Ә. Н. ШЫНЫБЕКОВ, Д. Ә. ШЫНЫБЕКОВ, Р. Н. ЖҰМАБАЕВ

ГЕОМЕТРИЯ

Жалпы білім беретін мектептің жаратылыстану-математика бағытындағы 10-сыныбына арналған оқулық

10

Қазақстан Республикасының
Білім және ғылым министрлігі ұсынған

Алматы «Атамұра» 2019

1 – 4370

ӘОЖ 373.167.1
КБЖ 22.151я72
Ш 97

Оқулық Қазақстан Республикасының Білім және ғылым министрлігі бекіткен негізгі білім беру деңгейінің 10–11-сыныптарына арналған. «Геометрия» пәнінің жаңартылған мазмұндағы Типтік оқу бағдарламасына сәйкес дайындалды

Жалпы редакциясын басқарған
физика-математика ғылымдарының докторы,
профессор ҚР ҰҒА академигі **М. Өтелбаев**

Пікір жазған
ҚР Инженерлік академиясының академигі, физика-математика ғылымдарының докторы, профессор **Данаев Н. Т.**

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ШАРТТЫ БЕЛГІЛЕР:

— жаңа материалды бекіту сұрақтары

— практикалық және шығармашылық жұмыстар

— тарихқа шолу

✻ — қосымша материалдар мен тапсырмалар

▲ — дәлелдеудің (есептің шешуінің) басы

■ — дәлелдеудің (есептің шешуінің) соңы

Есептер:

A — бастапқы деңгей
B — орта деңгей
C — жоғары деңгей

Шыныбеков Ә.Н., т.б.
Ш 97 Геометрия: Жалпы білім беретін мектептің жаратылыстану-математика бағытындағы 10-сыныбына арналған оқулық/ Ә.Н. Шыныбеков, Д.Ә. Шыныбеков, Р.Н. Жұмабаев. — Алматы: Атамұра, 2019. — 112 бет.

ISBN 978–601–331–536–2

ISBN 978–601–331–536–2

АЛҒЫ СӨЗ

Бұл оқулық жалпы білім беретін мектептің жаратылыстану-математикалық бағытындағы 10-сыныбына арналған. Осы орайда, бұл оқулық автордың алдыңғы «Геометрия –7, 8, 9» оқулықтарының жалғасы болып табылады.

Стереометрия курсының планиметриямен салыстырғанда кейбір өзіндік ерекшеліктері бар. Стереометрияда кеңістік денелері мен олардың қасиеттері қарастырылады. Сондықтан оқушының кеңістіктік ойлау қабілетін қалыптастырып, дамыту талап етіледі. Бұл қабілетті қалыптастырып, дамыту үшін сабақта мүмкіндігінше кеңістік денелері модельдерін жиі қолданып, олардың бейнелерін дәптерде дұрыс сала білуге машықтану қажет.

Стереометрия есептерін шешу барысында дұрыс салынған сызба жетекші орын алады. Сондықтан әр параграф соңында келтірілген тапсырмаларды және мұғалім ұсынған өзге де жеке практикалық тапсырмаларды орындап отыру қажет. Осыған қоса әр тақырып соңында келтірілген теориялық сұрақтарға жауап беруді дағдыға айналдырған жөн.

Геометрия курсын осы оқулықпен оқып-үйрену барысында мынадай қағиданы ұстанған дұрыс: өтілген жаңа тақырыпты бекіту барысында практикалық тапсырмалар мен **А** тобы материалдарын толық меңгерген соң **В, С** топтарының есептерін орындауға көшуге болады. **С** тобының материалдарын барлық оқушының орындауы міндетті болып саналмайды.

Ізденіс пен қажырлы еңбек өз жемісін берері сөзсіз. Оқуда табыс тілейміз!

Авторлар

ПЛАНИМЕТРИЯ КУРСЫН ҚАЙТАЛАУҒА АРНАЛҒАН СҰРАҚТАР МЕН ЕСЕПТЕР

Бөлімді оқып-үйрену барысында:

- **7—9-сыныпта өтілген материалдарды қайталайсыңдар;**
- **10-сыныпта өтілетін жаңа материалдарды меңгеруге дайындық жасайсыңдар.**

ЕСКЕ ТҮСІРІҢДЕР!

1. Қандай бұрыштарды сыбайлас және вертикаль бұрыштар деп атайды? Суретін салып көрсетіңдер.

2. Екі түзуді үшінші түзумен қиғанда пайда болатын бұрыштарды суретін салып көрсетіңдер, оларды атаңдар.

3. Қандай екі түзуді параллель түзулер деп, ал қандай түзулерді перпендикуляр түзулер деп атайды? Көз мөлшерімен перпендикуляр түзулер сызып, оның дұрыстығын транспортирмен тексеріңдер.

4. Параллельдіктің қандай белгілерін білесіңдер? Оларды тұжырымдап беріңдер. Көз мөлшерімен параллель түзулер салыңдар (дәптер сызықтарына көлбеу орналастырыңдар), сызбаның дұрыстығын параллельдіктің үш белгісі бойынша тексеріңдер.

5. Қандай фигураны үшбұрыш деп атайды? Үшбұрыштың қандай түрлерін білесіңдер? Олардың сызбаларын салып, әр үшбұрыштың элементтерін атап көрсетіңдер.

6. Үшбұрыштар теңдігінің неше белгісі бар? Оларды тұжырымдап беріңдер.

7. Қандай төртбұрышты параллелограмм деп атайды? Параллелограмм белгілерін тұжырымдап, олардың мағынасын сызба арқылы түсіндіріңдер. Көз мөлшермен параллелограмм салып, оның дұрыстығын параллелограмм белгілері бойынша тексеріңдер.

8. Тіктөртбұрыштың, ромбының, шаршының (квадраттың) қандай қасиеттерін білесіңдер? Сызғышты қолданбай осы фигуралардың сызбасын салып, олардың дұрыстығын қасиеттері арқылы тексеріңдер.

9. Трапецияның қандай түрлері мен қасиеттерін білесіңдер?

10. Үшбұрыштың (трапецияның) орта сызығы деген не және оның қандай қасиеттерін білесіңдер?

11. Пифагор теоремасын жазып, тұжырымдаңдар. Оған сәйкес үшбұрыш салып, элементтерін көрсетіңдер.

12. Сүйір бұрыштың тригонометриялық функциялары мен тік бұрышты үшбұрыш қабырғалары арасындағы байланысты көрсетіңдер. 30°, 45°, 60°-қа тең бұрыштардың тригонометриялық функцияларының мәндерін жазыңдар.

13. Тіктөртбұрыш, параллелограмм, үшбұрыш және трапеция аудандарының формулаларын жазыңдар. Сызбадан осы формулалардағы элементтерді атап көрсетіңдер.

14. Скалярлық, векторлық шама деп нені айтады? Коллинеар векторлар деп қандай векторларды атайды? Параллель көшіру мен векторлар арасында қандай байланыс бар?

15. Вектордың модулі деген не? Қандай векторларды тең деп атайды? Векторлардың қосындысы мен айырымын қалай анықтайды? Вектордың өзара қиылысатын түзулер бойындағы құраушылары арқылы қалай жіктелетінін сызбада көрсетіңдер.

16. Векторлар арасындағы бұрыш деп қандай бұрышты атайды? Векторлардың скалярлық көбейтіндісі деген не?

17. Вектордың координатасы деп нені айтады? Скалярлық көбейтіндіні, векторлардың коллинеарлық және ортогональдық шарттарын координаталық түрде жазыңдар. Векторлар арасындағы бұрышты анықтау формуласын жазыңдар.

18. Түзудің бағыттаушы векторы, нормал векторы деген не? Берілген екі нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуін жазыңдар. Кесіндіні берілген қатынаста бөлу формуласын жазыңдар.

19. Үшбұрыштарды шешу деп нені түсінесіңдер? Косинустар және синустар теоремасы формулаларын жазыңдар.

20. Өстік және центрлік симметрия, бұру және параллель көшіру түрлендіруі деп нені айтады? Олардың қандай ортақ қасиеттері бар?

21. Ұқсас түрлендіру және гомотетия деп нені айтады? Үшбұрыштардың ұқсастық белгілерін тұжырымдаңдар.

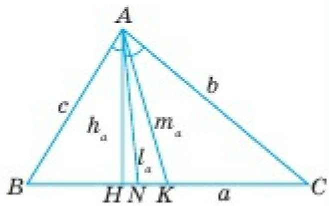
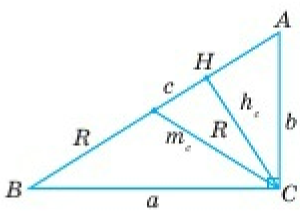
22. Шеңбер деген не? Оның негізгі элементтерін атаңдар. Шеңбер ұзындығы қалай анықталады?

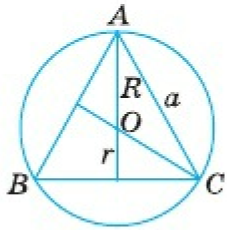
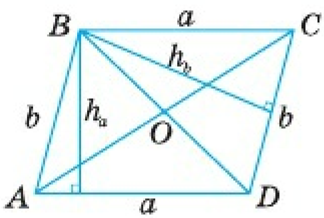
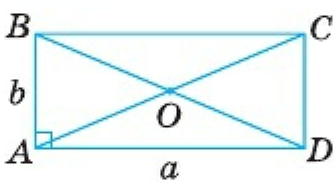
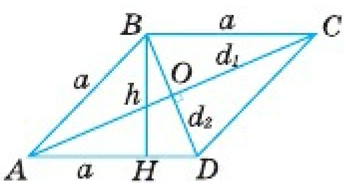
23. Дөңгелек деген не? Дөңгелектің ауданы, оның бөліктерінің аудандары қандай формулалармен анықталады?

24. Дөңгелектегі пропорционал кесінділердің қасиеттерін атаңдар. Шеңберге іштей сызылған бұрыштың қандай қасиеті бар?

25. Дөңес көпбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы және сыртқы бұрыштарының қосындысы неге тең? Үшбұрыш биссектрисасының қандай қасиеттері бар?

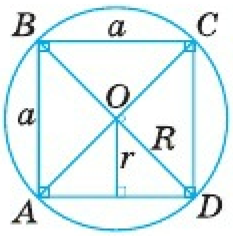
ПЛАНИМЕТРИЯНЫҢ НЕГІЗГІ ФОРМУЛАЛАРЫ

№	Фигура	Негізгі формулалар
1	2	3
1.	**Кез келген үшбұрыш**  m_a — медиана l_a — биссектриса h_a — биіктік	$P = a + b + c;\quad p = \frac{1}{2}(a + b + c);$ $m_a = \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}};$ $l_a = \frac{2bc \cdot \cos\frac{A}{2}}{b + c};\ h_a = \frac{2S}{a};$ $\frac{BN}{CN} = \frac{c}{b};\quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A;$ $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R;$ $R = \frac{abc}{4S};\ r = \frac{S}{p};$ $S = \frac{1}{2} a \cdot h_a;\ S = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin A;$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$
2	**Тік бұрышты үшбұрыш** 	$c^2 = a^2 + b^2,\quad \angle C = 90°;$ $h_c = \sqrt{AH \cdot BH};\ a^2 = c \cdot BH;$ $b^2 = c \cdot AH;$ $a = c \cdot \sin A = c \cdot \cos B;$ $c = \frac{a}{\sin A} = \frac{a}{\cos B};$ $a = b \cdot \operatorname{tg} A = b \cdot \operatorname{ctg} B;\ S = \frac{1}{2} a \cdot b;$ $R = \frac{c}{2};\ r = \frac{a + b - c}{2}.$

1	2	3
3	**Дұрыс үшбұрыш** 	$\angle A = \angle B = \angle C = 60°$; $AB = AC = BC = a$; $R = \frac{\sqrt{3}}{3}a$; $r = \frac{\sqrt{3}}{6}a$; $R = 2r$; $S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$. $h = m = l = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
4	**Параллелограмм** 	$AO = OC$; $BO = OD$; $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = 180°$; $AC^2 + BD^2 = 2(a^2 + b^2)$; $S = a \cdot h_a$; $S = b \cdot h_b$; $S = a \cdot b \cdot \sin A$.
5	**Тіктөртбұрыш** 	$AC = BD$; $AO = OC$; $BO = OD$; $S = a \cdot b$.
6	**Ромб** 	$AC \perp BD$; $AO = OC$; $BO = OD$; $AB = BC = CD = AD = a$; $S = a \cdot h$; $S = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2$

<table>
<tr>
<td>7</td>
<td>

Шаршы (квадрат)



</td>
<td>

$AC \perp BD$; $AC = BD$;

$AO = OC = BO = OD = R$;

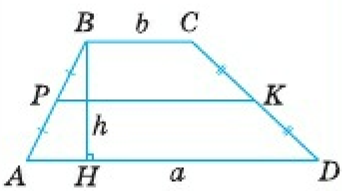
$AC = \sqrt{2}a$;

$R = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a$; $r = \dfrac{a}{2}$;

$S = a^2$.

</td>
</tr>
<tr>
<td>8</td>
<td>

Трапеция



</td>
<td>

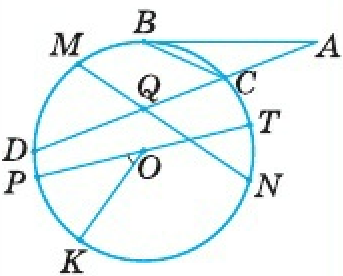
$PK = \dfrac{a+b}{2}$;

$S = \dfrac{h}{2}(a+b)$;

$AD \parallel BC$.

</td>
</tr>
<tr>
<td>9</td>
<td>

Шеңбер мен дөңгелек



</td>
<td>

$\angle BCD = \dfrac{1}{2}\overset{\smile}{BD}$; $\angle POK = \overset{\smile}{PK}$;

$\angle CBA = \dfrac{1}{2}\overset{\smile}{BC}$;

$\angle BAD = \dfrac{1}{2}(\overset{\smile}{BD} - \overset{\smile}{BC})$;

$\angle MQD = \angle CQN = \dfrac{1}{2}(\overset{\smile}{DM} + \overset{\smile}{CN})$

$AB^2 = AC \cdot AD$; AB — жанама;

$MQ \cdot QN = DQ \cdot QC$;

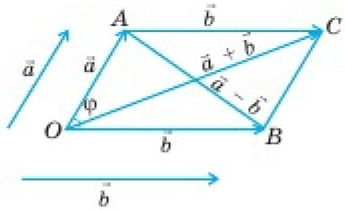
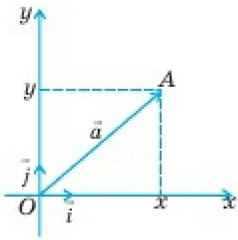
$C_{\text{шеңб.}} = 2\pi R$ — шеңбердің ұзындығы.

$C_{PK} = \dfrac{\pi R \cdot \alpha}{180^\circ}$ — $\overset{\smile}{PK}$ доғасының ұзындығы

$S = \pi R^2$ — дөңгелектің ауданы

$S_{OPK} = \dfrac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ}$ — OPK секторының ауданы

</td>
</tr>
</table>

10	**Жазықтықтағы векторлар**   	$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$ — үшбұрыш ережесі $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ — параллелограмм ережесі $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$; $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos\varphi$; $\vec{i} = (1; 0)$, $\vec{j} = (0; 1)$ — вектордың координаталары; $\forall \vec{a} \exists\ x, y \in (-\infty, +\infty)$ $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$ ($\exists$ таңбасы «табылады» сөзінің орнына қолданылады) x пен y — $\vec{a}$ векторының координаталары, оның жазылуы: $\vec{a} = (x; y)$. $\|\vec{a}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ — вектордың модулі; Егер $\vec{a} = (x_1; y_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2)$ болса, онда $\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2;\ y_1 \pm y_2)$; $\lambda\vec{a} = (\lambda x_1; \lambda y_1)$, $\lambda \in (-\infty, +\infty)$; $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$; $\cos\varphi = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$.

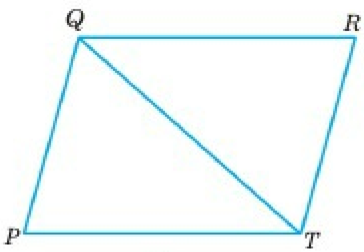
7–9-СЫНЫП МАТЕРИАЛДАРЫН ҚАЙТАЛАУ ЕСЕПТЕРІ

А

0.1. Тең бүйірлі үшбұрыштың периметрі 48 см, табаны 18 см. Оның бүйір қабырғасын табыңдар.

0.2. Егер екі түзу қиылысқанда пайда болатын бұрыштардың үшеуінің қосындысы 300°-қа тең болса, осы бұрыштардың шамасын табыңдар.

0.3. AB және CD кесінділері O нүктесінде қиылысып, осы нүктеде қақ бөлінеді. $\Delta AOD = \Delta BOC$ теңдігін дәлелдеңдер.



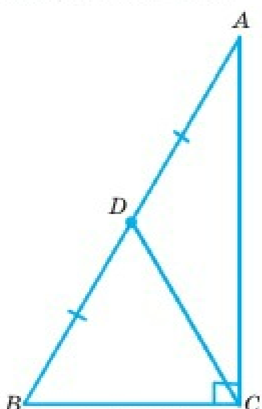
0.1-сурет

0.4. 1) Үшбұрыштың; 2) тіктөртбұрыштың; 3) ромбының; 4) квадраттың қабырғаларының орталарын тізбектеп қосу арқылы қандай фигура алынады? Жауаптарыңды негіздеңдер.

0.5. $PQRT$ параллелограмының периметрі 24 см, ал PQT үшбұрышының периметрі 18 см. QT диагоналын табыңдар (0.1-сурет).

0.6. Тік бұрышты үшбұрышта a және b — катеттер, c — гипотенуза, ал α — a катетіне қарсы жатқан бұрыш. Берілгендері бойынша үшбұрыштың белгісіз элементтерін табыңдар: 1) $a = 4$ м, $b = 3$ м; 2) $a = 12$ см, $c = 13$ см; 3) $\alpha = 30°$, $c = 12$ см; 4) $\alpha = 60°$, $b = 7$ дм.

0.7. *а*) Параллелограмның; *ә*) үшбұрыштың екі қабырғасы мен олардың арасындағы бұрышы берілген, оның ауданын табыңдар: 1) $a = 2$ м, $b = 3$ м, $\alpha = 30°$; 2) $a = 4$ см, $b = 2\sqrt{3}$ см, $\alpha = 60°$; 3) $a = 2$ м, $b = \sqrt{2}$ м, $\alpha = 45°$.



0.2-сурет

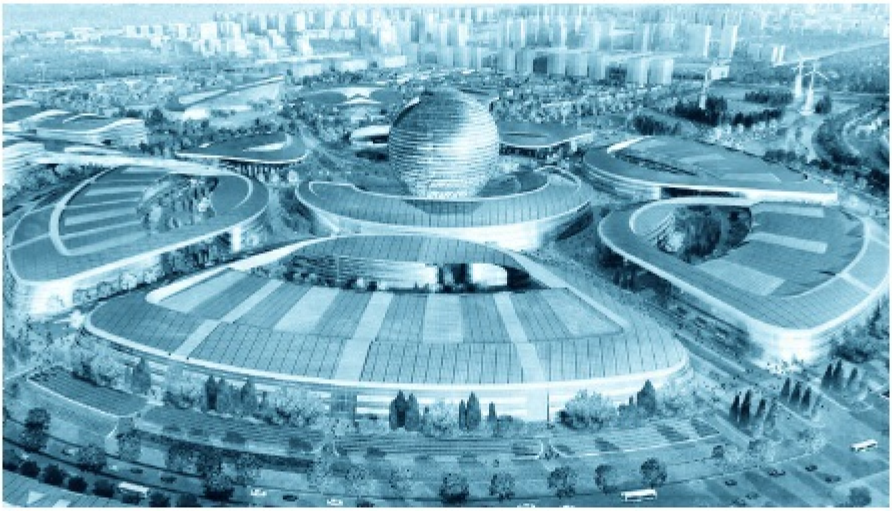
0.8. Қабырғасы мен бір диагоналы 6 см болатын ромбының ауданын табыңдар.

0.9. E және N нүктелері — $ABCD$ параллелограмының сәйкесінше BC және CD қабырғаларының орталары. $\overline{AE}$ және $\overline{AN}$ векторларын $\overline{AB} = \vec{a}$ және $\overline{AD} = \vec{b}$ векторлары арқылы өрнектеңдер.

0.10. C бұрышы тік болатын ABC үшбұрышында $AB = 2\sqrt{2}$ см, $\angle A = 30°$, CD — медиана. Скаляр көбейтіндіні табыңдар: 1) $\overline{CD} \cdot \overline{AB}$; 2) $\overline{CD} \cdot \overline{CB}$; 3) $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$ (0.2-сурет).

ГЕОМЕТРИЯ ЖӘНЕ СӘУЛЕТ ӨНЕРІ

ЭКСПО-2017. Астанадағы Халықаралық көрмелер бюросы аясында өткен Халықаралық мамандандырылған көрменің басты, әлемдегі ең үлкен сфера пішінді ғимараты – «Нұрлы әлем».



Тапсырма

0.11-есепті шығарып, сфераның диаметрін анықтаңдар.

0.11. Тік бұрышты үшбұрыш радиусы 50 м болатын шеңберге іштей сызылған және үшбұрыштың бір катеті 60 м. Оның екінші катетін табыңдар.

0.12. AB және CD кесінділері O нүктесінде қиылысады және осы нүктеде мынадай қатынаста бөлінеді: $AO : OB = CO : OD = 1 : 2$. $AC = 2$ см деп алып, BD-ны табыңдар.

0.13. Алдыңғы есептің шарты бойынша $AC \parallel BD$ болатынын көрсетіңдер.

0.14. Ауданы 36π м^2 болатын дөңгелекті шектейтін шеңбер ұзындығын табыңдар.

B

0.15. Шамалары α және β-ға тең үшбұрыш бұрыштарының биссектрисалары қандай бұрыштар жасап қиылысады?

0.16. Тік бұрышты үшбұрыштың сүйір бұрышы 30°, гипотенузасы 24 см. Оның тік бұрышынан түсірілген биіктігі гипотенузасын қандай бөліктерге бөледі?

0.17. Шеңбердің радиусына тең хордасының ұштарынан жүргізілген жанамалар қандай бұрыш жасап қиылысады?

0.18. Тең бүйірлі трапецияның табандары 10 см және 15 см, сүйір бұрышы 60°. Оның периметрін табыңдар.

0.19. Егер параллелограмға іштей шеңбер сызу мүмкін болса, онда оның ромб болатынын көрсетіңдер.

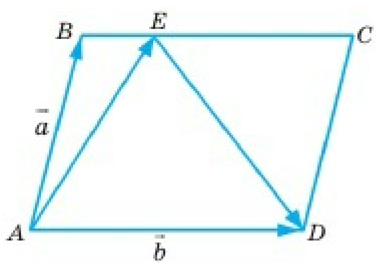
0.20. Периметрлері бірдей тіктөртбұрыштар арасында квадраттың ауданы ең үлкен болатынын көрсетіңдер.

0.21. Тік бұрышты үшбұрышқа іштей және сырттай сызылған шеңберлер диаметрлерінің қосындысы үшбұрыш катеттерінің қосындысына тең екенін дәлелдеңдер.

0.22. Трапецияның ауданы 594 см^2, биіктігі 22 см, табандарының айырымы 6 см. Трапецияның табандарын табыңдар.

0.23. Егер $PQ=PT$ болса, онда 0.5-есептегі PQT үшбұрышының ауданын табыңдар.

0.24. Ұзындығы 12π см-ге тең шеңберге ұзындығы 6 см хорда жүргізілген. Осы хорда керетін кіші доғаның градустық өлшемін табыңдар.



0.3-сурет

0.25. $ABCD$ параллелограмының BC қабырғасында $BE : EC = 1 : 4$ болатындай етіп, E нүктесі белгіленген. $\overrightarrow{AE}$ және $\overrightarrow{ED}$ векторларын $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ және $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ векторлары арқылы өрнектеңдер (0.3-сурет).

0.26. $ABCD$ параллелограмының C төбесі арқылы түзу жүргізілген, ол AB және AD қабырғаларының созындыларын сәйкесінше E және K нүктелерінде қияды. $BE \cdot DK = BC \cdot DC$ болатынын дәлелдеңдер.

0.27. Егер үшбұрыштың екі қабырғасы a және b, ауданы 0,5 болса, оның үшінші қабырғасын табыңдар.

0.28. Сағат маятнигінің ауытқу бұрышы 36°, ал оның ұшы жасайтын доғасының ұзындығы 24 см. Маятниктің ұзындығын табыңдар.

C

0.29. Бір бұрышы мен осы бұрыштың төбесінен жүргізілген биссектрисасы және биіктігі бойынша үшбұрыш салыңдар.

0.30. Екі қабырғасы мен осы қабырғалардың біріне түсірілген медианалары бойынша үшбұрыштар теңдігі белгісін дәлелдеңдер.

0.31. Трапецияның диагональдары оны төрт үшбұрышқа бөледі. Табандары трапецияның бүйір қабырғалары болатын үшбұрыштардың тең шамалы екенін дәлелдеңдер.

0.32. Берілген қабырғаларының орталары бойынша үшбұрышты қалай салуға болады?

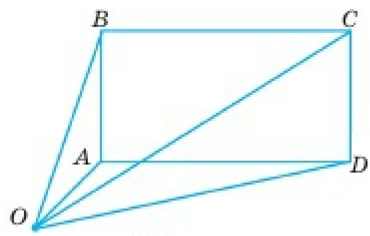
0.33. Тік бұрышты үшбұрыштың бір бұрышы қалған екі бұрышының арифметикалық ортасына тең. Егер оның гипотенузасы c-ға тең болса, осы үшбұрыштың катеттерін табыңдар.

0.34. Пифагор теоремасын пайдаланып, Герон формуласын дәлелдеңдер.

0.35. Табаны a, бүйір қабырғасына түсірілген биіктігі h болатын тең бүйірлі үшбұрыштың ауданын табыңдар.

0.36. $A(-7;\ 5)$, $B(3;\ -1)$ және $C(5;\ 3)$ нүктелері — үшбұрыштың төбелері. Осы үшбұрыштың орта перпендикулярларының теңдеулерін жазыңдар.

0.37. Егер $ABCD$ тіктөртбұрыш болса, онда жазықтықтың кез келген O нүктесі үшін $AO^2 + CO^2 = BO^2 + DO^2$ теңдігі орындалатынын көрсетіңдер (0.4-сурет).



0.4-сурет

0.38. Өзара сырттай жанасатын, радиустары R-ге және r-ге тең шеңберлердің ортақ жанамасының ұзындығын табыңдар.

0.39. Бұру түрлендіруі мен центрлік симметрияның арасында қандай байланыс бар?

0.40. P нүктесі — $\angle ABP = \angle BCP = \angle CAP = \varphi$ теңдігін қанағаттандыратындай ABC үшбұрышының ішкі нүктесі. $\operatorname{tg}\varphi$-ді үшбұрыштың ауданы мен оның қабырғалары арқылы өрнектеңдер.

https://www.geogebra.org/?land=ru сайтын қолданып өздеріңе қажетті кеңістіктегі фигуралар мен сызбаларды орындауға болады.

1-БӨЛІМ. СТЕРЕОМЕТРИЯ АКСИОМАЛАРЫ. КЕҢІСТІКТЕГІ ПАРАЛЛЕЛЬДІК

1.1. Стереометрия аксиомалары және олардың салдарлары

1.2. Кеңістіктегі түзулердің өзара орналасуы

1.3. Тетраэдр және параллепипед

1.4. Түзу мен жазықтықтың өзара орналасуы. Жазықтықтардың параллельдігі

1. 1. СТЕРЕОМЕТРИЯ АКСИОМАЛАРЫ ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ САЛДАРЛАРЫ

Тақырыпты оқып-үйрену барысында сендер:

- стереометрия аксиомаларымен танысасыңдар;
- оларды сызбада бейнелеп, математикалық символдармен жазуды үйренесіңдер;
- аксиомалардан туындайтын кейбір қарапайым салдарларды дәлелдеп, оларды есептер шығару барысында қолданасыңдар.

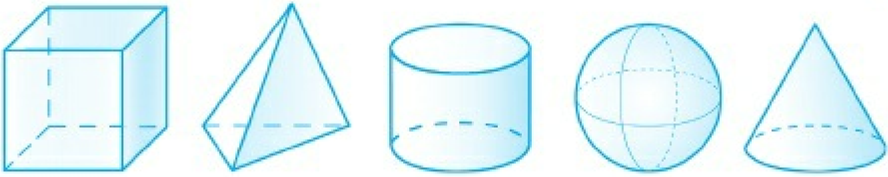
1.1.1. Кіріспе

Ойтүрткі

1.1-суретте ғимарат, 1.2-суретте Малевичтің атақты «Қара шаршы» суреті бейнеленген. Осы суреттерді салыстырыңдар: ғимарат нүктелері мен қара шаршының нүктелері жазықтыққа қатысты қалай орналасқан? Бұл фигуралардың барлық нүктелері бір жазықтықтың бойында жатуы мүмкін бе? Жауаптарыңды негіздеңдер.

1.1-сурет

1.2-сурет



1.3-сурет

1.3-суретте бейнеленген куб, пирамида, цилиндр, шар, конус және т.с.с. фигуралардың барлық нүктелері бір жазықтықтың бойында орналаспаған. Бұл фигуралар — кеңістік денелері. Кеңістік денелерін оқып-үйрену аса маңызды. Мәселен, құрылысшылар, сәулетшілер, конструкторлар, токарьлар және өзге де маман иелері мұндай денелерді күнделікті іс-тәжірибелерінде жиі пайдаланып, олардың қасиеттерін кеңінен қолданады. Кеңістік денелерінің қасиеттерін білмей үй салу, машина жасау, ұшақ пен ғарыш кемелерін дұрыс ұшырып-қондыру, заттардың құрылымын зерттеу мүмкін емес. Осыған қоса, бұл мәліметтер барлық техникалық жоғары оқу орындарында оқытылатын сызу пәні мен сызба геометриясының негізін қалайды.

Кеңістік денелерінің қасиеттерін зерттейтін геометрия саласын *стереометрия* деп атайды. Стереометрияда (грек. «стереос» – *кеңістік* және «метрео» — *өлшеймін*) осыған дейін оқып-үйренген планиметрияның барлық аксиомалары, теоремалары мен заңдылықтары орындалады. Сондықтан планиметрия курсын жақсы меңгерген оқушыларға стереометрия курсы айтарлықтай қиындық тудырмайды.

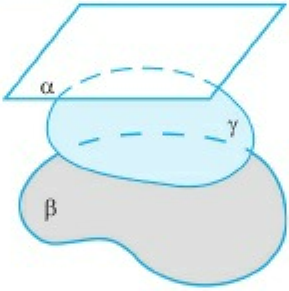
1.1.2. Стереометрия аксиомалары. Негізгі түсініктер

Планиметриядағы аксиомалар жүйесінде негізгі түсініктер ретінде нүкте мен түзу алынған.

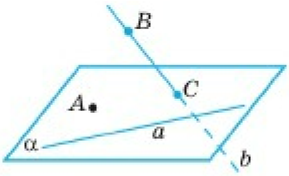
Ойтүрткі

Стереометриялық аксиомалар жүйесін құру үшін негізгі түсініктер ретінде нүкте мен түзу жеткілікті ме? Жеткіліксіз болса, олардың қатарына тағы қандай фигураны қосу қажет деп ойлайсыңдар?

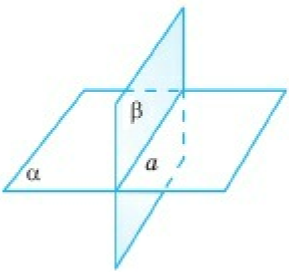
Мысалы, 1.1-суреттегі ғимаратты толық бейнелеу үшін нүкте мен түзуге қосымша тағы жазықтықтар қажет. Өйткені ғимараттың әр қабаты әртүрлі жазықтықта жатады. Олай болса негізгі фигуралар қатарына жазықтықты қосамыз. Сонымен стереометрия аксиомалары жүйесіндегі анықтамасыз қабылданатын негізгі



1.4-сурет



1.5-сурет



1.6-сурет

ұғымдар: *нүкте*, *түзу* және *жазықтық*. Нүктелерді бұрынғысынша латынның бас әріптерімен, түзулерді латынның кіші әріптерімен немесе түзу бойында жататын қос нүкте арқылы белгілейміз: A, B, C, ... — нүктелер; a, b, c, ... немесе AB, CD, AC, ... — түзулер. Жазықтықтарды гректің α, β, γ, ... кіші әріптерімен белгілейміз.

Жазықтықтарды сызбада параллелограмм түрінде немесе оның шектеулі бөлігін көрсету арқылы бейнелейді (1.4-сурет). Егер A нүктесі α жазықтығында жатса, оны $A \in \alpha$ арқылы белгілеп, α жазықтығы A нүктесі арқылы өтеді деп айтады. $B \notin \alpha$ жазуы B нүктесі α жазықтығында жатпайды немесе α жазықтығы B нүктесі арқылы өтпейді дегенді білдіреді.

Егер a түзуінің әр нүктесі α жазықтығында жатса, a түзуі α жазықтығында жатады немесе α жазықтығы a түзуі арқылы өтеді деп айтады және оны былай жазады: $a \subset \alpha$. Мысалы, 1.5-суреттегі a түзуі α жазықтығында жатады, b түзуі мен α жазықтығының жалғыз ортақ C нүктесі бар. Мұнда α жазықтығы b түзуімен C нүктесінде қиылысады деп айтады және оны былай жазады: $b \cap \alpha = C$.

Егер α және β жазықтықтарының екеуі де a түзуі арқылы өтсе, онда α және β жазықтықтары a түзуі бойымен қиылысады дейді және оны $\alpha \cap \beta = a$ түрінде жазады (1.6-сурет).

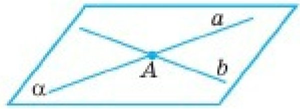
Стереометрия аксиомалары жүйесі планиметрияның аксиомаларына (7–9-сыныптарға арналған геометрия оқулықтарын қараңдар) қоса мынадай үш аксиомадан тұрады:

CI. *Қандай жазықтық болмасын кеңістікте оған тиісті және тиісті емес нүктелер табылады.*

CII. *Егер әртүрлі екі жазықтықтың ортақ нүктесі бар болса, онда бұл екі жазықтық осы ортақ нүктесі арқылы өтетін түзу бойымен қиылысады.*

CIII. *Егер әртүрлі екі түзудің ортақ нүктесі бар болса, онда бұл екі түзу арқылы жазықтық жүргізуге болады және бұл жазықтық жалғыз болады.*

Мысалы, $a \cap b = A$ болса, СІІІ аксиомасы бойынша $a \subset \alpha$ және $b \subset \alpha$ болатындай жалғыз α жазықтығы табылады. Бұл жазықтықты кейде (aAb) арқылы белгілейді (1.7-сурет).



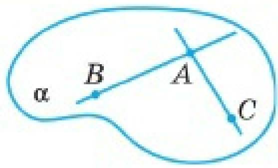
1.7-сурет

1.1.3. Аксиомалардың кейбір қарапайым салдарлары. Нүкте мен түзудің жазықтыққа тиістілігі

Енді СІ, СІІ, СІІІ аксиомаларынан туындайтын кейбір қарапайым салдарларға тоқталайық.

1-теорема. *Бір түзудің бойында жатпайтын үш нүкте арқылы бір ғана жазықтық өтеді.*

▲ **Дәлелдеуі.** Бір түзудің бойында жатпайтын A, B, C нүктелері берілсін (1.8-сурет). Планиметрияның І аксиомасы бойынша әрбір екі нүкте арқылы түзу жүргізуге болады, яғни AB және AC түзулерін жүргіземіз. Бұл түзулер беттеспейді, себебі A, B, C нүктелері теорема шарты бойынша бір түзудің бойында жатпайды. Онда СІІІ аксиомасы бойынша AB және AC түзулері арқылы өтетін жазықтық табылады және бұл жазықтық жалғыз. Теорема дәлелденді. ■

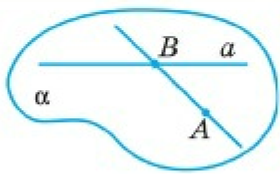


1.8-сурет

Дәлелденген теоремадан бір түзудің бойында жатпайтын A, B, C нүктелері арқылы бір ғана жазықтық өтетінін байқаймыз. Бұл жазықтықты (ABC) деп белгілейді.

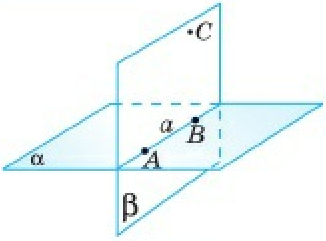
2-теорема. *Түзу мен оның бойында жатпайтын нүкте арқылы бір ғана жазықтық өтеді.*

▲ **Дәлелдеуі.** Айталық, a түзуі мен A $(A \notin a)$ нүктесі берілсін (1.9-сурет). Алдыңғы теореманың дәлелдеуінде айтылған І аксиома бойынша a түзуі бойында жататын B нүктесін алып, AB түзуін жүргіземіз. Мұндағы a мен AB — ортақ B нүктесі бар әртүрлі түзулер. Сондықтан СІІІ аксиомасы бойынша бұл екі түзу арқылы, яғни a түзуі мен A нүктесі арқылы жалғыз жазықтық өтеді. Теорема дәлелденді. ■



1.9-сурет

3-теорема. *Егер түзудің екі нүктесі берілген жазықтықта жатса, түзу толығымен осы жазықтықта жатады.*



1.10-сурет

▲ **Дәлелдеуі.** Айталық, a түзуінде жататын A және B нүктелері α жазықтығында жатсын (1.10-сурет). Онда $a \subset \alpha$ болатынын көрсету қажет.

