, $\angle C = 45°$, а высота $CD = 3$ см.
б) По статистическим данным Казахстан занимает пятое место в мире по общей площади пастбищ. Сколько миллионов гектаров занимают пастбища Казахстана, если это количество выражается тем же числом, что и средняя по длине сторона ΔABC, в котором $BC = 100$, $\angle A = 30°$, $\angle C = 80°$?

Уровень С

233. Найдите периметр и углы ΔABC с точностью до 1°, если в нем: а) $\angle B = 60°$, а высота AD делит сторону BC на два отрезка: $BD = 2\sqrt{3}$ см и $DC = 8$ см; б) $\angle C = 30°$, а высота BD делит сторону AC на отрезки $AD = 12$ см и $DC = 5\sqrt{3}$ см.

234. В треугольник, меньшая сторона которого равна 4 см, вписана окружность. Точки касания делят окружность на три дуги, градусная мера которых пропорциональна числам 9, 10 и 5. Найдите наибольшую сторону этого треугольника с точностью до 0,1 см.

235. В равнобедренном ΔABC $AB = AC = \sqrt{2}$ дм, $\angle BAC = 30°$, точка O – центр описанной около него окружности. Луч BO пересекает сторону AC в точке K. Найдите длину отрезка BK.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ

Постройте треугольник со сторонами 5 см, 8 см и углом между ними в 60°. Найдите третью сторону треугольника, используя векторы.

17. Теорема косинусов

Учебные достижения по изучению темы:
- знать теорему косинусов и уметь доказывать ее;
- знать формулу зависимости косинуса угла треугольника от его сторон;
- уметь применять теорему косинусов для решения задач.

Теорема. **Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними.**

Доказательство. Пусть дан ΔABC, в котором $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Докажем, например, что $\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A}$.

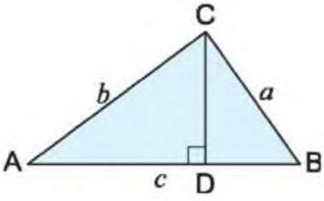


Рисунок 142

Проведем высоту CD треугольника ABC (рисунок 142). В ΔADC имеем: $AD = b \cdot \cos A$, $CD = b \cdot \sin A$. Тогда $DB = c - b \cdot \cos A$. По теореме Пифагора в ΔBDC:

$a^2 = (b \cdot \sin A)^2 + (c - b \cdot \cos A)^2 = b^2\sin^2 A + c^2 - 2bc \cdot \cos A + b^2\cos^2 A = b^2(\sin^2 A + \cos^2 A) + c^2 - 2bc \cdot \cos A = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$ (так как $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$). Таким образом, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$.

Случаи, когда угол A прямой или тупой, рассмотрите самостоятельно.

Аналогично доказываются соотношения:

$\boldsymbol{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B,\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C.}$

Из теоремы косинусов следует, что:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},\ \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},\ \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Из этих формул следует, что угол треугольника является: а) **прямым**, если квадрат противоположной стороны равен сумме квадратов двух других сторон; б) **острым**, если квадрат противоположной стороны меньше суммы квадратов двух других сторон; в) **тупым**, если квадрат противоположной стороны больше суммы квадратов двух других сторон.

Отметим, что теорему косинусов можно доказать и координатным методом (сделайте это самостоятельно).

З а д а ч а 1. Найти меньший угол треугольника со сторонами 17 см, 25 см и 28 см.

Р е ш е н и е. Меньший угол треугольника лежит против его меньшей стороны, равной 17 см. Обозначим этот угол α. По теореме косинусов

$17^2 = 25^2 + 28^2 - 2 \cdot 25 \cdot 28 \cdot \cos\alpha$, отсюда $\cos\alpha = \dfrac{25^2 + 28^2 - 17^2}{2 \cdot 25 \cdot 28} = 0{,}8$.

По таблице косинусов или при помощи калькулятора находим, что $\alpha \approx 37°$.

О т в е т. $\approx 37°$.

З а д а ч а 2. Две стороны треугольника равны 25 см и 30 см, а его площадь равна 300 см^2. Найти третью сторону треугольника.

Р е ш е н и е. Пусть в ΔABC $BC = 25$ см, $AC = 30$ см, площадь $S = 300$ см^2 (рисунок 143).

$S = \dfrac{1}{2} AC \cdot CB \cdot \sin C$, тогда $300 = \dfrac{1}{2} \cdot 30 \cdot 25 \cdot \sin C$, отсюда $\sin C =$ $= 0{,}8$.

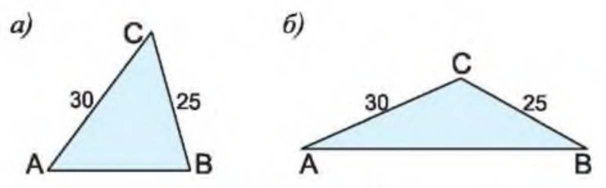


Рисунок 143

Используя основное тригонометрическое тождество $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$, найдем косинус угла C: $\cos C = \pm\sqrt{1 - \sin^2 C}$, отсюда $\cos C = \sqrt{1 - 0{,}64} = 0{,}6$ или $\cos C = -\sqrt{1 - 0{,}64} = -0{,}6$.

Если $\cos C = 0{,}6$, то $\angle C$ – острый (рисунок 143, *а*), по теореме косинусов найдем AB:

$$AB^2 = 25^2 + 30^2 - 2 \cdot 25 \cdot 30 \cdot 0{,}6 = 25^2, \text{ отсюда } AB = 25 \text{ см.}$$

Если $\cos C = -0{,}6$, то $\angle C$ – тупой (рисунок 143, *б*), по теореме косинусов $AB^2 = 25^2 + 30^2 + 2 \cdot 25 \cdot 30 \cdot 0{,}6 = 2425$, отсюда $AB = \sqrt{2425} = 5\sqrt{97}$ (см).

Треугольники со сторонами 25 см, 30 см, 25 см и 25 см, 30 см, $5\sqrt{97}$ см существуют (так как для них выполняется неравенство треугольника).

Ответ. 25 см или $5\sqrt{97}$ см.

Задача 3. Доказать, что если две стороны одного треугольника равны двум сторонам другого треугольника, а третьи стороны не равны, то против большей из этих сторон лежит больший угол.

Доказательство. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1 = m$, $AC = A_1C_1 = n$, $BC > B_1C_1$ (рисунок 144). Докажем, что $\angle A > \angle A_1$.

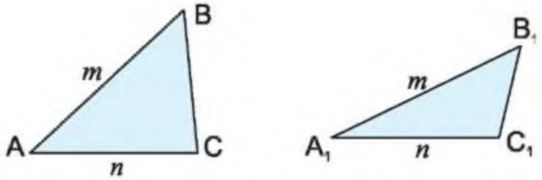


Рисунок 144

По теореме косинусов имеем:

$$BC^2 = m^2 + n^2 - 2mn \cdot \cos A,$$

$$B_1C_1^2 = m^2 + n^2 - 2mn \cdot \cos A_1.$$

Поскольку $BC > B_1C_1$, то

$$m^2 + n^2 - 2mn \cdot \cos A > m^2 + n^2 - 2mn \cdot \cos A_1,$$

$$-2mn \cdot \cos A > -2mn \cdot \cos A_1, \cos A < \cos A_1.$$

Следовательно, $\angle A > \angle A_1$, так как с увеличением угла его косинус уменьшается.

ВОПРОСЫ

Сформулируйте и докажите теорему косинусов.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

236. В треугольнике две стороны равны a и b, а угол между ними – 60°. Найдите длину третьей стороны, если: а) $a = 10$ см, $b = 16$ см; б) $a = 8$ см, $b = 15$ см.

237. Угол между двумя радиусами окружности равен 16°. Найдите с точностью до 0,1 дм длину хорды, соединяющей концы этих радиусов, если диаметр окружности равен 10 дм.

238. а) Найдите с точностью до 0,1 см сторону BC треугольника ABC, если $AB = 6$ см, $AC = 19$ см, $\sin A = 0{,}6$.

б) Расстояние между городами Алматы и Шу 260 км, а между Шу и Таразом – 208 км. Установите, на какой угол поворачивает железнодорожная ветка, соединяющая города Алматы и Тараз (рисунок 145), если расстояние между ними по прямой 453 км.

Рисунок 145

Уровень B

239. а) Участок земли имеет форму выпуклого четырехугольника $ABCD$, в котором $AB = 10$ м, $AD = 9$ м, $BC = CD$, $\angle B = 105°$, $\angle D = 135°$. Найдите с точностью до 0,1 м^2 площадь этого участка.

б) В ΔABC $\dfrac{BC}{AB} = \dfrac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}$, $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$. Найдите косинус угла C.

240. а) В параллелограмме диагонали равны 2 дм и 3 дм, а угол между ними – 45°. Найдите с точностью до 0,01 дм стороны параллелограмма. б) В параллелограмме $ABCD$ диагональ BD равна 10 см, а угол между диагоналями – 60°. Найдите стороны и вторую диагональ параллелограмма, если его площадь равна $30\sqrt{3}$ см^2.

241. а) Стороны параллелограмма равны 3 см и 3,5 см, а одна из его диагоналей равна 5,5 см. Найдите другую диагональ параллелограмма. б) Диагонали параллелограмма равны 14 см и 18 см, а стороны относятся как 4 : 7. Найдите периметр параллелограмма.

242. а) Докажите, что длину медианы m_a треугольника со сторонами a, b, c можно найти по формуле $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$.

б) Найдите длину медианы треугольника, проведенную к большей стороне, если его стороны равны 7 см, 11 см и 12 см.

243. а) В ΔABC сторона $AB = 10$ см, медианы $AM = 2\sqrt{13}$ см и $BN = \sqrt{73}$ см. Найдите длины сторон AC и CB этого треугольника. б) В ΔABC медианы AM и BN перпендикулярны и пересекаются в точке K. Найдите сторону AB, если $AC = 12$ см, $BC = 9$ см.

244. Найдите величины углов треугольника, стороны которого равны: а) 5 см, 12 см и 13 см; б) 7 см, 8 см и 9 см; в) 6 см, 8 см и 12 см; г) $\sqrt{8}$ см, $\sqrt{12}$ см, $\sqrt{20}$ см.

Уровень С

245. а) Периметр треугольника равен 30 см. Найдите угол, противолежащий стороне, равной 14 см, если биссектриса треугольника делит ее в отношении 3 : 5.

б) Найдите периметр треугольника, в котором сторона равна 10 см, противолежащий ей угол – 45°, а его площадь – 8 см^2.

246. Найдите угол между диагоналями четырехугольника, если суммы квадратов его противоположных сторон равны.

18. Решение треугольников

Учебные достижения по изучению темы:
- знать понятие «решение треугольников»;
- уметь применять теоремы синусов и косинусов для решения треугольников.

Основными элементами треугольника называют его три стороны и три угла, а решением треугольника – нахождение неизвестных сторон и углов по трем данным его элементам. В случае прямоугольного треугольника один элемент (прямой угол) известен. Решением прямоугольных треугольников вы занимались в предыдущем классе. Рассмотрим теперь основные задачи на решение произвольных треугольников.

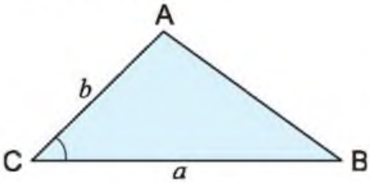


Рисунок 146

З а д а ч а 1. (*Решение треугольника по двум сторонам и углу между ними*).

Дано: ΔABC, $BC = a$, $AC = b$, $\angle C$ (рисунок 146).

Найти: AB, $\angle A$, $\angle B$.

Р е ш е н и е. Пусть $AB = c$. Тогда по теореме косинусов $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C}$, а $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$. Далее, если данные числовые, то по таблице или с помощью калькулятора находим угол A. $\angle B = 180° - (\angle A + \angle C)$. Например, если $a = 12$, $b = 8$, $\angle C = 60°$, то $c = \sqrt{12^2 + 8^2 - 2 \cdot 12 \cdot 8 \cdot 0,5} = \sqrt{112} \approx 10,58$,

$\cos A = \dfrac{112 + 64 - 144}{2 \cdot 8 \cdot 10,58} \approx 0,189$, $\angle A \approx 79°$, $\angle B \approx 41°$.

О т в е т. $AB \approx 10,58$, $\angle A \approx 79°$, $\angle B \approx 41°$.

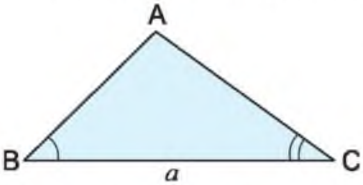


Рисунок 147

З а д а ч а 2. (*Решение треугольника по стороне и двум прилежащим к ней углам*).

Дано: ΔABC, $BC = a$, $\angle B$, $\angle C$ (рисунок 147).

Найти: AB, AC, $\angle A$.

Р е ш е н и е. $\angle A = 180° - (\angle B + \angle C)$. Воспользовавшись теоремой синусов, находим:

$AC = \dfrac{a \cdot \sin B}{\sin A}$, $AB = \dfrac{a \cdot \sin C}{\sin A}$. Например, если в ΔABC $BC = 5$ дм, $\angle B = 30°$, $\angle C = 45°$, то $\angle A = 180° - 75° = 105°$; $AC = \dfrac{BC \cdot \sin B}{\sin A} \approx \dfrac{5 \cdot 0,5}{0,966} \approx 2,59$ (дм), $AB = \dfrac{BC \cdot \sin B}{\sin A} \approx \dfrac{5 \cdot 0,707}{0,966} \approx 3,66$ (дм).

О т в е т. $AB \approx 3,66$ дм, $AC \approx 2,59$ дм, $\angle A = 105°$.

З а д а ч а 3. (*Решение треугольника по трем сторонам*).

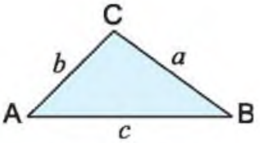


Рисунок 148

Дано: ΔABC, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ (рисунок 148). Найти: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.

Р е ш е н и е. По теореме косинусов $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, $\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$. Далее, если данные числовые, то по таблице или с помощью калькулятора находим углы A и B. $\angle C = 180° - (\angle A + \angle B)$. Например, если $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$, то $\cos A = \dfrac{9 + 16 - 4}{24} = \dfrac{21}{24} = 0,875$, $\angle A \approx 29°$; $\cos B = \dfrac{4 + 16 - 9}{16} = \dfrac{11}{16} \approx 0,688$, $\angle B \approx 47°$, $\angle C \approx 180° - (29° + 47°) = 104°$.

О т в е т. $\angle A \approx 29°$; $\angle B \approx 47°$, $\angle C \approx 104°$.

ВОПРОСЫ

1. Что называют решением треугольника?
2. Объясните способ решения треугольника по его данным: а) стороне и двум углам; б) двум сторонам и углу; в) трем сторонам.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

247. Найдите неизвестные стороны и углы треугольника ABC, если: а) $AB = 4$ см, $BC = 5$ см, $\angle B = 110°$; б) $AB = 2$ дм, $BC = 5$ дм, $\angle A = 40°$; в) $BC = 4$ см, $AB = 3$ см, $\angle A = 120°$; г) $BC = 3$ см, $AB = 4$ см, $\angle A = 60°$.

248. а) В треугольнике PKH $\angle K = 100°$, $PK = 6$ дм, $KH = 5$ дм. Найдите длину медианы HM и площадь треугольника PMH. б) В равнобедренном треугольнике к боковой стороне длиной 10 см проведена медиана, равная 9 см. Найдите площадь треугольника с точностью до 0,1 см^2.

249. а) Найдите боковую сторону равнобедренного треугольника, если его основание равно $(\sqrt{5} - 1)$ см, а угол при вершине равен 36°. б) Найдите стороны параллелограмма $ABCD$, если его диагональ BD, равная 10 см, делит угол B на части в 48° и 72°.

Уровень В

250. Найдите площадь параллелограмма, одна сторона которого равна 51 см, а диагонали – 40 см и 74 см. (Ответ округлите до десятков квадратных сантиметров.)

251. Острый угол ромба равен 80°, а его большая диагональ равна 12 см. Найдите площадь ромба с точностью до 0,1 см^2.

252. Постройте равнобедренный треугольник, измерьте его стороны. Найдите с точностью до 0,1 косинус угла при его вершине и синус угла при основании.

253. а) В прямоугольном ΔABC $\angle A = 15°$, $AC = \sqrt{3}$ дм. Из вершины прямого угла C проведена биссектриса CL. Найдите отрезок AL. б) В ΔABC $\angle A = 60°$, $\angle C = 30°$, $AC = 6$ см. Найдите с точностью до 0,1 см его биссектрисы AA_1 и BB_1.

254. В треугольнике ABC $AB = 5$ см, $BC = 4$ см, $AC = 3$ см. Найдите величину острого угла между медианами CC_1 и AA_1.

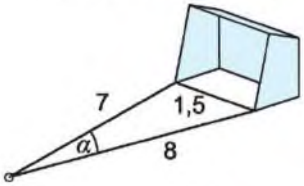


Рисунок 149

255. Шайба находится в точке на расстоянии 7 м и 8 м от оснований штанг ворот, ширина которых равна 1,5 м (рисунок 149). Найдите наибольший угол с целым числом градусов, при котором шайба, скользя по льду, попадает в ворота.

256. В остроугольном треугольнике ABC высоты AH и CK соответственно равны 1 дм и 2 дм, а угол между ними равен 60°. Найдите AC.

Уровень С

257. Из вершины B равностороннего ΔABC проведен луч BD, делящий его сторону AC в отношении 1 : 2, считая от точки A. Найдите синусы углов ABD и CBD.

258. а) Луч AL, проведенный из вершины острого угла ромба $ABCD$, делит этот угол в отношении 1 : 3, а сторону BC в отношении 3 : 5. Найдите косинус тупого угла ромба.

б) В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB вдвое больше ее меньшего основания BC, $\angle BAD = \alpha$. Найдите косинус угла BAC.

259. В ΔABC $\angle A : \angle B : \angle C = 4 : 2 : 1$, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Докажите, что $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ

Постройте окружность с центром в точке O. На ней отметьте точки A и B, не являющиеся концами диаметра, и произвольную точку C. Измерьте углы ACB и AOB. Какую зависимость между ними вы обнаружили?

19. Углы, вписанные в окружность, и их свойства

Учебные достижения по изучению темы:
- знать определение и свойства угла, вписанного в окружность;
- знать теорему об измерении угла, вписанного в окружность;
- уметь применять свойства угла, вписанного в окружность, для решения задач.

Напомним, что угол, вершиной которого является центр окружности, называется центральным углом. За градусную меру дуги принимают градусную меру соответствующего ей центрального угла. Градусная мера всей окружности равна полному углу, то есть 360°, градусная мера полуокружности равна 180°. Две дуги одной окружности или равных окружностей называются равными, если равны их градусные меры.

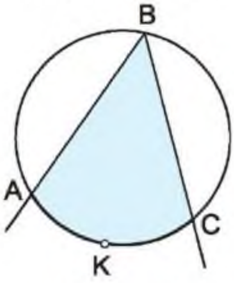


Рисунок 150

Углом, вписанным в окружность, называется угол, вершина которого принадлежит окружности, а стороны пересекают ее.

Например, на рисунке 150 угол ABC – вписанный в окружность, дуга AKC содержится в нем. Говорят, что угол ABC опирается на дугу AKC.

Теорема (*об измерении угла, вписанного в окружность*). **Градусная мера угла, вписанного в окружность, равна половине градусной меры дуги, на которую он опирается.**

Доказательство. Центр окружности может лежать на стороне вписанного в окружность угла, внутри или вне его (рисунки 151, *а*, *б*, *в*).

1) Пусть центр O окружности лежит на стороне вписанного в нее $\angle ABC$ (рисунок 151, *а*). Проведем радиус OA. Тогда $\angle 1 = \angle 2$ (как углы при основании равнобедренного ΔABO), $\angle 3 = \angle 1 + \angle 2$ (по свойству внешнего угла треугольника). Отсюда заключаем, что $\angle 1 = \frac{1}{2} \cdot \angle 3$. Так как угол 3 – центральный, то его градусная мера равна градусной мере дуги AC. Следовательно, $\angle ABC = \frac{1}{2} \smile AC$.

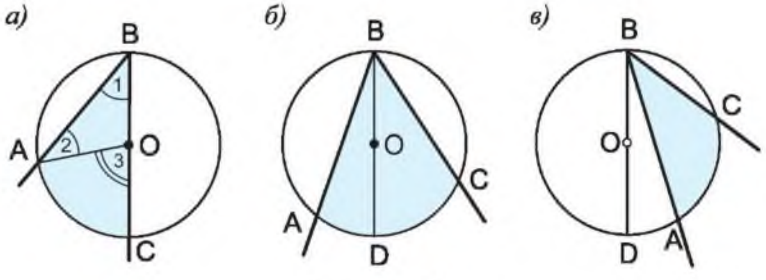


Рисунок 151

2) Пусть центр окружности находится внутри вписанного в нее $\angle ABC$ (рисунок 151, *б*). Проведем диаметр BD окружности. Тогда

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC = \frac{1}{2}\smile AD + \frac{1}{2}\smile DC = \frac{1}{2}\smile AC.$$

3) Пусть центр окружности расположен вне вписанного в нее $\angle ABC$ (рисунок 151, *в*). Проведем диаметр BD окружности. Тогда

$\angle ABC = \angle DBC - \angle DBA = \frac{1}{2}\smile DC - \frac{1}{2}\smile DA = \frac{1}{2}\smile AC$. Теорема доказана.

Из этой теоремы следует, что:

– вписанные в окружность углы, опирающиеся на одну и ту же ее дугу или на равные дуги (одной окружности или равных окружностей), равны;

– угол, вписанный в окружность, опирающийся на ее диаметр, – прямой.

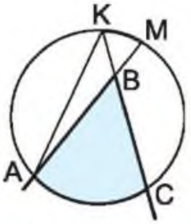


Рисунок 152

З а д а ч а 1. Доказать, что $\angle ABC$ (рисунок 152), вершина которого лежит внутри круга, измеряется полусуммой дуг AC и KM, из которых одна заключена между сторонами угла, а другая – между продолжениями этих сторон.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проведем хорду AK. Тогда $\angle KAM = \frac{1}{2}\smile KM$, $\angle AKC = \frac{1}{2}\smile AC$ (по свойству вписанного угла).

$\angle ABC = \angle KAM + \angle AKC$ (по свойству внешнего угла треугольника).

Следовательно, $\angle ABC = \frac{1}{2}(\smile KM + \smile AC)$, что и требовалось доказать.

З а д а ч а 2. Доказать, что $\angle ABC$ (рисунок 153), вершина которого находится вне круга, а стороны пересекают его окружность, измеряется полуразностью дуг AC и PE, заключенных между его сторонами.

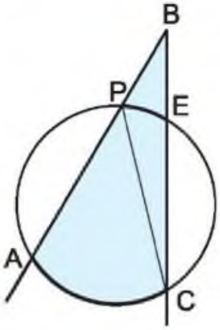


Рисунок 153

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проведем хорду PC. Тогда

$$\angle APC = \frac{1}{2}\smile AC, \text{ а } \angle PCE = \frac{1}{2}\smile PE.$$

$\angle APC = \angle ABC + \angle PCE$ (по свойству внешнего угла треугольника). Следовательно, $\angle ABC = \frac{1}{2}(\smile AC - \smile PE)$, что и требовалось доказать.

З а д а ч а 3. Найти множество всех вершин треугольников с общим основанием AB и данным углом α между двумя другими его сторонами.

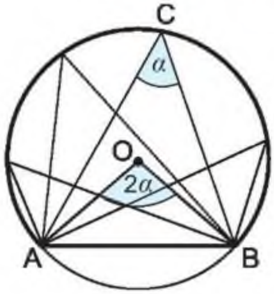


Рисунок 154

Р е ш е н и е. Любой вписанный в окружность угол, опирающийся на дугу AB, градусная мера которой равна 2α, равен α (рисунок 154). Поэтому искомое множество вершин треугольников и есть дуга окружности, опирающаяся на хорду AB.

О множестве всех точек дуги ACB (рисунок 154) говорят, что это *множество точек, из которых данный отрезок AB виден под углом α.*

З а д а ч а 4. Вершина A остроугольного треугольника ABC соединена отрезком с центром O описанной около него окружности. Из вершины A проведена высота AH треугольника. Доказать, что $\angle BAH = \angle OAC$.

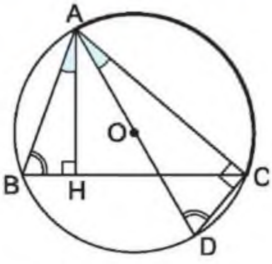


Рисунок 155

Доказательство. Проведем прямую AO и обозначим вторую точку D ее пересечения с описанной окружностью (рисунок 155). Тогда $\angle ADC = \angle ABC$ как вписанные, опирающиеся на одну дугу – AC. Угол ACD – прямой, так как опирается на диаметр окружности. Тогда $\angle DAC = 90° - \angle ADC$ и $\angle BAH = 90° - \angle ABC$.

Получили $\angle BAH = \angle DAC$, то есть $\angle BAH = \angle OAC$, что и требовалось доказать.

ВОПРОСЫ

1. Какой угол называется центральным углом?
2. Как определяется градусная мера дуги?
3. Что называется углом, вписанным в окружность?
4. Сформулируйте и докажите теорему об измерении угла, вписанного в окружность.
5. Чему равна градусная мера вписанного в окружность угла, опирающегося на полуокружность?

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

260. Докажите, что градусные меры дуг окружности, которые заключены между двумя параллельными хордами, равны.

261. Постройте вписанный в окружность угол, равный: а) 45°; б) 60°; в) 90°; г) 150°.

262. Хорда делит окружность на две дуги, градусные меры которых пропорциональны числам 4 и 5. Чему равен угол, вписанный в данную окружность, сторонам которого принадлежат концы этой хорды?

Уровень В

263. а) Точки A, B, C лежат на окружности. Найдите $\angle ABC$, если хорда AC равна радиусу окружности. б) Точки A, B, C и D лежат на окружности. Чему равен $\angle ADC$, если $\angle ABC = 60°$?

264. а) Хорда AB стягивает дугу, равную 105°, а хорда AC – дугу, равную 45°. Найдите $\angle BAC$. б) Найдите угол между хордой AB, стягивающей дугу в 52°, и диаметром BC.

265. Центральный угол AOB на 42° больше вписанного угла, опирающегося на дугу AB. Найдите каждый из этих углов.

266. Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке K. Найдите угол BKC, если градусная мера дуги AD равна 50°, а дуги BC – 83°.

267. Найдите острый угол между двумя секущими, проведенными через точку, не принадлежащую окружности, если дуги, заключенные между этими секущими, равны 41° и 135°.

Уровень C

268. Хорда AB параллельна диаметру CD окружности. Найдите AB, если $AC = 3$ дм, $BC = 4$ дм.

269. Постройте ΔABC по его данным: $AB = 4$ см, $\angle C = 40°$, высота $CH = 5$ см.

20. Свойства касательной и секущей, пересекающихся хорд окружности

Учебные достижения по изучению темы:

• знать теорему об измерении угла между касательной и хордой;

• знать теорему о свойстве касательной и секущей, проведенных к окружности через общую точку;

• знать теорему о свойстве двух пересекающихся хорд окружности;

• уметь применять свойства касательной и секущей, пересекающихся хорд окружности для решения задач.

Теорема (*об измерении угла между касательной и хордой*). **Градусная мера угла между касательной и секущей, проходящей через точку касания, равна половине градусной мере дуги, которую этот угол заключает.**

Доказательство. Пусть даны окружность с центром в точке O, касательная AB и хорда BC (рисунок 156). Проведем радиусы OB и OC. Тогда $\angle 2 = \angle 3$ (как углы при основании равнобедренного ΔBOC). По свойству касательной $\angle 1 + \angle 2 = 90°$, отсюда $\angle 1 = 90° - \angle 2$. По свойству суммы углов треугольника $\angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180°$.

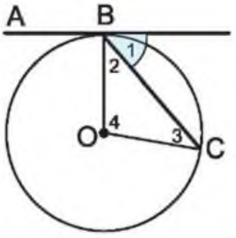


Рисунок 156

Отсюда, учитывая, что $\angle 2 = \angle 3$, находим: $\angle 4 = 180° - 2 \cdot \angle 2$. Сравнивая $\angle 1$ и $\angle 4$, заключаем, что $\angle 1 = 0{,}5 \cdot \angle 4$. Так как угол 4 – центральный, то $\angle 4 = \smile BC$. Следовательно, $\angle 1 = 0{,}5 \cdot (\smile BC)$. Теорема доказана.

Теорема (*свойство касательной и секущей, проведенных к окружности через общую точку*). **Если через точку A, которая не принадлежит окружности, проведены касательная AB (B – точка касания) и секущая AD, имеющая с окружностью общие точки C и D, то $AB^2 = AC \cdot AD$.**

Доказательство. Проведем хорды BC и BD окружности (рисунок 157). Тогда $\Delta ADB \sim \Delta ABC$ по I признаку подобия треугольников ($\angle A$ – общий, $\angle ABC = \angle ADB$, так как каждый из них измеряется половиной дуги BC). Из подобия этих треугольников следует, что $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB}$. Откуда $AB^2 = AC \cdot AD$, что и требовалось доказать.

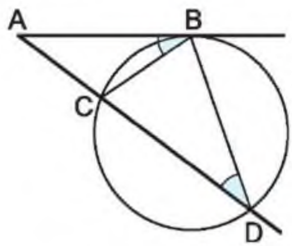


Рисунок 157

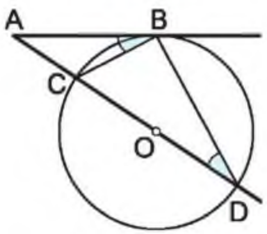


Рисунок 158

Из этой теоремы следует, что если радиус окружности равен R, а расстояние от точки A до ее центра равно d, то $\boldsymbol{AB^2 = AC \cdot AD = d^2 - R^2}$. (Секущая AD может проходить и через центр окружности (рисунок 158), тогда $AC = d - R$, а $AD = d + R$.)

Теорема (*о свойстве двух пересекающихся хорд окружности*). **Если две хорды AB и CD окружности пересекаются в точке M, то произведение длин отрезков одной хорды равно произведению длин отрезков другой хорды, то есть $AM \cdot MB = CM \cdot MD$.**

Доказательство. Проведем хорды AC и BD и рассмотрим треугольники ACM и DBM (рисунок 159). Они подобны по первому признаку подобия треугольников, поскольку $\angle ACD = \angle ABD$ (как вписанные в окружность углы, опирающиеся на одну и ту же дугу AD), $\angle AMC = \angle BMD$ (как вертикальные). Отсюда $\frac{AM}{MD} = \frac{CM}{MB}$, $AM \cdot MB = CM \cdot MD$. Что и требовалось доказать.

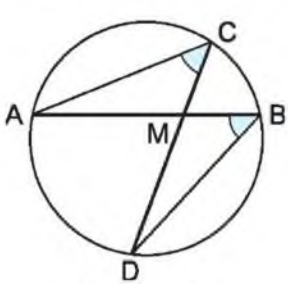


Рисунок 159

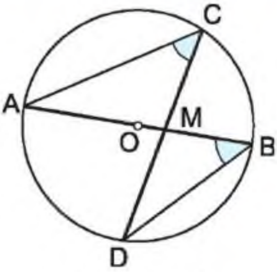


Рисунок 160

Из этой теоремы следует, что если радиус окружности равен R, а расстояние от точки M до ее центра равно d, то $\boldsymbol{AM \cdot MB = CM \cdot MD = R^2 - d^2}$. (Хорда AB может проходить и через центр окружности (рисунок 160), тогда $MB = R - d$, а $MA = R + d$.)

З а д а ч а 1. Прямая a касается окружности в точке A, а прямая b пересекает ее в точках B и C (рисунок 161, *а*). Найти расстояние от точки A до прямой b, если расстояния от точек B и C до прямой a соответственно равны 4 см и 9 см.

