В.А. Смирнов, Е.А. Тұяқов

ГЕОМЕТРИ

10

Жалпы білім беретін мектептің жаратылыстану-математика бағытындағы 10-сыныбына арналған оқулық

Қазақстан Республикасының Білім және ғылым министрлігі бекіткен

Алматы "Мектеп" 2019

ӘОЖ 373.167.1
КБЖ 22.151я72
С53

Шартты белгілер:

— жаңа білімді меңгеру барысында шешілетін мәселе

— теориялық материалды өзіндік оқып-үйренуге қажетті тапсырмалар

— теорема дәлелдеуінің аяқталуы

A — барлық оқушыға міндетті жаттығулар

B — орта деңгейлі жаттығулар

C — жоғары деңгейлі жаттығулар

Смирнов В.А., Тұяқов Е.А.
С53 **Геометрия:** Жалпы білім беретін мектептің жаратылыстану-математика бағытындағы 10-сыныбына арналған оқулық. — Алматы: Мектеп, 2019. — 200 б., сур.

ISBN 978—601—07—1140—2

С $\frac{4306020502-006}{404(05)-19}$ 38(1)—19

ӘОЖ 373.167.1
КБЖ 22.151я72

ISBN 978—601—07—1140—2

АЛҒЫ СӨЗ

Сендер геометрияның ең қызықты және маңызды бөлімдерінің бірі стереометрия курсын оқып білесіңдер. Ол курс не үшін қажет? Біріншіден, курс әртүрлі кеңістіктік формалар мен кеңістіктік фигуралардың кескіндері және олардың заңдылықтарымен таныстырып, қажетті кеңістіктік түсініктерді қалыптастырады. Екіншіден, стереометрия ғылыми таным әдісін үйретіп, логикалық ойлауды дамытуға ықпал етеді.

Сонымен қатар стереометрияны оқу кеңістіктік фигураларды кескіндеуге, модельдеуге және құрастыруға, негізгі геометриялық шамаларды (ұзындықтар, бұрыштар, аудандар, көлемдер) өлшеуге қажетті практикалық дағдыларды игеруге мүмкіндік береді.

Ақпараттық технологиялардың дамуы геометрияның рөлін күшейтеді, яғни материалды графикалық түрде ұсынумен компьютерлік модельдеу мүмкіндіктері айтарлықтай кеңейтіледі.

Оқулықтағы барлық материалдар тараулар мен параграфтарға бөлінген. Олар теориялық материалды, өздігінен орындауға арналған тапсырмаларды, пысықтау сұрақтарын, күрделілігі әртүрлі деңгейлі жаттығуларды қамтиды.

Теореманы дәлелдеудің аяқталуы (□) белгісімен белгіленген.

Оқулықта деңгейлері әртүрлі жаттығулар: **A** (міндетті деңгей), **B** (күрделілігі орта деңгей), **C** (деңгейі жоғары жаттығулар) берілген.

Әрбір тараудың соңында тарау бойынша оқу материалын меңгеру сапасын тексеруге арналған тест тапсырмалары берілген.

(*) жұлдызшамен белгіленген параграфтар оқу бағдарламасына енбейтін ғылыми-танымдық және қолданбалы сипаттағы қосымша материалды қамтиды. Оларды негізгі сабақтарда немесе қосымша сабақтарда (үйірмелерде, таңдау курстарында және т.б.) пайдалануға болады.

Оқулықтың соңында есептердің жауаптары келтірілген.

Геометрияны оқып білуде сәттілік тілейміз!

7–9-СЫНЫПТАРДАҒЫ ГЕОМЕТРИЯ КУРСЫН ҚАЙТАЛАУ

Планиметрияның негізгі ұғымдары

Планиметрияның (жазықтықтағы геометрия) негізгі ұғымдары **нүкте, түзу** және **жазықтық** болып табылады. Олардың өзара орналасуының негізгі қасиеттері (аксиомалары):

1. *Кез келген екі нүкте арқылы тек бір ғана түзу өтеді.*

2. *Бір түзудің бойында жатпайтын кем дегенде үш нүкте бар болады.*

Сәуле немесе *жарты түзу* деп берілген нүктеден және сол нүктенің бір жағында жататын барлық нүктелерден тұратын түзудің бөлігін айтады. Мұнда берілген нүкте *сәуленің төбесі* немесе *сәуленің басы* деп аталады.

Кесінді деп берілген екі нүктеден және осы нүктелердің арасында орналасқан барлық нүктелерден тұратын түзудің бөлігін айтады. Мұнда берілген екі нүкте *кесіндінің ұштары* деп аталады.

Кесіндінің ұзындығы — берілген кесіндіде бірлік кесінді және оның бөліктері неше рет орналасатынын көрсететін оң сан.

AB кесіндісінің ұзындығын, сонымен қатар *A* және *B* нүктелерінің *арақашықтығы* деп те атайды.

Ортақ төбесі бар екі сәуледен және осы сәулелермен шектелген жазықтықтың бір бөлігінен құрылған фигура *бұрыш* деп аталады. Сәулелердің ортақ төбесі *бұрыштың төбесі*, ал сәулелер *бұрыштың қабырғалары* деп аталады.

Бұрыштың градустық өлшемі бір градусқа тең бұрыш және оның бөліктері осы бұрышқа неше рет орналасатынын көрсетеді.

Егер бұрыштың қабырғалары бірігіп түзуді құрайтын болса, онда ол бұрыш *жазыңқы бұрыш* деп аталады. Керісінше жағдайда, бұрыш *жазыңқы емес бұрыш* деп аталады.

Егер екі бұрыштың бір қабырғасы ортақ, ал қалған екі қабырғасы бірігіп түзуді құрайтын болса, онда ол бұрыштар *сыбайлас бұрыштар* деп аталады.

Егер бір бұрыштың қабырғалары екінші бұрыш қабырғаларының толықтауыш жарты түзулері болса, онда ол екі бұрыш *вертикаль бұрыштар* деп аталады.

Өзінің сыбайлас бұрышына тең бұрыш *тік бұрыш* деп аталады.

Тік бұрыштан кіші бұрыш *сүйір бұрыш* деп аталады.

Тік бұрыштан үлкен, бірақ жазыңқы бұрыштан кіші бұрыш *доғал бұрыш* деп аталады.

Берілген бұрышты тең екі бұрышқа бөлетін ішкі сәуле *биссектриса* деп аталады.

Қиылысқан екі түзудің арасындағы бұрыш деп осы түзулердің қиылысу нүктесі арқылы құрылған сәулелердің арасындағы ең кіші бұрышты айтады.

Егер қиылысқан екі түзудің арасындағы бұрыш тік бұрыш болса, онда олар *перпендикуляр түзулер* деп аталады.

Егер екі түзу қиылыспайтын болса, яғни ортақ нүктелері болмаса, онда олар *параллель түзулер* деп аталады.

Аксиома ретінде келесі қасиет қабылданады.

Берілген түзудің бойында жатпайтын бір нүкте арқылы осы түзуге тек бір ғана параллель түзу жүргізуге болады.

Қандай да бір түзу A нүктесі арқылы өтіп, b түзуіне перпендикуляр болсын және B осы түзулердің қиылысу нүктесі болсын. AB кесіндісі A нүктесінен b түзуіне түсірілген *перпендикуляр* деп аталады. B нүктесі *перпендикулярдың табаны* деп аталады. *Перпендикулярдың ұзындығы* деп A нүктесінен b түзуіне дейінгі қашықтықты айтады.

b түзуінің бойында жатқан B нүктесінен басқа C нүктесі үшін AC кесіндісі A нүктесінен b түзуіне жүргізілген *көлбеу* деп аталады. C нүктесі *көлбеудің табаны* деп аталады. BC кесіндісі b түзуіндегі *көлбеудің проекциясы* деп аталады.

Екі параллель түзулердің арасындағы *қашықтық* деп бір түзудің бойында жатқан нүктеден екінші түзуге түсірілген перпендикулярдың ұзындығын айтады.

Пропорционал кесінділер туралы теорема. ***Бұрыштың қабырғаларын қиып өтетін параллель түзулер бұрыштың қабырғаларынан пропорционал кесінділерді кесіп өтеді*** .

Есептер

1. Қос-қоста н алған да он қиылысу нүктесі болатындай бес түзуді кескіндеңдер.
2. Түзудің бойында: а) 3 нүкте; ә) 4 нүкте; б) 5 нүкте; в)* n нүкте белгіленген. Төбелері осы нүктелерде болатын неше кесінді бар болады?
3. Түзудің бойында AB = 3 см, BC = 5 см, CD = 4 см болатындай тізбектелген үш кесінді орналастырылған. AB және CD кесінділерінің орта нүктелерінің арақашықтығын табыңдар.
4. Бір нүктеде қиылысатын n түзу жазықтықты неше бөлікке бөледі?
5. Қиылысқан екі түзу арқылы құрылған үш бұрыштың қосындысы 306°-қа тең. Олардың ішіндегі ең үлкен бұрыштың мәнін табыңдар.
6. OC сәулесі 120°-қа тең болатын AOB бұрышының ішінде орналасқан. Егер AOC бұрышы BOC бұрышынан 30°-қа кем болса, онда оның мәнін табыңдар.
7. Егер екі сыбайлас бұрыштардың біреуі екіншісінен екі есе артық болса, онда олардың градустық өлшемдерін табыңдар.

8. Бұрыштары сәйкесінше 60° және 90° болатын AOB және COD бұрыштарының арасындағы BOC бұрышының мәні 30°-қа тең. OC сәулесі AOB бұрышының ішінде орналасқан болса, AOD бұрышын табыңдар.
9. Доңғалақтың: а) 10 шабағы; ә) 12 шабағы бар. Екі көршілес шабақтың арасындағы бұрыштың шамасын (градуспен) табыңдар.
10. Сағаттың минуттық тілі: а) 20 мин-та; ә) 10 мин-та; б) 50 мин-та неше градусқа бұрылады?
11. Екі параллель түзулермен және қиюшымен құрылған екі ішкі айқыш бұрыштардың қосындысы 150°. Осы бұрыштарды табыңдар.
12. Егер қандай да бір түзу екі параллель түзулердің біреуін қиып өтсе, онда ол екіншісін де қиып өтетінін дәлелдеңдер.

Үшбұрыштар

Үшбұрыш деп бір түзудің бойында жатпайтын үш нүктеден және осы нүктелерді қос-қостан қосатын үш кесіндіден құралған фигураны айтады. Нүктелер үшбұрыштың *төбелері*, ал кесінділер үшбұрыштың *қабырғалары* деп аталады.

Егер үшбұрыштың барлық бұрыштары сүйір болса, онда ол *сүйір бұрышты* үшбұрыш деп аталады.

Егер үшбұрыштың тік бұрышы бар болса, онда ол *тікбұрышты үшбұрыш* деп аталады.

Тікбұрышты үшбұрыштың тік бұрышына қарама-қарсы жатқан қабырғасы *гипотенуза* деп, ал қалған екі қабырғасы *катеттер* деп аталады.

Егер үшбұрыштың доғал бұрышы бар болса, онда ол үшбұрыш *доғал бұрышты* үшбұрыш деп аталады.

Үшбұрыштың төбелері, қабырғалары және бұрыштарынан басқа келесі элементтерін атап өтуге болады:

- үшбұрыштың *медианасы* — үшбұрыштың төбесі мен оған қарсы жатқан қабырғасының ортасын қосатын кесінді;
- үшбұрыштың *биссектрисасы* — үшбұрыштың төбесіндегі бұрышын қақ бөлетін және осы төбесін қарсы жатқан қабырғасымен қосатын кесінді;
- үшбұрыштың *биіктігі* — үшбұрыштың төбесінен оған қарсы жатқан қабырғаға немесе оның жалғасына түсірілген перпендикуляр.

Үшбұрыштың *периметрі* деп үшбұрыштың барлық қабырғалары ұзындықтарының қосындысын айтады.

Қабырғаларының арасындағы қатынастарға байланысты үшбұрыштар: а) әртүрлі қабырғалы; ә) теңбүйірлі; б) теңқабырғалы болып бөлінеді.

Егер үшбұрыштың қабырғалары қос-қостан бір-біріне тең болмаса, онда ол *әртүрлі қабырғалы үшбұрыш* деп аталады.

Екі қабырғасы өзара тең болатын үшбұрыш *теңбүйірлі үшбұрыш* деп аталады. Осы тең қабырғалары *үшбұрыштың бүйір қабырғалары* деп, ал үшінші қабырғасы оның *табаны* деп аталады.

Егер үшбұрыштың барлық қабырғалары өзара тең болса, онда ол *теңқабырғалы үшбұрыш* деп аталады.

Үшбұрыштардың теңдігінің бірінші белгісі. *Егер бір үшбұрыштың екі қабырғасы және олардың арасындағы бұрышы екінші үшбұрыштың сәйкесінше екі қабырғасы мен олардың арасындағы бұрышына тең болса, онда мұндай үшбұрыштар тең болады.*

Үшбұрыштардың теңдігінің екінші белгісі. *Егер бір үшбұрыштың бір қабырғасы мен оған іргелес жатқан бұрыштары екінші үшбұрыштың сәйкесінше бір қабырғасы мен оған іргелес жатқан бұрыштарына тең болса, онда мұндай үшбұрыштар тең болады.*

Үшбұрыштардың теңдігінің үшінші белгісі. *Егер бір үшбұрыштың үш қабырғасы екінші үшбұрыштың сәйкесінше үш қабырғасына тең болса, онда мұндай үшбұрыштар тең болады.*

Теңбүйірлі үшбұрыштың белгісі. *Егер үшбұрыштың екі бұрышы өзара тең болса, онда ол теңбүйірлі үшбұрыш болады.*

Планиметрияның негізгі теоремаларының бірі — үшбұрыштың бұрыштары туралы теорема.

Теорема. ***Үшбұрыштың бұрыштарының қосындысы 180°-қа тең болады.***

Үшбұрыштың екі қабырғасының орталарын қосатын кесінді үшбұрыштың *орта сызығы* деп аталады.

Теорема. ***Үшбұрыштың орта сызығы оның қабырғаларының біреуіне параллель және оның жартысына тең болады.***

Үшбұрыштың тамаша нүктелеріне келесілер жатады:

а) биссектрисалардың қиылысу нүктесі (*іштей сызылған шеңбердің центрі*);

ә) үшбұрыштың қабырғаларына жүргізілген орта перпендикулярлардың қиылысу нүктесі (*сырттай сызылған шеңбердің центрі*);

б) медианалардың қиылысу нүктесі (*центроид*);

в) биіктіктердің немесе олардың созындыларының қиылысу нүктесі (*ортоцентр*).

Теорема (Пифагор). ***Тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасының квадраты катеттерінің квадраттарының қосындысына тең болады.***

Сонымен егер тікбұрышты үшбұрыштың катеттері a, b, ал гипотенузасы c-ға тең болса, онда келесі формула орынды болады:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Үшбұрыштардың ұқсастығының бірінші белгісі. *Егер бір үшбұрыштың екі бұрышы екінші үшбұрыштың сәйкесінше екі бұрышына тең болса, онда мұндай үшбұрыштар ұқсас болады.*

Үшбұрыштард ың ұқсастығының екінші белгісі. *Егер бір үшбұрыштың екі қабырғасы екінші үшбұрыштың сәйкесінше екі қабырғасына пропорционал және осы қабырғалардың арасындағы бұрыштары тең болса, онда мұндай үшбұрыштар ұқсас болады .*

Үшбұрыштардың ұқсастығының үшінші белгісі. *Егер бір үшбұрыштың үш қабырғасы екінші үшбұрыштың сәйкесінше үш қабырғасына пропорционал болса , онда мұндай үш бұрыштар ұқсас болады .*

Есептер

13. а) ABC сүйір бұрышты үшбұрышты; ә) ABC тікбұрышты үшбұрышты; б) ABC доғал бұрышты үшбұрышты салыңдар. Осы үшбұрыштардың медиана, биссектриса және биіктіктерін жүргізіңдер.

14. Үшбұрыштың периметрі 54 см. Оның қабырғаларының қатынасы 2 : 3 : 4 болса, олардың ұзындықтарын табыңдар.

15. Тең үшбұрыштардың: а) медианалары; ә) биссектрисалары; б) биіктіктері тең болатынын дәлелдеңдер.

16. Теңбүйірлі үшбұрыштың периметрі 15,6 м. Егер: а) табаны бүйір қабырғасынан 3 м-ге қысқа; ә) табаны бүйір қабырғасынан 3 м-ге ұзын болса, онда оның қабырғаларын табыңдар.

17. Егер ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштарында $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, CM медианасы C_1M_1 медианасына тең болса, ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштары тең екенін дәлелдеңдер.

18. ABC үшбұрышында A бұрышы 40°-қа тең және $AC = BC$ болса, C бұрышын табыңдар.

19. Үшбұрыштың бұрыштары 1 : 2 : 3 қатынасындай. Олардың ең кішісін табыңдар.

20. ABC үшбұрышында $AB = BC$. B төбесіндегі сыртқы бұрыш 138°. C бұрышын табыңдар.

21. Үшбұрыштың периметрі 15 см. Осы үшбұрыштан бір орта сызығымен қиылып түскен үшбұрышының периметрін табыңдар.

22. Қабырғасы 1-ге тең теңқабырғалы үшбұрыштың биіктігін табыңдар.

23. Бірінші үшбұрыштың қабырғалары 16 см, 8 см және 10 см. Осы үшбұрышқа ұқсас екінші үшбұрыштың ең кіші қабырғасы 6 см. Екінші үшбұрыштың қалған қабырғаларын табыңдар.

24. Тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасына түсірілген биіктік оны бастапқы үшбұрышқа ұқсас екі үшбұрышқа бөлетінін дәлелдеңдер.

Сынық сызықтар және көпбұрыштар

Сынық сызық деп біріншісінің ұшы екіншісінің басы, екіншісінің ұшы үшіншісінің басы және т.с.с. болып орналасқан саны шектеулі кесінділерден тұратын фигураны айтады. Кесінділер *сынық сызықтың буындары* , ал олардың ұштары *сынықтың төбелері* деп аталады.

Сыны қ сызықтың буындарының ұзындықтарының қосындысы *сынықтың ұзындығы* деп аталады. Сынық сызық оның төбелерін тізбектей көрсету арқылы белгіленеді. Мысалы, $ABCDE$, $A_1A_2 \ldots A_n$ сынық сызықтары.

Егер сынық сызықтың буындары өзара қиылыспайтын болса, онда ол *жай сынық сызық* деп аталады.

Егер сынық сызықтың бірінші буынының басы мен соңғы буынының ұшы беттесетін болса, онда ол *тұйық сынық сызық* деп аталады.

Егер тұйық сынық сызық өзін-өзі қимайтын болса, онда ол *жай тұйық сынық сызық* деп аталады.

Көпбұрыш деп жай тұйық сынық сызықпен құрылған және оның ішкі аймағымен шектелген фигураны айтады.

Сынық сызықтың төбелері — *көпбұрыштың төбелері*, сынық сызықтың буындары — *көпбұрыштың қабырғалары*, ал көршілес қабырғаларының арасындағы бұрыштар *көпбұрыштың бұрыштары* деп аталады. Көпбұрыштың қабырғаларында жатпайтын нүктелері *ішкі нүктелері* деп аталады.

Көпбұрыштың периметрі деп оның барлық қабырғаларының ұзындықтарының қосындысын айтады.

Көпбұрыштар үшбұрыштарға (үш бұрышы бар көпбұрыштар), төртбұрыштарға (төрт бұрышы бар көпбұрыштар) және т.с.с. болып бөлінеді. n бұрышы бар көпбұрыш *n-бұрышты* деп аталады.

Егер көпбұрыштың барлық қабырғалары және барлық бұрыштары тең болса, онда ол *дұрыс көпбұрыш* деп аталады.

Егер көпбұрышта оның кез келген екі нүктесімен қоса оларды қосатын кесінді жатса, онда ол *дөңес көпбұрыш* деп аталады.

Теорема. ***Дөңес n-бұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы*** **$180°(n-2)$*-ге тең болады.***

Есептер

25. Жай тұйық сынықтың 20 буыны бар. Оның неше төбесі болады?

26. а) Екі рет өзін-өзі қиятын; ә) үш рет өзін-өзі қиятын; б) бес рет өзін-өзі қиятын тұйық бес сынық сызықты салыңдар.

27. Дұрыс үшбұрыш; төртбұрыш; бесбұрыш; алтыбұрыш салыңдар. Сызғыш пен транспортирдің көмегімен салынған көпбұрыштардың дұрыстығын тексеріңдер.

28. Дөңес: а) төртбұрыш; ә) бесбұрыш; б) алтыбұрыш; в) n-бұрыш бір төбесінен жүргізілген диагональдарымен неше үшбұрыштарға бөлінеді?

29. а) Төртбұрыштың; ә) бесбұрыштың; б) алтыбұрыштың неше диагоналі болады?

30. Дөңес: а) төртбұрыштың; ә) бесбұрыштың; б) алтыбұрыштың; в) жетібұрыштың; г) сегізбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысын табыңдар.

31. Дөңес көпбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы 900°-қа тең. Оның қабырғаларының санын табыңдар.

32. Дұрыс: а) төртбұрыштың; ә) бесбұрыштың; б) алтыбұрыштың; в) сегізбұрыштың сыртқы бұрыштарын табыңдар.

Төртбұрыштар

Қарама-қарсы қабырғалары қос-қостан параллель болатын төртбұрыш *параллелограмм* деп аталады.

Параллелограмның бірінші белгісі. *Егер төртбұрыштың екі қабырғасы тең және параллель болса, онда мұндай төртбұрыш параллелограмм болады* .

Параллелограмның екінші белгісі. *Егер төртбұрыштың қарама-қарсы қабырғалары қос-қостан тең болса, онда ол параллелограмм болады* .

Барлық бұрыштары тік болатын параллелограмм *тіктөртбұрыш* деп аталады.

Тіктөртбұрыштың белгісі. *Егер параллелограмның диагональдары тең болса, онда ол тіктөртбұрыш болады* .

Барлық қабырғалары тең болатын параллелограмм *ромб* деп аталады.

Ромбының белгісі. *Ромбының диагональдары өзара перпендикуляр және олар сәйкесінше бұрыштарының биссектрисалары болып табылады* .

Барлық қабырғалары тең болатын тіктөртбұрыш *квадрат* деп аталады.

Квадраттың белгісі. *Егер тіктөртбұрыштың диагональдары перпендикуляр болса, онда ол квадрат болады* .

Екі қабырғасы параллель, басқа екі қабырғасы параллель емес төртбұрыш *трапеция* деп аталады.

Трапецияның параллель қабырғалары оның *табандары* , ал параллель емес қабырғалары *бүйір қабырғалары* деп аталады.

Трапецияның төбесінен оған қарсы жатқан табанына немесе табанының жалғасына түсірілген перпендикуляр оның *биіктігі* деп аталады.

Егер трапецияның бүйір қабырғалары тең болса, онда ол *теңбүйірлі трапеция* деп аталады.

Егер трапецияның бір бұрышы тік болса, онда ол *тікбұрышты трапеция* деп аталады.

Трапецияның орта сызығы деп оның бүйір қабырғаларының орталарын қосатын кесіндіні айтады.

Теорема. ***Трапецияның орта сызығы табандарына параллель және олардың қосындысының жартысына тең болады.***

Есептер

33. Паралл елограмның диагоналі оның екі қабырғасымен $25°$ және $35°$ бұрыштарын жасайды. Параллелограмның бұрыштарын табыңдар.

34. Егер параллелограмның екі бұрышының қосындысы: а) $80°$; ә) $100°$; б) $160°$ болса, параллелограмның бұрыштарын табыңдар.

35. Параллелограмның периметрі 48 см. Егер параллелограмның: а) бір қабырғасы екінші қабырғасынан 2 см ұзын; ә) екі қабырғасының айырымы 6 см; б) бір қабырғасы екінші қабырғасынан екі есе ұзын болса, онда оның қабырғаларын табыңдар.

36. Параллелограмның екі қабырғасы $3 : 4$ қатынаста, ал оның периметрі 2,8 м. Параллелограмның қабырғаларын табыңдар.

37. Тіктөртбұрыштың диагональдарының арасындағы сүйір бұрыш $50°$. Диагоналінің қабырғаларымен жасайтын бұрыштарын табыңдар.

38. Тіктөртбұрыштың кіші қабырғасы 5 см, ал диагональдары $60°$ бұрыш жасап қиылысады. Тіктөртбұрыштың диагональдарын табыңдар.

39. Егер тіктөртбұрыштың периметрі 34 см, ал диагоналімен бөлінгенде алынған үшбұрыштың біреуінің периметрі 30 см болса, осы тіктөртбұрыштың диагональдарын табыңдар.

40. Параллелограмның тең емес көршілес қабырғалары арасындағы бұрыштарының биссектрисалары тіктөртбұрыш құрайтынын дәлелдеңдер.

41. Тіктөртбұрыштың қабырғаларының орталары ромбтың төбелері екенін дәлелдеңдер.

42. Теңбүйірлі трапецияның қарама-қарсы бұрыштарының айырымы $40°$ болса, онда оның бұрыштары неге тең?

43. Трапецияның 3 см-ге тең кіші табанының ұшы арқылы оның бүйір қабырғасына параллель түзу жүргізілген. Бұл түзу трапециядан периметрі 15 см-ге тең үшбұрышты қиып түседі. Трапецияның периметрін табыңдар.

44. Трапецияның табандары 4 см және 10 см. Диагональдарының бірі орта сызығын қандай кесінділерге бөлетінін табыңдар.

Тригонометриялық функциялар

C тік бұрышы және A сүйір бұрышы болатын ABC тікбұрышты үшбұрышын қарастырайық.

Тікбұрышты үшбұрыштың *сүйір бұрышының синусы* деп осы бұрышқа қарсы жатқан катеттің гипотенузаға қатынасын айтады. A бұрышының синусы $\sin A$ арқылы белгіленеді. Анықтама бойынша

$$\sin A = \frac{BC}{AB}.$$

Тікбұрышты үшбұрыштың *сүйір бұрышының косинусы* деп осы бұрышқа іргелес жатқан катеттің гипотенузаға қатынасын айтады. A бұрышының косинусы $\cos A$ арқылы белгіленеді. Анықтама бойынша

$$\cos A = \frac{AC}{AB}.$$

Тікбұрышты үшбұрыштың *сүйір бұрышының тангенсі* деп осы бұрышқа қарсы жатқан катеттің іргелес жатқан катетке қатынасын айтады. A бұрышының тангенсі $\operatorname{tg} A$ арқылы белгіленеді. Анықтама бойынша

$$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}.$$

Тікбұрышты үшбұрыштың *сүйір бұрышының котангенсі* деп осы бұрышқа іргелес жатқан катеттің қарсы жатқан катетке қатынасын айтады. A бұрышының котангенсі $\operatorname{ctg} A$ арқылы белгіленеді. Анықтама бойынша

$$\operatorname{ctg} A = \frac{AC}{BC}.$$

Осы анықтамалардан келесі теңдіктер шығады:

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A}, \ \operatorname{ctg} A = \frac{\cos A}{\sin A}.$$

Синус, косинус, тангенс және котангенсті сүйір бұрыштың *тригонометриялық функциялары* деп атайды.

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \ \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \ \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}, \ \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3};$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \ \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \ \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}, \ \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \ \operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{ctg} 45^\circ = 1.$$

Негізгі тригонометриялық тепе-теңдіктер. A сүйір бұрышының синусы мен косинусы келесі негізгі тригонометриялық тепе-теңдікпен өзара байланысады:

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1.$$

A сүйір бұрышының тангенсі мен косинусы келесі теңдікпен өзара байланысады:

$$\operatorname{tg}^2 A + 1 = \frac{1}{\cos^2 A}.$$

A сүйір бұрышының котангенсі мен синусы келесі теңдікпен өзара байланысады:

$$\operatorname{ctg}^2 A + 1 = \frac{1}{\sin^2 A}.$$

Теорема (синустар теоремасы). ***Үшбұрыштың қабырғалары оларға қарсы жатқан бұрыштарының синустарына пропорционал болады. Үшбұрыштың қабырғасының оған қарсы жатқан бұрышының***

синусына қатынасы үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің диаметріне тең болады.

Сонымен егер ABC үшбұрышында $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ және R — оған сырттай сызылған шеңбердің радиусы болса, онда келесі теңдік орынды болады:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Косинустар теоремасы Пифагор теоремасының жалпыламасы болып табылады.

Теорема (косинустар теоремасы). ***Үшбұрыштың қабырғасының квадраты қалған екі қабырғасының квадраттарының қосындысынан осы қабырғалары мен олардың арасындағы бұрыштың косинусының екі еселенген көбейтіндісін азайтқанға тең болады.***

Сонымен егер ABC үшбұрышында $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ болса, онда келесі теңдік орынды болады:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

Есептер

45. ABC теңбүйірлі үшбұрышының ($AC = BC$) табаны 6-ға, бүйір қабырғалары 5-ке тең. A бұрышының тригонометриялық функцияларының мәндерін табыңдар.

46. ABC үшбұрышында C бұрышы $90°$, A бұрышы $30°$, $AC = 2$. CH биіктігін табыңдар.

47. ABC үшбұрышында $AC = BC = 2$, C бұрышы $120°$. AH биіктігін табыңдар.

48. Егер: а) $\sin A = \frac{1}{3}$; ә) $\sin A = \frac{3}{5}$ болса, онда $\cos A$ мәнін табыңдар.

49. Егер: а) $\cos A = \frac{2}{3}$; ә) $\cos A = \frac{5}{13}$ болса, онда $\operatorname{tg} A$ мәнін табыңдар.

50. Егер: а) $\operatorname{tg} A = \frac{1}{2}$; ә) $\operatorname{tg} A = 2$ болса, онда $\operatorname{ctg} A$ мәнін табыңдар.

51. Егер бұрыш: а) $120°$; ә) $135°$; б) $150°$ болса, онда оның синусы неге тең?

52. Егер бұрыш: а) $120°$; ә) $135°$; б) $150°$ болса, онда оның косинусы неге тең?

53. Үшбұрыштың бір бұрышының қандай мәнінде осы бұрышқа қарсы жатқан қабырғаның квадраты: а) қалған екі қабырғасының квадраттарының қосындысынан кіші; ә) қалған екі қабырғасының квадраттарының қосындысына тең; б) қалған екі қабырғасының квадраттарының қосындысынан артық болады?

54. ABC үшбұрышында $AB = 12$, $AC = 8$, $\angle A = 60°$. Үшінші қабырғасын табыңдар.

55. ABC үшбұрышында $AC = BC = 1$, C бұрышы $150°$. AB қабырғасын табыңдар.

56. Үшбұрыштың үш қабырғасы берілген: $BC = 2$, $AC = 3$, $AB = 4$. A, B, C бұрыш тары ның косинустарын табыңдар.

Аудан

Фигураның ауданы жазықтықтағы осы фигура жататын бөлігінің шамасын сипаттайды.

Фигураның ауданын өлшеу кесіндінің ұзындығын өлшеу сияқты осы фигураны аудан бірлігі болатын фигурамен салыстыр уға негізделеді.

Ауданның өлшем бірлігі ретінде қабырғасы ұзындықтың өлшем бірлігіне тең квадрат алынады. Ол *бірлік квадрат* деп аталады.

Фигураның ауданы деп өлшеу нәтижесінде алынған және берілген фигураға неше рет бірлік квадраттар мен оның бөліктері қамтылатынын көрсететін санды айтады.

Егер екі фигураның аудандары бірдей болса, онда ол фигуралар *теңшамалы* деп аталады.

Қабырғалары a, b болатын тіктөртбұрыштың S ауданы келесі формуламен есептеледі:

$$S = a \cdot b.$$

Теорема. ***Параллелограмның ауданы оның қабырғасы мен осы қабырғаға жүргізілген биіктігінің көбейтіндісіне тең болады*** .

Сонымен қабырғасы a және осы қабырғаға түсірілген биіктігі h болатын параллелограмның S ауданы келесі формуламен есептеледі:

$$S = a \cdot h.$$

Теорема. ***Параллелограмның ауданы оның екі көршілес қабырғалары мен олардың арасындағы бұрыштың синусының көбейтіндісіне тең болады*** .

Сонымен көршілес қабырғалары a, b және олардың арасындағы бұрышы C болатын параллелограмның S ауданы келесі формуламен есептеледі:

$$S = ab \cdot \sin C.$$

Теорема. ***Үшбұрыштың ауданы оның қабырғасы мен осы қабырғаға жүргізілген биіктігінің көбейтіндісінің жартысына тең болады*** .

Сонымен қабырғасы c және осы қабырғаға түсірілген биіктігі h болатын үшбұрыштың S ауданы келесі формуламен есептеледі:

$$S = \frac{1}{2} c \cdot h.$$

Теорема. ***Үшбұрыштың ауданы оның екі қабырғасы мен олардың арасындағы бұрыштың синусының көбейтіндісінің жартысына тең болады*** .

Сонымен қабырғалары a, b және олардың арасындағы бұрышы C болатын үшбұрыштың S ауданы келесі формуламен есептеледі:

$$S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin C.$$

Теорема. ***Трапецияның ауданы оның табандарының қосындысының жартысы мен биіктігінің көбейтіндісіне тең болады.***

Сонымен табандары a, b және биіктігі h болатын трапецияның S ауданы келесі формуламен есептеледі:

$$S = \frac{1}{2}(a + b) \cdot h.$$

Теорема. ***Дөңес төртбұрыштың ауданы оның диагональдары мен олардың арасындағы бұрыштың синусының көбейтіндісінің жартысына тең болады.***

Сонымен диагональдары d_1, d_2 және олардың арасындағы бұрышы C болатын дөңес төртбұрыштың S ауданы келесі формуламен есептеледі:

$$S = \frac{1}{2}d_1d_2 \cdot \sin C.$$

Көпбұрыштың ауданын оны үшбұрыштарға бөлу арқылы табуға болады. Сонда көпбұрыштың ауданы осы үшбұрыштардың аудандарының қосындысына тең болады.

Есептер

57. Қабырға сы 6-ға, диагоналі 10-ға тең болатын тіктөртбұрыштың ауданын табыңдар.

58. Диагоналі a-ға тең квадраттың ауданын табыңдар.

59. Квадраттың ауданы 1-ге тең. Төбелері осы квадраттың қабырғаларының орталары болатын жаңа квадраттың ауданын табыңдар.

60. Қабырғалары 8 см, 10 см және олардың арасындағы бұрыш: а) 30°; ә) 45°; б) 60° болатын параллелограмның ауданын табыңдар.

61. Параллелограмның ауданы 40 см^2, қабырғалары 5 см және 10 см. Оның биіктігін табыңдар.

62. Теңбүйірлі үшбұрыштың бүйір қабырғасы 5-ке, ал табаны 6-ға тең. Осы үшбұрыштың ауданын табыңдар.

63. Үшбұрыштың ауданы 30-ға, бір қабырғасы 10-ға тең. Осы қабырғаға түсірілген биіктікті табыңдар.

64. Екі қабырғасы 3 см және 8 см, ал олардың арасындағы бұрыш 30° болатын үшбұрыштың ауданын табыңдар.

65. Трапецияның орта сызығы 3-ке, биіктігі 2-ге тең. Оның ауданын табыңдар.

66. Трапецияның табаны 10 см және 35 см, ауданы 225 см^2. Оның биіктігін табыңдар.

67. Трапецияның биіктігі 20 см, ауданы 400 см^2. Трапецияның орта сызығын табыңдар.

68. Трапецияның ауданы 200 см^2. Оның бір табаны 26 см, ал биіктігі 10 см. Трапецияның екінші табанын табыңдар.

69. Қабырғасы 1-ге тең дұрыс алтыбұрыштың ауданын табыңдар.

70. Дөңес төртбұрыштың диагоналдары 6 және 8, ал олардың арасындағы бұрыш 30°. Осы төртбұрыштың ауданын табыңдар.

Векторлар

Вектор деп бағытталған кесіндіні, яғни басы мен ұшы көрсетілген кесіндіні айтады.

Егер нөлдік емес екі вектор бір түзудің бойында немесе параллель түзулердің бойында жатса, онда олар *коллинеар векторлар* деп аталады.

Егер AB немесе CD сәулелерінің біреуі екіншісінде жататын болса, онда бір түзудің бойында жатқан $\overline{AB}$ және $\overline{CD}$ векторлары *бірдей бағытталған* деп аталады.

Керісінше жағдайда, олар *қарама-қарсы бағытталған* деп аталады.

Егер бір түзудің бойында жатпайтын екі вектор параллель түзулердің бойында жатып бір жаққа (әртүрлі жаққа) бағытталса, онда олар *бірдей бағытталған* (*қарама-қарсы бағытталған*) деп аталады.

Бірдей бағытталған немесе қарама-қарсы бағытталған екі вектор *коллинеар векторлар* деп аталады.

Вектордың *ұзындығы* немесе *модулі* деп сәйкесінше кесіндінің ұзындығын айтады. $\overline{AB}$, $\vec{a}$ векторларының ұзындығы сәйкесінше $|\overline{AB}|$, $|\vec{a}|$ деп белгіленеді.

Егер екі вектордың бағыттары мен ұзындықтары бірдей болса, онда олар *тең векторлар* деп аталады.

Басы мен ұшы беттесетін *нөлдік векторлар* да қарастырылады. Мұндай векторлар $\vec{0}$ деп белгіленеді.

Нөлдік вектордың ұзындығы нөлге тең деп есептеледі.

Барлық нөлдік векторлар бір-біріне тең деп саналады.

Векторлар үшін кесінділерге ұқсас қосу амалы анықталған. $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларын қосу үшін $\vec{b}$ векторын оның басы $\vec{a}$ векторының ұшымен беттесетіндей етіп орналастыру керек.

Басы $\vec{a}$ векторының басымен, ал ұшы $\vec{b}$ векторының ұшымен беттесетін вектор $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының *қосындысы* деп аталады және $\vec{a}+\vec{b}$ деп белгіленеді.

$\vec{a}$ векторының t санына *көбейтіндісі* деп ұзындығы $|t|\cdot|\vec{a}|$ болатын және бағыты $t>0$ болғанда өзгеріссіз қалатын, ал $t<0$ болғанда қарама-қарсы бағытта болатын векторды айтады. $\vec{a}$ векторының t санына көбейтіндісі $t\vec{a}$ деп белгіленеді. Анықтама бойынша $|t\vec{a}|=|t|\cdot|\vec{a}|$.

$\vec{a}$ векторының -1 санына көбейтіндісі $-\vec{a}$ деп белгіленеді және ол $\vec{a}$ векторына *қарама-қарсы вектор* деп аталады.

Анықтама бойынша $-\vec{a}$ векторының бағыты $\vec{a}$ векторының бағытына қарама-қарсы болады және $|-\vec{a}|=|\vec{a}|$.

Теорема. ***Егер $\vec{a}$ және $\vec{b}$ нөлдік емес коллинеар емес екі вектор болса, онда кез келген $\vec{c}$ векторы үшін $\vec{c} = t \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}$ теңдігі орындалатындай тек бір ғана t және s сандары табылады .***

$\vec{a}$ және $\vec{b}$ нөлдік емес екі вектор болсын. Оларды O нүктесінен $\overline{OA} = \vec{a}$, $\overline{OB} = \vec{b}$ болатындай етіп саламыз. Егер осы векторлар бірдей бағытталмаған болса, онда OA және OB сәулелерінің арасындағы бұрыш $\vec{a}$ және $\vec{b}$ *векторларының арасындағы бұрыш* деп аталады.

Бірдей бағытталған векторлардың арасындағы бұрыш 0°-ка тең деп есептеледі.

Арасындағы бұрыш тік бұрыш болатын екі вектор *перпендикуляр векторлар* деп аталады.

Нөлдік емес екі вектордың *скаляр көбейтіндісі* деп олардың ұзындықтары мен арасындағы бұрыштың косинусының көбейтіндісін айтады.

Егер бір вектор нөлдік вектор болса, онда осы векторлардың скаляр көбейтіндісі нөлге тең деп есептеледі.

$\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының скаляр көбейтіндісі $\vec{a} \cdot \vec{b}$ деп белгіленеді. Анықтама бойынша

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos j ,$$

мұндағы j бұрышы — $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары арасындағы бұрыш.

$\vec{a} \cdot \vec{a}$ көбейтіндісі *скаляр квадрат* деп аталады және $\vec{a}^2$ деп белгіленеді. Скаляр көбейтіндінің анықтамасынан $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ шығады.

Есептер

71. Қабырғалары 1-ге тең және диагональдары O нүктесінде қиылысатын $ABCDEF$ дұрыс алтыбұрышы берілген. а) $\overline{DE}$; ә) $\overline{OF}$; б) $\overline{BE}$; в) $\overline{FC}$ векторларын табыңдар .

72. $ABCD$ параллелограмында келесі векторларды көрсетіңдер: а) $\overline{AB} + \overline{AD}$; ә) $\overline{AC} + \overline{CD}$; б) $\overline{AD} + \overline{CB} + \overline{DC}$.

73. $ABCD$ тіктөртбұрышында $AB = 4$, $BC = 3$. AC және BD диагональдары O нүктесінде қиылысады және олар 5-ке тең. а) $|\overline{AB} + \overline{AD}|$; ә) $|\overline{AO} + \overline{BO}|$; б) $|\overline{OB} + \overline{OC}|$; в) $|\overline{AC} + \overline{BD}|$ векторлардың қосындысының модулін табыңдар .

74. $ABCD$ ромбының O нүктесінде қиылысатын AC және BD диагональдары сәйкесінше 14-ке және 10-ға тең. Келесі векторлардың ұзындықтарын табыңдар: а) $\overline{AB} - \overline{AD}$; ә) $\overline{AB} - \overline{BC}$; б) $2\overline{AB} - \overline{AC}$; в) $\overline{BC} - \overline{OC}$.

75. Қабырғалары 1-ге тең және диагональдары O нүктесінде қиылысатын $ABCDEF$ дұрыс алтыбұрышы берілген. Келесі векторлардың ұзындықтарын табыңдар: а) $\overline{AO} - \overline{CD}$; ә) $\overline{AE} - \overline{OE}$; б) $\overline{AO} - \overline{FE}$.

76. $ABCD$ тіктөртбұрышында $AB = 4$, $AD = 3$, AC және BD диагональдары 5-ке тең. Келесі векторлардың ұзындықтарын табыңдар: а) $\frac{1}{2}\overline{AB} - \frac{1}{2}\overline{AD}$; ә) $\frac{1}{2}\overline{AC} - \frac{1}{2}\overline{AB}$.

77. $ABCDEF$ дұрыс алтыбұрышы үшін келесі векторлардың арасындағы бұрышты табыңдар: а) $\overline{AB}$ және $\overline{AF}$; ә) $\overline{AB}$ және $\overline{EF}$; б) $\overline{AB}$ және $\overline{CB}$; в) $\overline{AB}$ және $\overline{DC}$; г) $\overline{AC}$ және $\overline{BE}$; ғ) $\overline{AC}$ және $\overline{DE}$.

78. Қабырғалары $AB = 8$, $AD = 6$ болатын $ABCD$ тіктөртбұрышы үшін келесі скаляр көбейтіндіні табыңдар: а) $\overline{AB} \cdot \overline{AD}$; ә) $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$; б) $\overline{AB} \cdot \overline{BC}$; в) $\overline{AC} \cdot \overline{BC}$.

Координаталар

O нүктесі және оң бағытын көрсететін OE бірлік кесіндісі таңдап алынған түзу *координаталық түзу* немесе *координаталық ось* деп аталады. O нүктесі *координаталар басы* деп аталады.

Координаталық түзудегі *A нүктесінің координатасы* деп A нүктесінен O координаталар басына дейінгі x қашықтықты айтады. Егер A нүктесі оң жарты осьте жатса, ол "+" таңбасымен және егер A нүктесі теріс жарты осьте жатса, ол "–" таңбасымен алынады.

Теорема. ***Координаталық түзудегі координаталары сәйкесінше x_1, x_2 болатын A_1, A_2 нүктелерінің арақашықтығы келесі формуламен өрнектеледі:***

$$A_1A_2 = |x_2 - x_1|.$$

Жазықтықтағы тікбұрышты координаталар жүйесі деп ортақ координаталар басы болатын өзара перпендикуляр координаталық түзулердің жұбын айтады.

Координаталар басы O әрпімен, ал координаталық түзулер Ox, Oy арқылы белгіленеді және олар сәйкесінше *абсцисса осі*, *ордината осі* деп аталады.

Тікбұрышты координаталар жүйесімен берілген жазықтық *координаталық жазықтық* деп аталады.

Координаталық жазықтықтағы A нүктесін қарастырайық. Осы нүкте арқылы Ox осіне перпендикуляр түзу жүргіземіз және Ox осімен қиылысу нүктесін A_x арқылы белгілейміз. Нүктенің Ox осіндегі координатасын A нүктесінің *абсциссасы* деп атайды және x арқылы белгілейді. Осыған ұқсас A нүктесі арқылы Oy осіне перпендикуляр түзу жүргіземіз және Oy осімен қиылысу нүктесін A_y арқылы белгілейміз. Осы нүктенің Oy осіндегі координатасын A нүктесінің *ординатасы* деп атайды және y арқылы белгілейді.

Сонымен координаталық жазықтықтағы әрбір A нүктесіне $(x; y)$ жұбы сәйкес келеді және ол берілген координаталар жүйесіне қатысты *жазықтықтағы нүктенің координаталары* деп аталады. $(x; y)$ координаталары болатын A нүктесі $A(x; y)$ арқылы белгіленеді.

Координаталық жазықтықтағы $A_1(x_1; y_1)$, $A_2(x_2; y_2)$ нүктелерінің арақашықтығы келесі формуламен өрнектеледі:

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Центрі $(x_0; y_0)$ нүктесі және радиусы R болатын шеңбер келесі теңдеумен беріледі:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Түзу $ax + by + c = 0$ теңдеуімен беріледі, мұндағы a және b — бір уақытта нөлге тең емес сандар.

Басы координаталар басымен сәйкес келетіндей етіп қандай да бір векторды салайық. Сонда оның ұшының координаталары *вектордың координаталары* деп аталады.

Координаталары сәйкесінше (1; 0), (0; 1) болатын векторларды $\vec{i}$, $\vec{j}$ деп белгілейік. Бұл векторларды *координаталық векторлар* деп атаймыз және бастары координаталар басымен сәйкес келетіндей етіп саламыз.

Теорема. ***$\vec{a}$ векторын $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$ түрінде көрсетуге болатын жағдайда ғана оның координаталары $(x; y)$ болады.***

$A_1(x_1; y_1)$, $A_2(x_2; y_2)$ нүктелерімен берілген $\overline{A_1A_2}$ векторының ұзындығы келесі формуламен өрнектеледі:

$$|\overline{A_1A_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

$\vec{a}_1(x_1; y_1)$ және $\vec{a}_2(x_2; y_2)$ векторларының скаляр көбейтіндісі келесі формуламен өрнектеледі:

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = x_1x_2 + y_1y_2.$$

Нормаль векторлары $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ болатын түзулердің арасындағы j бұрышының косинусы векторлардың скаляр көбейтіндісінің формуласымен есептеледі:

$$\cos j = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}.$$

Дербес жағдайда, егер $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ векторларының скаляр көбейтіндісі нөлге тең болса, яғни

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = a_1a_2 + b_1b_2 = 0$$

теңдігі орындалатын болса, онда екі түзу перпендикуляр болады.

Есептер

79. AB кесіндісінің ортасының координаталарын табыңдар, егер: а) $A(-2; 1)$, $B(6; 5)$; ә) $A(4; -3)$, $B(2; 1)$; б) $A(7; 5)$, $B(-5; -3)$.

80. $O(0; 0)$, $A(6; 2)$, $C(0; 6)$ және B нүктелері $OABC$ параллелограмының төбелері. B нүктесінің координаталарын табыңдар.

81. $O(0;\ 0)$, $A(8;\ 2)$, $B(10;\ 8)$, $C(2;\ 6)$ нүктелері параллелограмның төбелері. Осы параллелограмның диагональдарының қиылысу нүктесі болатын P нүктесінің координаталарын табыңдар.

82. а) $A_1(2;\ 1)$ және $A_2(1;\ -1)$; ә) $B_1(4;\ 3)$ және $B_2(-1;\ 3)$ нүктелерінің арақашықтығын табыңдар.

83. $A(3;\ 2)$ нүктесінен келесі осьтерге дейінгі қашықтықты табыңдар: а) Ox; ә) Oy.

84. $A(1;\ 2)$ немесе $B(1;\ -2)$ нүктелерінің қайсысы координаталар басына жақын орналасқан?

85. Келесі теңдеумен берілген шеңбердің C центрінің координаталарын және R радиусын табыңдар: а) $(x+5)^2+(y-2)^2=16$; ә) $x^2+(y-3)^2=9$.

86. а) Центрі $O(0;\ 0)$ нүктесі және радиусы 1-ге тең; ә) центрі $C(-2;\ 1)$ нүктесі және радиусы 3-ке тең болатын шеңбердің теңдеуін табыңдар.

87. Центрі координаталар басы болатын және $A(3;\ 3)$ нүктесі арқылы өтетін шеңбердің теңдеуін табыңдар.

88. Келесі теңдеу шеңбердің теңдеуі болатынын дәлелдеңдер: а) $x^2-8x+y^2=0$; ә) $x^2+2x+y^2-6y+4=0$. Оның радиусы мен центрінің координаталарын табыңдар.

89. $\vec{a}_1(2;\ -1)$ және $\vec{a}_2(-1;\ 2)$ векторларының скаляр көбейтіндісін табыңдар.

90. Келесі теңдеулермен берілген түзулердің арасындағы бұрышты табыңдар: а) $2x+y-1=0$, $x-2y+3=0$; ә) $x+y+1=0$, $x-y-1=0$.

91. $A_0(2;\ 1)$ нүктесі арқылы өтетін және нормаль векторы $\vec{n}(1;\ -1)$ болатын түзудің теңдеуін табыңдар.

92. $M(-1;\ 3)$, $N\ (1;\ 4)$ нүктелері арқылы өтетін түзудің теңдеуін жазыңдар. Осы түзудің нормаль векторының координаталарын табыңдар.

93. Келесі түзулер жұбының қайсысы: а) параллель; ә) перпендикуляр екенін анықтаңдар:
1) $x+y-2=0$, $x+y+3=0$; 2) $x+y-2=0$, $x-y-3=0$;
3) $-7x+y=0$, $7x-y+4=0$; 4) $4x-2y-8=0$, $-x-2y+4=0$.

94. Келесі түзулердің қиылысу нүктесінің координаталарын табыңдар:
а) $x-y-1=0$, $x+y+3=0$;
ә) $x-3y+2=0$, $2x-5y+1=0$.

95. $\vec{a}(-1;\ 2)$ және $\vec{b}(2;\ -4)$ векторлары берілген. $3\vec{a}-2\vec{b}$ векторының координаталарын табыңдар.

96. $\vec{a}_1(1;\ 3)$ және $\vec{a}_2(3;\ -1)$ векторларының скаляр көбейтіндісін табыңдар.

97. $\vec{a}_1(3;\ 4)$ және $\vec{a}_2(4;\ 3)$ векторларының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

I тарау

СТЕРЕОМЕТРИЯ БАСТАМАЛАРЫ. КЕҢІСТІКТЕГІ ПАРАЛЛЕЛЬДІК

§ 1. Стереометрияның негізгі ұғымдары

Стереометрия немесе кеңістіктегі геометрия — әртүрлі кеңістіктік фигуралардың орнын, пішінін, өлшемдерін және қасиеттерін зерттейтін геометрияның бөлімі.

"Стереометрия" — грек сөзі, яғни "стереос" — қатты (дене) және "метрео" — өлшеу деген сөздерінен шыққан. "Стереометрия" сөзі денелерді өлшеу дегенді білдіреді.

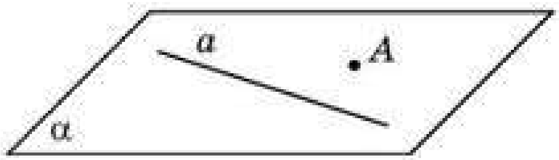
Стереометрияның негізгі ұғымдары кеңістіктегі объектілерді көрсететін *нүкте, түзу* және *жазықтық* болып табылады.

Нүкте — өте кішкентай, яғни өлшемдерін ескермеуге болатын обьектілердің орны. Евклид өзінің белгілі "Бастамалары" кітабында нүктенің бөліктері жоқ деп жазды.

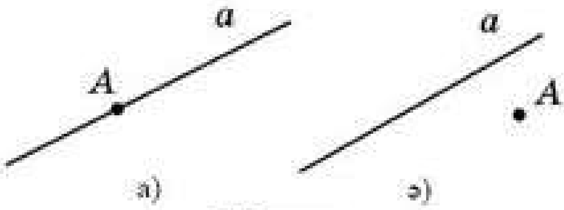
Түзу тіктөртбұрышты пішінді үстелдің қыры, керілген жіптің бейнесі болады. Түзудің бойымен жарықтың сәулесі таралады.

Жазықтық судың тегіс беті, үстел, тақта, айна және т.б. бетінің бейнесі болады.

Нүкте, түзу және жазықтықты 1.1-суретте көрсетілгендей кескіндейміз.



1.1-сурет



1.2-сурет

Нүктелер A, B, C, ... латынның бас әріптерімен белгіленеді.

Нүкте берілген түзудің бойында жатуы мүмкін (1.2, а-сурет) немесе жатпауы да мүмкін (1.2, ә-сурет).

Егер нүкте түзудің бойында жатса, онда түзу нүкте арқылы өтеді деп айтады.

Түзулер a, b, c, ... латынның кіші әріптерімен белгіленеді, сондай-ақ осы түзуде жататын екі нүктені көрсететін екі латынның әріптерімен белгіленеді, мысалы: AB түзуі, C_1D_1 түзуі және т.б.

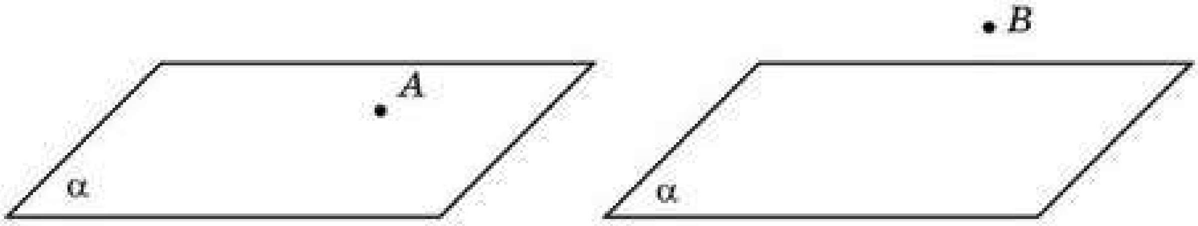
Математикада тиістілік қатынасы $\in$ белгісімен белгіленеді. Мысалы, A нүктесінің a түзуіне тиісті болуы $A \in a$ деп, ал B нүктесінің a түзуіне тиісті еместігі $B \notin a$ деп белгіленеді.

Кеңістікте екі түзудің бір ғана ортақ нүктесі бар болса, онда олар *қиылысатын түзулер* деп аталады.

C нүктесі a және b түзулерінің қиылысу нүктесі болуы $C = a \cap b$ деп белгіленеді.

Нүкте берілген жазықтықта жатуы (1.3, а-сурет) немесе жатпауы мүмкін (1.3, ә-сурет).

Егер нүкте жазықтықта жатса, онда жазықтық осы нүкте арқылы өтеді деп айтады.



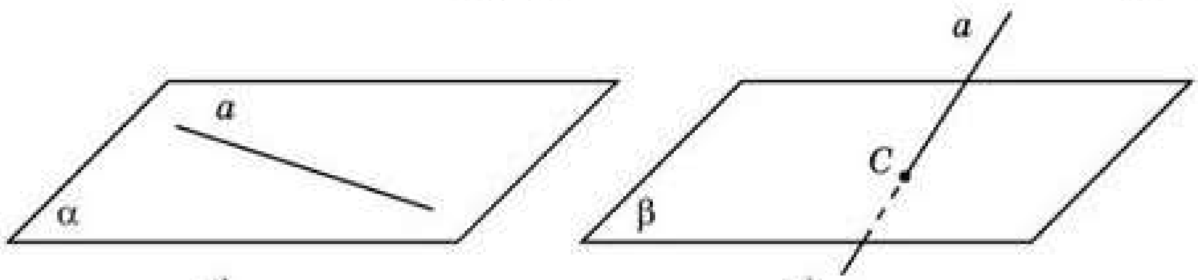
а) ә)

1.3-сурет

Жазықтық a, b, g ... грек әріптерімен, сонымен бірге осы жазықтықтағы бір түзудің бойында жатпайтын үш нүктені көрсететін латынның үш әрпімен белгіленеді. Мысалы, ABC жазықтығы, $D_1E_1F_1$ жазықтығы және т.б.

A нүктесінің a жазықтығында жатуы $A \in$a деп, ал B нүктесінің a жазықтығында жатпауы $B \notin$a деп белгіленеді.

Егер түзудің әрбір нүктесі жазықтықта жатса, онда түзу жазықтықта жатады немесе жазықтық түзу арқылы өтеді деп айтады (1.4, а-сурет).



а) ә)

1.4-сурет

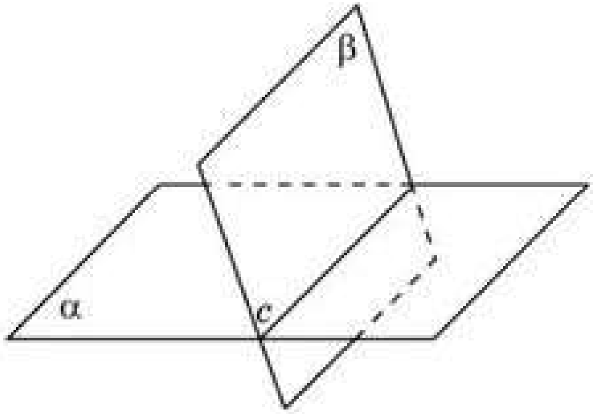
a түзуінің a жазықтығында жатуы $a \in$a деп белгіленеді.

Егер түзу мен жазықтықтың бір ғана ортақ нүктесі бар болса, онда түзу жазықтықты қиып өтеді дейді (1.4, ә-сурет).

C нүктесі a түзуі мен b жазықтығының қиылысу нүктесі болуы $C = a \cap$b деп белгіленеді (1.4, ә-сурет).

Жазықтықты қиып өтпейтін түзуді салып көріңдер.

Егер екі жазықтықтың ортақ нүктелері бір түзудің нүктелері болса, онда осы жазықтықтар осы түзудің бойымен қиылысады деп айтамыз (1.5-сурет).



1.5-сурет

c түзуі a жазықтығы мен b жазықтығының қиылысу сызығы болуы $c = a \cap b$ деп белгіленеді (1.5-сурет).

Қиылыспайтын екі жазықтықты салып көріңдер.

Тарихи мәліметтер

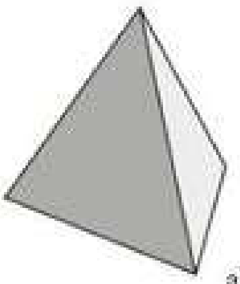
Стереометрия планиметрия курсы сияқты адамның практикалық іс-әрекетінің қажеттілігіне байланысты туындап, дамыды. Ежелгі Мысырда геометрияның пайда болуы туралы б.з.д. 2000 жыл бұрын Ежелгі грек ғалымы Геродот былай деп жазды: "Мысырлық фараон Сеозоострис әрбір мысырлыққа жер телімін жеребе арқылы бөліп беріп, әрбір жер теліміне тиісті салық алып отырды. Ніл өзені тасып, жерді су басқан кезде зардап шеккендер патшаға барды, осы кезде патша салықты тиісті етіп азайту үшін жер телімі қаншаға азайғанын анықтауға жер өлшеушілерді жібереді. Осылайша геометрия Мысырда, кейін Грекияда пайда болды".

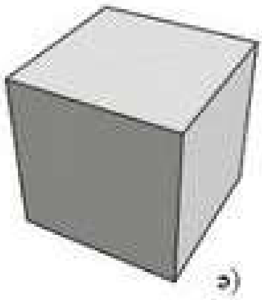
Қарапайым ғимараттарды салу кезінде де құрылысқа қанша материал қажет екенін есептеу, кеңістіктегі нүктелердің арақашықтығын, түзу мен жазықтықтың арасындағы бұрышты есептеу, қарапайым геометриялық фигуралардың қасиеттерін қолдану қажет болды. Б.з.д. 2, 3 және 4 мың жыл бұрын салынған мысырлық пирамидалар өзінің метрикалық қатынастарының дәлдігімен таңғалдырады. Бұл сол замандағы құрылысшылардың стереометрияны жақсы білгенін көрсетеді.

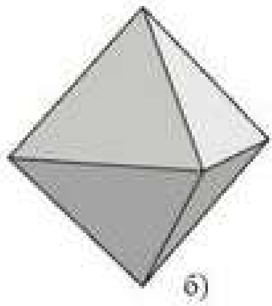
Теңізде жүзу мен сауданы дамыту уақыт пен кеңістікті бағдарлау біліктігін, яғни жыл маусымдарының ауысу мерзімін білу, картада өзінің тұрған жерін анықтау, қозғалыс бағытын табу және қашықтықты өлшеу біліктігін талап етті. Күн, Ай, жұлдыздарды бақылау және кеңістіктегі түзулер мен жазықтықтардың өзара орналасуы заңдылықтарын зерттеу осы есептерді шешуге мүмкіндік берді және жаңа ғылымның бастамасы — астрономияға жол ашты.

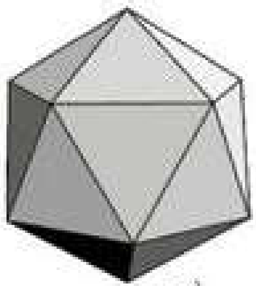
Б.з.д. VII ғасырдан бастап Ежелгі Грекияда практикалық геометриядан теориялық геометрияға біртіндеп ауысуы жүзеге асатын философиялық мектептер құрылды. Бұл мектептерде тұжырымдар орын алып, олардың көмегімен жаңа геометриялық деректер алуға мүмкіндік болды.

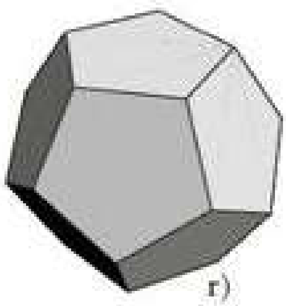
Алғашқы танымал мектептердің бірі Пифагор мектебі және ол негізін қалаушы Пифагордың құрметіне аталған (б.з.д. VI—V ғғ.). Пифагорлықтар өздерінің философиялық теорияларына дұрыс көпжақтарды қолданған, олар фигуралардың пішіндерін тұрмыстағы элементтермен салыстырған, яғни от — дұрыс тетраэдр (1.6, а-сурет), жер — гексаэдр (1.6, ә-сурет); ауа — октаэдр (1.6, б-сурет); су — икосаэдр (1.6, в-сурет); жержүзі — додекаэдр (1.6, г-сурет).


а)


ә)


б)


в)


г)

1.6-сурет

Дұрыс көпжақтардың атауында грек тілінен аударғанда: "тетра" — төрт, тетраэдрдың жақтары — төрт дұрыс үшбұрыштар; "гекса" — алты, гексаэдрдің (куб) алты квадрат жағы бар; "окто" — сегіз, октаэдрдің жақтары — сегіз дұрыс үшбұрыштар; "икоси" — жиырма, икосаэдрдің жақтары — жиырма дұрыс үшбұрыштар, "додека" — он екі, додекаэдрдің жақтары — он екі дұрыс бесбұрыштар, ал "эдра" — "жақ" дегенді білдіреді.

Кейінгі философиялық мектеп — Александрия мектебі б.з.д. 300 жыл бұрын әлемге белгілі ғалым Евклидті әкелуімен қызықты. Өкінішке орай, оның өмірі туралы мәліметтер аз. Өзінің бір шығармаларында Папп математик (б.з. III ғ.) Евклидті абырой мен өзімшілдіктен аулақ, адал, сабырлы және сыпайы адам ретінде сипаттаған. Евклид әйгілі "Бастамалар" кітабын жазды, онда геометрия алғашқы ғылыми тұрғыда баяндалды және геометрияның дұрыс аксиоматикалық құрылуы ұсынылды. Екі мың жылдан бері бұл кітап геометрияның жүйелі курсын оқуға негіз болды.

Бірде Птоломей патшасы Евклидтен: "Геометрияны оның "Бастамасынан" басқа қысқаша оқу жолы бар ма?" — деп сұрағанда, Евклид: "Геометрияда патшалыққа жол жоқ" — деп жауап береді.

Соңғы жүзжылдықта жаңа әдістер, соның ішінде геометриялық есептерді алгебра тіліне және керісінше көшіруге мүмкіндік беретін координаталық және векторлық әдістер пайда болды. Геометриялық зерттеулердің жаңа бағыттары дамып келеді, атап айтсақ: Лобачевский геометриясы, проективтік геометрия, топология, компьютерлік геометрия және т.б. Геометриялық әдістер басқа да ғылымдарда, мысалы, салыстырмалылық теориясы, кванттық механика, кристаллография және басқа көптеген ғылымдарда кеңінен қолданылады.

Сұрақтар

1. Стереометрия нені зерттейді?
2. "Стереометрия" сөзі грек тілінен қалай аударылады?
3. а) Нүкте; ә) түзу; б) жазықтық қандай объектілердің орны болады?
4. а) Нүкте; ә) түзу; б) жазықтық қалай белгіленеді?
5. A нүктесінің a түзуіне тиісті болуы қалай белгіленеді?
6. B нүктесінің a түзуіне тиісті еместігі қалай белгіленеді?
7. Кеңістікте қандай екі түзу қиылысқан түзулер деп аталады?
8. C нүктесі a және b түзулерінің қиылысу нүктесі болуы қалай белгіленеді?
9. A нүктесінің a жазықтығында жатуы қалай белгіленеді?
10. B нүктесінің a жазықтығында жатпауы қалай белгіленеді?
11. Қандай жағдайда түзу: а) жазықтықта жатыр; ә) жазықтықты қиып өтеді деп айтады?
12. a түзуінің a жазықтығында жатуы қалай белгіленеді?
13. C нүктесі a түзуі мен b жазықтығының қиылысу нүктесі болуы қалай белгіленеді?
14. Қандай жағдайда екі жазықтық түзудің бойымен қиылысады деп айтады?
15. c түзуі a жазықтығы мен b жазықтығының қиылысу сызығы болуы қалай белгіленеді?
16. Геометрия қашан және қайда пайда болды?
17. 1.6-суретте кескінделген көпжақтар қалай аталады? Олардың неше жағы бар?

Есептер

А

1.1. Сыныптың қабырғаларын жазықтықтың бөліктері деп қарастырыңдар.
а) Қиылысатын екі жазықтықты;
ә) қиылыспайтын екі жазықтықты;

б) жазықтықты және онымен қиылыспайтын түзуді;
в) қиылысатын екі түзуді;
г) қиылыспайтын екі түзуді көрсетіңдер.

1.2. Кескін деңдер:
а) қиылысатын екі түзуді;
ә) жазықтықты және онымен қиылыспайтын түзуді;
б) қиылыспайтын екі жазықтықты.

1.3. A, B, C нүктелері бір түзудің бойында жатпайды. Осы нүктелердің әртүрлі жұптары арқылы өтетін түзулерді жазыңдар.

1.4. A, B, C, D нүктелері бір жазықтықта жатпайды. Осы нүктелердің әртүрлі үшеуі арқылы өтетін жазықтықтарды жазыңдар.

B

1.5. A, B, C, D нүктелері бір жазықтықта жатпайды. AD түзуімен: а) ABC; ә) BCD жазықтығының қиылысу нүктесін көрсетіңдер.

1.6. A, B, C, D нүктелері бір жазықтықта жатпайды. ABC жазықтығымен: а) ABD; ә) BCD; б) ACD жазықтығының қиылысу түзуін көрсетіңдер.

1.7. Бір түзудің бойында үшеуі жатпайтын а) үш нүктенің; ә) төрт нүктенің; б) бес нүктенің әртүрлі жұбы арқылы неше түзу өтеді?

1.8. Бір жазықтықта жатпайтын төрт нүктенің әртүрлі үшеуі арқылы неше жазықтық өтеді?

C

1.9. Бір түзудің бойында үшеуі жатпайтын n нүктенің әртүрлі жұптары арқылы неше түзу өтеді?

1.10. Бір жазықтықта төртеуі жатпайтын n нүктенің әртүрлі үшеуі арқылы неше жазықтық өтеді?

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

1.11. Геометрияның жазықтықтағы аксиомаларын қайталаңдар.

1.12. Жазықтықтағы геометрияның аксиомаларын тұжырымдаңдар.

§ 2. Стереометрия аксиомалары

Планиметрия курсындағыдай кеңістікте нүктелердің, түзулер мен жазықтықтардың кейбір қасиеттері дәлелдеусіз қабылданады, олар *аксиомалар* деп аталады. Грек тілінен аударғанда "аксиома" — "лайықты мойындау", яғни дәлелдеуді талап етпейтін тұжырымды білдіреді.

Стереометрияның келесі аксиомаларын тұжырымдайық.

1. *Кеңістіктегі кез келген екі нүкте арқылы бір ғана түзу өтеді.*

Белгілеулерді пайдаланып, бұл аксиоманы келесі түрде тұжырымдауға болады.

Кеңістіктегі кез келген A_1, A_2 нүктелері үшін $A_1 \in a$ және $A_2 \in a$ болатындай жалғыз a түзуі табылады.

2. *Кеңістіктегі бір түзудің бойында жатпайтын кез келген үш нүкте арқылы бір ғана жазықтық өтеді*.

Белгілеулерді пайдаланып, бұл аксиоманы келесі түрде тұжырымдауға болады.

Кеңістіктегі бір түзудің бойында жатпайтын кез келген A_1, A_2, A_3 нүктелері үшін $A_1 \in$ a және $A_2 \in$ a, $A_3 \in$ a болатындай жалғыз a жазықтығы табылады.

