АЛГЕБРА және АНАЛИЗ БАСТАМАЛАРЫ

10

2-бөлім

Жалпы білім беретін мектептің жаратылыстану-математика бағытындағы 10-сыныбына арналған оқулық

Қазақстан Республикасының Білім және ғылым министрлігі бекіткен

Алматы "Мектеп" 2019

ӘОЖ 373.167.1
КБЖ 22.14я72
А39

ШАРТТЫ БЕЛГІЛЕР:

— жаңа тақырыпты игеру барысында қойылатын оқыту мақсаттары

— өздігінен орындауға арналған жазбаша тапсырмалар

— теореманың немесе қасиеттің дәлелдеуінің соны

— қосымша мағлұматтар

— өзіндік тексеру сұрақтары

A — барлық оқушылардың орындауы міндетті жаттығулар

B — орта деңгейдегі жаттығулар

C — жоғары деңгейдегі жаттығулар

ҚАЙТАЛАУ — өткенді қайталауға арналған жаттығулар

Әбілқасымова А.Е. т.б.
А39 **Алгебра және анализ бастамалары**. Жалпы білім беретін мектептің жаратылыстану-математика бағытындағы 10-сыныбына арналған оқулық. 2-бөлім / А.Е. Әбілқасымова, Т.П. Кучер, В.Е. Корчевский, З.Ә. Жұмағұлова. — Алматы: Мектеп, 2019 — 176 б., сур.

ISBN 978—601—07—1149—5

А $\frac{4306020503-083}{404(05)-19}$ 42(1)—19

ӘОЖ 373.167.1
КБЖ 22.14я72

ISBN 978—601—07—1149—5

6 КӨПМҮШЕЛЕР

§30. БІРНЕШЕ АЙНЫМАЛЫСЫ БАР КӨПМҮШЕЛЕР ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ СТАНДАРТ ТҮРІ. БІРТЕКТІ КӨПМҮШЕ. СИММЕТРИЯЛЫ КӨПМҮШЕ

Сендер бірнеше айнымалысы бар көпмүше, біртекті көпмүше, симметриялы көпмүше ұғымдарымен танысасыңдар;
көпмүшені стандарт түрге келтіруді, көпмүшенің дәрежесін табуды, біртекті көпмүше мен симметриялы көпмүшелерді ажыратуды үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Симметриялы көпмүше, біртекті көпмүше

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР: Сандар, айнымалылар, олардың дәрежелері және көбейтіндісі бірмүше деп аталатынын білесіңдер.

ТҮСІНДІРІҢДЕР

Неліктен x^3y^3, $8a^2y^5$, 13, y, m^2 өрнектері бірмүше болады, $x^3 + y^3$, $a^2 - 8y^3$, $13 + 67$, $y - 5$ өрнектері бірмүше болмайды?

Анықтама. *Бірмүшелердің қосындысы* ***көпмүше*** *деп аталады*.

ТҮСІНДІРІҢДЕР

Неліктен $\frac{z + x + y}{8}$ өрнегі көпмүше болады, $\frac{x^4}{y - 23} + 2x - x^2$ өрнегі көпмүше болмайды?

Анықтама. *Көпмүшенің құрамына кіретін бірмүшелер* ***көпмүшенің мүшелері*** *деп аталады*.

$xy + 1,5x^7 - 7y^5$ көпмүшесінің мүшелерін атаңдар.

Көпмүшелер бір айнымалысы бар көпмүшелер және бірнеше айнымалысы бар көпмүшелер болып бөлінеді.

МЫСАЛ

1. $x + 1,5x^7 - 7x^5$ — бір айнымалысы бар көпмүше;
$y + 1,5y^7 - 7y^5$ — бір айнымалысы бар көпмүше;
$xy + 1,5x^7 - 7y^5$ — екі айнымалысы бар көпмүше;
$xy + 1,5x^7 - 7z^5$ — үш айнымалысы бар көпмүше.

Анықтама. *Стандарт түрдегі ұқсас емес бірмүшелерден тұратын көпмүшені* ***стандарт түрдегі көпмүше*** *деп атайды*.

ТҮСІНДІРІҢДЕР

Неліктен $7xx - 9yxy^2 - 8xy + 5xy$ және $7x^2 - 9xy^3 - 8xy + 5xy$ көпмүшелері стандарт түрдегі көпмүшелер болмайды, $7x^2 - 9xy^3 - 3xy$ көпмүшесі стандарт түрдегі көпмүше болады?

МЫСАЛ

2. $0,5x \cdot 2y + 0,5x^7 + x^7 - 7y^5$ көпмүшесін стандарт түрге келтірейік.

Шешуі. Бірінші қосылғышты стандарт түрге келтіреміз. Сонда $0,5x \cdot 2y = xy$. Енді ұқсас қосылғыштарды біріктіреміз: $xy + 1,5x^7 - 7y^5$.

Анықтама. ***Көпмүшенің дәрежесі*** *деп құрамындағы бірмүшелер дәрежелерінің ең үлкен дәрежесін айтады.* ***Бірмүшенің дәрежесі*** *деп құрамындағы айнымалылардың дәреже көрсеткіштерінің қосындысының мәнін айтады*.

МЫСАЛ

3. $7x^2$ бірмүшесінің дәрежесі 2-ге, $9xy^3$ бірмүшесінің дәрежесі $1 + 3 = 4$-ке, $3xy$ бірмүшесінің дәрежесі $1 + 1 = 2$-ге тең. Демек, $7x^2 - 9xy^3 - 3xy$ көпмүшесінің дәрежесі 4-ке тең болады.

$a + b$, xy, $x^2y + xy^2$ көпмүшелерін қарастырайық.

Бұл көпмүшелердің келесі қасиеті бар: егер бір айнымалыны екінші айнымалымен алмастырса (бірінші көпмүшеде a-ны b-мен және b-ны a-мен, екінші және үшінші көпмүшелерде x-ті y-пен және y-ті x-пен), онда берілген көпмүшеге тепе-тең көпмүше алынады. Яғни $a + b = b + a$, $xy = yx$, $x^2y + xy^2 = y^2x + yx^2$.

Мұндай көпмүшелер *симметриялы көпмүшелер* болады.

Анықтама. *x және y айнымалыларынан тұратын көпмүшеде x-ті y-пен және y-ті x-пен алмастырғанда көпмүшенің түрі өзгермесе, онда ол* ***симметриялы көпмүше*** *деп аталады*.

ТҮСІНДІРІҢДЕР

Неліктен $x + y$, $x^2 + y^2$, $x^3 + y^3$, $xy(x + y)$ көпмүшелері симметриялы көпмүше болады, $x^2y - xy^2$, $x^3 - y^3$ көпмүшесі симметриялы болмайды?

Ең қарапайым симметриялы көпмүшелер: $x + y$ және xy. Бұл көпмүшелерді *элементар көпмүшелер* деп айтады.

Анықтама. *Көпмүшенің әрбір бірмүшелерінің дәрежелері көрсеткіштерінің қосындысының мәні бірдей болса, онда көпмүше* ***біртекті*** *деп аталады*.

ТҮСІНДІРІҢДЕР

Неліктен $x + 3y$, $x^2 + y^2$, $x^3 + y^3$, $xy(x + y)$, $x^2y - xy^2$, $x^3 - y^3$ көмүшелері біртекті көпмүшелер болады, $x + y^2$, $x^3 - 3y$ көпмүшелері біртекті болмайды?

1. Екі айнымалысы бар көпмүшеге мысал келтіріңдер.
2. Біртекті көпмүшеге мысал келтіріңдер.
3. Симметриялы көпмүшеге мысал келтіріңдер.
4. Екі айнымалысы бар төртінші дәрежелі біртекті симметриялы көпмүшеге мысал келтіріңдер.

Жаттығулар

А

30.1. Өрнекті стандарт түрдегі көпмүше ретінде жазыңдар:
1) $(x-1)(x+1)(x-3)$; 2) $(x-1)(x+3)(x-3)$;
3) $(x-2)(x+1)(x+2)$; 4) $(x-1)(x+1)+(x^2-2)(x-3)$.

30.2. $f(x)$ көпмүшесінің дәрежесін табыңдар және коэффициенттерін атаңдар:
1) $f(x)=2x^5-x^2-9x^3+9$; 2) $f(x)=-x^5-x^4-9x^2+1$;
3) $f(x)=x^6-x^4-x^3$; 4) $f(x)=x^5-3x^2-7x^3+\sqrt{3}$.

30.3. Егер: 1) $n=5$; 2) $n=3$; 3) $n=0$; 4) $n=1$ болса, онда n дәрежелі стандарт түрдегі көпмүшені құрастырыңдар.

30.4. Өрнекті стандарт түрдегі көпмүше ретінде жазыңдар:
1) $(x-1)^2-x(x+1)(x-3)$; 2) $(x-1)x^2+3(x-3)^2$;
3) $(x-2)^2+3(x+1)^3-(x+9)$; 4) $(x-3)(x+1)+2x(x^2-2x)$.

В

30.5. $x^5y^2+x^3y^4-2x^4y^5-y^4x^4+15x^4y^2-x^2(x^5y-x^2y^4)$ көпмүшесін стандарт түрде жазыңдар.
Келесі сөйлемдерден ақиқат сөйлемдерді көрсетіңдер:
1) көпмүшенің дәрежесі 7-ге тең;
2) көпмүше 9-шы дәрежелі симметриялы көпмүше болады;
3) көпмүшенің ұқсас мүшелері болмайды;
4) көпмүшенің дәрежесі 9-ға тең.

30.6. Егер: 1) $n=1$; 2) $n=2$; 3) $n=3$; 4) $n=5$ болса, онда n дәрежелі екі айнымалысы бар симметриялы көпмүше құрастырыңдар.

30.7. Өрнекті стандарт түрдегі көпмүше ретінде жазыңдар:
1) $a^2b(a^3b-b^2a^2)+4a^3b^2a^2-2aba^4b+7ab^0a^4b^2-3a^3bab^2$;
2) $3x^2y(x^3y-y^2x^2)-5x^3y^2x^2-2xyx^4y+5xy^2x^4y^2-4x^3yxy^2$.
Шыққан көпмүшенің дәрежесін атаңдар.

30.8. Егер: 1) $n=1$; 2) $n=2$; 3) $n=3$; 4) $n=5$ болса, онда n дәрежелі екі айнымалысы бар біртекті симметриялы көпмүше құрастырыңдар.

C

30.9. Симметриялы көпмүше болатындай берілген өрнекте (*) және (**) орнына бірмүшелер жазыңдар:
1) $x^4 - (*) - (**) + y^4$; 2) $yx^7 - (*) - (**) + xy^7$;
3) $5y^2x^7 - 6(*) - (**) + 5x^2y^7$.

30.10. Өрнекті көпмүше түрінде жазыңдар:
1) $(ax - 3y)(x^2 - py^2)$; 2) $(ax + 5y)(y^2 - xy + px^2)$.
Шыққан көпмүше x пен y айнымалыларына қатысты симметриялы болатындай a және p параметрлерінің мәндерін табыңдар.

ҚАЙТАЛАУ

30.11. Амалдарды орындаңдар:
1) $\frac{3x^3}{5y^3} : \frac{27x^5}{4y^4} \cdot \frac{45}{8y^2x^{-3}}$; 2) $\frac{25a(b-1)}{81d} : \frac{5cd^2}{27ab} : \frac{a^3(b-1)}{2c^3d^3}$.

30.12. Функцияның периодын табыңдар:
1) $y = \sin 4\pi x + \mathrm{tg}\, 2\pi x$; 2) $y = \mathrm{ctg}\, 6x - \sin 3x$;
3) $y = 2\mathrm{tg}\, \pi x + \cos 2\pi x$; 4) $y = 1 - \cos\frac{\pi x}{3} + 2\mathrm{ctg}\,\frac{\pi x}{3}$.

30.13. Теңсіздікті дәрежені төмендету әдісімен шешіңдер:
1) $\cos^2 x$ | $0{,}5$; 2) $\sin^2 x$ | 1; 3) $\cos^2 x < 1$.

30.14. Теңсіздікті интервалдар әдісімен шешіңдер:
1) $(x + 4)(x - 3)(x + 2)^2$ | 0; 2) $(2x - 3)(x + 6)(3x - 6)^3$ m 0;
3) $\frac{2x^2 - 5x + 3}{x - 3}$ m 0.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Көпмүше, көпмүшенің дәрежесі, көпмүшенің үлкен коэффициенті, қысқаша көбейту формулалары, квадрат үшмүше, квадрат үшмүшенің түбірлері.

§31. БІР АЙНЫМАЛЫСЫ БАР КӨПМҮШЕНІҢ ЖАЛПЫ ТҮРІ. КӨПМҮШЕНІ КӨПМҮШЕГЕ "БҰРЫШТАП" БӨЛУ

Сендер x айнымалысына қатысты n дәрежелі көпмүше ұғымымен танысасыңдар;
бір айнымалысы бар көпмүшені ажыратуды, көпмүшені стандарт түрге келтіруді, үлкен коэффициентті, дәрежені және бос мүшені табуды, көпмүшені көпмүшеге "бұрыштап" бөлуді үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР
Көпмүше, қалдықпен бөлу

Анықтама. $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$ (*мұндағы* n *— бүтін теріс емес сан*, $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$ *— кез келген сандар және* $a_n \neq 0$) *түрінде берілген өрнекті* x *айнымалысына қатысты* ***n дәрежелі көпмүше*** *деп атайды*.

Кез келген санды *нөлінші дәрежелі көпмүше* деп атайды. Нөлді *нөл-көпмүше* деп атайды.

Нөл-көпмүшенің басқа көпмүшелерден айырмашылығы — дәрежесі болмайды.

МЫСАЛ

1. $\sqrt{2}x^5 - x^4 + 2x^3 - \sqrt{1\frac{1}{3}}x^2 - 0{,}6x + 14$ — бесінші дәрежелі көпмүше.

$-3x^4 + 2x^3 - \sqrt{1\frac{1}{3}}x^2 - 0{,}6x + 14$ — төртінші дәрежелі көпмүше.

$2x^3 - \sqrt{1\frac{1}{3}}x^2 - 0{,}6x + 14$ — үшінші дәрежелі көпмүше.

$\sqrt{1\frac{1}{3}}x^2 - 0{,}6x + 14$ — екінші дәрежелі көпмүше.

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР:

Үшінші дәрежелі көпмүшені *үшмүше* деп атайды.
Екінші дәрежелі көпмүшені *екімүше* деп атайды.

ТҮСІНДІРІҢДЕР

Неліктен $2x^2 - \frac{1}{x} + 7$ өрнегі көпмүше болмайды?

Әдетте көпмүшені дәрежелердің кемуі ретімен жазады. Осындай жазу *көпмүшенің стандарт түрін* береді.

МЫСАЛ

2. $x + 2 + 3x^3 - 7x^2$ өрнегінің стандарт түрдегі көпмүше түрінде жазылуы: $3x^3 - 7x^2 + x + 2$.

Терминдер мен белгілеулер:

1) Көпмүшенің белгіленуі: $P(x)$; $Q(x)$; $S(x)$; $R(x)$ және т. б.

2) Көпмүше дәрежесінің белгіленуі: дәр. $P(x)$.

3) $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$ сандарын *көпмүшенің коэффициенттері* деп атайды, мұндағы a_n – үлкен коэффициент, a_0 – бос мүше.

МЫСАЛ

3. $2x^3 - \sqrt{3}x^2 - \frac{2}{3}x + 1$ көпмүшесінде үлкен коэффициент 2-ге, бос мүше 1-ге тең.

4) $a_n x^n, a_{n-1}x^{n-1}, a_{n-2}x^{n-2}, \ldots, a_1 x, a_0$ бірмүшелері *көпмүшенің мүшелері* деп аталады. Егер $a_i = 0$ болса, онда сәйкес мүше жазылмайды.

МЫСАЛ

4. x^4 көпмүшесінің коэффициенттері: 1, 0, 0, 0.

Барлық коэффициенттері және олардың орналасу реті белгілі болғанда көпмүшені жазуға болады.

1) Берілген коэффициенттері және олардың орналасу реті арқылы көпмүшені жазыңдар: а) $-\frac{2}{3}$, 5, 0, 1; ә) 1, 2, 0, 0.

2) Коэффициенттері 5, –7, 2, 0 болатын қанша көпмүше жазуға болады?

Екі көпмүшенің дәрежесі бірдей және сәйкес коэффициенттері тең болғанда ғана көпмүшелер тең болады.

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$, мұндағы $a_n \neq 0$;
$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} + \ldots + b_1 x + b_0$, мұндағы $b_m \neq 0$, көпмүшелері:

1) дәр. $P(x)$ = дәр. $Q(x)$, яғни $m = n$;

2) $a_n = b_m$, $a_{n-1} = b_{m-1}$, $a_{n-2} = b_{m-2}$, …, $a_1 = b_1$, $a_0 = b_0$ болғанда $P(x) = Q(x)$.

ТҮСІНДІРІҢДЕР

Неліктен $P(x) = \sin\frac{\pi}{6}x^3 - \sqrt{4+2\sqrt{3}}\,x^2 - x$ және $Q(x) = \frac{1}{2}x^3 - (1+\sqrt{3})x^2 - \text{tg}\,\frac{\pi}{4}x$ көпмүшелерінің дәрежелері тең?

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР: Көпмүшелерді қосуға, азайтуға, көбейтуге болады.

ТҮСІНДІРІҢДЕР

Көпмүшелермен амалдар қалай орындалған:

1) $(3x^3 - 7x^2 + x + 2) + (x^3 + 13x^2 - x - 2) = 3x^3 - 7x^2 + x + 2 + x^3 + 13x^2 - x - 2 = 4x^3 + 6x^2$.

2) $(3x^3 - 7x^2 + x + 2) - (x^3 + 13x^2 - x - 2) = 3x^3 - 7x^2 + x + 2 - x^3 - 13x^2 + x + 2 = 2x^3 - 20x^2 + 2x + 4$.

3) $(3x^3 - 7x^2 + x + 2)(x + 2) = 3x^4 - 7x^3 + x^2 + 2x + 6x^3 - 14x^2 + 2x + 4 = 3x^4 - x^3 - 13x^2 + 4x + 4$?

Келесі қасиеттер орындалған жағдайда көпмүшелерді қосуға, азайтуға, көбейтуге болады:

1) көпмүшелерді қосу мен көбейтудің ауыстырымдылық қасиеті —
$$P(x) + Q(x) = Q(x) + P(x),$$
$$P(x) \cdot Q(x) = Q(x) \cdot P(x);$$

2) көпмүшелерді қосу мен көбейтудің терімділік қасиеті —
$$(P(x) + Q(x)) + R(x) = P(x) + (Q(x) + R(x)),$$
$$(P(x) \cdot Q(x)) \cdot R(x) = P(x) \cdot (Q(x) \cdot R(x));$$

3) қосуға қатысты көпмүшелерді көбейтудің үлестірімділік қасиеті —
$$(P(x) + Q(x)) \cdot R(x) = P(x) \cdot R(x) + Q(x) \cdot R(x).$$

ТҮСІНДІРІҢДЕР

Неліктен:

— дәр. $(P(x) + Q(x) + R(x)) \leq k$, мұндағы $k = \max\ \{m,\ g,\ p\}$ және $m =$ дәр. $(P(x))$, $g =$ дәр. $(Q(x))$, $p =$ дәр. $(R(x))$?

— дәр. $(P(x) \cdot Q(x) \cdot R(x)) =$ дәр. $(P(x)) +$ дәр. $(Q(x)) +$ дәр. $(R(x))$?

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР: Көбейтуге кері амал бөлу амалы екенін білесіңдер.

МЫСАЛ

5. Егер $P(x) = x^3 + 1$, $Q(x) = x^2 - x + 1$, $S(x) = x + 1$ болса, онда $P(x) = Q(x) \cdot S(x)$.

Анықтама. *Егер $P(x) = Q(x) \cdot S(x)$ теңдігі орындалатындай $Q(x)$ көпмүшесі бар болса, онда $P(x)$ көпмүшесі $S(x)$ көпмүшесіне бөлінеді.*

$P(x)$ көпмүшесі $S(x)$ көпмүшесіне бөлінсе, онда $P(x) \vdots S(x)$ түрінде жазады.

Көпмүшелердің бөлінгіштігінің қасиеттері:

1) Нөл-көпмүше кез келген көпмүшеге бөлінеді, яғни $0 : P(x) = 0$.

2) Егер $P(x) \neq 0$ болса, онда $P(x)$ көпмүшесі нөлге бөлінбейді.

3) Нөлінші дәрежелі көпмүшеге кез келген көпмүше бөлінеді, яғни $P(x) : c = \left(\frac{1}{c}P(x)\right)$.

4) Егер $P(x) \vdots S(x)$ және $P(x) \neq 0$, $S(x) \neq 0$ болса, онда дәреже $(P(x)) \geq$ дәр. $(S(x))$.

Дәлелдеуі: Шарт бойынша $P(x) \vdots S(x)$. Онда анықтама бойынша $P(x) = Q(x) \cdot S(x)$ теңдігі орындалатындай $Q(x)$ көпмүшесі бар болады. Дәр. $(P(x) \cdot S(x)) =$ дәр. $(P(x)) +$ дәр. $(S(x))$ болғандықтан, дәр. $(P(x)) \geq$ дәр. $(S(x))$.

1 – 3 қасиеттерін өздерің дәлелдеп көріңдер.

Бір көпмүше екінші көпмүшеге бөлінбеген жағдайда қалдықпен бөлу (бүтін сандарды бөлу тәрізді $73 : 13 = 5$ (қалд. 8), өйткені $73 = 13 \cdot 5 + 8$ немесе жалпы $p = s \cdot q + r$, мұндағы $0 \leq r < s$) туралы айтады.

Теорема. ***Егер $P(x)$ және $S(x)$ көпмүшелер болса, онда $P(x) = S(x) \times Q(x) + R(x)$ және дәр. $(R(x)) <$ дәр. $(S(x))$ немесе $R(x) = 0$ теңдіктері орындалғанда ғана $Q(x)$ және $R(x)$ көпмүшелер жұбы бар болады.***

МЫСАЛ

6. $x^5 - 6x^3 + 2x^2 - 4$ көпмүшесін $x^2 - x + 1$ көпмүшесіне бөлейік.

$x^5 - 6x^3 + 2x^2 - 4 \;\big\vert\; \underline{x^2 - x + 1}$	Көптаңбалы сандарды бөлгендей "бұрыштап" бөлеміз
$x^5 - 6x^3 + 2x^2 - 4 \;\big\vert\; \underline{x^2 - x + 1}$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\; \big\vert\; x^3$ Көрнекілік үшін келесі түрде жазамыз: $-\; x^5 + 0 \cdot x^4 - 6x^3 + 2x^2 + 0 \cdot x - 4 \;\big\vert\; \underline{x^2 - x + 1}$ $\quad x^5 - x^4 + x^3 \qquad\qquad\qquad\qquad \big\vert\; x^3$	Алдымен бөлінгіштің үлкен мүшесін бөлгіштің үлкен мүшесіне бөлеміз: $x^5 : x^2 = x^{5-2} = x^3$ Осыдан кейін x^3-ты $x^2 - x + 1$ бөлгішке көбейтеміз және бөлінгіштің астына жазамыз: $x^5 - x^4 + x^3$
$-\; x^5 + 0 \cdot x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4 \;\big\vert\; \underline{x^2 - x + 1}$ $\quad \underline{x^5 - x^4 + x^3} \qquad\qquad\quad \big\vert\; x^3 + x^2$ $\qquad\quad x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 4$	Айырымды орындаймыз: $x^5 + 0 \cdot x^4 - 6x^3 + 2x^2 + 0 \cdot x - 4 -$ $- (x^5 - x^4 + x^3) = x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 4$
$-\; x^5 + 0 \cdot x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4 \;\big\vert\; \underline{x^2 - x + 1}$ $\quad \underline{x^5 - x^4 + x^3} \qquad\qquad\quad \big\vert\; x^3 + x^2 - 6x - 5$ $\qquad\quad x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 4$ $\qquad -\; \underline{x^4 - x^3 + x^2}$ $\qquad\qquad -6x^3 + x^2 - 4$ $\qquad\quad -\; \underline{-6x^3 + 6x^2 - 6x}$ $\qquad\qquad\qquad -5x^2 + 6x - 4$ $\qquad\qquad\quad -\; \underline{-5x^2 + 5x - 5}$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x + 1$ қалдық	Көпмүшені бөлуді жалғастырамыз: $x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 4$ көпмүшесін $x^2 -$ $- x + 1$ көпмүшесіне $x^5 - 6x^3 + 2x^2 - 4$ көпмүшесін $x^2 - x + 1$ көпмүшесіне бөлгендей т.с.с.
Әдетте $0 \cdot x^n$ жазылмайды. Сондықтан көпмүшелерді бөлу келесідей жазылады:	$-\; x^5 + 0 \cdot x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4 \;\big\vert\; \underline{x^2 - x + 1}$ $\quad \underline{x^5 - x^4 + x^3} \qquad\qquad\quad \big\vert\; x^3 + x^2 - 6x - 5$ $\qquad\quad x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 4$ $\qquad -\; \underline{x^4 - x^3 + x^2}$ $\qquad\qquad -6x^3 + x^2 - 4$ $\qquad\quad -\; \underline{-6x^3 + 6x^2 - 6x}$ $\qquad\qquad\qquad -5x^2 + 6x - 4$ $\qquad\qquad\quad -\; \underline{-5x^2 + 5x - 5}$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x + 1$ қалдық

1. Бір айнымалысы бар төртінші дәрежелі көпмүшеге мысал келтіріңдер.
2. Қандай көпмүшенің дәрежесі болмайды?
3. Көпмүшенің: а) бос мүшесі; ә) үлкен коэффициенті; б) дәрежесі нөлге тең бола ма?
4. Көпмүшелермен қандай амалдар орындауға болады?
5. Бір көпмүше екінші көпмүшеге әр уақытта бөліне ме?
6. Бір көпмүшені екінші көпмүшеге бөлу әр уақытта орындала ма?

Жаттығулар

A

31.1. $f(x)$ және $h(x)$ көпмүшелерінің қосындысының мәнін табыңдар:
1) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$ және $h(x) = 3x^2 - x - 6$, мұндағы $x = 2; 3; -1$;
2) $f(x) = -x^3 - 5x^2 + 3$ және $h(x) = 2x^4 - x^2 - 2$, мұндағы $x = -2; -1; 2$;
3) $f(x) = 5x^4 - 3x^2 + 1$ және $h(x) = x^2 - 3x - 1$, мұндағы $x = 2; 3; -1$;
4) $f(x) = -x^3 - 4x^2 - 3$ және $h(x) = -x^3 - x - 3$, мұндағы $x = 2; 3; -1$.

31.2. p параметрінің қандай мәндерінде $(p^2 - 4)x^4 - 2x^3 + (2p - 1)x - 6$ көпмүшесі:
1) келтірілген көпмүше;
2) төртінші дәрежелі көпмүше;
3) үшінші дәрежелі көпмүше;
4) $x = -1$ және $x = 1$ болғанда мәндері бірдей болады?

31.3. $f(x)$ және $h(x)$ көпмүшелері тең болатындай a және b параметрлерінің барлық мәндерін табыңдар:
1) $f(x) = 2ax - (a + 1)$ және $h(x) = 4x + (3b - a + 11)$;
2) $f(x) = 3ax - 3a - 2$ және $h(x) = 9x + (2b - 2a + 9)$;
3) $f(x) = ax - 3a + 5$ және $h(x) = -x + (a - 2b + 3)$;
4) $f(x) = -ax - 2a - 2$ және $h(x) = 5x + (2b - a + 4)$.

31.4. 1) $x^3 - 2x^2 - 3x - 5$ көпмүшесін $x^2 - 3x - 1$;
2) $2x^3 - 2x^2 + x + 3$ көпмүшесін $x^2 - 3x - 4$;
3) $x^5 - 3x^3 - x + 2$ көпмүшесін $x - 2$;
4) $6x^4 - 2x + 3$ көпмүшесін $2x + 3$ көпмүшесіне "бұрыштап" бөлуді орындаңдар.

31.5. Келесі тұжырымдардың арасынан ақиқатын көрсетіңдер:
1) n дәрежелі екі көпмүшенің қосындысы дәрежесі $2n$ болатын көпмүшеге тең;
2) n дәрежелі екі көпмүшенің айырымы дәрежесі n-нен артық болмайтын көпмүшеге тең;
3) n дәрежелі үш көпмүшенің көбейтіндісі дәрежесі n-нен артық болмайтын көпмүшеге тең;
4) n дәрежелі екі көпмүшенің көбейтіндісі дәрежесі $2n$ болатын көпмүшеге тең.

B

31.6. Егер $f(x)$ және $h(x)$ көпмүшелер болса, онда келесі 17-кестені толтырыңдар:

17-кесте

Дәр. $f(x)$	Дәр. $h(x)$	Дәр. $(f(x)+h(x))$	Дәр. $f(x)\cdot h(x)$	Дәр. $f^2(x)$
4	2			
	5			14
	3		7	
		2		6
		4	14	

31.7. Стандарт түріндегі $f(x)$ көпмүшесінің барлық коэффициенттерінің қосындысының мәні $f(1)$-ге тең болатынын дәлелдеңдер.

31.8. $f(x)$ және $h(x)$ көпмүшелері тең болатындай a параметрінің барлық мәндерін табыңдар:

1) $f(x) = (a^2 - 5)x^4 - 2x^3 + (2a - 1)x - 7$ және
$h(x) = 4x^4 - 2x^3 - (a - 8)x - a - 4$;
2) $f(x) = (a^2 - 2)x^3 - 2x^2 + (2a + 1)x - 4$ және
$h(x) = 2x^3 - 2x^2 + (a - 1)x - a - 6$;
3) $f(x) = (3 - a^2)x^5 - 2x^4 + (2a + 1)x + 3$ және
$h(x) = -x^5 - 2x^4 + (a - 1)x + a + 5$;
4) $f(x) = (a^2 - 2a)x^4 - 2x^2 + (3a - 2)x - 4 + a$ және
$h(x) = -x^4 - 2x^2 + (2a - 1)x - a - 2$.

31.9. Берілген теңдік ақиқат болатындай K, P және M мәндерін табыңдар:

1) $z^4 + 2z^3 - 16z^2 - 2z + 15 = (z + 1)(z^3 + Kz^2 + Pz + M)$;
2) $3z^5 - z^4 - 3z + 1 = (z^2 + 1)(3z^3 + Kz^2 + Pz + M)$;
3) $z^6 + 3z^3 + 2 = (z^3 + 1)(z^3 + Kz^2 + Pz + M)$.

C

31.10. $f(x)$ көпмүшесі n дәрежелі және x айнымалысының барлық мәндерінде $f(x) = f(-x)$ теңдігі орындалатын болса, онда келесі тұжырымдарды дәлелдеңдер:

1) n — жұп натурал сан немесе нөл;
2) x-тің тақ дәрежесінде $f(x)$ көпмүшесінің коэффициенттері нөлге тең.

31.11. a мен c-ның қандай мәндерінде $f(x)$ көпмүшесі $h(x)$ көпмүшесіне қалдықсыз бөлінеді:

1) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 + ax + c$, $h(x) = x^2 - 3x + 2$;
2) $f(x) = x^4 - 2x^3 + ax + 2$, $h(x) = x^2 + x + c$?

ҚАЙТАЛАУ

31.12. Теңдеуді шешіңдер:

1) $1 - \frac{x}{x+1} = \frac{x}{x-2}$;
2) $x^2 + \frac{1-3x}{x-4} = 16 - \frac{3x-1}{x-4}$;

3) $\dfrac{36}{x^2-12x}-\dfrac{3}{x-12}=13;$ 4) $\dfrac{12}{x^2+2x}-\dfrac{3}{x^2+2x-2}=1.$

31.13. Теңсіздіктер жүйесі арқылы берілген нүктелер жиынын координаталық түзуде кескіндеңдер:

1) $\begin{cases}x^2-3x\geq 0,\\ x-2>0;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}8x-x^2<0,\\ 4-2x<0;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}1+x^2\leq 5,\\ 1-x\leq 0;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}4-x^2\geq 0,\\ 1+x^2\leq 17.\end{cases}$

31.14. $y=|x^2+2x-8|$ функциясының графигін салыңдар. Графиктің көмегімен:

1) функция графигінің координаталар осьтерімен қиылысу нүктелерінің координаталарын табыңдар;
2) функцияның бірсарындылық аралықтарын жазыңдар;
3) симметрия осінің теңдеуін жазыңдар;
4) $p=|x^2+2x-8|$ теңдеуінің үш түбірі болатындай p параметрінің мәнін табыңдар.

31.15. 1) Екі айлақтың аралығы 90 км. Теплоход бір айлақтан екінші айлаққа барып, кері қайтып, барлық жолға 7,5 сағ жіберді. Егер өзен ағысының жылдамдығы теплоходтың меншікті жылдамдығының 20%-ын құрайтын болса, онда теплоходтың меншікті жылдамдығын табыңдар.
2) Өзен ағысы бойымен катер 30 мин жүрген жолды өзен ағысына қарсы 40 мин жүреді, сонымен қатар ағысқа қарсы 2 км жолды 10 мин жүріп өтеді. Катердің меншікті жылдамдығы мен өзен ағысының жылдамдығын табыңдар.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Көпмүше, теңдеу, теңдеудің түбірі, симметриялы және біртекті теңдеулер.

§ 32. БІР АЙНЫМАЛЫСЫ БАР КӨПМҮШЕНІҢ ТҮБІРЛЕРІН КӨБЕЙТКІШТЕРГЕ ЖІКТЕУ ТӘСІЛІМЕН ТАБУ. БЕЗУ ТЕОРЕМАСЫ. ГОРНЕР СХЕМАСЫ

Сендер көпмүшенің түбірі ұғымымен, Безу теоремасы және оның салдарымен, Горнер схемасымен таныcасыңдар;
бір айнымалысы бар көпмүшенің түбірлерін көбейткішке жіктеу тәсілімен табуды, $n\in N$ болғанда x^n-a^n, $x^{2n+1}+a^{2n+1}$ формулаларын көпмүшені көбейткіштерге жіктеуде қолдануды, есептер шығаруда Безу теоремасын және оның салдарын қолдануды, симметриялы және біртекті көпмүшелердің түбірлерін түрлі тәсілдермен табуды, көпмүшелердің түбірлерін табу үшін Горнер схемасын қолдануды үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Көпмүшенің түбірі, көпмүшені көбейткіштерге жіктеу

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$ көпмүшесін қарастырайық. Егер x айнымалысының орнына x_0 санын қоятын болсақ, онда $P(x_0) = a_n x_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + a_{n-2}x_0^{n-2} + \ldots + a_1 x_0 + a_0$ санын аламыз. $P(x_0)$ санын $P(x)$ көпм үшесінің $x = x_0$ болғандағы мәні дейді.

Егер $P(x) = 3x^4 - 2x + 1$ болса, онда $P(2)$, $P(0)$, $P(-0{,}5)$ мәндерін табыңдар.

Анықтама . *Егер $x = x_0$ болғанда $P(x)$ көпмүшесінің мәні нөлге тең болса, онда x_0 санын $P(x)$* ***көпмүшесінің түбірі*** *деп атайды* .

2 саны $x^3 + 3x^2 - 7x + 1$ көпмүшесінің түбірі бола ма?

Ескерту . Екі тұжырымды шатастыруға болмайды.
1) Көпмүше нөлге тең.
2) $x = x_0$ болғанда көпмүшенің мәні нөлге тең.

МЫСАЛ

1. $P(x) = x^3 - 8$ **көпмүшесі нөлге тең емес.**
$P(x) \neq 0$, $P(2) = 0$.

МЫСАЛ

2. $x^6 - x^5 - 2x^4 + x^2 - x - 2$ **көпмүшесінің түбірлерін топтау тәсілі арқылы табайық.**

Шешуі . $x^6 - x^5 - 2x^4 + x^2 - x - 2 = (x^6 - x^5 - 2x^4) + (x^2 - x - 2) = x^4 \cdot (x^2 - x - 2) + (x^2 - x - 2) = (x^2 - x - 2) \cdot (x^4 + 1) = (x - 2) \cdot (x + 1) \cdot (x^4 + 1)$. **Онда** $x^6 - x^5 - 2x^4 + x^2 - x - 2$ **көпмүшесінің түбірлері** $x = 2$ **және** $x = -1$.

Жауабы : -1; 2.

$x^n - a^n$ және $x^{2n+1} + a^{2n+1}$ түріндегі n-ші дәрежелі екімүшелерді көбейткіштерге жіктеуге мүмкіндік беретін формулаларды қарастырайық.

Теңдіктердің ақиқаттығын тексеріңдер:

$$x^2 - a^2 = (x - a)(x + a),$$
$$x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + xa + a^2),$$
$$x^4 - a^4 = (x - a)(x^3 + x^2 a + xa^2 + a^3),$$
....

Жақшалардағы қосылғыштардың өзгеруін талдап, заңдылықты орнатыңдар. Қарастырылған теңдіктерден $x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \ldots + xa^{n-2} + a^{n-1})$ теңдігін алуға бола ма?
Теңдіктің ақиқаттығына оң жағындағы жақшаларды ашу арқылы көз жеткізіңдер.

Өрнекті ықшамдаңдар:

$$(x + a)(x^2 - xa + a^2)$$
$$(x + a)(x^4 - x^3 a + x^2 a^2 - xa^3 + a^4)$$
$$(x + a)(x^6 - x^5 a + x^4 a^2 - x^3 a^3 + x^2 a^4 - xa^5 + a^6)$$
....

Қарастырылған теңдіктерден $x^{2n+1} + a^{2n+1} = (x + a)(x^{2n} - x^{2n-1}a + x^{2n-2}a^2 - \dots - xa^{2n-1} + a^{2n})$ теңдігін алуға бола ма?
Теңдіктің ақиқаттығына оң жағындағы жақшаларды ашу арқылы көз жеткізіңдер.

Анықтама. *Шетінен бірдей қашықтықта орналасқан мүшелердің коэффициенттері тең болатын бір айнымалысы бар n-ші дәрежелі көпмүше* ***симметриялы көпмүше*** *деп аталады*.

ТҮСІНДІРІҢДЕР

Неліктен $x^6 - 116x^5 - x^4 + 4x^3 - x^2 - 116x + 1$; $13x^5 - x^4 + 47x^3 + 47x^2 - x + 13$ көпмүшесі симметриялы болады?

АЛГОРИТМ

Жұп дәрежелі $ax^{2n} + bx^{2n-1} + cx^{2n-2} + \dots + cx^2 + bx + a$ симметриялы көпмүшесінің түбірлерін табу алгоритмін $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a$ көпмүшесі арқылы берейік:

1) көпмүшені нөлге теңестіру: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$;

2) шыққан теңдеудің екі жақ бөлігін x^2 өрнегіне бөлу (бұл жағдайда түбірлері жоғалмайды, себебі $a \neq 0$ болғанда $x = 0$ теңдеудің түбірі болмайды);

3) топтау тәсілі арқылы $ax^2 + bx + c + b\cdot\frac{1}{x} + a\cdot\frac{1}{x^2} = 0$ теңдеуін $a\cdot\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\cdot\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0$ түріне келтіру;

4) $y = x + \frac{1}{x}$ айнымалысын енгізу;

5) $x^2 + \frac{1}{x^2}$ өрнегін y арқылы өрнектеу, яғни $y^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$ немесе $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$;

6) $ay^2 + by + c - 2a = 0$ квадрат теңдеуін шешу;

7) x айнымалысына көшу.

Тақ дәрежелі симметриялы теңдеудің әр уақытта бір түбірі -1 болғандықтан оның жұп дәрежелі симметриялы теңдеуге келтірілетінін өздерің қарастырыңдар. Келесі мысалдарды қарастырыңдар:
$x^5 + 2x^4 - 7x^3 - 7x^2 + 2x + 1$; $3x^7 - 4x^6 - 9x^5 + 2x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 4x + 3$.

МЫСАЛ

3. $2x^5 - 3x^4 + x^3 + x^2 - 3x + 2$ бесінші дәрежелі симметриялы көпмүшенің түбірін табайық.

Шешуі. Көпмүшені $(x + 1)$ екімүшесіне бөлейік. Сонда $2x^5 - 3x^4 + x^3 + x^2 - 3x + 2 = (x + 1)(2x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 2)$ аламыз. Енді $2x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 2$ көпмүшесінің түбірін табу үшін оны 0-ге теңестіріп, x^2-іне бөлеміз:

$2x^2 - 5x + 6 - \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2} = 0$. Әрі қарай топтау тәсілін қолданамыз. Сонда $2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0$ теңдеуі шығады.

Енді $y = x + \frac{1}{x}$ алмастыруын енгіземіз:

$2y^2 - 5y + 2 = 0$. Соңғы теңдеудің түбірлері: $y_1 = 2$ және $y_2 = 0{,}5$. Алғашқы айнымалыға көшеміз,

$x + \frac{1}{x} = 2$ және $x + \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$ теңдеулерін аламыз, оларды шешу нәтижесінде $x = 1$ түбірін аламыз.

Жауабы: -1 және 1.

$P(x)$ көпмүшесін $(x-a)$ екімүшесіне бөліп $R(x)$ қалдығын табыңдар және оны $P(a)$ мәнімен салыстырыңдар:
1) $P(x)=2x^2+7x-1$, $a=1$.
2) $P(x)=x^5-3x^2+7x+2$, $a=-2$.
3) $P(x)=2x^4+3x^3-5x^2-7x+2$, $a=3$.

Тапсырманы орындау барысында $P(x)$ көпмүшесін $(x-a)$ екімүшесіне бөлгенде шыққан $R(x)$ қалдығы $P(a)$ мәніне тең болды. Бұл кездейсоқ жағдай емес.

Безу теоремасы. ***Кез келген көпмүшені $(x-a)$ екімүшесіне бөлгенде шыққан қалдық бөлінгіш көпмүшенің $x=a$ болғандағы мәніне тең.***

Дәлелдеуі. Бөлінгіш көпмүшені $P(x)$ деп белгілейік. Бөлгіш бірінші дәрежелі көпмүше, сондықтан дәреже $R(x)=0$, яғни $R(x)$ – const. $R(x)=c$ болсын, онда $P(x)=(x-a)\cdot S(x)+c$.

Демек, $P(a)=(a-a)\cdot S(a)+c=c$.

Егер: 1) $P(x)=3x^5-2x^4-7x^2+x+5$, $a=-1$;
2) $P(x)=x^3-3x^2-5x+9$, $a=-3$ болса, онда $P(x)$ көпмүшесін $(x-a)$ екімүшесіне бөлуді орындамай-ақ $R(x)$ қалдығын табыңдар.

1-салдар. a саны түбірі болғанда ғана $P(x)$ көпмүшесі $(x-a)$ екімүшесіне бөлінеді.

$P(x)\,\vdots\,(x-a) \Leftrightarrow a$ саны $P(x)$ көпмүшесінің түбірі, яғни:

1) $P(x)\,\vdots\,(x-a)$, онда a саны $P(x)$ көпмүшесінің түбірі,

2) a саны $P(x)$ көпмүшесінің түбірі, онда $P(x)\,\vdots\,(x-a)$.

Дәлелдеуі. 1) $P(x)=(x-a)\cdot S(x)+P(a)$. Шарт бойынша $P(x)\,\vdots\,(x-a)$ демек $P(a)=0$. Онда анықтама бойынша a саны $P(x)$ көпмүшесінің түбірі.

2) $P(x)=(x-a)\cdot S(x)+R(x)$. Шарт бойынша a саны $P(x)$ көпмүшесінің түбірі, демек $P(a)=0$. $R(x)=P(a)$ болғандықтан $R(x)=0$.

Сонда $P(x)=(x-a)\cdot S(x)$. Демек, $P(x)\,\vdots\,(x-a)$.

2-салдар. Егер $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ сандары $P(x)$ көпмүшесінің түрлі түбірлері болса, онда

$$P(x)\,\vdots\,(x-a_1)\cdot(x-a_2)\cdot(x-a_3)\cdot\ldots\cdot(x-a_n). \qquad (1)$$

Дәлелдеуі. Дәлелдеу үшін математикалық индукция әдісін қолданамыз.

$n=1$ үшін тексереміз. Яғни a_1 саны $P(x)$ көпмүшесінің түбірі болса, онда $P(x)\,\vdots\,(x-a_1)$. Бұл 1-салдар бойынша ақиқат.

(1) тұжырымы $n=k$ болғанда ақиқат болсын. Яғни $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ сандары $P(x)$ көпмүшесінің түрлі түбірлері болса, онда

$$P(x)\,\vdots\,(x-a_1)\cdot(x-a_2)\cdot(x-a_3)\cdot\ldots\cdot(x-a_k). \qquad (2)$$

Енді (1) тұжырымының $n=k+1$ болғанда ақиқат екенін дәлелдейік. Яғни $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{k+1}$ сандары $P(x)$ көпмүшесінің түрлі түбірлері болса, онда $P(x)\,\vdots\,(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\cdot\ldots\cdot(x-a_{k+1})$.

Ұйғарым бойынша $P(x) \vdots (x - a_1) \cdot (x - a_2) \cdot (x - a_3) \cdot \ldots \cdot (x - a_k)$, сондықтан

$$P(x) = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) \ldots (x - a_k) \cdot S(x). \qquad (3)$$

a_{k+1} саны $P(x)$ көпмүшесінің түбірі болғандықтан $P(a_{k+1}) = 0$.

(3) қолданамыз. Сонда $P(a_{k+1}) = (a_{k+1} - a_1)(a_{k+1} - a_2)(a_{k+1} - a_3) \ldots$ $\ldots (a_{k+1} - a_k) \cdot S(a_{k+1}) = 0$.

Шарт бойынша $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{k-1}$ сандары $P(x)$ көпмүшесінің түрлі түбірлері, сондықтан $(a_{k+1} - a_1)(a_{k+1} - a_2)(a_{k+1} - a_3) \ldots (a_{k+1} - a_k) \neq 0$. Демек, $S(a_{k+1}) = 0$, яғни a_{k+1} саны $S(x)$ көпмүшесінің түбірі болады. 1-салдар бойынша $S(x) \vdots (x - a_{k+1})$.

Онда $S(x) = (x - a_{k+1}) \cdot F(x)$.

(3) қолданамыз. Сонда $P(x) = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) \ldots (x - a_k) \times$ $\times (x - a_{k+1}) F(x)$. Бұл $P(x) \vdots (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) \ldots (x - a_k)(x - a_{k+1})$ береді.

3-салдар. Көпмүшенің нөлге тең емес әртүрлі нақты түбірлерінің саны көпмүшенің дәрежесінен артық емес.

Дәлелдеуі. $P(x) \neq 0$, дәреже $P(x) = n$ және $P(x)$ көпмүшесінің әртүрлі $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ түбірлерінің саны k-ға тең болсын. Онда 2-салдар бойынша $P(x) \vdots (x - a_1) \cdot (x - a_2) \cdot (x - a_3) \cdot \ldots \cdot (x - a_k)$.

$P(x) = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) \ldots (x - a_k) \cdot S(x)$, дәр. $P(x) = n$, дәр. $(x - a_1) \cdot (x - a_2) \cdot (x - a_3) \cdot \ldots \cdot (x - a_k) = k$, дәр. $(x - a_1)(x -$ $- a_2)(x - a_3) \ldots (x - a_k) \cdot S(x) \geq k$, сондықтан $n \geq k$ немесе $k \leq n$.

Горнер схемасы

Мысал

4. Көпмүшенің $(x - a)$ түріндегі екімүшеге бөлуін қарастырайық.

$$\begin{array}{r|l}
2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 7x + 2 & x - 3 \\
\underline{2x^4 - 6x^3} \qquad\qquad\qquad\qquad & 2x^3 + 9x^2 + 22x + 59 \\
9x^3 - 5x^2 \qquad\qquad\quad & \\
\underline{9x^3 - 27x^2} \qquad\qquad\quad & \\
22x^2 - 7x \qquad\quad & \\
\underline{22x^2 - 66x} \qquad\quad & \\
59x + 2 & \\
\underline{59x - 177} & \\
179 &
\end{array}$$

Бөлінгіш пен бөліндінің бас коэффициенттерін салыстырамыз:

$$\begin{array}{r|l}
2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 7x + 2 & x - 3 \\
2x^4 - 6x^3 \qquad\qquad\qquad\quad & 2x^3
\end{array}$$

Ол коэффициенттер тең.

Бөлінгіштің коэффициенттері	2	3	–5	–7	2
$a = 3$					
Бөліндінің коэффициенттері	2	9	22	59	179

Бөліндінің келесі коэффициенті қалай алынды?

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 7x + 2 & x - 3 \\ \underline{-\,2x^4 - 6x^3} & \overline{2x^3} \\ 9x^3 - 5x^2 - 7x + 2 & \end{array}$$

Бөліндінің келесі коэффициентін (9 санын) алу үшін бөлінгіштің сәйкес коэффициентін (3 санын) 3 санына көбейтілген бөліндінің алдыңғы коэффициентіне (2 санына) қосады.

Бөлінгіштің коэффициенттері	2	3	–5	–7	2
$a = 3$					
Бөліндінің коэффициенттері	2	9	22	59	179

Бөліндінің келесі коэффициенті қалай алынды?

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 7x + 2 & x - 3 \\ \underline{-\,2x^4 - 6x^3} & \overline{2x^3 + 9x^2} \\ 9x^3 - 5x^2 - 7x + 2 & \\ \underline{-\,9x^3 - 27x^2} & \\ 22x^2 - 7x + 2 & \end{array}$$

Бөліндінің келесі коэффициентін (22 санын) алу үшін бөлінгіштің сәйкес коэффициентін (–5 санын) 3 санына көбейтілген бөліндінің алдыңғы коэффициентіне (9 санына) қосады.

Бөлінгіштің коэффициенттері	2	3	–5	–7	2
$a = 3$					
Бөліндінің коэффициенттері	2	9	22	59	179

Бөліндінің келесі коэффициенті қалай алынды?

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 7x + 2 & x - 3 \\ \underline{-\,2x^4 - 6x^3} & \overline{2x^3 + 9x^2 + 22x} \\ 9x^3 - 5x^2 - 7x + 2 & \\ \underline{-\,9x^3 - 27x^2} & \\ 22x^2 - 7x + 2 & \\ \underline{-\,22x^2 - 66x} & \\ 59x + 2 & \end{array}$$

Қалдықты (179 санын) алу үшін бөлінгіштің сәйкес коэффициентін (2 санын) 3 санына көбейтілген бөліндінің алдыңғы коэффициентіне (59 санына) қосады.

Бөлінгіштің коэффициенттері	2	3	–5	–7	2
$a = 3$					
Бөліндінің коэффициенттері	2	9	22	59	179

Қалдық қалай алынды?

$$
\begin{array}{r|l}
2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 7x + 2 & x - 3 \\
\underline{-\ 2x^4 - 6x^3} \qquad\qquad\qquad & 2x^3 + 9x^2 + 22x + 59 \\
9x^3 - 5x^2 - 7x + 2 & \\
\underline{-\ 9x^3 - 27x^2} \qquad\quad & \\
22x^2 - 7x + 2 & \\
\underline{-\ 22x^2 - 66x} \quad & \\
59x + 2 & \\
\underline{-\ 59x - 177} & \\
179 &
\end{array}
$$

Бөлінгіштің коэффициенттері	2	3	–5	–7	2
$a = 3$ ×	+				
Бөліндінің коэффициенттері	2	9	22	59	179

Бөліндінің әр келесі коэффициентін алу үшін бөлінгіштің сәйкес коэффициентін a санына көбейтілген бөліндінің алдыңғы коэффициентіне қосу керек.

АЛГОРИТМ $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$ көпмүшесін $(x - p)$ түріндегі екімүшеге бөлу алгоритмі:

Екі жол жазылады — жоғарғысында бөлінгіштің коэффициенттері жазылады: $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$.

Екінші жолда бөлінгіштің бірінші коэффициентінің сол жағынан p саны жазылады.

Одан кейін екінші жолда бөліндінің коэффициенттері жазылады: $b_{n-1}, b_{n-2}, \ldots, b_1, b_0$ (18-кесте).

18-кесте

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_1	a_0
p	$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = a_{n-1} + pb_{n-1}$	$b_{n-3} = a_{n-2} + pb_{n-2}$		$b_0 = a_1 + pb_1$	қалдық

ТҮСІНДІРІҢДЕР

$x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 7$ көпмүшесін $(x + 2)$ екімүшесіне бөлгенде бөлінді мен қалдық қалай табылған (19-кесте)?

19-кесте

	1	–2	3	0	–7
–2	1	–4	11	–22	37

$x^3 - 4x^2 + 11x - 22$ — бөлінді, қалдық 37-ге тең.

?

1. Қандай жағдайда Горнер схемасы қолданылады?
2. $P(x)$ көпмүшесін $(x - c)$ екімүшесіне бөлгенде қалдық қалай табылды?

Жаттығулар

А

32.1. $P(x)$ көпмүшесін екімүшеге бөлгендегі қалдықты табыңдар:
1) $P(x) = 2x^4 + 7x^3 - 2x^2 - 13x + 9$ көпмүшесін $(x + 2)$-ге;
2) $P(x) = 2x^4 + 7x^3 - 2x^2 - 13x + 4$ көпмүшесін $(x - 1)$-ге;
3) $P(x) = x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x - 12$ көпмүшесін $(x + 2)$-ге;
4) $P(x) = x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x - 10$ көпмүшесін $(x - 1)$-ге.

32.2. Берілген сандар түбірлері болатын төртінші дәрежелі көпмүшені жазыңдар :
1) $-2,\ 0,\ 2,\ 3$; 2) $-3,\ -1,\ 1,\ 3$; 3) $-3,\ -1,\ 0,\ 3$; 4) $-2,\ 1,\ 2,\ 5$.

32.3. $P(x)$ көпмүшесінің $x = a$ нүктесіндегі мәнін табыңдар:
1) $P(x) = x^3 + 4x^2 + 3x + 11,\ a = -3$;
2) $P(x) = 3x^6 - x^3 - 12x^2 - 51,\ a = -2$;
3) $P(x) = 3x^4 - x^2 + x - 31,\ a = 2$;
4) $P(x) = -3x^5 + 2x^3 - 4x^2 - 2x + 10,\ a = -1$.

32.4. Горнер схемасын қолданып $P(x)$ көпмүшесін $(x - a)$ екімүшесіне бөлуді орындаңдар және 20-кестені толтырыңдар:

20-кесте

$P(x)$	a	Бөлінді	Қалдық
$x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 7x^2 + 2x - 1$	2		
$2x^4 + 7x^2 - 21x - 30$	-1		
$3x^5 + 5x^4 + 11x^2 + 2x$	1		

32.5. n-нің кез келген натурал мәнінде:
1) $49^n - 25^n$ өрнегі 24; 2) $25^n - 9^n$ өрнегі 24;
3) $6^{2n} - 2^{2n}$ өрнегі 32; 4) $21^n + 4^{n+2}$ өрнегі 17;
5) $13^n + 3^{n+2}$ өрнегі 10; 6) $5^n + 7 \cdot 9^n$ өрнегі 4 санына бөлінетінін дәлелдеңдер.

32.6. n-нің кез келген тақ натурал мәнінде:
1) $5^n + 2^n$ өрнегі 7; 2) $5^n + 11^n + 2$ өрнегі 6;
3) $5^n + 13 \cdot 11^{2n} - 4$ өрнегі 6 санына бөлінетінін дәлелдеңдер.

В

32.7. 1) $P(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 1$ көпмүшесі $S(x) = 2x^2 + 8x - 2$ көпмүшесіне бөлінетінін дәлелдеңдер.
2) $H(x) = 5x^4 - 9x^3 - 2x^2 + 4x - 8$ көпмүшесі $S(x) = -5x^2 + 4x - 4$ көпмүшесіне бөлінетінін дәлелдеңдер.
3) Горнер схемасын қолданып $P(x) = 2x^5 + x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2$ көпмүшесін $x + 2$ екімүшесіне бөлуді орындаңдар. Бөлінді мен қалдықты табыңдар.

32.8. Симметриялы көпмүшенің түбірлерін табыңдар:
1) $x^4 + 5x^3 + 2x^2 + 5x + 1$; 2) $x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1$;
3) $x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 1$; 4) $2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 5x + 2$;
5) $x^3 - 2x^2 - 2x + 1$; 6) $x^5 + 2x^3 + 2x^2 + 1$.

32.9. Горнер схемасын қолданып p саны $P(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + ax - 1$ көпмүшесінің түбірі болатындай a параметрінің барлық мәндерін табыңдар:
1) $p = 1$; 2) $p = 2$; 3) $p = -3$; 4) $p = 0{,}5$.

32.10. $(x^4 - 6x^2 + 8)(x^4 - 2x^2 - 8)$ өрнегін $(x - 2)^2$ өрнегіне бөлгенде шығатын қалдықты табыңдар.

32.11. Көпмүшенің барлық бүтін түбірлерін табыңдар және көбейткіштерге жіктеңдер:
1) $x^3 - 4x^2 + x + 6$; 2) $x^4 + 5x^2 - 6$;
3) $x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 5x + 2$; 4) $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$.

C

32.12. $(x^4 - 2x^3 + 3)^2 \cdot (x^4 - 2x^2 - 1)^3$ өрнегінің коэффициенттерінің қосындысының мәнін табыңдар.

32.13. 1) Көпмүшені $x - 1$ өрнегіне бөлгенде қалдық 3-ке, $x - 3$ өрнегіне бөлгенде қалдық 5-ке тең. Осы көпмүшені $(x - 1)(x - 3)$ өрнегіне бөлгендегі қалдықты табыңдар.
2) Көпмүшені $x + 1$ өрнегіне бөлгенде қалдық 1-ге, $x + 4$ өрнегіне бөлгенде қалдық 7-ге тең. Осы көпмүшені $(x + 1)(x + 4)$ өрнегіне бөлгендегі қалдықты табыңдар.
3) Көпмүшені $x - 2$ өрнегіне бөлгенде қалдық 3-ке, $2x + 5$ өрнегіне бөлгенде қалдық 6-ға тең. Осы көпмүшені $(x - 2)(2x + 5)$ өрнегіне бөлгендегі қалдықты табыңдар.

32.14. 1) Көпмүшені $x - 1$ өрнегіне бөлгенде қалдық 1-ге, $x + 2$ өрнегіне бөлгенде қалдық 8-ге тең. Көпмүшенің түбірі 2 болатыны белгілі. Осы көпмүшені $(x - 1)(x - 2)(x + 2)$ өрнегіне бөлгендегі қалдықты табыңдар.
2) Көпмүшені $x - 1$ өрнегіне бөлгенде қалдық 3-ке, $x + 1$ өрнегіне бөлгенде қалдық 5-ке тең. Көпмүшенің түбірі 0,5 болатыны белгілі. Осы көпмүшені $(x - 3)(x - 2)(x + 1)$ өрнегіне бөлгендегі қалдықты табыңдар.

ҚАЙТАЛАУ

32.15. Теңсіздікті шешіңдер:
1) $\cos 2 \cdot (2x - 4) < 0$; 2) $\sin 3 \cdot \cos 5 \cdot (x^2 - 4) < 0$.

32.16. Өрнектің таңбасын анықтаңдар:

1) $tg2 \cdot ctg2 + 3\cos^2\pi - \sin^2 15 - \cos^2 15$;
2) $\sin 215° \cdot \sin 4 \cdot \cos 2$;
3) $\cos 1 \cdot \cos(1+\pi) + \sin 60° - \cos 30°$;
4) $\sin(-5) \cdot \sin 4 \cdot \cos 2$.

32.17. $f(x)$ функциясының графигін салыңдар:

1) $f(x) = |\sin x| + \sin x$; 2) $f(x) = |\cos x| + \cos x$;
3) $f(x) = 2|\sin x| - \sin x$; 4) $f(x) = |\cos x| - 2\cos x$.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Көпмүше, көпмүшенің коэффициенттері, бас коэффициент, көпмүшенің бос мүшесі, көпмүшелерге амалдар қолдану, Безу теоремасы, сандарды көбейткіштерге жіктеу.

§33. АНЫҚТАЛМАҒАН КОЭФФИЦИЕНТТЕР ӘДІСІ. БҮТІН КОЭФФИЦИЕНТТІ КӨПМҮШЕНІҢ РАЦИОНАЛ ТҮБІРЛЕРІ ТУРАЛЫ ТЕОРЕМА

Сендер анықталмаған коэффициенттер әдісімен танысасыңдар;
аталған әдісті көпмүшелерді жіктеуде қолдануды, бір айнымалысы бар бүтін коэффициентті көпмүшенің рационал түбірі туралы теореманы оның түбірлерін табуда қолдануды үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Анықталмаған коэффициенттер әдісі

Үшінші және төртінші дәрежелі көпмүшелерді жіктеу үшін анықталмаған коэффициенттер әдісі колданылады.

Қолданылатын тұжырымдар:

1. Дәрежелері бірдей және сәйкес коэффициенттері тең болғанда ғана екі көпмүше тең болады.

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР:

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$, мұндағы $a_n \neq 0$;
$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} + \ldots + b_1 x + b_0$, мұндағы $b_m \neq 0$,

1) дәр. $P(x)$ = дәр. $Q(x)$, яғни $m = n$,
2) $a_n = b_m$, $a_{n-1} = b_{m-1}$, $a_{n-2} = b_{m-2}$, …, $a_1 = b_1$, $a_0 = b_0$ жағдайында ғана $P(x) = Q(x)$.

2. Кез келген үшінші дәрежелі көпмүшені біреуі бірінші дәрежелі, екіншісі екінші дәрежелі көпмүше болатын көбейткіштерге жіктеуге болады: $a_n x^3 + a_{n-1}x^2 + a_{n-2}x + a_{n-3} = (x-d)(ax^2+bx+c)$.

3. Кез келген төртінші дәрежелі көпмүшені екеуі де екінші дәрежелі көпмүше болатын көбейткіштерге жіктеуге болады:

$$a_n x^4 + a_{n-1}x^3 + a_{n-2}x^2 + a_{n-3}x + a_{n-4} = (ax^2+bx+c)(mx^2+px+k).$$

МЫСАЛ 1. $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ көпмүшесін көбейткіштерге жіктейік.

Шешуі. Ол үшін анықталмаған коэффициенттер әдісін қолданамыз.

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - d)(ax^2 + bx + c).$$

Теңдіктің оң жақ бөлігіндегі жақшаларды ашып ұқсас қосылғыштарды біріктіреміз:

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = ax^3 + (b - ad)x^2 + (c - bd)x - dc.$$

Дәрежелері бірдей екі көпмүшенің сәйкес коэффициенттері тең болатын тұжырымды қолданамыз: $\begin{cases} a = 1, \\ b - ad = -2, \\ c - bd = -5, \\ dc = -6. \end{cases}$

$dc = -6$ болғандықтан келесі жағдайларды қарастырамыз:

1) $d = -3$, $c = 2$, 2) $d = -2$, $c = 3$, 3) $d = 3$, $c = -2$, 4) $d = 2$, $c = -3$; 5) $d = -1$, $c = 6$; 6) $d = 1$, $c = -6$; 7) $d = 6$, $c = -1$; 8) $d = -6$, $c = 1$.

Осы жағдайларды қарастыру арқылы жүйенің келесі шешімін аламыз:

$a = b = 1$, $d = 3$, $c = -2$ және $a = 1$, $b = -1$, $c = -6$, $d = 1$.

Онда $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x^2 + x - 2)$ және $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1) \times (x^2 - x - 6)$.

$x^2 + x - 2 = 0$ теңдеуінің түбірлері -2 және 1.

$x^2 - x - 6 = 0$ теңдеуінің түбірлері 3 және -2.

Сондықтан $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(x - 3)(x + 2)$.

Теорема 1. ***Егер k бүтін саны бүтін коэффициентті көпмүшенің түбірі болса, онда көпмүшенің бос мүшесі k санына бөлінеді.***

Шарт бойынша k саны $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$ көпмүшесінің түбірі, демек, $a_0 \,\vdots\, k$ екенін дәлелдеу керек.

Дәлелдеуі. k — түбір, демек, $P(k) = 0$, яғни

$$a_n k^n + a_{n-1}k^{n-1} + a_{n-2}k^{n-2} + \ldots + a_1 k + a_0 = 0.$$

$$a_0 = k\,\underbrace{(-a_n k^{n-1} - a_{n-1}k^{n-2} - a_{n-2}k^{n-3} - \ldots - a_1)}_{\text{бүтін сан}}.$$

Демек, $a_0 \,\vdots\, k$ ■

АЛГОРИТМ Теорема негізінде бүтін коэффициентті көпмүшенің түбірін табу алгоритмі:

1) көпмүшенің бос мүшесінің барлық бөлгіштерін жазу;
2) бос мүшенің барлық бөлгіштеріне сәйкес көпмүшенің мәндерін есептеу;
3) көпмүшенің мәні нөлге тең болатын бөлгіштерді анықтау (осы бөлгіштер көпмүшенің түбірлері болады).

МЫСАЛ 2. $P(x) = x^5 + x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 11x - 3$ көпмүшесінің бүтін түбірлерін табайық.

Шешуі. k саны $P(x)$ көпмүшесінің түбірі болсын, онда теорема бойынша $3 \,\vdots\, k$. Бұдан $k = \pm 1$; $k = \pm 3$.

$P(1) = 1 + 1 - 6 - 14 - 11 - 3 \neq 0$. Демек, 1 саны $P(x)$ көпмүшесінің түбірі болмайды.

$P(-1) = 1 - 1 + 6 - 14 + 11 - 3 = 0$. Демек, -1 саны $P(x)$ көпмүшесінің түбірі болады.

$P(3) = 3^5 + 3^4 - 6 \cdot 3^3 - 14 \cdot 3^2 - 11 \cdot 3 - 3 = 3 \cdot (81 + 27 - 54 - 42 - 11 - 1) = 0$

Демек, 3 саны $P(x)$ көпмүшесінің түбірі болады.

$P(-3) = -3^5 + 3^4 + 6 \cdot 3^3 - 14 \cdot 3^2 + 11 \cdot 3 - 3 = 3 \cdot (-81 + 27 + 54 - 42 + 11 - 1) =$ $= -32$. Демек, -3 саны $P(x)$ көпмүшесінің түбірі болмайды.

Жауабы : -1; 3.

МЫСАЛ

3. $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ көпмүшесінің бүтін түбірлерін табайық.