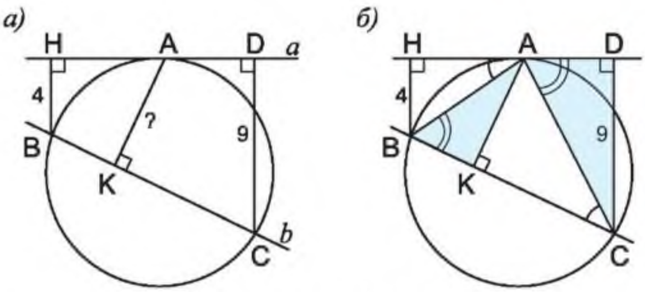


Рисунок 161

Р е ш е н и е. Проведем хорды AB и AC (рисунок 161, *б*). Тогда получим две пары подобных треугольников: $\Delta ABK \sim \Delta CAD$, так как $\angle B = \frac{1}{2} \cdot \smile AC = \angle A$ и $\angle K = \angle D = 90°$; $\Delta ABH \sim \Delta ACK$, так как $\angle A = \frac{1}{2} \cdot \smile AB = \angle C$ и $\angle H = \angle K = 90°$. Из подобия этих треугольников следует: $\frac{AK}{9} = \frac{AB}{AC}$ и $\frac{AB}{AC} = \frac{4}{AK}$. Значит, $\frac{AK}{9} = \frac{4}{AK}$, отсюда $AK^2 = 36$, $AK = 6$ см.

О т в е т. 6 см.

З а д а ч а 2. В треугольнике ABC $BC = a$, $AC = b$, CN – биссектриса, $BN = m$, $AN = n$. Доказать, что $\boldsymbol{CN} = \sqrt{ab - mn}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $CN = l$ и точку D пересечения биссектрисы CN с окружностью, описанной около ΔABC, а отрезок $ND = x$ (рисунок 162). По свойству пересекающихся хорд окружности $l \cdot x = m \cdot n$. $\Delta CBD \sim \Delta CNA$, так как в них $\angle BCD = \angle ACN$ по условию и $\angle BDC = \angle CAN = \frac{1}{2}\smile BC$. Следовательно, $\frac{a}{l} = \frac{l+x}{b}$. Тогда имеем: $x = \frac{mn}{l}$, $x = \frac{ab}{l} - l$, $\frac{mn}{l} = \frac{ab}{l} - l$, $mn = ab - l^2$, $l = \sqrt{ab - mn}$.

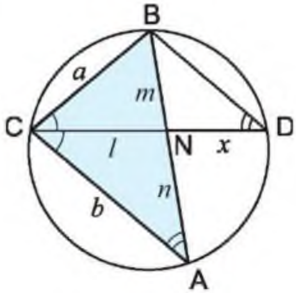


Рисунок 162

ВОПРОСЫ

1. Чему равна градусная мера угла между касательной и хордой, проведенной из точки касания?
2. Сформулируйте и докажите теорему о свойстве касательной и секущей к окружности, проведенных через одну точку.
3. Сформулируйте и докажите теорему об отрезках пересекающихся хорд окружности.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

270. Точки A и B разбивают окружность на две дуги AMB и ANB, градусные меры которых относятся как 7 : 17. Через точку A проведена касательная CD к окружности. Найдите угол между прямыми CD и AB.

271. К окружности с центром в точке O проведены касательная AB (B – точка касания) и секущая AO, имеющая с окружностью общие точки C и D (C лежит между точками A и O). Найдите $\angle ABC$ и $\angle BAC$, если $\smile BD = 124°$.

272. а) Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке M так, что $CM = MD$, $AM = 8$ см, $MB = 2$ см. Найдите хорду CD. б) Из двух пересекающихся хорд окружности одна разделена точкой пересечения на отрезки, равные 12 см и 18 см, а другая – в отношении 3 : 8. Найдите длину другой хорды. в) В окружности проведены две хорды AB и CD, пересекающиеся в точке M. Известно, что $AB = 15$ см, $CM = 9$ см, $MD = 4$ см, а расстояние между точками A и C равно 11 см. Найдите острый угол между этими хордами.

Уровень B

273. На радиусе окружности, равном 2,6 см, отмечена точка C, отстоящая от ее центра на расстоянии 1 см. Через точку C проведена хорда AB, равная 5 см. Найдите отрезки AC и CB.

274. Из точки A, не лежащей на окружности, проведены к ней касательная AB (B – точка касания) и секущая, пересекающая окружность в точках C и D (C лежит между A и D). Известно, что $AB = 16$ см, $AD = 32$ см, а расстояние от центра окружности до секущей равно 5 см. Найдите радиус окружности.

275. Из точки B, не лежащей на окружности, проведены к ней касательная BM (M – точка касания) и секущая, пересекающая окружность в точках C и D (C лежит между B и D). Известно, что $BD = 12$ см, $BM = \frac{2}{3} \cdot CD$. Найдите длину отрезка BM.

276. а) Катеты прямоугольного треугольника равны 6 см и 12 см. Найдите длину биссектрисы, проведенной из вершины прямого угла. б) Найдите длину биссектрисы CD треугольника ABC, если $AC = 7$ см, $CB = 9$ см и $AD = CD$.

Уровень C

277. Через точку M, лежащую вне окружности, проведены к ней две секущие, одна из которых пересекает окружность в точках

A и B, а другая – в точках C и D. Докажите, что $MA \cdot MB = MC \cdot MD$.

278. Даны две окружности, пересекающиеся в точках A и B, и их общая касательная MN, где M и N – точки касания. Докажите, что прямая AB делит отрезок MN пополам.

279. Докажите, что в произвольном разностороннем треугольнике BAC биссектриса AN: а) делит пополам угол между его высотой AH и диаметром AD окружности, описанной около него; б) лежит между высотой AH и медианой AM.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ

Начертите три произвольных треугольника и в каждый из них впишите окружность. Измерьте радиусы этих окружностей и длины сторон треугольников. Какую зависимость между площадью треугольника, его периметром и радиусом вписанной окружности вы можете установить?

21. Применение тригонометрии к выводу формул площадей треугольника и решению задач

Учебные достижения по изучению темы:

- знать формулы, выражающие зависимость между площадью, сторонами треугольника и радиусами окружностей, описанной около него и вписанной в него;
- уметь применять эти формулы для решения задач.

Задача 1. Доказать, что *в любом треугольнике отношение длины стороны к синусу противолежащего угла равно диаметру окружности, описанной около него.*

Доказательство. Пусть дан ΔABC и около него описана окружность с центром в точке O и радиусом, равным R. Докажем, что $\frac{BC}{\sin A} = 2R$.

Если центр окружности лежит на стороне треугольника (рисунок 163, *а*), то он прямоугольный, поэтому $\frac{BC}{\sin A} = 2R$. Если центр окружности лежит внутри ΔABC (рисунок 163, *б*), то проведем диаметр BD окружности, тогда $\angle BDC = \angle BAC$ (как вписанные углы, опирающиеся на дугу BC). Из прямоугольного ΔBCD получаем, что $\frac{BC}{\sin D} = 2R$. Следовательно, $\frac{BC}{\sin A} = 2R$. Если центр окружности находится вне ΔABC (рисунок 163, *в*), то $\angle D = 180° - \angle A$ и так как $\sin(180° - \angle A) = \sin A$, то и в этом случае $\frac{BC}{\sin A} = 2R$.

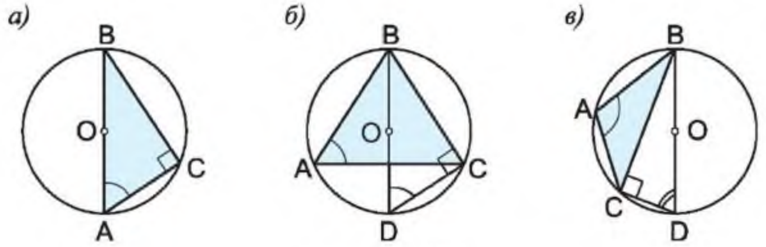


Рисунок 163

Аналогично доказывается, что $\frac{AC}{\sin B} = 2R$ и $\frac{AB}{\sin C} = 2R$.

Заметим, что из решения этой задачи следует еще один способ доказательства теоремы синусов: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.

З а д а ч а 2. Доказать, что **площадь S треугольника со сторонами a, b, c, вписанного в окружность радиуса R, равна** $S = \frac{abc}{4R}$.

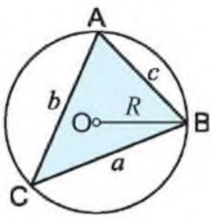


Рисунок 164

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть дан ΔABC (рисунок 164). Его площадь $S = \frac{1}{2}bc \cdot \sin A$. Так как $\frac{BC}{\sin A} = 2R$, то $\sin A = \frac{a}{2R}$. Тогда $S = \frac{abc}{4R}$. Что и требовалось доказать.

З а д а ч а 3. Доказать, что **площадь S треугольника равна произведению его полупериметра p и радиуса r вписанной окружности: $S = pr$.** Докажите самостоятельно.

З а д а ч а 4. Доказать, что **площадь S треугольника со сторонами a, b и c равна** $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, **где p – полупериметр треугольника** (формула Герона, древнегреческого ученого, I в. н. э.).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Площадь треугольника ABC равна $S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin C$ (рисунок 164).

Выразим $\sin C$ через a, b, c и p. Так как $\sin^2 C + \cos^2 C = 1$, то $\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C}$.

По теореме косинусов $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$, откуда $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$. Тогда $\sin C = \sqrt{1 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)^2} = \sqrt{\frac{(2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{(2ab)^2}} =$

$$= \sqrt{\frac{(2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2)}{(2ab)^2}} = \sqrt{\frac{(a + b + c)(a + b - c)(c + a - b)(c - a + b)}{(2ab)^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2p \cdot 2(p - c) \cdot 2(p - b) \cdot 2(p - a)}}{2ab} = \frac{2\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}}{ab}.$$

Подставляя последнее выражение $\sin C$ в формулу $S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin C$, получим $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Что и требовалось доказать.

З а д а ч а 5. Можно ли построить параллелограмм со сторонами 1 см, 3 см и углом 45° между его диагоналями?

Р е ш е н и е. Допустим, что такой параллелограмм $ABCD$ существует. Пусть его диагонали BD и AC пересекаются в точке O (рисунок 165). Обозначим $AO = x$ см, $BO = y$ см.

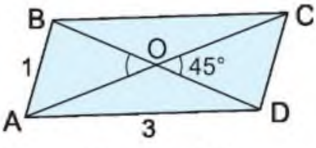


Рисунок 165

По теореме косинусов из ΔAOD:

так как $AD^2 = AO^2 + DO^2 - 2 \cdot AO \cdot DO \times \times \cos AOD$, $\cos 135° = \cos(90° + 45°) = -\cos 45°$, $9 = x^2 + y^2 + 2xy \cdot \cos 45°$, а из ΔAOB: $1 = x^2 + + y^2 - 2xy \cdot \cos 45°$.

Из этих равенств, отняв их левые и правые части, получаем: $8 = 4xy \cdot \cos 45°$.

Площадь параллелограмма $S = \frac{1}{2}AC \cdot BD \cdot \sin\angle AOB = \frac{1}{2} \cdot 4xy \times \times \sin 45° = 4$ (см^2).

Однако площадь параллелограмма не может превышать произведения длин двух его соседних сторон на синус угла между ними, равного 90°. В нашем случае эта площадь не может превышать 3 см^2. Получили противоречие. Следовательно, такой параллелограмм построить нельзя.

О т в е т. Нельзя.

З а д а ч а 6. Как измерить высоту предмета, основание которого недоступно (рисунок 166)?

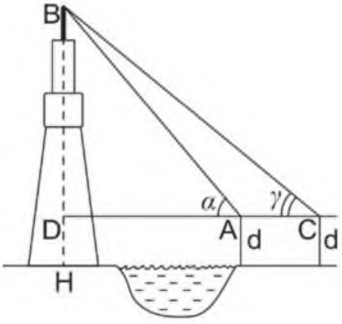


Рисунок 166

Р е ш е н и е. На некотором доступном горизонтальном участке можно провести измерения двух углов $\angle DAB = \alpha$, $\angle DCB = \gamma$ и отрезка AC (рисунок 166). Тогда из ΔABC имеем: $\frac{AB}{\sin\gamma} = \frac{AC}{\sin(\alpha - \gamma)}$, так как $\angle ABC = \alpha - \gamma$ (по свойству внешнего угла треугольника). Отсюда $AB = \frac{AC \cdot \sin\gamma}{\sin(\alpha - \gamma)}$.

Из прямоугольного ΔBDA находим $BD = AB \cdot \sin\alpha = \frac{AC \cdot \sin\gamma \cdot \sin\alpha}{\sin(\alpha - \gamma)}$.

Искомая высота $BH = \frac{AC \cdot \sin\gamma \cdot \sin\alpha}{\sin(\alpha - \gamma)} + d$.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

280. Одна из сторон треугольника равна b, а угол, лежащий против нее, равен β. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника, если: а) $b = 8$ см, $\beta = 135°$; б) $b = 4\sqrt{3}$ дм, $\beta = 120°$.

281. а) В окружность вписан треугольник со стороной, равной $2\sqrt{3}$ см и удаленной от центра окружности на 1 см. Найдите угол, лежащий против этой стороны.

б) Центр описанной около ΔABC окружности лежит вне треугольника, а его угол A – наибольший. Найдите $\angle A$, если $AB = 3$ м, $AC = 4$ м и $S_{\Delta ABC} = 3$ м^2.

282. Найдите с точностью до 0,1 см сторону AB остроугольного ΔABC, в котором $CB = 5$ см, $\sin\angle C = 0{,}64$, а расстояние от центра окружности, описанной около него, до стороны BC равно 0,5 см.

283. а) В равнобедренном ΔABC основание $AB = 18$ см, $AC = 15$ см. Найдите радиус окружности: 1) вписанной в ΔABC; 2) описанной около ΔABC.

б) В треугольнике известны две стороны (6 см, 8 см) и угол между ними (60°). Найдите с точностью до 0,1 см радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

284. а) Две стороны треугольника равны 10 см и 7 см, а косинус угла между ними равен $\frac{4}{5}$. Найдите площадь этого треугольника.

б) Каким должен быть угол C в ΔABC со сторонами $CB = a$ и $CA = b$, чтобы площадь треугольника была наибольшей?

285. Найдите площадь треугольника, стороны которого равны: а) 13 см, 14 см и 15 см; б) 12 см, 16 см, 21 см.

286. Найдите площадь и меньшую диагональ трапеции, если ее основания 4 см и 9 см, большая боковая сторона 5 см, а прилежащий к ней угол 36°.

287. Найдите диагонали и площадь ромба с углом 35° и стороной 7,5 см.

Уровень B

288. В ΔABC $AB = 13$ см, $BC = 14$ см, $AC = 15$ см, AN – высота, M – середина стороны AB. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника AMN.

289. Найдите радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с гипотенузой 13 см, если длина биссектрисы, проведенной из вершины прямого угла, равна $\frac{60\sqrt{2}}{17}$ см.

290. а) Площадь прямоугольника равна $9\sqrt{3}$ см^2, а угол между диагоналями – 120°. Найдите стороны прямоугольника.

б) Диагональ прямоугольника равна 7,5 см, а угол между диагоналями равен 48°. Найдите периметр прямоугольника.

291. Из вершины прямого угла прямоугольного треугольника проведены его высота и медиана, равные соответственно 12 см и 15 см. Найдите стороны и острые углы этого треугольника.

292. а) В параллелограмме $ABCD$ известны стороны $AB = 4$ см, $AD = 5$ см и диагональ $BD = 6$ см. Найдите угол CBD и площадь параллелограмма.

б) Найдите с точностью до 0,1 см^2 площадь треугольника, две медианы которого равны 6 см и 8 см, а угол между ними равен 100°.

293. В параллелограмме $ABCD$ $\angle A = 60°$, $BD = 2\sqrt{31}$ см. Длина перпендикуляра, проведенного из точки пересечения диагоналей к стороне AD, равна $2{,}5\sqrt{3}$ см. Найдите стороны и диагональ AC параллелограмма.

294. Внутри угла, равного 60°, дана точка, расстояния от которой до сторон угла равны 2 см и 5 см. Найдите расстояние от этой точки до вершины угла.

295. В треугольнике ABC известны сумма сторон BC и AC и углы A и B. Можно ли по этим данным найти стороны треугольника? Ответ объясните.

296. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна $5\sqrt{5}$ см, а катет – 5 см. Найдите длину его биссектрисы, проведенной из вершины прямого угла.

297. В равнобедренном треугольнике основание и боковая сторона равны соответственно 5 см и 20 см. Найдите биссектрису треугольника, проведенную из вершины угла при его основании.

298. Днище H самой глубокой впадины Казахстана Карагие (рисунок 167) расположено так, что с высоты 100 м над одним из ее краев C оно видно под углом HAC, равным 25°, а с высоты 200 м – под углом HBC, равным 18° (когда-то в котловине впадины располагалось соленое озеро, называемое Батыр). Какова глубина этой впадины относительно края C? (Найдите ответ с точностью до 1 м).

а)

б)

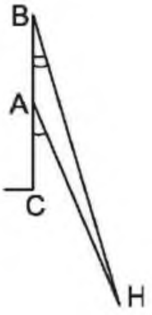


Рисунок 167

Уровень С

299. Найдите с точностью до 0,1 см^2 площадь прямоугольного треугольника ABC, в котором $\angle A = 60°$, а расстояние от его внутренней точки M до сторон AB, BC и AC соответственно равны 3 см, 4 см и 5 см.

300. Докажите, что площадь равностороннего или прямоугольного треугольника меньше $\frac{1}{2}\pi R^2$, где R – радиус описанной около него окружности.

301. В равносторонний треугольник, периметр которого равен 27 см, вписана окружность. Затем построена вторая окружность, касающаяся первой и двух сторон этого треугольника. Найдите радиус второй окружности.

302. а) В окружности радиуса R на диаметре AB отмечена точка M на расстоянии m от ее центра O. Проведена произвольная хорда CD, параллельная AB. Найдите сумму площадей двух квадратов со сторонами CM и DM.

б) Высота BH треугольника ABC делит угол B в отношении $2 : 1$, а сторону AC в отношении $3 : 1$, считая от точки A. Найдите угол C.

303. Даны две параллельные прямые и точка между ними. Постройте прямоугольный треугольник наименьшей площади с вершиной прямого угла в этой точке и двумя другими вершинами на данных прямых.

22. Упражнения на повторение раздела «Решение треугольников»

Уровень А

304. а) В ΔABC $\angle C = 135°$, высоты $AK = 4\sqrt{2}$ см и $BH = 8$ см. Найдите сторону AB и площадь этого треугольника. б) Найдите площадь участка земли, имеющего форму треугольника со стороной 20 м и прилежащими к ней углами 37° и 53°.

305. В ΔABC $\angle A = 30°$, $\angle B = 45°$; высота $BD = 3\sqrt{2}$ см. Найдите стороны треугольника.

306. Решите треугольник ABC со следующими данными: а) $AB = 8$, $\angle A = 143°$, $\angle B = 22°$; б) $BC = 9$, $\angle B = 33°$, $\angle C = 66°$.

307. Найдите неизвестную сторону и углы ΔABC, если $AB = 3$ см, $AC = 5$ см, $\angle A = 60°$.

Уровень В

308. Найдите с точностью до 0,1 м стороны AB и AC участка треугольной формы, если его площадь примерно равна 662 $м^2$, $\angle A = 60°$, $\angle C = 45°$.

309. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 8 см, а угол при вершине 72°. Найдите длину основания и биссектрисы треугольника, проведенной из вершины угла при основании.

310. Найдите углы параллелограмма со сторонами a, b и диагональю d, если: а) $d^2 = a^2 + b^2 + \sqrt{3}\,ab$; б) квадрат его диагонали равен неполному квадрату разности двух его соседних сторон.

311. а) Найдите стороны и площадь прямоугольника, если его диагональ 10 см, а угол между диагоналями 45°. б) Диагонали прямоугольника пересекаются под углом 70°, а его площадь равна 67,6 $м^2$. Найдите с точностью до 0,01 м стороны прямоугольника.

Уровень С

312. а) Найдите с точностью до 1 $см^2$ площадь равнобедренного треугольника, угол при вершине которого равен 120°, а радиус вписанной в него окружности – 5 см.

б) Площадь равнобедренного треугольника равна 1 $дм^2$, а угол при его основании – 40°. Найдите с точностью до 0,1 дм радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

313. а) Папа решил разбить и огородить клумбу формы треугольника с углом 150° и площадью 4 $м^2$, примыкающую к стене дома большей стороной. Какова может быть наименьшая длина изгороди?

б) Девятиклассникам было поручено разбить на пришкольном участке треугольную клумбу наименьшего периметра, площадь которой 9 $м^2$, а один из ее углов – 120°. Найдите с точностью до 0,1 м периметр такой клумбы.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

314. 1A) В треугольнике ABC $\angle ABC = 80°$, $\angle BCA = 40°$, $BC = 2\sqrt{3}$ м. Найдите неизвестные стороны треугольника с точностью до 0,01 м.

2A) Найдите углы треугольника со сторонами 9 м, 12 м и 12 м.

3B) Площадь треугольника равна $3\sqrt{3}$ $дм^2$, а две его стороны равны 3 дм и 4 дм. Найдите третью сторону треугольника.

4C) Стороны треугольника равны 3 см, 6 см и $\sqrt{45}$ см. Найдите его: 1) биссектрису, проведенную из вершины большего угла; 2) медиану, проведенную из вершины меньшего угла.

ЭТО ИНТЕРЕСНО!

Неизвестные элементы треугольника и других многоугольников в древности находили непосредственно измерениями или вычислениями, фактически с использованием тригонометрических соотношений, хотя эти понятия еще не существовали. Например, Евклидом использовалось соотношение о площади треугольника, которое в современном виде выражается формулой: $S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin C$. Для решения практических задач были необходимы тригонометрические таблицы. Их составлением и уточнением занимались многие ученые на протяжении столетий, начиная со времен Птолемея (I–II вв. н. э.). По историческим сведениям, учение о тригонометрии зарождалось в Индии. Например, теорема синусов была открыта индийским математиком Брахмагуптой (598–660). Им была также предложена формула вычисления площади четырехугольника, вписанного в окружность: $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, где p – полупериметр четырехугольника, a, b, c, d – длины его сторон. Теорема синусов, как и теорема косинусов, была доказана позднее, в частности, в трудах среднеазиатского ученого аль-Бируни (973–1048). В Европе тригонометрия получила развитие в XVI столетии после перевода арабских источников.

Тригонометрия в настоящее время широко применяется как в геометрии, так и в алгебре, физике и других науках и сферах человеческой деятельности.

Брахмагупта

аль-Бируни

IV. ОКРУЖНОСТЬ. МНОГОУГОЛЬНИКИ

знать

• определения: многоугольника, вписанного в окружность и описанного около окружности; правильного многоугольника;

• понятия: длины окружности и длины ее дуги, площади круга, сектора и сегмента;

• свойства: четырехугольника, вписанного в окружность и описанного около окружности; правильных многоугольников;

• признаки четырехугольника, вписанного в окружность и описанного около окружности;

• формулы: длины окружности и ее дуги, площади круга, сектора и сегмента.

уметь

• доказывать свойства: об измерении угла, вписанного в окружность; четырехугольника, вписанного в окружность и описанного около окружности; правильных многоугольников;

• выводить формулы длины окружности и ее дуги, площади круга, сектора и сегмента;

• применять при решении задач: свойства вписанного в окружность угла, четырехугольника, вписанного в окружность и описанного около окружности; признаки четырехугольника, вписанного в окружность и описанного около окружности; формулы длины окружности и ее дуги, площади круга, сектора и сегмента;

• строить правильные многоугольники.

23. Вписанные в окружность четырехугольники

Учебные достижения по изучению темы:

• знать определение многоугольника, вписанного в окружность;

• знать свойства и признаки четырехугольника, вписанного в окружность;

• уметь доказывать эти свойства и применять для решения задач.

Рисунок 168

Многоугольник, все вершины которого лежат на окружности, называется вписанным в окружность, а окружность – описанной около этого многоугольника.

Например, на рисунке 168 пятиугольник вписан в окружность, а окружность описана около него.

Теорема. **Если четырехугольник вписан в окружность, то сумма его противоположных углов равна 180°.**

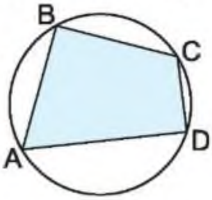


Рисунок 169

Доказательство. Пусть четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность (рисунок 169). Тогда $\angle B = 0,5 \cdot (\smile ADC)$, $\angle D = 0,5 \cdot (\smile ABC)$, $\angle B + \angle D = 0,5(\smile ADC + \smile ABC) = 180°$. Так как сумма углов четырехугольника $ABCD$ равна 360°, то $\angle A + \angle C = 360° - (\angle B + \angle D) = 180°$. Теорема доказана.

В отличие от треугольника четырехугольник не всегда можно вписать в окружность.

Теорема (*признак четырехугольника, вписанного в окружность*). **Четырехугольник можно вписать в окружность, если сумма его противоположных углов равна 180°.**

Доказательство. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ сумма противоположных углов равна 180°. Проведем через точки A, B и D окружность. Докажем, что и вершина C четырехугольника $ABCD$ лежит на этой окружности.

Допустим, что вершина C не лежит на окружности. Пусть прямая BC пересекает окружность в точке K, причем K лежит между точками B и C (рисунок 170). Тогда $\angle ADK = \angle ADC$, так как каждый из них равен $180° - \angle ABC$ ($\angle ADK = 180° - \angle ABC$ по свойству противоположных углов четырехугольника, вписанного в окружность, $\angle ADC = 180° - \angle ABC$ по условию теоремы). Но такое невозможно, так как от луча DA в одну полуплоскость можно отложить только один угол, равный $180° - \angle ABC$. Значит, допущение неверно, и точка C принадлежит окружности. Проведенное доказательство аналогично при допущении, что точка C лежит между точками B и K.

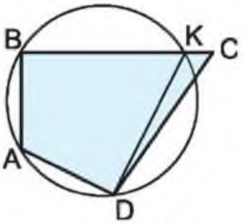


Рисунок 170

Из этой теоремы следует, что *из параллелограммов только прямоугольник (в том числе квадрат) можно вписать в окружность*, а *трапецию можно вписать в окружность, если она равнобедренная*.

З а д а ч а 1. Какой четырехугольник, вписанный в окружность радиуса R, имеет наибольшую площадь?

Р е ш е н и е. Пусть четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса R (рисунок 171). Проведем его диагонали AC и BD и обозначим точку их пересечения M. Площадь S четырехугольника $ABCD$ равна $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin\angle AMB$. Это выражение принимает наибольшее значение, если наибольшие AC, BD и $\sin\angle AMB$.

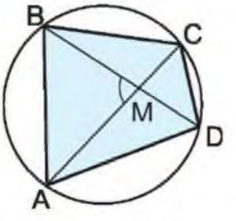


Рисунок 171

Отрезки AC и BD – наибольшие, если они являются диаметрами окружности, а $\sin\angle AMB$ – наибольший, если угол AMB – прямой.

Тогда искомым четырехугольником является квадрат, диагональ которого равна $2R$.

О т в е т. Квадрат с диагональю, равной $2R$.

З а д а ч а 2. Доказать, что *в четырехугольнике, вписанном в окружность, произведение длин диагоналей равно сумме произведений длин его противоположных сторон*. (Теорема Птолемея, древнегреческого ученого, I в. н. э.)

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Докажем, что $\boldsymbol{BD \cdot AC = AB \cdot CD + AD \cdot BC}$.

Построим угол ABM, равный углу CBD (рисунок 172). Тогда:

1) $\Delta ABM \sim \Delta CBD$ (по первому признаку подобия треугольников: $\angle ABM = \angle CBD$ по построению, а $\angle BAC = \angle BDC = 0{,}5 \cdot (\smile BC)$).

Следовательно, $\frac{AB}{BD} = \frac{AM}{CD} = \frac{BM}{BC}$, откуда $AB \cdot CD = BD \cdot AM$.

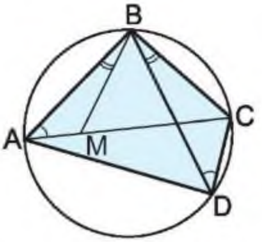


Рисунок 172

2) $\Delta ABD \sim \Delta MBC$ (по второму признаку подобия треугольников: $\angle ABD = \angle MBC$, так как $\angle ABD = \angle ABM + \angle MBD$, а $\angle MBC = \angle CBD + \angle MBD$ и $\frac{AB}{BM} = \frac{BD}{BC}$, что следует из пропорции $\frac{AB}{BD} = \frac{BM}{BC}$, полученной из подобия треугольников ABM и CBD). Следовательно, $\frac{AD}{MC} = \frac{BD}{BC}$, откуда $AD \cdot BC = MC \cdot BD$.

3) Тогда $AB \cdot CD + AD \cdot BC = BD \cdot AM + MC \cdot BD = BD \cdot (AM + MC) = BD \cdot AC$. Что и требовалось доказать.

ВОПРОСЫ

1. Какой четырехугольник называется вписанным в окружность?
2. Сформулируйте и докажите свойство углов вписанного в окружность четырехугольника.
3. Сформулируйте и докажите признак четырехугольника, вписанного в окружность.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень A

315. Можно ли описать окружность около четырехугольника, углы которого, взятые последовательно, относятся как числа: а) 2 : 2 : 3 : 3; б) 2 : 5 : 3 : 4; в) 3 : 5 : 3 : 1?

316. а) Найдите углы вписанного в окружность четырехугольника, если два его противоположных угла относятся как 3 : 5, а два других – как 4 : 5.

б) Найдите углы четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность, если точки A, B, C и D делят окружность на дуги, градусные меры которых относятся соответственно как 17 : 21 : 19 : 15.

Уровень B

317. В четырехугольнике $ABCD$, вписанном в окружность, $\angle A = 60°$, а угол B на 20 % больше угла A. Найдите неизвестные углы четырехугольника $ABCD$.

318. Точка A делит дугу BC данной окружности на две равные дуги. Из этой точки проведены хорды AD и AK, пересекающие хорду BC соответственно в точках M и N. Докажите, что около четырехугольника $DKNM$ можно описать окружность.

319. а) Найдите периметр описанной около окружности прямоугольной трапеции, если длина одного из оснований больше длины другого на 6 см, а радиус окружности равен 4 см.

б) Трапеция $ABCD$ вписана в окружность, причем ее основание AD является диаметром этой окружности, а хорда BC стягивает дугу в 60°. Найдите площадь трапеции, если радиус окружности равен R.

Уровень C

320. Трапеция с основаниями, равными 6 дм, 8 дм и высотой 1 дм, вписана в окружность. Найдите ее радиус.

321. В четырехугольнике *ABCD*, вписанном в окружность, диагонали пересекаются в точке *K* под прямым углом, точка *M* – середина стороны *AB* (рисунок 173). Докажите, что прямая *MK* перпендикулярна хорде *CD*.

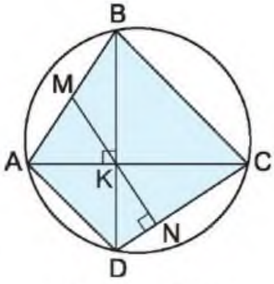


Рисунок 173

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ

Постройте окружность и опишите около нее четырехугольник и измерьте длины его сторон. Сравните суммы длин противоположных сторон построенного четырехугольника.

24. Описанные около окружности четырехугольники

Учебные достижения по изучению темы:
- знать определение многоугольника, описанного около окружности;
- знать свойства и признаки четырехугольника, описанного около окружности;
- уметь доказывать эти свойства и применять их для решения задач.

Многоугольник, каждая сторона которого касается окружности, называется описанным около окружности, а окружность – вписанной в этот многоугольник.

Например, на рисунке 174 пятиугольник описан около окружности, а окружность вписана в него.

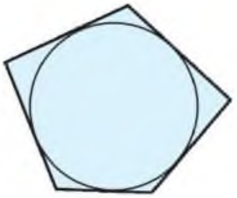


Рисунок 174

Т е о р е м а. **Если четырехугольник описан около окружности, то суммы длин его противоположных сторон равны.**

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть четырехугольник $ABCD$ описан около окружности и его стороны касаются окружности в точках K, H, M и P (рисунок 175). По свойству касательных, проведенных к окружности через одну точку, $AK = AP = a$, $BK = BH = b$, $CM = CH = c$, $DM = DP = d$. Тогда $AB + CD = a + b + c + d = BC + AD$. Что и требовалось доказать.

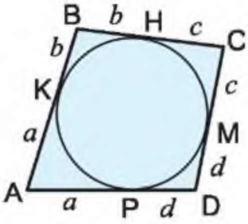


Рисунок 175

Четырехугольник, в отличие от треугольника, не всегда можно описать около окружности.