3. *Егер екі жазықтықтың ортақ нүктесі бар болса, онда олар осы нүкте арқылы өтетін түзудің бойымен қиылысады*.

Белгілеулерді пайдаланып, бұл аксиоманы өздерін тұжырымдаңдар.

4. *Бір жазықтықта жатпайтын кем дегенде төрт нүкте бар болады*.

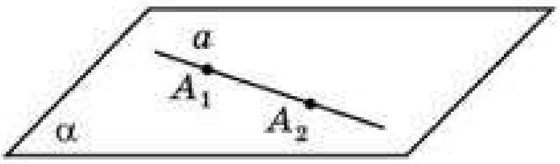
Белгілеулерді пайдаланып, бұл аксиоманы өздерін тұжырымдаңдар.

5. *Кеңістіктегі түзулер мен жазықтықтар үшін планиметрияның барлық аксиомалары орындалады*.

Стереометрияның аксиомаларын қолданып, логикалық тұжырымдардың көмегімен басқа қасиеттердің дұрыстығы дәлелденеді. Олардың кейбіреуін қарастырайық.

1-қасиет. *Егер түзу мен жазықтықтың екі ортақ нүктесі бар болса, онда түзу сол жазықтықта жатады*.

Дәлелдеуі. a түзуінің a жазықтығымен A_1 және A_2 екі ортақ нүктесі бар болсын (2.1-сурет).

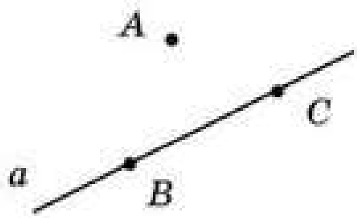


2.1-сурет

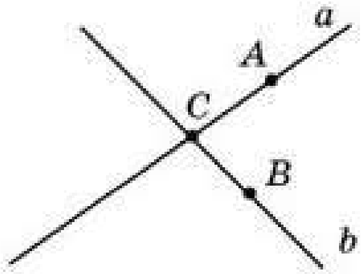
a жазықтығында планиметрияның аксиомалары орындалғандықтан, осы жазықтықта A_1, A_2 нүктелері арқылы бір ғана түзу өтеді. Егер ол a түзуімен сәйкес келмесе, онда біз берілген екі нүкте арқылы өтетін екі түзуді алар едік, ал бұл 1-аксиомаға қайшы келеді. Демек, бұл түзулер беттеседі. Осыдан, a түзуі a жазықтығында жатады. ◻

2-қасиет. *Түзу және осы түзуде жатпайтын нүкте арқылы бір ғана жазықтық жүргізуге болады*.

Дәлелдеуі. A нүктесі a түзуінің бойында жатпайтын болсын. Планиметрия аксиомалары орындалатындықтан, a түзуінің бойынан B, C нүктелері табылады (2.2-сурет).



2.2-сурет



2.3-сурет

2-аксиома бойынша бір түзудің бойында жатпайтын A, B, C нүктелері арқылы бір ғана α жазықтығы өтеді. 1-қасиет бойынша a түзуі α жазықтығында жатады. Демек, α жазықтығы a түзуі мен A нүктесі арқылы өтеді.

Осы жазықтықтың біреу ғана болатынын дәлелдейік. Расында да, a түзуі мен A нүктесі арқылы өтетін жазықтық A, B, C нүктелері арқылы да өтеді. 2-аксиома бойынша ол α жазықтығымен беттеседі. ☐

3-қасиет. Қиылысқан екі түзу арқылы бір ғана жазықтық жүргізуге болады.

Дәлелдеуі. a және b түзулері C нүктесінде қиылысқан болсын. a және b түзулерінде планиметрияның аксиомалары орындалғандықтан, олардың бойынан C нүктесінен өзгеше сәйкесінше A және B нүктелері табылады (2.3-сурет).

A, B, C нүктелері бір түзудің бойында жатпайды, сондықтан 2-аксиома бойынша олар арқылы бір ғана жазықтық өтеді. A және C нүктелері осы жазықтықта жатқандықтан 1-қасиет бойынша a түзуі осы жазықтықта жатады. Осыған ұқсас B және C нүктелері осы жазықтықта жатқандықтан, 1-қасиет бойынша b түзуі осы жазықтықта жатады. Демек, жазықтық берілген екі түзу арқылы өтеді.

Осы жазықтықтың біреу ғана болатынын дәлелдейік. Расында да, a және b түзулері арқылы өтетін жазықтық бір түзудің бойында жатпайтын A, B, C нүктелері арқылы өтеді. 2-аксиома бойынша мұндай жазықтық біреу ғана болады. ☐

4-аксиоманы пайдаланып, кеністікте төрт жазықтық бар болатынын дәлелдеңдер.

Қалай ойлайсыңдар, кеністіктегі екі нүкте арқылы неше жазықтық жүргізуге болады?

Сұрақтар

1. "Аксиома" сөзі нені білдіреді?
2. Стереометрияның аксиомаларын тұжырымдаңдар.
3. Белгілеулерді пайдаланып, стереометрияның аксиомаларын тұжырымдаңдар.
4. Түзу мен жазықтықтың екі ортақ нүктесі бар болса, онда түзу мен жазықтық қалай орналасады?

5. Түзу мен оның бойында жатпайтын нүкте арқылы неше жазықтық жүргізуге болады?
6. Қиылысқан екі түзу арқылы неше жазықтық жүргізуге болады?

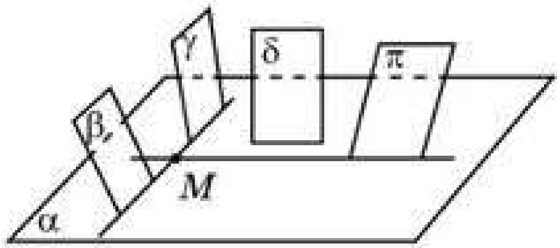
Есептер

A

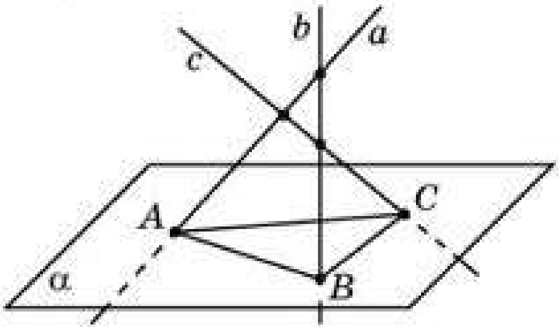
2.1. Бір нүкте арқылы неше түзу жүргізуге болады?
2.2. Бір түзу арқылы неше жазықтық жүргізуге болады?
2.3. Берілген үш нүкте арқылы неше жазықтық өтуі мүмкін? Үш нүкте қалай орналасқанда олар арқылы шексіз көп жазықтықтар жүргізуге болады?
2.4. Бір жазықтықта жатпайтын төрт нүкте берілген. Олардың үшеуі бір түзуде жатуы мүмкін бе?
2.5. Екі жазықтықтың: а) бір ортақ нүктесі; ә) екі ортақ нүктесі болуы мүмкін бе?
2.6. Екі жазықтықтың екі ортақ түзулері болуы мүмкін бе?

B

2.7. M нүктесі α жазықтығында жатыр. 2.4-суреттен M нүктесі қандай жазықтықтарда жататынын анықтаңдар.

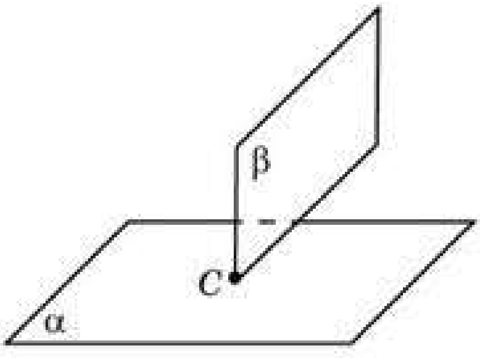


2.4-сурет



2.5-сурет

2.8. 2.5-суретте қос-қостан қиылысатын a, b, c түзулері жазықтықты сәйкесінше A, B, C нүктелерінде қиып өтеді. Сурет дұрыс салынған ба?
2.9. Параллелограмның екі төбесі және диагональдарының қиылысу нүктесі бір жазықтықта жатыр. Параллелограмның басқа екі төбесі де осы жазықтықта жатады ма?
2.10. 2.6-суретте кескінделген екі жазықтықтың қиылысуы нені береді?
2.11. Қиылысқан екі жазықтық кеңістікті неше бөлікке бөледі?



2.6-сурет

C

2.12. Түзу және оның бойында жатпайтын екі нүкте арқылы әрдайым жазықтық жүргізуге бола ма?

2.13. Үш жазықтық кеңістікті ең көп дегенде неше бөлікке бөледі?

2.14. Егер екі жазықтықтың ортақ нүктесі бар болса, онда олар осы нүкте арқылы өтетін түзудің бойымен қиылысатынын дәлелдеңдер.

2.15. Кез келген жазықтық үшін оған тиісті емес нүкте табылатынын дәлелдеңдер.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

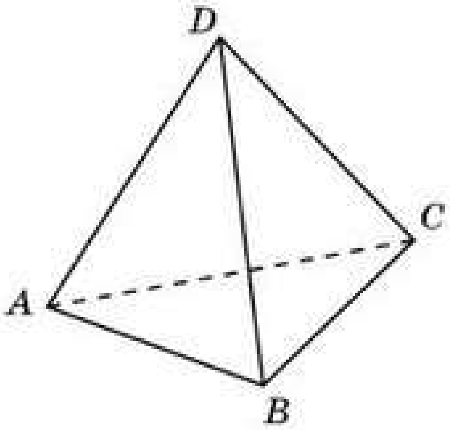
2.16. Көпбұрыштың анықтамасын қайталаңдар.

2.17. Көпжақтың анықтамасын аяқтап көріңдер. *Көпжақ* деп беті ... тұратын денені айтады.

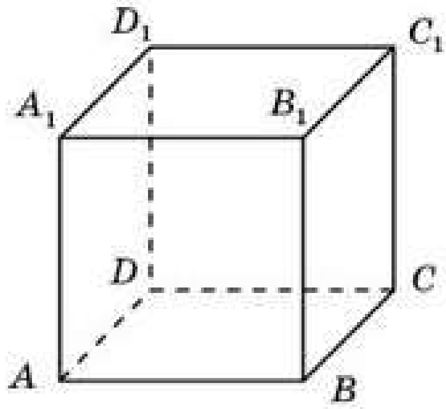
§ 3. Кеңістіктегі фигуралар. Тетраэдр, куб, параллелепипед

Кеңістіктік фигуралардың ішінде *көпжақ* — бетінің саны шектеулі көпбұрыштардан тұратын дене. Осы көпбұрыштар көпжақтың *жақтары*, ал көпбұрыштың қабырғалары мен төбелері көпжақтың сәйкесінше *қырлары* мен *төбелері* деп аталады.

Көпжақтың бір жағында жатпайтын екі төбесін қосатын кесіндіні оның *диагоналі* деп атайды. Қарапайым көпжақтардың бірі — беті төрт дұрыс үшбұрыштан тұратын тетраэдр (3.1-сурет). Әдетте, тетраэдр оның төбелерін көрсету арқылы белгіленеді, мысалы, $ABCD$.



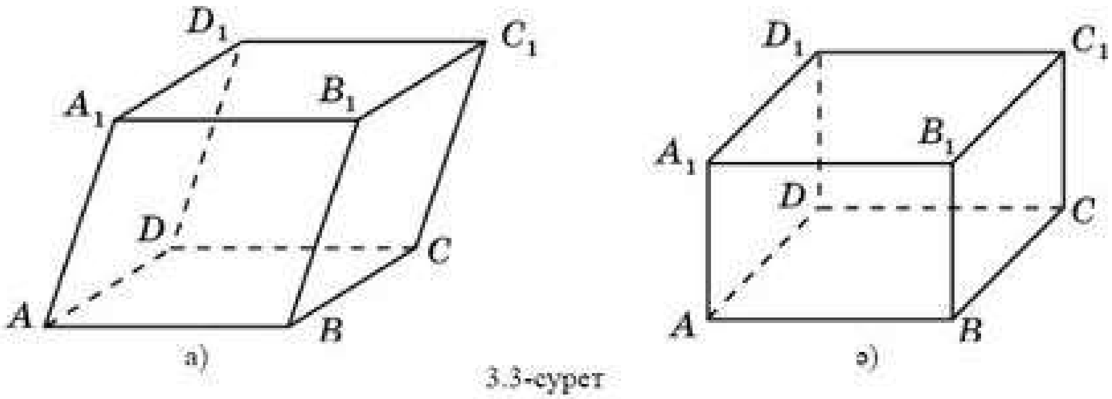
3.1-сурет



3.2-сурет

Куб деп алты жағы да квадрат болып келетін көпжақты айтады (3.2-сурет). Әдетте, куб оның төбелерін көрсету арқылы белгіленеді, мысалы $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Қыры 1-ге тең куб *бірлік куб* деп аталады.

Параллелепипед деп қарама-қарсы жақтары қос-қостан өзара параллель болатын көпжақты (алтыжақ) айтады (3.3-сурет). Параллелепипед оның төбелерін көрсету арқылы белгіленеді. Мысалы, $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

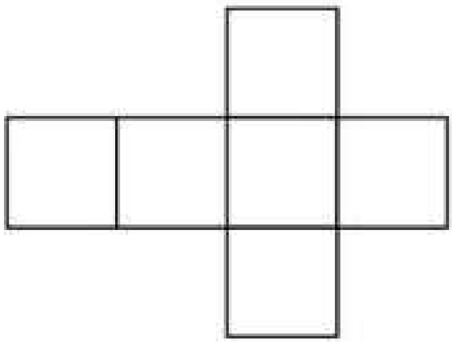


3.3-сурет

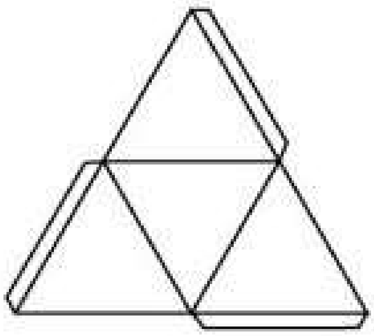
Барлық жақтары тіктөртбұрыштар болатын параллелепипедті *тікбұрышты параллелепипед* деп атайды (3.3, ә-сурет). Басқаша жағдайда ол *көлбеу параллелепипед* деп аталады (3.3, а-сурет).

Қалай ойлайсыңдар, куб параллелепипед бола ма?

Егер көпжақтың бетін барлық көпбұрыштары бір жазықтықта жататындай етіп кейбір қырлары бойынша кесіп, жазықтыққа жазса, онда пайда болған фигура *көпжақтың жазбасы* деп аталады. Мысалы, 3.4-суретте кубтың жазбасы кескінделген.



3.4-сурет



3.5-сурет

Қатты қағаздан, картоннан немесе басқа материалдан көпжақтың моделін жасау үшін алдымен оның жазбасын дайындап, кейін сәйкесінше қырларын желімдеп жапсырған жөн. Ыңғайлы болу үшін көпжақтың жазбасын желімдеп жапсыруға арналған қалпақтармен жасайды. 3.5-суретте тетраэдрдің жазбасы қалпақтарымен кескінделген.

Жазықтықтағы сияқты кеңістік үшін де қозғалыс, теңдік және ұқсастық ұғымдары анықталады.

Қозғалыс деп нүктелердің арақашықтығын сақтайтын кеңістіктегі түрлендіруді айтады.

Демек, егер қозғалыс кез келген екі A, B нүктелерін A', B' нүктелеріне көшірсе, онда $A'B' = AB$ орындалады.

Егер кеңістікте бір фигураны екінші фигураға көшіретін қозғалыс бар болса, онда осы екі фигура *тең* деп аталады.

Ұқсастық деп нүктелердің арақашықтығы қандай да бір санға ғана өзгеретін кеңістіктегі түрлендіруді айтады.

Яғни, қозғалыс кез келген екі A, B нүктелерін A', B' нүктелеріне көшірсе, онда $A'B' = kAB$ орындалады, мұндағы k — *ұқсастық коэффициенті* деп аталатын оң сан.

Егер кеңістікте бір фигураны екінші фигураға көшіретін ұқсастық бар болса, онда осы екі фигура *ұқсас* деп аталады.

Ұқсас көпжақтарға мысалдар келтіріңдер.

Сұрақтар

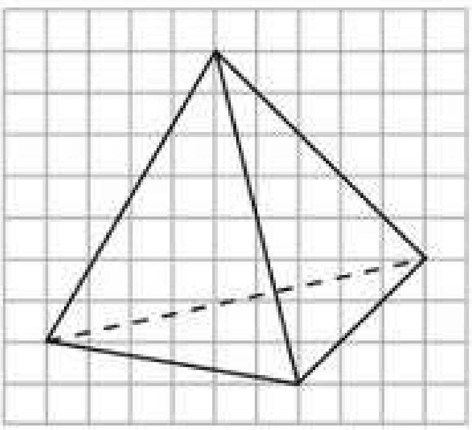
1. Кеңістіктегі қандай фигура көпжақ деп аталады?
2. Көпжақтың диагоналі дегеніміз не?
3. Қандай көпжақ: а) куб; ә) параллелепипед; б) тетраэдр деп аталады?
4. Қандай көпбұрыш: а) куб; ә) параллелепипед деп аталады?
5. Қандай параллелепипед тікбұрышты деп аталады?
6. а) Куб; ә) параллелепипед; б) тетраэдр қалай белгіленеді?
7. Қоршаған әлемнен: а) куб; ә) параллелепипед; б) тетраэдр пішіндес денелерге мысалдар келтіріңдер.
8. Көпжақтың жазбасы дегеніміз не?
9. Кеңістіктегі қандай түрлендіру *қозғалыс* деп аталады?
10. Кеңістікте қандай фигуралар *тең* деп аталады?
11. Кеңістікте қандай фигуралар *ұқсас* деп аталады?

Есептер

А

3.1. а) Тетраэдр; ә) куб; б) параллелепипедтің неше төбесі (Т), қыры (Қ) және жағы (Ж) болады?

3.2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының қыры болатын және ABC жазықтығын қиып өтетін түзулерді көрсетіңдер.



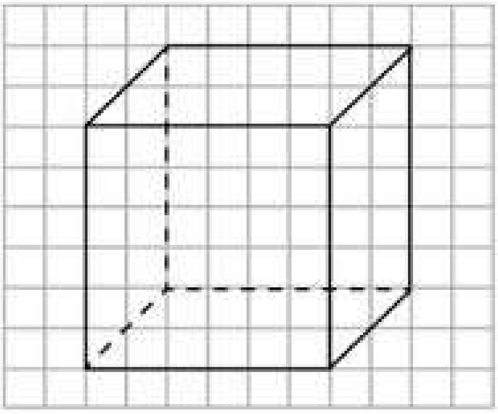
3.6-сурет

3.3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының жағы болатын және BCC_1 жазықтығымен қиылысатын жазықтықты көрсетіңдер.

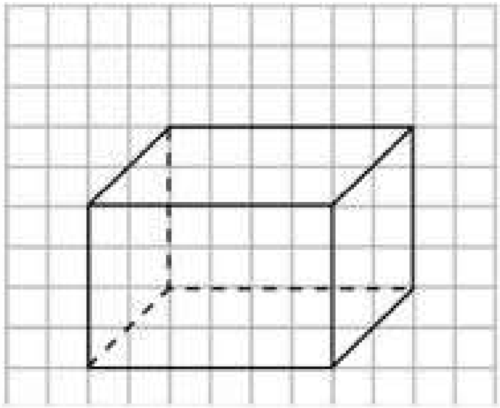
3.4. Торкөз қағазда 3.6-суреттегіге ұқсас тетраэдрді салыңдар.

3.5. Торкөз қағазда 3.7-суреттегіге ұқсас кубты салыңдар.

3.6. Торкөз қағазда 3.8-суреттегіге ұқсас тікбұрышты параллелепипедті салыңдар.



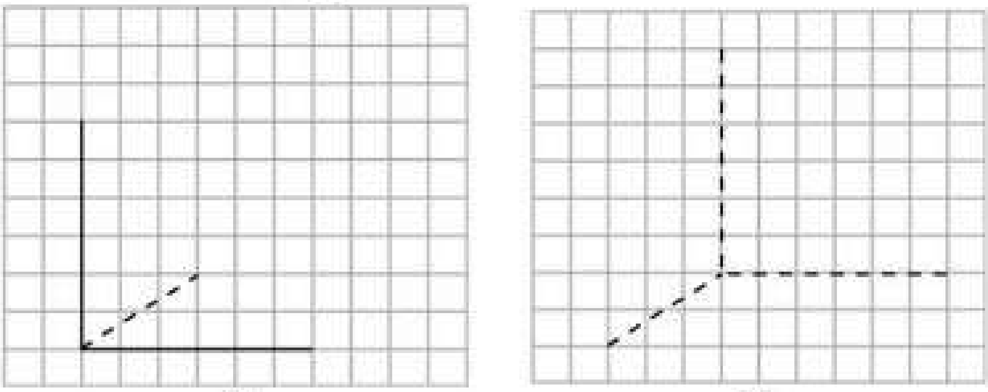
3.7-сурет



3.8-сурет

В

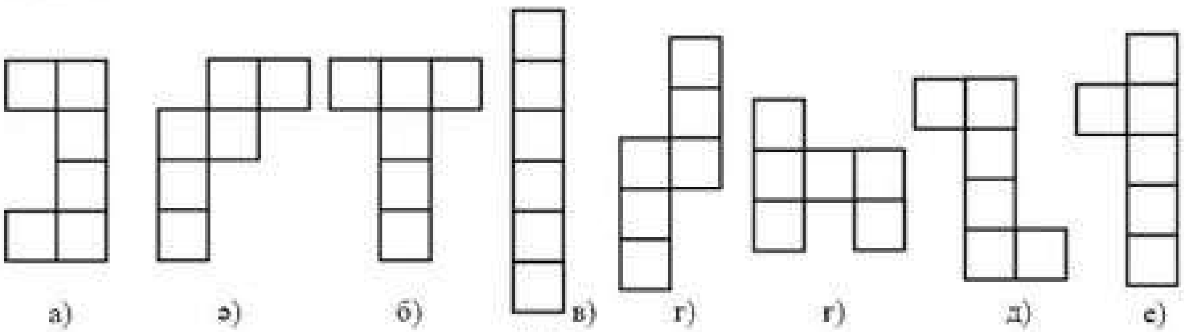
3.7. Торкөз қағазда кубтың үш қыры кескінделген (3.9-сурет). Кубтың толық кескінін салыңдар.



а) 3.9-сурет ә)

3.8. а) Тетраэдрдің; ә) кубтың; б) параллелепипедтің неше диагоналі болады?

3.9. 3.10-суретте кескінделген фигуралардың қайсысы кубтың жазбасы болады?



а) ә) б) в) г) ғ) д) е)

3.10-сурет

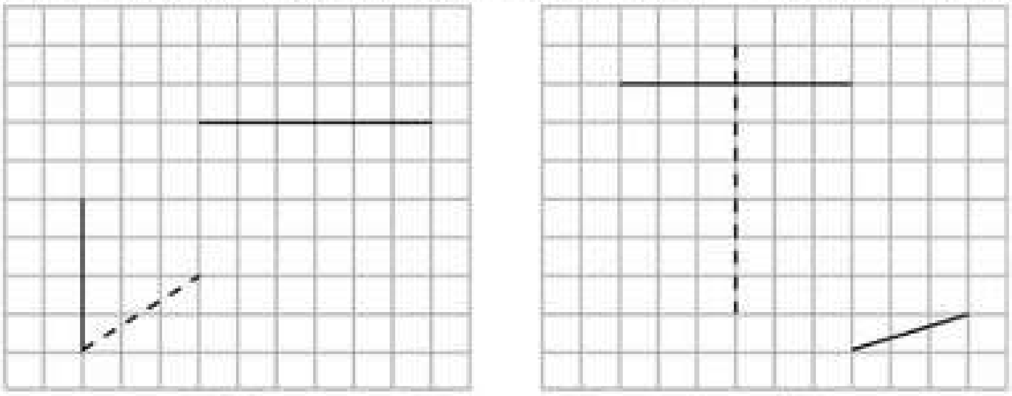
3.10. Тетраэдрдің және тікбұрышты параллелепипедтің жазбасын салыңдар.

3.11. Тетраэдрдің, кубтың және параллелепипедтің жазбаларын дайындап, олардың модельдерін құрастырыңдар.

C

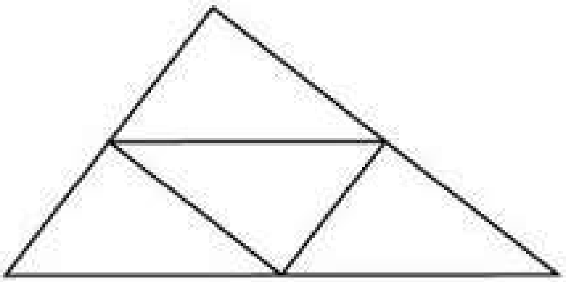
3.12. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубынан оның қыры жататын және BCC_1 жазықтығын қиып өтетін жазықтықты көрсетіңдер.

3.13. Торкөз қағазда тікбұрышты параллелепипедтің үш қыры кескінделген (3.11-сурет). Барлық параллелепипедтің кескінін салыңдар.



а) ә)

3.11-сурет



3.12-сурет

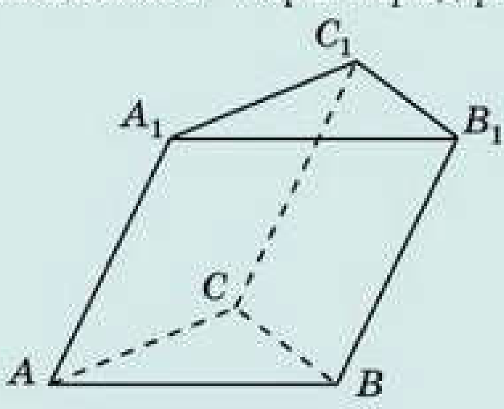
3.14. Төрт тең тікбұрышты үшбұрыштардан құрылған фигура (3.12-сурет) тетраэдрдің жазбасы бола ма?

3.15. Жақтары ромбы болатын көлбеу параллелепипедтің жазбасын салыңдар.

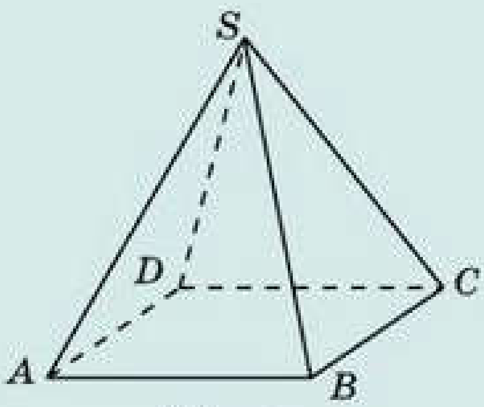
3.16. Көлбеу параллелепипедтің жазбасын дайындап, оның моделін құрастырыңдар.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

3.17. 3.13-суретте үшбұрышты призма кескінделген. Осы көпжақтың анықтамасын беріп көріңдер.



3.13-сурет



3.14-сурет

3.18. 3.14-суретте төртбұрышты пирамида кескінделген. Осы көпжақтың анықтамасын беріп көріңдер.

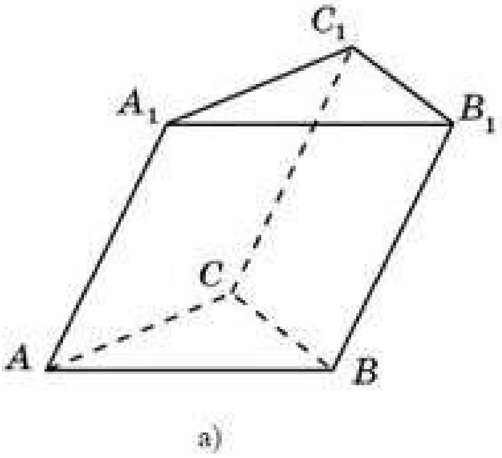
§ 4. Кеңістіктегі фигуралар. Призма, пирамида

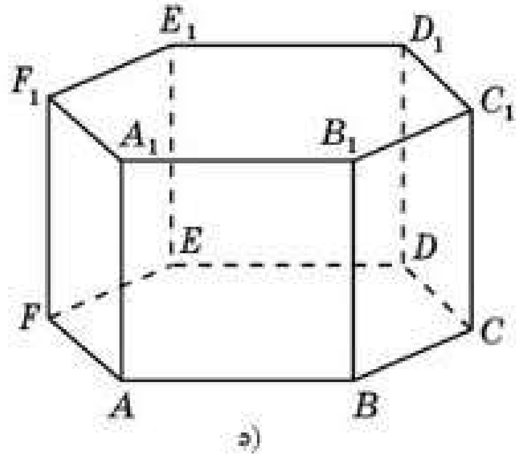
Призма деп беті екі тең көпбұрыштардан және әрбір табанымен ортақ қабырғалары бар параллелограмдардан тұратын көпжақты айтады. Көпбұрыштар призманың *табандары* , ал параллелограмдар призманың *бүйір жақтары* деп аталады. Призманың табандарында жатпайтын қырлары оның *бүйір қырлары* деп аталады.

Призмалар табандарында жатқан көпбұрыштарға (үшбұрыштар, төртбұрыштар, бесбұрыштар және т.б.) байланысты сәйкесінше үшбұрышты, төртбұрышты, бесбұрышты және т.б. болып бөлінеді.

Егер призманың табандары n-бұрыштар болса, онда ол *n-бұрышты призма* деп аталады.

Призма оның төбелерін көрсету арқылы белгіленеді, мысалы: $ABCA_1B_1C_1$ — үшбұрышты призма (4.1, а-сурет), $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — алтыбұрышты призма (4.1, ә-сурет).





4.1-сурет

Бүйір жақта ры тіктөртбұрыштар болатын призма *тік* деп аталады. Басқаша жағдайда ол *көлбеу призма* деп аталады. 4.1, а-суретте үшбұрышты көлбеу призма кескінделген. 4.1, ә-суретте тік алтыбұрышты призма кескінделген.

Табандары дұрыс көпбұрыштар болатын тік призма *дұрыс* деп аталады. 4.1, ә-суретте дұрыс алтыбұрышты призма кескінделген.

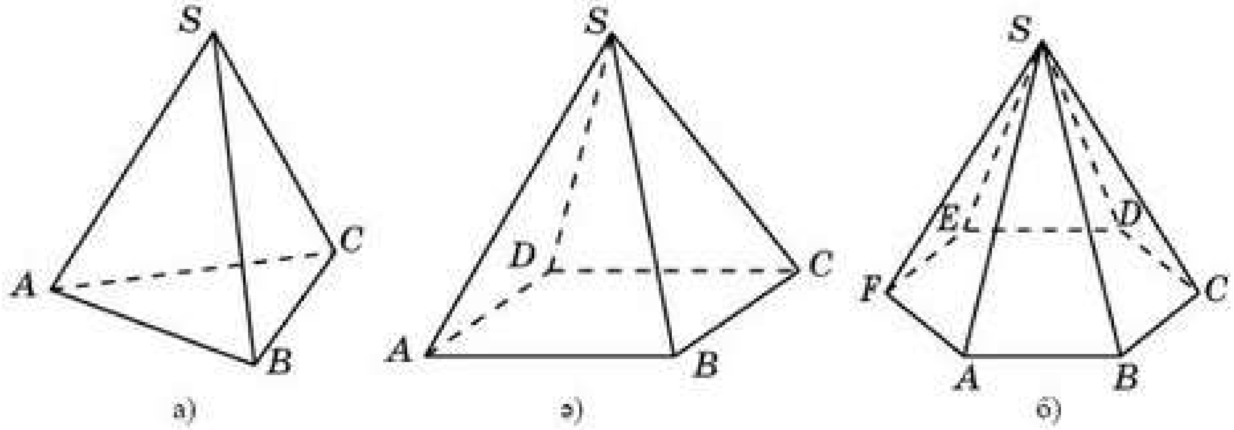
Қалай ойлайсыңдар, параллелепипед төртбұрышты призма бола ма?

Пирамида деп көпбұрыштан және ортақ төбесі бар үшбұрыштардан тұратын көпжақты айтады. Көпбұрыш пирамиданың *табаны* , ал үшбұрыштар пирамиданың *бүйір жақтары* деп аталады. Бүйір жақтарының ортақ төбесі пирамиданың *төбесі* , ал төбесінен шығатын қырлары пирамиданың *бүйір қырлары* деп аталады.

Пирамидалар табанында жатқан көпбұрыштарға (үшбұрыштар, төртбұрыштар, бесбұрыштар және т.б.) байланысты сәйкесінше үшбұрышты, төртбұрышты, бесбұрышты және т.б. болып бөлінеді.

Егер пирамиданың табаны n-бұрышты болса, онда ол *n-бұрышты пирамида* деп аталады.

4.2-суретте үшбұрышты, төртбұрышты және алтыбұрышты пирамидалар кескінделген.



4.2-сурет

Пирамида оның төбелерін көрсету арқылы белгіленеді, мысалы: *SABC* үшбұрышты пирамида (4.2, а-сурет), *SABCD* төртбұрышты пирамида (4.2, ә-сурет), *SABCDEF* алтыбұрышты пирамида (4.2, б-сурет).

Табанында дұрыс көпбұрыш жататын және барлық бүйір қырлары өзара тең болатын пирамида *дұрыс* деп аталады.

Қалай ойлайсыңдар, тетраэдр үшбұрышты пирамида бола ма?

Сұрақтар

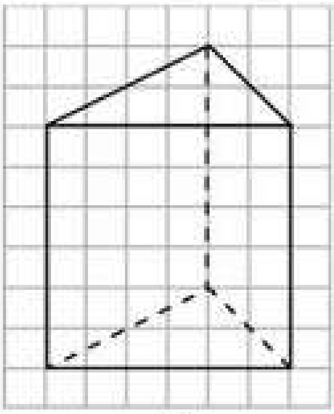
1. Қандай көпжақ призма деп аталады?
2. Қандай призма тік деп аталады?
3. Қандай призма дұрыс деп аталады?
4. Призма қалай белгіленеді?
5. Қандай көпжақ пирамида деп аталады?
6. Қандай пирамида дұрыс деп аталады?
7. Пирамида қалай белгіленеді?

Есептер

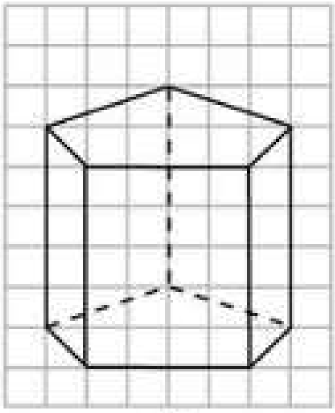
А

4.1. а) n-бұрышты призманың; ә) n-бұрышты пирамиданың неше төбесі (Т), қыры (Қ) және жағы (Ж) болады?

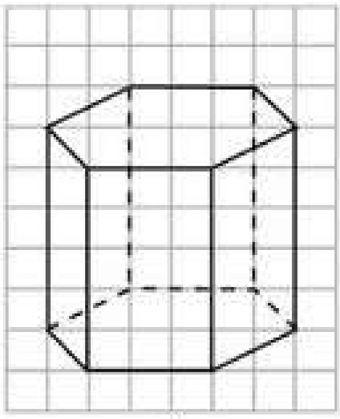
4.2. Торкөз қағазда 4.3-суреттегіге ұқсас призмаларды салыңдар.



а)



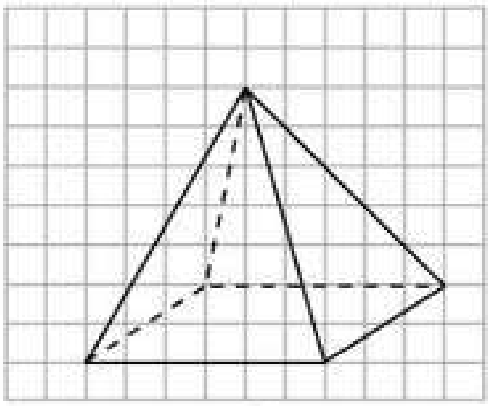
ә)



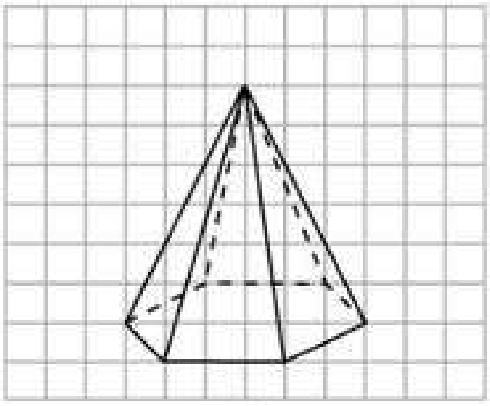
б)

4.3-сурет

4.3. Торкөз қағазда 4.4-суреттегіге ұқсас пирамидаларды салыңдар.



а)



ә)

4.4-сурет

B

4.4. Призманың: а) 9 төбесі; ә) 16 төбесі болуы мүмкін бе?

4.5. а) 20 төбесі; ә) 10 төбесі бар призманың табанында қандай көпбұрыш жатады?

4.6. а) 10 төбесі; ә) 18 қыры; б) 8 жағы бар призманың түрін анықтаңдар.

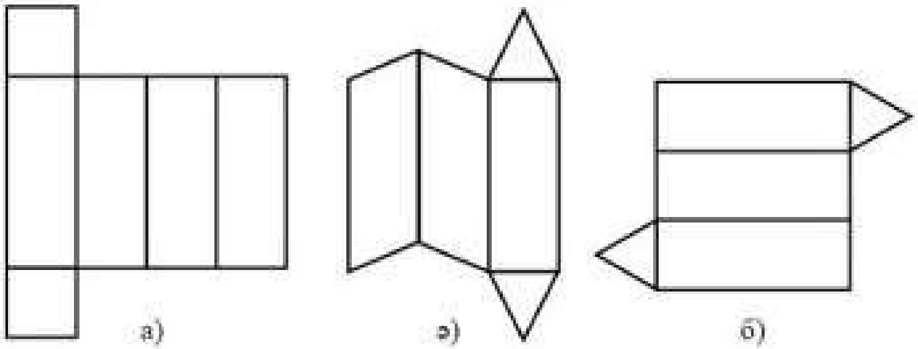
4.7. Пирамиданың: а) 9 қыры; ә) 16 қыры болуы мүмкін бе?

4.8. а) 32 қыры; ә) 15 жағы бар пирамиданың табанында қандай көпбұрыш жатады?

4.9. а) 10 төбесі; ә) 18 қыры; б) 8 жағы бар пирамиданың түрін анықтаңдар.

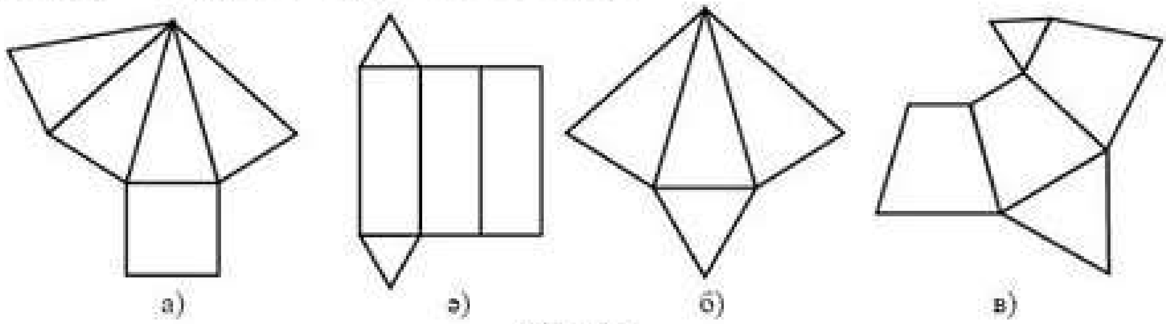
4.10. *SABCD* төртбұрышты пирамиданың жақтары жататын жазықтықтардың қиылысқан жұптарын көрсетіңдер (4.2, ә-сурет).

4.11. 4.5-суреттен призманың жазбалары болатын фигураларды табыңдар. Призмалардың түрін анықтаңдар.

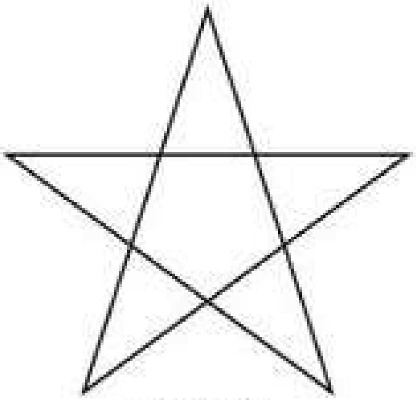


4.5-сурет

4.12. 4.6-суреттен пирамиданың жазбалары болатын фигураларды табыңдар. Олардың түрін анықтаңдар.



4.6-сурет



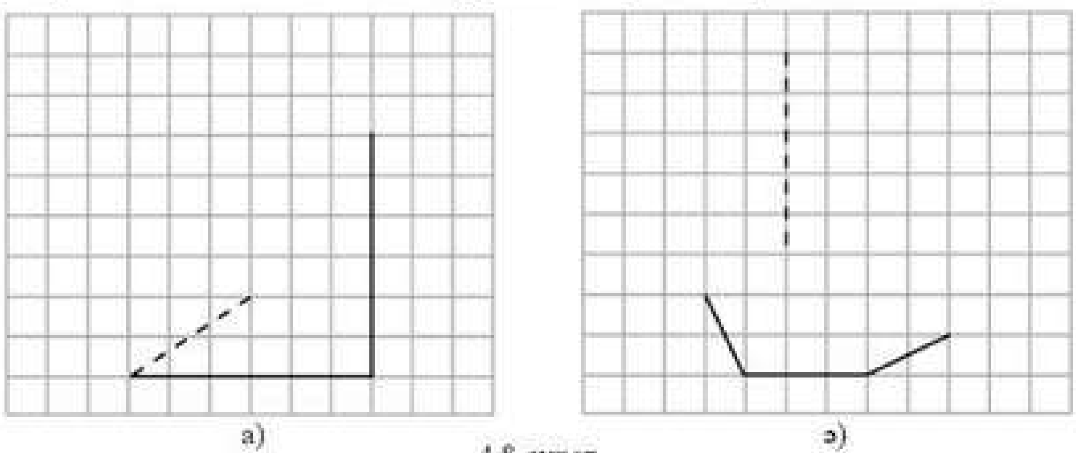
4.7-сурет

4.13. 4.7-суретте кескінделген фигура қандай көпжақтың жазбасы болады?

4.14. Дұрыс алтыбұрышты: а) призманың; ә) пирамиданың жазбасын салыңдар. а) Призманың; ә) пирамиданың жазбаларын дайындаңдар және олардың моделін құрастырыңдар.

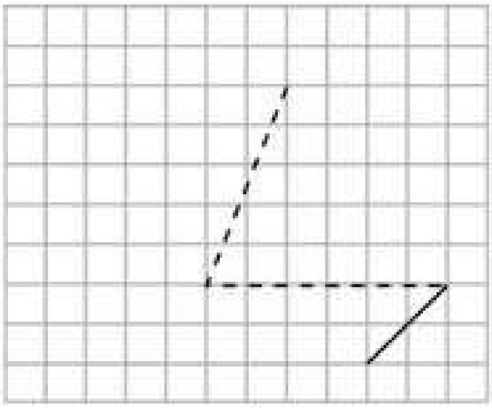
C

4.15. Торкөз қағазда: а) үшбұрышты; ә) алтыбұрышты призмалардың қырлары кескінделген (4.8-сурет). Призмаларды салыңдар.

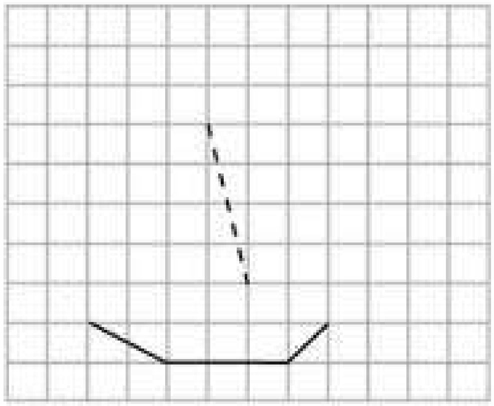


4.8-сурет

4.16. Торкөз қағазда: а) төртбұрышты; ә) алтыбұрышты пирамидалардың қырлары кескінделген (4.9-сурет). Пирамидаларды салыңдар.



а)

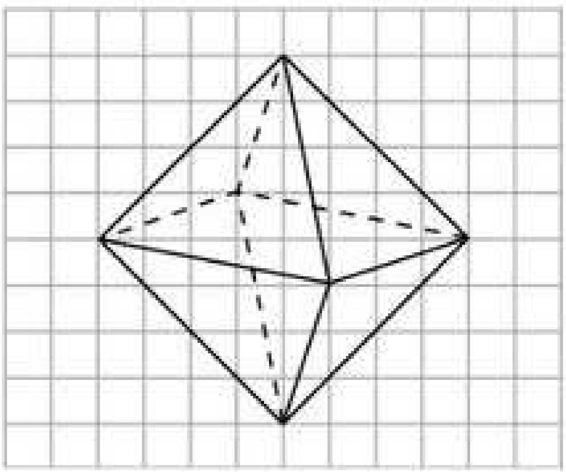


ә)

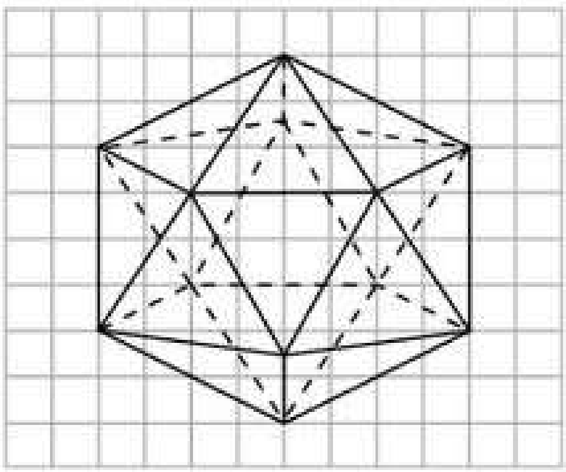
4.9-сурет

4.17. а) n-бұрышты пирамиданың; ә) n-бұрышты призманың неше диагоналі болады?

4.18. Торкөз қағазда 4.10-суреттегіге ұқсас октаэдр салыңдар. Оның неше төбесі (Т), қыры (Қ) және жағы (Ж) болады?



4.10-сурет

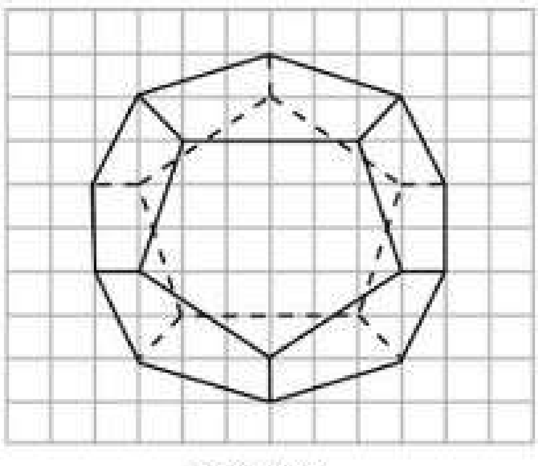


4.11-сурет

4.19. Торкөз қағазда 4.11-суреттегіге ұқсас икосаэдр салыңдар. Оның неше төбесі (Т), қыры (Қ) және жағы (Ж) болады?

4.20. Торкөз қағазда 4.12-суреттегіге ұқсас додекаэдр салыңдар. Оның неше төбесі (Т), қыры (Қ) және жағы (Ж) болады?

4.21. Қоршаған әлемнен: а) призма; ә) пирамида пішіндес нысандарға мысалдар келтіріңдер.



4.12-сурет

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

4.22. Жазықтықтағы екі түзудің параллельдігінің анықтамасын қайталаңдар.

4.23. Кеңістіктегі түзулердің параллельдігі ұғымын анықтап көріңдер.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

1. Кеңістіктегі бір нүкте арқылы неше түзу жүргізуге болады?

A. Болмайды. B. Біреу.
C. Екеу. D. Шексіз көп.

2. Кеңістіктегі бір нүкте арқылы неше жазықтық жүргізуге болады?

A. Болмайды. B. Біреу.
C. Екеу. D. Шексіз көп.

3. Кеңістіктегі екі нүкте арқылы неше түзу жүргізуге болады?

A. Болмайды. B. Біреу.
C. Екеу. D. Шексіз көп.

4. Кеңістіктегі бір түзудің бойында жатпайтын үш нүктенің әртүрлі жұбы арқылы неше түзу жүргізуге болады?

A. Болмайды. B. Үшеу.
C. Алтау. D. Шексіз көп.

5. Кеңістіктегі төрт нүктенің әртүрлі жұбы арқылы ең көп дегенде неше түзу жүргізуге болады?

A. Төртеу. B. Бесеу. C. Алтау. D. Сегіз.

6. Кеңістіктегі бес нүктенің әртүрлі жұбы арқылы ең көп дегенде неше түзу жүргізуге болады?

A. 5. B. 10. C. 15. D. 25.

7. Қиылысқан екі жазықтықтың неше ортақ нүктесі болады?

A. Біреу. B. Екеу.
C. Үшеу. D. Шексіз көп.

8. Кеңістіктегі екі нүкте арқылы неше жазықтық жүргізуге болады?

A. Болмайды. B. Біреу.
C. Екеу. D. Шексіз көп.

9. Кеңістіктегі бір түзудің бойында жатпайтын үш нүкте арқылы неше жазықтық жүргізуге болады?

A. Болмайды. B. Біреу.
C. Екеу. D. Шексіз көп.

10. Кеңістіктегі бір түзудің бойында жататын үш нүкте арқылы неше жазықтық жүргізуге болады?

A. Болмайды. B. Біреу.
C. Үшеу. D. Шексіз көп.

11. Кеңістіктегі бір жазықтықта жатпайтын төрт нүктенің әртүрлі үшеуі арқылы неше жазықтық жүргізуге болады?

A. Үшеу. B. Төртеу.
C. Алтау. D. Шексіз көп.

12. Кубтың үш төбесі арқылы неше жазықтық жүргізуге болады?

A. Біреу. B. Үшеу.
C. Алтау. D. Шексіз көп.

13. Тікбұрышты параллелепипед диагональдарының санын табыңдар.

A. 2. B. 4. C. 6. D. 8.

14. 6-бұрышты призма диагональдарының санын табыңдар.

A. 6. B. 12. C. 9. D. 18.

15. 12 қыры бар пирамиданың табанында қандай көпбұрыш жатады?

A. Үшбұрыш. B. Төртбұрыш.
C. Алтыбұрыш. D. 12-бұрыш.

16. 36 қыры бар призманың табанында қандай көпбұрыш жатады?

A. Алтыбұрыш. B. Тоғызбұрыш.
C. 12-бұрыш. D. 36-бұрыш.

17. Призманың 18 төбесі бар. Оның табанында қандай көпбұрыш жатады?

A. Үшбұрыш. B. Алтыбұрыш.
C. Тоғызбұрыш. D. 18-бұрыш.

18. Пирамиданың 10 төбесі бар. Оның табанында қандай көпбұрыш жатады?

A. Бесбұрыш. B. Алтыбұрыш.
C. Сегізбұрыш. D. Тоғызбұрыш.

19. Призманың 18 диагоналі бар. Оның түрін анықтаңдар.

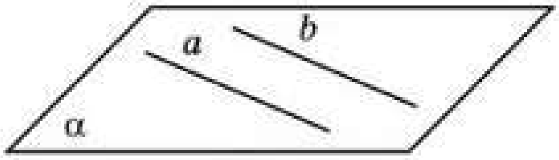
A. Үшбұрыш. B. Алтыбұрыш.
C. Тоғызбұрыш. D. 18-бұрыш.

20. 7-бұрышты пирамида диагональдарының санын табыңдар.

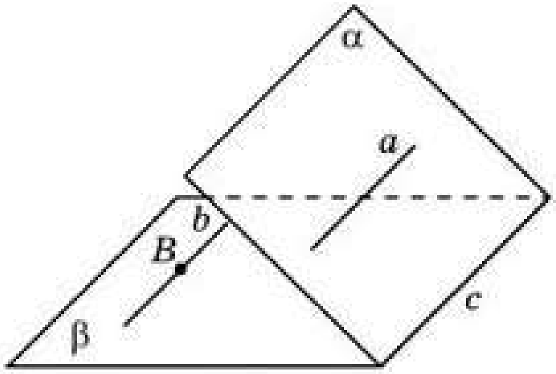
A. Біреу де емес. B. 6.
C. 7. D. 14.

§ 5. Кеңістіктегі түзулердің параллельдігі

Жазықтықта қиылыспайтын, яғни бірде-бір ортақ нүктесі болмайтын екі түзу параллель түзулер деп аталатынын еске түсірейік. Осыған ұқсас кеңістіктегі бір жазықтықта жататын және өзара қиылыспайтын екі түзу *параллель түзулер* деп аталады (5.1- сурет).



5.1-сурет



5.2-сурет

a және b түзулерінің параллельдігі $a \parallel b$ арқылы белгіленеді.

Кеңістіктегі екі түзу параллель болуы үшін бұл түзулер қиылыспауы және бір жазықтықта жатуы керек.

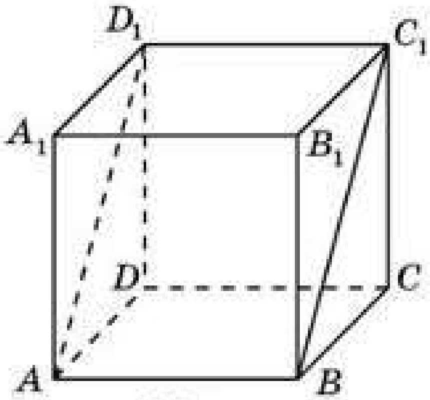
Параллель түзулердің бойында жататын екі кесіндіні *параллель кесінділер* деп айтамыз.

Теорема (екі түзудің параллельдігінің белгісі) . ***Үшінші түзуге параллель болатын екі түзу өзара параллель болады*** .

Дәлелдеуі*. a және b түзулері c түзуіне параллель болсын (5.2-сурет). a, b, c түзулерінің бір жазықтықта жатқан жағдайы планиметрия курсында қарастырылған болатын. Енді осы түзулер бір жазықтықта жатпауы жағдайын қарастырайық. a және b түзулері параллель екенін дәлелдейік. Ол үшін a және b түзулері бір жазықтықта жататынын және қиылыспайтынын дәлелдеуіміз қажет. a және c түзулері арқылы а жазықтығын жүргіземіз. b және c түзулері арқылы b жазықтығын жүргіземіз. a түзуі мен b түзуінің бойында жатқан қандай да бір B нүктесі арқылы g жазықтығын жүргіземіз. g жазықтығы b жазықтығын қандай да бір b' түзуінің бойымен қиып өтеді. Бұл түзу a жазықтығымен қиылыспайды, өйткені олардың қиылысу нүктесі a түзуі мен c түзулерінде де жатуы тиіс. Осыдан a мен c түзулерінің ортақ нүктесі бар болар еді, бұл осы түзулердің параллельдігінің шартына қайшы келеді. b' түзуі а жазықтығымен қиылыспайтындықтан, ол c түзуін де қиып өтпейді. Демек, b' және c түзулері өзара параллель болады. b жазықтығындағы B нүктесі арқылы c түзуіне параллель тек бір ғана түзу өтетіндіктен, b' түзуі b түзуімен беттеседі. b түзуі а жазықтығымен қиылыспайтындықтан, ол a түзуімен де қиылыспайды.

Сонымен a және b түзулері бір жазықтықта жатады және қиылыспайды. Ендеше олар өзара параллель болады.

Мысалы, $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында AB және C_1D_1 түзулері A_1B_1 түзуіне параллель болады. Демек, AB және C_1D_1 түзулері өзара параллель (5.3-сурет).



5.3-сурет

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында AD_1 және BC_1 түзулері параллель екендігін дәлелдейік. Расында да, жоғарыда көрсетілгендей, AB және C_1D_1 түзулері параллель және тең болады. Демек, ABC_1D_1 төртбұрышы — параллелограмм. Осыдан AD_1 және BC_1 түзулері параллель болады.

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының төбелері арқылы өтетін AA_1 және BC түзулері өзара параллель бола ма?

Тарихи мәліметтер

Берілген нүкте арқылы өтетін және берілген түзуге параллель болатын түзулердің саны туралы мәселенің ежелден келе жатқан тарихы бар. Евклидтің "Бастамалары" кітабындағы бесінші постулат өзінің мазмұны бойынша 7-сыныпта танысқан параллельдік аксиомасымен сәйкес келеді, яғни "Берілген түзуден тыс жатқан нүкте арқылы сол түзуге тек бір ғана параллель түзу жүргізуге болады".

Евклидтен кейін екі мың жыл бойы математиктер осы постулатты дәлелдеуге тырысты, алайда олардың барлық талпыныстары сәтсіздікпен аяқталды, ерте ме, кеш пе олардың тұжырымдарында қателіктер анықталды. Тек 1926 жылы Қазан университетінің профессоры, ұлы математик Н.И. Лобачевский (1792—1856) осы постулатты Евклидтің басқа постулаттарынан (аксиомаларынан) логикалық жолмен шығарып алуға, яғни дәлелдеуге болмайтындығын, сондықтан оны аксиома ретінде қабылдау керек екенін, не болмаса аксиома ретінде берілген нүкте арқылы осы түзуге параллель бірнеше түзу бар болатыны тұжырымын қабылдау қажет екенін ұсынды. Осы параллельдік аксиомасын геометрияның негізі деп алып, Лобачевский жаңа, евклидтік емес геометрияны құрды және ол Лобачевский геометриясы деп аталды.

Лобачевскийдің идеялары бірегей болды және сол кездегі адам санасына қарама-қайшылығы соншалықты, оны тіпті белгілі математиктер де түсінбеді. Осыған қарамастан, Лобачевский өз идеяларынан бас тартпады. Ол өзі ұсынған жаңа геометрияны нақты физикалық кеңістікті зерттеуге қолдануға болатындығына сенімді болды. Осы мақсатта Лобачевский күрделі астрономиялық бақылаулар мен өлшеулер жүргізді, алайда өлшеу аспаптарының жеткілікті дәлдікке не болмауы, оның болжамының дұрыстығын дәлелдеуге мүмкіндік бермеді.

Лобачевский геометриясын мойындау ол дүниеден өткеннен кейін ғана жүзеге асты. Лобачевскийдің еңбектері көптеген тілдерге аударылып, бүкіл әлем математиктерімен зерттелді. Қазіргі уақытта Лобачевский геометриясы заманауи математиканың ажырамас бөлігі және адам зат білімінің көптеген салаларында қолданыс тауып, қоршаған әлемді тереңірек танып-білуге жағдай жасауда.

Сұрақтар

1. Кеңістіктегі қандай екі түзу параллель деп аталады?
2. Кеңістіктегі қандай екі кесінді параллель деп аталады?
3. Кеңістіктегі параллель түзулердің қасиетін тұжырымдаңдар.

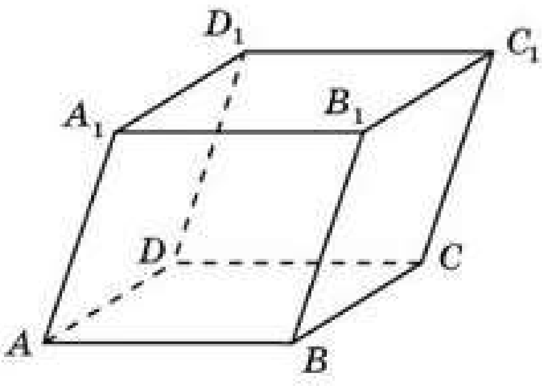
Есептер

A

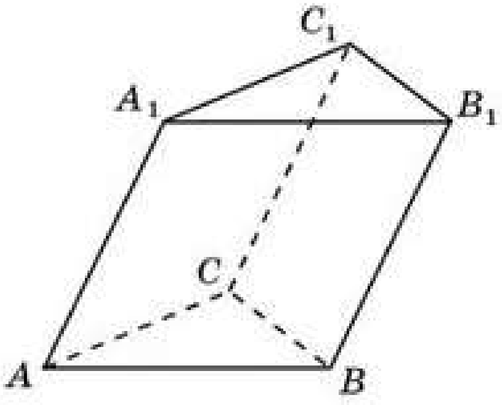
5.1. Жазықтықта параллель түзулердің біреуін қиып өтетін түзу екіншісін де қиып өтетіні белгілі. Осы тұжырым кеңістік үшін де орындала ма?

5.2. Жазықтықта берілген түзуде жатпайтын нүкте арқылы осы түзуді қимайтын тек бір ғана түзу өтетіні белгілі. Осы тұжырым кеңістік үшін де орындала ма?

5.3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедінің: а) AB; ә) AA_1 қырларына параллель қырларын жазыңдар (5.4-сурет).



5.4-сурет



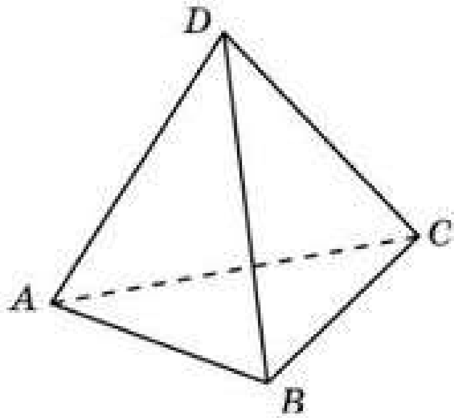
5.5-сурет

5.4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедінің AB және B_1C_1 қырлары параллель бола ма (5.4-сурет)?

5.5. $ABCA_1B_1C_1$ призмасының параллель қырларының жұбын жазыңдар (5.5-сурет).

5.6. $ABCA_1B_1C_1$ призмасының AB және CC_1 қырлары параллель бола ма (5.5-сурет)?

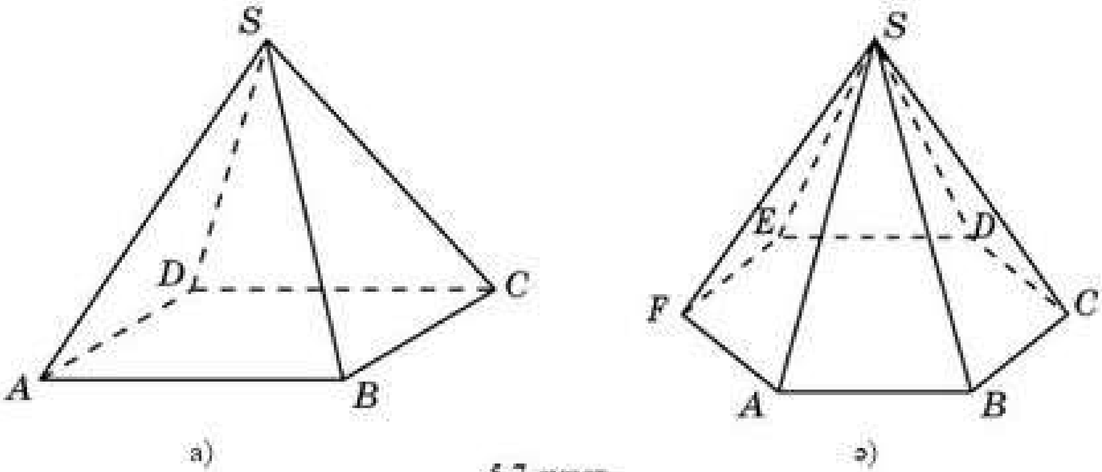
5.7. *ABCD* тетраэдрінің қарама-қарсы жатқан *AB* және *CD* қырлары параллель бола ма (5.6- сурет)?



5.6-сурет

B

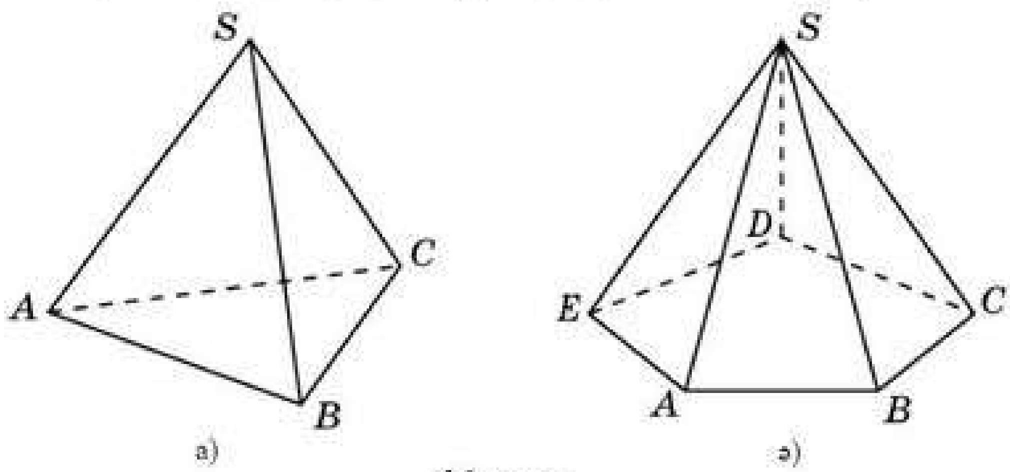
5.8. а) *SABCD* дұрыс төртбұрышты пирамиданың (5.7, а-сурет); ә) *SABCDEF* дұрыс алтыбұрышты пирамиданың (5.7, ә-сурет) параллель қырларының жұбын жазыңдар.



5.7-сурет

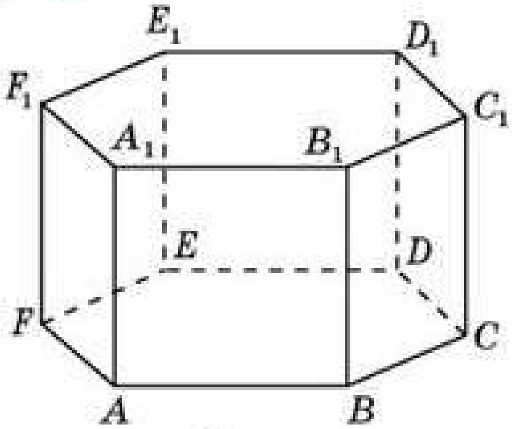
5.9. а) *SABCD* пирамидасының (5.7, а-сурет); ә) *SABCDEF* пирамидасының (5.7, ә-сурет) *AB* және *SC* қырлары параллель бола ма?

5.10. а) Дұрыс үшбұрышты пирамиданың (5.8, а-сурет) дұрыс бесбұрышты пирамиданың (5.8, ә-сурет) параллель қырлары бола ма?

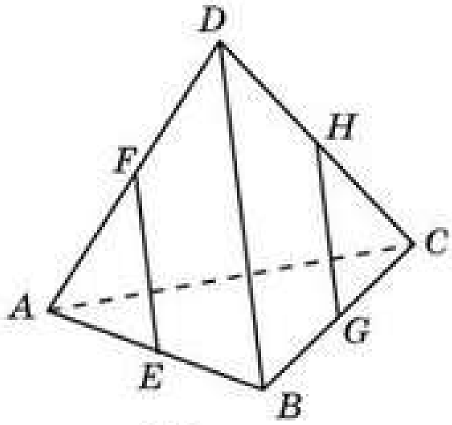


5.8-сурет

5.11. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ алтыбұрышты призмасы үшін келесі түзулер параллель екендігін дәлелдеңдер: а) AA_1 және CC_1; ә) AA_1 және DD_1 (5.9- сурет).



5.9-сурет



5.10-сурет

5.12. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призмасының келесі қырларына параллель қырларын жазыңдар : а) AA_1; ә) AB (5.9- сурет).

5.13. Кубтың неше параллель қырларының жұбы болады ?

5.14. Дұрыс алтыбұрышты призманың неше параллель қырларының жұбы болады ?

C

5.15. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеді үшін келесі түзулердің параллель екендігін дәлелдеңдер (5.4- сурет): а) AC және A_1C_1; ә) AB_1 және DC_1.

5.16. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призмасы үшін келесі түзулердің параллель екендігін дәлелдеңдер: а) AD және A_1D_1; ә) AB_1 және ED_1.

5.17. $ABCD$ тетраэдрінде E, F, G, H нүктелері сәйкесінше AB, AD, BC, CD қырларының орталары (5.10-сурет). EF және GH түзулері параллель екендігін дәлелдеңдер.

5.18. Кеңістікте берілген түзуден тыс жатқан нүкте арқылы сол түзуге параллель бір ғана түзу жүргізуге болатынын дәлелдеңдер.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

5.19. Қоршаған әлемнен параллель түзулерді көрсететін нысандарға мысалдар келтіріңдер.

5.20. Кеңістікте түзу және осы түзуден тыс жатқан нүкте берілген. Қалай ойлайсыңдар, осы нүкте арқылы берілген түзуді қиып өтпейтін неше түзу өтеді ?

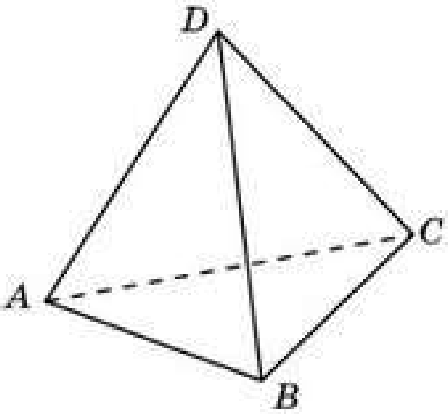
§ 6. Кеңістегі түзулердің өзара орналасуы

Кеңістіктегі екі түзудің қиылысуы немесе параллель болуы мүмкін екенін білеміз . Алайда жазықтық қа қарағанда, кеңістікте екі түзу қиылыспауы және бір-біріне параллель емес болуы да мүмкін .

Кеңістікте бір жазықтықта жатпайтын екі түзу *айқас түзулер* деп аталады.

Сондай-ақ екі кесінді айқас түзулердің бойында жатса, оларды *айқас кесінділер* деп атайды.

Мысалы, $ABCD$ тетраэдрінде AB және CD қырлары айқас (6.1-сурет).