Шешуі . k саны $P(x)$ көпмүшесінің түбірі болсын, онда теорема бойынша $6 \vdots k$. Бұдан $k = \pm 1$; $k = \pm 2$; $k = \pm 3$.

$P(1) = 1 - 6 + 11 - 6 - 3 = 0$. Демек, -1 саны $P(x)$ көпмүшесінің түбірі болады.

Безу теоремасы бойынша: $P(x) \vdots (x - 1)$.

Горнер схемасын қолданып, $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ көпмүшесін $(x - 1)$ екімүшесіне бөлеміз (21-кесте).

21-*кесте*

	1	–6	11	–6
1	1	–5	6	0
				қалдық

Сонда $Q(x) = x^2 - 5x + 6$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

Жауабы : 1; 2; 3.

ТҮСІНДІРІҢДЕР

Рационал коэффициентті көпмүшеге теорема қалай қолданылды:

$P(x) = 2x^3 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{6}$?

$P(x) = \frac{1}{6}(12x^3 + 4x^2 - 3x + 5)$, $P(x) = \frac{1}{6}Q(x)$.

Неліктен $P(x)$ және $Q(x)$ көпмүшелерінің түбірлері тең?

Теорема 2. ***Бүтін коэффициентті келтірілген көпмүшенің бөлшек рационал түбірлері болмайды.***

Шарт бойынша $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0$, (мұндағы $a_n = 1$) көпмүшесінің k саны түбірі болады. $k \neq \frac{m}{n}$, мұндағы m, n — бүтін сандар екенін дәлелдеу керек.

Дәлелдеуі . Қарсы жору әдісін қолданамыз. $k = \frac{m}{n}$, мұндағы m, n — бүтін сандар болсын. Егер бұл бөлшек қысқартылатын болса, онда қысқартуды орындаймыз: $k = \frac{m}{n} = \frac{p}{q}$.

$$P\left(\frac{p}{q}\right) = 0, \quad \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + a_{n-2}\frac{p^{n-2}}{q^{n-2}} + \dots + a_1\frac{p}{q} + a_0 = 0.$$

$$\frac{p^n}{q^n} = -a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} - a_{n-2}\frac{p^{n-2}}{q^{n-2}} - \dots - a_1\frac{p}{q} - a_0.$$

$$\frac{p^n}{q} = -a_{n-1}p^{n-1} - a_{n-2}p^{n-2}q - \dots - a_0q^{n-1}.$$

бөлшек сандар бүтін сандар

Шыққан теңдіктің сол жақ бөлігі қысқартылмайтын бөлшек, оң жағы бүтін сан. Демек, қарама-қайшылықты аламыз.

1. Анықталмаған коэффициенттер әдісінің мағынасы неде?
2. Егер келтірілген көпмүшенің бүтін түбірлері болмаса, оның рационал түбірлері бола ма?
3. "Көпмүшенің түбірі нөлге тең". "Көпмүшенің мәні нөлге тең" сөйлемі нені білдіреді?

Жаттығулар

А

33.1. Қандай бүтін сандар көпмүшенің түбірлері болуы мүмкін:
1) $x^3 - 2x^2 - 4x + 3$; 2) $x^3 - 5x^2 - 6x + 4$;
3) $2x^3 - 3x^2 - 8x - 5$; 4) $3x^3 - 2x^2 - 7x - 6$?

33.2. Қандай бүтін сандар көпмүшенің түбірлері болуы мүмкін:
1) $2x^3 - 2x^2 - 5x + 6$; 2) $2x^3 - 5x^2 + 7x + 4$;
3) $2x^3 + 3x^2 - 7x - 10$; 4) $x^3 - 3x^2 + 7x - 6$?

33.3. Көпмүшені көбейткіштерге жіктеңдер:
1) $x^3 - 2x^2 - x + 2$; 2) $x^4 - 13x^2 + 36$; 3) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$.

33.4. a мен p-ның қандай мәндерінде $P(x)$ және $K(x)$ көпмүшелері тең:
1) $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 5$, $K(x) = ax^3 + (a + p)x^2 + 2x - 5$;
2) $P(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x + 4$, $K(x) = 2x^3 - 4x^2 + (2a + p)x + a - 2p$;
3) $P(x) = 3x^3 - 5x^2 + (a - p)x - 7$, $K(x) = 3x^3 + (a + p)x^2 + 3x - 7$;
4) $P(x) = -x^3 + 10x^2 + 2x + a - 3p$, $K(x) = x^3 + (a + 2p)x^2 + 2x - 5$?

33.5. a-ның қандай мәндерінде $P(x)$ көпмүшесінің түбірі 2-ге тең болады:
1) $P(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + a^2 - 3a$; 2) $P(x) = -x^3 + x^2 + 2x + a^2 - a$;
3) $P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2a^2 - 3a - 7$;
4) $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + a^2 - 5a$?

B

33.6. a-ның қандай мәндерінде $P(x)$ және $K(x)$ көпмүшелері тең:

1) $P(x) = (2 - a^2)x^3 + 3x^2 + 2x - 9,$
$K(x) = ax^3 + (a^2 + 2a)x^2 + 2x - 9$;

2) $P(x) = 2ax^3 - 14x^2 + 3x + 4,$
$K(x) = -2x^3 + 14ax^2 + (2a^2 - a)x + a + 5$;

3) $P(x) = ax^3 - 4x^2 + 14x - 4,$
$K(x) = -2x^3 - 4x^2 + (2a^2 - 3a)x + a - 2$;

4) $P(x) = 2ax^3 - 7x^2 + 4x + 2,$
$K(x) = 8x^3 - 7x^2 + (2a^2 - 7a)x + a - 2$?

33.7. Көпмүшенің әртүрлі үш түбірі болатындай p параметрінің барлық мәндерін табыңдар:

1) $(x + 2)(x - 1)(x - 3)(x - p)$; 2) $5(x - 2)(x + 11)(x - 6)(x + p)$;
3) $(x^2 - x - 2)(x - 4)(x - 2p)$; 4) $(x^2 + x - 2)(x + 1)(p - 2x)$.

33.8. Қандай да бір $P(x)$ көпмүшесі үшін дәрежесі, барлық түбірлері, түбірлерінің қайталану саны белгілі. 22-кестені толтырыңдар және $P(x)$ көпмүшесінің жіктелуін жазыңдар.

22-кесте

	Көпмүшенің дәрежесі	Түбірлерінің қайталану саны 1	Түбірлерінің қайталану саны 2	Түбірлерінің қайталану саны 3	$P(x)$ көпмүшесінің жіктелуі
1)	4	–1; 3	2		
2)	7		1; 3	–2	
3)	8	2	–1; 4	1	
4)	10	0	2; 5; 7	–3	

33.9. 1) $P(x)$ көпмүшесін $x^2 - 5x + 6$ үшмүшеге бөлгендегі қалдық $3x - 2$ екімүшесіне тең. $P(2) - 3P(3)$ өрнегінің мәнін табыңдар.
2) $P(x)$ көпмүшесін $x^2 - x - 6$ үшмүшеге бөлгендегі қалдық $4x - 3$ екімүшесіне тең. $P(3) - 2P(-2)$ өрнегінің мәнін табыңдар.

C

33.10. Көпмүшенің әртүрлі үш түбірі болатындай p параметрінің барлық мәндерін табыңдар:

1) $(x^2 - 2x - 8)(x^2 + 2px + 1)$; 2) $(x^2 - 5x + 6)(px^2 + 4x + 1)$;
3) $(x^2 - 5x - 6)(x^2 - x - 2p)$; 4) $(x^2 - x - 2)(px^2 + 5x + 1)$.

33.11. $K(x) = x^2 - 7x - 1$ көпмүшесінің барлық түбірлері $P(x) = x^5 - 7x^4 - 5x^2 - 15x - 2$ көпмүшесінің түбірлері болатынын дәлелдеңдер.

ҚАЙТАЛАУ

33.12. Егер 1) $x + \frac{1}{x} = 3$; 2) $x + \frac{1}{x} = 5$; 3) $x - \frac{1}{x} = 2$; 4) $x - \frac{1}{x} = 4$ болса, онда $x^2 + \frac{1}{x^2}$ өрнегінің мәнін табыңдар.

33.13. $y = |x^2 - 2x - 8|$ функциясының графигін салыңдар. Графиктің көмегімен:

1) функция графигінің координаталар осьтерімен қиылысу нүктелерінің координаталарын табыңдар;
2) функцияның бірсарындылық аралықтарын жазыңдар;
3) симметрия осінің теңдеуін жазыңдар;
4) $y = |x^2 - 2x - 8|$ теңдеуінің үш түбірі болатындай p параметрінің мәнін табыңдар.

33.14. Теңдеуді шешіңдер:

1) $\frac{x}{x-2} - \frac{7}{x+2} = \frac{8}{x^2-4}$; 2) $\frac{2}{x} + \frac{x^2+8}{x^2-4x} = \frac{6}{x-4}$;

3) $\frac{4x-14}{x-3} = x - 2$; 4) $\frac{x^2-2x}{x-1} - 2 = \frac{2x-1}{1-x}$.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Теңдеу, теңдеудің түбірлері, квадрат теңдеу, квадрат теңдеудің түбірлерін табу формулалары, көпмүше, көпмүшені көбейткіштерге жіктеу, Безу теоремасы және салдары, Горнер схемасы.

§34. КВАДРАТ ТЕҢДЕУГЕ КЕЛТІРІЛЕТІН ЖОҒАРЫ ДӘРЕЖЕЛІ ТЕҢДЕУЛЕР

? Сендер жоғары дәрежелі теңдеуді шешу барысында көбейткіштерге жіктеу тәсілін, айнымалыны енгізу әдісін қолдануды үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР
Көбейткіштерге жіктеу әдісі, жаңа айнымалыны енгізу әдісі, жоғары дәрежелі теңдеу

Жоғары дәрежелі теңдеуді шешу барысында көбейткіштерге жіктеу тәсілі қолданылады. Яғни, ортақ көбейткіші болатындай қосылғыштарды топтарға біріктіру арқылы шығару болып табылады.

МЫСАЛ

1. $x^4 - 3x^2 + 4x - 3 = 0$ теңдеуін шешейік.

Шешуі. Келесі алмастыруды қолданып $-3x^2 = -2x^2 - x^2$ қосылғыштарды топтаймыз:

$(x^4 - 2x^2) - (x^2 - 4x + 3) = 0$.

$(x^4 - 2x^2 + 1 - 1) - (x^2 - 4x + 3 + 1 - 1) = 0$.

$(x^2-1)^2-1-(x-2)^2+1=0.$
$(x^2-1)^2-(x-2)^2=0.$
$(x^2-1-x+2)(x^2-1+x-2)=0.$
$(x^2-x+1)(x^2+x-3)=0.$
$x^2-x+1=0$ немесе $x^2+x-3=0.$
$x^2-x+1=0$ теңдеуінің нақты түбірлері болмайды.
$x^2+x-3=0$ теңдеудің екі түбірі бар: $x_{1,2}=\left(\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}\right)$.

Жауабы : $\left\{\frac{-1-\sqrt{13}}{2};\ \frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right\}$

АЛГОРИТМ $f(x)=0$ теңдеуін жаңа айнымалыны енгізу әдісімен шығару алгоритмі:
1) $y=x^n$ немесе $y=g(x)$ жаңа айнымалысын енгізу;
2) $f(x)$-ті y арқылы өрнектеп жаңа теңдеу аламыз $s(y)=0$;
3) $s(y)=0$ теңдеуін шешу ($y_1, y_2, \ldots, y_n$ — түбірлері);
4) $q(x)=y_1$, $q(x)=y_2$, …, $q(x)=y_n$ теңдеулер жиынтығын шешу;
5) табылған түбірлер жиынын жазу.

МЫСАЛ **2.** $(x^2+2x)^2-14x^2-28x-15=0$ теңдеуін шешейік.
Шешуі . $y=x^2+2x$ алмастыруын қолданып $y^2-14y-15=0$ теңдеуін аламыз. Теңдеудің түбірлері: -1 және 15. Сондықтан
$\left[\begin{array}{l}x^2+2x=-1;\\x^2+2x=15,\end{array}\right.$ немесе $\left[\begin{array}{l}x^2+2x+1=0;\\x^2+2x-15=0.\end{array}\right.$ Теңдеулер жиынтығының шешімдер жиыны $\{-5;\ -1;\ 3\}$.

Жауабы : $\{-5;\ -1;\ 3\}$.

МЫСАЛ **3.** $x^4+8x^2+16-7(x^2+4)+12=0$ теңдеуін шешейік.
Шешуі . $x^4+8x^2+16=(x^2+4)^2$ болғандықтан $x^2+4=y$ алмастыруын қолданып, $y^2-7y+12=0$ теңдеуін аламыз. Теңдеудің түбірлері: 4 және 3. Сондықтан $x^2+4=4$ немесе $x^2+4=3$.

Жауабы : $\{0\}$.

Анықтама . *Шеттерінен бірдей қашықтықта орналасқан коэффициенттері тең болатын n-ші дәрежелі теңдеу* ***симметриялы теңдеу*** *деп аталады* .

ТҮСІНДІРІҢДЕР

Неліктен $x^6-6x^5-11x^4+x^3-11x^2-6x+1=0$; $3x^5-4x^4-7x^3-7x^2-4x+3=0$ теңдеулері симметриялы теңдеулер болады?

АЛГОРИТМ $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$ төртінші дәрежелі симметриялы теңдеуді шешу алгоритмі:
1) теңдеудің екі жақ бөлігін x^2 өрнегіне бөлу;

2) топтауды қолданып теңдеуді $a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0$ түріне келтіру;

3) $t=x+\frac{1}{x}$ жаңа айнымалысын енгізу; $t^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}$ яғни $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$.

(демек $at^2+bt+c-2a=0$ квадрат теңдеуін аламыз);

4) теңдеуді t арқылы шығару және бастапқы айнымалыға көшу.

Кез келген тақ дәрежелі симметриялы теңдеудің бір түбірі -1-ге тең болғандықтан, тақ дәрежелі кез келген симметриялы теңдеу жұп дәрежелі теңдеуге келтіріледі.

МЫСАЛ

4. $x^7+2x^6-5x^5-13x^4-13x^3-5x^2+2x+1=0$ теңдеуін шешейік.

Шешуі. Теңдеудің түбірі $x=-1$ болатыны айқын.

$(x+1)(x^6+x^5-6x^4-7x^3-6x^2+x+1)=0$, демек, $x=-1$ немесе $x^6+x^5-6x^4-7x^3-6x^2+x+1=0$, өйткені $x=0$ теңдеудің түбірі болмайды, сондықтан теңдеудің екі жақ бөлігін $x^3\neq 0$ бөлеміз.

$x^3+x^2-6x-7+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}=0$, $\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-6\left(x+\frac{1}{x}\right)-7=0$.

Алмастыру жасаймыз:

$x+\frac{1}{x}=y$, $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$, $x^3+\frac{1}{x^3}=y^3-3y$. Сонда $y^3+y^2-9y-9=0$, $(y+1)(y-3)(y+3)$, $y=-1$, немесе $y=3$, немесе $y=-3$. Онда $x+\frac{1}{x}=-1$, немесе $x+\frac{1}{x}=3$, немесе $x+\frac{1}{x}=-3$.

Бірінші теңдеудің нақты түбірлері болмайды; екінші теңдеудің түбірлері: $x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$; үшінші теңдеудің түбірлері: $x_{3,4}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$.

Жауабы: $\left\{-1;\ \frac{-3-\sqrt{5}}{2};\ \frac{-3+\sqrt{5}}{2};\ \frac{3-\sqrt{5}}{2};\ \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

?

1. Жоғары дәрежелі теңдеуді көбейткіштерге жіктеу әдісімен шығарғанда қандай түрлендіру қолданылады?
2. Жоғары дәрежелі теңдеуді жаңа айнымалы енгізу арқылы шешу тәсілінің мағынасы неде?
3. n-ші жұп дәрежелі симметриялы теңдеудің шешімі n-ші тақ дәрежелі симметриялы теңдеудің шешімінен қандай айырмашылығы бар?

Жаттығулар

А

34.1. Теңдеудің нақты түбірлерін табыңдар:

1) $x^4-8x^2-9=0$; 2) $x^4-13x^2+36=0$;

3) $x^4-9x^2+20=0$; 4) $x^4-13x^2+42=0$.

34.2. Теңдеуді көбейткіштерге жіктеу арқылы шешіңдер:

1) $4x^3-8x^2-x+2=0$; 2) $x^3-2x^2=9x-18$;

3) $x^3-3x^2-3x+1=0$; 4) $x^4-2x^3+2x-1=0$.

34.3. $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ теңдеуінің рационал түбірлері болмайтынын дәлелдеңдер.

34.4. 2 және 3 сандары $2x^3 + mx^2 - 13x + n = 0$ теңдеулерінің түбірлері екені белгілі. m, n мәндерін және теңдеудің үшінші түбірін табыңдар.

34.5. Теңдеуді жаңа айнымалыны енгізу тәсілімен шешіңдер:
1) $(x + 1)^2(x^2 + 2x) - 12 = 0$;
2) $(x - 2)^2(x^2 - 4x) - 12 = 0$;
3) $(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 3x + 3) - 3 = 0$;
4) $(x^2 + 3x + 3)(x^2 + 3x + 1) + 1 = 0$.

34.6. Теңдеуді жаңа айнымалыны енгізу тәсілімен шешіңдер:
1) $(x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) - 12 = 0$;
2) $(x^2 - 3x)(x - 1)(x - 2) - 24 = 0$;
3) $(x^2 - 5x - 1)(x^2 - 5x + 2) - 28 = 0$;
4) $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 6 = 0$.

B

34.7. Теңдеудің нақты түбірлерін табыңдар:
1) $x^4 - x^3 - x^2 - x - 2 = 0$; 2) $x^4 - x^3 - 2x^2 - 2x + 4 = 0$;
3) $x^4 - 2x^3 + x^2 - 8x - 12 = 0$.

34.8. Теңдеуді шешіңдер:
1) $x(x + 3)(x + 5)(x + 8) + 56 = 0$;
2) $x(x - 1)(x + 1)(x + 2) - 24 = 0$;
3) $(x + 4)(x + 5)(x + 7)(x + 8) - 4 = 0$;
4) $(x + 4)(x + 3)(x + 2)(x + 1) - 120 = 0$.

34.9. Теңдеуді жаңа айнымалыны енгізу тәсілімен шешіңдер:
1) $2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 9 = 0$;
2) $6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 38 = 0$;
3) $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 7\left(x - \frac{1}{x}\right) + 10 = 0$;
4) $\left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right) - \left(x + \frac{2}{x}\right) - 8 = 0$.

C

34.10. Теңдеуді шешіңдер:
1) $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$; 2) $x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 1 = 0$;
3) $x^4 + 7x^3 + 10x^2 - 7x + 1 = 0$; 4) $2x^4 + x^3 - 11x^2 + x + 2 = 0$.

34.11. Теңдеуді жаңа айнымалыны енгізу тәсілімен шешіңдер:
1) $x^4 - x^3 - 10x^2 + 2x + 4 = 0$; 2) $x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 10x + 4 = 0$;
3) $x^4 - x^3 - 8x^2 + 2x + 4 = 0$; 4) $x^4 + 2x^3 - 11x^2 + 4x + 4 = 0$.

34.12. Теңдеуді шешіңдер:
1) $(2x + 3)^2 - 3(2x + 3)(7x - 5) + 2(7x - 5)^2 = 0$;
2) $(3x - 2)^2 + 3(5x - 7)(3x - 2) + 2(5x - 7)^2 = 0$;
3) $(x + 5)^4 - 13x^2(x + 5)^2 + 36x^4 = 0$;
4) $4(x - 1)^4 - 5(x - 1)^2(x - 2)^2 + (x - 2)^4 = 0$.

ҚАЙТАЛАУ

34.13. Квадрат теңдеу түбірлерінің қосындысының және көбейтіндісінің мәндерін табыңдар:
1) $x^2 + 9x - 22 = 0$; 2) $x^2 - 7x + 12 = 0$; 3) $x^2 - x - 72 = 0$;
4) $2x^2 - 3x - 2 = 0$; 5) $2x^2 - 3x - 2 = 0$; 6) $2x^2 - 6x + 1 = 0$.

34.14. Виет теоремасына кері теореманы қолданып: 1) -5 және -2; 2) -7 және 2; 3) $2\frac{2}{7}$ және 3; 4) $-5,4$ және 8 түбірлері болатын квадрат теңдеуді құрастырыңдар.

34.15. Біртекті теңдеуді шешіңдер:
1) $4\sin^2 x - 2\sin x\cos x = 3$;
2) $5\sin^2 x - 14\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 2$;
3) $2\cos^2 x - \sin x\cos x + 5\sin^2 x = 3$;
4) $2\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 4\cos^2 x = 4$.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Теңдеу, квадрат теңдеу, теңдеудің түбірлері, Виет теоремасы, үшінші дәрежелі көпмүше.

§35. ҮШІНШІ ДӘРЕЖЕЛІ КӨПМҮШЕГЕ АРНАЛҒАН ЖАЛПЫЛАНҒАН ВИЕТ ТЕОРЕМАСЫ

Сендер жалпыланған Виет теоремасымен танысасыңдар;
теореманы үшінші дәрежелі көпмүшенің түбірлерін табуда қолдануды үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Виет теоремасы, үшінші дәрежелі көпмүше

Виет теоремасы. ***Келтірілген квадрат үшмүшенің түбірлерінің қосындысының мәні қарама-қарсы таңбамен алынған екінші коэффициентке, түбірлерінің көбейтіндісінің мәні бос мүшеге тең болады.***

Шарт бойынша $P(x) = x^2 + px + q$.

Демек, $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$ теңдіктерін дәлелдеу керек.

Дәлелдеуі. Лемма бойынша $x^2 + px + q = (x - x_1) \cdot (x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2$. Бұдан $p = -(x_1 + x_2)$, $q = x_1 \cdot x_2$.

Лемма. $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ сандары n дәрежелі $P(x)$ көпмүшесінің түбірлері болса, онда $P(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$.

Дәлелдеуі. $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ сандары $P(x)$ көпмүшенің әртүрлі түбірлері болса, онда Безу теоремасының салдары бойынша $P(x) \vdots (x - x_1) \times (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$, онда анықтаманы қолданамыз:

$$P(x) = Q(x) \cdot \underbrace{(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)}_{S(x)}.$$

Дәр. $P(x) = n$ және дәр. $S(x) = n$, онда дәр. $Q(x) = 0$, яғни $Q(x) = c -$ const.

Шарт бойынша $P(x)$ келтірілген көпмүше, сондықтан анықтамадан $a_n = 1$.

Сондықтан $P(x) = Q(x) \cdot S(x)$, онда бас коэффициент $Q(x) \cdot S(x)$ мәні 1-ге тең. Бұл мүмкін емес: $Q(x) = c = 1$. Демек, $P(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \times (x - x_3) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$.

Виет теоремасы. ***$P(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ келтірілген үшінші дәрежелі көпмүше түбірлерінің қосындысының мәні қарама-қарсы таңбамен алынған екінші коэффициентке, жұппен алынған түбірлерінің көбейтінділерінің қосындысының мәні үшінші коэффициентке, түбірлерінің көбейтіндісінің мәні қарама-қарсы таңбамен алынған бос мүшеге тең болады.***

Шарт бойынша $P(x) = x^3 + px^2 + qx + r$.

$x_1 + x_2 + x_3 = -p$, $x_1 \cdot x_2 + x_3 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 = q$, $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -r$ теңдіктерін дәлелдеу керек.

Дәлелдеуі. Лемма бойынша $x^3 + px^2 + qx + r = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \times (x - x_3)$.

$(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1 \cdot x_2 + x_3 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3)x - x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$ теңдігін өздерің дәлелдеп көріңдер.

Сонымен, $x^3 + px^2 + qx + r = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1 \cdot x_2 + x_3 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3)x - x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$.

Көпмүшелер тең болғандықтан $x_1 + x_2 + x_3 = -p$, $x_1 \cdot x_2 + x_3 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 = q$, $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -r$.

МЫСАЛ $P(x) = x^3 - 3x^2 - x + r$, мұндағы r — бүтін сан, көпмүше түбірлерінің бірі 3 есе артық. Көпмүшенің түбірлерін табайық.

Шешуі.

$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1x_2 + x_3x_2 + x_1x_3 = -1, \\ x_1x_2x_3 = -r. \end{cases}$ Шарт бойынша, $x_3 = 3x_2$, $\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 3, \\ x_1x_2 + 3x_2^2 + 3x_1x_2 = -1, \\ 3x_1x_2^2 = -r. \end{cases}$

$x_1 = 3 - 4x_2$, $3(3 - 4x_2)x_2^2 = -r$, $3x_2 - 4x_2^2 + 3x_2^2 + 9x_2 - 12x_2^2 = -1$ немесе $13x_2^2 - 12x_2 - 1 = 0$. Соңғы квадрат теңдеудің түбірлері 1 және $-\frac{1}{13}$ болады. $x_2 = 1$ үшін $x_1 = -1$, $x_3 = 3$, $r = 3$.

$-\frac{1}{13}$ саны $P(x) = x^3 - 3x^2 - x + r$, мұндағы r — бүтін сан, көпмүшесінің түбірі болмайтынын түсіндіріңдер.

Жауабы: $P(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ көпмүшесі, оның түбірлері: -1; 1; 3.

1. Қандай жағдайда екінші коэффициент: 1) түбірлердің; 2) жұппен алынған түбірлерінің көбейтінділерінің қосындысының мәніне тең болады?
2. Үшінші дәрежелі көпмүшенің түбірлерінің көбейтіндісінің мәні қай мүшесіне тең?

Жаттығулар

А

35.1. p-ның қандай мәндерінде квадрат теңдеудің түбірлерінің көбейтіндісінің мәні нөлге тең:
1) $x^2 + 7x + (p^2 - 3p + 2) = 0$; 2) $x^2 - 3x + (2p^2 - 3p - 5) = 0$;
3) $3x^2 - 2x + (p^2 - 3p - 4) = 0$; 4) $x^2 + 7x + (4p^2 - 9p + 5) = 0$?

35.2. Түбірлері: 1) -1; 0; 2; 2) -2; 2; 1; 3) -2; 1; 3; 4) -2; -1; 4 болатын үшінші дәрежелі көпмүшені жазыңдар.

35.3. 23-кестені толтырыңдар:

23-кесте

Үшінші дәрежелі көпмүше	$x_1 + x_2 + x_3$ мәні	$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ мәні	$x_1x_2x_3$ мәні
$x^3 - 5x^2 - 2x - 3$			
$x^3 + 3x^2 - 4x + 5$			
$2x^3 - 5x^2 - 6x - 4$			
$3x^3 - 9x^2 - 12x + 9$			

35.4. 1) $P(x) = x^3 - 3x^2 - x + p$ көпмүшесінің бір түбірі 2. Осы көпмүшені жазыңдар және қалған түбірлерін табыңдар.

2) $P(x) = 2x^3 - 4x^2 - 3x + p$ көпмүшесінің бір түбірі -1. Осы көпмүшені жазыңдар және қалған түбірлерін табыңдар.

B

35.5. Түбірлері $x^3 - 6x^2 + 12x - 18$ көпмүшесінің түбірлеріне кері болатын және x^3-нің коэффициенті 2-ге тең көпмүшені жазыңдар.

35.6. Түбірлері $2x^3 - 8x^2 + 3x - 4$ көпмүшесінің түбірлеріне қарама-қарсы болатын және x^3-нің коэффициенті -5-ке тең көпмүшені жазыңдар.

35.7. $x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x - abc = 0$ теңдеуінің түбірлері a, b, c болатынын дәлелдеңдер.

35.8. Виет теоремасын қолданып теңдеуді шешіңдер:
1) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$; 2) $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$.

C

35.9. $x^3 + (a^2 - 9a)x^2 + 8ax - 64 = 0$ теңдеуінің әртүрлі үш түбірі геометриялық прогрессияны құрайтындай a параметрінің барлық мәндерін табыңдар.

35.10. $x^3 - 5x^2 + 7x - a = 0$ теңдеуінің әртүрлі екі түбірі $x^3 - 8x + b = 0$ теңдеуінің түбірлері болатындай a және b параметрлерінің барлық мәндерін табыңдар.

35.11. $x^3 - 2ax^2 + (2a - 3)x + 2 = 0$ теңдеуінің әртүрлі үш нақты түбірі болатыны белгілі. Бір түбірі қалған екі түбірдің қосындысының мәніне тең. a параметрінің мәндерін және теңдеудің түбірлерін табыңдар.

ҚАЙТАЛАУ

35.12. Функцияның графигін салыңдар:
1) $y = \sqrt{x + 2}$; 2) $y = -\sqrt{x - 3}$;
3) $y = \sqrt{x + 2} - 2$; 4) $y = 3 - \sqrt{x - 2}$.

35.13. $y = |\sqrt{x + 2} - 1|$ функциясының графигін салыңдар. Графикті қолданып:
1) функция графигінің координаталар осімен қиылысу нүктелерінің координаталарын;
2) функцияның бірсарындылық аралықтарын;
3) $p = |\sqrt{x + 2} - 1|$ теңдеуінің екі түбірі болатындай p параметрінің мәнін табыңдар.

35.14. Функцияның анықталу облысын табыңдар:

1) $y = \sqrt{2x^2 - 3x + 1} + \sqrt{x^2 - 9}$; 2) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3} + \sqrt{2x^2 - 8}$;

3) $y = \sqrt{x^2 + 4x - 5} + \sqrt{16 - x^2}$; 4) $y = \sqrt{5x^2 + 4x - 12} + \sqrt{36 - x^2}$.

35.15. Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases} x^2 + 5x + 6 \leqslant 0, \\ |x| > 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - x - 6 < 0, \\ |x| < 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x^2 + 3x - 5 > 0, \\ |x| \geqslant 3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x^2 + 5x - 8 \leqslant 0, \\ |x| \leqslant 4. \end{cases}$

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

1. $x^4 - x^3 + 2x^2 + 3x - 22$ көпмүшесін $(x - 2)$ екімүшесіне бөлгенде шығатын бөлінді мен қалдық:

A) $x^3 + 2x^2 + 2x - 5$; қалдық 22; B) $x^3 + x^2 + 4x + 11$; қалдық 0;
C) $x^3 - x^2 + 2x - 5$; қалдық 2; D) $x^3 - x^2 + 2x + 3$; қалдық (-12).

2. $f(x) = (a^2 - 7)x^3 - 2x^2 + (2a + 1)x - 3$ және $g(x) = 2x^3 - 2x^2 + (a - 2)x - a - 6$ көпмүшелері a-ның қандай мәнінде тең болады:

A) $a = -3$; B) $a = 2$; C) $a = 3$; D) $a = -2$?

3. $x^5 - 5x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 2x - 8$ көпмүшесін $(x + 1)$ екімүшесіне бөлгенде шығатын қалдық:

A) 9; B) –4; C) 10; D) –9.

4. $P(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 + px - 8$ көпмүшесінің түбірі 2 санына тең болатындай p параметрінің мәнін Горнер схемасының көмегімен табыңдар:

A) $p = 3$; B) $p = -3$; C) $p = -4$; D) $p = 4$.

5. $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ көпмүшесінің түбірлері:

A) –3; ±2; B) –2; 3; C) –3; ±1; D) –3; 2.

6. Түбірлері ±1; 2 және (–3) болатын төртінші дәрежелі көпмүшені көрсетіңдер:

A) $x^4 + x^3 + 11x^2 + 6x - 12$; B) $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$;
C) $x^4 - x^3 - x^2 + 7x - 6$; D) $x^4 - x^3 - 11x^2 + 6x - 8$.

7. $P(x)$ көпмүшесін $x^2 - 2x - 8$ үшмүшесіне бөлгенде шығатын қалдық $(2x - 3)$. $P(4) - 2P(-2)$ өрнегінің мәнін табыңдар:

A) 18; B) 9; C) –19; D) 19.

8. Жалпыланған Виет теоремасын қолданып, түбірлері $\{-1;\ 1;\ 3\}$ жиынына тиісті болатын үшінші дәрежелі көпмүшені табыңдар:
A) $x^3 - 2x^2 + 7x - 3$; B) $x^3 - x^2 - 7x + 3$;
C) $x^3 - 3x^2 - x + 3$; D) $x^3 - 3x^2 + 5x - 3$.

9. Виет теоремасын қолданып, $x^3 - 7x^2 = 8 - 14x$ теңдеуінің шешімдер жиынын табыңдар:
A) $\{-2;\ 1;\ 4\}$; B) $\{-1;\ 3;\ 4\}$; C) $\{-4;\ 1;\ 3\}$; D) $\{1;\ 2;\ 4\}$.

10. $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + p$ көпмүшесінің бір түбірі (-1)-ге тең. Осы көпмүшені және оның барлық түбірлерін табыңдар:
A) $x^3 - 2x^2 + 3x - 6$; $\left\{\mathbf{1};\ \dfrac{\mathbf{1 \pm \sqrt{5}}}{\mathbf{2}}\right\}$; B) $x^3 - 2x^2 + 3x + 6$; $\left\{\mathbf{-1};\ \dfrac{\mathbf{3 \pm \sqrt{5}}}{\mathbf{2}}\right\}$;
C) $x^3 - 2x^2 + 3x + 2$; $\left\{\mathbf{1};\ \dfrac{\mathbf{1 \pm \sqrt{5}}}{\mathbf{2}}\right\}$; D) $x^3 - 2x^2 + 3x - 6$; $\left\{\mathbf{1};\ \dfrac{\mathbf{-3 \pm \sqrt{5}}}{\mathbf{2}}\right\}$.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Функция, функция графигі, функцияның анықталу облысы, функцияның мәндер жиыны, функцияның нүктедегі мәні.

7

ФУНКЦИЯНЫҢ ШЕГІ ЖӘНЕ ҮЗІЛІССІЗДІГІ

§ 36. САНДАР ТІЗБЕГІНІҢ ШЕГІ. ФУНКЦИЯНЫҢ ШЕГІ

Сандар тізбегінің шегі, функцияның нүктедегі және шексіздіктегі шегі ұғымдарымен танысасыңдар;

сандар тізбегінің шегін, функцияның нүктедегі және шексіздіктегі шегін табуды үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Функция, шек, анықталмағандық, шекті табу

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР:

Егер k натурал санына бір ғана a_k саны сәйкес қосылатын болса, онда $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ сандар тізбегі берілген дейді. Сандар тізбегінің белгіленуі: $\{a_k\}$ немесе (a_k).

Тізбекті берудің ыңғайлы тәсілі оның жалпы мүшесін беру. Мысалы, $a_n = 3n + 1$, $a_n = \sqrt{n^2 - 1}$ немесе $a_n = n^2 - 2$. Кейбір жағдайларда тізбек рекуррентті формуламен беріледі. Мысалы, $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$, мұндағы $a_1 = 1$ және $a_2 = 2$, $n > 2$.

Сонымен қатар, сандар тізбегі баяндау арқылы да беріледі. Мысалы, $\sqrt{2}$ санының ондық жуықтауының жазылуы: 1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; 1,41421, … .

Сандар тізбегін N натурал жиынында берілген сандық функция ретінде қарастыруға болады. Мысалы, $a_n = f(n) = \sqrt{n^2 + 1}$. Онда (a_n) : $\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{10}$, … .

Функция тәрізді сандар тізбектері жоғарыдан немесе төменнен шектелген, бірсарынды өспелі немесе кемімелі болады.

Сандар тізбектеріне мысалдар қарастырайық.

МЫСАЛ

1. 2; $\frac{3}{2}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{5}{4}$, …, $\frac{n+1}{n}$ тізбегі берілсін. Оның жалпы мүшесінің формуласы $a_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$. Бұл формуладан $n \to \infty$ жағдайда $|a_n - 1|$ өрнегінің мәні нөлге ұмтылатынын байқаймыз.

МЫСАЛ

2. 1) Жалпы мүшесінің формуласы $a_n = \frac{\sin n}{n}$ болатын (a_n) тізбегінің бірнеше мүшесін жазайық: $\frac{\sin 1}{1}$; $\frac{\sin 2}{2}$; $\frac{\sin 3}{3}$; $\frac{\sin 4}{4}$; ….

$y = \sin x$ функциясы шектелген болғандықтан, бөлшектің бөлімі шексіздікке ұмтылғандықтан, берілген тізбек 0 санына ұмтылады.

2) 1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; 1,41421; … тізбегін қарастырайық. Бұл $\sqrt{2}$ санының кемуімен жуықталуын береді. Бұл тізбектің мүшелері n өскен сайын $\sqrt{2}$ санына ұмтылады.

Анықтама. *Егер кез келген $\varepsilon > 0$ үшін N_0 саны табылса, $n > N_0$ теңсіздігін қанағаттандаратын кез келген n мәндері үшін $|x_n - A| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда A саны n шексіздікке ұмтылғандағы (x_n)* ***тізбегінің шегі*** *деп аталады*.

Жазылуы: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

МЫСАЛ 3. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$.

Егер сандар тізбегінің шегі болса, онда ол шек біреу ғана болатыны айқын.

R нақты сандар жиынында берілген $y = f(x)$ функциясын қарастырайық.

x айнымалысы a санына ұмтылғандағы $y = f(x)$ функциясының мәні 4,9; 4,99; 4,999; ... немесе 5,1; 5,01; 5,001;... мәндерін қабылдай отырып, 5 санына жақындай түседі.

Бұл жағдайда көрсетілген сандардың әрқайсысы мен 5 санының айырымының модулі нөлге ұмтылады.

Расында, $|4{,}9 - 5| = 0{,}1$; $|4{,}99 - 5| = 0{,}01$; $|4{,}999 - 5| = 0{,}001$; ... немесе $|5{,}1 - 5| = 0{,}1$; $|5{,}01 - 5| = 0{,}01$; $|5{,}001 - 5| = 0{,}001$; ... .

0,1; 0,01; 0,001;... $\to$ 0.

Мысалда келтірілген 5 саны x-тің a санына ұмтылғандағы $y = f(x)$ *функциясының шегі* деп аталады.

Анықтама. *Егер кез келген $\varepsilon > 0$ болғанда $0 < |x - a| < \delta$ теңсіздігін қанағаттандыратын кез келген $x \neq a$ үшін $|f(x) - A| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалатындай $\delta > 0$ табылса, онда A саны x айнымалысының a санына ұмтылғандағы $y = f(x)$* ***функциясының шегі*** *деп аталады*.

Жазылуы: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

Анықтама. *Егер x айнымалысы a санына ұмтылған кезде x тек қана a-дан кіші мәндерді қабылдаған жағдайда A_1 саны $y = f(x)$ функциясының шегі болса, онда A_1 саны $y = f(x)$ функциясының a нүктесіндегі* ***сол жақ шегі*** *деп аталады*.

Жазылуы: $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = A_1$.

Анықтама. *Егер x айнымалысы a санына ұмтылған кезде x тек қана a-дан үлкен мәндерді қабылдаған жағдайда A_2 саны $y = f(x)$ функциясының шегі болса, онда A_2 саны $y = f(x)$ функциясының a нүктесіндегі* ***оң жақ шегі*** *деп аталады*.

Жазылуы: $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A_2$.

1-теорема. ***Егер x айнымалысы a санына ұмтылғанда $y = f(x)$ және $y = g(x)$ функцияларының шектері бар болса, онда олардың***

қосындысының да шегі бар болады және ол шек функциялардың шектерінің қосындысына тең:

$$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x).$$

2-теорема. *Егер x айнымалысы a санына ұмтылғанда $y = f(x)$ және $y = g(x)$ функцияларының шектері бар болса, онда олардың көбейтіндісінің де шегі бар болады және ол шек функциялардың шектерінің көбейтіндісіне тең:*

$$\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x).$$

3-теорема. *Егер x айнымалысы a санына ұмтылғанда $y = f(x)$ және $y = g(x)$ функцияларының шектері бар және $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$ болса, онда олардың қатынасының да шегі бар болады және ол шек функциялардың шектерінің қатынасына тең:*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}.$$

1-салдар. Тұрақты көбейткішті шектің алдына шығаруға болады:

$$\lim_{x \to a} k \cdot f(x) = k \cdot \lim_{x \to a} f(x).$$

2-салдар. Егер n — натурал сан болса, онда мына теңдіктер орындалады:

$$\lim_{x \to a} x^n = a^n; \quad \lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}.$$

3-салдар. x айнымалысы a санына ұмтылғанда

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x^1 + a_n$$

көпмүшесінің (бүтін рационал функцияның) шегі $x = a$ болғандағы көпмүшенің мәніне тең:

$$\lim_{x \to a} P(x) = P(a).$$

4-салдар. Егер a саны функцияның анықталу облысына тиісті болса, онда x айнымалысы a санына ұмтылғанда

$$F(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x^1 + a_n}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}x^1 + b_n}$$

бөлшек-рационал функциясының шегі $x = a$ болғандағы функцияның мәніне тең:

$$\lim_{x \to a} F(x) = F(a).$$

МЫСАЛ

4. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{5x^3 - 4x^2 + 18}{-7x^2 + 9}$ шегінің мәнін есептейік.

Шешуі. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{5x^3-4x^2+18}{-7x^2+9}=\frac{5\cdot 2^3-4\cdot 2^2+18}{-7\cdot 2^2+9}=\frac{42}{-19}=-2\frac{4}{19}$.

Жауабы: $-2\frac{4}{19}$.

Егер x айнымалысының мәні шексіз өссе, онда $x\to+\infty$ және егер x айнымалысының мәні шексіз кемісе, $x\to-\infty$ белгілеулерін енгізейік.

Анықтама. *Егер* $\lim\limits_{x\to a(x\to\pm\infty)}f(x)=0$ *болса, онда* $x\to a$ $(x\to\infty)$ *ұмтылғанда* $y=f(x)$ *функциясы* ***шексіз кіші*** *деп аталады.*

$y=\operatorname{tg}x$, $y=\sin x$, $y=x$, $y=x^n$, мұндағы $n>0$, функцияларының $x\to 0$ ұмтылғанда шексіз кіші болатынын дәлелдеңдер. $y=(x-3)^2$ функциясының $x\to 3$ ұмтылғанда шексіз кіші болатынын көрсетіңдер.

Анықтама. *Егер* $\lim\limits_{x\to a(x\to\infty)}f(x)=+\infty$ *болса, онда* $x\to a$ $(x\to+\infty)$ *ұмтылғанда* $y=f(x)$ ***функциясы шексіз үлкен*** *деп аталады.*

Кейбір функциялардың шегін табу кезінде $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$ түріндегі анықталмағандықтар шығуы мүмкін. Әрине, бұлар сандық мағынасы болмайтын белгілерді береді.

Анықтама. *$x\to a$ $(x\to\infty)$ ұмтылғанда анықталмағандықты беретін функцияның шегін табу* ***анықталмағандықты ашу*** *деп аталады.*

Анықталмағандықты ашу үшін әртүрлі тәсілдерді қолдануға болады. Мысалы, бөлшектің бөлімі мен алымын x-тің қандай да бір дәрежесіне бөлу немесе көбейткіштерге жіктеу және т.б.

МЫСАЛ

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n-2}-1}{n^2-9}$ шегін есептейік.

Шешуі. $x\to\infty$ жағдайында шек белгісінің астындағы өрнек $\frac{\infty}{\infty}$ анықталмағандығын береді. Сондықтан берілген өрнекті түрлендіреміз. Ол үшін бөлшектің алымы мен бөлімін алымының түйіндесіне көбейтеміз және бөліміндегі өрнекті қысқаша көбейту формуласы бойынша көбейткіштерге жіктейміз:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n-2}-1}{n^2-9}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-2-1}{(n^2-9)(\sqrt{n-2}+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-3}{(n^2-9)(\sqrt{n-2}+1)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+3)(\sqrt{n-2}+1)}=\frac{1}{\infty\cdot\infty}=0.$$

Жауабы: 0.

МЫСАЛ

6. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$ шегін есептейік.

Шешуі. $x\to 1$ ұмтылғанда шектің астындағы өрнек $\frac{0}{0}$ анықталмағандығын береді. Сондықтан бөлшектің алымы мен бөлімін көбейткіштерге жіктейміз:

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{(x-2)}{(x+1)}=\frac{1-2}{1+1}=-\frac{1}{2}.$$

Жауабы : $-\frac{1}{2}$.

МЫСАЛ

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+3}{3x^2+4x+1}$ шегін табайық.

Шешуі . $x\to\infty$ ұмтылғанда шектің астындағы өрнек $\frac{\infty}{\infty}$ анықталмағандығын береді. Сондықтан өрнекті түрлендіреміз. Ол үшін бөлшектің алымы мен бөлімін x^2 өрнегіне бөлеміз: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x^2}}{3+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{2}{3}$.

Жауабы : $\frac{2}{3}$.

МЫСАЛ

8. $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^2-9}{x+3}$ шегін есептейік.

Шешуі . $x\to-3$ санына ұмтылғанда шектің астындағы өрнек $\frac{0}{0}$ анықталмағандығын береді. Сондықтан өрнекті түрлендіреміз. Ол үшін бөлшектің алымын қысқаша көбейту формуласы арқылы көбейткіштерге жіктейміз: $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^2-9}{x+3}=$
$=\lim\limits_{x\to-3}\frac{(x-3)(x+3)}{x+3}=\lim\limits_{x\to-3}(x-3)=-3-3=-6.$

Жауабы : -6.

МЫСАЛ

9. $\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{x-3}-1}{x^2-16}$ шегін есептейік.

Шешуі . $x\to4$ санына ұмтылғанда шектің астындағы өрнек $\frac{0}{0}$ анықталмағандығын береді. Сондықтан бөлшектің алымы мен бөлімін оның алымының түйіндесіне көбейтеміз және бөліміне квадраттардың айырымының формуласын қолданамыз:

$$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x-3}-1}{x^2-16}=\lim_{x\to4}\frac{x-3-1}{(x^2-16)(\sqrt{x-3}+1)}=\lim_{x\to4}\frac{x-4}{(x^2-16)(\sqrt{x-3}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{1}{(x+4)(\sqrt{x-3}+1)}=\frac{1}{(4+4)(\sqrt{4-3}+1)}=\frac{1}{8\cdot2}=\frac{1}{16}.$$

Жауабы : $\frac{1}{16}$.

?

1. $x\to a$, $x\to\infty$ жазуы нені білдіреді?
2. Қандай жағдайларда анықталмағандықтарды ашуға болады?
3. "Шексіз үлкен функция", "шексіз кіші функция" деген сөз тіркестері нені білдіреді?
4. Шексіз үлкен функцияға мысал келтіріңдер.

Жаттығулар

A

36.1. Тізбектің шегін табыңдар:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-n+3}{n^2}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2-n+1}{2n^2}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin 2n}{n}$; 5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cos 2n}{n}$.

36.2. Функцияның нүктедегі шегінің анықтамасын қолданып теңдікті дәлелдеңдер:

1) $\lim\limits_{x\to 1}(3x-1)=2$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}(3x-2)=4$;

3) $\lim\limits_{x\to -2}(5x+4)=-6$; 4) $\lim\limits_{x\to -0,2}(5x-1)=-2$.

36.3. Функцияның шегін табыңдар:

1) $\lim\limits_{x\to -1}(x^2+1)$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-1)$; 3) $\lim\limits_{x\to -1}(2x^2-1)$;

4) $\lim\limits_{x\to -2}(2x^2-3)$; 5) $\lim\limits_{x\to -2}(2x^2+3)$; 6) $\lim\limits_{x\to -1}(2x^2-x)$.

36.4. Функцияның шегін есептеңдер:

1) $\lim\limits_{x\to 2}(2x^2-3x)$; 2) $\lim\limits_{x\to 0,4}(x^2+x)$; 3) $\lim\limits_{x\to -1}(-2x^3-x)$;

4) $\lim\limits_{x\to -2}(x^2+2x)$; 5) $\lim\limits_{x\to -2}(x^2-2x)$; 6) $\lim\limits_{x\to -0,1}(2x^2+2)$.

36.5. $f(x)$ функциясының $a=2$ нүктесіндегі шегі B-ға тең болатынын дәлелдеңдер:

1) $f(x)=x^2-3x+1$, $B=-1$; 2) $f(x)=x^2-2x+3$, $B=3$;

3) $f(x)=-x^2-2x+2$, $B=-6$; 4) $f(x)=-2x^2+3x-2$, $B=-4$.

36.6. Функцияның шегін табыңдар:

1) $\lim\limits_{x\to -1}(2(x^2+1)-1)$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x)$;

3) $\lim\limits_{x\to 4}\left(2\sqrt{x}-1\right)$; 4) $\lim\limits_{x\to 1}\left(2\sqrt{4x}-3\right)$.

36.7. $x\to x_0$ ұмтылғандағы $y=f(x)$ функциясының шегін табыңдар:

1) $f(x)=x^2-3x$, мұндағы $x\to 1$;

2) $f(x)=2x^2+x-5$, мұндағы $x\to -2$;

3) $f(x)=-2x^2+3x-3$, мұндағы $x\to 2$;

4) $f(x)=-x^2-x+5$, мұндағы $x\to -3$.

B

36.8. Теңдіктің дұрыстығын тексеріңдер:

1) $\lim\limits_{x\to 2}(2x^2 - 3) = 5$; 2) $\lim\limits_{x\to 3}(7 - 2x^2) = -11$; 3) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2 - 3x) = -2$.

36.9. Шектің мәнін табыңдар:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-6}{x+2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x-5}{x-3}$; 3) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{5x+4}{2-x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-3}{x-3}$.

36.10. $f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі шегін табыңдар:

1) $f(x) = x + \dfrac{x^2-9}{x-3}$, мұндағы $x_0 = 3$;

2) $f(x) = \dfrac{x^2-16}{x+4} - 3x$, мұндағы $x_0 = -4$;

3) $f(x) = \dfrac{4-x^2}{x-2} + x$, мұндағы $x_0 = -2$;

4) $f(x) = \dfrac{2x^2-18}{x+3} - 2x$, мұндағы $x_0 = -3$.

36.11. Шектің мәнін табыңдар:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x}{x+2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{6x-2x^3}{x^2-3}$;

3) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-5x+6}{2-x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x+1}{x-1}$.

36.12. Шекті табыңдар:

1) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2+2x}{2x^2+2}$; 2) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{6x-2x^3}{x^3-3}$;

3) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-5x+6}{2-x^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2-3x^3+x+1}{x^3-1}$.

C

36.13. $x \to -2$ ұмтылғанда шегі: 1) 2; 2) 4; 3) -2; 4) $\sqrt{2}$ санына тең болатын $f(x)$ бөлшек-рационал функциясын жазыңдар.

36.14. $x \to \infty$ ұмтылғанда шегі: 1) -1; 2) 3; 3) -4; 4) $\sqrt{3}$ санына тең болатын $f(x)$ бөлшек-рационал функциясын жазыңдар.

36.15. $f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі шегін табыңдар:

1) $f(x) = \sin 2x$, мұндағы $x_0 = \dfrac{\pi}{12}$;

2) $f(x) = 2\cos 2x$, мұндағы $x_0 = -\dfrac{\pi}{12}$;

3) $f(x) = x + \sin 3x$, мұндағы $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$;

4) $f(x) = 2x - \operatorname{tg} x$, мұндағы $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$.

36.16. Шекті есептеңдер:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2-\sqrt{n^2-1}}{n}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+\sqrt{n^2+1}}{n}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\operatorname{arctg} n}{n}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\arcsin 2n}{n}$.

36.17. Шектің мәнін табыңдар:

1) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$; 2) $\lim\limits_{x\to9}\dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}$; 3) $\lim\limits_{x\to16}\dfrac{4-\sqrt{x}}{x-16}$;

4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{x}-1}$; 5) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-x}{\sqrt{x+3}-2}$; 6) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{2x-3}-1}$.

ХАБАРЛАМА ДАЙЫНДАҢДАР

Джон Валлис
(1616 —1703)

36.18. Шексіздік белгісін (∞) 1655 жылы математикалық анализдің негізін салушылардың бірі ағылшын математигі Джон Валлис, шек белгісін (lim) 1853 жылы ирландық математик, механик және физик Уильям Роуэн Гамильтон енгізген.

Уильям Роуэн
Гамильтон
(1805 —1865)

ҚАЙТАЛАУ

36.19. Теңдеуді шешіңдер:

1) $\operatorname{arctg} 4x=\dfrac{\pi}{4}$; 2) $\arcsin\left(3-\dfrac{x}{2}\right)=-\dfrac{\pi}{6}$; 3) $\arccos(1-2x)=\pi$.

36.20. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\operatorname{ctg}(4\pi-\alpha)\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\operatorname{tg}(2\pi+\alpha)$;

2) $\cos(4\pi-\alpha)\cdot\left(\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)^2\cdot\operatorname{tg}(\pi+\alpha)\cdot\left(\operatorname{ctg}\left(\dfrac{5\pi}{2}+\alpha\right)\right)^2$.

36.21. Есептеңдер:

1) $2\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)-3\operatorname{arcctg}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)+\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)-2\operatorname{arctg}(-1)$;

2) $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)+2\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)-\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+\operatorname{arctg}1$;

3) $3\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} - 4\operatorname{arcctg}(-1) + \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 3\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)$;

4) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) - \arcsin(-1) - 2\operatorname{arctg}\sqrt{3}$.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Функция, функцияның нүктедегі мәні, тригонометриялық функциялар, тригонометрия формулалары, тригонометриялық функциялардың мәндері.

§ 37. БІРІНШІ ТАМАША ШЕК

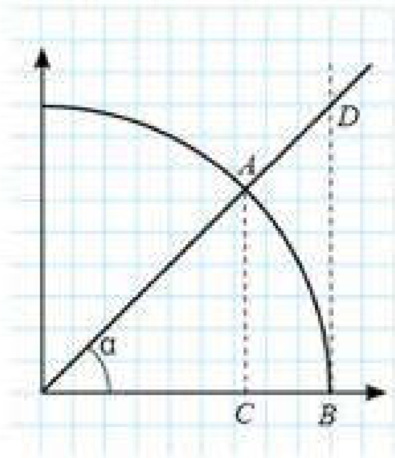
Бірінші тамаша шекпен танысасыңдар; бірінші тамаша шекті қолдану арқылы есептер шығаруды үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Функция, шек, бірінші тамаша шек

Математика және оның қосымшаларында жиі қолданылатын шекті қарастырайық.

Теорема. ***x айнымалысы 0 санына ұмтылғанда $y = \frac{\sin x}{x}$ функциясының шегі болады және ол шек бірге тең:*** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.



37.1-сурет

Дәлелдеуі. Бірлік шеңбердің $\overset{\smile}{AB}$ доғасын қарастырайық (37.1-сурет).

$\overset{\smile}{AB}$ доғасының ұзындығын CA және DB кесінділерінің ұзындығымен салыстырайық:

$CA < \overset{\smile}{AB} < DB$.

Радиусы $R = 1$ және α бұрышы радианмен өлшенгендіктен, доғаның ұзындығы $\overset{\smile}{AB} = \alpha$.

$CA = \sin\alpha$ және $DB = \operatorname{tg}\alpha$. Демек, $\frac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} < \frac{\sin\alpha}{\alpha} < \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha} \Rightarrow \cos\alpha < \frac{\sin\alpha}{\alpha} < 1$.

$\alpha \to 0$ ұмтылғанда $\cos\alpha \to 1$.

Демек, кез келген $\varepsilon > 0$ үшін $\delta > 0$ $(|\alpha| < \delta \Rightarrow |\cos\alpha - 1| < \varepsilon)$ табылады, яғни $\left|\frac{\sin\alpha}{\alpha} - 1\right| < |\cos\alpha - 1| < \varepsilon$. α-ның теріс мәні үшін де тура осылай, өйткені $\cos(-\alpha) < \frac{\sin(-\alpha)}{-\alpha} < 1$.

Анықтама. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ *шегі* ***бірінші тамаша шек*** *деп аталады*.

Бірінші тамаша шектің қолданылуына мысалдар қарастырайық.

МЫСАЛ

1. $x \to 0$ болғандағы $y = \dfrac{\sin(ax)}{bx}$ функциясының шегін табайық.

Шешуі. Бірінші тамаша шекті қолдану үшін $\dfrac{\sin(ax)}{bx}$ бөлшегін бөлімінде ax (синустың аргументіне тең өрнек) өрнегі болатындай етіп түрлендіреміз. Ол үшін бөлшектің алымы мен бөлімін a санына көбейтеміз, одан кейін көбейтіндінің шегі туралы теореманы қолданамыз:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(ax)}{bx} = \lim_{x\to0}\frac{\sin(ax)}{ax}\frac{a}{b} = \lim_{x\to0}\frac{\sin(ax)}{ax}\lim_{x\to0}\frac{a}{b} = 1\cdot\frac{a}{b} = \frac{a}{b}.$$

Жауабы: $\dfrac{a}{b}$.

МЫСАЛ

2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ шегін табайық.

Шешуі. Бірден бірінші тамаша шекті қолдана алмаймыз. Алдымен бөлшекті түрлендіреміз. Ол үшін бөлшектің бөліміндегі x^2 өрнегін $\left(2\cdot\dfrac{x}{2}\right)^2$ түрінде жазып, $1-\cos x = 2\sin^2\dfrac{x}{2}$ формуласын және шектер туралы теоремалар мен салдарларды қолданамыз:

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} = \lim_{x\to0}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\cdot1\cdot1 = \frac{1}{2}.$$

Жауабы: $\dfrac{1}{2}$.

МЫСАЛ

3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}$ шегін табайық.

Шешуі. Бөлшекті түрлендіреміз:

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x}{x} = \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x\cos x} = \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x} = 1.$$

Жауабы: 1.

МЫСАЛ

4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$ шегін табайық.

Шешуі. Бірінші тамаша шекті қолдану үшін бөлшекті түрлендіреміз:

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2} = \lim_{x\to0}\frac{2\sin 2x\sin x}{x^2} = 2\cdot2\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 4\cdot1\cdot1 = 4.$$

Жауабы: 4.

Теорема. *$x \to 0$ болғанда $\dfrac{\arcsin x}{x}$, $\dfrac{\operatorname{arctg}x}{x}$ функцияларының шегі болады және ол шек* **1** *санына тең.*

$$\lim_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x} = 1,\quad \lim_{x\to0}\frac{\operatorname{arctg}x}{x} = 1.$$

Дәлелдеуі. $\arcsin x = y$ алмастыруын қолданамыз, онда $x \to 0$ болғанда $y \to 0$ ұмтылады, сондықтан $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim\limits_{y \to 0} \frac{y}{\sin y} = 1$.

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$ теңсіздігін өздерің дәлелдеңдер.

МЫСАЛ

5. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arcsin 3x}{x}$ шегін есептейік.

Шешуі. Берілген шекті есептеу үшін алмастыру жасаймыз: $y = 3x$. Сонда $x \to 0$ болғанда $y \to 0$ аламыз. Демек,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin 3x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{3\arcsin 3x}{3x} = \lim_{y \to 0} \frac{3\arcsin y}{y} = 3.$$

Жауабы: 3.

МЫСАЛ

6. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{2}}{x}$ шегін есептейік.

Шешуі. $y = \frac{x}{2}$ алмастыруын қолданамыз. Сонда $x \to 0$ болғанда $y \to 0$. Демек,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{2}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \lim_{y \to 0} \frac{\frac{1}{2} \operatorname{arctg} y}{y} = \frac{1}{2}.$$

Жауабы: $\frac{1}{2}$.

1. Неліктен жоғарыда қарастырылған шектер "тамаша шектер" деп аталады?

Жаттығулар

A

37.1. $y = f(x)$ функциясының $x \to x_0$ ұмтылғандағы шегін табыңдар:

1) $f(x) = \frac{\sin x}{3x}$, мұндағы $x \to 0$;

2) $f(x) = \frac{\sin 6x}{3x}$, мұндағы $x \to 0$;

3) $f(x) = \frac{2\sin 2x}{5x}$, мұндағы $x \to 0$;

4) $f(x) = \frac{5\sin 3x}{6x}$, мұндағы $x \to 0$.

37.2. Теңдіктің ақиқаттығын дәлелдеңдер:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x + \sin 3x}{2x} = 2{,}5$;

2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x - \sin 3x}{2x} = -0{,}5$;

3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 9x - \sin 4x}{5x} = 1$;

4) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x + \sin 3x}{2x} = 4$.

37.3. Шекті табыңдар:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\sin 5x}{\sin 2x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 5x+\sin 2x}{\sin 3x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-2\sin 5x}{2\sin x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin 2x-4\sin 5x}{5\sin 2x}$.

37.4. $y=f(x)$ функциясының $x\to x_0$ ұмтылғандағы шегін табыңдар:

1) $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg}x}{2x}$, мұндағы $x\to 0$; 2) $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg}6x}{3x}$, мұндағы $x\to 0$;

3) $f(x)=\dfrac{2\operatorname{tg}2x}{5x}$, мұндағы $x\to 0$; 4) $f(x)=\dfrac{5\operatorname{tg}3x}{6x}$, мұндағы $x\to 0$.

37.5. Бірінші тамаша шекті қолданып, шекті есептеңдер:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}2x}{2\sin x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}3x}{\sin 3x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}2x}{\operatorname{tg}5x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}6x}{\arcsin 3x}$.

B

37.6. Шекті есептеңдер:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{tg}4x}{2x}+\dfrac{\sin 3x}{x}\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arcsin x}{3x}+\dfrac{\sin x}{2x}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{arctg}2x}{3x}+\dfrac{\sin 3x}{2x}\right)$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{arctg}3x}{x}-\dfrac{\sin 3x}{3x}\right)$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin 5x+\operatorname{tg}3x)$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x-1}+\dfrac{\sin 6x}{3x}\right)$.

Өрнектің шегін табыңдар **(37.7—37.9):**

37.7. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\cos x$; 2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos 2x$; 3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos 2x}{\sin 3x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\sin^2 x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x^2}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x+\operatorname{tg}2x}{\sin x}$.

37.8. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\operatorname{tg}(x^2)}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin 2x-4\sin 5x}{5\sin 3x+\sin 5x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin 2x-4\sin x}{5x-\sin 3x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 2x+2\sin 3x}{2x-4\sin 2x}$.

37.9. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x}{x+2}\right)^2$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2}{x^2-1}\right)^2$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\dfrac{\sin x}{2x-1}\right)$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4+x^2}{3-x^2}\right)^{-2}$.

37.10. Шекті есептеңдер:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{arctg}(x-1)}{x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\arcsin(x-2)}{x-2}$;

3) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\operatorname{arctg}(x+1)}{\arcsin(x+1)}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1,5}\dfrac{\arcsin(2x-3)}{\operatorname{arctg}(2x-3)}$.

37.11. Шекті табыңдар:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{3x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{2x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}(-4x)}{5x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{\arcsin 4x}$.

C

37.12. $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$ және $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = -1$ болса, онда берілген шекті табыңдар:

1) $\lim\limits_{x\to 2}(2f(x) - g(x))$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}(f(x)\cdot(g(x) - 2))$; 3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{g(x)}$;

4) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)} + 4g(x)\right)$; 5) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{6}{f(x)} - \dfrac{2f(x)}{g(x)}\right)$; 6) $\lim\limits_{x\to 2}(f(x) + 1)^2$.

Шекті есептеңдер (**37.13—37.15**):

37.13. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(-4x)}{\sin 2x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2}{\sin^2 2x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\sin x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(-4x)}{\sin 2x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}\left(-x^2\right)}{\sin 2x^2}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\operatorname{arctg} x^2}{\sin x^2}$.

37.14. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2 + 2}{x^2 - 2x + 1}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x - 1)^2}{3x - x^2 + 3}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4 + x^2} - 2}{x}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4 + x^2} - 2}{1 - \sqrt{x^2 - 1}}$.

37.15. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{x^2 + \pi x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4 + x} - 2}{\operatorname{tg} x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin(x + \pi)}{\sin 2x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x - \cos x}{1 - \cos x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1 - \sqrt{\cos x}}{x\sin x}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 10x}{2\operatorname{tg} x}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{\operatorname{tg} x}$.

37.16. Берілген қасиеттері бар $f(x)$ функциясының графигін салыңдар:

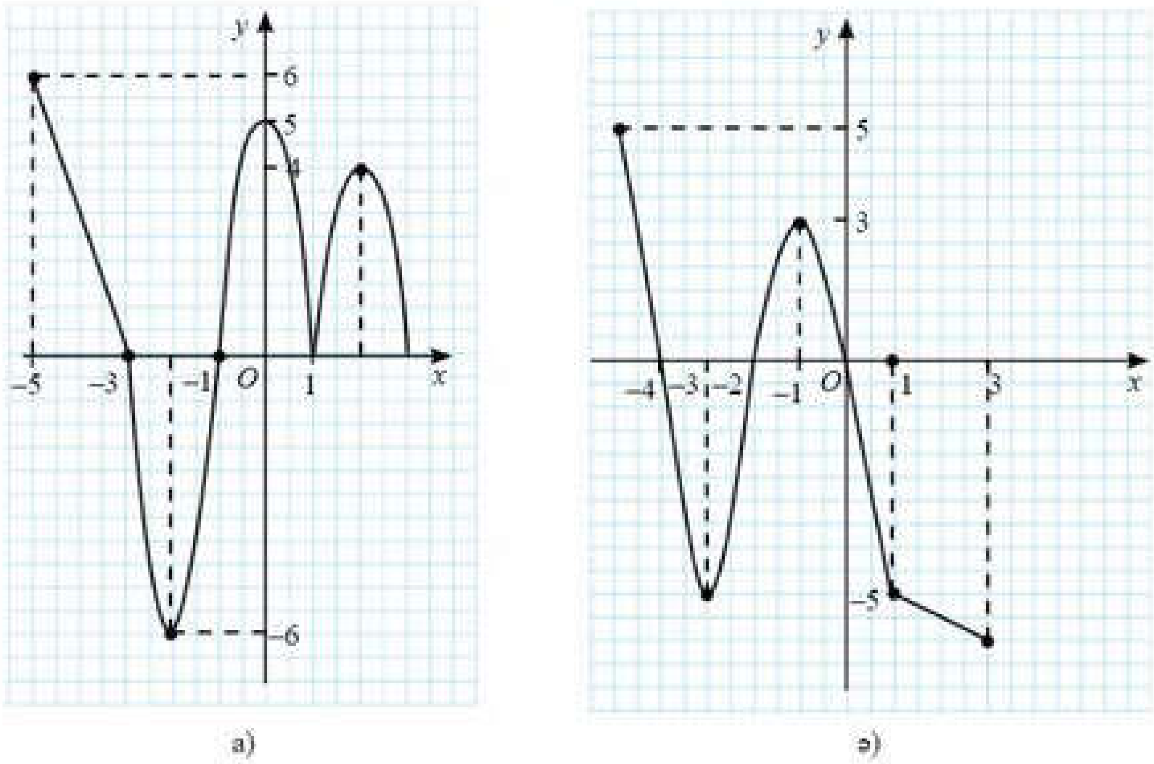
1) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4$, $f(2) = 4$; 2) $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 3$, $f(-1) = 2$;

3) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 2$, $f(2)$-нің мәні жоқ; 4) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

37.17. 37.2-суретте $y = f(x)$ функциясының графигі кескінделген. Шекті табыңдар:

1) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$; 2) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$; 3) $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$;

4) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$; 5) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$; 6) $\lim\limits_{x\to -5} f(x)$.



