Ә. Н. ШЫНЫБЕКОВ, Д. Ә. ШЫНЫБЕКОВ, Р. Н. ЖҰМАБАЕВ

АЛГЕБРА
ЖӘНЕ АНАЛИЗ БАСТАМАЛАРЫ

Жалпы білім беретін мектептің жаратылыстану-математика бағытындағы 10-сыныбына арналған оқулық

10

Қазақстан Республикасының Білім және ғылым министрлігі ұсынған

Алматы «Атамұра» 2019

1–4411

ӘОЖ 373.167.1
КБЖ 22.14я72
Ш 97

Оқулық Қазақстан Республикасының Білім және ғылым министрлігі бекіткен жалпы орта білім беру деңгейінің жаратылыстану-математика бағытындағы 10-11-сыныптарына арналған «Алгебра және анализ бастамалары» пәнінің жаңартылған мазмұндағы Типтік оқу бағдарламасына сәйкес дайындалды.

Пікір жазған ҚР ҰҒА-ның академигі,
физика-математика ғылымдарының докторы,
профессор **Өтелбаев М.Ө.**

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ШАРТТЫ БЕЛГІЛЕР:

— жаңа материалды бекіту сұрақтары
— практикалық және шығармашылық жұмыстар
— тарихқа шолу
✱ — шығармашылық немесе күрделілігі жоғары тапсырмалар мен материалдар
— дәлелдеудің (есептің шешуінің) басы
— дәлелдеудің (есептің шешуінің) соңы

Есептер:
A — бастапқы деңгей
B — орта деңгей
C — жоғары деңгей

Шыныбеков Ә. Н. және т.б.
Ш 97 Алгебра және анализ бастамалары: Жалпы білім беретін мектептің жаратылыстану-математика бағытындағы 10-сыныбына арналған оқулық / Ә.Н. Шыныбеков, Д.Ә. Шыныбеков, Р.Н. Жұмабаев. — Алматы: Атамұра, 2019. — 272 бет.

ISBN 978-601-331-539-3

ӘОЖ 373.167.1
КБЖ 22.14я72

ISBN 978-601-331-539-3

АЛҒЫ СӨЗ

Оқулық жалпы білім беретін мектептердің жаратылыстану-математика бағытындағы және математиканы тереңдетіп оқытатын сыныптарға арналған. «Алгебра–10» оқулығының мазмұны авторлардың «Алгебра–7,8,9» оқулықтарының мазмұнымен сабақтасып жатыр. Оқулықта тереңдетіп оқытатын сыныптарға арналған материалдар ерекшеленіп (*) таңбасымен белгіленген. Осыған қоса **С** тобының есептері де, негізінен математиканы тереңдетіп оқытатын сынып оқушыларына лайықталған. Дегенмен, бұл материалдарды қабілеті мен біліктілігі жоғары оқушылар сыныптан тыс уақыттарда өз беттерінше оқып-үйренулеріне болады. Өйткені математикалық олимпиадаларға және түрлі конкурстарға қатысып, нәтижелі орындарды иемденуге ықпалы зор. Жалпы, әр есепті өз беттерінше шығаруға тырысу керек, тіпті шығарылған есепті жете түсініп алып, міндетті түрде оған ұқсас есептерді де шығарып отыру қажет.

Оқулықпен дәріс алу барысында оқушы жалпы білім беретін мектепте оқыса да немесе математиканы тереңдетіп оқытатын сыныпта оқыса да, мынадай қағиданы ұстанған жөн: жаңа өтілген тақырыпты пысықтау барысында, ең алдымен **А** тобының материалдарын толық меңгеріп алу қажет. Онсыз келесі **В, С** топтарының есептерін шығару және келесі жаңа тақырыптарды меңгеру мүмкін емес. Сондықтан әр оқушының қабілетіне қарай, оның **А** тобының материалдарын толық меңгеруін қадағалап отыру қажет және оқушының келесі қиындық деңгейіне асығыс көшуіне жол бермеген дұрыс. Әр оқушыны келесі қиындық деңгейіне жалпы сынып бойынша емес, саралай отырып, әрбір оқушының қабілетіне қарай көшірген дұрыс.

Авторлар

7–9-СЫНЫП МАТЕРИАЛДАРЫН ҚАЙТАЛАУ

- **Алдыңғы сыныптарда өтілген материалдарды қайталау.**
- **10-сынып материалдарын меңгеруге дайындық.**

7–9-СЫНЫП МАТЕРИАЛДАРЫН ҚАЙТАЛАУҒА АРНАЛҒАН ЖАТТЫҒУЛАР

A

0.1. Центрі $(x_0;\ y_0)$ нүктесінде жатқан және радиусы R-ге тең шеңбердің теңдеуін жазыңдар:

1) $(1;\ 0)$, $R=2$; 2) $(0;\ -1)$, $R=1$.

0.2. Түзудің бұрыштық коэффициентін анықтап, оның графигін салыңдар:

1) $y=2x-3$; 2) $x-3y+4=0$; 3) $3x+4y-5=0$.

0.3. Теңдеудің графигін салыңдар:

1) $y=(x+2)^2-3$; 2) $(x-1)^2+(y+3)^2=9$; 3) $y=\dfrac{2}{x}$.

0.4. Теңдеулер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases} 3x-y=1, \\ x+y=3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y=7, \\ xy=12; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ x-y=2. \end{cases}$

0.5. Екі таңбалы санның бірінші цифры екіншісінен екі есе кіші, олардың көбейтіндісі 18-ге тең. Осы екі таңбалы санды табыңдар.

0.6. Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases} x+1\leqslant 7, \\ 5x-2>6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 6x-x^2>0, \\ 7-3x>4x; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} (x-2)(x+5)\geqslant 0, \\ x(x-3)\leqslant 0. \end{cases}$

0.7. Бұрышты анықтайтын радиус-вектор қай ширекке тиісті:

1) $425°$; 2) $-200°$; 3) $\dfrac{7\pi}{4}$; 4) $-\dfrac{5\pi}{3}$?

0.8. $30°$, $45°$, $60°$, $90°$, $120°$, $-135°$, $-300°$ бұрыштарын радиандық өлшемдермен өрнектеңдер.

0.9. $\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{3\pi}{2}$, $\dfrac{7\pi}{4}$, π, $-\dfrac{\pi}{4}$, -3π бұрыштарын градустық өлшемдермен өрнектеңдер.

0.10. Мына теңдіктер орындалатындай α бұрышы табыла ма:

1) $\sin\alpha = \frac{12}{11}$; 3) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$; $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) $\text{tg}\alpha = 100$;

2) $\cos\alpha = \frac{11}{12}$; 4) $\sin\alpha = -\frac{1}{3}$; $\cos\alpha = \frac{2}{5}$; 6) $\text{ctg}\alpha = -20$?

0.11. Өрнектің мәнін табыңдар:

1) $2\sqrt{3}\sin 60^\circ + 4\cos 60^\circ$; 3) $\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} + \sqrt{3}\text{tg}\frac{\pi}{6}$;

2) $\sqrt{3}\text{ctg}30^\circ - \text{tg}45^\circ$; 4) $\sin\frac{\pi}{6} - 2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}$.

0.12. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\cos^2\alpha - 1$; 2) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 2\sin\alpha\cos\alpha$.

0.13. Өрнектің таңбасын анықтаңдар:

1) $\sin 460^\circ$; 2) $\cos 460^\circ$; 3) $\text{tg } 200^\circ$; 4) $\text{ctg } 280^\circ$.

0.14. Тригонометриялық функциялардың α бұрышындағы мәндерін анықтаңдар:

1) $\alpha = 300^\circ$; 2) $\alpha = -690^\circ$; 3) $\alpha = \frac{5\pi}{6}$; 4) $\alpha = -\frac{3\pi}{4}$.

0.15. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\text{tg}\alpha - \frac{\sin\alpha - 1}{\cos\alpha}$; 3) $\text{tg}(3\pi + \alpha)\sin(270^\circ - \alpha) + \sin\alpha$;

2) $\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$; 4) $\frac{1-\cos^2(90^\circ + \alpha)}{\cos(\alpha + 4\pi)}$.

0.16. Бірінші мүшесі a_1 және айырымы d-ға тең арифметикалық прогрессияның алғашқы 5 мүшесін, олардың қосындысын және жалпы мүшесінің формуласын жазыңдар:

1) $a_1=3$, $d=2$; 2) $a_1=1{,}8$, $d=-0{,}3$.

0.17. Бірінші мүшесі b_1 және еселігі q-ға тең геометриялық прогрессияның алғашқы 5 мүшесін, олардың қосындысын және жалпы мүшесінің формуласын жазыңдар:

1) $b_1=4$, $q=2$; 2) $b_1=16$, $q=-0{,}5$.

0.18. Сыныптағы 30 оқушының алтауы сабаққа дайындалмай келген. Тақтаға кездейсоқ шақырылған оқушының сабаққа 1) дайын болуы; 2) дайын болмау ықтималдығы қандай?

B

0.19. Шеңбер центрінің координаталары мен радиусын табыңдар:

1) $x^2+y^2-4x+12y+4=0$; 2) $x^2+y^2-9x=0$.

0.20. Теңдеудің графигін салыңдар:

1) $y+|x|=3$; 2) $x^2-8x-y+13=0$; 3) $y(x-2)=3$.

0.21. Теңдеулер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases} |x-1|+y=2, \\ x+y=3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1, \\ x+y=4; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x^2-3xy-19y^2=8, \\ x^2-6y^2=3. \end{cases}$

0.22. Ауладағы қаздар мен ешкілердің аяқтарының саны 24, бастарының саны 9. Аулада неше қаз және неше ешкі жүр?

0.23. Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases} 5(x+2)-9(x+1)-3<1, \\ 7(3+5x)<3x-5(x-2); \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2-3x-4\leqslant 0, \\ 2x+1>0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2-3x-40\leqslant 0, \\ 3x^2-5x+2\geqslant 0; \end{cases}$

0.24. Үшбұрыш бұрыштарының қатынасы 5:6:7. Осы үшбұрыш бұрыштарының градустық және радиандық өлшемдерін табыңдар.

0.25. 1) $\alpha=\dfrac{4\pi}{3}$; 2) $\alpha=300^\circ$; 3) $\alpha=\dfrac{5\pi}{4}$ болса, $\sin\alpha-\cos^2\alpha+\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha$ өрнегінің мәнін табыңдар.

0.26. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\dfrac{\sin^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}{\cos^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha}$; 2) $\sin^2(\pi+\alpha)+\sin^2\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)$;

3) $\left(\sin(\pi+\alpha)-\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)\right)^2+\left(\cos(2\pi-\alpha)+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)^2$.

0.27. Өрнектің таңбасын анықтаңдар:

1) $\cos 40^\circ \cdot \sin 120^\circ \cdot \mathrm{tg}150^\circ$; 2) $\mathrm{tg}\frac{5\pi}{4} \cdot \mathrm{ctg}\frac{\pi}{6}$; 3) $\cos 8 \cdot \sin 5$.

0.28. Функцияның тақ-жұптығын анықтаңдар:

1) $y = x^3 - 7x$;
2) $y = 1 - \cos x$;
3) $y = \cos x \sin x$;
4) $y = \mathrm{tg}x \cdot \sin^2 x$.

0.29. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $\frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha + 1}{\sin^2\alpha} = 2$;
2) $\frac{1 - \sin^2\alpha}{1 - \cos^2\alpha} - \mathrm{ctg}^2\alpha = 0$.
3) $\frac{\mathrm{ctg}\alpha + \mathrm{ctg}\beta}{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta} = \mathrm{ctg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\beta$.

0.30. $\mathrm{tg}x=3$ деп алып, $\frac{3\sin x + \cos x}{\sin x - 4\cos x}$ өрнегінің мәнін табыңдар.

0.31. Сан тізбегі берілген:

1) 1; 4; 7; 10; 13; ...;
2) $\frac{1}{2}; \frac{4}{5}; \frac{9}{10}; \frac{16}{17}; \ldots$.
3) 1; –2; 3; –4; 5; –6; ...

Тізбектің жалпы мүшесінің формуласын жазыңдар. Тізбектің өспелі, кемімелі, жоғарыдан не төменнен шенелгендігін анықтаңдар.

0.32. $\{a_n\}$ арифметикалық прогрессиясы берілген:

1) $a_1+a_{10}=12$; $a_8-a_5=4$; 2) $a_5+a_{11}=-0{,}2$; $a_4+a_{10}=2{,}6$.

Прогрессияның бірінші мүшесін, айырымын, алғашқы 6 мүшесінің қосындысын, жалпы мүшесінің формуласын жазыңдар.

0.33. $\{b_n\}$ геометриялық прогрессиясы берілген:

1) 3; 3^2; 3^3; ...; 2) $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \ldots$.

Прогрессияның еселігін, алғашқы 5 мүшесінің қосындысын, жалпы мүшесінің формуласын жазыңдар.

0.34. 150-ден аспайтын және 7-ге еселік болатын барлық натурал сандардың қосындысын табыңдар.

C

0.35. Теңдеудің графигін салыңдар:

1) $y=|x^2-4\cdot|x|+3|$; 2) $|x|\cdot y=1$; 3) $x\cdot|y|=1$.

0.36. p мен q-дің қандай мәндерінде $y=x^2-px+q$ параболасының төбесі $(1;\ -2)$ нүктесінде орналасады?

0.37. Теңдеулер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases} x+y+xy=-1; \\ x^2+y^2+xy=3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{3x-9y}{x+y}+\dfrac{2x+y}{x-y}=4, \\ x^2-y^2=48; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^3-y^3=8, \\ x-y=2. \end{cases}$

0.38. Тапсырылған жұмысты 12 жұмысшыдан құрылған бригада 6 күнде аяқтады. 18 жұмысшыдан құрылған бригада осы жұмысты неше күнде аяқтаған болар еді?

0.39. $y=\dfrac{x-1}{x+2}+\dfrac{\sqrt{30+x-x^2}}{\sqrt{x^2-2x}}$ функциясының анықталу облысын табыңдар.

0.40. Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases} \dfrac{x^2-12x+35}{2x^2+x-3}\geqslant 0, \\ |x-3|\leqslant 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x+7}{x-5}+\dfrac{3x+1}{2}\geqslant 0, \\ |x-5|\leqslant 2. \end{cases}$

0.41. Өрнектің ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңдар:

1) $1+2\cos x$; 2) $2-5\sin x$; 3) $2-5|\sin x|$.

0.42. 1) $2\sin x+\cos x=3$;

2) $5\sin x-3\cos x=8$ теңдігі орындалуы мүмкін бе?

0.43. Функцияның ең кіші оң периодын табыңдар:

1) $y=\{x\}-3\sin\pi x$; 2) $y=\sin 3x-2\cos 2x$.

0.44. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $$\frac{\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\cos^2(3\pi-\alpha)+\cos(\pi+\alpha)\cos(2\pi-\alpha)}{\operatorname{tg}^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{ctg}^2\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)};$$

2) $$\frac{\cos\varphi+\sin\varphi-\cos^2\varphi\sin\varphi-\sin^2\varphi\cos\varphi}{\sin\varphi\operatorname{tg}\varphi+\cos\varphi\operatorname{ctg}\varphi}.$$

0.45. $\operatorname{tg}\alpha=3$ деп алып, өрнектің мәнін табыңдар:

1) $\dfrac{2\cos^2\alpha-7\sin^2\alpha}{3\sin^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha}$; 2) $\dfrac{\sin\alpha+3\cos\alpha}{\sin^3\alpha-3\cos^3\alpha}$.

0.46. $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}, n\geqslant 2$ теңсіздігін дәлелдеңдер.

0.47. $a_n\leqslant 200$, $b_m\leqslant 200$ болса, 1, 4, 7, 10, ..., a_n және 3, 7, 11, 15, ..., b_m арифметикалық прогрессияларының неше ортақ мүшесі бар?

0.48. 10; 11; 15 сандары бір геометриялық прогрессияның (көршілес болуы міндетті емес) мүшелері болуы мүмкін бе?

0.49. a; b; c сандары — геометриялық прогрессияның, a; $2b$; $3c$ сандары — арифметикалық прогрессияның мүшелері. Геометриялық прогрессияның 1-ден өзге еселігін табыңдар.

0.50. Қосындының мәнін табыңдар:

1) $\dfrac{9}{25}-\dfrac{27}{125}+\ldots+\left(-\dfrac{3}{5}\right)^{n+1}+\ldots;$

2) $\sin\dfrac{\pi}{3}+\sin^2\dfrac{\pi}{3}+\sin^3\dfrac{\pi}{3}+\ldots+\sin^n\dfrac{\pi}{3}+\ldots$.

1-бөлім. ФУНКЦИЯ, ОНЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ ЖӘНЕ ГРАФИГІ

1.1. Функция ұғымы және оның берілу тәсілдері

1.1.1. Функция ұғымы

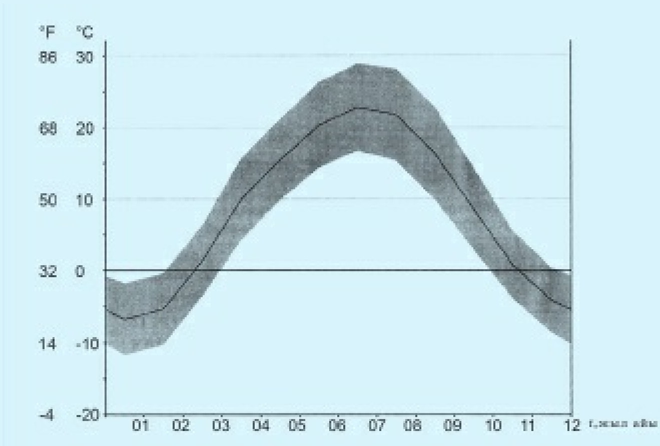
Қоршаған ортада, ғылым мен техниканың көптеген салаларында бір шаманың екінші шамаға тәуелді өзгерісін жиі кездестіреміз. Мысалы, табан қабырғасы x-ке тең шаршы болып келген тік параллелепипедтің биіктігі h болсын. Онда параллелепипед көлемі

$$V = hx^2 \qquad (1)$$

формуласымен есептеледі. Егер x-ты айнымалы деп қарастырсақ, (1) теңдіктен V көлемінің x-ке тәуелді өзгеретінін көреміз. Демек, V көлемі — x-ке (шаршы табанына) тәуелді функция.

ОЙТҮРТКІ

1.1-суретте Алматы қаласындағы ауаның орташа температурасының бір жыл ішіндегі өзгерісі график арқылы берілген (https://ru.climate-data.org/location/296/). Графикте қандай шамалардың тәуелділігі көрсетілген?

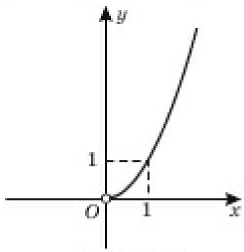


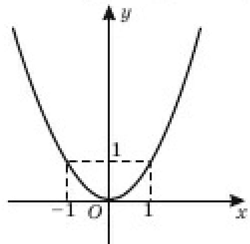
1.1-сурет

1-анықтама. *Берілген $D(f)$ сандар жиынының әрбір $x \in D(f)$ элементіне қайсыбір f заңдылығымен жалғыз y саны сәйкес қойылса, онда x-ке тәуелді $y = f(x)$ сандық функция берілді деп есептейміз.*

Мұндағы, $D(f)$ — функцияның анықталу облысы, x — тәуелсіз айнымалы (аргумент), y — тәуелді айнымалы (функция) деп аталады. $E(f)$ арқылы функцияның барлық мәндер жиынын белгілейік. $E(f)$ ***функцияның мәндері облысы*** деп аталады. Жазықтықтағы барлық $(x; f(x))$, $x \in D(f)$ нүктелері жиыны $y = f(x)$ *функциясының графигі* деп аталады. Мысалы, жоғарыдағы (1) теңдіктен V көлемнің шаршы қабырғасы x-ке тәуелді функция болатынын көреміз. Мұнда анықталу облысы $D(V) = (0; +\infty)$, мәндер облысы $E(V) = (0; +\infty)$. Себебі есеп шарты бойынша x-тің 0-ге тең немесе теріс сан болуы мүмкін емес. Егер $h = 1$ деп алсақ, бұл функцияның графигі 1.2-суреттегідей болды.

$y = x^2$, $x \in (-\infty; +\infty)$ функциясының графигі парабола екенін білеміз (1.3-сурет).


1.2-сурет

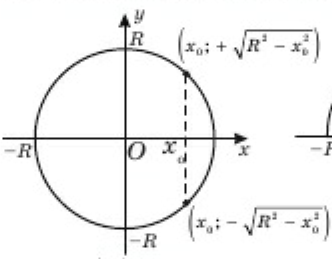

1.3-сурет

ТОПТЫҚ ЖҰМЫС

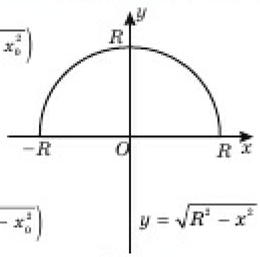
$y = x^2$, $x \in (-\infty; +\infty)$ функциясы квадраттық функция деп аталады. Ал $y = x^2$, $x \in (0; +\infty)$ функциясы квадраттық функциялар санатына ене ме? Сұрақтарды топпен талқылап, жауаптарыңды негіздеңдер.

$$x^2 + y^2 = R^2 \tag{2}$$

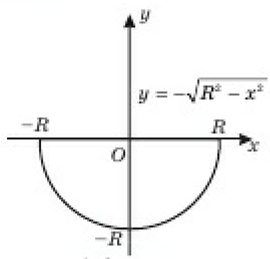
теңдеуін қарастыралық. Бұл теңдеумен жазықтықта радиусы R-ге тең, центрі координаталар бас нүктесінде орналасқан шеңбер анықталады (1.4-сурет). (2) теңдеу x пен y айнымалылары арасында тәуелділік орнатады. Мысалы, x-ті тәуелсіз айнымалы деп қарастырайық. x-ке тәуелді ($x \in [-R; R]$) y-тің мәні де өзгеріп отырады. Осы (2) теңдікпен x-ке тәуелді y функциясының анықталатынын не анықталмайтынын зерделейік. (2)-теңдеуді



1.4-сурет



1.5-сурет



1.6-сурет

$y^2 = R^2 - x^2$ түрінде жазып, оның екі бөлігінен де квадрат түбір аламыз.

$$\sqrt{y^2} = \sqrt{R^2 - x^2} \Rightarrow |y| = \sqrt{R^2 - x^2} \Rightarrow y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}.$$

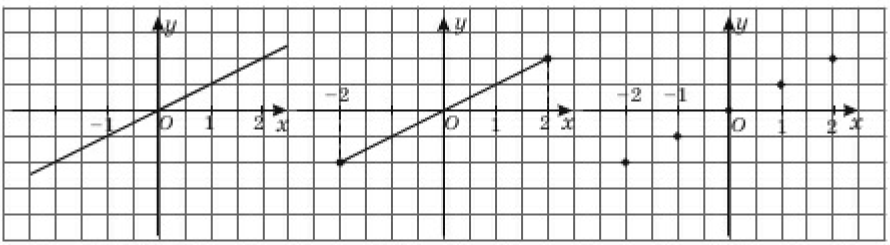
Осыдан әрбір $x_0 \in (-R; R)$ үшін y-тің екі мәні сәйкес қойылатынын көреміз: $y_1 = \sqrt{R^2 - x_0^2}$ және $y_2 = -\sqrt{R^2 - x_0^2}$. Мұнда функция анықтамасының шарты орындалмайды, яғни әрбір x-ке жалғыз y мәні емес, оның екі мәні сәйкес қойылып отыр. Сондықтан (2) теңдікпен функция анықталмайды. Ал мұнда $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ $x \in [-R; R]$ және $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$, $x \in [-R; R]$ өрнектерінің әрқайсысы өз алдына функцияны анықтайды және олардың графиктері, сәйкесінше 1.5 және 1.6-суреттерде бейнеленген.

Сонымен функцияны берілді деп есептеу үшін

а) *функцияның анықталу облысы, яғни тәуелсіз айнымалының қабылдайтын мәндер жиыны берілуі керек;*

ә) *тәуелсіз айнымалының әрбір мәніне тәуелді айнымалының тек бір мәнін сәйкес қоятын ереже берілуі керек.*

Бұл екі шарттың бірі орындалмаса, онда функция анықталмайды. Осы орайда 1) $y = \frac{1}{2}x$, $x \in (-\infty; +\infty)$; 2) $y = \frac{1}{2}x$, $x \in [-2; 2]$; 3) $y = \frac{1}{2}x$, $x \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$ функциялары — әртүрлі функциялар. Бұл функциялардың сәйкестік заңдылықтары бірдей болғанымен, анықталу облыстары әртүрлі. Олардың графиктері, сәйкесінше, 1.7—1.9-суреттерде бейнеленген.



1.7-сурет 1.8-сурет 1.9-сурет

1.1.2. Функцияның берілу тәсілдері

Функция үш түрлі тәсілмен берілуі мүмкін: а) аналитикалық; ә) графиктік; б) кестелік.

а) Егер функция аналитикалық тәсілмен (формула арқылы) берілсе, тәуелді айнымалы (функция) y пен тәуелсіз айнымалының (аргументтің) x арасындағы тәуелділік формулалар арқылы өрнектеледі. Мысалы, $y = \frac{2x-1}{x+1}$; $y = \sin x$; $y = 3x^2 - \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ және т.с.с.

Әдетте формуламен берілген функцияның анықталу облысы арнайы көрсетілмейді. Мұндай жағдайларда функцияның анықталу облысы ретінде функцияның нақты сандар жиынындағы мүмкін мәндер жиыны (ММЖ) алынады. Мәселен, $y = 3x^2 - \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ функциясының анықталу облысы $x-1>0$ теңсіздігімен анықталады: $D(f)=(1; +\infty)$.

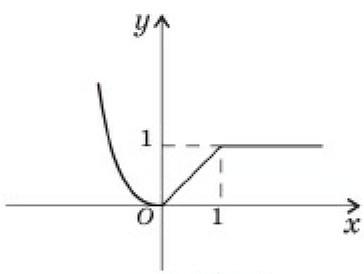
Кейде бір функцияның өзі сан өсінің әртүрлі бөлігінде әртүрлі формуламен беріледі:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ егер } x < 0, \\ x, \text{ егер } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1, \text{ егер } x > 1. \end{cases}$$

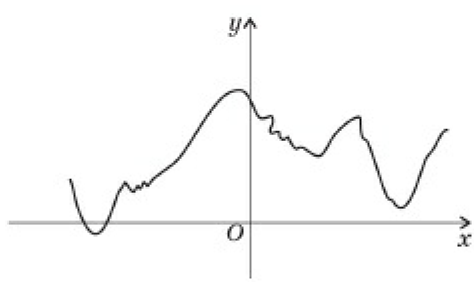
Бұл функцияның графигі 1.10-суретте бейнеленген.

ә) Егер функцияның графигі салынып көрсетілсе, онда бұл функцияны графиктік тәсілмен берілген деп есептейміз. Функцияның графиктік тәсілмен берілуін көрнекілік үшін немесе функцияны аналитикалық жолмен анықтау мүмкін емес жағдайларда қолданады. Мысалы, 1.11-суреттегі графикпен берілген функцияны аналитикалық жолмен анықтау өте күрделі. 1.1-суретте осындай функцияға жататын Алматы қаласының 2017 жылғы орташа температурасын көрсететін функцияның графигі бейнеленген.

б) Кейбір құбылыстарды зерттеу барысында функцияны кестелік тәсілмен анықтайды. Мысалы, метеорологтар сағат сайын ауа райы жөніндегі мәліметтерді арнайы кестелерге жазып отырады. Математикада да функцияның кестелік тәсілмен берілуін жиі қолданады.



1.10-сурет



1.11-сурет

ЕУРОПАДАҒЫ АУАНЫҢ ОРТАША ТЕМПЕРАТУРАСЫ

1.1-кесте

Биіктік, км	Температура, °C	
	жаз	қыс
0	+14,7	+1,7
1	+11,8	+0,6
2	+6,2	–4,1
3	+1,0	–9,1
4	–4,2	–15,2
5	–9,9	–22,2
6	–16,2	–29,3
7	–24,2	–36,6
8	–30,7	–43,6
9	–38,2	–49,2
10	–44,8	–54,3
11	–50,0	–56,8
12	–52,8	–57,2
13	–52,7	–56,3
14	–52,3	–56,5
15	–51,9	–57,1
16	–51,5	–57,3
17	–51,0	–57,6
18	–50,1	–57,6
19	–49,5	–57,6
20	–49,8	–57,9

(https://www.google.kz/url?sa=i&rct=j&q=&esrc=s&source=images&cd=&cad=rja&uact=8&ved=2ahUKEwjf-f7JoLzZAhWPLVAKHe3bAcMQjRx6BAgAEAY&url=http%3A%2F%2Fwww.sevparaplan.com%2Fmeteorology%2Ftemperatyra&psig=AOvVaw2VMy0eVA0do3gCrGqsn5SF&ust=1519482692841570)

1.1-кестеде жоғарыда көрсетілген дереккөзінен алынған мәлімет бойынша Еуропа континентіндегі орташа ауа температурасының жер бетінен жоғары көтерілу биіктігіне қарай өзгеруі көрсетілген. Мұнда бірінші бағанда биіктік, екінші (үшінші) бағанда биіктікке сәйкес келетін жазғы (қысқы) ауа температурасының мәндері көрсетілген.

Біз температураның биіктікке тәуелді функциясының кесте арқылы берілуін көріп отырмыз.

ТАРИХҚА ШОЛУ

Функцияға алғашқылардың бірі болып Лобачевский мен Дирихле жалпы түрде анықтама берген. Олар берген анықтаманы қазіргі мектеп математикасы курсында оқытады және оны біздер 9-сыныпта қарастырғанбыз.

Анықтама. *Егер x айнымалысының әрбір мәніне қандай да бір заңдылықпен y айнымалысының тек бір ғана мәні сәйкес қойылса, онда y айнымалысын x аргументіне тәуелді* ***функция*** *деп атайды.*

Мұнда x және y айнымалылары нақты сандар жиынына тиісті. Біз де жоғарыда осы анықтаманың баламасын келтірдік.

XVIII ғасырға дейін *нақты берілген тәуелділіктерді функция* деп түсінген. Ол кездерде жалпы «Функция деген не?» сұрағы ғалымдарды аса толғандырмаған да еді. Кейін ғылым мен техниканың дамуына қарай ғалымдар функция деген аса күрделі әрі маңызды ұғымға анықтама бере бастады.

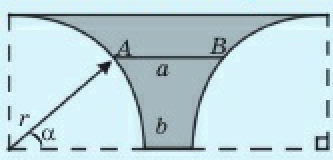
Әртүрлі ғалымдар функцияны әртүрлі анықтаған, кейбіреулері аналитикалық түрде формуламен өрнектесе, өзгелері еркін сызылған қисық ретінде анықтаған. Бұл көзқарастардың екеуінде де x және y айнымалыларының арасында сәйкестік орнайтындығы арқау болды. Дегенмен, бұл анықтамаларда сәйкестіктердің екі түрі ғана қарастырылады. Сондықтан осы көзқарастардың қайсысы неғұрлым жалпы жағдайларды қамтитындығы жөнінде пікірталастар көп болған. Бұл салада, әсіресе Леонард Эйлер (1707—1783), Жан Лерон Д'Аламбер (1717—1783), Жан Батист Жозеф Фурье (1768—1830), Николай Иванович Лобачевский (1792—1856) және Петер Густав Дирихле (1805—1859) сынды ғұлама математиктердің қосқан үлестері орасан зор. Фурьенің еңбектерінен кейін осы аталған екі көзқарастың екеуі де функция ұғымын толық қамтымайтындығы мәлім болды. Кейінірек ешқандай «аналитикалық өрнекпен» де, «еркін сызылған қисықпен» де өрнектелмейтін x және y айнымалыларының тәуелділігі анықталды. Дирихле функциясын қарастырайық:

$$y = \begin{cases} 1, & \text{егер } x \text{ — рационал сан болса,} \\ 0, & \text{егер } x \text{ — иррационал сан болса.} \end{cases}$$

Мұнда біз y-ті x арқылы өрнектейтін ешқандай аналитикалық өрнекті көрмейміз және Oxy жазықтығында осы функцияның графигі болатындай қисықты сызып шығу мүмкін емес.

1. Функцияның анықтамасын тұжырымдаңдар. Оның мағынасын өздеріңе белгілі функциялардың графиктері арқылы түсіндіріңдер.
2. Функцияның анықталу облысы, мәндер облысы және графигі деген не? Оларды қалай белгілейді?
3. Функцияның берілуінің қандай тәсілдерін білесіңдер? Жауаптарыңды мысал арқылы түсіндіріңдер.
4. Егер аналитикалық тәсілмен берілген функцияның анықталу облысы көрсетілмесе, оның анықталу облысы ретінде қандай жиын алынады?
5. $y=f(x)$ және $y=g(x)$ функциялары берілген. Осы функциялардың 1) қосындысының; 2) айырымының; 3) көбейтіндісінің; 4) қатынасының анықталу облысы ретінде қандай жиын алынады?

ПРАКТИКАЛЫҚ ЖҰМЫС



1.12-сурет

1) 1.12-суретте көрсетілген мәліметтер бойынша a-ны α-ға тәуелді өрнектеңдер, мұндағы r, b — тұрақты шамалар;
2) бұл тәуелділік функция бола ма?
3) Функция болса, оның анықталу облысы қандай?

ЕСЕПТЕР

А

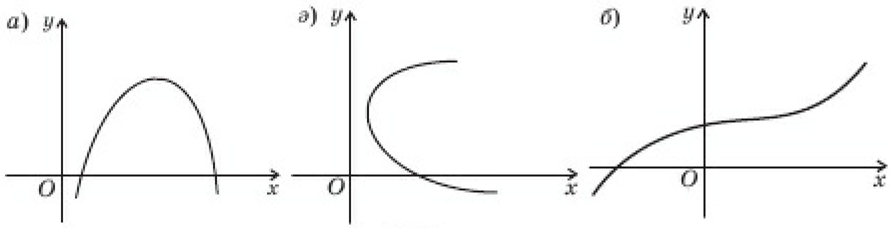
1.1. Тіктөртбұрыштың қабырғалары 5 м және x м, ауданы y м^2. x пен y арасындағы сәйкестікті формула арқылы өрнектеңдер. Бұл сәйкестіктің анықталу облысы мен мәндер облысын көрсетіңдер.

1.2. Нақты сандар жиынында 1) $y=3x-4$; 2) $y=(x-2)^2$; 3) $y=\sqrt{x+1}$; 4) $y^2=x+1$ сәйкестіктері формуламен берілген. Олардың анықталу облысы мен мәндер облысын анықтап, графиктерін салыңдар. Бұл сәйкестіктердің қайсысы функцияны анықтайды? Неге?

1.3. $X=\{-2;\ -1;\ 0; 1;\ 2\}$ жиынында f функциясы $y=\dfrac{3}{x-3}$ формуласымен анықталған. Осы функцияның графигін салыңдар.

1.4. $A(0;\ 1)$, $B(1;\ 0)$, $C(1;\ 2)$, $K(2;\ 1)$, $M(2;\ -1)$ нүктелерінің қайсысы $y=\dfrac{(x-1)^2}{1-x}$ функциясының графигіне тиісті болады?

1.5. 1.13-суретте көрсетілген сәйкестіктердің қайсысы функцияны анықтайды? Жауаптарыңды негіздеңдер.



1.13-сурет

1.6. $y=x^2-6x+5$ функциясын нақты сандар жиынында графиктік тәсілмен беріңдер.

1.7. $y=x^2-6x+5$ функциясын бүтін сандар жиынында графиктік тәсілмен беріңдер.

1.8. $y=x^2-6x+5$ функциясын $D=\{-1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$ жиынында кестелік тәсілмен беріңдер.

1.9. Нақты сандар жиынында $f(x)=\sqrt{x+3}$ және $g(x)=x-2$ функциялары берілген. Төмендегі функциялардың анықталу облысын табыңдар:

1) $f(x)+g(x)$; 2) $f(x)-g(x)$; 3) $f(x)\cdot g(x)$; 4) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$; 5) $\dfrac{g(x)}{f(x)}$.

1.10. Нақты сандар жиынында $f(x)=\sqrt{x-2}$ және $g(x)=3x-\sqrt{x-2}+2$ функциялары берілген. 1) $f(x)+g(x)$; 2) $f(x)-g(x)$ функциясының анықталу облысын табыңдар.

B

1.11. Нақты сандар жиынында берілген функцияның анықталу облысын табыңдар:

1) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}+\dfrac{x+1}{x-1}$; 3) $\varphi(x)=\sqrt{x+2}$;

2) $g(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x+1}$; 4) $\psi(x)=\sqrt{|x|+2}$.

1.12. $A(-2;\ 1)$, $B(-2;\ 3)$, $C(1;\ 0)$, $D(4;\ 3)$ нүктелерінің қайсысы

$$f(x)=\begin{cases}1, & x<0,\\ 1-x, & x\geqslant 0\end{cases}$$

функциясының графигіне тиісті?

1.13. Функцияның анықталу облысын табыңдар:

1) $f(x)=\dfrac{3x+1}{x^2-3x+2}$; 4) $f(x)=\sqrt{(1-x)(1+5x)}$

2) $f(x)=\sqrt{x^2-1}+\dfrac{1}{\sqrt{3-x}}$; 5) $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$;

3) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3+|x|}}$; 6) $f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}$.

1.14. $y=2x^2-4x-6$ функциясын $D=\{x\in Z: |x|\leqslant 3\}$ жиынында 1) графиктік; 2) кестелік тәсілмен беріңдер.

1.15. 1.12-есепте берілген $f(x)$ функциясының графигін салыңдар: 1) нақты сандар жиынында; 2) бүтін сандар жиынында; 3) натурал сандар жиынында.

1.16. Функцияның графигін салыңдар:

1) $f(x)=2x-3$, $D(f)=[-1;\ 2]$;
2) $g(x)=x^2-6x+5$, $D(g)=[0;\ 5]$;
3) $h(x)=\dfrac{2}{x-1}$, $D(h)=[-2;\ 1)\cup(1;\ 3]$.

1.17. $D=\{-2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2\}$ жиынында $y=2x-x^2$ функциясы берілген. Функцияның графигіне тиісті барлық қос сандар жиынын жазып, оларды тік бұрышты координаталар жүйесінде салып көрсетіңдер.

1.18. $f(x)=x^2-4x+3$ функциясының 1) нақты сандар жиынында; 2) теріс емес нақты сандар жиынында; 3) бүтін сандар жиынында; 4) натурал сандар жиынында графигін салыңдар.

1.19. Алдыңғы есепті төмендегі функция үшін шығарыңдар:

1) $y=3x-4$; 2) $y=|3x-4|$; 3) $y=2+\dfrac{1}{x-1}$; 4) $y=|x^2-4x+3|$.

1.20. Бүтін сандар жиынында

$$f(x)=\begin{cases} x^2-x+1, & \text{егер } |x|\leqslant 2, \\ 1, & \text{егер } |x|>2 \end{cases}$$ функциясы берілген.

$f(-3)$, $f(-2)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ мәндерін анықтаңдар.

1.21. $f(x)=\sqrt{x}\sqrt{x-1}$ және $g(x)=\sqrt{x(x-1)}$ функциялары 1) нақты сандар жиынында; 2) теріс емес нақты сандар жиынында; 3) бүтін сандар жиынында; 4) натурал сандар жиынында анықталса, олар өзара тең бола ма?

C

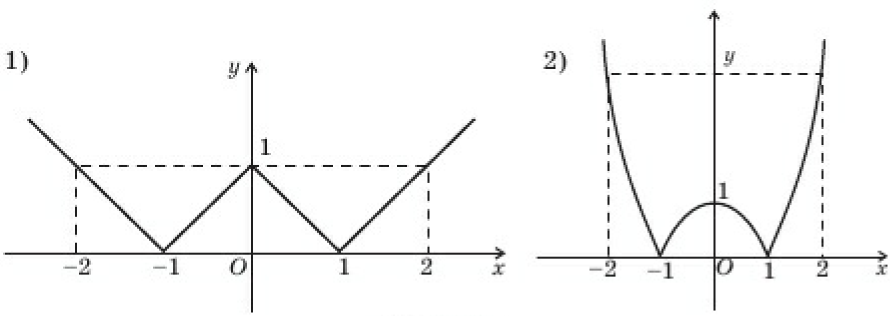
1.22. 1.14-суреттегі графиктік тәсілмен берілген функцияларды аналитикалық тәсілмен жазып көрсетіңдер.

1.23. $f(x)=\begin{cases} 1, & \text{егер } x>1, \\ -1, & \text{егер } x<1 \end{cases}$ функциясын бір формуламен жазып, оның графигін салыңдар.

1.24. $f(x)=(2x+1)\sqrt{4-x}$ және $g(x)=\sqrt{4-x}$, $x\in(-\infty;\ 4]$ функциялары берілген.

1) $f(x)\cdot g(x)$ функциясының анықталу облысын табыңдар;

2) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ функциясының анықталу облысын табыңдар;



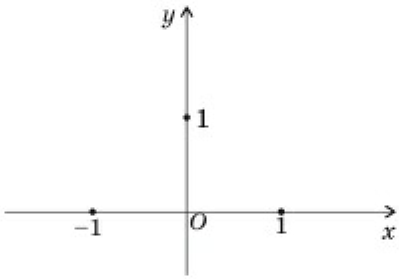
1.14-сурет

3) $\dfrac{g(x)}{f(x)}$ функциясының анықталу облысын табыңдар;

4) $f(x)\cdot g(x)$ және $h(x)=4+7x-x^2$, $x\in(-\infty;\ +\infty)$ функцияларының қандай айырмашылығы бар? Жауаптарыңды негіздеңдер.

5) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ және $\varphi(x)=2x+1$, $x\in(-\infty;+\infty)$ функцияларының қандай айырмашылығы бар? Жауаптарыңды негіздеңдер.

1.25. Бүтін сандар жиынында функция графиктік тәсілмен берілген (1.15-сурет). Бұл функцияны бірнеше жолмен аналитикалық тәсілмен жазып көрсетіңдер.



1.15-сурет

1.26. Функцияның графигін салыңдар:

1) $f(x)=\begin{cases}1, & \text{егер } x<0,\\ 0, & \text{егер } x\geqslant 0;\end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases}-1, & \text{егер } x<0,\\ 0, & \text{егер } x=0,\\ 1, & \text{егер } x>0;\end{cases}$

2*) $h(x)=\dfrac{1}{x}-\left[\dfrac{1}{x}\right];$

4) $g(x)=\begin{cases}1, & \text{егер } x<-1,\\ x, & \text{егер } -1\leqslant x\leqslant 1,\\ -1, & \text{егер } x>1.\end{cases}$

Қайталауға арналған жаттығулар

1.27. Өрнектің ең үлкен және ең кіші мәндері қандай:

1) $4+3\cos\alpha$;

2) $3-\sin\alpha$?

1.28. $y=x-12$ түзуі мен $x^2+y^2=36$ шеңберінің қиылыспайтынын дәлелдеңдер.

1.2. Функцияның кейбір қасиеттері

1.2.1. Функцияның нөлдері және оның үздіксіздігі ұғымы

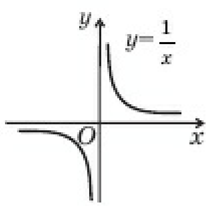
Анықтама. *Егер $x=a$ нүктесінде $f(x)$ функциясының мәні нөлге тең $f(a)=0$ болса, онда a нүктесін $f(x)$* ***функциясының нөлі*** *деп атаймыз.*

Мысалы, $x=1$ нүктесі — $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+1}$ функциясының нөлі. Өйткені $f(1)=\dfrac{1-1}{1^2+1}=0$.

Жалпы, $y=f(x)$ функциясының нөлдерін анықтау үшін $f(x)=0$ теңдеуінің түбірлерін табу керек. Бұл теңдеудің түбірлері бар болса, олар $y=f(x)$ функциясының нөлдері болады. Мысалы, $y=x^2+2x-3$ функциясының нөлдерін табу үшін $x^2+2x-3=0$ теңдеуінің түбірлерін табамыз: $x_1=-3$, $x_2=1$. Онда $x_1=-3$ және $x_2=1$ нүктелері — берілген квадраттық функцияның нөлдері.

Енді функцияның «үздіксіздігі» ұғымына тоқталайық. Жалпы, бұл ұғымды жоғары сыныптарда қатаң математикалық жолмен анықтаймыз. Ал қазір функцияның үздіксіздігі ұғымын оның графигі арқылы қарастырамыз.

Алдымен бірнеше мысалдар қарастырайық.



1.16-сурет

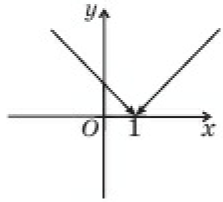
1-мысал. $f(x)=\dfrac{1}{x}$ функциясы $x=0$ нүктесінде анықталмаған. Оның анықталу облысы — $(-\infty;\ 0)\cup(0;+\infty)$. Бұл функцияның графигі — I және III ширектерде орналасқан гипербола (1.16-сурет). $\dfrac{1}{x}$ функциясының графигі «жалғаспайтын» екі бөлек қисықтан тұратынын білеміз. Демек, бұл функцияның графигі $x=0$ нүктесінде «үзіледі» деп есептеуге болады.

2-мысал. $f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{|x-1|}$ функциясы $x=1$ нүктесінен басқа нүктелерде анықталған: $D(f)=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$. Онда бұл функцияны модуль таңбасының анықтамасын қолданып, былай жазады:

$$f(x)=\begin{cases} x-1, \text{ егер } x>1, \\ 1-x, \text{ егер } x<1. \end{cases}$$

Бұл функцияның графигі де екі бөліктен тұрады (1.17-сурет).

Демек, бұл функцияның да графигі $x=1$ нүктесінде «үзіледі».

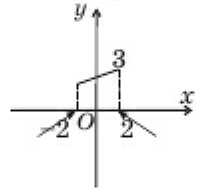


1.17-сурет

3-мысал.

$$f(x)=\begin{cases}0,5x+1, & \text{егер } x<-2,\\ 0,5x+3, & \text{егер } -2\leqslant x\leqslant 2,\\ -0,5x+1, & \text{егер } x>2\end{cases}$$

функциясы $(-\infty;+\infty)$ жиынында анықталғанымен, оның графигі бірнеше үзік қисықтардан тұрады (1.18-сурет). Функцияның графигі $x=-2$ және $x=2$ нүктелерінде «үзілген».



1.18-сурет

Функция графиктерінің «үзілетін» нүктелерін функцияның ***үзіліс нүктелері*** деп атайды. Ал $[a;\ b]$ кесіндісінде $y=f(x)$ функциясы анықталып, осы аралықта оның үзіліс нүктелері болмаса, $f(x)$ функциясын $[a;\ b]$ кесіндісінде ***үздіксіз*** деп атаймыз. Мысалы, $y=2x^2-3$, $y=3x+1$ функциялары сан өсінің барлық нүктелерінде үздіксіз. $f(x)=\dfrac{1}{x}$ функциясы $(-\infty;0)$ немесе $(0;+\infty)$ аралықтарының әрқайсысында үздіксіз, ал $(-\infty;+\infty)$ жиынында үзіліс нүктесі бар ($x=0$). Сондықтан $(-\infty;+\infty)$ жиынында үздіксіз болмайды.

1.2.2. Функцияның таңба тұрақтылық аралықтары

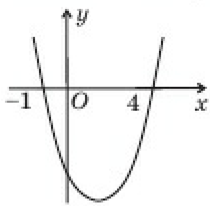
Анықтама. *Егер $y=f(x)$ функциясы $(a;b)$ аралығында анықталып, осы аралықтың барлық нүктелері үшін $f(x)>0$ және $f(x)<0$ теңсіздіктерінің біреуі ғана орындалса, $(a;b)$ аралығын $f(x)$ функциясының* ***таңба тұрақтылық аралығы*** *деп атайды.*

Мысалы, $f(x)=\dfrac{1}{x}$ функциясы үшін $(-\infty;0)$ және $(0;+\infty)$ аралықтарының әрқайсысы оның таңба тұрақтылық аралығы болады. Өйткені $(-\infty;0)$ аралығында $\dfrac{1}{x}<0$ теңсіздігі, $(0;+\infty)$ аралығында $\dfrac{1}{x}>0$ теңсіздігі орындалады. Осы сияқты, $f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{|x-1|}$ функциясы үшін $(-\infty;-1)$ және $(1;+\infty)$. 3-мысалда қарастырылған функция үшін $(-\infty;-2)$, $[-2;2]$ және $(2;+\infty)$ аралықтары таңба тұрақтылық аралықтары болады.

Осы мысалдардан функцияның үзіліс нүктелері оның таңба тұрақтылық аралықтары шегараларының бірі болатынын көреміз.

Сонымен қатар функцияның нөлдері де оның таңба тұрақтылық аралықтарының шегараларының бірі болатынын көру қиын емес. Ол үшін алдымен мысал қарастырайық.

4-мысал. $f(x)=x^2-3x-4$ функциясы бүкіл сан өсінде анықталған және үздіксіз. Оның нөлдері $x=-1$ және $x=4$ нүктелері. Бұл функцияның графигі $(-1;0)$ және $(4;0)$ нүктелері арқылы өтетін, тармақтары жоғары бағытталған парабола (1.19-сурет). $x<-1$ немесе $x>4$ болғанда функция оң мәндер, $-1<x<4$ болғанда теріс мәндер қабылдайды. $(-\infty;-1)$, $(-1;4)$ және $(4;+\infty)$ жиындары — функцияның таңба тұрақтылық аралықтары.



1.19-сурет

Енді жалпы жағдайда $y=f(x)$ функциясы берілсін. x_1, x_2, ..., x_n арқылы осы функцияның нөлдері мен үзіліс нүктелерінің (егер үзіліс нүктелері бар болса) өсу ретімен орналасқан тізбегін белгілейік. Онда әрбір $(x_k;\ x_{k+1})$, $(k=1,2,\ldots,\ n-1)$ аралықтары мен $(-\infty;\ x_1)$ және $(x_n;+\infty)$ аралықтарында берілген функция үздіксіз және бұл аралықтарда функцияның басқа нөлдері мен үзіліс нүктелері жоқ. Олай болса, осы аралықтарда функция графигі Ox өсінен не жоғары, не төмен орналасады. $(x_k;\ x_{k+1})$ аралықтарында $f(x)$ функциясының таңбасы тұрақты. Шынында да, егер кері жорып, $f(u)<0$ және $f(v)>0$ теңсіздіктерін қанағаттандыратын u және v нүктелері табылсын делік. Айталық, $u<v$ болсын. $(x_k;\ x_{k+1})$ аралығында функция үздіксіз болғандықтан және $(u;f(u))$ мен $(v;f(v))$ нүктелері Ox өсінің екі жақ бөлігінде орналасқандықтан, осы нүктелерді қосатын функция графигінің бөлігі Ox өсімен кем дегенде бір рет қиылысуы керек, яғни $(u;v)$ аралығында $f(x)$ функциясының кем дегенде бір нөлі бар. Бұл функцияның $(x_k;\ x_{k+1})$ аралығында нөлі жоқ болатынына қайшы. Алынған қайшылық $(x_k;\ x_{k+1})$ аралығында $f(x)$ функциясының таңбасы өзгермей, тұрақты болатындығын дәлелдейді. Осыдан, егер қандай да бір $c\in(x_k;x_{k+1})$, $(k=1,2,\ \ldots\ n-1)$ нүктесі үшін $f(c)<0$ (немесе $f(c)>0$) теңсіздігі орындалса, осы аралықтың барлық нүктелерінде функцияның таңбасы теріс (сәйкесінше оң) болады.

5-мысал. $f(x)=\dfrac{x^2+3x-4}{x^2+x-2}$ функциясының таңба тұрақтылық аралықтарын табайық.

x^2+x-2 квадрат үшмүшесінің түбірлері -2-ге және 1-ге тең, x^2+3x-4 квадрат үшмүшесінің түбірлері -4 және 1 болғандықтан, берілген функцияны $f(x)=\dfrac{(x-1)(x+4)}{(x-1)(x+2)}$ түрінде жазамыз. Осыдан функцияның $x=1$ және $x=-2$ нүктелерінде анықталмағандығын (функцияның үзіліс нүктелері), $x=-4$ нүктесі функцияның нөлі болатынын көреміз. Сонда -4, -2 және 1 нүктелері сан өсін төрт бөлікке бөледі: $(-\infty;-4)$, $(-4;-2)$, $(-2;1)$ және $(1;+\infty)$. Осы аралықтардың әрқайсысында берілген функцияның таңбасы тұрақты. $-5\in(-\infty;-4)$ үшін $f(-5)=\dfrac{1}{3}>0$. Бұл аралықта функцияның таңбасы оң. $-3\in(-4;-2)$ үшін $f(-3)=-1<0$. Бұл аралықта функцияның таңбасы теріс. $0\in(-2;1)$ үшін $f(0)=2>0$. Бұл аралықта функцияның таңбасы оң. Осы сияқты, $(1;+\infty)$ аралығында да функцияның таңбасы оң, өйткені $f(2)=3>0$. Сонымен, берілген функцияның таңба тұрақтылық аралығы төмендегі кестеде көрсетілген:

x	$(-\infty;-4)$	$(-4;-2)$	$(-2;1)$	$(1;+\infty)$
$F(x)$	+	–	+	+

1.2.3. Функцияның өсу және кему аралықтары. Функцияның экстремумдары

Анықтама. *Егер $y=f(x)$ функциясы $(a;\ b)$ аралығының $x_1<x_2$ болатындай әрбір x_1 және x_2 нүктелері үшін $a<x_1<x_2<b$ шарты орындалғанда*

$$f(x_1)<f(x_2) \tag{1}$$

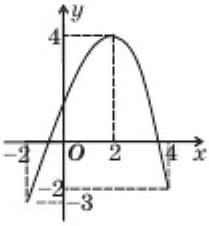
теңсіздігін қанағаттандырса, бұл функция $(a;\ b)$ аралығында ***өспелі****, ал*

$$f(x_1)>f(x_2) \tag{2}$$

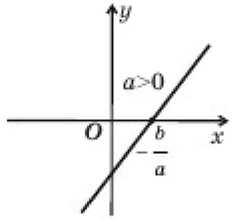
теңсіздігі орындалса, осы аралықта ***кемімелі*** *деп аталады.*

Басқаша айтқанда, $(a;\ b)$ аралығынан алынған әрбір екі аргументтің үлкен мәніне функцияның үлкен мәні сәйкес келсе, $y=f(x)$ функциясын ***өспелі***, аргументтің үлкен мәніне функцияның кіші мәні сәйкес келсе, функцияны ***кемімелі*** деп атаймыз.

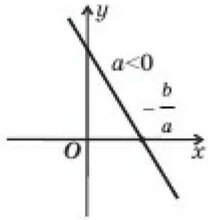
Мысалы, графигі 1.20-суретте бейнеленген функция $(-2;2)$ аралығында өспелі, ал $(2;4)$ аралығында кемімелі.



1.20-сурет



1.21-сурет

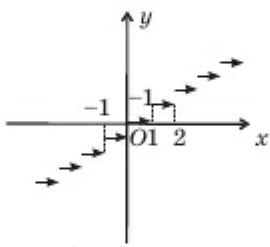


1.22-сурет

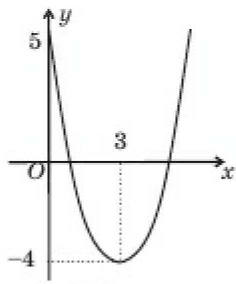
Енді $y=ax+b$ $(a \neq 0)$ сызықтық функциясының өсу және кему аралықтарын анықтайық.

Айталық, $x_1<x_2$ болса, функцияның сәйкес мәндері $y_1=ax_1+b$ және $y_2=ax_2+b$. Осыдан $y_2-y_1=a(x_2-x_1)$ теңдігін аламыз. $x_2-x_1>0$ болғандықтан, y_2-y_1 айырымының таңбасы a коэффициентінің таңбасына байланысты. Сонымен, $a>0$ болса, $y_2-y_1>0$ немесе $y_2>y_1$ — функция өспелі. $a<0$ болғанда $y_2>y_1$ теңсіздігі орындалады, функция кемімелі (1.21 және 1.22-суреттер).

Анықтамадағы (1) теңсіздіктің орнына $f(x)$ функциясы үшін $f(x_1)\leqslant f(x_2)$ теңсіздігі орындалса, функцияны ***кемімейтін*** функция, ал (2) теңсіздіктің орнына $f(x_1)\geqslant f(x_2)$ теңсіздігі орындалса, ***өспейтін*** функция деп атайды. Мысалы, $f(x)=[x]$ (x-тің бүтін бөлігі) функциясы — кемімейтін функция. Өйткені $x_1<x_2$ шартын қанағаттандыратын кез келген x_1 және x_2 нүктелері үшін $[x_1]\leqslant[x_2]$ теңсіздігі орындалады. Оның графигі 1.23-суретте көрсетілген.



1.23-сурет



1.24-сурет

1-мысал. $y=x^2-6x+5$ функциясының өсу және кему аралықтарын анықтайық. Ол үшін екімүшенің квадратын бөліп, функцияны $y=(x-3)^2-4$ түрінде жазайық. Функцияның графигі — төбесі $(3; -4)$ нүктесінде орналасқан және тармақтары жоғары бағытталған парабола (1.24-сурет). Осыдан бұл квадраттық функцияның $(-\infty; 3)$ аралығында кемитінін, $(3; +\infty)$ аралығында өсетінін көреміз.

Енді функцияның экстремумдары ұғымын қарастырайық. Ол үшін $y=f(x)$ функциясын $[a;\ b]$ кесіндісінде анықталған және графигі үздіксіз сызық болады деп есептейміз.

Анықтама. *Егер функция x_0 нүктесінде анықталса және осы нүкте арқылы солдан оңға қарай өткенде x_0 нүктесі $f(x)$ функциясының өспелі және кемімелі аралықтарының шегарасы болса, онда x_0 нүктесін функцияның* ***максимум нүктесі*** *деп атайды. Ал, егер x_0 нүктесі $f(x)$ функциясының кемімелі және өспелі аралықтарының шегарасы болса, онда x_0-ді $f(x)$ функциясының* ***минимум нүктесі*** *деп атайды. Функцияның максимум және минимум нүктелерін бір атпен оның* ***экстремум нүктелері*** *деп атайды.*

x_0 нүктесі $f(x)$ функциясының максимум нүктесі болса, онда $f(x_0)$ мәнін функцияның ***максимумы*** деп атайды және оны былай белгілейді: $\max f(x)$. Ал x_0 минимум нүктесі болса, $f(x_0)$ мәнін функцияның ***минимумы*** деп атайды және оны $\min f(x)$ арқылы белгілейді. Мысалы, графигі 1.20-суретте бейнеленген функция үшін $x=2$ нүктесі максимум нүктесі, өйткені $(-2;2)$ аралығында функция өспелі, $(2;4)$ аралығында кемімелі. Сонымен $\max f(x) = f(2)=4$. Ал $y=x^2-6x+5$ квадраттық функциясы үшін $x=3$ нүктесі минимум нүктесі: $\min(y)=y(3)=-4$ (1.24-сурет).

Осы сияқты, функцияның берілген аралықтағы ең үлкен және ең кіші мәндерін анықтауға болады. Ол үшін функцияның $[a;\ b]$ кесіндісінде барлық минимум және максимум нүктелерін анықтаймыз. Айталық, $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ функцияның $[a;\ b]$ кесіндісінде өсу ретімен орналасқан экстремум нүктелері болсын. Онда осы нүктелерге a және b нүктелерін қосып, $f(a),\ f(x_1),\ f(x_2),\ \ldots,\ f(x_n),\ f(b)$ мәндерін есептеп, олардың ішінен ең үлкені мен ең кішісін аламыз. Мысалы, графигі 1.20-суретте бейнеленген функцияның $[-2;4]$ кесіндісіндегі ең үлкен және ең кіші мәндері, сәйкесінше $f(2)=4$ және $f(-2)=-3$.

$y=x^2-6x+5$ квадраттық функциясының $[0;5]$ кесіндісіндегі ең үлкен және ең кіші мәндерін табайық (1.24-сурет). $x=3$ функцияның минимум нүктесі болғандықтан, функцияның 0; 3 және 5 нүктелеріндегі мәндерін анықтаймыз: $f(0)=5$; $f(3)=-4$; $f(5)=0$. $f(0)=5$ — функцияның ең үлкен мәні, $f(3)=-4$ — функцияның ең кіші мәні.

1.2.4. Жұп және тақ функциялар

Бұл тақырыпта қарастырылатын $y=f(x)$ функциясының анықталу облысы координаталар бас нүктесіне қатысты симметриялы деп есептейміз.

1-анықтама. *Егер $y=f(x)$ функциясы үшін*

$$f(-x)=f(x) \qquad (1)$$

*теңдігі орындалса, онда бұл функцияны **жұп функция** деп атайды.*

Мысалы, $y=x^2$, $y=|x|$ — жұп функциялар, өйткені $(-x^2)=x^2$ және $|-x|=|x|$ теңдіктері орындалады.

Айталық $M(a;\,b)$ нүктесі $y=f(x)$ жұп функциясының графигінде жатса, $b=f(a)$ теңдігі орындалады. (1) теңдік бойынша $f(-a)=f(a)=b$. Олай болса, $N(-a;b)$ нүктесі де $y=f(x)$ функциясының графигінде жатады. Осыдан *жұп функциялардың графиктері Oy осіне қатысты симметриялы* болатынын көреміз (1.25-сурет).

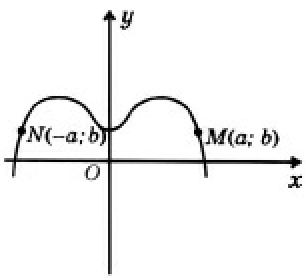
2-анықтама. *Егер $y=f(x)$ функциясы үшін*

$$f(-x)=-f(x) \qquad (2)$$

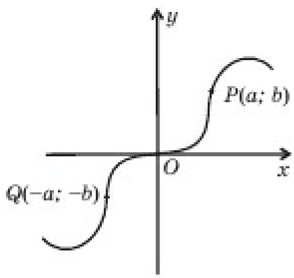
*теңдігі орындалса, функция **тақ функция** деп аталады.*

Мысалы, $y=x$, $y=x^3$—тақ функциялар, себебі $(-x)^1=-x$, $(-x)^3=-x^3$.

Егер $P(a;b)$ нүктесі $y=f(x)$ тақ функциясының графигінде жатса, $b=f(a)$ теңдігі орындалады. Анықтама бойынша $f(-a)=-f(a)=-b$. Осыдан функцияның графигінде $Q(-a;\,-b)$ нүктесі де жататындығы шығады, яғни *тақ функцияның графигі координаталар бас нүктесіне қатысты симметриялы* (1.26-сурет).



1.25-сурет



1.26-сурет

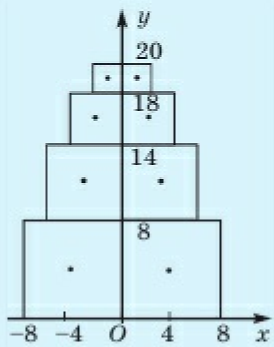
Осы айтылғандардан кез келген функцияны тақ немесе жұп болады деп ойлауға болмайды. Мысалы, $f(x)=x+x^2$ тақ та, жұп та болмайды. Өйткені $f(-x)=-x+x^2$, яғни $f(-x)=f(x)$ және $f(-x)=-f(x)$ теңдіктерінің екеуі де орындалмайды. Сонымен қатар функция тақ немесе жұп болуы үшін оның *анықталу облысы координаталар бас нүктесіне қатысты симметриялы* болуы керек. Себебі функцияның анықталу облысына a нүктесімен бірге $-a$ нүктесі де жатуы керек. Сонда ғана функцияның тақ не жұптығын (1), (2) теңдіктері арқылы тексере аламыз.

Тақ та, жұп та болмайтын функцияларды ***жалпы жағдайдағы функциялар*** (ЖЖФ) деп атайды. Сонда $f(x)=x^2+x$ — жалпы жағдайдағы функция.

1. Функцияның нөлі деп нені айтады?
2. Қандай нүктелерді функцияның үзіліс нүктелері деп атайды? Үздіксіз функция дегенді қалай түсінесіңдер?
3. Функцияның таңба тұрақтылық аралықтарын қалай анықтайды?
4. Өспелі және кемімелі функцияларға анықтама беріңдер.
5. Қандай нүктелерді функцияның максимум (минимум) нүктелері деп атайды?
6. Функцияның аралықтағы ең үлкен және ең кіші мәндерін қалай анықтайды?
7. Қандай функцияларды жұп (тақ) функция деп атайды?
8. Жалпы жағдайдағы функция (ЖЖФ) қандай функцияны атайды?

ШЫҒАРМАШЫЛЫҚ ЖҰМЫС

Қабырғалары 8, 6, 4 және 2-ге тең шаршы жұптары 1.27-суретте көрсетілгендей орналасқан. Шаршылардың:
1) центрлерінің координаталарын табыңдар;
2) центрлері парабола бойында жататынын көрсетіп, оның теңдеуін жазыңдар;
3) егер көрсетілген тәртіппен шаршылар жұбын Ox өсінен төмен жалғастырып салсақ, келесі шаршылар жұбы центрлерінің координаталары қандай болады?



1.27-сурет

ЕСЕПТЕР

А

1.29. Функцияның нөлдерін анықтаңдар:

1) $f(x)=2x-3$;
2) $\varphi(x)=3-|x|$;
3) $h(x)=2x^2+5x-7$;
4) $v(x)=4-x-3x^2$;
5) $\psi(x)=\sqrt{x^2+x}$;
6) $F(x)=\sqrt{x-x^2+2}$;
7) $g(x)=\dfrac{x+1}{2x^2+5x+3}$;
8) $f(x)=\dfrac{x^2+5x-6}{x-1}$;
9) $h(x)=\dfrac{x^2+5x-6}{2x^2+5x+3}$.

1.30. Функцияның үздіксіз болатынын дәлелдеңдер немесе үзіліс нүктелерін көрсетіңдер:

1) $y=2x^2+x+1$; 2) $y=3-x$; 3) $y=\dfrac{21x-9}{3x-1}$;

4) $y=\dfrac{4x+31}{x+7}$; 5) $y=\dfrac{x^3+8}{x+2}$; 6) $y=\dfrac{x^3-27}{x-3}$;

7) $y=\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+3x+2}$; 8) $y=\dfrac{(x^3+8)(x-4)}{x^2-2x-8}$.

1.31. Функцияның өсу және кему аралықтарын анықтаңдар:

1) $f(x)=2x-3$; 2) $g(x)=-3x+2$; 3) $f(x)=|x|$;

4) $u(x)=|x-2|$; 5) $h(x)=\dfrac{x^2}{2}$; 6) $r(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+2$.

1.32. Функцияның өсу және кему аралықтарын анықтаңдар:

1) $f(x)=(x-2)^2$; 2) $g(x)=-(x-3)^2$; 3) $u(x)=(x-1)^2-3$;

4) $h(x)=3-(x-3)^2$; 5) $r(x)=x^2-4x+5$; 6) $h(x)=-2x^2+6x-7$.

1.33. Өздеріңе белгілі қандай функцияның бүкіл сан өсінде 1) экстремалды нүктелері болмайды; 2) тек бір ғана экстремумы болады?

1.34. Функцияның экстремумдарын анықтаңдар:

1) $y=(x-1)^2+5$; 2) $y=12x^2-x-1$;

3) $y=3-(x+2)^2$; 4) $y=(x-1)(x-3)$.

1.35. $y=(x-3)(x-5)$ функциясының 1) $[2;3]$; 2) $[3;4]$; 3)$[4;5]$; 4) $[2;5]$; аралықтарындағы ең үлкен және ең кіші мәндерін анықтаңдар.

1.36. Функцияның тақ немесе жұптығын анықтаңдар (*ауызша*):

1) $y=x^{10}$; 2) $y=x^6$; 3) $y=x^4-2x^2+3$; 4) $y=x^3-5x$.

1.37. Функцияның таңба тұрақтылық аралығын табыңдар:

1) $y=x-2$; 2) $y=2-3x$; 3) $y=x^2-3x+2$;

4) $y=-3x^2+5x-2$; 5) $y=(3x-10)(x+6)$; 6) $y=\dfrac{6-x}{x}$.

1.38. Өспелі және кемімелі функциялардың анықтамаларына сүйеніп, 1) $y=\dfrac{5}{2x}$ функциясы $(-\infty;0)$ аралығында кемімелі;

2) $y = -\dfrac{4}{x}$ функциясы $(0;+\infty)$ аралығында өспелі болатынын дәлелдеңдер.

B

1.39. Функцияның өсу және кему аралықтарын анықтаңдар:

1) $g(x) = \dfrac{1}{x}$; 2) $f(x) = -\dfrac{1}{x}$; 3) $f(x) = \sqrt{x}$;

4) $h(x) = -\sqrt{x}$; 5) $g(x) = \sqrt{|x|}$; 6) $h(x) = \sqrt[3]{x}$.

1.40. 1) $y = \dfrac{5}{2x+1}$ функциясы $(-\infty;\ 0,5)$ аралығында кемімелі;

2) $y = \dfrac{4}{2-x}$ функциясы $(2;+\infty)$ аралығында өспелі;

3) $y = 3\sqrt{4x+1} - 1$ функциясы $[-0,25;+\infty)$ аралығында өспелі;

4) $y=3x^2-4x+7$ функциясы $\left(-\infty;\ \dfrac{2}{3}\right]$ аралығында кемімелі болатынын дәлелдеңдер.

1.41. Функцияның анықталу облысын, мәндер облысын, нөлдерін (бар болса), үзіліс нүктелерін және таңба тұрақтылық аралықтарын табыңдар:

1) $y=x^2+2$; 2) $y=3-4x^2$; 3) $y=3x^2-6x+1$;

4) $y = \dfrac{|x|}{x}$; 5) $y = \dfrac{4+2x}{5+x}$; 6) $y=\dfrac{6}{(x-1)(x+8)}$.

1.42. $f(x)$ және $\varphi(x)$ функциялары тең бе:

1) $f(x) = \sqrt{x}\sqrt{x-1}$; $\varphi(x) = \sqrt{x(x-1)}$;

2) $f(x) = |x|\sqrt{x+1}$; $\varphi(x) = \sqrt{x^3 + x^2}$?

1.43. 1) $y = \dfrac{3}{x-1}$; 2) $y = \dfrac{x-1}{x+1}$; 3) $y = 2 + \dfrac{1}{x-2}$;

4) $y = 3 + \dfrac{x+1}{x+3}$ функцияларының өспелі не кемімелі болатынын анықтаңдар.

1.44. Функцияның абсциссалар өсімен қиылысу нүктелерін табыңдар:

1) $y=3x-x^2$; 2) $y=3x^2-6x+1$; 3) $y = \sqrt{x-2} - 3$;

4) $y = 5-\sqrt{2x+1}$; 5) $y=|x-4|-2$; 6) $y=3-|2x+3|$;

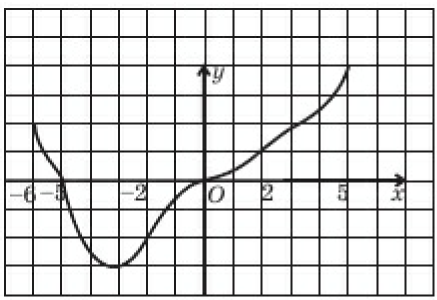
7) $y=\begin{cases}(x-1)^3, \text{ егер } x\geqslant 0,\\ \dfrac{1}{x-1}, \text{ егер } x<0;\end{cases}$ 8) $y=\begin{cases}-x^2-2x, \text{ егер } x<1,\\ -\dfrac{1}{x}, \text{ егер } x\geqslant 1.\end{cases}$

1.45. $f(x)=\begin{cases}-1, \text{ егер } -3\leqslant x\leqslant 0,\\ x, \text{ егер } 0<x<1,\\ 1, \text{ егер } 1\leqslant x\leqslant 5\end{cases}$

функциясы үшін $f(-2)$; $f(0)$; $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$; $f\left(\dfrac{1}{3}\right)$; $f(1)$; $f(4)$ мәндерін анықтаңдар.

1.46. $f(x)=\begin{cases}x^2-x+1, \text{ егер } |x|\leqslant 2,\\ 1, \text{ егер } x>2\end{cases}$ функциясы үшін $f(-2)$; $f(0)$; $f(2)$; $f(3)$; $f(5)$ мәндерін есептеңдер.

1.47. 1.28-суретте $y = \varphi(x)$ функциясы графиктік түрде берілген. 1) $\varphi(-5)$, $\varphi(-2)$, $\varphi(3)$, $\varphi(5)$ мәндерін; 2) $\varphi(x)=2$, $\varphi(x)=0$, $\varphi(x)=-1$, теңдіктерін қанағаттандыратын x-тің мәндерін анықтаңдар.



1.28-сурет

1.48. Функцияның анықталу облысын табыңдар:

1) $f(x)=x-1$; 2) $g(x)=\sqrt{x+3}$; 3) $h(x)=\sqrt{x^2-1}$;

4) $f(x)=\sqrt{16-x^2}$; 5) $g(x)=\sqrt{5-10x}$; 6) $\varphi(x)=\sqrt{10x-5}$;

7) $F(x)=\dfrac{x-1}{2x+3}$; 8) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+3}$; 9) $g(x)=\dfrac{3x+1}{x^2-3x+2}$.

1.49. Функцияның тақ немесе жұптығын зерттеңдер:

1) $f(x)=9$; 2) $g(x)=0$; 3) $h(x)=(2-3x)^3+(2+3x)^3$;

4) $f(x)=(5x-2)^4+(5x+2)^4$; 5) $f(x)=(x-6)^9(x+3)^5+(x+6)^9(x-3)^5$.

1.50. Функцияның тақ немесе жұптығын анықтаңдар:

1) $y=(x+3)|x-1|+(x-3)|x+1|$;

2) $y=(x+5)|x-3|-(x-5)|x+3|$;

3) $y=\dfrac{|x-7|}{x+1}+\dfrac{|x+7|}{x-1}$; 4) $y=\dfrac{|x-4|}{x+2}+\dfrac{|x+4|}{x-2}$;

5) $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2}{x+1}-\dfrac{x^3+2x^2}{x-1}$; 6) $g(x)=\dfrac{(x-1)^5}{(3x+4)^3}-\dfrac{(x+1)^5}{(3x-4)^3}$.

1.51. $\psi(x)=3x+5x^3-2x^5$ функциясы үшін $\psi(-x)=-\psi(x)$ теңдігі орындалатынын дәлелдеңдер.

1.52. $\psi(x)=x^4-2x^2-3$ функциясы үшін $\psi(-x)=\psi(x)$ теңдігі орындалатынын дәлелдеңдер.

C

1.53. Егер $f(x)$ және $g(x)$ функциялары $(a;\,b)$ аралығында өспелі болса, онда осы аралықта: 1) $f(x)+g(x)$ функциясының өспелі; 2) $f^2(x)$ функциясының өспелі; 3) $-f(x)$ функциясының кемімелі; 4) $\dfrac{1}{f(x)}$ функциясының кемімелі болатынын дәлелдеңдер.

1.54. Функцияның ең үлкен және ең кіші мәндерін анықтаңдар:

1) $f(x)=\sqrt{4x^2-12x+9}-2$; 2) $g(x)=3+\sqrt{x^2-3x+2}$;

3) $h(x)=-\dfrac{2}{x^2+1}$; 4) $u(x)=\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+4x+5}$.

1.55. $f(x)$ функциясының графигі сан өсінің барлық нүктелерінде үздіксіз және өспелі (кемімелі) болса, $f(x)=0$ теңдеуінің неше түбірі болуы мүмкін? Түбірінің болмауы мүмкін бе?

1.56*. $f(x)$ функциясы тақ және 1) $f(x)=x^2$, $x\geqslant 0$; 2) $f(x)=x^2$, $x\leqslant 0$; 3) $f(x)=x^2-2x$, $x\geqslant 0$; 4) $f(x)=\sqrt{x}$, $x>0$ болса, $f(x)$ функциясын бір формуламен анықтап, графигін салыңдар.

1.57*. Егер $y=f(x)$ функциясы жұп және 1) $f(x)=\sqrt{x}$, $x\geqslant 0$; 2) $f(x)=x^2-3x$, $x\geqslant 0$; 3) $f(x)=x^2-2x$, $x\geqslant 0$; 4) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$, $x\leqslant 0$ болса, $f(x)$ функциясын бір формуламен анықтап, оның графигін салыңдар.

1.58*–1.61*-есептердегі функцияларды зерттеп, олардың графиктерін салыңдар.

1.58*. $y = \begin{cases} 3, \text{ егер } x \leqslant -4, \\ \left|x^2 - 4|x| + 3\right|, \text{ егер } -4 \leqslant x \leqslant 4, \\ 3 - (x-4)^2, \text{ егер } x > 4. \end{cases}$

1.59*. $y = \begin{cases} 8 - (x+6)^2, \text{ егер } x < -6, \\ \left|x^2 - 6|x| + 8\right|, \text{ егер } -6 \leqslant x \leqslant 5, \\ 3, \text{ егер } x \geqslant 5. \end{cases}$

1.60*. $y = \begin{cases} \left|\left||x| - 1\right| - 1\right|, \text{ егер } |x| < 2, \\ \sqrt{|x| - 2}, \text{ егер } x \geqslant 2. \end{cases}$

1.61*. $y = \begin{cases} 2 - \sqrt{4 - |x|}, \text{ егер } |x| \leqslant 4, \\ \dfrac{8}{x}, \text{ егер } |x| > 4. \end{cases}$

1.3. Функцияны зерттеудің қарапайым жоспары

Сендер 9-сыныпта функцияны зерттеудің қарапайым жоспарымен таныстыңдар. Енді соны қысқаша қайталап өтейік:

1. Функцияның анықталу облысын анықтап, функцияның үзіліс нүктелері бар болса, оларды табу;

2. Функцияның тақ-жұптығын, периодтылығын анықтау;

3. Функция графигінің координаталар өстерімен қиылысу нүктелерін анықтау;

4. Функцияның таңба тұрақтылық аралықтарын анықтау;

5. Функцияның өсу және кему аралықтарын анықтау;

6. Функцияның экстремум нүктелерін анықтап, осы нүктелердегі функцияның мәндерін табу;

7. Қажет болса, функция графигінде жататын тағы бірнеше нүктенің координаталарын анықтап, функцияның графигін салу керек.

Енді осы жоспардың мағынасын мысалмен түсіндіріп көрейік.

Мысал. $f(x)=x^4-2x^2$ функциясын зерттеп, графигін салу керек.

Бұл функцияны зерттеп, оның графигін салуды жоғарыдағы келтірілген жоспар бойынша жүргіземіз.

1. Функцияның анықталу облысы $D(f)=(-\infty; +\infty)$, өйткені x^4-2x^2 өрнегінің кез келген $x\in(-\infty; +\infty)$ үшін мағынасы бар. Олай болса, функцияның үзіліс нүктелері жоқ.

2. а) Тақ және жұп функциялардың анықтамасын еске түсірейік.

МҰНЫ БІЛЕСІҢДЕР

Анықтама. *Егер $f(x)$ функциясының анықталу облысы координаталар бас нүктесіне қатысты симметриялы болса және әрбір $x \in D(f)$ үшін*

$$f(-x) = -f(x) \qquad (1)$$

*теңдігі орындалса, онда $f(x)$ функциясы **тақ функция** деп аталады, ал*

$$f(-x) = f(x) \qquad (2)$$

*теңдігі орындалса, $f(x)$ функциясы **жұп функция** деп аталады.*

*Егер бұл екі теңдіктің екеуі де орындалмаса, онда $f(x)$ функциясы **жалпы жағдайдағы функция** (жжф) деп аталады.*

Тақ функцияның графигі координаталар бас нүктесіне қатысты симметриялы, жұп функциялардың графигі Oy өсіне қатысты симметриялы орналасады. Біздің мысалда $D(f)=(-\infty; +\infty)$ және $f(-x)=(-x)^4-2(-x)^2=x^4-2x^2=f(x)$ болғандықтан, берілген функция жұп. Сондықтан оның графигі Oy өсіне қатысты симметриялы. Онда функцияны $x \geqslant 0$ болғанда зерттеп, оның графигінің I және IV ширектердегі бөлігін салса, жеткілікті.

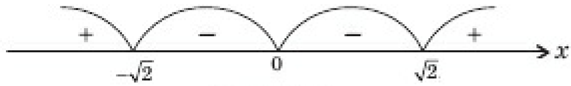
*ә) Егер кез келген $x \in D(f)$ үшін $T \neq 0$ саны табылып, $f(x+T)=f(x)$ теңдігі орындалса, $f(x)$ функциясын периоды T-ға тең **периодты функция** деп атайды.*

Біздің мысалда берілген функция периодсыз, өйткені бұл функция үшін көрсетілген теңдік орындалатындай $T \neq 0$ санын табу мүмкін емес.

3. Функция графигінің Ox абсциссалар өсімен қиылысу нүктелерін анықтау үшін $f(x)=0$ теңдеуінің түбірлерін табу қажет: $x^4-2x^2=0$. Бұл теңдеуді $x^2(x^2-2)=0$ түрінде жазсақ, оның түбірлері $x_1=0$, $x_2=-\sqrt{2}$, $x_3=\sqrt{2}$, болады. Бұл табылған мәндер *функцияның нөлдері* деп аталады. Осыдан функцияның графигі Ox өсімен $(A_1\, -\sqrt{2};\, 0)$, $O(0;0)$ және $A_2(\sqrt{2};\, 0)$ нүктелерінде қиылысады. Функция Oy өсімен $(0;\, f(0))$, яғни $O(0;0)$ нүктесінде қиылысады.

4. Функцияның таңба тұрақтылық аралығын анықтау үшін оның нөлдерін өсу ретімен орналастырамыз (функцияның үзіліс нүктелері бар болса, бұл тізімге оларды да қосамыз). Бұл нүктелер сан өсін бірнеше бөлікке бөледі. Осы бөліктердің әрқайсысында функция таңбасын анықтау қажет.

Қарастырылып отырған мысалда $x=-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}$ нүктелері — функцияның нөлдері. Бұл нүктелер сан өсін төрт бөлікке бөледі: $\left(-\infty; -\sqrt{2}\right)\left(-\sqrt{2};0\right);\left(0;\sqrt{2}\right);\left(\sqrt{2};+\infty\right)$. Осы бөліктердің әрқайсысындағы функция таңбасын анықтау үшін оны көбейткіштерге жіктеген тиімді: $f(x) = x^4 - 2x^2 = x^2\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)$. Функцияның таңбасын интервалдар әдісімен анықтаймыз (1.29-сурет).



1.29-сурет

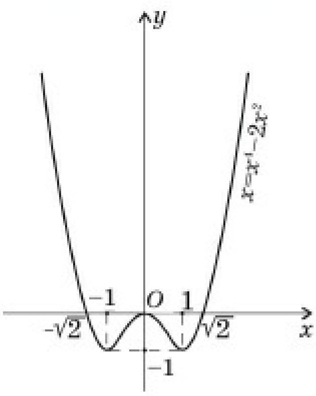
Функция $\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2};+\infty\right)$ жиынында оң мәндер, $\left(-\sqrt{2};0\right)\cup$ $\cup\left(0;\sqrt{2}\right)$ жиынында теріс мәндер қабылдайды.

5. Функцияның өсу және кему аралықтарын анықтау үшін оны түрлендіріп алу қажет:

$$f(x)=x^4-2x^2=(x^2)^2-2x^2+1-1=(x^2-1)^2-1.$$

Осыдан $x^2-1=0$ немесе $x=\pm1$ болғанда функцияның ең кіші мән қабылдайтынын көреміз. Ал $|x|$ шамасы үлкен мәндер қабылдаған сайын $f(x)=x^4-2x^2$ функциясы шексіз өседі. Олай болса, $(-\infty;\ -1)$ аралығында функция кемиді, $(1;\ +\infty)$ аралығында өседі, $[-1;\ 1]$ кесіндісіндегі $x=0$ нүктесінде функция ең үлкен мән қабылдайды. Сондықтан ол $(-1;\ 0)$ аралығында өседі, $(0;\ 1)$ аралығында кемиді.

6. Ox өсінің бойымен солдан оңға қарай, үзіліс нүктесі болмайтын нүктесі арқылы өткенде функцияның өсу аралығы оның кему аралығына немесе, керісінше, кему аралығы өсу аралығына ауысса, x_0 нүктесі экстремум нүктесі болады. Атап айтқанда, өсу аралығы кему аралығына ауысса, x_0 нүктесі — максимум нүктесі. Егер кему аралығы өсу аралығына ауысса, x_0 нүктесі — минимум нүктесі. Максимум нүктелері x_{max}, минимум нүктелері x_{min} арқылы белгіленеді. Функцияның мәндері сәйкесінше y_{max} және y_{min} арқылы белгіленеді.



1.30-сурет

Қарастырылған мысалға қайтып оралайық:

$f(x)=x^4-2x^2=(x^2-1)^2-1$ функциясы $x=-1$ және $x=1$ болғанда ең кіші мән қабылдайды: $f(\pm1)=-1$. Функцияның минимум нүктелері: $x=-1$ және $x=1$. $[-1;\ 1]$ кесіндісіндегі $x=0$ нүктесінде функция ең үлкен мән қабылдайды: $f(0)=0$. Демек, $x=0$ — максимум нүктесі.

7. Функцияның графигін (1.30-сурет) салу үшін жоғарыда анықталған шамаларды кестеге түсіреміз.

x	$(-\infty; -\sqrt{2})$	$-\sqrt{2}$	$(-\sqrt{2}; -1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1; \sqrt{2})$	$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2}; +\infty)$
$f(x)$	$\searrow$ +	0	$\searrow$ −	−1 min	$\nearrow$ −	0 max	− $\searrow$	−1 min	$\nearrow$ −	0	$\nearrow$ +

1. Функцияны зерттеуді қандай жоспар бойынша жүргізеді? Көрсетілген пункттердің әрқайсысының мағынасын түсіндіріңдер.
2. Қандай функция тақ, жұп, ал қайсыларын жалпы жағдайдағы функция деп аталады?
3. Қандай функция периодты деп аталады?
4. Қандай нүктелер максимум және минимум (экстремум) нүктелері деп аталады?
5. Үзіліс нүктелері жоқ функцияның экстремум нүктелерін басқаша қалай анықтауға болады?
6. Алдыңғы пункттегі «үзіліс нүктелері жоқ функция» шарты қаншалықты маңызды? Мысал келтіріңдер.

ЕСЕПТЕР

А

1.62–1.69-есептерде функцияны зерттеп, оның графигін салыңдар.

1.62. 1) $f(x)=2x-5$; 3) $f(x)=3x+4$;

2) $f(x)=3-0,5x$; 4) $f(x)=\frac{x}{2}+2$.

1.63. 1) $f(x)=x^2-4x+3$; 3) $f(x)=9-x^2$;

2) $f(x)=2x^2-4x-6$; 4) $f(x)=2-3x^2+x$.

1.64. 1) $f(x)=\frac{2}{x-3}$; 2) $f(x)=1-\frac{1}{x-2}$.

В

1.65. 1) $f(x)=\frac{2x-3}{x-1}$; 2) $f(x)=\frac{x-2}{x+1}$; 3) $f(x)=x^3-8$.

1.66. 1) $y=x^4-10x^2+9$; 3) $y=x^3-3x+2$;

2) $y=x^3-2x$; 4) $y=x^4+2x^2+1$.

1.67. 1) $y = \dfrac{3x - x^2 - 2}{3x^2 - x - 2}$; 2) $y = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 8x + 15}$.

C

1.68. 1) $y=|x-1|$; 3) $y=|x+3|-|2x-1|$;

2) $y=|x^2-4x-12|$; 4) $y=2x^2-|x|+1$.

1.69. 1) $y = \dfrac{x^2 - x}{x^3 + x^2 - 2x}$; 3) $y=(x+1)(|x|-2)$;

2) $y=x^2-|x-2|-4$; 4) $y = \dfrac{|x-2|+1}{x+3}$.

1.70. $y=x^2$ параболасын а) $y=x^2-8x+7$; ә) $y=x^2+4x+3$ функциясының графигімен беттестіру үшін қалай жылжыту керек?

Қайталауға арналған жаттығулар

1.71. Тізбектің жалпы мүшесінің формуласын жазыңдар:

1) $1, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{16}, \ldots$; 2) 3, 6, 12, 24, 48, … .

1.72. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $(1 + \mathrm{tg}^2\beta)(1 - \cos^2\beta) = \mathrm{tg}^2\beta$; 2) $\dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha \cdot \mathrm{tg}\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha \cdot \mathrm{ctg}\alpha} = 2\mathrm{tg}\alpha$.

1.73. Теңдеуді шешіңдер:

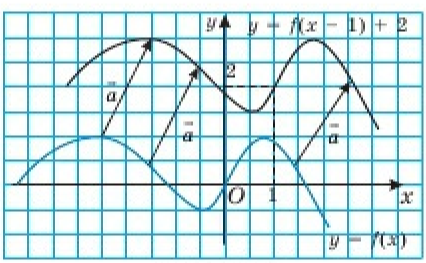
1) $x^2-3|x|=0$; 2) $2p^2-3|p|-7p=0$.

1.4. Функцияның графигін қарапайым түрлендіру

1.3-бабында функцияның графигі қарапайым зерттеулер көмегімен салынды. Кейбір жағдайларда функцияның графигін түрлендірулер арқылы салуға болады.