Т е о р е м а (*признак четырехугольника, описанного около окружности*). **Четырехугольник можно описать около окружности, если суммы его противоположных сторон равны.**

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ $AB + CD = BC + AD$. Построим окружность, касающуюся его сторон AB, AD и BC (центр O этой окружности является точкой пересечения биссектрис углов A и B). Докажем, что эта окружность касается и стороны CD, поэтому является вписанной в четырехугольник $ABCD$.

Допустим, что это не так. Пусть окружность целиком содержится в четырехугольнике $ABCD$ (рисунок 176). Проведем прямую CM, касательную к окружности, отличную от CB (M – точка ее пересечения с отрезком AD). Тогда

$$AB + CD = AD + BC \text{ (по условию) и}$$
$$AB + CM = AM + BC \text{ (по построению).}$$

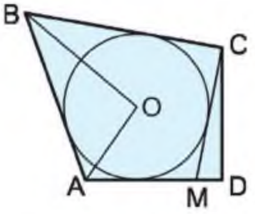


Рисунок 176

Отнимем от левой и правой частей первого равенства левую и правую части второго равенства, получим $CD - CM = AD - AM$, то есть $CD - CM = MD$, или $CD = CM + MD$. Но это невозможно по неравенству треугольника. Следовательно, наше предположение неверно, значит, точки M и D совпадают. Это доказательство аналогично при допущении, что окружность не содержится целиком в четырехугольнике $ABCD$.

Из этой теоремы следует, что *из параллелограммов только ромб или квадрат можно описать около окружности.*

З а д а ч а. Окружность с центром в точке O вписана в равнобедренную трапецию $ABCD$ и касается ее боковой стороны CD в точке K. Известно, что $CK = 1$ см, $KD = 4$ см. Найти площадь трапеции.

Р е ш е н и е. Площадь S трапеции равна: $S = \dfrac{BC + AD}{2} \cdot BH$, где BH – высота трапеции. Так как в трапецию вписана окружность, то высота BH равна ее диаметру, или $BH = 2OK$ (рисунок 177). Центром O окружности, вписанной в трапецию, является точка пересечения биссектрис ее углов C и D. Так как $\angle C + \angle D = 180°$, то $\frac{1}{2}\angle C +$

$+\frac{1}{2}\angle D = 90°$. Следовательно, треугольник COD прямоугольный, а отрезок OK его высота, $OK = \sqrt{CK \cdot KD} = 2$ (см), тогда $BH = 4$ см. Так как у описанного около окружности четырехугольника суммы противоположных сторон равны, а трапеция равнобедренная, то $\frac{BC + AD}{2} = CD = 5$ (см). Следовательно, $S = 5 \cdot 4 = 20$ (см^2).

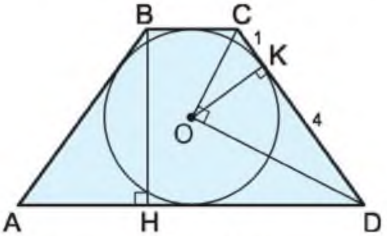


Рисунок 177

О т в е т. 20 см^2.

ВОПРОСЫ

1. Какой четырехугольник называется описанным около окружности?
2. Сформулируйте и докажите свойство сторон описанного около окружности четырехугольника.
3. Сформулируйте и докажите признак четырехугольника, описанного около окружности.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень A

322. Можно ли вписать окружность в четырехугольник, если его стороны, взятые последовательно, относятся как числа: а) 2 : 3 : 4 : 3; б) 2 : 3 : 4 : 5?

323. В описанном около окружности четырехугольнике сумма двух противоположных сторон равна 4,5 дм, а две другие стороны относятся как 2 : 3. Найдите длины этих сторон.

324. Около окружности описана равнобедренная трапеция, средняя линия которой равна 5 см, а синус ее острого угла равен 0,8. Найдите площадь этой трапеции.

Уровень B

325. Около окружности описана равнобедренная трапеция. Докажите, что ее: а) боковая сторона равна среднему арифметическому оснований; б) высота равна среднему геометрическому оснований.

326. а) Найдите радиус окружности, вписанной в прямоугольную трапецию с основаниями 5 см и 7,5 см.

б) Найдите радиус окружности, вписанной в равнобедренную трапецию, большее основание которой равно 3 дм, а острый угол равен 60°.

327. а) Докажите, что если в четырехугольник вписана окружность, то его площадь равна произведению полупериметра на радиус этой окружности.

б) Найдите радиус вписанной в четырехугольник окружности, если сумма двух его противоположных сторон 12 см, а площадь этого четырехугольника равна 60 см^2.

328. В четырехугольник $ABCD$ вписана окружность радиусом 1,7 см. Известно, что $AB : CD = 2 : 3$, $AD : BC = 2 : 1$. Найдите стороны четырехугольника, если его площадь равна 12,75 см^2.

329. Постройте с помощью циркуля и линейки ромб по данному радиусу вписанной в него окружности и стороне.

330. а) Около окружности описана равнобедренная трапеция, периметр которой равен P, а острый угол равен α. Найдите площадь трапеции.

б) Около окружности радиуса 2 см описана прямоугольная трапеция, меньшее основание которой равно 3 см. Найдите площадь этой трапеции.

331. Постройте с помощью циркуля и линейки квадрат: а) вписанный в данную окружность; б) описанный около данной окружности.

Уровень C

332. Докажите, что касательные к окружности, проведенные через вершины прямоугольника, вписанного в нее, образуют ромб. В каком случае этот ромб является квадратом?

333. Трапеция разделена на три трапеции отрезками, параллельными ее основаниям, так, что в каждую из них можно вписать окружность. Больший и меньший радиусы этих окружностей равны соответственно 8 см и 2 см. Найдите радиус третьей окружности.

334. а) Около окружности описан параллелограмм, периметр которого равен P, а тупой угол α. Найдите радиус этой окружности.
б) Постройте трапецию с основаниями 2 см и 4,5 см, в которую можно вписать окружность и описать окружность около нее.

25. Правильные многоугольники. Окружности, описанная около правильного многоугольника и вписанная в него

Учебные достижения по изучению темы:

- знать определение и свойства правильного многоугольника;
- знать понятия центра и центрального угла правильного многоугольника;
- уметь доказывать свойства и признаки правильных многоугольников, вписанных в окружность и описанных около нее;
- уметь применять эти свойства и признаки для решения задач;
- уметь строить правильные многоугольники.

Выпуклый многоугольник называется правильным, если равны все его стороны и равны все его углы. Например, квадрат, равносторонний треугольник (рисунок 178).

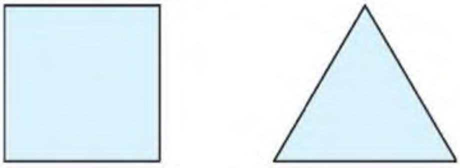


Рисунок 178

Построение правильных многоугольников удобно выполнять, используя окружность. Разделив окружность на равные дуги и соединив последовательно хордами точки деления, получим правильный многоугольник. Например, на рисунке 179 так построен правильный пятиугольник. Многоугольник, построенный таким способом, действительно правильный, так как все его стороны равны как хорды, стягивающие равные дуги, и все его углы равны как вписанные углы, опирающиеся на равные дуги.

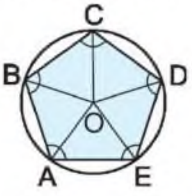


Рисунок 179

Если окружность разделить на равные дуги и через точки деления провести к ней касательные, то эти касательные также образуют правильный многоугольник.

Например, на рисунке 180 таким образом построен правильный шестиугольник. Этот многоугольник действительно правильный, так как все его стороны равны как основания равных равнобедренных треугольников с вершиной в центре окружности (докажите это самостоятельно). Все его углы также равны, при этом каждый из них в два раза больше угла при основании указанного равнобедренного треугольника.

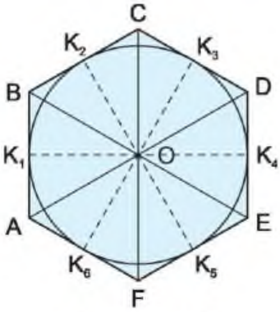


Рисунок 180

Т е о р е м а. **Около любого правильного многоугольника можно описать окружность и притом только одну.**

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть дан правильный многоугольник $A_1A_2A_3... A_n$ (рисунок 181). Соединим точку O – пересечения биссектрис углов A_1 и A_2 – отрезками с остальными вершинами многоугольника. Докажем, что $OA_1 = OA_2 ... = OA_n$.

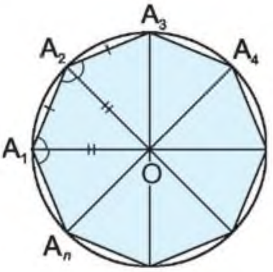


Рисунок 181

$\Delta A_1A_2O = \Delta A_3A_2O$ (по двум сторонам и углу между ними: $A_1A_2 = A_2A_3$ по условию, A_2O – общая, $\angle A_1A_2O = \angle A_3A_2O$ по построению). Следовательно, $OA_1 = OA_3$. Так как ΔA_1A_2O равнобедренный (прилежащие к стороне A_1A_2 углы равны по построению), то получаем, что $OA_1 = OA_2 = OA_3$ и $\angle A_2A_3O = \angle A_3A_2O = \frac{1}{2}\angle A_2$. Отсюда следует, что луч A_3O – биссектриса угла A_3.

Аналогично доказывая равенства $\Delta A_2A_3O = \Delta A_4A_3O$, $\Delta A_3A_4O = \Delta A_5A_4O$ и так далее, получим, что все вершины многоугольника равноудалены от точки O. Следовательно, окружность с центром в точке O и радиусом OA_1 является описанной около многоугольника $A_1A_2A_3... A_n$.

Докажем, что такая окружность единственная. Возьмем какие-нибудь три вершины многоугольника, например, A_1, A_2, A_3. Так как через эти три точки можно провести только одну окружность, то она является единственной окружностью, описанной около многоугольника $A_1A_2A_3... A_n$. Теорема доказана.

Теорема. **В любой правильный многоугольник можно вписать окружность и притом только одну.**

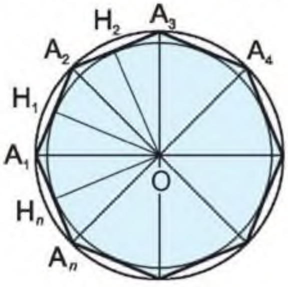


Рисунок 182

Доказательство. Пусть дан правильный многоугольник $A_1A_2A_3... A_n$, а точка O – центр описанной около него окружности (рисунок 182). Тогда, по доказанному в предыдущей теореме, $\Delta OA_1A_2 = \Delta OA_2A_3 = \cdots = \Delta OA_nA_1$. Поэтому высоты этих треугольников, проведенные из вершины O, также равны: $OH_1 = OH_2 = ... = OH_n$. Следовательно, окружность с центром O и радиусом OH_1 проходит через точки $H_1, H_2 ... H_n$ и касается сторон многоугольника $A_1A_2A_3... A_n$ в этих точках, то есть она является вписанной в правильный многоугольник $A_1A_2A_3... A_n$.

Докажем, что такая окружность единственная. Предположим, что имеется другая окружность, вписанная в этот многоугольник. Тогда ее центр O_1 равноудален от сторон многоугольника, поэтому точка O_1 принадлежит каждой из биссектрис углов многоугольника. Следовательно, точка O_1 совпадает с точкой O, а OH_1 – радиус этой окружности. Таким образом, эти окружности совпадают. Следовательно, вписанная в правильный многоугольник $A_1A_2A_3... A_n$ окружность – единственная. Теорема доказана.

Из доказанных теорем следует, что **в правильном многоугольнике центры описанной и вписанной окружностей совпадают и являются точкой пересечения биссектрис его углов.** Эта точка называется центром правильного многоугольника, а угол с вершиной в его центре, опирающийся на его сторону, называется *центральным углом* правильного многоугольника.

Отметим, что прямая, содержащая биссектрису угла $A_{k-1}OA_{k+1}$, является осью симметрии правильного многоугольника $A_1A_2... A_n$. Центр правильного многоугольника с четным числом сторон является его центром симметрии, а правильный многоугольник с нечетным числом сторон не имеет центра симметрии. При повороте вокруг центра правильного n-угольника на угол $\frac{360^\circ k}{n}$, где k и n – натуральные числа, причем $k \le n$, этот многоугольник отображается на себя. (Объясните эти свойства самостоятельно.)

Задача 1. Построить с помощью циркуля и линейки вписанный в данную окружность правильный: а) шестиугольник; б) треугольник; в) десятиугольник; г) пятиугольник; д) восьмиугольник.

Решение. а) Пусть правильный шестиугольник $ABCDMK$ вписан в окружность с центром в точке O (рисунок 183, *а*). Тогда в треугольнике AOB все углы по 60°, значит, он равносторонний. Поэтому сторона правильного шестиугольника, вписанного в окружность, равна ее радиусу. Построив хорды $AB = BC = CD = DM = MK = KA$, равные радиусу окружности, получим искомый шестиугольник $ABCDMK$ (рисунок 183, *а*).

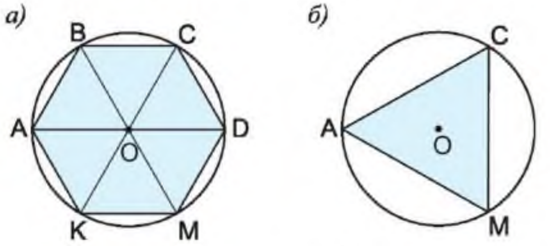


Рисунок 183

б) Разделим окружность на 6 равных частей, как в задаче а) и проведем хорды $AC = CM = MA$. Треугольник ACM – искомый (рисунок 183, *б*).

в) Пусть дана окружность с центром O и радиусом R, а хорда AB равна стороне правильного десятиугольника. Тогда $\angle AOB = 36^\circ$, $\angle OAB = \angle OBA = 72^\circ$ (рисунок 184). Проведем биссектрису AC треугольника OAB, тогда ΔOAC – равнобедренный и $AC = OC$. Треугольник BCA тоже равнобедренный, так как $\angle BCA = 180^\circ$ –

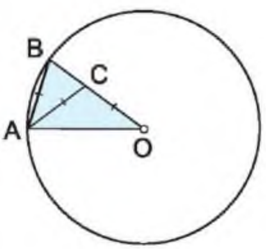


Рисунок 184

– (72° + 36°) = 72°, в нем $AB = AC$. Итак, получили: $AB = AC = OC$. Обозначим $AB = OC = x$. По свойству биссектрисы AC треугольника OAB имеем: $\frac{OC}{BC} = \frac{OA}{BA}$, то есть $\frac{x}{R-x} = \frac{R}{x}$, откуда $x^2 + Rx - R^2 = 0$. Решив это квадратное уравнение, найдем $x = -\frac{R}{2} + \sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 + R^2}$. Построим отрезок, равный x:

1) $\sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 + R^2}$ – это гипотенуза AM прямоугольного треугольника AOM с катетами R и $\frac{R}{2}$; 2) $x = AM - OM = AN$ (рисунок 185, *а*).

Далее, построив последовательно 10 хорд окружности, каждая из которых равна AN, получим искомый десятиугольник $ABCDEFMNKL$ (рисунок 185, *б*).

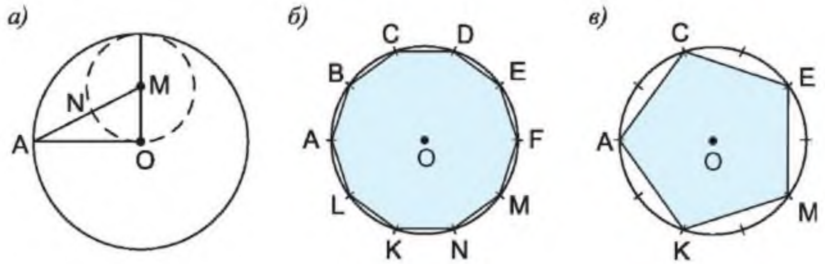


Рисунок 185

г) Разделим окружность на 10 равных частей, как в задаче в) и соединим отрезками точки деления через одну. Получим искомый пятиугольник $ACEMK$ (рисунок 185, *в*).

д) Правильный восьмиугольник постройте самостоятельно.

Отметим, что не всякий правильный многоугольник можно построить с помощью циркуля и линейки. Например, нельзя построить с помощью циркуля и линейки правильный семиугольник, девятиугольник.

З а д а ч а 2. Можно ли полностью покрыть площадку, используя комбинацию из правильных шестиугольников, четырехугольников и треугольников, которые не накладываются друг на друга? Если можно, то приведите пример.

Р е ш е н и е. Чтобы многоугольниками можно было покрыть площадку, необходимо, чтобы сумма углов при их общей вершине была равна 360°. Если на двух соседних сторонах правильного шестиугольника построить квадраты, то сумма трех углов при их общей вершине будет равна 300°. Между этими квадратами помещается правильный треугольник, сторона которого равна стороне квадрата (рисунок 186). Отметим, что такая комбинация из этих многоугольников – единственная, так как при ином их составлении сумма углов при общей вершине не равна 360° (проверьте это самостоятельно).

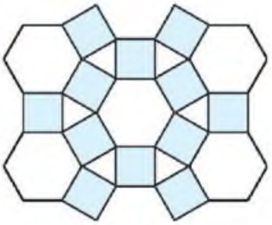


Рисунок 186

З а д а ч а 3. Бумажная лента одинаковой ширины завязана простым узлом и стянута так, чтобы узел стал плоской фигурой (рисунок 187, *а*). Доказать, что пятиугольник $ABCDK$ – правильный.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проведем диагонали AD, AC, BK, BD и CK этого пятиугольника (рисунок 187, *б*). Рассмотрим ΔABC: он равнобедренный, $AB = BC$, так как его высоты, проведенные из вершин A и C, равны ширине полосы. Аналогично устанавливаем, что в ΔKAB $AK = AB$, а в ΔBCD $BC = CD$. Следовательно, $AK = AB = BC = CD$, трапеции $KABC$ и $ABCD$ равнобедренные, $\angle KAB = \angle ABC = \angle BCD$. Тогда $\Delta KAB = \Delta ABC = \Delta BCD$, $BK = AC = BD$ и $\angle AKB = \angle ABK = \angle BAC = \angle BCA = \angle CBD = \angle CDB = \alpha$.

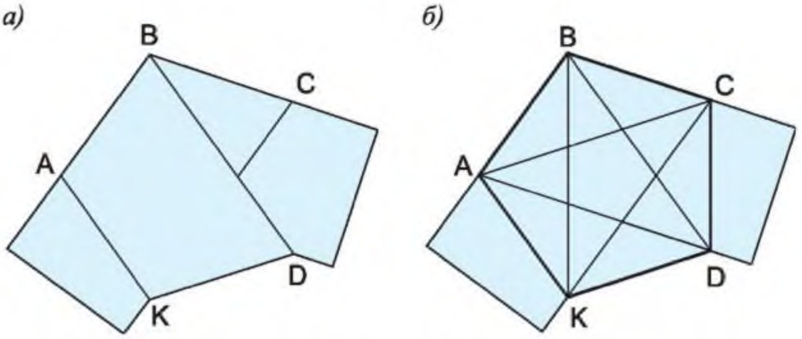


Рисунок 187

В трапециях $KABD$ и $ABCD$ равны накрест лежащие углы: $\angle DBK = \angle AKB = \alpha$, $\angle DAC = \angle ACB = \alpha$, $\angle ADB = \angle DBC = \alpha$. Получили в ΔABD $\angle DAB = \angle DBA = 2\alpha$, значит, он равнобедренный и $AD = BD$. Следовательно, $\Delta ABD = \Delta KDB$, так как они равнобедренные и $BK = AD = BD$, $\angle ADB = \angle KBD = \alpha$. Поэтому $AB = KD$ и $\angle DKB = \angle KDB = 2\alpha$. Тогда $\angle AKD = \angle CDK = 3\alpha = \angle ABC$. Итак, получили, что в пятиугольнике $ABCDK$ все стороны равны и все углы равны, значит, он правильный.

ВОПРОСЫ

1. Какой многоугольник называется правильным многоугольником?
2. Докажите, что: а) около любого правильного многоугольника можно описать единственную окружность; б) в любой правильный многоугольник можно вписать единственную окружность.
3. Докажите, что центры окружностей, описанной около правильного многоугольника и вписанной в него, совпадают.
4. Что называется центром правильного многоугольника?

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

335. а) Является ли вписанный в окружность равносторонний многоугольник правильным? Ответ обоснуйте.

б) Является ли описанный около окружности равносторонний многоугольник правильным? Ответ обоснуйте.

в) Постройте циркулем и линейкой правильный треугольник, сторона которого равна $(\sqrt{3} + 1)$ см.

336. а) Чему равна сумма внешних углов правильного n-угольника, взятых по одному при каждой его вершине? б) Найдите угол правильного 16-угольника.

337. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, если его угол равен: а) 140°; б) 144°; в) 150°; г) 160°?

338. а) Сколько сторон у правильного многоугольника, сумма углов которого равна 1620°?

б) Существует ли правильный многоугольник, угол которого равен 110°?

Уровень B

339. Докажите, что середины сторон правильного многоугольника являются вершинами другого правильного многоугольника.

340. Дана меньшая диагональ правильного n-угольника. Постройте с помощью циркуля и линейки этот n-угольник, если: а) $n = 6$; б) $n = 8$.

Уровень C

341. а) Периметр правильного шестиугольника равен $12\sqrt{2}$ см. Найдите его площадь.

б) К Ажар пришли друзья Арман и Анар с тортом квадратной формы. Как можно разделить этот торт поровну между ними, чтобы каждый получил по два куска? Приведите два решения задачи.

в) Найдите наибольший и наименьший размеры стороны квадратной скатерти для круглого казахского стола (рисунок 188), чтобы скатерть полностью покрывала стол и при этом не касалась пола, если высота стола равна 40 см, а диаметр его крышки – 140 см.

Рисунок 188

342. Площадь правильного треугольника равна $4\sqrt{3}$ см^2. Вычислите радиус окружности: а) описанной около треугольника; б) вписанной в данный треугольник.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ

Постройте окружность и опишите около нее четырехугольник, не являющийся ромбом или трапецией. Измерьте его стороны и радиус окружности. Установите зависимость между площадью построенного четырехугольника, его периметром и радиусом вписанной окружности.

26. Нахождение длин сторон и площадей правильных многоугольников

Учебные достижения по изучению темы:

• знать и применять формулы, связывающие стороны, периметр, площадь правильного многоугольника и радиусы вписанной в него и описанной около него окружностей.

Задача 1. Найти длину стороны правильного многоугольника, если радиус окружности, описанной около него, равен R.

Решение. Пусть AB – сторона правильного многоугольника, O – центр окружности, описанной около этого многоугольника, $OA = OB = R$ (рисунок 189). Проведем высоту OH равнобедренного треугольника AOB. Тогда $AH = BH$, а $\angle AOH = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{1}{2} \cdot \frac{360^\circ}{n} = \frac{180^\circ}{n}$, где n – число сторон правильного многоугольника. Из прямоугольного треугольника AOH находим $AH = R \cdot \sin\frac{180^\circ}{n}$. Тогда $AB = 2R \cdot \sin\frac{180^\circ}{n}$. Если обозначить сторону правильного многоугольника через a_n, то полученная формула примет вид: $\boldsymbol{a_n = 2R \cdot \sin\frac{180^\circ}{n}}$. В частности, $\boldsymbol{a_3 = R\sqrt{3}}$, $\boldsymbol{a_4 = R\sqrt{2}}$, $\boldsymbol{a_6 = R}$.

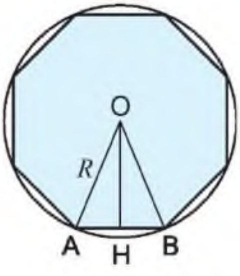


Рисунок 189

Задача 2. Найти длину стороны правильного n-угольника, если радиус вписанной в него окружности равен r.

Р е ш е н и е. Пусть AB – сторона правильного многоугольника, O – центр окружности, вписанной в этот многоугольник, $OD = r$ (рисунок 190). Из прямоугольного треугольника OBD находим $BD = r \cdot \mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n}$. Тогда $AB = 2r \cdot \mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n}$. Если обозначить сторону правильного многоугольника через a_n, то полученная формула примет вид: $\boldsymbol{a_n = 2r \cdot \mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n}}$. В частности, $\boldsymbol{a_3 = 2\sqrt{3}r}$, $\boldsymbol{a_4 = 2r}$, $\boldsymbol{a_6 = \frac{2\sqrt{3}}{3}r}$.

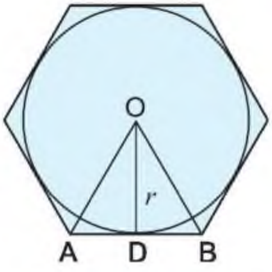


Рисунок 190

Т е о р е м а. **Правильные *n*-угольники подобны, а их стороны и периметры относятся как радиусы описанных около них окружностей или как радиусы вписанных в них окружностей.**

Д о к а з а т е л ь с т в о. Стороны правильных n-угольников пропорциональны, а каждый из их углов равен $\frac{180^\circ(n-2)}{n}$. Следовательно, они подобны. Периметры P_1 и P_2 правильных n-угольников равны: $P_1 = 2nR_1 \cdot \sin\frac{180^\circ}{n}$, $P_2 = 2nR_2 \cdot \sin\frac{180^\circ}{n}$, где R_1 и R_2 – радиусы описанных около них окружностей. Отношение периметров равно $\frac{P_1}{P_2} = \frac{R_1}{R_2}$.

Периметры P_1 и P_2 правильных n-угольников, выраженные через радиусы r_1 и r_2 вписанных в них окружностей, равны $P_1 = 2nr_1 \times \mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n}$ и $P_2 = 2nr_2 \cdot \mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n}$. Следовательно, отношение периметров равно $\frac{P_1}{P_2} = \frac{r_1}{r_2}$. Что и требовалось доказать.

Теорема. **Площадь S правильного многоугольника равна произведению его полупериметра p и радиуса r окружности, вписанной в него.**

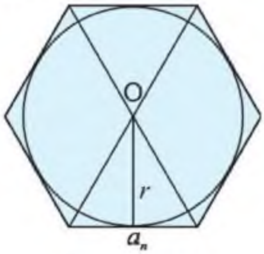


Рисунок 191

Доказательство. Формулу $S = p \cdot r$ можно получить, соединив отрезками центр правильного многоугольника с каждой из его вершин (рисунок 191). Площадь многоугольника равна сумме площадей полученных равнобедренных треугольников, в каждом из которых основание равно стороне многоугольника, а высота равна радиусу вписанной в многоугольник окружности, то есть $S = \frac{1}{2}a_n rn = pr$. Теорема доказана.

Отметим, что таким же способом доказывается и теорема: *площадь любого многоугольника, описанного около окружности, равна произведению его полупериметра и радиуса этой окружности.*

Теорема. **Площадь S правильного многоугольника равна $S = \frac{1}{2}R^2 n \cdot \sin\frac{360°}{n}$, где R – радиус описанной около многоугольника окружности, n – количество его сторон.**

Эту формулу выведите самостоятельно, используя рисунок 192.

Задача 3. В окружность радиуса R вписан правильный n-угольник со стороной a и правильный многоугольник, у которого число сторон равно $2n$. Доказать, что сторона b этого многоугольника равна $b = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - a^2}}$.

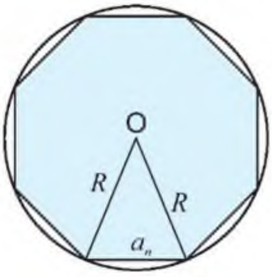


Рисунок 192

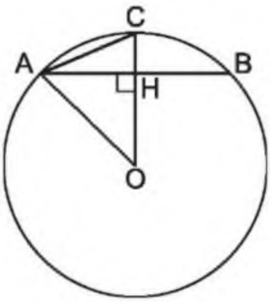


Рисунок 193

Доказательство. Пусть $AB = a$, $AC = b$, O – центр окружности (рисунок 193). Тогда отрезки OC и AB перпендикулярны и точка H их пересечения делит отрезок AB пополам. Из ΔAOC имеем: $AC^2 = OA^2 + OC^2 - 2OA \cdot OC \cdot \cos\angle AOC$, откуда $AC^2 = 2R^2 - 2R \cdot OH$. Из прямоугольного ΔAOH $OH = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}$.

Следовательно, $b^2 = 2R^2 - 2R \cdot \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}} = 2R^2 - R\sqrt{4R^2 - a^2}$, $b = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - a^2}}$.

ВОПРОСЫ

1. Как выражается сторона правильного многоугольника через радиус: а) описанной около него окружности; б) вписанной в него окружности?

2. Докажите, что правильные n-угольники подобны.

3. Выведите формулы площади правильного n-угольника через: а) его сторону и радиус вписанной в него окружности; б) радиус описанной около него окружности и его центральный угол.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

343. а) Радиусы окружностей, описанной около правильного n-угольника и вписанной в него, равны соответственно R и r. Найдите сторону этого многоугольника.

б) Около правильного n-угольника описана окружность и в него вписана окружность. Докажите, что разность квадратов диаметров этих окружностей равна квадрату стороны данного n-угольника.

344. а) Сторона правильного шестиугольника, вписанного в окружность, равна 7 см. Найдите периметр правильного треугольника, вписанного в эту окружность.

б) В окружность вписаны квадрат и правильный шестиугольник. Периметр квадрата равен 42 мм. Найдите периметр шестиугольника.

Уровень B

345. а) Сторона правильного треугольника, вписанного в окружность, равна 8 см. Найдите периметр квадрата, вписанного в эту окружность. б) Периметр квадрата, вписанного в окружность, равен 18 см. Найдите сторону правильного треугольника, вписанного в эту окружность.

346. Найдите наименьшую диагональ правильного восьмиугольника, если его наибольшая диагональ равна 6 см.

347. Найдите площадь правильного: а) треугольника со стороной 5 см; б) шестиугольника со стороной 2 см.

Уровень C

348. Найдите с точностью до 0,1 см^2 площадь правильного: а) девятиугольника, если радиус описанной около него окружности равен 2 см; б) десятиугольника, если радиус описанной около него окружности равен 4 см.

349. а) Какую часть площади правильного шестиугольника составляет площадь многоугольника, вершинами которого являются середины сторон данного шестиугольника?

б) Правильный шестиугольник разрежьте на семь частей так, чтобы из них можно было составить два правильных шестиугольника, площади которых относятся как 3 : 1.

27. Длина окружности и ее дуги

Учебные достижения по изучению темы:
- знать понятия длины окружности и длины ее дуги;
- знать и уметь выводить формулы длины окружности и длины ее дуги;
- уметь применять эти формулы для решения задач.

Окружность как линия имеет длину. В некоторых случаях длину окружности можно найти приближенно непосредственным измерением. Например, чтобы узнать, чему равна длина окружности круглой монеты, можно обвести ее ниткой и измерить ее длину. Понятно, что таким образом найти длину окружности не всегда возможно.

За длину окружности принимается величина, к которой стремятся периметры вписанных в окружность правильных многоугольников при неограниченном возрастании числа их сторон. Обычно длину окружности находят по ее радиусу или диаметру.

Т е о р е м а. **Длина C окружности радиуса R равна: $C = 2\pi R$.**

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть даны две окружности с радиусами R_1 и R_2. Впишем в каждую из этих окружностей правильный многоугольник с большим числом n его сторон (рисунок 194). Обозначим через P_1 и P_2 периметры этих многоугольников, тогда $P_1 = 2nR_1\sin\frac{180^\circ}{n}$, $P_2 = 2nR_2\sin\frac{180^\circ}{n}$. Отсюда $\frac{P_1}{P_2} = \frac{2R_1}{2R_2}$. Если число n сторон правильного n-угольника неограниченно увеличивать, то их периметры P_1 и P_2 будут почти такими же, как и длины C_1 и C_2 окружностей. Поэтому $\frac{C_1}{C_2} = \frac{2R_1}{2R_2}$, или $\frac{C_1}{2R_1} = \frac{C_2}{2R_2}$. Таким образом, отношение длины окружности к ее диаметру – постоянное. Это отношение равно иррациональному числу $\pi = 3{,}1416...$. Получили, что длина C окружности равна произведению числа π на ее диаметр, или $C = 2\pi R$. При решении задач обычно пользуются приближенным значением числа π с точностью до 0,01, то есть $\pi \approx 3{,}14$.