37.2-сурет

ҚАЙТАЛАУ

37.18. Функция графигін салыңдар:

1) $f(x) = (x + 1)^2 - 1$; 2) $f(x) = |x^2 - 4|$;

3) $f(x) = |\sin x|$; 4) $f(x) = |2\cos x|$.

37.19. Тригонометриялық функциялардың көбейтіндісін қосындыға немесе айырымға түрлендіріңдер:

1) $\sin 2\alpha \cdot \cos 3\alpha$; 2) $\cos 4\alpha \cdot \cos 2\alpha$;

3) $\sin 5\alpha \cdot \sin 3\alpha$; 4) $\sin 2\alpha \cdot \sin 8\alpha$.

37.20. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $4\sin^6\alpha + 4\cos^6\alpha - 3\cos^2 2\alpha$;

2) $(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta) \cdot \operatorname{ctg}(\alpha - \beta) - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta$;

3) $\dfrac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}$; 4) $\dfrac{2\cos\beta + \cos 3\beta + \cos 5\beta}{\cos 3\beta + \sin\beta \cdot \sin 2\beta}$;

5) $\dfrac{\sin\alpha - 2\cos 3\alpha - \sin 5\alpha}{\cos\alpha + 2\sin 3\alpha - \cos 5\alpha}$; 6) $\dfrac{\sin 9\alpha - \sin 6\alpha - \sin 7\alpha + \sin 8\alpha}{\cos 6\alpha + \cos 7\alpha + \cos 8\alpha + \cos 9\alpha}$.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Функция, функцияның нүктедегі мәні, тригонометриялық функциялар, тригонометрия формулалары, тригонометриялық функциялардың мәндері, функцияның нүктедегі шегі, функцияның графигі.

§38. ФУНКЦИЯНЫҢ НҮКТЕДЕГІ ЖӘНЕ ЖИЫНДАҒЫ ҮЗІЛІССІЗДІГІ

Функцияның үзіліссіздігі, үзіліс нүктесі ұғымдарымен танысасыңдар;
Үзіліс нүктесін анықтауды, функцияның нүктедегі, жиындағы үзіліссіздігін табуды үйренесіңдер.

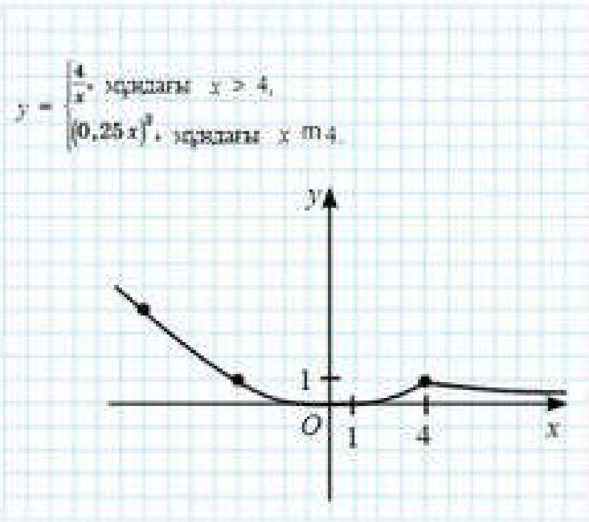
ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР
Функция, график, үзіліс нүктесі, үзіліссіздік

$y = f(x)$ функциясының үзіліссіздігін график арқылы қарастырайық.

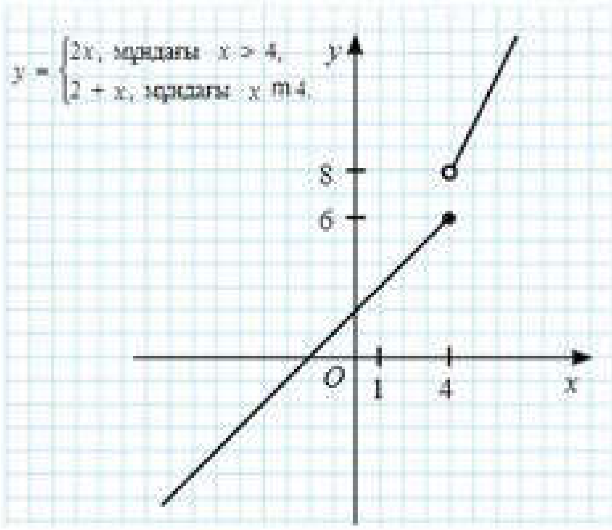
МЫСАЛ

1. 38.1-суретте үзіліссіз $y = \begin{cases} \frac{4}{x}, \text{ мұндағы } x > 4, \\ (0{,}25x)^2, \text{ мұндағы } x \le 4 \end{cases}$ функциясының графигі кескінделген.

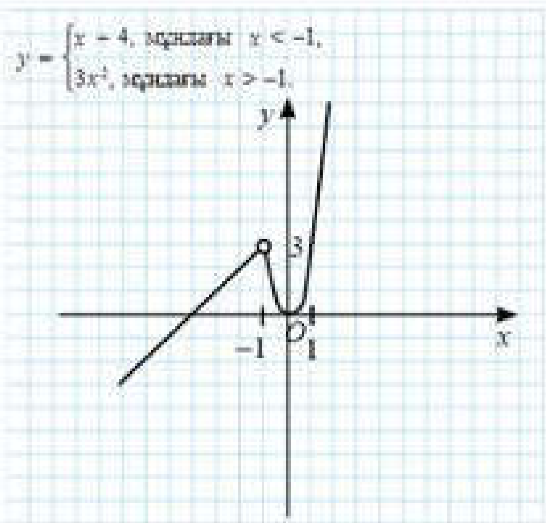
Ал графиктері 38.2—38.4-суреттерде берілген функциялар үзіліссіз болмайды.



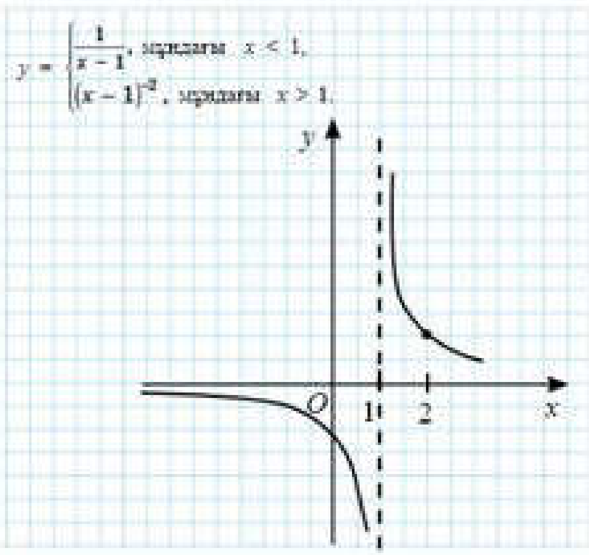
38.1-сурет



38.2-сурет



38.3-сурет



38.4-сурет

$y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \sqrt{x-2}$, $y = \frac{1}{x^2}$, $y = \frac{3x}{x-2}$ функцияларының графиктері бойынша олардың қайсысы: 1) нақты сандар жиынында; 2) өзінің анықталу облысында үзіліссіз болатынын анықтаңдар.

Анықтама. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ *теңдігі орындалса, онда* $y = f(x)$ *функциясы* $x = x_0$ *нүктесінде* ***үзіліссіз функция*** *деп аталады.*

Кері жағдайда $y = f(x)$ функциясы $x = x_0$ нүктесінде үзілісті болады.

МЫСАЛ

2. Графигі 38.3-суретте көрсетілген функция абсциссасы $x = -1$-ге тең нүктеде үзілісті. Расында, бұл функция үшін $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 3$, бірақ функцияның $y = f(-1)$ мәні анықталмаған, өйткені -1 нүктесі функцияның анықталу облысына тиісті емес. Сондықтан $\lim\limits_{x \to -1} f(x) \neq f(-1)$, яғни функция абсциссасы -1-ге тең нүктеде үзілісті болады.

Графигі 38.4-суретте кескінделген функцияны қарастырайық. Бұл функция үшін $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ шегі шексіздікке ұмтылады. Демек, абсциссасы 1-ге тең нүктеде функция үзілісті.

Үзіліс нүктесі анықталу облысына тиісті болмайды деген тұжырым қалыптасуы мүмкін. Бірақ олай емес. Оған графигі 38.2-суретте кескінделген функция мысал болады. Мұнда абсциссасы 4-ке тең нүкте функцияның анықталу облысына тиісті болғанымен, бұл нүкте функция үшін үзіліс нүктесі болады.

$\lim\limits_{x \to 4} f(x)$ шегін табайық (38.2-сурет). Шектің мәнін табу үшін x айнымалысының 4 санына қай жағынан жақындайтынын анықтау керек. Егер сол жақтан жақындаса $y = f(x) \to 6$, оң жақтан жақындаса $y = f(x) \to 8$, яғни $\lim\limits_{x \to 4-0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 4+0} f(x)$. Функция абсциссасы x_0-ге тең нүктеде үзіліссіз болуы үшін абсциссасы x_0-ге тең нүктедегі $y = f(x)$ функциясының сол жақтағы және оң жақтағы шектері, функцияның осы нүктедегі мәні тең болуы қажет, яғни

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = a, \quad f(x_0) = a.$$

$y = f(x)$ абсциссасы x_0 болатын нүктеде үзілісті болсын.

Анықтама.

1. *Егер біржақты* $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ *немесе* $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ *шектерінің ең болмағанда біреуі шексіз болса, онда абсциссасы* x_0 *болатын нүкте* ***II текті үзіліс нүктесі*** *болады;*

2. *Егер* $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ *немесе* $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ *біржақты шектері шектелген және әртүрлі болса, онда абсциссасы* x_0 *болатын нүкте* ***I текті үзіліс нүктесі*** *болады.*

3. *Егер* $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = b$ *және* $f(x_0) \neq b$ *немесе* $f(x_0)$ *анықталмаған болса, онда абсциссасы* x_0 *болатын нүкте* ***жойылатын үзіліс нүктесі*** *болады.*

38.2—38.4-суреттерден II текті, I текті (секіріс) жойылатын үзіліс нүктелерін табыңдар.

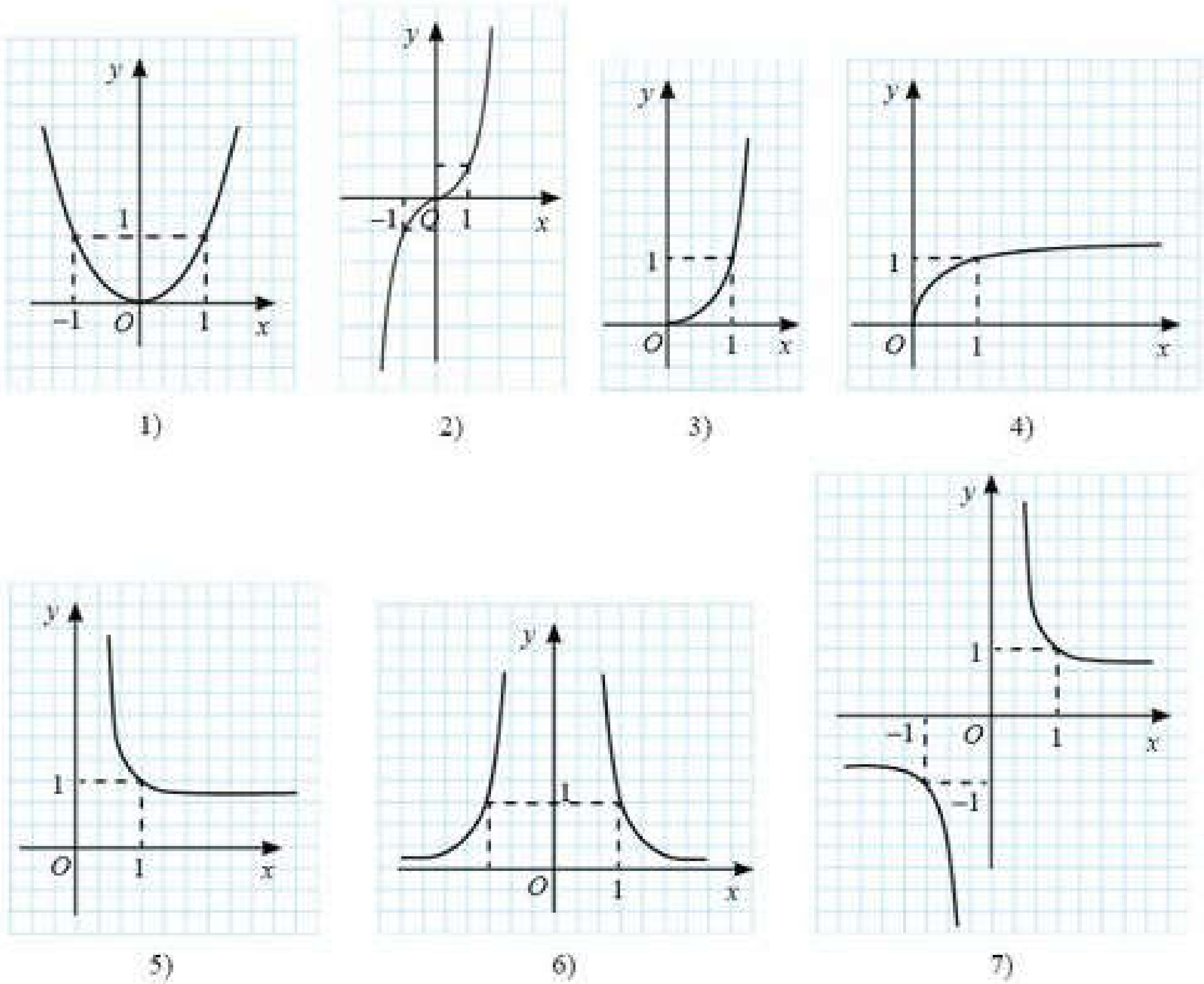
Анықтама. *Егер функция аралықтың барлық нүктелерінде үзіліссіз болса, онда ол осы аралықта* ***үзіліссіз*** *болады.*

1. $y = \operatorname{tg} x$ қандай нүктеде үзілісті болады? Ол үзіліс нешінші типті?
2. Қандай элементар функциялардың үзіліс нүктелері бар, қайсылары үзіліссіз функция болады?

Жаттығулар

А

38.1. Графиктері 38.5-суретте кескінделген функциялардың қайсыларының үзіліс нүктелері бар?



38.5-сурет

38.2. $y = f(x)$ функциясының графигін салыңдар. Абсциссасы $x_0 = 0$ болатын нүктеде функцияның үзіліссіз екенін анықтаңдар:

1) $y = \begin{cases} 1 - x, \text{ мұндағы } x \geq 0, \\ 1 + x, \text{ мұндағы } x < 0; \end{cases}$ 2) $y = \begin{cases} 2 + x, \text{ мұндағы } x \geq 0, \\ 1 + x, \text{ мұндағы } x < 0. \end{cases}$

3) $y = \begin{cases} 2 - x, \text{ мұндағы } x \geq 0, \\ 2x, \text{ мұндағы } x < 0. \end{cases}$

38.3. $y = f(x)$ функциясыны ң графигін салыңдар. Абсциссасы $x_0 = 1$ болатын нүктеде функция үзіліссіз екенін анықтаңдар:

1) $y = \begin{cases} 1 + 2x, \text{ мұндағы } x \geq 1, \\ 4x - 1, \text{ мұндағы } x < 1; \end{cases}$ 2) $y = \begin{cases} 5x, \text{ мұндағы } x \geq 1, \\ 3x - 1, \text{ мұндағы } x < 1; \end{cases}$

3) $y = \begin{cases} 8 - 7x, \text{ мұндағы } x \geq 1, \\ x + 3, \text{ мұндағы } x < 1. \end{cases}$

38.4. Берілген нүкте үзіліс нүктесі болатын функция графигінің кескінін салыңдар:

1) $x_0 = 3$; 2) $x_0 = -1{,}5$; 3) $x_0 = 4$; 4) $x_0 = -0{,}5$.

B

38.5. $f(x)$ функциясын үзіліссіздікке зерттеңдер және графигін салыңдар:

1) $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ мұндағы } x \leq 0, \\ 1 - x^2, \text{ мұндағы } x > 0; \end{cases}$ 2) $f(x) = \begin{cases} -x, \text{ мұндағы } x \leq 0, \\ x^2 + 1, \text{ мұндағы } x > 0; \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ мұндағы } x \leq 2, \\ 1 - x, \text{ мұндағы } x > 2. \end{cases}$

38.6. Берілген нүкте үзіліс нүктесі болатын функцияға мысал келтіріңдер:

1) $x_0 = 2$ және $x_0 = 4$; 2) $x_0 = -3$ және $x_0 = 0$;

3) $x_0 = -1$ және $x_0 = 2$.

38.7. $y = f(x)$ функциясының графигін салыңдар және үзіліссіздікке зерттеңдер:

1) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, \text{ мұндағы } x \leq 2, \\ 5 - x, \text{ мұндағы } x > 2; \end{cases}$ 2) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, \text{ мұндағы } x \leq 0, \\ x - 1, \text{ мұндағы } x > 0; \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, \text{ мұндағы } x \leq 2, \\ 7 - x^2, \text{ мұндағы } x > 2. \end{cases}$

38.8. Функцияның графигін салыңдар және үзіліс нүктелерін табыңдар:

1) $f(x) = [x]$; 2) $f(x) = x - [x]$; 3) $f(x) = \operatorname{sign} x$.

C

38.9. $f(x)$ функциясының графигін салыңдар және функцияны үзіліссіздікке зерттеңдер:

1) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, \text{ мұндағы } x \leq 2, \\ |x| + 1, \text{ мұндағы } x > 2; \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1, \text{ мұндағы } x \leq 0, \\ |x| - 1, \text{ мұндағы } x > 0; \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, \text{ мұндағы } x \leq 0, \\ 4 - x^2, \text{ мұндағы } x > 0. \end{cases}$

38.10. Функция ны үзіліссіздікке зерттеңдер және оның графигін салыңдар:

1) $f(x) = \begin{cases} x - 1, \text{ мұндағы } x \leq 0, \\ x^2 - 5, \text{ мұндағы } 0 < x \leq 3, \\ 4, \text{ мұндағы } x > 3; \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} 2 - x, \text{ мұндағы } x \leq 1, \\ x^2 - 6, \text{ мұндағы } 1 < x \leq 3, \\ x, \text{ мұндағы } x > 3; \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ мұндағы } x \leq 0, \\ 2x - 2, \text{ мұндағы } 0 < x \leq 2, \\ 2, \text{ мұндағы } x > 2; \end{cases}$

4) $f(x) = \begin{cases} 3x, \text{ мұндағы } x \leq -1, \\ 2x - x^2, \text{ мұндағы } -1 < x \leq 2, \\ 0, \text{ мұндағы } x > 2; \end{cases}$

5) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, \text{ мұндағы } x \leq -1, \\ x^2 - 3, \text{ мұндағы } -1 < x \leq 3, \\ 3 + x, \text{ мұндағы } x > 3; \end{cases}$

6) $f(x) = \begin{cases} 1 - 2x - x^2, \text{ мұндағы } x \leq -1, \\ x^2 - 5, \text{ мұндағы } -1 < x \leq 3, \\ 1 - 2x, \text{ мұндағы } x > 3. \end{cases}$

38.11. x_0 нүктесін де $f(x) = \begin{cases} H(x), \text{ мұндағы } x \neq x_0, \\ A, \text{ мұндағы } x \neq x_0 \end{cases}$ функциясы үзіліссіз болатынд ай A-ның мәнін табыңдар:

1) $H(x) = 2\sin 4x$, $x_0 = \frac{\pi}{8}$; 2) $H(x) = -\cos\frac{2x}{3}$, $x_0 = \frac{3\pi}{4}$;

3) $H(x) = \frac{x^2 - 5x - 14}{x + 2}$, $x_0 = -2$; 4) $H(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$, $x_0 = 4$.

ҚАЙТАЛАУ

38.12. Функцияның графигін салыңдар. Ең кіші периодын және мәндер жиынын табыңдар:

1) $f(x) = 3\cos 2x$; 2) $f(x) = 2\sin 4x$;

3) $f(x) = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$; 4) $f(x) = 2\{x\}$.

38.13. Функцияның шегін табыңдар:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 4x}{\sin 2x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\operatorname{tg}^2 2x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\sin^2 x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{2+x}-2}{x-2}$; 6) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-x}-2}{x-1}$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-2x+3}{x^3-2}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-2x^2+3x}{x^3+2x-1}$.

38.14. Функцияның графигін салыңдар:

1) $f(x) = 3 - \cos 2x$; 2) $f(x) = \sin x\cos 2x$; 3) $f(x) = 2\cos x\sin x$.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Функция, функцияның нүктедегі мәні, функцияның нүктедегі және шексіздіктегі шегі, функция графигі, сызықты функция графигі.

§ 39. ФУНКЦИЯ ГРАФИГІНІҢ АСИМПТОТАЛАРЫ

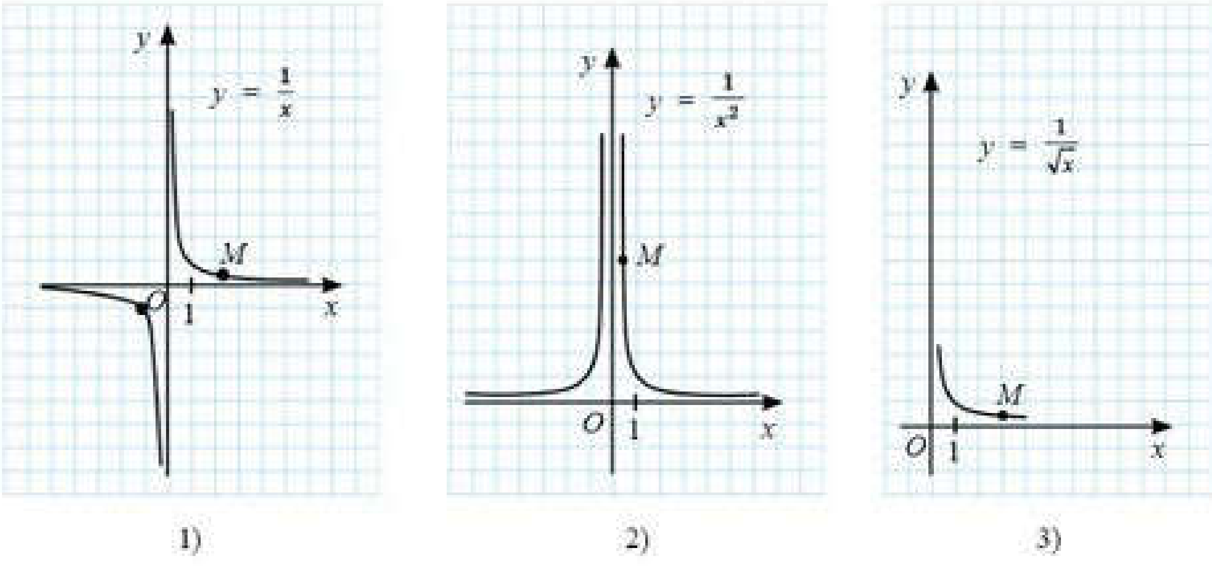
Қисықтың асимптотасы ұғымымен танысасыңдар; асимптотаны табуға арналған есептерді шығаруды үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Функция, график, асимптота

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР:

Сендер $y = \frac{1}{x}$ (39.1.1-сурет), $y = \frac{1}{x^2}$ (39.1.2-сурет), $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ (39.1.3-сурет) дәрежелік функцияларының графиктері $x \to +\infty$ және $x \to 0$ жағдайларында сәйкесінше Ox және Oy осьтеріне жақындай түсетінін, бірақ қиылыспайтынын білесіңдер. Басқаша айтқанда, осы функциялардың графиктері бойымен M нүктесі шексіздікке қарай қозғалғанда M нүктесінен координаталар осьтеріне дейінгі қашықтық нөлге ұмтылады.



39.1-сурет

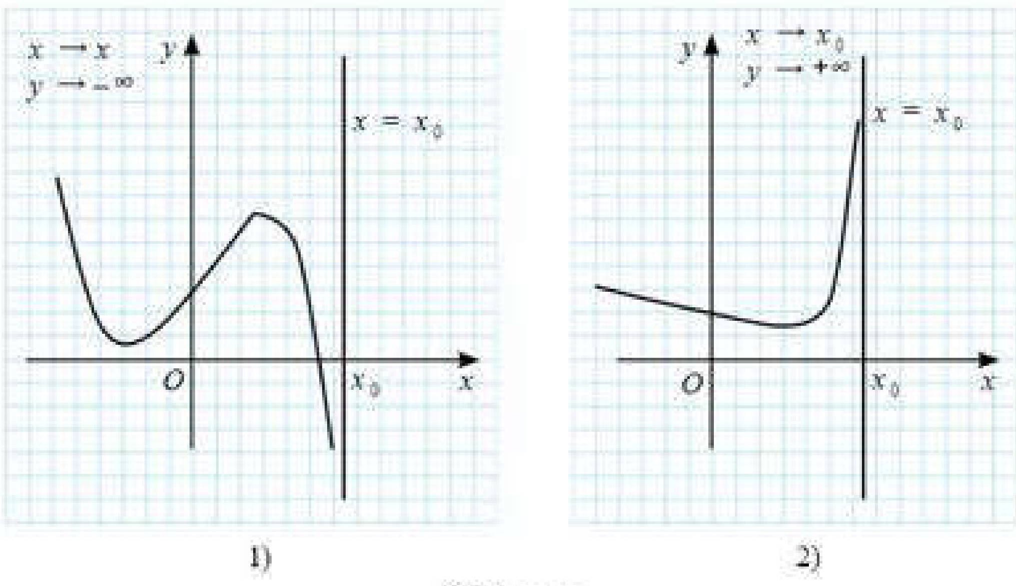
Бұл жағдайда координата осьтері осы функциялар графиктерінің, яғни қисық сызықтарының асимптоталары болып табылады.

Анықтама. *M нүктесі берілген сызық бойымен шексіздікке жылжығанда осы нүктеден а түзуіне дейінгі қашықтық нөлге ұмтылса, онда а түзуі* ***қисықтың асимптотасы*** *деп аталады.*

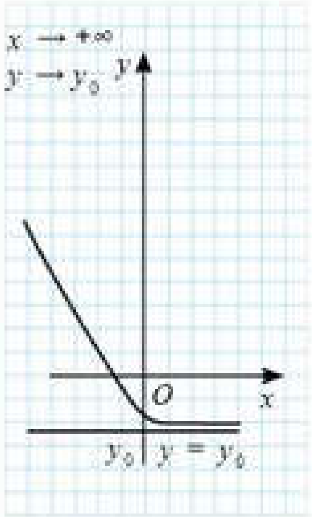
Асимптоталар вертикаль, горизонталь және көлбеу болып үш түрге бөлінеді.

Графигі 39.1-суретте кескінделген қисық сызықтардың вертикаль және горизонталь екі асимптоталары бар.

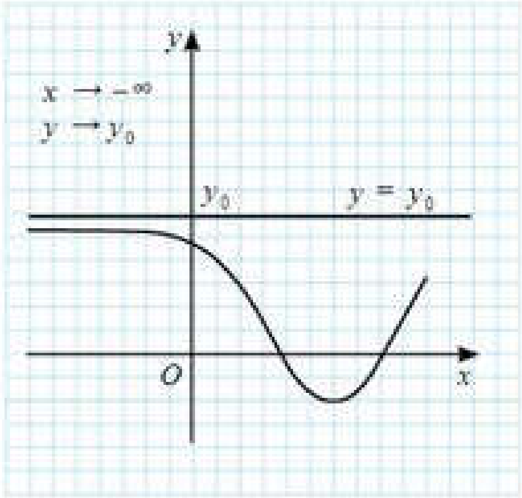
39.2.1-39.2.2-суреттерде кескінделген қисық сызықтардың бір вертикаль асимптотасы, 39.2.3-39.2.4-суреттерде кескінделген қисық сызықтардың бір горизонталь асимптотасы бар.



39.2-сурет



3)



4)

39.2-сурет

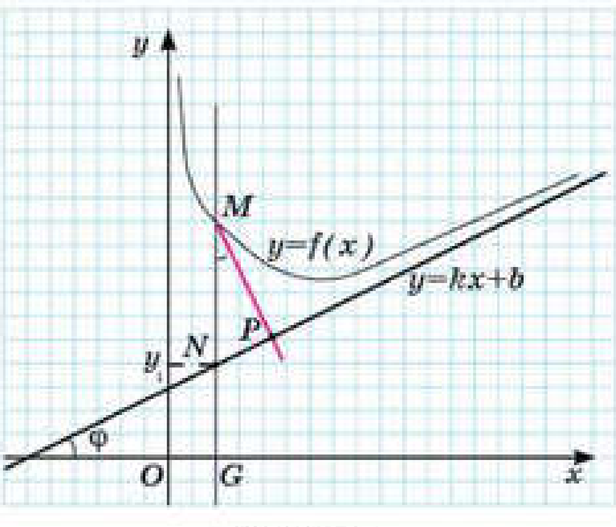
Егер $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty$ және (немесе) $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty$, болса, онда $x = x_0$ түзуі вертикаль асимптота болады (мұнда ∞ шамасы $+\infty$ немесе $-\infty$).

Осы тұжырымның ақиқаттығын 39.2-суреттің көмегімен өздерің көрсетіңдер.

МЫСАЛ

1. $x = 1$ теңдеуімен берілген түзу $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ функциясына вертикаль асимптота болады. Расында, $\lim\limits_{x \to 1 - 0} \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 1 + 0} \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = +\infty$.

$x = 5$ теңдеуімен берілген түзу $f(x) = \dfrac{2}{x - 5}$ функциясына неліктен вертикаль асимптота болатынын түсіндіріңдер.



39.3-сурет

Көлбеу асимптоталарды табуды қарастырайық. Егер $y = f(x)$ функциясының көлбеу асимптотасы бар болса, онда ол $y = kx + b$ түзуімен беріледі.

$y = f(x)$ қисық сызығының $y = kx + b$ көлбеу асимптотасы болсын (39.3-сурет).

M нүктесінен екі перпендикулярдың біреуін асимптотаға (MP), екіншісін Ox осіне жүргізіп, асимптотаға жүргізілген перпендикулярдың $y = f(x)$ қисық сызығымен қиылысу нүктесін M, асимптотамен қиылысу нүктесін P, асимптота және Ox осінің оң бағытының арасындағы бұрышты φ деп белгілейік. MG перпендикулярының Ox осімен қиылысу нүктесін N деп алайық.

$MG = y$ дегеніміз $y = f(x)$ қисық сызығының M нүктесінің ординатасы, $NG = y_1$ дегеніміз $y = kx + b$ асимптотасындағы N нүктесінің ординатасы (39.3-сурет).

Енді $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - (kx + b)] = 0$ теңдігін дәлелдейік.

Дәлелдеуі. $x \to +\infty$ жағдайында M нүктесі қисық сызық бойымен қозғалғанда P нүктесіне шексіз жақындайды: $\lim\limits_{x\to\infty}|MP| = 0$.

$\angle NMP = \varphi$ (өздерің дәлелдеңдер).

ΔMNP үшбұрыш ынан $|MN| = \dfrac{|MP|}{\cos\varphi}$ теңдігі шығады. φ бұрышы тұрақты және $90°$-қа тең емес, ендеше $\cos\varphi$ өрнегін шектің таңбасының алдына шығаруға болады:

$$\lim_{x\to\infty}|NM| = \lim_{x\to\infty}\frac{|MP|}{\cos\varphi} = 0.$$

39.3-суретті қолдана мыз: $|MN| = ||MG| - |GN|| = |y - y_1| = |f(x) - (kx + b)|$.

Демек, $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - (kx + b)] = 0$.

Шыққан шекті $y = f(x)$ қисық сызығының $y = kx + b$ асимптотасының k және b коэффициенттерін табу үшін қолданайық.

Ол үшін шек астындағы өрнекте x-ті жақшаның сыртына шығарамыз:

$$\lim_{x\to\infty} x\left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right] = 0.$$

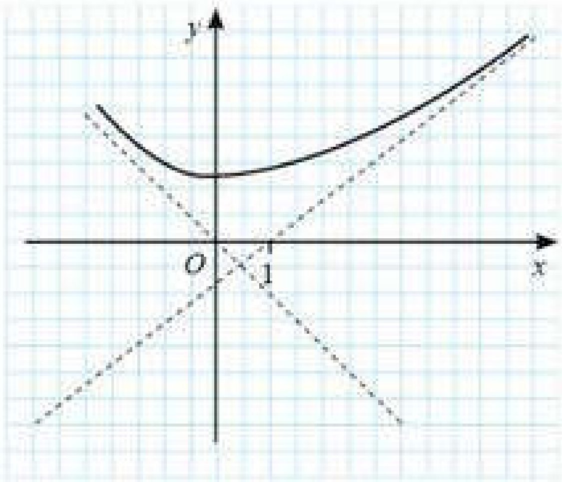
$x \to \infty$ жағдайы нда $x \neq 0$. Демек, $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{f(x)}{x} - k - \dfrac{b}{x}\right] = 0$ және b және k — тұрақтылар болғандықтан, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{b}{x} = 0$; $\lim\limits_{x\to\infty} k = k$. Онда $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} - k - 0 = 0$. Соңғы теңдіктен k-ны табамыз:

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}.$$

Дәлелденген $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - (kx + b)] = 0$ теңдігін түрлендірейік: $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - kx] - \lim\limits_{x\to\infty} b = 0$. Соңғы теңдіктен b-ны өрнектейміз: $b = \lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - kx]$.

Горизонталь асимптоталар $k = 0$ жағдайындағы көлбеу асимптоталардың дербес түрі болып табылады.

$k = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ және $b = \lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - kx]$ — көлбеу және горизонталь $y = kx + b$ асимптоталарын табу формулалары.



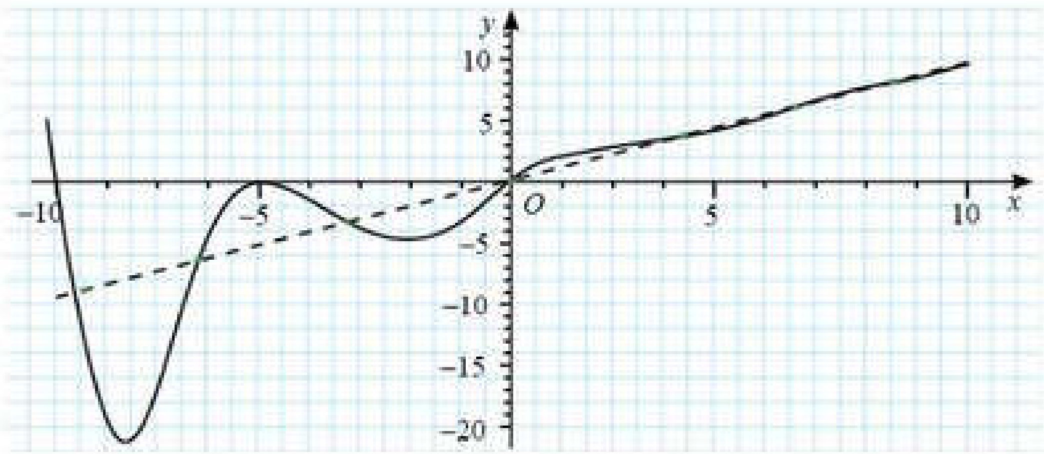
39.4-сурет

b-ны және k-ны табу үшін $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$) жағдайда шектің ең болмағанда біреуі болмаса, онда көлбеу асимптоталар болмайды.

Ескерту .

1) Функция графигінің екі көлбеу асимптотасы: біреуі $x \to +\infty$ және екіншісі $x \to -\infty$ жағдайда болуы мүмкін (39.4-сурет).

2) Қисық сызық өзінің асимптотасына шексіз жақындағанда онымен қиылысуы және қиылысу нүктесінің бірден артық болуы да мүмкін (39.5-сурет).



39.5-сурет

МЫСАЛ

2. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ функциясының көлбеу асимптотасын табайық.

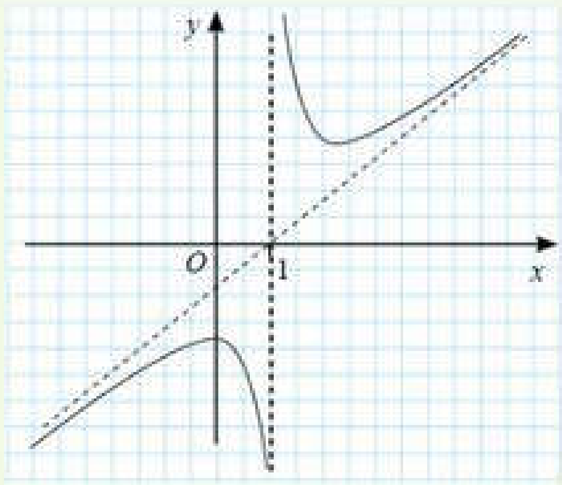
Шешуі . $k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$ және $b = \lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - kx]$ формулаларын қолданамыз:

$k = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x(x - 1)} = 1$ және

$k = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x(x - 1)} = 1$, яғни екі жағдайда да $k = 1$.

$b = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} - x \right) = -1$ және

$b = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} - x \right) = -1$, яғни екі жағдайда да $b = -1$.



39.6-сурет

Берілген функция графигінің бір ғана көлбеу асимптотасы бар: $y = x - 1$ ($x \to +\infty$ немесе $x \to -\infty$).

Жоғарыда функция графигінің $x = 1$ вертикаль асимптотасы болатыны көрсетілді.

39.6-суретте осы функция графигінің кескіні берілген.

1. 1) Вертикаль; 2) горизонталь асимптотасы бар функцияның графигі туралы не айтуға болады?

2. Функция графигінің: 1) горизонталь және вертикаль; 2) көлбеу және горизонталь екі асимптотасы болуы мүмкін бе?

3. Функция графигінің екі көлбеу асимптотасы болуы мүмкін бе?

Жаттығулар

A

39.1. $y = f(x)$ функция графигінің асимптоталарын табыңдар:

1) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$; 2) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$; 3) $f(x) = \dfrac{2x-5}{x-2}$;

4) $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-5}$; 5) $f(x) = \dfrac{x+1}{4-x}$; 6) $f(x) = \dfrac{5-x}{2x+3}$.

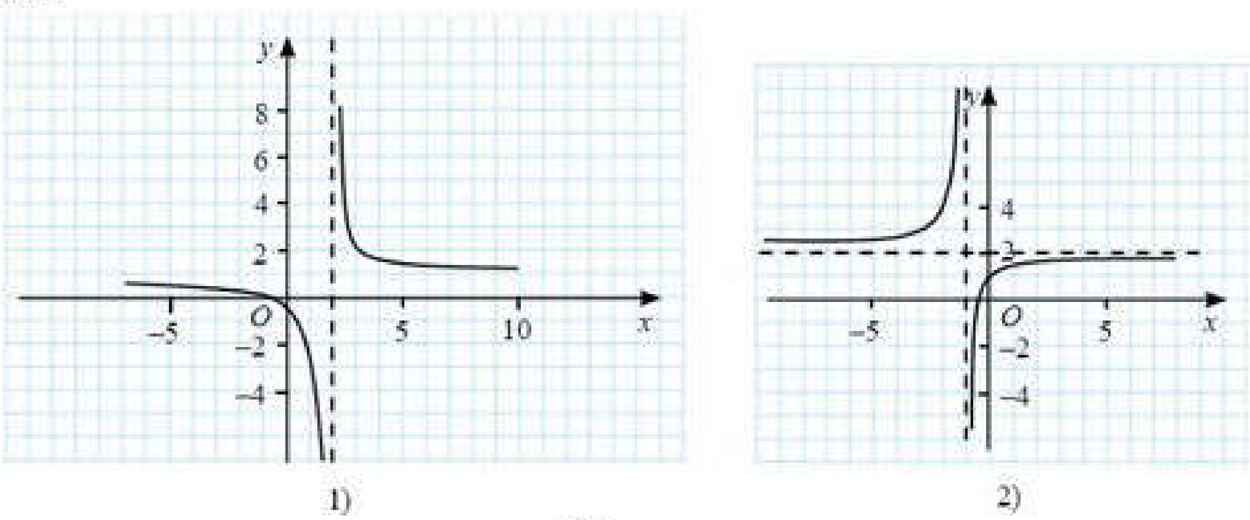
$y = f(x)$ функциясының асимптоталарын табыңдар (**39.2-39.3**):

39.2. 1) $f(x) = \dfrac{3x-2}{x-4}$; 2) $f(x) = \dfrac{x-4}{x^2-4}$; 3) $f(x) = \dfrac{x^2-5x}{x^2-4}$.

39.3. 1) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$; 2) $f(x) = \dfrac{2x^2}{x+1}$; 3) $f(x) = \dfrac{1-x^2}{x-2}$.

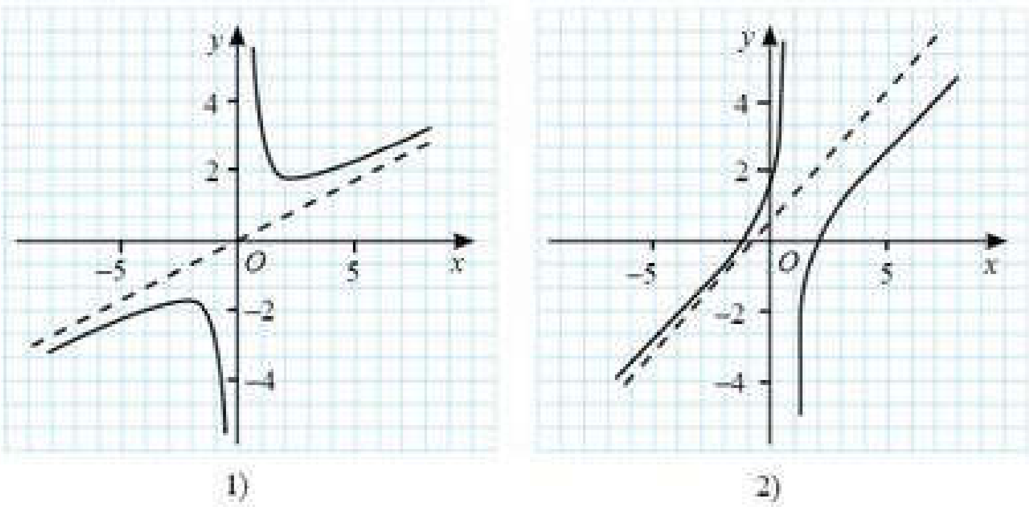
39.7 —39.9-суреттерді қолданып, функция графигінің асимптоталарының формулаларын жазыңдар (**39.4—39.6**):

39.4.



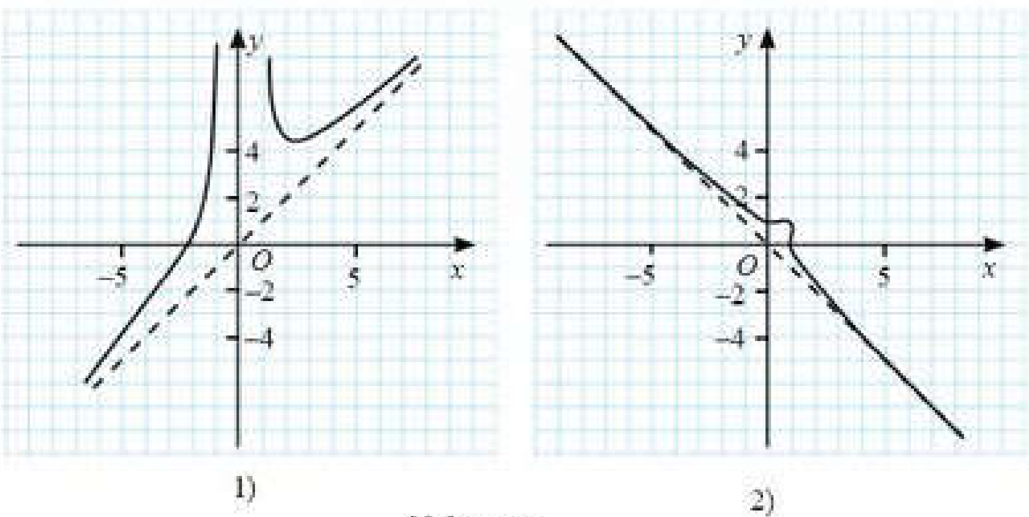
39.7-сурет

39.5.



39.8-сурет

39.6.



39.9-сурет

B

39.7. Сызықтың асимптоталарын табыңдар:

1) $y = \dfrac{x^2+1}{x}$; 2) $y = \dfrac{x^3}{x^2-1}$; 3) $y = \dfrac{x^3}{4-x^2}$.

39.8. Функция графигінің асимптоталарын табыңдар:

1) $y = -\operatorname{arctg} x$; 2) $y = \pi - \operatorname{arctg} x$; 3) $y = \pi + \operatorname{arctg} x$.

Функция асимптоталарын табыңдар (**39.9—39.11**):

39.9. 1) $y = \dfrac{x^2+4}{2x}$; 2) $y = \dfrac{x^2-4}{2x}$;

3) $y = \dfrac{x^2+9}{3x}$; 4) $y = \dfrac{9-x^2}{3x}$.

39.10. 1) $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$; 2) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$;

3) $f(x) = \dfrac{3x-2}{x+2}$; 4) $f(x) = \dfrac{4x-1}{x-1}$.

39.11. 1) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$; 2) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-1}$;

3) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$; 4) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-4}$.

C

39.12. Функция графигінің асимптоталарын табыңдар:

1) $f(x) = \dfrac{2x^3+5x}{x^2-4}$; 2) $f(x) = \dfrac{3x^3-2x^2}{x+3}$;

3) $f(x) = \dfrac{x^2-2x-2}{x^2-9}$; 4) $f(x) = \dfrac{x(x^2+2x-3)}{x^2+3x-1}$.

$x \to -\infty$ және $x \to +\infty$ жағдайда функция графигінің асимптоталарын табыңдар (**39.13-39.14**):

39.13. 1) $f(x) = \sqrt{x^2-4}$; 2) $f(x) = \sqrt{x^2-2x}$;

3) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$; 4) $f(x) = \sqrt{9x-x^2}$.

39.14. 1) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$; 2) $f(x) = \dfrac{\sin 2x}{x}$;

3) $f(x) = \dfrac{3\sin 3x}{x}$; 4) $f(x) = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{2x}$.

ҚАЙТАЛАУ

39.15. Функция графигінің кескінін салыңдар:

1) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$; 2) $f(x) = \dfrac{2}{(x-1)^2}$;

3) $f(x) = \dfrac{3}{(x+2)^2}$; 4) $f(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2}$.

39.16. Функцияны жұптылыққа зерттеңдер:

1) $f(x) = x\arcsin 2x$; 2) $f(x) = x\operatorname{arctg} 2x$; 3) $f(x) = x\arccos x$.

39.17. $y = f(x)$ функциясының графигін салыңдар және бірсарындылық аралықтарын жазыңдар:

1) $f(x) = \left|\dfrac{2x+3}{x-1}\right|$; 2) $f(x) = \left|\dfrac{2-x}{x+1}\right|$;

3) $f(x) = \left|2-\sqrt{x+2}\right|$; 4) $f(x) = \left|1-\sqrt{x-2}\right|$.

39.18. Функцияның анықталу облысы мен мәндер жиынын табыңдар:

1) $f(x) = 2 + \sqrt{x^2 + 2x}$; 2) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1} - 2$;

3) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3} + \frac{1}{\sqrt{2 - x}}$; 4) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}} + \sqrt{5 - x^2}$.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

1. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4}$ шегінің мәні:

A) –0,75; B) 0,75; C) 0,25; D) 1.

2. $\lim\limits_{n \to \infty}\left(\sqrt{n + 4} - \sqrt{n - 2}\right)$ шегінің мәні:

A) 0; B) $\sqrt{2}$; C) 1; D) 0,5.

3. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2 + 3x - 12}{2x^3 - 2x^2 + x}$ шегінің мәні:

A) 2; B) 3; C) 0; D) 1.

4. $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{\sin 3x}{x} - 3x\right)$ шегінің мәні:

A) 0; B) 6; C) $+\infty$; D) 3.

5. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x - \sin 7x}{2x}$ шегінің мәні:

A) –1; B) 3; C) 4; D) 1.

6. $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{\operatorname{tg} 4x + \operatorname{tg} 2x}{\sin 2x} - \cos 2x\right)$ шегінің мәні:

A) –2; B) 2; C) 1; D) 3.

7. $f(x) = \begin{cases} 4x - x^2, & x \leqslant 2, \\ 3x - 1, & x > 2 \end{cases}$ функциясы үшін ақиқат емес тұжырымды көрсетіңдер:

A) $f(x)$ функциясы $x_0 = 2$ нүктесінде анықталған және $f(2) = 4$;
B) $f(x)$ функциясы $x_0 = 2$ нүктесінде үзілісті;
C) $x_0 = 2$ нүктесінде $f(x)$ функциясының экстремумы болмайды;
D) $f(x)$ функциясы $x_0 = 2$ нүктесінде үзіліссіз.

8. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & x \leqslant -1, \\ B, & x > -1 \end{cases}$ функциясы $x_0 = -1$ нүктесінде үзіліссіз болса, онда B-ның мәні:

A) 5; B) 6; C) 4; D) 2.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{arctg}\,6x - \arcsin 2x}{2x}$ шегінің мәні:

A) 2; B) 3; C) 4; D) 6.

10. $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2}{x^2 - 1}$ функция графигінің асимптоталары:

A) $y = x - 2;\ x = \pm 1;$ B) $y = x + 1;\ x = \pm 1;$

C) $y = 2x - 2;\ x = \pm 1;$ D) $y = 1;\ x = \pm 2.$

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Функция, функция графигі, күрделі функция, функцияның жиында өсуі және кемуі, функцияның шегі, функцияның нүктедегі шегін табу ережелері, функцияның нүктедегі және шексіздіктегі үзіліссіздігі.

8 ТУЫНДЫ

§ 40. ТУЫНДЫНЫҢ АНЫҚТАМАСЫ

Функцияның туындысы ұғымымен танысасыңдар; туындының анықтамасын қолдануға есептер шығаруды үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Функция, аргументтің өсімшесі, функцияның өсімшесі, туынды, дифференциалдау

Анықтама. *Функцияның анықталу облысынан алынған екі аргументтің айырымының мәні **функция аргументінің өсімшесі** деп аталады.*

Аргумент өсімшесінің белгіленуі: Δx. Жазылуы: $x_2 - x_1 = \Delta x$.

Анықтама. *Мәндер жиынынан алынған функцияның екі мәнінің айырымы **функцияның өсімшесі** деп аталады.*

Функция өсімшесінің белгіленуі: Δy.
Жазылуы: $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$.
Функцияның өсімшесі былай табылады.
x аргументіне Δx өсімшесі берілсе, $x + \Delta x$ — аргументтің арттырылған өсімшесін және оған сәйкес $f(x) + \Delta y = f(x + \Delta x)$ функциясының өсімшесін аламыз. Демек, $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

МЫСАЛ **1.** Аргументтің мәнін 1-ден 1,5-ке дейін өзгерткенде, $f(x) = 4x^2 - 2x + 4$ функциясы аргументінің өсімшесі мен функцияның өсімшесі қандай болады?

Шешуі. Аргументтің өсімшесін табамыз: $\Delta x = 1,5 - 1 = 0,5$. Ал $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$ болғандықтан, $f(x_2)$ және $f(x_1)$ мәндерін есептейміз: $f(x_2) = f(1,5) = 4 \cdot 2,25 - 3 + 4 = 10$ және $f(x_1) = f(1) = 6$. Сондықтан $\Delta y = 10 - 6 = 4$.

Жауабы: 0,5 және 4.

МЫСАЛ **2.** $x = -2$ және $\Delta x = 0,5$ болғанда $f(x) = -x^2 + 2x - 4$ функциясының өсімшесін табайық.

Шешуі. $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ болғандықтан, $\Delta y = -(x + \Delta x)^2 + 2(x + \Delta x) - 4 + x^2 - 2x + 4 = -x^2 - 2x \cdot \Delta x - (\Delta x)^2 + 2x + 2 \cdot \Delta x - 4 + x^2 - 2x + 4 = -2x \cdot \Delta x - (\Delta x)^2 + 2 \cdot \Delta x = 2 - 0,25 + 1 = 2,75$.

Жауабы: 2,75.

Алынған мән туынды функцияның өзгеру жылдамдығын сипаттайды.

Анықтама. *Функция өсімшесінің аргумент өсімшесіне қатынасының аргумент өсімшесінің нөлге ұмтылғандағы шегі бар болса, ол шек **функцияның туындысы** деп аталады.*

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Анықтама. *Шекті елген туындысы бар функция нүктеде* ***дифференциалданатын функция*** *деп аталады.*

Егер жиынның әрбір нүктесінде функцияның шектелген туындысы болса, онда функция жиында дифференциалданады деп айтады.

МЫСАЛ

3. $f(x) = x^2$ функциясының туындысын табайық.

Шешуі. Туындының анықтамасын қолданамыз:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \text{ Онда } (x^2)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Жауабы: $(x^2)' = 2x$.

Анықтама. *Функцияның туындысын табу амалын* ***дифференциалдау*** *деп айтады.*

$(x^2)' = 2x$ болғандықтан, $y = x^2$ функциясы — барлық нақты сандар жиынында дифференциалданатын функция.

МЫСАЛ

4. $y(x) = \frac{1}{x}$ функциясының туындысын табайық.

Шешуі. Туындыны н анықтамасын қолданамыз:

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{x - (x + \Delta x)}{(x + \Delta x)x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{-\Delta x}{(x + \Delta x)x}}{\Delta x} =$$

$$= -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x(x + \Delta x)x} = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{(x + \Delta x)x} = -\frac{1}{x^2}.$$

Жауабы: $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

МЫСАЛ

5. $y(x) = \sqrt{x}$ функциясының туындысын табайық.

Шешуі. Туындының анықтамасын қолданамыз:

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}.$$

Бөлшектің алымы мен бөлімін $\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}$ өрнегіне көбейтеміз және $\left(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right) = \left(\sqrt{x + \Delta x}\right)^2 - \left(\sqrt{x}\right)^2 = x + \Delta x - x = \Delta x$ болатынын ескереміз. Сонда

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Жауабы: $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

МЫСАЛ

6. C' тұрақтысының туындысын табайық.

Шешуі. $C' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{C - C}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0.$

Жауабы: $C' = 0.$

$(x)' = 1$ болатынын өздерің дәлелдеңдер.

Мына формулаларды есте сақтаңдар:

24-кесте

$C' = 0$	$(x)' = 1$	$(x^2)' = 2x$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

1. $y = f(x)$ функциясы үшін туынды нені білдіреді?
2. Кез келген функция дифференциалданатын функция бола ма?

Жаттығулар

А

40.1. Абсциссасы x болатын нүктеден абсциссасы $x + \Delta x$ болатын нүктеге көшкенде $y = f(x)$ функциясы үшін Δf-тің Δx-ке қатынасын табыңдар:

1) $f(x) = 3x^2 + 1$; 2) $f(x) = x^2 - 2x$; 3) $f(x) = \frac{1}{x}$;
4) $f(x) = \sqrt{3x}$; 5) $f(x) = \cos x$; 6) $f(x) = \operatorname{tg} x$.

40.2. Абсциссасы x_0 болатын нүктедегі Δx пен Δf және $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ қатынасын табыңдар:

1) $f(x) = 5x - x^2$, $x_0 = 5{,}2$, $x = 5{,}3$;
2) $f(x) = x + 2x^2 - 1$, $x_0 = -6{,}4$, $x = -6{,}5$;
3) $f(x) = \sin 3x - 2$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{4}$;
4) $f(x) = \cos 2x + 2$, $x_0 = -\frac{\pi}{3}$, $x = -\frac{\pi}{4}$.

40.3. Туындының анықтамасы бойынша берілген нүктедегі $y'(x_0)$-тің мәнін табыңдар:

1) $y = \frac{x - 1}{x + 1}$, мұндағы $x_0 = 2$; 2) $y = \frac{x^2 + 1}{x - 2}$, мұндағы $x_0 = 1$;
3) $y = \frac{x + 2}{x - 4}$, мұндағы $x_0 = 5$; 4) $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 5x}$, мұндағы $x_0 = -1$;
5) $y = 2x^3$, мұндағы $x_0 = 3$; 6) $y = \frac{x^3}{(x + 1)^2}$, мұндағы $x_0 = -2$.

B

40.4. Нүктенің түзу бойымен қозғалыс заңы $s = t^3 + 2t^2 + 3$, мұндағы s жолдың ұзындығы сантиметрмен, t уақыты секундпен өлшенеді. $\Delta t = 0{,}5$; $0{,}2$; $0{,}1$ деп алып, $t_1 = 1$ мен $t_2 = 1 + \Delta t$ уақыт аралығындағы жылдамдықтың өзгерісін табыңдар.

40.5. Туындының анықтамасы бойынша $x_0 = 1$ нүктесіндегі $y'(x)$-тің мәнін табыңдар:

1) $y = \dfrac{2}{x^2}$; 2) $y = \dfrac{1}{x^3}$; 3) $y = \sqrt{1 + 2x}$; 4) $y = \sqrt{4 - 3x}$.

40.6. 1) Шаршының қабырғасы 0,2 см дәлдікпен өлшенген. Шаршының периметрі қандай дәлдікпен табылады?
2) Дұрыс алтыбұрыштың периметрін 0,1 дм дәлдікпен табу үшін оның қабырғасын қандай дәлдікпен өлшеген жеткілікті?

C

40.7. Берілген нүктеде функцияның дифференциалданбайтынын дәлелдеңдер:

1) $y = 2x + |x - 1|$, $x_0 = 1$;

2) $y = |x - x^3|$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$;

3) $y = \begin{cases} 2x^2, \text{ мұндағы } x < 0, \\ x + 1, \text{ мұндағы } x \ge 0, \end{cases}$ және $x_0 = 0$;

4) $y = \begin{cases} 1 - x^2, \text{ мұндағы } x \le 1, \\ 3 - x, \text{ мұндағы } x > 1, \end{cases}$ және $x_0 = 1$;

5) $y = \sqrt{x^3}$, $x_0 = 0$,

6) $y = \sqrt{x^4 - 8x^2 + 16}$, $x_1 = 2$, $x_2 = -2$.

40.8. Функцияның нүктедегі туындысының анықтамасын қолданып, x_0 нүктесіндегі туындысын табыңдар:

1) $y = \begin{cases} x^2, \text{ мұндағы } x \le 1, \\ 2x - 1, \text{ мұндағы } x > 1, \end{cases}$ және $x_0 = 1$;

2) $y = \begin{cases} 1 - x^2, \text{ мұндағы } x \le 1, \\ 2 - 2x, \text{ мұндағы } x > 1, \end{cases}$ және $x_0 = 1$.

40.9. Нүкте координаталық түзу бойымен қозғалады және t уақыт мезетіндегі мәні $y = f(t)$. Егер:

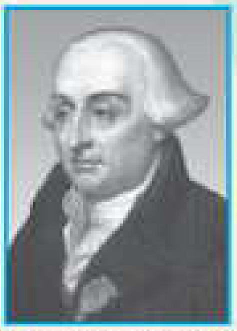
1) $y = 2t + t^2$, мұндағы $t \in [1; 3]$;

2) $y = \sqrt{t} + t$, мұндағы $t \in [4; 9]$ болса, онда нүкте қандай аралықты жүріп өтеді?

ХАБАРЛАМА ДАЙЫНДАҢДАР

Леонард Эйлер (1707—1788)

40.10. Δx айырымының белгісін 1755 жылы Швейцариялық математик және механик Леонард Эйлер, ал туындының $f'(x)$ белгісін 1770 жылы француз математигі және астрономы Жозеф Луи Лагранж енгізген.



Жозеф Луи Лагранж (1736—1813)

ҚАЙТАЛАУ

40.11. 1) $y = x - 3$; 2) $y = -2x + 3$; 3) $y = 1 - x$;
4) $y = \frac{1}{3}x - 1$; 5) $y = 5 + \frac{1}{3}x$; 6) $y = 3 - x$
теңдеулерімен берілген түзулердің арасынан параллель және ортогональ түзулер жұбын табыңдар.

40.12. Өрнектің мәнін табыңдар:
1) $\sqrt{27 \cdot 125 \cdot 240}$; 2) $\sqrt{64 \cdot 12 \cdot 27}$; 3) $\sqrt{\frac{25 \cdot 27}{12 \cdot 49}}$.

40.13. Функцияның анықталу облысын табыңдар:
1) $y(x) = \sqrt{\sin(2x + 5)}$; 2) $y(x) = \sqrt{1 - \cos(2x - 1)}$.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Cx, x^2, $\sqrt{x}$, $\frac{1}{x}$ функциялары, екі функцияның қосындысы, көбейтіндісі және бөліндісі, функцияның шегі, шекті табудың ережелері.

§41. ТУЫНДЫНЫ ТАБУ ЕРЕЖЕЛЕРІ

Дифференциалдау ережелерімен танысасыңдар; тұрақты функцияның және дәрежелі функцияның туындысын табуды, дифференциалдауды қолдануды үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Функция, туынды, қосындының туындысы, көбейтіндінің туындысы, бөліндінің туындысы, тұрақтының туындысы

Теорема. ***Екі функцияның қосындысының (айырымының) туындысы туындылардың қосындысына (айырымына) тең:***

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x).$$

Айырымды алгебралық қосындымен алмастыруға болады, демек, берілген формуланы былай жазуға болады:

$$(u + v)' = u' + v'.$$

Дәлелдеуі. $(u + v)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta(u + v)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = u' + v'.$

Дәлелденген формула қосылғыштар саны екіден артық болған жағдайда ақиқат.

МЫСАЛ

1. $g(x) = x + x^2 - 3$ функциясының туындысын табайық.

Шешуі. $y = g(x)$ функциясы дифференциалданатын үш функцияның қосындысын береді. Сондықтан $g'(x) = (x + x^2 - 3)' = (x)' + (x^2)' + (-3)' = 1 + 2x + 0 = 1 + 2x$.

Жауабы: $g'(x) = 1 + 2x$.

Теорема. ***Екі функцияның көбейтіндісінің туындысы*** $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ ***формуласымен табылады.***

Қысқаша формула $(uv)' = u'v + v'u$ түрінде жазылады.

Дәлелдеуі. $(uv)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta(uv)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{u(x_0 + \Delta x)v(x_0 + \Delta x) - uv}{\Delta x} =$

$$= \left| \begin{matrix} u(x_0 + \Delta x) = u + \Delta u \\ v(x_0 + \Delta x) = v + \Delta v \end{matrix} \right| = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta u)v + (\Delta v)u + (\Delta u)(\Delta v)}{\Delta x} = u'v + v'u + u' \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \Delta v}_{0} = u'v + v'u.$$

МЫСАЛ

2. 1) $f(x) = \dfrac{5}{x}$; 2) $g(x) = -7\sqrt{x}$ функциясының туындысын табайық.

Шешуі. 1) $y = f(x)$ функциясы 5 санынан (тұрақтыдан) және дифференциалданатын $y = \dfrac{1}{x}$ функциясының көбейтіндісінен тұрады. Сондықтан $f'(x) = \left(\dfrac{5}{x}\right)' = \left(5 \cdot \dfrac{1}{x}\right)' = 5 \cdot \left(\dfrac{1}{x}\right)' + \dfrac{1}{x} \cdot (5)' = 5 \cdot \left(\dfrac{1}{x}\right)' + \dfrac{1}{x} \cdot 0 = 5 \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -\dfrac{5}{x^2}$;

2) $y = g(x)$ функциясының бірінші көбейткіші тұрақты, яғни -7 саны, екінші көбейткіші дифференциалданатын $y = \sqrt{x}$ функциясы. Демек, $g'(x) = (-7\sqrt{x})' = -7(\sqrt{x})' + \sqrt{x} \cdot (-7)' = -7(\sqrt{x})' + \sqrt{x} \cdot 0 = -7 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = -\dfrac{7}{2\sqrt{x}}$.

Жауабы: $f'(x) = -\dfrac{5}{x^2}$; $g'(x) = -\dfrac{7}{2\sqrt{x}}$.

Дифференциалданатын функция мен тұрақтының көбейтіндісінің туындысы $(C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x)$ формуласымен есептеледі; яғни тұрақтыны туынды белгісінің алдына шығаруға болатынын өздерің дәлелдеңдер.

Формуланың қысқаша жазылуы: $(Cu)' = C \cdot u'$, мұндағы C — тұрақты.

МЫСАЛ

3. $2x^2$ өрнегінің туындысын табайық.

Шешуі. $(2x^2)' = 2 \cdot (x^2)' = 2 \cdot 2x = 4x$.

Жауабы: $4x$.

Теорема. *Дифференциалданатын $y = f(x)$ және $y = g(x)$, мұндағы $g(x) \neq 0$, функциялары қатынасының туындысы* $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$ *формуласынан табылады*.

Формуланың қысқаша жазылуы:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0).$$

Дәлелдеуі. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\left(\frac{u}{v}\right)}{\Delta x} = \left\{\Delta\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v}\right\} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta u)v - (\Delta v)u}{\Delta x v(v + \Delta v)} =$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \frac{1}{v + \Delta v} - \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot \frac{u}{v(v + \Delta v)} = \frac{u'}{v} - \frac{v'u}{v^2} = \frac{u'v - v'u}{v^2}$. ■

МЫСАЛ

4. x^n натурал көрсеткішті дәрежесінің туындысын табайық.