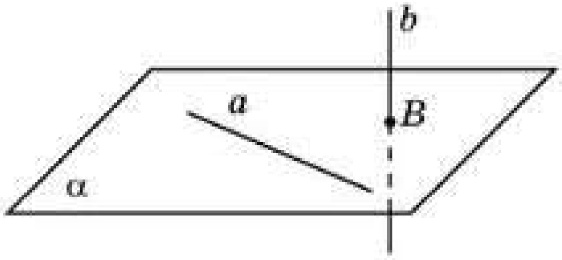


6.1-сурет

Осыны өздерің дәлелдеңдер.

Теорема. (Айқас түзулердің белгісі) ***Егер бір түзу жазықтықта жатса, ал екінші түзу осы жазықтықты бірінші түзуде жатпайтын нүктеде қиып өтсе, онда бұл түзулер айқас болады.***

Дәлелдеуі. a түзуі α жазықтығында жатсын, ал b түзуі α жазықтықтығын a түзуіне тиісті емес B нүктесінде қиып өтсін (6.2-сурет). Егер a және b түзулері бір жазықтықта жататын болса, онда бұл жазықтықта a түзуі мен B нүктесі де жатқан болар еді. Түзу арқылы және осы түзуден тыс жатқан нүкте арқылы тек бір ғана жазықтық өтетіндіктен, бұл жазықтық α жазықтығы болады. Бұл жағдайда b түзуі α жазықтығына тиісті болар еді, ал бұл шартқа қайшы келеді. Демек, a және b түзулері бір жазықтықта жатпайды, яғни олар айқас болады. ☐

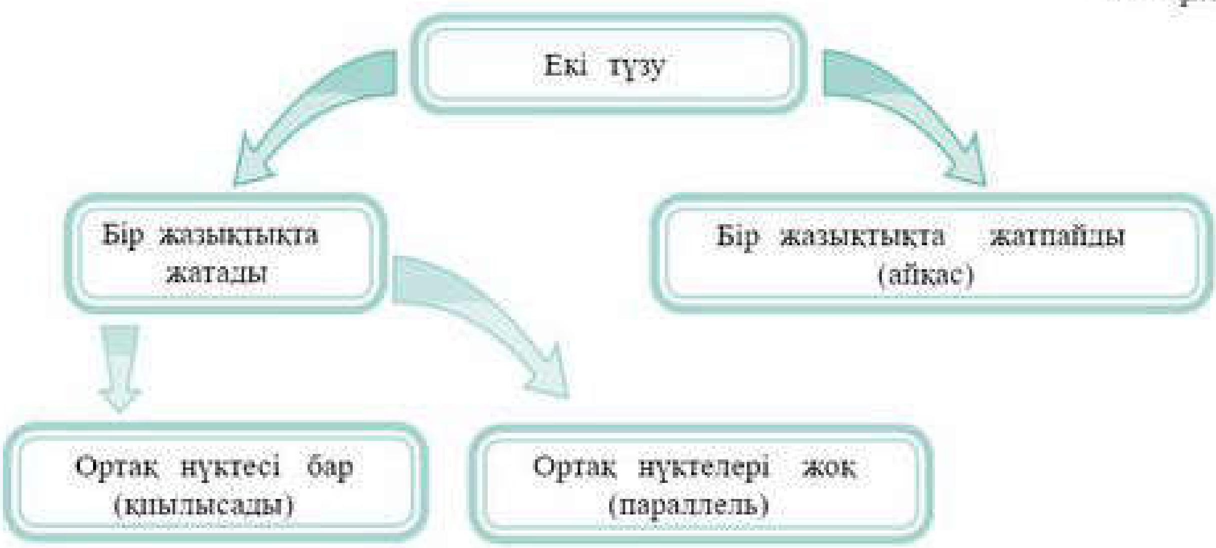


6.2-сурет

Егер екі түзу арқылы жазықтық жүргізуге болмайтын болса, онда бұл түзулер айқас түзулер екендігін дәлелдеңдер.

Кеңістіктегі екі түзудің өзара орналасуының әртүрлі жағдайларын сұлба түрінде көрсетейік.

6.1-*сұлба*



Үшінші түзумен айқас екі түзу өзара айқас болатыны дұрыс па? Мысал келтіріңдер .

Сұрақтар

1. Кеңістіктегі қандай екі түзу айқас деп аталады?
2. Кеңістіктегі қандай екі кесінді айқас деп аталады?
3. Айқас түзулердің белгісін тұжырымдаңдар .

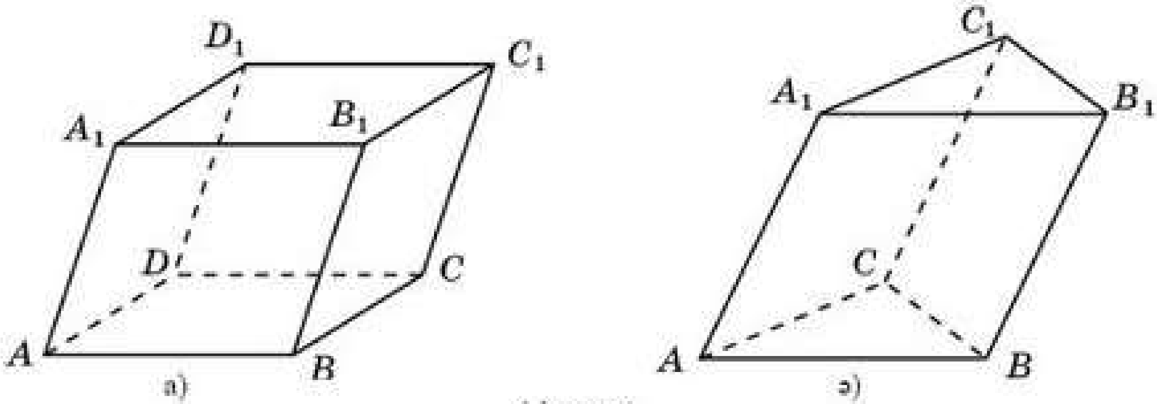
Есептер

A

6.1. Егер екі түзу әртүрлі жазықтықтарда жатса, онда олар айқас болатыны ақиқат па?

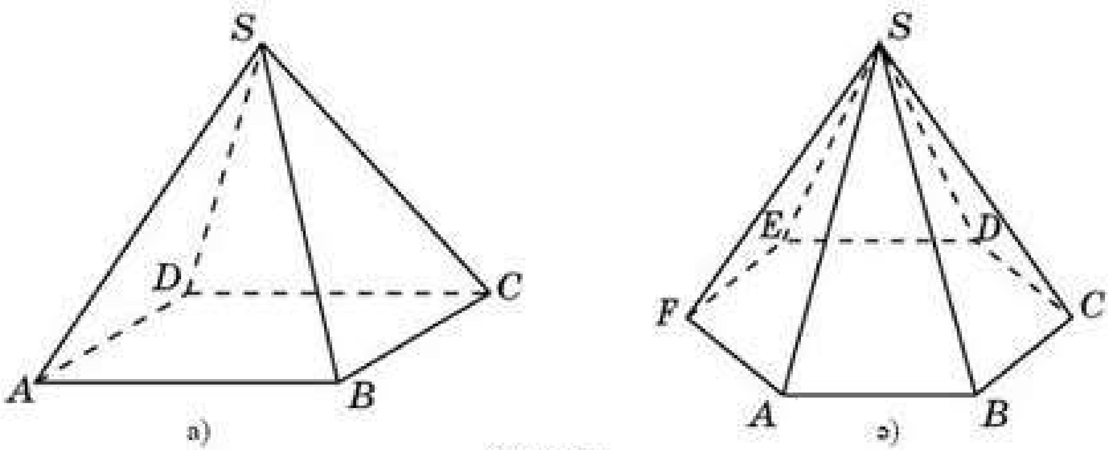
6.2. Берілген түзуден тыс жатқан нүкте арқылы осы түзумен айқас болатын неше түзулер өтеді?

6.3. а) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеді ; ә) $ABCA_1B_1C_1$ призмасы үшін AB қырымен айқас қырларды жазыңдар (6.3, а, ә-суреттер) .



6.3-сурет

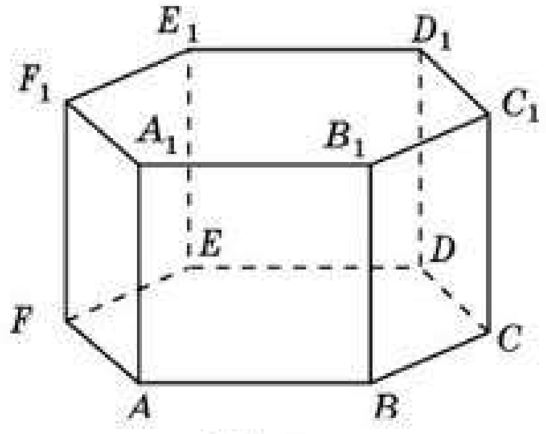
6.4. а) $SABCD$ төртбұрышты пирамиданың (6.4, а-сурет); ә) $SABCDEF$ алтыбұрышты пирамиданың (6.4, ә-сурет) SA қырымен айқас қырларын жазыңдар.



6.4-сурет

6.5. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ алтыбұрышты призманың : а) AA_1; ә) AB (6.5- сурет) қырларымен айқас қырларын жазыңдар .

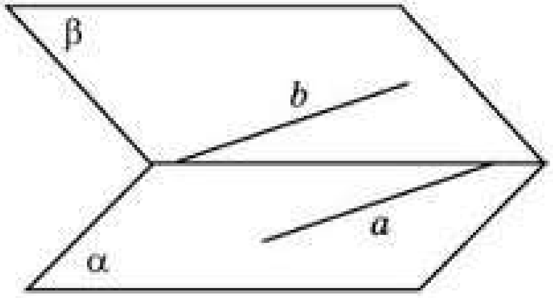
6.6. Тетраэдрдің айқас қырларының жұбы нешеу болады ?



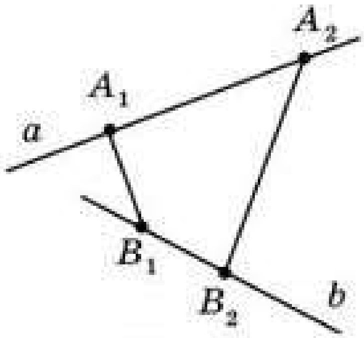
6.5-сурет

B

6.7. Кеңістіктегі a және b жазықтықтарында жүргізілген a және b түзулері қалай орналасқан (6.6-сурет)? Жауапты түсіндіріңдер.



6.6-сурет



6.7-сурет

6.8. a және b айқас түзулер болсын (6.7- сурет). A_1B_1 және A_2B_2 түзулері a және b түзулерін қиып өтеді . A_1B_1 және A_2B_2 түзулері айқас немесе параллель болуы мүмкін бе?

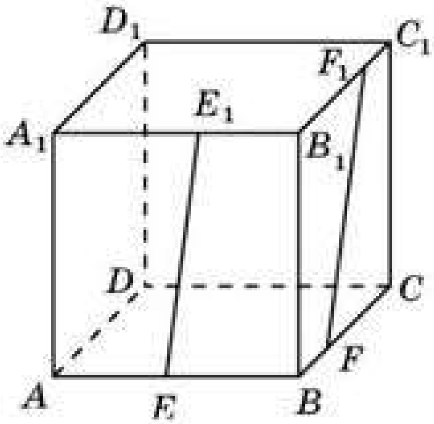
6.9. Төртбұрышты пирамиданың айқас қырларының жұбы нешеу болады?

6.10. Кубтың айқас қырларының жұбы нешеу болады?

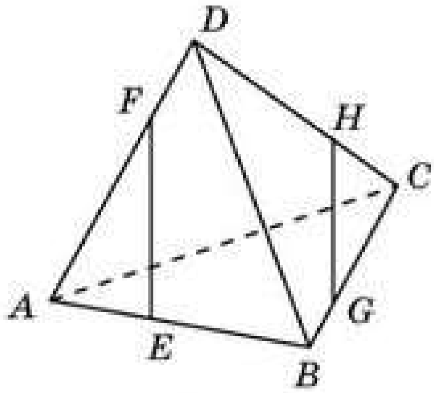
C

6.11. EE_1 және FF_1 түзулері өзара қалай орналасқан (6.8- сурет)? Жауапты түсіндіріңдер .

6.12. EF және GH түзулері өзара қалай орналасқан (6.9- сурет)? Жауапты түсіндіріңдер .



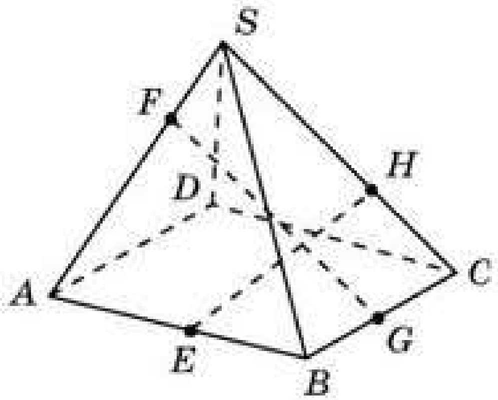
6.8-сурет



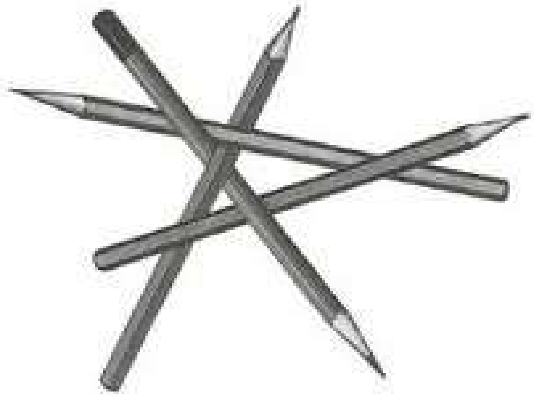
6.9-сурет

6.13. EH және FG кесінділері қиылысады ма (6.10- сурет)? Жауапты түсіндіріңдер .

6.14. Қарандаштардың келесі түрде орналасуы мүмкін бе (6.11- сурет)? Жауапты түсіндіріңдер .



6.10-сурет


6.11-сурет

6.15. Қоршаған әлемнен айқас түзулерді көрсететін нысандарға мысалдар келтіріңдер.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

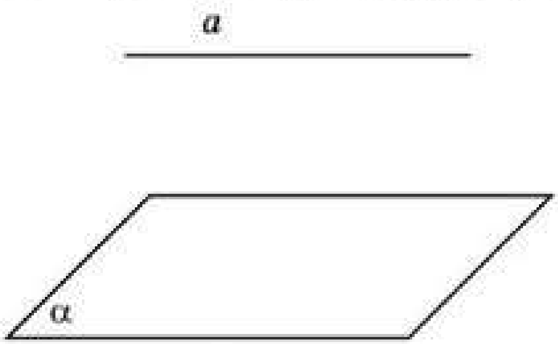
6.16. Түзу мен жазықтықтың параллельдігі ұғымын анықтап көріңдер .

§ 7. Түзу мен жазықтықтың өзара орналасуы

Түзу мен жазықтықтың өзара орналасуының жағдайларын қарастырайық.

Түзу жазықтықта жатады , яғни түзудің барлық нүктелері жазықтыққа тиісті болады. Түзу жазықтықты қиып өтеді , яғни түзу мен жазықтықтың бір ғана ортақ нүктесі бар болады. Түзу мен жазықтық қиылыспайды, яғни түзудің жазықтықпен бірде бір ортақ нүктесі болмайды.

Егер түзудің жазықтықпен бірде-бір ортақ нүктесі болмаса, онда бұл *түзу жазықтыққа параллель* деп аталады (7.1- сурет).

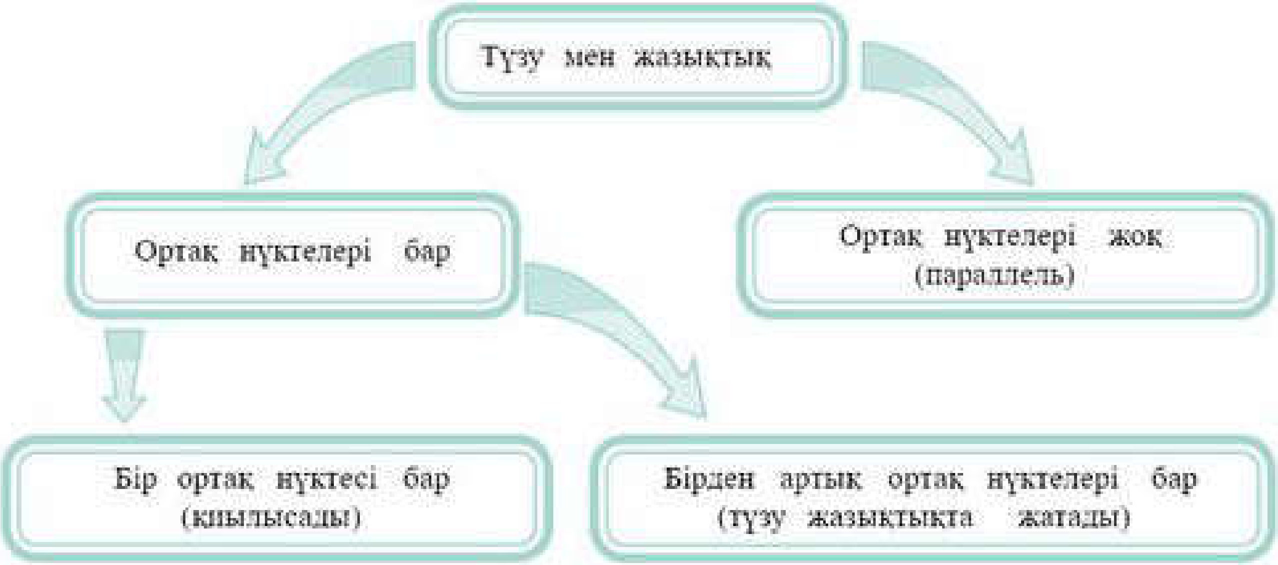


7.1-сурет

a түзуі мен α жазықтығының параллельдігі $a \parallel \alpha$ арқылы белгіленеді.

Түзу мен жазықтықтың өзара орналасуының әртүрлі жағдайларын сұлба көмегімен көрсетейік.

7.1-сұлба

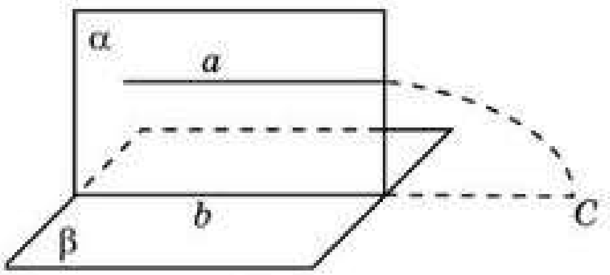


Егер көпжақтың қыры көпжақтың жағының жазықтығына параллель түзудің бойында жатса, онда осы қыр көпжақтың осы жағына параллель деп аталады.

Келесі теорема түзу мен жазықтықтың параллельдігінің жеткілікті шартын береді.

Теорема (түзу мен жазықтықтың параллельдік белгісі). ***Егер берілген жазықтықта жатпайтын түзу осы жазықтықтағы қандай да бір түзуге параллель болса, онда бұл түзу сол жазықтықтың өзіне де параллель болады.***

Дәлелдеуі. a түзуі α жазықтығында жатсын және осы жазықтықтағы b түзуіне параллель болсын (7.2-сурет).



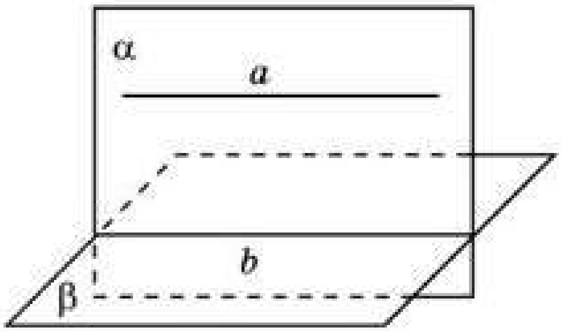
7.2-сурет

a түзуі β жазықтығына параллель екендігін дәлелдейік. Керісінше a түзуі β жазықтығын қандай да бір C нүктесінде қиып өтсін делік. a және b түзулері арқылы өтетін α жазықтығын қарастырайық (шарт бойынша $a \parallel b$). C нүктесі β жазықтығына да, α жазықтығына да тиісті, яғни олардың қиылысу сызығы b түзуіне тиісті. Демек, a және b түзулері қиылысады, ал бұл шартқа қайшы. Сонымен $a \parallel \beta$. ☐

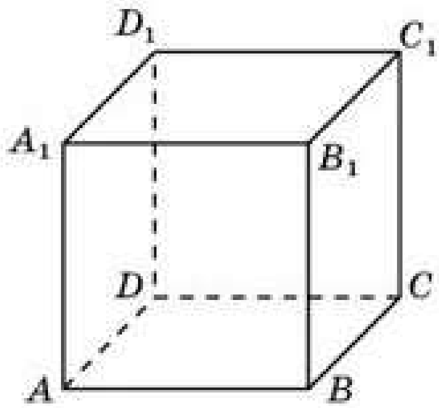
Берілген жазықтықта жатпайтын нүкте арқылы осы жазықтыққа параллель неше түзу жүргізуге болады?

Теорема. ***Егер бір жазықтық екінші жазықтыққа параллель түзу арқылы өтсе және ол жазықтықпен қиылысса, онда жазықтықтардың қиылысу түзуі бірінші түзуге параллель болады.***

Дәлелдеуі. a жазықтығы b жазықтығына параллель a түзуі арқылы өтетін болсын және осы жазықтықты b түзуінің бойымен қиып өтсін (7.3- сурет). a түзуі мен b жазықтығының ортақ нүктелері болмағандықтан, a және b түзулерінің де ортақ нүктелері болмайды. Бұл түзулер бір жазықтықта жатқандықтан, олар параллель болып табылады. ▢



7.3-сурет



7.4-сурет

Мысал. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы (7.4- сурет) үшін AA_1 түзуі BCC_1 жазықтығына параллель екендігін дәлелдеңдер.

Шешуі. AA_1 түзуі BCC_1 жазықтығындағы BB_1 түзуіне параллель және сол жазықтықта жатпайды. Демек, AA_1 түзуі BCC_1 жазықтығына параллель болады. ▢

Сұрақтар

1. Түзу мен жазықтық өзара қалай орналасуы мүмкін?
2. Қандай түзу жазықтыққа параллель деп аталады?
3. Түзу мен жазықтықтың параллельдік белгісін тұжырымдаңдар.

Есептер

А

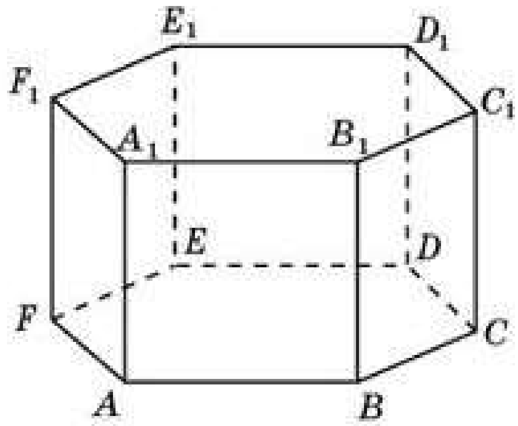
7.1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының $ABCD$ жағына параллель қырларды көрсетіңдер (7.4 -сурет).

7.2. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың: а) AB; ә) AA_1 қырларына параллель жақтарын көрсетіңдер (7.5 -сурет).

7.3. Бір жазық тыққа параллель екі түзу өзара параллель болатыны ақиқат па?

7.4. Егер түзу жазықтықта жатқан қандай да бір түзуге параллель болса, онда бұл түзу жазықтықтың өзіне де параллель болатыны ақиқат па?

7.5. Екі параллель түзулердің біреуі жазықтыққа параллель. Екінші түзу осы жазықтыққа параллель болатыны ақиқат па?

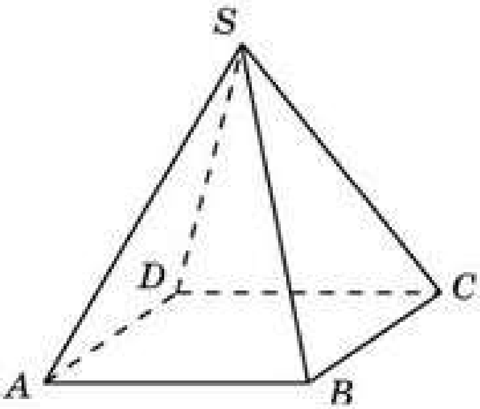


7.5-сурет

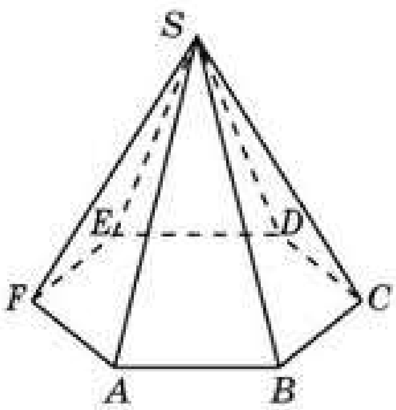
B

7.6. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың параллель қырлары мен жақтарын көрсетіңдер (7.6 -сурет).

7.7. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамиданың параллель қырлары мен жақтарын көрсетіңдер (7.7- сурет).



7.6-сурет



7.7-сурет

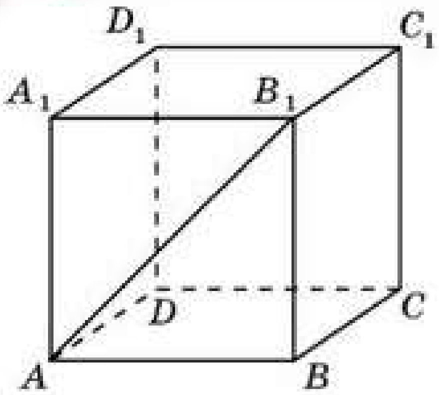
7.8. $ABCD$ парал лелограмы берілген . AB қабырғасы арқылы параллелограмм жазықтығымен беттеспейтін а жазықтығы жүргізілген . $CD \parallel a$ екенін дәлелдеңдер.

7.9. $ABCDEF$ дұрыс алтыбұрышының AF қабырғасы алтыбұрыш жазықтығымен беттеспейтін а жазықтығында жатыр. а жазықтығымен параллель болатын алтыбұрыштың қабырғасын көрсетіңдер.

C

7.10. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының (7.8- сурет) AB_1 түзуі келесі жазықтыққа параллель екенін дәлелдеңдер : а) CDD_1; ә) BDC_1.

7.11. Үшбұрыштың екі қабырғасының орталары арқылы үшбұрыш жазықтығымен беттеспейтіндей жазықтық жүргізілген . Осы жазықтық үшбұрыштың үшінші қабырғасына параллель болатынын дәлелдеңдер .



7.8-сурет

7.12. Берілген жазықтықтан тыс жатқан нүкте арқылы осы жазықтыққа параллель түзу өтетінін дәлелдеңдер. Осындай түзулердің саны нешеу?

7.13. Егер екі түзу параллель болса, онда олардың біреуі арқылы екіншісіне параллель жазықтық өтетінін дәлелдеңдер. Осындай жазықтықтардың саны нешеу?

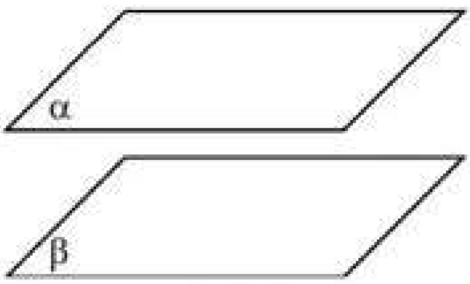
7.14. Айқас екі түзу берілген. Олардың біреуі арқылы екіншісіне параллель жазықтықты қалай жүргізуге болады?

7.15. Қоршаған әлемнен өзара параллель түзу мен жазықтықты көрсететін нысандарға мысалдар келтіріңдер.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

7.16. Екі жазықтықтың параллельдігі ұғымын анықтап көріңдер.

§ 8. Жазықтықтардың параллельдігі



8.1-сурет

Қиылыспайтын, яғни бірде-бір ортақ нүктесі болмайтын екі жазықтық *параллель жазықтықтар* деп аталады (8.1-сурет).

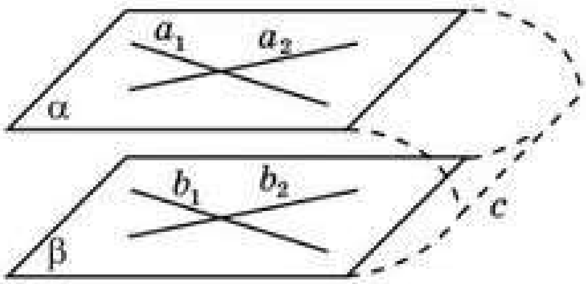
Екі жазықтықтың өзара орналасуының әртүрлі жағдайларын сұлба көмегімен көрсетейік.

8.1-*сұлба*

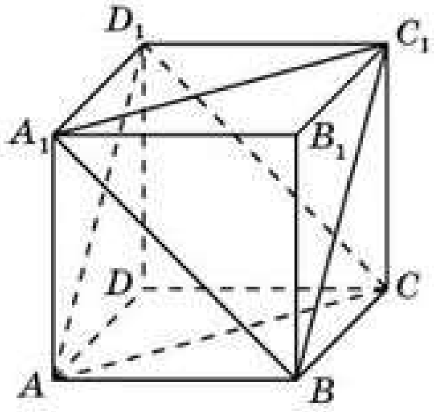
Келесі теорема екі жазықтықтың параллельдігінің жеткілікті шартын береді.

Теорема. (Екі жазықтықтың параллельдік белгісі). ***Егер бір жазықтықтағы қиылысқан екі түзу екінші жазықтықтағы сәйкесінше екі түзуге параллель болса, онда бұл жазықтықтар параллель болады.***

Дәлелдеуі. α жазықтығында қиылысқан a_1, a_2 түзулері β жазықтығындағы сәйкесінше b_1, b_2 түзулеріне параллель болсын (8.2-сурет). α және β жазықтықтары параллель болатынын дәлелдейік.



8.2-сурет



8.3-сурет

Керісінше α және β жазықтықтары c түзуі бойымен қиылысады деп есептейік. Түзу мен жазықтықтың параллельдігінің белгісі бойынша a_1 түзуі β жазықтығына параллель болады. Демек, ол c түзуіне де параллель (a_1 мен c түзулері бір жазықтықта жатады және қиылыспайды). Осыған ұқсас a_2 түзуі де c түзуіне параллель болады. Сонымен α жазықтығында бір түзуге параллель болатын қиылысқан екі түзуді аламыз, ал бұл мүмкін емес. Алынған қайшылық біздің α және β жазықтықтары қиылысатыны туралы ұйғарымның дұрыс еместігін көрсетеді. Олай болса, олар — параллель жазықтықтар.

Егер екі жазықтық параллель болса, онда осы жазықтықтардың біреуінде жатқан кез келген түзу екінші жазықтыққа параллель болатынын дәлелдеңдер.

Егер екі жазықтық параллель болса, онда осы жазықтықтардың біреуінде жатқан кез келген түзу екінші жазықтықтағы кез келген түзуге параллель болатыны ақиқат па?

Мысалы. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында ACD_1 және BA_1C_1 жазықтықтары параллель болатынын дәлелдеңдер (8.3-сурет).

Шешуі. AC түзуі A_1C_1 түзуіне және CD_1 түзуі BA_1 түзуіне параллель болады. Сонымен ACD_1 жазықтығында жатқан қиылысқан екі түзу BA_1C_1 жазықтығындағы сәйкесінше екі түзуге параллель болады. Демек, ACD_1 және BA_1C_1 жазықтықтары параллель болады.

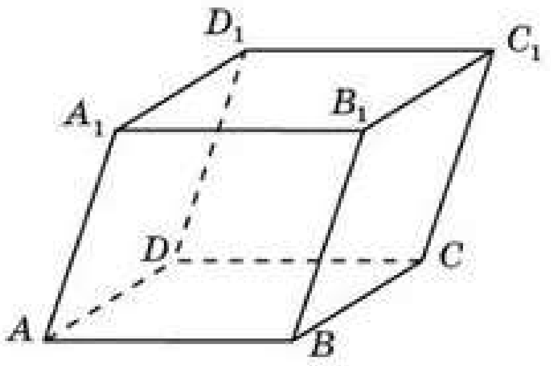
Сұрақтар

1. Қандай екі жазықтық параллель деп аталады?
2. Екі жазықтықтың өзара орналасуының жағдайларын айтыңдар.
3. Екі жазықтықтың параллельдік белгісін тұжырымдаңдар.

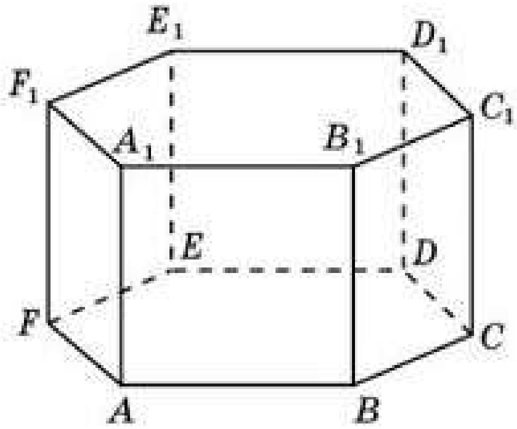
Есептер

A

8.1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедінің жақтары жатқан параллель жазықтықтарды көрсетіңдер (8.4 -сурет).



8.4-сурет

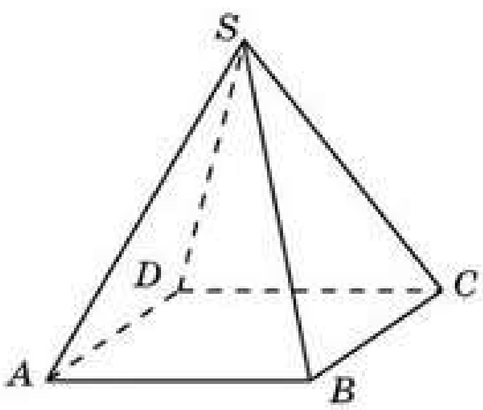


8.5-сурет

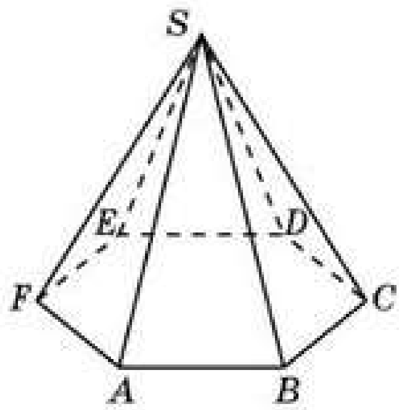
8.2. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың жақтары жатқан параллель жазықтықтарды көрсетіңдер (8.5 -сурет).

8.3. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың параллель жақтары бар ма (8.6-сурет)?

8.4. Дұрыс алтыбұрышты пирамиданың параллель жақтары бар ма (8.7-сурет)?



8.6-сурет



8.7-сурет

B

8.5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедінде келесі жазықтықтар параллель болатынын дәлелдеңдер: а) ABB_1 және CDD_1; ә) AB_1D_1 және BDC_1.

8.6. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призмада келесі жазықтықтар параллель болатынын дәлелдеңдер: а) ABC және $A_1B_1C_1$; ә) ABB_1 және DEE_1; б) ABB_1 және CFF_1; в) ACC_1 және DFF_1.

8.7. Келесі тұжырым дұрыс па: "Егер бір жазықтықта жатқан түзу екінші жазықтықтағы түзуге параллель болса, онда бұл жазықтықтар параллель болады"?

8.8. Келесі тұжырым дұрыс па: "Егер бір жазықтықта жатқан екі түзу екінші жазықтықтағы екі түзуге параллель болса, онда бұл жазықтықтар параллель болады"?

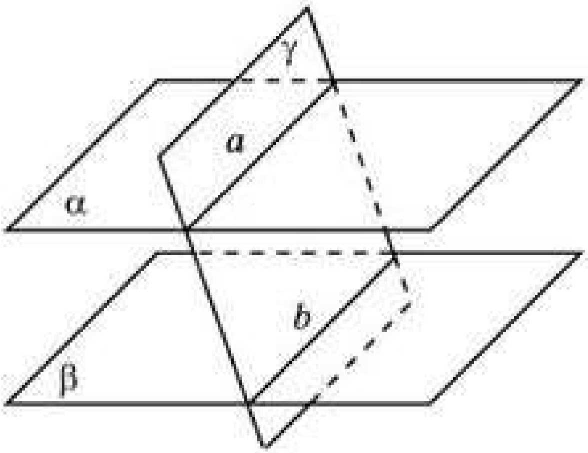
C

8.9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында ABC_1 және BCD_1 жазықтықтарының қиылысу сызығын көрсетіңдер.

8.10. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призмада ABC_1 және BCD_1 жазықтықтарының қиылысу сызығын көрсетіңдер.

8.11. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призмада ABC_1 және CD_1E_1 жазықтықтарының параллель болатынын дәлелдеңдер.

8.12. Егер параллель екі жазықтық үшінші жазықтықпен қиылысса, онда олардың қиылысу түзулері параллель болатынын дәлелдеңдер (8.8-сурет).



8.8-сурет

8.13. Қоршаған әлемнен параллель жазықтықтарды көрсететін нысандарға мысалдар келтіріңдер.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

8.14. Жазықтықтағы бұрыштың анықтамасын қайталаңдар.

8.15. Кеңістіктегі бұрыш ұғымын анықтап көріңдер.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

1. Екі a және b параллель түзулері берілген. a түзуі арқылы берілген түзулердің жазықтығымен беттеспейтін α жазықтығы өтеді. b түзуі мен α жазықтығының өзара орналасуын анықтаңдар.

A. b түзуі α жазықтығында жатыр.

B. b түзуі α жазықтығын қиып өтеді.

C. b түзуі a жазықтығына параллель.
D. Анықтау мүмкін емес.

2. Бір жазықтықта жатқан параллель үш түзудің әртүрлі жұптары арқылы неше жазықтық жүргізуге болады?
A. Біреу.
B. Екеу.
C. Үшеу.
D. Алтау.

3. Ешқандай үшеуі бір жазықтықта жатпайтын параллель төрт түзудің әртүрлі жұптары арқылы неше жазықтық жүргізуге болады?
A. Біреу.
B. Екеу.
C. Үшеу.
D. Алтау.

4. Параллель екі түзудің әрқайсысы арқылы жазықтықтар жүргізілген және олар қиылысады. Жазықтықтардың қиылысу сызығы берілген түзулерге қатысты қалай орналасады?
A. Параллель.
B. Қиылысады.
C. Біреуімен беттеседі.
D. Біреуімен айқасады.

5. Екі a және b айқас түзулері берілген және A нүктесі a түзуіне тиісті болсын. a түзуі A нүктесі мен b түзуі арқылы өтетін жазықтыққа қатысты қалай орналасады?
A. a түзуі жазықтықты қиып өтеді.
B. a түзуі жазықтыққа параллель.
C. a түзуі жазықтықта жатыр.
D. Анықтау мүмкін емес.

6. c мен d айқас түзулері және K нүктесі берілген. K нүктесі мен c түзуі және K нүктесі мен d түзуі арқылы өтетін жазықтықтар бір-біріне қатысты қалай орналасқан?
A. Беттеседі.
B. Қиылысады.
C. Параллель.
D. Анықтау мүмкін емес.

7. a жазықтығы b жазықтығына параллель a түзуімен қиылысады. a және b жазықтықтары өзара қалай орналасады?
A. Параллель.
B. Беттеседі.
C. Қиылысады.
D. Анықтау мүмкін емес.

8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының AB қырына параллель қырын көрсетіңдер.
A. CC_1.
B. DD_1.
C. B_1C_1.
D. C_1D_1.

9. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призмасының B_1C_1 қырына параллель қырын көрсетіңдер.

A. AA_1. B. EF. C. C_1D_1. D. DE.

10. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамиданың SAB және SDE жазықтықтарының қиылысу сызығына параллель түзуді көрсетіңдер.

A. BC. B. CF. C. AD. D. BE.

11. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының AA_1 қырымен айқас қырын көрсетіңдер.

A. BC. B. BB_1. C. AB. D. A_1D_1.

12. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың AB қырымен айқас қырын көрсетіңдер.

A. CD. B. EF. C. DD_1. D. D_1E_1.

13. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың SA қырымен айқас қырын көрсетіңдер.

A. AB. B. SC. C. SD. D. BC.

14. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамиданың BC қырымен айқас қырын көрсетіңдер.

A. DE. B. SB. C. SA. D. AF.

15. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының CC_1 қырына параллель жазықтықты көрсетіңдер.

A. ABC. B. ABC_1. C. BDA_1. D. BDD_1.

16. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының BC_1 түзуіне параллель жазықтықты көрсетіңдер.

A. ACD_1. B. ACB_1. C. ADB_1. D. CDA_1.

17. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың AF қырына параллель жазықтықты көрсетіңдер.

A. BEE_1. B. BDD_1. C. BCC_1. D. CEE_1.

18. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамиданың CD қырына параллель жазықтықты көрсетіңдер.

A. SAB. B. SAF. C. SBC. D. SEF.

19. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының ACB_1 жазықтығына параллель жазықтықты көрсетіңдер.

A. ABC. B. ADD_1. C. DA_1C_1. D. BA_1D_1.

20. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың ADC_1 жазықтығына параллель жазықтықты көрсетіңдер.

A. EFA_1. B. BED_1. C. CFE_1. D. EFF_1.

II тарау КЕҢІСТІКТЕГІ ПЕРПЕНДИКУЛЯРЛЫҚ

§ 9. Кеңістіктегі түзулердің арасындағы бұрыш

Кеңістіктегі бұрыштың анықтамасы жазықтықтағы бұрыштың анықтамасына ұқсас анықталады.

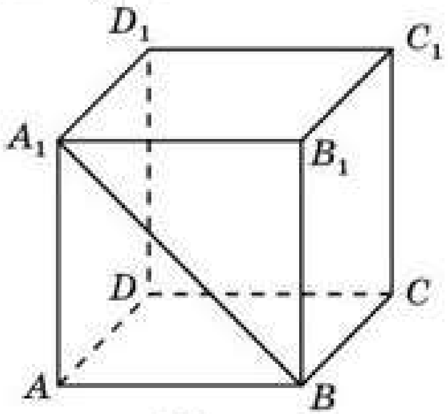
Кеңістіктегі бұрыш деп төбелері ортақ екі сәуледен және олармен шектелген жазықтықтың бір бөлігінен (осы сәулелер жататын) тұратын кеңістіктегі фигураны айтады.

Кеңістіктегі қиылысқан екі түзудің арасындағы бұрыш деп қиылысу нүктесіндегі осы түзулердің сәулелерінен жасалған бұрыштардың кішісін айтады.

Кеңістікте тік бұрыш жасап қиылысқан екі түзу *перпендикуляр түзулер* деп аталады.

Қиылысқан екі кесінді перпендикуляр түзулерде жататын болса, онда оларды перпендикуляр дейді. *Қиылысқан екі кесіндінің арасындағы бұрыш* деп оларға сәйкес түзулердің арасындағы бұрышты айтады.

Мысалы, кубтың қиылысқан қырлары өзара перпендикуляр, кубтың жағының диагоналі осы жақтың қырларымен $45°$ бұрыш жасайды (9.1-сурет).



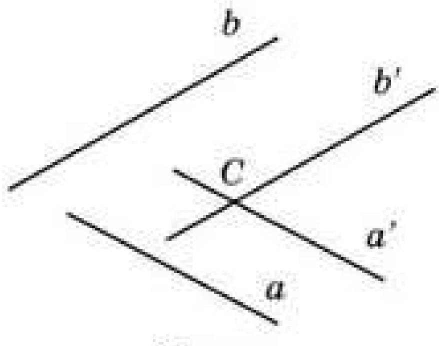
9.1-сурет

Жазықтықтағы сияқты, егер кеңістікте екі сәуленің бірі екіншісін қамтыса немесе олардың төбелерінен өтетін түзуге қарағанда бір бетінде (жағында) параллель түзулерде жатса, онда олар *бірдей бағытталған* (*бағыттас*) деп аталады.

Жазықтықтағы бұрыштың қасиетіне ұқсас кеңістіктегі бұрыштың келесі қасиеттері орынды болады.

1-қасиет. *Сәйкес қабырғалары бағыттас екі бұрыш тең болады.*

2-қасиет. *Сәйкес параллель түзулермен жасалған екі бұрыш тең болады.*



9.2-сурет

Қалай ойлайсыңдар, сәйкес қабырғалары параллель болатын екі бұрыш әрдайым тең бола ма? Мысал келтіріңдер.

Енді айқас түзулердің арасындағы бұрыш ұғымын анықтайық.

a мен b — айқас түзулер болсын (9.2-сурет). Кеңістікте қандай да бір C нүктесін алып, осы нүкте арқылы a мен b түзулеріне сәйкес параллель a', b' түзулерін жүргіземіз.

Айқас түзулердің арасындағы бұрыш деп сәйкесінше оларға параллель қиылысқан түзулердің арасындағы бұрышты айтады.

Параллель қабырғалардың арасындағы бұрыштар тең болғандықтан, бұл анықтама C нүктесін таңдаудан тәуелсіз. Дербес жағдайда C нүктесі a немесе b түзуінде жатуы да мүмкін. Бұл жағдайда a' немесе b' түзуі үшін сәйкесінше a немесе b түзуінің өзін алуға болады.

Егер екі айқас түзулердің арасындағы бұрыш тік болса, онда олар *перпендикуляр* деп аталады.

Берілген түзуде: а) жататын; ә) жатпайтын нүкте арқылы осы түзуге перпендикуляр неше түзу жүргізуге болады?

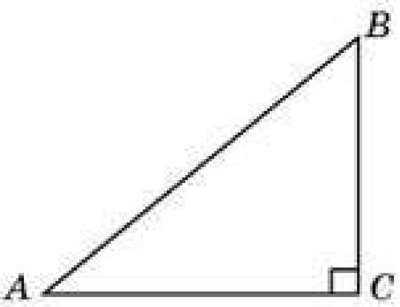
Егер екі кесінді перпендикуляр түзулерде жатса, онда оларды *перпендикуляр* деп атайды.

Кеңістіктегі екі кесіндінің арасындағы бұрыш деп осы кесінділер жатқан түзулердің арасындағы бұрышты айтады.

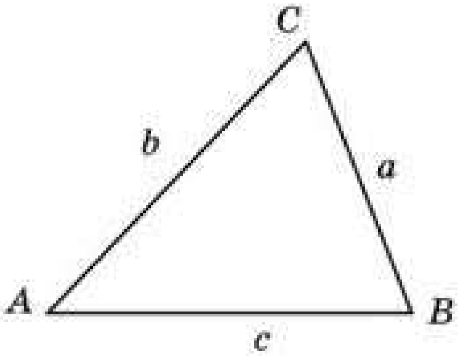
Үшбұрыштың бұрыштарын табу үшін тригонометриялық функцияларды қолдануға болатынын еске салайық.

Мысалы, C тік бұрышы болатын ABC үшбұрышының қабырғалары белгілі болса (9.3-сурет), онда оның A сүйір бұрышын келесі тригонометриялық функциялардың біреуін қолданып табуға болады:

$$\sin A = \frac{BC}{AB},\ \cos A = \frac{AC}{AB},\ \operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC},\ \operatorname{ctg} A = \frac{AC}{BC}.$$



9.3-сурет



9.4-сурет

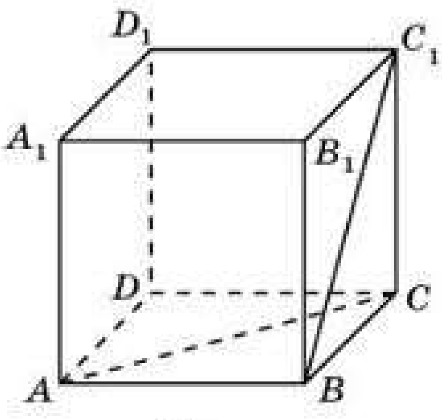
Қабырғалары $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ болатын кез келген ABC үшбұрышының C бұрышын табу үшін косинустар теоремасын қолдануға болады (9.4-сурет):

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

Онда

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

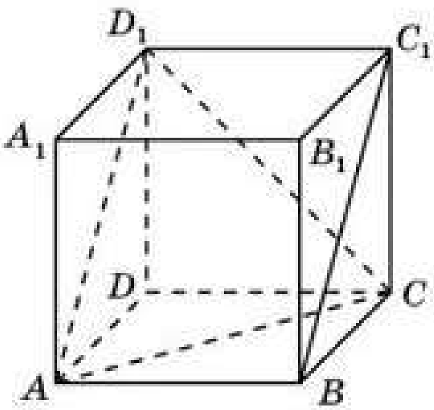
1-мысал. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында AC және BC_1 түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар (9.5-сурет).



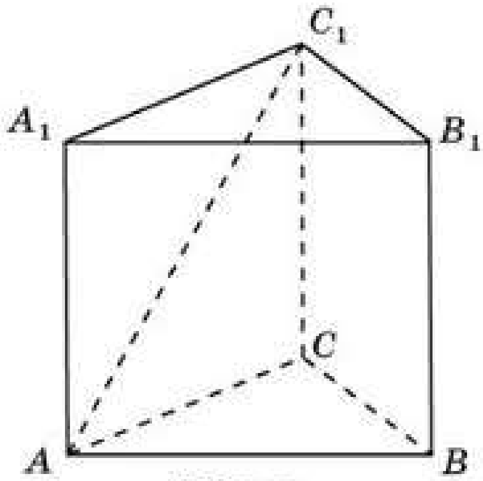
9.5-сурет

Шешуі. BC_1 түзуіне параллель AD_1 түзуін жүргіземіз. AC мен BC_1 түзулерінің арасындағы бұрыш AC мен AD_1 түзулерінің арасындағы бұрышқа тең болады. Осы бұрышты табу үшін ACD_1 үшбұрышын қарастырайық (9.6-сурет). Ол теңқабырғалы үшбұрыш болады. Демек, ізделінді CAD_1 бұрышы $60°$-қа тең.

2-мысал. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призмасының барлық қырлары 1-ге тең (9.7-сурет). AC_1 мен A_1B_1 түзулерінің арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.



9.6-сурет



9.7-сурет

Шешуі. A_1B_1 түзуі AB түзуіне параллель болғандықтан, ізделінді бұрыш BAC_1 бұрышына тең болады. ABC_1 үшбұрышында $AB = 1$, $AC_1 = BC_1 = \sqrt{2}$. Косинустар теоремасы бойынша

$$BC_1^2 = AB^2 + AC_1^2 - 2AB \cdot AC_1 \cdot \cos\angle BAC_1.$$

AB, AC_1, BC_1 ұзындықтарының мәндерін қоя отырып, табамыз: $\cos\angle BAC_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Сұрақтар

1. Кеңістіктегі бұрыш дегеніміз не?
2. Кеңістіктегі қиылысқан екі түзудің арасындағы бұрыш дегеніміз не?
3. Екі айқас түзулердің арасындағы бұрыш дегеніміз не?
4. Кеңістіктегі қандай екі түзу перпендикуляр деп аталады?
5. Кеңістіктегі бұрыштар үшін қандай қасиеттер орынды болады?
6. Қабырғалары берілген тікбұрышты үшбұрыштың бұрыштарын қалай табуға болады?
7. Қабырғалары берілген кез келген үшбұрыштың бұрыштарын қалай табуға болады?

Есептер

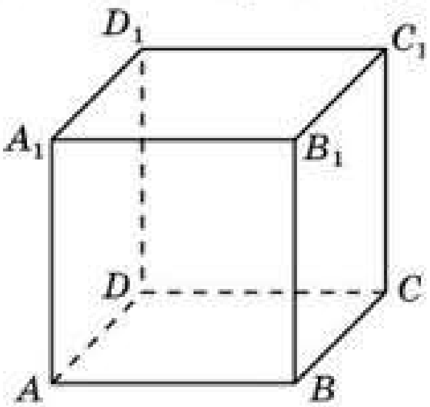
А

9.1. Кеңістікте түзу берілген және оның бойынан нүкте алынған. Осы нүкте арқылы өтіп, берілген түзуге перпендикуляр болатын неше түзу жүргізуге болады?

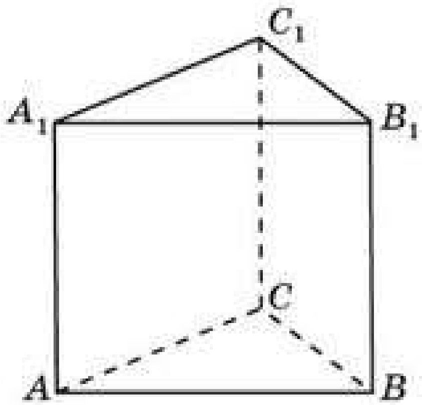
9.2. Түзу және одан тыс жатқан нүкте берілген. Осы нүкте арқылы өтіп, берілген түзуге перпендикуляр болатын неше түзу салуға болады?

9.3. Жазықтықта үшінші түзуге перпендикуляр болатын екі түзу параллель болады. Осы тұжырым кеңістік үшін орындала ма?

9.4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының AB қырына перпендикуляр болатын қырларды көрсетіңдер (9.8-сурет).



9.8-сурет



9.9-сурет

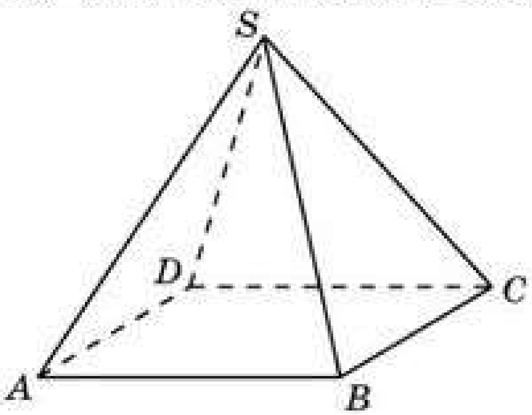
9.5. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың BB_1 қырына перпендикуляр болатын қырларын көрсетіңдер (9.9 -сурет).

B

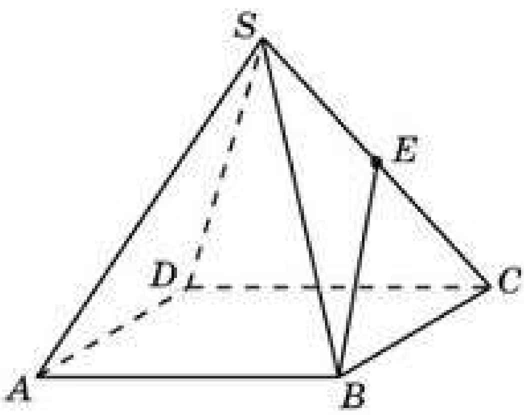
9.6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының келесі түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар: а) AC және B_1D_1; ә) AB және B_1C_1; б) AB_1 және BC_1.

9.7. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың келесі түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар: а) AB және CC_1; ә) AB және B_1C_1.

9.8. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең (9.10 -сурет). Келесі түзулердің арасындағы бұрышты табыңдар: а) AB және SC; ә) SB және SD.



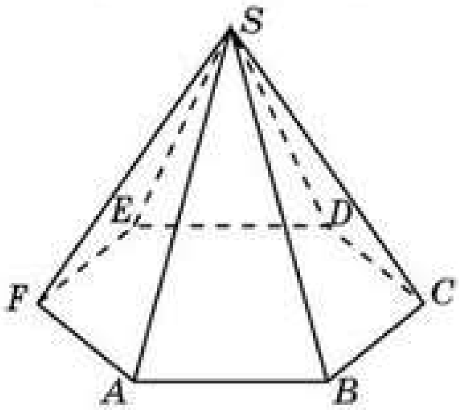
9.10-сурет



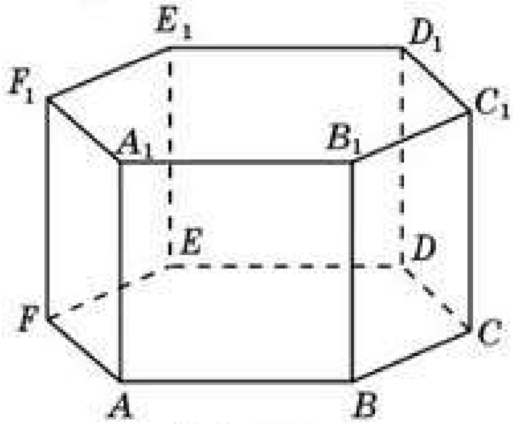
9.11-сурет

9.9. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең және E нүктесі — SC қырының ортасы (9.11 -сурет). AD мен BE түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар .

9.10. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамиданың табанының қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең (9.12-сурет). SA мен BC түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.



9.12-сурет

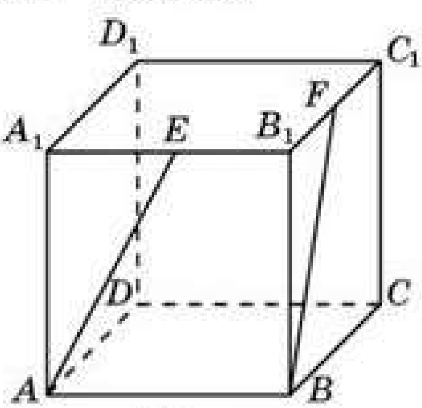


9.13-сурет

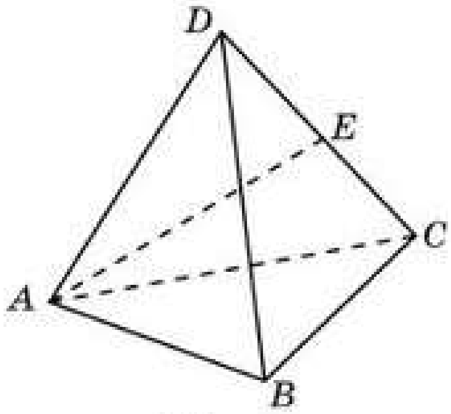
9.11. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең (9.13-сурет). Келесі түзулердің арасындағы бұрышты табыңдар: а) AA_1 және BC_1; ә) AA_1 және DE_1; б) AB және B_1C_1; в) AB және C_1D_1; г) AC және B_1C_1; ғ) AC және B_1D_1; д) AC және B_1E_1.

C

9.12. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының барлық қырлары 1-ге тең және E нүктесі — A_1B_1 қырының ортасы, F нүктесі — B_1C_1 қырының ортасы (9.14-сурет). AE мен BF түзулерінің арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.



9.14-сурет

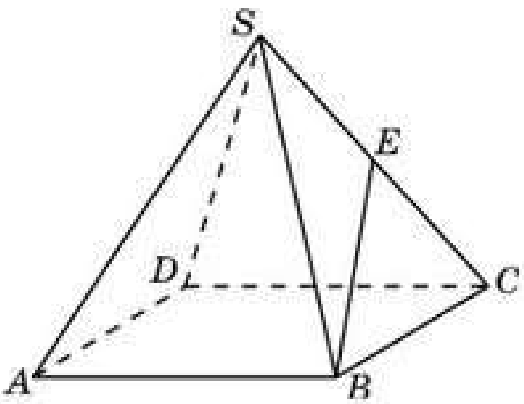


9.15-сурет

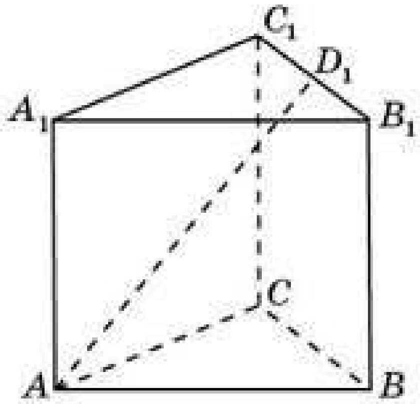
9.13. $ABCD$ тетраэдрінің барлық қырлары 1-ге тең және E нүктесі — CD қырының ортасы (9.15-сурет). AE мен BC түзулерінің арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

9.14. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең және E нүктесі — SC қырының ортасы (9.16-сурет). SA мен BE түзулерінің арасындағы бұрыштың тангенсін табыңдар.

9.15. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең, D_1 нүктесі — B_1C_1 қырының ортасы (9.17-сурет). AD_1 мен BB_1 түзулерінің арасындағы бұрыштың тангенсін табыңдар.



9.16-сурет



9.17-сурет

9.16. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамиданың табанының қабырғасы 1-ге, ал бүйір қырлары 2-ге тең (9.12 -сурет). Келесі түзулердің арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар: а) SA және CD; ә) SA және BD .

9.17. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең (9.13 -сурет). Келесі түзулердің арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар: а) AB_1 және BC_1; ә) AB_1 және CD_1.

9.18. Қоршаған әлемнен перпендикуляр түзулерді көрсететін нысандарға мысалдар келтіріңдер.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

9.19. Берілген нүктеден жазықтыққа дейінгі қашықтықтың анықтамасын қайталаңдар.

9.20. Кеңістіктегі нүктеден түзуге дейінгі қашықтық ұғымын анықтаңдар.

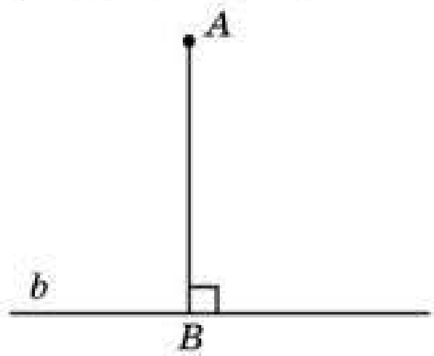
9.21. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубында A төбесінен келесі түзуге дейінгі қашықтықты табыңдар: а) BC; ә) BB_1.

§ 10. Нүктеден түзуге дейінгі қашықтық

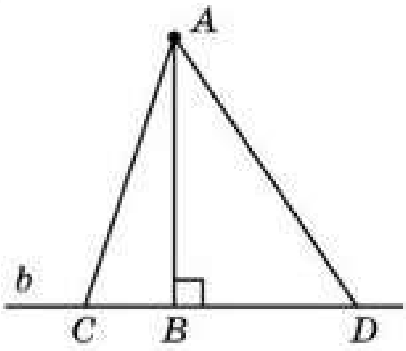
Жазықтықтағы *нүктеден түзуге дейінгі қашықтық* деп берілген нүктеден берілген түзуге түсірілген перпендикулярдың ұзындығын айтатынын еске салайық.

Нүкте мен түзу бір жазықтықта жатқандықтан нүктеден түзуге дейінгі қашықтықтың анықтамасы кеңістік үшін де орынды болады.

Кеңістіктегі *нүктеден түзуге дейінгі қашықтық* деп берілген нүктеден берілген түзуге түсірілген перпендикулярдың ұзындығын айтады (10.1-сурет).



10.1-сурет

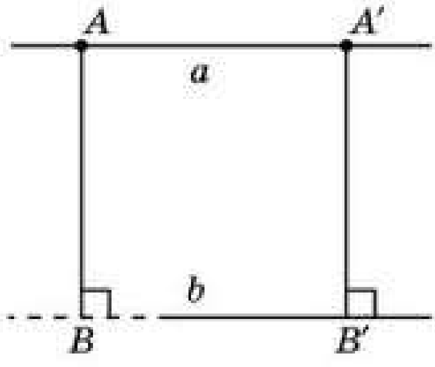


10.2-сурет

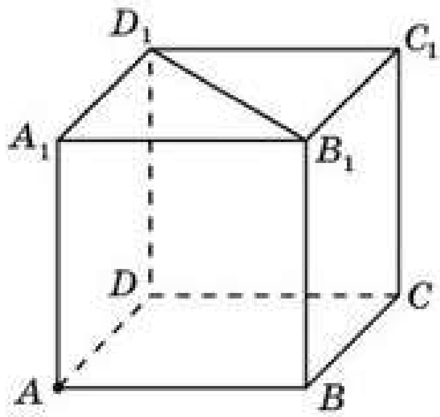
A нүктесінен b түзуіне дейінгі қашықтықты табу үшін, алдымен A нүктесінен b түзуіне түсірілген перпендикулярдың B табанын табамыз. Егер AB перпендикулярдың ұзындығын табу есептің шартынан тікелей шықпаса, онда b түзуінің бойынан қандай да бір C, D нүктелерін алып, биіктігі AB болатын ACD үшбұрышын қарастырамыз (10.2-сурет). AB биіктігін табу үшін Пифагор теоремасы немесе басқадай белгілі теоремалар мен формулалар қолданылады.

Егер перпендикулярдың B табаны суреттегідей b түзуінің аумағынан тыс жатса, онда A нүктесі арқылы b түзуіне параллель a түзуін жүргіземіз және оның бойынан перпендикулярдың B' табаны b түзуінде жататындай A' нүктесін таңдап аламыз (10.3-сурет). $A'B'$ кесіндісінің ұзындығы ізделінді A нүктесінен b түзуіне дейінгі қашықтыққа тең болады.

AB және $A'B'$ кесінділерінің теңдігін өздерің дәлелдеңдер.

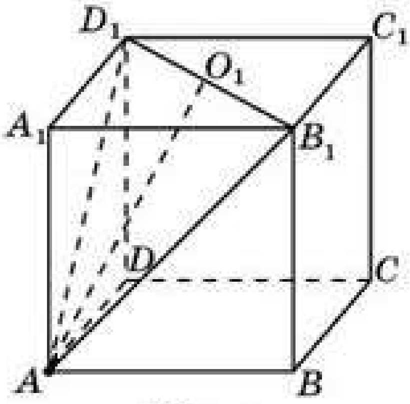


10.3-сурет



10.4-сурет

Мысал. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының A төбесінен B_1D_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар (10.4-сурет).



10.5-сурет

Шешуі. AB_1D_1 үшбұрышын қарастырайық. Ол теңқабырғалы үшбұрыш және қабырғасы $\sqrt{2}$-ге тең. A төбесінен B_1D_1 түзуіне түсірілген перпендикулярдың табаны B_1D_1 кесіндісінің O_1 ортасы болады (10.5-сурет). AO_1 перпендикуляры $\frac{\sqrt{6}}{2}$-ге тең.

Сонымен $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының A төбесінен B_1D_1 түзуіне дейінгі қашықтық $\frac{\sqrt{6}}{2}$-ге тең болады.

Сұрақтар

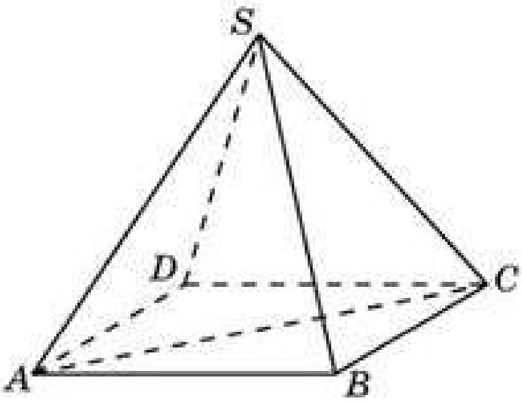
1. Кеңістіктегі нүктеден түзуге дейінгі қашықтық дегеніміз не?
2. Нүктеден түзуге дейінгі қашықтықты табу үшін қандай деректер қолданылады?

Есептер

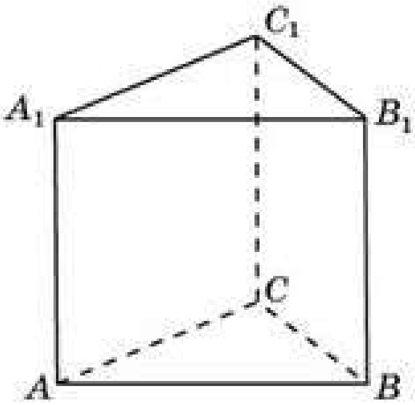
A

10.1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының A төбесінен келесі түзуге дейінгі қашықтықты табыңдар: а) BC; ә) BD; б) C_1D_1.

10.2. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең (10.6-сурет). S төбесінен келесі түзуге дейінгі қашықтықты табыңдар: а) AB; ә) AC.



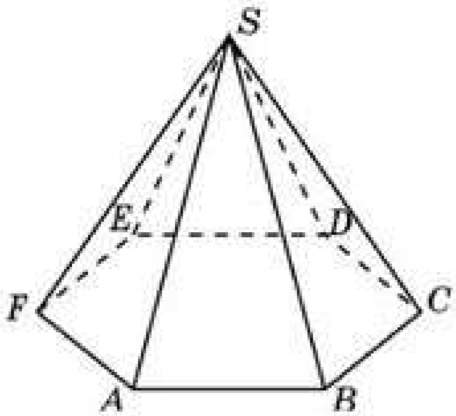
10.6-сурет



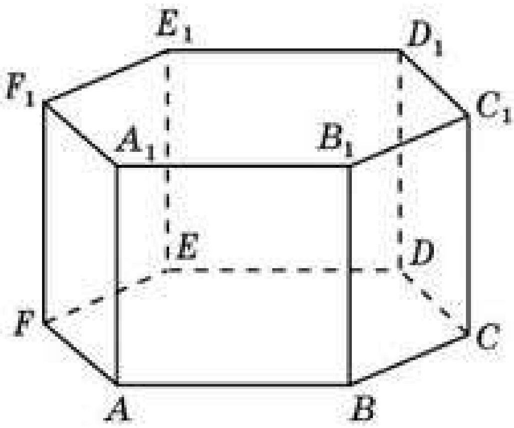
10.7-сурет

10.3. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең (10.7 -сурет). A нүктесінен келесі түзуге дейінгі қашықтықты табыңдар: а) BB_1; ә) BC; б) BA_1.

10.4. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамиданың табанының қабырғасы 1-ге, ал бүйір қырлары 2-ге тең (10.8- сурет). S төбесінен AD түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.