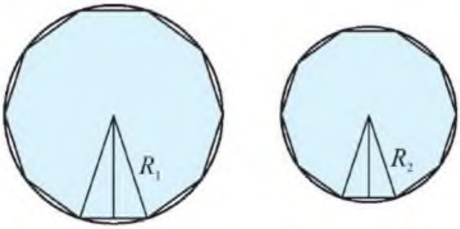


Рисунок 194

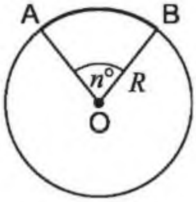


Рисунок 195

Длина *l* дуги окружности, соответствующей центральному углу $n°$ (рисунок 195), находится по формуле: $l=\frac{\pi Rn}{180}$, поскольку длина дуги в 1° равна $\frac{2\pi R}{360}$.

Задача 1. Длину окружности произвольного радиуса увеличили на 1 м. На сколько метров увеличился радиус этой окружности? Дать ответ с точностью до 0,01 м.

Решение. Обозначим радиус окружности R, а искомую величину x. По условию задачи $2\pi(R+x)=2\pi R+1$. Отсюда $x=\frac{1}{2\pi}\approx 0{,}16$ (м).

Ответ. $\approx 0{,}16$ м.

Задача 2. Две точки окружности делят ее на две дуги, угловые величины которых относятся как 11 : 13. Найти длины этих дуг, если радиус окружности равен 6 см.

Решение. Пусть градусная мера одной части окружности равна $x°$, тогда градусная мера одной дуги равна $11x°$, а другой – $13x°$. Так как градусная мера окружности равна 360°, то $11x+13x=360$. Отсюда $x=15$. Тогда $11x=165°$, $13x=195°$.

По формуле длины дуги окружности находим длины искомых дуг: $\frac{\pi\cdot 6\cdot 165}{180}=5{,}5\pi$ (см), $\frac{\pi\cdot 6\cdot 195}{180}=6{,}5\pi$ (см).

Ответ. $5{,}5\pi$ см, $6{,}5\pi$ см.

Задача 3. Доказать, что длина l дуги окружности радиуса R равна $\boldsymbol{l=R\cdot\alpha}$, где α – радианная мера этой дуги.

Доказательство. Длина l дуги окружности, соответствующей центральному углу $n°$, находится по формуле: $l = \frac{\pi R n}{180}$, где $\frac{\pi \cdot n}{180}$ – радианная мера этого угла. Так как градусная мера центрального угла равна градусной мере соответствующей ему дуги окружности, то $\frac{\pi \cdot n}{180} = \alpha$. Следовательно, $l = R \cdot \alpha$, что и требовалось доказать.

ВОПРОСЫ

1. Что называется длиной окружности?
2. Выведите формулу длины окружности радиуса R.
3. Выведите формулу длины дуги окружности радиуса R.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

350. Как изменится длина окружности, если ее радиус: а) увеличить в 2 раза; б) уменьшить в 3 раза?

351. а) Радиус окружности увеличили на 5 см. На сколько сантиметров увеличилась длина окружности? б) Радиус окружности, равный 4 дм, увеличили на 3 дм. На сколько процентов увеличилась длина окружности?

352. Диаметр данной окружности разделен на три равных отрезка, которые являются диаметрами трех других окружностей. Докажите, что сумма длин этих окружностей равна длине данной окружности.

353. На протяжении 3 км колесо повозки сделало 960 полных оборотов. Найдите диаметр этого колеса.

354. Чтобы найти толщину дерева (диаметр окружности поперечного сечения), можно измерить его обхват (длину окружности поперечного сечения). Вычислите толщину дерева, обхват которого равен: а) 1,5 м; б) 2,2 м.

355. а) Найдите длину дуги окружности, соответствующей центральному углу в 45°, если радиус окружности равен 8 см. б) Найдите длину дуги окружности, соответствующей центральному углу в 60°, если радиус окружности равен 10 см.

Уровень В

356. а) Окружность длиной 6 см развернули в дугу окружности радиусом 5 см. Найдите градусную меру этой дуги. б) Дуга радиусом 4 см и градусной мерой 120° равна длине некоторой окружности. Найдите радиус этой окружности.

357. Найдите длину дуги в 1° экватора Земли, принимая его радиус равным 6 370 км.

358. Найдите длину окружности, описанной около: а) равнобедренного треугольника с основанием 12 см и углом 30° при основании; б) равнобедренной трапеции с диагональю 9 см и углом 60° при большем основании.

359. Найдите длину окружности: а) вписанной в прямоугольный треугольник, катеты которого равны 12 см и 9 см; б) описанной около прямоугольного треугольника, периметр которого равен 28 см, а площадь 48 см^2.

360. Около окружности описана равнобедренная трапеция, периметр которой в два раза больше длины окружности. Найдите углы трапеции.

361. Найдите радианную меру центрального угла окружности радиуса R, если длина его дуги равна: а) $2R$; б) $0{,}5R$.

362. Найдите градусную и радианную меру углов: а) прямоугольного треугольника, острые углы которого относятся как 3 : 2; б) равнобедренного треугольника, два угла которого относятся как 1 : 2; в) равнобедренной трапеции, два угла которой относятся как 5 : 4.

363. Выразите в радианах величину угла и величину центрального угла правильного: а) треугольника; б) пятиугольника; в) двенадцатиугольника.

364. Вычислите длину дуги, если известны ее радианная мера α и радиус R содержащей ее окружности: а) $\alpha = 2$ рад., $R = 1$ см; б) $\alpha = 0{,}75\pi$, $R = 6$ см.

365. Найдите радиус дуги, если ее длина равна π дм, а радианная мера равна: а) $\frac{\pi}{4}$; б) $\frac{5\pi}{6}$.

366. Найдите радианную меру дуги, если ее длина 7 м, а радиус равен: а) 2 м; б) 3,5 м.

Уровень C

367. Минутная стрелка часов имеет длину 0,6 м. Какова длина дуги, которую описывает конец стрелки в течение: а) 15 минут; б) 50 минут?

368. а) Найдите длину маятника настенных часов, если центральный угол, в котором он колеблется, не превышает 30°, а длина наибольшей дуги, описываемой концом маятника, равна 2 дм.

Рисунок 196

б) Найдите путь, который преодолевает пассажир в кабинке колеса обозрения «Ailand», расположенного в городе Нур-Султане (рисунок 196), за одну минуту, если его диаметр 65 м, а время полного оборота 12 минут.

28. Площадь круга, его сектора и сегмента

Учебные достижения по изучению темы:

- знать понятия площади круга, сектора и сегмента;
- знать и уметь выводить формулы площади круга, сектора и сегмента;
- уметь применять эти формулы для решения задач.

За площадь круга принимается величина, к которой стремятся площади вписанных в круг правильных n-угольников и описанных около него правильных n-угольников, число сторон которых неограниченно возрастает.

Теорема. **Площадь S круга радиуса R равна: $S = \pi R^2$.**

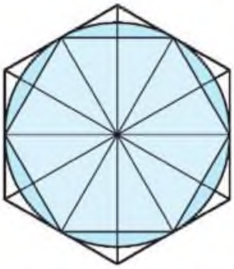


Рисунок 197

Доказательство. Пусть дан круг радиуса R. Построим два правильных n-угольника: вписанный в круг и описанный около него (рисунок 197). Площадь S_1 вписанного в круг многоугольника равна: $S_1 = \frac{1}{2}P_1 \cdot R \cdot \cos\frac{180°}{n}$, где P_1 – его периметр, при этом $S_1 < S$.

Площадь S_2 описанного около круга многоугольника равна: $S_2 = \frac{1}{2}P_2 \cdot R$, где P_2 – его периметр, при этом $S < S_2$. Таким образом, $S_1 < S < S_2$. При неограниченном увеличении числа n сторон правильных многоугольников их периметры P_1 и P_2 почти не отличаются от длины C окружности, а $\cos\frac{180°}{n}$ – от 1. Следовательно, площади таких многоугольников почти не отличаются от $\frac{1}{2}CR$. Эта величина и есть площадь S круга, то есть $S = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot R = \pi R^2$.

Сектором называется часть круга, ограниченная дугой окружности и двумя радиусами, соединяющими концы дуги с центром круга (рисунок 198). Эта дуга называется *дугой сектора*.

Площадь сектора, дуга которого равна $n°$ (рисунок 198, a), вычисляется по формуле: $S_{\text{сект.}} = \frac{\pi R^2 n}{360}$, так как площадь сектора, ограниченного дугой в 1°, равна $\frac{\pi R^2}{360}$. Из формулы площади сектора следует, что если дуга сектора равна α радиан, то $\boldsymbol{S_{\text{сект.}} = \frac{1}{2}R^2\alpha}$.

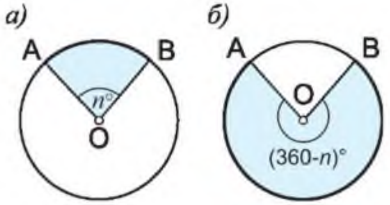


Рисунок 198

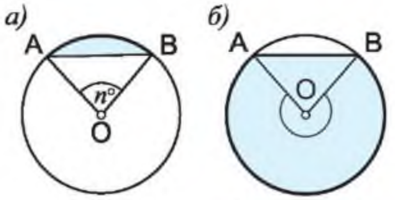


Рисунок 199

Сегментом называется часть круга, ограниченная хордой и дугой окружности, стягивающей эту хорду (рисунок 199). Эта дуга называется *дугой сегмента*.

Площадь сегмента вычисляется по формулам:

$\boldsymbol{S_{\text{сегм.}}} = \frac{\pi R^2 n}{360} - \boldsymbol{S_{\Delta AOB}}$, если $n < 180°$ (рисунок 199, *а*);

$\boldsymbol{S_{\text{сегм.}}} = \frac{\pi R^2 n}{360} + \boldsymbol{S_{\Delta AOB}}$, если $n > 180°$ (рисунок 199, *б*).

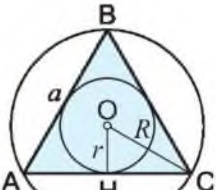


Рисунок 200

З а д а ч а 1. Площадь круга, описанного около правильного треугольника, равна S_1, а площадь круга, вписанного в него, равна S_2. Найти отношение $S_1 : S_2$.

Р е ш е н и е. Пусть дан правильный ΔABC со стороной, равной a, точка O – его центр (рисунок 200). Тогда $OC = R$ – радиус окружности, описанной около ΔABC, $OH = r$ – радиус вписанной в него окружности. Из прямоугольного ΔOHC найдем: $R = \frac{a}{2\cos 30°} = \frac{a}{\sqrt{3}}$, $r = \frac{a \cdot \operatorname{tg} 30°}{2} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$.

Тогда $\frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi R^2}{\pi r^2} = \frac{\pi a^2 \cdot 12}{3 \cdot \pi a^2} = 4$.

О т в е т. 4.

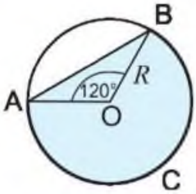


Рисунок 201

З а д а ч а 2. Хорда AB разбивает круг на два сегмента. Найти площадь сегмента ACB (рисунок 201), если радиус круга равен R, а $\angle AOB = 120°$.

Р е ш е н и е. Градусная мера дуги ACB и соответствующего ей центрального угла равна 240°, поэтому искомая площадь равна:

$$S_{\text{сегм.}} = \frac{\pi R^2 240°}{360°} + S_{\Delta AOB} = \frac{2\pi R^2}{3} + \frac{1}{2}R^2 \sin 120° = \frac{2\pi R^2}{3} + \frac{R^2\sqrt{3}}{4} =$$
$$= \frac{R^2(8\pi + 3\sqrt{3})}{12}.$$

О т в е т. $\frac{R^2(8\pi + 3\sqrt{3})}{12}$.

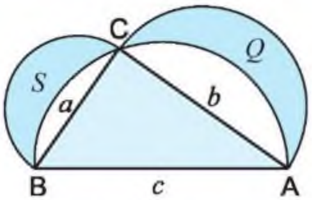


Рисунок 202

З а д а ч а 3. Доказать, что сумма площадей луночек, лежащих между полуокружностью, построенной на гипотенузе прямоугольного треугольника как на диаметре, и полуокружностями, построенными на его катетах как на диаметрах (рисунок 202), равна площади этого треугольника. (Задача Гиппократа – древнегреческого ученого, V в. до н. э.).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим площади этих луночек S и Q, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Площадь полукруга, построенного на гипотенузе, равна $\frac{\pi c^2}{8}$, а площади полукругов, построенных на катетах, соответственно равны $\frac{\pi a^2}{8}$ и $\frac{\pi b^2}{8}$.

По теореме Пифагора $c^2 = a^2 + b^2$, умножив это равенство на $\frac{\pi}{8}$, получим: $\frac{\pi c^2}{8} = \frac{\pi a^2}{8} + \frac{\pi b^2}{8}$, то есть площадь полукруга, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей полукругов, построенных на его катетах.

Если из $\frac{\pi c^2}{8}$ вычесть сумму площадей сегментов, отсекаемых от полукругов катетами, то получим $S_{\Delta ABC}$. Если вычесть эту сумму из выражения $\left(\frac{\pi a^2}{8} + \frac{\pi b^2}{8}\right)$, то получим $S + Q$. Поскольку $\frac{\pi c^2}{8} = \frac{\pi a^2}{8} + \frac{\pi b^2}{8}$, то $S_{\Delta ABC} = S + Q$.

ВОПРОСЫ

1. Выведите формулу площади круга радиуса R.
2. Выведите формулу площади кругового сектора.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

369. Как изменится площадь круга, если его радиус: а) увеличить в k раз; б) уменьшить в k раз?

370. Даны две концентрические окружности. Некоторая хорда окружности большего радиуса касается другой окружности и имеет длину 6 см. Найдите площадь кольца, ограниченного этими окружностями.

371. Две трубы диаметрами 6 дм и 8 дм требуется заменить одной трубой с той же пропускной способностью. Найдите диаметр такой трубы.

372. а) Найдите площадь круга, ограниченного окружностью, длина которой равна 50,24 м. б) Найдите длину окружности, ограничивающей круг, площадь которого равна 50,24 м^2.

373. а) Как можно разделить круг на три сектора, имеющих равные площади? б) Окружность разделена двумя точками на две дуги, длины которых относятся как 5 : 7. Найдите отношение площадей секторов, которые получатся, если к этим точкам провести радиусы окружности.

374. а) Длина дуги в 30° некоторой окружности равна 3 м. Найдите площадь сектора, радиус которого равен радиусу этой окружности, а его центральный угол равен 50°. б) Найдите площадь сектора, если радиус окружности равен 7 дм, а хорда, стягивающая дугу сектора, меньшую 180°, равна 8 дм.

Уровень B

375. Угол между касательной к окружности и ее хордой, проведенной в точку касания, равен 60°. Найдите площадь сектора, содержащего данную хорду, если длина этой хорды равна 6 м.

376. Найдите площадь сектора, если его радиус 4 см, а радианная мера дуги равна: а) $\frac{\pi}{6}$; б) 1,2 рад.

377. В круге радиуса R проведены две параллельные хорды, каждая из которых стягивает дугу в $\frac{2\pi}{3}$ радиан. Найдите площадь части круга, которая находится между этими хордами.

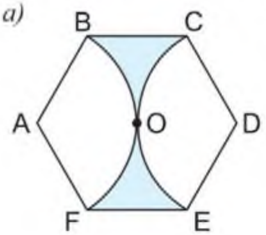
378. Окружность длиннее своего диаметра на 10,5 см. Найдите площадь круга, ограниченного этой окружностью.

379. Известно, что сторона правильного треугольника, вписанного в окружность, на 4 см больше стороны правильного четырехугольника, вписанного в нее. Найдите площадь круга, ограниченного окружностью.

380. В окружности по разные стороны от центра проведены две параллельные хорды длиной 6 см и 8 см, расстояние между которыми равно 7 см. Найдите площадь круга, ограниченного этой окружностью.

381. Вычислите площадь круга, описанного около треугольника, если: а) он равнобедренный, с основанием 12 см и боковой стороной 10 см; б) сторона треугольника равна 5 см, а прилежащие к ней углы – 40° и 80°.

а)



б)

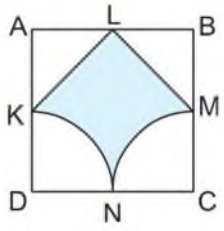


Рисунок 203

382. Найдите площадь закрашенной фигуры, если: а) $ABCDEF$ – правильный шестиугольник со стороной a и центром O (рисунок 203, *а*), EOC и FOB – дуги окружностей с центрами в точках D и A соответственно; б) $ABCD$ – квадрат со стороной b, DKN и CMN – равные секторы (рисунок 203, *б*).

383. В правильный треугольник ABC со стороной 12 см вписана окружность и проведена вторая окружность с центром в точке C и радиусом 6 см. Найдите площадь общей части полученных кругов.

384. а) Из квадратного листа жести размером 5×5 дм вырезан круг наибольшей площади. Какова площадь оставшейся части листа? б) Из квадратного листа жести размером 8×8 см нужно вырезать кружки диаметром 1 см. Можно ли из этого листа жести вырезать 65 таких кружков?

Уровень C

385. а) Для изготовления колпака к новогоднему костюму вырезают сектор так, чтобы длина дуги сектора была равна обхвату головы. Найдите градусную меру дуги такого сектора, если его радиус 20 см, а обхват головы 52 см. б) Диаметр основания юрты 5 м (рисунок 204). Чтобы накрыть войлоком крышу юрты, нужно вырезать сектор радиуса 2,76 м. Найдите градусную меру дуги этого сектора и его площадь.

Рисунок 204

29. Упражнения на повторение раздела «Окружность. Многоугольники»

Уровень А

386. Найдите площадь круга, если длина ограничивающей его окружности 12π см.

387. Градусная мера дуги окружности 120°, а ее радиус 6 см. Найдите с точностью до 0,1 см длину этой дуги.

388. Доказать, что сумма двух углов правильного многоугольника, внутреннего и центрального, равна 180°.

389. а) Валик, диаметр поперечного сечения которого равен 2 см, опилен так, что в поперечном сечении получился квадрат. Каков наибольший размер может иметь сторона этого квадрата? б) На два шкива, радиусы которых равны 0,9 м и 0,3 м, а расстояния между их центрами 2,4 м, туго натянут ремень. Найдите с точностью до 0,01 м длину одной части этого ремня, которая не касается шкивов.

390. а) Сторона вписанного в окружность квадрата равна $8\sqrt{2}$ см. Найдите площадь описанного около этой окружности правильного треугольника. б) Каждая сторона описанного около окружности треугольника на $\sqrt{6}$ см больше стороны правильного четырехугольника, вписанного в нее. Найдите сторону треугольника. в) Разность между радиусами окружностей, описанной около правильного треугольника и вписанной в него, равна 4 см. Найдите площадь этого треугольника.

Уровень В

391. Найдите радиус окружности, если известно, что периметр описанного около нее многоугольника равен 60 см, а площадь – 240 см^2. Может ли такой многоугольник быть правильным?

392. Пол в комнате прямоугольной формы размером 6 м × 3,64 м хотят покрыть паркетом в форме правильного шестиугольника со стороной 12 см. Хватит ли для этого 600 паркетных плиток?

393. Через точку, находящуюся на расстоянии b от центра данной окружности, проведены к ней две касательные, угол между которыми равен α. Найдите площадь правильного треугольника, вписанного в эту окружность.

394. а) Найдите площадь правильного восьмиугольника со стороной 4 см. б) Квадрат, сторона которого равна 8 см, срезан по углам так, что получился правильный восьмиугольник. Найдите площадь этого многоугольника.

395. Найдите сторону правильного 12-угольника, вписанного в окружность радиусом 4 см.

396. Найдите диагонали правильного шестиугольника, сторона которого равна 8 см.

397. Выразите площадь правильного восьмиугольника через длины его большей и меньшей диагоналей.

398. а) Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки, взятой внутри правильного n-угольника, до прямых, содержащих его стороны, постоянна. б) Внутри правильного шестиугольника со стороной $2\sqrt{3}$ дм взята произвольная точка. Найдите сумму расстояний от этой точки до прямых, на которых лежат стороны этого шестиугольника.

399. Найдите диагонали правильного восьмиугольника, сторона которого равна 8 см.

400. Вычислите площадь поперечного сечения дерева, если его обхват равен 88 см.

401. Дуга AB составляет 135°, а ее длина равна a. Найдите длину хорды AB.

402. Найдите площадь сектора, если его радиус 5 м, а длина дуги равна: а) 1 м; б) 2,5 м.

403. Найдите радиус сектора, если радианная мера его дуги $\frac{2\pi}{5}$, а площадь равна 45π м^2.

404. Найдите радиус окружности, длина которой и площадь ограниченного ею круга выражаются одним и тем же числом.

Уровень С

405. Угловая величина дуги сегмента равна 120°, а ее длина равна b. Найдите длину окружности наибольшего радиуса, вписанной в этот сегмент. (Окружность считается вписанной в сегмент, если она касается его дуги и хорды.)

406. а) Около правильного треугольника со стороной 4 см описана окружность, и в него вписана окружность. Найдите площадь полученного при этом кольца. б) Около правильного шестиугольника со стороной b описана окружность, и в него вписана окружность. Найдите площадь кольца, образованного этими окружностями.

407. Около круга описана равнобедренная трапеция с острым углом α и периметром $2p$. Найдите отношение площади трапеции к площади круга.

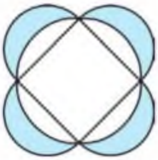


Рисунок 205

408. Найдите площадь фигуры, состоящей из четырех луночек, образованных окружностью, описанной вокруг квадрата, и полуокружностями, построенными на сторонах квадрата как на диаметрах (рисунок 205), если сторона квадрата равна 4 см.

409. Сторона правильного треугольника равна a. Из его центра радиусом $\frac{a}{3}$ проведена окружность. Найдите площадь той части треугольника, которая находится вне этой окружности.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

410. 1А) Сколько сторон имеет правильный многоугольник, угол которого равен 135°?

2А) Сторона правильного шестиугольника, вписанного в окружность, равна 12 см. Найдите площадь описанного около этой окружности квадрата.

3В) Постройте с помощью циркуля и линейки правильный двенадцатиугольник.

4B) Дан правильный треугольник ABC со стороной a. Построены дуги окружностей с центрами в точках A, B, C радиуса $0,5a$ (рисунок 206). Найдите площадь фигуры MNK.

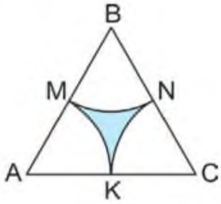


Рисунок 206

5C) Равнобедренный треугольник с боковой стороной $2\sqrt{3}$ см и углом $120°$ при его вершине вписан в круг. Найдите площадь сегмента, ограниченного боковой стороной и не содержащего данный треугольник.

ЭТО ИНТЕРЕСНО!

Многие свойства многоугольников и окружности изложены в 3, 4 и 5-й книгах «Начал» Евклида. Например, теорема об измерении вписанного в окружность угла в третьей книге формулируется в предложении 20: «В круге угол при центре вдвое больше угла при обводе, если эти углы имеют основанием тот же самый обвод». Свойство четырехугольника, вписанного в круг, изложено в предложении 22: «У четырехсторонников, вписанных в кругах, противоположные углы вместе равны двум прямым». Теорема, обратная этой, то есть признак четырехугольника, вписанного в окружность, была сформулирована Птолемеем во II веке, а появилась в систематических курсах планиметрии в Европе лишь в 1778 году в трудах французского математика Л. Бертрана.

Учение о правильных многоугольниках и их построении, используя окружность, изложено в четвертой книге «Начал» Евклида. Построением правильных n-угольников занимались многие ученые с древних времен. При этом возникла задача нахождения как общего способа построения, так и выявления возможностей построения при конкретных значениях n при помощи циркуля и линейки. Эту задачу решил в XVIII столетии выдающийся немецкий математик К. Ф. Гаусс (1777–1855) в 19-летнем возрасте. Он, в частности,

К. Ф. Гаусс

доказал, что такое построение возможно, если $n = 2^{2^k} + 1$, где k – целое неотрицательное число. Из этой формулы следует, что правильный семиугольник нельзя построить, используя циркуль и линейку, а правильный 17-угольник можно. Невозможность построения циркулем и линейкой не означает, что нельзя построить тот или иной правильный многоугольник, применяя разные чертежные инструменты.

Правильные многоугольники и их свойства используются в архитектуре, строительстве, например, при изготовлении и укладке паркетов. Известно, что существует только 11 различных паркетов, составленных из правильных многоугольников (рисунок 207).

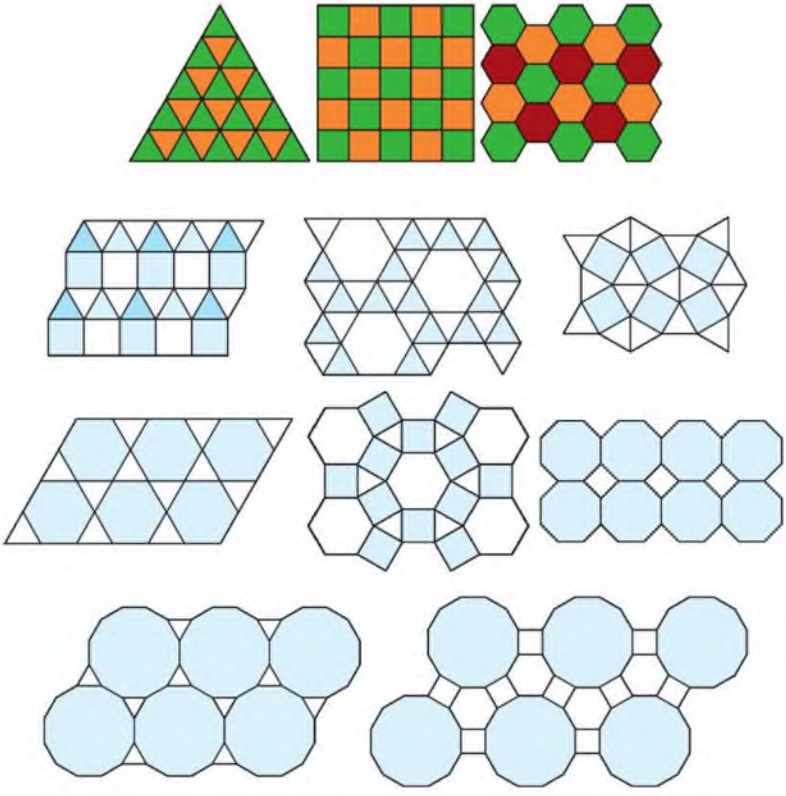


Рисунок 207

Идея нахождения длины окружности и площади круга с использованием свойств вписанных в окружность правильных n-угольников была известна ученым Древней Греции. Например, знаменитый физик и математик Архимед в III веке до нашей эры в научном труде «Измерение круга» впервые использовал последовательности периметров вписанных в окружность и описанных около нее правильных 96-угольников для вывода формул длины окружности и площади круга. При этом им было установлено, что отношение длины окружности к ее диаметру меньше $3\frac{1}{7}$ и больше $3\frac{10}{71}$. Интересно, что $3\frac{1}{7} \approx 3{,}142857$, $3\frac{10}{71} \approx 3{,}140846$, то есть Архимедом было найдено приближенное значение числа $\pi \approx 3{,}14$, которым пользуются в вычислениях и в настоящее время.

Архимед

Уточнением приближенного значения числа π геометры занимались на протяжении многих веков. В XVIII веке было установлено, что это число – иррациональное. Со времен Древней Греции ученые пытались найти это число путем построения циркулем и линейкой квадрата, площадь которого была бы равна площади круга. Невозможность решения этой проблемы, которая носит название задачи о квадратуре круга, была установлена лишь в 1882 году немецким математиком К. Линдеманом.

30. Повторение курса геометрии 9 класса

Уровень А

411. Найдите координаты вектора $\vec{m}$, коллинеарного вектору $\vec{n}(-3; 4)$, если $|\vec{m}| = 35$.

412. Найдите координаты точки, в которую переходит точка $M(0,5; 1,5)$ при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AB}(3; -4)$.

413. Подобны ли два треугольника, если: а) они прямоугольные и катеты одного равны 3 дм и 4 дм, а катеты другого – 0,6 дм и 0,8 дм; б) стороны одного 3 см, 4 см и 6 см, а стороны другого – 6 см, 8 см и 12 см?

414. По данным на рисунках 208, *а*, *б*, *в*, *г* найдите x.

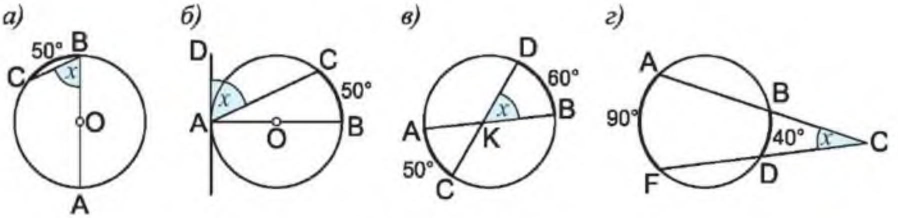


Рисунок 208

415. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями $BC = 18$ см, $AD = 24$ см. Диагонали трапеции пересекаются в точке K, и площадь ΔAKD равна 84 см^2. Найдите площадь ΔBKC.

416. а) Сколько сторон имеет многоугольник, сумма углов которого равна 1080°? б) Сколько сторон имеет выпуклый многоугольник, сумма углов которого вдвое больше суммы углов выпуклого девятиугольника?

417. Найдите площадь треугольника со сторонами 8 см, 12 см, 16 см.

418. Найдите неизвестные стороны и углы ΔABC, если: а) $BC = AB = 4$ дм, $\angle A = 30°$; б) $AC = 15$ мм, $\angle A = 30°$, $\angle C = 50°$; в) $AB = 5$ см, $AC = 9$ см, $\sin A = \frac{4}{5}$.

419. а) Длина дуги радиусом 6 дм, содержащая центральный угол в 150°, равна длине некоторой окружности. Найдите радиус этой окружности. б) Найдите с точностью до 0,1 см длину маятника настенных часов (рисунок 209), угол колебания которого составляет 36°, а длина дуги, которую описывает конец маятника, равна 16 см.

Рисунок 209

Уровень B

420. Дано: $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{a}+\vec{b}|=4$. а) Постройте эти векторы. б) Найдите $|\vec{a}-\vec{b}|$. в) Чему равен угол между векторами $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$?

421. Докажите, что точки $A(5; -1)$, $B(9; 5)$, $C(12; 6)$, $D(14; 2)$ являются вершинами трапеции. Найдите длину средней линии этой трапеции.

422. Векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ – единичные, $\vec{i} \perp \vec{j}$. Найдите углы ΔABC, если $\overrightarrow{AB}=6\vec{i}+3\vec{j}$ и $\overrightarrow{AC}=3\vec{i}+9\vec{j}$.

423. В четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Известно, что $AO = OC = 4$, $BO = 2$, $DO = 8$, $\angle BOC = 60°$. Найдите косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$.

424. При повороте около точки $M(2\sqrt{5};\ 1)$ на 30° против часовой стрелки точка $A(3\sqrt{5};\ 1)$ отобразилась на точку B. Найдите расстояние AB.

425. Длина тени от дерева равна 24 м. Вертикальный столб высотой 1,5 м отбрасывает в этот момент времени тень длиной 1,6 м. Найдите высоту дерева.

426. Известно, что стороны треугольника пропорциональны числам 5, 6 и 8. Найдите стороны подобного ему треугольника, если разность между его наибольшей и наименьшей сторонами равна 9 мм.

427. Во вписанном в окружность четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке K. Известно, что AB = 6 см, BK = 4 см, AK = 3 см, CD = 7 см. Найдите CK и DK.

428. Хорда AB окружности равна ее радиусу. На радиусах OA и OB отложены отрезки OM и OK – такие, что $AM : MO = BK : KO = 2 : 1$. Найдите длину отрезка MK, если радиус окружности равен 5 см.

429. Можно ли провести прямую так, чтобы она отсекла от данного треугольника ему подобный и не была параллельной ни одной его стороне, если треугольник: а) разносторонний; б) равнобедренный; в) равносторонний? Если можно, приведите пример.

430. Дан треугольник ABC. На стороне BC отмечена точка D так, что $\angle BAD = \angle ACB$, $BD = 4$ см, $BC = 9$ см. Найдите AB и отношение площадей треугольников ABD и ABC.

431. а) Постройте прямоугольный треугольник, если даны его гипотенуза $c = 8$ см и отношение катетов $b : a = 1 : 2$.

б) Постройте ΔABC, если $AB : AC = 2 : 3$, $\angle A = 60°$ и биссектриса $AK = 5$ см.