Шешуі. $(x)' = 1$ және $(x^2)' = 2x$ болғандықтан, $(x^n)' = nx^{n-1}$ деп жазуға болады. Соңғы теңдікті дәлелдейік. Ол үшін математикалық индукция әдісін қолданамыз. Тұжырымның $n = 1$ болғанда ақиқат болатынын тексереміз. Расында $(x^1)' = 1 \cdot x^{1-1} = 1$. $n = k$ болғанда тұжырым ақиқат деп қабылдаймыз. Яғни $(x^k)' = kx^{k-1}$. Енді $n = k + 1$ болғанда тұжырымның ақиқат екенін дәлелдейік. $(x^{k+1})' = (k+1)x^k$ болсын. Көбейтіндінің туындысын табу формуласын қолдансақ, $(x^{k+1})' = (x \cdot x^k)' = (x)' \cdot x^k + x \cdot (x^k)' = 1 \cdot x^k + x \cdot kx^{k-1} = (k+1)x^k$.

Демек, $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Жауабы: $(x^n)' = nx^{n-1}$.

МЫСАЛ

5. $g(x) = x^4$ функциясының туындысын табайық.

Шешуі. Жоғарыдағы мысалда дәлелденген формула бойынша $g'(x) = (x^4)' = 4x^{4-1} = 4x^3$.

Жауабы: $4x^3$.

Мына формуланы есте сақтаңдар: кез келген натурал n үшін $(x^n)' = nx^{n-1}$.

1. Туындыны табу ережелерін айтыңдар.
2. Туындыны табу ережелері қандай функциялар үшін ақиқат?

Жаттығулар

A

Туындыны табу ережелерін қолданып $f'(x)$-ті табыңдар **(41.1-41.2)** :

41.1. 1) $f(x) = 3x - \sqrt{3}$; 2) $f(x) = x^3 - \sqrt{3x}$;
3) $f(x) = x^2 + 3x - \sqrt{2}$; 4) $f(x) = x^3 - \sqrt{7}\,x + \pi$;
5) $f(x) = 5x^{-4} + 2x - \sqrt{5}$; 6) $f(x) = \frac{2}{5}x^5 - \sqrt{3}x^2 - 7$.

41.2. 1) $f(x) = 3x(x - 1)$; 2) $f(x) = x^2(x^3 - \sqrt{3}\,x)$;
3) $f(x) = (x^2 + 3)(x - 5)$; 4) $f(x) = \frac{2}{x} - \sqrt{7}\,x$;
5) $f(x) = \frac{x - 2}{x + 3} - 5x$; 6) $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x - 4} - 3x + 2$.

41.3. $f(x)$ функциясының абсциссасы x_0 болатын нүктедегі туындысының мәнін табыңдар:
1) $f(x) = x \cdot (x - 3)$, $x_0 = 4$;
2) $f(x) = (x^2 - 5) \cdot (x - 3)$, $x_0 = 1{,}1$;
3) $f(x) = 4 \cdot (x^2 + 3x) \cdot (x - 1)$, $x_0 = -0{,}4$;
4) $f(x) = (2x - 1)(x + 3) - x$, $x_0 = 1\frac{1}{3}$.

41.4. Абсциссасы $x = 2$ болатын нүктедегі $y = f(x)$ функциясы туындысының мәнін табыңдар:
1) $f(x) = \frac{3}{x - 1}$; 2) $f(x) = \frac{5x}{x - 3}$;
3) $f(x) = \frac{\sqrt{5}x + 7x^3}{x + 2}$; 4) $f(x) = \frac{5(x - 5)(x + 1)}{x + 3} - 4x$.

B

41.5. $f'(x) = 0$ теңдеуін шешіңдер:
1) $f(x) = \frac{5x^2 - 3x - 1}{x - 3}$; 2) $f(x) = \frac{2 - 5x^2}{x^2 + 3x}$;
3) $f(x) = \frac{5x}{x + 5} - x$; 4) $f(x) = \frac{x^2 + 7x}{x + 3} - \frac{2x}{x + 3}$.

41.6. $f'(x)$ | 0 теңсіздігін шешіңдер:
1) $f(x) = x^2 + 1{,}2x - 2\sqrt{3}$; 2) $f(x) = x^3 + 6x^2 - \sqrt{3}$;
3) $f(x) = x^5 + 111x^3 - 21\sqrt{7}$; 4) $f(x) = x^3 + 3x^4 - 3x^2 + 1$.

41.7. Берілген өрнек туындысы болатындай қандай да бір $f(x)$ функциясының формуласын жазыңдар:
1) $4x^3 + 6x^2 - 2\sqrt{3}$; 2) $\frac{1}{2}x^3 - 3x^2 - \sqrt{3}x$;

3) $5x^3 - 0{,}6x^2 + \sqrt{7}x - 4$; 4) $-\frac{5}{x^3} + x^4 - 7$;

5) $-\frac{5}{x^4} + 3x^4 - 7x + 1$; 6) $\frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{5}{x^3} - x^6 - 7x$.

41.8. Абсциссасы $x = -1$ болатын нүктедегі $y = f(x)$ функциясы туындысының мәнін табыңдар:

1) $f(x) = x^2 + \sqrt{x+2} - \sqrt{3}$; 2) $f(x) = x^3 - \sqrt{x+5} - 1$;

3) $f(x) = \sqrt{2}x^2 + \sqrt{x+2} - \sqrt{2}x$.

C

Функцияның туындысын табыңдар **(41.9—41.11):**

41.9. 1) $f(x) = 3x^{-4} + x\sqrt{x} - 2\sqrt{x}$; 2) $f(x) = x^{-5} + x^2\sqrt{x} - 4$;

3) $f(x) = x^{-10} + \sqrt{x} - \frac{2}{x}$.

41.10. 1) $f(x) = (1 - x^2)\sqrt{x}$; 2) $f(x) = (x^2 - 2x)\sqrt{x}$;

3) $f(x) = x^2 \cdot (\sqrt{x} - 1)$.

41.11. 1) $f(x) = 2 - \frac{\sqrt{x}}{x+1}$; 2) $f(x) = \frac{2-\sqrt{x}}{x-2} + 3$;

3) $f(x) = \frac{3\sqrt{x}}{9+2x} - \sqrt{x}$.

41.12. x айнымалысының барлық мүмкін болатын мәндер жиынында $f(x)$ функциясының туындысы теріс мәндерді қабылдайтынын дәлелдеңдер:

1) $f(x) = -2x + \frac{2}{x^3}$; 2) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{5}{x^5}$; 3) $f(x) = -3\sqrt{x} + \frac{2}{x}$.

41.13. 1) $x > 0$; 2) $x < 0$; 3) $x = 0$ болғанда $f(x) = |2x|$ функциясының туындысын табыңдар.

41.14. Берілген нүктеде функцияның туындысының мәнін табыңдар:

1) $f(x) = \frac{2}{x} - \frac{x}{2}$, $x = 1$; 2) $f(x) = \frac{5}{x} - \frac{x^2}{2} - 5$, $x = -2$;

3) $f(x) = 3 + \frac{4}{x} + \frac{\sqrt{x}}{2}$, $x = 4$.

ҚАЙТАЛАУ

41.15. Функцияның графигін салыңдар:

1) $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$; 2) $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$;

3) $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$; 4) $f(x) = \frac{3x^2-12}{x+2}$.

41.16. Теңдеудің графигін салыңдар:

1) $\frac{y - x^2}{x - 1} = 0;$ 2) $\frac{y - x^2 + 2}{x^2 - 4} = 0;$ 3) $\frac{y - \sqrt{x + 2}}{x - 2} = 0.$

41.17. Теңдеуді шешіңдер:

1) $3\sin^2 2x = 2 + \sin 2x \cos 2x$;

2) $2\sin^2 4x - 4 + 4\cos^2 4x = 3\sin 4x \cos 4x$;

3) $\cos^2 x - 7\sin x + \sin x \cos x - 7\cos x = 0.$

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Функция, функцияның туындысы, туындыны табу ережелері, түзу сызық, функция графигіне жүргізілген жанама, бұрыштық коэффициент, дене қозғалысының жылдамдығы, жүрілген жол.

§ 42. ТУЫНДЫНЫҢ ФИЗИКАЛЫҚ ЖӘНЕ ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ МАҒЫНАСЫ. ФУНКЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЫНЫҢ ҰҒЫМЫ

Туындының физикалық және геометриялық мағыналарымен, дифференциал ұғымымен танысасыңдар; туындының геометриялық және физикалық мағыналарын қолданып есептер шығаруды, жуықтап есептеуді үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Туынды, жылдамдық, жанама, дифференциал, жуықтап есептеу

Алдымен туындының физикалық мағынасын қарастырайық.

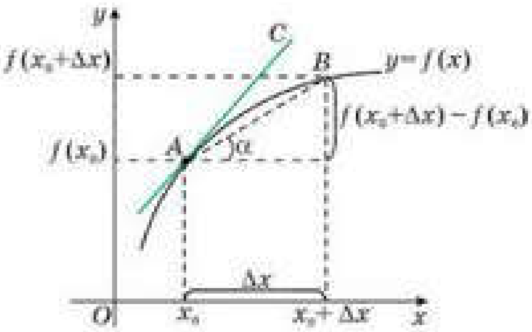
Түзу сызық бойымен қозғалған физикалық дененің t уақыт ішінде жүріп өткен жолы $s(t)$ функциясымен берілсін. Қозғалыстағы дененің $t + \Delta t$ уақыт өткеннен кейінгі жолы $s(t + \Delta t)$ функциясымен анықталады. Сонда уақыт t-дан $(t + \Delta t)$-ға дейін өзгергенде, жолдың шамасы $s(t + \Delta t) - s(t)$ айырымымен анықталады. Енді осы айырымды Δt уақытқа бөлеміз, онда қозғалыстағы дененің орташа жылдамдығы шығады: $v_{\text{орт.}} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$. Соңғы өрнектен Δt нөлге ұмтылғандағы шекке көшсек, $s'(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v \cdot t}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{v \cdot \Delta t}{\Delta t} = v(t)$ теңдігін аламыз. Мұндағы $s(t)$ — қозғалыстағы дененің t уақыт ішіндегі *жүрген жолы*, ал $s'(t) = v(t)$ — қозғалыстағы дененің t уақыт мезетіндегі *лездік жылдамдығы*.

Жалпы, $y = f(x)$ функциясының x нүктесіндегі $f'(x)$ туындысы оның x нүктесіндегі өзгеру жылдамдығын береді. Бұл туындының физикалық мағынасы.

Туынды ұғымы физикада кеңінен қолданылады.

МЫСАЛ

1. Ньютонның екінші заңы бойынша күш пен импульс $F = p'$ қатынасымен байланысқан; өткізгіштің көлденең қимасы арқылы өткен заряд мөлшері ток күшін анықтайды, яғни $I = q'$; Ox осі бойымен ғана өзгеретін электростатикалық өрісте кернеу мен потенциал $E = -\varphi'$ қатынасымен байланысқан.



42.1-сурет

Енді туындының геометриялық мағынасын қарастырайық.

$y = f(x)$ функциясының графигі берілсін (42.1-сурет).

42.1-суреттен $y = f(x)$ функциясы графигінің кез келген A және B екі нүктесі үшін $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ теңдігі орындалатынын көреміз, мұндағы α бұрыш ы — AB қиюшысының Ox осіне көлбеулік бұрыш.

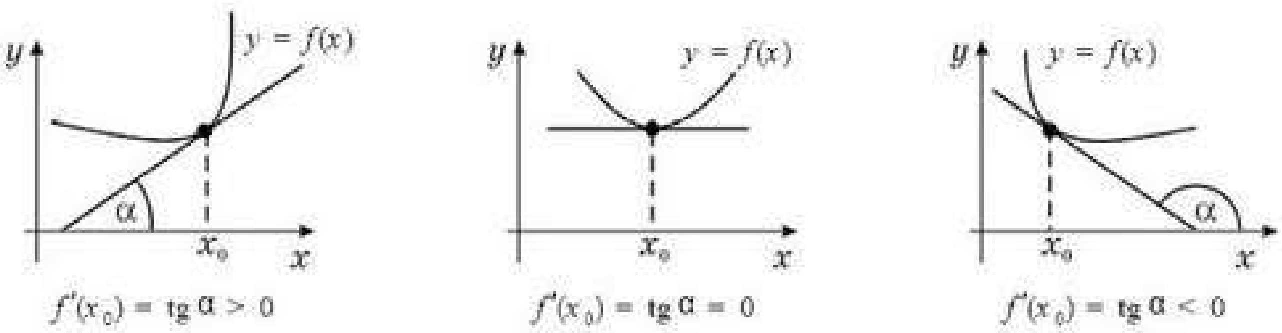
A нүктесінің орнын айқындап, B нүктесіне қарай жылжытсақ, онда Δx шексіз кеми отырып 0 санына жақындайды, AB қиюшысы AC жанамасына жақындайды. Демек, $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ қатынасының шегі абсциссасы x_0 болатын нүктеде жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффициентіне тең:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha.$$

Осыдан шығатын қорытынды: нүктедегі функцияның туындысы функция графигіне осы нүктеде жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффициентіне тең.

Туындының геометриялық мағынасы

$y = f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі туындысы осы нүктеде функция графигіне жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффициентіне тең және бұрыш шамасының түрлері 42.2-суретте көрсетілген.



42.2-сурет

$y = f(x)$ функциясы қандай да бір сан аралығында берілсін. Онда осы аралықтың қандай да бір x нүктесі үшін $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$ теңдігі орындалады. Демек, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) \right) = 0$ немесе $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y - f'(x)\Delta x}{\Delta x} = 0$. Бұл $\Delta x \to 0$ ұмтылғанда $\Delta y - f'(x)\Delta x$ өрнегі Δx өрнегіне қарағанда шексіз кіші болатынын білдіреді. Оны α арқылы өрнектейік, яғни $\Delta y - f'(x)\Delta x = \alpha \cdot \Delta x$.

$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha \cdot \Delta x$, мұндағы $f'(x)\Delta x$ — өсімшенің негізгі сызықтық бөлігі. Бұл бөлік *функцияның x нүктесіндегі дифференциалы* деп аталады және $dy = f'(x)\Delta x$ белгіленеді.

Анықтама. $\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha \cdot \Delta x$ *өсімшесінің* $f'(x)\Delta x$ *негізгі сызықтық бөлігі функцияның* ***x нүктесіндегі dy дифференциалы*** *деп аталады*.

$dy = f'(x)\Delta x$ — дифференциалдың формуласы.

$\Delta x \to 0$ ұмтылғанда dx және Δx арасындағы байланысты анықтайық. Ол үшін $y = x$ функциясының дифференциалын табамыз: $dy = x'\Delta x$ немесе $dy = \Delta x$. Онда $y = x$ болғандықтан, $dx = \Delta x$.

Функцияның дифференциалын табу формуласын аламыз:

$df = f'(x)dx$ — функцияның дифференциалын табу формуласы.

МЫСАЛ

2. $f(x) = x^3$ функциясының дифференциалын табайық.

Шешуі. Ол үшін $df(x) = f'(x)dx$ формуласын қолданамыз: $df(x) = 3x^2dx$.

Жауабы: $3x^2dx$.

Дифференциалдың жуықтап есептеуде қолданылуын қарастырайық.

Абсциссасы x болатын нүктедегі $y = f(x)$ функциясының Δy өсімшесін $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$ түрінде жазуға болатынын білесіңдер (мұнда $\Delta x \to 0$ ұмтылғанда $\alpha \to 0$ немесе $\Delta y = dy + \alpha \cdot \Delta x$). Егер $\alpha \cdot \Delta x$ шексіз кіші шаманы ескермесе, онда $\Delta y \approx dy$ жуық шамасы шығады. Шыққан жуықтау Δx кішірейген сайын дәлірек болады.

$\Delta y \approx dy$ — кез келген дифференциалданатын функцияның жуық өсімшесін табу формуласы.

Өсімшеге қарағанда дифференциал оңай табылатындықтан $\Delta y \approx dy$ формуласы практикада кеңінен қолданылады.

МЫСАЛ

3. $x = 2$ және $\Delta x = 0{,}001$ болғандағы $y = x^3 - 2x + 1$ функциясының жуық мәнін есептейік.

Шешуі. Дифференциалды табу формуласын қолданамыз:

$\Delta y \approx dy = (x^3 - 2x + 1)' \cdot \Delta x = (3x^2 - 2) \cdot \Delta x$;

$dy = (3x^2 - 2) \cdot \Delta x = (3 \cdot 2^2 - 2) \cdot 0{,}001 = 10 \cdot 0{,}001 = 0{,}01$; $\Delta y \approx 0{,}01$.

Функцияның дифференциалын есептеп Δy қателігін табамыз:

$\Delta y = ((x + \Delta x)^3 - 2(x + \Delta x) + 1) - (x^3 - 2x + 1) = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 2x - 2 \cdot \Delta x + 1 - x^3 + 2x - 1 = \Delta x\,(3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - 2)$;

$\Delta y = \Delta x\,(3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - 2) = 0{,}001 \cdot (3 \cdot 4 + 3 \cdot 2 \cdot 0{,}001 + 0{,}001^2 - 2) = 0{,}010006001$.

Абсолюттік қателік шамамен $|\Delta y - dy| = |0{,}010006001 - 0{,}01| = 0{,}000006001$. $\Delta y \approx dy$ формуласы кез келген дифференциалданатын функцияның жуық шамасын үлкен дәлдікпен табуға мүмкіндік беретінін көріп отырмыз. Функцияның жуық мәнін табу формуласын алу үшін $\Delta y \approx dy$ теңдігіне Δy пен dy мәндерін қоямыз:

$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$ немесе $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x$.

$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x$ — функцияның жуық мәнін есептеу формуласы.

$f(x) = \sqrt{x}$ функциясының $x = x_0 + \Delta x$ нүктесінде жуықтап есептеу формуласын қорытып шығарайық: $\sqrt{1 + \Delta x} \approx 1 + \frac{1}{2}\Delta x$.

$x_0 = 1$ болсын, онда $x = x_0 + \Delta x = 1 + \Delta x$.

$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$ формуласын қолданамыз. Шарт бойынша $f(x) = \sqrt{x}$.

Демек, $f(1) = 1$. Енді функцияның туындысын табамыз: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Онда $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{2}$.

Сонда $\sqrt{1 + \Delta x} \approx 1 + \frac{1}{2}\Delta x$ шығады.

МЫСАЛ

4. $\sqrt{25{,}75}$ өрнегін ің мәнін табайық.

Шешуі. $\sqrt{25{,}75} = \sqrt{25 + 0{,}75} = \sqrt{25 \cdot (1 + 0{,}03)} = 5 \cdot \sqrt{1 + 0{,}03} \approx 5 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}03\right) = 5{,}075$.

Жауабы: $\approx 5{,}075$.

1. Туынды қандай кездерде қолданылады?
2. Туындының физикалық және геометриялық мағынасы қандай?
3. Лездік жылдамдықты қалай табуға болады?
4. Берілген уақыттағы орташа жылдамдықты қалай табуға болады?
5. Функцияның дифференциалы мен туындысы арасында қандай байланыс бар?
6. Жуық мәнді есептеудің формуласы қандай шарт орындалғанда нақты нәтиже береді?

Жаттығулар

А

42.1. Туындының анықтамасын қолданып, функцияның берілген нүктедегі туындысының мәнін табыңдар. Шыққан нәтижеге геометриялық және физикалық түсініктеме беріңдер:

1) $y = 2 + \frac{3x + 1}{5x + 1}$, мұндағы $x = 4$;

2) $y = \dfrac{x^2+2}{2x+3} - 3$, мұндағы $x = 1$; 3) $y = \dfrac{x-2}{x+4}$, мұндағы $x = 7$;

4) $y = \dfrac{x^2+1}{2x^2+3x}$, мұндағы $x = 3$; 5) $y = x^3 - 7$, мұндағы $x = 3$;

6) $y = \dfrac{x^3}{3(x+1)^2} - 5{,}2$, мұндағы $x = 1$.

42.2. 1) Нүкте түзу бойымен $s = 5t^2 - 4t + 4$ заңымен қозғалады, мұндағы s шамасы метрмен, t уақыты секундпен өлшенеді. $\Delta t = 0{,}5$ деп алып, $t = 2$ болғандағы лездік жылдамдықты және $t_1 = 2$ мен $t_2 = 2 + \Delta t$ уақыт аралығындағы орташа жылдамдықтың өзгерісін табыңдар.
2) Нүкте түзу бойымен $s = t^3 - 3t^2 + 3t + 5$ заңымен қозғалады, мұндағы s шамасы метрмен, t уақыты секундпен өлшенеді. Қандай уақыт мезетінде жылдамдық нөлге тең болады?

42.3. A нүктесі арқылы $y(x)$ функциясының графигіне жүргізілген жанаманың көлбеу бұрышының тангенсін табыңдар:
1) $y = 2x^2 - x - 5$, $A(-1;\ -2)$; 2) $y = 0{,}2x^2 + 2x - 4$, $A(2;\ 0{,}8)$;
3) $y = -3x^2 - x + 5$, $A(-2;\ -5)$; 4) $y = x^2 - \dfrac{1}{x} - 5$, $A\left(3;\ 3\dfrac{2}{3}\right)$.

42.4. $f(x)$ функциясының туындысын қолданып $d(f(x))$-ын табыңдар:
1) $f(x) = x^3 - 1$; 2) $f(x) = 4x^2 - x$; 3) $f(x) = 3\sqrt{x} - 2x$.

42.5. $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$ формуласын қолданып, x_1 мен x_2 аргументтерінің берілген мәндерінде $f(x)$ функциясының жуық мәнін есептеңдер:
1) $f(x) = x^3 - 4x^2 - 2$, мұндағы $x_1 = 1{,}03$, $x_2 = 4{,}98$;
2) $f(x) = x^3 - x^2 + 3$, мұндағы $x_1 = 2{,}02$, $x_2 = 5{,}995$.

42.6. $\sqrt{1+\Delta x} \approx 1 + \dfrac{1}{2} \cdot \Delta x$ формуласын қолданып $f(x) = \sqrt{x}$ функциясы үшін өрнектің жуық мәнін табыңдар:
1) $\sqrt{0{,}98}$; 2) $\sqrt{0{,}996}$; 3) $\sqrt{4{,}06}$; 4) $\sqrt{122}$; 5) $\sqrt{224}$.

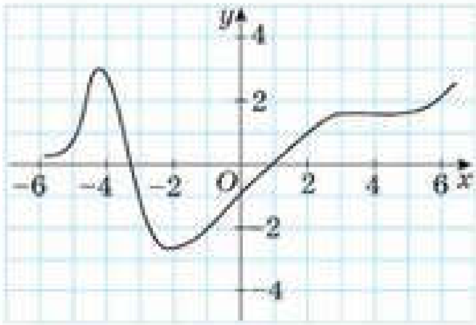
B

42.7. Берілген нүктеде функцияның дифференциалданбайтынын дәлелдеңдер:
1) $y = 3x - |x - 2|$, мұндағы $x_0 = 2$;
2) $y = |x^3 - 8x^2|$, мұндағы $x_1 = 1$, $x_2 = 2$;
3) $y = \sqrt[4]{x^3}$, мұндағы $x_0 = 0$;
4) $y = \begin{cases} x^2, \text{ мұндағы } x \le 1, \\ 2 - x, \text{ мұндағы } x > 1, \end{cases}$ $x_0 = 1$.

42.8. $x = 2$ болғанда $f(x) = \dfrac{25x^2 - 5}{16x^2 - 4}$ функциясының туындысының мәнін табыңдар. Шық қан нәтижеге геометриялық және физикалық түсініктеме беріңдер.

42.9. 1) $y = x^3 + 9x - 13$ қисығының графигіне жүргізілген кез келген жанама Ox осімен сүйір бұрыш жасайтынын көрсетіңдер;
2) $y = 0,5\,x^2$ функциясының графигіне абсциссасы $x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ болатын нүктеде жүргізілген жанаманың абсцисса осімен қандай бұрыш жасайтынын табыңдар.

42.10. 42.3-суретте берілген функцияның графигін қолданып, 25-кестеде көрсетілген нүктелердегі туындының мәндерін "+" таңбасымен көрсетіңдер.

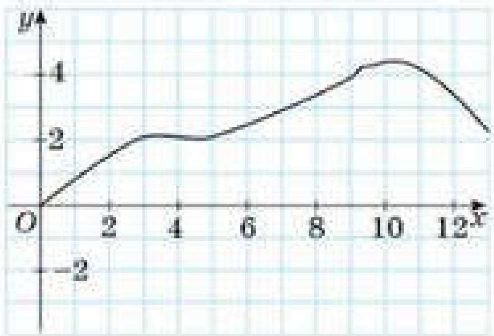


42.3-сурет

25-кесте

y' / x	$y' = -1$	$y' = 0$	$y' = 0,5$	$y' = 1$	Болмайды
$x = -4$					
$x = -2$					
$x = 0$					
$x = 2$					
$x = 4$					

42.11. 42.4-суретте материялық нүктенің қозғалыс графигі берілген. Көрсетілген уақыт мезетінде қозғалыс жылдамдығы туралы не айтуға болады (26-кесте)? (Сұрақ жылдамдық модуліне емес, таңбасын өзгертетін шамаға қатысты қойылған).



42.4-сурет

26-кесте

	$0 < t < 2$	$2 < t < 4$	$4 < t < 6$	$6 < t < 8$	$8 < t < 10$
Барлық уақыт аралығында жылдамдық нөлге тең					
Жылдамдық өседі					
Жылдамдық тұрақты және нөлге тең					
Жылдамдық кемиді					

C

42.12. Жанамасы абсцисса осіне параллель болатындай $y = \frac{1}{x^2+1}$ қисығы нүктелерінің координаталарын табыңдар.

42.13. Жанамасы $y - 2x + 3 = 0$ түзуіне параллель болатындай $y = x^2 - 3x - 3$ функциясы графигінің нүктелерінің абсциссаларын табыңдар.

42.14. 1) $y = x^3 + x - 3$ функциясы графигінің жанамасы қандай нүктелерінде $y - 4x - 2 = 0$ түзуіне параллель болады?

2) $y = 2x - 1$ түзуі $y = \sqrt{4x - 3}$ функциясының графигіне жанама бола ма? Егер болса, онда жанама нүктесінің координаталарын табыңдар.

42.15. Нүкте түзу бойымен $s(t) = 0{,}25\,t^2 + 2t - 3$ заңымен қозғалады, мұндағы s шамасы метрмен, t уақыты секундпен өлшенеді. $t = 4$ және $t = 8$ аралығындағы орташа жылдамдықты, $t = 4$ және $t = 8$ уақыт мезетіндегі лездік жылдамдықты табыңдар.

42.16. Нүкте түзу бойымен бастапқы нүктеден $s(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{2}{\sqrt{t}}$ заңымен қозғала отырып s жол жүреді, мұндағы t секундпен, s метрмен өлшенеді. Қозғалыс басталғаннан кейін 4 с өткендегі жылдамдықтың шамасын табыңдар.

ХАБАРЛАМА ДАЙЫНДАҢДАР

42.17. Дифференциалдың dx белгісін 1675 жылы неміс философы, математигі және физигі Готфрид Вильгельм Лейбниц енгізген.

Г. Лейбниц (1646–1716)

ҚАЙТАЛАУ

42.18. Функцияның графигін салыңдар:

1) $y = 1 + \sqrt{x + 3}$; 2) $y = 2 - \sqrt{x - 1}$;

3) $y = |1 - \sqrt{x + 3}|$; 4) $y = |\sqrt{x - 1} - 2|$.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Функция, функция графигі, нүктедегі функцияның туындысы, функция туындысын табу ережелері, түзу сызық, функция графигіне жүргізілген жанама, түзудің теңдеуі.

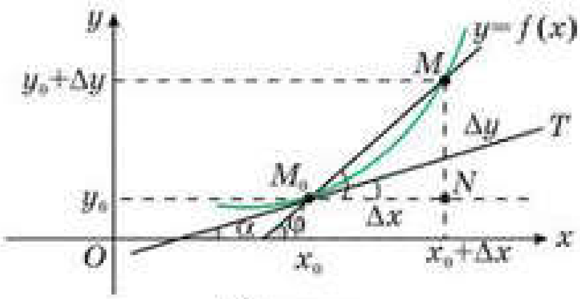
§ 43. ФУНКЦИЯНЫҢ ГРАФИГІНЕ ЖҮРГІЗІЛГЕН ЖАНАМАНЫҢ ТЕҢДЕУІ

Функцияның графигіне берілген нүктеде жүргізілген жанама теңдеуін құруды үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Функция, функция графигі, жанама, жанаманың теңдеуі

$y = f(x)$ функциясының графигіне $M_0(x_0, f(x_0))$ нүктесінде жүргізілген жанаманың (жанама бар болады деп жорамалдаймыз) теңдеуін анықтайық.



43.1-сурет

$y = f(x)$ функциясының графигіне тиісті $M(x_0 + \Delta x;\ y_0 + \Delta y)$ нүктесін алайық (43.1-сурет).

M_0 нүктесі арқылы M_0M қиюшысын және координаталар осьтеріне параллель түзулер жүргізсек, катеттері $M_0N = \Delta x$ және $NM = \Delta y$ болатын M_0NM үшбұрышын аламыз.

M_0M қиюшысы Ox осінің оң бағытымен φ бұрыш жасасын дейік: $\angle NM_0M = \varphi$. M_0NM тікбұрышты үшбұрышынан қиюшының бұрыштық коэффициентін өрнектейміз:

$$k = \operatorname{tg}\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Расында, егер $M_0(x_0; y_0)$ және $M(x; y)$ болса, онда нүктелердің координаталарын $y = kx + b$ теңдеуіне қойып,

$$\begin{cases} y = kx + b, \\ y_0 = k_0x + b \end{cases} \qquad (2)$$

жүйесін аламыз. k коэффициентін табу үшін бірінші теңдеуден екінші теңдеуді азайтамыз: $y - y_0 = k(x - x_0)$. Сонда $k = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg}\varphi$.

Егер $M \to M_0$ ұмтылса, $\Delta x \to 0$ және M_0M қиюшысы өзінің шектік жағдайына, яғни M_0 нүктесінде жүргізілген M_0T жанамасына ұмтылады. M_0T жанамасы мен Ox осінің оң бағытын жасайтын бұрышты α деп белгілейік. $\Delta x \to 0$ жағдайында $\varphi \to \alpha$ ұмтылады және M_0T жанамасы Ox осіне перпендикуляр болмайды, онда тангенстің үзіліссіздігінен $\operatorname{tg}\varphi \to \operatorname{tg}\alpha$ шығады. Бұдан (1) теңдікте шекке көшіп, M_0T жанамасының бұрыштық коэффициентін ($k = \operatorname{tg}\alpha$) табамыз:

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

(2) жүйесін шығару барысында $y - y_0 = k(x - x_0)$ теңдеуі алынды.

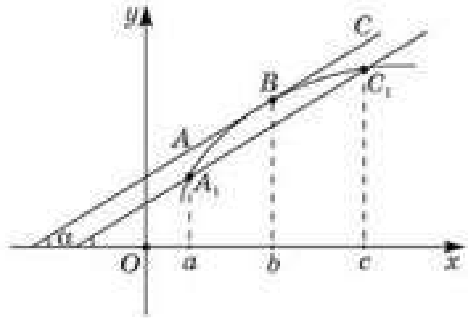
Қарастырылып отырған жағдайда $y_0 = f(x_0)$, $k = f'(x_0)$. Осы берілгендерді түзудің теңдеуіне қоямыз:

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ немесе $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ — абсциссасы x_0 болатын нүктеде $y = f(x)$ функциясының графигіне жүргізілген жанаманың теңдеуі.

$A_1(a;\ f(a))$, $C_1(c;\ f(c))$ нүктелері арқылы өтетінін қиюшысына параллель болатын $f(x)$ функциясының графигіне $(a;\ c)$ интервалынан алынған абсциссасы b-ға тең B нүктесінде жүргізілген AC жанаманың бар болуын түсіндіру үшін туындының геометриялық мағынасын пайдаланайық.

$y = f(x)$ функциясының B нүктесі арқылы өтетін AC жанамасына параллель A_1C_1 түзуін жүргізейік (43.2-сурет). Сонда α бұрышы A_1C_1 қиюшының көлбеулік бұрышына тең, яғни $f'(b) = \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{f(c) - f(a)}{c - a}$.



43.2-сурет

Сонымен, егер $f(x)$ функциясы $(a;\ c)$ аралығында дифференциалданатын болса, онда

$$f'(b) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}.$$

теңдігі орындалатындай $b \in (a;\ c)$ нүктесі табылады.

Бұл формула *Лагранж формуласы* деп аталады.

АЛГОРИТМ

Абсциссасы x_0 болатын нүктеде $y = f(x)$ функциясының графигіне жүргізілген жанаманың теңдеуін жазу үшін келесі алгоритм қолданылады:

1) $f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі мәнін есептеу;
2) $f(x)$ функциясының туындысын табу;
3) x_0 нүктесіндегі туындының мәнін, яғни $f'(x_0)$ есептеу;
4) табылған мәндерді $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ теңдеуіне қойып, жанаманың теңдеуін алу.

МЫСАЛ

1. Абсциссасы $x = 1$ болатын нүктеде $y = x^2$ функциясының графигіне жүргізілген жанаманың теңдеуін құрастырайық.

Шешуі. $y(1) = 1$ және $y' = 2x$. Демек, $y'(1) = 2$. Шыққан өрнектерді жанаманың теңдеуіне қоямыз: $y = 1 + 2(x - 1)$. Ұқсас қосылғыштарды біріктіріп, $y = 2x - 1$ болатын жанаманың теңдеуін аламыз.

Жауабы: $y = 2x - 1$.

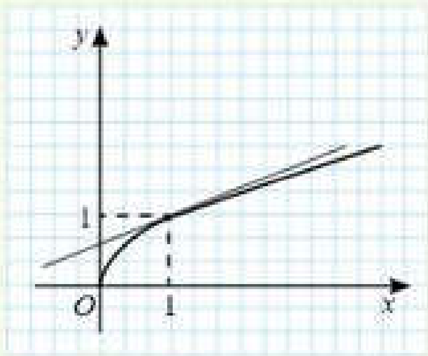
МЫСАЛ **2.** Абсциссасы $x = 1$ болатын нүктеде $y = \sqrt{x}$ функциясының графигіне жүргізілген жанаманың теңдеуін жазайық (43.3-сурет).

Шешуі .

1. $f(x_0) = f(1) = 1$; 2. $f'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;

3. $f'(x_0) = f'(1) = \dfrac{1}{2}$;

4. $y = 1 + \dfrac{1}{2}(x - 1) = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$.



43.3-сурет

Жауабы : $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$.

Жаттығулар

А

43.1. $x = x_0$ нүктесінде $y = f(x)$ функциясының графигіне жүргізілген жанаманың теңдеуін жазыңдар:

1) $y = 2x^2 - 5{,}5$, мұндағы $x_0 = -0{,}5$;
2) $y = 0{,}2x^2 - 4$, мұндағы $x_0 = 2$;
3) $y = -3x^2 - x$, мұндағы $x_0 = -2$;
4) $y = x^2 - \dfrac{1}{x}$, мұндағы $x_0 = 3$.

43.2. Функцияның графигіне жүргізілген жанама Ox осіне параллель болатындай x-тің мәндерін табыңдар:

1) $y = 2x^2 - 8x$; 2) $y = x^2 + 8x - 5$;
3) $y = 2x^2 - 8x + 5$; 4) $y = x - x^2$.

43.3. Абсцисса осімен қиылысу нүктелері арқылы $y = f(x)$ функциясының графигіне жүргізілген жанаманың теңдеуін жазыңдар:

1) $f(x) = 4 - x^2$; 2) $f(x) = x^2 - 9$;
3) $f(x) = 4x - x^2$; 4) $f(x) = 4x - x^2 - 3$.

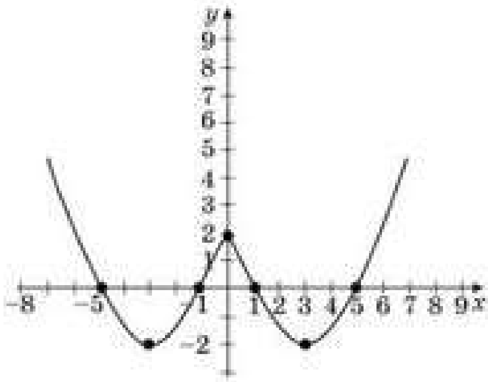
43.4. Ордината осімен қиылысу нүктелері арқылы $y = f(x)$ функциясының графигіне жүргізілген жанаманың теңдеуін жазыңдар:

1) $f(x) = 1 - x^2$; 2) $f(x) = x^2 - 3$;
3) $f(x) = 2 + 4x - x^2$; 4) $f(x) = 3x - x^2 - 2$.

43.5 . 43.4-суретті қолданып функцияның графигіне жүргізілген жанама:

1) Ox осіне параллель болатындай;
2) Ox осіне параллель болмайтындай;

3) Ox осінің оң бағытымен $45°$ бұрыш жасайтындай нүктенің координаталарын табыңдар.



43.4-сурет

43.6. Абсциссасы $x = x_0$ болатын нүктеде $y = f(x)$ функциясының графигіне жүргізілген жанаманың теңдеуін жазыңдар:

1) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$, $x_0 = 1$;

2) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-2}$, $x_0 = -1$;

3) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$, $x_0 = -2$.

Абсциссасы x_0 болатын нүктеде $y = f(x)$ функциясының графигіне жүргізілген жанаманың теңдеуін құрастырыңдар (**43.7-43.8**):

43.7. 1) $y = 3x^2 - 2x - 2$, $x_0 = -1$; 2) $y = 2\sqrt{x} - 10$, $x_0 = 16$;
3) $y = 2x + \dfrac{1}{x}$, $x_0 = 1$; 4) $y = x + \sqrt{x}$, $x_0 = 1$.

43.8. 1) $y = 2\sqrt{x} - 2$, $x_0 = 1$; 2) $y = 4\sqrt{x} - 3x$, $x_0 = 4$;
3) $y = 3 - 2\sqrt{x}$, $x_0 = 1$; 4) $y = 8\sqrt{x} - 2x^2$, $x_0 = 4$.

43.9. Ординатасы берілген нүктеде функцияның графигіне жүргізілген жанаманың теңдеуін жазыңдар:
1) $y = x^2 - 3x$ және ординатасы 4;
2) $y = -x^2 + 5x$ және ординатасы 6.

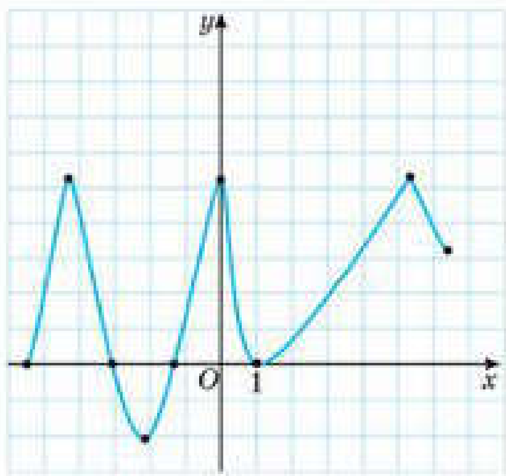
B

43.10. Берілген түзуге параллель болатындай етіп $y = x^2$ функциясының графигіне жүргізілген жанаманың жанасу нүктесінің координаталарын табыңдар:
1) $y = 2x - 1$; 2) $y = 0{,}75x - 2$;
3) $y = -0{,}5x - 6$; 4) $y = -x - 16$.

43.11. Берілген түзуге параллель болатындай $y = \dfrac{x^3}{3} - 3$ функциясының графигіне жүргізілген жанамалардың теңдеулерін жазыңдар:
1) $y = 4x - 1$; 2) $y = x + 31$; 3) $y = 9x - 10$.

43.12. Берілген түзуге параллель болатындай $y = 1 - \dfrac{1}{x}$ функциясының графигіне жүргізілген жанамалардың теңдеулерін жазыңдар:
1) $y = x + 2$; 2) $y = 4x - 3$; 3) $y = 0{,}5x - 10$.

43.13. 43.5-суретті қолданып функция графигінің:
1) жанамасы Ox осіне параллель болатындай нүктені және жанаманың теңдеуін;
2) жанамасы болмайтын нүктені табыңдар. Әр жағдай үшін нүктенің координаталарын жазыңдар.



43.5-сурет

43.14. $y = 2x - 1$ түзуіне параллель болатын $y = x^4 - 2x^2 + 2x - 1$ функциясының графигіне жүргізілген жанамалардың теңдеулерін жазыңдар.

43.15. Ox осінің оң бағытымен $135°$ бұрыш жасайтын $y = 3 + 5x - 2x^3$ функциясының графигіне жүргізілген жанамалардың теңдеулерін жазыңдар.

43.16. Абсциссасы $x = 2$ болатын нүктеде $y = x^2 - 3$ функциясының графигіне жүргізілген жанама теңдеуін жазыңдар.

43.17. $x + y - 2 = 0$ теңдеуімен берілген түзуге параллель болатын $y = 1 - 2\sqrt{x}$ функциясының графигіне жүргізілген жанаманың теңдеуін жазыңдар.

C

43.18. 1) Функция графигіне тиісті емес $A(2; -5)$ нүктесі арқылы өтетін $y = x^2 - 4x + 3$ функциясының графигіне жүргізілген жанамалардың теңдеулерін жазыңдар.
2) Функция графигіне тиісті емес $A(1; -5)$ нүктесі арқылы өтетін $y = x^2 - 2x$ функциясының графигіне жүргізілген жанамалардың теңдеулерін жазыңдар.

43.19*. $y = x^2 - 4$ формуласымен берілген параболаның бойынан абсциссалары $x_1 = 1$ және $x_2 = 3$ болатын екі нүкте алынған. Осы екі нүкте арқылы түзу жүргізілген. Параболаның қандай нүктесінде жүргізілген жанама осы түзуге параллель болады?

43.20. $y = ax^2 + x - 3$ функциясының графигіне $M(1; a - 2)$ нүктесі арқылы жүргізілген жанама a-ның қандай мәнінде $y - 2x = 12$ формуласымен берілген түзуге параллель болады?

43.21. $A(1; 3)$ нүктесі арқылы өтіп, $y = 8\sqrt{x} - 7$ функциясының графигін жанайтын және $y = x^2 + 4x - 1$ функциясының графигін әртүрлі екі нүктеде қиятын түзудің теңдеуін жазыңдар.

43.22. $y = 2x - 1$ формуласымен берілген түзу $y = 4\sqrt{x} - 3$ функциясының графигіне жанама бола ма?

43.23. M нүктесі арқылы өтетін функцияның графигіне жүргізілген жанаманың теңдеуін жазыңдар:

1) $y = -x^2 - 7x + 8$, $M(1; 1)$; 2) $y = -x^2 - 7x + 8$, $M(0; 9)$.

ҚАЙТАЛАУ

43.24. Шекті есептеңдер:

1) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x - 5}{x + 3}$; 2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{4x}$;

3) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2 - 5x + 1}{2x^2 + 3}$; 4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin 2x}{x}$.

43.25. Фун кцияның туындысын табыңдар:

1) $y = (x - 3) \cdot x^3$; 2) $y = (x^3 - 2x) \cdot \sqrt{2} \cdot x$.

43.26. Теңдеудің түбірлерін табыңдар:

1) $\sin^2 x = 1$; 2) $2\cos^2 2x = 1$.

43.27. Функцияның анықталу облысын табыңдар:

1) $y(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 2x - 3}}$;

2) $y(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x + 5}} + \sqrt{49 - x^2} + \sqrt{\dfrac{x}{x - 6}}$.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Туындының анықтамасы, функцияның туындысын табу ережелері, тригонометриялық функциялар, тригонометрия формулалары.

§ 44. ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ ТУЫНДЫСЫ

Тригонометриялық функциялардың туындыларын табу формулаларымен танысасыңдар; тригонометриялық функциялардың туындыларын табуды үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Функция, туынды, тригонометриялық функция

$y(x) = \sin x$ функциясының туындысын табайық.

Теорема. $(\sin x)' = \cos x$.

Дәлелдеуі. Туындының анықтамасы бойынша

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}.$$

Бөлшектің алымына $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ формуласын қолданамыз:

$$y'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\dfrac{x+\Delta x-x}{2}\cdot\cos\dfrac{x+\Delta x+x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\Delta x}\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Өрнектегі бірінші көбейткішке бірінші тамаша шекті қолданамыз:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}} = 1.$$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right) = \cos x$ болғандықтан, $y'(x) = (\sin x)' = \cos x$. ■

$(\cos x)' = -\sin x$ формуласын өздерің дәлелдеңдер.

$y(x) = \operatorname{tg} x$ тригонометриялық функциясының туындысын табайық.

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cdot\cos x - \sin x\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x\cdot\cos x - \sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$ формуласын өздерің дәлелдеңдер.

Мына формулаларды есте сақтаңдар:

$$(\sin x)' = \cos x;\ (\cos x)' = -\sin x;$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};\ (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

МЫСАЛ

1. $f(x) = x^2 + \sin x$ функциясының туындысын табайық.

Шешуі. $y = f(x)$ функциясы дифференциалданатын екі функцияның қосындысын береді:

$$f'(x) = (x^2+\sin x)' = (x^2)' + (\sin x)' = 2x + \cos x.$$

Жауабы : $f'(x) = 2x + \cos x$.

МЫСАЛ

2. $f(x) = x^3\cdot\cos x$ функциясының туындысын табайық.

Шешуі. $y = f(x)$ функциясы дифференциалданатын екі функцияның көбейтіндісін береді:

$$f'(x) = (x^3\cdot\cos x)' = (x^3)'\cdot\cos x + x^3\cdot(\cos x)' = 3x^2\cdot\cos x + x^3\cdot(-\sin x) = x^2\cdot(3\cos x - x\cdot\sin x).$$

Жауабы : $f'(x) = x^2\cdot(3\cos x - x\cdot\sin x)$.

МЫСАЛ

3. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ функциясының туындысын табайық.

Шешуі. $f'(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot x - \sin x \cdot x'}{x^2} = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$.

Жауабы : $f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$.

1. Тангенс және котангенс функцияларының туындысын табу үшін туындының қандай ережелері қолданылады?
2. Тангенс және котангенс функциялары туындысының формуласын қорытып шығару үшін қандай функциялардың туындысын білу керек?
3. x айнымалысының қандай мәндерінде $\operatorname{tg} x$ және $\operatorname{ctg} x$ функцияларының туындылары анықталмайды?

Жаттығулар

А

44.1. Функцияның туындысын табыңдар:

1) $f(x) = 2x + \sin x - 3$;
2) $f(x) = \sqrt{x} - \cos x + 2$;
3) $f(x) = \cos x + \sin x - \sqrt{2}$;
4) $f(x) = x^3 - 3\sin x$.

44.2. x_0 нүктесіндегі функция туындысының мәнін табыңдар:

1) $f(x) = 2\cos x + \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$;

2) $f(x) = 2x - \cos x + 3\sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$;

3) $f(x) = x^2 - 2\cos x + \sin x$, $x_0 = \frac{3\pi}{4}$;

4) $f(x) = \frac{2}{x} + 2\cos x + 4\sin x$, $x_0 = \frac{2\pi}{3}$.

44.3. Функцияның туындысын табыңдар:

1) $f(x) = 2\cos x + 3\operatorname{tg} x$;
2) $f(x) = \sin x + \operatorname{ctg} x$;
3) $f(x) = \cos x - 5\operatorname{tg} x + x^{-3}$;
4) $f(x) = 2\operatorname{tg} x + 2\operatorname{ctg} x + \frac{1}{x^3}$.

В

44.4. x_0 нүктесіндегі функцияның туындысының мәнін табыңдар:

1) $f(x) = 3\operatorname{ctg} x + 2\sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$;

2) $f(x) = x - 2\cos x + 3\operatorname{tg} x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$;

3) $f(x) = 2x^2 - 2\operatorname{tg} x + \sin x,\ x_0 = \frac{3\pi}{4}$;

4) $f(x) = \frac{2}{x} - 2\operatorname{ctg} x + 4\sin x,\ x_0 = \frac{2\pi}{3}$.

44.5. $f'(x) > 0$ теңсіздігін шешіңдер:

1) $f(x) = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$; 2) $f(x) = 2\sin^2\frac{x}{2} - 2\cos^2\frac{x}{2}$;

3) $f(x) = x - \cos x$.

44.6. $f'(x)$ m 0 теңсіздігін шешіңдер:

1) $f(x) = 2x - 4\sin x$; 2) $f(x) = \operatorname{tg} x$;

3) $f(x) = \operatorname{ctg} x$; 4) $f(x) = x - 2\cos x$.

44.7. Функцияның $y = f'(x)$ туындысы белгілі:

1) $f'(x) = \cos x + 1$; 2) $f'(x) = 2\cos x + \sin x$;

3) $f'(x) = \cos x + \frac{1}{\cos^2 x}$; 4) $f'(x) = -2\sin x + \frac{1}{\sin^2 x}$.

$y = f(x)$ болса, функцияның қандай формуламен берілгенін анықтаңдар.

C

44.8. Функцияның туындысын табыңдар:

1) $f(x) = 2\sin x \cdot \cos x$; 2) $f(x) = 2\sin x\ (\cos x + 1)$;

3) $f(x) = \sin x \cdot \operatorname{ctg} x$; 4) $f(x) = 2\sin x\ (2x^2 - 1)$;

5) $f(x) = 2\operatorname{tg} x \cdot \cos x$; 6) $f(x) = 2\sin x\ (x + \cos x)$.

44.9. x_0 нүктесіндегі функцияның туындысының мәнін табыңдар:

1) $f(x) = \operatorname{ctg} x \cdot \sin x,\ x_0 = \frac{\pi}{6}$;

2) $f(x) = x^2 - \operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{tg} x,\ x_0 = \frac{\pi}{4}$;

3) $f(x) = x^2 - \operatorname{ctg} x \cdot \sin x,\ x_0 = \frac{3\pi}{4}$;

4) $f(x) = \frac{2}{x} \cdot \operatorname{ctg} x,\ x_0 = \frac{2\pi}{3}$.

44.10. $x_0 = \frac{\pi}{2}$ нүктесіндегі $f(x)$ функциясының өзгеру жылдамдығын табыңдар :

1) $f(x) = \sin x \cdot (x + 1)$; 2) $f(x) = \operatorname{ctg} x \cdot (x^2 - 1)$;

3) $f(x) = \sin x \cdot (\operatorname{ctg} x + 3)$.

ҚАЙТАЛАУ

44.11. Теңдеуді шешіңдер:

1) $x|x| + 7x + 12 = 0$;
2) $x^2 - 5|x + 3| + 4 = 0$;
3) $x^2 - 5\left(\sqrt{x-2}\right)^2 - 5 = 0$;
4) $|x - 2|x^2 = 10 - 5x$;
5) $\sqrt{x^2 - 2x} = 3x + 1$;
6) $2\sqrt{x^2 - 2x} = x^2 - 2x - 3$;
7) $\sqrt{x^2 - 2x - 3} = x^2 - 2x - 15$;
8) $\sqrt{x^2 + 2x - 3} = x^2 + 2x - 15$.

44.12. Функ циясының шегін табыңдар:

1) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x+3}{x-2}$;
2) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 - 4x}$;
3) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x+11} - \sqrt{x}\right)$;
4) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x+6} - \sqrt{x}\right)$;
5) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{2\,\mathrm{tg}\,x}$;
6) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{4\sin 3x}{\sin 2x}$.

44. 13. Функцияны үзіліссіздікке зерттеңдер және графигін салыңдар:

1) $f(x) = \begin{cases} x + 3, \text{ мұндағы } x \leq 0, \\ x^2 - 1, \text{ мұндағы } 0 < x \leq 3, \\ 8, \text{ мұндағы } x > 3; \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} 3 - x, \text{ мұндағы } x \leq 1, \\ x^2 + 1, \text{ мұндағы } 1 < x \leq 2, \\ 5, \text{ мұндағы } x > 2; \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ мұндағы } x \leq 0, \\ 2x + 1, \text{ мұндағы } 0 < x \leq 2, \\ 5, \text{ мұндағы } x > 2. \end{cases}$

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Функция, күрделі функция, функцияның туындысы, функцияның туындысын табу ережелері мен формулалары, тригонометриялық функциялардың туындысы, кері тригонометриялық функциялар.

§ 45. КҮРДЕЛІ ФУНКЦИЯНЫҢ ТУЫНДЫСЫ. КЕРІ ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ ТУЫНДЫСЫ

Күрделі функцияның, кері тригонометриялық функциялардың туындыларын табу формулаларымен танысасыңдар;
күрделі функцияның, кері тригонометриялық функциялардың туындыларын табуды үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Күрделі функция, кері тригонометриялық функция, туынды

$y = f(g(x))$ күрделі функция болсын және $u = g(x)$ функциясы x нүктесінде, $y = f(u)$ функциясы u нүктесінде дифференциалданады. Онда берілген функция x нүктесінде дифференциалданады және $y' = f'(g(x))\, g'(x)$.

Туындының $f'(g(x))$ түрінде жазылуы оның алдымен $y = f(x)$ функциясы үшін табылатынын, бірақ x-тің орнына $g(x)$ қойылатынын білдіреді.

Күрделі функцияның туындысын табу формуласының қысқаша жазылуы: $f'(x) = f'(t)\cdot t'$, мұндағы x айнымалысы $t(x)$-ке алмастырылған.

Дәлелдеуі. $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f\Delta t}{\Delta x\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta t}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta t}{\Delta x} = f'(t)\cdot t'.$ ■

МЫСАЛ

1. $y(x) = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} - \operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}$ функциясының туындысын табайық.

Шешуі. $y'(x) = \left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} - \operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}\right)' = \left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)' - \left(\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}\right)'.$

$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$ болғандықтан күрделі функцияның туындысын табу ережесін қолданамыз:

$$y'(x) = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)' - \left(-\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}\right)\cdot\left(\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}\sin^2\frac{x}{2}}.$$

Шыққан өрнекті ықшамдау үшін тригонометрияның формулаларын, яғни $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ және $\sin x = 2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$ формулаларын қолданамыз:

$$y'(x) = \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\cdot 1}{4\cos^2\frac{x}{2}\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2}{\left(2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{2}{\sin^2 x}.$$

Жауабы: $\dfrac{2}{\sin^2 x}$.

МЫСАЛ

2. $y(x) = \sin^2\sqrt{x}$ функциясының туындысын табайық.

Шешуі. Күрделі функцияның туындысын табу ережесін бірнеше рет қолданамыз. Алдымен $y = t^2$ (мұндағы $t = \sin\sqrt{x}$) функциясының, одан кейін $t = \sin g$ (мұндағы $g = \sqrt{x}$) функциясының туындысын табамыз:

$y'(x) = (\sin^2\sqrt{x})' = 2\sin\sqrt{x}\cdot(\sin\sqrt{x})' = 2\sin\sqrt{x}\cdot\cos\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x})' = 2\sin\sqrt{x}\cdot\cos\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Әрі қарай $\sin 2\sqrt{x} = 2\sin\sqrt{x}\cos\sqrt{x}$ қос бұрыштың формуласын қолданып,

$y'(x) = \sin 2\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sin 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$ аламыз.

Жауабы : $\frac{\sin 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$.

МЫСАЛ

3. $y(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$ функциясының туындысын табайық.

Шешуі . Функциялардың қосындысының туындысы мен натурал көрсеткішті дәрежелік функцияның туындысының формуласын қолданамыз:

$y'(x) = (\sin^3 x + \cos^3 x)' = (\sin^3 x)' + (\cos^3 x)' = 3\sin^2 x\cdot(\sin x)' + 3\cos^2 x\cdot(\cos x)'$.

Енді туындылардың орнына өрнектерді қойып, түрлендіреміз: $y'(x) = 3\sin^2 x \times \cos x + 3\cos^2 x\cdot(-\sin x) = 3\sin^2 x\cos x - 3\cos^2 x\sin x = 3\sin x\cos x\,(\sin x - \cos x)$. $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ болғандықтан, берілген функцияның туындысы мына түрге не болады :

$y'(x) = 3\frac{\sin 2x}{2}(\sin x - \cos x) = \frac{3}{2}\sin 2x\,(\sin x - \cos x)$.

Жауабы : $\frac{3}{2}\sin 2x\,(\sin x - \cos x)$.

МЫСАЛ

4. Арксинустың туындысын табу формуласын қорытып шығарайық.

Шешуі . $y(x) = \arcsin x$ функциясы $[-1;\ 1]$ аралығында анықталған. Арксинус x-тен синустың мәні x-ке тең, яғни $\sin(\arcsin x) = x$.

Теңдіктің екі жағының туындысын есептейміз (сол жақ бөлігін күрделі функция ретінде дифференциалдаймыз): $(\sin(\arcsin x))' = (x)'$, $\cos(\arcsin x)\cdot(\arcsin x)' = 1$.

Демек, арксинустың туындысы $(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-(\sin(\arcsin x))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, мұндағы $-1 < x < 1$.

Жауабы : $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $-1 < x < 1$; $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ $(-\infty < x < +\infty)$; $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$, $(-\infty < x < +\infty)$ формулаларын өздерің дәлелдеңдер.

Мына формулаларды есте сақтаңдар:

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $-1 < x < 1$; $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $-1 < x < 1$;

$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$, $-\infty < x < +\infty$; $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$, $-\infty < x < +\infty$.

1. Күрделі функцияға мысал келтіріңдер.
2. Күрделі функцияның туындысын табу формуласы қандай жағдайларда қолданылады?
3. x-тің қандай мәндерінде $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \mathrm{arctg}\, x$ функцияларының туындысы болады?

Жаттығулар

А

Күрделі функцияның туындысын табыңдар **(45.1—45.4)**:

45.1. 1) $f(x) = \sin 3x$; 2) $f(x) = \cos(1 - 2x)$; 3) $f(x) = \mathrm{tg}\, 5x$; 4) $f(x) = \mathrm{ctg}(x - 2)$; 5) $f(x) = \sin(3 - 2x)$; 6) $f(x) = \mathrm{ctg}(5 - 3x)$.

45.2. 1) $f(x) = (3x - 1)^2$; 2) $f(x) = (1 - 2x)^3$; 3) $f(x) = (2 - 3x)^{-3}$; 4) $f(x) = 2 - (1 + 2x)^{-4}$; 5) $f(x) = 5x + (1 - 3x)^{-2}$; 6) $f(x) = x^2 + (1 + 5x)^{-2}$.

45.3. 1) $f(x) = \sqrt{2x - 5}$; 2) $f(x) = \sqrt{2x^2 - x}$; 3) $f(x) = \sqrt{2 - 5x}$; 4) $f(x) = \sqrt{3x^2 - 5x}$; 5) $f(x) = \sqrt{3x^2 - 5x + 1}$; 6) $f(x) = \sqrt{2 - 3x^2 + 5x}$.

45.4. 1) $f(x) = (5x^2 + 7)^6$; 2) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$; 3) $f(x) = \frac{5}{1 - 2x}$; 4) $f(x) = \frac{2}{(2x + 3)^4}$.

В

45.5. $f(x)$ және $g(x)$ функцияларынан $f(g(x))$, $f(f(x))$, $g(g(x))$ күрделі функцияларын құрастырыңдар:

1) $f(x) = x - 1$, $g(x) = \sqrt{3x - 2}$; 2) $f(x) = 3 - 2x^3$, $g(x) = \frac{1}{x - 2}$;

3) $f(x) = \frac{2x}{3x - 1}$, $g(x) = \frac{1}{x^2 + 2}$; 4) $f(x) = \sqrt{x^3 - 2x}$, $g(x) = \frac{1}{x^3}$;

5) $f(x) = \sin 3x + 5x$, $g(x) = x^2 - 1$;

6) $f(x) = \cos 5x - 6$, $g(x) = \mathrm{tg}\, 7x$.

45.6. $f(x)$ функциясының туындысын табыңдар:

1) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 2x}{3x + 2}}$; 2) $f(x) = (x^2 - 3)\sqrt{3x - 1}$;

3) $f(x) = 3x \cdot \left(\frac{1}{4}x - 5x^3\right)^2$; 4) $f(x) = \left(\sqrt{2x - 3} - x\right)^4$.

45.7. $f(x)$ функциясының $x_0 = 1$ нүктесіндегі туындысының мәнін табыңдар:

1) $f(x) = \left(\frac{2}{x^3} + x^3\right)^5$; 2) $f(x) = \left(\frac{1}{x} - x^4\right)^{10}$;

3) $f(x) = (5x^2 - 3x)^4$; 4) $f(x) = (5x^5 - 4x^4)^{23}$.

45.8. $f(x) = \frac{(2x-1)^8}{(x+1)^5}$ функциясы берілген.

1) $f'(x) > 0$; 2) $f'(x) \geq 0$; 3) $f'(x) < 0$; 4) $f'(x) \leq 0$ теңсіздігін шешіңдер.

45.9. $f(x) = \frac{(5x+4)^{13}}{(x-3)^6}$ функциясы берілген.

1) $f'(x) > 0$; 2) $f'(x) \geq 0$; 3) $f'(x) < 0$; 4) $f'(x) \leq 0$ теңсіздігін шешіңдер.

C

45.10. Функцияның туындысын табыңдар:

1) $f(x) = \sin^2 3x$; 2) $f(x) = \cos^4 2x$;

3) $f(x) = \mathrm{tg}^{-5}(-x)$; 4) $f(x) = \mathrm{ctg}^{-3}(1-x)$;

5) $f(x) = \arcsin 2x$; 6) $f(x) = \arccos 5x$;

7) $f(x) = \mathrm{arctg}\, 3x$; 8) $f(x) = x^2 - \arccos 2x$.

45.11. Абсциссасы x_0 болатын нүктеде $y = f(x)$ функциясының графигіне жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффициентін табыңдар:

1) $f(x) = 2\sin^2 x + \sqrt{3}$, $x_0 = \frac{3\pi}{4}$; 2) $f(x) = \cos^2 x - 1$, $x_0 = \frac{2\pi}{3}$;

3) $f(x) = \cos 3x + 1$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$; 4) $f(x) = \cos^2 3x - \sin^2 3x$, $x_0 = \frac{5\pi}{6}$;

5) $f(x) = \arccos 3x$, $x_0 = \frac{1}{4}$; 6) $f(x) = \arcsin^2 x$, $x_0 = \frac{1}{2}$.

45.12. $f'(x) \geq 0$ теңсіздігін шешіңдер:

1) $f(x) = \frac{1}{3}\cos 3x + x$; 2) $f(x) = 2\sin\frac{1}{2}x - \sqrt{3}x$;

3) $f(x) = 3\cos^2 x + 2\sin^2 x - x$; 4) $f(x) = \sin^2 3x - \frac{1}{12}\cos 6x + 5x$;

5) $f(x) = \arccos 3x + 2x + 3$; 6) $f(x) = \mathrm{arcctg}\, 2x + 2x - 1$.

45.13. Дифференциалдаудың ережелері мен формулаларын қолданып $f(x)$ функциясының туындысын табыңдар:

1) $f(x) = 2\arccos 4x + 2\sqrt{3}$; 2) $f(x) = \mathrm{arcctg}\, 4x + 2x - 7$;

3) $f(x) = \sin^2 3x + \frac{1}{6}\cos 6x - x$; 4) $f(x) = \sin^4 3x + 4x$;

5) $f(x) = \cos^5 2x - 4\sqrt{5}x$; 6) $f(x) = \frac{x+3}{x-5} - 2x + \pi x$.

45.14. Функцияның берілген нүктедегі туындысының мәнін табыңдар:

1) $f(x) = \arcsin^2 x + x,\ x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $f(x) = \mathrm{arctg}^2 x + \sqrt{3},\ x_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

3) $f(x) = x - \arccos^2 x,\ x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $f(x) = \frac{1}{x} - \mathrm{arcctg}^2 x,\ x_0 = 1$.

ҚАЙТАЛАУ

45.15. $f(x) = \begin{cases} 1 - x, \text{ мұндағы } x \geq 0, \\ x^3 + ax + b, \text{ мұндағы } x < 0 \end{cases}$ функциясы:

1) $x_0 = 0$ нүктесінде үзіліссіз болатындай;
2) $x_0 = 0$ нүктесінде дифференциалданатындай a мен b-ның мәндерін табыңдар.

45.16. $f(x) = \begin{cases} 3x + 1, \text{ мұндағы } x < 0, \\ x^3 + ax + b, \text{ мұндағы } x \geq 0 \end{cases}$ функциясы:

1) $x_0 = 0$ нүктесінде үзіліссіз болатындай;
2) $x_0 = 0$ нүктесінде дифференциалданатындай a мен b-ның мәндерін табыңдар.

45.17. Теңдеуді шешіңдер:

1) $\sin 2x + \mathrm{tg}\, x - 2 = 0$; 2) $2\cos 2x + 2\mathrm{tg}^2 x = 5$;

3) $2\left(\mathrm{tg}\frac{x}{2} - 1\right) - \cos x = 0$; 4) $\frac{\sin^2 x - 2}{\sin^2 x - 4\cos^2 \frac{x}{2}} = \mathrm{tg}^2 \frac{x}{2}$;

5) $\frac{4\,\mathrm{ctg}\, x}{1 + \mathrm{ctg}^2 x} + \sin^2 2x + 1 = 0$; 6) $1 + \cos x = 2\mathrm{tg}\frac{x}{2} - 1$.

45.18. Көбейткіштерге жіктеуді қолданып теңдеуді шешіңдер:

1) $\cos(2(x + 60^\circ)) + 4\sin(x + 60^\circ) = 2{,}5$;

2) $2\cos^2(2x + 60^\circ) - 3\sin^2(x + 30^\circ) = 2$;

3) $9\mathrm{ctg}^2 x + 4\sin^2 x = 6$; 4) $8\cos^4 x = 11\cos 2x - 1$;

5) $8\sin^4 x + 13\cos 2x = 7$; 6) $2\mathrm{tg}^2 x + 4\cos^2 x = 7$.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Функция, нүктедегі және жиындағы функцияның үзіліссіздігі, функцияның туындысы, туындыны табу ережелері мен формулалары, функцияның бірінші туындысының физикалық мағынасы.

§46. ЕКІНШІ ТУЫНДЫ ЖӘНЕ ОНЫҢ ФИЗИКАЛЫҚ МАҒЫНАСЫ

Екінші туынды ұғымымен және оның физикалық мағынасымен танысасыңдар; функцияның екінші туындысын табуға есептер шығаруды үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР
Функция, туынды, екінші туынды, физикалық мағынасы

Қандай да $(a; b)$ аралығында дифференциалданатын $y = f(x)$ функциясын қарастырайық. Осы аралықтағы оның туындысы $f'(x)$ функциясы болады. Егер соңғы функцияның берілген интервалында туындысы бар болса, онда ол туынды $y = f(x)$ функциясының *екінші туындысы* немесе *екінші ретті туындысы* деп аталады. Бұл жағдайда $f(x)$ үшін $f'(x)$ *бірінші туынды* немесе *бірінші ретті туынды* деп аталады.