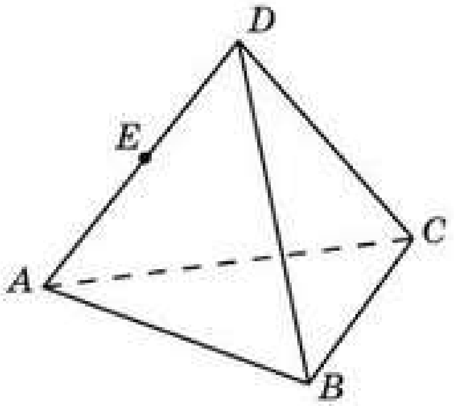
10.8-сурет



10.9-сурет

10.5. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең (10.9 -сурет). A нүктесінен келесі түзуге дейінгі қашықтықты табыңдар: а) BB_1; ә) BA_1; б) BC; в) CD; г) DE; ғ) BD; д) BE; е) BF; ж) CE; з) CF; и) A_1B_1.

B



10.10-сурет

10.6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының A нүктесінен CB_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар .

10.7. $ABCD$ тетраэдрінің барлық қырлары 1-ге тең (10.10 -сурет). Оның AD қырының E ортасынан BC түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар .

10.8. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең (10.7- сурет). A нүктесінен B_1C_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

10.9. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамиданың табанының қабырғасы 1-ге, ал бүйір қырлары 2-ге тең (10.8- сурет). S төбесінен AC түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

C

10.10. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең (10.7 -сурет). A нүктесінен BC_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

10.11. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең (10.9 -сурет). A нүктесінен келесі түзуге дейінгі қашықтықты табыңдар: а) B_1F_1; ә) B_1C_1.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

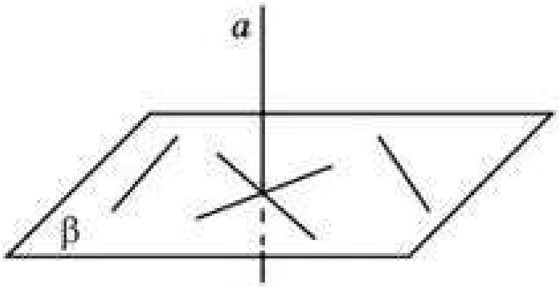
10.12. Түзу мен жазықтықтың перпендикулярлығы ұғымына анықтама беріңдер .

10.13. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының ABC жазықтығына перпендикуляр қандай да бір түзулерді көрсетіңдер.

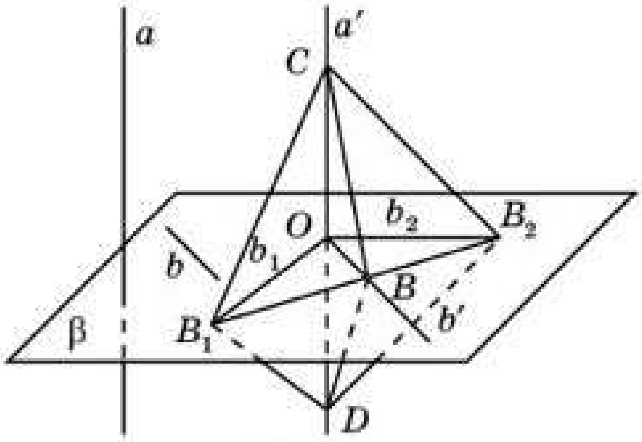
§ 11. Түзу мен жазықтықтың перпендикулярлығы

Түзу мен жазықтықтың перпендикулярлығы ұғымын анықтайық.

Егер түзу жазықтықтағы түзулердің кез келгеніне перпендикуляр болса, онда осы түзу *жазықтыққа перпендикуляр* деп аталады (11.1-сурет).



11.1-сурет



11.2-сурет

Жазықтыққа перпендикуляр түзудің бойында жататын кесінді де осы жазықтыққа перпендикуляр болады.

Жазықтыққа перпендикуляр түзудің осы жазықтықты қиып өтетінін байқаймыз. Расында да, егер түзу жазықтықта жатса немесе оған параллель болса, онда осы жазықтықта оған параллель түзу табылады. Осыдан бастапқы түзу берілген жазықтыққа перпендикуляр болмас еді.

Келесі теорема түзу мен жазықтықтың перпендикулярлығының жеткілікті шартын береді.

Теорема (түзу мен жазықтықтың перпендикулярлық белгісі). ***Егер түзу жазықтықта жататын өзара қиылысқан екі түзуге перпендикуляр болса, онда бұл түзу жазықтыққа перпендикуляр болады .***

Дәлелдеуі . a түзуі β жазықтығында жататын O нүктесінде қиылысқан b_1, b_2 түзулеріне перпендикуляр болсын (11.2 -сурет).

β жазықтығының кез келген b түзуін қарастырайық. O нүктесі арқылы a, b түзулеріне параллель сәйкесінше a', b' түзулерін жүргіземіз. a, b түзулерінің перпендикулярлығын дәлелдеу үшін a', b' түзулерінің перпендикулярлығын дәлелдеу жеткілікті.

Ол үшін β жазықтығында b_1, b_2, b' түзулерін сәйкесінше B_1, B_2, B нүктелерінде қиып өтетін түзуді жүргіземіз. a' түзуінің бойынан O нүктесінен бастап OC, OD тең кесінділерін аламыз және C, D нүктелерін B_1, B_2, B нүктелерімен қосамыз. OB_1C және OB_1D тікбұрышты үшбұрыштары тең (катеттері бойынша) болады . Демек, $B_1C = B_1D$.

Осыған ұқсас OB_2C және OB_2D тікбұрышты үшбұрыштарының теңдігінен $B_2C = B_2D$ шығады. B_1B_2C және B_1B_2D үшбұрыштары тең (үш қабырғасы бойынша) болады. Демек, $\angle CB_1B = \angle DB_1B$.

B_1BC және B_1BD үшбұрыштары тең (екі қабырғасы және олардың арасындағы бұрышы бойынша) болады . Сонымен $BC = BD$. OBC және OBD үшбұрыштары тең (үш қабырғасы бойынша), ендеше $\angle BOC = \angle BOD = 90°$, яғни a' пен b' түзулері өзара перпендикуляр.

Демек, a түзуі β жазықтығына перпендикуляр болады.

Қалай ойлайсыңдар, егер түзу жазықтықта жататын екі түзуге перпендикуляр болса, онда бұл түзу жазықтыққа перпендикуляр бола ма? Мысал келтіріңдер.

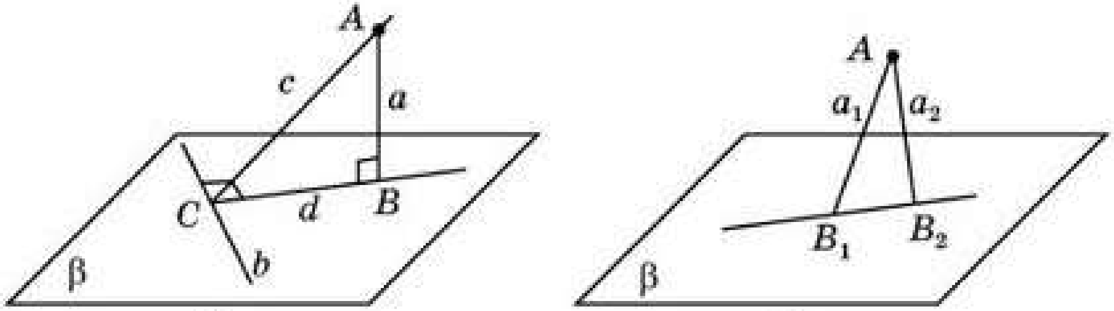
Түзу жазықтыққа перпендикуляр болмайтындай шартты тұжырымдаңдар.

Түзу мен жазықтықтың перпендикулярлығының кейбір қасиеттерін қарастырайық.

1-қасиет. *Берілген жазықтықтан тыс жатқан нүкте арқылы осы жазықтыққа перпендикуляр бір ғана түзу жүргізуге болады.*

Дәлелдеуі. A нүктесін және β жазықтығын қарастырайық (11.3, а-сурет). β жазықтығында қандай да бір b түзуін жүргіземіз. A нүктесі және b түзуімен анықталған жазықтықта b түзуіне перпендикуляр c түзуін жүргіземіз. b және c түзулерінің қиылысу нүктесін C арқылы белгілейік. β жазықтығында C нүктесі арқылы b түзуіне перпендикуляр d түзуін жүргіземіз. b түзуі c мен d түзулерімен анықталған β жазықтығына перпендикуляр болатынын байқаймыз.

A нүктесі және d түзуімен анықталған жазықтықта d түзуіне перпендикуляр a түзуін жүргіземіз. Осы түзу β жазықтығына перпендикуляр ізделінді түзу болады. Расында да, a түзуі d түзуіне перпендикуляр болады. Сондай-ақ ол β жазықтығында жатады, ендеше b түзуіне перпендикуляр болады. Сонымен a түзуі β жазықтығындағы қиылысқан екі b мен d түзулеріне перпендикуляр болады, демек, ол осы жазықтыққа да перпендикуляр болады.



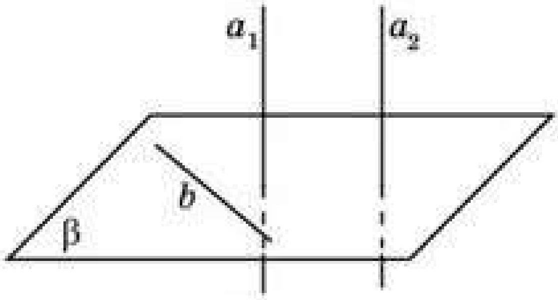
а) ә)

11.3-сурет

Жалғыздығын дәлелдейік. A нүктесі арқылы β жазықтығына перпендикуляр екі a_1 және a_2 түзулері өтсін деп ұйғарайық (11.3, ә-сурет). Олардың β жазықтығымен сәйкесінше қиылысу нүктелерін B_1, B_2 деп белгілейік. Сонда AB_1B_2 жазықтығында A нүктесі арқылы өтетін және B_1B_2 түзуіне перпендикуляр болатын екі түзу бар болады. Ал бұл жазықтықтағы перпендикуляр түзулердің сәйкес қасиетіне қайшы келеді. Ендеше A нүктесі арқылы β жазықтығына перпендикуляр біреуден артық түзу өтуі мүмкін емес. Демек, мұндай түзу біреу ғана болады.

2-қасиет. *Егер түзу жазықтыққа перпендикуляр болса, онда бұл түзуге параллель болатын кез келген түзу осы жазықтыққа перпендикуляр болады .*

Дәлелдеуі . a_1 түзуі β жазықтығына перпендикуляр және a_2 түзуі a_1 түзуіне параллель болсын (11.4 -сурет). a_1 түзуі β жазықтығында жатқан кез келген түзуге перпендикуляр болғандықтан, a_1 түзуіне параллель a_2 түзуі де осы жазықтықта жатқан кез келген түзуге перпендикуляр болады. Демек, ол β жазықтығына перпендикуляр болады.

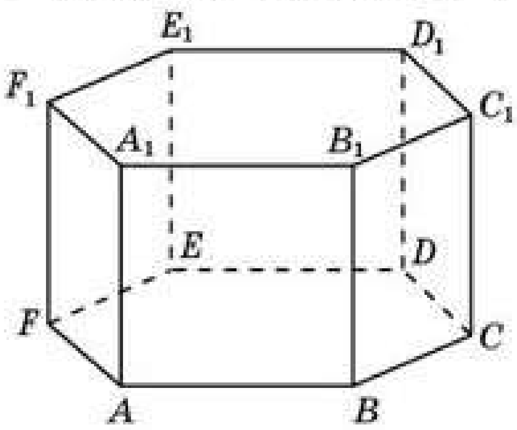


11.4-сурет

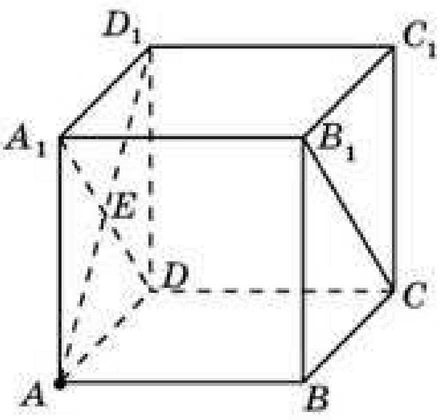
3-қасиет. *Бір жазықтыққа перпендикуляр екі түзу өзара параллель болады .*

Дәлелдеуі . a_1 және a_2 түзулері β жазықтығына перпендикуляр болсын. a_2 түзуінің бойында жатқан қандай да бір A_2 нүктесі арқылы a_1 түзуіне параллель түзу жүргіземіз. 2-қасиет бойынша ол β жазықтығына перпендикуляр болады. 1-қасиет бойынша ол a_2 түзуімен сәйкес келуі керек. Демек, a_2 түзуі a_1 түзуіне параллель болады.

1-мысал. Тік призманың бүйір қырлары оның табанына перпендикуляр болатынын дәлелдеңдер (11.5-сурет).



11.5-сурет



11.6-сурет

Шешуі . Тік призманың бүйір жақтары тіктөртбұрыштар болады. Сондықтан әрбір бүйір қыры призманың табанының іргелес жатқан екі қабырғасына перпендикуляр болады. Демек, ол табанына да перпендикуляр болады.

2-мысал. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында AD_1 түзуі CDA_1 жазықтығына перпендикуляр болатынын дәлелдеңдер.

Шешуі . AD_1 түзуі DA_1 түзуіне перпендикуляр болады (11.6 -сурет). Сонымен қатар ол CD түзуі перпендикуляр болатын ADD_1 жазықтығында жатыр. Демек, AD_1 түзуі CDA_1 жазықтығына перпендикуляр болады.

Сұрақтар

1. Қандай түзу жазықтыққа перпендикуляр деп аталады?
2. Қандай кесінді жазықтыққа перпендикуляр деп аталады?
3. Түзу мен жазықтықтың перпендикулярлық белгісін тұжырымдаңдар.

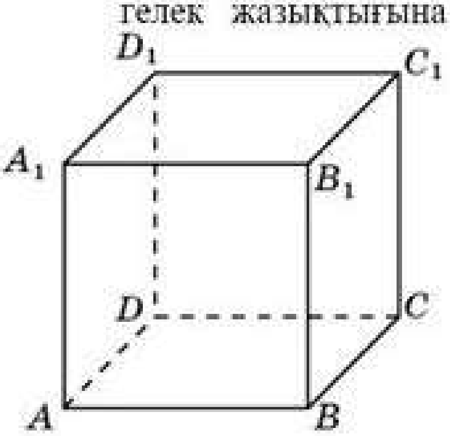
Есептер

А

11.1. Түзу жазықтыққа параллель. Ол осы жазықтықта жатқан қандай да бір түзуге перпендикуляр болуы мүмкін бе?

11.2. Үшбұрыштың екі қабырғасына перпендикуляр болатын түзу үшбұрыш жазықтығына қатысты қалай орналасады?

11.3. Егер түзу дөңгелектің: а) диаметріне; ә) екі диаметріне перпендикуляр болса, онда оның центрінде қиып өтетін осы түзу дөңгелек жазықтығына перпендикуляр болатыны ақиқат па?



11.7-сурет

11.4. a түзуі α жазықтығын қиып өтеді және оған перпендикуляр емес. α жазықтығында a түзуімен перпендикуляр болатын түзулер бар ма?

11.5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында (11.7-сурет) келесі түзу мен жазықтық перпендикуляр болатынын дәлелдеңдер: а) AA_1 және ABC; ә) AB және BCC_1; б) AB_1 және BCD_1.

B

11.6. Егер түзу параллель екі жазықтықтың біреуіне перпендикуляр болса, онда ол түзу екінші жазықтыққа да перпендикуляр болатыны ақиқат па?

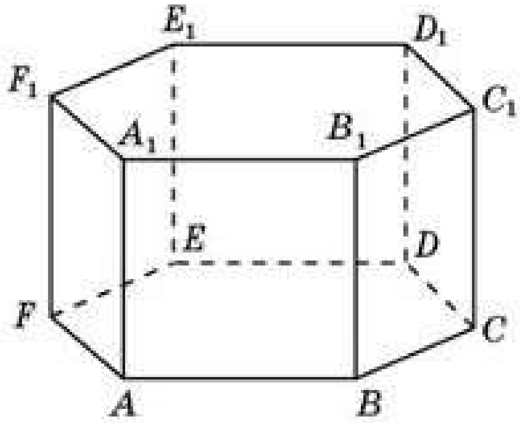
11.7. Екі түзу қалай орналасқан кезде біреуі арқылы екіншісіне перпендикуляр болатындай жазықтықты жүргізуге болады?

11.8. Егер үшбұрыштың бір қабырғасы арқылы екінші қабырғасына перпендикуляр жазықтық жүргізуге болса, онда үшбұрыштың түрін анықтаңдар.

11.9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында (11.7-сурет) келесі түзулердің перпендикулярлығын дәлелдеңдер : а) AA_1 және AC; ә) AA_1 және BD; б) AB және BC_1.

11.10. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призмада (11.8-сурет) келесі түзу мен жазықтық перпендикуляр болатынын дәлелдеңдер: а) AA_1 және ABC; ә) AB және BDD_1; б) AC және CDD_1; в) AC және BEE_1; г) AD және CEE_1; ғ) AB_1 және BDE_1.

11.11. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призмада (11.8-сурет) келесі түзулердің перпендикуляр болатынын дәлелдеңдер: а) AA_1 және AC; ә) AA_1 және AD; б) AA_1 және AE; в) AA_1 және BF; г) AB және BD_1; ғ) AB және EA_1; д) AC және DC_1.



11.8-сурет

C

11.12. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында AC және BD_1 түзулері перпендикуляр екенін дәлелдеңдер.

11.13. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында BD_1 түзуі ACB_1 жазықтығына перпендикуляр болатынын дәлелдеңдер.

11.14. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамидасында AC және SB түзулері перпендикуляр екенін дәлелдеңдер.

11.15. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призмада BE_1 түзуі ACB_1 жазықтығына перпендикуляр болатынын дәлелдеңдер.

11.16. Берілген жазықтықтағы кез келген нүкте арқылы осы жазықтыққа перпендикуляр бір ғана түзу жүргізуге болатынын дәлелдеңдер.

11.17. Қоршаған әлемнен өзара перпендикуляр түзу мен жазықтықты көрсететін нысандарға мысалдар келтіріңдер.

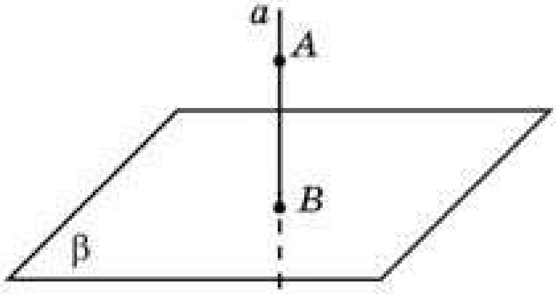
Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

11.18. Нүктеден жазықтыққа дейінгі қашықтық ұғымын анықтаңдар.

11.19. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубтың A_1 төбесінен ABC жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

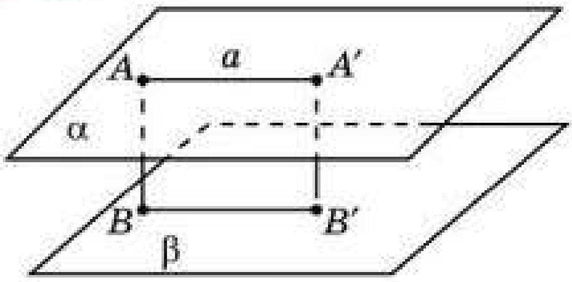
§ 12. Нүктеден жазықтыққа дейінгі қашықтық

β жазықтығында жатпайтын A нүктесі арқылы осы жазықтыққа перпендикуляр түзу жүргіземіз және оның жазықтықпен қиылысу нүктесін B деп белгілейік (12.1-сурет). AB кесіндісі A нүктесінен β жазықтығына түсірілген *перпендикуляр* деп аталады. Бұл кесіндінің ұзындығы *A нүктесінен β жазықтығына дейінгі қашықтық* деп аталады.



12.1-сурет

Егер перпендикулярдың B табаны 12.2-суреттегідей β жазықтығының аймағынан тыс жатса, онда A нүктесі



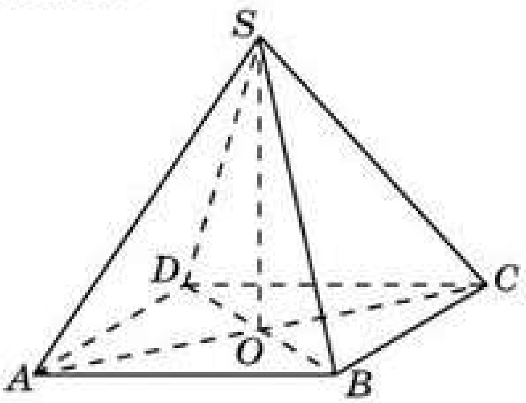
12.2-сурет

арқылы b жазықтығына параллель a түзуін немесе a жазықтығын жүргіземіз және оның бойынан перпендикулярдың B' табаны b жазықтығының аймағында жататындай A' нүктесін таңдап аламыз. $A'B'$ кесіндісінің ұзындығы ізделінді A нүктесінен b жазықтығына дейінгі қашықтыққа тең болады.

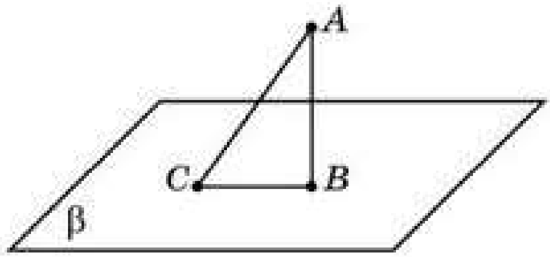
AB және $A'B'$ кесінділерінің теңдігін өздерің дәлелдеңдер.

Пирамид аның төбесінен оның табан жазықтығына түсірілген перпендикуляр *пирамиданың биіктігі* деп аталады.

12.3- суретте $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың SO биіктігі көрсетілген.



12.3-сурет

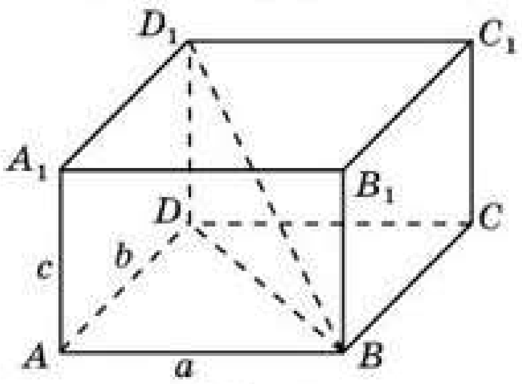


12.4-сурет

b жазықтығында жатпайтын A нүктесін осы жазықтықтағы C нүктесімен қосатын және перпендикуляр болмайтын AC кесіндісін A нүктесінен b жазықтығына жүргізілген *көлбеу* деп атайды (12.4 -сурет).

Берілген нүктеден жазықтыққа түсірілген перпендикуляр осы нүктеден сол жазықтыққа жүргізілген кез келген көлбеуден қысқа болатынын өздерің дәлелдеңдер.

Қашықтықтарды табуға мысалдар қарастырайық.



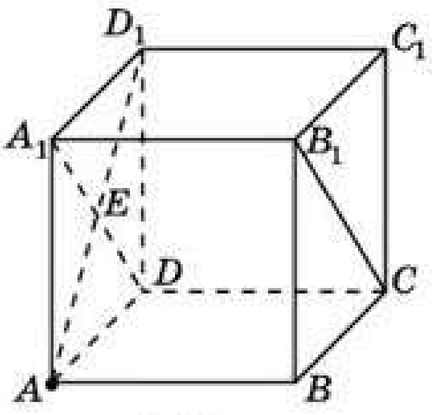
12.5-сурет

1-мысал. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тікбұрышты параллелепипедтің B және D_1 төбелерінің арақашықтығын (диагонал ін) табыңдар (12.5 -сурет), мұндағы $AB = a$, $AD = b$, $AA_1 = c$.

Шешуі . DD_1 түзуі DA мен DC түзулеріне перпендикуляр. Ендеше ол ABC жазықтығына перпендикуляр. Демек, ол түзу DB түзуіне де перпендикуляр болады.

BDD_1 тікбұрышты үшбұрышында $BD = \sqrt{a^2+b^2}$, $DD_1 = c$. Пифагор теоремасы бойынша гипотенузасын табамыз: $BD_1 = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

2-мысал. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының A төбесінен CDA_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар (12.6 -сурет).



12.6-сурет

Шешуі . AD_1 кесіндісін жүргіземіз. Оның DA_1 кесіндісімен қиылысу нүктесін E деп белгілей ік. AE түзуі DA_1 және DC түзулеріне перпендикуляр. Демек, ол CDA_1 жазықтығына да перпендикуляр болады. AE кесіндісі A нүктесінен CDA_1 жазықтығына түсірілген ізделінді перпендикуляр болады. Оның ұзындығы $\frac{\sqrt{2}}{2}$ -ге тең. Демек, бірлік кубтың A төбесінен CDA_1 жазықтығына дейінгі қашықтық $\frac{\sqrt{2}}{2}$ -ге тең болады.

Сұрақтар

1. Нүктеден жазықтыққа түсірілген перпендикуляр дегеніміз не?
2. Нүктеден жазықтыққа дейінгі қашықтық дегеніміз не?
3. Көлбеу дегеніміз не?

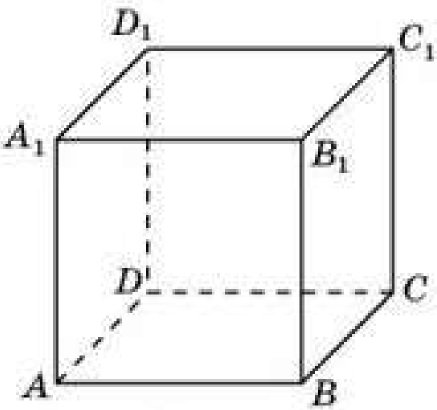
Есептер

А

12.1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тікбұрышты параллелепипедінде $AB = 5$, $AD = 4$, $AA_1 = 3$. AC_1 диагоналін табыңдар.

12.2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубындағы A төбесінен келесі жазықтықтарға дейінгі қашықтықты табыңдар: а) BCC_1; ә) BCD_1 (12.7- сурет).

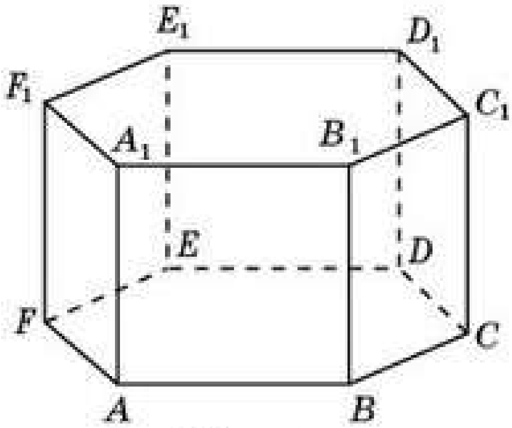
12.3. Барлық қырлары 1-ге тең $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың биіктігін табыңдар (12.3 -сурет).



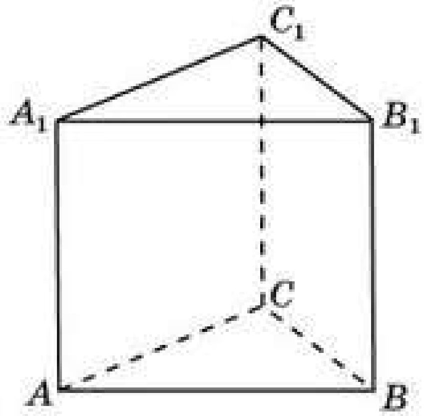
12.7-сурет

В

12.4. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең (12.8 -сурет). A төбесінен келесі жазықтықтарға дейінгі қашықтықты табыңдар : а) BDD_1; ә) BEE_1; б) BFF_1; в) BCC_1; г) CDD_1; ғ) CEE_1; д) CFF_1.



12.8-сурет



12.9-сурет

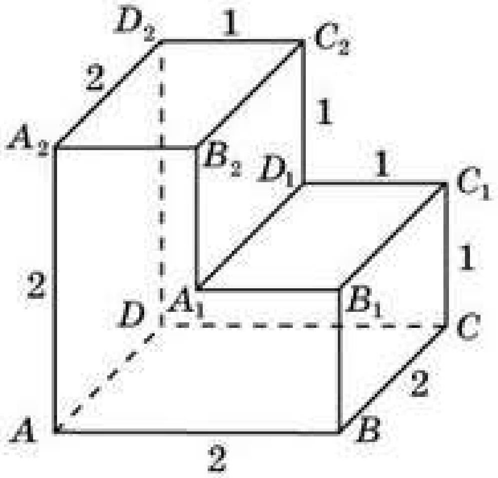
12.5. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең (12.8 -сурет). Келесі төбелердің арақашықтығын табыңдар: а) A және C_1; ә) A және D_1.

12.6. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең (12.8 -сурет). A төбесінен келесі түзулерге дейінгі қашықтықты табыңдар : а) BD_1; ә) CD_1.

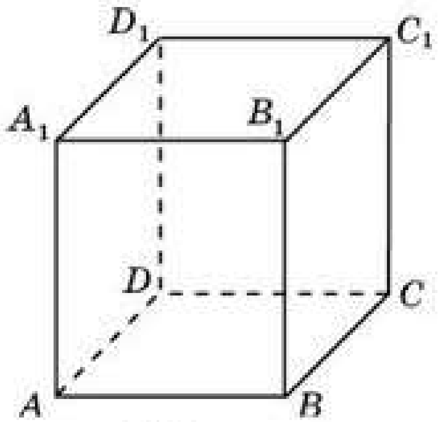
12.7. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың табанының қабырғалары 1-ге тең (12.9-сурет). Осы призманың A төбесінен BCC_1 жазықтығына дейінгі қашықтықт ы табыңдар .

12.8. Көпжақтың жақтары тік бұрыштары бар көпбұрыштар болады (12.10-сурет). Келесі төбелердің арақашықтығын табыңдар: а) A және C_1; ә) A және D_1; б) A және C_2; в) B және D_1; г) B және D_2.

12.9. Көпжақтың жақтары тік бұрыштары бар көпбұрыштар болады (12.10-сурет). A төбесінен келесі түзуге дейінгі қашықтықты табыңдар: а) B_1C_1; ә) A_1D_1; б) B_2C_2.



12.10-сурет

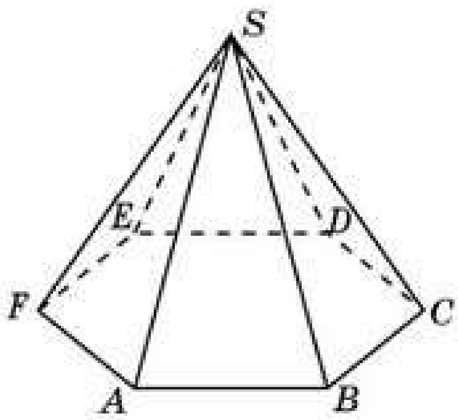


12.11-сурет

12.10. Тіктөртбұрышты призманың табаны ромб, оның қабырғасы 3-ке және сүйір бұрышы 60°-қа тең. Призманың бүйір қыры 4-ке тең. Призманың кіші диагоналін табы ңдар (12.11-сурет).

12.11. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамиданың биіктігін салыңдар (12.12-сурет).

12.12. Дұрыс алтыбұрышты пирамиданың табанының қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең. Оның биіктігін табыңдар (12.12-сурет).



12.12-сурет

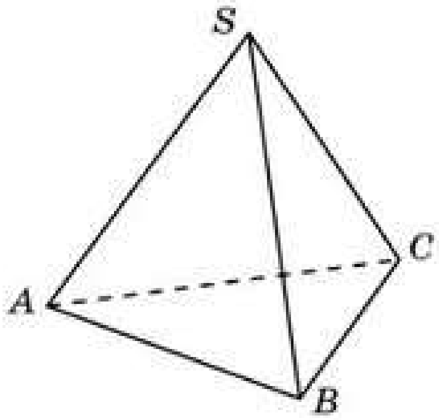
C

12.13. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең (12.8-сурет). A төбесінен келесі түзуге дейінгі қашықтықты табыңдар: а) BE_1; ә) CE_1.

12.14. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубындағы B төбесінен ACB_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар (12.7-сурет).

12.15. $SABC$ дұрыс үшбұрышты пирамиданың биіктігін салыңдар (12.13-сурет).

12.16. Дұрыс үшбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. Оның биіктігін табыңдар (12.13-сурет).



12.13-сурет

12.14-сурет

12.17. Нұр-Сұлтан қаласындағы Бейбітшілік пен келісім сарайы дұрыс төртбұрышты пирамида пішіндес болып табылады (12.14-сурет). Оның биіктігі табанының қабырғасына, яғни 62 м-ге тең. Осы пирамиданың бүйір қырының ұзындығын табыңдар.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

12.18. Параллель түзу мен жазықтықтың арақашықтығы ұғымын анықтаңдар.

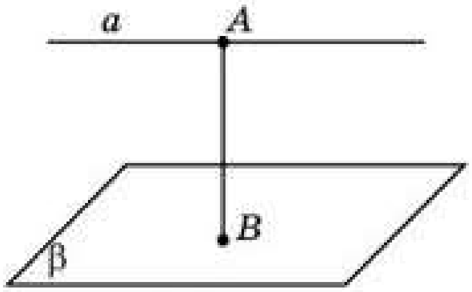
12.19. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубындағы A_1C_1 түзуі мен ABC жазықтығының арақашықтығын табыңдар.

12.20. *Параллель екі жазықтықтың арақашықтығы* ұғымын анықтаңдар.

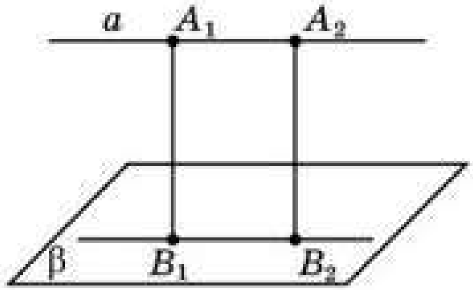
12.21. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубындағы $A_1B_1C_1$ және ABC жазықтықтарының арақашықтығын табыңдар.

§ 13. Параллель түзу мен жазықтықтың және параллель екі жазықтықтың арақашықтықтары

Түзу және оған параллель жазықтық берілсін. *Параллель түзу мен жазықтықтың арақашықтығы* деп түзудің қандай да бір нүктесінен жазықтыққа дейінгі қашықтықты айтады (13.1-сурет).



13.1-сурет

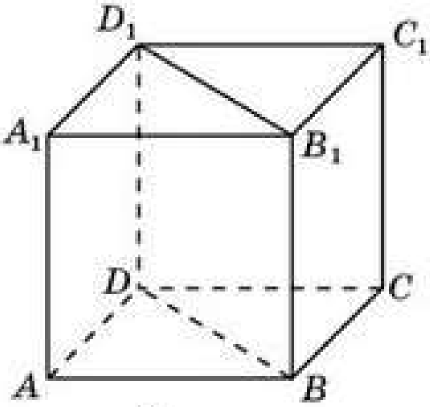


13.2-сурет

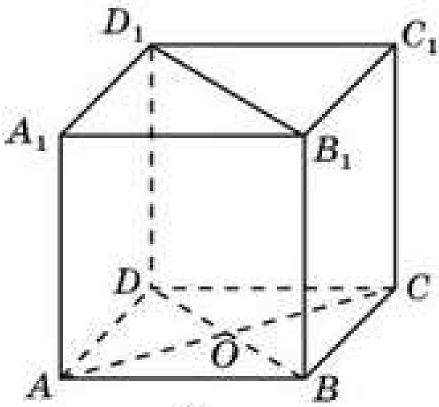
Теорема. ***Параллель түзу мен жазықтықтың арақашықтығы түзудің бойындағы нүктені таңдап алуға байланысты болмайды*** .

Дәлелдеуі . A_1, A_2 нүктелері — b жазықтығына параллель a түзуінде жатқан екі нүкте (13.2-сурет), B_1, B_2 нүктелері осы нүктелерден жазықтыққа түсірілген перпендикулярлардың табандары болсын. 11-параграфтағы 3-қасиет бойынша A_1B_1 және A_2B_2 перпендикулярлары параллель. B_1B_2 түзуі b жазықтығының осы перпендикулярлармен анықталған жазықпен қиылысу сызығы болады. Ендеше B_1B_2 түзуі a түзуіне параллель. Сонымен $A_1A_2B_2B_1$ төртбұрышы — параллелограмм (тіктөртбұрыш). Демек $A_1B_1 = A_2B_2$ болады.

1-мысал. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубындағы AA_1 түзуі мен BDD_1 жазықтығының арақашықтығын табыңдар (13.3, а-сурет).



а)

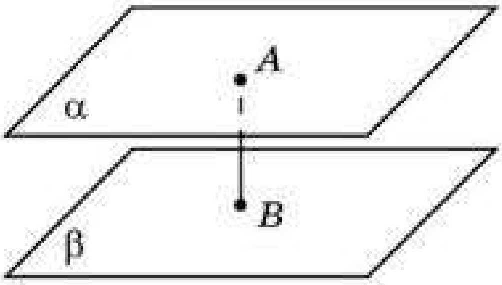


ә)

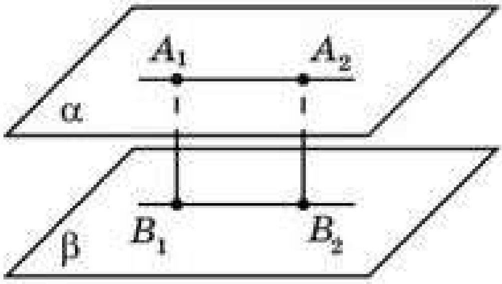
13.3-сурет

Шешуі. Кубтың $ABCD$ жағының AC диагоналі BDD_1 жазықтығына перпендикуляр. AC диагоналінің BDD_1 жазықтығымен қиылысу нүктесін O деп белгілейік (13.3, ә-сурет). AA_1 түзуі мен BDD_1 жазықтығының арақашықтығы AO кесіндісінің ұзындығына, яғни $\frac{\sqrt{2}}{2}$-ге тең болады.

Параллель екі жазықтықтың арақашықтығы деп олардың біреуінің қандай да бір нүктесінен екінші жазықтыққа дейінгі қашықтықты айтады (13.4-сурет).



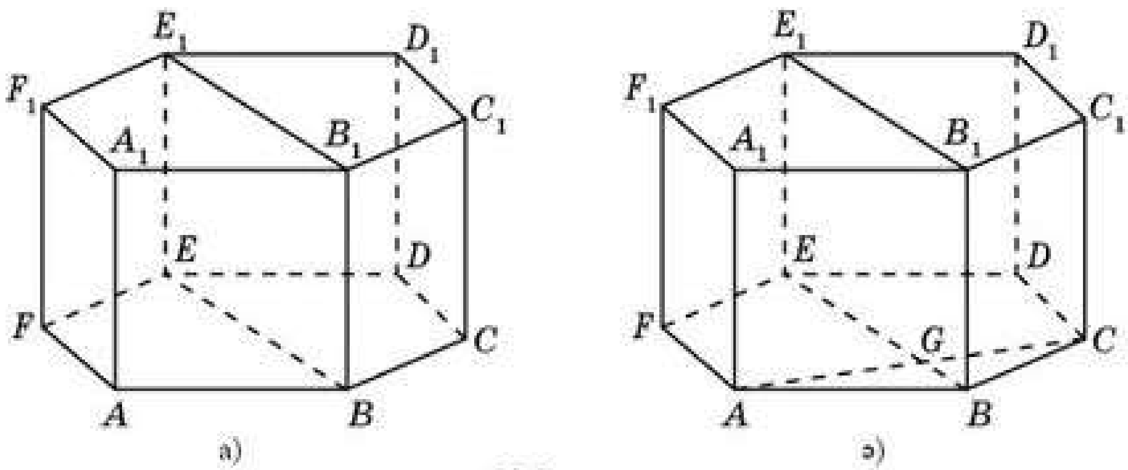
13.4-сурет



13.5-сурет

Параллель екі жазықтықтың арақашықтығы жазықтықтағы нүктені таңдап алуға байланысты болмайтынын өздерің дәлелдеңдер (13.5-сурет).

2-мысал. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. AFF_1 және BEE_1 жазықтықтарының арақашықтығын табыңдар (13.6, а-сурет).



13.6-сурет

Шешуі. Призманың $ABCDEF$ жағының AC диагоналі BEE_1 жазықтығына перпендикуляр. Осы диагональдің BEE_1 жазықтығымен қиылысу нүктесін G деп белгілейік (13.6, ә-сурет). AFF_1 және BEE_1 жазықтықтарының арақашықтығы AG кесіндісінің ұзындығына, яғни $\frac{\sqrt{3}}{2}$-ге тең болады.

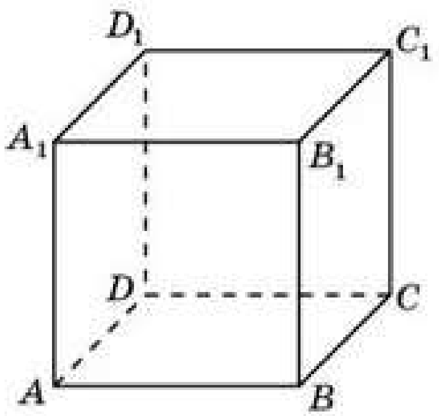
Сұрақтар

1. Параллель түзу мен жазықтықтың арақашықтығы дегеніміз не?
2. Параллель түзу мен жазықтықтың арақашықтығын қалай табуға болады?
3. Параллель екі жазықтықтың арақашықтығы дегеніміз не?

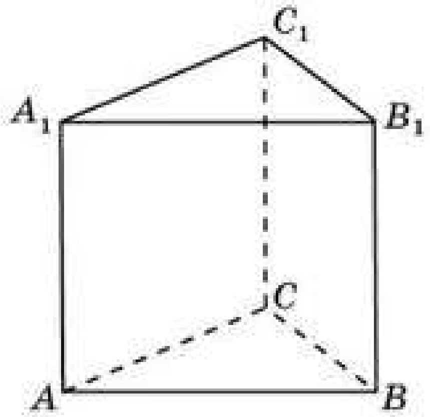
Есептер

А

13.1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубында : а) AA_1 түзуі мен BCC_1 жазықтығының арақашықтығын ; ә) AB_1 түзуі мен CDD_1 жазықтығының арақашықтығын табыңдар (13.7-сурет).



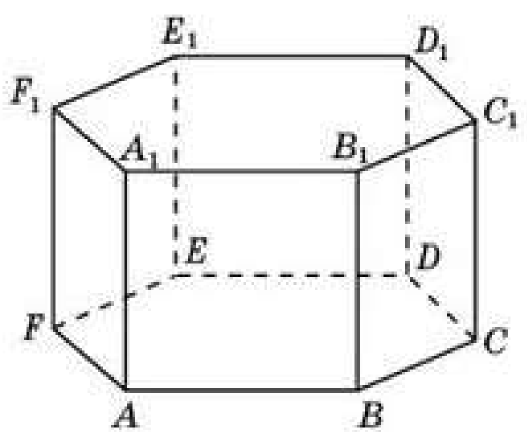
13.7-сурет



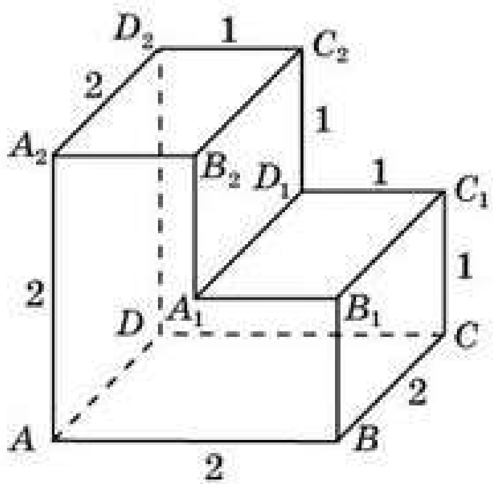
13.8-сурет

13.2. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең (13.8-сурет). AA_1 түзуі мен BCC_1 жазықтығының арақашықтығын табыңдар .

13.3. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең (13.9-сурет). AA_1 түзуі мен келесі жазықтықтың арақашықтығын табыңдар: а) BCC_1; ә) CDD_1; б) DEE_1; в) BDD_1; г) BEE_1; ғ) BFF_1; д) CEE_1; е) CFF_1.



13.9-сурет



13.10-сурет

13.4. Көпжақтың жақтары тік бұрышы бар көпбұрыштар болады (13.10-сурет). Келесі жазықтықтардың арақашықтығын табыңдар: а) ABB_1 және CDD_2; ә) ADD_2 және BCC_1; б) ADD_2 және $A_1D_1C_2$; в) ABC және $A_1B_1C_1$.

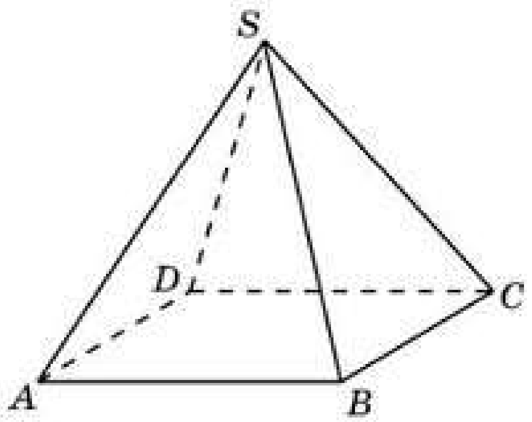
B

13.5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубындағы келесі : а) BB_1 түзуі мен ACC_1 жазықтығының арақашықтығын; ә) AB түзуі мен CDA_1 жазықтығының арақашықтығын табыңдар.

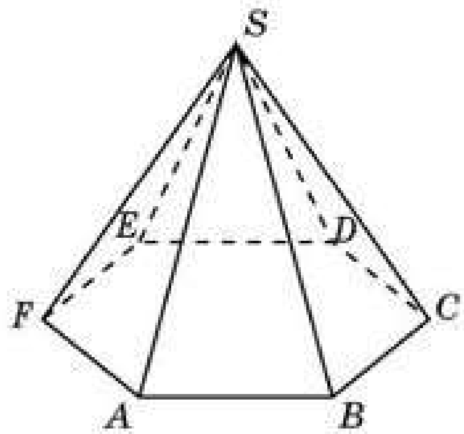
13.6. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. Келесі жазықтықтардың арақашықтығын табыңдар: а) ABB_1 және DEE_1; ә) ABB_1 және CFF_1; б) ACC_1 және FDD_1.

C

13.7. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең (13.11-сурет). BC түзуі мен SAD жазықтығының арақашықтығын табыңдар .



13.11-сурет



13.12-сурет

13.8. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамиданың табанының қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең (13.12-сурет). CD түзуі мен SAF жазықтығының арақашықтығын табыңдар .

13.9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубындағы ACB_1 және DC_1A_1 жазықтықтарының арақашықтығын табыңдар .

13.10. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубындағы O нүктесі — $ABCD$ жағындағы диагональдардың қиылысу нүктесі . OB_1 түзуі мен DA_1C_1 жазықтығының арақашықтығын табыңдар .

13.11. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. AB түзуі мен CA_1B_1 жазықтығының арақашықтығын табыңдар .

13.12. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең (13.9 -сурет). ACB_1 және ED_1F_1 жазықтықтарының арақашықтығын табыңдар .

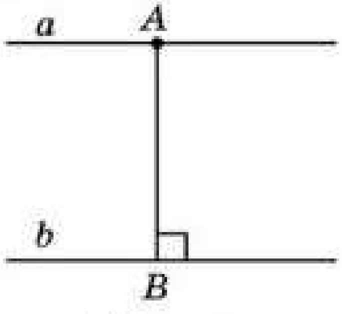
Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

13.13. Айқас екі түзудің арақашықтығы ұғымын анықтап көріңдер.

13.14. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубындағы AB және B_1C_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.

§ 14. Екі түзудің арақашықтығы

Планиметрия курсында *параллель екі түзудің арақашықтығы* деп олардың біреуінің қандай да бір нүктесінен екінші түзуге дейінгі қашықтықты айтатынын еске салайық.

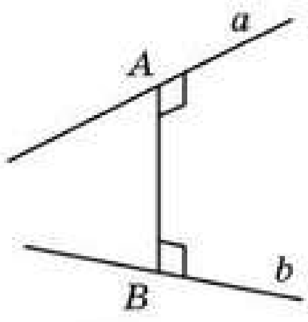


14.1-сурет

Параллель екі түзу бір жазықтықта жатқандықтан бұл анықтама кеңістік үшін де орынды болады.

Кеңістіктегі параллель екі түзудің арақашықтығы деп олардың біреуінің қандай да бір нүктесінен екінші түзуге дейінгі қашықтықты айтады (14.1-сурет).

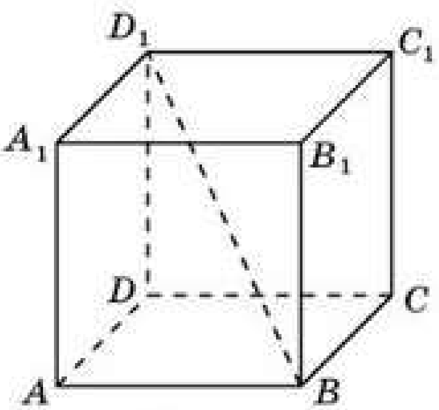
Енді кеңістіктегі айқас екі түзудің арақашықтығы ұғымын анықтайық.



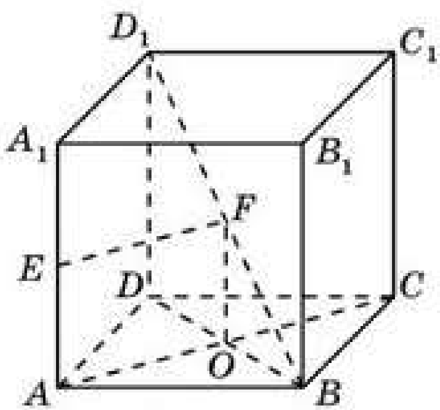
14.2-сурет

Айқас түзулердің ортақ перпендикуляры деп осы түзулердің қайсысына да перпендикуляр болатын, ұштары осы түзулерде жататын кесіндіні айтады. Ортақ перпендикулярдың ұзындығын *айқас түзулердің арақашықтығы* деп атайды (14.2-сурет).

1-мысал. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубындағы AA_1 мен BD_1 айқас түзулерінің арақашықтығын табыңдар (14.3-сурет).



14.3-сурет

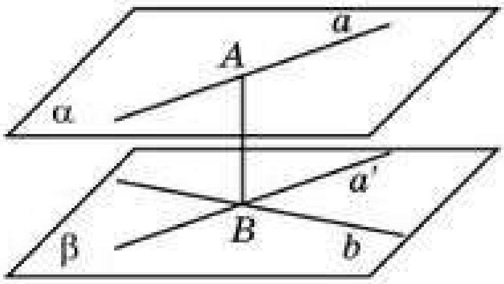


14.4-сурет

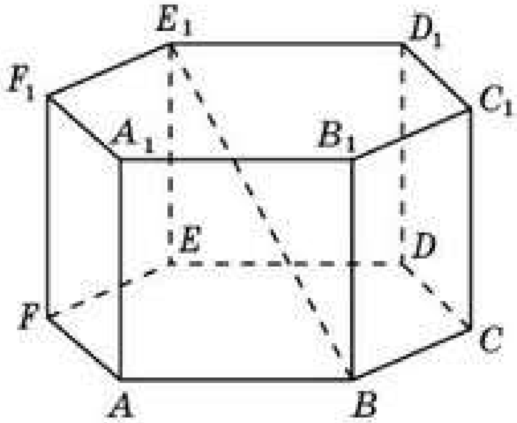
Шешуі. Берілген түзулер үшін ортақ перпендикуляр AA_1 және BD_1 кесінділерінің орталарын қосатын EF кесіндісі болады (14.4-сурет).

Расында да, EF кесіндісі AA_1 түзуіне және BDD_1 жазықтығына перпендикуляр болатын AC түзуіне параллель болады. Ендеше ол осы жазықтықта жатқан BD_1 түзуіне де перпендикуляр. EF ортақ перпендикуляры AO кесіндісіне тең, демек, $\frac{\sqrt{2}}{2}$-ге тең болады.

Параллель түзу мен жазықтықтың арақашықтығы ұғымын айқас екі түзудің арақашықтығын табуда қолдануға болады.



14.5-сурет



14.6-сурет

a және b — айқас екі түзу болсын. b түзуінің қандай да бір нүктесі арқылы a түзуіне параллель a' түзуін жүргіземіз. Осы түзу және b түзуі a түзуіне параллель болатын b жазықтығын анықтайды (14.5- сурет). Берілген айқас түзулерге AB ортақ перпендикуляры b жазықтығына перпендикуляр болады. Демек, оның ұзындығы a түзуі мен b жазықтығының арақашықтығына тең болады.

a және b айқас түзулерінің арақашықтығы осы түзулер жататын параллель a және b жазықтықтарының арақашықтығына тең болатынын дәлелдеңдер (14.5 -сурет).

2-мысал. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең (14.6 -сурет). AA_1 және BE_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.

Шешуі. AA_1 түзуі BEE_1 жазықтығына параллель. Ендеше, AA_1 және BE_1 түзулерінің арақашықтығы AA_1 түзуі мен BEE_1 жазықтығының арақашықтығына тең болады. Алдыңғы параграфта көрсетілгендей, бұл қашықтық $\frac{\sqrt{3}}{2}$-ге тең болады.

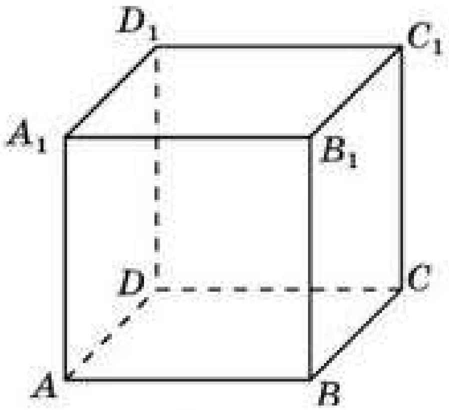
Сұрақтар

1. Параллель екі түзудің арақашықтығы дегеніміз не?
2. Айқас екі түзудің ортақ перпендикуляры дегеніміз не?
3. Айқас екі түзудің арақашықтығы дегеніміз не?

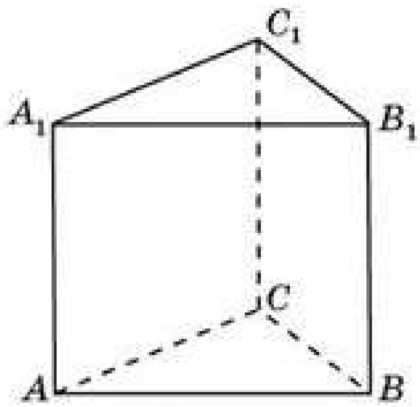
Есептер

А

14.1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубындағы келесі түзулердің арақашықтығын табыңдар: а) AA_1 және BB_1; ә) AA_1 және CC_1; б) AA_1 және BC; в) AA_1 және CD; г) AA_1 және BC_1; ғ) AA_1 және CD_1; д) AA_1 және BD; е) AB_1 және CD_1 (14.7 -сурет).



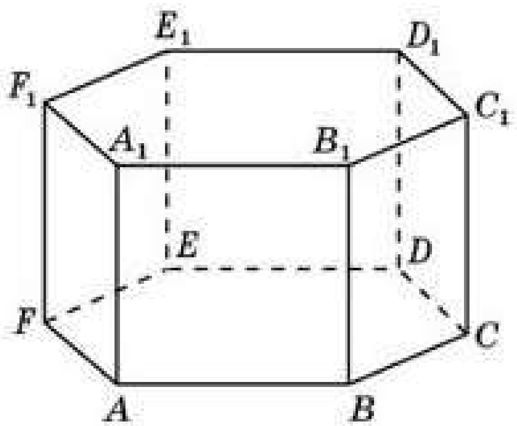
14.7-сурет



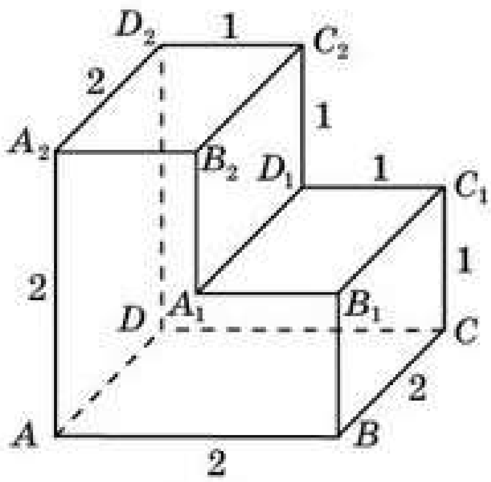
14.8-сурет

14.2. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең (14.8 -сурет). Келесі түзулердің арақашықтығын табыңдар: а) AA_1 және BC; ә) AB және A_1C_1.

14.3. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең (14.9 -сурет). Келесі түзулердің арақашықтығын табыңдар: а) AB және A_1B_1; ә) AB және B_1C_1; б) AA_1 және CC_1; в) AA_1 және DD_1.



14.9-сурет



14.10-сурет

14.4. Көпжақтың жақтары тік бұрышы бар көпбұрыштар болады (14.10 -сурет). Келесі түзулердің арақашықтығын табыңдар: а) AB және C_1D_1; ә) AB және C_2D_2; б) AA_2 және CC_1; в) AA_2 және D_1C_2.

B

14.5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубындағы AC_1 және BC түзулерінің арақашықтығын табыңдар (14.7 -сурет).

14.6. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең (14.8 -сурет). AA_1 және BC_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.

14.7. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең (14.9 -сурет). Келесі түзулердің арақашықтығын табыңдар: а) AA_1 және B_1C_1; ә) AA_1 және C_1D_1; б) AA_1 және CD_1; в) AA_1 және DE_1; г) AA_1 және BD_1.

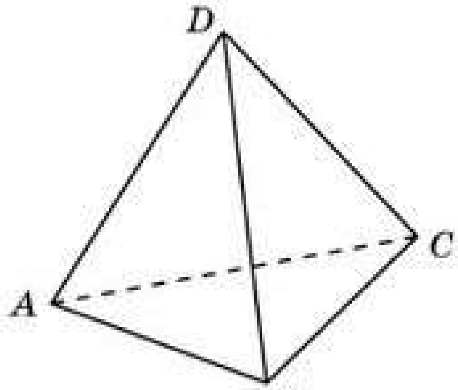
14.8. Көпжақтың жақтары тік бұрышы бар көпбұрыштар болады (14.10 -сурет). Келесі түзулердің арақашықтығын табыңдар: а) AA_2 және B_1C_1; ә) AA_2 және A_1D_1; б) AB_1 және CC_1; в) AB және D_1C_2; г) A_2B_2 және CC_1.

C

14.9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубындағы келесі түзулердің арақашықтығын табыңдар: а) AB_1 және BD_1; ә) AB_1 және DA_1 (14.7 -сурет).

14.10. $ABCD$ тетраэдрінің барлық қабырғалары 1-ге тең (14.11-сурет). AB және CD түзулерінің арақашықтығын табыңдар.

14.11. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең (14.9 -сурет). Келесі түзулердің арақашықтығын табыңдар: а) AA_1 және CE_1; ә) AA_1 және CF_1; б) AB_1 және DE_1; в) AB_1 және CF_1.



14.11-сурет

14.12. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамида табанының қабырғасы 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең. SA түзуі мен келесі түзудің арақашықтығын табыңдар: а) BC; ә) CD.

14.13. Кез келген айқас екі түзу үшін ортақ перпендикулярдың бар болатынын дәлелдеңдер.

14.14. Кез келген айқас екі түзу үшін ортақ перпендикулярдың жалғыз болатынын дәлелдеңдер.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

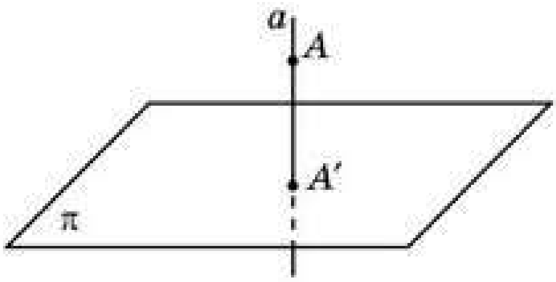
14.15. Жазықтықтағы түзуге жүргізілген көлбеу ұғымына ұқсас кеңістіктегі жазықтыққа жүргізілген көлбеу ұғымын анықтаңдар.

14.16. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында ABC жазықтығына жүргізілген қандай да бір көлбеулерді көрсетіңдер.

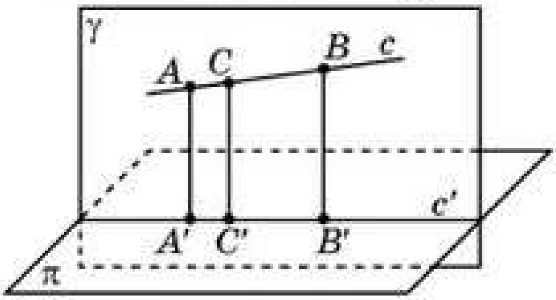
14.17. Бір нүктеден жазықтыққа жүргізілген перпендикуляр мен көлбеу өзара қалай байланысады?

§ 15. Ортогональ проекциялау

Қандай да бір ρ жазықтығы берілсін. Кеңістіктің кез келген A нүктесі арқылы осы жазықтыққа перпендикуляр a түзуін жүргіземіз. Осы түзудің берілген жазықтықпен қиылысуы A' нүктесі A нүктесінің жазықтықтағы *ортогональ проекциясы* деп аталады (15.1-сурет).



15.1-сурет



15.2-сурет

Кеңістіктің нүктелеріне олардың берілген жазықтықтағы ортогональ проекцияларын сәйкестендіруді осы *жазықтыққа ортогональ проекциялау* деп атайды. Жазықтықтың өзі *проекциялау жазықтығы* деп аталады.

Ортогональ проекциялаудың кейбір қасиеттерін қарастырайық.

1-қасиет. *Ортогональ проекциялау жазықтыққа перпендикуляр емес түзулерді түзулерге, ал перпендикуляр түзулерді нүктелерге көшіреді.*

Дәлелдеуі. c түзуі ρ проекциялау жазықтығына перпендикуляр емес болсын (15.2-сурет). c түзуіне тиісті қандай да бір A, B нүктелерін қарастырайық. Осы нүктелер арқылы ρ жазықтығына перпендикуляр түзулер жүргізейік. Олардың ρ жазықтығымен қиылысу нүктелерін сәйкесінше A', B' деп белгілейміз. Жүргізілген түзулер параллель болғандықтан, олар бір жазықтықта жатады. Бұл жазықтықты g деп белгілейік. c' — осы жазықтықтың ρ жазықтығымен қиылысу сызығы болсын. c' түзуі c түзуінің ортогональ проекциясы екенін дәлелдейік. Расында да, c түзуіне жататын кез келген C нүктесі үшін осы нүкте арқылы өтетін және ρ жазықтығына перпендикуляр түзу g жазықтығында жатады. Демек, оның ρ жазықтығымен қиылысу нүктесі c' түзуіне тиісті болады. Осыдан C нүктесінің ортогональ проекциясы c' түзуінде жатады. Керісінше, егер C' нүктесі c' түзуіне тиісті болса, онда осы нүкте арқылы өтетін және ρ жазықтығына перпендикуляр түзу g жазықтығында жататын болады. Демек, ол c түзуін қандай да бір C нүктесінде қиып өтеді. Оның ортогональ проекциясы C' нүктесі болады. Егер түзу ρ жазықтығына перпендикуляр болса (15.1-сурет), онда оның ортогональ проекциясы нүкте болатыны анық. ◻

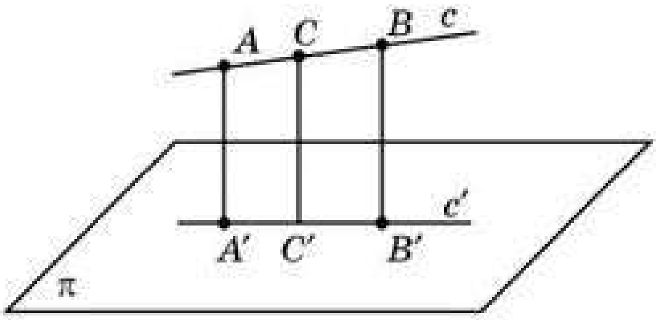
Ортогональ проекциялау жазықтыққа перпендикуляр емес кесінділерді кесінділерге көшіретінін өздерің дәлелдеңдер.

Қалай ойлайсыңдар, ортогональ проекциялау кесінділердің ұзындықтарын сақтайды ма?

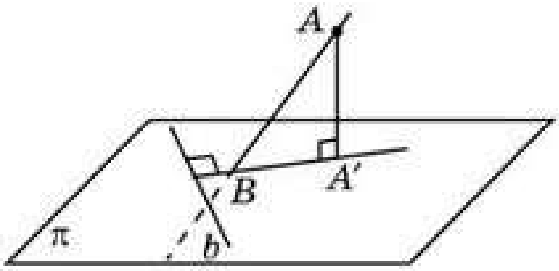
2-қасиет. *Ортогональ проекциялау жазықтыққа перпендикуляр емес түзуде жататын кесінділердің қатынасын сақтайды. Дербес жағдайда, кесіндінің ортасы осы кесіндінің проекциясының ортасына проекцияланады.*

Дәлелдеуі. A, B, C нүктелері π жазықтығына перпендикуляр емес c түзуіне тиісті болсын. A', B', C' олардың сәйкесінше c түзуінің жазықтығындағы c' ортогональ проекциясында жататын ортогональ проекциялары болсын (15.3-сурет). AA', BB', CC' түзулері параллель болғандықтан, пропорционал кесінділер туралы теорема бойынша келесі қатынастар теңдігі орындалады:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{A'C'}{C'B'}.$$



15.3-сурет



15.4-сурет

Жазықтыққа перпендикуляр емес түзуді *көлбеу* деп атаймыз. Сонымен қатар *көлбеу* деп жазықтықтан тыс жатқан нүктені осы жазықтықтағы нүктемен қосатын және жазықтыққа перпендикуляр емес кесіндіні айтады.

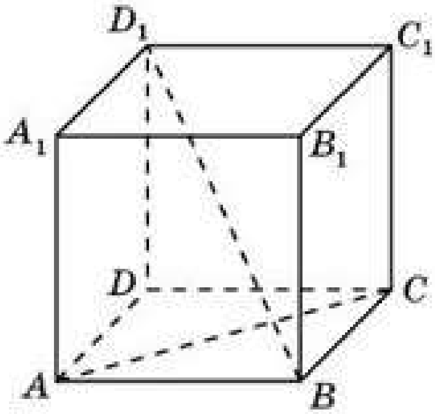
Теорема (үш перпендикуляр туралы). ***Егер жазықтықта жатқан түзу осы жазықтыққа жүргізілген көлбеудің ортогональ проекциясына перпендикуляр болса, онда ол көлбеудің өзіне де перпендикуляр болады.***

Дәлелдеуі. AA' — ρ жазықтығына перпендикуляр, AB — көлбеу, $A'B$ көлбеудің ортогональ проекциясы болсын (15.4-сурет).

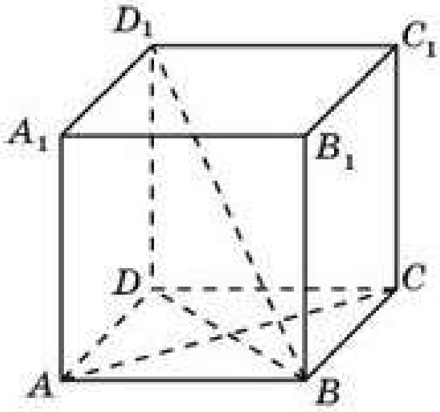
AA' түзуі ρ жазықтығына перпендикуляр болғандықтан, ρ жазықтығында жататын кез келген b түзуі AA' түзуіне перпендикуляр болады.

Егер сонымен қатар b түзуі $A'B$ түзуіне перпендикуляр болса, онда ол түзу мен жазықтықтың перпендикулярлық белгісі бойынша $AA'B$ жазықтығына перпендикуляр болады. Демек, ол осы жазықтықта жатқан кез келген түзуге, яғни AB көлбеуіне де перпендикуляр болады.

Мысал. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында AC және BD_1 түзулері перпендикуляр болатынын дәлелдеңдер (15.5 -сурет).



15.5-сурет



15.6-сурет

Шешуі . BD_1 түзуінің ABC жазықтығындағы ортогональ проекциясы BD түзуі болады (15.6 -сурет). AC түзуі BD түзуіне перпендикуляр , демек, ол BD_1 түзуіне де перпендикуляр болады .

Сұрақтар

1. Нүктенің жазықтықтағы ортогональ проекциясы дегеніміз не?
2. Жазықтыққа ортогональ проекциялау дегеніміз не?
3. Ортогональ проекциялаудың қасиеттерін тұжырымдаңдар .
4. Көлбеу дегеніміз не?
5. Үш перпендикуляр туралы теореманы тұжырымдаңдар .

Есептер

A

15.1. A нүктесінен берілген жазықтыққа AA' перпендикуляры және AB көлбеуі жүргізілген. Егер $AB = 37$ см, $AA' = 35$ см болса, онда AB кесіндісінің ортогональ проекциясын табыңдар.

15.2. A нүктесінен берілген жазықтыққа AA' перпендикуляры және AB көлбеуі жүргізілген. Егер $AA' = 6$ см, $\angle A'AB = 60°$ болса, онда AB кесіндісін табыңдар.

15.3. A нүктесінен берілген жазықтыққа AA' перпендикуляры және AB көлбеуі жүргізілген. Егер $AB = 2\sqrt{10}$ см, $A'B = 3AA'$ болса, онда AA' кесіндісін табыңдар.

15.4. Ұзындығы 13 м болатын сатының жоғарғы ұшы жерден 12 м биіктікте орналасуы үшін оның төменгі ұшын үй қабырғасынан қандай қашықтықта орналастыру керек?