1.4.1. Функцияның графигін параллель көшіру

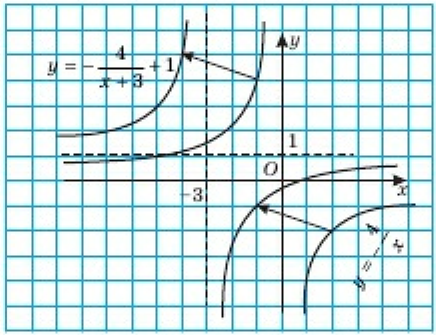
Бұл түрлендіруді 8-сыныптың «Алгебра» курсында толық қарастырдық. Мысалы, $y = f(x)$ функциясының графигі белгілі болса, $y = f(x - m) + n$ функциясының графигін салу үшін $y = f(x)$-тің графигін $\vec{a} = (m; n)$ векторына параллель көшірсе жеткілікті 1.31-суретте $y = f(x)$ функциясының графигі көмегімен $y = f(x - 1) + 2$ функциясының графигін тұрғызу жобасы көрсетілген.



1.31-сурет

Енді бөлшек-сызықтық функцияның графигін кері пропорционалдық функцияның графигі көмегімен салуды қарастырамыз.

1-мысал. $y = \dfrac{x-1}{x+3}$ функциясының графигін салу керек.

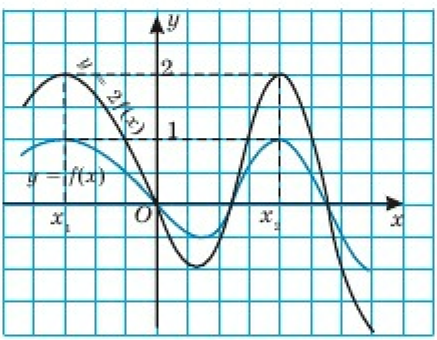


1.32-сурет

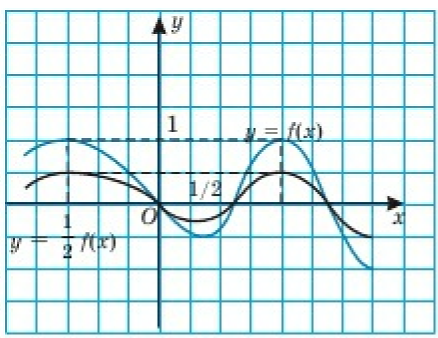
$\dfrac{x-1}{x+3} = \dfrac{x+3-4}{x+3} = 1 - \dfrac{4}{x+3}$ болғандықтан, берілген бөлшек сызықтық функцияны $y = -\dfrac{4}{x+3} + 1$ түрінде жазамыз. Бұл функцияның графигін $y = -\dfrac{4}{x}$ функциясының графигін Oy өсі бойымен жоғары 1 бірлікке және Ox өсі бойымен солға қарай 3 бірлікке жылжытып саламыз (1.32-сурет).

1.4.2. $y = a \cdot f(x)$ функциясының графигін салу

x-тің әрбір мәніндегі $y = f(x)$ және $y=af(x)$ функцияларының сәйкес мәндерін салыстырайық. $x=x_0$ нүктесінде $y=f(x)$ функциясы $y_0=f(x_0)$-ге, $y=a \cdot f(x)$ функциясы $y_1=f(x_0)=a \cdot y_0$-ге тең мән қабылдайды. $y=a \cdot f(x)$ функциясының мәндері $y = f(x)$ функциясының сәйкес нүктедегі мәндерімен салыстырғанда a есе өзгереді. Мысалы, 1.33-суретте $y = f(x)$ және $y = 2\,f(x)$ функцияларының графиктері бейнеленген.



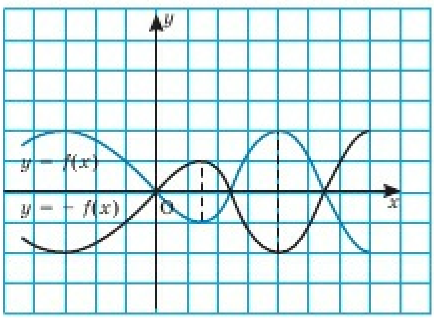
1.33-сурет



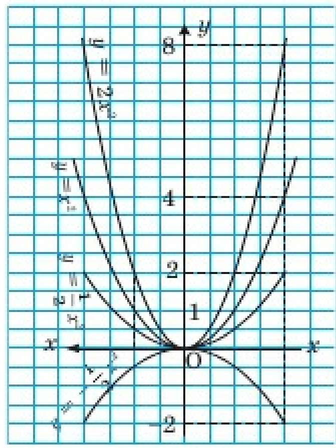
1.34-сурет

$y=2\cdot f(x)$ функциясының графигі $y=f(x)$ функциясы графигімен салыстырғанда Oy өсі бойымен 2 есе созылған. 1.34-суретте $y = \frac{1}{2}f(x)$ функциясының графигі $y=f(x)$ функциясының графигімен салыстырғанда Oy өсі бойымен Ox өсіне қарай 2 есе сығылғанын көреміз. Егер $a<0$ болса, $y=|a|\cdot f(x)$ функциясының графигін Ox өсіне қатысты симметриялы өзгертіп, $y=a\cdot f(x)$ функциясының графигін саламыз. Мысалы, 1.35-суретте $y=f(x)$ және $y=-f(x)$ функцияларының графиктері бейнеленген.

1.36-суретте $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$ және $y = -\frac{1}{2}x^2$ функцияларының графиктері бейнеленген.



1.35-сурет



1.36-сурет

1) Қандай функциялардың графиктерін параллель көшіру арқылы салуға болады? Мысалы келтіріңдер.

2) a-ның ($a > 0$) қандай мәндерінде $y = a\cdot f(x)$ функциясының графигі Oy өсіне параллель бағытта: а) a есе «созылады»; ә) $\frac{1}{a}$ есе «сығылады»? Мысал келтіріңдер.

ПРАКТИКАЛЫҚ ЖҰМЫС

1) Кестені толтырып 1.36-суреттегі графиктердің дұрыстығын тексеріңдер:

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4
$y = 2x^2$					

жалғасы

$y = \frac{1}{2}x^2$					
$y = -\frac{1}{2}x^2$					

2) қатырма қағаздан $y = \frac{1}{2}x^2$ функциясы графигінің үлгісін жасап, оның көмегімен бір координаталық жүйеде:

$y = \frac{1}{2}(x+2)^2 - 3$, $y = -0{,}5x^2$, $y = 4 - 0{,}5(x+1)^2$ және $y = \frac{1}{2}(x-3)^2 + 2$ функцияларының графиктерін бейнелеңдер.

3) $y = \frac{1}{x}$ функциясы графигінің үлгісі көмегімен $y = -\frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{x-2} + 3$, $y = -\frac{1}{x+1} - 2$ функцияларының графиктерін салыңдар.

ЕСЕПТЕР

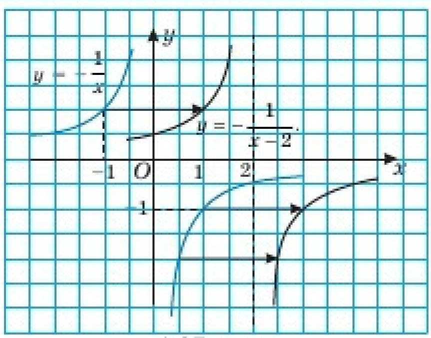
А

1.74. Қандай функцияның графигін Ox өсіне параллель көшіргенде төмендегі функциялардың графигі салынатынын ауызша анықтап, осы екі функцияның графиктерін бір координаталық жүйеде салыңдар:

1) $y = (x - 2)^2$; 2) $y = x^2 + 6x + 9$; 3) $y = (x + 1)^3$;

4) $y = \frac{1}{x+3}$; 5) $y = \frac{1}{x-3}$; 6) $y = -\frac{1}{x-2}$.

6) $y = -\frac{1}{x}$ функциясының графигін оңға қарай 2 бірлікке параллель көшіріп, $y = -\frac{1}{x-2}$ функциясының графигін аламыз (1.37-сурет).



1.37-сурет

1.75. Қандай функцияның графигін Oy өсіне параллель көшіргенде төмендегі функциялардың графигі салынатынын ауызша анықтап, осы екі функцияның графиктерін бір координаталық жүйеде салыңдар:

1) $y = x^2 - 2$; 2) $y = x^2 + 3$; 3) $y = x^3 + 1$;

4) $y = \dfrac{1}{x} + 3$; 5) $y = \dfrac{1-x}{x}$; 6) $y = -2 - \dfrac{1}{x}$.

1.76. Параллель көшіру арқылы функцияның графигін салыңдар:

1) $y = (x-3)^2 + 1$; 2) $y = x^2 - 4x + 5$; 3) $y = 7 - 6x - x^2$;

4) $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$; 5) $y = \dfrac{3x-7}{x-2}$; 6) $y = \dfrac{4x+7}{x+2}$.

1.77. Қандай функцияның графигін қолданып төмендегі функцияның графигін Oy өсіне параллель бағытта «созу» немесе «сығу» арқылы салуға болатынын ауызша анықтаңдар және ол график неше есе «созылады» немесе «сығылады»:

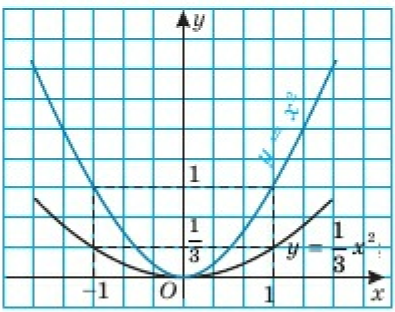
1) $y = \dfrac{1}{3}x^2$; 2) $y = 3x^2$; 3) $y = \dfrac{5}{3}x^2$; 4) $y = -\dfrac{3}{5}x^3$;

5) $y = \dfrac{2}{x}$; 6) $y = \dfrac{1}{2x}$; 7) $y = -\dfrac{3}{x}$; 8) $y = -\dfrac{1}{3x}$?

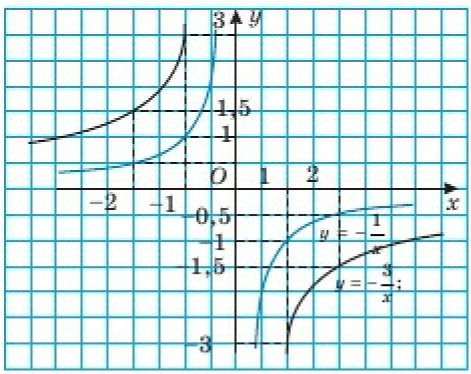
1.78. 1.77-есепте берілген функцияның графигін «созу» не «сығу» арқылы салыңдар.

1) 1.38-суретті қараңдар;

7) 1.39-суретті қараңдар.



1.38-сурет



1.39-сурет

B

1.79—1.80-есептерде қандай функцияның графигін параллель көшіргенде және қандай векторға көшіргенде берілген функцияның графигі алынады? Осы екі графикті бір координаталық жүйеде салып көрсетіңдер.

1.79. 1) $y = x^2 + 3x + 7$; 2) $y = 2 + 7x - x^2$;

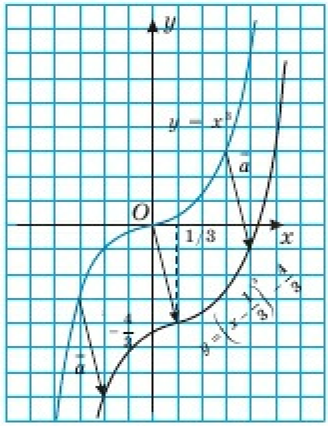
3) $y = x^3 + \dfrac{3x^2}{2} + \dfrac{3x}{4} + 1$; 4) $y = x^3 - x^2 + \dfrac{x}{3} - \dfrac{37}{27}$.

4) Алдымен берілген функцияны түрлендіріп, ықшамдаймыз:

$$x^3 - x^2 + \frac{x}{3} - \frac{37}{27} = x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot \frac{1}{3} + $$

$$+ 3 \cdot x \cdot \frac{1}{9} - \frac{1}{27} - \frac{36}{27} = \left(x - \frac{1}{3}\right)^3 - \frac{4}{3}.$$

Берілген функция $y = \left(x - \dfrac{1}{3}\right)^3 - \dfrac{4}{3}$ түріне келді. Сондықтан $y = x^3$ функциясының графигін $\vec{a} = \left(\dfrac{1}{3}; -\dfrac{4}{3}\right)$ векторына параллель көшіру қажет (1.40-сурет)

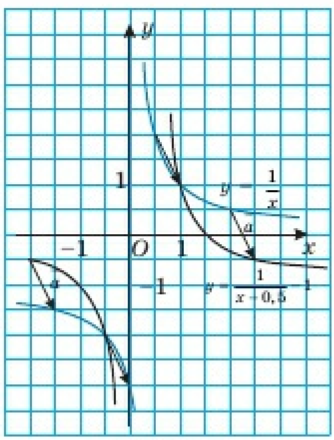


1.40-сурет

1.80. 1) $y = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{x - 0,5}$; 2) $y = \dfrac{2}{2x - 1} - 1$; 3) $y = \dfrac{6x - 5}{2x - 1}$; 4) $y = \dfrac{1 - 3x}{3x + 2}$.

2) $\dfrac{2}{2x - 1} - 1 = \dfrac{2}{2(x - 0,5)} - 1 =$

$= \dfrac{1}{x - 0,5} - 1$ болғандықтан, берілген функция $y = \dfrac{1}{x - 0,5} - 1$ түрінде жазылады және оның графигін салу үшін $y = \dfrac{1}{x}$-тың графигін $\vec{a} = (0,5; -1)$ векторына параллель көшірсе жеткілікті (1.41-сурет).



1.41-сурет

1.81. $y = x^2$ функциясының графигін неше есе «созғанда» («сыққанда») графигі $M_0(x_0; y_0)$ нүктесі арқылы өтетін функция алынады? Осы функцияның графигін салыңдар:

1) $M_0(2; 2)$; 2) $M_0(1; 2)$; 3) $M_0(2; 5)$; 4) $M_0(-3; 6)$.

1.82. $y = \dfrac{1}{x}$ функциясының графигін $\vec{a} = (-2; 3)$ векторына параллель көшіргенде шығатын график M_0 нүктесі арқылы өте ме:

1) $M_0(-1; 4)$; 2) $M_0(-1; 3)$; 3) $M_0\left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{10}{3}\right)$; 4) $M_0\left(-2\dfrac{1}{3}; 0\right)$?

2) Егер $y = \dfrac{1}{x}$ функциясының графигін $\vec{a} = (-2; 3)$ векторына параллель көшірсек, $y = \dfrac{1}{x+2} + 3$ функциясының графигін аламыз. Енді бұл графиктің $M_0(-1; 3)$ нүктесі арқылы өтетінін не өтпейтінін тексеру оңай: $3 = \dfrac{1}{-1+2} + 3 \Rightarrow$ $3 = 1 + 3 \Rightarrow 3 \neq 4$, яғни өтпейді

C

1.83. $y = x^2$ функциясының графигін «созу» («сығу») және параллель көшіру түрлендірулері арқылы берілген функцияның графигін салыңдар:

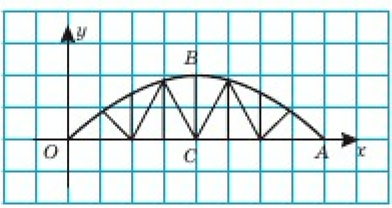
1) $y = 2x^2 - 3x + 1$; 2) $y = \dfrac{1}{2}x^2 - x - 1$;

3) $y = \dfrac{2}{3}x^2 + 4x + 2$; 4) $y = -\dfrac{2}{3}x^2 - 6x - 2$.

1.84. $y = \dfrac{1}{x}$ функциясының графигіне параллель көшіп, графигі M_1 және M_2 нүктелерінен өтетін функцияны жазыңдар:

1) $M_1(0; -3)$, $M_2(2; -1)$; 2) $M_1(0; 1)$, $M_2(-2; 3)$.

1.85. 1.42-суретте көрсетілгендей парабола пішіндес көпірдің доғасында $OA = 8$ м, $BC = 2$ м. Тік бұрышты координаталар жүйесін суретте көрсетілгендей етіп алып, параболаның теңдеуін жазыңдар. Мұндағы $y = x^2$ функциясының графигі неше есе сығылған және қандай векторға параллель көшірілген?



1.42-сурет

Қайталауға арналған жаттығулар

1.86. Теңдеуді шешіңдер:

1) $\frac{3}{x-2}=\frac{2}{x-3}$; 2) $\frac{y^2}{y-3}=\frac{y+6}{y-3}+1$.

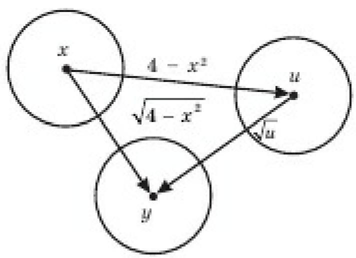
1.87. Теңдеулер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases} u-v=0, \\ 5u^2+2v=3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} p+q=-2, \\ p^2+q^2=100. \end{cases}$

1.5. Күрделі және кері функция

1.5.1. Күрделі функция

1-мысал. Бізге $y=\sqrt{u}$, $u \geqslant 0$ және $u=4-x^2$, $-2 \leqslant x \leqslant 2$ функциялары берілсін. Егер $y=\sqrt{u}$ теңдігінде u-дың орнына $4-x^2$ өрнегін қойсақ, $y=\sqrt{4-x^2}$, $-2 \leqslant x \leqslant 2$ функциясын аламыз. Бұл функцияны **күрделі функция** деп атайды. Оны $y=\sqrt{u}$ және $u=4-x^2$ функцияларын бірінен соң бірін қолданып алдық: алдымен x-ты $4-x^2$ амалы (заңдылығы) көмегімен u-ға сәйкес қойдық, сонан соң бұл u-ды $\sqrt{u}$ заңдылығымен y-ке сәйкес қойдық (1.43-сурет).



1.43-сурет

Сонымен, *функцияның функциясын, яғни аргументі функция болатын функцияны* ***күрделі функция*** деп атайды:

$$y=f(u),\ u=\varphi(x) \Rightarrow y=f(\varphi(x)).$$

1) $y=f(u)$ өз алдына, тек u-ға тәуелді функция ретінде қарастырылса, онда ол күрделі емес, қарапайым функция;

2) $y=f(u)$-ға қосымша $u=\varphi(x)$ функциясы берілсе, $y=f(u)$ — күрделі функция болады.

2-мысал. $f(x)=\frac{x-5}{3x+2}$ және $\varphi(x)=\sqrt{4+x}$ функциялары үшін $f(\varphi(x))$ және $\varphi(f(x))$ күрделі функцияларын жазу керек.

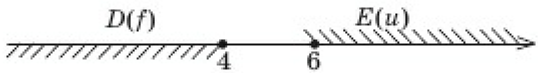
1) Егер $f(u)=\frac{u-5}{3u+2}$ және $u=\sqrt{4+x}$ деп алсақ,

$$f(\varphi(x))=\frac{\sqrt{4+x}-5}{3\sqrt{4+x}+2}.$$

2) Ал $\varphi(u) = \sqrt{4+u}$ және $u = \dfrac{x-5}{3x+2}$ деп алсақ,

$$\varphi(f(x)) = \sqrt{4 + \frac{x-5}{3x+2}} \text{ функциясы шығады.}$$

Ескерту: $f(u) = \sqrt{4-u}$ және $u = x^2 + 6$ функциялары үшін $f(u(x))$ күрделі функциясы анықталмайды. Себебі $f(u)$ функциясының анықталу облысы $D(f) = (-\infty; 4]$ жиыны мен $u = x^2 + 6$ функциясының мәндер облысы $E(u) = [6; +\infty)$ жиыны өзара қиылыспайды (1.44-сурет). Сондықтан $f(u(x)) = \sqrt{4-(x^2+6)} = \sqrt{-2-x^2}$ өрнегінің мағынасы жоқ.



1.44-сурет

$y = f(u(x))$ күрделі функциясында $u = u(x)$ функциясын **ішкі функция** деп, ал $y = f(u)$-ды **сыртқы функция** деп атайық. Егер ішкі функцияның мәндер облысы сыртқы функцияның анықталу облысының ішкі жиыны болса ($E(u) \subseteq D(f)$), онда күрделі функцияның анықталу облысы ретінде ішкі функцияның анықталу облысы алынады. Егер $E(u) \not\subseteq D(f)$ болса, онда күрделі функцияның анықталу облысы ретінде $E(u) \cap D(f)$ жиыны алынады. Сонымен

$$D[f(u(x))] = \begin{cases} D(u), \text{ егер } E(u) \subseteq D(f); \\ D(f) \cap E(u), \text{ егер } E(u) \not\subseteq D(f). \end{cases}$$

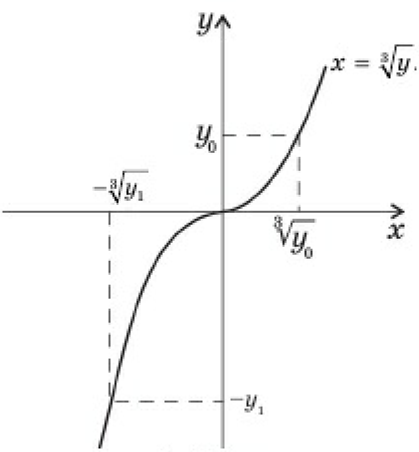
Осы сияқты бірнеше функция арқылы анықталатын күрделі функциялар қарастырылады. Мысалы, $\varphi(x) = 2x^2 + 3$, $g(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{x+1}$ функциялары берілсе, онда мына күрделі функцияларды қарастыруға болады: $g(\varphi(x)) = \sqrt{2x^2+3}$; $f(g(x)) = \dfrac{(\sqrt{x}-2)^2}{\sqrt{x}+1}$; $f(g(\varphi(x))) = \dfrac{\left(\sqrt{2x^2+3}-2\right)^2}{\sqrt{2x^2+3}+1}$ және т.с.с. Сонымен, күрделі функцияны жазу үшін сыртқы функцияның аргументі орнына ішкі функцияны орналастырып, ықшамдап жазу керек. Мысалы,

Сыртқы функция	Ішкі функция	Күрделі функция
$f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{x+1}$	$g(x) = \sqrt{x}$	$f(g(x)) = \dfrac{(\sqrt{x}-2)^2}{\sqrt{x}+1}$
$g(x) = \sqrt{x}$	$f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{x+1}$	$g(f(x)) = \sqrt{\dfrac{(x-2)^2}{x+1}} = \dfrac{\lvert x-2\rvert}{\sqrt{x+1}}$

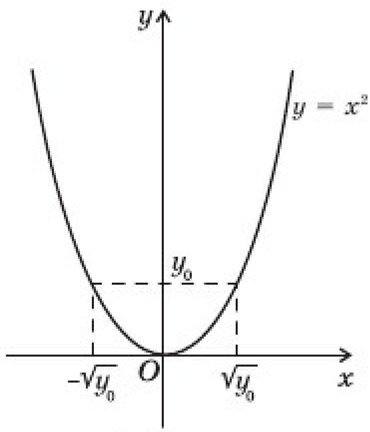
1.5.2. Кері функция

Айталық, $y=f(x)$, $x \in D(f)$ функциясы берілсін. Анықтама бойынша кез-келген $x \in D(f)$ мәніне функцияның бір ғана $y \in E(f)$ мәні сәйкес келеді. Егер осыған қоса, функцияның әрбір $f(x)$ мәнін анықтайтын $x \in D(f)$ аргументі де жалғыз болса, $y=f(x)$ функциясы *өзара бірмәнді сәйкестік орнатады* (қайтымды функция) деп айтады. Мысалы, $y=x^3$, $x \in (-\infty; +\infty)$ функциясы өзара бірмәнді сәйкестік орнатады. Өйткені бұл функцияның әрбір y мәнін анықтайтын жалғыз ғана $x = \sqrt[3]{y}$. саны табылады. Ал $y=x^2$, $x \in (-\infty; +\infty)$ функциясы өзара бірмәнді сәйкестік болмайды. Себебі функцияның әрбір y $(y>0)$ мәніне аргументтің екі түрлі $x = -\sqrt{y}$ және $x = \sqrt{y}$ мәндері сәйкес келеді (1.45, 1.46-суреттер).

Егер $y = x^2$, $x \in [0; +\infty)$ функциясын қарастырсақ, көрсетілген аралықта функция бірсарынды өспелі және Ox өсіндегі $[0; +\infty)$ пен Oy өсіндегі $[0; +\infty)$ жиындары арасында өзара бірмәнді сәйкестік орнатады (графигі 1.46-суреттегі параболаның оң жақтағы тармағы).



1.45-сурет



1.46-сурет

Сонымен, бірсарынды өспелі (кемімелі) функциялар өзара бірмәнді сәйкестік орнатады (қайтымды функциялар).

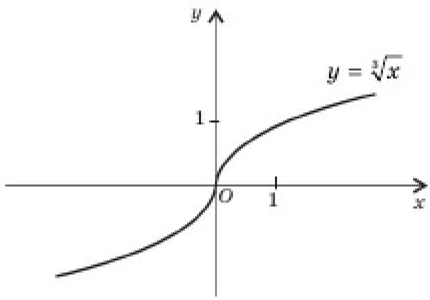
Егер $y = f(x)$, $x \in D(f)$ бірсарынды функция болса, онда әрбір $y \in E(f)$ санына $f(x) = y$ теңдеуінің түбірі болатын жалғыз $x \in D(f)$ санын сәйкес қоямыз. Бұл сәйкестік анықталу облысы $E(f)$ және мәндер облысы $D(f)$ болатын функцияны анықтайды.

Осылайша анықталатын $x=g(y)$, $y \in D(g)=E(f)$ функциясын берілген f функциясына **кері функция** деп атайды. Оны f^{-1} арқылы белгілейді. Осы $x=g(y)=f^{-1}(y)$ жазылуындағы x-ті y арқылы және керісінше y-ті x арқылы қайта белгілесек, кері функция

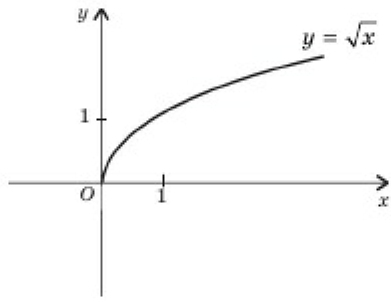
$y=f^{-1}(x)$, $x \in D(f^{-1})=E(f)$ түрінде жазылады. Мысалы, 1.47-суретте $y=x^3$ функциясына кері $y=\sqrt[3]{x}$ функциясының графигі бейнеленген. Ал $y=x^2$, $x \in(-\infty; +\infty)$ функциясы өзара бірмәнді сәйкестікті анықтамайтындықтан, оған кері функция болмайды. Бұл функцияның тарылымы $y=x^2$, $x \in[0; +\infty)$ — өзара бірмәнді сәйкестік. Сондықтан оған кері функция бар: $y=\sqrt{x}$, $x \geqslant 0$ (1.48-сурет).

Өзара кері функциялардың мынадай қасиеттері бар:

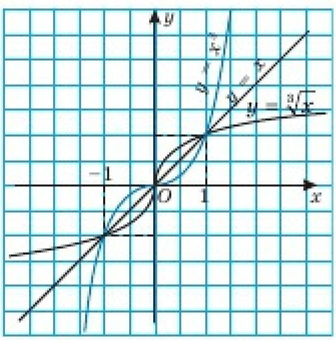
1. Егер $y=f(x)$, $x \in D(f)$ бірсарынды өспелі (кемімелі) болса, бұл функцияға кері $y=f^{-1}(x)$, $x \in D(f^{-1})=E(f)$ функциясы анықталады және кері функция да бірсарынды өспелі (кемімелі).



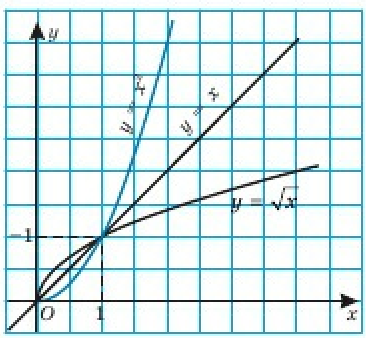
1.47-сурет



1.48-сурет



1.49-сурет



1.50-сурет

Бірсарынды функциялар өзара бірмәнді сәйкестік орнататындықтан, $y=f^{-1}(x)$ кері функциясы анықталады. Енді берілген $y=f(x)$ функциясы бірсарынды өспелі болсын делік. Кез келген $x_1, x_2 \in D(f)$, $x_1 < x_2$ үшін $y_1=f(x_1) < y_2=f(x_2)$ теңсіздігі орындалады. Анықтама бойынша $x_1=f^{-1}(y_1)$, $x_2=f^{-1}(y_2)$ және $y_1 < y_2$, $x_1 < x_2$ $(f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2))$ теңсіздігі орындалады. Сондықтан $y=f^{-1}(x)$ функциясы да бірсарынды өспелі. Бірсарынды кемімелі жағдай да осы сияқты дәлелденеді.

2. Өзара кері функциялардың графиктері I және III координаталық ширек биссектрисасына ($y = x$ түзуіне) қатысты симметриялы орналасады.

Бұл қасиеттің орындалатынын 1.49-және 1.50-суреттерден көруге болады.

1. $y=f(u)$, $u \in D(f)$ және $u=\varphi(x)$, $x \in D(\varphi)$ функциялары берілсін:
   а) қандай шарттар орындалғанда $f(\varphi)$ күрделі функциясы анықталады?
   ә) $f(\varphi)$ күрделі функциясы анықталатындығынан $\varphi(f)$ күрделі функциясының анықталатыны шыға ма? Мысал келтіріңдер.
2. Күрделі функцияны анықтау жобасын сызып көрсетіңдер.
3. Кері функция қалай анықталады? Қандай сәйкестікті өзара бірмәнді сәйкестік деп атайды?

ЕСЕПТЕР

А

1.88. $y=f(u(x))$ күрделі функциясын жазыңдар:

1) $f(u)=u^2$; $u(x)=2x-1$;
2) $f(u)=2u-1$; $u(x)=x^2$;
3) $f(u)=\sqrt{u}$; $u(x)=x-4$;
4) $f(u)=u-4$; $u(x)=\sqrt{x}$;
5) $f(u)=3-2\sqrt{u}, u(x)=x^2-1$;
6) $f(u)=u^2-1$; $u(x)=3-2\sqrt{x}$.

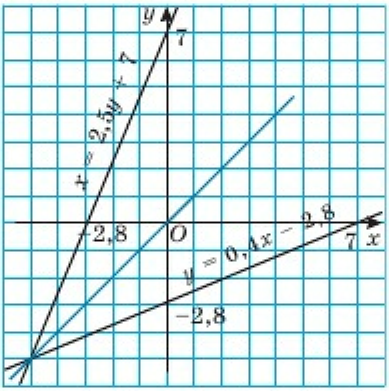
1.89. R_+ — барлық оң нақты сандар жиыны болсын және f функциясы әрбір $x \in R_+$-ке $y=5x$ санын сәйкес қойсын. f-ке кері функцияны жазыңдар.

1.90. $y=x^3$ функциясы нақты сандар жиынында анықталған. Кері функцияны анықтаңдар.

1.91. $f: x \to x^2$, $x \in (-\infty; +\infty)$ функциясы берілген. f-ке кері сәйкестікті анықтаңдар. Осы кері сәйкестік функция бола ма?

1.92. 1) $y=2x+6$;
3) $y=3-0{,}5x$;
2) $y=2x-8$;
4) $y=0{,}4x-2{,}8$

функциясы берілген. а) берілген функцияларға кері функцияны анықтаңдар; ә) бір координаталар жүйесінде берілген функция мен оған кері функцияның графигін салыңдар.



1.51-сурет

4) $y = 0{,}4x - 2{,}8$, $x \in (-\infty; +\infty)$ функциясы берілген. Бұл бірсарынды өспелі функция. Сондықтан оның кері функциясы бар. Оны анықтау үшін $y = 0{,}4x - 2{,}8$ теңдігінен x-ті y арқылы өрнектеу керек: $0{,}4x = y + 2{,}8 \Rightarrow x = \dfrac{1}{0{,}4}y + \dfrac{2{,}8}{0{,}4} \Rightarrow$ $\Rightarrow x = 2{,}5y + 7$. Соңғы теңдеуден y-ті тапсақ, $y = 0{,}4x - 2{,}8$ функциясына кері $y = 2{,}5x + 7$ функциясын аламыз (1.51-сурет).

B

1.93. Нақты сандар жиынында $f(x)=x+5$ және $\varphi(x) = \dfrac{1}{x}$ функциялары берілген. $f(\varphi(x))$ және $\varphi(f(x))$ күрделі функцияларын жазып көрсетіңдер.

1.94. $y=f(x)$ функциясы кестемен берілген. $f(f^{-1}(x))$ және $f^{-1}(f(x))$ бейнелеулерінің кестелерін толтырыңдар. Қорытынды жасаңдар.

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	3	4	5	6	7

1.95. $f(g(x))$ және $g(f(x))$ күрделі функцияларын жазып көрсетіңдер:

1) $f(x)=x^2$ және $g(x)=2x-5$;
2) $f(x)=x^2+1$ және $g(x)=\sqrt{3-x}$;
3) $f(x)=x^2-1$ және $g(x)=x^2+1$;
4) $f(x)=\dfrac{2}{x}$ және $g(x)=x^2-3x+2$.

1.96. Кері функцияны табыңдар:

1) $f(x)=\dfrac{3}{2x-1}$;
2) $y=x^2-4$, $x>0$;
3) $y=x^2-4x+3$, $x>2$;
4) $y=\sqrt{25-x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 5$.

3) $y = x^2 - 4x + 3$, $x > 2$. Мұнда да x-ті y арқылы өрнектеу керек. $y = (x^2 - 4x + 4) - 1 \Rightarrow y + 1 = (x - 2)^2 \Rightarrow |x - 2| = \sqrt{y+1}$. Ал $x > 2$ болғандықтан, $x = \sqrt{y+1} + 2$ теңдігін аламыз. Енді x пен y-ті үйреншікті орындарына алмастырсақ, кері функция $y = \sqrt{x+1} + 2$, $x > -1$ түрінде жазылады.

1.97. 1.96-есептегі функция мен оған кері функцияның графигін бір координаталық жүйеде салыңдар.

C

1.98. 1.95-есептегі $f(g(x))$ және $g(f(x))$ функцияларының анықталу облысын табыңдар.

1.99. Тіктөртбұрыштың периметрі 10 см, ал ұзындығы x см және ауданы S см^2. S-тің x-ке және x-тің S-ке тәуелділігін жазыңдар. Бұл тәуелділіктің кері функция ұғымымен қандай байланысы бар? Тура және кері функциялардың анықталу облыстарын табыңдар.

1.100. $f : x \to 2x$ және $g : x \to x-2$, $x \in Z$ бейнелеулері берілген. $f \cdot g$ және $g \cdot f$ бейнелеулері қандай формуламен анықталады? Бұл бейнелеулердің композициялары беттесе ме?

1.101. $f(x)=x+3$, $g(x)=2x$ және $\varphi(x)=x^2 (x \in R)$ функциялары берілген. $f(g(\varphi(x)))=f(\varphi(g(x)))$ теңдігі дұрыс па?

1.102. Кубтың көлемін оның толық бетінің ауданы арқылы өрнектеңдер. Бұл тәуелділіктің кері және күрделі функциялармен қандай байланысы бар?

Қайталауға арналған жаттығулар

1.103. $6x+y+19=0$ түзуі $y=3x^2+6x-7$ параболасын жанайтынын көрсетіңдер және жанасу нүктесінің координаталарын табыңдар.

1.104. Теңдеуді шешіңдер:

1) $(6x-2)^3-6x+2=0$; 2) $(2x-3)^2=2x-1$.

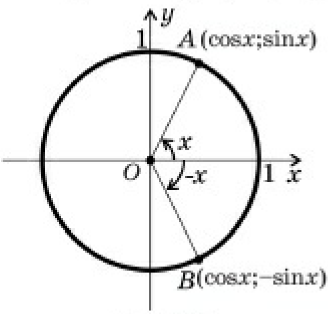
2-бөлім. ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ФУНКЦИЯЛАР

2.1. Тригонометриялық функциялардың негізгі қасиеттері

Бұл параграфта 1-бөлімдегі функцияны зерттеудің қарапайым жоспары бойынша sin$x$, cos$x$, tg$x$ және ctg$x$ функцияларын зерттеп, олардың графиктерін саламыз.

2.1.1. y=sin$x$ функциясы

1) y=sin$x$ функциясының кез келген x аргументі үшін мағынасы бар болғандықтан, бұл функция сан өсінің барлық нүктелерінде анықталған: $D(\sin x)=(-\infty;\ +\infty)$.



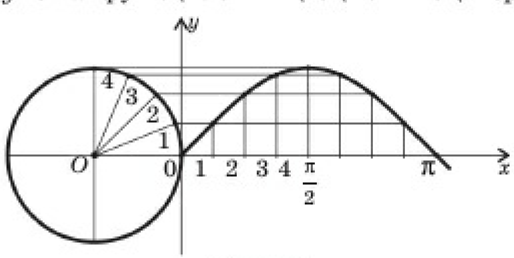
2.1-сурет

2) y=sin$x$ — тақ функция. Өйткені әрбір x үшін $\sin(-x)=-\sin x$ теңдігі орындалады (2.1-сурет).

y=sin$x$ — периодты функция. Оның ең кіші оң периоды 2π-ге тең. Бұл 2π саны y=sin$x$ функциясының *негізгі периоды* деп аталады.

Енді осы тұжырымды дәлелдейік. Шынында да, әрбір x үшін $\sin(x+2\pi)=\sin x$ теңдігінен 2π саны функцияның периоды болатыны шығады.

Кері жорып, кез келген $x\in(-\infty;+\infty)$ үшін sin$x$ функциясының 2π-ден кіші оң T_0 периоды табылсын делік: $\sin(x+T_0)=\sin x$ $(0<T_0<2\pi)$. Осыдан $x=\frac{\pi}{2}$ десек, $\sin\left(\frac{\pi}{2}+T_0\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$. 2.1-суреттен $\sin x=1$ теңдеуінің шешімі $x=\frac{\pi}{2}+2n\pi$, $n\in Z$, яғни $T_0=2\pi n\geqslant 2\pi$. Бұл T_0 санының ең кіші оң период болатынына қайшы. Алынған қайшылық y=sin$x$ функциясының ең кіші оң периоды 2π санына тең екенін көрсетеді.



2.2-сурет

Осы айтылғандардан мынадай қорытынды шығады: sin$x$ функциясының графигі координаталар бас нүктесіне қатысты симметриялы. Сондықтан оның графигін $[0;\pi]$ аралығында салып, оны O нүктесіне қатысты симметриялы көшіру керек (2.2-сурет). Сонан соң функцияның периодтылығын қолданып, соңғы графикті $[-(2k+1)\pi; -(2k-1)\pi]$ және $[(2k-1)\pi; (2k+1)\pi]$, $k\in N$ аралықтарына Ox өсі бойымен параллель көшірсе, жеткілікті.

3) $y=\sin x$ функциясы графигінің Ox өсімен қиылысу нүктелерін табу үшін $\sin x=0$ теңдеуінің түбірлерін анықтау керек. $[0; \pi]$ аралығында $x=0$ және $x=\pi$ болғанда ғана функция графигі Ox өсімен қиылысады (2.2-сурет). Жалпы, $\sin x=0$ теңдеуінің түбірлері $x=k\pi$, $k\in Z$ формуласымен анықталатынын көрсету қиын емес.

Егер $x=0$ болса, $f(0)=\sin 0=0$. Сондықтан функцияның графигі Oy өсімен $O(0; 0)$ нүктесінде қиылысады.

4) 2.2-суреттен $x\in(0; \pi)$ аралығында $\sin x>0$ болатынын көреміз. Ал $\sin x$ тақ функция болғандықтан, $x\in(-\pi; 0)$ аралығында $\sin x<0$. Енді $\sin x$-тің периодтылығын пайдаланып, $x\in(2\pi k; (2k+1)\pi)$ аралықтарында $\sin x>0$, $x\in((2k-1)\pi; 2k\pi)$ аралықтарында $\sin x<0$ болатынын көреміз. Мұндағы $k\in Z$ — бүтін сан.

5) 2.1-суреттен $-1\leqslant\sin x\leqslant 1$, яғни функцияның мәндер облысы $[-1; 1]$. Осыдан $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ аралығында функция -1-ден $+1$-ге дейін өседі, $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ аралығында $+1$-ден -1-ге дейін кемиді.

Осы айтылғандарды қатаң математикалық жолмен дәлелдейік. Алдымен функцияның $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ аралығында өсетінін көрсетейік.

Айталық, $x_1, x_2\in\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $x_1<x_2$ болсын. Онда

$$\sin x_2 - \sin x_1 = 2\cos\frac{x_1+x_2}{2}\cdot\sin\frac{x_2-x_1}{2}. \qquad (1)$$

теңдігін аламыз. $-\frac{\pi}{2}\leqslant x_1 < x_2 \leqslant \frac{\pi}{2}$ болғандықтан, $0<\frac{x_2-x_1}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{2}<\frac{x_1+x_2}{2}<\frac{\pi}{2}$ теңсіздіктері орындалады. Мұнда $x_1<\frac{\pi}{2}$, $x_2<\frac{\pi}{2}$ теңсіздіктерін мүшелеп қосып, $\frac{x_1+x_2}{2}<\frac{\pi}{2}$ және т.с.с. теңсіздіктерді алдық. Сондықтан $\sin\frac{x_2-x_1}{2}>0$, $\cos\frac{x_2+x_1}{2}>0$. (1) тепе-теңдігінен $\sin x_2-\sin x_1>0\Rightarrow\sin x_2>\sin x_1$ теңсіздігін аламыз. Бұл аралықта $\sin x$

өспелі. $\sin x$ функциясының $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ аралығында кемімелі болатыны да осы сияқты дәлелденеді.

Осыдан $\sin x$-тің периодтылығын пайдаланып, функцияның $\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi;\frac{\pi}{2}+2k\pi\right], k\in Z$ аралықтарында өсетінін,

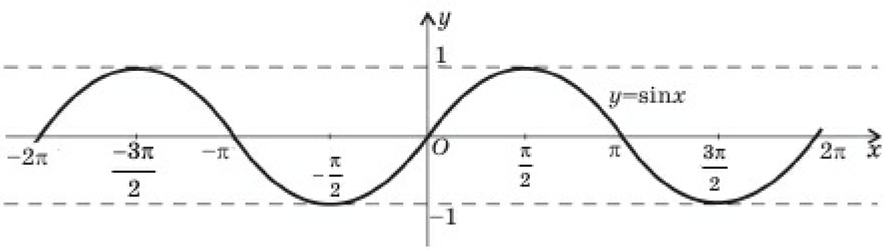
$\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi;\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right], k\in Z$ аралықтарында кемитінін көреміз.

6) $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi, (k\in Z)$ — $\sin x$ функциясының максимум нүктелері, $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi, (k\in Z)$ — минимум нүктелері. $\sin x$-тің максимум нүктелеріндегі мәндері 1, минимум нүктелеріндегі мәндері -1.

7) Осы айтылғандардың нәтижесінде төмендегідей кесте толтыруға болады:

x	$-\pi$	$\left(-\pi;-\frac{\pi}{2}\right)$	$-\frac{\pi}{2}$	$\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$	0	$\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{\pi}{2}$	$\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$	π
$\sin x$	0	$\searrow$ −	min -1	$\nearrow$ −	0	$\nearrow$ +	max $+1$	$\searrow$ −	0

Осы кестедегі мәліметтер мен $\sin x$-тің периодтылығын пайдаланып және функцияның $[0;\frac{\pi}{2}]$ аралығындағы бейнесі бойынша (2.2-сурет) оның графигін саламыз (2.3-сурет). 2.2-суретте ыңғайлы болу үшін 1, 2, 3, 4 цифрларымен $\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{4}$ бұрыштары белгіленген.



2.3-сурет

2.1.2. y=cos$x$ функциясы

Келтіру формулалары бойынша $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Сондықтан y=cos$x$ функциясының қасиеттерін y=sin$x$ функциясының сәйкес қасиеттерінен алуға болады. Ол үшін y=sin$x$ функциясының аргуметіне $-\frac{\pi}{2}$-ні қосады.

1) Анықталу облысы: $D(\cos x)=(-\infty;\ +\infty)$.

2) Анықтама бойынша кез келген $x\in(-\infty;\ +\infty)$ үшін $\cos(-x)=$ $=\cos x$ болғандықтан, cos$x$ — жұп функция. Бұл теңдікті былай шығарып алуға да болады:

$$\cos(-x) = \sin\left(-x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x.$$

$$\cos(x + 2\pi) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} + 2\pi\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \text{ болғандықтан,}$$

негізгі периоды 2π-ге тең. Сондықтан оның графигін $[0;\ \pi]$ аралығында салып, оны Oy өсіне қатысты симметриялы түрде $[-\pi;\ 0]$ аралығына көшіріп, шыққан графикті $[(2k-1)\pi;\ (2k+1)\pi]$, $k\in Z$ аралықтарына периодты түрде көшіріп отыру қажет.

3) $\cos x=0$ теңдеуінің түбірлері y=cos$x$ функциясының графигінің Ox өсімен қиылысу нүктелері болып табылады. Функцияның графигі Ox өсімен $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow x + \frac{\pi}{2} = k\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k\pi\,(k \in Z)$

нүктелерінде қиылысады. Сан өсінде $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi,\ \ k \in Z$ және $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \ k \in Z$; түріндегі нүктелер беттесіп, бір ғана жиынды анықтайды. y=cos$x$ функциясының графигі Ox өсін $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$ нүктелерінде қияды.

Егер $x=0$ болса, $\cos 0=1$. y=cos$x$ функциясының графигі Oy өсімен $(0;\ 1)$ нүктесінде қиылысады.

4) y=cos$x$ функциясы I және IV ширектерде оң мәндер, II және III ширектерде теріс мәндер қабылдайды. Онда функция

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ \ \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right),\ \ k \in Z \text{ болса, } \cos x>0;$$

$x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in Z$, болса, $\cos x<0$.

5) $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ болғандықтан, $y=\cos x$ функциясы $\left(-\frac{\pi}{2} + \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right); -\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = (-\pi + 2k\pi); 2k\pi\right)$, $k \in z$ аралығында өспелі.

Сол сияқты $[2k\pi; (2k+1)\pi]$, $k \in Z$ аралықтарында кемімелі.

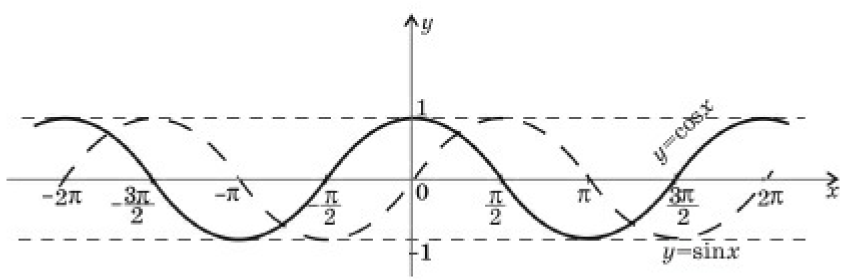
6) $x_k=2k\pi$, $k \in Z$ нүктелерінде функция максимум мәндерін қабылдайды: $\cos x_k=1$, $x_m=(2m+1)\pi$, $m \in Z$ нүктелері — минимум нүктелері: $\cos x_m=-1$.

7) Жоғарыда айтылғандарды төмендегі кестеге толтырамыз:

x	$-\pi$	$\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$	$-\frac{\pi}{2}$	$\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$	0	$\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{\pi}{2}$	$\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$	π
$\cos x$	min -1	$\searrow$ −	0	$\nearrow$ +	man $+1$	$\searrow$ +	0	$\searrow$ −	min -1

Енді функцияның периодтылығын пайдаланып, оның графигін салуға болады (2.4-сурет).

$y=\cos x$ функциясының графигін $y=\sin x$-тің графигін Ox өсінің бойымен солға қарай $\frac{\pi}{2}$ бірлікке параллель жылжытып алуға болады.



2.4-сурет

2.1.3. $y=\mathrm{tg}x$ функциясы

1) Анықталу облысы $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$. теңсіздігін қанағаттандыратын барлық нақты сандар жиыны. Өйткені $\mathrm{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x}$ өрнегінде $\cos x \neq 0$ болуы қажет.

2) $y=\mathrm{tg}x$ — тақ функция, себебі $\mathrm{tg}(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\mathrm{tg}x$. $y=\mathrm{tg}x$ функциясының оң периоды π-ге тең: $\mathrm{tg}(x+\pi)=\mathrm{tg}x$, $x \in D(\mathrm{tg}x)$.

Шынында да, $\mathrm{tg}(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \mathrm{tg}x$. Егер T_0 функцияның қандай да бір оң периоды болса, $\mathrm{tg}(x+T_0)=\mathrm{tg}x$, $x \in D(\mathrm{tg}x)$. Егер $x=0$ деп алсақ, $\mathrm{tg}T_0=\mathrm{tg}0=0$. Екінші жағынан, $\mathrm{tg}T_0 = \frac{\sin T_0}{\cos T_0} = 0 \Rightarrow \sin T_0 = 0 \Rightarrow T_0 = k\pi, \quad k \in Z$.

$k=1$ болғанда $\mathrm{tg}x$ функциясының ең кіші оң периодын аламыз: $T_0=\pi$.

3) Ox өсімен қиылысуы: $\mathrm{tg}x=0 \Rightarrow \sin x=0 \Rightarrow x=k\pi$, $k \in Z$ нүктелері $y=\mathrm{tg}x$ функциясының нөлдері. Функцияның графигі абсциссалар өсін $x=k\pi$, $k \in Z$ нүктелерінде қиып өтеді. Oy өсімен функцияның графигі $O(0;\ 0)$ нүктесінде ғана қиылысады.

4) $y=\mathrm{tg}x$ функциясы $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$ аралығында теріс, $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ аралығында оң мәндер қабылдайтындықтан, оның периодтылығын ескерсек, функция $x \in \left(-\frac{\pi}{2}+k\pi;\quad k\pi\right)$, $k \in Z$ аралықтарында теріс ($\mathrm{tg}x<0$), $x \in \left(k\pi;\quad \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$, $k \in Z$ аралықтарында оң мәндер ($\mathrm{tg}x>0$) қабылдайды.

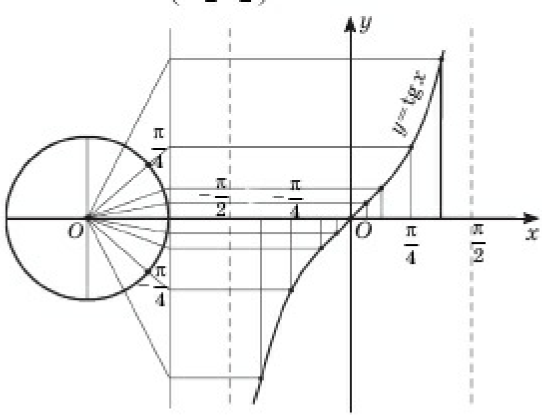
5) $y=\mathrm{tg}x$ функциясы анықталу облысында өспелі. Шынында да, $-\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$ мәндері үшін $\mathrm{tg}x_2 - \mathrm{tg}x_1 = \frac{\sin x_2 \cos x_1 - \sin x_1 \cos x_2}{\cos x_1 \cos x_2} = \frac{\sin(x_2 - x_1)}{\cos x_1 \cdot \cos x_2}$ теңдігі орындалады. Мұндағы $0<x_2-x_1<\pi$. Онда $\sin(x_2-x_1)>0$, $\cos x_1>0$ және $\cos x_2>0 \Rightarrow \mathrm{tg}x_2-\mathrm{tg}x_1>0 \Rightarrow \mathrm{tg}x_2>\mathrm{tg}x_1$. Демек, $\mathrm{tg}x$ функциясы $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ аралығында өспелі. Ал периодтылығы бо-

йынша $\operatorname{tg}x$ функциясы $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi;\ \frac{\pi}{2}+k\pi\right), k \in Z$ аралықтарында да өспелі. Бұл аралықтардың бірігулері $D(\operatorname{tg}x)$ жиынын анықтайтын болғандықтан, $\operatorname{tg}x$ функциясы өзінің анықталу облысында өспелі.

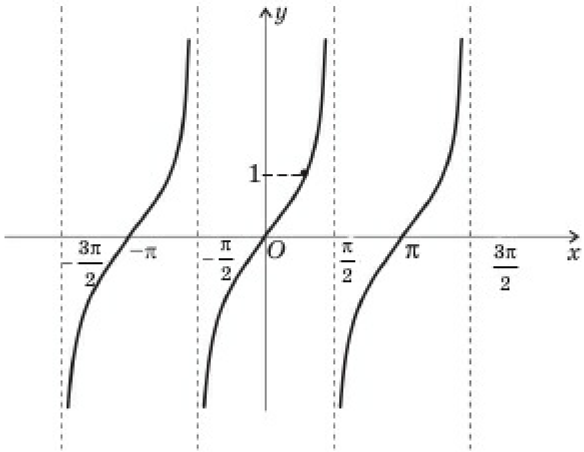
Енді функцияның $x=\frac{\pi}{2}$ нүктелерінің маңындағы өзгеру қасиеттеріне көңіл бөлейік. Егер $x<\frac{\pi}{2}$ болып, x нүктесі $\frac{\pi}{2}$-ге жақындай түссе, $\operatorname{tg}x$ функциясының сәйкес мәндері оң әрі «шексіз өсе береді». Шынында да, бұл жағдайда $\sin x$-тің сәйкес мәндері 1-ге жақындаса, онда $\cos x$-тің сәйкес мәндері 0-ге жақындай түседі. Сондықтан $\operatorname{tg}x$ функциясы барынша үлкен оң мәндер қабылдап, $\operatorname{tg}x$-тің мәндері плюс шексіздікке ұмтылады. Осы сияқты, егер $x>\frac{\pi}{2}$ болып, $\frac{\pi}{2}$-ге шексіз жақындаса тангенстің сәйкес мәндерінің модульдері шексіз өседі ($\sin x>0$, $\cos x<0$) және бұл мәндер теріс. Бұл жағдайда функцияның мәндері «минус шексіздікке ұмтылады».

Сонымен $y=\operatorname{tg}x$ функциясының графигі $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k \in Z$ түзуіне сол жағынан шексіз жақындап, жоғары қарай шексіз көтеріле береді де, оң жағынан $x=-\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k \in Z$ түзуінде жақындаған сайын функцияның графигі төменге шексіз созылады. Басқаша айтқанда, $x=\pm\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k \in Z$ түзулері — $y=\operatorname{tg}x$ функциясы графигінің вертикаль асимптоталары.

6) $y=\operatorname{tg}x$ функциясы өспелі болғандықтан, оның экстремум нүктелері жоқ. Функцияның $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ аралығындағы графигін 2.5-суретте



2.5-сурет



2.6-сурет

көрсетілген тәсілмен саламыз. Сонан соң бұл графикті параллель көшіріп $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi;\ \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$, $k\in Z$ аралықтарына саламыз (2.6-сурет).

2.1.4. $y=\text{ctg}x$ функциясы

Бұл функция $y=\text{tg}x$ функциясына ұқсас зерттеледі, сондықтан біз мұнда оның қасиеттерін тізіп көрсетумен шектелеміз. Оқушылар өз беттерінше толық зерттеулер жүргізуіне болады.

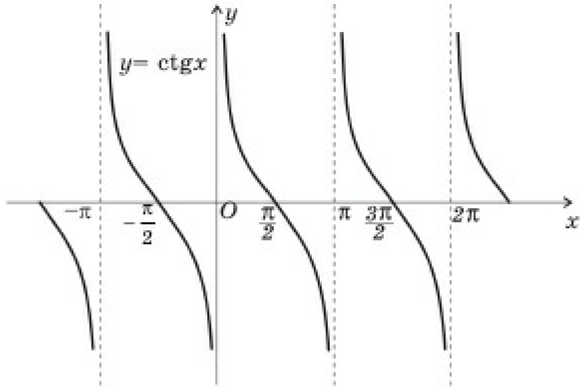
1) Анықталу облысы — $x\neq k\pi$, $k\in Z$ сандарынан өзге барлық нақты сандар жиыны.

2) $y=\text{ctg}x$ — тақ функция. Ең кіші оң периоды π.

3) Ox өсімен функцияның графигі $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$ нүктелерінде қиылысады. Oy өсімен қиылыспайды.

4) Егер $x\in\left(k\pi;\ \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$, $k\in Z$ болса, $\text{ctg}x>0$. Бұл аралықтарда функция оң мәндер қабылдайды. $x\in\left(\frac{\pi}{2}+k\pi;\ (k+1)\pi\right)$, $k\in Z$ аралықтарында функция теріс мәндер қабылдайды: $\text{ctg}x<0$.

5) $y=\text{ctg}x$ функциясы өзінің $(k\pi;\ (k+1)\pi)$, $k\in Z$ аралықтарындағы анықталу облысында кемімелі.



2.7-сурет

6) y=ctg$x$ функциясының экстремум нүктелері жоқ. Оның графигі 2.7-суретте көрсетілген.

1. Тригонометриялық функциялардың негізгі қасиеттерін айтып беріңдер: а) анықталу облысын; ә) тақ-жұптығын; б) негізгі периодын; в) Ox және Oy өстерімен қиылысу нүктелерін; г) таңба тұрақтылық аралықтарын; ғ) өсу және кему аралықтарын; д) экстремум нүктелерін. Жауаптарыңды негіздеңдер.
2. Негізгі тригонометриялық функциялардың әрқайсысының графигін салыңдар.

ЕСЕПТЕР

А

2.1. φ бұрышы қай ширекте аяқталуы мүмкін:

1) $|\sin\varphi|=\sin\varphi$;
2) $|\sin\varphi|=\sin(-\varphi)$;
3) $|\cos\varphi|=-\cos\varphi$;
4) $|\cos(-\varphi)|=\cos\varphi$;
5) $|\mathrm{tg}\varphi|=-\mathrm{tg}\varphi$;
6) $|\mathrm{ctg}\varphi|=\mathrm{ctg}\varphi$?

2.2. Өрнектің таңбасын анықтаңдар:

1) $\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin\frac{19\pi}{20}$; 2) $\sin\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\cos\frac{13\pi}{8}-\cos(-2,25\pi)$;

4) $\sin 139°+\cos 50°$; 5) $\mathrm{tg}1,25-1$; 6) $\sqrt{3}-\mathrm{ctg}\frac{13\pi}{20}$.

2.3. Қайсысы үлкен:

1) $\sin1°$ немесе $\sin1$;
2) $\cos2°$ немесе $\cos2$;
3) $\sin3°$ немесе $\sin3$;
4) $\cos3,5$ немесе $\cos 6,5$?

2.4. Салыстырыңдар:

1) $\sin\frac{7\pi}{5}$ және $\sin\frac{17\pi}{10}$;

2) $\cos\frac{6\pi}{5}$ және $\cos\frac{4\pi}{5}$;

3) $\operatorname{tg}1,5$ және $\operatorname{tg}1,6$;

4) $\operatorname{tg}3,14$ және $\operatorname{tg}\pi$;

5) $\operatorname{ctg}\frac{8\pi}{5}$ және $\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{5}$;

6) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}$ және $\operatorname{ctg}1,5$.

2.5. 3π саны а) $y=\sin 2x$; ә) $y=\operatorname{tg}x$; б) $y=\cos 4x$ функцияларының периоды бола ма? Бұл сан осы функциялардың ең кіші оң периоды бола ма? Осы функциялардың ең кіші оң периодын табыңдар.

В

2.6. Егер $y=f(x)$ периодты функция болса, $y=|f(x)|$ функциясының да периодты екенін көрсетіңдер. а) $y=|\sin x|$; ә) $y=|\cos x|$ функциясының ең кіші оң периодын анықтаңдар.

2.7. Функцияның анықталу облысын табыңдар:

1) $y=\sqrt{\sin x}$;

2) $y=\sqrt{\sin(-x)}$;

3) $y=\sqrt{\cos(-x)}$;

4) $y=\sqrt{-\operatorname{tg}(-x)}$.

2.8. x-тің қандай мәндерінде өрнектің мағынасы бар:

1) $\frac{1}{\sin x-1}$;

2) $\frac{1}{1+\cos x}$;

3) $\frac{1}{\sqrt[3]{\sin x}}$;

4) $\sqrt[3]{\cos(-x)}$;

5) $\sqrt{\operatorname{tg}^3(-x)}$;

6) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2x}$?

2.9. $(0;\ \pi)$ аралығында а) $y=\sin 3x$; ә) $y=\cos 2x$ функцияларының экстремумдарын табыңдар. Функцияның өсу және кему аралықтарын табыңдар.

2.10. $(1;\ 3)$ интервалының қай бөліктерінде $y=\sin\left(\frac{1-3x}{6}\pi\right)$ функциясы оң мәндер және теріс мәндер қабылдайды? Осы аралықта функцияның нөлдері бар ма?

2.11. $(0;\ 1)$ интервалының қай бөліктерінде $y=\cos\left(\frac{2x-1}{4}\pi\right)$ функциясы оң мәндер және теріс мәндер қабылдайды? Осы аралықта функцияның нөлдері бар ма?

2.12. 1) $\sin x=0,5x$; 2) $\sin x=x$; 3) $\cos x=x^2$; 4) $\operatorname{tg}x=kx+b$ теңдеуінің неше түбірі бар?

C

2.13. $y=|\operatorname{tg}x|$ функциясының өсу және кему аралықтарын, экстремумдарын табыңдар.

2.14. $D(x)=\begin{cases}1, \text{ егер } x \text{ рационал сан болса,}\\ 0, \text{ егер } x \text{ иррационал сан болса.}\end{cases}$

Дирихле функциясының периодты болатынын дәлелдеңдер.

2.15. Егер T саны $y=f_1(x)$ және $y=f_2(x)$ функцияларының периоды болса, онда T саны $f_1(x)+f_2(x)$ және $f_1(x)\cdot f_2(x)$ функцияларының да периоды болатынын көрсетіңдер.

2.16. $y=\sin x+\{x\}$ функциясы периодсыз болатынын көрсетіңдер. Бұл тұжырым 2.15-есепке қайшы емес пе?

2.17. $f_1(x)$ және $f_2(x)$ функциялары барлық нақты сандар жиынында үздіксіз және периодты болсын. Олардың негізгі периодтары сәйкесінше T_1 және T_2 сандарына тең. Егер $T_1 : T_2$ қатынасы рационал сан болса, онда $f_1(x)+f_2(x)$ қосындысы периодты, ал бұл қатынас иррационал болса, онда $f_1(x)+f_2(x)$ қосындысы периодсыз болатынын дәлелдеңдер.

Қайталауға арналған жаттығулар

2.18. $\begin{cases}x+2y\leqslant 4,\\ y<x^2+6x-7\end{cases}$

теңсіздіктер жүйесімен берілетін фигураны кескіндеңдер.

2.19. $\left(\sqrt{\sqrt{45}+2\sqrt{5}}+\sqrt{\sqrt{45}-2\sqrt{5}}\right)^2-6\sqrt{5}$ өрнегінің мәні рационал сан болатынын көрсетіңдер.

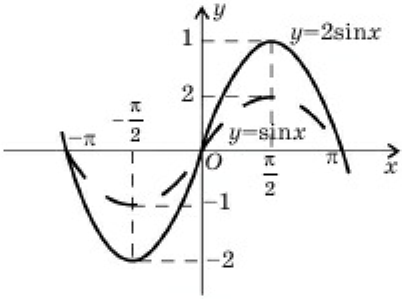
2.20. 4 л 10%-дық қышқылға бірнеше литр су қосып, 4%-дық қышқыл алынды. Қышқылға неше литр су қосылды?

2.2. Кейбір тригонометриялық функциялардың графиктерін салу

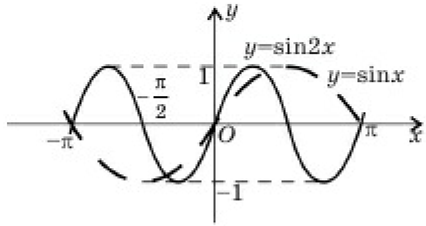
Бұл параграфтан функциялардың графиктерін қарапайым түрлендіру арқылы (параллель көшіру, созу, сығу) кейбір тригонометриялық өрнектермен берілген функциялардың графиктерін салу мысалдарын қарастырамыз.

1-мысал. $y=2\sin x$ функциясының графигін салу қажет.

$y=2\sin x$ функциясының графигі $y=\sin x$ функциясының әрбір x нүктесіндегі мәндерін 2 еселеу арқылы салынады. Басқаша



2.8-сурет



2.9-сурет

айтқанда, y=sin$x$ функциясы графигіндегі әрбір нүктені Ox өсіне перпендикуляр бағытта 2 есе созғанда шыққан график y=2sin$x$-тің графигі болады (2.8-сурет).

2-мысал. y=sin2x функциясының графигін салу керек.

y=sin2x-тің графигі y=sin$x$ функциясының графигін Ox өсінің бойымен 2 есе сығу арқылы алынады (2.9-сурет).

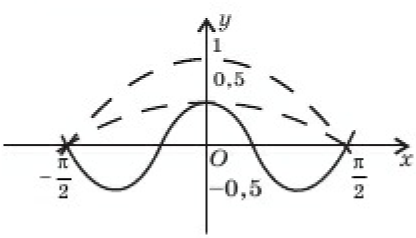
3-мысал. $y=\frac{1}{2}\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)+1$. функциясының графигін салу керек.

Алдымен $y=\frac{1}{2}\cos x$ функциясының графигін y=cos$x$-тің графигін пайдаланып салып, оны Ox-ке параллель бағытта 3 есе сығу қажет. Сонда y=0,5cos3x функциясының графигі шығады (2.10-сурет). Сонан соң берілген функцияны $y=\frac{1}{2}\cos 3\left(x-\frac{\pi}{12}\right)+1$ түрінде жазып, салынған $y=\frac{1}{2}\cos 3x$ -тің графигін оңға қарай $\frac{\pi}{12}$ бірлікке және 1 бірлікке параллель жоғары көшірсе, жеткілікті (2.11-сурет).

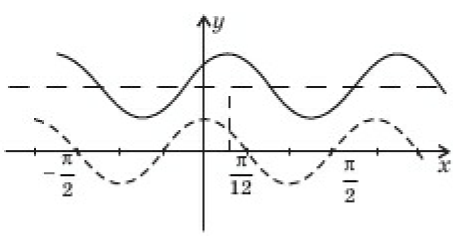
4-мысал. y=$x$sin$x$ функциясының графигін салу керек.

1) Анықталу облысы: $D(f)=(-\infty; +\infty)$.

2) Функция жұп: $f(-x)=(-x)\sin(-x)=x\sin x=f(x)$. Функция периодсыз.



2.10-сурет



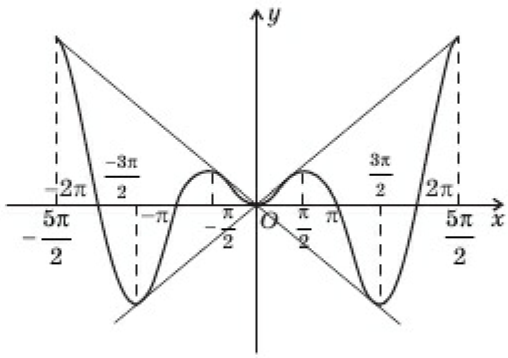
2.11-сурет

3) Ox өсімен $x=k\pi$, $k\in Z$ нүктелерінде қиылысады, Oy өсімен $O(0;\ 0)$ нүктесінде қиылысады.

4) $(2k\pi;\ \pi+2k\pi)$, $k\in N$ және $(-\pi-2m\pi;\ -2m\pi)$, $m\in N$ аралықтарында функция оң мәндер қабылдайды, $(\pi+2k\pi;\ 2\pi+2k\pi)$, $k\in N$ және $(-2\pi-2m\pi;\ -\pi-2m\pi)$, $m\in N$ аралықтарында функция теріс мәндер қабылдайды.

5) Бұл мысалдағы функцияның өсу және кему аралықтарын, экстремум нүктелерін осыған дейінгі қолданылып келген тәсілдермен анықтау мүмкін емес (оны IV тарауда қарастырамыз).

Енді $y=x\sin x$ функциясының графигін салу үшін оның өзгеру аралықтарын қарастырайық. $|\sin x|\leqslant 1$ болғандықтан, $|x\sin x|\leqslant|x|\Rightarrow$ $\Rightarrow -|x|\leqslant|x\sin x|\leqslant|x|$ теңсіздігі орындалады. Бұл геометриялық тұрғыдан берілген функцияның графигі $y=-x$ және $y=x$ түзулерінің арасында орналасатындығын көрсетеді. Функцияның осы түзулермен ортақ нүктелерін $x\sin x=\pm x$ теңдеуінің шешімдері ретінде анықтаймыз. Осыдан $x=0$ немесе $\sin x=\pm 1$ теңдеуінен $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$ теңдіктерін, $x\sin x=-x$ теңдеуінен $x=0$ немесе $x=-\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$ теңдіктерін аламыз. Бұл нүктелерде (0-ден өзгелерінде) $y=x\sin x$ функциясының графигі мен $y=x$, $y=-x$ түзулері жанасады (2.12-сурет).



2.12-сурет

1. Функцияның графигін «сығу» және «созу» сөздерінің мағынасын түсіндіріңдер.
2. Егер $y=f(x)$ функциясы графигінің көмегімен $y=f(x-m)+n$ функциясының графигін қалай салуға болады?

ЕСЕПТЕР

2.21–2.26-есептерде көрсетілген функциялардың графиктерін салыңдар.

А

2.21. 1) $y=3\cos x$; 2) $y=\cos 3x$; 3) $y=\dfrac{1}{2}\sin x$;

4) $y = \sin\dfrac{x}{2}$; 6) $y = \mathrm{tg}2x$; 8) $y = \mathrm{ctg}\dfrac{x}{3}$;

5) $y = 2\mathrm{tg}x$; 7) $y = \dfrac{1}{3}\mathrm{ctg}x$; 9) $y = \dfrac{1}{2}\cos 2x$.

2.22. 1) $y = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$; 3) $y = \mathrm{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) - 1$;

2) $y = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + 4$; 4) $y = 3 - \mathrm{ctg}\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$.

B

2.23. 1) $y = |\sin 2x|$; 3) $y = \left|\mathrm{tg}\dfrac{x}{2} - 1\right|$;

2) $y = \cos\left|\dfrac{x}{2}\right|$; 4) $y = \mathrm{ctg}\,|3x + 2|$.

C

2.24. 1) $y = 4\left(\cos^4\dfrac{x}{2} + \sin^4\dfrac{x}{2}\right)$; 3) $y = \mathrm{tg}^2 x - \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

2) $y = \sin x + |\sin x|$; 4) $y = \sin x + \cos x$.

2.25. 1) $y = \mathrm{tg}x\,\mathrm{ctg}x$; 3) $y = \mathrm{ctg}x\,|\sin x|$;

2) $y = \dfrac{|\cos x|}{\cos x}$; 4) $y = \mathrm{tg}x \cdot \cos x$.

2.26. 1) $y = |\sin x| + \sin|x|$; 3) $y = \mathrm{tg}x + \mathrm{ctg}x$;

2) $y = x - \sin x$; 4) $|y| = \sin x$.

Қайталауға арналған жаттығулар

2.27. $\left(\dfrac{x^{-1} - y^{-1}}{x^{-1} + y^{-1}} - \dfrac{x^{-1} + y^{-1}}{x^{-1} - y^{-1}}\right) \cdot \left(\dfrac{4xy}{y^2 - x^2}\right)^{-1}$ өрнегін ықшамдаңдар.

2.28. Теңдеулер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases} 2x + 3y = 1, \\ xy = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x - y = 3. \end{cases}$

2.29. 8-ге еселік болатын барлық үш таңбалы натурал сандардың қосындысын табыңдар.

2.3. Кері тригонометриялық функциялар

2.3.1. $y=\arcsin x$ функциясы

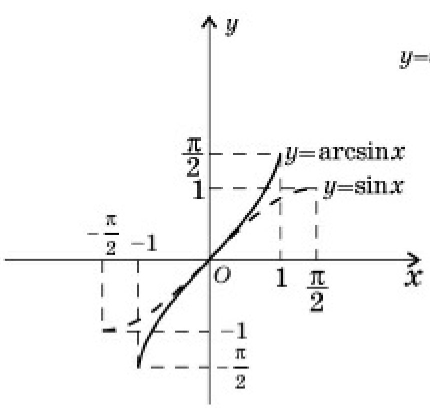
$y=\sin x$ функциясы сан өсінің барлық нүктелерінде анықталған және бұл аралықта функция бірсарынды емес. Сондықтан $\sin x$ функциясына кері функцияны $(-\infty; +\infty)$ жиынында анықтау мүмкін емес. Сол себепті, алдымен функцияның бірсарынды аралығын анықтап, осы аралықта оның кері функциясын табуға болады. $y=\sin x,\ x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ функциясы $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ кесіндісінде бірсарынды өспелі. Бұл берілген $y=\sin x,\ x\in(-\infty;+\infty)$ функциясының тарылымы болып табылады. Бұл функцияның көрсетілген аралықтағы кері функциясын $\arcsin x$ арқылы белгілейді.

Анықтама. $y=\sin x,\ x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ *функциясына кері функцияны арксинус функциясы деп атап,* $y=\arcsin x,\ x\in[-1;\ 1]$ *арқылы белгілейді.*

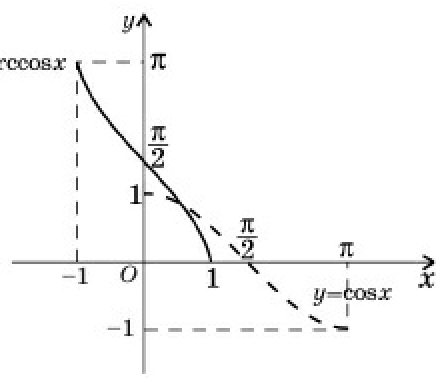
Сонымен, $\alpha=\arcsin a$ теңдігі $-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$ және $\sin\alpha=a$ қатынастары орындалатындығын білдіреді.

$y=\arcsin x$ функциясының анықталу облысы $-1\leqslant x\leqslant 1$, мәндер облысы $-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$. Функция анықталу облысында өспелі.

Әрбір $x\in[-1;1]$ үшін $\sin(\arcsin x)=x$ және әрбір $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ үшін $\arcsin(\sin x)=x$ теңдіктері орындалады. Бұл теңдіктер кері функцияның анықтамасынан шығады. $y=\arcsin x$ функциясының графигі 2.13-суретте көрсетілген.



2.13-сурет



2.14-сурет

2.3.2. $y=\arccos x$ функциясы

$y=\cos x$ функциясының бірсарындылық аралығы $0\leqslant x\leqslant\pi$ болғандықтан, осы аралықта $\cos x$ функциясына кері $y=\arccos x$ функциясын анықтауға болады.

Анықтама. $y=\cos x$, $x\in[0;\pi]$ *функциясына кері функцияны арккосинус функциясы деп атайды және оны* $y=\arccos x$, $x\in[-1;\ 1]$ *арқылы белгілейді.*

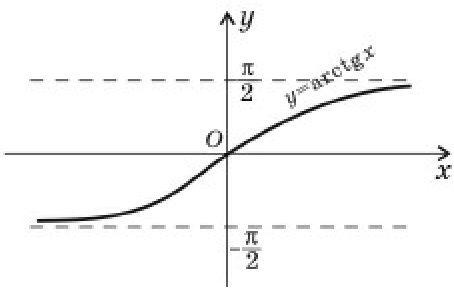
$\alpha=\arccos a$ теңдігі $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$ және $\cos\alpha=a$ қатынастарының орындалатындығын білдіреді. $y=\arccos x$ функциясының анықталу облысы $x\in[-1;\ 1]$, мәндер облысы $[0;\ \pi]$. Функция анықталу облысында бірсарынды кемімелі. Сонымен қатар $\cos(\arccos x)=x$, $x\in[-1;1]$, $\arccos(\cos x)=x$, $x\in[0;\pi]$ теңдіктері орындалады. $y=\arccos x$-тің графигі 2.14-суретте көрсетілген.

Енді $\arcsin x$ және $\arccos x$ функцияларын байланыстыратын тағы бір қасиетті қарастырайық. Әрбір $x\in[-1;\ 1]$ үшін $\alpha=\arcsin x$, $\beta=\arccos x$ деп белгілейік. Онда анықтама бойынша $-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\dfrac{\pi}{2}$, $0\leqslant\beta\leqslant\pi, 0\leqslant\beta$, $\sin\alpha=x$, $\cos\beta=x$ қатынастары орындалады. Бірінші теңсіздіктен $0\leqslant\dfrac{\pi}{2}-\alpha\leqslant\pi$ шығады. Онда $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha=x$. Сондықтан $\dfrac{\pi}{2}-\alpha=\arccos x=\beta$, яғни $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$. Сонымен, біз $\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$, $x\in[-1;1]$ формуласы орындалатынын дәлелдедік.

2.3.3. $y=\operatorname{arctg} x$ функциясы

$y=\operatorname{tg} x$ бірсарындылық аралықтарының бірі $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ болғандықтан, осы аралықтарда $\operatorname{tg} x$ функциясына кері функция анықталады. Оны $y=\operatorname{arctg} x$ арқылы белгілейді. Сонымен, $\alpha=\operatorname{arctg} a$ теңдігі $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ және $\operatorname{tg}\alpha=a$ қатынастары орындалатынын білдіреді.

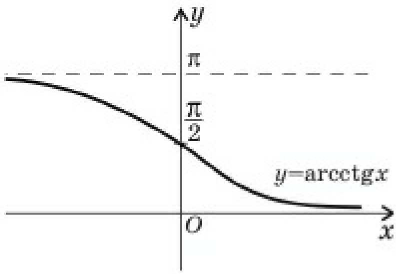
$y=\operatorname{arctg} x$ функциясы $(-\infty;+\infty)$ жиынында анықталған. Мәндер облысы $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ аралығы және анықталу облысында бірсарынды өспелі. $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)=x$, $x\in(-\infty;+\infty)$ және $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)=x$, $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ теңдіктері орындалады. $y=\operatorname{arctg} x$ функциясының графигі 2.15-суретте көрсетілген.



2.15-сурет

2.3.4. $y=\text{arcctg}x$ функциясы

$y=\text{ctg}x$ функциясы $(0;\ \pi)$ аралығында бірсарынды болғандықтан, осы аралықта $\text{ctg}x$-ке кері функция анықталады. Оны $y=\text{arcctg}x$ арқылы белгілейді: $\alpha=\text{arcctg}a \Leftrightarrow 0<\alpha<\pi$ және $\text{ctg}\alpha=a$.



2.16-сурет

Анықталу облысы $(-\infty;\ +\infty)$ жиыны. Өзгеру облысы $(0;\ \pi)$ аралығы. Функция анықталу облысында бірсарынды кемімелі. Сонымен қатар мынадай теңдіктер орындалады: $\text{ctg}(\text{arcctg}x)=x,\ x\in(-\infty;\ +\infty)$ және $\text{arcctg}(\text{ctg}x)=x,\ x\in(0;\ \pi)$. $y=\text{arcctg}x$ функциясының графигі 2.16-суретте көрсетілген.

Кері тригонометриялық функциялар үшін төмендегі формулалар орындалады:

$$\text{arctg}x+\text{arcctg}\,x=\frac{\pi}{2},\ x\in(-\infty;\ +\infty);\ \arcsin(-x)=-\arcsin x,\ x\in[-1;\ 1];$$

$$\arccos(-x)=\pi-\arccos x,\ x\in[-1;\ 1];\ \text{arctg}(-x)=-\text{arctg}x,\ x\in(-\infty;\ +\infty);$$

$$\text{arcctg}(-x)=\pi-\text{arcctg}x,\ x\in(-\infty;\ +\infty);$$

$$\arcsin a=\arccos\sqrt{1-a^2}=\text{arctg}\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}=\text{arcctg}\frac{\sqrt{1-a^2}}{a},\quad a\in(0;1).$$

Бұл теңдіктердің алғашқы үшеуінің орындалатынын кері тригонометриялық функциялардың анықтамалары мен келтіру формулаларын қолданып көрсету қиын емес. Енді соңғы қатынастың орындалатынын көрсетейік. Айталық, $\sin\alpha=a$ және $0<a<1$. Онда $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ болғандықтан, $\cos\alpha=\sqrt{1-a^2}$, $\text{tg}\alpha=\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$ және $\text{ctg}\alpha=\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$ болғандықтан, $\alpha=\arcsin a$, $\alpha=\arccos\sqrt{1-a^2}$, $\alpha=\text{arctg}\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$ және $\alpha=\text{arcctg}\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$ теңдіктерін аламыз. Дәлелдеу керегі де осы.

1-мысал. $\text{tg}\left(\frac{1}{2}\text{arcctg}3\right)$ өрнегінің мәнін табайық.

Белгілеу енгізейік: $\text{arcctg}3=\alpha$. Бұдан $\text{ctg}\alpha=3$. Онда

$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\text{ctg}^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+3^2}}=\frac{1}{\sqrt{10}};$$

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}} = \frac{3}{\sqrt{10}};\quad \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1}{\sqrt{10}+3} = \sqrt{10}-3.$$

Ж а у а б ы: $\sqrt{10}-3$.

2-мысал. $\sin\left(2\,\mathrm{arctg}\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\arccos\frac{3}{4}\right)$ өрнегінің мәнін табу керек.

$\alpha = \mathrm{arctg}\frac{1}{2}$, $\beta = \arccos\frac{3}{4}$ белгілеуін енгізсек,

$\sin\left(2\alpha - \frac{\beta}{2}\right) = \sin 2\alpha\cdot\cos\frac{\beta}{2} - \cos 2\alpha\cdot\sin\frac{\beta}{2}$. Ал $\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, $\cos\beta = \frac{3}{4}$ болса, $\sin2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha} = \frac{4}{5}$; $\cos2\alpha = \frac{1-\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha} = \frac{3}{5}$;

$\sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\beta}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$; $\cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\beta}{2}} = \frac{\sqrt{14}}{4}$ болғандықтан,

$$\sin\left(2\mathrm{arctg}\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\arccos\frac{3}{4}\right) = \frac{4}{5}\cdot\frac{\sqrt{14}}{4} - \frac{3}{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{20}\left(4\sqrt{14} - 3\sqrt{2}\right).$$

3-мысал. $y = \arcsin\frac{2x}{x-1}$ функциясының анықталу облысын табу керек.

Анықтама бойынша $-1 \leqslant \frac{2x}{x-1} \leqslant 1$. Осыдан $-1 \leqslant x \leqslant \frac{1}{3}$.

Ж а у а б ы: $\left[-1; \frac{1}{3}\right]$.

4-мысал. $y = \sqrt{\pi - 4\arccos\frac{x}{2}}$ функциясының анықталу облысын табу керек.

Бұл функцияның анықталу облысы

$$\begin{cases} -1 \leqslant \dfrac{x}{2} \leqslant 1, \\ \pi - 4\arccos\dfrac{x}{2} \geqslant 0. \end{cases}$$

Осыдан

$$\begin{cases} |x| \leqslant 2, \\ \arccos\dfrac{x}{2} \leqslant \dfrac{\pi}{4}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \leqslant 2, \\ \arccos\dfrac{x}{2} \leqslant \arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

$y=\arccos x$ функциясы кемімелі болғандықтан,

$$\begin{cases} |x| \leqslant 2, \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} \leqslant \dfrac{x}{2} \leqslant 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x| \leqslant 2, \\ \sqrt{2} \leqslant x \leqslant 2, \end{cases} \Rightarrow \sqrt{2} \leqslant x \leqslant 2.$$

Ж а у а б ы : $[\sqrt{2};\ 2]$.

1. Неліктен тригонометриялық функциялардың кері функцияларын анықтау үшін оның бірсарындылық аралықтарындағы тарылымын алады?
2. Кері тригонометриялық функциялардың әрқайсысының анықталу облысы мен мәндер облысын жазыңдар.
3. Кері тригонометриялық функциялар арасындағы байланыстарды өрнектейтін формулаларды жазыңдар.

ЕСЕПТЕР

A

2.30. Есептеңдер:

1) $\sin(2\arcsin 0,75)$;
2) $\cos(\arcsin(-0,5))$;
3) $\arcsin(\sin 2)$;
4) $\mathrm{tg}\left(2\arcsin\dfrac{2}{3}\right)$;
5) $\sin(\mathrm{arctg}2 + \mathrm{arctg}3)$;
6) $\cos\left(\arcsin\dfrac{1}{3} - \arccos\dfrac{2}{3}\right)$.

2.31. Өрнектің мәнін анықтаңдар:

1) $\arcsin(\sin 257^\circ)$;
2) $\mathrm{arcctg}\left(\mathrm{ctg}\left(-\dfrac{\pi}{11}\right)\right)$;
3) $\sin\left(2\mathrm{arctg}\dfrac{1}{3}\right) + \cos\left(\mathrm{arctg}2\sqrt{3}\right)$;
4) $\mathrm{tg}\left(5\mathrm{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{3} - \dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

B

2.32. Теңдіктің орындалатынын тексеріңдер:

1) $\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\pi}{2}$;
2) $\arcsin\dfrac{4}{5} + \arccos\dfrac{2}{\sqrt{5}} = \mathrm{arctg}\dfrac{11}{2}$;
3) $\mathrm{arctg}1 + \mathrm{arctg}2 = \pi - \mathrm{arctg}3$;
4) $\arccos\sqrt{\dfrac{2}{3}} - \arccos\dfrac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\pi}{6}$.

2.33. $\mathrm{arctg}\alpha+\mathrm{arctg}\beta+\mathrm{arctg}\gamma=\pi$ болса, $\alpha+\beta+\gamma=\alpha\beta\gamma$ теңдігінің орындалатынын дәлелдеңдер.

2.34. Теңдіктің орындалатынын тексеріңдер:

1) $\mathrm{arctg}\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}-\mathrm{arctg}\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\pi}{4}$; 2) $\mathrm{arctg}3-\arcsin\dfrac{\sqrt{5}}{5}=\dfrac{\pi}{4}$;

3) $\arcsin\dfrac{5}{13}+\arcsin\dfrac{12}{13}=\dfrac{\pi}{2}$;

4) $\dfrac{\pi}{2}+\arcsin\dfrac{77}{85}=\arcsin\dfrac{8}{17}+\arccos\left(-\dfrac{3}{5}\right)$.

C

2.35. $x\in\left[\dfrac{1}{2};1\right]$ үшін $\arccos x+\arccos\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{3-3x^2}\right)=\dfrac{\pi}{3}$ теңдігі орындала ма?

2.36. $\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+\dfrac{\sqrt{2-2x^2}}{2}\right)-\arcsin x=\dfrac{\pi}{4}$ теңдігі орындала ма?

2.37. Функцияның графигін салыңдар:

1) $y=3\arcsin\left(\dfrac{x}{2}+1\right)$; 3) $y=\dfrac{1}{2}\mathrm{arctg}(x-2)+3$;

2) $y=-\dfrac{1}{2}\arccos(1-3x)$; 4) $y=2\mathrm{arcctg}\left(\dfrac{1}{2}x+1\right)-2$.

2.38. Функцияның графигін салыңдар:

1) $y=\left|\arcsin\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right|$; 3) $y=|\mathrm{arctg}2x+1|$;

2) $y=\arcsin(|x|-1)$; 4) $y=\mathrm{arcctg}|1-x|$.

Қайталауға арналған жаттығулар

2.39. Егер $\sin x=\dfrac{5}{13}$; $x\in\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$ болса, онда $\mathrm{tg}x$ және $\mathrm{ctg}x$ мәндерін табыңдар.

2.40. Теңсіздікті шешіңдер:
1) $2x^2-5x+30\leqslant 0$; 2) $4x^2+x+1>0$.

2.41. $3x+0,6y=3,5$ түзуі $y=2x-8$ және $3y+7x=2$ түзулерінің қиылысу нүктесі арқылы өте ме?

3-бөлім. ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ ЖҮЙЕСІ

3.1. Тригонометриялық теңдеулер

3.1.1. Қарапайым тригонометриялық теңдеулерді шешу

Анықтама. *Құрамында белгісіз айнымалыға тәуелді тригонометриялық өрнектері бар теңдеулерді* **тригонометриялық теңдеулер** деп атайды.

Тригонометриялық теңдеулерді мынадай қарапайым тригонометриялық теңдеулерге келтіріп алып шешеді:

$\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$.

Енді осы теңдеулерді шешу тәсілдерін қарастырайық.

1. $\sin x = a$, $|a| \leqslant 1$ теңдеуі. Егер $|a| < 1$ болса, бұл теңдеудің екі шешімі бар: $\alpha+2k\pi$ және $\beta+2k\pi$, $k\in Z$ (3.1-сурет). Ал $\beta=\pi-\alpha$ болғандықтан, бұл шешімдерді сәйкесінше $\alpha+2k\pi$ және $-\alpha+(2k+1)\pi$ немесе оларды біріктіріп, $(-1)^k\alpha + k\pi$, $k \in Z$ түрінде жазуға болады. Мұнда $\alpha=\arcsin a$ болатынын ескерсек, берілген теңдеудің шешімін

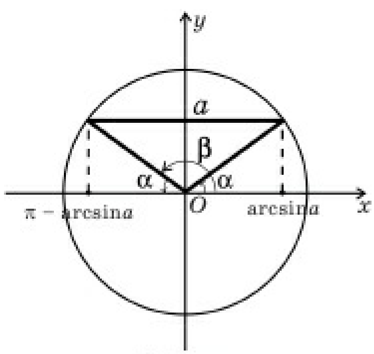
$$x = (-1)^k \arcsin a + k\pi,\ k \in Z \tag{1}$$

түрінде жазамыз. Егер $|a| = 1$ немесе $a=0$ болса, (1) формуладан төмендегідей дербес жағдайлардағы формулаларды аламыз:

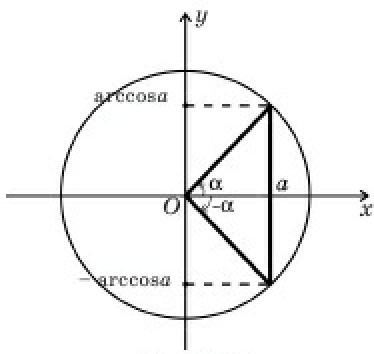
$$\sin x = 1,\ \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in Z; \tag{2}$$

$$\sin x = 0,\ \Rightarrow x = k\pi,\ k \in Z;$$

$$\sin x = -1,\ \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in Z.$$



3.1-сурет



3.2-сурет

Егер $|a| > 1$ болса, $\sin x = a$ теңдігінің мағынасы жоқ, себебі $|\sin x| \leqslant 1$.