Анықтама. ***$y = f(x)$ функциясының екінші туындысы*** *деп $f'(x)$ туындысынан алынған туындыны айтады.*

Белгіленуі: y'' немесе $f''(x)$.

$$f''(x) = (f'(x))'.$$

Мысалы, $(\sin x)'' = (\cos x)' = -\sin x$; $(x^4)'' = (4x^3)' = 12x^2$.

МЫСАЛ

1. $f(x) = x^3 - 2x$ функциясы үшін $x_0 = -1$ нүктесіндегі екінші туындысының мәнін табайық.

Шешуі. $f''(x) = (x^3 - 2x)'' = (3x^2 - 2)' = 6x$. $f''(x_0) = 6x_0 = 6 \cdot (-1) = -6$.

Жауабы: -6.

Екінші туындының физикалық мағынасын қарастырайық.

Материялық нүкте түзу бойымен бірқалыпты $s = f(t)$ заңымен қозғалсын, мұндағы t — уақыт, $f(t)$ — t уақыт аралығында жүрілген жол. Физика курсынан t мезетіндегі нүктенің үдеуі t уақыты бойынша жылдамдықтың туындысына тең екені белгілі.

Екінші туындының физикалық мағынасы

$a(t) = v'(t) = s''(t)$, яғни үдеу уақыт бойынша жолдан алынған екінші туындыға тең.

МЫСАЛ

2. $s = 2\sin\frac{\pi t}{3}$ заңымен қозғалатын нүктенің $t = 1$ мезетіндегі жылдамдығы мен үдеуін табайық.

Шешуі. Алдымен $v(t)$ жылдамдығын табамыз. $v(t) = s'(t)$ болғандықтан, $v(t) = \left(2\sin\frac{\pi t}{3}\right)' = \frac{2\pi}{3} \cdot \cos\frac{\pi t}{3}$. $v(1) = \frac{2\pi}{3} \cdot \cos\frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$.

Енді $a(t)$ үдеуін табамыз: $a(t) = v'(t) = \left(\frac{2\pi}{3} \cdot \cos\frac{\pi t}{3}\right)' = -\frac{2\pi}{3} \cdot \frac{\pi}{3} \cdot \sin\frac{\pi t}{3} = -\frac{2\pi^2}{9}\sin\frac{\pi t}{3}$;
$a(1) = -\frac{2\pi^2}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi^2\sqrt{3}}{9}$.

Жауабы: $\frac{\pi}{3}$, $-\frac{\pi^2\sqrt{3}}{9}$.

1. Қандай функциялар үшін екінші туынды бар болады?
2. Сызықтық және бірқалыпты қозғалыс кезіндегі уақыт бойынша жол ұзындығының екінші туындысы нені береді?

Жаттығулар

A

46.1. $y = f(x)$ функциясының бірінші және екінші ретті туындыларын табыңдар:

1) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x + 1$; 2) $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + x - 7$;
3) $f(x) = 5x^4 + 2x^2 - 2x$.

46.2. $y = f(x)$ функциясы үшін абсциссасы x_0 болатын нүктедегі екінші туындысының мәнін табыңдар:

1) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1$, мұндағы $x_0 = -1$;
2) $f(x) = x^4 - x^3 - x$, мұндағы $x_0 = 2$;
3) $f(x) = \sqrt{3 - x}$, мұндағы $x_0 = -1$;
4) $f(x) = \sqrt{2x + 1}$, мұндағы $x_0 = 4$.

46.3. Нүкте түзу бойымен $x(t) = \frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} + 2t^2 + 1$ заңымен қозғалады (мұндағы t секундпен, $x(t)$ метрмен өлшенеді). Нүкте қозғалысының:

1) $t = 3$ с уақыт мезетіндегі жылдамдығын;
2) $t = 3$ с уақыт мезетіндегі үдеуін табыңдар.

46.4. Берілген функция үшін $f''(x)$ мәнін табыңдар:

1) $f(x) = \sqrt{5 - x}$; 2) $f(x) = \sqrt{4 - 2x}$;
3) $f(x) = \sqrt{2x + 3}$; 4) $f(x) = \sqrt{2x^2 - 1}$.

Берілген функция үшін $f''(x)$-ті табыңдар (**46.5—46.8**):

46.5. 1) $f(x) = \sin x$; 2) $f(x) = \operatorname{tg} x$; 3) $f(x) = \sin 2x$;
4) $f(x) = \sin^2 x$; 5) $f(x) = \cos 2x$; 6) $f(x) = \cos^2 x$.

46.6. 1) $f(x) = \sqrt{x}$; 2) $f(x) = \sqrt{2x}$; 3) $f(x) = \sqrt{-x}$;
4) $f(x) = x\sqrt{x}$; 5) $f(x) = x - \sqrt{x}$; 6) $f(x) = x^2 - 2\sqrt{x}$.

46.7. 1) $f(x) = x \sin x$; 2) $f(x) = x \sin 2x$; 3) $f(x) = (2x - 1)\sin x$;
4) $f(x) = x \cos x$; 5) $f(x) = x \cos 3x$; 6) $f(x) = 3x^2 - \cos(x^2 + 1)$.

46.8. 1) $f(x) = \sin^2 2x$; 2) $f(x) = x^2 \sin 2x$;
3) $f(x) = (x^2 - 1)\sin x$; 4) $f(x) = x\cos 2x$;
5) $f(x) = (x + 1)^2 \cos 2x$; 6) $f(x) = x\cos(x^2 + 1)$.

46.9. Нүкте түзу бойымен $x(t) = \cos 3t$ заңымен қозғалады (мұндағы t секундпен, $x(t)$ метрмен өлшенеді). Нүкте қозғалысының t мезетіндегі үдеуінің формуласын жазыңдар.

B

46.10. Берілген функция үшін $f''(x)$ функциясы графигінің кескінін салыңдар:
1) $f(x) = 0{,}6x^3$; 2) $f(x) = x(2x^2 - 1)$;
3) $f(x) = \frac{1}{4}\sin^2 x$; 4) $f(x) = \frac{1}{x}$.

46.11. Функцияның екінші ретті туындысын табыңдар:
1) $f(x) = \operatorname{arctg} x$;
2) $f(x) = x \operatorname{arctg} x$.

46.12. Нүкте түзу бойымен $s(t) = \frac{4t + 3}{t + 4}$ заңымен қозғалады (мұндағы t секундпен, $x(t)$ метрмен өлшенеді). Нүкте қозғалысының $t = 6$ с мезетіндегі үдеуін табыңдар.

46.13. Нүкте түзу бойымен $s(t)$ заңымен қозғалады (мұндағы t секундпен, $x(t)$ метрмен өлшенеді). Нүкте қозғалысының t_0 мезетіндегі жылдамдығы мен үдеуін табыңдар:
1) $s(t) = t^3 - 2t^2 - t,\ t_0 = 2c$; 2) $s(t) = \frac{2t + 1}{t + 3},\ t_0 = 7c$.

C

46.14. Тік жоғары лақтырылған дене $h(t) = 9t - 2t^2$ заңымен қозғалады. Дененің бастапқы жылдамдығы мен үдеуін ($t = 0$) және $v(t) = 0$ жағдайындағы ең үлкен биіктігін табыңдар.

46.15. Функцияның екінші ретті туындысын табыңдар:
1) $f(x) = \frac{1}{4}(3 - x) \cdot x^2 - 3x$; 2) $f(x) = \frac{x}{9} \cdot \sin 3x$.

46.16. 1) $y = \sin 3x$ функциясының $y'' + 3\cos 3x + 9\sin 3x = y'$ теңдеуін;
2) $y = x\sin x$ функциясының $y'' + y - 2\cos x = 0$ теңдеуін қанағаттандыратынын тексеріңдер.

46.17. Функцияның екінші ретті туындысының берілген нүктедегі мәнін есептеңдер:

1) $f(x) = (x^2 + 1)(x + 1) + 2x$, мұндағы $x_0 = 2$;

2) $f(x) = (x^2 + 2)(x - 1) + 2x^2$, мұндағы $x_0 = 2$.

46.18. $y = f(x)$ функциясының екінші ретті туындысын табыңдар және $y = f''(x)$ функциясының графигін салыңдар:

1) $f(x) = \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{6}x^3 - 2x^2$; 2) $f(x) = (x^2 + 2)(x - 1) + \frac{5}{12}x^4$.

ҚАЙТАЛАУ

46.19. Функцияның шегін табыңдар:

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^3 + 2x^2 - 5}{5x - x^3 + 3}$; 2) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x^2 - 2x - 8}{x - 4}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{3x^2 - 5x + 2}{x - 1}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin x}$.

46.20. $f(x) = x\sin x$ және $g(x) = 2x^2$ функциялары берілген.

1) $g(f(x))$; 2) $f(f(x))$; 3) $f(g(x))$ күрделі функцияларын жазыңдар.

46.21. $f'(x) < 0$ теңсіздігін шешіңдер:

1) $f(x) = x^3 - 3x$; 2) $f(x) = x^2 - x^3$;

3) $f(x) = \sin 2x - x$; 4) $f(x) = -4\cos x + 2x$.

46.22. Функцияның мәндер жиынын табыңдар:

1) $f(x) = \sin 2x - \cos 2x$; 2) $f(x) = \sqrt{3}\sin x - \cos x$;

3) $f(x) = 3\sin 2x + 4\cos 2x$.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

1. $f(x) = x\cos 2x$ болса, онда $f'(x)$ өрнегі:

A) $2x\cos 2x\sin x$; B) $\cos 2x - 2x\sin 2x$;

C) $-2\cos x\sin x$; D) $1 - \cos 2x\sin x$.

2. $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ болса, онда $f'(2)$-тің мәні:

A) $\frac{\sqrt{5}}{2}$; B) $\frac{\sqrt{5}}{3}$; C) $\frac{2}{3}$; D) $2\sqrt{5}$.

3. $f(x) = 4 - (2x^2 - 3)^3$ болса, онда $f'(x)$ өрнегі:

A) $1 - 12x(2x^2 - 3)^2$; B) $-12x(2x^2 - 3)$;

C) $(3 - 4x)^2$; D) $-12x(2x^2 - 3)^2$.

4. $f(x) = \sin^2(3x + 2)$ болса, онда $f'(x)$ өрнегі:
A) $2\cos(6x + 4)$; B) $\sin(6x + 4)$;
C) $3\sin(6x + 4)$; D) $2\sin(6x + 4)$.

5. $f(x) = 5x + \frac{1}{x} + 2\sqrt{x}$ болса, онда $f'(1)$-тің мәні:
A) 7; B) 3; C) 4; D) 5.

6. Дифференциалдың көмегімен табылған $\sqrt{102}$ түбірінің мәні:
A) ≈10,2; B) ≈10,03; C) ≈10,15; D) ≈10,1.

7. $y = 3 - x^2 + x^3$ функциясының графигіне абсциссасы $x_0 = 2$ болатын нүктеде жүргізілген жанаманың бұрышының тангенсі:
A) –12; B) 16; C) 6; D) 8.

8. $f(x) = 2\arcsin x^2$ болса, онда $f'(x)$ өрнегі:
A) $-\frac{2x^2}{\sqrt{1-x^4}}$; B) $-\frac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$; C) $-\frac{2}{\sqrt{1-x^4}}$; D) $\frac{4x}{\sqrt{1-x^4}}$.

9. $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1\frac{5}{6}$ функциясының графигіне (1; 1) нүктесінде жүргізілген жанаманың теңдеуі:
A) $y = 4x - 3$; B) $y = 4x - 2$; C) $y = 4x + 1$; D) $y = 4x + 6$.

10. Материалдық нүкте түзусызықты $s = \frac{2}{3}t^3 - \frac{7}{2}t^2 + 5t + 10$ заңымен қозғалатын болса, онда оның уақыттың қандай мезетінде жылдамдығы нөлге тең болады:
A) $t = 1$ с; B) $t_1 = 2$ с; $t_2 = 3$ с;
C) $t_1 = 1$ с; $t_2 = 2{,}5$ с; D) $t = 2$ с?

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Түзу сызық, түзудің теңдеуі, функция, функцияның графигі, нүктенің аймағы, нүктедегі және жиындағы функцияның үзіліссіздігі.

9 ТУЫНДЫНЫ ҚОЛДАНУ

§47. ФУНКЦИЯНЫҢ ӨСУ ЖӘНЕ КЕМУ АРАЛЫҚТАРЫ

Функцияның өсу және кему белгілерімен танысасыңдар; өсу және кему белгілерін қолданып, есептер шығаруды үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Функция, өсу аралығы, кему аралығы

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР: Функцияның геометриялық кескіні график болады, график — координаталар жазықтығының нүктелер жиынынан тұратын қисық. Өспелі және кемімелі функцияның анықтамасын қолданып, график бойынша функцияның өсу және кему аралықтарын табуға болады.

Осы параграфта туындының көмегімен функцияның өсу және кему аралықтарын табуды қарастырамыз. Ол үшін функцияның өсу және кему аралықтарын табудың жеткілікті шарттарын берейік.

Теорема. ***Егер дифференциалданатын $y = f(x)$ функциясының туындысы X аралығының әрбір нүктесінде $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) болса, онда функция сол X аралығында өспелі (кемімелі) болады.***

Дәлелдеуі. $y = f(x)$ функциясы X аралығында дифференциалданатын функция болсын. X аралығынан кез келген x_1 және x_2 ($x_1 < x_2$) нүктелерін алайық. Лагранж формуласы бойынша

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(a) \qquad (1)$$

теңдігі орындалатын $(x_1; x_2)$ аралығына тиісті a санын алуға болады. x_1 және x_2 нүктелері X аралығына тиісті болғандықтан, a саны да осы аралыққа тиісті.

Егер X аралығына тиісті кез келген x үшін $f'(x) > 0$ теңсіздігі орындалса, онда $f'(a) > 0$. Ұйғарым бойынша $x_1 < x_2$, сондықтан $x_2 - x_1 > 0$, онда (1)-теңдіктен $f(x_2) - f(x_1) > 0$ немесе $f(x_1) < f(x_2)$ шығады. Өспелі функцияның анықтамасы бойынша берілген функция өспелі функция болып табылады.

Егер X аралығына тиісті кез келген x үшін $f'(x) < 0$ теңсіздігі орындалса, онда $f'(a) < 0$. Ұйғарым бойынша $x_2 - x_1 > 0$, онда (1)-теңдіктен $f(x_2) - f(x_1) < 0$ немесе $f(x_1) > f(x_2)$ шығады. Кемімелі функцияның анықтамасы бойынша берілген функция кемімелі функция болып табылады. ◼

Туындының көмегімен кез келген дифференциалданатын $f(x)$ функциясының өсу және кему аралықтарын анықтауға болады.

АЛГОРИТМ $f(x)$ функциясының өсу және кему аралықтарын табу үшін келесі алгоритм қолданылады:

1) функцияның анықталу облысын табу;
2) $f(x)$ функцияның туындысын табу;
3) $f'(x) > 0$ немесе $f'(x) < 0$ теңсіздігін шешу;
4) берілген теорема бойынша $f(x)$ функциясының өсу және кему аралықтарын табу.

Ескерту.

1) Егер $f(x)$ функциясы аралықтың ұштарында үзіліссіз болса, онда ол нүктелер аралыққа тиісті болады;

2) $f'(x) > 0$ және $f'(x) < 0$ теңсіздіктерін шешу үшін жалпыланған интервалдар тәсілін (Дарбу теоремасын) қолданған ыңғайлы: туындысы нөлге тең немесе туындысы болмайтын нүктелер арқылы $f(x)$ функциясының анықталу облысы аралықтарға бөлінеді, ол аралықтардың әрқайсысында туындысы $f'(x)$ таңбасын сақтайды (бұл тұжырым математикалық анализде дәлелденеді). $f'(x)$ туындысының таңбасын кез келген аралықта оның мәнін есептеу арқылы табуға болады.

Функцияның өсу және кему аралықтарын табуға мысалдар қарастырайық.

МЫСАЛ **1.** $f(x) = 4x^2 - 24x$ функциясының өсу және кему аралықтарын табайық.

Шешуі. Функцияның өсу және кему аралықтарын табу үшін берілген алгоритмді қолданамыз:

1) функцияның анықталу облысы барлық нақты сандар жиыны;
2) функцияның туындысын табамыз:
$f'(x) = (4x^2 - 24x)' = 8x - 24$;
3) $f'(x) > 0$ теңсіздігін шешеміз, яғни $8x - 24 > 0$ немесе $x > 3$;
4) $x > 3$ болғанда $f'(x) > 0$, онда теорема бойынша функция $[3; +\infty)$ аралығында өседі; $x < 3$ болғанда $f'(x) < 0$, онда теорема бойынша функция $(-\infty; 3]$ аралығында кемиді.

Жауабы: функция $[3; +\infty)$ аралығында өседі; $(-\infty; 3]$ аралығында кемиді.

МЫСАЛ **2.** $f(x) = -2x^3 + 6x + 5$ функциясының өсу және кему аралықтарын табайық.

Шешуі. Функцияның өсу және кему аралықтарын табу үшін берілген алгоритмді қолданамыз:

1) функцияның анықталу облысы барлық нақты сандар жиыны;
2) функцияның туындысын табамыз: $f'(x) = (-2x^3 + 6x + 5)' = -6x^2 + 6$;
3) $f'(x) > 0$, яғни $-6x^2 + 6 > 0$ теңсіздігін интервалдар әдісімен шешеміз: $6x^2 - 6 = 0$. Бұдан $x = \pm 1$. Сан түзуін үш интервалға бөлеміз және әр интервалдың таңбасын анықтаймыз: $x \le -1$ және $x \ge 1$ болғанда $f'(x) < 0$, ал $-1 \le x < 1$ болғанда $f'(x) > 0$;
4) онда теорема бойынша берілген функция $(-\infty; -1]$ және $[1; +\infty)$ аралықтарында кемиді, $[-1; 1]$ аралығында өседі.

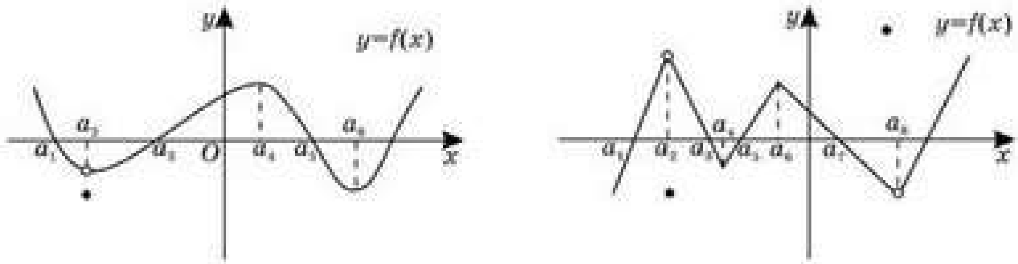
Жауабы: $(-\infty; -1]$ және $[1; +\infty)$ аралықтарында кемиді, $[-1; 1]$ аралығында өседі.

1. Функцияның өспелі немесе кемімелі болатынын қандай белгі бойынша анықтауға болады?
2. Қандай функция үшін әр уақытта өсу және кему аралықтарын табуға болады?

Жаттығулар

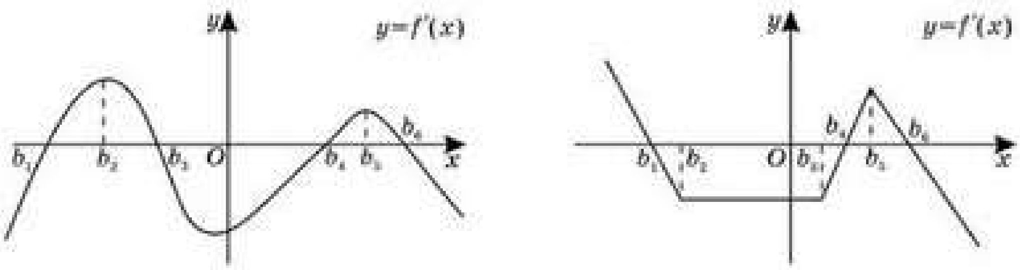
A

47.1. 47.1-суретте $y = f(x)$ функциясының графигі кескінделген. Графиктен функцияның туындысы: 1) оң; 2) теріс болатын аралықтарды көрсетіңдер.



47.1-сурет

47.2. 47.2-суретте $y = f'(x)$ функциясының графигі кескінделген. Графиктің көмегімен функцияның: 1) өсу; 2) кему; 3) тұрақтылық аралықтарын табыңдар.



47.2-сурет

$y = f(x)$ функциясының өсу және кему аралықтарын табыңдар (**47.3—47.5**):

47.3. 1) $f(x) = 7x + 1$; 2) $f(x) = 3 + 8x$;
3) $f(x) = -2x - 13$; 4) $f(x) = 10 - 4x$.

47.4. 1) $f(x) = x^2 - 3x$; 2) $f(x) = 5x + x^2$;
3) $f(x) = 8 - x^3$; 4) $f(x) = x^3 + 1$.

47.5. 1) $f(x) = x^2 - 4$; 2) $f(x) = -1 + x^2$;
3) $f(x) = -27 + x^3$; 4) $f(x) = -x^3 + 1$.

47.6. Анықталу облысында функцияның өспелі болатынын дәлелдеңдер:
1) $f(x) = 14 + 5x$; 2) $f(x) = 4 + x^5$;
3) $f(x) = -\frac{3}{x}$; 4) $f(x) = -\frac{6}{x} + 9$.

47.7. Анықталу облысында функцияның кемімелі болатынын дәлелдеңдер:
1) $f(x) = -2x + 8$; 2) $f(x) = 4 - x^3$;
3) $f(x) = \frac{10}{x}$; 4) $f(x) = \frac{5}{x} - 11$.

47.8. $y = f(x)$ функциясының өсу аралықтарын табыңдар:
1) $f(x) = x^2 - 0,49$; 2) $f(x) = -0,64 + x^2$;
3) $f(x) = -0,027 + x^3$.

47.9. $y = f(x)$ функциясының кему аралықтарын табыңдар:
1) $f(x) = x^2 + 0,5x$; 2) $f(x) = 0,4x - x^2$;
3) $f(x) = -0,64x + x^3$.

B

47.10. Егер $f(x)$ функциясы:
1) $(-\infty; -4]$ аралығында өсетін және $[-4; +\infty)$ аралығында кемитін;
2) $(-\infty; -0,5]$ аралығында кемитін және $[-0,5; +\infty)$ аралығында өсетін болса, онда $y = f(x)$ функциясы туындысының графигінің кескінін салыңдар.

47.11. Егер $f(x)$ функциясы:
1) $(-\infty; 2]$ және $[5,5; +\infty)$ аралықтарында өсетін, $[2; 5,5]$ аралығында кемитін;
2) $(-\infty; -3]$ және $[6; +\infty)$ аралықтарында кемитін, $[-3; 6]$ аралығында өсетін болса, онда $y = f(x)$ функциясы туындысының графигінің кескінін салыңдар.

47.12. $y = f(x)$ функциясының анықталу облысында өспелі болатынын дәлелдеңдер:
1) $f(x) = 5x + \cos x$; 2) $f(x) = x + \sin x$; 3) $f(x) = 2x + \cos x$.

47.13. $y = f(x)$ функциясының анықталу облысында кемімелі болатынын дәлелдеңдер:
1) $f(x) = -3x + \cos x$; 2) $f(x) = \sin x - 4x$; 3) $f(x) = -3x + \cos 2x$.

$y = f(x)$ функциясының өсу және кему аралықтарын табыңдар **(47.14—47.17)**:

47.14. 1) $f(x) = x^2 - 8x + 12$; 2) $f(x) = -x^2 - 8x + 9$;
3) $f(x) = 4x^2 - 4x - 3$; 4) $f(x) = -2x^2 + 7x - 5$.

47.15. 1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 8x^2 - 10;$ 2) $f(x) = x^3 + 3x - 20;$

3) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2{,}5x^2 + 7x + 1;$ 4) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 13.$

47.16. 1) $f(x) = \frac{5}{x-9} - 1;$ 2) $f(x) = 2 - \frac{3}{x+4};$ 3) $f(x) = 3 - \frac{2}{x-2}.$

47.17. 1) $f(x) = -\frac{2+x}{x+3} + 4x;$ 2) $f(x) = 6x - \frac{1-x}{2x+7};$ 3) $f(x) = 2x - \frac{x+3}{x-2}.$

C

47.18. Функцияның өсу және кему аралықтарын табыңдар:

1) $y = x^4 - 3x^2 - 4;$ 2) $y = x^4 - 6x^2 + 8;$

3) $y = 125x^5 - x;$ 4) $y = -0{,}2x^5 + x.$

Функцияны бірсарындылыққа зерттеңдер **(47.19-47.20)**:

47.19. 1) $y = \sqrt{2+3x};$ 2) $y = \sqrt{4x-1};$

3) $y = \frac{1}{x^2 - 4x + 3};$ 4) $y = \frac{1}{-2x^2 + 5x - 3}.$

47.20. 1) $y = x - \sin 2x;$ 2) $y = 2x + \sin x;$

3) $y = x - \cos 2x;$ 4) $y = 3x - \cos x.$

ҚАЙТАЛАУ

47.21. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\sqrt{1200} - 20\sqrt{2{,}43} + 4{,}5\sqrt{0{,}48};$ 2) $\sqrt{\frac{20}{81}} - \frac{2}{9}\sqrt{\frac{45}{49}} - \frac{11}{20}\sqrt{\frac{80}{121}}.$

47.22. Айнымалының қандай мәндерінде өрнектің мағынасы болады:

1) $\sqrt{x^3(2+x)} + \frac{8}{x+2};$ 2) $\frac{7}{\sqrt{36x - x^3}} - \sqrt{x^2 - 16}$?

47.23. $f'(x) < 0$ теңсіздігін шешіңдер:

1) $f(x) = 12x - x^3;$ 2) $f(x) = \sqrt{3}x - 2\cos\frac{x}{2}.$

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Функция, функцияның анықталу облысы, функция графигі, функцияның нөлдері, туынды табу ережелері мен формулалары, функцияның өсу және кему белгілері.

§ 48. ФУНКЦИЯНЫҢ СЫНДЫҚ НҮКТЕЛЕРІ ЖӘНЕ ЭКСТРЕМУМДАРЫ

Функцияның сындық нүктелері, экстремум нүктелері ұғымдарымен танысасыңдар; функцияның сындық нүктелері, экстремум нүктелерін табуды үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Функция, минимум нүктесі, максимум нүктесі, сындық нүкте

Анықтама. *$y = f(x)$ функциясының анықталу облысының барлық $x \neq x_0$ үшін $f(x) > f(x_0)$ ($f(x) < f(x_0)$) теңсіздігі орындалатындай x_0 нүктесінің ($x_0 - \delta$; $x_0 + \delta$) аймағынан δ табылса, онда x_0 нүктесі $y = f(x)$ функциясының* ***минимум (максимум) нүктесі*** *деп аталады.*

Анықтама. *Максимум және минимум нүктелері экстремум нүктелері, функцияның осы нүктелердегі мәні функцияның* ***экстремумдары*** *деп аталады.*

Экстремумның бар болуының қажетті шарты:

Теорема (*Ферма*). ***Егер x_0 нүктесі $y = f(x)$ функциясының экстремум нүктесі болса, онда осы нүктеде $f'(x_0)$ туындысы нөлге тең немесе туындысы болмайды.***

Дәлелдеуі. Төрт жағдай болуы мүмкін: 1) $f'(x_0) > 0$; 2) $f'(x_0) < 0$; 3) $f'(x_0) = 0$; 4) $f'(x_0)$ болмайды.

Бірінші және екінші жағдайлардың орындалмайтынын дәлелдейік.

$f'(x_0) > 0$ болсын. Онда x_0 нүктесінің сол жағында $f(x) < f(x_0)$ және x_0 нүктесінің оң жағында $f(x) > f(x_0)$. Бұл экстремумның анықтамасына қайшы.

Тура осылай екінші жағдай да дәлелденеді. ■

Анықтама. *$f'(x_0)$ туындысы нөлге тең немесе туындысы болмаса, онда x_0 нүктесі* ***функцияның сындық нүктесі*** *деп аталады.*

Анықтама. *$f'(x_0) = 0$ болса, онда x_0 нүктесі* ***функцияның стационар нүктесі*** *деп аталады.*

Ескерту.

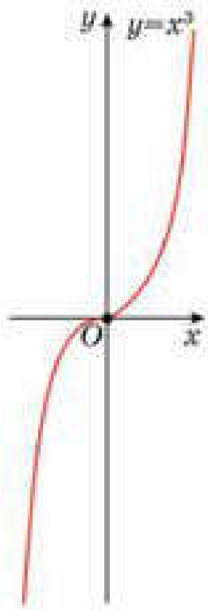
1) Функция сындық нүктесінде анықталған.

2) Функцияның экстремумдары сындық нүктелердің арасынан ізделінеді.

Ферма теоремасы экстремумдардың қажетті шартын тұжырымдайды.

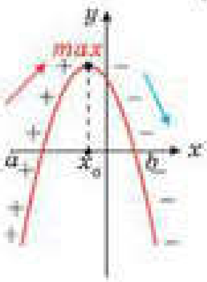
МЫСАЛ

1. $f(x) = x^3$ функциясының туындысы 0 нүктесінде нөлге тең, бірақ бұл нүктеде функцияның экстремумы болмайды (48.1-сурет).

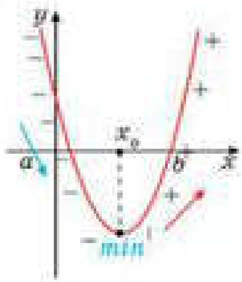


48.1-сурет

Нүктеде экстремумның болуының жеткілікті шартын (максимум және минимум белгісі) қарастырайық.



48.2-сурет



48.3-сурет

Функция максимумының белгісі.

Егер $y = f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде үзіліссіз, $(a;\ x_0)$ интервалында $f'(x) > 0$ және $(x_0;\ b)$ интервалында $f'(x) < 0$ болса, онда x_0 нүктесі функцияның *максимум нүктесі* деп аталады (48.2-сурет).

Функция минимумының белгісі.

Егер $y = f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде үзіліссіз, $(a;\ x_0)$ интервалында $f'(x) < 0$ және $(x_0;\ b)$ интервалында $f'(x) > 0$ болса, онда x_0 нүктесі функцияның *минимум нүктесі* деп аталады (48.3-сурет).

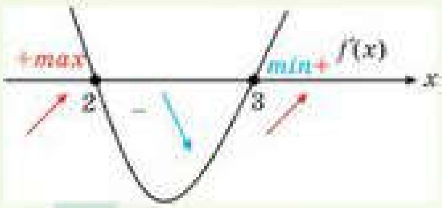
Жеткілікті шартты келесі түрде беруге болады.

Бірінші жеткілікті шарт. x_0 функцияның сындық нүктесі болсын. Егер $f'(x)$ функциясы x_0 нүктесінен өткенде таңбасын плюстен минусқа ауыстырса, онда x_0 нүктесі максимум нүктесі, керісінше жағдайда минимум нүктесі болады. Егер плюстен минусқа өту барысында таңбасын ауыстырмаса, онда x_0 нүктесінде функцияның экстремумы болмайды.

МЫСАЛ

2. $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 14$ функциясының экстремумын табайық.

Шешуі. $f'(x) = 6x^2 - 30x + 36 = 6(x - 2)(x - 3)$, онда сындық нүктелері $x_1 = 2$ және $x_2 = 3$.



48.4-сурет

Функцияның туындысы $x_1 = 2$ нүктесінен өткенде таңбасын плюстен минусқа ауыстырады, демек бұл нүктеде функцияның максимумы бар. Функцияның туындысы $x_2 = 3$ нүктесінен өткенде таңбасын минустан плюске ауыстырады, демек бұл нүктеде функцияның минимумы бар (48.4-сурет).

Функцияның $x_1 = 2$ және $x_2 = 3$ нүктелеріндегі экстремумдарын табамыз: $f_{max}(2) = 14$, $f_{min}(3) = 13$.

Жауабы: $f_{max}(2) = 14$, $f_{min}(3) = 13$.

Екінші жеткілікті шарт. $y = f(x)$ функциясы x_0 нүктесінің аймағында $f'(x)$ бірінші туындысы және x_0 нүктесінің өзінде $f''(x_0)$ екінші ретті туындысы болсын. Егер $f''(x_0) = 0$, $f''(x_0) > 0$ $(f''(x_0) < 0)$ болса, онда x_0 нүктесі $y = f(x)$ функциясының минимум (максимум) нүктесі болады.

Егер $f''(x_0) = 0$ болса, онда бірінші жеткілікті шартты қолдану керек.

Ескерту. Функцияның анықталу облысынан алынған нүктелерде туындысы нөлге тең немесе туындысы болмаса, онда ол нүктелер бірінші туындының *сындық нүктелері* деп аталады.

АЛГОРИТМ

Екінші туындының көмегімен функцияның экстремумдарын табу алгоритмі:

1) функцияның туындысын, яғни $f'(x)$-ты табу;

2) $f'(x) = 0$ теңдігі орындалатындай берілген функцияның сындық нүктелерін табу;

3) функцияның екінші туындысын, яғни $f''(x)$-ты табу;

4) сындық нүктелерде екінші туындының таңбаларын анықтау. Егер $f''(x_0) < 0$ болса, онда x_0 нүктесі максимум; егер $f''(x_0) > 0$ болса, онда x_0 нүктесі минимум нүктесі болады. Егер $f''(x_0) = 0$ болса, онда функцияның экстремумын бірінші туындының көмегімен анықтау керек;

5) экстремум нүктелеріндегі функцияның мәндерін есептеу.

МЫСАЛ

3. $y = -x^2 + 2x + 9$ функциясын экстремумға зерттейік.

Шешуі. Алгоритмді қолданамыз:

1) $y' = -2x + 2$; 2) $-2x + 2 = 0$ немесе $x = 1$ — сындық нүкте;

3) $y'' = -2$; 4) $f''(x_0) < 0$ болғандықтан, $x = 1$ — максимум нүктесі;

5) $y(1) = -1^2 + 2 \cdot 1 + 9 = 10$.

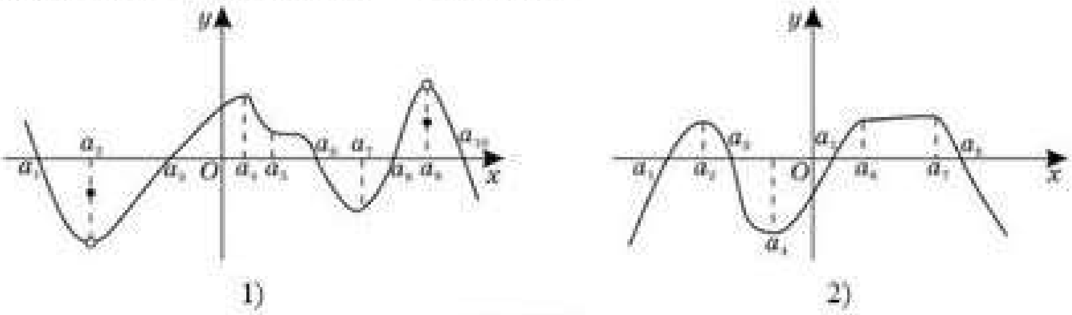
Жауабы: $y_{max}(1) = 10$.

1. Кез келген стационар нүкте сындық нүкте болады деген тұжырым дұрыс па?
2. Кез келген сындық нүктеде экстремум бола ма?

Жаттығулар

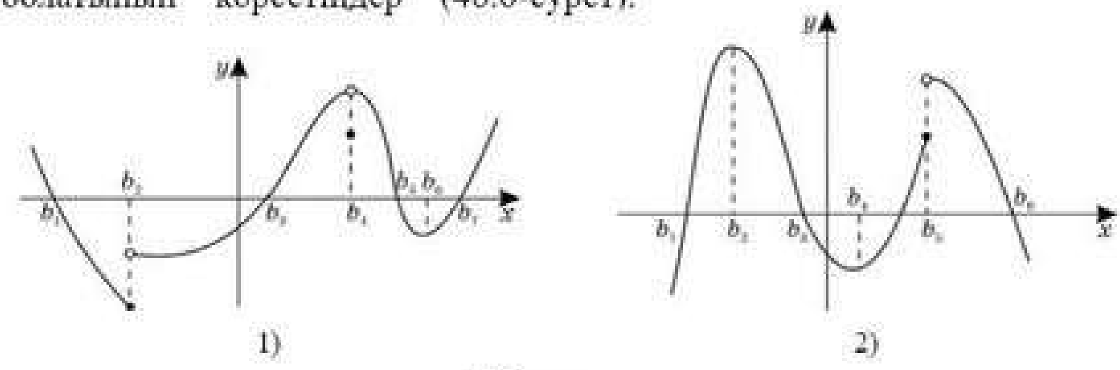
А

48.1. 48.5-суретте $y = f(x)$ функциясының графигі кескінделген. Графиктің көмегімен функцияның өсу және кему аралықтарын, экстремум нүктелерін табыңдар.



48.5-сурет

48.2. $y = f(x)$ функциясының сындық нүктелерін анықтаңдар және олардың қайсылары минимум, қайсылары максимум нүктелері болатынын көрсетіңдер (48.6-сурет).



48.6-сурет

$y = f(x)$ функциясының экстремум нүктелерін табыңдар **(48.3—48.5)**:

48.3. 1) $f(x) = x + 4$; 2) $f(x) = -x + 9$;
3) $f(x) = -5x + 7$; 4) $f(x) = 4x - 11$.

48.4. 1) $f(x) = x^2 - 8x + 15$; 2) $f(x) = -x^2 - 3x + 10$;
3) $f(x) = x^2 + 3x - 18$; 4) $f(x) = -x^2 + 12x - 20$.

48.5. 1) $f(x) = x^3 - 27$; 2) $f(x) = -x^3 - 8$;
3) $f(x) = x^3 + 3x^2$; 4) $f(x) = -x^3 + 12x$.

48.6. $y = f(x)$ функциясының экстремумдарын табыңдар:
1) $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$; 2) $f(x) = -3x^2 + 9x - 4$;
3) $f(x) = 8 + 8x - 6x^2$; 4) $f(x) = 17 + 18x + 9x^2$.

48.7. $y = f(x)$ функциясының сындық нүктелерін табыңдар. Олардың қайсылары: а) минимум нүктелері; ә) максимум нүктелері болатынын анықтаңдар:
1) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$; 2) $f(x) = -x^4 + 0{,}5x^2 + 1$;
3) $f(x) = -2x^4 + x^2 - 1$.

48.8. $y = f(x)$ функциясының сындық нүктелерін табыңдар. Олардың қайсылары: а) минимум нүктелері; ә) максимум нүктелері болатынын анықтаңдар:
1) $f(x) = 5x - x^5$; 2) $f(x) = 0{,}5x^6 + 3x^3$;
3) $f(x) = -x^4 + 2x + 1$.

48.9. 1) $y = 9 - 13x$; 2) $y = -17 + x^3$; 3) $y = 4 + \frac{8}{x}$; 4) $y = -\frac{11}{x} + 21$ функциясының экстремум нүктелері болмайтынын дәлелдеңдер.

B

$y = f(x)$ функциясының экстремум нүктелерін табыңдар **(48.10—48.13)**:

48.10. 1) $f(x) = x^2 - 8x + 12$; 2) $f(x) = -x^2 - 8x + 9$;
3) $f(x) = 4x^2 - 4x - 3$; 4) $f(x) = -2x^2 + 7x - 5$.

48.11. 1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 0{,}25$; 2) $f(x) = x^3 + 0{,}12x$;
3) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 1$; 4) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 11$.

48.12. 1) $f(x) = 0{,}25x^2 - 9x$; 2) $f(x) = -1{,}25x^2 + 13x$;
3) $f(x) = x^3 - 16x + 2$; 4) $f(x) = -x^3 + 9x + 2$.

48.13. 1) $f(x) = 45x - \frac{1}{3}x^3$; 2) $f(x) = -24x + x^3$;
3) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^4$; 4) $f(x) = x^3 - 15x^4$.

$y = f(x)$ функциясының экстремумдарын табыңдар **(48.14-48.15)** :

48.14. 1) $f(x) = \frac{2}{x} + x^2$; 2) $f(x) = -\frac{3}{x} - 3x^2$; 3) $f(x) = -\frac{2}{x} - \frac{x^2}{2}$.

48.15. 1) $f(x) = 5x - \frac{1}{x^2}$; 2) $f(x) = -4x + \frac{1}{x^2}$.

$y = f(x)$ функциясының өсу және кему аралықтарын, экстремумдарын табыңдар **(48.16-48.17)** :

48.16. 1) $f(x) = \frac{5}{x} - \frac{x}{5}$; 2) $f(x) = \frac{6}{x} + \frac{x}{6}$.

48.17. 1) $f(x) = \frac{x}{x+7} + 3$; 2) $f(x) = \frac{x}{x-8} - 6$.

C

48.18. Функцияның өсу және кему аралықтарын, экстремумдарын табыңдар:

1) $y = 0{,}5x^4 - 4x^2 + 20$; 2) $y = -x^4 - 24x^2 - 5$;
3) $y = -2x^4 - 16x^2 + 1$.

48.19. Функцияның экстремум нүктелерін табыңдар:

1) $y = \frac{\sqrt{2+x}}{3-x^2}$; 2) $y = \frac{\sqrt{4-x}}{x^2-8}$; 3) $y = x \operatorname{arctg} x$.

48.20. Функцияның экстремумдарын табыңдар:

1) $y = \frac{x^2 - x - 1}{x^2 - x - 2}$; 2) $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$; 3) $y = \frac{x^2+2}{x^2+x-2}$.

ҚАЙТАЛАУ

48.21. Функцияның туындысын табыңдар:

1) $y = \frac{8x+3}{2-5x}$; 2) $y = \sin^8(1 - 8x)$; 3) $y = \sqrt{\frac{3x}{6+x}}$.

48.22. $y = f(x)$ функциясының графигін салыңдар:

1) $f(x) = -x^3 + 1{,}5$; 2) $f(x) = -x^2 + 8$.

48.23. $f'(x) | 0$ теңсіздігін шешіңдер:

1) $f(x) = 2\cos 9x + 9x$; 2) $f(x) = -x^3 + 12x$.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Функция, функцияның анықталу облысы, функция графигі, функцияның нөлдері, туынды табу ережелері мен формулалары, функцияның дифференциалдануы, функцияның өсу және кему белгілері, сындық нүктелер, функцияның экстремумдары.

§ 49. ФУНКЦИЯ ГРАФИГІНІҢ ДӨҢЕСТІГІ МЕН ОЙЫСТЫҒЫ. ИІЛУ НҮКТЕЛЕРІ

Функция графигінің дөңестігі мен ойыстығы, иілу нүктелері ұғымдарымен танысасыңдар; дөңестік пен ойыстық аралықтарын, иілу нүктелерін табуды үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Функция, дөңестік, ойыстық, иілу нүктесі

Анықтама. *Егер дифференциалданатын функцияның графигі X интервалының кез келген нүктесіне жүргізілген жанамадан төмен орналасса, онда функция X интервалында* ***төменге қарай дөңестелген*** *деп аталады*.

Анықтама. *Егер дифференциалданатын функцияның графигі X интервалының кез келген нүктесіне жүргізілген жанамадан төмен болмаса, онда функция X интервалында* ***жоғары қарай дөңестелген*** *деп аталады*.

Көп жағдайда жоғары қарай дөңестелген функцияны *дөңес функция* (49.1.1-сурет), төменге қарай дөңестелген функцияны *ойыс функция* деп атайды (49.1.2-сурет).

Теорема (графиктің дөңестігі туралы). $[a; b]$ ***кесіндісінде $y = f(x)$ функциясы берілің, кесіндінің ішкі жағында функция екі рет дифференциалданса және $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) болса, онда $y = f(x)$ функциясы графигінің дөңестігі осы кесінд іде төмен (жоғары) қарайды.***

МЫСАЛ

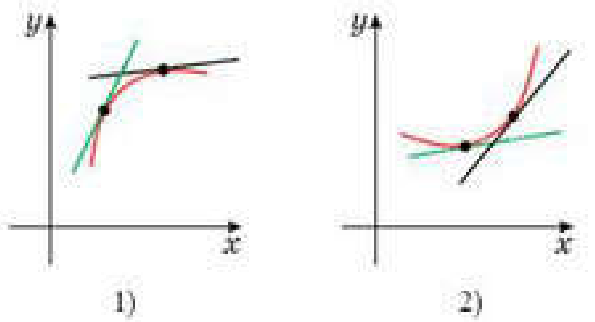
1. $y = x^3 - 6x^2 + 12x + 4$ функциясын дөңестікке зерттейік.

Шешуі. $y'' = 6x - 12$. Бұдан $x > 2$ жағдайында $y'' > 0$ және $x < 2$ жағдайында $y'' < 0$. Демек, $(-\infty; 2)$ аралығында функция графигінің дөңестігі жоғары, $(2; +\infty)$ аралығында төмен қарайды.

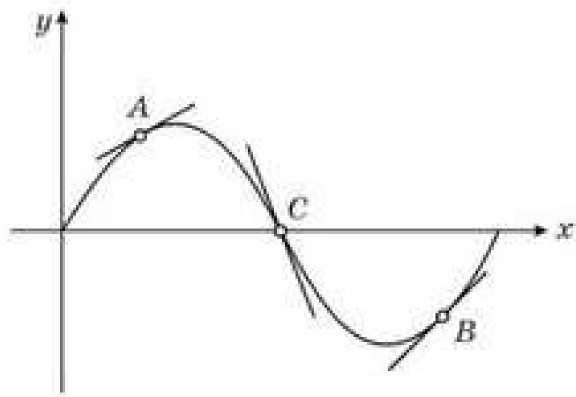
Жауабы: $(-\infty; 2)$ аралығында функция графигінің дөңестігі жоғары, $(2; +\infty)$ аралығында төмен қарайды.

Анықтама. *Егер M нүктесінің кіші аймағында қисық осы нүктеде жүргізілген жанаманың екі жағында орналасса, онда M нүктесі* ***иілу нүктесі*** *деп аталады*.

Мысалы, C — иілу нүктесі. Себебі бұл нүкте үзіліссіз функцияның жоғары және төмен дөңестік облыстарын бөліп тұр (49.2-сурет).



49.1-сурет



49.2-сурет

Теорема. ***Егер x_0 нүктесінде екінші туынды үзіліссіз және нөлге тең болмаса, онда $M(x_0; f(x_0))$ нүктесі иілу нүктесі болмайды.***

Дәлелдеуі. Егер $f''(x_0) > 0$ болса, онда f'' үзіліссіздігінен $f''(x) > 0$ болатындай нүктесінің аймағы бар болады. Демек, бұл нүктеде графиктің дөңестігі төмен карайды. Тура осылай, $f''(x) < 0$ болғанда дөңестік жоғары. Екі жағдайда да функцияның графигі M нүктесі арқылы жүргізілген жанаманың бір жағында орналасқан. ■

Салдар. *x_0 нүктесі иілу нүктесі болу үшін осы нүктедегі екінші туынды нөлге тең болуы немесе I текті үзілісті немесе туындысы болмауы қажет.*

Анықтама мен салдарды қолданып иілу нүктесінің бар болу шарттарын аламыз.

Теорема (иілудің жеткілікті белгісі). ***$y = f(x)$ функциясының x_0 нүктесінің аймағы мен осы нүктенің өзінде екінші туындысы бар болса және x_0 нүктесінде дифференциалданып, екінші туынды x_0 нүктесінен өткенде таңбасын ауыстырса, онда ол нүкте иілу нүктесі болады.***

АЛГОРИТМ

Функция графигінің иілу нүктесін табу алгоритмі:

1) екінші туындыны, яғни y''-ті табу;

2) $y'' = 0$ теңдігі орындалатындай немесе үзілісті болатындай нүктелерді табу немесе ондай нүктелердің болмайтынын көрсету;

3) табылған нүктелер арқылы функцияның анықталу облысын аралықтарға бөліп, әр аралықтағы екінші туындының таңбасын анықтау керек. Егер нүкте дөңестіктің әртүрлі (төмен және жоғары) орналасуының аралықтарын бөлсе, онда осы нүктенің абсциссасы функцияның иілу нүктесі болады;

4) иілу нүктесіндегі функцияның мәнін есептеу.

МЫСАЛ

2. $y = x^3$ функциясының иілу нүктесін табайық.

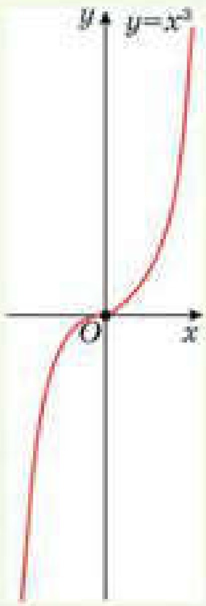
Шешуі. $y = x^3$ функциясының графигін қарастырайық (49.3-сурет). График бойынша функция $x > 0$ жағдайында ойыс және $x < 0$ жағдайда дөңес. Демек, $x = 0$ нүктесі $y = x^3$ функциясының иілу нүктесі болады.

Енді осы тұжырымды алгоритм бойынша анықтайық.

$y'' = 6x$; $y'' = 0$ немесе $x = 0$;

$x > 0$ жағдайда $6x > 0$ және $x < 0$ жағдайында $6x < 0$. $x > 0$ жағдайында $y'' > 0$, $x < 0$ жағдайында $y'' < 0$. Олай болса, $y = x^3$ функциясы $x > 0$ болғанда ойыс және $x < 0$ болғанда дөңес. Сондықтан $x = 0$ нүктесі $y = x^3$ функциясының иілу нүктесі болады.

Жауабы: $x = 0$ — иілу нүктесі.



49.3-сурет

1. Кез келген сындық нүкте иілу нүктесі бола ма?
2. Егер екінші туындысы нөлге тең болмаса, функцияның иілу нүктесі бола ма?

Жаттығулар

А

$y = f(x)$ функциясының графигін салыңдар және графиктің жоғары және төмен дөңестік аралықтарын жазыңдар (**49.1-49.2**):

49.1. 1) $y = \sin 0.5x$; 2) $y = \cos 2x$; 3) $y = x^3$; 4) $y - x^2 + 4x$.

49.2. 1) $y = 0.1x^3 - 1$; 2) $y = 0.5x^3 + 2$;
3) $y = 1 - \sqrt{x - 2}$; 4) $y = \sqrt{x + 1} - 2$.

49.3. Функцияның графигі берілген (49.4-сурет). Функция графигінің дөңестік және ойыстық аралықтарын жазыңдар.

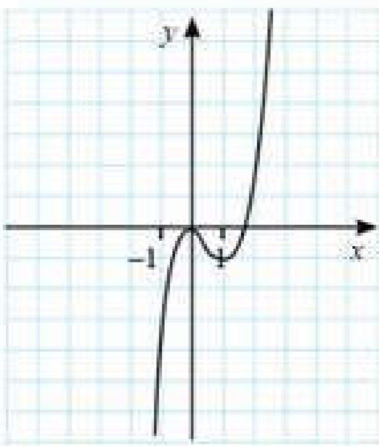
49.4. $y = x^3 - 4x$ функциясы графигінің жоғары және төмен бағытталған дөңестік аралықтарын жазыңдар, иілу нүктесінің координаталарын табыңдар.

49.5. $y = x^3 + 5x - 3$ функциясы графигінің жоғары және төмен бағытталған дөңестік аралықтарын жазыңдар.

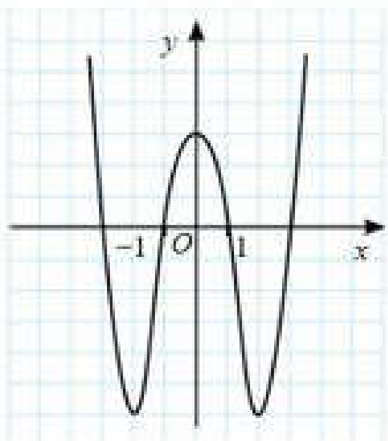
49.6. $y = (x - 2)(x + 1)^2$ функциясының иілу нүктелерін табыңдар.

49.7. Функция графигінің кескіні берілген (49.5-сурет). График бойынша жоғары және төмен дөңестік аралықтарын, иілу нүктесінің координаталарын табыңдар.

49.8. Функцияның иілу нүктелерін табыңдар:
1) $y = (x - 4)^5 + 4(x + 1)$; 2) $y = x^4 - 8x^3 + 24x^2$.



49.4-сурет



49.5-сурет

B

49.9. Функция графигінің жоғары және төмен дөңестік аралықтарын, иілу нүктелерін табыңдар:

1) $y = \frac{x+2}{x-1}$; 2) $y = \frac{3x+2}{2-x}$; 3) $y = \frac{3x-2}{2+x}$.

49.10. Функция графигінің дөңестік және ойыстық аралықтарын табыңдар:

1) $y = \frac{x^3}{x^2-1}$; 2) $y = \frac{x^3}{4-x^2}$; 3) $y = \frac{x^3+2}{9-x^2}$.

49.11. Функцияның графигін салыңдар. Графиктің жоғары және төмен дөңестік аралықтарын, иілу нүктелерін табыңдар:

1) $y = |\sin x|$; 2) $y = |\cos 0{,}5\,x|$; 3) $y = |\operatorname{tg} 2x|$; 4) $y = |\operatorname{ctg} 0{,}5\,x|$.

C

49.12. Функция графигінің иілу нүктелерінің координаталарын табыңдар:

1) $y = \frac{2x}{x^2+1}$; 2) $y = x + \operatorname{arctg} x$; 3) $y = 2x - \operatorname{arctg} x$.

49.13. 1) $y = x\sqrt{2-x}$; 2) $y = \sqrt{4+x}$ функциясы графигінің дөңестігі жоғары бағытталған аралықтарын табыңдар.

49.14. $y = 2x^2 - x^4$ функциясының экстремумдарын және графигінің иілу нүктелерінің координаталарын табыңдар. Функция графигінің кескінін салыңдар.

ҚАЙТАЛАУ

49.15. Функцияның бірсарындылық аралықтарын табыңдар:

1) $y = 2 + 2x^2 - x^4$; 2) $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$; 3) $y = \frac{x}{4} - \frac{4}{x}$.

49.16. Функцияның максимум және минимум нүктелерін табыңдар:

1) $y = 2 + 2x^2 - x^4$; 2) $y = -\frac{1}{x^3} + \frac{3}{x}$; 3) $y = \frac{x}{4} - \frac{4}{x}$.

49.17. Функция графигінің асимптоталарын табыңдар:

1) $y = 2 + x^2 - 5x^4$; 2) $y = \frac{2x^3}{1-x^2}$; 3) $y = \frac{5}{x} - \frac{x}{5}$.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Функция, функцияның анықталу облысы, функция графигі, функцияның нөлдері, туынды табу ережелері мен формулалары, функцияның дифференциалдануы, функцияның өсу және кему белгілері, сындық нүктелер, экстремум нүктелері және функцияның экстремумдары, функция графигінің дөңестігі мен ойыстығы, иілу нүктелері, функция графигінің асимптоталары.

§ 50. ТУЫНДЫЛАРДЫҢ КӨМЕГІМЕН ФУНКЦИЯНЫ ЗЕРТТЕУ ЖӘНЕ ФУНКЦИЯНЫҢ ГРАФИГІН САЛУ

Туындының көмегімен функцияны зерттеуді және графигін салуды үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Функция, функцияның қасиеттері, функцияның графигі

Туындылардың көмегімен функцияны зерттеу және графигін салуды мысал арқылы қарастырайық.

МЫСАЛ $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ функциясын зерттеп, графигін салайық.

Шешуі. 1) Анықталу облысы $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

2) Функцияның жұптылығын анықтаймыз. Берілген функция үшін $f(-x) \neq f(x)$ және $f(-x) \neq -f(x)$. Ендеше функция жұп та емес, тақ та емес.

3) Функцияның периодтылығын анықтаймыз. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ — периодты емес.

4) Функцияның нөлдері және таңбатұрақтылық аралықтарын табамыз. Ол үшін $\dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = 0$ теңдеуін шешеміз. Алымының дискриминанты теріс, сондықтан $x < 1$ болғанда $f(x) < 0$, $x > 1$ болғанда $f(x) > 0$.

5) Функцияның үзілісті нүктелерін және осы нүктелердің аймағында функция графигінің қалай орналасқанын анықтаймыз. $x = 1$ нүктесі функцияның анықталу облысына тиісті емес.

$\lim\limits_{x \to 1-0} \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 1+0} \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = +\infty$. Демек, $x = 1$ үзіліс нүктесі болады.

6) Асимптоталарды табамыз. Ол үшін $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ және $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - kx]$ формулаларын қолданамыз.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = 1$ және $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = 1$, яғни екі жағдайда да $k = 1$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} - x\right) = -1$ және $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} - x\right) = -1$, яғни $b = -1$.

Функция графигінің $x = 1$ вертикаль асимптотасы және $y = x - 1$ теңдеуімен анықталатын көлбеу асимптотасы бар (мұнда $x \to +\infty$ және $x \to -\infty$).

7) Функцияның өсу және кему аралықтарын, экстремумдарын табамыз.

$y' = \dfrac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2} = \dfrac{x(x - 2)}{(x - 1)^2}$. $y' = 0$ болғанда $x = 0$ және $x = 2$. Кесте құрамыз (27-кесте).

27-кесте

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; 2)$	2	$(2; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	болмайды	–	0	+
$f(x)$	өседі	–2	кемиді	анықталмаған	кемиді	2	өседі
	↗	max	↘	үзілісті	↘	min	↗

8) Дөңестікке зерттейміз. $f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$. $D(f)$-дан алынған кез келген x үшін $f''(x) \neq 0$, демек, иілу нүктесі болмайды. Сонда $x < 1$ жағдайында $f''(x) < 0$ және $x > 1$ жағдайында $f''(x) > 0$, яғни $x < 1$ болғанда функцияның дөңестігі жоғары, $x > 1$ болғанда төмен қарайды. Кесте құрамыз (28-кесте):

28-кесте

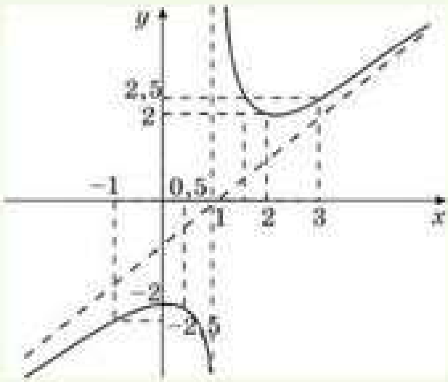
x	$(-\infty; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$f''(x)$	–	болмайды	+
$f(x)$	дөңестігі жоғары қараған	анықталмаған	дөңестігі төмен қараған
		үзілісті	

9) Функцияның кейбір нүктелері мәндерінің кестесін құрамыз (29-кесте):

29-кесте

x	–1	0	0,5	1,5	2	3
y	–2,5	–2	–2,5	2,5	2	2,5

10. Зерттеу бойынша функцияның графигін саламыз (50.1-сурет).



50.1-сурет

1. Туындылардың көмегімен функцияны зерттеу жолын айтыңдар. Туындылардың көмегімен функцияны зерттеу алгоритмін құрыңдар.
2. Функцияны зерттеу барысында 9-пункттің қандай қажеттігі бар?

Жаттығулар

А

50.1. $y = f(x)$ функциясының анықталу облысын табыңдар:

1) $f(x) = x^3 - 9x + 40$; 2) $f(x) = \frac{x-8}{10-x}$.

50.2. $y = f(x)$ функциясы туындысының анықталу облысын табыңдар:

1) $f(x) = \sqrt{x^2 - 0{,}09}$; 2) $f(x) = \dfrac{x}{16 + x^2}$;

3) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2{,}25}$; 4) $f(x) = \dfrac{x}{9 - x^2}$.

50.3. $y = f(x)$ функциясының мәндер жиынын табыңдар:

1) $f(x) = x^2 - 9x + 8$; 2) $f(x) = \dfrac{5}{x} - 4$;

3) $f(x) = \sqrt{6 - x} + 4$; 4) $f(x) = 3 - 7\sin 3x$.

50.4. $y = f(x)$ функциясы графигінің координаталар осьтерімен қиылысу нүктелерінің координаталарын табыңдар:

1) $f(x) = 7x^2 + x$; 2) $f(x) = -x^4 + 64$;

3) $f(x) = -5x^3 - 20x$; 4) $f(x) = -3x^5 + 5x^3$.

50.5. $y = f(x)$ функциясының экстремум нүктелерін табыңдар:

1) $f(x) = 5\sin 8x - 6$; 2) $f(x) = -3\cos 10x + 1$;

3) $f(x) = 2\cos 3x - 1$.

50.6. $y = f(x)$ функциясының өсу және кему аралықтарын табыңдар :

1) $f(x) = 4x^3 - 12x + 5$; 2) $f(x) = -\dfrac{9}{2 - x}$;

3) $f(x) = 2x^3 - 12x - 1$.

$y = f(x)$ функциясын зерттеп графигін салыңдар (**50.7–50.10**):

50.7. 1) $f(x) = -8x + 1{,}5$; 2) $f(x) = 1{,}2x - 10$;

3) $f(x) = -6x^2 + x + 1$; 4) $f(x) = 3x^2 - 7x$.

50.8. 1) $f(x) = 48x - x^3$; 2) $f(x) = -x^3 - 27x$;

3) $f(x) = x^4 - 1$; 4) $f(x) = -x^4 + 1$.

50.9. 1) $f(x) = 4x - \dfrac{1}{3}x^3$; 2) $f(x) = -x^3 - 6x$;

3) $f(x) = 2x^4 - 8x$; 4) $f(x) = -x^4 + 4$.

50.10. 1) $f(x) = 18x - x^3$; 2) $f(x) = -x^3 - 6x$;

3) $f(x) = x^4 - 16$; 4) $f(x) = -x^4 + 4x$.

B

$y = f(x)$ функциясын зерттеңдер және графигін салыңдар (**50.11–50.14**):

50.11. 1) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - x^2$; 2) $f(x) = -3x^3 + 2x^2$; 3) $f(x) = -x^3 + 4x^2$.

50.12. 1) $f(x) = \dfrac{10}{5 - x}$; 2) $f(x) = \dfrac{4}{3 + x}$; 3) $f(x) = \dfrac{2}{1 + 2x}$.

50.13. 1) $f(x) = \dfrac{x}{2x + 1}$; 2) $f(x) = \dfrac{x}{1 - 5x}$; 3) $f(x) = \dfrac{2x}{1 - 2x}$.

50.14. 1) $f(x) = 2 + \sqrt{4 + x}$; 2) $f(x) = -3 + \sqrt{2 - x}$; 3) $f(x) = \sqrt{3 + x} - 2$.

$y = f(x)$ функциясының графигін салыңдар (**50.15—50.17**):

50.15. 1) $y = \frac{1 + 2x}{x^2 + 2}$; 2) $y = \frac{2 - x}{x^2 + 5}$; 3) $y = \frac{3 + x}{x^2 + 3}$.

50.16. 1) $y = \frac{9 + x^2}{x^2 - 9}$; 2) $y = \frac{3 + x^2}{x^2 - 4}$; 3) $y = \frac{3 - 2x^2}{x^2 - 1}$.

50.17. 1) $y = \frac{x^3}{x + 1}$; 2) $y = \frac{x^3}{1 - x}$; 3) $y = \frac{2x^3}{x - 1}$; 4) $y = \frac{3x^3}{2 - x}$.

C

50.18. Функцияны зерттеңдер және графигін салыңдар:
1) $y = x^2 \cdot \sqrt{3 - x}$; 2) $y = x^2 \cdot \sqrt{2 + x}$;
3) $y = x^2 \cdot \sqrt{4 - x}$; 4) $y = x^2 \cdot \sqrt{3 + x}$.

50.19. Функцияны бірсарындылыққа зерттеңдер:
1) $y = \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 + x + 1}$; 2) $y = \sqrt{x - x^2}$;
3) $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$; 4) $y = \sqrt{2x - x^2}$.

50.20. 1) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ функциясының графигін салыңдар. a параметрінің қандай мәндерінде $x^4 - 2x^2 + 3 = a$ теңдеуінің түбірлері болмайды?
2) $f(x) = x^4 - x^2 + 1$ функциясының графигін салыңдар. a параметрінің қандай мәндерінде $x^4 - x^2 + 1 = a$ теңдеуінің түбірлері болмайды?
3) $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 8$ функциясының графигін салыңдар. a параметрінің қандай мәндерінде $-x^4 + 2x^2 + 8 = a$ теңдеуінің үш түбірі болады?

50.21. Функцияны зерттеңдер және графигін салыңдар:
1) $y = x + \sin x$; 2) $y = \cos 2x - \sin x$;
3) $y = \sin^2 x + \cos x$; 4) $y = \sin 2x + \cos x$.

ҚАЙТАЛАУ

50.22. Функцияның мәнін табыңдар:
1) $y = x^2 - 2$, мұндағы $x = 0$; -3; $0{,}3$;
2) $y = \sin 0{,}5x$, мұндағы $x = 300$; π; 4π.

50.23. Теңдеуді шешіңдер:
1) $\sin^2 x - \cos x = 1$; 2) $\sin^2 x + 2\cos x = 0$.

50.24. Теңсіздікті шешіңдер:

1) $-3x^2 - 2x + 8 \geq 0$; 2) $12x^2 + x - 1 < 0$.

50.25. $y = f(x)$ функциясының ең үлкен немесе ең кіші мәнін табыңдар:

1) $f(x) = x^2 - 8x + 14$; 2) $f(x) = 8x^2 - 5x - 3$.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Функция, функцияның анықталу облысы, функция графигі, функцияның нөлдері, туынды табу ережелері мен формулалары, функцияның өсу және кему белгілері, сындық нүктелер, экстремум нүктелері және функцияның экстремумдары.