Шынында да, α жазықтығында жатпайтын C нүктесін алайық (ондай нүкте бар, СІ аксиомасы). 2-теорема бойынша C нүктесі мен a түзуі арқылы β жазықтығын жүргізуге болады. α және β жазықтықтары қайсыбір b түзуі арқылы қиылысады. $A \in a$, $B \in a$ болғандықтан, $A \in \beta$ және $B \in \beta$. Теорема шарты бойынша $A \in \alpha$ және $B \in \alpha$, яғни $A \in \alpha \cap \beta$, $B \in \alpha \cap \beta$. Онда СІІ аксиомасы бойынша $A \in b$ және $B \in b$. Осыдан a және b түзулерінің екі ортақ нүктелері бар екені шығады. Демек, бұл түзулер беттеседі: $a = b$. Ал $b \subset \alpha$ болғандықтан, $a \subset \alpha$. Теорема дәлелденді. ■

Сонымен аксиомалар мен дәлелденген теоремалардан мынадай қорытынды жасауға болады.

Жазықтықты 1) *қиылысатын екі түзу*; 2) *бір түзудің бойында жатпайтын үш нүкте*; 3) *түзу және оның бойында жатпайтын нүкте арқылы толық анықтауға болады.*

1. Геометрияның қандай бөлімі стереометрия деп аталады?
2. Стереометрияның негізгі ұғымдарын атаңдар. Олардың арасында қандай негізгі қатынастар орындалады?
3. СІ, СІІ, СІІІ аксиомаларын тұжырымдап, олардың мағынасын сызба арқылы түсіндіріңдер.
4. Аксиомалардың қарапайым салдарларын тұжырымдап, оларды дәлелдеңдер.
5. Нүкте, түзу, жазықтық қалай белгіленеді?
6. Екі түзу (екі жазықтық) бір нүктеде (түзу бойымен) қиылысады. Осыны қысқаша қалай жазады?

Практикалық жұмыс

Қатты қағаздан өзара қиылысатын жазықтықтың үлгісін жасап, осыдан 1) жазықтықтардың қиылысу түзуін; 2) екі жазықтықтың ортақ нүктесін; 3) бір жазықтықтың екінші жазықтыққа тиісті емес нүктесін көрсетіңдер.

ЕСЕПТЕР

А

1.1. Бір түзудің бойында жатпайтын 1) үш нүкте; 2) төрт нүкте арқылы жазықтық жүргізуге бола ма? Неше жазықтық жүргізуге болады?

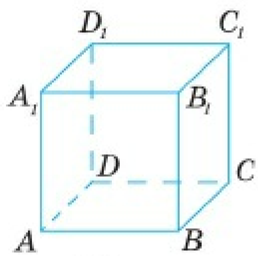
1.2. Төмендегі қысқаша жазуды нақты әрі неғұрлым ықшам етіп тұжырымдаңдар:

1) $A \in \alpha$, $B \in \alpha$, $C \in \alpha$, $C \notin AB$;
2) $a \subset \alpha$, $b \subset \alpha$, $a \cap b = A$;
3) $a \subset \alpha$, $a \subset \beta$;
4) $a \parallel b$, $a \subset \alpha$, $b \subset \alpha$.

1.3. Мына сөйлемдерді символдарды пайдаланып, қысқаша жазыңдар: 1) A нүктесі a түзуінде жатады; 2) a түзуі A және B нүктелері арқылы өтеді; 3) a және b түзулері O нүктесінде қиылысады; 4) α және β жазықтықтары a түзуі бойымен қиылысады; 5) α жазықтығы a түзуі мен осы түзуде жатпайтын A нүктесі арқылы өтеді; 6) C нүктесі γ жазықтығында жатпайды; 7) l түзуі β жазықтығын B нүктесінде қияды; 8) α жазықтығы бір түзудің бойында жатпайтын A, B және C нүктелері арқылы өтеді.

1.4. A нүктесі — α және β жазықтықтарының ортақ нүктесі. Бұл жазықтықтардың өзге ортақ нүктелері бар ма? Егер бар болса, онда бұл нүктелер қалай орналасады?

1.5. 1.11-суретте $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы бейнеленген. AA_1C_1C жазықтығының 1) $ABCD$; 2) $A_1B_1C_1D_1$; 3) AA_1D_1D; 4) BB_1C_1C жазықтығымен қиылысу түзуін көрсетіңдер.



1.11-сурет

1.6. Бір әуежайдан сағат 12-ден бастап әртүрлі бағыттарда 10 минут өткен сайын үш ұшақ ұшып шықты. Қай уақытта бұл үшеуі бір жазықтықтың бойында орналасады? Жауаптарыңды негіздеңдер.

1.7. Бір түзуде жатпайтын A, B, C нүктелері және α жазықтығы берілген. Егер $A \in \alpha$, $B \in \alpha$ және $C \in \alpha$ болса, ABC және α жазықтықтарының беттесетінін дәлелдеңдер.

1.8. α, β және γ жазықтықтары қос-қостан a, b және c түзулері бойымен қиылысады және $a \parallel b \parallel c$ болады. Сәйкес сызбаны салып көрсетіңдер.

В

1.9. Бір нүкте арқылы өтетін үш түзудің бір жазықтық бойында жатуы міндетті ме?

1.10. Үшеуі бір нүкте арқылы өтпейтін, бірақ қос-қостан қиылысатын үш түзудің бір жазықтықта жататынын дәлелдеңдер.

1.11. «Егер $A \in m,\ m \subset \alpha \Rightarrow A \in \alpha$» сөйлемін дәлелдеп, оны сөзбен тұжырымдаңдар.

1.12. Кеңістікте нүкте мен өзара қиылысатын түзулердің біреуі арқылы өтетін неше жазықтық жүргізуге болады? Барлық жағдайды қарастырыңдар.

1.13. Егер $A, B \in \alpha$ болса, онда кесінді $AB \subset \alpha$. Осыны дәлелдеңдер және сөзбен тұжырымдаңдар.

1.14. $A \in \alpha$, $B \notin \alpha$ болатындай α жазықтығы мен A, B нүктелері берілген. 1) AB кесіндісінің ортасы; 2) AB кесіндісі; 3) AB түзуі α жазықтығында жата ма? Жауаптарыңды негіздеңдер.

1.15. A, B, C және D нүктелері бір жазықтықта жатпайды. Онда бұл түзулердің кез келген үшеуі бір түзуде жатпайтынын дәлелдеңдер.

1.16. α, β, γ жазықтықтары және $A \in \alpha$, $B \in \alpha$, $B \in \beta$, $C \in \beta$, $A \in \gamma$, $C \in \gamma$ болатындай A, B, C нүктелері берілген. Суретін салыңдар және онда берілген жазықтықтар мен нүктелерді көрсетіңдер.

C

1.17. Теореманың дұрыс не бұрыс екенін дәлелдеңдер:

1) $A, B \in a;\ A, B \in \alpha \Rightarrow a \subset \alpha$;
2) $A, B \in m;\ m \cap \alpha \neq \varnothing \Rightarrow A, B \in \alpha$;
3) $a \subset \alpha,\ P \notin a \Rightarrow P \notin \alpha$;
4) $\alpha \cap \beta = b,\ A \in \alpha,\ A \in \beta \Rightarrow A \in b$.

1.18. Алдыңғы есептегі теоремаларды сөзбен тұжырымдаңдар.

1.19. Кеңістікте кез келген нүкте арқылы жазықтық жүргізуге болатынын көрсетіңдер.

1.20. Кеңістікте кез келген екі нүкте арқылы жалғыз түзу өтетінін дәлелдеңдер.

1.21. A нүктесі мен осы нүкте арқылы өтпейтін a түзуі берілген. A нүктесі арқылы өтетін және a түзуімен қиылысатын барлық түзулер бір жазықтықта жататынын дәлелдеңдер.

1.22. Егер $a \cap b = A$, $b \cap c = B$ болса, онда a және c түзулерінің қиылысуы міндетті ме?

1.23. a және b түзулері қиылыспайды. Бұл түзулердің бір жазықтықта жатуы міндетті ме?

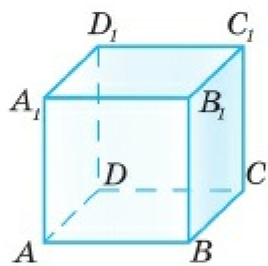
1.2. КЕҢІСТІКТЕГІ ТҮЗУЛЕРДІҢ ӨЗАРА ОРНАЛАСУЫ

Тақырыпты оқып-үйрену барысында сендер:

- түзу мен жазықтықтың параллельдік белгілері мен қасиеттерін білесіңдер және оларды есептер шығару барысында қолданасыңдар.

1.2.1. Түзулердің параллельдігі

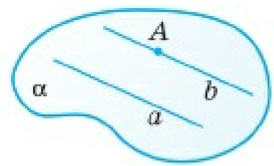
Бір жазықтықта жататын және қиылыспайтын түзулерді ***параллель түзулер*** деп атайды. Қиылыспайтын және бір жазықтықта жатпайтын түзулерді ***айқас түзулер*** деп атайды. Мысалы, 1.12-суретте бейнеленген кубтың AB және A_1B_1 қырлары арқылы өтетін түзулер өзара параллель, ал AB және B_1C_1, AB және A_1D_1 қырлары арқылы өтетін түзулер — айқас түзулер.



1.12-сурет

1-теорема. *Түзуден тысқары орналасқан нүкте арқылы осы түзуге параллель жалғыз ғана түзу өтеді.*

▲ **Дәлелдеуі.** Бұл теорема 7-сыныпта өтілген түзулердің параллельдік аксиомасына эквивалентті емес. Себебі бұл аксиомада кеңістікте емес, тек бір жазықтықта орналасқан параллель түзулер жөнінде айтылады. Сондықтан бұл теореманы дәлелдеу қажет.

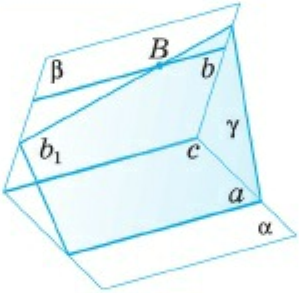


1.13-сурет

Айталық, a түзуі мен $A \notin a$ нүктесі берілсін (1.13-сурет). A нүктесі мен a түзуі арқылы α жазықтығын жүргіземіз және планиметрияның IX параллельдік аксиомасы бойынша осы жазықтықта A нүктесі арқылы өтетін a түзуіне параллель жалғыз b түзуін жүргізуге болады. Енді A нүктесі арқылы өтетін b түзуінің кеңістікте де a түзуіне параллель жалғыз түзу екенін көрсетейік.

Кері жорып, кеңістікте A нүктесі арқылы a түзуіне параллель өзге c түзуі өтсін делік. Онда a және c түзулері арқылы β жазықтығын жүргізуге болады. β жазықтығы A нүктесі мен a түзуі арқылы өтетін болғандықтан, 2-теорема (1.1.3-бап) бойынша α жазықтығымен беттеседі. Планиметрияның параллельдік аксиомасы бойынша b және c түзулері де беттеседі. Теорема дәлелденді. ■

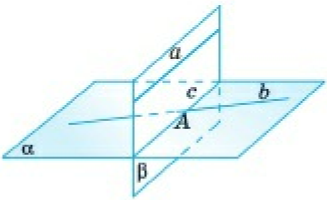
2-теорема. *Үшінші бір түзуге параллель екі түзу өзара параллель болады.*



1.14-сурет

▲ **Дәлелдеуі.** Айталық, $a \parallel c$ және $b \parallel c$ болсын. $a \parallel b$ екенін көрсетейік.

a және c түзулері жататын жазықтықты α арқылы, ал b және c түзулері жататын жазықтықты β арқылы белгілейік (a, b және c түзулері бір жазықтық бойында жататын жағдай планиметрия курсында толық қарастырылған). Мұнда α және β әртүрлі жазықтықтар. $B \in b$ нүктесін белгілеп, B нүктесі мен a түзуі арқылы γ жазықтығын жүргіземіз. Айталық, осы γ жазықтығы β жазықтығымен b_1 түзуі бойымен қиылыссын (1.14-сурет). $B \in b_1$ және $B \in b$ болғандықтан, $b \neq b_1$ немесе $b = b_1$ болуы қажет.



1.15-сурет

Егер $b \neq b_1$ болса, $b_1 \nparallel c$. b_1 және c түзулері β жазықтығында жататындықтан, бұл түзулер қиылысады: $K = b_1 \cap c$. Осыдан $K \in c = \beta \cap \alpha$, $K \in b_1 = \beta \cap \gamma$. Демек, K нүктесі α, β және γ жазықтықтарының үшеуіне де тиісті. Олай болса, K нүктесі $a = \alpha \cap \gamma$, $b_1 = \beta \cap \gamma$ және $c = \alpha \cap \beta$ түзулерінің үшеуіне де тиісті: $K = a \cap c$. Бұл $a \parallel c$ екеніне қайшы. Сондықтан $b_1 = b$ болуы қажет және b түзуі a түзуімен қиылыспайды (өйткені a және b түзулерінің қиылысу нүктесі c түзуінде жатар еді). Онда a және b түзулері γ жазықтығында жатады және қиылыспайды, яғни $a \parallel b$. Теорема дәлелденді. ■

Сонымен кеңістікте екі түзу үш түрлі жағдайда орналасуы мүмкін (1.15-сурет):

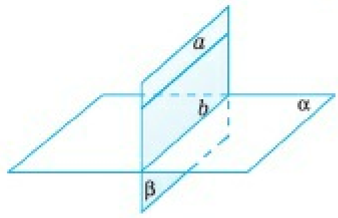
- *қиылысады* ($b \cap c = A$)
- *параллель* ($a \parallel c$)
- *айқас орналасады* (a мен b — айқас түзулер).

1.2.2. Түзу мен жазықтықтың параллельдігі

Кеңістіктегі ортақ нүктесі болмайтын түзу мен жазықтықты өзара ***параллель*** деп атайды. Егер a түзуі α жазықтығына параллель болса, онда оны былай жазады: $a \parallel \alpha$, сонымен қатар a түзуі мен α жазықтығы қиылыспайды деп айтады.

3-теорема. *Егер жазықтықта жатпайтын түзу осы жазықтықтағы түзуге параллель болса, онда бұл түзу берілген жазықтыққа параллель болады.*

▲ **Дәлелдеуі.** $a \parallel b$, $a \not\subset \alpha$, $b \subset \alpha$ шарты орындалатындай a, b түзулері мен α жазықтығы берілсін. $a \parallel \alpha$ екенін дәлелдеу қажет. Ол үшін $a \cap \alpha = \varnothing$ болатынын көрсетсе, жеткілікті.

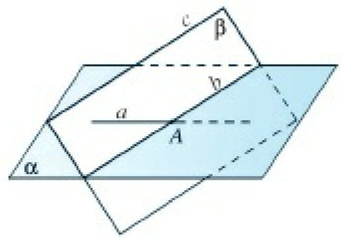


1.16-сурет

a және b түзулері арқылы β жазықтығын жүргізейік (1.16-сурет). α және β жазықтықтары b түзуі бойымен қиылысады. Егер a түзуі мен α жазықтығының ортақ нүктесі бар болса, онда бұл нүкте b түзуіне де тиісті болар еді. Ал бұлай болуы мүмкін емес, себебі $a \parallel b$. Олай болса, $a \cap \alpha = \varnothing$. Теорема дәлелденді. ■

4-теорема. *Айқас түзулердің біреуі арқылы екіншісіне параллель жалғыз ғана жазықтық өтеді.*

▲ **Дәлелдеуі.** Айталық, a және b айқас түзулері берілсін. $b \subset \alpha$ және $a \parallel \alpha$ болатындай жалғыз α жазықтығы табылатынын көрсетейік.



1.17-сурет

$A \in b$ нүктесін алып, A нүктесі мен a түзуі арқылы β жазықтығын жүргізейік. β жазықтығында A нүктесі арқылы өтетін және a түзуіне параллель c түзуін жүргіземіз. Сонымен бізде A нүктесінде қиылысатын b және c түзулері бар: $A = b \cap c$. Онда СІІІ аксиомасы бойынша қиылысатын b және c түзулері арқылы α жазықтығын жүргізуге болады. $c \subset \alpha$ және $a \parallel c$ болғандықтан, 3-теорема бойынша $a \parallel \alpha$ және жалғыз α жазықтығы анықталады. Теорема дәлелденді. ■

Сонымен кеңістікте түзу мен жазықтық үш түрлі жағдайда орналасуы мүмкін (1.17-сурет):

- *түзу жазықтықты қиып өтеді* ($a \cap \alpha = A$);
- *түзу жазықтыққа параллель* ($c \parallel \alpha$);
- *түзу жазықтықтың бойында жатады* ($b \subset \alpha$).

1.3. ТЕТРАЭДР ЖӘНЕ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД

Тақырыпты оқып-үйрену барысында сендер:

- кеңістік денелерінің екі түрі — тетраэдр және параллелепипедпен танысасыңдар;
- тетраэдр және параллелепипед анықтамасымен, олардың элементтерімен танысасыңдар;

- тетраэдр мен параллелепипедтің жазықтықтағы бейнелерін салуды үйренесіңдер;
- осы денелердің қиылысатын, параллель және айқас түзулері бойында жататын қырларын көрсете білесіңдер;
- параллель және қиылысатын жазықтықтар бойында орналасқан жақтарымен танысасыңдар.

1.3.1. Тетраэдр

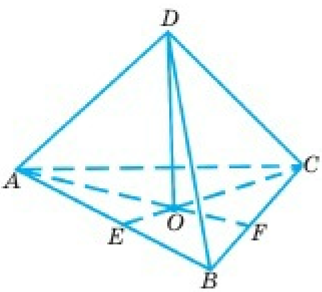
Ойтүрткі

1.18-суретте бейнеленген фигура туралы не ойлайсыңдар? Онда көрсетілген нүктелердің барлығы бір жазықтық бойында жата ма?

Бұл фигураны **тетраэдр** деп атайды.

Топтық жұмыс

Төрт-төрттен топтасып, тетраэдрге анықтама беріңдер және өз ұсыныстарыңды сыныппен бірге талқыландар. Дәл, нақты берілген анықтаманы таңдап, оны дәптерлеріңе жазып алыңдар.



1.18-сурет

1.18-суретте $ABCD$ тетраэдрі берілген. A, B, C және D нүктелері — оның **төбелері**, AB, AC, BC, AD, BD және CD кесінділері тетраэдрдің **қырлары** деп аталады. ΔABC — **табаны**, ABD, ACD және BCD үшбұрыштары тетраэдрдің **бүйір жақтары** деп аталады. AB, AC және BC қырлары **табанының қабырғалары**, AD, BD және CD кесінділері тетраэдрдің **бүйір қырлары** деп аталады.

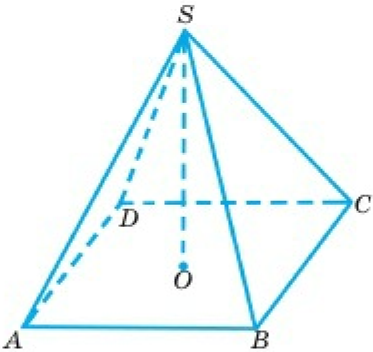
Егер $DO \perp AF$ және $DO \perp CE$ болса, онда DO кесіндісі $ABCD$ тетраэдрінің **биіктігі** деп аталады.

Топтық жұмыс

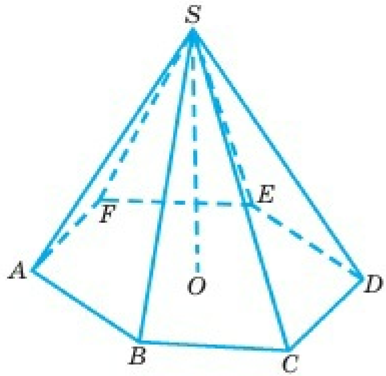
1. Топпен бірге 1.18-сурет бойынша айқас түзулердің жұптарын атап көрсетіңдер.
2. Сонымен, тетраэдрдің 4 төбесі, 6 қыры және 4 жағы бар. Олардың барлығын 1.18-сурет бойынша атап көрсетіңдер.

Тетраэдрдің табаны — үшбұрыш болып келеді. Егер үшбұрыш орнына төртбұрышты алсақ, **төртбұрышты пирамида** деп аталатын фигура алынады.

Тетраэдр — үшбұрышты пирамида. 1.19-суретте $SABCD$ төртбұрышты пирамидасы бейнеленген. Оның 5 төбесі, 8 қыры және 5 жағы бар. Жалпы пирамидалар табанында орналасқан фигураға байланысты төртбұрышты, бесбұрышты, алтыбұрышты пирамида деп аталады (1.20-сурет).



1.19-сурет

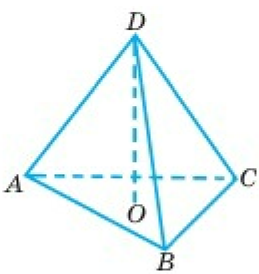


1.20-сурет

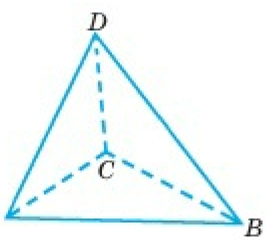
Кеңістік фигураларын (денелерін) жазықтық бетінде бейнелегенде олардың көрінетін элементтері тұтас сызықтармен, көрінбейтіндері, үзік сызықтармен сызылады. Кеңістік денелерін жазықтықта бейнелегенде мынадай принциптерді ұстанған дұрыс:

- фигураның көрінбейтін, үзік сызықтары саны мейлінше аз болуы қажет;
- бірде бір қыры (төбесі) өзге қырларының (төбелерінің) көлеңкесінде қалмауы қажет;
- мүмкіндігінше биіктігінің табанын көрсетіп отыру керек.

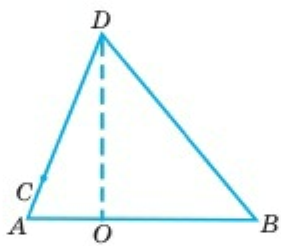
Мысалы, 1.21—1.25-суреттердің барлығында $ABCD$ тетраэдрі бейнеленген.



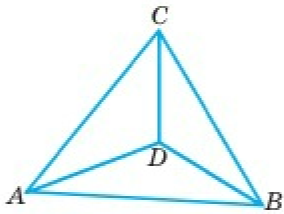
1.21-сурет



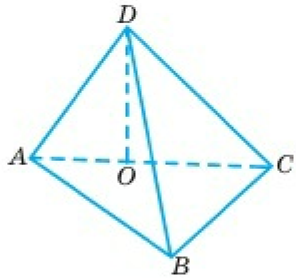
1.22-сурет



1.23-сурет



1.24-сурет

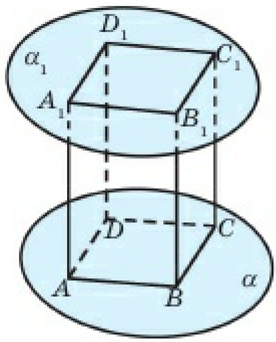


1.25-сурет

Топтық жұмыс

Топпен бірге 1.21—1.25-суреттерді талқылап, олардың қайсысы ережеге сәйкес келмейтінін атап көрсетіңдер. 1.21 және 1.25-суреттердегі тетраэдрлер бірдей денелер ретінде қабылдануы мүмкін бе? Жауаптарыңды негіздеңдер. Олардың түрі қандай нүктенің орналасуына тәуелді?

1.3.2. Параллелепипед



1.26-сурет

! Өздерің дәлелдеңдер

$ABCD$ және $A_1B_1C_1D_1$ өзара тең параллелограмдары параллель жазықтықтарда жатып, сәйкес қабырғалары өзара параллель болсын: $AB \parallel A_1B_1$; $AD \parallel A_1D_1$; $BC \parallel B_1C_1$ және $CD \parallel C_1D_1$ (1.26-сурет). Сонда AA_1B_1B, AA_1D_1D, BB_1C_1C, CC_1D_1D төртбұрыштары да параллелограмм болатынын дәлелдеңдер.

Барлығы параллелограмм болып келген алты жағы бар көпжақты *параллелепипед* деп атайды (1.26-сурет).

A, B, C, D және A_1, B_1, C_1, D_1 нүктелері параллелепипедтің **төбелері** деп аталады. $ABCD$ және $A_1B_1C_1D_1$ параллелограмдары оның сәйкесінше, төменгі және жоғарғы табандары, AA_1B_1B, BB_1C_1C, CC_1D_1D және A_1ADD_1 — бүйір жақтары. Осы көрсетілген параллелограмдардың қабырғалары параллелепипедтің **қырлары** деп аталады. Параллелепипедтің бір жағына тиісті емес төбелерін қосатын кесіндіні оның **диагоналі** деп атайды. Параллелепипедтің 8 төбесі, 12 қыры және 6 жағы, 4 диагоналі бар.

Топтық жұмыс

Топтасып, параллелепипед қырлары арқылы өтетін 1) параллель түзулерді; 2) айқас түзулер жұптарын; 3) диагональдарын көрсетіңдер; 4) параллелепипедте айқас диагональдар бар ма? Жауаптарыңды негіздеңдер. Жақтарының диагональдары мен параллелепипед диагональдары арасында айқас түзулер бар ма?

Егер параллелепипедтің бүйір жақтары тіктөртбұрыштар болса, мұндай денені **тік параллелепипед**, ал барлық жақтары тіктөртбұрыш болса, оны **тік бұрышты параллелепипед** деп атайды. Күнделікті тұрмыс-тіршілікте тік бұрышты параллелепипедтер жиі қолданылады. Мысалы, сынып бөлмесі, дүкендегі заттар салынған түрлі қораптар және т.с.с.

1. Кеңістікте қандай түзулер параллель түзулер деп аталады?
2. Қиылыспайтын түзулер үнемі параллель бола бере ме? Қандай түзулерді айқас түзулер деп атайды?
3. Параллель түзулердің қандай қасиеттерін білесіңдер?
4. Қандай түзулерді берілген жазықтыққа параллель деп атайды? Олардың қандай қасиеттерін білесіңдер?
5. Кеңістікте түзу мен жазықтық қалай орналасуы мүмкін?
6. Тетраэдр деген не және оның қандай элементтерін білесіңдер?
7. Параллелепипед деген не? Оның элементтерін анықтаңдар.
8. Кеңістік денесін жазықтықта қандай принциптерге сүйеніп салады және неліктен? Мысал келтіріңдер.

Практикалық жұмыс

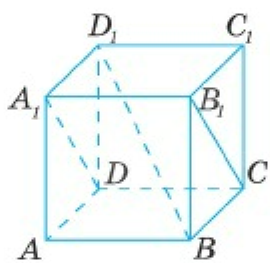
1. Сынып бөлмесінің қабырғаларын, еденін және төбесін жазықтық модельдері ретінде қарастырып, 1) параллель түзулерді; 2) айқас түзулер жұбын; 3) қиылысатын түзулер жұбын; 4) жазықтық пен оған параллель түзулерді көрсетіңдер.

2. Екі қарындашты пайдаланып, айқас түзулердің өзара орналасуын көрсетіңдер.

ЕСЕПТЕР

А

1.24. 1.27-суретте $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы бейнеленген. Түзулердің өзара қалай орналасқанын анықтаңдар: 1) AA_1 және BB_1; 2) A_1B_1 және D_1C_1; 3) AD және BB_1; 4) AB және DD_1; 5) A_1D және B_1C; 6) BD_1 және B_1C.



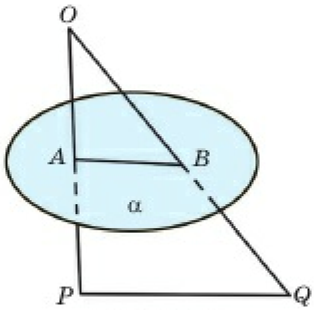
1.27-сурет

1.25. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген. Көрсетілген түзулер арқылы жазықтық жүргізуге бола ма: 1) AB және BD_1; 2) BB_1 және DD_1; 3) AA_1 және BD_1; 4) A_1D және B_1C; 5) AD және B_1C; 6) BDD_1 жазықтығы B_1 нүктесі арқылы өте ме?

1.26. a түзуі мен β жазықтығы қиылысады. Егер $a \cap b = \varnothing$ және $b \subset \beta$ болса, онда a түзуі арқылы өтетін және b түзуіне параллель жазықтық жүргізуге бола ма? a және b түзулері қалай аталады?

1.27. A, B, C және D нүктелері бір жазықтықта жатпайды. AB, AC, AD, BC, BD, CD түзулері арасынан өзара айқас түзулер жұбын көрсетіңдер. Мұндай неше түзулер жұбы бар? Сызбасын салыңдар.

1.28. Егер AB және CD түзулері айқас орналасса, AD және BC түзулері параллель бола ма?



1.28-сурет

1.29. α жазықтығы OP және OQ кесінділерінің орталары — A және B нүктелері арқылы өтеді. Егер $PQ = 8$ см болса, онда AB-ны табыңдар (1.28-сурет).

1.30. C нүктесі — AB кесіндісінің ортасы. A, B және C нүктелері арқылы өтетін параллель түзулер α жазықтығын сәйкесінше A_1, B_1 және C_1 нүктелерінде қиып өтеді. 1) $AA_1 = 3$ см, $BB_1 = 5$ см; 2) $AA_1 = 2{,}3$ м, $BB_1 = 3{,}7$ м; 3) $AA_1 = a$, $BB_1 = b$ болса, CC_1-ді табыңдар. Мұнда AB кесіндісі мен α жазықтығының ортақ нүктелері жоқ.

1.31. 1) $a \parallel \alpha$, $b \parallel \alpha$ болса, $a \parallel b$ болуы міндетті ме? 2) $a \parallel b$, $b \parallel \alpha$ болса, a түзуі мен α жазықтығы қалай орналасуы мүмкін? 3) $a \parallel \alpha$, $b \parallel \beta$ болса, α және β жазықтықтарының қиылысуы мүмкін бе? Жауаптарыңды сызба арқылы негіздеңдер.

1.32. Тетраэдрдің параллель қырлары бар ма? Жауаптарыңды сурет арқылы негіздеңдер.

1.33. Тік бұрышты параллелепипедтің табаны – шаршы. Оның диагоналі $6\sqrt{2}$ см, бүйір жағының диагоналі 10 см. Параллелепипедтің табан қабырғасы мен бүйір қырын табыңдар.

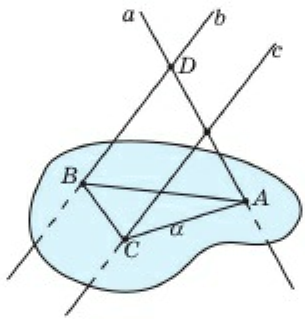
B

1.34. Нұр-Сұлтан «Бейбітшілік және келісім» сарайы төртбұрышты пирамида пішінінде салынған ғимарат. Пирамида табаны шаршы және оның қабырғасының ұзындығы пирамида биіктігіне тең. Биіктіктің табаны шаршы диагональдарының қиылысу нүктесінде орналасқан (1.29-сурет). Пирамида табанының диагоналі 87,4 м (0,01-ге дейінгі жуық мәні). Пирамиданың биіктігі мен табан қабырғаларының ұзындығын 0,01-ге дейінгі дәлдікпен анықтаңдар.

1.29-сурет

1.35. 1.30-суретте a, b және c түзулері α жазықтығын сәйкесінше A, B және C нүктелерінде қиып өтеді. Егер $D = a \cap b$, $E = a \cap c$ болса, онда $b \parallel c$ болуы мүмкін бе?

1.36. $AB \parallel CD$ болатындай A, B, C және D нүктелері берілген. B және C нүктелері арқылы өтетін жазықтық AD кесіндісін E нүктесінде қиып өтеді. $AB = 8$ см, $CD = 6$ см, $DE = 3$ см және $BE = 6$ см. BC мен AD-ны табыңдар.



1.30-сурет

1.37. Трапецияның орта сызығы бойымен қиып өтетін жазықтыққа трапецияның табандары параллель болатынын көрсетіңдер.

1.38. $ABCD$ параллелограмының AB қабырғасы арқылы α жазықтығы жүргізілген. Егер $C \notin \alpha$ болса, онда $DC \parallel \alpha$ екенін дәлелдеңдер.

1.39. ABC үшбұрышының BC қабырғасына параллель жазықтық оның AB қабырғасын P нүктесінде, AC қабырғасын Q нүктесінде қиып өтеді: $AB = 16$ см, $BC = 10$ см. 1) $AP : PB = 3:2$ деп алып, PQ-ды; 2) $PQ : BC = 1:4$ деп алып, AP-ны табыңдар.

1.40. Егер $b = \alpha \cap \beta$, $a \subset \alpha$ және $a \parallel \beta$ болса, онда $a \parallel b$ екенін дәлелдеңдер.

1.41. A, B, C және D нүктелері бір жазықтықта жатпайды. D нүктесі арқылы AB түзуіне параллель жазықтық BC кесіндісін $BK:KC = 2:3$ болатындай етіп, K нүктесінде қиып өтеді. Осы жазықтықтың AC кесіндісімен E қиылысу нүктесін табыңдар: $AE : EC$.

1.42. A, B, C және D нүктелері бір жазықтықта жатпайды. AD, AB, BC, CD кесінділерінің орталары параллелограмның төбелері болатынын дәлелдеңдер.

1.43. Тік параллелепипедтің табаны — диагональдары 8 см және 6 см болатын ромб. Параллелепипедтің бүйір жағының ауданы 35 см² болса, оның бүйір қыры қандай?

C

1.44. Параллель екі түзуді қиып өтетін түзу осы параллель түзулер арқылы өтетін жазықтықта жататынын дәлелдеңдер.

1.45. A, B, C және D нүктелері бір жазықтықта жатпайды. AD, AC, BC кесінділерінің орталары арқылы өтетін жазықтық BD кесіндісінің де ортасы арқылы өтетінін көрсетіңдер.

1.46. A, B, C және D нүктелері бір жазықтықта жатпайды және $AB = AC = AD = BC = BD = CD = 9$ см. BD және CD кесінділеріне параллель жазықтық AD кесіндісін E нүктесінде қиып өтеді. Осы жазықтықтың сәйкесінше AB және AC кесінділерімен қиылысу нүктелері F пен K-ны қалай анықтауға болады? Егер $AE : ED = 1 : 2$ болса, EFK үшбұрышының периметрін табыңдар.

1.47. Берілген жазықтық параллель екі түзудің біреуімен қиылысса, онда оның екінші түзумен де қиылысатынын дәлелдеңдер.

1.48. a түзуіне параллель және b түзуін ($b \nparallel a$) қиып өтетін барлық түзулердің геометриялық орнын (жиынын) анықтаңдар.

1.49. E нүктесі $ABCD$ тіктөртбұрышы жатқан жазықтықта жатпайды. Тіктөртбұрыштың әрбір қабырғасы оған қарсы жатқан қабырға мен E нүктесі арқылы өтетін жазықтыққа параллель болатынын дәлелдеңдер.

1.4. ТҮЗУ МЕН ЖАЗЫҚТЫҚТЫҢ ӨЗАРА ОРНАЛАСУЫ. ЖАЗЫҚТЫҚТАРДЫҢ ПАРАЛЛЕЛЬДІГІ

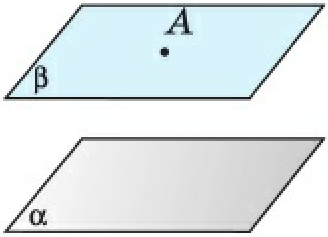
Тақырыпты оқып-үйрену барысында сендер:

- екі жазықтықтың параллельдігі белгілері мен қасиеттерін білесіңдер және оларды есептер шығару барысында қолданасыңдар.

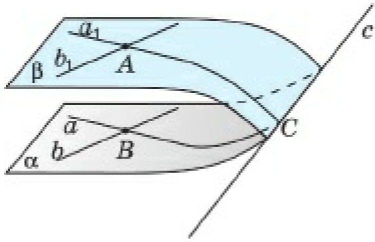
1.4.1. Екі жазықтықтың өзара орналасуы

Кеңістіктегі қиылыспайтын жазықтықтар ***параллель жазықтықтар*** деп аталады (1.31-сурет), $\alpha \cap \beta = \varnothing \Rightarrow \alpha \parallel \beta$.

1-теорема. *Жазықтықта жатпайтын нүкте арқылы осы жазықтыққа параллель бір ғана жазықтық жүргізуге болады.*



1.31-сурет

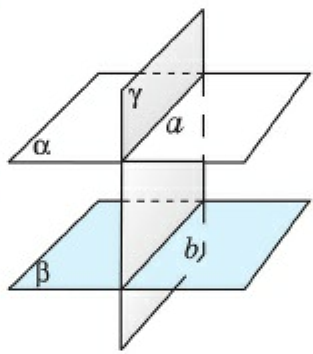


1.32-сурет

▲ **Дәлелдеуі.** α жазықтығы мен A ($A \notin \alpha$) нүктесі берілсін. α жазықтығынан қиылысатын a және b түзулерін аламыз: $a \subset \alpha$, $b \subset \alpha$, $a \cap b = B$ (1.32-сурет). Онда §1.2-тағы 1-теорема бойынша A нүктесі арқылы $a_1 \parallel a$ және $b_1 \parallel b$ болатындай a_1 және b_1 түзулерін жүргіземіз. Осыдан СІІІ аксиомасына сәйкес a_1 және b_1 түзулері арылы өтетін жалғыз β жазықтығын жүргізуге болады. Енді $\alpha \parallel \beta$, яғни $\alpha \cap \beta = \varnothing$ болатынын көрсету қалды.