432. Сформулируйте и обоснуйте признак подобия: а) двух ромбов; б) двух параллелограммов.

433. Какой должна быть ширина прямоугольника, длина которого равна 12 см, чтобы, сложив его пополам, получить два прямоугольника, подобных данному?

434. а) Через точку A окружности с центром O проведены касательная AB и хорда AC, D – произвольная точка, принадлежащая большей из дуг AC, $\angle BAC = 72°$. Найдите радианную меру угла ADC.

б) AB и AC – касательные к окружности с центром O (B и C – точки касания), D – произвольная точка, принадлежащая большей из дуг BC, $OA = 8$ см, а расстояние от центра окружности до хорды BC – 6 см. Найдите радианную меру угла BDC.

435. Найдите радианную меру угла между двумя касательными, проведенными через одну точку, если радианные меры дуг, на которые окружность разделена точками касания, относятся как $3 : 2$.

436. Точка C делит хорду AB окружности на отрезки длиной 12 см и 14 см. Найдите радиус этой окружности, если расстояние от ее центра до точки C равно 11 см.

437. а) Сторона правильного треугольника, вписанного в окружность, равна 6 см. Найдите площадь квадрата, вписанного в эту же окружность. б) Около квадрата со стороной 4 дм описана окружность, а около окружности – правильный шестиугольник. Найдите площадь этого шестиугольника.

438. Расстояния от центра вписанной в прямоугольную трапецию окружности до концов большей боковой стороны равны 6 см и 8 см. Найдите площадь трапеции.

439. В окружность вписан треугольник, одна сторона которого равна $2\sqrt{3}$ см. Найдите: а) радиус этой окружности, если угол, лежащий против данной стороны, равен 120°; б) угол, лежащий против данной стороны, если она удалена от центра окружности на расстояние, равное 1 см.

440. Найдите площадь круга, вписанного в треугольник со сторонами 15 м, 15 м, 24 м.

441. В прямоугольном ΔABC ($\angle C = 90°$) $AC = 18$ см, $\angle B = 60°$. Построен круг с центром в точке C, касающийся гипотенузы. Найдите площадь сектора, заключенного внутри треугольника.

442. Прямая, пересекающая окружность, делит ее на две дуги, длины которых относятся как 1 : 3. В каком отношении эта прямая делит площадь круга?

Уровень С

443. Найдите углы трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$), если она: а) прямоугольная с острым углом D и $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA}| = |\overrightarrow{BA}|$; б) равнобедренная и $|\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AB}|$.

444. Какой угол образуют векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ единичной длины, если известно, что векторы $\vec{d} + 3\vec{c}$ и $2\vec{d} + 0{,}4\vec{c}$ перпендикулярны?

445. Дан правильный пятиугольник $ABCDF$, K – точка пересечения его диагоналей AC и BF. Найдите угол AKB и выразите его в радианах.

446. Из точки B к окружности проведены касательная BA (A – точка касания) и секущая, пересекающая окружность в точках C и D, причем C лежит между B и D. Найдите радиус окружности, если $AB = 24$ см, $BC = 14{,}4$ см, а расстояние от центра окружности до секущей равно 9,6 см.

447. а) У квадрата со стороной b «срезали» углы так, что получился правильный восьмиугольник. Найдите сторону этого восьмиугольника.

б) В правильном двенадцатиугольнике со стороной a соединены середины шести сторон, взятых через одну так, что получился правильный шестиугольник. Найдите его сторону.

448. Стороны разностороннего треугольника равны 8, 15, x, где x – наибольшая сторона. При каких значениях x этот треугольник является: а) прямоугольным; б) тупоугольным; в) остроугольным?

449. Высота равнобедренного треугольника, проведенная к его основанию, равна 5 дм, а радиус вписанной в него окружности равен 2 дм. Найдите длину описанной около треугольника окружности.

450. Вокруг трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) описана окружность, причем хорды BC и AD лежат по разные стороны от ее центра, $AD = 4\sqrt{3}$ см, $BC = 4\sqrt{2}$ см, $\angle BDC = 45°$. Найдите длины дуг окружности, концами которых являются соседние вершины трапеции.

451. На каждой стороне квадрата со стороной b, принятой за диаметр, построен полукруг, лежащий внутри квадрата. Найдите площадь полученной розетки (рисунок 210).

Рисунок 210

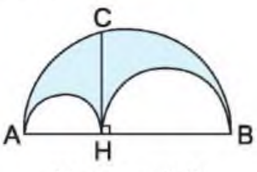


Рисунок 211

452. а) Разделите отрезок на две неравные части так, чтобы большая часть являлась средним пропорциональным между всем отрезком и его меньшей частью (задача Евклида, вошедшая в историю под названием задачи «о золотом сечении»). б) Из полукруга вырезаны два других полукруга, как показано на рисунке 211. Докажите, что площадь оставшейся части равна площади круга с диаметром CH (задача Архимеда).

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

453. 1А) Дан параллелограмм $ABCD$. Постройте векторы, равные сумме $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ и разности $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.
2А) В ΔABC $\angle C = 90°$, $AC = CB$, CD – медиана. Подобны ли треугольники ACD и ABC? Если подобны, то по какому признаку?
3В) Точка C делит хорду AB на отрезки $AC = 6$ см и $CB = 7$ см. Найдите радиус окружности, если $OC = 5{,}5$ см, где O – центр окружности.
4В) Найдите длину окружности, вписанной в трапецию с основаниями 2 см и 8 см, если около нее можно описать окружность.
5С) Найдите площадь круга, описанного около ΔABC, если $AB = 4\sqrt{3}$ см, $AC = 8$ см, $\sin A = 0{,}5$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ИТОГОВОЙ САМОПРОВЕРКИ

Задания по курсу геометрии 8 класса

1. Периметр равнобедренного треугольника равен 14 см, а одна из его сторон равна 3 см. Найдите длины остальных сторон треугольника.

(5,5 см, 5,5 см)

2. Найдите наибольший угол треугольника, если известно, что один из его углов равен разности двух других.

(90°)

3. Длины сторон параллелограмма равны 5 см и 12 см. На отрезки какой длины делит сторону параллелограмма биссектриса его тупого угла?

(5 см, 7 см)

4. Параллелограмм одной из его диагоналей делится на два треугольника, периметр каждого из которых равен 8 дм. Найдите длину этой диагонали, если периметр параллелограмма равен 10 дм.

(3 дм)

5. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведен серединный перпендикуляр к стороне AB, который пересекает сторону BC в точке P. Найдите угол PAC, если угол BCA равен 70°.

(30°)

6. Из вершины A острого угла параллелограмма $ABCD$ проведены перпендикуляры AF и AN к прямым BC и CD. Найдите углы параллелограмма, если угол FAN равен 130°.

(50°, 130°, 50°, 130°)

7. Длины оснований трапеции равны 25 см и 4 см, а длины боковых сторон – 20 см и 13 см. Найдите площадь трапеции.

(174 см^2)

8. Найдите площадь трапеции, если ее диагонали перпендикулярны и равны 8 см и 12 см.

(48 см^2)

9. В ромбе $ABCD$ высота равна $4\sqrt{3}$ дм, а $\angle ADC = 120°$. На прямой BC произвольно взята точка F. Найдите площадь треугольника AFD.

($16\sqrt{3}$ дм^2)

10. а) Найдите площадь ромба, периметр которого равен 2 м, а длины диагоналей относятся как 3 : 4.

б) Найдите сторону ромба, площадь которого равна S, а диагонали относятся как $m : n$.

$\left(\text{а) 24 дм}^2\text{; б) } \frac{S}{mn}\sqrt{m^2+n^2}\right)$

11. От участка земли, имеющего форму трапеции, нужно отделить треугольный участок так, чтобы его площадь была равна площади оставшейся части. Как это сделать?

(Основание треугольника взять равным полусумме оснований, а высоту, равной высоте трапеции)

12. Длины катетов прямоугольного треугольника равны 20 см и 21 см. Найдите длину его биссектрисы, проведенной из вершины прямого угла.

($\approx$ 14,5 см)

13. Внутри равностороннего треугольника со стороной a взята произвольная точка. а) Докажите, что сумма расстояний от нее до сторон треугольника – постоянная. б) Найдите сумму расстояний от этой точки до сторон треугольника.

$\left(\text{б) } 0{,}5a\sqrt{3}\right)$

14. Высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна 8 дм, а один из катетов равен 10 дм. Найдите длину гипотенузы.

$\left(16\frac{2}{3}\text{ дм}\right)$

15. Точка пересечения прямых, содержащих высоты треугольника *ABC*, находится вне этого треугольника, а его угол *C* – наибольший. Найдите величину угла *C*, если площадь треугольника равна $2\sqrt{3}$ м^2, $AC = 2$ м, $BC = 4$ м.

(120°)

16. Найдите периметр прямоугольной трапеции, если длины ее оснований равны 8 см и 12 см, а один из углов равен 135°.

($(24 + 4\sqrt{2})$ см)

17. В равнобедренном треугольнике один из внешних углов равен 60°, а высота, проведенная к боковой стороне, равна 18 см. Найдите длину основания треугольника.

(36 см)

18. *AB* и *AC* – касательные к окружности с центром в точке *O* (*B* и *C* – точки касания). Найдите градусную меру меньшей из дуг *BC*, если расстояние от центра окружности до точки *A* равно 8 см, а до хорды *BC* – 6 см.

(60°)

19. Треугольник с углами 40°, 50°, 90° описан около окружности. Найдите градусные меры дуг, на которые окружность разделилась точками касания.

(90°, 130°, 140°)

20. В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки 4 см и 21 см. Найдите площадь этого треугольника.

(84 см^2)

21. Длина стороны прямоугольника равна 9 см, а величина одного из углов, образованных диагоналями, равна 150°. Найдите площадь прямоугольника.

($81(2 \pm \sqrt{3})$ см^2)

22. Постройте параллелограмм, симметричный данному параллелограмму: а) относительно одной из его вершин; б) относительно одной из его сторон.

23. В данный треугольник ABC с помощью циркуля и линейки впишите ромб $AKPH$ так, чтобы его сторона AH лежала на стороне AC треугольника, а вершины K и P – на сторонах AB и BC соответственно.

(Сначала постройте ромб $AK_1P_1H_1$ так, чтобы точка K_1 лежала на стороне AB, а точка H_1 – на стороне AC. Затем, используя гомотетию с центром в точке A, отображающую точку P_1 в точку P, принадлежащую стороне BC, постройте ромб $AKPH$)

24. По транспортеру $AB = a$ поднимают груз (рисунок 1). На расстоянии $AM = b$ от основания транспортера установлено крепление MN высотой m. Выразите высоту BC подъема груза через указанные данные.

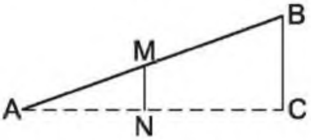


Рисунок 1

$\left(\frac{am}{b}\right)$

25. Дан треугольник ABC. На стороне AC отмечена точка K так, что $AK = 4$ см, $AC = 9$ см, $\angle ABK = \angle BCK$. Найдите AB и отношение площадей треугольников ABK и ABC.

(6 см, 4 : 9)

26. Сколько сторон имеет выпуклый многоугольник, сумма углов которого вдвое больше суммы углов выпуклого девятиугольника?

(16)

27. Боковые стороны трапеции равны 3 см и 5 см. Найдите периметр этой трапеции, если известно, что в нее можно вписать окружность.

(16 см)

28. Можно ли построить четырехугольник, если около него можно описать окружность, а величины его углов относятся как:
а) 1 : 2 : 3 : 4; б) 5 : 5 : 9 : 10?

(а) Можно; б) нельзя)

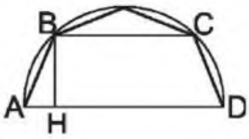


Рисунок 2

29. Мансардное покрытие дома образует в вертикальном сечении «половину» правильного восьмиугольника (рисунок 2). Найдите высоту BH мансардной комнаты $ABCD$, если $AD = 6$ м.

(≈ 2,1 м).

30. *Правильным паркетом называется такое покрытие плоскости правильными многоугольниками, при котором два многоугольника имеют либо общую сторону, либо общую вершину, либо не имеют общих точек, причем его можно наложить на самого себя так, что любая заданная его вершина совместится с любой другой заданной вершиной.*
Приведите примеры двух правильных паркетов, в вершинах которых сходятся: а) 5; б) 4; в) 3 многоугольника. Сколько всего существует правильных паркетов?

(Например, паркет, составленный из: а) правильных треугольников и квадратов; б) правильных треугольников и шестиугольников; в) квадратов и правильных восьмиугольников. Приведите другие примеры)

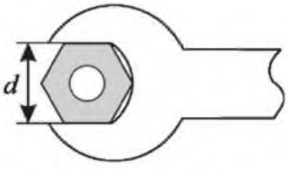


Рисунок 3

31. Найдите размер d гаечного ключа (рисунок 3), если сторона правильного шестиугольника гайки равна:
а) 10 мм;
б) 15 мм.

(а) 17; б) 26)

32. В окружность вписан треугольник, одна из сторон которого равна 6 см. Найдите расстояние от центра окружности до этой стороны, если угол треугольника, лежащий против нее, равен 60°.

($\sqrt{3}$ см)

33. Около треугольника ABC описана окружность радиусом 8 см. Найдите длину стороны AB, если известно, что длина стороны BC равна 12 см, а высота треугольника, проведенная к стороне AC, равна 5 см.

$\left(\frac{20}{3}\text{ см}\right)$

34. Найдите периметр треугольника ABC, если AB = 5 м, AC = = 9 м, $\sin A = 0{,}8$.

(($14 + 2\sqrt{13}$) м или ($14 + 4\sqrt{10}$) м)

35. Найдите площадь треугольника, длины сторон которого 12 мм, 16 мм и 21 мм.

(≈ 95,4 $мм^2$)

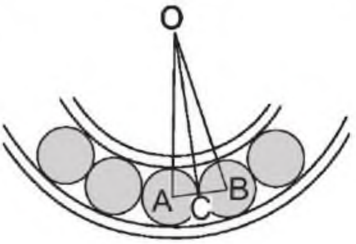


Рисунок 4

36. В подшипнике находится 18 стальных шариков (они лежат вплотную друг к другу). Найдите радиус r шарика, если радиус внешнего круга катания ($OB + r$) равен 60 мм (рисунок 4).

(≈ 9 мм)

37. а) Длины диагоналей параллелограмма равны 13 см и 19 см, а длина меньшей его стороны равна 11 см. Найдите длину большей стороны параллелограмма.
б) Длины сторон треугольника равны 11 см, 13 см и 16 см. Найдите длину медианы, проведенной к меньшей стороне.

(а) 12 см; б) 13,5 см)

38. Период обращения Земли вокруг Солнца примерно равен 365 суток. Расстояние от Земли до Солнца примерно равно 150 млн км. Найдите скорость (в км/с) вращения Земли вокруг Солнца.

(≈ 29,9 км/с)

39. Спутник вращается вокруг Земли со скоростью 7,9 км/с. За какое время он совершит полный оборот вокруг Земли? (Радиус Земли ≈ 6370 км, высота орбиты ≈ 500 км).

(1,5 ч.)

40. (*Занимательная задача*). Предположим, что Земля обтянута по экватору обручем. Если длину этого обруча увеличить на 1 м, то образуется зазор. а) Сможет ли кот пролезть через этот зазор? б) Если подобным образом обтянуть футбольный мяч и длину обруча также увеличить на 1 м, то зазор будет больше для Земли или для мяча?

$\left(\text{б) Для Земли и для мяча ширина зазора равна } \frac{1}{2\pi} \text{ м}\right)$

41. Две точки окружности делят ее на две дуги, разность градусных мер которых равна 50°. Вычислите длины этих дуг, если радиус окружности равен 8 см.

(≈ 21,6 см, ≈ 28,6 см)

42. Радиус закругления полотна железной дороги равен 1 км, дуга закругления содержит 20°. Найдите длину этой дуги.

(≈ 349 м)

43. а) Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 5 дм, а проекция меньшего катета на гипотенузу равна 1,8 дм. Найдите длину окружности, вписанной в этот треугольник.

б) Найдите длину окружности, описанной около прямоугольного треугольника, периметр которого равен 28 см, а площадь равна 48 см^2.

(а) ≈ 6,28 дм; б) ≈ 33,2 см)

44. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника, длины сторон которого – 15 см, 15 см, 24 см.

(12,5 см)

45. Найдите площадь оцинкованного железа, необходимого на изготовление ведра (без учета швов), если $\angle AOB = 115°$, $OB = BC$, диаметр дна ведра равен 20 см (рисунок 5).

($\approx 0{,}32$ м^2)

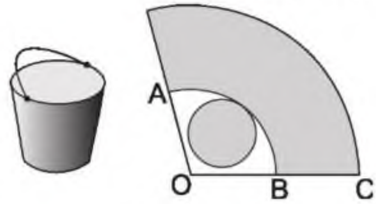


Рисунок 5

46. Найдите площадь поверхности куба, сумма длин всех ребер которого равна $\sqrt{12}$ дм.

(0,5 дм^2)

47. Какие размеры может иметь прямоугольный лист бумаги, из которого можно вырезать развертку куба с ребром 4 дм?

(12 дм × 16 дм, не менее)

48. Для выполнения отделочных работ внутри здания используют подмости (рисунок 6). Щит настила подмости закреплен на расстоянии $AA_1 = a$ от основания стойки и расстоянии $MA_1 = b$ от точки пересечения стоек. Расстояние между основаниями стоек $AB = c$. Найдите расстояние A_1B_1 между точками пересечения стоек с настилом.

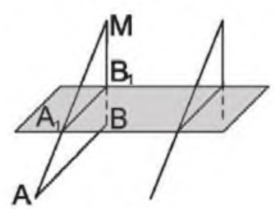


Рисунок 6

$\left(A_1B_1 = \dfrac{bc}{a+b}\right)$

49. Найдите длину гипотенузы прямоугольного треугольника, если длины его сторон образуют арифметическую прогрессию с разностью, равной 2 см.

(10 см)

50. Длина гипотенузы прямоугольного треугольника равна 12 см. Найдите длины его катетов, если известно, что длина большего катета равна среднему арифметическому длин меньшего катета и гипотенузы.

(9,6 см, 7,2 см)

51. а) Найдите наибольшую площадь четырехугольника, вписанного в окружность, радиус которой 9 см.

б) На расстоянии 8 м от центра O окружности радиуса 6 м взята точка M. Найдите наибольшую площадь треугольника OMX, где X – произвольная точка окружности.

(а) 162 $см^2$; б) 24 $м^2$)

52. В треугольнике ABC $AC = 2$ дм, $\angle A = 30°$, $\angle C = 45°$. Найдите высоту треугольника, проведенную к стороне AC.

(($\sqrt{3}$ – 1) дм)

53. Катеты прямоугольного треугольника равны 9 см и 40 см. Найдите расстояние от центра вписанной в треугольник окружности до центра описанной около него окружности.

(2,5$\sqrt{41}$ см)

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К УПРАЖНЕНИЯМ

1. а) $\angle M = \angle P = 45°$, $\angle N = \angle K = 135°$; б) $\angle B = \angle D = 130°$, $\angle A = \angle C = 50°$; в) $\angle F = 135°$, $\angle T = 100°$. **2.** Докажите, что $AB = CD$ и $AB \parallel CD$. **4.** $(24 + 4\sqrt{2})$ см, 40 см^2. **5.** 120°, $a^2\sqrt{3}$. **6.** 9 см^2. Проведите высоту через точку пересечения диагоналей и докажите, что она равна полусумме оснований трапеции. **7.** а) 45°, 135°, 45°, 135°; б) 11 см. **8.** 32 см. **9.** а) 55°. Установите вид ΔABC и ΔADC; б) 5 см, 4 см, 3 см. **10.** Используйте свойство медиан и теорему Фалеса. **11.** 35 см. Установите, что точка O – центр окружности, описанной около данного треугольника. **12.** $9\sqrt{3}$ см^2. **13.** 2 см. **14.** 8 см, 15 см. Используя свойство касательных, проведенных к окружности из одной точки, обозначьте катеты и составьте уравнение по теореме Пифагора. **15.** а) $2\sqrt{10}$ см, $6\sqrt{10}$ см, 20 см; б) 15 см, $5\sqrt{3}$ см, $5\sqrt{6}$ см. **16.** $1\frac{5}{37}$ см. **17.** 1 : 4. **18.** Пусть $BC = a$. Выразите через a гипотенузу и отрезки BH и AH. Далее выразите через a и h площади указанных треугольников и найдите их отношение. **19.** $4\sqrt{3}$ см, $16\sqrt{3}$ см^2. **20.** $(\sqrt{3} - 1)$ дм. Обозначьте высоту BD и отрезок DC через x, тогда $AD = 2 - x$, и составьте пропорцию, выразив tg A из ΔABD. **21.** $10\sqrt{3}$ см. **22.** $\approx$ 1300 м. Пусть $OA = x$. Выразите катеты OA и OC из ΔAOB и ΔCOB, используя котангенсы углов A и C. **23.** 10 см. Пусть дан ΔABC, в котором $AB = BC$, надо найти медиану AM. Продлите AM и отложите отрезок $MN = AM$, тогда $ABNC$ – параллелограмм. Используйте свойство сторон и диагоналей параллелограмма. **24.** Сначала найдите сторону AB, используя свойство сторон и диагоналей параллелограмма (как в задаче 23). **25.** 2,4 см. Найдите площадь ΔABC и составьте уравнение, выразив площадь ΔABC как сумму площадей треугольников ABD и CBD. **26.** а) $C(5; 0)$; б) (5; 0), (0; 10). **27.** Используйте единичную полуокружность с центром в начале координат и определение тригонометрических функций углов от 0° до 180°. Задача имеет: а) два решения; б) одно решение. **28.** $x^2 + (y - \sqrt{3})^2 = 12$. Сначала установите вид треугольника и найдите координаты центра и радиус искомой окружности. **29.** 24 кв. ед. Установите вид четырехугольника *ABCD*. **30.** 500 км. **32.** В случае б). **33.** а) и г) – верно; б) и в) – неверно. **34.** Верно. **35.** а) 13 см; б) 6,5 см; в) 2,5 см. **36.** 4,5 см и 7,5 см. **38.** б) Не равны. **39.** а) не равны. **40.** а) Отрезок, равный данному; б) треугольник, равный данному. **41.** а) 12 см; б) 8 см; в) $2\sqrt{43}$ см. **43.** Воспользуйтесь неравенством треугольника для неколлинеарных векторов. Установите, что знак равенства имеет место для коллинеарных векторов или если один из векторов или оба равны $\vec{0}$. **44.** По определению разности векторов. **46.** Используя правило многоугольника и определение разности векторов, найдите векторы, которым равны правая и левая части равенств. **47.** 15 векторов, их сумма равна $\vec{0}$ по правилу многоугольника. **49.** а) 4; б) $\sqrt{5}$; в) 0; г) $2\sqrt{5}$. **50.** $\overrightarrow{MK} = \vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{MN} = \vec{b} + \vec{a}$, $\overrightarrow{PN} = \vec{a} - \vec{b}$, $\overrightarrow{PK} = -\vec{a} - \vec{b}$. **51.** Установите, что $AD = 2BC$. $\overrightarrow{CB} = -\vec{a}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b} + \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{a}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{b} - (\vec{a} + \vec{a})$. **53.** Выразите вектор $\vec{x}$ из каждого равенства а) и б), представьте его в виде суммы векторов и примените правило многоугольника. **54.** а) Используйте свойство переноса вектора из одной части равенства в другую и определение разности векторов. б) Найдите, каким векторам равны выражения в правой и левой частях равенства. **55.** а) 8 см; б) 0. **56.** 4 см. Докажите, что сумма $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ равна вектору, противоположному $\overrightarrow{OC}$. **61.** Постройте, например, три одинаково направленных вектора и установите, что один из них параллелен вектору, равному как сумме, так и разности двух других векторов. **62.** а) $3\frac{1}{2}\vec{x} - 2\frac{1}{2}\vec{y}$; б) $3\frac{1}{3}\vec{x} + 4\frac{2}{3}\vec{y}$; в) $-0{,}55\vec{x} - 0{,}05\vec{y}$. **63.** $\overrightarrow{AM} = \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$, $\overrightarrow{CO} = \frac{3}{4}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$. **64.** $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$, $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$, $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{4}(\vec{b} - \vec{a})$, $\overrightarrow{DM} = -\frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b})$. **66.** Не могут. Предположив, что $\vec{a} = k\vec{b}$, установите, что из этого следует коллинеарность векторов $\vec{m}$ и $\vec{n}$, что противоречит условию. **67.** $x = \frac{8}{7}$, $y = -\frac{6}{7}$. **68.** Используя правило многоугольника, выразите вектор $\overrightarrow{MN}$ двумя способами и сложите левые и правые части полученных равенств. **69.** а) $\overrightarrow{MK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC})$. Выразите вектор $\overrightarrow{MK}$ двумя способами и сложите левые и правые части полученных равенств. б) $|\overrightarrow{MK}| = 5$ см. **70.** Выразите каждый из векторов, соединяющих точку O с серединой отрезка, через векторы, соединяющие точку O с концами отрезка (смотрите решение задачи 2 пункта 3), и сложите левые и правые части полученных равенств. **71.** Докажите, что векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$ коллинеарны. **72.** $\overrightarrow{NK} = \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AD} = ...$, $\overrightarrow{ML} = ...$, докажите, что $\overrightarrow{NK} = \overrightarrow{ML}$. **73.** $\overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OC}$. **74.** а) $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} - \frac{3}{5}\overrightarrow{AD}$. **75.** а) $\overrightarrow{AM} = \frac{4}{9}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{9}\overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{AM} = \frac{8}{9}\overrightarrow{AD} - \frac{4}{9}\overrightarrow{BD}$. **76.** а) $\overrightarrow{MO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$; б) $\overrightarrow{CM} = 1\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$. **77.** Используя формулу $CH^2 = AH \cdot HB$, составьте уравнение и найдите, в каком отношении точка H делит гипотенузу. $\overrightarrow{CH} = \frac{4}{5}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{CA}$. **78.** $\overrightarrow{MK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. **79.** $\overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}) = ...$. **80.** $\vec{m} = \frac{3}{7}\vec{b} + \frac{2}{7}\vec{a}$, $\vec{n} = \frac{2}{7}\vec{b} - \frac{1}{7}\vec{a}$. **81.** Докажите, что векторы $\overrightarrow{MK}$ и $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{PN}$ и $\overrightarrow{DB}$ коллинеарны: $\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AM} = \frac{2}{7}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{7}\overrightarrow{AD} = ...$, $\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{CP} = ...$. **82.** Нарисуйте данный треугольник в системе координат. Учитывая, что C – точка пересечения биссектрис этого треугольника, установите, что $CN : OC = 5 : 4$ (O – начало координат). Далее $\overrightarrow{CN} = -\frac{5}{4}\overrightarrow{CO} = ... = -\frac{5}{8}(\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{CK})$. **83.** Учитывая, что D – точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам данного треугольника, установите, что $D(0; y)$, и найдите y, составив уравнение: $AD^2 = CD^2$. Далее, так как $DC : DO = 5 : 3$, то $\overrightarrow{DC} = \frac{5}{3}\overrightarrow{DO} = ... = \frac{5}{6}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB})$. **84.** Постройте параллелограмм $OMCN$ с диагональю OC и сторонами, лежащими на прямых OA и OB. Далее из прямоугольных треугольников CAO и CAM установите, что: а) $AO = AM$, $\overrightarrow{OC} = 2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$; б) $AM : AO =$

$= 1 : 3$, т. к. $AM = AC \cdot \text{tg } 30°$, $AO = AC \cdot \text{tg } 60°$, значит, $\overrightarrow{OC} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.

85. а) $\overrightarrow{AB}(5; -5)$; б) $\overrightarrow{AB}(-20; 14)$. **86.** а) $B(4; 3)$; б) $B(1,5; 1,5)$. **87.** а) $A(3; 0)$ или $A(3; 6)$; б) $A(16; 13)$ или $A(0; 13)$. **88.** а) $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 15$, $|\vec{c}| = 2$, $|\vec{d}| = 1,3$; б) $\vec{m}(5; 4)$, $\vec{n}(0; -13)$; в) $|\vec{c}| = 5$, $|\vec{d}| = 10$. **89.** $\vec{a} = 2\vec{c}$, $\vec{b} = -\frac{2}{3}\vec{d}$. **90.** $y = -3$. **91.** Имеются, это векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$. **92.** а) $|\vec{a}| = |\vec{c}| = 1$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{d}| = 0,5$; б) $\vec{b} = 3\vec{a}$, $\vec{a} = -2\vec{d}$, $\vec{b} = -6\vec{d}$. **93.** Запишите координаты каждого вектора и учтите, что они равны координатам конца вектора. **94.** $\vec{a}(2; -1)$, $\vec{b}(-1; 2)$, $\vec{c}(1,5; -1,5)$, $\vec{d}(-2; -0,5)$. **95.** а) $\vec{c}(6; 1)$, $|\vec{c}| = \sqrt{37}$; б) $\vec{d}(-3; 2)$, $|\vec{d}| = \sqrt{13}$. **96.** а) $\vec{m}(5; 14)$; б) $\vec{n}(-3; -15)$. **97.** $M(-1; 1)$, $K(-2; 5)$. **98.** $\vec{a} = \overrightarrow{MA}$, $A(2; 4)$; $\vec{b} = \overrightarrow{MB}$, $B(0; -2)$; $\vec{c} = \overrightarrow{MC}$, $C(-1; 0,5)$. **99.** а) $x = 1$, $y = 2$; б) $x = 2$, $y = 2$. **100.** Найдите координаты векторов $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{OK}$ и установите, что $|\overrightarrow{OM}| = |\overrightarrow{OK}| = \sqrt{13}$. **101.** а) (2; 1); б) (3; 3). **102.** а) 75°; б) 150°; в) 105°. **103.** а) 60°; б) 120°; в) 180°; г) 0°; д) 90°. **104.** а) –10; б) 2,29. **105.** 16. **106.** а) 32; б) 0; в) 75. **107.** а) 18; б) –15. **108.** а) 4; б) 0; в) –8; г) –12. **109.** 135°. **110.** 30°. **112.** $-\frac{1}{2}$ или 1. **113.** 16. **114.** 250. Постройте вектор, равный $\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC}$, и найдите его длину из прямоугольного треугольника. **116.** 48. **117.** $\sqrt{12}$. Найдите $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2$. **118.** $AC^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})^2 = \ldots$, $DB^2 = (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD})^2 = \ldots$. **119.** а) Так как $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$; б) так как $0 \leq \cos^2\alpha \leq 1$. **120.** Постройте в координатной плоскости $\angle AOx = 45°$ и $\angle BOx = 30°$ так, чтобы их сумма была равна 75°. Пусть $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = 1$, тогда $\overrightarrow{OA}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\overrightarrow{OB}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$. Далее найдите $\cos\angle(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$. **121.** ≈ 275 Н. **122.** 1,5 Н. Пусть груз лежит на наклонной плоскости OM, ON – линия горизонта, $\angle MON = 30°$. Точка A – центр тяжести груза. Вектор $\overrightarrow{AC}$, изображающий вес груза, перпендикулярен ON и $|\overrightarrow{OC}| = 3$. Разложите вектор $\overrightarrow{AC}$ по двум перпендикулярным векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB} \perp OM$, $\overrightarrow{AD} \parallel OM$. Чтобы груз находился в покое, к нему нужно приложить силу, которая изображается вектором $\overrightarrow{AF}$, противоположным вектору $\overrightarrow{AD}$. $|\overrightarrow{AF}| = |\overrightarrow{AD}|$. Длину вектора $\overrightarrow{AD} = BC$ найдите из прямоугольного ΔABC, установив, что $\angle BAC = 30°$. **123.** ≈ 51 км/ч. Скорость птицы относительно земли – это вектор $\overrightarrow{AC}$, равный сумме векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$, изображающих собственную скорость птицы и скорость ветра соответственно. Так как $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$, то $|\overrightarrow{AC}| = AC$ – гипотенузе прямоугольного ΔABC. **124.** 60°. Пусть $\vec{F} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{Q} = \overrightarrow{AD}$, равнодействующая этих сил – вектор $\overrightarrow{AC}$. Установите, что $ABCD$ – ромб, пусть O – точка пересечения его диагоналей. Из ΔBAO найдите $\cos\frac{\angle A}{2}$. **125.** Нет, так как $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = 0$ (смотрите решение задачи 2 в пункте 2). **126.** а) $\approx 125°$; б) $\approx 55°$. Косинус искомого угла найдите по формуле $\cos\angle C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$, где a, b, с – стороны ΔABC (смотрите решение задачи 2 пункта 7). **127.** $-\frac{8}{3}$. **128.** На заданной прямой выберите две точки, например, A и B, и найдите скалярное произведение векторов $\vec{m}$ и $\overrightarrow{AB}$. **129.** а) $x + 2y - 8 = 0$; б) $5x + 19y - 215 = 0$. Используйте уравнение, полученное при решении задачи 3 пункта 7. **130.** Нет, так как таких векторов бесконечно много. **131.** а) $y = 2x + 6$, найдите координаты точек M и N и составьте уравнение прямой, используя вывод, полученный при решении задачи 3 пункта 7; б) $y = 6x - 19$, пусть $(x; y)$ – координаты точки H, запишите координаты векторов $\overrightarrow{BH}$ и $\overrightarrow{AC}$ и используйте условие их перпендикулярности. **132.** $\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 135°$, угол между прямыми равен 45°, так как это наименьший из углов, образованных прямыми при пересечении. **133.** а) $\approx 62°$; б) $\approx 72°$. Постройте заданные прямые, выберите на них по две точки и найдите косинус угла между векторами, лежащими на них. Учтите указание, данное к решению задачи № 132. **134.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **135.** а) 70 кв. ед.; б) 15 кв. ед. **136.** 21 кв. ед. **137.** 4 см, 10 см. Используйте теорему о пропорциональных отрезках, доказанную в пункте 4. **138.** $2(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ см. Используйте задачу 4 пункта 6. **139.** 120°. **140.** Пусть $ABCD$ – ромб, выразите векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{DB}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ и найдите скалярное произведение $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$. **141.** Найдите сумму векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$ по правилу треугольника и установите, что $(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) \uparrow\uparrow \overrightarrow{MN}$. **142.** а) 7; б) $5\sqrt{2}$. Найдите:

$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = (\vec{a}+\vec{b})^2 = ...$. **143.** Пусть дан параллелограмм $ABCD$, выразите векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{DB}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$, найдите $\overrightarrow{AC}^2$ и $\overrightarrow{DB}^2$ и сложите левые и правые части полученных равенств. **144.** $6R^2$. $MA^2 = |\overrightarrow{MA}|^2 = (\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA})^2 = ...$, $\overrightarrow{MB}^2 = ...$, $\overrightarrow{MC}^2 = ...$. Далее найдите сумму $MA^2 + MB^2 + MC^2$, при этом учтите, что $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ (смотрите решение задачи 2 в пункте 2). **145.** Пусть прямые, содержащие высоты BH и AK треугольника ABC, пересекаются в точке O. Докажите, что прямая OC содержит высоту CN этого треугольника, то есть докажите, что прямые OC и AB перпендикулярны. Для этого обозначьте векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ и выразите векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = ...$, $\overrightarrow{CA} = ...$. Запишите, чему равны скалярные произведения: $\vec{a} \cdot \overrightarrow{BC}$, $\vec{b} \cdot \overrightarrow{CA}$, сложите левые и правые части полученных равенств. Далее установите, что $\vec{c} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, что означает перпендикулярность прямых OC и AB. **146.** Пусть M и N – середины хорд AB и CD соответственно, тогда $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}) + ...$. **147.** Установите, что все такие точки X лежат на: а) окружности с диаметром AB; б) окружности с центром в точке B и радиусом, равным AB; в) серединном перпендикуляре к отрезку AB. **148.** 3B) $\frac{1}{10}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$; 4B) 150°; 5C) $3x - 5y - 2 = 0$. **153.** а) $\vec{m} = \overrightarrow{KC}$. **154.** б) $\angle ACB$, где A, B – центры окружностей. **156.** Например, поворот по часовой стрелке на 120° вокруг точки O и осевая симметрия относительно прямой BO. **157.** б) Для каждой вершины многоугольника должен быть образ – другая его вершина, следовательно, вершин должно быть четное число. **158.** а) Постройте точку A_1, например, симметричную точке A относительно данной прямой. Пусть отрезок A_1B пересекает данную прямую в точке C. Докажите, что ΔABC имеет наименьший периметр, сравнив $A_1X + XB$ и A_1B, где X – произвольная точка данной прямой. **159.** Решение аналогично решению задачи № 158. Постройте точки: A_1, симметричную точке A относительно прямой a, и B_1, симметричную точке B относительно прямой b. Пусть отрезок A_1B_1 пересечет прямые a и b в точках M и N соответственно.