§51. ФУНКЦИЯНЫҢ КЕСІНДІДЕГІ ЕҢ ҮЛКЕН ЖӘНЕ ЕҢ КІШІ МӘНДЕРІ

Функцияның ең үлкен және ең кіші мәндері ұғымымен танысасыңдар; туындының көмегімен функцияның ең үлкен және ең кіші мәндерін табуды, ең үлкен және ең кіші мәндермен байланысты қолданбалы есептерді шығаруды үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Функция, функцияның ең үлкен мәні, функцияның ең кіші мәні

Анықтама. *Кез келген $x \in X$, $x \neq x_0$ болғанда, $f(x) \leq f(x_0)$ теңсіздігі орындалса, онда $f(x_0)$ мәнін X аралығындағы $f(x)$* ***функциясының ең үлкен мәні*** *деп атайды.*

Белгіленуі: $\max\limits_{x \in X} y = f(x_0)$.

Анықтама. *Кез келген $x \in X$, $x \neq x_0$ болғанда, $f(x) \geq f(x_0)$ теңсіздігі орындалса, онда $f(x_0)$ мәнін X аралығындағы $f(x)$* ***функциясының ең кіші мәні*** *деп атайды.*

Белгіленуі: $\max\limits_{x \in X} y = f(x_0)$.

Функция көп жағдайда өзінің ең үлкен (ең кіші) мәнін X аралығының бір стационар нүктесінде қабылдайды. Сонымен қатар, функция өзінің ең үлкен және ең кіші мәнін функцияның анықталған, бірақ бірінші туындысы болмайтын нүктеде қабылдауы мүмкін.

Ең үлкен және ең кіші мән қандай да бір X аралығында немесе функцияның анықталу облысында немесе анықталу облысының қандай да бір бөлігінде ізделінеді. X интервалы $[a; b]$ кесіндісі, $(a; b)$, $(a; b]$, $[a; b)$, $(-\infty; a)$, $(-\infty; a]$, $(a; +\infty)$, $[a; +\infty)$, $(-\infty; +\infty)$ аралықтары болуы мүмкін.

$y = f(x)$ функциясы $[a; b]$ кесіндісінде өзінің ең үлкен немесе ең кіші мәнін сындық нүктелерде немесе $[a; b]$ кесіндісінің ұштарында қабылдайды.

Теорема (функцияның үзіліссіздігі туралы Вейерштрасс теоремасы). ***Егер $y = f(x)$ функциясы тұйықталған $[a; b]$ аралығында үзіліссіз***

болса, онда осы аралықтағы мәндердің арасында функцияның ең үлкен және ең кіші мәндері болады .

Теореманың дәлелдемесі жоғары математика курсында қарастырылады. Теореманың ақиқаттығын мысалдар арқылы көрсетейік.

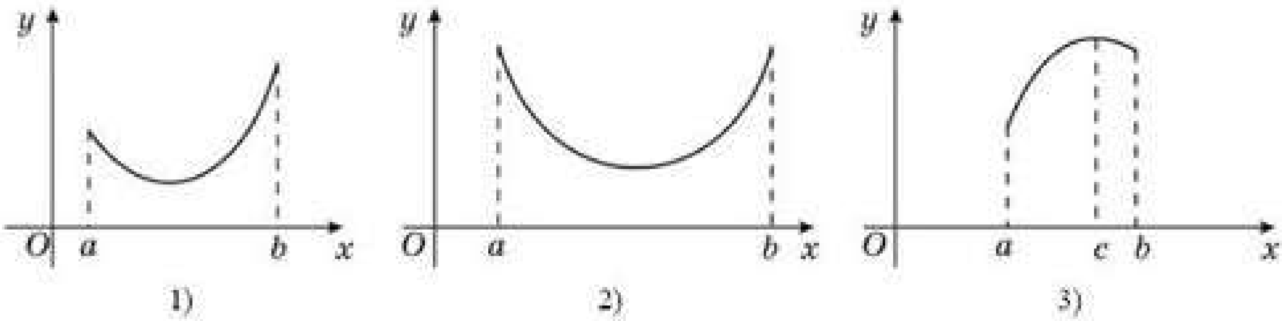
МЫСАЛ 1. $y = f(x)$ функциясы $[a; b]$ кесіндісінде анықталған және үзіліссіз болсын. Функцияның ең үлкен және ең кіші мәндерін қабылдайтын нүктелерді және осы нүктелердегі мәндерін табайық.

Шешуі . Функцияның ең үлкен мәні үшін екі жағдай бар:

1) ең үлкен мән $[a; b]$ кесіндісінің бір ұшында (51.1.1-сурет) немесе екі ұшында да болуы мүмкін (51.1.2-сурет).

2) ең үлкен мән $[a; b]$ кесіндісінің ішкі c нүктесінде болуы мүмкін (51.1.3-сурет).

Екінші жағдайда функцияның c нүктесіндегі мәні осы нүктенің аймағындағы функцияның мәнінен кіші емес, сондықтан c нүктесі $y = f(x)$ функциясы үшін максимум нүктесі болады. Онда c нүктесінде $y = f(x)$ функциясы дифференциалданбайды немесе туындысы нөлге тең болады. Тура осылай функцияның $[a; b]$ кесіндісіндегі ең кіші мәні туралы тұжырым жасалады.



51.1-сурет

Осы есептің шешуінен функцияның кесіндідегі ең үлкен және ең кіші мәндерін табудың төмендегі алгоритмі шығады.

АЛГОРИТМ $[a; b]$ кесіндісінде $y = f(x)$ үзіліссіз функциясының ең үлкен және ең кіші мәндерін табу алгоритмі:

1) функцияның туындысын және сындық нүктелерін табу;

2) табылған сындық нүктелердің арасынан $[a; b]$ кесіндісіне тиісті нүктелерді алу;

3) кесіндінің ұштарындағы функцияның мәндерін, яғни $f(a)$ және $f(b)$-ті табу;

4) $[a; b]$ кесіндісіне тиісті туындысы нөлге тең болатын нүктелерде функцияның мәндерін табу;

5) туындысы болмайтын, бірақ $[a; b]$ кесіндісіне тиісті нүктелерде функцияның мәндерін табу;

6) табылған мәндердің арасынан ең кіші және ең үлкен мәндерді анықтау.

МЫСАЛ 2. $[-4; 0]$ кесіндісінде $y = x^2 + 6x + 8$ функциясының ең үлкен және ең кіші мәндерін табайық.

Шешуі . Алгоритмді қолданамыз. $f'(x) = 2x + 6$. Онда $2x + 6 = 0$ немесе $x = -3$. Бұл сындық нүкте. Енді кесіндінің ұштары мен сындық нүктедегі функцияның мәндерін есептейміз: $f(-3) = -1$ және $f(-4) = 0$, $f(0) = 8$. Функцияның ең кіші мәні -1, ең үлкен мәні 8.

Жауабы : -1; 8.

МЫСАЛ **3.** Ұзындығы $2p$ сыммен қоршау үшін тіктөртбұрышты алаңның ең үлкен ауданы қандай болуы керек?

Шешуі . Алаңның ұзындығын x арқылы белгілесек, ені $p - x$ болады да ауданың формуласын былай жазамыз:

$$S = x(p - x) = px - x^2.$$

$S' = p - 2x = 0$, бұдан $x = \frac{p}{2}$. x айнымалысы 0-ден p-ға дейінгі мәндерді қабылдайды: $S(0) = S(p) = 0$ және $S\left(\frac{p}{2}\right) = \frac{p^2}{4} > 0$. Периметрі $2p$ болатын тіктөртбұрыштардың ішінде квадраттың ауданы ең үлкен болады. Сондықтан квадрат қабырғасының ұзындығы $\frac{p}{2}$, ауданы $\frac{p^2}{4}$.

Жауабы : $\frac{p^2}{4}$.

?

1. Функцияның ең кіші мәні оның минимумымен, ең үлкен мәні оның максимумымен әр уақытта бірдей бола ма? Мысал келтіріңдер.
2. Функцияның ең кіші және ең үлкен мәндерін табу үшін неліктен функцияның туындысы мен сындық нүктелерін табу қажет?

Жаттығулар

А

Аралықтағы функцияның ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңдар (**51.1—51.5**):

51.1. 1) $f(x) = 7x - 14$, $[0; 4]$; 2) $f(x) = -0{,}2x + 0{,}4$, $[1; 3]$.

51.2. 1) $f(x) = \frac{6}{x}$, $[1; 6]$; 2) $f(x) = -\frac{5}{x}$, $[-5; -1]$.

51.3. 1) $f(x) = \sqrt{x}$, $[0; 9]$; 2) $f(x) = \sqrt{x}$, $[1; 4]$.

51.4. 1) $f(x) = 2\sin x$, $[-0{,}5\pi; \pi]$; 2) $f(x) = -2\cos x$, $[-\pi; 0{,}5\pi]$.

51.5. 1) $f(x) = 4x^2$, $[-1; 1]$; 2) $f(x) = -2x^3$, $[-1; 1]$.

51.6. 1) 25 санын көбейтіндісі ең үлкен сан болатындай екі қосылғышқа жіктеңдер ;
2) 16 санын квадраттарының қосындысы ең кіші сан болатындай екі қосылғышқа жіктеңдер ;
3) 147 санын бір қосылғышының екінші қосылғыштан алынған квадрат түбірге көбейтіндісі ең үлкен сан болатындай қандай екі қосылғыштың қосындысы түрінде беруге болады?

Берілген кесіндідегі функцияның ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңдар (**51.7—51.9**):

51.7. 1) $f(x) = x^2 - 8x + 17$, $[-1;\ 2]$; 2) $f(x) = x^2 - 4x + 3$, $[1;\ 2]$.

51.8. 1) $f(x) = 2x^2 - 5x + 6$, $[-2;\ 4]$; 2) $f(x) = -3x^2 - x + 5$, $[0;\ 3]$.

51.9. 1) $f(x) = x^3 + 8$, $[-3;\ -1]$; 2) $f(x) = -x^3 + 27$, $[-2;\ 2]$.

B

Берілген аралықтағы функцияның ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңдар (**51.10—51.13**):

51.10. 1) $f(x) = x^3 - 12x + 1$, $[0;\ 1]$; 2) $f(x) = -x^3 + 6x - 5$, $[-1;\ 0]$.

51.11. 1) $f(x) = x^4 - 8x - 2$, $[-2;\ -1]$; 2) $f(x) = -x^4 + 4x^3 + 3$, $[0;\ 4]$.

51.12. 1) $f(x) = x + \frac{4}{x}$, $[1;\ 5]$; 2) $f(x) = x^2 - \frac{8}{x}$, $[0{,}5;\ 2]$.

51.13. 1) $f(x) = x + \sqrt{x}$, $[1;\ 4]$; 2) $f(x) = x - \frac{1}{\sqrt{x}}$, $[4;\ 9]$.

51.14. 1) Тіктөртбұрыштың ауданы 25 см^2. Тіктөртбұрыштың периметрі ең кіші болу үшін оның қабырғаларының ұзындықтары қандай болуы қажет?
2) Тіктөртбұрыш пішінді алаңның ауданы 3600 м^2. Алаңды қоршауға аз материал жіберу үшін алаңның өлшемдері қандай болуы қажет?
3) Сүйір бұрышы 30°-қа тең параллелограмм пішіндес жер телімінің ауданы 8 м^2. Жер телімі периметрінің ең кіші мәнін табыңдар.

C

51.15. 1) Периметрі P-ға тең барлық теңбүйірлі үшбұрыштардың арасынан ауданы ең үлкені тең қабырғалы үшбұрыш болатынын дәлелдеңдер.
2) Ауданы 800 м^2 тіктөртбұрыш пішінді жер телімі үш жағынан қоршалған. Қоршаудың ең кіші ұзындығын табыңдар.
3) Сүйір бұрышы 30°-қа тең тікбұрышты трапеция пішіндес жер телімінің периметрі 24 м. Жер телімі ауданының ең үлкен мәнін табыңдар.
4) Фигура бір қабырғасы дөңгелектің диаметріне тең тіктөртбұрыш пен жарты дөңгелектен құралған. Фигураның ауданы 12,5 м^2-ге тең. Жартыдөңгелек радиусының қандай мәнінде фигураның периметрі ең кіші болады?

Аралықтағы функцияның ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңдар **(51.16—51.18)** :

51.16. 1) $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, [1; 9]; 2) $f(x) = \sqrt{x(7-x)}$, [1; 3].

51.17. 1) $f(x) = 2 + \dfrac{6x}{x^2+4}$, [0; 1]; 2) $f(x) = -1 - \dfrac{x-1}{x^2+2}$, [0; 1].

51.18. 1) $f(x) = |x^3 - 1| - 3x$, [–1; 3];

2) $f(x) = x^2 - 4x + 5 + |1 - x|$, [0; 4].

ҚАЙТАЛАУ

51.19. Функцияның туындысын табыңдар:

1) $y = (3x - 10)^5 + 15x^2$; 2) $y = 2(5x^2 - 9x)^4 - 10x^6$.

51.20. $y = f(x)$ графигін салыңдар, өсу және кему аралықтарын көрсетіңдер:

1) $f(x) = -x^2 - 3x$; 2) $f(x) = x^3 + 3x$.

51.21. Теңсіздікті қанағаттандыратын ең үлкен бүтін санды табыңдар:

1) $-10x + 40 > 0$; 2) $-x^2 + 8x > 0$; 3) $-x^2 + 5x + 2 > 0$.

51.22. Теңсіздікті қанағаттандыратын ең кіші бүтін санды табыңдар:

1) $(x+2)^2(x-3)(x-5) < 0$; 2) $(x+4)(x-3)(x-6)^2$ m 0;

3) $(x-2)^2(x-3)^2(x+5) < 0$; 4) $(x-1)^3(x+2)(x-6)^2 < 0$.

51.23. Екі ойын сүйегі лақтырылған. Түскен ұпайлардың көбейтіндісінің мәні: 1) 4; 2) 5 санына тең болуының ықтималдығын табыңдар.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

1. a-ның қандай мәндерінде $f(x) = x^3 + 3x^2 + 6ax + 5$ функциясы x-тің кез келген мәнінде өседі:

A) R; B) $(-\infty; -1]$ және $[0; +\infty)$; C) $[0{,}5; +\infty)$; D) $[-0{,}5; 1]$?

2. $y = 12 + x^5 - 5x^4 + 5x^3$ функциясының өсу аралықтарының ұзындығы:

A) 1; B) 2; C) 3; D) 3,5.

3. [0,5; 1] кесіндіге тиісті болатын $y = 2x + \dfrac{1}{x^3}$ функциясының ең кіші мәні:

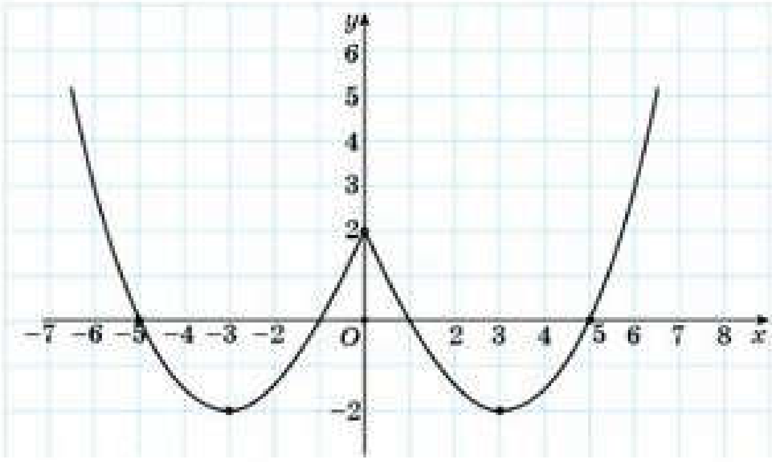
A) 1; B) 3; C) 6,5; D) 9,5.

4. $y = (x-2)^2(x-4)^2$ функциясының экстремум нүктелерінің саны:

A) 1; B) 2; C) 3; D) 4.

5. $y = 3x + 1$ түзуіне параллель болатын $y = x - \frac{2}{x}$ функциясының графигіне жүргізілген жанаманың теңдеуі:
A) $y = 3x + 2$ немесе $y = 3x + 4$; B) $y = 3 - 3x$;
C) $y = 3x - 4$; D) $y = 3 - 3x$, $y = 4 - 3x$.

6. 51.2-суретте $y = f'(x)$ функциясының графигі берілген. $y = f(x)$ функциясының минимум нүктелерін табыңдар:



51.2-сурет

A) $\{-3; 3\}$; B) $\{-5; 1\}$; C) $\{-1; 5\}$; D) $\{-5; -1; 1; 5\}$.

7. 51.2-суретте берілген $y = f'(x)$ функциясының графигі бойынша $f(x)$ функциясының кему аралықтарының ұзындығының мәнін табыңдар:
A) 2; B) 4; C) 6; D) 8.

8. Координаталық осьтермен және абсциссасы $x_0 = 1$ болатын нүкте арқылы $y = \frac{x^3 + 1}{x^2}$ функциясының графигіне жүргізілген жанамамен шектелген үшбұрыштың ауданын табыңдар:
A) 4,5; B) 4; C) 3,5; D) 3.

9. $y = \frac{4}{x} + \frac{x}{4}$ функциясының өсу аралықтары:
A) $\varnothing$; B) $(-\infty; -4]$ және $[4; +\infty)$; C) $(-\infty; 0)$; D) $(4; +\infty)$.

10. $f'(x) = (x^2 - 4)(x + 5)^2(x - 3)^2$ болса, онда $f(x)$ функциясының кему аралықтарының ұзындығының мәнін табыңдар:
A) 2; B) 2,5; C) 4; D) 8.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Вариациялық қатар, ықтималдық, ықтималдықты табудың ережелері, дискретті және үзіліссіз шамалар.

10 КЕЗДЕЙСОҚ ШАМАЛАР ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ САНДЫҚ СИПАТТАМАЛАРЫ

§ 52. КЕЗДЕЙСОҚ ШАМАЛАР. ДИСКРЕТТІ КЕЗДЕЙСОҚ ШАМАЛАР. ҮЗІЛІССІЗ КЕЗДЕЙСОҚ ШАМАЛАР. ДИСКРЕТТІ КЕЗДЕЙСОҚ ШАМАНЫҢ ҮЛЕСТІРІМ ЗАҢЫ

Сендер кездейсоқ шама, дискретті кездейсоқ шама, үзіліссіз кездейсоқ шама ұғымдарымен танысасыңдар; дискретті және үзіліссіз кездейсоқ шамаларды ажырата білуді, кейбір кездейсоқ шамалардың үлестірім заңының кестесін құруды үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Кездейсоқ шама, дискретті кездейсоқ шама, үзіліссіз кездейсоқ шама, ықтималдық

Кездейсоқ шама ұғымы ықтималдықтар теориясының маңызды ұғымдарының бірі болып табылады.

МЫСАЛ

1. Тәжірибе қарастырайық. Екі ойын сүйегі лақтырылсын. Екі ойын сүйегінде түскен ұпайлардың қосындысы 6-ға тең болатындай сандардың түсу ықтималдығы қандай? Қарастырылып отырған тәжірибемен A оқиғасы байланысты: ойын сүйектерінде түскен сандардың қосындысы 6-ға тең. Бұл оқиға тәжірибенің сапалық жағын сипаттайды. X кездейсоқ шамасы тәжірибенің сандық сипаттамасы болып табылады, себебі тәжірибе нәтижесінде қандай сандар түсетіні белгісіз. Ол қабылдайтын мәндерді $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ деп белгілейік.

Мысалы, бірінші ойын сүйегінде 1, екінші ойын сүйегінде 2 түсуі мүмкін немесе керісінше. Бұл жағдайларды сандардың жұбы түрінде жазайық: (1; 2) және (2; 1). Осы белгілеуді қолданып, тәжірибе нәтижесінде төмендегі мәндерді аламыз:

(1; 1), (1; 2), (1; 3), (1; 4), (1; 5), (1; 6)
(2; 1), (2; 2), (2; 3), (2; 4), (2; 5), (2; 6)
(3; 1), (3; 2), (3; 3), (3; 4), (3; 5), (3; 6)
(4; 1), (4; 2), (4; 3), (4; 4), (4; 5), (4; 6)
(5; 1), (5; 2), (5; 3), (5; 4), (5; 5), (5; 6)
(6; 1), (6; 2), (6; 3), (6; 4), (6; 5), (6; 6)

Онда екі ойын сүйегіндегі сандардың қосындылары: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 және X кездейсоқ шамасы осы мәндердің бірін қабылдайды.

Анықтама. *Тәжірибе нәтижесінде бірнеше мәндердің бірін қабылдайтын шама* ***кездейсоқ шама*** *деп аталады және бұл мәндердің қайсысын қабылдайтынын алдын ала білу мүмкін емес.*

Кездейсоқ шаманың екі түрі бар: *дискретті* және *үзіліссіз* үлестірілген кездейсоқ шамалар.

Дискретті кездейсоқ шамалар тек белгілі бір мәндерді қабылдайды.

МЫСАЛ

2. Тиын 6 рет лақтырылсын. Тиынның "елтаңба" жағы мүлдем түспеуі мүмкін немесе 1 рет, 2 рет, т.с.с. 6 рет түсуі мүмкін. Сондықтан "Елтаңба" жағымен түсу саны: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 — кездейсоқ шама болады және оны X деп белгілейік. X кездейсоқ шамасы бір бірінен оқшау мәндер қабылдайды және оларды нөмірлеуге болады.

Анықтама. *Бір-бірінен оқшау, бөлек мән қабылдайтын кездейсоқ шама* ***дискретті (үзілісті) кездейсоқ шама*** *деп аталады*.

"Дискретті" деген сөз латынның discretus сөзінен шыққан, "үзілісті, бөліктерден құралған" деген мағынаны береді.

МЫСАЛ

3. Спидометрдегі көрсеткіштер немесе белгілі бір уақыттарда өлшенген температура мәндері дискретті кездейсоқ шамалар болып табылады.

ТҮСІНДІРІҢДЕР

Неге жоғарыда қарастырылған мысалдағы кездейсоқ шама дискретті кездейсоқ шама болады?

Дискретті кездейсоқ шамалар өздерінің мәндерін белгілі бір ықтималдықпен қабылдайды.

Жоғарыда келтірілген мысалда әрбір кездейсоқ шаманың мәндерінің ықтималдықтары: $p_1 = \frac{1}{36}$, $p_2 = \frac{1}{18}$, $p_3 = \frac{1}{12}$, $p_4 = \frac{1}{9}$, $p_5 = \frac{5}{36}$, $p_6 = \frac{1}{6}$, $p_7 = \frac{5}{36}$, $p_8 = \frac{1}{9}$, $p_9 = \frac{1}{12}$, $p_{10} = \frac{1}{18}$, $p_{11} = \frac{1}{36}$ болатынына көз жеткізіңдер.

X кездейсоқ шамасы $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ мәндерін $p_1, p_2, \dots, p_n$ ықтималдықтармен қабылдайды және $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.

Анықтама. *Мәндерінің жиыны белгілі бір екі санның арасындағы мәндердің барлығын қабылдайтын кездейсоқ шама* ***үзіліссіз кездейсоқ шама*** *деп аталады*.

МЫСАЛ

4. Белгілі бір уақыт аралығындағы қозғалыстың немесе су температурасының мәндері кездейсоқ шама болып табылады.

Үзіліссіз кездейсоқ шаманың мүмкін мәндерінің саны шексіз болады. *Үзіліссіз кездейсоқ шамалар* ықтималдықтардың дәлдігімен сипатталады, яғни кездейсоқ шаманың нақты мәнді қабылдауы туралы емес, кездейсоқ шаманың мәні белгілі интервалға тиісті екендігі туралы айтқан жөн.

Дискретті кездейсоқ шаманың үлестірім заңы

Сендер кездейсоқ шаманың үлестірім заңы ұғымымен танысасыңдар; кейбір кездейсоқ шамалардың үлестірім заңының кестесін құрып үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР
Үлестірім, үлестірім заңы, үлестірім қатары, үлестірімнің көпбұрышы

Анықтама : *Кездейсоқ шаманың мүмкін мәндері мен олардың ықтималдықтарын тізіп жазу* ***кездейсоқ шаманың үлестірімі*** *деп аталады* .

Егер X кездейсоқ шамасының барлық $x_1, x_2, \dots, x_n$ мәндері мен оларды қабылдау $p_1, p_2, \dots, p_n$ ықтималдықтары берілсе, онда X дискретті кездейсоқ шамасының үлестірім заңы немесе жай ғана X шамасының үлестірімі берілді дейді.

Кездейсоқ шаманың мәндері мен олардың ықтималдықтарының арасындағы сәйкестікті кесте түрінде, аналитикалық түрде (формула түрінде) және графиктік түрде көрсетуге болады.

Анықтама : *X кездейсоқ шамасының $x_1, x_2, \dots, x_n$ мәндері мен олардың $p_1, p_2, \dots, p_n$ ықтималдықтары көрсетілген кесте* ***X дискретті кездейсоқ шамасының үлестірім қатары (заңы)*** *деп аталады* .

30-кесте

Кездейсоқ шаманың мәні	x_1	x_2	...	x_n
Ықтималдықтар	p_1	p_2	...	p_n

30-кестенің бірінші жолында X кездейсоқ шамасының барлық мүмкін $x_1, x_2, \dots, x_n$ мәндері өсу ретімен, ал екінші жолында олардың ықтималдықтары көрсетілген. Сонымен қатар, кез келген дискретті кездейсоқ шама үшін $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$ теңдігі орындалады.

Арнайы символдар арқылы: $\sum_{i=2}^{n} P(x_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

Бір саны кездейсоқ шаманың мәндеріне үлестірілгендіктен, сандық "үлестірім" термині қолданылады.

- x_1 оқиғасының ықтималдығы p_1-ге тең деген символдармен $p_1 = P(x_1)$ түрінде жазылады.
- x_2 оқиғасының ықтималдығы p_2-ге тең деген символдармен $p_2 = P(x_2)$ түрінде жазылады.

....

- x_n оқиғасының ықтималдығы p_n-ге тең деген символдармен $p_n = P(x_n)$ .... түрінде жазылады.

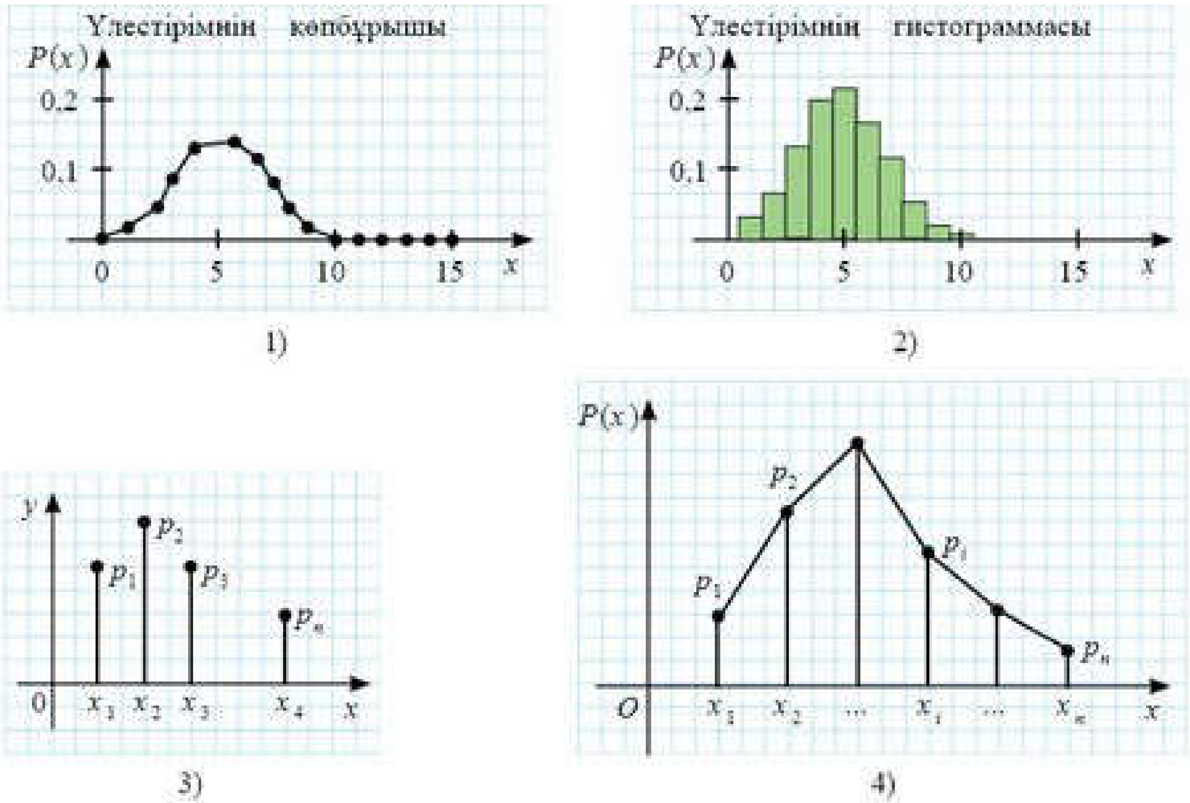
МЫСАЛ

5. X кездейсоқ шамасының үлестірім заңы:

31-кесте

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

Егер X кездейсоқ шамасының $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ мәндері $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ықтималдықтарын қабылдаса, онда бұл жағдайды график арқылы көрсетуге болады: абсцисса осіне кездейсоқ шама мәндерін, ордината осінде олардың ықтималдықтарын орналастырамыз. Пайда болған нүктелерді кесінділермен қоссақ, онда сынық сызық пайда болады және бұл сынық сызық *ықтималдықтар үлестірімінің көпбұрышы* немесе *полигоны* деп аталады (52.1-сурет).

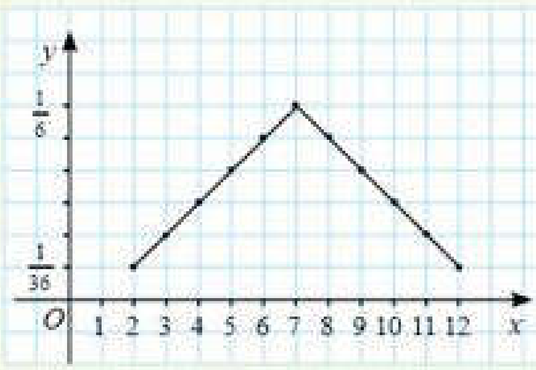


52.1-сурет

Анықтама. *Абсциссада кездейсоқ шаманың $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ мәндері, ординатада сәйкесінше $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ықтималдықтары болатын жазықтықтың $(x_i; p_i)$ нүктелері арқылы өтетін сынық сызық* ***үлестірімнің көпбұрышы***, *оған сәйкес гистограмма* ***үлестірімнің гистограммасы*** *деп аталады*.

МЫСАЛ

6. Екі ойын сүйегін лақтырғанда түсетін ұпайлардың ықтималдықтарының үлестірім көпбұрышы (полигоны) 52.2-суретте кескінделген.



52.2-сурет

X дискретті кездейсоқ шамасының үлестірімі кездейсоқ шаманың толық ықтимал сипаттамасын береді. Оған қарап, тәжірибеге дейін-ақ қандай кездейсоқ шамалар жиі, қандай кездейсоқ шамалар сирек болатынын білуге болады.

$$P_i = \begin{cases} \frac{i-1}{36}, & 2 \leqslant i \leqslant 7, \\ \frac{13-i}{36}, & 8 \leqslant i \leqslant 12 \end{cases}$$ формуласын қолданып, ықтималдықтарды есептеңдер.

Алынған мәліметтерді X кездейсоқ шамасының үлестірім кестесімен салыстырыңдар.

1. Кездейсоқ шама лар:
   а) бір тәулік ішінде жедел жәрдем қызметіне соғылған қоңыраулар саны;
   ә) ойын сүйегін бір рет лақтырғанда 5 ұпайының түсуі кездейсоқ шама бола ма?
2. Қандай жағдайда қозғалыс жылдамдығын, ауа температурасын және сәбидің бойы мен салмағын өлшеу дискретті кездейсоқ шама болады? Қандай жағдайда болмайды?
3. Дискретті кездейсоқ шаманың барлық мүмкін мәндері мен олардың ықтималдықтарының арасындағы байланысты қалай беруге болады?
4. X кездейсоқ шамасының үлестірімі арқылы қандай мәліметтер алуға болады?
5. X кездейсоқ шамасының үлестірім көпмүшелігі дегеніміз не?
6. Дискретті кездейсоқ шаманың үлестірім заңы қандай шамалар арасындағы байланысты анықтайды?
7. X дискретті кездейсоқ шамас ының үлестірім қатары дегеніміз не?

Жаттығулар

А

52.1. 1) а) Бір тәулі к ішінде анықтама бюросына шалынған қоңыраулар саны;
ә) ойын сүйегін екі рет лақтырған кезде 3 және 5 ұпайларының түсуі кездейсоқ шама бола ма?
2) а) N қаласындағы бір тәулік ішіндегі ауа температурасы;
ә) 50 км қашықтықтағы пойыз жылдамдығы;
б) пойыздың t_0 уақыттағы жылдамдығы үзіліссіз шама бола ма?

52.2. X кез дейсоқ шамасының үлестірім заңын анықтайтын кестені толтыры ңдар:

32-кесте

X	3	21	30	50
P	0,25	?	0,25	0,25

52.3. Егер белгісіз ықтималдықтардың мәндері тең болса, онда X кездейсоқ шамасының үлестірім заңын анықтайтын кестені толтырыңдар:

33- кесте

X	3	7	12	15	18	21
P	0,1	0,05	?	?	0,05	0,1

52.4. Тиын 5 рет лақтырылады. X дискретті кездейсоқ шамасы — елтаңбаның түсу санының үлестірім кестесін құрыңдар және үлестірім гистограммасын тұрғызыңдар.

52.5. Қорапта 4 ақ және 3 қара шар бар. Қораптан ақ шар шыққанша бір-бірден кезекпен шарлар алынады. X дискретті кездейсоқ шамасының — алынған шарлар санының үлестірім қатары мен үлестірім көпбұрышын тұрғызыңдар.

52.6. Төрт сан арифметикалық прогрессия құрайды және олардың ортаңғы мүшелері 10 және 14. Егер ортаңғы мүшелерінің ықтималдықтары шеткі мүшелерінің ықтималдықтарынан 4 есе артық болса, онда кездейсоқ шаманың үлестірім заңын анықтаңдар.

B

52.7. Егер допты баскетбол торына бір рет лақтырғанда допты торға салу ықтималдығы 0,7-ге тең болса, онда екі рет лақтырғанда допты торға салудың үлестірім қатарын тұрғызыңдар.

52.8. Мерген нысанаға бір-бірінен тәуелсіз үш рет оқ атты. Әрбір оқтың нысанаға тию ықтималдығы 0,9. Оқтардың нысанаға тиюінің үлестірім заңын анықтаңдар.

52.9. Екі мерген нысанаға кезекпен бір-бірден оқ атады. Екеуінің нысанаға тигізу ықтималдықтары — 0,8 және 0,9. X кездейсоқ шамасы — нысанаға тиген оқтар санының үлестірім заңын анықтаңдар.

C

52.10. Оқушының төрт кітапхананың әрқайсысында өзіне қажет әдебиетті табу ықтималдығы 0,4. X кездейсоқ шамасы – оқушының төрт кітапхананың ішінде баратын кітапханалар санының үлестірім қатарын тұрғызыңдар.

52.11. Оқушының үш емтиханның біріншісін, екіншісін және үшіншісін сәтті тапсыру ықтималдықтары — 0,8; 0,7; 0,7. X кездейсоқ шамасы — оқушының сәтті тапсырған емтихандар санының үлестірім қатарын тұрғызыңдар.

52.12. Барлығы 20 тетіктің ішінде төртеуі жарамсыз. Тетіктердің сапасын тексеруге кездейсоқ үш тетік алынады. Алынған тетіктердің ішіндегі жарамсыз тетіктер санының үлестірім қатарын тұрғызыңдар.

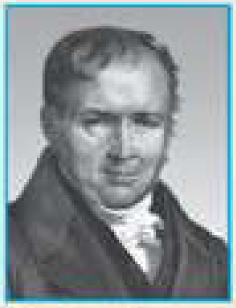
52.13. X дискретті кездейсоқ шамасының үлестірім заңы берілген.

34-кесте

X	2,0	2,4	2,8	3,2	3,4
P	0,1	0,2	0,3	0,3	0,2

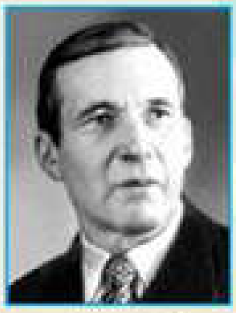
X шамасының үлестірім көпбұрышын тұрғызыңдар.

ХАБАРЛАМА ДАЙЫНДАҢДАР



Симеон Пуассон (1781—1840)

52.14. Кездейсоқ шама ұғымын белгілі француз физигі және математигі С. Пуассон енгізді.
Кездейсоқ шама ұғымының қатаң формальді анықтамасын өткен ғасырдың 20-жылдары XX ғасырдың ұлы математиктерінің бірі, Кеңес математигі А.Н. Колмогоров енгізді.



Колмогоров Андрей Николаевич (1903—1987)

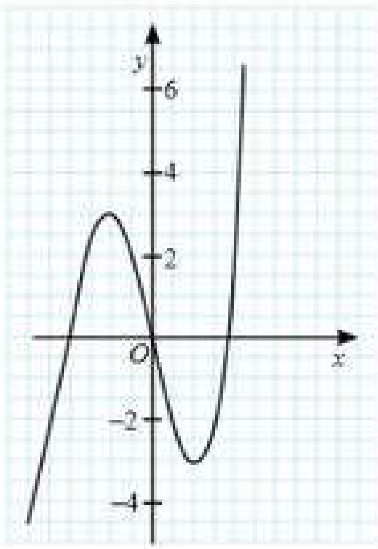
ҚАЙТАЛАУ

52.15. Функцияның туындысын табыңдар :

1) $y = (5x - 1)^5 + 5x^2 + \operatorname{tg} 2x$;

2) $y = 2(3x^2 - x)^4 - \cos 2x - 7x^6 - 5$.

52.16. Функция туындысының графигі берілген (52.3-сурет).
Функцияның максимум және минимум нүктелерін жазыңдар.



52.3-сурет

52.17. Функцияның бірсарынды болатын аралықтарын табыңдар:

1) $y = 5 - 2x^2 + x^4$; 2) $y = \frac{x}{2} - \frac{2}{x}$;

3) $y = -\frac{x}{3} + \frac{3}{x}$.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Дискретті және үзіліссіз кездейсоқ шамалар, дискретті кездейсоқ шаманың үлестірім қатары, үзіліссіз кездейсоқ шаманың үлестірім заңы, оқиғаның ықтималдығы, санның квадрат түбірі.

§ 53. ДИСКРЕТТІ КЕЗДЕЙСОҚ ШАМАЛАРДЫҢ САНДЫҚ СИПАТТАМАЛАРЫ

Сендер дискретті кездейсоқ шаманың математикалық күтімі, дискретті кездейсоқ шаманың дисперсиясы және орташа квадраттық (стандартты) ауытқуы ұғымдарымен, математикалық күтім қасиеттерімен танысасыңдар;
дискретті кездейсоқ шаманың математикалық күтімін, дисперсиясын және орташа квадраттық (стандартты) ауытқуын есептеуді, дискретті кездейсоқ шаманың сандық сипаттамаларын қолданып, есептер шығаруды үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Математикалық күтім, дисперсия, орташа квадраттық (стандартты) ауытқу)

Кездейсоқ шаманың маңызды сандық сипаттамаларының бірі — математикалық күтім.

Белгіленуі : Математикалық күтімді $M(X)$ символымен белгілейміз.

Анықтама . *Мәндері* $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n$ *сандары болатын және оларға сәйкес ықтималдықтары* $p_1, p_2, p_3, p_4, \ldots, p_n$ *болатын дискретті кездейсоқ шаманың мәндерінің оларға сәйкес ықтималдықтарына көбейтінділерінің қосындысы, яғни* $M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_n \cdot p_n$ ***саны X дискретті кездейсоқ шамасының математикалық күтімі*** *деп аталады* .

Бұл формуланы қысқаша $M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$ түрінде жазуға болады.

Мәндері: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, $x_4 = 5$, $x_5 = 6$, $x_6 = 7$, $x_7 = 8$, $x_8 = 9$, $x_9 = 10$, $x_{10} = 11$, $x_{11} = 12$, оларға сәйкес ықтималдықтары: $p_1 = \frac{1}{36}$, $p_2 = \frac{1}{18}$, $p_3 = \frac{1}{12}$, $p_4 = \frac{1}{9}$, $p_5 = \frac{5}{36}$, $p_6 = \frac{1}{6}$, $p_7 = \frac{5}{36}$, $p_8 = \frac{1}{9}$, $p_9 = \frac{1}{12}$, $p_{10} = \frac{1}{18}$, $p_{11} = \frac{1}{36}$ болатын X дискретті кездейсоқ шамасының математикалық күтімін табыңдар.

Математикалық күтім белгілі бір орташа сан маңайында кездейсоқ шама мәндері шоғырланатын сан болып табылады.

Мәндері $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, $x_4 = 5$, $x_5 = 6$, $x_6 = 7$, $x_7 = 8$, $x_8 = 9$, $x_9 = 10$, $x_{10} = 11$, $x_{11} = 12$ болатын кездейсоқ шаманың мәндерінің арифметикалық ортасын табыңдар және оны $M(X)$ математикалық күтімнің мәнімен салыстырыңдар.

Математикалық күтім жуық шамамен кездейсоқ шама мәндерінің арифметикалық ортасына тең және тәжірибе саны артқан сайын дәлдік арта береді.

Бұл математикалық күтімнің ықтималдық мағынасы болып табылады.

Математикалық күтімнің қасиеттері

1-қасиет. Тұрақты шаманың математикалық күтімі сол шамаға тең болады:

$$M(C) = C.$$

2-қасиет. Тұрақты көбейткішті математикалық күтім алдына шығаруға болады:

$$M(CX) = CM(X).$$

3-қасиет. Екі кездейсоқ шаманың қосындысының математикалық күтімі олардың математикалық күтімдерінің қосындысына тең болады:

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y).$$

4-қасиет. $X_1, X_2, ..., X_k$ кездейсоқ шамаларының математикалық күтімі олардың математикалық күтімдерінің қосындысына тең болады:

$$M(X_1 + X_2 + ... + X_k) = M(X_1) + M(X_2) + ... + M(X_k).$$

5-қасиет. Екі кездейсоқ шаманың айырмасының математикалық күтімі олардың математикалық күтімдерінің айырмасына тең болады:

$$M(X - Y) = M(X) - M(Y).$$

6-қасиет. Екі кездейсоқ шаманың көбейтіндісінің математикалық күтімі олардың математикалық күтімдерінің көбейтіндісіне тең болады:

$$M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y).$$

7-қасиет. $X_1, X_2, ..., X_k$ кездейсоқ шамаларының көбейтіндісінің математикалық күтімі олардың математикалық күтімдерінің көбейтіндісіне тең болады:

$$M(X_1 \cdot X_2 \cdot ... \cdot X_k) = M(X_1) \cdot M(X_2) \cdot ... \cdot M(X_k).$$

Кездейсоқ шаманың маңызды сандық сипаттамаларының тағы бір түрі — дисперсия.

Белгіленуі : Дисперсия $D(X)$ символымен белгіленеді.

Анықтама . *Кездейсоқ шама мен оның математикалық күтімінің айырмасы, яғни* $X - M(X)$ *шамасы* ***кездейсоқ шаманың ауытқуы*** *деп аталады* .

X кездейсоқ шаманың оның математикалық күтімінен ауытқуын келесі формуламен есептейміз:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - M(X)) = (x_1 - M(X)) + (x_2 - M(X)) + ... + (x_n - M(X)).$$

МЫСАЛ

1. Мәндері $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, $x_4 = 5$, $x_5 = 6$, $x_6 = 7$, $x_7 = 8$, $x_8 = 9$, $x_9 = 10$, $x_{10} = 11$, $x_{11} = 12$ болатын X кездейсоқ шамасының $M(X) = 7$ математикалық күтімінен ауытқуын $\sum_{i=1}^{11}(x_i - M(X)) = (x_1 - M(X)) + (x_2 - M(X)) + ... + (x_{11} - M(X))$ формуласымен табамыз.

$$x_1 - M(X) = 2 - 7 = -5,$$
$$x_2 - M(X) = 3 - 7 = -4,$$
$$x_3 - M(X) = 4 - 7 = -3,$$
$$x_4 - M(X) = 5 - 7 = -2,$$
$$x_5 - M(X) = 6 - 7 = -1,$$
$$x_6 - M(X) = 7 - 7 = 0,$$
$$x_7 - M(X) = 8 - 7 = 1,$$

$$x_8 - M(X) = 9 - 7 = 2,$$
$$x_9 - M(X) = 10 - 7 = 3,$$
$$x_{10} - M(X) = 11 - 7 = 4,$$
$$x_{11} - M(X) = 12 - 7 = 5$$

болғандықтан, X кездейсоқ шамасының $M(X)$ математикалық күтімінен ауытқуы: $-5 - 4 - 3 - 2 - 1 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 0$, яғни 0.

Анықтама . *X кездейсоқ шамасының математикалық күтімінен ауытқуының квадратының математикалық күтімі* ***кездейсоқ шаманың дисперсиясы*** *деп аталады және $D(X) = M((X - M(X))^2$ формуласымен есептеледі* .

Теорема. ***Кездейсоқ шаманың дисперсиясы кездейсоқ шаманың квадратының математикалық күтімі мен кездейсоқ шаманың математикалық күтімінің айырмасына тең болады*** **:** $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$.

Дискретті кездейсоқ шаманың дисперсиясын табу үшін келесі формуланы пайдаланады: $D(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i\right)^2$.

МЫСАЛ

2. Мәндері: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, $x_4 = 5$, $x_5 = 6$, $x_6 = 7$, $x_7 = 8$, $x_8 = 9$, $x_9 = 10$, $x_{10} = 11$, $x_{11} = 12$, оларға сәйкес ықтималдықтары $p_1 = \frac{1}{36}$, $p_2 = \frac{1}{18}$, $p_3 = \frac{1}{12}$, $p_4 = \frac{1}{9}$, $p_5 = \frac{5}{36}$, $p_6 = \frac{1}{6}$, $p_7 = \frac{5}{36}$, $p_8 = \frac{1}{9}$, $p_9 = \frac{1}{12}$, $p_{10} = \frac{1}{18}$, $p_{11} = \frac{1}{36}$ болатын және математикалық күтімі $M(X) = 7$ болатын X кездейсоқ шамасының дисперсиясын табайық.

Шешуі. $D(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i\right)^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i - (M(X))^2$ формуласы бойынша:

$$D(X) = 4 \cdot \frac{1}{36} + 9 \cdot \frac{1}{18} + 16 \cdot \frac{1}{12} + 25 \cdot \frac{1}{9} + 36 \cdot \frac{5}{36} + 49 \cdot \frac{1}{6} + 64 \cdot \frac{5}{36} + 81 \cdot \frac{1}{9} + 100 \cdot \frac{1}{12} +$$
$$+ 121 \cdot \frac{1}{18} + 144 \cdot \frac{1}{36} - 49 = \frac{1}{9} + \frac{1}{2} + 1\frac{1}{3} + 2\frac{7}{9} + 5 + 8\frac{1}{6} + 8\frac{8}{9} + 9 + 8\frac{1}{3} + 6\frac{13}{18} +$$
$$+ 4 - 49 = 5\frac{5}{6}.$$

Жауабы : $5\frac{5}{6}$.

Кездейсоқ шаманың дисперсиясы кездейсоқ шама мәндерінің математикалық күтімінің белгілі бір маңайында шашыраңқы орналасуының деңгейін білдіреді. Егер кездейсоқ шаманың мәндері математикалық күтім маңайында шоғырланып орналасса және математикалық күтімнен ауытқуы аз болса, онда кездейсоқ шаманың дисперсиясы аз болады. Егер кездейсоқ шаманың мәндері математикалық күтім маңайында шашыраңқы орналасса және математикалық ауытқуының мәні үлкен болса, онда дисперсия мәні үлкен болады.

Кездейсоқ шаманың маңызды сандық сипаттамаларының тағы бір түрі — мода.

Анықтама. *Ықтималдығы ең жоғары болатын кездейсоқ шаманың мәні* ***кездейсоқ шаманың модасы*** *деп аталады*.

ТҮСІНДІРІҢДЕР

Жоғарыда қарастырылған мысалда X кездейсоқ шамасының модасы $x_6 = 7$-ге тең.

1. Дискретті кездейсоқ шаманың маңызды сандық сипаттамаларын атаңдар.
2. X дискретті кездейсоқ шаманың математикалық күтімін есептеу үшін қандай мәліметтер қажет?
3. Дискретті кездейсоқ шаманың ауытқуы дегеніміз не?
4. Дискретті кездейсоқ шаманың модасы дегеніміз не?

Жаттығулар

А

53.1. Үлестірім қатары берілген X дискретті кездейсоқ шамасының модасы мен математикалық күтімін табыңдар:

35-*кесте*

X	1	2	4
P	0,1	0,3	0,6

53.2. X кездейсоқ шамасының мәндері: 2; 4; 7; 8; 9, үлестірім заңы кесте түрінде берілген:

36-*кесте*

X	2	4	7	8	9
P	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Математикалық күтім мен моданы табыңдар.

53.3. X кездейсоқ шамасының үлестірім қатары берілген. Дисперсиясын табыңдар:

37-*кесте*

X	1	2	4
P	0,1	0,3	0,6

53.4. X және Y кездейсоқ шамаларының математикалық күтімдері белгілі: $M(X) = 5$, $M(Y) = 9$. Төменде берілген кездейсоқ шамалардың математикалық күтімін табыңдар:

1) $Z = 3X + Y$; 2) $Z = 2X - Y + 5$; 3) $Z = XY$.

53.5. X және Y тәуелсіз кездейсоқ шамаларының үлестірім заңдары берілген:

38-кесте

X	1	3
P	0,7	0,3

39-кесте

Y	2	4
P	0,6	0,4

Төменде берілген кездейсоқ шамалардың математикалық күтімін табыңдар:
1) $Z = X + Y$; 2) $Z = 2X + 3Y$; 3) $Z = XY$.

B

53.6. Үлестірім заңы төмендегі кестемен берілген кездейсоқ шаманың математикалық күтімі мен дисперсиясын табыңдар:

40-кесте

X	3	4	6	7	8
P	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

53.7. Үлестірім заңы төмендегі кестемен берілген кездейсоқ шаманың математикалық күтімі мен дисперсиясын табыңдар:

41-кесте

X	2	5	7	10
P	0,2	0,4	0,2	0,2

53.8. X дискретті кездейсоқ шамасының үлестірім заңы төмендегі кестемен берілген. $2X$ кездейсоқ шамасының математикалық күтімі мен дисперсиясын табыңдар:

42-кесте

X	4	5	6
P	0,2	0,3	0,5

53.9. X және Y теуелсіз кездейсоқ шамалары берілген кесте бойынша үлестірілген. $M(X + Y)$, $D(X + Y)$ шамаларын есептеңдер.

43-кесте

X	6	12	14	20
P	0,25	0,3	0,2	0,25

44-кесте

Y	3	8	12	16
P	0,2	0,3	0,2	0,3

53.10. Екі мерген нысанаға бір уақытта оқ атқанда олардың нысанаға тигізулерінің үлестірім заңы кестемен берілген. Қай мерген мeжеге дәлірек тигізеді?

45-кесте

X	8	8	10
P	0,3	0,2	0,5

46-кесте

Y	8	9	10
P	0,5	0,2	0,3

53.11. X кездейсоқ шамасының үлестірім заңы 47-кестемен берілген. $M(X)$, $D(X)$, $M(2X + 5)$ шамаларын есептеңдер:

47-кесте

X	2	3	4	5
P	0,3	0,1	0,5	0,1

C

53.12. $X(-1;\ 0;\ 1)$, $M(X) = 0{,}1$ және $M(X^2) = 0{,}9$. X кездейсоқ шамасының мүмкін мәндеріне сәйкес ықтималдықтарын табыңдар және үлестірім заңын анықтаңдар.

53.13. X кездейсоқ шамасының мүмкін мәндерінің қатары берілген: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ және $M(X) = 2{,}3$, $M(X^2) = 5{,}9$. X кездейсоқ шамасының x_1, x_2, x_3 мүмкін мәндеріне сәйкес p_1, p_2, p_3 ықтималдықтарын табыңдар.

53.14. 10 тетіктің ішінде үшеуі стандартқа сай емес. Осы тетіктердің ішінен кездейсоқ екі тетік алынады. X кездейсоқ шамасы — алынған екі тетік ішінде стандартқа сай емес тетіктер санының математикалық күтімін табыңдар.

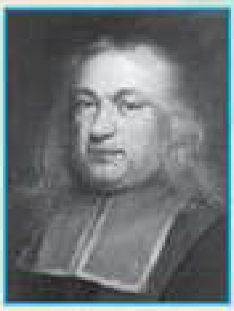
53.15. Тәуелсіз әрбір тәжірибеде A оқиғасының орындалу ықтималдығы 0,2. X кездейсоқ шамасы — тәжірибені бес рет жасағанда A оқиғасының орындалу санының дисперсиясын табыңдар.

53.16. X кездейсоқ шамасының мүмкін мәндері: $x_1 = 1$, x_2 және x_3 және $x_1 < x_2 < x_3$. X кездейсоқ шамасының x_1 және x_2 мәндерін қабылдау ықтималдықтары: 0,3 және 0,2. $M(X) = 2{,}2$ және $D(X) = 0{,}76$ болса, онда берілген кездейсоқ шаманың үлестірім заңын анықтаңдар.

ХАБАРЛАМА ДАЙЫНДАҢДАР

Блез Паскаль
(1623—1662)

53.17. Ықтималдықтар теориясының математикалық күтім ұғымы алғаш рет француз математигі, физигі, механигі, әдебиетшісі және философы Б. Паскаль мен француз математигі, заңгер П. Ферманың бір-біріне жазған хаттарында кездеседі.



Пьер де Ферма
(1601—1665)

ҚАЙТАЛАУ

53.18. $y = f(x)$ функциясының графигіне абсциссасы x_0 болатын нүктеде жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффициентін табыңдар:

1) $y = x^2 - 3x,\ x_0 = 2;$ 2) $y = \sqrt{3-x},\ x_0 = 2;$

3) $y = \dfrac{2x-1}{x+1},\ x_0 = 3.$

53.19. x_0 нүктесінде $f''(x)$-ті табыңдар:

1) $f(x) = \cos 3x,\ x_0 = \pi;$ 2) $f(x) = \sin 4x,\ x_0 = \dfrac{\pi}{4};$

3) $f(x) = \sin^2 3x,\ x_0 = -\dfrac{\pi}{2}.$

53.20. Функцияның графигін салыңдар:

1) $f(x) = 2|\cos x|;$ 2) $f(x) = 2\cos x + |\cos x|;$ 3) $f(x) = 2 - |\cos x|.$

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Дискретті және үзіліссіз кездейсоқ шамалар, дискретті кездейсоқ шаманың үлестірім қатары, кездейсоқ шаманың үлестірім заңы, оқиғаның ықтималдығы, алмастырулар, терулер, Ньютон биномы.

§ 54. ДИСКРЕТТІ КЕЗДЕЙСОҚ ШАМАНЫҢ ҮЛЕСТІРІМІНІҢ ТҮРЛЕРІ. ҮЛКЕН САНДАР ЗАҢЫ

Сендер дискретті кездейсоқ шаманың үлестірімінің түрлерін: биномдық үлестірім, геометриялық үлестірім, гипергеометриялық үлестірімді ажыратуды үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Биномдық үлестірім, геометриялық үлестірім, гипергеометриялық үлестірім

Кездейсоқ шаманың үлестірім заңының түріне байланысты, кездейсоқ шаманың мүмкін мәндерінің ықтималдықтары қандай формуламен есептелетініне байланысты кездейсоқ шаманың үлестірімдерінің атаулары бар. Олардың ішінде жиі кездесетіндері: биномдық үлестірім, геометриялық үлестірім, гипергеометриялық үлестірім.

Анықтама. *Кездейсоқ шаманың мүмкін мәндерінің ықтималдықтары Бернулли формуласымен есептелетін үлестірім* ***биномдық үлестірім*** *деп аталады*.

Бір-біріне тәуелсіз n тәжірибенің әрқайсысында A оқиғасының орындалу ықтималдығы p, орындалмау ықтималдығы $q = 1 - p$ болсын. Онда X кездейсоқ шамасының үлестірімі Бернулли формуласы бойынша: $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, мұндағы $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

X кездейсоқ шамасының үлестірім кестесі:

48-кесте

X	0	1	...	k	...	n
P	q^n	npq^{n-1}	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	p^n

МЫСАЛ

1. Тиынды 6 рет лақтырайық. Елтаңбаның түсу ықтималдығы 0,5. X кездейсоқ шамасы — елтаңбаның түсу саны. Осы кездейсоқ шаманың үлестірім қатарын құрайық.

Шешуі. Тиынды 6 рет лақтырғанда елтаңба мүлдем түспеуі мүмкін, 1 рет, 2 рет және т.с.с. 6 рет түсуі мүмкін. Сондықтан елтаңбаның түсу сандары: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 — X кездейсоқ шамасының мәндері болады, яғни $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$; $x_4 = 3$; $x_5 = 4$; $x_6 = 5$; $x_7 = 6$. Осы мәндерге сәйкес ықтималдықтарды $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ Бернулли формуласымен табайық:

$C_6^0 0{,}5^0 0{,}5^6 = 0{,}5^6 = 0{,}015625;$

$C_6^1 0{,}5^1 0{,}5^5 = 6 \cdot 0{,}5^6 = 0{,}09375;$

$C_6^2 0{,}5^2 0{,}5^4 = 15 \cdot 0{,}5^6 = 0{,}234375;$

$C_6^3 0{,}5^3 0{,}5^3 = 20 \cdot 0{,}5^6 = 0{,}3125;$

$C_6^4 0{,}5^4 0{,}5^2 = 15 \cdot 0{,}5^6 = 0{,}234375;$

$C_6^5 0{,}5^5 0{,}5^1 = 6 \cdot 0{,}5^6 = 0{,}09375;$

$C_6^6 0{,}5^6 0{,}5^0 = 0{,}5^6 = 0{,}015625.$

49-кесте

X	0	1	2	3	4	5	6
P	0,015625	0,09375	0,234375	0,3125	0,234375	0,09375	0,015625

Геометриялық үлестірім

Анықтама. *Бір-біріне тәуелсіз n тәжірибенің әрқайсысында A оқиғасының орындалу ықтималдығы p, орындалмау ықтималдығы $q = 1 - p$ болсын. Тәжірибе A оқиғасы бірінші рет орындалатын k-тәжірибеден кейін тоқтатылады. X дискретті кездейсоқ шамасының мүмкін мәндерінің ықтималдықтары $P(X = k) = q^{k-1}p$ формуласымен есептелетін үлестірім* ***геометриялық үлестірім*** *деп аталады*.

Тәжірибе A оқиғасы бірінші рет орындалатын k-тәжірибеден кейін тоқтатылатындықтан, алдыңғы $k - 1$ тәжірибеде A оқиғасы орындалмайды. Ықтималдықтарды көбейту формуласы бойынша: $P(X = k) = q^{k-1}p$.

$q^{k-1}p$ өрнегінде k-ның орнына 1, 2, ... сандарын қойсақ, онда p, pq, pq^2, pq^3, ... геометриялық прогрессия болатынына көз жеткізіңдер.
Осы прогрессияның бірінші мүшесі мен еселігін атаңдар.
Осы прогрессия неге шексіз кемімелі болады?

Ықтималдықтарды $k = 1, 2, \dots$ үшін $P(X = k) = q^{k-1}p$ формуласымен есептегенде геометриялық прогрессия пайда болатындықтан, бұл үлестірім *геометриялық үлестірім* деп аталады.

МЫСАЛ 2. Тиынды 6 рет лақтырайық. Елтаңбаның түсу ықтималдығы 0,5. X кездейсоқ шамасы — елтаңбаның түсу саны. A оқиғасы — елтаңбаның k рет лақтырғанда түсуі. Осы кездейсоқ шаманың үлестірім қатарын құрайық.

Шешуі. Тиынды 6 рет лақтырғанда елтаңба мүлдем түспеуі мүмкін, 1 рет, 2 рет және т.с.с. 6 рет түсуі мүмкін. Сондықтан елтаңбаның түсу сандары: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 – X кездейсоқ шамасының мәндері болады, яғни $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$; $x_4 = 3$; $x_5 = 4$; $x_6 = 5$; $x_7 = 6$. Осы мәндерге сәйкес ықтималдықтарды $P(X = k) = q^{k-1}p$ формуласымен табайық:

50-*кесте*

X	0	1	2	3	4	5	6
P	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,03 125	0,015 625	0,0 078 125

Анықтама. *Егер N — белгілі бір жиынның элементтерінің жалпы саны, M — осы жиынның белгілі бір қасиетті қанағаттандыратын элементтерінің саны, n — барлық элементтер ішінен кездейсоқ алынған элементтер саны, m — таңдап алынған элементтер ішінен берілген қасиетті қанағаттандыратын элементтер саны болса, онда X дискретті кездейсоқ шамасының мүмкін мәндерінің ықтималдықтары $P(m) = \dfrac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$ формуласымен есептелетін үлестірім* ***гипергеометриялық үлестірім*** *деп аталады*.

Берілген N, M және n сандары үшін m саны кездейсоқ шама болғандықтан, $P(m) = \dfrac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$ формуласымен есептелетін мәндерді қабылдау ықтималдықтары кездейсоқ шама болады.

МЫСАЛ 3. Жәшікте 6 көк және 4 қызыл шарлар бар. Жәшіктен кездейсоқ 5 шар алынады. A оқиғасы — алынған шардың пайда болуы. X кездейсоқ шамасы — алынған шарлардың ішіндегі көк шарлардың саны, яғни

$x_1 = 1$ (5 шардың біреуі көк);
$x_2 = 2$ (5 шардың екеуі көк);
$x_3 = 3$ (5 шардың үшеуі көк);
$x_4 = 4$ (5 шардың төртеуі көк);
$x_5 = 5$ (5 шардың бесеуі көк). Үлестірім қатарын құрайық.

Шешуі. $N = 10$, $M = 6$ және $n = 5$. $P(m) = \dfrac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$ формуласын пайдалансақ:

$$P(x_1) = \frac{C_6^1 C_4^4}{C_{10}^5} = \frac{\frac{6!}{5!}\cdot 1}{\frac{10!}{5!5!}} = \frac{6!5!5!}{5!10!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10} = \frac{1}{42}.$$

$$P(x_2)=\frac{C_6^2C_4^3}{C_{10}^5}=\frac{\frac{6!}{2!4!}\cdot\frac{4!}{3!}}{\frac{10!}{5!5!}}=\frac{6!4!5!5!}{2!4!3!10!}=\frac{4\cdot5\cdot3\cdot4\cdot5}{7\cdot8\cdot9\cdot10}=\frac{5}{21},$$

$$P(x_3)=\frac{C_6^3C_4^2}{C_{10}^5}=\frac{\frac{6!}{3!3!}\cdot\frac{4!}{2!2!}}{\frac{10!}{5!5!}}=\frac{6!4!5!5!}{3!3!2!2!10!}=\frac{4\cdot5\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{7\cdot8\cdot9\cdot10}=\frac{10}{21},$$

$$P(x_4)=\frac{C_6^4C_4^1}{C_{10}^5}=\frac{C_6^2C_4^1}{C_{10}^5}=\frac{5}{21},$$

$$P(x_5)=\frac{C_6^5C_4^0}{C_{10}^5}=\frac{C_6^1C_4^4}{C_{10}^5}=\frac{1}{42}.$$

51-*кесте*

X	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{42}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{1}{42}$

Үлкен сандар заңы

Сендер үлкен сандар заңымен танысасыңдар.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР
Үлкен сандар заңы

Белгілі бір тәжірибенің нәтижесі алдын ала білу мүмкін болмайтын кездейсоқ шама болып табылады, себебі тәжірибе нәтижесі көптеген жағдайларға тәуелді. Сонымен қатар, тәжірибені бірнеше рет қайталаған сайын нәтиженің пайда болу саны белгілі бір заңдылыққа бағынады. Бұл жағдай үлкен сандар заңы деп аталатын бірнеше теоремалардың салдары болып табылады. Бұл теоремаларда белгілі бір тұрақты шамаларға шарттар қойған кезде орташа сипаттамалардың жуықтауы туралы айтылады. Осындай теоремалар қатарына Чебышев және Бернулли теоремалары жатады.

Чебышев теоремасы. *Егер тәжірибенің саны үлкен болса, онда кездейсоқ шаманың мәндерінің арифметикалық ортасы ықтималдығы бойынша оның математикалық күтіміне жинақталады*.

Бернулли теоремасы. *Егер әрбір тәуелсіз сынауда A оқиғасының пайда болу ықтималдығы тұрақты p-ға тең болса, онда сынау саны n мейлінше үлкен болғанда A оқиғасының салыстырмалы жиілігінің ауытқу модулі 1-ге жуық аз шама болады*.

Үлкен сандар заңының мағынасы: әр жеке кездейсоқ құбылыстың нақты ерекшеліктері осы құбылыстар жиынының орта мәніне әсер етпейді, әр жағдайда болатын орташадан кездейсоқ ауытқу осы жағдайлардың барлығында өзара жойылады және теңеседі.

1. Дискретті кездейсоқ шамасының үлестірім түрлерін атаңдар.
2. X дискретті кездейсоқ шамасының биномдық үлестірімін қандай жағдайда қолданады?

3. X дискретті кездейсоқ шамасының геометриялық үлестірімін қандай жағдайда қолданады?
4. X дискретті кездейсоқ шамасының гипергеометриялық үлестірімін қандай жағдайда қолданады?
5. Үлкен сандар заңының мағынасы қандай?

Жаттығулар

A

54.1. 1) 6 тәуелсіз тәжірибелер жасалады. Осы тәжірибелердің әрқайсысында X оқиғасының пайда болу ықтималдығы $p = 0,6$. X оқиғасының 4 рет пайда болу ықтималдығын табыңдар.
2) 8 тәуелсіз тәжірибелер жасалады. Осы тәжірибелердің әрқайсысында X оқиғасының пайда болу ықтималдығы $p = 0,7$. X оқиғасының 5 рет пайда болу ықтималдығын табыңдар.

54.2. Ойын сүйегін 10 рет лақтырғанда 4 ұпайының дәл екі рет түсу ықтималдығын табыңдар.