Кері жорып, α және β жазықтықтары c түзуінің бойымен қиылыссын делік. Онда a және b түзулерінің кем дегенде біреуі c түзуіне параллель емес. $a \nparallel c$ және $a \cap c = C$ деп алсақ, $a_1 \nparallel c$ болып, 2-теореманың (1.2) дәлелдеуінде көрсетілгендей $a_1 \cap c = C$, яғни $a_1 \cap a = C$. Бұл $a_1 \parallel a$ шартына қайшы, онда $\alpha \cap \beta = \varnothing$, демек, $\alpha \parallel \beta$. Теорема дәлелденді. ■

2-теорема. *Екі параллель жазықтың үшінші жазықтықпен қиылысуынан пайда болған қиылысу түзулері өзара параллель болады, яғни* $\alpha \parallel \beta$, $a = \alpha \cap \gamma$, $b = \beta \cap \gamma \Rightarrow a \parallel b$ (1.33-сурет).



1.33-сурет

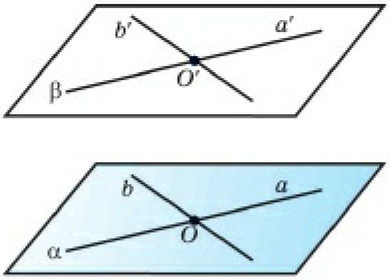
▲ **Дәлелдеуі.** Айталық, $a = \alpha \cap \gamma$, $b = \beta \cap \gamma$, $\alpha \parallel \beta$ болсын. $a \parallel b$ болатынын көрсету керек. Егер $a \nparallel b$ болса, онда $a, b \subset \gamma$. Ендеше a және b түзулері қиылысады: $A = a \cap b$. Ал $a \subset \alpha$ және $b \subset \beta$ болғандықтан, $A \in \alpha \cap \beta$. Бұл $\alpha \parallel \beta$ шартына қайшы. Олай болса, $a \parallel b$. Теорема дәлелденді. ■

Сонымен кеңістікте екі жазықтық екі түрлі жағдайда орналасуы мүмкін.

- *жазықтықтар түзу бойымен қиылысады;*
- *жазықтықтар параллель болады.*

1.4.2. Жазықтықтардың параллельдік белгілері

3-теорема. *Егер бір жазықтықтағы қиылысатын екі түзу екінші жазықтықтағы қиылысатын сәйкес екі түзуге параллель болса, бұл жазықтықтар өзара параллель болады.*



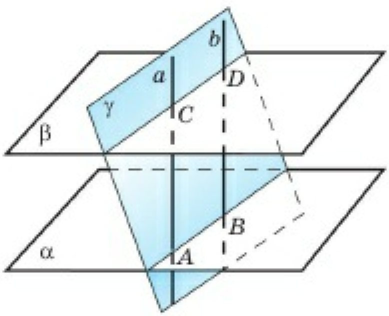
1.34-сурет

▲ **Дәлелдеуі.** Айталық, $a, b \subset \alpha$, $a \cap b = O$, $a', b' \subset \beta$, $a' \cap b' = O'$, $a \parallel a'$, $b \parallel b'$ болсын. $\alpha \parallel \beta$ екенін дәлелдеу керек (1.34-сурет).

Айталық, $\alpha \nparallel \beta$ және $\alpha \cap \beta = c$ болсын. 2-теореманың дәлелдеуіне ұқсас $a \cap a' \neq \varnothing$ немесе $b \cap b' \neq \varnothing$ болатыны шығады. Бұл $a \parallel a'$ немесе $b \parallel b'$ шартына қайшы. Олай болса, $\alpha \parallel \beta$. Теорема дәлелденді. ■

4-теорема. *Параллель түзулердің параллель жазықтықтармен шектелетін кесінділері өзара тең.*

▲ **Дәлелдеуі.** Айталық, $a \parallel b$, $\alpha \parallel \beta$, $a \cap \alpha = A$, $a \cap \beta = C$, $b \cap \alpha = B$, $b \cap \beta = D$ болсын, онда $AC = BD$ (1.35-сурет) теңдігі орындалатынын дәлелдеу керек.



1.35-сурет

Шынында да, $a \parallel b$ болғандықтан, бұл түзулер арқылы γ жазықтығын жүргізуге болады. Мұнда $\alpha \cap \gamma = AB$, $\beta \cap \gamma = CD$. 2-теорема бойынша $AB \parallel CD$, ал теорема шарты бойынша $AC \parallel BD$. Онда $ABCD$ төртбұрышы параллелограмм, демек, $AC = BD$. Теорема дәлелденді. ■

1. Қандай жазықтықтар параллель деп аталады?
2. Параллель жазықтықтардың қандай қасиеттері бар?
3. Кеңістікте екі жазықтық қалай орналасуы мүмкін?
4. Екі жазықтықтың параллельдік белгісін тұжырымдап, оны дәлелдеңдер.
5. Параллель түзулердің параллель жазықтықтармен шектелген кесінділерінің қандай қасиеттері бар?

Практикалық жұмыс

1. Сынып бөлмесінің қабырғаларын, еденін және төбесін жазықтықтың үлгі ретінде қарастырып, 1) барлық параллель жазықтықтар жұбын; 2) барлық қиылысатын жазықтықтар жұбы мен олардың қиылысу түзулерін көрсетіңдер.

2. Екі кітап арқылы параллель жазықтықтардың орналасуын көрсетіңдер.

ЕСЕПТЕР

A

1.50. a түзуі мен α жазықтығы қиылысады. a түзуі арқылы өтетін және α жазықтығына параллель жазықтық жүргізуге бола ма?

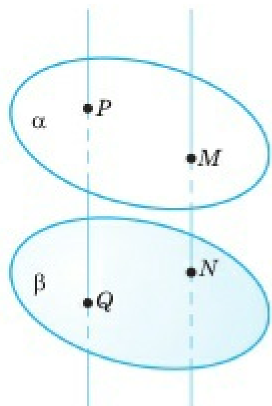
1.51. Егер α жазықтығындағы екі түзу β жазықтығына параллель болса, онда α және β жазықтықтарының параллель болуы міндетті ме? Жауапты түсіндіріңдер.

1.52. Бір жазықтықта жатпайтын AB, AC және AD кесінділерінің орталары арқылы α жазықтығы жүргізілген. α жазықтығы BCD жазықтығына параллель болатынын көрсетіңдер.

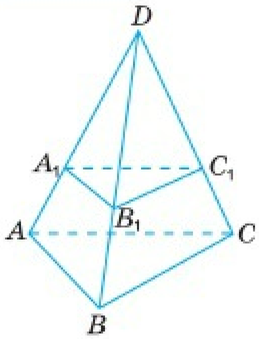
1.53. Параллель жазықтықтар AOB бұрышының OA қабырғасын C және C_1 нүктелерінде, OB қабырғасын D және D_1 нүктелерінде қиып өтеді және $OC = 6$ см, $OC_1 = 10$ см. 1) $C_1D_1 = 15$ см деп алып, CD-ны; 2) $OD = 9$ см деп алып, DD_1-ді табыңдар.

1.54. Қабырғасы 10 см болатын $ABCD$ квадраты мен O нүктесі бір жазықтықта жатпайды. A_1, B_1, C_1, D_1 нүктелері — сәйкесінше OA, OB, OC, OD кесінділерінің орталары. 1) A_1, B_1, C_1, D_1 нүктелері бір жазықтықта жататынын және осы жазықтық $ABCD$ квадрат жазықтығына параллель екенін дәлелдеңдер; 2) $A_1B_1C_1D_1$ төрт бұрышының периметрін табыңдар.

1.55. 1.36-суретте $PQ \neq MN$, $\alpha \parallel \beta$. $PQ \parallel MN$ қатынасы дұрыс па? Жауапты негіздеңдер.



1.36-сурет



1.37-сурет

1.56. $\angle BAD = B_1A_1D$, $\angle CBD = \angle C_1B_1D$ теңдіктері орындалады (1.37-сурет).

1) ABC және $A_1B_1C_1$ жазықтықтарының параллель болатынын дәлелдеңдер; 2) егер $AA_1 : A_1D = 2 : 3$ және $A_1B_1 = 2$ см болса, онда AB-ны табыңдар.

1.57. 1.37-суретте ABC және $A_1B_1C_1$ жазықтықтары параллель және $DA_1 : A_1A = 1 : 1$. 1) $AB \parallel A_1B_1$, $AC \parallel A_1C_1$, $BC \parallel B_1C_1$ болатынын дәлелдеңдер; 2) $AA_1 = 2$ см болса, AD-ны табыңдар.

B

1.58. Түзу өзара параллель екі жазықтықтың біреуін қиып өтеді. Түзудің екінші жазықтықты да қиып өтетінін көрсетіңдер.

1.59. Егер $\alpha \parallel \beta$ және $\beta \parallel \gamma$ болса, онда $\alpha \parallel \gamma$ екенін дәлелдеңдер (α, β, γ — жазықтықтар).

1.60. AA_1, BB_1 және CC_1 кесінділері O нүктесінде қиылысып, әрқайсысы осы нүктеде қақ бөлінеді. ABC және $A_1B_1C_1$ жазықтықтары параллель болатынын дәлелдеңдер.

1.61. γ жазықтығы α және β жазықтықтарымен қиылысады: $\alpha \cap \gamma = a$, $\beta \cap \gamma = b$, $a \parallel b$. $\alpha \parallel \beta$ деп тұжырымдауымыз дұрыс па? Неге?

1.62. a түзуі мен α жазықтығы берілген: $a \parallel \alpha$. a түзуі арқылы өтетін және α жазықтығына параллель жазықтықты қалай жүргізуге (салуға) болады?

1.63. Өзара параллель α және β жазықтықтары арасында орналасқан O нүктесі арқылы a және b түзулері жүргізілген: $a \cap \alpha = A$, $a \cap \beta = C$, $b \cap \alpha = B$, $b \cap \beta = D$ және $AO : AC = 1 : 3$. 1) $BO = 4$ см болса, OD-ны; 2) $OC = 6$ см болса, AC-ны табыңдар.

1.64. «Егер бір жазықтықта орналасқан екі түзу екінші жазықтыққа параллель болса, онда бұл екі жазықтық өзара параллель болады» деген тұжырымдама дұрыс па?

1.65. «Егер бір жазықтықта орналасқан екі түзу екінші жазықтықтағы екі түзуге параллель болса, онда бұл екі жазықтық өзара параллель болады» деген тұжырымдама дұрыс па?

C

1.66. Әрқайсысы айқас a және b түзулерінің біреуі арқылы өтетін және өзара параллель болатын α және β жазықтықтарының бір ғана жұбы табылатынын дәлелдеңдер.

1.67. ABC және BCD үшбұрыштары әртүрлі жазықтықтарда орналасқан. P, Q, R және T нүктелері — сәйкесінше AB, AC, CD және BD кесінділерінің орталары. $PQRT$ төртбұрышының параллелограмм болатынын дәлелдеңдер.

1.68. O нүктесі арқылы өтетін a, b, c және d түзулері α жазықтығын параллелограмның төбелері болатын нүктелерде қиып өтеді. Бұл түзулер α жазықтығына параллель кез келген жазықтықты да қандай да бір параллелограмның төбелерінде қиып өтетінін дәлелдеңдер.

1.69. a түзуі өзара параллель α, β және γ жазықтықтарын сәйкесінше A, B және C нүктелерінде қиып өтеді. $AB:BC$ қатынасы a түзуін таңдап алуға тәуелсіз екенін көрсетіңдер.

1.70. Берілген жазықтық өзара параллель жазықтықтардың біреуін қиып өтсе, онда бұл жазықтық параллель жазықтықтардың екіншісін де қиып өтетінін көрсетіңдер.

1.71. $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ және $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$. ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштары жатқан жазықтықтардың параллель болуы міндетті ме?

1.72. $\alpha \parallel \beta$, $\alpha \cap a = A$, $\beta \cap a = B$, $\alpha \cap b = C$, $\beta \cap b = D$ шарттарын қанағаттандыратын α, β жазықтықтары мен a, b түзулері берілген. $AK:KB = CN:ND$ болатындай K және N нүктелері сәйкесінше a және b түзулерінде жатады. $KN \parallel \beta$ болатынын дәлелдеңдер.

2-БӨЛІМ. КЕҢІСТІКТЕГІ ПЕРПЕНДИКУЛЯРЛЫҚ

2.1. Түзу мен жазықтықтың перпендикулярлығы

2.2. Үш перпендикуляр туралы теорема

2.3. Түзу мен жазықтық арасындағы бұрыш. Екіжақты бұрыштар

2.4. Кеңістік фигураларын жазықтықта бейнелеу

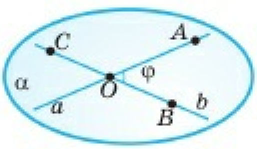
2.1. ТҮЗУ МЕН ЖАЗЫҚТЫҚТЫҢ ПЕРПЕНДИКУЛЯРЛЫҒЫ

Тақырыпты оқып-үйрену барысында сендер:

- перпендикуляр түзулердің анықтамасы мен қасиеттерін білесіңдер және оларды есептер шығарғанда қолданасыңдар;
- түзу мен жазықтықтың перпендикулярлығы анықтамасын, белгілері мен қасиеттерін білесіңдер және оларды есептер шығарғанда қолданасыңдар.

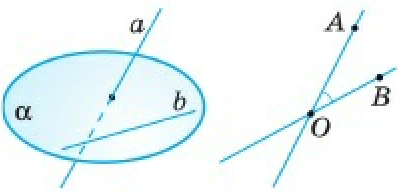
2.1.1. Түзулердің арасындағы бұрыш. Түзулердің перпендикулярлығы

Бір жазықтықта орналасқан қиылысатын a және b түзулері вертикаль бұрыштардың екі жұбын құрайтыны белгілі. Осы бұрыштардың доғал емесі a және b түзулері ***арасындағы бұрыш*** деп аталады. 2.1-суретте $\varphi=\angle AOB<\angle AOC$ болса, онда анықтама бойынша $\angle(a,b)=\varphi$. Әрине, екі түзу арасындағы бұрыш әрқашан $0°<\varphi\leqslant 90°$ теңсіздіктерін қанағаттандырады.



2.1-сурет

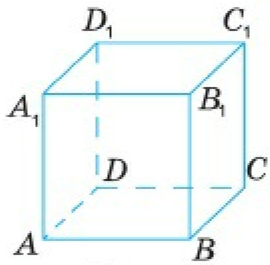
Енді айқас a және b түзулері арасындағы бұрышты анықтайық. Ол үшін кеңістікте қандай да бір O нүктесін алып, берілген түзулерге параллель OA және OB түзулерін жүргіземіз. Егер AOB бұрышы доғал болмаса, онда a және b айқас түзулері арасындағы бұрыш ретінде AOB бұрышының шамасын аламыз. 2.2-суретте a және b түзулері айқас және $a\parallel OA$, $b\parallel OB$, $\angle AOB<90°$, онда анықтама бойынша $\angle(a,b)=\angle AOB$.



2.2-сурет

Сонымен, кеңістіктегі екі түзудің арасындағы бұрыш деп оларға параллель және қиылысушы түзулер арасындағы бұрышты айтады.

Егер a және b түзулерінің арасындағы бұрыш 90°-қа тең болса, онда бұл түзулерді ***перпендикуляр түзулер*** деп атайды. Егер a және b түзулері перпендикуляр болса, оны $a \perp b$ деп белгілейді. Жоғарыда айтылғандай, перпендикуляр түзулердің қиылысуы да, қиылыспауы да немесе айқас орналасуы мүмкін. Мысалы, $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында AD, BC, A_1D_1, B_1C_1, AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 кесінділерінің әрқайсысы AB кесіндісіне перпендикуляр (2.3-сурет).



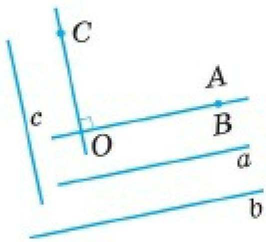
2.3-сурет

Мұнда перпендикуляр түзулердің бойында жататын кесінділер (сәулелер) де ***өзара перпендикуляр*** деп аталады.

1-теорема. *Параллель түзулердің біреуіне перпендикуляр түзу екіншісіне де перпендикуляр болады.*

▲ **Дәлелдеуі.** Егер $a \parallel b$ және $c \perp a$ болса, онда $c \perp b$ екенін дәлелдеу керек (2.4-сурет).

Шынында да, кеңістіктің қандай да бір O нүктесі арқылы a, b және c түзулеріне параллель сәйкесінше OA, OB және OC түзулерін жүргізейік. $a \parallel b$ болғандықтан, OA және OB түзулері беттеседі. $\angle AOC = 90°$ екенін ескерсек, $\angle BOC = 90°$, яғни $c \perp b$. Теорема дәлелденді. ■



2.4-сурет

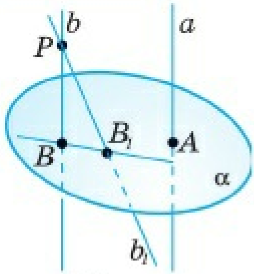
2.1.2. Түзу мен жазықтықтың перпендикулярлығы

Егер a түзуі α жазықтығындағы кез келген түзуге перпендикуляр болса, онда a түзуін α жазықтығына перпендикуляр деп атайды.

Оны $a \perp \alpha$ деп белгілейді. Жазықтыққа перпендикуляр кесінді мен сәуле де осылай анықталады. Егер кесінді (сәуле) жазықтыққа перпендикуляр түзудің бойында жатса, онда кесінді (сәуле) осы *жазықтыққа перпендикуляр* деп аталады.

2-теорема. *Бір жазықтыққа перпендикуляр түзулер өзара параллель болады:* $a \perp \alpha,\ b \perp \alpha \Rightarrow a \parallel b$.

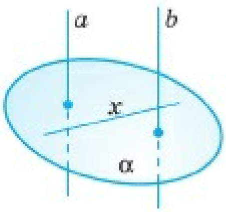
▲ **Дәлелдеуі.** Айталық, $a \perp \alpha$, $b \perp \alpha$ болсын, онда $a \parallel b$ екенін көрсетейік.



2.5-сурет

Кері жорып, $a \nparallel b$ болсын делік. Кез келген $P \in b$ нүктесін алып, осы нүкте арқылы a түзуіне параллель b_1 түзуін жүргізейік: $b_1 \parallel a$. $B = b \cap \alpha$, $B_1 = b_1 \cap \alpha$ деп белгілейік (2.5-сурет). $b \perp \alpha$ және $a \perp \alpha$ болғандықтан, $a \perp BB_1$ және $b \perp BB_1$ болады. Екінші жағынан, $a \perp BB_1$ және $a \parallel b_1$ болғандықтан, 1-теорема бойынша $b_1 \perp BB_1$. Демек, BPB_1 үшбұрышының екі тік бұрышы бар ($\angle PBB_1 = 90°$ және $\angle PB_1B = 90°$). Бұлай болуы мүмкін емес. Сондықтан $a \parallel b$. Теорема дәлелденді. ■

3-теорема. *Егер жазықтық параллель түзулердің біріне перпендикуляр болса, онда ол екінші түзуге де перпендикуляр болады, яғни* $a \parallel b$, $\alpha \perp a \Rightarrow \alpha \perp b$.



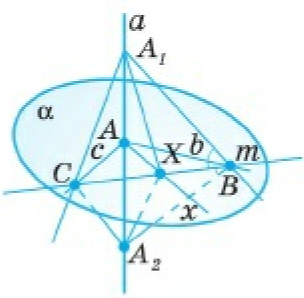
2.6-сурет

▲ **Дәлелдеуі.** $a \parallel b$, $\alpha \perp a$ болса, онда $\alpha \perp b$ екенін көрсетейік.

Шынында да, $\alpha \perp a$ болғандықтан, a түзуі α жазықтығының кез келген x түзуіне перпендикуляр: $a \perp x$, $\forall x \subset \alpha$ (2.6-сурет). 1-теорема бойынша $b \perp x$, $\forall x \subset \alpha$. Түзу мен жазықтықтың перпендикулярлығының анықтамасы бойынша $b \perp \alpha$. Теорема дәлелденді. ■

Енді *түзу мен жазықтықтың перпендикулярлық белгісі* деп аталатын 4-теореманы дәлелдейік.

4-теорема. *Егер берілген түзу жазықтықта жатқан өзара қиылысатын екі түзуге перпендикуляр болса, онда берілген түзу осы жазықтыққа перпендикуляр болады, яғни* $a \perp b$, $a \perp c$, $b \subset \alpha$, $c \subset \alpha$ *және* $b \cap c = A \Rightarrow a \perp \alpha$.



2.7-сурет

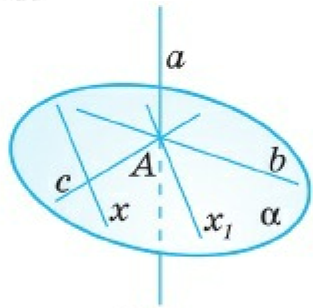
▲ **Дәлелдеуі.** $a \perp b$, $a \perp c$, $b \subset \alpha$, $c \subset \alpha$ және $a \cap b \cap c = A$ болса, $a \perp \alpha$ екенін дәлелдейік.

Жалпы жағдайға шектеу болмайтындықтан, a түзуі A нүктесі арқылы өтеді деп алайық. Бұлай болмаса, a түзуіне параллель және A нүктесі арқылы өтетін a_1 түзуін қарастырамыз.

Егер кез келген $x \subset \alpha$ түзуін алсақ, онда екі түрлі жағдай орындалуы мүмкін: 1) $A \in x$, 2) $A \notin x$.

1) $A \in x$ болсын. Онда a түзуі бойынан $AA_1 = AA_2$ болатындай екі кесінді алып, b, c, x түзулерін B, C, X нүктелерінде қиып өтетін m түзуін (2.7-сурет) жүргізейік. b түзуі A_1A_2 кесіндісінің симметрия өсі болады, сондықтан $A_1B = A_2B$. Осы сияқты $A_1C = A_2C$. Олай болса, $\Delta A_1BC = \Delta A_2BC$ (үш қабырғасы бойынша). Демек, $\angle A_1BC = \angle A_2BC$. Онда екі қабырғасы мен арасындағы бұрышы бойынша $\Delta A_1BX = \Delta A_2BX$. Осыдан $A_1X = A_2X$, сондықтан ΔA_1XA_2 — тең бүйірлі үшбұрыш және AX — оның табанына жүргізілген медианасы, әрі биіктігі болады: $AX \perp A_1A_2 \Rightarrow x \perp a$.

2) $A \notin x$ болса, $x_1 \parallel x$ және $x_1 \subset \alpha$ болатындай x_1 түзуін қарастырамыз (2.8-сурет). Дәлелдегеніміз бойынша $a \perp x_1$ және 1-теоремаға сәйкес $a \perp x$. Теорема дәлелденді. ■



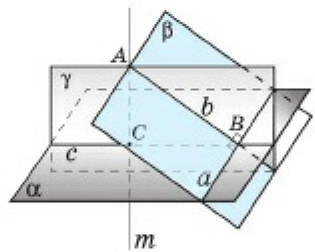
2.8-сурет

1-мысал. Кеңістіктің кез келген нүктесінен берілген жазықтыққа перпендикуляр жалғыз ғана түзу жүргізуге болатынын дәлелдейік.

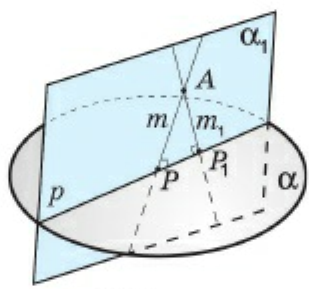
▲ A нүктесі мен α жазықтығы берілсін. Екі түрлі жағдай болуы мүмкін:

1) $A \notin \alpha$; 2) $A \in \alpha$.

1) $A \notin \alpha$. Кез келген $a \subset \alpha$ түзуін алып, A нүктесі мен a түзуі арқылы β жазықтығын жүргіземіз (2.9-сурет). β жазықтығында A нүктесі арқылы a түзуіне перпендикуляр b түзуін жүргізейік: $b \perp a$, $a \cap b = B$. Енді α жазықтығында B нүктесі арқылы a түзуіне перпендикуляр c түзуін жүргізіп, қиылысатын b және c түзулері арқылы γ жазықтығын жүргіземіз. γ жазықтығында A нүктесі арқылы c түзуіне перпендикуляр m түзуін жүргізейік: $m \perp c$, $m \cap c = C$. Онда $m \perp \alpha$. Шынында да, $a \perp b$ және $a \perp c \Rightarrow a \perp \gamma \Rightarrow a \perp m$. Салуымыз бойынша $m \perp c$. Олай болса, m түзуі α жазықтығында жатқан қиылысатын a және c түзулеріне перпендикуляр. 4-теорема бойынша $m \perp \alpha$.

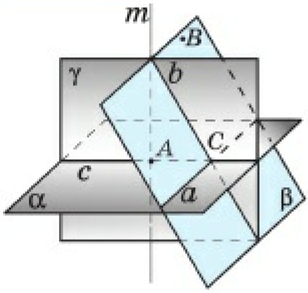


2.9-сурет



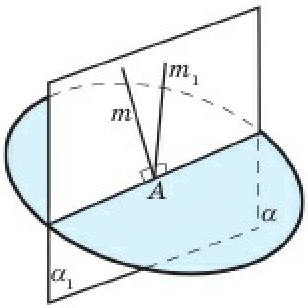
2.10-сурет

Енді m түзуінің жалғыз екенін көрсетейік. Түзу жалғыз емес деп кері жорып, A нүктесі арқылы α жазықтығына перпендикуляр



2.11-сурет

екінші m_1 түзуін жүргізуге болады делік. m_1 мен m әртүрлі түзулер болғандықтан, қиылысатын m_1 және m түзулері арқылы α_1 жазықтығын жүргіземіз және бұл жазықтық α жазықтығын p түзуі бойымен қиып өтсін. $P=m\cap p$ және $P_1=m_1\cap p$ деп белгілейік (2.10-сурет). $m\perp p$ және $m_1\perp p$ болғандықтан, APP_1 үшбұрышының екі тік бұрышы бар. Олай болуы мүмкін емес. Сондықтан $m=m_1$, яғни $m(A\in m,\ m\perp\alpha)$ түзуі жалғыз.



2.12-сурет

2) $A\in\alpha$ болсын. Кез келген $a\subset\alpha$ түзуін алып, A нүктесі арқылы a түзуіне перпендикуляр c түзуін жүргіземіз: $A\in c$, $c\perp a$ (2.11-сурет). Енді кеңістіктен қандай да бір B ($B\notin\alpha$) нүктесін алып, B нүктесі мен a түзуі арқылы өтетін β жазықтығын жүргіземіз. β жазықтығында $C=c\cap a$ нүктесі арқылы a түзуіне перпендикуляр b түзуін жүргізіп, қиылысатын b және c түзулері арқылы γ жазықтығын жүргіземіз. γ жазықтығында A нүктесі арқылы c түзуіне перпендикуляр m түзуін жүргіземіз: $A\in m$, $m\subset\gamma$, $m\perp c$. Онда $m\perp\alpha$ болатынын және бұл түзудің жалғыз екенін көрсету қиын емес. ■

! Өздерің дәлелдеңдер

2.12-суретті пайдаланып, $m\perp\alpha$ және осы түзудің жалғыздығын дәлелдеңдер.

Ескерту: Берілген A нүктесінен a түзуіне түсірілген перпендикулярдың ұзындығы A нүктесінен a түзуіне дейінгі қашықтық деп аталады. a түзуі мен $A\not\subset a$ нүктесі бір жазықтықта жатқандықтан, аталған перпендикуляр мірмәнді анықталады.

1. Түзулер арасындағы бұрыш деп нені айтады? Қиылысатын және айқас түзулерді қарастырыңдар.
2. Кеңістіктің қандай түзулері өзара перпендикуляр түзулер деп аталады?
3. Параллель екі түзудің біреуіне перпендикуляр түзудің қандай қасиеті бар? Тұжырымдаған сөйлемдеріңді дәлелдеңдер.
4. Қандай түзуді берілген жазықтыққа перпендикуляр деп атайды?

5. Бір жазықтыққа перпендикуляр түзулердің қандай қасиеті бар? Дәлелдеңдер.
6. Түзу мен жазықтықтың перпендикулярлық белгісін дәлелдеңдер.
7. Берілген нүктеден жазықтыққа неше перпендикуляр түзу жүргізуге болады? Жауапты негіздеңдер.

Практикалық жұмыс

1. Сынып бөлмесінің қабырғалары мен қырларын пайдаланып, перпендикуляр түзу мен жазықтықтың өзара орналасуын көрсетіңдер.

2. Қаламсап пен үстел бетін қолданып перпендикуляр түзу мен жазықтықтың өзара орналасуын көрсетіңдер.

3. $\angle C=90^\circ$, $BC\subset\alpha$, $AC\perp\alpha$ болатындай етіп, α жазықтығы мен тік бұрышты ABC үшбұрышын салыңдар.

ЕСЕПТЕР

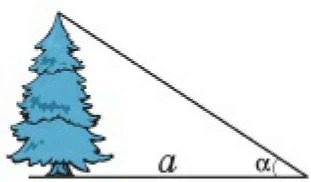
А

2.1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген: 1) кубтың қырлары арқылы өтетін және AA_1 түзуіне перпендикуляр барлық түзулерді көрсетіңдер; 2) AB түзуіне перпендикуляр және кубтың жақтары арқылы өтетін барлық жазықтықтарды көрсетіңдер; 3) кубтың төбелері арқылы өтетін қандай түзулер AA_1C_1C жазықтығына перпендикуляр?

2.2. Өзара перпендикуляр a түзуі мен α жазықтығы берілген. α жазықтығының берілген нүктесі арқылы өтетін және a түзуіне перпендикуляр неше түзу жүргізуге болады?

2.3. AO, BO және CO кесінділері өзара қос-қостан перпендикуляр. Егер $AO=BO=CO$ болса, онда ABC үшбұрышының бұрышын табыңдар.

2.4. 1) $a=3$ м, $\alpha=60^\circ$; 2) $a=5{,}7$ м, $\alpha=45^\circ$; 3) $a=8$ м, $\alpha=30^\circ$. Ағаштың биіктігін табыңдар (2.13-сурет).



2.13-сурет

2.5. AO, BO және CO кесінділері өзара қос-қостан перпендикуляр. 1) $AO=4$ см, $BO=3$ см; $CO=3$ см; 2) $AO=5$ см, $BO=12$ см; $CO=16$ см болса, AB, AC және BC-ны табыңдар.

2.6. AK кесіндісі $ABCD$ тіктөртбұрышының жазықтығына перпендикуляр. $AK=2\sqrt{14}$ м, $AB=5$ м, $AD=12$ м болса, KC-ны табыңдар.

2.7. $AB\perp\alpha$, $CD\perp\alpha$, $B\in\alpha$, $D\in\alpha$ нүктелері арқылы неше жазықтық жүргізуге болады? Жауапты түсіндіріңдер.

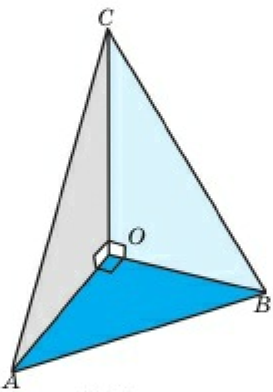
2.8. ABC үшбұрышының A төбесі арқылы өтетін a түзуі AB және AC қабырғаларына перпендикуляр. a түзуі BC қабырғасына қатысты қалай орналасқан? Жауапты түсіндіріңдер.

2.9. Берілген түзудің бойындағы нүкте арқылы осы түзуге перпендикуляр неше түзу жүргізуге болады? Түзу бойында жатпайтын нүкте арқылы ше?

2.10. $a\perp b$ және $c\perp b$ болатындай a, b және c түзулері берілген. $a\parallel c$ деп топшылауға бола ма? Бұл планиметрияның «үшінші түзуге перпендикуляр болатын екі түзу өзара параллель болады» деген қасиетіне қайшы келмей ме?

B

2.11. Егер $a\perp b$ және $\angle(a,c)=60^\circ$ болса, b және c түзулері перпендикуляр бола ма? Жауаптарыңды негіздеңдер.



2.14-сурет

2.12. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында $AB_1\perp CD_1$ орындалатынын көрсетіңдер.

2.13. OA, OB және OC кесінділері өзара қосқостан перпендикуляр. Егер $OA=OB=6$ см, $OC=8$ см болса, онда ABC үшбұрышының бұрыштарын табыңдар (2.14-сурет).

2.14. a түзуі мен α жазықтығы берілген: $a\perp\alpha$, $A=a\cap\alpha$. Егер b түзуі A нүктесі арқылы өтсе және $b\perp a$ болса, онда $b\subset\alpha$ екенін дәлелдеңдер.

2.15. ABC жазықтығынан тысқары P нүктесі берілген: $PC\perp BC$, $AC\perp BC$, $\Delta PBC=\Delta ABC$. 1) $PC\perp(ABC)$ деп есептеуге бола ма? 2) Көрсетілген кесінділер арасында ABC жазықтығына перпендикуляр кесінді бар ма?

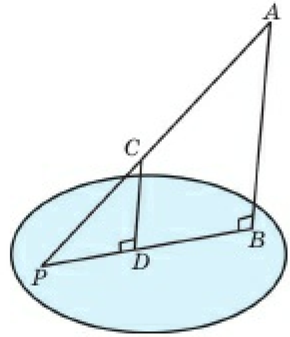
2.16. «Егер $c\perp\alpha$, $c\perp b$, $a\subset\alpha$, $b\subset\alpha$, $\Rightarrow c\perp\alpha$» деген тұжырымдама дұрыс па? Тұжырымдама дұрыс болатындай етіп, сөйлемді толықтырыңдар.

2.17. AB кесіндісінің ұштарынан бірдей қашықтықта орналасқан нүктелер жиыны қандай фигура болады?

2.18. AD кесіндісі ABC тең қабырғалы үшбұрышының жазықтығына перпендикуляр. 1) $AB=3$ см, $AD=4$ см; 2) $AB=AD=a$ болса, онда BCD үшбұрышының периметрін табыңдар.

2.19. $a \parallel m$, $b \parallel n$, $a \perp b$ болатындай a, b, m және n түзулері берілген. $m \perp n$ екенін дәлелдеңдер.

2.20. AB және CD түзулері α жазықтығына перпендикуляр және $BD \in \alpha$, $AC \cap \alpha = P$. Егер $AB=12$ см, $BD=PD=3$ см болса, CD-ны табыңдар (2.15-сурет).



2.15-сурет

2.21. A және B нүктелері α жазықтығында жатады, AC және BD кесінділері α жазықтығының бір жағында осы жазықтыққа перпендикуляр орналасады. 1) $AB=BD=3$ см, $AC=6$ см болса, $ABCD$ төртбұрышының бұрыштарын; 2) $AB=8$ см, $AC=21$ см, $BD=6$ см болса, $ABCD$ төртбұрышының периметрін табыңдар.

C

2.22. Тең қабырғалы ABC үшбұрышының периметрі $2p$, ал AD және BK кесінділері осы үшбұрыш жазықтығына перпендикуляр. Егер $ABKD$ квадрат болса, CDK үшбұрышының периметрін табыңдар.

2.23. Кеңістікте 1) тең қабырғалы үшбұрыш; 2) квадрат төбелерінен бірдей қашықтықта орналасқан нүктелер жиыны қандай фигура болады?

2.24. Кеңістікте бір түзу бойында жатпайтын үш нүктеден бірдей қашықтықта орналасқан нүктелер жиыны қандай фигура құрайды?

2.25. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубындағы AC кесіндісі B, B_1 және D_1 нүктелері арқылы өтетін жазықтыққа перпендикуляр болатынын дәлелдеңдер.

2.26. ABC тік бұрышты үшбұрышының катеттері $AC=3$ см, $BC=4$ см, ал үшбұрыш жазықтығына түсірілген CD перпендикулярының ұзындығы 5 см. D нүктесінен AB гипотенузасына дейінгі қашықтықты табыңдар.

2.27. ABC үшбұрышы мен $AD \perp AB$, $KC \perp BC$, $AD \parallel KC$ болатындай және үшбұрыш жазықтығынан тысқары D және K нүктелері берілген. AD және KC кесінділері үшбұрыш жазықтығына перпендикуляр болатынын дәлелдеңдер.

2.28. Берілген түзу параллель жазықтықтардың біреуіне перпендикуляр болса, оның екінші жазықтыққа да перпендикуляр болатынын дәлелдеңдер.

2.29. $a\perp b$, $a\perp\alpha$, $b\not\subset\alpha$ болатындай a, b түзулері мен α жазықтығы берілген. $b\parallel\alpha$ болатынын дәлелдеңдер.

2.30. $AB=AC=AD=BC=BD=CD=a$ теңдіктері орындалатындай кеңістікте A, B, C және D нүктелері берілген. P және Q нүктелері — сәйкесінше AB және CD кесінділерінің орталары. $PQ\perp AB$ және $PQ\perp CD$ болатынын дәлелдеп, PQ-дің ұзындығын табыңдар.