2. $\cos x = a$, $|a| \leqslant 1$ теңдеуі. Оның шешімдері

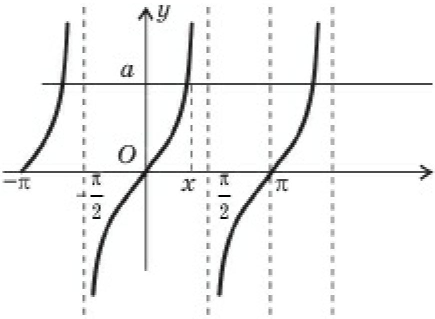
$$x = \pm\arccos a + 2k\pi,\ k \in Z \tag{3}$$

түрінде жазылады. Мұны 3.2-суретте көрсетілгендей етіп дәлелдеуге болады. Формуланың дербес жағдайлары ($|a| = 1$, $a = 0$):

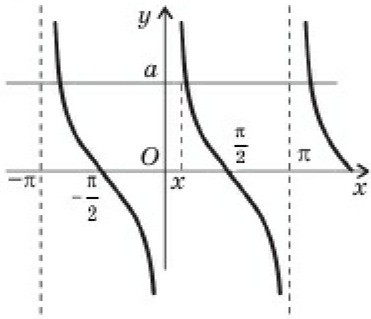
$$\cos x = 1,\ \Rightarrow x = 2k\pi,\ k \in Z; \tag{4}$$

$$\cos x = 0,\ \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z;$$

$$\cos x = -1,\ \Rightarrow x = (2k+1)\pi,\ k \in Z.$$



3.3-сурет



3.4-сурет

3. $\mathrm{tg}x = a$, $a \in (-\infty; +\infty)$ теңдеуінің шешімдері (3.3-сурет):

$$x = \mathrm{arctg}a + k\pi,\ k \in Z. \tag{5}$$

4. $\mathrm{ctg}x = a$, $a \in (-\infty; +\infty)$ теңдеуінің шешімдері (3.4-сурет):

$$x = \mathrm{arcctg}a + k\pi,\ k \in Z. \tag{6}$$

$0 < a < 1$ болғанда мына формулаларды қолданған тиімді:

$$\sin x = -a \Rightarrow x = (-1)^{k+1}\arcsin a + k\pi,\ k \in Z,$$

$$\cos x = -a \Rightarrow x = \pm(\pi - \arccos a) + 2\pi k,\ k \in Z.$$

Бұл формулалардың дұрыстығын өздерің дәлелдеңдер.

1-мысал. $2\sin x = \sqrt{3}$ теңдеуін шешу қажет.

Берілген теңдеуді 2 санына бөліп, $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ түрінде жазамыз. (1) формула бойынша $x = (-1)^k \arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2} + k\pi,\ k \in Z$. Енді $\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\pi}{3}$ екенін ескерсек, берілген теңдеудің шешімі $x = (-1)^k\dfrac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in Z$ түрінде жазылады.

2-мысал: $\sqrt{2}\cos x = 1$ теңдеуін шешу керек.

Берілген теңдеуді $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ санына көбейтіп, былай түрлендіреміз: $\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Енді (3) формуланы қолданамыз:

$x = \pm\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2} + 2k\pi,\ k\in z$. Бұдан $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k\in z$.

3-мысал. $3\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$ теңдеуін шешелік.

Берілген теңдеуді $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ түрінде жазамыз. $\operatorname{arcctg}\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{\pi}{3}$ болғандықтан, (6) формула бойынша берілген теңдеудің шешімі

$x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi,\ k\in z$.

4-мысал. $2\operatorname{tg} x = 1$ теңдеуін шешу керек.

Берілген теңдеу $\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{2}$ түрінде жазылады. Осыдан (5) формула бойынша $x = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} + k\pi,\ k\in z$. Мұнда $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}$ бұрышын π саны арқылы өрнектеу өте күрделі. Сондықтан, есептің жауабы көрсетілген түрде қалады.

3.1.2. Тригонометриялық теңдеулерді шешу тәсілдері

Жалпы, тригонометриялық теңдеулерді түрлендірулер арқылы қарапайым тригонометриялық теңдеулерге келтіріп шешеді. Тригонометриялық теңдеулерді қарапайым теңдеулерге келтірудің жиі қолданылатын бірнеше тәсілі бар. Осы тәсілдерге тоқталайық.

1. $\sin f(x)=a$, $f(\sin x)=0$ *түріндегі теңдеулер*. Мұнда

$$\sin f(x) = a,\ \ \cos f(x) = a,\ \ \operatorname{tg} f(x) = a,\ \ \operatorname{ctg} f(x) = a$$

теңдеулері мен

$$f(\sin x) = 0,\ \ f(\cos x) = 0,\ \ f(\operatorname{tg} x) = 0,\ \ f(\operatorname{ctg} x) = 0$$

теңдеулерін шешу әдістерін қарастырамыз. Бұл теңдеулердің барлығы да белгілеулер арқылы қарапайым тригонометриялық теңдеулерге оңай келтіріледі. Мысалы, $\sin f(x)=a$, $|a|<1$ теңдеуінде $f(x)=t$ деп белгілесек, онда $\sin t=a$ теңдеуін аламыз. Осыдан $t=(-1)^k\arcsin a+k\pi$, $k\in Z$ болғандықтан, алғашқы теңдеудің шешуі $f(x)= (-1)^k\arcsin a+k\pi$, $k\in Z$, $|a|<1$ теңдеуін шешуге келіп тіреледі.

Осы сияқты, $f(\sin x)=0$ теңдеуінде $\sin x=t$ белгілеуін енгізу арқылы оны $f(t)=0$ түріне келтіреміз. Егер $f(t)$ n-дәрежелі көпмүше болса және бұл көпмүшенің түбірлері $t_1, t_2, \ldots, t_n$ болса, онда берілген теңдеу $\sin x=t_1$, $\sin x=t_2$, ..., $\sin x=t_m$ (мұндағы $m\leqslant n$) теңдеулері жиынтығымен мәндес. Соңғы теңдеулердің әрқайсысының шешімдері (егер бар болса) берілген теңдеудің шешімі болады.

5-мысал. $\cos\left(x^2 - 2\right) = \dfrac{1}{2}$ теңдеуінің нақты шешімдерін табу қажет.

Жоғарыда айтылғандай, бұл теңдеудің шешуі

$$x^2 - 2 = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in Z \text{ немесе } x^2 = 2 \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in Z$$

теңдеуін шешуге келіп тіреледі. $2 \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi \geqslant 0$ шарты k=0, 1, 2, ... болғанда ғана орындалады. Онда берілген теңдеудің шешімдері $x = \pm\sqrt{2 \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi}, k = 0, 1, 2...$ түрінде жазылады.

Жауабы: $\pm\sqrt{2 \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi},\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \dots$.

6-мысал. $6\cos^2 x + \cos 3x = \cos x$ теңдеуін шешейік.

$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ формуласын қолданып, берілген теңдеуді $4\cos^3 x + 6\cos^2 x - 4\cos x = 0$ немесе $2\cos^3 x + 3\cos^2 x - 2\cos x = 0$ түріне келтіреміз. Енді $\cos x = t$, $|t| \leqslant 1$ белгілеуін енгізіп, $2t^3+3t^2-2t=0$ теңдеуін аламыз. Оның шешімдері $t_1 = 0$, $t_2 = -2$, $t_3 = \frac{1}{2}$. $|t_2| = |-2| > 1$ болғандықтан, $\cos x = -2$ теңдеуінің мағынасы болмайды. Сондықтан берілген теңдеу $\cos x = 0$ және $\cos x = \frac{1}{2}$ қарапайым теңдеулерін шешуге келіп тіреледі. Осыдан $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$; $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in Z$.

2. Біртекті теңдеулер.

$$a_0 \cdot \sin^n x + a_1 \sin^{n-1} x \cdot \cos x + \ldots + a_n \cdot \cos^n x = 0$$

түріндегі теңдеулерді $\sin x$ пен $\cos x$-ке қатысты ***біртекті теңдеулер*** деп атайды. Мұнда a_0, a_1, ..., a_n — берілген нақты сандар және әр қосылғыштағы $\sin x$ пен $\cos x$-тің дәрежелерінің қосындысы n-ге тең. Бұл теңдеуді, $a_0 \neq 0$ болған жағдайда $\cos x \neq 0$ болатынын ескеріп, $\cos^n x$-ке бөлу арқылы $a_0 \mathrm{tg}^n x + a_1 \mathrm{tg}^{n-1} x + \ldots + a_n = 0$ теңдеуіне келтіреміз. $a_0 = 0$, $a_n \neq 0$ болған жағдайда бұл теңдеуді $\sin x \neq 0$-ге бөлу керек.

7-мысал. $3\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 8\cos^2 x = 2$ теңдеуін шешейік.

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ тепе-теңдігін қолданып, берілген теңдеуді $3\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 8\cos^2 x = 2(\sin^2 x + \cos^2 x)$ немесе $\sin^2 x - 5\sin x \times \cos x + 6\cos^2 x = 0$ түріне келтіреміз. Енді бұл теңдеуді $\cos^2 x$-ке бөліп ($\cos x \neq 0$), $\mathrm{tg}^2 x - 5\mathrm{tg} x + 6 = 0$ түрінде жазамыз. Осыдан $\mathrm{tg} x = t$ деп алсақ, $t^2 - 5t + 6 = 0$ квадрат теңдеуі шығады.

Оның түбірлері $t_1 = 2$, $t_2 = 3$ болғандықтан, $\mathrm{tg}x = 2$ және $\mathrm{tg}x = 3$ қарапайым тригонометриялық теңдеулерін шешу керек. (5) формулаға сәйкес: $x = \mathrm{arctg}2 + k\pi$, $x = \mathrm{arctg}3 + n\pi$, $n \in Z$.

3. Қосымша бұрыш енгізу тәсілі.

$$a\sin x + b\cos x = c \qquad (7)$$

түріндегі теңдеулерді шешудің ең тиімді тәсілі — қосымша бұрыш енгізу әдісі. Егер $a^2 + b^2 \neq 0$ болса, (7) теңдеуді $\sqrt{a^2+b^2}$ санына бөлеміз:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Мұнда $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$ болғандықтан, φ бұрышы табылып, $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ теңдіктері орындалады.

Онда берілген теңдеуді

$$\cos\varphi \sin x + \sin\varphi \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

немесе

$$\sin(x+\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad (8)$$

түрінде жазамыз. Егер $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leqslant 1$ немесе $a^2 + b^2 \geqslant c^2$ болса ғана, (8) теңдеудің шешімдері болады және ол

$$x = -\varphi + (-1)^k \arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + k\pi,\ k \in Z$$

түрінде жазылады. Мұнда φ-дің орнына $\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ мәндерінің кез келгенін алуға болады және $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ белгілеулерінің орнына

$$\cos\psi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ және } \sin\psi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

белгілеулерін де қолдануға болады.

8-мысал. $\sin 8x - \cos 6x = \sqrt{3}(\sin 6x + \cos 8x)$ теңдеуін шешейік.

Берілген теңдеуді $\sin 8x - \sqrt{3}\cos 8x = \sqrt{3}\sin 6x + \cos 6x$ немесе

$$\frac{1}{2}\sin 8x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 8x = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 6x + \frac{1}{2}\cos 6x \qquad (8)$$

түрінде жазамыз.

Енді (9) теңдеудің әр бөлігіне сәйкес келетін қосымша φ бұрышының мәнін анықталық. Көрнекілік үшін мына кестені қарастырайық:

Өрнек	α	b	$\sqrt{a^2+b^2}$	$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$	$\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$	Қосымша бұрыш
$\sin 8x - \sqrt{3}\cos 8x$	1	$-\sqrt{3}$	2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\varphi = -\frac{\pi}{3}$
$\sqrt{3}\sin 6x + \cos 6x$	$\sqrt{3}$	1	2	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\varphi = \frac{\pi}{6}$

Осыдан $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ және $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ теңдіктері орындалатындықтан, (9) теңдеуді

$$\sin 8x \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \cos 8x \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \sin 6x \cdot \cos\frac{\pi}{6} + \cos 6x \cdot \sin\frac{\pi}{6}$$

немесе

$$\sin\left(8x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(6x + \frac{\pi}{6}\right)$$

түріне келтіреміз. (1) формуладан

$$8x - \frac{\pi}{3} = (-1)^k \arcsin\left(\sin\left(6x + \frac{\pi}{6}\right)\right) + k\pi, \quad k \in Z.$$

Осыдан $\arcsin\left(\sin\left(6x + \frac{\pi}{6}\right)\right) = 6x + \frac{\pi}{6}$. Егер $k = 2m$, $m \in Z$ болса,

$8x - \frac{\pi}{3} = 6x + \frac{\pi}{6} + 2m\pi$ немесе $2x = \frac{\pi}{2} + 2m\pi$, яғни $x = \frac{\pi}{4} + m\pi$, $m \in Z$.

Егер $k = 2m+1$, $m \in Z$ болса, $8x - \frac{\pi}{3} = -6x - \frac{\pi}{6} + \pi + 2m\pi$, $m \in Z$ теңдеуінен $14x = \frac{7\pi}{6} + 2m\pi$, $m \in Z$, яғни $x = \frac{\pi}{12} + \frac{m\pi}{7}$, $m \in Z$ аламыз.

Жауабы: $\frac{\pi}{4} + 2m\pi$, $\frac{\pi}{12} + \frac{m\pi}{7}$, $m \in Z$.

4. Белгісізді алмастыру тәсілі.

Егер берілген тригонометриялық теңдеуді түрлендіріп, R (sin$x$, cos$x$, tg$x$, ctg$x$)=0 түріне келтірейік, мұндағы R — рационал функция. $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ алмастыруын қолданамыз:

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2};\qquad \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$$\operatorname{tg}x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1-t^2};\qquad \operatorname{ctg}x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{2t}.$$

9-мысал. $(\cos x-\sin x)(2\operatorname{tg}x+\cos^{-1}x)+2=0$ теңдеуін шешейік.

$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ деп алсақ, берілген теңдеуді

$$\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}-\frac{2t}{1+t^2}\right)\cdot\left(\frac{4t}{1-t^2}+\frac{1+t^2}{1-t^2}\right)+2=0 \quad \text{немесе}$$

$$\frac{3t^4+6t^3+8t^2-2t-3}{(t^2+1)(1-t^2)}=0$$

теңдеуімен алмастырамыз. Бөлшектің алымын топтау тәсілімен жіктейміз:

$$3t^4+6t^3+8t^2-2t-3=(3t^4-t^2)+(6t^3-2t)+9t^2-3=(3t^2-1)(t^3+2t+3).$$

Шыққан теңдеу $3t^2-1=0$, $t^2+2t+3=0$, $t\neq\pm1$ теңдеулер жиынтығына эквивалентті. Екінші теңдеудің нақты түбірлері жоқ, ал $3t^2-1$ теңдеуінің екі нақты түбірі бар: $t_1=\frac{1}{\sqrt3}$, $t_2=-\frac{1}{\sqrt3}$. Сонымен берілген теңдеуді $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1}{\sqrt3}$ және $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=-\frac{1}{\sqrt3}$ теңдеулерін шешуге келтірдік. Бұл теңдеулердің шешімдерін біріктіріп, $x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$, $k\in Z$ түрінде жазуға болады. Бұл мәндер берілген теңдеудің анықталу облысында жатады. Теңдеудің ММО cos$x\neq0$, яғни $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$ теңсіздігімен анықталады. Табылған шешімдер бұл теңсіздікті қанағаттандырады. Осындай жағдайларда берілген теңдеудің бөгде түбірлері пайда болуы мүмкін. Сол себепті есептің соңында тиісті тексеру жұмыстарын орындап отыру қажет.

Жауабы: $\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$, $k\in Z$.

Егер R рационал өрнек болса,

$$R(\sin x\pm\cos x;\ \sin x\cos x)=0 \qquad (9)$$

түріндегі теңдеулерді $\sin x \pm \cos x = t$ белгілеуінің көмегімен шешкен тиімді. $t^2 = (\sin x \pm \cos x)^2 = 1 \pm 2\sin x \cos x$ теңдігінен

$$\sin x \cdot \cos x = \pm \frac{t^2 - 1}{2}.$$

(9) теңдеуді $R\left(t;\ \pm\frac{t^2-1}{2}\right) = 0$ рационал теңдеуімен алмастырдық.

10-мысал. $\sin x + \cos x - 2\sqrt{2}\sin x \cos x = 0$ теңдеуін шешейік.

$\sin x + \cos x = t$ белгілеуін енгізіп, берілген теңдеуді $\sqrt{2}t^2 - t - \sqrt{2} = 0$ түріне келтіреміз. Оның түбірлері: $t_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $t_2 = \sqrt{2}$.

Онда $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ және $\sin x + \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ теңдеулерін шешу қажет. 3-пунктте көрсетілген қосымша бұрыштар енгізу әдісімен соңғы теңдеулердің шешімдерін анықтау қиын емес.

Ж а у а б ы . $\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in Z;\ (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z.$

Тригонометриялық теңдеулердің дәрежелерін төмендету әдісі жиі қолданылады. Мұндай жағдайларда $\cos 2x = t$ белгілеуін енгізеді.

11-мысал. $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{4}\cos^2 2x$ теңдеуін шешейік.

Қос бұрыш формулаларын қолданып, берілген теңдеуді $\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^3 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^3 = \frac{7}{4}\cos^2 2x$ түрінде жазамыз. Енді $\cos 2x = t$ белгілеуін енгізіп, $t^2 = \frac{1}{4}$ теңдеуін аламыз. Онда $t_1 = -\frac{1}{2}$; $t_2 = \frac{1}{2}$.

Осыдан

$$\cos 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in Z$$

және

$$\cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in Z.$$

Ж а у а б ы : $\pm\frac{\pi}{3} + k\pi;\ \pm\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in Z.$

5. Көбейткіштерге жіктеу тәсілі.

12-мысал. $2\sin x \cos 2x - 1 + 2\cos 2x - \sin x = 0$ теңдеуін шешейік.

Теңдеудің сол жақ бөлігін топтап, оны былай жазамыз: $2\cos 2x(\sin x + 1) - (\sin x + 1) = 0$ немесе $(2\cos 2x - 1)(\sin x + 1) = 0$. Бұл теңдеу екі теңдеуге жіктеледі: $\sin x + 1 = 0$ және $2\cos 2x - 1 = 0$.

Ж а у а б ы : $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ \pm\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in Z.$

6. Теңдеудің оң жақ және сол жақ бөліктерін бағалау тәсілі. Алдын ала теңдеудің оң жақ және сол жақ бөліктерін бағалау арқылы оның түбірлері бар болатынын немесе болмайтынын анықтай аламыз. Осыған мысалдар қарастырайық.

13-мысал. $2\sin^4 x + \cos^5 x = 3$ теңдеуін шешу керек.

$|\sin x| \leqslant 1$ және $|\cos x| \leqslant 1$. Сондықтан

$$|2\sin^4 x + \cos^5 x| \leqslant 2|\sin^4 x| + |\cos^5 x|$$

болса, $2\sin^4 x + \cos^5 x = 3 \Leftrightarrow |\sin x| = 1$ және $\cos x = 1$ жағдайында ғана теңдік орындалады. Ал $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Ендеше, $|\sin x| = 1$, $\cos x = 1$ теңдіктер жүйесі орындалатындай x-тің мәнін табу мүмкін емес. Сондықтан берілген теңдеудің шешімі жоқ.

Жауабы: $\varnothing$.

14-мысал. a-ның қандай мәндерінде $\sin^4 x + \cos^6 x = a$ теңдеуінің шешімдері болмайды?

$\sin^4 x \geqslant 0$, $\cos^6 x \geqslant 0$ болғандықтан, $a<0$ мәндерінде теңдеудің шешімдері болмайтыны түсінікті.

Енді $a>0$ болсын. $\sin^4 x \leqslant \sin^2 x$ және $\cos^6 x \leqslant \cos^2 x$ болғандықтан, $\sin^4 x + \cos^6 x \leqslant \sin^2 x + \cos^2 x = 1$ теңсіздігін аламыз. Онда $a>1$ мәндерінде де теңдеудің шешімдері жоқ. $a=0$ болса, $\sin^4 x + \cos^6 x = 0$ болатындай x-тің мәні табылмайды.

Жауабы: $a \in (-\infty;\ 0] \cup (1;\ +\infty)$.

1. Қарапайым тригонометриялық теңдеулерді шешу формулаларын жазыңдар және оларды сызбаларын пайдаланып негіздеңдер.
2. $\sin x=1$, $\sin x=-1$, $\sin x=0$, $\cos x=1$, $\cos x=-1$, $\cos x=0$ түріндегі дербес теңдеулердің шешімдерін жазыңдар.
3. Тригонометриялық теңдеулерді шешудің қандай әдістерін білесіңдер? Бұл әдістерді қолданудың негізгі себептерін атаңдар.

ЕСЕПТЕР

А

3.1.–3.6-есептерде көрсетілген теңдеулерді шешіңдер.

3.1. 1) $\cos 2x = \dfrac{1}{2}$; 3) $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = \sqrt{3}$;

2) $\sin\dfrac{x}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\operatorname{ctg}3x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

3.2. 1) $\sin 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\operatorname{tg}2x = -1$;

2) $\cos\frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$; 4) $\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = -\sqrt{3}$.

3.3. 1) $2\sin x - 1 = 0$; 3) $3\operatorname{tg}x - \sqrt{3} = 0$;

2) $2\cos x + \sqrt{3} = 0$; 4) $\sqrt{3}\operatorname{ctg}x + 1 = 0$.

3.4. 1) $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0,5$; 3) $\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$;

2) $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{3}$.

3.5. 1) $4\sin x + 3 = 0$; 3) $\operatorname{tg}3x + 10 = 0$;

2) $7\cos x - 2 = 0$; 4) $12\operatorname{ctg}2x = 5$.

3.6. 1) $\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$; 3) $\sqrt{3}\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 1$;

2) $2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$; 4) $\operatorname{ctg}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$.

B

3.7. Теңдеудің көрсетілген аралықта жататын шешімдерін табыңдар:

1) $2\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2} = 0$, $(0°, 90°)$; 3) $\operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$, $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$;

2) $2\cos\frac{x}{2} - \sqrt{3} = 0$, $(0°, 90°)$; 4) $3\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$, $(-\pi;\ 0)$.

Теңдеуді шешіңдер (**3.8 —3.11**):

3.8. 1) $2\sin x + 3\cos x = 0$; 3) $\sin^2 3x = \cos^2 3x$;

2) $\sin^2 2x = \frac{1}{4}$; 4) $\sin\frac{x}{2} + \cos x = 1$.

3.9. 1) $2\cos\frac{x}{2} = 1 + \cos x$; 3) $\frac{\sin 3x}{\sin x} = 0$;

2) $2\sin^2 2x = 3\cos 2x$; 4) $\frac{\cos x}{\cos 3x} = 0$.

3.10. 1) $2\sin^2 x + \sin x = 1$; 3) $4\sin^4 x + \cos 4x = 1 + 12\cos^4 x$;

2) $\operatorname{tg}^3 x + 2\operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{tg}x = 0$; 4) $\cos^2 x = \sin x - 1$.

3.11. $\sqrt{\frac{1}{16}+\cos^4 x-\frac{1}{2}\cos^2 x}+\sqrt{\frac{9}{16}+\cos^4 x-\frac{3}{2}\cos^2 x}=\frac{1}{2}$.

3.12.–3.14-есептерде теңдеулерді біртекті теңдеулерге келтіріп шешіңдер.

3.12. 1) $2\sin x\cos x+5\cos^2 x=4$;

2) $\sin 2x-3\cos^2 x=4$;

3) $\sin^4 x-\cos^4 x=0,5$;

4) $4\cos^2\frac{x}{2}+0,5\sin x+3\sin^2\frac{x}{2}=3$.

3.13. 1) $3\cos^3 x-7\cos^2 x\sin x+4\sin^3 x=0$;

2) $\sin^4 x-\cos^4 x=\sin 2x-\frac{1}{2}$;

3) $\cos^6 x+\sin^6 x-\cos^2 2x=\frac{1}{16}$;

4) $\sin^4 x+\cos^4 x=\cos^2 2x$.

3.14. 1) $2\sin^3 x+2\cos x\sin^2 x-\sin x\cos^2 x-\cos^3 x=0$;

2) $2\sin^3 x-\sin^2 x\cos x+2\sin x\cos^2 x-\cos^3 x=0$.

3.15. $\sin^6 x+\cos^6 x=a\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)$ теңдеуін a параметрінің барлық нақты мәндері үшін шешіңдер.

3.16–3.17-есептерде теңдеулерді қосымша бұрыштар енгізу тәсілімен шешіңдер.

3.16. 1) $4\sin 3x+3\cos 3x=5,2$;

2) $3\sin x-4\cos x=5$;

3) $2\sin 7x+\sqrt{3}\cos 3x+\sin 3x=0$;

4) $3\sin x+4\cos x+5\sin 3x=0$.

3.17. 1) $(\sin 7x+\cos 7x)^2=2\sin^2 11x$;

2) $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin 7x$;

3) $(\sin 3x+\sin 5x)^2=(\cos 3x+\cos 5x)^2$;

4) $\sin 10x+\cos 10x=\sqrt{2}\sin 15x$.

3.18. $\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{2}\cos 3x=0$ теңдеуінің $\left(\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right)$ аралығында жататын барлық түбірлерін табыңдар.

3.19–3.20-есептерде теңдеулерді белгісізді алмастыру тәсілімен шешіңдер.

3.19. 1) $\sin x + \operatorname{ctg}\dfrac{x}{2} = 2$;

2) $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = 5\operatorname{tg}2x + 7$;

3) $3\sin 4x = (\cos 2x - 1)\operatorname{tg}x$;

4) $(1+\cos x)\sqrt{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} - 2 + \sin x} = 2\cos x$.

3.20. 1) $\sin x + \cos x + \sin x\cos x = 1$;

2) $\sin x + \cos x - 2\sin x\cos x = 1$;

3) $5(\sin x + \cos x) + \sin 3x - \cos 3x = 2\sqrt{2}(2 + \sin 2x)$;

4) $\sin x + \cos x - 2\sqrt{2}\sin x\cos x = 0$.

C

3.21. a-ның әрбір нақты мәні үшін теңдеуді шешіңдер:

$$\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin x\cos x} = a.$$

3.22. b-ның қандай мәндерінде $\sin 2x + 2b\sqrt{2}(\sin x - \cos x) + 1 - 4b = 0$ теңдеуінің шешімдері бар? Осы шешімдерді табыңдар.

3.23. a-ның қандай мәндерінде $\cos^2 x\cos 2x + a(\cos^4 x - \sin^4 x) = (2a+1)^2$ теңдеуінің шешімдері бар? Осы шешімдерді табыңдар.

3.24. a-ның қандай мәндерінде $\sin 2x - 2a\sqrt{2}(\sin x + \cos x) + 1 - 6a^2 = 0$ теңдеуінің шешімдері бар? Осы шешімдерді табыңдар.

3.25–3.26-есептерде көрсетілген теңдеулерді шешіңдер.

3.25. 1) $\sin^2 6x + 8\sin^2 3x = 0$;

2) $\sin^2 x + \cos^2 2x = \sin^2 3x + \cos^2 4x$;

3) $\sin^8 x + \cos^8 x = \dfrac{17}{32}$; 4) $\cos 2x + 4\sin^4 x = 8\cos^6 x$.

3.26. 1) $\sin^2 3x + \sin^2 4x = \sin^2 5x + \sin^2 6x$;

2) $\cos^2\dfrac{x}{2} + \cos^2\dfrac{3x}{2} = \sin^2 2x + \sin^2 4x$;

3) $2 + \cos 4x = 5\cos 2x + 8\sin^6 x$; 4) $8\sin^2 x + 6\cos^2 x = 13\sin 2x$.

3.27–3.28-есептерде теңдеуді көбейткіштерге жіктеу тәсілімен шешіңдер.

3.27. 1) $\sin(ax+b)=\sin(cx+d)$; 2) $\sin(ax+b)=\cos(cx+d)$;
3) $\cos 3x+\sin 5x=0$; 4) $\sin x\cos 5x=\sin 9x\cdot\cos 3x$;
5) $\cos^3 x+\sin^3 x=\cos 2x$;
6) $\sin ax\sin bx=\cos cx\cdot\cos dx$, $a-b=c-d$.

3.28. 1) $(\cos 2x-\cos 4x)^2=4+\cos^2 3x$; 2) $\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x=3$.

3.29. $a>1$ болғанда $\sin^4 x+\cos^6 x=a$ теңдеуінің шешімі болмайтынын дәлелдеңдер.

3.30. $\sin 5x\cdot\sin 7x=1$ теңдеуінің шешімі болмайтынын көрсетіңдер.

3.31. a-ның қандай мәндерінде $\sin^4 x+\cos^4 x=a$ теңдеуінің шешімдері бар? Осы шешімдерді табыңдар.

АРАЛАС ЕСЕПТЕР

B

3.32–3.36-есептерде көрсетілген теңдеулерді шешіңдер.

3.32. 1) $2\cos 2x=\sqrt{6}(\cos x-\sin x)$; 3) $\operatorname{tg}x+\sin 2x=\dfrac{1}{\cos x}$;
2) $\sin^3 x+\cos^3 x=1-\dfrac{1}{2}\sin 2x$; 4) $2\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}2x=\operatorname{tg}4x$.

3.33. 1) $\sin 2x\cdot\sin 6x=\cos x\cdot\cos 3x$;
2) $\sin x\sin 7x=\sin 3x\sin 5x$;
3) $\sin^3 x\cos 3x+\sin 3x\cos^3 x=0$;
4) $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}2x=\operatorname{tg}3x$.

3.34. 1) $(1-\operatorname{tg}x)(1+\sin 2x)=1+\operatorname{tg}x$;
2) $(1+\sin 2x)(\cos x-\sin x)=1-2\sin^2 x$;
3) $\sin x\cos x\cos 2x\cos 8x=\dfrac{1}{4}\sin 12x$;
4) $\sin 2x\sin 6x-\cos 2x\cos 6x=\sqrt{2}\sin 3x\cdot\cos 8x$.

3.35. 1) $\operatorname{ctg}^2 x-\operatorname{tg}^2 x=32\cos^3 2x$; 3) $\operatorname{tg}2x+\operatorname{ctg}x=8\cos^2 x$;
2) $\dfrac{\cos x}{\cos 3x}-\dfrac{\cos 3x}{\cos x}=8\sin x\sin 3x$; 4) $\dfrac{\cos x}{\cos 3x}-\dfrac{\cos 3x}{\cos x}=-2\cos 2x$.

3.36. 1) $\sin 2x + \sin^4 \frac{x}{2} = \cos^4 \frac{x}{2}$;   3) $\frac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x} = (\sin x + \cos x)^2$;

2) $\cos x = \sqrt{3}\sin x + 2\cos 3x$;   4) $\sin 3x + \sin x = 4\sin^3 x$.

C

3.37. $\sqrt{\sin(1-x)} = \sqrt{\cos x}$ теңдеуінің $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ аралығында жататын барлық түбірлерін табыңдар.

3.38. $\cos^4 x - \cos 3x = 3\cos x - \cos^3 x \cdot \cos 3x$ теңдеуінің $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ аралығында жататын барлық шешімдерін табыңдар.

3.39. $\cos 5x + \cos 7x + 2\cos^2 2x - 2\sin^2 3x = 0$ теңдеуінің $|x| < 2$ шартын қанағаттандыратын барлық шешімдерін табыңдар.

3.40. Теңдеуді шешіңдер:

1) $\operatorname{tg}x^2 = \operatorname{ctg}5x$;   3) $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\cos x\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\sin x\right)$;

2) $\sin x = \cos\sqrt{x}$;   4) $\sin(\pi\operatorname{ctg}x) = \cos(\pi\operatorname{tg}x)$.

3.41. $\sin(\cos x) = \cos(\sin x)$ теңдеуінің нақты түбірлері болмайтынын көрсетіңдер.

3.2. Тригонометриялық теңдеулер жүйесін шешу

Біз мұнда теңдеулер жүйесін шешудің жалпы ережелеріне сүйеніп, тригонометриялық теңдеулердің кейбір жиі кездесетін түрлеріне тоқталамыз.

3.2.1. $\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = a, \\ \cos x \cdot \cos y = b; \end{cases}$ $\begin{cases} \sin x \cdot \cos y = a, \\ \cos x \cdot \sin y = b \end{cases}$ **түріндегі жүйелер** (1)

Бұл жүйелерді шешу үшін олардың бір теңдеуіне екіншісін қосып, азайту арқылы

$$\begin{cases} \cos(x+y) = b - a, \\ \cos(x-y) = b + a; \end{cases} \quad \text{және} \quad \begin{cases} \sin(x+y) = a + b, \\ \sin(x-y) = a - b \end{cases}$$

жүйелеріне келтіріп аламыз. Әрине, бұл жүйелердің нақты шешімдері бар болуы үшін $|a+b| \leqslant 1$, $|a-b| \leqslant 1$ теңсіздіктерінің орындалуы қажетті және жеткілікті. Енді мысалдар қарастырайық.

1-мысал. $\begin{cases} \sin x \sin y = \dfrac{\sqrt{3}}{4}, \\ \cos x \cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$ жүйесін шешу қажет.

Жоғарыда айтылғандай бұл жүйені

$$\begin{cases} \cos(x-y) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos(x+y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = \pm\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi, \ k \in Z, \\ x + y = \dfrac{\pi}{2} + m\pi, \ m \in Z \end{cases}$$

түрінде жазамыз. Осыдан

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{2}(2k+m), \\ y = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{2}(m-2k), \ k, \ m \in Z; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{2}(2k+m), \\ y = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{2}(m-2k); \ k, \ m \in Z. \end{cases}$$

Жауабы: $\left\{\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{2}(2k+m); \ \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{2}(m-2k)\right\}$;

$\left\{\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{2}(2k+m); \ \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{2}(m-2k)\right\}$, $(k, m \in Z)$.

$$\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = a, \\ \mathrm{tg}x \cdot \mathrm{tg}y = b, \ a \cdot b \neq 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin x \cdot \sin y = a, \\ \mathrm{ctg}x \cdot \mathrm{ctg}y = b, \ a \cdot b \neq 0; \end{cases}$$

$\begin{cases} \sin x \cdot \cos y = a, \\ \mathrm{tg}x \cdot \mathrm{ctg}y = b, \ a \cdot b \neq 0 \end{cases}$ түріндегі жүйелер (1) түрге келеді. Ал

$\begin{cases} \sin x \cdot \cos y = a, \\ \cos x \cdot \cos y = b, \ b \neq 0 \end{cases}$ түріндегі жүйелерді шешу үшін оның бірінші теңдеуін екіншісіне бөліп, $\mathrm{tg}x = \dfrac{a}{b}$ теңдеуін аламыз. Осыдан x-тің мәндерін анықтап, y-ті берілген жүйенің біреуінен табуға болады.

2-мысал. $\begin{cases} \sin x \cos y = \dfrac{1}{4}, \\ \cos x \cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{4}. \end{cases}$ жүйесін шешу қажет.

Бірінші теңдеуді екіншісіне бөлеміз:

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in Z.$$

Демек, $\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{6} + k\pi\right) = (-1)^k \frac{1}{2}$. Сондықтан жүйенің бірінші теңдеуінен $(-1)^k \frac{1}{2}\cos y = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos y = (-1)^k \frac{1}{2}$ шығады. Осыдан

$$y = \pm\arccos\left((-1)^k \frac{1}{2}\right) + 2m\pi,\ k,\ m \in Z.$$

Осы жерде $k = 2n$, $n \in Z$ болса, $y = \pm\frac{\pi}{3} + 2m\pi$, $m \in Z$. Егер $k = 2n+1$, $n \in Z$ болса, $y = \pm\frac{2\pi}{3} + 2m\pi$, $m \in Z$.

Жауабы: $\left(\frac{\pi}{6} + k\pi;\ \pm\frac{\pi}{3} + 2m\pi\right)$, $\left(\frac{\pi}{6} + k\pi;\ \pm\frac{2\pi}{3} + 2m\pi\right)$, $k,\ m \in Z$.

3.2.2. $\begin{cases} \sin x + \sin y = a, \\ \sin^2 x + \sin^2 y = b \end{cases}$ **түріндегі жүйелерді u=sin$x$, v=sin$y$** белгілеулерін енгізіп,

$$\begin{cases} u + v = a, \\ u^2 + v^2 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = a, \\ uv = \dfrac{a^2 - b}{2} \end{cases}$$

алгебралық жүйелеріне келтіріп шешеміз.

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = a, \\ \cos^2 x + \cos^2 y = b; \end{cases} \quad \begin{cases} \cos x + \cos y = a, \\ \cos^2 x + \cos^2 y = b; \end{cases} \quad \begin{cases} \cos x + \cos y = a, \\ \sin^2 x + \sin^2 y = b \end{cases}$$

түріндегі жүйелер де осы сияқты шешіледі.

$\begin{cases} \sin x + \sin y = a, \\ \sin^2 x - \sin^2 y = b \end{cases}$ жүйесі $\begin{cases} \sin x + \sin y = a, \\ \sin x - \sin y = \dfrac{b}{a} \end{cases}$

жүйесіне мәндес болатынын көрсету қиын емес.

$\begin{cases} a_1 \operatorname{tg} x + b_1 \operatorname{tg} y = c_1, \\ a_2 \operatorname{ctg} x + b_2 \operatorname{ctg} y = c_2 \end{cases}$ жүйесі $u = \operatorname{tg} x$, $v = \operatorname{tg} y$ белгілеулері арқылы

$\begin{cases} a_1 u + b_1 v = c_1, \\ \dfrac{a_2}{u} + \dfrac{b_2}{v} = c_2 \end{cases}$ алгебралық жүйесіне келеді.

3-мысал. $\begin{cases} \cos x + \cos y = \dfrac{1}{2}, \\ \sin^2 x + \sin^2 y = \dfrac{7}{4} \end{cases}$ жүйесін шешу қажет.

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ формуласын қолданып, бұл жүйені

$\begin{cases} \cos x + \cos y = \dfrac{1}{2}, \\ \cos^2 x + \cos^2 y = \dfrac{1}{4}. \end{cases}$ түріне келтіреміз.

$u = \cos x$, $v = \cos y$ белгілеулері арқылы

$\begin{cases} u + v = \dfrac{1}{2}, \\ u^2 + v^2 = \dfrac{1}{4} \end{cases}$ немесе $\begin{cases} u + v = \dfrac{1}{2}, \\ u \cdot v = 0 \end{cases}$ түріне келтіреміз.

Осыдан $u_1 = 0$, $v_1 = \dfrac{1}{2}$; $u_2 = \dfrac{1}{2}$, $v_2 = 0$.

$$\begin{cases} \cos x = 0, \\ \cos y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in Z, \\ y = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2m\pi, \ m \in Z. \end{cases}$$

және

$$\begin{cases} \cos x = \dfrac{1}{2}, \\ \cos y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2m\pi, \ m \in Z; \\ y = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in Z. \end{cases}$$

Ж а у а б ы:

$$\left(\frac{\pi}{2} + k\pi;\ \pm\frac{\pi}{3} + 2m\pi\right),\ \left(\pm\frac{\pi}{3} + 2m\pi;\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right);\ k,\ m \in Z.$$

3.2.3 $\begin{cases} \sin x + \sin y = a, \\ x + y = \alpha \end{cases}$ түріндегі жүйелер (3)

Жүйені шешу үшін бірінші теңдеуді көбейтіндіге түрлендіреміз: $2\sin\dfrac{x+y}{2} \cdot \cos\dfrac{x-y}{2} = a$. Сонда (3) жүйені

$\begin{cases} 2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos\dfrac{x-y}{2}=a, \\ x+y=\alpha \end{cases}$ түрінде жазуға болады. Мұнда екі түрлі жағдай орындалуы мүмкін.

а) $\sin\dfrac{\alpha}{2}=0 \Rightarrow \alpha=2k\pi,\ k\in Z$. Онда $y=2k\pi-x$. Сондықтан (3) жүйенің бірінші теңдеуінен $\sin x-\sin x=a$, $a=0$ болғанда ғана (3) жүйенің шешімі бар және бұл жүйе $x+y=\alpha$ теңдеуімен мәндес.

ә) Егер $\sin\dfrac{\alpha}{2}\neq 0$ болса,

$$\begin{cases} \cos\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{a}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}, \\ x+y=\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=\pm2\arccos\left(\dfrac{a}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}\right)+4k\pi, k\in Z, \\ x+y=\alpha. \end{cases}$$

Осыдан

$$\begin{cases} x=\dfrac{\alpha}{2}\pm\arccos\left(\dfrac{a}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}\right)+2k\pi, \\ y=\dfrac{\alpha}{2}\mp\arccos\left(\dfrac{a}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}\right)-2k\pi,\ \ k\in Z. \end{cases}$$

Әрине, бұл жағдайда $\left|\dfrac{a}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}\right|\leqslant1$ теңсіздігі орындалғанда ғана берілген жүйенің шешімі бар. Бұл шарт орындалмаса жүйенің шешімі болмайды.

ӨЗДЕРІҢ ОРЫНДАҢДАР

$\begin{cases} \sin x-\sin y=a, \\ x\pm y=\alpha; \end{cases}$ $\begin{cases} \cos x\pm\cos y=a, \\ x\pm y=\alpha; \end{cases}$ $\begin{cases} \sin x\pm\cos y=a, \\ x\pm y=\alpha \end{cases}$

жүйелерін өздерің шешіңдер.

4-мысал. $\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = \dfrac{1}{2}, \\ x + y = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$ жүйесін шешу қажет.

Бұл жүйені қос бұрыш формулаларын қолданып,

$$\begin{cases} \cos 2y - \cos 2x = -1, \\ x + y = \dfrac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin(x+y)\sin(x-y) = -1, \\ x + y = \dfrac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x-y) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ x + y = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$ түріне келтіреміз. Осыдан есептің жауабы алынады:

$$\begin{cases} x - y = (-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z, \\ x + y = \dfrac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{8}\left(1 + (-1)^{k+1}\right) + \dfrac{k\pi}{2}, \\ y = \dfrac{\pi}{8}\left(1 - (-1)^{k+1}\right) - \dfrac{k\pi}{2},\ k \in Z. \end{cases}$$

Егер $k = 2n,\ n \in Z$ болса, онда $x = n\pi,\ y = \dfrac{\pi}{4} - n\pi,\ n \in Z$,

$k = 2n + 1,\ n \in Z$ болса, онда $x = \dfrac{3\pi}{4} + n\pi;\ y = -\dfrac{\pi}{2} - n\pi,\ n \in Z$.

Жауабы: $\left(n\pi; \dfrac{\pi}{4} - n\pi\right), \left(\dfrac{3\pi}{4} + n\pi; -\dfrac{\pi}{2} - n\pi\right),\ n \in Z.$

$\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = a, \\ x \pm y = \alpha; \end{cases}$ $\begin{cases} \cos x \cdot \cos y = a, \\ x \pm y = \alpha; \end{cases}$ $\begin{cases} \sin x \cdot \cos y = a, \\ x \pm y = \alpha \end{cases}$

жүйелерін көбейтіндіні қосындыға түрлендіретін формулаларды қолданып шешеміз.

5-мысал. $\begin{cases} \sin x \cos y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ x + y = \dfrac{3\pi}{4} \end{cases}$ жүйесін шешу қажет.

Жоғарыда айтылғандай, бұл жүйені

$$\begin{cases} \sin(x+y)+\sin(x-y)=\sqrt{2}, \\ x+y=\dfrac{3\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x-y)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ x+y=\dfrac{3\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y=(-1)^k\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in Z, \\ x+y=\dfrac{3\pi}{4} \end{cases}$$ түрінде жазамыз. Осыдан

$$\left\{\frac{\pi}{2}+n\pi;\ \frac{\pi}{4}-n\pi\right\},\ \left\{\frac{3\pi}{4}+n\pi;-n\pi\right\},\ n\in Z.$$

Осы әдістерді қолданып, төмендегі жүйелерді шешуге болады:

$$\begin{cases} \mathrm{tg}x\pm\mathrm{tg}y=a, \\ x\pm y=\alpha; \end{cases} \quad \begin{cases} \mathrm{ctg}x\pm\mathrm{ctg}y=a, \\ x\pm y=\alpha; \end{cases} \quad \begin{cases} \mathrm{tg}x\cdot\mathrm{tg}y=a, \\ x\pm y=\alpha; \end{cases} \quad \begin{cases} \mathrm{ctg}x\cdot\mathrm{ctg}y=a, \\ x\pm y=\alpha. \end{cases}$$

3.2.3. $\begin{cases} a\sin x+b\sin y=c, & a,b,c\in R, \\ p\cos x+q\cos y=r, & p,q,r\in R \end{cases}$ **түріндегі жүйелер**

Бұл жүйені шешу үшін оны $a\neq 0$, $p\neq 0$ болғанда

$$\begin{cases} \sin x=\dfrac{c}{a}-\dfrac{b}{a}\sin y, \\ \cos x=\dfrac{r}{p}-\dfrac{q}{p}\cos y \end{cases}$$ түрінде жазып, екі теңдеуді де квадраттап

қосамыз: $1=\left(\dfrac{c}{a}-\dfrac{b}{a}\sin y\right)^2+\left(\dfrac{r}{p}-\dfrac{q}{p}\cos y\right)^2$. Бұл теңдеу y-ке ғана тәуелді.

6-мысал. $\begin{cases} 5\sin x-\sin y=0, \\ 3\cos x-\cos y=2 \end{cases}$ жүйесін шешу керек.

$$\begin{cases} \sin y=5\sin x, \\ \cos y=3\cos x-2 \end{cases} \Rightarrow 1=25\sin^2 x+9\cos^2 x-12\cos x+4\Rightarrow$$

$\Rightarrow 4\cos^2 x+3\cos x-7=0$ теңдеуін аламыз. Осыдан

$\cos x=1\Rightarrow x=2k\pi,\ k\in Z$. Ал $\cos x=-\dfrac{7}{4}$ теңдеуінің шешімі жоқ.

Онда $\cos y=1\Rightarrow y=2\pi m,\ m\in Z$.

Тексеру. Егер $x = 2k\pi$ және $y = 2m\pi$, $k, m \in Z$ болса,

$$\begin{cases} 5\sin 2k\pi - \sin 2m\pi = 0, \\ 3\cos 2k\pi - \cos 2m\pi = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\cdot 0 - 0 = 0, \\ 3\cdot 1 - 1 = 2. \end{cases}$$

Жауабы: $(2k\pi;\ 2m\pi)$, $k, m \in Z$.

ЕСЕПТЕР

3.42–3.48-есептердегі тригонометриялық теңдеулер жүйесін шешіңдер.

А

3.42. 1) $\begin{cases} \sin x\cos y = -0,5, \\ \sin y\cdot\cos x = 0,5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \sin x\sin y = \dfrac{3}{4}, \\ \mathrm{tg}x\mathrm{tg}y = 3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \sin x\cos y = 0,36, \\ \cos x\sin y = 0,175; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \sin x\cos y = \dfrac{1+\sqrt{2}}{4}, \\ \cos x\sin y = -3+2\sqrt{2}. \end{cases}$

3.43. 1) $\begin{cases} \sin x - \sin y = 0,5, \\ \cos x + \cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \sin^2 x = \cos x\cos y, \\ \cos^2 x = \sin x\sin y; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \cos x + \cos y = 0,5, \\ \sin^2 x + \sin^2 y = \dfrac{7}{4}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \sin x\,\mathrm{ctg}y = \dfrac{\sqrt{6}}{2}, \\ \mathrm{tg}x\cdot\cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

3.44. 1) $\begin{cases} \mathrm{tg}x = \sin y, \\ \sin x = 2\mathrm{ctg}y; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \cos x + 3\sin x = 2\cos y, \\ \cos y + 3\sin y = 2\cos x; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \sin y = 3\sin x, \\ 2\cos x + \cos y = 1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \sqrt{2}\sin x = \sin y, \\ \sqrt{2}\cos x = \sqrt{3}\cos y. \end{cases}$

B

3.45. 1) $\begin{cases} \sin x\sin y = \dfrac{1}{4}, \\ x + y = \dfrac{\pi}{3}; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x - y = -\dfrac{1}{3}, \\ \cos^2 \pi x - \sin^2 \pi y = 0,5; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \cos^2 x + \cos^2 y = \dfrac{1}{4}, \\ x + y = \dfrac{5\pi}{6}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{4}, \\ \mathrm{tg}x\mathrm{tg}y = \dfrac{1}{6}. \end{cases}$

3.46. 1) $\begin{cases} \sin(x-y) = 3\sin x\cos y - 1, \\ \sin(x+y) = -2\cos x\sin y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin x\sin y = -\dfrac{1}{4}, \\ \cos(x+y) + \cos(x-y) = 1{,}5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4\sin(3x+2y) + \sin x = 0, \\ 4\sin(2x+3y) + \sin y = 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} a\cos(2x+y) = \cos y, \\ a\cos(x+2y) = \cos x \quad (a > 1). \end{cases}$

C

3.47. 1) $\begin{cases} \sin x - \dfrac{1}{\sin x} = \sin y, \\ \cos x - \dfrac{1}{\cos x} = \cos y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2} + \mathrm{tg}\,\dfrac{y}{2} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}, \\ \mathrm{tg}x + \mathrm{tg}y = 2\sqrt{3}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \mathrm{tg}x + \mathrm{ctg}y = 3, \\ |x-y| = \dfrac{\pi}{3}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3\mathrm{ctg}x = \mathrm{tg}^3 y, \\ \cos x = \sin 2y. \end{cases}$

3.48. 1) $\begin{cases} \mathrm{tg}x \cdot \mathrm{tg}z = 3, \\ \mathrm{tg}y \cdot \mathrm{tg}z = 6, \\ x + y + z = \pi; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2\cos x = 3\mathrm{tg}y, \\ 2\cos y = 3\mathrm{tg}z, \\ 2\cos z = 3\mathrm{tg}x. \end{cases}$

Қайталауға арналған жаттығулар

3.49. $x+7y=50$ түзуі $x^2+y^2=50$ шеңберін жанайтынын дәлелдеп, жанасу нүктесінің координаталарын табыңдар.

3.50. Жалпы мүшесі $a_n = 2^{7-n}$ формуласымен берілген тізбектің алғашқы 10 мүшесінің қосындысын табыңдар.

3.51. $a = -\dfrac{1}{3}$ деп алып, $\left(a + \left(1 + \left(\dfrac{3-a}{a+1}\right)^{-1}\right)^{-1}\right)^{-1}$ өрнегінің мәнін табыңдар.

3.3. Кері тригонометриялық теңдеулер

3.3.1. Қарапайым кері тригонометриялық теңдеулерді шешу

Анықтама. *Құрамында белгісіз айнымалыға тәуелді кері тригонометриялық функциялары бар теңдеулерді* ***кері тригонометриялық теңдеулер*** деп атайды.

Кері тригонометриялық теңдеулерді шешкенде төмендегі формулаларды пайдаланады:

1) $\arcsin x = \alpha, \ \left(|\alpha| \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow x = \sin\alpha;$

2) $\arccos x = \alpha,\ (0 \leqslant \alpha \leqslant \pi) \Rightarrow x = \cos\alpha$;

3) $\operatorname{arctg} x = \alpha,\ \left(|\alpha| < \dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow x = \operatorname{tg}\alpha$;

4) $\operatorname{arcctg} x = \alpha,\ (0 < \alpha < \pi) \Rightarrow x = \operatorname{ctg}\alpha$.

Бұл формулалардың дұрыстығы кері тригонометриялық функциялардың анықтамаларынан шығады. Шынында да, $y = \arcsin x$ функциясының анықтамасы бойынша $x = \sin y$, $|y| \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, $|x| \leqslant 1$. Осыдан, $y = \alpha$, $|\alpha| \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ болса, $x = \sin\alpha$.

ӨЗДЕРІҢ ДӘЛЕЛДЕҢДЕР

2, 3, 4-формулалардың да дұрыстығын өздерің дәлелдеңдер.

1-мысал. $\operatorname{arctg} 2x = \dfrac{\pi}{4}$ теңдеуін шешейік.

$\dfrac{\pi}{4} < \dfrac{\pi}{2}$ болғандықтан, 3) формула бойынша

$$2x = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow x = 0,5.$$

Жауабы: 0,5.

2-мысал. $\arcsin(2x - 1) = 2$ теңдеуін шешу қажет.

$2 > \dfrac{\pi}{2}$ болғандықтан, бұл теңдеудің шешімі жоқ.

Жауабы: $\varnothing$.

3.3.2. Құрамында кері тригонометриялық функциялары бар теңдеулер

1) Егер $P(t)$ рационал өрнек болса, $P(\arcsin x)=0$ түріндегі теңдеулерді шешу $\arcsin x=t$ белгілеуін енгізіп, $\arcsin x=t_k$ қарапайым кері тригонометриялық теңдеулерді шешуге келіп тіреледі. Мұндағы t_k сандары — $P(t)=0$ теңдеуінің түбірлері.

$P(\arccos x)=0$, $P(\operatorname{arctg} x)=0$ және $P(\operatorname{arcctg} x)=0$ түріндегі теңдеулер де осы сияқты шешіледі.

3-мысал. $2\arcsin^2 x - \arcsin x - 6 = 0$ теңдеуін шешу керек.

$\arcsin x = t$ белгілеуін енгізсек, $2t^2 - t - 6 = 0$ квадрат теңдеуін аламыз. Оның түбірлері: $t_1 = -1,5$ және $t_2 = 2$. Онда берілген теңдеу мынадай екі қарапайым теңдеумен мәндес болады: $\arcsin x = -1,5$ және $\arcsin x = 2$. Мұндағы $2 > \dfrac{\pi}{2}$, $|-1,5| < \dfrac{\pi}{2}$

болғандықтан, екінші теңдеудің шешімі болмайды және бірінші теңдеудің жалғыз шешімі бар: $x = -\sin 1,5$.

2) Теңдеудің құрамына әртүрлі кері тригонометриялық функциялар енсе, мұндай теңдеулерді оның екі бөлігінен де қандай да бір тригонометриялық функцияның мәнін есептеп шешеді. Осыдан пайда болатын бөгде түбірлерді тексеру арқылы бөліп тастайды. Берілген теңдеуге тангенс пен котангенсті қолданса, бұл функциялардың анықталу облысына енбейтін берілген теңдеудің түбірлерін жоғалтып алуымыз мүмкін. Сондықтан тангенс пен котангенстің мәндерін есептеуден бұрын олардың анықталу облыстарына енбейтін нүктелердің берілген теңдеудің түбірлері болатынын не болмайтынын тексеріп алу қажет.

4-мысал. $\arcsin 6x + \arcsin 6\sqrt{3}x = -\dfrac{\pi}{2}$ теңдеуін шешейік.

Берілген теңдеуді $\arcsin 6x = -\arcsin 6\sqrt{3}x - \dfrac{\pi}{2}$ түрінде жазып, оның екі жақ бөлігінен де синустың мәндерін табамыз:

$$\sin(\arcsin 6x) = \sin\left(-\arcsin 6\sqrt{3}x - \frac{\pi}{2}\right).$$

Онда келтіру формуласы бойынша

$$6x = -\cos\left(\arcsin 6\sqrt{3}x\right) \Rightarrow 6x = -\sqrt{1-108x^2} \Rightarrow 144x^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{12},\ x_2 = -\frac{1}{12}.$$

Тексеру жүргіземіз:

$x = \dfrac{1}{12} \Rightarrow \arcsin\dfrac{1}{2} + \arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{2}$, яғни $x = \dfrac{1}{12}$ саны берілген теңдеудің түбірі болмайды. Енді

$$x = -\frac{1}{12} \Rightarrow \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2}.$$

Жауабы: $x = -\dfrac{1}{12}$.

5-мысал. $2\operatorname{arctg}(2x+1) = \arccos x$ теңдеуін шешу қажет.

Теңдеудің екі бөлігінен де косинус аламыз:

$$\cos\left(2\operatorname{arctg}(2x+1)\right) = x.$$

Егер $\operatorname{arctg}(2x+1) = \alpha$ деп алсақ, $\operatorname{tg}\alpha = 2x+1$. Сонда

$\cos 2\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$ формуласы бойынша

$$\cos\left(2\operatorname{arctg}(2x+1)\right) = \cos 2\alpha = \frac{1-(2x+1)^2}{1+(2x+1)^2} = \frac{-2x^2-2x}{1+2x+2x^2}.$$

Сондықтан берілген теңдеуді мынадай алгебралық теңдеумен алмастырамыз:

$$\frac{-2x^2-2x}{1+2x+2x^2} = x \Leftrightarrow -2x^2-2x = x+2x^2+2x^3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x^3+4x^2+3x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Енді тексеру жұмыстарын жүргіземіз:

$$x=0 \Rightarrow 2\operatorname{arctg}1 = \arccos 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x=0.$$

Ж а у а б ы . $x=0$.

3) Кейбір теңдеулерде кері тригонометриялық функциялар таңбаларының астындағы айнымалысы бар өрнектер олардың ортақ анықталу облысында тепе-тең болып келеді. Оларды шешу үшін осындай ортақ облыстарды табу қажет.

6-мысал. $2\arccos x = \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$ теңдеуін шешейік.

$y=\arccos x$ функциясының анықтамасы бойынша $x=\cos y$, $0\leqslant y\leqslant\pi$, $|x|\leqslant 1$. x-тің осы мәнін берілген теңдеудің оң жақ бөлігіне қойсақ,

$$\arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = \arcsin\left(2\cos y\sqrt{1-\cos^2 y}\right) = \arcsin(2\cos y\sin y) =$$
$$=\arcsin(\sin 2y) = 2y = 2\arccos x$$

теңдігін аламыз. Мұнда $-\frac{\pi}{2}\leqslant 2y\leqslant\frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{4}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{4}$. Сонымен берілген теңдеудің оң жағы мен сол жағы әрбір $y\in\left[0;\ \frac{\pi}{4}\right]$ үшін өзара тең. Осыдан $x\in\left[\frac{\sqrt{2}}{2};\ 1\right]$.

Ж а у а б ы : $x\in\left[\frac{\sqrt{2}}{2};\ 1\right]$.

1. Қарапайым кері тригонометриялық теңдеулерді шешу формулаларын жазыңдар. Оларды дәлелдеңдер.
2. Кері тригонометриялық функциялардың анықталу облысы мен мәндер облысын жазып көрсетіңдер.

ЕСЕПТЕР

3.52–3.58-есептердегі теңдеулерді шешіңдер.

A

3.52. 1) $\arcsin 2x = \dfrac{\pi}{2}$; 3) $\operatorname{arc\,tg} 3x = \dfrac{\pi}{3}$;

2) $\arccos \dfrac{x}{3} = \dfrac{\pi}{4}$; 4) $\operatorname{arc\,tg} \dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{6}$.

3.53. 1) $\arcsin\left(\dfrac{x}{2} - 3\right) = \dfrac{\pi}{3}$; 3) $\operatorname{arctg}(2 - 3x) = -\dfrac{\pi}{4}$;

2) $\arccos(1 - 2x) = \dfrac{\pi}{2}$; 4) $\operatorname{arcctg}(3x + 2) = \dfrac{\pi}{4}$.

3.54. 1) $\operatorname{arctg}^2 \dfrac{x}{3} - 4\operatorname{arctg} \dfrac{x}{3} - 5 = 0$;

2) $\operatorname{arctg}^2 (3x + 2) + 2\operatorname{arctg}(3x + 2) = 0$;

3) $2\arcsin x = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi^2}{9} \arcsin x$;

4) $3\operatorname{arctg}^2 x - 4\operatorname{arctg} x + \pi^2 = 0$.

B

3.55. 1) $\arccos \dfrac{x}{2} = 2\operatorname{arctg}(x - 1)$; 3) $\operatorname{arctg} 2x + \operatorname{arctg} 3x = \dfrac{3\pi}{4}$;

2) $\arccos x - \pi = \arcsin \dfrac{4x}{3}$; 4) $\arcsin x + \arccos(x - 1) = \pi$.

3.56. 1) $\arcsin x + \arccos \dfrac{x}{\sqrt{3}} = \dfrac{\pi}{2}$; 3) $\arccos x - \arcsin x = \arccos \sqrt{3}x$;

2) $\arcsin 2x = 3\arcsin x$; 4) $\arccos x - \arcsin x = \arcsin(2 - 3x)$.

3.57. 1) $\arcsin x = \arccos \sqrt{1 - x^2}$;

2) $\arccos x = \pi - \arcsin \sqrt{1 - x^2}$;

3) $\arccos x = \operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$;

4) $\arcsin\left(2x\sqrt{1 - x^2}\right) = \arccos\left(2x^2 - 1\right)$.

3.58. 1) $2\arccos x = \arccos\left(2x^2 - 1\right)$;   3) $2\operatorname{arctg} x = \arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$;

2) $2\operatorname{arctg} x = \arcsin\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$;   4) $\arccos x = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

C

3.59. $2\arccos x = a + \dfrac{a^2}{\arccos x}$ теңдеуін a параметрінің кез келген нақты мәндері үшін шешіңдер.

3.60. Төмендегі теңдеулерді a параметрінің кез келген нақты мәндері үшін шешіңдер:

1) $\arcsin x = 2\arcsin a$;   2) $\arccos x = \arcsin 2a$.

Қайталауға арналған жаттығулар

3.61. $y = \sqrt{9 - x|x|}$ функциясының анықталу облысын табыңдар.

3.62. a параметрінің қандай мәндерінде $x^2 - (a-2)x - (a+1)$ квадрат үшмүшесінің түбірлері квадраттарының қосындысы ең кіші мән қабылдайды?

3.63. Шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысы 32-ге, оның алғашқы бес мүшесінің қосындысы 31-ге тең. Прогрессияның бірінші мүшесін табыңдар.

3.4. Тригонометриялық теңсіздіктер

3.4.1. Қарапайым тригонометриялық теңсіздіктерді шешу

Тригонометриялық өрнектерден құралған теңсіздіктерді ***тригонометриялық теңсіздіктер*** деп атайды. Тригонометриялық теңсіздіктерді түрлендіріп, төмендегідей қарапайым тригонометриялық теңсіздіктерге келтіріп шешеді: $\sin x < a$, $\cos x \leqslant a$, $\operatorname{tg} x \geqslant a$, $\operatorname{ctg} x > 0$ және т. с. с. Енді мынадай формулалардың орындалатынын көрсетейік:

1) $\sin x > a$, $(|a| < 1) \Rightarrow x \in (\arcsin a + 2k\pi;\ \pi - \arcsin a + 2k\pi)$, $k \in Z$;
2) $\sin x < a$, $(|a| < 1) \Rightarrow x \in (-\pi - \arcsin a + 2k\pi;\ \arcsin a + 2k\pi)$, $k \in Z$;
3) $\cos x > a$, $(|a| < 1) \Rightarrow x \in (-\arccos a + 2k\pi;\ \arccos a + 2k\pi)$, $k \in Z$;
4) $\cos x < a$, $(|a| < 1) \Rightarrow x \in (\arccos a + 2k\pi;\ 2\pi - \arccos a + 2k\pi)$, $k \in Z$;

5) $\operatorname{tg} x > a \Rightarrow x \in \left(\operatorname{arctg} a + k\pi;\ \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in Z$;

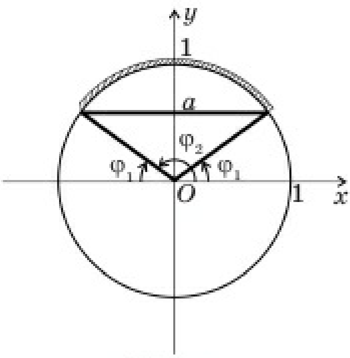
6) $\operatorname{tg} x < a \Rightarrow x \in \left(-\dfrac{\pi}{2} + k\pi;\ \operatorname{arctg} a + k\pi\right)$, $k \in Z$;

7) $\mathrm{ctg}x > a \Rightarrow x \in (k\pi;\ \mathrm{arctg}a + k\pi),\ k \in Z$;

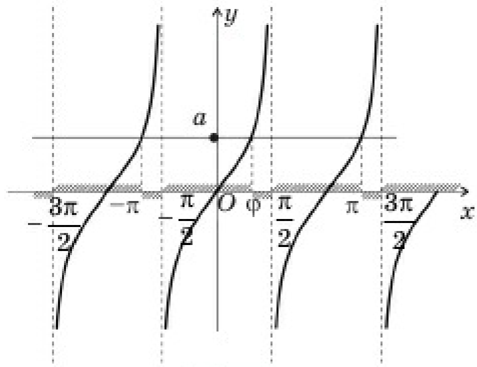
8) $\mathrm{ctg}x < a \Rightarrow x \in (\mathrm{arcctg}a + k\pi;\ \pi + k\pi),\ k \in Z$.

1) және 5) формулалардың орындалатындығын көрсетейік. Қалғандары осылар сияқты дәлелденеді.

1) формуланың дәлелдеуі: 3.5-суретте көрсетілгендей $\sin x > a$, $(|a| < 1)$ теңсіздігі орындалуы үшін $\varphi_1 + 2k\pi < x < \varphi_2 + 2k\pi$, $k \in Z$ қос теңсіздігінің орындалуы қажет. $\varphi_1 = \arcsin a$, $\varphi_2 = \pi - \varphi_1 = \pi - \arcsin a$ болатынын ескерсек, 1) формула орындалады. 3.6-суреттен (5) және (6) формулалардың орындалатынын көреміз.



3.5-сурет



3.6-сурет

Жалпы тригонометриялық теңсіздіктерді де 3.1-бабында көрсетілген тригонометриялық теңдеулер сияқты шешеді. Осыған мысалдар келтірейік.

1-мысал. $2\sin x - 1 \geqslant 0$ теңсіздігін шешу керек.

Берілген теңсіздікті $\sin x \geqslant \frac{1}{2}$ түрінде жазамыз. (1) формула бойынша $x \in [\arcsin\frac{1}{2} + 2k\pi;\ \pi - \arcsin\frac{1}{2} + 2k\pi]$, $k \in z$ және $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ болғандықтан, есептің жауабы былай жазылады:

Ж а у а б ы : $x \in \left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right]$, $k \in z$.

2-мысал. $3\,\mathrm{ctg}\,x + \sqrt{3} < 0$ теңсіздігін шешу керек.

Берілген теңсіздікті $\mathrm{ctg}\,x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$ түрінде жазып, (8) формуланы қолданамыз: $x \in \left(\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + k\pi,\ \pi + k\pi\right),\ k \in z$. Мұнда $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2\pi}{3}$ болғандықтан, есептің жауабы былай жазылады.

Жауабы: $\left(\frac{2\pi}{3} + k\pi;\ \pi + k\pi\right), k \in z.$

3-мысал. $2\sin^2 x - 7\sin x + 3 > 0$ теңсіздігін шешейік.

$\sin x = t$ белгілеуін енгізсек, берілген теңсіздікті $2t^2 - 7t + 3 > 0$ түрінде жазамыз. Оның шешімі $t < \frac{1}{2}$ немесе $t > 3$ теңсіздіктерімен анықталады. Сондықтан берілген теңсіздік $\sin x < \frac{1}{2}$ және $\sin x > 3$ теңсіздіктер жиынтығымен мәндес болады. Мұнда екінші теңсіздіктің шешімі болмайды. Бірінші теңсіздікті (2) формула бойынша шешеміз:

$$x \in \left(-\pi - \arcsin\frac{1}{2} + 2k\pi;\ \arcsin\frac{1}{2} + 2k\pi\right),\ k \in Z.$$

Осыдан $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ болатынын ескерсек, есептің жауабы

$$x \in \left(-\frac{7\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right),\ k \in Z.$$

Жауабы: $x \in \left(-\frac{7\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right),\ k \in Z.$

4-мысал. $\cos x + \cos 2x + \cos 3x > 0$ теңсіздігін шешейік.

Теңсіздіктің сол жақ бөлігіндегі бірінші және үшінші қосылғыштардың қосындысын көбейтіндіге түрлендірсек,

$$\cos 2x + 2\cos 2x \cdot \cos x > 0 \text{ немесе } \cos 2x(1 + 2\cos x) > 0.$$

Бұл теңсіздік мынадай екі теңсіздіктер жүйесінің жиынтығымен мәндес:

$$\begin{cases} \cos 2x < 0, \\ \cos x < -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ немесе } \begin{cases} \cos 2x > 0, \\ \cos x > -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Осыдан (3), (4) формулалар бойынша

$$\left[\begin{aligned}&\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}+2k\pi<2x<\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi,\ k\in Z,\\ \dfrac{2\pi}{3}+2m\pi<x<\dfrac{4\pi}{3}+2m\pi,\ m\in Z;\end{cases}\\&\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi<2x<\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in Z,\\ -\dfrac{2\pi}{3}+2m\pi<x<\dfrac{2\pi}{3}+2m\pi,\ m\in Z.\end{cases}\end{aligned}\right.$$

Сонда

$$\left[\begin{aligned}&\begin{cases}\dfrac{\pi}{4}+k\pi<x<\dfrac{3\pi}{4}+k\pi,\ k\in Z,\\ \dfrac{2\pi}{3}+2m\pi<x<\dfrac{4\pi}{3}+2m\pi,\ m\in Z;\end{cases}\\&\begin{cases}-\dfrac{\pi}{4}+k\pi<x<\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in Z,\\ -\dfrac{2\pi}{3}+2m\pi<x<\dfrac{2\pi}{3}+2m\pi,\ m\in Z\end{cases}\end{aligned}\right.$$

теңсіздіктер жүйелерін аламыз. Мұндағы $k, m\in Z$. Соңғы жүйелердің біріншісінен

$$x\in\left(\frac{2\pi}{3}+2k\pi;\ \frac{3\pi}{4}+2k\pi\right)\cup\left(\frac{5\pi}{4}+2m\pi;\ \frac{4\pi}{3}+2m\pi\right),\ k,\ m\in Z;$$

екіншісінен $x\in\left(-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi;\ \dfrac{\pi}{4}+2k\pi\right)$, $k\in Z$ шығады. Енді осы шешімдерді біріктіріп, теңсіздіктің жауабын аламыз:

Жауабы: $x\in\left(\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi;\ \dfrac{3\pi}{4}+2k\pi\right)\cup\left(\dfrac{5\pi}{4}+2m\pi;\ \dfrac{4\pi}{3}+2m\pi\right)\cup\left(-\dfrac{\pi}{4}+2n\pi;\ \dfrac{\pi}{4}+2n\pi\right)$, $k,\ m,\ n\in Z$.

5-мысал. $\sin^6 x+\cos^6 x>\dfrac{5}{8}$ теңсіздігін шешейік.

Теңсіздіктің сол жақ бөлігін түрлендірейік:

$$\sin^6 x+\cos^6 x=\left(\sin^2 x\right)^3+\left(\cos^2 x\right)^3=$$

$$=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)\left(\sin^4 x-\sin^2 x\cdot\cos^2 x+\cos^4 x\right)=$$

$$= \sin^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x - 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x =$$

$$= \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - \frac{3}{4}\cdot 4\sin^2 x \cdot \cos^2 x =$$

$$= 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = 1 - \frac{3}{4}\cdot\frac{1-\cos 4x}{2} = \frac{5}{8} + \frac{3\cos 4x}{8}.$$

Осыдан берілген теңсіздікті $\frac{5}{8} + \frac{3\cos 4x}{8} > \frac{5}{8}$ немесе $\cos 4x > 0$ түрінде жазамыз. Онда

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < 4x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z \Rightarrow -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} < x < \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2},\ k \in Z .$$

Ж а у а б ы: $x \in \left(-\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2};\ \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right),\ k \in Z.$

6-мысал. $y = \arccos(2\sin x - 1)$ функциясының анықталу облысын табу қажет.

Кері тригонометриялық функциялардың анықтамасы бойынша $-1 \leqslant 2\sin x\ -1 \leqslant 1$. Осыдан $0 \leqslant \sin x \leqslant 1$ теңсіздігін аламыз. Бұл $\sin x \geqslant 0$ теңсіздігімен мәндес болғандықтан, $2k\pi \leqslant x \leqslant (2k+1)\pi$, $k \in Z$.

Ж а у а б ы: $x \in [2k\pi\ ;\ (2k + \pi)\ 1],\ k \in Z.$

3.4.2. Тригонометриялық теңсіздіктерді дәлелдеу

Жалпы, «теңсіздіктерді шешу» мен «теңсіздіктерді дәлелдеу» деген екі ұғымды шатастырмау керек. Теңсіздікті шешу барысында осы теңсіздікті қанағаттандыратын оның құрамындағы айнымалылардың барлық мәндерін анықтау қажет. Ал теңсіздіктерді дәлелдеу дегеніміз оның құрамындағы айнымалылардың алдын ала берілген жиындардағы барлық мәндері үшін берілген теңсіздіктің орындалатынын көрсету болып табылады. Егер айнымалылардың өзгеру облыстары алдын ала көрсетілмесе, онда берілген теңсіздікті айнымалылардың барлық нақты мәндері үшін дәлелдеу қажет. Енді теңсіздіктерді дәлелдеуге бірер мысал қарастырайық.

7-мысал. $\alpha,\ \beta \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ болса, $\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \geqslant \frac{\cos\alpha + \cos\beta}{2}$ теңсіздігінің орындалатынын дәлелдеу қажет.

Теңсіздіктің оң жақ бөлігін түрлендіреміз:

$$\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{2}=\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Мұндағы $\alpha,\ \beta\in\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$. Сондықтан $\frac{\alpha+\beta}{2}\in\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ және $\frac{\alpha-\beta}{2}\in\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$;

$$0<\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\leqslant 1 \text{ және } 0<\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\leqslant 1.$$

$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\geqslant\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{2}$ өрнегі $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\leqslant 1$ теңсіздігімен мәндес. Сонымен, берілген теңсіздік кез келген $\alpha,\beta\in\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ үшін орындалады.

8-мысал. Егер α,β,γ үшбұрыштың бұрыштары болса,

$$\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}}\geqslant 6$$

теңсіздігі орындалатынын дәлелдеу қажет.

$\sin\frac{\alpha}{2},\ \sin\frac{\beta}{2},\ \sin\frac{\gamma}{2}$ өрнектері теріс емес. Сол себепті, $a+b+c\geqslant 3\sqrt[3]{abc}$ теңсіздігін қолдануға болады:

$$\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}}\geqslant\frac{3}{\sqrt[3]{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}}.$$

Енді түбір астындағы өрнекті түрлендірейік:

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\beta-\gamma}{2}-\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\right).$$

$\beta+\gamma=\pi-\alpha$ және $\frac{\beta-\gamma}{2}\in\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ болғандықтан,

$$\cos\frac{\beta+\gamma}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)=\sin\frac{\alpha}{2},\quad 0<\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\leqslant 1.$$

Сондықтан $\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\leqslant\frac{1}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right)$. Ал $f(t)=\frac{t(1-t)}{2}$,

$t \in [0;\ 1]$ $\left(0 < \sin\frac{\alpha}{2} = t < 1\right)$ функциясы $[0;\ 1]$ аралығында өзінің ең үлкен мәнін $t = \frac{1}{2}$ болғанда ғана қабылдайтындықтан,

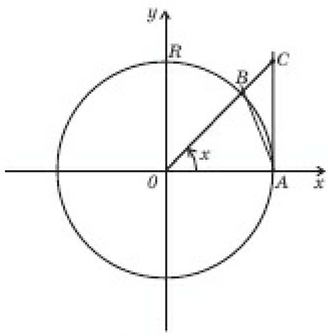
$$\frac{1}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\left(1 - \sin\frac{\alpha}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}.$$

Олай болса, $\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2} \leqslant \frac{1}{8}$. Сондықтан

$$\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}} \geqslant \frac{3}{\sqrt[3]{\frac{1}{8}}} = 6.$$

Дәлелдеу керегі де осы.

9-мысал. Егер $x \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ болса, $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ теңсіздігінің орындалатынын көрсетейік.



3.7-сурет

Центрі координаталар бас нүктесінде, радиусы R-ге тең дөңгелекті қарастырайық (3.7-сурет).

$OA = OB = R$, $\angle AOB = x$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$,

$0 < x < \frac{\pi}{2}$, $AC \perp OA$ болсын. Онда $S_{\Delta AOB} < S_{\text{сек}AOB} < S_{\Delta AOC}$. Аудандардың формулаларын орнына қойсақ,

$\frac{1}{2}R^2\cdot\sin x < \frac{1}{2}R^2 x < \frac{1}{2}R^2\operatorname{tg} x$ теңсіздігі орындалады. Бұдан $\sin x < x < \operatorname{tg} x$.

Дәлелдеу керегі де осы.

10-мысал. Егер $x \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ болса, $x - \frac{x^3}{4} < \sin x$ теңсіздігінің орындалатынын дәлелдейік.

$\sin x = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2} = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\left(1 - \sin^2\frac{x}{2}\right)$. 7-мысалдағы $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ теңсіздігі бойынша $\operatorname{tg}\frac{x}{2} > \frac{x}{2}$, $1 - \sin^2\frac{x}{2} > 1 - \frac{x^2}{4}$ теңсіздіктерін аламыз. Сондықтан $\sin x > 2\cdot\frac{x}{2}\left(1 - \frac{x^2}{4}\right) = x - \frac{x^3}{4}$. Дәлелдеу керегі де осы.

1. «Теңсіздікті шешу» және «теңсіздікті дәлелдеу» ұғымдарының мағынасын түсіндіріңдер. Олардың қандай айырмашылығы бар?
2. Қарапайым теңсіздіктерді шешу формулаларын жазып, оларды дәлелдеңдер.
3. (1)—(4) формулаларындағы $|a|<1$ шартының мағынасын түсіндіріңдер. Неліктен (5)—(8) формулаларында мұндай шектеу қойылмаған? Бұл формулалар a-ның қандай мәндері үшін орындалады? Жауапты түсіндіріңдер.

ЕСЕПТЕР

А

3.64–3.67- есептердегі теңсіздіктерді шешіңдер.

3.64. 1) $\sin x \geqslant \frac{1}{2}$; 3) $\operatorname{tg} x > -\frac{1}{\sqrt{3}}$; 5) $\cos x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$;

2) $\cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 6) $\operatorname{ctg} x \leqslant \sqrt{3}$.

3.65. 1) $2\cos x - 1 \geqslant 0$; 3) $2\cos x - \sqrt{3} \leqslant 0$;

2) $2\sin x + \sqrt{2} \geqslant 0$; 4) $3\operatorname{tg} x + \sqrt{3} > 0$.

3.66. 1) $\sin 2x < \frac{1}{2}$; 3) $\sin \frac{x}{2} < -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) < 1$;

2) $\cos \frac{x}{3} > \frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\operatorname{tg} 5x > 1$; 6) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) < 1$.

3.67. 1) $\sin x \cos \frac{\pi}{6} - \cos x \cdot \sin \frac{\pi}{6} \leqslant \frac{1}{2}$; 3) $4\sin 2x \cdot \cos 2x \geqslant \sqrt{2}$;

2) $\sqrt{3}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) > 1$; 4) $3\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{x}{2}\right) > -\sqrt{3}$;

5) $\cos \frac{\pi}{8} \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin \frac{\pi}{8} < -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 6) $0{,}5\sin 4x < -0{,}2$.

3.68. Теңсіздіктің көрсетілген аралыққа тиісті шешімдерін табыңдар:

1) $\sin x \geqslant -\frac{1}{2}$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{7\pi}{6}\right)$; 3) $\operatorname{tg} x \geqslant -1$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{4}\right)$;

2) $\cos \frac{x}{2} > \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\ 0\right]$; 4) $\sin 2x < \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x \in [0;\ \pi]$.

B

3.69–3.71-есептерде көрсетілген теңсіздіктерді шешіңдер.

3.69. 1) $\sin x > \cos x$; 3) $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) > 0,25$;

2) $\cos^2 x + \sin x\cdot\cos x \geqslant 1$; 4) $\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x \geqslant -1$.

3.70. 1) $\sin x - 3\cos x < 0$; 3) $2\cos 2x + \sin 2x > \mathrm{tg}x$;

2) $1-\sin x + \cos x < 0$; 4) $\cos x\cdot \mathrm{tg}2x > 0$.

3.71. 1) $\sin x + \cos x > -\sqrt{2}$; 2) $\mathrm{tg}x \geqslant \sin x$; 3) $\mathrm{tg}x + \mathrm{ctg}x \geqslant 2$; 4) $\sin 2x \leqslant 2\sin x$.

3.72. Функцияның анықталу облысын табыңдар:

1) $y=\sqrt{\sin(\cos x)}$; 3) $y=\arccos(\mathrm{tg}x)$;

2) $y=\arcsin\left(1+\mathrm{tg}^2\pi x\right)$; 4) $y=\sqrt{\mathrm{tg}x-\sin x}$.

3.73–3.75-есептерде көрсетілген теңсіздіктерді шешіңдер.

3.73. 1) $|\sin x| < |\cos x|$; 3) $|\sin x|\cdot\cos x > \frac{1}{4}$;

2) $|\sin x| > |\cos x|$; 4) $4\left(\sin^2 x - |\cos x|\right) < 1$.

C

3.74. 1) $\dfrac{5-4\left(\sin^2 x+\cos x\right)}{\cos x} \leqslant 0$; 3) $\left|\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\right| \leqslant 1$;

2) $\dfrac{2\sin^2 x+\sin x-1}{\sin x-1} < 0$; 4) $\sqrt{\dfrac{2(\sin x+\cos x)-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-(\sin x+\cos x)}} \geqslant 1$.

3.75. 1) $5\sin^2 x+\sin^2 2x > 4\cos 2x$; 4) $6\sin x\cdot\cos 2x - 2\sin 3x < 4$;

2) $4\sin^3 x < 2\sin x + \cos 2x$; 5) $\cos(\sin x) < 0$;

3) $\sin 3x > 4\sin x\cdot\cos 2x$; 6) $5+2\cos 2x \leqslant 3|2\sin x-1|$.

3.76. Теңсіздіктің әрбір $x\in R$ үшін орындалатынын дәлелдеңдер:

1) $|a\cos x + b\sin x| \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$; 2) $4\sin 3x + 5 \geqslant 4\cos 2x + 5\sin x$.

3.77. Егер α, β, γ үшбұрыштың бұрыштары болса,

$(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)(1-\cos\gamma)\leqslant\dfrac{1}{8}$ теңсіздігін дәлелдеңдер.

3.78. Егер α, β, γ үшбұрыштың бұрыштары болса,

1) $\dfrac{1}{\cos\alpha}+\dfrac{1}{\cos\beta}+\dfrac{1}{\cos\gamma}\geqslant 6$;

2) $\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}^2\beta+\mathrm{tg}^2\gamma\geqslant 9$ теңсіздігін дәлелдеңдер.

3.79. Теңсіздікті әрбір $x\in\left(0;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ үшін дәлелдеңдер:

1) $\cos x<1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{16}$; 2) $x-\dfrac{x^3}{4}<\mathrm{tg}\,x$; 3) $1-\cos x\leqslant\dfrac{x^2}{2}$.

Қайталауға арналған жаттығулар

3.80. Сандарды салыстырыңдар:

1) $\sin\dfrac{5\pi}{7}$ және $\sin\dfrac{7\pi}{8}$;

2) $\mathrm{tg}\dfrac{9\pi}{7}$ және $\mathrm{tg}\dfrac{6\pi}{5}$.

3.81. Теңдеуді шешіңдер:

1) $x^2-4x+|x^2-2x|+4=0$; 2) $|x^2-9|+|x^2-4|=5$.

3.82. m-нің қандай мәндерінде $2x^2+mx+18=0$ теңдеуінің әртүрлі екі түбірі бар?

4-бөлім. ЫҚТИМАЛДЫҚ

4.1. Комбинаторика элементтері. Ньютон биномы
4.2. Оқиғалар алгебрасы және ықтималдықтың классикалық анықтамасы
4.3. Оқиғаның толық ықтималдығы. Байес формуласы
4.4. Бернулли формуласы және оның салдары

Ықтималдықтар теориясы мен математикалық статистика элементтерін біз 7-сыныптан бастап оқып-үйреніп келеміз. Сондықтан жаңа материалдарды оқып-үйренуге қажетті өтілген материалдарды алдымен қысқаша қайталап аламыз.

4.1. Комбинаторика элементтері. Ньютон биномы

Іс жүзінде адамдарға заттардың өзара орналасуының барлық мүмкін жағдайларын есептеуге немесе қандай да бір іс-әрекеттің барлық мүмкін нәтижелерін білуге және оны орындауға қажетті барлық мүмкін тәсілдер санын есептеуге тура келеді. Мысалы, 5 оқулықты екі оқушыға неше тәсілмен үлестіріп беруге болады? Немесе 5 ер бала мен 5 қыз баладан тұратын үміткерлер арасынан мектепте өткізілетін«көктем балының» «ханзадасы» мен «ханшайымын» неше тәсілмен таңдап алуға болады және т.с.с. Мұндай есептерді *комбинаторика есептері*, оны оқытып-үйрететін математика саласын *комбинаторика* деп атайды.

4.1.1. Комбинаторика элементтері

1. Қосу ережесі. Егер A жиынының элементтерінің саны санаулы болса, оның элементтер санын $n(A)$ арқылы белгілейік. *Кез келген санаулы A және B жиындары үшін*

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B) \qquad (1)$$

теңдігі орындалады.

(1) формула бірнеше жиындардың бірігуі үшін де орындалады. Мысалы, A, B және C жиындары үшін бұл формула былай жазылады:

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C). \qquad (2)$$

2. Көбейту ережесі. *Кез келген санаулы A және B жиындары мен барлық $(a; b)$, $(a\in A,\ b\in B)$ түріндегі қос элементтер саны m үшін*

$$m=n(A)\cdot n(B) \qquad (3)$$

теңдігі орындалады.

1-мысал. 2-ге не 3-ке, не 5-ке бөлінетін неше үш таңбалы сан бар?

A арқылы 2-ге бөлінетін барлық үш таңбалы сандар жиынын, B арқылы 3-ке бөлінетін үш таңбалы сандар жиынын, C арқылы 5-ке бөлінетін үш таңбалы сандар жиынын белгілейік. Енді $n(A\cup B\cup C)$

өрнегінің мәнін табайық. $n(A)=\left[\frac{900}{2}\right]=450$, $n(B)=\left[\frac{900}{3}\right]=300$,

$n(C)=\left[\frac{900}{5}\right]=180$,

$n(A\cap B)=\left[\frac{900}{6}\right]=150$, $n(A\cap C)=\left[\frac{900}{10}\right]=90$,

$n(B\cap C)=\left[\frac{900}{15}\right]=60$, $n(A\cap B\cap C)=\left[\frac{900}{2\cdot 3\cdot 5}\right]=30$ болғандықтан, (2) формула бойынша

$$n(A\cup B\cup C)=450+300+180-150-90-60+30=660.$$

Жауабы: 660.

2-мысал. Абзалдың 3 жейдесі, 2 шалбары және туфли мен спорттық аяқкиімі бар. Ол көшеге қанша тәсілмен киімін алмастырып шыға алады? Киімнің бір түрін ауыстырса киінудің өзге тәсілі болып саналады.

A жейделер жиыны, B — шалбарлар жиыны, C — аяқкиімдер жиыны десек, $n(A)=3$, $n(B)=2$ және $n(C)=2$. Сондықтан, егер $a\in A$, $b\in B$, $c\in C$ болса, $(a;\ b;\ c)$ үштік элементі — киініп шығудың бір үлгісі. Олай болса, көбейту ережесі бойынша $n(A)\cdot n(B)\cdot n(C)=3\cdot 2\cdot 2=12$ тәсіл шығады.

Жауабы: 12 түрлі тәсіл.

3. Қайталанбалы орналастырулар. Элементтерінің саны n-ге тең X жиыны берілсін. Осы жиынның элементтерінен құрастырылған мынадай тізімді қарастырайық:

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k,\ (x_i\in X), \qquad (4)$$

мұндағы кейбір элементтер қайталанып орналасуы мүмкін. (4) түріндегі әрбір тізімді ***ұзындығы k-ға тең шеру*** (кортеж) деп атайды.

X жиынының элементтерінен түзілген ұзындығы k-ға тең әрбір шеруді *n-нен k бойынша алынған* ***қайталанбалы орналастырулар*** деп атайды. Ал барлық n-нен k бойынша алынған қайталанбалы орналастырулар саны

$$\tilde{A}_n^k=n^k. \qquad (5)$$

3-мысал. 7 оқулықты екі оқушыға неше тәсілмен үлестіріп беруге болады?