Взяв другие точки M_1 и N_1, докажите, что путь $AMNB$ – кратчайший, сравнив длину ломаной $A_1M_1N_1B_1$ и длину отрезка A_1B_1. **160.** Пусть платформа MK имеет длину a. Выполните параллельный перенос пункта A на вектор $\vec{a}$, получите точку A_1. Постройте точку A_2, симметричную точке A_1 относительно прямой, на которой должна быть платформа. Отрезок A_2B пересечет эту прямую в точке K, M – вершина параллелограмма AA_1KM. Тогда длина дороги $AMKB$ – наименьшая. **161.** Серединный перпендикуляр к отрезку O_1O_2, где O_1, O_2 – центры данных окружностей. **162.** а) 72°; б) BD или FB. **163.** а) Постройте окружность с центром O и разделите ее на 6 равных частей. Обозначьте точки деления, например, A, B, C, D, E, F, и докажите, что шестиугольник $ABCDEF$ удовлетворяет условию задачи. б) Центром симметрии этого шестиугольника является центр O окружности, осей симметрии – шесть, укажите их. **164.** а) 120°; б) выполните поворот вокруг центра O треугольника на 120° по часовой стрелке (или против часовой стрелки). **165.** а) $y = 2x - 5$; б) $y = -\frac{1}{2}x + 2$. **167.** $S_1 : S = 4$. **168.** б) $C_1M_1 = 1{,}25$, $C_2M_2 = 3{,}75$. **169.** б) 3,6 см. Выразив площадь ромба $ABCD$ двумя способами, найдите его высоту, затем, используя свойства подобия, найдите высоту построенного ромба. **170.** 4 см. Докажите, что ΔBDE и ΔBAC гомотетичны, а значит, подобны. **171.** Постройте отрезок OH, перпендикулярный данной прямой, и через середину C отрезка OH проведите хорду $AB \perp OH$. Докажите, что при гомотетии с центром в точке O и коэффициентом 2 точки A и B отобразятся на точки A_1 и B_1, принадлежащие данной прямой. **172.** Пусть проведены два радиуса OA и OB. Через середину C меньшей дуги AB проведите касательную к данной окружности. Пусть лучи OA и OB пересекут ее в точках A_1 и B_1 соответственно. Отложите на касательной отрезки $M_1A_1 = A_1B_1 = B_1N_1$ и проведите лучи OM_1 и ON_1. Пусть они пересекут данную окружность в точках M и N соответственно, тогда MN – искомая хорда. Докажите, что хорда MN лучами OA и OB делится на три равные части. **173.** а) Нет; б) подобны. **174.** $AC = 4$ см, $C_1B_1 = 14$ см. **175.** б) Подобны, $k = \frac{1}{2}$. **176.** а) 2; б) 4,5; в) 4. **177.** 24 см. **178.** а) 12 см, 36 см; б) 3 м. Установите, какие углы треугольников ABC и ACD равны. **179.** 8,67 м. **180.** $33\frac{1}{3}$ см^2. **181.** 16 см. **182.** 6 см. **183.** Подобны по второму признаку. **184.** $AC = 8$ см, $MK = 12$ см. **185.** Подобны по третьему признаку. **186.** 1 060 км, 1 210 км, 1 370 км. **187.** а) $2\sqrt{7}$ м; б) $4\frac{1}{6}$ дм. **188.** а) Подобны, $k = 1$; б) подобны, $k = \frac{1}{2}$. **189.** 0,96 см^2, 3,84 см^2. **190.** 4,8 см. Докажите, что $\Delta ACD \sim \Delta CBD$. **191.** а) $\frac{2}{5}$; б) $\frac{4}{25}$. Докажите, что два любых квадрата подобны. **192.** а) 100 см, 60 см; б) 22 см, 26 см. **193.** в) 6 м, 2 м, 7,5 м. **194.** а) $128\sqrt{3}$ см^2; б) $0{,}32\sqrt{3}$ см^2. **195.** а) 6; б) 0,3. **196.** а) $30\sqrt{2}$ см. **197.** а) 9 см^2; б) 16 см^2. **198.** б) 2 : 1. **199.** а) На 800 %; б) на $88\frac{8}{9}$ %. **200.** Искомый отрезок равен $\sqrt{ab}$. Он равен высоте прямоугольного треугольника, проведенной к гипотенузе длиной $a + b$. Постройте окружность с диаметром $KL = KH + HL$, где $KH = a$, $HL = b$, и перпендикуляр HS к диаметру KL (S – точка пересечения его с окружностью). Докажите, что $SH = \sqrt{ab}$. Далее постройте этот отрезок с концами на боковых сторонах трапеции $ABCD$ (как в задаче 3 пункта 13). **202.** 2 400 м. **203.** 105 м. **204.** а) 34,5 м. **205.** 4 см и 12 см. **206.** 14,4 см. **207.** $16(3 - \sqrt{3})$ см. **208.** а) 1,5 см, 2 см, 2,5 см; б) 3,6 см. **209.** 2,5 см. Проведите перпендикуляр OK к боковой стороне BC равнобедренного ΔABC (O – центр описанной окружности) и рассмотрите подобные треугольники OBK и CBH (BH – высота ΔABC). **210.** 4,2 см. Используйте свойство касательных, проведенных к окружности из одной точки, и подобие треугольников. **211.** 32 см. **212.** $8\sqrt{2}$ см. Запишите отношение площадей данного треугольника и треугольника, отсеченного указанной прямой, и найдите коэффициент их подобия. **213.** 90 см^2. **214.** 5 см^2. **215.** $\frac{5}{18}$. **216.** $\approx 18{,}3$ см^2. **217.** $4(\sqrt{5} - 1)$ см. **218.** $\angle H = 70°$, $\angle K = 50°$. **219.** Продлите сторону AC и отложите на ней отрезок $CF = a$. Докажите, что $\Delta ABC \sim \Delta AFB$. **220.** б) $\frac{4}{9}$; в) $\frac{3}{4}$. Используйте свойство: медианы делят треугольник на 6 равновеликих треугольников. **221.** Докажите, что $AC = BD$ и $ABCD$ – прямоугольник. **222.** 0,96. Найдите косинус угла между векторами $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, используя их скалярное произведение. **223.** $C(0; -2)$. Используйте равенство векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$. **224.** Пусть дан угол A и точка M внутри него. Центр окружности, вписанной в данный угол, лежит на его биссектрисе AO. Сначала постройте окружность с центром в точке O, касающуюся сторон угла A. Далее рассмотрите гомотетию с центром в точке A. Луч AM пересекает построенную окружность в двух точках, например, K и N. Каждая из этих точек может отображаться на точку M, поэтому задача имеет два решения. Пусть N переходит в точку M, тогда для нахождения центра O_1 искомой окружности постройте $MO_1 \parallel NO$, O_1 – точка пересечения биссектрисы AO и прямой MO_1. Радиус искомой окружности равен расстоянию от точки O_1 до стороны угла A. **225.** 2A) $\frac{5}{2}$; 3B) 90 см^2, 160 см^2; 4B) 6 см; 5C) сначала постройте прямоугольник $AB_1C_1D_1$, гомотетичный $ABCD$ (с центром гомотетии в точке A), в котором $AB_1 : AC_1 = 2 : 3$, а затем прямоугольник $ABCD$, в котором $AD = 5$ см. **226.** а) 15 см. **227.** ≈ 3,2 см, ≈ 3,8 см; **228.** а) $1 : \sqrt{3} : 2$; б) 588 : 743 : 995. **229.** а) ≈ 6,88 дм; б) ≈ 11,1 см или ≈ 12,9 см. **230.** ≈ 44°, ≈ 76°. **231.** а) ≈ 40,6 дм, ≈ 75,4 дм^2; б) ≈ 23,4 см^2. **232.** а) $BC = 6$ см, $AB \approx 4,4$ см, $AC \approx 3,1$ см; б) ≈ 188 млн га. **233.** а) $6(\sqrt{3} + 3)$ см, ≈ 37°, ≈ 83°; б) $5(7 + \sqrt{3})$ см, ≈ 22°, ≈ 128°. **234.** ≈ 7,7 см. **235.** 1 дм. **236.** а) 14 см; б) 13 см. **237.** ≈ 1,4 дм. **238.** а) ≈ 14,6 см или ≈ 24,1 см. **239.** а) ≈ 20,1 м^2; б) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. Выразите стороны BC и AC через AB и, используя теорему косинусов, найдите косинус угла C. **240.** а) ≈ 1,06 дм, ≈ 2,32 дм; б) $\sqrt{31}$ см, $\sqrt{91}$ см, 12 см. **241.** а) 3,5 см; б) 44 см. Составьте уравнение, используя свойство сторон и диагоналей параллелограмма. **242.** а) Достройте треугольник до параллелограмма с диагоналями, равными a и $2m_a$, и используйте свойство сторон и диагоналей параллелограмма; б) 7 см. **243.** а) 6 см, 8 см. Используя формулу, выражающую длину медианы через стороны треугольника (задача № 242, а), составьте и решите систему двух уравнений с двумя переменными. б) $3\sqrt{5}$ см. Обозначив, например, $KN = x$, $KM = y$, и, используя теорему Пифагора для треугольников AKN и BKM, составьте систему уравнений. Решив ее, найдите длину медианы AM, равную $3y$. Далее составьте уравнение, используя формулу для длины медианы. **244.** а) 90°, ≈ 22°, ≈ 68°; б) ≈ 74°, ≈ 48°, ≈ 58°; в) ≈ 117°, ≈ 26°, ≈ 37°; г) 90°, ≈ 39°, ≈ 51°. **245.** а) 120°. Найдите стороны треугольника, используя свойство биссектрисы. б) $(12 + 8\sqrt{2})$ см. Используя формулу площади треугольника ($S = \frac{1}{2}ab\sin C$) и теорему косинусов, составьте систему двух уравнений с двумя переменными. **246.** 90°. Исходя из условия задачи, составьте равные разности квадратов соседних сторон четырехугольника. Применив теорему косинусов, установите, при каком значении искомого угла эти разности равны. **247.** а) ≈ 7,4 см, ≈ 40°, ≈ 30°; б) ≈ 6,37 дм, ≈ 15°, ≈ 125°; в) ≈ 1,5 см, ≈ 40°, ≈ 20°; для нахождения стороны AC составьте уравнение по теореме косинусов; г) задача не имеет решений. **248.** а) ≈ 6,3 дм, ≈ 7,4 дм^2; б) ≈ 44,9 см^2. **249.** а) ≈ 2,0 см; б) ≈ 11 см, ≈ 8,6 см. **250.** ≈ 1230 см^2. **251.** ≈ 60,4 см^2. **253.** а) $\sqrt{2}$ дм; б) ≈ 3,5 см, ≈ 2,7 см. **254.** ≈ 87°. **255.** 8°. **256.** 2 дм. Пусть высоты пересекаются в точке O. Найдите $\angle B$ четырехугольника $KOHB$, далее стороны AB и BC из прямоугольных треугольников BAH и BCK соответственно. **257.** $\frac{\sqrt{21}}{14}$, $\frac{\sqrt{21}}{7}$. Используя теорему косинусов, из ΔABD выразите BD через сторону данного равностороннего треугольника. Далее примените теорему синусов к треугольникам ABD и CBD. **258.** а) $\cos B = -\frac{7}{18}$. Проведите диагональ AC ромба и установите, что AL – биссектриса ΔABC. Используя ее свойство, выразите сторону AC. б) $\frac{2 + \cos\alpha}{\sqrt{5 + 4\cos\alpha}}$. Пусть $BC = a$, $AB = 2a$, M – середина стороны AB. Косинус угла BAC найдите из ΔAMC, выразив его стороны MC и AC через a и $\cos\alpha$ (применяя теорему косинусов для ΔMBC и ΔABC). **259.** Используя теорему синусов, выразите стороны a и b через c и синусы соответственных углов. Получите равенство $\frac{\sin\alpha}{c\cdot\sin 4\alpha} + \frac{\sin\alpha}{c\cdot\sin 2\alpha} = \frac{1}{c}$ или

$\frac{\sin\alpha}{\sin 4\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha}=1$. Далее сложите дроби в левой части равенства, замените в числителе сумму ($\sin\alpha + \sin 4\alpha$) на произведение и сократите дробь. При этом учтите, что для углов этого треугольника выполняется равенство $\sin 4\alpha = \sin 3\alpha$, так как $\sin\angle A = \sin(180° - (\angle B + \angle C)) = \sin(\angle B + \angle C)$. **260.** Используйте равенство накрест лежащих углов. **261.** Постройте соответствующие центральные углы. **262.** 80° или 100°. **263.** а) 30° или 150°; б) 120° или 60°. **264.** а) 30° или 105°; б) 64°. **265.** 84° и 42° или 148° и 106°. **266.** 66,5°. **267.** 47°. **268.** 1,4 дм. Используйте свойство диагоналей равнобедренной трапеции и средние пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике. **269.** Множеством точек, из которых отрезок AB виден под углом 40°, является дуга окружности с центром O. Сначала постройте равнобедренный ΔAOB, в котором $AB = 4$ см, $\angle A = \angle B = 50°$, и окружность с центром O и радиусом OA. Затем найдите на этой окружности точку C, удаленную от прямой AB на расстояние, равное 5 см. **270.** 52,5°. **271.** 28° и 34°. **272.** а) 8 см; б) 33 см; в) ≈ 55° или ≈ 61°. **273.** 3,2 см и 1,8 см. Используйте следствие из теоремы о свойстве двух пересекающихся хорд: $AC \cdot CB = R^2 - d^2$. **274.** 13 см. **275.** 6 см. **276.** а) $4\sqrt{2}$ см; б) 5,25 см. **277.** Проведите касательную MN и примените теорему о свойстве касательной и секущей. **278.** Пусть AB пересекает MN в точке C. Запишите, чему равны NC^2 и MC^2. **279.** а) Пусть луч AN пересекает окружность в точке F, тогда ΔADF – прямоугольный. Выразите углы FAD и HAN из прямоугольных треугольников и сравните их, учитывая, что дуги BF и FC равны; б) установите, что ΔBFC – равнобедренный, следовательно, $FM \perp BC$, значит, $FM \parallel AH$... **280.** а) $4\sqrt{2}$ см; б) 4 дм. **281.** а) 60° или 120°; б) 150°. **282.** ≈ 3,3 см. **283.** а) 1) $\frac{9}{2}$ см; 2) $9\frac{3}{8}$ см; б) ≈ 2,0 см. **284.** а) 21 см^2; б) 90°. **285.** а) 84 см^2; б) $8{,}75\sqrt{119}$ см^2. **286.** ≈ 19,1 см^2; ≈ 5,8 см. **287.** ≈ 4,5 см; ≈ 14,3 см; ≈ 32,3 см^2. **288.** 8,45 см. **289.** 2 см. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с гипотенузой 13 см, равен $\frac{a+b-13}{2}$, где a и b – катеты этого треугольника. Для нахождения суммы катетов составьте систему уравнений, записав площадь треугольника двумя способами и используя теорему Пифагора: $\begin{cases} \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \cdot \frac{60\sqrt{2}}{17} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(a+b), \\ a^2 + b^2 = 169. \end{cases}$ **290.** а) 3 см, $3\sqrt{3}$ см; б) ≈ 20 см. **291.** 30 см, $6\sqrt{5}$ см, $12\sqrt{5}$ см, $\approx 27°$, $\approx 63°$. **292.** а) $\approx 41°$, $7{,}5\sqrt{7}$ см^2; б) $\approx 31{,}5$ см^2. **293.** 10 см, 12 см, $2\sqrt{91}$ см. **294.** $2\sqrt{13}$ см. Пусть даны угол A и точка D внутри него. Расстояния от точки D до сторон угла: $DB = 2$ см и $DC = 5$ см. Продлите CD до пересечения со стороной AB данного угла в точке F, тогда ΔAFC – прямоугольный с углом 30°. Найдите FD, AC, используя sin 30° и tg 30°, затем AD по теореме Пифагора. **295.** Можно. Постройте треугольник со сторонами AC, $AB + BC$ и углом A между ними. Найдите неизвестные углы этого треугольника и примените теорему синусов. **296.** $\frac{10\sqrt{2}}{3}$ см. Можно составить уравнение, выразив площадь треугольника двумя способами. **297.** 6 см. Пусть $a = 5$ см, $b = 20$ см. Можно найти отрезки m и n, на которые биссектриса делит сторону треугольника, а затем применить формулу $l = \sqrt{ab - mn}$ (смотрите пункт 20, задача 2). **298.** ≈ 129 м. **299.** $\approx 92{,}8$ см^2. Обозначив одну из сторон треугольника x, выразите через x его другие стороны и составьте уравнение, записав площадь треугольника двумя способами. **300.** Выразите площади равностороннего треугольника и наибольшую площадь прямоугольного треугольника через радиус описанной окружности и сравните полученные выражения с $\frac{1}{2}\pi R^2$. **301.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см. Пусть в ΔABC вписана окружность с центром в точке O. Через точку касания двух окружностей проведите прямую, параллельную основанию треугольника и пересекающую его другие стороны в точках M и N. Проведите высоту BH и выразите радиус OH через сторону данного треугольника. Так как $\Delta MBN \sim \Delta ABC$, то отношение радиусов окружностей, вписанных в эти треугольники, равно коэффициенту их подобия, то есть $\frac{1}{3}$. **302.** а) $2m^2 + 2R^2$. Установите, что $\angle AOC =$

$= \angle BOD$. Пусть $\angle AOC = \alpha$, тогда $\angle AOD = 180° - \alpha$. Из треугольников OMC и OMD выразите CM^2 и MD^2 и сложите полученные равенства. б) 60°. Пусть $\angle CBH = \alpha$, $\angle ABH = 2\alpha$. Составьте уравнение, например, относительно $\operatorname{tg}\alpha$, выразив высоту BH из прямоугольных треугольников CBH и ABH. При этом используйте формулу $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$. **303.** Пусть даны прямые m, n и точка C. Предположим, что такой ΔABC построен ($A \in n$, $B \in m$). Его площадь будет наименьшей, если длины его катетов наименьшие. Наименьшее расстояние от точки C до прямых n и m – это длины перпендикуляров $CN = a$ и $CM = b$ соответственно. Выразив длины катетов AC и CB из прямоугольных треугольников ACN и BCM через a, b и синусы соответственных углов, найдем, при какой величине угла ACN искомая площадь будет наименьшей. Получим $S = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{\cos\alpha} \cdot \frac{b}{\sin\alpha} = \frac{ab}{\sin 2\alpha}$, где $\alpha = \angle ACN = 45°$. **304.** а) $8\sqrt{5}$ см; 32 см²; б) ≈ 96 м². **305.** $AB = 6\sqrt{2}$ см, $AC \approx 6{,}2$ см, $BC \approx 4{,}4$ см. **306.** а) $\angle C = 15°$, $AC \approx 11{,}6$; $BC \approx 18{,}6$; б) $\angle A = 81°$, $AC \approx 4{,}9$; $AB \approx 8{,}2$. **307.** $BC = \sqrt{19}$ см, $\angle C \approx 36°$, $\angle B \approx 84°$. **308.** $AC \approx 45{,}8$ м; $AB \approx 33{,}4$ м. **309.** ≈ 9,4 см; ≈ 7,7 см. **310.** а) 30° и 150°; б) 60° и 120°. **311.** а) ≈ 3,8 см, ≈ 9,2 см, ≈ 35 см²; б) ≈ 6,88 м, ≈ 9,83 м. **312.** а) ≈ 201 см²; б) ≈ 0,4 дм. **313.** а) 8 м; б) ≈ 17,0 м. Используйте свойство, известное из курса алгебры 8 класса: если произведение ab – постоянное, то сумма $a + b$ будет наименьшей при $a = b$. **314.** 1А) ≈ 3,94 м, ≈ 2,57 м; 2А) ≈ 44°, ≈ 68°, ≈ 68°; 3В) $\sqrt{13}$ дм или $\sqrt{37}$ дм; 4С) 1) $2\sqrt{2}$ см, 2) $\frac{3\sqrt{17}}{2}$ см. **315.** а), в) – можно; б) нельзя. **316.** а) 112,5°, 80°, 67,5°, 100°; б) 85°, 105°, 95°, 75°. **317.** 72°, 120°, 108°. **318.** Докажите, что сумма противоположных углов четырехугольника равна 180° (при этом используйте равенство дуг AB и AC). **319.** а) 36 см; б) $\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$. **320.** 5 дм. Пусть дана трапеция $ABCD$, продлите ее высоту BH до пересечения с окружностью в точке F, например. Тогда ΔFBC – прямоугольный, следовательно, FC – диаметр окружности. Используя теорему о пересекающихся хордах AD и BF, найдите HF. Далее по теореме Пифагора найдите FC. **321.** Пусть MK пересекает DC в точке N. Установите, что в треугольниках ABK и DKN острые углы равны (используйте свойство медианы KM треугольника ABK). **322.** а) Можно; б) нельзя. **323.** 1,8 дм, 2,7 дм. **324.** 20 см^2. **325.** б) Используйте рисунок 174. Установите, что $CK = \frac{1}{2}BC$, $KD = \frac{1}{2}AD$ и примените свойство высоты OK прямоугольного ΔOCD. **326.** а) 3 см. Пусть в трапеции $ABCD$ $\angle A = \angle B = 90°$, $BC = 5$ см, $AD = 7{,}5$ см, $OK = r$, где K – точка касания окружности стороны CD. Установите, что $CK = 5 - r$, $KD = 7{,}5 - r$. Далее примените свойство высоты OK прямоугольного ΔOCD. б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ дм. Используйте рисунок 174. Радиус окружности OK найдите из прямоугольного ΔOKD, используя $\operatorname{tg}\angle ODK$. **327.** а) Соедините центр окружности с вершинами четырехугольника, тогда радиусы, проведенные в точки касания окружности его сторон, являются высотами полученных треугольников. б) 5 см. **328.** 3 см, 2,5 см, 4,5 см, 5 см. **329.** Пусть надо построить ромб $ABCD$, в котором $AB = a$, высота $BH = 2r$. Сначала постройте прямоугольный ΔABH, зная его катет BH и гипотенузу AB. **330.** а) $\frac{1}{16}P^2\sin\alpha$; б) 18 см^2. **333.** 4 см. Пусть точки A, B, C – центры указанных окружностей, соответственно M, N, K – точки касания этих окружностей боковой стороны трапеции, D – точка пересечения боковой стороны и прямой AC, тогда треугольники DKC, DNB и DMA – подобные. Из подобия треугольников DKC и DMA составьте пропорцию и выразите расстояние d от точки D до верхнего основания трапеции: $\frac{2}{8} = \frac{d+2}{d+4+2r+8}$ или $\frac{1}{4} = \frac{d+2}{d+12+2r}$ $d = \ldots$ Подставьте это значение d в пропорцию, полученную из подобия треугольников DCK и DBN, и найдите r. **334.** а) $\frac{P}{8}\sin\ \alpha$; б) найдите высоту трапеции, используя вывод, полученный при решении задачи 325, б. **335.** а) Является; б) нет, например, ромб. **336.** а) 360°; б) 157,5°. **337.** а) 9; б) 10; в) 12; г) 18. **338.** а) 11; б) не существует. **340.** а) Докажите, что меньшая диагональ правильного шестиугольника равна стороне правильного треугольника. Постройте этот треугольник и окружность, описанную около него. Далее постройте искомый шестиугольник. б) Докажите, что меньшая диагональ правильного восьмиугольника равна стороне квадрата. **341.** а) $12\sqrt{3}$ см^2. **342.** а) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ см; б) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ см. **343.** а) $2\sqrt{R^2 - r^2}$; б) используйте прямоугольный треугольник с гипотенузой R и катетами, равными r и $\frac{a}{2}$. **344.** а) $21\sqrt{3}$ см; б) $31{,}5\sqrt{2}$ мм. **345.** а) $\frac{32\sqrt{6}}{3}$ см; б) $\frac{9\sqrt{6}}{4}$ см. **346.** $3\sqrt{2}$ см. **347.** а) $\frac{25\sqrt{3}}{4}$ см^2; б) $6\sqrt{3}$ см^2. **348.** а) $\approx 11{,}6$ см^2; б) $\approx 47{,}0$ см^2. **349.** а) $\frac{3}{4}$; б) используйте ответ, полученный в задаче а). **350.** а) Увеличится в 2 раза; б) уменьшится в 3 раза. **351.** а) $\approx 31{,}4$ см; б) 75 %. **353.** ≈ 1 м. **354.** а) $\approx 47{,}8$ см; б) $\approx 70{,}1$ см. **355.** а) $\approx 6{,}3$ см; б) $\approx 10{,}5$ см. **356.** а) $\approx 69°$; б) $1\frac{1}{3}$ см. **357.** ≈ 111 км. **358.** а) $8\pi\sqrt{3}$ см; б) $6\pi\sqrt{3}$ см. Используйте соотношение между стороной и синусом противолежащего угла вписанного в окружность треугольника: $\frac{a}{\sin A} = 2R$. **359.** а) $\approx 18{,}8$ см; б) $\approx 33{,}2$ см. **360.** $\approx 40°$, $\approx 140°$, $\approx 140°$, $\approx 40°$. **361.** а) 2 рад.; б) 0,5 рад. **362.** а) $90° = \frac{\pi}{2}$, $54° = \frac{3\pi}{10}$, $36° = \frac{\pi}{5}$; б) $36° = \frac{\pi}{5}$, $72° = \frac{2\pi}{5}$, $72° = \frac{2\pi}{5}$ или $45° = \frac{\pi}{4}$, $45° = \frac{\pi}{4}$, $90° = \frac{\pi}{2}$; в) $100° = \frac{5\pi}{9}$, $80° = \frac{4\pi}{9}$, $80° = \frac{4\pi}{9}$, $100° = \frac{5\pi}{9}$. **363.** а) $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$; б) $\frac{3\pi}{5}$, $\frac{2\pi}{5}$; в) $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6}$. **364.** а) 2 см; б) $\approx 14{,}1$ см. **365.** а) 4 дм; б) 1,2 дм. **366.** а) 3,5 рад.; б) 2 рад. **367.** а) $\approx 0{,}94$ м; б) $\approx 3{,}14$ м. **368.** а) $\approx 3{,}8$ дм. **369.** а) Увеличится в k^2 раз; б) уменьшится в k^2 раз. **370.** 9π см^2. **371.** 10 дм. **372.** а) ≈ 201 м^2; б) $\approx 25{,}1$ м. **373.** б) 5 : 7. **374.** а) $\approx 14{,}3$ м^2; б) $\approx 29{,}9$ дм^2. **375.** $\approx 12{,}6$ м^2. **376.** а) $\approx 4{,}2$ см^2; б) 9,6 см^2. **377.** $\frac{1}{6}R^2(2\pi + 3\sqrt{3})$. **378.** $\approx 18{,}8$ см^2. **379.** ≈ 497 см^2. **380.** $\approx 78{,}5$ см^2. **381.** а) ≈ 123 см^2; б) $\approx 26{,}2$ см^2. **382.** а) $\frac{1}{6}a^2(9\sqrt{3} - 4\pi)$; б) $\frac{1}{8}b^2(6 - \pi)$. **383.** $(10\pi - 12\sqrt{3})$ см^2. **384.** а) $\approx 5{,}38$ дм^2; б) нельзя. **385.** а) $\approx 149°$; б) $\approx 326°$, $\approx 21{,}7$ м^2. **386.** 36π см^2;