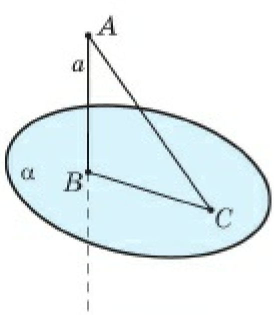
2.2. ҮШ ПЕРПЕНДИКУЛЯР ТУРАЛЫ ТЕОРЕМА

Тақырыпты оқып-үйрену барысында сендер:

- кеңістіктегі перпендикуляр, көлбеу және оның проекциясы анықтамаларын білесіңдер;
- үш перпендикуляр туралы теореманы білесіңдер және оны есептер шығарғанда қолданасыңдар;
- нүктеден түзуге дейінгі қашықтықты және айқас түзулер арасындағы қашықтықты табуды үйренесіңдер.

2.2.1. Жазықтыққа жүргізілген перпендикуляр және көлбеу

A нүктесі мен осы нүкте арқылы өтпейтін α жазықтығы берілсін. A нүктесінен α жазықтығына перпендикуляр a түзуін жүргізейік және $a\cap\alpha=B$ болсын. AB кесіндісін A нүктесінен α жазықтығына түсірілген ***перпендикуляр*** деп атайды (2.16-сурет). Мұнда B нүктесі AB перпендикулярының α жазықтығындағы ***табаны*** деп аталады.



2.16-сурет

A нүктесі мен α жазықтығының ***арақашықтығы*** деп осы нүктеден α жазықтығына түсірілген перпендикулярдың ұзындығын айтады. 2.16-суретте A нүктесінен α жазықтығына дейінгі қашықтық AB-ға тең.

Егер AB кесіндісі α жазықтығына түсірілген перпендикуляр болса (B — оның табаны), онда жазықтықтың кез келген C нүктесі мен A нүктесін қосатын кесіндіні A нүктесінен α жазықтығына жүргізілген

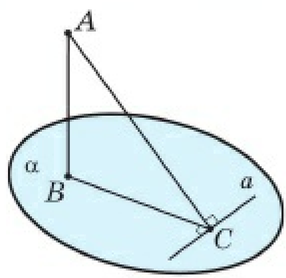
көлбеу деп атайды. C нүктесі AC көлбеуінің ***табаны*** деп аталады. Мұндағы BC кесіндісі AC көлбеуінің α жазықтығындағы ***проекциясы*** деп аталады. Мысалы, 2.16-суретте AB — перпендикуляр, AC — көлбеу, ал BC — оның проекциясы.

2.2.2. Үш перпендикуляр туралы теорема

1-теорема. *Жазықтықта көлбеудің табаны арқылы өтетін түзу оның проекциясына перпендикуляр болса, бұл түзу көлбеуге де перпендикуляр болады.*

Керісінше, *жазықтықта көлбеудің табаны арқылы өтетін түзу осы көлбеуге перпендикуляр болса, бұл түзу оның проекциясына да перпендикуляр болады.*

▲ **Дәлелдеуі.** AB және AC — α жазықтығына түсірілген перпендикуляр мен көлбеу болсын (2.17-сурет). Егер a түзуі C нүктесі арқылы өтіп, α жазықтығында жатса, $AB\perp\alpha$ болғандықтан, $a\perp AB$. Екінші жағынан, $a\perp BC$ немесе $a\perp AC$ болса, a түзуі ABC үшбұрышының жазықтығына перпендикуляр, өйткені a түзуі AB және BC (немесе AB және AC) қиылысушы түзулерге перпендикуляр. Онда түзу мен жазықтықтың перпендикулярлығының белгісі бойынша a түзуі AC-ға немесе BC-ға перпендикуляр. Теорема дәлелденді. ■



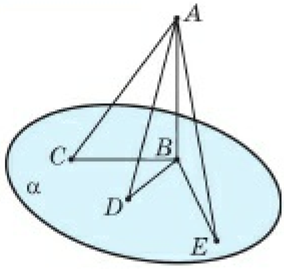
2.17-сурет

Сонымен, *жазықтықта жататын түзу көлбеуге перпендикуляр болуы үшін оның көлбеудің проекциясына перпендикуляр болуы қажетті және жеткілікті.*

Бұл теореманың атауы $AB\perp a$, $AC\perp a$, $BC\perp a$ қатынастарынан туындайды. Енді перпендикулярдың, көлбеудің және оның проекциясының тағы бір қасиетін қарастырайық.

2-теорема. *Егер жазықтықтан тысқары нүктеден осы жазықтыққа перпендикуляр және көлбеулер түсірілсе, онда: 1) проекциялары тең көлбеулер тең; 2) проекциясы үлкен көлбеу үлкен; 3) перпендикуляр кез келген көлбеуден кіші болады.*

▲ **Дәлелдеуі.** AB — перпендикуляр, ал AC, AD және AE көлбеулер болсын (2.18-сурет).



2.18-сурет

1) Егер $CB=EB$ болса, онда екі катеті бойынша $\Delta ABC=\Delta ABE$. Олай болса, $AC=AE$.

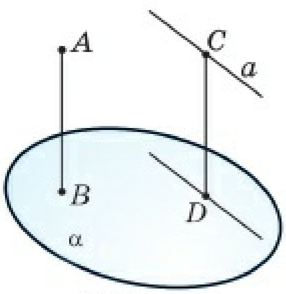
2) $CB>DB$ болсын. Онда ABC және ABD тік бұрышты үшбұрыштарынан

$$AD=\sqrt{AB^2+DB^2}<\sqrt{AB^2+CB^2}=AC,$$

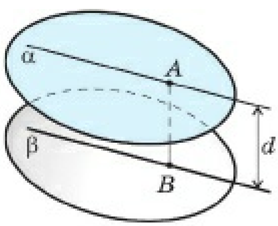
яғни $AD<AC$ теңсіздігі орындалады.

3) ABC тік бұрышты үшбұрышында перпендикуляр AB — катет, ал кез келген көлбеу AC гипотенуза болады. Сондықтан $AC>AB$. Теорема дәлелденді. ■

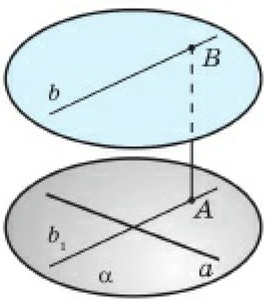
2.2.3. Кеңістіктегі арақашықтық түсінігі



2.19-сурет



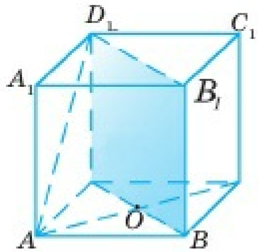
2.20-сурет



2.21-сурет

A және B нүктелерінің арақашықтығы ретінде AB кесіндісінің ұзындығын алу қажеттігі түсінікті. Жалпы, екі геометриялық фигураның ***арақашықтығы*** деп олардың бір-біріне ең жақын нүктелерінің (егер ондай нүктелер бар болса) арақашықтығын айтады. Осы орайда, нүктеден жазықтыққа түсірілген перпендикулярдың ұзындығы осынүктеден жазықтыққа дейінгі қашықтық болады. Осы сияқты параллель жазықтықтар арасындағы қашықтық ретінде олардың біреуінде орналасқан нүктеден екіншісіне түсірілген перпендикулярдың ұзындығы алынады. Айқас түзулердің арақашықтығы ретінде, олардың біреуінде жататын нүктеден екінші түзу арқылы өтетін және бірінші түзуге параллель жазықтыққа дейінгі қашықтықты алу керек. Егер F_1 және F_2 фигураларының арақашықтығын $d\ (F_1;\ F_2)$ арқылы белгілесек, онда 2.19—2.21-суреттерде сәйкес фигуралардың арақашықтығы былай анықталады: 2.19-суретте $a\parallel\alpha$, $AB\perp\alpha$, $CD\perp\alpha\Rightarrow d(A;\alpha)=AB$, $d(a;\alpha)=CD$; 2.20-суретте $\alpha\parallel\beta$, $AB\perp\beta\Rightarrow d(\alpha;\beta)=AB$; 2.21-суретте a және b түзулері айқас және $a\subset\alpha$, $b\parallel\alpha$ болса, онда $d(a;b)=d(\alpha;b)=AB$, мұндағы $AB\perp\alpha$, $B\in b$.

1-мысал. 2.22-суретте $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы бейнеленген және $AB=2$ см. 1) $d(B; D_1)$; 2) $d(AB; D_1C_1)$; 3) $d(AB; B_1C_1)$; 4) $d(A; BB_1D_1)$ қашықтықтарын табу керек.



2.22-сурет

▲ 1) $d(B; D_1)=BD_1$. BD_1-ді анықтау үшін екі рет Пифагор теоремасын қолданамыз: ABD тік бұрышты үшбұрышынан

$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2} \text{ см}$$

теңдігін, ал BDD_1 тік бұрышты үшбұрышынан

$$BD_1 = \sqrt{BD^2 + DD_1^2} = \sqrt{8+4} = 2\sqrt{3} \text{ см}$$

теңдігін аламыз.

2) $AB \parallel D_1C_1$ және $AB \perp (BB_1C_1C)$, $D_1C_1 \perp (BB_1C_1C)$ болғандықтан, $d(AB; D_1C_1) = AD_1$. Ал ADD_1 тік бұрышты үшбұрышынан

$$AD_1 = \sqrt{AD^2 + DD_1^2} = 2\sqrt{2} \text{ см.}$$

3) $ABCD$ және $A_1B_1C_1D_1$ жақтары параллель болғандықтан,

$$d(AB; B_1C_1)=BB_1=2 \text{ см.}$$

4) $BB_1 \perp (ABC)$, $AC \perp BD$ болғандықтан, $AO \perp (BB_1D_1)$. Сондықтан

$$d(A; BB_1D_1)=AO=\frac{1}{2}AC = \sqrt{2} \text{ см.}$$ ■

1. Берілген нүктеден жазықтыққа түсірілген перпендикуляр деп нені айтады? Қай нүктені перпендикулярдың табаны деп атайды?
2. Көлбеу және проекция деген не? Қандай нүкте көлбеудің табаны деп аталады? Осы ұғымдарды сызбадан көрсетіңдер.
3. Үш перпендикуляр туралы теореманы тұжырымдап, оны дәлелдеңдер.
4. Перпендикуляр, көлбеу және оның проекциясының қасиетін тұжырымдап, оны дәлелдеңдер.
5. Нүктеден жазықтыққа дейінгі қашықтықты, параллель жазықтықтардың арасындағы қашықтықты және айқас түзулердің арасындағы қашықтықты қалай анықтайды?

Практикалық жұмыс

1. Сіріңкенің бос қорабын алып, оның 1) барлық қырларының ұзындықтарын; 2) қарама-қарсы жақтарының арақашықтығын табыңдар. Жауаптарыңды негіздеңдер.

2. Қатты қағаз, төрт таяқша және желімі бар қағазды пайдаланып, үш перпендикулярдың моделін жасаңдар.

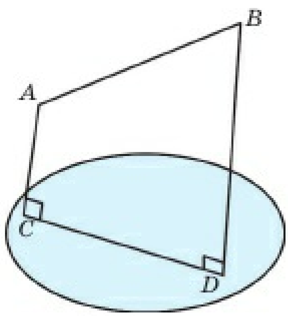
ЕСЕПТЕР

А

2.31. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген және $O = AC \cap BD$, $AB = 8$ см. 1) AC және B_1D_1 түзулерінің арақашықтығын; 2) A_1B және A_1C көлбеулерінің ұзындығын; 3) $A_1O \perp BD$ болатынын көрсетіп, A_1O-ның ұзындығын табыңдар.

2.32. Бір ұшы α жазықтығында жататын, ал екінші ұшы α жазықтығынан 4 см қашықтықта жататын кесіндінің ортасынан α жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

2.33. Кесіндінің ұштары жазықтықтан 3 см және 7 см қашықтықта орналасқан. Кесіндінің ортасынан жазықтыққа дейінгі қашықтықты табыңдар. Мұнда кесінді мен жазықтық қиылыспайды.



2.23-сурет

2.34. AB кесіндісінің ұштарынан жазықтыққа дейінгі қашықтық сәйкесінше мынаған тең: 1) 1 см және 5 см; 2) 3,1 мм және 6,9 мм; 3) 3,2 м және 7,4 м; 4) a және b. AB кесіндісінің ортасынан осы жазықтыққа дейінгі қашықтықты табыңдар. Мұнда AB кесіндісі мен жазықтық қиылыспайды (2.23-сурет).

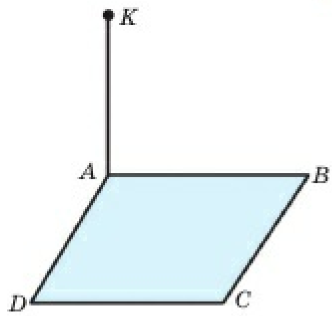
2.35. A нүктесінен α жазықтығына AB перпендикуляры мен AC көлбеуі түсірілген. 1) $AB = 4$ см, $AC = 5$ см болса, онда BC-ны; 2) $AB = 2,5$ м, $\angle ACB = 30°$ болса, онда AC мен BC-ны; 3) $AC = 13$ см, $BC = 12$ см болса, онда AB-ны табыңдар.

2.36. α және β жазықтықтары берілген: $\alpha \parallel \beta$. $A \in \alpha$ нүктесінен β жазықтығына AB перпендикуляры мен AC көлбеуі түсірілген. Егер $AC = 10$ см, $BC = 6$ см болса, онда α және β жазықтықтарының арақашықтығын табыңдар.

2.37. Берілгені: $AB \perp \alpha$, $CD \perp \alpha$, $B \in \alpha$, $D \in \alpha$, $AC \cap \alpha = E$ және $AB = CD = 4$ см. 1) $BE = DE$, $AE = CE$ теңдіктері орындалатынын дәлелдеңдер; 2) егер $\angle BAE = 60°$ болса, онда AC мен BD-ны табыңдар.

2.38. AD — тең қабырғалы ABC үшбұрышы жазықтығына түсірілген перпендикуляр, E — BC қабырғасының ортасы. 1) $DE \perp BC$ екенін дәлелдеңдер; 2) егер $AB = 4$ см, $AD = 3$ см болса, онда DE-ні табыңдар.

2.39. AK кесіндісі — $ABCD$ квадратының жазықтығына түсірілген перпендикуляр. Егер $AB = 3$ см, $AK = 4$ см болса, онда K нүктесінен AB, BC және BD түзулеріне дейінгі қашықтықтарды табыңдар (2.24-сурет).



2.24-сурет

2.40. AB кесіндісінің ұштары α жазықтығынан сәйкес 1 см және 5 см қашықтықта орналасқан. 1) AB кесіндісі α жазықтығымен қиылыспаса; 2) AB кесіндісі α жазықтығымен қиылысса, AB кесіндісінің ортасынан α жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

B

2.41. ABC тең қабырғалы үшбұрышының төбелерінен D нүктесіне дейінгі қашықтық 5 см. D нүктесінен ABC үшбұрышына дейінгі қашықтықты табыңдар. Мұнда $AB = 8$ см.

2.42. Берілген нүктеден жүргізілген ұзындықтары бірдей барлық көлбеулердің геометриялық орны қандай фигура құрайды?

2.43. α жазықтығы ABC тік бұрышты үшбұрышының AC катетіне перпендикуляр және оны $m:n$ қатынасында бөледі. α жазықтығы AB гипотенузасын қандай қатынаста бөледі?

2.44. Бір түзуге перпендикуляр екі жазықтық өзара параллель болатынын дәлелдеңдер.

2.45. $ABCD$ ромбысының диагональдары O нүктесінде қиылысады, OK кесіндісі оның диагональдарына перпендикуляр. K нүктесінен ромб қабырғалары арқылы өтетін түзулерге дейінгі қашықтықтардың өзара тең болатынын дәлелдеңдер.

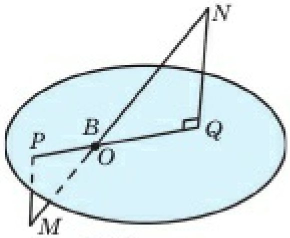
2.46. $OK = 4$ см, $AB = 5$ см, $AC = 6$ см деп алып, 2.45-есепте көрсетілген қашықтықты табыңдар.

2.47. AK кесіндісі $ABCD$ квадраты жазықтығына перпендикуляр. Егер $AB = 3$ м, $BK = 5$ м болса, K нүктесінен BD түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

2.48. A нүктесінен α жазықтығына AB көлбеуі түсірілген, $AB = 6$ см. Егер AB көлбеуі мен оның проекциясы арасындағы бұрыш 1) 30°; 2) 45°; 3) 60° болса, проекцияның ұзындығын табыңдар.

4 – 4370

2.49. Ұзындығы 62,5 см болатын кесінді ұштарынан жазықтыққа дейінгі қашықтықтар сәйкесінше 50 см-ге және 28 см-ге тең. Перпендикулярлардың табандары арасындағы қашықтықты табыңдар.



2.25-сурет

2.50. Ұзындығы 12 см болатын MN кесіндісі жазықтықты O нүктесінде қиып өтеді және оның ұштары жазықтықтан 1 см және 3 см қашықтықта орналасқан. MO мен NO-ны табыңдар (2.25-сурет).

2.51. $AB=a$ кесіндісі α жазықтығына параллель және $BB_1 \perp \alpha$, $B_1 \in \alpha$. Егер $\angle BAB_1 = 60°$ болса, онда $d(AB;\ \alpha)$-ны табыңдар.

2.52. K нүктесі ABC үшбұрышының төбелерінен бірдей қашықтықта орналасқан және $OK \perp (ABC)$. 1) $AB=BC$, $AC=4$ см, $BD=4$ см, $BD \perp AC$, $OK=6$ см; 2) $AB=BC=a$, $\angle ABC=120°$, $OK=\dfrac{3a}{4}$; 3) $AB=BC$, $BD=h$, $BD \perp AC$, $\angle ABC=120°$, $KO=a$; 4) $AB=13$ см, $BC=14$ см, $AC=15$ см, $OK=19{,}5$ см болса, AK-ны табыңдар.

2.53. Сым бағанға 5 м биіктікте және үй қабырғасына 3 м биіктікте бекітілген. Баған мен үй арасы 11 м. Керілетін сымның ұзындығы қандай болуы керек?

C

2.54. Ұзындықтары 13 см және 37 см болатын екі кесіндінің ұштары өзара параллель жазықтықтарда жатады. Кіші кесіндінің жазықтықтардағы проекциясының ұзындығы 5 см. Үлкен кесіндінің проекциясын табыңдар.

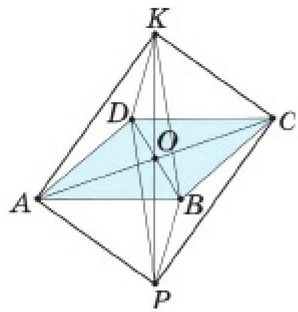
2.55. α жазықтығынан m қашықтығында орналасқан P нүктесінен осы жазықтыққа PQ және PR көлбеулері жүргізілген және бұл көлбеулер өз проекцияларымен 30° бұрыш жасайды. P нүктесінен α жазықтығына түсірілген перпендикулярдың табаны — O, $\angle QOR=120°$. QR-ді табыңдар.

2.56. Нүктеден жазықтыққа ұзындықтары 17 см және 10 см болатын екі көлбеу түсірілген. Олардың проекциялары ұзындықтарының айырымы 9 см. Осы нүктеден жазықтыққа дейінгі қашықтықты табыңдар.

2.57. D нүктесінен ABC үшбұрышының төбесіне дейінгі қашықтық 5 см және $AC=BC=6$ см, $AB=4$ см. D нүктесінен ABC жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

2.58. Өзеннің екі жағалауына бекітілген аспалы көпір керілген тростың ұштары өзен деңгейінен 40 м және 35,6 м биіктіктерде бекітілген. Трос ұштары бекітілген нүктелердің горизонтал жазықтықтағы проекцияларының арақашықтығы 48,3 м. Егер тростың иілуіне 10% қосу қажет болса, онда тростың ұзындығы қандай?

2.59. Ромб қабырғаларының біреуі арқылы оның қарама-қарсы қабырғасынан 4 см қашықтықта жазықтық жүргізілген. Ромб диагональдарының осы жазықтықтағы проекциялары сәйкесінше 8 см және 2 см. Ромб қабырғаларының проекцияларын табыңдар.



2.26-сурет

2.60. Ұзындықтары бірдей кесінділерден 2.26-суретте көрсетілгендей $KABCDP$ қондырғысы құрастырылған. Мұнда $AC = BD = KP = 2$ см. Осы қондырғыны диаметрі 1,8 см болатын дөңгелек тесіктен шығарып алуға бола ма? ($KABCDP$ фигурасын *октаэдр* деп атайды).

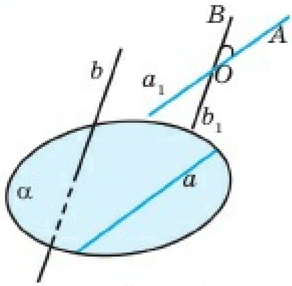
2.3. ТҮЗУ МЕН ЖАЗЫҚТЫҚ АРАСЫНДАҒЫ БҰРЫШ. ЕКІЖАҚТЫ БҰРЫШТАР

Тақырыпты оқып-үйрену барысында сендер:

- айқас түзулер арасындағы бұрышты бейнелеуді және олардың ортақ перпендикулярын тұрғызуды үйренесіңдер;
- түзу мен жазықтық арасындағы бұрышты анықтауды және оның шамасын табуды білесіңдер;
- екі жазықтық арасындағы бұрыш (екіжақты бұрыш) анықтамасын білесіңдер, оны кеңістікте бейнелеп, шамасын табуды үйренесіңдер;
- жазықтықтардың перпендикулярлық белгілері мен қасиеттерін білесіңдер және оларды есептер шығарғанда қолданасыңдар.

2.3.1. Айқас түзулер арасындағы бұрыш бейнесі және олардың ортақ перпендикулярлары

2.1-бапта біз a және b түзулері арасындағы бұрыш ретінде өзара қиылысатын және берілген түзулерге параллель a_1 және b_1 түзулері

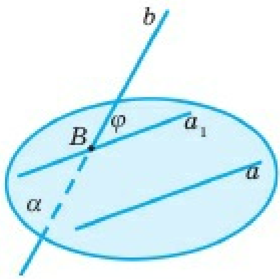


2.27-сурет

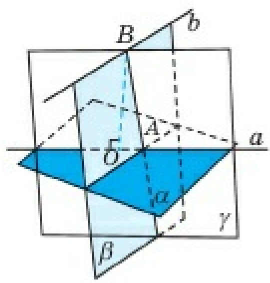
арасындағы бұрышты алдық (2.27-сурет, $\angle AOB$). Енді осы бұрышты кеңістікте қалай бейнелеуге болатынын қарастыралық.

Айталық, a және b айқас түзулер болсын. Онда қайсыбір $B \in b$ нүктесі мен a түзуі арқылы өтетін α жазықтығын жүргіземіз. α жазықтығында B нүктесі арқылы өтетін және $a_1 \| a$ болатындай a_1 түзуін жүргіземіз (2.28-сурет). Сонда анықтама бойынша $(\widehat{a_1; b})$ бұрышы a және b айқас түзулері арасындағы бұрыш болып табылады.

2.29-суретте a және b айқас түзулер және BO кесіндісі олардың ортақ перпендикуляры.



2.28-сурет

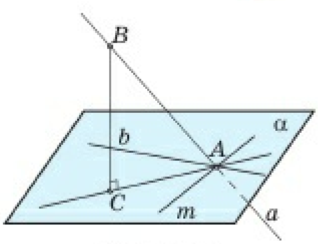


2.29-сурет

Жұптық жұмыс

Жұптасып 2.29-сурет бойынша 1) BO ортақ перпендикуляры қалай тұрғызылғанын сипаттап беріңдер; 2) осы үлгі бойынша А4 парағына кез келген екі айқас түзу сызып, олардың ортақ перпендикулярларын салып көрсетіңдер.

2.3.2. Түзу мен жазықтық арасындағы бұрыш



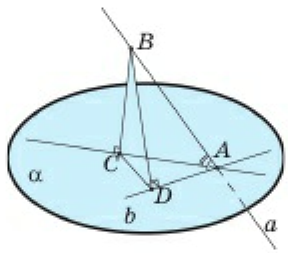
2.30-сурет

Айталық, a түзуі α жазықтығын A нүктесінде қиып өтсін және оған перпендикуляр болмасын. Кез келген $B \in a$ нүктесін алып, осы нүктеден α жазықтығына $BC (C \in \alpha)$ перпендикулярын түсірейік (2.30-сурет). Онда AC түзуін a түзуінің α жазықтығындағы ***проекциясы*** деп атайды.

α жазықтығында A нүктесі арқылы AC түзуінен өзге көптеген түзулер жүргізуге болады және олардың әрқайсысы a түзуімен белгілі бір бұрышпен қиылысады. Сонда a түзуі мен α жазықтығы арасындағы бұрыш ретінде қандай бұрышты түсіну қажет? Әрине, a түзуі мен α жазықтығының арасындағы бұрыш ретінде көрсетілген бұрыштардың ең кішісін алған орынды. Бұл бұрыштардың қайсысы ең кіші бұрыш болатынына мына теорема жауап береді.

1-теорема. *Түзу мен оның берілген жазықтықтағы проекциясының арасындағы бұрыш — осы көлбеу түзу мен оның табаны арқылы өтетін және берілген жазықтықта жататын өзге түзулер арасындағы бұрыштардың ең кішісі.*

▲ **Дәлелдеуі.** Айталық, AB түзуі — α жазықтығына көлбеу, BC — осы жазықтыққа түсірілген перпендикуляр, b түзуі A нүктесі арқылы өтетін AC түзуінен өзге α жазықтығында жататын түзу болсын. Мұнда AB түзуін a деп белгілесек, онда $a \cap \alpha = A$ (2.31-сурет). $\angle BAC < \angle(a, b)$ болатынын дәлелдейік.



2.31-сурет

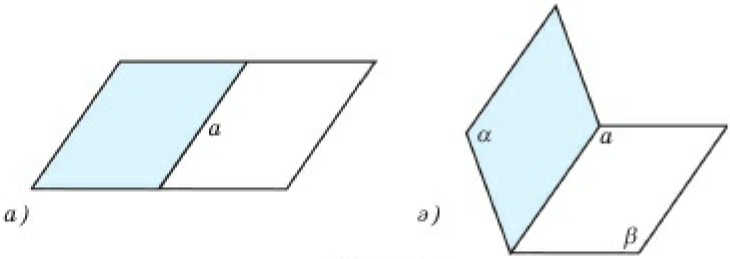
Айталық, $D \in b$, $CD \perp b$ және $b \perp a$ болсын. Үш перпендикуляр туралы теорема бойынша $BD \perp b$. Олай болса, $\sin(\angle BAC) = \dfrac{BC}{AB}$, $\sin(\angle BAD) = \dfrac{BD}{AB}$. Ал $BD > BC$ болғандықтан, $\sin(\angle BAD) > \sin(\angle BAC)$. Демек $\angle BAD > \angle BAC$ теңсіздігі орындалады, өйткені мұнда $90°$-тан аспайтын бұрыштар қарастырылған.

Егер $a \perp b$ болса, онда $\angle(b, a) = 90° > \angle BAC$. Теорема дәлелденді. ■

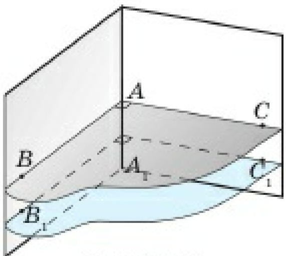
Енді түзу мен жазықтықтың арасындағы бұрышты анықтай аламыз: *түзу мен жазықтықтың арасындағы бұрыш деп осы түзу мен оның берілген жазықтықтағы проекциясының арасындағы бұрышты айтады.* Мысалы, 2.31-суретте $\angle(a; \alpha) = \angle BAC$.

2.3.3. Екіжақты бұрыштар

Жазықтықта орналасқан әрбір түзу оны екі жарты жазықтыққа бөлетіні белгілі (2.32, *а*-сурет). Егер осы жарты жазықтықты оларды бөліп тұрған түзу бойымен бүктесек, шыққан фигура *екіжақты бұрыш* деп аталады (2.32, *ә*-сурет). *Екіжақты бұрыш* деп шектейтін түзулері ортақ екі жарты жазықтықтардан құралған фигураны айтады. Екіжақты бұрышты құрайтын жарты жазықтықтарды екіжақты бұрыштың *жақтары*, оларды шектейтін түзуді екіжақты бұрыштың *қыры* деп атайды. Мысалы, 2.32, *ә*-суретте α және β жарты жазықтықтары — екіжақты бұрыштың жақтары, *a* түзуі — оның қыры.



2.32-сурет

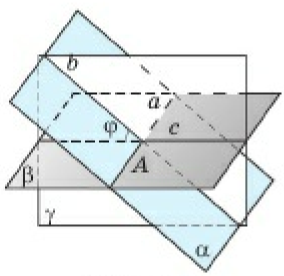


2.33-сурет

Екіжақты бұрыштың қырына перпендикуляр жазықтық оның жақтарын қырына перпендикуляр екі сәуле бойымен қиып өтеді. Осы сәулелердің арасындағы бұрышты екіжақты бұрыштың *сызықтық бұрышы* деп атайды (2.33-сурет). Сызықтық бұрыш шамасын сәйкес екіжақты бұрыштың өлшемі ретінде алады және бұл шама екіжақты бұрыш қырына перпендикуляр жазықтықты таңдап алуымызға, яғни екіжақты бұрыш қырына перпендикуляр AB және AC сәулелерін таңдап алуға тәуелсіз (2.33-сурет). Шынында да, егер $\angle B_1A_1C_1$ екіжақты бұрыштың өзге сызықтық бұрышы болса, $B_1A_1 \perp a$, $C_1A_1 \perp a$ болғандықтан, $AB \parallel A_1B_1$, $AC \parallel A_1C_1$. Олай болса, $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$.

2.3.4. Жазықтықтардың перпендикулярлығы

Алдымен екі жазықтық арасындағы бұрыш ұғымын енгіземіз. a түзуі бойымен қиылысатын α және β жазықтықтары берілсін. Қандай да бір $A \in a$ нүктесі арқылы осы түзуге перпендикуляр γ жазықтығын жүргізейік. Онда $b = \alpha \cap \gamma$ және $c = \beta \cap \gamma$ түзулерін аламыз, мұнда $b \perp a$, $c \perp a$ (2.34-сурет). $\varphi = \angle(b, c)$ бұрышы α және β жазықтықтарының *арасындағы бұрыш деп аталады, яғни қиылысатын жазықтықтар арасындағы бұрыш деп осы жазықтықтардың бойында жататын*



2.34-сурет

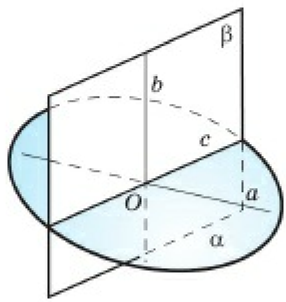
әрі олардың қиылысу түзуіне перпендикуляр болатын түзулердің арасындағы бұрышты айтады. Егер жазықтықтар параллель болса, олардың арасындағы бұрыш 0°-қа тең деп алынып, екі жазықтық арасындағы бұрыштың b және c түзулерін таңдап алғанға тәуелсіздігі дәлелденеді. α және β жазықтықтары арасындағы бұрышты $\angle(\alpha;\beta)$ деп белгілейді. Әрине, $0°\leqslant(\alpha;\beta)\leqslant 90°$. Осы орайда екі жазықтық арасындағы бұрышты екіжақты бұрышпен шатастырмау қажет. Екіжақты бұрыштар үшін $0°<\varphi\leqslant 180°$ теңсіздігі орындалады (2.34-сурет). Мысалы, екі жазықтық қиылысқанда төрт екіжақты бұрыш пайда болады.

Арасындағы бұрыш шамасы 90°-қа тең болатын екі жазықтықты өзара *перпендикуляр жазықтықтар* деп атайды (2.35-сурет).

Енді жазықтықтардың перпендикулярлығының белгісін дәлелдейік.

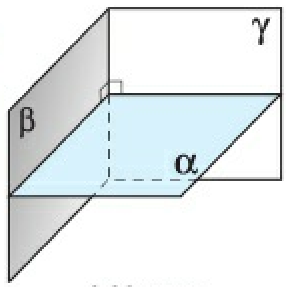
2-теорема. *Егер жазықтықтардың бірі екінші жазықтыққа перпендикуляр түзу арқылы өтсе, онда бұл жазықтықтар өзара перпендикуляр болады:* $b\perp\alpha$ *және* $b\subset\beta\Rightarrow\alpha\perp\beta$.

▲ **Дәлелдеуі.** Айталық, $b\perp\alpha$, $b\subset\beta$ болсын, онда $\alpha\perp\beta$ екенін көрсетейік (2.35-сурет). Егер $O=b\cap\alpha$ деп алсақ, онда O нүктесі α және β жазықтықтарының ортақ нүктесі болып, олар O арқылы өтетін қандай да бір c түзуі бойымен қиылысады. α жазықтығында O нүктесі арқылы c-ға перпендикуляр a түзуін жүргіземіз. $a\subset\alpha$, $c\subset\alpha$ және $b\perp\alpha$ болғандықтан, $b\perp a$, $b\perp c$ болатынын және $a\perp c$ екенін ескерсек, $\angle(\alpha;\beta)=\angle(a;b)=90°$ Демек, $\alpha\perp\beta$. Теорема дәлелденді. ■



2.35-сурет

Салдар. *Екі жазықтықтың қиылысу түзуіне перпендикуляр жазықтық осы жазықтықтардың әрқайсысына перпендикуляр болады* (2.36-сурет).



2.36-сурет

1. Қандай бұрышты түзу мен жазықтық арасындағы бұрыш деп атайды?
2. Екіжақты бұрыш деген не? Оның элементтерін атап, сызбадан көрсетіңдер.
3. Екіжақты бұрыштың сызықтық бұрышы деген не?
4. Екі жазықтық арасындағы бұрыш қалай анықталады?
5. Екіжақты бұрыш пен жазықтықтардың арасындағы бұрыш ұғымдарының қандай айырмашылығы бар?
6. Жазықтықтардың перпендикулярлығы белгісін тұжырымдап, оны дәлелдеңдер.

Практикалық жұмыс

1. Қатты қағаз алып, олардан екіжақты бұрыш үлгісін жасап, оның сызықтық бұрышын көрсетіңдер. Осы екіжақты бұрышты, оның сызықтық бұрышы 1) 30°, 2) 45°, 3) 60°, 4) 90°, 5) 150° болатындай етіп бүктеңдер.

2. Екі қатты қағаз алып, олардан өзара перпендикуляр жазықтықтардың үлгісін жасаңдар.

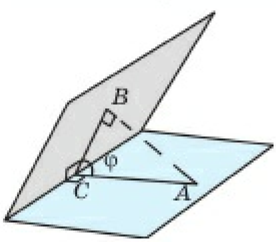
ЕСЕПТЕР

А

2.61. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген. 1) оның өзара перпендикуляр жақтарының барлық жұбын көрсетіңдер; 2) AB түзуі мен ACC_1A_1 жазықтығы арасындағы бұрышты табыңдар; 3) ACC_1A_1 және ABB_1A_1 жазықтықтары арасындағы бұрышты табыңдар; 4) ACC_1A_1 және BDD_1B_1 жазықтықтарының өзара перпендикуляр екенін көрсетіңдер.

2.62. Екіжақты бұрыштың шамасы: 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°. Екіжақты бұрыштың бір жағында орналасқан A нүктесінен оның қырына дейінгі қашықтық 10 см. A нүктесінен оның екінші жағына дейінгі қашықтықты табыңдар.

2.63. Екіжақты бұрыштың қырына перпендикуляр жазықтық оның жақтарына да перпендикуляр болатынын көрсетіңдер.



2.37-сурет

2.64. Екіжақты бұрыштың шамасы φ-ге тең. Оның бір жағында орналасқан A нүктесінен екінші жағына AB перпендикуляры түсірілген. 1) $\varphi=30°$; $AB=5$ см; 2) $\varphi=45°$; $AB=3\sqrt{2}$ дм; 3) $\varphi=60°$, $AB=2\sqrt{3}$ м болса, A нүктесінен екіжақты бұрыштың қырына дейінгі қашықтықты табыңдар (2.37-сурет).

2.65. Берілген нүктеден берілген жазықтықты 64°-тық бұрышпен қиып өтетін неше түзу жүргізуге болады?

2.66. AB көлбеуі жазықтықпен φ бұрышын жасайды, AC — оның проекциясы.

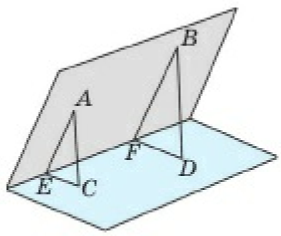
а) 1) $AB=48$ см, $\varphi=60°$; 2) $AB=4\sqrt{2}$ см, $\varphi=45°$ болса, проекция ұзындығын табыңдар;

ә) 1) $AC=4\sqrt{3}$ см, $\varphi=30°$; 2) $AC=5$ дм, $\varphi=60°$ болса, көлбеудің ұзындығын табыңдар;

б) 1) $AB=24$ см, $AC=12$ см; 2) $AB=8$ м, $AC=4\sqrt{2}$ м болса, φ бұрышын табыңдар.