Есеп шартында екі сан бар: 7 және 2. Онда (5) формула бойынша есептің жауабы 7^2 немесе 2^7 болуы қажет. Қайсысын алу керек? Әдетте оқушылар есеп шартына үстіртін талдау жасап, жауаптардың бірінші нұсқасын таңдайды. Мұндай қорытындыға келу жобасы қарапайым: «7 оқулықты 2 оқушыға үлестіріп

(2 оқушыға орналастырып) беру қажет». Олай болса, есептің жауабы $\tilde{A}_7^2 = 7^2 = 49$ болу керек сияқты. Бұл қателіктің табиғаты адамзат «тілінің» жетімсіздігінде болып отыр (сөйлесу тіліне тәуелсіз: қазақ тілі, ағылшын тілі және т.с.с.). Әлемнің ешбір тілінде «екі оқушыны 7 оқулыққа үлестіріп (орналастырып) беру керек» деп айтпайды. Ал іс жүзінде тап осылай болып отыр: екі оқушыны шартты түрде *А* және *Б* деп, ал оқулықтарды 1-ден 7-ге дейін нөмірлейік. Оқушылардың әрқайсысы өзіне бөлінген оқулықтарға аты-жөнін жазады делік. Онда 7 оқулықты *А* және *Б* оқушыларына үлестіріп берудің бір нұсқасын былай жазуға болады:

$\boxed{A}$	$\boxed{A}$	$\boxed{Б}$	$\boxed{A}$	$\boxed{Б}$	$\boxed{Б}$	$\boxed{A}$
1	2	3	4	5	6	7

Нәтижесінде екі оқушының аты-жөнін 7 оқулыққа үлестіріп (орналастырып) берген болып шықтық. Сондықтан барлық осындай орналастырулар саны

$$\tilde{A}_2^7 = 2^7 = 128\,.$$

Ж а у а б ы : 128 тәсіл.

4. Қайталанбайтын орналастырулар. Егер (4) шерудегі элементтер қайталанбаса, онда әрбір осындай шеруді *n-нен k бойынша алынған қайталанбайтын орналастыру* деп атайды. Барлық n-нен k бойынша алынған қайталанбайтын орналастырулар саны

$$A_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1) \text{ немесе } A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}\,. \qquad (6)$$

4-мысал. Неше тәсілмен 3 оқушыны 5 орындыққа отырғызуға болады?

Мұнда X жиыны 5 элементтен (орындықтардан) тұрады және олардан белгілі бір үш оқушы отыратындай үш орындықты таңдап алу қажет. Әрине, егер белгілі бір оқушының қай орындыққа отыратыны маңызды болса, онда бізге қажет сан 5 элементтен 3 бойынша алынған барлық қайталанбайтын орналастырулар санына тең:

$$A_5^3 = 5\cdot 4\cdot 3 = 60\,.$$

Ж а у а б ы : 60 тәсіл.

5. Алмастырулар. Егер n-нен k бойынша алынған қайталанбайтын орналастыруларда $n=k$ деп алсақ, онда бұл қайталанбайтын орналастыруды *n элементтен алынған алмастыру* деп атайды. Барлық n элементтен алынған алмастырулар саны

$$P_n = n! \qquad (7)$$

6. Қайталанбайтын терулер. Айталық, $n(X)=n$ болсын, онда X жиынының әрбір k элементтен тұратын ішкі жиынын *n-нен k бойынша алынған қайталанбайтын теру* деп атайды. Барлық n-нен k бойынша алынған қайталанбайтын терулер саны

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \qquad (8)$$

Мұндағы C_n^k санын ***теру коэффициенті*** деп атайды.

Теру коэффициентінің қасиеттері:

1°. $C_n^k = C_n^{n-k}$; 3°. $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n = 0$;

2°. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$; 4°. $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$.

1° және 4° формулалар 9-сынып алгебра оқулығында дәлелденген. 2° және 3° қасиеттер Ньютон биномы формуласынан оңай алынады.

5-мысал. Мини футболдан бір айналымдық жүйе бойынша ұйымдастырылған турнирге 5 команда қатысты. Турнирде барлығы неше ойын ойналған?

Әрбір ойынға 2 команда қатысады. Сондықтан турнирде ойналған ойындар саны 5-тен 2 бойынша алынған теруге тең: $C_5^2 = \dfrac{5!}{2!\cdot 3!} = 10.$

Жауабы: 10 ойын ойналды.

4.1.2. Ньютон биномы[1]

Теру коэффициенттері екімүшенің кез келген дәрежесін ашып жазуда қолданылады. Мәселен, кез келген n натурал саны үшін

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n. \qquad (9)$$

Бұл формуланы **Ньютон биномы** деп атайды. Формуланы дәлелдеу үшін математикалық индукция принципін қолданамыз:

$n = 1$ үшін $(a+b)^1 = C_1^0 a + C_1^1 b$;

$n = 2$ үшін $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = C_2^0 a^2 + C_2^1 ab + C_2^2 b^2$.

Енді $n=k$ үшін (9) формула орындалады деп алып, $n=k+1$ болғанда

$$(a+b)^{k+1} = C_{k+1}^0 \cdot a^{k+1} + C_{k+1}^1 a^k b + \ldots + C_{k+1}^m a^{k+1-m} \cdot b^m + \ldots + C_{k+1}^k a b^k + C_{k+1}^{k+1} \cdot b^{k+1}.$$

теңдігі орындалатынын көрсету керек. Шынында да,

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)(a+b)^k = (a+b)\left(C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1} \cdot b + \ldots + C_k^m a^{k-m} \cdot b^m + \ldots +\right.$$

$$\left. + C_k^{k-1} a \cdot b^{k-1} + C_k^k b^k\right) = C_k^0 \cdot a^{k+1} + C_k^1 \cdot a^k b + \ldots + C_k^m \cdot a^{k-m+1} \cdot b^m + \ldots +$$

[1] Бином сөзі екімүше мағынасында қолданылады.

$$+C_k^{k-1}a^2\cdot b^{k-1}+C_k^k ab^k+C_k^0\cdot a^k b+C_k^1\cdot a^{k-1}b^2+\ldots+C_k^{m-1}\ a^{k-m}\cdot b^m+C_k^m a^{k-m}\times$$
$$\times b^{m+1}+\ldots+C_k^{k-1}\cdot ab^k+C_k^k\cdot b^{k+1}=C_k^0\cdot a^{k+1}+\left(C_k^0+C_k^1\right)a^k\cdot b+\ldots+\left(C_k^{m-1}+\right.$$
$$\left.+C_k^m\right)a^{k-m+1}\cdot b^m+\ldots+\left(C_k^{k-1}+C_k^k\right)a\,b^k+C_k^k b^{k+1}.$$

$C_k^0=C_{k+1}^0=1, C_k^k=C_{k+1}^{k+1}=1$ және $C_k^{m-1}+C_k^m=C_{k+1}^m$ екенін ескерсек,

$$(a+b)^{k+1}=C_{k+1}^0+a^{k+1}+C_{k+1}^1 a^k b+\ldots+C_{k+1}^m\ a^{k+1-m}\cdot b^m+\ldots+$$
$$+C_{k+1}^k ab^k+C_{k+1}^{k+1}\cdot b^{k+1}.$$

Дәлелдеу керегі де осы.

Ньютон биномының жіктелуіндегі коэффициенттерді анықтағанда «Паскаль үшбұрышы» жиі қолданылады. Мұндағы әрбір қатар — сәйкес нөмірлі дәрежедегі Ньютон биномының жіктелу коэффициенттері.

0							1						
1						1		1					
2					1		2		1				
3				1		3		3		1			
4			1		4		6		4		1		
5		1		5		10		10		5		1	
6	1		6		15		20		15		6		1

Ньютон биномы көмегімен жоғарыдағы 2° және 3° қасиеттердің дұрыстығын дәлелдейік. (9) формулада $a=b=1$ деп алсақ,

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^k+\ldots+C_n^{n-1}+C_n^n=2^n.$$

Егер $a=1$, $b=-1$ десек,

$$C_n^0-C_n^1+C_n^2-\ldots+(-1)^k C_n^k+\ldots+(-1)^n C_n^n=(1-1)^n=0.$$

4.1.3*. Берілген құрамдағы орналастырулар[2]

Анықтама. *Құрамында $X=\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ жиынының x_1 элементі k_1 рет, x_2 элементі k_2 рет, т.с.с. x_n элементі k_n рет кездесетін, ұзындығы $m=k_1+k_2+\ldots+k_n$-ге тең әрбір шеруді берілген $(k_1+k_2+\ldots+k_n)$* ***құрамды орналастыру*** *деп атайды.*

Мысалы, егер $X=\{x_1, x_2, x_3\}$ болса, $(x_1, x_2, x_2, x_1, x_1)$ шеруі (3, 2, 0) құрамды орналастыру болады. Барлық $(k_1, k_2, ..., k_n)$ құрамды орналастырулар санын $P_m(k_1, k_2, ..., k_n)$ арқылы белгілесек,

[2]Кейде берілген құрамды орналастыруларды қайталанбалы алмастырулар деп те атайды.

$$P_m(k_1,\ k_2,\ \dots,\ k_n) = \frac{m!}{k_1!k_2!\dots k_n!}. \qquad (10)$$

Шынында да, $(k_1,\ k_2,\ \dots,\ k_n)$ құрамды орналастыру ұзындығы $m=k_1+k_2+\dots+k_n$-ге тең шеру болады. Бұл шеруде x_1 элементі k_1 орында кездеседі және бұл орындарды m-нің ішінен $C_m^{k_1}$ түрлі тәсілмен таңдап ала аламыз. Енді қалған $m-k_1$ орынның ішінен x_2 элементіне k_2 орынды түрлі тәсілмен таңдап аламыз және т.с.с. Соңында x_n элементін $C^{k_n}_{m-k_1-k_2-\dots-k_{n-1}}$ түрлі тәсілмен орналастыра аламыз. Онда көбейту ережесі бойынша

$$P_m(k_1,\ k_2,\ \dots,\ k_n) = C_m^{k_1}\cdot C_{m-k_1}^{k_2}\cdot\dots\cdot C^{k_n}_{m-k_1-k_2-\dots-k_{n-1}} =$$

$$= \frac{m!}{k_1!(m-k_1)!}\cdot\frac{(m-k_1)!}{k_2!(m-k_1-k_2)!}\cdot\dots\cdot\frac{(m-k_1-k_2-\dots-k_{n-1})!}{k_n!(m-k_1-k_2-\dots-k_n)!} =$$

$= \dfrac{m!}{k_1!k_2!\dots k_n!}$ теңдігін аламыз. Мұндағы $(m-k_1-k_2-\dots-k_n)!=0!=1$.

5-мысал. Кітап сөресінің бір қатарына математикадан төрт, физикадан үш оқулықты неше тәсілмен қойып шығуға болады?

Оқулықтарды сөреге қалай қойсақ та, бұл ұзындығы $4+3=7$ болатындай (4, 3) құрамды орналастыру болады. Онда (9) формула бойынша $P_7(4,\ 3) = \dfrac{7!}{4!3!} = 35$.

Жауабы: 35.

$P_m(k_1,\ k_2,\ \dots,\ k_n)$ санын *полиномдық коэффициент* деп атайды, өйткені

$$(a_1+a_2+\dots+a_n)^m = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_n=m} P_m(k_1,\ k_2,\ \dots,\ k_n)\cdot a_1^{k_1}\cdot a_2^{k_2}\dots a_n^{k_n} \qquad (10')$$

Егер мұнда $n=2$ болса, онда Ньютон биномы формуласын аламыз:

$$(a+b)^m = \sum_{n=0}^{m} C_m^n\cdot a^{m-n}\cdot b^n. \qquad (11)$$

Енді (10) формуланы дәлелдейік. Егер $a_1+a_2+\dots+a_n$ қосындысын өзіне-өзін m рет көбейтіп, ұқсас мүшелерді бір дәреженің астына алмай жазсақ, онда ұзындығы $m=k_1+k_2+\dots+k_n$-ге тең шерулердің барлық түрлерін алар едік. Сондықтан бұл жіктелудегі $a_1^{k_1}a_2^{k_2}\dots a_n^{k_n}$ өрнегінің коэффициенті $P_m(k_1,\ k_2,\ \dots,\ k_n)$-ге тең. Дәлелдеу керегі де осы. Ал (11) формула $C_m^k = P_m(m-k,\ k)$ теңдігінен шығады.

4.1.4. Қайталанбалы терулер*

n элементі бар $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ жиыны берілсін. X жиынының элементтерінен құрастырылған ұзындығы m-ге тең барлық шерулер жиынын қарастырайық. Олардың ішінен құрамдары бірдей шерулерді бір класқа жатқызайық. Әрбір осындай класты *n-нен m бойынша алынған қайталанбалы теру* деп атайды. Осындай барлық қайталанбалы терулер (кластар) санын $\overline{C_n^m}$ арқылы белгілейді. Мысалы, $X=\{a;\ b\}$ болсын. Онда осы элементтерден құрастырылған ұзындығы 3-ке тең барлық шерулер жиынының элементтері былай жазылады: (a, a, a), (a, a, b), (a, b, a), (b, a, a), (a, b, b), (b, a, b), (b, b, a), (b, b, b) және олардың саны $\bar{A}_2^3=2^3=8$-ге тең. Осыдан бірдей құрамды төрт класс құрылады: $K_1=\{(a, a, a)\}$; $K_2=\{(a, a, b), (a, b, a), (b, a, a)\}$, $K_3=\{(a, b, b), (b, a, b), (b, b, a)\}$, $K_4=\{(b, b, b)\}$.

Сондықтан $\overline{C_2^3}=4$.

Жалпы, жағдайда $\overline{C_n^m}$ саны

$$\overline{C_n^m}=C_{n+m-1}^{n-1}=C_{n+m-1}^{m} \qquad (12)$$

формуласымен анықталады.

Анықтама бойынша $\overline{C_n^m}$ саны $k_1+k_2+\ldots+k_n=m$ теңдігін қанағаттандыратын барлық $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ сандар шерулерінің санына (құрамдар санына) тең. Мұндағы k_i — теріс емес сандар. Енді әрбір осындай $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ сандар шеруін төмендегі тәсіл бойынша 1 және 0-ден құрылған шерулермен алмастырамыз: егер $k_i\neq0$ болса, k_i-ді саны k_i болатын бірліктермен алмастырамыз. $k_i=0$ болғанда оның орнына ешнәрсе жазбаймыз. Мұнда $i=1, 2, \ldots, n$. Шерудегі барлық үтірлерді 0-мен алмастырамыз. Басқаша айтқанда, құрамы $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ болатын класта k_i санының орнына k_i рет 1 санын қойып, әрбір үтірді 0-мен алмастырамыз. Сонда бұл класс $k_1+k_2+\ldots+k_n=m$ бірліктен және $n-1$ нөлдіктен (үтір саны $n-1$-ге тең) құралған шеруге сәйкес қойылады. Мысалы, жоғарыда қарастырылған K_1 класы құрамы (3, 0) шеруінен тұрады. Олай болса, бұл сандар шеруі (1, 1, 1, 0) шеруімен алмастырылады. Сол сияқты, K_2 класын құрамы (2, 1) болғандықтан, (1, 1, 0, 1) шеруіне сәйкес қоямыз, K_3-ке (құрамы (1, 2)) (1, 0, 1, 1) шеруін, K_4-ке (0, 1, 1, 1) шеруін сәйкес қоямыз. Бұл анықталған сәйкестік өзара бірмәнді сәйкестік болғандықтан, барлық n элементтен m бойынша алынған қайталанбалы терулер саны $k_1+k_2+\ldots+k_n=m$ бірліктен және $n-1$ нөлдіктен құралған шерулер санына тең. Ал мұндай шерулер саны C_{n+m-1}^{n-1} санына тең, өйткені шерудегі $n+m-1$ орынның ішінен нөлдіктер орналасатын $n-1$ орынды таңдап алу қажет (өзге m орында бірліктер орналасады). Сонымен, $\overline{C_n^m}=C_{n+m-1}^{n-1}$.

6-мысал. Гүл сататын дүкенде гүлдердің 6 түрі бар. Осылардан 7 гүлден тұратын гүл шоғын қанша тәсілмен жасауға болады? Әр гүлдің гүл шоғындағы орналасу тәртібі есепке алынбайды.

Қарастырылатын X жиынының 6 элементі бар. Әр гүл шоғын осы жиынның элементтерінен құралған, ұзындығы 7-ге тең шеру ретінде қарастырайық. Онда әртүрлі гүл шоғының саны 6 элементтен 7 бойынша алынған қайталанбалы терулер санына тең:

$$\overline{C_6^7} = C_{6+7-1}^{6-1} = C_{12}^5 = \frac{12!}{5!7!} = 792 .$$

Жауабы: 792.

Комбинаторика есептерін берілген құрамды орналастырулар мен қайталанбалы терулер көмегімен шешу барысында мынаны ескерген жөн:

Алдымен есеп шартында берілген құрамды шерулер санын есептеу немесе шерулердің барлық мүмкін құрамдары санын анықтау қажеттігін ажыратып алу керек. Бірінші жағдайда шерулердің құрамын анықтап, есепті (9) формула көмегімен шешеді. Екінші жағдайда негізгі жиынның элементтерінің саны n мен шеру ұзындығы m-ді анықтап, (12) формуланы қолданады.

1. Математиканың қандай бөлімін комбинаторика деп атайды?
2. Қосынды және көбейтінді ережелерін айтып, олардың мағынасын түсіндіріңдер.
3. Барлық 1) n-нен k бойынша алынған қайталанбалы орналастырулар саны; 2) n-нен k бойынша алынған қайталанбайтын орналастырулар саны; 3) n элементтің алмастырулар саны; 4) n-нен k бойынша алынған қайталанбайтын терулер саны қандай формуламен анықталады?
4. Берілген құрамдағы орналастыру деп нені айтады? Берілген құрамдағы барлық орналастырулар саны қалай анықталады?
5. n-нен m бойынша алынған қайталанбалы теру деп нені айтады? Барлық n-нен m бойынша алынған қайталанбалы орналастырулар саны қандай формуламен анықталады?

ЕСЕПТЕР

А

4.1. 1) 3-ке не 7-ге бөлінетін; 2) 5-ке не 7-ге бөлінетін барлығы неше екі таңбалы натурал сан бар?

4.2. Төраға мен оның орынбасарын 1) 4 үміткер арасынан; 2) 5 үміткер арасынан қанша тәсілмен сайлауға болады?

4.3. Екі қалтаға құны әртүрлі 1) 4 тиынды; 2) 5 тиынды қанша тәсілмен бөліп салуға болады?

4.4. Кезекке 1) 5 адамды; 2) 7 адамды қанша тәсілмен қойып шығуға болады?

8–4411

4.5. Сыныптағы 30 оқушы арасынан 1) бір; 2) екі; 3) үш сынып кезекшілерін қанша тәсілмен тағайындап шығуға болады?

4.6. «Рельс» сөзіндегі әріптердің барлық алмастырулар санын табыңдар.

4.7. 100-ден аспайтын неше натурал сан әрі 3-ке, әрі 5-ке бөлінеді?

4.8. 1) Бір қатарға; 2) дөңгелек үстел басына 5 оқушыны қанша тәсілмен отырғызуға болады?

4.9. Ұзындықтары 5 см, 6 см және 7 см болатын кесінділер жиынтығынан қанша үшбұрыш құрастыруға болады?

4.10. 1) «Отан»; 2) «Асар» сөзіндегі әріптердің орындарын алмастырып қанша сөз құрастыруға болады?

4.11. Жақшаны ашып жазыңдар:

1) $(x+2y)^3$; 2) $(3x-y)^3$; 3) $(a+b)^4$; 4) $(a-2b)^4$.

4.12. Өрнекті екімүше дәрежесі түрінде жазыңдар:

1) $x^3 - 9x^2y + 27xy^2 - 27y^3$;

2) $x^4+8x^3y + 24x^2y^2 + 48xy^3 + 16y^4$.

B

4.13. Шеңбер бойынан 12 нүкте алынған: 1) ұштары осы нүктелерде орналасқан неше хорда жүргізуге болады? 2) төбелері осы нүктелерде орналасқан неше үшбұрыш салуға болады?

4.14. Биномның жіктелуіндегі 5-мүшесін жазыңдар: $\left(2x\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}\right)^8$.

4.15. Биномның жіктелуіндегі ортаңғы мүшесін жазыңдар: $\left(2a + \dfrac{b}{2}\right)^{10}$.

4.16. $(1+x)^n$ биномының жіктелуіндегі үшінші және жетінші мүшелердің коэффициенттері тең. n-ді табыңдар.

4.17. $\left(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\right)^n$ биномы жіктелуіндегі үшінші коэффициент 28. Жіктелудің қақ ортасындағы мүшесін табыңдар.

4.18. Шахмат тақтасының қара түсті торларына 6 дойбы тастарын неше тәсілмен қойып шығуға болады?

4.19. Жолаушылар пойызында 15 вагон бар. Үш жолаушыны әртүрлі вагондарға қанша тәсілмен отырғызуға болады?

4.20. Баскетбол жарысына қатысу үшін жаттықтырушы 14 ер баланың ішінен 5 ойыншысы бар команда құрды. Егер команда құрамына белгілі екі баланың міндетті түрде енетіні анық болса, онда жаттықтырушы команданы қанша тәсілмен құра алады?

4.21. Өзара параллель n түзу мен өзара параллель m түзудің қиылысуы нәтижесінде неше параллелограмм шығады?

4.22. Кітап сөресінде математикадан сегіз, физикадан бес оқулық бар. Олардың арасынан неше тәсілмен математикадан үш, және физикадан екі оқулықты таңдап алуға болады?

4.23. Әрқайсысында 3 адамнан кем болмайтындай етіп, 8 адамды екі жеңіл автокөлікке неше тәсілмен отырғызуға болады?

4.24. *Логарифм* сөзінің құрамынан екі дауыссыз дыбысты және бір дауысты дыбысты неше тәсілмен таңдап алуға болады?

4.25. *Логарифм* сөзіндегі әріптердің барлық алмастырулар санын табыңдар.

4.26. Домино ойынындағы сүйектерде ұпайлар 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 цифрларымен көрсетілсе, бұл ойынға барлығы неше сүйек қажет болады?

4.27. Әрқайсысына n зат тиесілі болатындай етіп, үш адамға $3n$ затты қанша тәсілмен бөліп беруге болады?

4.28. Дүкенде офистік жиһаздардың 11 түрі бар. Офиске жиһаздардың бір немесе бірнеше түрінен 6 жиһазды қанша тәсілмен алуға болады?

4.29. Анасы баласына өзінде бар 4 алма, 3 алмұрт және 2 шабдалыдан күніне бір жеміс беріп отыруды ұйғарды. Анасы бұл ойынды қанша тәсілмен жүзеге асыра алады?

4.30. 1) $(x+y+z)^3$; 2) $(x+y+z)^4$ көпмүшесіндегі жақшаны ашып, ұқсас мүшелерін біріктіргенде барлығы неше қосылғыш шығады?

C

4.31. 4 оқушыға 12 оқулықты қанша тәсілмен тең үлестіріп беруге болады?

4.32. A өрнегі $(a+b)^n$ биномының жіктелуіндегі тақ орындарда орналасқан мүшелерінің қосындысы, B — оның жұп орындарда орналасқан мүшелерінің қосындысы болсын. Онда $A^2-B^2=(a^2-b^2)^n$ теңдігі орындалатынын дәлелдеңдер.

4.33. $\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)^9$ биномы жіктелуіндегі x^4 коэффициентін табыңдар.

4.34. $\left[(1+x)\left(\frac{1}{x}-1\right)\right]^{n}$ биномы жіктелуіндегі ең үлкен коэффициентін табыңдар.

4.35. $\left[(1+a)\left(1+\frac{1}{a}\right)\right]^{n}$ өрнегінің жіктелуіндегі a-ға тәуелсіз мүшесін табыңдар.

4.36. 30 оқушыны ағылшын, неміс және француз тілдерін оқыту үшін он-оннан 3 топқа бөлу қанша тәсілмен орындалады?

4.37. «Тоғызқұмалақ» ойыны турниріне қатысушылардың әрқайсысы қалғандарының бәрімен бір партиядан ойнап шығуы қажет еді. Турнирге қатысушылардың екеуі әрқайсысы үш партия ойнаған соң турнирден шығып қалды. Егер бұл жарыста барлығы 16 партия ойналса, басында турнирге неше ойыншы қатысқан?

4.38. Қандай шарт орындалғанда $\left(3a+\frac{1}{2a}\right)^{n}$ биномы жіктелуінде a-ға тәуелсіз қосылғышы бар болады?

4.39. «Қазақстан» сөзіндегі әріптерді үш «а» әрпі қатар орналаспайтындай етіп, қанша тәсілмен алмастыруға болады?

4.40. Алдыңғы есепте барлық «а» әрпі қатар келмейтіндей етіп, алмастырулардың барлық тәсілдерін жазыңдар.

4.41. 4 және 7 цифрларының көмегімен 10^4-нен кіші неше сан жазуға болады?

4.42. $x_1+x_2+...+x_n=k$ теңдеуінің неше теріс емес бүтін шешімдері бар?

4.43. $x_1+x_2+...+x_n \leqslant k$ теңсіздігінің неше теріс емес бүтін шешімдері бар?

4.44. $(a+b+c+d)^5$ өрнегінің жіктелуіндегі ең үлкен коэффициентін табыңдар.

4.45. $(2+x+3x^2)^6$ өрнегінің жіктелуіндегі x^5-нің коэффициентін табыңдар.

4.46. Автомобиль нөмірлері үш немесе төрт латын әрпі мен үш цифрдан құралған. 26 латын әрпі мен 10 цифрды пайдаланып, неше нөмір құрастыруға болады?

Қайталауға арналған жаттығулар

4.47. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\operatorname{tg}\varphi + \dfrac{\cos\varphi}{1+\sin\varphi}$; 2) $\operatorname{ctg}\varphi + \dfrac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}$.

4.48. $\{b_n\}$ геометриялық прогрессияның еселігін табыңдар:

1) $b_1 = 3;\ b_2 = -\dfrac{1}{3}$; 2) $b_1 = 1;\ b_2 = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$.

4.49. Функцияның графигін салыңдар:

1) $y = 2\sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) + 3$; 2) $y = 3 - \cos 2\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$.

4.2. Оқиғалар алгебрасы және ықтималдықтың классикалық анықтамасы

9-сыныпта өтілгендерді еске түсіріп, қысқаша қайталайық.

4.2.1. Оқиғалар алгебрасы

Элементар оқиға деп сынақтың (эксперименттің, тәжірибенің) қандай да бір нәтижесін, яғни сынақтың әрбір «жіктелмейтін» нәтижесін айтады. Мысалы, ойын сүйегін бір рет тастағанда 1, 2, 3, 4, 5, 6 ұпайларының бірі түсуі мүмкін. Сонымен, ойын сүйегін тастағанда A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 элементар оқиғаларының бірі орындалады, мұнда A_k оқиғасы k (k=1, 2, 3, 4, 5, 6) ұпай түскенін білдіреді.

Ойын сүйегін тастау барысында бізді жұп ұпайдың түсуі қызықтырса, ол кездейсоқ оқиға болғанымен, элементар оқиға емес. Өйткені ол A_2, A_4, A_6 элементар оқиғаларына жіктеледі.

Егер U жиынының әрбір элементі қандай да бір элементар оқиғаны білдірсе және керісінше, әрбір элементар оқиға U жиынының элементі болса, онда U жиынын *элементар оқиғалар кеңістігі* деп атайды. Мысалы, ойын сүйегін тастағанда элементар оқиғалар кеңістігі 6 элементтен тұрады: $U=\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$; тиын тастағанда элементар оқиғалар кеңістігінің екі элементі бар: $U=\{E, T\}$, мұндағы E — тиынның елтаңба жағымен түсуі, T — сан жағымен түсуі.

*Элементар оқиғалар кеңістігінің әрбір ішкі жиынын **кездейсоқ оқиға*** деп атайды. Мысалы, ойын сүйегін тастағанда U кеңістігінің $A=\{A_2, A_4, A_6\}$ ішкі жиыны — жұп ұпай түсетінін білдіретін кездейсоқ оқиға.

*Сынақтың кез келген нәтижесінде кездейсоқ оқиға орындалса, оны **ақиқат оқиға** деп, ал сынақтың ешбір нәтижесінде орындалмайтын оқиғаны **жалған оқиға*** деп атайды. Ақиқат оқиғаны U арқылы, жалған оқиғаны $\varnothing$ арқылы белгілейді. Мысалы, ойын сүйегін бір рет тастағанда бірден кем емес ұпайдың түсуі — ақиқат, 7-ден кем емес ұпайдың түсуі — жалған оқиға.

Бір сынақ нәтижесінде қатар орындалуы мүмкін емес екі кездейсоқ оқиғаны өзара ***үйлесімсіз оқиғалар*** деп атайды. Ал өзге оқиғаларды, яғни *сынақтың қандай да бір нәтижесінде қатар орындалуы мүмкін оқиғаларды* ***үйлесімді оқиғалар*** деп атайды.

Сонымен, $A \subset U$ оқиғасының орындалуы үшін оның құрамына енетін қандай да бір элементар оқиғаның орындалуы қажетті және жеткілікті.

Бірдей элементар оқиғалардан құралған A және B оқиғаларын ***тең мүмкіндікті*** (бірдей) ***оқиғалар*** деп атайды және оны былай жазады: $A=B$.

A оқиғасының орындалмайтынын білдіретін кездейсоқ оқиғаны A-ның *қарама-қарсы оқиғасы* деп атап, оны $\bar{A}$ арқылы белгілейді. Мысалы, ойын сүйегін бір рет тастағанда $A=\{A_2, A_4, A_6\}$ оқиғасына қарама-қарсы оқиға $\bar{A}=\{A_1, A_3, A_5\}$ тақ ұпай түсуін білдіреді.

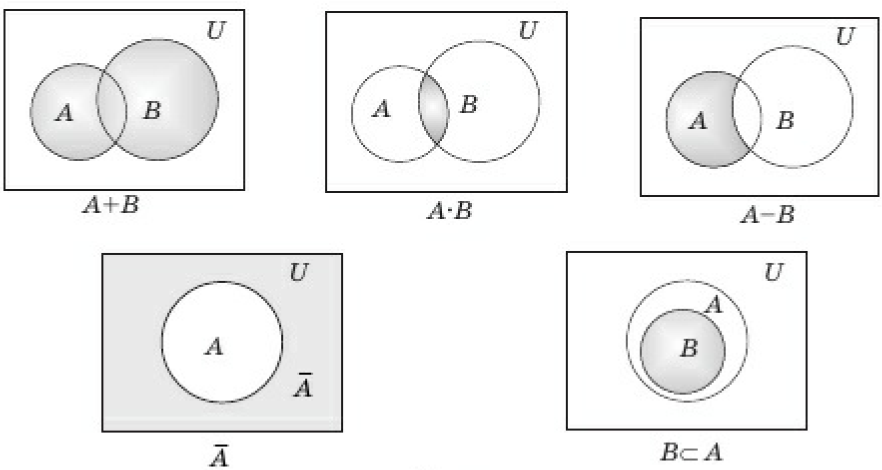
Егер A және B оқиғаларының бірінің орындалуы немесе орындалмауы екіншісінің орындалуына немесе орындалмауына әсер етпесе, онда бұл оқиғаларды *өзара тәуелсіз* оқиғалар деп атайды.

A және B оқиғаларының *қосындысы* деп A және B оқиғаларының кем дегенде біреуінің орындалуын білдіретін оқиғаны айтады және оны $A+B$ арқылы белгілейді. Мысалы, ойын сүйегін бір рет тастағандағы $A=\{A_2, A_4, A_6\}$ және $B=\{A_1, A_2\}$ оқиғалары үшін

$$A+B=\{A_1, A_2, A_4, A_6\}.$$

A және B оқиғаларының *көбейтіндісі* деп A және B оқиғаларының екеуінің де бір мезгілде орындалатынын білдіретін оқиғаны айтады және оны $A \cdot B$ арқылы белгілейді, яғни $A \cdot B$-ның құрамына A-ға да және B-ға да тиісті элементтер енеді. Мысалы, $A=\{A_2, A_4, A_6\}$ және $B=\{A_1, A_2\}$ оқиғалары үшін $A \cdot B=\{A_2\}$. Ал өзара қарама-қарсы A және $\bar{A}$ оқиғалары үшін $A \cdot \bar{A}=\varnothing$ және $A+\bar{A}=U$ теңдіктері орындалады.

A және B оқиғаларының *айырымы* деп A-ның орындалатынын



4.1-сурет

және B-ның орындалмайтынын білдіретін оқиғаны айтады және оны $A-B$ деп белгілейді. Мысалы, $A-B=\{A_4, A_6\}$; $B-A=\{A_1\}$.

B оқиғасы орындалған сайын A оқиғасы да орындалып отырса, A-ны B оқиғасының салдары деп атайды және оны былай жазады: $B \subset A$. Мысалы, $A=\{A_2, A_4, A_6\}$ және $C=\{A_4, A_6\}$ оқиғалары үшін A оқиғасы C-ның салдары болады: $C \subset A$.

Кездейсоқ оқиғаларды және оларға қолданылатын амалдарды Эйлер–Венн диаграммалары арқылы бейнелеген тиімді (4.1-сурет).

4.2.2. Ықтималдықтың классикалық анықтамасы. Ықтималдықтың қасиеттері

Айталық, $U=\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ элементар оқиғалар кеңістігі мен $A=\{A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots, A_{n_m}\}$, мұндағы $A_{n_k} \in U$, $(k=1, 2, \ldots, m)$ кездейсоқ оқиғасы берілсін. $A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots, A_{n_m}$ элементар оқиғаларын A оқиғасына *қолайлы нәтижелер* деп атайды.

Анықтама. *$A \subset U$ кездейсоқ оқиғасының ықтималдығы деп A-ға қолайлы нәтижелер санының барлық мүмкін нәтижелер (барлық элементар оқиғалар) санына қатынасын айтады және оны $P(A)$ арқылы белгілейді.*

Сонымен анықтама бойынша

$$P(A)=\frac{m}{n}. \qquad (1)$$

Бұл *ықтималдықтың классикалық анықтамасы.* Өйткені мұнда қарастырылатын барлық элементар оқиғалар өзара тең мүмкіндікті оқиғалар болып табылады.

1-мысал. Жабық қорапта 6 ақ және 4 қызыл шар бар. Қораптан кездейсоқ алынған шардың ақ түсті болу ықтималдығын анықтау керек.

A оқиғасы қораптан алынған шардың ақ түсті болатынын білдірсін. Онда 10 бірдей мүмкіндікті элементар оқиғалар ішінен 6-уы A оқиғасына қолайлы. Сондықтан (1) формула бойынша

$$P(A)=\frac{6}{10}=0,6.$$

Енді шартты ықтималдық ұғымын анықтайық. Айталық, A және B үйлесімді оқиғалар болсын. B-ның орындалғаны белгілі болғандағы A оқиғасының ықтималдығы *A-ның шартты ықтималдығы* деп аталады және оны $P_B(A)$ арқылы белгілейді. Мысалы, ойын сүйегін бір рет тастағанда A жұп ұпай түсетінін, ал B төрттен кем ұпай түсетінін білдіретін оқиғалар болсын. Онда $A=\{A_2, A_4, A_6\}$ және $B=\{A_1, A_2, A_3\}$ оқиғалары үйлесімді. Егер B оқиғасының орындалғаны белгілі болса, A_1, A_2, A_3 элементар оқиғаларының біреуі тек A_2-сі ғана A оқиғасына қолайлы нәтиже береді. Олай болса,

$$P_B(A)=\frac{1}{3}.$$

Енді ықтималдықтың қасиеттерін атап өтейік:

1°. Кез келген A оқиғасы үшін $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$ теңсіздігі орындалады. Осының қатарында $P(U)=1$ және $P(\varnothing)=0$ теңдіктері орындалады.

*2°. **(Қосу теоремасы).** Кез келген A және B оқиғалары үшін*

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)$$

теңдігі орындалады. Егер A және B үйлесімсіз оқиғалар болса, $A\cdot B=\varnothing$ болсын, бұл жағдайда қосынды теоремасы былай жазылады:

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

3°. Кез келген A оқиғасы үшін $P(A)=1-P(\overline{A})$ теңдігі орындалады.

4°. Кез келген A және B оқиғалары үшін

$$P(A\cdot B)=P(B)\cdot P_B(A)=P(A)\cdot P_A(B)$$

теңдіктері орындалады. Егер A және B тәуелсіз оқиғалар болса, онда $P_A(B)=P(B)$ теңдігі орындалып, алдыңғы теңдікті былай жазамыз:

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B).$$

2-мысал. Үш мерген нысанаға бір-бірден оқ атты. Егер мергендердің нысанаға тигізу ықтималдықтары сәйкесінше 0,5; 0,6 және 0,7-ге тең болса, онда нысанаға кем дегенде бір оқтың тию ықтималдығын анықтайық.

A, B және C арқылы сәйкесінше 1, 2, және 3-мергеннің нысанаға тигізуін білдіретін оқиғаларды белгілейік. Онда біз $P(A+B+C)$ ықтималдығын табуымыз қажет. Ал $\overline{A+B+C}=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$ болғандықтан,

$$P(A+B+C)=1-P\left(\overline{A+B+C}\right)=1-P\left(\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\right).$$

$\overline{A}$, $\overline{B}$ және $\overline{C}$ оқиғалары — тәуелсіз оқиғалар. Сондықтан $P\left(\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\right)=P\left(\overline{A}\right)\cdot P\left(\overline{B}\right)\cdot P\left(\overline{C}\right)$. Осы сияқты $P\left(\overline{A}\right)=1-P(A)=1-0,5=$ $=0,5$; $P\left(\overline{B}\right)=0,4$; $P\left(\overline{C}\right)=0,3$ екенін ескерсек,

$$P(A+B+C)=1-0,5\cdot 0,4\cdot 0,3=1-0,06=0,94.$$

Жауабы: 0,94.

1. Қандай оқиғалар элементар оқиғалар деп аталады? Элементар оқиғалар кеңістігі деген не? Мысал келтіріңдер.
2. Оқиғалардың түрін атаңдар. Үйлесімсіз, ақиқат, жалған, тәуелсіз оқиғалар деген не?
3. Қандай оқиғаны кездейсоқ оқиға деп атайды? Мысал келтіріңдер. Қарама-қарсы оқиға деген не?

4. Кездейсоқ оқиғаларға қандай амалдар қолданылады? Оларды Эйлер–Венн диаграммалары арқылы түсіндіріңдер.
5. Кездейсоқ оқиғаға қолайлы нәтижелер деп және барлық мүмкін нәтижелер деп нені атайды? Ықтималдықтың классикалық анықтамасын беріңдер. Мысал келтіріңдер.
6. Ықтималдықтың негізгі қасиеттерін келтіріп, оларды дәлелдеңдер. Мысал келтіріңдер.

ЕСЕПТЕР

A

4.50. Қорапта ақ, қызыл, көк түсті шарлар бар. Қораптан кездейсоқ алынған шардың ақ, қызыл не көк түсті болуын білдіретін оқиғаларды сәйкесінше A, B және C арқылы белгілейік. 1) $A+B+C$; 2) $A+B$; 3) A оқиғаларының мағынасын түсіндіріңдер.

4.51. Егер A оқиғасы B оқиғасының салдары болса, 1) $A+B$; 2) $A \cdot B$ оқиғасының мәнін табыңдар.

4.52. A оқиғасы ойын сүйегін бір рет тастағанда бестік ұпай түсетінін білдірсін. Онда $\overline{A}$ оқиғасы нені білдіреді?

4.53. A оқиғасы қораптағы асықтардың кем дегенде біреуі қызыл түсті болатынын білдірсін. $\overline{A}$ оқиғасы нені білдіреді?

4.54. $U=\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8\}$ элементар оқиғалар кеңістігінде $A=\{A_1,A_3\}$, $B=\{A_2,A_4,A_6,A_8\}$, $C=\{A_1,A_3,A_5,A_7\}$, $D=\{A_4, A_5, A_6, A_7\}$, $E=\{A_1, A_2, A_7, A_8\}$ оқиғаларын қарастырайық. 1) Өзара үйлесімсіз оқиғалар жұбын; 2) үйлесімді оқиғалар жұбын; 3) қарама-қарсы оқиғалар жұбын; 4) бірі екіншісінің салдары болатындай оқиғалар жұбын жазып көрсетіңдер.

4.55. Алдыңғы есеп шартында 1) $A+E$; 2) $C+D$; 3) $B \cdot D$; 4) $B-A$; 5) $\overline{A}-C$; 6) $C \cdot E-A$ оқиғасы құрамына енетін элементтерді жазып көрсетіңдер.

4.56. 20-дан аспайтын натурал сан ойладық. Бұл санның 1) 5-ке бөлінуі; 2) 3-ке бөлінуі; 3) жай сан болуы; 4) құрама сан болуы ықтималдығын табыңдар.

4.57. Қалтада боялмаған 5 асық және боялған 6 асық бар. Егер қалтадан бірінші алынған асық боялмаған болса, онда кездейсоқ екінші алынған асықтың боялмаған болу ықтималдығы қандай? Мұнда бірінші алынған асық қалтаға қайта салынбайды.

4.58. Тиын үш рет тасталды. Оның кем дегенде бір рет елтаңба жағымен түсу ықтималдығы қандай?

4.59. Цех өнімдерінің 1%-ы жарамсыз болып келеді. Оның 1000 өнімінің ішінде орта есеппен неше өнім жарамсыз болады деп күтіледі?

4.60. Кездейсоқ ойға келген екі таңбалы санның жай сан болуы және оның цифрлары қосындысының 5-ке бөліну ықтималдығы қандай?

4.61. Екі мерген нысанаға бір-бірден оқ атты. Бірінші мергеннің нысанаға тигізу ықтималдығы 0,7-ге, ал екіншісінікі 0,8-ге тең. 1) нысанаға бір ғана мергеннің тигізуі; 2) кем дегенде бір мергеннің тигізуі; 3) екі мергеннің де тигізуі; 4) кем дегенде бір мергеннің мүлт кету ықтималдығын табыңдар.

4.62. Алдыңғы есеп шартында нысанаға бірінші мергеннің дәл тигізіп, ал екіншісінің мүлт кету ықтималдығын табыңдар.

4.63. Дүкендегі әр 100 электр шамының біреуі жарамсыз болып келеді. Осы дүкеннен екі электр шамы сатып алынды. Сатып алынған электр шамдарының 1) екеуі де жарамды болуы; 2) тек біреуі ғана жарамсыз болуы; 3) екеуі де жарамсыз болуы ықтималдығы қандай?

B

4.64. Лотерея ойынының екі түрінен бір-бірден билет сатып алынды. A — бірінші билетке ұтыс түсуін, B екінші билетке ұтыс түсуін білдірсін. 1) $P=A\overline{B}+\overline{A}B$; 2) $Q=A\overline{B}+\overline{A}B+AB$ оқиғаларының мағынасы қандай?

4.65. A, B және C кездейсоқ оқиғалары үшін 1) $A\cdot B\cdot C=A$; 2) $A+B+C=A$ теңдіктерінің мағынасын ашып көрсетіңдер.

4.66. A, B және C кездейсоқ оқиғалары берілген. Төмендегі оқиғаларды A, B және C арқылы өрнектеңдер: 1) тек қана A оқиғасы орындалды; 2) A және B оқиғалары орындалып, C оқиғасы орындалмады; 3) үш оқиғаның барлығы орындалды; 4) осы оқиғалардың кем дегенде біреуі орындалды; 5) осы оқиғалардың кем дегенде екеуі орындалды; 6) берілген оқиғалардың біреуі де орындалмады; 7) орындалған оқиғалардың саны екіден артпайды.

4.67. A және B оқиғалары орындалып, C-ның орындалмағаны белгілі болса, 1) $A+BC$; 2) $(A+B)C$; 3) $\overline{A}B+C$; 4) ABC оқиғаларының орындалғанын не орындалмағанын анықтаңдар.

4.68. Ойын сүйегін үш рет тастағанда әртүрлі ұпайлар түсу ықтималдығы қандай?

4.69. Қалтада 4 боялған және 5 боялмаған асық бар. Қалтадан кездейсоқ алынған екі асықтың бірі боялған, екіншісі боялмаған болу ықтималдығы қандай?

4.70. Ұзындықтары 2 см, 5 см, 6 см және 10 см болатын кесінділер арасынан кездейсоқ үш кесінді алынды. Алынған кесінділерден үшбұрыш құрастыру ықтималдығы қандай?

4.71. Ойын сүйегі екі рет тасталды. 1) Кем дегенде бір рет 3-тен кем ұпай түсуі; 2) кем дегенде бір рет 1 ұпайының түсу ықтималдығы қандай?

4.72. Математикадан аудандық олимпиадаға 10-сыныптардан 15 оқушы қатысты, олардың 8-і оқу озаттары. Алғашқы үш жүлделі орынды оқу озаттарының иемдену ықтималдығы қандай? Олимпиадаға қатысушы 15 оқушының жеңімпаз болу мүмкіндіктері бірдей деп есептелінеді.

4.73. Нысанаға төрт рет атқанда оған кем дегенде бір оқ тию ықтималдығы 0,9984-ке тең. Нысанаға бір рет атқанда дәл тигізу ықтималдығы қандай?

C

4.74. A, B және C оқиғалары берілген. 1) $A+B$; 2) $A+B+C$ оқиғасын үйлесімсіз оқиғалар қосындыларына жіктеңдер.

4.75. 9 қабатты үйдің лифтіне 5 адам отырды. Бұл адамдардың әрқайсысының үйдің кез келген қабатынан шығу мүмкіндіктері бірдей деп алып, олардың барлығының лифтіден 1) бір қабаттан шығу; 2) 7-қабаттан шығу; 3) әртүрлі қабаттардан шығу ықтималдықтарын табыңдар.

4.76. Алты оқушы кездейсоқ дөңгелек үстел басына отырды. Екі құрбы қыздың қатар отыру ықтималдығы қандай?

4.77. Шахмат тақтасына кездейсоқ әр түсті екі ладья қойылды. Олардың бір-бірін «ала алмау» ықтималдығы қандай?

4.78. Бір атқанда нысанаға тигізу ықтималдығы 0,6-ға тең. Нысанаға тигенше оқ атыла береді. Нысанаға атылған оқтар саны 3-тен артық болмау ықтималдығы қандай?

4.79. Екі ойыншы кезектесіп тиын тастап ойнады. Ойын шарты бойынша кімнің тастаған тиыны бірінші болып елтаңба жағымен түссе, сол ойыншы ұтады. Әрбір ойыншының ұту ықтималдығын табыңдар.

4.80. Алдыңғы есепті үш ойыншы үшін шешіңдер.

4.81*. $\{1, 2, \ldots, n\}$ сандары арасынан кездейсоқ m саны алынды. m-ді берілген q санына бөлгенде r-ге тең қалдық қалу ықтималдығын табыңдар. Бұл ықтималдықты $n \to \infty$ деп алып, табыңдар.

4.82. Үш ойын сүйегі тасталды. n арқылы түскен ұпайлар қосындысын белгілейік. $n=11$ немесе $n=12$ оқиғаларының қайсысы ықтималдырақ?

Қайталауға арналған жаттығулар

4.83. Есептеңдер:

1) $\cos 70° \cdot \cos 50° \cdot \cos 10°$; 2) $\sin 15° - \sin 75°$.

4.84. Тізбектің жалпы мүшесінің формуласын жазыңдар:

1) 1; 4; 7; 10; ...; 2) $0;\ 1;\ \frac{\sqrt{2}}{2};\ \sin\frac{\pi}{8};\ \ldots$.

4.3. Оқиғаның толық ықтималдығы. Байес формуласы

4.3.1. Оқиғаның толық ықтималдығы

Теорема. $H_1, H_2, \ldots, H_n$, $(H_i \cdot H_j = \varnothing,\ i \neq j)$ *өзара қос-қостан үйлесімсіз оқиғалар* $H_1+H_2+, \ldots+H_n=U$, $P(U)=1$ *теңдігін қанағаттандырсын және* $A \subset U$ *кездейсоқ оқиғасы* $H_1, H_2, \ldots, H_n$ *оқиғаларымен үйлесімді болсын. Онда* A *оқиғасының ықтималдығы*

$$P(A)=P(H_1) \cdot P_{H_1}(A)+P(H_2) \cdot P_{H_2}(A)+\ldots+P(H_n) \cdot P_{H_n}(A) \qquad (1)$$

формуласымен анықталады. (1) формула ***толық ықтималдық формуласы*** деп аталады.

$A=A\cdot U=A\cdot H_1+A \cdot H_2+\ldots+AH_n$ және $A\cdot H_i$ пен AH_j $(i\neq j)$ үйлесімсіз болғандықтан,

$$P(A)=P(A \cdot H_1)+P(A \cdot H_2)+\ldots+P(A \cdot H_n)$$

теңдігінен $P(A\cdot H_j) = P(H_j) \cdot P_{H_j}(A)$ болатынын ескеріп, (1) формуланы аламыз.

1-мысал. Оқушы 25 емтихан сұрақтарының 20-на дайындалып үлгерген. Емтиханды ең үлкен ықтималдықпен тапсыру үшін оқушы емтихан билетін бірінші болып алғаны дұрыс па, әлде кезекпен алғаны дұрыс па?

Оқушының дайындалған билетін «сәтті» деп, ал дайындалып үлгермеген билетін «сәтсіз» билет деп атайық. Алдымен оқушының билетті бірінші болып алғандағы емтиханды тапсыру ықтималдығын анықтайық. Бұл жағдайда барлық мүмкін жағдайлар саны $n=25$, қолайлы жағдайлар саны $m=20$. Сонда $P=\frac{20}{25}=0,8$.

Енді оқушының билетті екінші болып алғандағы емтиханды тапсыру ықтималдығын анықтайық. Әрине, бұл оқиға бірінші билет алған оқушының қандай билет алғанына тәуелді: ол сәтті билет алды ма, әлде сәтсіз билет алды ма? H_1 арқылы бірінші оқушының «сәтті» билет алғанын, H_2 арқылы оның «сәтсіз» билет алғанын білдіретін оқиғаларды белгілейік. Бізге қажет оқушының емтиханды тапсыруын білдіретін оқиғаны A арқылы белгілейік. Онда A оқиғасы H_1 және H_2 оқиғаларының бірімен орындалады. Олай болса, (1) формула бойынша:

$P(A)=P(H_1) \cdot P_{H_1}(A)+P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) = 0,8\cdot\frac{19}{24}+0,2\cdot\frac{20}{24}=0,8$ теңдігін аламыз. Мұндағы $P(H_1)=\frac{20}{25}=0,8$, $P_{H_1}(A)=\frac{19}{24}$, $P(H_2)=\frac{5}{25}=0,2$, $P_{H_2}(A)=\frac{20}{24}$ болатынын ескердік. Сонымен оқушының емтихан тапсыру ықтималдығы оның қай кезекпен билет алуына тәуелсіз.

4.3.2. Байес формуласы

Алдыңғы тақырыптағы теоремада A оқиғасының орындалғаны белгілі болсын. Бізге A оқиғасының H_k оқиғасымен бірге орындалу ықтималдығын анықтау қажет. Оқиғалардың көбейтіндісі ықтималдығының формуласы бойынша

$P(A \cdot H_k)=P_{H_k}(A) \cdot P(H_k)=P_A(H_k) \cdot P(A)$ теңдігі орындалды.

Осыдан $P_A(H_k) = \dfrac{P(H_k) \cdot P_{H_k}(A)}{P(A)}$, яғни

$$P_A(H_k) = \frac{P(H_k) \cdot P_{H_k}(A)}{P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) + \ldots + P(H_n)P_{H_n}(A)} \qquad (2)$$

формуласын аламыз. (2) формуланы *Байес формуласы*, кейде *болжамдар теоремасы* деп те атайды.

2-мысал. Мектеп оқушыларының 60%-ы қыз балалар. Театрға қыз балалардың 80%-ы және ер балалардың 75%-ы билет алған. Мұғалімдер бөлмесіне жоғалған билет әкелінді. Бұл билетті ер баланың жоғалтып алу ықтималдығын анықтайық.

A арқылы оқушының билетін жоғалтып алғанын білдіретін оқиғаны, H_1 арқылы билетті қыз баланың жоғалтқанын, H_2 арқылы билетті ер баланың жоғалтқанын білдіретін оқиғаны белгілейік. Онда $P_A(H_2)$ ықтималдығын табу керек. $P(H_1)=0,6$; $P_{H_1}(A)=0,8$, $P(H_2)=0,4$; $P_{H_2}(A)=0,75$ болғандықтан, толық ықтималдықтың формуласы бойынша $P(A)=0,6 \cdot 0,8+0,4 \cdot 0,75=0,78$ болады. Сонда (2) формула бойынша

$$P_A(H_2) = \frac{P(H_2) \cdot P_{H_2}(A)}{P(A)} = \frac{0,4 \cdot 0,75}{0,78} = \frac{0,3}{0,78} = \frac{5}{13} \quad \text{аламыз.}$$

Жауабы: $\dfrac{5}{13}$.

1. Оқиғаның толық ықтималдығы жөніндегі теореманы тұжырымдап, оны дәлелдеңдер.
2. Байес формуласын жазып, оны дәлелдеңдер. Бұл формуланы неліктен болжамдар теоремасы деп атайтынын түсіндіріңдер.

ЕСЕПТЕР

A

4.85. Бір қалтадағы 10 асықтың 8-і, екіншісіндегі 20 асықтың 4-уі қызыл түсті. Әр қалтадан кездейсоқ бір асықтан алынды. Соңында осы екі асықтың кездейсоқ біреуі алынды. Соңында алынған асықтың қызыл түсті болу ықтималдығы қандай?

4.86. Үш мергеннің біреуі нысанаға оқ атып, оған дәл тигізді. Бірінші мергеннің нысанаға дәл тигізу ықтималдығы 0,3, екіншісінікі – 0,5, ал үшіншісінің дәл тигізу ықтималдығы 0,8. Нысанаға дәл тигізген екінші мерген болу ықтималдығы қандай?

4.87. Айталық, барлық ер адамдардың 0,5%-ы және барлық әйел адамдардың 0,25%-ы дальтониктер (түсті ажырату қабілеті төмен) болып келеді делік. Кездейсоқ таңдап алынған адам дальтоник болып шықты. Оның ер адам болу ықтималдығы қандай? Мұнда барлық ерлер мен әйелдер саны өзара тең деп есептелінеді.

4.88. Бір қорапта 5 ақ және 10 қара шар, екіншісінде 10 ақ және 5 қара шар бар. Кездейсоқ бір қорапты алып, одан кездейсоқ бір шар алынды. 1) алынған шардың ақ түсті болу ықтималдығын; 2) егер алынған шар ақ түсті болса, онда оның екінші қораптан алынуы ықтималдығын табыңдар.

4.89. Дүкенге бірдей қораптарға салынған аяқкиімдердің екі партиясы түсті. Әр партиядағы аяқкиімдер саны бірдей. Бір партиядағы аяқкиімдердің 40%-ы және екінші партиядағы аяқкиімдердің 70%-ы қара түсті. Осылардың ішінен кездейсоқ алынған аяқкиімнің қара түсті болу ықтималдығы қандай?

4.90. Құрастырушы 1-цех өндірген үш қорап тетік және 2-цех өндірген екі қорап тетік алды. 1-цех өнімдерінің стандартқа сәйкес келу ықтималдығы 0,8-ге, ал 2-цех өнімдерінің стандартқа сәйкес келуі ықтималдығы 0,9-ға тең. 1) кездейсоқ бір қораптан алынған тетіктің стандартқа сәйкес болуы; 2) егер алынған тетік стандартқа сәйкес болса, оның 2-цех өнімі болу ықтималдығы қандай?

B

4.91. Электр желісіне тізбектей үш элемент жалғанған. Бұл элементтердің істен шығу ықтималдықтары сәйкесінше 0,1-ге; 0,15-ке және 0,2-ге тең. Электр желісінде ток болу ықтималдығы қандай?

4.92. Үш дорбаның әрқайсысында 6 ақ және 4 қызыл түсті асықтар бар. Бірінші дорбадан кездейсоқ бір асық алынып, екінші дорбаға салынды. Сонан соң екінші дорбадан кездейсоқ бір асық алынып, үшінші дорбаға салынды. Соңында үшінші дорбадан кездейсоқ алынған асықтың қызыл түсті болу ықтималдығы қандай?

4.93. Үш мерген нысанаға бір-бірден оқ атты. Нәтижесінде нысанаға 2 оқ тиді. Егер мергендердің нысанаға тигізу ықтималдықтары сәйкесінше 0,6-ға, 0,5-ке және 0,4-ке тең болса, онда нысанаға тиген оқтың біреуі үшінші мергеннің оғы болу ықтималдығы қандай?

4.94. Бірінші қорапта 1 ақ және 9 қызыл шар, екіншісінде 5 ақ және 1 қызыл шар бар. Әрбір қораптан кездейсоқ бір-бір шар алынып тасталды да, қораптардағы қалған шарлар үшінші қорапқа салынды. Үшінші қораптан кездейсоқ алынған шардың ақ түсті болу ықтималдығын табыңдар.

4.95. Дүкенге екі фабрикадан тоқыма өнімдері түсті: бірінші фабрикадан 70% және екінші фабрикадан 30%. I фабрика өнімдерінің 10%-ы, II фабрика өнімдерінің 20%-ы жарамсыз болатыны белгілі. Дүкеннен кездейсоқ сатып алынған тоқыма өнімінің жарамсыз болу ықтималдығын табыңдар.

4.96. Құрастыру бөліміне үш станок-автоматтан өнімдер келіп түседі. Бірінші автомат 0,4%, екіншісі 0,3%, үшінші автомат 0,2% жарамсыз өнімдер береді. Егер I автоматтан 100 тетік, II-ден 200 тетік, ал III-ден 250 тетік түскен болса, онда құрастыруға алынған тетіктің жарамсыз болу ықтималдығы қандай?

C

4.97. Сырт пішіндері бірдей 10 монетаның біреуінің екі жағында да елтаңба белгісі бар, ал қалғандары кәдімгі тиындар. Осы тиындардың кездейсоқ біреуі алынып, 10 рет тасталды. 10 реттің барлығында да тиын елтаңба жағымен түсті. Бұл тиынның екі жағында да елтаңба белгісі болу ықтималдығы қандай?

4.98. Ішінде екі асығы бар қалтаға қызыл түсті асық салынып, одан кездейсоқ бір асық алынды. Алынған асықтың қызыл түсті болу ықтималдығы қандай? Қалтадағы бастапқы екі асықтың түстерінің барлық түрлері (қызыл не қызыл емес болуы) бірдей мүмкіндікті деп есептелінеді.

4.99. Шеберліктері бірдей екі ойыншы шахмат ойнады. Төмендегі оқиғалардың қайсысы ықтималдырақ: 1) 4 партияның екеуінде жеңіске жету ме, әлде 6 партияның үшеуінде жеңіске жету ме; 2) 4 партияның кем дегенде екеуінде жеңіске жету ме, әлде 6 партияның кем дегенде үшеуінде жеңіске жету ме?

4.100. Цехтағы жұмыс істейтін 20 станоктың 10-ын I завод, 6-ын II завод және 4-ін III завод жасап шығарған. Бұл станоктардың сапалы тетік жасап шығару ықтималдықтары сәйкесінше 0,9-ға, 0,8-ге және 0,7-ге тең. Осы цехтан шыққан өнімдердің неше пайызы сапалы тетік болады?

Қайталауға арналған жаттығулар

4.101. Теңдеуді шешіңдер: 1) $\sin 2x = \sqrt{3}\sin x$; 2) $\dfrac{\sin 2x}{4+\sin x} = -2\cos x$.

4.102. Функцияның анықталу облысын табыңдар:

1) $y = \sin^3 x$; 2) $y = \sqrt{x^2 + 2x + 1}$; 3) $y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$.

4.103. Функцияның бірсарындылық аралықтарын табыңдар:

1) $y = x + \dfrac{1}{x}$; 2) $y = 3x^2 - x^3$.

4.4. Бернулли формуласы және оның салдарлары

4.4.1. Бернулли формуласы

Қандай да бір сынақ (тәжірибе) барысында A оқиғасы p ықтималдығымен орындалсын. Осы сынақты бірнеше рет қайталағанда әрбір сынақ нәтижесі өзге сынақ нәтижелеріне әсер етпесе, мұндай сынақтарды *тәуелсіз сынақтар* деп атайды. Сынақты n рет қайталасақ, A және $\overline{A}$ оқиғаларынан құралған тізбек аламыз. Мысалы, 4 сынақтың алғашқысында A оқиғасы орындалмай, 2-және 3-сынақтарда орындалып, 4-сынақта тағы да орындалмаса, онда $\overline{A}\cdot A\cdot A\cdot\overline{A}$ тізбегін аламыз. Мұнда $P(\overline{A})=1-P(A)=1-p$ және бұл ықтималдықты әдетте q арқылы белгілейді: $q=1-p$.

n сынақ нәтижесінде A оқиғасы m рет орындалсын. Көрсетілген тізбекте A оқиғасы m рет, $\overline{A}$ оқиғасы $n-m$ рет кездеседі. Сондықтан белгілі бір тәртіппен A оқиғасының n сынақта m рет орындалу ықтималдығы $p^m\cdot(1-p)^{n-m}=p^m\cdot q^{n-m}$. Ал n сынақта A оқиғасы $P_n(m, n-m)=C_n^m$ түрлі жағдайда (бұл берілген құрамды орналастырулар саны) m рет орындалады. A оқиғасының n сынақта m рет орындалу ықтималдығы былай анықталады:

$$P_n(m)=C_n^m p^m\cdot q^{n-m}. \tag{1}$$

(1) формуланы *Бернулли формуласы* деп атайды. Осыдан n сынақта A оқиғасының m_1 мен m_2 аралығында орындалу ықтималдығы

$$P_n(m_1\leqslant m\leqslant m_2)=P_n(m_1)+P_n(m_1+1)+\ldots+P_n(m_2) \tag{2}$$

теңдігімен анықталады. Оқиғаның n сынақта кем дегенде бір рет орындалу ықтималдығы

$$P_n(m\geqslant 1)=1-q^n,\ (q=1-p). \tag{3}$$

Шынында да, n сынақта оқиғаның кем дегенде бір рет орындалу оқиғасына кері оқиға оның n сынақта бірде-бір рет орындалмайтынымен анықталады. Сондықтан (3) формула $P(A)=1-P(\overline{A})$ теңдігінен шығады.

$P_n(m_0)$ ықтималдығы $P_n(0)$, $P_n(1)$, $P_n(2)$, ..., $P_n(n)$ сандарының ең үлкені болса, m_0-ді A оқиғасының n сынақта орындалуының *ең ықтималды саны* деп атайды. Бұл сан

$$np-q\leqslant m_0\leqslant np+p \tag{4}$$

теңсіздігімен анықталады.

Шынында да, m_0 ең ықтималды сан болса, $P_n(m_0-1)\leqslant P_n(m_0)$ және $P_n(m_0+1)\leqslant P_n(m_0)$ немесе

$$\begin{cases} C_n^{m_0-1}\cdot p^{m_0-1}\cdot q^{n-m_0+1}\leqslant C_n^{m_0}\cdot p^{m_0}\cdot q^{n-m_0}, \\ C_n^{m_0+1}\cdot p^{m_0+1}\cdot q^{n-m_0-1}\leqslant C_n^{m_0}\cdot p^{m_0}\cdot q^{n-m_0} \end{cases}$$

теңсіздіктер жүйесі орындалады. Осыдан

$$\begin{cases} \dfrac{q}{n-m_0+1} \leqslant \dfrac{p}{m_0}, \\ \dfrac{p}{m_0+1} \leqslant \dfrac{q}{n-m_0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} qm_0 \leqslant np-(m_0-1)p, \\ p(n-m_0) \leqslant q(m_0+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_0(p+q) \leqslant np+p, \\ np-q \leqslant m_0(p+q) \end{cases}$$

теңсіздіктер жүйесі, ал $p+q=1$ болатынын ескерсек, (4) формула шығады.

1-мысал. Мергеннің бір көздегеннен нысанаға дәл тигізу ықтималдығы 0,8. Мергеннің 5 оқ атқанда нысанаға 1) тура үш оқ тигізу ықтималдығын; 2) кем дегенде үш оқ тигізу ықтималдығын; 3) кем дегенде бір рет тигізу ықтималдығы 0,9-дан кем болмайтындай, неше рет оқ атуы қажеттігін; 4) тигізудің ең ықтималды санын анықтайық.

1) Бұл ықтималдықты (1) формула бойынша анықтаймыз. Мұнда $p=0,8$; $q=0,2$; $n=5$, $m=3$. Сонда $P_5(3)=C_5^3\cdot p^3\cdot q^2=$ $=\dfrac{5!}{3!\cdot 2!}\cdot(0,8)^3\cdot(0,2)^2=0,2048$.

2) $P_5(m\geqslant 3)=P_5(3)+P_5(4)+P_5(5)$. Мұнда $P_5(3)=0,2048$, $P_5(4)=$ $=C_5^4\cdot p^4\cdot q=0,4096$ және $P_5(5)=C_5^5\cdot p^5\cdot q^0=0,8^5=0,32768$ болғандықтан, $P_5(m\geqslant 3)\approx 0,942$.

3) (3) формула бойынша $P_n(m\geqslant 1)=1-q^n=1-0,2^n\leqslant 0,9 \Rightarrow 0,1\leqslant 0,2^n \Rightarrow$ $\Rightarrow n\cdot\lg(0,2)\leqslant\lg(0,1)\Rightarrow$ $n \geqslant \dfrac{\lg 0,1}{\lg 0,2}=\dfrac{1}{1-\lg 2}\approx 1,429$. Демек, мерген нысанаға кем дегенде 2 рет атуы қажет.

4) (4) формула бойынша
$5\cdot 0,8-0,2 \leqslant m_0 \leqslant 5\cdot 0,8+0,8 \Leftrightarrow 3,8 \leqslant m_0\leqslant 4,8 \Rightarrow m_0=4$. Сонымен 5 рет атқанда нысанаға дәл тигізудің ең ықтималды саны 4-ке тең.

4.4.2. Нақты құбылыстар мен үрдістердің ықтималдық модельдері

Ықтималдық теориясы күнделікті тұрмыс-тіршілікте кездесетін құбылыстар мен үрдістердің модельдерін құрып, оларды талдап, дұрыс шешім қабылдауға көмектеседі.

2-мысал. Төрт құрбы дүкенге барып, өздеріне жазу құралдарын алды. Дүкенде қайтаратын ұсақ ақша болмағандықтан, төртеуіне ортақ бір лоторея билетін берді. Құрбылар бұл билетті «жеребе» арқылы біреуімізге тиесілі болғаны дұрыс деп шешті. Лоторея билетін иемдену ықтималдығы қай жағдайда көбірек: жеребені бірінші болып алғанда ма, әлде кезекпен алғанда ма?

Алдымен, жеребені бірінші алған құрбының лоторея билетін иемдену ықтималдығын бағалайық. Барлығы 4 жеребі, оның біреуінде лотореря белгісі бар. Олай болса, бірінші жеребені тартқан оқушының лотореяны иемдену ықтималдығы

$$P = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Енді жеребені екінші болып алған құрбының лоторея билетін иемдену ықтималдығын бағалайық. Бұл ықтималдық бірінші оқушының қандай жеребені алғанына тәуелді. Лоторея билетін иемденуге құқық беретін жеребені «сәтті жеребе» деп, ал өзгелерін «сәтсіз жеребе» деп атайық. Сонымен, бірінші құрбының «сәтті» жеребе алғанын білдіретін оқиғаны H_1, оның «сәтсіз» жеребе алғанын білдіретін оқиғаны H_2 деп белгілейік. Егер A оқиғасы екінші құрбының «сәтті» жеребе алатынын білдірсе, онда бұл оқиғаның ықтималдығын толық ықтималдық формуласымен есептейміз:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A).$$

Мұнда $P(H_1) = 0,25$ бірінші құрбының «сәтті» жеребе алу ықтималдығы, онда $P_{H_1}(A) = 0$, $P(H_2) = 0,75$, $P_{H_2}(A) = \frac{1}{3}$. Сонымен,

$$P(A) = 0,25 \cdot 0 + 0,75 \cdot \frac{1}{3} = 0,25.$$

Олай болса құрбылар жеребені қай кезекпен алса да, олардың «сәтті» жеребе алу ықтималдығы өзгермейді, 0,25-ке тең.

Тәуелсіз сынақтар саны өскен сайын оқиғаның орындалуының салыстырмалы жиілігі $\frac{m}{n}$ оның ықтималдығы P-ға «сәтті» болады. Мысалы, тиынды 1000 рет тастағанда, оның елтаңба жағымен түсу саны 500-дің маңында болады деп күтеміз: $\frac{m}{1000} \approx \frac{1}{2} = p$. Осындай маңызды тұжырымды **үлкен сандар заңы** деп атайды. Осы орайда оқиғаның орындалу жиілігінің оның ықтималдығынан ауытқуын бағалайтын Чебышев теңсіздігін дәлелдеусіз келтіреміз:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leqslant \varepsilon\right) \geqslant 1 - \frac{pq}{\varepsilon^2 n}. \qquad (5)$$

n (5) формуладағы сынақ саны өскен сайын $\frac{pq}{\varepsilon^2 \cdot n}$ өрнегінің мәні 0-ге ұмтылады. Сонда n өте үлкен сан болса, $\left|\frac{m}{n} - p\right| \leqslant \varepsilon$ теңсіздігінің орындалу ықтималдығы 1-ге жақындайды.

Енді мысал қарастырайық.

3-мысал. Өндіріс бірлестігінде шығарылатын бұйымның жарамды болу ықтималдығы 0,9-ға тең. Өндірілетін жарамды бұйымдардың салыстырмалы жиілігі оның ықтималдықтан ауытқу модулі

0,1 шамасынан кем болмау ықтималдығы 0,95-тен артық болуы үшін неше бұйым тексеру қажет?

(5) теңсіздікті қолданамыз. Мұнда $p=0,95$; $q=0,1$; $\varepsilon=0,1$, $P\left(\left|\frac{m}{n}-0,9\right|\leqslant 0,1\right)\geqslant 1-\frac{0,9\cdot 0,1}{(0,1)^2\cdot n}\geqslant 0,95$ болуы қажет. Осыдан $0,05\geqslant\frac{9}{n}\Rightarrow n\geqslant 180$. Кем дегенде 180 бұйым тексеру қажет.

1. Тәуелсіз сынақтар деп нені айтады? n тәуелсіз сынақ нәтижесіндегі A оқиғасының салыстырмалы жиілігі деген не?
2. Бернулли формуласын жазыңдар және оны дәлелдеңдер.
3. n тәуелсіз сынақ нәтижесінде оқиғаның кем дегенде бір рет орындалу ықтималдығы қалай анықталады?
4. Оқиға орындалуының ең ықтимал саны қалай анықталады? Сәйкес формуланы дәлелдеңдер.
5. Үлкен сандар заңын қалай түсінесіңдер?

ЕСЕПТЕР

А

4.104. Тиын 5 рет тасталды. Тиынның: 1) елтаңба жағымен тура 2 рет түсу; 2) елтаңба жағымен кем дегенде 2 рет түсу; 3) елтаңба жағымен кем дегенде 3 рет түсу ықтималдығын; 4) елтаңба жағымен түсуінің ең ықтималды санын табыңдар.

4.105. Қондырғының 15 элементі сынақтан өткізілді. Оның әрбір элементінің сынақтан оң нәтижелі өту ықтималдығы 0,9-ға тең. Сынақтан оң нәтижемен өтетін элементтерінің ең ықтималды саны қандай?

4.106. Берілген өсімдік дәнінің өнімділігі 80%. Себілген 5 дәннің кем дегенде төртеуінің өніп шығу ықтималдығы қандай?

4.107. Ойын сүйегін 4 рет тастағанда алты ұпайының кем дегенде бір рет түсу ықтималдығын табыңдар.

4.108. Ойын сүйегін 50 рет тастағанда алты ұпайы түсуінің ең ықтималды санын табыңдар.

B

4.109. Ұлттық бірыңғай тестілеу кезінде математикадан талапкерге берілетін 30 тест сұрақтарының әрқайсысына 5 жауап келтірілген және бұл жауаптардың тек біреуі ғана дұрыс. Талапкер берілген сұрақтардың жауаптарын кездейсоқ таңдап отырып, ең ықтималды түрде неше сұраққа жауап беруі мүмкін?

4.110. Сатып алушыға 41-өлшемді аяққиімнің қажет болу ықтималдығы 0,2-ге тең. Аяққиім дүкеніне келген алғашқы 5 сатып алушының 1) біреуіне; 2) кем дегенде біреуіне 41-өлшемді аяққиімнің қажет болу ықтималдығы қандай?

4.111. Нысана — іштей сызылған дөңгелегі бар квадрат. Нысанаға кездейсоқ 4 оқ тиді. Оның тура 3-уінің дөңгелекке тию ықтималдығы қандай?

4.112. Дөңгелекке іштей тең қабырғалы үшбұрыш сызылған. Дөңгелекке кездейсоқ 4 нүкте тасталды. Тура бір нүктенің дөңгелекке тиісті болу ықтималдығы қандай?

4.113. Екі тиынды қатар тастау сынағы 5 рет қайталанды. Тура 3 сынақта қатарынан 2 елтаңбаның түсу ықтималдығы қандай?

4.114. Автопарктегі 12 автобустың әрқайсысының рейске шығу ықтималдығы 0,8-ге тең. Егер автопарктің қалыпты жұмыс істеуі үшін рейске 8 автобус шығуы қажет болса, онда келесі күні автопарктің қалыпты жұмыс істеу ықтималдығы қандай?

4.115. Тетіктің стандартты болмау ықтималдығы 0,02-ге тең. Осындай 5000 тетіктің ішіндегі жарамсыз тетіктердің салыстырмалы жиілігінің ықтималдығынан ауытқуының модулі 0,01-ден артық болу ықтималдығын бағалаңдар.

4.116. Мергеннің нысанаға тигізу ықтималдығы 0,8-ге тең. Нысанаға тигізудің ең ықтималды саны 20 болу үшін нысанаға неше рет оқ ату қажет?

C

4.117. Қолжазбаның бір бетін компьютерге теру барысында оператордың қате жіберу ықтималдығы 0,3-ке тең. Оператордың 200 беттік қолжазбаны теру барысында жіберетін қателіктерінің ең ықтималды санын табыңдар.

4.118. Жүргізілген 50 сынақ барысында $p = \dfrac{m}{n}$ қатынасы 0,9-ға тең ықтималдықпен орындалады. Осы дәлдікті бағалаңдар.

4.119. Дүкенге 40 қорап фарфор ыдыстары түсті. Кездейсоқ алынған қораптағы ыдыстардың сынбаған, бүтін болу ықтималдығы 0,9-ға тең. Барлық ыдыстар бүтін болатын қораптардың ең ықтималды санын табыңдар.

4.120. Шеберліктері бірдей екі ойыншы шахмат ойнады. 1:1 немесе 2:2 нәтижелерінің қайсысы ықтималдырақ? Мұнда тең ойын есепке алынбайды.

4-бөлімге қосымша есептер

4.121. Кез келген 9 адамның ішінен бірін-бірі танитын 3 адам немесе бірін-бірі танымайтын 4 адам табылатынын дәлелдеңдер.

4.122. Шахмат тақтасының бір диагоналында орналасқан қарама-қарсы бұрышынан шаршылар қиып алынды. Тақтаның қалған бөлігін бір ақ және бір қара шаршыдан құрастырылған тіктөртбұрышпен толық жауып шығуға бола ма?

4.123. Поштадағы 10 түрлі маркалардан неше тәсілмен 1) 8 марка; 2) әртүрлі 8 марка сатып алуға болады?

4.124. Қорапта 5 ақ, 4 қызыл және 2 көк асық бар. Осы қораптан неше тәсілмен 1) 3 асық; 2) әртүрлі 3 асық; 3) екеуі бір түсті болатындай етіп, 3 асық алуға болады?

4.125. 15 күн ішінде оқушылар 5 емтихан тапсыруы қажет. Ол емтихандардың бірі алгебра, екіншісі геометрия пәнінен. Алгебрадан және геометриядан емтихандар бірінен соң бірі келмейтіндей етіп, емтихан кестесін неше тәсілмен құрастыруға болады?

4.126. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 цифрларының көмегімен 3 тақ, 2 жұп цифрдан тұратын қанша бес таңбалы сан жазуға болады?

4.127. Әр шаршы қабырғасының ұзындығы $2a$-ға тең «шексіз» шахмат тақтасына радиусы $r<a$ болатын тиын тасталды. Тиынның толығымен бір шаршыда жату ықтималдығы қандай?

4.128. Ертеректе бір хан жалшыны жазаламақшы болып, оған екі ақ және екі қызыл түсті асықты екі дорбаға үлестіріп салуды бұйырады. Жендет екі дорбаның бірінен бір асықты кездейсоқ таңдап алады. Алынған асық қызыл түсті болса, жалшы басынан айырылады. Асықтың түсі ақ болған жағдайда жалшыға рақымшылық жасалады. Жалшыға рахымшылық жасалу ықтималдығы ең үлкен болуы үшін асықтарды дорбаларға қандай тәсілдермен үлестіріп салғаны жөн?

4.129. Егер B және C — үйлесімсіз оқиғалар, $P(A) \neq 0$ болса, онда $P_A(B+C)=P_A(B)+P_A(C)$ теңдігі орындалатынын көрсетіңдер.

4.130. Егер $P(A) \neq 0$ болса, онда $P_A(B+C)=P_A(B)+P_A(C)-P_A(BC)$ теңдігі орындалатынын дәлелдеңдер.

4.131. Телефон нөмірін теру барысында абонент қажет телефон нөмірінің соңғы екі цифрын ұмытып, олардың әртүрлі және тақ сан екені ғана есінде қалған. Абоненттің қажет телефонды дұрыс теру ықтималдығын табыңдар.

4.132. 4 ойын сүйегі тасталғанда бірдей ұпайдың түсу ықтималдығын табыңдар.

4.133. Үш тиын тасталды. Екі тиынның елтаңба жағымен түсу ықтималдығын табыңдар.

4.134. Қызметкер жұмыстан соң үйіне автобуспен немесе микроавтобуспен қайтуы мүмкін. Ол әркез үйіне әртүрлі тәсілмен оралады: барлық жағдайлардың $\frac{1}{3}$ бөлігінде автобуспен, ал $\frac{2}{3}$ бөлігінде микроавтобуспен оралып жүрді. Микроавтобусқа мінген кездерінің 75%-ында қызметкер үйіне кешкі алтыларда оралып жүрді. Автобусқа мінген кездерінің 70%-ында ол үйіне көрсетілген мерзімде оралатын. Кездейсоқ алынған күні қызметкердің үйіне кешкі алтыларда келу ықтималдығы қандай?

4.135. 50 тәуелсіз сынақта 0,05-ке дейінгі дәлдікпен $p=\frac{m}{n}$ теңдігінің орындалу ықтималдығы қандай?

5-бөлім. КӨПМҮШЕЛЕР

5.1. Көп айнымалысы бар көпмүшелер

5.1.1. Көп айнымалысы бар көпмүшелердің стандарт түрі

Сандар мен айнымалылар дәрежелерінің көбейтіндісінен құралған өрнекті бір мүше деп атайды. Мысалы, $5x$; $xy\cdot zx$; $2x^3(-3)u^3\cdot zy^2$; $-5x^2y\cdot z^3$; -4; y^5— бірмүшелер. Бір мүшелерді түрлендіріп, ықшамдап жазуға болады. Мысалы, $2x^3(-3)z\cdot x^2\cdot y^3=-6x^5\cdot y^3\cdot z$.

Бірмүшелердің осындай түрін бірмүшенің **стандарт түрі** деп атайды. Сонымен, a — берілген сан, x_1, x_2 ..., x_n айнымалылар болса, онда осы айнымалыларға тәуелді стандартты бірмүшенің жалпы түрі былай жазылады:

$$a\cdot x_1^{m_1}\cdot x_2^{m_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{m_n}, \tag{1}$$

мұндағы m_1, m_2, ..., m_n — теріс емес бүтін сандар, $N=m_1+m_2+\ldots+m_n$ қосындысы бірмүшенің дәрежесі, a-саны оның коэффиценті деп аталады. Мысалы, $5x^2yz^3$ — x, y, z-ке тәуелді бірмүше, $2+1+3=6$ саны — оның дәрежесі, 5 — коэффициенті.

$f(x, y, z)=xy(x^2+y^2)+yz(y^2+z^2)+xz(x^2+z^2)$ бүтін өрнегі берілсін. Осы өрнектегі жақшаларды ашып, ұқсас мүшелерді біріктіреміз:

$$f(x, y, z)=x^3y+x^3z+y^3x+z^3x+y^3z+z^3\cdot y. \tag{2}$$

1-анықтама. (1) *түрдегі бірмүшелердің қосындыларынан тұратын өрнекті n айнымалыға тәуелді* **көпмүше** деп атайды.

Көпмүшенің құрамына енетін бірмүшелер дәрежелерінің ең үлкенін осы көпмүшенің дәрежесі деп атайды. Мысалы,

$$f(x, y, z)=2x^2+y^2+z^2+3xyz$$

көпмүшесінің дәрежесі 3-ке тең $(1+1+1=3)$.

Бір айнымалысы бар көпмүшелердің ***стандарт түрі*** деп оның мүшелері дәрежелерінің кему ретімен жазылған түрін айтады. Мысалы, $f(x)=2x^4+x^3-5x+7$. Көп айнымалысы бар көпмүшелердің стандарт түрін жазу бұдан өзгеше.

Алдымен x_1, x_2, ..., x_n айнымалылары ретке келтіріледі. Әдетте, индексі үлкен айнымалылардың «мәртебесі» кіші деп есептеледі немесе мәртебесі әліпби бойынша анықталады, x, y, z,..., т.с.с.

Әрі қарай бірмүшелердің мәртебелері айнымалылардың дәреже көрсеткіштеріне қарай анықталады.

2-анықтама. *Егер n айнымалысы бар көпмүшеде $m_1>k_1$ немесе $m_1=k_1$, $m_2>k_2$ немесе $m_1=k_1$, $m_2=k_2$, $m_3>k_3$ және т.с.с. болса, онда $a\cdot x_1^{m_1}\cdot x_2^{m_2}\ldots\cdot x_n^{m_n}$, $a\neq 0$, мүшесінің мәртебесі $b\cdot x_1^{k_1}\cdot x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n}$, $b\neq 0$ мүшесінің мәртебесінен жоғары деп атайды.*

Егер $m_1=k_1$, $m_2=k_2,\ldots, m_n=k_n$ болса, көрсетілген бірмүшелер ұқсас болады да, олар біріктіріледі. Мысалы, $-3x_1^2x_2^3x_3^2x_4$-тің мәртебесі $7x_1^2x_2^3x_3x_4^5$-тің мәртебесінен жоғары, $4y^2z^2$-тің мәртебесі xyz-тің мәртебесінен төмен.

Көп айнымалысы бар көпмүшенің мүшелері мәртебелерінің кему ретімен орналасса, бұл көпмүшені *стандарт түрде* жазылған деп есептейміз. Мысалы,

$$f(x,\ y,\ z) = -2y^5z + x^4yz^5 - 0{,}5x^2y^5z + 6x^2y^4z^2 \qquad (2)$$

көпмүшесі стандарт түрде жазылған. Кейде көпмүшелердің стандарт түрде жазылуын оның *лексикографикалық түрі* деп атайды. Мысалы,

$$f(x,\ y,\ z) = -2y^5z + x^4yz^5 - 0{,}5x^2y^5z + 6x^2y^4z^2$$

көпмүшесін лексикографикалық түрде жазайық. Мұнда x — бірінші, y — екінші, z — үшінші айнымалы (алфавит бойынша) деп есептейміз. Сондықтан берілген төртмүшенің ішіндегі мәртебесі ең жоғарғысы x^4yz^5, келесі $(-0{,}5x^2y^5z)$, үшіншісі $6x^2y^4z^2$, мәртебесі ең кішісі $(-2y^5z)$. $f(x,\ y,\ z)$ көпмүшесі стандарт түрде былай жазылады:

$$f(x,\ y,\ z) = x^4yz^5 - 0{,}5x^2y^55z + 6x^2y^4z^2 - 2y^5z.$$

3-анықтама. Егер $f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ көпмүшесі мен кез келген t саны үшін

$$f(tx_1,\ tx_2,\ \ldots,\ tx_n) = t^m f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ xn) \qquad (3)$$

теңдігі орындалса, онда бұл көпмүшені айнымалыларына қатысты т дәрежелі ***біртекті көпмүше*** *деп атайды.*

Мысалы, (2) көпмүше 4-дәрежелі біртекті көпмүше, $x-2y+3z$ көпмүшесі 1- дәрежелі біртекті көпмүше болады.

Сонымен, $f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ көпмүшесі t дәрежелі біртекті көпмүше болуы үшін оның әрбір мүшесінің дәрежесі t-ге тең болуы қажет. Мысалы, (2) көпмүшенің әрбір мүшесінің дәрежесі 4-ке тең.

Кейде көп айнымалысы бар көпмүшелерді лексикографикалық түрде жазудың орнына оның біртекті мүшелерін біріктіріп жазады. Мысалы,

$$f(x,\ y,\ z) = x^3 - 3x^2y + 2x^2 - y^2 + xy^2 - 2xy - 3y^3 + 4x + 5y - xyz$$

көпмүшесін жоғарыда аталған тәртіппен жазсақ,

$$f(x,\ y,\ z) = x^3 - 3x^2y + xy^2 - 3y^3 - xyz + 2x^2 - y^2 - 2xy + 4x + 5y.$$

Енді

$$f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) = 0 \qquad (4)$$

теңдеуін қарастырайық. Мұнда $f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ — көп айнымалысы бар көпмүше. Егер $c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n$ сандары үшін $f(c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n) = 0$ тепе-теңдігі орындалса, онда $x_1 = c_1,\ x_2 = c_2,\ \ldots,\ x_n = c_n$-ді (4) теңдеудің ***шешімі*** деп атайды. Жалпы, көп айнымалысы бар теңдеулердің шексіз көп шешімдері болады. Мысалы, $2x-y+3=0$ екі айнымалысы сызықтық теңдеудің шексіз көп шешімі бар. $y=2x+3$ теңдігін қанағаттандыратын әрбір $(x;\ y)$ сандар жиыны оның шешімі болады, яғни осы теңдеумен анықталатын түзудің бойында орналасқан әрбір нүктенің координаталары — осы теңдеудің шешімі.

Ал бұдан күрделі көп айнымалысы бар теңдеулердің шешімдерін анықтау өте қиын мәселе. Дегенмен, кейбір дербес жағдайларда мұндай теңдеулердің барлық шешімдерін анықтау мүмкіндігі бар. Енді осындай теңдеулерге мысал келтірейік.

1-мысал.

$x^2 - 4xy + 3y^2 = 0$ теңдеуінің барлық шешімдерін табу керек.

Шешуі. Әрине, $x = 0$, $y = 0$ берілген теңдеудің шешімі болады. Енді теңдеудің нөлден өзгеше шешімдерін анықтайық. Сонымен, егер $y \neq 0$ болса, онда берілген теңдеуді y^2-қа бөліп, оны былай жазамыз: $\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 4 \cdot \frac{x}{y} + 3 = 0$. Осыдан $\frac{x}{y} = t$ белгілеуін енгізе отырып, $t^2 - 4t + 3 = 0 \Rightarrow t_1 = 1$, $t_2 = 3$ түбірлерін анықтаймыз. Онда берілген теңдеудің барлық шешімдері $\frac{x}{y} = 1$ немесе $\frac{x}{y} = 3$ теңдеулерін қанағаттандырады: $y = c$. Егер c шамасын кез келген тұрақты деп алсақ, берілген теңдеудің барлық шешімдер жиыны былай жазылады:

$$\{(C;\ C)\} \cup \{(3C;\ C)\},\ C \in R.$$

Мысалдағы теңдеудің оң жақ бөлігі 2-дәрежелі біртекті көпмүше. Жалпы, кез келген екі айнымалысы бар біртекті көпмүшені бір айнымалысы бар көпмүшеге түрлендіруге болады. Шынында да, $f(x,\ y)$ екі айнымалысы бар k дәрежелі біртекті көпмүше болсын.

Онда $f(x;\ y) = \left(x \cdot 1;\ x \cdot \frac{x}{y}\right) = x^k f\left(1; \frac{x}{y}\right)$. Осыдан $\frac{x}{y} = t$ немесе $y = xt$ белгілеуін енгізсек, $f(x;\ y) = x^k f(1;\ t)$ теңдігін аламыз. Мұндағы $f(1;\ t)$ — бір айнымалысы бар көпмүше.

5.1.2. Симметриялы көпмүшелер

Анықтама. *$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ көпмүшесі $x_1, x_2, \ldots, x_n$ айнымалылардың орындарын қалауымызша алмастырғаннан шығатын көпмүшеге тепе-тең болса, бұл көпмүшені **симметриялы көпмүше** деп атайды.*

Мысалы, $5x^3y^2 + x^3 + y^3 + 5x^2y^3$ симметриялы көпмүше, өйткені x және y-тің орындарын алмастырғаннан бұл көпмүшенің түрі өзгермейді. Ал $5x^3y^2 + x^3 + y^3$ симметриялы көпмүше болмайды, себебі $5x^2y^3 + x^3 + y^3$ берілген көпмүшеге тепе-тең емес.

Қосындыда (көбейтіндіде) қосылғыштардың (көбейткіштердің) орындарын алмастырғаннан олар өзгермейді, симметриялы көпмүшеде оған енетін айнымалылардың рөлдерін ауыстыру осыған келтіріледі. Сондықтан $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ және $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$ — симметриялы көпмүшелер. Симметриялы көпмүшелердің жалпы түрін былай алуға болады. Егер $a \in R$ болса, онда $(x_1 + a)(x_2 + a) \ldots (x_n + a)$ өрнегі — $x_1, x_2, \ldots, x_n$ айнымалыларына тәуелді симметриялы көпмүше. Мұнда a-ның бірдей дәрежелерінің коэффициенттері

$$\begin{cases} \sigma_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \\ \sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_1x_n + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n, \\ \sigma_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sigma_n = x_1x_2x_3\ldots x_n \end{cases} \quad (6)$$

симметриялы көпмүшелер болады. Бұл көпмүшелерді *элементар симметриялы көпмүшелер* деп атайды. Мысалы, $n=2$ және $n=3$ болғанда элементар симметриялы көпмүшелер былай жазылады:

$$\begin{cases} \sigma_1 = x_1 + x_2, \\ \sigma_2 = x_1x_2 \end{cases} \quad \text{және} \quad \begin{cases} \sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3, \\ \sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3, \\ \sigma_3 = x_1x_2x_3. \end{cases}$$

Элементар симметриялы көпмүшелермен бірге төмендегідей бірдей дәрежелер қосындысы түрінде берілген симметриялы көпмүшелерді де қарастырады:

$$\begin{cases} S_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \\ S_2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2, \\ S_3 = x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \quad (6)$$

Мысалы, $n=2$ болғанда симметриялы көпмүшелер былай жазылады: $S_1 = x_1 + x_2$; $S_2 = x_1^2x_2^2$; $S_3 = x_1^3x_2^3$; ... . Енді мынадай теореманы дәлелдейік.