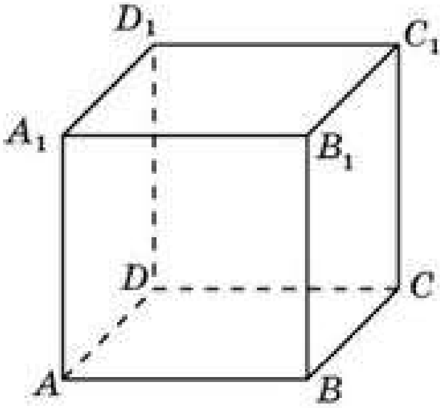
15.5. Сатының төменгі ұшы үйден 6 м қашықтықта болып, жоғарғы ұшы жерден 8 м биіктіктегі үй терезесіне жетуі үшін сатының ұзындығы қандай болуы керек?

B

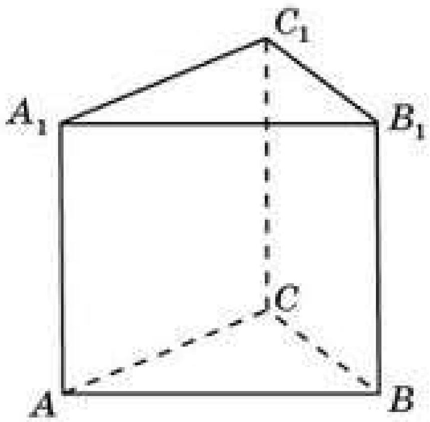
15.6. Бір нүктеден жазықтыққа жүргізілген екі көлбеудің кесінділерінің ұзындықтары 15 см және 20 см. Осы кесінділердің біреуінің ортогональ проекциясы 16 см. Екінші кесіндінің ортогональ проекциясын табыңдар.

15.7. A, B, C нүктелері бір түзудің бойында орналасқан және A', B', C' — осы нүктелердің сәйкесінше ортогональ проекциялары, $AB = 5$, $BC = 10$, $A'C' = 12$. $A'B'$ және $B'C'$ кесінділерінің ұзындықтарын табыңдар.

15.8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының (15.7 -сурет) ACC_1 жазықтығына келесі кесінділердің ортогональ проекцияларын салыңдар: а) BB_1; ә) BC_1; б) BD_1.



15.7-сурет



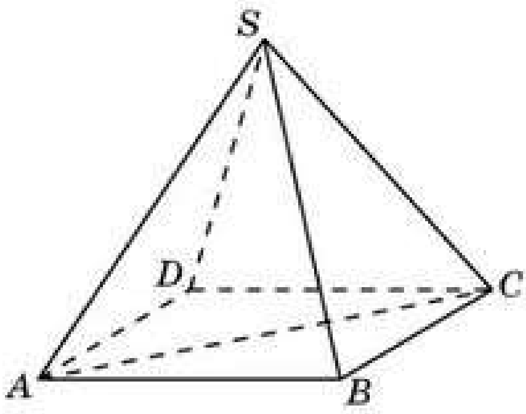
15.8-сурет

15.9. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призмасының (15.8 -сурет) ACC_1 жазықтығына келесі кесінділердің ортогональ проекцияларын салыңдар : а) BB_1; ә) BC; б) BC_1.

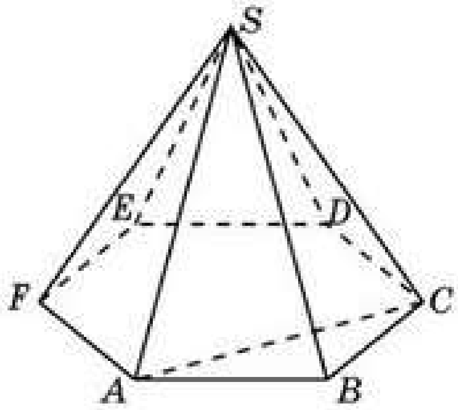
15.10. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамидасының табанының AC диагоналі онымен айқас SB қырына перпендикуляр екенін дәлелдеңдер (15.9 -сурет).

15.11. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында келесі түзулер перпендикуляр екенін дәлелдеңдер (15.7 -сурет): а) AB_1 және BD_1; ә) AC_1 және BD; б) AD_1 және CA_1.

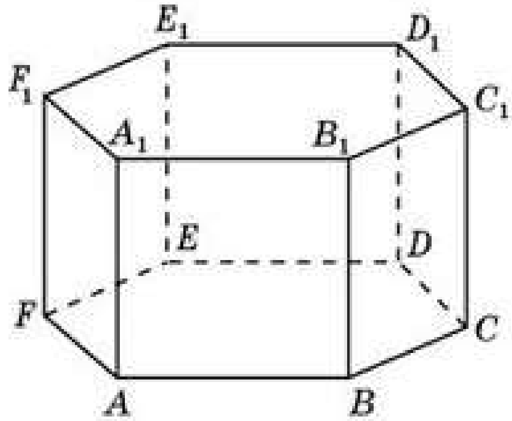
15.12. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамидасының табанының AC диагоналі онымен айқас SB қырына перпендикуляр екенін дәлелдеңдер (15.10 -сурет).



15.9-сурет



15.10-сурет



15.11-сурет

15.13. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призмасында келесі түзулер перпендикуляр екенін дәлелдеңдер (15.11-сурет) : а) AC_1 және BE ; ә) AD_1 және CE; б) AB_1 және BE_1.

C

15.14. Бір нүктеден берілген жазықтыққа жүргізілген тең көлбеулердің осы жазықтықтағы ортогональ проекциялары тең болатынын дәлелдеңдер.

15.15. Егер бір нүктеден берілген жазықтыққа жүргізілген көлбеулердің ортогональ проекциялары тең болса, онда ол көлбеулердің өздері де тең болатынын дәлелдеңдер.

15.16. Егер пирамиданың бүйір қырлары тең болса, онда оның биіктігі осы пирамиданың табанына сырттай сызылған шеңбердің центрі арқылы өтетінін дәлелдеңдер.

15.17. Дұрыс пирамиданың бүйір қыры b-ға, ал табанына сырттай сызылған шеңбердің радиусы r-ға тең. Пирамиданың биіктігін табыңдар .

15.18. Берілген екі нүктеден бірдей қашықтықта жатқан нүктелердің геометриялық орнын табыңдар .

15.19. Үш перпендикуляр туралы кері теореманы дәлелдеңдер : "Егер жазықтықта жатқан түзу осы жазықтыққа жүргізілген көлбеуге перпендикуляр болса, онда ол осы көлбеудің берілген жазықтықтағы ортогональ проекциясына перпендикуляр болады".

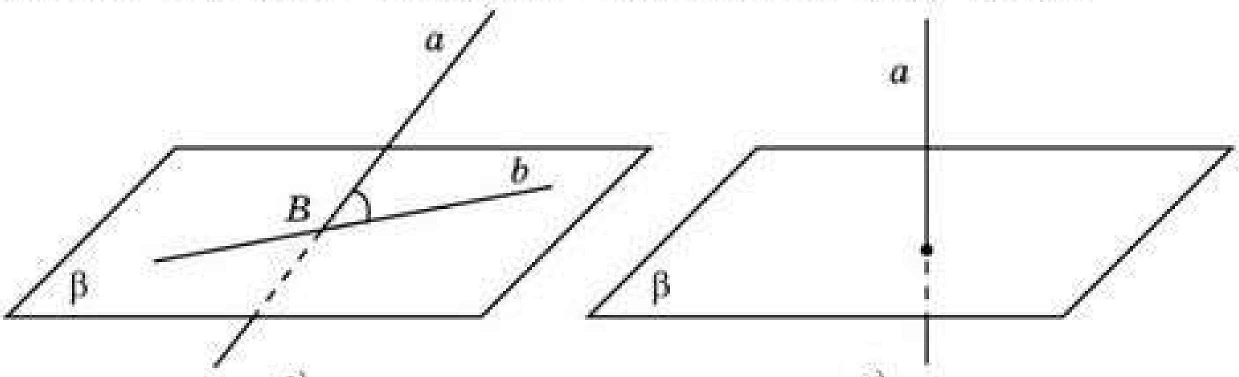
Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

15.20. Көлбеу мен жазықтықтың арасындағы бұрыш ұғымын анықтап көріңдер .

15.21. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының AD_1 көлбеуі мен ABC жазықтығы арасындағы бұрышты табыңдар .

§ 16. Түзу мен жазықтықтың арасындағы бұрыш

Ортогональ проекциялау түзулерді проекциялау жазықтығына перпендикуляр емес түзулерге (көлбеулер), ал жазықтыққа перпендикуляр түзулерді нүктелерге көшіретінін еске салайық (16.1 -сурет).



16.1-сурет

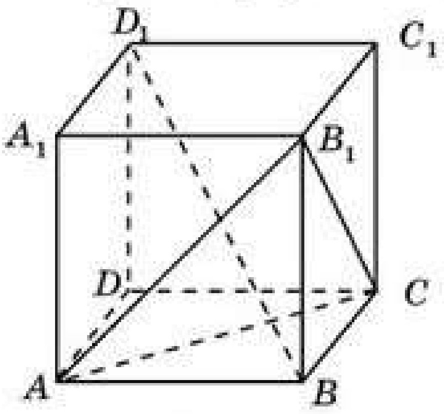
Көлбеу мен жазықтықтың арасындағы бұрыш деп осы көлбеу мен оның жазықтықтағы ортогональ проекциясы арасындағы бұрышты айтады (16.1, а-сурет).

Жазықтық пен оған перпендикуляр түзу арасындағы бұрыш 90°-қа тең болады (16.1, ә-сурет).

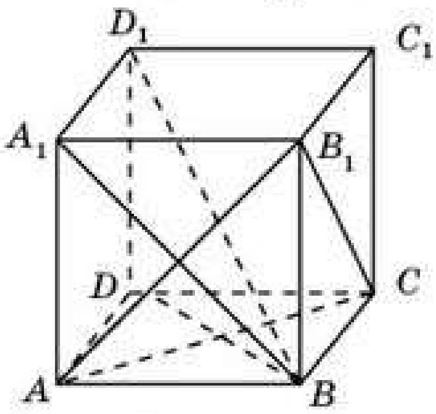
Кесінді мен жазықтықтың арасындағы бұрыш деп осы кесінді жататын түзу мен жазықтықтың арасындағы бұрышты айтады.

Мысал. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында BD_1 түзуінің ACB_1 жазықтығына перпендикуляр болатынын дәлелдеңдер (16.2 -сурет).

Шешуі . BD_1 түзуінің ABC жазықтығындағы ортогональ проекциясы BB_1 түзуіне перпендикуляр BD түзуі болады (16.3 -сурет).



16.2-сурет

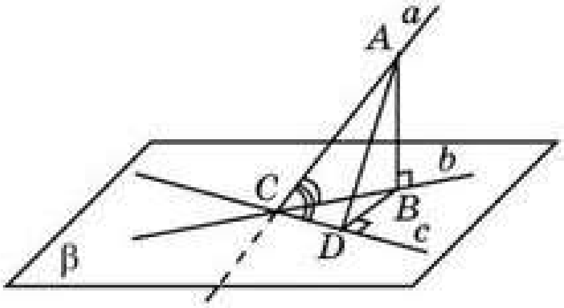


16.3-сурет

BD_1 түзуі ACB_1 жазықтығындағы қиылысқан AC және AB_1 түзулеріне перпендикуляр болады. Демек, BD_1 түзуі ACB_1 жазықтығына перпендикуляр болады.

Теорема . ***Көлбеу мен жазықтықтың арасындағы бұрыш осы көлбеу мен жазықтықта жатқан түзулердің арасындағы бұрыштардың ішіндегі ең кішісі болады*** .

Дәлелдеу і. a түзуі — β жазықтығына көлбеу, b — оның осы жазықтықтағы ортогональ проекциясы, c түзуі — β жазықтығында жататын және a мен b түзулерінің қиылысу C нүктесі арқылы өтетін түзу болсын (16.4-сурет).



16.4-сурет

a мен b түзулерінің арасындағы бұрыш a мен c түзулерінің арасындағы бұрыштан кіші екенін дәлелдейміз.

Егер c түзуі b түзуіне перпендикуляр болса, онда a мен c түзулері де өзара перпендикуляр болады. Демек, a мен b түзулерінің арасындағы бұрыш a мен c түзулерінің арасындағы бұрыштан кіші болады.

c түзуі b түзуіне перпендикуляр емес жағдайда, a түзуінің бойынан C нүктесінен басқа қандай да бір A нүктесін аламыз. Оның b жазықтығындағы ортогональ проекциясын B деп белгілейміз. B нүктесінен c түзуіне BD перпендикулярын түсіреміз. AB перпендикуляр AD көлбеуінен қысқа болғандықтан, ACB бұрышының синусы ACD бұрышының синусынан кіші болады. Осыдан, ACB бұрышы ACD бұрышынан кіші. Демек, a мен b түзулерінің арасындағы бұрыш a мен c түзулерінің арасындағы бұрыштан кіші болады. ☐

Жазықтыққа жүргізілген көлбеу мен осы жазықтықта жатқан түзулердің арасындағы қандай бұрыш ең үлкен бұрыш болады?

Сұрақтар

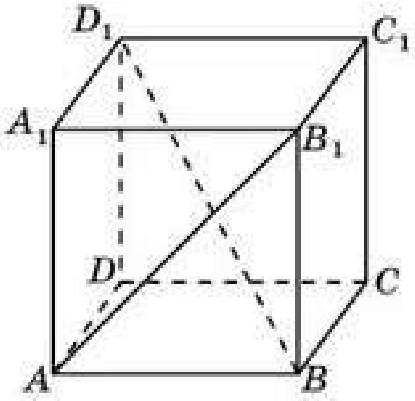
1. Көлбеу мен жазықтықтың арасындағы бұрыш дегеніміз не?
2. Жазықтық пен оған перпендикуляр түзу арасындағы бұрыш неге тең?
3. Кесінді мен жазықтықтың арасындағы бұрыш дегеніміз не?

Есептер

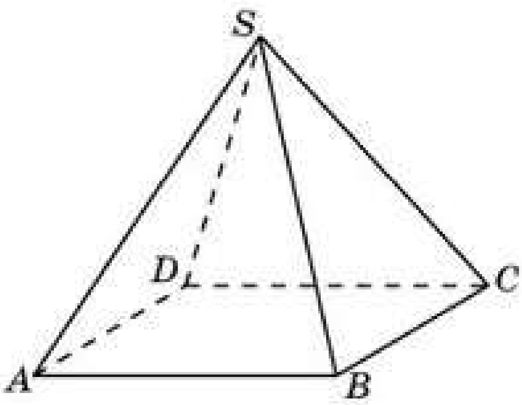
A

16.1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубындағы AB_1 түзуі мен келесі жазықтықтың арасындағы бұрышты табыңдар (16.5-сурет): а) ABC; ә) BCC_1; б) BCD_1.

16.2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубындағы BD_1 түзуі мен ABC жазықтығының арасындағы бұрыштың тангенсін табыңдар (16.5-сурет).



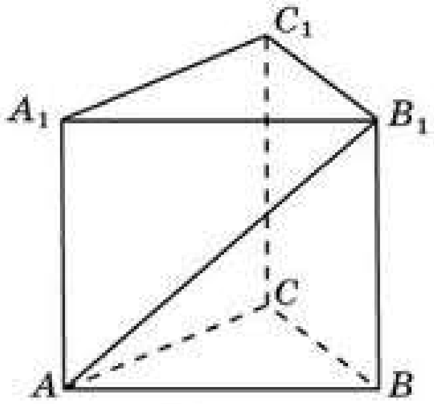
16.5-сурет



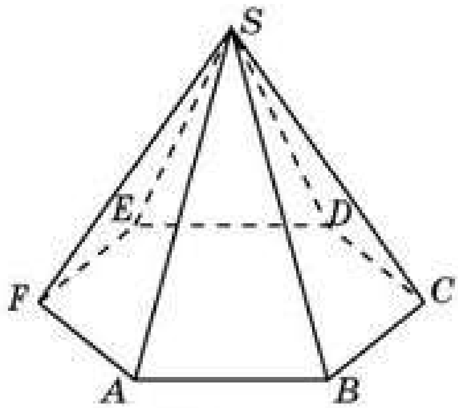
16.6-сурет

16.3. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең (16.6 -сурет). SA түзуі мен ABC жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар .

16.4. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең (16.7 -сурет). а) AB_1 түзуі мен ABC жазықтығының ; ә) AB түзуі мен BCC_1 жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар .



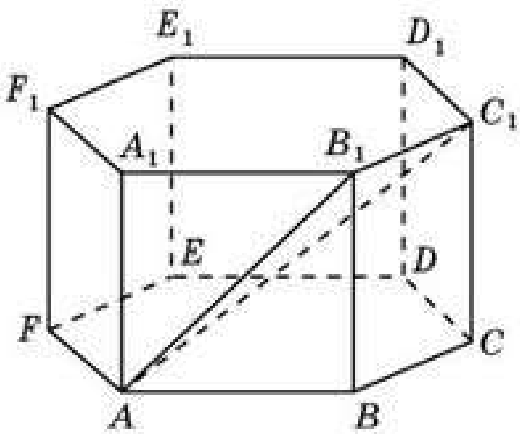
16.7-сурет



16.8-сурет

16.5. $SABCDEF$ дұры с алтыбұрышты пирамиданың табанының қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең (16.8 -сурет). SA түзуі мен ABC жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар .

16.6. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең (16.9 -сурет). а) AB_1 түзуі мен ABC жазықтығының ; ә) AC_1 түзуі мен ABC жазықтығының ; б) AA_1 түзуі мен ACD_1 жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар .



16.9-сурет

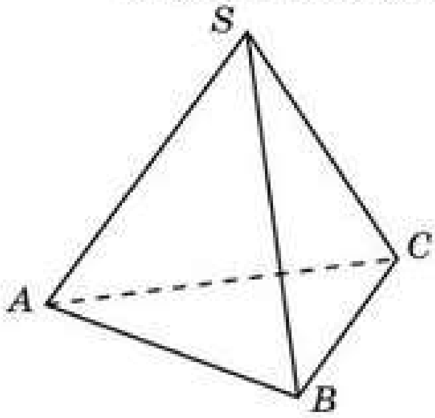
16.7. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең

(16.6 -сурет). AB түзуі мен SBC жазықтығының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар .

B

16.8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубындағы CC_1 түзуі мен AB_1D_1 жазықтығының арасындағы бұрыштың тангенсін табыңдар .

16.9. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең . AB_1 түзуі мен BCC_1 жазықтығының арасындағы бұрыштың синусын табыңдар .



16.10-сурет

16.10. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең . AB_1 түзуі мен келесі жазықтықтың арасындағы бұрыштың синусын табыңдар : а) BCC_1; ә) CDD_1.

16.11. $SABC$ дұрыс үшбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең (16.10 -сурет). SA түзуі мен ABC жазықтығының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар .

C

16.12. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубындағы AB_1 түзуі мен BC_1D_1 жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар .

16.13. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамиданың табанының қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең. AB түзуі мен SBC жазықтығының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар .

16.14. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. D нүктесі — CC_1 қырының ортасы. AD және A_1B түзулерінің перпендикуляр екенін дәлелдеңдер.

16.15. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең . AD_1 түзуі BFA_1 жазықтығына перпендикуляр екенін дәлелдеңдер .

16.16. Нұр-Сұлтан қаласындағы Бейбітшілік пен келісім сарайы дұрыс төртбұрышты пирамида пішіндес болып табылады (§12, 12.14-суретті қара). Оның биіктігі табанының қабырғасына тең. Осы пирамиданың бүйір қыры мен табан жазықтығы арасындағы бұрыштың тангенсін табыңдар.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

16.17. Қиылысқан екі жазықтықтың арасындағы бұрыш ұғымын анықтап көріңдер .

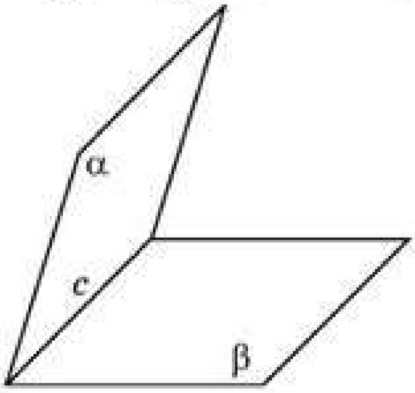
16.18. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубындағы ABC_1 және ABC жазықтықтарының арасындағы бұрышты табыңдар .

§ 17. Екіжақты бұрыш. Екі жазықтықтың арасындағы бұрыш

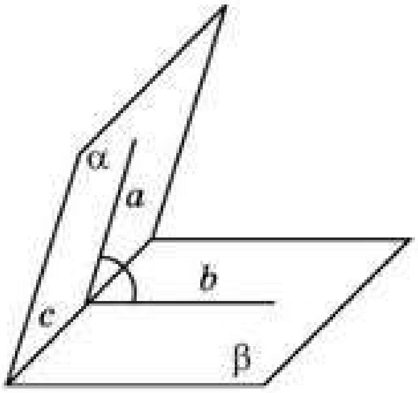
Жазықтықтағы бұрыштың кеңістіктік аналогі болатын екіжақты бұрыш ұғымын анықтайық.

Екіжақты бұрыш деп ортақ бір түзумен шектелген екі жартыжазықтықтан және кеңістіктің осы жартыжазықтықтармен шектелген бөлігінен тұратын фигураны айтады (17.1 -сурет).

Жартыжазықтықтарды екіжақты бұрыштың *жақтары*, ал оларды шектейтін түзуді *қыры* деп атайды.



17.1-сурет



17.2-сурет

a және b — ортақ түзумен шектелген жартыжазықтықтар (17.2 -сурет). c түзуіне перпендикуляр g жазықтығын қарастырайық және оның a және b жартыжазықтықтарымен қиылысу сызықтарын сәйкесінше a мен b деп белгілейміз. Осы сәулелердің арасындағы бұрыш *екіжақты бұрыштың сызықтық бұрышы* деп аталады.

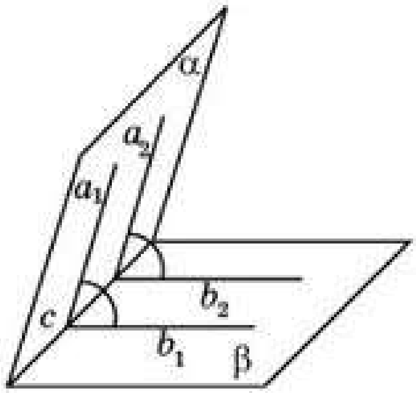
Сызықтық бұрыштың шамасы g жазықтығын таңдаудан тәуелсіз болатынын дәлелделік.

Шындығында, айталық, g_1, g_2 жазықтықтары c түзуіне перпендикуляр және олар a мен b жартыжазықтықтарын сәйкесінше a_1, a_2 және b_1, b_2 сәулелері бойымен қиып өтсін (17.3 -сурет). c түзуіне перпендикуляр болғандықтан, a_1 мен a_2 және b_1 мен b_2 сәулелері бағыттас. Сондықтан олардан жасалған бұрыштар тең. □

Екіжақты бұрыштың шамасы деп оның сызықтық бұрышының шамасын айтады (17.2-сурет).

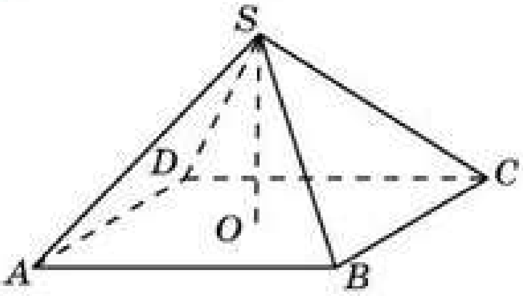
Екіжақты бұрыштың шамасы (0°; 180°] аралығында жатады.

Екіжақты бұрыш оның сызықтық бұрышының түріне (сүйір, тік немесе доғал) сәйкес *сүйір, тік, доғал* деп аталады.

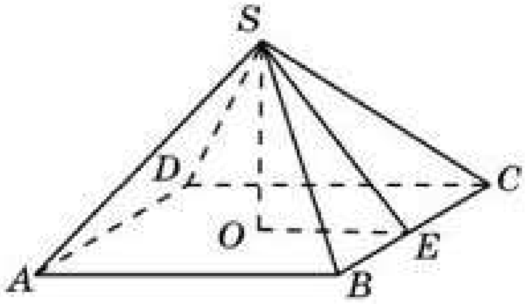


17.3-сурет

1-мысал. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамида табанының қабырғалары 2-ге, SO биіктігі 1-ге тең (17.4 -сурет). Пирамиданың бүйір жағы мен табанының арасындағы екіжақты бұрышты табыңдар.



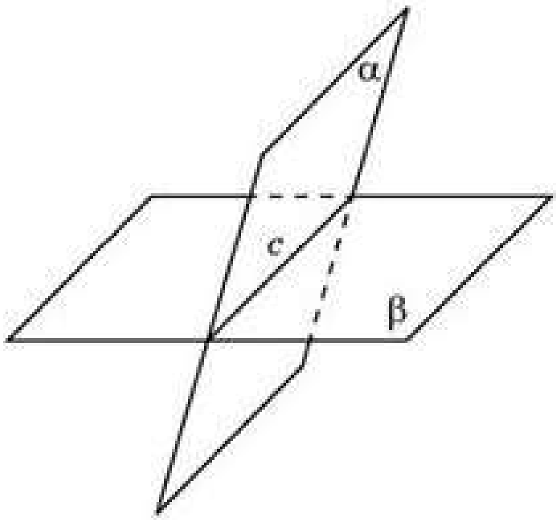
17.4-сурет



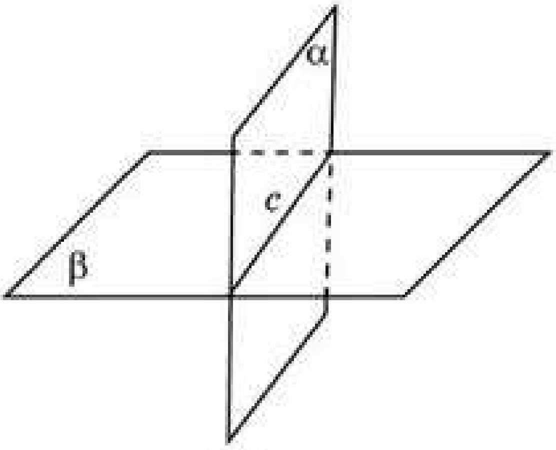
17.5-сурет

Шешуі . *SBC* үшбұрышының *SE* биіктігін жүргіземіз (17.5 -сурет). *SEO* бұрышы ізделінді екіжақты бұрыштың сызықты бұрышы болады. *SEO* тікбұрышты үшбұрышында *SO* және *EO* катеттері 1-ге тең . Осыдан *SEO* бұрышы 45°. Демек, ізделінді екіжақты бұрыш 45°-қа тең болады.

Қиылысқан екі жазықтықтың арасындағы бұрыш деп сәйкес екі жартыжазықтықтармен жасалған екіжақты бұрыштардың ең кішісінің шамасын айтады (17.6 -сурет).



17.6-сурет



17.7-сурет

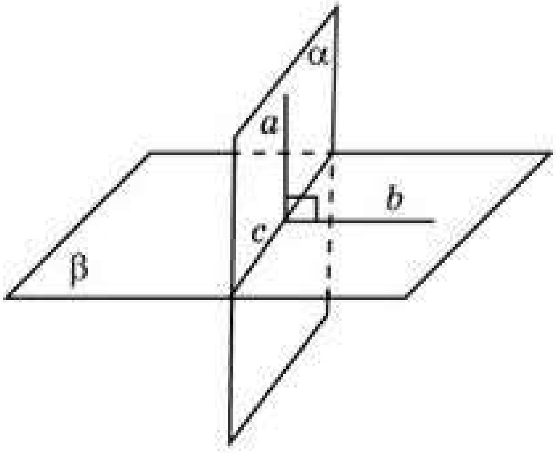
Қиылысқан екі жазықтықтың арасындағы екіжақты бұрыштардың біреуі 60°. Қалған үш екіжақты бұрыштарды табыңдар.

Екі жазықтық тік екіжақты бұрыш жасаса, онда оларды *перпендикуляр* деп атайды (17.7 -сурет).

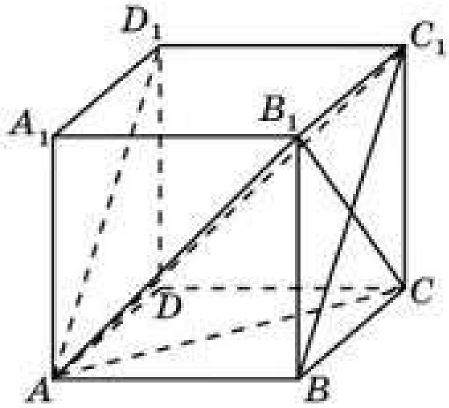
Келесі теорема екі жазықтықтың перпендикулярлығының жеткілікті шартын береді.

Теорема (екі жазықтықтың перпендикулярлығының белгісі). ***Егер екі жазықтықтың бірі екіншісіне перпендикуляр түзу арқылы өтетін болса, онда мұндай жазықтықтар өзара перпендикуляр болады*** .

Дәлелдеуі . a жазықтығы b жазықтығына перпендикуляр *a* түзуі арқылы өтсін. *c* — a және b жазықтықтарының қиылысу сызығы (17.8 -сурет).



17.8-сурет



17.9-сурет

a және b жазықтықтарының перпендикуляр екенін дәлелдейміз. b жазықтығында a түзуі мен b жазықтығының қиылысу нүктесі арқылы c түзуіне перпендикуляр b түзуін жүргіземіз. a түзуі b жазықтығына перпендикуляр болғандықтан, ол осы жазықтықта жатқан кез келген түзуге перпендикуляр болады. Демек, a және b түзулерінің арасындағы бұрыш тік. Ол сәйкесінше екіжақты бұрыштың сызықтық бұрышы болады. Осыдан a және b жазықтықтары перпендикуляр болады. ◻

2-мысал. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында ABC_1 және ACB_1 жазықтықтарының перпендикуляр екенін дәлелдеңдер (17.9 -сурет).

Шешуі . ACB_1 жазықтығында ABC_1 жазықтығының BC_1 және AB түзуіне перпендикуляр CB_1 түзуі жатыр . Демек, ABC_1 және ACB_1 жазықтықтары перпендикуляр болады.

Сұрақтар

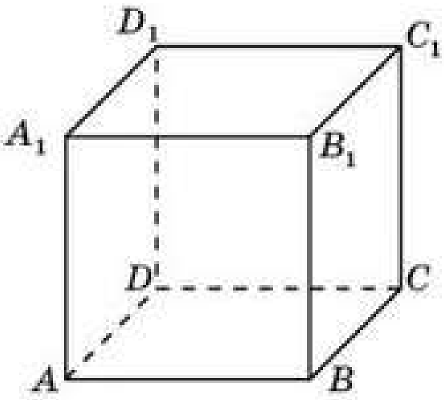
1. Екіжақты бұрыш дегеніміз не?
2. а) Екіжақты бұрыштың жағы; ә) екіжақты бұрыштың қыры дегеніміз не?
3. Екіжақты бұрыштың сызықтық бұрышы дегеніміз не?
4. Екіжақты бұрыштың шамасы дегеніміз не?
5. Қандай екіжақты бұрыш тік деп аталады?
6. Қиылысқан екі жазықтықтың арасындағы бұрыш дегеніміз не?
7. Қандай қиылысқан екі жазықтық перпендикуляр деп аталады?
8. Екі жазықтықтың перпендикулярлық белгісін тұжырымдаңдар.

Есептер

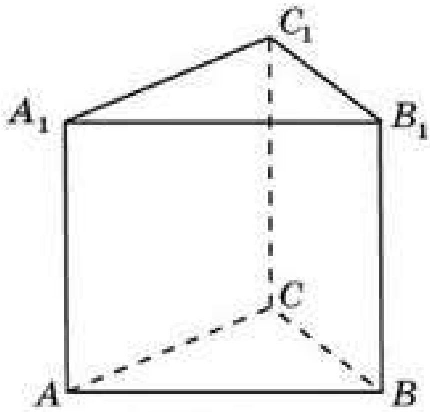
A

17.1. Кубтың көршілес жақтарының арасындағы екіжақты бұрыштарды табыңдар (17.10 -сурет).

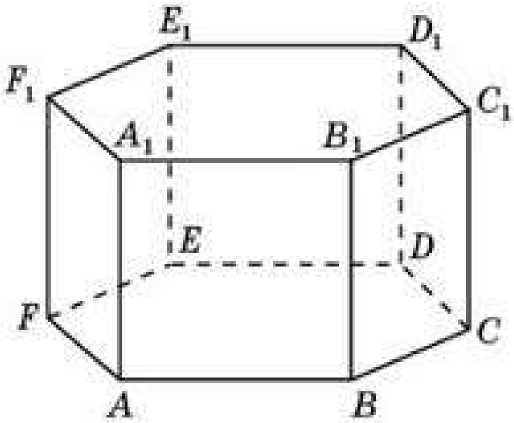
17.2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында : а) ABC және BDD_1; ә) ACC_1 және BDD_1 жазықтықтарының перпендикуляр екенін дәлелдеңдер.



17.10-сурет



17.11-сурет



17.12-сурет

17.3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубындағы ABC және CDA_1 жазықтықтарының арасындағы бұрышты табыңдар.

17.4. Дұрыс үшбұрышты призманың көршілес екі бүйір жағының арасындағы екіжақты бұрышты табыңдар (17.11-сурет).

17.5. Дұрыс алтыбұрышты призманың көршілес екі бүйір жағының арасындағы екіжақты бұрышты табыңдар (17.12-сурет).

B

17.6. Үшінші жазықтыққа перпендикуляр екі жазықтық өзара перпендикуляр бола ма?

17.7. Берілген нүкте арқылы берілген жазықтыққа перпендикуляр неше жазықтық жүргізуге болады?

17.8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубындағы келесі жазықтықтардың арасындағы бұрыштың тангенсін табыңдар: а) ABC және AB_1D_1; ә) ABC және ACB_1.

17.9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубындағы ACB_1 және ACD_1 жазықтықтарының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

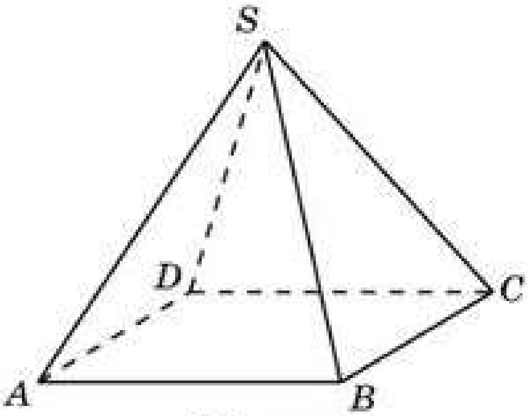
17.10. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. Келесі жазықтықтардың арасындағы бұрышты табыңдар: а) ABB_1 және CDD_1; ә) ACC_1 және CDD_1; б) ACC_1 және DEE_1; в) ACC_1 және CEE_1; г) ABC және BDE_1; ғ) CDF_1 және AFD_1.

17.11. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың келесі жазықтықтары перпендикуляр екенін дәлелдеңдер: а) ABC және ABB_1; ә) ABC және ACC_1; б) ABC және ADD_1; в) ACC_1 және BEE_1; г) ADD_1 және BFF_1.

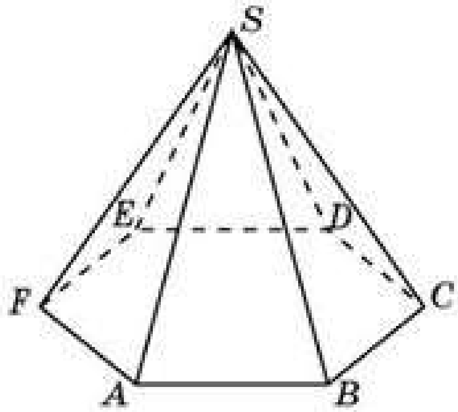
17.12. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қабырғалары тең (17.13 -сурет). Пирамиданың бүйір жағы мен табанының арасындағы екіжақты бұрыштың тангенсін табыңдар.

17.13. Дұрыс алтыбұрышты пирамида табанының қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең (17.14 -сурет). Пирамиданың бүйір жағы мен табанының арасындағы екіжақты бұрыштың тангенсін табыңдар.

17.14. Хеопс пирамидасы — табанының қабырғалары 230 м, биіктігі шамамен 138 м болатын дұрыс төртбұрышты пирамида . Оның бүйір жағы мен табанының арасындағы екіжақты бұрыштың тангенсін табыңдар. Тригонометриялық функциялардың кестесін пайдаланып, бұрыштың жуық мәнін табыңда р.



17.13-сурет



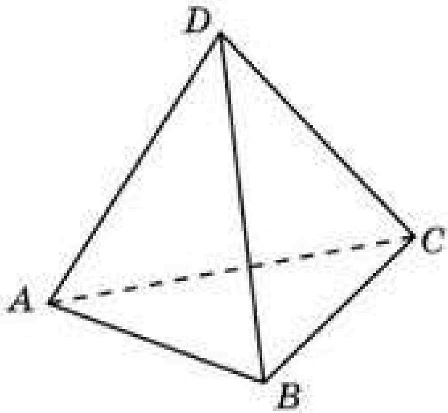
17.14-сурет

C

17.15. Дұрыс тетраэдрдің көршілес екі жағының арасындағы екіжақты бұрыштың косинусын табыңдар (17.15 -сурет).

17.16. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубындағы ABC_1 және BCD_1 жазықтықтарының арасындағы бұрышты табыңдар .

17.17. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары тең. Оның көршілес бүйір жақтарының арасындағы екіжақты бұрыштың косинусын табыңдар.



17.15-сурет

17.18. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең . Келесі жазықтықтардың арасындағы бұрыштың тангенсін табыңдар : а) ABC және BCD_1; ә) ABC және ADE_1.

17.19. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BCD_1 және EFA_1 жазықтықтарының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

17.20. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында ABC_1 және BDA_1 жазықтықтарының перпендикуляр болатынын дәлелдеңдер.

17.21. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. ACB_1 және ABD_1 жазықтықтарының перпендикуляр болатынын дәлелдеңдер.

17.22. Еліміздің астанасындағы Бейбітшілік пен келісім сарайы дұрыс төртбұрышты пирамида пішіндес болып табылады (§ 12, 12.14-суретті қара). Оның биіктігі табанының қабырғасына тең. Осы пирамиданың бүйір жағы мен табан жазықтығы арасындағы бұрыштың тангенсін табыңдар.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубындағы AD_1 және CB_1 түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.

   A. 30°. B. 45°. C. 60°. D. 90°.

2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубындағы AC және DA_1 түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.

   A. 30°. B. 45°. C. 60°. D. 90°.

3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубындағы BD және CA_1 түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.

   A. 30°. B. 45°. C. 60°. D. 90°.

4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубындағы AA_1 және DB_1 түзулерінің арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

   A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

5. Дұрыс үшбұрышты пирамиданың айқас қырларының арасындағы бұрышты табыңдар.

   A. 30°. B. 45°. C. 60°. D. 90°.

6. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. Оның айқас қырларының арасындағы бұрышты табыңдар.

   A. 30°. B. 45°. C. 60°. D. 90°.

7. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың BC және C_1D_1 түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.

   A. 30°. B. 45°. C. 60°. D. 120°.

8. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың AD_1 және CD түзулерінің арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубындағы BD_1 түзуі мен BCC_1 жазықтығының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

10. Көлбеудің жазықтықтағы ортогональ проекциясы көлбеудің кесіндісінен екі есе кіші. Көлбеу мен жазықтықтың арасындағы бұрышты табыңдар.

A. 30°. B. 45°. C. 60°. D. 90°.

11. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. SAD және SBC жазықтықтарының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

12. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. A және D_1 төбелерінің арақашықтығын табыңдар.

A. 2. B. $\sqrt{2}$. C. $\sqrt{3}$. D. $\sqrt{5}$.

13. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубындағы B_1 төбесінен AC түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

14. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. Оның B төбесінен E_1F_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

A. 2. B. $\sqrt{2}$. C. $\sqrt{3}$. D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

15. Жазықтықтан тыс жатқан нүктеден осы жазықтыққа перпендикуляр түсірілген және көлбеу жүргізілген. Егер перпендикуляр 12 см, көлбеу 15 см болса, көлбеудің проекциясын табыңдар.

A. 3 см. B. 9 см. C. 27 см. D. 81 см.

16. Кесіндінің ұштары берілген жазықтықтан 10 см және 15 см қашықтықта орналасқан. Оның жазықтықтағы ортогональ проекциясы 12 дм. Кесіндіні табыңдар.

A. 11 см. B. 12 см. C. 13 см. D. 14 см.

17. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубындағы BC және DB_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

18. $ABCD$ бірлік тетраэдріндегі AD және BC түзулерінің арақашықтығын табыңдар.

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

19. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубындағы B төбесінен ACB_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

20. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың табанының қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең. Оның биіктігін табыңдар.

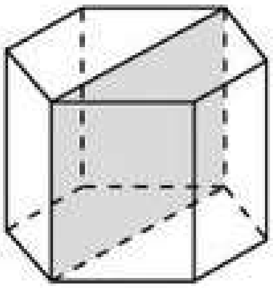
A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{14}}{2}$. C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{2\sqrt{7}}{3}$.

§ 18*. Кубтың, призманың және пирамиданың қималары

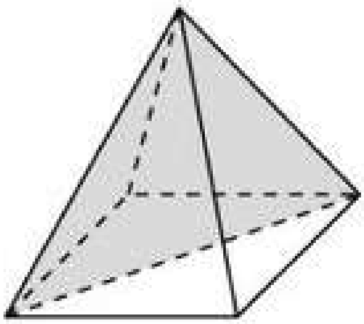
Көпжақтың жазықтықпен *қимасы* деп осы көпжақ пен жазықтықтың ортақ бөлігі (қиылысуы) болатын көпбұрышты айтады.

Призманың табанының диагоналі мен оған іргелес жатқан екі бүйір қыры арқылы өтетін жазықтықпен қимасы оның *диагональдық қимасы* деп аталады (18.1-сурет).

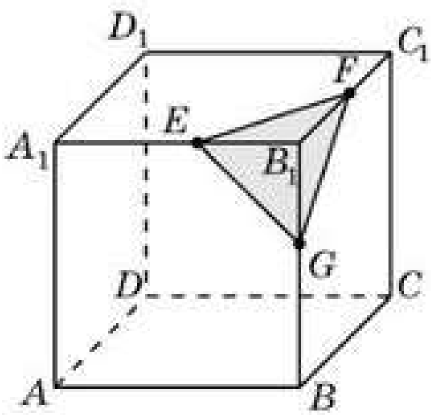
Пирамиданың табанының диагоналі мен төбесі арқылы өтетін жазықтықпен қимасы оның *диагональдық қимасы* деп аталады (18.2-сурет).



18.1-сурет



18.2-сурет



18.3-сурет

а) Үшбұрышты; ә) төртбұрышты; б)* n-бұрышты призманың неше диагональдық қимасы болады?

а) Үшбұрышты; ә) төртбұрышты; б)* n-бұрышты пирамиданың неше диагональдық қимасы болады?

Кубтың, призманың және пирамиданың жазықтықпен қимасын салу мәселесін қарастырайық. Алдымен кубтан бастайық.

1-мысал. Кубтың кескіні (18.3-сурет) және осы кубтың бір төбеден шығатын қырларына тиісті E, F, G нүктелері берілсін. Кубтың E, F, G нүктелері арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар.

Салу. E және F нүктелері кубтың $A_1B_1C_1D_1$ жағына тиісті болғандықтан, EF кесіндісі қима жазықтығына және кубтың осы жағына да ортақ болады. EG кесіндісі мен кубтың ABB_1A_1 жағы туралы және FG кесіндісі мен кубтың BCC_1B_1 жағы туралы да осыны айтуға болады.

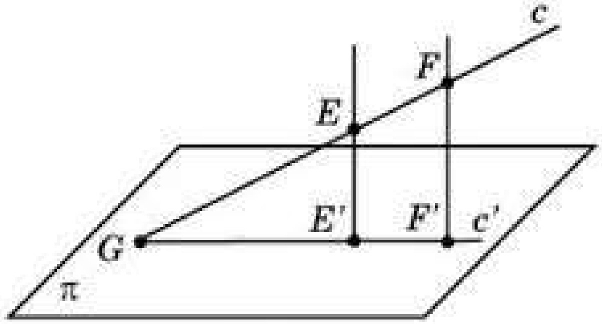
Кубтың осы нүктелер арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салу үшін оларды кесінділермен қосу жеткілікті. Нәтижесінде алынған EFG үшбұрышы кубтың қимасының ізделінді кескіні болады (18.3-сурет).

Бұдан күрделірек қималарды салу үшін *іздер әдісі* қолданылады. Дәлірек айтқанда, түзу мен жазықтықтың қиылысу нүктесін осы түзудің бойындағы екі нүкте мен олардың жазықтықтағы ортогональ проекциялары (іздері) арқылы табады.

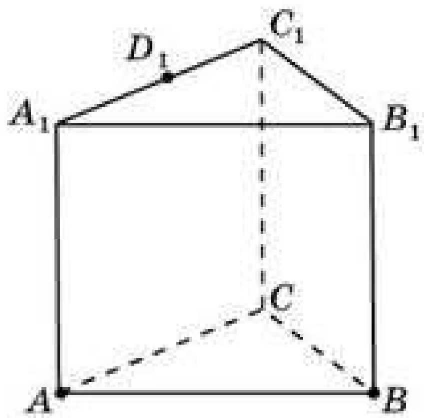
c түзуі E, F нүктелері арқылы өтсін және осы нүктелердің π жазықтығындағы E', F' ортогональ проекциялары белгілі болсын. Сонда c түзуі мен E', F' нүктелері арқылы өтетін c' түзуінің G қиылысу нүктесі c түзуі мен π жазықтығының ізделінді қиылысу нүктесі болады (18.4-сурет).

Призманың және пирамиданың қималарын салуға мысалдар қарастырайық.

2-мысал. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың A, B төбелері және A_1C_1 қырының D_1 ортасы арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар (18.5-сурет).



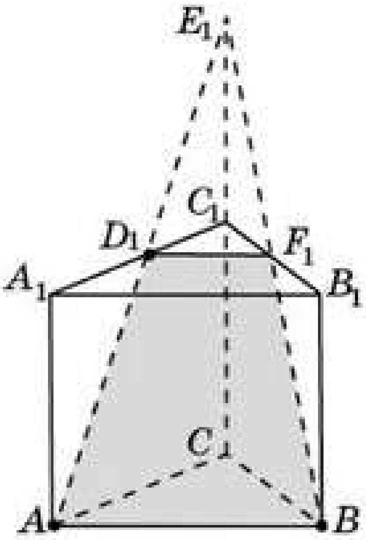
18.4-сурет



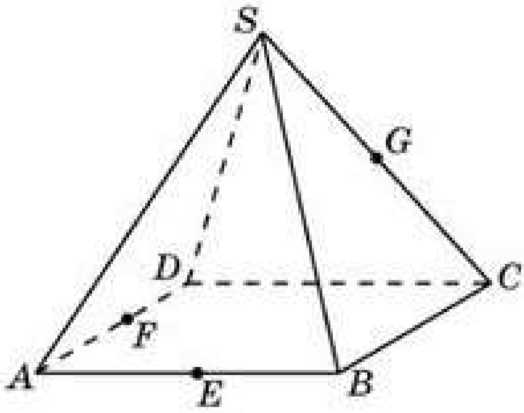
18.5-сурет

Салу. AD_1 түзуін жүргізейік және оның CC_1 түзуімен қиылысу нүктесін E_1 деп белгілейік. B және E_1 нүктелері арқылы түзу жүргізіп, оның B_1C_1 қырымен қиылысу нүктесін F_1 деп белгілейік. D_1 және F_1

нүктелерін кесіндімен қосамыз. ABF_1D_1 төртбұрышы ізделінді қима болады (18.6-сурет).



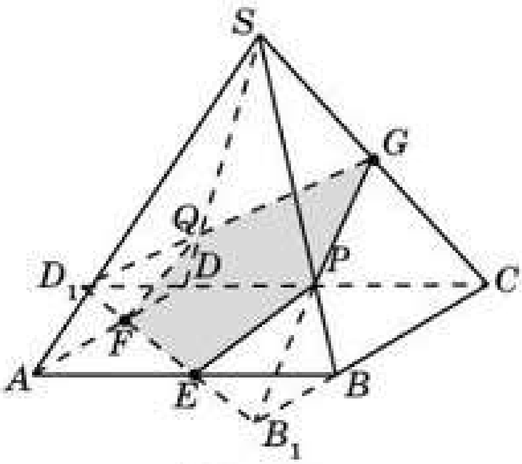
18.6-сурет



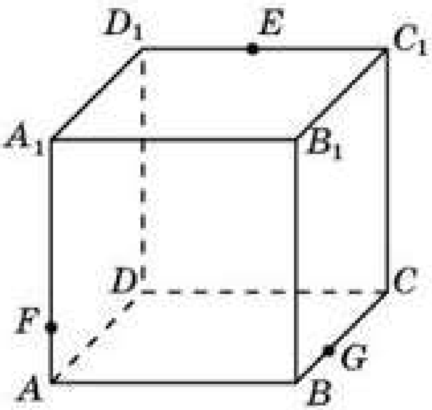
18.7-сурет

3-мысал. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың AB, AD және SC қырларының сәйкесінше E, F және G орталары арқылы өтетін қимасын салыңдар (18.7-сурет).

Салу. EF түзуін жүргізіп, оның BC және CD түзулерімен қиылысу нүктелерін сәйкесінше B_1 және D_1 деп белгілейік. B_1G, D_1G түзулерін жүргіземіз және олардың SB, SD қырларымен қиылысу нүктелерін сәйкесінше P, Q деп белгілейік. E және P, F және Q нүктелерін кесінділермен қосайық. $FEPGQ$ бесбұрышы ізделінді қима болады (18.8-сурет).



18.8-сурет



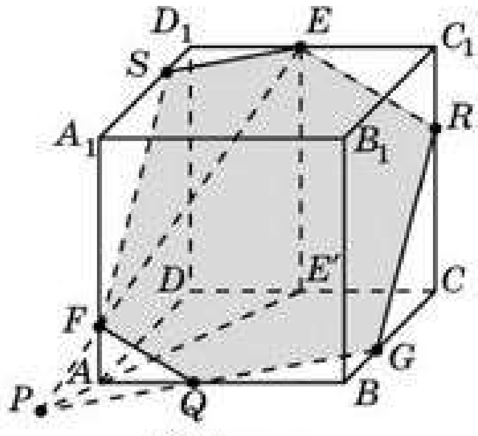
18.9-сурет

4-мысал. Іздер әдісін қолданып, $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының қос-қостан айқас қырларында жататын E, F, G нүктелері арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар (18.9-сурет).

Салу. Қима жазықтығында жататын EF түзуі мен кубтың $ABCD$ жағының жазықтығымен қиылысуын табайық. Ол үшін

E нүктесінің кубтың осы жағына E' ортогональ проекциясын саламыз (18.10- сурет). EF және $E'A$ түзулерінің қиылысу нүктесі ізделінді P нүктесі болады. Ол қима жазықтығында және кубтың $ABCD$ жағында жатады.

G нүктесі де қима жазықтығы мен кубтың осы жағында жатады. Демек, қима жазықтығы кубтың $ABCD$ жағының жазықтығын PG түзуі арқылы қиып өтеді. Осы түзудің кубтың AB қырымен қиылысу нүктесі қиманың тағы бір Q нүктесін береді.


18.10-сурет

G және Q, F және Q нүктелерін кесінділермен қосамыз. Кубтың қарама-қарсы жақтары параллель болғандықтан, қиюшы жазықтық осы жақтарды параллель түзулер бойымен қиып өтеді. E нүктесі арқылы FQ түзуіне параллель түзу жүргізейік және оның CC_1 қырымен қиылысу нүктесін R деп белгілейік. R және G нүктелерін кесіндімен қосамыз.

Осыған ұқсас E нүктесі арқылы GQ түзуіне параллель түзу жүргіземіз және оның A_1D_1 қырымен қиылысу нүктесін S деп белгілейік. E және S, F және S нүктелерін кесінділермен қосамыз. $ESFQGR$ көпбұрышы кубтың жазықтықпен қимасының ізделінді кескіні болады.

Қандай көпбұрыштар кубтың қимасы бола алады? Мысалдар келтіріңдер.

Сұрақтар

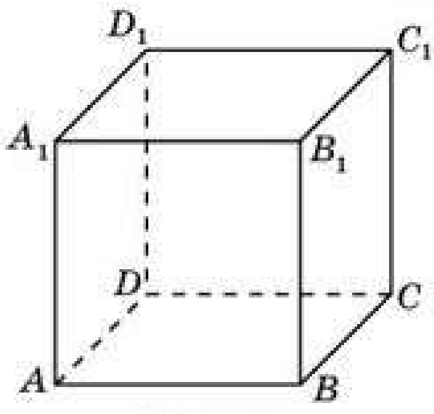
1. Көпжақтың жазықтықпен қимасы дегеніміз не?
2. Призманың жазықтықпен қандай қимасы диагональдық деп аталады?
3. Пирамиданың жазықтықпен қандай қимасы диагональдық деп аталады?
4. Іздер әдісінің мәні неде?

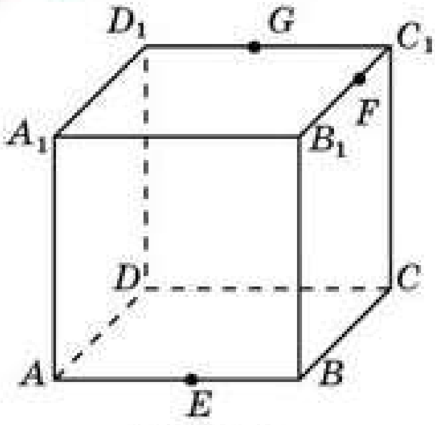
Есептер

В

18.1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының B, D_1 төбелері және CC_1 қырының ортасы арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар (18.11-сурет). Қиманың түрін анықтаңдар.

18.2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының AB, BC және A_1D_1 қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың түрін анықтаңдар.


18.11-сурет



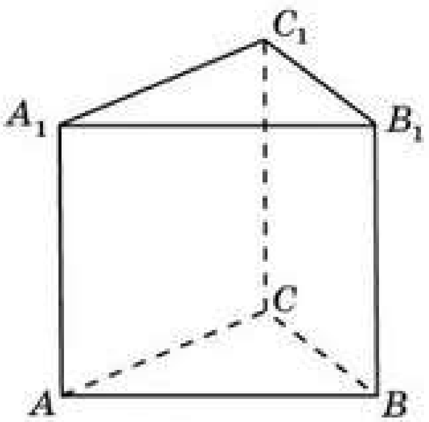
18.12-сурет

18.3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының A, C төбелері және A_1D_1 қырының ортасы арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың түрін анықтаңдар.

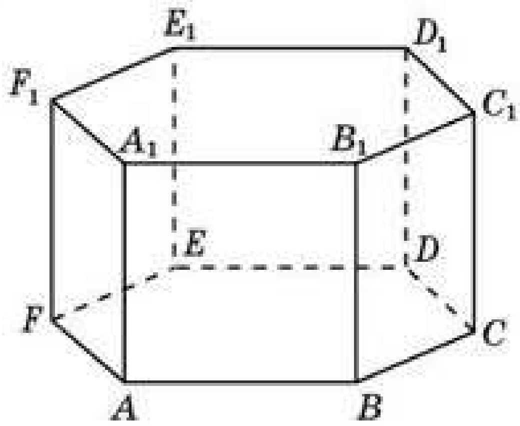
18.4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының C_1 төбелері және AB және AD қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар (18.11-сурет). Қиманың түрін анықтаңдар.

18.5. 18.12-сурет тегі кубтың E, F, G нүктелері арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар.

18.6. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың AA_1, BB_1 және B_1C_1 қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар (18.13-сурет). Қима ның түрін анықтаңдар.



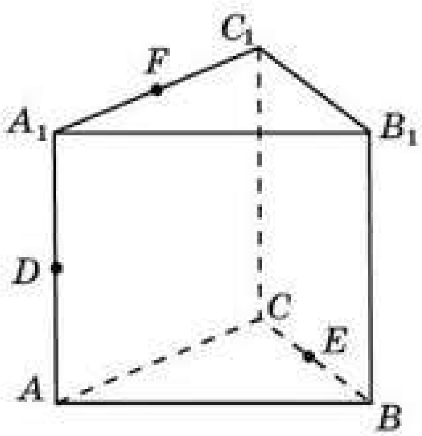
18.13-сурет



18.14-сурет

18.7. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың A, B және D_1 төбелері арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар (18.14-сурет).

C

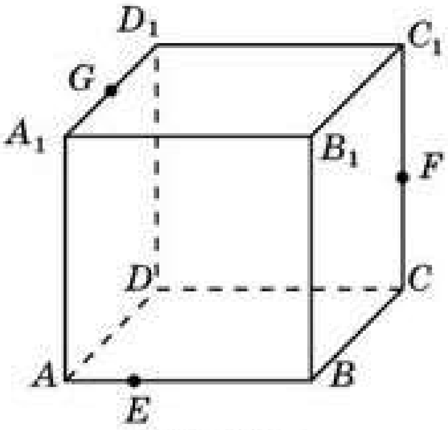


18.15-сурет

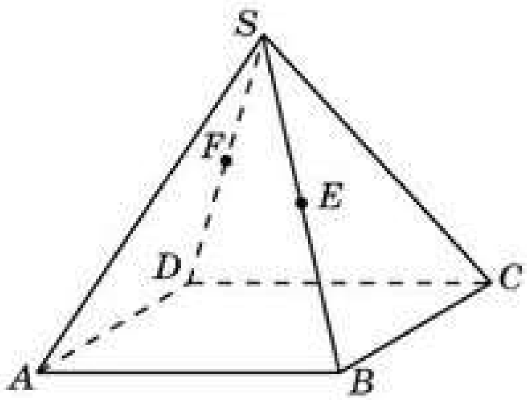
18.8. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың AA_1, BC және A_1C_1 қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар (18.15-сурет).

18.9. 18.16-суреттегі кубтың E, F, G нүктелері арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар.

18.10. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың A төбесі және SB мен SD қырларының сәйкесінше E және F орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар (18.17-сурет).



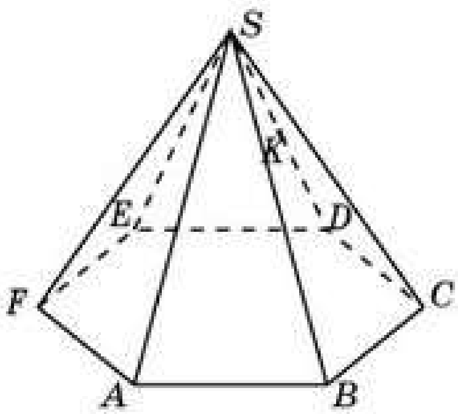
18.16-сурет



18.17-сурет

18.11. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамиданың A, B төбелері және SD қырының K ортасы арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар (18.18- сурет).

18.12. Келесі көпбұрыштар кубтың қимасы болуы мүмкін бе: а) дұрыс бесбұрыш ; ә) дұрыс алтыбұрыш ; б) жетібұрыш ?



18.18-сурет

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

18.13. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының келесі төбелер арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар : а) B, C, D_1; ә) B, D, C_1.

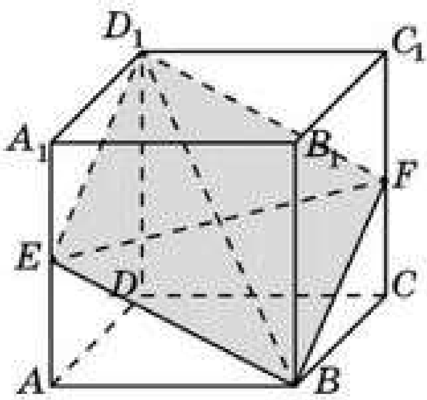
§ 19. Ортогональ проекцияның ауданы

Қиманың ауданын табуға мысал қарастырайық.

1-мысал. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының B, D_1 төбелері және CC_1 қырының ортасы арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар .

Шешуі . Ізделінді қима BED_1F ромб болады (19.1 -сурет).

Ромбының ауданы оның диагональдарының көбейтіндісінің жартысына тең екендігін қолданайық. Біздің жағдайда $EF = \sqrt{2}$, $BD_1 = \sqrt{3}$. Демек, ромбының ауданы $\frac{\sqrt{6}}{2}$-ге тең болады .

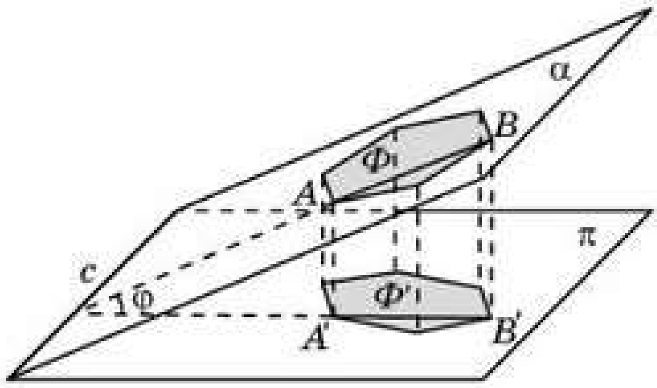


19.1-сурет

Қиманың ауданын табудың жалпы әдістерінің бірі келесі теоремаға негізделеді.

Теорема. ***Жазық фигураның ортогональ проекциясының ауданы осы фигураның ауданының фигура жазықтығы мен проекция жазықтығының арасындағы бұрыштың косинусына көбейтіндісіне тең болады .***

Φ — а жазықтығында жатқан фигура, Φ' — оның р жазықтығындағы ортогональ проекциясы, ал j — осы жазықтықтардың арасындағы бұрыш болсын (19.2 -сурет).



19.2-сурет

Келесі формула орынды : $S' = S \cdot \cos$ j , мұндағы S және S' — сәйкесінше Φ және Φ' фигураларының аудандары.

Мұнда біз бұл формуланың дәлелдеуін келтірмейміз. Тек Φ фигурасы Φ' фигурасын cos j коэффициентімен c түзуіне перпендикуляр бағытта сығу арқылы алынатынын ғана атап өтеміз , мұнда ғы c — жазықтықтардың қиылысу сызығы.

Бұл теоремадан Φ жазық фигураның S ауданы оның Φ' ортогональ проекциясының S' ауданы арқылы өрнектелген формуласы шығады :

$$S = \frac{S'}{\cos\varphi}.$$

Қалай ойлайсыңдар , фигураның ортогональ проекциясының ауданы фигураның өзінің ауданынан үлкен болуы мүмкін бе? Неліктен ?

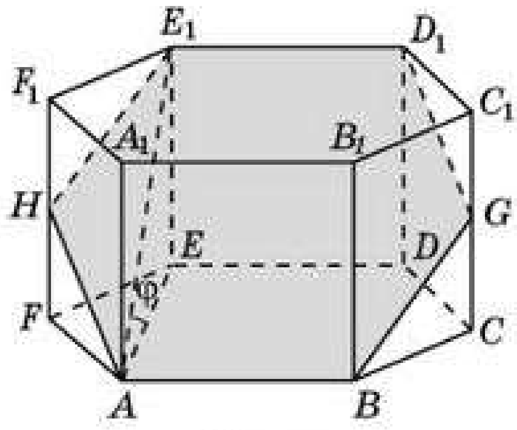
1-мысалдағы қиманың ауданын табу үшін ортогональ проекцияның ауданының формуласын қолданайық.

BED_1F ромбының ABC жазықтығындағы ортогональ проекциясы $ABCD$ квадраты болады. BED_1 және ABC жазықтықтарының арасындағы бұрыштың косинусы $BD : BD_1$ қатынасына , яғни $\frac{\sqrt{6}}{3}$-ке тең. $ABCD$ квадратының ауданы 1-ге тең болғандықтан ромбының ауданы $\frac{\sqrt{6}}{2}$-ге тең болады.

2-мысал. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. Оның A, B және D_1 төбелері арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар .

Шешуі. Ізделінді қима $ABGD_1E_1H$ алтыбұрышы болады (19.3-сурет).

Осы алтыбұрыштың ортогональ проекциясының қабырғасы 1-ге тең $ABCDEF$ дұрыс алтыбұрышы болады. Оның ауданы $\frac{3\sqrt{3}}{2}$-ге тең. ABG және ABC жазықтықтарының арасындағы φ бұрыштың косинусы $AE : AE_1$ қатынасына, яғни $\frac{\sqrt{3}}{2}$-ге тең. Демек, ізделінді алтыбұрыштың ауданы 3-ке тең болады.



19.3-сурет

Сұрақтар

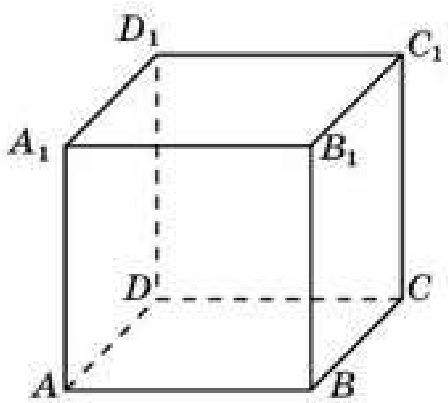
1. Жазық фигураның ортогональ проекциясының ауданы туралы теореманы тұжырымдаңдар.

Есептер

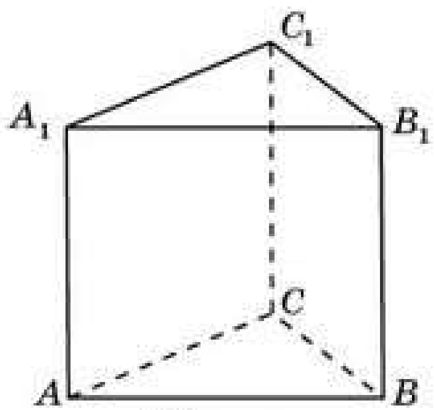
А

19.1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының келесі төбелері арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар: а) A, B, C_1; ә) A, C, D_1 (19.4-сурет).

19.2. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. Оның A, B және C_1 төбелері арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар (19.5-сурет).

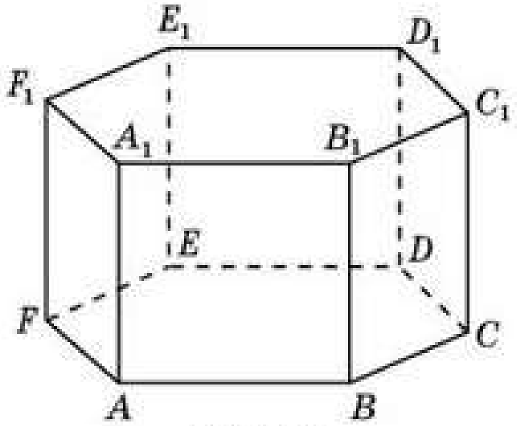


19.4-сурет

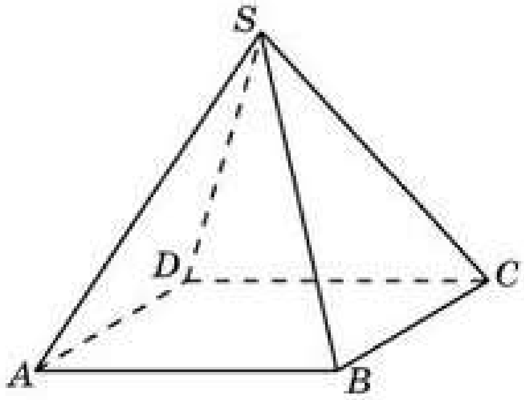


19.5-сурет

19.3. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. Оның келесі төбелері арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар: а) A, C, C_1; ә) A, D, D_1 (19.6-сурет).



19.6-сурет

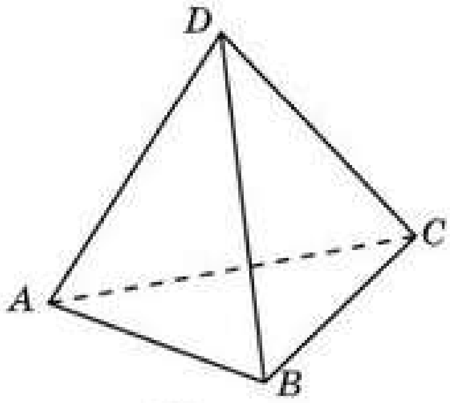


19.7-сурет

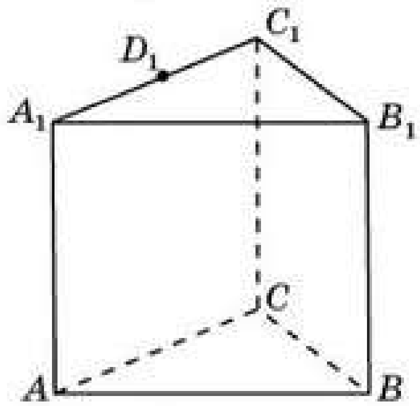
19.4. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. Оның A, C және S төбелері арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар (19.7 -сурет).

B

19.5. $ABCD$ тетраэдрінің барлық қырлары 1-ге тең. Оның AB, BC және CD қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар (19.8 -сурет).



19.8-сурет

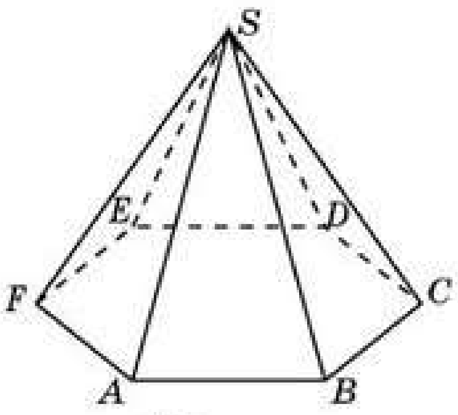


19.9-сурет

19.6. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. Оның A, B төбелері арқылы және A_1C_1 қырының D_1 ортасы арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар (19.9-сурет) .