2.67. Ұзындығы 6 см болатын AB кесіндісінің ұштары жазықтықтан 5 см және 3 см қашықтықта орналасқан. 1) AB кесіндісінің проекциясын; 2) AB түзуі мен жазықтық арасындағы бұрышты табыңдар.

2.68. A және B нүктелері екіжақты бұрыштың бір жағында орналасқан. Осы нүктелерден оның екінші жағына $AC=10$ см және $BD=20$ см перпендикулярлар және екіжақты бұрыш қырына $AE=30$ см және BF перпендикулярлары түсірілген. BF-ті табыңдар (2.38-сурет).



2.38-сурет

B

2.69. Тік бұрышы C болатын ABC тік бұрышты үшбұрышының AC катеті арқылы ABC жазықтығымен 30° бұрыш жасайтын α жазықтығы жүргізілген. Егер $AC=6$ см, $AB=10$ см болса, B нүктесінен α жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

2.70. «Бір жазықтыққа перпендикуляр екі жазықтық өзара параллель болады» деген тұжырым дұрыс па?

2.71. $\alpha\perp\gamma$, $\beta\perp\gamma$ және $\alpha\perp\beta$ болатындай α, β және γ жазықтықтары берілген. $a=\alpha\cap\beta$ түзуі γ жазықтығына перпендикуляр болатынын көрсетіңдер.

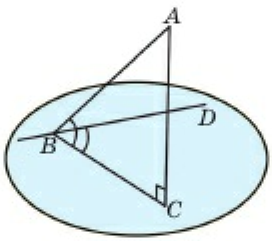
2.72. Кубтың қыры 8 см. Айқас екі қырының орталарын қосатын кесіндінің ұзындығын табыңдар.

2.73. Барлық қырлары өзара тең үшбұрышты пирамиданың екіжақты бұрышын табыңдар.

2.74. A нүктесі тік бұрышты екіжақты бұрыш жақтарынан 3 см және 4 см қашықтықта орналасқан. A нүктесінен екіжақты бұрыш қырына дейінгі қашықтықты табыңдар.

2.75. Барлық қырлары тең $SABC$ үшбұрышты пирамидасы берілген. D — AB қырының ортасы. CDS бұрышы сәйкес екіжақты бұрыштың сызықтық бұрышы болатынын көрсетіңдер.

2.76. Тең бүйірлі тік бұрышты үшбұрыштың бір катеті α жазықтығында жатыр, екінші катеті α жазықтығымен 45° бұрыш жасайды. Үшбұрыш гипотенузасы мен α жазықтығы арасындағы бұрышты табыңдар.



2.39-сурет

2.77. AB көлбеуі мен α жазықтығы арасындағы бұрыш 45°, ал α жазықтығындағы BD түзуі AB көлбеуінің BC проекциясымен 45° бұрыш жасайды. ABD бұрышын табыңдар (2.39-сурет).

2.78. Жазықтықтан 6 см қашықтықтағы нүктеден осы жазықтықпен 45° және 30° бұрыш жасайтын екі көлбеу жүргізілген. Бұл көлбеулер өзара перпендикуляр. Көлбеулер табандарының арақашықтығын табыңдар.

2.79. Өзара параллель көлбеулер жазықтықпен бірдей бұрыш жасайтынын көрсетіңдер.

2.80. Жазықтықтан 10 см қашықтықтағы A нүктесінен осы жазықтықпен 45° бұрыш жасайтын AB және AC көлбеулері түсірілген. Көлбеулердің проекциялары арасындағы бұрыш 120° болса, BC-ны табыңдар.

C

2.81. Екіжақты бұрыштың сызықтық бұрышы φ-ге тең. Осы бұрыштың қырынан A және B нүктелері алынып, оған екіжақты бұрыштың әртүрлі жақтарында жататын AC және BD перпендикулярлары түсірілген. Егер $AB=a$, $AC=b$, $BD=c$ болса, онда CD-ны табыңдар.

2.82. AB кесіндісінің ұштары екіжақты бұрыштың әртүрлі жақтарында жатыр және бұрыш қырына AC мен BD перпендикулярлары түсірілген. Егер $AC=BD$ болса, онда $\angle ABC=\angle BAD$ болатынын дәлелдеңдер.

2.83. Бір нүктеден шығатын үш сәуле өзара φ, ψ және γ-ға тең сүйір бұрыштар жасайды. Егер φ және ψ бұрыштарының жазықтықтары өзара перпендикуляр болса, онда $\cos\varphi \cdot \cos\psi = \cos\gamma$ теңдігі орындалатынын көрсетіңдер.

2.84. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында AC_1 және BD түзулері арасындағы бұрышты табыңдар.

2.85. Тік бұрышты $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеді берілген: $\angle(B_1C;\ DC) = 60°$, $B_1C = DC_1$. BB_1C_1C төртбұрышының түрін анықтаңдар.

2.86. α, β және γ жазықтықтары өзара қос-қостан перпендикуляр. Олардың қиылысатын түзулері де өзара қос-қостан перпендикуляр болатынын көрсетіңдер.

2.87. α жазықтығының A нүктесі арқылы a көлбеуі мен осы жазықтықта жататын b түзуі жүргізілген. Егер c түзуі a көлбеуінің α жазықтығындағы проекциясы және $\angle(a;\ b) = \varphi$, $\angle(c;\ b) = \psi$ болса, онда $\angle(a;\ c)$-ны табыңдар.

2.88. α жазықтығының A және B нүктелері арқылы осы жазықтықпен φ бұрыш жасайтын өзара параллель екі көлбеу жүргізілген. Егер көлбеу проекцияларының арақашықтығы b, $AB = a$ болса, көлбеулердің арақашықтығын табыңдар.

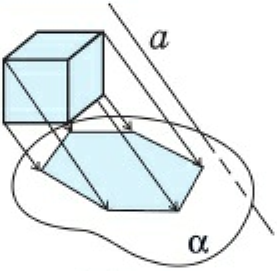
2.4. КЕҢІСТІК ФИГУРАЛАРЫН ЖАЗЫҚТЫҚТА БЕЙНЕЛЕУ

Тақырыпты оқып-үйрену барысында сендер:

- параллель проекциялаудың анықтамасы мен қасиеттерін білесіңдер;
- фигуралардың жазықтықтағы ортогональ проекцияларын бейнелейсіңдер;
- тік бұрышты пареллелепипед анықтамасы мен қасиеттерін білесіңдер;
- тік бұрышты параллелепипед қасиеттерін қорытып шығарасыңдар және оларды есептер шығару барысында қолданасыңдар.

2.4.1. Параллель проекциялау және оның қасиеттері

Стереометрия курсын оқып-үйренуде кеңістік фигураларының қағаз бетіндегі бейнесін сала білу бейімділігі аса маңызды. Кеңістік фигурасының дұрыс салынған бейнесі есептерді шығарудың негізгі құралдарының бірі болып табылады. Әдетте кеңістік денелерін қағаз бетінде бейнелегенде сызу пәнінде қарастырылатын параллель проекциялау тәсілі қолданылады.

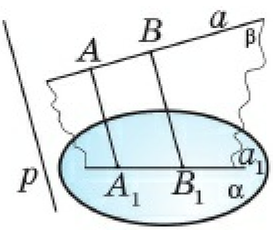


2.40-сурет

Айталық, α жазықтығы, оны қиып өтетін *a* түзуі мен *F* фигурасы берілсін. Онда *F* фигурасының әрбір нүктесі арқылы *a* түзуіне параллель жүргізілген түзулер мен α жазықтығының қиылысу нүктелерінің жиыны F_1-ді *F* фигурасының α жазықтығындағы *a* түзуіне ***параллель проекциясы*** деп атайды. Мысалы, 2.40-суретте кубтың *a* түзуіне параллель α жазықтығындағы проекциясы бейнеленген. Мұнда *a* түзуін ***проекциялау бағыты*** деп, ал α-ны ***проекциялау жазықтығы*** деп атайды.

Енді параллель проекциялаудың кейбір қарапайым қасиеттерін қарастырайық.

1-теорема. *Параллель проекциялау кезінде проекциялау бағытына параллель емес түзудің проекциясы түзу болады.*



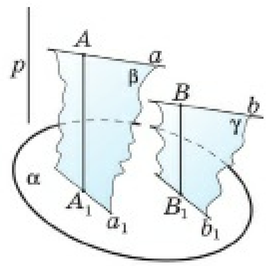
2.41-сурет

▲ **Дәлелдеуі.** Айталық, проекциялау бағыты *p*-ға параллель емес *a* түзуі мен α проекциялау жазықтығы берілсін (2.41-сурет). $A \in a$ нүктесі мен оның проекциясы $A_1 \in \alpha$ нүктесін алайық: $AA_1 \parallel p$. Қиылысушы AA_1 және *a* түзулері арқылы β жазықтығын жүргіземіз. Кез келген $B \in a$ нүктесін алып, β жазықтығында *B* арқылы AA_1 түзуіне параллель түзу жүргізелік. Бұл түзу $a_1 = \alpha \cap \beta$ түзуін B_1 нүктесінде қиып өтсін. Салуымыз бойынша $BB_1 \parallel AA_1$ және $AA_1 \parallel p$ болғандықтан, $BB_1 \parallel p$. Онда $B_1 \in \alpha$ нүктесі — *p* түзуі бағытында параллель проекциялау кезіндегі *B*-ның бейнесі, яғни параллель проекциялау кезінде *a* түзуінің кез келген нүктесінің бейнесі a_1 түзуінде жатады. Теорема дәлелденді. ■

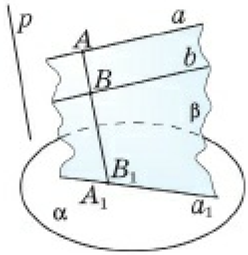
Салдар. *Түзу нүктелерін проекциялаушы барлық сәулелер бір жазықтықта жатады.*

Мысалы, 2.41-суреттегі AA_1 сәулесін ***проекциялаушы сәуле***, β жазықтығын ***проекциялаушы жазықтық*** деп атайды.

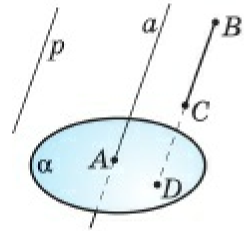
2-теорема. *Параллель проекциялау кезінде (проекциялау бағытына параллель емес) параллель түзулердің проекциялары да параллель түзулер (немесе бір түзу) болады.*



2.42-сурет



2.43-сурет



2.44-сурет

▲ **Дәлелдеуі.** α жазықтығына p түзуі бағытында параллель проекциялауды қарастырайық. $a \parallel b$ және $a \nparallel p$ болатын a және b түзулері берілсін. $A \in a$, $B \in b$ нүктелері мен олардың сәйкес проекциялары A_1 мен B_1-ді алайық (2.42-сурет). A_1 нүктесі және a түзуі арқылы β жазықтығын, B_1 нүктесі мен b түзуі арқылы γ жазықтығын жүргізейік. 1-теорема бойынша $a_1 = \beta \cap \alpha$ түзуі a-ның, $b_1 = \gamma \cap \alpha$ түзуі b түзуінің бейнесі. $a \parallel b$ және $AA_1 \parallel BB_1$ болғандықтан, $\beta \parallel \gamma$. Сондықтан $a_1 \parallel b_1$.

β және γ жазықтықтары беттессе (2.43-сурет), өзара параллель a және b түзулерінің бейнелері де беттеседі. Теорема дәлелденді. ■

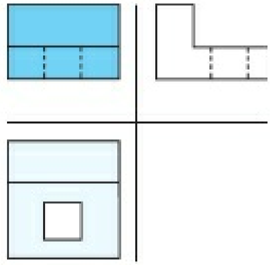
$a \parallel p$ (p — проекциялаушы түзу) болған жағдайда a түзуі нүктеге бейнеленеді ($A = a \cap \alpha$) (2.44-сурет). Осы теоремалардан мынадай маңызды салдар алынады.

Салдар. *Проекциялау бағытына параллель емес бағытта проекциялау кезінде 1) кесінді (сәуле) кесіндіге (сәулеге) бейнеленеді; 2) параллель кесінділер (сәулелер) параллель кесінділерге (сәулелерге) бейнеленеді, сонымен қатар параллель кесінділер проекцияларының қатынасы берілген кесінділердің қатынасына тең болады.*

Барлық параллель проекциялаулар арасынан *проекциялау бағыты проекциялау жазықтығына перпендикуляр болатын ортогональ проекциялауды* бөліп қарастыруға болады.

Мысалы, ортогональ проекциялау сызу пәнінде, инженерлік салада жиі қолданылады. 2.45-суреттегі тетіктің өзара қос-қостап перпендикуляр жазықтықтарға түсірілген ортогональ проекциялары 2.46-суретте бейнеленген.

2.45-сурет



2.46-сурет

2.4.2. Тік бұрышты параллелепипед

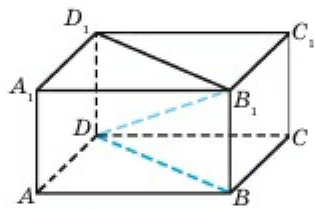
Табандары тіктөртбұрыш болатын тік параллелепипедті **тік бұрышты параллелепипед** деп атайды.

! Өздерің дәлелдеңдер

Тік бұрышты параллелепипедтің мына қасиеттерін топпен бірге талдап, дәлелдеңдер (2.47-сурет).

1. Тік бұрышты параллелепипедтің барлық жақтары тіктөртбұрыш болып келеді.
2. Бүйір қырлары табан жазықтықтарына перпендикуляр болып келеді.
3. Барлық екі жақты бұрыштары тік болып келеді.

Тік бұрышты параллелепипедтің табанындағы тіктөртбұрыштың ені мен ұзындығы және бүйір қырының ұзындықтарын оның **үш өлшемі** деп атайды. Кейде оларды **ені, ұзындығы** және **биіктігі** деп те атай береді. Мысалы, 2.47-суретте параллелепипедтің AD — ені, AB — ұзындығы және AA_1 — биіктігі.



2.47-сурет

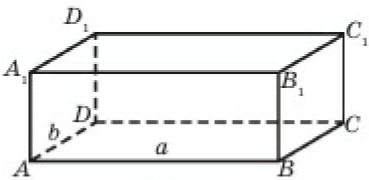
Теорема. *Тік бұрышты параллелепипед диагоналінің квадраты оның үш өлшемінің квадратына тең.*

▲ $DB_1^2 = DA^2 + DC^2 + DD_1^2$ теңдігі орындалатынын көрсетелік (2.48-сурет). Мұнда тік бұрышты паралелепипедтің өлшемдері ретінде DA, DC және DD_1 кесінділері алынған. $ABCD$ тіктөртбұрышында BD диагоналінің квадраты оның ені мен ұзындығы квадраттарының қосындысына тең: $BD^2 = DA^2 + DC^2$. BB_1D_1D төртбұрышы да тіктөртбұрыш болады (оны өздерің негіздеңдер). Сондықтан,

$$DB_1^2 = DB^2 + DD_1^2 = \left(DA^2 + DC^2\right) + DD_1^2 = DA^2 + DC^2 + DD_1^2.$$

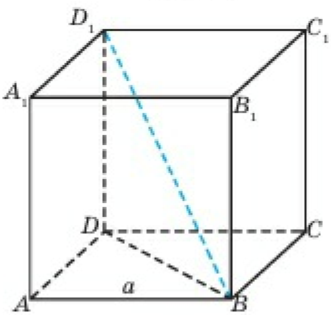
Дәлелдеу керегі де осы. ■

Салдар. Тік бұрышты параллелепипедтің диагональдары өзара тең.



2.48-сурет

▲ Тік бұрышты параллелепипедтің үш өлшемі: $AB = a$, $AD = b$, $AA_1 = c$ болсын (2.48-сурет). Онда дәлелденген теорема бойынша $AC_1 = CA_1 = BD_1 = DB_1 = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ теңдігі орындалады. ■



2.49-сурет

Барлық өлшемдері өзара тең тік бұрышты параллелепипедті **куб** деп атайды (2.49-сурет).

Кубтың барлық қырлары — өзара тең шаршылар.

1-мысал. Қыры a-ға тең кубтың диагоналін табу керек.

▲ $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында (2.49-сурет) $AB = a$ болсын. BD_1-ді табу керек. $AB = BC = BB_1 = a$ болғандықтан, салдар бойынша

$$BD_1 = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3} \cdot a.$$

Жауабы: $BD_1 = \sqrt{3} \cdot a$. ■

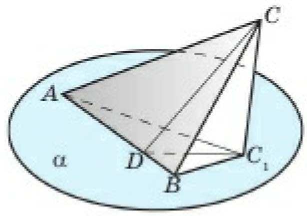
2.4.3. Көпбұрыштың ортогональ проекциясының ауданы

3-теорема. *Көпбұрыштың ортогональ проекциясының ауданы осы көпбұрыш ауданын көпбұрыш жазықтығы мен проекциялау жазықтығы арасындағы бұрыштың косинусына көбейткенге тең.*

▲ **Дәлелдеуі.** Теореманы үшбұрыш үшін дәлелдесе жеткілікті, себебі көпбұрышты бірнеше үшбұрышқа бөлуге болады.

Алдымен үшбұрыштың бір қабырғасы проекциялау жазықтығы α-ға параллель болатын жағдайды қарастырайық. Айталық, α проекциялау жазықтығы ABC үшбұрышының AB қабырғасы арқылы өтсін. Егер α жазықтығы AB арқылы өтпесе, онда AB

арқылы өтетін және α-ға параллель α_1 жазықтығын қарастыру керек. Сонымен $AB \subset \alpha$ және $C \notin \alpha$ болсын.

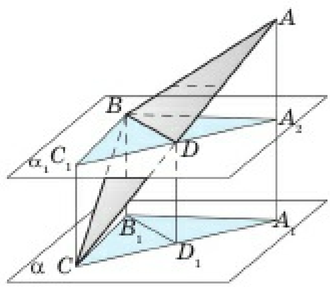


2.50-сурет

C нүктесінен α жазықтығына түсірілген перпендикуляр табанын C_1 арқылы белгілейік және $CD \perp AB$, $D \in AB$ болсын (2.50-сурет). Үш перпендикуляр туралы теоремаға сәйкес C_1D кесіндісі де ABC_1 үшбұрышының биіктігі болады. Егер $\angle CDC_1 = \varphi$ болса, $C_1D = CD \cdot \cos\varphi$, $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AB \cdot CD$ және $S_{ABC_1} = \dfrac{1}{2} AB \cdot C_1D$ теңдіктерінен

$$S_{ABC_1} = S_{ABC} \cdot \cos\varphi.$$

Енді ABC үшбұрышының α жазықтығына параллель қабырғасы болмасын делік. Онда 2.51-суретте көрсетілгендей, ABC үшбұрышының бір төбесі арқылы өтетін және проекцияланатын жазықтыққа параллель жазықтық көмегімен екі үшбұрышқа бөлуге болады. Дәлелдегеніміз бойынша



2.51-сурет

$$S_{BDC_1} = S_{BDC} \cdot \cos\varphi,$$

$$S_{BDA_2} = S_{BDA} \cdot \cos\varphi$$

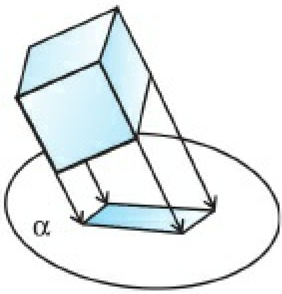
теңдіктерін аламыз. $\Delta A_2BC_1 = \Delta A_1B_1C$ болғандықтан,

$$S_{A_1B_1C} = S_{B_1D_1A_1} + S_{B_1D_1C} = S_{BDA_2} + S_{BDC_1} = S_{BDA} \cdot \cos\varphi + S_{BDC} \cdot \cos\varphi = S_{ABC} \cdot \cos\varphi.$$

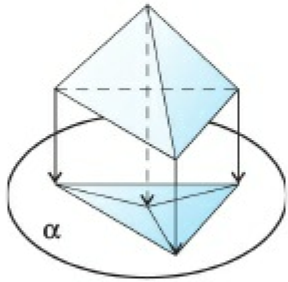
Теорема дәлелденді. ■

2.4.4. Кеңістік фигураларын жазықтықта бейнелеу

Кеңістік фигураларын жазықтықта (қағаз бетінде) бейнелеу үшін осы келтірілген параллель проекциялау қасиеттерін кеңінен қолдану қажет. Мұнда проекциялау бағытын дұрыс таңдап алу аса маңызды. Мысалы, кубты оның бір жағына перпендикуляр бағытта проекцияласақ, параллелограмм шығады (2.52-сурет). Ал үшбұрышты пирамиданы табанына перпендикуляр бағытта проекцияласақ, 2.53-суретте көрсетілгендей үшбұрыш аламыз. Әрине, бұл бейнелерді іс жүзінде кубтың не сәйкесінше пирамиданың бейнесі ретінде қабылдауға болмайды.



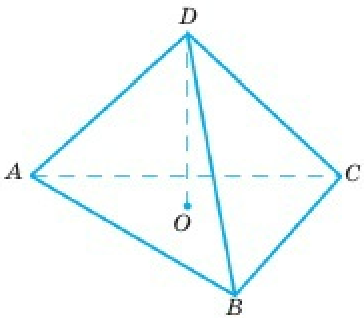
2.52-сурет

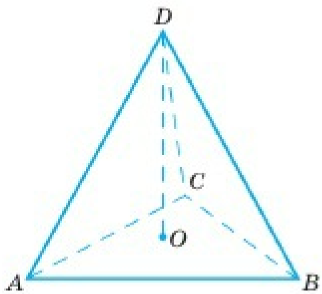


2.53-сурет

Сонымен, іс жүзінде кеңістік фигураларын бейнелегенде мынадай ережелерді ұстанған жөн:

1. Проекциялау кезінде көпжақтардың кейбір қырлары оның көрінетін жақтарының қалқасында қалады, сондықтан оларды үзік сызықтармен бейнелейді. Осы орайда *көпжақтарды бейнелеу барысында оның бейнесінде көрінбейтін сызықтар мейлінше аз болуын қадағалап отыру қажет*. Мысалы, 2.54-суреттегі бір үшбұрышты пирамиданың екі түрлі бейнесін салыстырыңдар.





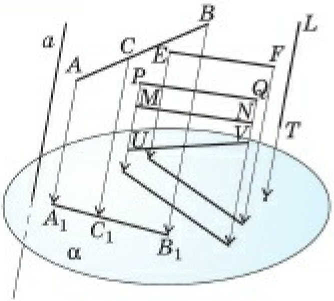
2.54-сурет

2. Фигураның әртүрлі кесінділерінің бейнелері бір түзудің бойында орналаспауы қажет.

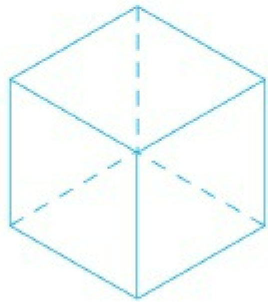
Мысалы, 2.55-суретте әртүрлі PQ, MN және UV кесінділерінің α жазықтығындағы проекциялары бір-бірімен беттеседі. Бұл проекция арқылы көрсетілген әртүрлі кесінділерді бір-бірінен ажыратып алу мүмкін емес. Осы сияқты, 2.52 және 2.56-суреттердегі кубтың бейнелері дұрыс салынбаған.

3. Пирамидаларды бейнелеу барысында оның төбесінен табан жазықтығына түсірілген перпендикулярдың табаны нақты анықталуы қажет.

5 – 4370

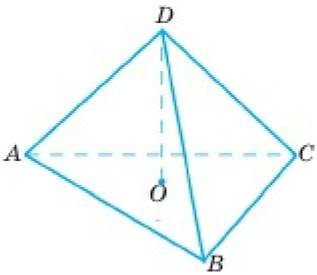


2.55-сурет

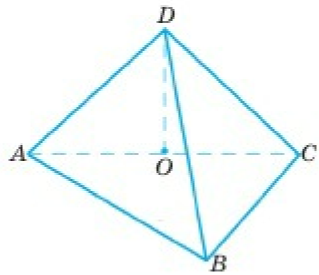


2.56-сурет

Мысалы, 2.57-суретте бейнеленген үшбұрышты пирамиданың қырлары өзара тең деп қабылданса (оны дұрыс тетраэдр деп атайды), 2.58-суреттегі пирамиданың барлық қырлары тең болып көрінбейді. Мұнда ACD және ABC жақтары өзара перпендикуляр.



2.57-сурет



2.58-сурет

1. Параллель проекциялау деген не?
2. Параллель проекциялаудың қандай қасиеттері бар?
3. Қандай проекция ортогональ проекция деп аталады?
4. Көпбұрыштың ортогональ проекциясының ауданы қандай формуламен анықталады?
5. Кеңістік фигураларын жазықтықта бейнелеудің негізгі қағидаларын атаңдар. Жауаптарыңды мысалдар арқылы негіздеңдер.

Практикалық жұмыс

1. Үшбұрышты пирамиданы оның биіктігінің табаны 1) табан жазықтығындағы үшбұрыш медианаларының қиылысу нүктесіне түсетіндей; 2) табанындағы үшбұрыштың бір төбесімен беттесетіндей; 3) табанындағы үшбұрыштың бір қабырғасының ортасына түсетіндей; 4) табанындағы үшбұрыштан тысқары орналасатындай етіп бейнелеңдер.
2. 1-тапсырманы төртбұрышты пирамида үшін орындаңдар.
3. Өздеріңе таныс көпжақтардың бейнесін салыңдар: 1) кубтың; 2) параллелепипедтің.

ЕСЕПТЕР

A

2.89. 1) $AB=2$ см, $AD=4$ см, $AA_1=3$ см; 2) $AB=5$ см, $AD=3$ см, $AA_1=6$ см болса, $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедін салыңдар.

2.90. Қандай фигуралардың проекциясы нүкте болуы мүмкін?

2.91. a және b түзулерінің проекциялары өзара параллель. $a \parallel b$ болуы міндетті ме? Жауаптарыңды сызба арқылы негіздеңдер.

2.92. Қандай жағдайларда кесіндінің α жазықтығындағы проекциясы 1) өзіне тең; 2) нүкте болады?

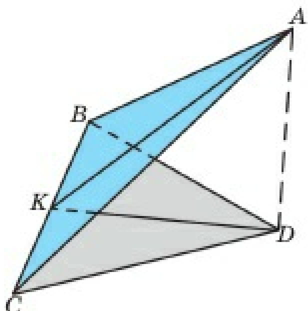
2.93. Кесіндінің проекциясы осы кесіндінің өзінен ұзын болуы мүмкін бе? Жауаптарыңды сызба арқылы негіздеңдер.

2.94. Параллель емес түзулердің проекциялары параллель болуы мүмкін бе? Мысал келтіріңдер.

2.95. Көпбұрыш жазықтығы проекциялау бағытына параллель емес. 1) Үшбұрыш; 2) квадрат; 3) тіктөртбұрыш; 4) параллелограмм; 5) трапеция қандай фигураға проекцияланады?

2.96. Қабырғасы 6 см болатын тең қабырғалы үшбұрыш берілген. Оның үшбұрыш жазықтығымен 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°-қа тең бұрыш жасайтын жазықтықтағы ортогональ проекциясының ауданын табыңдар.

2.97. Тең бүйірлі үшбұрыштың ортогональ проекциясы — қабырғасы 6 см болатын тең қабырғалы үшбұрыш. Тең бүйірлі үшбұрыштың табаны оның проекциясының бір қабырғасымен беттеседі. Осы үшбұрыштар орналасқан жазықтықтардың арасындағы бұрыш 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°. Тең бүйірлі үшбұрыштың ауданын табыңдар (2.59-сурет).



2.59-сурет

2.98. Пифагор теоремасын пайдаланып, өлшемдері a, b және c (ұзындығы, ені және биіктігі) болатын тік параллелепипедтің диагоналы $d^2=a^2+b^2+c^2$ формуласымен анықталатынын көрсетіңдер.

2.99. 1) $a=4$ м, $b=3$ м, $c=12$ м; 2) $a=1$ см, $b=1$ см, $c=\sqrt{2}$ см; 3) $a=9$ см, $b=8$ см, $c=5$ см; 4) $a=9$ дм, $b=7$ дм, $c=\sqrt{39}$ дм болса, тік параллелепипедтің диагоналының ұзындығын табыңдар.

2.100. Тетраэдрдің қыры 8 см. Бүйір жағының табан жазықтығына ортогональ проекциясының ауданын табыңдар.

В

2.101. Қисық сызықтың проекциясы түзу болуы мүмкін бе? Жауаптарыңды негіздеңдер.

2.102. Тең бүйірлі емес трапеция тең бүйірлі трапецияның проекциясы болуы мүмкін бе? Керісінше ше?

2.103. $A_1B_1C_1D_1$ төртбұрышы — $ABCD$ трапециясының проекциясы. Трапецияның орта сызығының проекциясын салыңдар.

2.104. Егер $\Delta A_1B_1C_1$ үшбұрышы ABC үшбұрышының проекциясы болса және бұл үшбұрыштар орналасқан жазықтықтар өзара параллель жатса, онда $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ теңдігін дәлелдеңдер.

2.105. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедінің барлық қырларының қосындысы 72 см және $AB:BC = 2:3$; $BC:B_1B = 3:4$. Параллелепипедтің қырларын табыңдар.

2.106. Кубтың қыры a-ға тең. Оның екі айқас қырларының орталарын қосатын кесіндінің ұзындығын табыңдар.

2.107. $SABC$ тетраэдрінің SB, SC және BC қырларынан сәйкесінше P, Q және R нүктелерін белгілеп алып, 1) PQ түзуі мен ABC жазықтығының; 2) QR түзуі мен ABS жазықтығының қиылысу нүктесін табыңдар.

2.108. Қабырғалары a-ға және b-ға, ал олардың арасындағы сүйір бұрышы 45°-қа тең параллелограмм — ромбының ортогональ проекциясы. Ромбының бір бұрышы 120°-қа тең. Егер ромб пен параллелограмм жазықтықтарының арасындағы бұрыш 60° болса, онда ромбының қабырғасын табыңдар.

2.109. Табан қабырғасы a, бүйір қыры b болатын дұрыс төртбұрышты пирамиданың (табаны квадрат, биіктігі квадраттың центріне түсетін пирамиданың) биіктігін табыңдар.

2.110. Бүйір қыры b-ға, ал төбесіндегі жазық бұрышы φ-ге тең дұрыс төртбұрышты пирамиданың табанының қабырғасын табыңдар.

C

2.111. Сүйір бұрышы 60°-қа тең ромбының проекциясы болатын параллелограмм берілген. Ромбының доғал бұрышының төбесінен түсірілген биіктігінің проекциясын салыңдар.

2.112. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының қыры 8 см. AB_1C үшбұрышының 1) $ABCD$ жазықтығындағы; 2) AA_1C_1C жазықтығындағы ортогональ проекциясының ауданын табыңдар.

2.113. Қимасында дұрыс алтыбұрыш шығатындай етіп, кубты қалай қиып өту қажет?

2.114. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың көршілес екі бүйір қырларының орталары арқылы өтетін және табан жазықтығына перпендикуляр қимасын салыңдар.

2.115. Алдыңғы есептегі пирамида табанының қабырғасы a, биіктігі h деп алып, салынған қиманың ауданын табыңдар.

Кеңес: https://www.geogebra.org/?land=ru сайтын қолданып өздеріңе қажетті кеңістіктегі фигуралар мен сызбаларды орындауға болады.

3-БӨЛІМ. КЕҢІСТІКТЕГІ ТІК БҰРЫШТЫ КООРДИНАТАЛАР ЖҮЙЕСІ ЖӘНЕ ВЕКТОРЛАР

3.1. КЕҢІСТІКТЕГІ ВЕКТОРЛАР ТҮСІНІГІ ЖӘНЕ ОЛАРҒА ҚОЛДАНЫЛАТЫН АМАЛДАР

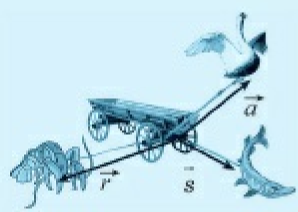
Тақырыпты оқып-үйрену барысында сендер:

- кеңістіктегі векторлар ұғымы, вектордың ұзындығын, тең векторлардың анықтамасын білесіңдер;
- векторларды санға көбейту және векторларды қосу ережелерін білесіңдер;
- кеңістіктегі коллинеар және компланар векторлар анықтамасымен танысасыңдар.

3.1.1. Кеңістіктегі векторлар ұғымы. Коллинеар векторлар

Ойтүрткі

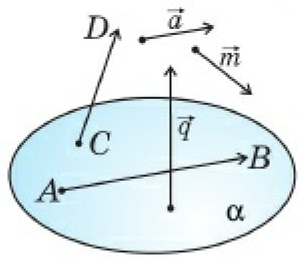
3.1-суретте Крыловтың әйгілі «Шаян, шортан және аққу» мысалының иллюстрациясы берілген. Қалай ойлайсыңдар, неліктен арба орнынан қозғалмай тұр? Жауаптарыңды негіздеп көріңдер. Тақырып соңында бұл құбылысты математикалық жолмен түсіндіре аласыңдар.



3.1-сурет

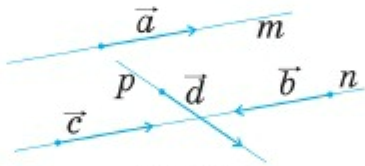
Кеңістікте, планиметрия курсындағыдай, вектор ұғымы, векторларға амалдар қолдану және олардың қасиеттері анықталады. Енді осы ұғымдарды қысқаша қайталап өтейік.

Кеңістікте кез келген бағытталған кесіндіні ***вектор*** деп атайды. Егер кесінді ұштарының қайсысы басы, қайсысы ұшы екені көрсетілсе, бұл кесіндіні ***вектор*** деп атайды. Векторларды басынан ұшына қарай нұсқама (стрелкамен) бағыттап көрсетіп жазады. Сонымен, AB кесіндісінің A нүктесі басы ретінде, B нүктесі ұшы ретінде қабылданса, шыққан векторды $\overrightarrow{AB}$ арқылы белгілейді. Сонымен бірге векторларды төбесінде бағыты көрсетілген латын әліпбиінің кіші әріптерімен де белгілейді. 3.2-суретте $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\vec{a}$, $\vec{q}$, $\vec{m}$ векторлары бейнеленген. Басы мен ұшы беттесетін векторды ***нөлдік вектор*** деп атайды, яғни кеңістіктегі кез-келген нүктені ***нөлдік вектор*** ретінде қарастыруға болады. Нөлдік вектор $\vec{0}$ символымен белгіленеді және ол бағыты анықталмаған жалғыз вектор.



3.2-сурет

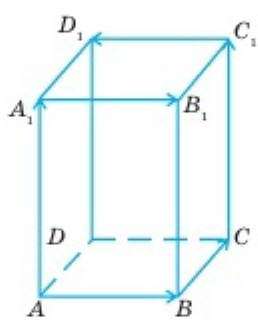
Параллель түзулердің бойында немесе бір түзудің бойында жататын векторларды *коллинеар векторлар* деп атайды. Мысалы, 3.3-суретте $m \parallel n$ болғандықтан, $\vec{a}$, $\vec{b}$ және $\vec{c}$ векторлары қос-қостан коллинеар болады. Ал $\vec{d}$ векторы бұл векторлардың ешбірімен де коллинеар болмайды, себебі, $p \nparallel n$, $p \nparallel m$. Векторлардың коллинеарлығы параллельдік белгісімен белгіленеді: $\vec{a} \parallel \vec{b}$, $\vec{a} \parallel \vec{c}$, $\vec{b} \parallel \vec{c}$, $\vec{a} \nparallel \vec{d}$. Егер екі коллинеар вектордың бағыттары бірдей болса, онда бұл векторларды ***бағыттас векторлар*** деп атап, оларды $\uparrow\uparrow$ символымен белгілейді. Егер коллинеар векторлардың бағыттары әртүрлі болса, оларды ***қарама-қарсы бағытталған векторлар*** деп атап, $\uparrow\downarrow$ символымен белгілейді. Мысалы, 3.3-суретте $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{c}$, $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, $\vec{c} \uparrow\downarrow \vec{b}$.



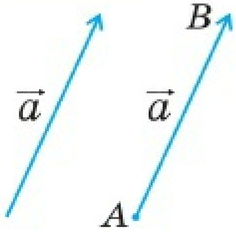
3.3-сурет

AB кесіндісінің ұзындығын $\overrightarrow{AB}$ векторының *модулі* деп атайды және оны $|\overrightarrow{AB}|$ деп белгілейді. Осы сияқты $\vec{a}$ векторының модулін $|\vec{a}|$ деп белгілейді.

Егер екі вектор бағыттас және олардың модульдері тең болса, онда бұл векторларды *тең* деп айтады. Басқаша айтқанда, егер 1) $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$; 2) $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ болса, $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары тең делінеді: $\vec{a} = \vec{b}$. Мысалы, 3.4-суретте $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тік параллелепипедінің қырлары арқылы анықталатын векторлар



3.4-сурет

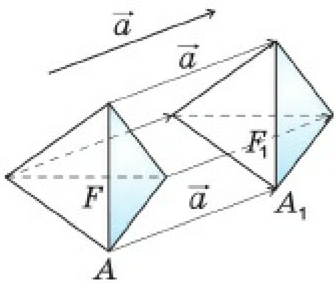


3.5-сурет

үшін $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{CC_1}$. Ал $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{C_1D_1}$ векторлары тең емес $\left(\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{C_1D_1}\right)$, себебі $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{C_1D_1}\right|$ болғанымен, бұл векторлар қарама-қарсы бағытталған.