B

54.3. Тиын 4 рет лақтырылады. Әрбір лақтырғанда елтаңбаның түсу ықтималдығы 0,5. X кездейсоқ шамасы — елтаңбаның түсу саны. Берілген кездейсоқ шаманың үлестірім қатарын тұрғызыңдар.

54.4. Колледж студенті 6 емтихан тапсырады. Әрбір емтиханды сәтті тапсыру ықтималдығы 0,5. X кездейсоқ шамасы — сәтті тапсырылған емтихандар саны. Берілген кездейсоқ шаманың үлестірім қатарын тұрғызыңдар.

54.5. Жәшікте 5 сары және 3 қызыл шар бар. Берілген шарлар ішінен кездейсоқ 4 шар алынады. A оқиғасы — сары шардың шығуы. X кездейсоқ шамасының үлестірім қатарын құрыңдар.

C

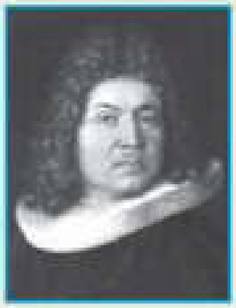
54.6. Сыныпта 21 оқушы, оның ішінде 5 қыз бала бар. Мұражайға баруға сынып оқушыларының ішінен кездейсоқ 3 оқушы алынады. X кездейсоқ шамасы — алынған оқушылар ішіндегі қыз балалар саны. X кездейсоқ шамасының математикалық күтімін табыңдар.

54.7. 1) Ойын сүйегін 8 рет лақтырғанда 2 ұпайының түсу санының 3-тен артық болмауының ықтималдығын табыңдар.
2) Ойын сүйегін 10 рет лақтырғанда 4 ұпайының түсу санының 2-ден артық болмауының ықтималдығын табыңдар.

54.8. Тәжірибе нәтижесінде A оқиғасының орындалу ықтималдығы 0,25. Осы тәжірибе бір-бірінен тәуелсіз 10 рет қайталанады. A оқиғасының орындалу санының 2-ден артық болмауының ықтималдығын табыңдар.

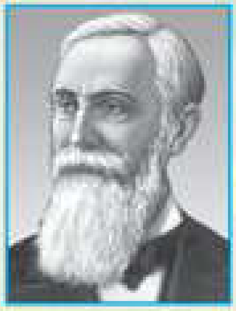
54.9. Құрылғыда бірдей 6 сақтандырғыш бар. Олардың әрқайсысының 1000 сағ өткеннен кейін істен шығу ықтималдығы 0,4. Егер кемінде екі сақтандырғыш істен шықса, онда құрылғыны жөндеу қажет болады. Егер сақтандырғыштардың істен шығуы бір-бірінен тәуелсіз болса, онда құрылғының 1000 сағ өткеннен кейін жөндеуді қажет етуінің ықтималдығын табыңдар.

ХАБАРЛАМА ДАЙЫНДАҢДАР



Якоб Бернулли
(1655—1705)

54.10. Якоб Бернулли — ықтималдықтар теориясын құрушылардың бірі. Үлкен сандар заңының дербес жағдайы — Бернулли теоремасын дәлелдеді. Пафнутий Львович Чебышев — XIX ғасырдағы ұлы орыс математигі, Петербург математикалық мектебінің негізін қалаушы, Петербург ғылым академиясының (1859) және әлемнің 24 академиясының академигі.



Пафнутий Львович
Чебышев
(1821—1894)

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

1. (+) және (–) таңбаларын қолданып, кестені толтырыңдар:

52-кесте

	Шама	Кездейсоқ	Үзіліссіз
1	Дененің жылынуы барысындағы температурасы		
2	Күні бойы кинотеатрға келген көрермендер саны		
3	Ойын сүйегін үш рет лақтырғанда 5 цифрының түсуі		
4	N аялдамасында автобустан түскен жолаушылар саны		
5	Моторлы қайықтың өзен ағысы бойымен жылдамдығы		

2. X дискретті кездейсоқ оқиғасының таралу заңдылығы берілген кестедегі A-ның мәнін табыңдар:

53-*кесте*

X	20	25	30	35	40
P	0,15	0,25	0,25	A	0,15

A) 0,25; B) 0,2; C) 0,15; D) 0,1.

3. Жәшікте 5 көк және 3 қызыл шар бар. Жәшіктен бір-бірден шарлар алынды. Үшінші болып көк шардың алынуының ықтималдығын табыңдар:

A) $\frac{5}{64}$; B) $\frac{5}{56}$; C) $\frac{2}{37}$; D) $\frac{3}{35}$.

4. Мерген нысананы үш рет атты. Мергеннің нысанаға дәл тигізу ықтималдығы 0,6. Нысананы дәл көздеудің таралу заңдылығын анықтаңдар. Мергеннің нысанаға дәл тигізу ықтималдығының ең үлкен мәнін табыңдар:

A) 0,216; B) 0,26; C) 0,3; D) 0,31.

5. X дискретті кездейсоқ оқиғасының таралу заңдылығы берілген:

54-*кесте*

X	2	3	4
P	0,2	0,4	0,4

X кездейсоқ оқиғасының математикалық болжамын табыңдар:

A) 3,0; B) 3,1; C) 2,8; D) 3,2.

6. X дискретті кездейсоқ оқиғасының таралу заңдылығы берілген:

55-*кесте*

X	2	3	4
P	0,4	0,4	0,2

X кездейсоқ оқиғасының дисперсиясын табыңдар.

A) 0,56; B) 0,64; C) 0,66; D) 0,58.

7. X және Y тәуелсіз кездейсоқ оқиғалардың ықтималдықтарының таралу заңдылығы кестемен берілген:

56-*кесте*

X	2	3
P	0,6	0,4

57-*кесте*

Y	2	4
P	0,6	0,4

$Z = 3X + 4Y$ кездейсоқ оқиғасының математикалық болжамын табыңдар:

A) 18,2; B) 18,4; C) 19,4; D) 20,4.

8. X кездейсоқ оқиғасының таралу заңдылығы кестемен берілген. $M(2X + 3)$ шаманың мәнін табыңдар:

58-*кесте*

X	3	4	5	6	7
P	0,3	0,3	0,2	0,1	0,1

A) 12,4; B) 10,4; C) 12,2; D) 12,6.

9. Бір-бірінен тәуелсіз 5 тәжірибе жүргізілген. X оқиғасының ықтималдығы $p = 0,8$. Осы тәжірибе барысында X оқиғасының тура 3 рет орындалуының ықтималдығын табыңдар:
A) ≈0,352; B) ≈0,296; C) ≈0,306; D) ≈0,307.

10. Тәжірибе барысында A оқиғасының орындалу ықтималдығы 0,4. Тәжірибе бір-бірінен тәуелсіз 10 рет жүргізілген. A оқиғасының төрттен артық емес орындалуының ықтималдығын есептеу формуласы:

A) $P = \sum\limits_{n=0}^{4} C_{10}^{n} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{10-n}$; B) $P = \sum\limits_{n=0}^{4} C_{10}^{n} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{n} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{10-n}$;

C) $P = \sum\limits_{n=0}^{4} C_{10}^{n} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{n} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{9-n}$; D) $P = \sum\limits_{n=0}^{3} C_{10}^{n} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{10-n}$.

10-СЫНЫПТАҒЫ АЛГЕБРА ЖӘНЕ АНАЛИЗ БАСТАМАЛАРЫ КУРСЫН ҚАЙТАЛАУҒА АРНАЛҒАН ЖАТТЫҒУЛАР

Есептеулер

Өрнектің мәнін табыңдар **(1–3)**:

1. 1) $\arccos(-1) - \arccos 0 - \operatorname{arctg} 1$; 2) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} - \operatorname{arcctg} 1$;

3) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} - \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \arcsin 1$;

4) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arccos\frac{1}{2} - \arccos 0$.

2. 1) $\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$; 2) $\operatorname{ctg}\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$;

3) $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 4) $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$.

3. 1) $\arcsin\left(\cos\frac{50\pi}{14}\right)$; 2) $\arccos\left(\sin\frac{27\pi}{7}\right)$; 3) $\arcsin\left(\sin\frac{10\pi}{3}\right)$;

4) $\arcsin(\sin 6)$; 5) $\arcsin(\cos 8)$; 6) $\arccos(\cos 10)$.

4. $f(x)$ функциясы туындысының x_0 нүктесіндегі мәнін есептеңдер:

1) $f(x) = x^3 - 2\sqrt{x}$, $x_0 = 1$;

2) $f(x) = 3 + (2x - 1)^2 + 4\sqrt{x}$, $x_0 = 1$;

3) $f(x) = 3\sqrt{2x} - \frac{5}{x} + 2x - 1$, $x_0 = 1$;

4) $f(x) = (3x + 4)^2 + \frac{4}{x+1}$, $x_0 = -2$;

5) $f(x) = \sin(3x - 2\pi) + \pi$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$;

6) $f(x) = \cos(2x - \pi) + \pi$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

5. $y = f(x)$ функциясы графигіне абсциссасы x_0 болатын нүктеде жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффициентін табыңдар:

1) $y = \frac{2x+1}{x-1}$; 2) $y = \frac{x}{x+1} + \sqrt{3-x}$, $x_0 = 2$;

3) $y = \frac{2x-1}{x+1} + \frac{9}{x}$, $x_0 = 3$.

6. $f''(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі мәнін табыңдар:

1) $f(x) = \sin 3x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$; 2) $f(x) = \cos 4x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$;

3) $f(x) = \sin^2 3x$, $x_0 = -\frac{\pi}{2}$.

7. $y = f(x)$ функциясының берілген кесіндідегі ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңдар:

1) $y = x^4 - 8x^2 - 9$ және $[0;\ 3]$; 2) $y = 3x^5 - 5x^3$ және $[2;\ 3]$;

3) $y = \sqrt{x} - x$ және $[0;\ 4]$; 4) $y = \dfrac{1}{x} + x$ және $[0{,}5;\ 4]$.

Функцияның шегі және туындысы

8. Дәлелдеңдер:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2 - 2x}{2x^2 + 3} = \dfrac{1}{2}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x - 3x^3}{x^3 - 3x + 1} = -3$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2 - x - 6}{2 - x^2} = -1$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2 - 3x^3 + 4x + 11}{x^3 - x + 3} = -3$.

Шекті есептеңдер (9-10):

9. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 2x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1 - \cos 4x}{4x^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1 - \cos 6x}{\sin^2 2x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1 - x} - 1}{x}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4 - x} - 2}{x}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3 - x} - \sqrt{3}}{2x}$; 8) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5 - x} - 2}{x - 1}$.

10. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(-2x)}{\operatorname{tg} 2x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1 - \cos 2x}{x^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1 - \cos 2x}{(2x)^2}$; 5) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2 - x - 6}{3 - x}$; 6) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 9}$;

7) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 + 2x - 8}$; 8) $\lim\limits_{x\to -6}\dfrac{x^2 + 5x - 6}{2x + 12}$.

11. $f(x)$ функциясының туындысын табыңдар:

1) $f(x) = \sin^2 2x + \cos^2 2x - \sqrt{2x}$; 2) $f(x) = \sin^3 2x + \cos 3x - \dfrac{2}{x}$;

3) $f(x) = \operatorname{tg}^2 2x + \operatorname{ctg} 3x + \sqrt{\pi}$; 4) $f(x) = \operatorname{arctg} 2x + \arccos x + \sqrt{x}$.

12. $f(x) = x + \sqrt{1 + x^2}$ функциясының $x = 2$ нүктесіндегі екінші туындысының мәнін есептеңдер.

13. Функцияның туындысын табыңдар:

1) $f(x) = \dfrac{2x - 1}{3x + 2} + 3x - 2$; 2) $f(x) = x\sin 2x + \sqrt{2 - 3x}$.

14. $f'(x) = 0$ теңдігі орындалатындай нүктелерді табыңдар:

1) $f(x) = 3x^2 - x^3$; 2) $f(x) = 2x^2 - x^4$;

3) $f(x) = \sin 2x + \cos 2x - 2$; 4) $f(x) = \sin^2 2x + 2x - 1$.

Теңдеулер мен теңсіздіктер

15. $f'(x) < 0$ теңсіздігін қанағаттандыратын ең үлкен бүтін санды табыңдар:

1) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2$;
2) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x$;
3) $f(x) = 2x^3 + x^2 - 4x$;
4) $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

16. 1) $\frac{x-3}{2} \leqslant \frac{\left(\sqrt{x-5}\right)^2}{x-6}$ теңсіздігінің шешімі болатын ең кіші бүтін санды көрсетіңдер;

2) $\frac{6-x}{\sqrt{x^2 - 8x + 7}}$ теңсіздігінің шешімі болатын ең үлкен бүтін санды көрсетіңдер;

3) $(x^2 + 2x - 8) \cdot \sqrt{x^2 + x - 2}$ m 0 теңсіздігін шешіңдер.

17. $f'(x)$ ǀ 0 теңсіздігін шешіңдер:

1) $f(x) = \frac{1}{3}\cos 3x + \sin x$;
2) $f(x) = 2\sin\frac{x}{2} - \sqrt{3}x$;
3) $f(x) = 3\cos^2 x + 2\sin^2 x + x$;
4) $f(x) = \sin^2 3x - \frac{1}{12}\cos 6x + x$;
5) $f(x) = \arccos 3x + 2x + 3$;
6) $f(x) = \operatorname{arcctg} 2x + 2x - 1$.

18. $f'(x) = 0$ теңдеуін шешіңдер:

1) $f(x) = \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}x$;
2) $f(x) = \sin x - \frac{x}{2}$;
3) $f(x) = 2x - \operatorname{tg} x$;
4) $f(x) = x + \operatorname{ctg} x$.

19. 1) $5\sin x + 2\cos x = A$ теңдеуінің шешімі болатындай A-ның барлық мәндерін табыңдар.

2) $3\sin 2x - 4\cos 2x = A$ теңдеуінің шешімі болатындай A-ның барлық мәндерін табыңдар.

20. Теңдеуді шешіңдер:

1) $\sin^4\frac{x}{2} - \cos^4\frac{x}{2} = \frac{1}{4}$;
2) $\cos 10x + \sin 10x = \sqrt{15}\sin 15x$;
3) $\cos^2 x - \cos^2 2x + \cos^2 3x - \cos^2 4x = 0$;
4) $5\sin^2 x - \sqrt{3}\cos x \cdot \sin x + 6\cos^2 x - 5 = 0$;
5) $(x-1)^2(x^2 - 2x) - 12 = 0$;
6) $(x-3)^2(x^2 - 6x) + 12 = 0$;
7) $(x^2 - 3x + 1)(x^2 - 3x + 3) - 3 = 0$;
8) $(x^2 + 3x - 4)(x^2 + 3x - 2) + 1 = 0$;
9) $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 12 = 0$;
10) $\left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right) - \left(x - \frac{2}{x}\right) - 16 = 0$.

Функция және оның графигі

21. Функция графигінің асимптоталарын табыңдар:

1) $y = \frac{x+3}{x-1}$; 2) $y = \frac{4-2x}{x+3}$; 3) $y = \frac{x^2+4}{x-2}$; 4) $y = \frac{x^2-4x}{x+2}$.

22. Функция графигінің иілу нүктелерінің координаталарын табыңдар:

1) $y = \frac{2x^3}{x^2-1}$; 2) $y = \frac{3x^2}{x-1}$; 3) $y = \frac{x^3}{4-x^2}$; 4) $y = 1 - 3x + 2x^3$.

23. $f(x)$ функциясының өсу және кему аралықтарын табыңдар:

1) $f(x) = x^2 + 12x - 100$; 2) $f(x) = 5x^2 - 3x - 1$;
3) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9$; 4) $f(x) = x^3 - 3x$;
5) $f(x) = \frac{2x}{x+1}$; 6) $f(x) = \frac{3x}{x^2-9}$;
7) $f(x) = \frac{x}{25-x^2}$; 8) $f(x) = \frac{x^2-9}{x^2-4}$.

24. 1) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ функциясы $x > 1$ болғанда өсетінін дәлелдеңдер;

2) $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$ функциясы $x < 0$ және $0 < x < 1$ болғанда кемитінін дәлелдеңдер.

25. Функцияның сындық нүктелерін табыңдар:

1) $f(x) = 4 - 2x^2 + 7x^2$; 2) $f(x) = 4x - \frac{x^3}{3}$;
3) $f(x) = 9 + 8x^2 - x^4$; 4) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4$.

Нүктелердің қайсылары максимум нүктелері, қайсылары минимум нүктелері болады?

26. $y = f(x)$ функциясының графигіне $x_0 = 0$ нүктесінде жүргізілген жанаманың теңдеуін жазыңдар:

1) $y = 2x - \sqrt{x+1}$; 2) $y = \sqrt{3x+1}$;
3) $y = 1 + \frac{1}{x+2}$; 4) $y = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$.

27. Функцияның сындық нүктелерін табыңдар:

1) $f(x) = x - 2\sin x$; 2) $f(x) = x + \cos 2x$.

28. 1) $f(x) = \sqrt{3x+1}$ функциясының графигіне жүргізілген және $y = \frac{3}{4}x$ түзуіне параллель болатын жанаманың теңдеуін жазыңдар;

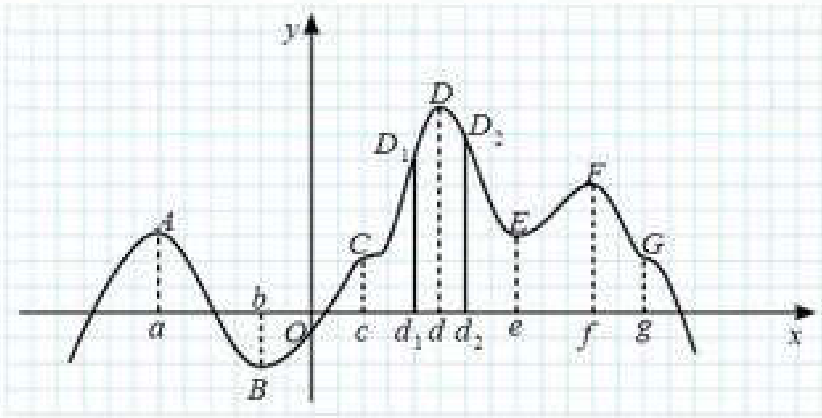
2) $f(x) = \sqrt{3-2x}$ функциясының графигіне жүргізілген және $y = -x + 5$ түзуіне параллель болатын жанаманың теңдеуін жазыңдар.

29. Берілген кесіндідегі функцияның ең кіші және ең үлкен мәндерін табыңдар:

1) $f(x) = \dfrac{x}{8} + \dfrac{2}{x}$, $x \in [1;\ 6]$; 2) $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3x^2}{2} + 2x$, $x \in [0;\ 3]$;

3) $f(x) = x^3 - 12x$, $x \in [-1;\ 3]$; 4) $f(x) = \dfrac{x}{2x^2 - 1}$, $x \in [-4;\ -2]$.

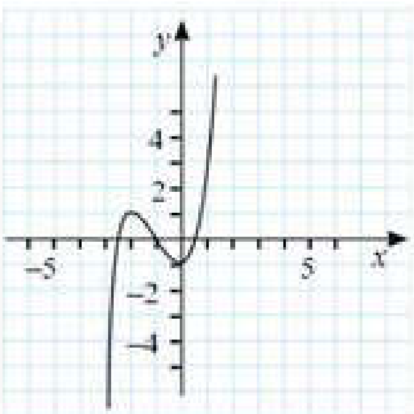
30. $y = f(x)$ функциясының графигі берілген (1-сурет).



1-сурет

График бойынша:
1) $f'(x) = 0$ болатын нүктелерді;
2) $f'(x) > 0$ болатын аралықтарды;
3) $f'(x) < 0$ болатын аралықтарды;
4) функция графигінің иілу нүктелерінің санын;
5) функцияның экстремум нүктелерін табыңдар.

31. Функцияның 2-суретте берілген графигі бойынша:



2-сурет

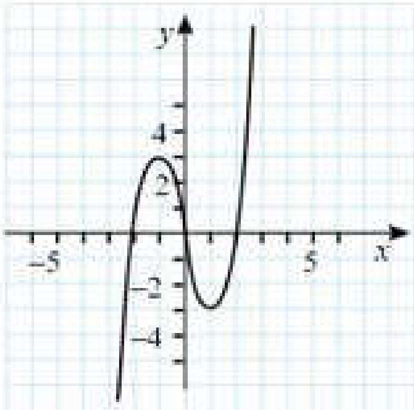
1) минимум нүктелерін; 2) максимум нүктелерін; 3) функцияның экстремумдарын табыңдар.

32. Функцияны зерттеңдер және графигін салыңдар:

1) $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$; 2) $y = x^3 - 3x^2 + 1$;

3) $y = x + \frac{2}{x}$; 4) $y = \frac{3}{x} - \frac{x}{3}$.

33. $f'(x)$ функциясының графигі берілген (3-сурет).



3-сурет

Функцияның минимум және максимум нүктелерін көрсетіңдер.

34. Нүкте түзу сызық бойымен $s = 12t^2 - \frac{3}{2}t$ заңдылығы бойынша қозғалады, мұндағы $s(t)$ — метрмен өрнектелген жолдың ұзындығы, t — секундпен алынған уақыт. Қандай уақытта [4; 10] аралығында қозғалыс жылдамдығы ең үлкен және осы жылдамдықтың шамасы неге тең болады?

35. Ұзындығы 80 см болатын сымнан ауданы ең үлкен болатындай тіктөртбұрыш жасау керек. Тіктөртбұрыштың қабырғаларының ұзындығын табыңдар.

36. 1) Үш қабырғасының ұзындығы a болатын трапецияның ең үлкен ауданын табыңдар.
2) $A(-1;\ 2)$ нүктесіне жақын орналасқан $y = x^2$ параболасының M нүктесінің координатасын табыңдар.

37. Кітап бетіндегі мәтіннің ауданы 363 см^2. Осы беттің жоғарғы және төменгі жиегінің ені 2 см, бүйір жақтағы жиегінің ені 1,5 см. Ауданы ең кіші болатындай кітап бетінің өлшемдері қандай болуы керек?

38. Сүйір бұрышы 30° болатын тікбұрышты трапеция пішіндес жер телімінің периметрі 24 м. Жер телімінің ең үлкен ауданын табыңдар.

39. Катеті $2\sqrt{2}$ см болатын теңбүйірлі тікбұрышты үшбұрышқа екі төбесі гипатенузада, қалған екі төбесі катеттерде жататын ең үлкен ауданы бар тіктөртбұрыш іштей сызылған. Тіктөртбұрыштың қабырғаларының ұзындықтарын табыңдар.

40. 1) Квадраттарының қосындысы ең кіші болатындай 16 санын екі оң санның көбейтіндісі түрінде жазыңдар.
2) 32 саны екі оң санның көбейтіндісі түрінде берілген. Біреуінің екіншісінің квадрат түбіріне қосындысы ең үлкен болатындай осы екі көбейткішті табыңдар.

***41.** $y = 6x - x^2$ функциясының графигіне екі жанама жүргізілген. Бір жанама абсциссасы $x_0 = -2$ болатын нүктеден, екіншісі функцияның максимум нүктесінен өтеді. Осы екі жанама және ордината осі арқылы құрылған үшбұрыштың ауданын табыңдар.

Практикаға бағытталған тапсырмалар

42. Бірінші оператор қолжазбаны компьютерде 9 сағ-та, екінші оператор 6 сағ-та тереді. Бірінші оператор 3 сағ-тан кейін басқа жұмысқа ауысқандықтан қалған жұмысты екінші оператор аяқтады.

1) Қалған жұмысты екінші оператор қанша уақытта терді?
2) Барлық жұмыс қанша уақытта орындалды?
3) Егер жұмыстың жартысын бірінші оператор, қалғанын екінші оператор орындаса, онда барлық жұмыс қанша уақытта бітеді?
4) Егер екі оператор бірдей жұмыс атқарса, онда барлық қолжазба қанша уақытта теріледі?
5) Орындалған жұмыс үшін әр оператор 9 000 тг алды. Егер олар жұмысты бірге атқаратын болса, онда әр оператор қанша теңгеден алады?

43. Үш адамнан тұратын жанұя Алматы қаласына бармақшы болды. Алматы қаласына пойызбен немесе жеңіл мәшинемен баруға болады. Пойыз билетінің бағасы бір адамға 3460 тг. Жеңіл мәшине 100 км-ге 11 л бензин жібереді. Жолдың ұзындығы 600 км, бензиннің бағасы 116 тг/л.
1) Жанұяның Алматыға пойызбен баруына және кейін қайтуына ең кемі қанша теңге кетеді?
2) Жанұя Алматыға пойызбен баратын болса, онда қаншаға қымбат шығады?

44. Ұялы байланыс компаниясы өзінің тұрақты тұтынушысына таңдау үшін жеңілдіктердің бірін ұсынуға шешім қабылдады: республика бойынша басқа ұялы байланыс абоненттеріне қоңырау шалуға 20% немесе шет ел абоненттеріне қоңырау шалуға 25%, немесе мобильді интернет қызметтерінде 15% жеңілдік. Тұтынушы қоңырау жазбаларын қарап, бір айда еліміздегі басқа компания абоненттеріне 3000 тг, шет елге қоңырау шалу үшін 2500 тг, мобильді интернетке 2000 тг жұмсағанын байқайды. Тұтынушы келесі айда шығын алдыңғы айдағыдай болады деп есептеп, ең тиімді жеңілдікті таңдады.

1) Тұтынушыға қандай жеңілдікті таңдаған тиімді?

2) Жеңілдік қанша теңгені құрайды?

3) Егер бір айда республика бойынша қоңырау шалуға 3500 тг жұмсалатын болса, еліміздегі басқа абоненттерге қоңырау шалуға 20% жеңілдік алған тиімді ме және қаншалықты тиімді?

45. Құрылыс компаниясы үш жерден 20 т кірпіш алмақшы болды. Бір кірпіштің массасы 5 кг. Жеткізу бағасы мен шарттары келесі кестеде көрсетілген:

59-кесте

Кірпіш сататын жер	Бір кірпіштің бағасы	Жеткізу бағасы (теңге)	Қосымша шарттар
A	254 тг	190 000	Жоқ
B	260 тг	150 000	Егер тапсырыс құны 500 000 теңгеден артық болса, онда жеткізу бағасы 40%-ға төмендейді
C	270 тг	140 000	Тапсырыс құны 1500 000 теңгеден артық болса, онда жеткізу құны 70%-ға дейін төмендейді

1) Ең арзан бағаны табыңдар.

2) Егер құрылыс компаниясы 30 т кірпіш алатын болса, онда шығын аз болу үшін қайсысынан алғаны тиімді?

46. Тікбұрышты параллелепипед пішінді ыдысқа 1700 см^3 су құйылған. Ыдыстағы судың деңгейі 10 см. Ыдысқа тетік салған кезде судың деңгейі 5 см көтерілген.

1) Тетіктің көлемі қандай?

2) Егер ыдыстағы судың деңгейі 15 см болса, онда ыдыстағы судың көлемі қанша?

3) Егер ыдысқа салынған тетіктің көлемі 1700 см^3 болса, онда судың деңгейі қанша сантиметрге көтеріледі?

47. Бастауыш сынып оқушысына күніне 2 л сұйықтық қажет. Денеге түскен жүктемеден ағзаның сұйықты қажет етуі 2 есе артады.
1) Спортпен шұғылданатын оқушы тәулігіне қанша сұйықтық ішуі керек?
2) Үзіліс барысында оқушы асханада қою тамақ, бір стақан шай немесе бір стақан шырын ішеді және тәтті нан жейді. Қою тамақ 150 тг, тәтті нан 55 тг, шай 35 тг, шырын 180 тг тұрады. Қаладағы көлікке 40 тг төлейді. Ата-анасы баласына күніне мектепке бару үшін қанша теңге беруі керек?
3) Мектепте бес күндік оқу. Егер оқушы үш күн шай, екі күн шырын ішетін болса, онда ата-анасы баласына аптасына қанша теңге береді?

48. Бала ағзасына тәулігіне 1100 мг кальций қажет. 1 кг сыр дайындау үшін 10 л сүт қажет. 90 г сыр адам ағзасын қажет кальциймен қамтамасыз етеді және оған 3 л сүт қажет.
1) Балаға бір аптада, бір айда қанша кальций керек?
2) 5 кг, 10 кг сыр жасау үшін қанша сүт қажет?
3) Егер бала аптасына сырды төрт күн жейтін болса, онда оған бір айда қанша сыр керек?

49. Сыныптағы оқушылар неміс, француз және ағылшын тілдерін оқиды. Ағылшын тілін барлық оқушы, неміс тілін 22 оқушы, француз тілін 13 оқушы, неміс және француз тілдерін 9 оқушы оқиды. Сыныпта қанша оқушы бар?

50. Қорапта 27 қарындаш бар. Олар қызыл, көк және жасыл түсті. Қызыл қарындаштар саны көк қарындаштар санынан 14 есе артық. Қорапта қанша жасыл түсті қарындаш бар?

Деңгейлігі жоғары тапсырмалар

51. n-нің қандай натурал мәндерінде $\frac{2n^2-3n+2}{2n-1}$ бөлшегі бүтін сан болады?

52. $1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+4\cdot 2^3+\ldots+50\cdot 2^{49}$ қосындысының мәнін табыңдар.

***53.** Егер $a(a+b+c)<0$ болса, онда $ax^2+bx+c=0$ теңдеуінің екі нақты түбірі болатынын дәлелдеңдер.

54. Мұғалім қағазға 20 санын жазды. 35 оқушының әрқайсысы осы санға 1-ді қосып немесе саннан 1-ді азайтып қағазды бір-біріне беріп отырды. Нәтижесінде 10 саны шығуы мүмкін бе?

***55.** $\sin^{20}x\cdot\cos^{24}x=0{,}0001$ теңдеуін шешіңдер.

***56.** 10 оқушы олимпиадада 35 есеп шығарды. Олардың арасында бір ғана, екі ғана, үш қана есеп шығарған оқушылар бар. Оқушылар арасында кем дегенде бес тапсырма шығарған оқушы болатынын дәлелдеңдер.

***57.** $\operatorname{tg}^2\pi(x+y)+\operatorname{ctg}^2\pi(x+y)=\sqrt{\dfrac{2x}{x^2+1}}+1$ теңдеуін шешіңдер .

58. $\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\dfrac{3}{4!}+\ldots+\dfrac{n}{(n+1)!}$ өрнегінің мәнін табыңдар.

***59.** $21+21^2+21^3+21^4+\ldots+21^{2007}+21^{2008}$ қосындысының мәні 11 санына қалдықсыз бөлінетінін дәлелдеңдер.

60. Кез келген x үшін $x^8+x^6-4x^4+x^2+1\geq 0$ теңсіздігі ақиқат екенін дәлелдеңдер.

61. $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{a+c}+\dfrac{c}{a+b}\geqslant\dfrac{3}{2}$ мұндағы a, b, c — оң сандар, теңсіздігін дәлелдеңдер.

62. $1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)<n^n$ теңсіздігін дәлелдеңдер.

63. Егер $a+b+c=3$, $(a\geq 0,\ b\geq 0,\ c\geq 0)$, онда $\dfrac{a}{a+1}+\dfrac{b}{b+1}+\dfrac{c}{c+1}\leqslant\dfrac{3}{2}$ теңсіздігін дәлелдеңдер.

64. $y=\sin^2 x-\sin x$ функциясының мәндер жиынын табыңдар.

65. $y=\dfrac{16}{x^2-6x+17}$ функциясының ең үлкен мәнін табыңдар.

***66.** Егер $x\neq 0$, $x\neq 1$ болғанда барлық мәндер үшін $f(x)+f\left(\dfrac{1}{1-x}\right)=x$ теңдігі орындалса, онда $f(x)$ функциясын табыңдар.

67. Теңдеуді шешіңдер:

1) $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{48}{x^2}=5\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{4}{x}\right)$;   2) $\dfrac{x^2-6x-9}{x}=\dfrac{x^2-4x-9}{x^2-6x-9}$;

3) $x^2+\dfrac{x^2}{(x+1)^2}=3$;   4) $x^2+\dfrac{9x^2}{(x-3)^2}=7$.

68. Егер $\dfrac{\pi}{6}$ саны түбірлерінің бірі болса, онда $2\cos^4 x-3\sin^2 x=a$ теңдеуін шешіңдер.

***69.** 1) a параметрінің қандай мәндерінде $(a+2)\sin x-3>0$ теңсіздігі x-тің барлық мәндері үшін орындалады?
2) a параметрінің қандай мәндерінде $(a-1)\cos x-2<0$ теңсіздігі x-тің барлық мәндері үшін орындалады?

***70.** Теңсіздікті шешіңдер:

1) $\arccos\dfrac{2-x}{x}<\dfrac{2\pi}{3}$;   2) $\arcsin\dfrac{2-x}{x}\geqslant\dfrac{\pi}{6}$.

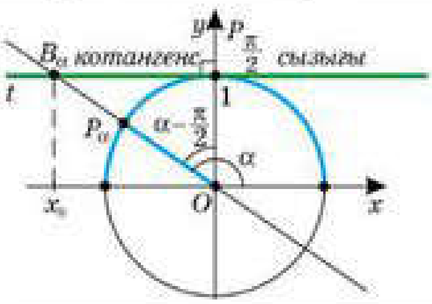
Глоссарий

a санының арккосинусы	a ($\lvert a\rvert \le 1$) *санының арккосинусы* деп косинусы a-ға тең $[0; \pi]$ аралығындағы санды айтады
a санының арккотангенсі	*a санының арккотангенсі* деп котангенсі a-ға тең $(0; \pi)$ интервалындағы санды айтады
a санының арксинусы	a ($\lvert a\rvert \le 1$) *санының арксинусы* деп синусы a-ға тең $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ аралығындағы санды айтады
a санының арктангенсі	*a санының арктангенсі* деп тангенсі a-ға тең $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ интервалындағы санды айтады
Анықталмағандықты ашу	$x \to a$ ($x \to \infty$) ұмтылғанда анықталмағандықты беретін функцияның шегін табу *анықталмағандықты ашу* деп аталады
Аргументтің өсімшесі	Функцияның анықталу облысынан алынған екі аргументтің айырымының мәні *функция аргументінің өсімшесі* деп аталады
Арккосинус	$y = \cos x$ функциясына кері функция *арккосинус* деп аталады және $y = \arccos x$ деп белгіленеді
Арксинус	$y = \sin x$ функциясына кері функция арксинус деп аталады және $y = \arcsin x$ деп белгіленеді
Арккотангенс	$y = \mathrm{ctg}\, x$ функциясына кері функция *арккотангенс* деп аталады және $y = \mathrm{arcctg}\, x$ деп белгіленеді
Арктангенс	$y = \mathrm{tg}\, x$ функциясына кері функция *арктангенс* деп аталады және $y = \mathrm{arctg}\, x$ деп белгіленеді
Аркфункциялар	Тригонометриялық функцияларға кері функциялар *кері тригонометриялық функциялар* немесе *аркфункциялар* деп аталады
Асимптота	M нүктесі берілген сызық бойымен шексіздікке жылжығанда осы нүктеден a түзуіне дейінгі қашықтық нөлге ұмтылса, онда a түзуі *қисықтың асимптотасы* деп аталады
Биномиалды коэффициенттер	Ньютон биномының формуласындағы C_n^k коэффициенттері *биномиалды коэффициенттер* деп аталады
Біртекті көпмүше	Көпмүшенің әрбір бірмүшелерінің дәрежелері көрсеткіштерінің қосындысының мәні бірдей болса, онда көпмүше *біртекті* деп аталады
Біртекті тригонометриялық теңдеу	Сол жақ бөлігіндегі $\sin x$ пен $\cos x$-ке қатысты барлық мүшелерінің дәреже көрсеткіштерінің қосындысы бірдей, оң жақ бөлігі 0-ге тең болатын теңдеу $\sin x$ пен $\cos x$-ке қатысты *біртекті тригонометриялық теңдеу* деп аталады
Бөлшек-сызықтық функция	$y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, $c \ne 0$, $ad \ne bc$ түріндегі функция *бөлшек-сызықтық функция* деп аталады

Жалғасы

Гармоникалық тербелістер	$f(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ немесе $f(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$ заңдарымен сипатталатын қозғалыстарды *гармоникалық тербелістер* деп атайды. A — тербелістің *амплитудасы*, ω — тербеліс *жиілігі*, φ — тербелістің *бастапқы фазасы* деп аталады. $f(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ және $f(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$ функцияларының $\frac{2\pi}{\omega}$-ға тең периоды *гармоникалық тербелістің периоды* деп аталады
Дискретті (үзілісті) кездейсоқ шама	Бір-бірінен оқшау, бөлек мән қабылдайтын кездейсоқ шама *дискретті (үзілісті) кездейсоқ шама* деп аталады
Дискретті кездейсоқ шаманың геометриялық үлестірімі	Бір-біріне тәуелсіз n тәжірибенің әрқайсысында A оқиғасының орындалу ықтималдығы p, орындалмау ықтималдығы $q = 1 - p$ болсын. Тәжірибе A оқиғасы бірінші рет орындалатын k-тәжірибеден кейін тоқтатылады. X дискретті кездейсоқ шамасының мүмкін мәндерінің ықтималдықтары $P(X = k) = q^{k-1}p$ формуласымен есептелетін үлестірім *геометриялық үлестірім* деп аталады
Дискретті кездейсоқ шаманың гипергеометриялық үлестірімі	Егер N — белгілі бір жиынның элементтерінің жалпы саны, M — осы жиынның белгілі бір қасиетті қанағаттандыратын элементтерінің саны, n — барлық элементтер ішінен кездейсоқ алынған элементтер саны, m — таңдап алынған элементтер ішінен берілген қасиетті қанағаттандыратын элементтер саны болса, онда X дискретті кездейсоқ шамасының мүмкін мәндерінің ықтималдығы $P(X = m) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$ формуласымен есептелетін үлестірім *гипергеометриялық үлестірім* деп аталады
Дисперсия	X кездейсоқ шамасының математикалық күтімінен ауытқуының квадратының математикалық күтімі *кездейсоқ шаманың дисперсиясы* деп аталады және $D(X) = M((X - M(X))^2)$ формуласымен есептеледі
Дифференциалдау	Функцияның туындысын табу амалын *дифференциалдау* деп атайды
Дөңес функция	Көп жағдайда жоғары қарай дөңестелген функцияны *дөңес функция* деп атайды
Екінші туынды	$y = f(x)$ функциясының *екінші туындысы* деп $f'(x)$ туындысынан алынған туындыны айтады
Жиында дифференциалданатын функция	Егер жиынның әрбір нүктесінде функцияның шектелген туындысы болса, онда *функция жиында дифференциалданады* деп айтады
Жоғары қарай дөңестелген функция	Егер дифференциалданатын функцияның графигі X интервалының кез келген X нүктесіне жүргізілген жанамадан төмен болмаса, онда функция X интервалында *жоғары қарай дөңестелген* деп аталады

Жалғасы

Иілу нүктесі	Егер M нүктесінің кіші аймағында қисық осы нүктеде жүргізілген жанаманың екі жағында орналасса, онда M нүктесі *иілу нүктесі* деп аталады
Қайталанатын терулер	Бір түрдің элементтері бір-бірінен ең болмағанда элементтердің санымен өзгешеленетін k элементтен тұратын реттелмеген жиынтық әртүрлі k типті n элементтен тұратын *қайталанатын терулер* деп аталады
Қайталанбайтын орналастырулар	n элементтен тұратын жиынның k элементінен реттелген жиындарды n элементтен алынған k-дан құралған *қайталанбайтын орналастырулар* деп айтады
Қайталанбайтын терулер	n элементтен тұратын жиынның k элементінен реттелген ішкі жиындарды n элементтен алынған k-дан құралған *қайталанбайтын терулер* деп айтады
Кездейсоқ шама	Тәжірибе нәтижесінде бірнеше мәндердің бірін қабылдайтын шама *кездейсоқ шама* деп аталады және бұл мәндердің қайсысын қабылдайтынын алдын ала білу мүмкін емес
Кездейсоқ шаманың ауытқуы	Кездейсоқ шама мен оның математикалық күтімінің айырмасы, яғни $X - M(X)$ шамасы *кездейсоқ шаманың ауытқуы* деп аталады
Кездейсоқ шаманың үлестірімі	Кездейсоқ шаманың мүмкін мәндері мен олардың ықтималдықтарын тізіп жазу *кездейсоқ шаманың үлестірімі* деп аталады
Кездейсоқ шаманың биномдық үлестірімі	Кездейсоқ шаманың мүмкін мәндерінің ықтималдықтары Бернулли формуласымен есептелетін үлестірім *биномдық үлестірім* деп аталады
Күрделі функция	$y = f(x)$ функциясының x аргументінің орнына $\phi = g(x)$ функциясынан алынған $y = f(g(x))$ түріндегі функция *күрделі функция* (функциялардың композициясы) деп аталады
Комбинаторика	Комбинаторикалық есептерді қарастыратын математиканың бөлігі *комбинаторика* деп аталады
Комбинаторикалық есептер	Шектелген жиынның элементтерінен қандай да бір ережелер бойынша әртүрлі комбинациялар құрастырылатын және олардың саны табылатын есептерді *комбинаторикалық есептер* деп атайды
Котангенстер сызығы	t түзуін *котангенстер сызығы* деп атайды 

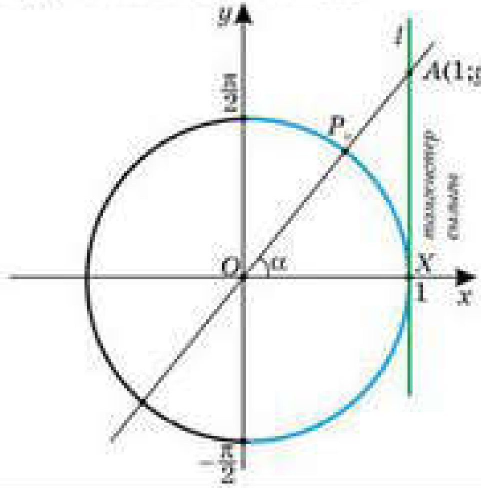
Жалғасы

Көпмүше	Бірмүшелердің қосындысы көпмүше деп аталады
Көпмүшенің дәрежесі	*Көпмүшенің дәрежесі* деп құрамындағы бірмүшелер дәрежелерінің ең үлкен дәрежесін айтады. *Бірмүшенің дәрежесі* деп құрамындағы айнымалылардың дәреже көрсеткіштерінің қосындысының мәнін айтады
Көпмүшенің мүшелері	Көпмүшенің құрамына кіретін бірмүшелер *көпмүшенің мүшелері* деп аталады
Көпмүшенің түбірі	Егер $x = x_0$ болғанда $P(x)$ көпмүшесінің мәні нөлге тең болса, онда x_0 санын $P(x)$ *көпмүшесінің түбірі* деп атайды
Максимум нүктесі	a нүктесінің қандай да бір аймағында әрбір x $(x \neq a)$ үшін $f(x) < f(a)$ теңсіздігі орындалған жағдайда ғана a нүктесі $y = f(x)$ *функциясының максимум нүктесі* деп аталады
Математикалық күтімі	Мәндері $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n$ сандары болатын және оларға сәйкес ықтималдықтары $p_1, p_2, p_3, p_4, \ldots, p_n$ болатын дискретті кездейсоқ шаманың мәндерінің оларға сәйкес ықтималдықтарына көбейтінділерінің қосындысы, яғни $M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_n \cdot p_n$ саны дискретті кездейсоқ шаманың *математикалық күтімі* деп аталады
Минимум нүктесі	a нүктесінің қандай да бір аймағында әрбір x $(x \neq a)$ үшін $f(x) > f(a)$ теңсіздігі орындалған жағдайда ғана a нүктесі $y = f(x)$ *функциясының минимум нүктесі* деп аталады
Мода	Кездейсоқ шаманың ықтималдығы жоғары мәні *кездейсоқ шаманың модасы* деп аталады
Оқиғалардың көбейтіндісі	A және B оқиғаларына тиісті болатын элементар оқиғалардан құралған оқиға *A және B оқиғаларының көбейтіндісі* деп аталады және AB символымен белгіленеді
Оқиғалардың қосындысы	A немесе B оқиғаларына тиісті болатын элементар оқиғалардан құралған оқиға *A және B оқиғаларының қосындысы* деп аталады және $A + B$ символымен белгіленеді
Ойыс функция	Көп жағдайда төменге қарай дөңестелген функцияны *ойыс функция* деп атайды
Өзара кері функциялар	Егер $y = \varphi(x)$ — берілген функция, $y = f(x)$ — берілген функцияға кері функция болса, онда $y = f(x)$ және $y = \varphi(x)$ функциялары *өзара кері функциялар* деп аталады
n дәрежелі көпмүше	$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0$ (мұндағы n — бүтін теріс емес сан, $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$ — кез келген сандар және $a_n \neq 0$) түрінде берілген өрнекті x айнымалысына қатысты *n дәрежелі көпмүше* деп атайды. Кез келген санды *нөлінші дәрежелі көпмүше* деп атайды
n элементтен тұратын қайталанбайтын алмастырулар	$A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ жиынының барлық n элементін қамтитын реттелген жиындар *n элементтен тұратын қайталанбайтын алмастырулар* деп аталады

Жалғасы

Нүктеде дифференциалданатын функция	Шектелген туындысы бар функция *нүктеде дифференциалданатын функция* деп аталады
Нүктеде үзіліссіз функция	$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ теңдігі орындалса, онда $y = f(x)$ функция сы $x = x_0$ болатын *нүктеде үзіліссіз функция* деп аталады. Кері жағдайда $y = f(x)$ функциясы $x = x_0$ нүктесінде үзілісті болады
Нүктенің аймағы	Нүкте тиісті болатын кез келген интервал *нүктенің аймағы* деп аталады
Ньютон биномы	(1) және (2) формулалары *Ньютон биномы* деп аталады. $(x + a)^n = x^n + n \cdot a \cdot x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot a^2 \cdot x^{n-2} + ... +$ $+ \frac{n(n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{k!} \cdot a^k \cdot x^{n-k} + ...+ a^n$ (1) $(x + a)^n = C_n^0 \cdot a^0 \cdot x^n + C_n^1 \cdot a^1 \cdot x^{n-1} + C_n^2 \cdot a^2 \cdot x^{n-2} +.... + C_n^k \cdot a^k \times$ $\times x^{n-k} + ...+ C_n^{n-1} \cdot a^{n-1} \cdot x^1 + C_n^n \cdot a^n \cdot x^0$ (2)
Сандық функция	Анықталу облысы *D болатын сандық функция* деп *D* жиынының кез келген x санына қандай да бір ереже бойынша x-тен тәуелді бір ғана y саны қойылатын сәйкестікті айтады
Стационар нүкте	$f'(x_0) = 0$ болса, онда x_0 нүктесі *функцияның стационар нүктесі* деп аталады
Стандарт түрдегі көпмүше	Стандарт түрдегі ұқсас емес бірмүшелерден тұратын көпмүшені *стандарт түрдегі көпмүше* деп атайды
Симметриялы көпмүше	Шетінен бірдей қашықтықта орналасқан мүшелердің коэффициенттері болатын бір айнымалысы бар n-ші дәрежелі көпмүше *симметриялы көпмүше* деп аталады
Симметриялы көпмүше	x және y айнымалыларынан тұратын көпмүшеде x-ті y-пен және y-ті x-пен алмастырғанда көпмүшенің түрі өзгермесе, онда ол *симметриялы көпмүше* деп аталады
Симметриялы теңдеу	Шеттерінен бірдей қашықтықта орналасқан коэффициенттері тең болатын n-ші дәрежелі теңдеу *симметриялы теңдеу* деп аталады
Синусоида	$y = \sin x$ және $y = \cos x$ функцияларының графигі *синусоида* деп аталады
Сындық нүкте	$f'(x_0)$ туындысы нөлге тең немесе туындысы болмаса, онда x_0 нүктесі функцияның *сындық нүктесі* деп аталады
Тангенсоида	$y = \operatorname{tg} x$ функциясының графигі *тангенсоида* деп аталады

Жалғасы

Тангенстер сызығы	l түзуін тангенстер сызығы деп атайды 
Тригонометриялық теңдеу	Белгісіз (айнымалысы) тригонометриялық функцияның аргументі түрінде берілген теңдеуді *тригонометриялық теңдеу* деп атайды
Тригонометриялық теңсіздік	Белгісіз (айнымалысы) тригонометриялық функцияның аргументі түрінде берілген теңсіздікті *тригонометриялық теңсіздік* деп атайды
Төмен қарай дөңестелген функция	Егер дифференциалданатын функцияның графигі X интервалының кез келген X нүктесіне жүргізілген жанамадан төмен орналасса, онда функция X интервалында *төменге қарай дөңестелген* деп аталады
Үзіліс нүктелері	1. Егер біржақты $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ немесе $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ шектерінің ең болмағанда біреуі шексіз болса, онда абсциссасы x_0 болатын нүкте II текті үзіліс нүктесі болады; 2. Егер $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ немесе $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ біржақты шектері шектелген және әртүрлі болса, онда абсциссасы x_0 болатын нүкте I текті үзіліс нүктесі болады. 3. Егер $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = b$ және $f(x_0) \neq b$ немесе $f(x_0)$ анықталмаған болса, онда абсциссасы x_0 болатын нүкте жойылатын *үзіліс нүктесі* болады
Үзіліссіз кездейсоқ шама	Мәндерінің жиыны белгілі бір екі санның арасындағы мәндердің барлығын қабылдайтын кездейсоқ шама *үзіліссіз кездейсоқ шама* деп аталады
Үзіліссіз функция	Егер функция аралықтың барлық нүктелерінде үзіліссіз болса, онда ол осы аралықта *үзіліссіз* болады
Үлестірімнің гистограммасы	Абсциссада кездейсоқ шаманың $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ мәндері, ординатада сәйкесінше $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ықтималдықтары болатын жазықтықтың $(x_i; p_i)$ нүктелері арқылы өтетін сынық сызық үлестірімнің көпбұрышы, оған сәйкес гистограмма *үлестірімнің гистограммасы* деп аталады
Үлестірім қатары (заңы)	X кездейсоқ шамасының $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ мәндері мен олардың $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ықтималдықтары көрсетілген кесте X дискретті кездейсоқ шамасының *үлестірім қатары (заңы)* деп аталады

Жалғасы

Шартты ықтималдық	Бір оқиғаның орындалғаны белгілі болған жағдайда екінші оқиғаның орындалу ықтималдығы *шартты ықтималдық* деп аталады. AB оқиғасына қолайлы элементар оқиғалар санының B оқиғасына қолайлы элементар оқиғалар санына қатынасы B оқиғасы орындалған жағдайда *A оқиғасының шартты ықтималдығы* деп аталады (B оқиғасының шартты ықтималдығының анықтамасына ұқсас)
Шексіз үлкен функция	Егер $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ (x \to \infty)}} f(x) = \infty$ болса, онда $x \to a$ ($x \to \infty$) ұмтылғанда $y = f(x)$ *функциясы шексіз үлкен* деп аталады
Функцияның ең кіші мәні	Кез келген $x \in X$, $x \neq x_0$ болғанда, $f(x) \geq f(x_0)$ теңсіздігі орындалса, онда $f(x_0)$ мәнін X аралығындағы *$f(x)$ функциясының ең кіші мәні* деп атайды. Белгіленуі: $\min\limits_{x \in X} y = f(x_0)$
Функцияның ең үлкен мәні	Кез келген $x \in X$, $x \neq x_0$ болғанда, $f(x) \leq f(x_0)$ теңсіздігі орындалса, онда $f(x_0)$ мәнін X аралығындағы *$f(x)$ функциясының ең үлкен мәні* деп атайды. Белгіленуі: $\max\limits_{x \in X} y = f(x_0)$
Функция максимумы	Функцияның максимум нүктесіндегі мәні *функцияның максимумы* деп аталады
Функция минимумы	Функцияның минимум нүктесіндегі мәні *функцияның минимумы* деп аталады
Функцияның оң жақ шегі	Егер x айнымалысы a санына ұмтылған кезде x тек қана a-дан үлкен мәндерді қабылдаған жағдайда A_2 саны $y = f(x)$ функциясының шегі болса, онда A_2 саны $y = f(x)$ функциясының a нүктесіндегі *оң жақ шегі* деп аталады
Функцияның өсімшесі	Мәндер жиынынан алынған функцияның екі мәнінің айырымы *функцияның өсімшесі* деп аталады
Функцияның сол жақ шегі	Егер x айнымалысы a санына ұмтылған кезде x тек қана a-дан кіші мәндерді қабылдаған жағдайда A_1 саны $y = f(x)$ функциясының шегі болса, онда A_1 саны $y = f(x)$ функциясының a нүктесіндегі *сол жақ шегі* деп аталады
Функцияның туындысы	Функция өсімшесінің аргумент өсімшесіне қатынасының аргумент өсімшесінің нөлге ұмтылғандағы шегі бар болса, ол шек *функцияның туындысы* деп аталады. $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$
Функцияның шегі	Егер кез келген $\varepsilon > 0$ болғанда, $0 < \vert x - a\vert < \delta$ теңсіздігін қанағаттандыратын кез келген $x \neq a$ үшін $\vert f(x) - A\vert < \varepsilon$ теңсіздігі орындалатындай $\delta > 0$ табылса, онда A саны x айнымалысының a санына ұмтылғандағы *$y = f(x)$ функциясының шегі* деп аталады
Функцияның экстремум нүктелері	Максимум және минимум нүктелері *функцияның экстремум нүктелері* деп аталады
Экстремум	Максимум және минимум нүктелері функцияның экстремум нүктелері, ал экстремум нүктесіндегі функцияның мәні *функцияның экстремумы* деп аталады

ЖАУАПТАРЫ

6-тарау . КӨПМҮШЕЛЕР

30.1. 1) x^3-3x^2-x+3; 2) x^3-x^2-9x+9; 3) x^3-x^2-4x+4; 4) x^3-2x^2-2x+5. **30.4.** 1) $-x^3+3x^2+x+1$; 2) $x^3+2x^2-18x+27$; 3) $3x^3+10x^2+4x-2$; 4) $2x^3-3x^2-2x-3$. **30.5.** 1) Ақиқат емес; 2) Ақиқат емес; 4) ақиқат. **30.8.** 1) $3x+3y$; 2) $3x^2+5xy+3y^2$; 3) $x^3+3yx^2+7xy^2+7x^2y+3xy^2+y^3$; 4) $x^5-3x^4y-3xy^4+y^5$. **30.9.** 1) $x^4-3xy^3-3x^3y+y^4$; 2) $yx^7-5x^8-5y^8+xy^7$; 3) $5y^2x^7-6x^9-6y^9+5x^2y^7$. **30.10.** 1) $a=3$, $p=1$ немесе $a=-3$, $p=-1$; 2) $a=5$, $p=1$ немесе $a=-2{,}5$, $p=-2$. **30.11.** 1) $\frac{x}{2y}$; 2) $\frac{10bc^2}{3a}$. **30.12.** 1) 0,5; 2) $\frac{2\pi}{3}$; 3) 1; 4) 6. **30.13.** 1) $\left[-\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \frac{\pi}{4}+\pi n\right]$, $n\in Z$; 2) $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi n\right\}$, $n\in Z$; 3) $(\pi n;\ \pi+\pi n)$, $n\in Z$. **30.14.** 1) $(-\infty;\ -4]\cup\{-2\}\cup[3;\ +\infty)$; 2) $(-\infty;\ -6]\cup[1{,}5;\ 2]$; 3) $(-\infty;\ 1]\cup[1{,}5;\ 3)$. **31.2.** 1) $p=\pm\sqrt{5}$; 2) $p\neq\pm2$; 3) $p=\pm2$; 4) $p=1{,}5$. **31.3.** 1) $a=2$, $b=-4$; 2) $a=3$, $b=-7$; 3) $a=-1$, $b=-3$; 4) $a=-5$, $b=-0{,}5$. **31.4.** 1) Бөлінді $x+1$, қалдық $x-4$; 2) бөлінді $2x+4$, қалдық $21x+19$; 3) бөлінді $x^4+2x^3+x^2+2x+3$, қалдық 8. **31.5.** 1) Жалған; 2) ақиқат; 3) жалған; 4) ақиқат. **31.8.** 1) $a=3$; 2) $a=-2$; 3) $a=-2$; 4) $a=1$. **31.9.** 1) $K=1$, $P=-17$, $M=15$; 2) $K=-1$, $P=-3$, $M=1$; 3) $K=0$, $P=0$, $M=2$. **31.11.** 1) $a=-3$, $c=2$; 2) $a=-5$, $c=2$ немесе $a=-1$, $c=1$. **31.12.** 1) $\varnothing$; 2) $\{-4\}$; 3) $\{-1\}$; 4) $\{-4;\ -3;\ 1;\ 2\}$. **31.14.** 1) $A(2;\ 0)$, $B(-4;\ 0)$, $C(0;\ 8)$; 2) $x\in(-\infty;\ -4]$, $x\in(-1;\ 2]$ болғанда кемиді, $x\in[-4;\ -1]$ және $x\in[2;\ +\infty)$ болғанда өседі; 3) $x=-1$; 4) $p=9$. **31.15.** 1) 25 км/сағ; 2) 14 км/сағ және 2 км/сағ. **32.1.** 1) 3; 2) -2; 3) 0; 4) 2. **32.2.** 1) $x^4-3x^3-4x^2+12x$; 2) x^4-10x^2+9; 3) $x^4+x^3-9x^2-9x$; 4) $x^4-6x^3+x^2+24x-20$. **32.3.** 1) 11; 2) 101; 3) 15; 4) 9. **32.5.** 3) *Нұсқау* . $6^{2n}-2^{2n}=(36^n-4^n)=(36-4)(36^{n-1}+36^{n-2}\cdot4+\ldots+4^{n-1})$. Онда $(36-4)=32$ өрнегі 32-ге бөлінеді, демек берілген өрнек те 32-ге бөлінеді. **32.6.** 3) *Нұсқау* . $5^n+13\cdot11^{2n}-4=5^n+1+13\cdot11^{2n}-5=(5^n+1)+(13\cdot11^{2n}+13)-18$, бірінші және екінші қосылғыштарды $x^{2n+1}+a^{2n+1}$ формуласының көмегімен көбейткіштерге жіктеп, әр қосылғыш 6-ға бөлінетінін аламыз. **32.7.** 3) Бөлінді $2x^4-3x^3+3x^2-4x+8$, қалдық (-14). **32.8.** 1) $\frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$; 2) $\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$; $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$; 3) $\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$; 4) -1; 0,5; 2; 5) -1; $\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$; 6) -1. **32.9.** 1) $a=2$; 2) $a=2{,}5$; 3) $2\frac{2}{3}$; 4) $a=2\frac{1}{8}$. **32.10.** 0. **32.11** . 1) $(x+1)(x-2)(x-3)$; 2) $(x-1)(x+1)(x^2+6)$; 3) $(x+2)(x-1)(x^2-3x-1)$; 4) $(x+1)(x-1)(x-2)(x+3)$. **32.12.** -32. **32.13.** 1) $R(x)=x+2$; 2) $R(x)=-2x-1$; 3) $R(x)=-\frac{2}{3}x+4\frac{1}{3}$. **32.14.** 1) $R(x)=\frac{1}{3}x^2-2x+2\frac{2}{3}$; 2) $4\frac{2}{3}x^2-x-\frac{2}{3}$. **32.15.** 1) $(2;\ +\infty)$; 2) $(-2;\ 2)$. **32.16.** 1) +; 2) –; 3) –; 4) +. **33.1** . 1) ±1; ±3; 2) ±1; ±2; ±4; 3) ±1; ±5; 4) ±1; ±2; ±3; ±6. **33.2** .1) ±1; ±3; ±6; 2) ±1; ±2; ±4; 3) ±1; ±2; ±5; ±10; 4) ±1; ±2; ±3; ±6. **33.3.** 1) $(x-1)(x+1)(x-2)$; 2) $(x-3)(x+3)(x-2)(x+2)$; 3) $(x-2)(x+2)(x-3)$; **33.4.** 1) $a=1$; $p=-4$; 2) $a=2$; $p=-1$; 3) $a=-1$; $p=-4$; 4) $a=4$; $p=3$. **33.5.** 1) -1 және 4; 2) 0 және 1; 3) -1 және 2,5; 4) 2 және 3. **33.6.** 1) $a=1$; 2) $a=-1$; 3) $a=-2$; 4) $a=4$. **33.7.** 1) $\{-2;\ 1;\ 3\}$; 2) $\{11;\ -2;\ -6\}$; 3) $\{-0{,}5;\ 1;\ 2\}$; 4) $\{-4;\ -2;\ 2\}$. **33.8.** 1) $P(x)=(x+1)\times(x-3)(x-2)^2$; 2) $P(x)=(x-1)^2(x-3)^2(x+2)^3$; 3) $P(x)=(x-2)(x+1)^2(x-4)^2(x-1)^3$; 4) $P(x)=x(x-2)^2(x-5)^2(x-7)^2(x+3)^3$. **33.9** . 1) -17; 2) 31. *Нұсқау* : $P(x)=(x^2-x-6)\times K(x)+4x-3$ немесе $P(x)=(x+2)(x-3)K(x)+4x-3$. Осы теңдікке $x=3$ және $x=-2$ мәндерін қоямыз: $P(3)=(3+2)(3-3)K(3)+4\cdot3-3=9$, $P(-2)=(-2+2)(-2-3)\times K(-2)+4(-2)-3=-11$. Сонда $P(3)-2P(-2)=9-2\cdot(-11)=31$. **33.10.** 1) $\left\{2\frac{1}{8};\ -1;\ 1;\ 1\frac{1}{4}\right\}$; 2) $\left\{-2\frac{1}{4};\ -1\frac{4}{9};\ 0;\ 4\right\}$; 3) $\{-0{,}125;\ 1;\ 15\}$; 4) $\left\{0;\ 4;\ -2\frac{3}{4};\ 6\frac{1}{4}\right\}$. **33.11.** *Нұсқау* : $P(x)$ көпмүшесін $K(x)$ көпмүшесіне бөліп қалдықта нөл санын аламыз. **33.12.** 1) 7; 2) 23; 3) 6; 4) 18. **33.13.** 1) $A(-2;\ 0)$, $B(4;\ 0)$, $C(0;\ 8)$; 2) $x\in(-\infty;\ -2]$, $x\in[1;\ 4]$ аралығында кемиді, $x\in[-2;\ 1]$; $x\in[4;\ +\infty)$ аралығында өседі; 3) $x=1$; 4) $p\in(0;\ 9)$. **33.14.** 1) $\{2;\ 3\}$; 2) $\varnothing$; 3) $\{4;\ 5\}$; 4) $\varnothing$. **34.1.** 1) -3; 3; 2) -3; -2; 2; 3; 3) $-\sqrt{5}$; -2;

2; $\sqrt{5}$; 4) $-\sqrt{7}$; $-\sqrt{6}$; $\sqrt{6}$; $\sqrt{7}$. **34.2.** 1) $\{-0{,}5;\ 0{,}5;\ 2\}$; 2) $\{-3;\ 2;\ 3\}$; 3) $\{-1;\ 2 \pm \sqrt{3}\}$; 4) $\{-1;\ 1\}$. **34.4.** $m = -5$, $n = 30$, $x_2 = -2{,}5$. **34.5.** 1) $\{-3;\ 1\}$; 2) $\{2 \pm \sqrt{6}\}$; 3) $\{-3;\ 0\}$; 4) $\{-2;\ -1\}$. **34.6.** 1) $\{-2;\ 1\}$; 2) $\{-1;\ 4\}$; 3) $\left\{2;\ 3;\ \frac{5 \pm 3\sqrt{5}}{2}\right\}$; 4) $\left\{\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$. **34.7.** 1) $\{-1;\ 2\}$; 2) $\{1;\ 2\}$; 3) $\{-1;\ 3\}$. **34.8.** 1) $\{-7;\ -1;\ -4 \pm 2\sqrt{2}\}$; 2) $\{-3;\ 2\}$; 4) $\{-6;\ 1\}$. **34.9.** 1) $\left\{2;\ \frac{1}{2}\right\}$. *Нұсқау* : $y = x + \frac{1}{x}$ алмастыруын қолданамыз. Сонда $y^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$; 2) $\left\{2;\ \frac{1}{2};\ -3;\ -\frac{1}{3}\right\}$; 3) $\left\{-2 \pm \sqrt{5};\ \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}\right\}$; 4) $\{-2;\ -1;\ 2 \pm \sqrt{2}\}$. **34.10.** 1) $\left\{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$, *нұсқау* : теңдеудің екі жақ бөлігін $x^2 \neq 0$ бөліп топтаймыз және $y = x + \frac{1}{x}$ алмастыруын қолданамыз. Сонда $y^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$; 2) $\left\{2 \pm \sqrt{3};\ \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$; 3) $\left\{-2 \pm \sqrt{5};\ \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}\right\}$; 4) $\left\{-3{,}5;\ 1;\ \frac{3 \pm 2\sqrt{2}}{2}\right\}$. **34.11.** 1) $\left\{-1 \pm \sqrt{3};\ \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}\right\}$; 2) $\{1;\ 2\}$; 3) $\{-2;\ -1;\ 2 \pm \sqrt{2}\}$; 4) $\left\{1;\ 2;\ \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}\right\}$. **34.12.** 1) $\left\{\frac{8}{5};\ \frac{13}{12}\right\}$; 2) $\left\{\frac{9}{8};\ \frac{16}{13}\right\}$; 3) $\left\{-\frac{5}{3};\ -\frac{5}{4};\ \frac{5}{2};\ 5\right\}$, *нұсқау* : $x^4 \neq 0$-ге бөлеміз; 4) $\left\{0;\ \frac{8}{5};\ \frac{13}{12}\right\}$, *нұсқау* : $(x-2)^4 \neq 0$-ге бөлеміз . **34.14.** 1) $x^2 + 7x + 10 = 0$; 2) $x^2 + 5x - 14 = 0$; 3) $7x^2 + 37x + 48 = 0$; 4) $x^2 + 2{,}6x + 43{,}2 = 0$. **34.15.** 1) $-\frac{\pi}{4} + \pi n$; $\mathrm{arctg}\,3 + \pi n$, $n \in Z$; 2) $\mathrm{arctg}\,5 + \pi n$; $-\mathrm{arctg}\,\frac{1}{3} + \pi n$, $n \in Z$; 3) $\frac{\pi}{4} + \pi n$; $-\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2} + \pi n$, $n \in Z$; 4) πn; $-\mathrm{arctg}\,\frac{3}{2} + \pi n$, $n \in Z$.
35.1 . 1) 1 және 2; 2) -1 және 2,5; 3) -1 және 4; 4) 1 және 1,25. **35.2.** 1) $x^3 - x^2 - 2x$; 2) $x^3 - x^2 - 4x + 4$; 3) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$; 4) $x^3 - x^2 - 10x - 8$. **35.4.** 1) $P(x) = x^3 - 3x^2 - x + 6$, түбірлері $\{-1,\ 1,\ 2\}$; 2) $P(x) = 2x^3 - 4x^2 - 3x + 3$, түбірлері $\left\{-1,\ \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}\right\}$.
35.5. $2x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{9}$. **35.6.** $-5x^3 - 20x^2 - 7\frac{1}{2}x - 10$. **35.7.** *Нұсқау* : $x = a$ болса, онда $a^3 - (a + b + c)a^2 + (ab + ac + bc)a - abc = 0$, бұдан $abc - abc = 0$, яғни $0 = 0$. Демек $x = a$ — теңдеудің түбірі. Тура осылай b және c. **35.8.** 1) $\{-3;\ -1;\ 2\}$. *Нұсқау* . $a = 1$ болғандықтан Виет теоремасы бойынша $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -5, \\ x_1x_2x_3 = 6. \end{cases}$ Бұдан $x_1 = -3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$; 2) $\{-3;\ 1;\ 5\}$. **35.9.** $a = 7$: $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $x_3 = 8$ немесе $x_1 = 8$, $x_2 = 4$, $x_3 = 2$.
35.10. $a = 2$, $b = 3$. **35.11.** $a = 1$, $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$ немесе $a = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$. *Шешуі* . x_1, x_2 және x_3 теңдеудің түбірлері болсын, онда Виет теоремасы бойынша
$\begin{cases} x_3 = x_1 + x_2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2a, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 2a - 3, \\ x_1x_2x_3 = -2. \end{cases}$ Бұдан $x_3 = a$. Сонда $x_1x_2 + x_3^2 = 2a - 3$, немесе $x_1x_2 = -a^2 + 2a - 3$. x_1x_2 мәнін төртінші теңдеуге қоямыз. Сонда $x_3(-a^2 + 2a - 3) = -2$ немесе $a(-a^2 + 2a - 3) = -2$ немесе $-a^3 + 2a^2 - 3a + 2 = 0$, немесе $a^3 - 2a^2 + 3a - 2 = 0$. Бұдан $(a^3 - a) - (2a^2 - 4a + 2) = 0$. Яғни $a(a^2 - 1) - 2(a - 1)^2 = 0$, немесе $(a - 1)(a^2 - a + 2) = 0$. Бұдан $a = 1$. Демек, $x_3 = 1$, сонда $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1x_2 = -2. \end{cases}$ Бұдан $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, немесе $x_1 = 2$, $x_2 = -1$. **35.13.** 1) $A(-1;\ 0)$, $C(0;\ \sqrt{2} - 1)$; 2) $x \in [-2;\ -1]$ болғанда кемиді, $x \in [-1;\ +\infty)$ болғанда өседі; 3) $p \in (0;\ 1]$. **35.14.** 1) $(-\infty;\ -3] \cup [3;\ +\infty)$; 2) $(-\infty;\ -2] \cup [3;\ +\infty)$; 3) $[1;\ 4]$; 4) $[-6;\ -2] \cup [1{,}2;\ 6]$. **35.15.** 1) $[-3;\ -2)$; 2) $[-2;\ 3)$; 3) $(-\infty;\ -3] \cup [3;\ +\infty)$; 4) $\left[-4;\ -2\frac{2}{3}\right] \cup [1;\ 4]$.