19.7. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамиданың табанының қабырғалары 1-ге, ал бүйір қырлары 2-ге тең. Келесі төбелері арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар : а) A, D және S; ә) A, C және S (19.10 -сурет).

19.8. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең.



19.10-сурет

Оның AA_1, BB_1 және A_1C_1 қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

C

19.9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының AB, BC және A_1D_1 қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

19.10. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының D_1 төбесі және AB, BC қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

19.11. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының AB, BC, DD_1 қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

19.12. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. Оның A, C_1 және E_1 төбелері арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

19.13. Еліміздің астанасындағы Бейбітшілік пен келісім сарайы дұрыс төртбұрышты пирамида пішіндес болып табылады (§ 12, 12.14-суретті қара). Оның биіктігі табанының қабырғасына, яғни 62 м-ге тең. Осы пирамиданың диагональдық қимасының ауданын табыңдар.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

19.14. Жазықтықтағы вектордың анықтамасын қайталаңдар.

19.15. Жазықтықтағы вектордың анықтамасына ұқсас кеңістіктегі вектордың анықтамасын беріп көріңдер.

19.16. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубындағы басы A төбесінде, ұшы C_1 төбесінде болатын вектордың ұзындығын табыңдар.

III тарау

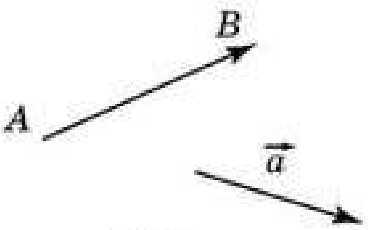
КЕҢІСТІКТЕГІ ТІКБҰРЫШТЫ КООРДИНАТАЛАР ЖӘНЕ ВЕКТОРЛАР

§ 20. Кеңістіктегі векторлар

Кеңістіктегі вектордың анықтамасы жазықтықтағы вектордың анықтамасына ұқсас болып келеді .

Кеңістіктегі *вектор* деп бағытталған кесіндіні, яғни басы мен ұшы көрсетілген кесіндіні айтады .

Басы мен ұшы беттесетін векторлар *нөлдік векторлар* деп аталады.



20.1-сурет

Басы A нүктесінде және ұшы B нүктесінде болатын вектор $\overline{AB}$ деп белгіленеді және нұскама кесіндімен бейнеленеді (20.1-сурет). Сонымен бірге вектор ды латынның кіші әрпімен үстіне нұскама қойып белгілейді, мысалы $\overline{a}$, $\overline{b}$ және т.б. Нөлдік вектор $\overline{0}$ деп белгіленеді .

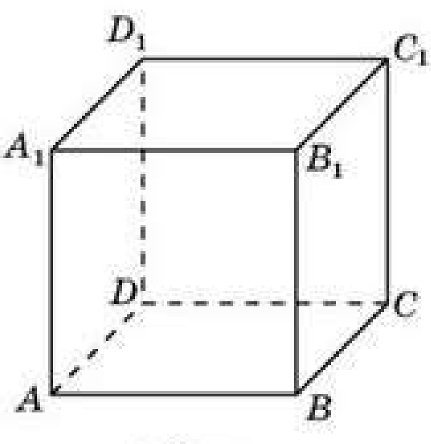
Егер нөлдік емес екі вектор бір түзудің бойында немесе параллель түзулердің бойында жатса, онда олар *коллинеар векторлар* деп аталады.

Егер кеңістіктегі нөлдік емес екі вектор бір жазықтықта жатса және сол жазықтықта бірдей (қарама-қарсы) бағытталса, онда оларды *бірдей бағытталған* немесе *бағыттас* (*қарама-қарсы бағытталған*) *векторлар* деп атайды.

Егер кеңістіктегі нөлдік емес екі векторды бір нүктеден салғанда бір түзудің бойында жатса, онда олар коллинеар векторлар болатынын дәлелдеңдер.

Коллинеар векторлар бірдей бағытталған немесе қарама-қарсы бағытталған болуы мүмкін.

Вектордың *ұзындығы* немесе *модулі* деп осы векторды кескіндеп тұрған кесіндінің ұзындығын айтады. Оны $|\overline{AB}|$ немесе $|\overline{a}|$ деп белгілейді.



20.2-сурет

Нөлдік вектордың ұзындығы нөлге тең.

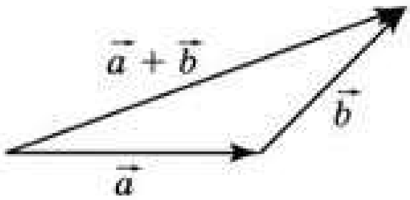
Егер екі вектор бірдей бағытталса және ұзындықтары тең болса, онда олар *тең векторлар* деп аталады.

Барлық нөлдік векторлар өзара тең болады.

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында төбелері арқылы $\overline{AA_1}$ векторына тең векторларды көрсетіңдер (20.2 -сурет).

Жазықтықтағы векторлар сияқты кеңістіктегі векторлар үшін де векторларды қосу, санға көбейту амалдары орындалады.

Екі $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларын қосу үшін $\vec{b}$ векторын оның басы $\vec{a}$ векторының ұшымен беттесетіндей етіп орналастыру керек (20.3-сурет).



20.3-сурет

Басы $\vec{a}$ векторының басымен, ал ұшы $\vec{b}$ векторының ұшымен беттесетін вектор $\vec{a}$ *және* $\vec{b}$ *векторларының қосындысы* деп аталады және $\vec{a}+\vec{b}$ деп белгіленеді.

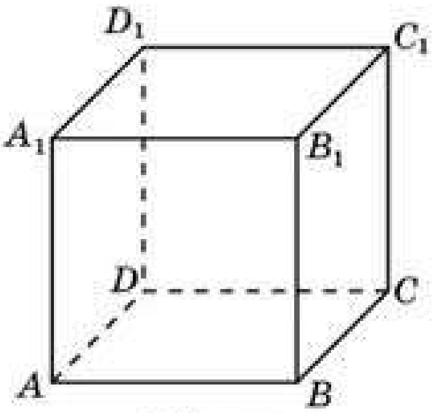
Векторларды қосу амалы үшін сандарды қосудың қасиеттеріне ұқсас келесі қасиеттер орынды болады:

1-қасиет. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (*орын ауыстырымдылық заңы*).

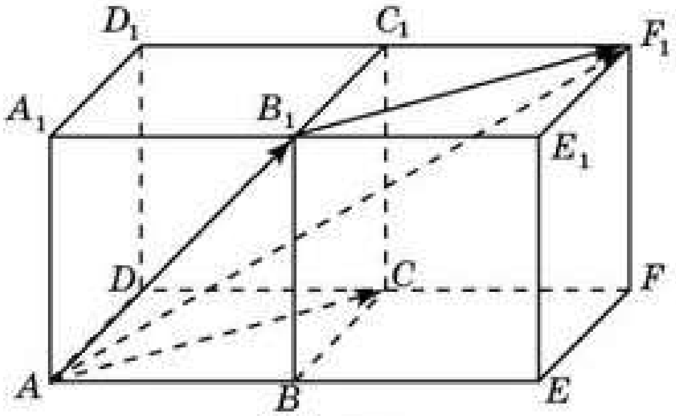
2-қасиет. $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ (*терімділік заңы*).

Осы қасиеттерді жазықтықтағы векторларға ұқсас өздерің дәлелдеңдер.

1-мысал. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубында $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB_1}$ векторының ұзындығын табыңдар (20.4-сурет).



20.4-сурет



20.5-сурет

Шешуі. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубына $BEFCB_1E_1F_1C_1$ бірлік кубын қосып, тікбұрышты параллелепипедке дейін толықтырамыз (20.5-сурет). $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB_1}$ қосындысы $\overrightarrow{AF_1}$ векторына тең. Оның ұзындығы $\sqrt{6}$-ға тең болады.

$\vec{a}$ *векторының* t *санына көбейтіндісі* деп ұзындығы $|t|\cdot|\vec{a}|$ болатын және бағыты $t>0$ болғанда өзгеріссіз қалатын, ал $t<0$ болғанда қарама-қарсы бағытта болатын векторды айтады. Вектордың нөлге көбейтіндісі нөлдік вектор болып есептеледі.

$\vec{a}$ векторының t санына көбейтіндісі $t\vec{a}$ деп белгіленеді. Анықтама бойынша $|t\vec{a}|=|t|\cdot|\vec{a}|$.

$\vec{a}$ векторының -1 санына көбейтіндісі $-\vec{a}$ деп белгіленеді және ол $\vec{a}$ *векторына қарама-қарсы вектор* деп аталады.

Анықтама бойынша $-\vec{a}$ векторының бағыты $\vec{a}$ векторының бағытына қарама-қарсы болады және $|-\vec{a}|=|\vec{a}|$.

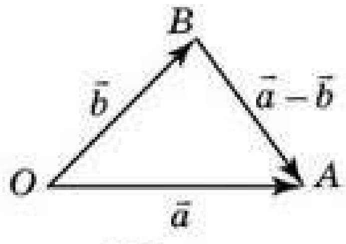
$\bar{b} = t\bar{a}$ теңдігі орындалатындай t нақты саны табылса ғана нөлдік емес $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторлары коллинеар болады.

Векторды санға көбейту амалы үшін сандарды көбейтудің қасиеттеріне ұқсас келесі қасиеттер орынды болады:

1-қасиет. $(ts)\bar{a} = t(s\bar{a})$ (*терімділік заңы*).

2-қасиет. $(t + s)\bar{a} = t\bar{a} + s\bar{a}$ (*бірінші үлестірімділік заңы*).

3-қасиет. $t(\bar{a} + \bar{b}) = t\bar{a} + t\bar{b}$ (*екінші үлестірімділік заңы*).



20.6-сурет

Осы қасиеттерді жазықтықтағы векторларға ұқсас өздерің дәлелдеңдер.

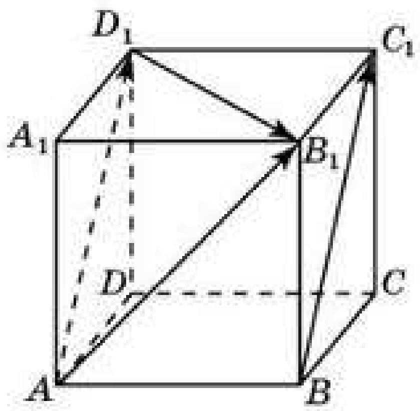
$\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторларының айырымы деп $\bar{a} + (-\bar{b})$ векторын айтады және $\bar{a} - \bar{b}$ деп белгілейді.

$\bar{a} - \bar{b}$ айырымын табу үшін $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторларының бастары сәйкес келетіндей салу қажет (20.6-сурет).

Басы $\bar{b}$ векторының ұшымен, ал ұшы $\bar{a}$ векторының ұшымен сәйкес келетін вектор $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторларының айырымы болады.

2-мысал. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубында $\overline{AB_1} - \overline{BC_1}$ векторының ұзындығын табыңдар (20.7-сурет).

Шешуі. $\overline{AB_1} - \overline{BC_1} = \overline{AB_1} - \overline{AD_1} = \overline{D_1B_1}$. $\overline{D_1B_1}$ векторының ұзындығы $\sqrt{2}$-ге тең.



20.7-сурет

Сұрақтар

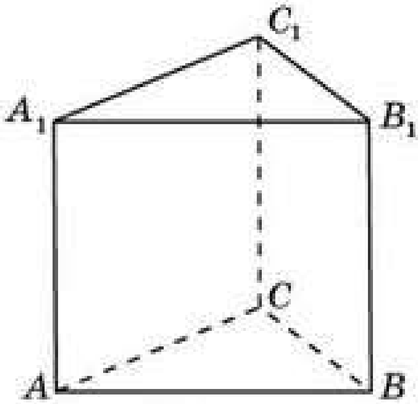
1. Вектор дегеніміз не?
2. Қандай вектор нөлдік вектор деп аталады?
3. Қандай екі вектор коллинеар деп аталады?
4. Вектордың ұзындығы (модулі) дегеніміз не?
5. Қандай екі вектор тең деп аталады?
6. Векторларды қосу амалы қалай анықталады?
7. Векторларды қосудың орын ауыстырымдылық заңын тұжырымдаңдар.
8. Векторларды қосудың терімділік заңын тұжырымдаңдар.
9. Векторды санға көбейту амалы қалай анықталады?
10. Векторды санға көбейту қалай белгіленеді?
11. Қандай вектор берілген векторға қарама-қарсы вектор деп аталады? Ол қалай белгіленеді?
12. Екі вектордың айырымы дегеніміз не? Ол қалай белгіленеді?
13. Векторды санға көбейтудің терімділік заңын тұжырымдаңдар.
14. Векторды санға көбейтудің бірінші үлестірімділік заңын тұжырымдаңдар.
15. Векторды санға көбейтудің екінші үлестірімділік заңын тұжырымдаңдар.

Есептер

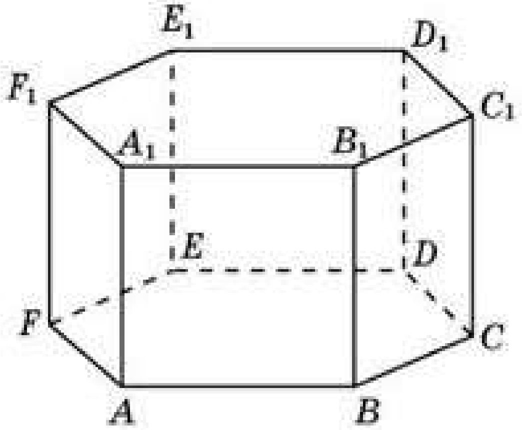
A

20.1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында төбелері арқылы $\overline{AB}$ векторына тең векторларды көрсетіңдер (20.4 -сурет).

20.2. $ABCA_1B_1C_1$ үшбұрышты призмасында төбелері арқылы $\overline{AA_1}$ векторына тең векторларды көрсетіңдер (20.8-сурет) .



20.8-сурет



20.9-сурет

20.3. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призмада төбелері арқылы келесі векторларға тең векторларды көрсетіңдер (20.9 -сурет): а) $\overline{AB}$; ә) $\overline{AC}$; б) $\overline{AD}$; в) $\overline{AB_1}$; г) $\overline{AC_1}$.

20.4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубындағы келесі векторлардың ұзындығын табыңдар: а) $\overline{AB}$; ә) $\overline{AB_1}$; б) $\overline{AC_1}$.

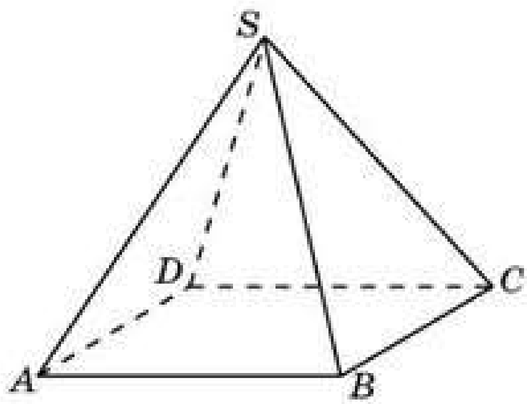
20.5. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең (20.9 -сурет). Келесі векторлардың ұзындығын табыңдар: а) $\overline{AB}$; ә) $\overline{AC}$; б) $\overline{AD}$; в) $\overline{AB_1}$; г) $\overline{AC_1}$; ғ) $\overline{AD_1}$.

20.6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында төбелері арқылы келесі векторларға тең векторларды табыңдар : а) $\overline{AB}+\overline{CC_1}$; ә) $\overline{AB}+\overline{AD}$; б) $\overline{AB}+\overline{AD_1}$; в) $\overline{AB}+\overline{CD_1}$; г) $\overline{AB}+\overline{AD}+\overline{AA_1}$.

B

20.7. Келесі көпжақтардың қырлары әртүрлі неше векторларды береді: а) куб; ә) үшбұрышты призма ; б) дұрыс төртбұрышты пирамида (20.10 -сурет)?

20.8. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призмада төбелері арқылы келесі векторларға тең векторларды көрсетіңдер: а) $\overline{AB}+\overline{FE}$; ә) $\overline{AB}+\overline{DC}$; б) $\overline{AC}+\overline{DD_1}$; в) $\overline{AB}+\overline{CE_1}$.



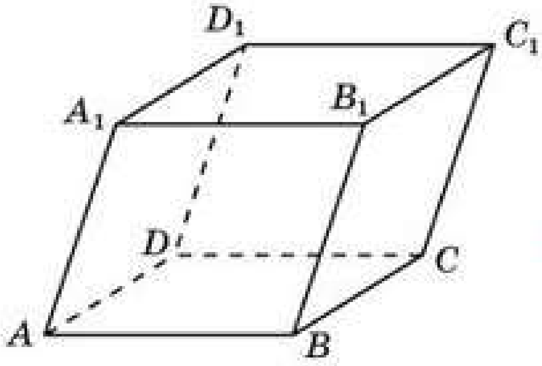
20.10-сурет

20.9. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қабырғалары 1-ге тең (20.8 -сурет). $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA_1}$ векторының ұзындығын табыңдар .

20.10. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубында келесі векторлардың ұзындығын табыңдар : а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$; ә) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD_1}$; б) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CC_1}$; в) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD_1}$; г) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$.

20.11. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қабырғалары 1-ге тең. Келесі векторлардың ұзындықтарын табыңдар: а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FE}$; ә) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$; б) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DD_1}$; в) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CE_1}$.

20.12. Қандай жағдайда векторлардың қосындысының ұзындығы қосылғыштардың ұзындықтарының қосындысына тең болады ?



20.11-сурет

20.13. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедінде келесі векторды көрсетіңдер: а) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AA_1}$; ә) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DD_1}$; б) $\overrightarrow{AB_1}-\overrightarrow{BC_1}$; в) $2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD_1}$ (20.11- сурет).

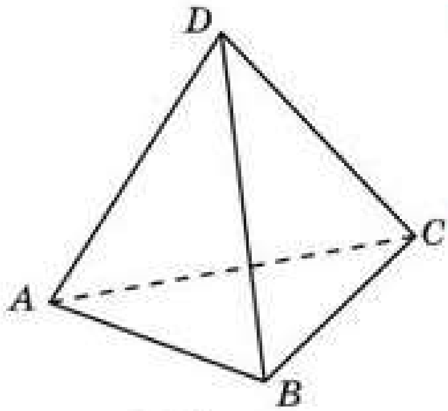
20.14. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубында келесі вектордың ұзындығын табыңдар: а) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AA_1}$; ә) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DD_1}$; б) $\overrightarrow{AB_1}-\overrightarrow{BC_1}$; в) $2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD_1}$.

C

20.15. $ABCD$ тетраэдрінің барлық қырлары 1-ге тең (20.12- сурет). $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$ векторының ұзындығын табыңдар .

20.16. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында келесі теңдік орындалатындай X нүктесін көрсетіңдер: а) $\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XC}=\vec{0}$; ә) $\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}+\overrightarrow{XD}=\vec{0}$; б) $\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}+\overrightarrow{XD}+\overrightarrow{XA_1}+\overrightarrow{XB_1}+\overrightarrow{XC_1}+\overrightarrow{XD_1}=\vec{0}$.

20.17. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең (20.9- сурет). Келесі теңдік орындалатындай t, s сандарын табыңдар : а) $\overrightarrow{AC}=t\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AF}$; ә) $\overrightarrow{AD}=t\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AF}$; б) $\overrightarrow{AE}=t\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AF}$; в) $\overrightarrow{AC_1}=t\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AF_1}$.



20.12-сурет

20.18. $ABCD$ тетраэдрінде E және F нүктелері сәйкесінше AB және CD қырларының орталары болады (20.12 -сурет). $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$ екенін дәлелдеңдер.

20.19. Қайық солтүстік-батысқа қарай 2 км, содан кейін солтүстікке қарай бұрылып, тағы 1 км жүрді. Масштабты таңдап, орын ауыстыру векторын салыңдар және оның ұзындығын табыңдар.

20.20. Қайық жағалауға перпендикуляр бағытта 5 м/с жылдамдықпен жүріп барады. Өзеннің ені 720 м және ағысының жылдамдығы 1 м/с. Соның салдарынан қайық әрбір 5 м жүрген сайын перпендикуляр бағыттан 1 м-ге жылжып отырады. Қайық қарама-қарсы жағалауға жеткенше қанша метрге жылжиды?

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

20.21. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында $\overrightarrow{AC_1}$ векторын $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA_1}$ векторлары арқылы өрнектеңдер.

§ 21. Компланар векторлар

Егер кеңістіктегі үш вектор бір жазықтықта немесе параллель жазықтықтарда жатса, онда олар *компланар векторлар* деп аталады.

Мысалы, $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ және $\overrightarrow{B_1C_1}$ векторлары компланар болады.

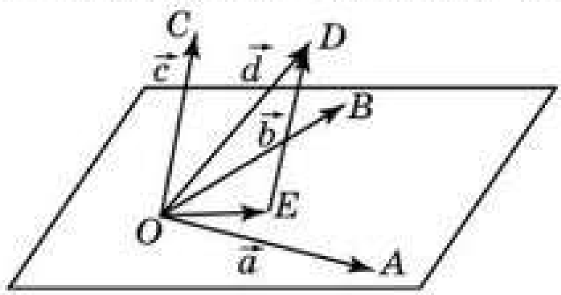
Егер кеңістіктегі нөлдік емес үш векторды бір нүктеден салғанда бір жазықтықта жатса, онда олар компланар векторлар болатынын дәлелдеңдер.

Планиметрия курсында “Егер жазықтықтағы $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары коллинеар емес болса, онда осы жазықтықтағы кез келген $\vec{c}$ векторын бір ғана $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$ түрінде көрсетуге болады, мұндағы x және y — қандай да бір нақты сандар” деген тұжырым дәлелденген болатын.

Кеңістікте осыған ұқсас векторды үш компланар емес векторлар бойынша жіктеу туралы теорема орын алады.

Теорема. ***Егер $\vec{a}$, $\vec{b}$, және $\vec{c}$ векторлары компланар емес болса, онда кез келген $\vec{d}$ векторын бір ғана $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ түрінде көрсетуге болады, мұндағы x, y, z — қандай да бір нақты сандар.***

Дәлелдеуі. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ және $\vec{d}$ векторларын O нүктесінен бастап саламыз және олардың ұштарын сәйкесінше A, B, C, D деп белгілейміз. D нүктесі арқылы OC түзуіне параллель түзу жүргіземіз және оның AOB жазықтығымен қиылысу нүктесін E деп белгілейміз (21.1 -сурет).



21.1-сурет

Егер D нүктесі OC түзуінде жатса, онда E нүктесі ретінде O нүктесін аламыз. $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OA}$ және $\overrightarrow{OB}$ векторлары компланар. Ендеше $\overrightarrow{OE} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$ теңдігі орындалатындай x және y сандары бар болады. $\overrightarrow{ED}$ және $\overrightarrow{OC}$ векторлары коллинеар. Ендеше $\overrightarrow{ED} = z\overrightarrow{OC}$ теңдігі орындалатындай z саны бар болады. $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{ED}$ болғандықтан, $\overrightarrow{OD} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$ теңдігі орындалады, яғни $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$.

Енді осы теңдіктің жалғыздығын дәлелдейік. Егер алынған теңдіктен басқа $\vec{d} = x'\vec{a} + y'\vec{b} + z'\vec{c}$ теңдігі орындалатын болса, мұндағы x' саны x-тен өзгеше немесе y' саны y-тен өзгеше, онда $\vec{0} = (x'-x)\vec{a} + (y'-y)\vec{b} + (z'-z)\vec{c}$ теңдігі орындалатын еді, мұндағы $x'-x$, $y'-y$, $z'-z$ нөлден өзгеше сандар. Демек, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлары компланар болады, бұл шартқа қайшы келеді. ☐

$ABCA_1B_1C_1$ үшбұрышты призманың төбелерінде басы мен ұшы болатын үш компланар емес векторларға мысал келтіріңдер.

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында $\overrightarrow{BD_1}$ векторын $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ және $\overrightarrow{BB_1}$ векторлары арқылы өрнектеңдер (21.2-сурет).

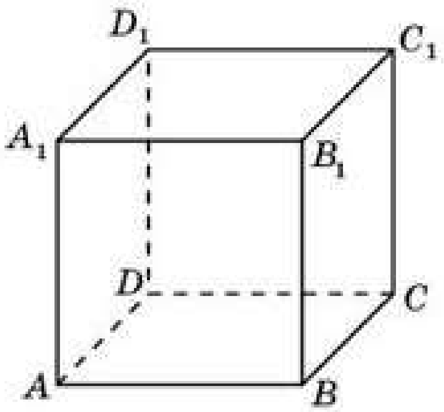
Сұрақтар

1. Кеңістіктегі қандай үш вектор компланар деп аталады?
2. Векторды үш компланар емес векторлар бойынша жіктеу туралы теореманы тұжырымдаңдар.

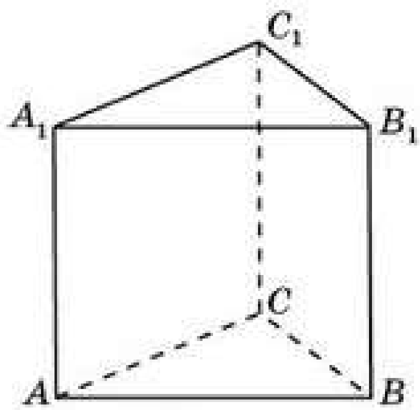
Есептер

A

21.1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында төбелері арқылы $\overrightarrow{AB}$ векторына коллинеар векторларды көрсетіңдер (21.2-сурет).



21.2-сурет



21.3-сурет

21.2. $ABCA_1B_1C_1$ үшбұрышты призмада төбелері арқылы $\overrightarrow{AA_1}$ векторына коллинеар векторларды көрсетіңдер (21.3-сурет).

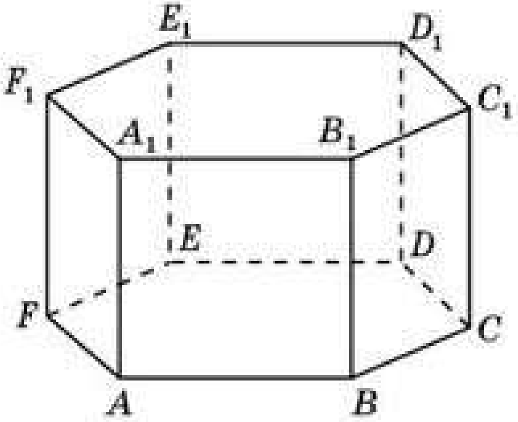
21.3. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призмада (21.4-сурет) төбелері арқылы $\overrightarrow{AB_1}$ векторына коллинеар векторларды көрсетіңдер.

21.4. $\vec{a}$ және $\vec{b}$, $\vec{b}$ және $\vec{c}$ векторлары коллинеар. $\vec{a}$ және $\vec{c}$ векторлары коллинеар бола ма?

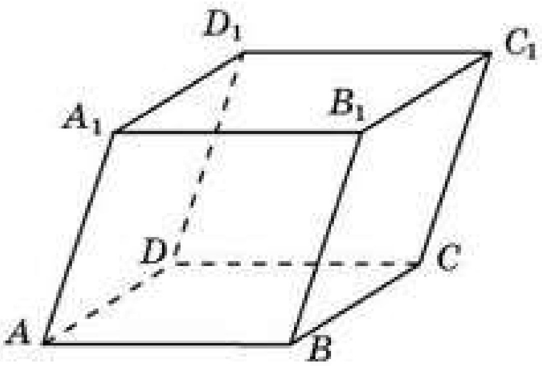
21.5. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призмада $\overrightarrow{AD_1}$ және $\overrightarrow{BC_1}$ векторлары коллинеар бола ма (21.4-сурет)?

B

21.6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедінен: а) үш компланар векторды; ә) үш компланар емес векторды көрсетіңдер (21.5-сурет).



21.4-сурет



21.5-сурет

21.7. $ABCA_1B_1C_1$ үшбұрышты призмада: а) үш компланар векторды; ә) үш компланар емес векторды көрсетіңдер (21.3-сурет).

21.8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ және $\overrightarrow{AA_1}$ векторлары арқылы келесі векторды өрнектеңдер: а) $\overrightarrow{A_1C}$; ә) $\overrightarrow{BD_1}$ (21.2-сурет).

21.9. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призмасында $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF}$ және $\overrightarrow{AA_1}$ векторлары арқылы келесі векторды өрнектеңдер: а) $\overrightarrow{AD_1}$; ә) $\overrightarrow{AC_1}$ (21.4-сурет).

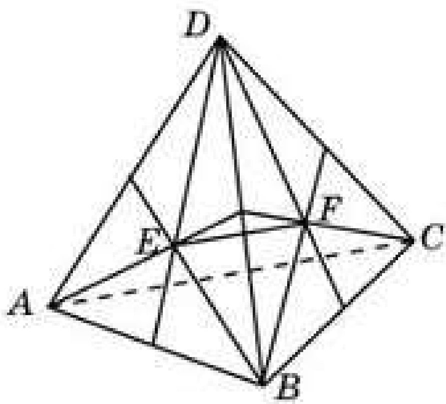
C

21.10. $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары коллинеар. $\vec{a}+\vec{b}$ және $\vec{a}-\vec{b}$ векторлары коллинеар бола ма?

21.11. $\vec{a}+\vec{b}$ және $\vec{a}-\vec{b}$ векторлары коллинеар. $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары коллинеар екенін дәлелдеңдер.

21.12. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында $\overrightarrow{AC_1}$ векторын $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB_1}$ және $\overrightarrow{AD_1}$ векторлары арқылы өрнектеңдер.

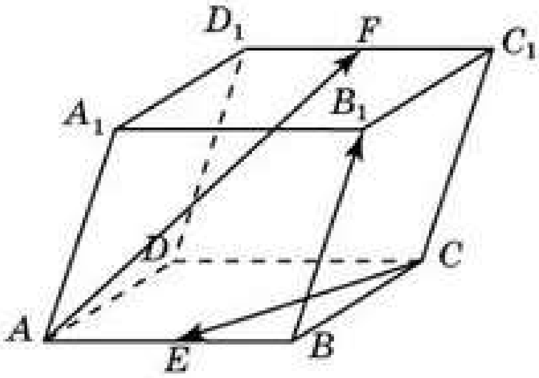
21.13. $ABCD$ тетраэдрінде (21.6-сурет) E, F нүктелері сәйкесінше ADB және BDC жақтарының медианаларының қиылысу нүктелері. $\overrightarrow{EF}$ және $\overrightarrow{AC}$ век-



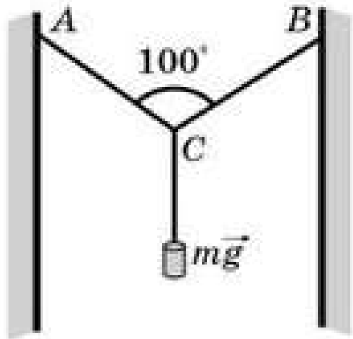
21.6-сурет

торлары коллинеар екенін дәлелдеңдер. Осы векторлардың ұзындықтарының қатынасын табыңдар.

21.14. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедінде E және F нүктелері сәйкесінше AB және C_1D_1 қырларының орталары (21.7-сурет). $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{AF}$ және $\overrightarrow{BB_1}$ векторларының компланар екенін дәлелдеңдер.



21.7-сурет



21.8-сурет

21.15. 21.8-суретте сымарқан A және B нүктелерінде бекітілген. C нүктесінде оған $P = mg = 45$ Н күш әрекет етеді. A мен B нүктелері бір деңгейде деп алып, AC және BC бөліктеріне түсетін күштерді табыңдар.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

21.16. Жазықтықтағы векторлардың арасындағы бұрыштың анықтамасын қайталаңдар.

21.17. Жазықтықтағы векторлардың арасындағы бұрыштың анықтамасына сәйкес кеңістіктегі векторлардың арасындағы бұрыш ұғымын анықтаңдар.

21.18. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында $\overrightarrow{AD_1}$ және $\overrightarrow{CD_1}$ векторларының арасындағы бұрышты табыңдар.

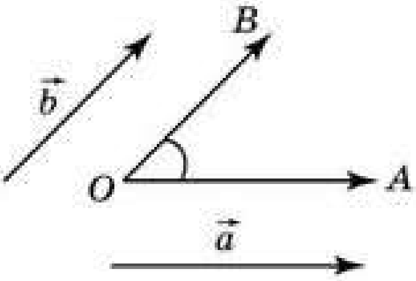
21.19. Жазықтықтағы векторлардың скаляр көбейтіндісінің анықтамасына сәйкес кеңістіктегі векторлардың скаляр көбейтіндісін анықтаңдар.

21.20. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында $\overrightarrow{AD_1}$ және $\overrightarrow{CD_1}$ векторларының скаляр көбейтіндісін табыңдар.

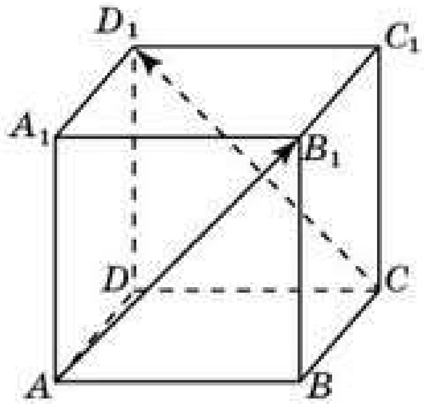
§ 22. Векторлардың арасындағы бұрыш. Векторлардың скаляр көбейтіндісі

Кеңістіктегі векторлардың арасындағы бұрыш жазықтықтағы сияқты анықталады.

$\vec{a}$ және $\vec{b}$ нөлдік емес екі вектор болсын. Оларды O нүктесінен $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ болатындай етіп саламыз (22.1-сурет). Егер осы векторлар бірдей бағытталмаған болса, онда OA және OB сәулелерінің арасындағы бұрыш $\vec{a}$ және $\vec{b}$ *векторларының арасындағы бұрыш* деп аталады.



22.1-сурет



22.2-сурет

Бірдей бағытталған векторлардың арасындағы бұрыш $0°$-қа тең деп есептеледі.

Егер екі вектордың арасындағы бұрыш тік болса, онда *екі вектор перпендикуляр* деп аталады.

1-мысал. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында (22.2 -сурет) $\overline{AB_1}$ және $\overline{CD_1}$ векторларының арасындағы бұрышты табыңдар.

Шешуі. $\overline{AB_1}$ және $\overline{CD_1}$ векторларының арасындағы бұрыш $\overline{AB_1}$ және $\overline{BA_1}$ векторларының арасындағы бұрышқа тең. Демек, $90°$-қа тең болады.

Кеңістіктегі векторлардың скаляр көбейтіндісі жазықтықтағы сияқты анықталады.

Нөлдік емес *екі вектордың скаляр көбейтіндісі* деп олардың ұзындықтары мен арасындағы бұрыштың косинусына көбейтіндісін айтады.

Егер екі вектордың біреуі нөлдік вектор болса, онда осы векторлардың скаляр көбейтіндісі нөлге тең деп есептеледі.

$\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының скаляр көбейтіндісі $\vec{a}\cdot\vec{b}$ деп белгіленеді. Анықтама бойынша

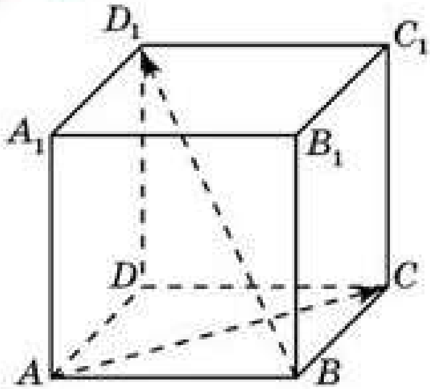
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos j,$$

мұндағы j бұрышы — $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары арасындағы бұрыш.

$\vec{a}\cdot\vec{a}$ көбейтіндісі *скаляр квадрат* деп аталады және $\vec{a}^2$ деп белгіленеді. Скаляр көбейтіндінің анықтамасынан $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ шығады.

Нөлдік емес екі вектордың арасындағы бұрыш $90°$-қа тең болса, онда олардың скаляр көбейтіндісі нөлге тең болатыны айқын, өйткені бұл жағдайда осы векторлардың арасындағы бұрыштың косинусы нөлге тең болады.

Қарама-қарсы бағытталған $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының скаляр көбейтіндісін олардың ұзындықтары арқылы өрнектеңдер.



22.3-сурет

Векторлардың скаляр көбейтіндісінің қарапайым физикалық мағынасы бар, яғни жұмыс күштің орын ауыстыруға скаляр көбейтіндісіне тең болады:

$$A = \vec{F} \cdot \vec{a} = |\vec{F}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos \varphi .$$

2-мысал. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубында (22.3-сурет) $\overline{AC}$ және $\overline{BD_1}$ векторларының скаляр көбейтіндісін табыңдар.

Шешуі. $\overline{AC}$ және $\overline{BD_1}$ векторлары перпендикуляр. Демек, олардың скаляр көбейтіндісі нөлге тең болады.

Сұрақтар

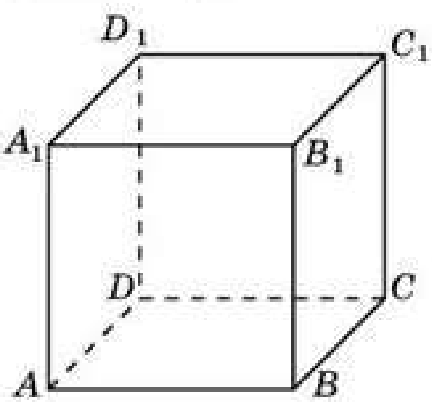
1. Векторлардың арасындағы бұрыш дегеніміз не?
2. Қандай екі вектор перпендикуляр деп аталады?
3. Екі вектордың скаляр көбейтіндісі дегеніміз не?
4. Скаляр көбейтінді қалай белгіленеді?
5. Скаляр квадрат дегеніміз не?
6. Қандай жағдайда екі вектордың скаляр көбейтіндісі нөлге тең болады?
7. Скаляр көбейтіндінің физикалық мағынасы қандай?

Есептер

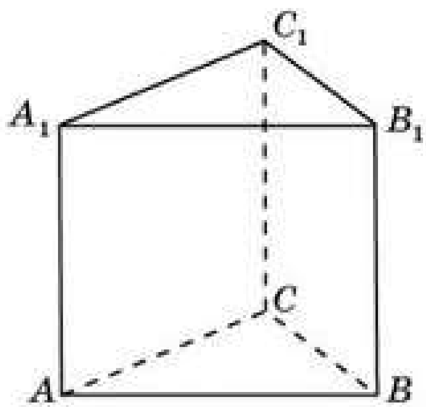
A

22.1. Векторлардың арасындағы бұрыш: а) сүйір; ә) доғал болса, олардың скаляр көбейтіндісінің таңбасы қандай болады?

22.2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында келесі векторлардың арасындағы бұрышты табыңдар (22.4-сурет): а) $\overline{AC}$ және $\overline{B_1D_1}$; ә) $\overline{AB}$ және $\overline{B_1C_1}$; б) $\overline{AB_1}$ және $\overline{BC_1}$.



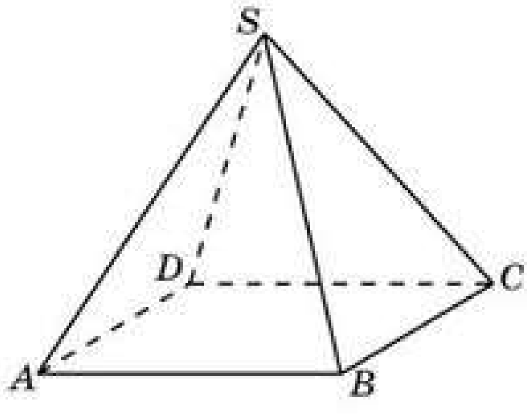
22.4-сурет



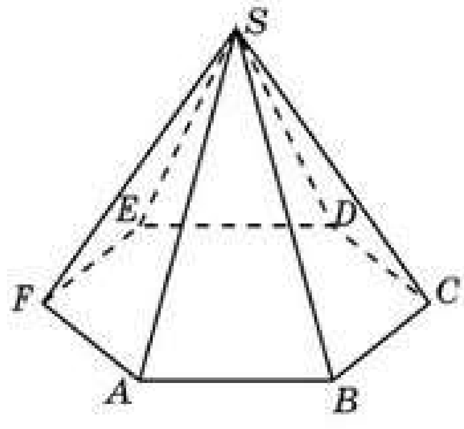
22.5-сурет

22.3. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призмада келесі векторлардың арасындағы бұрышты табыңдар (22.5-сурет): а) $\overline{AB}$ және $\overline{CC_1}$; ә) $\overline{AB}$ және $\overline{B_1C_1}$.

22.4. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең (22.6- сурет). Келесі векторлардың арасындағы бұрышты табыңдар : а) $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{SC}$; ә) $\overrightarrow{SB}$ және $\overrightarrow{SD}$.



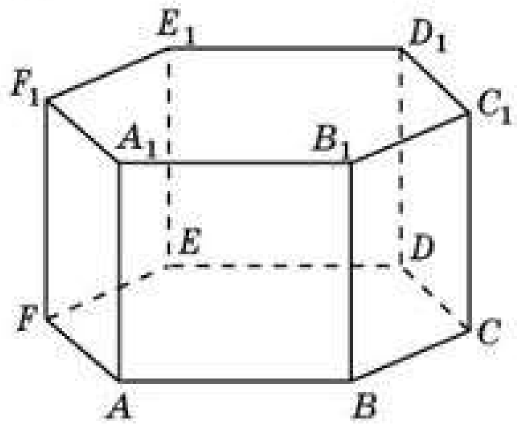
22.6-сурет



22.7-сурет

22.5. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамиданың табанының қабырғасы 1-ге тең, ал бүйір қырлары 2-ге тең (22.7- сурет). Келесі векторлардың арасындағы бұрышты табыңдар : а) $\overrightarrow{SA}$ және $\overrightarrow{SD}$; ә) $\overrightarrow{SA}$ және $\overrightarrow{BC}$.

22.6. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең (22.8 -сурет). Келесі векторлардың арасындағы бұрышты табыңдар : а) $\overrightarrow{AA_1}$ және $\overrightarrow{BC_1}$; ә) $\overrightarrow{AA_1}$ және $\overrightarrow{DE_1}$; б) $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{B_1C_1}$; в) $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{C_1D_1}$; г) $\overrightarrow{AC}$ және $\overrightarrow{B_1C_1}$; ғ) $\overrightarrow{AC}$ және $\overrightarrow{B_1D_1}$; д) $\overrightarrow{AC}$ және $\overrightarrow{B_1E_1}$.



22.8-сурет

B

22.7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубында келесі векторлардың скаляр көбейтіндісін табыңдар (22.4 -сурет): а) $\overrightarrow{AC}$ және $\overrightarrow{B_1D_1}$; ә) $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{B_1C_1}$; б) $\overrightarrow{AB_1}$ және $\overrightarrow{BC_1}$.

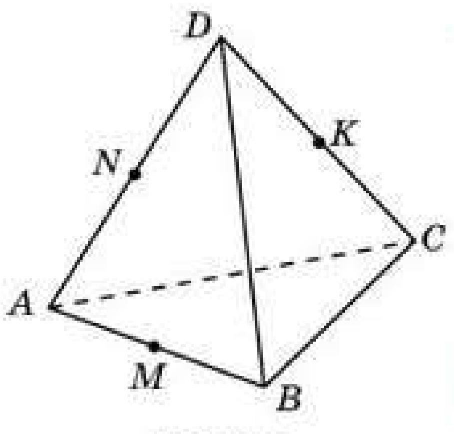
22.8. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең (22.5-сурет). Келесі векторлардың скаляр көбейтіндісін табыңдар: а) $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{CC_1}$; ә) $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{B_1C_1}$.

22.9. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең (22.6-сурет). Келесі векторлардың скаляр көбейтіндісін табыңдар: а) $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{SC}$; ә) $\overrightarrow{SB}$ және $\overrightarrow{SD}$.

22.10. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамида табанының қабырғалары 1-ге, ал бүйір қырлары 2-ге тең (22.7-сурет). Келесі векторлардың скаляр көбейтіндісін табыңдар: а) $\overline{SA}$ және $\overline{SD}$; ә) $\overline{SA}$ және $\overline{BC}$.

22.11. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең (22.8- сурет). Келесі векторлардың скаляр көбейтіндісін табыңдар: а) $\overline{AA_1}$ және $\overline{BC_1}$; ә) $\overline{AA_1}$ және $\overline{DE_1}$; б) $\overline{AB}$ және $\overline{B_1C_1}$; в) $\overline{AB}$ және $\overline{C_1D_1}$; г) $\overline{AC}$ және $\overline{B_1C_1}$; ғ) $\overline{AC}$ және $\overline{B_1D_1}$; д) $\overline{AC}$ және $\overline{B_1E_1}$.

C

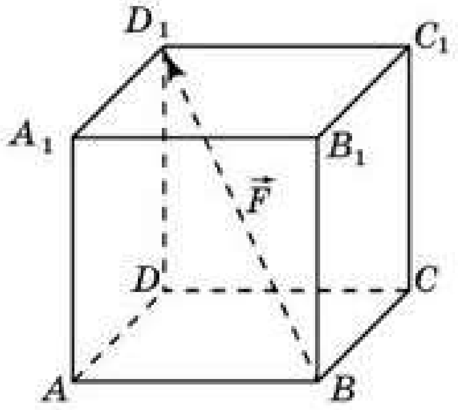


22.9-сурет

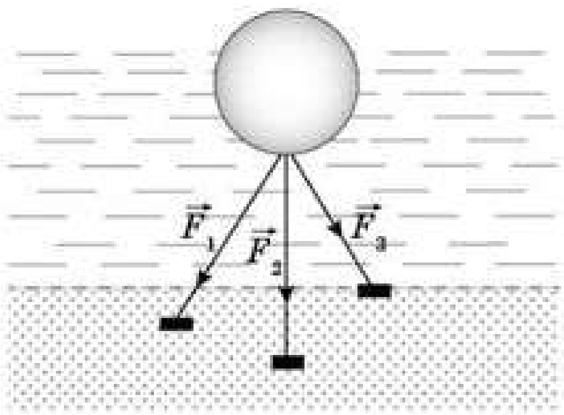
22.12. $ABCD$ дұрыс тетраэдрінің барлық қырлары 1-ге тең. M, N, K нүктелері — сәйкесінше AB, AD, CD қырларының орталары (22.9-сурет). Келесі векторлардың скаляр көбейтіндісін табыңдар: а) $\overline{AC}\cdot\overline{AB}$; ә) $\overline{AD}\cdot\overline{DB}$; б) $\overline{KN}\cdot\overline{AC}$; в) $\overline{MN}\cdot\overline{BC}$; г) $\overline{NK}\cdot\overline{BA}$; ғ) $\overline{KM}\cdot\overline{DC}$.

22.13. a жазықтығынан тыс жатқан C нүктесінен осы жазықтыққа CA перпендикуляры түсірілген. a жазықтығының кез келген B нүк тесі үшін $\overline{CA}\cdot\overline{CB}$ скаляр көбейтіндісі B нүктесінің орнына тәуелді емес екенін дәлелдеңдер.

22.14. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубында $\vec{F}$ күші арқылы нүктенің A төбесінен D төбесіне көшкен кездегі жасайтын жұмысын есептеңдер (22.10 -сурет).



22.10-сурет



22.11-сурет

22.15. Әрқайсысы 10 Н болатын күштер бір нүктеге түсірілген және олардың бағыттарының арасындағы бұрыштар 60°, 60°, 90°-қа тең. Күштердің тең әсерлі күшінің шамасын табыңдар.

22.16. Салмағы 500 кг және көлемі 0,7 м^3 болатын шар ұзындықтары бірдей үш сымарқанға бекітіліп, суда тұр (22.11-сурет). Егер кез келген екі сымарқан арасындағы бұрыш 60°-қа тең болса, әрбір сымарқанның тартылу (керілу) күшін табыңдар.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

22.17. Жазықтықтағы тікбұрышты координаталар жүйесі ұғымын қайталаңдар.

22.18. Координаталық жазықтықтағы $A_1(x_1; y_1)$ және $A_2(x_2; y_2)$ нүктелері үшін A_1A_2 кесіндісінің ортасының координаталарын көрсетіңдер.

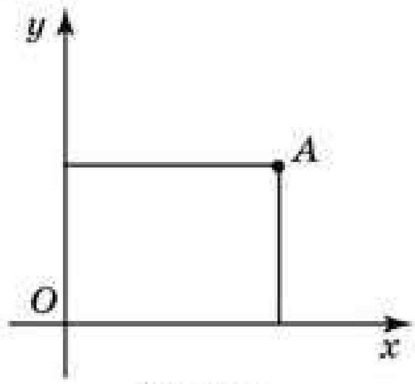
22.19. Координаталық жазықтықтағы $A_1(x_1; y_1)$ және $A_2(x_2; y_2)$ нүктелері үшін A_1A_2 кесіндісін k қатынаста бөлетін $\left(\frac{A_1A}{AA_2} = k\right)$ A нүктесінің координаталарын табыңдар.

22.20. Жазықтықтағы тікбұрышты координаталар жүйесі ұғымына ұқсас кеңістіктегі координаталар жүйесі ұғымын анықтап көріңдер .

§ 23. Кеңістіктегі тікбұрышты координаталар жүйесі

Планиметрия курсында біз жазықтықтағы тікбұрышты координаталар жүйесімен таныстық. Координаталар басы деп аталатын O нүктесі және оң бағытын көрсететін $\overline{OE}$ бірлік векторы таңдап алынған түзу *координаталық түзу* деп аталатынын еске салайық.

Жазықтықтағы тікбұрышты координаталар жүйесі деп ортақ координаталар басы болатын өзара перпендикуляр координаталық түзулердің жұбын айтады. Координаталар басы O әрпімен, ал координаталық түзулер Ox, Oy арқылы белгіленеді және олар сәйкесінше *абсцисса осі*, *ордината осі* деп аталады (23.1 -сурет).

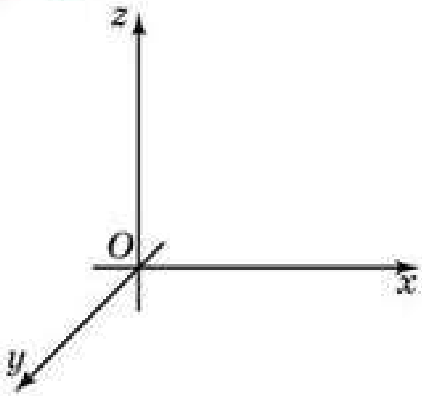


23.1-сурет

Координаталық түзудегі әрбір нүктеге осы нүктенің координатасы деп аталатын сан сәйкес келеді, ал жазықтықтағы координаталар жүйесіндегі әрбір нүктеге осы нүктенің координаталары деп аталатын (x, y) сандар жұбы сәйкес келеді.

Тікбұрышты координаталарды алғашқы рет Р.Декарт енгізген, сондықтан тікбұрышты координаталар жүйесін — *декарттық координаталар жүйесі*, ал координаталарды *декарттық координаталар* деп атайды.

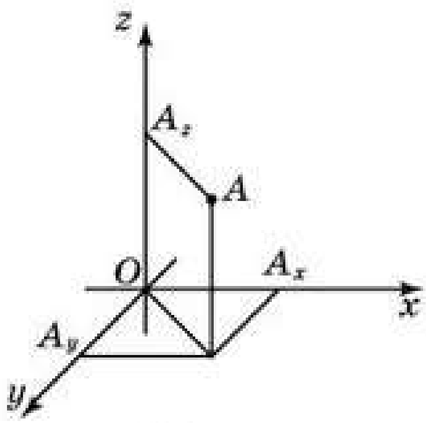
Жазықтықтағы және кеңістіктегі тікбұрышты координаталарды енгізу көптеген геометриялық есептерді алгебралық есептерге, керісінше алгебралық есептерді геометриялық есептерге көшіруге мүмкіндік берді. Осыған негізделген әдіс *координаталар әдісі* деп аталады.



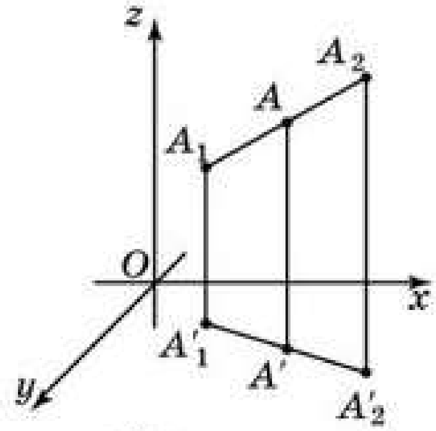
23.2-сурет

Кеңістіктегі тікбұрышты координаталар жүйесі деп ортақ координаталар басы болатын өзара перпендикуляр координаталық түзулердің үштігін айтады. Координаталар басы O әрпімен, ал координаталық түзулер Ox, Oy, Oz арқылы белгіленеді және олар сәйкесінше *абсцисса осі*, *ордината осі*, *аппликата осі* деп аталады (23.2 -сурет). Координаталық түзулер жұбы арқылы өтетін жазықтықтар *координаталық жазықтықтар* деп аталады және Oxy, Oxz, Oyz деп белгіленеді.

Кеңістіктегі тікбұрышты координаталар жүйесінде кез келген A нүктесін қарастырайық. Осы нүкте арқылы Ox осіне перпендикуляр түзу жүргіземіз және Ox осімен қиылысу нүктесін A_x арқылы белгілейміз (23.3 -сурет) . Осы нүктенің Ox осіндегі координатасы *A нүктесінің абсциссасы* деп аталады және x арқылы белгіленеді. Осыған ұқсас Oy, Oz осьтерінде A_y және A_z нүктелері анықталады, олар сәйкесінше *A нүктесінің ординатасы* мен *аппликатасы* деп аталады және сәйкесінше y пен z арқылы белгіленеді. $(x; y; z)$ сандарының үштігі *кеңістіктегі A нүктесінің координаталары* деп аталады.



23.3-сурет



23.4-сурет

$A(x; y; z)$ нүктесінің Oxy, Oxz, Oyz координаталық жазықтықтардағы ортогональ проекцияларының сәйкесінше координаталары $(x;\ y;\ 0)$, $(x;\ 0;\ z)$, $(0;\ y;\ z)$ болатынын байқаймыз.

Планиметрияда $A_1(x_1;\ y_1)$ және $A_2(x_2;\ y_2)$ нүктелері н қосатын кесіндінің ортасының координаталары $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}; \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$ екені дәлелденген болатын . Кеңістікте осыған ұқсас келесі теорема орынды болады.

Теорема . *$A_1(x_1; y_1; z_1)$, $A_2(x_2; y_2; z_2)$ нүктелерін қосатын кесіндінің ортасының координаталары* $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}; \dfrac{y_1+y_2}{2}; \dfrac{z_1+z_2}{2}\right)$ *болады* .

Дәлелдеуі . $A(x;\ y;\ z)$ нүктесі A_1A_2 кесіндісінің ортасы болсын. Осы кесіндіні Oxy жазықтығына проекциялаймыз, яғни A_1, A_2 нүктелері арқылы Oxy жазықтығына перпендикуляр түзулер жүргіземіз (23.4- сурет). Oxy жазықтығында сәйкесінше $A'_1(x_1; y_1; 0)$, $A'(x; y; 0)$, $A'_2(x_2; y_2; 0)$ нүктелерін аламыз. Ортогональ проекциялау бір түзудің бойында жатқан кесінділердің қатынасын сақтайтындықтан, A' нүктесі – $A'_1A'_2$ кесіндісінің ортасы болады. Жазықтықтағы геометрияның сәйкесінше теоремасы бойынша оның координаталары $\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}; 0\right)$ болады. Осыған ұқсас A_1A_2 кесіндісінің Oxz (немесе Oyz) жазықтығындағы ортогональ проекциясын қарастыра отырып, аламыз: $z = \frac{z_1+z_2}{2}$. Сонымен A_1A_2 кесіндісінің ортасы болатын A нүктесінің координаталары $\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}; \frac{z_1+z_2}{2}\right)$ болады. ◻

Пропорционал кесінділер туралы теореманы пайдаланып, $A_1(x_1; y_1; z_1)$, $A_2(x_2; y_2; z_2)$ нүктелерін қосатын кесінділе жататын және осы кесіндіні $\frac{A_1A}{AA_2} = k$ қатынаста бөлетін A нүктесінің координаталары $A = \left(\frac{x_1+kx_2}{1+k}; \frac{y_1+ky_2}{1+k}; \frac{z_1+kz_2}{1+k}\right)$ болатынын дәлелдеңдер.

Тарихи мәліметтер

Рене Декарт — XVII ғасырдағы белгілі ғалым математиктердің бірі. Оның зерттеу салаларының кеңдігі таң қалдырады. Р.Декарт философия, математика, физика, биология, медицина және т.б. ғылым салаларынан зерттеу нәтижелерін алған. Ол философияны шынайы әлемдегі көптеген құбылыстарға жауап беретін, табиғатты және адамның санасын басқаратын заңдылықтарды ашатын әмбебап ғылым ретінде қарастырады.

Декарт батыстың қазіргі замандық философиялық-ғылыми ойлауының негізін қалаушы тұлға ретінде толық философиялық жүйе жасады. Ол философияда дуализм (қосгегіз) мен рационализм (зердешілдік) бағытын дамытты.

Декарт картезиандық философия ілімдерінің (Картезий — Декарттың латынша есімі) негізін қалаушы болды. Ол мұнда жаратылыстану ғылымы теориясын дамытуға өзіндік көзқарасын ұсынған. Атап айтсақ, ол Күн жүйесінің пайда болуын ғылыми түрде түсіндіру мәселесін зерттеп, өзіндік болжамын берді.

1637 жылы жарық көрген кітабы Р.Декартты танымал етіп, белгілі атақ әкелді (Декарт ол кезде 41 жаста болатын). Сол кездегі әдет-ғұрыптарға сәйкес оның атауы ұзақ болған, яғни: "Ақыл-ойды бағыттауға және ғылымдағы шындықты іздеуге мүмкіндік беретін әдістер туралы ойлар. Сонымен қатар, осы әдістің қосымшасы болатын Диоптрика, Метеорлар және Геометрия". Бұл шығармада Декарт "Әдістің негізгі ережелерін" жазған, атап айтсақ:

Біріншіден, кез келген нәрсенің шындық екеніне көзің жетпей, шындық деп қабылдамау керек, яғни шапшаң шешім қабылдаудан және қате түсініктерден аулақ бол және өз пікірінді тек қана ақылға салып, ойланып, күдік туғызбайтындай анық тұжырымда.

Екіншіден, қарастырылатын өзіндік қиындықтарды тиімді шешу үшін оларды қажетінше әртүрлі бөліктерге бөліп шешу ұсынылады.

Үшіншіден, өзіндік ойлау дағдысын қадағалау, яғни қарапайымнан (жеңіл танып-білетіннен) бастап кезең-кезеңмен күрделі танымдық деңгейге дейін көтерілу, өз ойларыныңн бағытын басқаруға, тіпті бір-біріне қарсы келмейтіндер арасында тәртіпті сақтауға мүмкіндік беру.

Төртіншіден, күнделікті мәселелердің толық тізімін және жалпы шолулардың бәрін қалдырмай ештеңе жоқ екеніне сенімді етіп жасау.

Декарт "Ғылыми теорияның негізінде анық және қарапайым қағидалар болуы керек. Табиғат құбылыстарын зерделеу, сипаттау, топтастыру, эксперименттер мен математикалық есептеулерді жүргізу қажет. Табиғатты зерттеуде басқа біреуден көмек күтпей, тек өзіннің күшіне сенім арту керек", — деп баса айтқан.

Р.Декарт қазіргі заман математикасының дамуына зор үлес қосқан. Оның геометрияға қосымша болатын "...әдістер туралы ойлар" ғылыми жазбасы сол уақыттағы геометрия ғылымына жаңалықтар енгізді. Қысқа мерзімде "Геометрия" төрт басылымнан өтіп, XVII ғасырдағы әрбір математиктің қолдан түсірмейтін кітабы болды. Ол геометриялық координаталар жүйесін формулаға айналдыруы арқылы "Аналитикалық геометрияның атасы" деп аталды.

XVIII—XIX ғасырларда Декарттың координаталар әдісі негізінде көпөлшемді, кейін шексіз өлшемді геометрия пайда болды. Бүгінгі күні координаталар әдісінсіз математиканы да, физиканы да елестету мүмкін емес.

Сұрақтар

1. Қандай түзу координаталық түзу деп аталады ?
2. а) Жазықтықтағы ; ә) кеңістіктегі тікбұрышты координаталар жүйесі дегеніміз не?
3. а) Абсцисса; ә) ордината; б) аппликата осі дегеніміз не?
4. Қандай жазықтықтарды координаталық жазықтықтар деп атайды ?
5. Нүктенің: а) абсциссасы ; ә) ординатасы ; б) аппликатасы дегеніміз не?

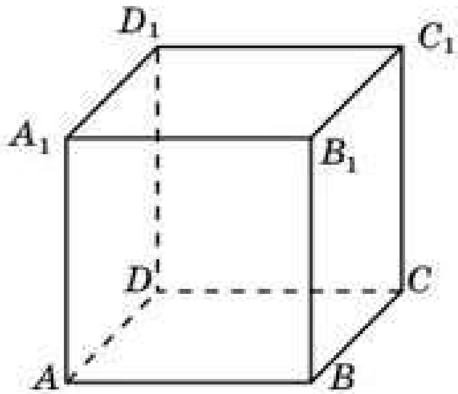
Есептер

A

23.1. Кеңістіктегі тікбұрышты координаталар жүйесінде координаталары берілген келесі нүктелерді кескіндеңдер: (1; 2; 3), (2; –1; 1), (–1; 3; 2).

23.2. $A(1;\ 3;\ 4)$ және $B(5;\ -6;\ 2)$ нүктелерінің: а) Oxy; ә) Oxz; б) Oyz жазықтықтарындағы ортогональ проекцияларының координаталарын табыңдар.

23.3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубы берілген (23.5 -сурет). Координаталар басы D нүктесінде жатыр. Координаталар осінің оң сәулелері сәйкесінше DC, DA және DD_1. Кубтың барлық төбелерінің координаталарын табыңдар.



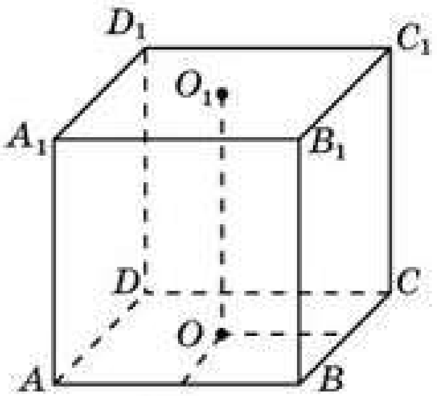
23.5-сурет

23.4. Келесі кесінділердің орталарының координаталарын табыңдар : а) AB, мұндағы $A(1;\ 2;\ 3)$ және $B(-1;\ 0;\ 1)$; ә) CD, мұндағы $C(3;\ 3;\ 0)$ және $D(3;\ -1;\ 2)$.

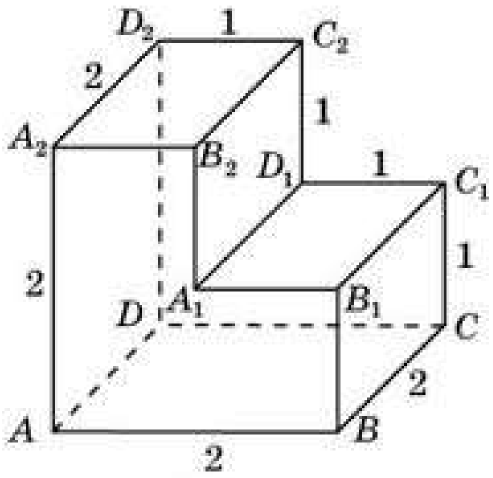
B

23.5. A нүктесі $A_1(1;\ -2;\ 3)$, $A_2(-2;\ 1;\ 0)$ нүктелерімен шектелген кесіндіде жатыр және оны 2 : 1 қатынас та бөледі, яғни $\frac{A_1A}{AA_2} = 2$. A нүктесінің координаталарын табыңдар .

23.6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубы тікбұрышты координаталар жүйесінде салынған және $ABCD$ жағының центрі — координаталар басы (23.6- сурет), қырлары сәйкесінше координаталар остеріне параллель, A төбесінің координаталары $(-1;\ 1;\ 0)$. Кубтың қалған төбелерінің координаталарын табыңдар.



23.6-сурет

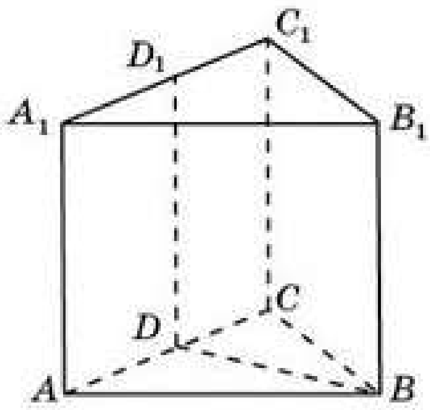


23.7-сурет

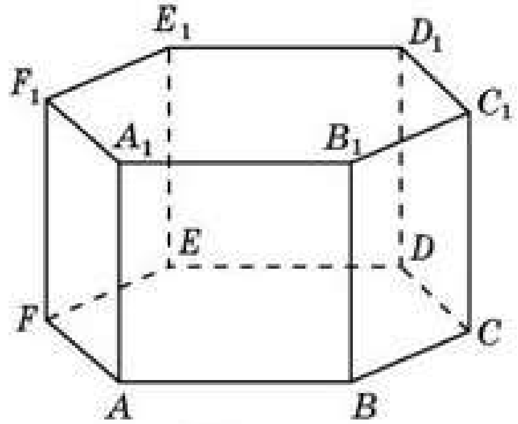
23.7. Көпжақтың жақтары тік бұрышы бар көпбұрыштар болады (23.7- сурет). D төбесі — координаталар басы, DC, DA, DD_2 кесінділері сәйкесінше Ox, Oy және Oz координаталар осінде жатыр. Көпжақтың төбелерінің координаталарын табыңдар.

23.8. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. D және D_1 — сәйкесінше AC және A_1C_1 қырларының орталары (23.8- сурет). D нүктесі — координат алар басы , DB, DA, DD_1 кесінділері сәйкесінше Ox, Oy және Oz координаталар осінде жатыр. Призманың төбелерінің координаталарын табыңдар.

23.9. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. E төбесі — координаталар басы , ED, EA, EE_1 кесінділері сәйкесінше Ox, Oy және Oz координаталар осінде жатыр (23.9-сурет). Призманың төбелерінің координаталарын табыңдар .



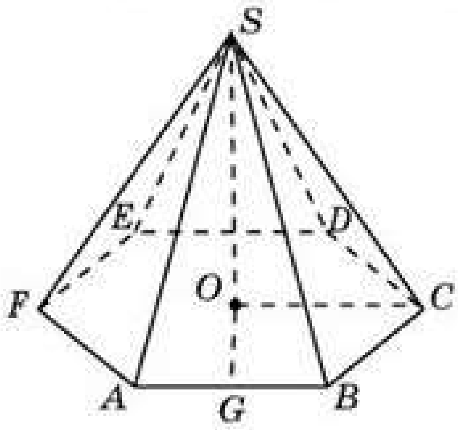
23.8-сурет



23.9-сурет

23.10. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамида табанының қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең. O нүктесі — табанының центрі, G нүктесі — AB қырының ортасы , OC, OG, OS кесінділері сәйкесінше Ox , Oy және Oz координаталар осінде жатыр (23.10-сурет). Пирамида ның төбелерінің координаталарын табыңдар.

23.11. Кеңістіктегі: а) бірінші координатасы нөлге тең; ә) екінші координатасы нөлге тең; б) үшінші координатасы нөлге тең; в) бірінші және екінші координаталары нөлге тең; г) бірінші және үшінші координаталары нөлге тең; ғ) екінші және үшінші координаталары нөлге тең; д) барлық координаталары нөлге тең нүктелердің геометриялық орны нені береді?



23.10-сурет

23.12. $A(-1;\ 2;\ 3)$ нүктесінен келесі жазықтыққа дейінгі қашықтықты табыңдар : а) Oxy ; ә) Oxz ; б) Oyz .

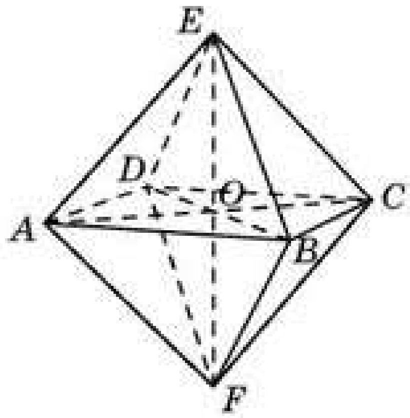
C

23.13. Октаэдрдің O центрі координаталар бас нүктесі болады. Оның екі төбесінің координаталары $A(0;\ 1;\ 0)$ және $B(1;\ 0;\ 0)$

(23.11 -сурет). Октаэдрдің қалған төбелерінің координаталарын табыңдар.

23.14. $A(x; y; z)$ нүктесінен келесі координаталық жазықтыққа дейінгі қашықтықты табыңдар : а) Oxy ; ә) Oxz ; б) Oyz .

23.15. а) Oxy , Oxz координаталық жазықтықтардан; ә) барлық үш координаталық жазықтықтардан бірдей қашықтықта жатқан кеңістіктің нүктелерінің координаталары қандай шарттарды қанағаттандырады?



23.11-сурет

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

23.16. Координаталық жазықтықтағы нүктелердің арақашықтығын табу формуласын қайталаңдар.

23.17. Координаталық жазықтықтағы нүктелердің арақашықтығын табудың формуласын пайдаланып, кеңістіктегі $A_1(x_1; y_1; z_1)$, $A_2(x_2; y_2; z_2)$ нүктелерінің арақашықтығының формуласын жазы п көріңдер.