Егер A нүктесі $\vec{a}$ векторының басы болса, $\vec{a}$ векторын A нүктесінен бастап өлшеп салынған деп айтады.

Кеңістіктің кез келген A нүктесінен бастап берілген векторға тең бір ғана векторды өлшеп салуға болатынын дәлелдеу қиын емес (3.5-сурет).



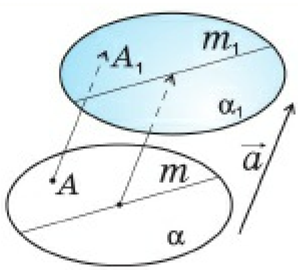
3.6-сурет

F және F_1 фигуралары мен $\vec{a}$ векторы берілсін. F фигурасын F_1 фигурасына түрлендіру барысында бір-біріне сәйкес келетін $A \in F$ және $A_1 \in F_1$ нүктелері үшін $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$ теңдігі орындалса, F_1 фигурасы F фигурасын $\vec{a}$ векторына *параллель көшіру* арқылы алынды деп айтады (3.6-сурет). Параллель көшірудің мынадай қасиеттері бар екенін көрсетуге болады:

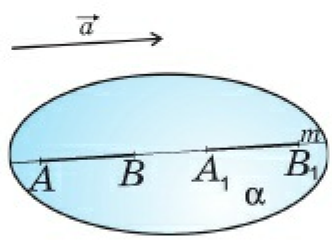
1) *параллель көшіру кезінде түзу өзіне параллель түзуге (немесе өзіне) көшеді* (3.6, 3.7-суреттер);

2) *параллель көшіру кезінде жазықтық өзіне параллель жазықтыққа (немесе өзіне) көшеді* (3.7, 3.8-суреттер);

3) *параллель көшіру кезінде кесінді өзіне параллель кесіндіге (немесе өзімен бір түзу бойында жататын кесіндіге) көшеді.*



3.7-сурет

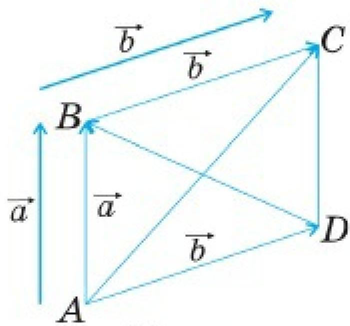


3.8-сурет

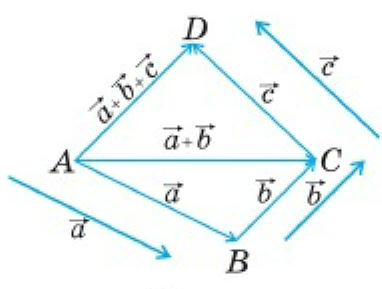
Сонымен, бірге *әрбір нөлдік емес вектор қандай да бір параллель көшіру түрлендіруін толық анықтайтынын және керісінше, әр параллель көшіру түрлендіруі қандай да бір векторды анықтайтынын* көрсетуге болады.

3.1.2. Векторларға амалдар қолдану. Компланар векторлар

Кеңістік векторларына жазықтықтағы векторларға ұқсас қосу, азайту және векторды санға көбейту амалдары қолданылады. Атап айтсақ, $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары берілсін. Бұл векторларды кеңістіктің қандайда бір A нүктесінен бастап өлшеп салайық: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. ABD жазықтығында $ABCD$ төртбұрышы параллелограмм болатындай етіп, C нүктесін алайық. Онда $\overrightarrow{AC}$ векторын $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының *қосындысы* деп атайды: $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$, ал $\overrightarrow{DB}$ векторын $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының *айырымы* деп атайды: $\overrightarrow{DB} = \vec{a} - \vec{b}$. Осы сияқты $\overrightarrow{BD} = \vec{b} - \vec{a}$ (3.9-сурет). Векторларды қосудың көрсетілген тәсілін ***параллелограмм ережесі*** деп атайтыны белгілі. Векторларды қосуды ***ұшбұрыш ережесін*** пайдаланып, анықтауға да болады. Мысалы, 3.9-суретте $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \vec{b}$ болғандықтан, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}$. Осы тәсілмен бірнеше вектордың қосындысын анықтауға болады. Ол үшін әр қосылғышты алдыңғы вектордың ұшынан өлшеп салады. Мысалы, 3.10-суретте $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларының қосындысын анықтау тәсілі көрсетілген. Мұнда $\vec{a}$, $\vec{b}$ және $\vec{c}$ векторларының бір жазықтыққа параллель орналасуы, яғни A, B, C және D нүктелерінің бір жазықтықтың бойында жатуы шарт емес. Бірнеше векторларды қосудың бұл ережесі *көпбұрыштар ережесі* деп аталады.



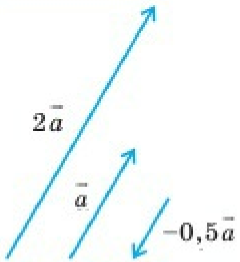
3.9-сурет



3.10-сурет

Тапсырма

Енді шаян, шортан және аққу жегілген арбаның неліктен қозғалмайтынын векторлар көмегімен түсіндіріп көріңдер.



3.11-сурет

$\vec{a}$ векторын k санына көбейту барысында осы векторға коллинеар және модулі $|k|\cdot|\vec{a}|$-ға тең $k\cdot\vec{a}$ векторын аламыз. Мұнда, егер $k>0$ болса, $\vec{a}\uparrow\uparrow k\cdot\vec{a}$, $k<0$ болса, $\vec{a}\uparrow\downarrow k\cdot\vec{a}$, (3.11-сурет); егер $k=0$ болса, $k\cdot\vec{a}=0$. Сонымен, егер $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары коллинеар болса, k саны табылып, мына теңдік орындалады:

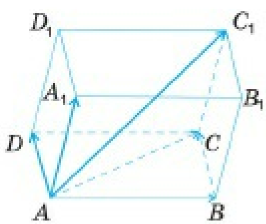
$$\vec{a}=k\cdot\vec{b}. \qquad (1)$$

Бір жазықтықта жататын немесе бір жазықтыққа параллель векторлар ***компланар векторлар*** деп аталады. Мысалы, 3.12-су-ретте $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеді бейнеленген. Мұнда $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{A_1D_1}$, $\overrightarrow{B_1C_1}$, $\overrightarrow{C_1D_1}$ векторлары компланар, себебі бұл векторлардың барлығы да $ABCD$ жазықтығында жатады немесе оған параллель болады. Ал $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ және $\overrightarrow{AA_1}$ векторлары ***компланар емес.***

Егер берілген үш вектор бір жазықтықта жатпаса немесе бір жазықтыққа параллель болмаса, оларды *компланар емес* деп атайды.

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ және $\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA_1}$ болғандықтан,

$$\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1} \qquad (2)$$



3.12-сурет

теңдігін аламыз. Үш компланар емес векторды қосқанда осы векторлар арқылы тұрғызылған параллелепипед диагоналімен анықталатын вектор алынады (3.12-сурет). Осы үш компланар емес вектордың қосындысын анықтауды ***параллелепипед ережесі*** деп атайды. Егер (2) теңдік орындалса, онда $\overrightarrow{AC_1}$ векторын $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ және $\overrightarrow{AA_1}$ компланар емес векторлардың қосындысына жіктелді деп те айтады.

3.1.3. Векторды үш компланар емес векторға жіктеу

Егер $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ және $\vec{d}$ векторлары үшін

$$\vec{d}=x\cdot\vec{a}+y\cdot\vec{b}+z\cdot\vec{c} \qquad (3)$$

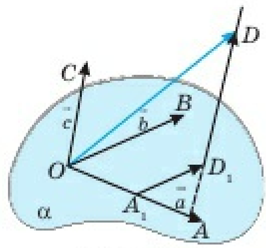
теңдігі орындалса, онда $\vec{d}$ *векторы* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *және* $\vec{c}$ *векторлары бойынша жіктелген* деп аталады. Мұнда x, y, z сандары *жіктелу коэффициенттері* деп аталады.

Енді кез келген векторды үш компланар емес векторлар бойынша жіктеуге болатынын көрсетелік.

Теорема. *Кез келген векторды үш компланар емес векторлар бойынша жіктеуге болады және жіктелу коэффициенттері бір ғана түрде анықталады.*

▲ Айталық, бізге $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ және $\vec{d}$ векторлары берілсін. Мұнда $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланар емес векторлар болсын. (3) теңдіктің орындалатынын көрсетелік.

Ол үшін кеңістіктің кез келген O нүктесінен берілген векторларды өлшеп саламыз: $\overline{OA} = \vec{a}$, $\overline{OB} = \vec{b}$, $\overline{OC} = \vec{c}$ және $\overline{OD} = \vec{d}$. Енді D нүктесі арқылы OC түзуіне параллель түзу жүргіземіз және бұл түзу (AOB) жазықтығын D_1 нүктесінде қиып өтсін. Осы сияқты D_1 нүктесі арқылы OB түзуіне параллель түзу жүргізіп, оның OA түзуімен қиылысу нүктесін A_1 арқылы белгілейміз (3.13-сурет). Онда векторларды қосудың көпбұрыштар ережесі бойынша



3.13-сурет

$$\overline{OD} = \overline{OA_1} + \overline{A_1D_1} + \overline{D_1D} \qquad (4)$$

теңдігі орындалады. Мұнда $\overline{OA_1} \parallel \vec{a}$, $\overline{A_1D_1} \parallel \vec{b}$ және $\overline{D_1D} \parallel \vec{c}$ болғандықтан x, y, z сандары табылып, $\overline{OA_1} = x\cdot\vec{a}$; $\overline{A_1D_1} = y\cdot\vec{b}$; $\overline{D_1D} = z\cdot\vec{c}$ теңдіктері орындалады. Олай болса, (4) теңдіктен (3) теңдіктің орындалатыны шығады.

Енді x, y, z жіктелу коэффициенттерінің жалғыз түрде анықталатынын көрсетейік. Ол үшін қарсы жорып, x_1, y_1, z_1 сандары табылады және

$$\vec{d} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b} + z_1\vec{c}$$

теңдігі орындалады деп жориық. Осы теңдікті (3) теңдіктен мүшелеп азайтсақ,

$$\vec{0} = (x - x_1)\vec{a} + (y - y_1)\vec{b} + (z - z_1)\vec{c}. \qquad (5)$$

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлары компланар емес, сондықтан бұл теңдік $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$ болғанда ғана орындалады, яғни (3) жіктелу түрі жалғыз. Егер олай болмаса, айталық $x_1 \neq x$ болса, (5) теңдіктен $-(x - x_1)\vec{a} = (y - y_1)\vec{b} + (z - z_1)\vec{c}$ немесе

$$\vec{a} = -\frac{y - y_1}{x - x_1}\vec{b} - \frac{z - z_1}{x - x_1}\vec{c}$$

теңдігін аламыз. Бұл теңдік $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларының компланар еместігіне қайшы, себебі $\vec{a}$ векторы $\vec{b}$ және $\vec{c}$ векторларына жіктелген. Теорема дәлелденді. ■

Практикалық жұмыс

Өз беттерінше теореманың дербес жағдайларын қарастырыңдар: $\vec{d}$ векторы (OAB), (OAC), (OBC) жазықтарының бірінде жатқан немесе $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларының бірімен коллинеар болған жағдайлар.

1. Вектор деген не және оны қалай белгілейді?
2. Қандай векторлар коллинеар деп аталады? Бағыттас және қарама-қарсы бағытталған векторларға мысал келтіріңдер.
3. Қандай векторлар тең деп аталады?
4. Қандай түрлендіру параллель көшіру деп аталады және оның вектормен қандай байланысы бар? Параллель көшірудің қандай қасиеттері бар?
5. Векторларды қосудың параллелограмм және үшбұрыш ережесін айтыңдар. Мысал келтіріңдер.
6. Векторлардың айырымы қалай анықталады?
7. Векторды санға көбейту қалай анықталады?
8. Қандай векторлар компланар векторлар деп аталады?
9. Үш компланар емес вектордың параллелепипед ережесін мысал арқылы көрсетіңдер.

Практикалық жұмыс

1. а) Коллинеар емес және ұзындықтары тең; ә) бағыттас және ұзындықтары тең; б) ұзындықтары тең және қарама-қарсы бағытталған векторларды салыңдар. а), ә) және б) жағдайларының қайсысында векторлар: 1) коллинеар болады; 2) тең болады? Жауаптарыңды негіздеңдер.

2. $\vec{a}$ және $\vec{b}$ $\left(\vec{a} \nparallel \vec{b}\right)$ векторларын салыңдар. O нүктесін белгілеп, 1) $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ және $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ болатындай етіп, $OABC$ параллелограмын; 2) $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ болатындай етіп, $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубын салыңдар. Салынған кубта а) ABB_1A_1 жазықтығына параллель компланар векторларды; ә) үш компланар емес векторды; б) $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{B_1C_1}$ векторларының қосындысын; в) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DD_1}$ және $\overrightarrow{A_1D_1}$ векторларының қосындысын; г) $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{A_1D_1}$ векторларының айырымын көрсетіңдер. Жауаптарыңды негіздеңдер.

ЕСЕПТЕР

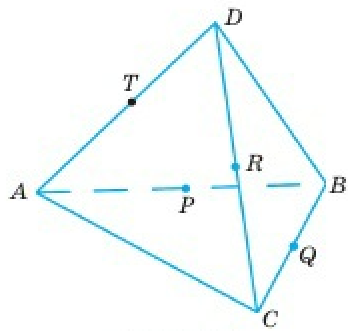
А

3.1. $ABCD$ тіктөртбұрышында $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$. $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CA}$ және $\overrightarrow{BD}$ векторларын $\vec{a}$ және $\vec{b}$ арқылы өрнектеңдер.

3.2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедінде (3.12-сурет): 1) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B_1C_1}$ және $\overrightarrow{DD_1}$ векторларына тең векторларды; 2) $\overrightarrow{A_1B}$ векторына тең векторды көрсетіңдер.

3.3. Алдыңғы есептің шартын пайдаланып анықтаңдар: 1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$; 3) $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AC}$; 4) $\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AC}$.

3.4. $ABCD$ пирамидасының P, Q, R, T нүктелері — сәйкесінше AB, BC, CD және AD қабырғаларының орталары. Егер $AC=8$ см, $BD=6$ см болса, $\overrightarrow{QR}$, $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{RT}$ және $\overrightarrow{TP}$ векторларының модульдерін табыңдар (3.14-сурет).



3.14-сурет

3.5. $\vec{a}$ және бірлік $\vec{e}$ $\left(\left|\vec{e}\right|=1\right)$ векторлары берілген.

1) $\left|\vec{a}\right|=3$, $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{e}$; 2) $\left|\vec{a}\right|=\dfrac{1}{2}$, $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{e}$;

3) $\left|\vec{a}\right|=1,4$, $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{e}$; 4) $\left|\vec{a}\right|=0,6$, $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{e}$ болса, $\vec{a}$ векторын $\vec{e}$ арқылы өрнектеңдер.

3.6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедінде (3.12-сурет) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ және $\overrightarrow{AA_1}$ векторларымен 1) бағыттас; 2) қарама-қарсы бағытталған барлық векторларды көрсетіңдер.

3.7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген. Егер $AB=4$ см болса,

1) $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1}\right|$; 2) $\left|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right|$; 3) $\left|\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right|$; 4) $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}\right|$ сандарын табыңдар.

3.8. $ABCD$ үшбұрышты пирамидасы берілген. 1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$; 2) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}$ қосындыларын табыңдар.

3.9. 3.4-есеп шарты бойынша 1) $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{TR}$; 2) $\overrightarrow{PT}=\overrightarrow{QR}$ болатынын дәлелдеңдер.

3.10. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеді берілген (3.12-сурет). $ABCD$ параллелограмын $A_1B_1C_1D_1$ параллелограмына көшіретін параллель көшіру табыла ма? Табылса, параллель көшіру векторын көрсетіңдер.

3.11. ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштары әртүрлі параллель жазықтықтарда орналасқан және өзара тең. ABC үшбұрышын $A_1B_1C_1$ үшбұрышына параллель көшіру үнемі орындала бере ме? Жауаптарыңды негіздеңдер.

B

3.12. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеді берілген (3.12-сурет). Басы мен ұшы осы параллелепипед төбелерінде орналасатын және: 1) $\overline{AB}+\overline{B_1C_1}$; 2) $\overline{AB}-\overline{B_1C_1}$; 3) $\overline{AA_1}+\overline{A_1C_1}$; 4) $\overline{AA_1}-\overline{A_1C_1}$; 5) $\overline{AB}+\overline{DB}$; 6) $\overline{AB}-\overline{DB}$; 7) $\overline{AD}+\overline{D_1C_1}+\overline{BB_1}$; 8) $\overline{AB}+\overline{B_1C_1}-\overline{AC_1}$ өрнегіне тең векторды көрсетіңдер.

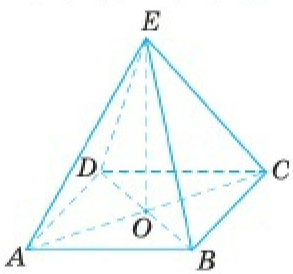
3.13. $ABCDEF$ — дұрыс алтыбұрыш, O — оның центрі. $\overline{OA}=\vec{a}$, $\overline{OB}=\vec{b}$ деп алып, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$, $\overline{OE}$, $\overline{OF}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{ED}$, $\overline{EC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ векторларын $\vec{a}$ және $\vec{b}$ арқылы өрнектеңдер.

3.14. Берілген $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары үшін $\vec{a}+\vec{b}$ және $\vec{a}-\vec{b}$ векторлары қандай шарттар орындалғанда коллинеар болады?

3.15. $\vec{a}+\vec{b}$ және $\vec{a}-\vec{b}$ векторларын параллелограмның диагональдары арқылы бейнелеп, $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$ теңдігі орындалатындай шартты табыңдар.

3.16. $ABCD$ үшбұрышты пирамидасы берілген. 1) $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}$; 2) $\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{DA}+\overline{AB}$ қосындысын табыңдар.

3.17. $\vec{a}=k\vec{b}\left(\vec{a}\neq\vec{0}\right)$ болсын. k-ның қандай мәндерінде 1) $|\vec{a}|=|\vec{b}|$; 2) $|\vec{a}|>|\vec{b}|$; 3) $|\vec{a}|<|\vec{b}|$ орындалады?



3.15-сурет

3.18. $\vec{b}=k\cdot\vec{a}$ және $|\vec{a}|=2$ болсын. 1) $|\vec{b}|=5$ және $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$; 2) $|\vec{b}|=1$ және $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$ болса, k-ның мәнін табыңдар.

3.19. $ABCDE$ — дұрыс төртбұрышты пирамида (3.15-сурет). $\overline{OE}+\overline{DE}+\overline{BC}+\overline{EB}+\overline{AO}=\overline{AE}+\overline{AD}+\overline{AB}+\overline{DA}$ теңдігін дәлелдеңдер.

3.20. E нүктесі $ABCD$ үшбұрышты пирамидасының AB қабырғасында $AE : EB = 3 : 1$ теңдігі орындалатындай етіп белгіленген. $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{ED}$ және $\overrightarrow{EC}$ векторларын $\vec{a} = \overrightarrow{AE}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AD}$ векторлары арқылы өрнектеңдер.

3.21. $\vec{x}$, $\vec{y}$ және $\vec{z}$ — компланар емес векторлар. $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары коллинеар бола ма:

1) $\vec{a} = \vec{x} - 2\sqrt{3}\cdot\vec{y}$; $\vec{b} = \sqrt{3}\cdot\vec{x} - 6\vec{y}$;

2) $\vec{a} = 2\vec{x} + \vec{y}$; $\vec{b} = \vec{x} + 6\vec{y}$;

3) $\vec{a} = \vec{x} - 2\sqrt{2}\cdot\vec{y} + \sqrt{6}\cdot\vec{z}$; $\vec{b} = \sqrt{2}\cdot\vec{x} - 4\vec{y} + 2\sqrt{3}\cdot\vec{z}$;

4) $\vec{a} = \sqrt{5}\cdot\vec{y}$; $\vec{b} = \sqrt{5}\cdot\vec{z}$?

C

3.22. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы $\overrightarrow{AC_1}$ векторына параллель басқа кубқа көшірілген. Егер $AB = a$ болса, онда осы екі кубтың ең қашық нүктелерінің арақашықтығын табыңдар.

3.23. O нүктесі — ABC үшбұрышы медианаларының қиылысу нүктесі, ал CE — оның медианасы. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CE}$ теңдігі орындалатынын дәлелдеңдер.

3.24. $ABCD$ параллелограмы мен кеңістіктің кез келген O нүктесі үшін $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$ теңдігі орындалатынын дәлелдеңдер.

3.25. Егер $ABCD$ төртбұрышы мен кеңістіктің O нүктесі үшін $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$ теңдігі орындалса, онда $ABCD$ параллелограмм болатынын дәлелдеңдер (3.24-есепке кері тұжырым).

3.26. P және Q нүктелері — $ABCD$ параллелограмының сәйкесінше AB және BC қабырғаларының орталары. $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)$ теңдігін дәлелдеңдер.

3.27. Кеңістікте $ABCD$ және $A_1B_1C_1D_1$ параллелограмдары берілген. AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 кесінділерінің орталары қандай да бір параллелограмның төбелері болатынын көрсетіңдер.

3.28. Бір нүктеден шығатын коллинеар емес $\vec{m}$ және $\vec{n}$ векторлары үшін $|\vec{m}|\vec{n} + |\vec{n}|\vec{m}$ векторы $\left(\widehat{\vec{m},\vec{n}}\right)$ бұрышының биссектрисасына коллинеар, ал $|\vec{n}|\vec{m} - |\vec{m}|\vec{n}$ векторы оған сыбайлас бұрыштың биссектрисасына коллинеар болатынын дәлелдеңдер.

3.29. Кеңістікте ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштары берілген. Онда $\overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1} = 3 \cdot \overline{OO_1}$ теңдігі орындалатынын дәлелдеңдер. Мұнда O және O_1 нүктелері — сәйкесінше берілген үшбұрыштардың медианаларының қиылысу нүктелері.

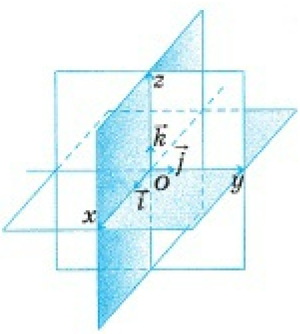
3.30. Кеңістікте ABC үшбұрышы мен O нүктесі берілген. A_1, B_1, C_1 нүктелері — сәйкесінше BC, AC және AB қабырғаларының орталары. $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ және $\overline{OC}$ күштеріне тең әсерлі күш $\overline{OA_1}$, $\overline{OB_1}$ және $\overline{OC_1}$ күштеріне тең әсерлі күшке тең екенін дәлелдеңдер.

3.2. КЕҢІСТІКТЕГІ НҮКТЕ. ВЕКТОРДЫҢ КООРДИНАТАЛАРЫ

Тақырыпты оқып-үйрену барысында сендер:

- кеңістікте тік бұрышты координаталар жүйесін анықтап, оның бейнесін салуды үйренесіңдер;
- координаталары бойынша кеңістікте нүктенің орнын белгілеуді білесіңдер;
- вектор координаторлары ұғымын білесіңдер, оны бірлік координаталық векторлар арқылы жіктеуді үйренесіңдер;
- координаталары бойынша вектор ұзындығын, векторларды санға көбейту және қосу амалдарын орындай аласыңдар;
- коллинеар векторларды координаталары бойынша анықтай аласыңдар.

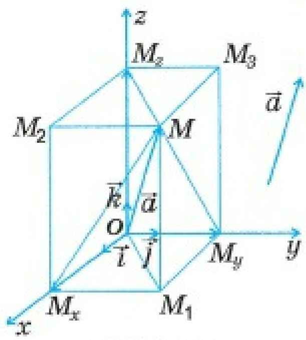
3.2.1. Кеңістіктегі тік бұрышты декарттық координаталар жүйесі



3.16-сурет

Кеңістікте тік бұрышты декарттық координаталар жүйесі жазықтықтағы тік бұрышты координаталар жүйесіне ұқсас енгізіледі.

Кеңістіктегі O нүктесі арқылы өзара қос-қостан перпендикуляр Ox, Oy және Oz түзулерін жүргізейік. Олардың бойындағы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ бірлік векторларын пайдаланып, бағыттарын анықтайық (3.16-сурет). Алынған өстер ***координаталар өстері*** деп аталады. Ox — ***абсциссалар өсі***, Oy — ***ординаталар өсі***, Oz — ***аппликаталар өсі***, ал O — ***координаталар бас нүктесі***. Oxy, Oxz және Oyz жазықтықтары ***координаталық жазықтықтар*** деп аталады. Сонымен кеңістікте тұрғызылған $Oxyz$ жүйесі ***кеңістіктегі тік бұрышты декарттық координаталар жүйесі*** деп аталады.



3.17-сурет

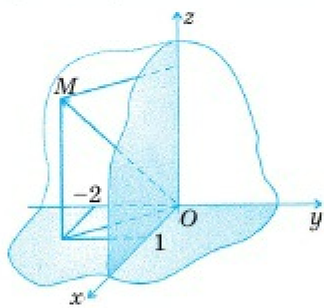
Кеңістіктен кез келген M нүктесін алып, $\overline{OM}$ векторын жүргіземіз. $\overline{OM}$ векторы M нүктесінің ***радиус-векторы*** деп аталады (3.17-сурет). M нүктесі арқылы координаталық жазықтықтарға параллель жазықтықтар жүргіземіз. Бұл жазықтықтардың әрқайсысы координаталар өстерінің тек біреуімен ғана қиылысады. Осы жазықтықтардың Ox, Oy және Oz өстерімен қиылысу нүктелерін сәйкесінше M_x, M_y және M_z арқылы белгілейік (3.17-сурет). M_1, M_2 және M_3 нүктелері M нүктесінен сәйкесінше Oxy, Oxz және Oyz жазықтықтарына түсірілген перпендикулярлардың табандары болсын. Онда $OM_xM_1M_yM_zM_2MM_3$ тік бұрышты параллелепипедін аламыз және векторларды қосудың параллелепипед ережесі бойынша

$$\overline{OM} = \overline{OM_x} + \overline{OM_y} + \overline{OM_z} \qquad (1)$$

теңдігі орындалады. $\overline{OM_x}$, $\overline{OM_y}$ және $\overline{OM_z}$ векторлары сәйкесінше $\vec{i}$, $\vec{j}$ және $\vec{k}$ бірлік векторларымен коллинеар болғандықтан, x, y және z сандары табылып, $\overline{OM_x} = x \cdot \vec{i}$, $\overline{OM_y} = y \cdot \vec{j}$ және $\overline{OM_z} = z \cdot \vec{k}$ теңдіктері орындалады. (1) теңдік мына түрде жазылады:

$$\overline{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}. \qquad (2)$$

x, y, z сандары $\overline{OM}$ ***радиус-векторының координаталары*** деп аталып, былай жазылады: $\overline{OM} = (x;\ y;\ z)$. Кез келген M нүктесі үшін сәйкесінше M_x, M_y және M_z нүктелері бірмәнді анықталатындықтан, $\overline{OM}$ радиус-векторының координаталары да бірмәнді анықталады. Егер $\vec{a} = \overline{OM}$ болса, $\vec{a} = (x;\ y;\ z)$ деп алынады. Кеңістіктің кез келген $\vec{a}$ векторының координаталарын анықтау үшін бұл векторды O нүктесінен бастап өлшеп салып, шыққан $\overline{OM} = \vec{a}$ радиус-векторының координаталарын тапса, жеткілікті.



3.18-сурет

$MM_x \perp Ox$, $MM_y \perp Oy$ және $MM_z \perp Oz$ (үш перпендикуляр туралы теорема) болғандықтан, x, y, z сандары M *нүктесінің координаталары* деп аталады. Оны былай жазады: $M(x;y;z)$. Мысалы, 3.18-суретте $M(1; -2;3)$ нүктесі және $\overrightarrow{OM} = (1;-2;3)$ радиус-векторы бейнеленген.

Жазықтықтағы сияқты, $A(x_1; y_1; z_1)$ және $B(x_2; y_2; z_2)$ нүктелері берілсе, $\overrightarrow{AB}$ векторының координаталары

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1) \qquad (3)$$

формуласымен анықталады.

3.2.2. Векторларға амалдар қолдану

Айталық, $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ және $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ векторлары берілсін. (2) теңдік бойынша бұл векторларды $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ және $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ түрінде жазып,

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) + (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) =$$

$$= (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} + (z_1 + z_2)\vec{k} \text{ және осы сияқты}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2)\vec{i} + (y_1 - y_2)\vec{j} + (z_1 - z_2)\vec{k}$$

теңдіктерін аламыз. Осыдан $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2)$ және $\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2)$.

Сонымен, *векторларды қосқанда олардың сәйкес координаталары қосылады, азайтқанда сәйкес координаталары азайтылады.*

Енді $\vec{m} = (x; y; z)$ векторын λ санына көбейтейік:

$$\lambda \cdot \vec{m} = \lambda(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = (\lambda x)\vec{i} + (\lambda y)\vec{j} + (\lambda z)\vec{k},$$

яғни $\lambda\vec{m} = (\lambda x; \lambda y; \lambda z)$.

Сонымен, *векторды санға көбейткенде оның координаталарының әрқайсысы осы санға көбейтіледі.*

Тең векторларға сәйкес келетін радиус-векторлар беттесетін болғандықтан, $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$, мұндағы $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ және $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$.

Тең *векторлардың сәйкес координаталары да өзара тең.*

Егер $\vec{a} \parallel \vec{b}$, $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ және $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ болса, $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$ болатындай λ саны табылады: $x_1 = \lambda x_2$; $y_1 = \lambda y_2$; $z_1 = \lambda z_2$ немесе

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}. \qquad (4)$$

Басқаша айтқанда, *коллинеар векторлардың координаталары пропорционал*. (4) теңдікті *векторлардың коллинеарлық шарты* деп атайды.

Айталық, $\vec{a} = (x;\ y;\ z)$ векторына $\overline{OM}$ радиус-векторы сәйкес болсын (3.17-сурет). $OM_x = |x|$, $OM_y = M_xM_1 = |y|$, $OM_z = M_1M = |z|$ болғандықтан, OM_xM_1 және OM_1M тік бұрышты үшбұрыштарынан

$$\begin{cases} OM_1^2 = OM_x^2 + M_xM_1^2, \\ OM^2 = OM_1^2 + M_1M^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} OM_1^2 = x^2 + y^2, \\ OM^2 = OM_1^2 + z^2 \end{cases} \Rightarrow OM^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Осыдан $|\overline{OM}| = OM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \qquad (5)$$

Егер $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ және $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ нүктелері берілсе, онда (3) және (5) формулалар бойынша

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Демек, *A және B нүктелерінің арақашықтығы*

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

формуласымен анықталады.

Мысал. $A(1;\ -2;\ 3)$, $B(-3;\ 2;\ -1)$ және $C(5;\ 0;\ -3)$ нүктелері берілген. Табу керек: 1) $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ векторларының координаталарын; 2) $\overline{AB} + \overline{AC}$ қосындысын; 3) $2{,}5 \cdot \overline{AB}$-ның координаталарын; 4) $\overline{AB}$ және $\overline{BC}$ векторларының модульдерін; 5) $\overline{AC}$ векторы $\vec{a} = (-2;\ -1;\ 3)$ векторына коллинеар болатынын тексеру қажет.

▲ 1) $\overline{AB} = (-3-1;\ 2-(-2);\ -1-3) = (-4;\ 4;\ -4)$. Осы сияқты $\overline{AC} = (4;\ 2;\ -6)$, $\overline{BC} = (8;\ -2;\ -2)$;

2) $\overline{AB} + \overline{AC} = (-4+4;\ 4+2;\ -4-6) = (0;\ 6;\ -10)$;

3) $2{,}5 \cdot \overline{AB} = (2{,}5 \cdot (-4);\ 2{,}5 \cdot 4;\ \ 2{,}5 \cdot (-4)) = (-10;\ 10;\ -10)$;

4) $|\overline{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{3}$; $|\overline{BC}| = \sqrt{8^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$;

5) $\dfrac{4}{-2} = \dfrac{2}{-1} = \dfrac{-6}{3}$ болғандықтан, $\overline{AC} \parallel \vec{a}$. ■

1. Нүктенің радиус-векторы деген не? Радиус-вектордың (кез келген вектордың) координаталары қалай анықталады?
2. Нүктенің координаталары қалай анықталады?
3. Ұштарының координаталары бойынша вектордың координаталары қалай анықталады?
4. Векторлардың қосындысы мен айырымының координаталары қалай анықталады?
5. Сан векторға қалай көбейтіледі?
6. Тең, коллинеар векторлардың координаталарының қандай қасиеті бар?
7. Координаталары бойынша вектордың модулі қалай анықталады?
8. Кеңістікте нүктелердің арақашықтығы қалай анықталады?

Практикалық жұмыс

Тік бұрышты координаталар жүйесін салып, $A(-2; 3; 2)$ және $B(4; -2; 3)$ нүктелерін белгілеңдер. $\overline{AB}$ векторының координаталарын тауып, сәйкес радиус-векторды жүргізіңдер.

ЕСЕПТЕР

А

3.31. Тік бұрышты координаталар жүйесінде $A(2; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$, $C(0; 0; 4)$, $D(1; 2; 3)$ нүктелерін белгілеңдер.

3.32. Төбелерінің координаталары бойынша ABC үшбұрышын салыңдар:

1) $A(0; 3; 0)$, $B(1; 3; 5)$, $C(3; 2; 5)$;
2) $A(3; 0; 0)$, $B(0; 4; 0)$, $C(0; 0; 5)$.

3.33. $\vec{a}=(2; -3; 4)$, $\vec{b}=(-1; 1; 1)$, $\vec{c}=(0; 2; -3)$; $\vec{d}=(3; 0; 0)$, $\vec{p}=(0; -2; 0)$, $\vec{q}=(0; 0; 2)$ векторларын $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ векторлары арқылы өрнектеңдер.

3.34. Вектордың координаталарын жазыңдар:

1) $\vec{a}=3\vec{i}-5\vec{j}+\vec{k}$; 2) $\vec{b}=0{,}5\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$; 3) $\vec{c}=-3\vec{i}+3\vec{k}$; 4) $\vec{d}=\vec{j}$.

3.35. $\vec{a}=\vec{i}+7\vec{k}$ және $\vec{b}=5\vec{a}$ болса, $|\vec{b}|$-ны табыңдар.

3.36. $\vec{a}=(1; 0; 1)$, $\vec{b}=(3; -2; 1)$, $\vec{c}=(2; -1; -2)$ векторлары берілген:

1) $\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\vec{c}-\vec{b}$; 3) $2\vec{a}-\vec{b}$; 4)$3\vec{b}-2\vec{c}$; 5) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$; 6) $\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$; 7) $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$; 8) $-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ векторының координаталарын табыңдар.

3.37. 3.33-есепте көрсетілген векторлардың модульдерін табыңдар.

3.38. $A(-1; 1; 1)$, $B(3; 0; 3)$, $C(0; 0; 2)$ нүктелері берілген. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ векторларының координаталары мен модульдерін табыңдар.

3.39. $\vec{a}=(3; -2; 1)$, $\vec{b}=(6; -8; 4)$, $\vec{c}=(6; -4; 2)$; $\vec{p}=(1,5; -1; 0,5)$, $\vec{q}=(-3; 4; -2)$ векторларының қайсылары өзара коллинеар?

3.40. Барлық коллинеар векторлар жұбын көрсетіңдер: $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}$, $\vec{b}=2\vec{j}-4\vec{k}$, $\vec{c}=6\vec{i}-10\vec{j}+8\vec{k}$, $\vec{p}=-\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{q}=5\vec{j}-4\vec{k}-3\vec{i}$, $\vec{m}=12\vec{i}-20\vec{j}+16\vec{k}$.

3.41. $A(2; -3; 4)$, $B(0; 2; -3)$ нүктелері мен $\overrightarrow{OC}=(0; -2; 0)$ векторы берілген, мұнда $O(0; 0; 0)$. 1) $|\overrightarrow{AB}|$; 2) $|\overrightarrow{BC}|$; 3) $|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}|$; 4) $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}|$ айырымы неге тең?

B

3.42. 3.33-есептің берілгенін пайдаланып, 1) $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$; 2) $\vec{b}+2\vec{p}-2\vec{q}$; 3) $2\vec{b}-3\vec{c}+0,5\vec{q}$; 4) $3\vec{a}-2\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{d}+\frac{1}{2}\vec{p}$ векторының координаталарын табыңдар.

3.43. $\vec{i}=(1; 0; 0)$, $\vec{j}=(0; 1; 0)$, $\vec{k}=(0; 0; 1)$ болатынын көрсетіңдер.