1-теорема. *$S_n = x^n + y^n$ түріндегі әрбір симметриялы көпмүшені $\sigma_1 = x + y$ және $\sigma_2 = xy$ элементар көпмүшелеріне тәуелді көпмүше түрінде жазуға болады.*

Дәлелдеу. Математикалық индукция тәсілін қолданамыз. $n = 1$ болғанда $\sigma_1 = x + y = S_1$; $n = 2$ болса,

$$S_2 = x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = \sigma_1^{\ 2} - 2\sigma_2.$$

Енді бұл тұжырым $n=k$ үшін орындалды делік, яғни $f_k(\sigma_1; \sigma_2)$ көпмүшелері табылып,

$$S_l = f_l(\sigma_1, \sigma_2),\ l = 1, 2, \ldots, k \quad (7)$$

теңдіктері орындалсын. Онда $n = 1$ үшін

$$S_{k+1} = x^{k+1} + y^{k+1} = x^{k+1} + xy^k + x^ky + y^{k+1} - x^ky - xy^k =$$
$$= (x + y)(x^k + y^k) - xy(x^{k-1} + y^{k-1}) = \sigma_1S_k - \sigma_2S_{k-1}.$$

(7) теңдік бойынша

$$S_{k+1} = \sigma_1f_k(\sigma_1, \sigma_2) - \sigma_2f_{k-1}(\sigma_1, \sigma_2).$$

Теорема дәлелденді.

2-теорема. *Кез келген $f(x, y)$ симметриялы көпмүшесін σ_1 мен σ_2-ге тәуелді көпмүше түрінде жазуға болады.*

Дәлелдеу. $f(x, y)$ көпмүшесінде ax^ky^k түріндегі мүшелер бар болса, онда ax^ky^k, $ax^ky^k = a(xy)^k = a\sigma_2^{\ k}$. Егер бұл көпмүшенің құрамында bx^my^k түріндегі мүшелер кездессе ($k > m$), онда bx^ky^k

түріндегі мүше де бар болуы қажет ($f(x; y)$ — симметриялы). Демек, $bx^ky^m + bx^my^k = b(xy)^m(x^{k-m} + y^{k-m}) = b\sigma_1^m S_{k-m}$. 1-теорема бойынша S_{k-m} көпмүшесі σ_1 және σ_2 арқылы өрнектеледі. Теорема дәлелденді.

Жоғары математикада 2-теореманың жалпы түрі n айнымалылы көпмүше үшін дәлелденеді.

3-теорема. *n айнымалысы бар әрбір симметриялы көпмүшені бір ғана түрде $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$ элементар көпмүшелеріне тәуелді көпмүше түрінде жазуға болады.*

3-мысал. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^3 - 2y^3 + 3xy^3 + 3x^3y$ көпмүшесін σ_1 мен σ_2 арқылы өрнектелік.

$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$.

$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = \sigma_1(\sigma_1^2 - 2\sigma_2 - \sigma_2) = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2$.

$x^4 + y^4 = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 2x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = (\sigma_1^2 - 2\sigma_2)^2 - 2\sigma_2^2 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2$. Осыдан $f(x, y) = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 - 2(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2) + 3xy(x^2 + y^2) = \sigma_1^4 - 2\sigma_1^3 - \sigma_1^2\sigma_2 + 6\sigma_1\sigma_2 - 4\sigma_2^2$.

1. Көп айнымалысы бар көпмүше деп қандай өрнекті атайды?
2. Көпмүшенің дәрежесі деген не?
3. Көпмүше мүшелерінің мәртебесін қалай салыстырады?
4. Көпмүшенің стандарт түрі деп нені айтады?
5. m дәрежелі біртекті көпмүше деп қандай көпмүшені айтады?
6. Көп айнымалысы бар теңдеу деп қандай теңдеуді атайды? Оның шешімі деп нені түсінесіңдер?
7. Қандай көпмүшені симметриялы көпмүше деп атайды? Мысал келтіріңдер.
8. Элементар симметриялы көпмүшелер деген не? Оның қандай қасиеттерін білесіңдер?

ЕСЕПТЕР

А

5.1. Теңдеудің барлық шешімдерін көрсетіңдер:
а) $x^2 - 6xy + 8y^2 = 0$; ә) $x^2 - 6xy - y^2 = 0$; б) $x^2 + 2xy - 24y^2 = 0$;
в) $x^2 + 9xy + 14y^2 = 0$; г) $3x^2 - 8xy + 5y^2 = 0$; ғ) $2x^2 + 7xy + 5y^2 = 0$.

5.2. a-ны b арқылы өрнектеңдер:
а) $a^2 - 3ab - 4b^2 = 0$; ә) $21a^2 - 4ab - b^2 = 0$.

5.3. $x^5 + y^5$ қосындысын σ_1 және σ_2 арқылы өрнектеңдер.

5.4. Симметриялы көпмүшелерді элементар симметриялы көпмүшелер арқылы өрнектеңдер:
а) $4x^2 - 5xy + 4y^2$; ә) $-2x^2 + 7xy - 2y^2$;
б) $x^3 - 2x^2y^2 + y^3$; в) $2x^4 + 2x^2y^2 + 2y^4 - x - y$.

B

5.5. Теңдеудегі бір айнымалыны екіншісі арқылы өрнектеңдер:

а) $6x^4 - 11x^3y - 18x^2y^2 - 11xy^3 + 6y^4 = 0$;
ә) $2x^4 + 7x^3y + 9x^2y^2 + 7xy^3 + 2y^4 = 0$;
б) $18a^4 - 21a^3b - 94a^2b^2 - 21ab^3 + 18b^4 = 0$;
в) $10u^4 - 27u^3v + 25u^2v^2 - 27uv^3 + 10v^4 = 0$.

5.6. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

а) $x^2 + y^2 + z^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$;
ә) $x^3 + y^3 + z^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$;
б) $x^4 + y^4 + z^4 = \sigma_1^{\ 4} - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3$;
в) $x^2y^2 + x^2z^2 + z^2y^2 = \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3$;
г) $x^2y + x^2z + y^2x + z^2x + y^2z + yz^2 = \sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3$;
ғ) $x^3y + x^3z + y^3x + z^3x + y^3z + yz^3 = \sigma_1^2\sigma_2 - 2\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_3$.

5.7. 5.5-есептегі көпмүшелерді элементар симметриялы көпмүшелер арқылы өрнектеңдер.

C

5.8. Көбейткіштерге жіктеңдер:

а) $2x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + 2y^4$; ә) $3x^4 - 8x^3y + 14x^2y^2 - 8xy^3 + 3y^4$;
б) $(x + y + z)^3 - (x^3 + y^3 + z^3)$; в) $(x + y + z)^5 - (x^5 + y^5 + z^5)$.

5.9. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

а) $(x + y)(x + z)(z + y) + xyz = (x + y + z)(xy + xz + yz)$;
ә) $(a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc)^2 - (a + b + c)^2(a^2 + b^2 + c^2) =$
$= (ab + ac + bc)^2$;
б) $y^2z^2(y^2 - z^2) + x^2z^2(z^2 - x^2) + x^2y^2(x^2 - y^2) =$
$=(x + y)(x + z)(z + y)(x - z)(y - z)(x - y)$;
в) $a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2) = (a - b)(b - c)(c - a)$.

5.10. $4x^2 - 6x - 1 = 0$ теңдеуінің түбірлері a мен b-ны таппай-ақ, түбірлері $x_1 = \dfrac{\alpha}{\beta} + 1$ және $x_2 = \dfrac{\beta}{\alpha} + 1$ болатындай квадрат теңдеу құрастырыңдар.

5.11. 5.10-есептің шарты бойынша төмендегі есептерді шешіңдер:

а) $x^2 - 7x + 10 = 0$, $x_1 = \alpha^3$, $x_2 = \beta^3$;

ә) $2x^2 - 7x - 3 = 0$, $x_1 = \alpha + \dfrac{1}{\beta}$, $x_2 = \beta + \dfrac{1}{\alpha}$;

б) $4x^2 - 6x - 1 = 0$, $x_1 = \dfrac{2}{\alpha^3} - 1$, $x_2 = \dfrac{2}{\alpha^3} - 1$;

в) $3x^2 + 7x + 4 = 0$, $x_1 = \dfrac{\alpha}{\beta - 1}$, $x_2 = \dfrac{\beta}{\alpha - 1}$.

5.12. Өрнекті ықшамдаңдар:

а) $\dfrac{a^3+b^3+c^3-3abc}{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}$; ә) $\dfrac{bc-a^2+ac-b^2+ab-c^2}{a\left(bc-a^2\right)+b\left(ac-b^2\right)+c\left(ab-c^2\right)}$.

5.13. Егер $a+b+c=0$ болса, онда төмендегі тепе-теңдіктерді дәлелдеңдер:

а) $a^3+b^3+c^3+3(a+b)(a+c)(b+c)=0$; ә) $a^3+b^3+c^3=3abc$;
б) $a^4+b^4+c^4=2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)$; в) $2(a^4+b^4+c^4)=(a^2+b^2+c^2)^2$.

5.14. $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ деп алып, $(p-a)^3+(p-b)^3+(p-c)^3+3abc=p^3$ тепе-теңдігін дәлелдеңдер.

5.15. $x^4+y^4+z^4+2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2z^2+4x^3yz+4xy^3z+4xyz^3+3x^2y^2z^2$ көпмүшесінің көбейткіштерге жіктелетінін көрсетіңдер.

5.2. Бір айнымалысы бар көпмүшенің жалпы түрі және оның түбірлерін анықтау

5.2.1. Бір айнымалысы бар көпмүшенің жалпы түрі

Бір айнымалысы бар көпмүшенің жалпы түрі былай жазылады:

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0, \qquad (1)$$

мұндағы x — айнымалы, n натурал саны — көпмүшенің дәрежесі, a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1} a_n — коэффициентер, a_0 — бас коэффицент, a_n — бос мүше. Бір айнымалысы бар көпмүшенің (1) түрінде жазылуын көпмүшенің **стандарт түрі** деп атайды. Мысалы, $f(x)=2x^3+x-3$ өрнегі — 3-дәрежелі көпмүше, $a_0=2$ — бас коэффициент, $a_3=-3$ — бос мүше. Осыған қоса, $a_1=0$ (x^2-тың коэффициенті), $a_2=1$. $f(x)=(x^2-2x)^2+x^2+x-5$ көпмүшесін стандартты түрде жазу үшін жақшаны ашып, ұқсас мүшелерін біріктіру қажет:

$f(x)=(x^2-2x)^2+x^2+x-5=x^4-4x^3+4x^2+x^2+x-5=x^4-4x^3+5x^2+x-5$. Сонымен берілген көпмүшенің стандартты түрі былай жазылады:

$$f(x)=x^4-4x^3+5x^2+x-5.$$

Бір айнымалысы бар көпмүшені стандарт түрде жазу үшін оны түрлендіріп ұқсас мүшелерін біріктіру керек. Сонан соң көпмүшелерді дәреже көрсеткіштерінің кему тәртібімен жазу қажет.

5.2.2. Көпмүше түбірі ұғымы

Айталық бізге $f(x)=x^3-3x^2-2x+2$ көпмүшесі берілсін. Онда $f(-1)=0$ теңдігі орындалатынын көрсетейік. Шынында да

$$f(-1)=(-1)^3-3(-1)^2-2(-1)+2=-1-3+2+2=0.$$

Мұнда $x = -1$ саны берілген көпмүшенің **түбірі** деп аталады. Осыдан $f(x)$ көпмүшесінің түбірін анықтау үшін $f(x) = 0$ теңдеуі түбірлерін табу керек.

Анықтама.

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (2)$$

теңдеуінің түбірлері $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ *көпмүшесінің түбірлері* деп аталады.

1-мысал. $f(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 8$ көпмүшесінің түбірлерін табу керек.

Берілген көпмүшені топтап, көбейткіштерге жіктейміз: $x^3 + 2x^2 + 4x + 8 = (x^3 + 8) + (2x^2 + 4x) = (x + 2)(x^2 - 2x + 4) + 2x(x + 2) = (x + 2)(x^2 - 2x + 2x + 4) = (x + 2)(x^2 + 4)$. Демек, $x^3 + 2x^2 + 4x + 8 = 0$ теңдеуі $(x + 2)(x^2 + 4) = 0$ түрінде жазылады. Соңғы теңдеу $\left[\begin{array}{l} x + 2 = 0, \\ x^2 + 4 = 0 \end{array}\right.$ теңдеулер жиынтығымен тең шамалас (түбірлер жиыны бірдей). Бірінші теңдеуден $x = -2$, екінші теңдеудің нақты түбірі жоқ ($D < 0$).

Жауабы: $x = -2$.

Бұл мысалда көпмүшені көбейткішке жіктеу үшін

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

формуласын қолдандық. Жалпы, жоғары дәрежелі көпмүшелерді көбейткіштерге жіктегенде жиі қолданатын формулалар:

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + \ldots + a^{n-2}x + a^{n-1}); \qquad (3)$$

$$x^{2n+1} + a^{2n+1} = (x + a)(x^{2n} - a \cdot x^{2n-1} + a^2 \cdot x^{2n-2} - \ldots + a^{2n}). \qquad (4)$$

ТОПТЫҚ ЖҰМЫС

$n = 3; 4; 5$ болғанда (3) формуланың, $n = 1; 2$ болғанда (4) формуланың орындалатынын тексеріп, (3) және (4) тепе-теңдіктерін дәлелдеңдер.

2-мысал. $x^5 + 3x^4 + 4x^3 + x^2 + 1 = 0$ теңдеуі түбірлерін табу керек.

Алдымен, теңдеудің сол жақ бөлігіндегі 5-дәрежелі көпмүшені көбейткіштерге жіктеп аламыз:

$x^5 + 3x^4 + 4x^3 + x^2 + 1 = (x^5 + 1) + (3x^4 + 4x^3 + x^2) = (x + 1) \times$ $\times(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) + x^2(3x^2 + 4x + 1)$.

$3x^2 + 4x + 1$ квадрат үшмүшесінің түбірлері -1 және $-\frac{1}{3}$. Сондықтан оны көбейткіштерге жіктеп жазамыз:

$x^5+3x^4+4x^3+x^2+1=(x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) + x^2(x + 1)(3x + 1) = (x + 1) \cdot [(x^4 + 2x^3 + 2x^2 - x + 1 + 3x^3 + x^2] = (x+1)(x^4+2x^3+2x^2-x+1)$. Осыдан берілген теңдеудің жалғыз түбірін аламыз $x = -1$. Себебі $x^4+2x^3+2x^2-x+1 = x^2(x+1)^2 + x^2 - x + 1 > 0$ (мұнда $x^2(x+1)^2 \geqslant 0$, $x^2 - x + 1$ квадрат үшмүшесінің дискриминанты теріс: $x^2 - x + 1 > 0$).

Жауабы: $x = -1$.

5.2.3. Көпмүшені көпмүшеге бұрыштап бөлу.

Бүтін коэффициентті көпмүшенің бүтін түбірлерін анықтау

$A(x)$ және $B(x)$ көпмүшелері үшін $A(x) = B(x)Q(x) + R(x)$ теңдігі орындалатындай $Q(x)$ және $R(x)$ көпмүшелері табылса, мұнда $R(x)$ көпмүшесінің дәрежесі $B(x)$ көпмүшесінің дәрежесінен кем болуы керек, онда $A(x)$ көпмүшесі $B(x)$ ***көпмүшесіне $R(x)$ қалдығымен бөлінеді*** *деп айтамыз. $Q(x)$ көпмүшесі $A(x)$-ті $B(x)$-ке бөлгендегі толымсыз бөлінді деп аталады. Егер $R(x) = 0$ болса, яғни қалдық 0-ге тең болса, онда $A(x)$* ***көпмүшесі*** *$B(x)$*-***ке қалдықсыз бөлінеді*** деп айтылады. Мысалы, $x^3 - 8$ көпмүшесі $x^2 + 2x + 4$ көпмүшесіне қалдықсыз бөлінеді. Өйткені $x^3 - 8 = (x - 2) \cdot (x^2 + 2x + 4)$ теңдігі орындалатынын жақсы білеміз. Мұнда $A(x) = x^3 - 8$, $B(x) = x^2 + 2x + 4$, $Q(x) = x - 2$, $R(x) = 0$ деп түсіну керек. Осы сияқты, $x^3 - 1 = (x^2 + 3x + 1)(x - 3) + 8x + 2$ теңдігінен $A(x) = x^3 - 1$ көпмүшесі $B(x) = x^2 + 3x + 1$ көпмүшесіне $R(x) = 8x + 2$ қалдығымен бөлінетінін көреміз. $Q(x) = x - 3$ — толымсыз бөлінді.

Көпмүшелерді бөлуді бізге үйреншікті көп таңбалы сандарды «бұрыштап» бөлу тәсілімен орындауға болады. Осыған бірнеше мысалдар қарастырайық.

1-мысал. $x^3 - 1$ көпмүшесін $x^2 + 3x + 1$ көпмүшесіне қалдықпен бөлу керек.

$$\begin{array}{rl|l}
- & x^3 + 0x^2 + 0x - 1 & x^2 + 3x + 1 \\ \cline{3-3}
 & x^3 + 3x^2 + x & x - 3 \\ \cline{1-2}
- & -3x^2 - x - 1 & \\
 & -3x^2 - 9x - 3 & \\ \cline{1-2}
 & 8x + 2 &
\end{array}$$

Осыдан $Q(x) = x - 3$, $R(x) = 8x + 2$. Олай болса,

$$x^3 - 1 = (x^2 + 3x + 1)(x - 3) + 8x + 2.$$

2-мысал. $3x^6 + 2x^4 + 2x^3 + x - 6$ көпмүшесін $x^4 + 2x + 2$ көпмүшесіне бөлу керек.

$$\begin{array}{rl|l}
- & 3x^6 + 2x^4 - 2x^3 + x - 6 & x^4 + 2x + 2 \\ \cline{3-3}
 & 3x^6 + 6x^3 + 6x^2 & 3x^2 + 2 \\ \cline{1-2}
- & 2x^4 - 8x^3 - 6x^2 + x - 6 & \\
 & 2x^4 + 4x + 4 & \\ \cline{1-2}
 & -8x^3 - 6x^2 - 3x - 10 &
\end{array}$$

Толымсыз бөлінді $Q(x) = 3x^2 + 2$ — екінші дәрежелі, қалдық $R(x) = -8x^3 - 6x^2 - 3x - 10$ — үшінші дәрежелі көпмүше.

3-мысал. $x^5 - x^4 + x^3 - 2x + 1$ көпмүшесін $x^3 - x^2 + 2x - 1$ көпмүшесіне бөлейік.

$$\begin{array}{r|l} x^5 - x^4 + x^3 - 2x + 1 & x^3 - x^2 + 2x - 1 \\ \cline{2-2} -\underline{x^5 - x^4 + 2x^3 - x^2} & x^2 - 1 \\ -x^3 + x^2 - 2x + 1 & \\ -\underline{-x^3 + x^2 - 2x + 1} & \\ 0 & \end{array}$$

Мұндағы $Q(x) = x^2 - 1$, $R(x) = 0$. Берілген көпмүшелер бір-біріне қалдықсыз бөлінеді.

Енді бүтін коэффициентті көпмүшенің бүтін түбірлерін (ондай түбірі бар болса) анықтау тәсілін қарастырайық.

Теорема. *Бүтін коэффициентті көпмүшенің әрбір бүтін түбірі оның бос мүшесінің бөлгіші болады. Басқаша айтқанда, егер $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ — бүтін сандар және $x = m$ саны*

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n \ (a_0 = 1) \qquad (1)$$

көпмүшесінің бүтін түбірі болса, онда a_n саны m-ге қалдықсыз бөлінеді.

Дәлелдеуі. Айталық, m бүтін саны (1) көпмүшенің бүтін түбірі болсын. Онда $f(x) = 0$. Олай болса

$$a_0m^n + a_1m^{n-1} + \ldots + a_{n-1}m + a_n = 0.$$

Осыдан $a_n = m(-a_0m^{n-1} - a_1m^{n-2} - \ldots - a_{n-1})$. a_n саны m-ге қалдықсыз бөлінді. Теорема дәлелденеді.

4-мысал. $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2$ көпмүшесінің бүтін түбірлерін табу керек.

Бұл көпмүшенің бүтін түбірлері бар болса, олар ±1; ±2 сандарының арасынан табылуы керек. Қарапайым тексерулер жүргізіп, $f(1) = 1$, $f(-1) = -3$, $f(2) = 0$, $f(-2) = -20$ аламыз. Ендеше $x = 2$ саны берілген көпмүшенің жалғыз бүтін түбірі болады.

5-мысал. $f(x) = x^3 - 19x - 30$ көпмүшесін көбейткіштерге жіктеу керек.

Бұл көпмүшенің бүтін түбірлері бар болса, олар ±1; ±2; ±3; ±5; ±6; ±15; ±30 сандарының арасынан табылады. Бұл сандардың берілген көпмүшенің бүтін түбірі болатынын, не болмайтынын тексеріп шығуға өте көп уақыт кетеді. Сондықтан тексеруді алғашқы бүтін түбірі анықталғанша жүргіземіз:

$$f(1) = -48,\ f(-1) = -30,\ f(2) = -60,\ f(-2) = 0.$$

Берілген көпмүше $x + 2$ екімүшесіне қалдықсыз бөлінеді:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 19x - 30 & x + 2 \\ \cline{2-2} -\underline{x^3 + 2x^2} & x^2 - 2x - 15 \\ -2x^2 - 19x - 30 & \\ -\underline{-2x^2 - 4x} & \\ -15x - 30 & \\ -\underline{-15x - 30} & \\ 0 & \end{array}$$

$x^3 - 19x - 30 = (x + 2)(x^2 - 2x - 15)$ теңдігі орындалады. $x^3 - 19x - 30$ көпмүшесінің өзге бүтін түбірлерін анықтау үшін $x^2 - 2x - 15$ көпмүшесінің бүтін түбірлерін тапса, жеткілікті. Оның бүтін түбірлері ±3; ±5; ±15 сандарының арасынан табылады (1 және -1 сандарының түбір болмайтынын тексердік). ... $=f(-3)=9 - 2 \cdot (-3) - 15 = 0$ болғандықтан, $x^2 - 2x - 15$ көпмүшесі $x + 3$ екімүшесіне бөлінеді:

$$\begin{array}{rl|l}
- & x^2 - 2x - 15 & x + 3 \\
 & x^3 + 3x & \overline{x - 5} \\ \hline
- & -5x - 15 & \\
 & -5x - 15 & \\ \hline
 & 0 &
\end{array}$$

Сондықтан $x^2 - 2x - 15 = (x + 3)(x - 5)$. Олай болса $x^3 - 19x - 30 = (x + 2)(x + 3)(x - 5)$.

1. Бір айнымалысы бар көпмүшенің стандарт түрі қалай жазылады?
2. Басты коэффициенті мен бос мүшесі деп нені айтады? Мысал келтіріңдер.
3. Қандай сан көпмүшенің түбірі деп аталады? Мысал келтір.
4. Мысал арқылы көпмүшені көпмүшеге бұрыштап бөлу амалын көрсетіңдер.
5. Көпмүшені көпмүшеге бөлгенде шығатын толымсыз бөлінді мен қалдық көпмүше деп нені айтады? Мысал келтіріңдер.
6. Қалдық көпмүшенің дәрежесі қандай болуы керек?
7. Бір көпмүше екіншісіне қандай шарт орындалғанда қалдықсыз бөлінеді деп айтады? Мысал келтіріңдер.
8. Бүтін коэффициентті көпмүшенің бүтін түбірін (бар болса) қалай анықтайды? Мысал келтіріңдер.

ЕСЕПТЕР

А

5.16. Көпмүшенің дәрежесін, басты коэффициентін және бос мүшесін анықтаңдар:

1) $x^4 + x^3 - 4x^2 + x - 7$; 2) $2x^4 - 8x^2 - 8x$;
3) $(x^2 + 4x)(x^2 - x - 1)$; 4) $(x^2 + 5x)(x^2 + x - 3)$;
5) $(3x + 4)(x^4 - x^2 - 1)$; 6) $(x - 1)(x^2 + 1)(4x + 3)$.

5.17. Көпмүшелерді қалдықпен бөліңдер:

1) $(x^4 + x^2 + 1) : (x + 5)$;
2) $(x^5 - 6x^3 + 2x^2 - 4) : (x^2 - x + 1)$;
3) $(x^7 - 1) : (x^2 + x + 1)$;
4) $(x^6 - 1) : (x - 3)$.

5.18. Амалдарды орындаңдар:

1) $(4x^4 - 5x^3 + x^2) : (3x^2 - 4x + 1)$;
2) $(9x^4 + 5x^2 + 1) : (3x^2 - 2x + 1)$;
3) $(2x^5 - 5x^4 - 4x + 1) : (2x^3 + x^2 - 1)$;
4) $(3x^5 - x^4 - 3x + 1) : (x^2 - 5x^2 + 6x)$.

5.19. Көпмүшелердің бүтін түбірлерін табыңдар:

1) $x^2 - 4x + 3$; 2) $x^2 + 3x - 4$; 3) $x^2 + 3x - 10$;
4) $x^2 + 5x - 6$; 5) $3x^2 - 2x - 21$; 6) $2x^2 + x - 21$.

Көбейткіштерге жіктеңдер (**5.20–5.21**):

5.20. 1) $x^2 - 6x - 16$; 2) $x^2 + 12x + 20$; 3) $x^2 - 3x - 10$;
4) $x^2 + 4x + 3$; 5) $2x^2 - 9x + 10$; 6) $x^2 + 2x - 80$.

5.21. 1) $x^4 - 16$; 2) $x^6 - 64$; 3) $x^4 + x - 2$; 4) $y^3 + 3y + 4$.

B

5.22. $x^5 + 3x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 5x - 5$ көпмүшесі $x^2 - 3x + 2$ үшмүшесіне қалдықсыз бөліне ме?

5.23. Көпмүшелерді қалдықпен бөліңдер:

1) $(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1) : (x^3 - 1)$;
2) $(x^2 - 1)(x^3 + x + 1) : (x^2 + x + 1)$;
3) $(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) : (x^3 + x^2 + x + 1)$;
4) $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) : (x - 2)(x - 1)x$.

5.24. Бүтін түбірлерін анықтап, көбейткіштерге жіктеңдер:

1) $x^3 - 7x - 6$;
2) $x^3 + 9x^2 + 11x - 21$;
3) $x^3 + 5x^2 + 3x - 9$;
4) $x^3 + 9x^2 + 23x + 15$;
5) $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4$;
6) $x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 11x - 4$.

5.25. Бүтін түбірлерін анықтаңдар:

1) $x^5 - 2x^3 - 8x^2 + 13x - 10$; 2) $x^5 - 4x^3 + 4x^2 + 5x - 6$;
3) $x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 38x - 24$; 4) $x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 11x - 4$.

5.26. Көбейткіштерге жіктеңдер (**5.26–5.27**):

1) $x^3 - x^2 - x - 2$; 2) $x^3 - 6x^2 - x + 30$.

5.27. 1) $x^3 + 9x^2 + 23x + 15$;
2) $(x - 1)^3 + (2x + 3)^3 = 27x^3 + 8$;
3) $(x + 1)(x^2 + 2) + (x + 2)(x^2 + 1) - 2$;
4) $x^8 - 15x^4 - 16$.

5.28. 1) $x^3 + ax^2 - 5x + 6$ көпмүшесінің бір түбірі 3-ке;
2) $x^3 - x^2 + ax + 12$ көпмүшесінің бір түбірі -3-ке тең болса, оның қалған түбірлерін табыңдар.

C

5.29. Әрбір жұп натурал n үшін $n^5 - 5n^3 + 4n$ өрнегі 240-қа бөлінетінін дәлелдеңдер.

5.30. Әрбір бүтін $x = 2n + 1$ түріндегі тақ саны үшін $x^3 + 3x^2 - x - 3$ көпмүшесінің мәні 48-ге бөлінетінін дәлелдеңдер.

5.31. k-ның қандай мәндерінде $x^3 + 6x^2 + kx + 12$ көпмүшесі $x + 4$ екімүшесіне қалдықсыз бөлінеді?

5.32. a мен b-нің қандай мәндерінде 1) $x^4 + 3x^3 - 2x^2 + ax + b$ көпмүшесі $x^2 - 3x + 2$ көпмүшесіне; ә) $x^3 - 2x^2 + ax + b$ көпмүшесі $x^2 - x + 1$ көпмүшесіне қалдықсыз бөлінеді?

5.33*. Кез келген $f(x)$ көпмүшесін $x - a$ екімүшесіне бөлгенде қалатын қалдықты анықтаңдар.

Қайталауға арналған жаттығулар

5.34. $x^2 - 2x + 3 = 0$ теңдеуін графиктік тәсілмен шешіңдер.

5.35. Теңсіздікті шешіңдер:

1) $|x - 3| \leqslant 4$; 2) $2x^2 + 3x - 5 > 0$.

5.3. Көпмүшенің түбірлері. Безу теоремасы. Горнер схемасы

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n \qquad (1)$$

көпмүшесіндегі x айнымалысының орнына $x=c$ мәнін қойғанда шығатын

$$f(c)=a_0c^n+a_1c^{n-1}+\ldots+a_{n-1}c+a_n$$

санын $f(x)$ көпмүшесінің $x=c$ нүктесіндегі ***мәні*** деп атайды.

Егер $f(c)=0$ болса, онда c санын $f(x)$ көпмүшесінің ***түбірі*** деп атайды. Енді Безу теоремасын дәлелдейік.

Безу теоремасы. *$f(x)$ көпмүшесін $x-a$ екімүшесіне бөлгенде қалатын қалдық $f(a)$ санына тең.*

$f(x)$ көпмүшесін $x-a$ екімүшесіне бөлгенде қалатын қалдық r — нөл дәрежелі көпмүше, яғни сан болады: $f(x)=(x-a)\,q(x)+r$. Осыдан $x=a$ болғанда $f(a)=(a-a)q(a)+r$ немесе $f(a)=r$ теңдігін аламыз. 2-теорема дәлелденді.

2-теорема. *$x=a$ саны $f(x)$ көпмүшесінің түбірі болуы үшін $f(x)$ көпмүшесі $x-a$ екімүшесіне қалдықсыз бөлінуі қажетті және жеткілікті.*

Айталық, $f(x)$ көпмүшесі $x-a$ екімүшесіне қалдықсыз бөлінсін. Онда $r=0$. Безу теоремасы бойынша $f(a)=r=0$, яғни $x=a$ саны — $f(x)$-тің түбірі.

Керісінше, $x=a$ саны $f(x)$-тің түбірі болсын: $f(a)=0$. Онда Безу теоремасы бойынша $f(x)$-ті $x-a$-ға бөлгендегі қалатын қалдық $r=f(a)=0$, яғни $f(x)$ көпмүшесі $x-a$-ға қалдықсыз бөлінеді. Теорема дәлелденді.

Осы теоремадан $f(x)$ көпмүшесінің түбірлерін табу үшін оның сызықты бөлгіштерін анықтау қажеттігі туындайды. Осы орайда $f(x)$ көпмүшесін $x-a$ екімүшесіне бөлудің қарапайым тәсілін көрсетейік. Бұл тәсілді ***Горнер схемасы*** деп атайды (бұл тәсіл ортағасырлық Қытайда қолданылған Тянь-Юань тәсілімен толық сәйкес келеді. XIX ғасырда оны ағылшын математигі У. Горнер қайта ашқан). Айталық,

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

көпмүшесі үшін

$$f(x)=(x-c)\,q(x)+r \qquad (2)$$

теңдігі орындалсын. Мұнда $q(x)$ көпмүшесі $(n-1)$-дәрежелі көпмүше:

$$q(x)=b_0\,x^{n-1}+b_1\,x^{n-2}+\ldots+b_{n-1}.$$

$x-c$ екімүшесі мен $q(x)$ көпмүшесін көбейтіп, (2) теңдіктегі x-тің бірдей дәрежелерінің коэффициенттерін салыстырсақ,

$$\begin{aligned}
&a_0=b_0,\\
&a_1=b_1-cb_0,\\
&a_2=b_2-cb_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{n-1}=b_{n-1}-cb_{n-2},\\
&a_n=r-cb_{n-1}.
\end{aligned}$$

Осыдан $b_0=a_0$, $b_k=cb_{k-1}+a_k$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$. b_k коэффициенті оның b_{k-1} коэффициентін c-ға көбейтіп, сәйкесінше a_k коэффициентін қосқанға тең. Ең соңында $r=cb_{n-1}+a_n$ теңдігі орындалады. Сонымен, $q(x)$ бөліндісінің коэффициенттері мен r қалдығын қарапайым арифметикалық амалдар арқылы табуға болады. Енді осыған мысал келтірейік.

1-мысал. $f(x)=x^4+19x^2-30$ көпмүшесін $x+1$ екімүшесіне бөлейік.

Шешуі. Екі жолдан тұратын төмендегідей кесте құрайық. Оның бірінші жолында $f(x)$ көпмүшесінің коэффициенттері, ал екінші жолында $q(x)$ көпмүшесі мен r қалдығы орналасқан.

	$a_0=1$	$a_1=0$	$a_2=19$
$c=-1$	$b_0=1$	$b_1=(-1)\cdot 1+0=-1$	$b_2=(-1)\cdot(-1)+19=20$

	$a_3=0$	$a_4=-30$
$c=-1$	$b_3=(-1)\cdot 20+0=-20$	$r_2=(-1)\cdot(-20)-30=-10$

Сонымен, $q(x)=x^3-x^2+20x-20$, $r=f(-1)=-10$.

2-мысал. $f(x)=x^4-8x^3+x^2+4x-9$ көпмүшесін $x-3$-ке бөлу керек.

Шешуі.

	1	−8	1	4	−9
3	1	−5	−14	−38	−123

Осыдан $q(x)=x^3-5x^2-14x-38$, $r=f(3)=-123$.

Горнер схемасы бүтін коэффициентті көпмүшенің бүтін түбірлерін анықтауда жиі қолданылады.

3-мысал. $f(x)=x^3+2x^2-5x-6$ көпмүшесінің бүтін түбірлерін (бар болса) анықтау керек.

Егер берілген көпмүшенің бүтін түбірлері бар болса, онда бүтін түбір −6 санының бөлгіштері ±1; ±2; ±3; ±6 сандарының арасында жатады. Бұл сандардың бүтін түбір болатынын не болмайтынын тексергенде Горнер схемасын қолданады.

1) Алдымен $x=1$ санының түбір болатынын не болмайтынын тексерелік:

	1	2	−5	−6
1	1	3	−2	−8

Осыдан $r=-8$. Демек, $x=1$ саны түбір емес.

2) $x=-1$ санын тексереміз:

	1	2	−5	−6
−1	1	1	−6	0

Осыдан $r=0$ және $f(x)=(x+1)(x^2+x-6)$, яғни $x=-1$ саны түбір болады.

Енді өзге бөлгіштердің түбір болатынын не болмайтыны $q(x)=x^2+x-6$ квадрат үшмүшесін қолданып тексеру керек. Квадрат теңдеулерді шешкенде Горнер схемасын қолданғаннан гөрі 8-сыныпта өтілген дайын формулаларды қолданған тиімді.

$x^2+x-6=0$ теңдеуінің түбірлері $x_2=2$ және $x_3=-3$. Сонымен, $x_1=-1$, $x_2=2$ және $x_3=-3$ сандары берілген көпмүшенің түбірлері және олардың бәрі 6 санының бөлгіштері.

Жауабы: −1; 2; −3.

5.4. Виет формуласы

Егер $f(x)$ көпмүшесі $(x-a)^k$-ға қалдықсыз бөлініп, $(x-a)^{k+1}$-ге бөлінбесе, $x=a$ санын $f(x)$-тің k ***еселік түбірі*** деп атаймыз. $f(x)=(x-a)^k q(x)$ болып, $q(x)$ көпмүшесі $(x-a)$-ға бөлінбесе, $x=a$ түбірі, k еселік түбір болады.

Егер $k=1$ болса, онда $x=a$ саны $f(x)$ көпмүшесінің ***жай түбірі*** деп аталады. Мысалы, $f(x)=(x+1)(x-2)^2$ көпмүшесі үшін $x=-1$ жай түбір, $x=2$ екі еселік түбір болады.

$f(x)$ көпмүшесінің үлкен мүшесінің алдындағы коэффициенті 1-ге тең болса, яғни $f(x)$ көпмүшесі

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

түрінде жазылса, оны *келтірілген көпмүше* деп атайды.

Кез келген нақты коэффициентті n-дәрежелі $f(x)$ көпмүшесінің нақты түбірлерінің саны n-нен аспайды.

$f(x)$-тің түбірлерінің саны $n+k$-ға тең десек, оның

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n,\ \ldots,\ \ldots,\ \alpha_{n+k}$$

түбірлері үшін

$$f(x)=a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)\ldots(x-\alpha_{n+k})$$

теңдігін алар едік (2-теорема). Бұл теңдіктің сол жағында n-дәрежелі, оң жағында $n+k$-дәрежелі көпмүшелер бар. Бұлай болуы мүмкін емес. Себебі ол көпмүшелер теңдігіне қайшы. Сондықтан $f(x)$ көпмүшесінің нақты түбірлерінің саны n-нен аспайды.

Енді 3-дәрежелі келтірілген көпмүшені қарастырайық:

$$f(x)=x^3+px^2-qx+r. \tag{3}$$

Бұл көпмүшенің үш нақты түбірі бар болсын: c_1, c_2, c_3. Бұл түбірлер арасында еселі түбірлер де бар болуы мүмкін:

$$x^3+px^2-qx+r=(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3).$$

Бұл теңдіктің оң жақ бөлігіндегі жақшаларды ашып, түрлендіреміз:

$$(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)=(x^2-(c_1+c_2)x+c_1\cdot c_2)(x-c_3)=$$
$$=x^3-(c_1+c_2+c_3)x^2+(c_1c_2+c_1c_3+c_2c_3)x-c_1c_2c_3.$$

Сонымен,

$$x^3+px^2-qx+r=x^3-(c_1+c_2+c_3)x^2+(c_1c_2+c_1c_3+c_2c_3)x-c_1c_2c_3.$$

x-тың бірдей дәрежелерінің коэффициенттерін теңестіріп,

$$\begin{cases} c_1+c_2+c_3=-p, \\ c_1c_2+c_1c_3+c_2c_3=q, \\ c_1c_2c_3=-r \end{cases} \tag{4}$$

жүйесін аламыз. Бұл формуланы 3-дәрежелі көпмүше үшін жазылған **Виет формуласы** деп атайды.

4-мысал. Жай түбірі 2-ге, екі еселік түбірі −3-ке тең көпмүшені анықтайық.

$c_1=2$, $c_2=c_3=-3$ болғандықтан, Виет формуласы бойынша $p=-(2-3-3)=4$; $q=2\cdot(-3)+2(-3)+(-3)(-3)=-3$, $r=-2(-3)(-3)=-18$. Сондықтан $f(x)=x^3+4x^2-3x-18$.

Жоғары ретті көпмүшелердің түбірлерін анықтауда оларды көбейткіштерге жіктеп, ретін төмендету тәсілі жиі қолданылады. Осындай көбейткіштерге жіктеу тәсілдерінің бірі — анықталмаған коэффициент тәсілі. Оны мысал арқылы қарастыралық.

5-мысал. $x^4-3x^3-x+3=(x^2+x+1)(x^2+Ax+B)$ теңдігі орындалатындай етіп A және B сандарын табу керек.

Ол үшін берілген теңдіктің оң жағындағы жақшаларды ашып, ұқсас мүшелерін біріктіреміз:

$(x^2+x+1)(x^2+Ax+B)=x^4+Ax^3+Bx^2+x^3+Ax^2+Bx+x^2+Ax+B=x^4+(A+1)x^3+(A+B+1)x^2+(A+B)x+B.$

Енді бұл өрнекті x^4-3x^3-x+3 көпмүшесімен салыстырып, x-ті бірдей дәрежелерінің коэффиценттеріне теңестіреміз:

$$\begin{cases} A+1=-3, \\ A+B+1=0, \\ A+B=-1, \\ B=3. \end{cases} \tag{5}$$

Осыдан $A=-4$, $B=3$.

Жауабы: $A=-4$, $B=3$.

Ескерту: (5) жүйеде 2 белгісіз және 4 теңдеу берілген. Бұл жүйедегі теңдеулер саны артық. Мұндай жүйенің үнемі шешімі бола бермейді. Егер (5) жүйенің шешімі болмаса, x^4-3x^3-x+3 көпмүшесі x^2+x+1 квадрат үшмүшелігіне қалдықсыз бөлінбеген болар еді.

1. n-дәрежелі көпмүшенің жалпы түрін жазыңдар. Оның үлкен мүшесін, коэффиценттері мен бос мүшесін көрсетіңдер.
2. Көпмүшені көпмүшеге бөлу жөніндегі теореманы тұжырымдап, дәлелдеңдер.
3. Безу теоремасы мен оның салдарын тұжырымдап, дәлелдеңдер.
4. Мысал арқылы Горнер схемасының мағынасын түсіндіріңдер.
5. 2-, 3-және 4-дәрежелі көпмүшелер үшін Виет формуласын жазыңдар.
6. Анықталмаған коэффиценттер тәсілін қалай қолданады? Мысал арқылы түсіндіріңдер.

ЕСЕПТЕР

A

5.36. Төмендегі көпмүшелердің біріншісін екіншісіне қалдықпен бөліңдер:

1) $x^5-x^4+x^3-x^2+x-1$; x^3-x+1;

2) x^6-2x^2+x-1; x^5-x;

3) x^4+x^2-2; x^2-1;

4) x^7-1; $x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$.

5.37. 1) $x^4+2x^3-16x^2-2x+15=(x+1)(x^3+Ax^2+Bx+C)$;

2) $3x^5-x^4-3x+1=(x^2+1)(3x^3+Ax^2+Bx+C)$ тепе-теңдіктері орындалатындай етіп, A, B және C сандарын анықтаңдар.

5.38. Горнер схемасын қолданып, төмендегі көпмүшелерді $x+1$ екімүшесіне бөлгендегі қалдық пен бөліндіні анықтаңдар:

1) $x^6+9x^3+32x+16$;

2) $14x-4+27x^4-9x^7$;

3) x^5-7x-6;

4) x^4+19x^2-30.

5.39. Горнер схемасын қолданып, -2 және 1 сандары төмендегі көпмүшелердің түбірлері болатынын көрсетіңдер:

1) $2x^4+7x^3-2x^2-13x+6$;

2) $(x^2+x)^2+4(x^2+x)-12$;

3) $(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12$.

5.40. Түбірлері 1) $1, 2, -3$; 2) $0, -1, 1$; 3) $-2, 1, 4$; 4) $-1, 2, 3$ болатын үшінші дәрежелі көпмүшені жазыңдар.

5.41. Егер 1 және -2 сандары $2x^3+mx^2+nx+12$ көпмүшесінің түбірлері болса, онда оның үшінші түбірін анықтаңдар.

5.42. Егер 1 және 2 сандары x^3-4x^2+ax+b көпмүшесінің түбірлері болса, онда оның үшінші түбірі мен a және b сандарын табыңдар.

5.43. Егер -1 саны x^3-2x^2+ax-2 көпмүшесінің түбірі болса, онда оның қалған екі түбірі мен a коэффициентін табыңдар.

5.44. Түбірлері 1) $-1, 2, 3, 4$; 2) $-1, 0, 1, 2, 3$ болатын көпмүшені жазыңдар.

5.45. 1) x^3-4x^2-x+4; 2) $x^4+x^3-7x^2-x+6$ көпмүшелерінің барлық бүтін түбірлерін анықтап, оларды көбейткіштерге жіктеңдер.

B

5.46. Горнер схемасын қолданып, $(x^2+4x+3)(x^2+12x+35)+15$ көпмүшесі $(x+2)(x+6)$ көпмүшесіне бөлінетінін көрсетіңдер.

5.47. $x^5-6x^4+16x^3-32x^2+48x-32$ көпмүшесі $(x-2)^2$ көпмүшесіне бөлінетінін көрсетіңдер.

5.48. $(x^4-10x^2+16)(x^4-11x^2+24)$ көпмүшесі $(x^2-8)^2$-ге бөліне ме?

5.49. $x^4-x^3-2x^2-4x-24$ көпмүшесінің бүтін түбірлерін табыңдар.

5.50. $(1+2x-4x^2)^{24}\cdot(1-7x+5x^2)^{25}$ көпмүшесі коэффициенттерінің қосындысын анықтаңдар.

5.51. Егер $f(x)$ бүтін коэффициентті көпмүше болса, онда кез келген a және b $(b>0)$ бүтін сандары үшін $f\left(a+\sqrt{b}\right)+f\left(a-\sqrt{b}\right)$ өрнегінің мәні бүтін сан болатынын дәлелдеңдер.

5.52. $x^{2006}-3x+2$ көпмүшесі x^2-1-ге бөліне ме?

5.53. Көпмүшені $x-1$-ге бөлгенде 3-ке тең, $x-2$-ге бөлгенде 4-ке тең қалдық қалады. Осы көпмүшені $(x-2)(x-1)$-ге бөлгенде қандай қалдық қалады?

5.54. Көпмүшені $(x+1)$, $(x-2)$, $(x-3)$ екімүшелеріне бөлгенде сәйкесінше 3, 1, -1-ге тең қалдықтар қалса, осы көпмүшені $(x+1)(x-2)(x-3)$-ке бөлгенде қандай қалдық қалады?

5.55. $x^6+2x^5+3x^4+2x^3+3x^2+2x-1=0$ және $x^4+4x^3+6x^2+5x+2=0$ теңдеулерінің ортақ түбірлерін анықтаңдар.

5.56. x_1, x_2, x_3 сандары ax^3+bx^2+cx+d көпмүшесінің түбірлері болса,

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-b/a, \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=c/a, \\ x_1\cdot x_2\cdot x_3=d/a \end{cases}$$

формуласының орындалатынын көрсетіңдер.

C

5.57. x_1, x_2, ..., x_n сандары $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$, $a_0\neq0$, $a_n\neq0$ көпмүшесінің түбірлері болса, $g(x)=a_0x^n-a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}-\ldots+(-1)^na_n$ және $\varphi(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$ көпмүшелерінің түбірлері қандай болады?

5.58. Егер $x=c$ саны бүтін коэффициентті $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ көпмүшесінің бүтін түбірі болса, онда $f(m)$ саны әрбір бүтін m үшін $c-m$ айырымына бөлінетінін дәлелдеңдер.

5.59. Егер $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ көпмүшесінің барлық коэффициенттері бүтін сандар болса, онда оның әрбір рационал түбірі бүтін сан болатынын дәлелдеңдер.

5.60. Айталық, c_1, c_2, ..., c_n, c_{n+1} бір-бірінен өзгеше нақты сандар болсын. Түбірлері c_1, c_2, ..., c_n сандарына тең және $x=c_{n+1}$ нүктесіндегі мәні 1-ге тең n-дәрежелі көпмүше табыла ма?

5.61. Әрбір оң бүтін m, n, k сандары үшін $x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3k+2}$ көпмүшесі x^2+x+1 квадрат үшмүшесіне қалдықсыз бөлінетінін дәлелдеңдер.

5.62. x^3+px+q көпмүшесінің түбірлері x_1, x_2, x_3 сандары үшін $x_1^3+x_2^3+x_3^3=3x_1x_2x_3$ теңдігі орындалатынын дәлелдеңдер.

5.63. Егер x_1, x_2, x_3 сандары x^3+px+q көпмүшесінің түбірлері болса, онда $x_1^2+x_2^2+x_3^2$ қосындысын p және q арқылы өрнектеңдер.

5.64. p және q-дың қандай мәндерінде $6x^4-7x^3+px^2+3x+2$ көпмүшесі x^2-x+q көпмүшесіне қалдықсыз бөлінеді?

5.65. a-ның қандай мәндерінде $x^2-(a+1)x+a+4$ квадрат үшмүшесінің екі түбірі де теріс болады?

Қайталауға арналған жаттығулар

5.66. Қатардың қосындысын табыңдар:

1) $1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{27}+\ldots$; 2) $1+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{25}+\dfrac{1}{125}+\ldots$.

5.67. Теңсіздіктерді интервалдар тәсілімен шешіңдер:

1) $(2x+7)(3x-4)(x+5)>0$;

2) $(x-6)(0,5x+4)(5x+10)<0$;

3) $\dfrac{x^2-2x+3}{x^2-4x+3}>-3$;

4) $\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}>3$.

5.5. Жоғары дәрежелі теңдеулерді шешу

5.5.1. Бүтін коэффиценттi көпмүшенің рационал түбірі туралы теорема

Бүтін коэффицентті

$$f(x)=a_0x^4+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n \qquad (1)$$

көпмүшесінің рационал түбірінің қасиеті төмендегі теоремада көрсетілген. (1) формуладағы $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — бүтін сандар. Айталық $r=\dfrac{m}{k}$ рационал саны қысқармайтын бөлшек, яғни m және k өзара жай сандар болсын: $(m,k)=1$, $m\in z$, $k\in N$ және бұл r санын (1) көпмүшенің түбірі дейік.

Теорема. *(1) теңдеудің $r=\dfrac{m}{k}$ рационал түбірінің алымы бос мүшесінің бөлгіші, ал бөлімі басты коэффицентінің бөлгіші болады:* $a_n \vdots m$; $a_0 \vdots k$.

$r=\dfrac{m}{n}$ санын (1) теңдеудің түбірі десек,

$$a_0\left(\frac{m}{k}\right)^n+a_1\left(\frac{m}{k}\right)^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\left(\frac{m}{k}\right)+a_n=0$$

болуы керек. Бұл теңдікті (k^n) көбейткішіне көбейтеміз:

$$a_0m^n+a_1m^{n-1}\cdot k+...+a_{n-1}m\cdot k^{n-1}+a_nk^n=0. \qquad (2)$$

(2) теңдікті алдымен былай жазамыз:

$$-a_0m^n=k(a_1m^{n-1}+a_2m^{n-2}k+...+a_{n-1}mk^{n-2}+a_nk^{n-1}).$$

Мұнда $(m, k)=1 \Rightarrow (m^n, k)=1$. Олай болса $a_0 \vdots k$ болуы керек. Сонда (2) формула

$$-a_nk^n=m(a_0m^{n-1}+a_1m^{n-2}\cdot k+...+a_{n-1}k^{n-1}).$$

Мұнда да $(k^n,m)=1$ болғандықтан, $a_n \vdots m$. Теорема дәлелденді

1 мысал. $f(x)=12x^3-8x^2-3x+2$ көпмүшесінің түбірлерін анықтау керек.

Берілген көпмүшенің рационал түбірлері бар болса, бұл түбірлер ±2; ±1; $\pm\frac{1}{2}$; $\pm\frac{1}{3}$; $\pm\frac{2}{3}$; $\pm\frac{1}{4}$; $\pm\frac{1}{6}$; $\pm\frac{1}{12}$ сандары арасында болады. Себебі алымы ±1; ±2-ге тең, бөлімі ±1; ±2; ±3; ±4; ±6; ±12 сандарының бірі болуы мүмкін. Осы сандардың барлық мүмкін қатынастарын алу керек. ±1 және ±2 сандарының түбір болмайтыны Горнер схемасы бойынша оңай тексеріледі.

Жалпы, Горнер схемасын бөлшек сандарға да қолдануға болады. Енді осы схема бойынша көрсетілген бөлшек сандардың түбір болатынын не болмайтынын тексерейік.

	12	−8	−3	2
$\frac{1}{2}$	12	−2	−4	0
$-\frac{1}{2}$	12	−8	0	

Осыдан $x=\frac{1}{2}$ саны түбір екені көрінеді. Сондықтан екінші қадамда Горнер схемасын $12x^2-2x-4$ квадрат үш мүшелігіне қолдандық. Осы схемадан көбейткіштерге жіктеу амалдары шығады:

$$12x^3-8x^2-3x+2=\left(x-\frac{1}{2}\right)(12x^2-2x-4)=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)(12x-8)=$$
$$=(2x-1)(2x+1)(3x-2).$$

Жауабы: $\pm\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$.

5.5.2. Симметриялы теңдеулер

n-дәрежелі симметриялы теңдеулердің жалпы түрі былай жазылады:

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots + cx^2 + bx + a = 0,\ a \neq 0. \qquad (1)$$

Симметриялы теңдеулерде оның басы мен соңынан бірдей «қашықтықтарда» орналасқан мүшелерінің коэффициенттері өзара тең. Мысалы, $x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = 0$, $2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 3x + 2 = 0$ — симметриялы теңдеулер. Симметриялы теңдеулердің түбірлерін табу үшін, әдетте $z = x + \dfrac{1}{x}$ белгілеуін қолданады. Енді осыған бірнеше мысал қарастырайық.

2-мысал. $6x^4 - 13x^3 + 12x^2 - 13x + 6 = 0$ теңдеуінің түбірлерін табу керек.

Бұл теңдеудің түбірі 0-ге тең болмайтындықтан, оны x^2-қа бөлуге болады:

$$6x^2 - 13x + 12 - 13\frac{1}{x} + 6\frac{1}{x^2} = 0.$$

Осыдан коэффициенттері бірдей мүшелерді топтап,

$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 13\left(x + \frac{1}{x}\right) + 12 = 0$$

теңдеуін аламыз. $z = x + \dfrac{1}{x}$ белгілеуін енгізсек, $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = z^2 - 2$. Берілген теңдеуді $6(z^2 - 2) - 13z + 12 = 0$ немесе $6z^2 - 13z = 0$ түрінде жазамыз. Оның түбірлері: $z_1 = 0$, $z_2 = \dfrac{13}{6}$. Сондықтан $x + \dfrac{1}{x} = 0$ және $x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{13}{6}$ теңдеулерін аламыз. Бірінші теңдеудің түбірі жоқ. Екінші теңдеу $6x^2 - 13x + 6 = 0$ түрінде жазылады. Оның түбірлері: $x_1 = \dfrac{2}{3}$, $x_2 = \dfrac{3}{2}$.

Жауабы: $\dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{2}$.

3-мысал. $30x^4 - 17x^3 - 228x^2 + 17x + 30 = 0$ теңдеуінің түбірлерін табу керек.

Бұл теңдеуде тақ дәрежелі x-тің коэффициенттерінің таңбалары қарама-қарсы. Мұндай теңдеулерді II текті симметриялы теңдеулер деп атайды және оларды да алдында көрсетілген тәсілдер бойынша шешеді. Берілген теңдеуді x^2-қа бөліп, былай жазамыз:

$$30\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 17\left(x - \frac{1}{x}\right) - 228 = 0.$$

$x-\frac{1}{x}=z$ белгілеуін енгізсек, $x^2+\frac{1}{x^2}=z^2+2$ теңдігі орындалады. Сонда $30(z^2+2)-17z-228=0$ немесе $30z^2-17z-168=0$ теңдеуін аламыз. Оның түбірлері $z_1=\frac{8}{3}$, $z_2=-2,1$. Онда $x-\frac{1}{x}=-\frac{21}{10}$ және $x-\frac{1}{x}=\frac{8}{3}$ теңдеулерінен $x_1=-\frac{5}{2}$, $x_2=\frac{5}{2}$, $x_3=3$, $x_4=-\frac{1}{3}$ түбірлері табылады.

5.5.3. Жоғары дәрежелі теңдеулерді көбейткіштерге жіктеу арқылы шешу

Сонымен, берілген теңдеуді шешу үшін оны өзіне мәндес бір немесе бірнеше қарапайым теңдеулермен алмастыру керек. Мысалы $(2x-5)(4x+3)(x-2)=0$ теңдеуін шешейік. Бұл теңдік орындалуы үшін көбейткіштердің кем дегенде біреуі нөлге тең болуы керек. Олай болса, берілген теңдеу төмендегідей үш теңдеумен мәндес: $2x-5=0$, $4x+3=0$ және $x-2=0$. Бұлардың шешімдері: $\frac{5}{2}$, $-\frac{3}{4}$ және 2. Бұл сандар берілген теңдеудің де шешімдері болады.

Теңдеулерді шешудің осы көрсетілген, яғни берілген теңдеуді көбейткіштерге жіктеу тәсілі жоғары ретті теңдеулерді шешуге өте қолайлы. Көпмүшелерді көбейткіштерге жіктеу өте күрделі, кейде тапқырлықты талап ететін, қиын да қызықты жұмыс. Дегенмен, кейбір теңдеулерді көбейткіштерге жіктеудің ортақ тәсілдері бар. Енді соларды мысалдар арқылы көрсетейік.

4-мысал. $x^3+4x^2+6x+4=0$ теңдеуін шешейік.

$x^3+4x^2+6x+4=x^3+4x^2+4x+2x+4=x(x^2+4x+4)+2(x+2)=x(x+2)^2+2(x+2)=(x+2)(x(x+2)+2)=(x+2)(x^2+2x+2)$ болғандықтан, берілген теңдеу $x+2=0$ және $x^2+2x+2=0$ теңдеулерімен мәндес болады. Мұнда бірінші теңдеудің түбірі $x=-2$, екінші теңдеудің нақты түбірлері болмайтындықтан, берілген теңдеудің жалғыз нақты түбірі бар: -2.

5-мысал. $x^4+x^3+x^2+x+1=0$ теңдеуін шешейік.

1-тәсіл. $x^4+x^3+x^2+x+1=x^4+\frac{1}{4}x^2+1+x^3+2x^2+x-\frac{5}{4}x^2=$

$$=(x^2)^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2+1+2\cdot x^2\cdot\frac{x}{2}+2x^2+2\frac{x}{2}-\frac{5}{4}x^2=\left(x^2+\frac{x}{2}+1\right)^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}x\right)^2=$$

$$= \left(x^2 + \frac{x}{2} + 1 - \frac{\sqrt{5}}{2}x\right)\left(x^2 + \frac{x}{2} + 1 + \frac{\sqrt{5}}{2}x\right) = \left(x^2 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}x + 1\right) \times$$

$$\times \left(x^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}x + 1\right)$$

болғандықтан, берілген теңдеу $x^2 + \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}x + 1 = 0$ немесе

$$x^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}x + 1 = 0$$

теңдеулеріне мәндес. Бұл теңдеулердің нақты түбірлері болмайды, өйткені олардың дискриминанттары теріс. Олай болса, берілген теңдеудің де нақты түбірлері болмайды: $\varnothing$

2-тәсіл. Берілген теңдеудің симметриялы теңдеу болатынын ескеріп, оған $z = x + \dfrac{1}{x}$ алмастыруын қолдануға болады. Бұл жағдайда да теңдеудің нақты түбірлері болмайтынын көреміз.

3-тәсіл. Берілген теңдеудің коэффициенттері оң. Сондықтан бұл теңдеудің оң түбірлері болуы мүмкін емес. 0-ге тең түбір де болмайды. Егер $-1 \leqslant x < 0$ болса, онда $|x^3| \leqslant x^2$, $|x| \leqslant 1$ теңсіздіктерінен $x^4 + (x^3 + x^2) + (x + 1) > 0$ теңсіздігін аламыз. Егер $x > -1$ болса, онда $x^4 > |x^3|$, $x^2 > |x|$ қатынастарынан $(x^4 + x^3) + (x^2 + x) + 1 > 0$ теңсіздігін аламыз. Берілген теңдеудің нақты түбірлері болмайды.

6-мысал. $x^4 + 12x^3 + 32x^2 - 8x - 4 = 0$ теңдеуінің түбірлерін табу керек.

$x^4 + 12x^3 + 32x^2 - 8x - 4 = (x^4 + 12x^3 + 36x^2) - (4x^2 + 8x + 4) = (x^2 + 6x)^2 - (2x + 2)^2 = (x^2 + 8x + 2)(x^2 + 4x - 2)$. Берілген теңдеу $x^2 + 8x + 2 = 0$ немесе $x^2 + 4x - 2 = 0$ теңдеулерімен мәндес. Бұл теңдеулерді шешіп, берілген теңдеудің түбірлерін табамыз:

$$x_{1,2} = -4 \pm \sqrt{14},\ x_{3,4} = -2 \pm \sqrt{6}.$$

ЕСЕПТЕР

А

Теңдеуді шешіңдер (**5.68 — 5.69**):

5.68. 1) $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$;

2) $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$;

3) $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$;

4) $3x^3 - 7x^2 - 7x + 3 = 0$;

5) $5x^4 - 12x^3 + 11x^2 - 12x + 5 = 0$;

6) $x^4 + 5x^3 + 4x^2 - 5x + 1 = 0$.

5.69. 1) $x^4 + 5x^3 + 2x^2 + 5x + 1 = 0$;

2) $6x^4 - 13x^3 + 12x^2 - 13x + 6 = 0$;

3) $x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 10x + 1 = 0$;

4) $2x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 3x + 2 = 0$.

5.70–5.74-есептерде берілген теңдеулерді көбейткіштерге жіктеу тәсілімен шешіңдер.

5.70. 1) $x^3 - 3x - 2 = 0$; 2) $x^3 - 19x - 30 = 0$;

3) $2x^3 - x^2 - 1 = 0$; 4) $x^3 + x - 2 = 0$.

5.71. 1) $x^3 - x^2 - 4x - 4 = 0$; 2) $3x^3 + 5x^2 + 5x + 3 = 0$;

3) $x^3 - x^2 - 81x + 81 = 0$; 4) $x^3 + 3x^2 - 16x - 48 = 0$.

B

5.72. 1) $x^4 - 2x^3 - x - 2 = 0$; 2) $x^4 - 3x^3 + x - 3 = 0$;

3) $2x^4 + 3x^3 + 16x + 24 = 0$; 4) $24x^4 + 16x^3 - 3x - 2 = 0$.

5.73. 1) $x^3 + 3x^2 - 6x - 8 = 0$; 2) $x^3 + 5x^2 + 15x + 27 = 0$;

3) $8x^3 - 6x^2 + 3x - 1 = 0$; 4) $27x^3 - 15x^2 + 5x - 1 = 0$.

5.74. 1) $x^3 + 2003x + 2004 = 0$; 2) $x^3 + 4x^2 - 5 = 0$;

3) $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$; 4) $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$.

5.75 – 5.76-есептерде берілген теңдеулерді шешіңдер:

5.75. 1) $3x^4 + 7x^3 + 7x + 3 = 0$; 2) $2x^4 - 9x^3 + 9x + 2 = 0$;

3) $x^4 + 1 = 2(1 + x)^4$; 4) $(1 + x^2)^2 = 2x(1 - x^2)$.

5.76. 1) $12x^5 - 56x^4 + 107x^3 - 107x^2 + 56x - 12 = 0$;

2) $15x^5 + 34x^4 + 15x^3 - 15x^2 - 34x - 15 = 0$.

C

5.77. Теңдеулерді шешіңдер:

1) $x^4 + 2x^3 - 11x^2 + 4x + 4 = 0$; 2) $x^4 - 2x^3 - 23x^2 + 8x + 16 = 0$;

5.78. Түбірлері 5, 3, $\frac{1}{3}$ болатындай 4-дәрежелі симметриялы теңдеу құрыңдар.

5.79. Теңдеулерді шешіңдер:

1) $28x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$;

2) $126x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$;

3) $(x^2 + 4x)(x^2 + x - 6) = (x^3 - 16x)(x^2 - 2x - 35)$;

4) $(x^2 + 4x)(x^2 + x - 6) = (x^3 - 16x)(x^2 - 2x - 35)$.

5.80. 1) $ax^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ теңдеуінің бір түбірі -2;

2) $x^3 - ax^2 - 5x + 6 = 0$ теңдеуінің бір түбірі 3;

3) $x^3 - x^2 + ax + 12 = 0$ теңдеуінің бір түбірі -3;

4) $2x^3 + 11x^2 + 17x + a = 0$ теңдеуінің бір түбірі $-0,5$ болса, a-ның мәнін анықтап, теңдеудің қалған түбірлерін табыңдар.

5.81. Теңдеуді шешіңдер:

1) $x^3 + (1 - a^2)x + a = 0$;

2) $(a - x)^3 + (b - x)^3 = (a + b - 2x)^3$.

Қайталауға арналған жаттығулар

5.82. Мектептегі барлық 8- сынып оқушыларының әр айға келетін туған күндерінің жиілігін анықтап, ығыспалы қатардың жиіліктер кестесін және жиіліктер алқабын тұрғызыңдар. Бұл мәліметтің модасы мен медианасын табыңдар.

5.83. $\dfrac{n - nm + k - km}{1 - 3m + 3m^2 - m^3} = \dfrac{n - k}{(1 - m)^2}$ тепе-теңдігін дәлелдеңдер.

5.84. Егер $xy + z^2 = 0$ болса, онда $(x + z)(y + z) + (x - z)(y - z) = 0$ теңдігі орындалатынын көрсетіңдер.

5.85. $\dfrac{a^3 + b^3}{n} : \dfrac{a^3 - b^3}{p} = \dfrac{p(a + b)}{n(a - b)} : x$ пропорциясының белгісіз x мүшесін анықтаңдар.

6-бөлім. ШЕК ЖӘНЕ ҮЗДІКСІЗДІК

6.1. Функцияның нүктедегі шегі

6.1.1. Функцияның нүктедегі шегі

Функцияның нүктедегі шегіне анықтама берер алдында бірнеше мысалдар қарастырайық.

1-мысал. $f(x)=x^2$ функциясы берілсін. Бұл функция бүкіл сан өсінде анықталған. Мәселен, $x=3$ нүктесінде анықталған. x айнымалысының мәндері 3-ке жақындай түссе, $f(x)=x^2$ функциясының сәйкес мәндері 9-ға жақындайды. Мысалы, оны мына кестеден байқауға болады:

x	2,9	2,95	2,98	3	3,02	3,05	3,1
x^2	8,41	8,7025	8,8804	9	9,1204	9,3025	9,61

Жалпы, $\varepsilon>0$ қаншалықты аз сан болса да, $\left|x^2-9\right|<\varepsilon$ теңсіздігі орындалатындай x-тің мәндерін табуға болады. Ол үшін x айнымалысының мәндері 3-ке мейлінше «жақын» болуы жеткілікті. Сондықтан x айнымалысының мәндері 3-ке ұмтылатындай болып өзгерсе, $f(x)=x^2$ функциясының сәйкес мәндері 9-ға жақындайды. Бұл жағдайда 9 санын $f(x)=x^2$ функциясының x аргументі 3-ке ұмтылғандағы *шегі* деп атайды. Оны былай жазады: $\lim\limits_{x\to 3} x^2=9$.

2-мысал. $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ функциясын қарастырайық. Бұл функцияның анықталу облысы — $D(f)=(-\infty;\ 2)\cup(2;\ +\infty)$ жиыны. Функция $x=2$ нүктесінде анықталмаған. Егер x-тің 2-ден сәл ғана өзгешелігі болса, онда $\dfrac{x^2-4}{x-2}$ бөлшегінің бөлімі нөлге тең болмайды, оның мағынасы бар. Сондықтан бұл функцияның $x\neq 2$ болғандағы аргументтің кез келген мәндеріндегі өзгеру тәртібін қарастыруға болады. Енді x-тің мәндері 2-ге жақындаған сайын берілген функцияның сәйкес мәндері қалай өзгеретінін қарастырайық:

x	1,97	1,98	1,99	2	2,01	2,02	2,03
$\dfrac{x^2-4}{x-2}$	3,97	3,98	3,99	функция анықталмаған	4,01	4,02	4,03

Осы кестеден x-тің мәні 2-ге (оң жағынан да, сол жағынан да) жақындаған сайын функцияның сәйкес мәндері 4-ке жақындайтынын байқау қиын емес. Енді осы айтқандарды математикалық тілге көшірейік. Басқаша айтқанда, x-ті 2-нің мейлінше аз аймағынан алып, $\left|\dfrac{x^2-4}{x-2}-4\right|$ айырымын кез келген $\varepsilon>0$ санынан кіші етуге болатынын көрсетейік. Шынында да, $x\neq 2$, онда

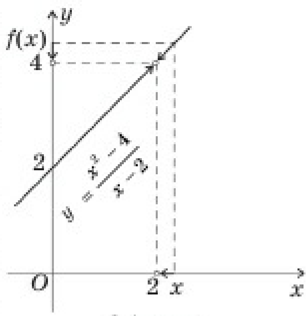
$$\frac{x^2-4}{x-2}-4=x+2-4=x-2.$$

Ендеше

$$\left|\frac{x^2-4}{x-2}-4\right|<\varepsilon \text{ теңсіздігін} \qquad (1)$$

$$|x-2|<\varepsilon \qquad (2)$$

түрінде жазуға болады. (2) теңсіздігінен (1) теңсіздік орындалатындай $x\neq 2$ нүктесінің аймағын аламыз (бұл аймаққа $x=2$ нүктесі енбейді). Сонымен, x-тің мәндері 2-ге шексіз жақындаған сайын $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ функциясының сәйкес мәндері 4-ке шексіз жақындай береді. Бұл жағдайда функция $x=2$ нүктесінде анықталмағанымен, оның x шамасы 2-ге ұмтылғандағы шегі бар деп есептеу керек: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=4$. Бұл айтылғандарды геометриялық жолмен кескіндеп, көрсетуге болады. 6.1-суретте $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ функциясының графигі бейнеленген. Осы суреттен x-тің 2-ге жақын (бірақ 2-ге тең емес) мәндерінде $f(x)$ функциясының сәйкес мәндері 4-ке жақын болатынын көреміз.



6.1-сурет

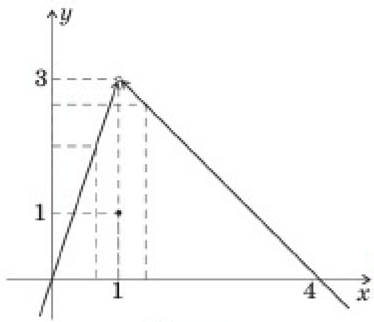
Енді функцияның нүктедегі шегінің жалпы анықтамасын қарастыруға болады.

Анықтама. *Егер кез келген $\varepsilon>0$ саны үшін $x=a$ нүктесінің аймағы табылып, осы аймақтағы әрбір x $(x\neq a)$ үшін*

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

теңсіздігі орындалса, онда ***A санын f(x) функциясының x = a нүктесіндегі шегі*** *деп атайды.* Оны былай жазады: $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ және оны «x-тің a-ға ұмтылғандағы $f(x)$ функциясының шегі A-ға тең» деп оқиды.

Сонымен, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ болса, $f(x)$ функциясының $x=a$ нүктесінде анықталуы міндетті емес (2-мысал). Жалпы, егер $f(a)$ мәні анықталса да, A саны мен $f(a)$ мәндері бір-біріне тәуелді емес.



6.2-сурет

Кейбір жағдайларда $A=f(a)$, яғни $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ теңдігі (1-мысал), екінші бір жағдайларда $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq f(a)$ теңсіздігі орындалуы да мүмкін. Енді осы айтқанымызды мысалмен көрсетейік.

3-мысал.
$$f(x) = \begin{cases} 3x, \text{ егер } x<1, \\ 1, \quad \text{егер } x=1, \\ 4-x, \text{ егер } x>1 \end{cases}$$

функциясының $x=1$ нүктесіндегі шегін қарастырайық. Бұл функцияның графигі 6.2-суретте бейнеленген. Осы графиктен x аргументі 1-ге ұмтылғанда (оң жағынан немесе сол жағынан болса да) функцияның сәйкес мәндері 3-ке жақындайтынын көреміз: $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$. Ал $f(1)=1$. Сонымен, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$.

6.1.2. Функция шегінің негізгі қасиеттері

Функция шегінің төмендегідей қасиеттері бар:

1°. *Тұрақты шаманың шегі өзіне тең:* $\lim\limits_{x \to a} C = C$.

2°. *Тұрақты көбейткішті шек таңбасының алдына шығаруға болады:* $\lim\limits_{x \to a} [k \cdot f(x)] = k \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

3°. *Егер қосылғыштардың шектері бар болса, онда қосындының шегі шектердің қосындысына тең:*

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x).$$

4°. *Егер көбейткіштердің шектері бар болса, онда көбейтіндінің шегі шектердің көбейтіндісіне тең:*

$$\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x).$$

5°. *Егер $f(x)$ және $g(x)$ функцияларының $x=a$ нүктесіндегі шектері бар және $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$ теңсіздігі орындалса, онда бөліндінің шегі шектердің бөліндісіне тең:*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}.$$

Үлгі ретінде 2°-қасиеттің дәлелдеуін көрсетейік. Айталық, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ және $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B$ болсын. Анықтама бойынша кез келген $\varepsilon>0$ саны үшін $\delta>0$ саны табылып, $0<|x-a|<\delta$ теңсіздігін қанағаттандыратын әрбір x үшін $|f(x)-A|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ және $|g(x)-B|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ теңсіздіктері орындалады:

$$|f(x)+g(x)|-(A+B)\leqslant|f(x)-A|+|g(x)-B|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Сондықтан анықтама бойынша

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=A+B=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x).$$

ТОПТЫҚ ЖҰМЫС

Топқа бөлініп, 1°, 3°, 4°-қасиеттерді 2°-қасиеттің дәлелдеуіне сүйеніп, өздерің дәлелдеңдер. Әр топ бір қасиетті дәлелдейді.

Егер $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ өрнегінде $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ және $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ теңдіктері орындалса, онда бұл шекті $\dfrac{0}{0}$ түріндегі анықталмағандық деп атайды. Ал егер $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ және $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$ теңдіктері орындалса, онда берілген шекті $\dfrac{\infty}{\infty}$ түріндегі анықталмағандық деп атайды.

4-мысал. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2}{x^3-x+1}$ шегін табу керек.

Шек таңбасы астындағы бөлшектің бөлімі x^3-x+1, $x=2$ болғанда нөлге тең емес. Сондықтан $\dfrac{x^2}{x^3-x+1}$ өрнегі $x=2$ нүктесінде анықталған. Онда 5-қасиет бойынша

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2}{x^3-x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 2} x^2}{\lim\limits_{x\to 2}\left(x^3-x+1\right)}=\frac{2^2}{2^3-2+1}=\frac{4}{7}.$$

5-мысал. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-8x+7}$ шегін табу керек.

Бөлшектің бөлімі $x=1$ нүктесінде нөлге тең. Онда шек таңбасы астындағы рационал өрнек $x=1$ нүктесінде анықталмаған. Бұл жағдайда (1) қасиетті қолдану үшін алдымен өрнекті түрлендіреміз: $x^2-8x+7=(x-1)(x-7)$ және $x^2-5x+4=(x-1)(x-4)$ болатынын ескерсек, $\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-8x+7}=\dfrac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x-7)}=\dfrac{x-4}{x-7}$.

$\dfrac{x-4}{x-7}$ өрнегі $x=1$ нүктесінде анықталғандықтан, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-8x+7}=$ $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-4}{x-7}=\dfrac{1-4}{1-7}=\dfrac{3}{6}=0,5$ теңдігін аламыз.

6-мысал. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-5x^2+10x-12}{x^3-2x^2-2x-3}$ шегін табу қажет.

$x=3$ нүктесінде берілген рационал өрнектің алымы да, бөлімі де нөлге айналады, бұл өрнек $x=3$ нүктесінде анықталмаған. Сондықтан алдыңғы мысалдағыдай, бөлшектің алымы мен бөлімін көбейткіштерге жіктеп, оны ықшамдап алу қажет. Ол үшін Горнер схемасын қолданып, көпмүшелерді $x-3$ екімүшесіне бөлеміз (бұрыштап бөлу тәсілін де қолдануға болады):

3	1	−5	10	−12
	1	−2	4	0

3	1	−2	−2	−3
	1	1	1	0

Осыдан $x^3-5x^2+10x-12=(x-3)(x^2-2x+4)$ және $x^3-2x^2-2x-3=$ $=(x-3)(x^2+x+1)$ теңдіктері орындалатындығы шығады. Олай болса, $\dfrac{x^3-5x^2+10x-12}{x^3-2x^2-2x-3}=\dfrac{(x-3)(x^2-2x+4)}{(x-3)(x^2+x+1)}$ теңдігі орындалады. Соңғы рационал өрнек $x=3$ нүктесінде анықталғандықтан,

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-5x^2+10x-12}{x^3-2x^2-2x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x^2-2x+4)}{(x-3)(x^2+x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x+4}{x^2+x+1}=\frac{9-6+4}{9+3+1}=\frac{7}{13}.$$

7-мысал. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+2}{\sqrt{x+3}-1}$ шегін табу керек.

$x=-2$ нүктесінде бөлшектің бөлімі де, алымы да нөлге айналады. Бұл анықталмағандықтан құтылу үшін бөлшектің алымын да, бөлімін де бөлімінің түйіндесі $\sqrt{x+3}+1$-ге көбейтеміз:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{\sqrt{x+3}-1}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)\left(\sqrt{x+3}+1\right)}{\left(\sqrt{x+3}-1\right)\left(\sqrt{x+3}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)\left(\sqrt{x+3}+1\right)}{x+2}=\lim_{x\to -2}\left(\sqrt{x+3}+1\right)=2.$$

6.1.3. Функцияның шексіздіктегі шегі

Біз алдыңғы тақырыптарда функциялардың шектеулі нүктелердегі шегін, яғни $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ өрнегіндегі a саны $|a|<+\infty$ теңсіздігін қанағаттандыратын жағдайды қарастырдық. Егер $y=f(x)$ функциясы бүкіл сан өсінде анықталса, онда бұл функцияның $x \to +\infty$ (немесе $x \to -\infty$) болғандағы шектерін қарастыруға болады.

Анықтама. *$y=f(x)$ функциясы $(-\infty;\ +\infty)$ аралығында анықталса және кез келген $\varepsilon>0$ саны үшін $k>0$ саны табылып, $x>k$ (немесе $x<-k$) теңсіздігін қанағаттандыратын әрбір x үшін*

$$\left|f(x)-A\right|<\varepsilon \qquad (3)$$

теңсіздігі орындалса, A санын $y=f(x)$ функциясының $x \to +\infty$ (сәйкес $x \to -\infty$) ұмтылғандағы шегі деп атаймыз. Оны былай жазады:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A \quad (\text{немесе } \lim_{x\to-\infty} f(x)=A). \qquad (4)$$

(4) теңдіктермен анықталатын шектерді *функцияның шексіздіктердегі шектері* деп атайды. Функцияның шексіздіктердегі шектері үшін қарастырылған барлық қасиеттер орындалады. Сонымен қатар функцияның шексіздіктердегі шектерінің тізбек шектерімен ұқсастығын аңғару қиын емес. Оны мысалдар арқылы қарастырайық.

8-мысал. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-1}{5x+3}=\dfrac{2}{5}$ теңдігі орындалатынын дәлелдеу керек.

$$\left|f(x)-A\right|=\left|\frac{2x-1}{5x+3}-\frac{2}{5}\right|=\left|\frac{-11}{5(5x+3)}\right|=\frac{11}{5(5x+3)}$$

айырымын қарастырайық. $x \to +\infty$ ұмтылғанда $5x+3 \to +\infty$ болатындықтан, $\dfrac{11}{5(5x+3)} \to 0$, яғни $\left|\dfrac{2x-1}{5x+3}-\dfrac{2}{5}\right|$ айырымы $x>k>0$ болғанда кез келген $\varepsilon>0$ санынан кіші болатындай етіп, k санын табуға болады. Олай болса, $\dfrac{2x-1}{5x+3}$ функциясының $x \to +\infty$ ұмтылғандағы шегі $\dfrac{2}{5}=0{,}4$-ке тең.

Ескерту. Бұл дәлелденген шекті тізбектер шегіне ұқсас $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ теңдігін қолданып табуға болады. Ол үшін $\dfrac{2x-1}{5x+3}$ өрнегінің алымын да, бөлімін де x-ке (x-тің ең үлкен дәрежесіне) бөліп, шек қасиеттерін қолданамыз:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{5x+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{5+\frac{3}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}2-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}}{\lim\limits_{x\to+\infty}5+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{x}}=\frac{2-0}{5+0}=\frac{2}{5}.$$

9-мысал. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-2x}{1+10x-4x^2}$ шегін табу қажет.

Ол үшін ескертудегі айтылған тәсілді қолданамыз:

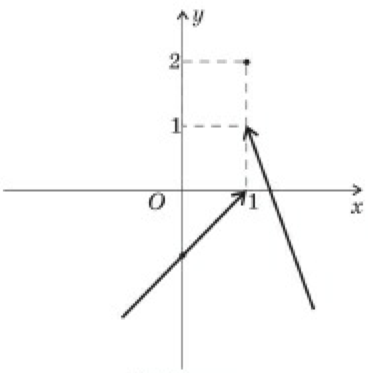
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-2x}{1+10x-4x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{2}{x}}{\frac{1}{x^2}+\frac{10}{x}-4}=\frac{1-0}{0+0-4}=-\frac{1}{4}.$$

6.1.4. Функцияның асимптоталары

Айталық, $y=f(x)$ функциясы $(a;c)\cup(c;b)$ жиынында анықталсын. Функция $x=c$ нүктесінде анықталмаса да, оның осы нүктедегі шегін қарастыруға болады. $\lim\limits_{\substack{x\to c\\ x\in(a;\,c)}} f(x)$ және $\lim\limits_{\substack{x\to c\\ x\in(c;\,b)}} f(x)$ шектерін бір атпен функцияның $x=c$ нүктесіндегі ***біржақты шектері*** деп атайды. Дәлірек айтқанда, оларды сәйкесінше ***сол жақты*** және ***оң жақты шектер*** деп атап, былай белгілейді:

$$\lim_{x\to c-0}f(x)=f(c-0)\quad \text{және}\quad \lim_{x\to c+0}f(x)=f(c+0).$$

Мысалы, $f(x)=\begin{cases}x-1, \text{ егер } x<1,\\ 2, \text{ егер } x=1,\\ 3-2x, \text{ егер } x>1\end{cases}$ функциясын қарастырайық.



6.3-сурет

Бұл функция үшін $\lim\limits_{x\to1-0}f(x)=0$; $\lim\limits_{x\to1+0}f(x)=1$ және $f(1)=2$ болатынын көреміз (6.3-сурет).

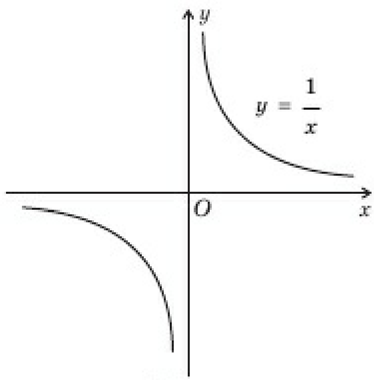
Біржақты шектер функцияның асимптотасы түсінігімен тығыз байланысты. Жалпы, функция асимптоталары үш түрге бөлінеді: *вертикаль*, *горизонталь* және *көлбеу асимптота*.

Анықтама. 1) *Егер* $y=f(x)$ *функциясы* $[a;\ c)\cup(c;\ b]$ *жиынында анықталып,* $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\pm\infty$, $\lim\limits_{x\to c-0} f(x)=\pm\infty$ *және* $\lim\limits_{x\to c+0} f(x)=\pm\infty$ *шарттарының кем дегенде біреуі орындалса, онда* $x=c$ *түзуі функцияның* ***вертикаль асимптотасы*** *деп аталады.*

2) *Егер* $y=f(x)$ *функциясы үшін* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ *немесе* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$ *шарттарының кем дегенде біреуі орындалса, онда* $y=b$ *түзуі функцияның* ***горизонталь асимптотасы*** *деп аталады.*

3) *Егер* $y=f(x)$ *функциясы мен* $y=kx+b$ *түзуі үшін* $\lim\limits_{x\to-\infty}\big(f(x)-(kx+b)\big)=0$ *немесе* $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-(kx+b)\big)=0$ *шарттарының кем дегенде біреуі орындалса, онда* $y=kx+b$ *түзуі функцияның* ***көлбеу асимптотасы*** *деп аталады.*

Мысалы, $y=\dfrac{1}{x}$ функциясының вертикаль және горизонталь асимптоталары бар. $\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{1}{x}=-\infty$ және $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1}{x}=+\infty$ болғандықтан, $x=0$ ординаталар өсі — функцияның вертикаль асимптотасы, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$ және $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ болғандықтан, $y=0$ түзуі (абсциссалар өсі) — функцияның горизонталь асимптотасы (6.4-сурет).



6.4-сурет

Функцияның көлбеу асимптотасы $y=kx+b$ түзуін анықтау үшін

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to-\infty}\big[f(x)-kx\big] \qquad (5)$$

немесе

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to+\infty}\big[f(x)-kx\big] \qquad (6)$$

формулаларын қолданады. Асимптота (5) формуламен анықталса, оны функцияның $x\to-\infty$ *ұмтылғандағы асимптотасы* деп, ал (6) формуламен анықталса, оны функцияның $x\to+\infty$ *ұмтылғандағы асимптотасы* деп атаймыз.

10-мысал. $y = x + \dfrac{1}{x-1} - 2$ функциясының асимптоталарын табу керек.

$\lim\limits_{x\to 1-0}\left(x + \dfrac{1}{x-1} - 2\right) = -\infty$ және $\lim\limits_{x\to 1+0}\left(x + \dfrac{1}{x-1} - 2\right) = +\infty$ болғандықтан, $x=1$ түзуі — берілген функцияның вертикаль асимптотасы.

$$k = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(1 + \frac{1}{x(x-1)} - \frac{2}{x}\right) = 1,$$

$$b = \lim_{x\to-\infty}\left[f(x) - kx\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[x + \frac{1}{x-1} - 2 - x\right] = -2$$

болғандықтан, $y=x-2$ түзуі функцияның $x\to-\infty$ ұмтылғандағы көлбеу асимптотасы және

$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{x(x-1)} - \frac{2}{x}\right) = 1,$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - kx\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(x + \frac{1}{x-1} - 2 - x\right) = -2.$$

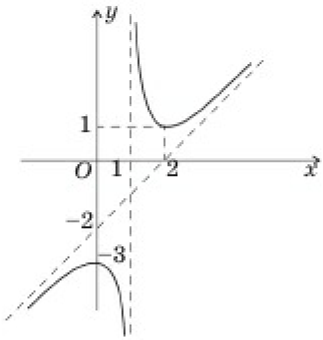
Сондықтан $y=x-2$ түзуі — функцияның $x\to+\infty$ ұмтылғандағы көлбеу асимптотасы (6.5-сурет).

Жалпы, функцияның асимптоталары оның графигін салуды көп жеңілдетеді. Шынында да, асимптоталардың анықтамасы бойынша, аргумент белгілі бір нүктеден бастап $+\infty$-ке (не $-\infty$-ке) ұмтылса, функцияның графигі көлбеу асимптотаға онымен қиылыспай, шексіз жақындай түседі.

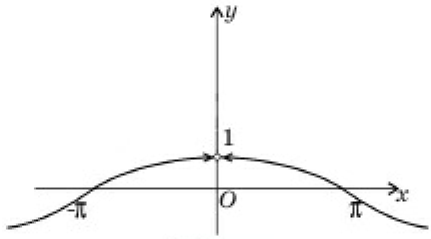
6.1.5. Бірінші тамаша шек

$f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ функциясын қарастырайық. Бұл функция $x=0$ нүктесінде анықталмаған (6.6-сурет). Дегенмен, бұл функцияның $x\to 0$ ұмтылғандағы шегі бар:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1. \qquad (7)$$



6.5-сурет



6.6-сурет

Бұл формуланы әдетте *бірінші тамаша шек* деп атайды.

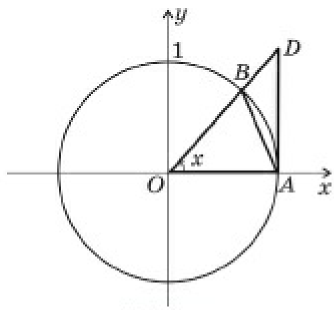
Енді (7) формуланың дәлелдемесін келтірейік.

Бірлік тригонометриялық дөңгелектен радиандық өлшемі x-ке тең $\left(0< x<\frac{\pi}{2}\right)$ AOB центрлік бұрышын аламыз (6.7-сурет).

Мұнда $AD\perp AO$, $AO=BO=1$. AOB, AOD үшбұрыштары мен AOB секторы аудандарын салыстырып,

$$S_{\Delta AOB} < S_{секAOB} < S_{\Delta AOB}$$

теңсіздігінің орындалатынын көреміз.



6.7-сурет

Аудан табу формулалары бойынша

$$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}\ AO \cdot BO \cdot \sin x = \frac{1}{2}\ \sin x;$$

$$S_{секAOB} = \frac{1}{2}\ AO^2 \cdot x = \frac{1}{2}\ x;$$

$$S_{\Delta AOD} = \frac{1}{2}\ AO \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot AO \cdot \operatorname{tg}x = \frac{1}{2}\operatorname{tg}x.$$

Сондықтан $\frac{1}{2}\ \sin x\ \frac{1}{2}\ x < \frac{1}{2}\operatorname{tg}x$ немесе $\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$ теңсіздігі орындалады. $0< x<\frac{\pi}{2}$ және $\sin x>0$ болғандықтан, соңғы теңсіздікті $\sin x$-қа бөлсек, $1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$. Осы кері шамалар үшін $\cos x < \frac{\sin x}{x} <1$ теңсіздігін аламыз. $\cos x$, $\frac{\sin x}{x}$ — жұп функциялар.