7-тарау. ФУНКЦИЯНЫҢ ШЕГІ ЖӘНЕ ҮЗІЛІССІЗДІГІ

36.1. 1) 2; 2) 2; 3) $\frac{3}{2}$; 4) 0; 5) 0. **36.3.** 1) 2; 2) 3; 3) 1; 4) 5; 5) 11; 6) 3. **36.4.** 1) 2; 2) 0,56; 3) 3; 4) 0; 5) 8; 6) 2,02. **36.6.** 1) 3; 2) –2; 3) 3; 4) 1. **36.7.** 1) –2; 2) 1; 3) –5; 4) –1. **36.9.** 1) –1; 2) 1; 3) $-2\frac{1}{5}$; 4) –5. **36.10.** 1) 9; 2) 4; 3) –2; 4) –6. **36.11.** 1) 2; 2) –2; 3) 6; 4) 1. **36.12.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) –2; 3) –1; 4) –3. **36.13.** 1) $f(x) = \frac{x^2 + 6x + 8}{x + 2}$; 2) $f(x) = \frac{2x^2 + 12x + 16}{x + 2}$; 3) $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x + 2}$; 4) $f(x) = \frac{x\sqrt{-x} + 2\sqrt{-x}}{x + 2}$. **36.14.** 1) $f(x) = \frac{3 - x}{x + 5}$; 2) $f(x) = \frac{3x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2}$; 3) $f(x) = \frac{2 - 4x^2}{x^2 + 2}$; 4) $f(x) = \frac{x\sqrt{3} - 1}{x + 2}$. **36.15.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\sqrt{3}$; 3) $\frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}$. **36.16.** 1) –1; 2) 1; 3) 0; 4) 0. **36.17.** 1) 4; 2) 6; 3) $-\frac{1}{8}$; 4) –2; 5) 4; 6) 4. **36.19.** 1) 0,25; 2) 7; 3) 1. **36.20.** 1) $-\cos\alpha$; 2) $-\sin\alpha$. **36.21.** 1) $-\frac{4\pi}{3}$; 2) 3π; 3) $-\frac{9\pi}{4}$; 4) $-\frac{4\pi}{3}$. **37.1.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) 2; 3) 0,8; 4) 2,5. **37.3.** 1) –2; 2) 4; 3) –3,5; 4) –1,4. **37.4.** 1) 0,5; 2) 2; 3) 0,8; 4) 2,5. **37.5.** 1) 1; 2) 1; 3) 0,4; 4) 2. **37.6.** 1) 5; 2) $\frac{5}{6}$; 3) $\frac{13}{6}$; 4) 2; 5) болмайды; 6) 2. **37.7.** 1) 1; 2) –1; 3) 1; 4) 2; 5) 8; 6) 6. **37.8.** 1) 2; 2) –0,7; 3) 1; 4) $-\frac{5}{3}$. **37.9.** 1) 16; 2) 4; 3) 2; 4) 1. **37.10.** 1) 1; 2) 1; 3) 1; 4) 1. **37.11.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) 1,5; 3) –0,8; 4) 0,5. **37.12.** 1) 7; 2) –9; 3) –3; 4) –7; 5) 8; 6) 16. **37.13.** 1) –2; 2) 0,25; 3) 3; 4) –2; 5) –0,5; 6) 2. **37.14.** 1) 1; 2) –1; 3) 1; 4) –1. **37.15.** 1) $\frac{7}{\pi}$; 2) –0,25; 3) –1; 4) –3; 5) 0,25; 6) 5; 7) 0; 8) 1. **37.17.** а) 1) 5; 2) –6; 3) 0; 4) 0; 5) 0; 6) 6; ә) 1) 0; 2) 0; 3) –5; 4) 3; 5) –6; 6) 0. **37.19**. 1) $\frac{1}{2}(\sin 5\alpha - \sin\alpha)$; 2) $\frac{1}{2}(\cos 6\alpha + \cos 2\alpha)$; 3) $\frac{1}{2}(\cos 2\alpha - \cos 8\alpha)$; 4) $\frac{1}{2}(\cos 6\alpha - \cos 10\alpha)$. **37.20.** 1) 1; 2) 1; 3) $\mathrm{tg}\,\alpha$; 4) $4\cos 2\beta$; 5) $-\mathrm{ctg}\,3\alpha$; 6) $\mathrm{tg}\,\alpha$. **38.1.** 6) және 7) $x_0 = 0$ нүктесінде функция үзілісті. **38.2.** 1) Үзіліссіз; 2) I текті үзілісті; 3) I текті үзілісті. **38.3.** 1) Үзіліссіз; 2) I текті үзілісті; 3) I текті үзілісті. **38.5.** 1) Үзіліссіз; 2) I текті үзілісті; 3) I текті үзілісті. **38.6.** 1) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2}, & x \text{ m } 4, \\ 1 - x^2, & x > 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{1}{x+3}, & x \text{ m } 0, \\ 1 - x^2, & x > 0; \end{cases}$; 3) $f(x) = \frac{2}{(x+1)(x-2)}$. **38.7.** 1) Үзіліссіз; 2) үзіліссіз; 3) үзіліссіз. **38.8.** 1) $x = n$, $n \in Z$ болғанда I текті үзіліс; 2) $x = n$, $n \in Z$ болғанда I текті үзілісті; 3) $x = 0$ болғанда I текті үзілісті. **38.9.** 1) Үзіліссіз; 2) үзіліссіз; 3) $x = 2$ болғанда I текті үзілісті. **38.10.** 1) $x = 3$ нүктесінде үзіліссіз, $x = 0$ болғанда I текті үзілісті; 2) $x = 3$ үзіліссіз, $x = 1$ нүктесінде үзіліссіз, болғанда I текті үзілісті; 4) $x = -1$, $x = 2$ үзіліссіз; 6) $x = 3$, $x = -1$ нүктесінде үзіліссіз. **38.11**. 1) 2; 2) 0; 3) –9; 4) 0,25. **38.12**. 1) $T = \pi$; $E(f) = [-3; 3]$; 2) $T = \frac{\pi}{2}$; $E(f) = [-2; 2]$; 3) $T = 2\pi$; $E(f) = R$; 4) $T = 1$; $E(f) = [0; 2)$. **38.13**. 1) 2; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) 2; 5) $\frac{1}{4}$; 6) $-\frac{1}{4}$; 7) 1; 8) 2. **39.1.** 1) Вертикаль $x = -2$, горизонталь $y = 1$; 2) вертикаль $x = 2$, горизонталь $y = 1$; 3) вертикаль $x = 2$, горизонталь $y = 2$; 4) вертикаль $x = 5$, горизонталь $y = 3$; 6) вертикаль $x = -1{,}5$, горизонталь $y = -0{,}5$. **39.2.** 1) $y = 3$; $x = 4$; 2) $y = 0$; $x = \pm 2$; 3) $y = 1$; $x = \pm 2$. **39.3.** 1) $x = 1$; 2) $x = -1$; 3) $x = 2$. **39.4.** 1) $x = 2$, $y = 1$; 2) $x = -1$, $y = 2$. **39.5.** 1) $x = 0$, $y = 0{,}5x$; 2) $x = 1$, $y = x + 1$. **39.6.** 1) $x = 0$, $y = x$; 2) $y = -x$. **39.7.** 1) $x = 0$, $y = x$; 2) $x = \pm 1$, $y = x$; 3) $x = \pm 2$, $y = -x$. **39.8.** 1) $y = \frac{\pi}{2}$, $y = -\frac{\pi}{2}$; 2) $y = \frac{\pi}{2}$, $y = \frac{3\pi}{2}$; 3) $y = \frac{\pi}{2}$, $y = \frac{3\pi}{2}$. **39.9.** 1) $x = 0$, $y = 0{,}5x$; 2) $x = 0$, $y = -0{,}5x$; 3) $x = 0$, $y = \frac{x}{3}$; 4) $x = 0$, $y = -\frac{x}{3}$. **39.10.** 1) $y = 1$, $x = 1$; 2) $y = 2$, $x = -1$; 3) $y = 3$, $x = -2$; 4) $y = 4$, $x = 1$. **39.11.** 1) $y = 0$, $x = \pm 1$; 2) $y = 0$, $x = \pm 1$; 3) $y = 0$, $x = \pm 2$; 4) $x = \pm 2$, $y = 0$. **39.12.** 1) $y = 2x$; $x = \pm 2$; 2) $x = -3$; 3) $y = 1$; $x = \pm 3$; 4) $y = x - 1$; $x = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$. **39.13.** 1) $x \to -\infty$ болғанда $y = -x$, $x \to +\infty$ болғанда $y = x$; 2) $x \to -\infty$ болғанда $y = -x + 1$, $x \to +\infty$ болғанда $y = x - 1$; 3) асимптота болмайды. 4) асимптота болмайды. **39.14.** 1) $y = 0$;2) $y = 0$; 3) $y = 0$; 4) $y = 0$. **39.16.** 1) Жұп; 2) жұп; 3) жұп та емес, тақ та емес.

8-тарау. ТУЫНДЫ

40.1. 1) $6x + 3\Delta x$; 2) $2x - 2 + \Delta x$; 3) $\frac{-1}{x(x+\Delta x)}$; 4) $\frac{\sqrt{3(x+\Delta x)} - \sqrt{3x}}{\Delta x}$; 5) $\frac{-2\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\cdot \sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$; 6) $\frac{\mathrm{tg}(x+\Delta x) - \mathrm{tg}\,x}{\Delta x}$. **40.3.** 1) $\frac{2}{9}$; 2) -4. **40.5.** 1) -4; 2) -3; 3) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 4) $-1{,}5$. **40.8.** 1) $x_0 = 1$ нүктесінде туынды болмайды; 2) $x_0 = 1$ нүктесінде туынды болмайды. **40.9.** 1) 12; 2) 6. **40.11.** 4) және 5), 3) және 6) — параллель түзулер; 1) және 3), 1) және 6) — ортогональ. **40.12.** 1) 900; 2) 144; 3) $1\frac{1}{14}$. **40.13.** 1) $\left[\pi k - 2{,}5;\ \frac{\pi}{2} - 2{,}5 + \pi k\right]$, $k \in Z$; 2) $\forall x \in R$. **41.1.** 1) 3; 2) $3x^2 - \sqrt{3}$; 3) $2x + 3$; 4) $3x^2 - \sqrt{7}$; 5) $-20x^{-5} + 2$; 6) $2x^4 - 2\sqrt{3}x$. **41.2.** 1) $3(2x - 1)$; 2) $5x^4 - 3\sqrt{3}\cdot x^2$; 3) $3x^2 - 10x + 3$; 4) $-\frac{2}{x^2} - \sqrt{7}$; 5) $\frac{5}{(x+3)^2} - 5$; 6) $\frac{x^2 - 8x + 8}{(x-4)^2} - 3$. **41.3.** 1) 5; 2) $-7{,}97$; 3) $-16{,}48$; 4) $9\frac{1}{3}$. **41.4.** 1) -3; 2) -15; 3) $\frac{140 + \sqrt{5}}{8}$; 4) $-2{,}2$. **41.5.** 1) $\{3 \pm \sqrt{7}\}$; 3) $\{-10;\ 0\}$; 4) $\varnothing$. **41.6.** 1) $[-0{,}6;\ +\infty)$; 2) $(-\infty;\ -4] \cup [0;\ +\infty)$; 4) $\left[\frac{-1-\sqrt{33}}{8};0\right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{33}}{8};+\infty\right)$. **41.7.** 1) $x^4 + 2x^3 - 2\sqrt{3}x + 5$; 2) $\frac{1}{8}x^4 - x^3 - \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 - 7$; 5) $\frac{5}{3}x^{-3} + \frac{3}{5}x^5 - \frac{7}{2}x^2 + x - \pi$. **41.8.** 1) $-1{,}5$; 2) $2{,}75$; 3) $-3\sqrt{2} + 0{,}5$. **41.9.** 1) $-12x^{-5} + \frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$; 2) $-5x^{-6} + \frac{5}{2}\sqrt{x^3}$; 3) $-10x^{-11} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{x^2}$. **41.10.** 1) $\frac{1 - 5x^2}{2\sqrt{x}}$; 2) $\frac{5x^2 - 6x}{2\sqrt{x}}$; 3) $2{,}5x\cdot\sqrt{x} - 2x$. **41.11.** 1) $\frac{x-1}{2\sqrt{x}\cdot(x+1)^2}$; 3) $\frac{27 - 6x}{2\sqrt{x}\cdot(2x+9)^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$. **41.13.** 1) 2; 2) -2; 3) болмайды. **41.14.** 1) $-2{,}5$; 2) $0{,}75$; 3) $-0{,}125$. **41.17.** 1) $-\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\pi n$, $\frac{\mathrm{arctg}\,2}{2} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; 2) $\frac{\pi n}{4}$, $-\frac{\mathrm{arctg}\,1{,}5}{4} + \frac{1}{4}\pi n$, $n \in Z$; 3) $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$. **42.2.** 1) $v_{\text{лез.}} = 16$ м/с; $v_{\text{орт.}} = 18{,}5$ м/с; 2) 1 с. **42.3.** 1) $\mathrm{tg}\,\alpha = -5$; 2) $\mathrm{tg}\,\alpha = 2{,}8$; 3) $\mathrm{tg}\,\alpha = 11$; 4) $\mathrm{tg}\,\alpha = 6\frac{1}{9}$. **42.4.** 1) $df = 3x^2\cdot dx$; 2) $df = (8x - 1)\cdot dx$; 3) $df = \left(\frac{3}{2\sqrt{x}} - 2\right)\cdot dx$. **42.5.** 1) $-5{,}15$; $22{,}3$. **42.6.** 1) $0{,}99$; 2) $0{,}998$; 3) $2{,}015$; 4) $11\frac{1}{22}$; 5) $14\frac{29}{30}$. **42.8.** $f'(2) = -\frac{1}{45}$. *Геометриялық түсіндірмесі*: $f(x) = \frac{25x^2 - 5}{16x^2 - 4}$ функциясына абсциссасы $x = 2$ нүктеде жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффициенті $-\frac{1}{45}$. *Физикалық түсіндірмесі*: нүкте $f(x) = \frac{25x^2 - 5}{16x^2 - 4}$ заңымен қозғалса (x — уақыт секунд пен, $f(x)$ — жүрілген жол метрмен), онда $t = 2$ с уақытындағы жылдамдық $f'(2) = -\frac{1}{45}$, минус таңбасы уақыт артқан сайын жылдамдық кемитінін білдіреді. **42.12.** $A(0;\ 1)$. **42.13.** 2,5. **42.14.** 1) $A(-1;\ -5)$; $B(1;\ -1)$; 2) иә. $M(1;\ 1)$. **42.15.** 5 м/с; $v(4) = 4$ м/с; $v(8) = 6$ м/с. **42.16.** 4,125 м/с. **43.1.** 1) $y = -2x - 6$; 2) $y = 0{,}8x - 4{,}8$; 4) $y = 6\frac{1}{9}x - 9\frac{2}{3}$. **43.2.** 1) 2; 2) -4; 3) 2; 4) 0,5. **43.3.** 1) $y = -4x + 8$; $y = 4x - 8$; 4) $y = -2x + 6$; $y = 2x - 2$. **43.4.** 1) $y = 1$; 2) $y = -3$; 3) $y = 4x + 2$; 4) $y = 3x - 2$. **43.5.** 1) $M(-3;\ -2)$ және $A(3;\ -2)$; 2) $B(0;\ 2)$; 3) $K(-1;\ 0)$ және $P(5;\ 0)$. **43.6.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) $-\frac{1}{3}$; 3) $-\frac{3}{16}$. **43.7.** 1) $y = -8x - 5$; 2) $y = 0{,}25x - 6$; 3) $y = x + 2$; 4) $y = 1{,}5x + 0{,}5$. **43.9.** 1) $y = 5x - 16$; $y = -5x - 1$; 2) $y = x + 4$; $y = -x + 9$. **43.10.** 1) $A(1;\ 1)$; 2) $B\left(\frac{3}{8};\frac{9}{64}\right)$; 3) $C\left(-\frac{1}{4};\frac{1}{16}\right)$; 4) $M(-0{,}5;\ 0{,}25)$. **43.11.** 1) $y = 4x - 8\frac{1}{3}$; $y = 4x + 2\frac{1}{3}$; 2) $y = x - 3\frac{2}{3}$; $y = x - 2\frac{1}{3}$. **43.12.** 1) $y = x + 3$ және

$y = x - 1$; 2) $y = 4x + 5$ және $y = 4x - 3$. **43.14.** $y = 2x - 1$, $y = 2x - 2$. **43.15.** $y = -x - 1$, $y = -x + 7$. **43.16.** Жанама — $y = 4x - 7$. **43.17.** $y = -x$. **43.18.** 1) $y = 4x - 13$; $y = -4x + 3$; 2) $y = 4x - 9$; $y = -4x - 1$. **43.19.** $M(2; 0)$. **43.20.** 0,5. **43.21.** $y = 2x + 1$. **43.22.** Иә, болады. **43.23.** 1) $y = -7x + 8$, $y = -11x + 12$; 2) $y = -9x + 9$, $y = -5x + 9$. **43.24.** 1) 2; 2) 0,5; 3) 1,5; 4) 2. **43.25.** 1) $y' = 4x^3 - 9x^2$; 2) $y' = 4\sqrt{2}x^3 - 4\sqrt{2}x$. **43.26.** 1) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$; 2) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in Z$. **43.27.** 1) $(-\infty; -1) \cup [4; +\infty)$; 2) $(-5; 0) \cup (6; 7]$. **44.1.** 1) $2 + \cos x$; 2) $\frac{1}{2\sqrt{x}} + \sin x$; 3) $\cos x - \sin x$; 4) $3x^2 - 3\cos x$. **44.2.** 1) $\frac{1 - 2\sqrt{3}}{2}$; 2) $2 + 2\sqrt{2}$; 3) $\frac{3\pi + \sqrt{2}}{2}$; 4) $-2 - \sqrt{3} - \frac{9}{2\pi^2}$. **44.3.** 1) $-2\sin x + \frac{3}{\cos^2 x}$; 2) $\cos x - \frac{1}{\sin^2 x}$; 3) $-\sin x - \frac{5}{\cos^2 x} - 3x^{-4}$; 4) $\frac{2}{\cos^2 x} - \frac{3}{\sin^2 x} - 3x^{-4}$. **44.4.** 1) $-12 + \sqrt{3}$; 2) $7 + \sqrt{2}$; 3) $3\pi - 4 - \frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\frac{2}{3} - \frac{9}{2\pi^2}$.
44.5. 1) $(-\pi + 2\pi n; 2\pi n)$, $n \in Z$; 2) $(2\pi n; \pi + 2\pi n)$, $n \in Z$; 3) $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$.
44.6. 1) $\left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$; 2) $\varnothing$; 3) $(\pi n; \pi + \pi n)$, $n \in Z$; 4) $\left[-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; -\frac{\pi}{6} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$.
44.7. 1) $f(x) = \sin x + x$; 2) $f(x) = 2\sin x - \cos x$; 3) $f(x) = \sin x + \operatorname{tg} x$; 4) $f(x) = 2\cos x - \operatorname{ctg} x$.
44.8. 2) $f'(x) = 4\cos\frac{3x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2}$; 3) $f'(x) = -\sin x$, $x \neq \pi n$, $n \in Z$; 5) $f'(x) = 2\cos x$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$. **44.9.** 1) $-0,5$; 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) $\frac{3\pi + \sqrt{2}}{2}$; 4) $-\frac{4}{\pi} + \frac{3\sqrt{3}}{2\pi^2}$. **44.10.** 1) 1; 2) $1 - \frac{\pi^2}{4}$; 3) -1.
44.11. 1) $\left\{\frac{7 - \sqrt{97}}{2}\right\}$; 3) $\left\{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right\}$; 4) $\{-\sqrt{5}; 2\}$; 5) $\varnothing$; 6) $\{1 \pm \sqrt{10}\}$; 7) $\{1 \pm 2\sqrt{5}\}$. **44.12.** 1) 1; 2) $\frac{3}{8}$; 3) 0; 4) 0; 5) 1,5; 6) 6. **44.13.** 1) $x_0 = 0$ болғанда I текті үзілісті; 2) функция үзіліссіз; 3) $x_0 = 0$ болғанда I текті үзілісті. **45.1.** 1) $3\cos 3x$; 2) $2\sin(1 - 2x)$; 3) $\frac{5}{\cos^2 5x}$; 4) $\frac{-1}{\sin^2(x - 2)}$; 6) $\frac{3}{\sin^2(5 - 3x)}$. **45.2.** 1) $6(3x - 1)$; 2) $-6(1 - 2x)^2$; 3) $9(2 - 3x)^{-4}$; 4) $8(1 + 2x)^{-5}$; 5) $5 + 6(1 - 3x)^{-3}$; 6) $2x - 10(1 + 5x)^{-3}$. **45.3.** 1) $\frac{1}{\sqrt{2x - 5}}$; 2) $\frac{4x - 1}{2\sqrt{2x^2 - x}}$; 5) $\frac{6x - 5}{2\sqrt{3x^2 - 5x + 1}}$; 6) $\frac{5 - 6x}{2\sqrt{2 - 3x^2 + 5x}}$. **45.4.** 1) $60x(5x^2 + 7)^5$; 2) $-\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$; 3) $\frac{10}{(1 - 2x)^2}$; 4) $\frac{-16}{(2x + 3)^5}$.
45.5. 1) $f(g(x)) = \sqrt{3x - 2} - 1$; $f(f(x)) = x - 2$; $g(g(x)) = \sqrt{3\sqrt{3x - 2} - 2}$; 2) $f(g(x)) = 3 - \frac{2}{(x - 2)^3}$; $f(f(x)) = 3 - 2(3 - 2x^3)^3$; $g(g(x)) = \frac{x - 2}{5 - 2x}$. **45.7.** 1) -1215; 2) 0; 4) 207.
45.8. 1) $(-\infty; -3,5) \cup (0,5; +\infty)$; 2) $(-\infty; -3,5] \cup [0,5; +\infty)$; 3) $(-3,5; -1) \cup (-1; 0,5]$; 4) $[-3,5; -1] \cup (-1; 0,5]$. **45.9.** 1) $(-\infty; 0,8) \cup (-0,8; 3) \cup \left(6\frac{9}{35}; +\infty\right)$; 2) $(-\infty; 3) \cup \left[6\frac{9}{35}; +\infty\right)$; 3) $\left(3; 6\frac{9}{35}\right)$; 4) $\left(3; 6\frac{9}{35}\right] \cup \{-0,8\}$. **45.10.** 1) $3\sin 6x$; 2) $-4\sin 4x \cdot \cos^2 2x$; 3) $\frac{5\operatorname{tg}^{-6} x}{\cos^2 x}$; 4) $\frac{-3\operatorname{ctg}^{-4}(1 - x)}{\sin^2(1 - x)}$; 5) $\frac{2}{\sqrt{1 - 4x^2}}$; 6) $\frac{-5}{\sqrt{1 - 25x^2}}$; 7) $\frac{3}{1 + 9x^2}$; 8) $2x + \frac{2}{\sqrt{1 - 4x^2}}$.
45.11. 1) -2; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) 0; 4) 0; 5) $\frac{-12\sqrt{7}}{7}$; 6) $\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$. **45.12.** 2) $\varnothing$; 5) $\varnothing$; 6) R.
45.13. 2) $y' = \frac{-4}{1 + 16x^2} + 2$; 4) $y' = 6\sin^2 3x \cdot \sin 6x + 4$. **45.14.** 1) $\frac{4\pi + 3}{3}$; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{4\pi + 3}{3}$; 4) $\frac{\pi - 4}{4}$. **45.15.** 1) $a \in R$, $b = 1$; 2) $a = -1$, $b = 1$. **45.16.** 1) $a \in R$, $b = 1$; 2) $a = 3$, $b = 1$.
45.17. 1) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$; 3) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$; 4) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$; 5) $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$; 6) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$. **45.18.** 2) $-\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$; 3) $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$; 4) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$;

5) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$; 6) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in Z$. **46.1.** 1) $f'(x)=4x^3+6x^2-3$, $f''(x)=12x^2+12x$. **46.2.** 1) -12; 2) 36; 3) $-\frac{1}{32}$; 4) $-\frac{1}{27}$. **46.3.** 1) 30 м/с; 2) 25 м/с^2. **46.4.** 1) $-\frac{1}{32}$; 4) -2. **46.5.** 1) $f''(x)=-\sin x$; 2) $f''(x)=\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$; 3) $f''(x)=-4\sin 2x$; 6) $f''(x)=-2\cos 2x$. **46.6.** 1) $f''(x)=-\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$; 2) $f''(x)=-\frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{x^3}}$; 3) $f''(x)=-\frac{1}{4\sqrt{-x^3}}$; 4) $f''(x)=\frac{3}{4\sqrt{x}}$; 5) $f''(x)=\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$; 6) $f''(x)=2+\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$. **46.7.** 1) $f''(x)=2\cos x-x\sin x$; 2) $f''(x)=4\cos 2x-4x\sin 2x$; 3) $f''(x)=4\cos x-(2x-1)\sin x$; 4) $f''(x)=-2\sin x-x\cos x$; 5) $f''(x)=-6\sin 3x-9x\cos 3x$; 6) $f''(x)=6+2\sin(x^2+1)+4x^2\cos(x^2+1)$. **46.8.** 1) $f''(x)=8\cos 4x$; 3) $f''(x)=2\sin x+4x\cos x-(x^2-1)\sin x$; 6) $f''(x)=-6x\sin(x^2+1)-4x^2\cos(x^2+1)$. **46.9.** $a(t)=-9\cos 3t$ м/с^2. **46.11.** 1) $f''(x)=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$; 2) $f''(x)=\frac{2}{(1+x^2)^2}$. **46.12.** $-0{,}026$ м/с^2. **46.13.** 1) 3 м/с, 8 м/с^2; 2) 0,05 м/с, $-0{,}01$ м/с^2. **46.14.** $v(0)=9$ м/с, $a(0)=-4$ м/с^2, $h_{max}=10{,}125$ м. **46.15.** 1) $f''(x)=1{,}5-1{,}5x$; 2) $f''(x)=\frac{2}{3}\cos 3x-x\sin 3x$. **46.17.** 2) $f''(2)=14$. **46.19.** 1) -3; 2) 6; 3) 1; 4) 2. **46.20.** 1) $g(f(x))=2x^2\sin^2 x$; 2) $f(f(x))=x\cdot\sin x\cdot\sin(x\cdot\sin x)$; 3) $f(g(x))=2x^2\sin(2x^2)$. **46.21.** 1) $(-1;\ 1)$; 2) $(-\infty;\ 0)\cup\left(\frac{2}{3};\ +\infty\right)$; 3) $\left(\frac{\pi}{6}+\pi n;\ \frac{5\pi}{6}+\pi n\right)$, $n\in Z$; 4) $\left(-\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\ -\frac{\pi}{6}+2\pi n\right)$, $n\in Z$. **46.22.** 1) $[-\sqrt{2};\ \sqrt{2}]$; 2) $[-2;\ 2]$; 3) $[-5;\ 5]$.

9-тарау. ТУЫНДЫНЫ ҚОЛДАНУ

47.4. 1) $(-\infty;\ 1{,}5]$ — кемиді; $[1{,}5;\ +\infty)$ — өседі; 3) $(-\infty;\ +\infty)$ — кемиді. **47.5.** 2) $(-\infty;\ 0]$ — кемиді; $[0;\ +\infty)$ — өседі; 3) $(-\infty;\ +\infty)$ — өседі. **47.8.** 1) $(-\infty;\ 0]$ — кемиді; $[0;\ +\infty)$ — өседі. **47.9.** 2) $(-\infty;\ 0{,}2]$ — өседі; $[0{,}2;\ +\infty)$ — кемиді. **47.14.** 2) $(-\infty;\ -4]$ — өседі; $[-4;\ +\infty)$ — кемиді; 4) $(-\infty;\ 1{,}75]$ — өседі; $[1{,}75;\ +\infty)$ — кемиді. **47.15.** 1) $(-\infty;\ 0]$ және $[16;\ +\infty)$ — өседі; $(0;\ 16)$ — кемиді; 3) $(-\infty;\ +\infty)$ — өседі. **47.16.** 1) $(-\infty;\ 9)$ және $(9;\ +\infty)$ — кемиді; 2) $(-\infty;\ -4)$ және $(-4;\ +\infty)$ — өседі. **47.17.** 2) $(-\infty;\ -3{,}5)\cup(-3{,}5;\ +\infty)$ — өседі. **47.18.** 1) $\left[-\sqrt{\frac{3}{2}};\ 0\right]$ және $\left[\sqrt{\frac{3}{2}};\ +\infty\right)$ — өседі; $\left(-\infty;\ -\sqrt{\frac{3}{2}}\right]$ және $\left[0;\ \sqrt{\frac{3}{2}}\right]$ — кемиді. **47.19.** 1) $\left[-\frac{2}{3};\ +\infty\right)$ — өседі. **47.20.** 2) $(-\infty;\ +\infty)$ — өседі; 3) $\left[-\frac{\pi}{12}+\pi k;\ \frac{7\pi}{12}+\pi k\right]$, $k\in Z$ — өседі. **47.23.** 1) $(-\infty;\ -2)\cup(2;\ +\infty)$; 2) $\varnothing$. **48.4.** 1) $x_{min}=2$; 4) $x_{max}=6$. **48.7.** 2) $x_{max}=-0{,}5$; $x_{min}=0$; $x_{max}=0{,}5$. **48.8.** 1) $x_{max}=1$; $x_{min}=-1$. **48.11.** 2) Болмайды; 4) $x_{max}=0$; $x_{min}=2$. **48.12.** 3) $x_{max}=-\frac{4}{\sqrt{3}}$; $x_{min}=\frac{4}{\sqrt{3}}$. **48.13.** 4) $x_{max}=\frac{1}{20}$. **48.16.** 2) $x_{min}=6$; $x_{max}=-6$; $(-\infty;\ -6]$, $[6;\ +\infty)$ — өседі; $[-6;\ 0]$, $[0;\ 6]$ — кемиді. **48.18.** 1) $x_{min}=-2$; $x_{max}=0$; $x_{min}=2$; $(-\infty;\ -2]$, $[0;\ 2]$ — кемиді; $[-2;\ 0]$ және $[2;\ +\infty)$ — өседі. **48.19.** 2) $x_{max}=\frac{8-2\sqrt{10}}{3}$. **48.20.** 1) $x_{max}=0{,}5$; $y(0{,}5)=\frac{5}{9}$. **48.21.** 2) $-32\sin^6(1-8x)\sin(2-16x)$. **48.23.** 1) $\left[-\frac{7\pi}{54}+\frac{2\pi n}{9};\ \frac{\pi}{54}+\frac{2\pi n}{9}\right]$, $n\in Z$; 2) $[-2;\ 2]$. **49.4.** $(-\infty;\ 0)$ аралығында дөңестігі жоғары, $(0;\ +\infty)$ аралығында дөңестігі төмен. Иілу нүктесі $M(0;\ 0)$. **49.6.** $M(0;\ -2)$. **49.7.** $(-\infty;\ -1)$, $(1;\ -\infty)$ аралығында дөңестігі төмен. Иілу нүктесі $M(-1;\ -2)$, $K(1;\ -2)$. **49.8.** 1) $M(4;\ 20)$; 2) иілу нүктесі жоқ. **49.9.** 1) $(-\infty;\ 1)$, $(1;\ +\infty)$ аралығында дөңестігі төмен. Иілу нүктесі жоқ. **49.10.** 1) $(-\infty;\ -1)$, $(0;\ 1)$ аралығында дөңестігі жоғары, $(-1;\ 0)$, $(1;\ +\infty)$ аралығында дөңестігі төмен.

49.12. 1) $M\left(-\sqrt{3}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $N\left(\sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $K(0; 0)$; 2) $M(0, 0)$. **49.13.** 1) $(-\infty; 2)$. **49.15.** 1) өседі — $(-\infty; -1]$, $[0; 1]$, кемиді — $[1; +\infty)$, $[-1; 0]$. **49.16.** 2) $x_{min} = -1$; $x_{max} = 1$; 3) max, min нүктелері жоқ. **49.17.** 1) Асимптоталары жоқ; 2) $x = -1$, $x = 1$, $y = -2x$; 3) $y = -\frac{1}{5}x$. **50.1.** 1) R; 2) $(-\infty; 10) \cup (10; +\infty)$. **50.2.** 1) $(-\infty; -0,3) \cup (0,3; +\infty)$; 2) R. **50.3.** 1) $[-12,25; +\infty)$; 2) $(-\infty; -4) \cup (-4; +\infty)$; 3) $[4; +\infty)$; 4) $[-4; 10]$. **50.4.** 2) $\pm 2\sqrt{2}$; 4) 0; $\pm\sqrt{\frac{5}{3}}$. **50.20.** 1) $a \in (-\infty; 2)$; 2) $a \in (-\infty; 0,75)$; 3) $a = 8$. **50.23.** 1) $\left\{\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi + 2\pi n, n \in Z\right\}$. **50.24.** 2) $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{4}\right)$. **50.25.** 1) $f_{\text{ең кіші}} = -2$, ең үлкен мәні жоқ. **51.1.** 1) –14; 14. **51.3.** 1) 0; 3. **51.5.** 1) 0; 4; 2) –2; 2. **51.6.** 1) 12,5; 12,5; 2) 8; 8; 3) 98; 49. **51.7.** 2) –1; 0. **51.9.** 1) –19; 7. **51.10.** 2) –12; –5. **51.11.** 1) 7; 30. **51.12.** 1) 4; 5,8. **51.13.** 2) 3,5; $\frac{26}{3}$. **51.14.** 1) 5 см; 5 см; 3) 16 м. **51.15.** 2) 80 м; 3) 24 м^2. **51.16.** 1) 2; $\frac{10}{3}$. **51.17.** 1) 2; 3,2. **51.21.** 1) 3; 2) 7. **51.22.** 1) 4; 2) –4. **51.23.** 1) $\frac{1}{12}$; 2) $\frac{1}{18}$.

10-тарау. КЕЗДЕЙСОҚ ШАМАЛАР ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ САНДЫҚ СИПАТТАМАЛАРЫ

52.2. 0,25. **52.3.** 0,35 және 0,35. **52.4.**

X	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

52.5.

X	1	2	3	4
P	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{1}{35}$

Нұсқау. $P(1) = \frac{4}{7}$ (бірінші шар ақ). $P(2) = \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} = \frac{2}{7}$ (бірінші шар қара, екінші шар ақ). $P(3) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{35}$ (бірінші шар қара, екінші шар қара, үшінші шар ақ). $P(4) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{4} = \frac{1}{35}$ (төртінші шар ақ). **52.6.**

Y	6	10	14	18
P	0,1	0,4	0,4	0,1

52.7.

Y	0	1	2
P	$0,3 \cdot 0,3 = 0,09$	$0,3 \cdot 0,7 + 0,7 \cdot 0,3 = 0,42$	$0,7 \cdot 0,7 = 0,49$

52.8.

Түсу саны	0	1	2	3
P	0,001	0,027	0,243	0,729

52.9.

Түсу саны	0	1	2
P	0,02	0,26	0,72

$$P(x) = \begin{cases} 0,02, & \text{егер } x = 0, \\ 0,26, & \text{егер } x = 1, \\ 0,72, & \text{егер } x = 2. \end{cases}$$

52.10.

Кітапхана-лар саны	1	2	3	4
P	0,4	$0,6 \cdot 0,4 = 0,24$	$0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,4 = 0,144$	$(0,6)^3 = 0,216$

52.11.

Y	0	1	2	3
P	$0,2\cdot0,3\cdot0,3=$ $=0,018$	$0,8\cdot0,3\cdot0,3+0,2\cdot0,7\cdot0,3+$ $+0,2\cdot0,3\cdot0,7=0,156$	0,434	$0,8\cdot0,7\cdot0,7=$ $=0,392$

52.12.

Y	0	1	2	3
P	$\frac{16}{20}\cdot\frac{15}{19}\cdot\frac{14}{18}\approx0,491$	0,421	0,084	$\frac{4}{20}\cdot\frac{3}{19}\cdot\frac{2}{18}=\frac{1}{285}$

52.15. 1) $25(5x-1)^4+10x+\frac{2}{\cos^2 2x}$; 2) $8(3x^2-x)^3(6x-1)+2\sin2x-42x^5$. **52.17.** 1) Өседі — $[-1;\ 0]$, $[1;\ +\infty)$, кемиді — $(-\infty;\ -1]$, $[0;\ 1]$; 2) өседі — $(-\infty;\ 0)$, $(0;\ +\infty)$; 3) кемиді — $(-\infty;\ 0)$, $(0;\ +\infty)$. **53.1.** 4; $M(X)=3,1$. **53.2.** 7,5; $M(X)=6,4$. **53.3.** 1,29. **53.4.** 1) 24; 2) 6; 3) 45. **53.5.** 1) 4,4; 2) 11,6; 3) 4,48. **53.6.** $M(X)=5,7$; $D(X)=2,21$. **53.7.** $M(X)=5,7$; $D(X)=2,21$. **53.8.** $M(2X)=10,6$; $D(2X)=2,44$. **53.9.** $M(X+Y)=23,1$, $D(X+Y)=24,99+22,56=47,55$. **53.10.** $D(X)=1$; $D(Y)=-1,24$. X атқан нысанаға дәл тиеді. **53.11.** $M(X)=3,4$; $D(X)=1,04$; $M(2X+5)=11,8$. **53.12.**

X	-1	0	1
P	0,4	0,1	0,5

53.13. $p_1=0,2$, $p_2=0,3$, $p_3=0,5$.

53.14. $M(X)=0,6$. **53.15.** $D(X)=3$.

53.16.

X	1	2	3
P	0,3	0,2	0,5

53.18. 1) $k=1$; 2) $k=-0,5$; 3) $k=\frac{3}{16}$. **53.19.** 1) $k=9$; 2) $k=0$; 3) $k=-18$. **54.1.** 1) $P=C_6^4\cdot0,6^4\cdot0,4^2\approx0,311$; 2) $P=C_8^5\cdot0,7^5\cdot0,3^3\approx0,254$.

54.2. $P=C_{10}^2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^8=\frac{10\cdot9\cdot5^8}{1\cdot2\cdot6^{10}}\approx0,2907$.

54.3.

X	0	1	2	3	4
P	$C_4^0\cdot0,5^0\cdot0,5^4=$ $=\frac{1}{16}$	$C_4^1\cdot0,5^1\cdot0,5^3=$ $=4\cdot0,5^4=0,25$	$C_4^2\cdot0,5^2\times$ $\times0,5^2=\frac{3}{8}$	$C_4^3\cdot0,5^3\cdot0,5^1=$ $=4\cdot0,5^4=0,25$	$C_4^4\cdot0,5^4\times$ $\times0,5^0=\frac{1}{16}$

54.4.

X	0	1	2	3	4	5	6
P	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,03 125	0,015 625	0,0 078 125

Шешуі. A — k-шы емтиханды тапсыру. Барлық 6 емтихан бір рет те тапсырылмаған, немесе 1 рет те, немесе 2 рет те, және т.с.с. 6 рет те тапсырылмаған. Сондықтан емтихан тапсыру саны: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 — кездейсоқ оқиға, оны X деп белгілейік, сонда олар бір-біріне қатысты емес мәндер қабылдайды: $x_1=0$; $x_2=1$; $x_3=2$; $x_4=3$; $x_5=4$; $x_6=5$; $x_7=6$. k-шы емтиханды тапсыру ықтималдығын табайық. Ол үшін $P(X=k)=q^{k-1}p$ формуласын қолданамыз. Сонда

X	0	1	2	3	4	5	6
P	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,03 125	0,015 625	0,0 078 125

54.5.

X	1	2	3	4
P	$\frac{5}{70}$	$\frac{30}{70}$	$\frac{30}{70}$	$\frac{5}{70}$

Шешуі. X кездейсоқ оқиға — сары шар түсу саны, оның мәндері: 1, 2, 3, 4. $N=8$, $M=5$, $n=4$, m-нің мәндері: 1, 2, 3, 4. $P(X=m)=\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$

формуласын колданамыз. $P(X = x_1 = 1) = \frac{C_5^1 C_3^3}{C_8^4} = \frac{\frac{5!}{4!} \cdot 1}{\frac{8!}{4! \cdot 4!}} = \frac{1 \cdot 5}{5 \cdot 7 \cdot 2} = \frac{5}{70}$. $P(X = x_2 = 2) =$ $= \frac{C_5^2 C_3^2}{C_8^4} = \frac{\frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot \frac{3!}{1! \cdot 2!}}{\frac{8!}{4! \cdot 4!}} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 3}{2 \cdot 7 \cdot 5} = \frac{30}{70}$. $P(X = x_3 = 3) = \frac{C_5^3 C_3^1}{C_8^4} = \frac{\frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot \frac{3!}{1! \cdot 2!}}{\frac{8!}{4! \cdot 4!}} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 3}{2 \cdot 7 \cdot 5} = \frac{30}{70}$.

$P(X = x_4 = 4) = \frac{C_5^4 C_3^0}{C_8^4} = \frac{5 \cdot 1}{2 \cdot 7 \cdot 5} = \frac{5}{70}$. Сонда:

X	1	2	3	4
P	$\frac{5}{70}$	$\frac{30}{70}$	$\frac{30}{70}$	$\frac{5}{70}$

. **54.6.** $M(X) = 0{,}7142$.

Шешуі. X кездейсок оқиға — таңдау саны: 0, 1, 2, 3. $N = 21$, $M = 16$, $n = 3$, m-нің мәндері: 0, 1, 2, 3. $P(X = m) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$ формуласын колданамыз. $P(X = x_1 = 0) = \frac{C_{16}^3 C_5^0}{C_{21}^3} \approx 0{,}4211$. $P(X = x_1 = 1) = \frac{C_{16}^2 C_5^1}{C_{21}^3} \approx 0{,}4511$. $P(X = x_1 = 2) = \frac{C_{16}^0 C_5^3}{C_{21}^3} \approx 0{,}1203$. $P(X = x_1 = 3) = \frac{C_{16}^2 C_5^1}{C_{21}^3} \approx$ $\approx 0{,}0075$. Сонда:

X	0	1	2	3
P	0,4211	0,4511	0,1203	0,0075

. $M(X)$ математикалық күтімді табамыз: $M(X) = 0 \cdot 0{,}4211 + 1 \cdot 0{,}4511 + 2 \cdot 0{,}1203 + 3 \cdot 0{,}0075 = 0{,}7142$.

54.7. 1) $P = \sum_{n=0}^{3} C_8^n \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^n \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{8-n}$; 2) $P = \sum_{n=0}^{2} C_{10}^n \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^n \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{10-n}$. **54.8.** $P = \sum_{n=0}^{2} C_{10}^n \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{10-n}$.

54.9. $P = 1 - \sum_{n=0}^{1} C_6^n \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{6-n} \approx 1 - 0{,}233 = 0{,}767$.

10-сыныптағы алгебра және анализ бастамалары курсын кайталауға арналған жаттығулар

1. 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{\pi}{3}$; 3) $-\frac{13\pi}{12}$; 4) $-\frac{\pi}{2}$. **2.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) -1; 3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 4) $\frac{1}{2}$. **3.** 1) $-\frac{5\pi}{14}$; 2) $\frac{9\pi}{14}$; 3) $-\frac{\pi}{3}$; 4) $6 - 2\pi$; 5) $\frac{5\pi}{2} - 8$; 6) $4\pi - 10$. **4.** 1) $f'(1) = 2$; 2) $f'(1) = 6$; 3) $f'(1) = \frac{3\sqrt{2}}{2} + 7$; 4) $f'(-2) = -16$; 5) -3; 6) 2. **5.** 1) -3; 2) $-\frac{11}{18}$; 3) $-\frac{13}{16}$. **6.** 1) 9; 2) 16; 3) -18. **7.** 2) $y_{\text{ең үлкен}}(3) = 594$, $y_{\text{ең кіші}}(2) = 56$; 3) $y_{\text{ең үлкен}}(0) = 0$, $y_{\text{ең кіші}}(4) = -2$. **9.** 1) 1; 2) 2,5; 3) 2; 4) 4,5; 5) $-\frac{1}{2}$; 6) $-\frac{1}{4}$; 7) $-\frac{1}{4\sqrt{3}}$; 8) $-\frac{1}{4}$. **10.** 1) 1,5; 2) -1; 3) 2; 4) 0,5; 5) -5; 6) $\frac{5}{6}$; 8) $-3{,}5$. **11.** 1) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}}$; 2) $f'(x) = 6\sin^2 2x \cdot \cos 2x - 3\sin 3x + \frac{2}{x^2}$; 3) $f'(x) = 2\text{tg}2x \cdot \frac{1}{\cos^2 2x} - \frac{3}{\sin^2 3x}$; 4) $f'(x) =$ $= \frac{2}{1+4x^2} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$. **12.** $\frac{\sqrt{5}}{25}$. **13.** 1) $\frac{7}{(3x+2)^2} + 3$; 2) $\sin 2x + 2x\cos 2x - \frac{3}{2\sqrt{2-3x}}$. **14.** 1) 0; 2; 2) -1; 0; 1; 3) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; 4) $-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. **15.** 1) 1; 2) 2; 3) 0; 4) -2. **16.** 1) 5; 2) 0; 3) $[-4; -2] \cup [1; 2]$. **17.** 2) $\varnothing$; 3) R; 5) $\varnothing$; 6) R. **18.** 1) $(-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$; 2) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$; 3) $\pm\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$; 4) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$. **19.** 1) $\left[-\sqrt{29}; \sqrt{29}\right]$; 2) $[-5; 5]$. **20.** 1) $\left\{\pm\arccos\frac{1}{4} + (2n à 1)\pi, n \in Z\right\}$; 2) $\left\{\frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5}, \frac{3\pi}{100} + \frac{2\pi n}{25}, n \in Z\right\}$; 3) $\left\{\frac{\pi n}{5}, \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z\right\}$; 4) $\left\{\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, k \neq 3n + 1, n \in Z\right\}$; 5) $\{-1; 3\}$; 6) $\varnothing$; 7) $\{0; 3\}$; 8) $\left\{\frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2}\right\}$; 9) $\left\{-1; \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}\right\}$;

Нұсқау : $y = x + \frac{1}{x}$ алмастыруын колданамыз, $y^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$; 10) $\left\{\frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}; 2 \pm \sqrt{2}\right\}$. **21.** 1) $y = 1$, $x = 1$; 2) $y = -2$, $x = -3$; 3) $x = 2$, $y = x + 2$; 4) $x = -2$, $y = x - 6$. **22.** 1) $M(0; 0)$; 2) иілу нүктелері жоқ; 4) $M(0; 1)$. **23.** 5) өседі — $(-\infty; -1)$, $(-1; +\infty)$, кемиді — $\varnothing$; 6) өседі — $\varnothing$, кемиді — $(-\infty; -3)$, $(-3; 3)$, $(3; +\infty)$; 7) өседі — $(-\infty; -5)$, $(-5; 5)$, $(5; +\infty)$, кемиді — $\varnothing$; 8) кемиді — $(-\infty; -2)$, $(-2; 0]$, өседі — $[0; 2)$, $(2; +\infty)$. **26.** 1) $y = 1{,}5x + 1$, $y = -\frac{2}{3}x + 1$; 2) $y = 1{,}5x + 1$, $y = -\frac{2}{3}x + 1$; 3) $y = -\frac{1}{4}x + 1{,}5$, $y = 4x + 1{,}5$; 4) $y = -\frac{1}{2}x + 1$, $y = 2x + 1$. **27.** 1) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$; 2) $(-1)^n\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\pi n$, $n \in Z$. **28.** 1) $y = \frac{3}{4}x + 1\frac{1}{4}$; 2) $y = -x + 2$. **29.** 2) 0; $1\frac{5}{6}$; 3) -16; 11; 4) $-\frac{2}{7}$; $-\frac{4}{31}$. **30.** 1) a, b, d, e, f; 4) 7; 5) min — b, e; max — a, d, f. **33.** min -2 және 2, max 0. **34**. $t = 10$ с, $v = 238{,}5$ м/с. **35.** Қабырғасы $a = 20$ см болатын шаршы. **36.** 1) $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$;2) $M\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}; \frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)$. **37.** 26 см, 19,5 см. **38.** 18 $м^2$. **39.** 2 см, 1 см. **40**. 1) 4; 4; 2) 16; 2. **41.** 1,25 кв.бірл. **42.** 1) 4 сағ; 2) 7 сағ; 3) 7 сағ 30 мин; 4) 3 сағ 36 мин; 5) 3 600 тг, 5 400 тг. **43.** 1) 15 312 тг; 2) 5448 тг. **44.** 1) 25% шет ел операторлары; 2) 625 тг; 3) 700 тг. **45.** 1) 1 190 000 тг; 2) 1 650 000 тг. **46.** 1) 850 $см^3$; 2) 2550 $см^3$; 3) 10 см. **47.** 1) ≈ 4 л; 2) 320 тг немесе 465 тг; 3) 1890 тг. **48.** 1) 7700 мг, 33 г; 2) 50 л, 100 л; 3) 360 г. **49.** $22 + 13 - 9 = 26$ оқушы. **50.** 12 қарындаш. **51**. $n = 1$. **52**. $49 \cdot 2^{50} + 1$. **53.** 1-*тәсіл* . $a(a + b + c) < 0$, онда $\begin{cases} a > 0, \\ a + b + c < 0; \end{cases}$ немесе $\begin{cases} a < 0, \\ a + b + c > 0. \end{cases}$ 1-*жағдай* . Егер $a > 0$ болса, онда $f(x) = ax^2 + bx + c$ параболасының тармақтары жоғары бағытталған. Онда $f(1) = a + b + c < 0$, яғни Ox осінен төмен орналасқан параболаның нүктелері болады. Демек, парабола Ox осін екі нүктеде қияды. $ax^2 + bx + c = 0$ теңдеуінің екі түбірі бар. 2-*жағдай* . $a < 0$ үшін де тура осылай талқылайды. 2-*тәсіл* . $a(a + b + c) < 0$ немесе $a^2 + cb + ca < 0$. Теңсіздіктің екі жағын 4 санына көбейтіп, екі жағына да b^2 өрнегін қосамыз. Сонда $-4a^2 - 4ba - 4ac + b^2 > b^2$ немесе $-4a^2 - 4ba - b^2 + b^2 - 4ac > 0$. $-(b + 2a)^2 \le 0$ болғандықтан $b^2 - 4ac > 0$, демек берілген теңдеудің екі түбірі болады. **54.** жоқ . **55.** $\varnothing$. *Нұсқау.* $\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$ болғандықтан $\sin^{20}x \cdot \cos^{20}x \cdot \cos^4 x = 0{,}0001$, $\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^{20} \cdot \cos^4 x = 0{,}0001$ немесе $\sin^{20}2x \cdot \cos^4 x = 2^{20} \cdot 0{,}0001$. **56.** *Шешуі.* $35 - 1 - 2 - 3 = 35 - 6 = 29$ есеп. $29 = 4 \cdot 7 + 1$ болғандықтан, бес есепті шығарған оқушы болады. **57.** $\left(1; \pm\frac{1}{4} - 1 + k, k \in Z\right)$. *Шешуі* : Онда $\operatorname{tg}^2\pi(x + y) + \operatorname{ctg}^2\pi(x + y) \ge 2$ екені ақиқат. $\operatorname{tg}^2\pi(x + y) = 1$ болғанда теңдік орындалады. $\sqrt{\frac{2x}{x^2+1}} + 1$. теңдеудің оң жағын бағалаймыз: $x \ge 0$, $x^2 + 1 \ge 2x$. Онда $0 \le \sqrt{\frac{2x}{x^2+1}} \le 1$ және $1 \le \sqrt{\frac{2x}{x^2+1}} \le 2$. Демек, теңдеудің сол жағындағы өрнек 2-ден үлкен немесе тең; теңдеудің оң жағындағы өрнек 2-ден кіші немесе тең, яғни $\begin{cases} \operatorname{tg}^2\pi(x + y) = 1, \\ \sqrt{\frac{2x}{x^2+1}} + 1 = 2 \end{cases}$ болса, теңдеудің шешімі болады. Немесе $\begin{cases} \operatorname{tg}^2\pi(x + y) = \pm 1, \\ \sqrt{\frac{2x}{x^2+1}} = 1. \end{cases}$ Яғни $\begin{cases} \operatorname{tg}^2\pi(1 + y) = \pm 1, \\ x = 1, \end{cases}$ демек, $\begin{cases} \pi(1 + y) = \pm\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z, \\ x = 1 \end{cases}$ немесе $\begin{cases} y = \pm\frac{1}{4} - 1 + k, k \in Z, \\ x = 1. \end{cases}$ **58.** $1 - \frac{1}{(n+1)!}$. *Шешуі* .

$\frac{k}{(k+1)!}=\frac{k+1-1}{(k+1)!}=\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}$, онда $S=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots+\frac{n}{(n+1)!}=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+$ $+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}+\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}$. **59.** *Шешуі.* Топтауды қолданып, өрнекті түрлендіреміз: $21+21^2+21^3+21^4+\ldots+21^{2007}+21^{2008}=21\cdot(1+21)+21^3\cdot(1+21)+$ $+\ldots+21^{2007}\cdot(1+21)=22\cdot(21+21^3+21^5+21^7+\ldots+21^{2007})$. 22 саны 11-ге бөлінеді, демек, берілген санды өрнек те 11-ге бөлінеді. **60.** *Шешуі* . 1-*тәсіл* . Теңсіздіктің сол жағын түрлендіреміз: $x^8-x^6-4x^4+x^2+1=(x^8-2x^4+1)+x^6-2x^4+x^2=(x^4-1)^2+$ $+x^2(x^2-1)^2\geq 0$. $x=\pm 1$ болса, онда теңдік ақиқат. 2-*тәсіл* : Төрт оң санның арифметикалық ортасы осы сандардың геометриялық ортасынан үлкен немесе тең теңсіздікті қолданамыз: $x^8+x^6-4x^4+x^2+1\geq 4\cdot\sqrt[4]{x^8\cdot x^6\cdot x^2\cdot 1}-4x^4=4x^4-4x^4=0$. $x=\pm 1$ болса, онда теңдік ақиқат. **61.** *Шешуі* . $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9$ теңсіздігін қолданамыз. $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 3\sqrt{abc}\cdot 3\sqrt{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}}=9$ (*) болғандықтан теңсіздіктің сол жағын түрлендіреміз: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}=\left(\frac{a}{b+c}+1\right)+\left(\frac{b}{a+c}+1\right)+\left(\frac{c}{a+b}+1\right)-3=$ $=\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{a+c}+\frac{a+b+c}{a+b}-3=(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\right)-3=\frac{1}{2}((a+b)+$ $+(a+c)+(b+c))\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\right)-3\geq\frac{9}{2}-3=\frac{3}{2}$. Теңдік $a=b=c$ болғанда ақиқат. **62.** *Шешуі.* Коши теңсіздігін қолданып теңдікті түрлендіреміз: $1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)=$ $=\sqrt{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot\ldots\cdot(2n-1)^2}=\sqrt{1\cdot(2n-1)}\cdot\sqrt{3\cdot(2n-3)}\cdot\sqrt{5\cdot(2n-5)}\cdot\ldots\cdot\sqrt{(2n-1)-1}<$ $<\frac{1+(2n-1)}{2}\cdot\frac{3+(2n-3)}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{(2n-3)+3}{2}\cdot\frac{(2n-1)+1}{2}=n\cdot n\cdot\ldots\cdot n=n^n$. **63.** *Шешуі* . $a+b\geq 2\sqrt{ab}$, яғни $a+1\geq 2\sqrt{a}$ теңсіздігін қолданамыз. $\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}\leq$ $\leq\frac{a}{2\sqrt{a}}+\frac{b}{2\sqrt{b}}+\frac{c}{2\sqrt{c}}=\frac{1}{2}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})\leq\frac{1}{2}\left(\frac{a+1}{2}+\frac{b+1}{2}+\frac{c+1}{2}\right)=\frac{1}{4}(a+b+c+3)\leq$ $\leq\frac{1}{4}(3+3)=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$. **64.** $\left[-\frac{1}{4};\ 2\right]$. **65.** 2. **66**. $f(x)=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{1-x}+\frac{x-1}{x}\right)$. *Шешуі.* Егер x_1 белгілі болса, келесі тізбекті жазамыз: $x_n=\varphi(x_{n-1})=\frac{1}{1-x_{n-1}}$, $x_2=\frac{1}{1-x_1}$; $x_3=\frac{1}{1-x_2}=$ $=\frac{1}{1-\frac{x_1-1}{x_1}}=\frac{x_1-1}{x_1}$; $x_4=\frac{1}{1-x_3}=\frac{1}{1-\frac{x_1-1}{x_1}}=x_1$; $x_4=x_1$. Яғни тізбек периодты. $T=3$. $x=x_1;\ x_2;\ x_3$ болғанда теңдіктерді жазамыз. Сонда $\begin{cases}f(x_1)+f(x_2)=x_1,\\ f(x_2)+f(x_3)=x_2.\\ f(x_3)+f(x_1)=x_3.\end{cases}$ Екінші теңдеуді (-1) санына көбейтіп, үш теңдеуді қосамыз: $2f(x_1)=x_1-x_2+x_3$, $f(x_1)=$ $=\frac{1}{2}\left(x_1-\frac{1}{1-x_1}+\frac{x_1-1}{x_1}\right)$ немесе $f(x)=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{1-x}+\frac{x-1}{x}\right)$. **67.** 1) $\{2;\ 6\}$; 2) $\left\{-1;\ 9;\ \frac{5\pm\sqrt{61}}{2}\right\}$; 3) $\left\{\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$; *нұсқау* : теңдеудің сол жағында айырымның квадратын айырамыз: $\left(x-\frac{x}{x+1}\right)^2+\frac{2x^2}{x+1}=3$, немесе $\left(\frac{x^2}{x+1}\right)^2+\frac{2x^2}{x+1}=3$, одан кейін алмастыру қолданамыз $y=\frac{x^2}{x+1}$; 4) $\left\{\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}\right\}$. **68.** $\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2};\ \pm\frac{1}{2}\left(\pi-\arccos\frac{3}{8}\right)+\pi n,\ n\in Z\right\}$. **69.** 1) $\varnothing$; 2) $(1;\ 3)$. **70.** 1) $[1;\ 4]$; 2) $\left[1;\ 1\frac{1}{3}\right]$.

МАЗМҰНЫ

6-тарау. КӨПМҮШЕЛЕР

§ 30. Бірнеше айнымалысы бар көпмүшелер және олардың стандарт түрі. Біртекті көпмүше. Симметриялы көпмүше 3
§ 31. Бір айнымалысы бар көпмүшенің жалпы түрі. Көпмүшені көпмүшеге "бұрыштап" бөлу 6
§ 32. Бір айнымалысы бар көпмүшенің түбірлерін көбейткіштерге жіктеу тәсілімен табу. Безу теоремасы. Горнер схемасы 13
§ 33. Анықталмаған коэффициенттер әдісі. Бүтін коэффициентті көпмүшенің рационал түбірлері туралы теорема 22
§ 34. Квадрат теңдеуге келтірілетін жоғары дәрежелі теңдеулер 27
§ 35. Үшінші дәрежелі көпмүшеге арналған жалпыланған Виет теоремасы 31
Өзіңді тексер! 35

7-тарау. ФУНКЦИЯНЫҢ ШЕГІ ЖӘНЕ ҮЗІЛІССІЗДІГІ

§ 36. Сандар тізбегінің шегі. Функцияның шегі 37
§ 37. Бірінші тамаша шек 45
§ 38. Функцияның нүктедегі және жиындағы үзіліссіздігі 51
§ 39. Функция графигінің асимптоталары 56
Өзіңді тексер! 64

8-тарау. ТУЫНДЫ

§ 40. Туындының анықтамасы 66
§ 41. Туындыны табу ережелері 70
§ 42. Туындының физикалық және геометриялық мағынасы. Функция дифференциалының ұғымы 75
§ 43. Функцияның графигіне жүргізілген жанаманың теңдеуі 82
§ 44. Тригонометриялық функциялардың туындысы 87
§ 45. Күрделі функцияның туындысы. Кері тригонометриялық функциялардың туындысы 92
§ 46. Екінші туынды және оның физикалық мағынасы 97
Өзіңді тексер! 100

9-тарау. ТУЫНДЫНЫ ҚОЛДАНУ

§ 47. Функцияның өсу және кему аралықтары 102
§ 48. Функцияның сындық нүктелері және экстремумдары 107
§ 49. Функция графигінің дөңестігі мен ойыстығы. Иілу нүктелері 112
§ 50. Туындылардың көмегімен функцияны зерттеу және функцияның графигін салу 116
§ 51. Функцияның кесіндідегі ең үлкен және ең кіші мәндері 120
Өзіңді тексер! 124

10-тарау. КЕЗДЕЙСОҚ ШАМАЛАР ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ САНДЫҚ СИПАТТАМАЛАРЫ

§ 52. Кездейсоқ шамалар. Дискретті кездейсоқ шамалар. Үзіліссіз кездейсоқ шамалар. Дискретті кездейсоқ шаманың үлестірім заңы 126
§ 53. Дискретті кездейсоқ шамалардың сандық сипаттамалары 133
§ 54. Дискретті кездейсоқ шаманың үлестірімінің түрлері. Үлкен сандар заңы ... 139
Өзіңді тексер! 144
10-сыныптағы алгебра және анализ бастамалары курсын қайталауға арналған жаттығулар 147
Глоссарий 157
Жауаптары 164

Учебное издание

Àáûëêàñûìîâà Àëìà Àñëàíáåêîâà
Êó÷åð Òàòüÿíà Ïàâëîâíà
Êîð÷åâñêèé Âëàäèìèð Åâãåíüåâè÷
Æóìàãóëîâà Çàóðå Àáûëêàñîâíà

АЛГЕБРА

Часть 2

Учебник для 10 классов
естественно-математического направления
общеобразовательных школ
(на казахском языке)

Редакторы *Ж. Өміржанова*
Көркемдеуші редакторы *А. Сланова*
Техникалық редакторы *И. Тарапунец*
Корректоры *С. Дәуірхан*
Компьютерде беттеген *С. Жұмагелдиева*

Баспаға Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігінің № 0000001 мемлекеттік лицензиясы 2003 жылы 7 шілдеде берілген

ИБ № 5869

Басуға 19.06.19 қол қойылды. Пішімі 70 × 100 1/16. Офсеттік қағаз.
Қаріп түрі "SchoolBook Kza". Офсеттік басылыс.
Шартты баспа табағы 14,19 + 0,32 қосарбет. Шартты бояулы беттаңбасы 58,05.
Есептік баспа табағы 8,9 + 0,54 қосарбет. Таралымы 85 000 дана. Тапсырыс №

"Мектеп" баспасы, 050009, Алматы қаласы, Абай даңғылы, 143-үй
Факс.: 8(727) 394-37-58, 394-42-30.
Тел.: 8(727) 394-41-76, 394-42-34.
E-mail: mektep@mail.ru
Web-site: www.mektep.kz