3.44. $\vec{m}_1=(1; -6; 3)$; $\vec{m}_2=(0; -4; 5)$; $\vec{m}_3=(5; 0; 0)$; $\vec{m}_4=(0; 2; 0)$; $\vec{m}_5=(-2; 0; 3)$; $\vec{m}_6=(2; -3; 6)$; $\vec{m}_7=(0; 0; -1)$; $\vec{m}_8=(3; -1; 0)$; $\vec{m}_9=(3; 0; -1)$; $\vec{m}_{10}=(0; -2; 0)$ векторларының арасынан 1) $\vec{i}$-ге коллинеар; 2) $\vec{j}$-ге коллинеар; 3) $\vec{k}$-ға коллинеар; 4) $\vec{i}$ және $\vec{j}$ векторымен компланар; 5) $\vec{i}$ және $\vec{k}$ векторларымен компланар; 6) $\vec{k}$ және $\vec{j}$ векторларымен компланар векторларды көрсетіңдер.

3.45. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедінің төрт төбесінің координаталары берілген: $A(2; -1; 1)$, $B(1; 3; 4)$, $A_1(4; 2; 0)$, $D(6; 0; 1)$. Оның өзге төбелерінің координаталарын табыңдар.

3.46. $A(-2; -3; 1)$, $B(1; 4; 3)$, $C(3; 1; -2)$ нүктелері — $ABCD$ трапециясының тізбектес үш төбесі. Егер оның AD табаны BC-дан 5 есе үлкен болса, D төбесінің координаталарын табыңдар.

3.47. $ABCD$ параллелограмының A, B және C төбелері берілген. Оның D төбесінің координаталарын табыңдар: 1) $A(2; -1; 1)$, $B(3; -1; 1)$, $C(0; 2; -3)$; 2) $A(3; 1; -1)$, $B(2; -1; 1)$, $C(-2; 0; 3)$; 3) $A(2; -1; 0)$, $B(-1; 3; 1)$, $C(0; 1; -1)$.

3.48. Егер $A(1;\ 3;\ 2)$, $B(0;\ 2;\ 4)$, $C(1;\ 1;\ 4)$, $D(2;\ 2;\ 2)$ болса, онда $ABCD$ төртбұрышының параллелограмм болатынын дәлелдеңдер.

3.49. Егер $\vec{a}=(m;\ 3;\ 2)$ және $\vec{b}=(4;\ n;\ 1)$ векторлары коллинеар болса, m мен n-ді табыңдар.

3.50. x пен y-тің қандай мәндерінде $\vec{p}=(x;\ y;\ 4)$ және $\vec{q}=(1;\ 3;\ 2)$ векторлары коллинеар болады?

3.51. $\vec{a}=(1;\ 2;\ 3)$ және $\vec{b}=(3;\ 2;\ 1)$ векторлары арқылы жасалған параллелограмның ромб болатынын дәлелдеңдер.

3.52. 3.51-есеп шартын пайдаланып, ромб диагональдарының ұзындығын табыңдар.

3.53. $\vec{p}=(1;\ 2;\ -3)$ және $\vec{q}=(3;\ 3;\ 3)$ векторлары арқылы жасалған параллелограмның тіктөртбұрыш болатынын дәлелдеңдер.

3.54. $\vec{a}=(5;\ -2;\ -3)$, $\vec{b}=(2;\ 3;\ -5)$ векторлары берілген. $\vec{a}+\vec{b}$ және $\vec{a}-\vec{b}$ векторлары арқылы жасалған параллелограмның тіктөртбұрыш болатынын көрсетіңдер.

3.55. $\vec{a}=(1;\ 2;\ -3)$, $\vec{b}=(0;\ 3;\ 1)$, $\vec{c}=(2;\ 5;\ 2)$ және $\vec{d}=(4;\ 0;\ -7)$ векторлары берілген. $\vec{d}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$ теңдігі орындалатындай x, y, z сандарын анықтаңдар.

3.56. $\vec{p}=(1;\ 2;\ 3)$ және $\vec{q}=(-1;\ x;\ 2)$ векторлары берілген: 1) $|\vec{p}|=|\vec{q}|$; 2) $|\vec{p}|=0,5|\vec{q}|$ болатындай x санын анықтаңдар.

3.57. Егер $|\vec{a}|=\sqrt{54}$ болса, $\vec{a}=(n;\ 2n;\ -n)$ өрнегінде n қандай болуы керек?

3.58. x пен y-тің қандай мәндерінде $\vec{a}=(x;\ 2;\ 3)$ және $\vec{b}=(4;\ y;\ 6)$ векторлары коллинеар болады?

3.59. $\vec{a}=(1;\ 0;\ 2)$, $\vec{b}=(1;\ 1;\ -1)$, $\vec{c}=(-1;\ 2;\ 4)$ векторлары компланар бола ма?

C

3.60. ABC үшбұрышы берілген, мұнда $A(1;\ 3;\ 2)$, $B(0;\ 2;\ 4)$, $C(1;\ 1;\ 4)$. AH биіктігін табыңдар.

3.61. $A(-2;\ 4;\ 3)$, $B(4;\ -2;\ 3)$, $C(0;\ 6;\ 7)$ және $O(0;\ 0;\ 0)$ нүктелері бір жазықтықта жата ма?

3.62. $\vec{d}$ векторын $\vec{a}$, $\vec{b}$ және $\vec{c}$ векторларына жіктеңдер:

1) $\vec{a}=(1;\ 3;\ 5)$, $\vec{b}=(0;\ 4;\ 5)$, $\vec{c}=(7;\ -8;\ 4)$, $\vec{d}=(2;\ -1;\ 3)$;

2) $\vec{a}=(1;\ 2;\ 5)$, $\vec{b}=(-1;\ 6;\ 3)$, $\vec{c}=(0;\ 0;\ 2)$, $\vec{d}=(1;\ 0;\ 4)$.

3.63. $A(1; -2; 3)$, $B(2; 0; -2)$, $C(0; k; 4)$ нүктелері берілген. k-ның қандай мәндерінде ABC үшбұрышы тең бүйірлі болады?

3.64. Егер $\vec{a} = (a; b; c)$ векторына параллель көшіру кезінде $A(x; y; z)$ нүктесі $A'(x'; y'; z')$ нүктесіне көшсе, A және A' нүктелерінің координаталары арасындағы тәуелділікті анықтаңдар.

3.65. $\vec{a} = (1; 2; 3)$ векторына параллель көшіру кезіндегі нүктенің бейнесін анықтаңдар: 1) $O(0; 0; 0)$; 2) $A(1; 2; 3)$; 3) $B(-2; 0; -1)$.

3.66. $A(1; -2; 3)$ және $B(2; 0; -2)$ нүктелері берілген. AOB бұрышының биссектрисасына коллинеар бірлік вектордың координаталарын табыңдар.

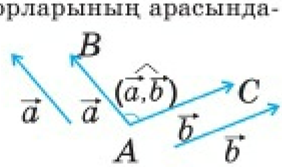
3.3. ВЕКТОРЛАРДЫҢ СКАЛЯР КӨБЕЙТІНДІСІ. КЕСІНДІНІ БЕРІЛГЕН ҚАТЫНАСТА БӨЛУ

Тақырыпты оқып-үйрену барысында сендер:

- координаталары бойынша векторлардың скаляр көбейтіндісін, арасындағы бұрышты анықтай білесіңдер;
- кесіндіні берілген қатынаста бөлу формуласын жазып, оны қолданасыңдар;
- векторды үш компланар емес векторлар арқылы жіктеу тәсілімен танысасыңдар.

3.3.1. Векторлардың скалярлық көбейтіндісі

$\overline{AB}$ және $\overline{AC}$ векторларының арасындағы *бұрыш* деп BAC бұрышын айтады. Ал нөлдік емес $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының арасындағы бұрыш деп, оларды бір нүктеден өлшеп салғанда пайда болатын бұрышты айтады. $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының арасындағы бұрышты $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ арқылы белгілейді (3.19-сурет).



3.19-сурет

> **Анықтама.** *Векторлардың* ***скалярлық көбейтіндісі*** *деп олардың модульдерін осы векторлардың арасындағы бұрыштың косинусына көбейткенде шығатын санды айтады.*

Сонымен $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының скалярлық көбейтіндісі $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ санына тең. Скалярлық көбейтіндіні $\vec{a} \cdot \vec{b}$ деп белгілейді. $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \varphi$ болса, анықтама бойынша:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi. \qquad (1)$$

Тең векторлардың скалярлық көбейтіндісі ***скалярлық квадрат*** деп аталады және оны $\vec{a}^2$ түрінде белгілейді. (1) формула бойынша $\vec{a}^2 = \vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cos 0° = |\vec{a}|^2$, $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

Егер $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 90°$ болса, онда $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларын ***ортогональ векторлар*** (перпендикуляр) деп атайды. $\cos 90° = 0$ болғандықтан, ортогональ векторлардың скалярлық көбейтіндісі нөлге тең: $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, $(\vec{a}\perp\vec{b})$.

Егер $\vec{a}(x_1;\ y_1;\ z_1)$ және $\vec{a} = (x_2;\ y_2;\ z_2)$ болса, онда 9-сынып геометриясындағыдай (I-бөлім, п. 1.6) $\vec{a}\cdot\vec{b}$ скалярлық көбейтіндісі

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 + z_1\cdot z_2 \tag{2}$$

формуласымен анықталатынын көрсетуге болады. Онда **векторлардың ортогоналдылық шарты**

$$\boldsymbol{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0} \tag{3}$$

түрінде жазылады, себебі $\vec{a}\perp\vec{b}$ болғанда $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$.

(1) формуладан $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$. (2) формула мен $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$, $|\vec{b}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$ екенін ескерсек,

$$\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \tag{4}$$

3.3.2. Кесіндіні берілген қатынаста бөлу

$A(x_A;\ y_A;\ z_A)$ және $B(x_B;\ y_B;\ z_B)$ нүктелері берілсін. $C(x_C;\ y_C;\ z_C)$ нүктесі AB кесіндісін λ қатынасында бөлсін: $\dfrac{AC}{CB} = \lambda$ немесе $AC = \lambda\cdot CB$. C нүктесінің координаталарын A және B нүктелерінің координаталары арқылы өрнектеу қажет. $\overrightarrow{AC} = (x_C - x_A;\ y_C - y_A;\ z_C - z_A)$ және $(x_B - x_C;\ y_B - y_C;\ z_B - z_C)$ болғандықтан,

$$\begin{cases} x_C - x_A = \lambda(x_B - x_C), \\ y_C - y_A = \lambda(y_B - y_C), \\ z_C - z_A = \lambda(z_B - z_C) \end{cases} \text{ немесе } \begin{cases} (1+\lambda)x_C = x_A + \lambda x_B, \\ (1+\lambda)y_C = y_A + \lambda y_B, \\ (1+\lambda)z_C = z_A + \lambda z_B \end{cases}$$

теңдіктер жүйесін аламыз. Олай болса,

$$x_C = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda},\quad y_C = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda},\quad z_C = \frac{z_A + \lambda z_B}{1+\lambda}. \tag{5}$$

(5) формулалар бойынша AB кесіндісін λ қатынасында бөлетін C нүктесінің координаталары анықталады. C нүктесі AB кесіндісінің

ортасы болса, $\lambda = 1$ және (5) формуладан кесіндіні қақ бөлу формуласын аламыз:

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2}, \; y_C = \frac{y_A + y_B}{2}, \; z_C = \frac{z_A + z_B}{2}. \qquad (6)$$

1-мысал. ABC үшбұрышының төбелері берілген: $A(0;\ 2;\ -3)$, $B(-1;\ 1;\ 1)$ және $C(3;\ -1;\ -5)$. 1) $\cos(\angle A)$-ны; 2) ΔABC-ның медианаларының қиылысу нүктесін табу керек.

Шешуі. 1) $\overline{AB}$ және $\overline{AC}$ векторлары арасындағы бұрыштың косинусын тапса, жеткілікті. $\overline{AB} = (-1;\ -1;\ 4)$; $\overline{AC} = (3;\ -3;\ -2)$, $\left|\overline{AB}\right| = 3\sqrt{2}$; $\left|\overline{AC}\right| = \sqrt{22}$, $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = (-1)\cdot 3 + (-1)\cdot(-3) + 4\cdot(-2) = -8$ болғандықтан, (4) формула бойынша

$$\cos(\angle A) = \frac{-8}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{22}} = -\frac{4\sqrt{11}}{33}.$$

2) Алдымен BC қабырғасының ортасы D-ның координаталарын анықтайық. (6) формула бойынша:

$$x_D = \frac{-1+3}{2} = 1; \quad y_D = \frac{1-1}{2} = 0; \quad z_D = \frac{1-5}{2} = -2.$$

Сонымен, $D(1;\ 0;\ -2)$. Егер E нүктесі ABC үшбұрышы медианаларының қиылысу нүктесі болса, бұл нүкте AD кесіндісін $\lambda = 2$ қатынасында бөледі: $AE : ED = 2 : 1$. (5) формула бойынша

$$x_E = \frac{0+2\cdot 1}{1+2} = \frac{2}{3}; \quad y_E = \frac{2+2\cdot 0}{1+2} = \frac{2}{3};$$

$$x_E = \frac{-3+2\cdot(-1)}{1+2} = -\frac{7}{3}. \text{ Демек, } E = \left(\frac{2}{3};\ \frac{2}{3};\ -\frac{7}{3}\right).$$

2-мысал. $\vec{a}=(1;\ 2;\ 1)$, $\vec{b}=(2;\ -1;\ 1)$, $\vec{c}=(-1;\ 1;\ 1)$, және $\vec{d}=(8;\ -3;\ 0)$ векторлары берілген. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларының компланар емес екенін көрсетіп $\vec{d}$ векторын $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлары арқылы жіктеу керек.

▲ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларын компланар десек, олар бір жазықтыққа параллель болады. Онда жазықтықтағы векторлар қасиеті бойынша бұл векторлардың біреуі қалған екеуі арқылы сызықты өрнектелуі, яғни u және v сандары табылып, $\vec{c} = u \cdot \vec{a} + v \cdot \vec{b}$ теңдігі орындалуы керек. Енді бұл теңдікті координаталық түрде жазамыз:

$$(u + 2v;\ 2u - v;\ u + v) = (-1;\ 1;\ 1).$$

Онда $\begin{cases} u + 2v = -1, \\ 2u - v = 1, \\ u + v = 1 \end{cases}$ болуы қажет. Бірақ бұл жүйе үйлесімсіз.

Олай болса, $\vec{c}$ векторы $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары арқылы сызықты өрнектелмейді. Ендеше бұл векторлар бір жазықтыққа параллель емес.

Енді, x, y, z сандары табылып $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ теңдігі орындалатынын көрсетелік. Бұл теңдікті координаталық түрде жазып, мына теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 8, \\ 2x - y + z = -3, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

Соңғы теңдеудің көмегімен алғашқы екі теңдеудегі z айнымалысынан арылуға болады:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8, \\ x - 2y = -3 \end{cases} \Rightarrow x = 1, y = 2. \text{ Онда } z = -3.$$

Сондықтан $\vec{d} = \vec{a} + 2\vec{b} - 3z$. ■

1. Векторлардың арасындағы бұрыш қалай анықталады?
2. Векторлардың скалярлық көбейтіндісі деген не?
3. Скалярлық көбейтіндінің координаталық түрін жазыңдар.
4. Векторлардың ортогональдық шартын жазыңдар.
5. Векторлар арасындағы бұрыш косинусының формуласын жазыңдар.
6. Кесіндіні берілген қатынаста бөлу формуласын жазыңдар.
7. Кесінді ортасының координаталары қалай анықталады?

ЕСЕПТЕР

A

3.67. $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының скалярлық көбейтіндісін табыңдар, мұнда $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \varphi$:

1) $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$, $\varphi = 45°$; 2) $|\vec{a}| = 0,5$, $|\vec{b}| = 16$, $\varphi = 60°$;

3) $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 3$, $\varphi = 30°$; 4) $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$, $\varphi = 120°$.

3.68. $\vec{a} = (2; -1; 0)$, $\vec{b} = (1; \sqrt{2}; -5)$, $\vec{c} = (1; 2; 5)$, $\vec{d} = (1; 0; 2)$ векторлары берілген. Есептеңдер:

1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; 2) $\vec{a} \cdot \vec{c}$; 3) $\sqrt{\vec{b}^2}$; 4) $(\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} + \vec{c})$; 5) $(\vec{a} - \vec{d})^2$; 6) $\vec{c} \cdot \vec{d} + \vec{b} \cdot \vec{a}$; 7) $(\vec{a} + \vec{d})(\vec{b} - \vec{c})$; 8) $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{c} - \vec{d})$.

3.69. $\vec{a} = (2; 3; 1)$, $\vec{b} = (5; 9; 2)$, $\vec{c} = (-3; 1; 3)$ векторларының қайсысы бір-біріне перпендикуляр?

3.70. $A(5; 2; 1)$, $B(-3; 4; 0)$, $C(3; 0; 4)$, $D(1; -4; 3)$ нүктелері берілген. Есептеңдер:

1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; 2) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$; 3) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}$; 4) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$;

3.71. 3.70-есептің шартын пайдаланып, 1) $\cos(\angle BAC)$; 2) $\cos(\angle CAD)$; 3) $\cos(\angle ABC)$; 4) $\cos(\angle ADC)$-ны табыңдар.

3.72. 3.70-есептің шартын пайдаланып, 1) AB; 2) AD; 3) BC; 4) CD кесіндісі ортасының координаталарын табыңдар.

3.73. $A(2; 3; -2)$, $B(4; -5; 6)$ нүктелері берілген. AB кесіндісін 1) $\lambda=1$; 2) $\lambda = \frac{2}{3}$; 3) $\lambda=2$; 4) $\lambda = \frac{1}{2}$ қатынасында бөлетін C нүктесінің координаталарын табыңдар.

3.74. $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының арасындағы бұрышты табыңдар:

1) $\vec{a} = \left(\sqrt{2}; 2; -\sqrt{2}\right)$, $\vec{b} = (-3; 0; 3)$;

2) $\vec{a} = (0; -5; 0)$, $\vec{b} = \left(0; -\sqrt{3}; -1\right)$.

3.75. $A(0; 2; -1)$, $B(1; 0; 1)$ және $C(-1; 4; 3)$ нүктелері берілген. ABC үшбұрышының 1) AA_1 медианасының ұзындығын; 2) $\cos(\angle C)$-ны табыңдар.

B

3.76. ABC үшбұрышы берілген, мұнда $A(2; 1; 3)$, $B(2; 1; 4)$, $C(0; 4; 3)$. 1) $\angle B$-ны; 2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$-ны; 3) AA_1 медианасының ұзындығын табыңдар.

3.77. $\vec{a}$, $\vec{b}$ және $\vec{c}$ векторлары өзара қос-қостан $60°$ бұрыш жасаса және $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 3$ болса, $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{c})$ скалярлық көбейтіндісін табыңдар.

3.78. Егер $\overrightarrow{AB} = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{a} + 3\vec{b}$, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$ және $\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = 60°$ болса, $ABCD$ параллелограмы диагональдарының ұзындықтарын табыңдар.

3.79. Бірлік $\vec{e}_1$ және $\vec{e}_2$ векторларының арасындағы бұрыш α-ға тең. 1) $\vec{e}_1$ және $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$; 2) $\vec{e}_2$ және $\vec{e}_1 - \vec{e}_2$; 3) $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ және $\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ векторларының арасындағы бұрышты табыңдар.

3.80. β-ның қандай мәндерінде $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары ортогональ болады: 1) $\vec{a} = (\beta; -7; 5)$, $\vec{b} = (2; 3, \beta)$; 2) $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \beta\vec{k}$, $\vec{b} = \beta\vec{i} - 3\vec{j} - 8\vec{k}$?

3.81. $A(0; -3; 1)$, $B(0; 3; -1)$, $C(-5; 0; 0)$ және $D(-6; -6; 2)$ нүктелері берілген. AC мен BD түзулерінің перпендикуляр болатынын көрсетіңдер.

3.82. ABC үшбұрышы төбелерінің координаталары берілген: $A(2; 1; -4)$, $B(4; 0; -2)$, $C(0; -3; 0)$. Осы үшбұрыштың 1) $\cos\angle A$-ны; 2) AA_1 медианасы мен AC қабырғасының арасындағы бұрышын; 3) AA_1-дің ұзындығын; 4) медианаларының қиылысу нүктесінің координаталарын табыңдар.

3.83. Егер $\vec{a}+\vec{b}\perp\vec{a}-\vec{b}$ болса, онда $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ болатынын көрсетіңдер.

3.84. Егер $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$ және $\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right)=120°$ болса, онда $(2\vec{a}-\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})$ өрнегінің мәнін табыңдар.

3.85. $\vec{a}=(2; 1; -4)$ және $\vec{b}=(4; 0, -3)$ векторлары берілген. $\vec{a}+m\vec{b}\perp\vec{b}$ болатындай етіп, m-нің мәнін табыңдар.

3.86. Егер $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ және $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=a$ болса, онда $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$ өрнегінің мәнін табыңдар.

C

3.87. ABC үшбұрышы төбелерінің координаталары берілген: $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$. ABC үшбұрышының медианаларының қиылысу нүктесінің координаталары

$$x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3};\quad y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3};\quad z=\frac{z_1+z_2+z_3}{3}$$

формулаларымен анықталатынын дәлелдеңдер. Осы формулаларды пайдаланып, ABC үшбұрышы медианаларының қиылысу нүктесінің координаталарын табыңдар: 1) $A(3; 1; 0)$, $B(-1; 4; 4)$, $C(1; 1; -2)$; 2) $A(7; 9; 1)$, $B(-2; -3; 2)$, $C(1; 5; 5)$.

3.88. Радиус-вектор координаталар өстерімен α, β және γ-ға тең бұрыштар жасайды. $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ болатынын дәлелдеңдер. Мұнда $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$-ны радиус-вектордың *бағыттаушы косинустары* деп атайды.

3.89. $\vec{a}=(x_1; y_1; z_1)$ және $\vec{b}=(x_2; y_2; z_2)$ векторлары үшін $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$ теңдігі орындалады. Осы формуланы $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ координаталық векторларына жіктелуін қолданып, дәлелдеңдер.

3.90. $A(x_1; y_1; z_1)$ және $B(x_2; y_2; z_2)$ нүктелері берілген. C_1, C_2, ..., ..., C_{n-1} нүктелерімен AB кесіндісі өзара тең n бөлікке бөлінген.

C_k $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ нүктесінің координаталарын A, B нүктелерінің координаталары мен k, n арқылы өрнектеңдер.

3.91. Егер үшбұрыштың екі медианасы тең болса, онда бұл үшбұрыштың тең бүйірлі болатынын дәлелдеңдер.

3.92. $\vec{a}=(x;\ y;\ z)$ векторының бағыттаушы косинустары мына формулалармен анықталатынын дәлелдеңдер:

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};\quad \cos\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};\quad \cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

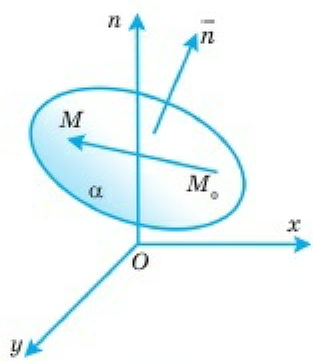
3.4. ЖАЗЫҚТЫҚТЫҢ ТЕҢДЕУІ. КЕҢІСТІК ФИГУРАЛАРЫН ТЕҢДЕУЛЕР МЕН ТЕҢСІЗДІКТЕР АРҚЫЛЫ БЕРУ

Тақырыпты оқып-үйрену барысында сендер:

- $\vec{n}=(a;\ b;\ c)$ нормаль векторы көмегімен жазықтықтың жалпы теңдеуін жазасыңдар;
- сфера теңдеуін жаза білесіңдер және оны есептер шығаруда қолданасыңдар.

3.4.1. Жазықтықтың теңдеуі

Айталық, α жазықтығы $Oxyz$ тік бұрышты координаталар жүйесінде берілген $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ нүктесі арқылы өтіп, $\vec{n}=(a;b;c)$ векторына перпендикуляр болсын. M_0 нүктесі α жазықтығының **бастапқы нүктесі**, ал $\vec{n}$ векторы жазықтықтың **нормаль векторы** деп аталады. Жалпы, бастапқы нүкте мен нормаль вектор арқылы жазықтық бірмәнді анықталып, M_0 нүктесі арқылы $\vec{n}$ векторына перпендикуляр жалғыз ғана α жазықтығы өтеді (3.20-сурет).



3.20-сурет

Егер $M(x;\ y;\ z)$ нүктесі α жазықтығының **ағым нүктесі**, яғни оның бойында орналасқан кез келген нүкте болса,

$$\overline{M_0M}=(x-x_0;\ y-y_0;\ z-z_0)$$

векторы мен $\vec{n}$ векторы өзара перпендикуляр: $\vec{n}\perp\overline{M_0M}$. Онда бұл векторлардың скаляр көбейтіндісі нөлге тең:

$$\vec{n}\cdot\overline{M_0M}=0.$$

Бұл теңдікті алдыңғы параграфтағы (2) формуланың көмегімен былай жазамыз:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0. \qquad (1)$$

(1) теңдеуді **жазықтықтың нормаль вектормен берілген теңдеуі** деп атайды. Мұндағы x_0, y_0, z_0 — бастапқы нүкте координаталары; a, b, c — нормаль вектордың координаталары, x, y, z — айнымалылар. (1) теңдеудегі жақшаларды ашып, мына түрге келтіреміз:

$$ax + by + cz-(ax_0 + by_0 + cz_0) = 0.$$

$d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$ белгілеуін енгізіп, (1) теңдеуді былай жазамыз:

$$ax + by + cz + d = 0. \qquad (2)$$

Сонымен, жазықтықтың нормаль векторымен берілген теңдеуін (2) сызықтық теңдеу түрінде жазуға болады. Енді керісінше, (2) түрінде берілген кез келген сызықтық теңдеумен жазықтықтың анықталатынын көрсетейік. Шынында да, бізге (2) түріндегі сызықтық теңдеу берілсін және $(x_0; y_0; z_0)$ оның қайсыбір шешімі болсын. ((2) теңдеудің шексіз көп шешімі барын естеріңе түсіріңдер). Онда

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0 \qquad (3)$$

тепе-теңдігі орындалады. (2) теңдеуден (3)-ті шегерсек,

$$ax + by + cz + d - (ax_0 + by_0 + cz_0 + d) = 0$$

немесе

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

теңдеуін аламыз. Бұл, жоғарыда көрсеткеніміздей, $M_0(x_0; y_0; z_0)$ нүктесі арқылы өтетін және $\vec{n} = (a,b,c)$ векторына перпендикуляр жазықтықты анықтайды. Сонымен, кез келген жазықтықты (2) түріндегі сызықтық теңдеумен беруге болатынын көрсеттік. (2) теңдеу *жазықтықтың жалпы теңдеуі* деп аталады.

1-мысал. $M_0(1; -2; 2)$ нүктесі арқылы өтетін және $n = (3; -1; 4)$ нормаль векторы болатын жазықтық теңдеуін жазу керек.

Шешуі. (1) формула бойынша $x_0 = 1$; $y_0 = -2$; $z_0 = 2$ және $a = 3$; $b = -1$; $c = 4$ болғандықтан, бізге қажет теңдеу былай жазылады: $3(x - 1) - (y + 2) + 4(z - 2) = 0$. Бұл теңдеуді жақшаны ашып, топтау арқылы былай жазамыз:

$$3x - y + 4z - 13 = 0. \blacksquare$$

2-мысал. Жазықтық өзінің жалпы теңдеуімен берілген:

$$2x + 5y - 3z + 7 = 0.$$

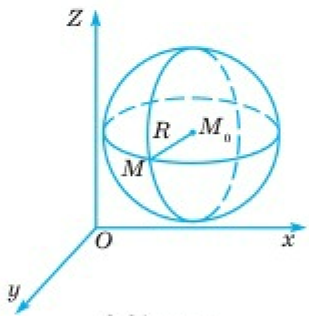
Осы жазықтықтың нормаль векторы мен оның бойында жататын қайсыбір нүкте координаталарын табу қажет.

▲ (1) не (2) теңдеулерден нормаль вектор координаталары сәйкесінше x, y, z айнымалылары коэффициенттеріне тең болатынын көреміз. Сондықтан $\vec{n} = (2; 5; -3)$.

Берілген теңдеу үш айнымалысы бар теңдеу болғандықтан, оның бір айнымалысын қалған екеуі арқылы өрнектейміз: $2x = -5y + 3z - 7$ немесе $x = \frac{1}{2}(-5y + 3z - 7)$. Мұнда y пен z айнымалылары мәндерін қалауымызша таңдап алуымызға болады. Айталық, $y = 0$, $z = 1$ болсын, онда $x = \frac{1}{2}(3 - 7) = -2$. Сондықтан M_0 $(-2;\ 0;\ 1)$ нүктесі берілген жазықтық бойында жатады және мұндай нүктелер саны шексіз көп. ■

3.4.2. Кеңістік фигураларын теңдеулер мен теңсіздіктер арқылы беру

Кеңістікте берілген $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ нүктесінен бірдей R қашықтықта орналасатын барлық $M(x;\ y;\ z)$ нүктелер жиынын **сфера** деп атайды. Мұндағы M_0 — **сфера центрі**, ал R — **сфера радиусы** деп аталады (3.21-сурет).



3.21-сурет

Центрі $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$, радиусы R-ге тең сфера бойында орналасқан кез келген $M(x;\ y;\ z)$ нүктесі (ағым нүктесі) үшін $M_0M = R$. Нүктелердің арақашықтығын есептеу формуласы бойынша

$$R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}\ .$$

Осы теңдеудің екі жақ бөлігін квадраттасақ,

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2. \qquad (4)$$

Бұл — сфера теңдеуі. Егер сфера центрі координаталар бас нүктесімен беттессе, сфераның теңдеуі былай жазылады:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \qquad (5)$$

3-мысал. Центрі $C(1;\ -2;\ 3)$ нүктесінде жатқан радиусы 4-ке тең сфераның теңдеуін жазу керек.

▲ (4) формула бойынша $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 16$. ■

4-мысал. Сфераның $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 10z + 23 = 0$ теңдеуімен анықталатынын көрсетіп, оның радиусы мен центрін анықтайық.

▲ Берілген теңдеудегі сәйкес айнымалыларды топтап, оларды толық квадратқа толықтырып жазамыз: $(x^2 - 2x) + (y^2 + 2y) + (z^2 - 10z) + 23 = 0 \Rightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 2y + 1) + (z^2 - 10z + 25) = -23 + 1 + 1 + 25 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 5)^2 = 4$.

Олай болса, берілген теңдеумен центрі $C(1; -1; 5)$, радиусы 2-ге тең сфера анықталады. ■

Кез келген сфера кеңістікті екі бөлікке (ішкі және сыртқы) бөледі. Кеңістіктің сферамен шектелген бөлігін **шар** деп атайды. $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ және R сәйкесінше сфераның центрі мен радиусы болса, M_0 мен R шардың да *центрі* мен *радиусы* деп аталады. Егер $M(x;\ y;\ z)$ шарға тиісті, яғни сфераның ішкі бөлігінде орналасқан нүкте болса, онда $M_0M<R$ теңсіздігі орындалады, N — сыртқы нүктесі болса, онда $M_0N>R$. Сондықтан шар

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2<R^2$$

теңсіздігімен, сфераның сыртқы бөлігі

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2>R^2$$

теңсіздігімен беріледі. Мұнда сфера нүктелері шар құрамына енсе немесе оның сыртқы бөлігімен бірге қарастырылса, онда қатаң емес теңсіздіктер алынады ($\leqslant$ немесе $\geqslant$). Осы сияқты,

$$ax+by+cz+d=0$$

теңдеуімен α жазықтығы берілсе, осы жазықтықпен шектелетін екі жарты кеңістіктердің біреуі

$$ax+by+cz+d<0$$

теңсіздігімен, ал екіншісі

$$ax+by+cz+d>0$$

теңсіздігімен анықталады. Жазықтықтың қай бөлігінде қандай теңсіздік орындалатынын мысал арқылы қарастырайық.

5-мысал. $2x+3y+3z-6=0$ жазықтығының екі жақ бөлгенде орындалатын теңсіздік таңбаларын анықтайық.

▲ Ол үшін жазықтықтың бір жақ бөлігінен, жазықтыққа тиісті емес бір нүктені таңдап аламыз. Айталық, $O(0;0;0)$ нүктесін алайық. Әдетте, мұндай нүктелер ретінде есептеу жұмыстары жеңілірек болатындай етіп алады. Алынған нүктенің координаталарын жазықтық теңдеуіне қойып, тексереміз:

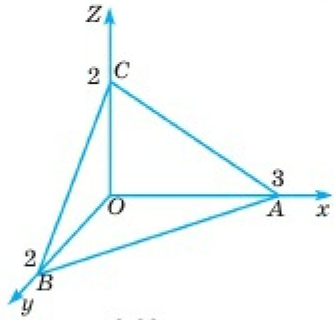
$$2\cdot 0+3\cdot 0+3\cdot 0-6<0.$$

Онда жазықтықтың $O(0;0;0)$ нүктесі орналасқан бөлігінде $2x+3y+3z-6<0$ теңсіздігі, ал екінші бөлігінде $2x+3y+3z-6>0$ теңсіздігі орналасады.

Егер қарастырылған бөліктерге жазықтық нүктелері қоса есептелсе, $2x+3y+3z-6\leqslant 0$ немесе $2x+3y+3z-6\geqslant 0$ теңсіздіктері орындалады. ■

6-мысал. Алдыңғы мысалда берілген жазықтықты координаталық бұрышпен қиғанда шығатын пирамиданы теңсіздіктер жүйесімен анықтайық.

▲ $2x+3y+3z-6=0$ жазықтығымен координаталар өстерін қиып өткенде шыққан пирамида 3.22-суретте бейнеленген. Бұл жазықтық координаталар өстерін $A(3,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(0,0,2)$ нүктелерінде қиып өтетінін тексеру қиын емес. $OABC$ пирамидасы Oxy, Oxz, Oyz координаталық жазықтықтарымен және берілген $2x+3y+3z-6=0$ жазықтығымен шектеледі. Пирамида берілген жазықтықтың $O(0,0,0)$ нүктесі жағында орналасатындықтан (5-мысал), $2x+3y+3z-6\leqslant 0$ теңсіздігін қанағаттандырады. Екінші жағынан, пирамиданың кез келген нүктелері үшін $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$ болуы қажет. Сонымен, пирамида келесі теңсіздіктер жүйесімен анықталады:



3.22-сурет

$$\begin{cases} x\geqslant 0, \\ y\geqslant 0, \\ z\geqslant 0, \\ 2x+3y+3z-6\leqslant 0. \end{cases}$$

Осылайша денені шектейтін беттердің теңдеулері белгілі болса, оны теңсіздіктер мен теңсіздіктер жүйесі арқылы анықтауға болады. ■

1. Жазықтықты бірмәнді анықтау үшін қандай мәліметтердің берілгені жеткілікті?
2. Қандай векторды жазықтықтың нормаль векторы деп атайды?
3. Жазықтықтың бастапқы нүктесі деген не? Ол қандай нүкте болуы мүмкін?
4. Жазықтықтың нормаль векторымен берілген теңдеуі, жалпы теңдеуі қалай жазылады?
5. Сфера деген не? Оның теңдеуін жазыңдар.
6. Шар деп нені айтады? Ол қандай теңсіздікпен анықталады?
7. Жазықтықтың теңдеуі бойынша онымен шектелетін жарты кеңістіктерді анықтайтын теңсіздіктердің таңбасы қалай табылады?

ЕСЕПТЕР

A

3.93. Бастапқы M_0 нүктесі мен $\vec{n}$ нормаль векторы бойынша жазықтықтың жалпы теңдеуін жазыңдар:

1) $M_0(1;\ 2;\ 3)$, $\vec{n}=(2;\ 1;\ 4)$; 2) $M_0(-2;\ 0;\ 2)$, $\vec{n}=(0;\ 3;\ -2)$;
3) $M_0(-3;\ 1;\ -2)$, $\vec{n}=(-2;\ 0;\ 3)$; 4) $M_0(1;\ 1;\ -1)$, $\vec{n}=(1;\ 1;\ -1)$.

7 – 4370

3.94. Берілген жазықтық бойында жататын және жатпайтын бірнеше нүктенің координаталарын анықтаңдар:

1) $2x - 3y + z - 2 = 0$; 2) $x - z + 5 = 0$;

3) $2y - 3z + 5 = 0$; 4) $x + 7 = 0$.

3.95. $A(2; -1; 3)$, $B(0; 1; 4)$, $C(-2; 2; 0)$, $D(1; 1; -1)$ нүктелерінің қайсысы $3x-y+z-1=0$ теңдеуімен берілген жазықтық бойында жатады?

3.96. 3.94-есепте берілген жазықтықтардың нормаль векторларының координаталарын анықтаңдар.

3.97. Берілген C центрі мен R радиусы бойынша сфера теңдеуін жазыңдар:

1) $C(0; 0; 0)$, $R=5$; 2) $C(1; -2; -3)$, $R=9$;

3) $C(-2; 1; 4)$, $R=3$; 4) $C(2; -2; 0)$, $R=2$.

3.98. 3.97-есепте берілген сферамен шектелген шарды теңсіздік арқылы анықтаңдар.

3.99. A нүктесі арқылы өтетін және $\overline{AB}$ векторына перпендикуляр жазықтықтың теңдеуін жазыңдар:

1) $A(1; 2; -2)$; $B(3; 0; 4)$; 2) $A(0; 3; -4)$; $B(2; 5; 4)$.

B

3.100. M нүктесі арқылы өтетін және $\overline{OM}$ векторына перпендикуляр жазықтықтың теңдеуін жазыңдар:

1) $M(-1; 2; 0)$; 2) $M(3; -4; 0)$; 3) $M(0; 1; -2)$; 4) $M(2; -5; 3)$.