Ендеше бұл теңсіздік $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ болатындай x-тің теріс мәндері, яғни $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ және $0 < x < \frac{\pi}{2}$ болатындай кез келген x үшін $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ теңсіздігі орындалады. Мұнда $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$, $\lim\limits_{x\to 1} 1 = 1$. Демек $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

11-мысал. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$ шегін табу қажет.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{3\cdot\sin 3x}{3x} = \left|\begin{array}{l} 3x = t \\ x\to 0 \\ t\to 0 \end{array}\right| = \lim_{t\to 0} 3\frac{\sin t}{t} = 3\cdot 1 = 3.$$

12-мысал. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$ шегін табу керек.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} 2\frac{\sin\frac{x}{2}}{2\cdot\frac{x}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{2\cdot\frac{x}{2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2}{4}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

13-мысал. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\pi-2x}$ шегін табу керек.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\pi-2x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)}{2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = \left|\begin{array}{l} \frac{\pi}{2}-x = t \\ x\to\frac{\pi}{2} \\ t\to 0 \end{array}\right| =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{2t} = \frac{1}{2}.$$

1. Функцияның нүктедегі шегі ұғымына анықтама беріңдер. Анықтаманың мағынасын түсіндіріңдер.
2. Функцияның нүктедегі шегі қасиеттерін тұжырымдап, дәлелдеңдер.
3. Функцияның шексіздіктегі шегін қалай түсінесіңдер?
4. Функцияның нүктедегі біржақты шегі деген не?
5. Функция асимптоталарының қандай түрлері бар және олар қалай анықталады? Функцияның асимптоталары болмауы мүмкін бе?
6. Бірінші тамаша шекті жазыңдар және оны дәлелдеңдер.

ЕСЕПТЕР

A

6.1 Анықтамаға сүйеніп, төмендегі теңдіктерді дәлелдеңдер:

1) $\lim\limits_{x\to 2}(2x+1)=5$; 4) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-5)=-1$;

3) $\lim\limits_{x\to -1}(2x^2+5)=7$; 5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=4$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}(4x-3)=1$; 6) $\lim\limits_{x\to 1,5}\dfrac{4x^2-9}{2x-3}=6$.

6.2–6.5-есептерде көрсетілген шектерді табыңдар.

6.2. 1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-1}{x^2}$; 3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-2}+3}{x^2+1}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-1}{x^2-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2-x}{1-\sqrt{x+1}}$.

6.3. 1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$; 3) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x^2-1}$;

2) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{x^2-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x-2x^2}$.

6.4. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x}{x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sin x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}3x}{x}$.

6.5. 1) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x-1}{3-2x}$; 3) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$;

2) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2-1}{x^2+x+1}$; 4) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+3}}$.

6.6. $y=f(x)$ функциясының көрсетілген $x=a$ нүктесіндегі біржақты $f(a-0)$, $f(a+0)$ шектерін анықтап, оларды $f(a)$ мәнімен салыстырыңдар:

1) $f(x)=x^2-3x+1$, $a=1$; 2) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3}$, $a=-3$.

6.7. $x\to 1$ ұмтылғанда $f(x)=\begin{cases}1, \text{ егер } x<1,\\ x-1, \text{ егер } x\geqslant 1\end{cases}$ функциясының шегі болмайтынын дәлелдеңдер. $f(1-0)$, $f(1+0)$ біржақты шектерін тауып, оларды $f(1)$ мәнімен салыстырыңдар.

6.8. Функцияның вертикаль және горизонталь асимптоталарын табыңдар:

1) $f(x)=\dfrac{x-2}{x+1}$; 2) $f(x)=2+\dfrac{3}{x-4}$; 3) $f(x)=\dfrac{5}{x+2}-3$.

6.9. Функцияның вертикаль және көлбеу асимптоталарын табыңдар:

1) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$; 2) $f(x)=\dfrac{x^2-x+2}{x+1}$.

B

6.10. 1) $f(x)=[x]$; 2) $f(x)=\{x\}$ функциясының $x\to 2$ ұмтылғанда шегі болмайтынын дәлелдеңдер. Қандай қорытынды жасауға болады? $f(2-0)$, $f(2+0)$ және $f(2)$ мәндерін табыңдар.

6.11–6.19-есептерде көрсетілген шектерді табыңдар.

6.11. 1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6}$; 3) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+5x-2}{5x^2+12x+4}$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-5x+4}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0,5}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2-15x+7,25}$.

6.12. 1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^2+3x+2}$; 3) $\lim\limits_{x\to 1,5}\dfrac{8x^3-36x^2+54x-27}{4x^2-12x+9}$;

2) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}}\dfrac{6x^2-5x+1}{27x^3-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to -0,5}\dfrac{4x^3-8x^2+5x-1}{4x^3-3x+1}$.

6.13. 1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x+1}$; 3) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{x^3-8}$;

2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$.

6.14. 1) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$; 3) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$;

2) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+3}{\sqrt{x+4}-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$.

6.15. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sqrt{x}-3x}{3\sqrt{x}-2x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x\sqrt{x}-5\sqrt{5}}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}+x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}-1}$.

6.16. 1) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2-2x+3}{x^2-5x+6}$; 3) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x^2+5x-1}{5x^2-12x+4}$;

2) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^2+10}{25-5x-3x^2}$.

6.17. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{2x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sin 5x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sin 5x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$.

6.18. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}2x}{x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin 4x}{x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{bx}{\operatorname{tg}ax}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin 6x}{10x}$.

6.19. 1) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}$; 3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}}$;

2) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{4x+\pi}$; 4) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$.

C

6.20. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}=\dfrac{m}{n}$ теңдігін дәлелдеңдер (m, n — натурал сандар).

6.21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ теңдігін дәлелдеңдер.

6.22 Төмендегі функциялардың барлық асимптоталарын анықтаңдар және графигін схема түрінде салыңдар:

1) $y=\dfrac{x^2+1}{x-1}$; 3) $y=2x-\dfrac{4}{x+2}-3$; 5) $y=3x-\dfrac{1}{x}$;

2) $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$; 4) $y=\dfrac{2x}{3-x}+4$; 6) $y=\dfrac{x^3-1}{x^2+1}$.

6.23. 1) $f(x)=\begin{cases}x^2-1, \text{ егер } x>1,\\ 2x-1, \text{ егер } x\leqslant 1;\end{cases}$ 2) $g(x)=\begin{cases}2, \text{ егер } x>1,\\ -2, \text{ егер } x\leqslant 1\end{cases}$

функцияларының $x=1$ нүктесіндегі біржақты шектерін табыңдар және оны $f(1)$ мәнімен салыстырыңдар.

6.24. $y=f(x)$ функциясының $x=a$ нүктесінде шегі бар болуы үшін $f(a-0)=f(a+0)$ теңдігінің орындалуы қажетті және жеткілікті болатынын дәлелдеңдер. Мұнда $f(x)$ функциясы $[c;\ a)\cup(a;\ b]$ жиынында анықталған.

Шекті табыңдар **(6.25–6.26)**:

6.25. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{\sin^3 x}$; 3) $\lim\limits_{x\to \alpha}\dfrac{\sin^2 x-\sin^2\alpha}{x^2-\alpha^2}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 3x}{3x^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$.

6.26. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-1}{\sin x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$; 4) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sqrt{\sin x}}{\sqrt{1+\cos x}-1}$.

Қайталауға арналған жаттығулар

6.27. Функцияның анықталу облысын табыңдар:

1) $f(x)=\dfrac{3}{\sqrt{18x^2-3x-1}}$; 2) $g(x)=\sqrt{(x+3)(11-x)}$.

6.28. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\operatorname{tg}^4\varphi[8\cos^2(\pi-\varphi)-\cos(\pi+4\varphi)-1]$; 2) $\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}-\dfrac{2\cos 2\alpha}{1+\sin(2\alpha+1,5\pi)}$.

6.29. Функцияның графигін салыңдар:

1) $4x^2-3y=0$; 2) $x^2+y^2=25$.

6.2. Сан тізбегінің шегі

6.2.1. Сан тізбегі ұғымы

Айталық бізге N натурал сандар жиынында анықталған $f(x)$ функциясы берілсін. Бұл функцияның

$$f(1),\ f(2),\ f(3),\ \ldots,\ f(n),\ \ldots \qquad (1)$$

мәндер жиынын сан тізбегі деп атайды. Көп жағдайда

$$a_1=f(1),\ a_2=f(2),\ a_3=f(3),\ \ldots,\ a_n=f(n),\ \ldots$$

белгілеулері арқылы сан тізбегін

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots \qquad (2)$$

түрінде жазады. (1) және (2) түрдегі сан тізбектерін қысқаша $\{f(n)\}$ және $\{a_n\}$ арқылы белгілейді. Мұнда $f(n)$ және a_n сәйкесінше тізбектердің **жалпы мүшелері** деп аталады. Мысалы, 1) $y=x$; 2) $y=3^x$; 3) $y=\sin\dfrac{\pi x}{2}$; 4) $y=\sqrt{x^2-1}$ функцияларының анықталу облыстарына натурал сандар жиыны енеді. Сондықтан бұл функциялардың натурал сандар жиынындағы тарылымы сәйкесінше төмендегідей сан тізбектерін береді: 1) $1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ \ldots$;

2) $3,\ 9,\ 27,\ \ldots,\ 3^n,\ \ldots$; 3) $1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1,\ \ldots,\ \sin\dfrac{\pi n}{2},\ \ldots$;

4) $0,\ \sqrt{3},\ 2\sqrt{2},\ \ldots,\ \sqrt{n^2-1},\ \ldots$.

Сан тізбегін берудің ең қолайлы түрі — оның *жалпы мүшесінің формуласымен берілуі*. Мысалы, 1)–4) тізбектерді төмендегідей жалпы мүшелерінің формулаларымен анықтаймыз: 1) $a_n=n$; 2) $a_n=3^n$; 3) $a_n=\sin\dfrac{\pi n}{2}$; 4) $a_n=\sqrt{n^2-1}$.

Кейде сан тізбектері *рекурренттік қатынастармен* (қайтымды қатынастар), яғни a_n-ді оның алдыңғы мүшелері арқылы өрнектейтін формулалармен беріледі. Мысалы, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... Фибоначчи сандары тізбегін $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$, $n>2$ және $a_1=a_2=1$ формулаларын пайдаланып анықтауға болады.

Сонымен қатар сан тізбектерін *сөзбен сипаттау* арқылы да анықтайды. Мысалы, π санының кемімен алынған ондық жуықтаулары мынадай сан тізбегін береді: 3; 3,1; 3,14; 3,141; ... .

Сан тізбектерін натурал сандар жиынында анықталған функцияның мәндері ретінде қарастыруға болатындықтан, олар үшін де функциялардағы сияқты, бірсарындылық және шенелгендік ұғымдары анықталады.

6.2.2. Сан тізбегінің шегі

Алдымен бірнеше мысалдар қарастырайық.

1-мысал. $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$; ...; $\frac{n}{n+1}$; ... сан тізбегі берілсін. Оның жалпы мүшесі $a_n = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$ түрінде жазылады. Осыдан n нөмірі үлкейген сайын a_n мен 1-дің айырымы $\frac{1}{n+1}$ өрнегіне тең бола отырып, нөлге жақындай түседі. Айталық, $n>99$ болса, $|a_n - 1|$ айырымы 0,01-ден кем; $n>999$ болғанда бұл айырым 0,001-ден кем және т.с.с. Тізбектің n мүшесінің нөмірі өскен сайын $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ 1 санына шексіз жақындайды.

2-мысал.

$\left\{\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}\right\}$ сан тізбегін ашып жазсақ, ол 1, 0, $-\frac{1}{3}$, 0, $\frac{1}{5}$, 0, $\frac{1}{7}$, ... түрінде жазылады және оның мүшелері кезектесіп нөлден үлкен, нөлге тең, нөлден кіші болып отырады. Сонымен бірге n нөмірі өскен сайын бұл тізбектің мүшелері нөлге шексіз жақындай түседі.

3-мысал. $\sqrt{2}$ санының кемімен алынған жуықтауларынан құралған сан тізбегін қарастырайық: 1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; ... . Бұл тізбектің мүшелері n нөмірі өскен сайын $\sqrt{2}$ санына шексіз жақындай түсетінін жақсы білеміз.

Осы мысалдарда қарастырылған тізбектердің $\{a_n\}$ мүшелері n нөмірі өскен сайын бір a санының маңында шоғырланатындығын көреміз. Осындай a сандарын берілген тізбектің *шегі* деп атайды. Енді тізбек шегінің қатаң математикалық анықтамасын келтірейік.

Анықтама. *Егер кез келген $\varepsilon>0$ саны үшін n_0 саны табылып, $n>n_0$ теңсіздігін қанағаттандыратын әрбір n нөмірі үшін*

$$|a_n - a| < \varepsilon \qquad (1)$$

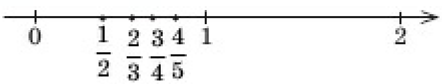
теңсіздігі орындалса, онда a санын $\{a_n\}$ ***тізбегінің шегі*** *деп атайды және оны былай белгілейді:* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$.

1-мысалда көрсетілген $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ тізбегінің шегі 1-ге тең, яғни $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1} = 1$. Екінші мысалда $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n} = 0$. Ал үшінші мысалдағы сан тізбегінің шегі $\sqrt{2}$ -ге тең.

Енді (1) теңсіздіктің мағынасына тоқталайық. Бұл теңсіздікті мынадай қос теңсіздік түрінде жазуға болады: $-\varepsilon<a_n-a<\varepsilon$ немесе соңғы теңсіздіктің барлық бөліктеріне a санын қоссақ,

$$a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon. \qquad (2)$$

Сонымен, анықтама бойынша кез келген $\varepsilon>0$ саны үшін n_0 нөмірі табылып, $n>n_0$ теңсіздігін қанағаттандыратын әрбір n үшін (2) теңсіздік орындалады. Басқаша айтқанда, $a_{n_0}+1$мүшесінен бастап, тізбектің барлық $\{a_n\}$ мүшелері $(a-\varepsilon;\ a+\varepsilon)$ интервалында жатады. Бұл интервалдың сыртында тізбектің алғашқы a_1, a_2, ..., a_n мүшелері ғана жатуы мүмкін. $\varepsilon>0$ қаншалықты аз сан болғанымен, оған сәйкес n_0 нөмірі табылып, тізбектің барлық a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, ... шексіз көп мүшелері $(a-\varepsilon;\ a+\varepsilon)$ интервалында жатады. Мысалы, $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$ тізбегі үшін $\varepsilon=0{,}1$ деп алсақ, онда $\left|\dfrac{n}{n+1}-1\right|<0{,}1$ немесе $\left|\dfrac{1}{n+1}\right|<0{,}1$ теңсіздігі кез келген $n>10$ үшін орындалады. Олай болса, 11-мүшесінен бастап тізбектің барлық мүшелері $(0{,}9;\ 1{,}1)$ интервалында жатады (6.8-сурет). Мұнда $\varepsilon=0{,}1$ болғанда $n_0=10$ деп алу керек. Бұл мысалда $\varepsilon=0{,}01$ деп алсақ, 101-мүшесінен бастап тізбектің барлық мүшелері $(0{,}99;\ 1{,}01)$ интервалында жатады және т.с.с.



6.8-сурет

Жалпы, осыдан кез келген сан тізбегінің шегі бола береді деп түсіну қате. Шегі болмайтын сан тізбектері де кездеседі. Мысалы, $\{2n-1\}$ және $\{1+(-1)^n\}$ сан тізбектерінің шегі жоқ. Бұл тізбектердің біріншісі шенелмеген, сондықтан оның мүшелері белгілі бір санның маңында шоғырлана алмайды. Ал екіншісінің шенелгендігіне қарамастан, шегі жоқ. Өйткені бұл тізбектің барлық мүшелері 0-ге немесе 2-ге тең. Оның 0-ге тең және 2-ге тең мүшелерінің сандары шексіз көп. Олай болса, бұл тізбектің шексіз көп мүшелері шоғырланатындай, сыртында санаулы ғана мүшелері болатын, ұзындығы $\varepsilon<1$ теңсіздігін қанағаттандыратын интервал $(a-1;\ a+1)$ таба алмаймыз.

Тізбектің $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$ шегі бар болса, мұндай тізбекті ***жинақты***, шегі жоқ тізбектерді ***жинақсыз*** деп атаймыз. Мысалы, барлық шенелмеген тізбектер жинақсыз болады.

$f(x)$ функциясы бірсарынды (өспелі не кемімелі) болса, онда сәйкесінше $\{f(n)\}$ сан тізбегі де бірсарынды (өспелі не кемімелі) болады.

$f(x)$ функциясы шенелсе (жоғарыдан шенелген, төменнен шенелген), сәйкесінше $\{f(n)\}$ сан тізбегі де шенелген (жоғарыдан шенелген, төменнен шенелген).

Мысалы, 1) $\left\{\dfrac{1}{2^{n-1}}\right\}$ — бірсарынды кемімелі және шенелген:

$$1>\frac{1}{2}>-\frac{1}{2^2}>\ldots>\frac{1}{2^{n-1}}>\ldots \text{ және } 0<\frac{1}{2^{n-1}}\leqslant 1;$$

2) 1; 3; 5; ...; $2n-1$; ... тізбегі бірсарынды өспелі, төменнен шенелген, бірақ жоғарыдан шенелмеген, сондықтан шенелмеген.

Бізді берілген тізбектің шегі бар-жоғын анықтау мәселесі көбірек қызықтырады. Кейбір дербес жағдайларда осы сұрақтардың дұрыс жауабын төмендегі К. Вейерштрасс теоремасынан көруге болады.

1-теорема. *Бірсарынды өспелі және жоғарыдан шенелген тізбектің шегі бар.*

Бірсарынды кемімелі және төменнен шенелген әр тізбектің шегі бар.

Бұл теореманы дәлелдеусіз келтіреміз. Оның мағынасын мысалдар арқылы қарастырайық. Мысалы, $a_n=\dfrac{n}{n+1}$ тізбегі бірсарынды өспелі және оның әр мүшесі 1-ден кіші, жоғарыдан шенелген. Вейерштрасс теоремасы бойынша бұл тізбектің шегі бар, жинақты.

$b_n=\dfrac{2n+3}{n^2}$ тізбегі кемімелі және төменнен шенелген (оның әрбір мүшесі нөлден үлкен). Сондықтан бұл тізбектің де шегі бар. $c_n=n^2$ сан тізбегі бірсарынды өспелі болғанмен (1, 4, 9, 16, ...), жоғарыдан шенелмеген. Бұл тізбектің мүшелері n өскен сайын шексіз өсе береді.

Кез келген $M>0$ саны үшін n_0 нөмірі табылып, әрбір $n>n_0$ үшін $a_n>M$ теңсіздігі орындалса, $\{a_n\}$ сан тізбегінің мүшелерін ***оң шексіз үлкен шама*** деп атаймыз. Оны былай белгілейді: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=+\infty$.

Осы сияқты, егер кез келген $M>0$ саны үшін n_0 нөмірі табылып, әрбір $n>n_0$ үшін $a_n<-M$ теңсіздігі орындалса, $\{a_n\}$ сан тізбегінің мүшелерін ***теріс шексіз үлкен шама*** деп атаймыз. Оны былай белгілейді: $\lim\limits_{n\to-\infty} a_n=-\infty$. Мысалы, $c_n=n^2$ оң шексіз үлкен шама:

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$. Ал $a_n=2-n$ теріс шексіз үлкен шама: $\lim\limits_{n\to-\infty}(2-n) = -\infty$.

$\{a_n\}$ сан тізбегінің шегі нөлге тең $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ болса, a_n-ді ***шексіз аз шама*** деп атаймыз. Мысалы, $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ тізбегі — шексіз аз шама, өйткені $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$. Шексіз аз шамалар мен шексіз үлкен шамалардың арасында байланыс бар.

2-теорема. *Егер a_n шексіз үлкен шама (теріс немесе оң) болса, онда $\frac{1}{a_n}$ шексіз аз шама болады және керісінше, егер $b_n(b_n\neq 0)$ шексіз аз шама болса, онда $\frac{1}{b_n}$ шексіз үлкен шама болады.*

a_n оң шексіз үлкен шама болсын: $\lim\limits_{n\to-\infty} a_n = \infty$. Онда анықтама бойынша кез келген $M>0$ саны үшін n_0 нөмірі табылып, $n>n_0$ болғаннан бастап $a_n>M$ теңсіздігі орындалады. Олай болса, кері шамалар үшін $0<\frac{1}{a_n}<\frac{1}{M}$ теңсіздігі орындалады. Басқаша айтқанда, белгілі бір n_0 нөмірінен бастап $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ тізбегінің мүшелері кез келген $\frac{1}{M}$ санынан кіші. M кез келген сан болғандықтан, $\lim\limits_{n\to-\infty}\frac{1}{a_n} = 0$.

Демек, $\frac{1}{a_n}$ — шексіз аз шама. Теореманың өзге тұжырымы да осы сияқты дәлелденеді.

3-теорема. *Шегі бар әрбір тізбектің жалпы мүшесін оның шегі мен қандай да бір шексіз аз шаманың қосындысы түрінде жазуға болады.*

Дәлелдеуі. Айталық, $\{a_n\}$ тізбегі үшін $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ болсын. Шектің анықтамасы бойынша кез келген $\varepsilon>0$ саны үшін n_0 нөмірі табылып, $n>n_0$ болғаннан бастап $|a_n - a| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалады. Егер $\alpha_n=a_n-a$ белгілеуін енгізсек, әрбір $n>n_0$ нөмірі үшін $|\alpha_n| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалады, яғни α_n — шексіз аз шама. Екінші жағынан, $a_n=a+\alpha_n$. Дәлелдеу керегі де осы.

4-мысал. $\frac{n+1}{n}$ тізбегін қарастырайық. $a_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$ және $\alpha_n = \frac{1}{n}$ — шексіз аз шама, сондықтан $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$.

6.2.3. Тізбек шегінің негізгі қасиеттері

Мұнда шекке көшу ережелерін қарастырамыз.

1°. *Тұрақты санның шегі өзіне тең:* $\lim\limits_{n\to\infty} C = C$.

2°. *Қосындының шегі шектердің қосындысына тең:*

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

3°. *Көбейтіндінің шегі шектердің көбейтіндісіне тең:*

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

4°. *Егер бөлімі нөлге тең болмаса, онда бөліндінің шегі шектердің бөліндісіне тең:* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$.

Салдар. *Тұрақты көбейткішті шек таңбасының алдына шығаруға болады:* $\lim\limits_{n\to\infty}(C \cdot a_n) = C \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Ескерту. Бұл тұжырымдардағы шектерді бар деп есептеу керек. Егер мұндағы $\lim a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ шектерінің кем дегенде біреуі жоқ болса, онда екінші, үшінші және төртінші қасиеттер орындалмайды.

1°. C тұрақты санын тұрақты тізбек ретінде қарастырамыз: $C, C, C, ..., C, \dots$, яғни $a_n = C$. Сондықтан $\lim\limits_{n\to\infty} C = C$.

2°. Айталық, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ және $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ болсын. Онда 3-теорема бойынша α_n және β_n шексіз аз шамалары табылып, $a_n = a + \alpha_n$ және $b_n = b + \alpha_n$ теңдіктері орындалады.

Осыдан $a_n + b_n = (a+\alpha_n) + (b+\beta_n) = (a+b) + (\alpha_n + \beta_n)$.

$\alpha_n + \beta_n$ — шексіз аз шама. Сондықтан

$$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n.$$

3°. Егер $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ болса, онда $a_n = a + \alpha_n$ және $b_n = b + \beta_n$ теңдіктері орындалатын α_n және β_n шексіз аз шамалары табылады. $a_n \cdot b_n = (a+\alpha_n)(b+\beta_n) = a \cdot b + (a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n)$. Мұнда $(a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n)$ шексіз аз шама болғандықтан, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ теңдігін аламыз.

ӨЗДЕРІҢ ДӘЛЕЛДЕҢДЕР

4°-қасиет те осы сияқты дәлелденеді. Салдардың дәлелдеуі 1° және 3°-қасиеттерден шығады. Оны өздерің орындап көріңдер.

Ескерту. Осы дәлелденген қасиеттер бірнеше қосылғыштар мен көбейткіштер үшін де орындалады. Оны математикалық индукция әдісімен дәлелдеуге болады.

5-мысал. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-n-5}{3n^2+n+5}$ шегін табу қажет.

Әрине, қатынастар шегі жөніндегі 4°-қасиетті бірден қолдануға болмайды. Өйткені шек таңбасы астындағы өрнектің алымы да, бөлімі де — шексіз үлкен шамалар. Сондықтан бұл өрнекті алдымен түрлендіріп алу керек. Ол үшін бөлшектің алымын да, бөлімін де осы рационал өрнектегі n-нің ең үлкен дәрежесіне бөліп жазамыз:

$$\frac{2n^2-n-5}{3n^2+n+5}=\frac{2-\dfrac{1}{n}-\dfrac{5}{n^2}}{3+\dfrac{1}{n}+\dfrac{5}{n^2}}.$$

Енді шектер жөніндегі 2° және 4°-қасиеттерді қолдануға болады:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-n-5}{3n^2+n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\dfrac{1}{n}-\dfrac{5}{n^2}}{3+\dfrac{1}{n}+\dfrac{5}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{n}-\dfrac{5}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\dfrac{1}{n}+\dfrac{5}{n^2}\right)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}2-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}3+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5}{n^2}}=\frac{2-0-0}{3+0+0}=\frac{2}{3}.$$

Есептер шығарғанда жиі қолданылатын тағы бір қасиетті қарастырайық. *Егер* $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ *шегі бар болса,* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}$ *теңдігі орындалады*. Бұл қасиеттің жалпы түрі былай айтылады:

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, a_n, $a\in D(f)$ және $y=f(x)$ функциясы өзінің *анықталу облысында үздіксіз* болса, $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=f\left(\lim\limits_{n\to\infty}a_n\right)$ теңдігі орындалады.

Бұл қасиеттің дәлелдеуі келесі параграфта қарастырылатын функция шегі ұғымынан туындайды.

Шенелген $\{a_n\}$ $(A\leqslant a_n\leqslant B)$ тізбегінің тағы бір қасиетін келтірейік, оның дәлелдеуі мектеп математика курсынан тыс болады. Кез келген шенелген тізбектен жинақталған ішкі тізбек бөліп алуға болады. Бұл тұжырымдаманың мағынасын мысалмен түсіндірейік. Мысалы, $x_n=2+(-1)^n$ тізбегі шенелген($1\leqslant x_n\leqslant 3$). Ол былай жазылады: 1; 3; 1; 3; ... және шегі болмайды. Бірақ оның 1, 1, 1, ..., 1, ... ішкі тізбегі жинақты болып табылады. Ол стационар (тұрақты) тізбек болғандықтан, оның шегі 1-ге тең. $\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{3}{4}; \frac{1}{4}; \frac{4}{5}; \frac{1}{5}; \ldots$ тізбегі шенелген және оның $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \ldots$ және $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \ldots$ ішкі тізбектері жинақты болып табылады.

6-мысал. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-3}{\sqrt{n^2-4}}$ шегін табу қажет.

Бөлшектің алымы мен бөлімін n-ге бөліп,

$$\frac{2n-3}{\sqrt{n^2-4}}=\frac{2-\frac{3}{n}}{\frac{1}{n}\sqrt{n-4}}=\frac{2-\frac{3}{n}}{\sqrt{1-\frac{4}{n^2}}}$$ теңдігін аламыз. Шекті табайық:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-3}{\sqrt{n^2-4}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{3}{n}}{\sqrt{1-\frac{4}{n^2}}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\frac{3}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1-\frac{4}{n^2}}}=\frac{2-0}{\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{4}{n^2}\right)}}=\frac{2-0}{\sqrt{1-0}}=2.$$

7-мысал. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-3n+1}-\sqrt{n^2+n+1}\right)$ шегін табу керек.

Бұл мысалда да бірден 2°-қасиетті қолдануға болмайды. Алдымен шек таңбасы астындағы өрнекті түрлендіріп алу керек.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-3n+1}-\sqrt{n^2+n+1}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2-3n+1}-\sqrt{n^2+n+1}\right)\left(\sqrt{n^2-3n+1}+\sqrt{n^2+n+1}\right)}{\sqrt{n^2-3n+1}+\sqrt{n^2+n+1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^2-3n+1\right)-\left(n^2+n+1\right)}{\sqrt{n^2-3n+1}+\sqrt{n^2+n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-4n}{\sqrt{n^2-3n+1}+\sqrt{n^2+n+1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-4}{\sqrt{1-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}=\frac{-4}{\sqrt{1-3\cdot 0+0}+\sqrt{1+0+0}}=\frac{-4}{2}=-2.$$

1. Сан тізбегі ұғымын қалай түсінесіңдер? Олардың берілу тәсілдерін атаңдар. Сан тізбегін қалай белгілейді?
2. Қандай тізбектер а) жоғарыдан шенелген; ә) төменнен шенелген; б) шенелген; в) бірсарынды өспелі; г) бірсарынды кемімелі деп аталады?
3. Сан тізбегінің шегі ұғымын қалай түсінесіңдер? Анықтама беріп, оның мағынасын түсіндіріңдер.
4. Жинақты тізбектің неше шегі болуы мүмкін?
5. Бірсарынды тізбектердің шегі жөніндегі Вейерштрасс теоремасын тұжырымдаңдар және оның мағынасын түсіндіріңдер.
6. Қандай тізбектер шексіз үлкен (оң немесе теріс) шама және шексіз аз шама деп аталады? Олардың арасында қандай байланыс бар?
7. Шектерді табудың негізгі қасиеттерін тұжырымдап, оларды дәлелдеңдер.

ЕСЕПТЕР

А

6.30. $\{a_n\}$ тізбегінің алғашқы бес мүшесін жазыңдар:

1) $a_n=9$; 2) $a_n=\dfrac{n^2-4}{n}$; 3) $a_n=\dfrac{2n-1}{n!}$;

4) $a_n=\dfrac{(-1)^n}{5n-7}$; 5) $a_n=2^n+(-2)^n$; 6) $a_n=(-1)^n+(-1)^{n+1}$.

6.31. Рекуррентті формуламен берілген $\{r_n\}$ тізбегінің алғашқы бес мүшесін жазыңдар:

1) $r_1=9$, $r_{n+1}=0{,}1\cdot r_n+10$; 3) $r_1=5$, $r_{n+1}=(-1)^n\cdot r_n-8$;

2) $r_1=-3$, $r_{n+1}=9-2r_n$; 4) $r_1=r_2=1$, $r_{n+2}=r_{n+1}+r_n$.

6.32. Төмендегі тізбектердің алғашқы бес мүшесін жазыңдар: 1) 4-ке бөлінетін барлық натурал сандар тізбегі; 2) барлық 3-ке еселік натурал сандар тізбегі; 3) 5-ке бөлгенде қалдығы 3-ке тең болатын натурал сандар тізбегі; 4) 3-ке және 5-ке еселік натурал сандар тізбегі.

6.33. Төмендегі тізбектердің жалпы мүшесін жазыңдар:

1) 4; 16; 36; 64; 100; ...; 4) $-\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{2}{3}$; $-\dfrac{3}{4}$; $\dfrac{4}{5}$; $-\dfrac{5}{6}$; ...;

2) 1; 2; 6; 24; 120; ...; 5) 2; −2; 2; −2; 2; ...;

3) 1; $\dfrac{3}{4}$; $\dfrac{4}{6}$; $\dfrac{5}{8}$; $\dfrac{6}{10}$; ...; 6) 3; 1; 3; 1; 3; ... .

6.34. $\{b_n\}$ тізбегі жалпы мүшесінің формуласымен берілген: $b_n=10n^2+4$. b_{k+4} мүшесін жазыңдар.

6.35. -21 саны $c_n=n^2-10n$ тізбегінің мүшесі болатынын көрсетіп, оның нөмірін табыңдар.

6.36. 6.32-есептегі берілген тізбектерді жалпы мүшелерінің формулаларымен жазып көрсетіңдер.

6.37. Төмендегі тізбектің өспелі немесе кемімелі болатынын анықтаңдар:

1) $a_n=-9n^2+10n+25$; 2) $b_n=n^2+2n-3$; 3) $u_n=3^n-2^n$;

4) $c_n=\dfrac{n}{n^2+1}$; 5) $x_n=\dfrac{3n+4}{n+2}$; 6) $y_n=\dfrac{2n+9}{n+3}$.

6.38. Төмендегі тізбектер бірсарынды бола ма:

1) $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$; 3) $c_n=\sqrt{n^2+n}-n$;

2) $b_n=\dfrac{2+(-1)^n}{n}$; 4) $x_n=\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}$?

6.39. Төмендегі тізбектер шенелген бе:

1) $12n-5$; 2) $\dfrac{1}{2n}$; 3) $(-1)^n\sqrt{n}$;

4) $\dfrac{n+3n^2}{n}$; 5) $\dfrac{n+\cos n}{2n+1}$; 6) $\dfrac{n^2}{100n+1}$?

6.40. 1) Жоғарыдан шенелген, бірақ төменнен шенелмеген; 2) төменнен шенелген, бірақ жоғарыдан шенелмеген; 3) жоғарыдан да, төменнен де шенелмеген; 4) шенелген, бірақ шегі жоқ; 5) өспелі; 6) кемімелі тізбектерге мысал келтіріңдер.

B

6.41. $a_n=\dfrac{5+4n}{2+n}$ тізбегінің барлық мүшелері жататындай $[a;\ b]$ кесіндісін анықтаңдар.

6.42. $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ және $\{c_n\}$ тізбектері сәйкесінше төмендегі рекуррентті формуламен берілген: $a_1=1$, $a_{n+1}=0{,}1\cdot a_n+14$; $b_1=5$, $b_{n+1}=b_n+4$; $c_1=5$, $c_{n+1}=-3c_n$. Бұл тізбектердің қайсысы 1) арифметикалық; 2) геометриялық прогрессия болады?

6.43. a мен b-ның қандай мәндерінде $y_n=\dfrac{an+2}{bn+1}$ тізбегі өспелі, кемімелі, кемімейтін, өспейтін болады?

6.44. $x_n=\dfrac{2n-3}{n}$ тізбегі үшін 1) $|x_n-2|<0{,}1$; 2) $|x_n-2|<0{,}01$ теңсіздіктері n-нің қандай мәндерінде орындалады?

6.45. $u_n = \dfrac{3n+5}{2n+1}$ тізбегі үшін 1) $|u_n - 1{,}5| < 0{,}1$; 2) $|u_n - 1{,}5| < 0{,}01$ теңсіздіктері n-нің қандай мәндерінде орындалады?

6.46. n-нің қандай мәндерінде $y_n = n^2 - 3n$ тізбегі үшін $y_n < 40$ теңсіздігі орындалады?

6.47. n-нің қандай мәндерінде $u_n = |n^2 - 2n - 3|$ тізбегі үшін $u_n \leqslant 2$ теңсіздігі орындалады?

6.48. $a_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ тізбегінің шегі бар ма? Ол шек неге тең?

6.49. Анықтамаға сүйеніп, төмендегі теңдіктерді дәлелдеңдер:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+n^2} = 0$;
3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-2}{4n+5} = \dfrac{3}{4}$;
2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-3n^2}{(2n+1)(n+1)} = -\dfrac{3}{2}$;
4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}}{n-2} = 0$.

6.50–6.54-есептердегі шектерді анықтаңдар.

6.50. 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+5n}{n-2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n+4}{3-2n}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3-n+2n^2}{2+n-4n^2}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-n+1}{3+2n-4n^2}$; 5) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^2-4n}{16-n^2}$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{6n^2-2n}{7n^2-13}$.

6.51. 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)(n+5)}{n^2+4}$;
4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3+n-3}{(2n-1)^3}$;
2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3(n+1)(3-n)}{4n^2+n-1}$;
5) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3+2n+1}$;
3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-n+1}{(3n+1)^2}$;
6) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3n-1)(1-2n)}{(2n+3)(n-3)}$.

6.52. 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n-1}{3n+1} - \dfrac{2n^2+3}{3n^2-1}\right)$;
3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{(-1)^n n}{5n^2+2} \cdot \dfrac{n^2}{2n^2+n-1}\right)$;
2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n^3+5n^2-1}{3n^3-2n^2} - \dfrac{3+5n}{3n-1}\right)$;
4) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n}{5n-1} \cdot \dfrac{2n^2+1}{n^2+4n-1}\right)$.

C

6.53. 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \ldots + \dfrac{n-1}{n^2}\right)$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{2^n}\right)$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{3^{n-1}}\right)$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$.

6.54. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n+1}-\sqrt{n^2+2n-1}\right)$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n^2+n+1}-\sqrt{3n^2+2n-1}}{\sqrt{n^2-1}+2n}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n+2}-\sqrt{n^2-4n-1}\right)$.

6.55. $|c|<1$, $|c|>1$ және $c=1$ болғанда $x_n=\frac{c^n}{1+c^n}$, $c\neq-1$ тізбегінің шегін анықтаңдар.

6.56. $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ және $\{c_n\}$ тізбектері үшін $a_n\leqslant c_n\leqslant b_n$ және $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a$ шарттары орындалса, $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=a$ болатынын көрсетіңдер.

6.57. $\{x_n\}$ тізбегі $x_1=1$; $x_{n+1}=bx_n+1$, $n=1, 2, \ldots$ рекуррентті формуласымен берілсе, бұл тізбек b-нің қандай мәндерінде жинақты болады?

6.58. Шекті анықтаңдар:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3+2^{-n}}{2-3^{-n}}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2^{-n}+3\cdot 5^{-n}}{7+3^{-n}+7^{-n}}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+5^n}{5^{n+1}}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+3^n+4^n}{4^{n+1}+3}$.

Қайталауға арналған жаттығулар

6.59. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $1+\sin(\pi-\varphi)\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\varphi\right)$; 2) $1-\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\varphi\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$;

3) $1+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}2\beta$;

4) $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}2\alpha$.

6.60. Теңсіздікті шешіңдер:

1) $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+3}>\frac{3}{x+2}$;

2) $\frac{x-1}{x+2}\geqslant\frac{2x-3}{4x+3}$.

6.3. Функцияның үздіксіздігі

6.3.1. Функцияның нүктедегі үздіксіздігі және оның қасиеттері

Анықтама. *$x=x_0$ нүктесінің аймағында анықталған $y=f(x)$ функциясы үшін*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \tag{1}$$

теңдігі орындалса, $y=f(x)$ функциясын $x=x_0$ нүктесінде үздіксіз деп атайды.

(1) теңдіктен функция шегінің анықтамасына сүйеніп, оның $x=x_0$ нүктесіндегі үздіксіздігі анықтамасын былай тұжырымдауға болады:

Егер кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін $\delta>0$ саны табылып, $|x - x_0| < \delta$ теңсіздігін қанағаттандыратын әрбір x үшін

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \tag{2}$$

теңсіздігі орындалса, онда $y=f(x)$ функциясын $x=x_0$ нүктесінде үздіксіз деп атайды.

Сонымен функцияның $x=x_0$ нүктесіндегі шегі мен үздіксіздігінің арасында тығыз байланыс бар. $y=f(x)$ функциясы $x=x_0$ нүктесінде үздіксіз болса, функцияның бұл нүктеде шегі бар және ол шек (1) формуламен анықталады.

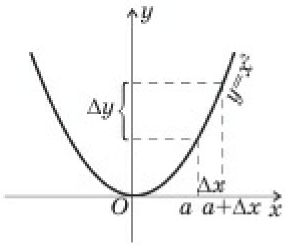
Кері тұжырым орындала бермейді. Өйткені, $x=x_0$ нүктесіндегі шектің анықтамасы бойынша функция x_0 нүктесінде анықталмауы да мүмкін. Функция үздіксіз болуы үшін ол міндетті түрде осы x_0 нүктесінде анықталуы қажет. Бұл осы екі анықтаманың басты айырмашылықтары.

Функция үздіксіздігі ұғымына тағы да өзге тұрғыдан анықтама берейік. Ол үшін $\Delta x=x-x_0$ белгілеуін енгіземіз. Δx ***аргументтің*** x_0 нүктесіндегі ***өсімшесі*** деп аталады. Ал $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ өрнегін $y=f(x)$ функциясының $x=x_0$ нүктесіндегі ***функцияның өсімшесі*** деп атайды. Енді (1) теңдікті $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x)-f(x_0)]=0$ түрінде жазуға болады. Осыдан $x=x_0+\Delta x$ және $x \to x_0$ ұмтылғанда $\Delta x \to 0$ ұмтылатынын ескерсек, $\lim\limits_{\Delta x \to x_0} [f(x_0+\Delta x) - f(x_0)] = 0$ немесе

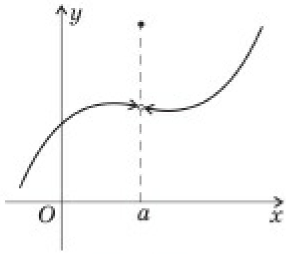
$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 \tag{3}$$

теңдігін аламыз. Сондықтан функцияның x_0 нүктесіндегі үздіксіздігіне қосымша мынадай анықтама беруге болады. *$x=x_0$ нүктесінде аргумент өсімшесі нөлге ұмтылғанда сәйкесінше функция өсімшесінің шегі нөлге тең болса, функция $x=x_0$ нүктесінде* ***үздіксіз*** *деп аталады.*

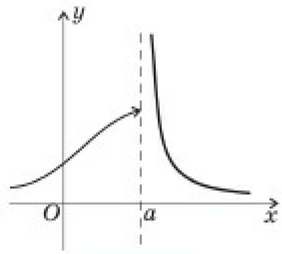
1-мысал. $y=x^2$ функциясының $x=a$ нүктесінде үздіксіз болатындығын көрсетейік.



6.9-сурет



6.10-сурет



6.11-сурет

Шынында да, (3) формула бойынша:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0}\left((a+\Delta x)^2 - a^2\right) = \lim_{\Delta x \to 0}(2a+\Delta x)\cdot\Delta x = 0.$$

Олай болса, функция $x=a$ нүктесінде үздіксіз. Бұл функцияның үздіксіздігі геометриялық тұрғыдан 6.9-суретте кескінделген. Графиктері 6.10, 6.11-суреттерде бейнеленген функциялар $x=a$ нүктесінде үздіксіз болмайды. Өйткені 6.10-суреттегі функция үшін $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$. 6.11-суреттегі функция үшін $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ шегі мүлде жоқ. Сонымен қатар ешбір нүктеде үздіксіз болмайтын функциялар бар. Ол Дирихле функциясы:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{егер } x \text{ — рационал сан.} \\ 0, & \text{егер } x \text{ — иррационал сан.} \end{cases}$$

Бұл функцияның ешбір нүктеде шегі жоқ.

Үздіксіз функцияларға арифметикалық амалдар қолдануға болады. Оны мына теоремадан көреміз.

1-теорема. *Егер $y=f(x)$ және $y=g(x)$ функциялары $x=x_0$ нүктесінде үздіксіз болса, онда осы нүктеде $f(x) \pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ және $f(x):g(x)$, $(g(x_0)\neq 0)$ функциялары да үздіксіз болады.*

Бұл теореманың дәлелдеуі функция шегі жөніндегі сәйкес теоремалардан шығады (6.1. 6.1.2).

6.3.2. Кесіндідегі үздіксіз функциялардың қасиеттері

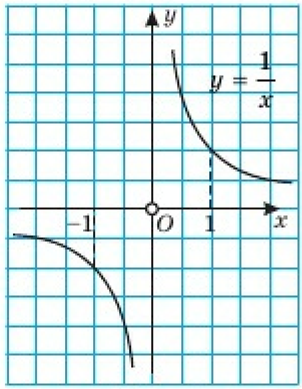
Анықтама. *Егер $y=f(x)$ функциясы $[a;b]$ жиынының әрбір нүктесінде үздіксіз болса, онда функцияны $[a;b]$ кесіндісінде үздіксіз деп атаймыз.*

Кесіндідегі үздіксіз функциялардың бірқатар тамаша қасиеттері бар. Енді осы қасиеттерді дәлелдеусіз, олардың мағынасын ашып көрсететіндей мысалдар арқылы қарастырайық.

1. *Егер $y=f(x)$ функциясы $[a;b]$ кесіндісінде үздіксіз болса, онда функция осы кесіндіде шенелген.*

Мұнда функцияның $[a;b]$ кесіндісінде үздіксіз болуы өте маңызды.

Мысалы, $y=\dfrac{1}{x}$ функциясы $[-1;1]$ кесіндісінде шенелмеген (6.12-сурет), өйткені ол $x=0$ нүктесінде анықталмаған. Сонымен қатар кесінді болуы да маңызды. Айталық, $y=\dfrac{1}{x}$ функциясы $(0;1)$ аралығында үздіксіз болғанымен, шенелмеген, себебі $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=+\infty$.



6.12-сурет

2. *Егер $y=f(x)$ функциясы $[a;b]$ кесіндісінде үздіксіз болса, онда функция $[a;b]$ кесіндісінде өзінің ең кіші және ең үлкен мәндерін қабылдайды. Басқаша айтқанда, $\alpha,\beta\in[a;b]$ нүктелері табылып,*

$$\min f(x)=f(\alpha),\ x\in[a;b] \text{ және } \max f(x)=f(\beta),\ x\in[a;b]$$

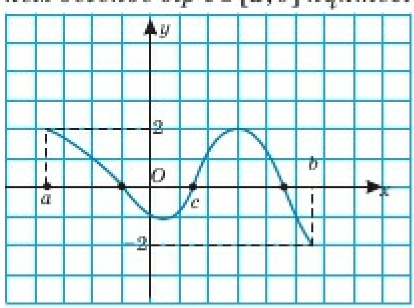
теңдіктері орындалады.

Мысалы, $y=x^2$ функциясы $(0;1)$ аралығында үздіксіз, бірақ бұл аралықта функция өзінің ең кіші және ең үлкен мәндерін қабылдай алмайды. Өйткені бұл аралықта $0<x^2<1$ болғандықтан, $x^2=0$ немесе $x^2=1$ теңдеуінің шешімі $(0;\ 1)$ интервалында жатпайды. Сондықтан теоремада $(a;\ b)$ интервалының орнына $[a;b]$ кесіндісін қарастыруымыз өте қажет.

Енді $y=\dfrac{1}{x}$ функциясын $[-1;\ 1]$ аралығында қарастырайық. Бұл функция да $[-1;\ 1]$ аралығында өзінің ең үлкен және ең кіші мәндерін қабылдай алмайды. Мұнда функцияның берілген кесіндідегі үздіксіздік шарты орындалмаған. $y=\dfrac{1}{x}$ функциясы $x=0$ нүктесінде анықталмаған (6.12-сурет).

3. *Егер $y=f(x)$ функциясы $[a;b]$ кесіндісінде үздіксіз және кесіндінің ұштарында таңбалары әртүрлі мәндер қабылдаса, $f(a)\cdot f(b)<0$* болса, онда *яғни $f(c)=0$ болатындай кем дегенде бір $c\in[a;b]$ нүктесі табылады.*

Мысалы, 6.13-суретте $f(a)>0$ және $f(b)<0$. Онда осы қасиет бойынша $y=f(x)$ функциясының графигі Ox өсін кем дегенде бір рет қиып өтетінін көрсетеді. 6.13-суретте функцияның графигі Ox өсін үш рет қиып өткен. Бұл $f(x)=0$ теңдеуінің үш түбірі бар екенін білдіреді. Мұнда да функцияның $[a;b]$



6.13-сурет

кесіндісінде үздіксіз болуы маңызды. Мысалы, $f(x)=\dfrac{1}{x}$ үшін $f(-1)=1$ және $f(1)=1$ болғанымен, $f(x)=0$, яғни $\dfrac{1}{x}=0$ теңдеуінің $[-1;1]$ аралығында түбірі жоқ (6.13-сурет).

Салдар. *$y=f(x)$ функциясы $[a;\ b]$ кесіндісінде үздіксіз және $f(a)=A$, $f(b)=B$ болса, A және B сандарының арасына орналасқан C саны үшін кем дегенде бір $x_0\in[a;\ b]$ нүктесі табылып, $f(x_0)=C$ теңдігі орындалады.*

Дәлелдеуі. $F(x)=f(x)-C$ функциясы $[a;\ b]$ кесіндісінде үздіксіз және $F(a)=A-C$, $F(b)=B-C$ сандарының таңбалары әртүрлі. Онда $x_0\in[a;\ b]$ нүктесі табылып, $F(x_0)=0$ теңдігі орындалады. Олай болса, $f(x_0)-C=0 \Rightarrow f(x_0)=C$ теңдіктері де орындалады.

2-мысал. $\cos x-x=0$ теңдеуінің $[0;\ \pi]$ аралығында түбірі бар екенін көрсетейік.

Шынында да, $f(0)=\cos 0-0=1>0$, $f(\pi)=\cos\pi-\pi=-(1+\pi)<0$ теңсіздіктері орындалғандықтан, 3-қасиет бойынша бір $x_0\in[0;\ \pi]$ нүктесі табылып, $f(x_0)=0$ немесе $\cos x_0-x_0=0$ теңдігі орындалады. x_0 — берілген теңдеудің түбірі.

Бұл теоремадағы $y=f(x)$ функциясы $[a;\ b]$ аралығында үздіксіз болуы қажет. Шынында да,

$$f(x)=\begin{cases}-1, & \text{егер } -1\leqslant x<0,\\ 1, & \text{егер } 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

функциясы $[-1;\ 1]$ кесіндісінің ұштарында $f(-1)=-1<0$, $f(1)=1>0$ теңсіздіктерін қанағаттандырғанымен, $[-1;\ 1]$ интервалының ешбір нүктесінде нөлге тең болмайды. Өйткені бұл функция $[-1;\ 1]$ аралығында үздіксіз емес.

1. Функцияның x_0 нүктесіндегі үздіксіздігіне анықтама беріңдер. Функция үздіксіздігінің үш түрлі анықтамаларын келтіріп, олардың арасындағы байланысты түсіндіріңдер.
2. Кесіндідегі үздіксіз функцияның қандай қасиеттері бар? Олардың мағынасын түсіндіріңдер.
3. $x=x_0$ нүктесіндегі функцияның шегі мен $x=x_0$ нүктесіндегі функцияның үздіксіздігі ұғымдарының қайсысы жалпы жағдайларды қамтиды? Неліктен?

ЕСЕПТЕР

А

6.61. $y=f(x)$ функциясының $x=x_0$ нүктесіндегі үздіксіздігін дәлелдеңдер:

1) $f(x)=5x-3$, $x_0=1$;

2) $f(x)=2x^2+x-3$, $x_0=-2$;

3) $f(x)=\dfrac{x-3}{x+2}$, $x_0=-1$;

4) $f(x)=\sqrt{x-3}+2x$, $x_0=4$.

6.62. Барлық үш анықтама бойынша функцияның үздіксіздігін көрсетіңдер:

1) $f(x)=x^2+3$, $x_0=2$;

2) $f(x)=\dfrac{1}{x-5}$, $(x\neq5)$, $x_0=3$.

6.63. Көрсетілген кесіндіде теңдеудің түбірі бар екенін көрсетіңдер:

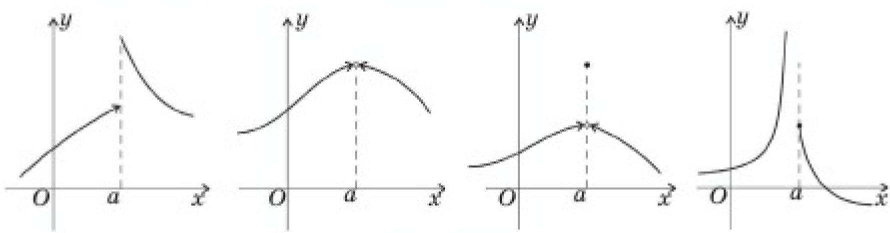
1) $\sin x+2x=0$, $\left[-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right]$;

2) $\cos x+3x=0$, $x\in[-\pi\ ;\ 0]$;

3) $\cos x-\sqrt{x}=0$, $x\in[0;\ \pi]$;

4) $\operatorname{tg}x+x-\dfrac{1}{2}=0$, $x\in\left[0;\ \dfrac{\pi}{4}\right]$.

6.64. $y=f(x)$ функциясы үшін $x=x_0$ нүктесінде үздіксіздік шарты орындалмаса, x_0 нүктесін функцияның ***үзіліс нүктесі*** деп атайды. $x=x_0$ нүктесі функцияның үзіліс нүктесі болса және бұл нүктеде $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$ шектеулі сандар болып, $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$ теңсіздігі орындалса немесе функция бұл нүктеде анықталмаса, x_0 нүктесін функцияның ***I текті үзіліс нүктесі*** деп атайды. Егер $f(x_0-0)$ не $f(x_0+0)$ сандарының кем дегенде біреуі анықталмаса, не шексіздікке тең болса, онда $x=x_0$ нүктесін функцияның ***II текті үзіліс нүктесі*** деп атайды. Графиктері 6.14-суретте кескінделген функциялардың үзіліс нүктелерінің тегін анықтаңдар. $f(x_0-0)$ және $f(x_0+0)$ мәндерін табыңдар.



6.14-сурет

В

6.65. $y=f(x)$ функциясы $x=x_0$ нүктесінде **үздіксіз** болуы үшін $f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$ теңдігінің орындалуы қажетті және жеткілікті екенін дәлелдеңдер.

6.66. Төмендегі функциялардың үзіліс нүктелері бар болса, олардың тегін анықтап, функцияның графигін салыңдар:

1) $f(x)=\begin{cases} x-1, \text{ егер } x\leqslant 1,\\ 1-x^2, \text{ егер } x>1;\end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}, \text{ егер } x<0,\\ x^2, \text{ егер } x\geqslant 0;\end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases} x+2, \text{ егер } x<1,\\ \dfrac{1}{x}, \text{ егер } x\geqslant 1;\end{cases}$

4) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3}$.

6.67. 1) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$, $(-\infty;\ +\infty)$;

2) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$, $[2;\ +\infty)$;

3) $f(x)=\begin{cases} x, \text{ егер } x\geqslant -1,\\ -x, \text{ егер } x<-1,\end{cases}$ $(-\infty;+\infty)$;

4) $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$, $(-\infty;\ +\infty)$

функциялары көрсетілген аралықта үздіксіз бола ма?

6.68. $y=x^2+4$ функциясы үшін

1) егер $x=2{,}5$ және $x_0=2$ болса, Δx пен Δy-ті;
2) егер $x_0=3$ және $\Delta x=0{,}1$ болса, x пен Δy-ті табыңдар.

6.69. Төмендегі функциялардың өсімшелерін анықтаңдар:

1) $y=5-3x$; 2) $y=3x^2$; 3) $y=2\sqrt{x}$; 4) $y=2x-x^2$.

6.70. $f(x)=kx+c$ функциясы үшін $\Delta y=k\cdot\Delta x$ теңдігі орындалатынын көрсетіңдер.

6.71. Төмендегі функцияларды үздіксіздікке зерттеп, графигін салыңдар:

1) $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$;

3) $f(x)=\begin{cases} 3x, \text{ егер } x\geqslant 1,\\ \dfrac{1}{x-1}, \text{ егер } x<1;\end{cases}$

2) $y=\dfrac{x+1}{x^2-2x-3}$;

4) $y=\begin{cases} 2x+3, \text{ егер } x\leqslant 3,\\ 1-x^2, \text{ егер } x>3.\end{cases}$

C

6.72. Егер $y=f(x)$ функциясы үшін $x=x_0$ нүктесінде $f(x_0-0)=f(x_0+0)$ теңдігі орындалса және функция x_0 нүктесінде анықталмаса, онда x_0 нүктесі функцияның *өзгертуге болатын ерекше* *нүктесі* деп аталады. Мысалы, $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ функциясын қарастырайық. Бұл функция $x=0$ нүктесінде анықталмаған және $f(-0)=f(+0)=1$ теңдігі орындалады. Онда $x=0$ — өзгертуге болатын ерекше нүкте. Бұл функцияны $x=0$ нүктесінде үздіксіз болатындай етіп, қосымша анықтауға болады:

$$f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, \text{ егер } x\neq 0,\\ 1, \text{ егер } x=0.\end{cases}$$

$f_1(x)$ функциясының $x=0$ нүктесінде үздіксіз болатынын көрсету қиын емес:

$$\lim_{x\to 0} f_1(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1=f_1(0).$$

Төмендегі функцияларды көрсетілген нүктеде үздіксіз болатындай етіп, қосымша анықтаңдар:

1) $x=0$ нүктесінде $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$;

2) $x=81$ нүктесінде $f(x)=\dfrac{3-\sqrt[4]{x}}{9-\sqrt{x}}$.

6.73. Функция $x=0$ нүктесінде үздіксіз болатындай етіп, m параметрін таңдап алыңдар:

1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}, \text{ егер } x\neq 0,\\ m, \text{ егер } x=0,\end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}, \text{ егер } x\neq 0,\\ m, \text{ егер } x=0.\end{cases}$

6.74. $y=2^{-\frac{1}{x^2}}$ функциясын бүкіл сан өсінде үздіксіз болатындай етіп, қосымша анықтаңдар.

6.75. $f(x)$ функциясы үздіксіз болатындай етіп, a және b параметрлерін таңдап алыңдар:

1) $f(x)=\begin{cases} ax+1, \text{ егер } x \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \\ \sin x + b, \text{ егер } x > \dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases} \left|x^2-5x+6\right|, \text{ егер } x > 2, \\ ax-b, \text{ егер } x \geqslant 2. \end{cases}$

6.76. p параметрінің қандай мәндерінде

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+7}-4}{x^2-5x+6}, \text{ егер } x \neq 3, \\ p, \text{ егер } x=3 \end{cases}$$

функциясы $x=3$ нүктесінде үздіксіз болады?

6-бөлімге қосымша есептер

6.77. Шекті табыңдар:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)\right]$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{n}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-7}\right)\right]$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{n+1}\right)$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+4+6+\ldots+2n}{3n^2}$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n^2}$.

6.78. $a_1=a$, $a_2=b$, $a_{n+2}=\dfrac{a_n+a_{n+1}}{2}$, $n=1, 2, 3, \ldots$ болса, $\{a_n\}$ тізбегінің шегі бар болатынын дәлелдеп, оны табыңдар.

6.79. Төмендегі тізбектердің шектері бар болатынын дәлелдеңдер:

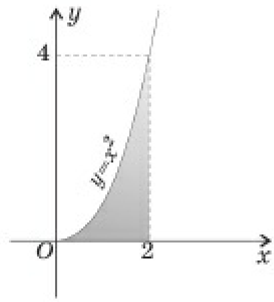
1) $y_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}$;

2) $z_n=1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\ldots+\dfrac{1}{n^2}$;

3) $u_n=1+\dfrac{1}{2\cdot 2}+\dfrac{1}{3\cdot 2^2}+\dfrac{1}{4\cdot 2^3}+\ldots+\dfrac{1}{n\cdot 2^{n-1}}$;

4) $v_n=\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$.

6.80. 6.15-суретте көрсетілген фигураның ауданын шек көмегімен табыңдар.



6.15-сурет

6.81–6.86-есептерде көрсетілген шектерді табыңдар.

6.81. 1) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$; 3) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^3-64}$;

2) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\sqrt[3]{x}+1}$; 4) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$.

6.82. 1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{9-x^2}{1-\sqrt[3]{x^2-8}}$; 3) $\lim\limits_{x\to 81}\dfrac{\sqrt[4]{x}-3}{\sqrt{x}-9}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{x}$.

6.83. 1) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}$; 3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1-x}-\sqrt[3]{1+x}}{2x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 15}\dfrac{\sqrt[4]{x+1}-2}{\sqrt{x+1}-4}$.

6.84. 1) $\lim\limits_{x\to 0,4}\dfrac{125x^3-150x^2+60x-8}{25x^2-20x+4}$; 3) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+4x+4}{x^4+2x^3-3x^2-4x+4}$;

2) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{4}}\dfrac{16x^3-40x^2-23x-3}{16x^3+56x^2+25x+3}$; 4) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^3-3x^2-4x+12}$.

6.85. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{3x^2}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x-\sin x}{x^3}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos mx-\cos nx}{x^2}$.

6.86. 1) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{1-2\cos x}{\pi-3x}$; 2) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$.

7-бөлім. ТУЫНДЫ ЖӘНЕ ОНЫҢ ҚОЛДАНЫЛУЫ

7.1. Функцияның туындысы және дифференциалы

Бұл параграфта математикадағы ең маңызды ұғымдардың бірі — функцияның туындысы ұғымын қарастырамыз. Бұл ұғым алғаш рет XVII ғасырда бірқалыпсыз қозғалатын денелердің лездік жылдамдығын табу, кез келген қисыққа жанама жүргізу және т.с.с. есептерді шығару барысында пайда болды. Сондықтан функцияның туындысы түсінігін лездік жылдамдықты анықтау мен жанама жөніндегі есептерді шығарудан бастаймыз.

7.1.1. Функцияның туындысына келтірілетін есептер

1-мысал. Айталық, қандай да бір M материялық нүкте түзу сызық бойымен қозғалсын. Онда t уақытының әрбір мәніне M материялық нүктесінің жүріп өткен жолының ұзындығын сәйкес қоялық. Сонда бұл сәйкестік бірмәнді болғандықтан, белгілі бір функцияны анықтайды. Сол себепті s орын ауыстыруды t уақытқа тәуелді функция ретінде қарастыруға болады:

$$s=f(t). \qquad (1)$$

7.1-сурет

Осыдан $f(t)$ функционалдық тәуелділік арқылы M материялық нүктесінің t уақыт ішіндегі орын ауыстыруын табуға болады (7.1-сурет). $f(t)$ функциясы M материялық нүктесінің қозғалыс заңдылығын береді. M материялық нүкте бірқалыпты қозғалса, қозғалыстың жылдамдығы тұрақты. Егер дене бірқалыпсыз қозғалса, оның жылдамдығы өзгеріп отырады. Мысалы, дененің еркін түсу жылдамдығы тұрақты емес. Сондықтан мұндай қозғалыс кезінде лездік жылдамдық ұғымын қарастырады. Алдымен дененің орташа жылдамдығы ұғымын қарастырайық.

Анықтама. *Айталық, материялық нүкте* $s=f(t)$ *заңымен қозғалсын. Егер* $f(t_0)=s_0$, $f(t_1)=s_1$ *болса,*

$$v_{орт}=\frac{s_1-s_0}{t_1-t_0}=\frac{f(t_1)-f(t_0)}{t_1-t_0} \qquad (2)$$

өрнегін t_0*-ден* t_1*-ге дейінгі уақыт аралығындағы қозғалыстың орташа жылдамдығы деп атаймыз.*

Қозғалыстың әртүрлі кезеңдеріндегі жылдамдықтары әртүрлі болуы айқын. Мысалы, автомобильдің жылдамдығы жөнінде сөз қозғасақ, оның белгілі бір уақыт аралығында жүріп өткен жолындағы орташа жылдамдығын аламыз. Бірақ автомобиль жолдың кейбір жерлерінде қозғалысын баяулатуы, ал кейбір жерлерінде үдетуі мүмкін. Сонымен, жалпы алғанда, әртүрлі уақыт аралықтарында автомобильдің орташа жылдамдықтары әртүрлі болады. Осы сияқты дененің еркін түсуі $s=\dfrac{gt^2}{2}$ формуласымен анықталатынын білеміз. Мұнда s жолы метрмен, t уақыты секундпен өлшенеді және $g\approx 9{,}8$ м/с^2.

Дене алғашқы 1 секундта $s(1)=\dfrac{g\cdot 1}{2}=4{,}9$ м жол жүреді. $t_0=4$ с және $t_1=5$ с аралығында дене $s(t_1)-s(t_0)=\dfrac{g\cdot 25}{2}-\dfrac{g\cdot 16}{2}=$ $=44{,}1$ м жол жүреді. Сондықтан дененің еркін түсуі бірқалыпты қозғалыс болмайды.

Техника мен жаратылыстанудың көптеген мәселелерін шешкенде бізге дененің орташа жылдамдығы емес, оның лездік жылдамдығын білу қажет. Айталық, дене $s=f(t)$ заңдылығымен қозғалсын. $t=t_0$ нүктесінде уақытқа Δt өсімшесін беріп, t_0 мен $t_0+\Delta t$ уақыттары аралығындағы дененің орташа жылдамдығын табайық:

$$v_{\text{орт}}=\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}.$$

Дененің $t=t_0$ уақытындағы $v(t_0)$ *лездік жылдамдығы* деп, оның t_0 мен $t_0+\Delta t$ уақыттары аралығындағы орташа жылдамдығының $\Delta t\to 0$ ұмтылғандағы шегін айтамыз:

$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}\qquad(3)$$

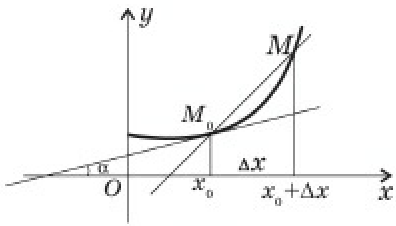
немесе $\Delta s=f(t_0+\Delta t)-f(t_0)$ болатынын ескерсек,

$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}.\qquad(3')$$

$t=t_0$ уақытындағы дененің лездік жылдамдығы $s=f(t)$ функциясының t_0 нүктесіндегі өсімшесінің уақыт өсімшесіне қатынасының $\Delta t\to 0$ ұмтылғандағы шегімен анықталады.

Мысалы, дененің еркін түсуінің $t=t_0$ уақыт мезетіндегі лездік жылдамдығын анықтайық:

$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\dfrac{g(t_0+\Delta t)^2}{2}-\dfrac{gt_0^{\,2}}{2}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{g\left(t_0^{\,2}+2t_0\Delta t+\Delta t^2-t_0^{\,2}\right)}{2\Delta t}=$$
$$=\lim_{\Delta t\to 0}g(t_0+0{,}5\Delta t)=gt_0.$$



7.2-сурет

2-мысал. $y=f(x)$ функциясы $x=x_0$ нүктесінің маңында анықталсын. Егер $x=x_0$ нүктесінде осы функцияның графигіне жанама жүргізу мүмкін болса, жанаманың теңдеуін жазайық. Ол үшін қисыққа жүргізілген жанама түсінігін анықтап алайық. $y=f(x)$ функциясының графигінен $M_0(x_0;\ f(x_0))$ және $M(x;\ f(x))$ нүктелерін алайық. Онда M_0M түзуі осы қисыққа жүргізілген *қиюшы* деп аталады (7.2-сурет).

Анықтама. *Қисық бойымен M нүктесі M_0 нүктесіне ұмтылғандағы M_0M қиюшысының алатын шектік түзуін $y=f(x)$ функциясының графигіне $x=x_0$ нүктесінде жүргізілген* ***жанама*** *деп атайды.*

Осы анықтамада M нүктесі M_0 нүктесіне ұмтылады $(M \to M_0)$ дегеннің орнына $x \to x_0$ деп алса, жеткілікті. Шынында да, $x \to x_0$ ұмтылса, $M(x;f(x)) \to M_0(x_0;f(x_0))$ болатыны түсінікті және керісінше, $(M \to M_0)$ шартынан $x \to x_0$ шарты шығады.

Енді M_0M түзуінің теңдеуін жазайық, мұндағы $M_0(x_0;\ f(x_0))$, $M(x;\ f(x))$. Егер $(X;Y)$ арқылы қиюшының кез келген M нүктесінің координаталарын белгілесек, онда екі нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуі бойынша

$$\frac{X-x_0}{x-x_0}=\frac{Y-f(x_0)}{f(x)-f(x_0)}$$

немесе
$$Y-f(x_0)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(X-x_0) \qquad (4)$$

теңдеуін аламыз. Егер $\Delta x = x - x_0$, $(x = x_0 + \Delta x)$ деп белгілесек, онда $x=x_0$ нүктесіндегі функцияның $f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\Delta y$ өсімшесін аламыз. Сонда M_0M қиюшысының (4) теңдеуі былай жазылады:

$$Y-f(x_0)=\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot(X-x_0). \qquad (4')$$

Анықтама бойынша (4) (немесе (4′)) теңдеуінен $x\to x_0(\Delta x\to 0)$ ұмтылғандағы жанаманың теңдеуін аламыз:

$$Y-f(x_0)=k(X-x_0). \qquad (5)$$

Мұндағы

$$k=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (6)$$

Сонымен қарастырылған екі мысалда

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta Y}{\Delta X}$$

шегінің маңызды рөл атқаратынын көрдік. Осы шекті $f(x)$ функцияның $x=x_0$ нүктесіндегі *туындысы* деп атайды.

7.1.2. Функцияның туындысы

Анықтама. *Айталық, $y=f(x)$ функциясы $x=x_0$ нүктесінің маңында анықталсын. Егер $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ қатынасының $x \to x_0$ ұмтылғанда шегі бар болса, бұл шекті $y=f(x)$ функциясының $x=x_0$ нүктесіндегі* ***туындысы*** *деп атайды.* Оны былай белгілейді: $f'(x_0)$; y'; $\dfrac{dy}{dx}$; $\dfrac{df(x_0)}{dx}$.

Сонымен,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \qquad (7)$$

(f' жазуы [«эф штрих»] деп оқылады).

$x - x_0 = \Delta x$, $(x \to x_0 \Rightarrow \Delta x \to 0)$ белгілеуін енгізсек, (7) теңдікті былай жазуға болады:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (7')$$

$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y$ функцияның өсімшесі екенін ескерсек, функцияның туындысының анықтамасын былай жазамыз:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (7'')$$

Егер $y=f(x)$ функциясы $(a; b)$ аралығының (мұнда $a = -\infty$, $b = +\infty$ болуы да мүмкін) әрбір нүктесінде туындысы бар болса, онда бұл функцияны $(a; b)$ аралығында *дифференциалданады* деп айтамыз.

Жалпы, функцияның берілген нүктедегі туындысын анықтау процесін функцияны ***дифференциалдау*** деп атайды. Сонымен, егер $x \in (a,b)$ болса, $(a; b)$ аралығында $f'(x)$ функциясы (7′) теңдігімен анықталады. Бұл *$f'(x_0)$ функциясын берілген $f(x)$ функциясының $(a; b)$ аралығындағы туындысы* деп атайды.

Алдыңғы тақырыпта қарастырылған екі мысалдан **туынды ұғымының физикалық** және **геометриялық мағыналары** алынады.

Материялық нүкте $s=s(t)$ заңына сәйкес түзу сызық бойымен қозғалса, 1-мысал бойынша $t=t_0$ уақытындағы материялық нүктенің лездік жылдамдығы

$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$$

теңдігімен анықталады. Олай болса,

$$v(t_0)=s'(t_0). \qquad (8)$$

$s(t)$ жолының туындысы нүктенің лездік жылдамдығына тең.

Ал 2-мысалдан $y=f(x)$ функциясының $x=x_0$ нүктесінде жүргізілген жанаманың (7.2-сурет) теңдеуі $y-f(x_0)=k(x-x_0)$ түрінде жазылатындығын және жанаманың k бұрыштық коэффициенті

$$k=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

формуласымен анықталатынын көрдік. Функция туындысының анықтамасы бойынша $k=f'(x_0)$, яғни $y=f(x)$ функциясының $x=x_0$ нүктесіндегі туындысы осы функцияның графигіне $x=x_0$ нүктесінде жүргізілген жанама түзуінің бұрыштық коэффициентіне тең. Жанама Ox өсінің оң бағытымен α бұрышпен қиылысса, $k=\operatorname{tg}\alpha$ болатынын геометрия курсынан жақсы білеміз. Сонда $f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha$. Сонымен $f'(x_0)=k$ **немесе** $f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha$ **теңдіктерімен туындының геометриялық мағынасы** анықталады.

Осы айтылғандарға сүйенсек, $y=f(x)$ функциясы графигіне $M_0(x_0;f(x_0))$ нүктесі арқылы жүргізілген (5) **жанаманың теңдеуін** былай жазамыз:

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0). \qquad (9)$$

3-мысал. $y=x^3-3x$ функциясы графигіне абсциссасы $x_0=2$ болатын нүктеде жүргізілген жанаманың теңдеуін жазу керек.

(9) формулаға сәйкес, алдымен $f(x_0)$ және $f'(x_0)$ мәндерін анықтап алу қажет: $f(x_0)=f(2)=2^3-3\cdot 2=2$. Ал $y'=3x^2-3$ болғандықтан, $f'(x_0)=f'(2)=3\cdot 2^2-3=9$. Бізге қажет жанама теңдеуі былай жазылады:

$$y=9(x-2)+2 \text{ немесе } y=9x-16.$$

Енді туындыны анықтауға бірнеше мысал қарастырайық.

4-мысал. $f(x)=C$ тұрақты функцияның x нүктесіндегі туындысын табу қажет.

Шешуі. Алдымен функцияның өсімшесін анықтайық:

$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=C-C=0$. Сонда $C'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0$,

Бұдан $C'=0$, тұрақты функцияның туындысы 0-ге тең.

5-мысал. $f(x)=x$ функциясының туындысын табу керек.

$\Delta y = x+\Delta x - x = \Delta x$. Сонда $x' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta x}=1$.

6-мысал. $f(x)=x^2-3x$ функциясының туындысын табу керек.

$\Delta y = (x+\Delta x)^2 - 3(x+\Delta x)-(x^2-3x) = 2x\Delta x - 3\Delta x + (\Delta x)^2$.

Осыдан

$$(x^2-3x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\Delta x - 3\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(2x-3+\Delta x) = 2x-3.$$

Сонымен, $(x^2-3x)' = 2x-3$.

7-мысал. $f(x)=x$ функциясының туындысын табу керек.

$|x| = \begin{cases} x, & \text{егер } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{егер } x<0 \end{cases}$ болғандықтан, $x>0$ жағдайында $|x| = x$.

Сондықтан $(|x|)' = 1\ (x>0)$.

Егер $x<0$ болса, онда $|x|=-x$. Олай болса, $(|x|)' = -1\ (x<0)$.

Енді бұл функцияның $x=0$ нүктесінде туындысы болмайтынын көрсетейік. $x=0$ нүктесіндегі функцияның өсімшесі

$\Delta y = |0+\Delta x| - |0| = |\Delta x|$. Демек, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$ шегі анықталмайды. Өйткені $\lim\limits_{\Delta x\to -0}\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to -0}\dfrac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$, $\lim\limits_{\Delta x\to +0}\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to +0}\dfrac{\Delta x}{\Delta x} = 1$.

$\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$ қатынасының сол және оң жақты шектері өзара тең емес.

$$f'(x) = (|x|)' = \begin{cases} 1, & \text{егер } x>0, \\ -1, & \text{егер } x<0, \\ \text{шегі жоқ, егер } x=0. \end{cases}$$

7.1.3. Функцияның дифференциалы және оның геометриялық мағынасы

Айталық, $y=f(x)$ функциясы $x=x_0$ нүктесінде дифференциалдансын. $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ теңдігінен және шектің анықтамасы бойынша

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \varepsilon(\Delta x). \qquad (10)$$

Мұндағы $\varepsilon(\Delta x)$ — шексіз аз шама: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varepsilon(\Delta x)=0$. Осыдан (10) теңдікті Δx-ке көбейтіп,

$$\Delta y = f'(x_0)\cdot\Delta x+\varepsilon(\Delta x)\cdot\Delta x \tag{11}$$

теңдігін аламыз. Біз $x=x_0$ нүктесінде дифференциалданатын $y=f(x)$ функциясының Δy өсімшесін $\Delta y = A\cdot\Delta x+\varepsilon(\Delta x)\cdot\Delta x, A=f'(x_0)$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varepsilon(\Delta x)=0$ түрінде жазуға болатынын көрсеттік.

Енді керісінше, $y=f(x)$ функциясының $x=x_0$ нүктесіндегі Δy өсімшесін

$$\Delta y = A\cdot\Delta x+\varepsilon(\Delta x)\cdot\Delta x \tag{12}$$

(мұнда $\varepsilon(\Delta x)\to 0$, егер $\Delta x\to 0$) түрінде жазу мүмкін болса, $y=f(x)$ функциясы $x=x_0$ нүктесінде дифференциалданатынын және оның туындысы $f'(x_0)=A$ болатынын көрсетейік. Шынында да, (12) теңдікті Δx-ке бөліп, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=A+\varepsilon(\Delta x)$, $\Delta x\to 0$ ұмтылғанда шекке көшейік:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(A+\varepsilon(\Delta x)\right)=\lim_{\Delta x\to 0}A+\lim_{\Delta x\to 0}\varepsilon(\Delta x)=A+0=A.$$

Біз мынаны дәлелдедік: $y=f(x)$ функциясы $x=x_0$ нүктесінде дифференциалданса, функцияның x_0 нүктесіндегі өсімшесі (12) түрінде жазылады және керісінше, егер функцияның өсімшесі x_0 нүктесінде (12) түрінде жазылса, функция осы нүктеде дифференциалданады.

Анықтама. *$x=x_0$ нүктесіндегі $y=f(x)$ функциясы өсімшесінің Δx-ке қатысты сызықтық бөлігін функцияның $x=x_0$ нүктесіндегі* ***дифференциалы*** *деп атайды.* Оны былай белгілейді: dy, $df(x_0)$.

Сонымен,

$$dy = f'(x_0)\cdot\Delta x.$$

$f(x)=x$ функциясының дифференциалын анықтайық.

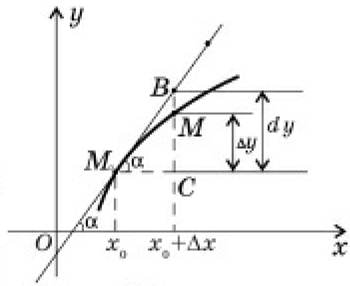
$$f'(x)=(x)'=1$$

болғандықтан, $dx=1\cdot\Delta x=\Delta x$. Осыдан аргументтің өсімшесі мен дифференциалы өзара тең болатынын көреміз. Сонда функцияның дифференциалы мына түрде жазылады:

$$dy = f'(x_0)\cdot dx.$$

Енді дифференциалдың геометриялық мағынасын қарастырайық. $y=f(x)$ функциясының $M_0\,(x_0;\,f(x_0))$ нүктесінде M_0T жанамасын жүргізейік. Бұл жанама Ox осінің оң бағытымен α бұрыш жасасын. x_0 нүктесінде Δx өсімшесін берейік. Онда функцияның $\Delta y=MC$ өсімшесін аламыз (7.3-сурет). BCM_0 тік бұрышты үшбұрышынан $BC=M_0C\cdot\operatorname{tg}\alpha=\Delta x\cdot\operatorname{tg}\alpha$ немесе $\operatorname{tg}\alpha=f'(x_0)$, $\Delta x=dx$ болатынын ескерсек, $BC=f'(x_0)\cdot dx$. Дифференциалдың анықтамасы бойынша

$dy=BC$. Олай болса, $y=f(x)$ функциясының $x=x_0$ нүктесіндегі дифференциалы функция графигіне $x=x_0$ нүктесінде жүргізілген жанаманың өсімшесіне тең.



7.3-сурет

8-мысал. $f(x)=x^2-3x$ функциясының $x=4$ нүктесіндегі дифференциалын табу керек.

Алдыңғы тақырыптағы 5-мысал бойынша $f'(x)=2x-3$. Сондықтан берілген функцияның дифференциалы $dy=(2x-3)dx$ түрінде жазылады. Ал $f'(4)=2\cdot4-3=5$ болғандықтан, функцияның $x=4$ нүктесіндегі дифференциалы $dy=5dx$.

1. Материялық нүкте қозғалысының орташа және лездік жылдамдықтары деп нені түсінесіңдер? Лездік жылдамдық қалай анықталады?
2. $y=f(x)$ функциясы графигіне жүргізілген жанама деп нені түсінесіңдер? Жанаманың бұрыштық коэффициенті қалай анықталады?
3. Функцияның нүктедегі туындысы ұғымына анықтама беріңдер. Туындыны қалай белгілейді? Туындының механикалық және геометриялық мағыналары қандай?
4. Неге $y=|x|$ функциясының $x=0$ нүктесінде туындысы болмайды? Бұның функция графигіне берілген нүктеде жүргізілген жанамамен қандай байланысы бар?
5*. Функция дифференциалы деп нені айтады және оның геометриялық мағынасы қандай?

ЕСЕПТЕР

А

7.1. $y=f(x)$ функциясының $x=x_0$ нүктесіндегі өсімшесін табыңдар:

1) $f(x)=2x-3, x_0=1, \Delta x=0,1;$
2) $f(x)=5, x_0=-3, \Delta x=-0,1;$
3) $f(x)=x^2+1, x_0=0, \Delta x=0,2;$
4) $f(x)=\dfrac{2}{x-1}, x_0=2, \Delta x=-0,2.$

7.2. $y=f(x)$ функциясы үшін көрсетілген $x=x_0$ нүктесінде Δy пен $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$-ті табыңдар:

1) $y=-3, x_0=2, \Delta x=0,01;$

2) $y = 4 - 3x,\ x_0 = -2, \Delta x = 0,3;$

3) $y = 2 - x^2, x_0 = 1, \Delta x = 0,1;$

4) $y = \dfrac{4x-2}{x}, x_0 = -1, \Delta x = -0,1.$

7.3. Түзудің бұрыштық коэффициентін табыңдар:

1) $y=4-5x$; 2) $y = \dfrac{2}{3}x - 7$; 3) $4x-5y+7=0$; 4) $x+3y-4=0$.
Бұл түзу абсциссалар өсінің оң бағытымен қандай бұрыш жасайды: сүйір ме, әлде доғал ма?

7.4. $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 2$ функциясының графигіне $x=x_1$ және $x=x_2$ нүктелерінде жүргізілген қиюшысының бұрыштық коэффициентін табыңдар:
1) $x_1=-1$, $x_2=3$; 2) $x_1=0$; $x_2=3$; 3) $x_1=-2$; $x_2=0$; 4) $x_1=1$; $x_2=2$.

7.5. Материялық нүкте $s(t)=2t^2+3t+5$ заңдылығымен түзу сызық бойымен қозғалады (s метрмен, t секундпен өлшенеді). 1) $t=0$ бастапқы кездегі; 2) $t=2$; 3) $t=t_0$ уақыт мезетіндегі қозғалыстың лездік жылдамдығын табыңдар.

7.6. 1) $s(t)=2t+3$; 2) $s(t) = 5 - \dfrac{t}{2}$; 3) $s(t)=5t^2-4t+9$ заңдылықтарымен түзу сызықты қозғалыста болатын материялық нүктенің $t=t_0$ уақыт мезетіндегі лездік жылдамдығын табыңдар.

7.7. $t>2$с болғанда материялық нүкте $s(t) = \dfrac{3}{t-2}$ заңдылығымен түзу сызықты қозғалыста болады. 1) $t=3$с; 2) $t=4,5$с уақыттарындағы нүктенің лездік жылдамдықтарын табыңдар.

7.8–7.13-есептерде анықтаманы қолданып, көрсетілген функциялардың туындыларын анықтаңдар.

7.8. $y(x)=3x+4$: 1) $y'(x)$; 2) $y'(2)$; 3) $y'(-2)$.

7.9. $f(x)=ax+b$: 1) $f'(2)$; 2) $f'(4)$.

B

7.10. $f(x) = \dfrac{1}{x}$: 1) $f'(x)$; 2) $f'(1)$; 3) $f'(-3)$.

7.11. $g(x)=x^2+3x+1$: 1) $g'(x)$; 2) $g'(2)$.

7.12. $u(x) = \sqrt{x}$: 1) $u'(x)$; 2) $u'(4)$.

7.13. $v(x) = \dfrac{3}{x-1}$: 1) $v'(x)$; 2) $v'(2)$.

7.14. 1) $f(x)=x^3$; 2) $f(x)=ax^2+bx+c$; 3) $f(x)=x^3+2x$ функцияларының туындысын табыңдар.

7.15. $s(t)$ заңдылығымен түзу сызықты қозғалатын дененің t_0 уақыт мезетіндегі лездік жылдамдығын табыңдар:

1) $s(t)=2t^3-3t^2$; 2) $s(t)=t^3+2t^2+3$.

C

7.16. $g(x) = |x-1|$ функциясының $x=1$ нүктесінде туындысы болмайтынын дәлелдеңдер.

7.17. $g(x)=x^2$ функциясының графигіне 1) $x=1$; 2) $x=-1$; 3) $x=2$ нүктелерінде жүргізілген жанамалардың теңдеулерін жазыңдар.

7.18. 1) $f(x)=x^2+x+1$; 2) $f(x)=x-2x^2$; 3) $f(x)=x^3$; 4) $f(x)=2x^2-3$ функцияларының графиктеріне $x=1$ нүктесінде жүргізілген жанамалардың теңдеулерін жазыңдар.

7.19. Айталық, $y=f(x)$ және $y=g(x)$ функцияларының графиктері $x=x_0$ нүктесінде қиылыссын. Онда осы функциялардың графиктеріне $x=x_0$ нүктесінде жүргізілген жанамалардың арасындағы бұрышты $y=f(x)$ және $y=g(x)$ функцияларының арасындағы бұрышы деп атайды. $y=x^2$ және $y = \dfrac{8}{x}$ функциялары графиктерінің арасындағы бұрышты анықтаңдар.

7.20. 1) $f(x)=x+4$; 2) $g(x)=2x+3$; 3) $u(x)=x^2-1$; 4) $v(x)=4-x^2$ функцияларының $x=1$, $x=-1$ және $x=x_0$ нүктелеріндегі дифференциалдарын анықтаңдар.

7.21. $y=ax+b$ функциясының дифференциалы тұрақты, яғни $x=x_0$ нүктесіне тәуелсіз болатынын көрсетіңдер.

Қайталауға арналған жаттығулар

7.22. Функцияның анықталу облысы мен мәндер облысын табыңдар:

1) $y = \sqrt{x^2+4}$; 2) $y = 1+\sin^2 2x$; 3) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$.

7.23. Функцияның графигін салыңдар:

1) $y = |x-1|$; 2) $y = \sqrt{x-1}$; 3) $y = \begin{cases} 3 - x^2, \text{ егер } x > 1, \\ x - 2, \text{ егер } x \leqslant 1. \end{cases}$

7.24. Теңдеуді шешіңдер:

1) $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$;
3) $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}x - \sqrt{3}\,\mathrm{ctg}x = 2$;
2) $4\sin^2 x + 11\sin x - 3 = 0$;
4) $\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = 1$.

7.2. Функцияны дифференциалдау ережелері

7.2.1. Туынды алу ережелері

Егер $u(x)$ және $v(x)$ дифференциалданатын функциялар болса, онда туынды табудың мынадай ережелері орындалады. Көрнекілік үшін бұл функциялардың аргументтерін жазбай келтіреміз:

1°. $(u \pm v)' = u' \pm v'$;
3°. $(C \cdot u)' = C \cdot u'$;
2°. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$;
4°. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$.

Үлгі ретінде 2° формуласының дәлелдеуін келтірейік.

2°. $\Delta u = u(x + \Delta x) - u(x)$, $\Delta v = v(x + \Delta x) - v(x)$ және

$$\Delta(u \cdot v) = u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x) = u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x + \Delta x) + u(x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x) = [u(x + \Delta x) - u(x)] \cdot v(x + \Delta x) + u(x)[v(x + \Delta x) - v(x)]$$

болғандықтан,

$$(u \cdot v)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(u \cdot v)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x + \Delta x) - u(x)] \cdot v(x + \Delta x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x)[v(x + \Delta x) - v(x)]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} v(x + \Delta x) + \lim_{\Delta x \to 0} u(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

ӨЗДЕРІҢ ДӘЛЕЛДЕҢДЕР

1°, 3°, 4° формулалары да осы сияқты дәлелденеді. Оларды өздерің қарастырыңдар.

7.2.2. Элементар функциялардың туындылары

Негізгі элементар функциялардың туындыларының кестесін келтірейік:

Функция	Туынды	Функция	Туынды
C=const	0	$\sin x$	$\cos x$
$x^{\alpha}, \alpha \in R$	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$	$\cos x$	$-\sin x$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\operatorname{tg} x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{ctg} x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arctg} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arcctg} x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$		

Мұнда көрсетілген формулалардың кейбіреулерін ғана дәлелдейміз, ал өзгелері келесі параграфта дәлелденеді.

1. $C'=0$ теңдігінің орындалатынын 7.1-дегі 4-мысалда көрсеткенбіз.

2. $(x^{\alpha})'=\alpha \cdot x^{\alpha-1}$ формуласының $\alpha \in N$ үшін орындалатынын көрсетейік. $\alpha=1$ болса, $x'=1$. Формула дұрыс. Енді формула $\alpha=k$ үшін орындалсын делік: $(x^k)'=k \cdot x^{k-1}$. Онда $\alpha=k+1$ үшін $(x^{k+1})'=(k+1)\ x^k$ формуласы орындалатынын көрсетсе жеткілікті:

$$(x^{k+1})'=(x \cdot x^k)'=x' \cdot x^k + x \cdot k \cdot x^{k-1}=(k+1) \cdot x^k.$$

Олай болса, математикалық индукция принципі бойынша $(x^{\alpha})'=\alpha \cdot x^{\alpha-1}$ формуласы әрбір нақты α саны үшін орындалады.

3. Жалпы, $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ туындысының формуласы $\alpha=\dfrac{1}{2}$ болғандағы $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$ туындысының дербес жағдайы. Дегенмен, бұл формула практикада жиі қолданылғандықтан, оның дәлелдеуін жеке қарастырамыз. $y=\sqrt{x}$ функциясы үшін $\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}$.

Онда $\left(\sqrt{x}\right)'=\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{x+\Delta x-x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}=$

$$=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

4. $y=\sin x$ функциясының өсімшесін табайық:

$$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$ болғандықтан,

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) =$$

$$= 1\cdot\cos(x+0) = \cos x.$$

ӨЗДЕРІҢ ДӘЛЕЛДЕҢДЕР

4)-пункттің дәлелдеуіне ұқсас $(\cos x)' = -\sin x$ формуласын өздерің дәлелдеңдер.

5. $$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cdot\cos x - \sin x\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

ӨЗДЕРІҢ ДӘЛЕЛДЕҢДЕР

5)-пункттің дәлелдеуіне ұқсас $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$ формуласын өздерің дәлелдеңдер.