387. $\approx$ 12,6 см; **389.** а) $\sqrt{2}$ см. **390.** а) $192\sqrt{3}$ см^2; б) $1{,}2(\sqrt{6}+1)$ см; в) $48\sqrt{3}$ см^2. **391.** 8 см, может. **392.** Хватит. **393.** $\frac{3b^2\sqrt{3}}{4}\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}$. **394.** а) $32(\sqrt{2}+1)$ см^2. Найдите R, используя соотношение: $a^2 = R^2 + R^2 - 2R^2\cos 45°$. б) $128(\sqrt{2}-1)$ см^2. Пусть $ABCD$ – данный квадрат, O – центр вписанной в него окружности, MN – сторона восьмиугольника, описанного около этой окружности, H – точка пересечения диагонали квадрата BD и стороны MN. Установите, что $MN = 2BH$, и используйте формулу для площади многоугольника, описанного около окружности: $S = pr$. **395.** $4\sqrt{2-\sqrt{3}}$ см, используйте соотношение: $a^2 = R^2 + R^2 - 2R^2\cos 30°$. **396.** 16 см, $8\sqrt{3}$ см. **397.** d_1d_2, где d_1 – меньшая диагональ, а d_2 – большая диагональ восьмиугольника. Выразите площадь восьмиугольника как сумму площади квадрата со стороной d_1 и 4-х равнобедренных треугольников с основанием d_1 и высотой, равной $\frac{1}{2}(d_2 - d_1)$. **398.** а) Соедините эту точку с вершинами многоугольника и докажите, что эта сумма равна $\frac{2S}{a}$, где S – площадь многоугольника, a – его сторона. б) 18 см. Докажите, что указанная сумма равна утроенному диаметру вписанной в шестиугольник окружности. **399.** $8\sqrt{2+\sqrt{2}}$ см, $8\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ см, $8\sqrt{4+2\sqrt{2}}$ см. Пусть $ABCDMNPK$ – данный восьмиугольник, O – центр описанной около него окружности. Диагональ AC выразите из ΔABC: $AC^2 = a^2 + a^2 - 2a^2\cdot\cos 135°$; диагональ $AM = 2R$, а R найдите из прямоугольного ΔAOC; диагональ AD найдите из ΔAOD. **400.** $\approx$ 617 см^2. **401.** $\frac{4a}{3\pi}\sqrt{2+\sqrt{2}}$. **402.** а) 2,5 м^2; б) 6,25 м^2. **403.** 15 м. **404.** 2. **405.** $\frac{3}{4}b$. **406.** а) 4π см^2; б) $\frac{\pi b^2}{4}$. **407.** $\frac{4}{\pi\cdot\sin a}$. **408.** 16 см^2. **409.** $\frac{a^2(3\sqrt{3}-\pi)}{18}$. **410.** 1A) 8; 2A) 576 см^2; 4B) $\frac{1}{8}a^2(2\sqrt{3}-\pi)$; 5C) $(2\pi - 3\sqrt{3})$ см^2. **411.** $\vec{m}(-21; 28)$, $\vec{m}(21; -28)$. **412.** $N(3{,}5; -2{,}5)$. **413.** а), б) – подобны. **414.** а) 65°; б) 65°; в) 55°; г) 25°. **415.** 47,25 см^2. **416.** а) 8; б) 16. **417.** $12\sqrt{15}$ см^2. **418.** а) $AC = 4\sqrt{3}$ дм, $\angle C = 30°$, $\angle B = 120°$; б) $AB \approx 11{,}7$ мм, $BC \approx 7{,}6$ мм, $\angle B = 100°$; в) $BC = 2\sqrt{13}$ см, $\angle A \approx 53°$, $\angle B \approx 94°$, $\angle C \approx 33°$ или $BC = 4\sqrt{10}$ см,

$\angle A \approx 127°$, $\angle B \approx 35°$, $\angle C \approx 18°$. **419.** а) $2{,}5\pi$ дм; б) $\approx 25{,}5$ см. **420.** б) $4\sqrt{3}$; в) $90°$. **421.** $2\sqrt{10}$. **422.** $45°$, $90°$, $45°$. **423.** $\frac{13}{14}$. **424.** $\sqrt{10-5\sqrt{3}}$. **425.** 22,5 м. **426.** 15 мм, 18 мм, 24 мм. **427.** $4\frac{2}{3}$ см и 3,5 см; **428.** $1\frac{2}{3}$ см. **429.** а), б) – можно, например, $AB = 2$, $BC = 3$, $M \in AB$, $N \in BC$, $BM = 1{,}5$, $BN = 1$ (для случая б) AB – основание); в) нельзя. **430.** 6 см, $\frac{4}{9}$. **431.** а) Сначала постройте $\Delta AB_1C_1 \sim \Delta ABC$, в котором $\frac{AC_1}{C_1B_1} = \frac{1}{2}$, затем на луче AB_1 отложите отрезок $AB = 8$ см и проведите $BC \parallel B_1C_1$. **432.** а) Два ромба подобны, если угол одного ромба равен углу другого. б) Два параллелограмма подобны, если соседние стороны одного параллелограмма пропорциональны сторонам другого, а углы между ними равны. **433.** $6\sqrt{2}$ см или $12\sqrt{2}$ см. **434.** а) $\frac{2\pi}{5}$; б) $\frac{\pi}{6}$. **435.** $\frac{\pi}{5}$. **436.** 17 см. Постройте диаметр, проходящий через точку C, и примените теорему о произведении отрезков двух пересекающихся хорд. **437.** а) 24 см^2; б) $16\sqrt{3}$ дм^2. **438.** 94,08 см^2. **439.** а) 2 см; б) $60°$ или $120°$. **440.** 16π м^2. **441.** $\frac{81\pi}{4}$ см^2. **442.** $\frac{\pi-2}{3\pi+2}$. **443.** а) $90°$, $90°$, $135°$, $45°$; б) $60°$, $120°$, $120°$, $60°$. **444.** $120°$. **445.** $\frac{3\pi}{5}$. **446.** 16 см. **447.** а) $b(\sqrt{2}-1)$; б) $a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)$. Рассмотрите, например, трапецию $ABCD$, основаниями BC и AD которой являются стороны 12-угольника и 6-угольника соответственно. Построив ее высоты BH и CK, найдите отрезок DK из ΔCDK. **448.** а) 17; б) $17 < x < 23$; в) $15 < x < 17$. **449.** 9π дм. **450.** 2π см, $\frac{8\pi}{3}$ см, $\frac{5\pi}{3}$ см, $\frac{5\pi}{3}$ см. **451.** $\frac{b^2(\pi-2)}{2}$. **452.** б) Используя свойство высоты CH прямоугольного ΔABC, выразите ее через радиусы двух вырезанных кругов. **453.** 3B) 8,5 см; 4B) 4π см; 5C) 16π см^2 или 48π см^2.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Таблица приближенных значений синусов и косинусов углов от 0° до 90°

A	$\sin A$	B	A	$\sin A$	B	A	$\sin A$	B
0°	0,000	90°	30°	0,500	60°	60°	0,866	30°
1°	0,017	89°	31°	0,515	59°	61°	0,875	29°
2°	0,035	88°	32°	0,530	58°	62°	0,883	28°
3°	0,052	87°	33°	0,545	57°	63°	0,891	27°
4°	0,070	86°	34°	0,559	56°	64°	0,899	26°
5°	0,087	85°	35°	0,574	55°	65°	0,906	25°
6°	0,105	84°	36°	0,588	54°	66°	0,914	24°
7°	0,122	83°	37°	0,602	53°	67°	0,921	23°
8°	0,139	82°	38°	0,616	52°	68°	0,927	22°
9°	0,156	81°	39°	0,629	51°	69°	0,934	21°
10°	0,174	80°	40°	0,643	50°	70°	0,940	20°
11°	0,191	79°	41°	0,656	49°	71°	0,946	19°
12°	0,208	78°	42°	0,669	48°	72°	0,951	18°
13°	0,225	77°	43°	0,682	47°	73°	0,956	17°
14°	0,242	76°	44°	0,695	46°	74°	0,961	16°
15°	0,259	75°	45°	0,707	45°	75°	0,966	15°
16°	0,276	74°	46°	0,719	44°	76°	0,970	14°
17°	0,292	73°	47°	0,731	43°	77°	0,974	13°
18°	0,309	72°	48°	0,743	42°	78°	0,978	12°
19°	0,326	71°	49°	0,755	41°	79°	0,982	11°
20°	0,342	70°	50°	0,766	40°	80°	0,985	10°
21°	0,358	69°	51°	0,777	39°	81°	0,988	9°
22°	0,375	68°	52°	0,788	38°	82°	0,990	8°
23°	0,391	67°	53°	0,799	37°	83°	0,993	7°
24°	0,407	66°	54°	0,809	36°	84°	0,995	6°
25°	0,423	65°	55°	0,819	35°	85°	0,996	5°
26°	0,438	64°	56°	0,829	34°	86°	0,998	4°
27°	0,454	63°	57°	0,839	33°	87°	0,999	3°
28°	0,469	62°	58°	0,848	32°	88°	0,999	2°
29°	0,485	61°	59°	0,857	31°	89°	1,000	1°
30°	0,500	60°	60°	0,866	30°	90°	1,000	0°
A	$\cos B$	B	A	$\cos B$	B	A	$\cos B$	B

Таблица приближенных значений тангенсов углов от 0° до 89°

A	tg A	A	tg A	A	tg A	A	tg A	A	tg A
0°	0,000	20°	0,364	40°	0,839	60°	1,73	80°	5,67
1°	0,017	21°	0,384	41°	0,869	61°	1,80	81°	6,31
2°	0,035	22°	0,404	42°	0,900	62°	1,88	82°	7,12
3°	0,052	23°	0,424	43°	0,933	63°	1,96	83°	8,14
4°	0,070	24°	0,445	44°	0,966	64°	2,05	84°	9,51
5°	0,087	25°	0,466	45°	1,000	65°	2,14	85°	11,4
6°	0,105	26°	0,488	46°	1,04	66°	2,25	86°	14,3
7°	0,123	27°	0,510	47°	1,07	67°	2,36	87°	19,1
8°	0,141	28°	0,532	48°	1,11	68°	2,48	88°	28,6
9°	0,158	29°	0,554	49°	1,15	69°	2,60	89°	57,3
10°	0,176	30°	0,577	50°	1,19	70°	2,75		
11°	0,194	31°	0,601	51°	1,23	71°	2,90		
12°	0,213	32°	0,625	52°	1,28	72°	3,08		
13°	0,231	33°	0,649	53°	1,33	73°	3,27		
14°	0,249	34°	0,675	54°	1,38	74°	3,49		
15°	0,268	35°	0,700	55°	1,43	75°	3,73		
16°	0,287	36°	0,727	56°	1,48	76°	4,01		
17°	0,306	37°	0,754	57°	1,54	77°	4,33		
18°	0,325	38°	0,781	58°	1,60	78°	4,70		
19°	0,344	39°	0,810	59°	1,66	79°	5,14		

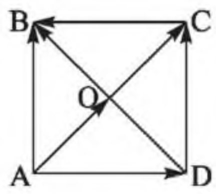
ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Тренировочные упражнения

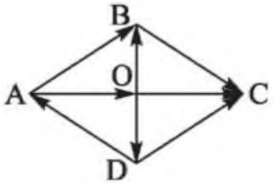
Т1. Понятие вектора. Коллинеарные векторы

1. Укажите равные и коллинеарные векторы, если $ABCD$: 1) квадрат; 2) ромб:

1)

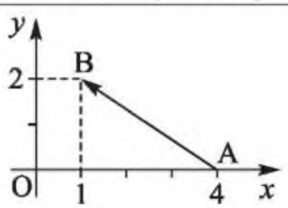


2)



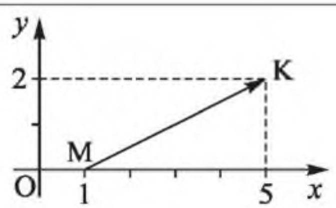
2. Найдите длину вектора:

1)



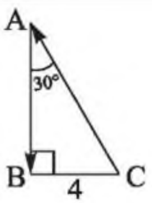
$|\overrightarrow{AB}|$ – ?

2)



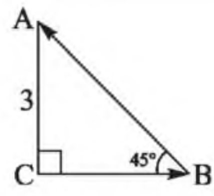
$|\overrightarrow{MK}|$ – ?

3)



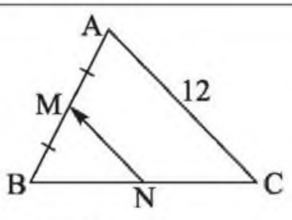
$|\overrightarrow{CA}|$ – ? $|\overrightarrow{AB}|$ – ?

4)



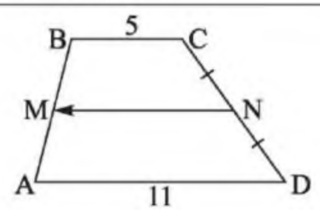
$|\overrightarrow{CB}|$ – ? $|\overrightarrow{BA}|$ – ?

5)



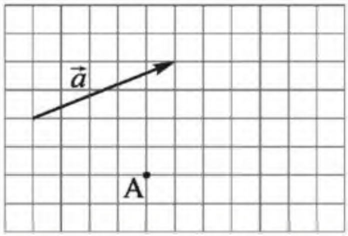
$MN \parallel AC$; $|\overrightarrow{NM}|$ – ?

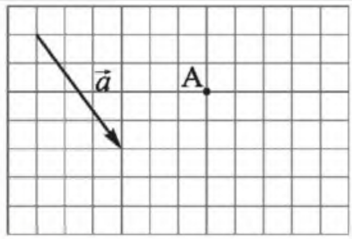
6)



$MN \parallel AD$; $|\overrightarrow{NM}|$ – ?

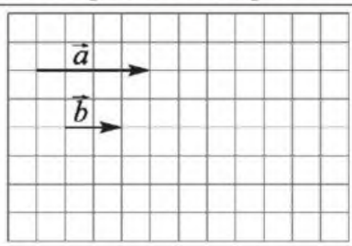
3. Отложите от точки A вектор, равный $\vec{a}$:

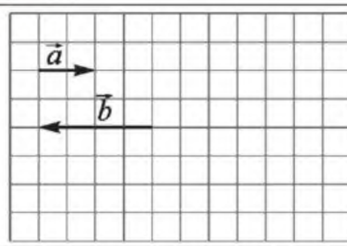
1) 

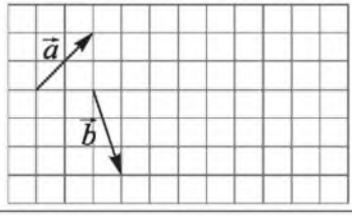
2) 

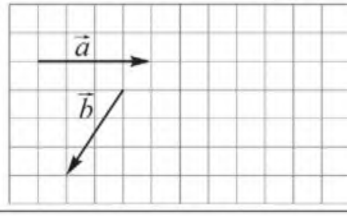
T2. Сложение и вычитание векторов

1. Постройте векторы $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$, $-\vec{a}$:

1) 

2) 

3) 

4) 

2. Упростите выражение:

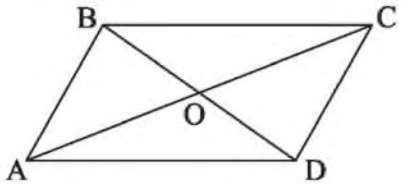
1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$;	2) $\overrightarrow{KM}+\overrightarrow{MC}$;
3) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$;	4) $\overrightarrow{KM}-\overrightarrow{KC}$;
5) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}$;	6) $\overrightarrow{KM}-\overrightarrow{MC}$;
7) $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{KE}+\overrightarrow{NK}$;	8) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EK}$;
9) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AM}$;	10) $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{DK}-\overrightarrow{DN}+\overrightarrow{KM}$;
11) $(\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{TA})-$ $-(\overrightarrow{PX}-\overrightarrow{TX})=$;	12) $(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NK}-\overrightarrow{PK})-$ $-(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{PD})$.

3. Используя рисунок, упростите выражение:

ABCD – параллелограмм;

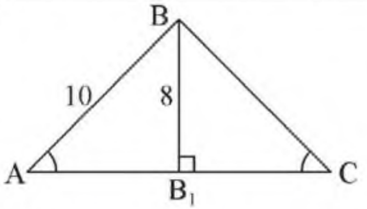
1) $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{OB}$;

2) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{OD}$.



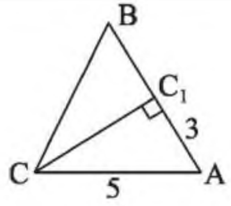
4. Найдите длину вектора $\vec{x}$:

1)



$|\vec{x}|=|\overrightarrow{BB_1}-\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{B_1C}|$ – ?

2)

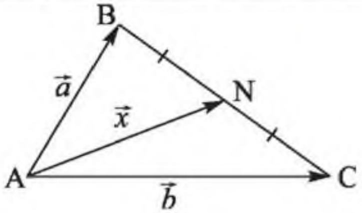


$|\vec{x}|=|\overrightarrow{BC_1}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}|$ – ?

T3. Умножение вектора на число

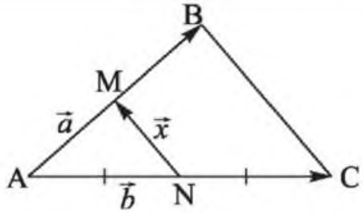
1. Выразите векторы через $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

1)



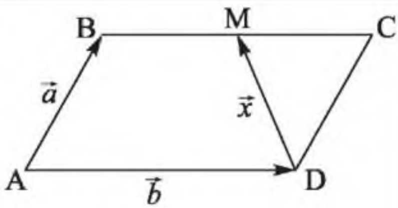
$\vec{x}$ – ?

2)



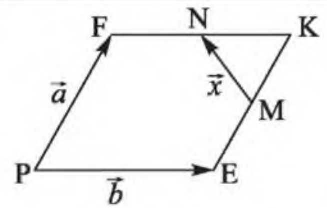
$BC \parallel MN$; $\vec{x}$ – ?

3)



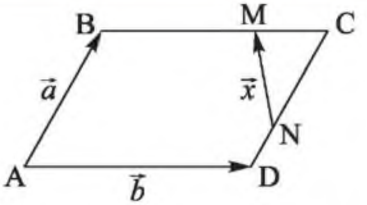
$BM=MC$; $\vec{x}$ – ?

4)



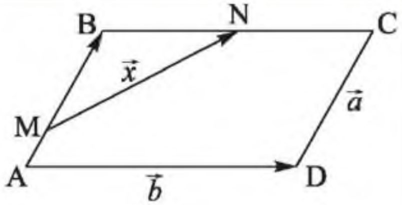
$FN=NK$, $ME=MK$; $\vec{x}$ – ?

5)



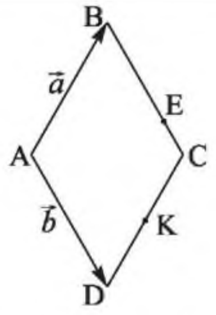
$BM : MC = 7 : 2$, $DN : NC = 1 : 2$;
$\vec{x}$ – ?

6)



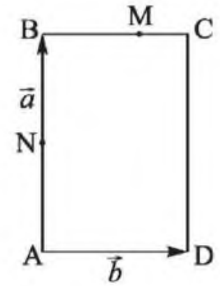
$AM : MB = 1 : 3$, $BN : NC = 7 : 9$;
$\vec{x}$ – ?

7)



$DK = KC$, $BE : EC = 3 : 1$;
$\overrightarrow{AE}$ – ? $\overrightarrow{AK}$ – ? $\overrightarrow{KE}$ – ?

8)



$AN = NB$, $BM : MC = 4 : 3$;
$\overrightarrow{AM}$ – ? $\overrightarrow{MD}$ – ? $\overrightarrow{MN}$ – ?

Т4. Координаты вектора

1. Найдите неизвестные координаты:

	A	B	$\overrightarrow{AB}$	$2\overrightarrow{AB}$	$-0{,}5\overrightarrow{AB}$
1)	(2; 3)	(–1; 2)			
2)		(2; 4)	(–1; 1)		
3)	(2; 0)			(–6; 2)	
4)	(–2; 1)				(4; –3)
5)	(–1; 3)	(4; 1)			
6)	(–2; 4)		(3; 0)		
7)		(–1; 5)			(3; –1)
8)		(2; –2)		(–6; 4)	

2. Найдите $|\vec{x}|$:

$\vec{x}$	$(-2; 3)$	$(\sqrt{2}; -\sqrt{3})$	$\left(\frac{5}{13}; -\frac{12}{13}\right)$	$\left(\frac{8}{17}; -\frac{15}{17}\right)$
$\lvert\vec{x}\rvert$				
$\vec{x}$	$(1; -5)$	$(2\sqrt{3}; -1)$	$\left(-\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right)$	$\left(1; \frac{4\sqrt{2}}{7}\right)$
$\lvert\vec{x}\rvert$				

3. Найдите неизвестные координаты, если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – коллинеарные векторы:

$\vec{a}$	$(-2; 3)$	$(x; -1)$	$(5; y)$	$(\sqrt{3}; \sqrt{2})$	$\left(x; 1\frac{2}{3}\right)$	$\left(3\frac{1}{3}; 5\right)$
$\vec{b}$	$(6; y)$	$(3; -4)$	$\left(\frac{1}{3}; 3\right)$	$(x; 3\sqrt{2})$	$(6; 2)$	$(-2; y)$

4. Заполните таблицу:
$\vec{a} = \{1; 3\}$, $\vec{b} = \{-2; 4\}$

$\vec{a}+\vec{b}$	$\vec{a}-\vec{b}$	$2\vec{a}$	$0{,}5\vec{b}$	$2\vec{a}-\vec{b}$	$\vec{a}-3\vec{b}$

5. Заполните таблицу:
$A(-3; 1)$, $B(0; 2)$, $C(2; -3)$, $D(-1; 0)$

$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{DC}$	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$	$-2\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AD}$
$\overrightarrow{BD}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{AC}$	$\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$

Т5. Угол между векторами. Скалярное произведение векторов

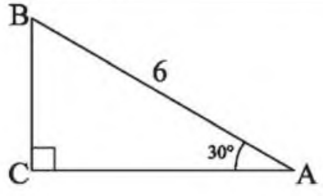
1. Заполните таблицу:

	1)	2)	3)	4)	5)	6)
$\lvert\vec{a}\rvert$	2	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	3		1
$\lvert\vec{b}\rvert$	3		4	5	4	$\sqrt{3}$
$\angle(\vec{a}, \vec{b})$	30°	45°		120°	60°	
$\vec{a}\cdot\vec{b}$		5	–6		5	1,5

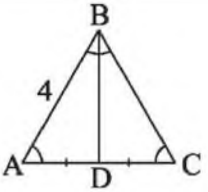
2. Заполните таблицу:

	1)	2)	3)	4)	5)	6)
$\vec{a}$	(–2; 3)	(1; –2)	$\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{5}\right)$	$(-\sqrt{2}; \_\_)$	$(2\sqrt{5}; -1)$	$\left(\frac{2}{7}; 3\frac{2}{5}\right)$
$\vec{b}$	(2; 3)	$(\_\_; 3)$	$\left(\frac{3}{4}; \frac{5}{8}\right)$	$(2\sqrt{2}; 3)$	$(3; -\sqrt{5})$	$(-14; \_\_)$
$\vec{a}\cdot\vec{b}$		2		–4		–3

3. Вычислите:

1) 

$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}$ – ? $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}$ – ?
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}$ – ?

2) 

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ – ? $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}$ – ?
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$ – ?

4. Определите значение x, если $\vec{a}\perp\vec{b}$:

	1)	2)	3)	4)	5)	6)
$\vec{a}$	$(2; x)$	$(x; 3)$	$(x-1; -2)$	$(x^2; 3)$	$(2; x+1)$	$(3; 2)$
$\vec{b}$	$(-3; 2)$	$(1; x+2)$	$(-4; x)$	$(1; -x)$	$(3; x)$	$(x; 3)$
x						

5. Заполните таблицу, здесь $\alpha = \angle(\vec{a}, \vec{b})$:

	1)	2)	3)	4)	5)	6)
$\vec{a}$	(–1; 1)	(2; 3)	(–2; –1)	(1; –2)	(1,5; 2)	(3; –4)
$\vec{b}$	(0; 1)	(–3; 0)	(1; 3)	(4; 3)	(2; –1)	(–6; 8)
$\vec{a} \cdot \vec{b}$						
$\lvert\vec{a}\rvert$						
$\lvert\vec{b}\rvert$						
$\cos\alpha$						

Т6. Применение векторов к решению задач

1. Составьте уравнение прямой, на которой лежит вектор $\overrightarrow{AB}$:

	1)	2)	3)	4)	5)	6)
A	(2; 1)	(–1; 2)	(4; –3)	(–1; 3)	(–3; 1)	(–1; –2)
B	(–3; 4)	(2; 0)	(0; –2)	(–2; –1)	(–1; 3)	(1; –4)
(AB)						

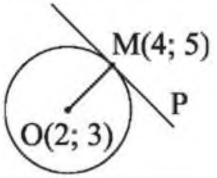
2. Докажите, что $ABCD$ – параллелограмм, если:
1) $A(2; -1)$, $B(5; -3)$, $C(-2; 11)$, $D(-5; 13)$;
2) $A(1; 1)$, $B(3; 5)$, $C(9; -1)$, $D(7; 5)$.

3. Найдите угол B треугольника ABC, если:
1) $A(2; 2\sqrt{3})$, $B(0; 0)$, $C(3; \sqrt{3})$;
2) $A(4; 1)$, $B(0; 0)$, $C(-1; 4)$.

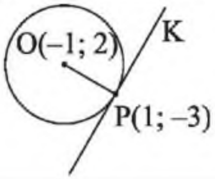
4. Докажите, что $ABCD$ – трапеция, если:
1) $A(-2; -3)$, $B(-3; 1)$, $C(-1; 4)$, $D(2; 3)$;
2) $A(-2; 1)$, $B(0; 3)$, $C(2; 3)$, $D(-1; -3)$.

5. Используя данные рисунка, запишите уравнение касательной:

1)

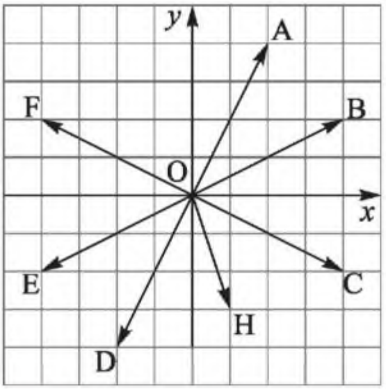


2)



6. $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60°$, $|\vec{a} - \vec{b}|$ – ?

7.



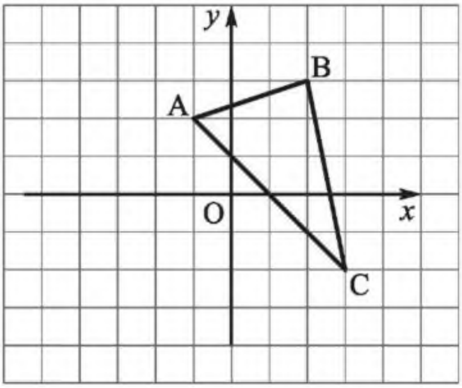
1) Какой из данных векторов равен $4\vec{i} - 2\vec{j}$?

2) Какой вектор имеет координаты (–4; 2)?

3) Запишите координаты векторов: $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{HC}$, $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB}$.

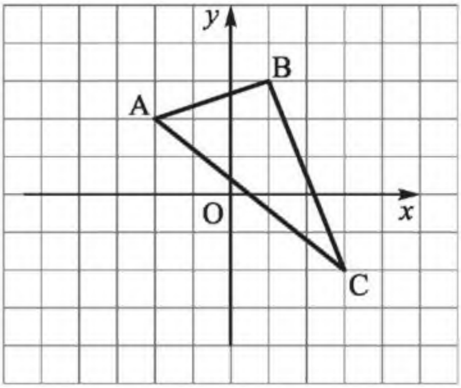
T7. Преобразования плоскости. Движение

1. Постройте $\Delta A_1B_1C_1$, симметричный ΔABC относительно точки O, и определите координаты точек A_1, B_1, C_1. Сделайте вывод.



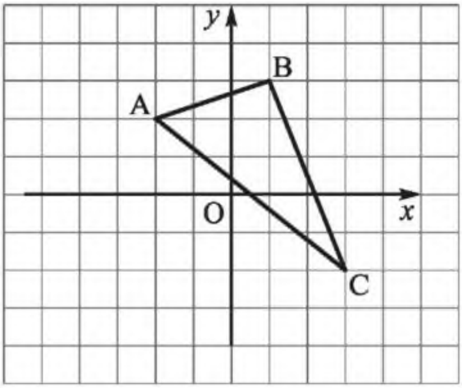
2. Найдите координаты точек $M_1 = Z_O(M)$, $H_1 = Z_O(H)$, $F_1 = Z_O(F)$, если $M(1; 3)$, $H(-2; -4)$, $F(5; -2)$.

3. Постройте $\Delta A_1B_1C_1$, симметричный ΔABC относительно оси Ox, и определите координаты точек A_1, B_1, C_1. Сделайте вывод.



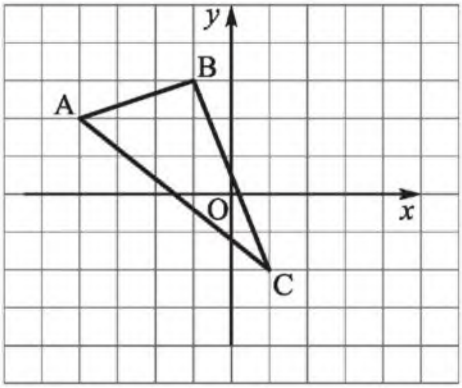
4. Найдите координаты точек $M_1 = S_{Ox}(M)$, $H_1 = S_{Ox}(H)$, $F_1 = S_{Ox}(F)$, если $M(1; 3)$, $H(-2; -4)$, $F(5; -2)$.

5. Постройте $\Delta A_1B_1C_1$, симметричный ΔABC относительно оси Oy, и определите координаты точек A_1, B_1, C_1. Сделайте вывод.



6. Найдите координаты точек $M_1 = S_{Oy}(M)$, $H_1 = S_{Oy}(H)$, $F_1 = S_{Oy}(F)$, если $M(1; 3)$, $H(-2; -4)$, $F(5; -2)$.

7. Постройте $\Delta A_1B_1C_1$, симметричный ΔABC при параллельном переносе на вектор $\vec{a}(2; -1)$, и определите координаты точек A_1, B_1, C_1. Сделайте вывод.



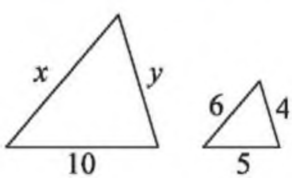
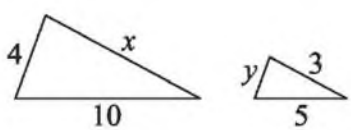
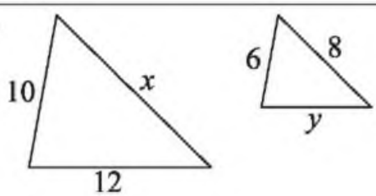
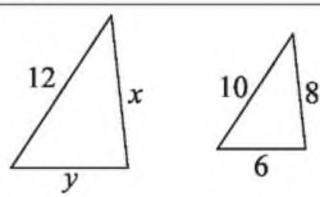
8. Найдите координаты точек $M_1 = T_{\vec{a}}(M)$, $H_1 = T_{\vec{a}}(H)$, $F_1 = T_{\vec{a}}(F)$, если $M(1; 3)$, $H(-2; -4)$, $F(5; -2)$ и $\vec{a}\,(2; -1)$.

9. В результате параллельного переноса точка $A(-1; 3)$ переходит в точку $A'(2; 4)$, а точка $B(1; -3)$ – в точку $B'(x; y)$. Найдите x и y.

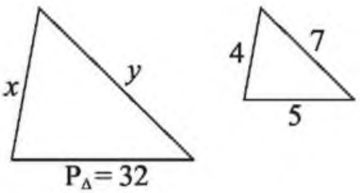
10. A_1B_1 является образом прямой AB при параллельном переносе на вектор $\vec{a}\,(2; -1)$, где $A(-2; 5)$, $B(1; -3)$. Запишите уравнение прямой A_1B_1.

T8. Подобие треугольников

1. Найдите x и y для подобных треугольников:

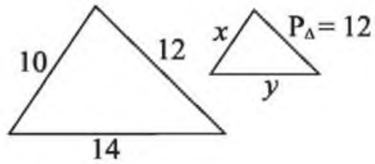
1)  x – ? y – ?	2)  x – ? y – ?
3)  x – ? y – ?	4)  x – ? y – ?

5)



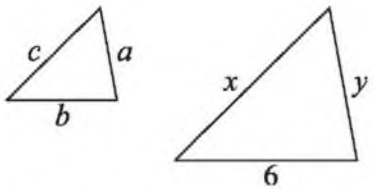
x – ? y – ?

6)



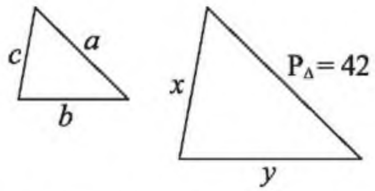
x – ? y – ?