3.101. $M(2; -3; 4)$ нүктесі арқылы өтетін және әрбір координаталар өсіне перпендикуляр жазықтықтардың теңдеулерін жазып, оларды кескіндеңдер.

3.102. Тік бұрышты координаталық жүйеде жазықтық $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ теңдеуімен берілген. Бұл жазықтық координаталар өсін, сәйкесінше $A(a;0;0)$, $B(0,b,0)$, $C(0,0,c)$ нүктелерінде қиып өтетінін көрсетіңдер. Оны **жазықтықтың кесінділік теңдеуі** деп атайды.

3.103. Берілген жазықтықтың кесіндідегі теңдеуін жазып, олардың суретін салыңдар:

1) $2x + y + z - 4 = 0$; 2) $3x - 2y - z - 6 = 0$.

3.104. MN кесіндісінің ортасы арқылы өтетін және оған перпендикуляр болатын жазықтықтың теңдеуін жазыңдар:

1) $M(1; -2; 2)$; $N(3; 0; 4)$; 2) $M(2; 5; 4)$; $N(0; 3; -4)$.

3.105. Центрі C нүктесінде болатын және M нүктесі арқылы өтетін сфера теңдеуін жазыңдар:

1) $C(1; 2; -2)$, $M(4; 2; 2)$; 2) $C(-2; 1; 4)$, $M(1; -2; 3)$.

3.106. Сфераның берілген теңдеумен анықталатынын көрсетіп, оның центрі мен радиусын анықтаңдар:

1) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 8z + 5 = 0$;

2) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 8y + 2z + 10 = 0$;

3) $x^2 + y^2 + z^2 + 12x - 6y - 19 = 0$;

4) $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$.

3.107. $x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0$ сферасымен шектелген шардың I октантта орналасқан бөлігін теңсіздіктер жүйесі арқылы жазыңдар.

C

3.108. $A(3;4; -1)$ және $B(0; -2;5)$ нүктесі берілген. AB кесіндісін 1:2 қатынасында бөлетін және оған перпендикуляр жазықтықтың теңдеуін жазыңдар.

3.109. $A(1;-2;5)$, $B(-3;0;0)$ және $C(0;0;1)$ нүктелері арқылы өтетін жазықтық теңдеуін жазыңдар.

3.110. $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ сферасына $M(2;3;6)$ нүктесінде жүргізілген жанама жазықтығының теңдеуін жазыңдар.

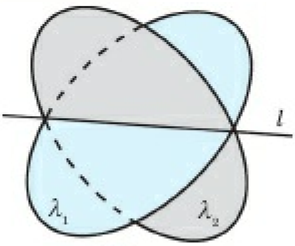
3.111. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8y = 0$ сферасының C центрі арқылы OC векторына перпендикуляр жазықтық сәйкес шарды екі бөлікке бөледі. Осы бөліктердің әрқайсысын теңсіздіктер жүйесі арқылы жазып, оларды кескіндеңдер.

3.112. Oxy жазықтығымен $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 23 = 0$ шеңбері бойымен қиылысатын және $M(1;5;1)$ нүктесі арқылы өтетін сфераның теңдеуін жазыңдар.

3.5. КЕҢІСТІКТЕГІ ТҮЗУ ТЕҢДЕУІ

Тақырыпты оқып-үйрену барысында сендер:

- түзудің жалпы теңдеуін, параметрлі теңдеуін, қарапайым канонды теңдеуін және екі нүкте арқылы өтетін түзу теңдеуін жаза білесіңдер;
- оларды есептер шығарғанда қолданасыңдар.

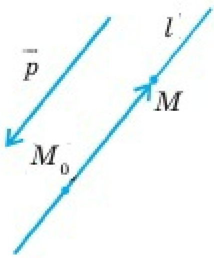


3.23-сурет

Кеңістікте кез келген l түзуін екі λ_1 және λ_2 жазықтықтарының қиылысуы ретінде қарастыруға болады (3.23-сурет). Егер λ_1 жазықтығының теңдеуі $a_1x_1+b_1y+$ $+c_1z+d_1=0$, λ_2-нің теңдеуі $a_2x+b_2y+c_2z+$ $+d_2=0$ болса, осы екі теңдеуден құралған жүйе l түзуін анықтайды:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0. \end{cases} \quad (1)$$

(1) жүйені l түзуінің *жалпы теңдеуі* деп атайды.



3.24-сурет

Айталық, l түзуі $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ нүктесі арқылы өтіп, $\vec{p}=(m;\ n;\ k)$ векторына параллель болсын. $\vec{p}$ — осы түзудің бағыттаушы векторы (3.24-сурет). l түзуінің кез келген $M(x;\ y;\ z)$ нүктесі үшін $\overline{M_0M}$ және $\vec{p}$ векторлары коллинеар: $\overline{M_0M}=\vec{p}\,t$, мұндағы t — қандай да бір нақты сан (параметр). Соңғы теңдеу координаталық түрде былай жазылады:

$$\begin{cases} x-x_0=mt, \\ y-y_0=nt, \\ z-z_0=kt \end{cases}$$

немесе

$$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \\ z=z_0+kt. \end{cases} \quad (2)$$

(2) теңдеулерді түзудің *параметрлік теңдеулері* деп атайды. Осыдан

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{m}=t, \\ \dfrac{y-y_0}{n}=t, \\ \dfrac{z-z_0}{k}=t \end{cases}$$

теңдіктері шығады. Олай болса,

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{k}. \qquad (3)$$

Бұл — $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ нүктесі арқылы өтетін және бағыттаушы векторы $\bar{p}=(m;\ n;\ k)$ болатын түзудің теңдеуі. (3) теңдеуді түзудің ***қарапайым теңдеуі*** деп атайды және түзудің жалпы теңдеуі (1) жүйенің дербес жағдайы болып табылады. Себебі, оны әрбір теңдеуімен жазықтық анықталатындай түрге келтіріп жазуға болады:

$$\begin{cases}\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n},\\[2mm] \dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{k}.\end{cases}$$

1-мысал. $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ және $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ нүктелері берілсін. Онда M_1M_2 түзуінің теңдеуін жазу қажет.

▲ $\overline{M_1M_2}=(x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1)$ векторы M_1M_2 түзуінің бағыттаушы векторы болғандықтан, (3) формула бойынша бұл түзудің теңдеуі былай жазылады (бұл түзу M_1 нүктесі арқылы өтеді):

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (4)$$

1. Кеңістікте түзуді қалай анықтауға (беруге) болады?
2. Түзудің жалпы теңдеуін жазыңдар.
3. Түзудің параметрлік теңдеуін жазыңдар.
4. Түзудің қарапайым теңдеуін жазыңдар. Бұл теңдеуді қалай түсіну керек?
5. Екі нүкте арқылы өтетін түзу теңдеуін жазыңдар.

ЕСЕПТЕР

А

3.113. Түзу бойында жататын үш нүктенің координаталарын табыңдар:

1) $\begin{cases}5x-y+4z+3=0,\\ x+2y-z-2=0;\end{cases}$ 2) $\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{3};$

3) $\begin{cases}x=2-3t,\\ y=3+t,\\ z=5t;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}6x-3y+2z=0,\\ 2y+z+3=0.\end{cases}$

3.114. A және B нүктелері арқылы өтетін түзудің қарапайым теңдеуін жазыңдар:

1) $A(0;\ -3;\ -2)$, $B(2;\ -1;\ 1)$;
2) $A(-1;\ 1;\ 1)$, $B(1;\ 2;\ 3)$;
3) $A(-1;\ 0;\ -1)$, $B(2;\ 1;\ 0)$;
4) $A(-2;\ -3;\ 0)$, $B(0;\ 2;\ 1)$.

3.115. A нүктесі арқылы өтетін және $\vec{p}$ векторына параллель түзудің теңдеуін жазыңдар:

1) $A(3;\ -3;\ 1)$, $\vec{p}=(3;\ 1;\ -2)$;
2) $A(1;\ 3;\ -5)$, $\vec{p}=(6;\ 1;\ 3)$;
3) $A(1;\ 2;\ 6)$, $\vec{p}=(7;\ 2;\ -3)$;
4) $A(-3;\ 4;\ 4)$, $\vec{p}=(2;\ -1;\ 3)$.

3.116. $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-1}{5}$ түзуінде жататын және 1) абсциссасы 3-ке тең; 2) ординатасы -2-ге тең нүктенің координаталарын табыңдар.

B

3.117. $A(3;\ -3;\ 1)$ нүктесі арқылы

$$\begin{cases} x+2y-z-2=0, \\ 2x-y+z-3=0 \end{cases}$$

түзуіне параллель өтетін түзудің теңдеуін жазыңдар.

3.118. $ABCD$ пирамидасы берілген: $A(2;\ -2;\ 5)$, $B(0;\ 7;\ 2)$, $C(7;\ 0;\ 2)$, $D(1;\ 5;\ 0)$. Пирамиданың 1) әр қыры арқылы өтетін түзудің қарапайым теңдеулерін; 2) әр жағы арқылы өтетін жазықтықтардың теңдеулерін; 3) A нүктесі арқылы өтетін және BCD жағының әр қырына параллель түзулердің қарапайым теңдеулерін жазыңдар.

3.119. ABC үшбұрышының медианалары арқылы өтетін түзулердің қарапайым теңдеулерін жазыңдар:

1) $A(-2;\ 3;\ 5)$, $B(4;\ -3;\ 0)$, $C(0;\ 6;\ -5)$;
2) $A(2;\ 0;\ 4)$, $B(3;\ 1;\ 2)$, $C(0;\ -3;\ -1)$.

C

3.120. $\begin{cases} x=2+4t, \\ y=-1+t, \\ z=1-t \end{cases}$ және $\begin{cases} x=-4+2t, \\ y=2-2t, \\ z=-2-3t \end{cases}$

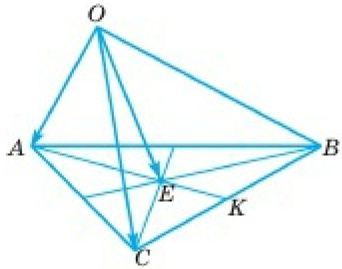
түзулерінің айқас екенін дәлелдеңдер.

3.121. $\begin{cases} x=1-2t, \\ y=2+t, \\ z=2t \end{cases}$ және $\begin{cases} x=-1+t, \\ y=3+2t, \\ z=2+2t \end{cases}$

түзулерінің қиылысатынын дәлелдеп, осы түзулер арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуін жазыңдар.

3.6. ВЕКТОРЛАРДЫ ЕСЕПТЕР ШЫҒАРҒАНДА ҚОЛДАНУ

Есептерді векторларды қолданып шешуді **векторлық тәсіл** деп атайды. Алдыңғы параграфтарда біз вектордың кейбір қолданылуларын қарастырдық. Мысалы, кесіндіні берілген қатынаста бөлу, кесінділер арасындағы бұрышты анықтау, жазықтық теңдеуін жазу және т.с.с. Мәселен, векторлық тәсілдің өзге де қолдануларында келесі тұжырым жиі қолданылады.



3.25-сурет

1-мысал. Егер E нүктесі ABC үшбұрышы медианаларының қиылысу нүктесі болса, онда кеңістіктегі кез келген O нүктесі үшін

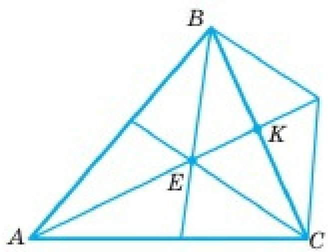
$$3\cdot\overline{OE}=\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}$$

теңдігі орындалады (3.25-сурет).

▲ Алдымен

$$\overline{EA}+\overline{EB}+\overline{EC}=0$$

теңдігі орындалатынын көрсетейік. Шынында да, $\overline{EB}+\overline{EC}=2\overline{EK}$ және $\overline{EK}=-\frac{1}{2}\overline{EA}$ теңдіктерінен (3.26-сурет)



3.26-сурет

$$\overline{EA}+\overline{EB}+\overline{EC}=-2\overline{EK}+2\overline{EK}=\overline{0}\,.$$

Енді векторларды қосудың үшбұрыштар ережесі бойынша

$$\begin{cases}\overline{OA}=\overline{OE}+\overline{EA},\\ \overline{OB}=\overline{OE}+\overline{EB},\\ \overline{OC}=\overline{OE}+\overline{EC}\end{cases}$$

теңдіктерін аламыз. Бұл теңдіктерді мүшелеп қосамыз:

$$\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=3\cdot\overline{OE}+\left(\overline{EA}+\overline{EB}+\overline{EC}\right)=3\cdot\overline{OE}\,.$$

Дәлелдеу керегі де осы. ■

Векторларды математика мен физика есептерін шығару барысында жиі қолданады. Өйткені геометрия мен физиканың көптеген есептері векторлар көмегімен жеңіл шешіледі. Дегенмен, мұндай есептердің мәтінінде векторларды қолдану жөнінде айқын жазылған мәліметтер жоқ болғандықтан, есеп қиындап, шешілмейтіндей болып кетеді. Сондықтан есептерді векторлар көмегімен шешуді мынадай үш кезеңге бөліп қарастырған тиімді:

I. Векторларды енгізіп, есептің шартын векторлар көмегімен жазу керек.

II. Векторлық түрде жазылған есеп шартын түрлендіріп, оның шешуін векторлық түрде аламыз.

III. Векторлық түрде алынған жауапты есептің бастапқы берілген мағынасына (геометриялық не физикалық) келтіріп жазу керек.

Осы айтылған қағидаларды іс жүзінде қолдана білу үшін, мәселен, фигуралардың көптеген қасиеттерін векторлық тепе-теңдіктер арқылы өрнектеуге болатынын естен шығармау қажет.

Мысалы:

$\overline{AB} = \overline{AC}$ теңдігінен B және C нүктелерінің беттесетіні;

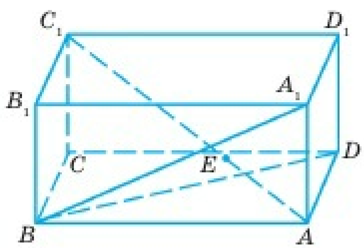
$\overline{AB} = \alpha \cdot \overline{CD}$ теңдігінен AB және CD түзулерінің параллель болатыны, не беттесетіні;

$\overline{AB} = \alpha \cdot \overline{AC}$ теңдігінен A, B және C нүктелерінің бір түзудің бойында жататыны;

$\overline{OA} = \alpha \cdot \overline{OB} + \beta \cdot \overline{OC}$ теңдігінен O, A, B және C нүктелерінің бір жазықтықтың бойында жататыны;

$\overline{AB} \cdot \overline{CD} = 0$, $\left|\overline{AB}\right| \neq 0$, $\left|\overline{CD}\right| \neq 0$ теңдігінен AB және CD түзулерінің өзара перпендикуляр болатыны шығады.

Осы және өзге қатынастарды ескеріп, көптеген геометриялық есептерді шешуге болады.



3.27-сурет

2-мысал. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тік бұрышты параллелепипеді берілген. E нүктесі A_1BD үшбұрышы медианаларының қиылысу нүктесі (3.27-сурет). E нүктесінің AC_1 диагоналінде жататынын көрсетіп, оны қандай қатынаста бөлетінін анықтайық.

▲ E нүктесі A_1BD үшбұрышы медианаларының қиылысу нүктесі болғандықтан, 1-мысал бойынша

$$\overline{AE} = \frac{1}{3}\left(\overline{AA_1} + \overline{AB} + \overline{AD}\right)$$

теңдігі орындалады.

$$\overline{AB} = \overline{D_1C_1},\quad \overline{AD} = \overline{A_1D_1}$$

болғандықтан,

$$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{D_1C_1} + \overrightarrow{A_1D}$$

Ендеше,

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}AC_1,$$

яғни A, C_1 және E нүктелері бір түзудің бойында жатады. Сонымен $E \in AC_1$ және $AC_1 = 3 \cdot AE$. Сондықтан

$$AE : EC_1 = 1 : 2. \blacksquare$$

1. Есептерді шығарудың векторлық тәсілі деп нені түсінесіңдер?
2. Егер $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ векторлары компланар болса, онда A, B, C, D нүктелері өзара қалай орналасады?
3. Егер AB және CD түзулері өзара перпендикуляр болса, онда $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{CD}$ векторлары жөнінде не айтуға болады?
4. $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{CD}$ векторлары көмегімен AB және CD түзулері арасындағы бұрыштың косинусын қалай анықтайды?

ЕСЕПТЕР

А

3.122. Берілген нүктелердің бір түзу бойында жататынын не жатпайтынын анықтаңдар:

1) $A(1; -2; 3)$, $B(-2; -1; 4)$, $C(7; -4; 1)$

2) $M(2; -3; 1)$, $N(-1; 1; 1)$, $P(0; -1; 3)$.

3.123. $C(x;\ y;\ z)$ нүктесі AB кесіндісінің ортасы болатындай етіп, x, y, z сандарын табыңдар:

1) $A(2;1; -4)$, $B(-4;5;2)$; 2) $A(0; -2;3)$, $B(4;2; -3)$.

3.124. $ABCD$ — параллелограмм болатындай етіп D нүктесінің координаталарын табыңдар:

1) $A(2; -3;1)$, $B(-1;1;1)$, $C(-4;5;6)$;

2) $A(2; -3;6)$, $B(1; -2;3)$, $C(-4;4;6)$.

3.125. Төбелері $A(2; -1; 3)$, $B(1; 1; 1)$ және $C(0; 0; 5)$ нүктелерінде орналасқан ABC үшбұрышының бұрыштарын анықтаңдар.

3.126. Егер $A(2; 1; -4)$, $B(0; -3; 2)$, $C(2; 13; 4)$ болса, онда ABC үшбұрышының A бұрышы тік болатынын көрсетіңдер.

B

3.127. Егер $A(3;\ 3;\ -2)$, $B(0;\ -3;\ 4)$, $C(-2;\ -1;\ 5)$ болса, онда ABC тік бұрышты үшбұрыш болатынын көрсетіңдер.

3.128. Параллелограмның тізбектес үш төбесі берілген: $A(-3;-2;0)$, $B(3;\ -3;\ 1)$ және $C(5;\ 0;\ 2)$. Оның төртінші төбесін анықтап, параллелограмм диагональдары арасындағы бұрышты табыңдар.

3.129. Сүйір бұрышы $60°$-қа тең параллелограмм қабырғалары 3 см және 4 см. Оның диагональдарының ұзындығын табыңдар.

3.130. $A(2;\ -1;\ -2)$, $B(1;\ 2;\ 1)$, $C(2;\ 3;\ 0)$ және $D(5;\ 0;\ -6)$ нүктелері бір жазықтық бойында жататынын көрсетіңдер.

3.131. $A(0;\ 2;\ -1)$, $B(1;\ 0;\ 1)$, $C(-1;\ 1;\ 2)$ нүктелері берілген. $AD \perp BC$ болатындай етіп, OZ осі бойында жататын D нүктесін табыңдар.

3.132. Параллелепипедтің төменгі табанының үш төбесі $O(0;0;0)$, $A(2;\ -3;\ 0)$, $C(3;\ 2;\ 0)$ және жоғарғы табанының бір төбесі $B_1(3;\ 0;\ 4)$ берілген. Оның қалған төбелерінің координаталарын табыңдар.

C

3.133. $ABCD$ үшбұрышты пирамидасының AB қырынан K нүктесі алынған. AD, BC, KD және KC кесінділерінің орталары бір жазықтық бойында жататынын дәлелдеңдер.

3.134. Параллелепипед диагональдары бір нүктеде қиылысып, қиылысу нүктесінде қақ бөлінетінін дәлелдеңдер.

3.135. $ABCD$ үшбұрышты пирамидасы берілген. Егер $AB \perp CD$ және $AC \perp BD$ болса, онда $AD \perp BC$ болатынын дәлелдеңдер.

3.136. $ABCDEF$ жазық емес (барлық төбелері бір жазықтық бойында жатпайды) алтыбұрышының қарама-қарсы төбелерін қосатын диагональдар бір нүктеде қиылысып, қиылысу нүктесінде қақ бөлінетінін көрсетіңдер.

3.137. $ABCD$ пирамидасының ABC жағының медианалары E нүктесінде қиылысады. $DA = 3$, $DB = 6$, $DC = 9$ және $\angle ADB = \angle BDC = \angle CDA = 60°$. DE-ні табыңдар.

3.138*. E нүктесі ABC тең қабырғалы үшбұрышы медианаларының қиылысу нүктесі және $AB = a$ болсын. Кеңістікте E нүктесінен d қашықтығында орналасқан K нүктесі берілген. $KA^2+KB^2+KC^2$ қосындысының шамасын табыңдар.

ЕСЕПТЕРДІҢ ЖАУАПТАРЫ

Қайталауға арналған есептер

0.1. 15 см. **0.2.** 60° және 120°. **0.5.** 6 см. **0.6.** 1) $c = 5$ м, $\mathrm{tg}\alpha = \frac{4}{3}$. $\beta = 90° - \alpha$; 3) $a = 6$ см, $\beta = 60°$, $b = 6\sqrt{3}$ см. **0.7.** 2) а) 12 см²; ә) 6 см². **0.8.** $18\sqrt{3}$ см². **0.9.** $\overrightarrow{AE} = \vec{a} + 0,5\vec{b}$, $\overrightarrow{AN} = 0,5\vec{a} + \vec{b}$. **0.10.** 3) 6. **0.11.** $\frac{27\sqrt{3}}{4}$ м². **0.12.** 4 см. **0.14.** 12π м. **0.15.** $\frac{\alpha+\beta}{2}$ және $180° - \frac{\alpha+\beta}{2}$. **0.16.** 6 см және 18 см. **0.17.** 120°. **0.18.** 35 см. **0.22.** $a = 30$ см, $b = 24$ см. **0.23.** $9\sqrt{3}$ см². **0.24.** 60°. **0.25.** $\overrightarrow{AE} = \vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b}$, $\overrightarrow{ED} = \frac{4}{5}\vec{b} - \vec{a}$. **0.27.** $\sqrt{a^2 + b^2}$. **0.28.** $\frac{120}{\pi}$ см. **0.31.** $S_{ABD} = S_{ACD} \Rightarrow S_{ABD} - S_{AOD} = S_{ACD} - S_{AOD} \Rightarrow S_{ABO} = S_{COD}$. Мұндағы O — диагональдардың қиылысу нүктесі. **0.33.** $a = \frac{c}{2}$; $b = \frac{\sqrt{3}}{2}c$; **0.35.** $S = \frac{ha^2}{4\sqrt{a^2 - h^2}}$. **0.36.** $5x - 3y + 16 = 0$, $6x - y + 10 = 0$, $x + 2y - 6 = 0$. **0.38.** $2\sqrt{Rr}$. **0.40.** $\mathrm{tg}\varphi = \frac{4S}{a^2 + b^2 + c^2}$.

1-бөлім

1.3. 4) $a = \alpha \cap \beta$; 7) $b = l \cap \beta$; 8) $\alpha = (ABC)$. **1.10.** Айталық, $a \cap b = A$, $a \cap c = B$, $b \cap c = C$ болсын, онда A, B және C нүктелері арқылы жалғыз жазықтық өтеді және a, b және c түзулері осы жазықтықта жатады. **1.22.** Міндетті емес. Мысалы, $a \parallel c$. **1.29.** 4 см. **1.30.** 1) 4 см; 2) 3 м; 3) $\frac{a+b}{2}$. **1.36.** $BC = 10,5$ см, $AD = 7$ см. **1.39.** 1) 6 см; 2) 4 см. **1.41.** $E \in AC$ және $AE : EC = 2 : 3$. **1.44.** $a \parallel b$, $c \cap a = A$, $c \cap b = B$ болса, онда a және b түзулері арқылы жалғыз α жазықтығы өтеді және $A \in \alpha$, $B \in \alpha \Rightarrow c = AB \subset \alpha$. **1.46.** $P_{EFK} = 9$ см. **1.53.** 1) 9 см; 2) 6 см. **1.54.** 2) 20 см. **1.63.** 1) 8 см; 2) 9 см. **1.64.** Жоқ. **1.65.** Жоқ.

2-бөлім

2.2. Шексіз көп. **2.3.** 60°. **2.5.** 1) $AB = AC = 5$ см, $BC = 3\sqrt{2}$ см; 2) $AB = 13$ см, $AC = \sqrt{281}$ см, $BC = 20$ см. **2.6.** 15 м. **2.8.** $a \perp BC$. **2.13.** $\cos A = \cos B = \frac{3\sqrt{2}}{4}$; $\cos C = \frac{7}{16}$.

2.18. 1) 13 см; 2) $\left(2\sqrt{2}+1\right)a$. **2.21.** 1) 90°, 90°, 45°, 135°; 2) 52 см.

2.22. $\dfrac{2\left(2\sqrt{2}+1\right)}{3}p$. **2.26.** $\dfrac{\sqrt{769}}{5}$ см. **2.31.** 1) 8 см; 2) $A_1B = 8\sqrt{2}$ см және $A_1C = 8\sqrt{3}$ см; 3) $4\sqrt{6}$ см. **2.32.** 2 см. **2.33.** 5 см. **2.34.** 1) 3 см; 2) 5 см; 3) 5,3 м; 4) $\dfrac{a+b}{2}$. **2.35.** 1) 3 см;2) 5 м; $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$ м; 3) 5 м. **2.36.** 8 см. **2.38.** 2) $\sqrt{21}$ см. **2.39.** 4 см, 5 см, $\sqrt{20,5}$ см. **2.40.** 1) 3 см; 2) 2 см. **2.41.** $\dfrac{\sqrt{11}}{3}$. **2.42.** Конус. **2.43.** $m:n$. **2.46.** $\dfrac{4}{5}\sqrt{34}$ см. **2.47.** $\sqrt{20,5}$ м. **2.48.** 1) $3\sqrt{3}$ см; 2) $3\sqrt{2}$ см; 3) 3 см. **2.49.** 58,5 см. **2.50.** 3 см, 9 см. **2.51.** $a\sqrt{3}$. **2.53.** $5\sqrt{5} = 11,2$ м. **2.54.** 35 см. **2.55.** 3 m. **2.56.** 8 см. **2.57.** $\dfrac{1}{4}\sqrt{238}$ см. **2.58.** 53,35 м. **2.59.** 3 см және 5 см. **2.62.** 1) 5 см; 2) $5\sqrt{2}$ см; 3) $5\sqrt{3}$ см. **2.64.** 1) 10 см; 2) 6 см; 3) 4 см. **2.66.** а) 1) 24 см; 2) 4 см; ә) 1) 8 см; 2) 10 дм; б) 1) 60°; 2) 45°. **2.67.** 1) $4\sqrt{2}$ см; 2) $\sin\varphi = \dfrac{1}{3}$. **2.68.** 60 см. **2.69.** 4 см. **2.72.** $4\sqrt{6}$ см. **2.73.** $\cos\varphi = \dfrac{1}{3}$. **2.74.** 5 см. **2.76.** 30°. **2.77.** 60°. **2.78.** $6\sqrt{6}$ см. **2.80.** $10\sqrt{3}$ см. **2.81.** $\sqrt{a^2+b^2+c^2-2bc\cdot\cos\varphi}$. **2.84.** 90°. **2.87.** $\cos\left(\angle(a;c)\right) = \dfrac{\cos\varphi}{\cos\psi}$. **2.88.** $\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}$. **2.96.** 1) 13,5 см²; 2) $4,5\sqrt{6}$ см²; 3) $4,5\sqrt{3}$ см². **2.97.** 1) 18 см²; 2) $9\sqrt{6}$ см²; 3) $18\sqrt{3}$ см². **2.99.** 1) 13 м; 2) 2 см; 3) $\sqrt{170}$ см; 4) 13 дм. **2.100.** $\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$ см². **2.105.** 4 см, 6 см, 8 см. **2.106.** $\sqrt{1,5}\cdot a$. **2.108.** $\sqrt{\dfrac{2ab\sqrt{6}}{3}}$. **2.109.** $\sqrt{\dfrac{2b^2-a^2}{2}}$. **2.110.** $2b\sin\dfrac{\varphi}{2}$. **2.112.** 1) 32 см²; 2) $32\sqrt{2}$ см². **2.115.** $\dfrac{3ah}{8}$.

3-бөлім

3.1. $\overrightarrow{AC} = \vec{a}+\vec{b}$, $\overrightarrow{CA} = -\vec{a}-\vec{b}$, $\overrightarrow{BD} = \vec{b}-\vec{a}$. **3.3.** 1) $\overrightarrow{AC}$; 3) $\overrightarrow{AC_1}$. **3.4.** $\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \left|\overrightarrow{RT}\right| = 4$ см, $\left|\overrightarrow{PT}\right| = \left|\overrightarrow{QR}\right| = 3$ см. **3.5.** 2) $-\dfrac{1}{2}\vec{e}$; 4) $0,6\vec{e}$.

3.7. 1) $4\sqrt{2}$ см. 3) $4\sqrt{2}$ см. **3.12.** 2) $\overrightarrow{DB}$; 4) $\overrightarrow{CA_1}$; 8) $\overrightarrow{C_1C}$. **3.13.** $\overrightarrow{EC} = 2\vec{b} - \vec{a}$. **3.16.** 1) $\overrightarrow{AD}$. **3.17.** 1) ± 1; 2) $|k| > 1$; 3) $|k| < 1$. **3.18.** 1) 2,5; 2) $-0,5$. **3.20.** $\overrightarrow{BC} = \vec{b} - \frac{4}{3}\vec{a}$. **3.22.** $2\sqrt{3}a$. **3.28.** $|\vec{m}|\vec{n}$ және $|\vec{n}|\vec{m}$ векторларына салынған параллелограмм ромб болады, өйткені $\left||\vec{m}|\cdot\vec{n}\right| = |\vec{m}|\cdot|\vec{n}| = \left||\vec{n}|\cdot\vec{m}\right|$. Сондықтан $|\vec{m}|\cdot\vec{n} + |\vec{n}|\cdot\vec{m}$ векторы $(\widehat{\vec{m},\vec{n}})$ бұрышының биссектрисасына коллинеар. **3.34.** 3) $\vec{c} = (-3; 0; 3)$; 4) $\vec{d} = (0; 1; 0)$. **3.36.** 7) $(2; -1; 4)$; 8) $(4; -3; -2)$. **3.37.** $|\vec{a}| = \sqrt{29}$; $|\vec{b}| = \sqrt{3}$; $|\vec{c}| = \sqrt{13}$; $|\vec{d}| = 3$; $|\vec{p}| = 2$; $|\vec{q}| = 2$. **3.38.** $\overrightarrow{AC} = (1; -1; 1)$, $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{3}$. **3.41.** 3) $\sqrt{14}$; 4) $\sqrt{185}$. **3.42.** 2) $(-1; -3; -3)$; 4) $(9; -12; 10)$. **3.45.** $C(5; 4; 4)$, $B_1(3; 6; 3)$, $C_1(7; 7; 3)$, $D_1(8; 3; 0)$. **3.46.** $D(8; -18; -24)$. **3.47.** 2) $D(-1; 2; 1)$. **3.49.** $m = 8$; $n = 1,5$. **3.50.** $x = 2$, $y = 6$. **3.52.** $4\sqrt{3}$; $2\sqrt{2}$. **3.55.** $\vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$. **3.56.** 1) $x = \pm 3$; 2) $x = \pm\sqrt{51}$. **3.57.** $n = \pm 3$. **3.58.** $x = 2$, $y = 4$. **3.60.** $AH = \sqrt{6}$. **3.62.** 2) $\vec{d} = \frac{3}{4}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$. **3.63.** $k = 8,5$ немесе $k = -2 \pm 2\sqrt{7}$. **3.65.** 1) $O'(1; -2; 3)$; 2) $A'(2; 4; 6)$; 3) $B'(-1; 2; 2)$. **3.67.** 1) 3; 3) 4,5. **3.68.** 2) 0; 4) $27 - \sqrt{2}$. **3.70.** 1) 9; 3) 8. **3.71.** 2) $\frac{13\sqrt{238}}{238}$; 4) $\frac{5\sqrt{6}}{14}$. **3.72.** 1) $(1; 3; 0,5)$; 3) $(0; 2; 2)$. **3.73.** 2) $\left(\frac{14}{5}; -\frac{1}{5}; \frac{6}{5}\right)$; 4) $\left(\frac{8}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$. **3.74.** 1) $\varphi = 135^\circ$; 2) $\varphi = 30^\circ$. **3.75.** 1) 3; 2) $\frac{3\sqrt{14}}{14}$. **3.76.** 1) $\cos(\angle B) = \frac{\sqrt{14}}{14}$; 2) 0; 3) $\frac{\sqrt{14}}{2}$. **3.77.** $-2,5$. **3.78.** $\sqrt{133}$ және 7. **3.80.** 1) 3; 2) 0,5. **3.82.** 1) $\frac{4}{9}$; 3) $\sqrt{15,25}$. **3.84.** 26. **3.85.** $m = -0,8$. **3.86.** $-1,5a^2$. **3.87.** 1) $\left(1; 2; \frac{2}{3}\right)$; 2) $\left(2; \frac{11}{3}; \frac{8}{3}\right)$. **3.90.** $x_k = \frac{(n-k)x_1 + kx_2}{n}$, $y_k = \frac{(n-k)y_1 + ky_2}{n}$, $z_k = \frac{(n-k)z_1 + kz_2}{n}$. **3.93.** 2) $3y - 2z + 4 = 0$; 3) $2x - 3z = 0$. **3.95.** D. **3.96.** 1) $\vec{n} = (2; -3; 1)$; 4) $\vec{n} = (1; 0; 0)$. **3.97.** 4) $(x-2)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 4$. **3.98.** 2) $(x-2)^2 +$

$+(y+2)^2+(z+3)^2\leqslant 81$. **3.99.** 1) $2x-2y+3z+8=0$. **3.100.** 2) $3x-47y-25=0$; 4) $2x-5y+3z-38=0$. **3.101.** $x=2$; $y=-3$; $z=4$. **3.103.** 1) $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{4}=1$. **3.104.** 2) $x+y+4z-5=0$. **3.105.** 1) $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=25$. **3.106.** 1) $C(1;-2;-4)$, $R=4$; 4) $C(0,0,0)$, $R=a$. **3.107.** $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$, $x^2+y^2+z^2\leqslant 4z$. **3.108.** $2x+3y-3z=0$. **3.109.** $2x+11y-6z+6=0$. **3.110.** $2x+3y+6z=49$. **3.111.** $(x-3)^2+(y-4)^2+z^2\leqslant 25$, $3x+4y\geqslant 25$ және $(x-3)^2+(y-4)^2+z^2\leqslant 25$, $3x+4y\leqslant 0$. **3.112.** $(x-1)^2+(y-5)^2+(z+1)^2=4$. **3.114.** 2) $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}$; 4) $\frac{x+2}{2}=\frac{y+3}{5}=\frac{z}{1}$. **3.115.** 1) $\frac{x-3}{3}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-1}{-2}$; 3) $\frac{x-1}{7}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-6}{-3}$. **3.116.** 1) $M(3;-1;1)$; 2) $M\left(\frac{7}{3};-2;-\frac{2}{3}\right)$. **3.117.** $\frac{x-3}{1}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z-1}{-5}$. **3.119.** 1) AA_1 медианасы арқылы өтетін түзудің теңдеуі мына түрде жазылады: $\frac{x+2}{4}=\frac{y-3}{-1,5}=\frac{z-5}{-7,5}$. **3.122.** 1) $\overline{AB}=(-3;1;1)$, $\overline{AC}=(6;-2;-2)\Rightarrow \overline{AC}=-2\cdot\overline{AB}\Rightarrow$ үш нүкте бір түзудің бойында жатады. **3.123.** 2) $C(2,0,0)$. **3.124.** 1) $D(-1;1;6)$. **3.125.** $\angle A=90°$, $\angle B=\angle C=45°$. **3.128.** $D(-1,1,1)$, $\cos\varphi=\frac{5\sqrt{19}}{38}$. **3.129.** $\sqrt{37}, \sqrt{13}$. **3.130.** Нұсқау: $\overline{AD}=-3-\overline{AB}+2,5-\overline{AC}$ теңдігі орындалатынын көрсетіңдер. **3.132.** $D(0;0;1)$. **3.137.** 5.

МАЗМҰНЫ

О қ у   б а с ы л ы м ы

Шыныбеков Әбдухали Насырұлы
Шыныбеков Данияр Әбдухалиұлы
Жұмабаев Ринат Нұрланұлы

ГЕОМЕТРИЯ

Жалпы білім беретін мектептің жаратылыстану-математика бағытындағы 10-сыныбына арналған оқулық

Редакторы *Ж. Баданова*
Көркемдеуші редакторы *Т. Сташкова*
Техникалық редакторы *Ү. Рысалиева*
Компьютерде беттеген *Ж. Есетова*

ИБ 052

Теруге 25.02.2019 берілді. Басуға 08.07.2019 қол қойылды. Пішімі $60\times90\,^1/_{16}$.
Офсеттік қағаз. Әріп түрі «мектептік». Офсеттік басылыс. Шартты баспа табағы 7,0.
Есептік баспа табағы 6,48. Таралымы 30 000 дана. Тапсырыс № 4370.

«Атамұра» корпорациясы» ЖШС, 050000, Алматы қаласы, Абылай хан даңғылы, 75.

Қазақстан Республикасы «Атамұра» корпорациясы» ЖШС-нің Полиграфкомбинаты.
050002, Алматы қаласы, М. Мақатаев көшесі. 41.