Қалған формулаларды келесі параграфта дәлелдейміз.

1-мысал. $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ функциясының туындысын табу керек.

$u(x)=x$, $v(x)=1+x^2$ деп белгілесек, 4° ережені қолдану керек. $u'=x'=1$ және $v'=1'+(x^2)'=0+2x=2x$ болғандықтан,

$$f'(x) = \left(\frac{x}{1+x^2}\right)' = \frac{x'\cdot(1+x^2) - x\cdot(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} = \frac{1\cdot(1+x^2) - x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

1. Туынды алудың негізгі ережелерін жазып, оларды дәлелдеңдер.
2. Негізгі элементар функциялардың туындыларын жатқа айтып беріңдер.

ЕСЕПТЕР

А

7.25–7.30-есептерде көрсетілген функциялардың туындысын табыңдар:

7.25. 1) $y=x^2$; 2) $y=1-x^3$; 3) $y=3x^2-4x+5$; 4) $y=4x^3-x^5$.

7.26. 1) $y=x^2(x-3)$; 2) $y=(x^3-2)(2x^3+1)$; 3) $y=x^3(3x+2)$; 4) $y=(3x^2-4)(7x^2+x-1)$.

7.27. 1) $y=\dfrac{1+2x}{3-5x}$; 2) $y=\dfrac{3x-2}{x+8}$; 3) $y=\dfrac{3x-2}{x-8}$; 4) $y=\dfrac{x-1}{x+1}$.

7.28. 1) $y=3x^3-2x^2+1$; 2) $y=4x^5-4x^4+x^2-1$; 3) $y=4+6x-3x^4$; 4) $y=(x-2)^3$.

7.29. 1) $y=\sqrt{x}\left(x^2+1\right)$; 2) $y=(x^{10}-1)(x^3+3)$; 3) $y=x^2\sin x$; 4) $y=(x^2+x+1)\cos x$; 5) $y=(x+1)\operatorname{tg}x$; 6) $y=(x^3+1)\operatorname{ctg}x$.

7.30. 1) $y=x^9+2x^6-\sqrt{x}$; 2) $y=x^{10}+\operatorname{tg}x$; 3) $y=5x^5-\sin x$; 4) $y=5x^6+\cos x$.

7.31. Функция туындысының көрсетілген нүктелердегі мәндерін табыңдар:

1) $y=2x^3-3x$, $x=1$; $x=0{,}5$;

2) $y=3x+2\sqrt{x}$, $x=0{,}02$; $x=4$;

3) $y=\dfrac{3}{x}-x$, $x=-2$; $x=\dfrac{1}{3}$;

4) $y=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}$, $x=-1$; $x=\dfrac{1}{4}$.

7.32. $f'(x)=0$ теңдеуінің түбірлерін табыңдар:

1) $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-4x$; 2) $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-x^2-3x+7$; 3) $f(x)=3x-5x^2$; 4) $f(x)=-\dfrac{2}{3}x^3+2x-5$.

B

7.33—7.37-есептерде көрсетілген функциялардың туындысын табыңдар:

7.33. 1) $y=2x^{1,5}$; 2) $y=x^{-\frac{4}{3}}$; 3) $y=\dfrac{3}{x}$; 4) $y=-\dfrac{2}{x^2}$.

14–4411

7.34. 1) $y = \sqrt{x\sqrt{x}}$; 3) $y = \sqrt[3]{3x\sqrt{4x}}$; 5) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x\sqrt[3]{x}}$;

2) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; 4) $y = \dfrac{1}{x\sqrt{2x}}$; 6) $y = x\sqrt{x^3}$.

7.35. 1) $y=(x^2+1)\sin x$; 3) $y = \dfrac{\operatorname{tg} x}{x+1}$;

2) $y = \dfrac{3x-2}{\cos x}$; 4) $y=(x^5+x^2-3)\operatorname{ctg} x$.

7.36. 1) $y=x\operatorname{arctg} x$; 3) $y = \dfrac{\sqrt{x^3}}{\arcsin x}$;

2) $y = \sqrt{x}\arccos x$; 4) $y = -\dfrac{\operatorname{arcctg} x}{\sqrt{2x}}$.

7.37. 1) $y = \sqrt{1+x^2}\cdot\cos x$; 2) $y = \sqrt{1-x^2}\cdot\sin x$.

7.38. $f'(x)=0$ теңдеуін шешіңдер:

1) $f(x) = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{2x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} - 2x + 4$;

2) $f(x) = x^4 + \dfrac{4x^3}{3} - 8x^2 - 16x + 17$.

7.39. Туындының көрсетілген нүктедегі мәнін табыңдар:

1) $y = \dfrac{x^3-3x}{2x^4+1}, x = -1; x = 2$;

2) $y = \left(\dfrac{3}{x} + x\right)\left(\sqrt{x}-1\right), x = 1, x = 4$.

7.40. $y=f(x)$ дифференциалданатын функция болса, $(f(ax+b))'=$ $=a\cdot f'(ax+b)$ формуласының орындалатынын көрсетіңдер.

7.41. Алдыңғы есептегі формула бойынша функцияның туындысын табыңдар:

1) $y=(2x+3)^{10}$; 4) $y = \cos\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)$;

2) $y=(3-4x)^8$; 5) $y=\operatorname{tg} 4x$;

3) $y = \sin\left(3x - \dfrac{\pi}{3}\right)$; 6) $y=(2x-1)^6\cdot(3x+2)^4$.

C

7.42. $(x+1)^{80}$ көпмүшесіндегі x-тің коэффициентін анықтаңдар.

7.43. $(x-2)^{100}=a_0\cdot x^{100}+a_1\cdot x^{99}+\ldots+a_{99}\cdot x+a_{100}$ көпмүшесі берілген. 1) $a_0+a_1+\ldots+a_{99}+a_{100}$; 2) $100\cdot a_0+99\cdot a_1+\ldots+a_{99}+a_{100}$ қосындысын табыңдар.

7.44. $g(x)=u(x)\cdot v(x)$ функциясының $x=x_0$ нүктесінде туындысы анықталмаған. $u(x)$ және $v(x)$ функцияларының әрқайсысы жөнінде не айтуға болады? $u(x)$ және $v(x)$ функцияларының әрқайсысының $x=x_0$ нүктесінде туындысы анықталмауы қажет пе?

7.45. **7.44**-есепті 1) $u(x)+v(x)$; 2) $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ функциясына қатысты шығарыңдар.

Қайталауға арналған жаттығулар

7.46. Есептеңдер:

1) $2\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+\operatorname{arc\,tg}(-1)+\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

2) $\arcsin 1+\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)+\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

7.47. Функция графигінің координаталар өстерімен қиылысу нүктелерінің координаталарын табыңдар:

1) $y=3x^2+2x-5$; 2) $y=\sin x+0{,}5$.

7.48. Ақынған алты сан геометриялық прогрессияның тізбектес мүшелері болатындай етіп, 2 және 64 сандарының арасына төрт санды орналастырыңдар.

7.3. Күрделі және кері функциялардың туындысы

7.3.1. Күрделі функцияның туындысы

ОЙТҮРТКІ

Алдыңғы тақырыптарда келтірілген ережелердің көмегімен $y=\sqrt{1-\sin x}$ функциясының туындысын тауып көр.

Қарапайым ережеге сүйеніп, $y=\sqrt{1-\sin x}$ функциясының туындысын таба алмаймыз. Сондықтан күрделі функциялардан туынды алу ережесін қарастырайық.

1-теорема. *Егер $y=g(x)$ функциясы x_0 нүктесінде, ал $f(y)$ функциясы $y_0=g(x_0)$ нүктесінде дифференциалданса, онда $F(x)=f(g(x))$ күрделі функциясы x_0 нүктесінде дифференциалданады және*

$$F'(x_0)=f'(g(x_0))\cdot g'(x_0) \qquad (1)$$

теңдігі орындалады.

$$\frac{\Delta F}{\Delta x}=\frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x}=\frac{f(g(x_0+\Delta x))-f(g(x_0))}{\Delta x}=$$

$$=\frac{f(g(x_0+\Delta x))-f(g(x_0))}{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}\cdot\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}=\frac{\Delta f(g(x_0))}{\Delta g(x_0)}\cdot\frac{\Delta g(x_0)}{\Delta x}.$$

$g(x)$ функциясы x_0 нүктесінде дифференциалданатын болғандықтан, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[g(x_0+\Delta x)-g(x_0)\right]=0$ теңдігі орындалады, яғни $\Delta x\to 0$ ұмтылғанда $\Delta g\to 0$.

Сондықтан

$$F'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(g(x_0))}{\Delta g(x_0)}\cdot\frac{\Delta g(x_0)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta g\to 0}\frac{\Delta f(g(x_0))}{\Delta g(x_0)}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta g(x_0)}{\Delta x}=f'(g(x_0))\cdot g'(x_0).$$

1-мысал. $y=(x^2-2x+5)^2$ функциясының туындысын табу қажет.

$y=u^2$, $u=x^2-2x+5$ деп алсақ, берілген функцияны күрделі функция ретінде қарастыруға болады. Сонда (1) формуладағы x_0-дің орнына кез келген x нүктесін алсақ,

$$F'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

формуласы орындалатынын көреміз. Осы формула бойынша

$$y'=(u^2)'\cdot(x^2-2x+5)'=2u\cdot(2x-2)=4(x-1)\cdot(x^2-2x+5).$$

2-мысал. $y=\sqrt{3x^2+x}$ функциясының туындысын анықтайық.

$$\left(\sqrt{3x^2+x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{3x^2+x}}\cdot\left(3x^2+x\right)'=\frac{6x+1}{2\sqrt{3x^2+x}}.$$

Жалпы, $\left(\sqrt{f(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$ формуласы орындалады.

3-мысал. $f(x)=\sqrt{\left(x^3+x+1\right)^3}$ функциясының туындысын табу қажет.

Бұл есепте үш функциядан құралған күрделі функция бар деп есептеу керек: $f(x)=g[u(v(x))]$. Онда (1) формула былай жазылады:

$$f'(x)=g'\left[u(v(x))\right]\cdot u'(v(x))\cdot v'(x).$$

Осы формула бойынша

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{(x^3+x+1)^3}}\cdot 3(x^3+x+1)^2\cdot(3x^2+1)=\frac{3(x^3+x+1)^2\cdot(3x^2+1)}{2\sqrt{(x^3+x+1)^3}}=$$

$$=\frac{3}{2}(3x^2+1)\cdot\sqrt{x^3+x+1}.$$

4-мысал. $y=\sin\left(\operatorname{tg}\sqrt{x^2+1}\right)$ функциясынан туынды алу керек.

$$y'=\cos\left(\operatorname{tg}\sqrt{x^2+1}\right)\cdot\frac{1}{\cos^2\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x=$$

$$=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{\cos\left(\operatorname{tg}\sqrt{x^2+1}\right)}{\cos^2\sqrt{x^2+1}}.$$

5-мысал. $y=\operatorname{arctg}\left(\sin\sqrt{x}\right)$ функциясының туындысын табу қажет.

$$y'=\frac{1}{1+\sin^2\sqrt{x}}\cdot\cos\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\cdot\left(1+\sin^2\sqrt{x}\right)}.$$

7.3.2. Кері функцияның туындысы

2-теорема. *Айталық, $y=f(x)$ функциясы $x=x_0$ нүктесінің маңында үздіксіз қатаң бірсарынды және x_0 нүктесінде $\frac{df(x_0)}{dx}\neq 0$ туындысы бар болсын. Онда $x=f^{-1}(y)$ кері функциясы $y_0=f(x_0)$ нүктесінде дифференциалданады және*

$$\frac{df^{-1}(y_0)}{dy}=\frac{1}{f'(x_0)} \qquad (2)$$

теңдігі орындалады.

$y=f(x)$ функциясы қатаң бірсарынды болатындай x_0 нүктесінің қандай да бір аймағын белгілеп алайық. Осы аймақта, $f(x)$ функциясына кері $x=f^{-1}(y)$ функциясы анықталады. Кері функцияның анықталу облысында $y_0=f(x_0)$ нүктесі жатады және $f^{-1}(y)$ функциясы y_0 нүктесінде үздіксіз. Сондықтан $\Delta x=x-x_0$, $\Delta y=y-y_0$ өсімшелері үшін $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ және $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\Delta x=0$ қатынастары орындалады, яғни $\Delta x\to 0$ ұмтылса, $\Delta y\to 0$ және керісінше, $\Delta y\to 0$, онда $\Delta x\to 0$. Осыдан кез келген $\Delta x\neq 0$, $\Delta y\neq 0$ өсімшелері үшін $\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$.

Олай болса, $\dfrac{df^{-1}(y)}{dy}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}=\dfrac{1}{f'(x_0)}$. Теорема дәлелденді.

$x_0=f^{-1}(y_0)$ болғандықтан, (2) формуланы былай жазуға болады:

$$\left(f^{-1}(x)\right)'=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}. \qquad (3)$$

Енді 1) $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 3) $(\operatorname{arctg} x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$;

2) $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 4) $(\operatorname{arcctg} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

формулаларының 1), 3)-шісін дәлелдейік. 2) және 4) формулалар осыған ұқсас дәлелденеді.

1) $y=\arcsin x$, $x=\sin y$, $-\dfrac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\dfrac{\pi}{2}$, $-1\leqslant x\leqslant 1$. (2) формуладан

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3) $y=\operatorname{arctg}x$, $x=\operatorname{tg}y$, $-\dfrac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\dfrac{\pi}{2}$, $-\infty<x<+\infty$;

$$(\operatorname{arctg}x)'=\frac{1}{(\operatorname{tg}y)'}=\cos^2 y=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y}=\frac{1}{1+x^2}.$$

Біз $(\sin x)'=\cos x$ және $(\operatorname{tg}x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ туындыларын қолдандық.

6-мысал. $y=\arcsin(1-x^2)$ функциясының туындысын табу қажет.

Күрделі функциядан туынды алу ережесі мен жоғарыда дәлелденген формула бойынша

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}}\cdot\left(1-x^2\right)'=\frac{1}{\sqrt{2x^2-x^4}}\cdot(-2x)=$$

$$=\frac{-2x}{\sqrt{x^2\left(2-x^2\right)}}=-\frac{2x}{|x|\sqrt{\left(2-x^2\right)}}$$

7.3.3. Жоғары ретті туынды түсінігі. Екінші ретті туындының механикалық мағынасы

$y=f(x)$ функциясының туындысы $f'(x)$-тің өзі x-ке тәуелді функция болады. Сондықтан $f'(x)$ функциясын да дифференциалдау мәселесі туындайды. Егер $f'(x)$ функциясының туындысы бар болса, онда бұл туындыны $f(x)$ функциясының *екінші ретті туындысы* деп атайды және оны $f''(x)$ немесе y'' арқылы белгілейді. Сонымен, $f''(x)=(f'(x))'$ немесе $y''=(y')'$.

7-мысал. $f(x)=x^4-2x^3+3x+1$ функциясының екінші ретті туындысын табайық.

$$f'(x)=4x^3-6x^2+3;\ f''(x)=(f'(x))'=(4x^3-6x^2+3)'=12x^2-12x.$$

$s(t)=\dfrac{gt^2}{2}$ дененің еркін түсуін қарастырайық. Бұл функцияның уақыт бойынша алынған $s'(t)$ туындысы дененің еркін түскен кездегі жылдамдығы болатынын жақсы білеміз: $v(t)=s'(t)=\left(\dfrac{gt^2}{2}\right)'=gt$. Онда $s''(t)=(gt)'=g$, яғни $s''(t)$ екінші ретті туындысы дененің g еркін түсу үдеуін анықтайды.

Сонымен, $y=f(x)$ функциясының y'' екінші ретті туындысының механикалық мағынасы бар екенін көреміз. Шынында да, материялық нүкте $y=f(x)$ заңдылығымен x уақытына тәуелді қозғалса, $f'(x)$ бірінші ретті туынды материялық нүкте қозғалысының жылдамдығын анықтайды. Осы сияқты, $f(x)$ функциясының $f''(x)$ екінші ретті туындысы «жылдамдықтың өзгеру шапшаңдығы» *үдеуді* береді. Олай болса, функцияның екінші ретті туындысы $y=f''(x)$ материялық нүкте қозғалысының *үдеуін* анықтайды.

Функцияның екінші ретті туындысынан алынған туындыны оның үшінші ретті туындысы деп атаймыз және оны y''' немесе $f'''(x)$ арқылы белгілейді: $y'''=(y'')'$ немесе $f'''(x)=(f''(x))'$. Осы сияқты функцияның 4-ретті, 5-ретті, т.с.с. туындыларын анықтауға болады (y^{IV}, y^{V}, т.с.с). Жалпы, $y=f(x)$ функциясының n ретті туындысы деп, оның $(n-1)$ ретті туындысынан алынған туындыны айтады: $y^{(n)}=(y^{(n-1)})'$ немесе $f^{(n)}(x)=(f^{(n-1)}(x))'$.

8-мысал. $y=x^2+14x-2$ функциясы үшін $y'=2x+14$, $y''=2$, $y'''=0$, $y^{IV}=0$, ...

9-мысал. $y=\sin x$ функциясының n-ретті туындысын табайық.

$y'=\cos x$, $y''=-\sin x$, $y'''=-\cos x$, $y^{IV}=\sin x$, ...

Кез келген n натурал санын $4k$; $4k+1$; $4k+2$; $4k+3$ $(k \in N)$ түрлерінің бірінде жазуға болады. Онда әрбір $n \in N$ натурал саны үшін

$$\sin^{(n)} x = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

$\cos^{(n)} x = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$ теңдігі де осы сияқты дәлелденеді.

$y = \sin x$ функциясының n-ретті туындысы

n	$\sin^{(n)} x$	$\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$
$n = 4k$	$\sin^{(4k)} x = \sin x$	$\sin\left(x + \frac{4k\pi}{2}\right) = \sin(x + 2k\pi) = \sin x$
$n = 4k+1$	$\sin^{(4k+1)} x = (\sin^{(4k)} x)' = \sin' x = \cos x$	$\sin\left(x + \frac{4k+1}{2}\pi\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = \cos x$
$n = 4k+2$	$\sin^{(4k+2)} x = (\sin^{(4k)} x)'' = \sin'' x = -\sin x$	$\sin\left(x + \frac{4k+2}{2}\pi\right) = \sin(x + \pi + 2k\pi) = -\sin x$
$n = 4k+3$	$\sin^{(4k+3)} x = (\sin^{(4k)} x)''' = \sin''' x = -\cos x$	$\sin\left(x + \frac{4k+3}{2}\pi\right) = \sin\left(x + \frac{2\pi}{2} + 2k\pi\right) = -\cos x$

1. Күрделі функцияның туындысы қалай анықталады? Жауаптарыңды негіздеңдер.
2. Кері функцияның туындысы қалай анықталады? Жауаптарыңды негіздеңдер.
3. Функцияның жоғары ретті туындылары қалай анықталады?
4. Екінші ретті туындының механикалық мағынасы қандай?

ЕСЕПТЕР

А

7.49–7.52-есептерде көрсетілген функциялардың туындысын табыңдар.

7.49. 1) $y=(2x-3)^5$; 2) $y=(4+7x)^6$; 3) $y=(2-3x)^8$; 4) $y=(1-5x)^5$.

7.50. 1) $y=(2x^2-3)^5$; 2) $y=(4+7x^3)^6$; 3) $y=(2-3x^2)^8$; 4) $y=(1-5x^5)^5$.

7.51. 1) $y=\sin 3x$; 3) $y=\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$;

2) $y=\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$; 4) $y=\operatorname{ctg}\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)$.

7.52. 1) $y=\sqrt{9-2x^2}$; 3) $y=\sqrt{x^2-7x+12}$;

2) $y=\frac{1}{\sqrt{3x+1}}$; 4) $y=\frac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}}$.

7.53. Көрсетілген нүктедегі туындының мәнін табыңдар:

1) $f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$, $x=\frac{\pi}{12}$, $x=-\frac{\pi}{6}$;

2) $f(x)=x-\operatorname{ctg}3x$, $x=\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{\pi}{18}$.

7.54–7.59-есептерде көрсетілген функциялардың туындысын табыңдар.

7.54. 1) $y=\arcsin(5x-3)$; 3) $y=\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}+1\right)$;

2) $y=\sqrt{x-1}+\arccos(x-1)$; 4) $y=\sqrt{x-1}\cdot\operatorname{arcctg}(2x+1)$.

B

7.55. 1) $y=(x^6+x)^2$; 3) $y=(2x^3-5x^2)^{16}$;

2) $y=(1-x)^{12}$; 4) $y=(3x^3-2x^2)^5$.

7.56. 1) $y=(x^3-2x^2+3)^{17}$; 3) $y=\sqrt{4x^2+5}$;

2) $y=\sqrt{1-x^4}+\frac{1}{x^2+3}$; 4) $y=(3-x^3)^5+\sqrt{2x^2+7}$.

7.57. 1) $y=\sqrt{x-2}\cdot\sin(3x-2)$; 3) $y=(3x^2-2x-5)\operatorname{tg}\sqrt{x}$;

2) $y=(x^2+4)\cos\sqrt{x-3}$; 4) $y=\sqrt{x}\operatorname{ctg}(3x^2-2x-5)$.

7.58. 1) $y=\frac{\sin 3x}{\sqrt{x-1}}$; 2) $y=\frac{\sqrt{2x-3}}{\cos\frac{x}{2}}$.

7.59. 1) $y=(2x+1)\arcsin\sqrt{x}$; 3) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{x-4}$;

2) $y=\sqrt{x}\cdot\arccos(x^2+2x-1)$; 4) $y=\operatorname{arcctg}(5x^2-3)$.

7.60. Көрсетілген нүктелердегі туындының мәнін табыңдар:

1) $f(x) = x^2 - 2\sqrt{x}$, $x = 4$, $x = 16$;

2) $g(x) = x^2 \sin\frac{x}{2}$, $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \pi$.

7.61. $f'(x)=0$ теңдеуін шешіңдер:

1) $f(x)=x-\sin 2x$;
2) $f(x)=x+\mathrm{ctg}\,3x$;
3) $f(x)=\cos 2x+x$;
4) $f(x) = \sin 2x - \sqrt{3}x$.

7.62. $f(x)=3-2x$, $g(x)=x^2$ және $u(x)=\sin x$ функциялары берілген. $F(x)$ күрделі функциясын анықтап, $F'(x)$-ті табыңдар:

1) $F(x)=f(g(x))$;
2) $F(x)=g(u(x))$;
3) $F(x)=g(f(x))$;
4) $F(x)=u(g(x))$;
5) $F(x)=f(g(u(x)))$;
6) $F(x)=u(g(f(x)))$.

7.63. $f(x)=\mathrm{ctg}\,x$, $g(x) = \sqrt{x}$ және $u(x)=\mathrm{arctg}\,x$ функциялары берілген. $F(x)$ күрделі функциясын анықтаңдар және $F'(x)$-ті табыңдар.

1) $F(x)=f(u(x))$;
2) $F(x)=g(u(x))$;
3) $F(x)=u(f(x))$;
4) $F(x)=u(g(x))$.

7.64–7.5.67-есептерде көрсетілген функциялардың туындысын табыңдар.

7.64. 1) $y = \sqrt{4+\sin^2 x}$;
2) $y = \sin^2 x + \sqrt{1+2\mathrm{tg}^2 x}$;
3) $y = 4 + \sqrt{1+\cos^2 x}$;
4) $y = 2 - \sqrt{\mathrm{ctg}^2 x - 1}$.

7.65. 1) $y = \sin\sqrt{x}\cdot\cos(x^2+1)$;
2) $y = \mathrm{tg}\sqrt{x}\cdot\sin(x+4)$;
3) $y = \dfrac{2x^2+1}{\cos(2x-1)}$;
4) $y = \dfrac{\mathrm{ctg}\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2-1}}$.

7.66. 1) $y = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\arcsin x}$;
2) $y = \dfrac{1+x^2}{\mathrm{arctg}\,x}$;
3) $y = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{\arccos\frac{x}{2}}$;
4) $y = \dfrac{9+x^2}{\mathrm{arcctg}\frac{x}{3}}$.

7.67. 1) $y=\sqrt{1-\sqrt{x}}$; 3) $y=x\cdot\sqrt{1+x^2}$; 5) $y=\dfrac{x}{x-\sqrt{x^2-4}}$;

2) $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$; 4) $y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$; 6) $y=\left(\dfrac{x^2}{3x-1}\right)^5$.

C

7.68. Көпмүше құрамындағы x-тің коэффициентін анықтаңдар:

1) $(2+x^2)^7$; 2) $(1-2x+x^2)^8$; 3) $(2+x-x^2)^{10}$; 4) $(x^3+x^2+x+1)^5$.

7.69. Функцияның 300-ретті туындысы неге тең:

1) $(7+x^2)^{100}$; 3) $\cos 3x$;

2) $(8-3x^2)^{149}$; 4) $\sin\dfrac{x}{2}$?

7.70. Функцияның үшінші ретті туындысын табыңдар:

1) $(x-1)^{-1}$; 2) $(2x-1)^{100}$; 3) $\sin(3x-2)$; 4) $\cos(ax+b)$.

7.71. Нәтижесінде 50-дәрежелі көпмүше алу үшін $(2+x^2)^{100}$ функциясын неше рет дифференциалдау керек?

7.72. Туындысы бойынша $f(x)$ функциясын анықтаңдар:

1) $f'(x)=2x-1$; 3) $f'(x)=x^2-2x+1$;

2) $f'(x)=\sin 5x$; 4) $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+2\cos\dfrac{x}{2}$.

7.73. $f'(x)>0$ теңсіздігін шешіңдер:

1) $f(x)=\sqrt{2}x+2\cos^2 x$; 2) $f(x)=\sin 2x-\sqrt{3}x$.

7.74. 1) $(3x-5)^{10}$; 2) $(2x-x^2)^{10}$ көпмүшесінде x^3-тың коэффициентін табыңдар.

7.75. $y=\dfrac{1}{x(x+1)}$ функциясының 100-ретті туындысын табыңдар.

7.76. $(x+a)^n=C_n^0x^n+C_n^1x^{n-1}\cdot a+\ldots+C_n^kx^{n-k}\cdot a^k+\ldots+C_n^n\cdot a^n$ формуласының орындалатынын дәлелдеңдер. Бұл формула ***Ньютон биномы*** деп аталады.

7.4. Туындыны функцияны зерттеуде қолдану

7.4.1. Функцияның өсу және кему аралықтары

1-бөлімнің 1.3-бабында функцияны зерттеу процесінде оның өспелі және кемімелі болатын аралықтарын анықтаудың маңызы зор екенін көрсеткенбіз. Енді осы есептерді туындылардың көмегімен оңай шешуге болатынын көрсетейік. Ол үшін екі топқа бөлініп, мына екі тапсырманы орындаңдар:

ОЙТҮРТКІ

1-тапсырма: 1) $y=6x-x^2-5$, $x\in(1;5)$ функциясының графигін салыңдар; 2) функцияның өспелі және кемімелі аралықтарын табыңдар; 3) функцияның туындысын табыңдар. Туындының өспелі және кемімелі аралықтардағы таңбасын зерттеңдер; 4) $x_0=3$ нүктесі функцияның қандай нүктесі болады? 5) $f'(3)$-тің мәні қандай? 6) Қорытынды жасап, сынып алдында есеп беріңдер.

2-тапсырма: 1) $y=|x-2|$, $x\in(0;4)$ функциясының графигін салыңдар; 2) функцияның өспелі және кемімелі аралықтарын табыңдар; 3) осы аралықтардағы функцияның туындысы таңбасын зерттеңдер; 4) $x_0=2$ нүктесі функцияның қандай нүктесі болады? 5) $f'(2)$ мәні туралы не айтасыңдар? Ондай мән табыла ма? Жауаптарыңды негіздеңдер. 6) Қорытынды жасап, сынып алдында есеп беріңдер.

Ескерту: $y=6x-x^2-5$ функциясын $y=4-(x-3)^2$ түрінде, $y=|x-2|$ функциясын $y=\begin{cases} x-2, \text{ егер } x\in[2;4), \\ 2-x, \text{ егер } x\in(0;2) \end{cases}$ түрінде жазып алыңдар. Жасаған қорытындыларың функцияның өспелі не кемімелі болуы шарттарымен және келесі баптағы экстремумның қажетті шартымен үйлесетінін негіздеңдер.

1) Функцияның өспелі болуының жеткілікті шарты:

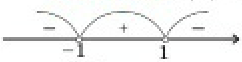
Егер $(a;\ b)$ интервалының әрбір нүктесінде $f'(x)>0$ теңсіздігі орындалса, онда функция осы аралықта өспелі болады.

2) Функцияның кемімелі болуының жеткілікті шарты:

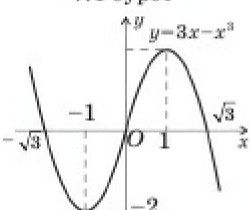
Егер $(a;\ b)$ интервалының әрбір нүктесінде $f'(x)<0$ теңсіздігі орындалса, онда функция осы аралықта кемімелі болады.

Ережедегі a және b сандарының орнына сәйкесінше $-\infty$ және $+\infty$ символдарын алсақ та теорема орындалады.

1-мысал. $f(x)=3x-x^3$ функциясының өспелі және кемімелі болатын аралықтарын анықтау қажет.



7.4-сурет



7.5-сурет

Берілген функция $(-\infty;\ +\infty)$ аралығында анықталған және бұл аралықтың барлық нүктелерінде туындысы бар:

$$f'(x)=3-3x^2 \text{ немесе } f'(x)=-3(x-1)(x+1).$$

Туындының таңбасы оң $f'(x)>0$ болған аралықтарда функция өспелі, ал теріс болған аралықтарда $f'(x)<0$ функция кемімелі. Туындының таңбасын интервалдар әдісімен анықтайық (7.4-сурет): $(-1;\ 1)$ аралығында функция өспелі, $(-\infty;\ -1)\cup(1;\ +\infty)$ аралығында функция кемімелі (7.5-сурет).

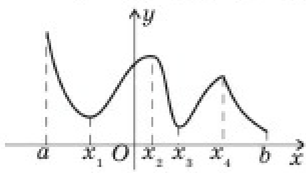
7.4.2. Функция экстремумдарының қажетті және жеткілікті шарттары

Функция экстремумы ұғымымен сендер алғаш рет 9-сыныпта таныстыңдар. Сонан соң I тарауда функцияларды зерттеудің қарапайым жоспарын (1.3-бап) қарастыру барысында бұл ұғымға қысқаша тоқталғанбыз. Туындыны қолданып, функцияның экстремумын оңай анықтауға болады.

Экстремумның қажетті шартын қарастырайық.

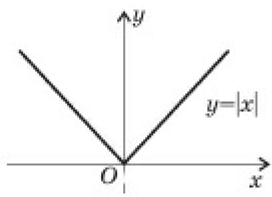
Экстремумның қажетті шарты. *Айталық, $y=f(x)$ функциясы $x=x_0$ нүктесінің маңында анықталып, осы x_0 нүктесі функцияның экстремум нүктесі болсын. Онда $f'(x_0)=0$ немесе функцияның x_0 нүктесінде туындысы болмайды.*

x_0 функцияның максимум нүктесі болсын делік. Онда анықтама бойынша x_0 нүктесінің $(x_0-\delta;\ x_0+\delta)$ $(\delta>0)$ аймағы табылып, осы аймақта функцияның ең үлкен мәні $f(x_0)$ болады. Егер x_0 нүктесінде функцияның туындысы бар болса, онда $(x_0-\delta;\ x_0)$ функция аралығында өспелі, яғни бұл аралықта $f'(x)>0$. Сондықтан, $f'(x_0)\geqslant 0$. Екінші жағынан $(x_0;\ x_0+\delta)$ аралығында функция кемімелі, яғни $f'(x)<0$. Сонда $f'(x_0)\leqslant 0$ болуы қажет. Олай болса $f'(x_0)=0$ болуы қажет. Немесе x_0 нүктесінде функцияның туындысы болмайды.



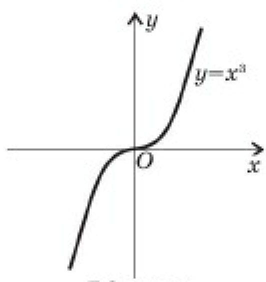
7.6-сурет

Жалпы, функцияның туындысы нөлге тең болатын немесе туындысы болмайтын нүктелерін оның *стационар* (*кризистік нүктелері*) деп атаймыз. Мысалы, графигі 7.6-суретте бейнеленген функция үшін x_1, x_2, x_3, x_4 — стационар нүктелер. Өйткені, x_1, x_2, x_3 сияқты нүктелерде функцияның туындысы нөлге тең болатынын (бұл нүктелерде жанама Ox өсіне параллель), x_4 сияқты нүктелерде функцияның туындысы болмайтынын төмендегі мысалдардан көреміз.



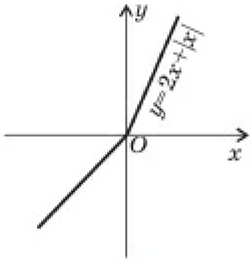
7.7-сурет

2-мысал. 7.7-суретте $y=|x|$ функциясының графигі бейнеленген. Бұл функцияның $x=0$ нүктесінде туындысы болмайтынын жақсы білеміз. $x=0$ нүктесі — стационар нүкте. Графиктен функцияның бұл нүктеде өзінің минимумын қабылдайтынын көреміз.



7.8-сурет

3-мысал. $y=x^3$ функциясының туындысы $x=0$ нүктесінде нөлге тең. Дегенмен функцияның бұл нүктеде экстремумы жоқ (7.8-сурет).



7.9-сурет

4-мысал. $y=2x+|x|$ функциясын қарастырайық (7.9-сурет). $x=0$ нүктесі — берілген функция үшін стационар нүкте. Өйткені бұл нүктеде функцияның туындысы болмайды. Суреттен $x=0$ нүктесінде функцияның экстремумы жоқ екенін көреміз.

Сонымен, әрбір стационар нүктеде функцияның экстремумы бола бермейді (3-және 4-мысалдар). Сондықтан берілген стационар нүктеде функцияның экстремумы бар немесе жоқ екенін анықтау үшін төмендегі экстремумның жеткілікті шартын беретін теореманы қолданады.

Экстремумның жеткілікті шарты. *Егер $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде үздіксіз, $(a;\ x_0)$ және $(x_0;\ b)$ аралықтарында функцияның туындысы $f'(x)$-тің таңбасы әртүрлі болса, онда x_0 функцияның экстремум нүктесі болады. Атап айтқанда, егер x_0 нүктесі арқылы сол жақтан оңға өткенде туындының таңбасы а) "+" таңбасынан "–" таңбасына өзгерсе, онда x_0 — максимум нүктесі; ә) "–" таңбасы "+" таңбасына өзгерсе, x_0 — минимум нүктесі.*

Айталық, әрбір $x\in(a;\ x_0)$ үшін $f'(x)>0$ және кез келген $x\in(x_0;\ b)$ үшін $f'(x)<0$ болсын. Онда 1-теорема бойынша функция $(a;\ x_0)$ аралығында өспелі, $(x_0;\ b)$ аралығында кемімелі. Осыдан анықтамаға сәйкес кез келген $x\in(a;x_0)$ үшін $f(x)<f(x_0)$ және кез келген $x\in(x_0\ ;b)$ үшін $f(x)<f(x_0)$. Демек, кез келген $x\in(a;b)$, $x\neq x_0$ үшін $f(x)<f(x_0)$ теңсіздігі орындалады. Онда x_0 — максимум нүктесі.

ӨЗДЕРІҢ ДӘЛЕЛДЕҢДЕР

Дәл осылай теореманың ә) пунктін өздерің дәлелдеңдер.

Функцияның экстремум нүктелерін анықтау ережелері:

1) *Функцияның стационар, яғни функция туындысының нөлге тең болатын нүктелері мен туындысы болмайтын нүктелерді табу қажет.*

2) *Әр стационар нүктенің маңында туындының таңбасын зерттеу керек. Егер сол жақтан оңға қарай стационер нүкте арқылы өткенде*

а) функция туындысының таңбасы "+"-тен "–"-ке өзгерсе, бұл стационар нүкте максимум нүктесі болады;

ә) функция туындысының таңбасы "–"-тен "+"-ке өзгерсе, бұл стационар нүкте минимум нүктесі болады;

б) функция туындысының таңбасы өзгермесе, бұл стационар нүкте экстремум болмайды.

1-мысалда $y=3x-x^3$ функциясын қарастырдық. Бұл функцияның туындысы $y'=3-3x^2=3(1-x)(1+x)$ түрінде жазылады. Онда $x_1=-1$, $x_2=1$ — стационар нүктелер. 7.4-суретте туындының таңбаларын көрсеткенбіз. Осыдан $x_1=-1$ — минимум нүктесі, $x_2=1$ максимум нүктесі болады (7.5-сурет).

Осы 2-мысалда $y=|x|$ функциясы үшін $x=0$ — стационар нүкте. $x<0$ болса, $y=-x$ және $y'=-1<0$, ал $x>0$ болса, $y=x$ және $y'=1>0$. Демек, $x=0$ нүктесінің сол жағында $y'<0$, оң жағында $y'>0$. Онда $x=0$ — функцияның минимум нүктесі (7.12-сурет).

$y=x^3$ функциясы үшін $x=0$ нүктесі — стационар нүкте. Ал $y'=3x^2\geqslant 0$ болғандықтан, $x=0$ нүктесінің маңында туындының таңбасы өзгермейді. Ендеше, 2-теорема бойынша $x=0$ нүктесі функцияның экстремум нүктесі болмайды (7.8-сурет).

1. Функцияның өсу және кему аралықтары қалай анықталады?
2. Экстремум нүктесі дегеніміз не? Қандай нүктелер максимум (минимум) нүктесі деп аталады? Анықтама беріңдер.
3. Қандай нүктелер стационар нүктелер деп аталады?
4. Экстремумның қажетті шартын тұжырымдап, оны дәлелдеңдер.
5. Экстремумның I жеткілікті шартын тұжырымдап, оны дәлелдеңдер.
6. Функцияның экстремумдарын (максимумын және минимумын) анықтау ережелерін тұжырымдап, оның мағынасын түсіндіріңдер.

ЕСЕПТЕР

А

7.77–7.80-есептерде берілген функциялардың өсу және кему аралықтарын табыңдар.

7.77. 1) $y=2x-1$; 3) $y=2x^2-4x+5$; 5) $y=1-(2-x)(3+2x)$;

2) $y=3-\dfrac{x}{2}$; 4) $y=(x-2)(x+3)$; 6) $y=x^2+x+1$.

7.78. 1) $y=\dfrac{x^3}{3}-4x^2+7x-8$; 3) $y=\dfrac{1}{x-2}$;

2) $y=x^3+3x^2-6x+5$; 4) $y=\dfrac{x}{4}+\dfrac{4}{x}$.

7.79. 1) $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$; 3) $y=\operatorname{tg}\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$;

2) $y=3-\cos 2x$; 4) $y=\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}$.

7.80. 1) $y = 4x - \frac{x^3}{3}$; 3) $y=x^2(1-x)$;

2) $y = \frac{x^4}{4} - x^3$; 4) $y = \frac{1}{x^2+1}$.

7.81–7.83-есептерде берілген функциялардың экстремумдарын анықтап, функцияның экстремум нүктелеріндегі мәндерін табыңдар.

7.81. 1) $y=4x-x^2$; 3) $y=x^2+2x-3$;

2) $y=7x^2-56x+8$; 4) $y=x^3+6x^2+9x$.

7.82. 1) $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + 3$; 3) $y=x^4-2x^2$;

2) $y=x^3-3x$; 4) $y = \frac{1}{x} + x$.

7.83. 1) $y=3\cos x$; 2) $y = \frac{1}{2}\sin 2x$;

B

7.84–7.87-есептерде берілген функциялардың бірсарындылық аралықтарын табыңдар.

7.84. 1) $y=x^3+3x^2+3x+1$; 3) $y=2x^4-x+1$;

2) $y=x^3-3x+1$; 4) $y=x^4-2x^2-3$.

7.85. 1) $y = 1 + \frac{3}{2-x}$; 3) $y = \left(\frac{x^2-1}{x}\right)^3$;

2) $y = \frac{x}{1+x^2}$; 4) $y = x + \frac{4}{x^2}$.

7.86. 1) $y=\sin 2x+x$; 3) $y=x-\cos 2x$;

2) $y=\sin x+\cos x$; 4) $y=x-\sin 2x$.

7.87. 1) $y = \sqrt{x^2-1}$; 3) $y = \sqrt{x^2-4x-5}$;

2) $y = \sqrt{5-2x}$; 4) $y = \sqrt{x-\sqrt{x}}$.

7.88–7.91-есептерде берілген функциялардың экстремумдарын табыңдар.

7.88. 1) $y=2x^3-3x^2$; 3) $y=4x-x^4$;

2) $y=x^3-6x^2+12x$; 4) $y=2x^3-6x^2-18x+7$.

7.89. 1) $y = \dfrac{x}{1+x+x^2}$; 3) $y = \dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$;

2) $y = \dfrac{3x}{1+x^2}$; 4) $y = \dfrac{2x-1}{x^2-1}$.

7.90. 1) $y = \dfrac{2x^2}{3}\cdot\sqrt[3]{6x-7}$; 2) $y = -x^2\cdot\sqrt{x^2+2}$.

7.91. 1) $y=\sin^2 x-\cos x$; 3) $y=\sin x+\operatorname{tg} x$; 5) $y = \dfrac{x}{\sqrt{2}}+\cos x$;

2) $y=\sin^2 x-\dfrac{x}{2}$; 4) $y=x-\operatorname{arctg} x$; 6) $y = \dfrac{\cos x}{2+\sin x}$.

7.92. Функцияның бүкіл сан өсінде бірсарынды болатынын көрсетіңдер:

1) $f(x) = \dfrac{x^3}{6}-\dfrac{x^2}{2}+x-5$; 3) $y=2x-\sin x$;

2) $f(x)=6-6x-2x^3+3x^2$; 4) $y = \cos\dfrac{x}{2}-x$.

C

7.93. Теңдеудің неше түбірі бар:

1) $x^3-6x^2-15x+2=0$; 3) $2x^3-6x^2-48x-17=0$;

2) $3x^2-x^3-2=0$; 4) $4x-x^4=0$?

7.94. $y = \sqrt{2-5x}$ қисығына оның ординаталар өсімен қиылысу нүктесінде жүргізілген жанаманың теңдеуін жазыңдар.

7.95. $y=2x^3-3x^2+6x$ қисығының $6x-y=5$ түзуіне параллель жанамасының теңдеуін жазыңдар.

7.96. $y = \sqrt{x^2+1}$ қисығының $y=x$ түзуіне параллель жанамасы бар ма?

7.97. Функцияның өсу және кему аралықтары мен экстремумдарын анықтаңдар:

1) $y= x^3-6x^2-15x+2$; 4) $y=\sin^4 x+\cos^4 x$.

Қайталауға арналған жаттығулар

7.98. Есептеңдер:

1) $432+72+\ldots+2$; 2) $512+256+128+\ldots+2$.

7.99. $\cos 2x = -\dfrac{5}{13}$ және $x \in \left(\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right)$ деп алып, $\mathrm{tg}\,x$-ті табыңдар.

7.100. Теңдеуді шешіңдер: 1) $|x-3|+2|x+1|=4$; 2) $|3x+1|+x=9$.

7.5. Функцияны зерттеп, графигін салудың қарапайым жоспары

7.5.1. Функцияның кесіндідегі ең үлкен және ең кіші мәндері

Айталық, $y=f(x)$ функциясы $[a; b]$ аралығында үздіксіз болсын. Онда функция $[a; b]$ кесіндісінде өзінің ең үлкен және ең кіші мәндерін қабылдайды. Енді осы мәндерді анықтау мәселесіне тоқталайық.

Әрине, $y=f(x)$ функциясы $[a; b]$ кесіндісінде өзінің ең үлкен және ең кіші мәндерін экстремум нүктелерінде немесе кесіндінің a, b ұштарында қабылдауы мүмкін. Сондықтан бұл мәндерді анықтауды мынадай ережелермен орындаған жөн:

1) $[a; b]$ кесіндісіне тиісті $y=f(x)$ *функциясының барлық стационар нүктелерін анықтап, кесіндінің ұштарын нүктелерімен қоса өсу ретімен жазу керек:* $a, x_1, x_2, \ldots, x_n, b$;

2) *функцияның анықталған нүктелердегі мәндерін табу қажет:* $f(a), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), f(b)$;

3) *осы табылған мәндердің ең үлкені мен ең кішісі берілген функцияның* $[a; b]$ *аралығындағы ең үлкен және ең кіші мәндері болады.*

1-мысал. $y=x^3-3x+1$ функциясының $[-3; 0]$ аралығындағы ең үлкен және ең кіші мәндерін табу керек.

Алдымен функцияның стационар нүктелерін анықтайық. $y'=3x^2-3=3(x-1)(x+1)=0 \Rightarrow x_1=-1,\ x_2=1$. Бұл екеуінің $x=-1$ нүктесі ғана $[-3; 0]$ аралығында жатады. Сондықтан функцияның $-3; -1; 0$ нүктелеріндегі мәндерін анықтаймыз: $f(-3)=(-3)^3-3(-3)+1=-17$;

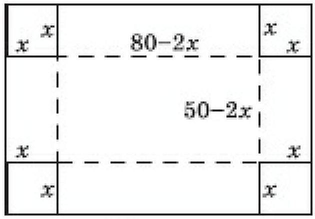
$f(-1)=(-1)^3-3(-1)+1=3$; $f(0)=1$. Олай болса, функцияның $[-3; 0]$ аралығындағы ең үлкен мәні $x=-1$ нүктесінде қабылданады және $f(-1)=3$ — оның ең үлкен мәні. Ең кіші мәні $x=-3$ нүктесінде қабылданады және $f(-3)=-17$ — оның ең кіші мәні.

Жауабы: $\max\limits_{x\in[-3;0]} f(x) = f(-1) = 3$; $\min\limits_{x\in[-3;0]} f(x) = f(-3) = -17$.

2-мысал. Өлшемі 80×50 см^2 болатын тіктөртбұрышты темір қаңылтырдан сыйымдылығы (көлемі) ең үлкен, беті ашық қорап жасау қажет (7.10-сурет).

7.15-суретте көрсетілгендей қиып тасталатын квадраттардың қабырғасын x арқылы белгілейік.

$0 \leqslant x \leqslant 25$ шартында қораптың көлемі $V(x)=x \cdot (80-2x)(50-2x)=4x^3-260x^2+4000x$ теңдігімен анықталады. Сонымен, қораптың көлемі $V(x)$ қиылатын квадраттың қабырғасы x-ке тәуелді функция. Енді осы функцияның $[0;\ 25]$ аралығындағы ең үлкен мәнін табу керек. Функцияның стационар нүктелері:



7.10-сурет

$$V'(x)=12x^2-520x+4000=0 \Rightarrow 3x^2-130x+1000=0 \Rightarrow x_1=10,\ x_2=\frac{100}{3}.$$

$10 \in [0;\ 25]$, $\frac{100}{3} \notin [0;25]$ және $V(0)=V(25)=0$, $V(10)=18000$ болғандықтан, $x=10$ см мәнінде ғана қораптың көлемі ең үлкен болады.

Жауабы: $V=18000$ см^3.

7.5.2. Функцияны зерттеп, оның графигін салудың қарапайым жоспары

Функцияны зерттеп, оның графигін салудың бұл жоспары 1-бөлімнің § 1.4-ында қарастырылған. Бұл тақырыпта жұмыс алдыңғы жоспарға сүйеніп жасалғанмен, оның мазмұны өзгеше. Өйткені зерттеу жұмыстарында қолданылатын туынды ұғымы жұмысты анағұрлым жеңілдетеді. Сонымен, функцияны зерттеуді мынадай жоспар бойынша орындаған тиімді.

1. Функцияның анықталу облысын табу қажет;

2. Егер бар болса, функцияның үзіліс нүктелерін анықтап, оның вертикаль асимптоталарын табу керек;

3. Функцияның тақ-жұптығын, периодтылығын анықтау қажет;

4. Функцияның графигінің координаталар өстерімен қиылысу нүктелерін табу керек;

5. Функцияның стационар нүктелерін табу керек;

6. Функцияның өсу және кему аралықтары мен экстремумдарын анықтау қажет;

7. Қажет болса, функция графигіне тиісті тағы бірнеше нүктенің координаталарын тауып, анықталған мәліметтерді кестеге толтырған тиімді. Соңында, осы мәліметтерге сүйене отырып, функция графигінің жобасын салу керек.

Мысалдар қарастырайық.

3-мысал. $y=x^3+x^2-2$ функциясын зерттеп, оның графигін салу керек.

1) Анықталу облысы: $D(f)=(-\infty;\ +\infty)$;

2) функцияның үзіліс нүктелері жоқ. Ол бүкіл сан өсінде үздіксіз;

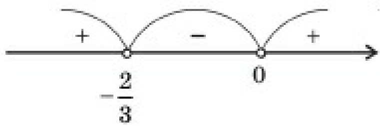
3) жалпы жағдайдағы функция (ЖЖФ). Функция тақ та, жұп та емес. Периодсыз;

4) Ox өсімен қиылысуы: $y=0 \Rightarrow x^3+x^2-2=0 \Rightarrow (x-1)(x^2+2x+2)=0 \Rightarrow x=1$. Функцияның графигі Ox өсін $(1;\ 0)$ нүктесінде қиып өтеді;

Oy өсімен қиылысуы: $x=0 \Rightarrow y=-2$, яғни функцияның графигі Oy өсін $(0;\ -2)$ нүктесінде қиып өтеді;

5) $y' = 3x^2 + 2x = 3x\left(x+\dfrac{2}{3}\right) = 0 \Rightarrow x_1 = -\dfrac{2}{3}, x_2 = 0$ — стационар нүктелер;

6) интервалдар әдісі бойынша функция туындысының таңбасын анықтаймыз:



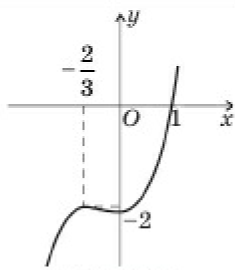
Осыдан $\left(-\infty; -\dfrac{2}{3}\right) \cup (0;\ +\infty)$ жиынында функция өспелі, $\left(-\dfrac{2}{3}; 0\right)$ жиынында кемімелі болатынын көреміз. Демек, $x_1 = -\dfrac{2}{3}$ — максимум нүктесі, $x_2 = 0$ — минимум нүктесі.

$$\max f(x) = f\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{50}{27} \approx -1{,}85; \qquad \min f(x) = f(0) = -2.$$

7) Анықталған шамаларды төмендегі кестеге түсіреміз:

x	$\left(-\infty; -\dfrac{2}{3}\right)$	$-\dfrac{2}{3}$	$\left(-\dfrac{2}{3}; 0\right)$	0	$(0;\ +\infty)$	1
$f(x)$	↗	max $-\dfrac{50}{27}$	↘	min -2	↗	0
$f'(x)$	+	0	–	0	+	

Енді кестедегі мәліметтер бойынша функция графигінің жобасын саламыз (7.11-сурет).



7.11-сурет

1. Функцияның кесіндідегі ең үлкен және ең кіші мәндері қалай анықталады? Жауаптарыңды негіздеңдер.
2. Функцияны зерттеп, оның графигін салу жоспарының негізгі кезеңдерін атап, жауаптарыңды негіздеңдер.

ЕСЕПТЕР

А

7.101–7.106-есептерде функцияның көрсетілген аралықтағы ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңдар.

7.101. $y=x^3-3x^2+3$; 1) $[-1; 1]$; 2) $[1; 3]$; 3) $[-1; 3]$.

7.102. $y=\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+6x+10$; 1) $[0; 1]$; 2) $[0; 2{,}5]$; 3) $[0; 4]$.

7.103. $y=x^4-8x^2-9$; 1) $[-1; 1]$; 2) $[0; 3]$; 3) $[3; 5]$.

7.104. $y=\frac{2x-5}{x^2-4}$; 1) $[-1{,}5; 1{,}5]$; 2) $[3; 5]$; 3) $[-3; 5]$.

7.105. $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$; 1) $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$; 2) $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$.

7.106. $y=2\text{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$; 1) $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]$; 2) $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$.

7.107–7.109-есептерде көрсетілген функцияны зерттеп, оның графигін салыңдар.

7.107. 1) $y=4x-x^2$; 2) $y=x^2+2x-3$; 3) $y=1-x-x^2$; 4) $y=2x^2-x-3$.

7.108. 1) $y=3x^2-x^3$; 2) $y=2x^2-x^4$; 3) $y=(x+3)^3$; 4) $y=x^4+4x^3-18x^2+x-17$.

7.109. 1) $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$; 2) $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

B

7.110. Периметрі $2a$-ға тең барлық тіктөртбұрыштардың ішінен ауданы ең үлкенін табыңдар.

7.111. Кубтарының қосындысы ең аз болатындай етіп, 12-ні екі қосылғышқа жіктеңдер.

7.112. Көбейтіндісі ең үлкен болатындай етіп, 10-ды екі қосылғышқа жіктеңдер.

7.113. Қосындысы ең аз болатындай етіп, 36-ны екі оң көбейткішке жіктеңдер.

7.114. Периметрі P-ға тең барлық тең бүйірлі үшбұрыштардың ішінен ауданы ең үлкені тең қабырғалы үшбұрыш болатынын көрсетіңдер.

7.115. Радиусы R-ге тең сфераға іштей сызылған көлемі ең үлкен цилиндрдің радиусын табыңдар.

7.116. Табаны a-ға және биіктігі h-қа тең сүйір бұрышты үшбұрышқа ауданы ең үлкен тіктөртбұрышты іштей сызыңдар. Осы тіктөртбұрыш ауданын табыңдар.

7.117–7.119-есептердегі функцияны зерттеп, оның графигін салыңдар:

7.117. 1) $y=x^2(1-x)$; 2) $y=(1-x^2)(2+x)$; 3) $y=(1-x^2)(1-x^3)$; 4) $y=(x-2)^2(x+1)^2$.

7.118. 1) $y=\sqrt{2}-2\sin^2 x$; 2) $y=2\text{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

7.119. 1) $y=\frac{x}{3}+\frac{3}{x}$; 2) $y=\frac{3-x^2}{x+2}$; 3) $y=\frac{x^2}{x-2}$; 4) $y=\frac{x+2}{x-1}$.

C

7.120. Радиусы R-ге тең дөңгелектен қандай секторды қиып алғанда оның қалған бөлігінен көлемі ең үлкен конус жасауға болады?

7.121. $x-x^2$ айырымы ең үлкен мән қабылдайтындай етіп, x оң санын табыңдар.

7.122. Материялық нүкте $s(t)=5t+2t^2-\frac{2}{3}t^3$ заңдылығымен түзу сызықты қозғалыста болды. Мұнда $s(t)$ жолы метрмен, ал t уақыты секундпен өлшенеді. Материялық нүктенің қай уақыт мерзімінде жылдамдығы ең үлкен болады?

7.123. Жарық қуаттарының қатынасы 27:8-ге тең екі прожектордың арақашықтығы 30 м. Оларды қосатын түзу бойындағы жарық ең аз түсетін нүктені табыңдар.

7.124. Бұрғылау мұнарасынан түзу сызықты тасжолдың ең жақын нүктесіне дейінгі қашықтық 9 км, осы нүктеден елді мекенге дейін тасжол бойымен 15 км. Егер велосипедші жолсыз 8 км/сағ, ал тасжолмен 10 км/сағ жылдамдықпен жүрсе, ол елді мекенге ең аз уақытта жетуі үшін тасжолдың қай нүктесіне дейін жолсыз жүруі керек?

7.125. Функцияның графигін салыңдар:

1) $y = \dfrac{x-1}{|x-3|} \cdot \left(x^2 - 9\right);$

2) $y = \dfrac{2-x}{|x+1|} \cdot \left(x^2 - x - 2\right).$

Қайталауға арналған жаттығулар

7.126. Теңсіздікті шешіңдер: 1) $\dfrac{8|x|-14}{x-3} \leqslant 4;$ 2) $\dfrac{x^3 - x^2 + x - 1}{x+8} \leqslant 0.$

7.127. $a=-0{,}1$ және $b=95$ деп алып, $\dfrac{a^{-2}-b^{-2}}{a^{-1}-b^{-1}} \cdot \dfrac{a^2b^2}{a+b}$ өрнегінің мәнін табыңдар.

7.6. Функцияны зерттеп, графигін салудың толық жоспары

7.6.1. Функция графигінің ойыс-дөңестігі және иілу нүктелері

Айталық, $y=f(x)$ функциясы $(a;\, b)$ аралығында анықталсын және $a<x_1<x_2<b$ болсын. Онда функция графигінде жататын $A(x_1;\ f(x_1))$ және $B(x_2;\ f(x_2))$ нүктелері арқылы өтетін қиюшы түзудің теңдеуі

$$y = \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)\cdot(x_2 - x)}{x_2 - x_1}. \qquad (1)$$

Шынында да, екі нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуі бойынша AB қиюшысының теңдеуін

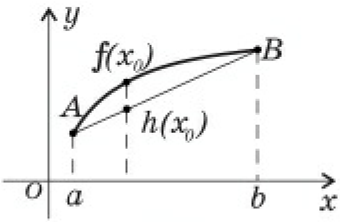
$$\frac{y - f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

түрінде жазамыз. Осыдан

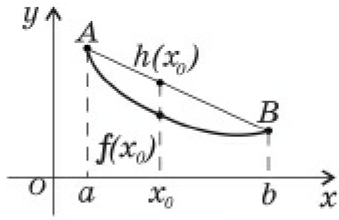
$$y - f(x_1) = \frac{(x - x_1)\left[f(x_2) - f(x_1)\right]}{x_2 - x_1} \Rightarrow$$

$$y = \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x_1) - (x - x_1)f(x_1)}{x_2 - x_1} \Rightarrow$$

$$y = \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1}.$$



7.12-сурет



7.13-сурет

(1) теңдеудің оң жақ бөлігін $h(x)$ арқылы белгілейік. Онда AB қиюшысының теңдеуі $y=h(x)$ түрінде жазылады. Осыдан $h(x_1)=f(x_1)$, $h(x_2)=f(x_2)$ болатынын көреміз.

1-анықтама. *$a<x_1<x_2<b$ болатындай кез келген x_1 , x_2 нүктелері мен әрбір $x_0\in(x_1;\ x_2)$ нүктесі үшін*

$$h(x_0)\ \leqslant\ f(x_0) \tag{2}$$

*теңсіздігі орындалса, $y=f\ (x)$ функциясының графигін $(a;\ b)$ аралығында **дөңес** (ойыстығы жоғары бағытталған) деп атаймыз. Ал*

$$h(x_0)\ \geqslant\ f(x_0) \tag{3}$$

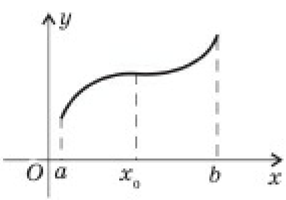
*теңсіздігі орындалса, $y=f(x)$ функциясының графигін $(a;\ b)$ аралығында **ойыс** (ойыстығы төмен бағытталған) деп атаймыз.*

Кейде функцияның графигі дөңес (ойыс) дегеннің орнына функцияның өзін дөңес (ойыс) деп атайды. Геометриялық тұрғыдан дөңес (ойыс) функциялар үшін оның графигі AB хордасынан жоғары (төмен) орналасады (7.12; 7.13-суреттер).

1-теорема (функцияның ойыс-дөңестігінің жеткілікті шарты). *Айталық, $y=f(x)$ функциясы $(a;\ b)$ аралығында екі рет дифференциалдансын. 1. Егер әрбір $x\in(a;\ b)$ үшін $f''(x)<0$ болса, функция $(a;\ b)$ аралығында дөңес болады. 2. Егер әрбір $x\in(a;\ b)$ үшін $f''(x)>0$ болса, онда функция $(a;\ b)$ аралығында ойыс болады.*

Теореманы дәлелдеусіз келтіреміз.

Бұл теорема функцияның ойыс-дөңестігі үшін жеткілікті, бірақ қажетті емес. Мысалы, $y=x^4$ функциясы барлық сан өсінде ойыс болғанымен, $y''=12x^2$ туындысы $x=0$ нүктесінде нөлге тең.



7.14-сурет

2-анықтама. *$h(x)-f(x)$ айырымының таңбасы* $(a;\ x_0)$ және $(x_0;\ b)$ аралығында *әртүрлі болса, мұндағы $x_0\in(a;\ b)$, x_0 нүктесі $y=f(x)$ функциясының **иілу нүктесі** деп аталады* (7.14-сурет).

Сонымен, осы анықтамадан иілу нүктесі функцияның дөңес және ойыс бөліктерінің шегарасы болатынын көреміз.

2-теорема (иілу нүктесінің қажетті шарты). *Айталық, $y=f(x)$ функциясының x_0 нүктесінің маңында екінші ретті үздіксіз туындысы бар болсын. Егер x_0 функцияның иілу нүктесі болса, онда $f''(x_0)=0$.*

Кері жорып, $f''(x_0)\neq 0$ болсын делік. $f''(x_0)>0$ деп алайық. $f''(x)$ туындысы x_0-дің маңында үздіксіз болғандықтан, екінші ретті туынды бұл нүктенің қандай да бір аймағында өз таңбасын сақтайды. Осы аймақта $f''(x_0)>0$.

1-теорема бойынша x_0-дің осы аталған аймағында $h(x)-f(x)>0$. Осы айырым x_0 нүктесінің аймағында өз таңбасын өзгертпейді. Бұл x_0-дің иілу нүктесі болатындығына қайшы. Алынған қайшылық теореманы толық дәлелдейді.

Дәлелденген теорема иілу нүктесінің тек қажетті шарты ғана. Бірақ жеткілікті емес. Мысалы, $y=x^4$ функциясы барлық сан өсінде ойыс болғанымен, $y''=12x^2$ туындысы $x=0$ нүктесінде нөлге тең. Дегенмен, $x=0$ нүктесі берілген функцияның иілу нүктесі болмайды.

3-теорема (иілу нүктесінің жеткілікті шарты). *Егер $y=f(x)$ функциясы $(a;\, b)$ аралығында екі рет дифференциалданса және $x\in(a;\, b)$ нүктесінің оң және сол жақ бөліктерінде $f''(x)$-тің таңбасы әртүрлі болса, онда x_0 нүктесі $y=f(x)$ функциясының иілу нүктесі болады.*

Айталық, $a<x_1<x_0<x_2<b$ және $f''(x)>0,\ \forall x\in(x_1;x_0)$ және $f''(x)<0,\ \forall x\in(x_0;x_2)$ болсын. 1-теоремаға сәйкес функция $(x_1;\ x_0)$ аралығында ойыс, $(x_0;\ x_2)$ аралығында дөңес. Демек, x_0 — функцияның ойыс және дөңес аралықтарының шегарасы. Онда анықтама бойынша x_0 — иілу нүктесі. Басқа жағдайда да теорема осы сияқты дәлелденеді.

1-мысал. 1) $y=x^2+2x$; 2) $y=x^3+3x^2-2x+7$ функциясының ойыс-дөңес аралықтары мен иілу нүктелерін табу керек.

1) $y'=2x+2$ және $y''=2>0\ \ \forall x\in(-\infty;\ +\infty)$ болғандықтан, функция бүкіл сан өсінде ойыс (ойыстығы төмен бағытталған) және иілу нүктелері жоқ.

2) $y'=3x^2+6x-2$ және $y''=6x+6=0\Rightarrow x=-1$. Егер $x<-1$ болса, онда $y''<0$ және $x>-1$ болса, $y''>0$. Сондықтан, функция $(-\infty;-1)$ аралығында дөңес, $(-1;+\infty)$ аралығында ойыс және $x=1$ — иілу нүктесі.

7.6.2. Функцияны зерттеп, графигін салудың толық жоспары

Біз мұнда функцияның ойыс-дөңес болатын аралықтарын, иілу нүктелерін, асимптоталарын анықтауды және шектер теориясын қолданып, функцияны зерттеу және оның графигін салудың 7.5.2-бабында қарастырылған жоспарын толықтырамыз. Бұл қосымша қасиеттер функцияны жан-жақты тереңірек зерттеп, оның графигін дәлірек салуға көмектеседі.

Жалпы, функцияны зерттеуде қатып қалған қағиданы ретімен орындау қажет емес. Бұл жұмыс біздің алға қойған мақсатымыз бен зерттелетін функцияның түріне байланысты. Дегенмен, зерттеу жұмыстарын бір жүйеге келтіріп, функцияның графигін салуды жеңілдету үшін оны белгілі бір жоспарға сүйеніп орындаған тиімді. Сондықтан төмендегідей жұмыс жоспарын ұсынамыз:

1. Функцияның анықталу облысын тауып, егер бар болса, оның үзіліс нүктелерін анықтау;

2. Функцияның вертикаль және көлбеу асимптоталарын табу;

3. Функцияның тақ-жұптығын, периодтылығын анықтау;

4. Функцияның координаталар өстерімен қиылысу нүктелерін табу;

5. Функцияның бірінші және екінші ретті туындыларын анықтап, олардың нөлге тең болатын нүктелерін және бұл туындылардың анықталмайтын нүктелерін табу;

6. Бірінші және екінші ретті туындылардың таңбаларын зерттеп, оның өсу-кему аралықтарын, ойыс-дөңес аралықтарын, экстремумдарын, иілу нүктелерін және осы нүктелердегі функцияның мәндерін (жуықтап болса да) табу;

7. Қажет болса, функция графигіне тиісті тағы бірнеше нүктенің координаталарын тауып, анықталған мәліметтерді кестеге толтырған тиімді. Соңында жоспарға сәйкес анықталған мәліметтер мен кесте бойынша функцияның графигін салу.

Енді функцияны зерттеп, оның графигін салуға бірер мысалдар қарастырайық.

2-мысал. $y=0,1x^4-1,3x^2+3,6$ функциясының графигін салу қажет.

1. Функция бүкіл сан өсінде анықталған: $D(f)=(-\infty;\ +\infty)$ және үзіліс нүктелері жоқ.

2. Функцияның үзіліс нүктелері жоқ болғандықтан, оның вертикаль асимптоталары, көлбеу асимптоталары да жоқ, өйткені $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$. Сонымен қатар функцияның шексіздіктердегі ұмтылатын мәндері мынадай:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(0,1x^4-1,3x^2+3,6\right)=+\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(0,1x^4-1,3x^2+3,6\right)=+\infty.$$

3. $f(-x)=0,1(-x)^4-1,3(-x)^2+3,6=0,1x^4-1,3x^2+3,6=f(x)$ — функция жұп, бірақ периодсыз.

4. Ox өсімен қиылысу нүктесі: $y=0\Rightarrow 0,1x^4-1,3x^2+3,6=0 \Rightarrow x^4-13x^2+36=0 \Rightarrow x^2=z \Rightarrow z^2-13z+36=0 \Rightarrow z_1=4,\ z_2=9$. Онда $x_{1,2}=\pm 2$ және $x_{3,4}=\pm 3$. Функцияның графигі Ox өсін төрт нүктеде қиып өтеді: $M_1(-3;\ 0)$, $M_2(-2;\ 0)$, $M_3(2;\ 0)$, $M_4(3;\ 0)$. Oy өсімен қиылысу нүктесі: $x=0\Rightarrow y=\dfrac{36}{10}=3,6$. Oy өсімен $N(0;\ 3,6)$ нүктесінде қиылысады.

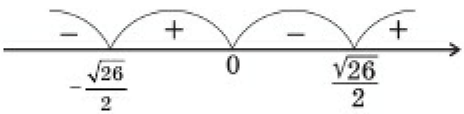
5. Функцияның бірінші ретті туындысы: $y'=0,1\cdot 4x^3-1,3\cdot 2x=0,2x\,(2x^2-13)=0\Rightarrow x_1=0$,

$$x_{2/3}=\pm\frac{\sqrt{26}}{2} \text{ және } y'=0,4x\left(x-\frac{\sqrt{26}}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{26}}{2}\right).$$

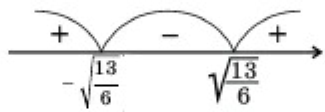
Функцияның екінші ретті туындысы:

$$y''=1,2x^2-2,6=1,2\left(x-\sqrt{\frac{13}{6}}\right)\left(x+\sqrt{\frac{13}{6}}\right)\Rightarrow y''=0, \text{ егер } x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{13}{6}}.$$

6. Функцияның бірінші және екінші ретті туындыларының таңбаларын интервалдар әдісімен анықтаған қолайлы. 7.15-суретте y'-тің таңбалары, 7.16-суретте y''-тің таңбалары көрсетілген.



7.15-сурет



7.16-сурет

Функция $\left(-\infty;-\dfrac{\sqrt{26}}{2}\right)\cup\left(0;\dfrac{\sqrt{26}}{2}\right)$ жиынында кемиді,

$\left(-\dfrac{\sqrt{26}}{2};0\right)\cup\left(\dfrac{\sqrt{26}}{2};+\infty\right)$ жиынында өседі.

$x=-\dfrac{\sqrt{26}}{2}$ — минимум нүктесі: $f\left(-\dfrac{\sqrt{26}}{2}\right)=-0,625$;

$x=0$ — максимум нүктесі: $f(0)=3,6$;

$x=\dfrac{\sqrt{26}}{2}$ — минимум нүктесі: $f\left(\dfrac{\sqrt{26}}{2}\right)=-0,625$.

Функция $\left(-\infty;-\sqrt{\dfrac{13}{6}}\right)\cup\left(\sqrt{\dfrac{13}{6}};+\infty\right)$ жиынында ойыс,

$\left(-\sqrt{\frac{13}{6}};\sqrt{\frac{13}{6}}\right)$ аралығында дөңес. $x=\pm\sqrt{\frac{13}{6}}$ — иілу нүктелері:

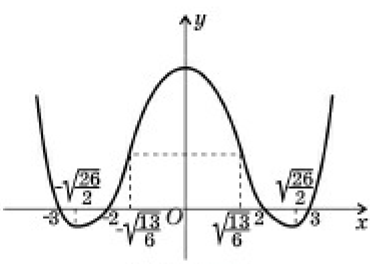
$$f\left(\pm\sqrt{\frac{13}{6}}\right)=\frac{451}{360}=1,25.$$

7. Жоғарыда анықталған мәліметтер бойынша төмендегі кестені толтырайық:

x	$-\infty$	$\left(-\infty;-\frac{\sqrt{26}}{2}\right)$	$-\frac{\sqrt{26}}{2}$	$\left(-\frac{\sqrt{26}}{2};-\sqrt{\frac{13}{6}}\right)$	$-\sqrt{\frac{13}{6}}$	$\left(-\sqrt{\frac{13}{6}};0\right)$	0
y	$+\infty$	$\searrow\cup$	min $-0,625$	$\nearrow\cup$	иілу нүкт. $\approx1,25$	$\nearrow\cap$	max 3,6
y'		$-$	0	$+$	$+$	$+$	0
y''		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$

x	$\left(0;\sqrt{\frac{13}{6}}\right)$	$\sqrt{\frac{13}{6}}$	$\left(\sqrt{\frac{13}{6}};\frac{\sqrt{26}}{2}\right)$	$\frac{\sqrt{26}}{2}$	$\left(\frac{\sqrt{26}}{2};+\infty\right)$	$+\infty$
y	$\searrow\cup$	иілу нүкт. $\approx1,25$	$\searrow\cup$	min $-0,625$	$\nearrow\cap$	$+\infty$
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
y''	$-$	0	$+$	$+$	$+$	

Енді кестедегі мәліметтер бойынша функцияның графигін саламыз (7.17-сурет).



7.17-сурет

3-мысал. $y=(x+1)^3\sqrt[3]{x^2}$ функциясының графигін салу керек.

1. $D(f)=(-\infty;+\infty)$. Үзіліс нүктелері жоқ.

2. Асимптоталары да жоқ.

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty;\ \lim_{x\to\infty}f(x)=+\infty.$$

3. Жалпы жағдайдағы функция тақ та, жұп та емес; периодсыз.

4. Ox: $y=0 \Rightarrow (x+1)^3\sqrt[3]{x^2}=0 \Rightarrow x_1=-1, x_2=0$. Функция Ox өсімен $(-1; 0)$ және $(0; 0)$ нүктелерінде қиылысады. Oy өсімен де $(0; 0)$ нүктесінде қиылысады.

5. $y'=\dfrac{(x+1)^2(11x+2)}{3\sqrt[3]{x}} \Rightarrow$ $x=0$ нүктесінде y' анықталмайды және $x_1=-1$, $x_2=-\dfrac{2}{11} \Rightarrow$ $y'=0$ теңдігі орындалады, -1; $-\dfrac{2}{11}$; 0 — стационар нүктелер.

$$y''=\frac{2(x+1)(44x^2+16x-1)}{9x\sqrt[3]{x}} \Rightarrow x_1=-1,$$

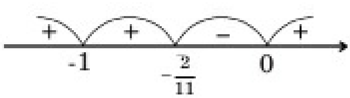
$x_{2/3}=\dfrac{-4\pm\sqrt{27}}{22}$, $\left(x_2=-\dfrac{9}{22}; x_3=\dfrac{1}{22}\right) \Rightarrow y''=0$ теңдігі орындалады.

$x=0$ нүктесінде y'' анықталмайды.

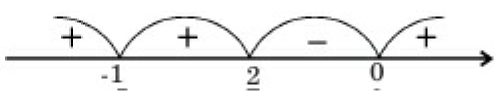
6. y' және y''-тың таңбалары 7.18-суретте және 7.19-суретте кескінделген. Функция $\left(-\infty; -\dfrac{2}{11}\right)\cup(0; +\infty)$ жиынында өседі, $\left(-\dfrac{2}{11}; 0\right)$ аралығында кемиді.

$x=-1$ нүктесінде экстремум жоқ; $x=-\dfrac{2}{11}$ — максимум нүктесі, $f\left(-\dfrac{2}{11}\right)=0{,}18$; $x=0$ — минимум нүктесі, $f(0)=0$. y''-тың таңбасы: $(-\infty; -1)\cup(x_2; 0)\cup(0; x_3)$ жиынында функция дөңес, $(-1; x_2)\cup(x_3; +\infty)$ жиынында ойыс болады.

$x_1=-1$, $x_2=\dfrac{-4-\sqrt{27}}{22}=-\dfrac{9}{22}$; $x_3=\dfrac{-4+\sqrt{27}}{22}=\dfrac{1}{22}$ — иілу нүктелері: $f(-1)=0$; $f(x_2)\approx 0{,}114$; $f(x_3)\approx 0{,}146$.



7.18-сурет



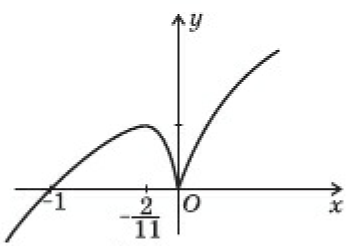
7.19-сурет

Бұл мысалдан функцияның ілу нүктелері мен оның ойыс немесе дөңес болуының маңыздылығы айқын көрінеді. Шынында да, егер функцияның графигін екінші ретті туындының көмегінсіз салсақ, 7.20-суретте бейнеленген графикті алар едік. Ал екінші ретті туындыны пайдаланып, функцияның ілу нүктелері мен оның ойыс-дөңестігін ескерсек, 7.21-суретте бейнеленген графикті аламыз.

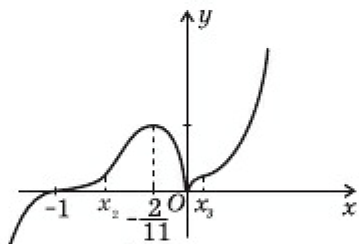
7. Жоғарыда анықталған мәліметтерді төмендегі кестеге толтырайық:

x	$-\infty$	$(-\infty;\,-1)$	-1	$(-1;\,x_2)$	x_2	$\left(x_2;-\dfrac{2}{11}\right)$	$-\frac{2}{11}$
y	$-\infty$	$\nearrow\cap$	ілу нүктесі 0	$\nearrow\cup$	ілу нүктесі ≈0,114	$\nearrow\cap$	max ≈ 0,18
y'		+	0	+	+	+	0
y''		–	0	+	0	–	–

x	$\left(-\dfrac{2}{11};0\right)$	0	$(0;\,x_3)$	x_3	$(x_3;\,+\infty)$	$+\infty$
y	$\searrow\cap$	min 0	$\nearrow\cap$	ілу нүктесі ≈0,146	$\nearrow\cup$	$+\infty$
y'	–	жоқ	+	+	+	
y''	–	жоқ	–	0	+	



7.20-сурет



7.21-сурет

4-мысал. $y = \dfrac{x^2 - 4}{x - 1}$ функциясының графигін салу қажет.

1. $x \neq 1$ болғандықтан, берілген функцияның анықталу облысы — $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$ жиыны.

2. $x = 1$— функцияның үзіліс нүктесі. Сондықтан осы нүктедегі

функцияның $f(1-0)$ және $f(1+0)$ біржақты шектерін анықтайық:

$$f(1-0)=\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2-4}{x-1}=+\infty;\qquad f(1+0)=\lim_{x\to 1+0}\frac{x^2-4}{x-1}=-\infty,$$

$x=1$ түзуі — функция графигінің вертикаль асимптотасы.

Енді функцияның көлбеу асимптотасын (егер ол бар болса) анықтайық: $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-4}{x(x-1)}=1;$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2-4}{x-1}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-4}{x-1}=1.$$

$x\to+\infty$ ұмтылғанда $y=x+1$ түзуі көлбеу асимптота болады. Осы сияқты $x\to-\infty$ ұмтылғанда да $y=x+1$ түзуі көлбеу асимптота болатыны анықталады.

Енді функцияның шексіздіктердегі шектерін анықтайық:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-4}{x-1}=-\infty;\qquad \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4-4}{x-1}=+\infty.$$

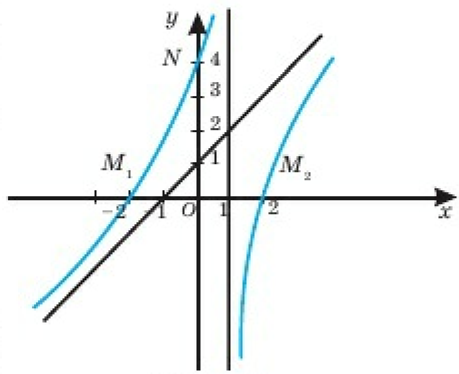
Сонымен қатар бұл алынған қатынастар функцияның горизонталь асимптотасының жоқ екенін де білдіреді.

3. Функция периодсыз және ЖЖФ.

4. Ox өсімен қиылысуы:

$$y=0\Rightarrow\frac{x^2-4}{x-1}=0\Rightarrow x=\pm 2.$$

Функцияның графигі Ox өсін $M_1(-2;0)$ және $M_2(2;0)$ нүктелерінде, Oy өсін $x=0$ мәнінде $y=4$ болғандықтан, $N(0;4)$ нүктесінде қиып өтеді (7.22-сурет).



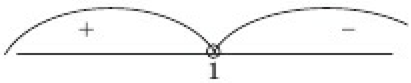
7.22-сурет

5. Бірінші және екінші ретті туындыларды анықтайық:

$$y'=\frac{2x(x-1)-(x^2-4)}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x+4}{(x-1)^2}\neq 0,$$

$$y''=\frac{(2x-2)(x-1)^2-2(x-1)(x^2-2x+4)}{(x-1)^4}=-\frac{2}{(x-1)^3}\neq 0.$$

7.23-сурет



7.24-сурет

6. Бірінші ретті туындының таңбасы тексерілген (7.23-сурет). Функцияның графигі анықталу облысында бірсарынды өспелі және экстремум нүктелері жоқ. Екінші ретті туындының таңбасы 7.24-суретте көрсетілген. $(-\infty;\ 1)$ аралығында функцияның графигі ойыс, $(1;\ +\infty)$ аралығында — дөңес.

$y'' \neq 0$ болғандықтан, функция графигінің иілу нүктелері жоқ.

7. Анықталған мәліметтерді кестеге жазамыз:

x	$-\infty$	$(-\infty;\ -1)$	$1-0$	1	$1+0$	$(1;\ +\infty)$	$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow \cup$	$+\infty$	анықталмаған	$-\infty$	$\nearrow \cap$	$+\infty$
y'		$+$		анықталмаған		$+$	
y''		$+$		анықталмаған		$-$	

1. $y=f(x)$ функциясының графигіне $A(x_1;\ f(x_1))$ және $B(x_2;\ f(x_2))$ нүктелерінде жүргізілген қиюшының теңдеуін жазыңдар.
2. Функцияның ойыс немесе дөңес болуына анықтама беріңдер.
3. Функцияның ойыс немесе дөңес болуының жеткілікті шартын тұжырымдап, анықтама беріңдер.
4. Қандай нүктені функцияның иілу нүктесі деп атайды?
5. Иілу нүктесінің қажетті шартын тұжырымдап, оны дәлелдеңдер.
6. Иілу нүктесінің жеткілікті шартын тұжырымдап, оны дәлелдеңдер.
7. Функцияны зерттеудің толық жоспарын тұжырымдап, оның мағынасын түсіндіріңдер. Бұл жоспардың 7.6. 2-пунктінде келтірілген жоспардан айырмашылығы қандай?

ЕСЕПТЕР

А

7.128–7.130-есептерде функцияның ойыс немесе дөңес болу аралықтары мен иілу нүктелерін табыңдар:

7.128. 1) $y=3x^2-x^3$; 3) $y=(x+3)^2$;
2) $y=2x^2-x^4$; 4) $y=x^4+4x^3-18x^2+x-17$.

7.129. 1) $y=\dfrac{3}{3+x^2}$; 2) $y=\dfrac{x-1}{2x+3}$; 3) $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$; 4) $y=\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^3}$.

7.130. 1) $y=\sin x$; 2) $y=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

7.131–7.139-есептерде берілген функцияны зерттеп, оның графигін салыңдар.

7.131. 1) $y=x(2-x)^2$; 3) $y=x^3-5x^2+8x$;
2) $y=0,2(x^3-6x^2+25)$; 4) $y=2x^3-3x+1$.

7.132. 1) $y=x^4-2x^2-3$; 3) $y=9x^5+3x^3$;
2) $y=2x^2-x^4$; 4) $y=0,5(x+1)^2(x-2)^3$.

B

7.133 1) $y=\dfrac{1}{x^2-1}$; 2) $y=\dfrac{2}{x^2+x+1}$; 3) $y=\dfrac{x}{x^2-1}$; 4) $y=\dfrac{x-1}{x^2-4}$.

7.134. 1) $y=x\sqrt{2-x}$; 3) $y=\sqrt[3]{x^3-3x}$;
2) $y=x^2\sqrt{1+x}$; 4) $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$.

7.135. 1) $y=\dfrac{1}{3}\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)$; 3) $y=x+\sin x$;
2) $y=2\cos\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)$; 4) $y=\cos 2x-x+1$.

7.136. 1) $y=\sin x-\cos 2x$; 3) $y=\sin^2 x+\cos x$;
2) $y=\sin x-\operatorname{tg} x$; 4) $y=\sin 2x+\cos x$.

C

7.137. 1) $y=\dfrac{1}{3+2\cos x}$; 3) $y=\operatorname{arctg} x+\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x}$;
2) $y=\dfrac{1+\cos x}{3-\sin x}$; 4) $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$.

7.138. 1) $y=x\sin x$; 2) $y=\operatorname{tg} x\cdot\cos x$; 3) $|y|=\cos x$.

7.139. 1) $y=x|x|+1$; 2) $y=\dfrac{|x-1|}{x-1}\cdot\left(x^2-4\right)$.

7.140. a_1, a_2, ..., a_n сандары берілген. x-тің қандай мәндерінде $f(x)=(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+...+(x-a_n)^2$ функциясы ең кіші мән қабылдайды?

7.141. $y=3x^5-10x^3+3x$ функциясы графигінің иілу нүктелері бір түзудің бойында жататынын көрсетіңдер.

Қайталауға арналған жаттығулар

7.142. Теңсіздіктің ең үлкен бүтін теріс шешімін табыңдар:

1) $x^3-4x<0$;   2) $\frac{x^2+x}{x-3}<0$.

7.143. Теңдеудің түбірлерін табыңдар:

1) $\sin^4 x-\cos^4 x=\sin 2x$;   2) $2\sin^2 x-\sqrt{3}\sin 2x=0$.

ТАРИХҚА ШОЛУ

XVII ғасырдан бастап туынды ұғымы математиканың ең маңызды ұғымдарының бірі болды. Функция ұғымының дамуына француз ғалымдары Р. Декарт (1596–1650) және П. Ферма (1601–1665) негізін қалаған координаталар әдісінің рөлі айтарлықтай болды. Декарттың «Геометриясында» және Ферма, Ньютон, Лейбниц еңбектерінде функция ұғымы негізінен интуитивтік сипатта болды және олар қандай да бір геометриялық немесе механикалық көзқарастармен тығыз байланысты еді: қисық нүктелерінің ординаталары — абсциссаға тәуелді функция; жүрілген жол және жылдамдық — уақытқа (t) тәуелді функция. Мәселен, Ньютон функцияны *флюэнта* (лат. fluere — ағын), туындыны *флюксия* деп атаған (осы fluere сөзінен). Ньютон анықталатын функцияларды әуелден-ақ үздіксіз деп қарастырған. «Функция» сөзін (лат. functio — орындау, атқару) 1673 жылдан бастап қандай да бір функцияны орындайтын шама ретінде Лейбниц қолдана бастады. Л. Эйлер (1707–1783) және И. Бернулли (1667–1748) функцияны оны қандай да бір аналитикалық өрнек, яғни айнымалыға аналитикалық амалдар қолдану арқылы құрастырылған өрнек ретінде қарастырды. Кезінде Л. Эйлер функцияға бұдан да жалпылау көзқарас қалыптастырды: ол функцияны бір айнымалының екінші айнымалы шамаға тәуелділігі ретінде қолданды. Бұл көзқарас кейінірек Н. И. Лобачевский (1792–1856), неміс ғалымы П. Дирихле (1805–1859) және өзге ғалымдардың еңбектерінде дамытылып, жалғасын тапты. Нәтижесінде функция сан жиындарының арасында орнатылған сәйкестік түрінде қарастырыла бастады.

Шек ұғымының пайда болуы қисық сызықты фигуралардың аудандары және қисық беттермен шектелген денелердің көлемдерін анықтаумен тығыз байланысты. Ежелгі грек математигі Евдокс (б.з.б. IV ғасыр) шекке көшу тәсілдерін қолдана білген. XVII ғасырда Евдокс тәсілі «таусысу» (аяқтау) тәсілі деп аталған және оны Евклид, Архимед сияқты ежелгі ғалымдар қолданған. Өзінің осы тәсілін пайдаланып Евдокс пирамиданың көлемі табаны мен биіктігі пирамиданың табаны мен биіктігіне тең призма көлемінің $\frac{1}{3}$ бөлігіне тең болатынын көрсеткен. Евдокстың замандасы әрі оқушысы Диностратр, өз ұстазының тәсілін қолданып, қазіргі уақытта $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ түрінде жазылатын I тамаша шекті тапқан десе де болады.

Айнымалылар мен шексіз аз шамалар жөніндегі сұрақтар ежелгі және орта ғасыр ғалымдарының көптеген еңбектерінде айтарлықтай орын алады. XVI және XVII ғасырдың екінші жартысында Европада Архимед шығармалары кеңінен тараған еді. Г. Галилей, И. Кеплер, Б. Кавальери, А. Таке және өзге ғалымдардың еңбектерінде геометриядағы шексіздік идеялары қолданылған. Осы ғасырларда Ферма, Паскаль, Валлис, Ньютон, Лейбниц сынды ғалымдардың еңбектері жарық көре бастады және бұл еңбектер туынды, интеграл сияқты жаңа маңызды ұғымдардың қалыптасуына зор ықпал етіп, шексіз аз шамаларды есептеу тәсілдері пайда болды. «Шек» ұғымын Ньютон енгізді (lim лат. limes *шегара*, шек — қысқартылған символ). Мысалы, Δx-ті шексіз кішірейтіп, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$-ті «$f'(x_0)$ шегіне» ұмтылдырамыз.

«Туынды» терминін Ж. Лагранж (1736–1813) енгізген. Туынды — француздың derivee сөзінің дәлме-дәл аудармасы. Лагранж туындыны y', f' арқылы, Г. Лейбниц (1646–1716) $\frac{df}{dx}$ арқылы белгілеуді ұсынған.

Сонымен, дифференциалдық есептеулер теориясын XVII ғасыр соңында И. Ньютон және Г. Лейбниц ашқан деп есептеледі. Ньютон дифференциалдық есептеулер теориясына, негізінен механика есептерін шешу барысында, Лейбниц, геометрия есептерін шешу арқылы келген.

Егер анализдің әрі қарай дамуы жөнінде айтсақ, алдымен Я. Бернулли, И. Бернулли, А. Лопиталь сынды оқымыстыларды атау қажет. Бұл салада Ж. Лагранж, Л. Эйлер, К. Гаусс сияқты атақты ғалымдар да қомақты нәтижелер алған және олардың еңбектері анализ негіздерін ұғынуда маңызды орын алды. Анализдің іргетасын XIX ғасырдың 20 жылдарында француз математигі О. Коши (1789–1857) қалап, осы күні қолданылып жүрген шек ұғымының анықтамасын «ε–δ» түрінде берді.