7)



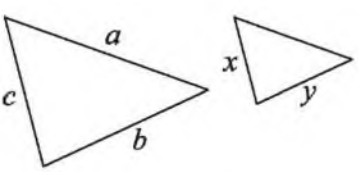
$c : a : b = 9 : 4 : 8;$
x – ? y – ?

8)



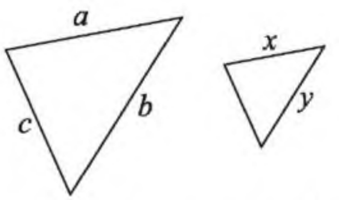
$c : a : b = 3 : 6 : 5;$
x – ? y – ?

9)



$c : a : b = 6 : 7 : 8,\ y - x = 4;$
x – ? y – ?

10)

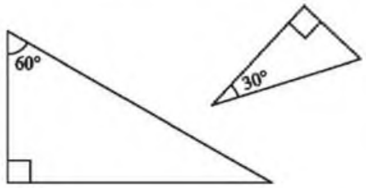


$c : a : b = 6 : 7 : 8,\ y + x = 45;$
x – ? y – ?

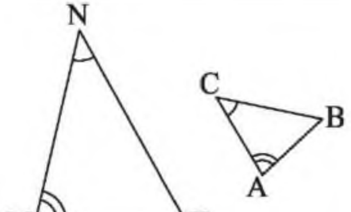
Т9. Признаки подобия

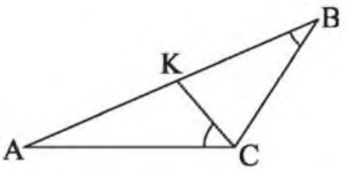
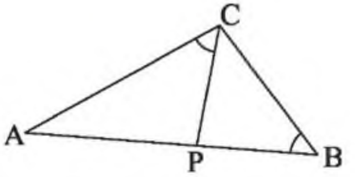
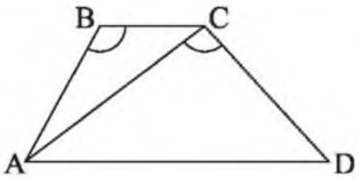
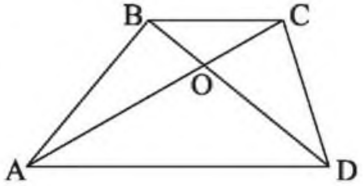
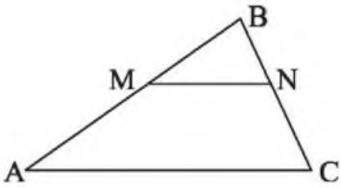
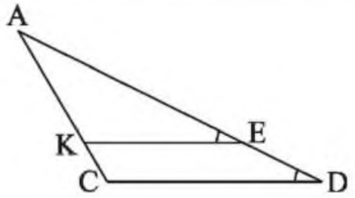
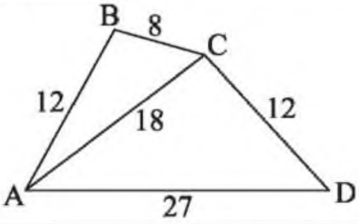
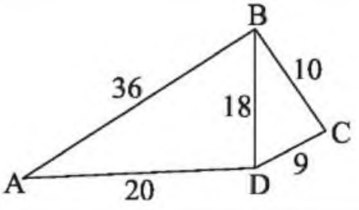
1. Найдите пары подобных треугольников и укажите соответственный признак подобия:

1)

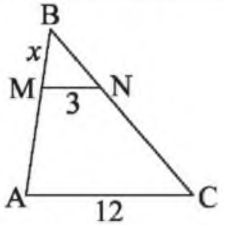
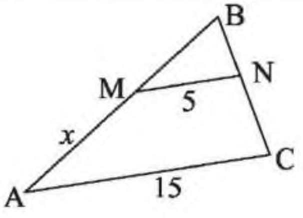


2)

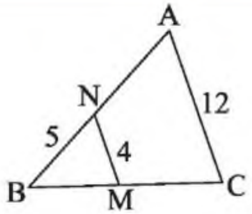


3) 	4) 
5) 	6) 
7)  $MN \parallel AC$	8) 
9) 	10) 

2. В треугольнике ABC $MN \parallel AC$. Найдите x и y:

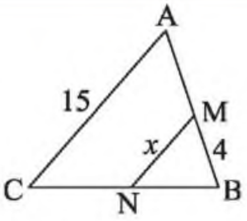
1)  $AB = 16;\ x - ?$	2)  $AB = 30;\ x - ?$

3)



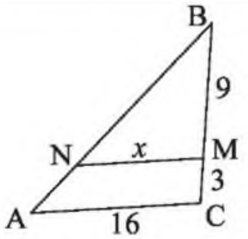
$AB = x - ?$

4)



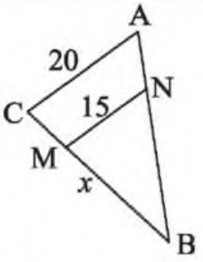
$AB = 12;\ x - ?$

5)



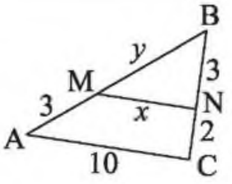
$x - ?$

6)



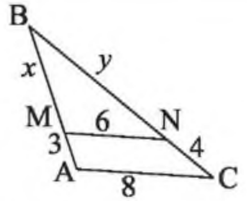
$CB = 28;\ x - ?$

7)



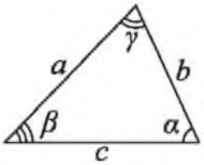
$x - ?\ y - ?$

8)



$x - ?\ y - ?$

T10. Теорема синусов



1. Заполните таблицу:

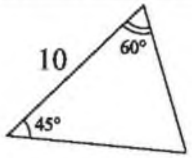
	1)	2)	3)	4)	5)	6)
a	5					10
b		20	26	12		
c			35		14	
α		75°		36°	64°	60°
β	30°	60°	40°	25°		
γ	45°		120°		48°	45°

2. Заполните таблицу:

	1)	2)	3)	4)	5)	6)
a	12		20	6	18	21
b	5	27		8	12	
c		9	24			25
α	120°				72°	
β		60°		30°		
γ			140°			100°
R						

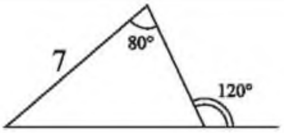
3. Найдите неизвестные элементы:

1)



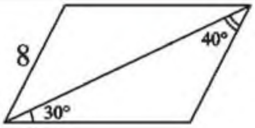
$P - ?$

2)



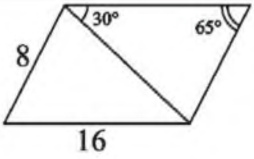
$P - ?$

3)



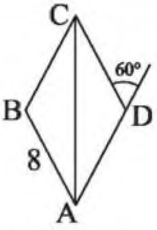
$P - ?$

4)



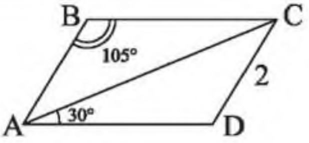
$P - ?$

5)



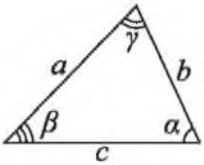
$ABCD$ – ромб; $AC - ?$
$BD - ?$ $S - ?$

6)



$AC - ?$

T11. Теорема косинусов



1. Заполните таблицу:

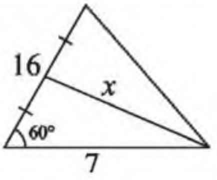
	1)	2)	3)	4)	5)	6)
a	12		15	7		10
b	8	17		14	6	
c		9	35		15	12
α		70°			80°	
β			30°			45°
γ	60°			120°		
S						

2. Заполните таблицу:

	1)	2)	3)	4)	5)	6)
a	15	7	15	5	80	8
b	13	4	14	5	65	35
c	4	5	13	6	17	29
α						
β						
γ						
S						

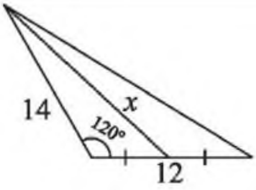
3. Найдите неизвестные элементы:

1)



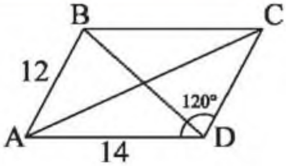
x – ?

2)



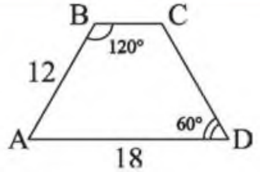
x – ?

3)



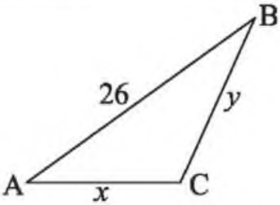
$AC - ?$ $BD - ?$

4)



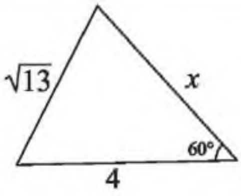
$AC - ?$ $BD - ?$

5)



$AC : BC = 7 : 8$, $\angle C = 120°$;
$x - ?$ $y - ?$

6)

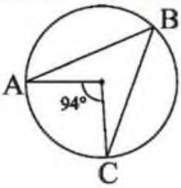


$x - ?$

T12. Углы, вписанные в окружность

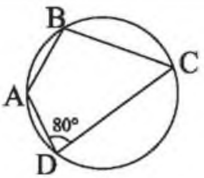
1. Найдите углы.

1)



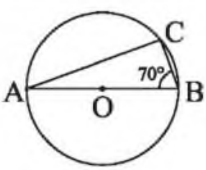
$\angle ABC - ?$

2)



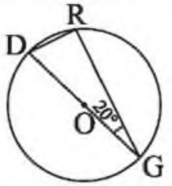
$\angle ABC - ?$

3)



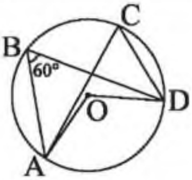
$\angle A - ?$ $\angle C - ?$

4)



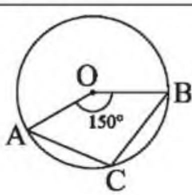
$\angle D - ?$ $\angle R - ?$

5)

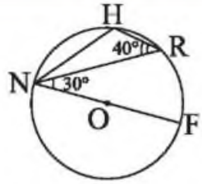
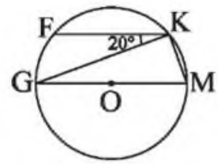
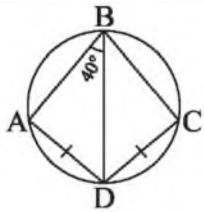
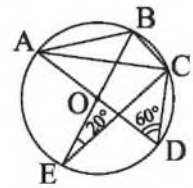
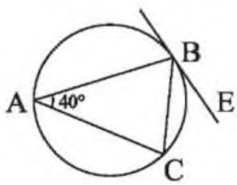
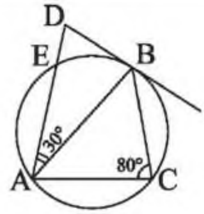
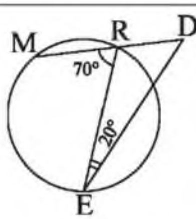
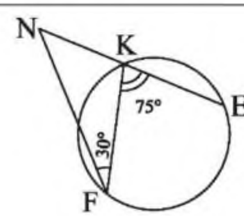


$\angle ACD - ?$ $\angle AOD - ?$

6)

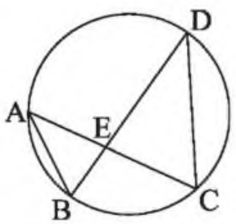


$\angle ACB - ?$

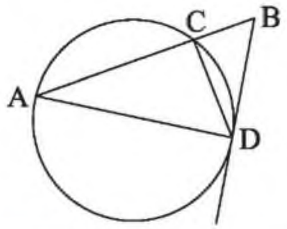
7)  $\angle HNR$ – ?	8)  $FK \parallel GM$; $\angle M$ – ? $\angle FKM$ – ?
9)  $\angle ADC$ – ?	10)  $\angle BAD$ – ?
11)  $\angle CBE$ – ?	12)  $\angle ADB$ – ?
13)  $\angle MDE$ – ?	14)  $\angle FNE$ – ?

2. Докажите, что треугольники подобны:

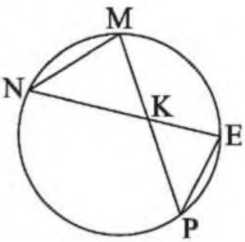
1)



2)



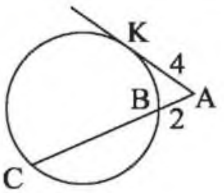
3)



T13. Свойства касательной и секущей, пересекающихся хорд окружности

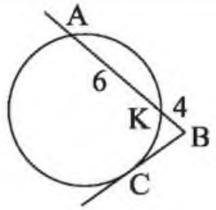
1. Найдите неизвестные элементы:

1)



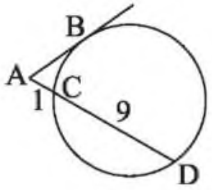
AC – ?

2)



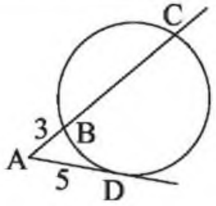
BC – ?

3)



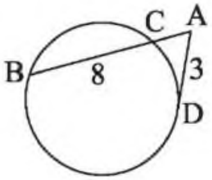
AB – ?

4)



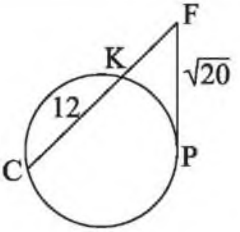
AC – ?

5)



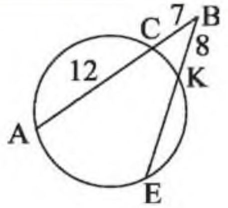
AB – ?

6)



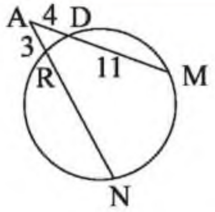
FC – ?

7)



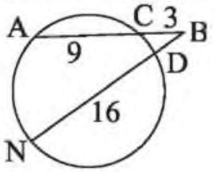
$BE - ?$

8)



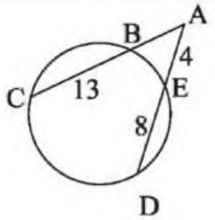
$AN - ?$

9)



$BD - ?$

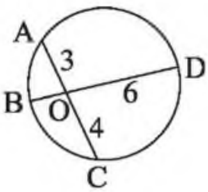
10)



$AC - ?$

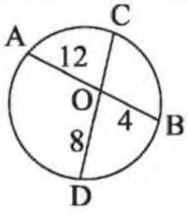
2. Найдите неизвестные элементы:

1)



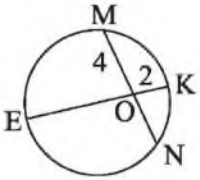
$BO - ?$

2)



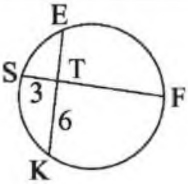
$OC - ?$

3)



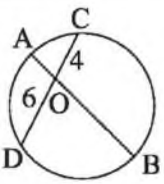
$KE = 7;\ ON - ?$

4)



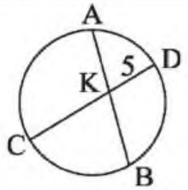
$EK = 10;\ ET - ?$

5)

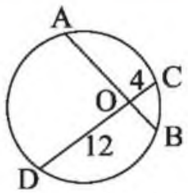
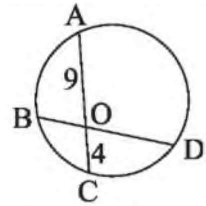
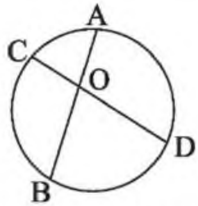
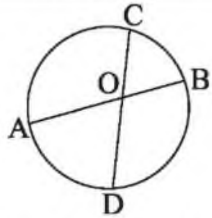


$BO - AO = 5;\ AO - ?\ BO - ?$

6)



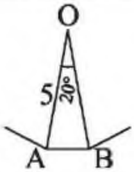
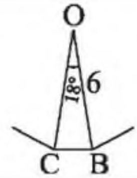
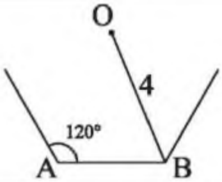
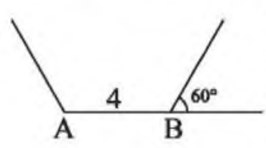
$CD = 17,\ KB - AK = 4;$
$AK - ?\ KB - ?$

7)  $AO : OB = 4 : 3$; AB – ?	8)  $BO : OD = 1 : 4$; BD – ?
9)  $AO : OB = 1 : 6$, $CO : OD = 1 : 3$, $BO - AO = 20$; CO – ? BO – ?	10)  $DO - CO = 11$, $AO + OB = 16$, $AO : OB = 5 : 3$; CO – ? OB – ?

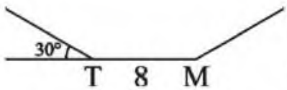
T14. Нахождение длин сторон и площадей правильных многоугольников

a – сторона правильного многоугольника; n – число сторон; R – радиус описанной окружности; r – радиус вписанной окружности; S – площадь правильного многоугольника.

1. Найдите неизвестные элементы:

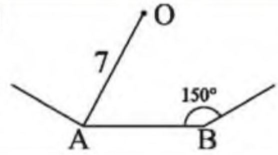
1)  n – ? a – ? r – ? S – ?	2)  n – ? a – ? r – ? S – ?
3)  n – ? a – ? r – ? S – ?	4)  n – ? a – ? r – ? S – ?

5)



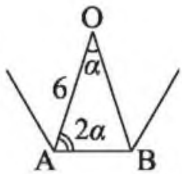
n – ?
R – ?
r – ?
S – ?

6)



n – ?
a – ?
r – ?
S – ?

7)

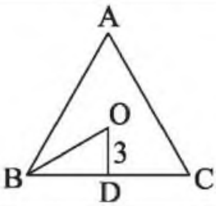


α – ?
n – ?
a – ?
r – ?
S – ?

8)

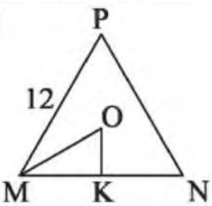
α – ?
n – ?
R – ?
r – ?
S – ?

9)



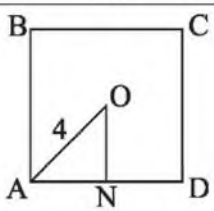
a – ?
R – ?
S – ?

10)



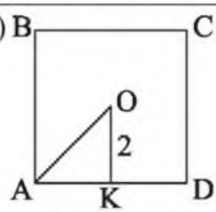
R – ?
r – ?
S – ?

11)



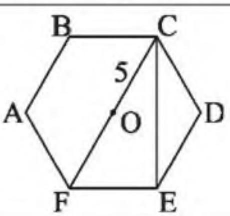
a – ?
r – ?
S – ?

12)



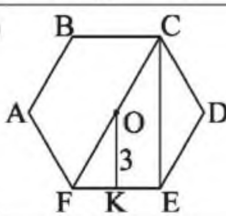
a – ?
R – ?
S – ?

13)



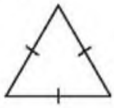
a – ?
r – ?
S – ?
FC – ?
CE – ?

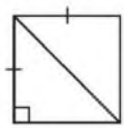
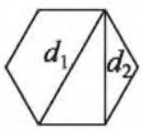
14)



a – ?
R – ?
S – ?
FC – ?
CE – ?

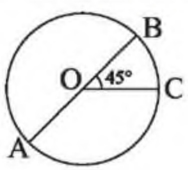
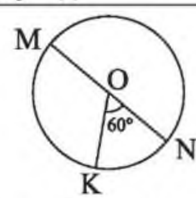
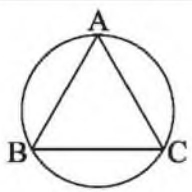
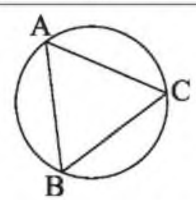
2. Заполните таблицу:

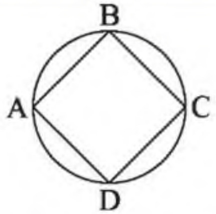
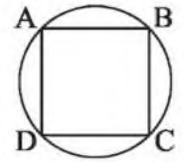
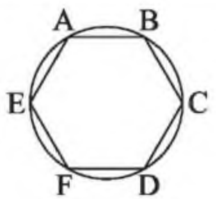
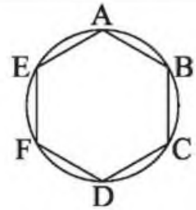
	a_n	R	r	d_1	d_2	S
правильный треугольник 	5			–	–	
		$2\sqrt{3}$		–	–	
				–	–	$4\sqrt{3}$
			4	–	–	

	a_n	R	r	d_1	d_2	S
квадрат 		$2\sqrt{2}$			–	
				$3\sqrt{2}$	–	
	7				–	
			3		–	
					–	25
правильный шестиугольник 		5				
			$2\sqrt{3}$			
						$\frac{27\sqrt{3}}{2}$
				12		
	4					
					$2\sqrt{3}$	

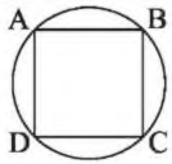
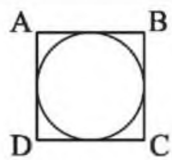
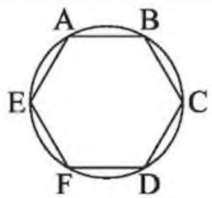
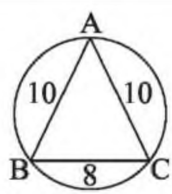
T15. Длина окружности и ее дуги

1. Найдите длину окружности (C) и длину дуг (l):

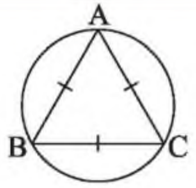
1)  $AB = 10$; l_{CB} – ? l_{AC} – ? C – ?	2)  $MN = 12$; l_{MK} – ? l_{KN} – ? C – ?
3)  ΔABC – правильный, $BC = 2\sqrt{3}$; l_{AC} – ? C – ?	4)  ΔABC – правильный, $AB = 3\sqrt{3}$; l_{BC} – ? C – ?

5)  $ABCD$ – квадрат, $BC = 2\sqrt{2}$; l_{AD} – ? C – ?	6)  $ABCD$ – квадрат, $AD = 6\sqrt{2}$; l_{DC} – ? C – ?
7)  $ABCDFE$ – правильный шести-угольник, $AB = 4$; l_{FD} – ? C – ?	8)  $ABCDFE$ – правильный шести-угольник, $BC = 5$; l_{FE} – ? C – ?

2. Найдите неизвестные элементы:

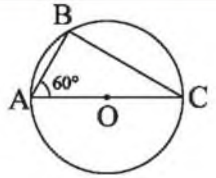
1)  $ABCD$ – квадрат, $l_{AD} = 4\pi$; S_{ABCD} – ?	2)  $ABCD$ – квадрат, $P_{ABCD} = 16$; C – ?
3)  $ABCDEF$ – правильный шести-угольник $S_{ABCDEF} = 36\sqrt{3}$; l_{AFE} – ?	4)  C – ?

5)



$l_{AB} = 2\pi$; S_{ABC} – ?

6)

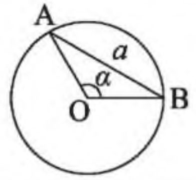


$AB = 2$; l_{AB} – ? l_{BC} – ?

T16. Площадь круга, его сектора и сегмента

1. Заполните таблицу:

R – радиус круга;
a – длина хорды;
α – центральный угол;
$S_{сек}$ – площадь сектора;
$S_{сегм}$ – площадь сегмента.



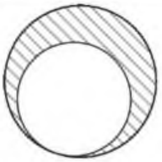
	1)	2)	3)	4)	5)
R	4		4	1	
a					6
α	120°	30°			60°
S_{AOB}					
$S_{сек}$		$\frac{\pi}{3}$	$\frac{8\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	
$S_{сегм}$					

2. Найдите площадь заштрихованной фигуры:

1)

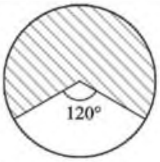
$R_1 = 5$, $R_2 = 2$; S – ?

2)



$R_1 = 4$, $R_2 = 3$; S – ?

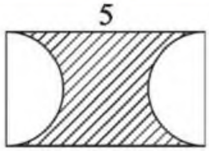
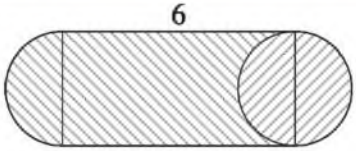
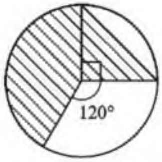
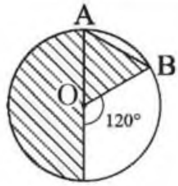
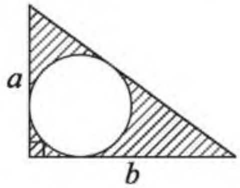
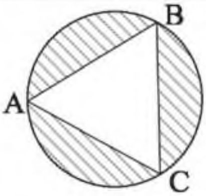
3)



$R = 5$; S – ?

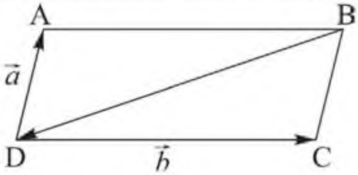
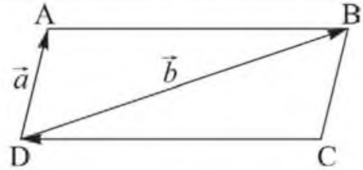
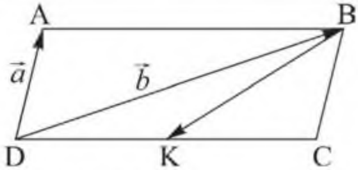
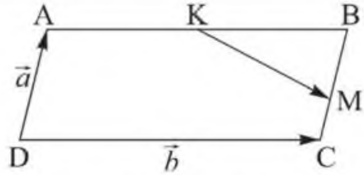
4)

$R = 3$; S – ?

5)  $R_1 = R_2 = 1$; S – ?	6)  $R_1 = R_2 = 2$; S – ?
7)  $R = 4$; S – ?	8)  $R = 4$; S – ?
9)  $a = 6$, $b = 8$; S – ?	10)  ΔABC – правильный, $AB = 2\sqrt{3}$; S – ?

T17. Повторение курса геометрии 9 класса

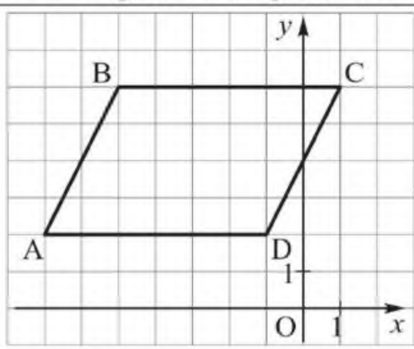
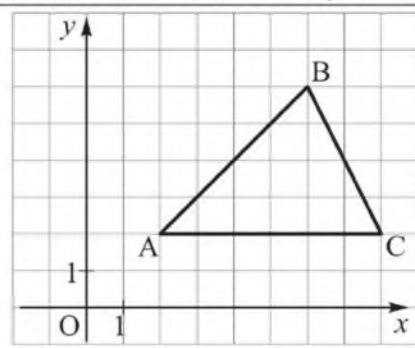
1. Выразите векторы через $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $ABCD$ – параллелограмм:

 $\overrightarrow{BD}$ – ?	 $\overrightarrow{CD}$ – ?
 $DK = KC$; $\overrightarrow{BK}$ – ?	 $AK = KB$, $BM : MC = 2 : 1$; $\overrightarrow{KM}$ – ?

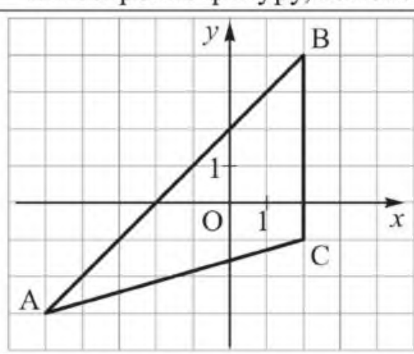
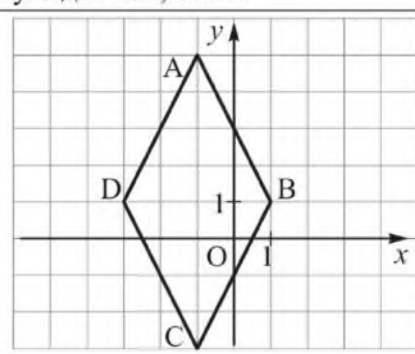
2. Найдите координаты векторов, если $A(2;\ 4)$, $B(1;\ -3)$, $C(5;\ 2)$, $D(-4;\ 0)$:

$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{DA}$	$\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CA}$	$-3\overrightarrow{AC}$	$2\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{DC}$
$\overrightarrow{DB}$	$\overrightarrow{CD}$	$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}$	$1{,}5\overrightarrow{BC}$	$0{,}5\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{DB}$

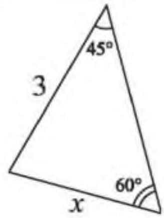
3. Постройте в тетради композицию движений, состоящую из:

	
1) симметрии относительно прямой Oy; 2) параллельного переноса на вектор $\vec{a}(-3;\ -2)$; 3) поворота на 90° по часовой стрелке.	1) симметрии относительно прямой Ox; 2) симметрии относительно точки O; 3) поворота на 90° против часовой стрелки.

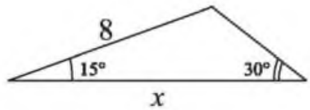
4. Постройте фигуру, гомотетичную данной, если:

	
центр гомотетии – точка O, коэффициент гомотетии $k = 2$	центр гомотетии – точка B, коэффициент гомотетии $k = -2$

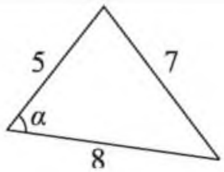
5. Найдите неизвестные элементы:



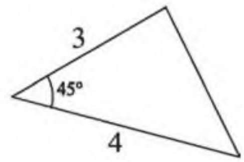
x – ?



x – ?

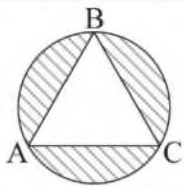


x – ?

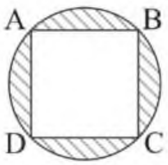


x – ?

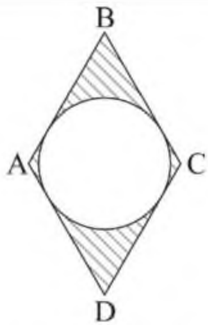
7. Найдите площадь заштрихованной части фигуры:



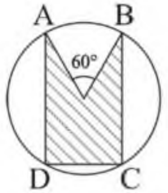
ΔABC – правильный, $AB = 4$;
S – ?



$ABCD$ – квадрат, $R = 8$;
S – ?



$ABCD$ – ромб, $\angle B = 60°$, $AC = 6$;
S – ?



$R = 10$, $\smile AB = 60°$;
S – ?

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Гордин Р. К. Геометрия. Планиметрия. 7–9 классы. – 3-е изд., испр. – М.: МЦНМО, 2006.

2. Готман Э. Г. Задачи по планиметрии и методы их решения. – М.: Просвещение, 1996.

3. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии: учебное пособие. – 5-е изд., испр. и доп. – М.: МЦНМО: Московские учебники, 2006.

4. Солтан Г. Н., Солтан А. Е., Жумадилова А. Ж. Геометрия: учебник для учащихся 8 класса общеобразовательной школы + CD. – Кокшетау: Келешек-2030, 2018.

5. Шарыгин И. Ф. Задачи по геометрии. Планиметрия. – М.: Наука, 1982.

6. Чистяков В. Д. Старинные задачи по элементарной математике. – Минск: Вышэйшая школа, 1978.

Список фотоснимков,
использованных в иллюстрациях на шмуцтитулах

1. Монумент «Астана-Байтерек» – 17 стр.

2. Акорда – резиденция Президента Республики Казахстан – 58 стр.

3. Комплекс административных зданий АО НК «КазМунайГаз»; Торгово-развлекательный центр «Хан Шатыр» – 101 стр.

4. «Столичный цирк» – 135 стр.