23.18. $O(0; 0; 0)$ және $A(1; 2; 2)$ нүктелерінің арақашықтығын табыңдар.

23.19. Координаталық жазықтықтағы шеңбердің теңдеуінің формуласын пайдаланып, кеңістіктегі центрі $A_0(x_0; y_0; z_0)$ және радиусы R болатын сфераның теңдеуін жазыңдер.

23.20. Центрі $O(0; 0; 0)$ және радиусы 1-ге тең болатын сфераның теңдеуін жазыңдар.

§ 24. Екі нүктенің арақашықтығы. Сфераның теңдеуі

Планиметрия курсында жазықтықтағы $A_1(x_1; y_1)$ және $A_2(x_2; y_2)$ нүктелерінің арақашықтығы келесі формуламен өрнектелетіні дәлелденген болатын:

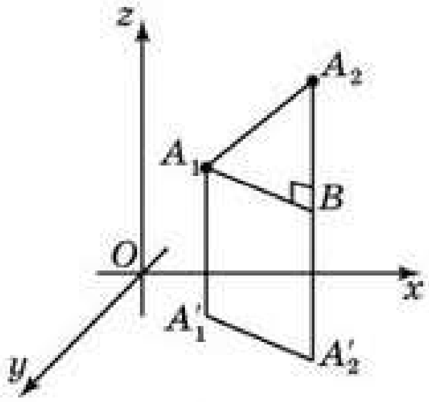
$$A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,.$$

Кеңістікте осыған ұқсас формула бар болады .

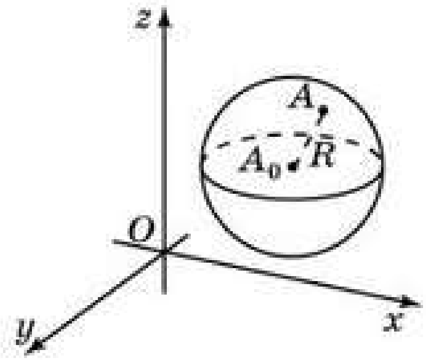
Теорема . ***Кеңістіктегі*** $A_1(x_1; y_1; z_1)$, $A_2(x_2; y_2; z_2)$ ***нүктелерінің арақашықтығы келесі формуламен өрнектеледі*** :

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,.$$

Дәлелдеуі . Кеңістіктегі $A_1(x_1; y_1; z_1)$, $A_2(x_2; y_2; z_2)$ нүктелері үшін A_1A_2 түзуін қарастырайық. Ол барлық координаталық осьтерге бір уақытта параллель бола алмайды. Мысалы, ол Oz осіне параллель емес делік және A_1', A_2' — Oxy жазықтығындағы сәйкес A_1, A_2 нүктелерінің ортогональ проекциялары болсын (24.1-сурет).



24.1-сурет



24.2-сурет

Бұл проекциялардың сәйкесінше $(x_1; y_1; 0)$, $(x_2; y_2; 0)$ координаталары бар. A_1', A_2' нүктелерінің арақашықтығы келесі формуламен өрнектеледі:

$$A_1'A_2' = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

A_1 нүктесі арқылы $A_1'A_2'$ түзуіне параллель түзу жүргіземіз және оның $A_2'A_2$ түзуімен қиылысу нүктесін B деп белгілейміз. Сонда A_1A_2B үшбұрышы тікбұрышты болады және $A_1B = A_1'A_2'$, $A_2B = |z_2 - z_1|$. Пифагор теоремасы бойынша:

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Сфераның анықтамасынан центрі $A_0(x_0; y_0; z_0)$ нүктесінде және радиусы R болатын сфераның нүктелерінің координаталары келесі теңдікті қанағаттандыратыны шығады:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

Бұл теңдік центрі $A_0(x_0; y_0; z_0)$ нүктесінде және радиусы R болатын *сфераның теңдеуі* деп аталады (24.2-сурет).

Сәйкесінше шардың нүктелерінің координаталары келесі теңсіздікті қанағаттандырады:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \le R^2.$$

Центрі $A_0(x_0; y_0; z_0)$ нүктесіндегі және радиусы R болатын шарға тиісті емес нүктелердің координаталарын қанағаттандыратын теңсіздікті жазыңдар.

Сұрақтар

1. Кеңістіктегі екі нүктенің арақашықты ғы қандай формуламен өрнектеледі?
2. Сфера нүктелерінің координаталары қандай теңдікті қанағаттандырады?
3. Қандай теңдік сфераның теңдеуін береді?
4. Шардың нүктелерінің координаталары қандай теңсіздікті қанағаттандырады?

Есептер

A

24.1. Келесі нүктеден координаталар басына дейінгі қашықтықты табыңдар : а) $A(3;\ 4;\ 0)$; ә) $B(1;\ -2;\ 2)$.

24.2. $A(3;\ 1;\ 5)$ немесе $B\ (1;\ -1;\ 6)$ нүктелерінің қайсысы координаталар басына жақын орналасқан?

24.3. Келесі нүктелердің арақашықтығын табыңдар : а) $A_1(1;\ 2;\ 3)$ және $A_2(-1;\ 1;\ 1)$; ә) $B_1(3;\ 4;\ 0)$ және $B_2(3;\ 1;\ -4)$.

24.4. Келесі теңдеумен берілген сфераның C центрінің координаталарын және R радиусын табыңдар: а) $(x-2)^2+(y+5)^2+z^2=9$; ә) $x^2+(y-6)^2+(z+1)^2=4$.

24.5. а) Центрі $O(0;\ 0;\ 0)$ нүктесінде және радиусы 1-ге тең; ә) центрі $O(1;\ -2;\ 3)$ нүктесінде және радиусы 4-ке тең сфераның теңдеуін жазыңдар.

B

24.6. Үшбұрыш төбелерінің координаталары берілген: $A(0;\ 0;\ 2)$, $B(0;\ 2;\ 0)$, $C(2;\ 0;\ 0)$. Оның түрін анықтаңдар .

24.7. $A(1;\ -2;\ 3)$ нүктесі: а) Ox; ә) Oy; б) Oz координаталық осьтен қандай қашықтықта жатады ?

24.8. Келесі координаталық жазықтықты жанайтын центрі $O(1;\ 2;\ -1)$ нүктесіндегі сфераның теңдеуін жазыңдар: а) Oxy; ә) Oxz; б) Oyz.

C

24.9. Келесі координаталық түзуді жанайтын центрі $O(3;\ -2;\ 1)$ нүктесіндегі сфераның теңдеуін жазыңдар : а) Ox; ә) Oy; б) Oz.

24.10. Үш координаталық жазықтықты жанайтын радиусы 3-ке тең сфераның теңдеуін табыңдар. Мұндай сфералардың саны нешеу ?

24.11. Үш координаталық жазықтықты жанайтын радиусы $\sqrt{2}$-ге тең сфераның теңдеуін табыңдар. Мұндай сфералардың саны нешеу ?

24.12. $x^2-4x+y^2+z^2=0$ теңдеуі кеңістіктегі сфераны беретінін дәлелдеңдер. Оның центрінің координаталары мен радиусын табыңдар.

24.13. $A(0;\ \sqrt{2};\ \sqrt{5})$ нүктесі центрі $O(3;\ 0;\ 0)$ болатын сфераның бойында жатыр. Осы сфераның теңдеуін жазыңдар.

24.14. $x^2+y^2+z^2-8x+4y+2z-4=0$ сфераға қатысты келесі нүкте қалай орналасқан : а) $A(5;\ 1;\ 2)$; ә) $B(4;\ 2;\ 2)$; б) $C(3;\ 2;\ 2)$?

24.15. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=1$, $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$ сфералары бір-біріне қатысты қалай орналасқан?

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

24.16. Координаталық жазықтықтағы вектордың координаталары анықтамасын қайталаңдар.

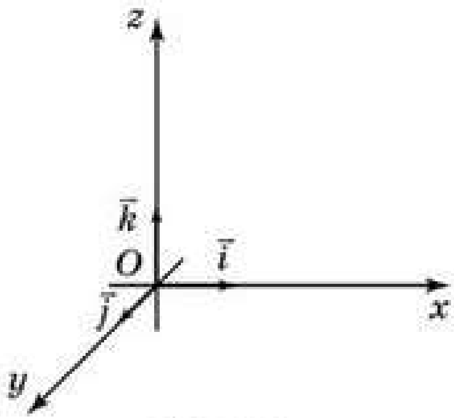
24.17. Координаталық жазықтықтағы вектордың координаталары ұғымының анықтамасына ұқсас кеңістіктегі вектордың координаталары ұғымын анықтаңдар.

24.18. $\vec{a}(x;\ y;\ z)$ векторының $|\vec{a}|$ ұзындығын оның координаталары арқылы өрнектейтін формуланы жазыңдар.

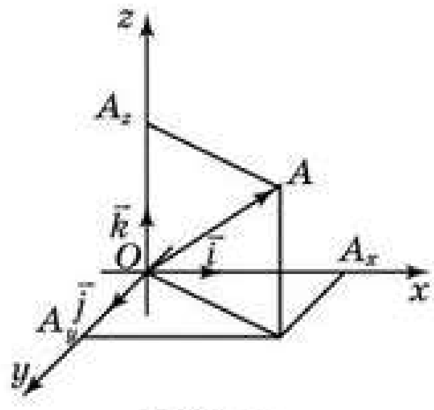
§ 25. Вектордың координаталары

Тікбұрышты координаталар жүйесінде берілген кеңістіктегі вектордың координаталары ұғымын анықтайық. Ол үшін вектордың басы координаталар басымен сәйкес келетіндей саламыз. Сонда оның ұшының координаталары *вектордың координаталары* деп аталады.

$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ векторларын сәйкесінше (1; 0; 0), (0; 1; 0), (0; 0; 1) координаталарымен белгілейік. Олардың ұзындықтары 1-ге тең, ал бағыттары сәйкес координаталар осьтерінің бағытына дәл келеді. Бұл векторларды координаталар басынан бастап саламыз және оларды *координаталық векторлар* деп атаймыз (25.1-сурет).



25.1-сурет



25.2-сурет

Теорема. ***$\vec{a}$ векторын $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ түрінде көрсетуге болатын жағдайда ғана оның координаталары $(x; y; z)$ болады.***

Дәлелдеуі. $\vec{a}$ векторын координаталар басынан бастап саламыз және оның ұшын A нүктесі арқылы белгілейміз. $\overline{OA} = \overline{OA_x} + \overline{OA_y} + \overline{OA_z}$ теңдігі орындалады (25.2-сурет). Сонда $\overline{OA_x} = x\vec{i}$, $\overline{OA_y} = y\vec{j}$, $\overline{OA_z} = z\vec{k}$ теңдігі орындалған жағдайда ғана A нүктесінің координаталары $(x; y; z)$ болады. Демек, $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. ☐

Теорема. ***$\vec{a}_1(x_1; y_1; z_1)$ және $\vec{a}_2(x_2; y_2; z_2)$ векторларының $\vec{a}_1 + \vec{a}_2$ қосындысының координаталары $(x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2)$ болады.***

Дәлелдеуі . $\vec{a}_1$ және $\vec{a}_2$ векторларын координаталық векторлар бойынша жіктейміз:

$$\vec{a}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k},\quad \vec{a}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}.$$

Сонда $\vec{a}_1 + \vec{a}_2$ қосындысы үшін келесі теңдік орын алады:

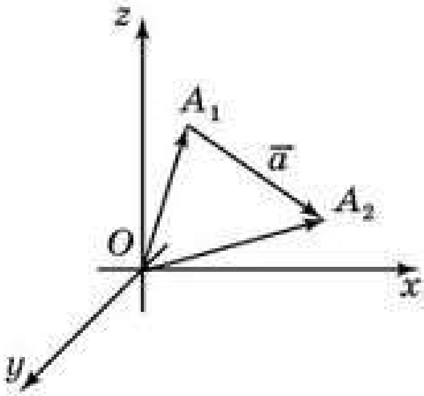
$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} + (z_1 + z_2)\vec{k},$$

осыдан $(x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2)$ сандарының үштігі $\vec{a}_1 + \vec{a}_2$ векторының координаталары болып табылады.

Векторды санға көбейткенде оның координаталары осы санға көбейтілетінін дәлелдеңдер. Осыдан $\vec{a}_1(x_1; y_1; z_1)$ және $\vec{a}_2(x_2; y_2; z_2)$ векторларының $\vec{a}_2 - \vec{a}_1$ айырмасы $(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ координаталарына ие екенін шығарыңдар.

Енді басы мен ұшының координаталары берілген вектордың координаталары қалай табылатынын қарастырайық.

$\vec{a}$ векторының басы $A_1(x_1; y_1; z_1)$ және ұшы $A_2(x_2; y_2; z_2)$ нүктелері нде болсын (25.3-сурет). Сонда оны $\vec{a} = \overline{A_1A_2} = \overline{OA_2} - \overline{OA_1}$ векторларының айырмасы ретінде көрсетуге болады, яғни координаталары: $(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$.



25.3-сурет

$\vec{a}(x; y; z)$ векторының ұзындығы координаталары арқылы келесі формуламен өрнектеледі:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Егер $\overline{A_1A_2}$ векторының басы мен ұшының координаталары $A_1(x_1; y_1; z_1)$, $A_2(x_2; y_2; z_2)$ нүктелерінде берілсе, онда оның ұзындығы келесі формуламен өрнектеледі :

$$|\overline{A_1A_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Нөлдік емес *екі вектордың скаляр көбейтіндісі* деп олардың ұзындықтары мен арасындағы бұрыштың косинусына көбейтіндісін айтатынын еске салайық.

Егер бір вектор нөлдік вектор болса, онда осы векторлардың скаляр көбейтіндісі нөлге тең деп есептеледі.

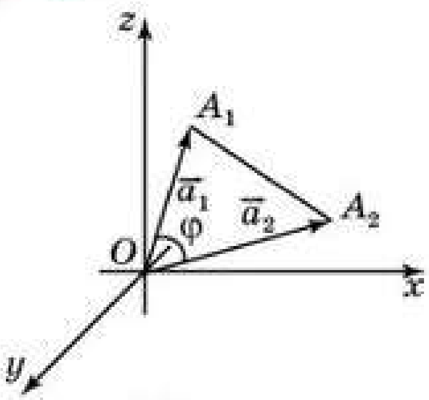
$\vec{a}_1$ және $\vec{a}_2$ векторларының скаляр көбейтіндісі $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2$ деп белгіленеді . Анықтама бойынша

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = |\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2| \cdot \cos j,$$

мұндағы j бұрыш — $\vec{a}_1$ және $\vec{a}_2$ векторларының арасындағы бұрыш.

$\vec{a} \cdot \vec{a}$ көбейтіндісі *скаляр квадрат* деп аталады және $\vec{a}^2$ деп белгіленеді. Скаляр көбейтіндінің анықтамасынан $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ шығады.

Векторлардың скаляр көбейтіндісін олардың координаталары арқылы өрнектейік . $\vec{a}_1(x_1; y_1; z_1)$ және $\vec{a}_2(x_2; y_2; z_2)$ векторлары берілсін.



25.4-сурет

Вектордың басын координаталар басынан бастап саламыз , ал ұштарын A_1, A_2 деп белгілейміз (25.4-сурет).

Косинустар теоремасы бойынша келесі теңдікті аламыз :

$(A_1A_2)^2 = (OA_1)^2 + (OA_2)^2 - 2OA_1 \cdot OA_2 \cdot \cos j$,

яғни $(\vec{a}_1 - \vec{a}_2)^2 = \vec{a}_1^{\,2} + \vec{a}_2^{\,2} - 2\,\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2$.

Соңғы теңдіктен скаляр көбейтіндіні өрнектейміз және келесі теңдіктерді пайдаланамыз:

$$\vec{a}_1^{\,2} = |\vec{a}_1|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2;\ \vec{a}_2^{\,2} = |\vec{a}_2|^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2;$$

$$(\vec{a}_1 - \vec{a}_2)^2 = |\vec{a}_1 - \vec{a}_2|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2.$$

Сонда

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - $$
$$ - (z_1 - z_2)^2) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Сонымен келесі формуланы аламыз:

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Алынған скаляр көбейтіндінің формуласы координаталары берілген $\vec{a}_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$ және $\vec{a}_2(x_2;\, y_2;\, z_2)$ векторлардың арасындағы бұрышты табуға мүмкіндік береді. Демек, келесі формуланы алуға болады:

$$\cos j = \frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Сұрақтар

1. Вектордың координаталары дегеніміз не?
2. Қандай векторлар координаталық векторлар деп аталады ?
3. Вектордың ұзындығы координаталары арқылы қалай өрнектеледі?
4. Вектордың ұзындығы оның басы мен ұшының координаталары арқылы қалай өрнектеледі?
5. Векторлардың скаляр көбейтіндісі қалай белгіленеді?
6. Векторлардың скаляр көбейтіндісі қалай анықталады?
7. Вектордың скаляр квадраты дегеніміз не?
8. Векторлардың скаляр көбейтіндісі олардың координаталары арқылы қалай өрнектеледі?
9. Векторлардың арасындағы бұрыш олардың координаталары арқылы қалай өрнектеледі?

Есептер

A

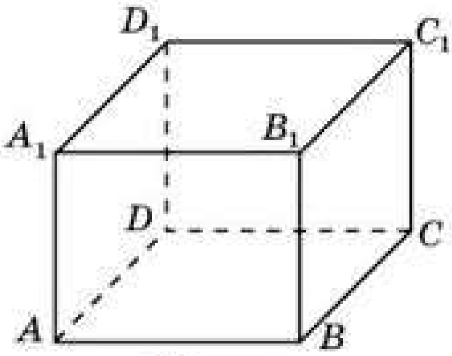
25.1. Келесі векторлардың координаталарын табыңдар : а) $\vec{a} = -2\vec{i} + 6\vec{j} + \vec{k}$; ә) $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{k}$; б) $\vec{c} = -3\vec{j} + \vec{k}$; в) $\vec{a} = 5\vec{i} - 4\vec{k}$.

25.2. $\overrightarrow{AB}$ векторының координаталарын табыңдар, мұндағы: а) $A(2;\ -3;\ 4)$, $B(-5;\ 2;\ -6)$; ә) $A(1;\ 3;\ -4)$, $B(6;\ -5;\ -8)$; б) $A(-3;\ 1;\ -10)$, $B(5;\ 2;\ -1)$.

25.3. $\overrightarrow{AB}$ векторының координаталары $(a;\ b;\ c)$. $\overrightarrow{BA}$ векторының координаталарын табыңдар.

25.4. $\vec{a}_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ және $\vec{a}_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ векторлары коллинеар. Олардың координаталары өзара қалай байланысады?

25.5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тікбұрышты параллелепипедінде D төбесі — координаталар басы, DC, DA, DD_1 қабырғалары сәйкесінше Ox, Oy, Oz координаталар осьтерінде жатыр және $DC = 4$, $DA = 3$, $DD_1 = 2$ (25.5-сурет). Келесі вектордың координаталарын табыңдар: а) $\overrightarrow{DB}$; ә) $\overrightarrow{DA_1}$; б) $\overrightarrow{DC_1}$; в) $\overrightarrow{DB_1}$; г) $\overrightarrow{AB}$; ғ) $\overrightarrow{AC}$; д) $\overrightarrow{AB_1}$; е) $\overrightarrow{AD_1}$; ж) $\overrightarrow{AC_1}$.



25.5-сурет

25.6. Вектордың координаталарын табыңдар: а) $\vec{a}+\vec{b}$; ә) $\vec{a}-\vec{b}$, мұндағы $\vec{a}(1;\ 0;\ 3)$, $\vec{b}(0;\ -2;\ 4)$.

25.7. Егер $\overrightarrow{MN}$ векторының координаталары $(2;\ -1;\ 0)$ және $M(1;\ -3;\ -5)$ болса, онда N нүктесінің координаталарын табыңдар.

25.8. Келесі вектордың ұзындығын табыңдар: а) $\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$; ә) $3\vec{j}+\vec{k}$; б) $-\vec{i}+2\vec{k}$.

25.9. $\vec{a}_1(-1;\ 2;\ 3)$ және $\vec{a}_2(2;\ -1;\ 4)$ векторларының скаляр көбейтіндісін табыңдар.

B

25.10. $\vec{a}(-1;\ 2;\ 5)$, $\vec{b}(2;\ -3;\ 4)$ векторлары берілген. Келесі векторлардың координаталарын табыңдар: а) $3\vec{a}+2\vec{b}$; ә) $-\vec{a}+3\vec{b}$.

25.11. а) Oxy координаталық жазықтығына перпендикуляр; ә) Ox координаталық түзуіне параллель болу үшін вектордың координаталары қандай шартты қанағаттандыруы керек?

25.12. Вектордың ұзындығы 3-ке тең. Вектордың координаталары өзара тең болса, онда оларды табыңдар.

25.13. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тікбұрышты параллелепипедінде D төбесі — координаталар басы, DC, DA, DD_1 қабырғалары сәйкесінше Ox, Oy, Oz координаталар осьтерінде жатыр және $DC = 4$, $DA = 3$, $DD_1 = 2$ (25.5-сурет). Келесі векторлардың координаталарын табыңдар: а) $\overrightarrow{DB}$; ә) $\overrightarrow{DA_1}$; б) $\overrightarrow{DC_1}$; в) $\overrightarrow{DB_1}$; г) $\overrightarrow{AB}$; ғ) $\overrightarrow{AC}$; д) $\overrightarrow{AB_1}$; е) $\overrightarrow{AD_1}$; ж) $\overrightarrow{AC_1}$.

25.14. $\vec{a}_1(-1;\ 2;\ 2)$ және $\vec{a}_2(3;\ 0;\ 4)$ векторларының арасындағы бұрышты табыңдар.

C

25.15. $\vec{e}(1;\ 1;\ 1)$ векторының координаталық векторлармен жасайтын бұрыштарының косинустарын табыңдар.

25.16. $\vec{e}(1;\ 1;\ 1)$ векторының Oxy, Oxz, Oyz жазықтықтарымен жасайтын бұрыштарының косинустарын табыңдар.

25.17. z-тің қандай мәнінде $\vec{a} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + z\vec{k}$ және $\vec{b} = -4\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ векторлары өзара перпендикуляр болады?

25.18. Төбелері $A(2;\ 1;\ 3)$, $B(1;\ 1;\ 4)$ және $C\ (0;\ 1;\ 3)$ болатын ABC үшбұрышында B бұрышы тік екенін дәлелдеңдер.

25.19. $A(2;\ 4;\ -4)$, $B(1;\ 1;\ -3)$, $C(-2;\ 0;\ 5)$, $D(-1;\ 3;\ 4)$ нүктелері параллелограмның төбелері болатынын дәлелдеңдер.

25.20. Дене $\vec{F}(-3;\ 4;\ 7)$ күшінің әсерінен $M(5;\ -1;\ 2)$ орыннан $N(2;\ 1;\ 3)$ орынға түзу сызықты қозғала отырып орын ауыстырғанда жұмсайтын A жұмысын есептеңдер.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

25.21. Координаталық жазықтықтағы түзудің теңдеуін қайталаңдар.

25.22. Координаталық жазықтықтағы түзудің теңдеуіне ұқсас кеңістіктегі жазықтықтың теңдеуін жазып көріңдер.

25.23. $(1;\ 0;\ 0)$, $(0;\ 1;\ 0)$, $(0;\ 0;\ 1)$ нүктелер і арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуін жазыңдар.

§ 26. Кеңістіктегі жазықтықтың теңдеуі

Планиметрия курсында жазықтықтағы түзу $ax + by + c = 0$ теңдеуімен берілетіні дәлелденген, мұндағы a, b, c — нақты сандар және a, b сандары бір уақытта нөлге тең емес. Кеңістікте осыған ұқсас теорема орын алады.

Теорема. ***Кеңістіктегі жазықтық***

$$ax + by + cz + d = 0$$

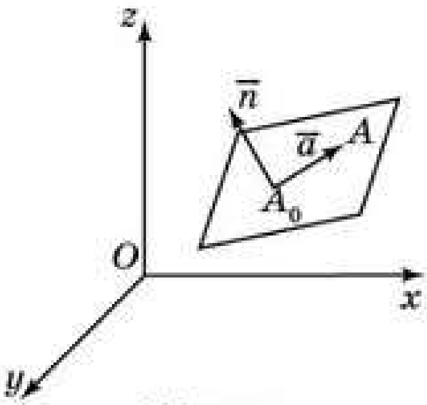
теңдеуімен беріледі, мұндағы a, b, c, d ***— нақты сандар***. a, b, c ***сандары бір уақытта нөлге тең емес және олар осы жазықтыққа перпендикуляр*** $\vec{n}$ ***векторының координаталары болады***. $\vec{n}$ векторы *нормаль вектор* деп аталады.

Дәлелдеуі. $A_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ нүктесі арқылы өтетін және $\vec{n}(a;\ b;\ c)$ векторына перпендикуляр жазықтықты қарастырайық (26.1-сурет). Осы жазықтықта жатқан кез келген $A(x;\ y;\ z)$ нүктесі үшін $\overline{A_0A}(x - x_0;\ y - y_0;\ z - z_0)$ векторы $\vec{n}$ векторына перпендикуляр болады, яғни $\vec{n} \cdot \overline{A_0A}$ скаляр көбейтіндісі нөлге тең болады. Скаляр көбейтіндіні осы векторлардың координаталары арқылы жазып, берілген жазықтықты беретін келесі теңдеуді аламыз:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,$$

$-ax_0 - by_0 - cz_0 = d$ деп белгілеп, теңдеуді түрлендіру арқылы жазықтықтың теңдеуін аламыз:

$$ax + by + cz + d = 0.$$



26.1-сурет

Кеңістіктегі жазықтықтардың өзара орналасуын олардың теңдеулері арқылы қарастырайық.

Кеңістіктегі екі жазықтықтың $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ нормаль векторлары коллинеар болса, онда олар параллель немесе беттеседі. Сондықтан қандай да бір t саны үшін келесі теңдік орындалады:

$$\vec{n}_2 = t \cdot \vec{n}_1.$$

Ал

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0\ (*)$$

теңдеулерімен берілген жазықтықтардың нормаль векторларының координаталары $(a_1; b_1; c_1)$, $(a_2; b_2; c_2)$ болады. Демек, қандай да бір t саны үшін $a_2 = ta_1$, $b_2 = tb_1$, $c_2 = tc_1$ теңдіктері орындалса, онда бұл жазықтықтар параллель немесе беттесетін болады.

Егер $d_2 = td_1$ болса, онда (*) теңдеулері бір жазықтықты анықтайды. Егер $d_2 \neq td_1$ болса, онда бұл теңдеулер параллель жазықтықтарды анықтайды. Егер жазықтықтар параллель болмаса, онда олар түзудің бойымен қиылысады және олардың арасындағы бұрышты нормаль векторлардың арасындағы бұрыш арқылы есептеуге болады.

Егер нормаль векторлардың арасындағы бұрыш сүйір немесе тік болса, онда ол жазықтықтардың арасындағы бұрышқа тең болады. Ал егер нормаль векторлар дың арасындағы бұрыш доғал болса, онда ол 180° пен жазықтықтар арасындағы бұрыштың айырымына тең болатынын өздерің тексеріңдер.

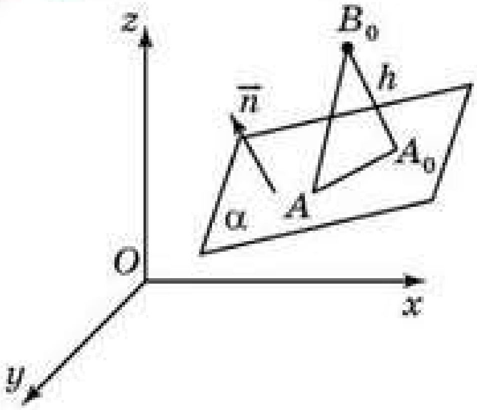
Сонымен, жазықтықтардың арасындағы j бұрышының косинусын нормаль векторлардың скаляр көбейтіндісінің формуласы арқылы есептеуге болады:

$$\cos j = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}.$$

Дербес жағдайда жазықтықтар өзара перпендикуляр болады, егер $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ векторларының скаляр көбейтіндісі нөлге тең болса, яғни келесі теңдік орындалса,

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0.$$

$B_0(x_0; y_0; z_0)$ нүктесінен $ax + by + cz + d = 0$ теңдеуімен берілген жазықтығына дейінгі қашықтықты табуға арналған формуланы шығарайық.



26.2-сурет

B_0 *нүктесінен жазықтыққа дейінгі қашықтық* деп берілген нүктеден берілген жазықтыққа түсірілген B_0A_0 перпендикулярының ұзындығын айтамыз. $\overline{A_0B_0}$ векторы $\vec{n}(a;\ b;\ c)$ нормаль векторына коллинеар (26.2-сурет).

$A(x;\ y;\ z)$ — α жазықтығының қандай да бір нүктесі болсын. Сонда

$$\cos\angle AB_0A_0 = \frac{\vec{n}\cdot\overline{B_0A}}{|\vec{n}|\cdot|\overline{B_0A}|} =$$

$$= \frac{|a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot|\overline{B_0A}|},$$

$-ax - by - cz = d$ екенін және ізделінді h қашықтығы $|\overline{B_0A}|\times$ $\times\cos\angle AB_0A_0$ тең екенін ескеріп, аламыз:

$$h = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Сұрақтар

1. Кеністіктегі жазықтық қандай теңдеумен беріледі?
2. Қандай вектор жазықтықтың нормаль векторы деп аталады?
3. Қандай жағдайда екі теңдеу кеністіктегі параллель жазықтықтарды анықтайды?
4. Қандай жағдайда екі теңдеу кеністіктегі бір жазықтықты анықтайды?
5. Қандай жағдайда екі теңдеу кеністіктегі перпендикуляр жазықтықтарды анықтайды?
6. Теңдеулері берілген екі жазықтықтың арасындағы бұрышты қалай табуға болады?

Есептер

A

26.1. Жазықтықтың нормаль векторының координаталарын табыңдар:
а) $5x - y - 1 = 0$; ә) $3x + 18z - 6 = 0$;
б) $15x + y - 8z + 14 = 0$; в) $x - 3y + 15z = 0$.

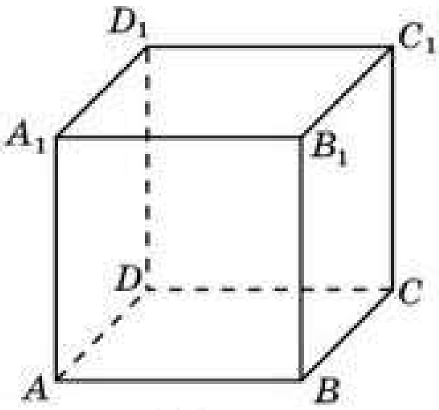
26.2. Координаталық жазықтықтың теңдеуін жазыңдар: а) Oxy; ә) Oxz; б) Oyz.

26.3. $A(3;\ 2;\ 5)$, $B(-1;\ -2;\ 2)$, $C(7;\ 0;\ -9)$ нүктелері берілген. $2x - 3y + z - 5 = 0$ жазықтығына тиісті нүктелерді анықтаңдар.

26.4. $x + 2y - 3z - 1 = 0$ жазықтығы берілген. Оның координаталар осьтерімен қиылысу нүктелерін табыңдар.

26.5. $M(-1;\ 2;\ 1)$ нүктесі арқылы өтетін және $\vec{n}$ нормаль векторының координаталары берілген жазықтықтың теңдеуін табыңдар:
а) $(0;\ -5;\ 2)$; ә) $(6;\ -1;\ 3)$; б) $(-4;\ -2;\ -1)$; в) $(-3;\ -8;\ 0)$.

26.6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубында D төбесі — координата лар басы, DC, DA, DD_1 қырлары сәйкесінше Ox, Oy, Oz координаталар осьтерінде жатыр (26.3-сурет). Кубтың жақтары жататын жазықтықтардың теңдеулерін жазыңдар.



26.3-сурет

B

26.7. $M(1;\ -2;\ 4)$ нүктесі арқылы өтетін және келесі координаталық жазықтыққа параллель жазықтықтың теңдеуін жазыңдар: а) Oxy; ә) Oxz; б) Oyz.

26.8. Келесі жазықтықтардың қайсысы өзара параллель екенін анықтаңдар:

а) $x + y + z - 1 = 0$, $x + y + z + 1 = 0$;

ә) $x + y + z - 1 = 0$, $x + y - z - 1 = 0$;

б) $-7x + y + 2z = 0$, $7x - y - 2z - 5 = 0$;

в) $2x + 4y + 6z - 8 = 0$, $-x - 2y - 3z + 4 = 0$.

26.9. Келесі жазықтықтар өзара перпендикуляр бола ма:

а) $y + z + 1 = 0$ және $y - z + 1 = 0$;

ә) $2x - 5y + z + 4 = 0$ және $3x + 2y + 4z - 1 = 0$;

б) $7x - y + 9 = 0$ және $y + 2z - 3 = 0$?

26.10. Теңдеулері берілген жазықтықтардың арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар:

а) $x + y + z + 1 = 0$, $x + y - z - 1 = 0$;

ә) $2x + 3y + 6z - 5 = 0$, $4x + 4y + 2z - 7 = 0$.

C

26.11. $H(-2;\ 4;\ -1)$ нүктесі координаталар басынан жазықтыққа түсірілген перпендикулярдың табаны болады. Осы жазықтықтың теңдеуін жазыңдар.

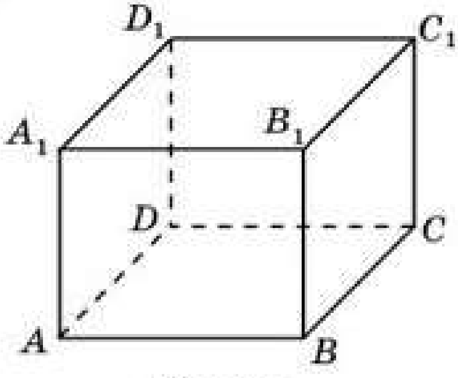
26.12. $M(1;\ 3;\ -1)$ нүктесі арқылы өтіп, келесі жазықтыққа параллель болатын жазықтықтың теңдеуін жазыңдар:

а) $3x + y - z + 5 = 0$;

ә) $x - y + 5z - 4 = 0$.

26.13. Координаталары берілген $A(a;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ b;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ c)$ нүктелері (a; b; c — нөлден өзгеше сандар) арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуін жазыңдар.

26.14. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тікбұрышты параллелепипедінде D төбесі — координаталар басы, DC, DA, DD_1 қырлары сәйкесінше Ox, Oy, Oz осьтерінде жатыр және $DC = 3$, $DA = 2$, $DD_1 = 1$



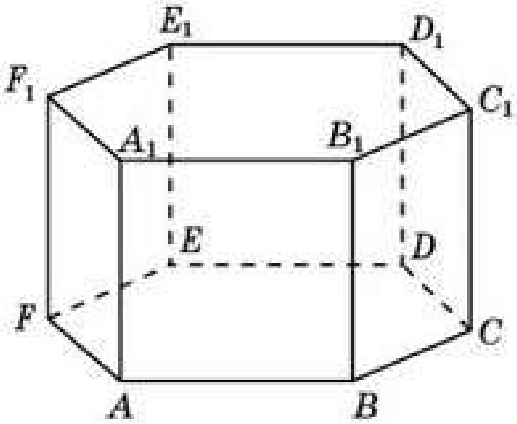
26.4-сурет

(26.4 -сурет). ACD_1 жазықтығының теңдеуін жазыңдар.

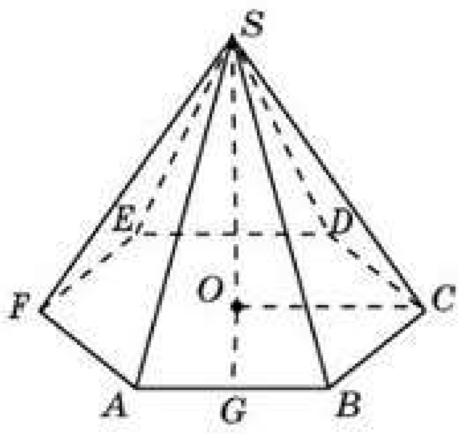
26.15. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тікбұрышты параллелепипедінде D төбесі — координаталар басы, DC, DA, DD_1 қырлары сәйкесінше Ox, Oy, Oz осьтерінде жатыр және $DC = 3$, $DA = 2$, $DD_1 = 1$. Келесі жазықтықтардың арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар: а) ABC және ACD_1; ә) ADD_1 және ACD_1; б) CDD_1 және ACD_1.

26.16. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубында D төбесі — координаталар басы, DC, DA, DD_1 қырлары сәйкесінше Ox, Oy, Oz осьтерінде жатыр. Келесі жазықтықтардың арасындағы бұрышты табыңдар: а) ABC_1 және BCD_1; ә) ABC_1 және BDA_1.

26.17. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. E төбесі — координаталар басы, ED, EA, EE_1 кесінділері сәйкесінше Ox, Oy, Oz координаталар осьтерінде жатыр (26.5 -сурет). BDD_1 және AFE_1 жазықтықтарының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.



26.5-сурет



26.6-сурет

26.18. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамиданың табанының қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең. O нүктесі — табанының центрі, G нүктесі — AB қырының ортасы . OC, OG, OS кесінділері сәйкесінше Ox, Oy, Oz координаталар осьтерінде жатыр (26.6-сурет). SAF және SBD жазықтықтарының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар .

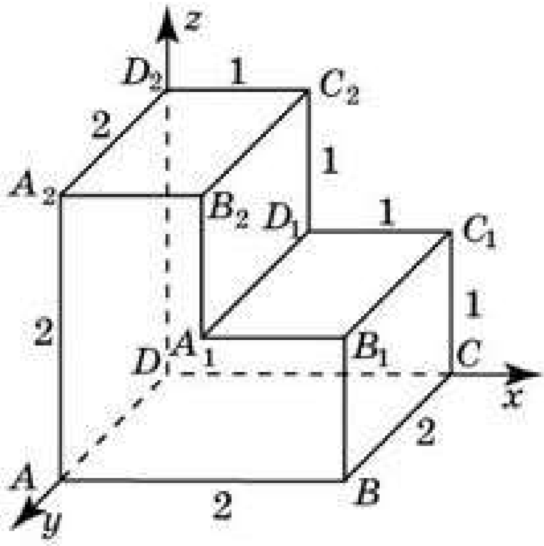
26.19. $O(0;\ 0;\ 0)$ нүктесінен $x + y + z = 1$ теңдеуімен берілген жазықтыққа дейінгі қашықтықты табыңдар.

26.20. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубында D төбесі — координаталар басы, DC, DA, DD_1 қырлары сәйкесінше Ox, Oy, Oz осьтерінде жатыр.

E және F нүктелері — BC және CC_1 қырларының орталары. D нүктесінен AEF жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

26.21. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тікбұрышты параллелепипедінде D төбесі — координаталар басы, DC, DA, DD_1 қырлары сәйкесінше Ox, Oy, Oz осьтерінде жатыр және $DC = 3$, $DA = 2$, $DD_1 = 1$. D нүктесінен ACD_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

26.22. 26.7-суреттегі көпжақтың жақтары жатқан жазықтықтардың теңдеулерін жазыңдар.



26.7-сурет

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

26.23. Координаталық жазықтықтағы түзудің параметрлік теңдеуін қайталаңдар.

26.24. Координаталық жазықтықтағы түзудің берілуіне ұқсас кеңістіктегі $A_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ нүктесі арқылы өтетін және $\vec{e}(k;\ l;\ m)$ бағыттаушы векторы бар түзудің параметрлік теңдеуін жазып көріңдер.

26.25. $O(0;\ 0;\ 0)$ нүктесі арқылы өтетін және бағыттаушы векторы бар түзудің параметрлік теңдеуін жазыңдар.

26.26. $O(0;\ 0;\ 0)$ және $A(1;\ 2;\ 3)$ нүктелері арқылы өтетін түзудің параметрлік теңдеуін жазыңдар.

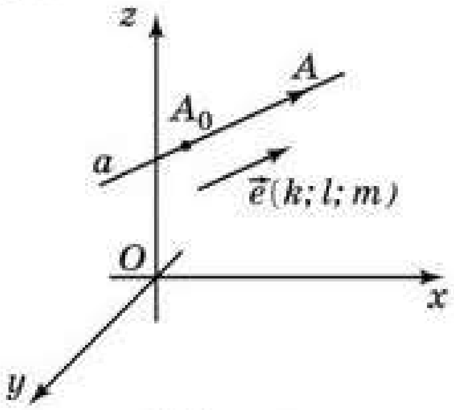
§ 27. Кеңістіктегі түзудің теңдеуі

Кеңістіктегі түзуді екі жазықтықтың қиылысу сызығы ретінде қарастыруға болатыны белгілі. Демек, кеңістіктегі түзудің теңдеуін екі жазықтықтың теңдеулерінен тұратын жүйе арқылы аналитикалық тәсілмен беруге болады:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0. \end{cases}$$

Түзудің аналитикалық берілуінің басқа да тәсілін қарастырайық. Кеңістіктегі түзуді анықтау үшін осы түзу өтетін $A_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ және $A_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ нүктелерінің жұбын немесе түзудегі $A_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ нүктесі мен осы түзуге параллель немесе түзудің бойында жатқан $\vec{e}(k;\ l;\ m)$ *бағыттаушы векторын* алсақ жеткілікті болады.

Егер түзу екі $A_1(x_1; y_1; z_1)$, $A_2(x_2; y_2; z_2)$ нүктелері арқылы берілсе, онда бағыттаушы векторы ретінде координаталары $(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ болатын $\overline{A_1A_2}$ векторын, ал A_0 нүктесі ретінде A_1, A_2 нүктелерінің біреуін алуға болады.



27.1-сурет

$A_0(x_0; y_0; z_0)$ нүктесі арқылы өтетін және $\vec{e}(k; l; m)$ бағыттаушы векторы бар a түзуінде жататын $A(x; y; z)$ нүктесінің координата ларын қанағаттандыратын шартты табайық (27.1-сурет).

Бұл жағдайда $\overline{A_0A}(x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ векторы $\vec{e}(k; l; m)$ векторына коллинеар болуы керек. Сондықтан осы векторлардың координаталары пропорционал, яғни келесі теңдіктер орындалуы қажет:

$$\begin{cases} x - x_0 = kt, \\ y - y_0 = lt, \\ z - z_0 = mt, \end{cases}$$

мұндағы t — нақты сан.

Бұл теңдеуді келесі түрде жазамыз:

$$\begin{cases} x = x_0 + kt, \\ y = y_0 + lt, \\ z = z_0 + mt. \end{cases}$$

Осы жүйе кеңістіктегі *түзудің параметрлік теңдеуі* деп аталады.

Егер бағыттаушы вектордың координаталары нөлден өзгеше болса, онда теңдеулерді сәйкес координаталарына бөлу арқылы келесі теңдеуді аламыз:

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_0}{k} = t, \\ \dfrac{y - y_0}{l} = t, \\ \dfrac{z - z_0}{m} = t. \end{cases}$$

Бұл жүйедегі t параметрін теңестіру арқылы кеңістіктегі түзудің канондық теңдеуі деп аталатын теңдеуді аламыз:

$$\frac{x - x_0}{k} = \frac{y - y_0}{l} = \frac{z - z_0}{m}.$$

Егер кеңістіктегі түзу $A_1(x_1; y_1; z_1)$, $A_2(x_2; y_2; z_2)$ нүктелері арқылы берілсе, онда бағыттаушы векторы ретінде $\overline{A_1A_2}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ векторын және A_0 нүктесі ретінде A_1 нүктесін алып, келесі түзудің теңдеуін аламыз:

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t, \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t, \\ z = z_1 + (z_2 - z_1)t. \end{cases}$$

$A_1(x_1; y_1; z_1)$, $A_2(x_2; y_2; z_2)$ нүктелері арқылы өтетін түзудің канондық теңдеуін жазыңдар.

Бағыттаушы векторлары $\vec{e}_1(k_1; l_1; m_1)$ және $\vec{e}_2(k_2; l_2; m_2)$ болатын екі түзудің арасындағы бұрыштың косинусын табатын формуланы жазыңдар.

Әдетте, физикалық есептерде t параметрі уақытты көрсетіп, түзудің параметрлік теңдеуі нүктенің қозғалыс теңдеуі ретінде қарастырылады. $t = 0$ мезгілінде оған түзу бойындағы $A_0(x_0; y_0; z_0)$ нүктесі сәйкес келеді.

t параметрі өзгергенде параметрлік теңдеуді қанағаттандыратын, координаталары $(x; y; z)$ болатын A нүктесі түзудің бойымен қозғалады. Нүктенің түзудің бойымен орын ауыстыруы бірқалыпты қозғалыс екенін дәлелдейік және оның жылдамдығын табайық.

t_1-ден t_2-ге дейінгі $T = t_2 - t_1$ уақыт аралығын қарастырайық. Нүктенің осы уақыт аралығындағы түзу бойымен қозғалысының $\overline{A_1A_2}$ орын ауыстыру векторы $(kT; lT; mT)$ координаталарына ие болады. Орын ауыстыру векторын T уақытқа бөліп, жылдамдық векторының $(k; l; m)$ координаталарын аламыз. Ол $\vec{e}$ бағыттаушы векторымен сәйкес келеді және уақыт аралығын таңдауға байланысты болмайды. Демек, нүктенің түзу бойымен қозғалысы бірқалыпты болады. Жылдамдық векторының ұзындығы нүктенің түзу бойымен қозғалыс жылдамдығын береді:

$$|\vec{e}| = \sqrt{k^2 + l^2 + m^2}.$$

Сұрақтар

1. Кеңістікте түзуді қалай беруге болады?
2. Қандай вектор түзудің бағыттаушы векторы деп аталады?
3. Түзудің қандай теңдеуі параметрлік теңдеу деп аталады?

Есептер

B

27.1. Координаталық түзулерді анықтайтын теңдеулерді жазыңдар: а) Ox; ә) Oy; б) Oz.

27.2. $A(1; -2; 3)$ нүктесі арқылы өтетін және бағыттаушы векторы $\vec{e}(2; 3; -1)$ болатын түзудің параметрлік және канондық теңдеулерін жазыңдар.

27.3. $A_1(-2; 1; -3)$ және $A_2(5; 4; 6)$ нүктелері арқылы өтетін түзудің параметрлік және канондық теңдеулерін жазыңдар.

27.4. $M(1; 2; -3)$ нүктесі арқылы өтетін және $x + y + z + 1 = 0$ жазықтығына перпендикуляр болатын түзудің параметрлік теңдеуін жазыңдар.

27.5. Келесі теңдеулер арқылы берілген түзулердің өзара орналасуын анықтаңдар:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 1 + t, \\ z = 1 + 3t; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 + t, \\ y = -8t, \\ z = 4 + 2t. \end{cases}$$

C

27.6. $A(-1; 0; 2)$ және $B(3; 1; 1)$ нүктелері арқылы өтетін түзу мен $2x - y + z - 6 = 0$ жазықтығының қиылысу нүктесінің координатасын табыңдар.

27.7. Нүкте $\vec{e}(1; 2; 3)$ векторының бағытымен түзу сызықты бірқалыпты қозғалады. $t = 0$ уақыт мезетінде оның координаталары — $(-1; 1; -2)$. $t = 4$ болғанда нүктенің координаталары қандай болады?

27.8. Материалдық нүктенің кеңістіктегі қозғалысының параметрлік теңдеуі берілген:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 2 - 2t, \\ z = -3 + 1t. \end{cases}$$

Осы нүктенің қозғалыс жылдамдығын табыңдар.

27.9. Нүкте түзу сызықты және бірқалыпты қозғалады. $t = 2$ уақыт мезетінде оның координаталары $(3; 4; 0)$, ал $t = 6$ болғандағы координаталары $(1; 2; -1)$. Нүктенің жылдамдығын табыңдар.

27.10. Бағыттаушы векторларының координаталары: а) $(1; -1; 1)$ және $(1; 1; 1)$; ә) $(1; 0; 0)$ және $(1; 1; 1)$ болатын түзулердің арасындағы бұрышты табыңдар.

27.11. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тікбұрышты параллелепипедінің D төбесі — координаталар басы, DC, DA, DD_1 қырлары сәйкесінше Ox, Oy, Oz осьтерінде жатыр және $DC = 3$, $DA = 2$, $DD_1 = 1$. AB_1 және BC_1 түзулерінің арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

1. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. Оның AB, AC, A_1B_1 қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

A. 0,5.
B. 1.
C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың бүйір қырлары 1-ге, ал табанының қабырға лары 2-ге тең. Оның SA, SB, SC қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар .

A. 0,25.
B. 0,5.
C. 1.
D. 2.

3. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. Оның B, E, E_1 төбелері арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар .

A. 0,5.
B. 1.
C. 1,5.
D. 2.

4. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамиданың табанының қабырғалары 1-ге, ал бүйір қырлары 2-ге тең. Оның S, C және F төбелері арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар .

A. 1.
B. 2.
C. $\sqrt{2}$.
D. $\sqrt{3}$.

5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубында $\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AA_1}$ векторының ұзындығын табыңдар .

A. 1.
B. 2.
C. $\sqrt{2}$.
D. $\sqrt{3}$.

6. $A(-5;6;-7)$ нүктесінің Oyz жазықтығындағы ортогональ проекциясының координаталарын табыңдар .

A. $(0;6;-7)$.
B. $(-5;0;-7)$.
C. $(-5;6;0)$.
D. $(-5;0;0)$.

7. $B(3;-8;-11)$ нүктесінен Oxy жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар .

A. –11.
B. 11.
C. 3.
D. 8.

8. $C(1;-5;6)$ нүктесі Oz осінен қандай қашықтықта жатыр ?

A. 5.
B. $2\sqrt{13}$.
C. 6.
D. $\sqrt{26}$.

9. $E(-1;0;4)$ және $F(2;-5;1)$ нүктелерінің арақашықтығын табыңдар.

A. $5\sqrt{18}$.
B. $\sqrt{51}$.
C. $\sqrt{43}$.
D. $\sqrt{59}$.

10. Егер $G(3; -2; 0)$ және $H(0; -12; 5)$ болса, онда GH кесіндісінің ортасының координаталарын табыңдар.

A. $(\frac{3}{2}; -5; 5)$. B. $(3; -7; -\frac{5}{2})$.

C. $(\frac{3}{2}; -7; \frac{5}{2})$. D. $(-3; 7; -\frac{5}{2})$.

11. $x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 4z + 1 = 0$ теңдеуімен берілген сфераның центрінің координаталарын табыңдар.

A. $(1; -1; 2)$. B. $(1; 2; -1)$.

C. $(0; -1; 2)$. D. $(0; 1; -2)$.

12. Егер $I(5; -1; 2)$ және $J((3; -2; 0)$ болса, онда $\overline{IJ}$ векторының координатасын табыңдар.

A. $(2; -1; 2)$. B. $(-2; -1; 2)$.

C. $(2; -3; 2)$. D. $(-2; -1; -2)$.

13. Егер $K(0; -1; 2)$ және $L(-3; 5; 0)$ болса, онда $\overline{KL}$ векторының ұзындығын табыңдар.

A. $\sqrt{29}$. B. 7.

C. 5. D. $2\sqrt{7}$.

14. $5\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ векторының ұзындығын табыңдар.

A. 36. B. 6.

C. $\sqrt{30}$. D. $2\sqrt{7}$.

15. $\vec{a}(-5; 6; 1)$ және $\vec{b}(0; -9; 7)$ векторларының скаляр көбейтіндісін табыңдар.

A. –52. B. 47.

C. –47. D. –56.

16. Егер $\vec{a}(0; 1; -2)$ және $\vec{b}(2; 0; 1)$ болса, онда k-ның қандай мәнінде $2\vec{a} - k\vec{b}$ және $\vec{a} + \vec{b}$ векторлары перпендикуляр болады?

A. 2. B. $3\frac{1}{2}$.

C. $-3\frac{1}{2}$. D. Шешімі жоқ.

17. $M(2; 1; m)$ нүктесі $3x - y + 2z - 1 = 0$ жазықтығында жатыр. m-ді табыңдар.

A. 3. B. –3.

C. 2. D. –2.

18. $P(3; -2; -4)$ нүктесі арқылы өтетін және $4x - 5y + 2z + 11 = 0$ жазықтығына параллель болатын жазықтықтың теңдеуін табыңдар.

A. $4x - 5y + 2z - 10 = 0$.
B. $8x - 10y + 4z + 22 = 0$.

C. $4x - 5y + 2z + 14 = 0.$
D. $4x - 5y + 2z - 14 = 0.$

19. Кеңістікте қандай фигура $y^2 + z^2 = 0$ теңдеуімен беріледі ?

A. Oyz жазықтығы .
B. Ox осі.
C. Oy және Oz осьтері .
D. Oxy және Oxz жазықтықтары .

20. Кеңістікте қандай фигура $z \geq 0$ теңсіздігімен беріледі ?

A. Oz жарты осі .
B. Oyz координаталар жазықтығымен шектелген жартыкеңістік .
C. Oxz координаталар жазықтығымен шектелген жартыкеңістік .
D. Oxy координаталар жазықтығымен шектелген жартыкеңістік .

10-СЫНЫПТЫҢ ГЕОМЕТРИЯ КУРСЫН ҚАЙТАЛАУ

БҰРЫШТАР

В

Түзулердің арасындағы бұрыш

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының AB және CB_1 түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының AB және DA_1 түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.
3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының BA_1 және CB_1 түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.
4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының BA_1 және B_1D_1 түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.
5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының BA_1 және AC түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.
6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының BA_1 және AD_1 түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.
7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының AC және BD_1 түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.
8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының AC және DB_1 түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.
9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының BC_1 және CA_1 түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.
10. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының BC_1 және DB_1 түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.
11. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының CA_1 және DC_1 түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.
12. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының BD_1 және DC_1 түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.
13. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының BA_1 және AC_1 түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.
14. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының BA_1 және DB_1 түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.
15. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының AD_1 және CA_1 түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.
16. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының AD_1 және DB_1 түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.
17. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының A_1C_1 және DB_1 түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.
18. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының A_1C_1 және BD_1 түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.

19. $ABCD$ дұрыс тетраэдрінің AB және CD түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.
20. $ABCD$ дұрыс тетраэдрінің AC және BD түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.
21. $ABCD$ дұрыс тетраэдрінің E және F нүктелері — сәйкесінше BC және BD қырларының орталары. AB және EF түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.
22. $ABCD$ дұрыс тетраэдрінің E және F нүктелері — сәйкесінше BD және CD қырларының орталары. AD және EF түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.
23. $ABCD$ дұрыс тетраэдрінің E, F, G нүктелері — сәйкесінше BC, BD, AD қырларының орталары. EFG бұрышын табыңдар.
24. $ABCD$ дұрыс тетраэдрінің E, F, G нүктелері — сәйкесінше AB, AD, CD қырларының орталары. EFG бұрышын табыңдар.
25. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. D нүктесі — BC қырының ортасы. BB_1 және AD түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.
26. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. D нүктесі — BC қырының ортасы. A_1C_1 және AD түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.
27. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. D нүктесі — BC қырының ортасы. B_1C_1 және AD түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.
28. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. D нүктесі — BC қырының ортасы. CB_1 және AD түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.
29. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. AC_1B бұрышының косинусын табыңдар.
30. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. SB және AC түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.
31. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. E, F нүктелері — сәйкесінше AB, BC қырларының орталары. SA және EF түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.
32. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. E нүктесі — SC қырының ортасы. AD және BE түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.
33. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. ABD_1 бұрышын табыңдар.
34. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. ABE_1 бұрышының тангенсін табыңдар.
35. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. AC және B_1F_1 түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.

36. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. AC және B_1D_1 түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.

37. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. AB және CF_1 түзулерінің арасындағы бұрыштың тангенсін табыңдар.

38. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. ACD_1 бұрышын табыңдар.

39. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. AC_1D_1 бұрышын табыңдар.

40. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. CC_1 және BE_1 түзулерінің арасындағы бұрыштың тангенсін табыңдар.

41. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BF_1 және CC_1 түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.

42. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BA_1 және B_1E түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.

43. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. AC және DF_1 түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.

44. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамида табанының қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең. SA және BC түзулерінің арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

45. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамида табанының қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең. G нүктесі — SD қырының ортасы. AG және BC түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.

46. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамида табанының қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең. SA және BF түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.

47. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамида табанының қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең. SA және CE түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.

48. Октаэдрдің айқас қырларының арасындағы бұрышты табыңдар.

Түзу мен жазықтықтың арасындағы бұрыш

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының AC түзуі мен BCD_1 жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.

2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының BD түзуі мен BCD_1 жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.

3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының DA_1 түзуі мен BCD_1 жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар .

4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының AD_1 түзуі мен BCD_1 жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.
5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының A_1C_1 түзуі мен BCD_1 жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар .
6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының BC_1 түзуі мен BCD_1 жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.
7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының AB_1 түзуі мен ABC_1 жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.
8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының AC түзуі мен ABC_1 жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.
9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының AB_1 түзуі мен BDD_1 жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.
10. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының BC_1 түзуі мен BDD_1 жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.
11. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының CA_1 түзуі мен AB_1D_1 жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.
12. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының BD_1 түзуі мен ACB_1 жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.
13. $ABCD$ тетраэдрінің барлық қырлары 1-ге тең. E нүктесі — AD қырының ортасы. AD түзуі мен BCE жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.
14. $ABCD$ тетраэдрінің барлық қырлары 1-ге тең. E нүктесі — AD қырының ортасы. AB түзуі мен BCE жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.
15. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. SA түзуі мен SBD жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.
16. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. AB түзуі мен SBD жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.
17. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамиданың табанының қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең. SH — биіктігі. SH түзуі мен SBC жазықтығының арасындағы бұрыштың тангенсін табыңдар.
18. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BE_1 түзуі мен ABC жазықтығының арасындағы бұрыштың тангенсін табыңдар .
19. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BD_1 түзуі мен ABC жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.
20. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. AB түзуі мен BCC_1 жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.

21. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. AF түзуі мен BCC_1 жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.

22. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BF түзуі мен BCC_1 жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.

23. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BE түзуі мен BCC_1 жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.

24. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BD түзуі мен BCC_1 жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.

25. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. FB_1 түзуі мен BCC_1 жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.

26. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. AB түзуі мен BDD_1 жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.

27. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BA_1 түзуі мен BDD_1 жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.

28. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. FB түзуі мен BDD_1 жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.

29. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. AF түзуі мен BDD_1 жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.

30. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. AB түзуі мен BEE_1 жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.

31. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. AD түзуі мен BEE_1 жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.

32. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BB_1 түзуі мен BCE_1 жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.

33. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BF түзуі мен BCE_1 жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.

34. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. CC_1 түзуі мен BDE_1 жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.

35. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. AB түзуі мен BDE_1 жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.

Екі жазықтықтың арасындағы бұрыш

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубындағы ABC_1 және BCC_1 жазықтықтарының арасындағы бұрышты табыңдар.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубындағы CDD_1 және BCD_1 жазықтықтарының арасындағы бұрышты табыңдар.
3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубындағы AB_1C_1 және BCD_1 жазықтықтарының арасындағы бұрышты табыңдар.
4. $ABCD$ дұрыс тетраэдрінде E нүктесі — AD қырының ортасы . ACD және BCE жазықтықтарының арасындағы бұрышты табыңдар.
5. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. E нүктесі — SC қырының ортасы. ABC және BDE жазықтықтарының арасындағы бұрышты табыңдар.
6. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамиданың SAD және SBE жазықтықтарының арасындағы бұрышты табыңдар.
7. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың AFF_1 және ACC_1 жазықтықтарының арасындағы бұрышты табыңдар.
8. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың ABB_1 және AEE_1 жазықтықтарының арасындағы бұрышты табыңдар .
9. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың ACC_1 және AEE_1 жазықтықтарының арасындағы бұрышты табыңдар.
10. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың AFF_1 және BCC_1 жазықтықтарының арасындағы бұрышты табыңдар.
11. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың AFF_1 және DEE_1 жазықтықтарының арасындағы бұрышты табыңдар.
12. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың AFF_1 және BDD_1 жазықтықтарының арасындағы бұрышты табыңдар .
13. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. ABC және BDE_1 жазықтықтарының арасындағы бұрышты табыңдар.
14. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың ACC_1 және BFF_1 жазықтықтарының арасындағы бұрышты табыңдар.
15. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың ADD_1 және BFF_1 жазықтықтарының арасындағы бұрышты табыңдар.
16. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. ABC және BCE_1 жазықтықтарының арасындағы бұрышты табыңдар.
17. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BCE_1 және BCC_1 жазықтықтарының арасындағы бұрышты табыңдар.

C

Түзулердің арасындағы бұрыш

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының AB және CA_1 түзулерінің арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының AB және DB_1 түзулерінің арасындағы бұрыштың тангенсін табыңдар.
3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының BD_1 және DB_1 түзулерінің арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.
4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының AC_1 және CA_1 түзулерінің арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.
5. $ABCD$ дұрыс тетраэдрінде E нүктесі — AD қырының ортасы . AB және CE түзулерінің арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.
6. $ABCD$ дұрыс тетраэдрінде E нүктесі — BC қырының ортасы. AB және DE түзулерінің арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.
7. $ABCD$ дұрыс тераэдрінде E, F нүктелері — сәйкесінше AB және BC қырларының орталары. EDF бұрышының косинусын табыңдар.
8. $ABCD$ дұрыс тетраэдрінде E нүктесі — AD қырының ортасы. BEC бұрышының косинусын табыңдар.
9. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. AB және CB_1 түзулерінің арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.
10. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. AB_1 және BC_1 түзулерінің арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.
11. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. E нүктесі — SC қырының ортасы. SA және BE түзулерінің арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.
12. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. E нүктесі — SC қырының ортасы. ABE бұрышының косинусын табыңдар.
13. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. E, F нүктелері — сәйкесінше SC және SD қырларының орталары . BEF бұрышының косинусын табыңдар.
14. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. E, F нүктелері — сәйкесінше SC және SD қырларының орталары . AF және BE түзулерінің арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.
15. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. E, F нүктелері — сәйкесінше SC және SD қырларының орталары . AF және BE түзулерінің арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

16. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. DE және BF_1 түзулерінің арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

17. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. AB және CD_1 түзулерінің арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

18. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. AB және CE_1 түзулерінің арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

19. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. DF және CE_1 түзулерінің арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

20. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. DF және CF_1 түзулерінің арасындағы бұрыштың синусын табыңдар.

21. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. AC және DE_1 түзулерінің арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

22. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BA_1 және CB_1 түзулерінің арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

23. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BA_1 және DC_1 түзулерінің арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

24. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BA_1 және DB_1 түзулерінің арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

25. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BA_1 және FC_1 түзулерінің арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

26. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BA_1 және FB_1 түзулерінің арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

27. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BA_1 және CD_1 түзулерінің арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

28. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. AC_1 және BD_1 түзулерінің арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

29. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. AC_1 және BE_1 түзулерінің арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

30. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамиданың табанының қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең. SA және DE түзулерінің арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

31. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамиданың табанының қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең. SA және BD түзулерінің арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

32. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамиданың табан қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең. SA және BE түзулерінің арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

Түзу мен жазықтықтың арасындағы бұрыш

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының BD_1 түзуі мен ABC жазықтығының арасындағы бұрыштың синусын табыңдар.

2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының DB_1 түзуі мен ADD_1 жазықтығының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының AC_1 түзуі мен BCD_1 жазықтығының арасындағы бұрыштың тангенсін табыңдар.

4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының DB_1 түзуі мен ABC_1 жазықтығының арасындағы бұрыштың тангенсін табыңдар.

5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының CA_1 түзуі мен BDD_1 жазықтығының арасындағы бұрыштың тангенсін табыңдар.

6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының BC түзуі мен AB_1D_1 жазықтығының арасындағы бұрыштың синусын табыңдар.

7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының CC_1 түзуі мен AB_1D_1 жазықтығының арасындағы бұрыштың синусын табыңдар.

8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының CD түзуі мен AB_1D_1 жазықтығының арасындағы бұрыштың синусын табыңдар.

9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының AC түзуі мен AB_1D_1 жазықтығының арасындағы бұрыштың синусын табыңдар.

10. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының BA_1 түзуі мен AB_1D_1 жазықтығының арасындағы бұрыштың синусын табыңдар.

11. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының CB_1 түзуі мен AB_1D_1 жазықтығының арасындағы бұрыштың синусын табыңдар.

12. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының BD_1 түзуі мен AB_1D_1 жазықтығының арасындағы бұрыштың синусын табыңдар.

13. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының DD_1 түзуі мен ACB_1 жазықтығының арасындағы бұрыштың синусын табыңдар.

14. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының A_1D_1 түзуі мен ACB_1 жазықтығының арасындағы бұрыштың синусын табыңдар.

15. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының C_1D_1 түзуі мен ACB_1 жазықтығының арасындағы бұрыштың синусын табыңдар.

16. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының BA_1 түзуі мен ACB_1 жазықтығының арасындағы бұрыштың синусын табыңдар.

17. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының B_1D_1 түзуі мен ACB_1 жазықтығының арасындағы бұрыштың синусын табыңдар.

18. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының CA_1 түзуі мен ACB_1 жазықтығының арасындағы бұрыштың синусын табыңдар.

19. $ABCD$ дұрыс тетраэдрінде AD түзуі мен ABC жазықтығының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

20. $ABCD$ дұрыс тетраэдрінде E нүктесі — AB қырының ортасы. DE түзуі мен ABC жазықтығының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

21. $ABCD$ дұрыс тетраэдрінде E нүктесі — CD қырының ортасы. AE түзуі мен ABC жазықтығының арасындағы бұрыштың синусын табыңдар.

22. $ABCD$ дұрыс тетраэдрінде E нүктесі — BCD үшбұрышының медианаларының қиылысу нүктесі. AE түзуі мен ABC жазықтығының арасындағы бұрыштың синусын табыңдар.

23. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BA_1 түзуі мен BCC_1 жазықтығының арасындағы бұрыштың синусын табыңдар.

24. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. E нүктесі — B_1C_1 қырының ортасы. AE түзуі мен ABC жазықтығының арасындағы бұрыштың тангенсін табыңдар.

25. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. AA_1 түзуі мен AB_1C_1 жазықтығының арасындағы бұрыштың тангенсін табыңдар.

26. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. A_1B_1 түзуі мен AB_1C_1 жазықтығының арасындағы бұрыштың синусын табыңдар.

27. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BA_1 түзуі мен AB_1C_1 жазықтығының арасындағы бұрыштың синусын табыңдар.

28. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. E нүктесі — SB қырының ортасы. AE түзуі мен SBD жазықтығының арасындағы бұрыштың синусын табыңдар.

29. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. AB түзуі мен SBC жазықтығының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

30. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. AC түзуі мен SBC жазықтығының арасындағы бұрыштың синусын табыңдар.

31. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. E нүктесі — AD қырының ортасы. SE түзуі мен SBC жазықтығының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

32. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. SE — биіктігі. SE түзуі мен SBC жазықтығының арасындағы бұрыштың синусын табыңдар.

33. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамиданың табанының қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең. AB түзуі мен SBC жазықтығының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

34. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамиданың табанының қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең. AF түзуі мен SBC жазықтығының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

35. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамиданың табанының қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең. BF түзуі мен SBC жазықтығының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

36. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамиданың табанының қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең. SA түзуі мен SBC жазықтығының арасындағы бұрыштың синусын табыңдар.

37. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамиданың табанының қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең. SF түзуі мен SBC жазықтығының арасындағы бұрыштың синусын табыңдар.

38. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BA_1 түзуі мен BCC_1 жазықтығының арасындағы бұрыштың синусын табыңдар.

39. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. AF_1 түзуі мен BCC_1 жазықтығының арасындағы бұрыштың синусын табыңдар.

40. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B_1E түзуі мен BCC_1 жазықтығының арасындағы бұрыштың синусын табыңдар.

41. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. AB түзуі мен BCE_1 жазықтығының арасындағы бұрыштың синусын табыңдар.

42. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BC_1 түзуі мен BCE_1 жазықтығының арасындағы бұрыштың синусын табыңдар.

43. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BD_1 түзуі мен BCE_1 жазықтығының арасындағы бұрыштың синусын табыңдар.

44. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B_1E түзуі мен BCE_1 жазықтығының арасындағы бұрыштың синусын табыңдар.

45. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. FC_1 түзуі мен BCE_1 жазықтығының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

Екі жазықтықтың арасындағы бұрыш

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының $A_1B_1C_1$ және BDC_1 жазықтықтарының арасындағы бұрыштың тангенсін табыңдар.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының ABC және CB_1D_1 жазықтықтарының арасындағы бұрыштың тангенсін табыңдар.
3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының BCC_1 және CB_1D_1 жазықтықтарының арасындағы бұрыштың тангенсін табыңдар.
4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының ADD_1 және BDC_1 жазықтықтарының арасындағы бұрыштың тангенсін табыңдар.
5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының ABC_1 және AB_1D_1 жазықтықтарының арасындағы бұрыштың тангенсін табыңдар.
6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының BDA_1 және BDC_1 жазықтықтарының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.
7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының BA_1C_1 және AB_1D_1 жазықтықтарының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.
8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының ABC_1 және BCD_1 жазықтықтарының арасындағы бұрышты табыңдар.
9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының ABC_1 және BCD_1 жазықтықтарының арасындағы бұрышты табыңдар.
10. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының ACB_1 және BCD_1 жазықтықтарының арасындағы бұрышты табыңдар.
11. $ABCD$ дұрыс тетраэдрінің барлық қырлары 1-ге тең. ABC және ACD жазықтықтарының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.
12. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. ABC және SCD жазықтықтарының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.
13. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. SAB және SCD жазықтықтарының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.
14. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. SAC және SBC жазықтықтарының арасындағы бұрыштың тангенсін табыңдар.
15. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. SAD және SCD жақтарының арасындағы екіжақты бұрыштың косинусын табыңдар.
16. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамида табанының қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең. ABC және SEF жазықтықтарының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.
17. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамида табанының қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең. SAF және SCD жазықтықтарының арасындағ ы бұрыштың косинусын табыңдар.

18. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамида табанының қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең. SAB және SAF жақтарының арасындағы екіжақты бұрыштың косинусын табыңдар.

19. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамида табанының қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең. SAF және SBC жазықтықтарының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

20. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамида табанының қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең. SBD және SDF жазықтықтарының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

21. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. ABC және BCA_1 жазықтықтарының арасындағы бұрыштың тангенсін табыңдар.

22. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. ABC және AB_1C_1 жазықтықтарының арасындағы бұрыштың тангенсін табыңдар.

23. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BCA_1 және AB_1C_1 жазықтықтарының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

24. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. ABC және AEF_1 жазықтықтарының арасындағы бұрыштың тангенсін табыңдар.

25. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. ABC және CA_1E_1 жазықтықтарының арасындағы бұрыштың тангенсін табыңдар.

26. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. ABC және BFE_1 жазықтықтарының арасындағы бұрышты табыңдар.

27. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. AFD_1 және CDF_1 жазықтықтарының арасындағы бұрышты табыңдар.

28. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. ABC және AFE_1 жазықтықтарының арасындағы бұрыштың тангенсін табыңдар.

29. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. ABC және BFD_1 жазықтықтарының арасындағы бұрыштың тангенсін табыңдар.

30. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. AFE_1 және CDE_1 жазықтықтарының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

31. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. AFE_1 және BCD_1 жазықтықтарының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

32. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. ACB_1 және DFE_1 жазықтықтарының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.
33. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BCC_1 және AFE_1 жазықтықтарының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

АРАҚАШЫҚТЫҚ

B

Нүктеден түзуге дейінгі қашықтық

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының B нүктесінен AC түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының B нүктесінен AB_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының B нүктесінен CB_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының B нүктесінен A_1D_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының B нүктесінен C_1D_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының B нүктесінен DD_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының B нүктесінен A_1C_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының B нүктесінен DA_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының B нүктесінен DC_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
10. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен AB_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
11. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен CB_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
12. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен A_1C_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
13. $ABCD$ дұрыс тетраэдрінің барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен CD түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
14. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. S нүктесінен BC түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
15. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен SA түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
16. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен SC түзуіне дейінг і қашықтықты табыңдар.

17. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен AC түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
18. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен SD түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
19. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. S нүктесінен AC түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
20. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамиданың табанының қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең. S нүктесінен AB түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
21. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамида табанының қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең. B нүктесінен AF түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
22. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамида табанының қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең. B нүктесінен EF түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
23. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен AB_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
24. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен CB_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
25. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен AF түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
26. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен FE түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
27. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен DE түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
28. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен EE_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
29. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен E_1F_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
30. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен D_1E_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
31. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен AE түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

32. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен CE түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
33. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен AC түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
34. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен DF түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
35. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен AD түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
36. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен CF түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
37. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен AE_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
38. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен CE_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

Нүктеден жазықтыққа дейінгі қашықтық

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының B нүктесінен ACC_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының B нүктесінен AB_1C_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының B нүктесінен CDA_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
4. $ABCD$ дұрыс тетраэдрінің E нүктесі — CD қырының ортасы . D нүктесінен ABE жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
5. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен ACC_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
6. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. S нүктесінен ABC жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
7. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен SAC жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
8. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. E нүктесі — SB қырының ортасы. B нүктесінен ACE жазықтығына дейінгі қашықтықт ы табыңдар.

9. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен DEE_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
10. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен EFF_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
11. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен CDD_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
12. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен AFF_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
13. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен CFF_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
14. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен ADD_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
15. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен ACC_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
16. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен DFF_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
17. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен AED_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
18. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен CEF_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

Екі түзудің арақашықтығы

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының AB және CD_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының AB және DC_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының AB және A_1C_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының AB және B_1D_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының AB және C_1D_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.

6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының AB және CB_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының AB және DA_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының BA_1 және DC_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
9. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамида табанының қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең. BC және EF түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
10. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. AB және B_1C_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
11. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BC және A_1C_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
12. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BC және C_1D_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
13. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BC және D_1E_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
14. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BC және E_1F_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
15. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BC және A_1F_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
16. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BC және A_1B_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
17. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BC және EF түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
18. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BB_1 және DD_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
19. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BB_1 және EE_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
20. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BA_1 және DE_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
21. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BC_1 және FE_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.

C

Нүктеден түзуге дейінгі қашықтық

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының B нүктесінен AC_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының B нүктесінен CA_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының B нүктесінен DB_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

4. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен AC_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
5. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамида табанының қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең. S нүктесінен BF түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
6. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамида табанының қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең. S нүктесінен BE түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
7. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамида табанының қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең. B нүктесінен SA түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
8. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамида табанының қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең. B нүктесінен SD түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
9. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамида табанының қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең. B нүктесінен SE түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
10. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен A_1F_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
11. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен C_1D_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
12. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен C_1E_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
13. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен A_1E_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
14. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен C_1F_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
15. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен A_1D_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
16. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен D_1F_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
17. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен A_1C_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

18. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен FE_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
19. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен DE_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
20. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен AC_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
21. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен CA_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
22. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен AD_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
23. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен CF_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
24. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен CD_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
25. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен FD_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
26. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен DF_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
27. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен FC_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
28. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен DA_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
29. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен FA_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
30. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен DC_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

Нүктеден жазықтыққа дейінгі қашықтық

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының B нүктесінен ACB_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының B нүктесінен DA_1C_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының B нүктесінен ACD_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының B нүктесінен AB_1D_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының B нүктесінен CB_1D_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
6. $ABCD$ дұрыс тетраэдрінің D нүктесінен ABC жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
7. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен ACB_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
8. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен AB_1C_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
9. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен CA_1B_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
10. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен SAD жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
11. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен SCD жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
12. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. E нүктесі — SD қырының ортасы. B нүктесінен ACE жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
13. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамида табанының қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең. S нүктесінен ABC жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
14. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамида табанының қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең. B нүктесінен SEF жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
15. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамида табанының қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең. B нүктесінен SDE жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
16. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамида табанының қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең. B нүктесінен SAF жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
17. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамида табанының қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең. B нүктесінен SCD жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
18. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамида табанының қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең. B нүктесінен SAD жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

19. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамида табанының қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең. B нүктесінен SCF жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
20. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамида табанының қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең. B нүктесінен SAE жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
21. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамида табанының қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең. B нүктесінен SCE жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
22. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамида табанының қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең. B нүктесінен SAC жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
23. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамида табанының қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең. B нүктесінен SDF жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
24. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен DEA_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
25. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен EFB_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
26. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен CFA_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
27. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен ADC_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
28. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен DEF_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
29. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен EFA_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
30. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен ACB_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
31. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен DFA_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
32. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен DFB_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

33. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен CFE_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
34. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен ADE_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
35. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен ACD_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
36. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен DFE_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
37. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен ACE_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
38. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен AEF_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
39. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен CED_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

Екі түзудің арақашықтығы

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының AB және CA_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының AB және DB_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының BA_1 және CB_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының BA_1 және AC түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының BA_1 және B_1D_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының BA_1 және AD_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының BA_1 және AC_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының BA_1 және DB_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
9. $ABCD$ бірлік тетраэдрінің AD және BC түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
10. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. SB және AC түзулерінің арақашықтығын табыңдар.

11. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. SB және AD түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
12. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. SB және CD түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
13. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамида табанының қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең. SB және AF түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
14. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамида табанының қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең. SB және EF түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
15. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамида табанының қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең. SB және CD түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
16. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамида табанының қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең. SB және DE түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
17. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамида табанының қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең. SB және AC түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
18. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамида табанының қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең. SB және DF түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
19. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамида табанының қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең. SB және AE түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
20. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамида табанының қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең. SB және CE түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
21. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. CC_1 және AB түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
22. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BB_1 және AC түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
23. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. AA_1 және BC түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
24. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BB_1 және AC_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
25. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BB_1 және A_1C_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
26. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. AB және CB_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
27. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. AB_1 және BC_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.

28. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. AB_1 және CA_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
29. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призма ның барлық қырлары 1-ге тең. BC және EE_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
30. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BB_1 және C_1D_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
31. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BB_1 және D_1E_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
32. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BB_1 және E_1F_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
33. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BB_1 және A_1F_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
34. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BB_1 және CD_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
35. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BB_1 және DC_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
36. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BB_1 және DE_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
37. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BB_1 және ED_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
38. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BB_1 және EF_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
39. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BB_1 және FE_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
40. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BB_1 және AF_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
41. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BB_1 және FA_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
42. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BB_1 және CE_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
43. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BB_1 және EC_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
44. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BB_1 және DF_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
45. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BB_1 және FD_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
46. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BB_1 және EA_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
47. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлар ы 1-ге тең. BB_1 және AE_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
48. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BB_1 және CF_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.

49. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BB_1 және FC_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
50. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BB_1 және DA_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
51. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BB_1 және AD_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
52. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BA_1 және ED_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
53. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BA_1 және CB_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
54. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BA_1 және DC_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
55. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BA_1 және FE_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
56. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BA_1 және AF_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
57. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BA_1 және DB_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
58. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BA_1 және AE_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
59. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BA_1 және AD_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
60. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BD_1 және EA_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.

ОРТОГОНАЛЬ ПРОЕКЦИЯНЫҢ АУДАНЫ

B

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының A, B және C_1 төбелері арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының B, C және D_1 төбелері арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.
3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының C, D және A_1 төбелері арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.
4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының A, C және C_1 төбелері арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.
5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының AB, BC, A_1B_1 қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.
6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының AD, BC, CC_1 қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.

7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының AD, CD, A_1D_1 қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.
8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының AB, CD, AA_1 қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.
9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының A төбесінен және CC_1, DD_1 қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.
10. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының B төбесінен және AA_1, DD_1 қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.
11. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының A төбесінен және CD, C_1D_1 қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.
12. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының B төбесінен және AD, A_1D_1 қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.
13. $ABCD$ тетраэдрінің барлық қырлары 1-ге тең. Оның AD қырының ортасы арқылы өтіп, ABC жағына параллель жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.
14. $ABCD$ тетраэдрінің барлық қырлары 1-ге тең. Оның AB қырының ортасы арқылы өтіп, BCD жағына параллель жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.
15. $ABCD$ тетраэдрінің барлық қырлары 1-ге тең. Оның AB қырының ортасы арқылы өтіп, осы қырына перпендикуляр жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.
16. $ABCD$ тетраэдрінің барлық қырлары 1-ге тең. Оның AD қырының ортасы арқылы өтіп, осы қырына перпендикуляр жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.
17. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. Оның SA қырының ортасы арқылы өтетін және $ABCD$ табанына параллель жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.
18. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. Оның SB қырының ортасы арқылы өтетін және осы қырына перпендикуляр жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.
19. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамида табанының қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең. Оның SA қырының ортасы арқылы өтетін және $ABCDEF$ табанына параллель жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.
20. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамида табанының қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең. Оның SA қыры арқылы өтетін

және $ABCDEF$ табанына перпендикуляр жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

21. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. Оның A, B және C_1 төбелері арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

22. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. Оның A, B_1 және C_1 төбелері арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

23. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. Оның AB, AC және A_1B_1 қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

24. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. Оның AC, BC және A_1C_1 қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

25. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. Оның B, B_1 төбелері мен AC қырының ортасы арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

26. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. Оның C, C_1 төбелері мен AB қырының ортасы арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

27. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. Оның A, C_1 төбелері мен BC қырының ортасы арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

28. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. Оның A, B_1 төбелері мен A_1C_1 қырының ортасы арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

29. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. Оның A, C және C_1 төбелері арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

30. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. Оның A, D және D_1 төбелері арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

31. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. Оның BC, EF және B_1C_1 қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

32. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. Оның AB, BC және A_1B_1 қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

33. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. Оның A, C және D_1 төбелері арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

34. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. Оның B, D және E_1 төбелері арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

35. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. Оның C, E және F_1 төбелері арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

36. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. Оның D, F және A_1 төбелері арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

37. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. Оның E, A және B_1 төбелері арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

38. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. Оның F, B және C_1 төбелері арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

C

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының A төбесінен және BB_1, DD_1 қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.

2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының B төбесінен және AA_1, CC_1 қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.

3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының C төбесінен және BB_1, DD_1 қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.

4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының D төбесінен және AA_1, CC_1 қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.

5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының A төбесінен және CD, A_1B_1 қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.

6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының B төбесінен және A_1B_1, CD қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.

7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының B_1 төбесінен және AB, C_1D_1 қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.

8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының A_1 төбесінен және AB, C_1D_1 қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.

9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының A төбесінен және BC, A_1D_1 қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.

10. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының D төбесінен және BC, A_1D_1 қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.
11. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының B төбесінен және AD, B_1C_1 қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.
12. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының C төбесінен және AD, B_1C_1 қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.
13. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының BB_1, DD_1 қырларының орталары және A төбесінен 0,25 қашықтықта AA_1 қырында жатқан нүкте арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.
14. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының AA_1, CC_1 қырларының орталары және B төбесінен 0,25 қашықтықта BB_1 қырында жатқан нүкте арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.
15. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының BB_1, DD_1 қырларының орталары және C төбесінен 0,25 қашықтықта CC_1 қырында жатқан нүкте арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.
16. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының AA_1, CC_1 қырларының орталары және D төбесінен 0,25 қашықтықта DD_1 қырында жатқан нүкте арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.
17. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының A_1B_1, CD қырларының орталары және A төбесінен 0,25 қашықтықта AB қырында жатқан нүкте арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.
18. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының A_1B_1, CD қырларының орталары және A төбесінен 0,75 қашықтықта AB қырында жатқан нүкте арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.
19. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының AB, C_1D_1 қырларының орталары және D төбесінен 0,25 қашықтықта CD қырында жатқан нүкте арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.
20. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының AB, C_1D_1 қырларының орталары және D төбесінен 0,75 қашықтықта CD қырында жатқан нүкте арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.
21. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының BC, A_1D_1 қырларының орталары және A төбесінен 0,25 қашықтықта AD қырында жатқан нүкте арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.
22. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының BC, A_1D_1 қырларының орталары және A төбесінен 0,75 қашықтықта AD қырында жатқан нүкте арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.
23. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының AD, B_1C_1 қырларының орталары және B төбесінен 0,25 қашықтықта BC қырында жатқан нүкте арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

24. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының AD, B_1C_1 қырларының орталары және B төбесінен 0,75 қашықтықта BC қырында жатқан нүкте арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.
25. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының AB, BC, CC_1 қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.
26. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының BC, CD, DD_1 қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.
27. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының CD, AD, AA_1 қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.
28. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының AD, AB, BB_1 қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.
29. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының A, C төбелері мен C_1D_1 қырының ортасы арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.
30. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының A, C төбелері мен B_1C_1 қырының ортасы арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.
31. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының B, D төбелері мен A_1D_1 қырының ортасы арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.
32. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының B, D төбелері мен C_1D_1 қырының ортасы арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.
33. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының A_1, C_1 төбелері мен AD қырының ортасы арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.
34. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының A_1, C_1 төбелері мен AB қырының ортасы арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.
35. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының B_1, D_1 төбелері мен AD қырының ортасы арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.
36. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының B_1, D_1 төбелері мен BC қырының ортасы арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.
37. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының A_1, B төбелері мен CD қырының ортасы арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.

38. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының A_1, B төбелері мен CC_1 қырының ортасы арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.

39. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының A, B_1 төбелері мен CD қырының ортасы арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.

40. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының A, B_1 төбелері мен DD_1 қырының ортасы арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.

41. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының C, D_1 төбелері мен AB қырының ортасы арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.

42. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының C, D_1 төбелері мен BB_1 қырының ортасы арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.

43. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының D, C_1 төбелері мен AB қырының ортасы арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.

44. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының D, C_1 төбелері мен AA_1 қырының ортасы арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.

45. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының B, C_1 төбелері мен AA_1 қырының ортасы арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.

46. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының B, C_1 төбелері мен AD қырының ортасы арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.

47. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының C, B_1 төбелері мен AD қырының ортасы арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.

48. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының C, B_1 төбелері мен DD_1 қырының ортасы арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.

49. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының A, D_1 төбелері мен BB_1 қырының ортасы арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.

50. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының A, D_1 төбелері мен BC қырының ортасы арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.

51. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының D, A_1 төбелері мен BC қырының ортасы арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.

52. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының D, A_1 төбелері мен CC_1 қырының ортасы арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.

53. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының A төбесінен және BC, A_1B_1 қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.

54. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының A төбесінен және CD, A_1D_1 қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.

55. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының A төбесінен және BC, DD_1 қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.

56. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының A төбесінен және BB_1, A_1D_1 қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.

57. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының A төбесінен және CD, BB_1 қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.

58. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының A төбесінен және A_1B_1, DD_1 қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.

59. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының D_1 төбесінен және AB, BC қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.

60. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының B_1 төбесінен және AD, CD қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.

61. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының C_1 төбесінен және AB, AD қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.

62. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының A_1 төбесінен және BC, CD қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.

63. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының AB, BC, DD_1 қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.

64. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының BC, CD, AA_1 қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.

65. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының AD, CD, BB_1 қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.

66. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының AD, AB, CC_1 қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.

67. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының AA_1, CC_1 қырларының орталары және A төбесінен 0,75 қашықтықта AB қырында жатқан нүкте арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

68. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының AA_1, CC_1 қырларының орталары және A төбесінен 0,75 қашықтықта AD қырында жатқан нүкте арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

69. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының BB_1, DD_1 қырларының орталары және C төбесінен 0,25 қашықтықта BC қырында жатқан нүкте арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

70. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының BB_1, DD_1 қырларының орталары және A төбесінен 0,25 қашықтықта AB қырында жатқан нүкте арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

71. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының AA_1, CC_1 қырларының орталары және A төбесінен 0,25 қашықтықта AB қырында жатқан нүкте арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

72. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының AA_1, CC_1 қырларының орталары және A төбесінен 0,25 қашықтықта AD қырында жатқан нүкте арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

73. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының BB_1, DD_1 қырларының орталары және C төбесінен 0,75 қашықтықта BC қырында жатқан нүкте арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

74. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының BB_1, DD_1 қырларының орталары және A төбесінен 0,75 қашықтықта AB қырында жатқан нүкте арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

75. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының A төбесі арқылы өтетін және DB_1 диагоналіне перпендикуляр жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

76. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының DB_1 диагоналінің ортасы арқылы өтетін және осы диагональға перпендикуляр жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

77. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының A, B_1 төбелері арқылы өтетін және BD_1 түзуіне параллель жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

78. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының AB, BC және CD қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

79. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының AB, AC және CD қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

80. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының барлық қырлары 1-ге тең. Оның AD, BD және BC қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

81. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. Оның A, B төбелері және SC қырының ортасы арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

82. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. Оның B, C төбелері және SA қырының ортасы арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

83. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. Оның C, D төбелері және AS қырының ортасы арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

84. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. Оның A, D төбелері және SB қырының ортасы арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

85. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. Оның AD, BC және SD қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

86. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. Оның AB, CD және SD қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

87. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. Оның AD, BC және SB қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

88. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. Оның AB, CD және SC қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

89. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. Оның AB, BC қырларының орталары арқылы өтетін және SB қырына параллель жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

90. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. Оның AB, BC қырларының орталары арқылы өтетін және SD қырына перпендикуляр жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

91. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. Оның A төбесінен және SB мен SD қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

92. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. Оның B төбесі, SD қырының ортасы арқылы өтетін және AC түзуіне параллель жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

93. $SABCDEF$ пирамида табанының қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең. Оның A, F төбелері мен SC қырының ортасы арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

94. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. Оның A, B төбелері мен A_1C_1 қырының ортасы арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

95. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. Оның A, C төбелері мен A_1B_1 қырының ортасы арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

96. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. Оның B, C төбелері мен A_1B_1 қырының ортасы арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

97. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. Оның A_1, B_1 төбелері мен AC қырының ортасы арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

98. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. Оның A_1, C_1 төбелері мен AB қырының ортасы арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

99. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. Оның B_1, C_1 төбелері мен AB қырының ортасы арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

100. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. Оның AA_1, BB_1 және A_1C_1 қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

101. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. Оның AA_1, CC_1 және A_1B_1 қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

102. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. Оның BB_1, CC_1 және A_1B_1 қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

103. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. Оның AC, BC және AA_1 қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

104. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. Оның AB, BC және CC_1 қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

105. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. Оның AB, AC және BB_1 қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

106. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. Оның AB, AA_1 және A_1C_1 қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

107. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. Оның BC, BB_1 және A_1B_1 қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

108. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. Оның AC, CC_1 және B_1C_1 қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

109. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. Оның AC, AA_1 және A_1B_1 қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

110. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. Оның AB, BB_1 және B_1C_1 қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

111. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. Оның BC, CC_1 және A_1C_1 қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

112. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. Оның A төбесі арқылы өтетін және BC_1 түзуіне перпендикуляр жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

113. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. Оның A, B_1 төбелері арқылы өтетін және BC_1 түзуіне параллель жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

114. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. Оның A, D және C_1 төбелері арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

115. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. Оның B, E және C_1 төбелері арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

116. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. Оның C, F және E_1 төбелері арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

117. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. Оның D, A және E_1 төбелері арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

118. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. Оның B, E және F_1 төбелері арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

119. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. Оның C, F және A_1 төбелері арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

120. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. Оның A, B және D_1 төбелері арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

121. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. Оның B, C және E_1 төбелері арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

122. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. Оның C, D және F_1 төбелері арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

123. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. Оның D, E және A_1 төбелері арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

124. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. Оның E, F және B_1 төбелері арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

125. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. Оның A, F және C_1 төбелері арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

ПӘНДІК АТАУ КӨРСЕТКІШТЕРІ

ЖАУАПТАРЫ

7–9-СЫНЫПТАРДАҒЫ ГЕОМЕТРИЯ КУРСЫН ҚАЙТАЛАУ

2. а) 3; ә) 6; б) 10; в)* $\frac{n(n-1)}{2}$. **3**. 8,5 см. **4**. $2n$. **5**. 126°. **6**. 45°. 7. 120° және 60°. **8**. 120°. **9**. а) 36°; ә) 30°. **10**. а) 120°; ә) 60°; б) 300°. **11**. 75°. **14**. 12 см, 18 см және 24 см. **16**. а) 3,2 м, 6,2 м, 6,2 м; ә) 7,2 м, 4,2 м, 4,2 м. **18**. 100°. **19**. 30°. **20**. 69°. **21**. 7,5 см. **22**. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **23**. 7,5 см және 12 см. **25**. 20. **28**. а) 2; ә) 3; б) 4; в) $n-2$. **29**. а) 2; ә) 5; б) 9. **30**. а) 360°; ә) 540°; б) 720°; в) 900°; г) 1080°. **31**. 7. **32**. а) 90°; ә) 72°; б) 60; в) 45°. **33**. 60°, 60°, 120°, 120°. **34**. а) 40°, 40°, 140°, 140°; ә) 50°, 50°, 130°, 130°; б) 80°, 80°, 100°, 100°. **35**. а) 11 см және 13 см; ә) 9 см және 15 см; б) 8 см және 16 см. **36**. 60 см және 80 см. **37**. 25° және 65°. **38**. 10 см. **39**. 13 см. **42**. 70° және 110°. **43**. 21 см. **44**. 2 см және 5 см. **45**. $\sin A = 0,8$; $\cos A = 0,6$; $\mathrm{tg}\, A = 1\frac{1}{3}$; $\mathrm{ctg}\, A = 0,75$. **46**. 1. **47**. $\sqrt{3}$. **48**. а) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; ә) 0,8. **49**. а) $\frac{\sqrt{5}}{2}$; ә) 2,4. **50**. а) 2; ә) 0,5. **51**. а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; ә) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{1}{2}$. **52**. а) $-\frac{1}{2}$; ә) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **53**. а) 90°-тан кіші; ә) 90°-қа тең; б) 90°-тан үлкен. **54**. $4\sqrt{7}$. **55**. $\sqrt{2+\sqrt{3}}$. **56**. $\cos A = \frac{7}{8}$, $\cos B = \frac{11}{16}$, $\cos C = -\frac{1}{4}$. **57**. 48. **58**. $\frac{a^2}{2}$. **59**. 0,5. **60**. а) 40 см²; ә) $40\sqrt{2}$ см²; б) $40\sqrt{3}$ см². **61**. 8 см және 4 см. **62**. 12. **63**. 6. **64**. 6 см². **65**. 6. **66**. 10 см. **67**. 20 см. **68**. 14 см. **69**. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ см. **70**. 12. **71**. а) 1; ә) 1; б) 2; в) 2. **72**. а) $\overline{AC}$; ә) $\overline{AD}$; б) $\overline{AB}$. **73**. а) 5; ә) 3; б) 4; в) 6. **74**. а) 10; ә) 10; б) 10; в) 5. **75**. а) 1; ә) 1; б) 0. **76**. а) 2,5; ә) 1,5. **77**. а) 120°; ә) 120°; б) 120°; в) 60°; г) 90°; ғ) 150°. **78**. а) 0; ә) 64; б) 0; в) 36. **79**. а) (2; 3); ә) (3; –1); б) (1; 1). **80**. $B(6; 8)$. **81**. (5; 4). **82**. а) $\sqrt{5}$; ә) 5. **83**. а) 2; ә) 3. **84**. Нүктелер координаталар басынан бірдей қашықтықта жатыр. **85**. (–5; 2), 4; ә) (0; 3), 3. **86**. а) $x^2 + y^2 = 1$; ә) $(x+2)^2 + (x-1)^2 = 9$. **87.** $x^2 + y^2 = 18$. **88**. а) 4, (4; 0); ә) $\sqrt{6}$, (–1; 3). **89**. –4. **90**. а), ә) 90°. **91**. $x - y - 1 = 0$. **92**. $x - 2y + 7 = 0$, $\vec{n}(1; -2)$. **93**. а) 1, 3; ә) 2, 4. **94**. а) (–1; –2); ә) (7; 3). **95**. (–7, 14). **96**. 0. **97**. 0,96.

I тарау. СТЕРЕОМЕТРИЯ АКСИОМАЛАРЫ. КЕҢІСТІКТЕГІ ПАРАЛЛЕЛЬДІК

§ 1

3. AB, AC, BC. **4.** ABC, ABD, ACD, BCD. **5.** а) A; ә) D. **6.** а) AB; ә) BC; б) AC. **7.** а) 3; ә) 6; б) 10. **8.** 4. **9.** $\frac{n(n-1)}{2}$. **10.** $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$.

§ 2

1. Шексіз көп. **2.** Шексіз көп. **3.** Егер үш нүкте бір түзудің бойында жатса, онда сол нүктелер арқылы шексіз көп жазықтықтар жүргізуге болады; егер үш нүкте бір түзудің бойында жатпайтын болса, онда сол нүктелер арқылы бір ғана жазықтық жүргізуге болады. **4.** Жоқ, бұл жағдайда нүктелер бір жазықтыққа тиісті болар еді. **5.** а), ә) жоқ. **6.** Жоқ. **7.** b, g, p. **8.** Жоқ. **9.** Жоқ. **10.** Түзу. **11.** 4. **12.** Жоқ. **13.** 8.

§ 3

1. а) Т = 4, Қ = 6, Ж = 4; ә) Т = 8, Қ = 12, Ж = 6; б) Т = 8, Қ = 12, Ж = 6. **2.** AA_1, BB_1, CC_1, DD_1. **3.** ABC, ABB_1, CDD_1, $A_1B_1C_1$. **8.** а) 0; ә) 4; б) 4. **9.** б), г), д). **12.** ABC, BCD_1, ABB_1, BDD_1, CDD_1, ACC_1, $A_1B_1C_1$, AB_1C_1, ABC_1, CDA_1. **14.** Жоқ.

§ 4

1. а) Т = $2n$, Қ = $3n$, Ж = $n + 2$; ә) Т = $n + 1$, Қ = $2n$, Ж = $n + 1$. **4.** а) Жоқ; ә) иә. **5.** а) Онбұрыш; ә) бесбұрыш. **6.** а) Бесбұрышты; ә), в) алтыбұрышты. **7.** а) Жоқ; ә) иә. **8.** а) 16-бұрыш; ә) 14-бұрыш. **9.** а), ә) 9-бұрышты; б) 7-бұрышты. **10.** ABC және SAB, ABC және SBC, ABC және SCD, ABC және SAD, SAB және SBC, SAB және SAD, SAB және SCD, SBC және SCD, SBC және SAD, SAD және SCD. **11.** а) Төртбұрышты; ә), б), в) үшбұрышты. **12.** а) -төртбұрышты, б) -үшбұрышты пирамида. **13.** Бесбұрышты пирамида. **17.** а) 0; ә) $n(n-3)$. **18.** Т = 6, Қ = 12, Ж = 8. **19.** Т = 12, Қ = 30, Ж = 20. **20.** Т = 20, Қ = 30, Ж = 12.

№ 1 тест

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D)	D)	B)	B)	C)	B)	D)	D)	B)	D)	B)	A)	B)	D)	C)	C)	C)	D)	B)	A)

§ 5

1. Жоқ. **2.** Жоқ. **3.** а) CD, A_1B_1, C_1D_1; ә) BB_1, CC_1, DD_1. **4.** Жоқ. **5.** AB және A_1B_1, AC және A_1C_1, BC және B_1C_1, AA_1 және BB_1, AA_1 және CC_1, BB_1 және CC_1. **6.** Жоқ. **7.** Жоқ. **8.** а) AB және CD, AD және BC; ә) AB және DE, BC және EF, AF және CD. **9.** а), ә) Жоқ. **10.** а), ә) Жоқ. **12.** а) BB_1, CC_1, DD_1, EE_1, FF_1; ә) A_1B_1, DE, D_1E_1. **13.** 18. **14.** 33.

§ 6

1. Жоқ. **2.** Шексіз көп. **3.** а) CC_1, DD_1, A_1D_1, B_1C_1; ә) CC_1, A_1C_1, B_1C_1. **4.** а) BC, CD; ә) BC, CD, DE, EF. **5.** а) BC, CD, DE, EF, B_1C_1, C_1D_1, D_1E_1, E_1F_1; ә) CC_1, DD_1, EE_1, FF_1, B_1C_1, C_1D_1, E_1F_1, F_1A_1. **6.** 3. **7.** Айқас болады. **8.** Жоқ. **9.** 8. **10.** 24. **11.** Айқас болады. **12.** Айқас болады. **13.** Жоқ. **14.** Жоқ.

§ 7

1. A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, A_1D_1. **2.** а) $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$; ә) BCC_1B_1, CDD_1C_1, DEE_1D_1, EFF_1E_1. **3.** Жоқ. **4.** Иә. **5.** Жоқ. **6.** AB және SCD, BC және SAD, CD және SAB, AD және SBC. **7.** AB және SDE, BC және SEF, CD және SAF, DE және SAB, EF және SBC, AF және SCD. **9.** AB, BC, DE және EF түзулері жазықтықпен қиылысады. CD түзуі жазықтыққа параллель болады..

§ 8

1. ABC және $A_1B_1C_1$, BCC_1 және ADD_1, CDD_1 және ABB_1. **2.** ABC және $A_1B_1C_1$, ABB_1 және DEE_1, BCC_1 және EFF_1, CDD_1 және AFF_1. **3.** Жоқ. **4.** Жоқ. **7.** Жоқ. **8.** Жоқ. **9.** BD_1. **10.** BO_1.

№ 2 тест

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C)	C)	D)	A)	A)	B)	C)	D)	B)	B)	A)	C)	D)	C)	D)	A)	A)	B)	C)	A)

II тарау. КЕҢІСТІКТЕГІ ПЕРПЕНДИКУЛЯРЛЫҚ

§ 9

1. Шексіз көп. **2.** Шексіз көп. **3.** Жоқ. **4.** AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, AD, BC, A_1D_1, B_1C_1. **5.** AB, BC, AC, A_1B_1, B_1C_1, A_1C_1. **6.** а), ә) 90°; б) 60°. **7.** а) 90°; ә) 60°. **8.** а) 60°; ә) 90°. **9.** 30°. **10.** 60°. **11.** а) 45°; ә) 45°; б) 60°; в) 60°; г) 30°; ғ) 60°; д) 90°. **12.** 0,8. **13.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **14.** $\sqrt{2}$. **15.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **16.** а) $\frac{1}{4}$; ә) $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **17.** а) $\frac{3}{4}$; ә) $\frac{1}{4}$.

§ 10

1. а) 1; ә) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **2.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; ә) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **3.** а) 1; ә) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **4.** $\sqrt{3}$. **5.** а) 1; ә) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\sqrt{3}$; г) $\sqrt{3}$; ғ) 1; д) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; е) $\frac{1}{2}$; ж) 1,5; з) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; и) 1. **6.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **7.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **8.** $\frac{\sqrt{7}}{2}$. **9.** $\frac{\sqrt{13}}{2}$. **10.** $\frac{\sqrt{14}}{4}$. **11.** а) $\frac{\sqrt{5}}{2}$; ә) $\frac{\sqrt{7}}{2}$.

§ 11

1. Иә. **2.** Перпендикуляр. **3.** а) Жоқ; ә) иә. **4.** Иә. **6.** Иә. **7.** Түзулер перпендикуляр. **8.** Тікбұрышты.

§ 12

1. $5\sqrt{2}$. **2.** а) 1; ә) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **3.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **4.** а) 1; ә) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\sqrt{3}$; ғ) $\frac{3}{2}$; д) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **5.** а) 2; ә) $\sqrt{5}$. **6.** а) 1; ә) $\sqrt{3}$. **7.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **8.** а) 3; ә) $\sqrt{6}$; б) 3; в) $\sqrt{6}$; г) $2\sqrt{3}$. **9.** а) $\sqrt{5}$; ә) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{5}$. **10.** 5. **12.** $\sqrt{3}$. **13.** а) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$; ә) $\frac{\sqrt{39}}{4}$. **14.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **16.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **17.** 76 м.

§ 13

1. а), ә) 1. **2.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **3.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; ә) $\sqrt{3}$; б) $\sqrt{3}$; в) 1; г) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; ғ) $\frac{1}{2}$; д) $\frac{3}{2}$; е) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **4.** а) 2; ә) 2; б) 1; в) 1. **5.** а), ә) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **6.** а) $\sqrt{3}$; ә) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) 1. **7.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **8.** $\frac{2\sqrt{15}}{5}$. **9.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **10.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **11.** $\frac{\sqrt{21}}{7}$. **12.** $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

§ 14

1. а) 1; ә) $\sqrt{2}$; б), в), г), ғ) 1; д) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; е) 1. **2.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; ә) 1. **3.** а), ә) 1; б) $\sqrt{3}$; в) 2. **4.** а) $\sqrt{5}$; ә), б) $2\sqrt{2}$; в) $\sqrt{5}$. **5.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **6.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **7.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; ә), б), в) $\sqrt{3}$; г) 1. **8.** а) 2; ә) 1; б), в), г) 2. **9.** а) $\frac{\sqrt{6}}{6}$; ә) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **10.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **11.** а) 1,5; ә) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\sqrt{3}$; в) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **12.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; ә) $\frac{2\sqrt{15}}{5}$.

§ 15

1. 12 см. **2.** 12 см. **3.** 2 см. **4.** 5 м. **5.** 10 м. **6.** 9 см. **7.** $A'B' = 4$, $B'C' = 8$. **17.** $\sqrt{b^2 - r^2}$. **18.** Берілген нүктелерді қосатын кесіндінің ортасынан өтетін және осы кесіндіге перпендикуляр болатын жазықтық.

§ 16

1. а), ә) 45°; б) 90°. **2.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **3.** 45°. **4.** а) 45°; ә) 60°. **5.** 60°. **6.** а) 45°; ә) 30°; б) 45°. **7.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **8.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **9.** $\frac{\sqrt{6}}{4}$. **10.** а) $\frac{\sqrt{6}}{4}$; ә) $\frac{\sqrt{6}}{4}$. **11.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **12.** 30°. **13.** $\frac{\sqrt{10}}{5}$. **16.** $\sqrt{2}$.

§ 17

1. 90°. **3.** 45°. **4.** 60°. **5.** 120°. **6.** Жоқ. **7.** Шексіз көп. **8.** а), ә) $\sqrt{2}$. **9.** $\frac{1}{3}$. **10.** а) 60°; ә) 90°; б) 30°; в) 60°; г) 45°; ғ) 60°. **12.** $\sqrt{2}$. **13.** 2. **14.** 1,2; $\approx 50°$. **15.** $\frac{1}{3}$. **16.** 60°. **17.** $-\frac{1}{3}$. **18.** а), ә) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **19.** $\frac{1}{7}$. **22.** 2.

№ 3 тест

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D)	C)	D)	B)	D)	C)	C)	D)	B)	C)	A)	D)	C)	A)	B)	C)	A)	A)	D)	B)

§ 19

1. а) $\sqrt{2}$; ә) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **2.** $\frac{\sqrt{7}}{4}$. **3.** а) $\sqrt{3}$; ә) 2. **4.** $\frac{1}{2}$. **5.** $\frac{1}{4}$. **6.** $\frac{3\sqrt{19}}{16}$. **7.** а) $\sqrt{3}$; ә) $\frac{\sqrt{39}}{4}$. **8.** $\frac{3\sqrt{7}}{16}$. **9.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. **10.** $\frac{7\sqrt{17}}{24}$. **11.** $\frac{7\sqrt{11}}{24}$. **12.** $\frac{5\sqrt{21}}{12}$. **13.** 2718 м².

III тарау. КЕҢІСТІКТЕГІ ТІКБҰРЫШТЫ КООРДИНАТАЛАР ЖҮЙЕСІ ЖӘНЕ ВЕКТОРЛАР

§ 20

1. $\overline{DC}$, $\overline{A_1B_1}$, $\overline{D_1C_1}$. **2.** $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$. **3.** а) $\overline{A_1B_1}$, $\overline{ED}$, $\overline{E_1D_1}$; ә) $\overline{A_1C_1}$, $\overline{FD}$, $\overline{F_1D_1}$; б) $\overline{A_1D_1}$; в) $\overline{ED_1}$; г) $\overline{FD_1}$. **4.** а) 1; ә) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{3}$. **5.** а) 1; ә) $\sqrt{3}$; б) 2; в) $\sqrt{2}$; г) 2; ғ) $\sqrt{5}$. **6.** а) $\overline{AB_1}$; ә) $\overline{AC}$; б) $\overline{AC_1}$; в) $\overline{AA_1}$; г) $\overline{AC_1}$. **7.** а) 6; ә) 8; б) 12. **8.** а) $\overline{AC}$; ә) $\overline{FB}$; б) $\overline{AC_1}$; в) $\overline{AF_1}$. **9.** 2.

10. а) $\sqrt{2}$; ә) $\sqrt{3}$; б) $\sqrt{2}$; в) 1; г) $\sqrt{3}$. **11.** а) $\sqrt{3}$; ә) $\sqrt{3}$; б) 2; в) $\sqrt{2}$. **12.** Егер векторлар бірдей бағытталған болса. **13.** а) $\overline{A_1B}$; ә) $\overline{A_1C}$; б) $\overline{DB}$; в) $\overline{AC_1}$. **14.** а) $\sqrt{2}$; ә) $\sqrt{3}$; б) $\sqrt{2}$; в) $\sqrt{3}$. **15.** $\sqrt{2}$. **16.** а) AC кесіндісінің ортасы; ә) AC және AD кесінділерінің қиылысу нүктесі; б) AC_1 және BD_1 кесінділерінің қиылысу нүктесі. **17.** а) $t = 2$, $s = 1$; ә) $t = 2$, $s = 2$; б) $t = 1$, $s = 2$; в) $t = 2$, $s = 1$. **19.** ≈ 2,8 км. **20.** 144 м.

§ 21

1. $\overline{BA}$, $\overline{DC}$, $\overline{A_1B_1}$, $\overline{D_1C_1}$, $\overline{CD}$, $\overline{B_1A_1}$, $\overline{C_1D_1}$. **2.** $\overline{A_1A}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$, $\overline{B_1B}$, $\overline{C_1C}$. **3.** $\overline{B_1A}$, $\overline{ED_1}$, $\overline{D_1E}$. **4.** Иә. **5.** Жоқ. **6.** а) $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{A_1C_1}$; ә) $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AA_1}$. **7.** а) $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{B_1C_1}$; ә) $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AA_1}$. **8.** а) $\overline{AC_1} = \overline{AB} + \overline{AD} - \overline{AA_1}$; ә) $\overline{BD_1} = -\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AA_1}$. **9.** а) $\overline{AD_1} = 2\overline{AB} + 2\overline{AF} + \overline{AA_1}$; ә) $\overline{AC_1} = 2\overline{AB} + \overline{AF} + \overline{AA_1}$. **10.** Иә. **12.** $\overline{AC_1} = \frac{1}{2}(\overline{AC} + \overline{AB_1} + \overline{AD_1})$. **15.** $\frac{45}{2\sin 40°} \approx 35$ Н.

§ 22

1. а) Плюс; ә) минус. **2.** а), ә) 90°; б) 60°. **3.** а) 90°; ә) 120°. **4.** а) 60°; ә) 90°. **5.** а) 60°; ә) 120°. **6.** а), ә) 45°; б) 60°; в) 120°; г) 30°; ғ) 60°; д) 90°. **7.** а), ә) 0; б) 1. **8.** а) 0; ә) $\frac{1}{2}$. **9.** а) $\frac{1}{2}$; ә) 0. **10.** а) 2; ә) –1. **11.** а), ә) 1; б) $\frac{1}{2}$; в) $-\frac{1}{2}$; г) 1,5; ғ) $1\frac{1}{2}$; д) 0. **12.** а) $\frac{1}{2}$; ә) $-\frac{1}{2}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{4}$; г) $-\frac{1}{4}$; ғ) 0. **14.** 1. **15.** ≈ 22,4 Н. **16.** ≈ 0,8 кН.

§ 23

2. а) (1; 3; 0) және (5; –6; 0); ә) (1; 0; 4) және (5; 0; 2); б) (0; 3; 4) және (0; –6; 2). **3.** $A(0; 1; 0)$, $B(1; 1; 0)$, $C(1; 0; 0)$, $D(0; 0; 0)$, $A_1(0; 1; 1)$, $B_1(1; 1; 1)$, $C_1(1; 0; 1)$, $D_1(0; 0; 1)$. **4.** (0; 1; 2), (3; 1; 1). **5.** $A(-1; 0; 1)$. **6.** $A(-1; 1; 0)$, $B(1; 1; 0)$, $C(1; -1; 0)$, $D(-1; -1; 0)$, $A_1(-1; 1; 2)$, $B_1(1; 1; 2)$, $C_1(1; -1; 2)$, $D_1(-1; -1; 2)$. **7.** $A(0; 2; 0)$, $B(2; 2; 0)$, $C(2; 0; 0)$, $D(0; 0; 0)$, $A_1(1; 2; 1)$, $B_1(2; 2; 1)$, $C_1(2; 0; 1)$, $D_1(1; 0; 1)$, $A_2(0; 2; 2)$, $B_2(1; 2; 2)$, $C_2(1; 0; 2)$, $D_2(0; 0; 2)$. **8.** $A(0; \frac{1}{2}; 0)$, $B(\frac{\sqrt{3}}{2}; 0; 0)$, $C(0; -\frac{1}{2}; 0)$, $A_1(0; \frac{1}{2}; 1)$, $B_1(\frac{\sqrt{3}}{2}; 0; 1)$, $C_1(0; -\frac{1}{2}; 1)$. **9.** $A(0; \sqrt{3}; 0)$, $B(1; \sqrt{3}; 0)$, $C(1,5; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0)$, $D(1; 0; 0)$, $E(0; 0; 0)$, $F(-0,5; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0)$, $A_1(0; \sqrt{3}; 1)$, $B_1(1; \sqrt{3}; 1)$, $C_1(1,5; \frac{\sqrt{3}}{2}; 1)$, $D_1(1; 0; 1)$, $E_1(0; 0; 1)$, $F_1(-0,5; \frac{\sqrt{3}}{2}; 1)$. **10.** $A(-0,5; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0)$, $B(0,5; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0)$, $C(1; 0; 0)$, $D(0,5; -\frac{\sqrt{3}}{2}; 0)$, $E(-0,5; -\frac{\sqrt{3}}{2}; 0)$, $F(-1; 0; 0)$, $S(0; 0; \sqrt{3})$. **11.** а) Oyz жазықтығы; ә) Oxz жазықтығы; б) Oxy жазықтығы; в) Oz осі; г) Oy осі; ғ) Ox осі; д) координаталар басы. **12.** а) 3; ә) 2; б) 1. **13.** $C(0; -1; 0)$, $D(-1; 0; 0)$, $E(0; 0; 1)$, $F(0; 0; -1)$. **14.** а) $|z|$; ә) $|y|$; б) $|x|$. **15.** а) $|z| = |y|$; ә) $|z| = |y| = |x|$.

§ 24

1. а) 5; ә) 3. **2.** A. **3.** а) 3; ә) 5. **4.** а) $C(2; -5; 0)$, $R = 3$; ә) $C(0; 6; -1)$, $R = 2$. **5.** а) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$; ә) $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$. **6.** Теңқабырғалы. **7.** а) $\sqrt{13}$; ә) $\sqrt{10}$; б) $\sqrt{5}$. **8.** а) $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 1$; ә) $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 4$; б) $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 1$. **9.** а) $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 5$; ә) $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 10$; б) $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 13$. **10.** $(x \pm 3)^2 + (y \pm 3)^2 + (z \pm 3)^2 = 9$, сегіз сфера. **11.** $(x \pm 1)^2 + (y \pm 1)^2 + (z \pm 1)^2 = 2$, сегіз сфера. **12.** 2, (2; 0; 0). **13.** $(x-3)^2 + y^2 + z^2 = 16$. **14.** а) A нүктесі сфераның ішінде жатыр; ә) B нүктесі сфераға тиісті; б) C нүктесі сферадан тыс жатыр. **15.** Сфералардың ортақ нүктесі жоқ.

§ 25

1. а) (–2; 6; 1); ә) (1; 0; 2); б) (0; –3; 1); в) (5; 0; –4). **2.** а) (–7; 5; –10); ә) (5; –8; –4); б) (8; 1; 9). **3.** $(-a; -b; -c)$. **4.** $x_2 = tx_1$, $y_2 = ty_1$, $z_2 = tz_1$. **5.** а) (4; 3; 0); ә) (0; 3; 2);

б) (4; 0; 2); в) (4; 3; 2); г) (4; 0; 0); ғ) (4; –3; 0); д) (4; 0; 2); е) (0; –3; 2); ж) (4; –3; 2). **6.** а) (1; –2; 7); ә) (1; 2; –1). **7.** (3; –4; –5). **8.** а) $\sqrt{6}$; ә) $\sqrt{10}$; б) $\sqrt{5}$. **9.** 8. **10.** а) (1; 0; 23); ә) (7; –11; 7). **11.** а) Вектордың координатасы (0; 0; z); ә) вектордың координатасы (x; 0; 0). **12.** ($\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$), ($-\sqrt{3}$; $-\sqrt{3}$; $-\sqrt{3}$). **13.** а) 5; ә) $\sqrt{13}$; б) $2\sqrt{5}$; в) $\sqrt{29}$; г) 4; ғ) 5; д) $2\sqrt{6}$; е) $\sqrt{13}$; ж) $\sqrt{29}$. **14.** $\frac{1}{3}$. **15.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **16.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$, $\frac{\sqrt{6}}{3}$, $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **17.** $z = 2$. **20.** 24.

§ 26

1. а) (5; –1; 0); ә) (3; 0; 18); б) (15; 1; –8). в) (1; –3; 15). **2.** а) $z = 0$; ә) $y = 0$; б) $x = 0$. **3.** A және C. **4.** (1; 0; 0), (0; $\frac{1}{2}$; 0), (0; 0; $-\frac{1}{3}$). **5.** а) $-5y + 2z + 8 = 0$; ә) $6x - y + 3z + 5 = 0$; б) $-4x - 2y - z + 1 = 0$; в) $-3x - 8y + 13 = 0$. **6.** $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$. **7.** а) $z = 4$; ә) $y = -2$; б) $x = 1$. **8.** а), ә), б). **9.** а), ә) Иә; б) жоқ. **10.** а) $\frac{1}{3}$; ә) $\frac{16}{21}$. **11.** $-2x + 4y - z - 21 = 0$. **12.** а) $3x + y - z - 7 = 0$; ә) $x - y + 5z + 7 = 0$. **13.** $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. **14.** $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{1} = 1$. **15.** а) $\frac{6}{7}$; ә) $\frac{2}{7}$; б) $\frac{3}{7}$. **16.** а) 60°; ә) 90°. **17.** $\frac{\sqrt{21}}{7}$. **18.** $\frac{\sqrt{65}}{13}$. **19.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **20.** $\frac{2}{3}$. **21.** $\frac{6}{7}$. **22.** $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 2$, $y = 2$, $z = 2$, $x = 1$, $z = 1$.

§ 27

1. а) $\begin{cases} x = t, \\ y = 0, \\ z = 0; \end{cases}$ ә) $\begin{cases} x = 0, \\ y = t, \\ z = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \\ z = t. \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -2 + 3t, \\ z = 3 - t. \end{cases}$ $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{-1}$ **3.** $\begin{cases} x = -2 + 7t, \\ y = 1 + 3t, \\ z = -3 + 9t. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 2 + t, \\ z = -3 + t. \end{cases}$ **5.** Түзулер өзара перпендикуляр. **6.** (3; 1; 1). **7.** (3; 9; 10). **8.** 5. **9.** $\frac{3}{4}$. **10.** а) $\frac{1}{2}$; ә) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **11.** $\frac{\sqrt{2}}{10}$.

№ 4 тест

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A)	A)	D)	D)	D)	C)	B)	D)	C)	C)	C)	D)	B)	C)	C)	A)	D)	D)	B)	D)

10-СЫНЫПТЫҢ ГЕОМЕТРИЯ КУРСЫН ҚАЙТАЛАУ

БҰРЫШТАР

В

Түзулердің арасындағы бұрыш

1. 90°. **2.** 90°. **3.** 60°. **4.** 60°. **5.** 60°. **6.** 60°. **7.** 90°. **8.** 90°. **9.** 90°. **10.** 90°. **11.** 90°. **12.** 90°. **13.** 90°. **14.** 90°. **15.** 90°. **16.** 90°. **17.** 90°. **18.** 90°. **19.** 90°. **20.** 90°. **21.** 90°. **22.** 90°. **23.** 90°. **24.** 90°. **25.** 90°. **26.** 30°. **27.** 90°. **28.** 90°. **29.** 0,75. **30.** 90°. **31.** 45°. **32.** 30°. **33.** 90°. **34.** 2. **35.** 60°. **36.** 60°. **37.** 0,5. **38.** 90°. **39.** 90°. **40.** 2. **41.** 60°. **42.** 90°. **43.** 30°. **44.** 60°. **45.** 30°. **46.** 90°. **47.** 90°. **48.** 60°.

Түзу мен жазықтықтың арасындағы бұрыш

1. 30°. **2.** 30°. **3.** 30°. **4.** 30°. **5.** 30°. **6.** 30°. **7.** 30°. **8.** 30°. **9.** 30°. **10.** 30°. **11.** 90°. **12.** 90°. **13.** 90°. **14.** 30°. **15.** 45°. **16.** 45°. **17.** 0,5. **18.** 0,5. **19.** 30°. **20.** 60°. **21.** 60°. **22.** 90°. **23.** 60°. **24.** 30°. **25.** 60°. **26.** 90°. **27.** 45°. **28.** 60°. **29.** 30°. **30.** 60°. **31.** 60°. **32.** 60°. **33.** 30°. **34.** 45°. **35.** 45°.

Екі жазықтықтың арасындағы бұрыш

1. 90°. **2.** 90°. **3.** 90°. **4.** 90°. **5.** 45°. **6.** 60°. **7.** 90°. **8.** 90°. **9.** 60°. **10.** 60°. **11.** 60°. **12.** 30°. **13.** 45°. **14.** 60°. **15.** 90°. **16.** 30°. **17.** 60°.

C

Түзулердің арасындағы бұрыш

1. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **2.** $\sqrt{2}$. **3.** $\frac{1}{3}$. **4.** $\frac{1}{3}$. **5.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **6.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **7.** $\frac{5}{6}$. **8.** $\frac{1}{3}$. **9.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **10.** $\frac{1}{4}$. **11.** $\sqrt{2}$. **12.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **13.** $-\frac{\sqrt{3}}{6}$. **14.** $\frac{1}{6}$. **15.** $\frac{5}{6}$. **16.** 0,75. **17.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **18.** $\frac{3}{4}$. **19.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **20.** $\frac{\sqrt{10}}{5}$. **21.** $\frac{\sqrt{6}}{4}$. **22.** $\frac{3}{4}$. **23.** $\frac{1}{4}$. **24.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **25.** $\frac{\sqrt{10}}{10}$. **26.** $\frac{\sqrt{2}}{8}$. **27.** $\frac{3}{4}$. **28.** $\frac{5}{8}$. **29.** $\frac{\sqrt{5}}{10}$. **30.** 0,25. **31.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **32.** $\frac{1}{4}$.

Түзу мен жазықтықтың арасындағы бұрыш

1. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **2.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **3.** $\sqrt{2}$. **4.** $\sqrt{2}$. **5.** $\sqrt{2}$. **6.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **7.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **8.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **9.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **10.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **11.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **12.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **13.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **14.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **15.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **16.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **17.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **18.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **19.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **20.** $\frac{1}{3}$. **21.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **22.** $\frac{1}{3}$. **23.** $\frac{\sqrt{6}}{4}$. **24.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **25.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **26.** $\frac{\sqrt{21}}{7}$. **27.** $\frac{\sqrt{42}}{7}$. **28.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **29.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **30.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **31.** $\frac{1}{3}$. **32.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **33.** $\frac{\sqrt{15}}{5}$. **34.** $\frac{\sqrt{15}}{5}$. **35.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **36.** $\frac{\sqrt{15}}{10}$. **37.** $\frac{\sqrt{15}}{5}$. **38.** $\frac{\sqrt{6}}{4}$. **39.** $\frac{\sqrt{6}}{4}$. **40.** $\frac{\sqrt{15}}{5}$. **41.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **42.** $\frac{\sqrt{6}}{4}$. **43.** $\frac{\sqrt{3}}{8}$. **44.** $\frac{\sqrt{15}}{10}$. **45.** $\frac{3}{5}$.

Екі жазықтықтың арасындағы бұрыш

1. $\sqrt{2}$. **2.** $\sqrt{2}$. **3.** $\sqrt{2}$. **4.** $\sqrt{2}$. **5.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **6.** $\frac{1}{3}$. **7.** $\frac{1}{3}$. **8.** 90°. **9.** 60°. **10.** 90°. **11.** $\frac{1}{3}$. **12.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **13.** $\frac{1}{3}$. **14.** $\sqrt{2}$. **15.** $-\frac{1}{3}$. **16.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **17.** 0,6. **18.** –0,6. **19.** 0,2. **20.** $\frac{5}{13}$. **21.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **22.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **23.** $\frac{1}{7}$. **24.** 2. **25.** $\frac{2}{3}$. **26.** 45°. **27.** 60°. **28.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **29.** $\frac{2}{3}$. **30.** $\frac{1}{7}$. **31.** $\frac{1}{7}$. **32.** 0,6. **33.** $\frac{\sqrt{7}}{7}$.

АРАҚАШЫҚТЫҚ

B

Нүктеден түзуге дейінгі қашықтық

1. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **2.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **3.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **4.** $\sqrt{2}$. **5.** $\sqrt{2}$. **6.** $\sqrt{2}$. **7.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **8.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **9.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **10.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **11.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **12.** $\frac{\sqrt{7}}{2}$. **13.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **14.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **15.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **16.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **17.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **18.** 1. **19.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **20.** $\frac{\sqrt{15}}{2}$. **21.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **22.** $\sqrt{3}$. **23.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **24.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **25.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **26.** $\sqrt{3}$. **27.** $\sqrt{3}$. **28.** 2. **29.** 2. **30.** 2. **31.** 1. **32.** 1. **33.** 0,5. **34.** 1,5. **35.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **36.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **37.** 1. **38.** 1.

Нүктеден жазықтыққа дейінгі қашықтық

1. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **2.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **3.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **4.** 0,5. **5.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **6.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **7.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **8.** 0,5. **9.** $\sqrt{3}$. **10.** $\sqrt{3}$. **11.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **12.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **13.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **14.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **15.** 0,5. **16.** 1,5. **17.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **18.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Екі түзудің арақашықтығы

1. 1. **2.** 1. **3.** 1. **4.** 1. **5.** $\sqrt{2}$. **6.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **7.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **8.** 1. **9.** $\sqrt{3}$. **10.** 1. **11.** 1. **12.** 1. **13.** 1. **14.** 2. **15.** 1. **16.** 1. **17.** $\sqrt{3}$. **18.** $\sqrt{3}$. **19.** 2. **20.** $\sqrt{3}$. **21.** $\sqrt{3}$.

C

Нүктеден түзуге дейінгі қашықтық

1. $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **2.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **3.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **4.** $\frac{\sqrt{14}}{4}$. **5.** $\frac{\sqrt{13}}{2}$. **6.** $\sqrt{3}$. **7.** $\frac{\sqrt{15}}{4}$. **8.** $\frac{\sqrt{39}}{4}$. **9.** $\sqrt{3}$. **10.** $\frac{\sqrt{7}}{2}$. **11.** $\frac{\sqrt{7}}{2}$.

12. $\sqrt{2}$. 13. $\sqrt{2}$. 14. $\frac{\sqrt{7}}{2}$. 15. $\frac{\sqrt{7}}{2}$. 16. $\frac{\sqrt{13}}{2}$. 17. $\frac{\sqrt{5}}{2}$. 18. $\sqrt{3}$. 19. $\sqrt{3}$. 20. $\frac{\sqrt{7}}{4}$. 21. $\frac{\sqrt{7}}{4}$.
22. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. 23. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. 24. $\frac{\sqrt{14}}{4}$. 25. $\frac{\sqrt{39}}{4}$. 26. $\frac{\sqrt{39}}{4}$. 27. $\frac{\sqrt{30}}{5}$. 28. $\frac{\sqrt{30}}{5}$. 29. $\frac{\sqrt{30}}{4}$. 30. $\frac{\sqrt{30}}{4}$.

Нүктеден жазықтыққа дейінгі қашықтық

1. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 2. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. 3. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 4. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 5. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 6. $\frac{\sqrt{6}}{3}$. 7. $\frac{\sqrt{21}}{7}$. 8. $\frac{\sqrt{21}}{7}$. 9. $\frac{\sqrt{21}}{7}$. 10. $\frac{\sqrt{6}}{3}$. 11. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.
12. 0,5. 13. $\sqrt{3}$. 14. $\frac{2\sqrt{15}}{5}$. 15. $\frac{2\sqrt{15}}{5}$. 16. $\frac{\sqrt{15}}{5}$. 17. $\frac{\sqrt{15}}{5}$. 18. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 19. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 20. $\frac{2\sqrt{39}}{13}$. 21. $\frac{2\sqrt{39}}{13}$.
22. $\frac{\sqrt{39}}{13}$. 23. $\frac{3\sqrt{39}}{13}$. 24. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 25. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 26. $\frac{\sqrt{21}}{7}$. 27. $\frac{\sqrt{21}}{7}$. 28. $\frac{2\sqrt{21}}{7}$. 29. $\frac{2\sqrt{21}}{7}$. 30. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. 31. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.
32. $\frac{3\sqrt{13}}{13}$. 33. $\frac{2\sqrt{21}}{7}$. 34. $\frac{2\sqrt{21}}{7}$. 35. $\frac{\sqrt{2}}{4}$. 36. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$. 37. $\frac{\sqrt{13}}{13}$. 38. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. 39. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Екі түзудің арақашықтығы

1. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 2. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 3. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 4. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 5. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 6. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 7. $\frac{\sqrt{6}}{6}$. 8. $\frac{\sqrt{6}}{6}$. 9. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 10. 0,5. 11. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.
12. $\frac{\sqrt{6}}{3}$. 13. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 14. $\frac{2\sqrt{15}}{5}$. 15. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 16. $\frac{2\sqrt{15}}{5}$. 17. $\frac{\sqrt{3}}{4}$. 18. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. 19. $\frac{2\sqrt{39}}{13}$. 20. $\frac{2\sqrt{39}}{13}$. 21. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
22. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 23. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 24. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 25. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 26. $\frac{\sqrt{21}}{7}$. 27. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. 28. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. 29. $\sqrt{3}$. 30. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 31. $\sqrt{3}$.
32. $\sqrt{3}$. 33. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 34. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 35. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 36. $\sqrt{3}$. 37. $\sqrt{3}$. 38. $\sqrt{3}$. 39. $\sqrt{3}$. 40. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 41. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 42. 1.
43. 1. 44. 1,5. 45. 1,5. 46. 1. 47. 1. 48. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 49. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 50. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 51. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 52. $\sqrt{3}$. 53. $\frac{\sqrt{21}}{7}$.
54. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$. 55. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$. 56. $\frac{\sqrt{21}}{7}$. 57. $\frac{\sqrt{21}}{7}$. 58. $\frac{\sqrt{21}}{7}$. 59. $\frac{\sqrt{30}}{10}$. 60. 1.

ОРТОГОНАЛЬ ПРОЕКЦИЯНЫҢ АУДАНЫ

B

1. $\sqrt{2}$. 2. $\sqrt{2}$. 3. $\sqrt{2}$. 4. $\sqrt{2}$. 5. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 6. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 7. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 8. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 9. $\frac{\sqrt{5}}{2}$. 10. $\frac{\sqrt{5}}{2}$. 11. $\frac{\sqrt{5}}{2}$.
12. $\frac{\sqrt{5}}{2}$. 13. $\frac{\sqrt{3}}{16}$. 14. $\frac{\sqrt{3}}{16}$. 15. $\frac{\sqrt{2}}{4}$. 16. $\frac{\sqrt{2}}{4}$. 17. 0,25. 18. $\frac{\sqrt{2}}{4}$. 19. $\frac{3\sqrt{3}}{8}$. 20. $\sqrt{3}$. 21. $\frac{\sqrt{7}}{4}$.
22. $\frac{\sqrt{7}}{4}$. 23. 0,5. 24. 0,5. 25. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 26. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 27. $\frac{\sqrt{15}}{4}$. 28. $\frac{\sqrt{15}}{4}$. 29. $\sqrt{3}$. 30. 2. 31. $\sqrt{3}$.
32. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 33. $\sqrt{6}$. 34. $\sqrt{6}$. 35. $\sqrt{6}$. 36. $\sqrt{6}$. 37. $\sqrt{6}$. 38. $\sqrt{6}$.

C

1. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. 2. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. 3. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. 4. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. 5. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. 6. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. 7. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. 8. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. 9. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. 10. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. 11. $\frac{\sqrt{6}}{2}$.
12. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. 13. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$. 14. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$. 15. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$. 16. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$. 17. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$. 18. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$. 19. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$. 20. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.
21. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$. 22. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$. 23. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$. 24. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$. 25. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. 26. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. 27. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. 28. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. 29. $1\frac{1}{8}$. 30. $1\frac{1}{8}$.
31. $1\frac{1}{8}$. 32. $1\frac{1}{8}$. 33. $1\frac{1}{8}$. 34. $1\frac{1}{8}$. 35. $1\frac{1}{8}$. 36. $1\frac{1}{8}$. 37. $1\frac{1}{8}$. 38. $1\frac{1}{8}$. 39. $1\frac{1}{8}$. 40. $1\frac{1}{8}$.
41. $1\frac{1}{8}$. 42. $1\frac{1}{8}$. 43. $1\frac{1}{8}$. 44. $1\frac{1}{8}$. 45. $1\frac{1}{8}$. 46. $1\frac{1}{8}$. 47. $1\frac{1}{8}$. 48. $1\frac{1}{8}$. 49. $1\frac{1}{8}$. 50. $1\frac{1}{8}$.
51. $1\frac{1}{8}$. 52. $1\frac{1}{8}$. 53. $\frac{3\sqrt{21}}{16}$. 54. $\frac{3\sqrt{21}}{16}$. 55. $\frac{3\sqrt{21}}{16}$. 56. $\frac{3\sqrt{21}}{16}$. 57. $\frac{3\sqrt{21}}{16}$. 58. $\frac{3\sqrt{21}}{16}$. 59. $\frac{7\sqrt{17}}{24}$.
60. $\frac{7\sqrt{17}}{24}$. 61. $\frac{7\sqrt{17}}{24}$. 62. $\frac{7\sqrt{17}}{24}$. 63. $\frac{7\sqrt{17}}{24}$. 64. $\frac{7\sqrt{17}}{24}$. 65. $\frac{7\sqrt{17}}{24}$. 66. $\frac{7\sqrt{17}}{24}$. 67. $\frac{5\sqrt{17}}{16}$.
68. $\frac{5\sqrt{17}}{16}$. 69. $\frac{5\sqrt{17}}{16}$. 70. $\frac{5\sqrt{17}}{16}$. 71. $1\frac{5}{16}$. 72. $1\frac{5}{16}$. 73. $1\frac{5}{16}$. 74. $1\frac{5}{16}$. 75. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 76. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

77. $\frac{\sqrt{6}}{4}$. **78**. 0,25. **79**. 0,25. **80**. 0,25. **81**. $\frac{3\sqrt{11}}{16}$. **82**. $\frac{3\sqrt{11}}{16}$. **83**. $\frac{3\sqrt{11}}{16}$. **84**. $\frac{3\sqrt{11}}{16}$. **85**. $\frac{3\sqrt{3}}{16}$. **86**. $\frac{3\sqrt{3}}{16}$. **87**. $\frac{3\sqrt{3}}{16}$. **88**. $\frac{3\sqrt{3}}{16}$. **89**. $\frac{5\sqrt{2}}{16}$. **90**. $\frac{5\sqrt{2}}{16}$. **91**. $\frac{\sqrt{5}}{12}$. **92**. $\frac{\sqrt{10}}{6}$. **93**. $\frac{13\sqrt{10}}{24}$. **94**. $\frac{3\sqrt{19}}{16}$. **95**. $\frac{3\sqrt{19}}{16}$. **96**. $\frac{3\sqrt{19}}{16}$. **97**. $\frac{3\sqrt{19}}{16}$. **98**. $\frac{3\sqrt{19}}{16}$. **99**. $\frac{3\sqrt{19}}{16}$. **100**. $\frac{3\sqrt{7}}{16}$. **101**. $\frac{3\sqrt{7}}{16}$. **102**. $\frac{3\sqrt{7}}{16}$. **103**. $\frac{3\sqrt{7}}{16}$. **104**. $\frac{3\sqrt{7}}{16}$. **105**. $\frac{3\sqrt{7}}{16}$. **106**. $\frac{3\sqrt{51}}{16}$. **107**. $\frac{3\sqrt{51}}{16}$. **108**. $\frac{3\sqrt{51}}{16}$. **109**. $\frac{3\sqrt{51}}{16}$. **110**. $\frac{3\sqrt{51}}{16}$. **111**. $\frac{3\sqrt{51}}{16}$. **112**. $\frac{3}{8}$. **113**. $\frac{\sqrt{15}}{8}$. **114**. $\frac{3\sqrt{7}}{4}$. **115**. $\frac{3\sqrt{7}}{4}$. **116**. $\frac{3\sqrt{7}}{4}$. **117**. $\frac{3\sqrt{7}}{4}$. **118**. $\frac{3\sqrt{7}}{4}$. **119**. $\frac{3\sqrt{7}}{4}$. **120**. 3. **121**. 3. **122**. 3. **123**. 3. **124**. 3. **125**. 3.

МАЗМҰНЫ

Учебное издание

Смирнов Владимир Алексеевич
Туяков Есенкельды Алыбаевич

ÀÄÏÀÔÐÈß

Учебник для 10 классов естественно-математического направления общеобразовательных школ

Редакторы *Ж. Өміржанова*
Көркемдеуші редакторы *Л. Уралбаева*
Техникалық редакторы *Л. Садықова*
Корректоры *С. Дәуірхан*
Компьютерде беттеген *Б. Нөкер*

Баспаға Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігінің № 0000001 мемлекеттік лицензиясы 2003 жылы 7 шілдеде берілген

ИБ № 5856

Басуға 21.05.19 қол қойылды. Пішімі 70×100 1/16. Офсеттік қағаз. Қаріп түрі "SchoolBook Kza". Офсеттік басылыс. Шартты баспа табағы 16,13 + 0,32 қосарбет. Шартты бояулы беттанбасы 33,60. Есептік баспа табағы 9,91 + 0,54 қосарбет. Таралымы 80 000 дана. Тапсырыс №

"Мектеп" баспасы, 050009, Алматы қаласы, Абай даңғылы, 143
Факс: 8(727) 394-42-30, 394-37-58
Тел.: 8(727) 394-41-76, 394-42-34
E-mail: mektep@mail.ru
Web-site: www.mektep.kz