8-бөлім. КЕЗДЕЙСОҚ ШАМАЛАР

8.1. Кездейсоқ шамалар және олардың сандық сипаттамалары
8.2. Дискретті кездейсоқ шамалардың кейбір түрлері

8.1. Кездейсоқ шамалар және олардың сандық сипаттамалары

8.1.1. Кездейсоқ шамалар

Кездейсоқ шама ұғымы ықтималдықтар теориясының ең негізгі ұғымдарының бірі болып табылады. Төменгі сыныптарда ықтималдықтар теориясының алғашқы ұғымдарынан бастап қарастырылған кездейсоқ оқиғалардың көпшілігі белгілі бір сандар жиынынан мәндер қабылдайтынын көрдік. Мысалы, ойын сүйегін тастағанда 1, 2, 3, 4, 5 және 6 сандарының бірі түсуі мүмкін. Мұнда орындалатын кездейсоқ оқиға осы сандардың бірімен өрнектеледі және ойын сүйегі қандай сан көрсеткішімен түсетінін болжау мүмкін емес.

Осы сияқты, белгілі бір уақыт аралығында жедел жәрдем бекетіне келіп түскен шақырулар саны, бір күнгі мектепке кешігіп келген оқушылар саны, белгілі бір жер теліміне себілген дәндердің өнімділік көрсеткіші және т.с.с. кездейсоқ шамалар болады.

Сонымен, белгілі бір сынаққа (тәжірибеге) байланысты *кездейсоқ шама* деп, осы сынақтың әрбір қайталануында қандай да бір сан мәніне ие болатын және алдын ала қандай сан мәні орындалатыны белгісіз шаманы айтады. Басқаша айтқанда, кездейсоқ шама деп $U=\{A_1;\ A_2;\ \ldots;\ A_n\}$ элементар оқиғалар кеңістігінде анықталған $X=X(A_i)$, $i=1,2,\ \ldots,\ n$ сан функциясының мәнін айтады. Кездейсоқ шамаларды латын әліпбиінің үлкен X, Y, Z, ... әріптерімен, ал кездейсоқ шаманың элементар оқиғалардағы мәндерін кіші x, y, z, ... әріптері арқылы белгілейді.

Жалпы, екі түрлі кездейсоқ шамаларды қарастырады: үздіксіз кездейсоқ шамалар және дискретті (үзікті) кездейсоқ шамалар. Біз мұнда тек дискретті кездейсоқ шамаларды қарастырамыз.

X кездейсоқ шамасы x_1, x_2, ..., x_n, ... мәндерін p_1, p_2, ..., p_n, ... ықтималдығымен қабылдаса, X *дискретті кездейсоқ шама* деп аталады. Дискретті кездейсоқ шамалар тек қана оқшауланған мәндер қабылдайды.

X	x_1	x_2	...	x_n	...
P	p_1	p_2	...	p_n	...

түріндегі кестені X кездейсоқ шамасының *үлестірімділік қатары* (*заңы*) деп атайды. Барлық элементар оқиғалар ықтималдықтарының қосындысы 1-ге тең болғандықтан,

$$p_1+p_2+\ldots+p_n+\ldots=1$$

теңдігі орындалуы қажет. Мысалы, ойын сүйегін тастағандағы кездейсоқ шаманың үлестірімділік қатары былай жазылады:

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

1-мысал. Қорапта 5 ақ және 10 қызыл түсті шар бар. X кездейсоқ шамасы қораптан кездейсоқ алынған шар ақ түсті болса, 1-ге, қызыл түсті болса, 0-ге тең. Осы кездейсоқ шаманың үлестірімділік қатарын жазу керек.

Кездейсоқ шаманың үлестірімділік заңын жазу үшін, біріншіден, оның барлық қабылдайтын мәндерін білу керек және екіншіден, осы мәндердің әрқайсысын қандай ықтималдықпен қабылдайтынын анықтау қажет. Біздің жағдайда X кездейсоқ шамасы екі түрлі мән қабылдайды: 0, егер қораптан алынған шар қызыл (ақ түсті емес) болса (алынған ақ түсті шарлар саны 0-ге тең); 1, егер қораптан ақ шар алынса (алынған ақ түсті шарлар саны 1-ге тең). Қораптан қызыл түсті шар (ақ емес) алынуы ықтималдығы $P(0)=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$-ке тең, Ақ түсті шардың алыну ықтималдығы $P(1)=1-P(0)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$ тең. Олай болса, X кездейсоқ шамасының үлестірімділік заңы былай жазылады:

X	0	1
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

8.1.2. Кездейсоқ шамалардың сандық сипаттамалары

Сонымен, үлестірімділік қатары кездейсоқ шаманы толық сипаттайтынын көрдік. Дегенмен, кейбір жағдайларда кездейсоқ шаманың үлестірімділік заңын толық білмей-ақ, оның кейбір, бізге қажет ерекшеліктерін сипаттайтын сандарды анықтаумен шектелсе, жеткілікті. Осындай сан мәндерін кездейсоқ шаманың *сандық сипаттамалары* деп атайды.

Сандық сипаттамалар арасындағы ең маңыздысы — кездейсоқ шаманың математикалық үміті (орта мәні) болып табылады.

Анықтама. *Үлестірімділік қатары*

X	x_1	x_2	...	x_n	...
P	p_1	p_2	...	p_n	...

(1)

кестесімен анықталатын X кездейсоқ шамасы үшін

$$M(X)=x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_np_n+\ldots \qquad (2)$$

санын оның ***математикалық үміті (орта мәні)*** деп атайды.

Сонымен, анықтама бойынша сынақты көп рет қайталағанда X кездейсоқ шамасының қабылдаған мәндерінің орташа мәні $M(X)$ саны маңында болады.

Математикалық үміт берілген кездейсоқ шаманы толық сипаттай алмайды. Мысалы,

X	$-0{,}01$	$0{,}02$
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

және

Y	-40	40
P	$0{,}5$	$0{,}5$

кестелерімен берілген X және Y кездейсоқ шамаларының математикалық үміттері тең:

$$M(X)=-0{,}01\cdot\frac{2}{3}+0{,}02\cdot\frac{1}{3}=0 \text{ және } M(Y)=-40\cdot0{,}5+40\cdot0{,}5=0.$$

Десек те, X және Y кездейсоқ шамалары бір-бірінен мүлде өзгеше кездейсоқ шамалар. X-тің мәндері математикалық үміт маңында орналасса, Y-тің мәндері шашыраңқы және орташа мәннен алшақ жатады. Сондықтан кездейсоқ шама мәндерінің оның математикалық үмітінен қаншалықты «шашыраңқы» орналасқандығын сипаттайтын сандық сипаттамалар қарастырылады.

$\overset{0}{X}=X-M(X)$ кездейсоқ шамасын X кездейсоқ шамасының ***математикалық үміттен ауытқуы*** деп атайды.

$$D(X)=M\left[\left(X-M(X)\right)^2\right]=M\left[\left(\overset{0}{X}\right)^2\right] \qquad (3)$$

санын X кездейсоқ шамасының ***дисперсиясы*** деп атайды. Дисперсия — ауытқу квадратының математикалық үміті.

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)} \qquad (4)$$

саны X кездейсоқ шамасының *орташа квадраттық ауытқуы* деп аталады. Сонымен, (3), (4) формулаларымен анықталатын дисперсия мен орташа квадраттық ауытқулар X кездейсоқ шамасы мәндерінің $M(X)$-пен салыстырғанда «шашыраңқылығын» сипаттайды. Жалпы, іс жүзінде дисперсияны мына формуламен есептеген тиімді:

$$D(M)=M(X^2)-(M(X))^2. \qquad (5)$$

X кездейсоқ шамасы

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

, $p_1+p_2+...+p_n=1$

заңымен берілсе,

$$D(M)=x_1^2p_1+x_2^2p_2+...+x_n^2p_n-(x_1p_1+x_2p_2+...+x_np_n)^2. \quad (6)$$

(5) және (6) формулаларды дәлелдеусіз қабылдаймыз.

2-мысал. X кездейсоқ шамасы

X	-2	-1	0	1	2
P	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

заңдылығымен берілген. Кездейсоқ шаманың а) математикалық үмітін; ә) дисперсиясын; б) орташа квадраттық ауытқуын табу керек.

а) (2) формула бойынша

$$M(X)=(-2)\cdot 0{,}1+(-1)\cdot 0{,}2+0\cdot 0{,}3+1\cdot 0{,}3+2\cdot 0{,}1=0{,}1.$$

ә) Алдымен $M(X^2)$-ты анықтап алу керек:

$$M(X^2)=(-2)^2\cdot 0{,}1+(-1)^2\cdot 0{,}2+0^2\cdot 0{,}3+1^2\cdot 0{,}3+2^2\cdot 0{,}1=1{,}3.$$

Енді (5) формуланы қолданамыз:

$$D(X)=1{,}3-(0{,}1)^2=1{,}29.$$

б) $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{1{,}29}=1{,}136$.

Жауабы: $M(X)=0{,}1$; $D(X)=1{,}29$; $\sigma(X)\approx 1{,}136$.

Кездейсоқ шаманың осы қарастырылған сандық сипаттамаларына, атап айтқанда, математикалық үміт, дисперсия және орташа квадраттық ауытқуларына қосымша төменгі сыныптарда кездейсоқ шаманың модасы мен медианасын қарастырдыңдар.

Мысалы, кездейсоқ шаманың ***модасы*** (M_o) *деп оның ықтималдығы ең үлкен мәнін айтады*, ал ***медиана*** деп

$$P(X<M_e)=P(X>M_e)=\frac{1}{2}$$

теңдігі көмегімен есептелетін M_e *санын айтады.*

Мысалы,

X	2	3	6	7	8	10
P_i	0,1	0,2	0,25	0,2	0,15	0,1
$\sum P_i$	0,10	0,30	0,55	0,75	0,90	1,0

заңдылығымен берілген X кездейсоқ шамасының модасы $M_0=6$, өйткені X-тің 6-ға тең мәні — кездейсоқ X шамасының ықтималдығы ең үлкені мәні. Медианасы $M_e=6$. Ол ықтималдықтар қосындысының 0,5-тен артық болған алғашқы мәні.

1. Кездейсоқ шама деп нені айтады? Мысал келтіріңдер.
2. Қандай кездейсоқ шамаларды дискретті кездейсоқ шамалар деп атайды?
3. Дискретті кездейсоқ шаманың үлестірімділік қатары (заңы) деп нені айтады?
4. Үлестірімділік қатардағы ықтималдықтардың қосындысы қандай болуы керек? Жауапты негізде.
5. Кездейсоқ шаманың математикалық үміті деп нені айтады? Оның мағынасы қандай?
6. Дисперсия және орташа квадраттық ауытқу деген не? Олардың мағыналары қандай?

ЕСЕПТЕР

А

8.1. Тиынды бір рет тастағанда оның «елтаңба» жағымен түсу санына тең болатын кездейсоқ шаманың үлестірімділік заңын жазыңдар.

8.2. Қалтада 4 қызыл түсті және 6 боялмаған асық бар. Қалтадан кездейсоқ бір асық алынды. X кездейсоқ шамасы алынған қызыл түсті асықтың санына тең болсын. X-тің үлестірімділік қатарын жазыңдар.

8.3. **8.1**-есептегі кездейсоқ шаманың математикалық үмітін табыңдар.

8.4. **8.2**-есепте берілген кездейсоқ шаманың дисперсиясы мен орташа квадраттық ауытқуын табыңдар.

8.5. X кездейсоқ шамасы

X	−1	1	2
P	0,3	0,5	0,2

заңымен үлестірілген, $M(X)$, $D(X)$ және $\sigma(X)$-ті табыңдар.

8.6.

X	3	5	7	9
P	0,4	0,4	0,2	0,1

заңымен берілген X кездейсоқ шамасының орташа квадраттық ауытқуын табыңдар.

8.7. X кездейсоқ шамасы

X	–2	–1	0	2
P	0,2	0,3	P_3	0,1

қатарымен берілген. P_3 пен $D(X)$-ті табыңдар.

8.8. X кездейсоқ шамасы

X	1	x_2	5
P	0,4	0,1	0,5

заңдылығымен үлестірілген. $M(X)=3,2$ деп алып, x_2-ні табыңдар.

B

8.9. Тиын екі рет тасталды. Оның «елтаңба» жағымен түсу санына тең кездейсоқ шаманың үлестірімділік қатарын жазыңдар.

8.10. Ойын сүйегі екі рет тасталды. Алты ұпайының түсу санына тең кездейсоқ шаманың үлестірімділік заңын жазыңдар.

8.11. 8.9-есептегі кездейсоқ шаманың математикалық үмітін табыңдар.

8.12. 8.10-есептегі кездейсоқ шаманың дисперсиясын табыңдар.

8.13. Бес оғы бар мергеннің бір рет атқанда нысанаға тигізу ықтималдығы 0,6-ға тең. Мерген нысанаға бір рет оқ тигенше атады немесе барлық оқтары біткенше атады. X кездейсоқ шамасы атылған оқтар санына тең деп алып, а) X-тің үлестірімділік заңын; ә) $M(X)$-ті; б) $D(X)$-ті; в) $\sigma(X)$-ті табыңдар.

8.14. Жазылған 25 бақылау жұмысының бесеуіне «бестік» баға қойылған. Осы жұмыстар арасынан кездейсоқ үш жұмыс алынды. X кездейсоқ шамасы алынған үш жұмыс ішіндегі «5»-ке бағаланған жұмыстар санына тең. X-тің үлестірімділік заңын жазыңдар.

8.15. Алдыңғы есеп шартында берілген X кездейсоқ шамасының дисперсиясын табыңдар.

8.16. Төмендегі кестемен берілген X кездейсоқ шамасының математикалық үмітін, дисперсиясын, орташа квадраттық ауытқуын және q-ді табыңдар:

а)

X	-2	-3	1	2
P	0,1	q	0,4	0,2

ә)

X	1	2	5	7
P	q	0,2	0,3	0,3

8.17. y-тің қандай мәндерінде

X	0	y	4	6
P	0,2	0,1	0,3	0,4

заңдылығымен үлестірілген X кездейсоқ шамасы үшін а) $M(X)=3{,}8$; ә) $D(X)=5{,}16$ теңдігі орындалады?

C

8.18.

X	0	1	2	...	n
P	p_0	p_1	p_2	...	p_n

заңдылығымен үлестірілген X кездейсоқ шамасы берілген. Мұндағы $P_m = C_n^m\, p^m\, q^{n-m}$, $m=0, 1, 2, \ldots, n$, $q=1-p$, $0<p<1$. X кездейсоқ шамасын *биномдық заңмен* үлестірілген деп айтады. $D(X)$ пен $M(X)$-ті табыңдар.

8.19.

X	1	2	...	n	...
P	p_1	p_2	...	p_n	...

заңдылығымен үлестірілген X кездейсоқ шамасын *геометриялық заңмен* үлестірілген деп айтады. Мұнда $P_n = q^{n-1}\cdot p$, $q=1-p$, $0<p<1$. $M(X)$-ті табыңдар.

8.20. Тиын 5 рет тасталды. **8.18**-есептің көмегімен тиынның «елтаңба» жағымен түсу санына тең X кездейсоқ шамасының математикалық үмітін табыңдар.

8.21. Мергеннің оқ атқанда бірден нысанаға тигізу ықтималдығы 0,6-ға тең. Мерген нысанаға оқ тигенше ата береді. X кездейсоқ шамасы атылған оқтар санына тең. $D(X)$ пен $M(X)$-ті табыңдар (**8.19**-есепті пайдаланыңдар).

Қайталауға арналған жаттығулар

8.22. Екі оқушыға 6 кітапты неше тәсілмен а) үлестіріп; ә) тең бөліп беруге болады?

8.23. 10%-дық қышқылдың 4 литріне су қосылып, 4%-дық қышқыл алынды. Қоспаға неше литр су қосылды?

8.24. $y=\sqrt{2}\sin x$ функциясына $x=\dfrac{\pi}{4}$ нүктесінде жүргізілген жанаманың теңдеуін жазыңдар.

8.2. Дискретті кездейсоқ шамалардың кейбір түрлері

Кездейсоқ шаманың қабылдайтын мәндерінің саны шектеулі болса немесе тізбек түрінде жазылса, оны ***дискретті кездейсоқ шама*** деп атайды. Дискретті кездейсоқ шама — бөлек-бөлек оқшауланған мәндер қабылдайтын кездейсоқ шама. *Кездейсоқ шаманың мәндер жиыны қайсыбір сан аралығымен беттесе, оны* ***үздіксіз кездейсоқ шама*** деп атайды. Мысалы, фермадағы сиырлар сүтінің майлылығы 3% бен 5% аралығында кез келген мәнді қабылдауы мүмкін және ол үздіксіз кездейсоқ шама.

1. Биномдық заңмен үлестірілген кездейсоқ шама.

X кездейсоқ шамасының мүмкін мәндері 0, 1, 2, ..., *n-ге тең болып, сәйкес ықтималдықтар* Бернулли формуласымен

$$p_k = P_n(k) = C_n^0 p^k q^{n-k},\ k = 0, 1, 2, \ldots, n;\ q = 1 - p \qquad (1)$$

түрінде анықталса, X кездейсоқ шамасын ***биномдық заңмен үлестірілген*** деп атайды. Бұл заңдылықтағы ықтималдықтар Ньютон биномындағы

$$(p + q)^n = C_n^n p^n + C_n^{n-1} p^{n-1} q + C_n^{n-2}\ p^{n-2} q^2 + \ldots$$

$$\ldots + C_n^0 p^k q^{n-k} + \ldots + C_n^0 q^n$$

әрбір қосылғышпен анықталатын болғандықтан, оны *биномдық заң* деп атаған. Сонымен, биномдық заң былай жазылады.

X	0	1	...	k	...	n
p_i	$C_n^0 q^n = q^n$	$C_n^1 pq^{n-1}$	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	$C_n^n p^n = p^n$

1-мысал Нысанаға тәуелсіз 4 рет оқ атылды және әр атқанда нысанаға тигізу ықтималдығы $p = 0{,}8$. а) нысанаға тиген оқтар санына тең X кездейсоқ шамасының (КШ) үлестірімділік заңын жазу керек; ә) $1 \leqslant X \leqslant 3$ және $X > 3$ оқиғаларының ықтималдықтарын табу керек.

а) кездейсоқ шаманың мүмкін мәндері X : 0, 1, 2, 3, 4. Оларға сәйкес ықтималдықтар Бернулли формуласы бойынша анықталады:

$$p_0 = P_4(0) = C_4^0 \cdot 0{,}8^0 \cdot 0{,}2^4 = 0{,}0016;$$

$$p_1 = P_4(1) = C_4^1 \cdot 0{,}8^1 \cdot 0{,}2^3 = 0{,}0256;$$

$$p_2 = P_4(2) = C_4^2 \cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^2 = 0{,}1536;$$

$p_3 = P_4(3) = C_4^3 \cdot 0{,}8^3 \cdot 0{,}2^1 = 0{,}4096;$

$p_4 = P_4(4) = C_4^4 \cdot 0{,}8^4 \cdot 0{,}2^0 = 0{,}4096.$

Сонымен, X кездейсоқ шамасының үлестірімділік заңы былай жазылады:

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,0016	0,0256	0,1536	0,4096	0,4096

ә) $P(1 \leqslant X \leqslant 3) = p_1 + p_2 + p_3 = 0{,}0256 + 0{,}1536 + 0{,}4096 = 0{,}5888$. $P(X > 3) = p_4 = 0{,}4096$.

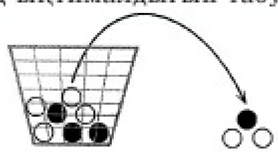
2. Гипергеометриялық заңмен үлестірілген кездейсоқ шама.

m, n, s, k натурал сандары беріліп, $k \leqslant m \leqslant s \leqslant n$ теңсіздіктері орындалсын. X кездейсоқ шамасының мүмкін мәндері 0, 1, 2, ..., m және сәйкес ықтималдықтар мына формуламен анықталса,

$$p_k = P(X = k) = \frac{C_m^k \cdot C_{n-m}^{s-k}}{C_n^s},\ k = 0, 1, 2, \ldots, m,$$

X кездейсоқ шамасын *гипергеометриялық заңмен үлестірілген* деп атайды.

2-мысал. Қорапта 4 ақ және 3 қызыл шар бар. Қораптан кездейсоқ 3 шар алынды. X кездейсоқ шамасы алынған ақ шарлар санына тең. Осы X кездейсоқ шамасының үлестірімділік заңын жазып, $X \geqslant 2$ оқиғасының ықтималдығын табу керек.



X кездейсоқ шамасының мүмкін мәндері: 0, 1, 2, 3. Оларға сәйкес p_0, p_1, p_2, p_3 ықтималдықтары классикалық тәсілмен анықталады:

$$p_0 = \frac{C_4^0 C_3^3}{C_7^3} = \frac{1}{35}; \qquad p_1 = \frac{C_4^1 C_3^2}{C_7^3} = \frac{12}{35};$$

$$p_2 = \frac{C_4^2 C_3^1}{C_7^3} = \frac{18}{35}; \qquad p_3 = \frac{C_4^3 C_3^0}{C_7^3} = \frac{4}{35}.$$

Онда сәйкес заңдылық былай жазылады:

x_i	0	1	2	3
p_i	1/35	12/35	18/35	4/35

және $P(X \geqslant 2) = p_2 + p_3 = \frac{18}{35} + \frac{4}{35} = \frac{22}{35}$. Әрине, бұл X кездейсоқ шамасы гипергеометриялық заңмен үлестірілген.

3. Геометриялық заңмен үлестірілген кездейсоқ шама. Тәуелсіз сынақтың әрқайсысында A оқиғасы p ықтималдығымен орындалсын (онда $q = 1 - p$ ықтималдығымен орындалмайды) және бұл сынақ A оқиғасы орындалғанда ғана аяқталады. Сонымен, егер оқиға k-шы сынақта орындалса, онда алдыңғы $k - 1$ сынақтарда бұл оқиға орындалмаған. X кездейсоқ шамасы жүргізілген сынақтар санына тең болсын. Онда X кездейсоқ шамасының мүмкін мәндері натурал сандар жиыны болады:

$$X: 1, 2, 3, \ldots, k, \ldots$$

Ал сәйкес ықтималдықтар көбейту ережесі бойынша анықталады:

$$p_1 = p,\ p_2 = qp,\ p_3 = q^2p,\ \ldots,\ p_k = q^{k-1}p,\ \ldots . \qquad (2)$$

(2) сан тізбегі шексіз кемімелі геометриялық прогрессия болғандықтан, сәйкес X кездейсоқ шамасы *геометриялық заңмен* үлестірілген деп аталады және бұл заң былай жазылады:

x_i	1	2	3	...	k	...
p_i	p	qp	q^2p	...	$q^{k-2}p$	...

3-мысал. Ойын сүйегі алғаш рет алтылық ұпай түскенше тасталады. X кездейсоқ шамасы ойын сүйегінің тасталуы санына тең. Оның үлестірімділік заңы мен $X \leqslant 5$ оқиғасының ықтималдығын табу керек.

Алтылық n-рет тастағанда пайда болса, ықтималдықтарды көбейту ережесі бойынша мынаны анықтаймыз:

$$p_n = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6}.$$

Онда X кездейсоқ шамасының үлестірімділік заңы былай жазылады:

x_i	1	2	3	...	n	...
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$	$\left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6}$	...	$\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6}$	...

Осыдан $P(X \leqslant 5) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = 1/6\,(1 + (5/6) + (5/6)^2 + (5/6)^3 + (5/6)^4) \approx 0,596$.

1. Дискретті кездейсоқ шама деп нені айтады? Мысал келтіріңдер.
2. Үздіксіз кездейсоқ шама деп нені түсінесіңдер?
3. Қандай кездейсоқ шама биномдық заңмен үлестірілген деп аталады?
4. Қандай кездейсоқ шама гипергеометриялық заңмен үлестірілген деп аталады?
5. Қандай кездейсоқ шама геометриялық заңмен үлестірілген деп аталады?

ЕСЕПТЕР

A

8.25. 1) 8.1; 2) 8.2; 3) 8.9-есептерде берілген КШ (кездейсоқ шаманың) қандай заңмен үлестірілгенін анықтаңдар.

8.26. 1) 8.13; 2) 8.14; 3) 8.20; 4) 8.2-есептерде берілген КШ қандай заңмен үлестірілгенін анықтаңдар.

8.27.

X	-2	0	2	4
p	0,4	0,3	0,2	0,1

заңымен үлестірілген кездейсоқ шамасының математикалық үміті мен дисперсиясын табыңдар. Бұл КШ геометриялық заңдылықпен үлестірілуі мүмкін бе? Жауаптарыңды негіздеңдер.

8.28. Дискретті КШ үлестірімділік заңымен берілген:

X	0,3	0,6
p	0,2	0,8

КШ орташа квадраттық (стандартты) ауытқуын табыңдар.

8.29. Дискретті КШ үлестірімділік заңмен берілген:

X	0,1	0,4	0,6
p	0,2	0,3	0,5

КШ дисперсиясын анықтаңдар.

B

8.30—8.33-есептерде X кездейсоқ шамасы екі түрлі мән қабылдайды: x_1 және x_2, мұнда $x_1<x_2$. Бұл мәндерді КШ сәйкесінше p_1 және p_2 ықтималдықтарымен қабылдайды. Берілген мәліметтер бойынша КШ үлестірімділік заңын жазыңдар.

8.30. $x_1 = 1$, $p_2 = 0,3$, $M[X] = 1,3$.

8.31. $x_2 = 2,5$, $p_2 = 0,4$, $M[X] = 2,2$.

8.32. $x_1 = 3$, $p_1 = 0,5$, $M[X] = 4$.

8.33. $x_2 = 2$, $p_1 = 0,6$, $M[X] = 1,4$.

8.34. Қалтадағы 7 асықтың 4-уі боялған. Қалтадан кездейсоқ екі асық алынды. X кездейсоқ шамасы алынған асықтар арасындағы боялған асықтар санына тең. 1) X-тің үлестірімділік заңын; 2) $M[X]$ пен $D[X]$-ты; 3) $P(X > 1)$ ықтималдығын; 4) үлестірімділік заңының түрін (атауын) табу керек.

8.35. Атқанда бірден тигізу ықтималдығы 0,8-ге тең мерген нысанаға 4 рет оқ атты. X кездейсоқ шамасы нысанаға тиген оқтар санына тең. 1) X-тің үлестірімділік заңын; 2) $P(1 < X < 3)$ ықтималдығын; 3) $M[X]$ пен $D[X]$-ті; 4) үлестірімділік заңының түрін табыңдар.

8.36. X кездейсоқ шамасы үш тиын тасталғанда түскен «елтаңбалар» санына тең. 1) X-тың үлестірімділік заңын; 2) $P(X > 1)$ ықтималдығын; 3) $M[X]$ пен $D[X]$-ті; 4) үлестірімділік заңының түрін табыңдар.

8.37. Себетке допты бір лақтырғаннан дәл түсу ықтималдығы 0,4. Табу керек: 1) үш рет лақтырғанда доптың дәл түсу санына тең X-тің үлестірімділік заңын; 2) $P(1<X<2)$; 3) $M[X]$ пен $D[X]$-ті; 4) үлестірімділік заңының түрін.

C

8.38. 10 тетіктен құралған партияда 8 стандартты тетік бар. Осы партиядан кездейсоқ 2 тетік алынды. X кездейсоқ шамасы алынған тетіктер арасындағы стандартты тетіктер санына тең. а) X-тің үлестірімділік заңын; ә) $P(X < 1)$ ықтималдығын; б) $M[X]$ пен $D[X]$-ті табыңдар.

8.39. Қолдағы 5 кілттің біреуі ғана құлыпқа сәйкес келеді. X кездейсоқ шамасы құлыпты ашу үшін тексерілген кілттер санына тең. а) X-тің үлестірімділік заңын; ә) $P(2 < X < 4)$ ықтималдығын; б) $M[X]$ пен $D[X]$-ті табыңдар.

8.40. Бесеуі «бестікке» бағаланған 25 бақылау жұмысы арасынан кездейсоқ 3 жұмыс алынды. X кездейсоқ шамасы алынған жұмыстар арасындағы «бестікке» бағаланған жұмыстар санына тең.
1) X-тің үлестірімділік заңын; 2) $P(X > 0)$ ықтималдығын; 3) $M[X]$ пен $D[X]$-ті табыңдар.

8.41. Дискретті X кездейсоқ шамасы екі түрлі мән қабылдайды: x_1 және x_2 $(x_1 < x_2)$, $P(X = x_1) = p_1$, $P(X = x_2) = p_2$. Төмендегі мәліметтер бойынша X кездейсоқ шамасының үлестірімділік заңын жазыңдар:
1) $p_1 = 0,3$; $M[X] = 3,7$; $D[X] = 0,21$;
2) $p_2 = 0,4$; $M[X] = 3,4$; $D[X] = 0,24$.

8.42. 2 мерген нысанаға бір-бірден оқ атты. Бірінші мергеннің нысанаға тигізу ықтималдығы 0,5-ке, екіншісінікі 0,4-ке тең. X кездейсоқ шамасы нысанаға тиген оқтар санына тең. 1) X-тің үлестірімділік заңын; 2) $P(X > 1)$ ықтималдығын; 3) $M[X]$ пен $D[X]$-ті табыңдар.

8.43. Атқанда бірден тигізуі ықтималдығы 0,7-ге тең аңшы аңды оқ тигенше атады, бірақ ол небәрі екі оқ атып үлгереді. X кездейсоқ шамасы атылған оқтар санына тең. 1) X-тің үлестірімділік заңын; 2) $P(X < 2)$ ықтималдығын; 3) $M[X]$ пен $D[X]$-ты табыңдар.

8.44. Дискретті X кездейсоқ шамасы 5 баласы бар жанұядағы ұлдар санына тең. Ұл мен қыз баланың туу ықтималдықтары бірдей деп алып, 1) X-тің үлестірімділік заңын; 2) $P(2 \leqslant X \leqslant 3)$ ықтималдығын; 3) $M[X]$ пен $D[X]$-ты табыңдар.

Қайталауға арналған жаттығулар

8.45. Функцияның туындысын анықтаңдар:

1) $y = 1 - \dfrac{3}{2-x}$; 2) $y = x - \dfrac{4}{x^2}$;

3) $y = \arcsin(2x - 3)$; 4) $y = \dfrac{\sin x}{1 + \cos x}$.

8.46. Көбейткіштерге жіктеңдер:

1) $1 - \cos\varphi - \sin\dfrac{\varphi}{2}$; 2) $\sin\varphi - \sin 2\varphi$.

8.47. Қосындыны табыңдар:

1) $512 + 128 + \ldots + 2$; 2) $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{8\cdot 9}$.

ЕСЕПТЕРДІҢ ЖАУАПТАРЫ

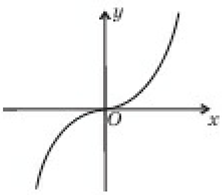
7–9-сыныптар материалдарын қайталауға арналған жаттығулар

0.4. 1) (1; 2); 3) (2; 0); (0; –2). **0.5.** 36. **0.6.** 2) (0; 1). **0.11.** 1) 5. 2) 2; 3) 2; 4) –1,5. **0.15.** 1) $\frac{1}{\cos\alpha}$; 2) 1; 3) 0; 4) $\cos\alpha$. **0.19.** 2) (4,5; 0), R = 4,5. **0.21.** 1) (1; 2), (2; 1); 2) (2; 2); 3) (±3; ∓1). **0.22.** 6 қаз және 3 ешкі. **0.23.** 2) (–0,5; 4]. **0.26.** 3) 2. **0.30.** –10. **0.34.** 1617. **0.36.** $p=2$, $q=-1$. **0.37.** 1) (2; –1), (–1; 2), (–1; –1). **0.38.** 4. **0.40.** 2) $\{3\}\cup(5;\ 7]$. **0.41.** 1) $-1\leqslant 1+2\cos x\leqslant 3$. **0.43.** 1) 2; 2) 2π. **0.44.** 1) $\cos^2\alpha$; 2) $\frac{1}{2}\sin 2\varphi$. **0.45.** 2) 2,5. **0.49.** $\frac{1}{3}$. **0.50.** 2) $2\sqrt{3}+3$.

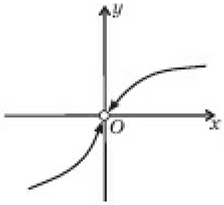
1-бөлім

1.1. $y=5x$. $D=(0; +\infty)$, $R=(0; +\infty)$. **1.5.** 1) және 3) функция болады, ал 2) функция емес. **1.9.** 1) $[-3; +\infty)$; 4) $[-3; 2)\cup(2; +\infty)$; 5) $(-3; +\infty)$. **1.10.** 1) $[2; +\infty)$; 2) $[2; +\infty)$. **1.13.** 2) $(-\infty; -1]\cup[1; 3)$; 5) $(-\infty; 0)\cup(0; +\infty)$. **1.21.** 1) Тең емес; 2) тең; 3) тең емес; 4) тең. **1.23.** $f(x)=\frac{x-1}{|x-1|}$. **1.27.** 1) $1\leqslant 4+3\cos\alpha\leqslant 7$; 2) $2\leqslant 3-\sin\alpha\leqslant 4$. **1.29.** 1) 1,5; 2) ±3; 3) 1; –3,5; 4) 1; $-\frac{4}{3}$; 5) –1; 0; 6) –1; 2; 8) –6; 9) –6; 1. **1.30.** 1) үздіксіз; 3) $x=\frac{1}{3}$ — үзіліс нүктесі; 7) $x=-1$; $x=-2$ — үзіліс нүктелері; 8) $x=-2$; $x=4$ — үзіліс нүктелері. **1.31.** 1) $(-\infty; +\infty)$-те өспелі; 5) $(-\infty; 0)$-де кемімелі; $(0; +\infty)$-те өспелі. **1.32.** 3) $(-\infty; 1)$-де кемімелі; $(1; +\infty)$-те өспелі; 6) $(-\infty; 1{,}5)$-те өспелі; $(1{,}5; +\infty)$-де кемімелі; **1.33.** 2) $y=ax^2$. **1.34.** 1) $x=1$ — минимум нүктесі; min $y=5$; 3) $x=-2$ — максимум нүктесі; max $y=3$. **1.35.** $f(4)=-1$; $f(2)=3$; $f(3)=0$; $f(5)=0$. 1) $f(2)=3$ — ең үлкен мәні; $f(3)=0$ — ең кіші мәні; 3) $f(5)=0$ — ең үлкен мәні; $f(4)=-1$ — ең кіші мәні; 4) $f(2)=3$ — ең үлкен мәні; $f(4)=-1$ — ең кіші мәні. **1.36.** 1) Жұп; 2) жұп; 4) тақ. **1.37.** 3) $(-\infty; 1)\cup(2; +\infty)$ — оң, (1; 2) — теріс аралығы; 6) (0; 6) — оң, $(-\infty; 0)\cup(6; +\infty)$ — теріс аралығы. **1.39.** 1) $(-\infty; 0)\cup(0; +\infty)$ — өспелі; 3) $[0; +\infty)$ — өспелі; 4) $[0; +\infty)$ — кемімелі; 6) $(0; +\infty)$ — өспелі, ал $(-\infty; 0)$-де кемімелі. **1.41.** 5) $(-\infty; -5)\cup(-5; +\infty)$ — анықталу облысы; $(-\infty; 2)\cup(2; +\infty)$ — мәндер облысы; $x=-2$ — нөлі; $x=-5$ — үзіліс нүктесі; функция $(-\infty; -5)\cup(-2; +\infty)$ аралығында оң мәндер, ал (–5; –2) аралығында теріс мәндер қабылдайды. **1.43.** 1) кемімелі; 2) өспелі; 3) кемімелі; 4) өспелі. **1.44.** 1) 0; 3; 2) $\frac{3\pm\sqrt{6}}{3}$; 3) 11; 4) 12; 5) 2; 6; 6) 0; –3; 7) 1; 8) –2; 0. **1.45.** $f(-2)=-1$; $f(0)=-1$; $f(0{,}5)=0{,}5$; $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$; $f(1)=1$;

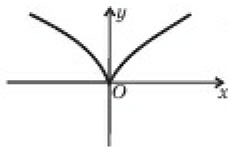
$f(4)=1$. **1.48.** 2) $[-3; +\infty)$; 4) $[-4; 4]$; 8) $(-\infty; +\infty)$; 9) $(-\infty; 1)\cup(1; 2)\cup(2; +\infty)$. **1.49.** 1) Жұп; 5) тақ. **1.50.** 2) Жұп; 6) тақ. **1.56.** 1) $f(x)=x\cdot|x|$ (1-сурет); 4) $f(x)=\frac{|x|}{x}\sqrt{|x|}$, (2-сурет); **1.57*.** 1) $f(x)=\sqrt{|x|}$, (3-сурет); 3) $f(x)=$ $=x^2-2|x|$ (4-сурет). **1.58.** (5-сурет). **1.59.** (6-сурет). **1.60.** (7-сурет). **1.65.** 2) 8-сурет. **1.66.** 2) 9-сурет; 4) 10-сурет. **1.67.** 1) 11-сурет. **1.68.** 3) 12-сурет. **1.69.** 3) 13-сурет; 4) 14-сурет. **1.71.** 1) $a_n=\frac{1}{n^2}$; 2) $a_n=3\cdot 2^{n-1}$.



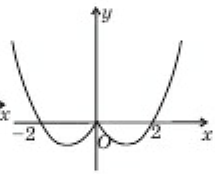
1-сурет



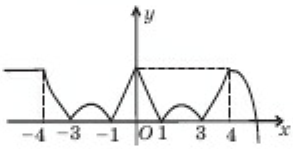
2-сурет



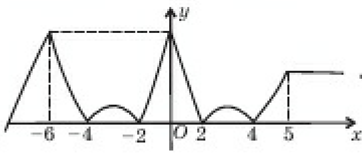
3-сурет



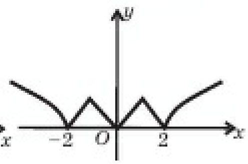
4-сурет



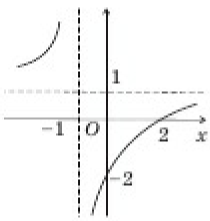
5-сурет



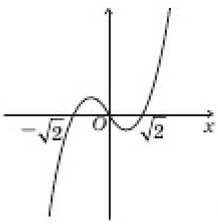
6-сурет



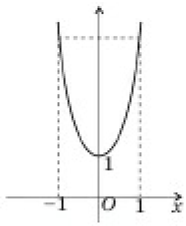
7-сурет



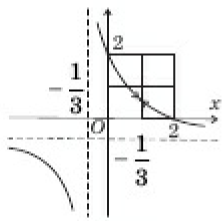
8-сурет



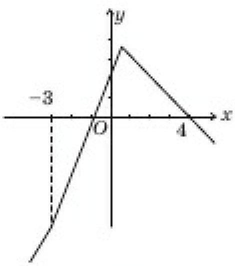
9-сурет



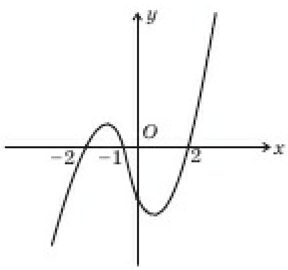
10-сурет



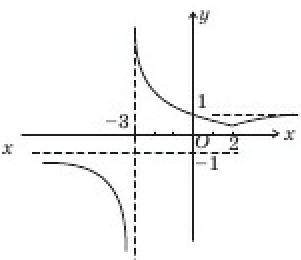
11-сурет



12-сурет



13-сурет



14-сурет

1.88. 3) $f(u(x))=\sqrt{x-4}$; 4) $f(u(x))=\sqrt{x}-4$. **1.92.** 2) $f^{-1}(x)=\frac{x+8}{2}$;

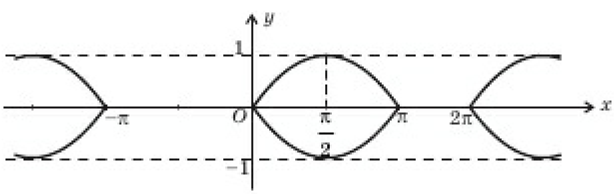
4) $f^{-1}(x)=2{,}5x+7$. **1.93.** $f(\varphi(x))=\frac{1}{x}+5$; $\varphi(f(x))=\frac{1}{x+5}$. **1.95.** 4) $f(g(x))=$ $=\frac{2}{x^2-3x+2}$; $g(f(x))=\frac{4}{x^2}-\frac{6}{x}+2$. **1.96.** 1) $f^{-1}(x)=\frac{3}{2x}+\frac{1}{2}$. **1.102.** $V=S\sqrt{\frac{S}{216}}$. **1.103.** $(-2;\ -7)$ — жанасу нүктесі. **1.104.** 1) $\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{6}$; 2) 1; 2,5.

2-бөлім

2.3. 1) $\sin 1^\circ<\sin 1$; 2) $\cos 2^\circ>\cos 2$; 3) $\sin 3^\circ<\sin 3$; 4) $\cos 3{,}5<\cos 6{,}5$. **2.4.** 2) Тең; 4) $\operatorname{tg}3{,}14<\operatorname{tg}\pi$; 6) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}<\operatorname{ctg}1{,}5$. **2.7.** 1) $[2k\pi;\ \pi+2k\pi]$, $k\in Z$; 3) $\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi;\frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$, $k\in Z$. **2.9.** 1) $x=\frac{\pi}{6}$ және $x=\frac{5\pi}{6}$ — максимум нүктелері, $x=\frac{\pi}{2}$ — минимум нүктесі. **2.10.** $x\in\left(\frac{7}{3};\ 3\right)\Rightarrow f(x)>0$, $x\in\left(1;\ \frac{7}{3}\right)\Rightarrow$ $\Rightarrow f(x)<0$, $f\left(\frac{7}{3}\right)=0$. **2.12.** 1) 3 түбір; 2) бір түбір; 3) екі түбір; 4) шексіз көп. **2.16.** Кері жоримыз. $f(x)=\sin x+\{x\}$ функциясының периоды T болсын. Онда T саны 2π-ге бөлінетін натурал сан болуы қажет ($\{x\}$-тің периоды 1-ге еселік). Ал $2m\pi$ түріндегі натурал сан табылмайды. Қайшылық, яғни функция периодсыз. Бұл 2.15-есепке қайшы емес. **2.19.** 10. **2.20.** 6 л. **2.24.** 1) $y=4(\cos^4\frac{x}{2}+$ $+\sin^4\frac{x}{2})=3+\cos 2x$; 4) $y=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

$$\textbf{2.25. } 2)\ y=\begin{cases}1, \text{ егер } x\in\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi;\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right),\ k\in Z,\\ -1, \text{ егер } x\in\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi;\ \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right),\ k\in Z,\end{cases}$$

4) $y=\sin x$, $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$. **2.26.** 4) $\sin x\geqslant 0$ болса, $\pm y=\sin x$. Егер $\sin x<0$ болса, берілген теңдіктің мағынасы жоқ (15-сурет). **2.27.** -1. **2.28.** 1) $\varnothing$; 2) $\varnothing$. **2.29.** 61376. **2.30.** 1) $\frac{3\sqrt{7}}{8}$; 3) $\pi-2$; 5) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **2.31.** 2) $\frac{10\pi}{11}$; 4) $-\sqrt{3}$. **2.39.** $\operatorname{tg}x=-\frac{5}{12}$; $\operatorname{ctg}x=-\frac{12}{5}$. **2.40** 1) $[1;\ 1{,}5]$; 2) $(-\infty;\ +\infty)$. **2.41.** Өтпейді.



15-сурет.

3-бөлім

3.1. 1) $x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in Z$; 3) $x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in Z$. **3.2.** 2) $\pm\frac{4\pi}{3}+4k\pi,\ k\in Z$; 4) $-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in Z$. **3.3.** 1) $(-1)^k\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in Z$. **3.4.** 3) $\frac{5\pi}{24}+\frac{k\pi}{2},\ k\in Z$. **3.5.** 4) $\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\frac{5}{12}+\frac{k\pi}{2},\ k\in Z$. **3.6.** 2) $-\frac{\pi}{6}\pm\frac{\pi}{12}+k\pi,\ k\in Z$. **3.7.** 1) $\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{3}$; 2) $\frac{\pi}{3}$; 3) $\frac{11\pi}{24}$; 4) $\varnothing$. **3.8.** 2) $\pm(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$; 4) $2k\pi;(-1)^k\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in Z$. **3.9.** 1) $4k\pi;\ \pi+2k\pi,\ k\in Z$; 3) $\frac{k\pi}{3},\ (k\neq 3m),\ k,\ m\in Z$. **3.10.** 2) $k\pi,\ k\in Z$; 4) $\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in Z$. **3.11.** $\left[\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2};\ \frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}\right],k\in Z$. **3.12.** 2) $\varnothing$; 4) $-\frac{\pi}{2}+2k\pi$; $(2k+1)\pi,\ k\in Z$; **3.13.** 3) $\pm\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},\ k\in Z$; 4) $\frac{k\pi}{2},\ k\in Z$. **3.14.** 1) $-\frac{\pi}{4}+k\pi$; $\pm\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}+k\pi,k\in Z$; 2) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+k\pi,k\in Z$. **3.15.** Егер $a\in(-\infty;\ 0{,}5)\cup(1;+\infty)$, $x\in\varnothing$; егер $a\in[0{,}5;\ 1]$, $x=\pm\frac{1}{2}\arcsin\frac{2\sqrt{a-1}}{2a-3}+\frac{k\pi}{2},k\in Z$. **3.16.** 1) $\varnothing$. **3.17.** 4) $\frac{\pi}{20}+\frac{2k\pi}{5};\ \frac{3\pi}{100}+\frac{2k\pi}{25},\ k\in Z$. **3.18.** $\frac{11\pi}{8};\frac{17\pi}{16};\frac{21\pi}{16}$. **3.19.** 1) $\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in Z$; 3) $k\pi;\pm\operatorname{arctg}\sqrt{2}+k\pi;\pm\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in Z$. **3.20.** 2) $-\frac{\pi}{4}+k\pi;\ 2k\pi;\ \frac{\pi}{2}+2k\pi$. **3.21.** Егер $a\in(-\infty;\ 2-2\sqrt{2}\,]\cup[2+2\sqrt{2}\,;+\infty)$, $x=-\frac{\pi}{4}+(-1)^k\arcsin\frac{a+2}{\sqrt{2}a}+k\pi,\ k\in Z$, егер $a\in(2-2\sqrt{2};\ 2+2\sqrt{2}\,)$, $x\in\varnothing$. **3.22.** Егер $b\in[0;\ 1]$, $x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$, $x=\frac{\pi}{4}+(-1)^k\times$ $\times\arcsin(2b-1)+k\pi,\ k\in Z$; егер $b\notin[0;\ 1]$, $x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\ k\in Z$. **3.23.** Егер $a\in\left[-\frac{3}{4};\ -\frac{1}{4}\right]$, $x=\pm\frac{1}{2}\arccos(-4a-2)+k\pi$, $x=\pm\frac{1}{2}\arccos(2a+1)+k\pi,\ k\in Z$. Егер $a\in\left[-1;-\frac{3}{4}\right]\cup\left(-\frac{1}{4};0\right]$, $x=\pm\frac{1}{2}\arccos(2a+1)+k\pi$; егер $a\in(-\infty;\ -1)(0;\ +\infty)$,

$x\in\varnothing$. **3.24.** Егер $a\in\left[-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right]$, $x=-\frac{\pi}{4}-(-1)^k\arcsin a+k\pi$, $x=-\frac{\pi}{4}+(-1)^k\times$ $\times\arcsin 3a+k\pi$, $k\in Z$; егер $a\in\left[-1;-\frac{1}{3}\right]\cup\left(\frac{1}{3};1\right]$, $x=-\frac{\pi}{4}-(-1)^k\cdot\arcsin a+k\pi$, $k\in Z$; егер $a\notin(-\infty;-1)(1;+\infty)$, онда $x\in\varnothing$. **3.25.** 1) $\frac{k\pi}{3}, k\in Z$; 3) $\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}, k\in Z$. **3.26.** 2) $\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$; $\frac{\pi}{7}+\frac{2k\pi}{7}$; $\frac{\pi}{5}+\frac{2k\pi}{5}, k\in Z$. 4) $\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+k\pi$; $\operatorname{arctg}3+k\pi$, $k\in Z$. **3.27.** 3) $-\frac{\pi}{4}+k\pi$; $\frac{3\pi}{16}+\frac{k\pi}{4}, k\in Z$; 4) $\frac{k\pi}{8}, k\in Z$. **3.28.** 1) $\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z$; 2) $\varnothing$. **3.31.** $a\in\left[\frac{1}{2};1\right]$, $x=\pm\frac{1}{4}\arccos(4a-3)+\frac{k\pi}{2}, k\in Z$. **3.32.** 4) $\frac{k\pi}{3}, k\in Z$. **3.33.** 2) $\frac{k\pi}{4}, k\in Z$; 4) $\frac{k\pi}{2}, \frac{k\pi}{3}, k\in Z$. **3.34.** 3) $\frac{k\pi}{8}$; $\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}, k\in Z$. **3.35.** 3) $\frac{\pi}{2}+$ $+k\pi, (-1)^k\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{4}, k\in Z$; 4) $\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z$. **3.36.** 1) $\frac{\pi}{2}+k\pi, (-1)^k\frac{\pi}{6}+$ $+k\pi, k\in Z$; 3) $k\pi$; $-\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in Z$. **3.37.** $\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}$. **3.38.** $\frac{3\pi}{2}$. **3.39.** $\pm\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{11}+\frac{2m\pi}{11}$, мұндағы $k=-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$. **3.40.** 3) $\pm\frac{\pi}{4}-(-1)^k\times$ $\times\arcsin\frac{5\sqrt{2}}{8}+k\pi, k\in Z$. **3.42.** 1) $x=-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}(k+2m), k$, $y=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}(k-2m), k, m\in Z$; 3) $x=\pm\frac{\pi}{3}+(k+m)\pi$; $y=\pm\frac{\pi}{3}+(k-m)\pi$; $k\in Z$. **3.43.** 3) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}(m+4k)$; $y=\frac{\pi}{4}+\frac{m\pi}{2}$, $k, m\in Z$. **3.44.** 2) $x=2k\pi$, $y=\pi+2m\pi$, $k, m\in Z$; 4) $x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi$, $y=\pm\frac{\pi}{4}+$ $+k\pi$, $k\in Z$. **3.45.** 1) $x=\frac{\pi}{6}+2m\pi$, $y=\frac{\pi}{6}-2m\pi$, $m\in Z$; 3) $\varnothing$ **3.46.** 2) $x=\pm\frac{\pi}{6}+m\pi$, $y=\mp\frac{\pi}{6}+k\pi$, $k\in Z$. **3.47.** 1) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$, $y=-(-1)^{p+n}\frac{\pi}{4}+m\pi$, $p=\left[\frac{k}{2}\right]$, $k, m\in Z$; 4) $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$; $y=m\pi$; $k, m\in Z$. **3.48.** 1) $x=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi$; $y=\operatorname{arctg}2+m\pi$, $z=\pi\pm\frac{\pi}{4}\pm\operatorname{arctg}2(m+k)\pi$, $m, k\in Z$. **3.49.** $K(1;7)$. **3.50.** $\frac{1023}{8}$. **3.51.** 2. **3.52.** 1) 0,5. **3.53.** 2) $\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{1}{3}$. **3.54.** 1) $-3\operatorname{tg}1$; 3) $\varnothing$; 4) $\varnothing$.

3.55. 1) $\sqrt{2}$; 2) $-\frac{3}{5}$; 3) 1; $-\frac{1}{6}$; 4) 0; 1. **3.56.** 2) 0; 3) 0; $\pm\frac{1}{2}$; 4) $\frac{2}{3}$. **3.57.** 1) $[0; 1]$; 2) $[-1; 0]$; 3) $[0; 1]$; 4) $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$. **3.58.** 1) $[0; 1]$; 2) $[-1; 1]$; 3) $[-1; 1]$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3.59. Егер $a\in[-2\pi; 0)$, $x=\cos\frac{a}{2}$; егер $a\in(0; \pi]$, $x=\cos a$; егер $a\notin[-2\pi;0)\cup(0;\pi]$, $x\in\varnothing$. **3.61.** $(-\infty; 3]$. **3.62.** $a=1$. **3.63.** $a_1=16$. **3.64.** 1) $\left[\frac{\pi}{6}+2k\pi; \frac{5\pi}{6}+2k\pi\right]$, $k\in Z$; 3) $(-\frac{\pi}{6}+k\pi; \frac{\pi}{2}+k\pi)$, $k\in Z$. **3.65.** 2) $\left[-\frac{\pi}{4}+2k\pi; \frac{5\pi}{4}+2k\pi\right]$, $k\in Z$; 4) $(-\frac{\pi}{6}+k\pi; \frac{\pi}{2}+k\pi)$, $k\in Z$. **3.66.** 1) $\left(-\frac{7\pi}{12}+k\pi; \frac{\pi}{12}+k\pi\right)$, $k\in Z$; 3) $\left(-\frac{4\pi}{3}+4k\pi; -\frac{2\pi}{3}+4k\pi\right)$, $k\in Z$; 5) $(-3\pi+4k\pi; 4k\pi)$, $k\in Z$. **3.67.** 2) $\left(-\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}; \frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\right)$, $k\in Z$; 4) $\left(-\frac{2\pi}{3}+2k\pi; \frac{2\pi}{3}+2k\pi\right)$, $k\in Z$. **3.68.** 1) $\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right)$; 3) $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$. **3.69.** 2) $\left[k\pi; \frac{\pi}{4}+k\pi\right]$, $k\in Z$; 4) $\left[-\frac{\pi}{4}+k\pi; \frac{5\pi}{12}+k\pi\right]$, $k\in Z$.

3.70. 1) $(\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}-\pi+2k\pi; \arccos\frac{1}{\sqrt{10}}+2k\pi)$, $k\in Z$; 3) $(-\frac{\pi}{4}+k\pi; \frac{\pi}{4}+k\pi)\cup(-\frac{\pi}{2}+k\pi; -\mathrm{arctg}2+k\pi)$, $k\in Z$. **3.71.** 2) $[k\pi; \frac{\pi}{2}+k\pi)$, $k\in Z$; 4) $[2k\pi; \pi+2k\pi)$, $k\in Z$.

3.72. 1) $[-\frac{\pi}{2}+2k\pi; \frac{\pi}{2}+2k\pi]$, $k\in Z$; 3) $[-\frac{\pi}{4}+k\pi; \frac{\pi}{4}+k\pi]$, $k\in Z$. **3.73.** 2) $(\frac{\pi}{4}+k\pi; \frac{3\pi}{4}+k\pi)$, $k\in Z$; 4) $(-\frac{\pi}{3}+k\pi; \frac{\pi}{3}+k\pi)$, $k\in Z$. **3.74.** 1) $x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$; $x\in(\frac{\pi}{2}+2k\pi; \frac{3\pi}{2}+2k\pi)$, $k\in Z$; 3) $x\in[\pi k; \frac{\pi}{2}+\pi k]$, $k\in Z$. **3.75.** 2) $x\in\left(-\frac{3\pi}{4}+2k\pi; -\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\cup\left(-\frac{\pi}{6}+2k\pi; \frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\cup\left(\frac{3\pi}{4}+2k\pi; \frac{7\pi}{6}+2k\pi\right)$, $k\in Z$; 4) $x\neq\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in Z$.

3.77. Егер $1-\cos\alpha=a$, $1-\cos\beta=b$, $1-\cos\gamma=c$ болса, онда $(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)\times(1-\cos\gamma)=abc$ өрнегінің геометриялық мағынасы — қабырғалары a, b және c-ға тең параллелепипедтің көлемі. Бұл көлем $a=b=c$ жағдайында ең үлкен мәнге ие болады ($\alpha=\beta=\gamma=60°$).

Онда $a\leqslant 1-\cos60°=\frac{1}{2}$, $b\leqslant\frac{1}{2}$, $c\leqslant\frac{1}{2}$, яғни $(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)(1-\cos\gamma)=\frac{1}{8}$.

3.80. 2) $\frac{9\pi}{7} = \pi + \frac{2\pi}{7}$, $\frac{6\pi}{5} = \pi + \frac{\pi}{5}$, $\frac{2\pi}{7} > \frac{\pi}{5} \Rightarrow \operatorname{tg}\frac{9\pi}{7} > \operatorname{tg}\frac{6\pi}{5}$. **3.81.** 1) 2; 2) $[-3; -2] \cup [2; 3]$. **3.82.** $m \in (-\infty; -12) \cup (12; +\infty)$.

4-бөлім

4.1. 2) 28. **4.2.** 1) $A_2^4 = 12$. **4.3.** 1) $A_2^4 = 16$. **4.4.** 1) $5! = 120$. **4.5.** 2) $C_{30}^2 = \frac{30 \cdot 29}{2} = 435$. **4.6.** $5! = 120$. **4.7.** 6. **4.8.** 2) $4! = 24$. **4.9.** $\tilde{C}_3^3 = 10$. **4.10.** 1) $4! = 24$. **4.13.** 2) $C_{12}^3 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{6} = 220$. **4.14.** $1120x^7\sqrt[3]{x}$. **4.15.** $252x^5 \cdot y^5$. **4.16.** 8. **4.17.** $n=8$. **4.18.** $C_{32}^6 = \frac{32!}{6!26!} = 906192$. **4.19.** $A_{15}^3 = 15 \cdot 14 \cdot 13 = 2730$. **4.20.** $C_{12}^3 = 220$. **4.21.** $C_n^2\ C_m^2$. **4.22.** $C_8^3 \cdot C5_8^2 = 560$. **4.23.** 252. **4.24.** 30. **4.25.** 8!. **4.26.** $\frac{10+1}{2} \cdot 10 = 55$. **4.27.** $\frac{(3n)!}{(n!)^3}$. **4.28.** $\tilde{A}_{11}^6 = 11^6$. **4.29.** $P_9(4, 3, 2) = 1260$. **4.30.** 2) $\overline{C}_3^4 = 15$. **4.31.** $P_{12}(3, 3, 3, 3) = 123200$. **4.33.** 84. **4.34.** Егер $n=2m$ болса, онда C_{2m}^m, егер $n=2m-1$ болса, онда C_{2m-1}^m және C_{2m-1}^{m+1}. **4.35.** C_{2n}^n. **4.36.** $C_{30}^{10} \cdot C_{20}^{10}$. **4.37.** 7. Турнирде шығып қалған ойыншылар өзара ойнамағанын көрсетіңдер. **4.38.** 1) $2^n \cdot \cos^n\frac{\varphi}{2} \cdot \cos\frac{n\varphi}{2}$; 2) $2^n \cdot \cos^n\frac{\varphi}{2} \cdot \sin\frac{n\varphi}{2}$. **4.39.** $P_9(3, 2, 1, 1, 1, 1) - P_7(2, 1, 1, 1, 1, 1) = 27720$. **4.41.** $\overline{C}_2^4 + \overline{C}_2^3 + \overline{C}_2^2 + \overline{C}_2^1 = 14$. **4.42.** $\overline{C}_n^k = \overline{C}_{n+k-1}^k$. **4.44.** Сандардың ең үлкенін табу керек: $P_5(k_1, k_2, k_3, k_4)$ $(k_1+k_2+k_3+k_4=5)$: $\max P_5 = P_5(2, 1, 1, 1) = 60$. **4.46.** $\bar{A}_{10}^3\left(\bar{A}_{26}^3 + \bar{A}_{26}^4\right)$. **4.50.** 2) Алынған шар ақ немесе қызыл түсті. **4.51.** 1) A. **4.53.** Қорапта қызыл түсті асық жоқ. **4.55.** 3) $B \cdot D = \{A_4, A_6\}$. **4.56.** 2) 0,3. **4.57.** 0,4. **4.58.** $1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$. **4.59.** 10. **4.60.** $\frac{1}{18}$. **4.61.** 1) 0,38; 2) 0,94; 3) 0,56; 4) 0,44. **4.63.** 1) 0,9801; 2) 0,018; 3) 0,0001. **4.65.** 1) B мен C A-ның салдарлары болып табылады. **4.66.** 5) $AB+AC+BC$. **4.68.** $\frac{5}{9}$. **4.69.** $\frac{5}{9}$. **4.70.** $\frac{1}{2}$. **4.71.** 1) $\frac{5}{9}$; 2) $\frac{11}{36}$. **4.72.** $\frac{8}{65}$. **4.73.** 0,8. **4.74.** 1) $(A-B)+(B-A)+A \cdot B$. **4.75.** 1) $m=8$, $n=\bar{A}_8^5 = 8^5 \Rightarrow P = \frac{1}{8^4}$. **4.76.** $\frac{2}{5}$. **4.77.** $\frac{7}{9}$. **4.78.** 0,936. **4.79.** $\frac{2}{3}$ және $\frac{1}{3}$. **4.80.** $\frac{4}{7}$, $\frac{2}{7}$ және $\frac{1}{7}$. **4.81.** $P_n = \left(\left[\frac{n-r}{q}\right] + 1\right) : n$; $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = \frac{1}{q}$.

4.82. $P(12)=\frac{26}{216}<\frac{27}{216}=P(11)$. **4.85.** $\frac{1}{2}$. **4.86.** $\frac{5}{16}$. **4.87.** $\frac{2}{3}$. **4.88.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{2}{3}$.

4.89. $\frac{11}{20}$. **4.90.** 1) $\frac{21}{25}$; 2) $\frac{9}{21}$. **4.91.** 0,612. **4.92.** 0,4. **4.95.** 0,13. **4.96.** $\frac{3}{1100}$.

4.97. $\approx 0{,}9913$. **4.98.** $\frac{2}{3}$. **4.99.** 1) $P_4(2)>P_6(3)$; 2) $P_4(m\geqslant 2)<P_6(m\geqslant 3)$. **4.101.** 1) $k\pi; \pm\frac{\pi}{6}+2k\pi$; $k\in Z$; 2) $\frac{\pi}{2}+k\pi$; $k\in Z$. **4.102.** 1) $3\sin^2 x\cdot\cos x$; 2) $\frac{x+1}{|x+1|}$; 3) $\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$. **4.103.** 1) $(-\infty; -1)\cup(1; +\infty)$ — өседі, $(-1; 0)\cup(0; 1)$ — кемиді; 2) $(-\infty; 0)\cup(2; +\infty)$ — өседі, $(0; 2)$ — кемиді. **4.104.** 1) $P_5(2)=C_5^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{10}{32}=\frac{5}{16}$. **4.107.** $\frac{671}{1296}$. **4.108.** $m_0=8$. **4.109.** 6. **4.110.** 1) 0,4096.

4.111. $\frac{\pi^3(4-\pi)}{64}$. **4.112.** $\frac{3\sqrt{3}\left(4\pi-3\sqrt{3}\right)^3}{64\pi^4}$. **4.113.** $\frac{45}{512}$. **4.115.** $P\geqslant 0{,}9608$. **4.116.** 25. **4.117.** 60. **4.119.** 36. **4.120.** 1:1 есебі ықтималдырақ. **4.122.** Жоқ, болмайды. **4.123.** 1) $\tilde{A}_{10}^{8}=10$; 2) $A_{10}^{8}=90$. **4.124.** 1) 165; 2) 40; 3) 111. **4.125.** 72. **4.126.** $5!C_4^3\cdot C_3^2=1440$. **4.127.** $\frac{(a-r)^2}{a^2}$. **4.132.** $\frac{1}{20}$. **4.133.** $\frac{1}{216}$. **4.134.** $\frac{3}{8}$. **4.135.** $\frac{11}{15}$.

5-бөлім

5.1. а) $x=4y$; $x=2y$; в) $x=-2y$, $x=-7y$. **5.2.** а) $a=-b$; $a=4b$; ә) $b=-7a$; $b=3a$. **5.4.** а) $4\sigma_1^2-13\sigma_2$; б) $\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2-2\sigma_2^2$. **5.5.** а) $x=3y$; $y=3x$; ә) $x=-2y$; $y=-2x$; в) $u=2v$; $v=2u$. **5.8.** а) $(x^2+xy+y^2)(2x^2-3xy+2y^2)$; б) $3(x+y)(x+z)(y+z)$; в) $5(x+y)\times$ $\times(x+z)(y+z)(x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz)$. **5.10.** x^2+9x-9. **5.11.** а) $x^2-133c+1000=0$; в) $21x^2-23x+6=0$. **5.12.** а) $\frac{a+b+c}{2}$; ә) $\frac{1}{a+b+c}$. **5.17.** 3) $x^7-1=(x^2+x+1)\times$ $\times(x^5-x^4+x^2-x)+x-1$; $r(x)=x-1$. **5.19.** 1) 3; 1; 2) 1; -4; 3) 2; -5; 4) -6; 1; 5) 3; 6) 3. **5.20.** 2) $(x+2)(x+10)$; 4) $(x+1)(x+3)$. **5.21.** 1) $(x-2)(x+2)(x^2+4)$; 3) $(x-1)$ (x^3+x^2+x+2). **5.24.** 2) $(x-1)(x+3)(x+7)$; 4) $(x+1)(x+3)(x+5)$; 6) $(x+1)(x^3-7x^2-$ $-7x-4)$. **5.25.** 1) 2; 2) ± 1; 2; -3; 3) -4; -1; 4) -1. **5.26.** 2) $(x+2)(x-3)(x-5)$. **5.27.** 1) $(x+1)(x+3)(x+5)$. **5.28.** 1) 1; -2; 3; 2) 2; 2; -3. **5.36.** 2) $q(x)=x$, $r(x)=-x^2+x-1$. **5.37.** 1) $A=1$, $B=-17$, $C=15$; 2) $A=-1$, $B=-3$, $C=1$. **5.40.** 2) x^3-x; 4) x^3-4x^2+x+6. **5.41.** $x_3=3$. **5.42.** $a=5$, $b=-2$, $x_3=1$. **5.43.** $a=-5$; $x_{2/3}=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$.

5.44. 1) $x^4-8x^3+17x^2+2x-24$. **5.45.** 1) $(x-1)(x+1)(x-4)$; 2) $(x-1)(x-2)(x+1)(x+3)$. **5.49.** $x_1=-2$, $x_2=3$. **5.50.** -1. **5.51.** Бөлінбейді.

5.53. $r(x)=x+2$; **5.55.** -1. **5.60.** Табылады: $f(x)=\dfrac{(x-c_1)(x-c_2)\dots(x-c_n)}{(c_{n+1}-c_1)(c_{n+1}-c_2)\dots(c_{n+1}-c_n)}$.
5.63. $x^2_1+x^2_2+x^2_3=-2p$. **5.64.** $p_1=-12$, $q_1=-2$; $p_2=-7$, $q_2=-1$. **5.65.** $a\in(-4;\ -3]$.
5.68. 2) -3; $-\dfrac{1}{3}$; $\dfrac{1}{2}$; 2; 4) -1; $\dfrac{1}{3}$; 3; 6) $1\pm\sqrt{2}$; $\dfrac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$. **5.69.** 1) $\dfrac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$; 3) $3\pm2\sqrt{2}$; $2\pm\sqrt{3}$. **5.70.** 2) -3; -2; 5; 4) 1. **5.71.** 1) -1; ±2; 3) 1; ±9. **5.72.** 2) -1; 3; 4) $-\dfrac{2}{3}$; 0,5. **5.73.** 1) -4; 2; -1; 3) 0,5. **5.74.** 2) $\dfrac{-5\pm\sqrt{5}}{2}$; 1; 4) -2; 1; 4.
5.75. 2) $2\pm\sqrt{5}$; $\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{2}$. **5.76.** 2) 1; $\dfrac{5}{3}$; $\dfrac{3}{5}$. **5.77.** 1) 2; 1; $\dfrac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$. **5.79.** 1) $-0{,}25$; 4) ±5; -4; 0; 7. **5.80.** 2) $a=-2$; 3; 1; -2; 4) $a=6$; $-0{,}5$; -2; -3. **5.81.** 1) $-a$; $\dfrac{a\pm\sqrt{a^2-4}}{2}$, $|a|\geqslant2$; егер $a\in(-2;\ 2)$ болса, $x=-a$, жалғыз түбір; 2) $\dfrac{a+b}{2}$; a; b.

6-бөлім

6.2. 1) 1; 2) 1; 3) $\dfrac{3}{5}$; 4) 3. **6.3.** 1) 6; 2) $-\dfrac{1}{2}$; 3) $-1{,}5$; 4) 1. **6.4.** 1) 2; 2) 3; 3) 1; 4) 3. **6.5.** 1) $-\dfrac{1}{2}$; 2) 1; 3) 1; 4) 1. **6.6.** 1) $f(1-0)=f(1+0)=f(1)=-1$; 2) $f(-3-0)=$ $=-6$; $f(-3+0)=-6$, $f(-3)$ анықталмаған. **6.8.** 1) $x=-1$, $y=1$; 2) $x=4$, $y=2$; 3) $x=-2$; $y=-3$. **6.9.** 1) $y=x$, $x=0$; 2) $y=x-2$. **6.11.** 1) 4; 2) $-\dfrac{1}{3}$; 3) $\dfrac{7}{8}$; 4) $-\dfrac{1}{2}$. **6.12.** 1) 0; 2) $-\dfrac{1}{9}$; 3) 0. **6.13.** 1) 3; 2) 12; 3) 0; 4) 3. **6.14.** 1) $\dfrac{1}{4}$; 2) 2; 3) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; 4) $\dfrac{1}{4}$.
6.15. 1) $\dfrac{2}{3}$; 2) 1; 3) 15; 4) 3. **6.16.** 1) 1; 2) 1; 3) $\dfrac{3}{5}$; 4) $-\dfrac{2}{3}$. **6.17.** 1) 2; 2) $\dfrac{3}{5}$; 3) $\dfrac{4}{5}$; 4) $\dfrac{m}{n}$.
6.18. 1) 2; 2) $\dfrac{b}{a}$; 3) -3; 4) $-0{,}3$. **6.19.** 1) 1; 2) $\dfrac{1}{4}$; 3) $-\dfrac{2}{\pi}$; 4) $\dfrac{3}{3}$.
6.22. 1) $y=x+1$; $x=1$; 2) $x=-1$; $y=2$; 3) $x=-2$; $y=2x-3$; 4) $x=3$, $y=2$; 5) $x=0$, $y=3x$; 6) $y=x$. **6.25.** 1) 1; 2) 3; 3) $\dfrac{\sin2\alpha}{2\alpha}$; 4) $\dfrac{1}{2}$. **6.26.** 1) $-\dfrac{1}{4}$; 2) $\dfrac{\sqrt{2}}{8}$; 3) $\dfrac{1}{2}$; 4) 0. **6.27.** 1) $\left(-\infty;-\dfrac{1}{6}\right)\cup\left(\dfrac{1}{3};+\infty\right)$; 2) $[-3;\ 11]$. **6.28.** 1) $8\sin^4\varphi$; 2) 1. **6.33.** 1) $a_n=4n^2$; 3) $a_n=\dfrac{n+1}{2n}$; 4) $a_n=\dfrac{(-1)^n\cdot n}{n+1}$; 6) $a_n=2-(-1)^n$. **6.36.** 3) $a_n=5n+3$; 4) $a_n=15n$.
6.37. 4) $C_n=\dfrac{n}{n^2+1}$, $C_{n+1}=\dfrac{n+1}{(n^2+1)^2+1}=\dfrac{n+1}{n^2+2n+1}\Rightarrow C_{n+1}-C_n=\dfrac{n+1}{n^2+2n+2}-$ $-\dfrac{n}{n^2+1}=\dfrac{n^3+n^2+n+1-n^3-2n^2-2n}{(n^2+1)(n^2+2n+2)}=$

$= \dfrac{n^3+n^2+n+1-n^3-2n^2-2n}{(n^2+1)(n^2+2n+2)} = \dfrac{-n^2-n+1-n^3-2n^2-2n}{(n^2+1)(n^2+2n+2)} < 0 \Rightarrow$ кемімелі тізбек. **6.41.** [3; 4]. **6.42.** Арифметикалық прогрессияға $a_{n+1}-a_n$ =const, геометриялық прогрессияға — $a_{n+1}:a_n = q$ – const теңдіктері орындалатынын қолданыңдар. **6.43.** 1) $a>2b$; 2) $a<2b$; 4) $a=2b$ болса, тізбек тұрақты болады. **6.44.** 1) $n>30$; 2) $n>300$. **6.45.** 2) $n>174$. **6.46.** n=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. **6.47.** n=3. **6.50.** 1) 5; 2) −2,5; 3) $-\dfrac{1}{2}$; 4) $-\dfrac{1}{4}$; 5) −4; 6) $\dfrac{6}{7}$. **6.51.** 1) 1; 2) $-\dfrac{3}{4}$; 3) $\dfrac{1}{9}$; 4) $\dfrac{1}{4}$; 5) 1; 6) −3. **6.52.** 1) 0; 2) −1; 3) 0; 4) $\dfrac{4}{5}$. **6.53.** 1) $\dfrac{1}{2}$; 2) 2; 3) $\dfrac{3}{4}$; 4) 1. **6.54.** 1) 0; 2) $\dfrac{1}{2}$; 3) $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{3}$; 4) 3. **6.57.** $|b|<1$. **6.58.** 1) 1,5; 2) $\dfrac{1}{7}$; 3) $\dfrac{1}{5}$; 4) $\dfrac{1}{4}$. **6.66.** 2) $f(1-0)=3$; $f(1+0)=1$, $x=1$ — I текті үзіліс нүктесі. **6.68.** 1) $\Delta x = 2{,}5-2=0{,}5$; $\Delta y=f(2{,}5)-f(2)=10{,}25-8=2{,}25$. **6.69.** $\Delta y=\Delta x(2-2x_0-\Delta x)$.

6.72. 2) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{3-\sqrt[4]{x}}{9-\sqrt{x}}, & \text{егер } x \neq 81, \\ \dfrac{1}{6}, & \text{егер } x = 81. \end{cases}$ **6.73.** 1) $m=\dfrac{2}{3}$; 2) $m=\dfrac{1}{2}$.

6.75. 1) $b=\dfrac{a\pi}{2}$; 2) $b=2a$. **6.76.** $p=\dfrac{3}{4}$. **6.77.** 1) 1; 2) 5; 3) 0; 4) $\dfrac{1}{2}$; 5) $\dfrac{1}{3}$; 6) 1. **6.81.** 1) $\dfrac{1}{12}$; 2) 3; 3) $\dfrac{1}{192}$; 4) $-\dfrac{1}{56}$. **6.82.** 1) 3; 2) 1,5; 3) $\dfrac{1}{6}$; 4) 1. **6.83.** 1) $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$; 2) $-\dfrac{1}{3}$; 3) $\dfrac{2}{3}$; 4) $\dfrac{1}{4}$. **6.84.** 1) 0; 4) $\dfrac{4}{5}$. **6.85.** 1) $-\dfrac{1}{6}$; 2) $\dfrac{1}{2}$; 3) $-\dfrac{1}{4}$; 4) $\dfrac{n^2-m^2}{2}$. **6.86.** 1) $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; 2) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

7-бөлім

7.1. 2) $\Delta y=0$; 4) $\Delta y=0{,}5$. **7.2.** 3) $\Delta y=0{,}79$; $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=7{,}9$. **7.4.** 1) $k=1$; 3) $k=-1$. **7.5.** 1) $v(0)=3$ м/с; 2) $v(2)=11$ м/с; 3) $v(t_0)=4t_0+3$ м/с. **7.9.** 1) $f'(x)=a$; $f'(2)=a$; 2) $f'(4)=a$. **7.12.** $u'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; 2) $\dfrac{1}{4}$. **7.14.** 2) $f'(x)=2ax+b$. **7.15.** 1) $v(t_0)=6t_0^2-6t_0$. **7.17.** 1) $y=2x-1$; 2) $y=-2x-1$; 3) $y=4x-4$. **7.18.** 1) $y=3x$; 4) $y=4x-5$. **7.19.** $\cos\alpha=\dfrac{7\sqrt{85}}{85}$. **7.20.** 3) $du=2x_0dx$. **7.22.** 1) $(-\infty;+\infty)$; $[2;+\infty)$; 2) $(-\infty;+\infty)$; $[1;2]$; 3) $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$; $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$. **7.24.** 4) $-\dfrac{\pi}{6}+(-1)^k\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{2}$, $k\in Z$.

7.25. 2) $-3x^2$; 4) $12x^2-5x^4$. **7.26.** 2) $12x^5-9x^2$; 3) $12x^3+6x^2$. **7.27.** 2) $\dfrac{26}{(x+8)^2}$; 4) $\dfrac{2}{(x+1)^2}$. **7.28.** 1) $9x^2-4x$; 3) $6-12x^3$. **7.29.** 2) $13x^{12}+30x^9-3x^2$; 4) $(2x+1)\cos x-(x^2+x+1)\sin x$; 6) $3x^2\operatorname{ctg}x-\dfrac{x^3+1}{\sin^2 x}$. **7.30.** 1) $9x^8+12x^5-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; 3) $25x^4-\cos x$. **7.31.** 1) $y'(1)=3$; $y'(0,5)=-1,5$; 3) $y'(-2)=-1\dfrac{3}{4}$; $y'=\left(\dfrac{1}{3}\right)=-28$. **7.32.** 2) $\{-1;\ 3\}$; 4) ±1. **7.33.** 1) $3\sqrt{x}$; 3) $-\dfrac{3}{x^2}$. **7.34.** 2) $-\dfrac{1}{2\sqrt{x^3}}$; 4) $-\dfrac{3}{2\sqrt{2}\sqrt{x^5}}$; 6) $2,5\cdot\sqrt{x^3}$. **7.35.** 2) $\dfrac{3\cos x+(3x-2)\sin x}{\cos^2 x}$; 3) $\dfrac{x+1-\sin x\cos x}{(x+1)^2\cos^2 x}$. **7.36.** 1) $\operatorname{arctg}x+\dfrac{x}{1+x^2}$; 3) $\dfrac{3\sqrt{x-x^3}\arcsin x-2\sqrt{x^3}}{2\sqrt{1-x^2}(\arcsin x)^2}$. **7.38.** 2) -1; ±2. **7.39.** 2) $y'(1)=2$; $y'(4)=2$. **7.41.** 1) $20(2x+3)^9$; 3) $3\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right)$; 5) $\dfrac{4}{\cos^2 4x}$. **7.42.** 30. **7.46.** 1) $-\dfrac{2\pi}{3}$; 2) $\dfrac{\pi}{3}$. **7.47.** 1) $(1;0)$, $\left(-\dfrac{5}{3};0\right)$, $(0;\ -5)$. **7.48.** 2, 4, 8, 16, 32, 64. **7.49.** 1) $10(2x-3)^4$; 3) $-24(2-3x)^7$. **7.50.** 2) $126x^2(4+7x^3)^5$; 4) $-125x^4(1-5x^5)4$.

7.52. 4) $-\dfrac{2x-3}{2\sqrt{(x^2-3x+2)^3}}$. **7.53.** 2) $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=7$; $f'\left(\dfrac{\pi}{18}\right)=13$. **7.54.** 3) $\dfrac{2}{x^2+4x+8}$. **7.55.** 3) $16(6x^2-10x)(2x^3-5x^2)^{15}$. **7.56.** 2) $-\dfrac{2x^3}{\sqrt{1-x^4}}-\dfrac{2x}{(x^2+3)^2}$. **7.57.** 3) $(6x-2)\operatorname{tg}\sqrt{x}+\dfrac{3x^2-2x-5}{2\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}$. **7.59.** 1) $2\arcsin\sqrt{x}+\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$; 3) $\dfrac{1}{2(x-3)\sqrt{x-4}}$. **7.60.** 1) $f'(4)=7,5$; $f'(16)=31,75$. **7.61.** 2) $\varnothing$; 4) $x=\pm\dfrac{\pi}{12}k\pi$. **7.62.** 3) $F(x)=(3-2x)^2$; $F'(x)=8x-12$; 5) $F(x)=3-2\sin^2 x$; $F'(x)=-2\sin 2x$. **7.64.** 2) $\sin 2x+\dfrac{2\sin x}{\cos^3 x\sqrt{1+2\operatorname{tg}^2 x}}$. **7.66.** 2) $\dfrac{2x\operatorname{arctg}x-1}{\operatorname{arctg}^2 x}$. **7.67.** 1) $-\dfrac{1}{4\sqrt{x-x\sqrt{x}}}$. **7.68.** 2) -16; 4) 5. **7.69.** 1) 0; 2) 0; 3) $3^{300}\cos 3x$. **7.70.** 1) $-\dfrac{6}{(x-1)^4}$; 4) $a^3\sin(ax+b)$. **7.71.** 150 рет. **7.72.** 2) $-\dfrac{1}{5}\cos 5x+c$, c–const. **7.73.** 1) $x\in\left(-\dfrac{5\pi}{8}+k\pi;\dfrac{\pi}{8}+k\pi\right)$, $k\in Z$; 2) $x\in\left(-\dfrac{\pi}{12}+k\pi;\dfrac{\pi}{12}+k\pi\right)$, $k\in Z$.

7.74. 1) $a_3=\dfrac{y'''(0)}{3!}\Rightarrow y'''(0)=-810\cdot 24\cdot 5^7\Rightarrow a_3=-3240\cdot 5^7$. **7.77.** 2) $(-\infty;+\infty)$ — функция кемімелі; 6) $(-\infty;\ -\frac{1}{2})$ — кемімелі; $(-\frac{1}{2};\ +\infty)$ — өспелі. **7.78.** 1) $(-\infty;1)\cup(7;+\infty)$ — өспелі; $(1;7)$ — кемімелі; 3) $(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$ — кемімелі. **7.79.** 2) $(k\pi;\ \frac{\pi}{2}+k\pi)$ — кемімелі; $(\frac{\pi}{2}+k\pi;\pi+k\pi)$ — өспелі, $k\in Z$. **7.80.** 3) $(-\infty;0)\cup(\frac{2}{3};+\infty)$ — кемімелі, $(0;\ \frac{2}{3})$ — өспелі. **7.81** 2) $x=4$ — минимум нүктесі, $f(4)=-104$. **7.82.** 3) ±1— минимум нүктесі, $f(\pm1)=-1$; $x=0$–максимум нүктесі, $f(0)=0$. **7.84.** 1) Экстремумы жоқ, өспелі; 3) $(-\infty;\ \frac{1}{2})$ — кемімелі; $(\frac{1}{2};\ +\infty)$ — өспелі. **7.86.** 2) $x_1=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ — максимум нүктесі, $f(x_1)=\sqrt{2}$; $x_2=\frac{5\pi}{4}+2k\pi$ — минимум нүктесі, $f(x_2)=-\sqrt{2}$. **7.87.** 1) $(-\infty;\ -1)$ — кемімелі; $(1;\ +\infty)$ — өспелі. **7.88.** 2) Экстремумы жоқ; 3) $x=1$ максимум нүктесі, $f(1)=3$. **7.89.** 4) Экстремумы жоқ. **7.90.** 1) $x=0$ — максимум нүктесі, $f(0)=0$; $x=1$ — минимум нүктесі, $f(1)=-\frac{2}{3}$. **7.91.** 3) Экстремумы жоқ, өспелі. **7.93.** 2) 3 түбір; 4) 2 түбір. **7.94.** $y=\sqrt{2}-\frac{5\sqrt{2}}{4}x$. **7.95.** $y=6x$, $y=6x-1$. **7.98.** 1) 518; 2) 1024. **7.99.** $\mathrm{tg}x=\frac{2}{3}$. **7.100.** 1) -1; 2) -5; 2. **7.101.** 2) $f(3)=3$ — max, $f(2)=-1$ — min. **7.103.** 1) $f(0)=-9$ — max, $f(\pm1)=-16$ — min. **7.105.** 2) $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$ — min, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}$ — max. **7.110.** Квадрат $\frac{a}{2}\times\frac{a}{2}$. **7.111.** $12=6+6$. **7.112.** $10=5+5$. **7.113.** $36=6\cdot6$. **7.115.** $\sqrt{\frac{2}{3}}R$. **7.116.** $\frac{h}{2};\frac{a}{2}$. **7.120.** $\frac{6\pi-2\pi\sqrt{6}}{3}$. **7.121.** $x=\frac{1}{2}$. **7.122.** $t=1$ с. **7.124.** Трасса бойымен 11 км. **7.126.** 1) $(-\infty;\ -\frac{1}{6};)\cup[\frac{1}{2};3)$; 2) $(-8;\ 1]$. **7.127.** $-9{,}5$. **7.128** 3) $(-\infty;\ +\infty)$ — ойыс. 4) $(-\infty;\ -3)(1;\ +\infty)$ — ойыс, $(-3;\ 1)$ дөңес, $x=1$ және $x=-3$ — иілу нүктелері. **7.130.** 2) $\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi;\ \frac{3\pi}{4}+2k\pi\right)$ — дөңес, $\left(\frac{3\pi}{4}+2k\pi;\frac{7\pi}{4}+2k\pi\right)$ — ойыс, $x=\frac{3\pi}{4}+k\pi$ — иілу нүктелері, $k\in Z$. **7.140.** $\frac{a_1+a_2+\ldots a_n}{n}$. **7.142.** 1) -3; 2) -2. **7.143.** 1) $k\in Z$.

8-бөлім

8.1.

X	0	1
P	0,5	0,5

8.2.

X	0	1
P	0,6	0,4

. **8.3** 0,5. **8.4.** $D[X]=0{,}24$;

$\sigma(X)\approx 0{,}4899$. **8.5.** $M[X]=0{,}6$; $D[x]=1{,}24$; $G(X)\approx 1{,}1136$. **8.6.** $D[X]=4$; $\sigma(X)=2$.

8.7. $P_3=0{,}4$; $D[X]=1{,}49$; **8.8.** $x_2=3$. **8.9.**

X	0	1	2
D	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

. **8.10.**

X	0	1	2
P	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

.

8.11. $M(X)=1$. **8.12.** $D(X)=\frac{5}{18}$. **8.13.** а)

X	1	2	3	4	5
P	0,6	0,24	0,096	0,0384	0,0256

;

ә) $M(X)=1{,}6496$. **8.14.**

X	0	1	2	3
P	$\frac{57}{115}$	$\frac{19}{46}$	$\frac{2}{23}$	$\frac{1}{230}$

. **8.16.** ә) $q=0{,}2$; $M(X)=4{,}2$; $D(X)=5{,}56$; $\sigma(X)=2{,}358$. **8.17.** а) $y=2$; ә) $y=2$. **8.18.** $M(x)=np$; $D(x)=npq$.

Нұсқау:

$$x_i=\begin{cases}1, \text{ егер } i\text{-сынақта оқиға орындалса,}\\ 0, \text{ егер } i\text{-сынақта оқиға орындалмаса,}\end{cases} \qquad (i=1,2,\ \ldots,\ n),$$

кездейсоқ шамаларын қарастырсақ, онда бізге қажет X кездейсоқ оқиғасын $X=x_1+x_2+...+x_n$ қосынды түрінде жазуға болады. Мұнда $M(x_i)=P$, $D(x_i)=pq$ болғандықтан, $M(X)=M(x_1)+M(x_2)+\ldots M(x_n)=np$, $D(X)=D(x_1)+D(x_2)+$ $+\ldots+D(x_n)=npq$. **8.19.** Бұл үлестірімділік заңы

X	1	2	3	…	n	…
P	p	pq	pq^2	…	pq^{n-1}	…

түрінде жазылады. Сонда $M(X)=$

$$=p(1+2q+3q^2+\ldots+n\cdot q_{n-1}+\ldots)=p\frac{d}{dq}\left(q+q^2+q^3+\ldots q^n+..\right)=p\frac{d}{dq}\left(\frac{q}{1-q}\right)=$$

$$=\frac{p}{(1-q)^2}=\frac{1}{p}.$$ **8.20.** $M(X)=5\cdot\frac{1}{2}=2{,}5$; $D(X)=5\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=1{,}5$. **8.21.** $M(X)=\frac{5}{3}$;

$D(X)=\frac{10}{9}$. **8.22.** а) $2^6=64$; ә) $C_6^3=20$. **8.23.** 6 л. **8.24.** $y=x-\frac{\pi}{4}+1$. **8.25.** 3) Биномдық заң. **8.26.** 1) Геометриялық заң. **8.27.** $M[X]=0$; $D[X]=4$. **8.28.** $\sigma(X)\approx 0{,}5532$. **8.29.** $D(X)=0{,}23$.

8.30.

X	1	2
P	0,7	0,3

. **8.33.**

X	1	2
P	0,6	0,4

. **8.34.**

X	0	1	2
P	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$

.

8.36.

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

. **8.38.** а)

X	0	1	2
P	$\frac{1}{45}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{28}{45}$

.

8.43. 1)

X	1	2
P	0,7	0,3

; 2) $P(x<2)=0{,}7$; 3) $M(X)=1{,}3$; $D(X)=0{,}2$.

8.46. 1) $\sin\frac{\varphi}{2}\left(2\sin\frac{\varphi}{2}-1\right)$. **8.47.** 2) $\frac{8}{9}$.

МАЗМҰНЫ

6-бөлім. Шек және үздіксіздік

7-бөлім. Туынды және оның қолданылуы

8-бөлім. Кездейсоқ шамалар

Оқу басылымы

Шыныбеков Әбдухали Насырұлы
Шыныбеков Данияр Әбдухалиұлы
Жұмабаев Ринат Нұрланұлы

АЛГЕБРА ЖӘНЕ АНАЛИЗ БАСТАМАЛАРЫ

Жалпы білім беретін мектептің жаратылыстану-математика бағытындағы 10-сыныбына арналған оқулық

Редакторы *Ж. Баданова*
Көркемдеуші редакторы *Н. Тлеуімбеков*
Техникалық редакторы *Ү. Рысалиева*
Корректоры *Б. Жанпейісова*
Компьютерде беттеген *А. Куватова*

ИБ № 055

Теруге 12.02.2019 берілді. Басуға 01.07.2019 қол қойылды. Пішімі 60x90 $^1/_{16}$.
Офсеттік қағаз. Офсеттік басылыс. Шартты баспа табағы 17,0.
Есептік баспа табағы 12,46. Таралымы 27000 дана. Тапсырыс № 4411.

«Атамұра» корпорациясы» ЖШС, 050000, Алматы қаласы, Абылай хан даңғылы, 75.

Қазақстан Республикасы «Атамұра» корпорациясы» ЖШС-нің
Полиграфкомбинаты, 050002, Алматы қаласы, М. Мақатаев көшесі, 41.